

ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

PÁLES ZSOLT

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

BENCZÚR ANDRÁS, GERENCSÉR LÁSZLÓ, SZÁNTAI TAMÁS

FELELŐS SZERKESZTŐ

BOZÓKI SÁNDOR

FELELŐS SZERKESZTŐ-HELYETTES

CSATÓ LÁSZLÓ

TÖRDELŐSZERKESZTŐ

MOCZÁR KÁROLY

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Miklós, Baran Sándor, Csáji Balázs Csanád, Csendes Tibor, Csirik János, Fazekas István, Forgó Ferenc, Frank András, Fridli Sándor, Friedl Katalin, Friedler Ferenc, Galántai Aurél, Garay Barna, Gazdag-Tóth Boglárka, Gyimóthy Tibor, Hajdu András, Hartung Ferenc, Hatvani László, Heppes Aladár, Horváth Zoltán, Illés Tibor, Járai Antal, Jelasity Márk, Katona Gyula, Király Tamás, Kis Tamás, Kovács Gergely, Krisztin Tibor, Lovász László, Maksa Gyula, Maros István, Michaletzky György, Miklós István, Molnár-Sáska Gábor, Pap Gyula, Pituk Mihály, Rásonyi Miklós, Recski András, Rónyai Lajos, Röst Gergely, Simon Péter, Szabó Péter Gábor, Szeidl László, Szilágyi Brigitta, Tasnádi Attila, Temesi József, Tusnády Gábor, Vizi Zsolt, Vizvári Béla

38. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Páles Zsolt, főszerkesztő

1055 Budapest, Falk Miksa u. 12.

A folyóirat e-mail címe: aml@renyi.hu

A folyóirat honlapja: <http://aml.math.bme.hu>

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára évfolyamonként 1200 forint. Megrendelések a szerkesztőség címén lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

ELŐSZÓ

Az *Alkalmazott Matematika Lapok* ezen száma a 2019. augusztus 26-án és 27-én Veszprémben tartott Veszprém Optimization Workshop konferenciaköte-
te. A konferencián barátai, kollégái és tanítványai köszöntötték Vizvári Bélát
70. születésnapja alkalmából.

Dósa György
Kovács Gergely
Takács Szabolcs
vendégszerkesztők

VIZVÁRI BÉLA KÖSZÖNTÉSE



Vizvári Béla 1948-ban született Budapesten. A Berzsenyi Dániel Gimnázium első matematika tagozatos osztályában érettségizett 1967-ben.

Egy év katonai szolgálat után kezdhette meg egyetemi tanulmányait az ELTE matematikus szakán. Oktatói közül Surányi Jánosnak, Turán Pálnak, Prékopa Andrásnak és Kovács László Bélának köszönheti a legtöbbet. Az operációkutatás szakirányon a Kovács László Béla modellezési gyakorlatain, egészértékű óráin megismert szemlélet kutatói pályájára is komoly hatással volt. Diplomadolgozatát szintén Kovács László Bélánál írta a Lagrange-szorzók elméletéről 1973-ban, akkor kétgyermekes családapaként. Azóta is operációkutatónak vallja magát, ideértve a téma teljes spektrumát a modellezéstől a matematikai módszerek fejlesztéséig.

1973 és 1989 között az MTA SZTAKI-ban dolgozott (16 év, öt költözés). Az Operációkutatási Osztályon sokáig Kovács László Béla volt a közvetlen főnöke. De alapító igazgatóként Vámos Tibor, főosztályvezetőként Prékopa András is sokat

tett azért, hogy a SZTAKI-ban jól felszerelt, szabad, mégis inspiráló közeg alakuljon ki. Külön megemlítendő a Prékopa András által szervezett mátrafüredi téli konferenciasorozat, mely Kelet és Nyugat operációkutatóinak legendás találkozási helye volt (többek között George Dantzig vagy R. Tyrrell Rockafellar is megjelent itt).

A SZTAKI kiváló terep volt arra, hogy elméleti ismereteit a gyakorlatban kamatoztassa, egyben komoly gyakorlati tudásra tegyen szert. 1974-ben az Úttröszts számára készített kőszállítási modelleket. 1975–1981 között a Dunai Vasmű hideghengerművének termelésirányítási problémáival foglalkozott, majd 1988-ban részt vett a Dunai Vasmű karbantartási tevékenységeit vezérlő számítógépes rendszer tervezésében.

1979-ben az ELTE-n doktorált, disszertációjának témája a Lagrange-szorozók egészértékű alkalmazása volt. Ezután a SZTAKI-ban a Diszkrét Optimalizálás Csoport vezetője lett, majd 1985-től a Matematikai Szoftverek Osztályának osztályvezető helyettese volt. Időközben kétszer nyert intézeti díjat.

1987-ben szerzett dr. sc. nat. (nagydoktori) fokozatot Merseburgban (akkor NDK). Ezt Magyarországon a matematikai tudomány kandidátusa fokozatként honosították. Disszertációja a Frobenius-probléma egészértékű programozási megközelítéséről szólt. Konzulense Joachim Piehler volt, akivel levelező aspiránsként tartotta a kapcsolatot, évi kétszer egy hónapot Merseburgban töltve.

A SZTAKI-ban dolgozva is oktatott operációkutatói tárgyakat, előbb az ELTE Valószínűségszámítási Tanszékén, majd az Operációkutatói Tanszék megalakulása után annak főlállású adjunktusaként.

1989-ben Törökországba költözött, és 1993-ig az ankarai Bilkent Egyetem Iparimérnök Tanszékén tanított. Itt az első tanévben az év oktatója lett. Sokat köszönhet a magánegyetem alapítójának és első vezetőjének, Ihsan Dođramacı nagyvállalkozónak.

1993-ban hazatért, és 2007-ig az ELTE Operációkutatói Tanszék főlállású oktatója lett (14 év, három költözés). A 2004–2005-ös tanévben a Matematika I. Tanszékcsoporthoz vezetője volt. Ebben az időszakban számos cikke jelent meg a káoszelmélet kommunikációs alkalmazásáról (Kolumbán Gézával), agrárgazdaságtani piacok elemzéséről (Bacsi Zsuzsannával és Lakner Zoltánnal), illetve az egészértékű programozás kémiai alkalmazásairól (Tóth Jánossal).

2003-ban az ELTE-n habilitált.

Nagy munkabírását jellemzi, hogy emellett különféle szakoknak kb. 15-féle tárgyat oktatott, közel 70 MSc-s diplomamunka konzulense volt, illetve ekkor öten is a lelkiismeretes és inspiráló témavezetése mellett szereztek meg PhD fokozatot: Bacsi Zsuzsanna, Kovács Gergely, Dósa György, Bernáth Attila, Takács Szabolcs (időrendi sorrend). Komoly érdemei vannak az alkalmazott matematikus szak létrejöttében, mintatantervének kidolgozásában is.

Ekkor jelentek meg legfontosabb könyvei, melyek mindegyike az adott terület hiánypótló műve: Bevezetés a termelésirányítás matematikai elméletébe [1], Egészértékű programozás [2], Operációkutatási modellek [3].

Az 1994–1995-ös tanévben vendégoktató volt a new jersey-i Rutgers University Operációkutatási Központjában. Több közös cikke született Prékopa Andrással sztochasztikus egészértékű programozás témakörben. Itt került barátságba Peter L. Hammerrel is, aki a korszak tudományszervezőjeként több jelentős folyóirat alapítója. Ő később a központ vezetőjeként többször meghívta az USA-ba egy-egy félévre (1999, 2002, 2004).

2007 óta él Észak-Cipruson (Észak-ciprusi Török Köztársaság) Famagosztában, ahol a Kelet-Mediterrán Egyetem Iparimérnök Tanszékének professzora (eddig 14 év, költözés nélkül).

Az oktatás mellett számos cikke jelent meg telepítési problémákról, kvadratikus hozzárendelési feladatról (Sadegh Niroomanddal), rugalmas gyártó rendszerekről (Mazyar Ghadiri Nejaddal), digitális geometriáról (Nagy Benedekkel), vagy humanitárius logisztikáról. 2017-ben jelent meg Questions, Problems, and Critical Thinking to Production Planning című könyve [4].

Cipruson eddig hét doktorandusza védte meg PhD-értekezését: Sadegh Niroomand, Nima Mirzai, Farhad Mousavi, Elmabrok H. Abdelrahim, Sam Mossallaeipour, Mazyar Ghadiri Nejad, Tareq Babaqi (időrendi sorrend). Jelen pillanatban öt doktorandusza van.

Vizvári Béla kilenc könyv szerzője, társszerzője. 132 cikket publikált referált folyóiratban, hetet kötetben, 32 cikke van konferencia kiadványban, 93 kutatási jelentés szerzője vagy társszerzője. Eddig közel 100 MSc diplomamunka konzulense volt, 12 tanítványa szerzett doktori címet. Több mint 1400 független hivatkozása van, h-indexe 19, i10-indexe 35. Minderről ezt gondolja: *„Amikor egy jelentős tudós meghal, számokba rendezik munkásságát: hány könyvet írt, mennyi ilyen, olyan, amolyan cikket publikált, hányan szereztek tudományos fokozatot az irányításával, mekkora az idézettsége. Pedig sokszor fontosabb a személy kisugárzása: hogyan tudta kollégáit meggyőzni, hogy amivel ő foglalkozik, fontos, s tegyék ezt a többiek is; hogyan szemlélte a világot; milyen távoli dolgok kapcsolatára világlátott rá; hogyan tehetjük hasznossá a szakmát a társadalom számára, s hogyan kötött össze embereket, akik nem is ismerték egymást.”*

Ennek szellemében alkot, tanít, él. Óráira, előadásaira mindig lelkiismeretesen készül. Célja nem csak a tudás, hanem egy egész szellemiség közvetítése. Diákjaira, szakdolgozóira, doktoranduszaira minden körülmények között van ideje. Fontosnak tartja, hogy velük való kapcsolata ne merüljön ki egy-egy dolgozat elkészültében. A folyamat során a diák is alakul, kirándulnak, múzeumba viszi őket, életvezetési tanácsokkal látja el őket. Erről szól például ez a hiánypótló videó is:

Tips you need to know as a scientist (www.youtube.com/watch?v=10-Uep78GJk).

Az Alkalmazott Matematikai Lapok felelős szerkesztője volt 2003 és 2019 között, emellett a P.U.M.A. négy konferencia kötetének vendégszerkesztője volt. De a tudományszervezés mellett fontos szerepet szán annak, hogy matematikáról írjon a nem tudós közösségnek is. 15 ismeretterjesztő dolgozatából kiemelkedik a KÖMAL-ba szerkesztett, középiskolásoknak szóló operációkutatási sorozat, vagy az Érintőbe írt Számolni tudni kell? című cikke.

Egyéni látásmódját közéleti írásaiban tárja a széles nyilvánosság elé, közel 20 cikke jelent meg többnyire hetilapokban különböző közéleti témákban: felsőoktatásról, egészségügyről, alkotmányról, migrációról, genderről.

Végül életművével kapcsolatban kiemelendő, hogy referált cikkei közül időrendi sorrendben a középső (tehát a medián) 59 éves korában jelent meg. Vagyis kortársai többségével ellentétben, életkorát meghazudtoló lelkesedéssel élete legutóbbi 14 évében alkotott annyit, amennyit előtte összesen.

A további tanításhoz, publikáláshoz, alkotáshoz jó egészséget, lelkes tanítványokat kívánunk! A 70. születésnapját ünneplő veszprémi VOW workshop konferenciakötetével köszöntik őt kollégái és tanítványai nevében a kötet vendégszerkesztői: Dósa György, Kovács Gergely, Takács Szabolcs.

Hivatkozások

- [1] VIZVÁRI, B., *Bevezetés a termelésirányítás matematikai elméletébe*, egyetemi jegyzet, ELTE, Budapest, p. 262 (1994).
- [2] VIZVÁRI, B., *Egészértékű programozás*, Typotex, Budapest, p. 353 (2006).
- [3] VIZVÁRI, B., *Operációkutatási modellek*, Typotex, Budapest, p. 294 (2009).
- [4] VIZVÁRI, B., *Questions, Problems and Critical Thinking to Production Planning*, Typotex, Budapest, p. 240 (2017).

NYOLC KÉRDÉS, KÉTSZER NYOLC VÁLASZ

CSIZMADIA ZSOLT, TAKÁCS SZABOLCS, VIZVÁRI BÉLA

Cikkünk rendhagyó lesz, több szempontból is. Egyik oldalról igen kevés olyan dolgozat jelenik meg tudományos lapokban, mely nem a „problémafelvetés-hivatkozások-problémamegoldás-diskusszió” négyes körforgásában értelmezhető. Másik oldalról szerettük volna, ha 70 év élet- és 50 év tanítási tapasztalata olyan környezetben jelenik meg, ahol az akadémiai kérdésfelvetések ipari, alkalmazási vetületei is felszínre kerülnek. Valamint mindez egy kötetlenebb, de mégis némileg strukturált beszélgetés leirataként láthat napvilágot. Bízunk abban, hogy esetleg vitákat generálhatunk ezzel a beszélgetéssel, vagy csak gondolatokat ébreszthetünk az utánunk jövő generáció tagjaiban. A beszélgetés fő résztvevői Vizvári Béla és Csizmadia Zsolt – Takács Szabolcs pedig a beszélgetés moderálásában és szövegezésében vett részt. A szerzőket éppen ezért alfabetikus sorrendben tüntettük fel.

Bevezető

A beszélgetés előtt megállapodtunk a kérdésekben, melyek jelenleg foglalkoztatják a beszélgetőtársakat. E kérdések a matematikai programozási, illetve optimalizálási feladatok megoldására vonatkoztak, és az alább olvashatók:

1. NP-teljesnek ígérkező modellek esetén meg kell-e állapítani az egzakt modell – heurisztikus módszer határát? Ez akadémiai kérdésfelvetésnek tűnik, de van gyakorlati jelentősége is.
2. Melyek az egzakt megoldás mellőzésének és a csak heurisztikus megoldás alkalmazásának szakmailag korrekt feltételei?
3. Lehet-e használni az időben levágott korlátozást és szétválasztást heurisztikaként? Általánosságban: ha heurisztikákat használunk, akkor globális és nem globális heurisztikák eredményeit miként hasonlíthatjuk össze? Talán még általánosabban (kicsit szabadabban értelmezve) hogyan értékeljük, ha egy megoldó hamar ad jó megoldást (majd sokáig bizonyítja, hogy nincsen jobb), szemben azzal, ha a végén ad egy optimálisat?

4. Honnan vegyünk hiteles tesztfeladatokat?
5. A megoldások minősége különböző lehet a toleranciáktól és a feladat numerikus nehézségétől függően. Ezeket figyelembe tudjuk venni?
6. Az átlagszámításnál hogyan kezeljük a kiugró értékeket? Mitől nem fogja az eredményeket néhány kiugró adat dominálni?
7. Mennyire lehet/kell a felhasználó előzetes ismereteit a problémáról egy professzionális szoftverrel közölni?
8. Ha van beállított megengedett időkorlát, lehet-e az eredményeket befolyásolni ennek ügyes megválasztásával? És mit lehet tenni ez ellen? Kell-e tenni ellene valamit, vagy egyszerűen csak „mindenféle időkorlátra” adjunk át információt?

E nyolc kérdésben kértem ki beszélgetőpartnereim véleményét, meglátásait, tapasztalatait. Most a válaszok következzenek úgy, ahogy azok a beszélgetés során elhangoztak.

1. NP-teljesség: egzaktság, heurisztikák, határok

V.B.: Ha megengeditek, akkor kezdem én, mert én vetettem fel ezt a kérdést. Mostanában több olyan cikket is kaptam bírálatra, amely két részből állt, és e két résznek semmifajta köze nem volt egymáshoz.

A szerzők felvetettek egy problémát – ami nem matematikai, hanem alkalmazott probléma. A probléma modelljéről azt mondták, hogy ez egy egész értékű probléma, tehát akkor NP-teljes, nem tudjuk megoldani. Ekkor következik a cikk második része, egy heurisztikus eljárás, amivel megoldanak valamit, és ez önmagában akár teljesen korrekt is lehet. Azonban ennek a heurisztikának általában nincsen semmi köze az eredeti problémához, de megoldanak valamit – és a lefutás után értékelik a megoldást. Ez a szerzők szerint egy jó cikk – szerintem viszont nem az. Mert a két résznek így nincsen köze egymáshoz.

Először is igazolni kellene, hogy a mi feladatunk (az a feladatosztály) speciel tényleg NP-teljes. Igazuk van abban, hogy általában az – de ezt akkor is bizonyítani kellene. Utána viszont kellene tudni azt is, hogy az adott feladatosztályt milyen méretig tudjuk megoldani.

Lehet persze inentől arról beszélni, hogy az adott feladatosztályból ez milyen struktúrájú? Mit teszi nehezzé vagy könnyűvé? Tudok rá két példát is mondani.

Ósidőkben, amikor még Zsolt diák volt...

T.Sz.: Mintha mi együtt lettünk volna diákok Zsolttal?

V.B.: Zsolt 300 éve volt diák, én 500 éve voltam diák. Szóval, Zsolt, ha emlékszel rá, akkor Földes Pistával dolgoztunk egy problémán, amit nagyon nehezen

oldogattunk. Volt egy modell, amihez hozzávettünk több ezer, teljesen felesleges feltételt. Így viszont már pillanatok alatt meg tudtuk oldani. Ez egy érdekes tapasztalat volt.

De tudnék egy példát mondani Zsolt jelenlegi munkahelyéről is. Oldogattam egy nagy feladatot a megoldótok egy régi verziójával – több ezer részfeladaton keresztül, amiket dokumentáltam is. Majd a valóban jóindulatú főnököd javasolta, hogy alkalmazzam az új változatot. Ezen a speciális feladaton azonban lényegesen lassabb volt, mint a régi változat. Úgy általában bizonyosan jobb volt, gyorsabb volt – de speciel ennél a feladtnál ez nem volt igaz.

És ha visszaélhetek az időtökkel, akkor még régebben, amikor Ti még diákok sem voltatok, a Bilkenten voltam, ahol egy Ramazan Demir nevű hallgatóval dolgoztunk együtt párhuzamos, egyforma berendezések ütemezésén. A feladatok generálásában volt csak különbség. Volt olyan feladatosztály, ahol 800 ezer, tehát majdnem egymillió munkát tudtunk úgy ütemezni, hogy megkaptuk az optimális megoldást a módszerünkkel.

Volt olyan osztály is, ahol 50-et tudtunk, 60-at nem (az előbb majdnem egy millióról beszéltem) és látszott, hogy 55-nél történik valami, utána nem tudunk dolgozni.

Van tehát olyan, amikor a megoldó jól passzol a feladathoz, és akkor igen nagy méretű feladatokat is meg tudunk oldani – más esetekben pedig esélyünk sincsen.

Cs.Zs.: Megjegyezném, hogy az NP-teljes feladatok esetében a méret lényegében semmit sem mond. Vannak olyan feladatok, ahol egészen kis problémák is nagyon nehezek akár csak 40–50 változóval, ami nem megoldható – más esetekben pedig igen nagy méretben is jól tudunk dolgozni.

Más esetben pedig illeszkedik a szolverhez – ez gyakran annyit jelent, hogy a szolver fejlesztői láttak már olyan feladatot – és gond nélkül megoldható.

Én például az alábbi javasolom: elsősorban meg kell nézni, mi a feladat struktúrája. Majd oda kell adni az elérhető szolvereknek (ez az akadémiai térben járható út, mert a nagy szolvereknek van akadémiai licensze), és ki kell próbálni őket. Lehetőleg e próbákat nem véletlen számokon alapuló feladathalmazon kell megtenni – és ezek után lehet dönteni.

2. Egzaktság és heurisztika – mik az alkalmazás korrekt feltételei?

T.Sz.: Ezzel rá is tértünk akkor a második kérdéskörre? Úgy érzed, érted, hogy akkor egy kellő feladathalmazon érdemes, kell kipróbálni a feladataidat és azon kell jónak lenni?

Cs.Zs.: Ez egy bevett szokás. Azonban fontos kiemelni azt, ha egy adott speciális feladaton a heurisztikád jó, illetve van olyan jó, mint a nagy szolverek, akkor az igenis jó eredmény! Ugyanis a szolverek mögött jelentős erőforrások állnak – tehát legalább olyan jót elérni nem egy lebecsülendő eredmény! Az valóban lehet, ha ezt utána elküldöd a fejlesztőknek, akkor azt beépítik, és a speciális osztályon

is már jól, vagy jobban fognak dolgozni. De mindenképpen fontos, ha hozod azt, amit a szolver hoz, az már egy figyelemre méltó eredmény – még speciális feladaton is.

Ha a szolvert jól beállítod, visszajöhetnek egy olyan finomhangolással, ami még a tiednél is jobb. De nem ez a cél, nem erről szól az egész, hanem arról, hogy a te heurisztikád jó, hatékony.

A te lépéselőnyöd az, hogy láttad a feladatot – a szolver előnye a több évnyi belefektetett fejlesztési tapasztalat. Én azt mondanám, ha a te heurisztikád jó vagy jobb, mint a szolver, és ezzel a megbízó elégedett, akkor rendben van. A szolvernek a feladat alkalmazóját kell kiszolgáltatnia.

Általánosan a nagy méret, a nem konvex feladatok esetében a heurisztikák általában elfogadottak, van létjogosultságuk. Vagy ha olyan feladatosztályba futunk bele, amire nincsen algoritmus.

T.Sz.: Béla?

V.B.: Én ezzel teljesen egyetértek.

Cs.Zs.: Fontos még az is, hogy a szolver-fejlesztőket az szokta inspirálni, ha a tesztfeladatok egy mindenki által elérhető felületen vannak – mert akkor mindenki tudja ezt tesztelni, mindenki tudja tesztelésre használni. Ebből következően még inkább transzparenssé válik, hogy ki teljesít jobban/rosszabbul.

3. Időben levágott korlátozás és szétválasztás? Globális és nem globális megoldók összehasonlítása. Sőt: gyorsan majdnem jót, vagy lassan jobbat?

Cs.Zs.: Ezt most kezdeném én: az első olyannyira lehet, hogy lényegében minden szolver rutinból csinálja. Ez egy tipikus heurisztika: van egy megoldás, ott van egy környezet, amiben ez működik – és ott dolgozom valamennyit tovább.

Az időben levágással az a gond, hogy determinisztikus módon kell levágni a feladatot, hiszen ideálisan ismételtetőnek kell lennie, vagyis ez lehet idő, de inkább iterációs szám vagy egyéb determinisztikus mennyiség, amiben limitáljuk a „korlátozás és szétválasztás” módszerét.

Az összehasonlítás számunkra is gond volt, mert az Akadémia szereti azt gondolni, hogy mindig globális megoldókkal dolgoznak és hasonlítják össze – de ez nem egészen igazságos akkor, ha heurisztikák vannak, mert lokális megoldásokat érnek el a szolverek más és más idők alatt. Így maga a heurisztika összehasonlítása nem lesz egészen igazságos.

Ha fejlesztesz, akkor kérdés az, hogy például egy új módszer mikor jobb, mikor rosszabb? Erre kitaláltunk egy új módszert, ami a primál-integrál elvén alapul [1].

Az egészértékű megoldóknak van egy „GAP” mértéke. Ez azt jelenti, hogy mennyire igazolt az, hogy a jelenlegi megoldás optimális. Ha van egy megoldás, aminek a jelenlegi megoldása 100, és a GAP 20%, akkor az azt jelenti, hogy az optimum valahol 80 és 120 között van.

Az ötlet: a GAP függvényt integráljuk az időben. Ez azt jelenti, hogy ha megoldásunk van az elején – akkor az lenyomja a GAP-et (míg ha nincsen megoldás, csak a végén, akkor a GAP végig azonos marad). Ez azt eredményezi, hogy „boldogabb vagy” az eredménnyel az elején, mintha csak a végén van megoldás.

Ez nagyjából a primál-duál integrál, hiszen itt van egy korlátunk is a duál oldalról.

Heurisztika esetében azért nem működik így ez az integrál, mert nincsen duál korlátunk – és a legjobb megoldást sem ismerjük. Viszont az az ötlet, hogy ha van két megoldásunk, akkor a jobbik megoldás mint korlát már működik - ha több ilyen megoldás van, akkor a legjobbja szintén jó korlát.

Amit sikerült bizonyítani [3]:

1. Az új megoldások számadataiból az új integrálok jól, gyorsan számolhatók - tehát újabb és újabb megoldásokkal könnyű update-et csinálni erre a mértékre.
2. Szintén lehetett bizonyítani, hogy ez a mérték tranzitív, tehát a különböző megoldásokon rendes rendezést lehet adni.

Érdekes azt is megemlíteni, egy lokális szolver heurisztikaként is felfogható. Ezen vita van, de mi azt mondtuk, hogy a lokális szolver bizonyos feltételek teljesülése mellett igazolja, hogy lokális optimumban van – míg a heurisztika egyszerűen csak egy jó megoldást akar adni.

V.B.: Nekem nagy bánatom volt a régebbi szolvereknél, hogy nem tudtam megadni célfüggvény értékeket. Ha ezt meg tudtam volna tenni, akkor az nagyban könnyítette volna a dolgomat.

Akkoriban kitaláltam egy függvényt, ami megmutatta, hogy a szolver az én feladatomra miként haladt az optimum felé – és elég jól tudtam jósolni a segítségével.

Cs.Zs.: Az szép teljesítmény, mert ilyet általában nem tudunk mondani.

V.B.: Az én feladatomra, specifikusan tudtam ezt megmondani és megmutatni.

Ha most teljesen alkalmazás szinten dolgozom, és nem akadémiai szinten, akkor alapvetően két feladattípust érdemes megkülönböztetni.

Az egyik feladattípus az, amikor megoldjuk a feladatot, és annak eredményét sokáig vagy sokat fogjuk használni:

1. Egy kórházban a kórházi osztályok elhelyezése.
2. Egy autógyárban a gyártósor beállítása.

Időben vagy darabszámban nagyon sokáig úgy használjuk a rendszert, ahogy megcsináltuk. Ezek beruházási feladatok, ilyenkor az optimalizálásba érdemes sok időt, akár heteket is befektetni.

Ezzel szemben vannak olyan feladatok, amik nem ilyenek. Most humanitárius logisztikával foglalkozom. Itt például egy földrengés esetében az, hogy a most visszaérkező mentőautó merre menjen tovább, nem tervezhető napokig. Azonnal irányítanom kell, nincsen tere az optimalizálási időnek.

Ez a két feladatcsoport felhasználási szempontból igen különböző. Mindkettő mögött igen bonyolult modellek is lehetnek.

Cs.Zs.: Mi ezeket offline és online eljárásoknak nevezzük.

V.B.: Ez rendben van, és a második esetben nem tudok érvelni a heurisztikákkal szemben - ha azok elfogadható megoldásokat adnak, akkor részemről rendben vannak.

4. Hiteles tesztfeladatok

V.B.: Ezt kezdeném én, mert erre majd Zsolt sok okosat tud mondani.

Amikor én ifjú voltam és bohó, akkor ha olvastunk egy cikket és a tesztfeladatokat elkértük, akkor ezek a legnagyobb titkoknak számítottak. Alig lehetett tesztfeladatot kapni. És ne felejtsetek el, én 500 éve voltam diák.

Egy nyomtatott áramköri lapon a valóságban van 100–150 elem. Eredetileg Zsolt ötlete volt, hogy ha egy olyan automata van, amiben kicsi cellákban van az alkatrész tárolva, akkor egy két részes gráfban való mozgás írja le a cellák feltöltését és a robot mozgását. Ha 120 cella van, akkor 240 városos utazó ügynök feladat van, amit öt iterációban meg tudtunk oldani. Viszont nem biztos, hogy ilyen feladatot mi egy teszt adatbázisban kaphatunk.

Cs.Zs.: Igen. Azt hallhattuk már, hogy vannak most már nyilvános feladatgyűjtemények. Ezek minősége nagyban függ attól, hogy milyen társaság van a feladatbank mögött.

Például a legismertebb egészértékű feladatgyűjtemény mögött több hónapos munkája van egy 15–16 fős társaságnak, hogy ott jó feladatok legyenek. Sőt maga a végső kiválogatás is egy egészértékű feladatként volt megfogalmazva (kézi válogatás után)[2].

Vannak olyanok is, ahol jó feladatok vannak, de inkább Akadémiából jövő feladatok, és elég messze vannak az ipari feladatoktól.

Amit én látok, hogy nagyon sok olyan példa van, amik véletlen számokkal generált feladatok. Ezek nem jók, ezek általában vagy sokkal könnyebbek, vagy éppen sokkal nehezebbek, mint a való élet feladatai. Illetve hiba az is, ha a tesztfeladatok nem nyilvánosak, ezeket ki kell adni. Ezzel lehet ugyanis azt kivédeni, hogy generálunk 100 ezer feladatot, és az a 10 lesz a teszt, amely 10 darabon megvertem a szolvert. Ez nem igazságos, ezért kell nyilvánosságra hozni a feladatokat, amikkel dolgozunk.

5. Minőség kérdése tolerancia, nehézség és idő figyelembe vételével

Cs.Zs.: Az összes szigorúan vett tesztfeladatnál általános elvárás az, hogy azokat, ahol a numerikus hibák a feladat sajátjai, azokat a feladatokat törölni érdemes. Ezen azt értjük, hogy ne azt nézzük meg, hogy egy szolver szerencsés módon elkerüli a numerikus nehézségeket (nagy számok vagy igen kis számok).

V.B.: Fejtsük ezt ki egy kicsit, mert szerintem az olvasó sem fogja ezt egészen érteni.

Cs.Zs.: Mondom az egyszerűen felismerhető dolgot. Ha egy feladatban nagy számok vannak, akkor ez két helyen rögtön gondot fog okozni. Az elején lévő skálázás valószínűleg el fogja tüntetni a nagy számokat – de ez gondot is jelenthet, mert „kis” számok jelennek meg, és ezek a strukturális elemek utána nem különülnek el a kerekítési, illetve numerikus hibáktól.

A másik gond az, hogy a numerikusan nagy számok elnyelhetnek kisebb számokat (ami a szokásos dupla pontosságú számok nagyságrendje felett van). A numerikus nehézséget tehát el kell különíteni a strukturális részekről.

Mondok egy másik példát: nagyon sok feladatnak van egymásba ágyazott strukturája. Ezt azonban igen nehéz észrevenni a gép számára – lényegében tudni kell, hogy mit is keresünk. Viszont ezek a halmazott viselkedések (feladatok a feladatokban) azt eredményezhetik, hogy habár lokálisan minden lépés jónak tűnik, összességében mégis baj van, legegyszerűbben például ha egy számsorban minden szám az előző duplája.

A szolver előbb-utóbb észreveszi, hogy gond van, és ilyenkor le is állítja a folyamatot, vagy legalábbis valamit közbeszól. De ez egy ad hoc döntés lesz, ami egy ilyen feladaton egyszer jó, más számoknál meg rosszabb eredményre vezet. Ezeket a szerencsés egybeeséseket szeretnénk kiszűrni, mert ezek nem szisztematikus eredményt adnak, ezek a feladatok tesztelésére nem megfelelőek.

6. Átlagszámítás és kiugró értékek – hogyan hasonlítsunk össze? Van helyette más mutató?

Cs.Zs.: Ezen az egész értékű közösség elég sok időt eltöltött. Általános az, hogy nem használunk aritmetikai átlagot, mert nem szerencsés.

Helyette sokszor használt a geometriai közép, mert jól lehet magyarázni, a másik megközelítés az, hogy minden megoldáshoz adunk egy konstans értéket (mondjuk 10-et), ami egyik oldalról jól szűri a „mázlit” – szerencsésen gyors megoldás, másik oldalról viszont jól kezeli a „fix költségek” irányát is, amit bármely feladatnál meg lehet azért érteni.

V.B.: Én annyit még hozzátennék, hogy offline esetekben akár az összes megoldót végignézném. Hiszen offline esetben erre van idő, van lehetőség, van mód.

T.Sz.: Én alapvetően inkább statisztikai oldalról közelítenék: nagyon kevés olyan esetet tudok elképzelni, amikor az aritmetikai közép egy jó mutató. A rend-

szerek döntő többségében én nem találok egy jó, alkalmazott középértéknek. Nagyon érzékeny, egy-egy érték elmozgathatja – szinte bármilyen más választás jobb. Trimmelhetem, súlyozhatom – de ezt én nem látom értelmesnek. Szerintem okosabb azt a kérdést feltenni, hogy mire is vagyunk kíváncsiak? Mit akarunk igazán? A legjobb időt, a legrosszabb esetek idejét - mi érdekel igazán minket az összehasonlításnál.

Cs.Zs.: Itt most egy sorrendet akarunk a szolvek között.

T.Sz.: Mondok egy egyszerű példát. Bélával ugyanazon középiskolába járunk, de vélhetően nem ugyanaz volt a testnevelő tanárunk.

V.B.: Nő volt?

T.Sz.: Nem, férfi volt.

V.B.: Akkor nem ugyanaz volt.

T.Sz.: Mondom akkor a példát: tegyük fel, hogy a középiskolai testnevelő tanárom egy futóversenyt rendez egy sportgimnáziummal. A mi osztályunkban van 29 átlagosnak mondható diák és jómagam, aki egy métert nem fogok futni. A sportgimnáziumban van 27 atléta és három szumó birkózó. A Margitszigeten köröket futva azt a stratégiát választjuk, hogy a sportgimisek loholnak, én pedig a teljes négy év osztálypénzével megállok a három szumóossal az első talponállóban és fizetek. Ekkor a sportgimisek átlagát három szumós fogja rontani és a miénket csak én. Ezzel az átlagok szintjén nyerni fogunk.

De ha helyette azt csináljuk, hogy párokba rendezzük a diákokat és megnézzük, hogy páros versenyeken ki nyer többet, akkor már látható, hogy nehezen verjük meg a sportgimiseket. Ugyanis az ő atlétáik mindig nyernek, mi pedig csak akkor, ha szumóást választunk (és közülünk nem én futok). Ez egy merőben más mérték lenne, mint az átlagok.

7. Felhasználó előzetes ismereteinek beépítése, alkalmazása

Cs.Zs.: Ez feltétlenül kell! Minél több információt képes a szolver befogadni, annál jobb. Egy induló megoldás megadása drasztikusan javíthat. Akár egészértékű, akár nemlineáris feladatoknál fontos, hogy a felhasználó ad-e számunkra egy kiindulási pontot.

Fontos kiemelni még valamit: az ügyfél általában azért elégedett a lokális szolveval, mert a legtöbb gyakorlati felhasználó pontosan tudja, hogy mit keres! Sok, nagyon sok feladatot láttak, tehát „sejtik” a megoldást és tudják, hogy mit keresnek.

V.B.: Zsolt, ezek mennyire mérnöki, műszaki feladatok?

Cs.Zs.: A személyes tapasztalatom az, hogy inkább azok.

V.B.: Ezt vártam. Az én tapasztalatom ugyanis az, hogy a szervezés esetében a helyi szakemberek általában csőlátásúak, és lokális érdekeket vetítenek ki globális feltétellé. Ezzel szemben a műszaki irányok azt mutatják, hogy ott azért vannak globális, általános érvényű szabályok.

T.Sz.: Én valahogy kettős dolgot érzek ebben statisztikai alkalmazóként. Mert egyik oldalról van olyan, hogy a szakemberek általános meglátásai többnyire azért meg szoktak jelenni a számokban.

Viszont van egyfajta „bevásárló központ” hatás is a szakembereknél. Ezt én neveztem el, és az alábbi értem rajta: tegyük fel, hogy COVID miatt reggel 6-kor kinyitom a kapukat és beengedem azokat, akik ott vannak – majd beengedve őket, zárom a kapukat.

A pénztáraknál ülnek 10-en, de 10 perc után felállítok közülük nyolcat. A maradék két pénztáros azt fogja érzékelni, hogy egyre több a vevő.

Ez például akár orvosi, akár pszichológus praxisban úgy jelenik meg, hogy a praxis elején könnyű feladatok vannak – majd 20–30 év praxistapasztalat után azt látom, a világ egyre durvább, mert egyre több komoly betegség, probléma jelenik meg nálam – az egyszerű esetek pedig nem. Holott nem a világ durvul, hanem mi leszünk egyre tapasztaltabbak, és egyre bonyolultabb esetekkel találunk meg minket – mert a könnyű esetek maradnak a kezdőknél.

Cs.Zs.: Igen, és ez megjelenik egyéb iránt a tesztfeladatoknál is. Mert nem a mindennapos feladatokat küldik el általában a feladatbankoknak, hanem az érdekes eseteket. Ami általában azt jelenti, valamiért nehéz. Ez aztán odébb tolja az átlagot is és minden egyebet. Emiatt kell jól megválasztani a tesztfeladatokat.

