Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

21. szám 2021. szeptember

2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

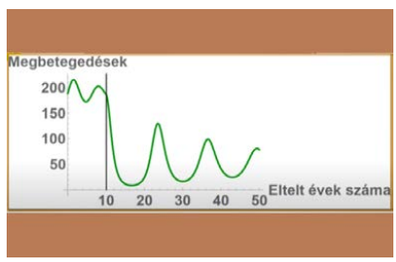
Két augusztusi jó hír

Bizonyára értesültek már olvasóink arról, hogy *Lovász László* 2021. aug. 20-án megkapta a Magyar Szent István Rend kitüntetést. Egyúttal arról is beszámolunk, hogy a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet az ELKH támogatásával új konferenciaközpontot alapított, az *Erdős Centert*. Az első tematikus szemesztert a nagy hálózatok témájában 2022 tavaszán Lovász professzor szervezi. Tovább...

2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Online IMO 2021, és ami előtte volt…

A 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát Szentpétervár rendezte meg online formában 2021. július 14-24. között. Képünkön a magyar csapat és felkészítőik: balról jobbra *Dobos Sándor* helyettes csapatvezető, Kovács Tamás, Fleiner Zsigmond, Velich Nóra, Szabó Kornél, Füredi Erik, Várkonyi Zsombor, Kovács Benedek felkészítő, Frenkel Péter csapatvezető. A szakkörökről, válogatóversenyekről, a nyári edzőtáborról és az olimpiáról itt olvashatnak.



2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Járványmatek középiskolásoknak – 1. rész

A diákoknak élményszerűvé teszi a matematika tanulását, ha a tananyagtól picit elrugaszkodva hallhatnak a mindennapokban előforduló jelenségekről. A Covid-járvány kapcsán egy újabb példát láthatnak arra, hogy az életünket milyen módon befolyásolhatja ez a tudományág. Középiskolában a járványterjedés modellezésének összetett matematikai módszereire ugyan nem tudunk kitérni, de számos olyan, a matematikához kapcsolódó fogalomról, összefüggésről beszélhetünk, amely középiskolai tudással megérthető. *Volf Annamária* összefoglalóját három részben közöljük, ez az első...

2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

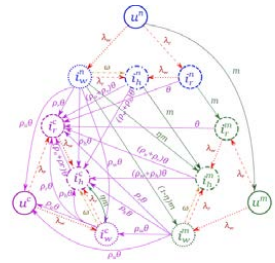
Matematikus történetek: T. Sós Vera

T. Sós Vera matematikus, akadémikus, professor emerita kivételes tudása, személyisége itthon és külföldön is mindenkit lenyűgöz. Egyike azoknak, akiknek neve fémjelzi a magyar matematika XX–XXI. századi történetét. Ezért is közöljük újra a vele csaknem 20 évvel ezelőtt készült interjút, a magyar televízióban 2004-ben leadott riportfilmet. Tessék rákattintani...

2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Egy siker fényében – ismerjük meg az IMC-t!

A Tokiói Olimpián (és azóta a Paralimpián) elért sikerek sem homályosítják el a tudományos-szakmai versenyeken, megmérettetéseken elért magyar sikereket. Augusztus elején *Gáspár Attila* (ELTE) fényes győzelmet aratott az egyetemistáknak szervezett International Mathematics Competition verseny abszolút első helyének megszerzésével. *Kós Géza*, az egyik fő szervező ismertet meg a versennyel.



2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Kiszámított emlékezet

A Szegedi Tudományegyetem és a Semmelweis Egyetem kutatói közötti együttműködés keretében megszületett egy olyan új epidemiológiai modell, amely egy, a szokásos kezelésekre rezisztens baktériumfertőzés eredetét vizsgálja; az ezzel kapcsolatos orvosi-matematikai tanulmány idén jelent meg a Nature Communications folyóiratban. *Juhász Nóra* írása az említett cikkből emel ki és követ végig egy matematikailag érdekes vezérfonalat: bemutatja, hogyan alkalmazható ez az új modell a múlt "megjóslására", vagyis az ismert jelen alapján a rezisztens fertőzés ismeretlen eredetének visszafejtésére. Tovább...

2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 60. (online) Rátz László Vándorgyűlés

2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

KöMaL új-ságok

Vajon mit jelent az Érintő olvasóinak a KöMaL? A magyar

2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Gördülő akrobatikus eszközök

Bár nem az eredetileg eltervezett módon, és egy év késéssel, de nagy sikerrel, sok résztvevővel rendezte meg 60. Rátz László Vándorgyűlését a Bolyai János Matematikai Társulat. A teljes programon és az előadások során kivetített ppt bemutatókon túl az online előadások videofelvételei is elérhetők a vándorgyűlés honlapján. A rendezvényről *Kosztolányi József* írt beszámolót.

matematikai tehetséggondozás bástyáját, egy nélkülözhetelen intézményt? Egy régmúltból itt maradt, koránál fogva tiszteletre méltó, de manapság már csak keveseket érdeklő, anakronisztikus folyóiratot? Talán nem mindenki tudja, milyen új(don)ságokkal készül a KöMaL és a MATFUND Alapítvány az idei tanévben, folytatva a korábbi évek megújító törekvéseit. *Kós Rita*, *Oláh Vera* és *Vladár Károly* írásai következnek.

Különleges témájú *Henry Segerman* nemrég az Amerikai Matematikai Társaság *Notices* folyóiratában (a 2021. 7. számban) megjelent cikke gördülő akrobatikus eszközökről. Izgalmas képek és videók mutatják a cikk-cakk-gördülő eszközök mozgását – belsejükben az akrobatákkal. Geometria, fizika, matematika: a cikket a fordító, *Figula Ágota* kissé átsruktúrálta és lerövidítette. Tovább...

2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Mi is…az EGMO? – 2021/2022

2022-ben Magyarország rendezi a Lányok Európai Matematikai Olimpiáját, az EGMO-t, és ennek apropóján 2019 őszén indítottuk el programunkat, az évek óta működő EGMO felkészítés bővítéseként a fiatalabb korosztály számára. Az előkészítő program egyik célja, hogy minél több középiskolás lányt ösztönözzünk, segítsünk, hogy matematikával foglalkozzanak, és lehetőséget biztosítsunk számukra, hogy egymást is jobban megismerjék. *Baran Zsuzsa* és *Molnár-Sáska Gábor* is a felkészítők között volt.*Tovább...*

2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az elmélet haszna – avagy inkább végy föl két zoknit...

Gian-Carlo Rotának a differenciálegyenletek tanítására vonatkozó állításai közül a legtöbbel nehéz egyet nem érteni; klaviatúrát nyilván azért ragadtam, mert van viszont olyan kijelentése, amelyiket vitatni szándékozom. Azt javasolja, hogy ne foglalkozzunk túl sokat a megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozó alapvető tételekkel. Ezeknek az állításoknak azonban (akár gyakorlati szempontból is) fontosnak nevezhető következményei is vannak – írja *Tóth János*, amint az alábbi példákból ki fog derülni...

2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

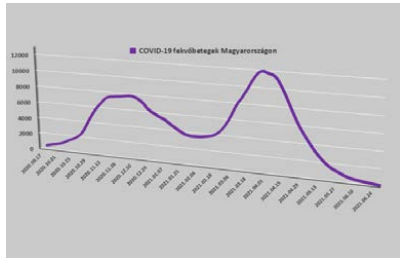
A pedagógus a számítógépek korában

Kalmár László gondolatait idézzük halálának 45. évfordulóján: milyen meglátásai voltak csaknem fél évszázaddal ezelőtt a számítógép felhasználásáról, különösen az oktatásban. A régi interjúból sok kérdés még ma is ismerős, aktuális, vagy éppen még mindig megoldatlan. Képünkön a Szegedi Tudományegyetem Kalmár László Informatikai Intézete. Tovább...

2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is... egy nyitott könyv?

A nagyon kifejező nyitott könyv fogalmat H. E. Winkelnkemper vezette be 1973-ban egy olyan geometriai struktúrára, amely akkor már más neveken említve meglehetősen hosszú idő óta ismert volt: kétdimenziós speciális esete valóban úgy néz ki, mint egy 360 fokban kinyitott könyv. *Emmanuel Giroux* cikke 2005 januárjában jelent meg a *Notices of the American Mathematical Society* folyóiratban (Fordította: *Stipsicz András*). Tovább...



2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Epidemiológia és Modellezés Workshop, Kecskemét, 2021. július 14–16.

2021. július 14. és 16. között Kecskeméten rendezték meg az Epidemiológia és Modellezés Workshopot, amelyen a Járványmatematikai Modellező és Epidemiológiai Projekt munkatársai mellett számos további, a témában aktív kutató is részt vett. A javuló járványhelyzetnek köszönhetően a kutatók személyesen is találkozhattak és beszámolhattak az elmúlt több mint egy év eredményeiről. Az érdekes előadások lényegét *Dénes Attila* foglalta össze.

2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Tipográfia a matematikaórán

Székely Péter is azok közé a tanárok közé tartozik, akik sokat tesznek azért, hogy minél érdekesebbé tegyék az órát, hasznosíthatóbbá a megszerzett tudást. A digitális oktatás során még nehezebb ezt elérni, fenntartani az érdeklődést, motiválni azokat is, akik félnek a matektól. A beszámolót olvasva talán más, informatikában is járatos kollégák is megpróbálják osztályukban megszerettetni a matematikát a TEX program segítségével, tipográfiát is tanítva az órán. Cikkünk a július elején lezajlott Rátz László Vándorgyűlésen online elhangzott előadás nyomán készült. Tovább...

2021. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Róka Sándor: Zénón figyelmeztetése

2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Czách László (1929–2021)

Dr. Czách László, az Eötvös

2021. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Mit jelentenek a szavaink?

Egyetlen mondatban

A jó bornak se árt a cégér. Ahogy a Múzeumok éjszakáján megtelnek az üres épületek, vagy ahogyan az ilyen-olyan Maraton tömegeket vonz a komoly zene meghallgatására, úgy az olvasóink által nyilván nagyrabecsült matematikának is jót tesz, ha élvezetes formában tálalják. Erre kiváló példa Róka Sándor: Zénón figyelmeztetése című könyve. *Tóth János* recenziója következik.

Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetének egyetemi docense, életének 93. évében, 2021. augusztus 18-án elhunyt. Halálával a háború utáni magyar matematika egésze és a hazai egyetemi matematikaoktatás kiemelkedő alakja távozott. Temetése 2021 október 4-én, 15 órakor lesz a Fiumei úti sírkert szóróparcellájában. Volt kollégái, *Faragó István, Pfeil Tamás, Szilágyi Tivadar* emlékeznek rá.

összefoglalható az ún. számítógépes nyelvészet „szemantika” nevű feladatköre: hogyan mondjuk meg a számítógépnek, hogy mi a szavak jelentése, oly módon, hogy ugyanolyan értelmes válaszokat adjon vissza a kérdéseinkre, mint amilyeneket egy embertől is elvárnánk…*Molnár Zoltán* szubjektív beszámolója Kornai András: Szemantika című könyvéről.

2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

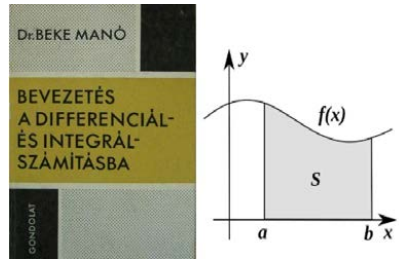
Az entrópia-hatásfüggvény-sejtés

Bakos Bence és *Pálfy Máté* cikkében egy érdekes sejtést mutat be, ami a matematika számos területéről tartalmaz elemeket. A sejtés szerteágazó, ezt jól mutatja, hogy gráftulajdonságok vizsgálata során fogalmazták meg, Boole-függvényeket használ, és a Fourier-analízis eszközeivel vizsgálják. Ezek mind a matematika egy-egy igen széles területét képezik, azonban a sejtés megértéséhez nem kell szakértőnek lenni egyik területen sem. Az írás az alapfogalmak megismertetésével indul...

2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Ez történt a MEMO 2021-en

Augusztus végén Zágrábban rendezték meg a 15. Közép-európai Matematikai Olimpiát, a MEMO 2021-et, amelyen csapatversenyben 11 ország közül Magyarország az ezüstérmet szerezte meg. A csapat tagjai, akiket a tanév folyamán szakkörökön, nyári edzőtáborban készítettek fel és a válogatóversenyeken választottak ki, nagyon szép eredményeket értek el az egyéni versenyeken is. Következik a csapatvezetők és a diákok beszámolója.



2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Fejezetek a matematikai analízis tanításának történetéből

„Igen, a tanárok felkészítésével kell kezdeni az analízis tanításának tervezését, őrajtuk áll vagy bukik a szemléletesség, a precíz fogalomalkotás és a modern technika alkalmazási arányának a kérdése.” Szemléletesen vagy tudományos precízséggel oktassuk az analízist a középiskolában? *Kántor Sándorné* az ókortól a 20. századig mutat be néhány példát. Tovább…

2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

ECM8 – Ilyen volt a 8. Európai Matematikai Kongresszus

1771 résztvevő 77 országból és összesen 1058 előadás – 2021. június 26-án rekordokat döntő számadatokkal, sikeresen zárult a 8. Európai Matematikai Kongresszus. Júniusi cikkünkben olvashatták, hogy a négyévente megrendezésre kerülő konferenciát az egyik legjelentősebb matematikai eseményként tartjuk számon. Az ECM8 2020 helyett 2021-ben félig hagyományos, félig online módon sikeresen, jó hangulatban zajlott. *Földvári Viktória* számol be a portoroži konferenciáról...

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet.

A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.)*

Kós Rita, Oláh Vera, Vladár Károly
2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

KöMaL új-ságok

Vajon mit jelent az Érintő olvasóinak a KöMaL? A magyar matematikai tehetséggondozás bástyáját, egy nélkülözhetelen intézményt? Egy régmúltból itt maradt, koránál fogva tiszteletre méltó, de manapság már csak keveseket érdeklő, anakronisztikus folyóiratot? Talán nem mindenki tudja, milyen új(don)ságokkal készül a KöMaL és a MATFUND Alapítvány az idei tanévben, folytatva a korábbi évek megújító törekvéseit. *Kós Rita*, *Oláh Vera* és *Vladár Károly* írásai következnek.

Szerkesztő
2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Két augusztusi jó hír

Bizonyára értesültek már olvasóink arról, hogy *Lovász László* 2021. aug. 20-án megkapta a Magyar Szent István Rend kitüntetést. Egyúttal arról is beszámolunk, hogy a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet az ELKH támogatásával új konferenciaközpontot alapított, az *Erdős Centert*. Az első tematikus szemesztert a nagy hálózatok témájában 2022 tavaszán Lovász professzor szervezi. Tovább...

Kós Géza, Kós Rita
2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Egy siker fényében – ismerjük meg az IMC-t!

A Tokiói Olimpián (és azóta a Paralimpián) elért sikerek sem homályosítják el a tudományos-szakmai versenyeken, megmérettetéseken elért magyar sikereket. Augusztus elején *Gáspár Attila* (ELTE) fényes győzelmet aratott az egyetemistáknak szervezett International Mathematics Competition verseny abszolút első helyének megszerzésével. *Kós Géza*, az egyik fő szervező ismertet meg a versennyel.

Kosztolányi József
2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Dobos Sándor
2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Lenger Dániel, Imolay András
2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 60. (online) Rátz László Vándorgyűlés

Bár nem az eredetileg eltervezett módon, és egy év késéssel, de nagy sikerrel, sok résztvevővel rendezte meg 60. Rátz László Vándorgyűlését a Bolyai János Matematikai Társulat. A teljes programon és az előadások során kivetített ppt bemutatókon túl az online előadások videofelvételei is elérhetők a vándorgyűlés honlapján. A rendezvényről *Kosztolányi József* írt beszámolót.

Online IMO 2021, és ami előtte volt…

A 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát Szentpétervár rendezte meg online formában 2021. július 14-24. között. Képünkön a magyar csapat és felkészítőik: balról jobbra *Dobos Sándor* helyettes csapatvezető, Kovács Tamás, Fleiner Zsigmond, Velich Nóra, Szabó Kornél, Füredi Erik, Várkonyi Zsombor, Kovács Benedek felkészítő, Frenkel Péter csapatvezető. A szakkörökről, válogatóversenyekről, a nyári edzőtáborról és az olimpiáról itt olvashatnak.

Ez történt a MEMO 2021-en

Augusztus végén Zágrábban rendezték meg a 15. Közép-európai Matematikai Olimpiát, a MEMO 2021-et, amelyen csapatversenyben 11 ország közül Magyarország az ezüstérmet szerezte meg. A csapat tagjai, akiket a tanév folyamán szakkörökön, nyári edzőtáborban készítettek fel és a válogatóversenyeken választottak ki, nagyon szép eredményeket értek el az egyéni versenyeken is. Következik a csapatvezetők és a diákok beszámolója.

Földvári Viktória

2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

ECM8 – Ilyen volt a 8. Európai Matematikai Kongresszus

1771 résztvevő 77 országból és összesen 1058 előadás – 2021. június 26-án rekordokat döntő számadatokkal, sikeresen zárult a 8. Európai Matematikai Kongresszus. Júniusi cikkünkben olvashatták, hogy a négyévente megrendezésre kerülő konferenciát az egyik legjelentősebb matematikai eseményként tartjuk számon. Az ECM8 2020 helyett 2021-ben félig hagyományos, félig online módon sikeresen, jó hangulatban zajlott. *Földvári Viktória* számol be a portoroži konferenciáról...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kós Rita, Oláh Vera, Vladár Károly 2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

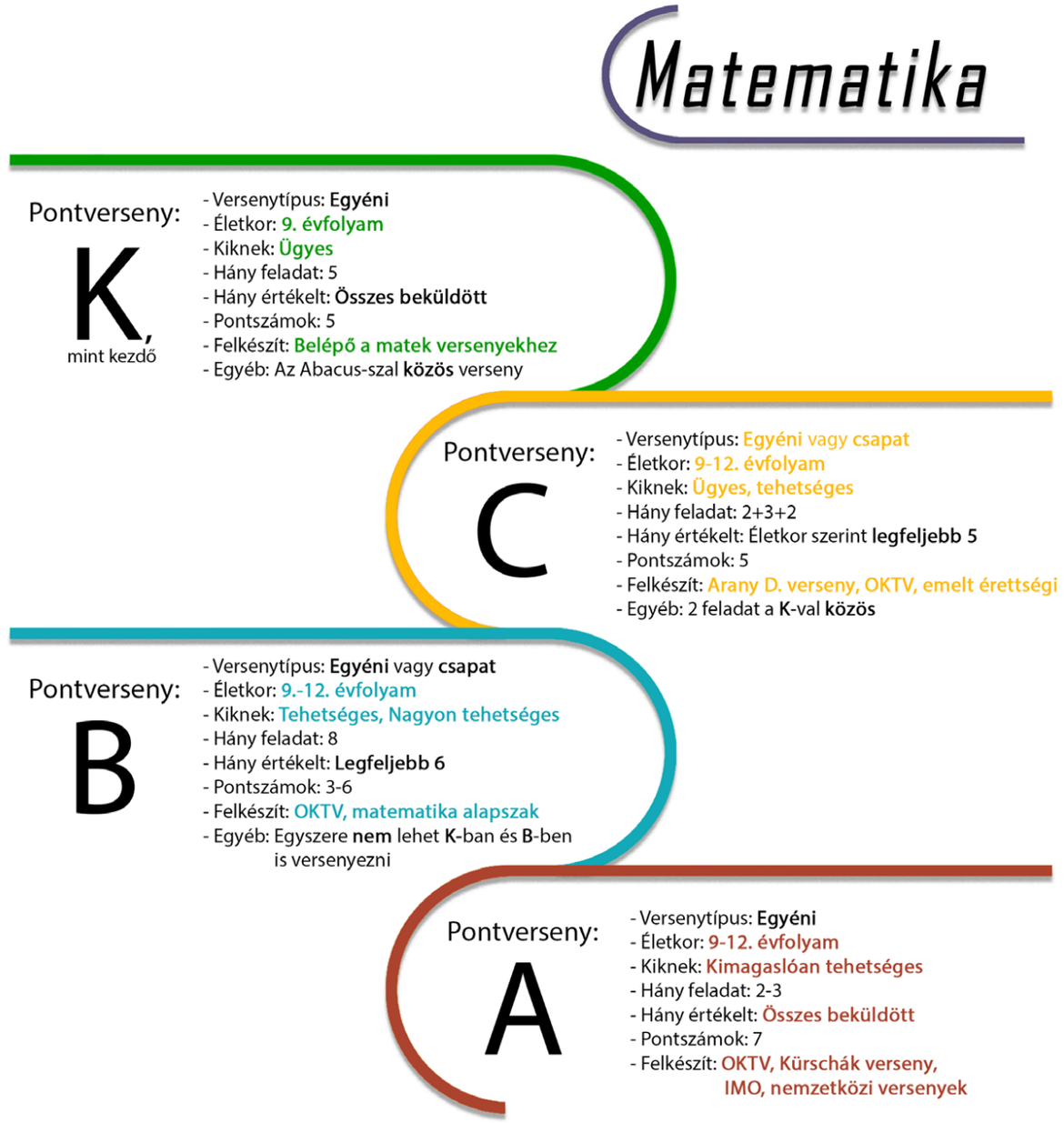
KöMaL új-ságok

A 2021/22-es tanév több változást is hoz a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapoknál. Nagyobb hírveréssel, több közösségi média bevonásával, előfizetőknek a tartalmak online elérési lehetőségével szeretnék kiterjeszteni olvasótáborukat azokra a középiskolásokra és tanáraikra is, akik eddig nem mertek belevágni a versenyzésbe. Idén kísérleti jelleggel bevezetik a matematika csapatversenyt is az egyéni versenyek mellett: ez lehetőséget ad arra, hogy többen, csoportosan oldjanak meg olyan feladatokat, amelyeket egyedül nehezebb lenne és több időbe telne. A tanárok és a diákok számára bővíteni szeretnék a KöMaL-archívum lehetőségeinek kihasználását. Szeretnék megkönnyíteni a matematika tanulását, tanítását, hogy minél többen megkedveljék ezt a tárgyat. A részletekért érdemes ellátogatni a komal.hu honlapra. Szeptemberben még nem késő megrendelni a lapot!

Augusztusban két ingyenes kedvcsináló tanári különszámot juttatott el a szerkesztőség az iskolákba, egyet fizika-informatika és egyet matematika-informatika témában, akikhez nem jutott el, azok innen letölthetik :

Aki át szeretné látni, milyen versenyeken érdemes benevezni a KöMaL egész éven át tartó tehetséggondozásába, annak segítségül ajánljuk az alábbi tájékoztató infografikákat:

Oláh Vera MATFUND Alapítvány



Pontverseny:

G,

mint gondolkodj

- Versenytípus: Egyéni vagy csapat
- Életkor: 9-10. évfolyam
- Kiknek: Ügyes, tehetséges
- Hány feladat: 4
- Hány értékelt: **Legfeljebb 3**
- Pontszámok: 3-4
- Felkészít: Érettségi

Pontverseny:

P,

nehéz fizika

- Versenytípus: Egyéni vagy csapat
- Életkor: 9.-12. évfolyam
- Kiknek: Tehetséges, Nagyon tehetséges
- Hány feladat: 8/9
- Hány értékelt: **Legfeljebb 4/5**
- Pontszámok: 3-5 / 6
- Felkészít: OKTV, emelt érettségi
- Egyéb: Egyszere **nem** lehet **G**-ben és **P**-ben is versenyezni

Informatika

Pontverseny:

I,

informatika

- Versenytípus: Egyéni vagy csapat
- Életkor: 1-12. évfolyam
- Kiknek: Ügyes, tehetséges
- Hány feladat: 3+1
- Hány értékelt: **Legfeljebb 3**
- Pontszámok: 10
- Felkészít: Nemes T. verseny, emelt érettségi

Pontverseny:

S,

nehéz programozás

- Versenytípus: Egyéni
- Életkor: 1-12. évfolyam
- Kiknek: Tehetséges, Nagyon tehetséges
- Hány feladat: 1+1
- Hány értékelt: **Összes beküldött**
- Pontszámok: 10
- Felkészít: OKTV, emelt érettségi, informatika alapszakok

Nevezés

Egyéni vagy csapat-versenyre az első hónapban.

Bármikor lehet csatlakozni év közben.

Regisztráció

Ha korábban még nem regisztráltál. www.komal.hu

Elfelejtett jelszó esetén kérj újat!

Egyéni

Nevezés kész.

Bármely pontverseny feladatát beküldheted.

Csapat

Nevezzétek a csapatot is pontversenyenként.

Különböző osztályból v. évfolyamból is lehettek.

Figyelj!

K és B ill. G és P egyszerre nem küldhető.

Jelöld választásod az adatlapodon.

Figyelj!

#kömaloznijó

Vajon mit jelent az Érintő olvasóinak a KöMaL? A magyar matematikai tehetséggondozás bástyáját, egy nélkülözhetelen intézményt? Egy régmúltból itt maradt, koránál fogva tiszteletre méltó, de manapság már csak keveseket érdeklő, anakronisztikus folyóiratot? Valami újságot, amit "oh ismerem, kellett ilyen feladatokat beadni a suliban "?

Bevallom, a magam részéről mindegyik állításban érzek több-kevesebb igazságot. Tapasztalataim alapján azonban állíthatom: a szerkesztők, szerkesztőbizottsági tagok és a kiadásért felelők nemcsak a KöMaL, mint folyóirat vagy mint intézmény iránt elkötelezettek, hanem a ma középiskolákban tanuló − matematikában vagy fizikából vagy informatikában −tehetséges diákok és tanáraik iránt is.

Állításom igazolásaként szeretném felidézni az elmúlt évtizedben bevezetett újításokat és beszámolni arról, mi minden várható az idei tanévtől.

- A honlapunkon nagy sikerrel működő Fórumba, illetve Elektronikus Munkafüzetbe ugyanazon belépő felületen keresztül lehet eljutni – egységes felhasználói fiók jött létre. (A megrendelő oldalhoz jelenleg külön regisztráció után lehet csatlakozni.)
- Az újság megrendelése után a szeptemberi számmal megkapott előfizetői kóddal a honlapon a feladatok szövegét a hónap első felétől lehet látni (előfizetés nélkül a hónap végétől).
- Az általános iskolás és gimnáziumi matematika közötti könnyebb átmenetet segítve elindult az Abacusszal közös K pontverseny sokáig 6, jelenleg 5 feladattal.
- A C pontverseny feladatainak száma 5-ről 7-re bővült, és

- a tananyagot és életkori sajátosságokat is figyelembe véve két korosztályra bomlott.
- Fizikából az általános iskolákban lecsökkent óraszámok miatti változásokra reagálva elindult a 9-10-edik évfolyamosoknak meghirdetett G pontverseny.
- Az M mérési versenyben az elmúlt években mérőpárok is indulhattak.
- Az informatika versenyek sorába bekerültek a közepesen nehéz programozói feladatokból álló I/S jelű feladatok.

A pandémia okozta helyzet lehetőséget adott arra, hogy *a postán beküldött megoldások helyett csak elektronikusan fogadjunk dolgozatokat* az Elektronikus Munkafüzeten keresztül. Ezzel lehetővé vált a dolgozatok távjavítása olyan értelemben is, hogy *nem budapesti tanárképző egyetemek hallgatói is be tudtak kapcsolódni a KöMaL munkájába.*

Tavasszal külön a még nem érettségizett diákokat és külön a KöMaL felnőtt olvasóit megkérdeztük egy-egy kérdőívben a nyomtatott lap és a honlap főbb tartalmi elemeiről, KöMaL-fogyasztási szokásokról és a pontversenyekről. *A két kérdőívet együtt több mint ötszázan töltötték ki*, nagyon sok személyes véleményt osztva meg bennük. Ezúton is szeretném megköszönni a rászánt időt és figyelmet. A kérdőívről szóló rövid beszámolót az augusztus végére összeállított tanároknak szóló különszámokban a KöMaL honlapján is megtalálják.

A visszajelzésekkel felvértezve – a következő tanévre kísérleti évként tekintve – *csapatversenyeket is indítunk a C és B pontversenyekben* 3 fős csapatok számára, illetve az újság tartalmának bizonyos, pontversenyeken túli részét is elérhetővé tesszük elektronikusan az előfizetők számára.

Újdonság a matematika pontversenyekben, hogy a „gyakorló” jellegű C feladatok legfeljebb 10. osztályosok számára kijelölt feladatai közül kettő a K pontverseny utolsó két feladatával megegyezik, a többi feladat nehézsége pedig ehhez igazodik. Az emelt szintű matematika érettségire felkészítő gyakorló feladatsorok összeállításának vezérfonala az, hogy minél többen használhassák. Így megjelennek olyan feladatlapok is, amelyek nem minden témakört tartalmaznak, hogy fiatalabbak is megoldhassák, illetve a feladatok nehézségében és összeállításában is olyanok, mint amiket az érettségin adnak.

Már készülnek azok a rövid cikkek, olvasmányok, amelyeket a tanárok és diákjaik segítésére publikálunk – a tartalomtól függően interaktív illusztrációkkal. Kövessék *Facebook oldalunkat*, ami szeptembertől rendszeresen jelentkezik aktualitásokkal, érdekességekkel, és beszámol a honlapon megjelenő tartalmakról. Hamarosan indul a fiataloknak (és örök fiataloknak) szóló *Instagram oldalunk* is. Bátorítsák tehetséges diákjaikat, kollégáikat és önmagukat is arra, hogy írják le matematikai élményeiket a

KöMaL számára („így jöttem rá erre…”, „kedvenc feladataim…”, „most már én is tudom, hogy …” stb).

Szeretném felhívni a figyelmet a *KöMaL Őszi Ankétjára*, amit idén 2021. október 26−27-én rendezünk meg Budapesten, az ELTE lágymányosi kampuszán. Az előadások nyitottak az érdeklődők számára regisztrációt követően. Az előző tanév versenyeinek díjkiosztóján kívül számos érdekes, középiskolásoknak szóló előadással, rejtvényekkel, matematika-fizika TOTÓ-val és idén először kerekasztal beszélgetésekkel is várjuk a diákokat és kollégákat.

A KöMaL-t rendszeresen kézbe venni, néhány cikket elolvasni, feladatokon gondolkodni, a tehetséges versenyzők nevét és arcát megismerni – ez egy életérzés, ami gimnazista korom óta a mai napig is tart gyakorló tanárként.

Kós Rita, MATFUND Alapítvány, KöMaL

Ilyen volt a KöMaL nyári tábora

A KöMaL-t kiadó MATFUND Alapítvány két KöMaL-rendezvényt is szokott tartani minden évben, tavaly ugyan mindkettő elmaradt, de idén a nyári tábor már sikeresen lezárult, és reméljük, így lesz az őszi Ifjúsági Ankéttal is. A KöMaL június végi matematika-fizika táborának matematika programjáról részletesen olvashatnak Dobos Sándor olimpiai beszámolójában. A fizikus táborvezető, Vladár Károly is küldött egy beszámolót:

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok nyári fizikatáborát egy év kényszerű kihagyás után 2021. június 24. és 30. között tartottuk a Dombóvárhoz tartozó Gunaras üdülőfaluban. A táborban a Kömal pontversenyében elért eredmény alapján meghívással lehetett részt venni, idén 18 lelkes ifjú fizikus érkezett.

A matematika és fizika tábor egy időben, egymás mellett volt, közös étkezésekkel és szabadidős programokkal.

A hatnapos tábor a következő napirend szerint működött: reggeli után a diákok megkapták az aznapi feladatokat egy nyomtatott lapon − hét elméleti feladat (ebből beadandó tetszőleges öt), egy mérés, és egy becslés, mindezeket lekellett adni még vacsora előtt. A munka az első napon megalakult három-négy fős csapatokban folyt. Az évközi pontversenyhez képest itt a segítségkérés megengedett, sőt ajánlott volt. Vacsora után megbeszéltük az aznapi nehezebb problémákat.

A második este Honyek Gyula és Baranyai Klára csodálatos kísérleti bemutatót tartott, másnap délelőtt pedig egy különleges mérési feladattal (hidrosztatikai fekete doboz) tették próbára az tábotozókat. Strandolás mellett kísérleteztünk is: a léggőmb átmérője és nyomása közti összefüggést kellett kimérni. Kirándultunk a közeli Kapos folyóhoz, ahol kipróbáltuk az otthonról hozott krumpliágyút.

Az utolsó nap utolsó feladata konstrukció volt: hidat kellett építeni két minél távolabbi alátámasztási pont közé az öt nap alatt teleírt papírlapok felhasználásával. A nap végén kihirdettük az összesített pontverseny eredményét, és a díjazottak szerény jutalmat kaptak. A búcsúesten a két résztábor közös tábortűz köré ült, helyben sütött húst és zöldséget vacsoráztunk és énekeltünk. De előtte még elsütöttük néhányszor a krumpliágyút, mert az a matematikusokat is nagyon érdekelte.

A napi munka − programok szervezése, a napirend betartása, feladatok javítása − oroszlánrészét négy egyetemista segítő: Asztalos Bogdán, Kondákor Márk, Olosz Adél és Olosz Balázs végezte. A Nemzeti Tehetség Program keretében a Miniszterelnökség NTP-TÁB-20-0042 pályázata tette lehetővé a matematikus és fizikus fiatalok ingyenes táborozását. Köszönettel tartozunk a MATFUND Alapítványnak és Salamon Máriának a tábor anyagi feltételeinek előteremtéséért és megszervezéséért, a tábort támogató AIT-Budapestnek (Aquincum Institute of Technology), Rotter Barbara programigazgatónak, Bojár Gábor alapítónak, valamint Tigelmann Péternek, aki Gunarason a hatodik alkalommal látott vendégül bennünket, és mindig teljesítette olykor különös kéréseinket is.

Emberi Erőforrások Minisztériuma
Miniszterelnökség Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Vladár Károly fizikus táborvezető

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Két augusztusi jó hír

Az Abel-díjas Lovász László 2021. aug. 20-án megkapta a legrangosabb állami kitüntetést, a Magyar Szent István Rendet. A részleteket az ELTE, illetve a Rényi Intézet honlapjáról olvashatják. Gratulálunk!

https://ttk.elte.hu/content/szent-istvan-rend-kituntetest-kapott-lovasz-laszlo-matematikus.t.4803

https://renyi.hu/hu/hir/lovasz-laszlo-a-magyar-szent-istvan-rend-kituntetettje

Fotó: Koszticsák Szilárd (MTI)

A Magyar Tudomány 2021/8. számában jelent meg Laczkovich Miklós áprilisban készült interjúja Lovász Lászlóval: Bolyongás a matematikában és határán.

A Rényi Intézet honlapját meglátogatók egy, a magyar matematikai élet szempontjából igen fontos eseményről is hírt kapnak:

Az ELKH támogatásával a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet idén nyáron megalapította az *Erdős Centert*.

A konferenciaközpont célja magasszintű workshopok, konferenciák és nyári iskolák szervezése matematikai, vagy azt alkalmazó témákban tematikus szemeszterek keretében, továbbá fiatal, illetve elismert vendégprofesszorok meghívása. A konferenciaközpont a Rényi Intézettel szemben, a Reáltanoda utca 14-ben található.

A tudományos rendezvények 2022 tavaszán indulnak, az első tematikus szemesztert Lovász László szervezi. A már előkészített szemesztereket követően, a továbbiakban a hazai matematikus közösség tagjainak is lehetősége lesz pályázni az Erdős Centerbe tervezett események szervezésére. Az Erdős Központ weboldala itt található.

Erdős Pál díjazottak konferencia Lovász László

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

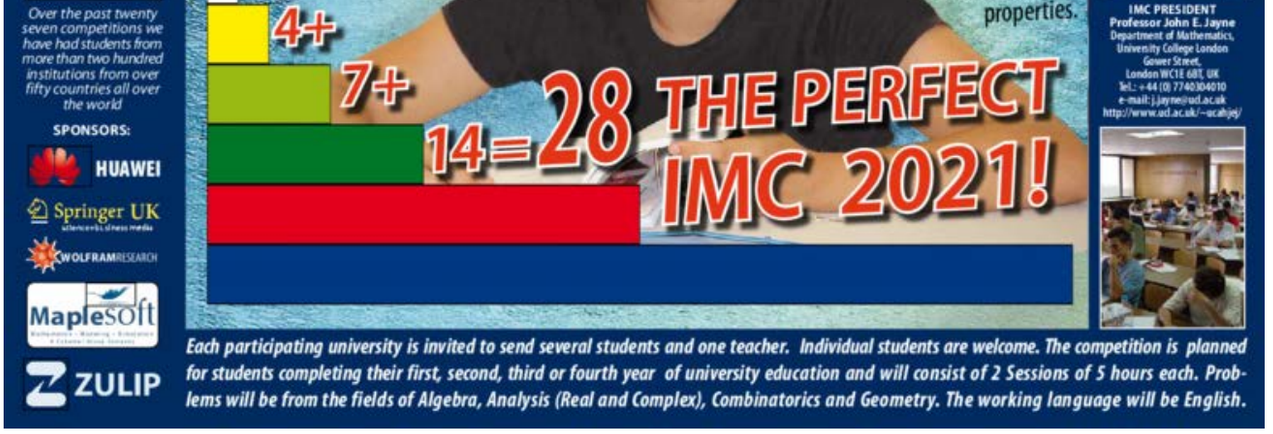
Kós Géza, Kós Rita 2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Egy siker fényében – ismerjük meg az IMC-t!

A Tokiói Olimpián (és azóta a Paralimpián) elért sikerek sem homályosítják el a tudományos-szakmai versenyeken, megmérettetéseken elért magyar sikereket. Különösen így van ez, ha az eredményt ifjú matematikusok, természettudósok érik el. Augusztus elején Gáspár Attila fényes győzelmet aratott az egyetemistáknak szervezett International Mathematics Competition (IMC) verseny abszolút első helyének megszerzésével.

Az ELTE két csapatot is indított, a fiatal matematikusok kitűnő versenyzéssel – Attila kiemelt első díján kívül – 8 arany- és 1 ezüstérmet zsebeltek be, ezzel a két csapat az egyetemek nem hivatalos versenyében az 5. és 7. helyet szerezte meg. Az IMC-n hagyományosan sok érmet osztanak, idén az indulók kb. negyede kapott első díjat. Az eredmény sorrendjében a versenyzők felső 10%-ába négy magyar is bekerült.

Az idén 28. alkalommal megrendezett versenyen 50 ország összesen 158 egyeteméről érkeztek a versenyzők. Az 589 fiatalnak mindkét versenynapon 4 feladatot kellett megoldania 4 óra alatt: vagy a csapatvezetője által megszervezett alkalommal, vagy a verseny szervezői által biztosított és kötelezően előírt videókonferencia felügyelete alatt.



A különböző szakmai, és ezen belül a matematika versenyeknek nagy hagyománya van a régiónkban − és nemcsak középiskolás fokon. A ’80-as évek végén Csehszlovákiában, illetve Belgrádban (ISTAND) rendeztek versenyeket, utoljára 1989-ben. A régióban a rendszerváltást követően az ostravai Vojtec Jarnik Nemzetközi Matematikaverseny és az IMC folytatta ezt a hagyományt. Mára mindkét versenyre 4 földrészről érkeznek versenyzők. Az észak-amerikai nagy egyetemek diákjai elsősorban a régebbi és versenyzőszámban is nagyobb W. L. Putnam Versenyen vesznek részt.

Az IMC-t legelőször a bulgáriai Plovdivban rendezték meg 1994-ben, a következő években pedig Szófiában, Plovdivban és Blagoevgradban, az EU által finanszírozott Tempus Projektek támogatásával. A cél a korábbi hagyományok folytatása és a bulgáriai rendszerváltást követően a matematikai tehetséggondozás segítése volt. A verseny szülőatyja, Prof. John E. Jayne (UCL, London, UK) egy olyan nemzetközi rendezvényt álmodott meg, amelynek során egyetemisták nemcsak a rangos matematika versenyek szellemiségét viszik tovább, hanem a közös programok révén egymást és egymás kultúráját is megismerhetik. Az IMC-t később 1999-ben és 2009-ben Magyarországon az ELTE támogatásával, 2000 és 2006 között minden évben más-más országban a főváros (vagy egyetemi város) vezető egyetemének segítségével szervezték meg. 2010 óta visszatért Bulgáriába, ahol Blagoevgradban az AUBG (American University in Bulgaria) kampusza ad otthont a versenynek.

A feladatokat az algebra, valós és komplex analízis, geometria és kombinatorika témaköreiből választja ki a csapatvezetőkből álló zsűri (az online versenyek alkalmával pedig egy néhány fős bizottság). A feladatok szövegét angolul kapják meg a résztvevők és a megoldásokat is angolul kell leírniuk. Az IMC létszáma évről évre nőtt – az utóbbi két évben leginkább a „távversenyzés” lehetősége miatt. A külső szemlélő számára talán meglepő helyekről is érkeznek csapatok, de ez nem azért van, mert a verseny színvonala alacsony lenne. Az IMC-n rendszeresen korábbi IMO aranyérmes, IMO nyertes fiatalok szerepelnek, de a korábbi siker sem garancia a biztos győzelemhez. A felkészültségen és azon, hogy „összejöjjenek a dolgok” plusz segítséget jelent a csapatvezetők munkája: ők rendeznek válogatóversenyeket, esetleg felkészülést segítő szemináriumokat, szervezik az utazást, javítják a megoldásokat és „harcolnak” a pontokért a diák megoldásának elmagyarázásával, megértetésével. Az ELTÉ-sek az elmúlt években Ágoston Tamásnak köszönhetik ezt a hátteret.

Nagy öröm, hogy az egyetemi nemzetközi versenyeken kiválóan szerepelő fiatal magyar matematikusok közül egyre többen − mint például Matolcsi Dávid, aki az idei IMC-n megosztott 10-14. helyezést ért el −részt vállalnak a középiskolások versenyeztetésében, a tehetséggondozásban, tanításban. Persze nem is olyan régen ők is a középiskolás matematikaversenyek legjobbjai voltak, tudják, mit és hogyan érdemes átadni ahhoz, hogy mindig új és újabb kiváló matematikus nemzedékek nőjenek fel.

Kós Géza, ELTE Matematikai Intézet

Kós Rita, MATFUND Alapítvány, KöMaL

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kosztolányi József 2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 60. (online) Rátz László Vándorgyűlés

2020 márciusában javában zajlottak a 60., Egerbe tervezett Vándorgyűlés előkészületei, amikor a pandémia miatt lezárták az országot. Hamarosan világossá vált, hogy a járványhelyzet következtében nem tudjuk megrendezni Egerben a Vándorgyűlést. 2020 volt az első olyan év 1961, az első Rátz László Vándorgyűlés hagyományteremtő megszervezése óta, amikor elmaradt ez a kiváló szakmai fórum, egyben akkreditált tanártovábbképzés. Ráadásul éppen egy jubileumi alkalom, a 60-adik…

Még dúlt a járvány igen erős harmadik hulláma, amikor ez év kora tavaszán a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottsága úgy döntött, hogy idén mindenképpen lesz Vándorgyűlés, más lehetőségünk nem lévén, online formában. Úgy gondoltuk, hogy az eltelt egy évben az online tanítás során szereztünk már annyi tapasztalatot, hogy bátran nekivághatunk a szervezésnek, és talán a digitális feltételek megteremtése sem fog ki rajtunk. Tudtuk, hogy ez a Vándorgyűlés nem lesz olyan, mint a korábbiak voltak, hiszen elmaradnak a személyes találkozások, nem lesznek közös kulturális- és sportprogramok, városnézés, kirándulás, könyves standok előtti böngészés, esti sörözések. Viszont lehetnek kiváló előadások, szemináriumok, szakmai szempontból minden résztvevő töltekezhet kedvére. És így is lett, utólag beigazolódott, hogy jó döntést hozott a Bizottság.

