Katona János – Nagy Kem Gyula: Matematikai versenyeink

Cikkünk az utóbbi években felmerült kérdések alapján összehasonlítja a magyarországi országos szintű matematikaversenyek többségét. Egy adatbázist hoztunk létre a versenyek publikus eredményeiből, és ennek lekérdezései alapján vonunk le következtetéseket. A cikk tartalmaz néhány szubjektívnek tűnő megállapítást, ezek a szerzők tapasztalatait, véleményét is tükrözik, főként a matematika tárgy oktatására vonatkozóan, és mélységükben a korrepetálástól kezdve a tehetséggondozásig terjednek, érintik az általános, a közép- és a felsőoktatást. Érintjük a „tehetség”, a „jó tanár” és az „elit iskola” fogalmát is.

We compare the majority of national math competitions in Hungary in the last few years. We have created a database of public appearances from the competitions and draw conclusions based on its queries. The article contains some subjective findings, which reflect the authors’ experiences and opinions, especially in the field of teaching mathematics and in depth, ranging from tutoring to talent-nurturing, touching basic, middle and higher education, and mentioning the concept of “talent”, “good teacher” and “elite school”.

1. Bevezetés

Diákjaink matematikát igénylő felsőoktatási képzésében – ilyenek például a gazdasági, műszaki és természettudományi szakok –, illetve a későbbi hivatására vonatkozóan elengedhetetlen feltétel a problémamegoldó gondolkodás elsajátítása. A gondolkodás képességének fejlesztése a középiskola elvégzésével intézményes keretek között gyakorlatilag megszűnik. Felsőoktatásunk és hasonlóan munkahelyeink nem igazán kényszerítik gondolkodásra diákjainkat, alkalmazottaikat; inkább csak a gyakorlati ismeretekre, algoritmusokra – e cikkben a rutinszerű feladatmegoldást értjük algoritmus alatt – helyezik a hangsúlyt.

Legfeljebb néhány szakot, tanszéket, oktatót lehet kivételként megemlíteni, akik szerencsénkre még megtalálhatók egyetemeinken. Egyre kevesebben vállalják fel a problémamegoldó gondolkodást követelő oktatás nehézségeit, hiszen ezt a munkát általában a hivatalos tanterv többnyire csak látszólagosan támogatja [Bérces, Dinya, Jäckel, Kozma]. Pedig kormányunk szerint: „Az oktatás a jövő kihívásaira, az alapvető globális és hazai trendekre akkor készíti fel a hallgatókat, ha minden értelemben az interdiszciplináris és problémaorientált, problémamegoldó gondolkodásra és teamekben való munkára készíti fel a hallgatókat” [Fokozatváltás…].

A problémamegoldó gondolkodásunk fejlesztése (hasonlóan fizikai erőnlétünk fejlesztéséhez), amelyen középiskolás tanáraink adottságaik, lelkiismeretük, lelkesedésük szerint munkálkodnak, a 20-as éveinek elején járó fiatalok átlagát tekintve megáll, hanyatlásnak indul [Avolio és Waldman, Salthouse]. Igaz, hogy más készségek, mint pl. a kommunikációs készség, vagy akár az átlagos intelligencia is fejlődhet tovább. Ezért a gondolkodás tekintetében érdemes minél mélyebb ismeretekre szert tenni a rendelkezésre álló közoktatási időszakban, illetve a továbbiakban ezt a képességet folyamatosan gyakorolni és fejleszteni szükséges.

A tömegoktatásra épülő tantervek azon típusfeladatai, melyek jobbára a középszintű érettségire készítenek fel, kevésbé gyakorlatiasak és még kevésbé gondolkodtatóak; mindössze visszakérik a leadott ismeretek gerincét. Azokat továbbgondolni nem szükséges; összefüggések meglátását, következtetéseket, analógiák felfedezését már nem kérik számon. Erről a diákok és a szülők is tehetnek az axiómának kikiáltott közhely kapcsán: „nem adta le a tanár, tehát nem is kérheti számon”. Ezért a „jó tanár” nem tesz ilyesmit, inkább megadja a görbült jegyet, és mindenki boldog. Még kiemelkedő iskolák alsóbb osztályaiban is elhangzik: „Mi azt akarjuk, hogy csak boldogok legyenek a tanulóink.” Ez a „csak boldogság” többek számára leginkább azt jelenti, nem kell erőlködni, küzdeni, a dolgok megtörténnek amúgy is, maguktól. Csodálkoznak, elfogadott az, hogy tanítványaik a felsőbb osztályokat más (közép-) iskolákban kezdik, mert tanulóik tömegesen nem teljesítik még a saját intézményük által támasztott felvételi követelményeket sem.

Az iskolai előmenetel azonban általában nem úgy alakul, ahogy a diákok egy része, vagy a diákok egy előző halmazától bizonyosan bővebb halmazának szülei elvárnák, mert az elvárás egyre inkább nemcsak a diploma, hanem a jó diploma. Legyen az hazai vagy külföldi, fontos, hogy jó egyetem adja, így az beszállókártya lehet az áhított hivatás magas színvonalú gyakorlásához, amely – különösen a versenyszférában – feltételezi tulajdonosának fejlett problémamegoldó gondolkodását. Általános vélemény, hogy ez még csak szükséges feltétele a „sikernek”, mert ahhoz ezen kívül még jó marketing – mert közmondásunkkal ellentétben bizony a jó bornak is kell a cégér – és többnyire szerencse is kell. Előbbivel nem foglalkozunk, utóbbit pedig többek által is idézett, napjainkra már közhellyé vált idézet világítja meg igazán: „Minél többet gyakorlok, annál nagyobb a szerencsém.” [Quote Investigator]. Tehát a sikerhez – hasonlóan a matematikához, illetve a geometriához –, ahogy már Eukleidész is mondta: nincs királyi út.

2. A magyarországi országos matematikaversenyek

Magyarország méltán volt híres a matematikai tehetséggondozásáról. Bántó lehet a múlt idő, de nemzetközi versenyeredményeink a helyezések tekintetében az abszolútból a relatívba csúsztak a népességhez viszonyítva. Összességében még mindig jó eredményeink vannak, különösen igaz ez az egyéni teljesítményekre. A Nemzetközi Diákolimpia elmúlt 60 évének minden résztvevőjét tekintve az első 100 helyezett között [IMO Hall of Fame] nyolc magyar versenyző van:

Pelikán József, Lovász László, Terpai Tamás, Rácz Béla András,
Ruzsa Imre, Lakos Gyula, Kós Géza, Gáspár Attila.

A cikk végén még visszatérünk a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia eredményeire. Korábban nagyon sok jó matematikai témájú könyv jelent meg magyar nyelven; a középiskolákban matematika tagozatokat, szakköröket indítottak. Sajnos egyre kevesebb a jó tanár, aki a tehetséggondozás legfontosabb pillére lehetne. Erdős és Pólya a KöMaL és az Eötvös (ma Kürschák) matematikai versenyeknek legalább ekkora szerepet tulajdonít a matematikai tehetséggondozásban [Hersh és John-Steiner].

A közelmúltban sok új matematikaverseny létesült, a legfontosabb versenyekről találunk rövid összefoglalókat itt: [Cserepek].

A matematikai versenyek több célt szolgálnak:

- Népszerűsítik a tudományt, terjesztik a matematikai ismereteket.
- Hozzájárulnak a pályaorientációhoz.
- Felkészítik a tanulókat az érettségire, a felvételire vagy éppen egy másik versenyre.
- A versenyzők össze tudják hasonlítani tudásukat a régió, az ország vagy éppen a világ többi tanulójának tudásával.
- A színvonalas feladatok fejlesztik a problémamegoldó képességet.

- Fenntartják az érdeklődést, mert a versenyeken mindig előfordulnak igen érdekes és/vagy gyakorlati feladatok.
- A diákok megtanulják a megoldásokat és indoklásokat áttekinthetően, szabatosan, precízen, tömören leírni.

Cikkünkben az elsőkként felsorolt négy célhoz kapcsolódóan teszünk észrevételeket. A fennmaradó célok legalább annyira fontosak, de azok mélyebb vizsgálatára e cikkben nem fogunk kitérni. A versenyek eredményeinek adatbázisa alapján vannak igen könnyen és objektíven megválaszolható kérdések is. Például:

- Az X versenyben 2014-ben jó helyezéseket elért diákok milyen eredményeket értek el a korábbi évek versenyeiben?
- Az Y versenyben 2005-ben jó helyezéseket elért diákok milyen eredményeket értek el a későbbi évek versenyeiben?
- A X versenyen elért helyezések mennyiben egyeznek az Y verseny eredményeivel?
- Melyik általános iskolás verseny mutat egyezést az OKTV-vel vagy a Kürschákkal? Az első tíz helyezett közül hány lesz az OKTV első tíz helyezettje?
- Melyik általános iskolás korúaknak szóló verseny mutat egyezést a többivel?
- A tesztversenyek mennyire mutatnak egyezést az egyéb versenyekkel?
- Mely diákok és mely tanárok értek el jó eredményeket?

Arra vállalkozunk, hogy feltárjuk tehetséggondozásunk fontos tényezőjét képező versenyeink hierarchiáját. Végigkísérünk néhány évfolyamot az első matematikaversenyüktől a legszínvonalasabb Kürschák versenyig. A résztvevők az elért eredményeik alapján átfogó képet adnak a tehetséggondozásban különleges szerepet játszó iskoláinkról, versenyeinkről. A vizsgált periódus annyiban különleges, hogy már kellő rálátásunk lehet az eseményekre, és nem túl régi ahhoz, hogy a megállapításaink hasznosuljanak a versenyek résztvevőit felkészítők, illetve a versenyek szervezői számára is. [Baróti, Bartha] szerint egyes versenyek a szakemberképzés szempontjából gyakorlatilag minőségbiztosítási funkciót is ellátnak.

2.1. Miért érdemes matematikai feladatokat megoldani?

Sajnos a matematikai ismeretek hasznossága, a matematikai alkalmazások sikeressége egyáltalán nem tudatosul mai társadalmunkban. A politika, a gazdaság, valamint a széles média szereplői közül nagyon kevesen hirdetik, hogy matematikai ismereteik segítették gondolkodásukat, személyes karrierjüket, valószínűleg azért, mert nincs hírértéke. Az átlag (média-) fogyasztó nem ezt várja.

A diákok többsége képes a problémamegoldó gondolkodás elsajátítására, de nem tanítottuk meg, vagy egyéb okból nem szerezték meg ezt a képességet. Nem mutattuk meg annak örömét csak keveseknek, és ezért sokan más kellemes, gondolkodást talán nem igénylő tevékenységekkel foglalkoztak (-nak). Természetesen olyan hasznos tevékenységekre is szükség van, amelyek rutinszerű gondolkozással, egyszerű algoritmussal megoldhatók, automatizálhatók.

A gondolkodás értékét, annak magas szintű elsajátítását, hétköznapi hasznosságát, társadalmi elfogadottságát már a végzett diplomások kezdő átlagfizetése is jelzi például a brit viszonyok között (1. táblázat). Ez a táblázat azonban nem jelzi azt a nagyságrendi különbséget, amit a versenyszféra képes nyújtani a legszínvonalasabb egyetemek végzős, problémamegoldásból jeles hallgatóinak:

Medicine	Biologic.	Agricult.	Physical	Mathem.	Computer	Engineer.	Architect.	Law	Busin.	Commun.	Educat.
£28 500	£18 500	£19 500	£21 500	£24 500	£24 000	£25 500	£22 500	£19 500	£22 500	£18 000	£20 500

1. táblázat. A teremtő gondolkodás, az ahhoz vezető problémamegoldás társadalmi igénye, presztízse növekszik az algoritmizálható tevékenységekkel szemben, hiszen utóbbiak könnyen gépesíthetők. Ezt támasztják alá azok az előrejelzések, amelyek hosszú távon a matematika szakokat gondolják a legjobban dotált majdani hivatásnak az orvosi szakok mellett [UK domiciled. . .].

2.2. Országos matematikai versenyeink adatai 2005-től 2014-ig

Azért, hogy a 2. ábrán látható jelentős egyéni matematikaversenyeken legjobban teljesítők eredményeit össze tudjuk hasonlítani, egy adatbázist hoztunk létre a 2005-től 2014-ig terjedő versenyek szervezői által rendelkezésünkre bocsátott adataiból. Ezúton is köszönetet mondunk az egyes versenyek szervezőinek, hogy az adatokat rendelkezésre bocsátották.

Az adatbázist egy közismert, irodai adatbázis-kezelő szoftverrel hoztuk létre, amelynek lehetőségei elegendőek a feladat az elvégzésére. Előnyös az is, hogy az adatok és lekérdezések később exportálhatók egy professzionálisabb rendszerbe.

A lenti táblázat a helyezések táblában szereplő rekordok számát mutatja versenyenként, évenkénti bontásban. A lekérdezéseknél általában csak az első legfeljebb tíz vagy húsz eredményt vettük figyelembe, eltekintve a Kürschák verseny eredményeitől, ahol minden eredményt tekintettünk, amelyet a Kürschákról szóló jelentésben megemlítettek.

verseny	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016
Abacus		516	595	670	533	549	608	393	360	365						
Alapművelet			50	83	81	118	96	97	99	100	99	115	101	101	94	109
Arany				77	98	71	75	74	59	54	76	56	69	52		
Bátaszéki	41	37	39	40	37	38	36	40	40							
Kalmár	61	61	62	61	67	62	62	66	59	40	40	40				
Kenguru		221	227	455	664	237	452	295	470	1018	1037	1019	1007	269	271	292
Kürschák				6	9	4	6	3	12	4	9	12	5	11		
OKTV				20	90	60	91	90	145	142	62	60	60	60		
Varga		44	42	43	43	46	47	44	42							
Zrínyi				180	180	180	180	180	180							

2. táblázat. A vizsgálataink során az adatokat a táblázatban található versenyek megfelelő évfolyamai első tíz helyezettjének eredményeiből számítottuk.

Az adatbázis kezdetben 3 fő táblából állt:

- A törzsadatok természetesen maguk a versenyek. A tábla tartalmazza többek között a versenyek nevét, szervezőjét, típusait (pl. egyéni vagy csapatverseny, teszt vagy indoklásos, levelező vagy helyben megírt stb.), a versenyen indítható tanulók évfolyamait, a verseny fordulóinak számát és a kategóriák azonosítóit.
- A kategóriák külön táblába kerültek. Ez a tábla azt tartalmazza, hogy az egyes versenyekre hány kategóriában lehet nevezni, és ezeknek mik a kritériumai. Például a közismert OKTV három kategóriát különböztet meg: szakközépiskolások, nem speciális matematika tanterv szerint tanuló gimnazisták és speciális matematika tanterv szerint tanuló gimnazisták.
- A harmadik fő tábla tartalmazza a versenyek helyezettjeit. Az adatbázis képes fogadni minden elérhető adatot, amit a szervezők megadnak: a tanuló neve, iskolája, városa, megyéje, tanárai, osztálya; a konkrét verseny éve, évfolyama, kategóriája; a tanulónak versenyen elért pontszáma és helyezése.

A helyezést tároltuk szövegesen (pl. 3. helyezés, 2. dicséret), és átváltottuk számokra is. Ez jelentette az egyik legnagyobb, nehezen automatizálható feladatot. Például ha egy versenyen három fő első helyezettet hirdettek, akkor ott a második helyezett a rangsorban a negyedik lett. Ha pedig öt fő ért el második helyezést, ők a negyediktől a nyolcadik helyet foglalták el.

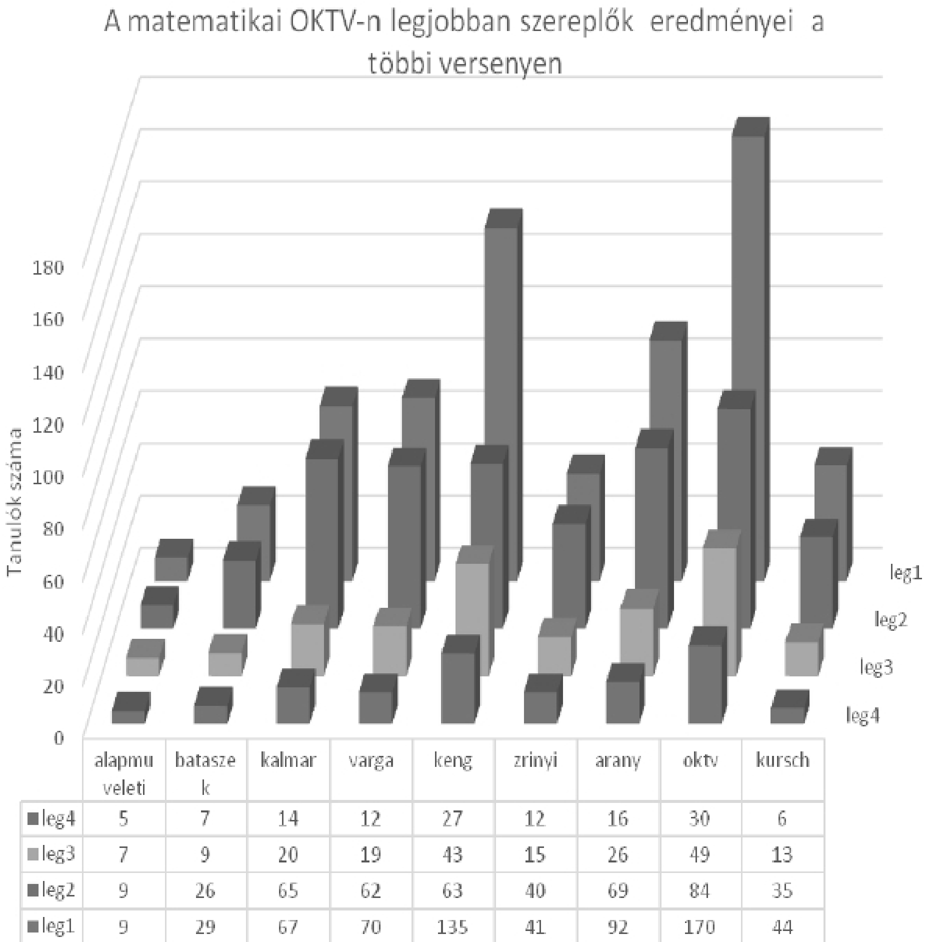
A másik nagy feladatot az jelentette, hogy a nagyon sokféle formátumban rendelkezésre álló adatokat egységes rendszerbe kellett konvertálni. Kaptunk adatokat DOC, XLS, TXT, RTF és PDF formátumban, de ezeknek az oszlopsorrendje is gyakran különböző volt. A használt karakterkódolások is eltérőek voltak, ami az ékezetes betűknél okozhatott nehézséget. Az oszlopok néha szóközzel vagy szóközökkel, néha tabulátorral vagy tabulátorokkal voltak elválasztva, néha pedig valódi táblázatként érkeztek. Szintén nehezítette az automatizálást a nem megfelelő tördelés és az egységesség hiánya. Különösen nehéz volt PDF-ből konvertálni.

A fent leírt adatbázist felhasználva olyan lekérdezéseket készítettünk, amelyek eredményeként megválaszolhatjuk a 2. fejezet elején feltett kérdéseket, illetve fényt deríthetünk a versenyek tehetséggondozásban játszott szerepére. Szeretnénk megerősíteni, megosztani néhány gondolatot, amelyet a kiolvasott adatok alátámasztottak, inspiráltak, illetve érintik a versenyek minőségét, így a tehetséggondozásunk minőségét is. Az adatbázist folyamatosan bővítjük, a tartalom lekérdezésével tudományos kutatáshoz szívesen adunk bővebb, részletesebb eredményeket a szerzők elérhetőségein (katona.janos@uni-obuda.hu, nagy.gyula@uni-obuda.hu).

3. A verseny mint mérés megmérettetése

Országos matematikaversenyeinket, vizsgáinkat szeretnénk megmérni, összehasonlítani eredményességük szempontjából.

Ezt lehetne úgy is mérni, hogy azt vizsgálnánk, hogy a versenyzők mennyire elégedettek a versennyel, lehetne úgy, hogy megnéznénk felvételi eredményeiket, és lehetne úgy is, hogy elemeznénk későbbi munkájuk során elért eredményeiket, ezekhez nincsenek adataink. Így azt vizsgáltuk, hogy a fiatalabb korú versenyzők eredményei mennyire kapcsolódnak a közoktatás végső szakaszában levő versenyekhez. Ezt mutatja az 1. ábra grafikonja.



	alapmu veleti	batasze k	kalmar	varga	keng	zrinyi	arany	oktv	kursch
leg4	5	7	14	12	27	12	16	30	6
leg3	7	9	20	19	43	15	26	49	13
leg2	9	26	65	62	63	40	69	84	35
leg1	9	29	67	70	135	41	92	170	44

1. ábra. Azt kérdeztük, hogy az OKTV-n jól teljesítők (1–10. helyezés) között hányan teljesítettek jól az adott versenyben (a táblázat legalsó sora: leg1). Az adott versenyben és még egy másikban az első hat verseny közül (a táblázatban alulról a második sor: leg2) stb. Jól látható az egyes sorokat tekintve, hogy a versenyen hányan vettek részt és értek el jó helyezést azok, akik később az OKTV-n is jól szerepeltek.

Az Alapműveleti, illetve a Bátaszéki verseny alacsonyabb mutatói a versenyek ismertségének vagy a számon kért készségek a többi versenytől való eltérésének lehet az eredménye, esetleg más okoknak tulajdonítható, ennek megállapítása további vizsgálatot igényelne. A Kalmár és a Varga számai közel azonosak, de elmaradnak az OKTV-n résztvevők számai mögött, ez bizonyosan az eltérő kategóriák, illetve évfolyamok miatt alakult így. Valószínűleg a nevezési díjas fejezetben említett okok miatt alacsonyak a Zrínyi verseny számai. A Kenguru különösen jó teljesítménye valójában csak annak köszönhető, hogy versenyeit nemcsak az általános iskolai évfolyamokban, hanem a 9. évfolyamtól a 12. évfolyamig is indítja. Lentebb, amikor a Kürschák versennyel hasonlítjuk majd össze, akkor csak a 8. évfolyamig fogjuk keresni a tanulókat ebben a versenyben is. Nagyobb egyezés azért nincs, mert a legjobbak közül sem mindenki vett részt ezen a versenyen, ugyanis a felsőbb osztályos versenyzők, illetve tanáraik nem preferálták a tesztversenyeket.