8. Beállított időkorlátok ügyes megválasztása – visszaélések kizárása

Cs.Zs.: Ez részben a szumósok kizárását jelenti.

T.Sz.: És akkor ezzel le is zárjuk?

Cs.Zs.: Azért nem, mondok rá még példákat. Egyik oldalról fontos látni, hogy nagy feladatokon egy lokális szolver bármilyen globális szolvert megver, mert egy globális szolver nem tudja megoldani a nagyon nagy feladatokat.

Másik oldalról az integrálás ötlet itt is megoldás lehet. Ugyanis egy értelmes kérdés az, hogy a felhasználó mennyire boldog akkor, ha fél óra alatt adok neki megoldást. Ezek után megkérdezem tőle, hogy ha vár 2–3 órát, akkor adok egy 10%-kal jobbat. Ha vár egy napot, akkor még többet javítok, és így tovább.

Az integrált ezzel súlyozva – akár személyesen, rád szabva - kizárható egy csomó eset (például a szumósok esete).

V.B.: Fontos, hogy ez nem csak olyan szempont lehet, ami az optimalizáláshoz kötődő szempont. Például, ha nem sietek, akkor mindegy, hogy fél óra vagy egy óra alatt számol valami – akkor sokszor kiléphetünk a matematika és számítástechnika világából. Én ugyanis döntőnek találom azt, hogy online vagy offline feladatról van szó, mert ez nem feltétlenül folytonos jelenség.

Mindegyiknek lehet értelme, de vannak olyan esetek, amikor ezen döntés nem az optimalizálási feladat része, hanem külső szempont, tehát nem is biztos, hogy van rá szabály.

Cs.Zs.: Ez így van, de a szolverek összehasonlításánál azért egzakt korlátokat használhatunk, ezek pedig tipizálhatók.

T.Sz.: Jól értem, hogy akkor ez akár egy-egy szolveren belüli heurisztikák összehasonlítására is használható?

V.B.: Én más kérdést tennék fel Zsoltnak. Ti nem mondtok olyat a felhasználónak, hogy most ennyire közel vagyok a megoldáshoz, folytassam-e tovább?

Cs.Zs.: De, ilyet mondunk – ez egy megállítási kritérium alapvetően. Úgyhogy igen, ez egy létező felhasználói döntés lehet egy ilyen esetben.

T.Sz.: Uraim! Én köszönöm a beszélgetést, azt hiszem végigvettük a kérdéseket, amiket előzetesen egyeztetünk.

Befejezés

A szerzők a beszélgetést részben a járvány, részben a földrajzi távolságok miatt a Ciprus-Anglia-Magyarország háromszögben folytatták le, 2020. november 14-én.

Hivatkozások

- [1] BERTHOLD, T.: *Measuring the impact of primal heuristics*. PhD Thesis.
- [2] A. GLEIXNER, G. HENDEL, G. GAMRATH, T. ACHTERBERG, M. BASTUBBE, T. BERTHOLD, P.M. CHRISTOPHEL, K. JARCK, T. KOCH, J. LINDEROTH, M. LÜBBECKE, H.D. MITTELMANN, D. OZYURT, T.K. RALPHS, D. SALVAGNIN AND SHINANO, Y.: *MIPLIB 2017: Data-Driven Compilation of the 6th Mixed-Integer Programming Library*. Mathematical Programming Computation, Vol. **13**, pp. 443–490 (2021). DOI: 10.1007/s12532-020-00194-3
- [3] BERTHOLD, T. AND CSIZMADIA, Z.: *The confined primal integral: a measure to benchmark heuristic MINLP solvers against global MINLP solvers..* Mathematical Programming Vol. **188**, pp. 523–537 (2020). DOI: 10.1007/s10107-020-01547-5



Csizmadia Zsolt az ELTE-n szerzett doktori címet 2007-ben, majd ugyanazon évben felvették az Xpress megoldót készítő Dash Optimization (jelenleg FICO) fejlesztői csoportjába, ahol 2013 óta mint főmérnök (principal engineer) dolgozik. Elsősorban nagyméretű nemlineáris feladatok megoldásán dolgozik, de jelentős fejlesztői tapasztalattal rendelkezik az optimalizálási feladatok és módszerek legkülönbözőbb területein, beleértve a lineáris, kvadrati-
kus és egészértékű optimalizálást és az azokkal való modellezést. A fejlesztés mellett számottevő szakértői tevékenységet végez elsősorban banki, pénzügyi, illetve mérnöki optimalizálási területeken.

CSIZMADIA ZSOLT

FICO

zsolt.csizmadia@gmail.com

TAKÁCS SZABOLCS

Károli Gáspár Református Egyetem, BTK, Pszichológiai Intézet
takacs.szabolcs@kre.hu

VIZVÁRI BÉLA

Department of Industrial Engineering, Eastern Mediterranean University
Famagusta, Észak-Ciprus
bela.vizvari@emu.edu.tr

EIGHT QUESTIONS, EIGHT ANSWERS TWICE

ZSOLT CSIZMADIA, SZABOLCS TAKÁCS, BÉLA VIZVÁRI

Our article is unusual in several ways. On the one hand, to our best knowledge, very few publications appear in scientific journals that cannot be interpreted in one of the four circles of “problem raising-references-problem solving-discussion”.

On the other hand, we wanted 70 years of life and 50 years of teaching experience to appear in an environment that combines the industrial and application aspects with academic values and points of views in the form of a casual, yet somewhat structured conversation.

We hope the conversation presented will generate discussions, or inspire thoughts in the members of the next generation. The main participants of the conversation were Béla Vizvári and Zsolt Csizmadia – Szabolcs Takács participated as the moderator and helped wording the conversation. The authors are therefore listed in alphabetical order.

BORSÓSZEMEK A FALRÓL

TÓTH JÁNOS

„Ezért indítani kívánunk egy nyelvi rovatot.” [11]

Szakszövegek helyesírásának, szóhasználatának és mondszerkezeteinek néhány gyakori problémáját tárgyaljuk. Kitérünk a matematikai dolgozatoknál felmerülő különleges kérdésekre is.

1. Bevezetés

A jelen folyóirat egy korábbi számában Vizvári Béla korábbi felelős szerkesztő felkérte az olvasókat, hogy (szak)nyelvi megjegyzéseikkel is járuljanak hozzá a lap színvonalának emeléséhez. Sőt: lásd a mottót. A mostani alkalmat arra szeretném használni, hogy kérésének eleget téve, 70. születésnapja alkalmából (de a 73.-at le nem késve. . .) megnyissam a rovatot.

A helyzetem azért nem könnyű, mert egyszerre vagyok a toleranciabajnok Nádasdy Ádám (lásd például [8]) lelkes híve, valamint türelmetlen szabálykövető és -követelő. Virágozzék tehát minden virág, de néhány gyom gyérítéséhez azért hadd járuljak hozzá.

2. Helyesírás

2.1. Egybe- és különírás

De, megtanulhatók.

Tudniillik a többszörös összetételek egybe- és különírásának szabályai [7, 139–141.] olyan részletességgel, ami a tipikus felhasználónak elegendő. A két szóból álló és a több szóból álló, de legfeljebb hatszótagú kifejezéseket egybe írjuk, többbit kiskötőjellel: sűrűségfüggvény (öt szótag), tűzoltólaktanya (három szó, de csak hat szótag), csapatzászló-avatás (három szó, de hét szótag). Néhány számunkra is érdekes kivétel: akasztófárávaló, pénzügyminisztérium, *valószínűségszámítás*.

Tipikus anglicizmus a következő: általánosított inverz fogalom. Ha az egybeírás szabályait akarjuk követni, akkor *általánosítottinverz-fogalom*. De leginkább így írnám: az *általánosított inverz fogalma*.

Az idézőjelek elhelyezéséről a \TeX ([13]) képes gondoskodni, ha nem akadályozzuk meg ebben. Mára sajnos beszédben is elterjedt az angolszász szokásnak megfelelő "idézés", tehát sokszor látjuk azt, hogy a beszélő kezével kétszer is a fölső állásban hadonászik, pedig először alsóban, másodszor fölsőben kellene kalimpálnia.

2.2. Vízszintes pálcikák

Írástudó, vagyis \TeX -ben és \LaTeX -ben járatos hallgatóimnak el szoktam árulni, hogy a Cauchy-sorozat *kiskötőjellel* írandó, a tól-ig szerkezetekben viszont (lásd [7, 264. és 178.]), amilyen például a *10–12 oldal, 3–4 ember*, és a kezdő és záró oldalszám közé az irodalomjegyzékben két pálcika egymás mellé írásával kapjuk a *nagyköttöjelet*. Figyeljük meg az alábbi kifejezés írásmódját is: Cauchy–Schwarz–Csebisev–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Mi még így tanultuk; nem végeztem elmélyült, önálló matematikatörténeti kutatásokat annak eldöntésére, hogy kinek mekkora szerepe volt a tételben, de megnéztem a Besenyei Ádám (<http://www.ematlap.hu/index.php/konyvespolc-2017-03/451-konyveket-ajanlunk-honlapokat-ajanlunk>) által ajánlott honlapot: <http://jeff560.tripod.com/c.html>. Eszerint az egyenlőtlenség különféle formáit használta Cauchy 1821-ben, Schwarz szerint pedig Bunyakovszkij 1859-ben. Poincaré 1859-ben Schwarzról, Hardy és Littlewood 1920-ban Cauchyról és Schwarzról nevezte el az egyenlőtlenséget.

Feltűnhetett az olvasónak, hogy fentebb a kiskötőjel és nagyköttőjel szavakat egybeírtam: ezek nem kicsi vagy óriási kötőjelek, hanem őket az egybeírt kifejezés azonosítja. Hasonló ezekhez a kis- és nagybetű: a kisbetű is lehet akár 24 pontos.

2.3. Lázadás

Itt néhány rebellis gondolatomat említem meg. Következétesen („gondozott szöveg”) ezt írom: október 10.-én, és nem október 10-én, mert az utóbbi szabályosnak deklarált [7, 295. és 298.] formát én nem tudom másképpen olvasni, mint így: október tízén. Olvassák ki ezeket is („fonetikus” a magyar...): 1-i, 1-ji, 1-jei, 10-e óta. Szerintem legalábbis mókásan hangzanak.

Az ábécésorrenddel kapcsolatban azt még lenyelném, hogy az *o* és az *ó* betű között nem kell különbséget tenni [7, 14. c)], ha ugyanis az elsőt elég sokáig hangoztatjuk, akkor a másodikat kapjuk. Ugyanez az eljárás viszont nem jár a kívánt eredménnyel az *a* és *á* betű esetén. E két betű azonosításának egyetlen eredménye, hogy a listák (telefonkönyv és társai) sokkal nehezebben kezelhetőek, mint ha tudomásul vennénk (ahogyan ezt például az EXCEL teszi, bár az *ó* sorrendje sem kielégítő teljesen), hogy itt nemcsak időtartamban van különbség a két betű kiejtése között, hanem a hangképzés módjában is. Megjegyzendő, hogy [7, 14. b)]

utolsó bekezdése is rontja, míg [7, 14–16.] összes többi része segíti a tájékozódást a listákban. Reménykedjünk a szabályzat további kiadásában.

3. Szóhasználat

Stílusunk biztosan jobb lesz, ha elkerüljük a hivatali bikkfanyelv üres fordulatait: kerül, történik, biztosít, eszközöl, szolgáltat, lehetőség/mód van/nyílik rá, mentén, tekintetében, vonatkozásában, kimaxol stb. A sajnálatosan elterjedt használat mellett ezek a szavak a szövegből a legkisebb károsodás nélkül kiiktathatók. Sőt. Ennek a bekezdésnek az eleje éppen azt mutatja, hogy nem a szavak a bűnösök, hanem az, aki [lehetőséget kerít biztosításukra]. Feladatul adjuk az olvasónak, hogy elemezze, melyik szörnyeteg kedvence a programozóknak, melyiket imádják a politikusok, és melyiket a jogászok vagy az internet népe.

Élvezetes példák vannak összegyűjtve itt is: [3, 236–240. oldal], valamint Nádasy *Mit utáljunk?* című írásában ([9, 274–278. oldal]). Ez utóbbiból idézek: „sorjáz, munkál és hajaz. Pfüj.”

4. Mondatszerkezet

Kicsit szerencsésebb („magyarosabb”) az *igei szerkezet* a névszóinál, tehát tetsetősebb (nekem) ez: *mókásan hangzanak*, mint ez: *mókás hangzásúak*.

Meg kellene szabadulni attól a babonától, hogy a *határozói igenév* elátkozott: nem igaz, nincs elátkozva. Néha még arra is kedvem szottyan, hogy többes számba tegyem, de ezt nem vesszük be a javallatok közé. Hogy még két példát idézzek [3, 239. oldal] alapján: *arra van egy kőhíd rakva* és nem pedig [arra egy kőhíd rakott]. [9, 275. oldal]: „Az üzlet riasztóval védett. Förtelmes germanizmus.”

[Arról (is) szól a történet], hogy ne használjunk közhelyeket.

5. Matematikai specialitások

Sokunk számára kiindulópont Halmos Pál cikke: [5]; az újszülötteknek melegen ajánlom. Egyetlen gondolatot idézek belőle, a többiekért forduljon az olvasó a forráshoz. [5, 279. oldal]: „a függvény és a függvény értéke közötti különbség nagyobb annál, semhogy figyelmen kívül hagyható lenne... ne mondjunk olyat, hogy a $z^2 + 1$ függvény páros. Az $f(z) = z^2 + 1$ összefüggéssel értelmezett f függvény páros... a $z \mapsto z^2 + 1$ függvény páros.” (Sajnos, az angol eredetiben szereplő – helyes \mapsto jel a magyar szövegben így jelenik meg: \rightarrow .)

A fenti fogalmazás egy részét kicsit pontosítanám, így: „Az $f(z) := z^2 + 1$ összefüggéssel értelmezett f függvény” forma kifejezi a *definiáló egyenlőség* aszimmetriáját, szemben a = szimmetrikus egyenlőségjellel, amely egy *reláció* jele, egy kétváltozós függvényé, amelynek értéke igaz vagy hamis.

A téma fontossága miatt vegyünk még egy példát.

$$\text{A } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ egyenlet a standard normális eloszlást írja le.}$$

(Mégkímélem a szerzőt attól, hogy megnevezzem.) Több, ettől az „állítás”-tól eltérő mondatnak is *van* értelme.

- $A \mathbb{R} \ni x \mapsto \varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ hozzárendeléssel értelmezett φ függvényt a *standard normális eloszlás sűrűségfüggvényének* nevezzük. Itt tehát *definiáló egyenlőség* segítségével bevezettük a bal oldalon álló rövid jelölést a jobb oldalon álló függvényre, és egyúttal nevet is adtunk neki.
- Valahonnan (mérési adatokból, fizikai levezetésből) megkaptuk a φ függvényt, és megállapítjuk, hogy a $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ *reláció* minden $x \in \mathbb{R}$ esetén igaz értéket ad. (Pontosan így használja a Wolfram nyelv az **Equal** függvényt, míg az előző esetre a **Set** vagy a **SetDelayed** szolgál, mint az azonnali és a késleltetett értékadás realizációja a nyelvben.)
- Egy feladat megoldása közben eljuthatunk ahhoz a kérdéshez, hogy milyen x valós számokra áll fenn a $0.1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ *egyenlet*. Ez az egyenlet szó megfelelő használata. Itt valójában arról van szó, hogy az

$$F := \left(\mathbb{R} \ni x \mapsto 0.1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right)$$

hozzárendelés *igazsághalmazát* keressük, azaz azokat az x számokat (a *megoldásokat*), amelyekre az F függvény értéke igaz. Szokás az F függvényt *nyitott állításnak* is nevezni [10, 93. oldal]. [4, 109. oldal] a *kitöltetlen* kifejezést használja.

- A pontok az $y = \varphi(x)$ egyenletű görbére esnek. Ezt a mondatot annak rövidítéseként foghatjuk fel, hogy a pontok *részhalmazát* képezik az

$$\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2\}$$

halmaznak.

További megjegyzések következnek.

- Miért szerepel 0.1 a fentiekben a magyar helyesírásnak megfelelő 0, 1 helyett? Lehangelő élményem volt, amikor egy Rátz László Vándorgyűlésen egy szegény tanár megkérdezte a jelenlévő magas akadémikusoktól, hogy miért írjon ő vesszőt a tizedespont helyett, amikor például az állandóan kezünkben lévő számológépeken a gyerekek is tizedespontot látnak. Mintha a kérdés el se hangzott volna... Azóta viszont örömmel tapasztaljuk, hogy pl. az EXCEL magyarított változata is vesszőt használ, értelmetlenül tovább bonyolítva a helyzetet. (Ha valakinek ez érv: a II. világháború előtt pontot használtak, bár nem az alapvonalon, hanem a szám magasságának kétharmadában.)

- Képlettel nem kezdünk mondatot. $f > 0$ azt fejezi ki, hogy helyett inkább *Az $f > 0$ reláció azt fejezi ki, hogy.*
- Képletet nem ragozunk. Ez utóbbi elkerülése végett használjuk Czách tanár úr nyomán a – néha már modorosnak tűnő – *jelölje x fordulatot.*
- Írásban nem szívesen használom a **kéne** szót, és **darab** helyett inkább *számút* mondok, a **plusz feltétel**nél jobb a *további feltétel.* (Vegyünk n számú csúcspontot, vagy n csúcspontot.)
- Szóban se szeretem, de sokan használják még írásban is az ilyen kifejezéseket: **az f** ; én inkább azt mondom, hogy f , vagy azt, hogy az f függvény.
- Mi a baj az alábbi definícióval?

5.1. Definíció. Az f függvény folytonosan differenciálható, ha differenciálható, és derivált függvénye folytonos.

Az, hogy nem tesz eleget a pisztolyról szóló *Csehov-axiómának.* Miért vezetnénk be az f jelet a függvényre, ha a továbbiakban nem használjuk?

- Annál, hogy **legyenek x és y valós számok**, jobban tetszik, hogy *legyen x és y valós szám*, bár ha hátranézek, a polcomon Petőfi Sándor *Összes műveit* látom, de keresésem eredményeként a Google Mikszáth, József Attila és Márai Sándor *Összes művét* kínálja. Magyar nyelvterületen a **feleségeik** szinte biztosan hibás, viszont ma már lehet helyes a felszólítás: *Kapcsolják ki telefonjaikat!*
- **Egy x szám abszolút értéke** helyett jobb: *az x szám abszolút értéke.*
- Ami az írásmű elején áll, az nem **absztrakt**, hanem kivonat magyarul. Nem **licenz**, hanem *licenc*, hisz ezt a szót nem a múlt héten vettük át az angoltól.
- És még egy megjegyzés az írásművek végéről. Matematikusok képesek befejezni úgy egy cikket, hogy ezzel a 23. tétel be van bizonyítva, ahelyett, hogy arról elmélgedének kicsit még, hogy a deklarált (esetleg a címben is kihirdetett, csábos) célt sikerült-e elérniük, mi az, amit nem, miért nem: nem volt elég idő, számítógép-kapacitás, tudás, ötlet, borsó. Mi várható a jövőben? Mi az, amit megtudtunk? Mihez kapcsolódik a matematikán belül vagy kívül? (Nem az azonnali értékesítésre gondolok.) Merre megyünk tovább?

Csak remélem, hogy a rovat további bővültével a nyelvi kérdésekről élénk vita fog kialakulni, amihez az ünnepelt is – eddigi szerkesztői munkáján túl, explicite is – hozzájárul majd. És a legközelebbi kerek születésnapra talán ahhoz is veszem a bátorságot, hogy a *matematikai kémia* (az alkalmazott matematika egy fejezete) történetéről írjak [12] – már eddig is eredményesebb – felhívásának (lásd például [1, 2, 6]), nem beszélve a nekrológokról) eleget téve.

Köszönetnyilvánítás

A dolgozat részben az SNN 125739 számú NFKIH pályázat támogatásával készült.

Hivatkozások

- [1] APÁTHY, M.S.: *Az útvonaltervező algoritmus történeti áttekintése, különös tekintettel azok turisztikai célú alkalmazásaira*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **33** No. **1**, pp. 93–118 (2016).
- [2] W. COOK: *A kombinatorikus egészértékű programozás ötvenegynéhány éve*, fordította: Bernáth Attila, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **30**, pp. 23–80 (2013).
- [3] CSERMELY, P., GERGELY, P., KOLTAY, T. ÉS TÓTH, J.: *Kutatás és közlés a természettudományokban*, Osiris Kiadó, Budapest, (1999).
- [4] G. FREGÉ (Szerk. Ruzsa, I.): *Logika, szemantika, matematika. Válogatott tanulmányok*, Gondolat, Budapest, (1980).
- [5] HALMOS, P.R.: *Hogyan írjunk matematikát?* Matematikai Lapok, Vol. **26** No. **3/4**, pp. 265–286 (1975).
- [6] KOMÁROMI, É.: *Prékopa, András: Lineáris programozás I. – A magyar operációkutatás első félidejéről, ahogy én láttam*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **35**, pp. 29–42 (2018).
- [7] MTA: *A magyar helyesírás szabályai*, Akadémiai Kiadó, Budapest, tizenkettedik kiadás (2015).
- [8] NÁDASDY, Á.: *Ízlések és szabályok. Írások nyelvről, nyelvészetről*, Magvető Kiadó, Budapest, (2003).
- [9] NÁDASDY, Á.: *Prédikál és szónokol*. Magvető Kiadó, Budapest, (2008).
- [10] VARGA, T.: *Matematikai logika kezdőknek 2*, Tankönyvkiadó, Budapest, (1966).
- [11] VIZVÁRI, B.: *Nyelvészkedés*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **21** No. **1**, p. 175 (2004).
- [12] VIZVÁRI, B.: *Szakmánk története*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **26** No. **2**, pp. 403–404 (2009).
- [13] WETTL, F., MAYER, G. ÉS SZABÓ, P.: *L^AT_EX kézikönyv*. Panem Kiadó, Budapest, (2004).



Tóth János (1947) az ELTE TTK matematikus szakán végzett. Kandidátusi értekezését 1986-ban védte meg a Magyar Tudományos Akadémián. 2010-ben habilitált matematikából a BME-n. Dolgozott a Semmelweis Orvostudományi Egyetemen, a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézetében, majd Műszaki Kémiai Kutató Intézetében. Vezette a Gödöllő Agrártudományi Egyetem Számítástechnikai Tanszékét, majd nyugdíjazásáig a BME

Analízis Tanszékén oktatott, jelenleg ott címzetes egyetemi tanár. Az Eötvös Loránd Tudományegyetemen 1976-tól fogva néhány évtizeden keresztül tartott órákat.

1981-ben Farkas Gyula-díjat kapott, 2013-ban pedig elnyerte a *Mathematics in (bio)Chemical Kinetics and Engineering* életműdíját.

Kutatási területe a formális reakciókinetika elmélete és alkalmazásai és a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete. Két angol és több magyar könyve, 100 körüli folyóiratcikke jelent meg, összes hivatkozásainak száma a https://scholar.google.hu/citations?hl=hu&user=_6V4DdoAAAAJ szerint 2000 fölött van.

Tagja az AMS-nek, a SIAM-nak, a Bolyai János Matematikai Társulat Ellenőrző Bizottságának elnöke, tagja a Magyar Égéstudományi Bizottságnak és a Magyar Tudományos Akadémia Reakciókinetikai és Fotokémiai Munkabizottságának, szerkesztője a Bolyai János Matematikai Társulat elektronikus folyóiratának, az *Érintőnek*: <https://ematlap.hu>.

TÓTH JÁNOS

BME Analízis Tanszék,
1111 Bp. Egry J. u. 1.
és ELTE Reakciókinetikai Laboratórium,
1117 Pázmány P. sétány 1/A.
jtoth@math.bme.hu

WATER DROPS OFF A DUCK'S BACK

JÁNOS TÓTH

Following the announcement of the editor for 16 years, Béla Vizvári, we collected a few ideas about how to write or speak about mathematics.

Keywords: grammar, spelling, vocabulary of mathematical texts

Mathematics Subject Classification (2020): 00-02, 97-02, 00A99.

SEGÉLYCSOMAGOK KISZÁLLÍTÁSA KATASZTRÓFA UTÁN TEHERAUTÓ-DRÓN TANDEMMEEL

KOVÁCS GERGELY, VIZVÁRI BÉLA

A humanitárius logisztika a logisztika minden olyan ágát felöleli, amit azért művelnek, hogy embereken segítsenek. Ezen belül fontos részterület a katasztrófák után a segélycsomagok eljuttatása a rászorulókhhoz. A szállítási technológia változásával itt újabb matematikai feladatok merülnek fel. Jelenleg a legfontosabb technológiai újítás a pilóta nélküli légi járművek, azaz drónok alkalmazása. Ebben a cikkben az utazó ügynök feladat egy olyan változatát tárgyaljuk, amelyben egy teherautó és egy drón alkotta páros látja el egy katasztrófa sújtotta vidéki, azaz nem sűrű úthálózattal rendelkező nagyvárosi terület igényeit. A drónt két repülése között a teherautó viszi magával. A drónt a teherautón szállított segélycsomagokból töltik fel. Maga a teherautó kiszolgálja mindazokat a pontokat, amelyeken keresztül halad. A megoldás két fontos előnye, hogy azok a helyek is elláthatók, amelyek az utak megrongálódása vagy egyéb ok miatt máshogy nem érhetők el, és a páros rövidebb idő alatt tudja a segélyt eljuttatni a rászorulókhöz.

1. Bevezetés

Minden évben számos katasztrófa történik a világban. Földrengés és árvíz sok területet sújt. A katasztrófa utáni időszak egyik legfontosabb feladata az, hogy segélyt nyújtson a rászoruló embereknek. A szállítás módja fontos, és a körülményektől függ. Például a hurrikán esetében annak helye és ideje ismert. Mielőtt a hurrikán lecsapna, a segélycsomagokat, beleértve az élelmiszert is, raktárakba lehet szállítani. A hurrikán alatt azonban le kell állítani a szállítást. A földrengés előfordulási helyei ismertek. Így már a katasztrófa előtti időszakban létre lehet hozni olyan segélyszervezetet, amely szállítási kapacitással is rendelkezik. A szervezet tulajdonában lévő járművek teherautók és drónok is lehetnek [12]. A járművek közül a helikopterek nagyon hasznosak, mert sokféle célra felhasználhatók. Azonban nem lehet jó helikopterflottára számítani a katasztrófa utáni időszakban, kivéve, ha nagyon erős a katonai részvétel a mentésben [9]. A közlekedés nehezebb, ha vidéki területet sújt a katasztrófa, mintha egy nagyvárost, mert az utóbbiban sok a párhuzamos út. Világosan mutatta ezt 2004-ben Aceh [9] és 2011-ben a

Van-tó melletti földrengés esete [17]. A szállítási távolság ilyen esetben hosszú, és kevés a használható út. Továbbá lehetnek olyan helyek, amelyeket nem lehet megközelíteni közúton. Csak drónokból álló szállítási rendszer használható a városokban, de vidéki térségben nem feltétlenül tud minden igényt kielégíteni a nagyobb távolságok és a drónok korlátos maximális repülési ideje miatt, amit *állóképességnek* is nevezhetünk. Ilyen esetekben kombinált szállítási mód lehet a megoldás. Már létező műszaki megoldás a következő. Egy nagy teherautó szállítja a segélycsomagokat. A tetején van egy drón. A teherautó szolgálja ki azokat a helyeket, amelyeket útja során érint. A teherautó útvonalától távol eső helyeket a drón szolgálja ki. A drón korlátozott állóképességgel rendelkezik, de csomaggal és üzemanyaggal való újratöltése technikai szempontból könnyen megoldható a teherautóról. A kombinált megoldásnak számos előnye van, így például kevesebb drón szükséges annál, mintha minden szállítást drón végezne.

Amikor egy teherautó-drón tandem küldetést hajt végre, akkor először az általuk kiszolgálandó helyeket kell kiválasztani. A közös küldetés ütemezése során külön kell választani a teherautó és a drón által meglátogatott helyeket. Ezen kívül minden küldetést optimalizálni kell. A tandem egy központi raktárból indul, és ugyanoda tér vissza. Ezért a matematikai problémát az angol nyelvű irodalom gyakran jelöli TSP-D-vel, ami a drónnal kiegészített utazó ügynök feladatot (travelling salesman problem with drones) jelenti. A problémát [1] és [11] vezette be. Az utóbbi közölt egy egzakt modellt, ami azonban igen nagyméretű lehet. [19] hasonló modellt dolgozott ki, ami hatékonyabb és 12 pontig működik. Dinamikus programozáson alapuló hatékony megoldási módszer található [2]-ben. A [5] és [7] evolúciós algoritmust dolgozott ki a feladat megoldására.

2. Az utazó ügynök feladatról

Az utazó ügynök feladat (travelling salesman problem, TSP) ugyan kezelhető egzakt modell nélkül [2], ebben a dolgozatban a garantált optimum elérésére törekszünk.

A TSP hosszú múltra tekint vissza. A feladatot 1832-ben definiálták [14]. A TSP-t ismerték és tudományos beszélgetésekben tárgyalták, de az első matematikai modellre 1954-ig kellett várni [4]. Érdekes módon ez a mai napig az egyik legnépszerűbb és a számítási szempontból leghatékonyabb modell. Jól ragadja meg a probléma kombinatorikus természetét. Azonban más modellekkel ellentétben nincs eszköze a körút idejének elemzésére. Másik hátránya, hogy exponenciálisan sok feltételt tartalmaz. A gyakorlatban iteratív módon oldjuk meg úgy, hogy minden iterációban egy relaxált feladat optimális megoldását keressük meg. A relaxáció abban áll, hogy az összes feltétel helyett csak azok egy részhalmozát követeljük meg. Ha a pillanatnyi optimális megoldás nem elégíti ki az összes feltételt, akkor egy megsértett feltételt adunk a feladathoz. Ez a megközelítés sok matematikai eredmény elérését tette lehetővé, melyek legnagyobb része kívül

esik ezen a dolgozaton. Később a TSP számos más modelljét találták meg [15]. Elméleti összehasonlítás alapján [15] arra a következtetésre jutott, hogy a [4] modellje a két leghatékonyabb egyike.

A számításokban másik népszerű modell a [10]. Egyszerű módszert alkalmaz az idő múlásának leírására. Minden városhoz tartozik egy döntési változó, amely azt adja meg, hogy a város hányadik a körútban a kiindulási pont után, mely utóbbinak 0 a pozíciója. Más modellek is használhatók a számításhoz. A különböző modelleket nem hasonlították össze alaposan abból a szempontból, hogy a belőlük származó optimalizálási feladatok mennyire hatékonyan oldhatók meg.

Az ebben a dolgozatban tárgyalt modell alapja a Miller–Tucker–Zemlin-modell, vagy röviden az MTZ-modell. A modellt először általános irányított gráfok esetében fogalmazzuk meg. A meglátogatandó pontok halmaza $N := \{0, 1, \dots, n\}$, ahol 0 a kezdőpont. A körút itt kezdődik és fejeződik be. A j pont távolsága az i ponttól d_{ij} . A távolságról nem tesszük fel, hogy szimmetrikus. A legfontosabb döntési változók a következők:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az ügynök } i\text{-ből közvetlenül } j \text{ városba utazik,} \\ 0 & \text{különben.} \end{cases} \quad (1)$$

A feltételek első két csoportja egyszerű. Az ügynöknek minden várost el kell hagynia, ami az alábbi egyenletekkel fejezhető ki

$$\forall i \in N : \sum_{j \in N, j \neq i} x_{ij} = 1. \quad (2)$$

Ehhez hasonlóan meg is kell érkeznie minden városba

$$\forall j \in N : \sum_{i \in N, j \neq i} x_{ij} = 1. \quad (3)$$

Sajnos a (2) és (3) feltétel nem elegendő a körutak pontos leírására, mert kisebb köröket is megenged.

Így további feltételekre van szükség, melyek kizárják a teljes körútnál kisebb köröket. [4] ezen a ponton sok exponenciális korlátozást vezet be. Az MTZ-modell más. Bevezet n új, folytonos változót és ezekre vonatkozó $O(n^2)$ számú feltételt. A változók a gráf csúcsaihoz tartoznak a kiindulási pont kivételével, melyhez nem tartozik új változó. Lent azonban kiderül, hogy a feltételek miatt ezek csak egész értékeket vehetnek fel. Legyen u_j az, hogy a j város hányadik a körútban a kezdőpont után. Az új feltételek a következők:

$$\forall j \in N, j \neq 0 : 1 \leq u_j \leq n \quad (4)$$

és

$$\forall i, j \in N, i \neq j, i, j \neq 0 : u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1. \quad (5)$$

Vegyük észre, ha $x_{ij} = 0$, akkor (4)-ből következik, hogy (5) teljesül. Ha $x_{ij} = 1$, akkor (5) arra egyszerűsödik, hogy

$$u_i + 1 \leq u_j. \quad (6)$$

Innen azonnal következik, hogy az u_i változók csak az egész számokat vehetik fel 1 és n között. Ha van kisebb kör, akkor legalább két ilyen létezik. Az egyik kisebb kör nem tartalmazza a kiindulási pontot. (6) szerint ezen kisebb kör mentén az u_j változók értéke szigorúan növekszik. Tegyük fel, hogy az ügynök ezen a kisebb körön indul a k várostól. Amikor visszatér ugyanebbe a k városba, u_k -nak nagyobbak kell lennie, mint a kör elején, ami ellentmondás. Így a kisebb kör nem lehetséges. Tehát a teljes MTZ-modell

$$\min \sum_{i=0}^n \sum_{j=0, j \neq i}^n d_{ij} x_{ij}$$

az (1–5) feltételek mellett.

Mint említettük, az u_j változók halmaza primitív módon írja le az idő múlását. Az idő minden lépésben egy egységgel változik. Azért nem kell u_0 -t bevezetni, mert az 0-n van rögzítve. Az u_j változók növekvő sorrendje megadja a városok látogatásainak sorrendjét. Más szavakkal, az u_j változó jelentése a j város helyzete a körútban. Vannak a TSP-nél bonyolultabb problémák, amelyek háttérében egy TSP húzódik meg. Például ütemezésnél az események időpontja nagyon fontos. Az MTZ-modell pozícióit ki lehet cserélni a modell változóiként kezelt időpontokra [6, 13]. Az események pontos időpontjának meghatározása érdekében természetesen további feltételeket kell bevezetni.

Teherautóval a Föld felszínén szállítanak, ezért igen valószínű, hogy az útszakaszokból alkotott gráf síkbarajzolható. Az ilyen gráfoknak viszont kevés éle van.

2.1. TÉTEL. *[Folklor] Tegyük fel, hogy a síkbarajzolható G gráfnak sem hurokéle, sem párhuzamos élei nincsenek. Ha G -nek p számú csúcsa és q számú éle van, akkor $q \leq 3p - 6$.*

Habár az x_{ij} változók száma a csúcsok számának négyzetes függvénye, ezekre a változókra csak azon élek esetében van szükség, amelyek ténylegesen léteznek a gráfban. A 2.1. Tétel szerint ezen élek száma síkgráfok esetén lineáris. Hasonlóképpen (5)-öt elegendő csak a létező élekre megkövetelni. A (2) és (3) feltételeket ehhez kell igazítani. Így jelentősen csökkenteni lehet a feladat méretét.