Július 1. és 3. között, 291 regisztrált résztvevővel zajlott le az online Vándorgyűlés. A járulékos programok elmaradása miatt egy nappal rövidebb volt, mint hagyományosan. Az online forma miatt az előadások és a feladatmegoldó szemináriumok is rövidebbek, 60 percesek voltak. A szakmai programok zoom-platformon zajlottak, a szükséges, összesen 6 csatornát a Bolyai János Matematikai Társulat, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet és a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete bocsátotta (térítésmentesen) a szervezők rendelkezésére.

A hagyományoknak megfelelően az első nap délutánján volt az ünnepélyes plenáris ülés. Ezen előbb Pálfy Péter Pál, a Társulat elnöke köszöntötte a jelenlévőket, majd az ez évi Beke Manó Emlékdíjak (virtuális) átadására került sor. Beke Manó Emlékdíjban részesültek a következő kollégák: Czimmermann József, Dr. Máder Attila, Fonyóné Németh Ildikó, Hujter Bálint, Kozma Lászlóné, Molnár Judit és Dr. Molnár István (megosztott díj), Tomcsányi Szabó Katalin. A plenáris ülés második felében először a Társulat előző elnöke, Katona O. H. Gyula akadémikus *Lovász, a csodafelnőtt* című előadásával köszöntöttük a friss Abel-díjas Lovász Lászlót.

Hagyományosan a Vándorgyűlés plenáris délutánján szoktak előadást tartani az előző év végén Rátz Tanár Úr Életműdíjat kapott matematikatanárok is. Most két év mind a négy életműdíjasát felkértük előadás tartására. Kovács Csongorné sajnos nem tudott jelen lenni, így három, a matematikát és a példaértékű tanári életutat háromféleképpen, de mindhárom esetben briliáns módon ötvöző előadást hallhatott a közel háromszáz kolléga: Dr. Horváth Eszter: *12 évfolyam matematika feladatokban*; Dr. Kiss Géza: *Néhány évtizedeken átívelő feladat*; Bíró Bálint: *A matematika élménye és kihívása*. Ezután Vancsó Ödön, az MTA-ELTE matematikadidaktikai kutatócsoportjának vezetője tartott tájékoztató előadást az MTA által támogatott matematikadidaktikai kutatásokról. A plenáris ülés végeztével Kosztra Gábor, az Oktatási Bizottság titkára tartott nagysikerű, oldott hangulatú „beavató” tájékoztatót a Rátz László Vándorgyűlésekről az „első bálozóknak”, vagyis azon kollégáknak, akik először vettek részt ezen a rendezvényen.

A plenáris ülés után péntek reggeltől szombat kora délutánig a szokásos négy szekcióban (Alsó tagozat; Felső tagozat; Gimnázium, szakgimnázium és szakközépiskola; Speciális matematika tagozat) kifejezetten színvonalas és tartalmas előadások és feladatmegoldó szemináriumok közül választhattak a résztvevők. A Vándorgyűlés egyéni értékelésére lehetőséget adó, 120 résztvevő által ki is töltött online kérdőív kiértékelése alapján megállapítható, hogy a „színvonalas” és „tartalmas” jelzők egyrészt nem túloznak, másrészt a rendezvény egészét jellemzik.

A teljes programon és az előadások során kivetített ppt bemutatókon túl az online előadások videofelvételei is elérhetők a vándorgyűlés honlapján.

Az „igazi” vándorgyűlések két népszerű programját is átmentettük az online térbe. Az online *Tanárverseny* legalább olyan népszerű volt, mint a korábbi vándorgyűléseken, és a Typotex Kiadó által szervezett és támogatott *Hangos könyvek* péntek késő esti felolvasásaira és könyvismertetéseire is sokan felcsatlakoztak.

Az Oktatási Bizottság Vándorgyűlést záró ülésén felvetődött az a javaslat, hogy a következő években hibrid módon (jelenléti és online) szervezzük a Vándorgyűléseket, ugyanis sok kollégának csak így volt lehetősége részt venni a szakmai programokon, utazni különböző okokból nem tudott volna. Ezt a javaslatot sokan megfogalmazták a kérdőívet kitöltő kollégák közül is. Maga a nagyon sikeresen lebonyolított online rendezvény és ezek a javaslatok azt jelzik, hogy a Vándorgyűlések történetében korszakhatárhoz érkeztünk. A „Hogyan tovább?” kérdés részletes megválaszolása komoly és összetett feladatot ad az elkövetkezendő hónapokban az Oktatási Bizottságnak.

Jelen állás szerint 2022-ben a 61. Rátz László Vándorgyűlést Egerben fogjuk rendezni.

Kosztolányi József

a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottságának elnöke

---

Bolyai beszámolók Rátz László matematikatanítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Dobos Sándor 2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Online IMO 2021, és ami előtte volt…

Az alábbi beszámolóban a 2021-es matematika diákolimpiára való felkészülésről és magáról a versenyről adunk hírt. Mindkettőre ebben az évben is rányomta a bélyegét a pandémia, ám az előző évi tapasztalatok sokat segítettek a helyzet kezelésében.

A szakkörök

A tanév első olimpiai szakköre a szeptember végére halasztott IMO 2020 (Nemzetközi Matematikai Diákolimpia) előtt volt. Mivel már szeptemberben a levegőben volt a lezárások lehetősége, ezért eleve online szakköröket hirdettünk. Ezek szervezésében és a további munkában is nagyon sokat segített Kovács Benedek, aki létrehozta a szakköri jelentkezés regisztrációs felületét, és új, szakmai honlappal támogatta a felkészülést.

A szakköri munkához ez a forma sok hozadékkal járult hozzá:

- A Budapesttől távolabb lakó diákoknak nem kellett hosszas vonatozással tölteniük a szakköri nap jelentős részét.
- A diákokon kívül bekapcsolódtak tanárok is. A szakkörön rendszeresen „jelen volt” többek közt Pelikán József tanár úr, a korábbi csapatvezető, Kós Géza, a problémakiválasztó bizottság tagja, és Juhász Péter, a Rényi Intézet szakmódszertani csoportjának referense.
- A szakköri feladatok megoldásaiból felkészülő diákok nagyon jó bemutatókat tartottak, ezek technikai megvalósítása, prezentálása sokszínű és példamutató volt.
- A szakkör azon részében, amikor gondolkozási időt kaptak a résztvevők, az ország különböző részein külön-külön élő diákok kis csoportokat alkotva együtt birkózhattak a problémákkal.

A szakköröket a korábban bevált módon kéthetente péntekenként délután 3–5 óra között rendeztük meg. 71-en regisztráltak, több alkalommal is 50–60 résztvevő jelentkezett be. A fent említett jó dolgok mellett meg kell említeni, hogy több diákkal beszélgetve kiderült, ők hiányolták a korábbi hagyományos, jelenléti szakköröket, azok hangulatát, a személyes találkozásokat. A zoom-os szakkörök további hátránya, hogy aktív gondolkozóból könnyen átválthat a résztvevő egyszerű szemlélővé.

A válogatóversenyek

A válogatóversenyek szervezésében úttörő jelentőségű volt az a minta, ahogy a Kürschák-versenyt szervezték. Így az első válogatót meg lehetett írni akár otthonról , akár a versenynek helyszínt biztosító iskolai környezetben. A második válogató, a Surányi János emlékverseny 2021. március 9-én volt, azaz a tavaszi lezárások elején, amikor már a felsősök sem jártak iskolába. Mivel az intézmények nyitva voltak, az érettségizők felkészítő konzultációi folytatódhattak, ezért ezt a válogatót is hasonló módon szerveztük. A legtöbb diák a saját iskolájában írta meg a dolgozatot, de voltak, akik az otthonukban dolgoztak, egy zoom találkozó keretében, egy bekapcsolt kamera felügyelete mellett. Ezúton is szeretném megköszönni a versenyre regisztrált diákok iskoláinak, az ottani tanároknak a segítőkész hozzáállást, a helyszín biztosítását, a felügyeletet, a diákok dolgozatainak beszkennelését és feltöltését. A szervezésben részt vevő iskolák: Batthyány Lajos Gimnázium (Nagykanizsa), Bányai Júlia Gimnázium (Kecskemét), ELTE Bolyai János Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (Szombathely), Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, Fazekas Mihály Gimnázium (Debrecen), Földes Ferenc Gimnázium (Miskolc), Janus Pannonius Gimnázium (Pécs), Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium (Szeged), Révai Miklós Gimnázium (Győr), Táncsics Mihály Gimnázium (Kaposvár), Türr István Gimnázium és Kollégium (Pápa), Vajda János Gimnázium (Keszthely).

A második válogatót az eredeti tervekhez képest el kellett halasztani, végül május 25–26-án tudtuk megtartani. Erre az utóbbi években kialakult rendszerben már csak a versenyben legjobban szereplő szűk kör kapott meghívást. Ezt a fordulót mindenki a saját iskolájában írta. A diákok dolgozatait feladatonként javítottuk, ebben közreműködött *Frenkel Péter*, az IMO csapat vezetője, *Dobos Sándor* helyettes vezető, *Lenger Dániel*, a MEMO csapat vezetője, továbbá korábbi diákolimpikonok: *Borbényi Márton*, *Kovács Benedek*, *Matolcsi Dávid*, *Szabó Kristóf*. Munkájukat ezúton is hálásan köszönjük. A verseny után kialakultak a csapatok (a nevek után álló szám az évfolyamot jelzi):

Az IMO csapata: Fleiner Zsigmond (11), **Füredi Erik** (12), **Kovács Tamás** (11), **Szabó Kornél** (12), **Várkonyi Zsombor** (12), **Velich Nóra** (12);

A MEMO csapata: Bán-Szabó Áron (11), **Bencsik Ádám** (11), **Jánosik Máté** (11), **Molnár-Szabó Vilmos** (10), **Nádor Benedek** (10), **Török Ágoston** (11);

iskolák szerint Máté a győri Révaiból, Ágoston a kecskeméti Bányaiból, a többiek pedig a budapesti Fazekasból.

A nyári edzőtábor

Mivel idén sem rendeztek szóbeli érettségiket, továbbá a komoly oltási kampánynak köszönhetően lépcsőzetes enyhítések jöttek, így június végén sor kerülhetett a korábbi évekhez hasonlóan Dombóváron megrendezett olimpiai edzőtáborra, ami szakmailag és szociálisan is nagyon jó programnak bizonyult. Nagy elismerés és köszönet a tábor finanszírozását biztosító pályázat megírásáért, a gondos szervezésért Salamon Máriának, aki a KöMaL MATFUND alapítványa részéről mindent kézben tartott. Köszönettel tartozunk továbbá a tábort támogató AIT-Budapestnek (Aquincum Institute of Technology), Rotter Barbara programigazgatónak, Bojár Gábor alapítónak, és a helyszínt biztosító Dombóvár-Gunaras üdülőközpontnak, személy szerint is Tigelmann Péternek.

Emberi Erőforrások Minisztériuma
Miniszterelnökség Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

A Nemzeti Tehetség Program keretében fogadta el a Miniszterelnökség az NTP-TÁB-20-0042 pályázatot, ez tette lehetővé mintegy 40 fiatal ingyenes táborozását. A matematikusok edzőtábora lassan hagyományossá váló módon párhuzamosan zajlott a fizikusok programjával, egyik este Honyek Gyula tanár úr és kedves felesége, Baranyai Klára tanárnő tartott színes, izgalmas kísérleti bemutatót az összes táborozónak. A matematika szakmai programot délelőttönként Kiss Géza és Dobos Sándor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanárai irányították, a délutáni programot Kovács Benedek és Imolay András egyetemisták vezették. A matematikatáborba a fent említett két csapaton kívül az EGMO vezetősége által javasolt 4 lány, továbbá a válogatókon jól szerepelt diákok jöttek, továbbá meghívást kapott a felvidéki Csaplár Viktor, aki a budapesti Fazekasban tanult és érettségizett, de az olimpián Szlovákia színeiben indult és csapatának legjobbjaként szép ezüstérmet nyert. A komoly munka mellett az egyik délután közös strandolás, röplabdázás volt a Gunaras strandfürdőben. A körülmények ideálisak voltak, a Hotel Európában laktunk, annak alagsorában tágas, a kánikulában is kellemes hőmérsékletű termeiben dolgozhattunk. Esténként az EB egy-egy mérkőzését is közösen lehetett végigszurkolni. A sok-sok hónap otthoni online iskolázása után nagyon jó volt újra együtt lenni, élőben közösen matekozni. Meg kell említeni a zárótábortüzet, ahol Salamon Marika grillmesterként is csillagos ötösre vizsgázott. Az étkezésünket biztosító étterem előkészítette a hozzávalókat, táborszervezőnk pedig a rögtönzött körülmények között a tábor közel ötven résztvevőjének megsütötte a finomságokat a tábortűznél. A fizikusok látványos krumpliágyú- és vízágyú-bemutatója, a MaMuT táborból örökölt éneklista végigdalolása a parázsló tűz mellett a kellemes nyári éjszakában,…szóval nagyon jó záróeste és összességében véve is szuper tábor volt.

Az olimpia

Az olimpia július második felében volt, az előtte levő héten még két napot a Fazekasban, kettőt pedig már a versenynek helyet adó Rényi Intézetben matekoztunk a csapattal. Maga a verseny ugyanúgy zajlott le, ahogy tavaly, erről részletesen írtunk az előző évi beszámolóban. Az apró különbségek egyike, hogy a külföldi vizsgabiztos idén a grúz Nika Salia volt, a koordinálást végző kvartettben a tavalyihoz képest egy csere történt, Fekete Panna helyett Terpai Tamás kapcsolódott be. Az online verseny nagyon más, mint a korábban megszokott. Nincs utazás, nem látszanak a riválisok, nincs megnyitóünnepség, zászlós felvonulás. A versenyen nem szuszog együtt egy hatalmas térben a 600 diák, miközben várja a feladatlapot tartalmazó mappa kinyitására engedélyt adó jelet, nincsenek utána közös étkezések, beszélgetések, kirándulások. A szervezők igyekeztek idén is valamilyen módon kárpótolni mindezt, és online dolgokat szerveztek: volt „városnézés”, sakkverseny és több exkluzív interjú, ezek egyikét Lovász Lászlóval készítették.

A feladatlap és a részletes eredmények is megtalálhatók az olimpia hivatalos honlapján. A csapat tagjait már felsoroltuk, közülük **Zsombor ezüstérmet** szerzett, **a többiek pedig** mindannyian **bronzot**, a csapat az országok nemhivatalos versenyében 107 közül a 32. lett. Az idei évben három feladat is nagyon nehéznek bizonyult, ennek köszönhetően az éremhatárok a szokásosnál alacsonyabbak voltak, a mezőny tömörült. Egy-egy megingás, vagy a nehezebb feladatokban elért siker az országok közti sorrendben jelentősen előre, vagy hátra vethette a csapatot. Ezt a két jelenséget egyszerre figyelhetjük meg a mieink teljesítményén. Ha a 4. feladatot nem tekintenénk, az országok közti sorrendben az első 10-ben lennénk, de sajnos a négyest csak Nóri oldotta meg, a vetélytársak pedig ennél a feladatnál nálunk jobban szerepeltek.

A jövő évi olimpiát Norvégia rendezi majd. Ennek van érdekes magyar vonatkozású szála, hiszen a norvég csapat vezetője Kunszenti-Kovács Dávid, aki maga hét olimpián vett részt versenyzőként, több éve készíti fel és vezeti a norvég csapatot, benne van az IMO Board-ban és az etikai bizottságban is, és a következő évi olimpia szervezésében is tevékenyen részt vesz.

Őszintén kívánom, hogy a 2022-es olimpia újra a régi keretek között lehessen. Szurkoljunk együtt a szervezőknek, a jövő évi magyar csapatnak és a járvány ellen küzdő emberiségnek!

Dobos Sándor, IMO csapatvezető-helyettes

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Lenger Dániel, Imolay András 2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Ez történt a MEMO 2021-en

Idén augusztus 23. és 29. között rendezték meg Horvátország fővárosában, Zágrábban a 15. Közép-európai Matematikai Olimpiát (MEMO), amelyen a szokásos 10 ország (Ausztria, Csehország, Horvátország, Lengyelország, Litvánia, Magyarország, Németország, Svájc, Szlovákia és Szlovénia) mellett Bosznia-Hercegovina is részt vett.

Az elmúlt másfél évben a nemzetközi versenyeket csak online módon lehetett megtartani, így felüdülés volt, hogy végre el lehetett utazni valahova. A versenyt ugyanis hibrid módon szervezték meg: 8 ország csapata jelen volt Horvátországban, míg 3 ország (Bosznia-Hercegovina, Litvánia és Németország) online vett részt.

A magyar csapat tagjai: *Bán-Szabó Áron* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium), *Bencsik Ádám* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium), *Jánosik Máté* (Győr, Révai Miklós Gimnázium), *Molnár-Szabó Vilmos* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium), *Nádor Benedek* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium), *Török Ágoston* (Kecskemét, Bányai Júlia Gimnázium).

A csapatot *Lenger Dániel* (Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium) és *Imolay András* (ELTE TTK) vezették.

A felkészülésről és a válogatóversenyekről az Érintő 2021. szeptemberi számának másik cikkében (Online IMO 2021, és ami előtte volt…) olvashatnak.

A MEMO első versenynapján tartják az egyéni versenyt, amelyen a versenyzők egy-egy feladatot kapnak algebrából, geometriából, kombinatorikából és számelméletből. A MEMO egyik különlegessége a második versenynapon megrendezésre kerülő csapatverseny, ahol a hatfős nemzeti csapatoknak együtt kell dolgozniuk a kapott 8 feladaton. Aznap minden témakörből 2, egy könnyebb és egy nehezebb feladatot kapnak. Mindkét napon 5 óra áll a diákok rendelkezésére, és minden feladatra 8 pontot lehet szerezni.

A magyar csapat szép eredményeket ért el. Az egyéni versenyen

Török Ágoston 30 ponttal

és **Molnár-Szabó Vilmos** 20 ponttal

aranyérmet,

Bán-Szabó Áron 16 ponttal,

ezüstérmet,

Bencsik Ádám 14 ponttal

és **Jánosik Máté** 14 ponttal

bronzérmet szerzett.

Mindössze két versenyző volt, aki lényegében megoldotta mind a négy egyéni feladatot, ebből az egyik Török Ágoston volt.

A csapatversenyben 49 ponttal **ezüstérmet** szerzett a magyar csapat. Az aranyérmet a lengyelek, a bronzérmet a horvátok nyerték.

A MEMO-n csak olyan diákok vehetnek részt, akik még nem voltak Nemzetközi Diákolimpián (IMO), de a következő IMO-n még indulhatnak. Így tehát ezeket a szép eredményeket úgy érték el, hogy többüknek ez volt az első nemzetközi versenye, de reméljük, egyiküknek sem az utolsó!

Köszönünk minden segítséget a Bolyai János Matematikai Társulatnak, akik támogatták az utazást!

Lenger Dániel (csapatvezető) és *Imolay András* (csapatvezető-helyettes)

A MEMO 2021 honlapja: https://memo2021.math.hr/.

Most pedig következzen a diákok beszámolója:

„Izgatottan utaztunk le Zágrábba, a határőrök kevésbé voltak izgatottak, inkább nagyon lassúak. Megérkezve a buszpályaudvarra, a kísérőnk már várt ránk, és elmondta a legsürgősebb tudnivalókat. A szálláson kipakoltunk, megismertük a verseny Boris Johnsonra a megszólalásig hasonlító főszervezőjét, majd elmentünk a helyi neves étterembe. Miután kiderült, hogy nem nekünk kell fizetni, finom desszertet is rendeltünk mindenkinek. A szállásra teli hassal gyalogoltunk vissza, majd megismerkedtünk a többi ország versenyzőivel is.

Kedden, miután a magyar csapat megtartotta szokásos reggeli tornáját, különleges városnézésen vehettünk részt, ahol feladványok megoldásával ismerhettük meg jobban Zágrábot. Vegyes csapatokba osztottak bennünket, így össze tudtunk ismerkedni más nemzetiségűekkel. A feladatokat legjobban teljesítő csapat ajándékot, sütit kapott. Délután részt vettünk a megnyitón, ahol meghallgathattuk az otthonról versenyző csapatok bemutatkozását. Volt közöttük, amelyiket egyszerre három helyről is hallottuk, valamelyiknek pedig nem volt hangja, de legalább láttuk a csapatokat.

Szerdán megrendezték az egyéni versenyt. Mindenki nagyon izgatott volt, de tudtuk, mi már mind győztesek vagyunk azzal, hogy ide kijutottunk. A verseny után egyesek nagyon boldogok voltak, persze mások kevésbé. A nap további részében pihenhettünk, beszélgethettünk a többi résztvevővel.

Másnap a csapatversenyt írtuk meg. A 8 feladat nehézsége érdekes volt, 3 nagyon egyszerű feladat mellett volt 3 nehéz és 2 nagyon-nagyon nehéz. Összesen hatot tudtunk közülük teljesen megoldani. Délután megint szabad program volt, úgyhogy elmentünk a városközpontba egy szabadulószobába. Nagyon kreatív ötletekkel volt teli a szoba, éppen elég időnk volt a teljesítésre, sikerült ellopni a Mona Lisá-t.

Pénteken kirándulni mentünk. Első célunk Samobor csodálatos városa volt, ahol megkóstoltuk a híres horvát specialitást, a kremsnitát, ami igazából egy krémes. Innen utunk egy csúszdaparkba vezetett, ahol megebédeltünk, majd strandoltunk.

Szombaton hajnalban keltünk, mivel a Plitvicei-tavakhoz mentünk, ami messze, nagyjából két órányi buszútra volt. Sajnos, a javítók rossz információt kaptak, ezért egy órát késtek az indulásról, így addig a buszon ülve vártuk őket. A tavak és vízesések egészen gyönyörűek, alig hittünk a szemünknek. Még egy kis hajókázásra is maradt időnk. Egész nap izgultunk, mivel este került sor a várva várt eredményhirdetésre.

Másnap reggel utolsóelőttiként hagytuk el a helyszínt, sokan már éjszaka elmentek. A buszút hosszú volt és kimerítő, de épségben hazaért mindenki.”

Végül néhány gondolat a feladatokról:

I-1: „Meglepetésünkre a szokásostól eltérően nem egyenlőtlenség és nem függvényegyenlet volt a feladat, hanem végtelen számsorozatokkal kell foglalkozni benne. A megoldáshoz egy érdekes ötlet kell, de akár a konvergens sorozatok tulajdonságait figyelembe véve is rá lehet jönni a megoldásra.”

I-2: „Egy igazi kombinatorikai probléma volt az egyéni verseny legnehezebb feladata. Első olvasásra egy ismert feladatnak hangozhat, viszont hosszabb gondolkodás után rájöhetünk, hogy egy fokkal bonyolultabb. A magyar csapat két megoldást tudott adni: az egyik a téglalap átlói segítségével átírta a feladatot egy körmentes páros gráf éleinek maximalizására, míg a másik sorok és oszlopok elvételével vezette vissza rekurzívan egy könnyű esetre. A konstrukció sem volt triviális, ezen még az aranyérmesünk is pontot vesztett.”

I-3: „Egy pont felvételével viszonylag egyszerű elemi megoldás van, kijön inverzióval is. Koor-geóval vigyázni kell, a végére eldurvul.”

I-4: „Némileg meglepő módon ezt a számelmélet-feladatot csak úgy lehet megoldani viszonylag egyszerűen, ha megmondjuk, mely n-ekre teljesülhet az állítás. Többen próbáltuk azt bizonyítani, hogy általános esetben a feltételből következik az állítás, de senkinek sem sikerült.”

T-1: „Függvényegyenlőtlenség, nem olyan bonyolult megoldással. Pár behelyettesítéssel egy szép egyenlőséget kapunk, innen könnyen kezelhetővé válik a feladat.”

T-2: „Egészen érdekes függvényvizsgálati feladat, a polinomfüggvények rácspontjainak és helyi szélsőértéken egész értéket felvevő pontjainak számát kellett vizsgálni.”

T-3: „Szokásos, nem olyan nehéz kombinatorika feladat. Algoritmust kellett készíteni pénzérmék egyenlő szétosztására.”

T-4: „Konstrukciókeresős kombinatorika, egészen furcsa módon kellett a megoldáshoz geometria.”

T-5: „A csapatverseny könnyebb geometria feladata a szokásosnál több időt vett igénybe. Habár sok szögszámolással vagy Pascal-tétellel is megoldható volt a feladat, a magyar csapat egy − még a koordinátorok számára is − ismeretlen technikával, mozgó pontok segítségével bizonyította az állítást.”

T-6: „A nehezebb geometriapéldát az utolsó percekben sikerült megoldani, természetesen ezt is projektív geometriával.”

T-7: „Egy triviális számelmélet-feladat, amit nagyjából lehetetlen volt elrontani. Elkezdtük felírni, és mindig adta magát, mit kell éppen csinálni.”

T-8: „Erre a feladatra minden csapat vagy 0 vagy 8 (maximum) pontot kapott, részpontokat senki. Az ötlet, hogy egy jó számból képezzünk egy nála nagyobbat, elég kézenfekvő, csak a konkrét megoldást megtalálni nem könnyű, és kell hozzá még egy ötlet is, amire semelyikünk se gondolt. A lengyelek úgy oldották meg a feladatot, hogy egyikük csak ezen gondolkodott és 5 óra alatt megtalálta a konstrukciót, nekünk erre nem volt emberünk.“

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Földvári Viktória 2021. SZEPTEMBER, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

ECM8 – Ilyen volt a 8. Európai Matematikai Kongresszus

1771 résztvevő 77 országból és összesen 1058 előadás – 2021. június 26-án rekordokat döntő számadatokkal, sikeresen zárult a 8. Európai Matematikai Kongresszus.

Júniusi cikkünkben olvashatták, hogy a négyévente megrendezésre kerülő konferenciát az egyik legjelentősebb matematikai eseményként tartjuk számon. A 8. Európai Matematikai Kongresszust, az ECM8-at a koronavírus-járvány miatt halasztották 2020 helyett 2021-re, és története során először nagyrészt online zajlott. Bár a technika ördöge a szlovén szervezőket sem kímélte, örömmel írhatom, hogy a rendezvény végül komolyabb bonyodalmak nélkül, rendben és legfőképpen jó hangulatban telt.

A körülmények lehetővé tették, hogy védettségi igazolvány birtokában akár személyesen is Portorožba látogassunk, így többen félig hagyományos módon élvezhettük a programsorozatot. Számunkra az interneten élőben közvetített előadásokat kivetítették a fényűző Bernardin Hotel konferenciaközpontjában. Néhány meghívott előadóval személyesen is találkozhattunk, a délelőtti kávészünetben pedig lehetőségünk nyílt beszélgetésekre, együttműködések kezdeményezésére más munkatársakkal.

Rendkívül változatos tudományos programot és sűrű napirendet követtünk. Az európai matematika legkiemelkedőbb alakjai közül tíz plenáris és harminc meghívott előadót hallhattunk, köztük Pach Jánost, Székelyhidi Lászlót, valamint az Abel-előadást tartó

Lovász Lászlót, akik, jelentős tudományos eredményeik bemutatása közben is mindenki számára érdekes kérdésfelvetésekkel nyűgözték le a hallgatóságot. Pach János *Escaping the curse of dimensionality in combinatorics* című előadásából megtudhattuk, hogy mit tehetünk a dimenzionalitás átka ellen néhány nehéz kombinatorikai probléma estén, például, ha napraforgókkal van dolgunk. Székelyhidi László (*Convex integration and synthetic turbulence*) konvex integrálásról beszélt, de azt is elemezte, hogyan lehet szívószállal pingponglabdát egyensúlyozni a levegőben, míg Lovász László (*Graph limits and Markov spaces*) sok más mellett kitért arra is, hogy ami kiscicának tűnik, az néha egy grafon.

A kongresszuson az elméleti és az alkalmazott matematika szinte minden területét lefedő 62 miniszimpózium közül válogathattunk. (Összehasonlításképpen: a tokiói XXXII. Nyári Olimpiai Játékokon 33 sportág szerepelt.) Mindenki megtalálta a számára legérdekesebb témát, és értesülhetett a legfrissebb kutatási eredményekről. Emellett rengeteg izgalmas és meglepő fejleményről hallhattunk, mint például a matematika alkalmazásáról a szívgyógyászatban (Alfio Quarteroni), vagy hogy mi köze a Tetris játéknak az erdőtüzek terjedéséhez (Martin Hairer). Az ECM8 egyik kiemelt eseményeként Jean-Pierre Bourguignon, az Európai Matematikai Társaság és az Európai Kutatási Tanács egykori elnöke adott élő interjút, amiben hangsúlyozta az alapkutatás fontosságát, kiemelve a matematikatanárok, valamint a fiatal kutatók helyzetét is.

A kongresszus honlapjára időközben felkerültek az előadások prezentációi.

A személyesen jelenlévő résztvevőket számtalan további szabadidős programlehetőséggel, valamint ízletes helyi ételeket kínáló állófogadással kényeztették a szervezők. A nyitó- és záróünnepélyen operaáriákat, hétfőn zongoraestet élvezhettünk. Csütörtökön a napi tudományos program után éjszakai városnéző sétára invitáltak minket a szomszédos Piran hangulatos, szűk utcácskáira. Akinek ideje engedte, kihajózhatott a tengerre, hogy a helyi biológus kutatók segítségével megértse egy időjárási és oceanográfiai bója működését. A kongresszus indulásával egy időben nyolc kiállítás megnyitójára került sor. Ezeken tudományhoz kapcsolódó képzőművészeti alkotásokat, női matematikusokat bemutató portrékat, európai matematikai témájú bélyegeket csodálhattunk meg. Itt szeretném a gyűjtők figyelmébe ajánlani, hogy a Szlovén Posta a 8. Európai Matematikai Kongresszus tiszteletére bélyeget bocsátott ki:

Intenzív és eredményes hetet tudhat tehát maga mögött, aki részt vett ezen a nagyszabású konferencián. Összesen 16 magyar előadó szerepelt, és 40 regisztrációval Magyarország a résztvevők száma szerinti toplistán a 11. helyen végzett. Érdemes megnézni a kiemelt előadásokról készült felvételeket, valamint a rövid összefoglaló filmet a rendezvényről a kongresszus honlapján: 8th European Congress of Mathematics (8ecm.si).

Földvári Viktória

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

---

beszámolók konferencia

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

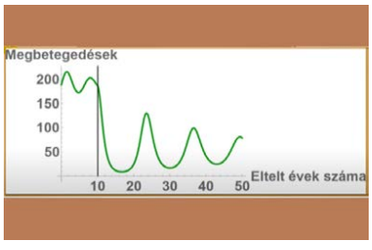
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS.
(ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Baran Zsuzsa, Molnár-Sáska Gábor
2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Mi is…az EGMO? – 2021/2022

2022-ben Magyarország rendezi a Lányok Európai Matematikai Olimpiáját, az EGMO-t, és ennek apropóján 2019 őszén indítottuk el programunkat, az évek óta működő EGMO felkészítés bővítéseként a fiatalabb korosztály számára. Az előkészítő program egyik célja, hogy minél több középiskolás lányt ösztönözzünk, segítsünk, hogy matematikával foglalkozzanak, és lehetőséget biztosítsunk számukra, hogy egymást is jobban megismerjék. *Baran Zsuzsa* és *Molnár-Sáska Gábor* is a felkészítők között volt.*Tovább...*



Volf Annamária
2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

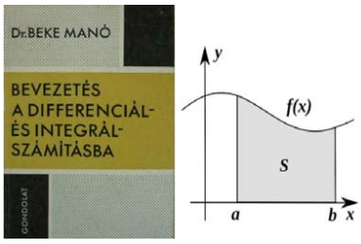
Járványmatek középiskolásoknak – 1. rész

A diákoknak élményszerűvé teszi a matematika tanulását, ha a tananyagtól picit elrugaszkodva hallhatnak a mindennapokban előforduló jelenségekről. A Covid-járvány kapcsán egy újabb példát láthatnak arra, hogy az életünket milyen módon befolyásolhatja ez a tudományág. Középiskolában a járványterjedés modellezésének összetett matematikai módszereire ugyan nem tudunk kitérni, de számos olyan, a matematikához kapcsolódó fogalomról, összefüggésről beszélhetünk, amely középiskolai tudással megérthető. *Volf Annamária* összefoglalóját három részben közöljük, ez az első...

Székely Péter
2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Tipográfia a matematikaórán

Székely Péter is azok közé a tanárok közé tartozik, akik sokat tesznek azért, hogy minél érdekesebbé tegyék az órát, hasznosíthatóbbá a megszerzett tudást. A digitális oktatás során még nehezebb ezt elérni, fenntartani az érdeklődést, motiválni azokat is, akik félnek a matektól. A beszámolót olvasva talán más, informatikában is járatos kollégák is megpróbálják osztályukban megszerettetni a matematikát a TEX program segítségével, tipográfiát is tanítva az órán. Cikkünk a július elején lezajlott Rátz László Vándorgyűlésen online elhangzott előadás nyomán készült. Tovább...



Kántor Sándorné

2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Fejezetek a matematikai analízis tanításának történetéből

„Igen, a tanárok felkészítésével kell kezdeni az analízis tanításának tervezését, őrajtuk áll vagy bukik a szemléletesség, a precíz fogalomalkotás és a modern technika alkalmazási arányának a kérdése.” Szemléletesen vagy tudományos precízséggel oktassuk az analízist a középiskolában? *Kántor Sándorné* az ókortól a 20. századig mutat be néhány példát. Tovább…

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Baran Zsuzsa, Molnár-Sáska Gábor 2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Mi is…az EGMO? – 2021/2022

Mi is az az EGMO? Már régen felmerült többünkben az a kérdés, hogy hogyan lehetne több lányt ösztönözni és segíteni abban, hogy aktívabban foglalkozzanak matematikával. Különböző nemzetközi kezdeményezések is indultak ezzel a céllal: nagyon jó példa erre a 2012 óta megrendezett Lányok Európai Matematikai Olimpiája (EGMO – European Girls' Mathematical Olympiad) vagy a 2021-ben indult Lányok Európai Informatikai Olimpiája (EGOI – European Girls' Olympiad in Informatics).

Az EGMO 2021 online versenyén a magyar csapat ismét szép eredményt ért el: *Velich Nóra Zoé* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium) aranyérmet, *Hámori Janka* (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium) ezüstérmet, *Győrffy Johanna és Nguyen Diep Bich* (mindketten a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium tanulói) pedig bronzérmet szerzett. Az 55 résztvevő ország közül 37 volt Európához tartozó ország. Magyarország az európai (hivatalos) listán a 6. helyet szerezte meg, míg az összes nemzet rangsorában holtversenyben a 10. helyen végzett. A csapatvezető Fekete Panna Tímea, a csapatvezető-helyettes Kiss Melinda Flóra volt.

További részletek olvashatók az idei lányolimpiáról a BJMT honlapján, többek között a lányok beszámolója, illetve a csapatvezetők írása a Gondolkodás Öröme Alapítvány honlapján. A feladatsorok és megoldások a verseny hivatalos honlapján érhetők el.

2022-ben Magyarország rendezi az EGMO-t és ennek apropóján 2019 őszén indítottuk el programunkat, az évek óta működő EGMO felkészítés bővítéseként a fiatalabb korosztály számára. Az előkészítő programnak egyrészt célja, hogy a 2022-es magyarországi EGMO-n hazánk minél erősebb csapatokkal tudja képviseltetni magát (szervezőként ebben az évben az ország egy második csapatot is indíthat), másrészt cél, hogy minél több középiskolás lányt ösztönözzünk, segítsünk, hogy matematikával foglalkozzanak, és lehetőséget biztosítsunk számukra, hogy egymást is jobban megismerjék.

A program a lányok számára ingyenes, cserében elvárjuk tőlük az aktív részvételt és a rendszeres munkát. A táborok szervezését a Gondolkodás Öröme Alapítvány koordinálja és az Eszterházy Károly Egyetem által elnyert pályázat teszi lehetővé (az NTP-NTMV-M-20-0001 pályázati azonosítón nyilvántartásba vett EGMO2022 felkészítő program című EMMI-s pályázat). A felkészülést támogatja a Morgan Stanley, valamint magánszemélyek is hozzájárultak a költségekhez. Mindemellett a program sikeréhez elengedhetetlen annak a körülbelül 20 főnek a lelkes és önkéntes munkája, akik a táborok között és alatt segítik a lányok fejlődését. A felkészülés első részéről és a válogatóversenyekről az Érintő is beszámolt.

Az idei tanév utolsó eseménye egy egyhetes tábor volt Pásztón július 11. és 16. között. A lányok valószínűségszámítási feladatokat oldhattak meg Backhausz Ágnessel, megismerkedhettek rekurzív kombinatorika feladatokkal Nikházy Lászlótól, foglalkoztak számelmélettel Molnár-Sáska Gáborral, továbbfejlesztették geometria tudásukat Steller Gáborral, és stratégiás feladatokon gondolkoztak Nagy Kartallal. A tábor lebonyolításában segített nekünk még Csepregi-Horváth Zsófi és Andó Angelika.

A matematika programokon túl jutott idő szabadidős tevékenységekre is. Sokat társasjátékoztunk, voltunk túrázni a Mátrában, illetve meglátogattuk a pásztói strandot is az egyik melegebb délutánon.

A 2021/2022-es tanév már egy speciális év lesz, hiszen áprilisban rendezzük meg a magyarországi EGMO-t. Az a tervünk, hogy a válogatóversenyek mellett idén is megszervezzük az előkészítő táborainkat, ahová a jelenleg résztvevő diákok mellett kisebbek (8. osztálytól) jelentkezését is várjuk.

Fontos linkek:

EGMO 2022:
https://egmo2022.hu/

EGMO:

https://www.egmo.org/

Korábbi táborok: https://agondolkodasorome.hu/2021/02/23/egmo-felkeszito-taborok-8-11-osztalyos-lanyoknak/

Jelentkezés a tábori programra: EGMOtabor@gmail.com

Jelentkezés a 2021/2022-es EGMO válogatóra és felkészítésre:
egmo.hungary@gmail.com

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Volf Annamária 2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Járványmatek középiskolásoknak – 1. rész

1. Bevezető

„Csak azt kívánom, hogy az emberi faj jólétét ily közelről érintő ügyben ne hozzunk döntéseket a nélkül a tudás nélkül, aminek egy kevés elemzés és számítás útján birtokába kerülhetünk.” (Daniel Bernoulli[1])

A koronavírus-járvány kapcsán olyan tudományterületek által használt fogalmak kerültek a köztudatba, mint a mikrobiológia, az epidemiológia vagy a járványmatematika. A járványterjedés modellezésével foglalkozó tudósok előrejelzéseket, szimulációkat készítenek. „A matematika segítségével tudjuk rendszerezni az adatainkat, azokat értelmezni, tudunk új összefüggéseket feltárni, kockázatokat számszerűsíteni. A dinamikus modelljeinkkel, differenciálegyenletek segítségével tudunk előrejelzéseket tenni (hányan fognak várhatóan megbetegedni, mikor éri el a járvány a csúcspontját...). Tudunk különböző intervenciós stratégiákat, vakcinálási stratégiákat kiértékelni, esetleg újabbakat javasolni.”[2] Hazánkban a Járványmatematikai Modellező és Epidemiológiai Elemző Munkacsoport végzi ezt a munkát Röst Gergely vezetésével. Eredményeik a koronavírus-járvány kezdetén, 2020 januárjában kerültek először az érdeklődés középpontjába, amikor sikerült megbecsülniük az iráni járvány valós mértékét[3].

Középiskolában a járványterjedés modellezésének összetett matematikai módszereire ugyan nem tudunk kitérni, de számos olyan, a matematikához kapcsolódó fogalomról, összefüggésről beszélhetünk, amely középiskolai tudással megérthető. Tapasztalatom szerint a diákoknak élményszerűvé teszi a matematika tanulását, és növeli a motivációjukat, ha a tananyagtól picit elrugaszkodva hallhatnak érdekességekről, a mindennapokban előforduló jelenségekről. A járvány kapcsán egy újabb példát láthatnak arra, hogy az életünket milyen módon befolyásolhatja ez a tudományág.

Ez az összeállítás[4] talán lerövidíti a felkészülést, ha egy-egy tanórán a Covid-járvány matematikai vonatkozásairól szeretnénk beszélni a diákokkal. A csoport matektudásának, a rendelkezésünkre álló időnek vagy éppen az aktuális tananyagnak megfelelően válogathatunk belőle, de segítségével akár közös projekteket is szervezhetünk a biológia, informatika vagy angol szakos kollégákkal. (Utóbbi tantárgyhoz az angol nyelvű források miatt, előbbihez a táblázatkezelőben megoldható számolási feladatok miatt tudunk kapcsolódni.) Bizonyos részeket önálló feldolgozásra is kiadhatunk, de akár kiselőadásra is felkészülhetnek belőle a diákok.

A cikksorozat első részében szó lesz arról, hogy mit jelent az exponenciális növekedés, és hogy hol találkozunk vele a járványterjedés kapcsán. Kitérünk olyan fogalmakra is, mint a reprodukciós szám és a nyájimmunitás. A második részben néhány érdekesebb járványgörbét tekintünk át, továbbá szót ejtünk a járványok terjedését leíró SIR-modellről. A harmadik rész az egészségügyi tesztek megbízhatóságával, valamint a vakcinák hatékonyságával kapcsolatos számításokkal foglalkozik.

Mi az exponenciális növekedés?

Példák exponenciális változásra

Annak ellenére, hogy a mindennapokban is találkozunk exponenciálisan változó mennyiségekkel, az emberek nagy százaléka alulbecsüli az exponenciális növekedés mértékét.[5] A lineáris változásokat egyszerűbben meg tudjuk becsülni, míg az exponenciális változások esetén nehéz elképzelnünk, hogy egy kicsi érték rövid idő alatt a sokszorosára növekedhet.

Az exponenciális változás gyorsaságának érzékeltetésére négy példát választottam, amelyek végeredményét a végigszámolás előtt érdemes megtippeltetni a diákokkal. Az első két feladat egy-egy mértani sorozat n-edik tagját kérdezi, míg a második kettő az első n tag összegére is rákérdez. A diákok matektudásának megfelelően akár általánosíthatjuk is a feladatokat.

1. Képzeljük el, hogy adott egy végtelenül nagy, de mindössze $0{,}001$ cm vastag papírlap, amit akárhányszor félbe tudunk hajtani. Nagyjából milyen magas lesz 45 hajtás után?

Ehhez a klasszikus problémához számos szemléltető-magyarázó videót találunk elsősorban angol nyelven.

- Szemléltetés: Angol nyelvű TED-Ed videó magyar felirattal (Exponenciális növekedés: Hogyan juthatsz el papírhajtogatással a Holdig?)