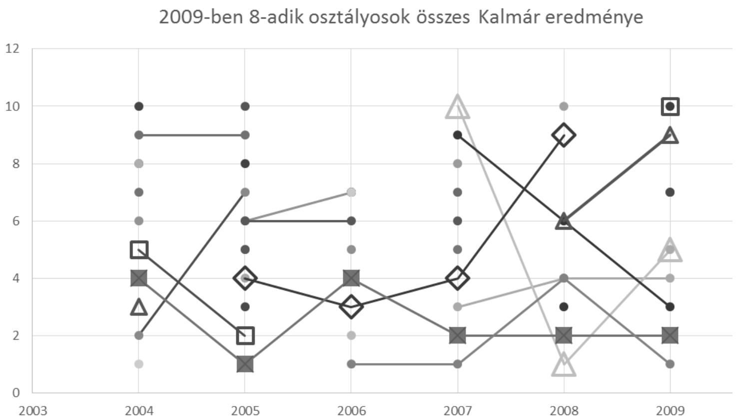
3.1. Nevezési díjas versenyek

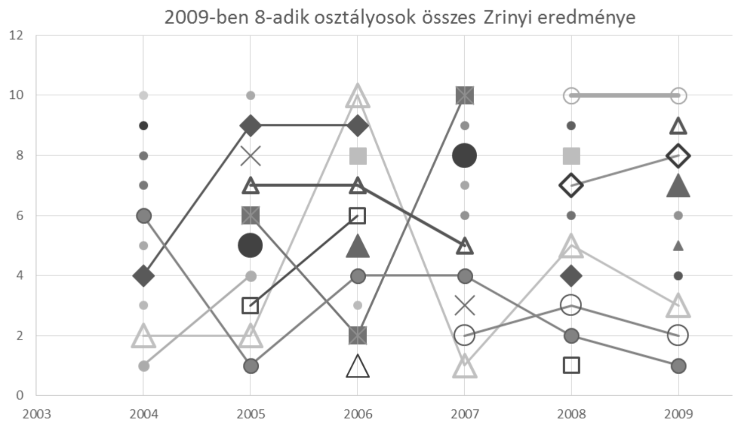
Bizonyos versenyek, a 2. ábra első hat versenye is ilyen, nevezési díjat kérnek a résztvevőktől és pályázati forrásokból is fedezik a verseny költségeit. Ez általában biztosítja a verseny színvonalas lebonyolítását. Így a szervezők érdekeltek a versenyzői létszámok emelkedésében, a versenyszabályzat által kialakított körzeteikből a jelentkezettek arányában jutnak tovább a versenyzők, az első helyezett biztosan tovább jut, azonban előfordulhat, hogy jobb pontszámot elért versenyző egy másik körzetből nem kerül döntőbe. Így bizonyos körzetekből gyengébb eredménnyel is tovább lehet jutni a döntőbe.

Így e versenyek helyezései – hasonlóan a kieséses versenyek eredményeihez – nem feltétlenül tükrözik a tényleges sorrendet a feladatmegoldó képesség tekintetében. Így előfordulhatott, hogy a Kalmár második és harmadik helyezettje nem lett döntős a Zrínyiben. A többiek viszont döntőbe kerültek, de ott többnyire gyengébben teljesítettek, ennek okai lehetnek még a következők. A kitűzött feladatoknak több mint fele rutinszerű feladat. Ezzel növekszik a verseny népszerűsége, hiszen így a gyengébb versenyzők nagy része is képes megoldani néhány feladatot, így nem érzi haszontalannak a részvételt. Előfordulhat azonban, hogy még a jobb megoldók is a sok rutinszerű feladat közül néhányat eltévesztenek. Így ezek a versenyek, különösen a tesztversenyek, nemcsak a problémamegoldó gondolkodást, hanem közel azonos súllyal a gyorsaságot, precízséget és a kitartást is tesztelik.

3.2. Tesztversenyek

A tehetséggondozással foglalkozó kollegák egy része szerint ezek a versenyek nem feltétlenül azokat a képességeket mérik, amelyeket a hagyományos, indoklást, bizonyítást igénylő versenyek mérnek. A lekérdezésekből készített grafikonok szintén ezt támasztják alá, hiszen pl. a Kalmár verseny legjobb helyezettjei közül csak három került a Zrínyiben az első tíz helyezett közé. Hosszabb ciklusban megfigyelve azonban e versenyek legjobb helyezettjeit, feltűnik, hogy a tartósan, több éven keresztül jól teljesítők mindkét versenytípusban rendszeresen, legtöbbször ismétlődően érnek el jó eredményt, mint ahogy ez a következő ábrákon is látható. Az azonos színű és formájú jelek ugyanazt a tanulót jelölik egy ábrán belül, ha az első tíz között szerepeltek egymást követő év(-ek)-ben is, akkor a megfelelő pontok össze is vannak kötve a megfelelő színű vonallal.





2. ábra. Mennyire változtak az azonos évfolyamra járók versenyeredményei (első helytől a tizedik helyig) az évek során az adott versenyen belül? Az első egy Kalmár, a második egy Zrínyi verseny grafikonját, illetve gráfját mutatja a 3. osztálytól a 8. osztályig 2004-től 2009-ig. Jól kivehető az egyes versenyzők eredményeinek változása az évek során (elektronikus verzióban színesben).

3.3. Mobilitás a legjobb versenyzők között

Mennyire változnak az azonos évfolyamra járók versenyeredményei az évek során egy adott versenyen belül? Az ábra egy Kalmár és egy Zrínyi verseny grafikonját, illetve gráfját mutatja, ezeket vizsgálva nehéz különbségeket felfedezni, de ha a függőleges oszlopokban található éleket vizsgáljuk, akkor mindössze három él elhagyásával mindkét gráf két különálló részre bomlik. Ennek magyarázata lehet a Kalmár verseny esetében az is, hogy más szervezi a 3. és 4. osztályos versenyeket, mint a többit. Ezt támasztja alá az, hogy a Zrínyi versenyben a kiosztott 60 helyezést 31 diák, míg a Kalmár verseny 65 helyezését 39 diák kapta. Lehetne ez a nagyobb mobilitás példája, azonban ez a különbség döntően az első két évben mutatkozik, hiszen a Kalmár versenyben 22 diákból 6 (27%) tudott az elsők között szerepelni a későbbi években, míg a Zrínyi verseny 19 versenyzőjéből 11 (58%). A Zrínyi verseny kapcsán nem tudunk megfelelő indokot a 4. oszlop alacsony élszámára vonatkozóan, hacsak nem a hatosztályos gimnáziumokba történő iskolaváltást. Ha tüzetesebben megvizsgáljuk a jobb oldali grafikont mint gráfot, akkor a 2006. év és a 2008. év eredményei között találunk még három azonos diákot, akik 2007-ben éppen nem szerepeltek az első tíz között. Tehát az összes kapcsolatot tekintve a jobb oldali gráf több kapcsolattal rendelkezik, így a versenyzők mobilitása kisebb, ez azonban valószínűleg a Kalmár verseny 3. és 4. osztályos versenyének eltérő megrendezéséből fakad.

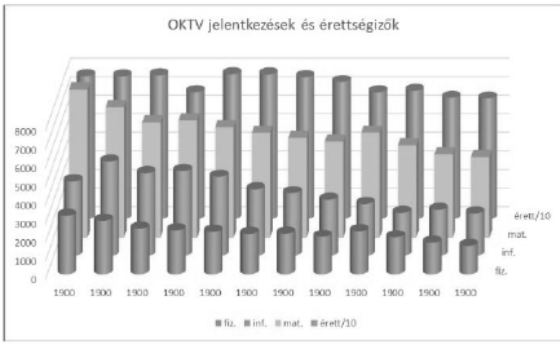
3.4. Otthoni környezetben írt verseny összevetése zárthelyi versenyekkel

A KöMaL és az Abacus versenyek esetében nem ellenőrizhető, hogy a beküldő mennyi ideig dolgozott a feladatokon, illetve hogy milyen (megengedett) forrásokat használt. Lehet találni néhány olyan versenyzőt, akinek zárt helyen időre megírt dolgozata eredményei nem korrelálnak az otthoni eredményekkel. Előfordulhat ilyen lámpaláz, stressz, lassúság következményeként, érdemes azonban további erőfeszítéseket tenni az okok felderítésére és javítására. Hiszen a kiválóság eléréséhez sokszor versenyhelyzetben is jól kell gondolkodni.

3.5. Az érettségi

2014-ben 76 423-an tettek matematikából középszintű, míg mindössze 3 593-an tettek emelt szintű érettségi vizsgát. Érdekes, hogy nagyságrendileg azonos számú diák (4 968 fő) jelentkezett ebben az évben a matematikai

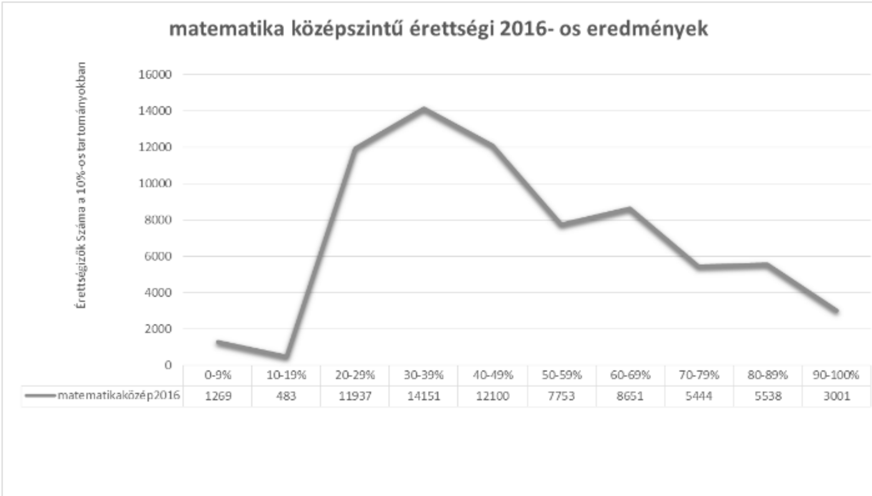
OKTV-kre a 11.-12. évfolyamokból, nem tudjuk mekkora a két halmaz közös része. Erre az évre vonatkozóan a [Bánky és mások] felmérés egyik megállapítása, hogy a legnagyobb tudásfölény a matematika esetében mutatkozott meg a vizsgálatban résztvevő diákok eredményei és a középszintű vizsgázók között. „Ez talán értelmezhető úgy, hogy az emelt és a középszintű tudás között a matematika tartalmi területén van a legmarkánsabb eltérés.” Szerintünk ez a matematikai versenyek kialakult struktúrájának, hierarchiájának is köszönhető, amelyet cikkünkben részletesen vizsgálunk. Ha figyelembe vesszük a közelmúlt matematikaversenyeinek létszámait egy adott évben, akkor közel 10 ezer diákra tehető közoktatásunk egy-egy korai évfolyamában a matematikaversenyeken résztvevők száma, ez a késői évfolyamok esetében mindössze kétezer tanulót jelent (a grafikon két évfolyam, a 11. és a 12. évfolyam létszámának összegét mutatja). Sajnos még rosszabb eredményt kapunk, ha az idősort vizsgáljuk, mert a versenyekben résztvevők száma 10 év alatt ötödére csökkent, azaz ugyanannak a diáknak tizedannyi vetélytársa van a tanulmányai végén, mint alsós elemiben.



év	fiz.	inf.	mat.	érett/10
2005	3139	4014	7972	7702,5
2006	2873	5075	7017	7689,5
2007	2450	4456	6202	7752,7
2008	2372	4569	6315	6845,3
2009	2280	4258	5945	7803,7
2010	2172	3584	5646	7795,7
2011	2182	3377	5370	7644,1
2012	2006	3019	5170	7384,5
2013	2312	2794	5656	6843,6
2014	1985	2320	4968	6917,6
2015	1690	2473	4488	6536,3
2016	1524	2291	4340	6500

3. ábra. OKTV jelentkezések és az érettségizettek számának összehasonlítása 2005-től 2016-ig

A jobb egyetemeken élesebb a verseny, a gólyákat néhány cinikus kolléga a következővel serkenti: „Most pedig kedves hallgatók, nézzék meg jól a jobb oldali, majd a bal oldali szomszédaikat, mert a diplomaosztón nagy valószínűséggel nem fognak találkozni”. Diákjaink nagy része elveszíti lelkesedését a gondolkodás, a problémamegoldás iránt; más irányú lesz érdeklődésük, pedig fontos lenne a jó eredmények fenntartása érdekében a megfelelően hosszú „kispad”, a középosztály fenntartása, amely nem hagyja, hogy a legjobbak a babérjaikon üljenek. Meglepő statisztika látható a fenti grafikonon. Az OKTV jelentkezések száma az elmúlt tíz év alatt a felére csökkent, míg a nappalis végzős érettségizők száma 77 ezerről mindössze 65 ezerre csökkent, hasonlóan a korfa megfelelő szintjeihez (a nagy eltérés a korfa szintjeiben egy 5 éves ciklussal korábban volt) [Wikipédia].



	0-9%	10-19%	20-29%	30-39%	40-49%	50-59%	60-69%	70-79%	80-89%	90-100%
matematikaközép2016	1269	483	11937	14151	12100	7753	8651	5444	5538	3001

4. ábra. A matematikai közoktatás eredményességét látjuk a 2016-os adatok tükrében. További vizsgálatok szükségesek a normálistól erősen eltérő eloszlás magyarázatára.

Ez nem lesz elég a kiválósághoz, ahhoz sem, hogy jó problémamegoldók legyünk. Az érdeklődő, tehetséges diákok fejlesztéséhez megoldást jelenthetnek a különböző szakkörök, táborok, hozzáértő hozzátartozók, interneten elérhető segédanyagok, magántanár(-ok) – nevezzük inkább mentornak – és természetesen a versenyek. Utóbbiakról szólunk még a továbbiakban, előtte azonban a tehetségről ejtsünk néhány szót.

4. A kiválóság, illetve az elit

Ahhoz, hogy valamiben kiválóak legyünk, küzdeni kell. Eötvös Lóránd szavaival:

„Aki nagy útra készül, aki testi erejét nagy próbának veti alá, még az is, aki bárminemű sport-téren másokkal versenyre kel, lemond kedves szokásairól, kényelmét, mulatságait céljának eláldozza. Nem érdemel-e a szellemi küzdés terén elérendő siker éppen ilyen áldozatokat?”

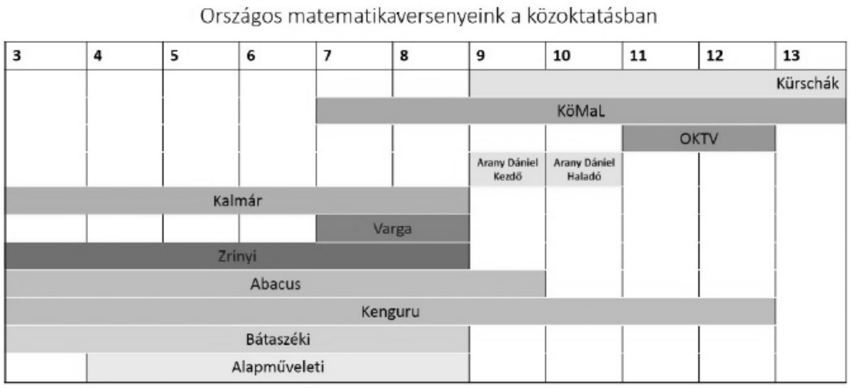
Egy átlagos diák, egy fásult szülő megnyugszik, ha gyermeke átment az érettségin vagy bármely vizsgán, és mint korábban említettük, mindenki örül.

Etalonnak tekintett versenyünk a Kürschák József Matematikai Tanulóverseny. Az adatbázisban feldolgozott években a 81 kiemelkedő Kürschák versenyeredményből 67-et a speciális matematika tagozatra járó diákok értek el, 48 eredményt pedig azok, akik a Budapesti Fazekas Gimnáziumba jártak. Nagyon sokan úgy gondolják, hogy az elit iskolákban tanulnak a legjobb diákok és tanítanak a legjobb tanárok. Ez nem így van, talán nem is baj, hiszen tudjuk, az iskola az életre nevel, és az elit iskola is elsősorban iskola. Általában azért elmondható, hogy a kiváló iskolákban több jó tanár is van, mint gyengébb képességű, ahogyan ez általában a diákokra is igaz. A Pintér Ferenc által szervezett tehetséggondozásban oktatók véleménye szerint is, a vidéki iskolákban megtalálhatóak a tehetségek, de talán hiányoznak azok az egyes középiskolákhoz köthető műhelyek, amelyek a szegedi Radnótihoz vagy a budapesti Fazekashoz hasonlóak, ezért hívták életre az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó Iskolát.

4.1. A jó tanár és a jó iskola

Nehezen meghatározható, hogy milyen tulajdonságok jellemzik a jó matematikatanárt. Sokszor egész mást tekint jó tanárnak a szülő, mást a diák és mást az egyetem vagy a munkaerőpiac. Ha valaki nem felvételizik matematikából, számára az lehet a jó tanár, aki minél rövidebb idő alatt eléri vele az érettségihez szükséges szintet, és a diák zavartalanul a felvételi tárgyaira tud figyelni. Van, aki szerint az a jó tanár, aki motiválni tudja a hallgatóságát. Más elvárja, hogy a fizikához, informatikához szükséges matematikára helyeződjön a hangsúly. Sokak szerint az a jó tanár, aki a tehetségtelen gyermekeket is el tudja juttatni a sikeres érettségiig, felvételiig. Kérdés, ekkor marad-e elég idő, energia a tehetségesekkel differenciáltan foglalkozni.

Ha normál iskolai oktatás keretein belül differenciáltan kívánunk foglalkozni a diákokkal, akkor ez nagy energiát kíván tőlünk, azonban a tehetséges tanítvány egy idő után túlnő rajtunk. Többnyire a tanár, a szülő felismeri, hogy a diáknak különleges segítségre lesz szüksége további fejlődéséhez, esetleg együtt ösztönzik ezt szakkörök, táborok, mentor(-ok) segítségével. A fentebb említetteken kívül az Abacus az érdeklődő 3.–8. osztályosok számára nagyon hasznos segítség, nélkülözhetetlenek a több mint száz éve „nem középiskolás fokon”, de e korosztály számára megjelenő Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok versenyei, röviden a KöMaL versenyek [KöMaL 1994, 2018, C2K, Nagy 2010], valamint az immár fél évszázada működő Speciális Matematika Tagozat. Mindkettő a természettudományos, mérnöki, illetve gazdasági ismeretek elsajátításához is szilárd alapokat biztosít, másrészt a természettudományos kutatói hivatás megismerésére is alkalmas médium. A magyar matematikai tehetségfejlesztés kapcsán a KöMaL és a versenyek kapcsolata vitathatatlan [Berzsenyi 2010, 2011], [C2K], [Czinkán és mások], [Hersh], [Huszár], [Kántor S-né], [Nagy 2003], [Surányi J], [Wieschenberger], mostanában megjelent versenyeredmények statisztikáival is alátámasztva [Nagy 2015, 2016].



5. ábra. A közoktatásban tanuló 3.–12. osztályba járó diákok mely versenyekben mérhetik össze tudásukat évfolyamtársaikkal, a Kürschák verseny esetében nincs az évfolyamra vonatkozó feltétel, az OKTV esetében van, azonban a 11. és 12. évfolyam megkülönböztetés nélkül versenyez.

E cikkben azt fogjuk jó tanárnak tekinteni, aki motivált tanulóit jól fel tudja készíteni a versenyekre, azaz fejleszti a problémamegoldó képességüket. Megemlítjük, hogy a jó iskolákba felvett tanulókat általában már nem kell motiválni, a hangsúly a fejlesztésre helyeződhet. Általában is igaz, a motivált és érdeklődő tanulóval könnyebb foglalkozni, ezért lehet nagyobb a hozzáadott érték a problémamegoldó készség fejlesztése tekintetében is.

A matematikatanár munkájának minőségmérése nincs kidolgozva, illetve a szakma által széles körben elfogadva, ezért a jó tanár minősítés matematikatanárok esetében is szubjektív. Jól mérhető lehetne a tanár problémamegoldó készsége. Ez azonban csak akkor megmutatkozó előny az óráira rendesen felkészült, esetleg gyengébb problémamegoldó oktatókkal szemben, ha a diákok gondolatait megértve, azokat felhasználva halad a megoldás felé. A problémamegoldó gondolkodás oktatásában kiemelkedő eredményeket elérő kollégák között is találunk kevésbé jó problémamegoldókat, példás felkészültségük, tapasztalatuk pótolhatja ezt a hiányt. Azt azonban semmi sem pótolja, hogy képes legyen felmérni: tanulói megértették-e magyarázatát, és amennyiben nem, akkor találjon olyan alternatív megoldást, amelyet a diák megért, nyilván azért nem érthette meg az eredeti gondolatot, mert valamelyik „lépcső” hiányzott. Tehát egy jó tanárnak egyben jó problémamegoldónak is kell lennie, legalábbis ez utóbbi tekintetben feltétlenül!

A következő táblázatokból arra is választ kapunk, van-e hozzáadott érték az elit iskolák részéről. Hiszen érdemeiket csökkenti az, hogy már eleve jó versenyeredményekkel rendelkező diákokat iskoláznak be. E cikk megírásánál jóval nehezebb feladat lenne megmutatni, hogy az általános iskolás versenyektől mennyire rögös az út egy Kürschák feladat megoldásáig, ez több ezer munkaórát kíván a diáktól. Ennek a munkának az irányítása is teljes embert kíván, nem szokták félállásban csinálni. Érdeme ezeknek az iskoláknak, hogy versenyző múlttal rendelkező diákokat fel tudnak készíteni a Kürschák versenyre, illetve a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára. Vegyük a szegedi Radnóti Gimnáziumban végzettek közül a legjobb Kürschák megoldókat. A lenti táblázatban 4 Kürschák eredményt találunk három tanulótól, akik korábban legalább két általános iskolás versenyben is jól szerepeltek, így tehát voltak már korábban is versenyeredményeik. A következő oldalon levő táblázatból azonban az is kiolvasható, hogy a szegedi Radnótisoknak összesen 10 Kürschák eredményét hét tanuló érte el, tehát $10-4$, azaz hat eredmény nem köthető általános iskolás versenyeken történő jó szerepléshez (legalábbis az adataink szerint). A győri Révai esetében ez a szám 2, a budapesti Fazekas esetében pedig 20, tehát mondhatjuk, van hozzáadott érték, ezek az iskolák is jól gazdálkodtak talentumaikkal.

A matematikai tehetséggondozás vidéken is nagyon erős, közel azonos számú vidéki iskola diákja ért el az általános iskolai versenyeken jó eredményeket, mint budapesti, és e diákok később a Kürschák versenyen a legeredményesebbek között szerepeltek. A 3. táblázat mindössze 30 versenyzőhöz tartozó iskolákat mutatja 2004-től 2014-ig. A többi versenyzőnek legfeljebb egy vagy egyáltalán nem volt első tíz közötti eredménye az alsóbb osztályokban (ez lehet annak következménye, hogy a vizsgált időszak elején már gimnazisták voltak, vagy nem Magyarországon éltek, és így nem tudtak versenyezni), ezért eredményeikre talán még inkább mondhatjuk, hogy az a középiskolájuk, tanáraik, mentoraik érdeme is, elsősorban természetesen a versenyző diákok kitartó munkájának, fejlett problémamegoldó készségének eredménye. Ezért is soroltuk fel neveiket.

Honnan	Hová	Diákok száma	Kürschák eredménye
Áldás utcai, Bp.	Fazekas	5	10
Apáczai, Bp.	Fazekas	1	2
Bocskai, Hajdúböszörmény	Fazekas	1	1
DE Arany, Debrecen	debreceni Fazekas	1	1
Egry József, Keszthely	Fazekas	1	1
ELTE Radnóti, Budapest	Fazekas	3	4
Fazekas	Fazekas	1	2
Gróf Apponyi, Jászberény	Fazekas	1	1
Hunyadi, Szeged	szegedi Radnóti	1	2
makói József Attila	makói József Attila Gimnázium	1	1
Kinizsi, Debrecen	debreceni Fazekas	1	3
Kovács Margit, Győr	győri Révai	1	1
Lauder, Bp.	Fazekas	1	2
Makkosházi, Szeged	szegedi Radnóti	1	1
Nagyboldogasszony, Kaposvár	kaposvári Nagyboldogasszony	1	1
Pasaréti Gimnázium, Bp.	Fazekas	1	2
Pázmány, Pécs	pécsi Leőwey	1	1
Petőfi, Kiskőrös	Fazekas	1	1
Petőfi, Kiskunfélegyháza	kecskeméti Katona	1	1
PTE Deák, Pécs	pécsi Leőwey	1	1
Száraznád, Bp.	Fazekas	1	2
Teleki Blanka, Székesfehérvár	székesfehérvári Teleki	1	1
Veres Péter Gimnázium, Bp.	Veres Péter Gimnázium	1	2
Zrínyi Ilona, Szeged	szegedi Radnóti	1	1
		30	45

3. táblázat. Az első oszlopban azoknak a diákoknak a korábbi iskoláját soroltuk fel, akik az első tíz helyezés valamelyikét kapták az általános iskolai versenyek közül legalább kettőben a 3. osztálytól a 6. osztályig, és eredményesen szerepeltek a vizsgált évek valamelyik Kürschák versenyén. Második oszlopban a tanulók jelentésben szereplő iskoláinak rövid neveit láthatjuk.

