Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

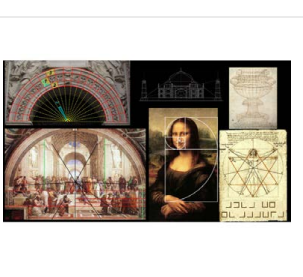
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

19. szám 2021. március

2021. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Digitális ikrek – matematika a technológiában

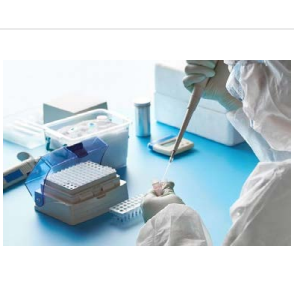
Nem szeretem azt a kifejezést, hogy alkalmazott matematika, mert egy matematika van, és annak a különféle alkalmazásai – mondja az interjúban *Horváth Zoltán*, az európai ipari és innovációs matematika szolgáltatási hálózat, az EU-MATHS-IN új elnöke. A győri Széchenyi István Egyetem Matematikai és Informatikai Tanszékének vezetője 2013 óta elnöke a hálózat magyar tagszervezetének, amely 7 egyetem és két kutatóintézet összesen 22 kutatócsoportját fogja össze. Tovább...



2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

„Matematika egy jobb világért"

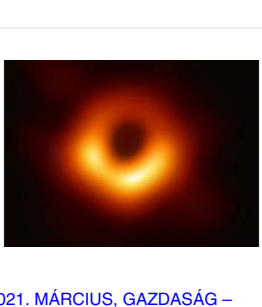
A Matematika Világnapjának ez évi szlogenje aktualisabb ma, egy világjárvány kellős közepén, mint bármikor. A Nemzetközi Matematikai Unió vezette projekt honlapján, a https://www.idm314.org/ címen hívják fel minden ország figyelmét arra, mivel lehet a matematikát az év egy napján, március 14-én megünnepelni: „Matematika egy jobb világért".



2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mennyit teszteljünk? 3. rész – a Bayes-becslésről

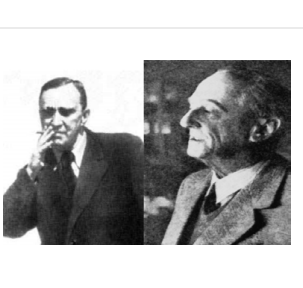
Cikkünk első két részében azzal foglalkoztunk, hogy hány tesztelést kell végeznünk, ha adott pontossággal szeretnénk megállapítani, megbecsülni egy adott betegségben szenvedők arányát. Ehhez felidéztük a normális eloszlással való közelítést (1. rész), a konfidenciaintervallum fogalmát, és bemutattuk a maximum-likelihood becslést (2. rész), ami alátámasztotta azt a természetesnek tűnő becslési módszert, hogy az ismeretlen valószínűséget a bekövetkezett kísérletek arányával becsüljük. Azonban még ennek az egyszerű módszernek is lehetnek hátrányai – állítja *Backhausz Ágnes*. Tovább...



2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Roger Penrose: az első Nobel-díjas matematikus, 2. rész

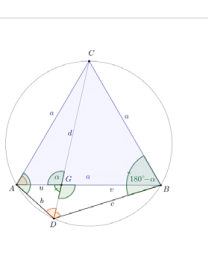
Penrose munkássága előtt tisztelgő áttekintő írásunk első részében a fizikai Nobel-díjas matematikus főleg matematikai jellegű eredményei (lehetetlen ábrák, kváziperiodikus csempézések és twisztor-elmélet) tekintette át Szabó Szilárd. A második részben *Etesi Gábor* elméleti fizikai, pontosabban gravitációelméleti eredményeit veszi közelebbről szemügyre; ezekért az 1960-70-es években folytatott vizsgálataiért nyerte el a fizikai Nobel-díjat 2020-ban. Tovább...



2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Skót kávéház

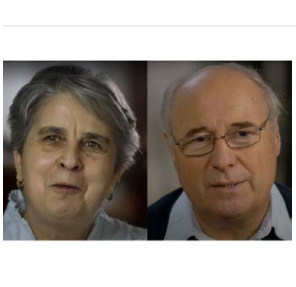
A huszadik század első felében a kávéházak a társasági élet legfontosabb helyszínei voltak Európa-szerte: irodalmárok, képzőművészek, tudósok csoportjai tartottak rendszeres összejöveteleket, vagy éppen dolgoztak egy-egy kávéház törzsvendégeként. A Skót Kávéház Lwówban a lengyel matematikus elit állandó gyülekezőhelyének számított. A társaság központi figurái: Banach, Mazur és Ulam... A kávéház főpincérétől lehetett elkérni a Skót Könyvet. Hogy mi is volt az, *Titkos Tamás* írja le a következőkben.



2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése egy feladat példáján

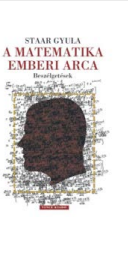
A tananyag folyamatos frissen tartása érdekében az oktatók rendszeresen tanulmányozzák a diákok nehézségeit, feladatokhoz való hozzáállását és a megoldásaikat. Ebben a tanulmányban az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ két oktatója, *Ambrus Gabriella* és *Fried Katalin* mutat be egy válogatást egy geometria feladathoz készített megoldásokból, hallgatói munkákat is felhasználva. Tovább...



2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Rátz-életműdíj: Horváth Eszter és Kiss Géza

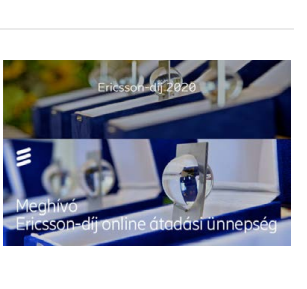
2020. decemberében tartották meg a Rátz Tanár Úr Életműdíj jubileumi évében az első online díjkiosztó ünnepséget. A legújabb díjazottak matematikából: *Dr. Horváth Eszter* és *Dr. Kiss Géza*, fizikából *Lévainé Kovács Róza* és *Farkas László*, kémiából *Dobóné Dr. Tarai Éva* és *Sebő Péter*, biológiából *Gadóné Kézdy Edit* és *Dr. Franyó István*. A két matematikatanár kollégáról a díjátadóra készített videókat láthatják a következőkben.



2021. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Staar Gyula: A matematika emberi arca

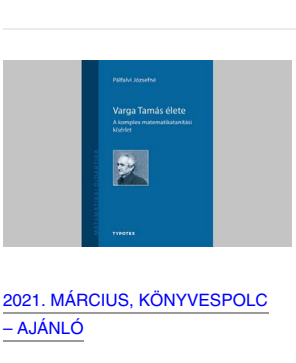
Az interjúkötet különböző utakat bejárt szereplőiben közös nemcsak a tehetség, de szokatlanul széleskörű az érdeklődés, hatalmas a kitartás, az ifjúság jövője iránti felelősség, a család iránti szeretet. Az ő életükben is voltak buktatók, szomorúság, de sikereik, örömeik, kitűzött céljaik elérése jellemzi mindegyiküket. Egyvalamiben sosem csalódtak: a matematikában. Tovább...



2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Ericsson-díj eredményhirdetés 2020

Matematikából és fizikából is 4-4 tanár érdemelte ki a tavalyi évben az Ericsson által 21-edszer kitűzött díjakat. A nyertesek matematikából: *Szilágyiné Manasses Melinda*, *Győry Ákos*, *Juhász Péter* és *Lángné Juhász Szilvia*, fizikából pedig *Siposs András*, *Hömöstrei Mihály*, *Rudolf Tamásné* és *Szabó László Attila*. A 2020 decemberében lezajlott online díjátadó videói és a díjazottak méltatása következik.



2021. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

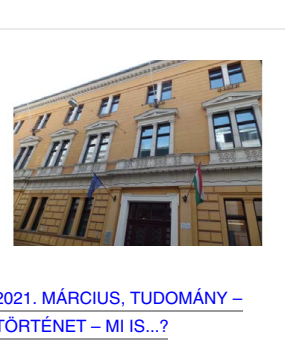
Pálfalvi Józsefné: Varga Tamás élete

Az 1987-ben elhunyt, világszerte ismert nagy műveltségű matematikusnak, aki a 20. századi iskolai matematika megújításának egyik vezetője volt, sokat emlegetett komplex matematikatanítási kísérlete a mai tanítók és tanárok számára már történelem, részleteit kevesen ismerik. Ezt a hiányt pótolja *Pálfalvi Józsefné* könyve Varga Tamás életéről. Tovább...

2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Erdős László Schrödinger-díjas

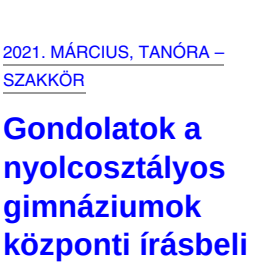
Az Osztrák Tudományos Akadémia 2020 márciusában Erdős Lászlónak, az Osztrák Tudományos és Technológiai Intézet professzorának ítélte az Erwin Schrödinger-díjat. A jelentős kitüntetést a matematika és a fizika határterületein végzett kiemelkedő munkásságáért kapta, különösen tekintettel a véletlen mátrixok elméletében elért úttörő eredményeire. Tovább...



2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

70 éves a Rényi Intézet

1950. augusztus elsején alakult meg a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete. Sajnos, a hetvenéves évforduló megünneplésére tervezett nemzetközi konferenciát a járványhelyzet miatt nem lehetett megtartani. Ebben a cikkben az intézet történetének néhány fontos, illetve érdekes mozzanatát mutatja be Pálfy Péter Pál, a kutatóintézet korábbi igazgatója. Bár a hét évtized alatt született tudományos eredmények gazdag tárházába most nem nyerhetünk bepillantást, de az egykori és mostani munkatársak eredményei magukért beszélnek. Tovább...



2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

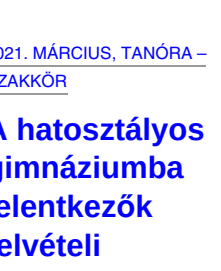
Gondolatok a nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli felvételijéről

Minden év elején sokezer tinédzsert és szülőt tartanak izgalomban a gimnáziumi felvételi vizsgák. Az idei hatosztályos felvételiről az Eötvös József Gimnáziumban Gyengéné Beé Andrea, a négyosztályos középiskolákba felvételiről dolgozatairól a Szent István Gimnáziumban Tamás Beáta és Magyar Zsolt küldött beszámolót. A *Kempelen Farkas Gimnázium* matematika munkaközösségének írása a *nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli feladatsoráról* a következőkben olvasható.

2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Javítási tapasztalatok a 9. évfolyamra jelentkezők felvételi dolgozataiban

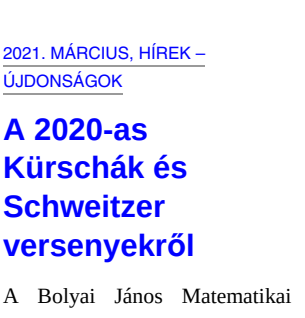
Minden év elején sokezer tinédzsert és szülőt tartanak izgalomban a gimnáziumi felvételi vizsgák. Az idei nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli feladatsoráról a Kempelen Farkas Gimnázium matematika munkaközössége, a hatosztályos felvételiről az Eötvös József Gimnáziumban Gyengéné Beé Andrea küldött beszámolót. A *négyosztályos középiskolákba felvételizők dolgozatairól* a Szent István Gimnáziumban *Tamás Beáta* és *Magyar Zsolt* írása a következőkben olvasható.



2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A hatosztályos gimnáziumba jelentkezők felvételi feladatsoráról

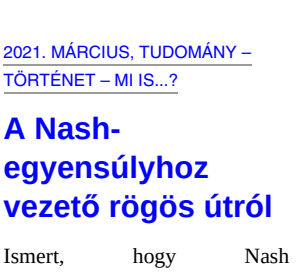
Minden év elején sokezer tinédzsert és szülőt tartanak izgalomban a gimnáziumi felvételi vizsgák. Az idei nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli feladatsoráról a Kempelen Farkas Gimnázium matematika munkaközössége, a négyosztályos középiskolákba felvételizők dolgozatairól a Szent István Gimnáziumban Tamás Beáta és Magyar Zsolt küldött beszámolót. *A hatosztályos felvételiről* az Eötvös József Gimnáziumban *Gyengéné Beé Andrea* írása a következőkben olvasható.



2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 2020-as Kürschák és Schweitzer versenyekről

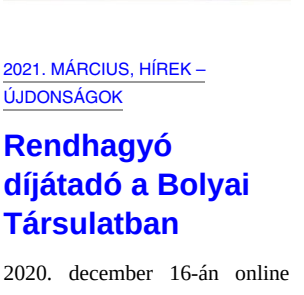
A Bolyai János Matematikai Társulat a 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 2-án rendezte meg – a verseny történetében először, a járványügyi helyzet való tekintettel – online formában. 2020. október 22. és 2020. november 2. között pedig a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyre került sor hagyományos módon, mivel itt nincs szükség a személyes jelenlétre. Mindkét verseny eredményhirdetését a Bolyai Társulat díjkiosztó ünnepségén december 16-án tartották Zoom Meeting keretében. Tovább...



2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Nash-egyensúlyhoz vezető rögös útról

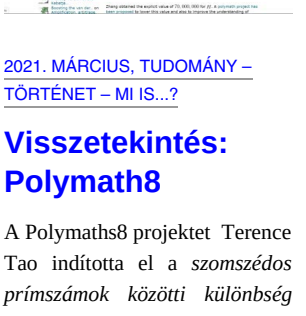
Ismert, hogy Nash tanulmányozta elsőként az *n*-személyes nemkooperatív játékelmélet – egyébként kézenfekvő – egyensúlyát, amelyet hamarosan róla neveztek el. De sokan még ma sem tudják, milyen rögös út vezetett el a definícióhoz és az egzisztenciatétel kimondásához. Ebben a rövid írásban az említett felfedezést a matematika alkalmazásai iránt érdeklődők számára vázolja *Simonovits András*. Tovább...



2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Rendhagyó díjátadó a Bolyai Társulatban

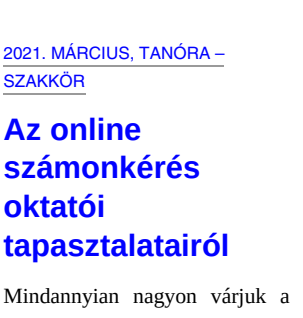
2020. december 16-án online díjátadót rendezett a Bolyai János Matematikai Társulat. Az erről készült felvételeket a Bolyai YouTube-csatornáján lehet megnézni. Pálfy Péter Pál elnök megnyitójával külön-külön a Beke Manó Emlékdíjak, a Szele Tibor Emlékérem, a Grünwald Géza Emlékérmek, a Farkas Gyula Emlékdíjak, a Patai-díjak és a Bod Péter Emlékdíj átadását, valamint a Schweitzer Miklós Emlékverseny és a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny eredményhirdetését. Cikkünk a korábbi évekhez hasonlóan összefoglalót nyújt a társulati díjak legutóbbi, rendhagyó átvételéről. Tovább...



2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Visszatekintés: Polymath8

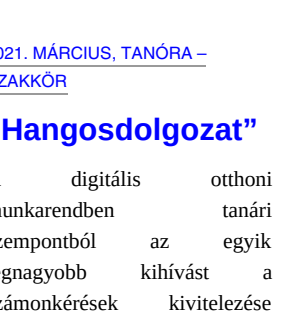
A Polymath8 projektet Terence Tao indította el a *szomszédos prímszámok közötti különbség* témájában 2013-ban. A matematikai kutatás új formájának tapasztalatait osztja meg *Harcos Gergely*, aki a Polymath8 átsegített egy nehéz időszakon, és összebarátott olyan kollégákkal, akikkel másképpen nem írt volna közös cikket. Mindenki nyomon követhette a projektet: azok is, akik elkötelezettnek tartották, hogy ilyen módon komoly eredmények születhetnek. Tovább...



2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Az online számonkérés oktatói tapasztalatairól

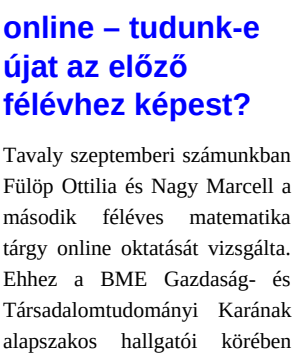
Mindannyian nagyon várjuk a visszatérést a jelenléti oktatáshoz, mert úgy érezzük, hogy az oktatómunka eredményességéhez felbecsülhetetlen értékű hozzátartozik a hallgatókkal való személyes kapcsolattartás, és így a számonkérés is reálisabb eredményt hoz. Mindazonáltal a digitális oktatás némely elemét a jövőben is érdemes lesz megtartani. Két félév tapasztalatairól *Kónya Eszter*, a Debreceni Egyetem oktatója. Tovább...



2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

„Hangosdolgozat"

A digitális otthoni munkarendben tanári szempontból az egyik legnagyobb kihívást a számonkérések kivitelezése jelenti. Egy fiatal középiskolai tanár, *Kiss Márton* azt próbálta ki osztályában, hogy matematikából az otthon írásban megoldott dolgozat feladatait nem elég leírnyképezve visszaküldeniük a tanulóknak, hanem készíteniük kell egy hangfelvételt is a megoldások gondolatmenetéről, magyarázatáról. A kísérlet nagyon érdekes eredményeket hozott...



2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

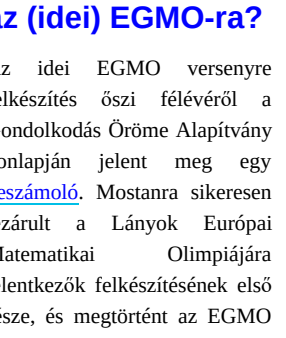
Matematikaoktatás online – tudunk-e újat az előző félévhez képest?

Tavaly szeptemberi számunkban Fülöp Otília és Nagy Marcell a második féléves matematika tárgy online oktatását vizsgálta. Ehhez a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karának alapszakos hallgatói körében elvégzett felmérésüket hívták segítségül. A 2020/21-es tanévben már felhasználhatták előző félévben szerzett, online oktatással kapcsolatos tapasztalataikat. És igen, volt, amit most másképp csináltak... Tovább...

2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az Arany Dániel Matematika Verseny 2020-as döntője

A 2019/20-as tanév Arany Dániel Matematika Verseny döntőjét – több más versenyhez hasonlóan – nem tudta a Bolyai János Matematikai Társulat a szokásos időben és formában megrendezni, tavaszról elhalasztották ősszre. Minden résztvevő a saját iskolájában írta meg a versenydolgozatot. A nehézségek ellenére a döntő jól sikerült – erről számol be a két versenybizottság elnöke, *Fonyó Lajos* és *Balga Attila*. Tovább...



2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hogyan készülünk az (idei) EGMO-ra?

Az idei EGMO versenyre felkészítés őszi félévéről a Gondolkodás Öröme Alapítvány honlapján jelent meg egy beszámoló. Mostanra sikeresen lezárult a Lányok Európai Matematikai Olimpiájára jelentkezők felkészítésének első része, és megtörtént az EGMO 2021-es részt vevő magyar csapat kiválasztása. A felkészítésre 47 lány regisztrált, ami sokkal több, mint a korábbi években bármikor. A nagy érdeklődés azért is biztató, mivel 2022-ben Magyarország szervezi az EGMO-t. (Fényképünk a 2. válogatón készült, a Rényi Intézet nagytermében.) Tovább...

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **HÍREK – ÚJDONSÁGOK** ROVAT A MATEMATIKÁHOZ ÉS A BOLYAI TÁRSULATHOZ KAPCSOLÓDÓ ESEMÉNYEKRŐL, ÚJDONSÁGOKRÓL SZÓL. (ROVATSZERKESZTŐ: *RÁKÓCZI ILDIKÓ.*)

Szerkesztő
2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Rátz-életműdíj: Horváth Eszter és Kiss Géza

2020. decemberében tartották meg a Rátz Tanár Úr Életműdíj jubileumi évében az első online díjkiosztó ünnepséget. A legújabb díjazottak matematikából *Dr. Horváth Eszter* és *Dr. Kiss Géza*, fizikából *Lévainé Kovács Róza* és *Farkas László*, kémiából *Dobóné Dr. Tarai Éva* és *Sebő Péter*, biológiából *Gadóné Kézdy Edit* és *Dr. Franyó István*. A két matematikatanár kollégáról a díjátadóra készített videókat láthatják a következőkben.

Szerkesztő
2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Erdős László Schrödinger-díjas

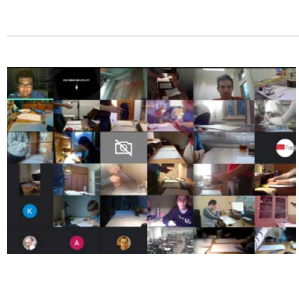
Az Osztrák Tudományos Akadémia 2020 márciusában Erdős Lászlónak, az Osztrák Tudományos és Technológiai Intézet professzorának ítélte az Erwin Schrödinger-díjat. A jelentős kitüntetést a matematika és a fizika határterületein végzett kiemelkedő munkásságáért kapta, különösen tekintettel a véletlen mátrixok elméletében elért úttörő eredményeire. Tovább…

Ericsson-díj 2020
Meghívó
Ericsson-díj online átadási ünnepség

Szerkesztő
2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Ericsson-díj eredményhirdetés 2020

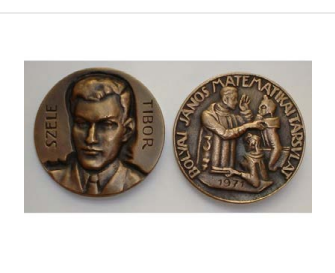
Matematikából és fizikából is 4-4 tanár érdemelte ki a tavalyi évben az Ericsson által 21-edszer kitűzött díjakat. A nyertesek matematikából: *Szilágyiné Manasses Melinda, Győry Ákos, Juhász Péter* és *Lángné Juhász Szilvia*, fizikából pedig *Siposs András, Hömöstrei Mihály, Rudolf Tamásné* és *Szabó László Attila*. A 2020 decemberében lezajlott online díjkiosztó videói és a díjazottak méltatása következik.



Pach Péter Pál, Harangi Viktor
2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 2020-as Kürschák és Schweitzer versenyekről

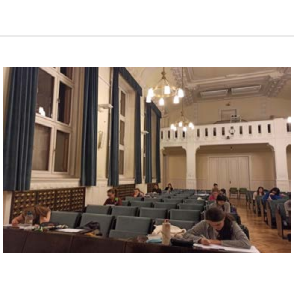
A Bolyai János Matematikai Társulat a 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 2-án rendezte meg – a verseny történetében először, a járványügyi helyzetre való tekintettel – online formában. 2020. október 22. és 2020. november 2. között pedig a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyre került sor hagyományos módon, mivel itt nincs szükség a személyes jelenlétre. Mindkét verseny eredményhirdetését a Bolyai Társulat díjkiosztó ünnepségén december 16-án tartották Zoom Meeting keretében. Tovább...



Szerkesztő
2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Rendhagyó díjátadó a Bolyai Társulatban

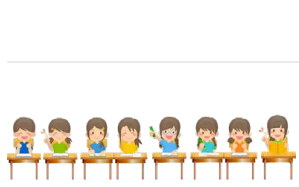
2020. december 16-án online díjátadót rendezett a Bolyai János Matematikai Társulat. Az erről készült felvételeket a Bolyai YouTube-csatornáján lehet megnézni, Pálfy Péter Pál elnök megnyitójával külön-külön a Beke Manó Emlékdíjak, a Szele Tibor Emlékérem, a Grünwald Géza Emlékérmek, a Farkas Gyula Emlékdíjak, a Patai-díjak és a Bod Péter Emlékdíj átadását, valamint a Schweitzer Miklós Emlékverseny és a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny eredményhirdetését. Cikkünk a korábbi évekhez hasonlóan összefoglalót nyújt a társulati díjak legutóbbi, rendhagyó átvételéről. Tovább...



Fekete Panna, Kiss Melinda Flóra
2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hogyan készülünk az (idei) EGMO-ra?

Az idei EGMO versenyre felkészítés őszi félévéről a Gondolkodás Öröme Alapítvány honlapján jelent meg egy beszámoló. Mostanra sikeresen lezárult a Lányok Európai Matematikai Olimpiájára jelentkezők felkészítésének első része, és megtörtént az EGMO 2021-en részt vevő magyar csapat kiválasztása. A felkészítésre 47 lány regisztrált, ami sokkal több, mint a korábbi években bármikor. A nagy érdeklődés azért is biztató, mivel 2022-ben Magyarország szervezi az EGMO-t. (Fényképünk a 2. válogatón készült, a Rényi Intézet nagytermében.) Tovább…



Balga Attila, Fonyó Lajos
2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az Arany Dániel Matematika Verseny 2020-as döntője

A 2019/20-as tanév Arany Dániel Matematika Versenye döntőjét – több más versenyhez hasonlóan – nem tudta a Bolyai János Matematikai Társulat a szokásos időben és formában megrendezni, tavaszról elhalasztották őszre. Minden résztvevő a saját iskolájában írta meg a versenydolgozatot. A nehézségek ellenére a döntő jól sikerült – erről számol be a két versenybizottság elnöke, *Fonyó Lajos* és *Balga Attila*. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

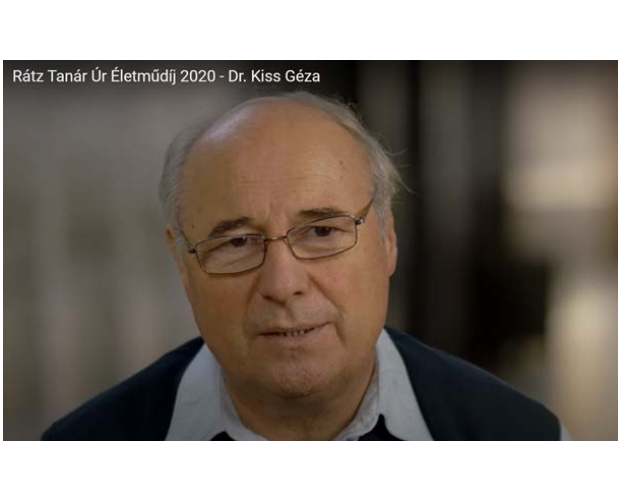
Rátz-életműdíj: Horváth Eszter és Kiss Géza

RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ
2000-2020.

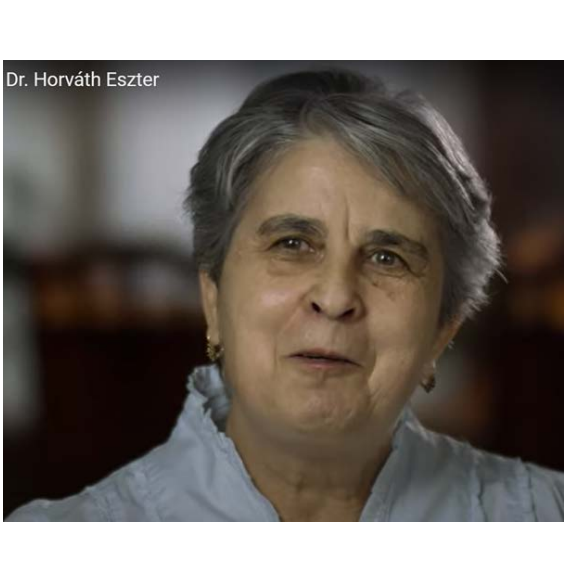
2020. decemberében tartották meg a Rátz Tanár Úr Életműdíj jubileumi évében az első online díjkiosztó ünnepséget. A legújabb díjazottak matematikából Dr. Horváth Eszter és Dr. Kiss Géza, fizikából Lévainé Kovács Róza és Farkas László, kémiából Dobóné Dr. Tarai Éva és Sebő Péter, biológiából Gadóné Kézdy Edit és Dr. Franyó István.

Részletesen lehet mindegyikükről olvasni
a https://www.ratztanarurdij.hu/dijazottak/2020 oldalon.

Kezdőlap
Rátz László életrajz
Kapcsolat
JUBILEUMI ÉV
20
2000 - 2020
INTERJÚK
...hogy ne csak a világhírű tudósok,
hanem a tanáraik nevét is ismerjük...
RÁTZ TANÁR ÚR
ÉLETMŰDÍJ


Rátz Tanár Úr Életműdíj 2020 - Dr. Kiss Géza

Dr. Kiss Géza az ELTE TTK matematika-fizika középiskolai tanári diplomájának megszerzését követően az 1983/84-es tanévtől a kisújszállási Móricz Zsigmond Gimnáziumban tanított, majd közben 1988-tól 1996-ig igazgatóként dolgozott. 2003-tól az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumban tanított, majd 2009-től a Budapesti Fazekas Mihály Általános Iskola és Gimnázium vezetőtanára lett. Kiss Géza kiemelkedő szakmai tudású és kitűnő pedagógiai érzékű, elhivatott, nagy hatású tanáregyéniség, aki a legkülönbözőbb képességű és hozzáállású diákok tanításában és nevelésében végez a mai napig kiváló munkát. Szakmai tudása, alapos felkészültsége miatt a diákok nagy érdeklődéssel, odafigyeléssel, aktivitással vesznek részt az óráin. Tanár úr a legnehezebb problémákat is úgy képes a diákok elé tárni, hogy azok megértése magától értetődő számukra. Megnyerő egyénisége népszerűvé teszi a kollégák körében is, megfigyeléseit, megállapításait kollégái elfogadják. Publikációi sokirányúak, tudását, tapasztalatait sikeresen adja tovább tanártársainak. A tanári munkához kapcsolódik tudományos fokozata, versenybizottsági és versenyszervező tevékenysége, a KöMaL szerkesztőbizottsági tagsága, középiskolásoknak szóló matematikakönyvek lektorálása, szerkesztése és írása, vezetőtanári munkája. Aktív munkatársa a Zalamat Alapítványnak, és az Erdős Pál Matematika Tehetséggondozó iskolának. Foglalkozásokat vezet nyári matematika táborokban. Diáktalálkozók, vándorgyűlések, számos tanártalálkozó, konferencia meghívott előadója. Középiskolás tanítványai a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok pontversenyein, az Arany Dániel Matematikaversenyeken és az Országos Középiskolai Matematika Versenyeken kiváló helyen végeznek. Külön kiemelendő a tehetséggondozása, aminek köszönhetően tanítványai nagy számban érnek el nívós eredményeket a legrangosabb versenyeken. (A Közép-Európai Matematikai Olimpián (MEMO), az Európai Lány Matematikai Olimpián (EGMO) és a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián (IMO). Eddigi munkásságát 2006-ban és 2015-ben Graphisoft-díjjal, 2012-ben Beke Manó-díjjal és a MOL Tehetséggondozásért-díjjal, 2014-ben Ericsson-díjjal ismerték el. Dr. Kiss Géza a legkiválóbbak közül is kiemelkedik. Emberi tulajdonságai, szerénysége, önzetlen segítőkészsége, állandó önképzése is méltóvá teszik a Rátz Tanár Úr Életműdíjra.



Dr. Horváth Eszter 1979-ben végzett az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika-fizika szakán. A budapesti Szilágyi Erzsébet Gimnáziumban kezdte meg tanári hivatását, 23 évig a matematika-fizika munkaközösség vezetője volt. Ezt követően a Piarista Gimnáziumban tanított, 2014-től a Kempelen Farkas Gimnázium tanára. Soha nem lanyhuló lelkesedéssel és energiával végzi sokirányú tanári munkáját, mindig maximális felelősséget érezve tanítványaiért és tanártársaiért. Nagyfokú precizitás és igényesség jellemzi munkáját, kimagasló szervezőkészségét a mindennapokban aktívan gyakorolja. Lelkesedése, példája, kedves, de határozott egyénisége, lenyűgöző szakmai tudása kivívja diákjai szeretetét és elismerését. A tanítás tölti ki az életét, ehhez kapcsolódik a summa cum laude doktori fokozatban kiteljesedő sikeres matematikai kutatása, a speciális matematika tagozatosok több évtizedes specmatos versenybizottsági tagsága, széleskörű tantervkészítői tevékenysége, tehetséggondozó és tanártovábbképző munkája. Megszerzett és folyamatosan fejlesztett ismereteit számos fórumon adja tovább kollégáinak. Külön kiemelendő közösségformáló ereje a Pázmány Péter Katolikus Egyetem keretében működő matematika tanárok részére megálmodott továbbképzés irányítójaként, a matematika tanárklub megalapítójaként és fáradhatatlan szervezőjeként, valamint a hiánypótló tanári levelező fórum megálmodójaként, kifejlesztőjeként és fenntartójaként. Az évente megjelenő gondosan összeállított, nagy terjedelmű, kitűnően megírt, változatos témájú tanártovábbképzést támogató anyagok jelentős részének szerzője és lektora. Ezek az interneten szabadon elérhetőek, jól segítve tanárokat és diákokat egyaránt. Sokoldalú, szakmailag és pedagógiailag egyaránt nagyszerű tanáregyéniség. Tehetséggondozó tevékenysége kiemelkedő, diákjai sikerrel szerepelnek országos versenyeken. A Rátz László Vándorgyűlések és a Varga Tamás Napok rendszeres részvevője, számos alkalommal előadója, az Érintő elektronikus folyóirat szerkesztője, cikk szerzője. 2001-ben szakmai munkáját Beke Manó-Emlékdíjjal ismerték el, 2009-ben Ericsson-díjban részesült, 2020-ban a Dél-Budapest Köznevelésééert-díjat kapta meg. A matematikatanári közéletben vitt megkérdőjelezhetetlen szerepe, elképesztő munkabírása, a személyéből a tanítványok felé áradó értő odafigyelés és szeretet, a legnemesebb értelemben vett küldetés- és hivatástudat maximálisan méltóvá teszik a Rátz Tanár Úr Életműdíjra.

díjazottak Rátz László

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Erdős László Schrödinger-díjas

Az Osztrák Tudományos Akadémia idén Erdős Lászlónak, a Maria Guggingban található Institute of Science and Technology Austria (IST) professzorának ítélte az Erwin Schrödinger-díjat. A másik díjazott Markus Arndt, a Universität Wien professzora.

Erdős László átveszi a Schrödinger-díjat 2020. márc. 2-n (© IST Austria).

Erdős László kutatási területe a matematikai fizika és a valószínűségszámítás. A díjat (ami az egyik legjelentősebb kitüntetés ezen a területen) a matematika és a fizika határterületein végzett kiemelkedő munkásságáért kapta, különösen tekintettel a véletlen mátrixok elméletében elért úttörő eredményeire.

Erdős László az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerzett diplomát, majd a Princeton University-n doktorált Elliott H. Lieb vezetésével. (A doktori tézis címe: Magnetic Schrödinger Operators and Estimates on Stochastic Oscillatory Integrals.) Doktori fokozatszerzése után olyan neves intézményekben dolgozott, mint az ETH Zürich, a Courant Institute, vagy a GeorgiaTech.

2013 óta dolgozik az Osztrák Tudományos és Technológiai Intézetben, az IST-ben, ahol az Erdős Group vezetője. 2015-ben lett az Osztrák Tudományos Akadémia levelező tagja, 2016 óta a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja.

Gratulálunk az elismeréshez!

https://ist.ac.at/en/news/laszlo-erdos-receives-erwin-schrodinger-prize-of-the-oaw/

https://24.hu/tudomany/2021/03/02/magyar-matematikus-erdos-laszlo-schrodinger-dij/

https://mta.hu/sajtoszemle/erdos-laszlo-az-mta-kulso-tagja-kapta-az-erwin-schrodinger-dijat-111263

alkalmazott matematika díjazottak alkalmazott fizika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

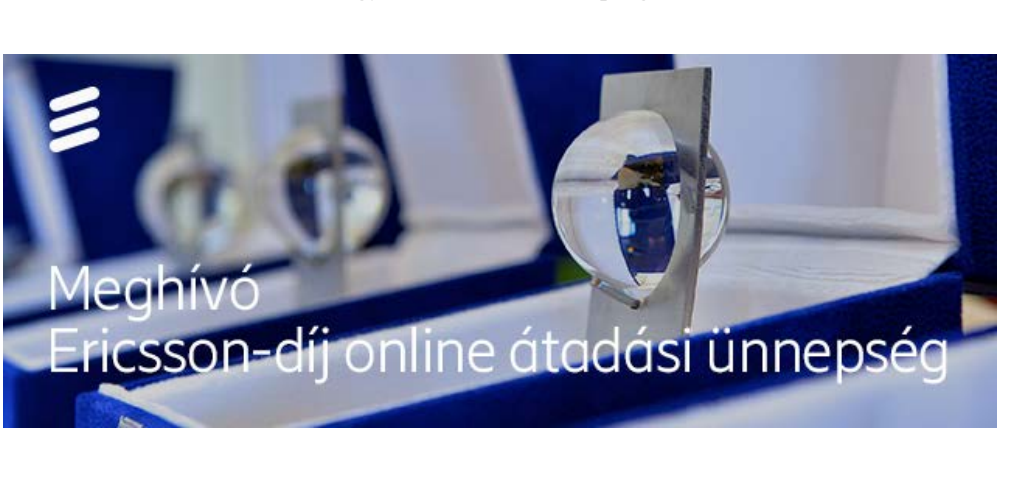
Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Ericsson-díj eredményhirdetés 2020

A rangos matematika- és fizikatanári díj odaítélése több mint két évtizeden keresztül hasonlóképpen zajlott. A 2020-as Ericsson-díj pályázati kiírásának beküldési határideje 2020. febr. 10. volt. Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat és a Bolyai János Matematikai Társulat díjbizottsága már februárban megszavazta a jelölteket, akiket a MATFUND Alapítvány kuratóriuma március 11-én jóváhagyott. Ekkor még a tervek szerint minden érintett azt várta, hogy a tavasz folyamán elkészülhessenek a kiváló tanárokat bemutató kisfilmek, amelyeket a tanév végi rendezvényen az Ericsson székházában a nyilvánosság előtt bemutathatnak. Azonban az már napokkal később látszott, hogy a díjkiosztó ünnepséget nem lehet megtartani május végén. Sajnos az ősszel tartandó (több mint százfős) rendezvény sem lett volna biztonságos a koronavírus-járvány miatt, így az Ericsson azt a döntést hozta, hogy csak virtuális ünnepséget tart.



A 2020. december 17-i online díjkiosztót bárki megnézhette, hiszen a KöMaL, a Bolyai és az Eötvös Társulat is közzétette az elérhetőségét. 2020-ban az alább 8 tanár nyerte el az Ericcson díjait:

Az ,,ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért" 2020. évi díját *matematikából*

Szilágyiné Manasses Melinda, a Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnázium tanára és

Győry Ákos, a miskolci Földes Ferenc Gimnázium tanára nyerte el.

Az ,,ERICSSON a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért" 2020. évi díját *fizikából*

dr. Siposs András, az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium tanára és

dr. Hömöstrei Mihály, a Budapesti Német Iskola tanára kapta.

Az ,,ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért" 2020. évi díját *matematikából*

Juhász Péter, a budapesti Szent István Gimnázium tanára és

Lángné Juhász Szilvia, a Szegedi Gregor József Általános Iskola tanára nyerte el.

Az ,,ERICSSON a matematika és fizika népszerűsítéséért" 2020. évi díját *fizikából*

Rudolf Tamásné, a budapesti Áldás Utcai Általános Iskola tanára és

Szabó László Attila, a Csongrádi Batsányi János Gimnázium tanára kapta.

A díjkiosztóról készült felvételeket az Ericsson Facebook-oldalán megosztotta, így mi is közzé tudjuk tenni.

Szilágyiné Manasses Melinda egyetemi tanulmányait az Eötvös Loránd Tudományegyetem matematika-fizika szakán kiváló minősítéssel fejezte be 1993-ban. Tanári tevékenységét a Dunakeszi Radnóti Miklós Gimnáziumban kezdte el, ahol néhány év óta az iskola matematika munkaközösségének vezetője. Az iskolában főleg emelt szintű csoportokban tanít. A továbbképzéseit úgy szervezte, hogy képes legyen a magas szintű szakmai elvárásoknak megfelelni. Ezért kapcsolódott be a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium által szervezett tehetséggondozó szakköri program megismerésébe. 2008 és 2013 között a Curie matematikaverseny területi képviselője volt. Évek óta egyik szervezője az iskolában a Zrínyi Ilona és a Bolyai matematikaversenyeknek. Szívügyének tekinti a matematikában tehetséges diákok felkutatását és fejlesztését. Tanítványai rendszeres megoldói a KöMaL és az Abacus matematikai lapok pontversenyeinek. Rendszeresen tart versenyekre felkészítő szakköri foglalkozásokat. Ezeknek is köszönhető, hogy tanítványai nagyon eredményesen szerepelnek a legjelentősebb hazai középiskolás és általános iskolás versenyeken. Az Országos Középiskolás Tanulmányi versenyen, az Arany Dániel, a Varga Tamás, a Zrínyi Ilona Matematikaversenyeken és a KöMaL pontversenyein minden évben több tanítványa található a legjobbak között. Eddigi tehetséggondozó munkájáért 2013-ban Graphisoft díjat kapott.

https://www.facebook.com/EricssonMagyarorszag/videos/787511221972108

Győry Ákos a miskolci Földes Ferenc Gimnázium tanára. Szakmailag kiválóan fölkészült, igazi elhivatott tanár, akit a matematikai tehetségek gondozása vonz. Különlegesen lelkes tanár, nemcsak hivatása, de hobbija is a matematika. Rendkívüli igényességgel végzi tehetséggondozó munkáját. Felkészültsége és a matematika, mint tudomány iránti megszállottsága maga köré vonzza a tehetséges diákokat. Ennek is köszönhető, hogy tanítványai nagyon eredményesen szerepelnek a nemzetközi és a legjelentősebb hazai középiskolás és általános iskolás versenyeken. Egyik tanítványa két aranyérmet és egy ezüstérmet szerzett a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián és egy aranyérmet a Középeurópai Matematikai Diákolimpián. Rajta kívül sok tanítványa ott található az Országos Középiskolás Tanulmányi verseny, a Kürschák, az Arany Dániel, a Varga Tamás, a Zrínyi Ilona Matematikaversenyeken és a KöMaL pontversenyein a legjobbak között. 2015-től tagja a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottságának. 2016-tól a Matematika OKTV II. kategória versenybizottságának tagja. 2017 óta a Rátz László Vándorgyűlés speciális matematika szekciójának egyik programfelelőse. 2018-tól tagja a Varga Tamás Matematikaverseny feladatösszeállító bizottságának. Lektor és zsüritag a Kalmár László Matematikaversenyen, rendszeres előadó országos matematika tárgyú rendezvényeken. A Rátz László Vándorgyűlésen két alkalommal feladatmegoldó szemináriumot, egyszer pedig eladást tartott. Évek óta az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola tanára. 2019-ben doktori programba nyert felvételt, ahol a matematikából tehetséges diákok geometriai szemléletét vizsgálja. Több cikke jelent meg ebben a témában. Eddigi eredményes tanári munkájáért több országos kitüntetést kapott.

https://www.facebook.com/EricssonMagyarorszag/videos/172954324576761

Juhász Péter a budapesti Szent István Gimnázium tanára. Hosszú éveken át segítette Pósa Lajost tehetséggondozó matematikatáboraiban. 2004 óta főszervezője és táborvezetője a Matematikai Mulatságok Táborának (a MaMuT-nak), illetve 2013 óta a MaMuT2-nek. 2005 óta vezet Pósa-típusú tehetséggondozó táborokat. A Gondolkodás Öröme Alapítvány Kuratóriumának elnöke. Az Alapítvány a MaMuT és a Pósa-táborok szervezése mellett, hátrányos helyzetű diákok matematikai tehetséggondozásával is foglalkozik. Elindították Repülő Iskola programjukat, aminek célja minél szélesebb körből kiválogatni a tehetségeket, és segíteni fejlődésüket. Módszertani kutatásokat végez a tehetségeseknél bevált Pósa-módszer átültetéséről a hétköznapokba. Számos hazai és külföldi módszertani konferencián adott elő a Pósa-módszerről és hozzá kapcsolódó kutatásáról. Emellett fontos feladatának tartja a Magyarországon több mint fél évszázada meglévő speciális matematika tagozatos iskolák tanárainak összefogását. 2014 óta tagja a Kalmár László Országos Matematikaverseny feladatösszeállító csapatának. 2016-ban és 2019-ben a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny 5–8. osztályos feladatsorainak egyik összeállítója. 2019-ben a Hanoi Open Mathematics Competiton magyar csapatának felkészítő tanára, csapatkísérője. A Rátz László Vándorgyűlés állandó résztvevője, előadója, a speciális matematika tagozatos szekció egyik kitalálója. A Varga Tamás Módszertani napokon is rendszeresen tart előadásokat. Nagyon sok diákot segített hozzá ahhoz, hogy a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián eredményesen szerepeljen. Eddigi tevékenységét több díjjal ismerték el, köztük 2002-ben Graphisoft díjjal.

https://www.facebook.com/EricssonMagyarorszag/videos/825769507981212

Lángné Juhász Szilvia a Szegedi Gregor József Általános Iskola tanára. Magas színvonalon végzett iskolai munkája mellett számos helyen végez tehetséggondozó szakmai munkát. A Csongrád Megyei Matematika-, Fizikatanárok Szegedi Alkotóműhelyének tagja. A Bendegúz Gyermek és Ifjúsági Akadémia levelező versenyeire az utóbbi 10 évben matematikából az 1–8.osztály számára a feladatsorok és megoldókulcsok egyik összeállítója. Az immár nemzetközivé fejlődött Bonifert Domonkos Matematikaversenynek és a Makkosházi Matematikaversenynek zsűritagja. Előadásokat tart a Mozaik Módszertani Napok keretében az ország különböző városaiban. A Mategye Alapítvány által szervezett Megyei Matematikaverseny Csongrád megyei főszervezője. A szegedi Mozaik Kiadó által kiadott Sokszínű matematika tankönyvcsalád alsós tankönyveinek és a hozzá kapcsolódó Számolófüzeteknek a társszerzője. A mindennapokban végzett magas színvonalú pedagógiai munkája mellett kiemelkedő szerepet vállal a tehetséggondozásban. Diákjai rendszeresen részt vesznek a legjelentősebb általános iskolás versenyeken, ahol több alkalommal szerepeltek eredményesen. Eddigi tanári munkájáért 2013-ban Beke Manó díjat kapott.

https://www.facebook.com/EricssonMagyarorszag/videos/404395677340109

Dr. Hömöstrei Mihály a Budapesti Német Iskolában német nyelven oktatja a fizikát. Szakkörei rendkívül népszerűek, munkája nyomán diákjai nagy arányban választják a természettudományos és mérnöki pályát. Gimnáziumi munkája mellett 2013-ban tagja lett az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenyének (IYPT) nemzetközi vezetőtestületének, és megszervezte a magyar csapat kiválasztásának és felkészítésének folyamatát. A magyar csapat 2015 óta minden évben éremmel tér haza. A sikerekben kulcsfontosságú volt a felkészítés módszertanának kidolgozása: a féléves folyamatban a kísérletalapú felfedező kutatómunka mellett hangsúlyos szerepet kap a kommunikációs készségek és a csapatmunkával kapcsolatos kompetenciák fejlesztése. A tehetséggondozást nem csak magas fokon űzi, de oktatja is. A 2015/16 tanévtől kezdődően az ELTE Anyagfizikai Tanszékének részállású mesteroktatója.

https://www.facebook.com/EricssonMagyarorszag/videos/2773794409543827

Dr. Siposs András Az ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium vezetőtanára, az évek során nagyon sokat tett a fizika népszerűsítéséért és a tehetséges tanulók gondozásáért. Iskolájában rendszeresen szervezett fizika feladatmegoldó versenyeket. Tanítványai rendszeresen szerepelnek az elsők között hazai fizika versenyeken (Mikola versenyen, KÖMAL, OKTV). A Nemzetközi Csillagászati és Asztrofizikai Diákolimpiákon két tanítványa is dobogós helyezést ért el. Eredményes munkájával, szakmai tudásával, színes egyéniségével példát mutatva komoly elismerést vívott ki diákjai és tanártársai között egyaránt.

https://www.facebook.com/EricssonMagyarorszag/videos/227784152289531

Rudolf Tamásné 1979-1987 között a gödi Kilián György Általános Iskola tanáraként dolgozott, 1988 óta jelenlegi munkahelyén, a budapesti Áldás Utcai Általános Iskolában tanít matematika-fizika szakos tanárként. Nagyon fontosnak tartja, hogy miden segítséget megadjon tanítványainak a tudás megszerzéséhez. Komoly hivatástudattal, kellő derűvel és szeretettel foglalkozik a tanítványaival. Rendszeresen viszi tanítványait a Magyar Tudományos Akadémia előadásaira, ahova egyetlen általános iskolai tanárként meghívást kap. Rövidebb-hosszabb filmeket készít a fizika tantárgy tanulásához, megértéséhez. Tehetséggondozó munkája is példaértékű. Régi és jelenlegi tanítványai országos és nemzetközi versenyeken díjazottak.

https://www.facebook.com/EricssonMagyarorszag/videos/158559239360601

Szabó László Attila diplomáját a szegedi József Attila Tudományegyetemen szerezte. Az egyetem elvégzése óta a Csongrádi Batsányi János Gimnáziumban tanít, jelenleg a matematika-fizika-informatika munkaközösség vezetője, illetve az iskola természettudományos laboratóriumának átadása óta az Öveges-projekt szakmai vezetője. Rengeteg energiát fektet abba, hogy a kísérletezésen keresztül szerettesse meg a fizikát. Nyári táborokat és kísérletező délutánokat szervez, természettudományos kísérletezős versenyt is szervez általános iskolásoknak. Nemcsak diákjai, de saját foglalkozásai is több díjban részesültek az évek során.

https://www.facebook.com/EricssonMagyarorszag/videos/1115915398858419

díjazottak matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pach Péter Pál, Harangi Viktor 2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

A 2020-as Kürschák és Schweitzer versenyekről

Online Kürschák-verseny

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 2-án rendezte meg – a verseny történetében először, a járványügyi helyzetre való tekintettel – online formában. A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: Biró András, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Maga Péter (titkár), Pach Péter Pál (elnök), Tóth Géza.

A bizottság a következő feladatokat tűzte ki:

1. Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.

2. Határozzuk meg azokat a racionális számok halmazán értelmezett, nemnegatív valós értékű f függvényeket, melyekre teljesül, hogy tetszőleges x, y racionális számokra

- $f(x+y) \le f(x)+f(y)$,
- $f(xy)=f(x)f(y)$,
- $f(2)=1/2$.

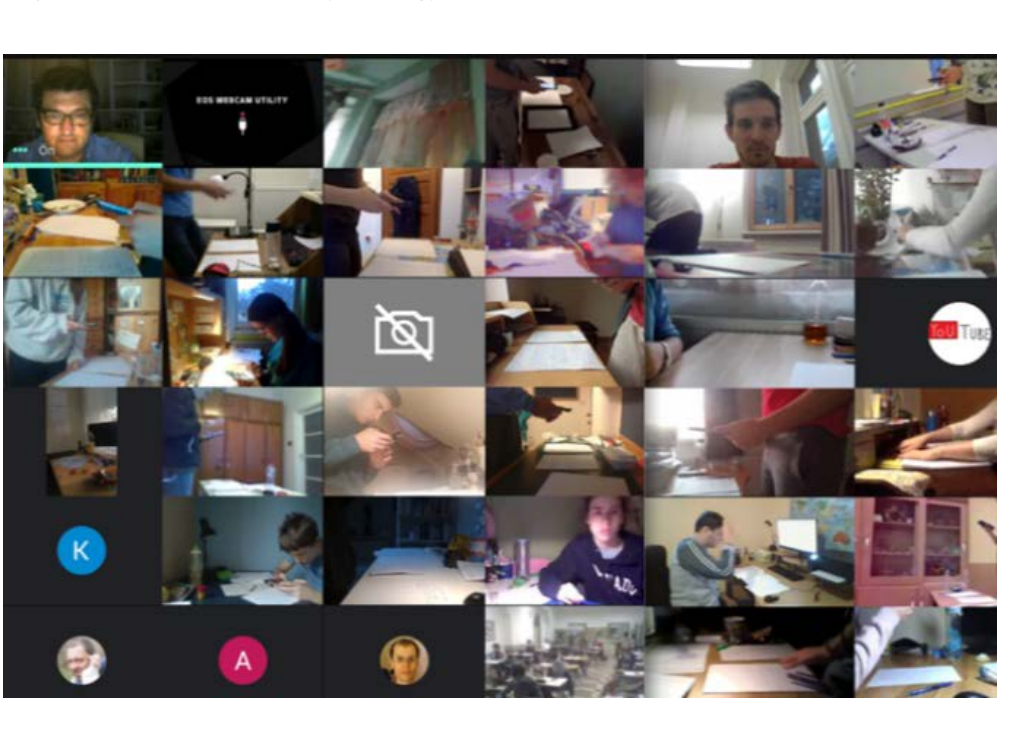
3. Egy városban N ház van. Télapó minden karácsonykor végigjárja a házakat valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy ha N elég nagy, akkor teljesül, hogy három egymást követő évben mindig található 13 olyan ház, amit (a három közül) két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg. Határozzuk meg a legkisebb N számot, melyre ez fennáll.