- Gyakorlati bemutató: A MythBusters csapata 11-szer hajt félbe egy focipályányi papírlapot (angol nyelvű videó felirat nélkül)

2. A szultán kincstárában $3\,145\,728$ aranypengő van. Elhatározza, hogy szétosztja a feleségei között. Első nap magához hívatja a kedvenc feleségét, és odaadja neki a kincstárban lévő arany felét. A második nap a második feleségének adja oda a

megmaradt arany felét, és ezt így folytatja egészen addig, amíg csak 3 aranya marad. Hány feleséget tudott megjutalmazni a szultán?

3. Megnyerted a lottó 5-öst, és erről bizalmasan értesíted a 3 legjobb barátodat. Megkéred őket, hogy senkinek ne adják tovább a nagy hírt. Biztosítanak róla, hogy megbízhatsz bennük, de természetesen nem bírják megtartani a titkot, és egy órán belül mindegyikük elmondja 3-3 embernek. Ha mindenki, aki megtudta a hírt, 1 órán belül 3 embernek tovább is adja, hányan fogják tudni 10 óra múlva, hogy Te nyertél? (Tegyük fel, hogy mindenki csak olyan embernek adja tovább a hírt, aki még nem tud róla.)

4. A monda szerint a sakkjáték felfedezője is felvetett egy matematikai problémát az őt megjutalmazni kívánó uralkodónak. Ugyanis jutalmát rizsszemekben kérte, mégpedig úgy, hogy tegyen az uralkodó a sakktábla első mezőjére egy rizsszemet, a következőre kettőt, az azután következőre négyet és így tovább, mindig kétszer annyi szemet, mint amennyi az előzőn volt. Folytassa ezt addig, amíg a 64. mezőig el nem ér. Körülbelül hány rizsszem a jutalom összesen?

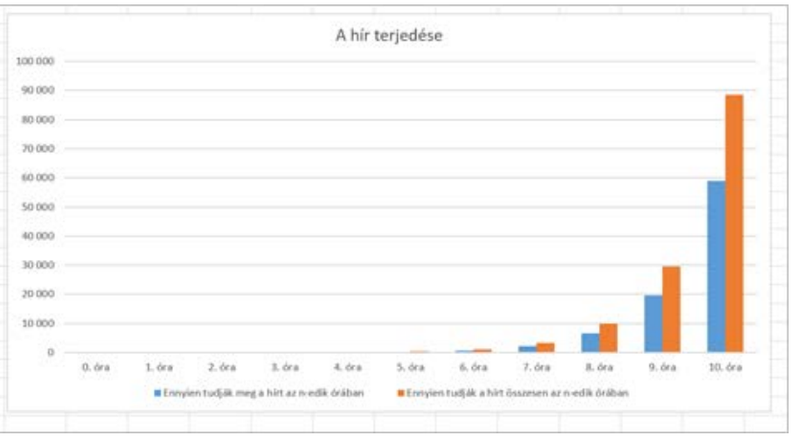
Angol nyelvű szemléltető videó: Rizsszemek a sakktáblán – egy exponenciális történet

Végezzük el a számolást egy táblázatkezelő programban, a kapott értékeket pedig ábrázoljuk pontdiagramon! (Az Excel csak 15 értékes jegy tárolására képes, így lesz olyan feladat, amelynek a végeredményét csak kerekítve tudja megjeleníteni.)

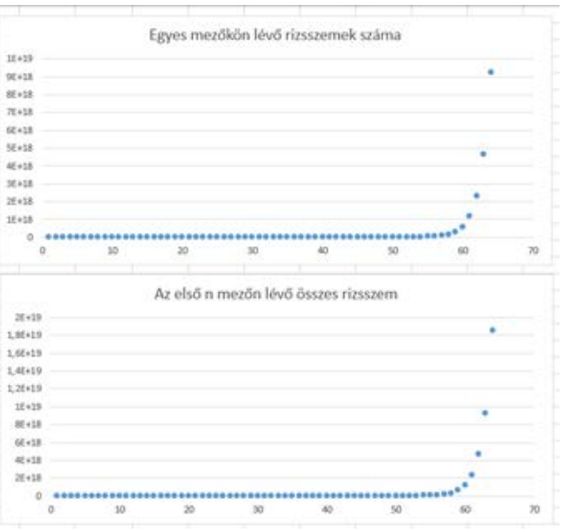
kiindulás	0,001 cm	0 km
1 hajtás után	0,002 cm	0 km
2 hajtás után	0,004 cm	0 km
3 hajtás után	0,008 cm	0 km
4 hajtás után	0,016 cm	0 km
5 hajtás után	0,032 cm	0 km
6 hajtás után	0,064 cm	0 km
7 hajtás után	0,128 cm	0 km
8 hajtás után	0,256 cm	0 km
9 hajtás után	0,512 cm	0 km
10 hajtás után	1,024 cm	0 km
11 hajtás után	2,048 cm	0 km
12 hajtás után	4,096 cm	0 km
13 hajtás után	8,192 cm	0 km
14 hajtás után	16,384 cm	0 km
15 hajtás után	32,768 cm	0 km
16 hajtás után	65,536 cm	0 km
17 hajtás után	131,072 cm	0 km
18 hajtás után	262,144 cm	0 km
19 hajtás után	524,288 cm	0 km
20 hajtás után	1 048,576 cm	0 km
21 hajtás után	2 097,152 cm	0 km
22 hajtás után	4 194,304 cm	0 km
23 hajtás után	8 388,608 cm	0 km
24 hajtás után	16 777,216 cm	0 km
25 hajtás után	33 554,432 cm	0 km
26 hajtás után	67 108,864 cm	1 km
27 hajtás után	134 217,728 cm	1 km
28 hajtás után	268 435,456 cm	3 km
29 hajtás után	536 870,912 cm	5 km

kincstárban lévő arany	3 145 728
1. feleség után	1572864
2. feleség után	786432
3. feleség után	393216
4. feleség után	196608
5. feleség után	98304
6. feleség után	49152
7. feleség után	24576
8. feleség után	12288
9. feleség után	6144
10. feleség után	3072
11. feleség után	1536
12. feleség után	768
13. feleség után	384
14. feleség után	192
15. feleség után	96
16. feleség után	48
17. feleség után	24
18. feleség után	12
19. feleség után	6
20. feleség után	3

		részösszegek		
0. óra	1	1	összesen:	88 573
1. óra	3	4		
2. óra	9	13		
3. óra	27	40		
4. óra	81	121		
5. óra	243	364		
6. óra	729	1 093		
7. óra	2 187	3 280		
8. óra	6 561	9 841		
9. óra	19 683	29 524		
10. óra	59 049	88 573		



		részösszegek		
1. mező	1	1	összesen:	18 446 744 073 709 400 000
2. mező	2	3		
3. mező	4	7		
4. mező	8	15		
5. mező	16	31		
6. mező	32	63		
7. mező	64	127		
8. mező	128	255		
9. mező	256	511		
10. mező	512	1023		
11. mező	1 024	2047		
12. mező	2 048	4095		
13. mező	4 096	8191		
14. mező	8 192	16383		
15. mező	16 384	32767		
16. mező	32 768	65535		
17. mező	65 536	131071		
18. mező	131 072	262143		
19. mező	262 144	524287		
20. mező	524 288	1048575		
21. mező	1 048 576	2097151		
22. mező	2 097 152	4194303		
23. mező	4 194 304	8388607		
24. mező	8 388 608	16777215		
25. mező	16 777 216	33554431		
26. mező	33 554 432	67108863		
27. mező	67 108 864	134217727		
28. mező	134 217 728	268435455		
29. mező	268 435 456	536870911		
30. mező	536 870 912	1073741823		



Az első n mezőn lévő rizsszemek számának meghatározása:

A keresett összeg legyen x.

Tudjuk, hogy $x = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}$.

Szorozzuk meg 2-vel ezt az egyenlőséget: $2x = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}$.

Vonjuk ki egymásból a két egyenletet és ejtsük ki az azonos tagokat: $x = 2^{64} - 1$.

A rizsszemek számának pontos értéke: 18 446 744 073 709 551 615 darab.

A példák után megfogalmazhatjuk az általános észrevételt: egy mennyiség időbeli változása exponenciális, ha bárhogyan is választunk két egyenlő időtartamot, a mennyiség mindkét időtartam alatt ugyanannyiszorosára változik.

Az exponenciális függvény precíz definiálása előtt megfogalmazhatunk néhány, a megértést segítő kérdést:

- Határozzuk meg az exponenciális változást leíró szorzót az egyes feladatokban!
- Miből látszik, hogy az exponenciális változás növekedés vagy csökkenés lesz-e?

- Összeköthetjük-e a grafikonjaink pontjait?

Az exponenciális függvény precíz matematikai bevezetéséhez használhatjuk a ZanzaTv videóját.

További példák exponenciálisan változó mennyiségekre:

- A ZanzaTv újabb videója két, a hétköznapi életben előforduló exponenciális folyamatot elemez (a Föld népességének növekedése, egy autó értékének változása), továbbá elmagyarázza az exponenciális csökkenés kapcsán a felezési idő fogalmát.

- Klasszikus példa az exponenciális növekedésre a piramisjátékok működése. Ennek a rövid bemutatására alkalmas például a TED-Ed „How to spot a pyramid scheme” című, angol nyelvű animációs videója.

A középiskolai tananyagban az exponenciális folyamatok között kiemelt szerepet kap a kamatos kamat. Érdemes egy példa erejéig kitérni erre a feladattípusra is.

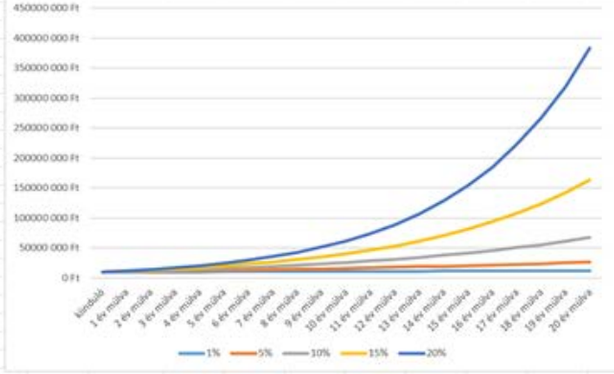
Kamatos kamatszámításnál minden tőkésítési periódus (pl év) végén a kamatot a tőkéhez csatolják, a következő periódusban a kamattal növelt tőke kamatozik.

Tegyük fel, hogy fel szeretnénk venni 10 000 000 Ft lakáshitelt 20 évre. Nézzük meg, hogy a 20 év alatt mennyi pénzt fizetünk vissza, ha a lakáshitel kamata 1%, 5%, 10%, 15% vagy 20%. Az egyes kamatlábakhoz tartozó grafikonokat érdemes egy koordináta-rendszerben ábrázolni. (Nézzünk utána, hogy a fenti kamatlábak közül melyek állnak legközelebb a valós adatokhoz!)

kamatláb	**szorzó**	**képlet**	**végeredmény**
1%	1,01	$10000000 \cdot 1{,}01^{20}$	12 201 900
5%	1,05	$10000000 \cdot 1{,}05^{20}$	26 532 977
10%	1,1	$10000000 \cdot 1{,}1^{20}$	67 274 999
15%	1,15	$10000000 \cdot 1{,}15^{20}$	163 665 374
20%	1,2	$10000000 \cdot 1{,}2^{20}$	383 375 999

Szemléltetés táblázatkezelőben:

kamatláb	1%	5%	10%	15%	20%
kiinduló	10 000 000 Ft	10 000 000 Ft	10 000 000 Ft	10 000 000 Ft	10 000 000 Ft
1 év múlva	10 100 000 Ft	10 500 000 Ft	11 000 000 Ft	11 500 000 Ft	12 000 000 Ft
2 év múlva	10 201 000 Ft	11 025 000 Ft	12 100 000 Ft	13 225 000 Ft	14 400 000 Ft
3 év múlva	10 303 010 Ft	11 576 250 Ft	13 310 000 Ft	15 208 750 Ft	17 280 000 Ft
4 év múlva	10 406 040 Ft	12 155 063 Ft	14 641 000 Ft	17 490 063 Ft	20 736 000 Ft
5 év múlva	10 510 101 Ft	12 762 816 Ft	16 105 100 Ft	20 113 572 Ft	24 883 200 Ft
6 év múlva	10 615 202 Ft	13 400 956 Ft	17 715 610 Ft	23 130 608 Ft	29 859 840 Ft
7 év múlva	10 721 354 Ft	14 071 004 Ft	19 487 171 Ft	26 600 199 Ft	35 831 808 Ft
8 év múlva	10 828 567 Ft	14 774 554 Ft	21 435 888 Ft	30 590 229 Ft	42 998 170 Ft
9 év múlva	10 936 853 Ft	15 513 282 Ft	23 579 477 Ft	35 178 763 Ft	51 597 804 Ft
10 év múlva	11 046 221 Ft	16 288 946 Ft	25 937 425 Ft	40 455 577 Ft	61 917 364 Ft
11 év múlva	11 156 683 Ft	17 103 394 Ft	28 531 167 Ft	46 523 914 Ft	74 300 837 Ft
12 év múlva	11 268 250 Ft	17 958 563 Ft	31 384 284 Ft	53 502 501 Ft	89 161 004 Ft
13 év múlva	11 380 933 Ft	18 856 491 Ft	34 522 712 Ft	61 527 876 Ft	106 993 205 Ft
14 év múlva	11 494 742 Ft	19 799 316 Ft	37 974 983 Ft	70 757 058 Ft	128 391 846 Ft
15 év múlva	11 609 690 Ft	20 789 282 Ft	41 772 482 Ft	81 370 616 Ft	154 070 216 Ft
16 év múlva	11 725 786 Ft	21 828 746 Ft	45 949 730 Ft	93 576 209 Ft	184 884 259 Ft
17 év múlva	11 843 044 Ft	22 920 183 Ft	50 544 703 Ft	107 612 640 Ft	221 861 111 Ft
18 év múlva	11 961 475 Ft	24 066 192 Ft	55 599 173 Ft	123 754 536 Ft	266 233 333 Ft
19 év múlva	12 081 090 Ft	25 269 502 Ft	61 159 090 Ft	142 317 716 Ft	319 479 999 Ft
20 év múlva	12 201 900 Ft	26 532 977 Ft	67 274 999 Ft	163 665 374 Ft	383 375 999 Ft



A logaritmikus skála

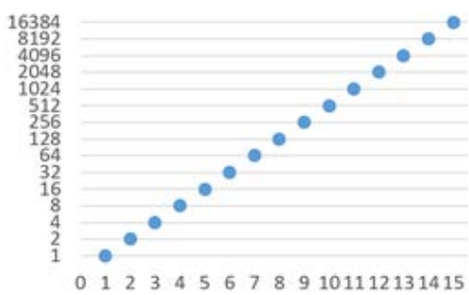
Az exponenciális folyamatokat leíró függvények nagyon gyorsan változnak, és nagyságrendekkel eltérő adatokat tartalmaznak. A logaritmikus skála előnye, hogy nagyon nagy és nagyon kicsi adatokat egyaránt ábrázolhatunk a segítségével.

Nézzük példaként az 1. feladatot a rizsszemekkel. (Emlékeztető: az exponenciális növekedés szorzója ebben a feladatban 2 volt.)

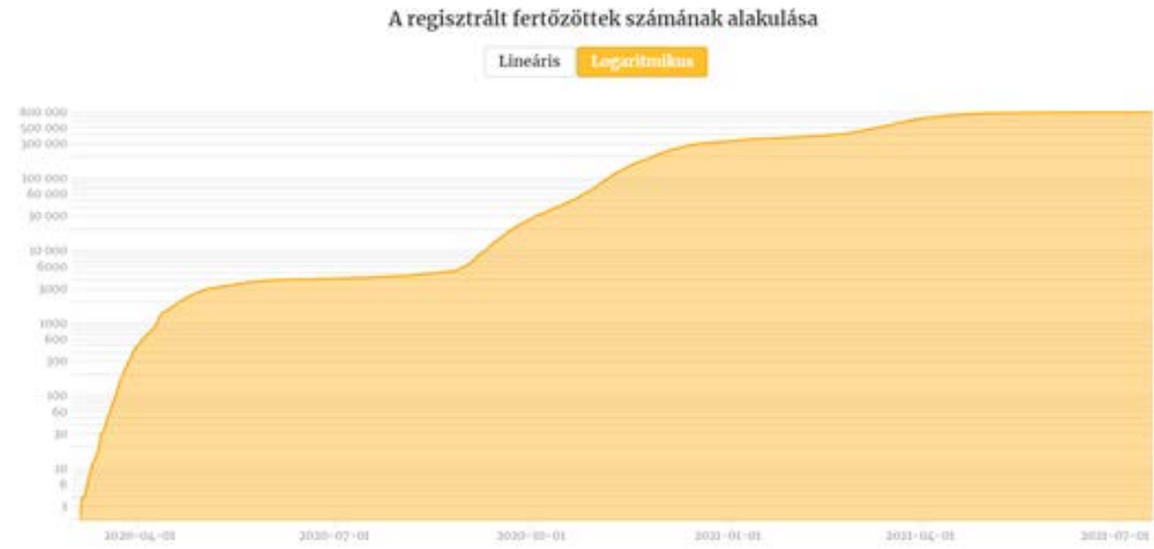
Készítsük el a grafikonját 2-es alapú logaritmikus skálán! (Excelben is használhatunk logaritmikus skálát: Jobb kattintás az értéktengelyre/Tengely formázása/Tengely beállításai/Logaritmikus skála, alapja: 2.) A 2-es alapú logaritmikus skála értéktengelyén az egységek a kettőhatványok lesznek.

Megoldás:

Kiemelve a bal alsó sarok a könnyebb értelmezhetőség kedvéért:



A Koronamonitor oldalon megtaláljuk a magyarországi összes regisztrált fertőzött számát mutató diagramot, amelyek nézetét lineárisra és logaritmikusra is állíthatjuk.



Nemzetközi adatokról hasonló digramokat találunk a worldometers.info oldalon.

A tőzsdei elemzések során is hasznos lehet a logaritmikus skála alkalmazása, az elemzeskozpont.hu írása több példa segítségével szemlélteti az előnyeit.

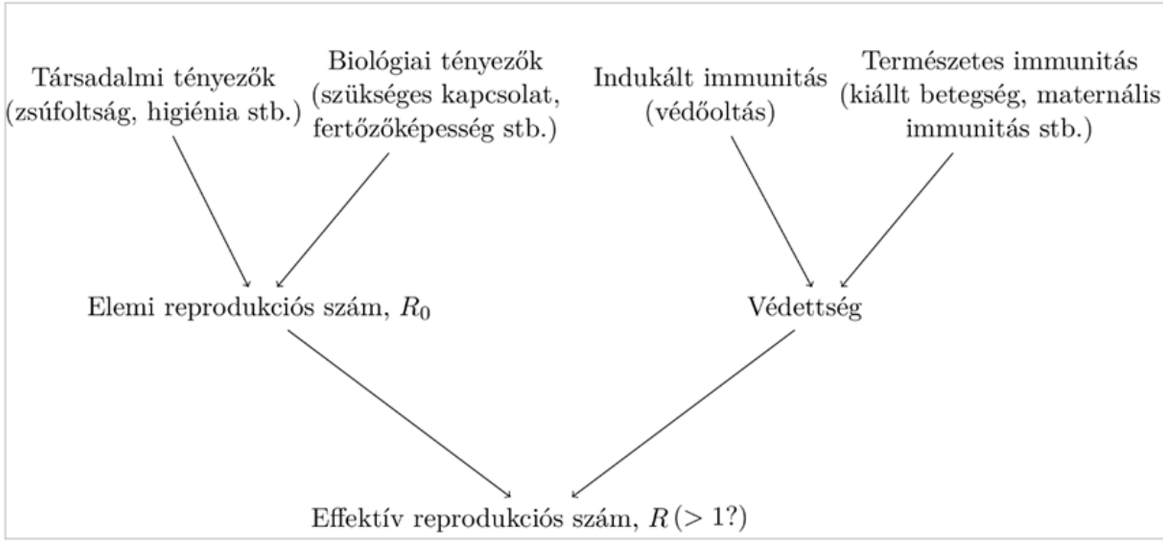
A földrengések erősségét[6] mérő Richter-skála is 10-es alapú logaritmikus, azaz eggyel nagyobb számmal jelzett földrengés a valóságban 10-szer nagyobb erősségű.[7]

2. Exponenciális növekedés a járványterjedésben

A reprodukciós szám

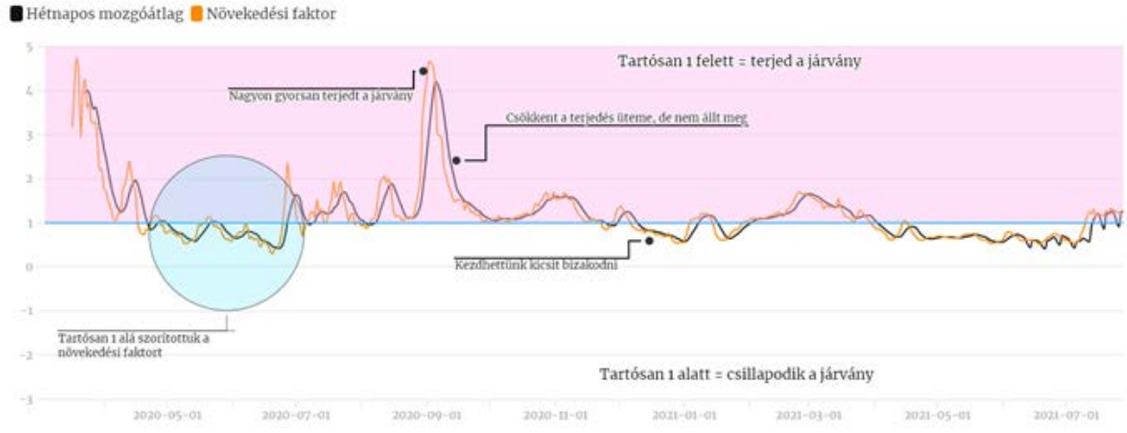
A járványmodellezés egyik legfontosabb paramétere a koronavírussal kapcsolatban is emlegetett reprodukciós szám. Az **effektív reprodukciós szám** (R) azt fejezi ki, hogy egy fertőzött beteg átlagosan hány embernek adja át a vírust. Ha ez az érték 1-nél nagyobb, akkor a vírus könnyen terjedhet, míg ha annál kisebb, akkor várhatóan le fog csengeni. Az **alap vagy elemi reprodukciós szám** (R_0) a vírus fertőzőképességét mutatja a korlátozó intézkedések, védőoltás nélkül. Figyelembe vesz viszont olyan tényezőket, mint a zsúfoltság, a higiénia, a vírus terjedésének módja, vagy hogy milyen hosszú ideig fertőz az, aki elkapta. Gyakorlatilag azt mutatja meg, hogy a járvány kezdetén, amikor még senki sem immunis a fertőzésre, milyen gyorsan tud terjedni a vírus.[8]

Összefoglaló ábra:[9]



A reprodukciós számra általában intervallumot adnak meg, mert a társadalmi tényezők akár még egy-egy országon belül is eltérőek lehetnek.

A magyarországi koronavírus-járvány effektív reprodukciós számának (R) becslése a Koronamonitoron:



Hol van az exponenciális növekedés?

A járványterjedés pontos modellezésének a matematikája nagyon bonyolult, de első közelítésben nézzünk egy leegyszerűsített számítást annak az ellenőrzésére, hogy valóban exponenciális növekedésről van szó.

Tegyük fel, hogy egy városban $1\,000\,000$ lakos él, és közülük egyvalaki fertőzött. Legyen $R = 3$. Feltételezzük továbbá, hogy minden fertőzött *pontosan* ennyi embernek adja át a vírust rögtön a fertőzését követő napon, és hogy az ezt követő napokon már nem fertőz. Adjunk képletet arra, hogy a k-adik napon hány ember fertőződik meg a koronavírussal! Módosítsuk a modellt, nézzük meg, mi történik, ha $R = 3{,}28$, $R = 2$,

$R = 0{,}5$! Az általános képlet felírásával igazoljuk, hogy exponenciális kifejezést kapunk! (Megoldás: $N_k = R^k$.)

Azt is kiszámolhatjuk, hogy hány olyan ember lesz k nap múlva, aki már elkapta a vírust. (Tehát vagy éppen fertőzött, vagy már átesett a fertőzésen.)

Megoldás:

A keresett összeg legyen x. $x = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^k$.

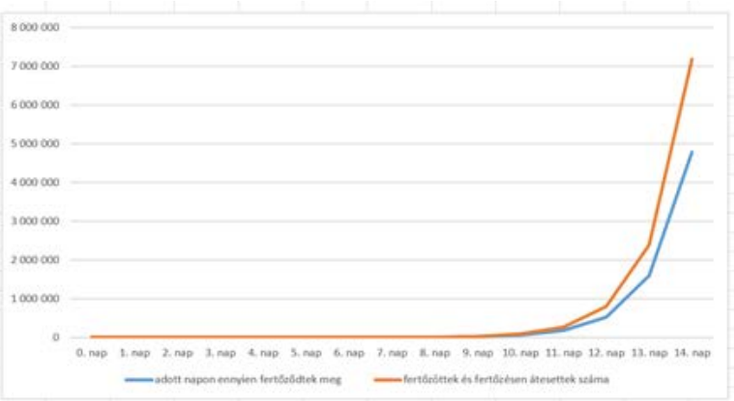
Szorozzuk az egyenletet 3-mal: $3x = 3 + 3^2 + \ldots + 3^k + 3^{k+1}$.

Vonjuk ki egymásból az egyenleteket: $2x = 3^{k+1} - 1$.

Osszunk 2-vel: $x = \frac{3^{k+1}-1}{2}$.

Az adatok ábrázolása táblázatkezelőben:

	adott napon ennyien fertőződtek meg	fertőzöttek és fertőzésen átesettek száma
0. nap	1	1
1. nap	3	4
2. nap	9	13
3. nap	27	40
4. nap	81	121
5. nap	243	364
6. nap	729	1 093
7. nap	2 187	3 280
8. nap	6 561	9 841
9. nap	19 683	29 524
10. nap	59 049	88 573
11. nap	177 147	265 720
12. nap	531 441	797 161
13. nap	1 594 323	2 391 484
14. nap	4 782 969	7 174 453
~~15. nap~~	~~14 348 907~~	~~21 523 360~~



Röst Gergely előadásának inkjére kattintva a koronavírus matematikájáról szóló előadás egy részletét nézhetjük meg[10]. A videó 2020. április végén készült, ekkor a reprodukciós számra adott becslés $2{,}2$ volt. A kivetített dián az látható, hogy a különböző mértékű korlátozások esetén mennyire csökken le az effektív reprodukciós szám.

Az alábbi táblázat néhány vírus alap reprodukciós számát tartalmazza[11]:

Betegség	**Terjedés**	R_0
Kanyaró	Levegőben	12–18
Bárányhimlő	Levegőben	10–12
Szamárköhögés	Cseppfertőzéssel	12–17
Diftéria	Nyállal	6–7
Himlő	Társas érintkezéssel	5–7
Járványos gyermekbénulás (polio)	Széklettel	5–7
Rózsahimlő (rubeola)	Cseppfertőzéssel	5–7

Mumpsz	Cseppfertőzéssel	4–7
COVID–19	Cseppfertőzéssel	2,4–8[12]
HIV/AIDS	Nemi úton	2–5
SARS	Cseppfertőzéssel	2–5
Spanyolnátha (az 1918-as világjárványt okozó influenza)	Cseppfertőzéssel	2–3
Ebola (a 2014-es járványt okozó törzs)	Testnedvekkel	1,5–1,9
Influenza (a 2009-es járványt okozó törzs)	Cseppfertőzéssel	1,4–1,6
MERS	Cseppfertőzéssel	0,3–0,8

A magas alap reprodukciós szám (R_0) nem mindig jár együtt rengeteg beteggel (azaz magas effektív szaporodási rátával), mert ez utóbbit más faktorok és különféle beavatkozások is módosítják (pl. védőoltás, korlátozó intézkedések). A SARS koronavírus esetében például 2 és 3 közé tették az R_0 értékét, mégis csak 8000 embert fertőzött meg. Ehhez képest az influenza alap szaporodási rátája a becslések szerint $1{,}3$ körül lehet, mégis milliókat fertőz meg évente.

Összefüggés R és R_0 között[13]

Legyen p a védettek[14] aránya a populáción belül ($p \in [0;1]$). Más megfogalmazásban: p annak a valószínűsége, hogy a populációból véletlenszerűen választva egy egyedet, ő védett a fertőzéssel szemben. Ekkor a nem védettek aránya a populáción belül $1-p$. (Például ha a populáció $\frac{1}{5}$ része védett, akkor $\frac{4}{5}$ része nem az.)

Kezdetben legyen 1 fertőzött egyedünk.

Ő R_0 másik embert fertőzne meg, ha nem lennének védett egyedek.

De valójában az R_0 egyedből csak azokat sikerül megfertőznie, akik nem védettek. Mivel a nem védettek aránya $1-p$, ezért valójában összesen $R_0(1-p)$ egyed fertőződik meg. A képlet eredménye az effektív reprodukciós szám (R). (Ha $p=0$, azaz ez egy új járvány és még nincsenek védett egyedek, akkor a definíciónak megfelelően $R=R_0$.)

A járvány kitörésének feltétele tehát, hogy $R_0(1-p)>1$ legyen.

3. A nyájimmunitással kapcsolatos számítások

A koronavírus kapcsán sokat lehetett hallani a nyájimmunitás vagy közösségi immunitás fogalmáról. Nyájimmunitásról fertőző betegségek esetén beszélünk. „Úgy jön létre, hogy a népesség egy bizonyos részének beoltása vagy kigyógyulása védettséget biztosít a beoltatlanok számára is. Azaz, bár nem mindenki immunis a populációban, de az egész közösség együtt az. Egy népességben azok az egyének, akik immunitást szereztek, nem járulnak hozzá a kórokozó továbbterjedéséhez. Ilyen közösségben a fertőzésláncok nagyobb valószínűséggel szakadnak meg, a terjedés ezért lelassul, vagy meg is áll. A közösség minél több tagja szerez immunitást, annál kisebb a valószínűsége, hogy a többiek találkoznak a kórokozóval."[15] A Szertár 2020-as videója szemléletesen magyarázza el a nyájimmunitás fogalmát.

Hogy a népesség mekkora részének kell átfertőződnie, illetve védőoltást kapnia a nyájimmunitás kialakulásához, az az adott kórokozó fertőzőképességétől függ. A nyájimmunitással kapcsolatos számolásokhoz Ferenci Tamás cikkét vesszük alapul.

Az R és R_0 közötti összefüggés vizsgálatakor a járvány kitörésének feltételére az $R_0(1-p) > 1$ összefüggést kaptuk, ahol R_0 az alap reprodukciós szám, p pedig a védettek aránya a populáción belül. A fenti egyenlőtlenségből p-t kifejezve a következőt kapjuk: $p < 1 - \frac{1}{R_0}$. Azaz a járvány kitörésének feltétele, hogy a védettek aránya, azaz p $1 - \frac{1}{R_0}$-nál kisebb legyen. A járvány lecsengésének feltétele is felírható ebből: $p > 1 - \frac{1}{R_0}$. Ha egy járvány ellen csak a védőoltás biztosít immunitást, akkor ez az arány megadja, hogy a populáció hanyadrészének kell beoltva lennie, hogy ne törjön ki a járvány.

Ez alapján az alábbi táblázatot ki tudjuk egészíteni azzal az értékkel, hogy hány százalékos védettség ad nyájimmunitást. Helyettesítsük be a fenti képletbe az R_0 értékeket!

Betegség	R_0
Kanyaró	12–18
Bárányhimlő	10–12
Szamárköhögés	12–17
Diftéria	6–7
Himlő	5–7
Járványos gyermekbénulás (polio)	5–7
Rózsahimlő (rubeola)	5–7
Mumpsz	4–7
COVID–19	2,4–8
HIV/AIDS	2–5
SARS	2–5
Spanyolnátha (1918)	2–3
Ebola (a 2014-es járványt okozó törzs)	1,5–1,9
Influenza (a 2009-es járványt okozó törzs)[16]	1,4–1,6

Megoldás:

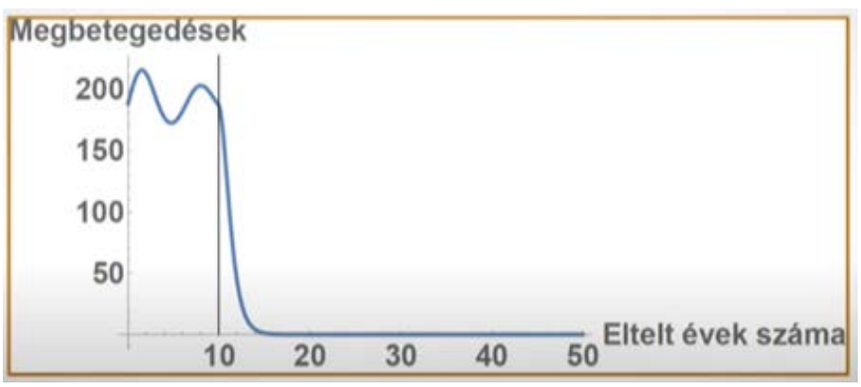
Betegség	R_0	Nyájimmunitáshoz szükséges immunitási szint
Kanyaró	12–18	91,7%–94,4%
Bárányhimlő	10–12	90%–91,7%
Szamárköhögés	12–17	91,7%–94,1%
Diftéria	6–7	83,3%–85,7%
Himlő[17]	5-7	80% - 85,7%
Járványos gyermekbénulás (polio)	5–7	80% - 85,7%
Rózsahimlő (rubeola)	5–7	80% - 85,7%
Mumpsz	4–7	75%–85,7%
COVID–19	2,4–8	58,3%–87,5%[18]
HIV/AIDS	2–5	50%–80%
SARS	2–5	50%–80%
Spanyolnátha (1918)	2–3	50%–66,7%
Ebola (a 2014-es járványt okozó törzs)	1,5–1,9	33,3%–47,4%
Influenza (a 2009-es járványt okozó törzs)	1,4–1,6	28,6%–37,5%

Néhány szó a kanyaróról a nyájimmunitás szemszögéből

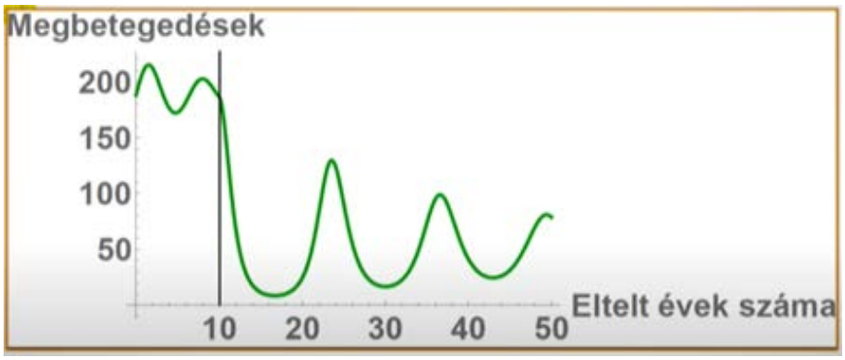
Nézzük meg a Mindenki Akadémiája sorozatból Röst Gergely előadását, amelynek címe A védőoltások matematikája!

A videóban szereplő egyik példa a kanyaró, amely a magas oltottságnak köszönhetően visszaszorult, majd több helyen újra megjelent[19], ahogy az átoltott népesség elkezdett kihalni, az újszülötteket pedig kisebb arányban oltották be, mint ami a nyájimmunitáshoz szükséges lett volna (91,7%–94,4%).

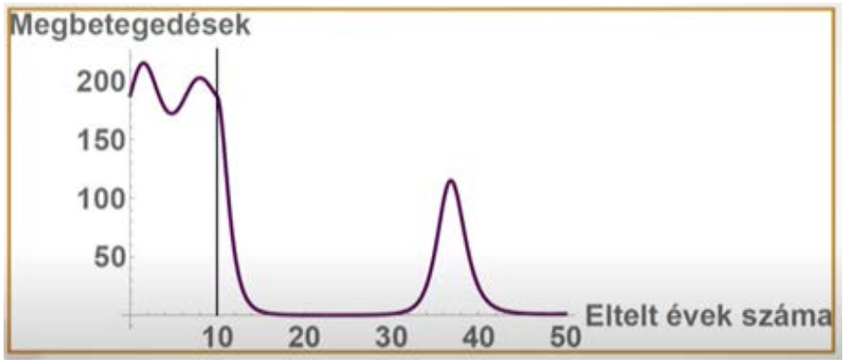
Egy jó oltási program eredményét mutatja az első grafikon. A fekete vonal az oltás bevezetésének időpontját jelzi:



Ha 90% helyett 70%-os a beoltottság, akkor a járvány hullámokban visszatér:



A majdnem tökéletes, 85%-os oltottság esetén is hasonló visszatérő hullámot kapunk, csak hosszabb lesz a szünet az egymást követő járványhullámok között.



A kanyaróval kapcsolatban érdemes kiemelni a 2012-es foci EB-ről szóló részt. A versenysorozat egyik házigazdája Ukrajna volt, ahol az EB időpontjában kanyarójárvány zajlott.[20] Mivel több európai országban a kanyaró elleni oltottság szintje 90% alatt van, ezért megvolt rá az esély, hogy az Ukrajnába utazó szurkolók elkapják a betegséget, és a saját országukba visszahurcolva járványt robbantanak ki. A legnagyobb kockázatot a franciák jelentették, mert ott volt a legalacsonyabb az átoltottság. Járványügyi szempontból szerencse, hogy a francia csapat hamar kiesett, a szurkolók hazamentek, és nem okoztak járványt Franciaországban.

A cikk második részében szó lesz járványgörbékről, illetve a járványok terjedését leíró SIR-modellről.

Volf Annamária

Lábjegyzetek

[1] Daniel Bernoulli 18. századi orvos, matematikus és fizikus. Többek között a feketehimlő ellen alkalmazott védekezési eljárással, a variolációval kapcsolatban végzett fontos számításokat.

[2] Részletek Röst Gergely előadásából (A védőoltások matematikája – Mindenki Akadémiája) https://www.youtube.com/watch?v=vCbuu747t-w .

[3] https://index.hu/techtud/2020/03/05/magyar_matematikusok_a_koronavirus-jarvany_fo_modellezoi_kozott/

[4] A tananyagban szereplő hivatkozások, görbék a 2021. júliusi állapotokat mutatják.

[5] Forrás: https://qubit.hu/2020/07/21/aki-megerti-az-exponencialis-novekedest-nagyobb-esellyel-fogadja-el-a-jarvanyugyi-intezkedeseket .

[6] A rengés erőssége a földrengés helyétől 100 km távolságban lévő szeizmográf által mikrométerben mért legnagyobb kitérés tízes alapú logaritmusa. Forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Richter-skála

[7] A Richter-skála szerinti erősség mellett egy földrengés fontos jellemzője a magnitúdó, ami a földrengés során felszabaduló energiával függ össze. Ezt szintén logaritmikus skálán definiáljuk: egy magnitúdófokozat növekedés mintegy 32-szeres energia növekedést jelent. Forrás: http://www.foldrenges.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=15:magnitudo&catid=19&Itemid=23 .

[8] Magyarázat a Zállatorvos videójából 16:13-tól: https://youtu.be/j0RijCfdlGE?t=973 .

[9] Ferenci Tamás cikke alapján.

[10] Röst Gergely: A járványmatematikai és egyéb kutatások szerepe a koronavírussal szembeni védekezésben.

[11] források: https://en.wikipedia.org/wiki/Basic_reproduction_number .

[12] Az eredeti koronavírusra $2{,}4 < R_0 < 3{,}4$; a variánsokra $3 < R_0 < 8$.

[13] forrás: https://vedooltas.blog.hu/2012/09/05/miert_oltunk_avagy_mire_jok_a_vedooltasok

[14] Védett kétféleképp lehet valaki: védőoltás által vagy úgy, hogy már átesett a fertőzésen és immunissá vált a vírusra. (A fertőzésen való átesés nem minden esetben garancia az immunitásra.)

[15] forrás: https://hu.wikipedia.org/wiki/Nyájimmunitás

[16] Influenza esetén a járvány lefolyását az is befolyásolhatja, hogy a lakosság egyes csoportjait milyen sorrendben oltják be. Röst Gergely és Knipl Diána számításai alapján akár 10%-kal is csökkenthető az összes megbetegedett száma, ha influenzajárvány idején az iskolásokat oltják be először: http://www.epidelay.u-szeged.hu/images/readersdigest.png

[17] A himlő esetében az egész világon elérték a kritikus átoltottsági szintet, így ez a betegség megszűnt 1979-ben.

[18] A magasabb értékek a koronavírus új variánsaira vonatkoznak.

[19] Egy 2019. decemberi cikk az európai kanyarójárványokról: https://www.magyarhirlap.hu/eletmod/20191209-meg-nem-csillapodott-a-kanyarojarvany-europa-szerte

[20] Az Országos Epidemiológiai Központ 2012-es tájékoztatója az Ukrajnába utazni készülő focidrukkerek számára: https://index.hu/sport/futball/2012/04/21/kanyarojarvany_terjed_az_eb_elott_ukrajnaban/

alkalmazott matematika matematikatanítás járványtan

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés
Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Székely Péter 2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Tipográfia a matematikaórán

Egy példa arra, hogyan szerettessük meg a matematikát

Hosszú éveken át szerveztem matematikatáborokat az iskolámban. Nem kezdtük korán a foglalkozásokat, hiszen előző este általában sokáig fent voltunk, társasoztunk, beszélgettünk. Diákjaink nem voltak speciálismatematika-tagozatos gimnazisták, így kollégáimmal együtt úgy éreztük, hogy egy téma felvetése, tárgyalása, majd néhány elmélyítő feladat elegendő a matematikát kedvelő fiatalok számára. Ebéd után valami mást kellett csinálni. Általában elmentünk kirándulni, csak vacsorára jöttünk vissza. Megelőzendő azt a szokásos kérdést, hogy *„Sok van még?”* vagy *„Mikor érünk már oda?”*, fejtörőkkel készültünk az útra. Sokszor a fejtörők olyan jól sikerültek, hogy az egész út alatt lekötötték a diákok figyelmét, és a vacsora után is vissza kellett térni rájuk. A korábbi kérdéseket felváltották a logikai feladványokkal kapcsolatos érdeklődések, megoldásvázlatok. Szép emlékek ezek a túrák.

A bevezetőben említett kedves „elterelő hadművelet” késztetett arra, hogy a hosszú távolléti tanítást érdekessé tegyem, s a számítógép mögött is különlegessé tehessem az órát a gyerekek számára.

1. Iskolai háttér

Mindannyiunkat nagyon váratlanul ért a pandémia miatti iskolabezárás, illetve az az igény, hogy az interneten keresztül kell tanítanunk. Ugyan már egy ideje láttuk, hogy nem tehetünk mást a járvány megfékezése érdekében, de a megvalósításról nem sok tapasztalatunk volt. Magam is gondokkal tele kezdtem neki az első ilyen „online órának”, jóllehet már szeptember óta így tartottam a módszertanos óráimat az ELTE-n a hallgatóknak.

Nagy szerencsém van az iskolámmal, hiszen a felkészülésre az igazgatónk lehetővé tett számunkra néhány napot értekezletekkel, megbeszélésekkel. Azon túl, hogy felmértük az igényeket (s ha kellett, kaptunk iskolai segítséget otthonunk „gépesítésére”), kisebb csoportokban (néha tanítási szakok szerint, néha éppen vegyesen válogatva, hogy további ötleteket „lophassunk” egymástól), megbeszéltük az óratartás új kérdéseit: hiányzások, táblahasználat, ellenőrzés, számonkérés stb. A további felkészülést, a különböző platformok, lehetőségek használatát egy-egy, a technikában járatosabb kolléga segítségével sajátítottuk el.