<table>
<tr><th>Iskola</th><th>Versenyző</th><th colspan="2">Kürschák eredmények száma</th><th>Versenyző</th><th>Iskola</th></tr>
<tr><td>Berzsenyi Dániel Gimnázium;
Juhász Péter, Nemecskó István,
Pósa Lajos, Sztranyák Attila</td><td>Simon Péter</td><td>1</td><td>1</td><td>Rácz Béla András</td><td rowspan="7">Fazekas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">debreceni Fazekas Mihály Gimnázium
Remeténé Orvos Viola, Kovács Péter,
Tóth Marianna, Lakatos Tibor, Pósa Lajos</td><td>Baran Zsuzsanna</td><td>1</td><td>2</td><td>Sándor András</td></tr>
<tr><td>Éles András</td><td>3</td><td>1</td><td>Seres Gyula</td></tr>
<tr><td>ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskola,
walesi Atlantic College; Csatár Katalin,
Juhász Péter, Pósa Lajos, Paul Beltcher</td><td>Gosztonyi Balázs</td><td>1</td><td>1</td><td>Szabó Barnabás</td></tr>
<tr><td rowspan="27">Fazekas;
Beleznay Ferenc,
Dobos Sándor,
Elekes G. Sándor,
Fazekas Tünde,
Frenkel Péter,
Gyapjas Zoltán,
Hegedűs Pál,
Hraskó András,
Jakucs Erika,
Juhász Péter,
Kiss Gergely,
Kiss Géza,
Kós Géza,
Laczkó László,
Pataki János,
Pelikán József,
Pósa Lajos,
Surányi László,
Szászné Simon Judit,
Táborné Vincze Márta</td><td>Ágoston Tamás</td><td>2</td><td>2</td><td>Tardos Jakab</td></tr>
<tr><td>Eisenberger András</td><td>1</td><td>2</td><td>Tomon István</td></tr>
<tr><td>Erdélyi Márton</td><td>1</td><td>1</td><td>Wagner Zsolt</td></tr>
<tr><td>Fehér Zsombor</td><td>1</td><td>1</td><td>Di Giovanni Márk</td><td rowspan="3">győri Révai Miklós Gimnázium;
Árki Tamás, Fodor Péter,
Zábrádiné Schmierer Emília,
Dobos Sándor, Juhász Péter, Pósa Lajos</td></tr>
<tr><td>Fonyó Dávid</td><td>1</td><td>1</td><td>Gőgös Balázs</td></tr>
<tr><td>Havasi Márton</td><td>1</td><td>1</td><td>Mészáros András</td></tr>
<tr><td>Homonnay Bálint</td><td>2</td><td>1</td><td>Somogyi Ákos</td><td>kaposvári Nagyboldogasszony Római Katolikus Gimn.; Fodor Péter, Pósa Lajos</td></tr>
<tr><td>Hubai Tamás</td><td>1</td><td>1</td><td>Damásdi Gábor</td><td>kecskeméti Katona József Gimnázium;
Reiter István</td></tr>
<tr><td>Hujter Bálint</td><td>1</td><td>1</td><td>Gyenizse Gergő</td><td>kiskunhalasi Szilády Áron Református Gimnázium; Osváth Emese</td></tr>
<tr><td>Janzer Barnabás</td><td>3</td><td>1</td><td>Kúsz Ágnes</td><td>makói József Attila Gimnázium;
Rójáné Oláh Erika, Kosztolányi József</td></tr>
<tr><td>Janzer Olivér</td><td>3</td><td>1</td><td>Czank Tamás</td><td>miskolci Földes Ferenc Gimnázium;
Gulyás Tibor, ifj. Szabó Kálmán</td></tr>
<tr><td>Kabos Eszter</td><td>1</td><td>1</td><td>Gyarmati Máté</td><td rowspan="2">pécsi Leőwey Klára Gimnázium;
Bereczkiné Székely Erzsébet, Kiss Zoltán,
Ruff János, Dobos Sándor, Pósa Lajos</td></tr>
<tr><td>Kalina Kende</td><td>1</td><td>1</td><td>Szabó Attila</td></tr>
<tr><td>Kiss Viktor</td><td>1</td><td>1</td><td>Gyulai-Nagy Szuzina</td><td rowspan="7">szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium;
Ábrahám Gábor,
Mike János,
Schultz János,
Tigyi István,
Kosztolányi József,
Dobos Sándor,
Pósa Lajos</td></tr>
<tr><td>Korándi Dániel</td><td>2</td><td>1</td><td>Herczeg József</td></tr>
<tr><td>Komis Kristóf</td><td>1</td><td>3</td><td>Jankó Zsuzsanna</td></tr>
<tr><td>Lenger Dániel</td><td>1</td><td>1</td><td>Magda Gábor</td></tr>
<tr><td>Lovász László Miklós</td><td>2</td><td>2</td><td>Nagy Donát</td></tr>
<tr><td>Machó Bónis</td><td>1</td><td>1</td><td>Nagy-György Pál</td></tr>
<tr><td>Maga Balázs</td><td>2</td><td>1</td><td>Szilágyi Csaba</td></tr>
<tr><td>Medek Ákos</td><td>1</td><td>1</td><td>Strenner Balázs</td><td rowspan="2">székesfehérvári Teleki Blanka Gimn.;
Buday Endre, Ponácziné Csuthy Márta,
Szekély Edit, Szabó Gábor, Dobos Sándor</td></tr>
<tr><td>Nagy Bence Kristóf</td><td>1</td><td>1</td><td>Strenner Péter</td></tr>
<tr><td>Nagy Csaba</td><td>2</td><td>1</td><td>Gehér György</td><td>szombathelyi Bolyai János Gyakorló Gimnázium; Zsiros Péter</td></tr>
<tr><td>Nagy Dániel</td><td>1</td><td>2</td><td>Dankovics Attila</td><td rowspan="2">Veres Péter Gimnázium; Rácz Mihályné,
Hraskó András, Dobos Sándor,
Surányi László, Pósa Lajos, Juhász Péter</td></tr>
<tr><td>Nagy János</td><td colspan="2">2+1</td><td>Nagy János</td></tr>
<tr><td>Nagy Róbert</td><td>1</td><td>1</td><td>Sümegi Károly</td><td>zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium;
Csiszár Mária</td></tr>
<tr><td>Paulin Roland</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

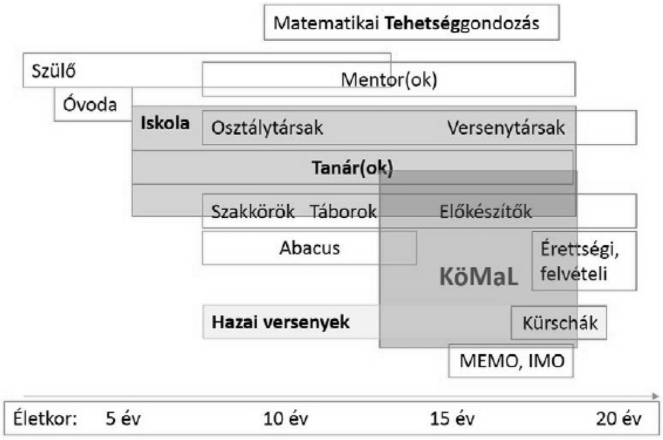
4. táblázat. Kürschák verseny díjazottjai és tanáraik a vizsgált időszakban (a táblázat jobb oldali három oszlopa jobbról balra olvasandó)

Megjegyezzük, hogy köznapi értelemben az elit iskoláknak legjellemzőbb tulajdonsága, hogy az elégedett diák felnőttként szintén ide küldi gyermekét. Ebből következően az alapításuk óta eltelt idő harminc-negyven évnél nem lehet kevesebb. A fenti iskolák többsége ilyen, azonban egyik sem Roxfort, ahová csak a mágikus képességekkel rendelkező gyerekek kapnak meghívást, mivel a problémamegoldás, a gondolkodás tanulható, ezért a felvétel lehetősége mindenki számára nyitott, itt azonban meg kell felelni, jól kell teljesíteni. A felvételhez már az általános iskolában is jó feladatmegoldónak kell lenni. Általában nem elegendő csak az órákon részt venni, hanem szakkörökön, levelezős versenyeken, egyéb versenyeken is jó eredményt kell elérni.

Az egyik fontos kérdés: mi lenne, ha a tehetséges diákok nem az elit gimnáziumokba, hanem egy másik iskolába járnának, vagy diákonként véletlenszerűen választott középiskolákba járnának? A kérdés első fele egyszerű, akkor az a másik iskola lenne az elit, amely kialakítaná megfelelő oktatási módszerét, megszerezné megfelelő tanárait, erőforrásait. A kérdés második felére nehezebb választ adni. Ezért inkább azt vizsgáljuk a versenyeredmények tükrében, mekkora, egyáltalán van-e a matematikai tehetségfejlesztés során hozzáadott érték az elit iskolák részéről. Ebben a cikkben elit iskoláknak tekinthetjük azokat, amelyekben végzett tanulóknak több Kürschák eredménye is van a vizsgált időszakban (2004-től 2014-ig). A 4. táblázatban soroltuk fel a diákokat és iskolájukat, valamint a Kürschák jelentésben szereplő tanáraikat, akik nem feltétlenül tartoznak a diákok iskoláinak tanárai közé. Leggyakrabban Pósa Lajos és Dobos Sándor neve szerepel, a tehetséggondozó táborokban és a Nemzetközi Matematikai Olimpiára felkészítő szakkörökben végzett kiváló munkájuk eredményeként.

4.2. A tehetségek

Az átlaghoz képest lényegesen jobb eredményeket elért személyeket a köznyelv kivételes képességűnek vagy tehetségesnek nevezi. Nehéz jó definíciót találni a matematikai tehetségre, mondhatnánk itt is – mint a sportban –, hogy aki nyer, az tehetséges. A tehetségek felkutatása és a tehetségnevelés korunk neveléstudományának egyik legfontosabb kutatási témája. A tehetség fogalma az egyéni adottságokra (velünk született) és a képességekre (tanult) vezethető vissza. A kutatók által szinte egységesen elfogadott tehetségmodell Renzulli és Mänks nevéhez fűződik [Petriné]. A modell alapján azok közül a rendkívüli képességekkel bíró, kreatív és motivált (kitartó) tanulók közül kerülnek ki a tehetségek, akik támogató családi, iskolai és kortárs közösségekben bontakoztathatják ki kiválóságukat.



6. ábra. A magyarországi matematikai tehetséggondozás áttekintő ábrája

4.3. A tehetség

A lehetséges tehetségdefiníciók közül Renzulli modelljét [Czeizel] a zsenik családfájára irányuló genetikai kutatások alapján módosította, egyben hangsúlyozza a társadalomnak a tehetségek nevelése érdekében megnövekedett felelősségét. A Renzulli-modell az átlag feletti képességeket egyszerűen csak általános értelmességként, illetve bizonyos speciális egyéb, de nem átlag feletti képességekként értelmezi, ahogy Czeizel is. Ezt támasztja alá a következő Einstein-idézet is:

Nem vagyok különösebben tehetséges. Csupán szenvedélyesen kíváncsi.
Albert Einstein

A tehetséggondozás (tehetségnevelés) nehéz (talán mondhatjuk, megoldhatatlan) feladatot jelent a tanárok számára, mert az alapvető cél a tömegoktatás szinten tartása. Ehhez illeszkedik tehetséggondozásunk is. Nem törekszünk a tehetség azonosítására, hanem valamiféle folyamat, szelekció folytán létrejön diákoknak egy csoportja, amely tehetséggondozásban részesül, így az általános vélekedés, hogy a tehetségnevelés első lépése: annak felismerése [Papp], kétségessé válik, hiszen tehetséggondozásunk is régóta így működik. Mégis – tekintve a tehetségek életrajzát még nehéz körülmények között (halmozottan hátrányos helyzetben) nevelkedő gyerekek esetében is – gyakori, hogy a falusi plébánost, illetve a tanítót ismerik el tehetségük felismerőjeként.

Ők voltak az elsők, akik, nem tudom, milyen jelek alapján, szellemi képességeket véltek felfedezni bennem.

Illyés Gyula

A tehetségek felismerését az ismeretszerzésre, a motivációra, a kreativitásra és a szociális viselkedésre jellemző sajátosságok megítélése segíti, e sajátosságok súlyozott előfordulása valószínűsíti a tehetséget [Petriné]. Valóban e jegyek mindegyikének birtoklása már garantálhatja a tehetséget, egyesek hiánya pedig tanulható, tanítható.

Csodagyermek lettem, mint kivétel nélkül minden gyermek, akire figyelnek egy kicsit.

Illyés Gyula

A tehetség azonosítása a matematikában is rendkívül nehéz. [Gyarmathy] említ módszereket, de ezek többsége olyan elvárt készségek alapján dönt, amelyek megszerezhetők, tanulhatók.

4.4. A matematikai tehetséggondozás és a csapatmunka

Visszatérve a bevezetőben idézett állásfoglalásra, a matematikai csapatmunkáról is beszélnünk kell. Általában 10 év feletti gyermekek esetében vizsgálják a matematikai tehetséget, erre a korra tehető a tehetséggondozás kezdete is. A matematikai tehetség változhat az életkorral, ezért a tehetséggondozást szükséges az adott életkorhoz és értelmi szinthez illeszteni [Gyarmathy (2002)]. Ezért a matematikai tehetségek fejlesztésekor ügyelni kell életkori és értelmi sajátosságaikra, munkamódszerükre. Például nehéz jól specifikálni egy gyermekeknek szánt feladatot, ha a szövegértési képességek még hiányosak. [Reichel] szerint a matematikai tehetségek szeretnek versenyezni (ezért is népszerűek a matematikai versenyek), a csapatmunka azonban nehezükre esik, ezért talán nem annyira szerencsés különösen gyerekek esetében a csapatversenyek erőltetése, hiszen a siker, illetve a kudarc összetevői ekkor sokszorozódnak, és ezért nehezebben is magyarázhatók. Csapatsportokra nem is használjuk; zenekarokra, kórusokra sem szoktuk mondani, hogy tehetséges; a csapat, zenekar egyes tagjaira inkább. A matematika, a problémamegoldó gondolkodás felnőtt korban sem igazán csapatjáték, bár nagyon sokan egymást segítve érnek el eredményeket, lásd a társszerzős eredményeket, illetve ezekre való hivatkozásokat. Azonban az igazán releváns hivatkozások, mély eredmények általában nem többszerzős cikkekből születnek. Ha megnézzük a matematikai áttöréseket, azok többnyire egy-, ritkább esetben két-, háromszerzősek ([Szamuely], [Komjáth]). Utóbbiból azért az is kiderül, mostanság érdemes lehet kiépíteni egy jól működő hálózatot – vagy akárcsak részt venni egy ilyenben (a publikációs kényszer kielégítésére) –, amely egy-egy probléma megoldását célozza meg. A többszerzős cikkek ilyenkor az akadémiai előmenetellel is kecsegtetnek, néhány ismert probléma esetén azonban annak csoportos megoldása nehezen lesz összemérhető a nagyközönség számára is felvillantott Wiles vagy Perelmann eredményeivel.

Látszólag lehet érveket felsorakoztatni a csapatmunka, illetve a csapatversenyek mellett is. Mondhatjuk, hogy bonyolult és az egyes részleteiben esetleg különösen speciális problémákat kell megoldani, hogy arra egyetlen ember képtelen. Specialistát kell találni pl. egy számítógépes támogatást igénylő bizonyításhoz, vagy akárcsak egy a közléshez szükséges grafikon előállításához, esetleg egy jó ábra elkészítéséhez is. Azonban ha jobban meggondoljuk, az ilyen feladatok nem csapatmunkában, hanem egy jól szervezett hierarchikus struktúrának köszönhetően készülnek el, ahol az egyes szinteken olyan vezetők (problémamegoldók) dolgoznak, akik a struktúra közel eső szintjeit teljesen átlátják, szükség esetén döntéseket tudnak hozni, változásokat tudnak generálni. Ezt nem igazán neveznénk csapatmunkának.

A szellemi csapatmunka szintén látszólagos szükségessége mellett megemlíthető még a brain storming. A résztvevők többnyire a már meglevő rutinokat gyűjtik össze. Ebben az esetben általában adott célhoz keresik a megfelelő forrásokat vagy fordítva. Ha nincs megfelelő moderátora egy ilyen eseménynek, akkor többnyire nem lesz eredménye sem, hasonlóan a sokszerzős cikkekhez. Ez mégis lehet hatékony egy bizonyos probléma megoldása során, amennyiben a gondolatok megvitatására, összefűzésére van szükségünk. Jobb esetben ez történik a jó matematikaórákon, illetve a kutatás rutinszerű lépései során. Előfordulhat, hogy éppen ilyenkor születik új gondolat, amelyet valamely partner ötlete, megjegyzése inspirált. Hasonló ez a szakirodalom olvasása közben kipattanó gondolathoz, sajnos sokan talán ezért nem publikálnak részeredményeket, amelyekből nyílt problémák megoldása állhatna össze több éve különböző féltékeny tudósok fiókjaiban, tárolóin őrzött eredményekből.

Szintén Reichel említi, hogy a tehetségek kifejezetten előnyben részesítik az egyéni munkát, és esetleges kérdéseiket mentorukkal beszélik meg, még inkább mentoruknak kell kitalálni rezdüléseikből az estleges tudásbeli hiányokat, kérdéseket. A matematikai gondolkodáshoz szükséges elvonatkoztatás, vizualitás, képzelet teszi egyénivé, nehezen megoszthatóvá a heuréka élményéhez vezető folyamatot. Ha ez mégis megtörténik, tehát sikerül megosztani a megoldás élményét, az ahhoz vezető gondolatsort, akkor már közlésről, oktatásról, tanításról beszélünk. Ez akkor lesz effektív, ha részletesen kitérünk az alternatívákra, következményekre. Fenti érveket az egyéni matematikai versenyek mellett, a csapatversenyekkel szemben hoztuk fel. Azonban feltétlenül a csapatversenyek mellett szól szociális szerepük, amelyet érdemes lehet mélyebben is vizsgálni.

4.5. A matematikai tehetség mérése

A matematika a mennyiség és a tér sajátos tulajdonságaiból elvonatkoztatott fogalmak és összefüggések összessége, a szellemi tevékenység kiváló terepe, amely már kevés ismeret és tapasztalat birtokában is gyakorolható. Ez utóbbi teszi a matematikát igazán hasznossá az oktatásban, az előző mondat első tagmondata miatt lesz nélkülözhetetlen az elmélet és az alkalmazások során, és középső tagmondata miatt lesz intellektuális örömök forrása, az utolsó megállapítás pedig az oktatás alapvető, igazán kényelmes eszközévé avatja a matematikát. Kezdetben minél könnyebben felfogható, megérthető területet választunk, annál kevesebb előismeretre, fogalomra lesz szükség a gondolkodás fejlesztéséhez, ezért is használjuk előszeretettel a gráfokat a gondolkodás oktatásában. Ha pedig a szellemi tevékenységet gyakoroljuk, akkor talán mérhetjük is. Mérhető ez egyáltalán?

A gondolkodás hasonló az érzelmekhez. Gondolhatnánk, az érzelmeket nem lehet mérni, akkor talán ezeket sem. Ismert, hogy mindkettőt mérik tesztekkel, az IQ (Intelligence Quotient) az értelmi, míg az EQ (Emotional Quotient) az érzelmi képességek IQ-hoz hasonló elven megalkotott mérési módja.

Akkor miért nem intelligenciatesztekkel mérjük a matematikai kreativitást? Tulajdonképpen azzal mérjük, hiszen matematikaoktatásunk azt a kevés fogalmat, ismeretet, amely a matematikai versenyfeladatok megoldásához szükséges, minden diák számára hozzáférhetővé teszi, és a „teszt”, azaz a kitűzött feladatsor csak ezekre a szűk ismeretekre támaszkodik. Egy közönséges IQ-teszt esetében ez a bázis sokkal bővebb, így a mérés pontatlanabb, mert az alapismereteknek tekintett halmaz nem is igazán definiált. (Léteznek ugyan speciális és sztenderdizált IQ-tesztek, amelyekhez még olvasni sem kell tudni, de az alapismeretek meghatározása általában hiányzik.)

A matematikai versenyek elsődlegesen a szellemi teljesítmény mérésére szolgálnak, azt azonban nehéz meghatározni, hogy pontosan milyen teljesítményt is mérnek. Talán már most megállapíthatjuk, hogy a heuréka élményének mérésére szánt szerepüket nem igazán töltik be. Mégis, valószínűleg azért népszerűek a matematikaversenyek diákjaink körében, mert néhány feladat esetében mégiscsak megadják ezt az élményt a versenyzőnek. Sajnos előfordulhat az is, hogy éppen a győztes nem részesül benne, hiszen már korábban minden szükséges ötlettel találkozott, nem kellett gondolkodnia egyik feladaton sem, csak rutinszerűen leírnia a megoldásokat. Nagyon nehéz jó versenyfeladatot kitűzni, amelyet egyik versenyző sem tud rutinszerűen megoldani, ez mérhetné a kreativitást. A versenyekre történő felkészülés – mint az eredményes szereplés feltétele – már a tehetségnevelés talán elengedhetetlen része lett. Különösen igaz ez a többfordulós, illetve azokra a versenyekre, amelyek évfolyamonként több éven keresztül is mérik az adott diák, illetve felkészítőik teljesítményét szinte azonos feltételek mellett, köszönhetően a versenykiírások viszonylagos statikusságának. Szintén ezt támasztja alá a tény, hogy nem igazán találunk a középiskolás versenyeredmények között olyan kiváló helyezést, amelynek ne lenne előzménye egy, de inkább több jó helyezés az általános iskolai versenyek között. Tehetséggondozással foglalkozó tapasztalt kollégák véleménye azonban az, hogy a tanulók eredményei, rangsoruk mégis sok esetben már az első gimnáziumi (7. vagy 9.) osztályban töltött év után (tanár, környezetváltozás) lényegesen átrendeződhet, megfordulhat köszönhetően az év során kapott ismereteknek, amelyekkel nem mindenki találkozott korábban.

Tanáraink tapasztalataik alapján kiszűrik a tehetségeknek látszókat, ez leginkább szintén az elvárt készségek minősége alapján történik. Nehezen tesztelhető az, hogy mennyi invenció, kreativitás van a látszólag kimagasló teljesítmény mögött (hiszen a befektetett munka és a kreativitás között fordított arányosságot vélünk azonos teljesítmény esetén). További Einstein-idézet támasztja alá az előző idézetet, és kérdőjelezi meg a kreativitás, az invenció titokzatosságát, misztikumát:

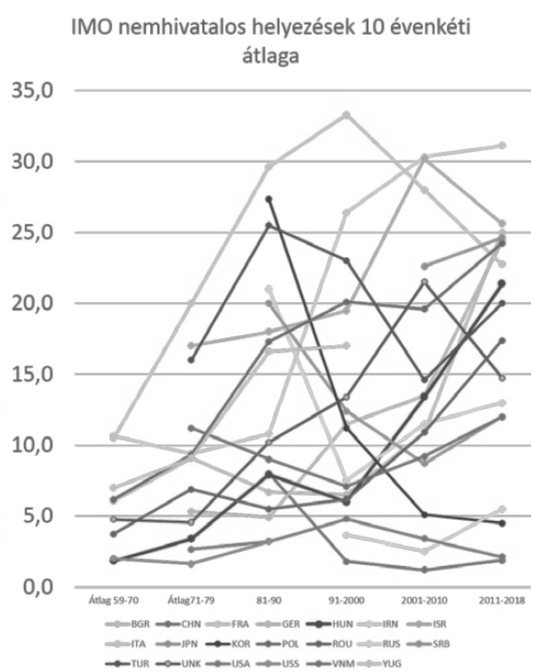
A kreativitás titka az, hogy ügyesen titkold el a forrásaidat.