Az eredmények ismertetése előtt bemutatjuk, mit is jelentett a gyakorlatban az online lebonyolítás. Az online verseny azt jelenti, hogy mindenki az általa választott helyen – jellemzően otthon – dolgozik a feladatokon, a feladatokat elektronikusan kapja meg, és a megoldásokat interneten keresztül küldi be. A Kürschák-verseny technikai lebonyolításához felhasználtuk a július 25. és 30. között, szintén online formában megrendezett IMC (International Mathematics Competition for University Students) tapasztalatait, ahol a bizottság tagjai közül Kós Géza szervezőként vett részt.

Biztosítanunk kellett, hogy a verseny kezdetén a feladatok időben, a biztonság kedvéért lehetőleg többféle csatornán eljussanak a versenyzőkhöz. A feladatokat elküldtük e-mailben, és közzétettük a Bolyai Társulat és a KöMaL honlapján is.

A versenyzők felügyeletét Google Meet videókonferenciákkal oldottuk meg. A versenyt megelőző napon egy technikai főpróbát is tartottunk, amelyen a versenyzők és a felügyelők is részt vehettek, ez egyben a lebonyolítással kapcsolatos kérdések megválaszolására is lehetőséget nyújtott. A versenyzőknek a verseny helyszínén fel kellett állítaniuk egy webkamerát – ez lehetett kinyitott laptop vagy állványra szerelt okostelefon is – úgy, hogy a kamera oldalról mutassa az asztalt, ahol dolgoznak. A Meet egyszerre legfeljebb 49 résztvevő videóképét képes megmutatni, ezért a versenyzőket előzetesen két virtuális terembe osztottuk szét, és a két termet két böngészőablakban figyeltük egyszerre. A felügyelő tanárok szerepét a versenybizottság tagjai töltötték be.

A Budapesti Fazekas Mihály Gimnázium 18 diákja az iskolában írta meg a dolgozatot Hujter Bálint tanár úr személyes felügyeletével, de a videókonferencián is részt vettek.



A dolgozatok digitalizálására a CamScanner telefonos applikációt ajánlottuk. Ezzel nincs szükség külön szkennerre, a program mobiltelefonon fut, és alkalmas többoldalas dolgozat fényképezésére, vágására és átalakítására PDF formátumra. A dolgozatok beküldésére minden versenyző kapott egy személyes Dropbox File Request linket. A linket megnyitva, a dolgozat néhány másodperc alatt feltölthető. A különböző versenyzők fájljai a szerveren különböző könyvtárba kerültek, így az esetleges keveredéseket is ki lehetett zárni. A verseny végén a résztvevők többsége önállóan, gyorsan boldogult a feltöltés feladatával, akinek pedig technikai segítségre volt szüksége, bejelentkezve maradt, amíg a feltöltés nem sikerült. Körülbelül negyed órával az idő lejárta után minden dolgozat sikeresen beérkezett.

A versenybizottság tagjai a szokásos feladataikon túl azzal kezdték a munkát, hogy ellenőrizték, tényleg olyanoktól érkeztek-e be dolgozatok, akik a videókonferenciák egyikén részt is vettek. Természetesen mindent rendben találtak. A dolgozatok javítása, értékelése, és végül a díjakról döntő ülés is mind online formában zajlott.

A 73 regisztrált versenyzőtől összesen 58 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen a második feladatot 5-en oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen, a harmadik feladatra szintén 5 helyes megoldás érkezett. A legnehezebbnek bizonyult első feladatnál két helyes megoldás mellett egy versenyző jutott a megoldás közelébe.

Egyetlen versenyző oldotta meg lényegében mindhárom feladatot. Ezért

I. díjban és 45 000 Ft pénzjutalomban részesült

Gyimesi Péter, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Varga Mária, Szűcs Gábor és Pósa Lajos).

Három versenyző oldott meg helyesen két feladatot. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 25 000 Ft pénzjutalomban részesült

Beke Csongor, Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Varga Mária és Szűcs Gábor) a második és a harmadik feladat megoldásáért,

Tóth Balázs, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Dobos Sándor és Nikházy László) a második és a harmadik feladat megoldásáért,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos és Dobos Sándor) az első és a harmadik feladat megoldásáért.

Dicséretben és 10 000 Ft pénzjutalomban részesült

Füredi Erik, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter és Dobos Sándor), mert az első feladatban a megoldás közelébe jutott és félig megoldotta a harmadik feladatot,

Szabó Kornél, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, Surányi László és Pósa Lajos) a harmadik feladat helyes megoldásáért,

Weisz Máté Barnabás, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai Schultz János és Tigyi István) a második feladat helyes megoldásáért.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál.

A feladatok megoldásai megjelentek a KöMaL folyóirat 2021. februári számában.

Pach Péter Pál

A 2020. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2020. október 22. és 2020. november 2. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2020-ban fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: Keleti Tamás (elnök), Harangi Viktor (titkár), Ágoston Tamás, Elekes Márton, Károlyi Gyula, Kiss Viktor, Kós Géza, Kun Gábor, Maga Balázs, Nagy János, Pálvölgyi Dömötör, Ráth Balázs, Terpai Tamás.

A bizottság október 16-i ülésén kiválasztotta a 11 kitűzendő feladatot. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre. A kitűzött feladatokat javasolták: 1. Csernák Tamás, 2. Totik Vilmos, 3. Carl Schildkraut, 4. Eyal Ackerman, Keszegh Balázs és Pálvölgyi Dömötör, 5. Laczkovich Miklós és Totik Vilmos, 6. Laczkovich Miklós és Halász Gábor, 7. Ráth Balázs, 8. Carl Schildkraut és Brandon Wang, 9. Maga Balázs és Maga Péter, 10. Szabó Csaba és Zábrádi Gergely, 11. Balogh M. Zoltán.

A feladatok és a megoldások a Bolyai Társulat honlapján a Versenyek menüpontban tekinthetők meg, innen tölthetők le.

A verseny eredményes volt; **16 versenyző összesen 73 megoldást** nyújtott be. A versenybizottság december 2-i ülésén a következő díjakat ítélte oda.

▶ Két versenyző oldott meg tíz feladatot. Ennek alapján

*I. díj*ban és 100 000 Ft pénzjutalomban részesül

Borbényi Márton, az ELTE matematikus mesterszakos hallgatója,

Gáspár Attila, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója.

Borbényi Márton megoldotta az 1., 5., 6., 7., 8., 9., 10., 11., illetve apró pontatlanságoktól eltekintve a 2. és 3. feladatot, valamint fontos részeredményeket ért el a 4. feladatban. A bizottság szeretné kiemelni, hogy a 10. feladatra egyedül ő adott be teljes megoldást, továbbá a 7. feladatra adott megoldása különösen szép és egyszerű.

Gáspár Attila tíz feladatra – az első kilencre valamint az utolsóra – adott be megoldást. Minden megoldása precíz és hibátlan. Különösen elegáns a 8. feladatra adott megoldása.

▶ Egy versenyző oldott meg hét feladatot (1., 2., 4., 5., 6., 7., 8.), valamint fontos részeredményeket ért el a 3. feladatnál. Ennek alapján

*II. díj*ban és 50 000 Ft pénzjutalomban részesül

Matolcsi Dávid, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója.

▶ Egy versenyző oldott meg lényegében hat feladatot (1., 4., 5., 8., 11., illetve apró pontatlanságoktól eltekintve a 3. feladatot), valamint fontos részeredményeket ért el a 2. feladatnál. Kiemelendő továbbá, hogy a 4. feladatra különösen elegáns megoldást adott. Ennek alapján

*III. díj*ban és 40 000 Ft pénzjutalomban részesül

Schweitzer Ádám, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója.

▶ Három versenyző oldott meg három feladatot. Ennek alapján

*dicséret*ben és 20 000 Ft pénzjutalomban részesül

Szabó Kristóf, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója.

Kovács Benedek, az ELTE matematikus mesterszakos hallgatója,

Schwarcz Tamás, az ELTE idén végzett, matematikus mesterszakos hallgatója.

Szabó Kristóf megoldotta az 1. és 8., illetve apró pontatlanságoktól eltekintve a 3. feladatot, valamint fontos részeredményeket ért el a 2., 4. és 7. feladatban.

Kovács Benedek megoldotta az 1., 3. és 8. feladatot, valamint fontos részeredményeket ért el a 2. feladatban.

Schwarcz Tamás megoldotta az 1., 2. és 8. feladatot. Különösen elegáns az 1. és 8. feladatra adott megoldása.

▶ Legalább egy feladatot teljesen vagy lényegében teljesen megoldott

Csahók Tímea, az ELTE matematikus mesterszakos hallgatója,

Forman Balázs Attila, az ELTE matematikus mesterszakos hallgatója,

Gehér Boglárka, az ELTE matematikus mesterszakos hallgatója,

Geng Máté, az ELTE matematikus mesterszakos hallgatója,

Imolay András, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,

Kocsis Anett, az ELTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója,

Marsi Viktor, az SZTE elsőéves, matematika alapszakos hallgatója.

A versenybizottság köszönetét fejezi ki a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft-nek és A Matematika Oktatásáért és Kutatásáért Alapítványnak a pénzjutalmakhoz való hozzájárulásukért.

Harangi Viktor

Mindkét eredményhirdetés megtekinthető a Bolyai Társulat Youtube-csatornáján is, az alábbi linkeken:

- Kürschák József Matematikai Tanulóverseny: https://youtu.be/PrzM_nE5VLo

- Schweitzer Miklós Emlékverseny: https://youtu.be/aWncPvmlJsA

---

díjazottak Kürschák József Schweitzer Miklós

Szerkesztő 2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Rendhagyó díjátadó a Bolyai Társulatban

A Beke Manó Emlékdíjakat nem tudták átadni a 2020-ban elmaradt Rátz László Vándorgyűlésen, ezért került sor decemberben az eseményre.

A Beke Manó Nagydíjat Pelikán József kapta.

Pelikán József a legendás, első specmatos osztályba járt. A "Ki miben tudós" televíziós vetélkedő révén már középiskolás korában országosan ismert lett a neve. A Nemzetközi Matematikai Diákolimpián, háromszor arany, egyszer ezüstérmet szerzett. Két megoldása is különdíjat kapott. Talán ez indította arra, hogy később, komoly matematikusként vállalja a Diákolimpiákon induló magyar csapat vezetését. Egy emberöltőn keresztül, összesen 31 alkalommal volt a csapat vezetője. A Keszthelyen rendezett olimpia univerzális jolly-jokereként szinte minden fajta feladatot végzett. A Diákolimpiák szervezését irányító nemzetközi testületnek sok éven át tagja, két cikluson át – azaz 8 éven keresztül – elnöke volt. Munkáját 2014-ben Erdős-díjjal ismerték el. A tavalyi, 60. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia után bejelentette visszavonulását és egyúttal az utódját is kiszemelte, és a feladatra felkészítette.

Az olimpiai munka mellett a diákolimpiai csapat felkészítésében is rendszeresen segített, előadásokat tartott. A 2000-es évek elején közös magyar-román edzőtábort szervezett és ennek fő előadója volt öt éven át. A Reiman István által koordinált Ifjúsági Matematika Kör alkalmain, és a húsz éves múltra visszatekintő angol-magyar olimpiai edzőtáborban szinte minden évben tartott előadást. A diákok matematikai tartalom és előadói stílus tekintetében is a legmagasabb osztályzattal értékelték visszajelzéseikben előadásait.

Beke Manó Emlékdíjat kapott Mihályi Gyula, Kimle Mária és Dr. Rókáné Rózsa Anikó.

Mihályi Gyula 1980 óta tanít a székesfehérvári Teleki Blanka Gimnáziumban. Tevékenyen részt vett a speciális matematika oktatás megszervezésében. A matematika tagozat fenntartását, megújítását ma is szívügyének tartja. Iskolájában dolgozott igazgatóként, igazgatóhelyettesként és a matematika munkaközösség vezetőjeként.

Szaktanárként magas színvonalú oktató-nevelő munkát folytat, és osztályfőnöki tevékenységét is ugyanilyen módon, lelkiismeretesen végezte. Tanítványai az élet minden területén megállják a helyüket, és sokan értek el közülük kimagasló szakmai sikereket. Mindig is nagy figyelmet szentelt a tehetséggondozásnak, és emellett természetesen a felzárkóztatásra is gondot fordított. Több tanítványa ért el szép eredményeket az Arany Dániel versenyeken és az OKTV-n. Diákjai közül többen indulnak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok pontversenyében.

Évek óta tagja az OKTV matematika versenybizottságának és az Abacus matematikai lapok felügyelőbizottságának. Tartott bemutató órát a speciális matematika tagozatos osztályokban tanító tanárok szakmai-módszertani továbbképzésén. Széleskörű tapasztalatát, meglátásait szívesen osztja meg kollégáival. Segítőkész módon karolja fel a pályakezdő fiatalokat. Kiemelkedő szakmai felkészültségű munkáját alaposság és precizitás jellemzi. Elhivatottságával, szakmai felkészültségével és emberségével méltán vívta ki kollégái és tanítványai megbecsülését.

Kimle Mária hosszú évek óta dolgozik a matematikai tehetséggondozásban. Az általános iskolás és a középiskolás korosztály tehetségfejlesztésében egyaránt jártas. Diákjai szép eredménnyel szerepeltek a Varga Tamás Matematika Versenyen, a Nemzetközi Magyar Matematikaversenyen, az Arany Dániel Matematikaversenyen és az OKTV-n. Tanítványait arra ösztönzi, hogy rendszeresen oldják meg és küldjék be a KöMaL feladatait, amiket szakköri munkájában is felhasznál. Sok tanulót készített fel eredményesen a műszaki és a természettudományos pályákra. Rendszeres szervezője iskolája matematika táborainak, szervezői munkáját pontosan, nagy odaadással végzi. Középiskolára felkészítő szakköröket és megyei matematika szakköröket szervez.

Szaktanári munkáját a precizitás és a strukturáltság jellemzi, gondosan ügyel a legapróbb részletekre is. Diákjait megtanítja arra, hogy bármely területen tanulnak, dolgoznak, a precíz munkával nem csak saját munkájukat könnyítik meg, hanem közelebb jutnak céljaik megvalósításához. Mindezt humorral oldott légkörben éri el.

Dr. Rókáné Rózsa Anikó iskolájában a matematika munkaközösség szakmai életének kiváló vezetője. A szakmai pályázatokat aktívan segíti. Koordinálja az iskolai versenyeket, népszerűsítő programokat, segít azok megvalósításában. Aktív segítője a továbbtanulást segítő programoknak is, pl. SZTE Kutatók éjszakája, BME Nyitott laborok délutánja. Szívesen tart bemutató órákat, oszt meg jó gyakorlatokat, mentorál pályakezdőket és tapasztalt kollégákat is. Szakmailag nagyon jól képzett, felkészült tanár. Önmagával és tanítványaival szemben is igényes, megköveteli a komoly, rendszeres munkát, ugyanakkor kellő megértéssel rendelkezik diákjai iránt. Tanítását igényesség és sokszínűség jellemzi. Rendszeresen részt vesz szakmai továbbképzéseken, változatos módszerek alkalmazásával színesíti tanóráit.

A népszerűsítő munka mellett nagyon nagy hangsúlyt fektet a tehetségek gondozására, kiváló versenyeredményei vannak. Munkájában felhasználja és népszerűsíti a szakmai folyóiratokat, leginkább a KöMaL-t és az ABACUS-t. Diákjai rendszeresen oldanak meg feladatokat tanítási órákon és tehetséggondozó foglalkozásokon.

Szaktanácsadó munkájának kapcsán Békés megye matematikatanításának meghatározó személyisége. Aktív szervezője a megyei, sőt országos szintű Mesterek és tanítványaik programsorozatnak, a Békéscsabai Középiskolai Matematikaverseny szervező csapatának egyik vezető személyisége. Az általános iskolák 8. osztályos tanulóinak meghirdetett, egész Békés megyére kiterjedő Horváth János Matematikaverseny főszervezője. Szoros kapcsolatokat ápol az egyetemekkel, segíti azok megjelenését iskolájában, diákokat irányít, segít, hogy eljussanak az egyetemi előkészítő programokra. Népszerűsítő és tehetséggondozó munkájának eredménye, hogy iskolájából nagyon sokan választják a matematikát továbbtanuló tantárgyként. Ezzel sokat segít a matematika, általában a természettudományok népszerűsítésében.

Szele Tibor Emlékérem: Hajnal Péter

A 2020. évi Szele Tibor Emlékérmet a Bizottság (Babai László, Hatvani László, Krisztin Tibor, Pete Gábor, T. Sós Vera, Simonovits Miklós, Totik Vilmos és Tóth Bálint) **Hajnal Péternek**, a Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézetének habilitált tanszékvezető docensének ítélte. Hajnal Péter nagyszerű matematikai ízléssel és odaadással végzi kutatásait és a fiatalok mentorálását.

A szegedi Bolyai Intézetben diplomázott 1984-ben Lovász László témavezetésével, ezután a University of Chicago Számítástudományi Tanszékén szerzett doktori fokozatot 1988-ban Simon János és Babai László diákjaként *Complexity of Graph Problems* című disszertációjával. Pár éves MIT és princetoni posztdoktori állások után 1990-ben tért vissza a Bolyai Intézetbe, ahol 2006-ban habilitált. Ő vezeti a Halmazelméleti és Matematikai Logikai Tanszéket, korábban intézetvezető-helyettes volt. Jelenleg az intézet doktori iskolájának helyettes vezetője. Számos OTKA-pályázat nyertese és a zsűri visszatérő tagja. Hivatalosan 6 PhD disszertáció témavezetője volt eddig, de a valóságban ennél jóval több fiatalt indított el kutatói pályáján. Több évtizede szervezi lankadatlan energiával a szegedi Kombinatorika Szemináriumot, és ez a szeminárium a fiatal tehetségeknek mindvégig valódi kibontakozási lehetőséget biztosított.

A kombinatorika és gráfelmélet területén dolgozik, 35-nél több dolgozatára 300 fölötti független hivatkozás érkezett. Legnagyobb hatású munkája a Füredi Zoltánnal közös *Davenport–Schinzel theory of matrices* (1992), melyben az extremális gráfelmélet egy rendezett változatát vezetik be: egy 0-1 mátrixban legfeljebb hány 1-es lehet, hogy egy adott részmátrix ne forduljon elő. Amikor ez a részmátrix egy tetszőleges permutációmátrix, a megengedhető szám $O(n)$: ez volt a híres Füredi-Hajnal sejtés, melyet bizonyos esetekben már az eredeti cikk bizonyított, és amit végül teljes egészében, a Stanley-Wilf sejtéssel együtt, Adam Marcus és Tardos Gábor igazolt 2004-ben.

Egy izgalmas bonyolultságelméleti eredménye a következő. Rivest és Vuillemin 1975-ben bizonyították, hogy tetszőleges monoton tranzitív n-változós Boole-függvény kiszámolásához, legalábbis ha n egy prímhatvány, a legrosszabb input esetén meg kell kérdezni $\Omega(n)$ bitet, és ebből igazolták, hogy tetszőleges n-re, tetszőleges monoton gráf-tulajdonság ellenőrzéséhez n csúcson legalább $\Omega(n^2)$ élet meg kell kérdezni. Ha az algoritmus véletlent is használhat, akkor vannak monoton tranzitív Boole-függvények, melyekre $O(n^{4/3+o(1)})$ kérdés is elég, ám Karp és Yao egymástól függetlenül azt sejtették (1977), hogy monoton gráftulajdonságnál továbbra is szükséges $\Omega(n^2)$ kérdés. A legjobb ismert kitevő $\Omega(n^{4/3+o(1)})$, melyet először Hajnal Péter igazolt 1991-ben, egy gráfpakolási lemma segítségével. Azóta ezt az alsó korlátot O'Donnell, Saks, Schramm, és Servedio (2005) bebizonyította általános monoton tranzitív Boole-függvényekre is (ahol ez éles), teljesen más módszerrel, diszkrét Fourier-analízist használva.

Az általa több évtizede szervezett Kombinatorika Szeminárium a szegedi matematikai élet egyik fontos helyszíne, amely sok szállal kapcsolódik a szegedi informatikusok kutatásaihoz (olyan állandó informatikus résztvevőkkel, mint Pluhár András, Csaba Béla, vagy a fiatalon elhunyt Imreh Csanád.) A szeminárium a kombinatorikát a legtágabban értelmezi, melybe a bonyolultságelmélettől kezdve a geometrián és a csoportelméleten keresztül a statisztikus fizikáig minden belefér. *A kombinatorika iránt érdeklődő szegedi fiatalok több generációja itt tanult meg cikkeket olvasni és előadni, előadásokat kritikusan hallgatni, új kérdéseket felteni, kutatóvá válni.*

Hajnal Péter témavezetésének legfőbb jellemzője az, hogy a diákot rávezesse arra, mi érdekli őt igazán – soha nem akarja a saját érdeklődését ráerőltetni a diákra. Azt bátorítja, hogy a diák ott szerezzen fokozatot, ahol a világon az adott téma erős, ahol a legtöbbet tanulhat. OTKA pályázatai költségeinek jelentős hányadát fordította arra, hogy a diákok konfenciákon, nyári iskolákon vehessenek részt. A Hajnal Péterrel való matematikai interakció személyes élményét kiegészítik nagyszerű tankönyvei, feladatgyűjteménye, ismeretterjesztő cikkei. Ezek közül kiemeljük a következő könyveket, amelyeken hallgatók generációi nőttek fel: *Elemi kombinatorikai feladatok, Gráfelmélet, Algoritmuselmélet és bonyolultságelmélet, Diszkrét matematika, Halmazrendszerek*.

Eddig 6 PhD diákja volt. *Barát János* 2002-ben védte meg disszertációját gráfelméletből, jelenleg a Pannónia Egyetem docense, a Rényi Intézet vendégkutatója. *Balogh József* (2003), aki kész PhD disszertációval rendelkezett Hajnal Péter vezetésével, mielőtt további tanulmányokra Memphisbe utazott, ahol hivatalos PhD-jét megszerezte. Jelenleg Urbana-Champaignben professzor, az extremális kombinatorika egyik vezető kutatója, maga is tíznél több PhD diák témavezetője .*Nagy-György Judit* (2010) Imreh Csanáddal közös diákja volt, disszertációját online algoritmusokból írta. A Bolyai Intézet Sztochasztika Tanszékének docense. *Mészáros Viola* (2011) Pavel Valtrral (Prágai Károly Egyetem) volt közös diákja, disszertációját kombinatorikus geometriából írta. Prágában, a TU Berlinen, és a Lausanne-i EPFL-en volt posztdoktor, jelenleg Berlinben él. *Nagy V. Gábor* (2014) a Catalan-számokhoz kapcsolódó bijekciókból írta PhD-jét, jelenleg a Bolyai Intézet Halmazelméleti és Matematikai Logikai Tanszékének adjunktusa. *Bényi Beáta* (2015) a poly-Bernoulli számokhoz kapcsolódó bijekciókból irta disszertációját, jelenleg a Nemzeti Közszolgálati Egyetem főiskolai docense.

MSc diákjainak száma 30, közülük sokan jelentős kutatókká váltak. Ők ugyan doktori fokozatukat nem Szegeden szerezték, de Hajnal Péter óriási hatással volt matematikai ízlésükre, fejlődésükre, stílusukra. *Pete Gábor* a Rollo Davidson (2011) és az Erdős Pál (2014) díjak nyertese, jelenleg a Rényi Intézetben az ERC Zajérzékenység Kutatócsoport vezetője, és a BME Sztochasztika Tanszék docense. *Timár Ádám* a Rényi Intézet és a University of Iceland kutatója.

A Grünwald Géza Emlékérem jogelődjét, a Grünwald Géza Emlékdíjat a Bolyai János Matematikai Társulat 1951-ben alapította a matematikai alapkutatásban kiemelkedő tudományos eredményeket elérő, fiatal magyar matematikusok jutalmazására. 2018-ban a Társulat a jutalmazhatók körét kiterjesztette a Magyarországon tanulmányokat folytatott külföldi kutatókra is.

2020-ban a Grünwald Géza Emlékéremre négy felterjesztés érkezett, egyikőjüket viszont a jelenleg érvényes szabályok szerint a Bizottságnak nem állt módjában kitüntetni. Egyhangú döntéssel, a Bizottság idén két díjazottat szavazott meg:

Grünwald Géza emlékérmet kapott 2020-ban Gyenizse Gergő és Tomon István.

Gyenizse Gergő 1991-ben született. Matematikus alap-, majd mesterszakos tanulmányait 2007 és 2013 között végezte a Szegedi Tudományegyetemen, majd ugyanitt folytatta a doktori képzést. Doktori fokozatát 2018-ban szerezte meg, jelenleg pedig a SZTE Bolyai Intézet adjunktusa.

Gyenizse Gergőnek 8 cikke jelent meg, melyek közül két munka egyszerzős. Főleg az univerzális algebra területén folytat kutatásokat. A téma egyik nélkülözhetetlen eszköze a szelíd kongruenciák 1988-ban bevezetett elmélete, mely segítségével sok tétel érvényességi határát sikerült pontosan meghatározni, illetve számos sejtést igazolni. Gyenizse Gergő eddig legnagyobb eredménye a szelíd kongruenciák elméletének kiterjesztése algebrák kompatibilis kvázirendezés-hálóira, mely segítségével társszerzőivel egy 1984 óta nyitott problémára adott nemleges választ. Ezen kívül vizsgálta irányított gráfok transzformációgráfjainak algebrai tulajdonságait is, amely szorosan kapcsolódik a constraint satisfaction problem algoritmikus komplexitásának vizsgálatához. Több hálóelméleti eredménnyel is rendelkezik. Többek között társszerzőivel megmutatta, hogy a megszámlálhatóan végtelen elem által generált szabad háló beágyazható a 3-elem által generált szabad háló szimmetrikus elemei által alkotott részhálójába.

Tomon István 1990-ben született. BSc és MSc diplomáit az ELTE matematikus szakán szerezte kitűnő eredménnyel, aztán a Cambridge-i Trinity College-ba került, ahol 2016-ban Bollobás Béla iányításával szerzett doktori címet. Ezután Lausanne-ban, az EPFL-en töltött három évet posztdoktorként Pach János csoportjában, jelenleg pedig a zürichi ETH-n dolgozik Benny Sudakov csoportjában posztdoktorként.

Tomon Istvánnak eddig 24 dolgozata jelent meg nemzetközi folyóiratokban, s további 10 áll megjelenés alatt. Nehéz, sokak által vizsgált kombinatorikai kérdésekre összpontosít, cikkei a legszínvonalasabb folyóiratokban jelennek meg. Eredményei közül csak párat emelünk ki. Sikerült belátnia, hogy az összefüggő síkbeli görbék metszetgráfjaira (az úgynevezett string-gráfokra) teljesül az Erdős-Hajnal sejtés, amely a Ramsey-elmélet egyik legfontosabb nyitott problémája. Egy másik, extremális gráfelmélethez tartozó eredménye egy n csúcsú, r-uniform, körmentes hipergráf maximális élszámának becslése, itt Sudakovval együtt aszimptotikusan közel optimális felső korlátot sikerült bizonyítaniuk. Erdős, Faudree és Sós egy régi kérdését válaszolta meg azzal, hogy társszerzőivel együtt megmutatta, egy n csúcsú C-Ramsey gráfnak legalább $n^{2-o(1)}$ különböző élszámú részgráfja van. Egy híres, részbenrendezett halmazokra vonatkozó pakolási problémát is vizsgált: megmutatta, hogy egy n elemű halmaz részhalmazainak hálója pontosan akkor parkettázható ki egy P részbenrendezett halmaz példányaival, ha P elemszáma 2-hatvány, és P-nek van egy egyértelmű minimuma és maximuma. Egy további, részbenrendezett halmazokra vonatkozó eredményében pedig belátta, hogy egy rögzített alaphalmazon definiált összefüggő gráfoknak a részgráf tulajdonság által parciálisan rendezett halmaza rendelkezik a Sperner tulajdonsággal, azaz legnagyobb antilánca a legnagyobb szint elemeiből áll.

2020-ban Farkas Gyula Emlékdíjat kaptak Berend Gábor, Fekete Imre, Molontay Roland és Rigó Petra Renáta.

A részletes indoklások, amelyeket itt is közzé tettünk, megjelentek az Alkalmazott Matematikai Lapok 37 (2020), 1-2. számában.

2020-ban a Rényi Kató Emlékdíj Bizottság két jelöltnek ítélte oda a **Rényi Kató Emlékdíj I. fokozatát: Grünwald Richárdnak és Schwarcz Tamásnak.**

Grünwald Richárd a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájának elsőéves doktorandusz hallgatója. Kutatásai során Páles Zsolt témavezetése mellett először valós algebrai deriváciokkal foglalkozott. Az eredményeiből készült két dolgozatot az Acta Mathematica Hungarica és a Publicationes Mathematicae Debrecen közölte, illetve fogadta el. Számos magyar- és angol nyelvű előadást is tartott erről a témáról.

Ezt követően figyelme a középértékek elméletében felmerülő kérdések vizsgálata felé fordult. Sikerült megoldaniuk az általánosított Bajraktarević-közepek egyenlőségi problémáját. Az ebből írt dolgozat az Aequationes Mathematicae-ben jelent meg. Az ebben elért eredményekről a 15th International Students' Conference on Analysis nemzetközi konferencián tartott előadást.

Schwarcz Tamás az Eötvös Loránd Tudományegyetem elsőéves doktorandusz hallgatója. Bérczi Kristóf témavezetésével tavaly kezdett el matroidok közös bázisainak pakolásán dolgozni. Rendkívül hatékonyan kombinálja matematikai széleslátását programozási ismereteivel, melynek eredményeképpen sikerült megmutatniuk, hogy egy bizonyos értelemben nehéz két matroid metszetében két diszjunkt közös bázist találni. Ez a probléma régóta nyitott volt, az eredményeket bemutató cikket a tekintélyes Mathematical Programming folyóirat fogadta el.

Yutaro Yamaguchival közösen folytatták vizsgálataikat, melyek elsősorban matroidok redukálhatóságára irányultak. Sikerült megmutatniuk, hogy a kombinatorikus optimalizálásban leggyakrabban előforduló matroidok jól közelíthetőek partíciós matroidokkal. Ennek eredményeképpen felső korlátot adtak két ezen osztályokból kikerülő matroid metszetének listaszínezési számára.

A Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége által kiküldött bizottság **a Patai Alapítvány 2020. évi díját Fridrik Richárdnak és Kiss Mártonnak ítélte oda.**

Kiss Márton 2020 januárjában szerzett matematika-fizika szakos középiskolai tanári diplomát a Debreceni Egyetemen. Jelenleg a jászberényi Szent József Katolikus Elektronikai Technikum, Gimnázium es Kollégiumban tanit matematikát es fizikát. 2020 szeptemberétől a Debreceni Egyetem Matematika es Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programjának nappali tagozatos PhD hallgatója.

Már egyetemi tanulmányai alatt diákköri kutatómunkát végzett a matematika didaktika területén. Dolgozataival szerepelt a XXXIII. és XXXIV. OTDK Tanulás- és Tanításmódszertani −Tudástechnológiai Szekciójában. Jelenleg PhD hallgatóként kutatási témája a problémamegoldás folyamatának elemzéséhez kapcsolódik. Középiskolás tanulók körében vizsgálta a megértés és memória szerepét, valamint a metakognitív tevékenységek fejlesztésének lehetőségeit. Jelenlegi kutatásaival arra keresi a választ, hogy hogyan építhető be a normál tanterv szerint haladó osztályok tananyagába a problémamegoldás, hogyan érhető el, hogy a tanulók aktív részesei legyenek a matematikaóráknak és ezáltal tartós tudásra tegyenek szert. 2016 óta folyamatosan végez felméréseket, 2019 óta pedig tanítási kísérleteket is középiskolai osztályokban. 2017 óta több hazai és nemzetközi konferencián tartott előadást illetve vett részt poszterrel. Két angol és két magyar nyelvű dolgozata jelent meg. Második éve vesz részt a Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások (MIDK) elnevezésű, évenként megrendezésre kerülő konferenciasorozat szervezésében.

Fridrik Richárd 2018-ban szerzett matematika- és fizika tanári oklevelet a Szegedi Tudományegyetemen. Jelenleg a hódmezővásárhelyi Eötvös József Technikumban matematikatanár. 2008-tól a Magister Universitas Matematika Szekciójában érettségi felkészítő tanár emelt és közép szinten egyaránt.

2013-tól folyamatosan tart tehetséggondozó szakköröket Szegeden, Pécsen, Komáromban, Bonyhádon, Gyulán és Gödöllőn. Az SZTE, PTE és a BJMT által szervezett szakmai napokon két-két alkalommal is felkérték, hogy népszerűsítő előadásokat tartson az egyetem által szervezett matematikai napokon. A Szabadkai Nyári Egyetem felkérésére 2020. októberben online formában tartott továbbképzést ottani tanároknak „Vizsgáljuk meg kicsiben a problémát!" címmel.

2012 óta folyamatosan minden évben részt vesz és aktívan tevékenykedik a matematikatanárok Rátz László Vándorgyűlésén. Még középiskolásként javasolt feladatokat a Zrínyi Ilona matematikaversenyre, ahol 2008-ban több feladatát is kitűzték. 2017. óta folyamatosan szervező a Dürer Matematika versenyen. Feladatait többször kitűzték a versenyen. 2012-ben ő állította össze a Szőkefalvi-Nagy Gyula matematikai emlékverseny 11. osztályos feladatsorait, valamint javította és értékelte a döntős versenydolgozatokat.

Több feladata megjelent 2009-2010-ben a Matematika Tanítása folyóiratban, tanároknak szóló versenypéldaként. 2018 óta Ratkó Éva főszerkesztő felkérésére folyamatosan készít matematika emelt szintű gyakorló feladatsorokat a KöMaL számára. Hamarosan megjelenik két előadásából készült cikke a szlovákiai Katedra folyóiratban.

A Bod Péter Emlékdíj célja a társadalombiztosítás, illetőleg a nyugdíjrendszerek szakmailag megalapozott, igényes aktuáriusi megközelítésű vizsgálatának, modellezésének, az elméleti modellek tényleges gyakorlati alkalmazásának elősegítése a fiatal magyar szakemberek körében, ily módon hozzájárulva az e rendszerek egyre szakszerűbb működéséhez szükséges tudományos és gyakorlati munka megalapozásához, ezáltal a közérdek kiteljesedéséhez. E vonatkozásban a nyugdíjrendszer fogalma tágan értelmezve magában foglal minden, az időskor biztonságát, az időskori ellátást segítő formát, így magát a szűkebben értelmezett társadalombiztosítást, a kötelező, önkéntes és foglalkoztatói nyugdíjpénztárakat, az ilyen célú biztosításokat vagy más nyugdíjcélú megtakarításokat. Az e célokkal összhangban − fiatal kutató által − elvégzett és a Bod Péter Emlékdíjbizottság, illetve a bírálók számára nyilvános és dokumentált teljesítmény díjazható. A hangsúly az alkalmazáson, a gyakorlati hasznosuláson van. Az Emlékdíjra a felhívás minden páros évben kerül kiadásra. Az Emlékdíj alapítói Bod Judit és Lippner György.

A Bod Péter Emlékdíjat Burka Dávidnak, a Budapesti Corvinus Egyetem Számítástudományi Tanszékének adjunktusának ítélte oda az idei évben az Emlékdíjbizottság.

Kutatásának középpontjában a demográfia- és nyugdíjkutatás áll. Burka Dávid doktori kutatása során szimulációs keretrendszer fejlesztett ki, amely lehetőséget biztosít mikroszimulációs nyugdíjmodellek gyors, hatékony és fejlesztői ismereteket nem igénylő implementálásához. Kutatási eredményeit több publikációban ismertette.

A szimulációs megközelítés egy viszonylag új technika, amelynek fejlődését a számítógépes kapacitások jelentős bővülése teszi lehetővé. A szimulációs technika olyan vizsgálatokra ad lehetőséget, amelyek analitikusan nem megragadhatók, azonban amelyek mély betekintést nyújtanak egy-egy probléma gyökeréhez, és alkalmazásuk fontos eredményekhez vezetnek. Azonban e technika alkalmazása valóban csak egy technika, amelynek meghajtása komoly alapismeretekre és megfelelő ítélőképességre van szükség. A nyugdíjrendszerek tudományos és gyakorlatban is alkalmazható elemzése területén e technikai alkalmazása ma már szinte megkerülhetetlen.

Burka Dávid doktori kutatása mellett részt vett a „Fenntartható, intelligens és befogadó regionális és városi modellek" kutatási projektben is, ahol a halandóság modellezésével foglalkozott. Az itt végzett kutatásaiból szintén több publikációja jelent meg.

□ Bolyai □ díjazottak

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Fekete Panna, Kiss Melinda Flóra 2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Hogyan készülünk az (idei) EGMO-ra?

Sikeresen lezárult a Lányok Európai Matematikai Olimpiájára jelentkezők felkészítésének első része, és megtörtént az EGMO 2021-en részt vevő magyar csapat kiválasztása. A felkészítésre 47 lány regisztrált, ami sokkal több, mint a korábbi években bármikor. Ez bizonyára annak köszönhető, hogy egyre többen hallanak a versenyről már általános iskolában és gimnázium elején. A nagy érdeklődés azért is biztató, mivel 2022-ben Magyarország szervezi az EGMO-t, így jövőre tőlünk 8 lány is mehet a diákolimpiára.

Őszi felkészülés

Az őszi félévben a felkészítés elsősorban tematikus feladatsorok megoldásából áll. Augusztustól novemberig négy anyagot küldtünk ki: kombinatorika, geometria, számelmélet és algebra témakörökben kaptak segédanyagot és feladatsort a diákok. A feladatsorokat úgy állítjuk össze, hogy a fontosabb ötletek, megoldási módszerek előkerüljenek a megoldások során. A feladatsor mellé küldött segédanyag összefoglalja az adott témában leggyakrabban használatos ötleteket. Mindegyik feladatsort körülbelül egy hónap alatt kell megoldani. Itt nem a versenyzés a lényeges elem, hanem hogy minél többet fejlődjenek. A lányok bármikor kérhetnek segítséget a feladatokhoz. A beküldött megoldásaikra nem pontszámot, hanem személyes visszajelzést adunk, ezeket a saját szintjükhöz igazítjuk.

Első válogatóverseny

Emellett lezajlott az első válogató is, ami egyúttal az IMO és MEMO diákolimpiák válogatóversenye is. A versenyre 96-an regisztráltak, 85 diák adott be dolgozatot, közülük 36 lány. Az első válogatót egészségügyi megfontolások alapján online, egy zoom konferencia keretében tartottuk meg. Azaz a diákok jelentős része otthon, kamera előtt oldotta meg a feladatokat.

Mint minden évben, idén is négy feladatot kaptak a versenyzők a rendelkezésükre álló négy és fél órára. A válogató feladatainak megoldását ezt követően online bemutattuk, illetve a versenyzők e-mailben is megkapták. A jók között a legjobbak eredményei a hivatalos magyarországi olimpiai honlapon tekinthetők meg: https://cms.renyi.hu/olimpiak/hu/allas.

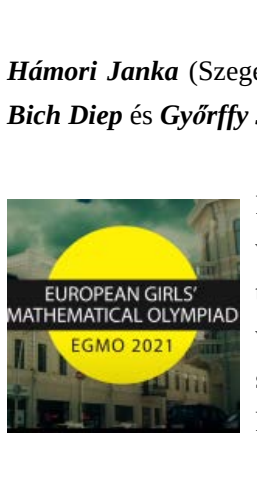
Második válogatóverseny

A 2021-es EGMO-ra való felkészítés további részében januárban egy válogatóhoz hasonló vegyes feladatsoron dolgozhattak a lányok, majd február 3-án a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben zajlott le a 2. EGMO válogató. Ezen a nem szokványos feladatokat tartalmazó versenyen 29 lány vett részt, ez a korábbi évekhez képest nagy örömünkre szinte a duplájára nőtt. A résztvevőknek a beadott munkájukra (az első válogatóhoz hasonlóan) személyes visszajelzést is adtunk.

A Rényi Intézetben készült fotókon is látszik, hogy mindenki nagyon komolyan vette a megmérettetést:

Az idei Lányok Európai Matematikai Olimpiáját Grúzia szervezi 2021. április 9-15. között, online formában. A verseny weboldala: https://egmo2021.atsu.edu.ge/what-is-egmo-2021/ . A Magyarországot képviselő csapat − az EGMO történelmében idén először − négy végzős diákból áll:

Hámori Janka (Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium), ***Velich Nóra***, ***Nguyen Bich Diep*** és ***Győrffy Johanna*** (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium).



Rajtuk kívül a legjobbak az EGMO feladatsoraihoz hasonló vegyes feladatsorok segítségével gyakorolhatnak, illetve egy tervezetten hibrid formában megtartott felkészítő hétvégén is részt vehetnek. A Magyarországot képviselő csapat tagjai mentor segítségével egy hónap intenzív matematikai és lelki felkészítést kapnak.

Reméljük, hogy jövőre is hasonlóan sok lelkes lánnyal találkozhatunk a felkészítés folyamán és a válogatóversenyeken!

Fekete Panna, Kiss Melinda Flóra az EGMO felkészítő csapat nevében

beszámolók diákolimpiák

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Balga Attila, Fonyó Lajos 2021. MÁRCIUS, HÍREK – ÚJDONSÁGOK

Az Arany Dániel Matematika Verseny 2020-as döntője

A verseny első két fordulóját a korábbi évek gyakorlatához hasonlóan szerveztük meg. A kezdők versenybizottsága 2020 januárjában összeállította az egyes kategóriákban a döntő feladatsorait. Időközben az év elején Magyarországon is kitört a COVID-19 járvány, ami már akkor előre vetítette annak a lehetőségét, hogy a 3. fordulót a szokásoktól eltérően kell megrendezni. A döntő megrendezésére három forgatókönyvet is kialakított a Bolyai János Matematikai Társulat vezetősége.

Első lehetőségként a dolgozatokat a tanulók az EDUTUS Egyetem két nagytermében írták volna meg, ügyelve arra, hogy a diákok és a tanárok együttes létszáma egyik helyiségben sem haladja meg a 100 főt.

Második lehetőségként az vetődött fel, hogy az egyetem bezárása esetén a tanulók a saját iskolájukban az érettségi vizsgák körülményeinek megfelelően, tanári felügyelet mellett fognak versenyezni.

A harmadik opció pedig az volt, hogy a döntőt elhalasztjuk addig, amíg a járvány lecsendesedik, és vissza nem áll a hagyományos munkarend az országban.

Miután március 13-án a miniszterelnök bejelentette, hogy az iskolák átállnak az online oktatásra, természetes módon a verseny döntője halasztásra került. Mivel a járvány a vártnál hosszabban elhúzódott, és az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek döntői sem kerültek megrendezésre, ezért felvetődött az a gondolat is, hogy a verseny végeredményét a bizottság a 2. forduló eredményei alapján állapítsa meg. Végül a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottsága 16 igen, 5 nem szavazattal, 2 tartózkodással a verseny szeptemberi befejezése mellett döntött.

A versenybizottság 2020. szeptember 9-ére tűzte ki az időpontot, és úgy terveztük, hogy a diákok Budapesten az EDUTUS egyetemen írják meg a dolgozatukat. Sajnos az élet ismét átrendezte a számításainkat. Több iskola is jelezte, hogy fenntartója az egyre fokozódó járvány miatt nem engedélyezi a diákok Budapestre utazását, ezért az lett a megoldás, hogy a döntős dolgozatokat minden résztvevő saját iskolájában írta meg. A versenyfeladatok a kezdés előtt 20 perccel online úton érkeztek meg a középiskolákba. A versenyfelelős kinyomtatta a küldött feladatsorokat, és a versenyzők papíron dolgoztak tanári felügyelet mellett. A befejezés után az iskolában a dolgozatokat beszkennelték vagy lefényképezték, és azokat elektronikus úton továbbították a Bolyai János Matematikai Társulathoz. Az eredeti dolgozatokat másnap postai úton juttatták el a társulathoz.

A kezdők kategóriájában egy tanuló kivételével mindenki megírta a dolgozatot. A bizottságnak az volt a tapasztalata, hogy a dolgozatok valamivel gyengébbek lettek, mint a korábbi években. Különösen igaz ez a megállapítás a nem speciális tanterv szerint haladó gimnáziumi tanulókra. Ebben a kategóriában mindössze két tökéletes és néhány majdnem teljes értékű megoldás született. Ennek valószínűleg a feladatok nehézségi foka mellett az is az oka lehetett, hogy a középiskolák nagyon nehezen álltak át az online oktatásra. Az átállás megnehezítette a magas színvonalú oktatás biztosítását, Ebben a formában lassabban lehetett haladni, kevesebb tananyagot lehetett elvégezni. Valószínűleg egyes iskolákban megszűntek a szakköri foglalkozások, háttérbe szorult a tehetséggondozás. Országos szinten is ugyanez a helyzet volt jellemző. Elmaradtak az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskola tavaszi foglalkozásai, nem tartottak meg színvonalas matematika táborokat. Ez nagyon hiányzott a 9. osztályos tanulók egy részének, hiszen ők a középiskola elején tanulják meg, hogy milyen egy teljes értékű bizonyítás, hogyan kell a gondolataikat úgy leírni, hogy az precíz, megfelelően indokolt legyen, és természetesen ebben a korban tanulnak meg a diákok sok nagyon fontos tételt, módszert, amire támaszkodni tudnak további tanulmányaik során.

Ennek figyelembevételével a bizottság végül úgy döntött, hogy a szerényebb teljesítmények ellenére is a korábbi éveknek megfelelően jutalmazza a jó eredményt elért tanulókat. Így 5 első, 2 második, 5 harmadik díj és 7 dicséret került kiosztásra. A díjazott tanulók egy részével beszélgetve, a diákok elmondták, hogy kicsit szomorúak amiatt, hogy a verseny ilyen formában zajlott le, és nem a Rényi Alfréd Matematikai Intézetben vehették át díjaikat, de nagyon remélik, hogy 2021-ben már a szokott módon kerül megrendezésre a verseny döntője A magam részéről én is nagyon bízok ebben:

Fonyó Lajos

a kezdők versenybizottságának elnöke

2020. március 13. Az Arany Dániel Verseny HALADÓK versenybizottságának harmadik ülése a tanévben. A bizottság meghatározza a döntőbe jutott tanulók névsorát. Szomorúan állapítottuk meg, hogy az első kategóriában nagyon kevés dolgozatot küldtek tovább, és azt is, hogy a geometria feladatok egyre nagyobb nehézséget jelentnek a versenyzők számára. Ezt követte a döntő feladatsorainak kitűzése. Igyekeztünk a második forduló tapasztalatainak figyelembevételével elkészíteni a feladatsorokat. Az ülés végén, amikor a jól végzett munka elégedettségével felálltunk, valaki csendben megkérdezte: „Lesz döntő forduló?”. Némi tanácstalansággal néztünk egymásra. Reménykedtünk, hogy a 11-én bevezetett intézkedések betartásával, némi átalakítással még megrendezhető a döntő. Nem tudtuk még, mivel állunk szemben…

Aznap estére kiderült, hogy ez aligha lesz lehetséges. Gyors egyeztetések indultak el a bizottságokon belül, és a bizottságok között, a Bolyai Társulat bevonásával. A mi álláspontunk (egyeztetve a KEZDŐK bizottságával) mindenképpen az volt, hogy a döntőt szeretnénk megszervezni, lehetőleg a hagyományos formájában, hiszen az Arany Dániel Verseny csúcspontja a döntő, ahol az ország különböző pontjairól érkező versenyzők évfolyamuk és kategóriájuk legjobbjai együtt, egy teremben írják a versenydolgozatot. Az igazsághoz persze az is hozzátartozik, hogy jóval könnyebb helyzetben voltunk, mint például az OKTV szervezői, hiszen a mi versenyünk nem jelent plusz pontokat a felsőoktatási felvételi eljárásban.

Tehát maradt a halasztás. Akkor még kicsit túlzónak éreztük azt a mondatot, amit kimondtunk, nevezetesen, hogy akár őszig is elhalaszthatjuk a döntőt. Bíztunk a kollégák szakmai elhivatottságában, a versenyzők matematika iránti elkötelezettségében, és reméltük, hogy a versenyláz, a felkészítő és felkészülő munka hatékonysága nem hagy alább még akkor sem, ha szokatlanul hosszú idő lesz a második és a döntő forduló között.

Sajnos valóban őszre halasztódott a döntő. A bizottság nyár végén, szeptember elején még újra ránézett a feladatsorokra, azokat továbbra is megfelelőnek találtuk, megtörtént a lektorálás, és reménykedtünk abban, hogy a döntő megrendezhető részben hagyományos módon. Ugyanakkor egyre több jelzés érkezett az iskolákból, hogy a budapesti utazás veszélyeket rejt magába, senki sem szerette volna veszélyeztetni a versenyzők egészségét. Szomorúan, de a bizottság is erre a következtetésre jutott, így nem volt más lehetőség, mint bízni abban, hogy az iskolák vállalják a plusz feladatot, a döntő megrendezését helyben, megterhelve azzal a plusz előírással, hogy a versenydolgozatokat elektronikus formában még a verseny napján tovább kellett küldeni a Bolyai Társulatba.

Minden nehézség ellenére a döntő jól sikerült. Nagyon szép dolgozatok születtek, különösen a második kategóriában, de a másik két kategória versenyzőinek sem volt oka szégyenkezésre. Nem volt könnyű a sorrendet felállítani a sok jó dolgozat között, de ezt a feladatot már nagy örömmel végeztük, hiszen a versenyt sikerült eredményesen befejezni. Nagyon köszönjük az iskolák segítségét, és külön kiemelten köszönjük a felkészítő kollégák és a versenyzők áldozatos munkáját, matematika iránti elkötelezettségét!

Balga Attila

a haladók bizottságának elnöke

Az érdeklődők a tavalyi verseny részleteit a Bolyai Társulat honlapján nézhetik meg, ahol a díjazottak, valamint a feladatok és a megoldások is megtalálhatók.

Az idei, 2020/21-es versenyről és az április 22-ére tervezett döntő lebonyolításának módjáról is majd itt lehet tájékozódni.

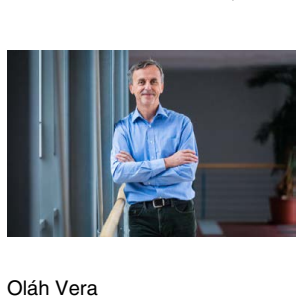
beszámolók Arany Dániel

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

AZ **INTERJÚ-PORTRÉ** MENÜPONT JÓL VAGY KEVÉSBÉ ISMERT MATEMATIKUSOKAT, VAGY OLYAN, EGYKOR MATEMATIKUSKÉNT VÉGZETTEKET SZERETNE BEMUTATNI, AKIK MA MÁS SZAKMA ELISMERT KÉPVISELŐI, SPORTOLÓK, MŰVÉSZEK...(ROVATSZERKESZTŐ: *OLÁH VERA*.)