Szerencsénk van abban a tekintetben is, hogy diákjainknak otthon általában volt számítógépük és internetelérési lehetőségük, és sok esetben a családtagok el tudtak különülni egymástól, hogy ne zavarják egymást a munkában. Az iskola alapítványai tudták támogatni a diákokat anyagilag, számítógéppel, valamint a szülői felajánlások is lehetővé tették, hogy mindenki nagyjából ugyanolyan erőforrásokkal rendelkezzen a hosszú otthonlét alatt.

Nem szabad arról sem megfeledkezni, hogy iskolánk diákjai igen motiváltak a tanulásban, valamint a közös munkában. Az általunk sokat emlegetett „Eötvös-szellem” nagyban támogatta a munkánkat, hiszen a diákok sok tekintetben építhettek egymás segítségére is.

2. A LaTeX szövegszedő rendszer használata

A műszaki tanulmányokat végzők számára nem ismeretlen a TEX program. Azoknak, akik még nem találkoztak ezzel a szövegszedő programmal, néhány mondatban szeretném bemutatni, mivel ezzel támogatva valósítottam meg a diákokkal közösen a matematikaóráinkat.

Egy kis történelem

Egyetemi éveim alatt komoly kihívást jelentett a szakdolgozat begépelése, hiszen addigra már szinte elvárás volt (különösen informatika szakos hallgatók számára), hogy a hagyományos írógéppel készült forma helyett számítógépes szövegszerkesztővel hozzuk létre művünket. Akkor még igencsak gyerekcipőben járt a Windows Word nevű szövegszerkesztője, s nehézkes volt pl. a sok fizikaképlet beírása. Az sem sokat segített, hogy a Word helyett szívesen használtam az OS/2 operációs rendszer szövegszerkesztőjét, hiszen ebben a programban is nehézkes volt a képletek begépelése, s a nagyobb, több oldalas írásokkal nehezen boldogult a kevéske memóriával rendelkező gépünk.

Ebben a „történelmi múltban” ismertem meg Donald Knuth matematikus (1978 óta folyamatosan fejlesztett) TEX szövegszedő programját, ami kis eszközigénye, valamint a parancsok egyszerűsége miatt megváltás volt számunkra. Igaz, nem volt a megszokott `wysiwyg` környezet (what you see is what you get – azt kapod, amit látsz), s csak a program lefuttatása (fordítás) után láttuk, hogyan is néz ki a papíron a kész szöveg, mégis lenyűgözött minket könnyű használata és tipográfiailag kifogástalan

„kimenete”.

A program hátterében Knuth zseniális programozói tehetsége áll. A szöveget a szerkesztő parancsokkal együtt egy egyszerű editor használatával visszük be, s a parancsként megadott formátumban fordítás után (`.dvi`, `.ps`, vagy akár `.pdf` állományban) kapjuk vissza. Az egyes parancsok (helykihagyás, igazítás, betű formátuma, matematikai képletek parancsai...) azon szövegrészek mellett találhatók, amelyekre vonatkoznak, így könnyű átlátni azt, hogy mit is szerkesztettünk a dokumentumunkon. Emellett szemet gyönyörködtető az új betűtípus (`cmr` – computer modern roman), aminek leírásához szintén matematikai függvények segítenek a háttérben. Nekünk, matematika-fizika szakos tanároknak a jól átlátható, nyomdász szemmel hibátlan képletek teszik igazán széppé, kedvessé a programot.

Talán feltűnő volt eddigi szóhasználatomban, hogy az említett programra nem a *szövegszerkesztő*, hanem a nyomdászatban használatos *szövegszedő* szót használom. Valóban, a TEX azt a munkát modellezi számítógépes program segítségével, ahogyan a nyomdász eligazgatja a betűsínben a betűket, ha kell, akkor kiegyenlíti a szavak közötti űrt, hogy a sorok végei egymás alá kerüljenek, a kész sorokat pedig úgy illeszti egymáshoz, hogy azok az oldalon szépen mutassanak.

Ugyan a TEX felhasználói ismerete nem igényel túl sok tanulást (néhány parancs magtanulása után könnyen használhatjuk már a programot), mégis nehéz azt jól használni, hiszen kevesen rendelkezünk alapvető nyomdászati ismeretekkel. (Más szövegszerkesztőkkel készült dokumentumok is igen árulkodnak erről a hiányosságunkról...) Ezt segítendő hozta létre Leslie Lamport azt a LATEX-nek hívott programrendszert, mely a TEX parancsait kisebb csomagok segítségével teszi könnyen használhatóvá. Így pl. megadhatjuk a készülő dokumentumunk típusát (levél, cikk, könyv stb.), és e csomag beállítása után a program (a megfelelő formázási parancsokkal) automatikusan készíti el a kívánt formátumú írást, s nem kell a cím, alcím, dátum... elhelyezésével bajlódnunk. Természetesen tudunk változtatni a formázáson, ha vagyunk olyan bátrak, hogy a nyomdászatilag tökéletestől eltérjünk (de ezt csak haladóknak ajánljuk). Emellett a LATEX (vagy egyszerűbben LaTeX) lehetővé teszi számos (és egyre bővülő számú) csomag betöltését, így könnyen írhatunk sakkról (kész figurák állnak rendelkezésünkre), kottázhatunk (a komoly kottagrafikusi munkát néhány paranccsal kiválthatjuk), vagy (néhány parancs megismerése után) egyszerűen gépelhetünk kémiai képleteket. Az egyes grafikai csomagok egyszerűvé teszik a táblázatok, képek stb. beillesztését.

(Az érdeklődők részletesen megismerkedhetnek a LATEX-hel az Érintőben 2017–18-ban megjelent Miért éppen LaTex? és Latex még egyszer cikkekből. *A szerk.*)

Azoknak, akik még sosem próbálták, hadd mutassak két példát a forráskóddal együtt.

```
$$\sum_{n=1}^\infty
    \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
```

$$\sum_{n=1}^\infty \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

```
$$\left\{
  \begin{aligned}
    &x+3y=5\\
    &15x-\frac34y=15
  \end{aligned}
\right.$$
```

$$\left\{\begin{aligned}&x+3y=5\\&15x-\frac34y=15\end{aligned}\right.$$

Az első próbálkozások

Mint említettem, az iskolavezetés az iskolai alapítványok segítségével „minden jóval” felszerelt bennünket az online tanítás támogatására. Így pl. kifejezetten hasznosnak bizonyult az elektronikus palatábla (digitalizáló rajztábla), amellyel a kisebb ábrákat, magyarázatokat meg tudtuk valósítani. (Megjegyzem, a dolgozatok javításánál is igen jól lehetett használni ezt az eszközt.) A hagyományos óratartás innentől valamennyire megvalósulhatott, hiszen a diákok a kérdésekre válaszolva diktálhatták, mi kerüljön a táblára. Ezzel a jegyzeteléshez mintát adhattam, s egyfajta kezdetleges interaktivitás is megvalósulhatott.

Korábbi ismereteim és a viszonylag gyors, tízujjas gépelésem lehetővé tették azt is, hogy a tanulók diktálása alapján a szöveget és a képleteket LaTeX-parancsként begépeljem, s az egyes diákat (a LaTeX beamer csomagjának segítségével) a velük megosztott képernyőmre kivetíthessem. A jegyzet ettől fogva szebb lett, de a tanulói aktivitás nem sokat változott. A sok előkészítés (pl. a fizikához az ábrák megrajzolása), a feladatsorok begépelése, stb. még mindig nem hozta meg a kívánt eredményt, az igazi tanulói aktivitást. Természetesen folyamatosan beszélgethettünk, miközben a jegyzetet készítettem, de azt szerettem volna elérni, hogy a jegyzetet a diákok maguk írják, s nem arról szólna az óra, hogy a saját füzetükbe másolják a „táblát”. A fájl elküldése ugyan megoldhatta azt, hogy ne kelljen jegyzetelniük az órán, de azt szerettem volna, ha a viszonylagos passzív szerepből aktív részesei lennének az órának.

Ekkor jutott eszembe, hogy az egyetemen a hallgatók sok esetben megosztják velem a készülő szakdolgozatukat egy, az interneten működő virtuális számítógépen futó LaTeX program segítségével, s így én is bele tudok írni egy-két megjegyzést a készülő dolgozatba. Az új felületet (néhány éve használható az `overleaf.com` felületen a LaTeX) korábban még nem használtam úgy, hogy egyszerre 15-20 ember is szerkesztené azt...

3. Az órák gyakorlati megvalósítása

Az `overleaf.com` felületen található LaTeX program várakozáson felül jól működik. Általánosságban igaz, hogy a 10–15 felhasználó (akik aktívan szerkesztik) nem jelent gondot. Esetenként a túl sok grafikon – komoly, számításigényes pl. `tikzpicture`-ábrák, rekurzív-képletek (pl. fraktálok készítése a `lindenmayer` csomaggal) – lassította a program futását, vagy a fordítóprogram jelzett memóriahiányt. (Ezek a fizetős változattal elkerülhetők.) A gyerekek hamar észrevették, hogy a hasonlóképpen megosztható `google`-dokumentumok többségével ellentétben, ebben a programban nagyon könnyen szerkeszthetjük pl. a képleteinket, és gyönyörű `.pdf` kimenetet kapunk, amelyet (a forráskóddal együtt (`.tex` állomány)) könnyen letölthetünk.

Bevallom, az első órára készülve aggódtam, hogy a diákok számára érdekes lesz-e a program használata, s nem veszi-e el a kedvüket a néhány parancs megtanulása. (Ehhez előre elkészítettem egy sablont, ami néhány beállítást tartalmazott (preambulum), s igen koncentráltan csak a legszükségesebb parancsokat mondtam el – természetesen sok személyes, illetve történeti vonatkozás megemlítésével.) Magam is meglepődtem, hogy az óra második harmadában már mindenki képletet szerkesztett, s örömmel nyugtázták, hogy milyen gyönyörű is annak a `.pdf` állományban megjelent képe. A 45 perces óra végére mindenki önállóan tudott dolgozni, sőt már egymást javították, segítették a munkában.

Az „élő” tanítási óra hangulatát adta vissza az is, hogy a tanulópárok (egész évre van a csoportokban ilyen beosztás, akik egymást segítik az órán és délután a tanulásban) elkezdtek egymással kommunikálni akár a háttérben, akár csak úgy, mindenki füle hallatára. Ettől a pillanattól fogva éreztem, hogy megtaláltam a jó munkaformát.

A diákok hol párban (tanulópárok), hol nagyobb csoportokban egymást támogatva dolgoztak. A mindennapi életben megfigyelhető ez a munkaforma (a team-munka): közös ötletelés, majd az egyik fél írja a konkrét feladatot, míg a másik segít, ellenőriz, építő jelleggel kritizál, utána cserélnek. Számomra is egészen más típusú feladatot jelentett az óratartás: délutánonként előre kitalált feladatokat gépeltem be, tettem közzé a következő órához, vagy ellenőriztem a – szintén ebben a dokumentumban található – házi feladatokat. Az órán szemet gyönyörködtető volt látni a 15–16 fő aktív munkáját, hallgatni a párbeszédeiket. Egy-egy kérdés mind a tanulók részéről, mind felőlem felhívta mindenkinek a figyelmét az esetleges gondokra, diszkusszióra. A kérdésekre örömmel válaszoltak, ha kellett, hamar érkezett a segítség. Az egymáshoz hasonló feladatokat viszonylag könnyű volt áttekinteni, s folyamatosan figyelni a párok haladását. Egy-egy órán így kb. 3–4-szer annyi feladatot tudtunk kidolgozni, mint a hagyományos frontális oktatás során. A hagyományos páros munkaformához képest pedig lényeges különbség volt, hogy a tanulók délutáni készüléséhez minden kidolgozott feladat rendelkezésre állt, hiszen egy közös „füzetbe” készültek a munkák.

(Ezeket bárki bármikor lementhette magának.)

Délutáni „leskelődésem” során (hogyan halad a házi feladatok elkészítése, van-e probléma) észrevettem, hogy igen sok esetben továbbra is egymást segítik a tanulók, de immár nemcsak a tanulópárok, hanem 4–5 fős nagyobb csoportok. Természetesen egyrészt az a kényszer, hogy nem lehetett sehová sem elmenni, érthetővé tette ezt a hozzáállást, másrészt nem gondolhatok másra – ezt a későbbi, évvégi értékelésnél a tanulók is megfogalmazták –, mint hogy igen érdekesnek tartották magának a LaTeX programnak a használatát.

Többféle csoportom is volt, s mindegyikben kipróbáltam ilyen típusú órák megtartását.

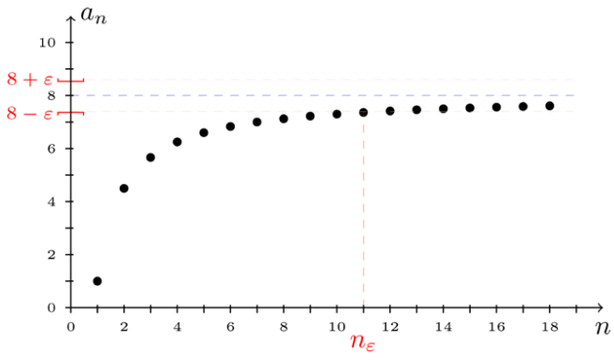
A hetedikes csoportban nagyon ügyesen elsajátították a program használatát, s kifejezetten jót tett a jól strukturált írásmód megtanításánál. Így a szöveges feladatokhoz készített táblázatok jól áttekinthetőek lettek, s azokból az egyenletet felírni már gyerekjáték volt. De az egyenletek, egyenletrendszerek megoldásánál is igen tetszetős képet kaptunk néhány szükséges parancs megismerése után. Ezt követően a diákok kifejezetten élvezték azt, hogy egy programcsomag (`tikzpicture`) megismerésével mennyire egyszerűen készíthetünk grafikonokat, függvényeket. A digitális kultúra c. órán is nagy sikert aratott az, hogy a programozási ismeretek egy részét a LaTeX program segítségével szereztük meg (pl. `do-while`-ciklus). Örömmel írtak például olyan programot, ami az első néhány ezer héttel osztható számot nyomtatja ki egy négysoros program eredményeképpen.

A nagyobbaknál (11. és 12. évfolyamosoknál) hamarabb jött meg a sikerélmény, annak ellenére, hogy kezdetben jóval összetettebb parancsokkal kellett megismerkedniük. A komoly grafikonok, ábrák készítése viszonylag nehézkes a kezdő felhasználó számára. Ezt a problémát eleinte úgy léptük át, hogy a jól ismert GeoGebra program LaTeX-kimenetét illesztettük be a megadott helyre. (Sőt, kezdetben olyan is volt, hogy a GeoGebra programban elkészített képet mint `.png`, vagy `.pdf` dokumentumot) helyeztük el a kívánt részre. Az így készült ábrákat később még szebbek váltották fel, amint a komolyabb grafikai csomagokat elkezdtük használni.

Egy-egy komoly ábra megtervezése és kivitelezése nagyobb erőfeszítést igényelt a diákoktól, de ezt ők kihívásnak tekintették, s nem nyugodtak bele a hozzávetőlegesen jól sikerült ábrákba, a tökéletességre törekedtek. Így pl. a sorozatok határértékénél gyönyörűen berajzolták az ε-hoz tartozó n_ε küszöbindexet. Érdekes volt megfigyelnem, hogy míg a korábbi években megszoktam, hogy ezeket a fogalmakat minden órán újra át- és átbeszélem, újra újabb ábrákat készítve minden órán segítem az elmélyítést, most erre egyáltalán nem volt szükség. A tanulók igen nagy szellemi erőfeszítéssel tervezték s rajzolták be ezeket az értékeket, miközben eltörpült az a probléma, hogy mi is lenne az a

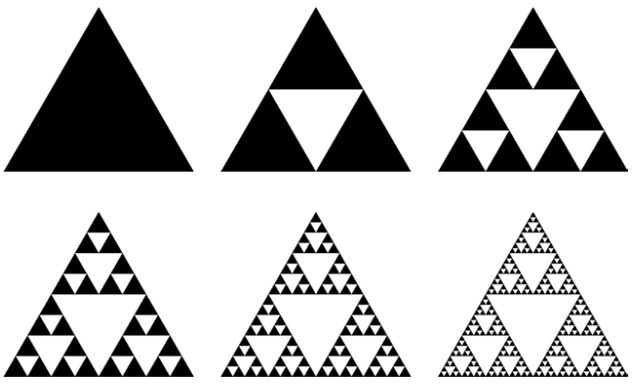
küszöbindex. Mint ahogy a kiránduláson a logikai feladványokon töprengve elfelejtették azt, hogy milyen hosszú és fárasztó is a hegyre felmenni, most a konvergencia fogalma szinte magától érthetővé vált (pedig ez a matematikában igen sok beszélgetés, gyakorlás árán szokott megvalósulni). Ezt a jelenséget később több helyen is megfigyeltem. A LaTeX mint „görcsoldó” gyógyszer segített a matematikai nehézségeken átlépni, az alkotás öröme, a gyönyörű esztétikai eredmény minden tanuló figyelmét elterelte.

A könnyebb elképzeléshez álljon itt egy példa.



Sok esetben azt figyeltem meg, hogy az addig gyengébben teljesítő diákok örömüket lelik ebben az alkotásban, sikerült oldani a félelmüket a matematikai sikertelenségtől. De azt is észrevettem, hogy egyesek kifejezetten örömüket lelik abban, hogy tovább kutatják a LaTeX előnyeit, sőt, feszegetik a határokat. Lehetett feszegetni, lehetett próbálkozni, nem volt határ. Külön élmény volt számomra, hogy a végzős osztály két matematikafakultációs tanulóját annyira magával ragadta a – kitekintésként megemlített – fraktálos foglalkozás, hogy maguk utánaolvasva a témának, saját anyagot hoztak létre kezdetben az osztálynak, majd később nagyobb közönségnek is egy komoly KöMaL-cikkben. Közös, majd' féléves projektünk eredménye nem csak a saját felfedezéseik publikálása volt, de egy másik, 10 oldalas cikkben a fraktálos ábrák rekurzív programozásának közlése, bemutatása is elkészült. Mint matematikaszakos tanár, ezt igen komoly munkának könyveltem el.

Íme egy ábra a tanulók által készített rekurzív programozás eredményéről.



Az egyetemi hallgatók néhány órájánál (Elemi matematika 1–4. c. tantárgyak) is felajánlottam ennek a munkaformának a kipróbálását. A későbbi beszámolók alapján is elmondhatom, hogy számukra is nagyon hasznos foglakozások voltak ezek, hiszen hamarosan ennek segítségével írhatják meg a beadandó feladatokat, vagy akár a szakdolgozatukat. (A hallgatók körében komoly kihívás szokott lenni, ha önállóan kell megismerkedniük a program használatával.)

4. Mit kaptak a diákok az órán?

Közel egy év távolléti oktatás után volt alkalmam találkozni pár hétre a diákokkal. Nagyon kíváncsi voltam, hogyan élték meg ezt a fajta tanítást, hogyan érzik, mennyiben volt más a többi órához (korábbi óráimhoz, illetve más tantárgyak tanóráihoz) viszonyítva. Nem csak ebben a pár hétben találkozhattam a diákokkal, a nyári táborok alatt is kötetlenül beszélgethettem velük. (Osztálytábor, tanulmányi tábor, kerékpártábor stb. – idén, az igények miatt, halmozottan sok tábor volt a nyáron.) Közösen összeszedtük, hogy miben volt más ez a munkaforma, s ők miben látják előnyét, hátrányát.

Kezdem a gondokkal. Ahogy én is, a diákok is félve álltak az ötletem előtt, nem gondolták, hogy könnyen fog menni a (többé-kevésbé) tízujjas gépelés elsajátítása, a parancsok megértése, használata. Úgy érezték, hogy a matematika tantárgyban az órai személyes találkozások elengedhetetlenek a jó megértéshez. Ezeket a problémákat valójában, véleményük szerint is, csak az ismeretlentől való félelem szülte, kiderült, hogy sokkal többet tudnak velem és egymással is dolgozni ebben az új környezetben. Igen hasznosnak vélték a közös jegyzetet, ami jóval több gyakorlatot tartalmazott, mint az eddigi füzeteik. (Persze, most is voltak olyanok, akik délutánonként átmásolták a számukra lényegesnek tartott dolgokat a füzetükbe.)

A tanulók kifejezetten érdekesnek tartották azt, amikor elmeséltem, hogy hány munkahelyen dolgoznak hasonló módszerekkel a szüleik. Többen otthoni rákérdezés után megerősítették ezt az állításomat.

A diákok külön kiemelték, hogy az ismerős környezet már a második héten megnyugtatta őket, pontosan tudták, hogy mit várjanak ezektől a matematikaóráktól. A tanórák gördülékeny lefolyását, az „idő elrepülését” is többen említették. A strukturált írásmód, a jól áttekinthető jegyzet (dátumozás, tartalomjegyzék...) szintén említésre került. Többen szeretnék valamilyen módon a jegyzeteket folytatni, örülnének, ha saját magunk által írt könyvből, jegyzetből tanulhatnának. (A tanév alatt arra is volt példa, hogy néhány diák a témazáró dolgozat előtt egy saját összefoglalást készített az anyagról, amit ellenőrzésre, áttekintésre én is megkaptam.)

Az utolsó hetekben a saját osztályomban előkerült a nyomdászat, a tipográfiai ismeretek témája. Ennek kapcsán beszélgettünk magáról a gutenbergi könyv jelentőségéről, valamint a könyvkötésről. Az elmélet rövid áttekintése kapcsán rávettek, hogy a saját balatoni nyaralásunk során tanuljunk meg könyvet kötni. Igen büszkék voltunk az egyhetes tábor alatt elkészült gyönyörű művekre. (Igen nagy logisztikai szervezést jelentett, hogy a táborra ekkora létszámra minden felszerelést előteremtsek. A cél érdekében a papír, a szürke lemez, a vászon, ragasztóanyagokon keresztül a vágó- és présgépig mindent le kellett vinni. Hallatlan élmény volt tanítgatni őket.)

A diákok nem nagyon vették észre, de saját tapasztalatom alapján kifejezetten figyeltem arra, hogy a gépelés közben ejtett hibákat milyen hatékonysággal találják meg a sorok között. A nagy fejlődés mindenkinél megfigyelhető volt. Ez külön öröm volt számomra, hiszen évek óta sok fogadóórán kérdezik a szülők, hogy mivel lehetne a gyerekek pontosságát fejleszteni, figyelmüket növelni. Erre korábban mindig valamiféle társasjátékot javasoltam, amelynél a hibázás büntetést von maga után, de ennek talán nem olyan nagy a tétje, mint a matematikadolgozatban keletkezett figyelmetlenségből adódó hibáké. A gyors hibakeresés fokozta az odafigyelést, a precizitást, s ez biztosan a jövőben is meg fog térülni a matematikai feladatok megoldásánál .

Összefoglalva, úgy látom, hogy a rengeteg szakmai (matematikai, informatikai, tipográfiai) ismeret mellett számtalan kedvező hozadéka volt ennek a tanítási munkaformának. A nyár alatt szeretnék tervet kidolgozni arra, hogy milyen módon lehetne élni evvel a lehetőséggel akkor is, amikor ismét az osztályteremben tudunk dolgozni.

Ajánlott irodalom

Amennyiben felkeltette az érdeklődését a LaTeX program, szívesen ajánlom a következő könyveket, internetes elérhetőségeket.

- D. E. Knuth: The TEXbook, American Mathematical Sociaty 1995.
Az eredeti Knuth által írt kézikönyv a TEXhasználatáról.

- Wettl F.–Mayer Gy.–Szabó P.: LaTeX kézikönyv, Panem Kft. 2004.
A ma kapható kézikönyv magyarul sok példával.

- Prezentáció készítése.
(Az `az overleaf.com` *oldalon.)*

- Csárdi G.: LaTeXnem túl röviden
Interneten elérhető, 79 oldal.

- Tómács T.: LaTeX
Interneten elérhető bő változat, 350 oldal

- Fried Katalin: Miért éppen LaTex? és Latex még egyszer.

Néhány felhasználási, megvalósítási ötlet:

- Faktosok megoldása: házi feladat megoldása fizikából.
- Hetedikesek által önállóan készített összefoglaló a dolgozat előtt.
- Milliméterpapír – lila színben.
- Segítség gyerekeknek: üres file, előadás...
- Egy hetedikes tanítványom által készített szorzótábla.
- Az osztály daloskönyvének egy oldala.
- Kottaírashoz is kitűnően használható...

Székely Péter
Eötvös József Gimnázium, Budapest
ELTE, Matematikatanítási és Módszertani Központ

A cikk eredeti változata a Budapesti Pedagógiai Oktatási Központ 2021/22. tanév eleji első Hírlevelében jelenik meg.

Photo by **Katerina Holmes** from **Pexels**

TeX - LaTeX matematikatanítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kántor Sándorné 2021. SZEPTEMBER, TANÓRA – SZAKKÖR

Fejezetek a matematikai analízis tanításának történetéből

Bevezetés

Mit értünk (matematikai) analízis alatt?

A matematikai analízis (kalkulus) a matematikának egy részterülete, ami végtelen kicsi mennyiségekkel, vagyis infinitézimális számításokkal foglalkozik, azaz szorosan kapcsolódik a függvény, a határérték, a folytonosság, a differenciálhányados, az integrál, a sorozat, a végtelen sor fogalmához, a differenciálegyenletek, integrálegyenletek, függvényegyenletek, komplex függvények, funkcionálanalízis, variációszámítás, disztribúció-, potenciálelmélet, metrikus terek, mértékelmélet témakörökhöz.

A matematikai analízis fejlődésének főbb állomásai

A matematikai analízisnek (röviden analízisnek), mint tudománynak az eredete az ókorba nyúlik vissza, egészen *Arkhimédészig* (i.e. 3 sz.). Az infinitézimális számítás, vagyis a kalkulus megalkotói *Newton és Leibniz* voltak (17. század). Newton fizikai modellt használt (fluxióelmélet), Leibniz geometriai modellt választott, az érintő fogalmára alapozott. Problémát okozott, hogy nem voltak meg a pontos definíciók, hiányzott a határérték, az érintő pontos fogalma, de Leibniz gyakorlatilag nagyon ügyesen, sokszor analógiás alapon alkotta meg az eljárásait. Munkáikban sok volt a hiányosság, ezeket vette észre *Euler*. Euler három latin nyelvű könyvet írt analízisből. A *Bevezetés a végtelenek analízisébe* (1748) című kétkötetes művében felépítette a függvényelméletet. Tőle származik az f függvény x helyen vett helyettesítési értékének $f(x)$-szel való jelölése. Érdekes a tárgyalás módszere, mert minden definícióhoz ad konkrét példát. Van, amikor az általános fogalmat közli elsőként, de van, amikor a konkrét példa előzi meg az általános fogalmat. A második könyve a *Differenciálszámítás alapjai* (1755). Ebben kitért a függvények maximumának és minimumának megkeresésére. Nagyon sok kidolgozott példa található benne, olyanok, amelyek még ma is benne vannak a tankönyvekben és példatárakban. Ilyen pl. az $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ függvény vizsgálata, szélsőértékeinek megkeresése. *Az integrálszámítás*

alapjai (1767–1770, 1794) háromkötetes könyvében először az alapokat tárgyalta. Megtaláljuk az integrálási szabályokat. Euler monográfiái összefoglalták a 18. századi matematikai felfedezéseket és azok gyakorlati alkalmazásait. Meghatározó szerepük volt a következő évszázadok tankönyveire és matematikai képzésére.

A határérték definíciója a geometriai fogalmaktól való elszakadás után, a 19. században *Cauchy* (1821) nevéhez fűződik, de ez sem volt pontos. Hiányzott hozzá még a valós és irracionális szám fogalmának axiomatikus értelmezése, amit *Weierstrass* (1815–1897) adott meg. A határozott integrál fogalmát *Riemann* (1854) pontosította. A fogalom továbbfejlesztése már a 20. századra esik és *Lebesgue* (1902) nevéhez fűződik, illetve összefügg a mérték fogalmával.

A matematikai analízis tanításának első állomásai

A matematikai analízis történeti fejlődése mutatja, hogy a matematika nehéz részterületéről van szó. A tudományban is sok volt a tévút, a hiányosság. Lassan értek be a pontos fogalmak. Ezt nem szabad elfelejteni tanításakor. A fentiekből nyilvánvaló, hogy az analízis oktatása elsősorban a felsőfokú oktatás feladata és nagyon nehéz kérdés, hogy hogyan, milyen módszerrel vihető le a tudomány szintjéről a középfokú oktatás, illetve a felhasználást igénylő nem szakemberek szintjére. Ma is vannak kétségek, hogy kinek, mennyit, milyen mélységben tanítsunk, milyen módszerekkel kerüljön be a középiskolai matematikai oktatásba, hogyan lehet a modern informatikai eljárásokat alkalmazni a tanításában, mennyire kell az elméleti utat követni, mennyire kell csak a gyakorlati felhasználásra koncentrálni, van-e a középiskolai fizikatanításnak igénye rá?

Már a 19. században is voltak Magyarországon kísérletek az analízis tanítására. *Bolyai Farkas* a *Tentamen*-ben és a hozzá csatlakozó *Errata*-ban saját tudományos eredményeit szőtte be a diákok tananyagába (pl. konvergenciakritérium). A legfőbb problémát mégis az okozta, hogy nem volt meg a magyar szakmai műnyelv, ami a szakmai vonatkozások mellett újabb nehézséget jelentett. Bolyai Farkasnak (1775–1856) az analízisben használt új szavai meglehetősen bonyolultak voltak: differenciálás = külzés, limes = széj-becs, teorema = tét, geometriai sor = eggynézeti sor. *Nagy Károly* (1797–1868) könyveiben találjuk meg először a mai matematikai szaknyelvben is használt következő kifejezéseket, pl. szükséges és elég, nagyobb, mint akármely még oly nagy szám, csak egy és nem több.

Az *ősi Debreceni Református Kollégium* a 16. század óta élen járt a reáliák oktatásában. A felsőfokú képzéssel kapcsolatban a professzorok közül *Kerekes Ferenc* (1784–1850) nevét emeljük ki. Népszerű volt a diákok körében. Számunkra különösen érdekesek a tanítási módszerei, mert ő 1840-ben *a heurisztikus tanítási módszer* bevezetéséről írt. Analízissel kapcsolatos nézeteit a Csányi Dániel által kiadott *A felsőbb mértan valódi alapelvei és egy toldalék töredékkel* (Debrecen, 1862) könyvből ismerhetjük meg. A differenciál- és integrálszámítás témában Kerekes Euler nézeteit követte, de saját elképzeléseit is érvényesítette, amelyek ma nem egészen világosak már. Úgy gondolta, hogy különböző értékű zérusok vannak, de mi nem tudunk köztük különbséget tenni. Nézeteiből következtek a javasolt szakszavak: differenciálni = megnullítani, differenciálszámítás = nullító számvetés, differenciális calculus, leszálló nullszámvetés, integrálás = egészítés, integrálszámítás = egészítő számvetés, felhágó nullszámvetés. Érdemi eredményt nem ért el, mégis azt lehet mondani, hogy az *Elmélkedés a Fellengős Mathesis igaz Sarkalatairól* című, magyar nyelvű írásával elsőként vetette meg 1837-ben a differenciál- és integrálszámítás oktatásának hazai alapjait.

Kerekes véleményt mondott az axiomatikus tárgyalásról, nem tetszett neki, hogy Euklidész előre bocsátja a sok axiómát. Azt javasolta: „*Ott hozzuk elő a definíciók, az axiómák, okoskodások mindegyikét, ahol először szükség van rá, vagyis hol a tudomány rendi szerint a sor reá kerül.*”

A 19. század végére merült fel nemzetközi szinten a középiskolai matematikaoktatás megreformálása. *Beke Manó Felix Klein* mellett ismerkedett meg a matematikatanítási reformeszmékkel. Kezdeményezésére jött létre Magyarországon 1906-ban a Matematikai Reformbizottság, amelynek elnöke ő lett, titkára pedig az akadémikus fizikatanár *Mikola Sándor*. Mikola Sándort is foglalkoztatta a jövő középiskolájának a kérdése, ő elsősorban a fizika tanításának korszerűsítésével foglalkozott, de látta azt, hogy a fizikai fogalomalkotáshoz szükséges az analízis elemeinek az ismerete. A tagok között találjuk a Fasori Evangélikus Gimnázium híres matematikatanárát, *Rátz Lászlót*. A Reformbizottság fő feladatának a formális oktatás elleni harcot tekintette és a munkáltató matematikatanítás elvei alapján dolgozta ki a matematika tananyagát, tanítási módszereit, amit „*A középiskolai matematika-tanítás reformja*” című könyvükben fejtettek ki.

„*Tanterveink mindinkább rendszerességre, a részek közti tervszerű kapcsolatra, koncentrációra törekszenek. Ezen kívül világos tendencia mutatkozik* a *matematikai tanítás gyakorlatias iránya felé, keresi a tanterv az élettel és a többi tantárggyal a kapcsolatot, tekintetbe veszi a gazdasági élet szempontjait, a szigorúan tudományos tanítás helyett, inkább egy-egy rész feldolgozásában nyújt a tanulóknak bepillantást a matematika tudományos problémáinak a tárgyalásába és e tekintetbe a függvények menetének vizsgálatában az összes külföldi tantervet megelőzi.*”

A reform során előtérbe került a tanítás gyakorlatiasabbá tétele, a gyakorlat, a közvetlen tapasztalat és a becslés fontossága, a függvényfogalom, a differenciál- és integrálszámítás bevezetése, a sík- és térgeometria egységes tanítása, a geometria tanításának folytonossága, a térgeometriai rajzolás és modellezés.

A bizottság reális és szükséges reformokra törekedett. „*El kell hagyni azokat a tárgyi dolgokat, amelyek idejüket múlták.*” Kimondták, hogy redukcióra van szükség mind az algebra, mind a geometria tanításában. A fogalomalkotás viszont lassan és fokozatosan történjen meg.

Feladatok: a matematikaoktatás gyakorlativá tétele, a gazdasági érzék, a térszemlélet és a térbeli felfogó képesség fejlesztése, a mennyiségek viszonyainak grafikus ábrázolása, felhasználva hozzá a tanulók észleletgörbéit, az analitikai geometria tárgyalása, a függvényfogalom módszeres kiépítése, a differenciál- és integrálszámítás elemeinek bevezetése és felhasználása, legalább olyan mértékben, hogy a maximum-minimum feladatok, az egyszerűbb felület- és köbtartalom számítások általánosabb módon is elvégezhetők legyenek. (Jelentés a bizottság határozatairól és javaslatairól, 1909).

Beke Manót kérték fel az 1914. április 6–8. között Párizsban megrendezett Nemzetközi Matematikatanítási Kongresszus egyik főelőadójának, de Mikola Sándor is részt vett rajta. Témája annak a megvitatása volt, hogy a differenciál- és integrálszámítás bevezetésével milyen eredményeket értek el az egyes országok középiskoláinak felsőbb osztályaiban, illetve a főiskolákon. Ez utóbbi kérdés előadója *Paul Stäckel* heidelbergi professzor volt. A Matematikai Oktatás Nemzetközi Bizottsága *Kérdőívet* állított össze, ami a középiskolák felsőbb osztályaiban bevezetett differenciál-és integrálszámításra vonatkozott. A Bizottság azt akarta megtudni, hogy mit és hogyan tanítanak az egyes országokban. Az ismert volt, hogy a franciaországi líceumokban már 1902-ben bevezették, így célszerűnek látszott, hogy az előadó az egyes országok tapasztalatait összegezze, és az eredményeket összehasonlítsa. A *Kérdőív* kérdéseit megfelelő modernizálással ma is célszerű lenne elemezni, és az analízis tanítási céljait és módszereit újraértékelni.

Beke Manó elképzelése az analízis középiskolai tanításáról

Ma is szállóige Beke Manónak az a mondása, hogy *magas szintű és korszerű középiskolai matematikaoktatást nem lehet a differenciál- és integrálszámítás bevezetése nélkül megvalósítani.*

Beke tevékenysége arra az időszakra esett, amikor itthon is és nemzetközi viszonylatban is szóba került a középiskolai tananyag kibővítése a differenciál- és integrálszámítás elemeivel. *Császár Ákos* szerint: „*ma sem tudjuk még igazában, hogy ezt hogyan lehet jól megcsinálni. De kísérletezni kell a megvalósításával*”. Ez a 21. században is érvényes.

Beke Manó tankönyvei közül két könyvet emelünk ki, az ún. *Kis Beke*-ként emlegetett könyvét, vagyis a *Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba* (1908) címűt, és a

Nagy Bekét, vagyis kétkötetes *Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba* (1910, 1916) egyetemi tankönyvét. Ezt a könyvet az egyetemi hallgatók nagyon szerették.

„Bekének a matematikusok között csak Kis Beke néven emlegetett Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba című könyve mintaképe annak, hogy hogyan lehet szakmailag érdeklődő, de mégis nagyon kezdő fokon álló emberek számára érdekessé, népszerűvé tenni egy tudományt. A széles olvasóközönségnek szánta. Több kiadásban is megjelent és kiváló bevezetést nyújtott az analízis fogalmaiba és módszereibe. Érdekessége, hogy az 1960-as években, amikor ismét előtérbe került a differenciál- és integrálszámítás középiskolai bevezetése, a Gondolat Kiadó újból kiadta, ami nem véletlen, és amikor az ember újra előveszi, régi élmények jönnek vissza, hogy hogyan elevenedett meg annak idején és vált érdekessé, és érthetővé számára az analízis.” (Surányi János, 1987-es rádióriport)

„Az éppen most említett Kis Beke könyv, valóban a matematika népszerűsítésére szolgáló irodalomnak egyik gyöngyszeme, olyan elegánsan, olyan jól összeválogatott anyaggal ellátva, hogy ezt még ma is nagyon sok részletében minden változtatás nélkül fel lehet használni, akár egyetemi előadásokban is. Én magam is megteszem ezt egy-két, ebben a könyvben található példával, rendszeresen felhasználom őket.

Ami a nagy, kétkötetes differenciál- és integrálszámítás tankönyvet illeti, gazdag anyagot dolgoz fel, és imponáló a szerzőnek a korabeli irodalomban való tájékozottsága. Érdekes és sokoldalú képet nyújt az akkori kor analízisének az állásáról, és a Budapesti Egyetemen történő tárgyalásáról. Meg is írja az Előszóban, hogy úgy igyekezett a könyvet megírni, mintha egy egyetemi előadást jegyezne le, és ez valóban érződik, az olvasóban azt az érzést kelti, minthogyha egy egyetemi előadásnak volna a hallgatója éppen.” (Császár Ákos, 1987-es rádióriport)

Átnéztem a Nagy Beke könyvet. Természetesen azóta az analízis tudománya fejlődött, változott pl. a függvény, a függvények folytonosságának fogalma, egyes fogalmak neve, viszont a függvény határértékének fogalmát ma a tankönyvekben ugyanúgy szemléltetjük, mint ahogy ott van. Tapasztalatom szerint ez a szemléltetés érthetővé, világossá és megtanulhatóvá teszi a diákok előtt a kvantorok segítségével történő ε-os megfogalmazást.

Beke Manó a Felix Klein által meghirdetett célokat akarta megvalósítani, ezek a matematikaoktatás közelebb hozása a társadalmi élethez, a természettudományos gondolkodás átvitele a köztudatba, a függvény fogalmának a bevezetése, a függvényközpontú gondolkodás, grafikus ábrázolás, grafikus táblázatok készítése, a differenciál- és integrálszámítás bevitele a középiskolába.

A Kis Beke a Népszerű Főiskolai Tanfolyam 1906. évi II. sorozatában tartott előadásokon alapult. Ebből szűrte le Beke Manó, hogy mit tart alkalmasnak középiskolai tárgyalásra. Rátz Lászlóval egyetértésben megállapíthatjuk, hogy ez a könyv nem középiskolás tankönyv, inkább a differenciál- és integrálszámítás alkalmazását igénylő szakemberek számára készült. A szemléletes tárgyalásra alapozott, nem igényelte a pontos matematikai fogalmak elsajátítását, inkább gyakorlati irányultságú. A másik nagy különbség az, hogy a fizikai alkalmazásokat akkor a matematika keretében tárgyalták. Ez mára már megváltozott. Nagyon kevés esetben azonos a matematika és a fizika tanára. Én még azok közé a tanárok közé tartoztam, akik ugyanabban az osztályban mindkét tárgyukat tanították. A speciális matematika tagozatos diákok viszont nem igényelték, hogy a matematikában megtanult integrálást alkalmazzuk a súlypont, a tehetetlenségi nyomaték, a hidrosztatika nyomóerő kiszámítására.

Beke Manóék célja az volt, hogy a tanároknak alkalmat adjanak a további elmélkedésre, de a végleges gyakorlati rögzítést nem tekintették feladatuknak. „*Módszerünk mindenütt szemléletes és gyakorlati legyen. Tárgyalásunkban kerüljük a túlságos absztrakciót és a teljes precízióra törekvést, de itt-ott esetleg mutassunk rá azokra a kivételes viszonyokra, amelyek eljárásaink alkalmazhatóságának határt szabnak.*”

Rátz László és Mikola Sándor elképzelése az analízis középiskolai tanításáról

A 20. század elején Rátz László is részt vett a magyar matematikatanítási reformmozgalomban. Kiemelt témával, a függvények, a differenciál- és integrálszámítás tanításával tankönyvíróként is, tanárként is foglalkozott fizikus kollégájával, Mikola Sándorral együtt. Tantervi átcsoportosításokat javasoltak, módszertani elképzeléseket fogalmaztak meg. Véleményük ma is időt álló és megfontolandó. Ők is *a heurisztikus módszert* tartották jónak. *Rátz László Mikola Sándorral* közösen írta meg *A függvények és az infinitézimális számítás elemei középiskolában (1910, 1914) tankönyvet*. A reformtörekvéseknek szellemében kidolgozott és már 1902-től bevezetett kísérleteknek megfelelő tanmenetek az 1924-es országos tanügyi reform során kerültek be a hivatalos gimnáziumi tantervbe, de közben egyes iskolák már hamarabb bevezették, pl. Budapesten *Rátz László* a Fasori Evangélikus Gimnáziumban, Debrecenben a Református Kollégium Gimnáziumában, a „nagy osztály” számára *Jakucs István*. Két diák nevét említem meg, akik ebből a könyvből sajátították el az analízis elemeit: a fasori Gimnáziumból *Wigner Jenőét*, Debrecenből pedig *Bay Zoltánét*, aki fél évszázaddal később is emlegette, hogy ebből az ügyes kis könyvből pompásan megértette és megtanulta az analízis alapjait.