Einstein

Az idézet többféleképpen értelmezhető, jelen esetben arra szorítkozunk, hogy a tehetség, a kiválóság a problémamegoldásban inkább kitartás, állhatatosság, szorgalom, mint rejtélyes, különleges, esetleges titkos asszociációk sora, melyet jobb híján invenciónak, kreativitásnak nevezünk. Valószínűleg forrás alatt nem mások publikálatlan, vagy éppen publikált eredményeit kell érteni, hanem a felhasznált tények és azok következményeinek nem igazán részletes bemutatását az új gondolat közlése során. Valóban, néhány munkában tényleg nehéz kideríteni, hogyan jött rá, miért úgy írta le a szerző, ahogyan leírta az eredményt. Mindenesetre az idézet nem követendő példaként szerepelt, inkább az új eredmények misztifikálását próbálja leleplezni.

A nagy eredmények visszatekintve többnyire (nem kézenfekvő) következményei az adott kor ismereteinek, amelyeket a kiválóságok közül nem ritkán szinte azonos időpontban többen is megoldanak. Valami hasonló történik az igazán jó versenyeken is. Feltétlenül ide sorolnánk a Kürschák versenyt és a Matematikai Diákolimpiát is. Utóbbi mégis más, lényeges különbség a feladatok kiválasztásában van. Míg a Kürschák verseny feladatainak kiválasztásakor a tradíciónak megfelelően ötletekre és csak a középiskolás ismeretekre támaszkodnak, a nemzetközi versenyeken egyes országok hasznára, mások kárára utóbbi feltétel nehezen tud teljesülni az országonként különböző tantervek miatt. Több jó versenyző véleménye szerint a korábbi évek olimpiai feladatait [IMO f] és az azokhoz tartozó short list-eket megoldva, nem igazán érhet bennünket meglepetés az Olimpián, a Kürschák feladatokra ugyanez nem mondható el. Érdekes lenne egy mélyebb összehasonlítása a két verseny feladatainak a megoldáshoz vezető ötletek, illetve az elvárt ismeretek vonatkozásában.

Átlag	1959-70	1971-79	1981-90	1991-2000	2001-2010	2011-2018
BGR	6,1	9,1	6,7	6,5	10,9	25,0
CHN			8,0	1,8	1,2	1,9
FRA	10,7	9,4	10,8	26,4	30,3	31,1
GER		5,3	4,9	11,5	13,5	24,4
HUN	1,8	3,4	7,9	6,0	13,4	21,4
IRN			21,0	7,5	11,5	13,0
ISR		17,0	18,0	19,5	30,2	25,6
ITA	10,5	20,0	29,6	33,3	28,0	22,8
JPN			20,0	12,4	8,7	12,0
KOR			27,3	11,2	5,1	4,5
POL	6,2	9,3	17,3	20,1	19,6	24,3
ROU	3,8	6,9	5,5	6,2	10,9	17,4
RUS				3,7	2,5	5,5
SRB					22,6	24,6
TUR		16,0	25,5	23,0	14,6	20,0
UNK	4,8	4,6	10,2	13,4	21,5	14,8
USA		2,7	3,2	4,8	3,4	2,1
USS	2,0	1,6	3,2			
VNM		11,2	9,0	7,1	9,2	12,0
YUG	7,0	9,1	16,6	17,0		



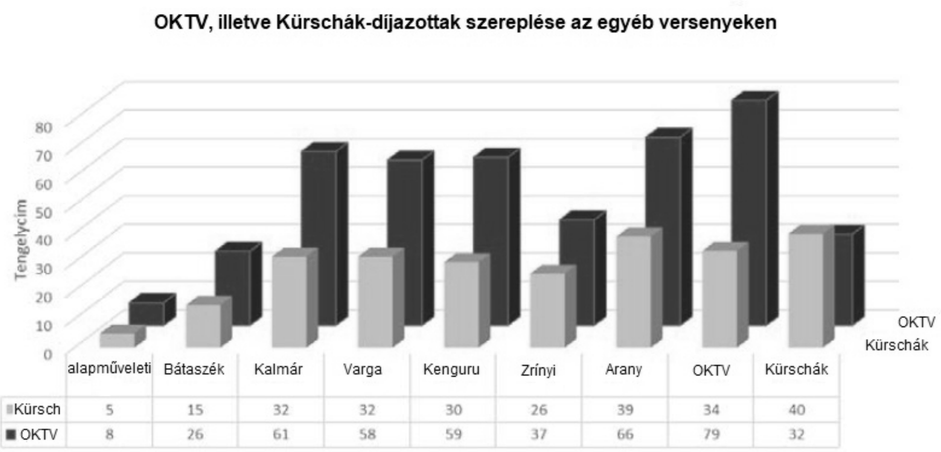
7. ábra. Néhány ország IMO nem hivatalos helyezésének 10 évenkénti átlagát látjuk a táblázatban és a grafikonon is (a növekedést kellene legalább mérsékelni). Megnyugtató, hogy több népesebb ország helyezése még elmarad a miénktől, azonban többen nálunk jobban teljesítettek az utóbbi években különösen a távol-keleti országok közül [IMO e] (elektronikus verzióban színesben).

5. A versenyek és a Kürschák verseny

A Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt a Bolyai János Matematikai Társulat szervezi az adott évben érettségizettek, illetve a még nem érettségizett középiskolai tanulók számára. Nevezési díj nincs. A résztvevők száma a 2009/2010-es tanévben 105 fő volt. A kezdetektől egészen a mai napig érvényes, hogy egyetlen fordulóban három feladatra 4 óra áll rendelkezésre. A KöMaL beszámolók a feladatok és megoldásaik ismertetésén túl a nyertesek adatait is közölték. Ezt a versenyt tekintik az összes matematikaverseny elődjének, sikerének két fontos tényezőjét emeli ki [Fleiner]: A kitűzött feladatok kiválóan megfelelnek a kezdetben megfogalmazott céloknak: a megoldáshoz a középiskolában tanított ismereteken túl nincs szükség további tudásra, hanem sokkal inkább a matematikai gondolkodásmód alkalmazásával lehet elérni a sikert. Íratlan hagyomány, hogy a feladatok megoldásához lehetőleg ne fárasztó számolás, hanem az összefüggések átlátása, illetve egy-egy jó ötlet vezessen. Ebben a tekintetben a verseny talán a világon egyedülálló.

A verseny sikerének másik kulcsa a Kürschák által elindított munka, a Matematikai versenytételek [Hajós, Neukomm, Surányi: I., II., III., IV.] közül az első könyv, amiben az 1894 és 1928 közötti versenyek feladatait (tételeit), azok megoldását és a díjazottak neveit találjuk. Hasonlóan például a KöMaL-ban kitűzött feladatok megoldásaihoz, amelyeket a versenyzők dolgozataiból válogattak. Kürschák több jól átgondolt megoldást is közölt az egyes feladatokra, amiket számos esetben kiegészítésekkel, „jegyzetekkel” látott el.

Mivel a Kürschák versenyt etalonnak tekintettük, ehhez hasonlítottuk a többit oly módon, hogy egy adott verseny első tíz helyezettje közül hánynak lett Kürschák eredménye. A következő grafikon előterében levő oszlopsor azok számát mutatja, akik legalább egyszer az első tíz között szerepeltek az adott verseny valamely vizsgált évfolyamában, és a Kürschák versenyben is. A hátsó oszlopsora azok számát mutatja az adott verseny első 10 helyezettjéből, akik az OKTV valamelyik versenyében az első 10 között szerepeltek.



8. ábra. Legalább két, 3.-tól a 8. osztályig tartó versenyen jó eredményt elértek közül hányan szerepeltek jól a Kürschák versenyen, illetve az OKTV-n.

A korábban említett 81 eredményből azért csak 40 szerepel az első sorban, mert a 81 eredményt 40 diák érte el, hiszen közülük voltak többen, akik kétszer vagy háromszor is a díjazottak között szerepeltek. Ezek között voltak olyanok is, akik 10. osztályosként nem vehettek részt az OKTV-n, ezért lett hattal kevesebb, 34 azoknak a száma, akik valamelyik OKTV-n és a Kürschák versenyen is díjazottak lettek. Az adatokból úgy tűnik, hogy az Alapműveleti és a Bátaszéki verseny még nem tekinthető országos szintűnek, vagy a problémamegoldás mérésének tekintetében ezek a versenyek nem ugyanazt mérik, mint amit a többi verseny mér, ez további vizsgálatot igényelne.

Hasonló a helyzet a 3. és 4. osztályos Kalmár versennyel. Mindössze 19 olyan tanulót találunk, akik jó eredménnyel szerepelnek majd az OKTV-n, a Bátaszékin mindössze 11 versenyző, míg a Zrínyin 31 ilyen versenyzőt számoltunk ebben a korai korosztályban, tehát utóbbi jobban jelzi a későbbi eredményességet. A grafikonról jól látható, hogy a Zrínyi versenyben is kevesebb a jó eredményt elért diákok száma, különösen az OKTV eredményekhez viszonyítva. Ez talán arra vezethető vissza, hogy ez a verseny – ellentétben a többivel – tekinthető ,,kieséses” versenynek, a körzetektől függő továbbjutási lehetőségek miatt, így a legjobb megnyeri a versenyt, és minden körzetből továbbjut a legjobb, ami nagyon jót tesz a verseny népszerűségének, de ezzel párhuzamosan erős körzetekből nem feltétlenül jutnak tovább a jobbak. Ha az ország néhány legjobb versenyzője azonos körzethez tartozna, akkor a jelenlegi versenykiírás alapján közülük többen kieshetnének már az első forduló után, mint ahogy ez már többször megtörtént, ami viszont árt a verseny jó hírének. A másik ok lehet a teszt formátumú versenyzés, amiről már korábban is szóltunk.

Fontos megemlítenünk néhány forrást a versenyfeladatokkal és megoldásaikkal kapcsolatban. Ezek többnyire az adott verseny honlapján is szerepelnek, így erős támogatást jelentenek a tehetséggondozásban résztvevő diákok és kollégák számára. Egyéb helyeken található gondolkodtató feladatok többnyire megoldásokkal: [Berzsenyi 2010, 11], [Fazakas, Hraskó], [Hraskó], [Lovász és sztsi.], [KöMaL 2018], [Pólya 1945, 66], [Reiman és Dobos], [Surányi L.], [Versenyvizsga].

A versenyeken történő jó szereplés és a kreativitás kapcsolata

A tanulók elemző, gondolkozó képességének, illetve kreatív gondolkodásának mérését feladatsorokkal többnyire objektívnek tekintjük, pedig nem az. Adott feladatsor esetén adott tudásszint ismeretében megmondható, mely feladatokat oldják majd meg rutinszerűen, illetve melyekhez kell „nyújtózkodni”, hogy meg tudják oldani azokat. A heuréka mérése különösen azért nehéz, mert a birtokolt tárgyi tudás, illetve a szerzett megoldási algoritmusok teljesen különbözőek lehetnek még azonos osztályokba járó tanulók esetében is, az egyéb helyekről (egyéni felkészülés, szakkör, magántanár, mentor) szerzett ismeretek következtében. Így a kreativitás mérése szinte lehetetlen, hiszen nehéz találni olyan feladatot, amelyet még nem tűztek ki, vagy legalább olyat, amelyet a versenyzők egyike sem ismert korábban és mégis lesz közöttük, aki azt megoldja. Sajnos a legjobb versenyeken sem sikerül ezt minden esetben elérni. Leginkább az történik, hogy a legtöbb ismerettel, illetve rutinnal rendelkező problémamegoldó megnyeri a versenyt. Ez kézenfekvő abban az esetben, ha a versenyen nem szerepel kreativitást igénylő feladat, és természetes akkor is, ha található a feladatok között invenciót igénylő. Ekkor ugyanis versenyzőnk még nem a versenyt, de az időt, amelyet a kreativitást igénylő feladatra többletként fordíthat, már megnyerte a lassúbb, esetleg kevesebb ismerettel, de talán nem kevésbé invenciózus társaival szemben. Ezt úgy lehetne orvosolni, hogy csak kreativitást igénylő feladatokat tűzünk ki, viszont a versenyek népszerűek is szeretnének maradni, ezért ilyen versenyt keveset találunk. Az igazán sikeres fejvadászok sem azt a munkavállalót részesítik előnyben, aki a meghallgatáson kitűzött feladatok közül a legtöbbet megoldja, hanem azt, aki olyan problémát is meg tud oldani, amilyent korábban még nem tudott, ennek tesztelésére a többlépcsős felvételi eljárás igazán kedvező lehetőség.

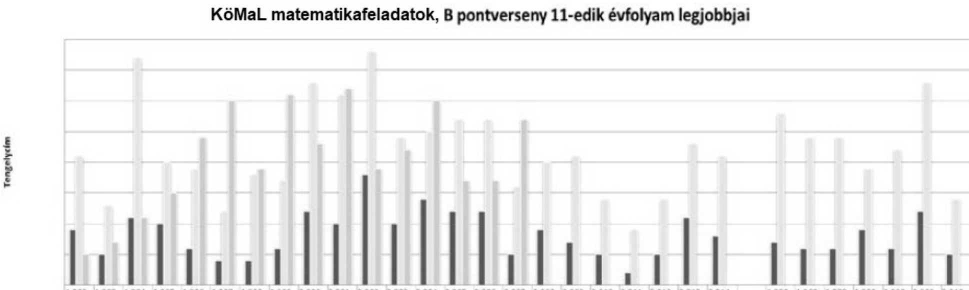
A Kürschák után

A 2004-től 2008-ig terjedő időszakban 23 versenyző ért el kiváló eredményt a Kürschák versenyen, az eredmények korrelálnak a KöMaL-ban elért eredményekkel, ami az egész éves verseny során elérhető pontszám legalább 80%-át jelenti. Közülük (a szerzők tudomása szerint) mindössze hárman szereztek doktori fokozatot 2017 júniusáig.

Nem tudjuk, hogy miért csak ilyen kevesen.

Matematikai doktori iskola	**Egyetem**	**Aktív hallgatók**
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola	Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem	14
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola	Debreceni Egyetem	18
Matematika Doktori Iskola	Eötvös Loránd Tudományegyetem	25
Alkalmazott Informatikai és Alkalmazott Matematikai Doktori Iskola	Óbudai Egyetem	40
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola	Szegedi Tudományegyetem	16

5. táblázat. A magyarországi matematikai doktori iskolák aktív hallgatóinak száma



	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
matk	9	5	11	10	6	4	4	6	12	10	18	10	14	12	12	5
mat	21	13	37	20	19	12	18	17	33	31	38	24	25	27	27	16
Dr 9év után	5	7	11	15	24	30	19	31	23	32	19	22	30	17	17	27

	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014		1930	1960	1970	1980	1990	2000	2010
matk	9	7	5	2	5	11	8		7	6	6	9	6	12	5
mat	20	21	14	9	14	23	21		28	24	24	19	22	33	14
Dr 9év után															

9. ábra. Az egyes években a KöMaL legjobb (matk.: 80% felett, mat.: 50% felett) feladatmegoldóinak számát ábrázoltuk. A jobb oldalon a 10 évenkénti eredményeket is ábrázoltuk. Az 1992-től 2007-ig terjedő részben ábrázoltuk a 9 évvel későbbi, tehát 2001-től 2016-ig tartó években a sikeres doktori védések számát az összes matematikai doktori iskolát tekintve.

Ugyanakkor 2013-tól 2017 júniusáig pontosan 100 sikeres védés történt a magyar matematikai doktori iskolákban. Amennyiben az 50% feletti teljesítményeket vizsgáljuk ismét a KöMaL eredmények tekintetében, akkor a számok között már látható bizonyos korreláció, a személyeket tekintve hasonlóan az előző megállapításhoz ekkor sem találunk lényegesen több sikeres megoldót a doktori fokozatot szerzett személyek között. További vizsgálatokra lenne szükség annak megállapítására, hogy miért nem szereznek több doktori fokozatot a középiskolai eredményeiket tekintve jó problémamegoldó készséggel rendelkező diákok.

Irodalom

[1] Avolio, Bruce J.; Waldman, David A., Variations in cognitive, perceptual, and psychomotor abilities across the working life span: Examining the effects of race, sex, experience, education, and occupational type, *Psychology and Aging* Vol. **9** (3), Sep. 1994, 430–442.

[2] Bánky Judit, Somfai Zsuzsa, Lajos Józsefné, Morvay Zsuzsanna, Wintsche Gergely: „Közép- és emelt szintű értékelési skálák összehasonlítása” tárgyú kutatás-fejlesztési projekt összehasonlító elemzésmatematika vizsgatárgyból, https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/unios_projektek/tamop318/ertekelesi_skalak_osszehasonlitasa/ertekelesi_skalak_matematika.pdf

[3] Baróti György és Bartha Gábor, Arany Dániel verseny, in: [Cserepek], 40–45.

[4] Bérces R., The Improvement of Higher Education Quality and Talent-Nurturing with Scientific Students' Association (SSA) Commitment. *Acta Polytechnica Hungarica* Vol. **12**, No. 5, 2015.

[5] Berzsenyi, Gy., International Mathematical Talent Search Part 1, AMT publishing, Canberra, 2010.

[6] Berzsenyi, Gy., International Mathematical Talent Search Part 2, AMT publishing, Canberra, 2011.

[7] C 2 K Century 2 of KöMaL. V. Oláh (editor), G. Berzsenyi, E. Fried and K. Fried (assoc. editors), KöMaL, János Bolyai Mathematical Society, Roland Eötvös Physical Society, Budapest, 2000.

[8] Czeizel E., Sors és tehetség. Budapest, FITT Image és Minerva, 1997.

[9] *Cserepek a magyarországi matematikai tehetséggondozó műhelyekből*. Szerkesztők: Ács Katalin, Csordás Mihály, Kosztolányi József, Lajos Józsefné, Nagy Tibor. Bolyai János Matematikai Társulat, Budapest, 2010.

[10] Dinya, L. (2005): A felsőoktatás marketingkihívásai, Marketingoktatás és kutatás a változó Európai Unióban, Szent István Egyetem, Győr, MOK konferencia.

[11] Einstein, A., Letter to Carl Seelig (11 March 1952), *Einstein Archives* 39-013.

[12] Fazakas T., Hraskó A., *Bergengóc példatár*, Typotex, 1999.

[13] Fazakas T., Hraskó A., *Bergengóc példatár 2*, Typotex, 2001.

[14] Fleiner T., *Kürschák Verseny* [Cserepek], 28-–32.

[15] *Fokozatváltás a felsőoktatásban:* http://www.kormany.hu/download/d/90/30000/fels%C5%91oktat%C3%A1si%20koncepci%C3%B3.pdf. Letöltve: 2017. 07.07. Ellenőrizve: 2018. szeptember 12.

[16] Friedl K., Recski A., Simonyi G., *Gráfelméleti feladatok*, Typotex, 2006.

[17] Gyarmathy Éva, https://www.ofi.hu/tudastar/matematikai-tehetsegek Letöltve: 2018. 02. 02., Hall of Fame IMO: https://www.imo-official.org/hall.aspx

[18] Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J., *Matematikai versenytételek, I. rész*, Tankönyvkiadó, 1955.

[19] Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J., *Matematikai versenytételek, II. rész*, Tankönyvkiadó, 1956.

[20] Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J., *Hungarian Problem Book III*, A. Liu (editor) Hungarian Problem Book III: based on the Eötvös Competitions 1929–1943.

[21] Hajós Gy., Neukomm Gy., Surányi J., *Hungarian Problem Book IV*, R. B. Leigh, Hersh, R., & John-Steiner, V., A Visit to Hungarian Mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 15(2) (1993), 13–26.

[22] Hraskó, A., *Matematika Oktatási Portál. Feladatbank*, 2004. Ellenőrizve: 2018. szeptember 12., from http://matekold.fazekas.hu/listfd1a.html?what=competition

[23] Huszár, K., Creating a Culture of Problem Solving: The Hungarian Approach to Mathematics Education, *Five Continents (ÖT KONTINENS)*, (2012), 163–194.

[24] Illyés Gyula, *Puszták népe*, Nyugat, Budapest, 1936.

[25] IMO eredmények: https://www.imo-official.org/results.aspx

[26] IMO feladatok: https://www.imo-official.org/problems.aspx

[27] IMO Hall of Fame: https://www.imo-official.org/hall.aspx

[28] Jäckel K., *Frontvonal audit a felsőoktatásban, a felsőoktatás konfliktushelyzeteinek feltárása*. Doktori értekezés, Gödöllő, 2010.

[29] Kántor Sándorné, A lap első megoldóiról, *KöMaL*, 1993/december, 435–437.

[30] Komjáth P., web.cs.elte.hu/ kope/attszammatud.rtf

[31] Kozma T., *A minőségbiztosítás szerepe és fejlesztése a felsőoktatási intézményekben és annak hallgatói értelmezése a gyakorlatban*. Doktori értekezés, 208 p.

[32] KöMaL 2018, *KöMaL*. Ellenőrizve: 2018. szeptember 14. https://www.komal.hu/feladat?a=honap&h=201809&t=mat&l=hu

[33] KöMaL 1994, *Középiskolai Matematikai Lapok* 8., 9., 10. szám

[34] Lovász L., Pelikán J., Vesztergombi K., *Kombinatorika az általános és a középiskolai matematika szakkörök számára*, Tankönyvkiadó, 1970.

[35] Nagy Gy., Tudományok katalizátora, a KöMaL, *Magyar Tudomány* **11** (2003), p. 1455. http://www.matud.iif.hu/03nov/016.html

[36] Nagy Gy., KöMaL in [Cserepek], (2010), 158–165.

[37] Nagy Gy., A problémamegoldás megismerésének magyar módszere, *Matematikai Lapok* **21**:(2) (2015), 44–56.

[38] Nagy Gy., Developing Problem-solving Skills, *Mathematics Competition* **29** (2) (2017), 26–41. http://www.wfnmc.org/Journal%202016%202.pdf#page=31

[39] Nagyné Mészáros B., Gyarmathy É., Matematikai tehetségek, *Új Pedagógiai Szemle* 2002. május.

[40] Papp G., A differenciálás módszerei. In: Némethné Tóth Ágnes (szerk.) *Az inkluzív pedagógia alapjai*, Magánkiadás, 2003.

[41] Petriné Feyér Judit, A különleges bánásmódot igénylő gyermek. In: Falus Iván (szerk.) *Didaktika NTK*, Budapest, 1998, 450–452.

[42] Pólya Gy., *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945. Magyarul: *A gondolkodás iskolája*, Gondolat Kiadó, 1969.

[43] Pólya Gy., *Mathematical Discovery. On understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*, John Wiley and Sons, 1962. Magyarul: *A problémamegoldás iskolája*, Tankönyvkiadó, 1985.

[44] Quote Investigator, https://quoteinvestigator.com/2010/07/14/luck/

[45] Reiman I., Dobos S., *Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959–2003*, Typotex, 2003.

[46] Salthouse T. A., When does age-related cognitive decline begin? *Neurobiol. Aging* **30** (2009), 507–14.

[47] Surányi L., Gráfelmélet. https://matek.fazekas.hu/solo/suranyilaszlo_graf/ Ellenőrizve: 2018. szeptember 12.

[48] Surányi J., A 100-adik Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, *Matematika Oktatási Portál* (In Hungarian), 2004.