Oláh Vera
2021. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Digitális ikrek – matematika a technológiában

Nem szeretem azt a kifejezést, hogy alkalmazott matematika, mert egy matematika van, és annak a különféle alkalmazásai – mondja az interjúban *Horváth Zoltán*, az európai ipari és innovációs matematika szolgáltatási hálózat, az EU-MATHS-IN új elnöke. A győri Széchenyi István Egyetem Matematikai és Informatikai Tanszékének vezetője 2013 óta elnöke a hálózat magyar tagszervezetének, amely 7 egyetem és két kutatóintézet összesen 22 kutatócsoportját fogja össze. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2021. MÁRCIUS, PORTRÉ – INTERJÚ

Digitális ikrek – matematika a technológiában

Interjú Horváth Zoltánnal, az európai ipari és innovációs matematika szolgáltatási hálózata, az EU-MATHS-IN új elnökével

Dr. Horváth Zoltán (Fotó: Májer Csaba József)

Horváth Zoltán 2013 óta a Magyar Matematikai Ipar és Innovációs Szolgáltatási Hálózat, a HU-MATHS-IN, 2020 decembere óta pedig az európai EU-MATHS-IN elnöke. 2006 óta vezeti a győri Széchenyi István Egyetem Matematikai és Informatikai Tanszékét. Milyen út vezetett Győrből Európába?

Tanszékünkön 26 állandó, több óraadó, és néhány, határozott időre, egy 2017-ben indult EFOP projektre felvett munkatárs van, jelenleg ötvenen vagyunk. Félévente 7000 tárgyfelvétel van a tanszékünkön, az összes mérnöki, közgazdasági szakokon mi tanítjuk a matematikát és az alapinformatikát is. Huszonegyen matematikát, öten informatikát tanítanak, de a matematikát tanítóknak sok interdiszciplináris tárgyuk is van. Például én a mérnökök képzésében az Ipari matematika és számítógépes szimuláció választható tárgyat már 15 éve tanítom. Ez nagyon népszerű a diákok körében, pedig a nevében ott a matematika. 2020 szeptemberében indult az első saját szakunk, a Computer Science, azaz a programtervező informatikus mesterképzés, ami valójában egy alkalmazott matematika szak, ahol a két fő téma az AI és a Digital Twins.

Mit takarnak ezek a kifejezések?

Az AI (Artifical Intelligence) a ma már egyre ismertebb *mesterséges intelligencia*. A *digitális ikrek* az *ipari szimulációk*nak egy új szakaszát, új korszakát jelentik. Szimulációt már a 80-as évek óta rengeteg ipari fejlesztő cég használ, számítógéppel segített terméktervezéshez. Sok esetben előfordul, hogy a terméket csak számítógépen tervezik meg. Mondjuk egy autó tervezésekor arra kíváncsiak, hogy a menettulajdonságokat figyelembe véve hogyan hűl az az adott teljesítmény mellett működő motor, megfelelő-e a hűtés? Ezt számítógépes kísérletekkel lövik be, hogy utána minél kevesebbet kelljen a gyakorlatban megépíteni. Napjainkban is nagy cégeknél külön részlegek foglalkoznak ilyen szimulációkkal. Persze végeznek méréseket a gyakorlatban is, de sokkal kevesebbet kell mérni, ha szimulációt is használnak.

A digitális ikrek egy most feljövő technológia, amit például a Forbes magazin is a következő öt év első 5 legnagyobb hatású eszköze, vezető technológiája közé sorolt. Egy klasszikus szimuláció a felvett adatok számítógépes reprezentálása, megismétlése, a digitális iker viszont a valóság egy *változó* termékének alkotja meg a digitális mását. Például az üzemidő során változik az a valódi folyamat vagy a valódi motor viselkedése, de ha ez szenzor-összeköttetésben van a számítógépes szimulációval, akkor a szenzoradatokon keresztül a szimulációt újra lehet kalibrálni. Ezáltal, ha matematikailag jól megalapozott a szimuláció − ez végül is matematika, csak egy számítógépes keretrendszert raktak rá − akkor létrehozható az adott gép digitális mása, mert a szenzoradatokon keresztül a tényleges mindenkori állapotának megfelelő értékeket asszimilálni lehet, be lehet építeni a szimulációba.

A szenzor folyamatosan küldi az adatokat?

Ez így van, és az adatokat elemezni kell, ebben gépi tanulási és más eszközök is segítenek. A digitális modellen ki lehet számolni olyan tényezőket is, amiket nem mérnek a szenzorok, és vissza lehet hatni a rendszerre. A legelső „ikret" a NASA holdutazás-programjánál használták. Amikor valami meghibásodott az űrben, a földi szimulátor segítségével tudták megoldani a problémát. Akkor még az űreszköznek nem a digitális mását készítették el a Földön a laborban, hanem egy fizikai mását, egy fizikai ikret, és azon teszteltek egy csomó olyan beavatkozást, amit végül megvalósítottak az űrben. A mai technológia már digitális ikerrel működik.

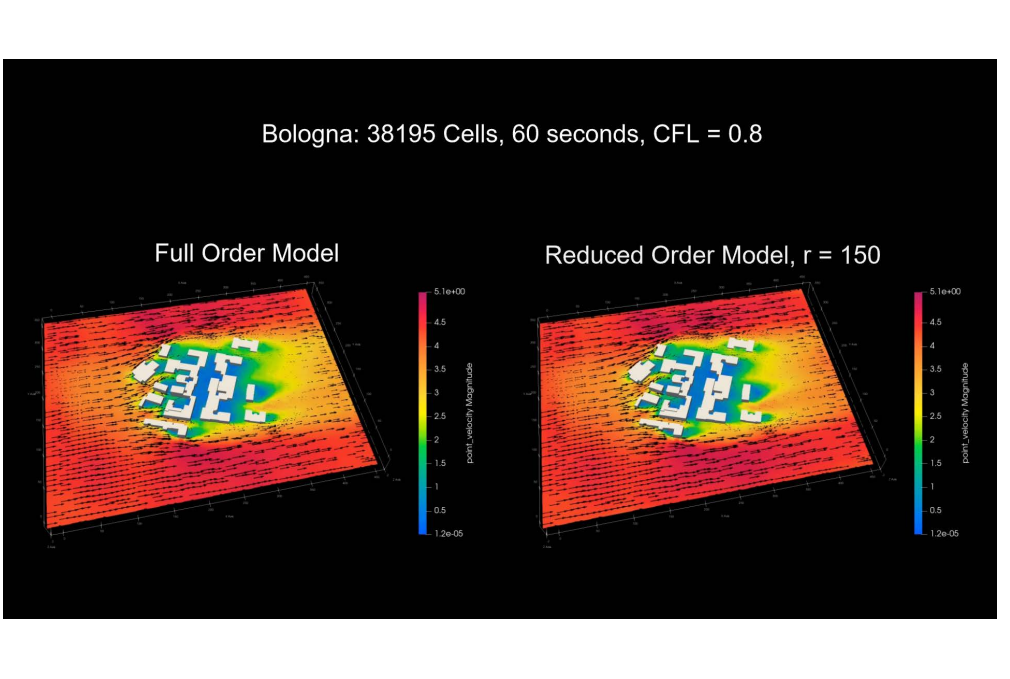
A matematika milyen ágai szükségesek az új technológiákhoz?

A legkézenfekvőbb matematikai diszciplínák a numerikus módszerek, a differenciálegyenletek numerikus módszerei, az optimalizálás. Mi ezeknek vizsgáljuk nagyrészt járműipari és ahhoz köthető alkalmazásait. Volt ipari jellegű alkalmazásunk is, nagy feszültségű árammegszakítók szimulációja, ahol nagyon nehéz fizikai körülményeket kellett szimulálni. Egy másik terület az egészségügy, ott inkább a gépi tanuláson, a mesterséges intelligencián alapul az együttműködésünk a győri Petz Aladár Egyetemi Oktató Kórházzal. Nagyon jelentős eredményt értünk el például a vastag- és végbéldaganatok endoszkópos vizsgálatánál. Amikor a vizsgálatot végző orvos észrevesz egy polipot, egy elváltozást a bélfelszínen, akkor döntenie kell, hogy azt lecsípi-e vagy sem. Az együttműködésünk során adatokat gyűjtöttünk valódi ilyen eseményekből, ezeket hisztológiai, patológiai elemzésnek vetették alá a kórház megfelelő osztályán. Ebből lett egy tanítókészletünk arra, hogy mi az orvos által látott kép és mit mond arról a hisztológia. Ebből fejlesztettünk egy gépi tanuláson nyugvó algoritmust. Ennek az algoritmusnak a találati pontossága egy átlagos orvosénál jobb, a legtapasztaltabb orvos találati pontosságát még éppen nem érjük el, mert még nincs annyi adatunk, de egy kezdő orvosénál mindenképpen jobb, ezt leteszteltük.

Az, hogy egy ilyen együttműködés sikeres legyen, rengeteg munka, idő, és egy olyan csapat szükséges hozzá, ahol egy kicsit mindenki belelát a másik területére.

Ha innovációt akarunk, ahhoz nagyon jól kell tudni a matematikát. Hadd mondjak egy konkrét példát: most egy olyan közvetlenül brüsszeli finanszírozású nagy nemzetközi projektben vagyunk benne, amelyben globális társadalmi hatásai lehetnek a HPC (High Performance Computing), szuperszámítógépeken futó AI alapú alkalmazásoknak. Győri csoportunk 3 ilyen fejlesztése közül az egyik a városi légszennyezés nagy pontosságú modellezése. Ebben a projektben egy nagyon komoly mérőhálózatot fejlesztettünk ki a járművek mozgásának vizsgálatára. Győrben 82 rendszámot is felismerő kamera nézi, hogy hol, mikor, milyen autó bukkan fel. Kódoltan megkapjuk a rendszámokat, így tudjuk, hogy egy-egy autó honnan hova közlekedik. A Bosch 5 nagypontosságú légszennyezésmérő szenzort telepített, ennek az adatai szintén hozzánk futnak be. Természetes, hogy a matematikus nem tud működni, ha nincs a csapatában olyan ember, villamosmérnök, hálózathoz értő informatikus, aki ezeket az adatokat megfelelően tudja kezelni. Mi az adatokból tudunk egy számítást adni, egyrészt a közlekedést le tudjuk szimulálni, másrészt járműmodellek alapján a közlekedésbeni paramétereket figyelembe véve tudjuk becsülni az emissziót, mennyi szennyeződést bocsátott ki az autó. Ezen kívül a 3D geometriát, a házak elhelyezkedését, minden tényezőt figyelembe véve, ki kell számolni, hogy egyrészt hogyan áramlik a levegő, másrészt abban hogy oszlik szét a szennyeződés. Ehhez meg kell oldani a Navier-Stokes-egyenleteket az egész városra, tehát óriási területre kiterjedően. A numerikus megoldás még mindig kihívás a matematikusoknak, hogyan lehet ezt gyorsan, jól megcsinálni, pláne akkor, ha mondjuk, a szimulációs tartomány 4x4x1 kilométeres! És úgy, hogy az utca szintjén 1 méteres felbontás legyen! Tehát most a városi légszennyezés digitális ikrét készítjük el.

Más városokban is alkalmazható ez a rendszer?


Bologna: 38195 Cells, 60 seconds, CFL = 0.8
Full Order Model
Reduced Order Model, r = 150
point_velocity Magnitude

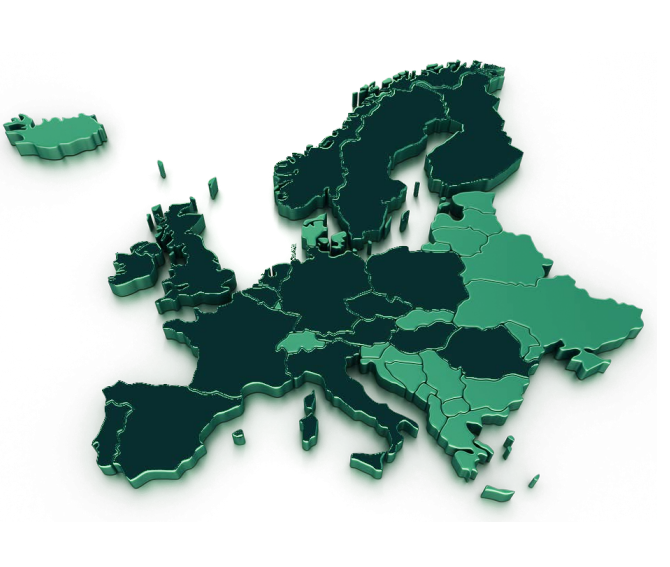
Városi szél számítása nagy térbeli felbontással (2 méter felbontás utca szinten), a Bolognai Egyetem egy részére alkalmazva. Bal oldali kép: teljes modell (192 ezer ismeretlen időlépésenként), jobb oldali kép: adatok alapján matematikai modszerrel betanított, 150 szabadsági fokú modell számítási eredménye. (HZ, Constans M. (SZE))

A validációs terület Győr, de olyan rendszert fejlesztettünk, ami minden olyan városra alkalmas, ami az Open Street Map-en rajta van. Van is rá érdeklődés, hiszen ez egy termék: a HORIZON2020 EU-s projektjei és a 2021-27-es programozási időszak HORIZON EUROPE most induló projektjei innovációs termékfejlesztések, amelyekben meg kell találni a matematika szerepét is.

Ezekben segíthet tehát az EU-MATHS-IN, az európai ipari innováció matematikai hálózata?

EU MATHS IN

Az EU-MATHS-IN nemzetközi tevékenysége is arra irányul, hogy az európai kutatási programokban nagyobb szerepet tudjunk adni a matematikának. Az Európai Matematikai Társaság, az EMS, már évtizedek óta próbálja elérni, hogy legyenek olyan kutatási projektek, témák, amelyek kifejezetten az iparnak és az innovációnak szükséges matematikát támogatják. Habár az európai döntéshozók mindig elismerik ennek fontosságát, de azt, hogy bevegyék a munkaprogramba, hogy a matematikai kutatásainkra – amelyek segítik például ezeket a szimulációkat – dedikált pénzt adjanak, azt már nagyon nehéz elérni. Ezek a kísérletek kevés sikerrel jártak. Magához az innovációhoz közelebb állnak ugyanis az informatikusok, mérnökök, ők szervezik, és úgy gondolják, hogy a szükséges matematikai tudásuk is megvan hozzá. De olyan tudásuk mégsincs, mint amit mi tudunk adni egy közös együttműködésben az előbbre lépéshez. Mi viszont nélkülük nem tudunk terméket fejleszteni, így nekünk is szükségünk van partnerekre. Ezért alapította meg az EMS és az ECMI (European Consortium for Mathematics in Industry) 2013 novemberében az EU-MATHS-IN (European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation) hálózatát, hogy ezeken a területeken az eddigiektől eltérő alapokon szerveződve sikeres legyen. Ugyanis az Európai Bizottság nem a tudományos társaságokat, hanem tipikusan az ipar által támogatott technológiai platformokat (European Technology Platforms) tekinti tárgyalófélnek.



Közreműködésemmel 2015 táján kezdtünk előrelépni ebben a kérdésben. Az lett az ötlet, hogy hozzunk létre a szolgáltatásokra egy külön társaságot, egy nemzeti hálózatok fölötti hálózatot. Minden európai országban van az ipari matematikusokat összefogó, inkluzív hálózat. Európai szinten az EU-MATHS-IN szervezi 17 ország nemzeti hálózatának működését.

Mindegyik részt vevő európai tagország a saját nemzeti kapcsolattartójával képviselteti magát, így azt a döntéshozási folyamatot, hogy a HORIZON 2020 és a most következő HORIZON EUROPE projektjeiben a matematikának adjanak dedikáltan súlyt, mi úgy tudjuk segíteni, hogy a mi nemzeti kapcsolattartóinktól ugyanazt kérjük, mint azok, akik a megfelelő EU-s bizottságokban nemzeti kérésként ezt előterjesztik.

Másrészt rátaláltunk arra, hogyan alakítsuk meg az ipari matematika európai technológiai platformját az EU-MATHS-IN közreműködésével. A többi, az Európai Bizottsággal már partnerségben levő nagy technológiai platform már régóta úgy működik, hogy benyújtanak egy stratégiai kutatási tervet. Ilyenek platformok például a Big Data Value Association, az ETP 4 HPC, a 5G IA, az 5G-s nagy európai hálózat, vagy a Cybersecurity. A mi európai ipari matematikai hálózatunkat hozzájuk hasonlóan hoztuk létre, mivel a digitalizáció szempontjából a legközelebb állnak hozzánk. Részben az én eredményem is, hogy 2020 decemberében sikerült velük aláírni egy együttműködési megállapodást: 8 platform[1], köztük az EU-MATHS-IN aláírta az un. TransContinuum Initiative egyezményt arról, hogy közösen adjunk arra javaslatokat az Európai Bizottságnak, hogy milyen pályázati felhívások készüljenek. Tehát most az európai ipari matematika már abban a pozícióban van, hogy nevesítve, a többi platformmal közösen, nem mint matematikai diszciplína, hanem mint technológiai téma jelenjen meg. Úgy kell megőriznünk a matematikát ezekben a projektekben, hogy az matematika maradjon, ugyanakkor technológiaként kell eladnunk.

Tehát az a cél, hogy ebbe a közös európai platformba proaktívan olyan témákat javasoljunk, amiben benne van a matematika, fogadtassuk el ezt a többiekkel, és utána közösen terjesszük ezt az Európai Bizottság elé, és ez már a 8 platform közös előterjesztése lesz!

Tudjuk már, hogy mi lesz az EU-MATHS-IN témája a közös előterjesztésben?

Ebben az együttműködésben mi vagyunk a Digital Twins zászlóvivői. A digitális ikrek lényege, hogy valós időben lehessen szimulálni egy bonyolult fizikai rendszert, ami nagyon nehéz, mivel a rendszernek iszonyú sok szabadsági foka van. A mérnök valós időben szeretné nézni a képernyőjén, hogy mi zajlik az eszköz belsejében. Ez a jövő egyik vezető technológiája, amiben fontos a matematika szerepe. Egyik kulcseszköze a Model Order Reduction, a modell rendcsökkentő módszerek használata: nagyon sok offline szimulációval felderítjük, hogy mi az igazán lényeges egy adott folyamatban (régebben egyszerűbb esetekben a főkomponens-analízist szokták erre használni). Betanító, training adatokat nyerünk a sok offline szimulációból, és abból állítjuk össze az online szimulációt, ami már nagyon gyors. Ehhez érteni kell a matematikát, és adott helyzetben egy új ötlettel, matematikai trükkel javítani a korábbi eredményeket.

A nagy, platformok közötti együttműködés januári online találkozóján sikerült kiharcolni, hogy hogy a közös előadásokból az első három közül kettőt az EU-MATHS-IN tartott. Az első előadást a Siemens tartotta a Digital Twinsről, amiben integrálni lehet a szenzoros mérnökök a tapasztalatait, a Big Datások tudását, hogy az offline szimulációk hatalmas adatmennyiségét hogyan kell feldolgozni, és a szuperszámítógépesekét, akik tudják, hogyan lehet ezeket hatékonyan lefuttatni. Én egy másik előadásban a győri fejlesztéseinket mutattam be.

Hogyan lett Ön a vezetője az EU-MATHS-IN-nek? Mivel kezdődött?

7 évvel ezelőtt a Berlini Műszaki Egyetem, a TU Berlin professzora, Volker Mehrmann vont be az EU-MATHS-IN létrehozásába. Ő most alkalmazott matematikusként (!) az EMS, az európai matematikai társaság elnöke. Vele 2011 körül tudományos kapcsolatban voltunk, ismertük egymás munkáját, érdekelték a magyar kutatás-fejlesztések. Engem kérdezett meg, hogy megszervezném-e a magyar ipari matematikai hálózatot. Megpróbáltam. Az ELTE-n annakidején a témavezetőm Stoyan Gisbert volt, akitől nagyon sokat tanultam, és rajta keresztül megismertem mindenkit, aki az ELTE-n, a BME-n vagy máshol ipari matematikával foglalkozott. Így mi voltunk az elsők, akik a 2013 novemberi EU-MATHS-IN megalakulása után 2 héttel megalakítottuk a magyar Matematikai Ipar és Innovációs Szolgáltatási Hálózatot, a HU-MATHS-IN-t. A 7 évvel ezelőtti alapítók matematikus professzorok, kutatók voltak, mostanra ez megváltozott, kutatócsoportok a tagjai: 7 egyetem 22 kutatócsoportja és két akkori MTA, mostani ELKH intézet, a Rényi Intézet és a SZTAKI csoportjai. (Csak néhány név a sok résztvevő közül: Csendes Tibor, Fridli Sándor, Gerencsér László, Röst Gergely, Simon Péter, Illés Tibor, Kis Tamás, Márkus László, Szeidl László,…, és kulső tanácsadoként Terlaky Tamás.)

Mennyire szoros a magyar hálózat együttműködése?

Nagyon szoros, 2017 nyarán indult el egy 1,4, milliárdos EFOP projekt a HU-MATHS-IN, tehát a magyar ipari és innovációs hálózat elmélyítése címmel[2]. Most is zajlanak a kutatások, rengeteg eredményes tevékenységünk volt, közöttük az iparból kiinduló matematikai tartalmú, célzott alapkutatási projektek. Közel ötven ipari indíttatású projektben kutatunk, a konzorciumi partnereken kívül (a Győri Széchenyi Egyetem, a Debreceni Egyetem és a Szegedi Tudományegyetem) más egyetemek kutatócsoportjainak részvételével. A pandémia miatt meghosszabbított projekt 2021. márciusában zárul egy online konferenciával[3].

Hogyan valósul meg az „elmélyítés" ebben a projektben?

Azoknak a legjobb modelleknek a bevezetésével, amiket én korábban Európában megismertem. Ilyen minta például Berlinben a Matheon kutatóközpont, amelynek az alapítói nagyon nagy matematikusok, Martin Grötschel és Mehrmann voltak. Célzott alapkutatási matematikai projektek otthona, azóta az Excellence Plus-ból is támogatják őket Németországban. Ahogyan ők szervezték a Matheont, lényegében azt csináltuk mi a HU-MATHS-IN-en belül. A spanyolok rendszerét is tanulmányoztuk – a spanyolok nagyon jók az üzleti kapcsolattartásban. A franciák kiemelkedőek az alkalmazott matematikai, ipari matematikai támogatásban, van például egy jó Job Portal-juk, ami most már az EU-MATHS-IN honlapjáról is elérhető. A teljesen nyilvános állásportálra cégek vagy cégekhez kapcsolódó kutatások matematikusoknak szóló állásajánlatait lehet föltenni. Ezt kicsit félve is reklámozzuk, hogy ne menjenek el a magyar matematikusok. Főleg franciák hirdetnek, de Franciaországban az ipari matematika tábora ezerszer nagyobb, mint Magyarországon. Láttam olyan, Párizsban szervezett matematikai vásárt, ahol rengeteg cég csak matematikai állásokat kínált a francia diákoknak, akik ott tömegével tolongtak. Azt a módszertant egy nagy magyar projektbe vettük át, illetve fejlesztettük, bekapcsolódva az európai vérkeringésbe.

Voltam Heidelbergben is, mert a német hálózat, a KoMSO nem azonos a Matheonnal. A KoMSO, a matematikai modellezés, szimuláció és optimalizáció bizottságának vezetője ideáig egy heidelbergi professzor, Hans Georg Bock volt. Vele többször találkoztunk, barátian elmagyarázta az összes működési lépésüket, hogy ők hogyan csinálták. Éppen a KoMSO mintájára indítjuk 2021 februárjában és márciusában az online ipari partnertalálkozóinkat, 5-6 nagy cég részvételével. Ezek a partnertalálkozók, úgynevezett Challenge Workshopok, nagyon népszerűek Németországban a KoMSO-nál. Általában egy szaktekintély tart egy előadást arról, hogy egy adott témának, amit aznap feldolgoznak, mik az ipari és a kutatási vonatkozásai. Utána van mondjuk két egyetemi kutató előadó, akik előadják, hogy mik a legkorszerűbb lehetőségek az ehhez kapcsolódó kutatás területén, majd következik két-három ipari cég, akik elmondják, hogy az adott területnek milyen kihívásait látják a saját cégüket, saját ipari területüket illetően. Az ipar szót mindig általános értelemben használjuk, tehát minden gazdasági szereplő tevékenyége „ipar".

Példaként állt előttem egy igazi ipari matematikus, Wil Schilders, aki 30 évet dolgozott matematikusként a Philipsben; tőle, az EU-MATHS-IN megelőző elnökétől sokat ellestem a nemzetközi szervezetek vezetéséből, a nemzetközi kommunikációból.

A mostani workshopok milyen területeket céloznak meg?

Az első partnertalálkozónk témája Röst Gergely koordinálásával a járványterjedés ipari-gazdasági hatásai. A szegedi csoport és Ferenci Tamás az Óbudai Egyetemről modellezték az OTP-n belül a járványterjedést, hogy megtudják, hogyan kell elválasztani egy cégen belül az embereket ahhoz, hogy ne essenek ki a munkából. A következő a hálózatok és az egészségtudomány kapcsolata, a szegediek, Csendes Tiborék által vezetett orvosi tematika. Mesterséges intelligencia lesz a téma Debrecenben, az AI egészségipari alkalmazásai, a GE, és a Microsoft részvételével. Az idei március 26-i pedig a banki alkalmazások napja, a Morgan Stanley és az ELTE (Márkus László) vezetésével.

Ezek magyar vagy nemzetközi tapasztalatok megbeszélésére szolgálnak? Hiszen a szereplő cégek között sok a nemzetközi.

Elsősorban magyar, de mivel most a HU-MATHS-IN-nek és az EU-MATHS-IN-nek is ugyanaz az elnöke, szeretnék ezeknek a Challenge Day-eknek sokkal szélesebb körű láthatóságot biztosítani.

Milyennek látja Magyarországon és Európában az alkalmazott matematika terjedését?

Az EU-MATHS-IN külföldi képviselői is részt vettek Győrben 2016-ban a Bolyai Társulat Alkalmazott Matematikai Konferenciáján, amiről az Érintő is beszámolt. Itt a kerekasztal-beszélgetésben Volker Mehrmann elmondta, hogy mielőtt Berlinben bevezették a célzott matematikai alapkutatási projekteket és ennek keretet is adtak, akkor kezdetben a berlini matematikaprofesszorok (vannak vagy százan) 20 százalékának volt köze az alkalmazásokhoz. Ez nagyon hamar megváltozott éppen a fordítottjára, a berlini matematikusok 70%-a részt vett olyan projektekben, ahol alkalmazásokkal foglalkozott.

Dirk Hartman (matematikus, elméleti fizikus), aki a Siemensnél a digitális ikrek témát vezeti, volt az, aki az EU-MATHS-IN európai core teamjének vezetőjeként az EU-MATHS-IN zászlójára kitűzte a Digital Twins jelszót. Az elég impresszív, ha egy ilyen nagy cég, mint a Siemens egy „matematikai találmány" zászlóvivője!

A TU Berlinben a folyosón nagy posztereken bemutatják az összes korábbi projektjüket, öröm látni, milyen jók is voltak és hogy a legnagyobb matematikusaik neve is ott szerepel a megvalósítók között. Ott az alkalmazás nem másodlagos, a legjobbak is szívesen csinálják.

Jó volna, ha nálunk is ez irányban változna a közmegítélés, mert az egész társadalom talán másképp állna a matematikatanuláshoz, ha többet látna-tudna azokról a fantasztikus alkalmazásokról, alkotásokról, fejlesztésekről, amelyekben a matematikusok szerepe is kiemelt.

Amikor én tanultam matematikát, már akkor is volt alkalmazott matematika, de akkoriban nem láttuk, nem láthattuk, hogy ennyi mindenben használható majd évtizedek múltán a matematika.

Nem szeretem azt a kifejezést, hogy alkalmazott matematika, mert egy matematika van, és annak a különféle alkalmazásai. A matematikusoknak Magyarországon is egyre több lehetőségük nyílik arra, hogy bekapcsolódjanak az európai matematikai közéletbe, amiben mi most nagyon is benne vagyunk. Ha szeretnének valóságközeli feladatokat, akkor megfelelő teljesítménnyel és menedzseléssel az európai, az iparral együttműködő projektek erre lehetőséget adnak, ráadásul európai szintű fizetésekkel. Nem kell emiatt a fiatal kutatóknak külföldre költözni.

Reméljük, hogy a magyar matematika elismertsége a jövőben tehát még tovább növekszik, ebben Önöknek nagy szerepe lesz, amihez további sok sikert kívánok.

Oláh Vera

---

[1] • 5G IA, the 5G Infrastructure Association, • AIOTI, the Alliance of Internet Of Things Innovation, • BDVA, the Big Data Value Association, • CLAIRE, the Confederation of Laboratories for Artificial Intelligence Research in Europe, • ECSO, the European Cybersecurity Organisation, • ETP4HPC, the European Technology Platform for High-Performance Computing, • EU-Maths-In, the European Service Network of Mathematics for Industry and Innovation, • HiPEAC project (High Performance Embedded Architecture and Compilation).

[2] EFOP-3.6.2-16-2017-00015, A HU-MATHS-IN – Magyar Ipari Innovációs Matematikai Szolgáltatási Hálózat tevékenységének elmélyítése

[3] https://hu-maths-in.hu/hirek-es-esemenyek/xy-konferencia/

alkalmazott matematika EMS hálózatok mesterséges intelligencia

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

SOKSZOR TALÁLKOZUNK OLYAN FELADATTAL, ÖTLETTEL, AMIT SZÍVESEN ELTESZÜNK KÉSŐBBI HASZNÁLATRA. A **TANÓRA – SZAKKÖR** ROVAT SZERETNE HOZZÁJÁRULNI A MATEMATIKATANÁROK ESZKÖZTÁRÁNAK GAZDAGÍTÁSÁHOZ, FÓRUMOT KÍVÁN ADNI A GONDOK, NEHÉZSÉGEK MEGTÁRGYALÁSÁRA IS. (ROVATSZERKESZTŐ: *HORVÁTH ESZTER*.)

Tamás Beáta, Magyar Zsolt
2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Javítási tapasztalatok a 9. évfolyamra jelentkezők felvételi dolgozataiban

Minden év elején sokezer tinédzsert és szülőt tartanak izgalomban a gimnáziumi felvételi vizsgák. Az idei nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli feladatsoráról a Kempelen Farkas Gimnázium matematika munkaközössége, a hatosztályos felvételiről az Eötvös József Gimnáziumban Gyengéné Beé Andrea küldött beszámolót. A *négyosztályos középiskolákba felvételizők dolgozatairól* a Szent István Gimnáziumban *Tamás Beáta* és *Magyar Zsolt* írása a következőkben olvasható.

Gyengéné Beé Andrea
2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

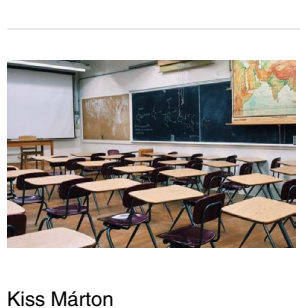
A hatosztályos gimnáziumba jelentkezők felvételi feladatsoráról

Minden év elején sokezer tinédzsert és szülőt tartanak izgalomban a gimnáziumi felvételi vizsgák. Az idei nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli feladatsoráról a Kempelen Farkas Gimnázium matematika munkaközössége, a négyosztályos középiskolákba felvételizők dolgozatairól a Szent István Gimnáziumban Tamás Beáta és Magyar Zsolt küldött beszámolót. *A hatosztályos felvételiről* az Eötvös József Gimnáziumban *Gyengéné Beé Andrea* írása a következőkben olvasható.

Kempelen Farkas Gimn. mat. munkaközössége
2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Gondolatok a nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli felvételijéről

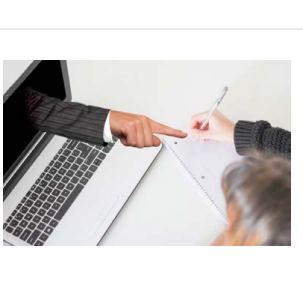
Minden év elején sokezer tinédzsert és szülőt tartanak izgalomban a gimnáziumi felvételi vizsgák. Az idei hatosztályos felvételiről az Eötvös József Gimnáziumban Gyengéné Beé Andrea, a négyosztályos középiskolákba felvételizők dolgozatairól a Szent István Gimnáziumban Tamás Beáta és Magyar Zsolt küldött beszámolót. A *Kempelen Farkas Gimnázium* matematika munkaközösségének írása a *nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli feladatsoráról* a következőkben olvasható.



Kiss Márton
2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

„Hangosdolgozat”

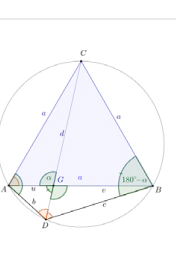
A digitális otthoni munkarendben tanári szempontból az egyik legnagyobb kihívást a számonkérések kivitelezése jelenti. Egy fiatal középiskolai tanár, *Kiss Márton* azt próbálta ki osztályában, hogy matematikából az otthon írásban megoldott dolgozat feladatait nem elég lefényképezve visszaküldeniük a tanulóknak, hanem készíteniük kell egy hangfelvételt is a megoldások gondolatmenetéről, magyarázatáról. A kísérlet nagyon érdekes eredményeket hozott…



Kónya Eszter
2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Az online számonkérés oktatói tapasztalatairól

Mindannyian nagyon várjuk a visszatérést a jelenléti oktatáshoz, mert úgy érezzük, hogy az oktatómunka eredményességéhez feltétlenül hozzátartozik a hallgatókkal való személyes kapcsolattartás, és így a számonkérés is reálisabb eredményt hoz. Mindazonáltal a digitális oktatás némely elemét a jövőben is érdemes lesz megtartani. Két félév tapasztalatairól ír *Kónya Eszter*, a Debreceni Egyetem oktatója. Tovább…



Ambrus Gabriella, Fried Katalin
2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése egy feladat példáján

A tananyag folyamatos frissen tartása érdekében az oktatók rendszeresen tanulmányozzák a diákok nehézségeit, feladatokhoz való hozzáállását és a megoldásaikat. Ebben a tanulmányban az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ két oktatója, *Ambrus Gabriella* és *Fried Katalin* mutat be egy válogatást egy geometria feladathoz készíthető megoldásokból, hallgatói munkákat is felhasználva. Tovább...

Fülöp Ottilia
2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematikaoktatás online – tudunk-e újat az előző félévhez képest?

Tavaly szeptemberi számunkban *Fülöp Ottilia* és *Nagy Marcell* a második féléves matematika tárgy online oktatását vizsgálta. Ehhez a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karának alapszakos hallgatói körében elvégzett felmérésüket hívták segítségül. A 2020/21-es tanévben már felhasználhatták előző félévben szerzett, online oktatással kapcsolatos tapasztalataikat. És igen, volt, amit most másképp csináltak... Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Tamás Beáta, Magyar Zsolt 2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Javítási tapasztalatok a 9. évfolyamra jelentkezők felvételi dolgozataiban

Központi matematika írásbeli felvételi – Szent István Gimnázium

2021. január 23-án tartották a 6 és 8 évfolyamos gimnáziumok és a 4 évfolyamos középiskolák központi írásbeli felvételi vizsgáit.[1]

A nyolcadik osztályosok feladatsora az elmúlt évekhez hasonló típusú feladatokat tartalmazott, így a felvételizők számára sem jelentett meglepetést.

Jól összeállított feladatsor volt, amelynek viszonylagos nagy szórása lehetővé teszi a differenciálást, ezért mérésmetodikai szempontból jók voltak a feladatok és a javítási útmutató.

A dolgozatok javítása során az alábbiakat állapíthatjuk meg a feladatokról és a tanulók által elkövetett típushibákról.

(A leírtakat a Szent István Gimnáziumban írásbelit írt diákok dolgozatai alapján állítottuk össze. Ezek a diákok mindenképpen az országos átlag felett teljesítettek összességében, de találkoztunk nagyon gyenge teljesítménnyel is.)

A feladatlap innen tölthető le és megnézhető a javítási útmutató is.

1. feladat: A feladat b) részében többen nem értették a prímszámok számát, helyette összeadták a 10-nél kisebb prímszámokat. A d) résznél több olyan felvételiző volt, aki nem értette, mit kell csinálni a betűkkel megadott műveletekkel, ők általában algebrai kifejezésként kezelték a problémát, csak a zárójel felbontásáig jutottak el (a betűk megtartásával), ami a javítási-értékelési útmutató szerint még nem ért pontot.

A feladatrészek megoldottságában a b) és e) átlagpontszámában tükröződnek a fentebb említett nehézségek, de a feladatrészek megoldottsága általában magas.

2. feladat: A mértékegység-átváltásokat összességében jól megoldották a tanulók. Sokan azért hibáztak, mert nem figyeltek a műveleti jelekre, kivonás helyett összeadást végeztek. A feladatrészek megoldottsága 85% feletti.

3. feladat: A feladatot arányaiban kevesen oldották meg maximális pontra. A matematikai szövegértés mellett nagyfokú koncentrációra volt szükség, ahhoz, hogy mind a négy feltételnek egyszerre eleget tegyen a felírt szám. Nagyon jó feladatnak tartjuk, felvételi feladatként jól mér. Hibátlan megoldást csak a vizsgázók fele adott, a második leggyakoribb pontérték a 3 pont (öt számból két hibás, vagy 4 számból 1 hibás), illetve a 0 pont.

4. feladat: A feladat nem tűnt nehéznek a tanulók számára. Többen azért vesztettek pontot, mert a grafikont nem figyelték meg alaposan. Míg az a) rész megoldása ténylegesen magas (80% feletti), addig a b) részt hibátlanul csak 60% oldotta meg, és a pontszámok elég nagy tartományban szóródnak. Ennek oka lehet a táblázat értelmezésével kapcsolatos nehézség, de a figyelmetlenség is belejátszott, jópáran voltak, akik üresen hagytak kitöltendő cellákat.

5. feladat: A feladat c) részével a nagy többség nem tudott megbirkózni. A szögfelező, és szakaszfelező tulajdonságait egyszerre nem tudták felhasználni a feladat megoldásánál. Ez típushiba volt a dolgozatokban. Míg az a) és b) rész 90, illetve 80% feletti, addig a c) rész csak 30%-os megoldottságú, a d) rész pedig 50%-os, ami abból fakad, hogy sokan a c)-t üresen hagyták, így a d)-re már nem volt mit írniuk. Aki a c) részre rossz eredményt adott meg, azok nagy része a d) részt már jó számolással oldotta meg. Azonban az ellenőrzéskor kiderülhetett volna, hogy az ábrában kialakult olyan háromszög ezen adatokkal, ahol nem 180° a szögek összege. Erre valószínűleg a tanítás során sem fektetünk nagy hangsúlyt, ez meglátszott a kapott eredmények elfogadásán.

6. feladat: A többség számára rutinfeladatnak bizonyult, a tanulóknak csak 10 százaléka nem oldotta meg. Felvételi szempontból nem a legszerencsésebb, mert lényegében vagy maximális pontot kaptak rá, vagy 0-t. Számolási hiba nem jellemző. Pontszáma (6 pont) relatíve sok, mert jóval könnyebb volt és könnyebbnek is bizonyult, mint a 8. feladat, ami 5 pontot ért.

7. feladat: A feladat megoldása többségében jól sikerült, átlagosan 3 pontot szereztek a 4-ből. Egyenletes volt a hibák eloszlása, kissé többet hibáztak a b) illetve d) résznél, de nem szignifikánsan.

8. feladat: Ez a feladat már nagyon szórt a tanulók megoldásában. Sokan jól határozták meg a 2 fordulóba jutó versenyzők számát, de onnan nem léptek tovább. Ez típushibának tekinthető a feladat megoldása során. Nehézségének megfelelő helyen volt (8. feladat), de mint már említettük, kevesebb pont járt érte, mint a 6. feladatra. A feladatra hibátlan megoldást lényegében a vizsgázók fele adott, de elég magas, 18% a 0 pontosok aránya – közöttük sok olyan van, aki már nem jutott el eddig a feladatig a megoldás során.

9. feladat: Változatos megoldásokat hoztak a felvételizők. Leggyakoribb hiba, hogy rosszul számolták össze a négyzetek számát. A megoldásokból csak ritkán derült ki, de talán többségében a jobb alsó (nem látható) négyzetet, vagy a két hasáb között lévő négyzeteket nem vették figyelembe. A négyzet és a téglalap területével lényegében tisztában vannak. Javítás szempontjából talán a legnehezebben javítható feladat volt, mert a vizsgázók nem részletezték a gondolatmenetüket, nem látták el szöveggel a számolásukat, így sok esetben nehéz volt kibogozni, hogy éppen mit is számoltak, és a logikai összefüggésük helyes vagy nem helyes a feladat megoldásának szempontjából. A vizsgázók harmadának sikerült hibátlanul, és közel ennyinek egy hibaponttal, de 20%-nyi a 0 pontos megoldás is, ami csatlakozik az előző feladatnál leírtakhoz: a vizsgázók egy részének már nem maradt ideje foglalkozni ezzel a feladattal sem.

10. feladat: A legnehezebb feladat volt a feladatsorban, ennek megfelelően kis arányú hibátlan megoldás született, csak 25%, és 1 pontot is csak a vizsgázók 15%-a vesztett.

Típushiba volt, hogy az egyenlet felírásakor nem figyeltek arra, hogy a maradék rész felével dolgozzanak tovább. További hibázási lehetőség, ha jól felírta az egyenletet, akkor az egyenletrendezést hibázta el a beszorzásnál, vagy a zárójelfelbontásnál. Akik visszafelé gondolkodással oldották meg, szinte mindannyian jó végeredményt kaptak, de az ő arányuk nem volt nagy. A feladatmegoldásokból látszott, hogy a vizsgázókat meglepte a feladattípus: valójában ez nem egyenlet felírásával eredményesen megoldható feladat volt, hanem a visszafelé számolással való feladatmegoldást kellett volna felismerni benne. Az egyenlet felírásával megoldva nemcsak 10. feladatként a vizsga legvégén, de önmagában is nehéznek számított volna.

Tamás Beáta, Magyar Zsolt

Szent István Gimnázium, Budapest

---

[1] Indokolt esetben január 28-án és február 5-én írhattak pótló feladatsort a diákok.

A feladatok és a javítási útmutatók az Oktatási Hivatal honlapján érhetők el:

https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok/2021evi_6_8osztalyos

https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok/2021evi_9evfolyamra

Megtudhatjuk az elért eredmények statisztikai adatait is:

https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/beiskolazas/2021/OH_honlap_felveteli_eredmenyek_gyorsstat_2021_KPF.pdf

matematikatanítás

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok
Aktuális szám: 19. szám 2021. március Választon: ›
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Gyengéné Beé Andrea 2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A hatosztályos gimnáziumba jelentkezők felvételi feladatsoráról

- Az Eötvös József Gimnázium tapasztalatai

2021. január 23-án tartották a 6 és 8 évfolyamos gimnáziumok és a 4 évfolyamos középiskolák központi írásbeli felvételi vizsgáit.[1]

Iskolánkban, a Budapest V. kerületi Eötvös József Gimnáziumban ebben a tanévben 132 hatodikos írta meg a felvételi dolgozatot. Az iskolai átlag ebben az évben 35 pont lett 9,88 szórással. Ez az átlag majdnem 10 ponttal jobb, mint az előző tanévben, ez és a viszonylag magas szórás mutatja, hogy a dolgozatot most sikerült úgy összeállítani, hogy ne okozzon sokaknak nagyon nagy kudarcélményt, ugyanakkor alkalmas legyen arra a célra, amire szánják, azaz a kicsit érettebb, középiskolai módszereket, absztraktabb tanítást elbíró gyerekek kiválogatására. Ugyanakkor ez a feladatsor semmi esetre sem alkalmas a matematikai tehetségek felismerésére, ennek több oka is van, erről egy kicsit később.

A feladatlap innen tölthető le és megnézhető a javítási útmutató is.

Miket mért a feladatsor? Mért olyan ismereteket, mint alapvető számolási készségek megléte (műveleti sorrend, előjeles számok, törtek – 1. feladat). Ezekkel a gyerekek túlnyomó többsége jól boldogult, bár volt, aki az öt nagyon egyszerű számolásból csak egyet tudott megcsinálni. A másik ilyen, az általános iskolában hangsúlyosan szereplő tananyag a mértékegységek átváltása (3. feladat), ezzel a feladattal is megbirkóztak legtöbben. A tényszerű ismeretek közül szükség volt még a számok helyiértékes felírásának (4. és 5. feladat) és a kerekítésnek az ismeretére (4. feladat).

Az **5. feladat** már összetettebb volt, pontosan így szólt:

A 2021 olyan négyjegyű természetes szám, amelyben az ezresek és tízesek helyi értékén is 2-es áll, és van három különböző számjegye, amelyek egymás utáni számok.

Sorold fel az összes ilyen tulajdonságú, 2021-től különböző négyjegyű természetes számot!

Itt már szükség volt a nagyon pontos szövegértésre, némi kombinatorikai készségre, figyelni is kellett, sajnos voltak, akik teljesen félreértették ezt a feladatot, a gyerekek kevesebb mint fele tudta csak hibátlanul megoldani.

Jó szövegértésre és egy táblázat értelmezésére volt szükség a 2. feladatban, ezzel elég jól boldogultak, hasonló példákkal már alsó tagozaton is lehet találkozni. A 6. feladat is hasonló kompetenciákat mért, itt kicsit több figyelemre volt szükség.

A komolyabb nehézségek a **7. feladatnál** kezdődtek:

Egy baráti társaság háromnapos kenutúrára indult a Tiszán. Az első napon megtették a teljes út 2/5 részét, a második napon a teljes út 1/5részét és még 16 km-t. Így a harmadik napra a teljes út 2/15 része maradt.

a) Hányadik napon tették meg a leghosszabb utat? ……………………

b) Hány kilométer hosszú volt a teljes kenutúra? ……………………

c) Hány kilométert tettek meg a második napon? ……………………

d) A teljes útnak mekkora része a második napon megtett út? ……………………

Ezzel a feladattípussal már a korábbi évek feladatsoraiban találkozhattak a gyerekek (és remélhetőleg tanórán is csináltak már hasonlót), a feladat kiválóan alkalmas lehetne a gondolkodásmód mérésére, de az útmutató szerint úgy kell értékelni, hogy csak a megoldás helyére beírt jó eredmény ér pontot. Azaz az a) részre akár tippelve beírt jó eredmény pontot ad, míg a helyesen végig gondolt, de esetleg elszámolt b) már csak 0-t.

Összesen 17 teljes megoldás született, ez volt a legrosszabbul sikerült feladat.

Ugyan több teljes megoldás jött a 8. és 9. feladatra (45 ill.24.), de ezekkel is több gond volt. A 9–esnél kockákból kellett téglatestet építeni, szükség lett volna némi térszemléletre, a téglatest térfogatának ismeretére, ehhez egész számok szorzattá alakítására. A térgeometriai példákkal mindig probléma van, én azt szoktam mondani a hasonló korú tanítványaimnak, hogy legózni, legózni, ez segíthet. A **8. feladat** viszont nem elvileg volt nehéz, hanem a szövegezése volt sokaknak idegen:

András és Bea a kezébe fogott egy-egy téglalapot. A két téglalap egyforma volt. Egy ilyen téglalap kerülete 50 cm volt. Egyikük a hosszabb oldallal párhuzamosan, másikuk a rövidebb oldallal párhuzamosan vágta két egyforma téglalapra az eredeti téglalapját. András két olyan kisebb téglalapot kapott, amelyeknek a kerülete 40 cm volt.

a) Hány centiméter hosszú az a szakasz, amelynek mentén András kettévágta az eredeti téglalapját? ……………………

b) Hány centiméter hosszúak az eredeti téglalap oldalai? a = ………… *b =* …………

c) Hány centiméter Bea vágás utáni kisebb téglalapjának a kerülete? ……………………

d) Hány négyzetcentiméter az eredeti téglalap területe? ……………………

A mentén szót én húztam alá, a megoldásokból kiderült, hogy a gyerekek jelentős része ezt a szót rosszul ismeri, a merőleges megfelelőjének tartották, a későbbi részekből látszott, hogy teljesen jól gondolkodtak, csak a szó értelmezésével volt bajuk. Nekem a feladat szövegezésével más gondom is volt, nem éreztem matematikai szempontból helyesnek a „kézben tartott" téglalapot, az „egyforma" szó használatát.

A 10. feladatig, ami egy halmazelméleti-logikai feladat volt, már nagyon sokan nem jutottak el. A feladat nem volt nehéz, de így is csak 29 teljes megoldás született rá. Itt is csak arra lehetett pontot adni, ha megjelent a helyes végeredmény, ami éppen egy logikai feladatnál nem szerencsés.

Az egész feladatsor megoldására 45 perc volt. Ahogyan az elején is írtam, arra alkalmas volt ez a felvételi, hogy a jól felkészült-felkészített, jó szövegértésű, tempósan dolgozó, azaz középiskolai tanulmányokra már érettnek tűnő gyerekeket jó helyzetbe hozza. Arra viszont már évek óta nem alkalmas, hogy az elmélyült gondolkodású, emiatt kicsit lassúbb, de a matematikában kifejezetten tehetséges gyerekeket is felfedezzük közöttük.

Az is igaz, hogy még nincs iskolaváltási kényszer ennél a korosztálynál, az igazán tehetségesek még érhetnek a következő két évben.

Gyengéné Beé Andrea

Eötvös József Gimnázium, Budapest

---

[1] Indokolt esetben január 28-án és február 5-én írhattak pótló feladatsort a diákok.

A feladatok és a javítási útmutatók az Oktatási Hivatal honlapján érhetők el:

https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok/2021evi_6_8osztalyos

https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok/2021evi_9evfolyamra

Megtudhatjuk az elért eredmények statisztikai adatait is:

https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/beiskolazas/2021/OH_honlap_felveteli_eredmenyek_gyorsstat_2021_KPF.pdf

☐ matematikatanítás

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kempelen Farkas Gimn. mat. munkaközössége 2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Gondolatok a nyolcosztályos gimnáziumok központi írásbeli felvételijéről

– A Kempelen Farkas Gimnázium matematikai munkaközössége

2021. január 23-án tartották a 6 és 8 évfolyamos gimnáziumok és a 4 évfolyamos középiskolák központi írásbeli felvételi vizsgáit.[1]

Ebben a cikkben a Kempelen Farkas Gimnázium tanáraiként iskolánk nézőpontjából szeretnénk megosztani gondolatainkat a felvételiről és az idei nyolcosztályos gimnáziumi matematika feladatsorról, javítási útmutatóról.

Néhány előzetes észrevétel:

Fontos, hogy különbséget tegyünk a 8 évfolyamos/6 évfolyamos gimnáziumba készülők, illetve a 4 osztályos középiskolába jelentkezők feladatsorai között.

A nyolcadikos tanulók jelentős része vizsgázik, a vizsgán elért összpontszám számértéke határozza meg azt, bejut-e a tanuló a vágyott intézménybe, vagy sem. Az általános iskolának presztízskérdés a jó középiskolai felvételi eredmény, ez alapján ítélik meg őket. A vizsgára való felkészítés is ennek jegyében történik az általános iskolákban.

A nyolcadikosok a vizsgán az elsajátított, meglévő matematika tudásukról adnak számot, a feladatsoroknak ezt jól kell tudni mérni.