A Kis Beke könyv és a Rátz–Mikola könyv az integrál fogalmának a bevezetésében különbözik, Beke a határozatlan integrállal kezd, míg Rátz–Mikola a határozott integrált tárgyalja előbb. Ez a kettős szemléletmód ma is nyomon követhető a tankönyvekben (pl. *Czapáry Endre–Gyapjas Ferenc: Matematika, 11–12, Emelt szintű kiegészítő anyag* (2008), *Schlegl István–Trembeczki Csaba: Sokszínű Matematika, Az analízis elemei* (2012)). Én a határozott integrállal való kezdést tartottam jobbnak és érthetőbbnek. Egyidőben tartottam az egyetemen analízis gyakorlatot elsőéves matematika szakos hallgatóknak, és tanítottam „specmatos" diákokat. Megpróbáltam nekik több ekvivalens definíciót adni az integrálra. Nem volt sikerem. Nem értették meg, hogy erre miért van szükség, pedig a későbbiekben az osztály minden tagja felsőfokú végzettséget szerzett, sőt nagyobbik fele matematikusként, vagy matematikatanárként végzett. Nekik könnyebbség volt az egyetemi tanulmányaik során, hogy ismerték az analízis alapvető fogalmait. Talán az volt a szerencséjük, hogy azonos stílusban sajátították el mind a középiskolai, mind az egyetemi analízis tananyagot.

Hozzám a két tárgyalásmód közül a Rátz–Mikoláé áll közelebb. Jónak tartottam a függvényvizsgálatnál követett táblázatos és szemléletes ábrázolási módot, én is ezt mutattam meg és vártam el tanítványaimtól, ma is ez szerepel a tankönyvekben. Sokat tanultam *Urbán Jánost*ól a „specmatos" tanárok éves továbbképzésén az 1960-as évek második felében, amikor ismét előkerült az analízis bevezetése a középiskolákban. Rengeteg függvényt ábrázoltunk, határértéket kerestünk, folytonosságot, monotonitást vizsgáltunk, deriváltunk, integráltunk, sorba fejtettünk, tételeket fogalmaztunk meg, bizonyítottunk, foglalkoztunk a kivételekkel, (pl. *ez a függvény alkalmas arra, hogy a folytonosság szemléletes képét megingassa*), de előkerült a példa a mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható függvényre is.

A Rátz–Mikola könyvből válogattam a 11. évfolyamos diákok számára a 2013. évi Révkomáromi Nagy Károly Diáktalálkozóra egy 9 feladatból álló feladatlapot a függvények maximális és minimális értékeinek meghatározására. A Diáktalálkozón részt vevő középiskolás diákok emelt szinten tanulták a matematikát. Ismerték a differenciálhányados fogalmát és a közepek közti összefüggéseket is. A feladatok egy részét meg lehetett volna oldani elemi úton is, de ők a differenciálást választották.

Hasonló volt a tapasztalatom egy *kooperatív tanulással kapcsolatos tanítási kísérletnél*, amiben négy középiskola 9–11 évfolyamos tanulói vettek részt. A kitűzött feladat: *Egy farmer* 120m *hosszú drótkerítéssel akar körbe keríteni egy téglalap alakú füves legelőterületet. Határozzuk meg a körbe keríthető terület maximumát!*

Azt tapasztaltuk, hogy a 9–10. évfolyamos diákok elemi úton oldották meg a feladatot, míg a 11. évfolyamon, a fakultatív oktatásban részt vevő tanulók a differenciálást választották, azzal a megjegyzéssel, hogy így könnyű a számítás.

Ugyanez volt a helyzet most, 2021-ben, a *Református Iskolák Országos Versenyé*n is, ahol a 12. évfolyam 3. feladata másodfokú függvény maximumának a meghatározására vezetett. A 3. feladat a következő volt:

Legyen M az $AB = 6$ hosszúságú szakasz belső pontja. Az AB, AM és BM szakaszok mint átmérők felé félköröket írunk az AB szakasznak ugyanarra a partjára. Hol helyezkedik el az az M pont, amelyre a legnagyobb a három félkör által határolt síkrész területe? Adja meg a maximális síkrész területét!

A megoldás során a $T = (-x^2 + 6x)\frac{\pi}{4}$ függvény maximumát kellett meghatározni. Itt is azt tapasztaltam a top 20 tanuló versenydolgozatának az átnézésekor, hogy főképpen differenciálással oldották és nem elemi úton.

Következtetés: a matematikát emelt szinten tanuló tanulók szívesen és előszeretettel alkalmazzák a differenciálást, mint rutineljárást a szélsőérték meghatározására.

A 20. század eleji középiskolai tankönyvekben tárgyalt analízis anyag

1913-ban adták ki *Borosay Dávid* és *Lévay Ede* középiskolás tankönyveit. 1923-ban jelent meg Borosay Dávidnak*a VI–VIII. osztályok számára készült tankönyve*. Tárgyalta a függvény fogalmát, folytonosságát, ábrázolását, a másodfokú egész függvény maximumát és minimumát, a másodfokú egyenlet grafikus megoldását, a szinusz- és koszinuszfüggvény ábrázolását. Ennél a tárgyalásnál is az volt a probléma, hogy nem alakította ki a függvény határértékének a fogalmát, és a folytonosság szemléletes fogalma megelőzte a határértéket.

Tapasztalatom szerint a határérték fogalma nehezebb, mint a folytonosságé, vagy a differenciálhányadosé. Számomra egyetemi hallgatóként *Rapcsák András* akadémikus professzor tanította az elsőéves analízist. Még november elején is a nullsorozatoknál és a „hangyabokányi” ε-nál tartottunk.

A középiskolák szerkezetét 1924-ben megváltoztatták. A matematika tananyag korszerűbb lett, de zsúfoltabb. Az időhiány miatt a kitűzött célok, pl. a tanulók önálló munkája, nem valósultak meg, megsokasodtak a problémák, a tanárok tiltakoztak. 1938-ban a Teleki-féle egységes középiskolai tanterv csökkentette az óraszámot, összevont anyagrészeket. Így egyre nagyobb problémává vált az analízis oktatása. Az 1943-as évben több fórum is jelezte ezt.

A református gimnáziumok *Jónás Márton Mennyiségtan tankönyveit* (1945) használták. Nála már a VI. osztályban a sorozatok tárgyalásakor, a végtelen geometria sornál megjelent a határérték, a konvergencia, a divergencia elnevezés, a fogalom pontos tárgyalása nélkül. Erre alapozta a VII. osztályban az $y = \frac{1}{4}x^2$ másodfokú racionális egész függvény differenciálhányadosának a meghatározását. A folytonos és nem folytonos függvény fogalmát is konkrét függvények ábrázolásával kötötte össze. Szó esett a fizikai alkalmazásokról is (sebesség, gyorsulás, harmonikus rezgőmozgás). Az integrál esetében ő is a határozatlan integrál bevezetésével kezdett. A VIII. osztályban, az első fejezetben, a Függvénytant átismételte. Kiemelném, hogy nagyon szépek az ábrák, rajzolói között neves művészek voltak: G. Szabó Kálmán festőművész-grafikus és Drahos István festőművész.

Az analízis középiskolai tanításának kritikái

A Mennyiségtani és Természettudományi Didaktikai Lapok (1943. I. évf. 5. szám) vita rovatában jelent meg *Alexits György* írása arról, hogy *Tanítsuk-e az analízist a középiskolában?* ([1]) A „*szemlélet segít*” csatakiáltás ellen lépett fel, azzal, hogy a középiskolai analízis tanításában hemzsegnek a hibák, ködös, vagy éppen hibás fogalmakkal, bizonyításokkal van tele. Szerinte a differenciálszámítás alapja a határérték fogalma, aminek kialakítása nem történik meg, még számsorozatok esetén sem. Nem világos a folytonos és a differenciálható függvények közti kapcsolat, nehezen érthető a szakadásos függvény fogalma. A szemléletesség kapcsán a bizonyítások csak olyan függvényekre érvényesek, amelyek lokálisan monotonok. Hibás az összetett függvény differenciálási szabálya, mert feltételek hiányoznak belőle, nem pontos a függvény fogalma sem, mert csak szemléletes. Azt tartotta, hogy a középiskolákban tanított infinitézimális számítás zavarosságának koronája a Riemann-integrál. Szerinte ez a fogalom nehéz, és igen finom meggondolást kíván. A középiskolában való tanításának már azért sincs semmi értelme, mert a Riemann-integrál igazi értéke csak akkor mutatkozik meg, ha olyan függvényekre kívánjuk kiterjeszteni az integrálhatóság fogalmát, amilyenekre a középiskolában még példát sem tudunk mondani. „*Miért éppen a Riemann-féle és miért nem a Lebesgue-féle integrállal riasztjuk el a tanulókat a matematikai gondolkodástól? Az átlagos gimnazisták, pedig egy nullaméretű halmaztól eltekintve, Lebesgue-ül se tudnának rosszabbul integrálni, mint ahogy Riemann-ul tudnak.*”

Nekem ezzel kapcsolatban egy érdekes tapasztalatom van. Az egyik „specmat”-os osztályomban tartottam országos bemutató órát, amelyen a síkbeli alakzatok területének meghatározásáról volt szó, kiegészítve azzal a kérdéssel, hogy létezik-e minden síkbeli alakzatnak/ponthalmaznak területe? A vizsgált halmazt a Dirichlet-függvény általánosításaként adtuk meg, vagyis az volt a kérdés, hogy van-e területe a derékszögű koordináta-rendszer azon pontjai halmazának, amelyeket úgy származtatunk a $(0;0)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(0;1)$ koordinátájú pontokkal határolt egységnégyzetből elhagyjuk (szemléletesen kiszúrjuk) azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája racionális. Az egyik tanuló azt javasolta, hogy gurigázzuk össze ezeket a pontokat az origóba és akkor már meg tudjuk adni a területet. Véleménye a bemutató tanításon elnöklő Surányi János professzort is meglepte. Talán mégsem olyan rémisztő a diákok számára a Lebesgue-integrál fogalma?

A probléma másban gyökerezett, a diákok azt fogták fel nehezen, hogy lényeges különbség van azon két állítás között, hogy pl. egy síkbeli ponthalmaznak nem létezik területe, vagy a terület mértéke 0. A másik nehézség a végtelen fogalmának tisztázása volt. Nem volt nyilvánvaló a számukra, hogy nemcsak egy fajta végtelen van. Értelmes diákoknak is hosszú idő kellett a megértéséhez.

Alexits György olyan tanulók számára tartotta reálisnak az analízis tanítását, akik a gimnáziumban matematika tagozatra járnak, és legalább heti 5-6 órában tanulják a matematikát. Ezzel nagyon egyet lehet érteni. A 20. század második felében, illetve a 21. században a megvalósítás reális útja is ez (matematika tagozat, speciális matematika tagozat, emelt szintű oktatás), sőt kiegészült az IKT-eszközök felhasználásával. Alexits György végső következtetése az volt, hogy ennek az állapotnak csak egy gyógyszere van: „*Ne tanítsunk a mai gimnáziumban infinitézimális számítást!*” Nincs a középiskolai fizikának erre feltétlen szüksége.

Tóth Ferenc: Mégiscsak tanítsunk infinitézimális számítást a középiskolában című cikkében vitába szállt Alexits Györggyel. Megállapította, hogy a hibák vonatkozásában Alexits Györgynek igaza van. „*De, mert a tankönyveink rosszak, ez nem ok arra, hogy ne tanítsuk a középiskolában az infinitézimális számítást.*” *Barra György* a *Tanítsunk-e a középiskolában infintézimális számítást?* című cikkében a tanárok hozzáállásáról mond negatív véleményt: „*megfelelő előkészítés nélkül tanítanak egyes részleteket, elhanyagolnak fontos részleteket. Szükséges a tanár teljes biztonsága a szóban forgó ismeretkörben, és a helyes didaktika annak közlésében.*” ([2])

A tankönyvi hibák megismétlődtek a későbbiekben, pl. amikor a tanterv a szakközépiskolákban meghagyta az analízis tanítását (Czapáry szakközépiskolai tankönyve), míg a gimnáziumokban „taníthatatlan anyag” címmel eltörölte. Egyoldalú és nem körültekintő szemléltetésből származó szakmai hibák voltak pl. *Cser Andor* tankönyvében az integrálszámításnál, ahol a szerző azt állította, hogy az integrálközelítő összegek szigorúan monotonok, ami természetesen csak az általa felvázolt szigorúan monoton függvényre teljesült.

Az analízis középiskolai tanításának új alapokra helyezése

Az 1940-es években is használt legjobb tankönyveket *Veress* Pál írta. *Barra György A mennyiségtan tanítása* c. szakmódszertani könyvében (1943) ezt a tankönyvsorozatot elemezte. ([3]) Megjelent benne a függvény folytonosságának fogalma, megemlítette a középértéktételt. Az integrál fogalmát ő is a differenciálás inverz műveleteként vezette

be. A határozott integrál fogalmát a középértéktétel felhasználása miatt elbonyolította és elsősorban nem a kétoldali megközelítésre támaszkodott. Fakultatív anyagnak szánta a helyettesítéses és a parciális integrálást.

A középiskolák analízis anyagát 1945 után ideiglenes jelleggel *Surányi János és Králik Dezső* (1950) dolgozta át. Az 1950-52-es tanterv óriási változásokat hozott. Új szemléletmód, új tananyagrészek kerültek be a középiskolai tananyagba, kimaradt a határérték, a differenciál- és integrálszámítás, helyére jöttek pl. a halmazok, geometriai transzformáció, kombinatorika, valószínűségszámítás, matematika logika, ábrázoló geometria. *Péter Rózsa, Gallai Tibor, Hódi Endre, Tolnai Jenő, Varga Tamás, Faragó László n*eve fémjelzi ezt a korszakot. Az analízis oktatása az egyetemek feladata lett.

Számos irányzat, elképzelés, illetve hozzá tankönyv, példatár készült a folytatásban. Hozzám a Czapáry-könyvek álltak a legközelebb. Nem ragadott meg *Peller József és Megyesi László* elképzelése, sem *Kósa András és Korányi Erzsébet* felfogása, sőt az integrál újonnan bevezetett jelölése sem: (pl. $\int_0^4 x \mapsto 3x$) a *Matematikai feladatok gyűjteménye II. kötetében. Az Összefoglaló Feladatgyűjtemény matematikából* XX–XXI. fejezetének feladatai már nem kerültek be az érettségibe.

Következtetések

Hogyan tovább? A kor követelményeinek megfelelően, a modern IKT-eszközök felhasználásával, az analízis alkalmazási szintjének megfelelően, támaszkodva a hagyományokra, konvenciók kialakítása, egy egészséges kompromisszum létrehozása az elmélet, a gyakorlat és az alkalmazás között, biztosítva függvények széles körű ismeretét. Nem kell a középiskolában mindent precízen a megtanítani, szemléletesen elő kell készíteni és felfedeztetni a fogalmakat, de úgy, hogy arra ne mondja majd az egyetemi oktató, hogy „felejtsd el fiam, amit eddig tanultál”. Ne mondjunk ki olyan állítást, amit később korrigálni kellene. Nagyon fontos a tanárok felkészítése az analízis tanítására, másképpen nem megy.

Kövessük az akadémikus Beke Manó tanácsát: „*Jól kell megválasztani az időt, amikor az absztrakt fogalom bevezetendő. Ezt a bevezetést mindig előzze meg a kellő előkészítés. Adjuk meg előbb annak az absztrakt fogalomnak tapasztalati, szemléleti, általában érzékelhető elemeit, kapcsoljuk erősen össze a tanulóban meglévő, hasonló rokon, vagy analóg ismeretanyaggal és úgy térjünk rá az absztrakcióra, a fogalmak megalkotására és azoknak a tanuló általános műveltsége szempontjából is értékes anyagon való begyakorlására.*”

Irodalom

[1] Alexits, Gy. (1943): *Tanítsunk-e a középiskolában analízist*? Mennyiségtani és

Term.tud Didaktikai Lapok, Bp. I. 5.
[2] Barra, Gy. (1944): *Tanítsunk-e a középiskolában infinitézimális számítást?* Mennyiségtani és Term.tud. Didaktikai Lapok, Bp. II. 1.
[3] Barra, Gy. (1943): *A Mennyiségtan tanítása*, Debreceni Könyvek.
[4] Beke, M. (1967): *Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba*, Gondolat, Bp.
[5] Beke, M. & Mikola, S. (1909): *A középiskolai matematika tanítás reformja*, Franklin, Bp.
[6] Jónás, M. (1945): *Mennyiségtan* a Gimnáziumok és Leánygimnáziumok VI-VIII. osztálya számára, ORT, Debrecen.
[7] Rátz, L. & Mikola, S. (1910): *Az infinitézimális számítások elemei a középiskolában*, Franklin, Bp.
[8] Tóth, F. (1943): *Mégiscsak tanítsunk infinitézimális számítást a középiskolában*, Mennyiségtani és Természetttudományi Didaktikai Lapok, Bp. I. 7.
[9] Veress, P. (1928–1942): *Elemi Mennyiségtan* a Gimnáziumok és Reálgimnáziumok VI-VIII. osztálya számára, Egyetemi Nyomda, Bp.

Kántor Sándorné
Debreceni Egyetem Matematikai Intézet

---

matematikatörténet Rátz László matematikatanítás analízis

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)

Faragó István, Pfeil Tamás, Szilágyi Tivadar
2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Czách László (1929–2021)

Dr. Czách László, az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematikai Intézetének egyetemi docense, életének 93. évében, 2021. augusztus 18-án elhunyt. Halálával a háború utáni magyar matematika egésze és a hazai egyetemi matematikaoktatás kiemelkedő alakja távozott. Temetése 2021 október 4-én, 15 órakor lesz a Fiumei úti sírkert szóróparcellájában. Volt kollégái, *Faragó István, Pfeil Tamás, Szilágyi Tivadar* emlékeznek rá.

Szerkesztő
2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

A pedagógus a számítógépek korában

Kalmár László gondolatait idézzük halálának 45. évfordulóján: milyen meglátásai voltak csaknem fél évszázaddal ezelőtt a számítógép felhasználásáról, különösen az oktatásban. A régi interjúból sok kérdés még ma is ismerős, aktuális, vagy éppen még mindig megoldatlan. Képünkön a Szegedi Tudományegyetem Kalmár László Informatikai Intézete. Tovább...

Szerkesztő
2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus történetek: T. Sós Vera

T. Sós Vera matematikus, akadémikus, professor emerita kivételes tudása, személyisége itthon és külföldön is mindenkit lenyűgöz. Egyike azoknak, akiknek neve fémjelzi a magyar matematika XX–XXI. századi történetét. Ezért is közöljük újra a vele csaknem 20 évvel ezelőtt készült interjút, a magyar televízióban 2004-ben leadott riportfilmet. Tessék rákattintani...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Faragó István, Pfeil Tamás, Szilágyi Tivadar 2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Czách László (1929–2021)

Czách tanár úr 1929. június 11-én született Székesfehérvárott, a középiskolát is ott végezte el, majd az ELTE matematika szakán diplomázott. Ezután Leningrádban Kantorovics és Fihtengolc aspiránsaként szerzett kandidátusi fokozatot, majd hazatérve az ELTÉ-n a matematikusképzés egyik megszervezője lett. Több, mint öt évtizeden át tanított az Eötvös Loránd Tudományegyetemen, matematikus generációk hosszú sora tőle ismerte meg a klasszikus analízist, a differenciálegyenleteket, a mérték- és integrálelméletet, valamint a funkcionálanalízist, több évfolyam a függvénysorokat is.

Tanár úr kiemelkedő pedagógus volt, a matematika számos területe hazai oktatásának iskolateremtő egyénisége. Élmény volt hallgatni a precíz és letisztult, ugyanakkor szemléletes és magával ragadó előadásait. Modern, topológiai szemlélettel tanította a matematikát, minden előadását tökéletesen kidolgozta. Számtalan olyan saját eredményét illesztette be az anyagba, amelyek új kutatási eredményként is publikálhatóak lettek volna. Amit a táblára felírt, az változtatás nélkül megjelenhetett volna tankönyvként. Kimondottan szórakoztató, jó hangulatú előadásaira egykori hallgatói a mai napig szívesen emlékeznek, emellett rajongással és tisztelettel idézik Tanár úr egyéniségét.

Igazi matematikai polihisztor volt, a matematika szinte valamennyi ága érdekelte és többnyire kutatói szinten járatos volt azokban. Megszokott jelenet volt, hogy a tanszéki folyosón egy neki feltett kérdésre válaszul több órás előadást kerekített ki, amihez a folyosón megjelenő fiatal és nem csak fiatal kollégák folyamatosan csatlakoztak. Ha közben Tanár úr írt egy papírra és az betelt, akkor nem szakította meg az írást, amíg új papírlapot kapott, hanem 90 fokkal elfordította a teleírtat, majd folytatta az írást. Szemléletét és a matematika iránti szeretetét tanítványai elsajátították tőle.

90-edik születésnapján, 2019-ben az ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszéke bensőséges ünnepséggel köszöntötte Tanár urat, és a tiszteletére a lágymányosi Déli épület bejáratánál fát ültettünk. A kis fa az aszályok ellenére szépen fejlődik.

Czách tanár úr munkásságát folytatjuk és emlékét megőrizzük a szívünkben!

Faragó István, Pfeil Tamás

ELTE TTK Matematikai Intézet

Szubjektív emlékezés egy szeretetre méltó tanárra

2021. augusztus 18-án, életének 93. évében elhunyt egykori kedvenc tanárom, egyetemi szakdolgozati témavezetőm, majd évtizedeken keresztül szeretett kollégám, Czách László. Abban a megtiszteltetésben lehetett részem, hogy én vezethettem a legtöbb gyakorlatot a sokak által kedvelt Analízis előadásaihoz, majd nyugdíjba vonulása után néhány éven keresztül félig-meddig utóda is lehettem. A mellékelt képen látható kőtábla a 90. születésnapja óta őrzi emlékét az ELTE TTK két épülete között, de biztosra veszem, hogy sokan vagyunk olyanok, akik a szívünkben is őrizzük emlékét még hosszú időn keresztül. Emlékszünk a maximális precizitásra törekvő előadásaira, emlékszünk fanyar humorára, emlékszünk arra, hogy milyen magas hőfokon tudott lelkesedni. Nemcsak a matematika szépsége tudta lelkesíteni, hanem például a zene, főleg J. S. Bach zenéje (Bachnak alighanem majdnem minden műve megtalálható impozáns CD-gyűjteményében), meg a sport is. A sport nemcsak nézőként vagy szurkolóként tudta tűzbe hozni: máig él bennem annak emléke, hogy − túl az ötvenedik születésnapján − milyen gyermeki lelkesedéssel vett részt egy részben általam szervezett pingpong csapatmeccsen, amelyen tanszékünk csapatának ellenfele egy "Közgázos" matematikusokból álló csapat volt. A pingpongot egyébként is szerette, de még jobban szerette a sakkot. Volt olyan időszak, amikor a BEAC igazolt játékosaként rendszeresen részt vett csapatbajnoki mérkőzéseken, a vidéki helyszínekre egy-két csapattársát is vitte

magával a Trabantján. Czách tanár úr békét sugárzó egyénisége sokunk számára példa volt.

Szilágyi Tivadar

ny. egyetemi docens

---

nekrológ analízis

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

A pedagógus a számítógépek korában

45 évvel ezelőtt, 1976 augusztusában hunyt el Kalmár László váratlanul, az MTA mátraházai üdülőjében – amint ezt Péter Rózsa megemlékezésében olvashatjuk a Szegedi Tudományegyetem Kalmár László emlékoldalán: http://www.inf.u-szeged.hu/projectdirs/kalmar/elete.php.

De ezen az oldalon található Kalmár László önéletrajza is, amelyből nagyon érdekes részletek derülnek ki matematikai munkásságáról, külföldi szakmai útjairól. Ugyanezen a helyen tették közzé *A pedagógus a számítógépek korában* című interjút Kalmár László akadémikussal, ami eredetileg a Köznevelés című folyóirat 1974. május 17-i számában jelent meg. (Az interjút készítette N. Sándor László.) Érdemes végigolvasni, Kalmár professzor véleménye, akkori meglátásai milyenek voltak a számítógép felhasználásáról, különösen az oktatásban. Mai szemmel nézve is előremutatóak!

Néhány 1974-es gondolata:

…A számítógépes, pontosabban a számítógép segítségével végzett oktatás az audio-vizuális tanítás újabb fokozata: minden gyerek előtt ott lehet egy külön képernyő, egy fényceruza meg egy írógép, amelynek révén kapcsolatot tart a számítógéppel. Válaszolhat a kapott kérdésekre, kérdezhet maga is, és megkaphatja a helyes választ is tőle. Belép ily módon az oktatásba az a pedagógus, „aki” egyidejűleg minden gyerekkel egyénileg tud foglalkozni.

…A tantervek megreformálásánál – véleményem szerint – már arra is gondolni kell, hogy a számítástechnika alapjai hovatovább az általános műveltség részét képezik. Ez annyit jelent, hogy be kell iktatnunk egy „számítástechnika” című tárgyat. Ezenkívül szinte minden tantárgy keretében tárgyalni kell, hogyan alkalmazható a számítógép az illető szakterületen.

…Az, amit viszont például Varga Tamás honosított meg hazánkban – Pólya György és Dienes Zoltán didaktikai gondolataiból kiindulva, de azokat lényegesen továbbfejlesztve –, az a matematikaoktatási tömegbázis kiszélesítésének útja. Ez jó út.

…Ismét aláhúzom: a gép nem helyettesítheti a pedagógus szakértelmét, sőt előtérbe állítja azt. A gépre nem bízunk emberi feladatot, a gép csak segédeszköze az embernek. Az orvos diagnózisát sem készítheti el a gyógyítás szolgálatába állított gép. Nincs gépi gyógyítás, sem gépi diagnosztika orvos nélkül. Gépi oktatás sincs: ellenben van – lesz – gép segítségével végzett oktatás, amelyből soha nem hiányozhat az élő szó varázsos ereje.

---

informatika matematikatanítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

facebook

Szerkesztő 2021. SZEPTEMBER, PORTRÉ – INTERJÚ

Matematikus történetek: T. Sós Vera

T. Sós Vera matematikus, akadémikus, professor emerita kivételes tudása, személyisége itthon és külföldön is mindenkit lenyűgöz. Egyike azoknak, akiknek neve fémjelzi a magyar matematika 20-21. századi történetét. Ezért is közöljük újra a vele csaknem 20 évvel ezelőtt készült interjút, a magyar televízióban 2004-ben leadott riportfilmet (rendező: Pataki Éva, szakértők Ács Katalin, Pataki János, hossz: 29.10 perc, Presidents Productions Kft 2001-2002), a *Matematikus történetek* sorozat egyik részét. A kisfilm a Széchenyi-díjas kutató, az MTA rendes tagja, az ELTE díszdoktora 70. születésnapjának ünneplésekor készült. A videóban feltűnnek kollégái, barátai (sajnos már nem mindegyikük él), első kézből tudhatjuk meg, milyennek látták Gallait, Erdőst, Turánt... (Előző számunkban megnézhető a Lovász Lászlóról készült kisfilm, következő számainkban láthatják a sorozat további darabjait is.)

A most következő videó közlési jogát 3 évre vásárolhattuk meg. Felhívjuk olvasóink figyelmét, hogy az MTVA által az Érintő elektronikus folyóirat weboldalán 3 éves felhasználásra átadott 2004-ben műsorra tűzött felvételt harmadik fél semmilyen formában nem használhatja!

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

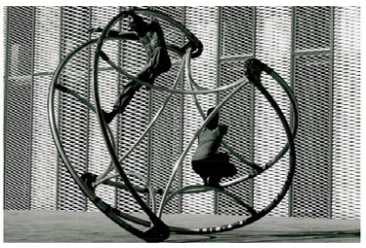
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÖST GERGELY.*)

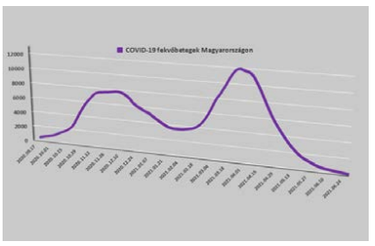


Henry Segelman, Figula Ágota

2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Gördülő akrobatikus eszközök

Különleges témájú *Henry Segerman* nemrég az Amerikai Matematikai Társaság *Notices* folyóiratában (a 2021. 7. számban) megjelent cikke gördülő akrobatikus eszközökről. Izgalmas képek és videók mutatják a cikk-cakk-gördülő eszközök mozgását – belsejükben az akrobatákkal. Geometria, fizika, matematika: a cikket a fordító, *Figula Ágota* kissé átsruktúrálta és lerövidítette. Tovább...

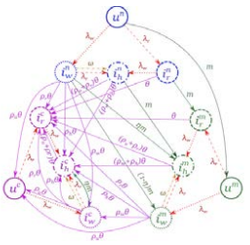


Dénes Attila

2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Epidemiológia és Modellezés Workshop, Kecskemét, 2021. július 14–16.

2021. július 14. és 16. között Kecskeméten rendezték meg az Epidemiológia és Modellezés Workshopot, amelyen a Járványmatematikai Modellező és Epidemiológiai Projekt munkatársai mellett számos további, a témában aktív kutató is részt vett. A javuló járványhelyzetnek köszönhetően a kutatók személyesen is találkozhattak és beszámolhattak az elmúlt több mint egy év eredményeiről. Az érdekes előadások lényegét *Dénes Attila* foglalta össze.



Juhász Nóra

2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Kiszámított emlékezet

A Szegedi Tudományegyetem és a Semmelweis Egyetem kutatói közötti együttműködés keretében megszületett egy olyan új epidemiológiai modell, amely egy, a szokásos kezelésekre rezisztens baktériumfertőzés eredetét vizsgálja; az ezzel kapcsolatos orvosi-matematikai tanulmány idén jelent meg a Nature Communications folyóiratban. *Juhász Nóra* írása az említett cikkből emel ki és követ végig egy matematikailag érdekes vezérfonalat: bemutatja, hogyan alkalmazható ez az új modell a múlt "megjóslására", vagyis az ismert jelen alapján a rezisztens fertőzés ismeretlen eredetének visszafejtésére. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Henry Segelman, Figula Ágota 2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Gördülő akrobatikus eszközök

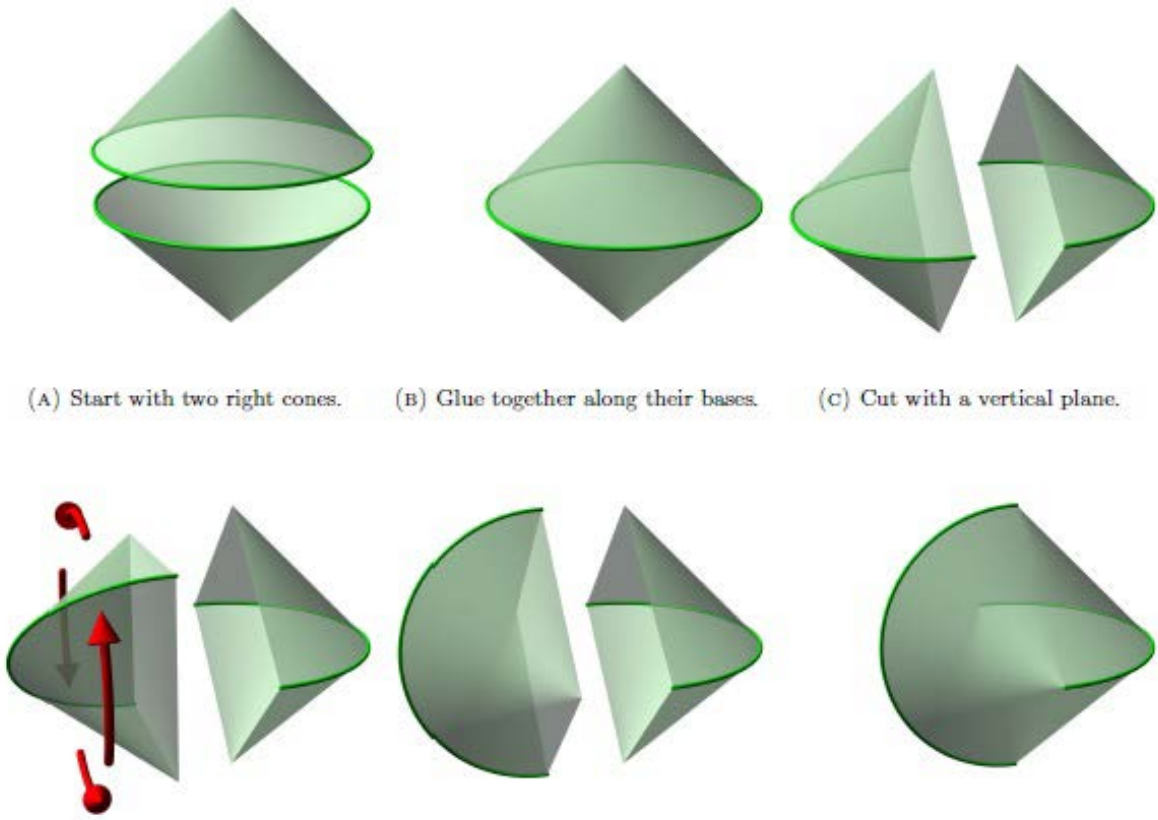
Az akrobatika egyik népszerű ága, amikor akrobaták egy nagy fémkeret mozgását a testsúlyuk fémkereten belüli mozgatásával egyensúlyozva gurítják a fémkeretet a színpadon. Az egyik népszerű akrobatikus eszköz a *német kerék*. Két párhuzamos gyűrűből áll, amelyet fokok és fogantyúk kötnek össze (lásd 1. ábra), ezeket fogják az akrobaták.

1. ábra

Egy kevésbé ismert változata ezeknek az eszközöknek a cikk-cakk-gördülő, amely Toni Vighetto találmánya (lásd 2. ábra).

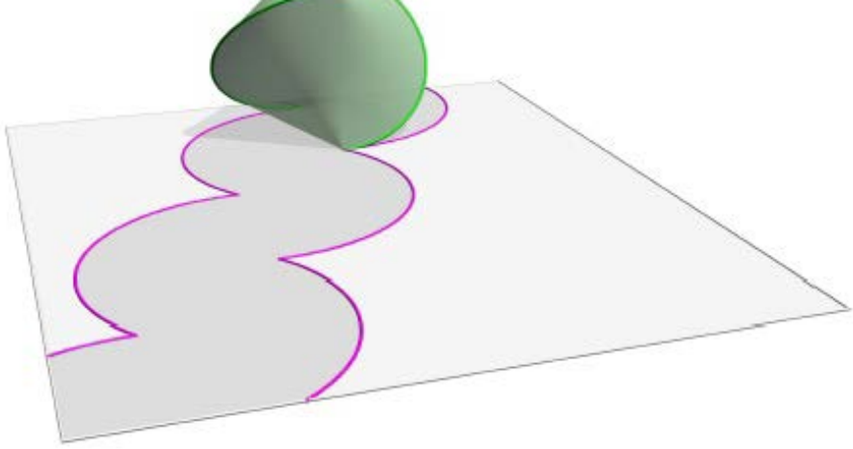
2. ábra

Mozgását a https://bit.ly/3wgmvEP oldal videója mutatja. Lényegében ugyanúgy mozog, mint a *gömbicsavartkúp* ([3]), amelyet a 3. ábrán látható módon konstruálunk két derékszögű egyenes kúpból.



3. ábra

A 4. ábrán a *gömbicsavartkúp* mozgását látjuk a síkon.



4. ábra

A cikk-cakk-gördülő eszköz esetében a gömbicsavartkúp félköríveit hurkok helyettesítik, amelyek szorosan közelítik a félköríveket. Az eszköznek azon részeit, amelyek kapcsolatba kerülnek a színpaddal, miközben az eszköz mozog, *síneknek* fogjuk nevezni. A maradék struktúra a síneket kapcsolja össze, és biztosítja a művésznek, hogy lépjen vagy megtartsa magát rajtuk.

Marco Paoletti, világhírű zsonglőr és cirkuszi artista a következő kérdést vetette fel a cikk-cakk-gördülő eszközzel kapcsolatban: jóllehet az eszköz cikk-cakk alakban mozog a színpadon, egy teljes fordulat után ugyanabba az irányba néz, mint a mozgás kezdetén. Nagy léptékben így egyenes vonalban mozog, akárcsak a német kerék. Ezért az akrobatának, hogy ki ne fusson a színpadról, meg kell állítania az eszközt és visszafelé haladnia vele, megtörve ezzel az előrehaladó mozgás lendületét. Marco azt kérdezte, lehetne-e konstruálni olyan eszközt, amelyik kiküszöböli ezt a problémát: például ha a cikk-cakk-gördülő két félköre különböző méretű lenne, akkor az eszköz kört írna le, miközben cikk-cakkban mozog? Henry Segerman a ([2]) cikkben ennek a kérdésnek a megválaszolásával foglalkozik, és javaslatot tesz néhány alternatív eszközre. A guruló eszközre a következő feltevést tesszük:

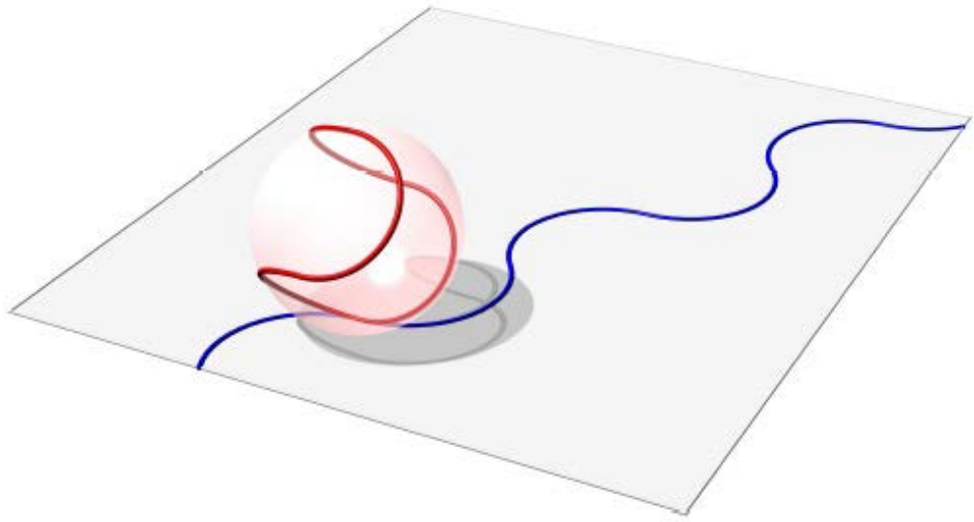
1. feltevés. *Az eszköz tömegközéppontja nem változtatja a magasságát mozgás közben.*

Ha ez a feltevés nem teljesül, akkor az eszköz mozgása során lesznek pillanatok, amikor a tömegközéppont magassága egy lokális minimumnál lesz. Egy ilyen pontból való elmozdulás munkát igényel az akrobata részéről. Ehhez elegendő súrlódás szükséges a keret és a színpad között a csúszás elkerülése érdekében. Az előadónak nem könnyű megtartania az eszközt egy bizonyos egyensúlyi pontnál, és nincs más választása, mint hagyja, hogy tovább guruljon. Mindezek korlátozzák, milyen módon használhatja az akrobata az eszközt. Ha az 1. feltevés teljesül, akkor az előadó minden konfigurációban kontrollálni tudja az eszköz mozgását. Elég, ha egy kicsit változtat a pozicióján, eltolva a keret és a saját közös tömegközéppontját, és így egyensúlyozza az eszközt.

Marco kérdésére válaszolva megmutatjuk, hogy egy kevésbé szimmetrikus cikk-cakk-gördülő eszköz, amelynek két félköre különböző méretű, a 8. ábrán látható mozgást ír le a porondon, azaz három ciklus után visszatér az eredeti helyzetébe. Sajnos egy ilyen eszköz fizikai megvalósítása problémába ütközik, mivel ha állandó sűrűségű fémcsövekből készítjük el, akkor tömegközéppontja nem teljesíti az 1. feltevést. Ez a probléma elvileg kiküszöbölhető, ha a keretre bizonyos helyeken plusz súlyokat helyeznek el. Az 5. és a 6. tételek azt mutatják, hogy szükségszerűen nehéz olyan eszközt konstruálni, amely a színpadon marad, anélkül, hogy az akrobata megállítaná és visszafordítaná. Ha általánosítjuk a konstrukciónkat, és megengedünk többszörös hurkokat, akkor azonban lehetővé válik, hogy az 5. és a 6. tétel is teljesüljön. Két ilyen eszközt fogunk bemutatni. Az első (lásd 10/a. és 10/b. ábrák) az egyenes vonalú mozgáson kívül 270°-os elfordulásra is képes (lásd 10/c. ábra). A második eszközzel (lásd 11/a. és 11/b. ábrák) a 11/c. ábrán látható köröket írhatjuk le a porondon.

A gördülő eszköz konstrukciója, megvalósításának feltételei

Az 1. feltevéssel élve egy képzeletbeli gömböt rögzítünk a kerethez, amelynek sugara a tömegközéppont színpadtól mért távolsága. Ezt hívjuk *gördülő gömbnek*. Az eszköz mozgásának minden pillanatában a gördülő gömb egyetlen pontban érinti a színpadot. Ezeknek a pontoknak a nyomon követése két görbét állít elő: σ-t a gördülő gömbön és ρ-t a színpad síkján. Az 5. ábra azt a példát mutatja, ahol σ a *teniszlabdagörbe*, ami négy egybevágó félkörből áll.



5. ábra

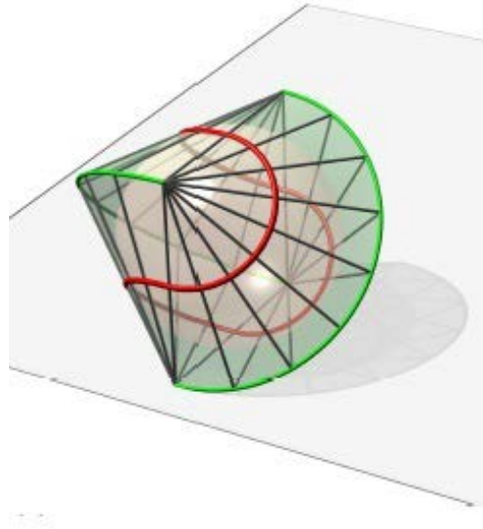
Általában, fel fogjuk tenni, hogy σ egy szakaszonként sima egyszerű zárt görbe. Mostantól feltesszük, hogy a gördülő gömb sugara egységnyi. Legyen $s(t)$ a σ görbe természetes paraméterezése (egység sebességű paraméterezése). Legyen $r(t)$ a megfelelő síkbeli ρ görbe természetes paraméterezése. Ha az eszközhöz rögzített vonatkoztatási rendszerben dolgozunk, nem a színpadhoz rögzítettben, akkor úgy választhatjuk a rendszert, hogy a gördülő gömb középpontja legyen az origó.

Az eszköz számára a sínek halmazát a következőképpen konstruáljuk meg. Először egy, a gördülő gömböt érintő $S(t,u)$ vonalkázott felületet konstruálunk, ami olyan vonalakból áll, amelyek merőlegesek mind $s(t)$-re (a gömb centrumából a felszínére mutató vektor), mind $s'(t)$-re, ahol $s'(t)$ az $s(t)$ görbe első deriváltja (sebesség), és hasonlóképpen jelöljük a második deriváltat (gyorsulás). Azaz minden rögzített t_0 esetén $S(t_0,u)$ a következő egyenes:

$$S(t_0,u) = s(t_0) + ub(t_0), \tag{1}$$

ahol $b(t_0) = s(t_0) \times s'(t_0)$ egy egységvektor. Felhasználva, hogy $s(t) \times s''(t) = 0$, direkt számolás mutatja, hogy az $S(t,u)$ felület normálisa nem függ u-tól. Ebből következik, hogy $S(t,u)$ Gauss-görbülete 0, így $S(t,u)$ fejleszthető felület ([4], 91. old.).