[49] Szamuely T., A Fields-éremről. https://www.komal.hu/cikkek/fields/fields.h.shtml

[50] Czinkán Zs., Németh A., Mészáros G., Bognár Z., Ratkó É., Miklós I., Gnädig P., Nagy, Gy., Versenyvizsga, *KöMaL* (2005). Ellenőrizve 2018. szeptember 12. http://versenyvizsga.hu/

[51] Wieschenberg, A. A., The Birth of the Eötvös Competition, *The College Mathematics Journal* **21**, 4 (1990), 286–293.

[52] UK domiciled full-time leavers who obtained first degree qualifications and entered full-time paid work in the UK by subject area, location of HE provider, sex and salary 2014/15 Table 10.
https://www.hesa.ac.uk/news/30-06-2016/sfr237-destinations-of-leavers

[53] Wikipédia: https://hu.wikipedia.org/wiki/Magyarorsz%C3%A1g_n%C3%A9pess%C3%A9ge#/media/File:Hungary_pp_2005.png

Szent István Egyetem Ybl Miklós Építéstudományi Kar
katona.janos@uni-obuda.hu, nagy.gyula@uni-obuda.hu

Nagy Kartal Dávid: Egy Sperner-típusú tétel

1. Bevezetés

Jelölés. Jelöljük az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazt $[n]$-nel, az n elemű halmaz részhalmazainak családját $2^{[n]}$-nel, az n elemű halmaz i elemű részhalmazainak halmazát $\binom{[n]}{i}$-vel. Amennyiben $i > n$, akkor ez a jelölés az üres halmazt jelenti.

Az extremális halmazelmélet egyik fő tétele a Sperner-tétel [1], amely egy n elemű halmaz részhalmazairól mond ki egy állítást:

1.1. tétel. *A $2^{[n]}$-ből legfeljebb $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ halmaz választható ki úgy, hogy ne legyen két olyan kiválasztott halmaz, melyek közül az egyik tartalmazza a másikat.*

E tételnek igen sok általánosítása és analógiája van. Ezek közül csak néhányat sorolunk fel, amelyek a mi témánk szerint érdekesek:

1.2. tétel (Erdős, 1945 [2]). *A $2^{[n]}$ elemei közül legfeljebb $\sum_{i=\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{n+k}{2} \rfloor} \binom{n}{i}$ halmazt választhatunk ki, ha nem választhatunk ki egyszerre olyan különböző A és B halmazt, hogy $A \subset B$ és $|B - A| > k$.*

1.3. tétel (Katona, 1971 [3]). *A $2^{[n]}$ elemei közül legfeljebb $\sum_{i \equiv \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \pmod k} \binom{n}{i}$ halmazt választhatunk ki, ha nem választhatunk ki egyszerre olyan különböző A és B halmazt, hogy $A \subset B$ és $|B - A| \leq k$.*

Leader és Long 2012-es cikke, [4] pedig a következő kérdésre adott választ:

Legfeljebb hány részhalmazt választhatunk ki az n elemű halmaz részhalmazai közül, ha nem választhatunk ki egyszerre olyan különböző A és B halmazt, amikre $|A \setminus B| = 2|B \setminus A|$?

2. A kérdés felvetése

Ezek után természetesen merül fel a következő kérdés: egy n elemű halmaznak maximum hány részhalmaza adható meg úgy, hogy ne legyen olyan A és B részhalmaz, amire $A \subset B$ és $|A| \cdot 2 \leq |B|$?

A kérdéssel kapcsolatban a következő állítást sikerült bizonyítani:

2.1. tétel. *Legyen n pozitív egész, és $k = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Ekkor az n elemű halmaz részhalmazai közül úgy adható meg a legtöbb úgy, hogy ne legyen olyan A és B részhalmaz, amire $A \subset B$ és $|A| \cdot 2 \leq |B|$, ha a legalább $k+1$ és legfeljebb $2k+1$ elemszámú halmazokat választjuk ki.*

Ezen halmazok kiválasztása kielégíti a feltételeket, hiszen bármely két ilyen halmazra fennáll, hogy $|A| \cdot 2 > |B|$, így ezek egy jó konstrukciót adnak.

Annak a bizonyítását, hogy ennél többet nem lehet kiválasztani, a következő részben mutatjuk be.

3. Bizonyítás láncokkal

Jelölés. Jelöljük $\mathcal{H}$-val a tételben szereplő halmazrendszert, vagyis a legalább $k+1$ és legfeljebb $2k+1$ elemszámú halmazokat tartalmazó halmazrendszert.

3.1. definíció. Nevezzünk láncnak egy $\mathcal{L}$ halmazrendszert, ha bármely $A \in \mathcal{L}$ és $B \in \mathcal{L}$ halmazra teljesül az $A \subset B$ és $B \subset A$ közül az egyik.

3.2. definíció. Hívjuk duplázó láncnak az olyan $\mathcal{L}$ láncot, ha bármely $A \in \mathcal{L}$ és $B \in \mathcal{L}$ halmazra teljesül az $|A| \geq 2 \cdot |B|$ és $|B| \geq 2 \cdot |A|$ közül az egyik.

A következő állítás nyilvánvaló:

3.3. állítás. *Egy duplázó láncból legfeljebb 1 elemet lehet kiválasztani a fenti feltételeknek megfelelően.*

A tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő függvények megalkotására:

- $f_i : \binom{[n]}{i} \longrightarrow \binom{[n]}{k+i}$ minden $1 \leq i \leq k$-ra, legyen f_i injektív és minden $X \in \binom{[n]}{i}$-re $2 \cdot |X| \leq |f_i(X)|$ és $X \subset f_i(X)$.

- $g_i : \left(\binom{[n]}{2(k+i)} \cup \binom{[n]}{2(k+i)+1}\right) \longrightarrow \binom{[n]}{k+i}$ minden $1 \leq i$-re, legyen g_i injektív és minden $X \in \binom{[n]}{2(k+i)} \cup \binom{[n]}{2(k+i)+1}$-re $2 \cdot |g_i(X)| \leq |X|$ és $g_i(X) \subset X$. (Ha $i = \frac{n-2k}{2}$, akkor a g_i értelmezési tartománya csak a $2(k+i)$ elemű halmazokból fog állni. Ha pedig az i ennél nagyobb, akkor a g_i értelmezési tartománya az üres halmaz lesz.)

Ezután készítsük el a duplázó láncokat a következőképpen:

Minden $\mathcal{H}$-beli elemhez fog tartozni egy duplázó lánc. Egy $X \in \mathcal{H}$-hoz tartozó duplázó láncba azok az Y halmazok fognak bekerüli, amelyekhez létezik olyan f_i vagy g_i függvény, melyre az X halmaz őse Y. Vagyis ha egy $\mathcal{H}$-beli halmaz kétszer szerepel mint függvényérték, akkor egy háromelemű, ha egyszer, akkor kételemű, ha pedig egyszer sem, akkor egyelemű duplázó láncot fog alkotni.

Ezzel az összes halmazok rendszere, az üres halmazt leszámítva, duplázó halmazok diszjunkt uniója lesz úgy, hogy minden duplázó láncban szerepelni fog pontosan egy $\mathcal{H}$-beli halmaz. Ebből és a 3.3. állításból következik, hogy legfeljebb $|\mathcal{H}|$ halmazt lehet kiválasztani.

A bizonyítás három lépésből fog állni. Első két lépésben megalkotjuk az f_i és a g_i függvényeket, majd a harmadik lépésben belátjuk, hogy a fenti módszerrel valóban duplázó láncokat fogunk kapni.

Bizonyítás.
Jelölés. A legfeljebb k elemű halmazok halmazát jelöljük $\binom{[n]}{\leqslant k}$-val, a legalább $2k+2$ elemű halmazok halmazát pedig $\binom{[n]}{2k+2\leqslant}$-vel.

Mivel egy $\mathcal{H}$-beli halmaz meghatározza a duplázó láncot, ezért a továbbiakban úgy tekintünk rá, hogy az $\binom{[n]}{\leqslant k}$ és $\binom{[n]}{2k+2\leqslant}$-beli halmazokat a $\mathcal{H}$-beli halmazhoz kapcsoljuk.

Az f_i függvények megalkotása

Az f_i függvények megalkotása közben két feltételre kell figyelni. Az egyik, hogy $2 \cdot |X| \leq |f_i(X)|$ mindig teljesülni fog, mivel $2i \leq k + i$. A másik feltétel, amit teljesítenie kell a függvénynek, hogy $X \subset f_i(X)$.

Ez a feladat pedig megfogalmazható úgy is, hogy van egy páros gráfunk az i és a $k + i$ elemű halmazok közt, ahol két halmazhoz tartozó csúcs akkor van összekötve, ha ez egyik halmaz tartalmazza a másikat, és egy olyan párosítást akarunk készíteni, ahol az i elemű halmazok le vannak fedve.

Azt tudjuk, hogy egy olyan $G(A, B, E)$ páros gráfot kapunk, ahol feltehető, hogy $|A| \geq |B|$, és amelynek mindkét csúcshalmaza reguláris, azaz minden i és j esetén $d(a_i) = d(a_j)$, ahol a_i és $a_j \in A$. Mivel a $\sum_i d(a_i) = \sum_j d(b_j)$, ahol $a_i \in A$ és $b_j \in B$, ezért a páros gráf kevesebb csúcsot tartalmazó felében lesznek a nagyobb fokszámú csúcsok, azaz $d(A_i) \leq d(B_j)$. A következő lemma alapján pedig a B-beli csúcsok hozzápárosíthatóak a A-beli csúcsokhoz:

3.4. lemma. *Adott egy olyan $G(A, B, E)$ páros gráf, melyben minden A-beli csúcsának ugyanakkora a fokszáma, illetve minden B-beli csúcsának is ugyanakkora a fokszáma, és $|A| \geq |B|$. Ekkor létezik a B halmaz csúcsait lefedő párosítás.*

Ez a lemma a Kőnig–Hall-tétel egyszerű következménye. A továbbiakban már csak azt kell megmutatni, hogy az i elemű halmazokat tartalmazó felében van a kevesebb halmaz, vagyis $\binom{n}{i} \leq \binom{n}{k+i}$.

Mivel $i \leq k$, ezért $\binom{n}{i} \leq \binom{n}{k}$. Ezenkívül $\binom{n}{k+i} \geq \min\left\{\binom{n}{k+1}, \binom{n}{2k}\right\}$. Mivel azt tudjuk, hogy $n \geq 3k$, ezért $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$, illetve $\binom{n}{k} \leq \binom{n}{2k}$. Ezzel pedig beláttuk, hogy az i elemű halmazokból legfeljebb annyi van, mint $k + i$ eleműből, ezért elkészíthető a kívánt párosítás, azaz megalkothatóak a kívánt f_i függvények.

A g_i függvények megalkotása

Az g_i függvények megalkotása közben is két feltételre kell figyelni. Az egyik, hogy $2 \cdot |g_i(X)| \leq |X|$ feltétel nyilvánvalóan mindig teljesülni fog. A másik feltétel, aminek teljesülnie kell, hogy $g_i(X) \subset X$.

Ehhez fogunk gyártani olyan h_i és j_i függvényeket, melyekre $h_i \circ j_i = g_i$ kompozíció kielégíti a feltételeket.

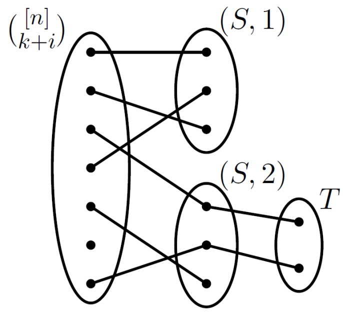
Először a $h_i : \left(\binom{[n]}{2(k+i)} \cup \binom{[n]}{2(k+i)+1}\right) \longrightarrow \binom{[n]}{2(k+i)} \times \{1, 2\}$ függvényeket fogjuk legyártani.

Legyen S egy $2(k+i)$ elemű halmaz, akkor $h_i(S) = (S, 1)$. Ha pedig T egy $2(k+i)+1$ elemű halmaz, akkor $h_i(T) = (S, 2)$ úgy, hogy S-nek az elemszáma $2(k+i)$ és $S \subset T$. A kompozíció alkalmazásához az kell, hogy minden h_i injektív legyen.

A függvény megalkothatóságának bizonyításához a 3.4. lemmát fogjuk alkalmazni. Készítsük el a páros gráfot a $2(k+i)$ elemű halmazok és a $2(k+i)+1$ elemű halmazok között úgy, hogy akkor legyen két halmazhoz tartozó csúcs összekötve, ha a két halmaz közül az egyik tartalmazza a másikat. Ekkor a 3.4. lemma alapján elkészíthető a két halmaz közt a párosítás úgy, hogy minden $2(k+i)+1$ elemű halmaz fedve legyen, mivel $\binom{n}{2(k+i)+1} \leq \binom{n}{2(k+i)}$.

Most pedig gyártsuk le a $j_i : \binom{[n]}{2(k+i)} \times \{1, 2\} \longrightarrow \binom{[n]}{k+i}$ függvényeket. A cél itt is az, hogy olyan szürjektív függvényeket készítsünk, hogy minden $(S, 1)$ és $(S, 2)$ halmazra $j_i(S, 1)$ $j_i(S, 2) \subset S$ teljesüljön. Ehhez most is vegyük a tartalmazást leíró gráfot.

A tartalmazásokat leíró gráf itt is egy olyan páros gráf lesz, ahol mindkét csúcsosztályon belül minden pont foka egyenlő. Emiatt a kevesebb csúcsot tartalmazó felében lesznek a nagyobb fokszámú csúcsok a gráfban, így a 3.4. lemma alapján ezt a felét hozzá lehet majd párosítani a másikhoz. Nekünk arra lenne szükségünk, hogy a $2(k+i)$ elemet tartalmazó halmazok 2-2 példánya legyen hozzápárosítva a $k+i$ eleműekhez. Ehhez be kéne látni, hogy $\dbinom{n}{k+i} \geq 2\dbinom{n}{2(k+i)}$.



1. ábra. A $2k+2i$ és a $2k+2i+1$ elemű halmazok párosítása a $k+i$ eleműekkel

Az $\binom{n}{k+i}$ értéke $i=1$ esetén lesz a legkisebb, míg az $\binom{n}{2(k+i)}$ az $i=1$ esetén lesz a legnagyobb, vagyis elegendő ezt az esetet megnézni.

Ha $n=3k+2$, akkor

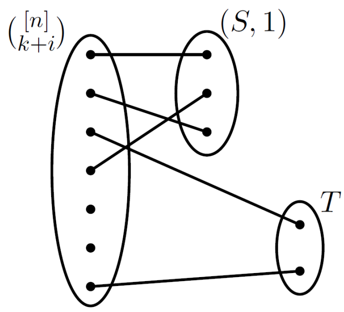
$$2\binom{n}{2(k+1)} = 2\binom{n}{k} = 2\frac{k+1}{2k+2}\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k+1}.$$

Ha $n=3k+1$, akkor

$$2\binom{n}{2(k+1)} = 2\binom{n}{k-1} = 2\frac{k(k+1)}{(2k+1)(2k+2)}\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k+1}.$$

Ha $n=3k$, akkor

$$2\binom{n}{2(k+1)} = 2\binom{n}{k-2} = 2\frac{(k-1)k(k+1)}{2k(2k+1)(2k+2)}\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k+1}.$$



2. ábra. A párosítás összefűzése a $2k+2i+1$ és a $k+i$ eleműek közt

Vagyis megalkotható a h_i és a j_i függvények, aminek a kompozíciójából megkaphatjuk a g_i függvényeket, amire igaz lesz, hogy $g_i(X) \subset X$.

A duplázó láncok összeállítása

Könnyen látható, hogy ha az üres halmazt berakjuk a kiválasztott halmazok közé, akkor melléje semelyik másik halmazt nem tudjuk belevenni. Vagyis a továbbiakban csak azt az esetet vizsgáljuk, amikor az üres halmaz nincs a kiválasztott halmazok között.

Az f_i és g_i függvények segítségével a $2^{[n]}-$üres halmazt felbontottuk egy–három-elemű duplázó láncokra. Még le kell ellenőriznünk, hogy ezek a duplázó láncok megfelelnek-e a feltételeknek. Az egy- és a kételemű csoportok nyilvánvalóan egy duplázó láncot fognak alkotni. A háromelemű csoportok a következő három halmazból fognak állni: $F \in \binom{[n]}{\leqslant k}$, $G \in \binom{[n]}{2k+2\leqslant}$ és $H \in \mathcal{H}$. Azt tudjuk, hogy $F \subset H$ és $H \subset G$, így $F \subset G$. Ezenkívül $2|F| \leq |H|$ és $2|H| \leq |G|$, ezért $2|F| \leq |G|$. □

Észrevehető, hogy a tételben szereplő kettes szorzó könnyen általánosítható.

3.1. Tetszőleges egész szorzó

3.5. tétel. *Legyen n pozitív egész, és $k = \lfloor \frac{n}{c+1} \rfloor$. Ekkor az n elemű halmaz részhalmazai közül akkor adható meg a legtöbb úgy, hogy ne legyen olyan A és B részhalmaz, amire $A \subset B$ és $|A| \cdot c \leq |B|$, ha azokat a halmazokat választjuk ki, amelyeknek legalább $k+1$ és legfeljebb $ck+c-1$ eleme van.*

Bizonyítás. Megfigyelhető, hogy a tételben szereplő halmazok egy jó konstrukcióját adják a feladatnak. A bizonyítás, hogy ennél többet nem lehet, az előző bizonyításhoz hasonlóan fog működni, ezért ezt csak vázlatosan fogjuk megcsinálni.

Ezúttal az alábbi függvények megalkotása szükséges:

- $f_i : \binom{[n]}{i} \longrightarrow \binom{[n]}{(c-1)k+i}$ minden $1 \leq i \leq k$-ra, legyen f_i injektív és minden $X \in \binom{[n]}{i}$-re $c \cdot |X| \leq |f_i(X)|$ és $X \subset f_i(X)$.
- $g_i : \bigcup_{j=1}^{c} \binom{[n]}{c(k+i)+j-1} \longrightarrow \binom{[n]}{k+i}$ minden $1 \leq i$-re, legyen g_i injektív és minden $X \in \bigcup_{j=1}^{c} \binom{[n]}{c(k+i)+j-1}$-re $2 \cdot |g_i(X)| \leq |X|$ és $g_i(X) \subset X$. (Ha $\frac{n-ck}{c} > i > \frac{n-c(k+1)}{c}$, akkor a g_i értelmezési tartomány uniójában lesznek üres tagok. Ha pedig az $i \geq \frac{n-ck}{c}$, akkor a g_i értelmezési tartománya az üres halmaz lesz.)

Ahhoz, hogy belássuk, hogy ezek a függvények megalkothatóak, a következő egyenlőtlenségeket kell belátni:

- $\binom{[n]}{i} \leq \binom{[n]}{(c-1)k+i}$;
- $\bigcup_{j=1}^{c} \binom{[n]}{c(k+i)+j-1} \leq c \cdot \binom{[n]}{c(k+i)}$;
- $c \cdot \binom{[n]}{c(k+i)} \leq \binom{[n]}{(k+i)}$.

Felhasználva azt, hogy $(c+2)k-1 \geq n \geq (c+1)k$ és $i \geq 1$, mindhárom egyenlőség könnyen igazolható.

Ezek után az f_i függvények megalkotása ugyanúgy fog történni, mint a kétszeres szorzó esetén. A g_i függvények esetén lesznek változások. A g_i-t most is $h_i \circ j_i$ alakban írjuk fel, viszont a $h_i : \bigcup_{j=1}^{c} \binom{[n]}{c(k+i)+j-1} \longrightarrow \binom{[n]}{c(k+i)} \times \{1, 2, \ldots, c\}$, és $j_i : \binom{[n]}{c(k+i)} \times \{1, 2, \ldots, c\} \longrightarrow \binom{[n]}{(k+i)}$.

Látható, hogy a fenti függvények megalkotásával olyan láncokat kapunk, ahol a halmazok méretei közt legalább c-szeres a különbség, és a nagyobb elemszámú halmaz tartalmazni fogja a kisebb elemszámút. Vagyis a bizonyítás itt is működni fog. $\square$

Irodalom

[1] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27** (1928), 544–548.

[2] P. Erdős, On a lemma of Littlewood and Offord, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51**, 12 (1945), 898–902.

[3] G. O. H. Katona, Families of subsets having no subset containing an other one with small difference, *Nieuw Archief voor Wiskunde* (3) XX (1972), 54–67.

[4] I. Leader, E. Long, Tilted Sperner families, *Discrete Applied Mathematics* **163**, Part 2 (2014), 194–198.

Prékopa András Takács Lajosról

Takács Lajos (1924–2015) a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja volt.

Takács Lajos 1924. augusztus 21-én született Maglódon. Az elemi iskolát ugyanitt, a középiskolát Budapesten végezte, 1943-ban érettségizett. A matematika iránti érdeklődése és tehetsége korán megmutatkozott. Tizenöt éves korában elolvasta Euler Algebráját, majd több magyar és német nyelvű matematika könyvet olvasott, köztük Beke Manó népszerű Differenciál- és Integrálszámítását. Érettségi után részt vett az Eötvös matematikai versenyen, melyen második helyezést ért el. Ugyanebben az évben beiratkozott a Műegyetemre, mely abban a formában 1934-ben jött létre, teljes neve: Magyar Királyi József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem volt. Itt Huszár Gézának, a biztosítási matematika professzorának asszisztense lett.

Az első év végétől egy tanéven át a háború miatt szünetelt az oktatás, és amikor 1945 őszén újból elkezdődött, Takács a Gazdaságtudományi Kar Statisztika Tanszéke tanszékvezető professzorának, később akadémikusnak, Jordan Károlynak az előadásait kezdte látogatni. Jordan világhírű statisztikus volt, Takács az ő tanítványa lett, de átjárt a Pázmányra is matematikai előadásokat hallgatni. Vele együtt hallgatott előadásokat a „big five” (Császár Ákos és négy további kiváló évfolyamtársa). Takács nem lett tagja ennek a közösségnek, pedig tehetsége alapján méltán jöhetett volna létre vele együtt egy „big six”. Ő azonban egy másik egyetemről jött vendéghallgatóként ült a padokban, ez elválasztotta tőlük. Másfelől viszont a Műegyetemen Jordan Károly körül is létrejött egy elit tanítványi közösség, melynek Takácson kívül ismertebb tagjai Ziermann Margit és a későbbi fizikus akadémikus Pál Lénárd voltak. Itt jegyezzük meg, hogy 1949-ben a Schweitzer Miklós matematikai emlékversenyen Takács Lajos első díjat nyert.

1945 őszén Bay Zoltánnak, a Műegyetem Atomfizikai Tanszéke vezetőjének gyakornoka lett. A Tanszék munkatársai a Tungsram (Egyesült Izzó) Kutató Laboratóriumában végezték kutató munkájukat, ahol 1936 óta Bay Zoltán volt az igazgató. A gyár is és a laboratórium is világhírű volt. Takács részt vett Bay kísérleteiben, a Holdra küldött radarjelek visszhangjának észlelésében, kiértékelésében és a foton természetének vizsgálatában [8]. A radart 1936-ban fedezte fel az angol Watson-Watt (valójában már 1904 óta ismert volt, de a háború miatt vált fontossá). Magyarország is foglalkozott vele, a Honvédség 1942-ben felkérte Bay professzort légvédelmi célú radar építésére. El is készült egy működőképes példány, melyet Jászkiséren állítottak fel légvédelmi céllal. A radarjelekkel kapcsolatban Takács feladata a Hold helyzetének meghatározása és mozgásának nyomon követése volt, hogy a leadott jelsorozat célba találjon. Takács ezt a feladatot hibátlanul megoldotta, ebben segítséget nyújtott Detre László csillagász professzor. 1946. február 6-án Pócza Jenő tanársegéddel kettesben végezték a kísérleteket, amikor a radarvisszhangot először észlelték. A kísérletek során Bay Zoltán egy ötletét alkalmazták, jelsorozatokat küldtek a Holdra, és a zajt átlagolással kiszűrték. Ez azért volt lehetséges, mert a zaj által okozott hiba az észlelések számának csak a négyzetgyöke arányában növekszik. Egyetlen jel visszhangját nem lehetett a zajtól elkülöníteni, de hosszú időre átlagolva a jel/zaj viszony emelkedéséből lehetett az észlelés valódiságára következtetni. Bay Zoltán zseniálisan alkalmazta a statisztikai elvet a radarral végzett kísérletekre, elgondolását siker koronázta, és ez egyben a statisztika diadala volt. Az eredményekről [1] cikkében számolt be. Kár, hogy Takács nem közölt részleteket a Bay-projektben végzett munkájáról, csak a negyven évvel későbbi [9] és a még későbbi [8] rövid tudósításokban olvashatunk erről.