A „kisebbeknél” más a helyzet:

- az adott évfolyam töredéke ír csak ilyen felvételit, vélhetően a tehetséges része.
- az általános iskoláknak sajnos nem érdeke azt a fajta tudást, készséget és képességet erősíteni a tanulókban, amellyel tömegesen tudnának sikeresen felvételizni, hiszen fontos, hogy ne menjenek el a gyerekek az iskolából, ne kelljen osztályokat összevonni. Ez hiba, hiszen azzal, hogy sokakat felvesznek, a tanítók tehetségét lehetne kiemelni, elismerni. Azt is értjük viszont, hogy a tanítók egy nagyon heterogén csoportban kell, hogy átadják a számukra előírt anyagot, valószínűleg nem mindig fér bele az órákba a kiemelkedő tanulók fejlesztése.
- a nyolcosztályos és hatosztályos gimnáziumok olyan tehetséges gyerekeket szeretnének felvenni, akik megfelelő, biztos tudással rendelkeznek, és ezt a tudást már alkalmazni is tudják, képesek az ismereteiket a gyakorlatban is kamatoztatni, önállóan tovább tudnak gondolni dolgokat, használni tudják a józan eszüket.
- a felvételire való felkészítés feladata vagy közvetlenül a szülőkre hárul, vagy azokra a magántanárokra, vagy felvételi előkészítő tanfolyamokra, akiket a szülők bíznak meg, és fizetnek érte. Ez ellen nem tudunk tenni, a szülők ezt értik, elfogadják.
- Az előző sok-sok év feladatsora áll mindenki számára rendelkezésre a felkészítéshez, ez a minta, ezek egy állandónak mondható stílust és tudásszintet képviselnek, nem lenne korrekt egyik évről a másikra ezektől gyökeresen eltérni.
- ezek a gyerekek csak egyszer felvételizhetnek, így egyetlen adott feladatsor alapján hasonlítjuk össze a tudásukat. A feladatsorban kellenek olyan feladatok, amelyek a megfelelő szórást biztosítják, és lehetővé teszik a válogatást. A nagyon magas, és a nagyon alacsony átlagpontszám sem jó, de a hangsúly igazán a szóráson van. Talán egy 30-35/50 pont közötti átlag már elfogadhatónak tekinthető megfelelő szórás

A felvételi feladatsorról:

Észrevételeinket a január 23-ai feladatsorról tesszük, mert iskolánkban csak néhányan írtak a későbbi időpontokban, így ez alapján nem tudunk általános megállapításokat tenni.

A fenti szempontokat figyelembe véve az idei negyedikes feladatsor feladatait alapjában megfelelőnek tartjuk a tehetséges tanulók mérésére, bár talán az előző évek átlagához képest nehezebb volt, figyelmetlenségből többször lehetett pontot veszíteni.

A feladatlap innen tölthető le és megnézhető a javítási útmutató is.

Az alábbiakban részletezzük a javítás során összegyűlt gondolatainkat:

A középiskolai felvételi feladatsorok, így a nyolcosztályos feladatsor is három területen méri a diákok felkészültségét: matematikai tudás, logikus következtetések képessége és a szövegértés. Mindhárom nézőpont fontos, de matematikatanárokként az első kettőre helyeznénk nagyobb hangsúlyt a szövegértés komolyabb tesztelését a magyar felvételi dolgozatra hagynánk. Ebből a szempontból a 2021-es feladatsorban a szövegértés a szokásosnál és kívánatosnál nagyobb szerepet kapott néhány feladat szövege a kívánatosnál hosszabbra sikerült: 6. feladat; 7. feladat; 9. feladat.

A feladatok szövege a gyerekek nyelvén adja meg a problémákat, ezt dicsérni tudjuk. Sajnáljuk, hogy pontatlan, félreérthető a 2.; a 4.; a 7. feladat fogalmazása.

Ebben a feladatsorban előforduló matematikai ismeretek: helyiértékes írásmód; megtett út-eltelt idő; mértékegységek; kombinatorika; sorozatok; grafikon elemzése; arányok; térbeli alakzatok építése; algebrai műveletek; nyitott mondatok.

Talán az arány, arányos osztáshoz köthető feladatokból kicsit több volt a kívánatosnál: 4. feladat; 6. feladat; 7/a feladat.

- feladatot oldották meg a diákok a legjobban, a maximális pontszám 83%-át kapták.
- A 7. feladat bizonyult a legnehezebbnek, a pontszám 46%-át érték el, csak 1 tanuló kapott maximális pontszámot.
- A 3. és 9. feladatok is nehezebbnek bizonyultak.
- A legtöbb hibátlan megoldás a 10. feladatra született (a diákok 42%-a), de az átlagosan elért pontszám itt is alacsonyabb (53%).
- Az átlagpontszám 30,6 (61%).

Néhány feladatról részletesen:

2. feladat:

A gyorsvonat egy és negyedóra alatt 152 km-t tett meg, majd 10 percig állt, majd további 67 perc alatt még 108 km-t tett meg.

a) Összesen hány percig tartott az út? ……………… perc

Ez hány (egész) óra és hány perc? …… óra …… perc

Többek válasza 142 perc. Ők nem számolták bele a 10 perc állást. Utólag, tudjuk, könnyű azt mondani, hogy talán azt kellett volna kérdezni, hogy mennyi ideig tartott az utazás.

4. feladat: Ennek a feladatnak a megfogalmazása többeknek okozott nehézséget.

Mari néni kosarat fon, a kosár az aljánál 25 cm széles. A kosár az alja felett 15 sorból áll, és felfelé haladva minden sor 3 cm-rel szélesebb, mint az alatta levő.

a) Hány centiméter széles a kosár az alja feletti első sornál? ……… cm

b) Hány centiméter széles a kosár az 5. sornál? ……… cm

c) Hány centiméterrel szélesebb a 6. sor a 3. sornál? …….. centiméterrel

d) Hányadik sor lesz 55 cm széles? ………

e) Hány cm széles az elkészült kosár? ……… cm

A feladathoz szerepel egy kép is. Igen, ilyen kosarat már láthatott a gyerek. De azért érezzük, hogy absztrakció kell ahhoz, hogy ebben azt lássuk, hogy az egymás felett lévő „sorok” szélessége között 3 cm a különbség.

És hogyan értsük az alját? Az alját is sornak tekintsük? – Az alja 25 cm széles, és efelett van 15 sor?

Az a) kérdésben az alja feletti első sor a kérdés, a b) –ben az 5. sor. Vajon ez az alja feletti 4. sor? Volt, aki így értette.

A d) kérdésben is kérdés, hogy az alját sornak tekintjük-e? Ha a b) és d) kérdésben következetesen az alját is sornak tekintette a gyerek, adjunk-e pontot? – ezt a kérdést a javítási kulcs módosításával szerencsére egyértelművé tette az Oktatási hivatal: b) kérdés 0 pont; d) kérdés 1 pont. Az a tanár, aki ugyanígy gondolkozott, szíve szerint a b)-re is adott volna pontot J. És az e) rész esetében is adhatta a hibás választ a fogalmazásbeli pontatlanság, itt a javítási útmutató nem adott mérlegelési lehetőséget.

7. feladat: A térgeometria mindig a nehezebb témák közé tartozik. Nem volt meglepő, hogy ezt a feladatot kevesen oldották meg hibátlanul.

A feladat kérdéseivel is volt gondunk.

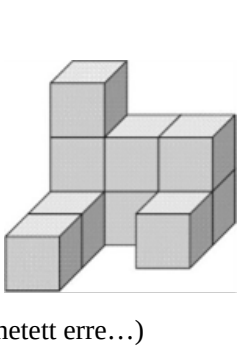
Andinak és Dávidnak összesen 36 építőkockája van. Andinak kétszer annyi építőkockája van, mint Dávidnak.

a) Hány építőkockája van Andinak?

Ebből az információból azt tudjuk meg, hogy Andinak 24 (Dávidnak 12) kockája van. Ehhez az eredményhez lazán kötődik az e) feladatrész.

e) *Dávid egy nagy kockára szeretné kiegészíteni nyomdává alakított építményét. Legalább hány építőkockából állna a kiegészített nagy kocka?*

Erre a válasz 27. De Daninak csak 12 kockája van. „Jobb” lett volna a kérdés, ha Daninak elegendő számú kockája lett volna a megépítéshez. Igaz, a feladat pontosan fogalmazott.



És mit érdemel az a gyerek, aki azt számolta ki, hogy hány kockával lehet **kiegészíteni**? Tudjuk, ő volt figyelmetlen, 0 pont. (A kérdésben benne van a kiegészíteni szó, tehát a gondolat terelődhetett erre…)

A c) kérdés

Dávid összeragasztotta az építményt. Hány négyzetlapot kellett beragasztóznia, ha az összeillesztett lapokat mind bekente ragasztóval?

A jó válasz 22. De mire gondolhatott az, aki 11-et írt? Ő, ha modellt készít, csak az egyik felületet ragasztózza. 0 pont – sajnáljuk, miért nem olvasott figyelmesebben.

Néhány javaslat:

Hasznos lenne, ha **a javítókulcs esetleges módosítását az OH honlapján is jeleznék**, hiszen ha a szülő a dolgozat megírását követően letölti az első javítókulcsot, utána nem fogja észrevenni, hogy már más szabályok vannak érvényben.

A javítás határidejét nagyon szorosnak tartjuk:

A mi iskolánkban a javítás folyamata ez: Az dolgozatot a diákok egy szombati napon írják. A tanárok ezen a napon felügyelnek. Megoldva a feladatsort szereznek egy első benyomást a várható hibákról. Letöltik a javítási útmutatót és elkezdik a dolgozatok átnézését. Egyeztetnek e-mailben, Messengeren a javítás közben előkerülő kérdésekről. Egymásközt megállapodásokat tesznek. Hivatalos álláspont, a javítási útmutató módosítása legkorábban hétfőn délután érkezik. Minden dolgozatot két ember néz át, kontrollra szükség van. Hétvégéig az eredmények bekerülnek az elektronikus rendszerbe, a szülők megtekintik a dolgozatokat. Látható, hogy ez nagyon feszített munka. Úgy érezzük, néhány nappal jó lenne meghosszabbítani ezt a folyamatot.

Mi is tudjuk:

Egy felvételi feladatsor sokféle szempont figyelembevételével készül, utólag könnyű látni a feladatsor erényeit és esetleges gyengeségeit.

Ezek a megfogalmazott gondolatok nem tekinthetők országos elemzésnek, a mi iskolánkról készült áttekintést tudtunk adni. Reméljük, ez az írás ilyen értelemben is érdeklődésre tarthat igényt.

A Kempelen Farkas Gimnázium matematikai munkaközössége

---

[1] Indokolt esetben január 28-án és február 5-én írhattak pótló feladatsort a diákok.

A feladatok és a javítási útmutatók az Oktatási Hivatal honlapján érhetők el:

https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok/2021evi_6_8osztalyos

https://www.oktatas.hu/kozneveles/kozepfoku_felveteli_eljaras/kozponti_feladatsorok/2021evi_9evfolyamra

Megtudhatjuk az elért eredmények statisztikai adatait is:

https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/beiskolazas/2021/OH_honlap_felveteli_eredmenyek_gyorsstat_2021_KPF.pdf

□ matematikatanítás

Copyright © Bolyai János Matematikai Társulat Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet. A honlapot készítette a PANEM MULTIMÉDIA STÚDIÓ

Adatkezelés Elfogadom.

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok
Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kiss Márton 2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

„Hangosdolgozat”

Az online számonkérések margójára – „Hangosdolgozat”

A digitális otthoni munkarendben tanári szempontból az egyik legnagyobb kihívást a számonkérések kivitelezése jelenti. Valamennyi tanár igyekszik olyan formát találni, amely a tanulókat minél inkább arra kényszeríti, hogy a saját tudásuk nyilvánuljon meg egy számonkérés alkalmával, a lehető legkevesebb külső segítséggel. Ennek kapcsán hosszas ötletelések során született meg az a gondolat, hogy matematikából az otthon írásban megoldott dolgozat feladatait nem elég lefényképezve visszaküldeniük a tanulóknak, hanem készíteniük kell egy hangfelvételt is a megoldások gondolatmenetéről, magyarázatáról.

Hogyan zajlott egy ilyen számonkérés és mik voltak az előzményei?

Ezt a módszert még 2020 tavaszán próbáltam ki először, az általam akkor tanított legmagasabb, tizenegyedik évfolyamon, és azóta többször alkalmaztam már ebben a 28 fős, matematikából gyenge teljesítményűnek mondható osztályban. Tavasszal volt az első két alkalom, majd 2020. november 11. óta további három számonkérés szerveződött ilyen formában az időközben már tizenkettedikes osztályban. Logaritmus, kombinatorika, sorozatok és valószínűségszámítás témaköreiből történt az öt számonkérés.

A tanulók a dolgozat feladatait a Google Tanteremben kapták meg bizonyos határidővel, amelyen belül a megoldások levezetésén kívül el kellett készíteni a hangfelvételt a magyarázatokról, és ezeket fel is kellett tölteni. A rendelkezésre álló idő meghatározásakor mindezeket figyelembe vettem.

A szóbeli magyarázatokra külön, közvetlen felkészítést nem kaptak tőlem. Annyiban azért mégis, hogy a témaköröket nem egyedül kellett feldolgozniuk, hanem az önálló feladatmegoldó munkán kívül az órákon konferenciahívásban kellett részt venniük. A képernyőmet megosztva tárgyaltuk a témaköröket, így oldottuk és beszéltük meg a feladatokat. Tehát a tananyag szóbeli magyarázatát is hallhatták a tanulók.

A hangfelvételek pontozásra kerültek és így befolyásolták a dolgozat eredményét. A feladatoktól és a korábbi számonkérések tapasztalataitól függően változó súllyal jelentek meg az érdemjegy meghatározásában a hangfelvétel pontszámai. Az első ilyen számonkérés után szinte minden tanuló igyekezett ezeket komolyan venni. Volt olyan számonkérés, ahol a hangfelvételek alapján több pontot lehetett szerezni, mint az írásbeli munkával. Előfordult persze, hogy valamelyik feladat hangfelvételének elkészítésére nem jutott idő vagy éppen elkapkodva lett csak készen.

A magyarázatok értékelése szubjektívebb, mint az írásbeli részé. Az értékelés során azt tartottam szem előtt, hogy mennyire tudja valaki összefüggéseiben, indokokkal alátámasztva elmagyarázni a feladatok megoldását. Bizonyos mértékben az is számított, hogy megfelelően használják-e az alapvető matematikai szaknyelvet. Kíváncsi voltam, hogy a leírt műveleteket, jelöléseket helyesen nevezik-e meg.

Mik voltak a hangfelvételek tapasztalatai?

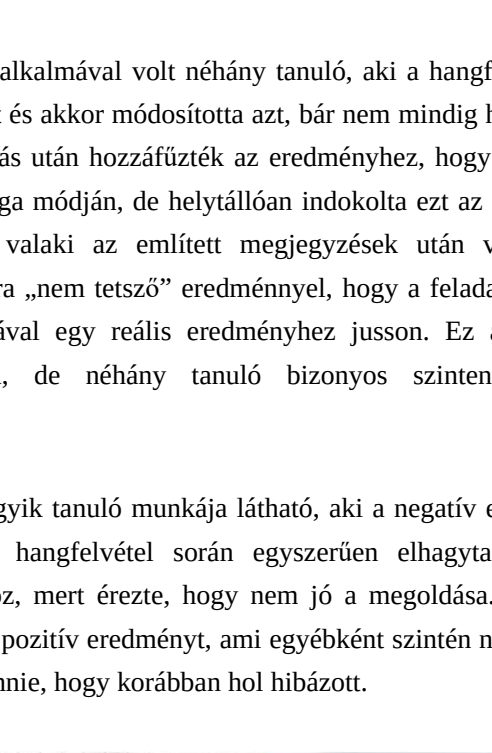
Ebben az osztályban az volt a jellemző, hogy legalább az osztály fele olyan hangfelvételt készített, amelynek alapján részletesebb magyarázatot kaptam a megoldásaikról, mint azt az írásbeli munka mutatta. A diákok fele többnyire szóról szóra vagy összefoglalva újra felelevenítette a feladat szövegét a hangfelvétel során. Ez lehetőséget nyújthatott számukra a feladat újbóli értelmezésére, illetve, ha valaki összefoglalta a szöveget, az a megértés bizonyos szintjét tükrözte.

Több olyan megfogalmazás visszaköszönt, amire igyekeztem hangsúlyt fektetni az órákon. Érezhető volt, hogy törekedtek a szakmai nyelv használatára, ám sokszor ingatagok voltak és kevertek bizonyos egyformának tűnő elnevezéseket, esetleg saját, hasonló szóösszetételeket alkottak. Gyakran előfordult olyan is, hogy a tanuló „megbeszélt magával” valamit, vagy éppen közvetlenül hozzám intézett mondatot, amikor úgy érezte, hogy egy kicsit belebonyolódott a mondanivalójába. Például: „*Na szóval ugye érti?*”

Ez a fajta szóbeli megnyilvánulás hasonlít a feleléshez, de itt nincs lehetősége a diáknak arra, hogy a számonkérés alatt választ kapjon az esetleges kérdésére. A tanárnak sincs lehetősége közvetlenül visszakérdeznie, esetleg segítő kérdést feltennie. A tapasztalatok alapján érezhető volt, hogy a tanulók nincsenek hozzászokva ahhoz, hogy összefüggően ki tudják fejezni a gondolataikat, főleg a matematikai szaknyelvvel tarkítva. Egy-egy dolgozat 3-4 feladatból állt, és a tanulók feladatonként kb. 2 perces hangfelvételeket készítettek.

Minden dolgozatírás alkalmával volt néhány tanuló, aki a hangfelvétel közben fedezte fel valamilyen hibáját és akkor módosította azt, bár nem mindig helyesen. Jellemző volt az is, hogy a megoldás után hozzáfűzték az eredményhez, hogy „*De nem biztos, hogy jó.*” és volt, aki a maga módján, de helytállóan indokolta ezt az észrevételét. Történtek olyan esetek, hogy valaki az említett megjegyzések után végzett még el olyan műveleteket a számára „nem tetsző” eredménnyel, hogy a feladat szövegében szereplő számok felhasználásával egy reális eredményhez jusson. Ez azt jelenti, hogy nem feltétlenül tudatosan, de néhány tanuló bizonyos szinten vizsgálta a kapott eredményeket.

Az alábbi ábrán az egyik tanuló munkája látható, aki a negatív eredményt nem tartotta elfogadhatónak, s a hangfelvétel során egyszerűen elhagyta az előjelet. Később visszatért a feladathoz, mert érezte, hogy nem jó a megoldása. Egy újabb műveletet elvégezve kapott egy pozitív eredményt, ami egyébként szintén nem a helyes megoldás. Nem sikerült észrevennie, hogy korábban hol hibázott.


2)
T0 = 144000 (Ft)
p = 1,2 ⊖ (%)
n = 5 (év)
Tn = ?
Tn = T0 · (1 − p/100)^n
T5 = 144 000 · (1 − 1,2/100)^5
T5 = 144000 · (1 − 0,012)^5
T5 = 144000 · (−0,988)^5
T5 = 144000 · −0,9414
T5 ≈ −135564,9
T5 = 144000 − 135564,9
Tehát 2009-ben a család 8435,1 −Ft ot költött benzinre.
Egy család megfigyelte, hogy az elmúlt időszakban átlagosan minden évben 1,2-szer annyit költött benzinre, mint az előző évben. Eszerint, ha 2014-ben 144000 Ft-ot fizettek benzinért, akkor mennyi pénzt költhetett 2009-ben benzinre a család?
„Úgy gondoltam, hogy mivel csökkent, ezért mínusz, de szerintem nem lett jó.”
„A család 2009-ben 135564,9 Ft-ot költött benzinre.”
Visszatért ide a 3. feladat után.
„Dehát mondom az biztos nem jó, úgyhogy azért írtam át.”

1.ábra. Az eredmény befolyásolása a tanuló részéről

Ezen kívül szeretnék kiemelni még egy esetet. Meglepetés és örömteli élmény volt az első „hangosdolgozat” javításánál azt hallanom, amikor az iskolában a felszólítások alkalmával is csak keveset szóló és közepesen teljesítő tanuló mennyire összefüggően, értelmesen, összeszedetten és lendületesen mondta el a megoldásainak a magyarázatát. Úgy tűnik, számára ez jó lehetőség volt a kibontakozásra.

Mit adott/adhatott a hangfelvétel tanulói szempontból?

Általánosnak mondható az a tapasztalat, hogy a tanulók többsége ritkán tekint vissza az általa megoldott feladatra, nem marad kapcsolatban a szöveggel, nem ellenőrzi az eredményeket, nem értelmezi azokat. A hangfelvételek során azonban a diákoknak újra foglalkozniuk kellett a feladattal. Így tulajdonképpen a hangfelvétel egyfajta visszatekintésként szolgálhatott a tanulók számára. A visszatekintés eredményessége, hatása viszont nyilvánvalóan függ annak minőségétől vagy éppen a tárgyi tudástól is. Hiába érzi vagy veszi észre valaki, hogy valami nem helyes az adott megoldásban, ha utána nem tud vele mit kezdeni.

Ahhoz, hogy a tanuló össze tudja foglalni egy feladat magyarázatát, tudatosítania, értelmeznie kell magában a megoldás lépéseit, ezáltal a rendszerező gondolkodása is fejlődhet. A megoldások részletes magyarázata rákényszerítette őket a szaknyelv használatára, így a kifejezőképességüket fejlesztette.

Nagyon sokan összefoglalták, hogy mi volt adott, és mit kért a feladat. Ehhez mindenképpen értelmezni kell a szöveget (újra), tömörebb reprezentációt kell készíteni, és így több lehetőség nyílik arra, hogy valaki ezáltal felfedezze az esetleges hibát a munkájában, vagy olyan összefüggéseket vegyen észre a szövegből, amire korábban nem figyelt fel. Szintén pozitív következménye lehet a diákokra nézve a hangfelvétel készítésének, ha már a gyakorlásnál tudatosabban fognak hozzá egy feladathoz, gondolva arra, hogy hogyan magyaráznák azt el. Mindezek arra is nevelhetik a tanulókat, hogy a későbbiekben is visszatekintsenek egy általuk megoldott feladatra.

A rendelkezésre álló időkeretet a diákoknak kellett beosztani az írásbeli rész, a hangfelvétel és a Google Tanterembe való feltöltés elkészítésére. Az idő megfelelő kihasználása szintén szervezést igényel a diákok részéről.

Úgy gondolom, hogy a NAT által felsorolt hét kulcskompetenciából az első négyet mindenképpen igénybe vehette, fejleszthette a dolgozat hangfelvétellel történő kiegészítése.

1. A tanulás kompetenciái

2. A kommunikációs kompetenciák (anyanyelvi és idegen nyelvi)

3. A digitális kompetenciák

4. A matematikai, gondolkodási kompetenciák

Tanulói szempontból mindezek az előnyök természetesen akkor mutatkoznak meg leginkább, ha a tanulók is komolyan veszik a feladatukat és a tanulást.

Mit adott/adhatott a hangfelvétel tanári szempontból?

Az írásbeli rész szóbeli megnyilvánulással történő kiegészítése, alátámasztása részletesebb hibaelemzésre ad lehetőséget. Könnyebben ki lehet deríteni, hogy már a szöveg értelmezésénél volt-e gond, vagy akár egy nem megfelelő összefüggés felírásának mi lehetett az oka. A szaknyelv használatának megfigyelése pedig egyértelműen reflektorfénybe kerülhet. Nagyon érdekes és tanulságos volt számomra részletesebb bepillantást nyerni abba, hogy a tanulók az általuk nem valószerűnek tartott eredményt hogyan, milyen elgondolásból, milyen műveletekkel befolyásolják úgy, hogy végül egy reális eredményt kapjanak megoldásként.

Bár az ilyen formában történő számonkérés javítása több időt vesz igénybe, de mindenkinek hallhattam a hosszabb, rövidebb magyarázatát a témakör egyes feladatai kapcsán, és néhány tanulót új oldaláról is megismerhettem. A hangfelvétel során megosztott gondolatok nem feltétlenül fedik le a diák összes gondolatát a feladattal kapcsolatban, és nem biztos, hogy mindenki önállóan dolgozott. Itt sem lehet elkerülni a csalást, viszont arra kényszerülnek a tanulók, hogy legalább néhány perc erejéig beszéljenek a feladatról, gondolják azt át. Így mindenképpen részletesebb képet kaphat a tanár a diákok aktuális fejlettségi szintjéről. Úgy gondolom, hogy a korábbiakban felsorolt szempontok mindegyike növelheti a tanítás hatásfokát.

Kiss Márton PhD hallgató

matematika-fizika szakos középiskolai tanár

A szerkesztő megjegyzése. Az online felsőoktatás kihívásairól, a számonkérés különböző lehetőségeiről szól e számunk két további cikke is, egyikük a BME, másikuk a Debreceni Egyetem oktatóinak tapasztalatait foglalja össze.

matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Kónya Eszter 2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Az online számonkérés oktatói tapasztalatairól

Ahogy minden felsőoktatási intézményben, a Debreceni Egyetem Matematikai Intézetében is komoly kihívást jelentett az elmúlt két félévben a távolléti oktatásra történő átállás. Túl a második online vizsgaidőszakon, az új félév első tanszéki megbeszélésén megosztottuk egymással a felgyülemlett tapasztalatokat, pozitív és negatív érzéseinket.

A tanszék oktatómunkája két kategóriába sorolható. Matematika, matematika tanár szakos hallgatóknak geometriai és szakmódszertani tárgyakat oktatunk, jellemzően kis létszámú (10-20 fős) csoportokban. A TTK-n tanuló villamosmérnök, biomérnök, vegyész, fizikus, biológus hallgatóknak általános matematikai kurzusokat tartunk, amelyeknél az előadások nagy létszámúak (100-200 fő), a szemináriumok pedig 20-30 fősek. A digitális számonkérés megtervezésénél és lebonyolításánál természetesen lényeges szempont a hallgatói létszám. Más módszerek vehetők igénybe a kisebb és mások a népesebb csoportok esetén.

A szorgalmi időszakban, ahogy korábban, most is igyekeztünk hallgatóinkat a rendszeres tanulásra biztatni. Ennek alapvetően három formája jelent meg. Voltak, akik minden óra elején rövid, 3-5 kérdésből álló teszttel mérték fel az előző héten elsajátított ismereteket, s a megszerzett pontszám általában valamilyen mértékben hozzájárult a félévi érdemjegy kialakításához. Voltak, akik heti rendszerességgel gyakorló tesztfeladatokat tűztek ki. Itt a hallgatók szorgalmára bíztuk, hogy a Moodle felületen készített teszteket használják-e a felkészüléshez. Azt tapasztaltuk, hogy többen éltek a lehetőséggel, annak ellenére, hogy az elért eredményt direkt módon nem vettük figyelembe az érdemjegy kialakításánál. A hallgatói visszajelzések ezzel a formával kapcsolatban is pozitívak voltak, többször lefuttatták a kérdéssorokat. Oktatói szempontból az volt hasznos, hogy rögtön látszott, hogy ki és milyen eredménnyel foglalkozott a tananyaggal. A harmadik típusba az alkalomszerűen beadandó házi feladatok tartoztak. Ezeket esszékérdés formájában tűztük ki, a hallgatók pedig vagy begépelték a megoldásokat, vagy képfájlként feltöltötték papíron végzett számításaikat. Tekintettel arra, hogy a megoldások sok matematikai kifejezést, sőt geometriáról lévén szó, rajzot is tartalmaztak, a papíron végzett munka feltöltése volt a népszerűbb.

Megemlítendő mindhárom esetben az oktatói munkamennyiség növekedése, hiszen a feleletválasztós teszteknél a kérdések összeállítása, míg az esszé jellegű kérdéseknél a beküldött megoldások javítása tartott sok ideig. Utóbbi esetben ráadásul a feltöltött fájlok képminőségével is adódtak problémák.

A gyakorlati jegyek, aláírások megszerzéséhez a jelenléti oktatásban hagyományosan zárthelyi dolgozatokat íratunk. A távoktatásban ezeket a számonkéréseket jellemzően olyan típusú online tesztekkel igyekeztünk megoldani, amelyeket a hallgató csak egyszer tud kitölteni. Ennél a formánál az alapvető problémát annak biztosítása jelentette, hogy a hallgató munkája saját, önálló tudását tükrözze. Az előbbiekhez hasonlóan itt is a feleletválasztós és esszékérdéseket tartalmazó teszteket, vagy ezek kombinált változatait használtuk. A nagy létszámú csoportoknál inkább az automatikusan javítható teszteket, míg a kislétszámú csoportoknál az esszékérdéseket részesítettük előnyben. Az önálló munkát egyrészt a teszthez rendelt időkorlát szűkítésével, másrészt tesztírás közben a kamera bekapcsolásával próbáltuk elérni. (A szigorú időkorlát negatívuma, hogy vannak hallgatók, akik a kapkodás miatt alulteljesítenek.) A feladatok véletlenszerű kiosztását és egy adott kategóriában legalább 4-5 feladat véletlenszerű keverését alkalmazva gyakorlatilag minden hallgatónak egyedi feladatsort tudtunk adni. Előfordult további szigorírtásként az is, hogy nem engedélyeztük a hallgatónak, hogy a kitöltés során egy korábbi feladatra visszalépjen. Úgy véljük, hogy ezzel csökkent annak a lehetősége, hogy a képernyőképet mással megosztva külső segítséget vehessen igénybe, hiszen nem érdemes a külső megoldásra várnia sem az időkorlát, sem pedig amiatt, hogy előre nem tudja, milyenek a hátralévő feladatok. Ilyenkor viszont az oktatónak oda kell figyelnie a kitűzött feladatok sorrendjére, elől az egyszerűbb, rövidebb feladatoknak, a végén pedig a hosszabb, több számolást igénylő esszékérdéseknek kell szerepelni. Szintén az összedolgozás megakadályozására született az az esszékérdéseknél alkalmazott módszer, hogy a nyilvánvalóan hasonló megoldást feltöltő hallgatókat szóban is megkérdeztük arról, hogyan gondolkodtak.

Az oktatói tapasztalatok vegyesek, de alapvetően pozitívak voltak. Többen megjegyeztük, hogy korreláltak a jelenléti és a távolléti oktatás időszakában született érdemjegyek. Egybehangzó véleményként ugyanakkor az is megfogalmazódott, hogy szükség van a feladatbank folyamatos bővítésére, mert egy idő után a hallgatók megismerik a kérdéseket, elkészítik a saját feladatbankjukat a helyes megoldásokkal együtt, ami sajnos sokszor azzal jár, hogy anélkül adnak jó válaszokat, hogy a feltett kérdések tartalmával tisztában lennének.

A vizsgáztatás formái: Az online szóbeli vizsgákra tételsort adtunk ki és egy véletlenszerűen kiválasztott tételből felelt a hallgató, bekapcsolt kamerával. A kidolgozásra nem kapott időt, hanem jellemzően egyszerűbb kérdéssel, felvezető beszélgetéssel kezdtük a vizsgáztatást. Ebben a formában a hangsúly az adott téma összefüggéseinek meglátására, átfogó ismeretére helyeződött, s kevésbé a konkrét, precíz definíciók, bizonyítások bemutatására. Mindannyian úgy éreztük, hogy a szóbeli online vizsgára adott érdemjegy megnyugtatóan tükrözte a hallgató tudását, hiszen az oktatói kérdésekre adott azonnali válaszok megmutatták, hogy a hallgató mennyire felkészült, mennyire érti az adott tananyagot. Néhányszor érzékelhető volt, hogy a hallgató a saját monitorján olvas felelet közben, ám az oktató mindig tud úgy kérdezni, hogy minden tételhez kapcsolódóan egyedi példát, alkalmazást kérjen, így a hallgató kénytelen a saját tudására hagyatkozni. Ily módon hamar kiderül, ha nem érti az anyagot. A hagyományos, felkészülési idő mellett zajló szóbeli vizsgákon sokszor előfordul, hogy a hallgató képes ugyan visszaadni a kért tételt, definíciót, akkor is, ha az összefüggéseket, a bizonyítások egyes lépései közötti kapcsolatokat már nem látja át. A fenti tapasztalatot erősítette meg néhány jobb képességű hallgatónk is, akik szívesebben vizsgáztak az online, beszélgetős formában, mert így a tananyagot érintő átfogó tudásukról adhattak inkább számot. Fontos pozitív vizsgatapasztalatunk volt az is, hogy kevésbé fordult elő, hogy egy-egy felelet elhúzódott volna, mivel az időt a képernyőn folyamatosan figyelhettük. Ráadásul az előzetes időbeosztáshoz is szigorúan tartanunk kellett magunkat, hiszen a hallgatók eszerint jelentkeztek be. A szóbeli vizsgák során biztosítottuk, hogy minden feleletet egy további hallgató meghallgasson, de arra is volt példa, hogy az elhangzottakról videófelvételt készítettünk. A szerzett érdemjegyekkel kapcsolatban hallgatói panasz nem érkezett. Technikai nehézség (például gyenge internetkapcsolat) minimális esetben fordult elő.

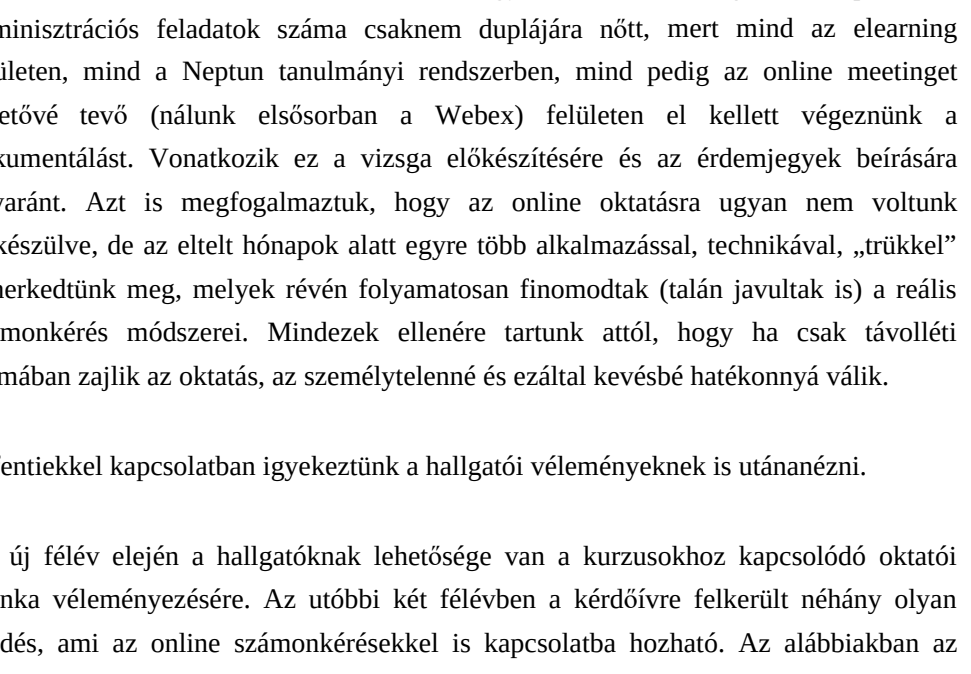
A nagyobb létszámú csoportok vizsgáztatása több terhet és nehezebb feladatot jelentett oktatói oldalról. Az ilyen típusú vizsgák sokszor korábban is írásbeli formában zajlottak, jellemzően esszékérdések megoldásával, amik tételkimondásra, definícióra, rövidebb-hosszabb alkalmazásra vonatkoztak. A vizsga zárthelyi jellege megnyugtatóan biztosította, hogy a hallgató csak a saját tudására támaszkodva vizsgázik. Az online tesztekre történő áttérésnél többen, többféle módszert igyekeztünk alkalmazni. Az egyik az volt, hogy a feleletválasztós kérdések mellett, a dolgozat végén esszékérdés is szerepelt. Ezt úgy fogalmaztuk meg, hogy ne legyen elég csak kimásolni valahonnan a megoldást, hanem szükség legyen az önálló gondolatokra (például fogalmazza meg egy eljárás lépéseit konkrét példán keresztül). Az ilyen kérdések fontosságát a pontozás is tükrözte. Ahogy a gyakorlati számonkérésnél, úgy itt is előfordult, hogy egy idő után a hallgatók megismerték a feladatbankot és felkészültek ezekre a kérdésekre (például az első vizsgán elégtelent szerzők a második vizsgán már kimondottan jól teljesítettek). A másik egy kevert forma volt. Néhány beugró tesztkérdéssel először kiszűrtük a teljesen felkészületlen hallgatókat, majd a többieket a fentebb leírt módon szóban vizsgáztattuk.

Összességében megállapítottuk, hogy a félév során szerzett érdemjegyek közül a gyakorlati jegyek valamivel jobban sikerültek, mint a jelenléti oktatás során, míg a vizsgajegyek hasonló eredményességet mutattak. Több kolléga megjegyezte azonban, hogy érzése szerint a jegyek nem teljesen tükrözik a hallgatók tudását, valamivel jobbak lettek annál. Említést érdemel az is, hogy az online vizsgákkal kapcsolatos adminisztrációs feladatok száma csaknem duplájára nőtt, mert mind az elearning felületen, mind a Neptun tanulmányi rendszerben, mind pedig az online meetinget lehetővé tevő (nálunk elsősorban a Webex) felületen el kellett végeznünk a dokumentálást. Vonatkozik ez a vizsga előkészítésére és az érdemjegyek beírására egyaránt. Azt is megfogalmaztuk, hogy az online oktatásra ugyan nem voltunk felkészülve, de az eltelt hónapok alatt egyre több alkalmazással, technikával, „trükkel" ismerkedtünk meg, melyek révén folyamatosan finomodtak (talán javultak is) a reális számonkérés módszerei. Mindezek ellenére tartunk attól, hogy ha csak távolléti formában zajlik az oktatás, az személytelenné és ezáltal kevésbé hatékonnyá válik.

A fentiekkel kapcsolatban igyekeztünk a hallgatói véleményeknek is utánanézni.

Az új félév elején a hallgatóknak lehetősége van a kurzusokhoz kapcsolódó oktatói munka véleményezésére. Az utóbbi két félévben a kérdőívre felkerült néhány olyan kérdés, ami az online számonkérésekkel is kapcsolatba hozható. Az alábbiakban az ezekre adott válaszokat összegezzük. A kérdésekre a Matematikai Intézetből 2020 tavaszáról 658, 2020 őszéről 954 válasz érkezett (egy hallgató több kurzusról is leírhatta a véleményét, ugyanakkor nem válaszolt minden hallgató):

1. A távolléti oktatás során a kurzus követelményeinek teljesítéséhez szükséges idő hogyan viszonyult a tantermi oktatáshoz képest?

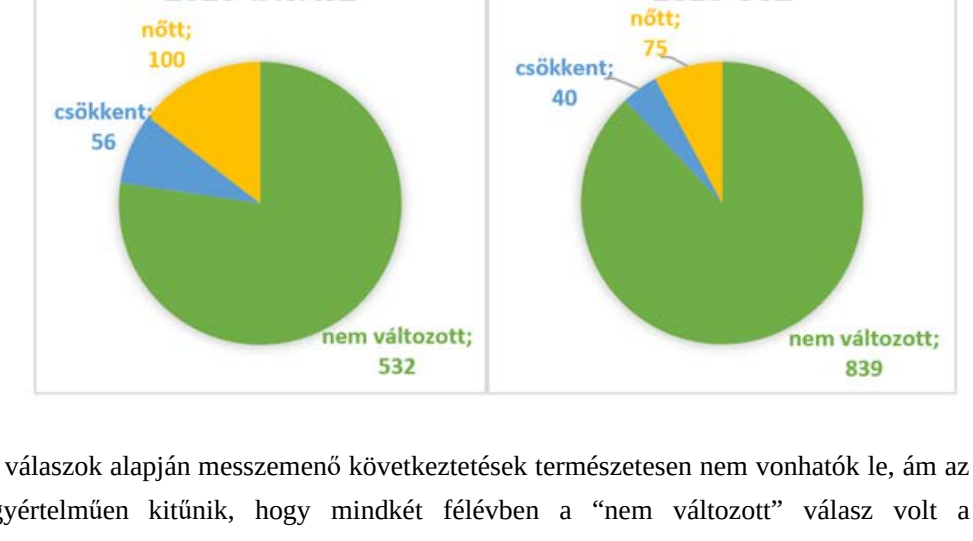


A válaszok alapján messzemenő következtetések természetesen nem vonhatók le, ám az egyértelműen kitűnik, hogy mindkét félévben a "nem változott" válasz volt a meghatározó, vagyis a hallgatók számára alapvetően nem igényelt több időt a távolléti kurzusok követelményeinek teljesítése.

A következő két kérdés párhuzamba állítható. Mindkettő a hallgató tudásának alapos, reális felmérésére vonatkozik. A 2. kérdés arra, hogy az oktató törekedett-e erre, míg a 3. kérdés arra, hogy a szerzett érdemjegy tükrözi-e a teljesítményt. (A skálán az 5 jelentése: "tökéletesen megfelelő".)

2. Mennyire törekedett az oktató az Ön tudásának alapos felmérésére?

3. A teljesítményéhez mérten reálisnak, igazságosnak érzi a kapott eredményt?



A hallgatói válaszok megnyugtatóak abból a szempontból, hogy legtöbbjük egyrészt elismerte és megfelelőnek tartotta az oktató erőfeszítéseit a tudás alapos felmérésére, másrészt a kapott érdemjegyet is igazságosnak érezte.

A hallgatói véleményezésben volt további két olyan kérdés is, amelyben a hallgatók kifejthették, hogy mi tetszett, illetve mi nem tetszett az adott kurzussal kapcsolatban. Igaz, hogy ezekre a kérdésekre a legtöbben nem adtak érdemi választ, vagy válaszaik a kurzus egészére, az oktató stílusára, tanítási módjára vonatkoztak, de akadt néhány, a számonkérésre utaló megjegyzés.

Az alábbiakban ezekből idézünk néhány pozitívat és negatívat:

> \+ *Nagyon hasznosnak véltem, hogy minden óra elején egy rövid teszttel indítottunk. Ez késztetett a folyamatos készülésre, de a végén csak profitáltam belőle.*
>
> \+ *… hogy hétről-hétre készülni kellett, sok kis házi feladat volt.*
>
> \+ *… kifejezetten tetszett, hogy több számonkérés volt 1 vagy 2 nagyobb helyett, így könnyebb volt a felkészülés a dolgozatokra, hiszen több téma egyszerre tanulása helyett külön-külön témakörönként lehetett felkészülni, így alaposabban, részletesebben sajátíthattuk el a tudást. Külön pozitív, hogy a felkészüléshez az oktató minta teszteket biztosított, így lemérve tét nélkül a tudásunkat.*
>
> \- *Míg rendes vizsgán lett volna 1 óra 50 percünk kevesebb kérdésre, itt volt 40 percünk több kérdésre. Mindez a csalás, a puskázás ellen lett kitalálva, viszont inkább a vizsgát jóval nehezebbé és igazságtalanabbá tette.*
>
> \- *Az elméleti vizsgán kicsit kevésnek bizonyult az idő, mivel utólagos ellenőrzésre nem volt lehetőség, így 5-10 perc plusz idő hasznos lett volna (de így sem volt teljesíthetetlen).*

Végezetül néhány szót a jövőről. A megbeszélésen kiderült, hogy mindannyian nagyon várjuk a visszatérést a jelenléti oktatáshoz, mert úgy érezzük, hogy az oktatómunka eredményességéhez feltétlenül hozzátartozik a hallgatókkal való személyes kapcsolattartás, és így a számonkérés is reálisabb eredményt hoz. Mindazonáltal többeknek megegyezett a véleménye abban, hogy a digitális oktatás némely elemét a jövőben is érdemes lesz megtartani. Ilyen például a hallgatók által is pozitívan fogadott, heti rendszerességű, pár kérdésből álló online teszt, vagy az önellenőrzést lehetővé tevő gyakorlótesztek alkalmazása. Szintén hasznosnak bizonyult az előadáskövető jegyzetek és a kidolgozott mintapéldák közzététele, mert hozzájárult ahhoz, hogy az érdeklődő hallgatók már az előadás alatt összefüggéseiben megérthessék a tananyagot, hiszen nem kellett a gyors jegyzetelésre figyelniük. Megfontolandó az is, hogy a levelezőképzés egyes kurzusai a jövőben is online formában valósuljanak meg, ezzel is csökkentve a más városokban élő hallgatók utazással járó elfoglaltságát. Eddigi tapasztalataink egy őszi és egy tavaszi félévre vonatkoznak, így arra még nem volt módunk, hogy az elkészített feladatbankokat újra felhasználjuk. Nyilvánvalónak tűnik azonban, hogy a következő félévekben ezeket újra elő tudjuk majd venni, így munkát már csak az esetleges bővítés, módosítás fog jelenteni, vagyis a befektetett idő nem vész kárba.

Kónya Eszter, egyetemi oktató

Debreceni Egyetem Matematikai Intézete

A szerkesztő megjegyzése. Kónya Eszter PhD hallgatója, Kiss Márton középiskolai tanár írása további ötletet adhat az online számonkérés hatékonyabbá tételéhez. Ebben a számunkban a BME oktatóinak tapasztalatait is olvashatják két félév online oktatásáról.

matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Ambrus Gabriella, Fried Katalin 2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

A problémamegoldó gondolkodás fejlesztése egy feladat példáján

1. Bevezetés

A 2020 júniusi Érintőben megjelent „Hány bőrt lehet lehúzni egy feladatról? – avagy nincs új a Nap alatt?” című cikkben szóba került egy feladat, amely az ELTE TTK matematika tanár szakosok tananyagában is szerepel ([Fried, K. (2020).]).

A tananyag folyamatos frissen tartása érdekében az oktatók rendszeresen tanulmányozzák a diákok nehézségeit, feladatokhoz való hozzáállását és a megoldásaikat. Ebben a tanulmányban az ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ két oktatója mutat be egy válogatást az említett feladathoz készíthető megoldásokból, hallgatói munkákat is felhasználva. Bár olykor csak az ötletig jutottak el a hallgatók, a teljes megoldást nem sikerül megtalálniuk, de ez semmit sem rontott az ötlet felhasználhatóságán.

Érdekes a gyakorlatokon megfigyelni, hogy miként változnak az egyetemi diákok feladatokra adott megoldásai attól függően, hogy milyen előtanulmányokat folytattak, hogyan állnak a geometriához, illetve hogy a kiadott feladatsor feladatait milyen sorrendben dolgozzák fel. Fontos tapasztalat az is, hogy a hallgatót jól be lehet vonni a munkába, ha a saját gondolataira építhet, ezeket kiegészítheti, viszont ha ettől eltérő, „idegen” ötletet kap, előfordul, hogy azt a megközelítést elutasítóan fogadja.

A most következő íráshoz tehát hallgatói munkákból, megoldásokból, ötletekből szemezgettek a szerzők, és az egyes megoldásokhoz megjegyzéseket fűztek, illetve rendezték, helyenként ki is egészítették ezeket.

2. Miért is foglalkozunk ezzel a témával?

Egy geometriai problémához készült megoldások vizsgálata számos lehetőséget rejt magában. A megoldások átgondolása és rendezése például újabb megoldási ötletekhez vezethet. De a különböző megoldások jellege, mennyisége a megoldó geometriai gondolkodásáról is szolgálhat többféle, esetleg mérhető felvilágosítással [Levav, A. & Leikin, R. (2010).]. Meggondolható az a lehetőség is, hogy figyelembe véve az egyes megoldások ismereti-gondolkodásbeli szintjét, különböző évfolyamokon is elővehető ugyanaz a feladat, és akár több éven át is gyűjthetők hozzá megoldások, ami segíthet egyben az oktatásban sajnos eléggé uralkodó „egy feladat-egy megoldás” hozzáállás ellen is hatni. Ha egy problémához több megoldás áll a tanár rendelkezésére, akkor válogathat is belőlük olyanokat, amelyekhez ötletadó segítséget adva, a matematikában kevésbé teljesítőképes tanuló is megoldást tud készíteni. Itt természetesen arra törekedve, hogy a segítő ötlethez (például ábrához) több lehetséges megoldás is készíthető legyen [Ambrus, G. & Rott, B. (2017).].

Egy problémákhoz készült/gyűjtött megoldások rendezhetők például aszerint, hogy a problémamegoldó milyen matematikai eszközöket használt a megoldásokhoz és azok hogyan függnek össze ([Levav, A. & Leikin, R. (2010).], Fig2.]). Egy ilyen jellegű rendezést szeretnénk végül bemutatni a feladatunk megoldásai esetében, jelölve benne, hogy egy általunk megfigyelt hallgató megoldásai melyik megoldással egyeznek meg lényegileg. A megoldások első rendezésének alapja lehetne egy hallgató ötleteinek követése is, és megpróbálhatnánk ebbe beilleszteni a további megoldásokat. A következőkben ettől eltérő utat választottunk. A megoldások rendezése valójában egy láncolat alapján történik, amelyhez a főbb láncszemeket mi határoztuk meg a gyűjtött megoldásaink ismeretében; a láncszemekhez tartozó főbb (ötletek) gondolatok:

– felmérjük egy szakaszra két szakasz összegét

– geometriai transzformációk használata

– trigonometriai számítás, tételek

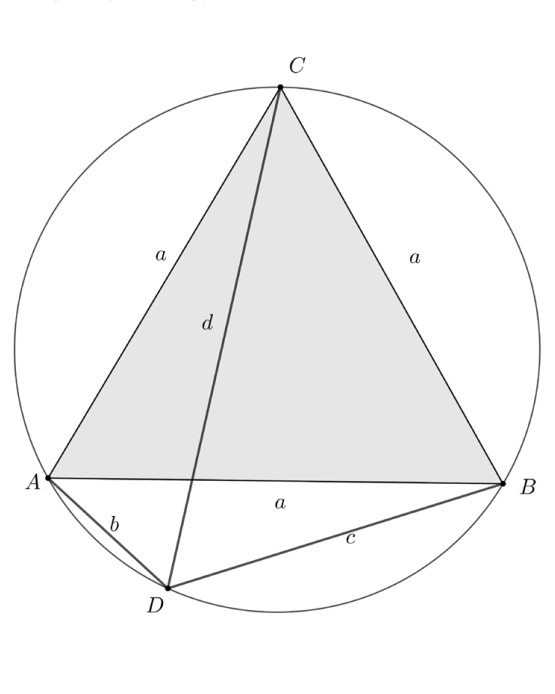
– algebraizálás (koordinátageometriai eszközök igénybevétele)

A továbbiakban először bemutatjuk a – most már sokat emlegetett – feladatot, majd következnek a megoldások (az említett lánc szerint rendezve). Mindegyik megoldás bemutatása előtt megemlítjük a felhasznált főbb ismereteket, matematikai eszközöket és azt a szemléleti kérdést, hogy a megoldáshoz a feladat ábráján belül elég volt-e dolgozni, vagy ki kellett-e lépni belőle, vagyis az esetleges belső ábra kiegészítésein kívül szükség volt-e az ábrához külső kiegészítésre. (Ez utóbbinak az elemzése is érdekes kérdés lenne, de ezzel most nem foglalkozunk.) A megoldások mellett helyenként egy kék szám található, ez azt jelzi, hogy egy, az általunk figyelt hallgatónál ([Tóth E. (2009).]) ez a megoldás (lényegileg így) hányadikként jelent meg.

Ezután kerül sor a megoldások végső áttekintő rendezésére egy ábra segítségével, a felhasznált matematikai eszközök alapján a már korábban elmondottak szerint.

Annak érdekében, hogy a megoldások között fennálló kapcsolatot jobban lássuk, több megoldáshoz is lényegében ugyanazt az ábrát illesztettük be a most következő megoldásoknál.

A feladat. Az ABC szabályos háromszög körülírt körén, a rövidebbik AB íven felvesszük a D pontot. Igazoljuk, hogy $AD+DB=CD$!



A feladathoz tartozó megoldásláncunk:

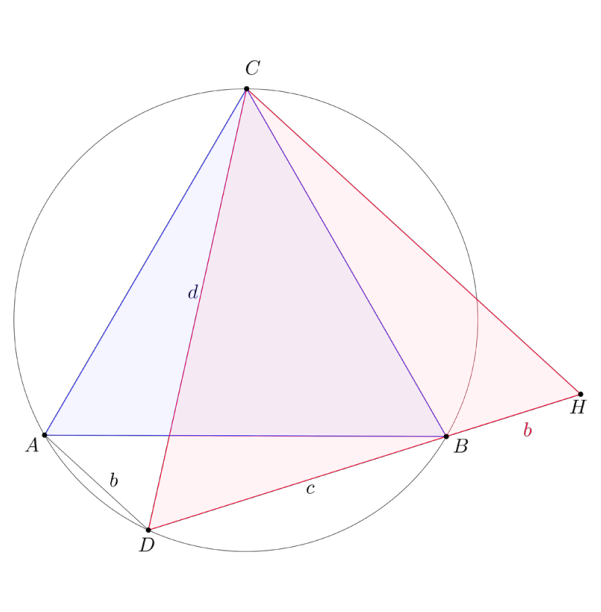
1. megoldás (1. megoldás (a) variáció) – szakaszok összege egy szakaszon (5)

– alapötlet: szakaszok összege egy szakaszon, szakasz meghosszabbításán

– bizonyítás alapja: egybevágóság (transzformáció), kerületi szögek

– szemlélet: „kifelé” dolgozunk az eredetileg a feladathoz készült ábrából.