Legyen $G(N, A)$ egy irányított gráf hurokélek és párhuzamos élek nélkül, ahol N a csúcsok, A az élek halmaza. Legyen $\delta_+(i)$ azon élek halmaza, melyek az i csúcsból indulnak. Hasonlóképp, legyen $\delta_-(i)$ azon élek halmaza, melyek az i csúcsba mennek. Tehát $\delta_+(i), \delta_-(i) \subset A$. Ekkor (2) és (3) megfelelő alakja

$$\forall i \in N : \sum_{(i,j) \in \delta_+(i)} x_{ij} = 1$$

és

$$\forall j \in N : \sum_{(i,j) \in \delta_-(j)} x_{ij} = 1.$$

(5) új alakja

$$\forall (i,j) \in A, i, j \neq 0 : u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1.$$

3. A feladat leírása

Egy teherautó és egy drón tandemje szállít segélyt katasztrófa után a bajbajutottaknak. Azok a helyek, amelyeket a tandemnek meg kell látogatnia, ismertek a küldetés megkezdése előtt. Lehet, hogy a teherautó nem tud minden kijelölt helyre elmenni, mert az utak sérültek. A tandem egy raktárról, más néven depóból indul, és a küldetés végén ide kell visszatérnie. A meglátogatandó helyeket egyszerűen pontoknak nevezzük. Két pont akkor van összekötve, ha van köztük olyan út, amelyen a teherautó elhaladhat, vagyis nincs jelentős kár az út ezen részén. Ha a teherautó meglátogat egy pontot, akkor a pontot a teherautó szolgálja ki. Ha egy pontot a drónnak kell kiszolgálnia, akkor egy ponton töltik fel üzemanyaggal, és ugyanott kapja meg a szállítandó csomagot. A drón a kívánt ponton ledobja a rakományt, és egy másik pontnál tér vissza a teherautóhoz. A drón maximális repülési idejét állóképességnek nevezzük. A drón az utántöltés után maximális állóképességgel rendelkezik. Egy feladat befejezése után a drón új küldetést kaphat, vagy egy ideig utazhat a teherautóval. A drón minden repülése alkalmával csak egy pontot szolgál ki. A depó is egy pont. Azon pontok kiválasztása, amelyeket a drón szolgál ki, a probléma része. A teherautó és a drón külön-külön is elhagyhatja a raktárt, és szükség esetén külön térhet vissza. A cél a küldetés befejezési idejének minimalizálása. A küldetés akkor fejeződik be, ha mindkét jármű visszatért a depóba.

4. Az új modell

Technikai okokból bevezetjük az $n + 1$ -es csúcsot, ami azonos a 0 csúccsal, tehát a raktárral. Az alábbiakban [18] jelöléseit használjuk. Legyen most $N := \{1, \dots, n\}$. Továbbra is használjuk az x_{ij} változókat, azonban azok most csak a teherautóra vonatkoznak. További jelölések:

Paraméterek

- π_{ij} a teherautó mozgásának ideje az i csúcsból a j csúcsba;
 p_{ij} a drón mozgásának ideje az i csúcsból a j csúcsba;
 s_w a drón üzemanyaggal és csomaggal való feltöltésének ideje;
 s_d annak az ideje, hogy a drón egy pontra megérkezve a csomagot kézbesíti (ledobja);
 s_t a teherautóról történő kézbesítés ideje, ha a teherautó megérkezett egy pontba.

Változók

- x_{ij} bináris változó; 1, ha a teherautó az i -ből közvetlenül a j csúcsba megy, 0 különben; $i \in \{0\} \cup N$; $j \in N \cup \{n+1\}$;
 y_{ij} bináris változó; 1, ha a drón az i -ből közvetlenül a j csúcsba megy, beleértve azt az esetet is, amikor a teherautón utazik; 0 különben; $i \in \{0\} \cup N$; $j \in N \cup \{n+1\}$;
 d_j bináris változó; 1, ha a drón szolgálja ki a j csúcsot; 0 különben; $j \in N$;
 w_j bináris változó; 1, ha a drónt a j csúcson feltöltik üzemanyaggal; 0 különben; $j \in \{0\} \cup N$;
 t_j a j csúcs kiszolgálásának befejezési időpontja, nem beleértve a drón esetleges feltöltését és egy további csúcs kiszolgálását; $j \in N \cup \{0, n+1\}$;
 ε a drón állóképessége;
 M egy nagy pozitív szám.

A síkgráfokkal kapcsolatban bevezetett fogalmakat a modell matematikai megfogalmazásában használjuk. Feltehető azonban, hogy a drón bármelyik két pont között repülhet.

A körút a raktárból indul és visszatérve ott ér véget. A teherautóra vonatkozóan ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{(0,j) \in \delta_+(0)} x_{0j} = 1 \quad (7)$$

és

$$\sum_{(i,n+1) \in \delta_-(n+1)} x_{i,n+1} = 1. \quad (8)$$

Minden más csúcs esetében a csúcsba való érkezések és a csúcsból való távozások számának azonosnak kell lennie:

$$\forall j \in N : \sum_{(i,j) \in \delta_-(j)} x_{ij} = \sum_{(j,i) \in \delta_+(j)} x_{ji}. \quad (9)$$

Hasonló feltételek vonatkoznak a drónra is:

$$\sum_{j=1}^n y_{0j} = 1 \quad (10)$$

és

$$\sum_{j=1}^n y_{j,n+1} = 1. \quad (11)$$

Itt is minden más csúcs esetében a csúcsba való érkezések és a csúcsból való távozások számának azonosnak kell lennie:

$$\forall j \in N : \sum_{i=0, i \neq j}^n y_{ij} = \sum_{i=1, i \neq j}^{n+1} y_{ji}. \quad (12)$$

Minden csúcsot legalább a tandem egyik tagjának meg kell látogatnia:

$$\forall j \in N : \sum_{(i,j) \in \delta_-(j)} x_{ij} + \sum_{i=0, i \neq j}^n y_{ij} \geq 1. \quad (13)$$

Minden csúcsot vagy a teherautó, vagy a drón szolgál ki. Az utóbbi azt jelenti, hogy a drón ott ledobja a csomagot:

$$\forall j \in N : \sum_{(i,j) \in \delta_-(j)} x_{ij} = 1 - d_j. \quad (14)$$

Ha a drónt egy adott ponton feltöltik üzemanyaggal, akkor ezt a pontot a teherautó ki tudja szolgálni:

$$\forall j \in N : w_j + d_j \leq 1. \quad (15)$$

Ha a drón az i csúcsból a j csúcsba repül, és kiszolgálja a j csúcsot, akkor az i csúcsban fel kell tölteni:

$$\forall i \in \{0\} \cup N : \forall j \in N : j \neq i : y_{ij} + d_j \leq 1 + w_i. \quad (16)$$

Induláskor a raktár, azaz a 0 csúcs kiszolgálása a 0 időpontban fejeződik be:

$$t_0 = 0. \quad (17)$$

Egy pont kiszolgálása vagy akkor fejeződik be, amikor a tandem mindkét tagja megérkezett és a kiszolgálás is megtörtént; vagy, ha a tandem egyik tagja nem látogatja meg a pontot, akkor a kiszolgálás befejezési ideje nem függ ettől a járműtől. Ha a teherautó szolgálja ki a pontot, akkor az előző pont kiszolgálása után szükség esetén még ott fel kell töltenie a drónt, át kell mennie a következő pontba, és ott le kell szállítania a segélycsomagot. Ebből a következő feltételt kapjuk:

$$\forall j \in N : \forall i \in \{0\} \cup N, i \neq j : t_j \geq t_i + s_w w_i + \pi_{ij} + s_t - M(1 - x_{ij}). \quad (18)$$

A $j = n + 1$ esetén a feltétel hasonló, de mivel a raktárt nem kell kiszolgálni, s_t kikerül belőle:

$$\forall i \in N : t_{n+1} \geq t_i + s_w w_i + \pi_{i,n+1} - M(1 - x_{i,n+1}).$$

A drónra vonatkozó feltétel nagyon hasonló. Az utazási idő és a kiszolgálás ideje különböző:

$$\forall j \in N : \forall i \in \{0\} \cup N, i \neq j : t_j \geq t_i + s_w w_i + p_{ij} + s_d d_j - M(1 - y_{ij}). \quad (19)$$

Ismét $j = n + 1$ esetén egyszerűsödik a feltétel:

$$\forall i \in N : t_{n+1} \geq t_i + p_{i,n+1} - M(1 - y_{i,n+1}).$$

A drón által végzett minden kiszolgálás két részből áll. A drón egy i pontból, a teherautóról indul, a j pontra repül, azt kiszolgálja, és onnan repül tovább a k pontra, ahol találkozik a teherautóval. Az egész repülés, beleértve a segélycsomag ledobását, nem lehet hosszabb, mint az állóképesség:

$$\forall j \in N : \sum_{i=0, i \neq j}^n p_{ij} y_{ij} + \sum_{k=1, i \neq j}^{n+1} p_{jk} y_{jk} + s_j d_j - M(1 - d_j) \leq \varepsilon.$$

A célfüggvény a körút bejárás idejének minimalizálása, azaz

$$\min t_{n+1}. \quad (20)$$

A feladat feltételeinek vannak egyszerű következményei, melyeket az alábbi két lemmában adunk meg.

4.1. SEGÉDTÉTEL. A (13) és (14) feltételből következik, hogy

$$\forall j \in N : \sum_{i=0, i \neq j}^n y_{ij} \geq d_j. \quad (21)$$

Bizonyítás. A bizonyítás egyszerű helyettesítés. □

(21) jelentése az, hogy ha a j pontot a drón szolgálja ki, vagyis a drón ott segélycsomagokat dob le, akkor a drónnak oda kell repülnie ehhez a ponthoz.

4.2. SEGÉDTÉTEL. A (15) és (16) feltételből következik, hogy

$$\forall i \in N : \forall j \in N : j \neq i : y_{ij} + d_i + d_j \leq 2. \quad (22)$$

Bizonyítás. A bizonyítás (15) és (16) összegzéséből áll. □

A lemma értelmében a drón nem dobhat le segélycsomagot a repülés két végpontján.

A legfontosabb azonban annak megmutatása, hogy a modell korrekt.

4.3. SEGÉDTÉTEL. *Ha a drón az i pontról a j pontra repül, kiszolgálja azt, és onnan a k pontra repül tovább, ahol i , j és k páronként különböző pontok, akkor a teherautó szintén meglátogatja a k pontot, és nem távozik a drón előtt.*

Bizonyítás. A (12) feltétel azt mondja, hogy ha a drón a j pontra repül, akkor tovább kell repülnie egy másik pontra, vagyis létezik k pont. Ebből következik a 4.2. segédtétel szerint, hogy ha a drón a j pontra repül és kiszolgálja, akkor nem tudja kiszolgálni a következő pontot, vagyis a k pontot. Ha a k pontot nem a drón szolgálja ki, akkor a (14) feltétel azt jelenti, hogy a teherautónak meg kell látogatnia a k pontot. A k pont kiszolgálása csak akkor fejeződik be, a (18) és (19) feltételek szerint, ha a teherautó és a drón is megérkezett, és a teherautó kiszolgálta a pontot. \square

5. Mi az új a modelben?

[18] modellje 37 típusú feltétellel és két célfüggvénnyel rendelkezik. Az egyik célfüggvény megegyezik a (20)-beli függvénnyel. Ez a modell a drón repülését három-indexű bináris változókkal írja le. Így $O(n^3)$ változóval rendelkezik. Azzal sikerült az ilyen típusú változók számát $O(n^2)$ -re redukálni, hogy a modellben nem csupán a drónok repülését értelmezzük mozgásukként, hanem azt is, amikor a teherautón utaznak. Így az y_{ij} változók egy teljes körutat írnak le az x_{ij} változókhoz hasonlóan, lásd a (10–12) feltételeket. Bár a két körút számos közös élt tartalmazhat, pontosan ott, ahol drón a teherautón utazik, de különbözők, ha a drón legalább egy repülést teljesít. Ezzel a drón küldetéseinek időpontjaira vonatkozó feltétel is feleslegessé vált.

[18] modellje ugyancsak feleslegesen tartalmaz mind pozíció-, mind időváltozókat. A pozícióváltozók a [10] modelljéből származnak, ahol az idő leegyszerűsített leírására szolgálnak [4] modelljével ellentétben, ami semmi időre vonatkozó információt nem tartalmaz azon az áron, hogy feltételeinek száma exponenciális. Ha azonban az időre vonatkozóan pontosabb eredményekre van szükség, mint az egyes helyek felkeresésének sorrendje, akkor az időpontok leírására külön változókat kell bevezetni, és a pozícióváltozók, mint ebben az esetben is, teljesen kiküszöbölhetők. A kapott modell a katasztrófa utáni, folyamatosan változó helyzetben ismételtelen megoldható a soron következő szállítás optimalizálására.

Köszönetnyilvánítás

A szerzők köszönetet mondanak Fereshte Nadjenadnak, hogy felhívta figyelmüket a téma fontosságára.

Hivatkozások

- [1] N. AGATZ, P. BOUMAN AND M. SCHMIDT: *Optimization Approaches for the Traveling Salesman Problem with Drone*, Transportation Science, Vol. **52** No. **4**, pp. 965–981 (2017). DOI: 10.1287/trsc.2017.0791
- [2] P. BOUMAN, N. AGATZ AND M. SCHMIDT: *Dynamic programming approaches for the traveling salesman problem with drone*, Networks, Vol. **72**, pp. 528–542 (2018). DOI: 10.1002/net.21864
- [3] N. BOYSEN, D. BRISKORN, S. FEDTKE AND S. SCHWERDFEGER: *Drone delivery from trucks: Drone scheduling for given truck routes*, Networks, Vol. **72**, pp. 506–527 (2018). DOI: 10.1002/net.21847
- [4] G.B. DANTZIG, D.R. FULKERSON AND S.M. JOHNSON: *Solution of a large scale traveling salesman problem*, Operations Research, Vol. **2**, pp. 393–410 (1954). DOI: 10.1287/opre.2.4.393
- [5] S.M. FERRANDEZ, T. HARBISON, T. WEBER, R. STURGES AND R. RICH: *Optimization of a Truck-drone in Tandem Delivery Network Using K-means and Genetic Algorithm*, Journal of Industrial Engineering and Management, Vol. **9** No. **2**, pp. 374–388 (2016). DOI: 10.3926/jiem.1929
- [6] H. GÜLTEKIN, O.E. KARASAN AND M.S. AKTÜRK: *Pure Cycles in Flexible Robotic Cells*, Computers and Operations Research, Vol. **36** No. **2**, pp. 329–343 (2009). DOI: 10.1016/j.cor.2007.10.007
- [7] Q.M. HA, Y. DEVILLE, Q.D. PHAM AND M.H. HA: *A hybrid genetic algorithm for the traveling salesman problem with drone*, Journal of Heuristics, megjelenés alatt (2019). DOI: 10.1007/s10732-019-09431-y
- [8] A.M. HAM: *Integrated scheduling of m-truck, m-drone, and m-depot constrained by time-window, drop-pickup, and m-visit using constraint programming*, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, Vol. **91**, pp. 1–14 (2018). DOI: 10.1016/j.trc.2018.03.025
- [9] X-H. LI AND J-CH. ZHENG: *Efficient Post-Disaster Patient Transportation Transfer: Experiences and Lessons Learned in Emergency Medical Rescue in Aceh After the 2004 Asian Tsunami*, Military Medicine, Vol. **179** No. **8**, pp. 913–919 (2014). DOI: 10.7205/MILMED-D-13-00525
- [10] C.E. MILLER, A.W. TUCKER AND R.A. ZEMLIN: *Integer programming formulation of traveling salesman problems*, Journal of the ACM, Vol. **7** No. **4**, pp. 326–329 (1960). DOI: 10.1145/321043.321046
- [11] C.C. MURRAY AND A.G. CHU: *The flying sidekick traveling salesman problem: Optimization of drone-assisted parcel delivery*, Transportation Research Part C: Emerging Technologies, Vol. **54**, pp. 86–109 (2015). DOI: 10.1016/j.trc.2015.03.005
- [12] A. NEDJATI, VIZVÁRI B. AND G. IZBIRAK: *Post-earthquake response by small UAV helicopters*, Natural Hazards, Vol. **80**, pp. 1669–1688 (2016). DOI: 10.1007/s11069-015-2046-6
- [13] M.G. NEJAD, H. GÜDEN AND VIZVÁRI B.: *Time minimization in flexible robotic cells considering intermediate input buffers: a comparative study of three well-known problems*, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, Vol. **32** No. **8**, pp. 809–819 (2019). DOI: 10.1080/0951192X.2019.1636411

- [14] B.F. VOIGT: *Der Handlungsreisende wie er sein soll und was er zu thun hat, um Aufträge zu erhalten und eines Glücklichen Erfolgs in seinen Geschäften gewiss zu sein*, Commis-Voageur, Ilmenau (1832).
- [15] A. ORMAN AND H.P. WILLIAMS: *A survey of different integer programming formulations of the travelling salesman problem*, Optimization, Econometric and Financial Analysis, pp. 91–104 (2007). DOI: 10.1007/3-540-36626-1_5
- [16] B. SAH: *Drone Truck Combined Operation: Models and Algorithm*, PhD Thesis, Department of Industrial and Systems Engineering, Binghamton University, State University of New York (2019).
- [17] https://en.wikipedia.org/wiki/2011_Van_earthquakes
- [18] K. WANG, B. YUAN, M. ZHAO AND Y. LU: *Cooperative route planning for drone and truck in delivery services: A bi-objective optimisation approach*, Journal of the Operational Research Society, Vol. **71** No. **10**, pp. 1657–1674 (2019). DOI: 10.1080/01605682.2019.1621671
- [19] E.E. YUREK AND H.C. OZMUTLU: *A decomposition-based iterative optimization algorithm for traveling salesman problem with drone*, Transportation Research Part C, Vol. **91**, pp. 249–262 (2018). DOI: 10.1016/j.trc.2018.04.009



Kovács Gergely 1975-ben született. Doktori címét az Eötvös Loránd Tudományegyetemen szerezte 2006-ban. Jelenleg a tatabányai Edutus Egyetem főiskolai tanára. Kutatási területe a termelésütemezés, modellalkotás, digitális geometria. Eddig közel 20 tudományos cikke jelent meg, több egyetemi jegyzetet írt.

KOVÁCS GERGELY

Edutus Egyetem, Tatabánya
kovacs.gergely@edutus.hu

VIZVÁRI BÉLA

Department of Industrial Engineering, Eastern Mediterranean University
Famagusta, Észak-Ciprus
bela.vizvari@emu.edu.tr

TRANSPORTATION OF RELIEF ITEMS AFTER DISASTER BY A TRUCK-DRONE
TANDEM

GERGELY KOVÁCS, BÉLA VIZVÁRI

Humanitarian logistics encompasses all branches of logistics that are done to help people. Within humanitarian logistics, an important sub-area is the delivery of relief items to those in need in a post-disaster period. With the change in transport technology, new mathematical problems arise here. At present, the key technology innovation is the use of unmanned aerial vehicles (drones). In this paper, we discuss a version of the traveling salesman problem in which a truck and a pair formed by a drone meets the needs of a disaster-stricken rural area, i.e. a non-metropolitan area with a dense road network. Between the two flights of the drone, a truck takes the drone with itself. The drone is loaded from the aid packages delivered on the truck. The truck itself serves all the points it passes through. Two important advantages of this solution are that it is possible to provide places that cannot be reached otherwise due to road damage or other reasons, and the shorter time can deliver aid to those in need.

Keywords: TSP; TSP-D; humanitarian logistics; disaster; post-disaster period

Mathematics Subject Classification (2000): 90-10, 90B20

ADAPTÍV TESZTEK MINIMÁLIS HOSSZÁNAK, HIBÁJÁNAK, ÉRTÉKELÉSI SZINTJÉNEK ÉS A MEGOLDÓK SZÁMÁNAK ÖSSZEFÜGGÉSEI – ÁLTALÁNOS MEGOLDÁSI ARÁNNYAL

T. KÁRÁSZ JUDIT, TAKÁCS SZABOLCS

A cikkünk alapvetően egy általános formalizmus megalkotását tűzte ki célul, melynek segítségével a papír-ceruza alapú tesztek digitalizációjának egyik problémáját kezelhetjük. A kidolgozott formalizmus általános módon lett megalkotva, azonban egy gyakorlati példán is ismertetjük az eredményeket. Dolgozatunkban bemutatjuk, hogy egy alapvetően papír-ceruza teszten alapuló felmérés esetében, mint amilyen az OECD PISA [8] és az Országos kompetenciamérés [9], annak leendő adaptív változata milyen korlátokkal és előnyökkel szolgálna. A nemzetközi mérések esetében már elkezdődött az a fejlesztési munka, mely ezt az irányt készíti elő, illetve az elmúlt időszak online oktatási tapasztalatai megágyaztak annak, hogy az Országos kompetenciamérés esetében is lehetőség legyen digitális, majd adaptív mérésre való áttérésre. Az ehhez szükséges itemszintű logisztika (feladatbank, modellezési környezet) alapvetően rendelkezésre áll. A szakirodalom azonban általánosságban ezekre a technikai részletekre tér ki – valamint arra, hogy a megbízhatósághoz hány főre van szükség. Cikkünkben mi nem erre a kérdésre voltunk kíváncsiak, ugyanis az itembank kellő méretű, illetve jellemzően egy országos mérésnél a kellő kitöltöttség eredendően adott lesz. Ezzel szemben számunkra az a fontosabb kérdés, hogy milyen mértékben rövidíthető le a teszt úgy, hogy a mostanival megegyező – vagy annál jobb, megbízhatóbb – teszthez jussunk. Minket tehát most nem a kitöltők száma, hanem a teszt hossza érdekelt, erre vonatkozóan végeztünk el úgy szimulációs számításokat, hogy a mostani [8, 9] mérések általánosan kiadott mutatóit vettük alapul.

1. Bevezető

Az adaptív tesztelés nagyobb számítógépes kapacitása napjainkra már nem jelenthet érdemi kifogást a papír-ceruza tesztekkel szemben. Lényegében a legegyszerűbb (Google, Microsoft), leginkább elterjedt platformok is képesek arra, hogy online tesztek vegyünk fel a segítségükkel. Ennél fejlettebb az, ha a tesztünk nemcsak számítógépes, hanem adaptív is. Az adaptív tesztelés [6] során az egymás utáni itemeket a tesztelő rendszer úgy adja a tesztalanyoknak, hogy az mindig

az aktuálisan számított tudásszintnek megfelelő legyen. Tehát egy rosszul teljesítő alany nem kap megoldhatatlanul nehéz feladatokat, míg az igen jól teljesítő sem kapja a számára unalmasabbnak látszó, könnyű feladatokat. De természetesen az adaptív tesztelés nemcsak teljesítményre, hanem egyéb tesztelésekre is általánosítható. Gondolhatunk itt arra is, hogy ha egy betegség tüneteit nézzük, akkor egy lázas betegnél az alábbi kérdések nem praktikusak: Több-e a testhőmérséklete, mint 36,5 fok?, 37 fok? 37,5 fok? Az egész skálán nem fogunk végigmenni – egészen pontosan nem fogjuk a lázas betegnél az összes alacsony testhőmérsékletre vonatkozó kérdést feltenni. Azaz: ha teszt szinten gondolkodnánk, akkor mondjuk 1/10 fokonként újra és újra kérdeznénk. Ezzel szemben a nincsen lázam, hőemelkedés, láz kérdések, vagy a 38 foknál való kezdés (alatta vagy felette) alkalmas kérdések arra vonatkozóan, hogy viszonylag gyorsan eljussunk a megfelelően kalibrált testhőmérsékletig (vagy természetesen használhatunk hőmérőt is). A valódi kérdés azonban az, hogy ha például egy teljesítmény tesztet akarunk összeállítani, akkor e kérdezési módszerrel vajon mennyivel hamarabb tudunk célba jutni [3]? Természetesen ez sok paramétertől függhet (mi a pontosság, milyen típusú kérdésekkel dolgozunk, stb). Ezért rögzítünk néhány alap feltételt.

1) Kizárólag két értékű itemekkel dolgozunk (megoldja/nem oldja meg, illetve például van-e tünet/nincsen tünet) – a súlyosságot nem mérjük.

2) A teszt pontosságát rögzítettnek tekintjük. Ezen azt értjük, hogy ha van egy papír-ceruza alapú tesztünk (vagy egy nem adaptív tesztelési módszerünk/for-gatókönyvünk), akkor azt a becslési pontosságot szeretnénk elérni, amit az adott teszt tud.

Megjegyezzük, hogy itt felmerülhet az alábbi kérdés: miért igaz az, hogy kevesebb kérdéssel, gyorsabb méréssel hasonló minőségű és mennyiségű információhoz juthatunk? A válasz kétoldali. Egyik oldalról nem kérdezzünk sok felesleget. A megkérdezett jellemzően a tudásszintjének, teljesítményének megfelelő kérdéseket kap. Másik oldalról a rövidebb idő azt is eredményezheti nagyobb volumenek esetében, hogy azon válaszadók, akik elunják a tesztet és félbehagyják, a rövidebb tesztet mégis kitöltik.

Azaz a kérdésünk: ugyanolyan típusú kérdésekkel, mint az eredeti papír-ceruza teszt, ugyanolyan pontosságot mennyivel gyorsabban tudunk reprodukálni? Azzal a feltételezéssel fogunk még élni, hogy a teszt itemjeinek paramétereit ismerjük, tehát olyan itemekkel dolgozhatunk, melyek nehézsége (feladatmegoldási paramétere) ismertek a tesztet összeállítók előtt. Ez nem túlzó feltételezés, mert gondolhatunk itt egy betegség esetében arra, hogy egy-egy tünet mennyire súlyos (általában ezzel az orvosok tisztában vannak), illetve egy-egy teljesítményt mérő item esetében is a szakemberek rendelkeznek ezzel az információval a tesztek összeállításakor [2]. Hogy ez mennyire nem túlzó feltételezés, Harrisonék munkájában még az is tisztázott, hogy egy-egy feladat gyermekek és felnőttek számára mennyire nehéz feladat - tehát a szakértők akár korosztályonként is meglehetősen jó becsléseket tudnak mondani a feladatok nehézségét illetően. Ezek után az a

kérdés, hogy ugyanolyan típusú kérdésekkel, ugyanazon jelenséget vizsgálva, hány item segítségével tudunk hasonló becslési pontosságot felmutatni – egy-egy egyénre vonatkoztatva? Megjegyezzük, hogy az eddig hivatkozott művek mindegyike esetében kellően nagy mintákon szimulált vizsgálatokat végeztek annak érdekében, hogy az adott becslési hatékonyságot vizsgálni tudják. Azaz nem a teljes mintafelvétel hibáját szeretnék csökkenteni, hanem az adott teszten elérhető pontszám hibáját szeretnék elérni kevesebb item felhasználásával. A kutatókat általánosságban érdeklő és foglalkoztató kérdés az adaptív tesztelés során inkább az, hogy mekkora itembankra van szükség ahhoz, hogy egy adaptív rendszert működtetni lehessen. Gondoljunk ugyanis arra, hogy az IQ-t szeretnék 100 kérdés helyett csak 10 kérdésből mérni. Ha a kérdések nyilvánosságra kerülnek, használhatatlanná válnak (lásd például [1]), és akkor nagyon gyorsan maguk a tesztek is használhatatlanná válnak. Ezt azzal lehet kivédeni, hogy nagy méretű itembankot hozunk létre, amiből a megkérdezett véletlenszerűen kap kérdéseket – az aktuális szintjének megfelelően.

2. Kuder–Richardson formula

Bár maga a becslési formula meglehetősen régóta ismert [4], a megközelítés általában inkább szimulációk sorát jelentette. Azaz a felmérés során egyfajta mi lenne, ha „lehetőségeket” vizsgálnak, hogy adott mintanagyság esetében egy-egy teszthossz vagy egyéb feltételrendszer esetében hány kérdésre lenne szükség az adott becslési szint teljesítéséhez. A tesztek során az alap definíciónak a teszt megbízhatóságát fogjuk alapul venni. A megbízhatóság a Kuder–Richardson formula szerint az alábbi alakban határozható meg [4, (20) képlet]:

$$r = \frac{L}{L-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^L p_i q_i}{s^2} \right),$$

ahol L az itemek száma, $\sum_i p_i q_i$ az itemek össz-varianciája, p_i az összes jó válasz aránya (jó válasz / összes esetszám), míg q_i a rossz válaszok aránya. Továbbá s^2 a teljesítmény összesített varianciája. Ez az s^2 alapesetben $N(0, 1)$ változók összegzését jelenti (ha a mintaalanyok egymástól függetlenül írják a tesztet/mennek el orvoshoz tünetekkel), tehát s^2 legalábbis nagyságrendileg a minta nagyságával összemérhető.

A teszt a minta növelésével tehát egyre megbízhatóbbá válik, hiszen a hányados határértékben 0-hoz konvergál (feltéve, hogy valóban standard normális határeloszlást tudunk az IRT modellek – a nemzetközi és hazai mérések egyaránt ezzel dolgoznak, lásd bővebben [8, 9] – segítségével meghatározni minden résztvevő pontszámaként). A formula definíciói alapján a teszt standard hibáját (SEM) az

alábbi formula szerint definiálják.

$$SEM = \sqrt{1 - r}.$$

Jól látható tehát az alábbi: Ha a teszt itemjei konzisztensek (azaz megoldhatóságukat tekintve kiegyensúlyozottak), azaz a teszt teljes variabilitásához képest az itemek variabilitása összességében alacsony, akkor a $(\sum pq)/s^2$ kifejezés értéke alacsony lesz. Amennyiben az itemek összvarianciája a teljes teszt/teljesítmények varianciájához képest alacsony marad, úgy az $1 - (\sum pq)/s^2$ kifejezés egyre jobban közelít 1-hez. Ebből következően relatíve hosszú tesztek esetében a teljes teszt megbízhatósága 1-hez közelít.

Minél közelebb van a teszt megbízhatósága 1-hez, várhatóan annál kisebb lesz az $s\sqrt{1 - r}$ kifejezés értéke, tehát annál kisebb lesz a teszt standard hibája.

Ezen a ponton szokás a szimulációkat végrehajtani. Ugyanis az egyes itemek megoldottsága természetesen nem rögzített (vannak a tesztekben könnyebb és nehezebb feladatok – egészségügyi tesztek esetében vannak súlyosabb és kevésbé súlyos tünetek). A teljes tesztre ránézve azt tudjuk szimulálni, hogy egyik-másik itemet elhagyva (vagy bevéve) az eljárásunkba, mennyivel tudunk gyorsabban célba érni – tehát relatíve kevesebb itemet felhasználva hasonló eredményre jutni.

Az adaptív tesztelés esetében ez nem egészen így történik [5], miként arra vonatkozóan Linden és Glas az elsők között tett említést: ők több itembank nagysággal és teszt hosszal, mintanagysággal végeztek kísérletet – tehát nem egészen azt az utat járták be, mint amit mi fogunk választani.

Az egyik lehetséges cél tehát az, hogy rögzítve a teszt megbízhatóságát, rögzítve a teljes minta hibájának mértékét, azt szeretnénk megtudni, hogy milyen itemszámra van szükségünk, ha adaptív módon szeretnénk kérdezni. Magyarán: az esetszám, tehát a mintanagyság, melyet a becsléshez felhasználunk, változatlan marad.

Tekintettel arra, hogy e formula nem tartalmazza azon szinteket, melyekkel a nemzetközi [8], illetve például egy teljes népességet vizsgáló magyar mérés is dolgozik (Országos kompetenciamérés, [9]), így olyan formulával dolgoztunk helyette, mely ezt a sajátosságát is figyelembe veszi. A szintek esetében az alábbi példákra gondolhatunk:

- 1) Betegség esetében egy adott betegség súlyosságának fokozatai.
- 2) Iskolai teljesítmény esetében például nem egy teszt pontszámait értjük alatta, hanem az arra kapott osztályzatot.

3. Wright formulája – általános eset ($0 < p < 1$)

Általában a $p = 1/2$ esetet elemzik – magyarán, hogy egy teszt esetében ugyanolyan valószínűséggel oldja vagy nem oldja meg a diák a feladatot. Ettől mi eltérünk és azt mondjuk, hogy általánosságban könnyebb ($p > \frac{1}{2}$), illetve nehezebb ($p < \frac{1}{2}$) tesztek is görcső alá vehetők. Felhívjuk a figyelmet, hogy a formula p és q esetére szimmetrikus, mi most a $p \leq 0,5$ eseteket fogjuk formalizálni. Világos, hogy a $p = 0$ és a $p = 1$ esetek nem érdekesek.

Az előzőekben megismert jelölések tehát az alábbi alakban írhatók át. Tegyük fel, hogy b_i jelöli az adott személy képességét ($i = 1, \dots, N$ kitöltővel számolva) és d_j jelöli az adott itemek nehézségét (továbbra is $j = 1, \dots, L$ itemet használunk a papír-ceruza referencia tesztben).

Jelölje s_j azt a számot, ahányan az adott itemet jól megoldották (valamint n_w jelölje azt, hogy pontosan w darab feladatot hányan oldottak meg). Ha adaptív tesztelésben gondolkodunk, akkor a korábbi jelölésekkel $s_j = Np$ (illetve $s_j = \frac{N}{2}$ a teljesen klasszikus felállás esetében). Életszerű továbbá az a megközelítés, hogy azokat az alanyokat, akik minden itemet megoldanak vagy elrontanak, kihagyjuk a további elemzésekből (a kitöltők számát továbbra is N -nel jelölve). Hasonlóan, ha egy itemet mindenki/senki sem oldott meg, szintén elhagyhatjuk (jelölje a továbbiakban is a teszt hosszát L). Tehát N és L a valid teszt hossz és kitöltők számát fogja jelölni.

Fontos megjegyezni, hogy a senki sem töltötte ki, illetve mindenki kitöltötte változatok elvi – intuitív – szinten nem szimmetrikus esetek (a legjobb és legrosszabbak elhagyása), azonban a tesztben lévő információk szintjén szimmetrikusak. Ugyanis annak, aki mindent megold az elvi maximumot kell adnunk teljesítményként (nem tudjuk, mennyivel van felette ennek az értéknek), míg aki semmit sem, őt az elvi minimumra helyezzük (és nem tudjuk, mennyivel teljesítene ez alatt a szint alatt).

Wright [7] az alábbi jelöléseket használja, alkalmazza (a képletek háttérét, levezetését itt nem közöljük, azokat [7] anyagai alapján alkalmazzuk):

$$x_j = \ln \left[\frac{N-s_j}{s_j} \right],$$

$$x = \sum_{j=1}^L \frac{x_j}{L},$$

$$U = \sum_{j=1}^L \frac{(x_j - x)^2}{L - 1}.$$

Az első három formula esetében azt láthatjuk, hogy ez lényegében az itemek relatív megoldottságát jelzik, illetve azok varianciáját, hibáját mutatják. Azaz, hogy a teljes mintán általában hányan oldják az adott feladatokat, itemeket.

Az x -ben rejlő információk tehát az itemekre vonatkozó információkat jelölik, azokból származtatott adatok x_j, x , illetve U .

$$y_w = \ln \left[\frac{w}{L - w} \right],$$

$$y = \sum_{w=1}^{L-1} \frac{n_w y_w}{N},$$

$$V = \sum_{w=1}^{L-1} \frac{n_w (y_w - y)^2}{N - 1}.$$

Az x -ekkel szemben az y és V mutatók azt mutatják, hogy egy adott hosszúságú teszten a vizsgálati alanyok átlagosan hány feladatot tudnak megoldani – tehát ez a három összevont formula (y_w, y és V) a vizsgálati alanyok átlagos teljesítményére vonatkozó mutatóegyütteseket fed, továbbra is Wright [7] jelöléseit és számításait használva:

$$X = \sqrt{\frac{1 + \frac{U}{2,89}}{1 - \frac{UV}{8,35}}},$$

$$Y = \sqrt{\frac{1 + \frac{V}{2,89}}{1 - \frac{UV}{8,35}}}.$$

Az X és Y értékek tehát a teszt és a vizsgálati alanyok teljesítményét mutatják.

$$d_j = Y (x_j - x),$$

$$SE(d_j) = y \sqrt{\frac{N}{s_j (N - s_j)}}.$$

A d_j paraméter tehát az összes megoldóra megoldásra/teljesítményre vetítve az itemek x_j nehézsége, tehát $SE(d_j)$ az adott itemek nehézségének standard hibája.

$$b_w = X y_w,$$

$$SE(b_w) = X \sqrt{\frac{L}{w(L - w)}}.$$

Ezzel szemben b_w az adott megoldók, adott tesztet kitöltők átlagos teljesítménye lesz, illetve $SE(b_w)$ a teljesítményeken lévő átlagos (standard) hibaként kerül bevezetésre.

Látható tehát, hogy e mutatók segítségével megadható, hogy az itemeknek, illetve a teljes tesztnek (teljesítménynek) mi lesz a hibája, milyen biztonsággal tudunk item-paramétert vagy teljesítményt meghatározni.

Ha azt tekintjük, hogy továbbra is adaptív módon, de kicsit nehezítve vagy könnyítve (tehát mindenki a saját képességének megfelelő itemet kap, de rögzített p , illetve q valószínűséggel oldja meg/rontja el a feladatokat, valamint úgy kezeljük, hogy mondjuk K szinten akarjuk az eredményeket kezelni (Wright [7] 11 szinttel számolt, tehát -5 és 5 közötti képességértékekkel dolgozott), akkor további, szintén nem túlságosan életszerűtlen egyszerűsítések tehetők. Tudjuk továbbá, hogy

$$s_i = \frac{Np}{K},$$

hiszen ilyen esetben tudható, hogy az adott szinten lévő alanyok nem kapnak más szintekről itemeket (tehát azok adott hányadát fogják megoldani).