Ha σ egy elegendően szép görbe, megcsonkítva az $S(t_0,u)$ egyeneseket, ahol ezek metszik a σ más pontjaiból jövő egyeneseket, egy S zárt felületet kapunk. Az 5. ábrán mutatott példában, a teniszlabdagörbe által generált zárt felület a gömbicsavartkúp (lásd 6/a. ábra). Egy zárt felület jól funkcionál egy szilárd objektum, mint a gömbicsavartkúp, határaként. Az akrobatikus eszköz számára az S vonalkázott felületet helyettesíthetjük egy-dimenziós sínek egy K halmazával, amely ugyanilyen módon gördül σ mentén. A K halmaznak vehetjük az $S(t,u)$ felület önmagával vett metszéspontjainak halmazát. A 6/a. ábrán ezek a gömbicsavartkúp félkörei. A cikk-cakk-gördülő hurkai a σ mentén gördülő síneknek másik halmaza.

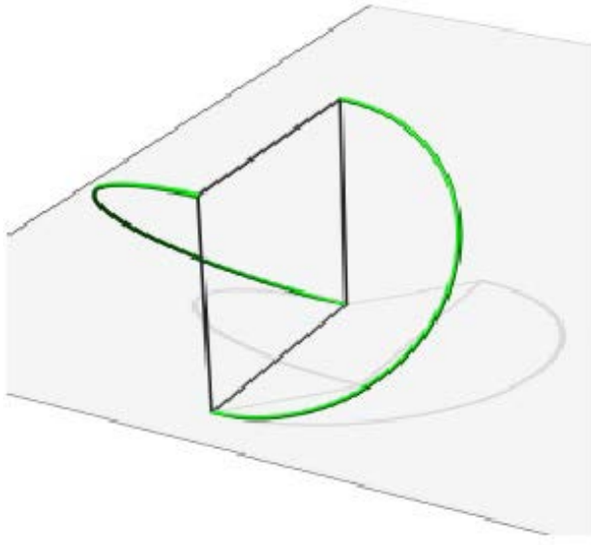


6/a. ábra

Általában K-ra az a megszorítás, hogy minden $S(t_0,u)$ vonal esetén, a $K \cap S(t_0,u)$

halmaz tartalmazzon egy pontot a $\sigma \cap S(t_0, u)$ valamelyik oldalán. Ez biztosítja, hogy az eszköz ne boruljon fel a gördülő gömb centrumát és az $S(t_0, u)$ egyenest tartalmazó síkban.

Eszközünk konstrukciójához szükségünk van még olyan extra struktúra hozzáadásához, amely összeköti a két félköríves sínt. A 6/b. ábrán ez a vonalkázott felület négy vonala, amely egy négyzetet alkot.



6/b. ábra

A teljes méretű fizikai eszköz esetén ezek a vonalak nem szükségesek. A 2. ábrán ezeket azok a csatlakozó ívek helyettesítik, amelyek az eszköz közepe felé görbülnek. Ezek megkönnyítik az akrobatának, hogy megkapaszkodjon, és megakadályozzák, hogy megragadjon egy rudat, amely a padlót érintve balesetet okozhat.

Milyen nagy legyen a porond?

Marco kérdésének a megválaszolásához meg kell értenünk a színpad síkján történő mozgást az eszköz gurulásakor. Azt akarjuk tudni, hogy a ρ görbe korlátos-e? Mivel a σ görbe zárt, ehhez meg kell értenünk az eszköz helyezetében és irányában fellépő különbségeket, miközben egyszer végiggördül σ-n. A síknak ezt az izometriáját σ holonómiájának hívjuk és $I(\sigma)$-val jelöljük.

2. lemma. *A ρ görbe akkor és csak akkor nem korlátos, ha az $I(\sigma)$ holonómia egy nemzérus vektor általi eltolás.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy $I(\sigma)$ egy transzláció. Ekkor az eszköz ismétlődő gördülése σ mentén megismétli a transzlációt, így az eszköz végül eléri akármilyen porond szélét. Másrészről, ha $I(\sigma)$ rotáció, akkor bár a ρ út soha nem tér vissza

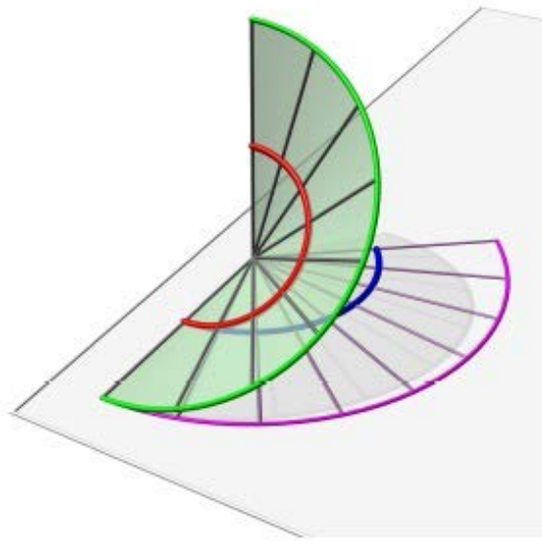
ugyanabba a helyzetbe és irányba, mint a mozgás kezdetén, nem kerülhet távolabb a forgás centrumától, mint a σ menti első mozgás során. Így egy véges sugarú porond tartalmazni fogja ρ-t. □

Így Marco kérdésének a megválaszolásához meg kell értenünk a kapcsolatot a σ görbe és a között a szög között, amellyel az eszköz elfordul, mialatt σ mentén gördül.

3. tétel. *Az eszköz elfordulási szöge, mialatt egyszer végiggördül a σ egyszerű zárt görbén, 2π és a gömb σ által határolt valamelyik komponensének felszíne közötti különbség.*

Megjegyzés: A gömb felszíne 4π. A tételben szereplő két különbség előjeltől eltekintve megegyezik. A bizonyítás során a Gauss-Bonnet tételt alkalmazva megmutatjuk, hogy a tételben szereplő felszín különbség σ teljes geodetikus görbületével egyenlő. Ez megegyezik a ρ egy periódus alatti teljes geodetikus görbületével, amely akkor és csak akkor 0, ha a holonómia transzláció.

Bizonyítás: Miközben a gördülő gömb gurul a síkon, ezzel együtt gurul a vonalkázott felületet is. Így síkbeli egyenesek $R(t,u)$ egy-paraméteres családja jön létre, amelyet az $S(t,u)$ egyenesekből kapunk, amikor azok a síkot érintik. Például, ha σ egy körív, akkor az $S(t,u)$ megfelelő részhalmaza része egy kúpnak. Az $R(t,u)$ egy-paraméteres család megfelelő részhalmaza egy körszelet (lásd 7. ábra).



7. ábra

Ekkor világos, hogy $S(t,u)$ izometrikus $R(t,u)$-val, és ez általánosan is igaz: a fejleszthető felület izometrikus a síkkal ([4]).

Legyen $c(t)$ egy sima természetes paraméterezésű görbe az $\mathbb{R}^3$ tér F felületén. Legyen

$n(t)$ normális F-hez $c(t)$-ben. Ekkor $c'(t)$ és $n(t)$ merőlegesek és így $\{c'(t), n(t), n(t) \times c'(t)\}$ $\mathbb{R}^3$ ortonormált bázisát alkotja. Így $c''(t)$-t felírhatjuk, mint $c'(t)$, $n(t)$ és $n(t) \times c'(t)$ lineáris kombinációját. Sőt, $c''(t)$ merőleges $c'(t)$-re mivel $c(t)$ természetes paraméterezésű. Így

$$c''(t) = \kappa_n(t)n(t) + \kappa_g(t)(n(t) \times c'(t)). \tag{2}$$

Itt $\kappa_n(t)$ a normál görbülete, $\kappa_g(t)$ a geodetikus görbülete c-nek a t pillanatban. A geodetikus görbület *belső*, azaz invariáns a felület izometriáival szemben. Továbbá, $S(t,u)$-n az $s(t)$ geodetikus görbülete megegyezik $R(t,u)$-n az $r(t)$ geodetikus görbületével. Mivel σ egyszerű, a gördülő gömböt két részre bontja. Legyen P a σ bal oldali, Q a jobb oldali része. Alkalmazzuk a Gauss-Bonnet tételt P-re:

$$\int_P K dA + \int_{\partial P} \kappa_g ds = 2\pi\chi(P). \tag{3}$$

A második integrál összege a ∂P sima darabjai mentén vett integráloknak plusz azoknak a szögeknek az összege, amelyeket a sima darabok zárnak be a találkozásuknál. A K Gauss görbület 1, a P felület ∂P határa σ, a $\chi(P)$ Euler karakterisztika 1. Így átrendezve (3)-at azt kapjuk:

$$2\pi - A(P) = \int \kappa_g ds. \tag{4}$$

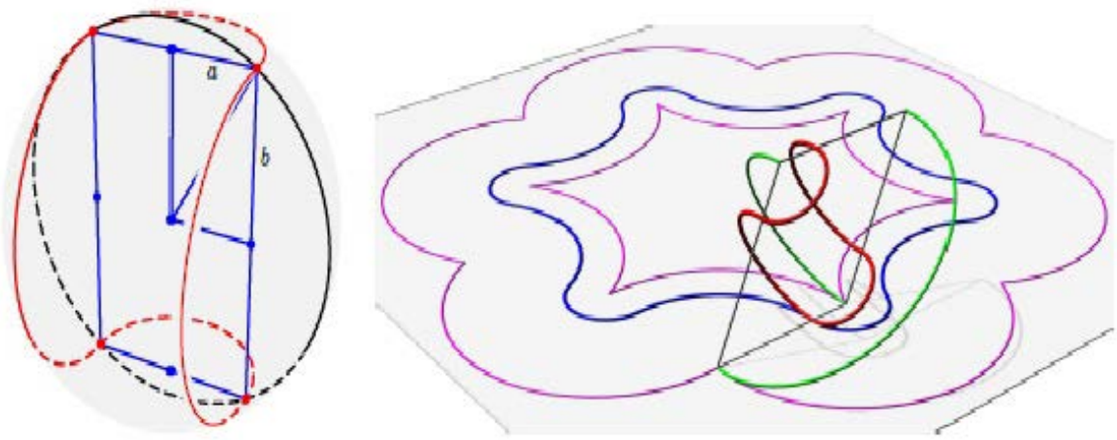
Mivel σ geodetikus görbülete $S(t,u)$-n egyenlő ρ geodetikus görbületével $R(t,u)$-n, tekinthetjük κ_g-t $R(t,u)$ geodetikus görbületének. ρ síkgörbe, ezért normál görbülete 0. Így κ_g éppen a ρ síkgörbe előjeles görbülete. Ismét, az integrál megkapható, mint a sima darabok mentén vett integrálok összege, plusz azon szögek összege, amelyeket a sima darabok a sarkoknál bezárnak. Tetszőleges saroknál a szögek összege ugyanaz a síkon és a gömbön. Így a (4) egyenlet jobb oldala a ρ görbe irányának teljes változását adja, amint egyszer körbefutunk σ-n. Ebből következik a 3. tétel. □

A 3. tételt alkalmazva, a fordulási szög 0, ha a P felszíne 2π, azaz pontosan a gördülő gömb felszínének a fele. A fordulási szög nem lehet 2π valamely más egész többszöröse, hiszen ekkor a P vagy a Q felszíne kisebb vagy egyenlő mint 0. Ez lehetetlen anélkül, hogy σ vagy önmagát metszené vagy triviális lenne.

Ennélfogva:

4. következmény: *Egy gördülő eszköz korlátlan porondot kíván akkor és csak akkor, ha a σ görbe két egyforma területű részre bontja a gördülő gömb felszínét.*

Ez történik a cikk-cakk-gördülő eszköz esetében, ahol σ a teniszlabdagörbe (lásd 5. ábra). A *deformált teniszlabdagörbék* egy-paraméteres családjába négy félkörből álló görbék tartoznak, amelyek végpontjai a gördülő gömb egyik főkörét egy téglalap csúcsaiban metszik (lásd 8. bal oldali ábra).



8. ábra

Ekkor két különböző, a, b sugarú félkörünk van úgy, hogy $a^2+b^2=1$. Így a gömb két komponensének felületét a következőképpen kapjuk: A gömb 4π felszíne a következőkből áll: két gömbsüvegből, amelyek határa az a sugarú körvonal, két gömbsüvegből, amelyek határa a b sugarú körvonal és a maradékból, ami két görbült téglalap. Az a sugarú körvonal által határolt gömbsüveg felszíne: $2\pi(1-\sqrt{1-a^2})=2\pi(1-b)$. Ezért a két görbült téglalap felszíne:

$$4\pi-2(2\pi(1-b))-2(2\pi(1-a))=4\pi(a+b-1). \tag{5}$$

Így az a sugarú körvonal által határolt gömbsüveget tartalmazó komponens felszíne:

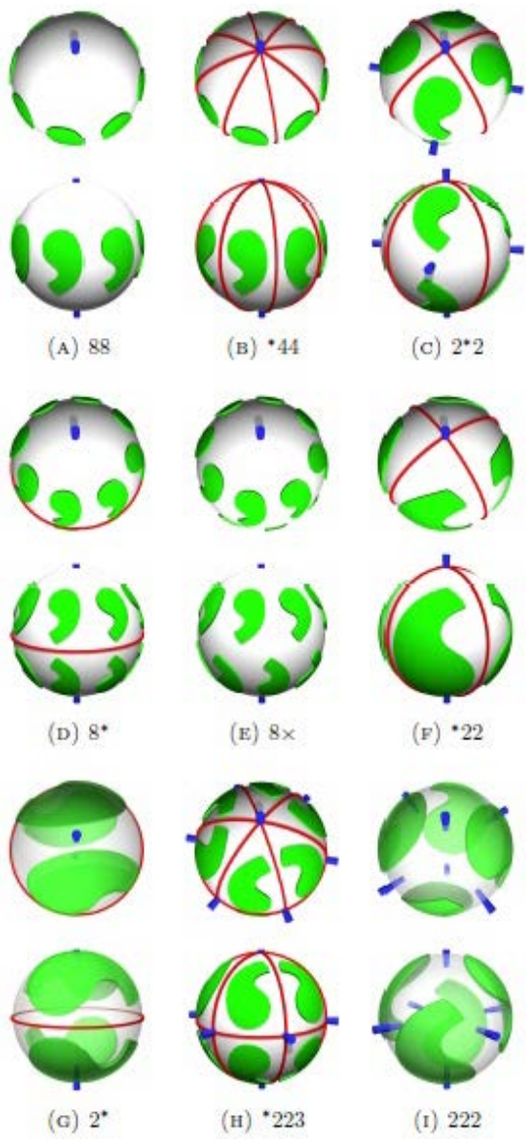
$$2(2\pi(1-b))+\frac{1}{2}(4\pi(a+b-1))=2\pi(1+a-b). \tag{6}$$

Ezért az eszköz elfordulási szöge $2\pi(b-a)$. Megadva egy kívánt elfordulási szöget, a-ra és b-re megoldhatjuk az egyenletet. Például ha $\frac{2\pi}{3}$ elfordulási szöget akarunk, akkor $a=(\sqrt{17}-1)/6$, $b=(\sqrt{17}-1)/6$. A 8. jobb oldali ábra egy ilyen paraméterű eszközt és mozgását mutatja. Ez az eszköz azonban nem teljesíti azt a feltevésünket, hogy tömegközéppontja a gördülő gömb centruma. A következő tétel egy szimmetrián alapuló kritériumot ad arra, hogy a végső fizikai eszköz tömegközéppontja az origó legyen:

5. tétel: *Ha az eszköz szimmetriacsoportja csak a gördülő gömb O origóját hagyja pontonként fixen, akkor az eszköz tömegközéppontja O.*

Bizonyítás: Definició szerint egy objektumot a szimmetriacsoportjának minden eleme fixen hagyja. Így az objektum tömegközéppontja is fix. A tétel feltétele mellett a tömegközéppontnak az O-ban kell lennie. □

Egy korlátos háromdimenziós objektum szimmetriáinak talán legismertebb jelölési rendszere a Conway-Thurston jelölés ([1]). Ez a jelölés az $O(3)$ ortogonális csoport véges részcsoportjait írja le, $\mathbb{R}^3$ azon izometriáit, amelyek az origót fixen hagyják. A 9. ábra néhány példát mutat szimmetrikus objektumokra a Conway-Thurston jelölésükkel.



9. ábra

Minden objektumot felül- és oldalnézetből látunk. A forgatások fixpontjai kékkel vannak jelölve, a tükrözéssel szemben fix síkok pirossal. A jelölés egész számok egy sorozata, ami tartalmazhatja a $*$ vagy a $\times$ szimbólumot. Ha nem tartalmazza ezeket a szimbólumokat, akkor egy n szám azt mutatja, hogy a gömbnek van egy pontja, amely fix az n-szeri ($360/n$ szögű) forgatással szemben. A 9 (A) ábrán két különböző pont van, amely fix a 8-szoros forgatással szemben, így a jelölés 88. A $*$ szimbólum jelenléte azt mutatja, hogy létezik tükrözéssel szemben fix szimmetriasík. Egy n szám a $*$ jel után azt jelenti, hogy létezik egy pont a gömbön, amelyen keresztül n különböző tükrözéssel szemben fix sík halad. A 9 (B) ábrán két különböző pont létezik, amelyeken keresztül 4 szimmetriatükör-sík halad, így a jelölés $*44$. Egy szám a $*$ szimbólum előtt azt jelenti, hogy létezik egy pont a korábban leírt forgatási szimmetriával. Végezetül, egy tükrözéstől különböző irányításváltó szimmetria létezését a $\times$ jelöli. A 9 (E) ábrán van egy pont, amely fix a 8-szoros forgatással szemben, és létezik egy olyan szimmetria, amely egy forgatás és egy tükrözés kompozíciója. A gömbi szimmetriatípusok teljes listáját, és ennek a bizonyítását megtaláljuk ([1])-ben. Azok a szimmetriatípusok, amelyeknek több fixpontjuk van, mint az origó, az 1, nn és a $*nn$, $n \geq 1$. Példaként, az eredeti cikk-cakk-gördülő eszköz szimmetriatípusa $2*2$ (lásd 9 (C) ábra), így a tömegközéppontja az origóban van. A módosított teniszlabdagörbéhez tartozó cikk-cakk-gördülő eszköz szimmetriatípusa $*22$ (lásd 9 (F) ábra), így nem lehet a tömegközéppontja az origó. A következő tétel azt mutatja, hogy más egyszerű zárt görbe esetén is lehetetlen az, hogy nem egyenlő felületű részekre osztja a gömböt de a tömegközéppont az origó.

6 tétel: *Tegyük fel, hogy σ egy szakaszonként sima egyszerű zárt görbe a gömbön. Ha σ a gömböt két nem izometrikus részre bontja, akkor σ G szimmetriacsoportja nemcsak a gömb origóját rögzíti pontonként.*

Bizonyítás: Legyen H a G irányítástartó részcsoportja. Először tegyük fel, hogy H triviális. Ha $G = H$ akkor G mindent fixen hagy és készen vagyunk. Egyébként, G-t egy másodrendű elem generálja: vagy egy tükrözés vagy egy antipoláris leképezés. Az első esetben (szimmetriatípusa $*$) G fixen hagyja a tükrözés szimmetriasíkját, így készen vagyunk. A második esetben (szimmetriatípusa $\times$) az antipoláris leképezés felcseréli a σ által határolt két kiegészítő komponenst. Így ezek izomorfak, ellentétben a feltevéssel.

Segédállítás: *Legyen $g \in H \setminus \{1\}$. Ekkor g egy rotáció. A σ hurok nem tartalmazza g fixpontjait.*

Bizonyítás: Euler tétele szerint a gömb minden nemtriviális irányítástartó izometriája rotáció. Indirekt tegyük fel, hogy $p \in \sigma$ g egy fixpontja. Mivel σ egyszerű, így p egy kis környezetét két komponensre bontja. De g nem cserélheti fel a két komponenst, mivel a σ által határolt kiegészítő részek nem izometrikusak. $\square$

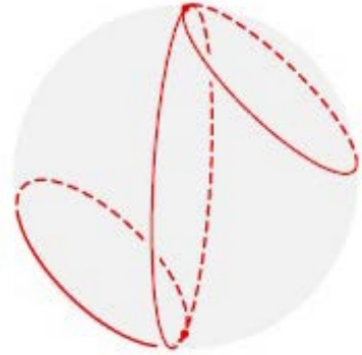
Következőnek tegyük fel, hogy H véges és nemtriviális. Megmutatjuk, hogy H ciklikus. A Segédállítás miatt és mivel H véges, H hatása a σ hurkon szabad, és sehol sem folytonos. Ebből következik, hogy a $\sigma \to \sigma/H$ egy fedő leképezés. Az egyetlen tér, amely a kört lefedi a kör. A H csoport ekkor a kör fundamentális csoportjának egy faktorcsoportja, így ciklikus. Ennélfogva a H csoport egy tengelyt pontonként fixen hagy, és így fixen hagy a gömbön egy antipoláris pontpárt, a-t és a'-t . A Segédállítás miatt σ sem a-t sem a'-t nem tartalmazza. Megmutatjuk, hogy σ szeparálja a-t és a'-t. Ehhez tekintsük az S^2/H hányadosteret. Ez ismét egy kétdimenziós gömbfelület két speciális ponttal, $\bar{a}$ és $\bar{a}'$-vel. Ha σ/H szeparálja $\bar{a}$-t $\bar{a}'$-től, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor válasszunk egy λ utat $\bar{a}$-ból $\bar{a}'$-be, ami nem metszi σ/H-t. A λ ősképe szétvágja a gömböt legalább két komponensre, amelyek mindegyike metszi σ-t. Ez ellentmond annak, hogy σ összefüggő.

Ha $G = H$ (szimmetriatípusa nn) akkor készen vagyunk. Egyébként, G-t megkapjuk H-ból, ha hozzáadunk egyetlen irányításváltó izometriát, és vesszük a csoport lezártját. Az új elemnek a tengelyt mint halmazt fixen kell hagynia, sőt a tükrözés általi konjugálás új forgatásokat hoz létre. Az új elem sem cserélheti fel a-t és a'-t, mivel azok a σ két nem izometrikus kiegészítő komponensére esnek. Így G ismét fixen hagyja a tengelyt. (Az új szimmetriatípus $*nn$. Mivel a és a' nem felcserélhető, ez kizárja a $*n$ és a $n\times$ típusokat).

Végül tegyük fel, hogy H végtelen. Ekkor H zárt végtelen részcsoportja $SO(3)$-nak. Így vagy a teljes $SO(3)$ csoport, vagy izomorf $SO(2)$-vel. Az első lehetetlen, mivel egy szakaszonként sima görbe nem metszheti a gömb minden pontját. Így H izomorf $SO(2)$-vel és σ egy körvonal. Mivel σ nem egyforma részekre bontja a gömböt, így nem főkör. Így σ G szimmetriacsoportja fixen hagyja σ tengelyét. $\square$

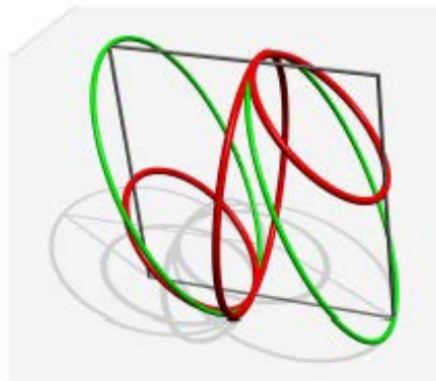
Ha általánosítjuk a konstrukciónkat, megengedve többszörös hurkokat, kielégíthetjük az 5. és 6. tételeket. Az ötlet, az, hogy a σ görbét a gördülő gömbbe ágyazott Σ gráffal helyettesítjük. A Σ gráf változatos hurkokat tartalmazhat, amelyek egyenletlenül osztják fel a gömböt, mégis a teljes gráf (és így az eszköz) szimmetriatípusa teljesíti az 5. tételt. Két ilyen eszközt mutatunk be:

$270°$*-os forduló eszköz:* Ez az eszköz mozoghat egyenes vonalon, mint a német kerék, de $270°$-os elfordulást is megenged, innen kapta a nevét. Ezért a Σ gráf tartalmaz egy főkört és két kisebb kört olyan sugárral, amely lehetővé teszi a $270°$-os elfordulást. A 3. tétel szerint a gömbsüveg felülete mindkét kis kör esetén $\frac{\pi}{2}$. Ebből adódik, hogy a kis kör sugara $r = \frac{\sqrt{7}}{4}$ (lásd a 10/a. ábrát).



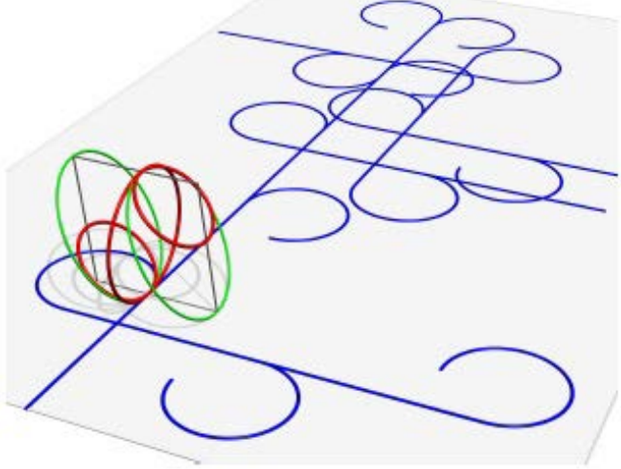
10/a. ábra

Az eszköz szimmetriája $2*$ (9 (G) ábra). Követve a korábban leírt konstrukciót, az eszköz modellje a 10/b. ábrán látható. Az eszköz sínpárja két, az ábrán zölddel jelölt ellipszis.



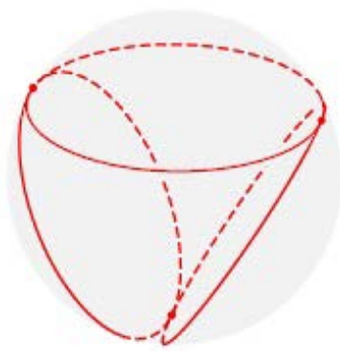
10/b. ábra

Ismét összekapcsoljuk a síneket bizonyos vonalakkal. Ezek a vonalak 10/b. ábrán a szürke paralelogrammát alkotják. A 10/c. ábrán az eszközzel megtehető utakat látjuk. A szemléltetett helyzetben, feltéve, hogy az eszköz távolodik tőlünk, folytathatja a gördülést egyenes vonalban, vagy $270°$-kal elfordulhat balra. Ha így tesz, akkor visszatér az eredeti állapotban (annak a pontnak a tekintetében, ahol a gömb érinti a padlót), de elmozdult és megváltoztatta az irányát a padlón. Másik lehetőség, hogy fél fordulatot előre gurul és ott $270°$-kal elfordul jobbra. Ezek együttesen lehetővé teszik, hogy az eszköz többé-kevésbé mindenütt mozogjon végtelen porondon vagy elforduljon, és ezzel egy (elegendően nagy) korlátos területen maradjon.



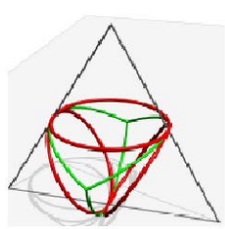
10/c. ábra

Három gyűrű eszköz: A következő eszköz a gördülő gömbbe ágyazható kör alakú hurokról tett megfigyelésen alapszik, amely $180°$-os fordulatnak felel meg. Alkalmazva a 3. tételt, a körök által határolt gömbsüveg felülete π. Így a körök sugara $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Három ilyen kör pontosan elfér a gördülő gömb egy főköre körül (lásd 11/a. ábra).



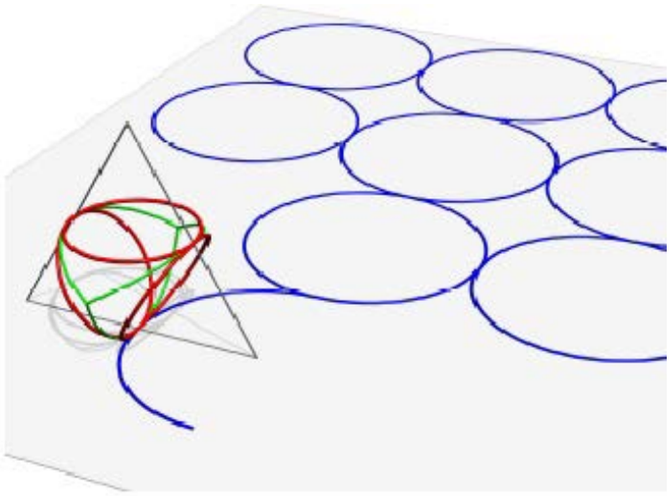
11/a. ábra

A három kör érinti egymást, az eszköz szimmetriatípusa $*223$ (lásd 9 (H) ábra). A korábban leírt módon generálva síneket ehhez az eszközhöz, megkapjuk a 11/b. ábrán mutatott modellt. A síneket ismét zölddel jelöltük. Ismét vonalakat adunk az eszközhöz a sínek összekapcsolására. Ezek végpontjai a három kör, mint alapkör által meghatározott kúp csúcsai. Itt a vonalak sokkal nagyobbá teszik az eszközt, mint csupán a sínek. Mint korábban, a teljes eszköz megépítéséhez ezek a vonalak nem szükségesek.



11/b. ábra

A kúpok csúcsait ki lehet cserélni a kúpon áthaladó kör keresztmetszetű sínekre, amelyek párhuzamosak Σ köreivel. Félpályát gurulva a körök egyike mentén a sínpálya egyik csúcsából a másikba, a porondon egy negyed körívű forgás történik. A jobbra és balra történő fordulások váltakozásával ez az eszköz közelíti egy cikk-cakk-gördülő eszköz mozgását, bár az artista természetesen más utat is választhat a sínpálya bármely csúcsában. Az eszköz néhány lehetséges elmozdulását a 11/c. ábra mutatja.



11/c. ábra

Irodalomjegyzék

[1] J. H. Conway, H. Burgiel and C. Goodman-Strauss, *The symmtries of things*, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008.

[2] H. Segerman, *Rolling Acrobatic Apparatus*, Notices in AMS, **68**, no. 7 (2021), 1106–1118.

[3] I. Stewart, *Cone with a twist*, Scientific American **281**, no. 4 (1999), 116–117.

[4] D. J. Struik, *Lectures on classical differential geometry*, Addison-Wesley Press, Inc., Cambridge, Mass., 1950.

Munkánkat a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Hivatal (NKFI) K132951 és az EFOP-3.6.1-16-2016-00022 projekt támogatta. A második projektet az Európai Unió és az Európai Szociális Alap finanszírozza.

Henry H. Segerman, *Rolling Acrobatic Apparatus*, Notices in AMS, **68**, no. 7 (2021), 1106–1118. cikkét fordította, átdolgozta: *Figula Ágota, Debreceni Egyetem, TTK Matematikai Intézet.*

© H. Segerman. A cikk a szerző engedélyével jelenik meg.

© Marco Paoletti. Az 1.ábra az engedélyével jelenik meg.

© Toni Vighetto. A 2. ábra az engedélyével jelenik meg.

---

alkalmazott fizika geometria

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

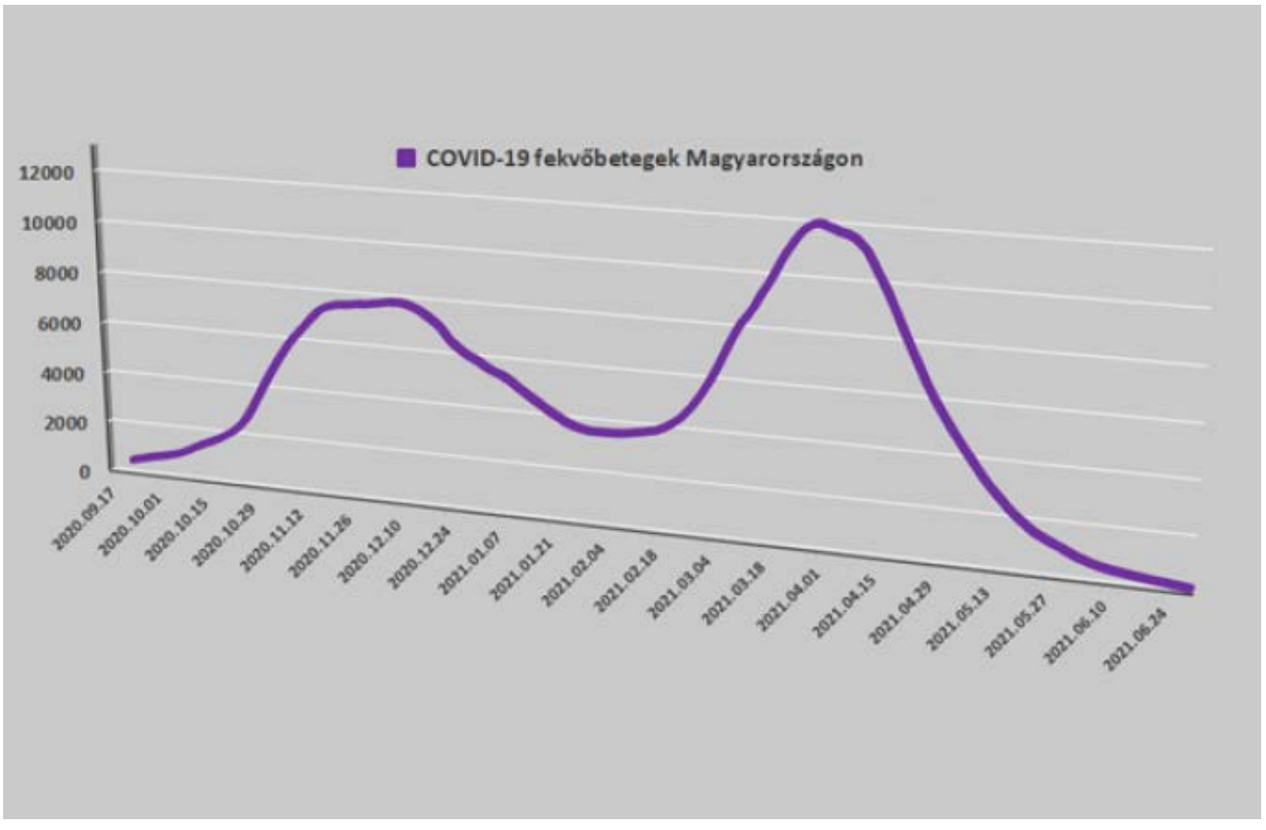
Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Dénes Attila 2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Epidemiológia és Modellezés Workshop, Kecskemét, 2021. július 14–16.



Alig néhány héttel az első magyarországi megbetegedést követően jött létre 2020 márciusában az Innovációs és Technológiai Minisztérium felügyelete alatt a Járványmatematikai Modellező és Epidemiológiai Projekt a COVID-19 járvány magyarországi terjedésének matematikai modellezésére, elemzésére, előrejelzések készítésére, hogy a döntéshozóknak támogatást nyújtson a bizonyítékokon alapuló döntéshozatalban. A multidiszciplináris projektben az ország több egyeteméről, intézetéből vesznek részt szakemberek, akik szakértelmükkel széles körű tudásbázist tudnak biztosítani az intézkedések kidolgozásához: matematikusok, biostatisztikusok, orvosok, epidemiológusok, szociológusok, népegészségügyi szakemberek stb. A projektben résztvevők feladatai közé tartozik többek között stratégiai anyagok készítése a döntéselőkészítéshez, folyamatos járványügyi helyzetértékelés, a legújabb tudományos eredmények és nemzetközi ajánlások összegzése, intézkedési forgatókönyvek vizsgálata. A kutatócsoport munkájához tartozik valamennyi releváns adat és információ összegyűjtése egy tudásközpontba, elemzések készítése, evidenciák értékelése, javaslatok kidolgozása, heti egyeztetések, napi és heti jelentések készítése, valamint az elért eredmények alapján tudományos publikációk készítése. A kutatók munkája három fő területre oszlik: a járványmatematikai modellezést dr. Röst Gergely, a Szegedi Tudományegyetem Alkalmazott és Numerikus Matematika tanszékének vezetője irányítja, a surveillance és epidemiológia részterületet dr. Oroszi Beatrix, a Semmelweis Egyetem Epidemiológiai és Surveillance Központjának mb. igazgatója vezeti, míg az egészségügyi adatok elemzésének vezetője dr. Szócska Miklós, a Semmelweis Egyetem Egészségügyi Közszolgálati Karának dékánja.

A javuló járványhelyzetnek köszönhetően a kutatók személyesen is találkozhattak és beszámolhattak az elmúlt több mint egy év eredményeiről: 2021. július 14. és 16. között Kecskeméten rendezték meg az Epidemiológia és Modellezés Workshopot, amelyen a Járványmatematikai Modellező és Epidemiológiai Projekt munkatársai mellett számos további, a témában aktív kutató is részt vett.

A háromnapos workshopon elsőként Oroszi Beatrix a járvány epidemiológiai vonatkozásairól beszélt. Előadásából kiderült, hogy a COVID-19 világjárvány igazolta a járványügyi szakemberek azon aggodalmát, miszerint a klímaváltozás, az antimikrobiális rezisztencia terjedése, a nemfertőző betegségek növekvő terhe, az újonnan megjelenő, illetve a visszatérő fertőző betegségek nagy kihívások elé fogják állítani az emberiséget a 21. században. Még a legfejlettebb országok sem voltak valóban felkészültek egy, a COVID-19-hez hasonló pandémiára.

Ezt követően Müller Viktor, az ELTE Biológiai Intézetének docense foglalta össze a vírusról, valamint a vírus és a szervezet kölcsönhatásairól összegyűlt tudományos ismereteket, érintve a vírus életciklusát és eredetét, a patogenezis mechanizmusait, és az immunválasz főbb jellemzőit.

Ezután Röst Gergely ismertette röviden a matematikai epidemiológia történetét, a járványmodellezés alapvető módszereit, és azt is bemutatta, hogyan lehet egyre komplexebb kompartmentmodelleket felépíteni, realisztikus időeloszlásokat és populációs heterogenitást beépíteni. Mindezt a COVID-19 pandémia példájával is illusztrálta.

Krisztalovics Katalin (OEK) követendő példaként ismertette a tajvani járványkezelést, ahol gyorsan, határozottan hozott innovatív intézkedések hatékony végrehajtása révén, a lakosság támogatásával, együttműködésével sokáig sikerült igen alacsony szintre szorítani a megbetegedések számát, ám később bebizonyosodott, hogy a hagyományos járványügyi intézkedésekkel egy olyan kórokozót, mint a SARS-CoV-2, nem lehet tartósan leküzdeni.

Papp Balázs (Szegedi Biológiai Kutatóintézet) előadásából kiderült, hogy a koronavírus-fertőzés terjedési láncának visszakövetésében és a vakcinák várható hosszú távú hatékonyságának előrejelzésében is fontos szerepet kap a vírus genomjának nyomon követesé és filogenetikai elemzése. A vírus teljes genetikai állományának vizsgálata más járványtani elemzésektől független információforrás, amely betekintést nyújt a magyarországi járványhullámok különbségeibe.

Ferenci Tamás, az Óbudai Egyetem docense előadásában a koronavírus-járvány példáin keresztül illusztrálva bemutatta a legfontosabb biostatisztikai kérdéseket, amelyek a járvány kezelése során felmerülnek: a különböző paraméterek becslése, előrejelzések készítése, statisztikai modellezés.

Simon L. Péter, az ELTE professzora a hálózaton történő járványterjedés matematikai modellezéséről és annak differenciálegyenletekkel való közelítéséről adott áttekintést, Bartha Ferenc (SZTE Bolyai Intézet) arról beszélt, hogyan lehet modellezni a járvány terjedését, illetve kontrollját egy országos bank központi egységeiben illetve komplex fiókhálózatában. Karsai Márton (CEU) a korai fertőzöttek eloszlásának a fertőzés terjedési folyamatokra gyakorolt hatásáról beszélt metapopulációs geometriai hálózatokon. Backhausz Ágnes (ELTE) többrétegű (háztartás, iskola, munkahely, lakókörnyezet, nyilvános helyek) véletlen hálózatokon történő járványterjedésről beszélt. Munkájának egyik tanulsága hogy az iskolában terjedő fertőzést úgy lehet a leginkább lassítani, ha elkerüljük a különböző osztályba járó gyerekek keveredését. Horváth Judit Krisztina (Semmelweis Egyetem) előadásából megtudhattuk, hogyan vizsgálják a védőoltások hatásosságát a gyakorlatban. Zsichla Levente (ELTE) egy új módszert mutatott be az elvesztett életévek (azt a maradék élettartamot fejezi ki, amelyre az elhunytak várhatóan számíthattak volna, ha nem fertőződnek meg) populációs átlagának és eloszlásának becslésére, melynek alapja az a feltételezés, hogy a fertőzés lefolyásának súlyosságát nem közvetlenül a kor, hanem a kor előre haladtával is egyre romló általános egészségi állapot befolyásolja. Komlós Krisztina (Semmelweis Egyetem) a gyermekek és fiatal felnőttek szerepét ismertette a második járványhullámban. Túri Gergő (SOTE) a COVID-19 pandémia menedzselésének nemzetközi jó gyakorlatainak értékeléséről beszélt. Csikász-Nagy Attila (Pázmány Péter Katolikus Egyetem) egy virtuális városban mutatta be a járvány terjedését. Az általa ismertetett ágens alapú mikroszimulációs keretrendszer lehetővé teszi, hogy egy új vírusváltozat terjedése által okozott több fertőzési hullámban, egy város méretű társadalmi környezetben, reális adatokhoz igazítva illesszék a különböző intézkedéseket. Reguly István (PPKE) a PanSim ágens-alapú szimulátor viselkedését mutatta be a valós magyarországi adatokhoz képest, valamint hogy miként történt a paraméterillesztés, és a későbbi hullámokhoz milyen további paraméterek bevezetésére volt szükség. Kitért a szezonalitás kérdésére és arra is, hogy milyen fertőzöttségi adatok lettek volna várhatók keleti vakcinák használata nélkül. Vásárhelyi Orsolya (Warwick) társadalmi hálózati és viselkedési minták dinamikus követését ismertette a pandémia alatt Magyarországon online és offline adatokkal, a MASZK kérdőív példáján.