Mérjük fel a DB szakaszra B-n túl az AD szakaszt (H).



Az $ADBC$ húrnégyszög, ezért $CBH\sphericalangle = CAD\sphericalangle$ (mindkettő 180°-ra egészíti ki a $CBD\sphericalangle$-et). $CAD\triangle \cong CBH\triangle$, mert két-két oldaluk egyenlő hosszú, és az általuk közbezárt szög ugyanakkora. Ebből következik, hogy a harmadik oldalaik is egyenlők: $CD=CH$, a CDH háromszög egyenlő szárú. Mivel a CB ívhez tartozó $CDB\sphericalangle = 60^\circ$-os, így a CDH háromszög szabályos is. Innen $HC=DC=b+c$.

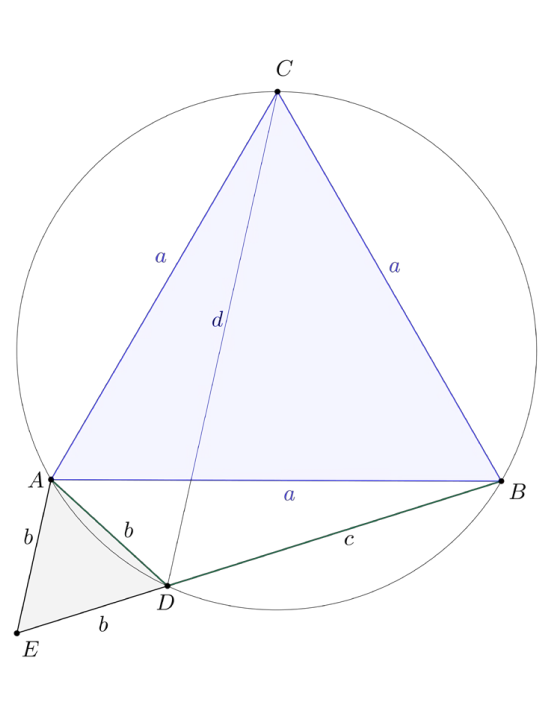
A megoldást megelőző, korábbi feladatmegoldásokból leszűrt ötlet: két szakasz összegét úgy lehet más szakasz hosszával összehasonlítani, ha egy egyenesre (csatlakozva) vesszük fel a két szakaszt. Ez a gondolat kerül alkalmazásra a további három megoldásban is, csak módosított változatban.

2. megoldás (1. megoldás (b) variáció) – szakaszok összege egy szakaszon (4)

– alapötlet: szakaszok összege egy szakaszon, szakasz meghosszabbításán

– bizonyítás alapja: egybevágóság (transzformáció), kerületi szögek

– szemlélet: „kifelé” dolgozunk



Hosszabbítsuk meg DB-t D-n túl, és mérjünk fel rá az AD hosszú szakaszt. Így kapjuk az E pontot. Ezt az AD szakasz D körüli 60°-os elforgatásával is megkaphatjuk. Ezek szerint DEA szabályos háromszög (két oldala egyenlő hosszú és 60°-os szöget zár be).

Az ABE és ACD háromszögek szögei páronként egyenlőek: $ACD\sphericalangle = ABD\sphericalangle$ (az AD húrhoz tartozó kerületi szögek), $AEB\sphericalangle = 60^\circ$, mert AED szabályos, továbbá $ADC\sphericalangle = 60^\circ$, mert az AC ívhez tartozó kerületi szög.

ABE és ACD tehát hasonlók, de egybevágók is, mert a 60°-os szögükkel szemközti oldalaik egyaránt a hosszúságúak.

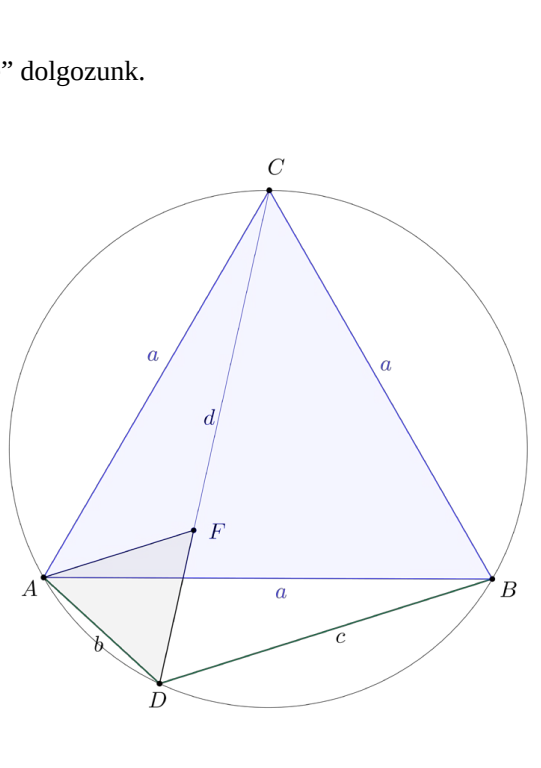
Ebből következik, hogy harmadik oldalaik is egyenlők: $ED+DB=CD$, azaz $AD+DB=CD$.

3. megoldás – szakaszok különbsége

– alapötlet: szakaszok különbsége egy szakaszon, szakasz meghosszabbításán

– bizonyítás alapja: egybevágóság (transzformációval vagy anélkül), kerületi szögek

– szemlélet: „befelé” dolgozunk.



Mérjük fel a CD szakaszra D-ből a b (AD) távolságot. Így kapjuk az ADF egyenlő szárú háromszöget, de mivel a szárszöge, $ADC\sphericalangle$ az AC húrhoz tartozó kerületi szög 60°-os, a háromszög szabályos is.

Belátjuk, hogy $AFC\triangle \cong ADB\triangle$, amiből már következik, hogy $AD+DB=AF+FC=DF+FC=DC$.

A két háromszög hasonló, mert egyenlők a szögei: az $ACD\sphericalangle$ és az $ABD\sphericalangle$ az AD ívhez tartozó kerületi szögek, tehát egyenlők; az $AFC\sphericalangle$ 120°-os, hiszen a 60°-os $AFD\sphericalangle$ kiegészítő szöge, továbbá az $ADB\sphericalangle$ is 120°-os, mert D az AB húr C-t nem tartalmazó ívén helyezkedik el és $ACB\sphericalangle = 60^\circ$.

Mivel a két hasonló háromszögben a legnagyobb oldalaikkal szemközti (leghosszabb) oldalaik egyenlő hosszúak ($AB=AC$), így a két háromszög egybevágó.

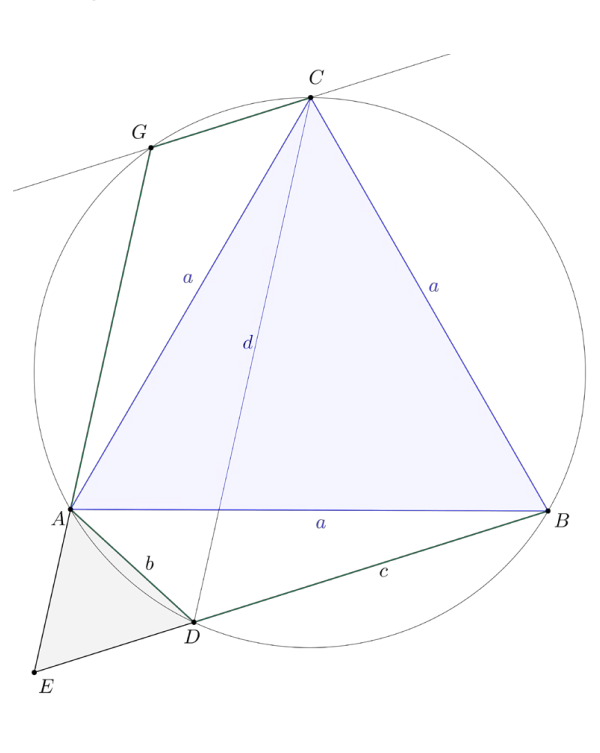
(Valójában azt kaptuk meg eredményül, hogy $CD-AD=DB$.)

4. megoldás – szakaszok összege egy szakaszon

– alapötlet: szakaszok összege egy szakaszon, hozzáírt szabályos háromszög

– bizonyítás alapja: egybevágóság (transzformáció), kerületi szög

– szemlélet: „kifelé” dolgozunk



Ha meghosszabbítjuk a BD szakaszt B-n túl, az 60°-os szöget zár be az AD oldallal, mert az $ADB\sphericalangle$ 120°-os, hiszen az D AB húrhoz tartozó C-vel átellenes ívén van. Felmérve b-t a meghosszabbítással kapott félegyenesre D-n túl, az E pontot kapjuk. AZ AED háromszög szabályos, mert $AD=ED=b$, és D-nél 60°-is szöge van. Jelölje az AE egyenes körrel vett metszéspontját G.

Mivel az AC ívhez tartozó $ABC\sphericalangle = 60^\circ$, így $ADC\sphericalangle$ is 60°-os, innen $EDC=120^\circ$. Továbbá $EGC\sphericalangle = AGC\sphericalangle = 120^\circ$, mert G az AC húrhoz tartozó rövidebbik íven van.

$AED\sphericalangle$ 60°-os, így az $ADCG$ négyszögben a negyedik szög, $DCG\sphericalangle = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ - 60^\circ$ is 60°-os. Eszerint $EDCG$ paralelogramma.

Ebből következik, hogy $CD=EA+AG$. Tehát be kell látnunk, hogy $AG=DB$. Az ACG és BAD háromszögek egybevágók, mert $CG=AD$, $AC=BA$ és az $AGC\sphericalangle$ és $ADB\sphericalangle$ szögek is egyenlően, 120°-osak. A legnagyobb szöggel szemközti oldalaik egyenlő hosszúak (a).

(A megoldás több állítása is megmutatható más módon is. Például $CGA\triangle \cong ADB\triangle$ úgy is belátható, hogy a kör középpontja körüli 120°-os forgatás C-t A-ba, A-t B-be és a GE egyenesét olyan, az EB egyenesével megegyező állású egyenesbe viszi, amelynek A pontja a B-be megy, vagyis az EB egyeneséről van szó. Ezért ez a forgatás $CGA\triangle$-et az $ADB\triangle$-be viszi.)

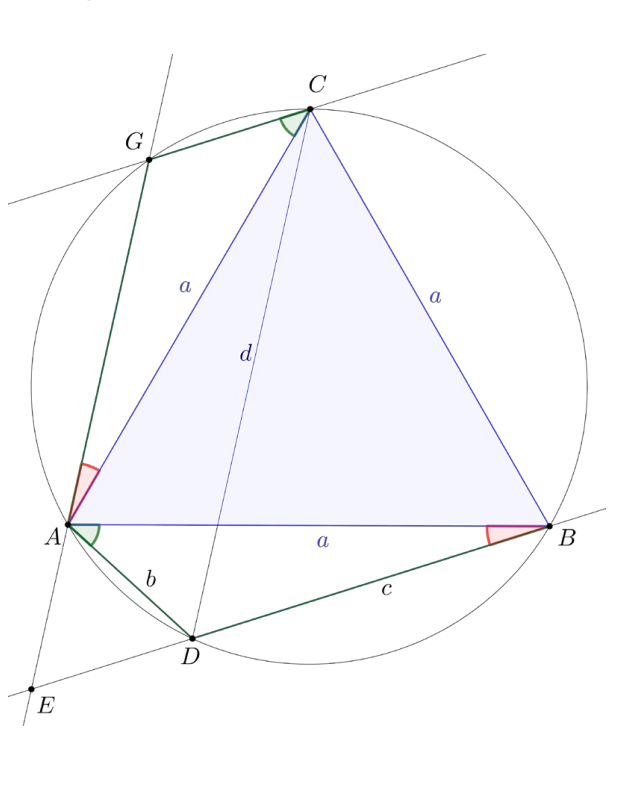
Ezek szerint $CD=EA+AG=AD+DB$.

5. megoldás – forgatással

– alapötlet: szakaszok összege egy szakaszon, forgásszimmetrikus alakzat

– bizonyítás alapja: kerületi szög

– szemlélet: „kifelé” dolgozunk



Forgassuk el a D pontot az ABC köré írt kör középpontja körül -120°-kal, így kapjuk a G pontot.

Az AC húrhoz a hosszabbik íven $ABC\sphericalangle = 60^\circ$-os kerületi szög tartozik, így $ADC\sphericalangle = 60^\circ$.

$AGC\sphericalangle = 120^\circ$ és $AD=GC$ (a forgatás miatt).

A $DAG\sphericalangle$ felírható három szög összegeként: $DAB\sphericalangle$, $BAC\sphericalangle = 60^\circ$ és $CAG\sphericalangle$. A forgatás miatt $CAG\sphericalangle = ABD\sphericalangle$ és az ABD háromszögben $DAB\sphericalangle + DAB\sphericalangle = 60^\circ$, így $DAG\sphericalangle = 120^\circ$.

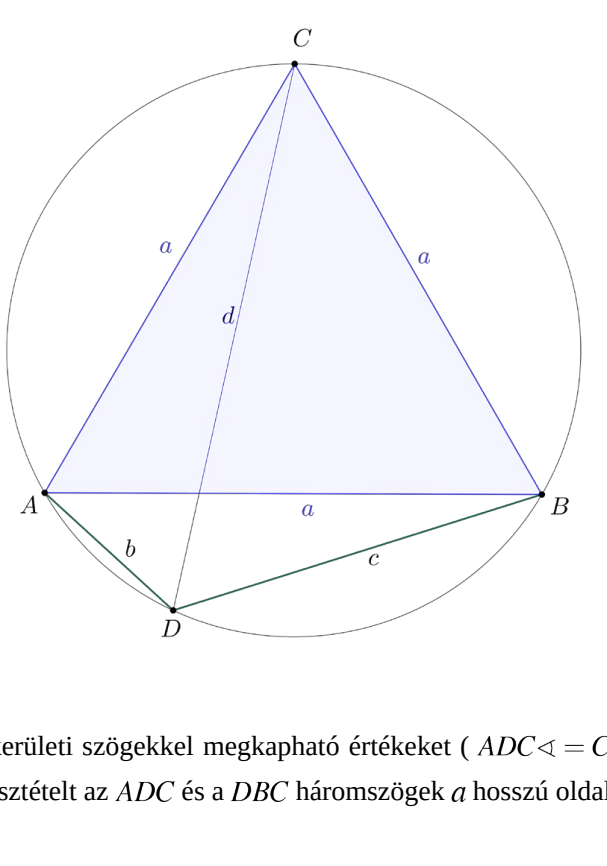
Így az $ADCG$ négyszög húrtrapéz, amelynek az alapokon nyugvó szögei 60, illetve 120 fokosak. Egészítsük ki ezt $EDCG$ paralelogrammává. Ez megtehető úgy, hogy az AD-re kifelé ADE szabályos háromszöget írunk. A paralelogramma két szemközti oldalának hossza egyenlő: $CD=EA+AG=AD+AG$.

6. megoldás – koszinusztétellel (2)

– alapötlet: Koszinusztétel felírása kétszer ugyanarra az oldalra, trigonometriai összefüggések, számítások alkalmazása

– bizonyítás alapja: kerületi szög, koszinusztétel

– szemlélet: „befelé” dolgozunk



Felhasználjuk a kerületi szögekkel megkapható értékeket ($ADC\sphericalangle = CDB\sphericalangle = 60^\circ$), és felírjuk a koszinusztételt az ADC és a DBC háromszögek a hosszú oldalaira.

$$a^2=d^2+b^2-2db\cos 60^\circ = d^2+b^2-db,\quad a^2=d^2+c^2-2dc\cos 60^\circ = d^2+c^2-dc.$$

Ezek alapján $0=c^2-b^2-dc+db=(c-b)(c+b-d)$.

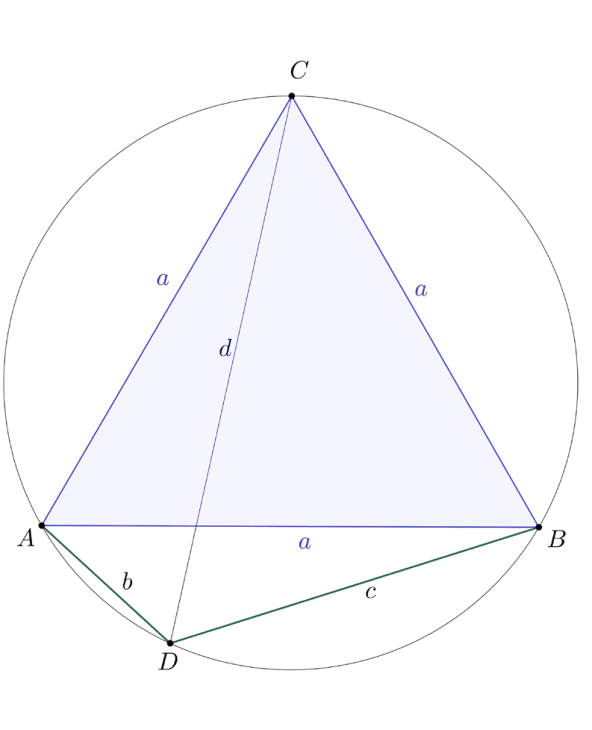
Ha $c\neq b$, akkor $0=c+b-d$, ami éppen a keresett összefüggést jelenti, $c=b$-ből pedig következik, hogy (például) az ACD háromszög egy 30-60 fokos derékszögű háromszög, amelyben $2b=d$, ahonnan $b+c=d$.

7. megoldás – területtel (3)

– alapötlet: terület felírása kétféleképpen, területek összege trigonometriai összefüggésekkel, számítások alkalmazása

– bizonyítás alapja: kerületi szög, szinuszos területképlet, koszinusztétel

– szemlélet: „befelé” dolgozunk



Az $ADBC$ négyszög területét kétféleképpen írjuk fel. (A megoldás során felhasználjuk, hogy a kerületi szögek egyenlősége miatt $ADC\sphericalangle = CDB\sphericalangle = 60^\circ$, illetve hogy $ADB\sphericalangle = 120^\circ$, $ACB\sphericalangle = 60^\circ$.)

$$T_{ADBC}=T_{ADC\triangle}+T_{CDB\triangle}=\frac{b\cdot d\cdot\sin 60^\circ}{2}+\frac{d\cdot c\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{b\cdot d\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}+\frac{d\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2},$$

illetve

$$T_{ADBC}=T_{ABC\triangle}+T_{ADB\triangle}=\frac{b\cdot c\cdot\sin 120^\circ}{2}+\frac{a\cdot a\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{b\cdot c\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}+\frac{a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}.$$

A két kifejezés egyenlő, innen $db+dc=bc+a^2$.

Az a^2-et az ADB háromszögre felírt koszinusztétellel tudjuk másképp kifejezni:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos 120^\circ = b^2+c^2+bc.$$

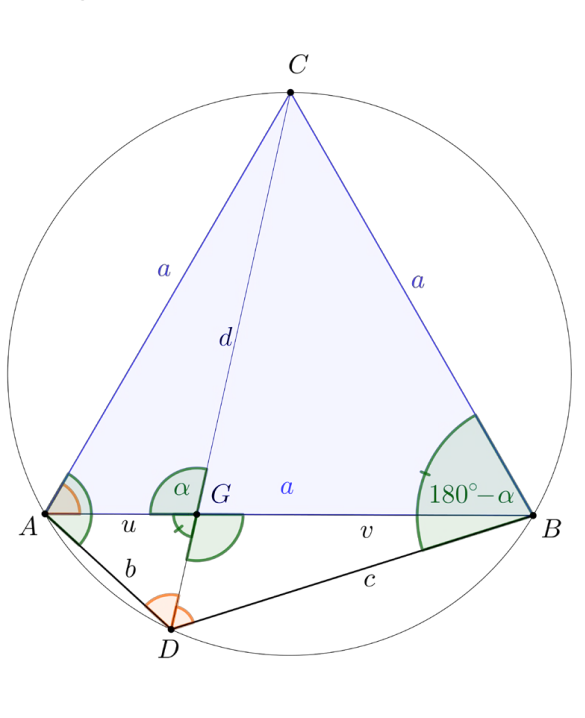
Ezt behelyettesítve a korábbi kifejezésbe: $db+dc=bc+b^2+c^2+bc$, azaz $d(b+c)=(b+c)^2$. Mivel $b+c$ nem nulla, ebből következik, hogy $d=b+c$, és ezt akartuk belátni.

8. megoldás – szinusztétellel

– alapötlet: trigonometria, számítások alkalmazása

– bizonyítás alapja: kerületi szög, szinusztétel

– szemlélet: „befelé” dolgozunk



Felhasználjuk, hogy a CAD és a CGA háromszögek hasonlóak (hiszen a C-nél lévő szögük közös, $CAG=60^\circ$ és a kerületi szögek egyenlősége miatt $CDA\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 60^\circ$). Ebből következik, hogy a harmadik szögük is egyenlő: $AGC\sphericalangle = CAD\sphericalangle$. Mivel a CD húrhoz tartozó különböző köríveken nyugvó pontok az A és a B, így $CAD\sphericalangle + CBD\sphericalangle = 180^\circ$.

Az $ADG\triangle$-ben $u:b=\sin 60^\circ : \sin(180^\circ-\alpha)$, azaz $u=b\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin\alpha}$, illetve a $DBG\triangle$-ben $v:c=\sin 60^\circ : \sin\alpha$, azaz $v=c\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin\alpha}$.

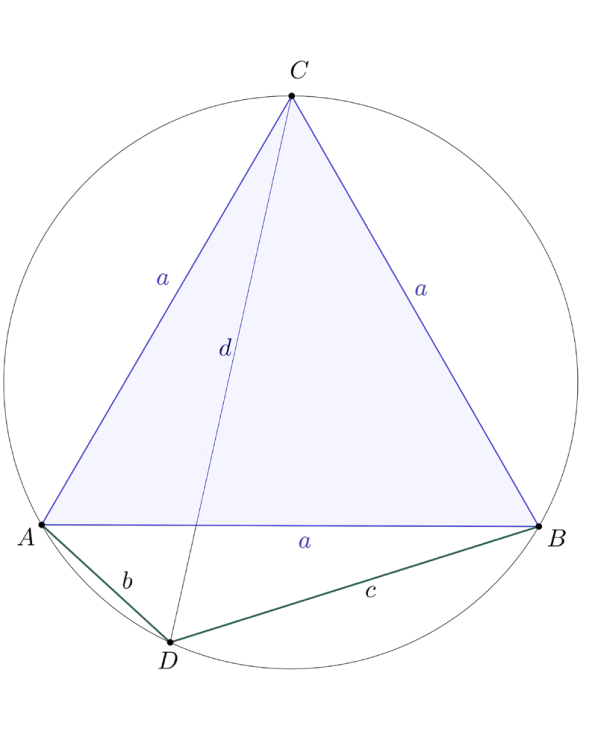
Eszerint $a=u+v=(b+c)\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin\alpha}$, azaz $a:(b+c)=\sin 60^\circ : \sin\alpha$. Másrészt viszont az ADC háromszögben $a:d=\sin 60^\circ : \sin\alpha$, azaz $d=b+c$.

9. megoldás – Ptolemaiosz-tétellel (1)

– alapötlet: Szemléletváltás: Az ábrát a kiegészítéssel mint húrnégyszöget tekintjük, magasabb szintű geometriai alapok

– bizonyítás alapja: levezetés

– szemlélet: nem elemi geometriai megoldás, „befelé” dolgozunk.



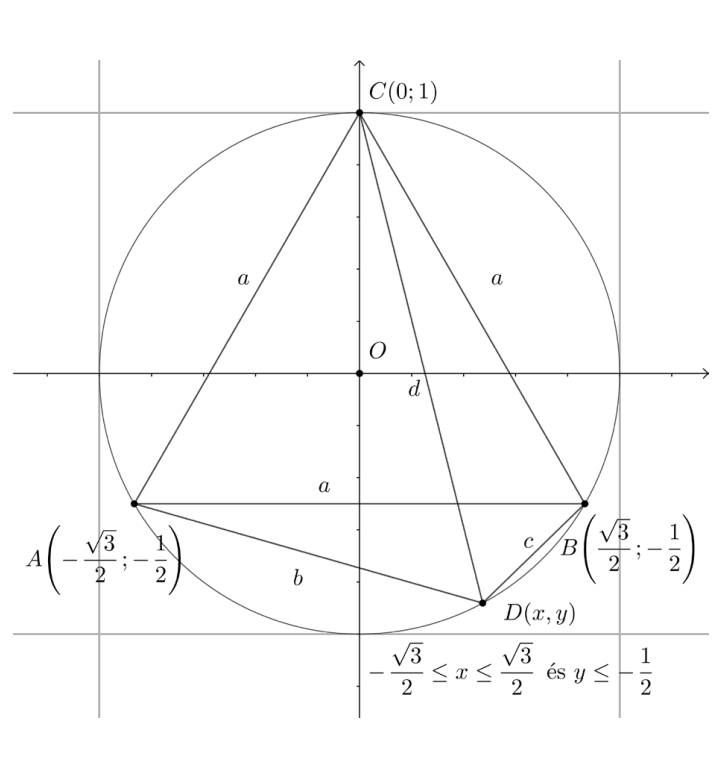
Az $ADBC$ húrnégyszögben $ad=ab+ac$, így $d=a+b$, ami éppen a bizonyítandó összefüggés.

10. megoldás – koordinátageometriával

– alapötlet: Szemléletváltás, az ábrát a koordináta-rendszerbe helyezzük, koordinátageometria

– bizonyítás alapja: koordinátageometriai összefüggések, távolság

– szemlélet: koordinatizálás (algebraizálás), nem elemi geometriai megoldás, „befelé” dolgozunk.


C(0;1)
a
a
O
d
a
c
b
$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$
$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$
D(x, y)
$-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $y\le-\frac{1}{2}$

Legyen a kör az origó középpontú 1 sugarú kör, és legyen a háromszög három csúcsa $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $C(0;1)$. A $D(x,y)$ pont koordinátáira fennáll, hogy $x^2+y^2=1$. A feladat azon feltétele, hogy D az AB-t összekötő rövidebbik íven van azt jelenti, hogy $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le x\le\frac{\sqrt{3}}{2}$ és $y\le-\frac{1}{2}$.

Annak érdekében, hogy elkerüljük a négyzetgyökvonást, a keresett szakaszok hosszának négyzetét számítjuk ki.

$|CD|^2=x^2+(y-1)^2=x^2+y^2-2y+1=2-2y.$

Kiszámítjuk az AD és BD szakaszok hosszának négyzetét:

$|AD|^2=\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+y^2+\sqrt{3}x+y+1=2+y+\sqrt{3}x$, mert $x^2+y^2=1$, illetve

$|BD|^2=\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=x^2+y^2-\sqrt{3}x+y+1=2+y-\sqrt{3}x.$

Azt kellene belátni, hogy $|AD|+|BD|=|CD|$, illetve ehelyett azt, hogy $(|AD|+|BD|)^2=|CD|^2$.

Ehhez szükség lesz a $2|AD||BD|$ szorzatra, ezért kiszámítjuk az $|AD|^2|BD|^2$ szorzatot:

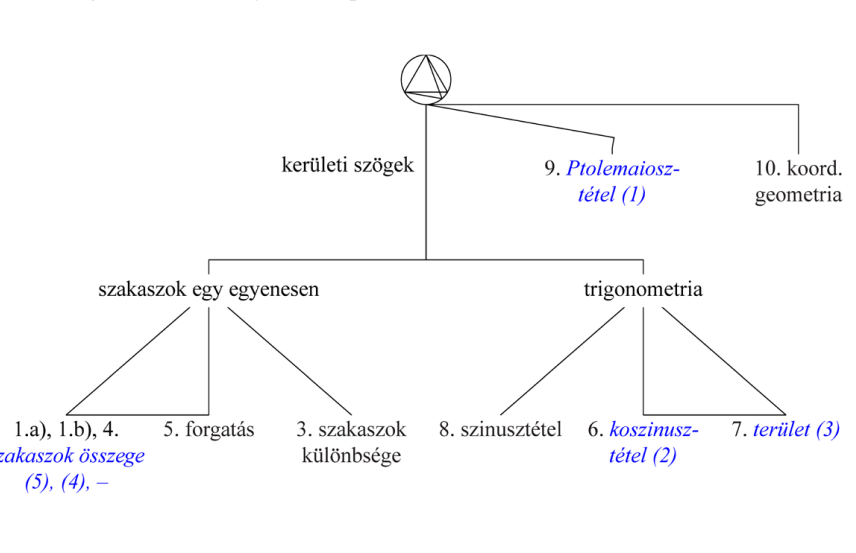
$|AD|^2|BD|^2=\left[(2+y)+\sqrt{3}x\right]\left[(2+y)-\sqrt{3}x\right]=(2+y)^2-3x^2$. Mivel $x^2+y^2=1$, ezt tovább alakítva $1+4y+4y^2=(1+2y)^2$-et kapunk. Itt használjuk fel, hogy $y\le-\frac{1}{2}$, azaz $2y\le-1$, ezért $|AD|\cdot|BD|=-1-2y$, illetve $2|AD|\cdot|BD|=-2-4y$.

Innen $(|AD|+|BD|)^2=|AD|^2+|BD|^2+2|AD|\cdot|BD|=4+2y-2-4y=2-2y$, ami valóban $|CD|^2$.

3. A megoldások összefüggésábrája

A problémamegoldási stratégiák explicit tanítása helyett ezek implicit módon való bemutatása sikeresebbé teszik a stratégiák alkalmazását más problémahelyzetekben is [Rott, B. & Gawlik, T. (2014).]. A stratégiák, illetve a megoldáshoz használt ismeretek összefüggésekben való konkrét tárgyalása belelendítheti a hallgatót további megoldások keresésébe is, és ez segíti egyrészt az aktív részvételt a feladatmegoldásban, másrészt az összefüggésekben való gondolkodást az ötletkeresésnél is. A következő ábra a felhasznált matematikai eszközöket rendezte a megoldásokban történt felhasználásuk alapján.

Összefüggésábra ([Levav, A. & Leikin, R. (2010).] rendezési ötletét használva): Az ábrán feltüntettük az ismertetett megoldásokat a láncban szereplő sorszámukkal, illetve a megfigyelt hallgató (ld. [Tóth E. (2009).]) megoldásait (kékkel, dőlt betűvel), zárójelben megadva a munkájában kapott sorszámát.



Az ábrán elrendezett 10 megoldás közül 5 szerepelt a megfigyelt hallgatónál (dőlttel kiemelve), ezek elhelyezkedése az ábrán azt is mutatja, hogy a hallgató egy-egy matematikai eszközt ötletként főleg önmagában használt, azaz nem gondolta át, hogy esetleg ezzel tovább is léphetne más megoldások készítése felé.

A megfigyelt hallgatói munkában a Ptolemaiosz-tétellel való megoldás volt az első. Ennek egyik oka lehet, hogy más (elemi) ismeretekhez képest ezt „nemrég” tanulta, illetve egy másik talán az, hogy megvolt az eszköztárában egy közvetlenül alkalmazható, megoldásra vezető tétel, és ez mindenképpen előnyt élvezett. Ez utóbbit némileg alátámasztja, hogy reflektálva megoldásaira, a hallgató ezt a megoldást tartotta a legegyszerűbbnek, és mindössze abban látta alkalmazhatóságának problémáját, hogy csak szakkörön fordulhatna elő a középiskolai oktatásban.

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy a legbonyolultabbnak a „számítások” miatt a koszinusztételre épülő megoldást tartotta.

Több hallgatói megoldásban észrevehető volt, hogy a választott megoldáshoz sokszor használtak olyan eszközöket, amelyekkel nemrégiben találkoztak. Magasabb ismeretekre (Ptolemaiosz-tétel, koszinusztétel stb.) történő hivatkozás esetén a felhasznált tételek bizonyításának ismeretét is elvárjuk. Ilyen esetekben kiderülhet, hogy a rövidnek vélt megoldás valójában nagyon is hosszadalmas. Jellemzően szakaszok összegéhez azokat egy szakaszra másolták, ezt sokszor úgy érték el, hogy a két, egymással 60°-os szöget bezáró szakasz egyikére szabályos háromszöget írtak.

Megjegyezzük még, hogy a 8. és a 10. megoldás általában csak ötletként szokott felmerülni a hallgatóknál.

4. Befejező gondolatok

A tanulmányban egy, az iskolai oktatásban is használható geometriai probléma megoldásainak vizsgálatával, rendszerezésével a problémamegoldás tanításának/taníthatóságának kérdését is érintettük. Nyilván nem lehetett minden összefüggést feltárni, a hallgatók munkájának egy része a háttérben marad: nem mindent mondanak el, írnak le, így egy-egy gondolatmenet eredetére, feladatok között vont párhuzamokra nem derül mindig fény.

Továbbgondolva azt a lehetőséget,hogy a tanulókat/hallgatókat bevonjuk a megoldások készítésébe jól választott alapmegoldás(ok/ötletek) segítségével, érdemes eltűnődni azon, hogy még mire használható, ha egy (jövendő) tanár egy vagy több (nem túl nehéz) problémához kellően sok és számára rendezett megoldást ismer. Például kiválogathat belőle alkalmasan néhányat, majd ezeket tanulmányozásra adja a tanulóknak azzal a feladattal, hogy ezeket valamilyen szempont szerint rendezzék. Az ennek során végzett aktív tanulói munka komoly többletet jelent különböző megoldások „csak” olvasásával és megértésével szemben, a tanulói problémamegoldás fejlesztése szempontjából.

Tanulmányunkkal a jelenlegi iskolai oktatásban háttérbe szorult geometriai bizonyításokra is fel szeretnénk hívni a figyelmet és bízunk benne, hogy munkánk tanulságos lesz a tanár kollégák számára is.

Irodalomjegyzék

Ambrus, G. & Rott, B. (2017). Hilfestellungen beim Problemlösen in Form von „Lösungsbildern”, Mathematica Didactica. `http://www.mathematica-didactica.com/altejahrgaenge/md_2017/md_2017_Ambrus_Rott_Bilder.pdf`

Fried, K. (2020). Hány bőrt lehet lehúzni egy feladatról? – avagy nincs új a Nap alatt?, Érintő, 2020 június, `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2020-11/979-hany-bort-lehet-lehuzni`

Levav, A. & Leikin, R. (2010). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry, Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010 `http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg5-11-levav-leikin.pdf`

Tóth E. (2009). Feladatok többféle megoldással, BSc szakdolgozat, ELTE TTK, Témavezető: Ambrus G.

Rott, B. & Gawlik, T. (2014). Explizites oder implizites Heurismentraining – was ist besser? Mathematica Didactica, (37) 191–212.

Ambrus Gabriella, Fried Katalin

ELTE TTK Matematikai Intézet, Matematikatanítási és Módszertani Központ

matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Fülöp Ottilia 2021. MÁRCIUS, TANÓRA – SZAKKÖR

Matematikaoktatás online – tudunk-e újat az előző félévhez képest?

1. Bevezetés

A COVID-19 járvány miatt a BME Gazdaság- és Társadalomtudományi Karának hallgatói a 2020/21-es tanév őszi félévében rögtön a legelejétől távoktatásban kezdték tanulni a matematikát. Az előző félévhez hasonlóan a szinkron online oktatást céloztuk meg úgy, hogy lehetővé tettük az előadások, gyakorlatok és konzultációk felvételeinek visszanézését már csak azért is, mert az általunk használt platform (Microsoft Teams) egyszerre maximum 360 főnek engedélyezte az előadások értekezleteibe történő csatlakozást, elsőéves hallgatóink létszáma pedig meghaladta az 500-at. A valós időben (Microsoft Teamsen) megtartott kis létszámú gyakorlatokon való aktív online részvételt viszont erősen ajánlottuk minden olyan hallgatónknak, aki ezt megtehette.

A kommunikációs csatornák és a rendelkezésünkre álló online platformok kiválasztásában az előző félévben már szereztünk némi tapasztalatot [1], az ott elkövetett kezdeti hibákból valamennyit már okultunk, így jóval több időnk szabadult fel az online számonkérések és az interaktív válaszadó rendszerek előkészítésére, amire a nagy hallgatói létszám miatt a korábbinál is jóval nagyobb szükségünk volt. Nekünk, oktatóknak most már nem a tanév zökkenőmentes lezárása volt a cél, ennél jóval többet szerettünk volna megvalósítani [2].

2. Számonkérés a matematikaoktatásban: áttérés a Moodle-tesztekre

Mivel Microsoft Teamsben 200 fő fölötti csoportokban nagyon körülményes munkát (feladatot, tesztet) kiosztani, számonkérni és értékelni, és ebben a félévben a nemzetközi gazdálkodás, pénzügy és számvitel, valamint gazdálkodási és menedzsment alapszakos hallgatóink 530-an, azaz kb. kétszer annyian vették fel a matematika tárgyat, mint az előző félévben, a számonkérések lebonyolításán mindenképpen változtatnunk kellett. Így mind a zárthelyi dolgozatokat, mind pedig az írásbeli vizsgákat Moodle-tesztek formájában írattuk meg.

Egy Moodle-teszt íratásakor számos kockázatot vállalunk, ezek közül a legaggasztóbb az, amikor a kevésbé felkészült, de elszánt hallgatók Discord-szobákban vagy egyéb helyeken hosszasan keresik a tesztjeikben megtalálható azonos feladatokat. Mivel Moodle-tesztjeinkben nem kértük a teljes feladatmegoldások kézzel írt másolatának csatolását, csupán a részfeladatok eredményeivel kapcsolatos helyes válaszok megjelölését, figyelembe kellett vennünk azt, hogy lehetnek majd olyan hallgatóink, akik az írásbeli tesztek ideje alatt más platformok igénybevételével sok időt fordítanak tesztfeladataik összehasonlítására, közös tesztkérdések és válaszok keresésére. Minden felmérésben a feladatok sokszínűségével, változatos kérdéscsomagokkal igyekeztünk arra ösztönözni a hallgatókat, hogy minden idejüket az egyéni munkára fordítsák és eszükbe se jusson más dolgokkal foglalkozni, ha jó eredményt szeretnének elérni a teszteken. Annyi feladatot tartalmazott egy-egy ilyen Moodle-teszt, hogy csak folyamatos számításokkal és munkával lehetett teljesíteni. Emiatt rengeteg időnket vitte el a meglehetősen nagy volumenű Moodle-feladatbankunk előállítása. A Moodle-zárthelyik és írásbeli vizsgák több jó válaszos feladatokból álló tesztek voltak, melyek feladatai a feladatbank kategóriáiból (ugyanolyan típusú feladatokat tartalmazó feladatcsomagjaiból) véletlenszerűen lettek kiválasztva, és melyekben a helytelen válaszok kiválasztásáért negatív pontszám járt. Egy teljes függvényvizsgálattal kapcsolatos feladat például a következőképpen nézhetett ki:

Tekintse az $f:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-8}$ függvényt! Válassza ki az összes igaz állítást:

a) f páros függvény.

b) $f'(x)=\dfrac{x^3(x^3+32)}{(x^3-8)^2}, x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

c) $f'(x)=\dfrac{7x^6-32x^3}{(x^3-8)^2}, x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

d) Az f függvény zérushelye lokális minimumhely is egyben.

e) Az f függvénynek pontosan három stacionárius pontja van.

f) $f''(x)=\dfrac{48x^2(x^3+16)}{(x^3-8)^3}, x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

g) Ha $x\in\left(-\infty,-\sqrt[3]{16}\right)$, akkor az f függvény konvex.

h) Az f függvénynek $x_1=0$ inflexiós pontja.

i) Ha $x\in(-\infty,0)$, akkor az f függvény szigorúan monoton növekvő.

j) Az f függvény nem csak a $(0,2)$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

k) $x\in\left(\sqrt[3]{32},\infty\right)$ esetén az f függvény deriváltfüggvénye pozitív.

l) Az $x_2=\sqrt[3]{32}$ az f függvény egyetlen lokális minimumhelye.

m) Az $x_3=-\sqrt[3]{16}$ az f függvény egyetlen inflexiós pontja.

n) Az $y=x+1$ egyenes aszimptotája az f függvénynek $(-\infty)$-ben is és ∞-ben is.

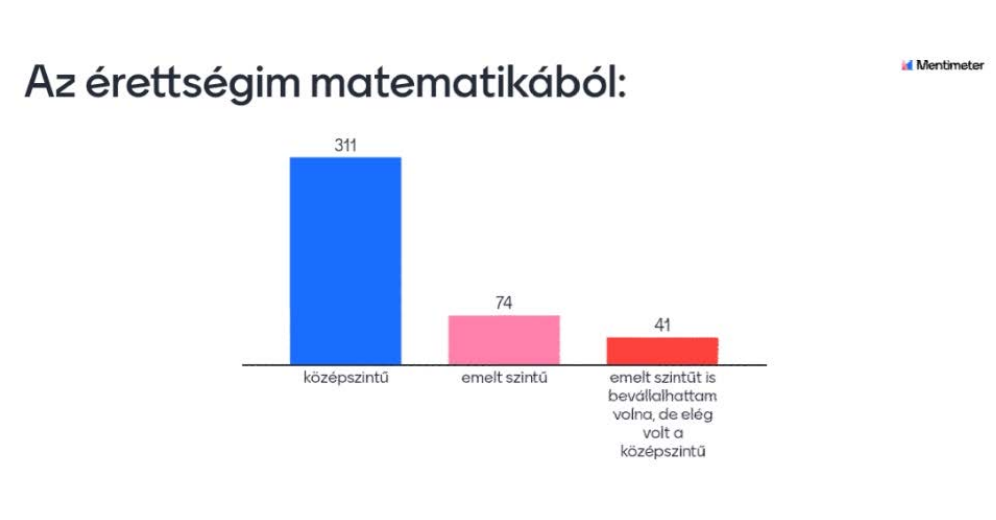
o) Nem válaszolok.

E cikk írásának idején az őszi félév teljes terjedelmében még nem bontakozott ki, hiszen az öt vizsgaalkalomból még csak három zárult le az, érhetnek még meglepetések bennünket. Az eddig lezajlott három vizsga átlaga nem sokban különbözik a tavaszi vizsgaátlagoktól, amikor a kisebb hallgatói létszám miatt bevállaltuk a feladatmegoldások teljes javítását.

3. A segédanyagokról röviden

Már az előző félévben bevált, és a hallgatók visszajelzéseiből is egyértelmű volt, hogy ebből a tárgyból is szükséges minden egyes előadás és gyakorlat magyarázatokkal tarkított, részletes tananyagát elkészíteni és már a tanórákat megelőző napokban elérhetővé tenni mind a Teams-fájlok között, mind pedig az oktató személyes honlapján. Ezzel remélhetőleg sok hallgatót tudtunk motiválni a tanulásban, mert lehetett akár előre tanulni, készülni minden előadásra és gyakorlatra. Ezáltal az órák is interaktívvá váltak, mert egyes hallgatók a tananyag előzetes átolvasásával bátrabban mertek kérdéseket feltenni, megválaszolni, vagy akár egyéb feladatmegoldásokat javasolni.

Azt, hogy milyen részletesen kell az órákon magyarázni, mindig a hallgatók matektudása határozza meg. Erre már az első előadáson rákérdeztünk Mentimeter segítségével. Olyan kérdésekre kellett válaszolniuk például, hogy milyen szintű érettségit tettek matematikából és mennyire félnek az előttük álló (első féléves) matematika számonkérésektől, ezzel is arra buzdítva őket, hogy már az elejétől kezdve aktívak legyenek az órákon. Az első kérdésünkre 426 válasz érkezett (ábra):



Ebből az eredményből azonnal tudtuk, hogy hallgatóinknak alapos magyarázatokra, rengeteg tanulásra és aktív online részvételre ösztönző, motiváló gesztusra van szüksége ahhoz, hogy következetesen és lelkiismeretesen végigtanulják a félévet: például az órákon feltett okos hozzászólásokat, valamint a megadottól eltérő helyes feladatmegoldásokat bónuszpontokkal jutalmaztuk, melyeket a vizsgán lehetett beváltani.

A feltöltött oktatási segédanyagaink mellett a féléves anyagot teljesen lefedő *Egyváltozós valós függvények* interaktív Neptun e-tananyagunk is hallgatóink rendelkezésére állt. Ez a tananyag érdekes ábráival és animációival, interaktív feladatmegoldásaival és tesztjeivel lépést tart a mai igényekkel. Minta Moodle-zárthelyiket, valamint minta vizsgatesztet is hallgatóink rendelkezésére bocsájtottunk, hogy ellenőrizhessék tudásukat a számonkérések előtt. Ezek elkészítése sok időnket elvitte, de hasznosnak bizonyultak.

4. A vizsgajegyek kialakításáról

Aki az írásbeli vizsga után legalább közepes vizsgaeredményt ér el, részt vehet egy 3 tesztkérdésből álló opcionális, rövid, online szóbeli vizsgán, amit a Teamsen bonyolítunk le és amihez kamerát is használunk. Ezen egy jeggyel lehet változtatni az írásbeli vizsga eredményén (így akár rontani is lehet), és itt minden kérdés a fent említett Neptun-tananyagnak a (többnyire elméleti) tesztjeiből van összeválogatva.

Érdekes és számunkra kissé lehangoló, hogy hallgatóink a szóbeli helyett inkább a teljes írásbeli vizsga újraírását célozzák meg. Ennek hátterében az lehet, hogy ezen a szóbelin a tételek, definíciók nagyon pontos visszakérdezése történik, ami a hallgatók szerint jóval több stresszel és felkészüléssel jár, mint a félévben tanult feladattípusok begyakorlása.

Ebben a távoktatásban töltött félévben is nagyon hiányoltuk a tantermi oktatás általános hangulatát, izgalmát és millőjét. Véleményünk szerint az online oktatás egyelőre nem ér fel a hagyományos tantermi oktatással, de egy jól strukturált, könnyen követhető tárgykövetelményekkel, játékszabályokkal lejátszott, átlátható online oktatási folyamat, valamint a benne tanúsított kölcsönös bizalom és empátia valamelyest kárpótol bennünket az elveszített tantermi tanítási élményekért.

Végezetül, évek múltán könnyen lehet, hogy az oktatási tartalmakra csak halványan emlékeznek majd hallgatóink, de nem felejtik el azt, hogy mit éreztek ezekben a hónapokban, emlékeznek majd arra, hogyan törődtünk velük és hogyan támogattuk őket [3].

Irodalomjegyzék

[1] `https://ematlap.hu/tanora-szakkor-2020-12/1006-az-online-matematikaoktatas-tapasztalatai-oktatoi-es-hallgatoi-szemmel`

[2] „Digitális kompetenciáinkat erősíti a távolléti oktatás” – Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

[3] Bozkurt, A., Sharma, R. C. (2020). Emergency remote teaching in a time of global crisis due to CoronaVirus pandemic, *Asian Journal of Distance Education*, *15*, i-vi.

Fülöp Ottilia
BME Matematika Intézet, Differenciálegyenletek Tanszék

A szerkesztő megjegyzése. Az online számonkérésről két további cikket olvashatnak ugyanebben a számban, egyik a Debreceni Egyetem oktatóinak tapasztalatait foglalja össze, a másik egy fiatal középiskolai tanár ötletének megvalósítását.

matematikatanítás

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

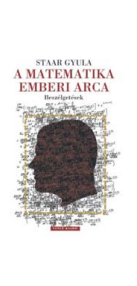
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ** ROVATBAN ELSŐSORBAN OLYAN KÖNYVEKRŐL SZERETNÉNK TUDÓSÍTANI ÉS OLYAN ELEKTRONIKUSAN ELÉRHETŐ ÍRÁSOKAT AJÁNLUNK, AMELYEK A MATEMATIKA BÁRMELY RÉSZE VAGY KAPCSOLATAI IRÁNT ÉRDEKLŐDŐK SZÁMÁRA KÍVÁNATOSAK LEHETNEK. (ROVATSZERKESZTŐ: *TÓTH JÁNOS.)*

Oláh Vera
2021. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Pálfalvi Józsefné: Varga Tamás élete

Az 1987-ben elhunyt, világszerte ismert nagy műveltségű matematikusnak, aki a 20. századi iskolai matematika megújításának egyik vezetője volt, sokat emlegetett komplex matematikatanítási kísérlete a mai tanítók és tanárok számára már történelem, részleteit kevesen ismerik. Ezt a hiányt pótolja *Pálfalvi Józsefné* könyve Varga Tamás életéről. Tovább…



Oláh Vera
2021. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Staar Gyula: A matematika emberi arca

Az interjúkötet különböző utakat bejárt szereplőiben közös nemcsak a tehetség, de szokatlanul széleskörű az érdeklődés, hatalmas a kitartás, az ifjúság jövője iránti felelősség, a család iránti szeretet. Az ő életükben is voltak buktatók, szomorúság, de sikereik, örömeik, kitűzött céljaik elérése jellemzi mindegyiküket. Egyvalamiben sosem csalódtak: a matematikában. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2021. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Pálfalvi Józsefné: Varga Tamás élete

A komplex matematikatanítási kísérlet

„Ma már szinte mindenki számára természetes, hogy az iskolába lépés kezdetétől lehet a gyerekeknek „igazi” matematikát tanítani, nemcsak a régi számolást és mérést.” – írja könyvében *Pálfalvi Józsefné*, aki Varga Tamás munkatársaként végigélte-tanította ezt az időszakot. Azóta is őrzött dokumentumait felhasználva hiteles krónikása nemcsak a kezdeti éveknek, de a matematikatanár-képzés egyik vezetőjeként az eltelt fél évszázad oktatáspolitikai változásainak is.

Könyvének első fele Varga Tamás életéről, a nevével fémjelzett komplex matematikatanítási kísérlet előzményeiről, folyamatáról és arról szól, hogyan is gondolta Varga Tamás az „igazi” matematika tanítását. Az alapelvek újdonságai között volt: „A legfontosabb belső motiváló erő a felfedezés öröme legyen, szabad legyen munka közben tévedni, s az nem járhat elmarasztalással. A szemléltetés helyébe a tanulói manipulálás lépjen.” Bár Varga Tamás „új matek”-ja megosztotta nemcsak a matematikatanárok, de a matematikusok közösségét is az 1960-70-es években, de szelleme „kiszabadult a palackból”, és ha lassan is, de változásokat hozott a tantervekben, tankönyvekben, a tanárok fejében, és megalapozta az 1978-as általános iskolai matematikai tantervet.

A könyv második fele a kísérlet tantervi témaköreit mutatja be példákkal Varga Tamás tanulmánya alapján, majd ismerteti az 1978-as alsó és felső tagozat tanterveit, és az ezekhez készült tankönyveket. Mindezek rengeteg ötletet adhatnak ma is a tanításhoz.

Az 1987-ben elhunyt világszerte ismert nagy műveltségű matematikusnak, aki a 20. századi iskolai matematika megújításának egyik vezetője volt, sokat emlegetett komplex matematikatanítási kísérlete a mai tanítók és tanárok számára már történelem, részleteiről nemigen tudnak. Varga Tamás gondolatait tanítványai és fiatalabb munkatársai vitték tovább, az ő érdemük, hogy előadásokban, tankönyvekben, szakköri foglalkozásokon, konferenciákon újra és újra előkerülnek. Az akkori fiatalok ma már rég nyugdíjasok, ezért is örvendetes, hogy 2016 és 2021 között az MTA két matematika oktatásával kapcsolatos kutatócsoportot is támogatott, egyikük az ELTE-n a *Korszerű komplex matematikaoktatás* címet viselte, és fő célja volt Varga Tamás hagyatékának megmentése, és az, hogy az eltelt három évtizednyi fejlődést abba beépítsék. Szintén ennek a programnak része volt Varga Tamás módszereinek kiterjesztése a középiskolai tanulmányokra, mivel ez – bár voltak rá értékes próbálkozások – félbemaradt. 1980-ban kapcsolódott be Pósa Lajos is a középiskolai kísérletbe, aminek nyoma a másik kutatócsoport megnevezésében és céljaiban is fellelhető: a Rényi Intézet *Felfedeztető matematikatanítás kutatócsoportjának* vezetője Juhász Péter, Pósa Lajos tanítványaként hisz abban, hogy az általa és munkatársai által alkalmazott felfedeztető matematikatanítás minden gyermek számára élvezetesebbé és érthetőbbé tenné a matematikát.