Ez utóbbi úgy is felfogható (ezért nem életszerűtlen a megkötés), hogy egy adaptív teszt esetében a nagyon jó nem kap nagyon könnyű feladatokat és a nagyon alul teljesítő sem kap megoldhatatlannak látszó példákat. Miként egy igen súlyos állapotban lévő páciensből sem kérdezik az enyhe tüneteket – és az alapvetően enyhébb panaszokkal érkezőket sem a rendkívül súlyos esetekre jellemző tünetek mentén kezelik.

Ebből az egyszerűsítésből következik, hogy

$$x_i = \ln \left(\frac{N - \frac{Np}{K}}{\frac{Np}{K}} \right) = \ln \left(\frac{K - p}{p} \right).$$

A fenti formula azt mondja, hogy a jó és rossz válaszok aránya átlagosan tehát csak a szintektől függ (minden szinten lényegében állandó, hogy hányan, milyen arányban oldják meg jól vagy rosszul a feladatokat).

Ebben az esetben az is elmondható, hogy

$$x = \frac{\sum_{i=1}^L \ln \left(\frac{K-p}{p} \right)}{N} = \frac{L}{N} \ln \left(\frac{K-p}{p} \right),$$

ami az átlagos megoldottsági/elrontottsági kapcsolati mutatónk.

Ezek után a variancia:

$$U = \frac{\sum_{i=1}^L \left(\ln \left(\frac{K-p}{p} \right) - \frac{L}{N} \ln \left(\frac{K-p}{p} \right) \right)^2}{L-1},$$

$$y_w = \ln \left(L \frac{p}{q} \right).$$

Tehát $w = Lp$ (a teljes teszten hány jó megoldást adunk), amiből következik, hogy optimális adaptív teszt esetében $V = 0$ és $Y = 1$. Optimálisan adaptív egy teszt akkor, ha valóban minden vizsgálati alany folyamatosan a számára megfelelő szinten, tehát p valószínűséggel megoldható feladatokat kap.

Innen viszont azt is tudhatjuk, hogy

$$SE(d_i) = \sqrt{\frac{N}{s_i(N-s_i)}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{K}{\sqrt{p(K-p)}}.$$

Azaz az adott itemek hibája annál nagyobb, minél több szintet szeretnénk vele bemérni, viszont minél több kitöltővel rendelkezünk, annál jobban csökken. Ez egybevág azzal az intuícióval, hogy minél szélesebb tartományon szeretnénk, hogy egy kérdés jól mérjen, annál nagyobb bizonytalansággal tudjuk megtenni (specifikus kérdések pontosabban mérnek). Illetve, hogy a kitöltők számának növekedésével együtt jár az, hogy az itemek viselkedését egyre pontosabban fogjuk ismerni.

Szintén Wright formulái alapján [7] megadható a teljesítmény hibája is:

$$SE(b) = X \sqrt{\frac{L}{w(L-w)}} = X \sqrt{\frac{1}{Lpq}}$$

Amiből további behelyettesítéssel:

$$SE(b) = \sqrt{\frac{1}{Lpq}} \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{L}{L-1}\right) \left(\frac{N-L}{N}\right)^2 \ln^2\left(\frac{K-p}{p}\right)}{2,89}}$$

A fenti formulából látható például, hogy adott teszt-hossz esetében az esetszám növelésével egy ideig csökkenthető a hiba mértéke – majd lényegében stagnálni fog, ha semmi más paraméteren nem változtatunk. Ahogy az is látható, hogy N -ben egy idő után nem fogunk tudni jobb eredményt mutatni – tehát más megközelítésben egy-egy kitöltő hibáját attól nem fogjuk tudni jobban megbecsülni, hogy rajta kívül még sokan kitöltik a tesztet.

Ez azt is jelenti, hogy ha a teszt hosszát nem növeljük, akkor az esetszám növelésével egy-egy alanyra pontosabb becsléseket nem fogunk tudni adni. Ezt felfoghatjuk úgy is, hogy az adott itemek egy idő után kellően pontosan bemérésre kerülnek, tehát a belőlük nyerhető információ lényegében stagnál, tehát újabb és újabb esetek hozzávételével már nem tudunk további információkhoz jutni.

Ez azt is jelenti, hogy a képességeket csak úgy tudjuk egyre pontosabban mérni, hogy a teszt hosszát növeljük, ha újabb és újabb itemeket veszünk hozzá a tesztünkhöz.

Felhívjuk arra a figyelmet, hogy ez alapvetően nem mond ellent annak az intuitív megfigyelésnek, melyet például az egészséggel kapcsolatos diagnosztikában

csinálnak, vagy akár a teljesítményméréseknél tapasztalhatunk. Az egészséggel kapcsolatos teszteknel nem az történik, hogy újra és újra azonos tesztekkel vért vesznek (ha nem ismert a diagnózis), hanem újabb tesztekkel, másfajta információkat csatornáznak be. A teljesítménymérés esetében sem írja meg a diák újra és újra ugyanazt a tesztet (típusfeladatot), hanem másfajta típusokkal igyekszünk pontosabb képet kapni a tudásáról.

Valamint arra is kitérnénk, hogy alapvetően a kitöltők száma jellemzően 100 – 200-as minimális nagyságrendet jelent, a tesztek hossza pedig ritkán megy 100-as feladatszám fölé. Tehát az esetszám emelkedésével valódi, empirikus esetekben a többi paramétert fixen tartva folyamatosan javuló teszt eredményeket fogunk tapasztalni.

4. Szimulációs eljárás, eredmények

A szimuláció során szintén Wright [7] nyomvonalát követjük. Esetében a kitöltők száma 50 és 500 fő között alakult itemként. Ez szintén nem elrugaszkodott a valóságtól, hiszen egy-egy standardizálás során a kérdőíveket hagyományosan legalább 500 fővel szokás kitöltetni – de az online felmérések során ennél jellemzően lényegesen nagyobb minták keletkeznek.

Fontos azonban kiemelni, hogy Wright [7] nem adaptív, hanem papír-ceruza tesztek esetében határozta meg ezeket a számokat – és esetünkben éppen az a kérdés, hogy ennél kevesebb kitöltővel is el lehet-e érni hasonló eredményeket egy adaptív tesztelés során.

Két kérdésre keressük tehát a választ:

1. Első lépésben a kérdés az, hogy egy-egy item megbízhatóságához (adott hibahatár eléréséhez) minimálisan hány kitöltőre van szükség.
2. Második lépésben a kérdés az, hogy ha megvan egy megfelelő méretű itembankunk, akkor ebből az itembankból minimálisan hány kérdésre van szükség ahhoz, hogy az egyes válaszadók teljesítményét meg tudjuk határozni.

Wright nyomán (a hiba $N(0, 1)$ tehát) a 0,2-es szintet határozzuk meg mint elérni kívánt minimumot. Ez nagyjából azt jelenti, hogy a teljes teszt esetében az itemek megbízhatósága a teljes teszt megbízhatóságának 20%-a alá kell, hogy csökkenjen. A kitöltőkre vonatkozó hibát/szórást ezzel szemben 0,5-ös szinten határozzuk meg.

A szinteket a hagyományos OECD PISA [8], illetve Országos kompetenciamérés [9] szintjeihez szabjuk, azaz a szintek száma a szimulációkban 2 és 8 lesznek, azaz $K = 2, \dots, 8$. Jellemzően e két felmérés esetében a diákok teljesítményén lévő hiba nagyságrendileg a szórás 40–50%-a is lehet. Ezért maradtunk a teljesítmények esetében a 0,5-ös szint elérése mellett. A második esetben, amikor a teljesítmények teljes teszt szintjét fogjuk vizsgálni, $K = 3, 5, 8$ változatok esetére mutatjuk

be az elemzés eredményeit. Ezt úgy foghatjuk fel, mint az alacsony-közepes-magas ($K = 3$) esetben. Második esetben az iskolai osztályzatokat kezelhetjük szintekként. A harmadik, $K = 8$ esetben pedig egy részletesebb, betegsúlyosság esetét vehetjük alapul.

A szimulációkban $N = \{10, 20, 30, 50, 100, 200, 300, 400, 500\}$ esetszámokkal fogunk dolgozni.

A teszt hosszát $L = \{10, 30, 60\}$ értékekre állítjuk be.

A megoldottsági szinteket $p = \{0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5\}$ esetekre állítjuk be.

Első lépésben azt vizsgáljuk meg, hogy az itemek hibája miként alakul a szintek, a megoldottsági valószínűségek és a kitöltők száma alapján.

Az eredményekből leolvasható (1. táblázat), hogy $p = 0, 1$, illetve $p = 0, 2$ (mely értelemszerűen megegyezik a $p = 0, 9$ és a $p = 0, 8$ esetekkel) legalább 400, inkább 500 fő kell ahhoz, hogy elérjük a 0, 2-es alsó határt. A tapasztalatok egyébiránt azt mutatják, hogy ez jellemzően a nagyon nehéz/nagyon könnyű feladatok világa, amely esetben valóban azt láthatjuk, hogy több esetre van szükség a megfelelő minőség garantálásához.

Ráadásul ez a szintek emelkedésével még nehezebbé is válik – tehát minél több szintet kalibrálunk (minél árnyaltabban szeretnénk mérni), annál több kitöltőre van szükség a szélsőséges feladatok pontos bemérésére.

Ezzel szemben ha megnézzük a 0, 4-es, illetve 0, 5-ös szinteket, tehát a kiegyensúlyozottabb itemeket (nagyjából fele-fele arányban oldják vagy nem oldják meg), ilyen esetekben már jellemzően 100, illetve 200 kitöltő is elegendő a megfelelő szint biztosítására (ez alól csak a 8 szint esetében van kivétel).

Mit láthatunk akkor, ha mindezt kiegészítjük a teszt hosszával? Azt láthatjuk (2. táblázat), hogy egy 10 itemből álló teszt esetében lényegében nem tudjuk elérni a 0, 4-es vagy 0, 5-ös minimális szintet (és ezt egyébiránt az empirikus tapasztalatok is alátámasztják, ennyire rövid teljesítményt mérő tesztek általában nincsenek).

Ezzel szemben 30 item esetében már akár 20–30 kitöltővel is elérhető $p = 0, 3$ -as megoldottsági nehézség esetében. Igaz ez $K = 3, 5, 8$ esetben egyaránt. Ez azt jelenti, hogy egy aránylag bonyolultabb teszt esetében is, akár még 8 szintet megkülönböztetve, a teljes teszt megbízhatósága már 30–40 kitöltővel is elérhető, amennyiben adaptív tesztet tudunk a kérdésben összeállítani megfelelő itembankkal rendelkezve.

5. Két példa gyakorlati felhasználásra

Jellemzően az OECD PISA [8] és az Országos kompetenciamérés [9] olyan felmérések, ahol $N \gg L$, azaz lényegesen, nagyságrendekkel több kitöltő diák van, mint ahány item egy-egy felmérés során felhasználásra kerül egy tesztfüzetben. Jellemzően egy tesztfüzet egy-egy témakörre 50–60 itemet tartalmaz, míg a kitöltők

K	p	$N=10$	$N=20$	$N=30$	$N=50$	$N=100$	$N=200$	$N=300$	$N=400$	$N=500$
2	0,1	1,451	1,026	0,8377	0,6489	0,4588	0,3244	0,2649	0,2294	0,2052
2	0,2	1,0541	0,7454	0,6086	0,4714	0,3333	0,2357	0,1925	0,1667	0,1491
2	0,3	0,8856	0,6262	0,5113	0,3961	0,2801	0,198	0,1617	0,14	0,1252
2	0,4	0,7906	0,559	0,4564	0,3536	0,25	0,1768	0,1443	0,125	0,1118
2	0,5	0,7303	0,5164	0,4216	0,3266	0,2309	0,1633	0,1333	0,1155	0,1033
3	0,1	1,7617	1,2457	1,0171	0,7878	0,5571	0,3939	0,3216	0,2785	0,2491
3	0,2	1,2677	0,8964	0,7319	0,5669	0,4009	0,2835	0,2315	0,2004	0,1793
3	0,3	1,0541	0,7454	0,6086	0,4714	0,3333	0,2357	0,1925	0,1667	0,1491
3	0,4	0,9303	0,6578	0,5371	0,416	0,2942	0,208	0,1698	0,1471	0,1316
3	0,5	0,8485	0,6	0,4899	0,3795	0,2683	0,1897	0,1549	0,1342	0,12
4	0,1	2,0255	1,4322	1,1694	0,9058	0,6405	0,4529	0,3698	0,3203	0,2864
4	0,2	1,451	1,026	0,8377	0,6489	0,4588	0,3244	0,2649	0,2294	0,2052
4	0,3	1,2006	0,849	0,6932	0,5369	0,3797	0,2685	0,2192	0,1898	0,1698
4	0,4	1,0541	0,7454	0,6086	0,4714	0,3333	0,2357	0,1925	0,1667	0,1491
4	0,5	0,9562	0,6761	0,5521	0,4276	0,3024	0,2138	0,1746	0,1512	0,1352
5	0,1	2,2588	1,5972	1,3041	1,0102	0,7143	0,5051	0,4124	0,3571	0,3194
5	0,2	1,6137	1,1411	0,9317	0,7217	0,5103	0,3608	0,2946	0,2552	0,2282
5	0,3	1,3316	0,9416	0,7688	0,5955	0,4211	0,2977	0,2431	0,2105	0,1883
5	0,4	1,1656	0,8242	0,673	0,5213	0,3686	0,2606	0,2128	0,1843	0,1648
5	0,5	1,0541	0,7454	0,6086	0,4714	0,3333	0,2357	0,1925	0,1667	0,1491
6	0,1	2,4702	1,7467	1,4261	1,1047	0,7811	0,5523	0,451	0,3906	0,3493
6	0,2	1,7617	1,2457	1,0171	0,7878	0,5571	0,3939	0,3216	0,2785	0,2491
6	0,3	1,451	1,026	0,8377	0,6489	0,4588	0,3244	0,2649	0,2294	0,2052
6	0,4	1,2677	0,8964	0,7319	0,5669	0,4009	0,2835	0,2315	0,2004	0,1793
6	0,5	1,1442	0,809	0,6606	0,5117	0,3618	0,2558	0,2089	0,1809	0,1618
7	0,1	2,6649	1,8843	1,5386	1,1918	0,8427	0,5959	0,4865	0,4214	0,3769
7	0,2	1,8981	1,3422	1,0959	0,8489	0,6002	0,4244	0,3466	0,3001	0,2684
7	0,3	1,5613	1,104	0,9014	0,6983	0,4937	0,3491	0,2851	0,2469	0,2208
7	0,4	1,3624	0,9633	0,7866	0,6093	0,4308	0,3046	0,2487	0,2154	0,1927
7	0,5	1,2279	0,8682	0,7089	0,5491	0,3883	0,2746	0,2242	0,1941	0,1736
8	0,1	2,8463	2,0126	1,6433	1,2729	0,9001	0,6364	0,5197	0,45	0,4025
8	0,2	2,0255	1,4322	1,1694	0,9058	0,6405	0,4529	0,3698	0,3203	0,2864
8	0,3	1,6645	1,177	0,961	0,7444	0,5264	0,3722	0,3039	0,2632	0,2354
8	0,4	1,451	1,026	0,8377	0,6489	0,4588	0,3244	0,2649	0,2294	0,2052
8	0,5	1,3064	0,9238	0,7542	0,5842	0,4131	0,2921	0,2385	0,2066	0,1848

1. táblázat. Itemek megbízhatóságának táblázata kitöltők számának, szintek nagyságának és a teszt nehézségének függvényében

K	L	p	10	20	30	50	100	200	300	400	500
3	10	0,1	1,054	1,524	1,807	2,052	2,244	2,341	2,374	2,391	2,401
3	10	0,2	0,791	1,021	1,17	1,302	1,407	1,461	1,479	1,489	1,494
3	10	0,3	0,69	0,835	0,932	1,021	1,092	1,129	1,141	1,147	1,151
3	10	0,4	0,645	0,746	0,816	0,881	0,933	0,961	0,97	0,975	0,978
3	10	0,5	0,632	0,707	0,76	0,809	0,85	0,872	0,879	0,882	0,885
3	30	0,1	2,527	0,864	0,609	0,782	1,052	1,207	1,26	1,287	1,303
3	30	0,2	1,512	0,582	0,456	0,54	0,68	0,764	0,793	0,808	0,817
3	30	0,3	1,121	0,477	0,398	0,45	0,541	0,597	0,617	0,627	0,633
3	30	0,4	0,914	0,427	0,373	0,408	0,474	0,515	0,529	0,537	0,541
3	30	0,5	0,792	0,405	0,365	0,391	0,44	0,472	0,483	0,489	0,493
3	60	0,1	4,319	1,772	0,961	0,463	0,551	0,74	0,811	0,848	0,87
3	60	0,2	2,547	1,061	0,6	0,338	0,381	0,479	0,517	0,537	0,549
3	60	0,3	1,857	0,787	0,463	0,291	0,318	0,381	0,407	0,42	0,429
3	60	0,4	1,487	0,642	0,394	0,27	0,288	0,334	0,352	0,362	0,368
3	60	0,5	1,259	0,557	0,357	0,263	0,276	0,311	0,325	0,333	0,337
5	10	0,1	1,054	1,652	1,997	2,292	2,52	2,636	2,675	2,695	2,707
5	10	0,2	0,791	1,11	1,305	1,476	1,61	1,678	1,701	1,712	1,719
5	10	0,3	0,69	0,907	1,045	1,168	1,264	1,314	1,331	1,339	1,344
5	10	0,4	0,645	0,81	0,917	1,014	1,091	1,131	1,144	1,151	1,155
5	10	0,5	0,632	0,765	0,854	0,936	1,001	1,034	1,046	1,052	1,055
5	30	0,1	2,899	0,934	0,609	0,832	1,164	1,35	1,413	1,445	1,464
5	30	0,2	1,795	0,63	0,456	0,573	0,76	0,867	0,905	0,923	0,935
5	30	0,3	1,371	0,516	0,398	0,477	0,608	0,685	0,712	0,726	0,734
5	30	0,4	1,151	0,462	0,373	0,432	0,533	0,594	0,616	0,627	0,633
5	30	0,5	1,027	0,437	0,365	0,413	0,496	0,548	0,566	0,575	0,58
5	60	0,1	4,986	2,033	1,083	0,474	0,586	0,818	0,904	0,948	0,974
5	60	0,2	3,059	1,259	0,689	0,345	0,404	0,534	0,584	0,61	0,625
5	60	0,3	2,316	0,962	0,539	0,296	0,336	0,428	0,463	0,482	0,493
5	60	0,4	1,927	0,808	0,464	0,274	0,305	0,375	0,403	0,418	0,427
5	60	0,5	1,702	0,721	0,424	0,267	0,291	0,35	0,373	0,385	0,393
8	10	0,1	1,054	1,775	2,176	2,516	2,778	2,911	2,955	2,977	2,991
8	10	0,2	0,791	1,196	1,435	1,64	1,799	1,88	1,908	1,921	1,929
8	10	0,3	0,69	0,979	1,155	1,308	1,428	1,489	1,509	1,52	1,526
8	10	0,4	0,645	0,874	1,017	1,143	1,242	1,292	1,309	1,318	1,323
8	10	0,5	0,632	0,826	0,949	1,059	1,146	1,191	1,206	1,213	1,218
8	30	0,1	3,24	1,002	0,609	0,881	1,269	1,483	1,556	1,593	1,615
8	30	0,2	2,052	0,677	0,456	0,607	0,836	0,965	1,009	1,032	1,045
8	30	0,3	1,598	0,555	0,398	0,504	0,672	0,769	0,802	0,819	0,829
8	30	0,4	1,365	0,497	0,373	0,456	0,592	0,671	0,699	0,713	0,721
8	30	0,5	1,238	0,47	0,365	0,435	0,552	0,621	0,646	0,658	0,665
8	60	0,1	5,594	2,272	1,196	0,485	0,62	0,892	0,991	1,041	1,072
8	60	0,2	3,522	1,439	0,772	0,352	0,428	0,588	0,647	0,678	0,697
8	60	0,3	2,726	1,121	0,611	0,302	0,356	0,473	0,517	0,54	0,554
8	60	0,4	2,316	0,958	0,53	0,279	0,321	0,416	0,453	0,472	0,483
8	60	0,5	2,09	0,869	0,489	0,271	0,307	0,389	0,42	0,437	0,447

2. táblázat. Teljesítmények hibájának táblázata kitöltők számának, a teszt hosszának, szintek nagyságának és a teszt nehézségének függvényében

száma több tízezres nagyságrendet jelent (az OECD PISA esetében országonként is több ezer diák tölti ki a tesztekét).

Mindkét teszt esetében próbateszteket tartanak (e próbateszteken mérik be a későbbiekben használatra kerülő itemeket), ami azt jelenti, hogy az itembank, ami rendelkezésre áll, nagyságrendileg 20–30-szorosa egy-egy évben a végül felhasználásra kerülő itemeknek. De ez azt is jelenti, hogy a korábbi évek itemjeivel együtt olyan gazdag itemállomány áll rendelkezésre, hogy akár adaptív módon is könnyen lehet mérést szervezni az itemek kimerülésének, korrumpálódásának kockázata nélkül [1].

A szimulációs eredmények megmutatták, hogy 200–300 kitöltő esetében érdemi különbségek a szintek ($K = 4$ és felette) és a megoldottságok között ($p = 0,3$ felett) már nincsenek, lényegében hasonlatos működések tapasztalunk. Az alábbi megkötések tehát gyakorlati szempontból életszerűek.

Tegyük fel tehát, hogy

1. $K = 5$: iskolai környezetben az 1-es és 5-ös közötti osztályzatokra asszociáló megkötések nem idegen megközelítések, ezeket mind a pedagógusok, mind a diákok megfelelő módon tudják értelmezni.
2. N legyen 100 és 500 között rögzített érték. Jellemzően ugyanis az OECD PISA [8] és a kompetenciamérés is [9] a próbamérések során az itemeket nagyjából ennyi diákkal tölteti ki. Az általános tapasztalatok alapján $N = 300$ megfelelő értéknek mutatkozik.
3. $p = 0,3$, $p = 0,4$ és $p = 0,5$ esetekkel dolgozunk, ugyanis ennél nehezebb vagy könnyebb tesztek jellemzően nem szokás írni – legalábbis felmérés jelleggel azok a tesztek, amiket mindenki megold, illetve senki sem tud rajta érdemben jól teljesíteni, tömegesen nem alkalmazottak.

A fenti megkötések azért is érdekesek lehetnek, mert minket alapvetően nem az érdekel, hogy 100 vagy 500 kitöltőre van szükség. A mostani infrastruktúra mellett 300 diákkal egy teljesítményt mérő tesztet kitöltetni érdemi költségekkel nem jár. A $K = 5$ megkötés nem érdemi megkötés egy iskolai rendszerben. A tesztek nehézségének 30%–70% közötti rögzítése szintén kellően bő keretet szolgáltathat tesztek összeállításához.

Megfigyelhető (3. táblázat), hogy egy nehezebb tesztnél (30%-os megoldottság) 54 kérdéssel érhető el a megfelelő megbízhatósági szint. Könnyebb tesztnél (40%-os megoldottság) 43 ítemes teszt mutatja az alsó határt, míg egy alapvetően igazságos, 50%-os megoldási szintre beállított teszt esetében 38 kérdésből álló tesztetől már elfogadható szintet érhetünk el.

A fenti táblázatokról látható, illetve az általános tapasztalatok [8, 9] azt mutatják, hogy papír-ceruza tesztek esetében akár 60–70 kérdés is megtalálható a

	0,3	0,4	0,5
30	0,712	0,616	0,566
31	0,699	0,604	0,555
32	0,686	0,593	0,545
33	0,673	0,582	0,535
34	0,661	0,572	0,526
35	0,650	0,563	0,517
36	0,639	0,553	0,509
37	0,629	0,544	0,501
38	0,618	0,536	0,493
39	0,609	0,527	0,485
40	0,599	0,519	0,478
41	0,590	0,512	0,471
42	0,582	0,504	0,465
43	0,573	0,497	0,458
44	0,565	0,490	0,452
45	0,557	0,484	0,446
46	0,550	0,477	0,440
47	0,542	0,471	0,434
48	0,535	0,465	0,429
49	0,528	0,459	0,423
50	0,522	0,453	0,418
51	0,515	0,447	0,413
52	0,509	0,442	0,408
53	0,502	0,437	0,403
54	0,496	0,432	0,399
55	0,491	0,427	0,394
56	0,485	0,422	0,390
57	0,479	0,417	0,385
58	0,474	0,412	0,381
59	0,469	0,408	0,377
60	0,463	0,403	0,373

3. táblázat. Könnyebb tesztek minimális itemszáma

tesztfüzetekben. Látható azonban, hogy adaptív módon ennek töredékével, 40 kérdéssel már egy 35–40%-os szórással, hibával rendelkező teszt is összeállítható. Egy ilyen adaptív teszt az alábbi előnyökkel rendelkezik:

1. Fele annyi itemmel, fele annyi idő alatt tudunk felmérést készíteni.
2. A diákok a nekik megfelelő szintű feladatokat kapják [3], tehát nem unják meg a feladatokat, jellemzően mindenki a számára még kihívást jelentő szinten dolgozik.
3. Ha van a felmérésre fennmaradó idő, akkor a próbafelmérés során használandó itemek azok, amelyeket a diákok a fennmaradó időben oldhatnak – így a következő mérés próbaidőszaka az előző időszakkal összerakható, párhuzamosan vezényelhető.

A fenti előnyök fenntartása mellett egy második példát is bemutatunk. Elsősorban felsőoktatásban vagy szakképzési területeken fordulnak elő olyan tesztek, melyek szintén adaptívvá tehetők és valójában $K = 2$ szintet követelnek meg (teljesített vagy nem teljesített). Ez esetben tehát nem feltétlenül osztályzatokat képzelünk el, hanem egy elvárt szint teljesítését tűzzük ki célként.

Ilyen esetben jellemzően nehezebbek a teljesítések, tehát $p = 0,2$, $p = 0,25$ és $p = 0,3$ eseteket fogjuk bemutatni (azaz a teljesítéshez egy 20%-os sikerességi határt veszünk, mint legnehezebb teljesítési szintet). Ezt értelemszerűen úgy is interpretálhatjuk, hogy a vizsga teljesítéséhez legalább 80%-os teljesítményre van szükség.

A megoldók száma továbbra is legyen $N = 300$ főben rögzítve, mely akár felsőoktatási, akár szakképzési keretek között életszerű feltételezés.

Bár a rendszer szigorúbb, itt is 0,5-ös megbízhatóságot fogunk minimum hátrásként megadni – tehát vizsgázónként hasonlóan pontos becslést szeretnénk az adaptív tesztől átlagosan elvárni.

E második esetben (4. táblázat) látható, hogy 30%-os, némileg megengedőbb teljesítési szint esetében már 37 kérdésnél elérhető a 0,5-ös megbízhatóság szint. Kicsit szigorítva, $p = 0,25$ -nél ehhez minimum 46 itemre van szükség, illetve $p = 0,2$ esetében minimum 59 item lesz az alsó határ.

Azonban ez azt is jelenti, hogy adaptív módon egy teljesített/nem teljesített rendszer működtetésénél 60 item már elegendő annak kiderítésére, hogy az adott vizsgázó valóban megfelelő szinten helyezkedik-e el.

Abban az esetben ugyanis, ha 60 item segítségével egy nehezebb tesztet választunk, ebből már a teljesítményt mérő modellek segítségével a megfelelő képességszintje számítható a vizsgázónak – abból pedig láthatóvá válik, hogy eléri-e a számunkra elfogadható szintet vagy sem.

	0,2	0,25	0,3
30	0,726	0,625	0,557
31	0,713	0,614	0,547
32	0,700	0,603	0,538
33	0,688	0,593	0,529
34	0,677	0,584	0,520
35	0,666	0,575	0,512
36	0,656	0,566	0,504
37	0,646	0,557	0,497
38	0,637	0,549	0,490
39	0,628	0,541	0,483
40	0,619	0,534	0,476
41	0,610	0,527	0,470
42	0,602	0,520	0,464
43	0,594	0,513	0,458
44	0,587	0,506	0,452
45	0,579	0,500	0,446
46	0,572	0,494	0,441
47	0,565	0,488	0,436
48	0,558	0,482	0,431
49	0,552	0,477	0,426
50	0,546	0,471	0,421
51	0,539	0,466	0,416
52	0,533	0,461	0,412
53	0,528	0,456	0,407
54	0,522	0,451	0,403
55	0,517	0,447	0,399
56	0,511	0,442	0,395
57	0,506	0,438	0,391
58	0,501	0,433	0,387
59	0,496	0,429	0,384
60	0,491	0,425	0,380

4. táblázat. Nehezebb tesztek minimális itemszáma

6. Konklúzió

Megállapítható tehát, hogy még akár igen nehéz tesztek, a diákok számára kihívást jelentő kérdéseket alkalmazva is 60 kérdést összeállítva megfelelő pontosság érhető el ahhoz, hogy a megoldott feladatokból visszszámítva a diák képesség-pontját, általánosságban elfogadható értékelést tudjunk biztosítani.

Ezzel szemben viszont, jellemző iskolai körülményeket szimulálva a tesztekhez ($K = 5$, tehát 5 fokozatú értékelést alkalmazva, $p = 0,4$, illetve $p = 0,5$, azaz átlagos tesztnehézséget feltételezve) ez az itemszám lényegesen kevesebb, 40–50 darabos szinten áll meg. Ez lényegében megegyezik azokkal a mutatókkal, melyekkel mind a nemzetközi [8], mind a hazai mérések [9] általánosságban találkozunk.

Továbbá ez azt is jelenti, hogy egy adaptív teszt esetében a mostani mérési idő jelentősen csökkenthető (a hivatkozott mérések [8], [9] jellemzően tudásterületenként 50–60 itemet használnak) – és a fennmaradó idő a próbaidőszak itemeinek bemérésére fordítható.

Ez azt is jelenti, hogy egy-egy időszakban nem kell kétszeres logisztikát alkalmazni (próbaméréseket tartani az itemek tesztelésére), hanem az amúgy is mérésre fordított időben lehet a tesztelést megvalósítani. Tehetjük ezt akár úgy is, hogy a valós tesztitemek közé tesszük véletlenszerű helyekre a bemérendő próbafeladatokat [1] annak érdekében, hogy a kifáradást elkerüljük, a diákok érdeklődését folyamatosan fenntartsuk. Ez általánosságban is teljesülhet olyan tesztekkel, melyek rövidebbek és folyamatosan olyan kérdéseket adnak a diákoknak, amik a tudásszintjüknek éppen megfelelnek.

Megfigyelhető tehát, hogy az adaptív mérések során megfogalmazott általános nehézségek (itembank mérete, illetve az itemek kifáradásának kérdése) egy jól szervezett logisztikával, illetve a korábban már bemért itemek felhasználásával általánosságban orvosolható – és a tapasztalatok alapján még akár a szélsőségesebb megoldási mutatókkal bíró alanyok (20%-os megoldottság, tehát nehéz körülmények) is a mostani teszthosszok segítségével bemérhetők.

Köszönetnyilvánítás

A kutatás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

Hivatkozások

- [1] G.J. CIZEK AND J.A. WOLLACK: *Handbook of Quantitative Methods for Detecting Cheating on Tests*, Routledge, (2016). DOI: 10.4324/9781315743097
- [2] P.M.C. HARRISON, T. COLLINS AND D. MÜLLENSIEFEN: *Applying modern psychometric techniques to melodic discrimination testing: Item response theory, computerised adaptive testing, and automatic item generation*, Scientific Report Vol. **7** No. **1**, article number: 3618 (2017). DOI: 10.1038/s41598-017-03586-z
- [3] G.G. KINGSBURY: *Adaptive Item Calibration: A Process for Estimating Item Parameters Within a Computerized Adaptive Test*, Proceedings of the 2009 GMAC Conference on Computerized Adaptive Testing, (2009).
- [4] G.F. KUDER AND M.W. RICHARDSON: *The theory of the estimation of test reliability*, Psychometrika Vol. **2** No. **3**, pp. 151–160 (1937). DOI: 10.1007/BF02288391
- [5] J.W. VAN DER LINDEN AND C.A.W. GLAS: *Capitalization on Item Calibration Error in Adaptive Testing*, Applied Measurement in Education Vol. **13** No. **1**, pp. 35–53 (2000). DOI: 10.1207/s15324818ame1301_2
- [6] S.L. WISE: *A Critical Analysis of the Arguments for and against Item Review in Computerized Adaptive Testing*, ERIC, New York, (1996).
- [7] B.D. WRIGHT: *Solving Measurement Problems with the Rasch Model*, Journal of Educational Measurement, Vol. **14** No. **2**, pp. 97–116 (1977). DOI: 10.1111/j.1745-3984.1977.tb00031.x
- [8] OECD, PISA <http://www.oecd.org/pisa/>
- [9] Országos kompetenciamérés <https://www.oktatas.hu/koznevelés/merések/kompetenciamérés>



Takács Szabolcs 1980-ban született Marcaliban, 1998-ban a Berzsényi Dániel Gimnáziumban érettségizett az utolsó 4 évfolyamos speciális matematika tantervű osztályban (megjegyzés: Vizvári Béla az első speciális matematika tantervű osztályban érettségizett, szintén a Berzsényiben).

2004-ben végzett az ELTE TTK-n Alkalmazott matematikusként. Első munkahelyein statisztikusként dolgozott (Fővárosi Munkaügyi Központ, statisztikai referens, majd Sulinova Kht- később Oktatási Hivatal mérésértékelési osztály, statisztikus). 2014-ben doktorált az ELTE TTK Matematika Doktori Iskolájában, 2008 óta oktat a Károli Gáspár Református Egyetemen a Pszichológiai Intézet Általános Lélektani és Módszertani tanszékén statisztikát. Egyetemi oktatói állása mellett 2013 óta az ANIMA cégcsoporttal dolgozik, ahol biztonságtechnológiával, biztonságtechnikai fejlesztésekkel, ipari és nyomozati innovációval foglalkoznak.

2016 óta az Oktatási Hivatalban digitális mérések szakértőjeként dolgozik, itt a különböző országos mérések papír-ceruza tesztről digitális formára történő mérési átállítását készítik elő.

2019 óta a CIVIL biztonsági szolgálatnál is dolgozik szakértőként, itt digitális oktató- és mérőterek megvalósításán, valamint munkahelyi beválás előrejelzésének rendszerein dolgoznak együtt egy több éves fejlesztési projekt munkatársaival (pszichológusokkal, mérnökökkel, biztonsági szakemberekkel).

TAKÁCS SZABOLCS

Károli Gáspár Református Egyetem, BTK, Pszichológiai Intézet, Általános Lélektani és Módszertani Tanszék,
1037, Budapest, Bécsi út 324.
takacs.szabolcs.dr@gmail.com



T. Kárász Judit 1979-ben született Budapesten, 2004-ben az ELTE TTK-n végzett alkalmazott matematikus szakon.

2004-től a Sulinova Kht. Értékelési Központjának, később Oktatási Hivatal, Köznevelési Mérés Értékelési Osztályának statisztikus munkatársa. Főbb feladatai az Országos kompetenciamérés statisztikusi teendőinek ellátása, a kiegészítő mérés elemzésétől a különböző szintű jelentések adatainak előállításáig. További feladatai az Idegnyelvi és Célnyelvi mérés, illetve a Középfokú felvételi központi írásbeli feladatsorai feladatainak elemzése. Munkája során részt vett a köznevelés keretrendszeréhez kapcsolódó mérési-értékelési és digitális fejlesztések, innovatív oktatásszervezési eljárások kialakítása, megújítása (EFOP 3.2.15.) és a Tematikus együttműködés erősítése a köznevelés és felsőoktatás terén a Kárpát-medence szomszédos országaival (EFOP 3.10.1.) projektekben. 2019-től az ELTE PPK Neveléstudományi Doktori Iskola hallgatója, kutatási témája az Adaptív teljesítménymérési algoritmusok kidolgozása az Országos kompetenciamérés adatainak felhasználásával. Eközben részt vett A köznevelés módszertani megújítása a végzettség nélküli iskolaelhagyás csökkentése céljából a köznevelési intézményekben (EFOP-3.1.2-16) és A felsőoktatás hozzáférhetőségének javítása, komplex fenntartható tanulástámogatási környezet kialakítása, az oktatás innovatív megújítása az ELTE telephelyein (EFOP-3.4.3-16) projektekben. 2020-ban elnyerte az Új Nemzeti Kiválóság Program ösztöndíját. Óraadóként oktat a KRE BTK Pszichológiai Intézetében statisztikát, az ELTE PPK Neveléstudományi Intézetében társoktatóként kutatómódszertani alapokat.