Bogya Norbert (SZTE Bolyai Intézet) bemutatta a Flatten járványmodellező keretrendszer koncepcióját, és a konferencia résztvevőivel közös ötletbörzét irányította, Juhász Nóra, Renji Han és Sadegh Marzban (SZTE) pedig egy hibrid, parciális differenciálegyenleteket és ágens alapú modellezést ötvöző modellel kapcsolatos eredményeiket ismertették. Ez a modell jól reprodukálta a vírus laboratóriumban tapasztalt viselkedését. Tekeli Tamás (SZTE) egy tüneti alapú COVID-teszteléses modellről, Bornali Das (SZTE) pedig egy rinovírus-COVID-19 koinfekciós modellről beszélt, ahol a rinovírus fertőzés okán megjelenő interferonok a koronavírust gátolják. Szederkényi Gábor (PPKE) a magyarországi COVID-19 járvány nem (vagy nem pontosan) mért adatainak kizárólag a kórházban ápoltak számának alapján való becslését ismertette egy inverziós technika segítségével. Péni Tamás (PPKE) előadásában egy modell prediktív irányítási algoritmuson alapuló módszert mutatott be a COVID-19 járványcsúcs optimális beavatkozással történő eltolására, azaz a járvány negatív hatásainak mérséklésére. Nagy Csilla (Budapest Főváros Kormányhivatala) a COVID-19 pandémia második és harmadik magyarországi járványhullám alatti megbetegedés, halálozás és letalitás területi elrendeződéséről, illetve mindezeknek a társadalmi-gazdasági helyzettel való összefüggéséről, Juhász Attila (BFK) pedig a pandémia alatti többlethalálozásról és annak területi eloszlásáról beszélt. Dénes Attila (SZTE) egy olyan matematikai modellt ismertetett, amely egy fertőző betegség terjedését írja le több földrajzi régióban, és amelynek segítségével a megbecsülhető annak a járványügyi hatása, ha az emberek tömegesen menekülnek egy olyan régióból, ahol szigorú lezárásokat rendelnek el. A workshop záróelőadásában Vizi Zsolt (SZTE) bemutatott egy olyan eszközt, amivel egy kórház COVID-osztályának a terheltségét lehet két hétre prognosztizálni: a módszer hasznosságát mutatta, hogy a harmadik hullám során a szegedi Szent-Györgyi Albert Klinikai Központ betegszámát sikerült jól előre jelezni.

Dénes Attila

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

alkalmazott matematika járványtan

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

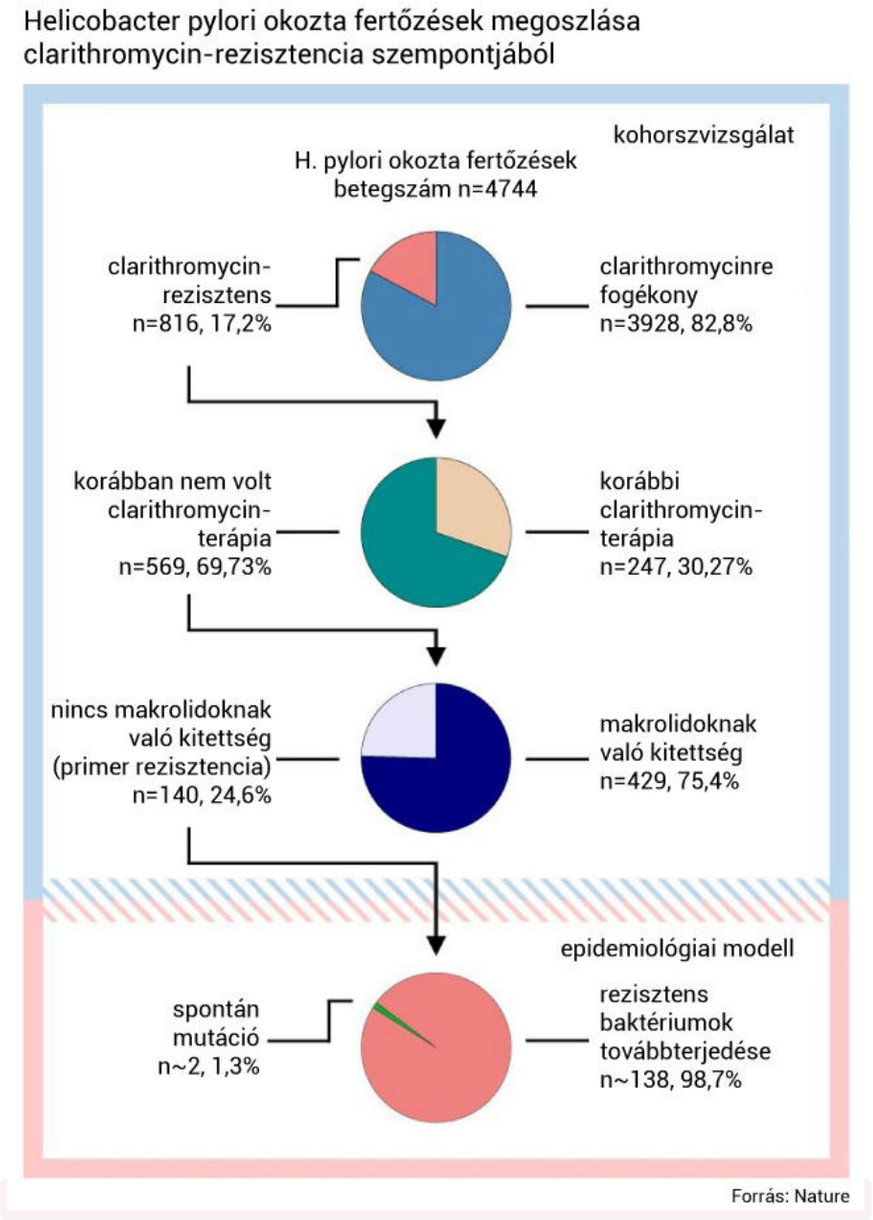
Juhász Nóra 2021. SZEPTEMBER, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Kiszámított emlékezet

Egy rezisztens baktériumfertőzés matematikailag feltérképezett múltja

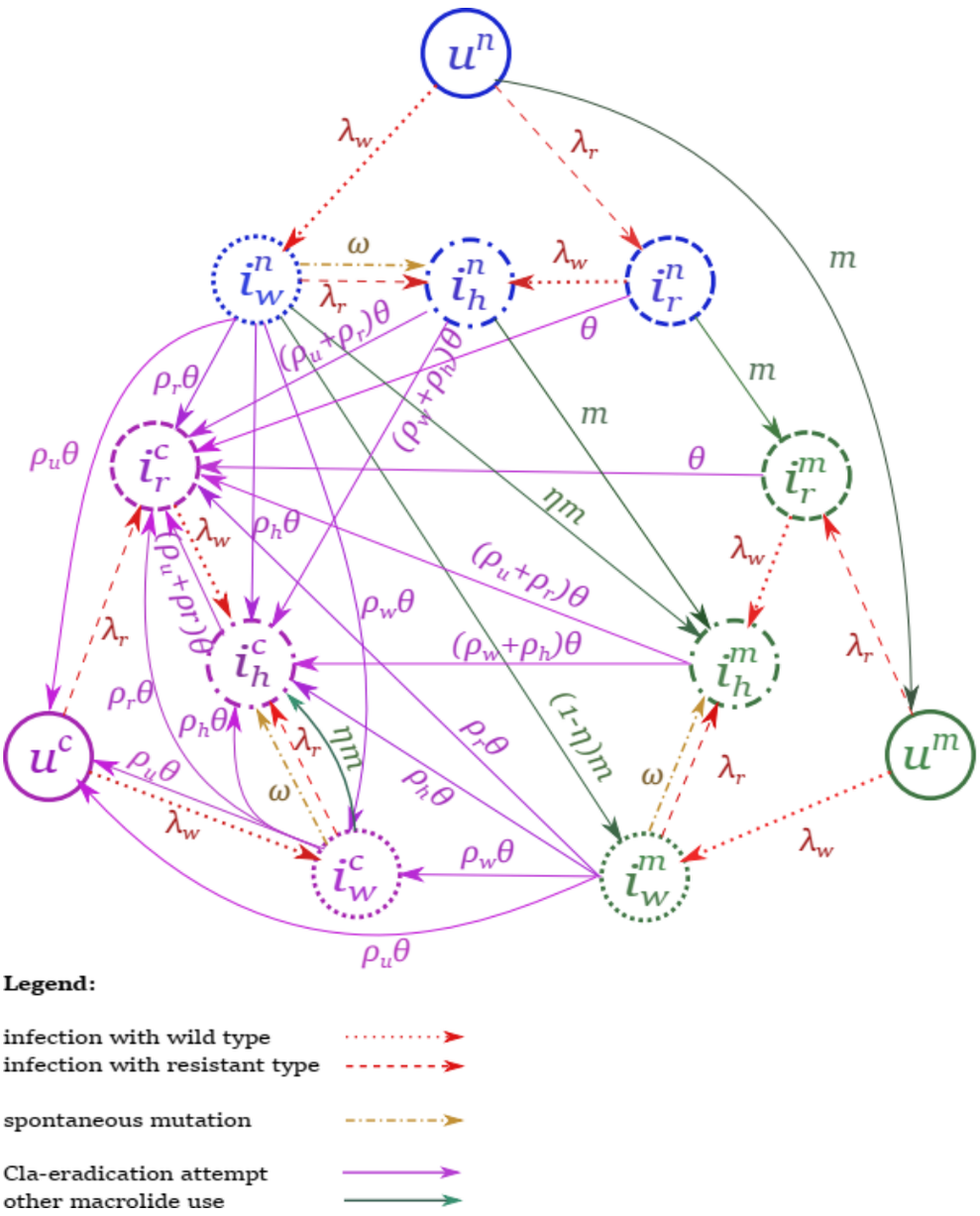
Képzeljük el a következő, nagy kihívást jelentő helyzetet. Olyan betegeket szeretnénk meggyógyítani, akik panaszainak hátterében egy *Helicobacter pylori* nevű baktérium által okozott fertőzés áll, amely súlyos esetekben akár gyomorfekélyt, gyomorrákot és más betegségeket is okozhat. A betegek kezelésére egy ebben az esetben széles körben használt, *clarithromycin* nevű antibiotikumot alkalmazunk, mire azt tapasztaljuk, hogy a páciensek igen jelentős része, kb. 17%-uk esetében a baktériumfertőzés egyszerűen nem reagál a kezelésre, más szóval rezisztens arra. Ezen a ponton nem kisebb nehézséggel nézünk szembe, mint a WHO által is „legproblematikusabb”-ként rangsorolt *clarithromycin-rezisztens H. pylori* fertőzés. A rangos Nature Communications folyóirat idén megjelent [1] cikke pontosan ezen fertőzés dinamikáját és eredetét vizsgálja – a fent említetteknek megfelelően – 4744 fertőzött páciens adatai alapján, mégpedig a betegek múltbeli gyógyszerfogyasztásának összefüggésében. A *Szegedi Tudományegyetem* és a *Semmelweis Egyetem* kutatói közötti együttműködés keretében született eredmények egyik pillére egy új epidemiológiai modell. Ez utóbbi megalkotásának matematikai munkálatai, illetve az ehhez szükséges innováció és problémamegoldás *Röst Gergely matematikus (SZTE, Bolyai Intézet)* nevéhez fűződik.

Jelen írás célja, hogy az említett cikk szövetéből egy matematikailag érdekes vezérfonalat kiragadjon, annak szükséges kontextusát elmagyarázza, és ennek mentén röviden bemutassa, hol, hogyan és miként alkalmazza az orvosi-matematikai tanulmány ezt az új epidemiológiai modellt. Ennek megértéséhez tegyünk pár lépést hátra, és térjünk vissza kiindulópontunkhoz, a 4744 regisztrált *H. pylori*-fertőzött beteg adataihoz. Kocsmár Éva és Lotz Gábor, a Semmelweis Egyetem kutatói egy modern fluoreszcens technológiával (érdemes megnézni a publikációban a gyönyörű felvételeket!) megvizsgálták mind a 4744 páciens gyomorbiopsziás mintáját, és megállapították, hogy az antibiotikumra rezisztens vagy nem rezisztens baktériummal voltak-e megfertőződve, netán mindkettővel. Itt azonban nem álltak meg: hogy fényt derítsenek a *H. pylori* baktérium antibiotikum-rezisztenciájának eredetére, a kutatók azt is megvizsgálták, e 4744 beteg múltbeli gyógyszerfogyasztása milyen összefüggésben van a rezisztencia gyakoriságával. Ehhez fel kellett térképezni az összes beteg gyógyszerszedési történetét. Amint a lenti ábra is mutatja, a betegek gyógyszerszedési múltjának leírásánál a szerzők nemcsak magát a clarithromycin (Cla)-t vették figyelembe, mint magától értetődően fontos tényezőt, hanem innovatív módon egy újabb faktorként definiálták magát a makrolid antibiotikum-családot is, amibe többek között a Cla is tartozik. Ez a bizonyos értelemben szokatlan megközelítés valóban a kutatás egyik újdonsága, hiszen a makrolidok, amelyeket sok egyéb betegség kezelésére alkalmaznak, ugyanúgy hozzájárulhatnak a gyakoribb Cla-rezisztenciához. Ennek fényében a szóban forgó ábra harmadik tortadiagramja egy különösen érdekes csoportot jelez: a betegek egy jelentős része, 140 fő soha nem szedett makrolid típusú antibiotikumot (így Cla-t sem), mégis Cla-rezisztens baktériummal volt megfertőzve – a cikk ezt a jelenséget definiálja *primer rezisztens fertőzésként*. Honnan erednek ezek a fertőzések? Alapvetően kétféle módon jöhetnek létre: egy eredetileg nem-rezisztens (wild type) baktériumfertőzés spontán belső *mutációja* során, vagy pedig eleve rezisztens baktériummal való fertőződés, *közvetlen átadás* útján.



1. ábra

E 140 embernek természetesen nincs, sőt, az esetek túlnyomó többségében nem is lehet emléke arról, hogy az ő konkrét esetükben fennálló primer rezisztencia mutációs vagy átadásos eredetű, más szóval e fertőzéseknek csak a jelene ismeretes, a múltja nem. Ezeknek a primer rezisztens fertőzéseknek az eredete nemcsak önmagában érdekes kérdés: ezen múltak legalábbis várható értékben vett megismerése fontos következményeket és tanulságokat hordoz. Írásunkban röviden bemutatjuk, hogy a Röst Gergely által létrehozott matematikai modell segítségével többek között ez a nehéz probléma is megoldható. Vegyük észre, hogy ez a múltkeresési feladat érdekes fordítottja a relatíve közismert predikciós matematikai alkalmazásoknak: itt a jövő helyett a múltat szeretnénk kiszámítani, a rezisztencia eredetét akarjuk „megjósolni”. A kérdés tehát képletesen: a fenti 1. ábrán *hogyan jutunk át a kék-rózsaszín szaggatott vonalon*, a válasz pedig az alább látható új epidemiológiai modell segítségével adható meg.



E modell felállításánál a kutatók innovatív módon beépítették az ún. *homorezisztencia* és *heterorezisztencia* fogalmát is, így a rendszer megértéséhez ezeket röviden tisztázzuk. A fertőzés heterorezisztens, ha a fertőzöttben egyaránt élnek Cla-rezisztens és nem-rezisztens *H. pylori* törzsek is, míg a kizárólag Cla-rezisztens törzzsel fertőzött eseteket homorezisztensnek hívjuk. A nyilak fejezik ki a kompartmentek közötti átmeneteket, például ha valaki megfertőződik, gyógyszert szed, vagy éppen meggyógyul, akkor az új állapotának megfelelő kompartmentbe kerül. Ezek után a modell jelölései kézenfekvők, például az u^n kompartment jelöli azt a fertőzésmentes populációt, amely a múltban soha nem fogyasztott makrolid típusú antibiotikumokat (azaz *„makrolid-naive”*), i_w^n a wild-type (nem rezisztens) törzzsel fertőzött és makrolid-naive populáció, i_h^n és i_r^n pedig a heterorezisztens, illetve homorezisztens törzsekkel fertőzött makrolid-naive populáció. Gyakorlatilag ez utóbbi két halmaz felel meg a cikk által azonosított 140 fős csoportnak (makrolid-naive Cla-rezisztens fertőzött populáció). Az ábráról rögtön leolvasható, hogy az ezekbe a kompartmentekbe való összesített érkezési ráta

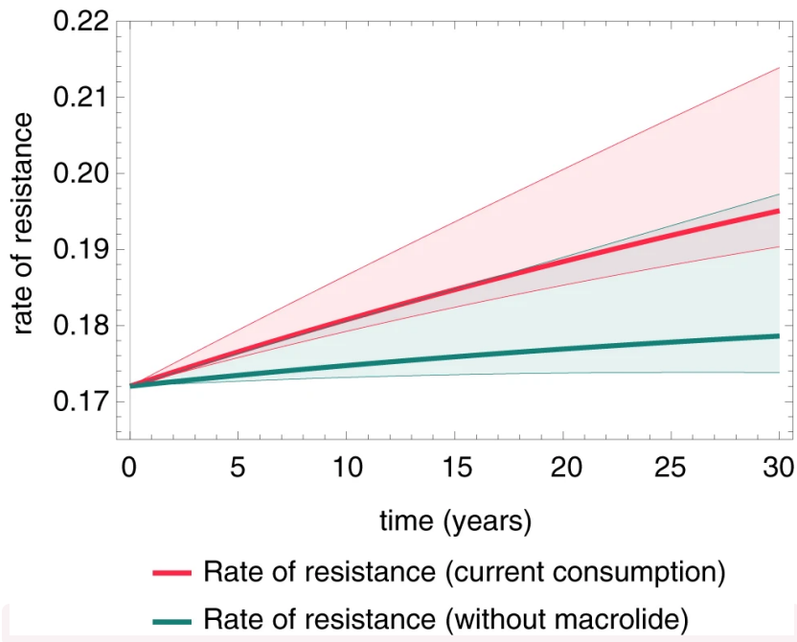
$$\lambda_r(u_n + i_w^n) + \varpi \cdot i_w^n,$$

az eleve rezisztens baktériumtörzzsel való átadásos fertőzések aránya pedig értelemszerűen

$$\frac{\lambda_r(u_n + i_w^n)}{\lambda_r(u_n + i_w^n) + \varpi \cdot i_w^n}.$$

A probléma megoldása természetesen ezzel még nem ér véget, hiszen *a modell számos paramétere nem mérhető*, többek közt maga λ_r sem – valójában a modell egyik legfőbb érdeme pontosan az, hogy ezeket a nem mérhető értékeket képes *számszerűsíteni*. Ezen számszerűsítésnek dióhéjban az az észrevétel a kulcsa, hogy a modell által leírt dinamikának vannak kifejezetten lassú részei. Ezt a megfigyelést, illetve a lassúság koncepcióját matematikailag már meg lehet ragadni. Röst Gergely megközelítésében mindez egy *feltételes minimumkeresési feladathoz* vezet, az így definiált optimalizációs probléma megoldásaként pedig kinyerhetők a konkrét, számszerűsített paraméterek. Ennek eredményeként a fenti képlet 0.987 körüli numerikus értéket ölt, vagyis a kórokozók mutálódása elenyésző szerepet játszik: a 140 primer rezisztens típusú fertőzésből legfeljebb 2 esetért felelős spontán mutáció, nagyrészt tehát eleve Cla-rezisztens fertőzés történt (vagyis esetükben valószínűleg egy másik személy antibiotikum szedése miatt rezisztens a kórokozó). Összefoglalva, a Cla-rezisztens *H. pylori* okozta fertőzések döntő többségéért a makrolid családba tartozó antibiotikumok, különösen maga a clarithromycin fogyasztása tehető felelőssé.

A modell segítségével azonosított paramétereket természetesen nemcsak múltbeli események felderítésére lehet használni, predikciós célokra is alkalmazhatók. A kutatók azt is megvizsgálták, hogy az egyéb célú makrolidok fogyasztásának nullára csökkentése mennyivel mérsékelhetné a *H. pylori* rezisztencia kialakulását a jövőben, eredményeik az alábbi ábrán láthatók. A probléma komplexitását jól jelzi, hogy még az antibiotikus kezelések észszerűsítésétől is legfeljebb a rezisztencia további növekedésének enyhülése várható: még ha mostantól fel is hagynánk a makrolidok minden egyéb, *H. pylori* fertőzéstől eltérő betegségre való használatával, a rezisztens fertőzések aránya továbbra is valamelyest növekedne, bár sokkal kisebb mértékben, mintha az antibiotikum-használat a jelenlegi szinten maradna.



3. ábra

A rezisztens baktériumok terjedése az egyik legnagyobb globális egészségügyi kihívás. Az ilyen kutatások nagyban elősegítik olyan kezelési protokollok kidolgozását, ami ezt a kockázatot csökkenti. A munka arra is nagyon jó példa, hogy az orvosok és a matematikusok együttműködése milyen értékes új tudományos eredményekre vezethet – fogalmazott a tanulmány egyik szerzője, Lotz Gábor.

Végezetül mintegy kuriózumként megemlítjük, hogy egy ilyen komoly folyóiratnál, mint a Nature Communications, magába a bírálati folyamatba is érdekes bepillantani: a bírálók és a szerzők közötti kommunikáció 66 oldalt tesz ki, ami szintén publikusan olvasható.

Juhász Nóra

Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet

Irodalomjegyzék

[1] Kocsmár, É., Buzás, G. M., Szirtes, I., Kocsmár, I., Kramer, Zs., Szijártó, A.,

Fadgyas-Freyler, P., Szénás, K., Rugge, M., Fassan, M., Kiss, A., Schaff, Zs., Röst, G. and Lotz, G. Primary and secondary clarithromycin resistance in *Helicobacter pylori* and mathematical modeling of the role of macrolides. *Nat Commun* 12, 2255 (2021). https://doi.org/10.1038/s41467-021-22557-7

[2] https://qubit.hu/2021/07/26/magyar-kutatok-szerint-a-rosszul-szedett-antibiotikumok-miatt-is-terjednek-a-rezisztens-szuperbakteriumok

[3] https://u-szeged.hu/sztehirek/2021-aprilis/rost-gergely-szegedi?objectParentFolderId=19396

[4] https://semmelweis.hu/hirek/2021/04/19/gyomorbetegsegeket-okozo-fertozes-kezeleset-javithatja-egy-semmelweis-egyetem-vezetesevel-vegzett-kutatas/

alkalmazott matematika járványtan

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)

Bakos Bence, Pálfy Máté
2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az entrópia-hatásfüggvény-sejtés

Bakos Bence és *Pálfy Máté* cikkében egy érdekes sejtést mutat be, ami a matematika számos területéről tartalmaz elemeket. A sejtés szerteágazó, ezt jól mutatja, hogy gráftulajdonságok vizsgálata során fogalmazták meg, Boole-függvényeket használ, és a Fourier-analízis eszközeivel vizsgálják. Ezek mind a matematika egy-egy igen széles területét képezik, azonban a sejtés megértéséhez nem kell szakértőnek lenni egyik területen sem. Az írás az alapfogalmak megismertetésével indul...

Emmanuel Giroux
2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is... egy nyitott könyv?

A nagyon kifejező *nyitott könyv* fogalmat H. E. Winkelnkemper vezette be 1973-ban egy olyan geometriai struktúrára, amely akkor már más neveken említve meglehetősen hosszú idő óta ismert volt: kétdimenziós speciális esete valóban úgy néz ki, mint egy 360 fokban kinyitott könyv. *Emmanuel Giroux* cikke 2005 januárjában jelent meg a *Notices of the American Mathematical Society* folyóiratban (Fordította: *Stipsicz András*). Tovább...

Tóth János
2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az elmélet haszna – avagy inkább végy föl két zoknit...

Gian-Carlo Rotának a differenciálegyenletek tanítására vonatkozó állításai közül a legtöbbel nehéz egyet nem érteni; klaviatúrát nyilván azért ragadtam, mert van viszont olyan kijelentése, amelyiket vitatni szándékozom. Azt javasolja, hogy ne foglalkozzunk túl sokat a megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozó alapvető tételekkel. Ezeknek az állításoknak azonban (akár gyakorlati szempontból is) fontosnak nevezhető következményei is vannak – írja *Tóth János*, amint az alábbi példákból ki fog derülni...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Erintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Bakos Bence, Pálfy Máté 2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az entrópia-hatásfüggvény-sejtés

Bevezetés

Ebben a cikkben egy érdekes sejtést fogunk bemutatni, ami a matematika számos területéről tartalmaz elemeket. A sejtés szerteágazó, ezt jól mutatja, hogy gráftulajdonságok vizsgálata során fogalmazták meg, Boole-függvényeket használ, és a Fourier-analízis eszközeivel vizsgálják. Ezek mind a matematika egy-egy igen széles területét képezik, azonban a sejtés megértéséhez nem kell szakértőnek lenni egyik területen sem.

A számítógép-tudomány megjelenésével a matematikában előtérbe került az irányzat számára fontos területek vizsgálata. Ide tartoznak a bitsorozatokon értelmezett 0-1 értékű függvények (Boole-függvények) is, amelyek például áramkörök tervezésénél játszanak fontos szerepet. Az elméleti matematika segítségével, esetünkben a Fourier-analízis eszközeit használva, igen általános kontextusban is vizsgálhatóak ezek a függvények. Az így elért eredményeket aztán eredményesen tudják alkalmazni a kutatók és a fejlesztők a gyakorlati projektek megvalósításában.

Az entrópia-hatásfüggvény-sejtés ennek a területnek egy máig bizonyítatlan elméleti állítása. A jelentősége többek között abban is rejlik, hogy alsó becslést ad a címben szereplő hatásfüggvénynek nevezett mennyiségre. Ez ugyanis szorosan kapcsolódik az ún. küszöbjelenséghez (threshold phenomena, [4]): Tegyük fel, hogy egy rendszer rendelkezik egy valós paraméterrel és valamilyen esemény valószínűsége ezen paraméter változtatásától monoton módon függ. Gyakran a paraméterskála azon része az érdekes, ahol ez a valószínűség gyorsan változik a paraméter apró módosításától is. Ezeket az intervallumokat hívjuk küszöbintervallumnak. Ilyesfajta vizsgálódások nemcsak a fent említett számítógép-tudomány területén érdekesek, hanem alkalmazzák gazdasági folyamatok elemzésében és a politikatudományban is (lásd: [6]).

Az alábbiakban bemutatunk néhány fogalmat és állítást, amelyek segítségével aztán formába önthetjük az 1995-ben Ehud Friedgut és Gil Kalai által megfogalmazott sejtést.

További érdekességként bemutatunk egy eredményt a kérdéskörben arról, hogy véletlen függvényekre a sejtés állítása „nagy valószínűséggel” teljesül.

Jelölések, alapfogalmak

Előzetesen néhány szó a jelölésekről, szóhasználatról. Az alábbiakban Boole-függvényekkel fogunk dolgozni. Ezek az irodalomban több különböző formában szerepelnek, előfordulnak $\{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$, $\{0,1\}^n \to \{-1,1\}$, $\{-1,1\}^n \to \{0,1\}$ és $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ alakban is. Mi a második alakkal foglalkozunk, így ha Boole-függvényről beszélünk, akkor a képhalmaz mindig a $\{-1,1\}$ halmaz lesz, az alaphalmaz pedig $\{0,1\}^n$.

Néhány jelölés: Az $f\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ várható értékén az $\mathbb{E}(f) = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)$, míg az f és g függvények skaláris szorzatán az $\langle f,g\rangle = \mathbb{E}(f\cdot g)$ mennyiséget értjük. Egy $S \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ halmaz karakterisztikus vektora az az $s \in \{0,1\}^n$ vektor, amelynek az i-edik koordinátája akkor és csak akkor 1, ha $i \in S$, egyébként 0.

A cikkben igyekszünk csak a sejtés megfogalmazásához szükséges definíciók és állítások kimondására szorítkozni. Néhány állítás bizonyítása azonban kellően rövid és megértésükkel jobb betekintés nyerhető a terület gondolatvilágára. Ezeket a bizonyításokat a cikk végén gyűjtöttük össze.

Ahogy már a bevezetőben is említettük, a sejtéshez vezető úton a Fourier-analízis eszközeit fogjuk használni. Ehhez először definiáljuk a területen nagyon fontos szerepet játszó ún. karaktereket a mi speciális alaphalmazunk esetén:

1. definíció. *Legyen $S \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ és s legyen ennek a halmaznak a karakterisztikus vektora. Ekkor az S-hez tartozó karakter az a $\chi_S\colon \{0,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvény lesz, amelyre:*

$$\chi_S(x) := (-1)^{s\cdot x}.$$

A kitevőben $\mathbb{R}^n$-beli vektorok szokásos skaláris szorzását használjuk.

A továbbiakban az alsó indexekben egyaránt használjuk a halmazos és a karakterisztikus vektoros jelölést is, amikor egy halmazhoz tartozó karakterről beszélünk.

Mielőtt rátérnénk a Boole-függvényekre, először általánosabb, valós számokba képező függvényeket fogunk tekinteni. Belátható, hogy a χ_S karakterek, ahol S befutja az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmazt, ortonormált bázisát adják az $f\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ függvények alkotta vektortérnek. Azaz minden $S, T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz esetén $\langle \chi_S, \chi_T \rangle = 1$, ha $S = T$, és 0 különben, valamint minden $f\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ függvény felírható az alábbi módon:

$$f(x) = \sum_{r \in \{0,1\}^n} \widehat{f}(r)\chi_r(x).$$

Az $\widehat{f}(r)$ értékeket az f függvény r-hez tartozó *Fourier-együtthatóinak* nevezik. Az $\widehat{f}(r)$ értékek seregét (ahogy r végigfut $\{0,1\}^n$ elemein) értelmezhetjük úgy, mint egy $\widehat{f}\colon \{0,1\}^n \to \mathbb{R}$ függvényt. Ezt a függvényt az f *Fourier-transzformáltjának* nevezik. Hasonlóan a karakterekhez, $\widehat{f}$ argumentumába időnként nem a karakterisztikus vektort, hanem a hozzá tartozó halmazt írjuk: $\widehat{f}(r) = \widehat{f}(R)$, ha r az $R \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz karakterisztikus vektora.

A következő néhány összefüggés rámutat a Fourier-együtthatók és az f függvény kapcsolatára. Az olvasó mind a négy állítást könnyen ellenőrizheti a definíciók alapján.

1. állítás. *Igazak a következő egyenlőségek:*

(i) $\widehat{f}(r) = \langle f, \chi_r \rangle$;

(ii) $\langle f, g \rangle = \sum_{r \in \{0,1\}^n} \widehat{f}(r)\widehat{g}(r)$ *(Plancherel-tétel)*

(iii) $\mathbb{E}(f^2) = \langle f, f \rangle = \sum_{r \in \{0,1\}^n} \widehat{f^2}(r)$ *(Parseval-egyenlőség)*

(iv) *Boole-függvényekre* $\sum_{r \in \{0,1\}^n} \widehat{f^2}(r) = 1$.

Hatásfüggvény, entrópia

Térjünk rá most kifejezetten a Boole-függvényekre, azon belül is a hatásfüggvény definíciójára. Legyen tehát adva egy $f\colon \{0,1\}^n \to \{-1, 1\}$ leképezés. Kérdés: mennyire függ a függvény értéke az i-edik argumentumtól? Azaz, ha megváltoztatjuk az argumentum i-edik koordinátáját, változik-e a függvény értéke? $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ esetén jelölje $x^{\oplus i} := (x_1, \ldots, \bar{x}_i, \ldots, x_n)$ ezt a változást, ahol a felülvonás jelenti azt, hogy az x i-edik koordinátáját az ellenkezőjére változtatjuk.

2. definíció. *Az i-edik változó hatásfüggvényének az*

$$I_i(f) = Pr_x(f(x) \neq f(x^{\oplus i})) = \frac{|\{x\colon f(x) \neq f(x^{\oplus i}\}|}{2^n}$$

valószínűséget, míg f teljes hatásfüggvényének az

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} I_i(f)$$

értéket nevezzük.

E definíció egy ügyes átfogalmazásával és némi számolással meg lehet mutatni, hogy az így definiált hatásfüggvény felírható pusztán a Fourier-együtthatók segítségével:

2. állítás.

$$I_i(f) = \sum_{S \subseteq [n], i \in S} |\widehat{f}(S)|^2.$$

Ebből az összefüggésből, az összegzések némi átrendezésével, a teljes hatásfüggvényre nézve a következő adódik:

3. állítás.

$$I(f) = \sum_{S \subseteq [n]} |S| |\widehat{f}(S)|^2.$$

Most térjünk át a címben is megjelenő másik fogalom, a Shannon-entrópia tárgyalására. Ez a fogalom számos más kontextusban is felbukkan a matematikában, de mindenhol hasonló jelentéssel (és definícióval) rendelkezik. A mi Boole-függvényekkel kapcsolatos vizsgálódásainkban a következőképpen vezethető be:

3. definíció. *Legyen f Boole-függvény. Az f függvény (Shannon-féle) entrópiáján a*

$$\mathbb{H}(f) := \sum_{S \subseteq [n], \widehat{f}(S) \neq 0} \widehat{f}^2(S) \log \frac{1}{\widehat{f}^2(S)}$$

kifejezést értjük.

Mivel Boole-függvényeknél létezik nullától különböző Fourier-együttható, így ez az összeg nem lesz üres. Könnyen látható, hogy nemnegatív értékeket vesz fel, valamint a Jensen-egyenlőtlenség alkalmazásával (a $-\log \frac{1}{x}$ függvény konvexitását felhasználva) igazolható, hogy nem nagyobb mint n.

Az entrópia és a hatásfüggvény is valamilyen formában azt fejezik ki, hogy a Fourier-együtthatók kis helyre koncentrálódnak. A két mennyiség viszonyát illetően máig nem bizonyított az a sejtés, hogy az entrópia nem lehet nagyobb, mint a hatásfüggvény:

Entrópia-hatásfüggvény-sejtés. *Létezik olyan c konstans, hogy minden f Boole-függvényre*

$$\mathbb{H}(f) \leq c \cdot I(f).$$

Néhány egyszerű függvény, amelyekre a sejtés igaz: például az AND (értéke pontosan akkor 1, ha a bemeneti vektor összes koordinátája 1), OR (értéke pontosan akkor 1, ha a bemeneti vektor legalább egy koordinátája 1), és egyéb alapvető logikai függvények. Ezek direkt kiszámolásánál az is kiderül, hogy a konstans legalább 4 kell legyen. A [5] cikkben olvasható, hogy az eddig belátott legjobb alsó korlát már $\frac{60}{13} \approx 4{,}615$.

A sejtést először Kalai és Friedgut vetette fel monoton gráftulajdonságok vizsgálata közben [2]. A vizsgálataik során a sejtés állítását a hatásfüggvényre adott alsó becslésként használták volna fel. A problémával és annak különböző következményeivel sokan foglalkoztak. Gil Kalai 2007-es Terrence Tao blogjára írt bejegyzésében kitűnő áttekintést nyújt a kérdés jelentősségéről az addig ismert eredmények alapján [3]. Itt olvasható például, hogy Mansour sejtése is következne Kalai és Friedgut eredeti sejtéséből. Ez nagy vonalakban arról szól, hogy, amennyiben egy Boole-függvény „tömören reprezentálható”, akkor a Fourier-együtthatók „kis helyre koncentrálódnak”.

A sejtés véletlen függvényekre

Sok eredmény született Kalai 2007-es írása óta is a témában, például a sejtés bizonyítása különböző speciális függvényosztályokra ([5]). Mi egy eredményre szeretnénk még kitérni, miszerint véltelenül választott Boole-függvény esetén a sejtés „nagy valószínűséggel igaz”. Mit jelent ez pontosan?

Válasszunk egy véletlen $\{0,1\}^n \to \{-1,1\}$ Boole-függvényt úgy, hogy minden $\{0,1\}^n$-beli ponthoz $1/2$ valószínűséggel rendelünk -1-et vagy 1-et. Ekkor minden $\{0,1\}^n \to \{-1,1\}$ függvényt $\frac{1}{2^{2^n}}$ valószínűséggel kapunk. Legyenek I_r és H_r valószínűségi változók, amelyek az így választott függvény teljes hatásfüggvényét és entrópiáját jelölik. Az állítás gyakorlatilag azt mondja ki, hogy amennyiben a sejtésben $c = 3$-at választunk konstansnak, akkor az előbbi módon véletlenül választott Boole-függvény nagyon kis valószínűséggel lehet egyáltalán ellenpélda. Vagyis, ha léteznek is függvények, amelyek cáfolják a sejtést $c = 3$-ra, akkor azok csak nagyon (n-ben exponenciálisan) kis hányadát teszik ki az össze Boole-függvénynek. Formálisan az állítás:

$$Pr(H_r > 3I_r) \leq \frac{36}{n \cdot 2^{n+1}}.$$

Tehát egyenletesen véletlenül választott függvényre $c = 3$ konstanssal legalább $1 - \frac{36}{n \cdot 2^{n+1}}$ valószínűséggel teljesül az entrópia-hatásfüggvény-sejtés.

Ennek az állításnak a bizonyítása már bőven meghaladja ennek az írásnak a terjedelmi korlátait. Azonban részben azért is emeltük ki ezt az eredményt, mert bár a bizonyításban néhol megjelennek hosszabb számítások, az eddig bevezetett fogalmakon kívül nem igazán igényel magasabb szintű matematikai tudást, csupán elemi valószínűségszámítási ismereteken alapul. Akit érdekel a gondolatmenet, és nem riad vissza néhány hosszabb, de helyenként kifejezetten ötletes számolás végigolvasásától, az a levezetését teljes egészében elolvashatja [1]-ben.

Bizonyítások

Az 1. állítás bizonyítása.

(i) $\langle f, \chi_r \rangle = \langle \sum_t \widehat{f}(t)\chi_t, \chi_r \rangle = \sum_t \widehat{f}(t)\langle \chi_t, \chi_r \rangle = \widehat{f}(r)$.

(ii)
$\langle f, g \rangle = \langle \sum_r \widehat{f}(r)\chi_r, \sum_s \widehat{g}(s)\chi_s \rangle = \sum_{r,s} \widehat{f}(r)\widehat{g}(s)\langle \chi_r, \chi_s \rangle = \sum_r \widehat{f}(r)\widehat{g}(r)$.

(iii) az (ii) speciális esete, amikor $f = g$.

(iv) A Boole-függvények értékei $-1, 1$ ezért (iii)-at felhasználva kapjuk az állítást. □

A 2. állítás bizonyítása. Vegyük észre, hogy a definíció egyszerű következménye, hogy $I_i(f) = \mathbb{E}_x \left[\frac{(f(x) - f(x^{\oplus i}))^2}{4} \right]$.

Valóban, $f(x) - f(x^{\oplus i})$ értéke vagy 0, nincs változás, vagy ± 2. Tehát $\frac{(f(x) - f(x^{\oplus i}))^2}{4}$ értéke pontosan akkor 1, ha $f(x)$ értéke változik az i-edik koordináta előjelváltásával, és akkor 0, ha nem. Vagyis ez a mennyiség pont a nekünk szükséges esemény indikátorfüggvénye, melynek várható értéke épp a valószínűség.

Most igazoljuk, hogy $I_i(f) = \sum_{S:\, i \in S} |\widehat{f}(S)|^2$.

Tekintsük az $f(x) - f(x^{\oplus i})$ különbséget; $f(x^{\oplus i})$ jelentése, amikor az i-edik koordinátát az ellenkezőjére változtatjuk. Ha vesszük $f(x)$ és $f(x^{\oplus i})$ Fourier-előállítását, azon S-ekhez tartozó tagok, amelyekben az i nem szerepel mind a két függvényben azonosak, tehát a különbségben kiesnek. Ha az $i \in S$ akkor

$\chi_S(x^{\oplus i}) = -\chi_S(x)$, tehát a különbségben ennek a tagnak a kétszerese szerepel. (Nem nehéz, de érdemes ellenőrizni, hogy ez a karakter mindkét formájára valóban igaz a megfelelően adott Boole-függvény esetén.) Röviden azt kaptuk, hogy

$$f(x) - f(x^{\oplus i}) = 2\sum_{i \in S} \widehat{f}(S)\chi_S(x).$$

Végül

$$\mathbb{E}_x\left[\frac{(f(x) - f(x^{\oplus i}))^2}{4}\right] = \left\langle \frac{f(x) - f(x^{\oplus i})}{2}, \frac{f(x) - f(x^{\oplus i})}{2} \right\rangle = \left\langle \sum_{i \in S} \widehat{f}(S)\chi_S, \sum_{i \in T} \widehat{f}(T)\chi_T \right\rangle = \sum_{i \in S} |\widehat{f}(S)|^2.$$

Az utolsó egyenlőségnél a Parseval-egyenlőséget és a karakterek ortonormáltságát használtuk. □

A 3. állítás bizonyítása.

$$I(f) = \sum_i I_i(f) = \sum_i \sum_{S:\, i \in S} |\widehat{f}(S)|^2 = \sum_S \sum_i |\widehat{f}(S)|^2 = \sum_S |S||\widehat{f}(S)|^2$$

.□

Irodalomjegyzék

[1] Bireswar Das, Manjish Pal, and Vijay Visavaliya. The entropy influence conjecture revisited. *arXiv preprint arXiv:1110.4301*, 2011.

[2] Ehud Friedgut and Gil Kalai. Every monotone graph property has a sharp threshold. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 124(10):2993–3002, 1996.

[3] Gil Kalai. *(Gil Kalai) The entropy/influence conjecture*, 2007 (accessed February 15, 2020). https://terrytao.wordpress.com/2007/08/16/gil-kalai-the-entropyinfluence-conjecture/.

[4] Gil Kalai and Shmuel Safra. Perspectives from mathematics, computer science, and economics. *Computational complexity and statistical physics*, page 25, 2006.

[5] Ryan O'Donnell, John Wright, and Yuan Zhou. The Fourier entropy-influence conjecture for certain classes of Boolean functions. In *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, pages 330–341. Springer, 2011.

[6] Wikipedia. Condorcet's jury theorem -- Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Condorcet's%20jury%20theorem&oldid=1026667834 , 2021. [Online; accessed 04-August-2021].

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg (EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002).

Bakos Bence MSc hallgató, ELTE Matematikai Intézet

Pálfy Máté doktorandusz, ELTE Matematikai Intézet

informatika analízis

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Emmanuel Giroux 2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mi is... egy nyitott könyv?

A nagyon kifejező *nyitott könyv* fogalmat H. E. Winkelnkemper vezette be 1973-ban megjelent [3] dolgozatában, és egy olyan geometriai struktúrát értett alatta, mely akkor már meglehetősen hosszú idő óta ismert volt. Egy V sima (valós) sokaságon értelmezett nyitott könyv (vagy nyitottkönyv felbontás) egy (K, θ) párból áll, melyek a következőket teljesítik:

- K a V sokaság két kodimenziós valódi részsokasága, melynek normálnyalábja triviális – így K-nak van egy $\mathbb{D}^2 \times K$-val diffeomorf N környezete (ahol $\mathbb{D}^2$ az $\mathbb{R}^2$ zárt egységgömbjét jelöli), melyben K maga mint $\{0\} \times K$ helyezkedik el;
- θ pedig egy lokálisa triviális (sima V esetén tehát egy kritikus pont nélküli) sima $\theta : V \setminus K \to S^1$ fibrálás, melyre teljesül, hogy létezik K-nak egy olyan N környezete, amire θ-t megszorítva a normális anguláris koordinátát kapjuk, vagyis $\theta|_{N \setminus K} : N \setminus K \to S^1$ a kézenfekvő

$$N \setminus K = (\mathbb{D}^2 \setminus \{0\}) \times K \to \mathbb{D}^2 \setminus \{0\} \to S^1$$

projekciók kompozíciója.

A K részsokaságot a nyitott könyv kötésének (mivel a gerinc már más topológiai fogalmat jelöl), míg θ fibrumait, pontosabban azok lezártjait, a nyitott könyv lapjainak nevezzük.

A fogalom alapvető példáját adja az $\mathbb{R}^2$-en értelmezett nyitott könyv, melynek kötése az origó, a lapok pedig az origóból kiinduló $\theta = konstans$ félegyenesek, ahol (r, θ) a szokásos polárkoordinátákat jelöli. Ezt valamely $n \geq 2$ esetén $\mathbb{R}^{n-2}$-vel megszorozva $\mathbb{R}^n$-en kapjuk a standard nyitott könyvet, mely a kötés körüli lokális képet mutatja, és $n = 3$-ra valóban úgy néz ki, mint egy $360°$-ban kinyitott könyv. Az USA-ban régebben előszeretettel használt, telefonszámok feljegyzésére szolgáló Rolodex nevű forgó kartotékozó épp így néz ki.