A magyar kutatócsoport később értesült arról, hogy az Egyesült Államokban, New Jersey egy tengerparti városában, Belmarban John DeWitt ezredes irányításával kb. egy hónappal korábban, január 10-én már észleltek Holdról visszaverődő radarjeleket [4]. Az amerikaiak lényegesen jobb körülmények között végezték kísérleteiket, Bay Zoltánék magyar fejlesztésű radarral dolgoztak, a felszerelési hiányosságot azonban pótolta néhány zseniális megoldásuk.

Takács 1948-ban doktorált Jordan Károlynál, disszertációjának címe: „A Brown-mozgás valószínűségszámítási tárgyalása” volt. 1948–1955 között a Tungsram Kutató Laboratórium utódjánál, a Távközlési Kutató Intézetnél dolgozott. 1950–1958 között tagja volt az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének (1950–1955), illetve az átalakult Matematikai Kutató Intézetnek (1955–1958). 1953–1958 között az ELTE Valószínűségszámítási Tanszékének az adjunktusa is volt. 1957-ben a kandidátusi fokozat kihagyásával megszerezte a matematikai tudományok doktora fokozatot „A részecskeszámlálók elméletében fellépő sztochasztikus folyamatok” című disszertációjával. 1958-ban vendégtanári meghívást kapott a londoni Imperial College-tól és a London School of Economics-tól. Angliából nem tért haza. Ott megismerkedett Pálóczi Horváth Dalmával, akivel 1959-ben házasságot kötött. Dalma később a Notre Dame College, Ohio, English Department tanszékvezető tanára lett.

Takács Lajos a New York-i Columbia University professzora lett (assistant 1959–60, associate 1960–1966). Egyidejűleg dolgozott a Bell Laboratory és az IBM számára is konzultánsként. 1966-ban full professor lett Clevelandben a Case Intitute of Technologyn, majd annek jogutódján a Case Wertern Reserve Universityn. Innen ment nyugdíjba és lett emeritus professzor 1987-ben. Nyugdíjasként töretlen energiával alkotott, publikált. Élete utolsó éveiben egészségi problémákkal küzdött. A halál Clevelandban érte 2015. december 4-én, felesége és két lánya vele volt utolsó perceiben. A clevelandi történelmi Lakeview Cemeteryben temették el.

Takács Lajos a 20. századi valószínűségelméleti iskola egyik meghatározó és legkiemelkedőbb egyénisége volt. Az Izzó Kutató Laboratóriumában, majd a Távközlési Kutató Intézetben eltöltött évek a problémamegoldás és a problémákkal való töltekezés évei voltak. Ugyanez elmondható az MTA Alkalmazott Matematikai Intézetére is, ahol az ötvenes években intenzív alkalmazási munka folyt, az Intézetet sok mérnök, közgazdász, orvos és természettudós látogatta. Takács a valószínűségelméleti gondolkodásmódot Jordan Károlytól sajátította el. Munkáira jellemző a véletlennel kapcsolatos „természettudományos” gondolkodásmód és a mélyen szántó matematikai gondolatok egysége.

Eredményeinek egy része a véletlen pontfolyamatok, pontrendszerek és az ezek által generált másodlagos folyamatok köré csoportosul. A szakirodalomban a „megjelölt (marked) Poisson-folyamat” néven említett modell Takácsnál fordul elő először. Alkalmazásait az elektroncsövekre kezdte, de később sok egyéb problémára kiterjesztette, általánosította. Ezek körében a legszínvonalasabb a számláló csövek Takács-féle elmélete. A terület szoros kapcsolatban van a tömegkiszolgálás (queueing theory) elmélettel is, melynek Takács kezdeményezője és legeredményesebb kutatója volt. Ennek egy speciális esetét Takács-folyamatnak nevezik a szakirodalomban, és egy eloszlásfüggvény meghatározására vonatkozó elegáns integro-differenciál egyenlet Takács nevét viseli.

A Poisson-folyamat általánosítása, az ún. felújítási folyamat vagy rekurrens folyamat (angol neve: renewal process), midőn a szomszédos események közötti időtartamok azonos eloszlásúak és függetlenek, de nem feltétlenül exponenciális eloszlásúak, szintén Takácstól származik, legalább részben. 1954-ben Takács egy ezzel kapcsolatos dolgozata hozzám került lektorálás céljából, ám azt menetközben a szerző visszakérte javítás céljából (akkoriban nem titkolóztunk a lektor személyét illetően, hanem a szerző és a lektor személyesen is együttműködött). A dolgozatban volt egy tévedés, amit

Takács észrevett és kijavított. A tévedés a következő volt: egy rekurrens folyamatban tekintjük egy adott, rögzített időponttól a legközelebbi eseményig eltelt idő várható értékét, erről azt állítjuk, hogy nem lehet nagyobb, mint a szomszédos események közötti időtartam várható értéke. A valóság az, hogy ez lehetséges, és akkor fordul elő, ha az események közötti időtartam szórása nagy. A jelenség a mai szakirodalomban „inspection paradox" néven ismert, tudomásom szerint ezt Takács fedezte fel.

A kombinatorika Takács egyik kedvenc problémaköre és kutatási területe volt. Több fontos eredményt ért el ezeknek a sztochasztikus folyamatok elméletével való összekapcsolása terén. Ide tartoznak az ún. „választási tételek" (ballot theorems), ahol annak a valószínűségét keressük, hogy a szavazáshoz leadott szavazatok számában egy jelölt végig vezet a riválisával szemben, és azok alkalmazásai, sztochasztikus folyamatok maximumaira vonatkozó tételek, rendstatisztikai tételek stb. Takács ezeket az eredményeket az 1967-ben megjelent [7] könyvében összegezte. Megemlítem, hogy az ún. magyar készletmodell vagy Prékopa–Ziermann-féle modell az 1960-as évek első felében készült. Formuláink egy része speciális esete lett általánosabb Takács-féle formuláknak, de sikerült azok segítségével újakat is nyernünk az országos jelentőségű készletgazdálkodási problémák megoldásához.

A kombinatorikai problémák körébe sorolhatjuk a véletlen gráfokkal és az ún. inclusion–exclusion formulákkal kapcsolatosakat. Az utóbbiakat Takács Jordan Károlytól tanulta, aki maga is publikált e téren, formulákat vezetett le események Boole-függvényei valószínűségére. Takács észrevette, hogy azokat Jordan Károly névrokona, a francia C. Jordan 1867-ben már közölte. Az idevágó Takács-féle eredmények újabb koincidenciaproblémák megoldását tartalmazzák, valamint eredményeket arra az esetre, amikor végtelen sok eseményt vizsgálunk.

Takács 70. születésnapja alkalmából Dshalalow és Siski [2], továbbá Galambos és Gani [3] írt munkáiról részletes méltatást, az érdeklődő olvasó ezekben és önvallomásában [9] talál további részleteket, hiszen mindegyikben lesznek megoldatlan problémák, amik azután szükségessé teszik az elmélet továbbfejlesztését.

Takács Lajos 1952-ben Grünwald-díjat kapott a Bolyai Társulattól, 1993-ban külső tagja lett a Magyar Tudományos Akadémiának, 1994-ben az INFORMS (Institute for Operations Research and the Management Science) John von Neumann elméleti díjjal tüntette ki és fellow-vá választotta. Munkásságát az operációkutatás részének is tekintették. Takács tehát az operációkutatás klasszikusa is, és művelői első generációjához tartozik. Ez év márciusában a European Conference on Queueing Theory (ECQT) bejelentette, hogy díjat hoztak létre a tömegkiszolgálás-elmélettel és annak alkalmazásával foglalkozó kiváló PhD disszertációk jutalmazására, melyet Takács Lajosról neveztek el.

Takács Lajos hat könyvet és 225 tudományos dolgozatot publikált. A három fontosabb könyve az [5], [6], [7] az alábbi felsorolásban.

Irodalom

[1] Bay, Z., Reflections of microwaves from the Moon, *Acta Physica Hungarica* **1** (1947), 1–6.

[2] Dshalalow, J. H., R. Syski, Lajos Takács and his work, *J. of Applied Math. and Stoch. Anal.* **7** (1999), 215–237.

[3] Galambos, J., Gani, J., Lajos Takács, an appreciation, *Studies in Applied Probability, Papers in Honour of L. Takács. J. of Applied Probability, Special Volume* 31/A (1994).

[4] Gootée, T., Radar reaches the Moon, *Radio News* 04-R (1946), 25–27, 84–88.

[5] Takács, L., *Stochastic Processes*, Methuen, London, 1960.

[6] Takács, L., *Introduction to the Theory of Queues*, Oxford University Press, 1962.

[7] Takács, L., *Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes*, John Wiley, New York, 1967.

[8] Takács Lajos, Holdvisszhang 1946. február 6-án, *Fizikai Szemle* (1997) I/20.

[9] Takács, L., Chance or determinism? In: *The Craft of Probabilistic Modelling. A Collection of Personal Accounts* (J. Gani, ed.), Springer, New York, 1986, 139–149.

Jelentés a 2016. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat 2016. október 24. és november 2. között rendezte meg a Schweitzer Miklós Matematikai Emlékversenyt. A versenyen középiskolai tanulók, egyetemi és főiskolai hallgatók, továbbá azok vehettek részt, akik egyetemi vagy főiskolai tanulmányaikat 2016-ban fejezték be.

A verseny lebonyolítására a Társulat a következő bizottságot kérte fel: Füredi Zoltán (elnök), Frenkel Péter (titkár), Biró András, Csikós Balázs, Halász Gábor, Keleti Tamás, Komjáth Péter, Móri Tamás, Terpai Tamás.

A bizottság október 14-i ülésén kiválasztotta a 10 kitűzendő feladatot. A bizottság köszönetét fejezi ki mindazoknak, akik feladatot javasoltak a versenyre. A kitűzött feladatokat javasolták: 1. Ruzsa Imre, 2. Király Zoltán, 3. Totik Vilmos, 4. Füredi Zoltán, 5. Buczolich Zoltán, 6. Biró András és Halász Gábor, 7. Szabó Endre és Szűcs András, 8. Augustin Fruchard és Bárány Imre, 9. Lovász László, 10. Székely J. Gábor.

A verseny eredményes volt, 15-en indultak rajta, összesen 65 megoldást nyújtottak be. Ezek ötletességükben helyenként a kitűzők eredeti megoldásait is túlszárnyalták.

A versenybizottság december 2-i ülésén megállapította, hogy egyetlen versenyző oldotta meg – apró hiányosságoktól eltekintve – mind a tíz feladatot. Ennek alapján

*I. díj*ban és 100 000 forint pénzjutalomban részesül

Nagy János, az ELTE végzett, matematikus mesterszakos hallgatója, jelenleg a Közép-európai Egyetem Matematika és Alkalmazásai doktori programjának elsőéves hallgatója.

Egy versenyző oldott meg hat és fél feladatot (1., 2., 3., 7., 8., 9., valamint részeredmény a 4. és 5. feladatban). Ennek alapján

*II. díj*ban és 50 000 forint pénzjutalomban részesül

Ágoston Tamás, az ELTE másodéves, matematikus mesterszakos hallgatója.

Három versenyző oldott meg lényegében öt vagy öt és fél feladatot. Ennek alapján

*III. díj*ban és fejenként 30 000 forint pénzjutalomban részesül

Fehér Zsombor, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója,

Frankl Nóra, az ELTE végzett, matematikus mesterszakos hallgatója, jelenleg a London School of Economics and Political Science elsőéves doktorandusz hallgatója és

Maga Balázs, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója.

Közülük Fehér Zsombor megoldotta az 1., 2., 3., 5., 8. feladatot; a 2. feladatra adott megoldása kiemelkedő. Frankl Nóra megoldotta 2., 3., 4., 8., valamint apróbb, javítható hibáktól eltekintve az 5. feladatot, és hiányos megoldást adott az 1. feladatra. Maga Balázs megoldotta a 2., 3., 5., 8., valamint – kis hiányosságtól eltekintve – a 4. feladatot.

Három versenyző oldott meg három feladatot (és ért el esetleges további részeredményt). Ennek alapján
*dicséret*ben részesül
Csernák Tamás, az ELTE harmadéves, matematika alapszakos hallgatója,
Szőke Tamás, az ELTE másodéves, matematika alapszakos hallgatója és
Williams Kada, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. évfolyamos tanulója.
Közülük Csernák Tamás megoldotta a 3., 5. és 8. feladatot, és részeredményt ért el a 2. feladatban. Szőke Tamás a 2., 3. és 8., Williams Kada pedig a 3., 4. és 8. feladatot oldotta meg.

A díjakat a Morgan Stanley Magyarország Elemző Kft. támogatta, ezért a versenybizottság köszönetét fejezi ki.

Feladatok

1. Milyen α komplex számhoz van olyan teljesen multiplikatív, komplex értékű f számelméleti függvény, amelyre

$$\sum_{n<x} f(n) = \alpha x + O(1)\,?$$

2. Legyen $K = (V, E)$ véges, egyszerű, teljes gráf. Legyen d pozitív egész. Legyen $\phi\colon E \to \mathbb{R}^d$ olyan leképezése az élhalmaznak

az euklideszi térbe, hogy az értékkészlet bármely pontjának ősképe összefüggő gráfot alkot az egész V csúcshalmazon, továbbá a K bármely háromszögének éleihez rendelt pontok egy egyenesen vannak. Mutassuk meg, hogy ϕ értékkészlete egy egyenesen van.

3. Igazoljuk, hogy minden P valós együtthatós polinomhoz és minden pozitív egész n-hez van olyan Q valós együtthatós polinom, amelyre $P^2(x) + Q^2(x)$ osztható $(1 + x^2)^n$-nel.

4. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan valós számokból álló $a(1), a(2), \ldots,$ $a(n), \ldots$ sorozat, amelyre

$$a(n+m) \leq a(n) + a(m) + \frac{n+m}{\log(n+m)} \tag{1}$$

minden $m, n \geq 1$ egészre, és amelyre az $\{a(n)/n : n \geq 1\}$ halmaz mindenütt sűrű az egész számegyenesen.

Megjegyzés. De Bruijn és Erdős tétele kimondja, hogy ha a fenti egyenlőtlenség a jobb oldal utolsó tagja helyett $f(n+m)$-mel teljesül, ahol $f(n) \geq 0$ monoton növő és

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n)/n^2 < \infty, \tag{2}$$

akkor $a(n)/n$ konvergál, vagy $(-\infty)$-hez tart.

5. Létezik-e olyan szakaszonként lineáris, folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre bármilyen $a_n \in [0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$ két irányban végtelen sorozathoz van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy

$$\limsup_{K \to \infty} \frac{\#\{k \leq K \,:\, k \in \mathbb{N},\, f^k(x) \in [n, n+1)\}}{K} = a_n$$

teljesül minden $n \in \mathbb{Z}$-re, ahol $f^k = f \circ \ldots \circ f$ az f függvény k-adik iteráltja?

6. Legyen $\Gamma(s)$ az Euler-féle gamma-függvény. Konstruáljunk olyan nem azonosan eltűnő $F(s)$ páros egészfüggvényt, amelyre az $F(s)/\Gamma(s)$ hányados korlátos a $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ jobb félsíkban.

7. Mutassuk meg, hogy a $\mathbb{C}P^\infty$ tér feletti tautologikus (univerzális) komplex vonalnyaláb önmagával vett r-szeres direkt összegének egységgömbnyalábja homotopikusan ekvivalens $\mathbb{C}P^{r-1}$-gyel.

8. Milyen $n > 1$ egész számra van olyan téglalap, amely fölbontható n darab hozzá hasonló, de páronként nem egybevágó téglalapra?

9. Ha $p_0, \ldots, p_d \in \mathbb{R}^d$, legyen

$$S(p_0, \ldots, p_d) = \left\{ \alpha_0 p_0 + \cdots + \alpha_d p_d : \alpha_i \leq 1,\ \sum_{i=0}^{d} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Legyen π tetszőleges valószínűségeloszlás $\mathbb{R}^d$-n, és válasszuk a $p_0, \ldots, p_d$ pontokat függetlenül π szerint. Bizonyítsuk be, hogy $\pi(S(p_0, \ldots, p_d))$ várható értéke legalább $1/(d+2)$.

10. Legyenek X és Y független, azonos eloszlású véletlen pontok az $\mathbb{R}^3$-beli egységgömbfelületen. Az X milyen eloszlása mellett lesz X és Y (euklideszi) távolságának várható értéke maximális?

Megoldások

A megoldás szerzőjét csak akkor jelezzük, ha eltér a feladat szerzőjétől és nem tagja a bizottságnak.

1. Akkor és csak akkor van ilyen függvény, ha $\alpha = 1$ vagy $|\alpha| < 1$.

(1) A feltétel miatt f korlátos, és ha egyszer $f(n^k) = f(n)^k$ korlátos, akkor $|f(n)| \leq 1$, így $|\alpha| \leq 1$.

(2) Tegyük fel, hogy $\alpha \neq 1$; belátjuk, hogy $|\alpha| < 1$. Válasszunk olyan m számot, amelyre $f(m) \neq 1$. Az

$$F(x) = \sum_{n<x} f(n)$$

összegből m többszöröseinek adaléka

$$f(m)F(x/m) = \frac{\alpha f(m)}{m} x + O(1),$$

tehát az m-mel nem oszthatóké

$$\alpha\left(1-\frac{f(m)}{m}\right)x+O(1).$$

Az ilyen számok száma $x(1-1/m)+O(1)$, és mindegyik adaléka legfeljebb 1, tehát

$$|\alpha|\left|1-\frac{f(m)}{m}\right|\le 1-\frac{1}{m}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\left|1-\frac{f(m)}{m}\right|>1-\frac{1}{m},$$

tehát $|\alpha|<1$.

(3) Most konstruálunk ilyen függvényt. Az $\alpha=0,1$ esetek triviálisak; legyen $0<|\alpha|<1$. A függvényt olyan formában készítjük, hogy választunk egy véges P prímhalmazt, $f(p)=1$ ha $p\notin P$ és $|f(p)|<1$ ha $p\in P$.

Belátjuk, hogy minden ilyen függvényre

$$F(x)=\beta x+O(1), \tag{3}$$

ahol

$$\beta=\prod_{p\in P}\frac{p-1}{p-f(p)}. \tag{4}$$

Ez fennáll az azonosan 1 függvényre, és ezt a tulajdonságot megőrzi az alábbi két művelet. Az egyik, hogy egy p prímen $f(p)$ értékét kicseréljük 0-ra, a többi prímnél változatlanul hagyjuk. Az új függvényt és összegzési függvényét f'-vel, illetve F'-vel jelölve

$$F'(x)=F(x)-f(p)F(x/p)=\beta' x+O(1),\ \beta'=\beta(1-f(p)/p)).$$

A másik, hogy egy olyan prímnél, ahol $f(p)=0$, kicseréjük egy c számra, $|c|<1$. Ekkor

$$F'(x)=F(x)+cF(x/p)+c^2F(x/p^2)+\ldots=\beta' x+O(1),\ \beta'=\beta\frac{p}{p-c}.$$

Ha az O konstansa C volt, most legfeljebb

$$C(1+|c|+|c^2|+\ldots)=\frac{C}{1-|c|}$$

lesz. E két művelet ismételt alkalmazásával a fent leírt függvények megkaphatók.

(4) Most a P halmazt és az $f(p)$ értékeket kell úgy választani, hogy $\beta=\alpha$ legyen. Legyen $\alpha=e^{-z}$, ahol $z=a+ib, a>0$. A (2) szorzat tényezői között szétosztjuk ezt $1/(p-1)$-gyel arányosan, vagyis

$$p-f(p)=(p-1)e^{\delta z/(p-1)}$$

lesz, ahol

$$\delta=\left(\sum_{p\in P}1/(p-1)\right)^{-1}.$$

Ez megadja $f(p)$ értékeit. Belátjuk, hogy $|f(p)|<1$ lesz, ha δ elég kicsi, ahol az „elég kicsi” értelme csak z-től függ.

A fenti képletből

$$f(p)=p-(p-1)e^{\delta z/(p-1)}.$$

Tudjuk, hogy

$$e^{\delta z/(p-1)}=1+\frac{\delta z}{p-1}+O\left(\frac{\delta^2}{p^2}\right),$$

tehát

$$f(p)=1-\delta z+O\left(\frac{\delta^2}{p}\right). \tag{5}$$

Továbbá

$$|1-\delta z|^2=(1-\delta a)^2+(\delta b)^2<1-\delta a$$

ha $\delta<a/(a^2+b^2)$, így

$$|1-\delta z|<\sqrt{1-\delta a}<1-\delta a/2,$$

ami (3) miatt elég kis δ választással garantálja, hogy $|f(p)|<1$. Mivel a prímek reciprokösszege divergens, δ tetszőlegesen kicsivé tehető.

Megjegyzések. 1. (Ágoston Tamás) Ha $\alpha \neq 0$, akkor csak véges sok olyan prím lehet, amelyre $|f(p)| < 1$. Ha ugyanis $p_1, \ldots, p_k, \ldots$ ilyen prímek, akkor véve egy olyan k kitevőt, amelyre $|f(p_j)|^k < \varepsilon$ fennáll $j \leq m$ esetén, majd egy olyan n számot, melyre

$$p_1^k|n+1,\ \ldots,\ p_m^k|n+m,$$

elérjük, hogy

$$|F(n+m) - F(n)| \leq |f(n+1)| + \ldots + |f(n+m)| < \varepsilon m$$

legyen, miközben a feltevés szerint ez $= |\alpha|m + O(1)$.

2. A feladat kitűzője nem tudja (és nehéznek véli eldönteni), hogy van-e olyan, a feladatbeli tulajdonsággal bíró függvény, amelyre $\alpha \neq 0$ és valamely p prímre $|f(p)| = 1$, $f(p) \neq 1$. Tagadó válasz esetén a fent leírt konstrukció megadja az összes szóbajövő megoldást.

3. (Halász Gábor) A feltétel szükségessége az alábbi módon is látható. Ha létezik az α középérték, akkor parciális összegzéssel

$$\alpha = \lim_{\sigma\to 1+0}(\sigma-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^\sigma} = \lim_{\sigma\to 1+0}\frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^\sigma}}{\zeta(\sigma)} = \lim_{\sigma\to 1+0}\prod_p \frac{1-\frac{1}{p^\sigma}}{1-\frac{f(p)}{p^\sigma}},$$

$$|\alpha| = \lim_{\sigma\to 1+0}\prod_p \frac{1-\frac{1}{p^\sigma}}{\left|1-\frac{f(p)}{p^\sigma}\right|}.$$

Mivel minden tényező ≤ 1, csak egyet megtartva

$$|\alpha| \leq \lim_{\sigma\to 1+0}\frac{1-\frac{1}{p^\sigma}}{\left|1-\frac{f(p)}{p^\sigma}\right|} = \frac{1-\frac{1}{p}}{\left|1-\frac{f(p)}{p}\right|} < 1,$$

ha van $f(p) \neq 1$ érték.