T. KÁRÁSZ JUDIT

ELTE, PPK, Neveléstudományi Doktori Iskola,
1075, Budapest, Kazinczy utca 23-27.
t.karasz.judit@ppk.elte.hu

THE RELATIONSHIPS OF THE MINIMUM LENGTH, ERROR, EVALUATION LEVELS
AND NUMBER OF RESPONDENTS OF ADAPTIVE TESTS WITH GENERAL
SOLUTION PROBABILITY

JUDIT KÁRÁSZ T., SZABOLCS TAKÁCS

Correlations between the minimum length, error, evaluation level and number of solvers of adaptive tests - with overall solution rate Our article basically aims to create a general formalism that can be used to address one of the problems of digitization of paper-and-pencil-based tests. The developed formalism was constructed in a general way, but the results are also described in a practical example.

In our article, we present the limitations and benefits of a future adaptive version of a survey based essentially on a paper-and-pencil test, such as the OECD PISA [8] and the National Assessment of Basic Competencies [9]. In the case of international measurements, the development work that has prepared this direction has already begun, and the recent online educational experience has paved the way for the transition to digital and then adaptive measurement in the case of the National Assessment of Basic Competencies.

The necessary item-level logistics (task bank, modeling environment) are basically available. However, the literature generally covers these technical details - as well as how many people are needed for reliability. In our article, we were not interested in this question, because the itembank will be of sufficient size, or typically in a national measurement, the sufficient filling will be given by default. In contrast, the most important question for us is to what extent the test can be shortened to a test that is the same - or better, more reliable than the current one. So we are not interested in the number of respondents, but in the length of the test, we performed simulation calculations based on the commonly published indicators of the current [8], [9] measurements.

KÉTELEMŰ CIKLUSOK EGYUTAS GYÁRTÓRÉSZELEGBEN

KOVÁCS GERGELY, SAM MOSALLAEIPOUR, MAZYAR GHADIRI NEJAD,
VIZVÁRI BÉLA

Ebben a tanulmányban egy egyutas automatizált gyártórészlellegel (FAMC) foglalkozunk, ahol minden munkadarabot minden gépen meg kell munkálni, minden munkadarab esetében a gépek sorrendje azonos (flow shop), és a gyártórészlellegben belül a munkadarabok automatizált mozgatását egy ipari robot végzi. Gyártórészlellegben minden gép külön bemeneti és kimeneti tárolóval rendelkezik, így növelve a gépek kihasználtságát. A rendszer kulcsa a gépek kiszolgálásához szükséges robottevékenység: a munkadarabok szállítása, a gépek be- és kirakodása. A robotmozgás optimalizálása ún. mozgatósi sorrend mátrixok segítségével történik. Két munkadarab elkészítésének minden lehetséges sorrendjéhez kiszámítjuk a ciklusidő általános képletét és ezek alsó korlátját, illetve meghatározzuk az alsó korlát elérésének feltételét.

1. Bevezetés, irodalmi áttekintés

Az *open shop* ütemezési feladatnál minden munkadarabot minden géppel meg kell munkálni, de a gépek megmunkálások szerinti sorrendje tetszőleges. A *flow shop* (azaz egyutas) feladatnál azonban minden munkadarab esetében azonos a megmunkálásokat végző gépek sorrendje. Ha egy egyutas gyártórészlellegben a munkadarabok gépek közötti mozgatását valamilyen automatizált rendszer végzi (pl. szállítószalag, robot stb.), akkor ezt *egyutas automatizált gyártórészlellegnek* (angolul flow shop automated manufacturing cell – FAMC) nevezik.

Automatizált gyártórészlellegünkben CNC-gépek munkálnak meg munkadarabokat, ahol a munkadarabok gépek (illetve tárolóik) közötti mozgatását egy robot végzi, ahogy [6]-ban is. Hasonló gyártórészlellegeket széles körben használnak a külföldi gyártási folyamatokban, például a vegyiparban vagy a fémmegmunkálás során, ahol egyszerre több hasonló terméket állítanak elő [4], [8].

A klasszikus ütemezési problémákban csak a munkadarabok megmunkálási ideje számít, a munkadarabok gépek közötti mozgatása, gépekre helyezése és gépekről levétele nem [12]. Azonban egy *automatizált gyártórészlelleg* (automated manufacturing system – AMS) problémában tekintettel kell lenni a munkadarabok szállítási idejére, a be- és kipakolási időre, sőt az üres robotmozgás sem elhanyagolható [9].

Ha a gépekhez tárolókat csatlakoztatunk, akkor ezzel egy géphez addig is vihető munkadarab, amíg a gép egy másik munkadarabbal foglalkozik. Ezzel növelhető a rendszer rugalmassága, egy adott lépésben növelhető a lehetőségek száma [5], [7]. Ugyan az AMS rendszereknek széles irodalma van, kevés tanulmány foglalkozik egyedi tárolókkal rendelkező gépekkel [15].

Dawande et al. [1] tanulmányukban több robotra vonatkozó egységes ciklust vizsgáltak, és adtak alsó korlátot a ciklus idejére. Drobouchevitch et al. [2]-ben olyan AMS-t vizsgáltak, ahol a gépek egyedi, egységnyi kapacitású kimeneti tárolókkal rendelkeznek, a robot pedig kettős karral. Zeballos [16]-ban olyan matematikai modellt dolgozott ki egy AMS ütemezésére, melyben figyelembe vette a gépek karbantartását is. [13]-ban Rajapakshe et al. a termelékenység és a gépek elrendezésének kapcsolatát vizsgálták.

Ha egy automatizált gyártórendszerben a munkadarabok mozgását robot végzi, akkor annak neve *robottal kiszolgált gyártórendszer* (robotic manufacturing system – RMS). Ezen a területen Jolai et al. [3]-ban adtak azonos munkadarabok tömeggyártására vonatkozó ciklikus robotmozgási eljárást. Zhou és Li a [17]-ben felírt nemlineáris modellel az átlagos ciklusidőre kapott alsó korlátot. [10]-ben Nejad et. al matematikai modelljüket egy jól ismert metaheurisztikus módszerrel, a szimulált hűtéssel (simulated annealing) oldották meg. Lineáris elrendezésű gyártórészleg esetére utazó ügynök alapú modellt fejlesztettek ki [11]-ben a ciklusidő minimalizálására. Egy másik tanulmányukban egy többcélú feladatot tárgyaltak: a ciklusidő és a teljes termelési költség egyidejű minimalizálását [9].

Ebben a cikkben robottal kiszolgált és tárolókkal rendelkező, két- és háromgépes egyutas gyártórészleg ciklusidejének optimalitási feltételét vizsgáljuk ciklusonként két munkadarab esetén. Minden munkadarabot minden gépnek meg kell munkálnia, előre adott sorrendben. A ciklusidőt az határozza meg, hogy a robot a gépek közötti mozgásokat milyen sorrendben végzi. Ezt a sorrendet egy úgynevezett *mozgási sorrend mátrix* (angolul sequential part production matrix – SPPM) segítségével határozzuk meg. Az egyes, mátrixokkal leírt sorrendek ciklusidejének alsó határát is megadjuk.

A cikk felépítése az alábbi. A következő részben a probléma definiálását, a feltételeket és jelöléseket ismertetjük. A 3. és 4. szakasz a két- és háromgépes RMS mozgási sorrend mátrixait és ezek ciklusidő számításait tartalmazza. A tanulmányt összefoglaló zárja.

2. Feltételek és jelölések

A robottal kiszolgált, egyutas gyártórendszerünk feltételei az alábbiak. A rendszer automatikus üzemmódban egyetlen fajta terméket gyárt, ezért a megmunkálási idők függetlenek a munkadarabtól. A munkadarabokat egymás után több géppel kell megmunkálni, a gépek sorrendje kötött. Minden gép bemeneti és kimeneti tárolóval rendelkezik, ezek kapacitása 1. Ezen felül egy-egy nagyobb bejövő

és kimenő raktár is van a gyártórészleg elején és végén. A munkadarabokat egy robot szállítja a bejövő raktárból a gépekre, a gépek között, és a gépekről a kimenő raktárba. A munkadarabok előbb a gépek tárolóiba kerülnek, onnan kerülnek a gépre. A tárolóban lévő munkadarab egyből rákerül az üres gépre, ennek ideje 0. Minden ciklusban két munkadarab készül el. Minden ciklus azzal a lépéssel kezdődik, amikor az első munkadarab a bejövő raktárból az első gépre kerül.

A két-, vagy háromgépes feladat matematikai leírásában az alábbi jelöléseket használjuk:

P_i a munkadarabok jele, $i = 1, 2$.

M_j a gépek jele, $j = 1, 2$, vagy $j = 1, 2, 3$.

δ a robot mozgásának ideje két szomszédos gép között, a bejövő raktár és az első gép, illetve az utolsó gép és a kimenő raktár között.

ε idő alatt tesz át/vesz ki a robot a tárolóba/-ból egy munkadarabot.

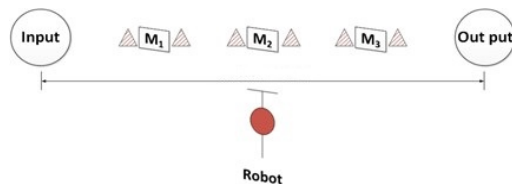
p_j a j -edik gép megmunkálási ideje, $j = 1, 2$, vagy $j = 1, 2, 3$.

T_s az s mozgatási sorrendhez tartozó ciklusidő, $s = 1, 2, \dots$

w_k a robot várakozási ideje a k -edik megmunkálásnál, $k = 1, 2, \dots, 4$, vagy $k = 1, 2, \dots, 6$.

Természetesen a berakodáskor a robotnak nem kell várakoznia. Várakozás akkor fordulhat elő, ha a robotnak egy gépnél meg kell várnia, hogy a gép végezzen az aktuális megmunkálással, és átadja a munkadarabot szállításra. (Mivel elvileg minden munkadarab minden gépnél várakozhat, ezért fut 4-ig, illetve 6-ig a k index. Ebből az első 2–3 érték az első munkadarabhoz, az utolsó 2–3 érték a második munkadarabhoz tartozik.) A várakozási idő akkor pozitív, ha a robot a berakodás után gyorsabban visszatér ugyanahhoz a géphez, mint az adott gép megmunkálási ideje.

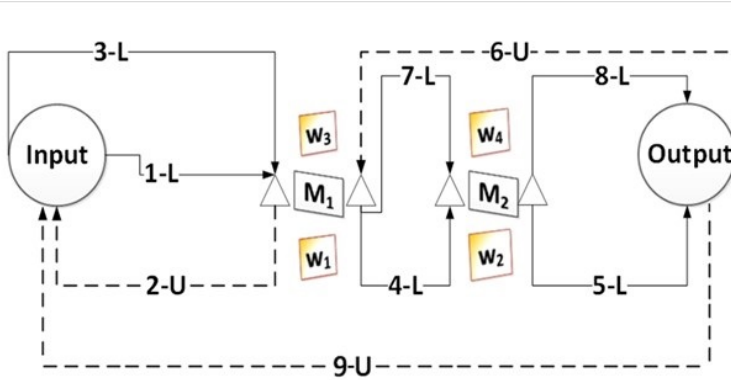
Az 1. ábra a vizsgált rendszer szerkezetét mutatja három gép esetén.



1. ábra. A robottal kiszolgált gyártórészleg szerkezete három gép esetén.
A háromszögek a gépek tárolóit szimbolizálják.

3. Robottal kiszolgált, kétgépes, egyutas gyártórészleg

Két munkadarabos ciklusban a robotnak hat anyagmozgatást kell végeznie: mindkét munkadarabot el kell vinnie mindkét géphez, majd a kimenő raktárhoz (output). Ezek sorrendjét tartalmazza a mozgatósi sorrend mátrix. A mátrix két sora az egyes munkadarabokhoz (P_1 és P_2) tartozik, első két oszlopa az M_1 és M_2 gépekhez, harmadik oszlopa a kimenő raktárhoz (output) köthető. A mátrixban szereplő számok pedig azt jelentik, hogy melyik mozgatósi lépés a sorrendben.



2. ábra. A kétgépes feladat 4. mozgatósi sorrendjének sematikus rajza.

A mozgatósi lépések egy lehetséges sorrendje látható a 2. ábrán. Az L -vel jelölt lépések során a robot munkadarabot mozgat, az U -val jelölt lépések során üresen mozog.

A ciklus első lépésében az első, P_1 munkadarab a bejövő raktárból az első, M_1 gépre kerül, tehát a mátrix első eleme lesz az 1-es: $\begin{bmatrix} 1 & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$. A második lépésben két dolog történhet: a robot vagy vár M_1 -nél, amíg az be nem fejezi a munkát, és utána M_2 -hez viszi; vagy ehelyett visszamegy a bejövő raktárhoz, ahonnan P_2 -t M_1 -hez viszi. A 2. ábrán ez utóbbi látható, így a mátrixban a 2-es szám a második sor első oszlopába kerül: $\begin{bmatrix} 1 & - & - \\ 2 & - & - \end{bmatrix}$. Így a harmadik lépésben nincs választási lehetőség, a robotnak P_1 -et kell elvinnie M_1 -től M_2 -hez. Ezután azt választjuk, hogy a robot M_2 -nél várakozik, majd a kész P_1 munkadarabot a kimenő raktárba viszi: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & - & - \end{bmatrix}$. Ahhoz, hogy a két munkadarabos ciklus befejeződhessen, az ötödik lépésben P_2 átkerül M_1 -ről M_2 -re. Ezután a robot megvárja, míg M_2 végeztével a munkával, majd az utolsó lépésben elviszi P_2 -t a kimenő raktárba: $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

A két munkadarabos, kétgépes feladatnak öt lehetséges mozgatósi sorrendje van. Minden mátrix bal felső sarkában 1-es, jobb alsó sarkában 6-os szerepel. A maradék négy számnak pedig úgy kell elhelyezkednie, hogy a számok a mátrix minden sorában és oszlopában növekvő sorrendben legyenek, hiszen sem a gépekkel, sem a munkadarabokkal egymást előzni nem lehet. (Ez az 1-es és a 6-os miatt a két szélső oszlopban biztosan teljesül.) A lehetséges sorrendek mátrixai a következő táblázatban láthatók:

a sorrend sorszám	1.	2.	3.	4.	5.
sorrendi mátrix	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

1. táblázat. A lehetséges mozgatósi sorrend mátrixok két munkadarabra kétgépes gyártórészleg esetén.

A sorrendek többségében a munkadarabok párhuzamosan készülnek. Viszont az első sorrendben P_2 gyártása csak P_1 teljes elkészülte után kezdődik el. Ebben az esetben a gépek tárolóinak nincs szerepe, így a feladat a tároló nélküli kétgépes RMS probléma, amit Sethi et al. [14]-ben tárgyalnak.

A továbbiakban mind az öt sorrend esetén kiszámítjuk a két munkadarabos ciklus hosszát. Célunk ezzel az optimális sorrend megtalálása.

3.1. TÉTEL. *A különböző robotmozgási sorrendekhez tartozó ciklusidők az alábbiak:*

$$\begin{aligned} T_1 &= 12\delta + 12\varepsilon + 2(p_1 + p_2), \\ T_2 &= 10\delta + 10\varepsilon + p_1 + p_2 + \max\{4\delta + 2\varepsilon, p_1, p_2\}, \\ T_3 &= 6\delta + 6\varepsilon + p_1 + \max\{6\delta + 6\varepsilon + p_1, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2, 2p_2\}, \\ T_4 &= 6\delta + 6\varepsilon + p_2 + \max\{6\delta + 6\varepsilon + p_2, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2, 2p_1\}, \\ T_5 &= 6\delta + 6\varepsilon + \max\{6\delta + 6\varepsilon, 2\delta + 2\varepsilon + 2p_1, 2\delta + 2\varepsilon + 2p_2, 2p_1 + p_2, p_1 + 2p_2\}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Az egyes esetekre vonatkozó ciklusidő számítások nagyon hasonlóak, ezért terjedelmi okok miatt most csak a 2. ábrán is látható, negyedik sorrend ciklusidejét, T_4 -et számítjuk ki, ez alapján a többi képlet is könnyen meghatározható. A számítások könnyebb érthetősége érdekében minden egyes lépés hossza a lépés leírása végén szerepel. A ciklusidőt úgy kapjuk meg, hogy ezeket az időket egyszerűen összeadjuk. A negyedik sorrendhez tartozó robotmozgások a következők:

1. A robot felveszi a P_1 munkadarabot a bejövő raktárban, elviszi az M_1 géphez, és ott leteszi: $\varepsilon + \delta + \varepsilon$.
2. A robot üresen visszatér M_1 -től a bejövő raktárhoz: δ .
3. Felveszi P_2 -t, elviszi M_1 -hez, és ott leteszi: $\varepsilon + \delta + \varepsilon$.

4. A robot megvárja, amíg M_1 elkészül a P_1 munkadarabbal (ha kell): w_1 .
5. Felveszi P_1 -et, elviszi M_2 -höz, és ott leteszi: $\varepsilon + \delta + \varepsilon$.
6. M_2 -nél megvárja, amíg az végez P_1 -gyel: $w_2 = p_2$.
7. Felveszi P_1 -et, elviszi a kimenő raktárhoz, és ott leteszi: $\varepsilon + \delta + \varepsilon$.
8. A robot üresen visszatér M_1 -hez: 2δ .
9. M_1 -nél megvárja, amíg az végez P_2 -vel (ha kell): w_3 .
10. Felveszi P_2 -t, elviszi M_2 -höz, és ott leteszi: $\varepsilon + \delta + \varepsilon$.
11. A robot megvárja, amíg M_2 elkészül P_2 -vel: $w_4 = p_2$.
12. Felveszi P_2 -t, elviszi a kimenő raktárhoz, és ott leteszi: $\varepsilon + \delta + \varepsilon$.
13. A robot visszatér a bejövő raktárhoz: 3δ .

Így a negyedik sorrend ciklusideje: $T_4 = 12\delta + 12\varepsilon + \sum_{k=1}^4 w_k$. A ciklusidő a w_k értékeken múlik. $w_2 = p_2$ és $w_4 = p_2$, de w_1 és w_3 értéke lehet többféle is, ami a p_1 , p_2 és $2\delta + 2\varepsilon$ értékek egymáshoz való viszonyán múlik: $w_1 = \max\{0, p_1 - (2\delta + 2\varepsilon)\}$ és $w_3 = \max\{0, p_1 - (4\delta + 4\varepsilon + p_2)\}$.

1. Ha $p_1 \leq 2\delta + 2\varepsilon$, akkor $w_1 = w_3 = 0$, így $T_4 = 12\delta + 12\varepsilon + 2p_2$.
2. Ha $2\delta + 2\varepsilon < p_1 \leq 4\delta + 4\varepsilon + p_2$, akkor $w_1 = p_1 - 2\delta - 2\varepsilon$ és $w_3 = 0$, így $T_4 = 10\delta + 10\varepsilon + p_1 + p_2$.
3. Végül, ha $4\delta + 4\varepsilon + p_2 < p_1$, akkor $w_1 = p_1 - 2\delta - 2\varepsilon$ és $w_3 = p_1 - 4\delta - 4\varepsilon - p_2$, így $T_4 = 6\delta + 6\varepsilon + 2p_1 + p_2$.

A fenti várakozás értékek alapján megfigyelhető, hogy $w_1 + w_3 + 6\delta + 6\varepsilon + p_2 = \max\{6\delta + 6\varepsilon + p_2, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2, 2p_1\}$, ami alapján $T_4 = 6\delta + 6\varepsilon + p_2 + \max\{6\delta + 6\varepsilon + p_2, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2, 2p_1\}$. \square

Ahogy a következő tételben látható, a lehetséges sorrendek között van dominancia.

3.2. TÉTEL. Minden p_1 és p_2 érték esetén $T_1 > T_5$ és $T_2 > T_5$.

Bizonyítás. A T_5 lehetséges értékei a következők: $12\delta + 12\varepsilon$, $8\delta + 8\varepsilon + 2p_1$, $8\delta + 8\varepsilon + 2p_1$, $6\delta + 6\varepsilon + 2p_1 + p_2$, $6\delta + 6\varepsilon + p_1 + 2p_2$. Ezek mindegyikénél (tehát a maximumánál is) nagyobb a $T_1 = 12\delta + 12\varepsilon + 2p_1 + 2p_2$.

A T_2 lehetséges értékei a következők: $14\delta + 12\varepsilon + p_1 + p_2$ és $10\delta + 10\varepsilon + 2p_1 + 2p_2$. A T_2 első értéke nagyobb, mint T_5 lehetséges első értéke, illetve T_2 második értéke nagyobb, mint T_5 utolsó 4 értéke. Vagyis T_2 értékeinek maximuma nagyobb, mint T_5 összes értéke, azaz $T_2 > T_5$. \square

3.1. *Megjegyzés.* Hasonló dominancia T_3 , T_4 és T_5 értékei között nem figyelhető meg.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. *Egy konkrét feladat optimális megoldása tehát úgy kapható meg, hogy ki kell számolni a T_3 , T_4 és T_5 értékeket, majd ezek közül ki kell választani a legkisebbet.*

Egy adott mozgatási sorrendhez tartozó ciklusidő alsó korlátját úgy értelmezzük, hogy ebben az esetben egy munkadarab megmunkálási ideje kevesebb, mint az az idő, ami a robotnak az adott géphez való visszatéréshez szükséges. Ebben az esetben a várakozási idő 0, a robot felhasználása ekkor a leghatékonyabb.

3.3. TÉTEL. *A nem dominált sorrendek alsó korlátai (jelölésben T_{iL}) a következők: $T_{3L} = 12\delta + 12\varepsilon + 2p_1$, $T_{4L} = 12\delta + 12\varepsilon + 2p_2$, és $T_{5L} = 12\delta + 12\varepsilon$.*

Bizonyítás. A 3.1. tételhez hasonlóan most is csak a negyedik sorrend esetét bizonyítjuk, a többi bizonyítása hasonló. Korábban láttuk, hogy a ciklusidő $12\delta + 12\varepsilon + \sum_{k=1}^4 w_k$, ahol $w_2 = p_2$, és $w_4 = p_2$ fix értékek. A ciklusidő akkor a legkisebb, ha a maradék $w_1 = \max\{0, p_1 - (2\delta + 2\varepsilon)\}$ és $w_3 = \max\{0, p_1 - (4\delta + 4\varepsilon + p_2)\}$ várakozások a lehető legkisebbek, azaz értékük 0. Ennek szükséges feltétele: $p_1 \leq 2\delta + 2\varepsilon$. \square

3.2. KÖVETKEZMÉNY. *A teljes feladat alsó korlátja $T_L = \min\{T_{3L}, T_{4L}, T_{5L}\} = T_{5L} = 12\delta + 12\varepsilon$.*

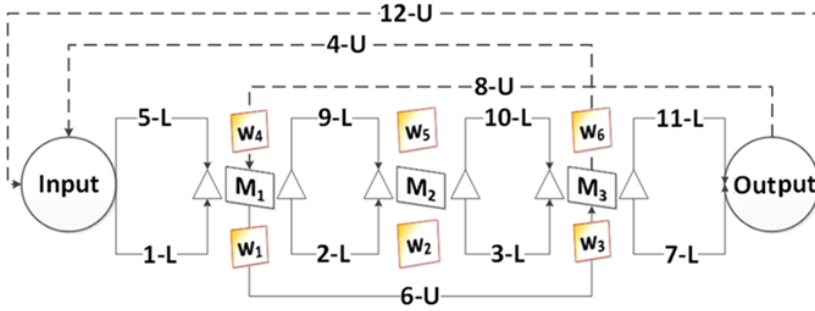
4. Robottal kiszolgált, háromgépes, egyutas gyártórészleg

Három gép esetén a két munkadarabos ciklushoz 14 különböző sorrend van, ezek a 2. táblázatban láthatók. Minden mátrix bal felső sarkában az 1-es, jobb alsó sarkában a 8-as szerepel, és továbbra is igaz, hogy a számoknak soronként és oszloponként növekvőnek kell lenniük.

a sorrend sorszáma	1.	2.	3.	4.	5.
sorrendi mátrix	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
a sorrend sorszáma	6.	7.	8.	9.	10.
sorrendi mátrix	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
a sorrend sorszáma	11.	12.	13.	14.	
sorrendi mátrix	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 6 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$	

2. táblázat. A lehetséges mozgatási sorrend mátrixok két munkadarabra háromgépes gyártórészleg esetén.

A 3. ábrán a háromgépes feladat 2. sorrendjének robotmozgásai láthatók.



3. ábra. A háromgépes feladat 2. mozgási sorrendjének sematikus rajza.

4.1. TÉTEL. A különböző robotmozgási sorrendekhez tartozó ciklusidők az alábbiak:

$$T_1 = 16\delta + 16\varepsilon + 2p_1 + 2p_2 + 2p_3,$$

$$T_2 = 14\delta + 14\varepsilon + p_1 + 2p_2 + p_3 + \max\{6\delta + 2\varepsilon, p_1, p_3\},$$

$$T_3 = 12\delta + 12\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3 + \max\{6\delta + 4\varepsilon + p_1, p_3, 2\delta + 2\varepsilon + p_1 + p_2\},$$

$$T_4 = 8\delta + 8\varepsilon + p_1 + p_2 + \max\{8\delta + 8\varepsilon + p_1 + p_2, 6\delta + 6\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3, 2p_3\},$$

$$T_5 = 12\delta + 12\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3 + \max\{6\delta + 4\varepsilon + p_3, 2\delta + 2\varepsilon + p_2 + p_3, p_1\},$$

$$T_6 = 12\delta + 12\varepsilon + p_1 + p_3 + \max\{8\delta + 4\varepsilon, 4\delta + 2\varepsilon + p_1, 4\delta + 2\varepsilon + p_3, p_2 + p_3, 2p_2, p_1 + p_2\},$$

$$T_7 = 8\delta + 8\varepsilon + p_1 + \max\{10\delta + 8\varepsilon + p_2, 8\delta + 6\varepsilon + p_2 + p_3, 6\delta + 6\varepsilon + 2p_2, 6\delta + 6\varepsilon + p_1 + p_2, 4\delta + 4\varepsilon + 2p_2 + p_3, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3, 4\delta + 2\varepsilon + 2p_3, p_2 + 2p_3\},$$

$$T_8 = 8\delta + 8\varepsilon + p_1 + p_3 + \max\{8\delta + 8\varepsilon + p_1 + p_3, 4\delta + 4\varepsilon + p_2 + p_3, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2, 2p_2\},$$

$$T_9 = 8\delta + 8\varepsilon + p_1 + \max\{8\delta + 8\varepsilon + p_1, 6\delta + 6\varepsilon + p_1 + p_2, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + 2p_3, 2\delta + 2\varepsilon + 2p_2, 2p_2 + p_3, p_2 + 2p_3\},$$

$$T_{10} = 8\delta + 8\varepsilon + p_2 + p_3 + \max\{8\delta + 8\varepsilon + p_2 + p_3, 6\delta + 6\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3, 2p_1\},$$

$$T_{11} = 8\delta + 8\varepsilon + p_3 + \max\{10\delta + 8\varepsilon + p_2, 8\delta + 6\varepsilon + p_1 + p_2, 6\delta + 6\varepsilon + p_2 + p_3, 6\delta + 6\varepsilon + 2p_2, 4\delta + 6\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + 2p_2, 4\delta + 2\varepsilon + 2p_1, 2p_1 + p_2\},$$

$$T_{12} = 8\delta + 8\varepsilon + p_2 + \max\{8\delta + 8\varepsilon + p_2, 6\delta + 6\varepsilon + p_1 + p_2, 6\delta + 6\varepsilon + p_2 + p_3, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3, 2\delta + 2\varepsilon + 2p_1, 2\delta + 2\varepsilon + 2p_3, 2p_1 + p_3, p_1 + 2p_3\},$$

$$\begin{aligned}
T_{13} &= 8\delta + 8\varepsilon + p_3 + \max\{8\delta + 8\varepsilon + p_3, 6\delta + 6\varepsilon + p_2 + p_3, 4\delta + 4\varepsilon + p_1 + p_2 + p_3, \\
&\quad 2\delta + 2\varepsilon + 2p_2, 2p_1 + p_2, p_1 + 2p_2\}, \\
T_{14} &= 8\delta + 8\varepsilon + \max\{8\delta + 8\varepsilon, 4\delta + 4\varepsilon + 2p_1, 4\delta + 4\varepsilon + 2p_2, 4\delta + 4\varepsilon + 2p_3, \\
&\quad 2\delta + 2\varepsilon + 2p_1 + p_2, 2\delta + 2\varepsilon + 2p_2 + p_3, 2\delta + 2\varepsilon + p_1 + 2p_2 + p_3, 2\delta + 2\varepsilon + p_2 + 2p_3, \\
&\quad 2p_1 + p_2 + p_3, 2p_1 + 2p_3, p_1 + 2p_2 + p_3, p_1 + p_2 + 2p_3\}.
\end{aligned}$$

Bizonyítás. A különböző sorrendekhez tartozó bizonyítások hasonlóak, ezért itt csak a 2. sorrend bizonyítását közöljük. $T_2 = (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + w_1 + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + w_2 + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + 3\delta + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + 2\delta + w_3 + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + 3\delta + w_4 + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + w_5 + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + w_6 + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + 4\delta = 20\delta + 16\varepsilon + \sum_{k=1}^6 w_k$, ahol $w_1 = p_1$, $w_2 = p_2$, $w_5 = p_2$, és $w_6 = p_3$ fix értékek. $w_3 = \max\{0, p_3 - (6\delta + 2\varepsilon)\}$, mivel míg a robot visszatér M_3 -hoz, $3\delta + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + 2\delta = 6\delta + 2\varepsilon$ idő telik el. Hasonlóan, $w_4 = \max\{0, p_1 - (6\delta + 2\varepsilon + w_3)\}$, mivel míg a robot P_2 megmunkálása alatt visszatér M_1 -hez, $2\delta + w_3 + (\varepsilon + \delta + \varepsilon) + 3\delta = 6\delta + 2\varepsilon + w_3$ idő telik el. Ezek alapján $w_3 + w_4 + 6\delta + 2\varepsilon = \max\{6\delta + 2\varepsilon, p_1, p_3\}$, amiből $T_2 = 14\delta + 14\varepsilon + p_1 + 2p_2 + p_3 + \max\{6\delta + 2\varepsilon, p_1, p_3\}$. \square

Egy konkrét feladat optimális megoldása ismét úgy kapható meg, hogy ki kell számolni az összes T_i értékeket, majd ezek közül kell kiválasztani a legkisebbet.

A kétgépes esethez hasonlóan a háromgépes esetben is meghatározhatók az egyes sorrendek legkisebb ciklusidői, ahol a robot várakozási ideje 0.

4.2. TÉTEL. *A ciklusidők alsó korlátai a következők:* $T_{1L} = 16\delta + 16\varepsilon + 2p_1 + 2p_2 + 2p_3$, $T_{2L} = 20\delta + 16\varepsilon + p_1 + 2p_2 + p_3$, $T_{3L} = 18\delta + 16\varepsilon + 2p_1 + p_2 + p_3$, $T_{4L} = 16\delta + 16\varepsilon + 2p_1 + 2p_2$, $T_{5L} = 18\delta + 16\varepsilon + p_1 + p_2 + 2p_3$, $T_{6L} = 20\delta + 16\varepsilon + p_1 + p_3$, $T_{7L} = 18\delta + 16\varepsilon + p_1 + p_2$, $T_{8L} = 16\delta + 16\varepsilon + 2p_2 + 2p_3$, $T_{9L} = 16\delta + 16\varepsilon + 2p_1$, $T_{10L} = 16\delta + 16\varepsilon + 2p_2 + 2p_3$, $T_{11L} = 18\delta + 16\varepsilon + p_2 + p_3$, $T_{12L} = 16\delta + 16\varepsilon + 2p_2$, $T_{13L} = 16\delta + 16\varepsilon + 2p_3$, $T_{14L} = 16\delta + 16\varepsilon$.

Bizonyítás. Ismét csak a 2. sorrend esetét bizonyítjuk, a többi hasonló elvet követ. Láttuk, hogy a ciklusidő ekkor $T_2 = 20\delta + 16\varepsilon + \sum_{k=1}^6 w_k$, ahol $w_1 = p_1$, $w_2 = p_2$, $w_5 = p_2$, és $w_6 = p_3$, melyek fix értékek. A ciklusidő akkor a legkisebb, ha a további $w_3 = \max\{0, p_3 - (6\delta + 2\varepsilon)\}$, illetve $w_4 = \max\{0, p_1 - (6\delta + 2\varepsilon + w_3)\}$ várakozások a lehető legkisebbek, azaz értékük 0. Ezek szükséges feltételei: $p_3 \leq 6\delta + 2\varepsilon$ és $p_1 \leq 6\delta + 2\varepsilon$, ekkor $T_{2L} = 20\delta + 16\varepsilon + p_1 + 2p_2 + p_3$. \square

4.1. KÖVETKEZMÉNY. *A teljes feladat alsó korlátja* $T_L = \min\{T_{iL}\} = T_{14L} = 16\delta + 16\varepsilon$.

5. Összefoglalás

A cikkben egy egyutas automatizált gyártórendszert vizsgálunk, amely hasonló munkadarabokat munkál meg két és három gép segítségével. A gépek egymás mellett, vonalszerűen helyezkednek el, be- és kimeneti tárolókkal rendelkeznek. A robot különféle ciklikus mozgásokra ütemezhető, ezért fontos meghatározni, hogy ezek közül melyik a leggyorsabb. Az ütemezéseket mozgatási sorrend mátrixokkal írjuk le. A dolgozatban meghatároztuk az egyes sorrendek ciklusidejét, ezek alsó korlátját. Későbbi kutatás célja nagyobb gépszámra a lehetséges mozgatási sorrendek számának megadása, illetve a ciklusidők kiszámítása. További tanulmányok témája lehet olyan ciklusok vizsgálata, ahol a ciklus elején a gépek nem teljesen üresek, hanem a ciklus egy félkész állapotból indul el. Tehát, amikor az első munkadarab az első gépre kerül, a második munkadarab már valamelyik gépnél ott van. Tömeges gyártás esetén az ilyen, nem üres állapotból induló ciklusoknak is van létjogosultsága. Szintén vizsgálat célja lehet hasonló ciklus open shop feladat esetén.

Hivatkozások

- [1] DAWANDE, M., H.N. GEISMAR, S.P. SETHI, AND C. SRISKANDARAJAH: *Sequencing and scheduling in robotic cells: Recent developments*, Journal of Scheduling, Vol. **8** No. **5**, pp. 387-426 (2005). DOI: 10.1007/s10951-005-2861-9
- [2] DROBOUCHEVITCH, I.G., S.P. SETHI, AND C. SRISKANDARAJAH: *Scheduling dual gripper robotic cell: One-unit cycles*, European Journal of Operational Research, Vol. **171** No. **2**, pp. 598-631 (2006). DOI: 10.1016/j.ejor.2004.09.019
- [3] JOLAI, F., M. FOUMANI, R. TAVAKOLI-MOGHADAM, AND P. FATTAHI: *Cyclic scheduling of a robotic flexible cell with load lock and swap*, Journal of Intelligent Manufacturing, Vol. **23** No. **5**, pp. 1885-1891 (2012). DOI: 10.1007/s10845-011-0505-9
- [4] MOSALLAEIPOUR, S., R. NAZERIAN, AND M. GHADIRINEJAD: *A Two-Phase Optimization Approach for Reducing the Size of the Cutting Problem in the Box-Production Industry: A Case Study*, Industrial Engineering in the Industry 4.0 Era, Springer, pp. 63-81 (2018). DOI: 10.1007/978-3-319-71225-3_6
- [5] MOSALLAEIPOUR, S., M.G. NEJAD, S.M. SHAVARANI, AND R. NAZERIAN: *Mobile robot scheduling for cycle time optimization in flow-shop cells, a case study*, Production Engineering, Vol. **12** No. **1**, pp. 83-94 (2018). DOI: 10.1007/s11740-017-0784-x
- [6] NEJAD, M.G., H. GÜDEN, AND B. VIZVÁRI: *Time minimization in flexible robotic cells considering intermediate input buffers: a comparative study of three well-known problems*, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, Vol. **32** No. **8**, pp. 809-819 (2019). DOI: 10.1080/0951192X.2019.1636411
- [7] NEJAD, M.G., S. MOSALLAEIPOUR: *A new approach to optimize a flexible manufacturing cell*, 1st international conference on new directions in business, management, finance and economics (2013).