Reméljük, Pálfalvi Józsefné könyve és annak készülő folytatása, a *Tények és emlékek egy középiskolai matematikatanítási kísérletről* is hozzájárul ahhoz, hogy a történteket megismerve és a tanulságokat levonva a mai pedagógusok továbblépjenek egy átgondolt, kiérlelt alapokon nyugvó korszerű matematika oktatása felé.

Oláh Vera

Hivatkozások:

Pálfalvi Józsefné: *Varga Tamás élete – A komplex matematikatanítási kísérlet*, Typotex Kiadó, 2019

Pálfalvi Józsefné:*Tények és emlékek egy középiskolai matematikatanítási kísérletről*, E-könyv, Typotex Kiadó, megjelenés előtt

recenzió Varga Tamás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Oláh Vera 2021. MÁRCIUS, KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ

Staar Gyula: A matematika emberi arca

Nagyon nehéz elfogulatlanul írnom Staar Gyula: *A matematika emberi arca* c. (2020-ban a Vincze kiadónál megjelent 500 oldalas) könyvéről. Hiszen az ember elfogult azokkal szemben, akiket szeret. A könyv csaknem összes „szereplőjét" régóta ismerem, tisztelem, és nagyon örültem, amikor újra szembekerültem velük a könyv lapjain. A szerzővel még mint a Természet Világa főszerkesztőjével több mint 25 évvel ezelőtt találkoztam először. Közös célunk, a természettudományos ismeretterjesztés érdekében többször hosszasabban is elbeszélgettünk, innen és korábbi interjúköteteiből [*A megélt matematika* (Gondolat Kiadó, 1990), *De mi az igazság…Beszélgetések Simonyi Károllyal* (Közlöny-és Lapkiadó, 1996), *Matematikusok és teremtett világuk* (Vince Kiadó, 2002), *Fizikusok az Aranykorból* (Vince Kiadó, 2006)] ismerhettem meg a szerény, céltudatos, egy-egy interjúra maximálisan felkészült újságírót, szerkesztőt, aki eredetileg maga is matematika-fizika szakos tanár volt. A két lektor, Herczeg János és Márki László is régi ismerősöm, előbbit gimnáziumom egyik legjobb tanáraként, később az Élet és Tudomány főszerkesztőjeként, utóbbit a Bolyai Társulat vezetőségében a Rényi Intézet kutatójaként ismertem meg. Az előszót író Szász Domokos és a könyv 21 interjúalanya közül is 12 személyes ismerősöm, további 7 hírét-nevét is hallottam már. Mégis rengeteg újat tudtam meg a könyvből a matematika sok-sok régi és legújabb ágáról, matematikatörténeti csemegékről, kis kitekintésekkel magáról a magyar matematikáról és annak számos (21-nél jóval több) képviselőjéről, akik arcot adnak a mai matematikának.

De vajon mit nyújt ez az interjúkötet olyanoknak, akik nem sokat tudnak a matematikáról, és akiknek a fejezetcímekben szereplő nevek sem ismerősek? Nekik is átad, üzen a könyv egésze. Ha átugorják a szakmai részeket, akkor is teljes képet kapnak egy csodás világról, egy olyan, ma már a világot átfogó közösségről, ahol az ész, az igazság, a befektetett munka és egymás tisztelete számít, akkor is, ha előfordul benne emberi hiúság, megbántottság, véleménykülönbség. A szerző így ír erről a bevezetőben: „…közel áll hozzám ez a világ, mivel a matematika igazságait nem lehet csűrni-csavarni, itt a rendkívüli tudás már fiatalon megmutatkozhat, amit a matematikustársadalom egy emberként elismer. A matematika szövete összeköt tehetségeket, nemzedékeket."

Staar Gyula nem véletlenül választotta ki beszélgetőtársait. A szakma iránti feltétlen alázattal, ugyanakkor hihetetlenül felkészülten, empátiával kérdezi-beszélteti riportalanyait, amiből őszinte, érdekes történetek kerekednek ki, túl a megszólaltatott matematikusok egyéni sorsán. Olyan világszerte ismert eredményeket elért tudósokkal ismertet meg, mint Szemerédi Endre, Pálfy Péter Pál, Pintz János, Alexander Lubotzky. Néha a történeteket egymás mellé rakva képet kapunk régebbi, akár 50 vagy 75 évvel ezelőtti eseményekről, amelyek így, több szempontból megközelítve lesznek igazán hitelesek. Mire gondolok? Például a Fazekas első matematika tagozatos osztályára (Lovász László, Pelikán József, Rábai Imre) vagy a szovjet illetve az amerikai matematikaoktatás jó és rossz oldalaira (Szemjon Gingyinkin, Jefim Zelmanov, Charles Simonyi), a második világháborút átéltek élményeire (Aczél János, Császár Ákos, Czapáry Endre, Katona Gyula, Vekerdi László), a magyar kisebbségek életére a határon túl (Némethi András, Balázsi Borbála, Kalácska József, Bencze Mihály, Szabó Magda, Szabó Péter Gábor), apák és fiaik kapcsolatára, ami szinte mindegyik interjúban megjelenik. A 21 megszólaló túlnyomó többsége matematikus vagy matematikatanár. Van köztük 80 év fölötti (miután a beszélgetések részben a 2000-es évek elején zajlottak, sajnos többen már nem élnek közülük) és van, aki negyvenes éveinek közepén jár. Többen világhírűek, mások egy-egy vidéki iskolában tanítottak egész életükben. Miért kerültek mégis épp ők egybe egy kötetbe? Azt hiszem, ezt már az olvasónak kell megfejtenie.

A beszélgetések során kibontakozó történetek közül sok ismerős van (több már korábban megjelent a Természet Világa, a Forrás, vagy a Magyar Tudomány lapjain), ezeket újra olvasni is jó, de a többi fejezetből rengeteg eddig ismeretlen részlet is kiderül. Nemcsak a matematika emberi arca, a szereplők személyisége kerül közel hozzánk, az élettörténetek egyfajta példát is szeretnének mutatni. A könyv különböző utakat bejárt szereplőiben közös nemcsak a tehetség, de szokatlanul széleskörű az érdeklődés, hatalmas a kitartás, az ifjúság jövője iránti felelősség, a család iránti szeretet. Az ő életükben is voltak buktatók, szomorúság, de sikereik, örömeik, kitűzött céljaik elérése jellemzi mindegyiküket. Egyvalamiben sosem csalódtak: a matematikában. Azt tették-teszik egész életükben, amit szerettek: ugyanaz a hivatásuk, mint a hobbijuk. És mindabból, amit a kérdezőnek elmondanak, az derül ki, hogy jól csinálták. Ebben a könyvben (beleértve a készítőit is) csupa jó ember van, már csak ezért is érdemes elolvasni.

Oláh Vera

☐ matematikatörténet ☐ recenzió ☐ matematikus-karrier ☐ matematikatanítás

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

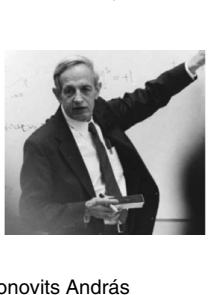
Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **TUDOMÁNY** MENÜPONT TÖBBFÉLE, A MATEMATIKA TUDOMÁNYÁHOZ KAPCSOLÓDÓ FUNKCIÓT TAKAR..**A TUDOMÁNY– TÖRTÉNET ROVAT** CÉLJA ELSŐSORBAN MATEMATIKATÖRTÉNETI JELLEGŰ ÍRÁSOK KÖZLÉSE. **A MI IS ...?ROVAT** A MAI MATEMATIKA TUDOMÁNYÁRÓL KÍVÁN SZÓLNI A HOZZÁÉRTŐKNEK.
(ROVATSZERKESZTŐK: *BESENYEI ÁDÁM; STIPSICZ ANDRÁS.*)

Pálfy Péter Pál
2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

70 éves a Rényi Intézet

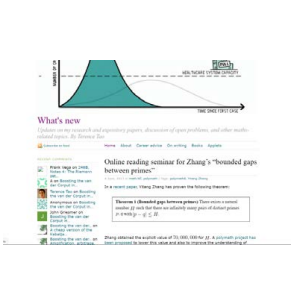
1950. augusztus elsején alakult meg a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete. Sajnos, a hetvenéves évforduló megünneplésére tervezett nemzetközi konferenciát a járványhelyzet miatt nem lehetett megtartani. Ebben a cikkben az intézet történetének néhány fontos, illetve érdekes mozzanatát mutatja be Pálfy Péter Pál, a kutatóintézet korábbi igazgatója. Bár a hét évtized alatt született tudományos eredmények gazdag tárházába most nem nyerhetünk bepillantást, de az egykori és mostani munkatársak eredményei magukért beszélnek. Tovább...



Simonovits András
2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Nash-egyensúlyhoz vezető rögös útról

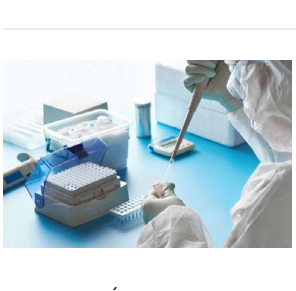
Ismert, hogy Nash tanulmányozta elsőként az *n*-személyes nemkooperatív játékelmélet – egyébként kézenfekvő – egyensúlyát, amelyet hamarosan róla neveztek el. De sokan még ma sem tudják, milyen rögös út vezetett el a definícióhoz és az egzisztenciatétel kimondásához. Ebben a rövid írásban az említett felfedezést a matematika alkalmazásai iránt érdeklődők számára vázolja *Simonovits András*. Tovább...



Harcos Gergely
2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Visszetekintés: Polymath8

A Polymaths8 projektet Terence Tao indította el a *szomszédos prímszámok közötti különbség* témájában 2013-ban. A matematikai kutatás új formájának tapasztalatait osztja meg *Harcos Gergely*, akit a Polymath8 átsegített egy nehéz időszakon, és összehozott olyan kollégákkal, akikkel máskülönben nem írt volna közös cikket. Mindenki nyomon követhette a projektet: azok is, akik elképzelhetetlennek tartották, hogy ilyen módon komoly eredmények születhetnek. Tovább...



Backhausz Ágnes
2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mennyit teszteljünk? 3. rész − a Bayes-becslésről

Cikkünk első két részében azzal foglalkoztunk, hogy hány tesztelést kell végeznünk, ha adott pontossággal szeretnénk megállapítani, megbecsülni egy adott betegségben szenvedők arányát. Ehhez felidéztük a normális eloszlással való közelítést (1. rész), a konfidenciaintervallum fogalmát, és bemutattuk a maximum-likelihood becslést (2. rész), ami alátámasztotta azt a természetesnek tűnő becslési módszert, hogy az ismeretlen valószínűséget a bekövetkezett kísérletek arányával becsüljük. Azonban még ennek az egyszerű módszernek is lehetnek hátrányai − állítja *Backhausz Ágnes*. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

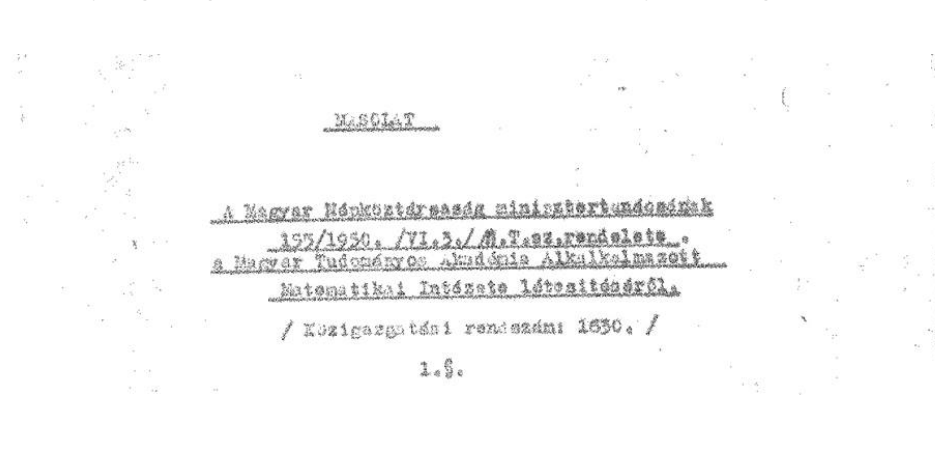
Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Pálfy Péter Pál 2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

70 éves a Rényi Intézet

1950. augusztus elsején alakult meg a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézete. Sajnos, a hetvenéves évforduló megünneplésére tervezett nemzetközi konferenciát a járványhelyzet miatt nem lehetett megtartani. Ebben a cikkben az intézet történetének néhány fontos, illetve érdekes mozzanatát mutatjuk be. Noha úgy illenék, hogy mindenekelőtt matematikai tételekről essék szó, a rendelkezésre álló terjedelem nem teszi lehetővé, hogy a hét évtized alatt született tudományos eredmények gazdag tárházából akár csak rövid szemelvényeket válogassunk.



MÁSOLAT

A Magyar Népköztársaság minisztertanácsának
155/1950. /VI.3./ M.T.sz.rendelete
a Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott
Matematikai Intézete létesítéséről.
/ Közigazgatási rendszám: 1630. /
1.§.

Bár az intézet alapítását a Magyar Népköztársaság Minisztertanácsának 155/1950. (VI.3.) M.T. számú rendeletétől számítjuk, nem előzmény nélküli az intézmény létrejötte: Már 1947-től működött egy alkalmazott matematikai csoport a Műegyetemen, az akkori Közoktatásügyi Minisztérium keretében, Egerváry Jenő vezetésével. A kor szellemének megfelelően az új intézet feladata „az alkalmazott matematikai tudományok művelése általában és olyan módszerek kidolgozása, amelyekkel az elméleti matematikai eredményeket a népgazdasági termelés növelésére lehet felhasználni.” Ennek a feladatkörnek megfelelően az induláskor az intézet osztályai a következők voltak: Mechanikai és szilárdságtani osztály (vezetője Egerváry Jenő), Valószínűségszámítási osztály (Rényi Alfréd), Biztosítási és gazdasági matematikai osztály (Vincze István), Vegyipari osztály (Fenyő István), Numerikus és grafikus módszerek osztálya (Hajós György).

Természetesen az alkalmazott matematikai tevékenység mellett a kutatók folytatták elméleti munkásságukat is. Az elmélet és az alkalmazás egysége tükröződött abban is, hogy öt évvel az indulás után megváltozott az intézet elnevezése, 1955-től már az MTA Matematikai Kutató Intézete néven folytatta tevékenységét. Azonban idősebb kollégák még évtizedek múltán is „AMI” néven emlegették. Az osztályok sora is bővült, létrejött a Komplex függvénytani osztály Turán Pál vezetésével és az intézet egységeként Szegeden a Funkcionálanalízis osztály Szőkefalvi-Nagy Béla irányításával. Később további tudományos osztályok alakultak. Az évek során az alkalmazási irányok is gazdagodtak, megalakult például a Biometriai csoport, az Operációkutatási csoport és az Információelméleti osztály.

Az intézet vezetésére 1950-ben Rényi Alfréd kapott megbízást, aki akkor mindössze 29 éves volt. Húsz éven át, korai haláláig töltötte be az igazgatói tisztséget. Utódai – Fejes Tóth László (1970-1982), Hajnal András (1983-1992), Szász Domokos (1993-1995), Katona Gyula (1996-2005), Pálfy Péter Pál (2006-2018) és Stipsicz András (2019-től) – az ő szellemében vezették tovább az intézetet, ami 1999-ben fel is vette alapító igazgatójának nevét.

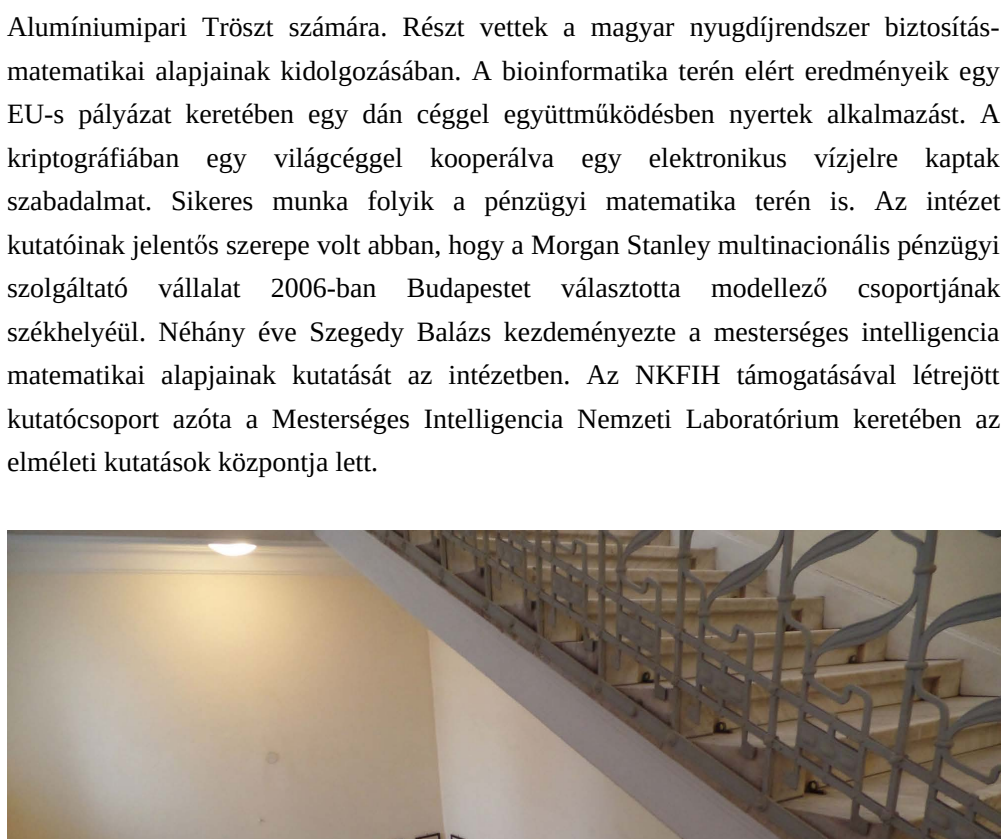
Az intézet 69 éven át a Magyar Tudományos Akadémia irányítása alatt működött. 2019. szeptember elsejétől viszont – a széleskörű tiltakozás ellenére – egy törvénymódosítás alapján az akkor létrehozott Eötvös Loránd Kutatási Hálózat részévé vált.

Ugyan a Reáltanoda utcai épület képe ma már összeforrt a kutatóintézettel, az első években még nem itt dolgoztak a munkatársak. A Sztálin (ma Andrássy) út 31-ben és a Zichy Jenő utca 4-ben levő lakásokban kezdte munkáját az új intézmény és csak 1958-tól vette fokozatosan birtokba a Reáltanoda utcai Rédl-palotát. Akkor még más szervezetek is működtek az épületben, erre utal a kis előadóterem mai napig fennmaradt elnevezése: „kutyás terem” – mivel az alagsori helyiségben abban az időben még az Ebtenyésztők Egyesülete kapott elhelyezést. Báró Rédl Béla palotája két részletben épült, 1887-ben lett kész. 1907-ben a Magyar Mérnök és Építész Egylet vásárolta meg az épületet és elnökének, Hauszmann Alajosnak a tervei szerint átépítették, kibővítették. Ekkor készült el a nagy előadóterem is, amelynek falán ma is láthatók az egyes mérnöki ágazatok jelképei, de sajnos a tábla fölötti falfestmény valamelyik felújítás áldozata lett. A folyamatos fejlődés következtében az intézet szinte állandóan helyhiánnyal küzd. Két szakaszban, 2001-ben és 2017-ben sor került a tetőtér beépítésére. Emellett a közelben három lakásban is kialakították munkahelyeket az intézet dolgozóinak elhelyezésére.

Az intézet pénzügyi helyzete sokáig meglehetősen labilis volt. Devizahiányos időszakokban többször előfordult, hogy számos folyóirat előfizetését szüneteltetni kellett. Bár a legfontosabbakat utólag pótolták, néhány hiány a könyvtár polcain emlékeztet ezekre a szűk esztendőkre. Az Európai Unió tudományos programjaiba való bekapcsolódás gyökeresen változtatott ezen a helyzeten. Már 2000-ben elnyerte az intézet az EU-tól a kiválósági központ („Centre of Excellence”) elismerést, ami anyagi támogatással is járt. Először a különböző együttműködési programok, majd 2008-tól az Európai Kutatási Tanács (ERC) pályázatai nyújtottak kiváló lehetőségeket a kutatóknak. Tíz nyertes projektjével a Rényi Intézet a CEU és a Kísérleti Orvostudományi Kutatóintézet mellett egyike a legsikeresebb magyarországi intézményeknek. Büszkék nyertes kutatóikra: az Advanced Grant kategóriában Pintz János, Bárány Imre, Stipsicz András, Szemerédi Endre, Pyber László és Pach János; a Consolidator Grant kategóriában Szegedy Balázs, Abért Miklós és Pete Gábor; a Synergy Grant kategóriában pedig Lovász László kapott támogatást. A Magyar Tudományos Akadémia által elindított Lendület pályázat keretében Tardos Gábor, Stipsicz András, Abért Miklós, Szegedy Balázs, Rásonyi Miklós, Virág Bálint, Harcos Gergely és Csikvári Péter alakíthatott új kutatócsoportokat az intézetben.

A projektek céljaira létrehozott csoportok mellett jelenleg a következő tudományos osztályok keretében folyik a kutatómunka: Algebra, Algebrai geometria és differenciáltopológia, Analízis, Extremális kombinatorika, Geometria, Gráfelmélet, Halmazelmélet, logika és topológia, Kombinatorika és alkalmazásai, Számelmélet, Valószínűségszámítás és statisztika. Az osztályok szemináriumait az intézet kutatóin kívül sok egyetemi kolléga is rendszeresen látogatja. Most, hogy a járvány miatt a szemináriumok az online térbe kényszerültek, érdeklődő kutatók gyakran csatlakoznak külföldről is a Rényi Intézetben meghirdetett előadásokhoz. Az előadások amúgy is legtöbbször angol nyelvűek, mivel több külföldi posztdoktor és vendégkutató dolgozik az intézetben.

Az intézetben felhalmozott tudás nem maradt az épület falai között. A matematika alkalmazásaira irányuló kutatások a gazdasági és a társadalmi élet számos területén hasznosultak. Azon túl, hogy az alapítás idején az alkalmazott témák domináltak, a tervgazdaság keretében még az 1980-as években is készítettek modelleket az Alumíniumipari Tröszt számára. Részt vettek a magyar nyugdíjrendszer biztosítás-matematikai alapjainak kidolgozásában. A bioinformatika terén elért eredményeik egy EU-s pályázat keretében egy dán céggel együttműködésben nyertek alkalmazást. A kriptográfiában egy világcéggel kooperálva egy elektronikus vízjelre kaptak szabadalmat. Sikeres munka folyik a pénzügyi matematika terén is. Az intézet kutatóinak jelentős szerepe volt abban, hogy a Morgan Stanley multinacionális pénzügyi szolgáltató vállalat 2006-ban Budapestet választotta modellező csoportjának székhelyéül. Néhány éve Szegedy Balázs kezdeményezte a mesterséges intelligencia matematikai alapjainak kutatását az intézetben. Az NKFIH támogatásával létrejött kutatócsoport azóta a Mesterséges Intelligencia Nemzeti Laboratórium keretében az elméleti kutatások központja lett.



Az intézet fennállása során mindig ezer szállal kötődött a felsőoktatáshoz. A kutatók jelentős része rendszeresen oktat valamelyik egyetemen, nem egy esetben még tanszékvezetői beosztást is betöltöttek az intézeti kutatók. A másik irányban is több példa van arra, hogy professzorok másodállásban irányították az intézet egyik-másik osztályát, így Hajós György, Turán Pál, Szőkefalvi-Nagy Béla, Rédei László, Császár Ákos, Hajnal András. A legszorosabb együttműködés – már csak a 2001-ig fennálló térbeli közelség okán is – az Eötvös Loránd Tudományegyetemhez fűzi a kutatóintézetet. Jelentős a kapcsolat a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemmel is, de számos más felsőoktatási intézményben is tanítanak (vagy tanítottak korábban) az intézet kutatói, pl. Pázmány Péter Katolikus Egyetem, Budapesti Gazdasági Egyetem, Nemzeti Közszolgálati Egyetem, Szegedi Tudományegyetem, Debreceni Egyetem, Pannon Egyetem. Különleges kapcsolat fűzte az intézetet a CEU-hoz. Egy 2000-ben megkötött szerződés alapján a Rényi Intézet szellemi bázisára építve hozta létre a CEU a Matematika és Alkalmazásai Tanszéket és ennek doktori programját (majd később a mester-programját is). A tantárgyak előadóinak és a doktori témavezetőknek a legnagyobb része az intézet kutatói közül került ki. Ez a tevékenység tovább növelte a Rényi Intézet hírnevét a világban: az itt doktorátust szerzettek legjobbjai a világ vezető egyetemein folytatták pályafutásukat. Sajnos a CEU száműzetésbe kényszerítésével ennek a doktori iskolának a felívelő pályája – a magyar matematika kárára – hirtelen megszakadt, hiszen bécsi székhellyel ez az együttműködési program nem folytatható tovább.

A Rényi Intézet nemcsak az egyetemi oktatáshoz, hanem a közoktatáshoz is kapcsolódik. Az 1960-as években is működött egy szakdidaktikai csoport az intézetben Surányi János vezetésével. Később azonban a létszáma lecsökkent, majd meg is szűnt a csoport. Aztán hosszú ideig Pósa Lajos volt az egyetlen munkatárs az intézetben, aki elsősorban matematikai tehetséggondozással foglalkozott. A 2010-es években Juhász Péter irányításával vett új lendületet ez a téma az intézeten belül. Az MTA Tantárgy-pedagógiai kutatási program támogatásával, a Gondolkodás Öröme Alapítvánnyal együttműködésben széleskörű munkát végeznek. Tevékenységük spektrumának egyik szélén a speciális matematika tagozatok tananyagfejlesztése, a másikon a hátrányos helyzetű tehetséges gyerekeket elérő Repülő Iskola található.

Érdemes említést tenni a kutatóintézet olyan egykori munkatársairól is, akik nem matematikusként ismertek. Rényi Alfréd több ízben segített olyanokon, akik politikai okból nem kaphattak állást máshol. Lakatos Imre azután került az intézetbe, hogy a recski munkatáborból szabadult. Ekkor fordította magyarra Pólya György könyvét, a Gondolkodás iskoláját. 1956-os emigrációja után Londonban vált a tudományfilozófia világnagyságává. Szabó Árpád klasszika-filológust 1957-ben megfosztották egyetemi tanári katedrájától. Utána az intézet kötelékében dolgozott, és ebből a helyzetből adódóan fordult figyelme a görög matematika története felé és vált ennek a területnek nemzetközi szaktekintélyévé. Az 1960-as években az intézet könyvtárában dolgozott Vekerdi László, irodalom-, tudomány- és művelődéstörténész is.

Az intézet gazdag könyvtára szívesen lát minden matematika iránt érdeklődőt, nem csupán a belső munkatársak számára teszi lehetővé a szakirodalom követését. E sorok írója – általános iskolai történelem tanárnőjének ajánlására – kapcsolatba került az intézet szakmódszertani csoportjával, és ennek köszönhetően már 14 évesen kölcsönözhetett könyveket innen.

Szoros a kapcsolat a Bolyai János Matematikai Társulattal is. A társulati rendezvényeket gyakran tartják az intézet nagytermében, és számos tudományos konferenciát rendez közösen a Bolyai Társulat és a Rényi Intézet. A társulat tisztségviselőiként, verseny- és díjbizottságok tagjaiként is szép számmal veszik ki részüket a matematikus szakma érdekében végzett munkából az intézet tagjai.

Minden évben számos konferenciát, workshopot rendeznek. (Persze ezek most a világjárvány alatt vagy elmaradnak, vagy az online térbe kerülnek át.) Az utolsó évtizedből a következő nagyrendezvényeket említhetjük: 2010-ben konferencia Szemerédi Endre hetvenedik születésnapjának tiszteletére; 2011-ben EuroComb’11, valamint Turán Pál emlékkonferencia; 2012-ben CAST Summer School and Conference; 2013-ban Erdős Centennial; 2014-ben Summit 240 (Frankl Péter, Füredi Zoltán, Győri Ervin és Pach János 60. születésnapja alkalmából), valamint Graph Limits, Groups and Stochastic Processes summer school and workshop; 2015-ben Intuitive Geometry (László Fejes Tóth Centennial); 2017-ben 6th European Set Theory Conference; 2018-ban Building Bridges II (Lovász László 70. születésnapja tiszteletére); 2019-ben Geometry and Topology of Singularities (Némethi András 60. születésnapja alkalmából), amelyek nagyszámú – esetenként több száz – külföldi kutatót vonzottak Budapestre.

A Rényi Intézet közössége rendkívül büszke munkatársainak nagyszerű eredményeire. Kiváló teljesítményükről számos nemzetközi és hazai díj tanúskodik. A legkiemelkedőbb természetesen Szemerédi Endre Abel-díja (2012-ben). Ugyanő számos más díj és kitüntetés birtokosa; csak a legjelentősebbeket említve: Magyar Szent István-rend (2020), Széchenyi-díj (2012), Rolf Shock-díj (2008), Leroy P. Steele-díj (2008). A hazánkban Rényi Alfréd által elindított információelméleti iskola nemzetközi súlyát jelzi, hogy az IEEE Information Theory Society által odaítélt Claude E. Shannon-díjban Csiszár Imre (1996), Marton Katalin (2013) és Körner János (2014) is részesült. 2014-ben Pintz János megkapta az American Mathematical Society Cole-díját. Tardos Gábor 1996-ban az Európai Matematikai Társulat Díjában részesült. Az Academia Europaea az intézet kutatói közül tagjává választotta Pach Jánost, Pintz Jánost, Ruzsa Imrét, Szemerédi Endrét, T. Sós Verát, Tardos Gábort és Tóth Bálintot. A Magyar Tudományos Akadémia által évente egy tudósnak adományozott legmagasabb kitüntetést, az Akadémiai Aranyérmet 2015-ben T. Sós Vera kapta.

A jelentős nemzetközi díjakkal vetekedő értéke van annak, ha valakit meghívnak előadni a négyévenkénti Nemzetközi Matematikus Kongresszusra (ICM). Az intézetből a következők voltak ICM előadók: Bárány Imre (2002), Erdős Pál ([1936, 1954], 1983), Füredi Zoltán (1994), Hajnal András (1974), Némethi András (2018), Pach János (2014), Pintz János (2014), Rényi Alfréd (1958), Révész Pál (1978), Ruzsa Imre (2006), Stipsicz András (2010), Szegedy Balázs (2018), Szemerédi Endre (1974), Tardos Gábor (2018), Tóth Bálint (2018).

Erdős Pál esetében az első két meghívás dátuma azért került szögletes zárójelbe, mert csak az 1983-as meghíváskor számított az intézet munkatársának. Amikor már szoros kapcsolata volt az intézettel, akkor igen intenzív együttműködést folytatott az itteni kutatókkal. Társszerzőinek hosszú listáján közel harminc olyan név található, akikkel a Matematikai Kutatóintézetben dolgozott. Amikor Erdős Budapestre érkezett, akkor általában elfoglalta az intézetigazgató irodáját, ott vették őt körül munkatársai, akikkel sokszor szimultán számos témán dolgozott együtt. Rengeteg eredménye és sejtése ezen a helyen született.

Bízunk benne, hogy a 70 éves Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet a jövőben is meghatározó módon járul hozzá a magyar matematikai élethez, kutatóinak eredményei pedig tovább öregbítik a magyar matematika megbecsültségét szerte a világban.

Pálfy Péter Pál

matematikatörténet Rényi Intézet

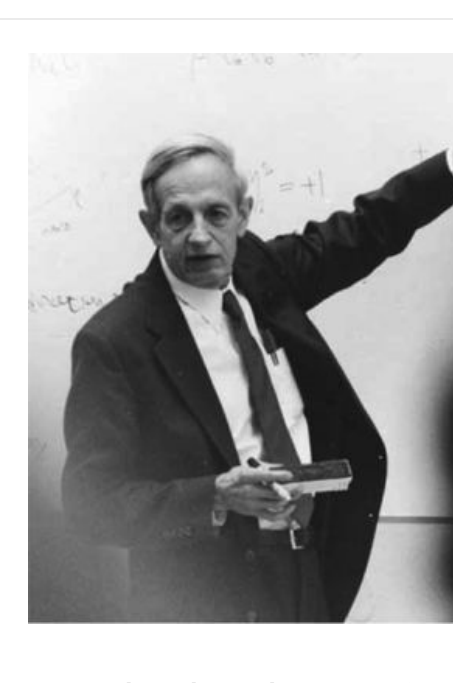
Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Simonovits András 2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

A Nash-egyensúlyhoz vezető rögös útról



John Forbes Nash (1928–2015)

Ismert, hogy Nash (Nash (1950a)) és (Nash (1951)) cikkeiben tanulmányozta elsőként az n-személyes nemkooperatív játékelmélet – egyébként kézenfekvő – egyensúlyát, amelyet hamarosan róla neveztek el. De sokan még ma sem tudják, milyen rögös út vezetett el a definícióhoz és az egzisztenciatétel kimondásához. Ebben a rövid írásban az említett felfedezést a matematika alkalmazásai iránt érdeklődők számára vázolom (vö. Raussen–Skau 2015-ös interjúja John Nash-sel (Raussen, Skau (2015)), amely Nash 2015-ös Abel-díja alkalmából készült, és Nasar (Nasar (1998)) kiváló életrajza).[1] Nash kiindulópontja Neumann 1928-as kétszemélyes nullaösszegű játékelméleti modellje volt (Neumann (1928)), pontosabban annak Neumann–Morgenstern 1944-es változata (Neumann, Morgenstern (1944)). (Furcsa, hogy hősünk még a 2015-ös interjújában is a következő történetileg téves állítást teszi: „Nem emlékszem pontosan, mikor történt, de Neumann és Morgenstern Princetonban találtak egy bizonyítást a kétszereplős játékok megoldására, ami egy speciális esete az én általános tételemnek n-szereplős játékokra." A nevezett bizonyítást valójában Neumann már 1928-ban közölte.) A döntő lépés nem annyira az volt, hogy Nash a szereplők számát 2-ről n-re emelte, hanem az, hogy szakított a társasjátékokra jellemző, de nagyon megszorító nullaösszegűséggel. Ez az általánosítás viszont speciális esetben már (Cournot (1838))-ban megjelent, csak sem Neumann, sem Nash nem tudott róla.

1. Cournot duopólium modellje

A többszemélyes stratégiai döntések közgazdasági elmélete felé az első lépést egy francia tudós, Cournot (Cournot (1838)) tette meg, amikor bevezette a duopólium fogalmát, és meghatározta az *egyensúlyt*. Emlékeztetőül: egy piacon két vállalat árusít azonos áron azonos terméket, amelynek ár–keresleti függvénye, $P(Q)$ csökkenő. A két vállalat Q_1 és Q_2 mennyiséget dob a piacra (értékük tetszőleges pozitív valós szám), és ennek összegeként adódik a piaci kínálat: $Q = Q_1 + Q_2$. Elhanyagolva a közösnek feltételezett egységköltséget, mindkét vállalat árbevétele, egyben profitja nemcsak saját, hanem a vetélytársa kínálatától is függ:

$$\pi_1(Q_1,Q_2) = P(Q_1+Q_2)Q_1 \quad \text{és} \quad \pi_2(Q_1,Q_2) = P(Q_1+Q_2)Q_2.$$

Hogyan lehet megfogalmazni a megfelelő piaci egyensúlyt? Egyensúlynak nevezünk egy olyan kínálatpárt, amelytől egyik vállalatnak sem érdemes egyedül eltérnie.

Cournot zseniális gondolata szerint mindkét vállalat adottnak veszi a másik kínálatát, és meghatározza saját profitjának feltételes maximumát. Folytonosan változtatva a másik kínálatát, megkapjuk a *reakciófüggvényt*: $q_1(Q_2)$ és $q_2(Q_1)$. Képletben:

$$\pi_1(q_1(Q_2),Q_2) \ge \pi_1(Q_1,Q_2) \quad \text{és} \quad \pi_2(Q_1,q_2(Q_1)) \ge \pi_1(Q_1,Q_2).$$

Egyszerű feltételek mellett létezik egy olyan, *konzisztensnek* nevezett kínálati pár: (Q_1^*,Q_2^*), amelyre

$$Q_1^* = q_1(Q_2^*) \quad \text{és} \quad Q_2^* = q_2(Q_1^*).$$

A reakciófüggvények nélkül is definiálható az egyensúly: minden (Q_1,Q_2) párra fennáll

$$\pi_1(Q_1^*,Q_2^*) \ge \pi_1(Q_1,Q_2^*) \quad \text{és} \quad \pi_2(Q_1^*,Q_2^*) \ge \pi_2(Q_1^*,Q_2).$$

Hangsúlyozom, hogy a két vállalat nem kooperál egymással, pedig összejátszás esetén mindketten kínálhatnák a monopolista egyensúly felét, és megfelezhetnék a monopolista hasznot. Másképp szólva, létezhet olyan kínálatpár: $(\bar{Q}_1,\bar{Q}_2)$, amely mindkét félnek előnyösebb, mint az egyensúly, de összejátszás nélkül nem valósítható meg:

$$\pi_1(\bar{Q}_1,\bar{Q}_2) > \pi_1(Q_1^*,Q_2^*) \quad \text{és} \quad \pi_2(\bar{Q}_1,\bar{Q}_2) > \pi_2(Q_1^*,Q_2^*).$$

Ha lineáris keresleti függvényt tételezünk föl, akkor az egyensúly explicite is meghatározható (lásd a későbbi 2. példát $n \ge 2$ vállalat esetére).

Cournot elképzelését vitatta egy neves francia matematikus (Bertrand (1883)): kínálati verseny helyett árversenyt modellezett, ezt azonban most figyelmen kívül hagyjuk. Jellemző, hogy a matematikai közgazdászok egyrészt folytatták (például Hotelling (1929)), másrészt hevesen bírálták Cournot elméletét. Schumpeter 1954-es elmélettörténete (Schumpeter (1954)) is érdemben tárgyalta, lásd 979–983. o., bár ő is kételkedett a Cournot-egyensúly széleskörű használhatóságában.[2]

2. Neumann modellje

Egészen más úton indult el Neumann 1928-as cikkében (magyarul Neumann (1965)). Ő egy elvontabb feladatot vizsgált. Legyen két játékos: 1. és 2., absztrakt stratégiai halmazuk rendre S_1,S_2, tetszőleges stratégiája $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$, és hasznosságfüggvénye $u_1(s_1,s_2), u_2(s_1,s_2)$. Neumann-nál a stratégiák nemcsak valós számok lehetnek, mint Cournot-nál, hanem például a társasjátékokból ismert véges lépések sorozatai. A társasjátékok iránti heves érdeklődés magyarázza, hogy Neumann (1928) főleg *nullaösszegű* játékokat vizsgált:

$$u_1(s_1,s_2) + u_2(s_1,s_2) \equiv 0.$$

Történetünk szempontjából közömbös, hogy Neumann az egyensúlyt az ún. minmax-elvvel határozta meg, mi megelégszünk a Neumann-definícióval ekvivalens Cournot-egyensúly elvont felírásával:

$$u_1(s_1^*,s_2^*) \ge u_1(s_1,s_2^*), \quad s_1 \in S_1 \quad \text{és} \quad u_2(s_1^*,s_2^*) \ge u_2(s_1^*,s_2), \quad s_2 \in S_2.$$

Már a legegyszerűbb esetben is problematikus az egyensúly létezése.

1. példa. Érmepárosítás. Két játékos egymástól függetlenül, egyidejűleg elhelyez 5–5 Ft-ot Fejre vagy Írásra. Ha azonos állású választanak, az 1. nyer; ha különbözőt, akkor a 2., mindkétszer 5 Ft-ot.

1. táblázat: Érmepárosítás

2. játékos 1. játékos	Fej	Írás
Fej	$(5,-5)$	$(-5,5)$
Írás	$(-5,5)$	$(5,-5)$

Könnyű belátni, hogy itt nem létezik egyensúly. Ahhoz, hogy létezzen egyensúly, általánosítani kell a játékot *kevert stratégiákra*. Válasszon az 1. és a 2. játékos egy-egy $p,q \in [0,1]$ valós számot, és p,q *független* valószínűséggel játssza az F-stratégiát, míg $1-p, 1-q$ valószínűséggel játssza az Í-stratégiát. Ezzel mindkét játékos kiismerhetetlenné teszi viselkedését a másik előtt, matematikailag viszont ezáltal folytonossá válik az eredetileg diszkrét feladat. Ha elfogadjuk az ún. *várható hasznosság* elvét, akkor a két játékos hasznosságfüggvénye

$$u_1(p,q) = 5pq - 5p(1-q) - 5(1-p)q + 5(1-p)(1-q) \quad \text{és } u_2 \equiv -u_1.$$

Ugyancsak könnyű igazolni, hogy ebben az általánosított játékban, ahol (p,q) a stratégiapár, létezik egyensúly: $p^* = q^* = 1/2$, és mindkét játékos nyeresége 0.

1. példa (folytatás). A továbbiak miatt érdemes felírni az 1. játékos legjobb válaszát a 2. választására:

$$\tilde{p}(q) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \le q < 1/2; \\ \in [0,1], & \text{ha } q = 1/2; \\ 1, & \text{ha } 1/2 < q \le 1. \end{cases}$$

A második válaszfüggvény, $\tilde{q}(p)$ is hasonló. Figyelemre méltó, hogy a legjobb válasz – éppen az $(1/2,1/2)$ egyensúlyi pontban – halmazértékű. Emellett a két másik feltételes optimum *sarokoptimum*, amelyet a hagyományos kalkulus nehezen kezelt.

Komoly matematikai eredmény volt, hogy Neumann az egyensúly létezését általánosította kétszemélyes (véges) mátrixjátékokra, ahol az 1. játékos $k \ge 2$, a 2. játékos pedig $m \ge 2$ számú tiszta stratégia között választhat, és ezeket

$$p_1 + \cdots + p_k = 1 \qquad \text{és} \quad q_1 + \cdots + q_m = 1$$

feltételek mellett kombinálja. Ha ellenfele a j-edik stratégiáját játssza, az 1. játékos az i-ediket, és hasznossága u_{ij} valós szám, akkor az 1. játékos várható hasznosságfüggvénye

$$u_1(p,q) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} p_i u_{ij} q_j = pUq, \quad \text{ahol} \quad U = (u_{ij})$$

a nyeremények $k \times m$-es mátrixa. Ezeket a játékokat *mátrixjátékoknak* nevezzük.

1. Tétel (Neumann (1928)). *Minden kétszereplős nullaösszegű mátrixjátéknak létezik legalább egy egyensúlya.*

A továbbiak miatt utalunk arra, hogy a létezés bizonyításához Neumann egy nevezetes tételt alkalmazott.

2. Tétel (Brouwer-féle fixponttétel, 1911). *Legyen $N > 0$ egy természetes szám. Tetszőleges folytonos f leképezésnek, amely az $S \in R^N$-beli korlátos és zárt konvex halmazt önmagára képezi le, létezik legalább egy x^* fixpontja: $x^* = f(x^*)$.*

Neumann azt is belátta, hogy ha több egyensúly létezik, akkor azok *csereszabatosak*. Például jelölje a másik egyensúlypárt $(\bar{s}_1,\bar{s}_2)$. Ekkor $(s_1^*,\bar{s}_2)$ és $(\bar{s}_1,s_2^*)$ is egyensúly, valamint $i = 1,2$-re

$$u_i(s_1^*,s_2^*) = u_i(\bar{s}_1,s_2^*) = u_i(s_1^*,\bar{s}_2) = u_i(\bar{s}_1,\bar{s}_2).$$

Morgenstern közreműködésével Neumann 1944-ben publikálta játékelméleti könyvét, amelyben azonban nehezen tudott elszakadni a kétszemélyes nullaösszegű játéktól, legalábbis a nemkooperatív részben. A könyvet számos kutató korszakalkotóként üdvözölte,[3] a játékelmélet áttörésére azonban még meg kellett várni Nash egyensúlyelméletét. Érdekes, hogy Neumann, Morgenstern (1944) nem hivatkozik Cournot-ra!

A kétszemélyes nullaösszegű játékoknál megjelent dualitás később nagy hangsúlyt kapott Neumann 1938-ból származó gazdasági növekedési modelljében és Dantzig 1947-ben született lineáris programozásában (ez utóbbit Kantorovics 1939-ben publikálta először oroszul).

3. Nash felfedezése

Nash egy tehetséges matematikus diák volt Princetonban, ahol 21 éves korában, 1949-ben felfedezte az n-személyes nemkooperatív játék általános egyensúlyi fogalmát. Legyen a játékosok száma $n \ge 2$, indexük $i = 1,2,\ldots,n$; a stratégiahalmazok S_i, a stratégiák $s_i \in S_i$, a skalárértékű hasznosságfüggvények $u_i(s_1,\ldots,s_n)$.

A továbblépés előtt célszerű lesz definiálni a kétszemélyes játékbeli domináns stratégiáját. Az 1. játékos $s_1^* \in S_1$ stratégiája *domináns*, ha bármely $s_2 \in S_2$ esetén legalább akkora hasznosságot nyújt az 1. játékosnak, mint bármely másik stratégiája. A 2. játékos $s_2^* \in S_2$ stratégiája is domináns, ha bármely $s_1 \in S_1$ esetén legalább akkora hasznosságot nyújt a 2. játékosnak, mint bármely másik stratégiája. Együttesen az (s_1^*,s_2^*) domináns egyensúly, amelytől egyoldalúan egyik játékosnak sem érdemes eltérnie:

$$u_1(s_1^*,s_2) \ge u_1(s_1,s_2) \quad \text{és} \quad u_1(s_1,s_2^*) \ge u_1(s_1,s_2).$$

Talán a legnevesebb nem nullaösszegű kétszemélyes játék a közismert *fogolydilemma* (1950 körül, névadója, Tucker, Nash témavezetője volt), amelynek van domináns stratégiapárja. Mivel nem tudnak összebeszélni, mindkét fogoly jobban jár, ha elárulja a másikat, bármit tesz a másik. A legtöbb játékban azonban nincs domináns egyensúly (vö. a 2. és a 3. példát), ezért szélesebb érvényű definíciót kell keresni.

A folytatáshoz célszerű bevezetni egy Nash-től származó szellemes jelölést, amellyel az n-személyes játék szinte 2-személyesre vezethető vissza: legyen

$$s_{-i} = (s_1,\ldots,s_{i-1},s_{i+1},\ldots,s_n)$$

az i-edik játékos ellenfeleinek stratégiavektora, és $u_i(s_i,s_{-i})$ a megfelelő hasznosság.

Nash egyensúlyi definíciója a következő: minden $s_i \in S_i$-re

$$u_i(s_i^*,s_{-i}^*) \ge u_i(s_i,s_{-i}^*), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Szóban: semelyik játékosnak nem érdemes egyedül eltérnie az egyensúlytól.

Bemutatunk egy kétszemélyes, nem nulla összegű játékot, amelyben nem létezik domináns stratégiapár, de két Nash-egyensúly is létezik, amelyek azonban nem csereszabatosak.

2. példa. A nemek harca. A Fiú és a Lány szeret együtt lenni, de a Fiú inkább meccsre menne, a Lány inkább moziba. A kifizetési mátrixpár most legyen a következő:

2. táblázat: Nemek harca

Lány Fiú	mérkőzés	mozi
mérkőzés	$(3,2)$	$(1,1)$
mozi	$(0,0)$	$(2,3)$

Valóban, a Fiú számára a „meccs" stratégia jobb, mint a „mozi", ha a lány is meccsre megy ($3 > 0$), és a Lánynak is jobb, mint ha moziba menne ($2 > 1$). Hasonló érveléssel belátható, hogy a (mozi, mozi) pár is Nash-egyensúly. Felvetődik a kérdés: a résztvevők melyiket válasszák a két egyensúly közül? Hogyan koordinálja a szerelmespár a választást? (Hogy ne a lány menjen a meccsre és a fiú a moziba!)

Nash nemcsak definiálta az n-személyes egyensúlyt, hanem létezését általános mátrixjátékokra bizonyította.

3. Tétel (Nash, 1951). *Véges számú játékos véges mátrixjátékának mindig létezik legalább egy egyensúlya.*

Érdekes, hogy Nash-nek nem jutott eszébe, hogy elszakadjon a mátrixjátékoktól, és olyan keretet alkosson, amelybe például a korábban említett Cournot-modell is belefér. Ezt a viszonylag könnyű feladatot követői végezték el. Megfelelő módon általánosítva a stratégiahalmazokat és a hasznosságfüggvényeket, maximálisan kiterjesztették az alaptételt. A következő definíciókra lesz szükségünk:

Definíciók. 1. *Halmazértékű leképezésnek* nevezünk két absztrakt halmaz, X és Y közötti $f : X \to Y$ hozzárendelést, amely minden $x \in X$ ponthoz egy $f(x) \subseteq Y$ halmazt rendel. (Ha $f(x)$ minden esetben pont, akkor függvényről beszélhetünk.)

2. A folytonos függvény egyik lehetséges általánosításaként egy leképezést *felülről félig folytonosnak* nevezünk, ha bármely olyan $\{x^m\} \subseteq X$ sorozatra, amely konvergál $x \in X$-hez, és bármely $y^m \in f(x^m) \subseteq Y$, $\{y^m\}$ konvergál $y \in Y$-hoz, akkor $y \in f(x)$ teljesül. Kompakt X tér esetén ez azt jelenti, hogy az $[x, f(x)]$ gráf zárt halmaz.

3. Egy f leképezésnek az $x \in X$ pont *fixpont*ja, ha $x \in f(x)$.

4. Az $f(x,y)$ függvény *kvázikonkáv*, ha minden szintvonala konvex, azaz minden c-re az $f(x,y) = c$ egyenletet kielégítő $y(c,x)$ görbe konvex.

4. Tétel (Nikaido, Isoda (1955)). *Egy n-személyes játéknak létezik legalább egy Nash-egyensúlya, ha teljesülnek a következő feltételek:*

a) az S_i stratégiahalmaz egy m_i-dimenziós euklideszi tér nemüres, konvex és kompakt halmaza;

b) Az i-edik játékos $u_i(s_1,\ldots,s_i,\ldots,s_n)$ hasznosságfüggvénye folytonos minden változójában és kvázikonkáv s_i-ben, $i = 1,\ldots,n$.

Érdekes módon a legkézenfekvőbb bizonyítási eszköz a Cournot-féle reakciófüggvényen alapul, amelyet a játékelméletben *legjobb válasznak* neveznek, és nem pont-, hanem halmazértékű: $b_i(s_{-i})$ az i-edik játékosnak olyan stratégiai részhalmaza, hogy bármely elemét válasszuk is, nincs nála jobb válasz s_{-i}-re:

$$u_i(s_i',s_{-i}) \ge u_i(s_i,s_{-i}), \quad s' \in b_i(s_{-i}), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Ekkor a Nash-egyensúly tömörebben is megfogalmazható:

$$s_i^* \in b_i(s_{-i}^*), \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Megismételjük, Nash egy fixpontként adódó s^* stratégiavektor létezését igazolta. A technikai bonyodalmakat elkerülendő, csak utalunk a bizonyítás alapötletére. Legyen $s = (s_1,\ldots,s_n)$ a stratégiák vektora, és legyen

$$b(s) = (b_1(s_{-1}),\ldots,b_n(s_{-n}))$$

a legjobb válaszfüggvények vektora, s ennek s^* fixpontja:

$$s^* \in b(s^*).$$

A fixpont létezésének a bizonyítása már csak matematikai technika kérdése.