Nyitott könyvek más nevek alatt is felbukkannak az irodalomban – mint globális Poincaré–Birkhoff-szelések, relatív leképezés-tóruszok, Lefschetz- vagy Milnor-fibrálások, fibrált láncok, pörgethető struktúrák –, mutatva azt a változatosságot, amely kontextusokban ez a fogalom természetesen felmerül – ilyenek a dinamikai rendszerek, komplex algebrai geometria, algebrai vagy geometriai topológia.

Poincaré „utolsó geometriai tétele” szerint a körgyűrű olyan területtartó leképezésének, amely a két határkört ellentétes irányba forgatja, legalább két fixpontja van. E tétel valójában a háromtest-problémára ad egy periodikus megoldást. Poincaré munkájában a körgyűrű (az annulus) úgy jelenik meg, mint a generált vektormező globális szelése egy $V \cong S^3$ energiaszinten, vagyis egy olyan F kompakt felületként, mely minden orbitot metsz, peremét érinti a vektormező, de belseje transzverz a vektormezőre. Következésképp a vektormező V-n megfigyelhető dinamikáját az F annuluson jelentkező „első visszatérési leképezés” teljesen meghatározza. Továbbá, F-et a vektormező mentén mozgatva V-t végigsúroljuk annulusok egy S^1 családjával, melyek határa ugyanaz: ezek az annulusok egy nyitott könyvet alkotnak V-n.

Egy tetszőleges V sokaságon lévő tetszőleges (K,θ) nyitott könyv leírható így, mivel léteznek olyan integrálható vektormezők, melyek érintik K-t és transzverzálisak θ fibrumaira. Olyan vektormezőket tekintve, melyek eltűnnek K mentén, a nyitott könyvek következő általános konstrukcióját kapjuk. Legyen F egy peremes sokaság és ϕ az F-nek egy olyan önmagára vonatkozó diffeomorfizmusa, mely a peremen az identitás. A $\Sigma(F,\phi)$ leképezés-tórusz, vagyis az $F \times \mathbb{R}$ szorzatnak a $(p,t) \sim (\phi(p), t-1)$ ekvivalenciarelációval vett hányadosa egy $\partial\Sigma(F,\phi) = \partial F \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ peremű sokaság. Minden $p \in \partial F$ esetén a $\{p\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ köröket pontra ejtve egy perem nélküli $\overline{\Sigma}(F,\phi)$ sokaságot kapunk, melyet a ϕ relatív leképezés-tóruszának szokás nevezni. Ez a sokaság egy természetes nyitott könyvet hordoz, melynek kötése ∂F egy kópiája – melyet $\partial F \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$-ből kapunk a faktorizálás során – és amelynek leképezését a körvonalra az $F \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ projekcióból nyerjük, így a nyitott könyv lapjai F kópiái lesznek. A V sokaságon értelmezett (K,θ) nyitott könyv monodrómiájának nevezzük az F lap minden olyan önmagára vonatkozó ϕ diffeomorfizmusát, amelyre létezik egy olyan $\overline{\Sigma}(F,\phi) \to V$ diffeomorfizmus, mely a $\overline{\Sigma}(F,\phi)$-n lévő kézenfekvő nyitott könyvet (K,θ)-ba viszi.

Egy háromdimenziós sokaságban lévő egyszerű zárt görbét csomónak, míg csomók véges és diszjunkt unióját láncnak nevezünk. A lánc akkor fibrált, ha előáll, mint egy nyitott könyv kötése. Elágazó fedések és láncok fonataira vonatkozó munkáinak következményeként 1920 körül J. Alexander belátta, hogy minden zárt V három-sokaságban létezik fibrált lánc. Valóban, az S^3 gömbfelületen van egy triviális (K_0,θ_0) nyitott könyv (az $\mathbb{R}^3$-on értelmezett standard nyitott könyv egypontú kompaktifikációja), és V előállítható S^3 egy olyan fedéseként, mely egy lánc mentén elágazik. Ez a lánc pedig előáll fonatként, vagyis egy izotópia segítségével a θ_0 fibrumaira transzverzzé tehető, így (K_0, θ_0) visszahúzása V-n egy nyitott könyvet ad.

Nevezetes példák adódnak magasabb dimenziós nyitott könyvekre azokon a páratlan dimenziójú gömbökön, melyek holomorf függvények izolált szingularitásaihoz tartoznak. Ha az $f\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ komplex polinomnak az origó izolált kritikus pontja és $f(0) = 0$, Milnor fibrálási tétele szerint elég kis $r > 0$ esetén az alább definiált (K_r, θ_r) pár egy, az S_r r-sugarú, origó középpontú gömbfelületen ad nyitott könyvet:

- K_r-et S_r és az $f^{-1}(0)$ hiperfelület transzverz metszete adja, míg
- θ_r az $f|_{S_r \setminus K_r}$ függvény szöge.

Milnor-fibrálásokat a múltban is intenzíven vizsgáltak, és V. I. Arnold vette észre – majd S. K. Donaldson és P. Seidel eredményei megerősítették –, hogy ezek a fibrálások szorosan kapcsolódnak szimplektikus geometriához: a fibrum egy természetes szimplektikus formát – vagyis egy nemelfajuló zárt 2-formát – hordoz, melyet a monodrómia megőriz, és melyre a Picard–Lefschetz-féle eltűnési ciklusok Lagrange-féle – vagyis féldimenziós izotróp – gömbök.

Azok a feltételek, melyek teljesülése esetén egy adott sokaságon létezik nyitott könyv, I. Tamura, H. Winkelnkemper, T. Lawson és F. Quinn munkásságának köszönhetően jól ismertek és meglehetősen enyhék (lásd a [2] cikket a pontos állításokért). Például minden páratlan dimenziós sokaságon van nyitott könyv. Másrészt viszont nyitott könyvek számos topológiai probléma megoldásában bizonyultak hasznos eszköznek, mint például diffeomorfizmusok bordizmus-csoportjainak kiszámolásában, vagy (a W. Thurston által adott végleges megoldás megtalálása előtt) 1-kodimenziós fóliázások találásában. W. Thurston és H. Winkelnkemper arra is használták a nyitott könyveket, hogy (újra) belássák, minden irányított három-sokaságon található kontakt struktúra. Valójában a legújabb eredmények (lásd az [1] cikket további információkért) azt mutatják, hogy „szimplektikus nyitott könyvek” (amelyek nyitott könyvek egy meglehetősen széles osztályát alkotják, és tartalmazzák az eddig bemutatott összes példát) szoros kapcsolatban állnak a kontakt geometriával, amely területen a nyitott könyvek különböző – topologikus, dinamikai, komplex analitikus – tulajdonságai természetes módon egyesülnek.

Irodalomjegyzék

[1] Emmanuel Giroux, *Géométrie de contact: de la dimension trois vers les dimensions supérieures*, Proc. Int. Cong. Math. (Bejing 2002, Vol II, 405–414, Higher Education Press, 2002.

[2] Frank Quinn, *Open book decompositions, and the bordism of automorphisms*, Topology **18** (1979), 55–73.

[3] Horst Elmar Winkelnkemper, *Manifolds as open books*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 45–51.

Emmanuel Giroux a Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) kutatási igazgatója, és az Unité de Mathématiques Pures et Appliquées de l'École Normale Supérieure de Lyon intézetben dolgozik. A fenti cikk 2005 januárjában jelent meg a *Notices of the American Mathematical Society* folyóiratban. Ez a fordítás a szerző engedélyével jelenik meg.

Fordította Stipsicz András.

Emmanuel Giroux, WHAT IS…an Open Book? Notices Amer. Math. Soc. 52 (January 2005) 42–43. © Emmanuel Giroux. https://www.ams.org/journals/notices/200501/what-is.pdf?trk=200501what-is&cat=collection

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Erintő Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2021. SZEPTEMBER, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Az elmélet haszna – avagy inkább vég föl két zoknit...

Gian-Carlo Rota (1932–1999, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Rota/) – aki többek között a számos kiadásban megjelent differenciálegyenletekről szóló [1] tankönyv társszerzője – időnként szerette írásban megfogalmazni az oktatásra vonatkozó véleményét mások (és saját (!)) okulására.

Differenciálegyenletek

A differenciálegyenletek tanítására vonatkozó állításai közül a legtöbbel nehéz egyet nem érteni; klaviatúrát nyilván azért ragadtam, mert van viszont olyan kijelentése, amelyiket vitatni szándékozom. Azt javasolja, [5] hogy ne foglalkozzunk túl sokat a megoldások létezésére és egyértelműségére vonatkozó alapvető tételekkel. Ezeknek az állításoknak azonban (akár gyakorlati szempontból is) fontosnak nevezhető következményei is vannak, amint az alábbi példákból ki fog derülni. Részletesebben: idézünk két, jól ismert **elméleti** eredményt (1. tétel és 2. tétel), majd példákon mutatjuk meg **gyakorlati** fontosságukat. Nem térünk ki itt arra, hogy a differenciálegyenletek (elméleti és alkalmazási szempontból egyaránt fontos) **kvalitatív elméletének** kiinduló pontjai az egzisztencia- és unicitási tételek, ld. pl. [6].

Induljunk ki a következőkből. Legyen N pozitív egész szám, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tartomány, $\mathbf{f}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ olyan függvény, amelyiknek a deriváltja normában korlátos és nem nagyobb, mint az $L \in \mathbb{R}^+$ szám, továbbá legyen $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in \Omega$.

1. tétel. (Picard–Lindelöf) *Az*

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi} \qquad (1a, b)$$

kezdetiérték-problémának létezik megoldása valamilyen pozitív α szám mellett a $]\tau - \alpha, \tau + \alpha[$ intervallumon, és ez a megoldás egyértelmű.

1. példa. Az $N = 1$ esetben a tételben szereplő kezdetiérték-problémának nem létezik

nemtriviális periodikus megoldása.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a $\boldsymbol{\varphi}$ folytonosan differenciálható függvény a fenti kezdetiérték-probléma periodikus megoldása, akkor létezik olyan pozitív T szám, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ esetén $\boldsymbol{\varphi}(t+T) = \boldsymbol{\varphi}(t)$. Legyen $t_0 \in \mathbb{R}$ olyan pont, ahol a $\boldsymbol{\varphi}$ függvénynek szélső értéke van, akkor $\boldsymbol{\varphi}'(t_0) = 0$. Tekintsük ezek után a fenti differenciálegyenlet $\mathbf{x}$ megoldását az $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\varphi}(t_0)$ kezdeti feltétel mellett. Ennek a kezdetiérték-problémának nyilván megoldása a $\boldsymbol{\psi}(t) := \boldsymbol{\varphi}(t_0)$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel értelmezett (állandó) függvény, hiszen minden $t \in \mathbb{R}$ estén $\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = 0$, és $\mathbf{f}(\psi(t)) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varphi}(t_0)) = 0$. Másrészt a $(t_0, \boldsymbol{\varphi}(t_0))$ ponton pontosan egy megoldás halad át, ezért $\boldsymbol{\varphi}$ nem lehet más, mint a fent bevezetett $\boldsymbol{\psi}$ állandó megoldás.

Fölvetődhet, hogy de hiszen az $\dot{x}(t) = \sqrt{1 - x(t)^2}$ egyenletnek megoldása a periodikus szinuszfüggvény. Ez azonban nem igaz, mert ennek az egyenletnek a megoldásai csak olyan függvények lehetnek, amelyeknek a deriváltja kizárólag nemnegatív értéket vesz fel. Ilyen a $\sin$ függvény valamely **leszűkítése**, például a $\sin_{]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}[}$ függvény. (A $\sin$ függvényt azért szorítottuk meg egy nyílt intervallumra, mert differenciálegyenlet megoldásának első közelítésben *nyílt intervallumon értelmezett* függvényeket szokás nevezni.)

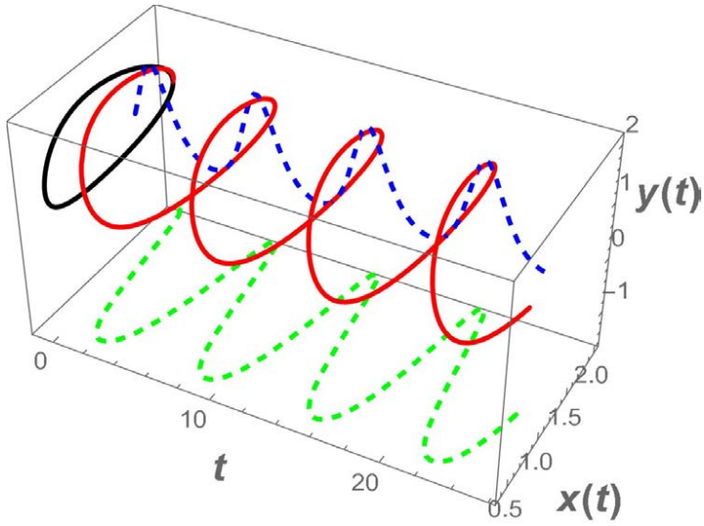
Mi a helyzet az $|\dot{x}| = \sqrt{1 - x(t)^2}$ és az $\dot{x}^2 = 1 - x(t)^2$ egyenletekkel? Ezekre a Picard–Lindelöf-tétel nem vonatkozik, ugyanis ezek **nem explicit** differenciálegyenletek.

2. példa. Az $\dot{x} = x - xy, \dot{y} = xy - y$ **Lotka–Volterra-egyenletről** könnyen belátható, hogy vannak periodikus megoldásai, ugyanis a

$$H(\overline{x}, \overline{y}) := \overline{x} + \overline{y} - \ln(\overline{x}) - \ln(\overline{y}) \quad ((\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$$

összefüggéssel értelmezett H függvény ennek **első integrálja**, azaz a $h(t) := H(x(t), y(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ képlettel értelmezett függvény a megoldások mentén állandó, hiszen $\dot{h}(t) = 0$. Akkor viszont – mivel a megoldások trajektóriái a H függvény szintvonalain haladnak, és ezek a szintvonalak zárt görbék – a megoldások periodikus függvények.

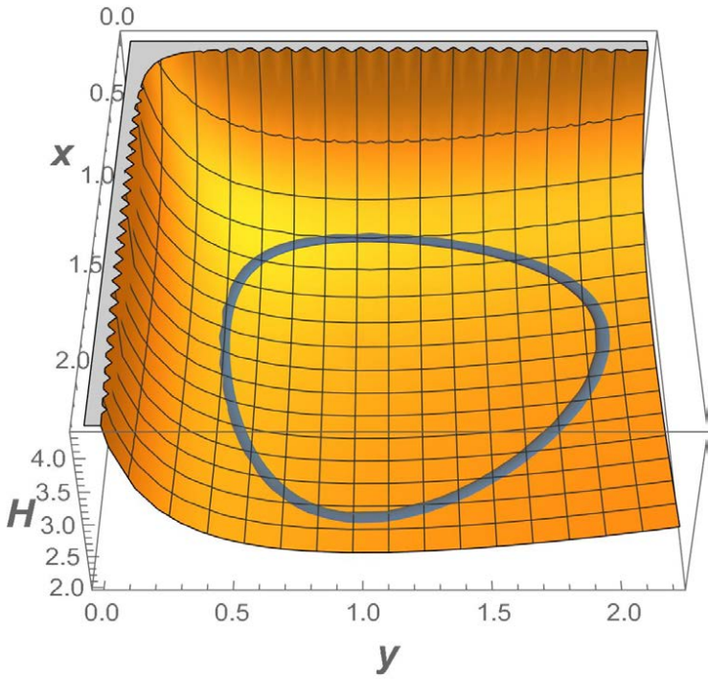
Ezek után felvethető a következő kérdés: előfordulhat-e, hogy a megoldások koordinátafüggvényei ugyanabban a t pontban veszik fel szélsőértéküket? A korábbi érvelést alkalmazva látható, hogy a Picard–Lindelöf-tétel szerint ez lehetetlen.



1. ábra. A Lotka–Volterra-egyenlet egy megoldása, a hozzá tartozó trajektória és a megoldás koordinátafüggvényei

Általában is igaz az az állítás, hogy az (1a) differenciálegyenletnek nincsen olyan (nemtriviális) periodikus megoldása, amelynek összes koordinátafüggvénye ugyanott vesz fel szélsőértéket. Póriasan: a csúcsok és völgyek szükségképpen eltolódnak egymáshoz képest. Hasonlóan ahhoz, ahogyan a költő [2, 623. oldal] mondja:

> „Nem stoppolok, inkább
> végy föl két zoknit, hisz nincsenek egy helyen úgysem
> mind a lukak.”



2. ábra. A Lotka–Volterra-egyenlet első integrálja és az általa definiált felületen fekvő egyik zárt trajektória

Még egy, elméleti szempontból alapvető állításról mutatjuk meg, hogy az (akár matematikán kívüli) alkalmazásokhoz is sok köze van.

2. tétel. (Peano-egyenlőtlenség) *Tekintsük az*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\eta} \qquad (2)$$

kezdetiérték-problémát is, ahol $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ *és* $(\tau, \boldsymbol{\eta}) \in \Omega$. *Legyen valamilyen pozitív* δ *számmal*

$$|\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) - \mathbf{g}(\overline{\mathbf{x}})| < \delta \ (\overline{\mathbf{x}} \in \Omega),$$

és tegyük fel, hogy $\mathbf{f}$ *és* $\mathbf{g}$ *egyaránt olyan függvény, amelyiknek a deriváltja normában korlátos és nem nagyobb, mint az* $L \in \mathbb{R}^+$ *szám. Ha* $\mathbf{x}_i$ *az (i) kezdetérték-feladat megoldása (i=1,2), akkor eltérésük a következőképp becsülhető:*

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_2(t)| \leq |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}| \exp(L|t-\tau|) + \frac{\delta}{L}(\exp(L|t-\tau|) - 1).$$

Világos, hogy a becslés első tagja a **kezdeti állapot mérésének hibájától** függ, és ennek csökkentésével tetszőlegesen kicsivé tehető. A második tag pedig (amennyiben $\mathbf{f}$ írja le helyesen a jelenséget és ennek $\mathbf{g}$ a modellje) a **modell hibájától** függ, a modell javításával ez a tag is tetszőlegesn kicsivé tehető. Mindenesetre az egyenlőtlenség megmutatja, hogy a kísérletezőnek és a modellezőnek egymásra mutogatás helyett érdemesebb összefognia...

Az eltérés tehát minden **véges** intervallumon tetszőlegesen kicsinnyé tehető, ami nem zárja ki a nagy eltéréseket **végtelen hosszú** intervallumon, hiszen a becslés mindkét tagjában exponenciális függvény szerepel, vagyis a Peano-egyenlőtlenség nem mond ellent annak, hogy szép egyenletek megoldásai is nagyon érzékenyek lehetnek a kis eltérésekre.

3. példa. Számítsuk ki (numerikusan) a Lorenz-egyenlet

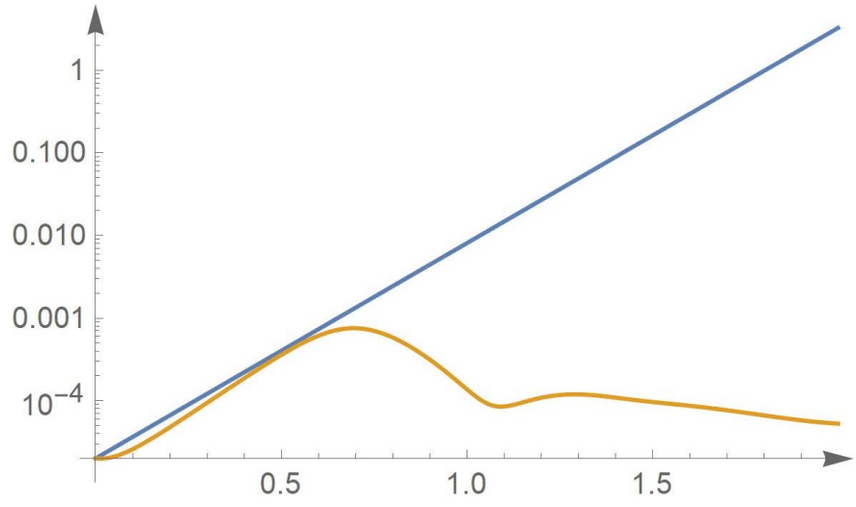
$$\dot{x} = -3(x-y), \quad \dot{y} = -xz + 26.5x - y, \quad \dot{z} = xy - z,$$

két megoldása különbségének normáját, és becsüljük meg ezt az eltérést a Peano-egyenlőtlenség felhasználásával is.

Szükségünk lesz a jobb oldal deriváltja normájának becslésére. Ehhez keresünk egy korlátos zárt halmazt, amelyben a trajektóriák benne maradnak. Ez a halmaz egy alkalmasan választott ellipszoid, lásd a 3. ábrát.

3. ábra. A Lorenz-egyenlte trajektóriái és egy bennfoglaló ellipszoid

Ezek után kiszámoljuk a deviált mátrix normáját ezen az ellipszoidon, ami becsülhető a 6 számmal.



4. ábra. A Lorenz egyenlet $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix}1.0002 & 0 & 0\end{bmatrix}$ kezdeti állapotból indított megoldása különbségének normája és a Peano-egyenlótlenségből adódó becslés.

Ha csak a kezdeti értékek különböznek, akkor a Peano-egyenlőtlenségnek csak első tagja különbözik nullától.

Publikáció

Másik, nem kevésbé tanulságos intelemsorozata [4] , amelynek fordítását az Érintő is közölte, szintén nem maradt kritikai visszhang nélkül. Névai Pál [3] – nem kevés tisztelettel adózva a szerzőnek – kiemelt három tanácsot, amelyekkel szemben komoly ellenérveket sorakoztatott fel, ennek a vitának az áttekintését házi feladatul adjuk az olvasónak. Ha eközben eljut az https://people.math.osu.edu/nevai.1/QUIZ/quiz.txt oldalra, további örömökben is része leend.

Irodalomjegyzék

[1] Birkhoff, Garrett and Rota, Gian-Carlo: *Ordinary differential equations*. Introductions to Higher Mathematics. Ginn and Company, Boston, Mass., 1962.

[2] Devecseri Gábor: Utószó, In: *Quintus Horatius Flaccus összes versei*, Corvina Kiadó, Budapest, 1961.

[3] Névai Pál: Ten lessons I wish I had never been taught by Gian-Carlo Rota. *Notices of the AMS* **44** (3) (1997), 309–310.

[4] Rota, Gian-Carlo: Ten lessons I wish I had been taught. *Notices of the AMS* **44** (1) (1997), 22–25.

[5] Rota, Gian-Carlo: Ten lessons I wish I had learned before I started teaching differential equations. In: Palombi F. (eds) *Indiscrete Thoughts*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, Boston, MA. 1997.

[6] Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek és dinamikai rendszerek*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék, Budapest, 2012. https://simonp.web.elte.hu/files/dinrendjegyzet.pdf

[7] Tóth János és Simon L. Péter: *Differenciálegyenletek. Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba.* (3. kiadás) Typotex, Budapest, 2020.

Tóth János

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

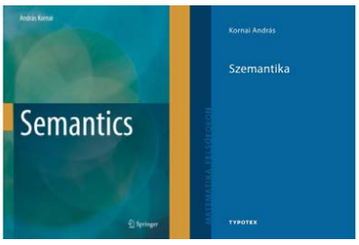
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*



Molnár Zoltán Gábor
2021. SZEPTEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Mit jelentenek a szavaink?

Egyetlen mondatban összefoglalható az ún. számítógépes nyelvészet „szemantika” nevű feladatköre: hogyan mondjuk meg a számítógépnek, hogy mi a szavak jelentése, oly módon, hogy ugyanolyan értelmes válaszokat adjon vissza a kérdéseinkre, mint amilyeneket egy embertől is elvárnánk…*Molnár Zoltán szubjektív beszámolója* Kornai András: Szemantika című könyvéről.

Tóth János
2021. SZEPTEMBER,
KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Róka Sándor: Zénón figyelmeztetése

A jó bornak se árt a cégér. Ahogy a Múzeumok éjszakáján megtelnek az üres épületek, vagy ahogyan az ilyen-olyan Maraton tömegeket vonz a komoly zene meghallgatására, úgy az olvasóink által nyilván nagyrabecsült matematikának is jót tesz, ha élvezetes formában tálalják. Erre kiváló példa Róka Sándor: Zénón figyelmeztetése című könyve. *Tóth János recenziója következik.*

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Molnár Zoltán Gábor 2021. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Mit jelentenek a szavaink?

Kornai András *Szemantika* című könyvéről szubjektív beszámolót fogok írni, mert nagyon sok témához, amit érint, nem értek vagy nem értek kellőképpen. Mégis, azt hiszem ez egy fontos könyv, sokan szeretnének róla hallani, és meggyőződésem, hogy közhasznú cél beszélni róla.

Egyetlen mondatban összefoglalható az ún. számítógépes nyelvészet „szemantika” nevű feladatköre: hogyan mondjuk meg a számítógépnek, hogy mi a szavak jelentése, oly módon, hogy ugyanolyan értelmes válaszokat adjon vissza a kérdéseinkre, mint amilyeneket egy embertől is elvárnánk, amennyiben az adott szöveg tartalmáról érdeklődnénk felőle. Ebből az egyszerű feladatból elég világosan következik, hogy milyen tudományterületek ismereteit építi magába a számítógépes szemantika. A szavak jelentése központi témaköre a nyelvfilozófiának, ezért a számítógépes szemantikában a nyelvfilozófia alkalmazásra talál, amennyiben meghatározandó, hogy mi az, amit a számítógépen a szavaink „értelmeként” kérünk számon. Egy másik tudományhoz, a megismeréstudományhoz vagy kognitív tudományhoz köthető annak felismerése, hogy mi értelmes, vagy annak felmutatása, hogy melyek az értelmes viselkedési formák. Ennek a technikai megvalósítása magas szintű informatikai hátteret kíván, ami szétválaszthatatlanul összefonódik a statisztikával és a számítástudománnyal. A számítógépes szemantikának tehát nem lehet úgy nekiugrani, hogy itt vannak az adatok, ezt szoktuk csinálni velük, hát hajrá! Éppen az a könyv célja, hogy felépítse azt az interdiszciplináris hátteret, amivel egy számítógépszerű ágens szövegmegértését legalább elégséges szinten értelmezni lehet.

A könyv eredetileg tankönyvnek készült, angol nyelvű jegyzetként kezdte életét, és a szerző valóban tanította is a Műegyetem egy idevágó kurzusán. A TypoTeX Kiadóval megegyezve a fejezeteket magyarra fordították: Varasdi Károly (előszó), Máté András, Kálmán László, Makrai Márton, Gyenis Zalán és Takó Ferenc. Ez a kötet 2018-ban jelent meg. A Springer kiadónál az angol változat megjelenése 2020-ig váratott magára.

Az előszóban jól meghatározott olvasótáborokat jelöl meg célközönségként, úgy, mint nyelvész-, filozófus-, informatikus- és kognitívtudomány-szakos hallgatókat. Ha jól belegondolunk, akkor azért ez egy elég szűk kör, hiszen közülük sem érdeklődik mindenki a számítógépes szemantika iránt, és nem is szükséges egy általános, előbb említett hallgatónak a könyv témáiban jártasságot szereznie. Kornai könyve valójában sokkal szélesebb olvasótábornak szól. Ez annak ellenére van így, hogy ha egy, az előbb említett hallgató belelapoz, akkor megijedhet az ott megemlített módszerektől. És valljuk be, a szerző valóban sok munkaóra felkészülést várna el ezektől a diákoktól. Egy helyütt jelzi is, hogy a célközönsége elsősorban doktoranduszok lennének. Ahogy kivettem a szavaiból, konkrétan az ezt a témát kutató doktori hallgató lenne az ideális olvasó. Mint mondtam, ez azonban ne tévesszen meg minket!

Az alapképzésben vagy mesterképzésben tanuló hallgató azért fog megijedni a kötettől, mert Kornai leginkább egy olyan könyvet írt, ami Michael Dummett *A metafizika logikai alapjai* című művéhez hasonlít. Ahogy az angol nyelvűkiadás kritikusa meg is jegyzi: ezt a könyvet senki más nem tudta volna megírni csak Kornai. Ahogy az előbb említettet pedig csak Michael Dummett. A két könyv jellege ugyanis hasonló. Az eddig felhalmozott ismeretek új szemszögből való áttekintését, és új módszerek, megközelítések felvázolását tartalmazza esszészerű stílusban. Varasdi Károly véleménye szerint a *Szemantikát* érdemes újra és újra elővenni, belelapozni és ötleteket meríteni belőle. Ha nem csak doktoranduszoknak szánt *tankönyv* lenne, akkor egészen biztosan jobb lenne az új elméletek számára feltétlenül szükséges előismeretek alapos elkülönítése és didaktikus tálalása. A statisztika világából példaként említeném John Kruschke: *Doing Bayesian Data Analysis: A Tutorial Introduction with R* című tankönyvét. Kruschke nem kevésbé nagy prófétája a bayesianizmusnak, mint Kornai az Eilenberg-gépeknek, de témája működtetését számos egyszerű programrészlettel alaposan elő is készíti. Szívesen olvastam volna egy „Számítógépes szemantika Python példákkal” című munkát. Vagy a számítógépes kognitív nyelvészetből érdemes példaként hozni a Gregory Scontras et. al.: *Probabilistic language understanding: An introduction to the Rational Speech Act framework* című online könyvet, amely kifejezetten egy javascript alapú programnyelv példaprogramjain keresztül szemlélteti a témáját.

Akkor hát a laikus olvasónak hogyan kell olvasnia a *Szemantikát*? Először is a bevezetés elolvasása után az *A prolepszis* című 3. fejezettel kellene kezdenie. (A Boole-algebrákat és a Löwenheim–Skolem-tételt bátran hagyjuk ki!) Ez egy rendkívül olvasmányos és jó stílusban megírt bevezetés a témába. Kiváló példákkal motiválja a számítógépes szemantika feladatát, és érdekesen köti össze a határterületekkel. Olyan példákkal, amelyeket nem fogunk elfelejteni, és az az érzésünk fog támadni, hogy világosan értjük, hogy mire megy ki a játék. A laikus olvasó továbbhaladtában nyugodtan hagyja ki a *Gráfok és Eilenberg-gépek* fejezetet. Tudom-tudom: ez a fejezet lenne a lényeg! De a laikus olvasónak egy szemléletes mondat sokkal többet jelent, mint a formalizmus: most nem a doktori hallgatók szemüvegén át nézzük a könyvet. Az 5. *Fenogrammatika* és a 6. *Lexémák* fejezetet viszont mindenki élvezni fogja, akit érdekel a nyelvészet. Szintén emlékezetes áttekintését nyújtja e két fejezet a szófajtannak, mondattannak, pragmatikának és rendszeresen felbukkannak benne a pszicholingvisztikai problémák. A maradék fejezetekkel való barátkozást az olvasó ízlésére bíznám.

Aki a Springer-féle kiadást olvassa, érzékelheti, hogy Kornai Andrásnak angol nyelven egyedi, felismerhető, élvezetes stílusa van. Ugyanez magyar nyelven a *Szemantika* olvasójának is hamar szembetűnik. Néhány idézettel fejezném ki személyes szimpátiámat Kornai szellemessége mellett. Először egy kognitív tudományi vagy nyelvfilozófiai:

> Az emberek pontosan tudják, mit jelent elárulni valakit vagy valamit, mégis teljesen valószínűtlen, hogy szülők ezt mondják a gyerekeiknek: „itt van az árulás egy tökéletes esete, itt meg egy másik”. 40. o.

A már említett Dummett hangúlyozta jelentéselméletében, hogy egy szó jelentése nem érme, egyik oldalán a jellel, a másikon a jelölttel, amit megmutatunk a gyereknek, hanem inkább egy társasjáték valamely kártyája, amit a játék során bizonyos szituációkban kijátszunk, és ezzel a használati gyakorlattal adjuk meg a jelentést.

Egy másik, nyelvészeti:

> [...] sokkal nehezebb feladat a mondatokhoz szintaktikai elemzéseket társítani (olyanokat, mint az UD függőségi fái), mint megadni a mondattani szerkezeten alapuló szemantikai elemzésüket. Nem tudunk a Mount Everest csúcsára úgy feljutni, hogy ne másznánk meg a Hillary Stepet, de a valódi nehézség nem ennek a 12 méteres falnak a megmászása, hanem az, hogy előbb oda kell jutni. Amikor azt mondjuk, hogy a szemantikának nincs szüksége a központozást kifejező viszonyokra, az nem azt jelenti, hogy ezek nem fontosak, amikor például egyértelműsíteni kell, hogy melyik mondatról van szó: arról-e, hogy *Eats, shoots and leaves*, vagy arról, hogy *Eats shoots and leaves*. 170. o.

(Az itt olvasható két mondat magyar változata az emlékezetes Gertrudis-probléma: *A királynét megölni nem kell félnetek, jó lesz, ha mindenki egyetért, én nem ellenzem.* illetve *A királynét megölni nem kell, félnetek jó lesz, ha mindenki egyetért, én nem, ellenzem.*)

Egy matematikafilozófiai:

> Semmi elkötelezettséget nem kell vállalnunk abban a kérdésben, hogy vajon az euklidészi geometria inkább vagy kevésbé „valóságos” vagy „igaz”, mint a nem-euklidészi. Valójában ennek semmi jelentősége nincs a különböző tételek igazsága vagy valósága szempontjából – jelentősége kizárólag annak van, hogy megértsük, milyen axiómákra van szükség egy adott elmélethez. 26. o.

Amely észrevételt Gödel úgy fogalmazza meg, hogy a hipotetiko-deduktív rendszerek csupán feltételes igazságot tulajdonítanak a tételeknek.

Összességében Kornai *Szemanatikája* egy olvasmányos és érdekes könyv, ajánlható mindenkinek, aki érdeklődik a számítógépes nyelvfeldolgozás problémái iránt, feltéve, hogy az olvasó kellő önmérsékletet tanúsít és nem áll neki a hiányzó háttértudását túl gyors iramban pótolni.

Kornai András: Szemantika, Typotex, 2018, 332 o.
https://www.typotex.hu/book/9642/kornai_andras_szemantika

Andras Kornai: Semantics, Springer International Publishing, 2020 http://library.lol/main/BFC1A3C639F959717FE1E1EF1730201D

Molnár Zoltán Gábor

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Algebra Tanszék

Hivatkozások

Dummett, M. (2000). *A metafizika logikai alapjai*. Osiris.

Kruschke, J. K. (2015). *Doing Bayesian data analysis: A tutorial with R, JAGS, and Stan*. New York, NY: Academic Press.

Scontras, G., Tessler, M. H., and Franke, M. (2018). *Probabilistic language understanding: An introduction to the Rational Speech Act framework*. https://www.problang.org.

Gödel, K (1953). *Néhány tétel a matematika megalapozásáról és ezek következményei*. In: *A matematika filozófiája a 21. század küszöbén*, szerk.: Csaba Ferenc, 2003, Osiris.

---

recenzió matematikafilozófia számítógépes nyelvészet

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tóth János 2021. SZEPTEMBER, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Róka Sándor: Zénón figyelmeztetése

Feladatok a matematika történetéből

A jó bornak se árt a cégér. Ahogy a Múzeumok éjszakáján megtelnek az üres épületek, vagy ahogyan az ilyen-olyan Maraton tömegeket vonz a komoly zene meghallgatására, úgy az olvasóink által nyilván nagyrabecsült matematikának is jót tesz, ha élvezetes formában tálalják. Erre kiváló példa Róka Sándor új könyve. A szerzőt tanárok és diákok jól ismerik, ha máshonnan nem, akkor a – maga nemében – Pólya és Szegő könyvéhez hasonlatos [6] feladatgyűjteményéről.

A serdületlen ifjúságot oly sok káros hatás érheti az iskolában manapság, szerzőnk nem akarja ezek számát azzal növelni, hogy elárulná: a geometria axiomatikus felépítése *definiálatlan* alapfogalmakkal és axiómáknak nevezett *bizonyítatlan* állításokkal indul, a definíciók, tételek és bizonyításuk csak ez után következik. Ez kétségtelenül megrendítő tény, de szerintem hasznosabb megemészteni, mit elkenni.

Ami a prímszámok számát illeti: Eukleidész azt bizonyította be, hogy nem lehet, hogy véges sok van belőlük. Hírneves könyvének [2] tárgymutatójában olyan tisztázatlan fogalom, mint a végtelen nem szerepel. Az állítás Róka Sándor által adott második megfogalmazása szerencsésebb: minden pozitív egésznél létezik nagyobb prímszám. Ez közelebb is áll az eredetihez [2, 271. oldal], amely Mayer Gyula magyar fordítása szerint így szól:

1. tétel. (IX. 20.) *Prímszámból prímszámok bármely adott sokaságánál több van.*

Püthagorasz tételével kapcsolatban érdekes James Abraham Garfield amerikai elnök esete, aki szintén adott egy bizonyítást a tételre, ráadásul cikkének végén megjegyzi, hogy a leírtakkal pártállástól függetlenül mindenki egyetérthet… (36. oldal)

A szögharmadolás feladata (53. oldal) euklideszi szerkesztéssel nem végezhető el. A feladat a megkötéssel együtt teljesen értelmetlennek tűnik, Arkhimédész más módszerekkel sikeresen meg is oldotta. Kétezer évvel később kiderült, hogy a lehetetlenség bizonyításához új matematikai eszközök kellenek, amelyek önmagukban meglehetősen fontosak és hasznosak.

Nagyon jó, hogy Diophantoszról megtudunk valamit sokat emlegetett nevén túl is. Külön örültem a Descartes álma című fejezetnek, ami egy kis filozófiai kitérő. (Talán érdemes lett volna megemlíteni Pólya remek – éppen hogy az ajánlottak közt nem szereplő – könyveit, ha már a *Módszerről* esik itt szó.)

A – legújabbkori útjavításban jelentős szerepet játszó – négyszíntétel tárgyalásában az a szép, hogy számos egyszerűen bizonyítható analóg állítást tartalmaz, amelyek segíthetnek rámutatni az eredeti állítás bizonyításának nehézségeire. Talán érdemes lett volna megemlíteni vagy akár meg is mutatni, hogy olyan térkép is konstruálható, amelyiknek kiszínezéséhez 5, 6 vagy 18 szín kell [8, 178–179. oldal]. Ez a konstrukció rámutat arra, hogy a tételben pontosan mit is kell értenünk térképen és színezésen.

Talán irigyelhetjük Königsberg lakóit, hogy volt érkezésük a Pregel hídjainak bejárásával törődni. Fölmerül a kérdés, hogy kell-e ma irigyelnünk őket?

Ami a Gellérthegyről letekintő személyt illeti (105. oldal), a mi valószínűségszámítás-óránkat Rényi Alfréd azzal az állítással kezdte, hogy letekintve sztochasztikus folyamatokat látunk…

A Könyvről szóló könyvet szerzőnk is ajánlja, én is kiemelem: [1].

Bár a görög matematika legnagyobbja kétségtelenül Arkhimédész volt, éppen az igazán nagy újdonság, a határérték fogalmának kidolgozásában Eudoxosznak volt a legfontosabb szerepe [7, 2.6. szakasz].

Néhány érdekes állítás, feladat:

26. oldal. Gauss (1796): Bármely természetes szám előáll három háromszögszám összegeként.

74. oldal. Fermat tételére hivatkozva bizonyítsuk be, hogy $n \geq 3$ esetén $\sqrt[n]{2}$ értéke irracionális szám.

A könyvet a feladatok megoldása zárja, legvégül pedig jegyzetek, további ajánlott olvasmányok szerepelnek. A kötet kiállítása szép.

A 31. oldal legutolsó sorában gépelési hiba található, ami kizárólag azért méltó az említésre, mert egyetlen továbbit sem találtam a könyvben.

Összefoglalva: tanároknak kötelező, okos diákoknak nagyon hasznos olvasmány, bár néhol valószínűleg túlmegy a jelenlegi középiskolai anyagon. A matematikát (részben történetén keresztül, mint [3,4,5,7]) népszerűsítő irodalom legújabb gyöngyszeme.

Róka Sándor: Zénón figyelmeztetése. Feladatok a matematika történetéből, Typotex, Budapest, 2021.

Irodalomjegyzék

[1] M. Aigner, G. M. Zigler: *Bizonyítások a Könyvből*, Typotex, Budapest, 2009.

[2] Eukleidész: *Elemek*, Gondolat, Budapest, 1983. Fordította: Mayer Gyula.

[3] Filep László: *A tudományok királynője*, Typotex, Budapest, 2012.

[4] B. A. Korgyemszkij: *Piruett körzővel. Matematikai feladványok nem csak*

iskolásoknak, Typotex, Budapest, 2019. https://ematlap.hu/konyvespolc-2020-11/958-piruett-korzovel

[5] B. A. Korgyemszkij: *A nyúl nem tanult matematikát. Mesés fejtörők nem csak iskolásoknak*, Typotex, Budapest, 2018. https://ematlap.hu/konyvespolc-2020-10/942-a-nyul-nem-tanult-matematikat

[6] Róka Sándor: *2000 feladat az elemi matematika köréből*, 7. kiadás, Typotex, Budapest, 2021.

[7] Simonovits András: *Válogatott fejezetek a matematika történetéből*, Typotex, Budapest, 2009.

[8] N. Ja. Vilenkin: *A végtelen kutatása*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

Tóth János

matematikatörténet recenzió matematikatanítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.

Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 21. szám 2021. szeptember Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

100

Cím	Szerző
ECM8 – Ilyen volt a 8. Európai Matematikai Kongresszus	Írta: Földvári Viktória
Ez történt a MEMO 2021-en	Írta: Lenger Dániel, Imolay András
Online IMO 2021, és ami előtte volt…	Írta: Dobos Sándor
Két augusztusi jó hír	Írta: Szerkesztő
A 60. (online) Rátz László Vándorgyűlés	Írta: Kosztolányi József
Egy siker fényében – ismerjük meg az IMC-t!	Írta: Kós Géza, Kós Rita
KöMaL új-ságok	Írta: Kós Rita, Oláh Vera, Vladár Károly
Matematikus történetek: T. Sós Vera	Írta: Szerkesztő
Czách László (1929–2021)	Írta: Faragó István, Pfeil Tamás, Szilágyi Tivadar
A pedagógus a számítógépek korában	Írta: Szerkesztő
Járványmatek középiskolásoknak – 1. rész	Írta: Volf Annamária
Tipográfia a matematikaórán	Írta: Székely Péter
Fejezetek a matematikai analízis tanításának történetéből	Írta: Kántor Sándorné
Mi is…az EGMO? – 2021/2022	Írta: Baran Zsuzsa, Molnár-Sáska Gábor
Mit jelentenek a szavaink?	Írta: Molnár Zoltán Gábor
Róka Sándor: Zénón figyelmeztetése	Írta: Tóth János
Az elmélet haszna – avagy inkább végy föl két zoknit...	Írta: Tóth János
Az entrópia-hatásfüggvény-sejtés	Írta: Bakos Bence, Pálfy Máté
Mi is... egy nyitott könyv?	Írta: Emmanuel Giroux
Gördülő akrobatikus eszközök	Írta: Henry Segelman, Figula Ágota
Kiszámított emlékezet	Írta: Juhász Nóra
Epidemiológia és Modellezés Workshop, Kecskemét, 2021. július 14–16.	Írta: Dénes Attila

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot

készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés

Elfogadom.