- [8] NEJAD, M.G., S.M. SHAVARANI, H. GÜDEN, AND R.V. BARENJI: *Process sequencing for a pick-and-place robot in a real-life flexible robotic cell*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. **103** No. **9-12**, pp. 3613-3627 (2019). DOI: 10.1007/s00170-019-03739-6
- [9] NEJAD, M.G., S.M. SHAVARANI, B. VIZVARI, AND R.V. BARENJI: *Trade-off between process scheduling and production cost in cyclic flexible robotic cells*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. **96** No. **1-4**, pp. 1081-1091 (2018). DOI: 10.1007/s00170-018-1577-x
- [10] NEJAD, M.G., H. GÜDEN, B. VIZVARI, AND R.V. BARENJI: *A mathematical model and simulated annealing algorithm for solving the cyclic scheduling problem of a flexible robotic cell*, Advances in Mechanical Engineering, Vol. **10** No. **1**, pp. 1-12 (2018). DOI: 10.1177/1687814017753912
- [11] NEJAD, M.G., G. KOVÁCS, B. VIZVARI, AND R.V. BARENJI: *An optimization model for cyclic scheduling problem in flexible robotic cells*, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Vol. **95** No. **9-12**, pp. 3863-3873 (2018). DOI: 10.1007/s00170-017-1470-z
- [12] PINEDO, M.: *Scheduling*, Springer (2012).
- [13] RAJAPAKSHE, T., M. DAWANDE, AND C. SRISKANDARAJAH: *Quantifying the impact of layout on productivity: An analysis from robotic-cell manufacturing*, Operations Research, Vol. **59** No. **2**, pp. 440-454 (2011). DOI: 10.1287/opre.1100.0874
- [14] SETHI, S.P., C. SRISKANDARAJAH, G. SORGER, J. BLAZEWICZ, AND W. KUBIAK : *Sequencing of parts and robot moves in a robotic cell*, International Journal of Flexible Manufacturing Systems, Vol. **4** No. **3-4**, pp. 331-358 (1992). DOI: 10.1007/BF01324886
- [15] VIZVÁRI, B., H. GUDEN, AND M.G NEJAD: *Local search based meta-heuristic algorithms for optimizing the cyclic flexible manufacturing cell problem*, Annals of Optimization Theory and Practice, Vol. **1** No. **3**, pp. 15-32 (2018). DOI: 10.22121/aotp.2019.148030.1015
- [16] ZEBALLOS, L.J.: *A constraint programming approach to tool allocation and production scheduling in flexible manufacturing systems*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. **26** No. **6**, pp. 725-743 (2010). DOI: 10.1016/j.rcim.2010.04.005
- [17] ZHOU, B.-H. AND M. LI: *Scheduling method of robotic cells with robot-collaborated process and residency constraints*, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, Vol. **30** No. **11**, pp. 1164-1178 (2017). DOI: 10.1080/0951192X.2017.1305504

KOVÁCS GERGELY

Edutus Egyetem, Tatabánya
kovacs.gergely@edutus.hu



Sam Mosallaeipour 1984-ben született. Doktori címét az észak-ciprusi Eastern Mediterranean University-n szerezte, Famagustában. Jelenleg a holland NHL Stenden University of Applied Sciences oktatója. Kutatási területe a többcélú optimalizálás és döntéstámogató rendszerek létrehozása ipari alkalmazásokhoz. Eddig 16 tudományos cikke jelent meg, több mint 50 hivatkozása van.

SAM MOSALLAEIPOUR

Technology and Innovation Faculty, NHL Stenden University of Applied Science, Leeuwarden, Hollandia
sam.m.pure@gmail.com



Mazyar Ghadiri Nejad 1980-ban született. Doktori címét az észak-ciprusi Eastern Mediterranean University-n szerezte, Famagustában. Jelenleg a szintén észak-ciprusi Girne American University docense. Kutatási területe a termelésütemezés, a rugalmas gyártó részlegek és a szállítási rendszerek optimalizálása. Eddig hat konferenciacikke és 32 tudományos cikke jelent meg, három könyvet és egy könyvfejezetet írt. Több mint 700 hivatkozása van.

MAZYAR GHADIRI NEJAD

Industrial Engineering Department, Girne American University, Girne, Észak-Ciprus
mazyarghadirinejad@gau.edu.tr

VIZVÁRI BÉLA

Industrial Engineering Department, Eastern Mediterranean University, Famagusta, Észak-Ciprus
bela.vizvari@emu.edu.tr

COMPUTATIONAL ANALYSIS FOR FLOW SHOP AUTOMATED MANUFACTURING CELLS

GERGELY KOVÁCS, SAM MOSALLAEIPOUR, MAZYAR GHADIRI NEJAD, BÉLA VIZVÁRI

Flow shop manufacturing methodology is one of the main approaches to fabricate products in a manufacturing area considering serial material flow among workstations. A manufacturing cell is a section of a manufacturing area with some machines to perform similar processes, or to fabricate a family of products. In such manufacturing environments, if the transportation of the materials is performed by an automated system such as conveyors, AVGs, robots, etc., it is called a flow shop automated manufacturing cell (FAMC). In this study we deal with an FAMC in which an industrial robot performs the whole material handlings inside the manufacturing area. In this manufacturing system, each machine is equipped by one input and one output buffer capable of storing one part at each time. These buffers keep one part ready while the machine is processing another part, therefore each machine is able to produce two parts consequently. Finding the possible robot move for serving the machines is a key element in such systems. To determine the possible strategies of robot cyclic moves including the machines' loading and unloading sequences, a sequential part production matrix is proposed. Moreover, a lower bound is found for each strategy and the optimality condition is scrutinized for each. Finally, some mathematical theorems for determining the cycle times are provided discussed and a linear programming model to solve this category of problems is proposed.

Keywords: Automated manufacturing system, Flow shop, Robotic cell, Job scheduling.

DIGITÁLIS TÁVOLSÁGOK A HÁROMSZÖGRÁCSON

NAGY BENEDEK

Digitális síknak tekinthetjük a sík egy szabályos csempézésével kapott diszkrét rácsot, mely pontjainak a digitális képfeldolgozásban, illetve számítógépes grafikában megszokott módon magukat a csempéket tekintjük. A háromszögrács, amely háromszögcsempékből épül föl, a három szabályos síkrács egyike. Minden háromszögcsempét (amit a továbbiakban legtöbbször képpontnak, vagy röviden pontnak hívunk) egyedi egészekből álló koordinátahármassal címzünk. A digitális síkban gyakorlati szempontból fontos szerepet játszanak az ún. digitális távolságok, amelyeket a pontok közti utakkal definiálunk. Az utak felépítésében a pontok közti szomszédság alapvető fontosságú. A háromszögrácson minden pontnak háromféle szomszédja van, beleértve a legközelebbi oldalszomszéd csempepárokat, illetve további kétféle típusú csúcshomszéd csempepárokat. Ezek alapján háromféle (digitális) alaptávolságot értelmezhetünk a pontok közti legrövidebb út (vagy utak) lépésszámaként, amelyeket általánosíthatunk két közismert módon. A szomszédsági sorozatokkal megszabhatjuk, hogy az út hányadik lépésében milyen típusú szomszédság engedélyezett, míg a súlyozott távolság esetén a különböző típusú szomszédokra való lépésekhez különböző súlyokat rendelhetünk, és a legrövidebb összsúlyú út súlya adja a távolságot. Az ezekkel a digitális távolságokkal kapcsolatos eredményeket foglaljuk össze, valamint mutatunk nem metrikus távolságokat, digitális köröket és egyéb érdekes kapcsolódó kutatási irányokat.

1. Bevezetés

A háromszögrácsokat az utóbbi időben egyre több helyen alkalmazzák a gyakorlatban, többek között geometriai modellezésben, 3D szkennelésnél, valamint szimulációs, grafikai és képfeldolgozási algoritmusokban. Utóbbira jó példa a vékonyító algoritmus [8]. A háromszögrácson a három alapvető szomszédsági viszony már [5]-ben megtalálható (1. ábra, jobb oldal). A digitális távolságokat a rács-pontok közötti utak alapján definiáljuk, hasonlóan ahhoz, ahogy a gráfelméletben használjuk a távolság fogalmát [9, 13, 14, 40]. Ennek megfelelően a rács struktúrája, a szomszédsági viszony alapvető fontosságú. A háromféle szomszédság

alapján három alapvető távolságfüggvényt definiálhatunk (3. fejezet). A szomszédsági sorozatokkal definiált távolság a négyzetrácsokra már a 80-as évektől ismert [2, 3, 42, 43]. Háromszögrácsra is értelmezhetőek, de itt a „tér dimenziójánál” eggyel több szomszédságtípussal, ami több matematikailag is érdekes következménnyel jár [16, 17, 18]. A 4. fejezetben algoritmust adunk tetszőleges két pont közötti legrövidebb út meghatározására, illetve megadjuk a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy egy tetszőleges szomszédsági sorozattal definiált távolságfüggvény mikor határoz meg metrikus teret. A háromszögrácson több olyan érdekes jelenség is megfigyelhető, amely a négyzetes rácsokon nem tapasztalható. Ezeket a jelenségeket, mint a nem szimmetrikus távolságfüggvény vagy az egymást „megelőző” sorozatok, külön is megvizsgáljuk. Az utolsó alfejezet a digitális körökről szól.

Másik jól ismert alternatíva a digitális távolságok változatos definiálására (és lehetőséget adva pl. az euklideszi távolság jobb közelítésére a digitális síkon), ha a különböző típusú szomszédok közti lépésnek különböző súlyokat adhatunk. Az így kapott súlyozott távolságok [1], ugyancsak adaptálhatóak a háromszögrácsra [32]. Ezeket a távolságokat és tulajdonságaikat tekintjük át az 5. fejezetben. Képletet adunk a távolság kiszámítására tetszőleges rácspontok és súlyhármasok esetére, ahogy lineáris egészértékű programozás segítségével azt is megmutattuk, mikor, milyen lépések, milyen bázis adja az optimális megoldást, a legrövidebb utat [11].

Amint látni fogjuk, a háromszögrácson a digitális távolságok sok érdekes tulajdonsággal rendelkeznek már a szomszédsági sorozatokkal definiált távolságok esetén is. A súlyozott távolságok esetén pedig ugyancsak sokkal érdekesebb távolságokat kapunk, mint a négyzetrács analóg módon definiált távolságai, amit az általuk definiált digitális körökkel reprezentálunk.

A cikkben elsősorban a szerző és szerzőtársai által az utóbbi húsz év ezirányú kutatásait tekintjük át néhány aktív irányt is megemlítve.

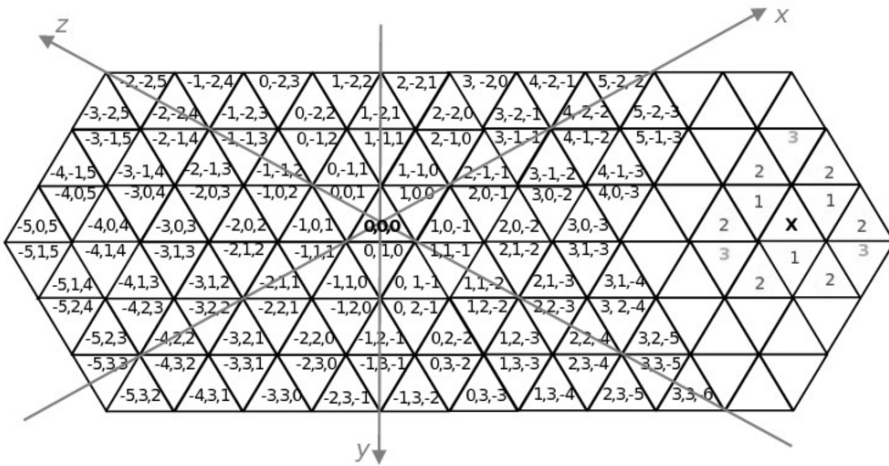
2. A háromszögrács leírása

A háromszögrácson háromféle szomszédsági viszonyt szokás definiálni [5]. A koordinátákat az 1. ábrán látható módon vezetjük be [19, 41]. Jelölje H a rács pixeleinek halmazát. Ekkor matematikailag a következő definíció alapján definiáljuk a szomszédsági relációkat.

2.1. Definíció. Legyen $p = (p(1), p(2), p(3)), q = (q(1), q(2), q(3)) \in H$ két különböző pont a háromszögrácson és $k \in \{1, 2, 3\}$. A p és q pontok k -szomszédok, ha teljesülnek a következők:

- $|p(i) - q(i)| \leq 1$ minden $i \in \{1, 2, 3\}$ esetén,
- $\sum_{i=1}^3 |p(i) - q(i)| \leq k$.

Ha a második feltételben egyenlőség áll fenn, akkor azt mondjuk, hogy a p és q pontok *szigorúan* k -szomszédok.



1. ábra. Koordináták és szomszédságtípusok a háromszögrácson, a jobb oldalon a számok az x pont szigorú szomszédait jelölik.

2.2. *Definíció.* Rögzítsünk le egy koordinátát. Azon pontok, amelyeknek ez a koordinátája megegyezik ezzel a fix értékkel, egy *sávot* alkotnak.

2.1. *Megjegyzés.* A H háromszögrács pontjai egy-egyértelműen azonosíthatók az olyan koordináta-hármasokkal, amelyekre az értékek összege 0 vagy 1.

2.3. *Definíció.* A 0 koordinátaösszegű pontok *paritása páros*. Azok a pontok pedig, melyeknek a koordináta-összege 1, *páratlanok*.

A háromszögek paritás alapján történő csoportosítása megfelel az orientációjuk alapján történő csoportosításnak (Δ, ∇), a páros-páratlan megkülönböztetés pedig az eredeti egész számokra vett paritásfüggvény egy kétdimenziós általánosításának, hiszen két élszomszédos, vagyis 1-szomszéd háromszögcsempe paritása mindig különböző. Továbbá ha két pont 1-szomszéd, akkor két különböző sáv is tartalmazza mindkettőjüket. Két szigorúan 2-szomszéd paritása megegyezik, és pontosan egy sávra igaz, hogy mindkettőt tartalmazza. A szigorúan 3-szomszédok paritása különbözik, és nincs olyan sáv, amely mindkettőt tartalmazza.

A következő fogalmak fontos szerepet játszanak a távolságmérésben, hiszen két pont egymáshoz képesti viszonyát jellemzik a rácsban.

Legyen $p, q \in H$ két pont. A $w_{p,q}$ vektort a p és a q pont *különbség-vektorának* hívjuk, ha $w(i) = q(i) - p(i)$. A pontok paritásától függően $w_{p,q}$ koordinátáinak összege 0 vagy ± 1 lehet. A $w_{p,q}$ -nak mint multihalmaznak az elemeit abszolút értékük nagysága szerint nemnövekvő sorrendbe szedve kapjuk a $v_{p,q}$ vektort. Az egyértelműség kedvéért, ha két vagy három egyforma nagyságú érték fordul elő, amelyek közt különböző előjelűek is vannak, pl. $(n, -n, \pm 1)$, beleértve az $(1, -1, \pm 1)$

esetet is, akkor $v(1) > 0$ és $v(2) < 0$. Ekkor $v_{p,q}$ multihalmazként tekintve megegyezik $w_{p,q}$ -val, ráadásul $|v(i)| \geq |v(j)|$ ha $i < j$ is fennáll ($1 \leq i, j \leq 3$). A $v_{p,q}$ vektort *rendezett különbségvektornak* nevezzük. Amikor az egyértelműséget nem veszélyeztetni, el fogjuk hagyni a p, q indexpárt. Továbbá $p, q \in H$ esetén legyen $\delta_{p,q} = 1$, ha p és q paritása különbözik; és $\delta_{p,q} = 0$, ha p és q azonos paritású.

Érdeemes megemlíteni, hogy szabályos hatszögrácshoz jutunk, ha az élen osztozó háromszögek középpontjait éllel összekötjük, vagyis a két rács egymás duálisa.

3. Digitális távolságok rögzített szomszédsággal

A dolgozatban a távolság fogalma központi szerepet játszik. Általában a metrikus tulajdonságokat teljesítő függvényeket szokás jó távolságoknak tekinteni. Egy $d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ távolságfüggvényről akkor mondjuk, hogy *metrikus* tulajdonságú, ha bármely p, q, r pontok esetén teljesülnek a következő feltételek:

1. $d(p, q) \geq 0$ (nemnegativitás),
2. $d(p, q) = 0$, akkor és csak akkor, ha $p = q$ (egyediség),
3. $d(p, q) = d(q, p)$ (szimmetria),
4. $d(p, q) + d(q, r) \geq d(p, r)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

A három lehetséges szomszédságnak megfelelően, a háromszögrács pixeleit különböző típusú utakkal köthetjük össze:

3.1. Definíció. Egy véges $\Pi(p, q; (k))$ pontsorozatot – ami $p = p_0, p_1, \dots, p_m = q$ formába írható, ahol p_{i-1} és p_i k -szomszédok minden $1 \leq i \leq m$ esetén – egy k -szomszédságú p -ből q -ba vezető útnak hívunk. A $\Pi(p, q; (k))$ út hossza $|\Pi(p, q; (k))| = m$. A p -ből q -ba vezető legrövidebb utat (vagy ezek egyikét) jelölje $\Pi^*(p, q; (k))$. Ekkor p és q (k)-távolságát definiáljuk ezen út hosszával: $d(p, q; (k)) = |\Pi^*(p, q; (k))|$.

A következő eredmény megtalálható a [26, 36] cikkekben.

3.1. TÉTEL. Legyen $p = (p(1), p(2), p(3))$ és $q = (q(1), q(2), q(3))$ a háromszögrács két pontja, ekkor a távolságuk a következő képletekkel határozható meg:

$$d(p, q; (1)) = \sum_{i \in \{1, 2, 3\}} |p(i) - q(i)| = |p(1) - q(1)| + |p(2) - q(2)| + |p(3) - q(3)|,$$

$$d(p, q; (2)) = \left\lceil \frac{|p(1) - q(1)| + |p(2) - q(2)| + |p(3) - q(3)|}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{d(p, q; (1))}{2} \right\rceil,$$

$$d(p, q; (3)) = \max_{i \in \{1, 2, 3\}} \{|p(i) - q(i)|\}.$$

3.1. Példa. $d((0, 0, 0), (1, 1, -1); (1)) = 3$, $d((0, 0, 0), (1, 1, -1); (2)) = 2$,
 $d((0, 0, 0), (1, 1, -1); (3)) = 1$, $d((0, 0, 0), (5, -2, -2); (1)) = 9$,
 $d((0, 0, 0), (5, -2, -2); (2)) = d((0, 0, 0), (5, -2, -2); (3)) = 5$,
 $d((1, 1, -1), (5, -2, -2); (2)) = d((1, 1, -1), (5, -2, -2); (3)) = 4$.

Két pont (1)-távolsága akkor és csak akkor páros, ha a két pont paritása megegyezik. Továbbá a távolságok között a következő összefüggések teljesülnek: Egyrészt bármely két pont (2)-távolsága fele az (1)-távolságuknak (felfele kerekítve, ha az (1)-távolság páratlan). Másrészt, két pont (2)-távolsága és (3)-távolsága közt legfeljebb 1 a különbség a kétféle megengedett koordinátaösszeg miatt (ha ez a két távolság különböző értékű két pont esetén, akkor a (3)-távolságuk a kisebb, ilyen esetben azt mondjuk, hogy a két pont *szerencsés irányban* van egymáshoz képest). Ha a két pont paritása megegyezik, akkor viszont a (2)-távolságuk biztosan pont akkora, mint a (3)-távolságuk. A szerencsés irányt formálisan is definiáljuk, mert később fontos szerepet játszik.

Formálisan legyen $\sigma_{p,q} = 1$, ha p páros és $w_{p,q}$ két pozitív és egy negatív értéket tartalmaz, vagy p páratlan és $w_{p,q}$ -ban egy pozitív és két negatív érték van (vagyis p -től q szerencsés irányban van). Egyébként pedig legyen $\sigma_{p,q} = 0$, beleértve azokat az eseteket is, amikor p és q pont egy sávon van, vagyis van közös koordinátájuk. A szerencsés irány fogalma azzal kapcsolatos, hogy egy adott pontból a paritásától függően csak a hat lehetséges szigorú 3-szomszéd vektor fele használható, vagyis egy páros pont esetén az $(1, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$, $(-1, 1, 1)$ irányok, amíg páratlan pont esetén $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ és $(-1, -1, 1)$ azok a lépések, amik 2-szomszédra történő lépésekkel nem elérhetőek. Ezek alapján vannak olyan irányok, amelyekben kihasználható a 3-as szomszédság, és vannak irányok, ahol „csak” ugyanannyit ér, mint a 2-es. Ezekre a távolságokra igaz a következő ([26]):

3.2. TÉTEL. *A háromszögrácson a (k) -távolság, $k \in \{1, 2, 3\}$ esetekben metrikus távolság függvényt definiál.*

4. Szomszédsági sorozatok a háromszögrácson

Az előző fejezetben bemutatott három digitális távolság egyik kézenfekvő általánosítása, ha a pontokat összekötő út során lépésenként szabályozhatjuk, mely szomszédság megengedett [22, 29, 31]. Ebben a fejezetben az ilyen távolságokat mutatjuk be.

4.1. Definíció. A $B = (b(i))_{i=1}^{\infty}$ sorozatot, ahol $b(i) \in \{1, 2, 3\}$ minden $i \in \mathbb{N}$ értékre, *szomszédsági sorozatnak* hívjuk. Ha van olyan $l \in \mathbb{N}$, hogy $b(i) = b(i + l)$ fennáll minden $i \in \mathbb{N}$ esetén, akkor B periodikus l periódussal. Ebben az esetben egy periódusnyi elemmel megadhatjuk a sorozatot: $B = (b(1), \dots, b(l))$. Legyen p és q két pont és $B = (b(i))_{i=1}^{\infty}$ egy szomszédsági sorozat. Egy véges $\Pi(p, q; B)$ pontsorozatot – ami $p = p_0, p_1, \dots, p_m = q$ formába írható, ahol p_{i-1} és p_i $b(i)$ -szomszédok minden $1 \leq i \leq m$ esetén – p -ből q -ba vezető B -útnak hívunk. Az út hossza, és ez alapján a B -távolság a 3.1. definícióval analóg módon adható meg: $d(p, q; B) = |\Pi^*(p, q; B)|$.

Legrövidebb út előállítására bármely két pont között történhet mohó algoritmus-sal (lásd pl. [16, 18]), ami röviden így írható le:

Legyen adott a kezdő- és a végpont (p és q), valamint egy B szomszédsági sorozat. Legyen $j = 0$ és $x_0 = p$ az út első pontja. Amíg $x_j \neq q$, addig egy ciklusban hajtsuk végre a következő számolást:

Számoljuk ki q és x_j w különbségvektorát, továbbá adjunk egyet j értékéhez.

A $b(j)$ értéke alapján három eset van: ha $b(j) = 1$, akkor a $v(1)$ és $v(2)$ értékekhez tartozó különbségek közül a lépés azt csökkenti, amit x_{j-1} paritása megenged. Ha $b(j) = 2$, és w -ben van legalább két nem nulla érték, akkor csökkentjük a $v(1)$ és $v(2)$ értékekhez tartozó elemet. Ha w -ben csak egy nem nulla elem van, akkor lépünk q -ra pontosan úgy, mintha $b(j) = 1$ lenne. Végül, ha $b(j) = 3$, akkor, ha x_{j-1} -től q szerencsés irányban van, akkor mindhárom koordinátakülönbséget csökkentjük, egyébként csak olyat lépünk, mintha $b(j) = 2$ állna fenn.

Fűzzük a lépés után kapott új x_j pontot az úthoz.

Az algoritmus konstans tár-bonyolultságú, és a pontok koordinátakülönbség-összegével arányosan lineáris időbonyolultságú. Az algoritmus egy legrövidebb B -út mellett a két pont B -távolságát is megadja.

4.1. Megjegyzés. Bármely két pont B -távolsága függ a pontok különbségvektorától és paritásától, valamint a szomszédsági sorozattól.

4.1. Képlet a távolságszámításhoz

Mivel – a háromszögrács sajátosságai miatt – egy $b(i) = 3$ választással nem mindig tudunk „közelebb” kerülni a célpont-hoz, mint ha csak $b(i) = 2$ lenne, bevezetjük a minimális ekvivalens sorozatok fogalmát ([17]).

4.2. Definíció. Egy B szomszédsági sorozat *minimális ekvivalens sorozatán* a következő tulajdonságokkal rendelkező B' szomszédsági sorozatot értjük.

1. $d(p, q; B) = d(p, q; B')$ bármely p, q pontpárra; és
2. minden olyan B_1 szomszédsági sorozatra, amire $d(p, q; B) = d(p, q; B_1)$ minden p, q pontpárra, teljesül, hogy $b'(i) \leq b_1(i)$ minden i -re.

4.1. SEGÉDTÉTEL. *Egy B szomszédsági sorozat B' minimális ekvivalens sorozata egyértelműen meghatározott:*

1. $b'(i) = b(i)$, ha $b(i) < 3$,
2. $b'(i) = 3$, ha $b(i) = 3$ és nincs olyan $j < i$, amire $b'(j) = 3$,
3. $b'(i) = 3$, ha $b(i) = 3$ és van olyan $b'(l) = 3$, hogy $l < i$, de $\sum_{k=j+1}^{i-1} b'(k)$ páros,
ahol $j = \max \{l \mid l < i, b'(l) = 3\}$,
4. $b'(i) = 2$, különben.

Az előző eredmény azért is érdekes, mert azt mutatja, hogy pl. a négyzetrácsal ellentétben, a háromszögrácson vannak olyan különböző szomszédsági sorozatok, amelyek ugyanazt a távolságfüggvényt definiálják. Ha a pontok iránya a B sorozat első 3-as eleme szempontjából nem szerencsés, akkor az nem használható ki, ezért bevezetjük a következő fogalmat is.

4.3. Definíció. A B'' szomszédsági sorozatot a B csökkentett minimális ekvivalens sorozatának hívjuk, ha

1. $b''(k) = 2$, ahol k az első B -ben előforduló 3 helye;
2. $b''(i) = b'(i)$, minden más i -re, ahol $b'(i)$ -k B minimális ekvivalens sorozatának elemei.

A távolságszámításhoz, pl. ha a két pont egy sávon fekszik, szükség lesz egy további származtatott sorozatra:

4.4. Definíció. Egy B szomszédsági sorozat *2-korlátozott sorozatának* nevezük azt a sorozatot, amelyet B -ből a 3-asok 2-esre cserélésével kapunk: $B^{(2)} = (b^{(2)}(i) : i \in \mathbb{N})$.

Eredetileg a távolságképlet megadásához először a 3 dimenziós kockarácsban vett képletet bizonyítottuk [23, 27], és abból származtattuk az eredményt a háromszögrácsra az előbb bevezetett származtatott szomszédsági sorozatok segítségével.

4.1. TÉTEL. Legyen $p, q \in H$ és B egy szomszédsági sorozat. Legyen $k = \min\{i \mid b(i) = 3\}$ a legkisebb olyan érték, amelyre $b(k) = 3$, vagy, ha a 3-as nem szerepel B -ben, akkor $k = \infty$. Jelölje d_m , d_c és d_k az alább definiált értékeket, amiket rendre B minimális ekvivalens sorozatával, B' -vel; a B csökkentett minimális ekvivalens sorozatával, B'' -vel; illetve B 2-korlátozott sorozatával, $B^{(2)}$ -vel számolunk:

$$d_m = \max \left\{ i \left| \sum_{\ell=1}^3 |v(\ell)| > \sum_{j=1}^{i-1} b'(j) \right. \right\}, d_c = \max \left\{ i \left| \sum_{\ell=1}^3 |v(\ell)| > \sum_{j=1}^{i-1} b''(j) \right. \right\}$$

$$d_k = \max \left\{ i \left| \sum_{\ell=1}^2 |v(\ell)| > \sum_{j=1}^{i-1} b^{(2)}(j) \right. \right\}, \text{ továbbá,}$$

$d' = \max\{|v(1)|, d_k, d_m\}$, és $d'' = \max\{|v(1)|, d_k, d_c\}$.

Ekkor $d(p, q; B) = d''$, ha $d' \geq k$ és az alábbi esetek egyike fennáll: B nem tartalmaz 3-ast; vagy $\sigma_{p,q} = 0$ és $\sum_{i=1}^{k-1} b(i)$ páros, vagy $\sigma_{p,q} = 1$ és $\sum_{i=1}^{k-1} b(i)$ páratlan.

Minden a fentiekől eltérő esetben $d(p, q; B) = d'$.

Most néhány érdekes példát mutatunk.

4.1. *Példa.* Legyenek adottak $p = (0, 0, 0)$, $q = (1, 1, -1)$, $r = (1, 1, -2)$ és $s = (2, 1, -2)$ pontok. Ekkor $d(p, q; (2, 1, 1)) = 2$, $d(p, r; (2, 1, 1)) = 3$, $d(p, s; (2, 1, 1)) = 4$, $d(q, s; (2, 1, 1)) = 1$, tehát, $d(p, q; (2, 1, 1)) + d(q, s; (3, 1)) < d(p, s; (3, 1))$ vagyis a $(2, 1, 1)$ -távolság nem metrikus, mert nem teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget. Továbbá, $d(p, r; (3, 1)) = 2$, $d(p, s; (3, 1)) = 3$, $d(p, q; (3, 1)) = 1$, $d(q, s; (3, 1)) = 1$, $d(r, p; (3, 1)) = 3$, így, $d(p, r; (3, 1)) \neq d(r, p; (3, 1))$ és $d(p, q; (3, 1)) + d(q, s; (3, 1)) < d(p, s; (3, 1))$, vagyis a $(3, 1)$ -távolság nem szimmetrikus (és nem metrikus).

4.2. Metrikus és nem metrikus távolságok

A háromszögrácson szomszédsági sorozatok esetén a háromszög-egyenlőtlenséggel és a szimmetriával is gond lehet (ahogy a 4.1. példában is láttuk), így kicsit más a helyzet, mint a négyzetrácson, ahol csak a háromszög-egyenlőtlenség sérülhet bizonyos sorozatok által definiált távolság esetén. A következő eredmény egy szükséges és elégséges feltételt ad a szimmetria tulajdonság ellenőrzésére [17].

4.2. SEGÉDTÉTEL. *Egy B -távolság pontosan akkor nem teljesíti a szimmetria tulajdonságot, ha van olyan $i \in \mathbb{N}$, hogy $b(i) = 3$, és fennáll legalább a következő esetek egyike az $i = \min \{l | b(l) = 3\}$ értékkel:*

$$\sum_{k=1}^{i-1} b(k) \text{ páratlan; vagy van olyan } j, \text{ amire } b(j) = 1 \text{ és } i < j.$$

A háromszög-egyenlőtlenség ellenőrzése a következőképpen lehetséges [20, 24, 28]:

4.3. SEGÉDTÉTEL. *Legyen adott a B szomszédsági sorozat, jelölje $B^{(2)}$ a B 2-korlátozott sorozatát, valamint B' a B minimum ekvivalens sorozatát. A háromszög-egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül a B -távolságra, ha minden $i, j \in \mathbb{N}$ számpárra fennáll, hogy $\sum_{k=1}^i b^{(2)}(k) \leq \sum_{k=j+1}^{j+i} b^{(2)}(k)$ és $\sum_{k=1}^i b''(k) \leq \sum_{k=j+1}^{j+i} b'(k)$, ahol $B'' = B'$ a B minimális ekvivalens sorozata, ha $\sum_{k=1}^j b'(k)$ páros és B'' a B csökkentett minimális ekvivalens sorozata egyébként.*

Az előzőek alapján kimondjuk a tételt:

4.2. TÉTEL. *Legyen B egy szomszédsági sorozat. A B -távolság pontosan akkor metrikus, ha teljesülnek a következők:*

1. ha $b(j) = 3$ és $b(i) = 1$, akkor $i < j$;
2. ha B -ben szerepel a 3, akkor B -ben páros darab 1-es van;
3. $\sum_{k=1}^i b(k) \leq \sum_{k=j+1}^{j+i} b(k)$, ahol $i + j < l$, arra az l -re, ami a B -ben levő első 3-as helye, (ha nincs 3-as B -ben, akkor a feltételnek minden $i, j \in \mathbb{N}$ párra fenn kell állnia).

A következő következmények a [31] könyvfejezetből valók.

4.3. TÉTEL. Egy $d(p, q; B) > k$ B -távolság függ B első k elemének sorrendjétől, ha azoknak van olyan permutációja, amellyel a B -távolság nem szimmetrikus.

4.1. KÖVETKEZMÉNY. Legyen B egy periodikus szomszédsági sorozat. Ekkor a B -távolság akkor és csak akkor metrikus, ha a következő két feltétel egyike fennáll.

1. B nem tartalmazza a 3 értéket, és $\sum_{k=1}^i b(k) \leq \sum_{k=j+1}^{j+i} b(k)$ minden $i, j \in \mathbb{N}$ esetén;
2. B nem tartalmazza az 1 értéket.

4.3. Digitális körök

A digitális távolságok jellemzése történhet a digitális körök segítségével:

4.5. Definíció. Legyen adott egy $d(p, q)$ digitális távolság és egy nemnegatív $k \in \mathbb{R}$ sugár, ekkor az o középpontú k sugarú digitális kör a következő halmaz:

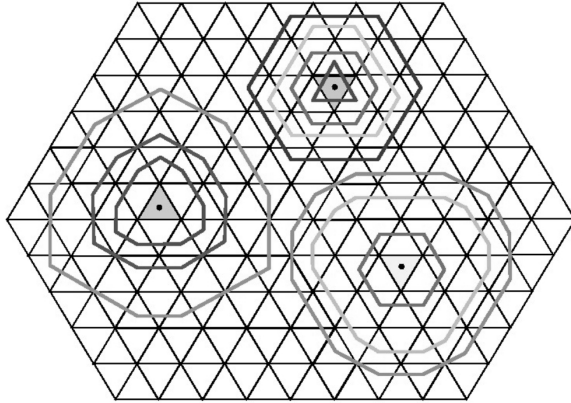
$$C_k^d = \{p \mid d(o, p) \leq k\}.$$

Itt jegyezzük meg, hogy a digitális kör ezen definíciója nem a körvonal, hanem a körlap digitális változatának, a digitális diszknek felel meg.

Amennyiben szomszédsági sorozattal definiáljuk a digitális távolságot, a C_k^d jelölésben d helyére a B sorozatot írhatjuk. Négyzetrácson hasonló értelemben az $O_k^d = \{p \mid d(o, p) \leq k\}$ jelölést használjuk. Világos, hogy egy k sugarú digitális kör csak a B sorozat első k elemétől függ.

Ezen körök jellemzése különböző szempontok alapján megtalálható a [7, 21, 25, 33, 39] cikkekben, itt néhány fontos megállapítást közlünk róluk röviden. A négyzetrácson a különböző szomszédsági sorozattal generált, de egyező sugarú digitális körök egy jól rendezett halmazt alkotnak. Ez háromszögrácson nem teljesül. A négyzetrácson O_k^B nem függ B első k elemének sorrendjétől. Ezzel szemben a háromszögrácson pl. $C_2^{(1,3)}$ és $C_2^{(3,1)}$ két, egymással nem összemérhető ponthalmazt jelöl. Ahogyan a négyzetrácson, úgy a háromszögrácson is igaz viszont, hogy a k sugár növekedtével az ugyanazzal a szomszédsági sorozattal generált B -körök szigorúan monoton nőnek, vagyis: ha $k > l$, akkor $C_k^B \supsetneq C_l^B$. A négyzetrácson nem fordulhat elő, hogy két szomszédsági sorozatra a különböző sugarú körök megegyezzenek. Ezzel szemben pl. $C_2^{(1)} = C_1^{(2)}$. Adott B szomszédsági sorozat és minimális ekvivalens sorozata, B' ugyanazt a digitális körsorozatot generálja, vagyis $C_k^{B'} = C_k^B$ bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén. Ezzel szemben a négyzetrácson ha egy B_1 sorozat elemenként nem kisebb egy másik B_2 sorozatnál, és van olyan $i \in \mathbb{N}$, hogy $b_1(i) > b_2(i)$, akkor minden legalább i sugarú köreikre ($k \geq i$) igaz, hogy $O_k^{B_1} \supsetneq O_k^{B_2}$. A digitális körök, illetve a szomszédsági sorozatok előbb említett érdekes tulajdonságait kommunikációs hálózatokban is kihasználhatjuk [34]. Egy

adott szomszédsági sorozat által megszabott módon mintegy hullámfrontként terjedő jel lefedi a megfelelő digitális kör pontjait. Egy „gyorsabb” sorozat által terjedő jel pedig akár később indulva is utolérheti az előzőt. A $B_f = (3)$ a leggyorsabb, a $B_s = (1)$ a leglassabb sorozat ilyen értelemben.