Megoldotta Ágoston Tamás, Fehér Zsombor és Nagy János. Részeredményt ért el Frankl Nóra, Lenger Dániel és Markó Ádám. Hibás egy dologozat.

2. (Fehér Zsombor) Legyen $U \subset V$ olyan csúcshalmaz, amelyre létezik olyan $p \in U$ és $v \in V \setminus U$, hogy $u \in U$-ra $\phi(uv) = A$ állandó, és $u \in U \setminus \{p\}$-re $\phi(up) = B$ szintén állandó, de $A \neq B$. Ha ϕ állandó

az egész élhalmazon, akkor készen vagyunk, ha nem állandó, akkor nyilván létezik ilyen tulajdonságú kételemű U halmaz. Rögzítsünk egy olyan U, p, v-t, melyben U elemszáma maximális.

Megmutatjuk, hogy ϕ értékkészlete az AB egyenesen van. Tegyük fel indirekt módon, hogy $C \notin AB$ eleme az értékkészletnek. Legyen T azon $t \in V \setminus U$ csúcsok halmaza, melyekre $\phi(ut) = D$ állandó $u \in U$-ra, és D rajta van az AC egyenesen, de $D \neq C$.

Világos, hogy T diszjunkt U-tól, és hogy T nem üres, hiszen $v \in T$. Mivel $\phi^{-1}(C)$ összefüggő, ezért létezik olyan T-ből kilépő rs él ($r \in T$, $s \in V \setminus T$), melyre $\phi(rs) = C$. Mivel $r \in T$, ezért $u \in U$-ra $\phi(ur) = R$ állandó, ahol $R \in AC$, $R \neq C$. Így $s \notin U$.

Legyen $\phi(sp) = S$. A prs háromszög miatt R, C, S egy egyenesen lévő pontok. Továbbá minden $u \in U \setminus \{p\}$-re az ups háromszög miatt $B, S, \phi(us)$, az urs háromszög miatt pedig $R, C, \phi(us)$ egy egyenesen vannak. Ez $B \notin AC = RC$ miatt azt jelenti, hogy $\phi(us) = RC \cap BS = S$.

Tehát $s \in V \setminus U$ olyan csúcs, hogy minden $u \in U$-ra $\phi(us) = S$ állandó, ahol $S \in AC$. Mivel $s \notin T$, ezért ez csak úgy lehet, ha $S = C$. Ekkor azonban $U' = U \cup \{r\}$, $p' = r$, $v' = s$ ellentmond U maximalitásának. Ezzel készen vagyunk.

Megjegyzés. Az állítás akkor is igaz marad, ha ϕ értékkészlete egy hurokmentes matroid, és az „egy egyenesen van" kifejezést helyettesítjük a „legfeljebb 2 rangú halmazt alkot" kifejezéssel.

Kiemelkedő megoldást adott Fehér Zsombor és Nagy János. Megoldotta Ágoston Péter, Ágoston Tamás, Frankl Nóra, Garamvölgyi Dániel, Maga Balázs és Szőke Tamás. Hibás négy dolgozat.

3. Feltehetjük, hogy $P = 1$, ha ugyanis $1 + Q^2(x)$ osztható $(1 + x^2)^n$-nel, akkor $P^2(x) + (PQ)^2(x)$ is osztható $(1 + x^2)^n$-nel.

   Ha $n = 1$, akkor $Q(x) = x$ megfelelő. Ha $n = 2$, akkor $Q(x) = x(x^2 + 3)/2$ megfelelő, hiszen $Q(i) = i$ és $Q'(x) = 3(x^2 + 1)/2$ miatt i kétszeres gyöke $1 + Q^2$-nek.

   Ha már $1 + Q^2(x)$ osztható $(1 + x^2)^n$-nel, akkor $1 + Q^2(Q(x))$ osztható $(1 + Q^2(x))^n$-nel, ez pedig $(1 + x^2)^{n^2}$-nel. Mivel a 2 ismételt négyzetre emelésével tetszőlegesen nagy számot kaphatunk, a feladat állítása igaz.

Megoldotta Ágoston Tamás, Csernák Tamás, Fehér Zsombor, Frankl Nóra, Garamvölgyi Dániel, Kiss Melinda, Lenger Dániel, Maga Balázs, Markó Ádám, Nagy János, Szőke Tamás, Williams Kada, valamint – javítható hibával – Kaprinai Balázs is.

4. Legyen

$$c(n) = \begin{cases} 0 & n \le e \\ \log\log n & n \ge e, \end{cases}$$

és legyen $b(n) = nc(n)$. Azt állítjuk, hogy alkalmas $C > 0$ abszolút konstanssal tetszőleges $n > k > 0$ egészekre

$$-b(k) - b(n-k) + b(n) \le Cn/\log n. \tag{6}$$

Valóban, a $b(n)$ függvény konvex, tehát $b(k) + b(n-k) \ge 2b(n/2)$. Ha $n \ge 6$, akkor

$$\begin{aligned} b(n) - 2b(n/2) &= n\log\log n - 2(n/2)\log\log(n/2) = n\log\left(\frac{\log n}{\log(n/2)}\right) \\ &= n\log\left(1 + \frac{\log 2}{\log n - \log 2}\right) < \frac{n}{\log_2 n - 1} < C\frac{n}{\log n}. \end{aligned}$$

A C konstanst alkalmasan megnövelve, (6) teljesülni fog $n = 2, 3, 4, 5$ esetén is.

Legyen

$$a(n) = n(c(n) - \overline{c(n)})/C = (b(n) - n\overline{c(n)})/C,$$

ahol $\overline{x}$ az x-hez legközelebbi négyzetszám. Mivel a $\overline{c(n)}$ sorozat monoton növekvő, ezért $a(n)$ kielégíti az (1) egyenlőtlenséget. Könnyű belátni, hogy az $\{a(n)/n : n \ge 1\}$ halmaz mindenütt sűrű az egész számegyenesen.

Megjegyzés. Valós számok egy $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ végtelen sorozata *szubadditív*, ha

$$a(n+m) \le a(n) + a(m)$$

minden $m, n \ge 1$ egészre. Sok bevezető analíziskönyvben szerepel feladatként vagy tételként Fekete lemmája: ha $(a(n))$ szubadditív, akkor az

$(a(n)/n)$ sorozatnak létezik limesze (amely véges vagy $-\infty$, sőt megegyezik a sorozat infimumával).

Legyen $f(1), \ldots, f(n), \ldots$ egy nemnegatív számokból álló sorozat. Valós számok egy $a(1), a(2), \ldots, a(n), \ldots$ végtelen sorozata f*-majdnem szubadditív,* ha

$$a(n+m) \leq a(n) + a(m) + f(n+m)$$

minden $m, n \geq 1$ egészre. De Bruijn és Erdős fent említett eredménye a Fekete-lemma általánosítása majdnem szubadditív sorozatokra.

A feladat azt mutatja meg, hogy a (2) feltétel nagyon közel van a lehető legjobbhoz, hiszen $f(x) = x/\log x$ esetén már létezik olyan f-majdnem szubadditív $a(n)$ sorozat, amelyre $(a(n)/n)$ „nagyon” nem konvergens.

Megoldotta Frankl Nóra, Nagy János, Williams Kada és – kis hiányosságtól eltekintve – Maga Balázs. Részeredményt ért el Ágoston Tamás. Nem tartalmaz érdemi eredményt egy dolgozat.

5. (A kitűző megoldását átdolgozta Keleti Tamás.) Legyen $f(x) = [x] + 5\{x\} - 2$ ha $\{x\} \in [1/5, 4/5]$, a kiegészítő intervallumokon lineárisan kiegészítve. Megmutatjuk, hogy ez a függvény jó.

Állítás. *Legyen $b_0, b_1, \ldots$ olyan, egészekből álló sorozat, amelyben a szomszédos tagok különbsége legfeljebb* 1. *Ekkor van olyan $x \in (0,1)$, amelyre $[f^k(x)] = b_k$ minden $k = 0, 1, 2, \ldots$ egészre.*

Bizonyítás. Legyen $d_k = b_k - b_{k-1}$, x pedig az a szám, amelynek egész része b_0, és ötös számrendszerben a k-adik jegye $d_k + 2$. Könnyen látszik, hogy ez pont jó.

Állítás. *Bármely, két irányban végtelen $[0,1]$-beli (a_n) sorozathoz van olyan, egészekből álló $b_0, b_1, \ldots$ sorozat, amelyben a szomszédos tagok különbsége legfeljebb* 1*, és minden egész n-re az n-nel egyenlő b_k számok relatív gyakoriságának* $\limsup$*-ja éppen a_n.*

Bizonyítás. Legyen $b_0 = 0$. A további b_k értékeket a következőképpen konstruáljuk: föl-le sétálunk $\mathbb{Z}$-n úgy, hogy meg-megpihenve fellépegetünk 1-ig, aztán le (-1)-ig, aztán fel 2-ig, aztán le (-2)-ig, fel 3-ig stb. Ha sehol sem pihennénk meg, akkor minden n-re 0-hoz tartana a relatív gyakoriság. Ezért minden n-re, mindig amikor n-ben járunk, pihenjünk meg olyan sokáig, hogy a relatív gyakoriság épp felmenjen a_n fölé, aztán menjünk tovább. Így megfelelő b_k sorozatot kapunk.

A két fenti Állítás alapján az f függvény kielégíti a feladatbeli követelményt.

Megoldotta Csernák Tamás, Fehér Zsombor Maga Balázs, valamint – apró hiányosságoktól eltekintve – Frankl Nóra és Nagy János. Jó kiinduló ötleteket írt Ágoston Tamás.

6. (Nagy János megoldása nyomán, aki észrevette, hogy a Riemann-féle $\zeta(s)$ függvény függvényegyenlete lényegében minden megkövetelt tulajdonságot magában foglal. A kitűzők közvetlen konstrukciót adtak.) $c_1, c_2, \ldots$ alkalmas pozitív abszolút kostansokat fog jelölni.

A szóban forgó függvényegyenlet azt mondja ki, hogy a

$$\xi(s) \stackrel{\text{def}}{=} s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

egészfüggvényre $\xi(s) = \xi(1-s)$, más szóval $\xi(s+1/2)$ páros egészfüggvény.

Olyan $F(s)$ páros egészfüggvényt kell konstruálnunk, amire

$$|F(s)| < c_1 \left|\frac{s^s}{e^s\sqrt{s}}\right| \quad (\Re s \geq 0,\ |s| \geq 1),$$

hiszen a Stirling-formula komplex síkra való kiterjesztése szerint $|\Gamma(s)|$ a jobb félsíkban a jobb oldal két pozitív konstansszorosa közé esik, hacsak s el van határolva az origóban levő pólustól. Itt és a továbbiakban az s^α $(\Re s \geq 0)$ komplex hatvány értelmezéséhez $\log s$-et mindig $|\arg s| \leq \pi/2$-lel definiáljuk. Ennek köszönhetően $s^{\alpha_1}s^{\alpha_2} = s^{\alpha_1+\alpha_2}$ minden további nélkül, és ha s_1, s_2, s_1s_2 is a jobb félsíkba esik, akkor $\arg s_1 + \arg s_2 = \arg s_1s_2$, ahonnan $s_1^\alpha s_2^\alpha = (s_1s_2)^\alpha$, mint a valósban megszoktuk.

Első próbálkozásunk legyen a szintén páros egészfüggvény,

$$F_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \xi^2\left(s+\frac{1}{2}\right) = \left(s^2-\frac{1}{4}\right)^2 \pi^{-s-\frac{1}{2}}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)\zeta^2\left(s+\frac{1}{2}\right).$$

Az első két tényező abszolút értéke

$$\left|\left(s^2-\frac{1}{4}\right)^2\right| < c_2|s|^4 \quad (|s|\ge 1),$$

$$\left|\pi^{-s-\frac{1}{2}}\right| = c_3\pi^{-\Re s}.$$

Ismét a Γ-függvény említett becslése alapján a harmadiké

$$\left|\Gamma^2\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)\right| < c_4\left|\frac{\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)^{s+\frac{1}{2}}}{e^{s+\frac{1}{2}}\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{4}\right)}\right| =$$

$$c_4\left|\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)^s}{2^{s-\frac{1}{2}}e^{s+\frac{1}{2}}\sqrt{s+\frac{1}{2}}}\right| < c_5\left|\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)^s}{2^s e^s\sqrt{s}}\right| \quad (\Re s\ge 0).$$

Itt

$$\left(s+\frac{1}{2}\right)^s = s^s\left(1+\frac{1}{2s}\right)^s,$$

ahol

$$\left|\left(1+\frac{1}{2s}\right)^s\right| = \left|e^{s\log\left(1+\frac{1}{2s}\right)}\right| \le e^{|s|\frac{c_6}{|s|}} = e^{c_6} \quad (\Re s\ge 0,\ |s|\ge 1).$$

Szinte triviális becsléssel $|\zeta(s)| < c_7\sqrt{|s|}$ $(\Re s \ge 1/2)$ – ez kisebb kitevővel is ismert, de a kitevőnek nem lesz lényeges szerepe –, ahonnan a negyedik tényező abszolút értéke

$$\left|\zeta^2\left(s+\frac{1}{2}\right)\right| < c_8|s| \quad (\Re s\ge 0,\ |s|\ge 1).$$

Összeszorozva a négy tényezőt, látjuk, hogy $F_1(s)$ legfeljebb egy $|s|^5(2\pi)^{-\Re s}$ tényezővel lépi túl a megengedett korlátot.

$\sinh s/s = (e^s - e^{-s})/(2s)$ is páros egészfüggvény, ahol $|(e^s - e^{-s})/2| \le e^{\Re s}$ $(\Re s\ge 0)$.

$$F(s) \stackrel{\text{def}}{=} F_1(s)\left(\frac{\sinh(as)}{s}\right)^5 \qquad \left(a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\log 2\pi}{5}\right)$$

tehát már kielégíti a feladat követelményeit.

Megjegyzés. Az csak a látszat, mintha $F_1(s)$ becslésében a $\Re s \to \infty$ esetén exponenciálisan csökkenő $(2\pi)^{-\Re s}$ tényezőnek lényeges szerepe lenne. Ha ott sem volna, $F_1(s)$ helyett $F_1^M(s/M)$-et véve egész M-mel, már megjelenne egy $M^{-\Re s}$ a becslésében, amivel tetszőleges M-hez konstruáltunk olyan $F(s)$ függvényt, amelyre még $F(s)M^s/\Gamma(s)$ is korlátos a jobb félsíkban. Egyszerű Phragmén–Lindelöf-típusú tétel mutatja viszont, hogy egyetlen függvény ezt nem tudja megtenni minden M-re.

Megoldotta – apró hiányosságoktól eltekintve – Nagy János.

7. Ha $L \in \mathbb{C}P^\infty$ a $\mathbb{C}^\infty$ vektortérnek egy egydimenziós altere, akkor a tautologikus nyaláb L feletti fibruma, definíció szerint, éppen L. Az r-szeres direkt összeg L feletti fibruma tehát $L^{\oplus r}$. Így az egységgömbnyaláb L feletti fibruma

$$\{(x_1, \ldots, x_r) : x_i \in L, |x_1|^2 + \cdots + |x_r|^2 = 1\}.$$

Mivel nem lehet $x_1, \ldots, x_r$ mindgyike a nullvektor, ezért ez az r vektor meghatározza az $L = \langle x_1, \ldots, x_r\rangle$ alteret. Tehát az egységgömbnyaláb totális tere

$$E=\{(x_1, ..., x_r) : x_i \in \mathbb{C}^\infty \text{ egymás számszorosai}, |x_1|^2+...+|x_r|^2=1\}.$$

Az $(x_1, \ldots, x_r) \mapsto [x_1 : \cdots : x_r]$ hozzárendelés egy jóldefiniált, folytonos $\eta : E \to \mathbb{C}P^{r-1}$ leképezést határoz meg. Belátjuk, hogy η homotopikus ekvivalencia. Mivel S^∞ pontrahúzható, ezért elég belátni, hogy η lokálisan triviális nyaláb S^∞ fibrummal. Ehhez legyen

$$U_i = \{[z_1 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}P^{r-1} : z_i \neq 0\}.$$

Ekkor van olyan $U_i \times S^\infty \leftrightarrow \eta^{-1}(U_i)$ homeomorfizmus, amelynél a z feletti fibrumok egymásnak felelnek meg minden $z \in U_i$ esetén. Valóban, a direkt szorzat (z, v) pontjának feleljen meg a

$$\left(\frac{|z_i|}{|z|}\frac{z_j}{z_i}v\right)_{j=1}^r$$

vektor-r-es.

Megoldotta Ágoston Tamás és Nagy János. Részeredményt ért el Kiss Melinda. Hibás egy dolgozat.

8. (Laczkovich Miklós) Könnyen látható, hogy $n = 2$-re ilyen téglalap nincs. Belátjuk viszont, hogy minden $n > 2$-re van.

   Legyen $x > 1$. Legyen $b_{-1} = 0$, $b_0 = 1$ és $b_{n+1} = xb_n + b_{n-1}$ minden $n > 1$-re. Könnyű ellenőrizni, hogy a $b_{n-1} \times b_n$ méretű T_n téglalap felbontható n darab $1 : x$ oldalarányú és különböző méretű téglalapra: mindig hozzáillesztünk egy $1 : x$ oldalarányú téglalapot az előzőhöz. Most illesszünk T_n hosszabbik (b_n hosszúságú) oldalához egy $b_n \times (b_n/x)$ méretű téglalapot. Legyen a kapott téglalap R_n. Csak azt kell ellenőrizni, hogy alkalmas $x > 1$-re R_n oldalainak aránya $1 : x$. Ezt nem nehéz ellenőrizni, ui. $x = 1$ esetén b_n az $(n + 1)$-edik Fibonacci-szám, és ekkor R_n oldalainak aránya $> 1 = x$, ha viszont x nagyon nagy, akkor könnyen láthatóan R_n oldalainak aránya $< 1 < x$. Mivel b_n az x paraméter folytonos függvénye (amit egyébként explicite is meg lehet adni), kell hogy legyen olyan $x > 1$, amelyre az arány x.

   Az is világos, hogy a kapott $n + 1$ téglalap páronként nem egybevágó.

   Megoldotta Ágoston Tamás, Csernák Tamás, Faragó János, Fehér Zsombor, Frankl Nóra, Kiss Melinda, Maga Balázs, Nagy János, Szőke Tamás és Williams Kada. Részeredményt ért el Ágoston Péter és Lenger Dániel. Nem tartalmaz érdemi eredményt egy dolgozat.

9. Legyen p_{d+1} egy további véletlenül választott pont a π eloszlás szerint, ekkor
   $$\mathbb{E}(\pi(S(p_0, \dots, p_d))) = \Pr(p_{d+1} \in S(p_0, \dots, p_d)).$$
   Mivel $p_0, \dots, p_{d+1}$ eloszlása szimmetrikus, ezért a
   $$\Pr(p_j \in S(p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{d+1}))$$
   valószínűség nem függ j-től ($j = 0, \dots, d + 1$). Ezért elegendő belátni, hogy ennek a $d+2$ valószínűségnek az összege legalább 1. Ehhez pedig elegendő belátni, hogy biztosan van olyan j, amelyre
   $$p_j \in S(p_0, \dots, p_{j-1}, p_{j+1}, \dots, p_{d+1}).$$
   Mivel az $\binom{1}{p_i} \in \mathbb{R}^{d+1}$ vektorok lineárisan összefüggnek, ezért vannak olyan $\beta_0, \dots, \beta_{d+1}$ valós számok, amelyek nem mind nullák, s melyekre
   $$\sum_{i=0}^{d+1} \beta_i p_i = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{d+1} \beta_i = 0.$$

Feltehetjük, hogy $\max_i |\beta_i| = 1$ és a(z egyik) maximális abszolút értékű β_i pozitív. Legyen ez β_j, ekkor tehát

$$\sum_{i \neq j} (-\beta_i) p_i = p_j, \quad \sum_{i \neq j} (-\beta_i) = 1 \quad \text{és} \quad -\beta_i \leq 1.$$

Így $p_j \in S(p_0, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_{d+1})$.

Megoldotta Ágoston Tamás és Nagy János.

10. **Első megoldás** (Nagy János megoldása nyomán). Legyenek p_1, p_2, $\ldots, p_n$ tetszőleges pontok az S^2 egységgömbfelületen. Jelölje U az egyenletes eloszlást, Q_n pedig a p_i pontok által meghatározott tapasztalati eloszlást S^2-en. Legyen $-1 < t < 1$ esetén $\sigma(t) = \{x \in S^2 : x_1 \leq t\}$; ez az a gömbsüveg, amelynek szimmetriatengelye az első koordinátatengely, és a gömbfelület azon pontjait tartalmazza, amelyek első koordinátája legfeljebb t. Végül jelölje ν az $SO(3)$ forgatáscsoporton vett normált Haar-mértéket. Ekkor [K. B. Stolarsky: Sums of distances between points on a sphere II, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **41** (1973), 575–582, Theorem 2] szerint

$$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \|p_i - p_j\| + 4 \int_{-1}^{1} \int_{SO(3)} \Big(Q_n(\Theta\sigma(t)) - U(\Theta\sigma(t)) \Big)^2 \nu(\mathrm{d}\Theta) \, \mathrm{d}t = E\|X - X'\|,$$

ahol $\| \, . \, \|$ az euklideszi távolság, továbbá X, X' függetlenek és egyenletes eloszlásúak a gömbfelületen.

Ha most $p_1, p_2, \ldots$ független, Q eloszlású véletlen pontok az S^2 gömbfelületen, akkor $n \to \infty$ esetén a fenti egyenlőség bal oldalának első tagja 1 valószínűséggel konvergál, és a határértéke $E\|Y - Y'\|$, ahol Y és Y' függetlenek és eloszlásuk Q. Ez pl. az U-statisztikákra vonatkozó nagy számok erős törvényének a következménye [Móri Tamás: *Diszkrét paraméterű martingálok*, Typotex, Budapest, 2011, 12.10. Tétel]. A második tagban $Q_n(\Theta\sigma(t)) \to Q(\Theta\sigma(t))$ majdnem biztosan, így a dominált konvergencia-tétel értelmében a második tag határértéke

$$4 \int_{-1}^{1} \int_{SO(3)} \Big(Q(\Theta\sigma(t)) - U(\Theta\sigma(t)) \Big)^2 \nu(\mathrm{d}\Theta) \, \mathrm{d}t.$$

Mivel ez nemnegatív, azt kapjuk, hogy $E\|Y - Y'\| \le E\|X - X'\|$, vagyis az egyenletes eloszlás maximalizál. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a Q eloszlás majdnem minden gömbsüvegen ugyanazt az értéket veszi fel, mint az egyenletes eloszlás. Megmutatjuk, hogy akkor Q nem lehet más, mint az egyenletes eloszlás. Legyen ε rögzített kis pozitív szám. Legyenek $G_1, G_2, \dots, G_n$ olyan gömbsüvegek, amelyek páronként diszjunktak, legfeljebb ε átmérőjűek, $Q(G_i) = U(G_i)$, továbbá $G_0 = S^2 \setminus \cup_{i=1}^n G_i$-re $U(G_0) < \varepsilon$. Legyen Y eloszlása Q, legyenek az X_i valószínűségi változók függetlenek Y-tól és X_i egyenletes eloszlású G_i-n, $0 \le i \le n$. Definiáljuk X-et a következőképpen: ha $Y \in G_i$, akkor legyen $X = X_i$, $0 \le i \le n$. Ekkor X egyenletes eloszlású az S^2 gömbfelületen, és

$$P(\|X - Y\| > \varepsilon) \le P(Y \in G_0) = Q(G_0) = U(G_0) < \varepsilon.$$

Mivel ε tetszőlegesen kicsi lehet, azt kapjuk, hogy $Q = U$.