5. Tétel (Kakutani fixpont-tétele, 1941). *Ha X egy véges-dimenziós euklideszi tér nemüres, konvex és kompakt halmaza; ha f az X-nek egy önmagára való, felülről félig folytonos leképezése, amely minden $x \in X$-hez nemüres konvex halmazt rendel, akkor f-nek létezik fixpontja: $x^* \in f(x^*)$.*

Nash (1951) sem hivatkozik Cournot-ra,[4] de még Neumann (1928)-ra sem, csak Neumann, Morgenstern (1944)-re! Őt is túlzottan érdekelték a társasjátékok, ez magyarázza a szimmetrikus játékok külön tárgyalását és a póker modellezését. A következő példában azonban egy valódi közgazdasági modellben, egy n vállalatból álló oligopólium egyensúlyát mutatjuk be.

3. példa. Tegyük föl, hogy $P(Q) = a - bQ$ a piaci ár–keresleti függvény, és mindegyik vállalat költségfüggvénye cQ_i, ahol $c < a$. Az n-szereplős oligopolista egyensúlyban mindegyik vállalat egyensúlyi kibocsátása azonos, és fordítva arányos $1+n$-nel:

$$Q_i^*(n) = \frac{a-c}{(n+1)b}, \qquad i = 1,2,\ldots,n.$$

Hangsúlyozzuk, hogy minél több egyforma vállalat verseng egymással, annál nagyobb az össztermelés:

$$Q^*(n) = \frac{(a-c)n}{(n+1)b}.$$

és annál alacsonyabb a piaci ár:

$$P^*(n) = c + \frac{a-c}{n+1}, \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Határértékben megvalósul a *tökéletes verseny*:

$$Q^*(\infty) = \frac{a-c}{b} \quad \text{és} \quad P^*(\infty) = c.$$

Szomorú, hogy amikor Nash személyesen közölte Neumann-nal korszakalkotó eredményét, Neumann képtelen volt felkarolni az eredményt: „Fixponttétel" – utalt a bizonyítás számára nyilvánvaló alapjára, és másra terelte a beszélgetést. (Az említett interjúban Nash nem szomorkodik, és még egy tévedést elkövet: „a játékelméletben ő [Neumann] nem használt fixpont-tételeket." Dehogynem. Más kérdés, hogy a konvex halmazokat elválasztó síkjának létezését kimondó tétel is elegendő lett volna a mátrixjátékok minmax-tételének bizonyításához.)

Bár a Kuhn–Tucker cikkben (Kuhn, Tucker (1958)), amely Neumann játékelméleti és közgazdaságtani eredményeit tekinti át, már megjelenik Nash (1951), de eléggé halványan. Ugyanakkor az általános egyensúlyelmélet klasszikus kifejtésében a létezési tétel bizonyítása (Arrow, Debreu (1954)) már a Nash-egyensúlyra épült.[5]

Zárásként megemlítjük, hogy 1950/51-es megjelenése óta a Nash-egyensúly a nemkooperatív játékelmélet alapja lett. Ez nem jelenti azonban azt, hogy a Nash-egyensúly minden nemkooperatív játékelméleti kérdést megold. Az elméletnek csupán két problémáját említem meg, azokat is csak távirati stílusban:

– Ha több egyensúly létezik (nemek harca), akkor hogyan koordinálják a játékosok a választásukat (Selten, 1965)?

– Mi történik, ha a játékosok nem ismerik egymás stratégiahalmazait és hasznosságfüggvényeit (Harsányi, 1967)?

A Nash-egyensúly beérését jól jelzi, hogy 1994-ben először kaptak játékelméleti kutatók közgazdasági Nobel-díjat. Nash mellett a másik két díjazott az imént említett Harsányi és Selten volt. Ha az 1903-ban született Neumann megéri a díj 1969-es alapítását, akkor nagy valószínűséggel az első díjazottak közt lett volna – akár a növekedési modelljéért, akár a Neumann–Morgenstern-féle hasznosságfüggvény megalkotásáért.

Irodalomjegyzék

K. Arrow, G. Debreu (1954) „Existence of Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica 22*, 265–290. o.

J. Bertrand (1883) „Theorie mathematique de la richesse sociale et recherches sur les principles mathematiques de la theorie des richesses", *Journal de Savants 67*, 499–508. o.

A. Cournot (1838) *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth* francia eredeti angol fordítása, 1897.

W. Fellner (1949) *Competition among the Few*. New York, Knopf.

H. Hotelling (1929) „Stability of Competition", *Economic Journal 39* 41–57. o.

L. Hurwicz (1945) „The Theory of Economic Behavior," *American Economic Review, 35*, 909–925. o.

H. Kuhn, A. W. Tucker (1958) „John von Neumann's Work on the Theory of Games and Mathematical Economics", *Bulletin of American Mathematical Society*, 1958.

R. J. Leonard (1994) „Reading Cournot, Reading Nash: The Creation and Stabilization of the Nash Equilibrium," *The Economic Journal, 104*, 492–511. o.

J. Marschak (1946) „Von Neumann and Morgenstern's New Approach to Statc Economics", *Journal of Political Economy 54*, 97–115. o.

S. Nasar (1998) *Egy csodálatos elme*, az angol eredeti magyar fordítása, Bp. Gabo, 2002.

J. Nash (1950a) „Equilibrium Points in N-Person Games", *Proceeding of the National Academy of Scieneces of the USA*, 36:1, 48–49. o.

J. Nash (1950b) „The Bargaining Problem", *Econometrica, 18*, 155-162. o.

J. Nash (1951) „Non-Cooperative Games", *Annals of Mathematics, 2nd series*, 54:2, 286–295. o.

J. Neumann (1928) „Zur Theories der Gesellschaftsspiele", *Math. Ann. 100*, 295–320.

J. Neumann, O. Morgenstern (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton Univ. Press, Princeton NJ, első kiadás.

J. Neumann (1965) *Válogatott előadások és tanulmányok*, Budapest, KJK, 1965.

H. Nikaido, K. Isoda (1955) „Note on Noncooperative Convex Games", *Pacific Journal of Mathematics 5*, 807–815. o.

M. Raussen, C. Skau (2015) Interjú Nash-sel, fordította Matolcsi Máté, Érintő, 2016, szept. https://ematlap.hu/interjuk-portrek-2016-09/326-interju-a-2015-ben-abel-dijat-nyert-john-f-nash-jr-professzorral

J. Schumpeter (1954) 19 [19] *History of Economic Analysis*. NYC, Oxford University Press.

H. von Stackelberg (1934) *The Theory of the Market Economy*, London, W. Hodge, a német eredeti angol fordítása.

Simonovits András
ELKH KRTK KTI, BME, MI

Lábjegyzetek

---

[1] Köszönettel tartozom Madarász Aladárnak, aki fölhívta a figyelmem Leonard (1994) cikkére, amelynek néhány megállapítására lábjegyzetekben hivatkozom. A részletek után érdeklődőknek ajánlom a teljes cikk elolvasását.

[2] Két további fontos Cournot-hivatkozást idézek Leonard (1994)-ből: Stackelberg (1934) dinamikusan kiterjesztette a Cournot-egyensúlyt vezető és követő vállalatra, Fellner (1949) elutasította Cournot reakciógörbéin alapuló rejtett dinamikát.

[3] Azonnali recenziók Neumann, Morgenstern (1944)-ről: Hurwicz (1945) és Marschak (1946).

[4] Az alkuról szóló Nash (1950b) cikk viszont megemlíti Cournot nevét is.

[5] Figyelemre méltó, hogy a princetoni és más közgazdászok először hevesen ellenezték a játékelmélet közgazdasági térfoglalását.

John Nash · játékelmélet · alkalmazott matematika

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

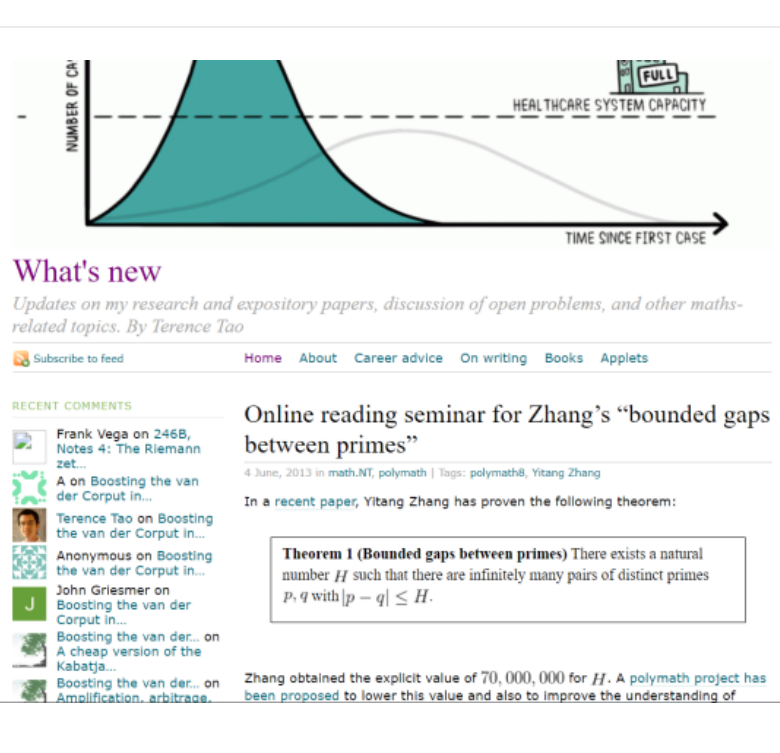
Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Harcos Gergely 2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Visszatekintés: Polymath8


NUMBER OF CA
FULL
HEALTHCARE SYSTEM CAPACITY
TIME SINCE FIRST CASE
Subscribe to feed
Home About Career advice On writing Books Applets
RECENT COMMENTS
Frank Vega on 246B, Notes 4: The Riemann zet…
A on Boosting the van der Corput in…
Terence Tao on Boosting the van der Corput in…
Anonymous on Boosting the van der Corput in…
John Griesmer on Boosting the van der Corput in…
Boosting the van der… on A cheap version of the Kabatja…
Boosting the van der… on Amplification, arbitrage…

What's new

Updates on my research and expository papers, discussion of open problems, and other maths-related topics. By Terence Tao

Online reading seminar for Zhang's "bounded gaps between primes"

4 June, 2013 in math.NT, polymath | Tags: polymath8, Yitang Zhang

In a recent paper, Yitang Zhang has proven the following theorem:

Theorem 1 (Bounded gaps between primes) There exists a natural number H such that there are infinitely many pairs of distinct primes p, q with $|p-q| \leq H$.

Zhang obtained the explicit value of $70,000,000$ for H. A polymath project has been proposed to lower this value and also to improve the understanding of

2013. május 13-án Yitang Zhang előadást tartott a Harvard egyetemen. Az előadó nevét akkoriban kevesen ismerték, a vázolt eredményt pedig a legtöbben elérhetetlennek tartották: a szomszédos prímszámok különbsége nem tart a végtelenhez. Az előadásról másnap a *Nature* magazin is beszámolt, hozzátéve, hogy Zhang bizonyítását az *Annals of Mathematics* lektorai elsőrangúnak tartották és közlésre javasolták. A bizonyítás Daniel A. Goldston, Pintz János és Cem Y. Yıldırım módszerét feljeszti tovább, akik 2005-ben az Elliott–Halberstam-sejtés feltevése mellett igazolták, hogy a szomszédos prímek közötti különbség végtelen sokszor legfeljebb 16. Zhang az Elliott–Halberstam-sejtés egy gyengített változatát igazolta, és ebből le tudta vezetni, hogy a szomszédos prímek közötti különbség végtelen sokszor legfeljebb 70 millió. Azonnal megindult a találgatás, hogy a bizonyítás finomhangolásával (pl. az Elliott–Halberstam-sejtés Zhang-féle gyengítésének erősítésével) nem lehet-e a 70 milliós korlátot csökkenteni és Goldston–Pintz–Yıldırım 16-os korlátjához közelíteni. Terence Tao ebből a célból indította el 2013. június 4-én a Polymath8 projektet.

Míg Yitang Zhang egyedül és titokban dolgozott, addig a Polymath projektek célja minél több ember bevonása a teljes nyilvánosság mellett. Hogy az utóbbi lehetséges-e és szükséges-e, azt Timothy Gowers vetette fel először, 2009. január 27-én. A matematikai kutatás egy új formájáról van szó, amelynek kiváló eredményeket köszönhetünk – olyanokat is, amelyeket a hagyományos módon valószínűleg nem értünk volna el. A Polymath8 projekt kiemelkedően sikeres volt: jelentősen erősítette az Elliott–Halberstam-sejtés Zhang-féle variánsát [2], továbbá az említett 70 milliós korlátot levitte 246-ra [3]. Minderről írtam részletes összefoglalót [1].

A fentiekkel egyidőben én személyesen rossz híreket kaptam: két kutatási pályázatomat is elutasították. Talán ennek is köszönhető, hogy rögtön az elején belevetettem magam a Polymath8 projektbe. Már 2013. június 5-én hozzászóltam Tao blogbejegyzéséhez, amit további 250 hozzászólásom követett azon a nyáron. Hiszen levegőváltásra volt szükségem, a saját projektjeimre pár hónapig rá se tudtam nézni. A közös munkát úgy kell elképzelni, mint a hagyományos – tábla előtti vagy emailben zajló – eszmecserét. Annyi a különbség, hogy többen vagyunk, és ezért jobban pörög a dolog. Eleinte gátló, később pedig felszabadító érzés, hogy hibázhatunk, és a hibáinkat mindenki látja. Hiszen mindenki hibázik, a Fields-érmes matematikus ugyanúgy, mint a műkedvelő amatőr. A Polymath8 átsegített egy nehéz időszakon, és összehozott olyan kollégákkal, akikkel máskülönben nem írtam volna közös cikket. Nem utolsósorban mindenki nyomon követte a projektet: azok is, akik elképzelhetetlennek tartották, hogy ilyen módon komoly eredmények születhetnek. A résztvevők élményeit és tapasztalatait gyűjti egybe a [4] cikk.

Irodalomjegyzék

[1] G. Harcos, Prímek, Polignac, Polymath, *Mat. Lapok (N.S.)* 20 (2014), no. 2, 1–13.

[2] D. H. J. Polymath, New equidistribution estimates of Zhang type, *Algebra & Number Theory* 8 (2014), 2067–2199.

[3] D. H. J. Polymath, Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes, *Res. Math. Sci.* 1 (2014), no. 12, 83 oldal.

[4] D. H. J. Polymath, The "Bounded gaps between primes" Polymath project – A retrospective analysis, *EMS Newsletter*, no. 94, December 2014, 13–23.

Harcos Gergely
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

hálózatok számelmélet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Backhausz Ágnes 2021. MÁRCIUS, TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...?

Mennyit teszteljünk? 3. rész − a Bayes-becslésről

Cikkünk első két részében azzal foglalkoztunk, hogy hány tesztelést kell végeznünk, ha adott pontossággal szeretnénk megállapítani, megbecsülni egy adott betegségben szenvedők arányát. Ehhez felidéztük a normális eloszlással való közelítést, a konfidenciaintervallum fogalmát, és bemutattuk a maximum-likelihood becslést, ami alátámasztotta azt a természetesnek tűnő becslési módszert, hogy az ismeretlen valószínűséget a bekövetkezett kísérletek arányával becsüljük. Ahogy azonban az alábbi kérdés rávilágít, még ennek az egyszerű módszernek is lehetnek hátrányai.

Kérdés. Tegyük fel, hogy egy oltás számunkra ismeretlen p valószínűséggel okoz súlyos mellékhatást. Beoltottunk (a) $n=40$; (b) $n=400$; (c) $n=4000$ embert, közülük senkinél nem tapasztaltunk ilyet. Adjunk becslést p értékére.

A korábban látott egyszerű módszerrel mindhárom esetben 0 adódik p becslésére: a súlyos mellékhatás bekövetkezésének száma osztva az összes kipróbálás számával. Azonban világos, hogy a (c) esetben valójában sokkal több információnk van a p-ről, mint az (a) esetben. Kérdés, hogy ezt milyen módon tudjuk a becslésben kifejezni.

Egy lehetőség a konfidenciaintervallum, amikor például azt mondjuk, egy megfelelően választott p_0 számmal, hogy a megfigyeléseink alapján p értéke legfeljebb p_0, és ezt 95%-os megbízhatósággal állítjuk, vagyis a tévedésünk valószínűsége legfeljebb 5% (abban az értelemben, amit cikkünk 2. részében [2] fejtettünk ki részletesebben). Azonban itt sem mindegy, hogy milyen módszert használunk: a konfidenciaintervallumról egyrészt megállapítottuk, hogy éppen a kicsi vagy egyhez közeli p értékek esetén nem jól használható (hiszen nem teljesülnek annak a közelítő módszernek a feltételei, amiből kiindultunk), másrészt középpontja szintén az előfordulások aránya, vagyis a 0, az pedig nem a legoptimálisabb, ha azt mondjuk, hogy a valószínűség például $-0{,}01$ és $0{,}01$ között van. Más módszerekkel erre a feladatra is lehet jó konfidenciaintervallumot készíteni [1], most azonban ennek ismertetése helyett egy, a korábbitól eltérő becslési módszert mutatunk be: a Bayes-becslést.

A Bayes-becslés nemcsak abban különbözik a korábban látott maximumlikelihood-módszertől, hogy bizonyos helyzetekben természetesebb eredményre vezet, hanem abban is, hogy lehetőséget ad az ismeretlen p paraméterre vonatkozó előzetes, *a priori* információik beépítésére. Ami sok esetben előny, hiszen így pontosabb becslést kaphatunk, más szempontból viszont hátrány is: ha hibás volt az eredeti feltételezésünk, az a végeredményben is megmutatkozhat. Ez azonban nem csak a Bayes-becslés sajátja, hasonló jelenséggel a statisztika számos más módszerénél is találkozunk.

1. Diszkrét a priori eloszlás

Visszatérve az eredeti kérdésünkre, nézzünk egy egyszerű példát arra, hogy a p-re vonatkozó előzetes ismereteinket hogyan fogalmazhatjuk meg, és milyen becslést kapunk eredményül. A Bayes-módszer alapötlete az, hogy az ismeretlen paramétert is véletlennek tekinti, nem csak a megfigyeléseket, vagyis, a paraméterre vonatkozó előzetes információt úgy fejezi ki, hogy megmondja, hogy a paraméter egyes értékeit vagy értéktartományait mennyire tartja valószínűnek.

A példa kedvéért tegyük fel, hogy az előzetes információnk szerint a súlyos mellékhatás valószínűsége, vagyis p egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon, és tegyük fel azt is, hogy egyelőre p-nek csak a tizedesre kerekített értékére vagyunk kíváncsiak. Legyenek tehát p lehetséges értékei $0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ \ldots,\ 0{,}9$, és mindegyiknek $1/10$ a valószínűsége. Úgy is mondhatjuk, hogy a p paraméter *a priori eloszlása* egyenletes eloszlás a $0,\ 0{,}1,\ 0{,}2,\ldots,\ 0{,}9$ számokon.

A kérdés (a) esetében $n=40$ ember közül egyiknél sem jelentkezett súlyos mellékhatás. Ha például $p=0{,}9$ lenne, akkor várhatóan $40\cdot 0{,}9=36$ embernél lép fel ilyen, annak valószínűsége, hogy senkinél nem jelentkezik, nagyon-nagyon kicsi: $0{,}1^{40}=10^{-40}$, ez nagyságrendileg annak valószínűségével egyezik meg, mint hogy öt egymást követő héten öttalálatosunk lesz a lottón. Ha viszont $p=0{,}1$, akkor már csak várhatóan 4 embernél lép fel súlyos mellékhatás, a 0 érték sem ennyire elképzelhetetlen: a 0 megfigyelés valószínűsége $0{,}9^{40}=0{,}015$, lényegesen nagyobb az előzőnél. Ez arra utal, hogy bár előzetesen azt feltételeztük, hogy a $0{,}1$ és $0{,}9$ egyformán valószínűek, a megfigyelések alapján ezt újragondolva a $0{,}1$-et sokkal valószínűbbnek gondolhatjuk, mint a $0{,}9$-et. Arról nem is beszélve, hogy a $p=0$ esetén biztos, hogy senkinél nem tapasztalunk súlyos mellékhatást, így ez még valószínűbbnek tűnik. A maximumlikelihood-módszer ez alapján az érvelés alapján meg is állna, és a lehetséges tíz érték közül a $p=0$-t választaná, hiszen ebben az esetben a legnagyobb annak valószínűsége, amit megfigyeltünk. A Bayes-módszer pedig pontosan kiszámítja, hogy a megfigyelések után melyik értéket mennyire tartjuk valószínűnek, méghozzá a feltételes valószínűség fogalma alapján. Hiszen bekövetkezett az az esemény, hogy 40 ember közül senkinél nem tapasztalunk súlyos mellékhatást, így az „új” valószínűségeket erre vonatkozóan, feltételes valószínűségként tudjuk leírni.

Legyen tehát B az az esemény, hogy 40 ember közül senkinél nem volt súlyos mellékhatás, A_k pedig az az esemény, hogy p értéke $k/10$ (itt $k=0,1,\ldots,9$ a lehetséges értékek). Ekkor a

$$\mathbb{P}(p=k/10\mid B)=\mathbb{P}(A_k\mid B)$$

feltételes valószínűség mondja meg, hogy a megfigyelések alapján a $k/10$ értéket mennyire tartjuk valószínűnek. A feltételes valószínűség definíciója (lásd például [3]) alapján:

$$\mathbb{P}(A_k\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A_k\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B\mid A_k)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}\cdot(1-k/10)^{40}}{\mathbb{P}(B)}. \tag{1}$$

Itt a számláló annak a valószínűsége, hogy p értéke $k/10$ *és* a 40 ember közül senkinél sem jelenkezett súlyos mellékhatás. Az előbbi valószínűsége $1/10$ volt minden lehetséges k értékre az a priori eloszlás szerint, ha pedig $p=k/10$, akkor 40 független kísérletben $(1-k/10)^{40}$ annak a valószínűsége, hogy egyszer sem lép fel súlyos mellékhatás.

Kérdés, hogy a nevezőben B valószínűségét hogyan írhatjuk fel. Vegyük észre, hogy ha p értéke ismert, akkor annak valószínűségét, hogy B bekövetkezik, könnyen ki tudtuk számolni. Vagyis a $\mathbb{P}(B\mid A_k)$ feltételes valószínűségeket meg tudtuk határozni. Mivel pedig az A_k események közül pontosan az egyik következik be, és a valószínűségeiket is ismerjük, a teljes valószínűség tételét (lásd például [3]) alkalmazva:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B)&=\mathbb{P}(B\mid A_0)\mathbb{P}(A_0)+\mathbb{P}(B\mid A_1)\mathbb{P}(A_1)+\mathbb{P}(B\mid A_2)\mathbb{P}(A_2)+\ldots+\mathbb{P}(B\mid A_9)\mathbb{P}(A_9)=\\&=1\cdot 0{,}1+0{,}9^{40}\cdot 0{,}1+0{,}8^{40}\cdot 0{,}1+\ldots+0{,}1^{40}\cdot 0{,}1.\end{aligned} \tag{2}$$

Ezt az (1) egyenlettel összevetve megkapjuk a p lehetséges értékeinek a megfigyelések alapján számolt feltételes, *a posteriori* valószínűségét:

$$\mathbb{P}(A_k\mid B)=\frac{(1-k/10)^{40}}{1+0{,}9^{40}+0{,}8^{40}+\ldots+0{,}1^{40}}.$$

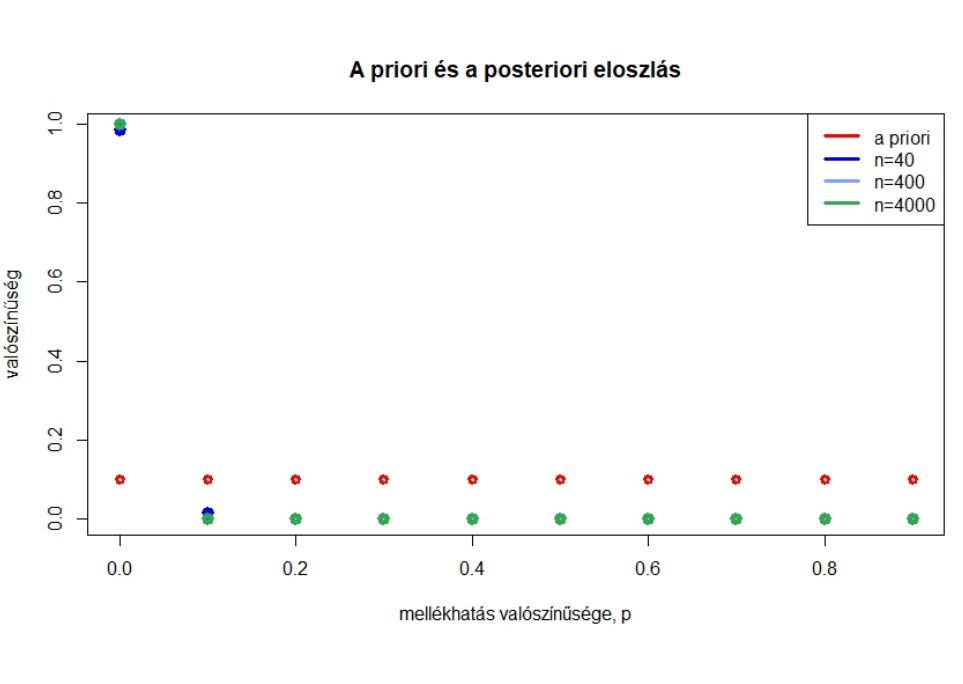
Ugyanehhez jutottunk volna Bayes tételének alkalmazásával is, innen adódik a módszer neve. A számításokhoz visszatérve, például a $p=0{,}9$ feltételes valószínűsége arra vonatkozóan, hogy az $n=40$ ember közül senkinél nem jelentkezett súlyos mellékhatás:

$$\mathbb{P}(p=0{,}9\mid B)=\mathbb{P}(A_9\mid B)=\frac{0{,}1^{40}}{1+0{,}9^{40}+0{,}8^{40}+\ldots+0{,}1^{40}}=9{,}9\cdot 10^{-41}.$$

Ugyanez $p=0{,}1$ esetén:

$$\mathbb{P}(p=0{,}1\mid B)=\mathbb{P}(A_1\mid B)=\frac{0{,}9^{40}}{1+0{,}9^{40}+0{,}8^{40}+\ldots+0{,}1^{40}}=0{,}015.$$

Tehát, az, hogy a B esemény bekövetkezése a $p=0{,}1$ érték esetén sokkal valószínűbb, mint $p=0{,}9$ esetén ($0{,}015$, illetve 10^{-40}, ahogy korábban láttuk), azt eredményezi, hogy a $p=0{,}1$ érték megfigyelések utáni, *a posteriori* valószínűsége sokkal nagyobb, mint a $p=0{,}9$ értéké. Ilyen módon tudjuk újragondolni az egyes lehetséges értékek valószínűségéről alkotott elképzeléseinket a kísérletek elvégzése alapján – és ebben az esetben még csak az sem kellett, hogy a p-ről előzetesen nagyon pontos ismeretekkel rendelkezzünk.



1. ábra. A $p=0, 0{,}1,\ldots, 0{,}9$ értékek valószínűsége az előzetes elképzelés szerint, illetve arra feltételesen, hogy $n=40$, 400, 4000 kísérletből egyszer sem volt súlyos mellékhatás

Kérdés, mi történik, ha a kísérletek számát növeljük, de továbbra is azt feltételezzük, hogy senkinél nem volt súlyos mellékhatás. Az 1. ábrán azt láthatjuk, hogy $n=40$, 400, 4000 esetén hogyan alakulnak ezek a valószínűségek. Mivel az értékek egymáshoz közeliek, nézzük meg ezt egy táblázat segítségével is. A táblázatban kerekített értékek szerepelnek, ha pedig $p\geq 0{,}4$, még ezeknél is kisebb értékeket kapunk. Összességében azt láthatjuk, hogy minél nagyobb a kísérletek száma, annál közelebb van a 0 a posteriori valószínűsége az 1-hez, és hogy 400 kísérlet elég ahhoz, hogy a $0{,}1$ és nagyobb értékek a posteriori valószínűsége elhanyagolhatóvá váljon.

p	a priori	$n=40$	$n=400$	$n=4000$
0	0,1	0,99	1	1
0,1	0,1	0,015	$5\cdot 10^{-19}$	$9\cdot 10^{-184}$
0,2	0,1	0,0001	$2\cdot 10^{-39}$	0
0,3	0,1	$6\cdot 10^{-7}$	10^{-62}	0

Egy másik, talán még fontosabb kérdés az, hogy mi történik, ha p lehetséges értékeinek halmazát bővítjük. Eddig összesen 10-féle lehetőséget engedtünk meg, a táblázatból pedig arra következtethetünk, hogy a 0 sokkal valószínűbb, mint a $0{,}1$ vagy a még nagyobb értékek. Ehhez még a Bayes-becslés sem feltétlenül kellett volna, ha azonban több lehetséges értéket is megengedünk, akkor pontosabb információhoz is juthatunk.

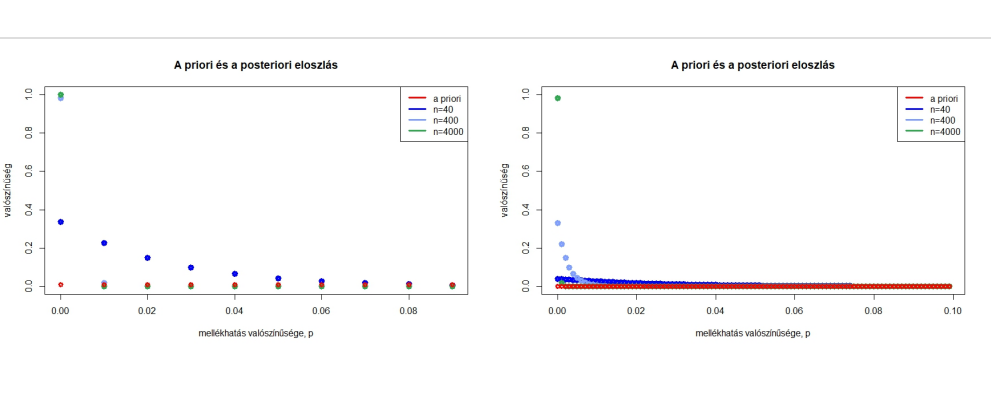
Módosítsuk tehát az a priori eloszlást, úgy, hogy nem tizedekre, hanem századokra kerekített p valószínűségeket hasonlíthassunk össze. A lehetséges értékek legyenek 0, $0{,}01$, $0{,}02$, $0{,}03$, $\ldots$, $0{,}99$, és továbbra is legyen mindegyiknek azonos, $1/100$ a valószínűsége az előzetes feltételezésünk szerint. Legyen most A_k az az esemény, hogy a p értéke $k/100$ (itt $k=0,1,\ldots,99$. A (2) egyenlethez hasonlóan, ha n kísérletből egyik alkalommal sem lépett fel súlyos mellékhatás:

$$\mathbb{P}(A_k\mid B)=\frac{(1-k/100)^n}{1+0{,}99^n+0{,}98^n+\ldots+0{,}01^n}. \tag{3}$$

Tehát ha például $n=40$ kísérletből egyszer sem volt súlyos mellékhatás, akkor

$$\mathbb{P}(A_5\mid B)=\mathbb{P}(p=0.05\mid B)=\frac{0{,}95^{40}}{1+0{,}99^{40}+0{,}98^{40}+\ldots+0{,}01^{40}}.$$

Készítsünk ez alapján is ábrát az a posteriori valószínűségekről, a különböző mintaelemszámok esetén, illetve készítsük el ugyanezt század helyett ezred pontosságú skálán is (a számolás ugyanaz, csak az a priori eloszlás a 0, $0{,}001, 0{,}002,\ldots, 0{,}999$ ezer lehetséges értéknek ad azonos valószínűségeket).



2. ábra. Az egyes $p=0, 0{,}01, 0{,}02,\ldots, 0{,}99$ (bal oldal), illetve $p=0, 0{,}001, 0{,}002,\ldots, 0{,}999$ értékek valószínűsége az előzetes elképzelés szerint, illetve arra feltételesen, hogy $n=40$, 400, 4000 kísérletből egyszer sem volt súlyos mellékhatás

Ahogy a 2. ábrán látjuk, egyrészt, az a posteriori eloszlás szerint minden esetben a kisebb p-k lesznek nagyobb valószínűségűek. Ugyanakkor azt is láthatjuk, hogy a posteriori eloszlás függ az előzetes feltételezésünktől, vagyis attól, hogy eredetileg milyen lehetséges értékeket tekintettünk. Például ha $n=40$, akkor csak azt állapíthatjuk meg, hogy a $0{,}04$-nél nagyobb értékek nem túl valószínűek, ha $n=400$, akkor ez a $0{,}01$-nél nagyobb értékekre is elmondható – azzal valamennyire összhangban, hogy n kísérletből nem várható, hogy $1/n$-nél nagyobb pontossággal meghatározzuk a kérdéses valószínűséget.

2. Folytonos a priori eloszlás

Az eddigi gondolatmenettel kapcsolatban felvetődik, hogy nem tudnánk-e előzetes és utólagos kerekítések nélkül becsülni p-t, tizedektől, századoktól függetlenül, hogy a kerekítésektől ne függjön az eloszlás.

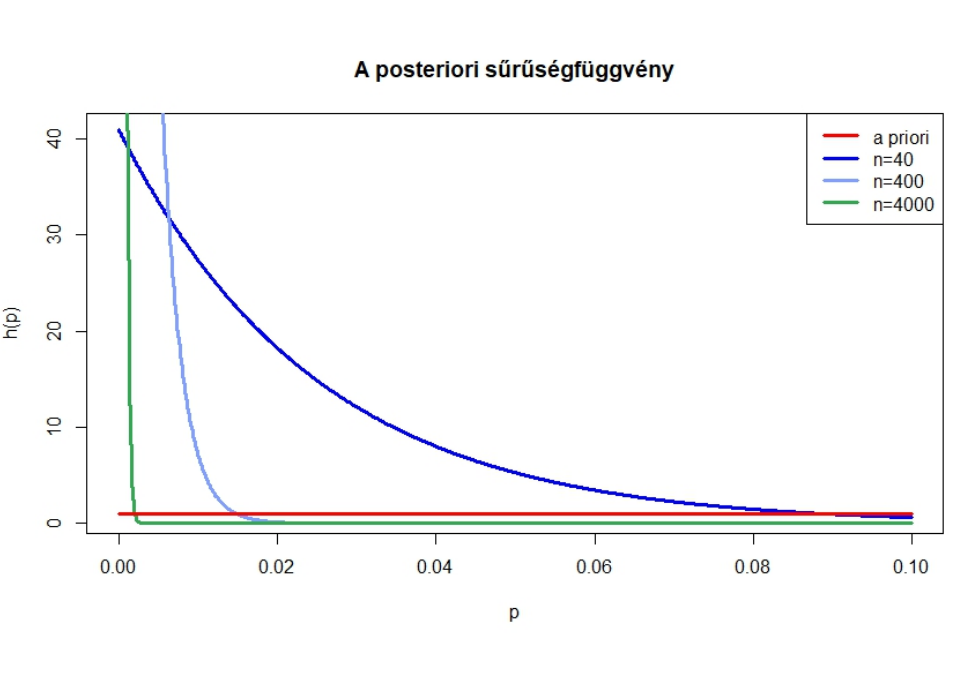
Ehhez tegyük fel, hogy a súlyos mellékhatás kialakulásának p valószínűségéről azt feltételezzük előzetesen, hogy egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Ilyenkor tehát már végtelen sok lehetséges érték van, és például a korábban kiszámított $\mathbb{P}(p=0{,}05)$ valószínűségre nullát kapnánk, annak megfelelően, hogy előzetesen minden konkrét értéknek 0 a valószínűsége. Ha azonban újra megnézzük a (3) egyenletet, azt láthatjuk, hogy a jobb oldalának tudunk értelmet adni. A számlálóban annak valószínűsége szerepel, hogy feltéve, hogy p értéke $k/100$, mennyi a valószínűsége, hogy az n kísérletből egy sem következik be, ez nem más, mint $(1-p)^n$. A nevezőbe annak valószínűsége került, hogy az n kísérletből egy sem következik be. Ezt a teljes valószínűség tételének egy általánosabb változata alapján írhatjuk fel, értéke (az előző összegek analógiájára) $\int_0^1(1-y)^n dy$. Amit pedig megkapunk így, az nem más, mint az *a posteriori sűrűségfüggvény*:

$$h(p)=\frac{(1-p)^n}{\int_0^1(1-y)^n\,dy}=(n+1)(1-p)^n,$$

ha a nevezőben szereplő integrált is kiszámítjuk.

Ezt a következőre használhatjuk fel. Ha meg szeretnénk tudni, hogy egy $A\subseteq[0,1]$ (megfelelő) halmazba mennyi valószínűséggel esik p értéke arra feltételesen, hogy B bekövetkezett, vagyis nem volt súlyos mellékhatás egyik esetben sem, akkor így számolhatunk:

$$\mathbb{P}(p\in A\mid B)=\int_A h(x)\,dx=(n+1)\cdot\int_A(1-x)^n\,dx.$$



3.ábra. Az a posteriori sűrűségfüggvények arra feltételesen, hogy $n=40$, 400, 4000 kísérletből egyszer sem volt súlyos mellékhatás

A $h(p)$ függvényeket $n=40$, 400 és 4000 kísérlet esetén a 3. ábrán láthatjuk. A sűrűségfüggvény nagy értékei jelzik azokat a tartományokat, ahova p nagy valószínűséggel esik. Tehát az $n=40$ kísérlet elégnek tűnik ahhoz, hogy megállapítsuk, hogy p nagy valószínűséggel nem több 8%-nál, de azt már nem mondhatjuk, hogy p kisebb lesz, mint 2%, hiszen a sűrűségfüggvény alatti terület nagyjából fele a 2%-tól jobbra esik. Az $n=400$ kísérletből arra juthatunk, hogy p nagy valószínűséggel 0 és 2% között van, míg $n=4000$ esetén azt is mondhatjuk, hogy p nagy valószínűséggel kisebb egy ezrednél, legalábbis az a posteriori eloszlás szerint.

3. A Bayes-becslés

Az eddigi számításokból a leglényegesebb még nem derült ki: mi is lesz a Bayes-becslés, vagyis az a szám, amiről azt állíthatjuk a megfigyeléseink alapján, hogy közel van a valódi p-hez, legalábbis valamilyen értelemben, például elég nagy valószínűséggel.

Most tehát végeredményképpen nem egy eloszlást és nem egy sűrűségfüggvényt szeretnénk, ami megmondja, hogy p milyen tartományokba milyen valószínűségekkel esik, hanem egyetlen számot. Esetleg ezt a számot sorsolhatjuk véletlenül: mondhatjuk, hogy a p-nek olyan véletlen számot választunk, amit a $h(p)$ sűrűségfüggvény által leírt eloszlásból sorsolunk. Ez azonban még nem túlságosan stabil, az eljárást ismételve egészen más eredményeket kaphatunk. Ha azonban sokszor kisorsolnánk p-t a $h(p)$ sűrűségfüggvény által leírt eloszlásból, majd átlagot vennénk, az már egyetlen szám lenne, és stabil, a mintától függ, de további véletlenítéstől nem. A nagy számok törvényéből (lásd például: [3]) tudjuk, hogy az átlag az eloszlás várható értékéhez konvergál, ha a mintaelemszámmal végtelenhez tartunk, és megfelelő feltételek teljesülnek. Tehát, ha így gondolkodunk, akkor lényegében az *a posteriori eloszlás várható értéke* lesz a tippünk.

Ez valójában a leggyakrabban alkalmazott módszer a Bayes-becslésre, az a posteriori eloszlás alapján. Az átlagoláson kívül még egy érv szól mellette: be lehet látni, hogy ez a várható érték az a becslés, amely bizonyos értelemben minimalizálja a tippünk és az igazi érték távolságát. Ez a minimalizáló tulajdonság az, ami alapján a Bayes-becslést meg szokták határozni.

Lássuk, mit ad ez a konkrét esetekben. Az a posteriori sűrűségfüggvényből a szokásos módon számíthatjuk ki a várható értéket, ez lesz tehát becslésünk p-re:

$$\begin{aligned}\hat{p}&=\int_0^1 p\cdot h(p)\,dp=\int_0^1 p\cdot(n+1)(1-p)^n\,dp\overset{x=1-p}{=}\\&=(n+1)\int_0^1(1-x)x^n\,dx=(n+1)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}.\end{aligned}$$

Tehát ha n független kísérletből egyszer sem következik be a súlyos mellékhatás, és a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlás az előzetes feltevés, akkor a súlyos mellékhatás valószínűségére adott becslésünk $1/(n+2)$. A korábban vizsgált esetekben ez így alakul:

n	40	400	4000
$\hat{p}$	2,39%	0,249%	0,025%.

Másképpen, ez azt is jelenti, hogy ha például azt szeretnénk bizonyítani, hogy a súlyos mellékhatás valószínűsége legfeljebb $0{,}025\%$, akkor legalább 4000 vizsgálatot kell végeznünk. Általában, ha a súlyos mellékhatás valószínűsége legfeljebb q lehet, akkor legalább

$$n=\frac{1}{q}-2$$

vizsgálatra van szükség. Ugyanis ebből a szempontból az, hogy egyetlen esetben sem tapasztalunk mellékhatást, a lehető legjobb eset: ha néhány esetben mellékhatás következik be, akkor $\hat{p}$ értéke nagyobb lesz.

A számolás részleteit mellőzve, a fentihez hasonló érveléssel azt lehet belátni, hogy ha n kísérletből k esetben tapasztalunk súlyos mellékhatást, akkor

$$\hat{p}=\frac{k+1}{n+2}.$$

Ahogy a bevezetésben említettük, ez a becslés függ az előzetes feltevésünktől is, vagyis az a priori eloszlástól. Erre is nézzünk egy példát. Eddig abból indultunk ki, hogy p egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumon. Tegyük fel először, hogy előzetesen is sejtjük, hogy p kicsi, az a priori sűrűségfüggvény legyen például $(r+1)(1-p)^r$, ahol $r\geq 0$ tetszőleges. Ez ugyanis a 0 körül nagyobb értékeket vesz fel, mint az 1 körül. Nézzünk meg azt is, hogy ha előzetesen éppen hogy rossz a feltevésünk, vagyis a 0 körüli értékek a kevéssé valószínűek, akkor mennyire „javul meg” a becslés a bayes-i módszerrel. Ehhez például legyen a priori sűrűségfüggvény $(r+1)p^r$.

a priori sűrűségfüggvény	$n=40, k=0$	$n=400, k=0$	$n=4000, k=0$	általános
egyenletes	$2{,}39\%$	$0{,}249\%$	$0{,}025\%$	$\frac{k+1}{n+2}$
$10(1-p)^9$	$1{,}96\%$	$0{,}243\%$	$0{,}025\%$	
$(r+1)(1-p)^r$	$\frac{1}{40+r+2}$	$\frac{1}{400+r+2}$	$\frac{1}{4000+r+2}$	$\frac{k+1}{n+r+2}$
$10p^9$	$19{,}6\%$	$2{,}43\%$	$0{,}243\%$	
$(r+1)p^r$	$\frac{r+1}{40+r+2}$	$\frac{r+1}{400+r+2}$	$\frac{r+1}{4000+r+2}$	$\frac{k+r+1}{n+r+2}$

Itt tehát az látható, hogy az előzetes feltevés lényeges hatással van a becslésre, a becsült értékek között nagyságrendi eltérést is láthatunk a $k=0$ esetben. A „tipikus” esetben persze az történik, hogy n értékét növelve a bekövetkezett kísérletek száma, k is növekszik, így ha k és n elég nagy r-hez képest, akkor a három érték már majdnem ugyanakkora lesz. Mindenesetre ez a példa is mutatja, hogy ha a minta nagyon másképpen viselkedik, mint azt az előzetes feltételezés szerint várnánk, akkor a Bayes-becslés megtévesztő eredményekre is vezethet: ha 40 kísérletből egy sem sikerül, a $19{,}6\%$ nem éppen a legjobb becslésnek tűnik a valószínűségre. Ugyanakkor az $n=4000$ kísérlet ahhoz már elég, hogy akkor is jónak mondható eredményt kapjunk, ha előzetesen kevés információnk volt p-ről, és egyenletes eloszlásúnak téteteztük fel.

4. Összefoglalás

Ahogy láttuk, a Bayes-becslés módszerében lényeges különbség a korábbiakhoz képest, hogy itt magát a paramétert is egy véletlen számnak tekintjük, és van egy előzetes elképzelésünk arról, hogy milyen értékeket milyen valószínűséggel vesz fel (diszkrét a priori eloszlás), illetve az egyes tartományokba milyen valószínűséggel esik (a priori sűrűségfüggvény). Amit kiszámítunk, az az, hogy ezek a valószínűségek hogyan alakulnak, ha a megfigyeléseinket mint feltételeket beépítjük (a posteriori eloszlás), így megkapjuk, hogy a megfigyelések alapján melyek lesznek a paraméter valószínű és kevéssé valószínű értékei, értéktartományai. Ha egyetlen számmal írjuk le a becslést, akkor ennek az eloszlásnak a várható értékét vesszük, ez adja a becslésünket, ami természetesen függ az előzetes feltételezéstől is. Minél pontosabb az előzetes feltételezésünk, annál kevesebb megfigyelés elég a pontos becsléshez, és fordítva, ha a mintaelemszám elég nagy, akkor egy nem túl pontos előzetes feltételezésből is jó eredményekhez juthatunk. A téma részletesebb megismerésében például a [4,5] könyvek segíthetnek.

Irodalomjegyzék

[1] Douglas Altman, David Machin, Trevor Bryant, Martin Gardner, *Statistics with Confidence: Confidence Intervals and Statistical Guidelines*. Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 2000.

[2] Backhausz Ágnes, Simon L. Péter, Mennyit teszteljünk? 2. rész, Érintő, 2020. szeptember. https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2020-12/992-mennyit-teszteljunk-2-v3

[3] Csiszár Villő, Valószínűségszámítás 1. http://csvillo.web.elte.hu/mtval/jegyzet.pdf

[4] Allen B. Downey, *Think Bayes: Bayesian Statistics in Python*. First edition, O'Reilly, Sebastopol, 2012.

[5] Peter M. Lee, *Bayesian Statistics: An Introduction*. John Wiley & Sons, Chicester, 2012.

Backhausz Ágnes
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet

statisztika járványtan valószínűségszámítás

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

A **GAZDA(G)SÁG** NEVET ADTUK A **GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET ROVATNAK**, AMELYBEN BEMUTATJUK, HOL, MIKÉPPEN HASZNÁLJÁK FEL A MATEMATIKÁT, MILYEN GAZDAG IS AZ A KÖR, AMELYIK ÉRINTI EZT A TUDOMÁNYÁGAT. (ROVATSZERKESZTŐK: *ILLÉS TIBOR, MOLNÁR-SÁSKA GÁBOR ÉS RÓST GERGELY*.)

Szerkesztő

2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

„Matematika egy jobb világért”

A Matematika Világnapjának ez évi szlogenje aktuálisabb ma, egy világjárvány kellős közepén, mint bármikor. A Nemzetközi Matematikai Unió vezette projekt honlapján, a https://www.idm314.org/ címen hívják fel minden ország figyelmét arra, mivel lehet a matematikát az év egy napján, március 14-én megünnepelni: „Matematika egy jobb világért”.

Titkos Tamás

2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Skót kávéház

A huszadik század első felében a kávéházak a társasági élet legfontosabb helyszínei voltak Európa-szerte: irodalmárok, képzőművészek, tudósok csoportjai tartottak rendszeres összejöveteleket, vagy éppen dolgoztak egy-egy kávéház törzsvendégeként. A Skót Kávéház Lwówban a lengyel matematikus elit állandó gyülekezőhelyének számított. A társaság központi figurái: Banach, Mazur és Ulam... A kávéház főpincérétől lehetett elkérni a Skót Könyvet. Hogy mi is volt az, *Titkos Tamás* írja le a következőkben.

Etesi Gábor

2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Roger Penrose: az első Nobel-díjas matematikus, 2. rész

Penrose munkássága előtt tisztelgő áttekintő írásunk első részében a fizikai Nobel-díjas matematikus főleg matematikai jellegű eredményeit (lehetetlen ábrák, kváziperiodikus csempézések és tvisztor-elmélet) tekintette át Szabó Szilárd. A második részben *Etesi Gábor* elméleti fizikai, pontosabban gravitációelméleti eredményeit veszi közelebbről szemügyre; ezekért az 1960-70-es években folytatott vizsgálataiért nyerte el a fizikai Nobel-díjat 2020-ban. Tovább...

TOVÁBBI CIKKEK KERESÉSE

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon: ›

Nemzeti Kulturális Alap
A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Szerkesztő 2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

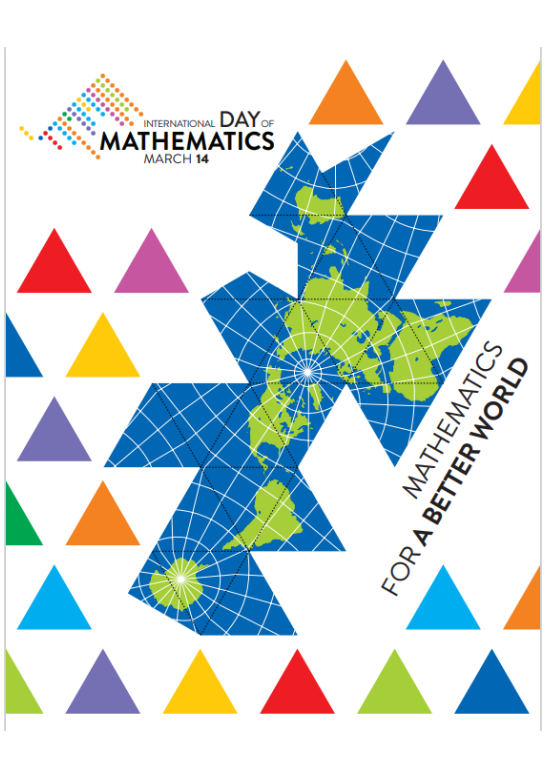
„Matematika egy jobb világért”

A Matematika Világnapjának ez évi szlogenje aktuálisabb ma, egy világjárvány kellős közepén, mint bármikor. Az Érintő is több olyan cikket közölt az elmúlt egy évben, ami rávilágít arra, hogy a matematikának mekkora szerepe van például az egészségügyben a járványok terjedésének megfékezésében, különféle orvosi alkalmazások területén, a járműiparban, vagy a pénzpiacon. De akármerre nézünk, életünket már teljesen behálózták azok a technológiák, amelyeknek kidolgozását a matematika alapozta meg. Számtalan lehetőség van a matematika napjának megünneplésére, amint ez a hivatalos honlapon is látható: https://betterworld.idm314.org/.

INTERNATIONAL DAY OF
MATHEMATICS
MARCH 14

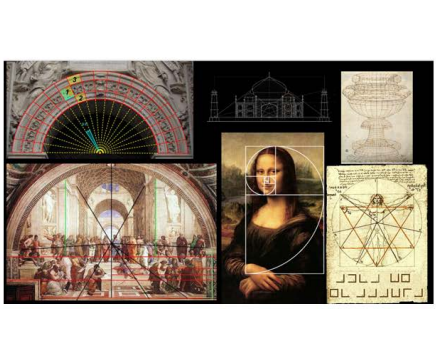
Celebration of International Day of Mathematics 2021
www.idm314.org

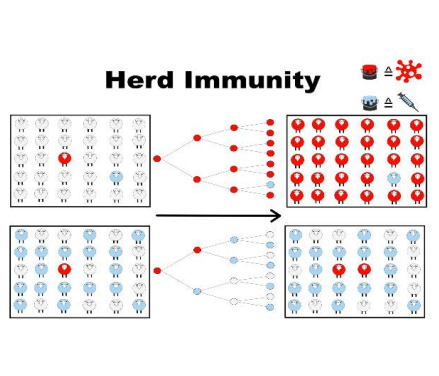
A π-nap globális online ünnepe (angol nyelven) 03.14, azaz márc.14-én 14-15 óra között kezdődik itt, programja pedig itt érhető el: https://www.idm314.org/launch-2021-program.html, Az egész világon követhetők a megosztott képek, videók, poszterek, események Facebookon, Twitteren, Instagramon (hashtag #idm314), mégpedig nem 24, hanem az időeltolódás miatt 48 órán keresztül.