2. ábra. Digitális körök szomszédsági sorozatok segítségével, $B_1 = (3, 1, 3)$ balra, $B_s = (1, 1, 1, 1)$ fent és $B_2 = (2, 3, 1)$ jobbra lent.

A köröket a továbbiakban a digitális kör által tartalmazott háromszögcsempék középpontjai által meghatározott legkisebb területű konvex síkidommal azonosítjuk. Igaz továbbá, hogy ezen digitális körök digitálisan konvexek, vagyis ezek a síkidomok nem tartalmaznak olyan háromszögcsempe középpontot, amely nem eleme a digitális körnek. Az egy pontból induló, szomszédsági szekvenciával generált hullámfrontokkal láthatjuk, hogy a háromszögrácson a digitális körök tulajdonképpen sokszögek [25], ahogy a 2. ábra is mutatja.

4.4. TÉTEL. Egy B szomszédsági sorozat által definiált k sugarú kör alakja

- háromszög: $C_1^{(1)}$, akkor és csak akkor, ha $k = 1$, és $b(1) = 1$;
- hatszög, ha B felhasznált elemei közt nincs 3-as (kivéve az előző esetet);
- kilencszög, ha B felhasznált elemei közt nincs 2-es, továbbá nincs két egymás melletti azonos érték (kivéve az első esetet);
- tizenkétszög, minden az előző esetekbe nem illő esetben.

A fentiek alapján a háromszögrácson szomszédsági sorozatokkal jobban közelíthető az euklideszi távolság és kör, mint a négyzetrácson [7, 30, 39]. Ez utóbbin a digitális körök négyzetek, ha csak egyféle lépést használunk, ezzel „megoldva” a kör négyszögesítését a digitális sík felhasználásával [13, 35], illetve általános esetben nyolcszögek (ezért hívják *oktagonális távolság*oknak is a szomszédsági sorozatokkal definiált távolságokat [4]).

5. Súlyozott távolságok a háromszögrácson

A 3-szomszédságú utakat ebben a fejezetben egyszerűen utaknak nevezzük.

5.1. Definíció. Legyenek α, β, γ pozitív súlyok. Ekkor bármely $\Pi(p, q) : p = p_0, p_1, \dots, p_m = q$ úthoz hozzárendelhető az $n_1\alpha + n_2\beta + n_3\gamma$ súly, ahol n_1 a Π -ben levő 1-szomszéd (p_i, p_{i+1}) pontpárok száma, n_2 a szigorú 2-szomszéd (p_i, p_{i+1}) pontpárok száma, valamint n_3 a szigorú 3-szomszéd (p_i, p_{i+1}) pontpárok száma ($0 \leq i < m$). A p és q közti legkisebb súlyú út súlya adja a pontok (α, β, γ) súlyokkal vett *súlyozott távolságát*, amit $d(p, q; \alpha, \beta, \gamma)$ jelöl.

Itt jegyezzük meg, hogy egyes terminológia szerint súlyozott távolság esetén csak akkor beszélnek digitális távolságról, ha a távolság (vagyis a használt súlyok) értéke egész. Cikkünkben a természetes $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$ feltételt alkalmazzuk.

5.1. A távolság számítása

Nemcsak maga a súlyozott távolság, de az is függ maguktól a súlyoktól is, hogy mely út súlya lesz a legkisebb. Ennek megfelelően a következő tétel adja meg, hogy milyen feltételek esetében mely formula adja meg a súlyozott távolságot két tetszőleges pont között [32]. Ahogy a korábbiakban láttuk, nem csupán a pontok koordináta különbsége, de a pontok paritása, és egymáshoz viszonyított iránya is fontos szerepet játszik a legrövidebb út és a távolság meghatározásában.

5.1. TÉTEL. Legyenek α, β, γ pozitív súlyok, valamint $p = (p(1), p(2), p(3))$ és $q = (q(1), q(2), q(3))$ a háromszögrács két pontja. Ekkor p és q (α, β, γ) súlyokkal vett *súlyozott távolsága*:

1. Ha $2\alpha \leq \beta$ és $3\alpha \leq \gamma$, akkor $d(p, q; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha d(p, q; (1))$.

2. Ha $2\alpha > \beta$ és $3\alpha \leq \gamma$, akkor $d(p, q; \alpha, \beta, \gamma) = \beta \left\lfloor \frac{d(p, q; (1))}{2} \right\rfloor + \delta_{p, q} \alpha$.

3. Ha $2\alpha > \beta$, $3\alpha > \gamma$ és $\alpha + \beta \leq \gamma$, akkor $d(p, q; \alpha, \beta, \gamma) = \beta \left\lfloor \frac{d(p, q; (1))}{2} \right\rfloor + \delta_{p, q} \alpha$.

4. Ha $2\alpha > \beta$, $3\alpha > \gamma$, $\alpha + \beta > \gamma$ és $2\beta < \gamma + \alpha$, akkor:

$$d(p, q; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \beta \frac{d(p, q; (1))}{2} & \text{ha } \delta_{p, q} = 0, \\ \beta \frac{d(p, q; (1)) - 3}{2} + \gamma & \text{ha } \delta_{p, q} = 1, \sigma_{p, q} = 1, \\ \beta \frac{d(p, q; (1)) - 1}{2} + \alpha & \text{egyébként.} \end{cases}$$

5. Ha $2\alpha > \beta$, $3\alpha > \gamma$, $\alpha + \beta > \gamma$ és $\gamma + \alpha \leq 2\beta$, akkor $d(p, q; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha(|v(3)| + \delta_{p, q}(-1)^{\sigma_{p, q}} + \beta \frac{|v(1)| + |v(2)| - 3|v(3)| + \delta_{p, q}(-1)^{1 - \sigma_{p, q}}}{2} + \gamma|v(3)|$.

6. Végül, ha $2\alpha \leq \beta$ és $3\alpha > \gamma$, akkor $d(p, q; \alpha, \beta, \gamma) = \alpha(|v(1)| + |v(2)| - 2|v(3)|) + \gamma|v(3)|$.

Most példát adunk mindegyik esetre egészértékű súlyokkal.

5.1. Példa. Legyen $p = (0, 0, 0)$, $q = (2, 2, -3)$ és $r = (-3, -2, 5)$. Ekkor $\alpha = 2, \beta = 5$ és $\gamma = 6$ súlyválasztás megfelel az első esetnek, ekkor $d(p, q; 2, 5, 6) = 14$. Legyen most $\alpha = 2, \beta = 3$ és $\gamma = 7$. Ezen súlyok a második esetnek felelnek meg, így $d(p, q; 2, 3, 7) = 11$ és $d(p, r; 2, 3, 7) = 15$. Az $\alpha = 3, \beta = 4, \gamma = 8$ súlyhármas a harmadik esetre példa; $d(p, q; 3, 4, 8) = 15$. A negyedik esetet szemlélteti az $\alpha = 4, \beta = 5, \gamma = 8$ súlyhármas. Így $d(p, q; 4, 5, 8) = 18$ és $d(p, r; 4, 5, 8) = 25$ adódik. Továbbá, $\alpha = 4, \beta = 7, \gamma = 8$ választás az ötödik esetbe esik. Ezekkel a súlyokkal $d(p, q; 4, 7, 8) = 20$ és $d(p, r; 4, 7, 8) = 31$. Végül, $\alpha = 3, \beta = 7, \gamma = 8$ az utolsó esetre példa; ezesetben $d(p, q; 3, 7, 8) = 19$ és $d(p, r; 3, 7, 8) = 28$.

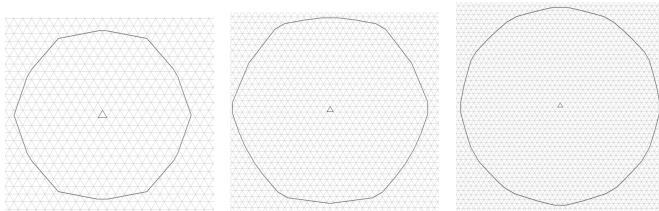
A különböző súlyeloszlásokhoz tartozó optimális megoldásokat lineáris egészértékű programozás segítségével írtuk le a [11] cikkben.

5.2. Súlyozott távolságok tulajdonságai és digitális körök

A súlyozott távolságok bizonyos szempontból jobban viselkednek a szomszédsági sorozatokkal definiált távolságoknál, ugyanis a súlyozott utak megfordíthatóak, illetve összefűzhetőek, aminek következménye a következő eredmény ([32]).

5.2. TÉTEL. *A súlyozott távolság bármilyen pozitív súlyhármas esetén metrikus.*

A digitális körök esetén a távolságot itt az α, β, γ súlyhármassal azonosítjuk (és ezt írjuk a felső indexbe: $C_k^{\alpha, \beta, \gamma}$). A természetes $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ feltétel teljesülése esetén az α, β, γ súlyokkal definiált digitális körök mindig digitálisan konvexek. Néhányat bemutatunk a 3. ábrán. A leírásukhoz geometriai, kombinatorikai [15, 38] és operációkutatási módszerek is alkalmazhatóak [10, 12]. Többek között egy 18-szög alakú digitális kört írtunk le Chvátal-vágás alkalmazásával [12], és egy 63-szög alakú digitális kört is megadtunk [15]. Ezzel szemben a négyzet rácson a hagyományos két szomszédság segítségével, két súllyal, a digitális köröknek legfeljebb 8 csúcsa lehet. Ez egy olyan kutatási irány, amely jelenleg is aktív. Így ez a terület átvezet minket a következő kitekintő fejezetbe.



3. ábra. Digitális körök súlyozott távolságokkal, $C_{100}^{6,10,12}$ balra, 18-szög; $C_{200}^{7,13,17}$ középen, 27-szög és $C_{299}^{8,15,18}$ jobbra, 48-szög.

6. Összefoglalás és további kapcsolódó kutatási irányok

A digitális távolságok elméletét foglaltuk össze a háromszögrácson, képletet adtunk a távolság kiszámítására két tetszőlegesen adott háromszögcsempe között, a távolságok metrikusságát is vizsgáltuk. Ezen távolságok nemcsak matematikai szempontból érdekesek, hanem azért is, mert hasonlóan a digitális távolságok négyzet rácson való alkalmazásához, változatos módon használhatóak pl. a digitális képfeldolgozás területén. Kapcsolódó kutatások folyamatban vannak a digitális körökkel kapcsolatban. Mint láthattuk, a digitális térben sokszor nem egy legrövidebb út van két pont között. A legrövidebb utak számát a háromszögrácson mint kombinatorikai problémát a [6, 36, 37] cikkekben vizsgáltuk.

Köszönetnyilvánítás

A szerző köszöni a társszerzőinek a közös munkát és a lektorok megjegyzéseit.

Hivatkozások

- [1] G. BORGEFORS: *Distance transformations in arbitrary dimensions*: Comput. Vision Graphics Image Process., Vol. **27**, pp. 321-345 (1984).
- [2] P.P. DAS, P.P. CHAKRABARTI AND B.N. CHATTERJI: *Distance functions in digital geometry*, Inform. Sci., Vol. **42**, pp. 113-136 (1987).
- [3] P.P. DAS, P.P. CHAKRABARTI AND B.N. CHATTERJI: *Generalised distances in digital geometry*, Inform. Sci., Vol. **42**, pp. 51-67 (1987).
- [4] P.P. DAS AND B.N. CHATTERJI: *Octagonal distances for digital pictures*, Inform. Sci., Vol. **50**, pp. 123-150 (1990).
- [5] E.S. DEUTSCH: *Thinning algorithms on rectangular, hexagonal and triangular arrays*, Communications of the ACM, Vol. **15** pp. 827-837 (1972).
- [6] M. DUTT, A. BISWAS AND B. NAGY: *Number of Shortest Paths in Triangular Grid for 1- and 2-Neighborhoods*, IWCIA'15, LNCS Vol. **9448**, pp. 115-124 (2015). DOI: 10.1007/978-3-319-26145-4_9
- [7] A. HAJDU AND B. NAGY: *Approximating the Euclidean circle using neighbourhood sequences*, 3. KÉPAF konferencia, Domaszék, pp. 260-271 (2002).
- [8] P. KARDOS AND K. PALÁGYI: *Topology preservation on the triangular grid*, Ann. Math. Artif. Intell. Vol. **75**, pp. 53-68 (2015). DOI:10.1007/s10472-014-9426-6
- [9] R. KLETTE AND A. ROSENFELD: *Digital geometry: Geometric methods for digital picture analysis*, Morgan Kaufmann, San Francisco, CA; Elsevier, Amsterdam, p. xiii+655 (2004).
- [10] G. KOVÁCS, B. NAGY AND B. VIZVÁRI: *An Integer Programming Approach to Characterize Digital Disks on the Triangular Grid*, DGCI 2017, LNCS Vol. **10502**, pp. 94-106 (2017). DOI: 10.1007/978-3-319-66272-5_9

- [11] G. KOVÁCS, B. NAGY AND B. VIZVÁRI: *Chamfer distances on the isometric grid: a structural description of minimal distances based on linear programming approach*, Journal of Combinatorial Optimization, Vol. **38**, pp. 867-886 (2019). DOI: 10.1007/s10878-019-00425-x
- [12] G. KOVÁCS, B. NAGY AND B. VIZVÁRI: *On disks of the triangular grid: An application of optimization theory in discrete geometry*, Discrete Applied Mathematics Vol. **282**, pp. 136-151 (2020). DOI: 10.1016/j.dam.2019.11.018
- [13] S. MARCHAND-MAILLET AND Y.M. SHARAIHA: *Binary Digital Image Processing: A Discrete Approach*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, p. 251 (2000).
- [14] R.A. MELTER AND I. TOMESCU: *Path generated digital metrics*, Pattern Recognition Lett., Vol. **1**, pp. 151-154 (1983).
- [15] H. MIR-MOHAMMAD-SADEGHI AND B. NAGY: *On the Chamfer Polygons on the Triangular Grid*, IWCIA 2017, LNCS Vol. **10256**, pp. 53-65 (2017). DOI: 10.1007/978-3-319-59108-7_5
- [16] B. NAGY: *Finding shortest path with neighbourhood sequences on triangular grids*, ISPA'01, 2nd Int. Symp. Image and Signal Proc. and Analysis, Pula, Croatia pp. 55-60 (2001).
- [17] B. NAGY: *Metrics Based on Neighbourhood Sequences in Triangular Grids*, Pure Math. Appl., Vol. **13**, pp. 259-274 (2002).
- [18] B. NAGY: *Shortest Path in Triangular Grids with Neighbourhood Sequences*, Journal of Comp. and Inf. Techn., Vol. **11**, pp. 111-122 (2003).
- [19] B. NAGY: *A symmetric coordinate system for hexagonal networks*, (2004), IS-TCS'04, Proc. Theor. Comp. Sci. - Inform. Soc., Ljubljana, Slovenia, pp. 193-196 (2004).
- [20] B. NAGY: *Non-metrical distances on the hexagonal plane*, PRIA-7-2004, 7th Int. Conf. on Pattern Recog. and Image Anal.: New Information Technologies, St. Petersburg, Russian Federation, pp. 335-338 (2004).
- [21] B. NAGY: *Characterization of Digital Circles in Triangular Grid*, Pattern Recognition Lett. Vol. **25**, pp. 1231-1242 (2004). DOI: 10.1016/j.patrec.2004.04.001
- [22] B. NAGY: *Szomszédási szekvenciák a háromszögrácson*, 4. NJSZT-KÉPAF konferencia, Miskolc, pp. 197-205 (2004).
- [23] B. NAGY: *Calculating Distance with Neighborhood Sequences in the Hexagonal Grid*, IW-CIA 2004, LNCS Vol. **3322** pp. 98-109 (2004).
- [24] B. NAGY: *Metrical and Nonmetrical Distances on the Hexagonal Plane*, Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. **15**, pp. 268-271 (2005).
- [25] B. NAGY: *Geometry of neighborhood sequences in hexagonal grid*, DGCI 2006, LNCS Vol. **4245**, pp. 53-64 (2006). DOI: 10.1007/11907350_5
- [26] B. NAGY: *Digital geometry of various grids based on neighbourhood structures*, 6. KÉPAF konferencia, Debrecen, pp. 46-53 (2007).
- [27] B. NAGY: *Distances with Neighbourhood Sequences in Cubic and Triangular Grids*, Pattern Recognition Lett., Vol. **28**, pp. 99-109 (2007). DOI: 10.1016/j.patrec.2006.06.007
- [28] B. NAGY: *Nonmetrical Distances on the Hexagonal Grid Using Neighborhood Sequences*, Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. **17**, pp. 183-190 (2007). DOI: 10.1134/S1054661807020022

- [29] B. NAGY: *Theory of Neighborhood Sequences on Hexagonal Grids*, ISPA 2007, 5th Int. Symp. Image and Signal Processing and Analysis, Istanbul, Turkey, pp. 391-396 (2007).
- [30] B. NAGY: *Optimal Neighborhood Sequences on the Hexagonal Grid*, ISPA 2007, 5th Int. Symp. Image and Signal Processing and Analysis, Istanbul, Turkey, pp. 310-315 (2007).
- [31] B. NAGY: *Distances Based on Neighborhood Sequences in the Triangular Grid*, in: Computational Mathematics: Theory, Methods and Applications, Nova Science Publishers, pp. 313-351 (2011).
- [32] B. NAGY: *Weighted Distances on a Triangular Grid*, IWCIA 2014, LNCS Vol. **8466**, pp. 37-50 (2014). DOI: 10.1007/978-3-319-07148-0_5
- [33] B. NAGY: *Number of Words Characterizing Digital Balls on the Triangular Tiling*, DGCI 2016, LNCS Vol. **9647**, pp. 31-44 (2016).
- [34] B. NAGY: *Application of neighborhood sequences in communication of hexagonal networks*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **216**, pp. 424-440 (2017). DOI: 10.1016/j.dam.2015.10.034
- [35] B. NAGY: *On the number of shortest paths by neighborhood sequences on the square grid*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. **21**, pp. 285-301 (2020). DOI: 10.18514/MMN.2020.2790
- [36] B. NAGY AND A. AKKELES: *Trajectories and Traces on Non-traditional Regular Tessellations of the Plane*, IWCIA 2017, LNCS Vol. **10256**, pp. 16-29 (2017). DOI: 10.1007/978-3-319-59108-7_2
- [37] B. NAGY AND B. KHASSAWNEH: *On the Number of Shortest Weighted Paths in a Triangular Grid*, Mathematics, Vol. **8** paper 118 (2020). DOI: 10.3390/math8010118
- [38] B. NAGY AND H. MIR-MOHAMMAD-SADEGHI: *Digital Disks by Weighted Distances in the Triangular Grid*, DGCI 2016, LNCS Vol. **9647**, pp. 385-397 (2016). DOI: 10.1007/978-3-319-32360-2_30
- [39] B. NAGY AND R. STRAND: *Approximating Euclidean circles by neighbourhood sequences in a hexagonal grid*, Theoretical Computer Science, Vol. **412**, pp. 1364-1377 (2011). DOI: 10.1016/j.tcs.2010.10.028
- [40] A. ROSENFELD AND J.L. PFALTZ: *Distance functions on digital pictures*, Pattern Recognition, Vol. **1**, pp. 33-61 (1968).
- [41] I. STOJMENOVIC: *Honeycomb networks: topological properties and communication algorithms*, IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst., Vol. **8**, pp. 1036-1042 (1997).
- [42] M. YAMASHITA AND N. HONDA: *Distance functions defined by variable neighbourhood sequences*, Pattern Recognition, Vol. **17**, pp. 509-513 (1984).
- [43] M. YAMASHITA AND T. IBARAKI: *Distances defined by neighbourhood sequences*, Pattern Recognition, Vol. **19** pp. 237-246 (1986).



Nagy Benedek 1973-ban született. Tanulmányai: Debreceni Egyetem (KLTE, DE), fizikus (1996), programozó matematikus (1997), filozófus (logika spec., 1998), programtervező matematikus (1999), alkalmazott és általános nyelvész (2000); PhD (2004) és habilitáció (2007), Matematika és Számítástudományok, illetve Informatika tudományterületen. Főbb díjai: Patai László Alapítvány díja (BJMT, 2004), Kemény János Díj (NJSzT, 2006). Vendégkutató: Indiana Egyetem (USA), Rovira i Virgili Egyetem (Spanyolország), Brémai Egyetem (Németország), Uppsala Egyetem (Svédország), Kyoto-Sangyo Egyetem (Japán). 2010 és 2012 között a DE Informatikai Karának dékánhelyettese. Jelenleg a diszkrét matematika és a számítástudomány professzora az Eastern Mediterranean Egyetemen (Famagusta, Ciprus). Főbb kutatási területei: digitális geometria, formális nyelvek, automaták, kombinatorikus képfeldolgozás, számítási paradigmák, mesterséges intelligencia. Szervezője az MCU2015 (Famagusta) és az NCMA2016 (DE), meghívott előadója pl. a DCFS 2019 konferenciának.

NAGY BENEDEK

Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences, Eastern Mediterranean University, Famagusta, North Cyprus, via Mersin-10, Turkey
 nbenedek.inf@gmail.com

DIGITAL DISTANCES ON THE TRIANGULAR GRID

BENEDEK NAGY

One of the three regular tessellations of the plane is the triangular grid. It is based on triangle tiles. Digital spaces, i.e., grids are used in image processing in computer graphics, and the graphs/networks defined by them are also play importance in other disciplines. In digital spaces, digital distances are defined based on (graph theoretical) shortest paths between the tiles (they are also called pixels and points depending on the subdiscipline). The concept of neighbor points plays a crucial role. Paths and digital distances allow to use incremental algorithms and therefore of high importance. There are three types of natural neighborhood on the triangular grid. The symmetric coordinate system describes them nicely. In the basic digital distances the same type of neighborhood is used in each step of the path. By neighborhood sequences, one can vary the used neighborhood criteria step by step along the path giving a large variety of digital distances. However, some of those distance may not meet the triangular inequality and/or not symmetric. Thus, when metricity of the distance function is important, one may use the if and only if condition provided for the neighborhood sequences to check their metricity. Another way to define various digital distances based on various weights assigned to the steps between the various neighbor points. These weighted (also called chamfer) distances are always define metrical distances. Formulae to compute digital distances of the mentioned types are presented, as well as, some further studies, including the description of some digital disks (balls) defined by digital distances.

Keywords: neighborhood sequences, chamfer distances, weighted distances, triangular grid, digital disks.

POLINOMIÁLIS OPTIMALIZÁLÁSI FELADATOK ÉS RELAXÁCIÓK

PAPP DÁVID

Polinomok zárt félalgebrai halmazok feletti szélsőértékeinek meghatározása nehéz, de számtalan (matematikai és egyéb) alkalmazásokkal bíró feladat. Ebben a dolgozatban rövid áttekintést adunk a feladat algebrai háttéréről és megoldásának numerikus módszereiről. A polinomiális optimalizálás NP-nehéz, ezért hatékonyan megoldható relaxációk és közelítő módszerek keresése népszerű kutatási terület. Két megközelítést ismertetünk: az első a négyzetösszegge alakítás módszere, ami Schmüdgen, Putinar, és mások *Positivstellensatzként* ismert tételein alapul, a másik a nemnegatív körpolinomok módszere, ami súlyozott számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenségeket használva korlátozza az optimalizálandó polinomot. A két módszer leírása után azt is vizsgáljuk, hogyan oldhatjuk meg a közelítő feladatokat a szemidefinit programozás és a nonszimmetrikus kúpprogramozás belsőponthoz módszereivel.

1. Bevezetés

A polinomiális optimalizálás alapfeladata a következő: határozzuk meg egy adott, n változós, d -edfokú, valós együtthatós f polinom legkisebb értékét egy polinomiális egyenlőtlenségekkel megadott

$$S := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, \dots, m\} \quad (1)$$

zárt félalgebrai halmaz felett, pontosabban az

$$\inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\} \quad (2)$$

értéket, illetve a feladat egy optimumhelyét, amennyiben f felveszi az infimumát (Ez utóbbi automatikusan teljesül, ha S korlátos.).

A polinomiális optimalizálásnak (illetve a szorosan kapcsolódó kérdésnek, hogy egy polinomnak van-e zérushelye egy adott félalgebrai halmazon) számtalan alkalmazása ismert, mind a matematikai tudományokon belül, mind azon kívül, ezek közül csak néhányat említünk meg. Diszkrét geometriai feladatok felírhatók polinomiális optimalizálási feladatként [5, 6]. Statisztikai kísérlettervezésben és értékelők optimális elhelyezésének feladatában az optimális konfigurációk leírhatók

nemnegatív polinomok gyökeinek halmazaként (pl. [33]). Szabályozástechnikában és dinamikus rendszerek tervezésében a félegyenesen és magasabb dimenziós féltereken nemnegatív polinomok fontos szerepe révén alkalmazható a polinomiális optimalizálás [16, 4, 2, 24, 49]. A pozitív (vagy nemnegatív) gyökök létezése a reakciókinetikában is fontos kérdés [52, 7. fej.], [9], ez is átfogalmazható polinomiális optimalizálási feladatként (ahol S az első ortáns).

A polinomiális optimalizálás NP-nehéz már abban a speciális esetben is, ha $m = 0$ (azaz $S = \mathbb{R}^n$) és $d = 4$, illetve abban az esetben is, ha $S = [0, 1]^n$ és $d = 2$; a [10] cikk számos klasszikus NP-nehéz kombinatorikus optimalizálási feladatot visszavezet az utóbbi problémára. A polinomiális optimalizálás algebrai és numerikus módszereiről számos nagyobb lélegzetű összefoglaló cikk és monográfia készült, például [27], [29], és [7]. Ennek a cikknek kettős célja van: egyrészt egy rövid magyar nyelvű összefoglalást ad a polinomiális optimalizálás legfontosabb eszközeiről, másrészt kiemel néhány közelmúltbeli eredményt és aktív kutatási irányt, amik az említett „klasszikus” forrásokban nem találhatók meg.

A polinomiális optimalizálás feladata szorosan kapcsolódik a nemnegatív polinomok karakterizációjának feladatához. Jelölje \mathcal{P}_d^S az S halmazon nemnegatív d -edfokú polinomok halmazát, ekkor a (2) optimalizálási feladat így is írható:

$$\sup\{c \mid f - c \in \mathcal{P}_d^S\}. \quad (3)$$

Érdeemes megemlítenünk, hogy bár a (2) feladat általában nem konvex optimalizálási feladat (hiszen általános esetben sem az f célfüggvény, sem pedig a megengedett megoldások S halmaza nem konvex), a (3) formában írva azonban már konvex, hiszen a célfüggvény lineáris, és a \mathcal{P}_d^S halmaz is konvex minden d -re és S -re, függetlenül attól, hogy S konvex-e. A „trükk” az, hogy a (2) és (3) feladatok különböző terekben optimalizálnak (az előbbi feladat változói nem jelennek meg az utóbbiban). A konvex alak természetesen nem jelenti azt, hogy a feladat egyszerűbben megoldható, a (3) feladat is NP-nehéz, de a konvexitás egyéb következményei (pl. optimalitási feltételek, a lokális minimumok globális minimum volta) fontosak és felhasználhatók algoritmusok tervezésben.

A (2) feladat nehézsége abból is levezethető, hogy már annak eldöntése is NP-nehéz, hogy egy polinom nemnegatív-e az S halmaz felett. Másodfokú polinomok esetén, ha $S = \mathbb{R}_+^n$, a kérdés ekvivalens annak eldöntésével, hogy egy adott valós szimmetrikus mátrix teljesen pozitív-e [30]. A teljesen pozitív kúpba tartozás kérdésének erős NP-teljességét a közelmúltban bizonyították precízen [14].

Mindezekből következik, hogy a polinomiális optimalizálás feladatára, a legegyszerűbb speciális esetektől eltekintve, nem várható hatékony (polinomiális futásidőjű) algoritmus. A (2) feladat megoldását célzó numerikus módszerek stratégiája ezért a következő: a feladat (3) alakjában a nehezen kezelhető \mathcal{P}_d^S kúpot egy olyan közelítő kúpra cseréljük, amelyre a kúpba tartozás kérdése polinomidőben eldönthető. A közelítés pontossága és a futásidő között kompromisszumot kell kötnünk: a módszerek általában nem egy közelítő kúppal dolgoznak, hanem közelítő kúpok

egy $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{P}_d^S$ sorozatával, amelyre $\cup_{i=1}^{\infty} K_i = \mathcal{P}_d^S$. Fontos, hogy a K_i kúp *belülről* közelítse a \mathcal{P}_d^S kúpot: így a $\sup\{c \mid f - c \in K_i\}$ feladat minden megengedett megoldása alsó korlátot ad a (2) feladat megoldására, továbbá az $f - c$ polinom K_i -beli tagsága egy polinomidőben ellenőrizhető tanúsítványa a $c \leq \inf\{f(x) \mid x \in S\}$ egyenlőtlenségnek.

A következő két szakasz a \mathcal{P}_d^S -t belülről közelítő kúpok két családját mutatja be részletesebben.

2. Négyzetösszeggé alakítható (SOS) polinomok és szemidefinit optimalizálás

Egy valós együtthatós p polinom *négyzetösszeggé alakítható* (angolul *sum-of-squares*, röviden *SOS*), ha előáll valós együtthatós polinomok négyzetösszegeként: $p = \sum_{i=1}^j q_i^2$. Az n változós $2d$ -edfokú négyzetösszeggé alakítható polinomok halmazát jelölje $\Sigma_{n,2d}$. Nyilvánvaló, hogy az SOS tulajdonság a nemnegativitás elégséges feltétele: $\Sigma_{n,2d} \subseteq \mathcal{P}_{2d}^{\mathbb{R}^n}$. (A feltétel nem szükséges, ld. a 2.2. tételt.) Az is könnyen belátható, hogy $\Sigma_{n,2d}$ egy zárt konvex kúp, amelyre $\dim \text{span}(\Sigma_{n,2d}) = \dim \text{span}(\mathcal{P}_{2d}^{\mathbb{R}^n}) = \binom{n+2d}{2d}$.

A nemnegativitás és négyzetösszeggé alakíthatóság kapcsolatának vizsgálata már a XIX. században megkezdődött: polinomok helyett racionális törtfüggvényekre a két tulajdonság ekvivalens [3], ez Hilbert 17-ik problémája [21], ám ebből még nem következik, hogy a négyzetösszeggé alakítás könnyen megoldható. Újabb eredmény, hogy az SOS *polinomok* felismerése polinomidőben visszavezethető egy *szemidefinit optimalizálási* feladatra [46, 31]. A szemidefinit optimalizálás feladatának pontos definíciójához szükségünk lesz az alábbi jelölésekre.

Legyen \mathbb{S}^k a $k \times k$ méretű valós szimmetrikus mátrixok halmaza és \mathbb{S}_+^k a pozitív szemidefinit $k \times k$ mátrixok halmaza. Használjuk továbbá az $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{B}$ egyenlőtlenséget annak jelölésére, hogy az $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ mátrix pozitív szemidefinit.

2.1. Definíció. A $H \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz *szemidefiniten reprezentálható*, ha valamilyen $k \geq 1$ és $\ell \geq 0$ egész számra léteznek olyan $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^k$ és $C : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{S}^k$ affin (elsőfokú, nem feltétlenül homogén) függvények, amelyekkel H a következőképpen írható:

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{u} \in \mathbb{R}^\ell : A(\mathbf{x}) + C(\mathbf{u}) \succcurlyeq \mathbf{0}\}. \quad (4)$$

A definíció közvetlen következménye, hogy minden szemidefiniten reprezentálható halmaz konvex. Egy sokat vizsgált, algebrai geometriai szemszögből különösen érdekes speciális eset az \mathbf{u} „segédváltozók” nélküli $\ell = 0$ eset: a H halmaz egy *spektraéder*, ha felírható (4) alakban és $\ell = 0$ [55]. Ha továbbá $A(\mathbf{x})$ értéke diagonális mátrix minden \mathbf{x} -re, akkor H egy *konvex poliéder* (és fordítva, minden konvex poliéder szemidefiniten reprezentálható ilyen módon).

Az előbbiek segítségével azt mondjuk, hogy egy optimalizálási probléma egy *szemidefinit optimalizálási feladat*, ha felírható

$$\inf \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in H \}$$

alakban, ahol $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ és H egy szemidefiniten reprezentálható halmaz.

Szemidefinit optimalizálási feladatok a lineáris programozásra emlékeztető módon *standard alakra* hozhatók [53, 54]. A standard alak egyik szokásos (primál) formája

$$\inf \{ \mathbf{C} \bullet \mathbf{X} \mid \mathbf{A}_i \bullet \mathbf{X} = b_i, i = 1, \dots, m; \mathbf{X} \succcurlyeq \mathbf{0} \}, \quad (5)$$

ahol \bullet jelöli a mátrixok skaláris (Frobenius) szorzatát, az $\mathbf{A}_i \in \mathbb{S}^k$ mátrixok, a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ vektor és a $\mathbf{C} \in \mathbb{S}^k$ mátrix adottak, és \mathbf{X} az optimalizálási változó. Ekkor a *duális feladat* így írható:

$$\sup \left\{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{C} - \sum_{i=1}^m \mathbf{A}_i y_i \succcurlyeq \mathbf{0} \right\}. \quad (6)$$

Szemidefinit optimalizálási feladatok polinomiális futásidővel megoldhatók, ha az \mathbf{A}_i és \mathbf{C} együtthatómátrixok és a \mathbf{b} vektor egészek, és a bemenet méretét kellő körültekintéssel definiáljuk [17, 41]. Ezt nem részletezzük, de annyit fontos megjegyeznünk, hogy (a lineáris programozással ellentétben!) csupán az $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$, \mathbf{b} és \mathbf{C} méretében polinomiális futásidőben a szemidefinit optimalizálási feladatok általában *nem* oldhatók meg.

A gyakorlatban belső pontos algoritmusokkal az (5-6) feladatok meglehetősen nagy méretű példányai, ahol k és m tízezres nagyságrendűek, viszonylag könnyen megoldhatók. (2.2. szakasz.)

A polinomiális optimalizálás egyik alapvető eredménye, hogy (minden (n, d) párra) a $\Sigma_{n,2d}$ kúp és duális kúpja szemidefiniten reprezentálhatók [31, 38, 26].

2.1. TÉTEL. ([31]) Legyen $L = \binom{n+d}{d}$ és $U = \binom{n+2d}{2d}$, továbbá legyen $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_L)$ az n változós d -edfokú polinomok egy tetszőleges rendezett bázisa, és legyen $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_U)$ az n változós $2d$ -edfokú polinomok egy tetszőleges rendezett bázisa. Jelölje Λ azt az (egyértelműen meghatározott) lineáris $\mathbb{R}^U \rightarrow \mathbb{S}^L$ leképezést, amelyre $\Lambda(\mathbf{q}) = \mathbf{p}\mathbf{p}^T$, míg Λ^* ennek az adjungáltját. Ekkor $\mathbf{x} \in \Sigma_{n,2d}$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $\mathbf{X} \in \mathbb{S}_+^L$ mátrix amelyre

$$\mathbf{x} = \Lambda^*(\mathbf{X}).$$

Ennek következményeképpen a $\Sigma_{n,2d}$ kúp duális kúpja is szemidefiniten reprezentálható (sőt, spektraéder):

$$\Sigma_{n,2d}^* = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^U \mid \Lambda(\mathbf{s}) \succcurlyeq \mathbf{0} \}.$$

2.1. *Példa.* Az algebra alaptételének egyszerű következménye, hogy egy egyváltozós valós együtthatós polinom akkor és csak akkor nemnegatív a teljes számsíkon, ha SOS [39, 44. feladat]. A 2.1. Tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy a $p(t) = \sum_{k=0}^{2d} p_k t^k$ egyenlőséggel definiált p polinom akkor és csak akkor nemnegatív a teljes számsíkon, ha létezik olyan valós pozitív szemidefinit $\mathbf{X} = (x_{ij})_{i,j=0}^d$ mátrix, amelyre

$$p_k = \sum_{i+j=k} x_{ij}, \quad k = 0, \dots, 2d. \tag{7}$$

(Ez az \mathbf{X} mátrix általában nem egyértelmű.) A duális $\Sigma_{1,2d}^*$ kúp pedig az olyan $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_{2d}) \in \mathbb{R}^{2d+1}$ vektorok kúpja, amelyekre az

$$\begin{pmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_d \\ s_1 & s_2 & & & s_{d+1} \\ s_2 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ s_d & s_{d+1} & \cdots & & s_{2d} \end{pmatrix}$$

Hankel-mátrix pozitív szemidefinit.