Második megoldás. Legyen P és Q két véges várható értékű valószínűségeloszlás $\mathbb{R}^d$ Borel-halmazain. Ekkor P és Q energiatávolsága a

$$D^2(P, Q) = 2\,E\|X - Y\| - E\|X - X'\| - E\|Y - Y'\|$$

mennyiség négyzetgyöke, ahol az X, X', Y, Y' valószínűségi (vektor)változók függetlenek, X és X' eloszlása P, Y és Y' eloszlása Q. Ez tehát nemnegatív, l. https://en.wikipedia.org/wiki/Energy_distance.

Legyen most P az egyenletes eloszlás az egységgömbfelületen, Q pedig tetszőleges eloszlás ugyanott. Az egyenletes eloszlás szimmetriatulajdonsága miatt az egységgömbfelület tetszőleges z pontja esetén $\|X - z\|$ eloszlása z-től függetlenül ugyanaz. Ezért tetszőleges, X-től független Z valószínűségi változó esetén, amely az értékeit az egységgömbfelületről veszi, $\|X - Z\|$ eloszlása is mindig ugyanaz. Következésképpen

$$\begin{aligned} 0 \le D^2(P, Q) &= 2\,E\|X - Y\| - E\|X - X'\| - E\|Y - Y'\| \\ &= E\|X - X'\| - E\|Y - Y'\|, \end{aligned}$$

ami mutatja, hogy az egyenletes eloszlás adja a maximumot (és csak az).

Apró hiányosságtól eltekintve megoldotta Nagy János.

Társulati élet – 2016

Szele Tibor-emlékérem

A Bolyai János Matematikai Társulat Szele Tibor-emlékérem bizottsága a 2016. évi érmet **Krisztin Tibornak** ítélte oda.

Indoklás:

Krisztin Tibor a Szegedi Tudományegyetem tanszékvezető egyetemi tanára, a dinamikus rendszerek és késleltetett differenciálegyenletek nemzetközi elismertségnek örvendő szakértője. 56 tudományos publikációjára több mint 560 hivatkozást kapott, H.-O. Waltherrel és J. Wuval írt „Shape, smoothness and invariant stratification of an attracting set for delayed monotone positive feedback” c. monográfiája a témakör egyik legismertebb munkája. Munkásságáért a Magyar Tudományos Akadémia 2013-ban levelező tagjává választotta. 2016-ban az E. M. Wright által megadott paramétertartomány jelentős kiterjesztéséért az ún. Wright-sejtésben három kollégájával együtt megkapta a Moore-díjat, amit a *Reliable Computing* szerkesztőbizottsága kétévente ítél oda az intervallumaritmetikát használó legjobbnak ítélt dolgozatért.

Krisztin Tibor kimagasló eredményeket ért el fiataloknak a tudományos munkába való bevezetése terén. Négy végzett doktorandusza van, mindannyian a Szegedi Tudományegyetemen dolgoznak. Közülük Röst Gergely kitüntetéses doktor, aki Grünwald Géza-emlékéremben, valamint Alexits György-díjban részesült, és aki a kevés magyar „European Research Council Starting Grant” nyertesek közé tartozik. Vas Gabriella sikeresen folytatja a késleltetett differenciálegyenletekre vonatkozó közös kutatatásaikat, ő Grünwald Géza-emlékérmet, Fulbright-ösztöndíjat és MTA posztdoktori ösztöndíjat kapott. Garab Ábel jelenleg posztdoktor a klagenfurti egyetemen, 2013-ban a *Journal of Differential Equations and Applications* folyóirat legjobb cikkért járó díját kapta meg. Jelenleg Krisztin Tibornak további négy doktorandusza van, akikből kettő várhatóan 2017 folyamán véd majd. Hat olyan diákja volt, aki nála kezdte kutatói pályafutását, nála írt diplomadolgozatot, de utána valahol máshol szerzett PhD fokozatot.

Grünwald Géza-emlékérem

2016-ban a Grünwald Géza-emlékéremre nyolc felterjesztés érkezett. Mind a jelöltek tudományos munkássága, mind pedig az oktatási és közéleti tevékenységük magas színvonalat képviselt. Ez jól példázza a Grünwald-emlékérem tudományos és társadalmi presztízsét. A Bizottság négy díj odaítéléséről döntött. A díjazottak tudományos munkássága hűen tükrözi a matematika sokszínűségét. Külön örömünkre szolgál, hogy lehetőségünkben állt az ország különböző egyetemeinek, illetve kutatóintézeteinek munkatársait kitüntetni. A bizottság szavazatai alapján az idei díjazottak a következők: **Cseh Ágnes, Kertész Dávid, Varga Nóra és Vidnyánszky Zoltán.**

Indoklások:

Cseh Ágnes 1988-ban született. 2010-ben a Budapesti Műszaki Egyetemen szerzett alkalmazott matematikusi B.Sc. diplomát, majd tanulmányait a Berlin Mathematical School ösztöndíjasaként Németországban folytatta. 2012-ben mesteri fokozatot, majd 2015-ben Summa cum Laude minősítésű Ph.D. fokozatot szerzett a berlini műszaki egyetemen, ahol munkáját több rangos díjjal is elismerték. Doktori tanulmányai alatt összesen másfél évet töltött vendégkutatóként, majd Izlandon vállalt nyolc hónapra posztdoktori állást. 2016 szeptembere óta az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos munkatársa.

Cseh Ágnesnek nyolc megjelent dolgozata van. Eredményei a gráfelmélet és a bonyolultságelmélet területét gazdagítják. Matematikai alapkutatásokat végez a játékelmélet, a számítástudomány és a közgazdaságtan területén. Legtöbb munkája a párosítások gráfelméleti tanulmányozásához kapcsolódik. Preferenciákkal ellátott gráfokon vizsgált speciális párosításokat, így modellezhető például az egyetemi felvételi eljárás. Legfontosabb eredménye a stabil és a népszerű párosítások több évtizedes elméletének összekapcsolása. Az elméleti egzisztenciabizonyítások mellett bonyolultságelméleti szemszögből is vizsgálja a felmerülő problémákat, meghatározván, hogy milyen inputra könnyű és milyenre nehéz az optimális párosítás meghatározása. Foglalkozott a stabil allokációk problémájával is, ami kapacitásokat is figyelembe vevő kiterjesztése a hagyományos párosításoknak, valamint olyan hálózati folyamatokkal, ahol az időkomponens fontos szerepet játszik, mint például szállítási feladatoknál. Munkássága kiválóan példázza a gyakorlati problémák egzakt matematikai vizsgálatának lehetőségét és szükségességét. Kiemelkedő eredményeire tekintettel Cseh Ágnes a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Kertész Dávid 1988-ban született, 2009-ben szerzett matematikus B.Sc. diplomát, majd 2011-ben mesteri fokozatot a Debreceni Tudományegyetemen. Doktori disszertációját, melyet ugyancsak itt írt Szilasi József témavezetésével, 2014-ben védte meg. Jelenleg a Debreceni Tudományegyetem Matematika Intézetének tanársegédje, illetve az MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetének tudományos segédmunkatársa.

Kertész Dávid eddig hét dolgozatot publikált, valamint egy 2014-ben megjelent, 700 oldalas szakkönyv társszerzője. Munkája a differenciálgeometria területére összpontosul, főként a Finsler-geometria és a hozzá kapcsolódó nemlineáris konnexiók témájában végez kutatásokat. Olyan változatos témákkal foglalkozott, mint a Berwald-sokaságok különböző karakterizációi, Riemann-metrikák konstruálása átlagolás segítségével, egy sokaság érintőnyalábján adott holonómia-invariáns függvények jellemzése, illetve differenciálható távolságfüggvénnyel rendelkező metrikus terek vizsgálata. Társszerzőivel új bizonyítást adott Finsler-sokaságok izometriáinak és szubmetriáinak differenciálhatóságára, és megmutatta, hogy a Berwald-sokaságok családján belül csak triviális példák lehetnek Einstein–Finsler-sokaságokra. Legújabb eredményei a Finsler-sokaságok affin- és Killing-vektormezőinek kapcsolatáról szólnak.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Kertész Dávid a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Varga Nóra 1987-ben született, 2011-ben szerzett a Debreceni Tudományegyetemen alkalmazott matematikus diplomát. Ugyancsak itt írta doktori disszertációját, melyet 2016-ban védett meg Summa cum Laude minősítéssel. 2014-től a Debreceni Tudományegyetem Matematika Intézetének tanársegédje, valamint az *MTA-DE Egyenletek, Függvények, Görbék Kutatócsoport* tagja 2012 óta.

Varga Nórának hét tudományos dolgozata van. A számelmélet területén dolgozik, főként a diofantikus egyenletek elméletével foglalkozik. Egyik fő kutatási témája azokra a szeparábilis egyenletekre irányul, amelyek kombinatorikus hátterű problémákból adódnak, a polinomok figurális számokat jelentenek. Ezek a diofantikus egyenletek elméletének egyik igen jelentős, klasszikus fejezetét alkotják. Társszerzőivel együtt bizonyított egy sejtést, mely poligonális és piramidális számok közös értékeire vonatkozik. Később ezt az eredményt terjesztették ki az általános alakban felírt figurális számok és a poligonális számok közös értékeit vizsgálva, amelyet a *Journal of Number Theory* folyóiratban közöltek. Kutatásának másik irányvonala az Erdős–Selfridge-problémakör speciális eseteinek vizsgálata. Az ezzel kapcsolatos két cikkében olyan törtfüggvények hatványértékét vizsgálja, amelyek számlálójában egymást követő egészek, míg nevezőjében elsőfokú paraméteres tagok szorzata áll. Kutatásaiban a klasszikus módszerek alkalmazása mellett modern, számítógépes módszerek is fontos szerephez jutnak.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Varga Nóra a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Vidnyánszky Zoltán 1989-ben született. 2011-ben szerzett matematikus diplomát, majd 2015-ben doktori fokozatot az Eötvös Loránd Tudományegyetemen Elekes Márton témavezetése mellett. Jelenleg a University of Toronto és a York University posztdoktori kutatója.

Vidnyánszky Zoltánnak hat publikációja van, melyek a legrangosabb nemzetközi folyóiratokban jelentek meg. Fő kutatási területe a leíró halmazelmélet. Társszerzőivel közösen Mycielski és Fremlin egy régi kérdését megválaszolva megmutatták, hogy nem lokálisan kompakt lengyel csoportokban a Haar-null halmazok nem rendelkeznek bizonyos, a lokálisan kompakt esetben könnyen igazolható regularitási tulajdonsággal. Fő eredményük, hogy minden Abel nem lokálisan kompakt csoportban létezik olyan Haar-null Borel-halmaz, amelynek nincs G_δ Haar-null burka. Ez a cikkük az *Israel Journal of Mathematics*-ben jelent meg. Egy másik komoly eredményükben, melyet az *Advances in Mathematics* közlésre elfogadott, Laczkovich egy klasszikus kérdését megválaszolva pontosan karakterizálják, hogy a Baire I függvényekből álló, a pontonkénti rendezésre nézve lineárisan rendezett halmazoknak milyen lehet a rendtípusa. A közelmúltban pedig sikerült általánosítaniuk a leíró halmazelmélet egyik alapvető elméletét, a rangfüggvények elméletét a Baire I esetről az általános Baire ξ esetre, és ennek alkalmazásaként megválaszoltak egy függvényegyenlet-rendszerek megoldhatóságáról szóló kérdést is, melyet a paradox geometriai átdarabolhatóságok motiváltak.

Kiemelkedő eredményeire tekintettel Vidnyánszky Zoltán a Grünwald Géza-emlékéremben részesül.

Farkas Gyula-emlékdíj

A Bizottság a beérkezett javaslatok alapján 2016-ban két Farkas Gyula-emlékdíjat adományozott. A díjazottak: Kovács Péter és Sikolya Kinga.

Indoklások:

Kovács Péter 1986-ban született. BSc diplomáját 2008-ban, MSc diplomáját pedig 2010-ben szerezte az ELTE Programtervező Informatikus szakán, kitüntetéssel. Tanulmányait 2010 és 2013 között az ELTE Informatika Doktori Iskola Numerikus és szimbolikus számítások programjának PhD hallgatójaként folytatta. 2014-ben tudományos munkája elismeréséül megkapta az ELTE IK Fiatal Kutatók Tudományos Díját. A PhD fokozatot 2016 májusában summa cum laude minősítéssel szerezte meg. Jelenleg az ELTE Informatikai Kar Numerikus Analízis Tanszékén adjunktus.

Kovács Péter matematikai modellalkotó tevékenysége humán orvosbiológiai jelek, ezen belül EKG és EEG jelek feldolgozásához kapcsolódik. Kutatásainak döntő része az adaptívan választott bázisok szerinti sorfejtésekhez, az ún. „variable projection” módszerekhez köthető. Ezen a területen egyrészt adaptív Hermite-sorfejtésekkel, másrészt racionális rendszerek szerinti sorfejtésekkel és modellezéssel foglalkozott. Az utóbbi eszközzel sikerült az EKG jelek diagnózisában fontos QRS komplexusokat néhány paraméterrel jellemezni. Ezen túlmenően a különböző elvezetéseken mérhető jelek közötti összefüggéseket is sikerült kimutatnia.

Az adaptív racionális approximáció alkalmazásával – finn szerzőtársaival közösen – kidolgozott egy új módszert epilepsziaroham detektálására, illetve alvásfázis detektálására.

Magának az adaptív rendszernek, ill. az azt jellemző paramétereknek a meghatározása egy nemlineáris célfüggvény optimalizálására vezethető vissza. Ennek a feladatnak a megoldásához Kovács Péter az ismert Particle Swarm Optimization (PSO) eljárást vette alapul, ezt adaptálta hiperbolikus racionális waveletek paramétereinek a meghatározására. A feladatkitűzés és maga az eljárás biztosítja annak a fizikailag indokolható feltételnek a teljesülését, hogy az inverz pólusok a komplex egységkörön belül maradjanak. A jelölt kidolgozta az algoritmus többdimenziós változatát is.

Az elméleti modellalkotás mellett Kovács Péter az általa kifejlesztett módszereket a numerikus matematika alapos ismeretének birtokában implementálta, továbbá azokat a szakirodalomban elfogadott adatbázisokon a megfelelő protokollok szerint tesztelte, és igazolta, hogy jobbak az eddig ismert módszereknél.

Kovács Péternek 12 angol nyelvű publikációja jelent meg, amelyből 5 folyóiratcikk. Utóbbiak között kiemelendők az *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, ill. a *Knowledge-Based Systems* folyóiratokban megjelent dolgozatai. Eredményeit 14 külföldi és 4 hazai konferencián adta elő.

Sikolya Kinga 1986. április 27-én született Szatmárnémetiben. 2005-ben felvételt nyert a Debreceni Egyetem alkalmazott matematikus szakára. Egyetemi hallgatóként – Baran Sándor irányításával – a Down-szindróma kockázatát vizsgálta. Eredményeiből írt dolgozatával 2009-ben az OTDK Informatika Tudományi Szekciójában I. helyezést ért el. Több alkalommal kapott köztársasági ösztöndíjat. 2010-ben alkalmazott matematikus oklevelet szerzett, kitüntetésessel.

A Debreceni Egyetem Informatika Tudományok Doktori Iskolájában – szintén Baran Sándor témavezetése alatt – folytatta kutatói munkáját, ezúttal térbeli statisztikai modellek és alkalmazásaik témakörében. Térbeli lineáris modellek esetén meghatározták és vizsgálták a modell paramétereinek maximum likelihood becslését. Ezen túlmenően, folytonos véletlen mezők esetén foglalkozott az optimális mintavételi terv meghatározásával is. Fontos kutatási területe a diszkrét, térbeli auto-regresszív modellek stabilitási problémáinak vizsgálata.

2013-ban Apáczai Csere János Doktoranduszi Ösztöndíjat nyert. A „Térbeli statisztikai modellek és alkalmazásaik” című doktori (PhD) értekezését 2014-ben summa cum laude eredménnyel védte meg. Sikolya Kinga szorgalmát, tehetségét és szakmai munkájának elismerését tükrözi, hogy doktori címét kitüntetéses (Promotio sub auspiciis Praesidentis Rei Publicae) minősítéssel vehette át.

2013-tól a Debreceni Egyetem Alkalmazott Matematika és Valószínűségszámítás Tanszékén dolgozik. Számos tantárgyat oktat, és több kutatási pályázatban volt résztvevő. Eddigi tudományos tevékenységének elismeréseként 2015-ben Nemzeti Kiválóság Díjat kapott.

Folyóiratban eddig 6 tudományos dolgozata jelent meg, ezen túlmenően 11 nemzetközi konferencián tartott előadást.

Rényi Kató-emlékdíj

A Rényi Kató-emlékdíj I. fokozatát kapta **Remete László**, a Debreceni Egyetem másodéves matematikus MSc szakos hallgatója, II. fokozatát kapta **Szabó Gréta**, a Debreceni Egyetem másodéves alkalmazott matematikus MSc szakos hallgatója.

Remete László [1] dolgozatában megmutatja, hogy negyedfokú gyökbővítésekben a hatvány egész bázisok keresése binom Thue egyenletekre vezet. A szerzők 10^7 paraméter alatti negyedfokú gyökbővítések esetén kiszámítják a binom Thue egyenletek 10^{500} alatti megoldásait.

[2]-ben másodfokú számtestek feletti relatív negyedfokú gyökbővítésekben meghatározzák a hatvány egész bázisokat.

[3]-ban szuperszámítógép segítségével $m < 10^7$ paraméter értékig meghatározzák az $x^k - my^k = 1$ binom Thue egyenletek 10^{500} alatti megoldásait $k = 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$-re.

[4]-ben másodfokú testek legegyszerűbb harmadfokú polinomok gyökeivel történő bővítéseit vizsgálják. A keletkező hatodfokú testek parametrikus családjában meghatározzák az összes monogén testet és azok hatvány egész bázisainak generátorait.

[5]-ben a Gauss-féle számtest és negyedfokú gyökbővítések kompozitumaként keletkező nyolcadfokú számtestek végtelen parametrikus családjáról megmutatják, hogy a testek nem monogének.

[6]-ban komplex másodfokú testek és negyedfokú gyökbővítések kompozitumaként előálló nyolcadfokú testekben vizsgálják a hatvány egész bázisokat.

[7]-ben n-edfokú bővítések egész bázisait vizsgálják. Megmutatják, hogy ha az egész bázisok struktúrája periodikus, a periódus hossza $3 \leq n \leq 9$-re n^2, és megadják az egész bázisok típusait. Az $n = 3, 4, 5, 6, 8$ értékekre megadják az n-edfokú gyökbővítések indexformáját.

[8]-ban a legegyszerűbb hatodfokú testek esetén belátják, hogy az egész bázisok struktúrája 36-os periódushosszal periodikus. Jellemzik e testek monogenitását.

Remete László publikációi

[1] I. Gaál, L. Remete: Binomial Thue equations and power integral bases in pure quartic fields, *JP Journal of Algebra, Number Theory, and Applications*, **32** (2014), 49–61.

[2] I. Gaál, L. Remete, T. Szabó: Calculating power integral bases by solving relative Thue equations, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, **59** (2014), 1–13.

[3] I. Gaál, L. Remete: Solving polinomial Thue equations, *JP Journal of Algebra, Number Theory, and Applications*, **36** (2015), 29–42.

[4] I. Gaál, L. Remete: Power integral bases in a family of sextic fields with quadratic subfields, *Tatra Mountains Mathematical Publications*, **64** (2015), 1–8.

[5] I. Gaál, L. Remete: Non-monogenity in family of octic fields, *Rocky Mountains Journal of Mathematics*, megj. alatt.

[6] I. Gaál, L. Remete, T. Szabó: Calculating power integral bases by using relative power integral bases, *Functiones et Approximatio, Commentarii Mathematici*, **54** (2016), 141–149.

[7] I. Gaál, L. Remete: Integral bases and monogenity of pure fields, *Journal of Number Theory*, megj. alatt.

[8] I. Gaál, L. Remete: Integral bases and monogenity of the simplest sextic fields, benyújtva.

Szabó Gréta [1] dolgozatában a szerzők olyan egyváltozós, lineáris függvényegyenletet vizsgálnak, amely helyettesítések véges csoportját tartalmazza. Klasszikus és lineáris algebrai módszerekkel teljesen leírják a megoldásokat. A [2] dolgozat egy függvényegyenlettel kapcsolatos középiskolai versenyfeladat hibás hivatalos megoldásának apropóján két különböző általános megoldást mutat be. A [3] cikk elemi tárgyalásban ismerteti véges ponthalmazok legrövidebb hálózatának problémáját.

Szabó Gréta publikációi

[1] M. Bessenyei, Á. Konkoly, G. Szabó: Linear functional equations and finite groups of substitutions, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, megj. alatt.

[2] M. Bessenyei, G. Szabó: Adventures around an addition formula.

[3] Bessenyei Mihály, Szabó Gréta: Kábelrakás kis költséggel, *Középiskolai Matematikai Lapok*, benyújtva.

Patai László Alapítvány díja

A Bolyai János Matematikai Társulat elnöksége által kiküldött bizottság a Patai Alapítvány 2016. évi díját Szanyi Gyöngyinek és Somogyi Anikónak ítélte oda.

Szanyi Gyöngyi 1988-ban Nagydobronyban, Ukrajnában született. 2011-ben matematika-informatika szakos középiskolai tanári diplomát szerzett az Ungvári Nemzeti Egyetemen. 2010 és 2016 között a magyar tannyelvű Nagydobronyi Középiskolában tanított. 2013-tól a Debrecei Egyetem Matematika és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika programjának PhD hallgatója, 2016 őszétől tanársegéd.

Aktív szerepet vállalt középiskolai diákjai tehetséggondozásában és versenyekre való felkészítésében. Matematikafoglalkozásokat vezetett a Kárpátalján a Génius Alapítvány által létrehozott Tehetségpontban.

Kutatásai a függvényfogalom tanítási kérdéseire irányulnak. Sokéves követéses vizsgálatokat végzett egy debreceni és egy nagydobronyi iskolában, ahol saját elképzeléseit tanítási kísérletekben próbálhatta ki. Eredményeiről számos konferencián tartott előadást. Hat dolgozata közül négy nemzetközileg referált folyóiratban jelent meg.

Somogyi Anikó 1990-ben született Gyulán. A Szegedi Tudományegyetemen 2013-ban matematika BSc fokozatot szerzett tanári szakirányban fizika szakpárral, 2016-ban pedig a matematikatanár-fizikatanár master képzést végezte el. Jelenleg a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium matematika-fizika szakos tanára.

Somogyi Anikó egyetemi évei alatt számos díjat és kitüntetést kapott. Sikeres TDK dolgozatokat készített, Cambridge-ben és Jeruzsálemben volt rövid tanulmányúton. Demonstrátorként is dolgozott a Szegedi Tudományegyetemen. Részt vett egy fizika-feladatgyűjtemény elkészítésében is. A tanári pályára való felkészülés mellett azonban komoly tudományos tevékenységet is végzett a SZTE Optikai és Kvantumelektronikai Tanszékén, a Nanoplazmonika Kutatócsoportban. Ezen a területen 3 publikációja és 5 posztere született.

Somogyi Anikó még csak első teljes tanévét tölti a tanári pályán, de már most komoly tapasztalatokkal rendelkezik mind a tanítás, mind a kutatás terén: egy majdani igazi kutatótanár (több mint) ígérete.

Kovács Béla (Szatmárnémeti) alkotása:
Könnyű matekóra 2017-ben

Tartalom

Contents