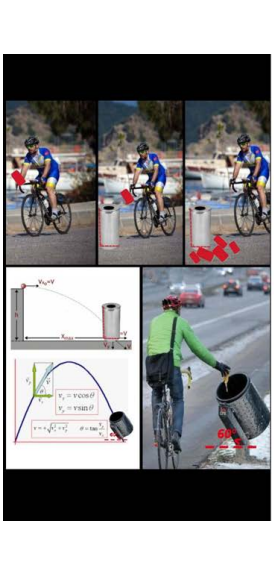
Aki még nem hallott a π-napról, olvassa el tavalyi cikkünket is. Sajnos se tavaly, se idén nem tudtuk úgy ünnepelni, ahogyan szerettük volna, hiszen az iskolák zárva, nem lehet igazán jó valós projekteket, szakmai összejöveteleket, kirándulásokat, akadályversenyeket szervezni. Maradt, mint sok egyébre, az online tér.

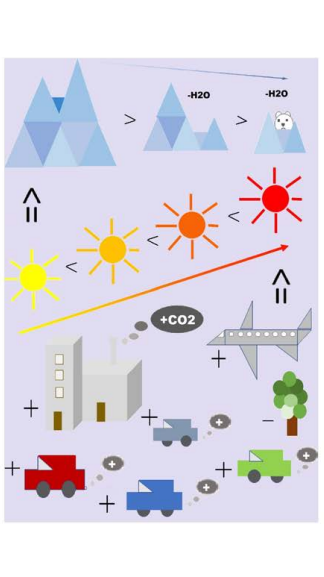
A Nemzetközi Matematikai Unió által meghirdetett poszterpályázatra több mint 2100 alkotás érkezett, ezekből több különböző válogatást is kitesznek a https://www.idm314.org/2021-poster-challenge-gallery.html galériába. A résztvevőknek olyan ötleteket kellett megjeleníteni a matematika nemzetközi nyelvén, amelyek azt mutatják, hogy a matematika kicsit jobbá teszi a világot. Sokan választották a világjárvány leküzdésének témáját, vagy a fenntartható fejlődést. Néhányat közülük mi is közlünk, feltüntetve a készítőiket.

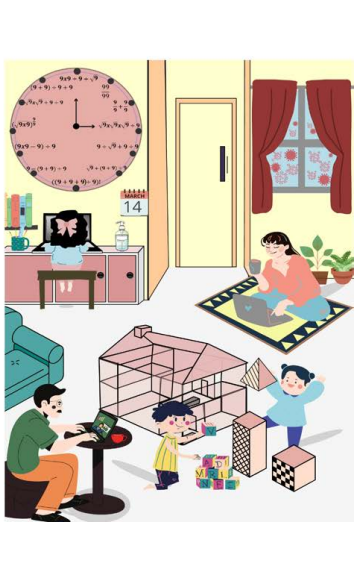




(A matematika a művészetben Eddy A. Pérez Coello (Ticul, Yucatán, Mexico) munkája, a Nyájimmunitás készítői: Eliseo Carrasco Krämer és Julius Schrapel (Schwetzingen, Németország).







(A bicikli és a szemetes téma feldolgozója Zahide Ersoy (Antalya, Törökország), a károsanyag-kibocsátás hatását geometriai és algebrai formulákkal egy Lisszaboni iskolából Leonor Silva, Ana Reis és Maria João Rodrigues reprezentálta, az otthoni munkát és tanulást támogató matematikát pedig a Mathematics Education Sriwijaya University diákjai, Gita Dwi Pangesti, Sincia Anggaraini Indah és Risa Rahmatia Firsta (Palembang, Sumatera Selatan, Indonesia) küldték be.)

Szerkesztőségünk várja azok jelentkezését, akik idén is készültek a pi-napra, vagy jövőre szándékoznak azt megünnepelni, és ennek részleteit szeretnék megosztani az Érintő olvasóival.

alkalmazott matematika pályázat

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Titkos Tamás

2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Skót kávéház

A XX. századi matematika egyik rendkívül érdekes fejezete a Lvivben található Skót Kávéházhoz köthető. Ugyan Lviv ma Ukrajnához tartozik, történetünk kezdetén, 1935-ben a lengyel-szovjet háborút lezáró rigai béke értelmében Lwów néven még Lengyelország részét képezte. A Skót Kávéház matematikusaira ezért mint lengyel matematikusokra szokás hivatkozni. 1939-től aztán szovjet fennhatóság alá került a város egészen az 1941-es német megszállásig. Azon túl, hogy az Einsatzkommando azonnal megölt több mint 45 professzort (köztük három matematikust: Antoni Marian Lomnickit, Stanislaw Ruziewiczet, és Wlodzimierz Stożeket), a németek a népes zsidó lakosságot, köztük jónéhány matematikust gettóba gyűjtötték, koncentrációs táborokba deportálták, vagy épp orvosi kísérleteknek vetették alá. Noha nyilvánvaló, hogy a város tragédiákkal terhelt történelme és a Skót Kávéház tudósainak élete nem választható szét, ebben a most induló cikk- és bejegyzéssorozatban megpróbálunk főleg a matematikára és a társaság környezetének sokszínűségére fókuszálni.

A Skót Kávéház

1. A Skót Kávéház

A huszadik század első felében a kávéházak a társasági élet legfontosabb helyszínei voltak Európa-szerte: irodalmárok, képzőművészek, tudósok csoportjai tartottak rendszeres összejöveteleket, vagy éppen dolgoztak egy-egy kávéház törzsvendégeként. Példaként említhetjük Karinthy Frigyest, aki amellett, hogy előszeretettel írt kávéházakban, és vélhetően a szórakoz(tat)ásra is szakított némi időt, a Hadikban működő sakk-kör elnöki posztját is betöltötte. (Egyik leghirhedtebb sakk eredménye, hogy egy szimultán alkalmával komiszul ellopta a világbajnok Alekszandr Aljechin egyik bástyáját.) De említhetnénk a Japán kávéházat is. Faludy György elmondása alapján: „A Japán a XX. század első évtizedeiben a főváros egyik neves kávéháza volt, elsősorban festők találkozóhelye. A tulajdonos szerette volna, ha kávéházát költők is látogatják – ez vonzerőt gyakorolt a polgári közönségre –, de a kávé árát kevesen tudtuk volna megfizetni. Ezért létesítette az úgynevezett mocsár asztalt. Ide pincér csak akkor jött, ha kifejezetten hívták, viszont óránként 2-2 pohár friss vizet tett mindenki elé tálcán. Borravalót értünk a tulajdonos adott, nehogy a pincérek lenézzenek bennünket.”

Lwówban a Monopol és a Café de la Paix voltak az „irodalmi kávéházak”, míg a fizikusok, kémikusok és matematikusok törzshelye az egyetemhez közeli Róma Kávéház volt.

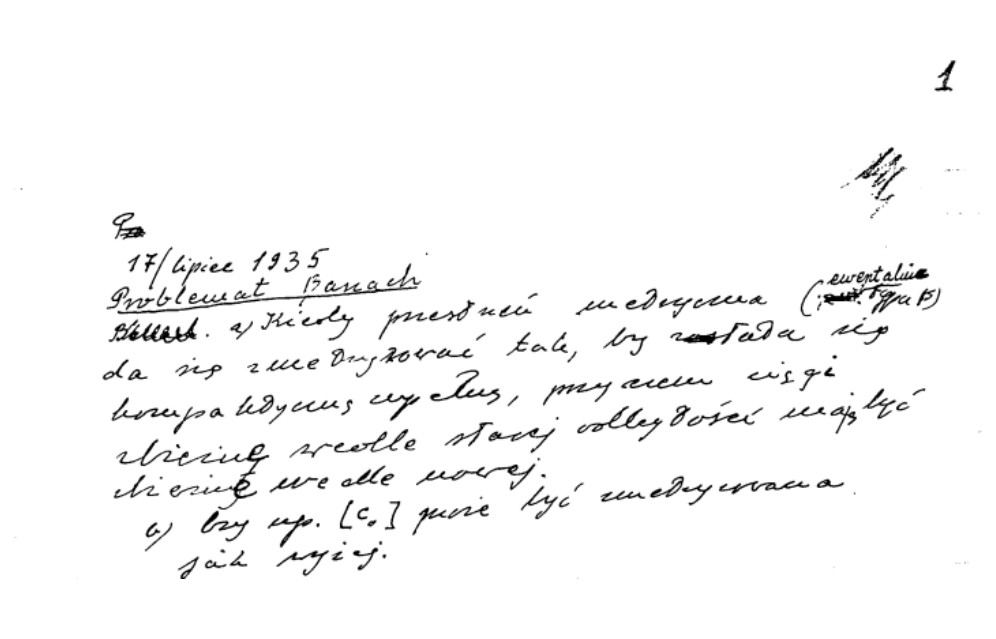
Tomasz Broda lengyel művész formabontó képein (http://www.matematyka.wroc.pl/doniesienia/zrob-sobie-matematyka) balra Banach, jobbra Steinhaus.

Íme az eredeti fényképek, Banach és Steinhaus:

Heti rendszerességű szemináriumuk után ide vonult át a Stefan Banach és Hugo Steinhaus nevével fémjelzett Lengyel Matematikai Társaság tagsága kiegészülve néhány kiváló fiatal hallgatóval, köztük Stanislaw Ulammal. (Ulam neve főleg az termonukleáris fegyverek kifejlesztésére szolgáló Manhattan-terv kapcsán lehet ismerős az olvasóknak, ahol Teller Ede kutatócsoportjában dolgozott.) Steinhaus egy elegánsabb cukrászdát favorizált volna, de Banach ragaszkodott a kávéházhoz, ahol oldottabban lehetett matematikáról vitatkozni, inni, dohányozni, és sakkozni. Banach maga a többiektől függetlenül is rengeteg időt töltött a Rómában. Mivel az egyetemi fizetésből − különösen a hónap végén − nehezen lehetett kifizetni a fogyasztást, a hely tulajdonosa pedig meglehetősen rugalmatlan volt, Banach egy napon ráunt a kellemetlenségekre, és átsétált a néhány lépésre lévő Skót Kávéházba (Café Szkocka). Ez a nagyjából 50 fő befogadására alkalmas hely onnantól fogva a matematikus elit állandó gyülekezőhelyének számított. A társaság központi figurái: Banach, Mazur és Ulam, de mint később látni fogjuk, a legendás márványasztaloknál rengeteg világhírű matematikus megfordult, többek közt Neumann János és Maurice René Fréchet. A kávéházat vezető Tomasz Zielinski rugalmasságáról nem is a helyenként nagyvonalú számlakezelés árulkodik a legjobban, hanem az asztalok tisztántartása, vagy éppen tisztán nem tartása! Az asztalok ugyanis fehér márvánnyal voltak borítva, és a márványra jól lehetett írni puha ceruzával. Persze amilyen könnyű volt ráírni, olyan könnyű volt letakarítani, ezért néhány tragikus törlés után megkörnyékezték Zielinskit. Arra kérték, hogy a záróráig tartó összejövetelek után takarja le, vagy különítse el a teleírt asztalokat, nehogy a személyzet megsemmisítse a munkát. Így is történt, a következő nap délelőttjén pedig érkezett egy diák, és mindent lejegyzetelt.

2. A Skót Könyv

Vitán felül nagyon eredeti ez a munkafolyamat, de mint látjuk, elég sok szervezést igényel. Egyes elmondások szerint Zielinski panaszára Banach felesége, mások szerint maga Banach vásárolt egy kemény fedeles füzetet, amelybe azután a fontosabb problémákat feljegyezték. A füzet attól kezdve mindig a kávéházban volt elrejtve, a főpincértől lehetett kikérni, ha szükség volt rá. A napnál is világosabb, hogy egy ilyen szent tárgy neve nem lehet egyszerűen „a füzet”: az első oldalon *Ksiega Szkocka*, azaz *Skót Könyv* áll, csupa nagy betűvel. Az első tudományos bejegyzés 1935. július 17. dátummal szerepel:



Banach kérdése tömören így fogalmazható meg:

(a) Milyen feltételek mellett lehet egy (esetleg (B)-típusú) metrikus téren olyan új metrikát megadni, amellyel az már egyfelől teljes és kompakt, másfelől minden sorozat ami az eredeti metrika szerint konvergens volt, konvergens az új metrika szerint is? *[A (B)-típusú tereket ma Banach tereknek nevezik.]*

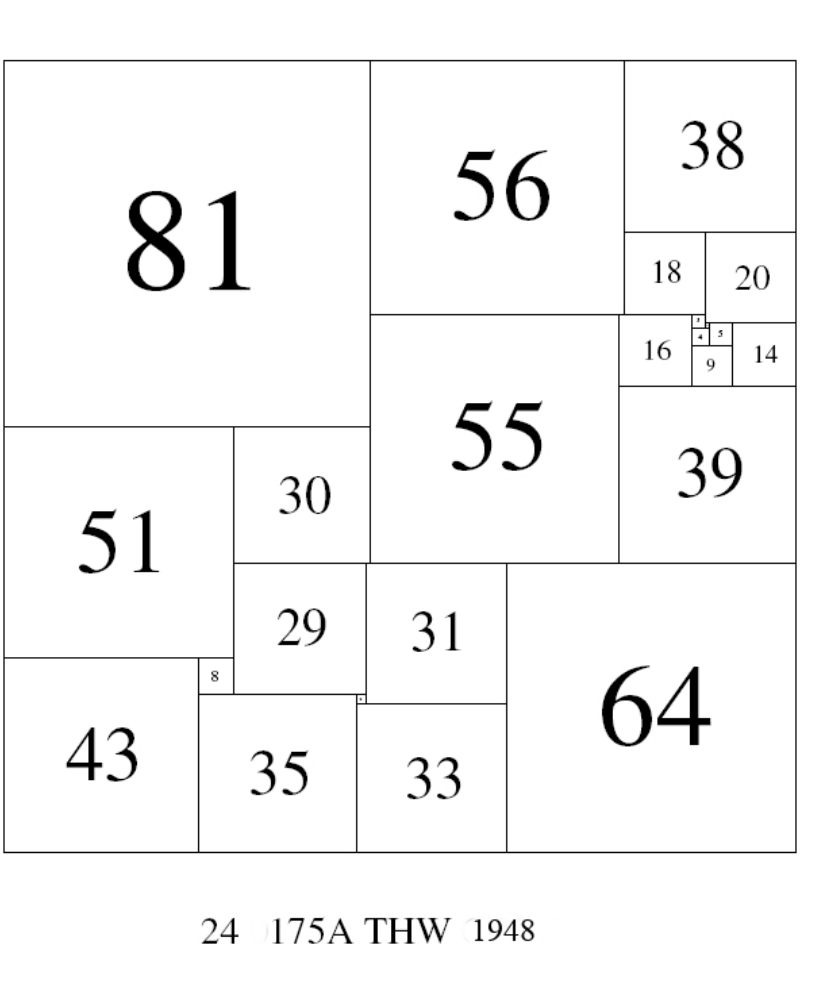
(b) A zérus sorozatok c_0 terét lehet így metrizálni? *[A c_0 tér eredeti távolsága ebben a kérdésben az egyenletes távolság.]*

A probléma jóval bonyolultabb annál, mint hogy itt tárgyalhassuk, de a (b) pontról annyit legalábbis el lehet mondani, hogy 1957-ben oldotta meg egy Victor Klee nevű amerikai matematikus [4].

A Skót Könyvben összesen 193 probléma található, többnyire funkcionálanalízisből és topológiából. Néhányat ők maguk megoldottak a helyszínen, néhány a mai napig megoldatlan. A későbbiekben jónéhány problémát részletesen bemutatunk majd. Most csak egyet említünk meg érdekességként.

53. Probléma (RUZIEWICZ). *Felbontható-e egy négyzet egymástól mind eltérő oldalhosszúságú négyzetek átfedés nélküli egyesítésére?*

Ez egy roppant egyszerű fejtörő, bárki nekiugorhat! Aki ezt megteszi, némi próbálkozás után garantáltan elkezd majd gyanakodni, hogy ez a fejtörő az egyszerűtől meglehetősen távol van. Eleinte sokan azon a véleményen voltak (többek közt a legendás orosz matematikus Nikolai Luzin is), hogy ilyen felbontás nem létezhet. A sok megoldás közül egyet emelünk ki, 1948-ban Theophilus Harding Willcocks amatőr matematikus és sakkfanatikus megadta a négyzetnek egy olyan feldarabolását, ami 24 eltérő méretű négyzetből áll. Érdekesség, hogy Willcocks a megoldást egy tündérsakk magazinban hozta nyilvánosságra (Fairy Chess Review) [3].



Akit ez a probléma jobban érdekel, nézze meg ezt a honlapot: http://www.squaring.net/sq/ss/s-pss.html.

A problémák mellé nemegyszer díjat is kitűztek. Általában egy-két üveg bort vagy sört (Neumann János whiskey-t), de volt néhány érdekesebb felajánlás is: Steinhaus 100 gramm kaviárt, Saks egy kiló bacont ajánlott jutalmul. (Ne felejtsük, hogy nagy világválság idején vagyunk!)

A legkülönösebb felajánlás kétség kívül Mazuré, aki 1936. november 6-án egy élő libát tűzött ki a 153. probléma megoldásáért. A megoldásra 1973-ig kellett várni: a legendás svéd matematikus Per Enflo ellenpéldát konstruált [1], ami rámutatott arra, hogy a 153-as problémában leírt approximációs tulajdonság nem mindig teljesül. A díjátadó ceremóniát akkor lengyelországszerte közvetítették, az alábbi kép pedig a mai napig gyakran felbukkan olyan előadásokban, amelyek bármilyen módon kapcsolatba hozhatók az approximációs problémával, vagy a Schauder-bázis létezésének problémájával.

A társaság történetére visszatérve: a náci megszállás elől többen emigráltak (Mazur például Neumann meghívására Princetonba ment), sokakat pedig ellehetlenítettek vagy meggyilkoltak. A legenda szerint magát a könyvet egy kapufa tövéhez közel ásták el egy bizonyos futballpályán. Akár így volt, akár nem, a könyv sikeresen túlélte a háborút, a szkennelt változata bárki számára elérhető.

A következő hónapokban az Érintő facebook oldalán rövid bejegyzések formájában folytatjuk a Skót Kávéház, illetve a Skót Könyv történetének bemutatását. Magáról a Skót Könyvről Daniel R. Mauldin szerkesztésében egy komoly kötet is megjelent, amelyben részleteen áttekintették rengeteg probléma történetét [2]. A kötetnek számos magyar vonatkozása van, ezekről is szó lesz: néhány problémát Buczolich Zoltán és Laczkovich Miklós tisztázott, egy egész fejezet szól Erdős Pál kedvenc könyvbéli problémáiról, és többször is feltűnik Neumann János neve.

Irodalomjegyzék

[1] P. Enflo, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, Acta Mathematica, (1973) 130: 309–317.

[2] The Scottish Book Mathematics from The Scottish Café, with Selected Problems from The New Scottish Book, Springer International Publishing, Switzerland, 2015.

[3] T. H. Willcocks, Problem 7795 and solution, Fairy Chess Rev. 7 (1948), 97 (Aug.), 106 (Oct.).

[4] V. Klee, On a problem of Banach, Coll. Math. 5 (1957), 280–285.

A cikk az ITM és az NKFIH ÚNKP-20-5-BGE-1 és PD128374 kódszámú projektjeinek, valamint az MTA Bolyai János Kutatási Ösztöndíjának támogatásával készült.

Titkos Tamás
Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

matematikatörténet

Érintő
Elektronikus Matematikai Lapok

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a Magyar Tudományos Akadémia támogatásával készült.

Etesi Gábor 2021. MÁRCIUS, GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET

Roger Penrose: az első Nobel-díjas matematikus, 2. rész

Penrose munkássága előtt tisztelgő áttekintő írásunk első részében a fizikai Nobel-díjas matematikus főleg matematikai jellegű eredményeit (lehetetlen ábrák, kváziperiodikus csempézések és tvisztor-elmélet) tekintettük át [10]. A második részben elméleti fizikai, pontosabban gravitációelméleti erdeményeit vesszük közelebbről szemügyre; ezekért az 1960-70-es években folytatott vizsgálataiért nyerte el a fizikai Nobel-díjat 2020-ban.

1. Szingularitási tételek

A gravitáció modern elmélete Einstein általános relativitáselmélete, amelyet hosszú küzdelem után és a fizikus társadalom általános értetlenkedése közepette Einstein 1915-ben öntött végleges formába [11]. Az általános relativitáselmélet a klasszikus newtoni gravitáció-elmélet számos fogalmi nehézségét, valamint hibás kísérleti előrejelzését kiküszöböli; ennek viszont az az ára, hogy – a newtoni fizikával ellentétben – igen bonyolult matematikai apparátuson alapul: művelése a modern absztrakt differenciálgeometria és a nemlineáris parciális differenciálegyenletek elmélete szinte teljes fegyvertárának bevetését igényli. A mi szempontunkból most elegendő megemlíteni, hogy az általános relativitáselmélet alapfeltevése szerint a fizikai világ összes eseményei egy kauzális struktúrával ellátott négydimenziós kontinuumot alkotnak, a *téridőt*, amelynek matematikai modellje egy 4-dimenziós (M,g) Lorentz-sokaság: az M differenciálható sokaság pontjai modellezik a fizikai eseményeket, a köztük levő ok-okozati viszonyokat pedig a g Lorentz-metrika írja le, a gravitációs mezőt pedig a metrika R_g Riemann-féle görbületi tenzora adja meg. A g kauzális szerkezet és ezzel az R_g gravitációs mező konkrét alakját az anyag téridőbeli eloszlása határozza meg (és fordítva) egy nagyon bonyolult másodrendű nemlineáris parciális differenciálegyenleten keresztül, ami az *Einstein-egyenlet* (a klasszikus gravitáció-elmélet *Poisson-egyenletének* messzemenő általánosítása.) Ennek az immár száz éves egyenletnek a vizsgálata a matematika máig aktívan kutatott, nyitott területe, véglegesnek tekinthető válaszok nélkül. Mindezek ellenére fogalmi egyszerűsége, szigorúan megalapozott matematikai háttere, valamint rendkívüli kísérleti jóslóereje az általános relativitáselméletet a fizika történetének talán esztétikailag legvonzóbb elméletévé teszi. Népszerűsítő bevezetés Einstein örökzöld könyvecskéje [1], egyetemi szintű fizikai-matematikai igényességű pedig pl. [12].

A természetben két makroszkopikus méretekben is jelen lévő kölcsönhatást ismerünk: az elektromágneses és a gravitációs kölcsönhatást. Míg az előbbi mind vonzó-, mind taszítóerő kifejtésére képes, a gravitációs erő mindig univerzális vonzóerőként jelentkezik. A gravitációs kölcsönhatás e tulajdonsága sajátos belső instabilitást eredményez, ami semmilyen más természeti erő esetében nem lép fel: nagy (csillagászati méretű) tömegek jelenlétében ez a nem kioltható vonzóerő olyan óriásivá fokozódhat, hogy minden más fizikai mechanizmust legyőzve a fizikai objektumot teljesen összeroppanthatja, valamiféle „kiterjedés nélküli” téridőbeli szingularitást hagyva csupán hátra. De miféle dolog egy ilyen „téridő-szingularitás” fizikai, ill. matematikai szempontból? Első ötletünk klasszikus elektrodinamikai ill. gravitációelméleti analógiák alapján a pontszerű töltések terében jelen lévő divergenciák mintájára az lenne, hogy a téridő azon tartományát kell szingulárisnak tekinteni, ahol a gravitációs térerősség, vagyis az Einstein-egyenlet g megoldásából kapott R_g görbületi tenzor divergál. Ilyen esetekben gyakran előfordul, hogy az (M,g) téridő tartalmaz olyan megfigyelőt, egy $\gamma\colon (a,b)\to M$ differenciálható jövőirányú nemtérszerű görbét, ami úgy éri el a végtelen görbületű szinguláris tartományt, hogy közben a saját óráján csak véges idő telik el. Fizikailag szólva tehát található olyan fizikai objektum (akár egy űrhajós), amely a fizika törvényeinek megsértése nélkül saját ideje szerint véges (esetleg nagyon rövid) idő alatt elérheti a téridő végtelenül nagy gravitációs mezejű tartományait. Ez a lehetőség az ide érkező objektum feltehetően teljes fizikai megsemmisülésén túl azért is nyugtalanító, mert lehetőséget ad arra, hogy fizikai entitások véges idő alatt teljesen „eltűnjenek”, vagyis „kilépjenek a térből-időből”, „lemenjenek a térképről” stb. ami képtelenségnek tűnik. Tehát az Einstein-elmélet fizikai tartalma szempontjából döntő fontosságú a szingularitások meglétének-hiányának tisztázása az elméletben. Matematikailag (vagyis kevésbé drámaian) szólva az eddig elmondottak azt jelentik, hogy szingularitást tartalmazó (M,g) Lorentz-sokaságokban létezhetnek nemmeghosszabítható de véges hosszúságú nemtérszerű γ görbék. Penrose nagy jelentőségű meglátása az volt, hogy így a gravitációs „téridő-szingularitás” fizikai szempontból nagyon nehezen körülhatárolható fogalma matematikailag megragadhatóvá válik, ha azt nem a görbület, hanem a görbék hossza felől fogjuk meg:

Definíció. Legyen (M,g) egy olyan téridő, amely maximális, tehát tovább (pl. differenciálhatóan) nem terjeszthető. Ekkor (M,g) *szinguláris*, ha mint Lorentz-sokaság nemtérszerűen nemteljes, pontosabban tartalmaz legalább egy olyan $\gamma\colon (a,b)\to M$ differenciálható időszerű görbét vagy fényszerű geodetikust, mely (pl. differenciálhatóan) nemmeghosszabbítható, de $\|\gamma\|_{L^1(M,g)}<+\infty$. Itt

$$\|\gamma\|_{L^1(M,g)}:=\begin{cases}\int\limits_a^b\sqrt{-g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}\,\mathrm{d}\,t & \text{amennyiben } \gamma \text{ időszerű görbe}\\ \text{a } \gamma \text{ affin hossza} & \text{amennyiben } \gamma \text{ fényszerű geodetikus}\end{cases}$$

a γ görbe hosszát jelöli.

Fontos hangsúlyozni, hogy a definícióban végül is arról *nem* esik szó, hogy divergens-e az R_g görbületi tenzor vagy sem, vagyis hogy végül is milyen természetű a szingularitás: ennek vizsgálata további, esetleg nagyon bonyolult, meggondolásokat igényel. Kérdés mármost az, hogy a fizikai szempontból lényeges − pl. a csillagok gravitációs terét, vagy a Világegyetemet kozmikus léptékben leíró stb. − téridők szingulárisak-e a fentebbi egyszerű és általános értelemben. Az 1960-70-es években Penrose-t és akkori tanítványát, S. W. Hawkingot az Einstein-egyenlet megoldásainak beható tanulmányozása számos olyan „szingularitási tétel” megfogalmazására vezette, amelyek fizikailag fontos feltételek mellett garantálják szingularitások létezését. A szingularitási tételek, amik tehát differenciálgeometriai nyelven megfogalmazott és matematikai értelemben szigorúan bizonyított állítások, az alábbi sémára épülnek:

1. Tétel. *Legyen (M,g) egy olyan téridő, ami egy fizikailag releváns anyagmezőt vagy a vákuumot tartalmazó Einstein-egyenlet maximális, tehát tovább nem terjeszthető megoldása. Tegyük fel, hogy (M,g) ezen kívül eleget tesz bizonyos fizikai szempontból releváns és differenciálgeometriai nyelven jól megfogalmazható feltételeknek. Ekkor (M,g) szinguláris, vagyis tartalmaz legalább egy nemmeghosszabítható nemtérszerű γ görbét, amelynek hossza véges.*

Sajnos e rövid áttekintésben e tételek pontos jelentését és sava-borsát (tehát erősségét) adó „fizikai szempontból releváns és differenciálgeometriai nyelven jól megfogalmazható” feltételek részletezésére nem térhetünk ki kifejezetten technikai jellegüknél fogva (de l. pl. [12, Chapter 9]). Mindenesetre e tételek fényében az Einstein-egyenlet „tipikus” megoldásai szingulárisak. Ez a tény fizikailag nem meglepő annak ismeretében amit a gravitáció univerzális vonzó jellegéről fentebb mondtunk; de matematikailag sem váratlan az eredmény hiszen *Lorentz-sokaságokról* van szó, és ezek körében *nem* igaz a Hopf-Rinow tétel (mely *Riemann-sokaságok* esetében tipikusan garantálja pl. a geodetikus teljességet).

Az első, immár tudománytörténeti jelentőségű szingularitási tételt Penrose bizonyította 1965-ben [7]. A Nobel Bizottság hivatalos indoklása szerint ezen eredményéből következő és 2019-ben kísérletileg is igazolt fizikai jóslatokért (fekete lyukak létezése, l. alább) nyerte el Penrose két másik tudóstársával a 2020-as Nobel-díjat. Azóta számos erősebb tétel-változat született, meg kell említeni ezek közül a Hawking-Penrose szingularitási tételt [5], amelyet a szerzők 1970-ben bizonyítottak be.

2. Kozmikus cenzor hipotézisek

A fentebbiekben a szingularitási tételek kapcsán az alábbi észrevételeket tettük: (i) a tételek azt mondják ki, hogy az Einstein-egyenlet fizikailag releváns megoldásai szingulárisak; (ii) egy szinguláris téridőben véges időn belül fizikai entitások „tűnhetnek el – jelenhetnek meg” a „semmiből” ami fizikai szerepüket igen kétségessé teszi (hiszen e téridők sértik az ok-okozatiság elvét); (iii) a szingularitási tételekben nincs szó a görbületi tenzor viselkedéséről; (iv) különböző „erősségű” szingularitási tételek léteznek.

Vizsgáljuk meg e kijelentéseket részletesebben. Az (i) észrevétel alapján az Einstein-elmélet matematikai szerkezete olyan, hogy az Einstein-egyenlet fizikailag releváns megoldásai kauzálisan nemteljesek, ez viszont (ii) alapján Einstein elméletét fizikai szempontból igen kétségessé teszi. Viszont nem szabad elfelejteni, hogy habár Penrose szingularitás-definíciója matematikai szempontból nagyon szabatos, fizikai szempontból esetleg túl általános, a (iii) szerinti értelemben. Valóban, az összes ismert *igazán fontos*, tehát nem csak valamiféle matematikai értelemben, hanem fizikai-csillagászati szempontból is jelentős de szinguláris Einstein-egyenlet megoldás kétféle osztályba sorolható: vagy ún. *fekete lyuk* vagy pedig. ún. *kozmológiai* típusú. Az előbbi típusba esnek a *Schwarzschild*, a *Reissner-Nordstrøm* valamint a *Kerr* és a *Kerr-Newman téridők* melyek különböző szimmetriájú, elektromosan semleges vagy töltött kompakt objektumok, pl. csillagok gravitációs tereit írják le. E megoldások közös tulajdonsága szinguláris jellegükön túl az, hogy bennük a görbületi tenzor is divergál, de úgy, hogy a tenzormező divergens része egy távoli megfigyelő számára nem észlelhető, mert azt egy, e tartományt körülvevő, ún. *eseményhorizont* mindig elrejti. Itt technikai okok miatt megintcsak nem definiáljuk, mit is értünk ezen (de l. pl. [12, Chapter 12]), hanem egy hasonlattal élünk: egy megfelelően görbült téridőben egy megfigyelő szempontjából létezhetnek nem megfigyelhető események pontosan úgy, mint ahogy egy valahol az Alföldön álló szemlélő számára bizonyos túl messzi, „horizonton túli” tereptárgyak már nem láthatóak a földfelszín görbültsége miatt. Egy ilyen téridőben az eseményhorizonton túli történések, események összességét *fekete lyuknak* nevezzük és azt mondjuk, hogy ez a téridő fekete lyukat tartalmaz. Tehát amennyiben egy téridő úgy szinguláris, hogy benne a kauzálisan problematikus tartományok mind fekete lyukak mélyén helyezkednek el, vagyis egy szokványos megfigyelő elől eseményhorizontok által mindig rejtve maradnak, akkor ezt a helyzetet kauzalitási szempontból végül is nem tartjuk aggályosnak. Fontos hangsúlyozni, hogy a fentebbi téridők szinguláris jellege és bennük eseményhorizontok létezése látszólag egymástól teljesen függetlenek, mindkét megnyilvánulás az Einstein-egyenlet két szubtilis és látszólag független tulajdonsága, ezek együttes megjelenésére viszont egy fizikailag releváns megoldásban az ok-okozatisági elv effektív teljesülése szempontjából szükség van.

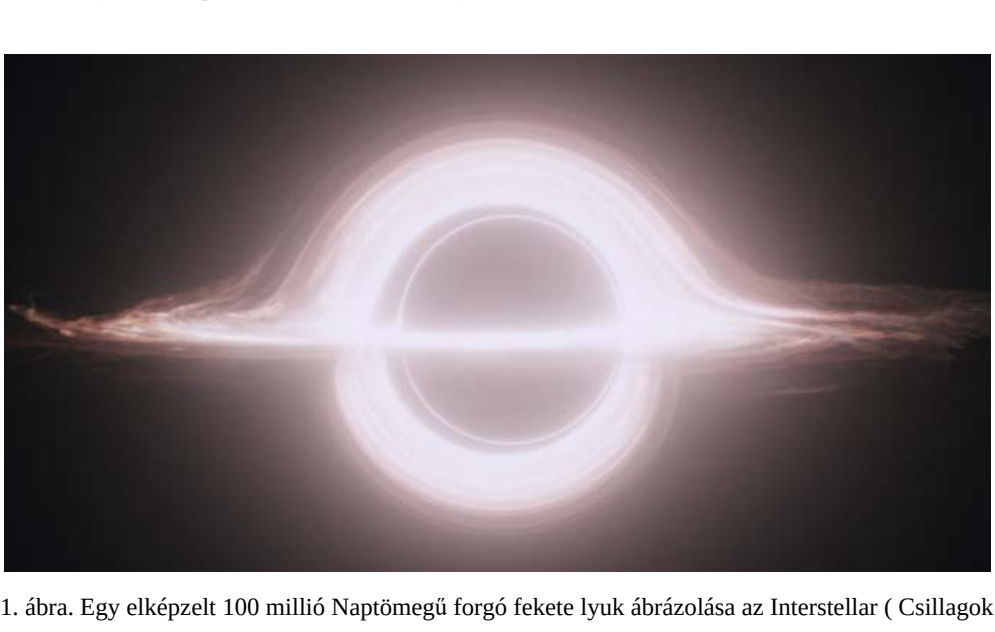
Az utóbbi, tehát a kozmológiai típusú szingularitásokra példa a modern kozmológia standard modelljének számító *Friedman-Lemaître-Robertson-Walker téridő*, ami az általunk megfigyelhető Világegyetem nagybani, homogén és izotrópnak látszó szerkezetét modellezi. Ez a téridő szintén szinguláris és benne a görbület divergál, de úgy, hogy a kauzalitás-sértés minden lehetséges megfigyelő számára annak múltjában található (tehát elvben „látható”). Egy kozmológiai szingularitást tartalmazó téridőben tehát kauzalitás-sértési szempontból „mindössze” annyi történhet, hogy „minden egyszerre csak megjelenik” (*Ősrobbanás*). Ismét meg kell jegyezni, hogy a kauzalitás-sértés pontosan efféle jellege látszólag véletlen, az Einstein-egyenlet szerkezete ezt *a priori* nem garantálja. Emiatt is Penrose-t sokat foglalkoztatta az, hogy a szingularitási tételek által feltárt és generikusnak tekinthető kauzalitás-sértési lehetőségek az általános relativitáselméletben minden esetben a fentebbi két biztonságos osztályba esnek-e, ami tehát azt jelenti, hogy tipikus megfigyelő elől „eltakartak” ill. általa „nem vehetők igénybe”. Jobb híján tehát elvként ki kell kötnünk, nagyon vázlatosan fogalmazva, hogy fennáll:

Kozmikus cenzor hipotézisek. *A fizikai világ térideje olyan, hogy az egyetlen kozmológiai típusú, tehát elvben látható múltbeli (Ősrobbanás) szingularitáson kívül csakis fekete lyuk típusú, tehát nem látható (mert eseményhorizontok mögé rejtett) szingularitásokat tartalmaz.*

A hipotézist szokás erős és gyenge változatban kimondani, ill. egyre finomabb precíz matematikai alakok is léteznek, ezekre azonban itt nem térhetünk ki (de l. pl. [12, Section 12.1]). Az erős változat megfogalmazása Penrose egyik 1979-es dolgozatában található meg először [8]. Az elmúlt fél évszázad során mind a fizikusok, mind a matematikusok nagy erőkkel dolgoztak a kozmikus cenzor hipotézisek valamely változatának bizonyításán – vagy éppen ellenkezőleg: cáfolatán. Azt lehetne mondani, hogy míg a hipotézisek megfogalmazása idején, tehát a korai 1970-80-as években mindenki meg volt győződve a hipotézisek (valamely formájának) igazságáról, manapság a helyzet egyre kevésbé világos [2,3,4,9].

Érdemes röviden kitérni a hipotézisek elnevezésének eredetére. Egy elvben máig érvényben lévő XVI. századi rendelet szerint az angol királyság területén működő színházakban tilos a nyíltszíni meztelenkedés. De mivel ezt gyakran megsértették, azt is elrendelték, hogy minden egyes előadás alkalmával a nézőtér első sorában egy ülőhelyet fent kell tartani a hivatalos *királyi cenzor* számára, akinek feladata, hogy egy pokróccal kezében az előadást figyelje és ha meztelenkedésre kerülne sor, akkor azonnal a színpadra lépjen és mindenkit letakarjon – lehetőleg az előadás megzavarása nélkül.

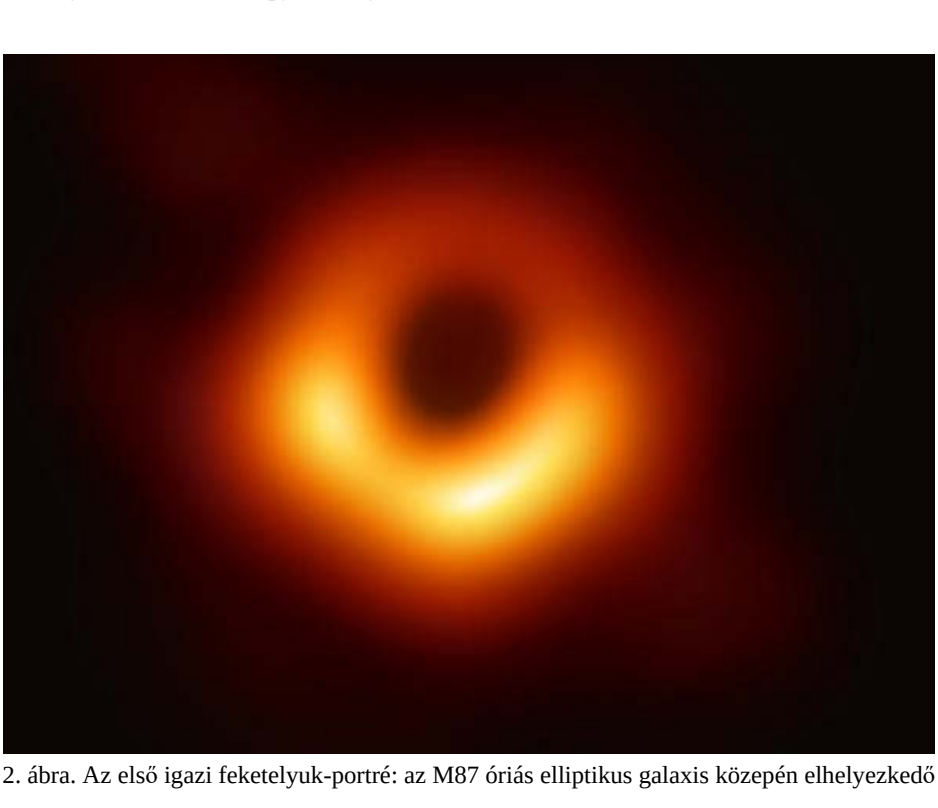
A most leírtak motivációul szolgálnak a szingularitási tételek, ill. a kozmikus cenzor hipotézisek bizonyos kurrens továbbfejlődési irányainak áttekintéséhez, amikre a (iv) pontban utaltunk. Egy szingularitási tétel „erejét” az dönti el, hogy a benne szereplő „fizikai szempontból releváns és differenciálgeometriai nyelven jól megfogalmazható” feltételek mennyire lokális (tehát nem globális) jellegűek, ui. egy konkrét megfigyelőnek (pl. űrhajósnak) csupán a téridő lokális tulajdonságainak meghatározására van lehetősége, efféle mérésekből kell kitalálnia, hogy pl. a körülötte elhelyezkedő ismeretlen téridő-tartomány tartalmaz-e fekete lyukat vagy sem. Nem túlzás azt állítani, hogy a kérdés helyes megválaszolása egy eljövendő űrhajós számára kulcsfontosságú lehet. Az eredeti Penrose-, ill. Hawking-Penrose-féle és viszonylag könnyen bizonyítható szingularitási tételek még sok olyan feltevést tartalmaznak, amelyek globálisak (pl. hogy a teljes téridő globálisan hiperbolikus, benne a Cauchy-felületek nem kompaktak, stb.). Az ilyen feltevések egy lokális megfigyelő szempontjából praktikusan nem eldönthetőek, *a priori* adottnak tekintendők. Pl., ha *a priori* tudjuk, hogy a téridő tartalmaz egy fekete lyukat, akkor egy ilyen fekete lyuk látványa megfesthető. Kip Thorne amerikai fizikus (aki 2017-ben kapott fizikai Nobel-díjat a 2016-ban kísérletileg szintén kimutatott, összeütköző fekete lyukak keltette gravitációs hullámok megjóslásáért) számításai és instrukciói alapján az *Interstellar* (*Csillagok között*) c. 2014-es erősen hollywoodi jellegű filmben megjelenik egy tudományos szempontból korrekt feketelyuk-ábrázolás (l. 1. ábra).



1. ábra. Egy elképzelt 100 millió Naptömegű forgó fekete lyuk ábrázolása az Interstellar (Csillagok között) c. filmben. A kép forrása: DNEG/Warner Boss. Entertainment Inc/CQG 32 05001. https://www.dneg.com/show/interstellar/

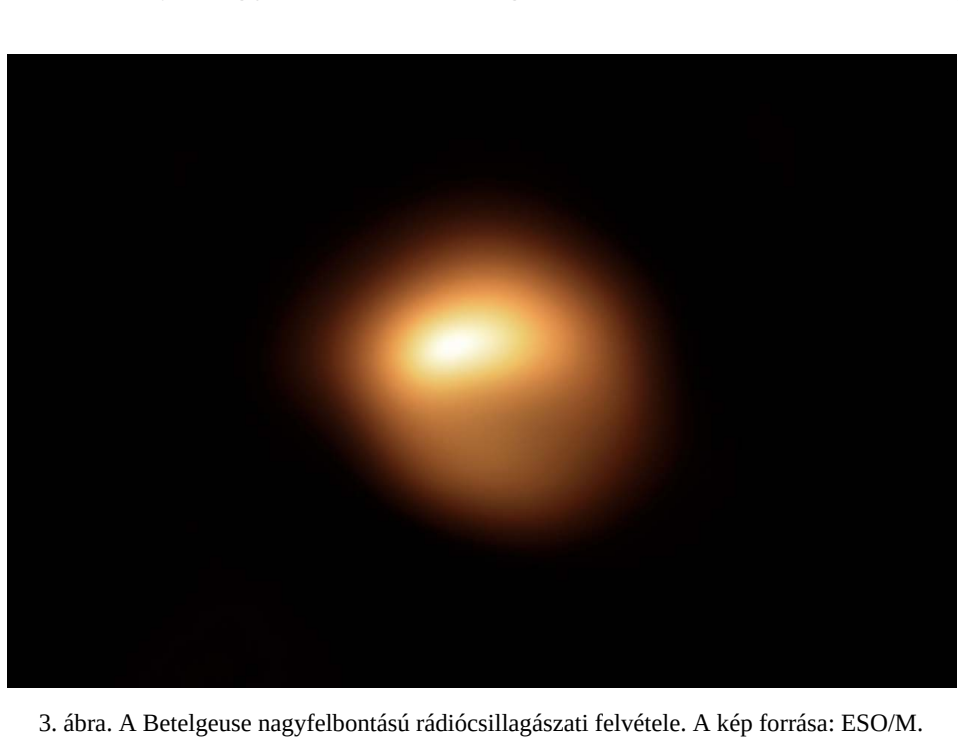
Mit látunk ezen a festményen? Egy forgó fekete lyuk képét látjuk, amelynek forgástengelye egy, a kép síkjába eső függőleges egyenes, és a rá merőleges egyenlítői síkban a fekete lyukat egy izzó gázokból álló ún. *akkréciós korong* veszi körül. Hawking egy alapvető fontosságú tétele szerint a fekete lyuk eseményhorizontja egy téridőbe ágyazott (vagy esetleg csak immertált) felület, amely mindig homeomorf egy kédimenziós gömbbel. Az 1. ábrán ezt a gömböt fekete korong szemlélteti, „azon túl” van a fekete lyuk. Egy szokásos gömb szemlélésével ellentétben viszont e látvány rendkívüli tulajdonságokkal bír: nemcsak az eseményhorizont felénk néző „eleje”, hanem a „hátulsó fele” is látszódik, hiszen a fekete lyuk hatalmas gravitácós tere a hátrafelé induló fotonok egy részét is „visszafordítja” felénk (emiatt látunk egy fényes korongot a merőleges síkban is, ami nem más, mint az eredeti akkréciós korong „hátsó fele”).

Abban a szerencsés helyzetben vagyunk, hogy ezt a képet már össze tudjuk hasonlítani egy tőlünk kb. 53 millió fényévnyire lévő igazi és nagyon aktív szuperóriás fekete lyuk portréjával (l. 2. ábra). A híres felvétel 2019 májusában járta be a világsajtót és Penrose Nobel-díjának kísérleti alapját is adja.



2. ábra. Az első igazi feketelyuk-portré: az M87 óriás elliptikus galaxis közepén elhelyezkedő kb. 6,5 milliárd Naptömegű fekete lyuk eseményhorizontjáról készült rádiócsillagászati felvétel. A kép forrása: Event Horizon Telescope Collaboration, via National Science Foundation.

Mielőtt tovább mennénk, meg kell említeni, hogy a 2020-as fizikai Nobel-díj két másik kitüntetettje: Andrea Ghez amerikai és Reinhard Genzel német fizikusok e kép megszületésében játszott szerepükért nyerték el a rangos elismerést. Visszatérve, ez a kép már nem annyira meggyőző, mint az előző; pl. összevetve a tőlünk kb. 640 fényévre található haldokló vörösóriás csillag, a Betelgeuse (az Orion-alak jobb válla) szintén 2019-ben készült fényképével (l. 3. ábra) némi hasonlóságot is vélünk felfedezni (minden bizonnyal még jobban hasonlító csillagászati felvételeket is találhattunk volna).



3. ábra. A Betelgeuse nagyfelbontású rádiócsillagászati felvétele. A kép forrása: ESO/M. Montargès *et al*.

Felvetődik hát a kérdés: léteznek-e praktikus szingularitási tételek, amik tehát tisztán lokális tulajdonságokból eldöntik, hogy egy adott téridő-tartomány tartalmaz-e fekete lyukat vagy csak egy arra nagyon hasonlító valamit? Véleményünk szerint komoly óvatosságra int, hogy ilyen tételek nem léteznek: friss eredmények [6] szerint egy *a priori* ismereteket nem feltételező, tehát tisztán csak lokális tulajdonságokat meghatározni képes megfigyelő egy téridő tartományról csak akkor tudja biztosan eldönteni, hogy tartalmaz-e fekete lyukat, ha a fekete lyuk *belsejében* is meghatároz bizonyos lokális tulajdonságokat [6, Section 6]. Másként fogalmazva: egy űrhajós csak akkor bizonyosodhat meg egy közeli fekete lyuk ottlétéről, ha már nem tudja azt többé elhagyni!

Etesi Gábor
BME TTK,Matematika Intézet, Geometria Tanszék

Irodalomjegyzék

[1] Einstein, A.: *A speciális és általános relativitás elmélete*, Gondolat, Budapest (1963).

[2] Etesi, G.: *A proof of the Geroch-Horowitz-Penrose formulation of the strong cosmic censor conjecture motivated by computability theory*, Int. Journ. Theor. Phys. **52**, 946-960 (2013).

[3] Etesi, G.: *Exotica and the status of the strong cosmic censor conjecture in four dimensions*, Class. Quant. Grav. **34**, 245010 (2017).

[4] Etesi, G.: *Global solvability of the vacuum Einstein equation and the strong cosmic censorship in four dimensions*, Journ. Geom. Phys. 164, 104164 (2021).

[5] Hawking, S.W., Penrose, R.: *The singularities of gravitational collapse and cosmology*, Proc. Roy. Soc. London **A314**, 529–548 (1970).

[6] Müller, O.: *Black holes in Einstein-Maxwell theory*, Class. Quant. Grav. **36**, 015002 (2019).

[7] Penrose, R.: *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14**, 57–59 (1965).

[8] Penrose, R.: *Singularities and time asymmetry*, in: *General relativity, an Einstein centenary survey* (ed. S. W. Hawking, W. Israel), Cambridge Univ. Press, Cambridge (1979).

[9] Penrose, R.: *The question of cosmic censorship*, Journ. Astrophys. Astr. **20**, 233-248 (1999).

[10] Szabó Sz.: *Roger Penrose, az első Nobel-díjas matematikus, 1. rész*, megjelent az Érintő 2020 decemberi számában.

[11] Vizgin, V.P.: *A modern gravitációelmélet kialakulása*, Gondolat, Budapest (1989).

[12] Wald, R. M.: *General relativity*, Chicago Univ. Press, Chicago (1984).

Nobel-díj alkalmazott fizika

Aktuális szám: 19. szám 2021. március Válasszon:

Nemzeti Kulturális Alap

A kiadvány a
Magyar Tudományos Akadémia
támogatásával készült.

100

Cím	Szerző
A 32. Varga Tamás Módszertani Napokról	Írta: Csapodi Csaba
Roger Penrose: az első Nobel-díjas matematikus, 1. rész	Írta: Szabó Szilárd
Online IMO, 2020	Írta: Dobos Sándor
Tíz éve halt meg Benoît Mandelbrot, a fraktálgeometria atyja	Írta: Buczolich Zoltán
Nekrológ: Dr. Leindler László	Írta: Totik Vilmos
Matematikaoktatás a COVID-19 idején	Írta: Máder Attila,Torma Bence, Torma Gábor
Szabadulószoba flippity-vel	Írta: Tolnai Judit
Logirintus: a karantén ihlette matematikai kalandjáték	Írta: Gyimesi Bernadett, Balogh Tamás László
Hibrid képalkotás és vizualizáció	Írta: Lóczi Lajos
Valószínűségszámítás négy kötetben	Írta: Kói Tamás
A matematikára semmi szükség – egészen addig, amíg...	Írta: Mosóczi András
A négyzetes és téglalapos cövekek problémájáról	Írta: Stpsicz András
Varga Tamás családfája – Szász Károly (1798 – 1853)	Írta: Oláh-Gál Róbert
Az érintőmódszer történetéről	Írta: Simonovits András
Klein-gyöngyök	Írta: Figula Ágota
József Attila egy matematikai kérdése	Írta: Ferenci Tamás
Jövőformáló matematika	Írta: Szerkesztő