2.1. A nemnegatív és négyzetösszegé alakítható polinomok kapcsolata

Mikor azonos a négyzetösszegé alakítható és a nemnegatív polinomok halmaza? Erre a kérdésre Hilbert alábbi tétele ad választ:

2.2. TÉTEL. ([20]) $\Sigma_{n,2d} = \mathcal{P}_{n,2d}$ akkor és csak akkor, ha $n = 1$ vagy $2d = 2$ vagy $(n, 2d) = (2, 4)$.

Amint említettük, az $n = 1$ eset az algebra alaptételéből egyszerűen levezethető. A másodfokú (többváltozós) esetben az állítás annak az átfogalmazása, hogy $\mathbf{A} \succcurlyeq \mathbf{0}$ akkor és csak akkor, ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$ valamilyen \mathbf{B} mátrixra. A kétváltozós negyedfokú eset lényegesen bonyolultabb, ezért nem részletezzük. A többi esetre egyszerű ellenpéldák konstruálhatók: a kétváltozós, hatodfokú *Motzkin-polinom*ot az

$$m(x, y) = 1 - 3x^2y^2 + x^4y^2 + x^2y^4 \tag{8}$$

egyenlőséggel definiáljuk. Ez a polinom mindenhol nemnegatív, ezt a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséggel bizonyíthatjuk. Viszont elemi módszerekkel (a szemidefinit optimalizálási feladat vizsgálata nélkül) is belátható, hogy m nem alakítható négyzetösszegé. Hasonlóan, az $(n, 2d) = (3, 4)$ esetben a

$$c(x, y, z) = 1 - 4xyz + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$$

egyenlőséggel megadott háromváltozós, negyedfokú polinom (a *Choi–Lampolinom*) egy mindenhol nemnegatív, ám négyzetösszegé nem alakítható polinom.

A 2.2. Tétel nem biztató, azonban Artin [3] előbb említett eredménye szerint minden nemnegatív polinom felírható racionális törtfüggvények négyzetösszegeként. Ez motiválja a következő stratégiát $\inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ becslésére. Rögzítünk egy c_0 célszámot, amelyre szeretnénk belátni, hogy $c_0 \leq \inf\{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$ (az optimális értéket c_0 -ra alkalmazott bináris kereséssel közelíthetjük), majd válasszunk egy r fokszámot, és keressünk olyan $s_1 \in \Sigma_{n,r}$ és $s_2 \in \Sigma_{n,2d+r}$ polinomat, amelyekre

$$s_1(f - c_0) = s_2. \quad (9)$$

Az előbbieket alapján a (9) feladat megoldhatósága szemidefinit optimalizálással eldönthető. Ha találunk megoldást, akkor $f \geq c_0$ mindenhol. Ha nem találunk megoldást, akkor az r fokszámot növelve próbálkozhatunk újra. Artin tétele szerint minden f és c_0 értékre vagy létezik olyan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ amelyre $f(\mathbf{x}) < c_0$ vagy létezik olyan r fokszám, amelyre (9) megoldható. A módszer praktikussága kétségbe vonható, mert r értékére nem adható alacsony korlát. Ez jelenleg is aktív kutatási terület; Lombardi, Perrucci és Roy közelmúltbeli eredménye még nem sok jóval kecsegtet:

2.3. TÉTEL. ([28]) *Ha $f \geq c_0$, akkor (9) megoldható valamilyen $r \leq 2^{2^{2^{d^{4^n}}}}$ -re.*

Az (1) alakban megadott félalgebrai S halmazok felett nemnegatív polinomok esete elméletileg hasonlóan kezelhető, és ha a megengedett megoldások halmaza korlátos, akkor a szükséges fokszámok is lényegesen alacsonyabbak.

Nyilvánvaló, hogy az (1) formában megadott S halmazon minden olyan p polinom nemnegatív, amelyre $p = g_i s$ valamilyen s SOS polinommal. Általánosabban, ha $p = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}} \left(\prod_{i \in I} g_i \right) s_I$ és minden s_I négyzetösszeggé alakítható, akkor p nemnegatív. Az ilyen formában írható polinomokat *súlyozott négyzetösszeggé alakítható* (weighted-sum-of-squares) polinomoknak nevezzük. Az állítás (részleges) megfordítása Schmüdgen tétele:

2.4. TÉTEL. ([43]) *Legyen S az (1) egyenletben megadott halmaz, és tegyük fel hogy S kompakt. Ekkor minden az S halmazon (szigorúan) pozitív p polinom felírható*

$$p = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, m\}} \left(\prod_{i \in I} g_i \right) s_I \quad (10)$$

alakban, ahol az s_I , $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ polinomok négyzetösszeggé alakíthatók.

Putinar eredménye az állítás erősebb formája:

2.5. TÉTEL. ([40]) *Jelölje r az $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$ polinomot, és tegyük fel, hogy $C - r = \sum_{i=1}^m g_i q_i$ valamilyen négyzetösszeggé alakítható q_1, \dots, q_m polinomokra és C konstansra. Ekkor minden az S halmazon (szigorúan) pozitív p*

polinom felírható

$$p = s_0 + \sum_{i=1}^m g_i s_i \quad (11)$$

alakban, ahol az s_0, \dots, s_m polinomok négyzetösszeggé alakíthatók.

Praktikus szempontból Putinar 2.5. Tétele a hasznosabb: a 2.1. Tétel értelmében minden SOS polinom reprezentálásához egy külön pozitív szemidefinit mátrixra van szükség, tehát a (10) reprezentációból konstruálható szemidefinit optimalizálási feladatnak 2^m mátrix változója van, míg a (11) reprezentációt használva csak $m+1$ szemidefinit mátrixra van szükség. Putinar tételének szigorúbb feltétele az általánosság megszorítása nélkül feltehető: ha S korlátos, akkor S reprezentációjához mindig hozzáadható a (redundáns) $g_{m+1}(\mathbf{x}) := C - r(\mathbf{x}) \geq 0$ egyenlőtlenség egy kellően nagy C konstanssal; ezzel viszont $C - r = g_{m+1}$ triviálisan kielégíti a Putinar-tétel feltételét.

Megjegyzés. Schmüdgen és Putinar tételeire (és más hasonló, a félalgebrai halmazok felett nemnegatív polinomokat karakterizáló tételekre) a szakirodalom kollektíven *Positivstellensatz* tételekként hivatkozik, Hilbert nullahelytételéhez (*Nullstellensatz*) való hasonlatosságuk miatt. Az SOS polinomok fokszámanak növelésével kapható szemidefinit optimalizálási feladatok sorozatára pedig szemidefinit optimalizálási *hierarchiaként* hivatkozik a szakirodalom.

Schmüdgen és Putinar tétele esetében is fontos kérdés, hogy milyen felső korlát adható a tételekben szereplő s_i SOS polinomok fokszáma. A Schmüdgen-hierarchia esetében Stengle [47], valamint Schweighofer és Nie [44] vizsgálta a fokszárok és a becslés hibájának kapcsolatát. A Putinar-hierarchia esetére hasonló eredmények a [32] cikkben olvashatók. Ezek lényegesen alacsonyabb korlátok, mint a 2.3. Tételbeli fokszámkorlát.

Az alkalmazásokban leggyakrabban felmerülő félalgebrai halmazok esetében általánosabb és egyszerűbben bizonyítható Positivstellensatzok adhatók: a nemnegatív ortáns esetére Pólya [19, 57. old.], konvex politópok esetére Handelman [18] eredményét fontos megemlítenünk. Ebben a két esetben a szemidefinit optimalizálás teljesen meg is kerülhető, helyettük már *lineáris* optimalizálási feladatok sorozatával is adhatunk a polinom minimumértékéhez konvergáló alsó korlátot. A szükséges fokszárok is alacsonyabbak [12, 13].

További hivatkozások. Az SOS polinomok és szemidefinit optimalizálás kapcsolatának vizsgálata Parrilo [38] és Lasserre [26] munkáiból eredeztethető. A részletek iránt érdeklődő olvasónak Laurent összefoglaló cikkét [27] ajánljuk. A polinomiális optimalizálást absztrakt algebrai szemszögből a [29] és [7] monográfiák mutatják be, míg az alapvető algoritmikus kérdések számítási bonyolultságát a [11] cikk taglalja részletesen.

2.2. Numerikus módszerek

A szemidefinit optimalizálás numerikus módszereit részletesen tárgyalja az [57] és [41] könyv. A legnépszerűbb és -hatékonyabb megoldóalgoritmusok belsőpontos algoritmusok, amik a lineáris optimalizálás belsőpontos módszereinek [23, 42, 50] természetes általánosításai. (A szimplex módszernek, a kombinatorikus struktúra hiányában, nincs analogonja a szemidefinit optimalizálásban.) Népszerű implementációk a nyílt forráskódú SeDuMi [48], SDPT3 [51] és CSDP [8], valamint a (nem ingyenes) MOSEK. A YALMIP és CVX Matlab csomagok segítenek a szemidefinit optimalizálási feladattá alakítható optimalizálási feladatok felismerésében, illetve leírásában.

Az SOS polinomok szemidefinit reprezentációnak fő hátránya a szemidefinit optimalizálási feladatok óriási mérete. A 2.1. Tétel értelmében egy $\binom{n+2d}{2d}$ -dimenziós $\Sigma_{n,2d}$ -beli vektor leírásához egy $\binom{n+d}{d} \times \binom{n+d}{d}$ méretű szemidefinit mátrixra van szükség. Ha n rögzített, akkor a szemidefinit mátrix elemeinek száma (a d fokszám függvényében) a vektor dimenziójánál nagyságrendekkel nagyobb: például $n = 1$ esetén az SOS polinom $(2d + 1)$ -dimenziós, míg a polinomot reprezentáló szemidefinit mátrix $(d + 1) \times (d + 1) = \Theta(d^2)$ méretű. Ez akkor is gond, ha a megoldandó (2) optimalizálási feladatban minden polinom alacsony fokszámú, hiszen minden az előző fejezetben ismertetett hierarchia a négyzetösszeggé alakítható polinomok fokszámának növelésével javítja az optimumértékre adott alsó korlátot.

Nagyméretű polinomiális optimalizálási feladatok megoldása továbbra is aktív kutatási terület. Csak két ígéretes irányt említettünk meg: a Positivstellensatzokból a 2.1. tétel segítségével felírt szemidefinit optimalizálási feladatokat azok leírása nélkül megoldhatjuk *nemszimmetrikus* kúpok feletti optimalizálási algoritmusokkal [36, 37]. Amennyiben még ez is túl költséges, akkor a négyzetösszeggé alakítható polinomokat tovább közelíthetjük egyszerűbb kúpokkal, ha a hierarchiákban a szemidefinit mátrixokat például diagonálisan domináns mátrixokra cseréljük [1]. Ezzel kapcsolatban azonban fontos megemlítenünk, hogy Putinar és Schmüdgen Positivstellensatzai ezekkel a közelítésekkel már nem teljesülnek, tehát ez csupán egy heurisztika, nem egy elméletileg megalapozott módszer. Egyszerű ellenpéldákat C. Jozs [25] cikkében találhatunk.

Gyakran felmerülő kérdés, hogy a hierarchiákban használt magas fokszámú polinomok nem vezetnek-e numerikus nehézségekhez. A válasz elsősorban attól függ milyen bázisban reprezentáljuk az SOS polinomokat. A szokásos monomiális bázis nagy körületekintést igényel, hiszen már a polinomok kiértékelése is numerikusan instabil. Kompakt S halmazok felett értelmezett (súlyozott) SOS polinomok esetén a polinomokat Lagrange interpolációs bázisban reprezentálva a 2.1. Tételbeli szemidefinit optimalizálási feladat numerikusan problémamentes [34]. Ha $S = [a, b]^n$, akkor még egyszerűbb és hatékonyabb a másodfajú Csebisev-polinomok bázisában reprezentálni a polinomokat [36].

3. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségen alapuló relaxációk

A nemnegatív, de négyzetösszeggé nem alakítható polinomokra adott két klasszikus példánk (a Motzkin- és a Choi–Lam-polinom) nemnegativitása a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel egyszerűen bizonyítható. Természetes ötlet, hogy az SOS tulajdonság helyett (vagy mellett) használjuk ezt a nemnegativitás elégséges feltételeként. Az elméleti nehézség, hogy (a négyzetösszeggé alakíthatóság konvexitásával ellentétben) egyáltalán nem világos, hogy a „számtani-mértani közép egyenlőtlenséggel bizonyíthatóan nemnegatív polinomok” halmaza konvex-e. A kulcseredmény az alábbi, számtalanszor újrafelfedezett, 3.1. Tétel; ehhez használjuk a következő jelöléseket: minden $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ vektorra, $\mathbf{x}^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$. A p polinom tartóhalmazát jelölje $\text{supp}(p)$. Azt mondjuk, hogy a p polinom egy *körpolinom* (circuit polynomial), ha tartóhalmaza $\text{supp}(p) = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}\}$ alakban írható, ahol az $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ egy affin független halmaz¹ és $\boldsymbol{\beta}$ az $\boldsymbol{\alpha}_i$ vektorok konvex burkának belső pontja, azaz létezik egy (egyértelmű) $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}_+^r$ pozitív együtthatóvektor, amelyre $\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i$ és $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy egy körpolinom tartóhalmaza egy olyan minimálisan affin összefüggő halmaz, amelynek egyik eleme a többi elem konvex burkában található.

3.1. Példa. A (8) egyenletben definiált Motzkin-polinom tartóhalmaza $\left\{\binom{0}{0}, \binom{2}{2}, \binom{4}{2}, \binom{2}{4}\right\}$. Ez egy minimálisan affin összefüggő halmaz, továbbá $\binom{2}{2} = \frac{1}{3} \binom{0}{0} + \frac{1}{3} \binom{2}{4} + \frac{1}{3} \binom{4}{2}$. Ezért a Motzkin-polinom egy körpolinom.

3.1. TÉTEL. ([22]) *Legyen p a $p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^r c_{\boldsymbol{\alpha}_i} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\alpha}_i} + c_{\boldsymbol{\beta}} \mathbf{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ egyenlőséggel definiált körpolinom, és legyen $\boldsymbol{\beta} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ az egyértelműen meghatározott $\lambda_i > 0$ együtthatókkal. Ekkor p nemnegatív \mathbb{R}^n felett akkor és csak akkor, ha minden $i = 1, \dots, r$ -re $\boldsymbol{\alpha}_i \in (2\mathbb{N})^n$ és $c_{\boldsymbol{\alpha}_i} \geq 0$, valamint az alábbi két állítás közül legalább az egyik teljesül:*

1. $\boldsymbol{\beta} \in (2\mathbb{N})^n$ és $c_{\boldsymbol{\beta}} \geq 0$, vagy

$$2. |c_{\boldsymbol{\beta}}| \leq \prod_{i=1}^r \left(\frac{c_{\boldsymbol{\alpha}_i}}{\lambda_i} \right)^{\lambda_i}.$$

A második alternatíva elégségsége a λ_i együtthatókkal súlyozott számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségből adódik. A tétel következménye, hogy körpolinomok esetén a nemnegativitás mindig bizonyítható ezzel az egyenlőtlenséggel. Általános (nem kör-) polinomok esetére, az SOS polinomokhoz hasonlóan, bevezethetjük a *nemnegatív körpolinomok összegévé alakítható polinomok* halmazát, ezt az egyszerűség kedvéért az angol nyelvű szakirodalomban használt rövidítéssel SONC-vel jelöljük (sum of nonnegative circuit polynomials). Egy n -változós

¹Az $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_r\}$ halmaz affin függetlensége azt jelenti, hogy a $\left\{\binom{\boldsymbol{\alpha}_1}{1}, \dots, \binom{\boldsymbol{\alpha}_r}{1}\right\}$ halmaz elemei lineárisan függetlenek.

polinom *SONC polinom*, ha felírható \mathbb{R}^n felett nemnegatív körpolinomok összegeként.

Az SOS tulajdonsághoz hasonlóan a SONC tulajdonság is a nemnegativitás elégséges de nem szükséges feltétele: az egyváltozós $\mathbb{R} \ni x \mapsto (1-x)^4$ polinom például nemnegatív a számegeyenesen, azonban nem SONC. (Ebből már az is látható, hogy az SOS és SONC polinomok kúpjai közül egyik sem tartalmazza a másikat.)

A definíciókból világos, hogy a SONC polinomok halmaza egy konvex kúp, ám ebből még nem következik automatikusan, hogy a SONC polinomok könnyen felismerhetők, illetve hogy egy adott SONC polinom nemnegatív körpolinomok összegeként való felírására hatékony algoritmus adható. Ahogy a négyzetösszeggé alakíthatóság a 2.1. Tétel révén eldönthető szemidefinit optimalizálással, a SONC tulajdonság a 3.1. Tétel segítségével a *hatványkúpok feletti optimalizálásra* vezethető vissza.

3.1. Definíció. Tegyük fel, hogy $\lambda \in \mathbb{R}_+^r$ és $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$. Ekkor a λ paraméterű *hatványkúp* a

$$\mathcal{K}_\lambda := \{(\mathbf{v}, z) \in \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R} \mid |z| \leq \mathbf{v}^\lambda\} \quad (12)$$

halmaz.

A \mathcal{K}_λ kúp egy konvex, zárt, $(r+1)$ -dimenziós konvex kúp, amelynek duálisa (a skaláris szorzásra nézve) a

$$\mathcal{K}_\lambda^* := \left\{ (\mathbf{v}, z) \in \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R} \mid |z| \leq \prod_{i=1}^r \left(\frac{v_i}{\lambda_i} \right)^{\lambda_i} \right\}$$

kúp. Ezzel a jelöléssel a 3.1. tétel második alternatívája egy egyszerű (konvex) kúpfeltételre cserélhető [35]:

$$|c_\beta| \leq \prod_{i=1}^r \left(\frac{c_{\alpha_i}}{\lambda_i} \right)^{\lambda_i} \iff ((c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_r}), c_\beta) \in \mathcal{K}_\lambda^*. \quad (13)$$

Mivel \mathcal{K}_λ^* egy konvex kúp, ebből következik, hogy azonos tartóhalmazú nemnegatív körpolinomok összege is nemnegatív körpolinom. Egy p polinom nemnegatív körpolinomok összegére bontásának feladata tehát ekvivalens azzal, hogy a p polinom együtthatóvektorát felírjuk különböző λ vektorokhoz tartozó \mathcal{K}_λ^* kúpokba tartozó vektorok összegeként. Ez egy konvex kúp feletti lineáris optimalizálási feladat. Ilyen (szemidefinit programozásnál általánosabb) kúpfeltételeket tartalmazó feladatokat, a szemidefinit programozáshoz hasonlóan, belső pontos módszerekkel oldhatunk meg hatékonyan, legalábbis amíg a kúpfeltételek száma nem túl nagy.

E cikk írásakor a leghatékonyabb szoftver a \mathcal{K}_λ hatványkúp és duális kúpja feletti optimalizálásra a MOSEK; az ebben implementált algoritmus részletei nem publikusak. Egy nyílt forráskódú szoftver általános kúpprogramozási feladatok megoldására az **alfonso** Matlab csomag [37].

A hatékony kúpprogramozási algoritmusok önmagukban még nem elégségesek egy SONC felbontás hatékony kiszámítására, mert a szükséges kúpfeltételek száma megegyezik a különböző tartóhalmazok számával. Wang közelmúltbeli eredménye, hogy minden SONC polinom p felírható olyan körpolinomok összegeként, amelyek tartóhalmaza p tartóhalmazának részhalmaza [56]. Ezzel a SONC tulajdonság ellenőrzéséhez megoldandó optimalizálási feladat kúpfeltételeinek számára véges (bár továbbra is exponenciális méretű) korlát adható. Egy közelmúltbeli eredmény, hogy a tartóhalmaz minimálisan affin összefüggő részhalmazainak kombinatorikus struktúráját felhasználva a SONC felbontást oszlopgenerálás segítségével gyorsan, a kúpfeltételek felsorolása nélkül, megtalálhatjuk [35].

4. Diskusszió

Nem kerülhetjük meg a két bemutatott relaxáció összehasonlítását. A súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség (és számos még általánosabb egyenlőtlenség) bizonyítható négyzetösszeggé alakítással [15], ebből a bizonyításból az következik, hogy SONC polinomok kellően magas fokú hatványai négyzetösszeggé alakíthatók. Azonban, általános esetben, az SOS és SONC kúpok egyike sem tartalmazza a másikat: a Motzkin-polinom egy olyan nemnegatív körpolinom, ami nem alakítható négyzetösszeggé, míg az $\mathbb{R} \ni x \mapsto (1-x)^4$ polinom egy teljes négyzet, ám nem írható fel nemnegatív körpolinomok összegeként. Ebből adódóan, ha a (3) feladatban a nemnegatív kúpok halmazát e két kúp valamelyikével helyettesítjük, *a priori* nem világos, melyik esetben kapunk erősebb korlátot.

A két módszer futásidejét Seidler és DeWolff hasonlította össze nagy számú (mesterséges) feladaton [45]. A szemidefinit kúpnál egyszerűbb kúppal reprezentálhatóság, az elméleti eredményekkel összhangban, a gyakorlatban is azt eredményezi, hogy a SONC relaxációkkal nagyságrendekkel gyorsabban kaphatunk (nem feltétlenül éles) alsó korlátot egy polinomra, mint SOS relaxációkkal. Ugyanakkor az SOS polinomokra épülő hierarchiaknak (illetve Putinar Positivstellensatzának) nincsen ismert SONC analogonja, és az SOS relaxációkkal kapott korlátok többnyire erősebbek mint a SONC relaxációkkal kapható korlátok. Továbbá, mint említettük, az SOS relaxációkat szemidefinit programozásnál hatékonyabb algoritmusokkal is megoldhatjuk [36].

Természetesen semmilyen elvi akadálya nincsen a két módszer összekapcsolásának: egy polinom nemnegativitásának elégséges feltétele, ha felbontható teljes négyzetek és nemnegatív körpolinomok összegére. Nem várható, hogy ez bármilyen lényeges elméleti előnnyel jár, de a fentiek következményeként az ilyen felbontás kiszámítása a négyzetösszeggé alakítással azonos nagyságrendű futásidőben megoldható, és a módszer örökli az SOS relaxáció összes elméleti tulajdonságát (Positivstellensatzok, stb.)

Köszönetnyilvánítás

A szerző kutatását a National Science Foundation DMS-1719828 és DMS-1847865 pályázata támogatta.² A szerző köszönetet mond Tóth Jánosnak a kézirat átolvasásáért és a hasznos kritikai megjegyzésekért, valamint Bozóki Sándornak a [15] hivatkozásért.

References

- [1] A.A. AHMADI AND A. MAJUMDAR: *DSOS and SDSOS optimization: LP and SOCP-based alternatives to sum of squares optimization*, In 48th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS), IEEE, pp. 1–5, (2014). DOI: 10.1109/CISS.2014.6814141
- [2] A.A. AHMADI AND A. MAJUMDAR: *Some applications of polynomial optimization in operations research and real-time decision making*, Optimization Letters, Vol. **10**, pp. 709–729 (2016). DOI: 10.1007/s11590-015-0894-3
- [3] E. ARTIN: *Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Vol. **5**, pp. 100–115 (1927). DOI: 10.1007/BF02952513
- [4] E.M. AYLWARD, S.M. ITANI, AND P.A. PARRILO: *Explicit SOS decompositions of univariate polynomial matrices and the Kalman-Yakubovich-Popov lemma*, In 46th IEEE Conference on Decision and Control, Dec, pp. 5660–5665 (2007). DOI: 10.1109/CDC.2007.4435026
- [5] C. BACHOC AND F. VALLENTIN: *New upper bounds for kissing numbers from semidefinite programming*, Journal of the American Mathematical Society, Vol. **21**, pp. 909–924 (2008). DOI: 10.1090/S0894-0347-07-00589-9
- [6] B. BALLINGER, G. BLEKHERMAN, H. COHN, N. GIANIRACUSA, E. KELLY, AND A. SCHÜRMAN: *Experimental study of energy-minimizing point configurations on spheres*, Experimental Mathematics, Vol. **18**, pp. 257–283 (2009). DOI: 10.1080/10586458.2009.10129052
- [7] G. BLEKHERMAN, P. A. PARRILO, AND R. R. THOMAS, *Semidefinite Optimization and Convex Algebraic Geometry*, SIAM, (2013).
- [8] B. BORCHERS: *CSDP, a C library for semidefinite programming*, Optimization Methods & Software, Vol. **11** No. **2**, pp. 613–623 (1999). DOI: 10.1080/10556789908805765
- [9] B. BOROS: *Existence of positive steady states for weakly reversible mass-action systems*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. **51**, pp. 435–449 (2019). DOI: 10.1137/17M115534X
- [10] E. BOROS AND P. L. HAMMER: *Pseudo-Boolean optimization*, Discrete Applied Mathematics, Vol. **123**, pp. 155–225 (2002). DOI: 10.1016/S0166-218X(01)00341-9
- [11] E. DE KLERK: *The complexity of optimizing over a simplex, hypercube or sphere: a short survey*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **16**, pp. 111–125 (2008). DOI: 10.1007/s10100-007-0052-9

²This material is based upon work supported by the National Science Foundation under Grant No. DMS-1719828 and DMS-1847865.

- [12] E. DE KLERK AND M. LAURENT: *Error bounds for some semidefinite programming approaches to polynomial minimization on the hypercube*, SIAM Journal on Optimization, Vol. **20**, pp. 3104–3120 (2010). DOI: 10.1137/100790835
- [13] E. DE KLERK, M. LAURENT, AND P.A. PARRILO: *A PTAS for the minimization of polynomials of fixed degree over the simplex*, Theoretical Computer Science, Vol. 361, pp. 210–225 (2006). DOI: 10.1016/j.tcs.2006.05.011
- [14] P.J.C. DICKINSON AND L. GIJZEN: *On the computational complexity of membership problems for the completely positive cone and its dual*, Computational Optimization and its Applications, Vol. **57**, pp. 403–415 (2014). DOI: 10.1007/s10589-013-9594-z
- [15] P.E. FRENKEL AND P. HORVÁTH: *Minkowski’s polynomial inequality and sums of squares*, Central European Journal of Mathematics, Vol. **12**, pp. 510–516 (2014). DOI: 10.2478/s11533-013-0346-1
- [16] D. GOLUSKIN AND G. FANTUZZI: *Bounds on mean energy in the Kuramoto-Sivashinsky equation computed using semidefinite programming*, Nonlinearity, Vol. **32**, 1705 (2019). DOI: 10.1088/1361-6544/ab018b
- [17] M. GRÖTSCHEL, L. LOVÁSZ, AND A. SCHRIJVER: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer Science & Business Media, Vol. **2**, (2012).
- [18] D. HANDELMAN: *Representing polynomials by positive linear functions on compact convex polyhedra*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. **132**, pp. 35–62 (1988). DOI: 10.2140/pjm.1988.132.35
- [19] G.H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, AND G.PÓLYA: *Inequalities*, Cambridge University Press, (1934).
- [20] D. HILBERT: *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten*, Mathematische Annalen, Vol. **32**, pp. 342–350 (1888). DOI: 10.1007/BF01443605
- [21] D. HILBERT: *Mathematische probleme*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, pp. 253–297 (1900). Illetve *Archiv der Mathematik und Physik*, Vol. **3**, pp. 44–63 és pp. 213–237 (1901). Angol fordítása: *Bulletin of the AMS*, Vol. **8**, pp. 437–479 (1902).
- [22] S. ILIMAN AND T. DE WOLFF: *Amoebas, nonnegative polynomials and sums of squares supported on circuits*, Research in the Mathematical Sciences, Vol. **3**, p. 9 (2016). DOI: 10.1186/s40687-016-0052-2
- [23] T. ILLÉS: *Lineáris optimalizálás elmélete és belsőpontos algoritmusai*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, (2014). Egyetemi jegyzet. ELTE Operations Research Report 2014-04. <http://web.cs.elte.hu/opres/orr/download/IT-LP-belsopontos-jegyzet-20140824.pdf>
- [24] Z. JARVIS-WLOSZEK, R. FEELEY, W. TAN, K. SUN, AND A. PACKARD: *Some controls applications of sum of squares programming*, in 42nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC), vol. 5, IEEE, Dec, pp. 4676–4681 (2003). DOI: 10.1109/CDC.2003.1272309
- [25] C. JOSZ: *Counterexample to global convergence of DSOS and SDSOS hierarchies*, arXiv preprint (2017). <https://arxiv.org/abs/1707.02964>
- [26] J.B. LASSERRE: *Global optimization with polynomials and the problem of moments*, SIAM Journal on Optimization, Vol. **11**, pp. 796–817 (2001). DOI: 10.1137/S1052623400366802

- [27] M. LAURENT: *Sums of squares, moment matrices, and optimization over polynomials*, In Emerging Applications of Algebraic Geometry, M. Putinar and S. Sullivant, szerk., Vol. **149** of IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Springer, pp. 157–270 **2008**. DOI: 10.1007/978-0-387-09686-5_7
- [28] H. LOMBARDI, D. PERRUCCI, AND M.-F. ROY: *An elementary recursive bound for effective Positivstellensatz and Hilbert 17-th problem*, arXiv preprint (2014). <https://arxiv.org/abs/1404.2338>
- [29] M. MARSHALL: *Positive Polynomials and Sums of Squares*, AMS, (2008).
- [30] K. MURTY AND S. KABADI: *Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming*, Mathematical Programming, Vol. **39**, pp. 117–129 (1987). DOI: 10.1007/BF02592948
- [31] Y. NESTEROV: *Squared functional systems and optimization problems*, In High Performance Optimization, H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, szerk., Vol. 33 of Applied Optimization, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 405–440 (2000).
- [32] J. NIE AND M. SCHWEIGHOFER: *On the complexity of Putinar’s Positivstellensatz*, Journal of Complexity, Vol. **23**, pp. 135–150 (2007). DOI: 10.1016/j.jco.2006.07.002
- [33] D. PAPP: *Optimal designs for rational function regression*, Journal of the American Statistical Association, Vol. **107**, pp. 400–411 (2012). DOI: 10.1080/01621459.2012.656035
- [34] D. PAPP: *Semi-infinite programming using high-degree polynomial interpolants and semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimizatón, Vol. **27**, pp. 1858–1879 (2017). DOI: 10.1137/15M1053578
- [35] D. PAPP: *Duality of sum of nonnegative circuit polynomials and optimal SONC bounds*, arXiv preprint (2019). <https://arxiv.org/abs/1912.04718>
- [36] D. PAPP AND S. YILDIZ: *Sum-of-squares optimization without semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimizatón, Vol. **29**, pp. 822–851 (2019). DOI: 10.1137/17M1160124
- [37] D. PAPP AND S. YILDIZ: *alfonso: Matlab package for nonsymmetric conic optimization*, INFORMS Journal on Computing, (2021). Elfogadva. Preprint: <https://arxiv.org/abs/2101.04274>, Szoftver: <https://github.com/dpapp-github/alfonso>
- [38] P.A. PARRILO: *Structured Semidefinite Programs and Semialgebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*, PhD disszertáció, California Institute of Technology, Pasadena, CA, May (2000).
- [39] G. PÓLYA AND G. SZEGÓ: *Problems and Theorems in Analysis*, Springer, New York, NY, Vol. **2**, (1976).
- [40] M. PUTINAR: *Positive polynomials on compact semi-algebraic sets*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. **42**, pp. 969–984 (1993). <http://www.iuj.indiana.edu/IUMJ/FTDLOAD/1993/42/42045/pdf>
- [41] J. RENEGAR: *A Mathematical View of Interior-Point Methods in Convex Optimization*, No. **03** in MPS-SIAM Series on Optimization, MPS-SIAM, Philadelphia, PA (2001).
- [42] C. ROOS, T. TERLAKY, AND J.-P. VIAL: *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Approach*, Wiley, (1997).

- [43] K. SCHMÜDGEN: *The K -moment problem for compact semi-algebraic sets*, *Mathematische Annalen*, Vol. **289**, pp. 203–206 (1991). DOI: 10.1007/BF01446568
- [44] M. SCHWEIGHOFER: *On the complexity of Schmüdgen's Positivstellensatz*, *Journal of Complexity*, Vol. **20**, pp. 529–543 (2004). DOI: 10.1016/j.jco.2004.01.005
- [45] H. SEIDLER AND T. DE WOLFF: *An experimental comparison of SONC and SOS certificates for unconstrained optimization*, arXiv preprint (2018). <https://arxiv.org/abs/1808.08431>
- [46] N.Z. SHOR: *An approach to obtaining global extremums in polynomial mathematical programming problems*, *Cybernetics*, Vol. **23**, pp. 695–700 (1987). DOI: 10.1007/BF01074929
- [47] G. STENGLE: *Complexity estimates for the Schmüdgen Positivstellensatz*, *Journal of Complexity*, Vol. **12**, pp. 167–174 (1996). DOI: 10.1006/jcom.1996.0011
- [48] J.F. STURM: *Using SeDuMi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones*, *Optimization Methods and Software*, Vol. **11–12**, pp. 625–653 (1999). DOI: 10.1080/10556789908805766. Lásd: <http://sedumi.ie.lehigh.edu/>
- [49] G. SZEDERKÉNYI, A. MAGYAR, AND K. M. HANGOS: *Analysis and Control of Polynomial Dynamic Models with Biological Applications*, Academic Press, London, UK, (2018).
- [50] T. TERLAKY: *An easy way to teach interior-point methods*, *European Journal of Operational Research*, Vol. **130**, pp. 1–19 (2001). DOI: 10.1016/S0377-2217(00)00094-1
- [51] K.C. TOH, M. J. TODD, AND R. H. TÜTÜNCÜ: *SDPT3 — a Matlab software package for semidefinite programming, version 1.3*, *Optimization Methods and Software*, Vol. **11–12**, pp. 545–581 (1999). DOI: 10.1080/10556789908805762
- [52] J. TÓTH, A. L. NAGY, AND D. PAPP: *Reaction Kinetics: Exercises, Programs and Theorems*, Springer–Verlag, New York, (2018).
- [53] M. UJVÁRI: *Szemidefinit programozás alkalmazásai a kombinatorikus optimalizálásban*, Eötvös Loránd Tudományegyetem, (2001).
- [54] L. VANDENBERGHE AND S. P. BOYD: *Semidefinite programming*, *SIAM Review*, Vol. **38**, pp. 49–95 (1996). DOI: 10.1137/1038003
- [55] C. VINZANT: *What is ... a spectrahedron?*, *Notices of the American Mathematical Society*, Vol. **61**, pp. 492–494 (2014). <https://www.ams.org/notices/201405/rnoti-p492.pdf>
- [56] J. WANG: *Nonnegative polynomials and circuit polynomials*, arXiv preprint arXiv:1804.09455 (2019).
- [57] H. WOLKOWICZ, R. SAIGAL, AND L. VANDENBERGHE, szerk.: *Handbook of Semidefinite Programming: Theory, Algorithms, and Applications*, Kluwer, Norwell, MA (2000).



Papp Dávid a North Carolina State University matematika tanszékének egyetemi docense. A Budapesti Műszaki Egyetemen folytatott műszaki informatikus tanulmányait követően a Rutgers University-n szerzett operációkutatás PhD fokozatot. 2011–2012 között a Northwestern University kutatója, 2013–2014 között a Massachusetts General Hospital munkatársa volt. Az amerikai National Science Foundation CAREER-díjas kutatója (2019). Kutatási területei a nemlineáris optimalizálás elmélete, valamint orvosi és statisztikai alkalmazásai.

PAPP DÁVID

North Carolina State University
Department of Mathematics
Raleigh, NC 27695, USA
dpapp@ncsu.edu

POLYNOMIAL OPTIMIZATION PROBLEMS AND THEIR RELAXATIONS

DÁVID PAPP

Computing the extreme values of a polynomial over a closed semialgebraic set is a difficult problem with numerous applications both within and outside of the mathematical sciences. This paper gives a brief overview of the algebraic background of this area and some of the practical numerical methods applied in polynomial optimization. While polynomial optimization is NP-hard, several tractable convex relaxations of it have been proposed in the literature. We review two of them: sum-of-squares (SOS) relaxations, based on the *Positivstellensatzes* of Schmüdgen, Putinar, and others, and sum-of-nonnegative-circuit-polynomials (SONC) relaxations, motivated by the AM/GM inequality. After motivating and defining the sequences of these two types of relaxations, we outline how they can be efficiently solved using interior-point methods of semidefinite and non-symmetric cone programming.

Keywords: polynomial optimization, semidefinite programming, sums-of-squares, circuit polynomials.

Mathematics Subject Classification (2000): 90C22, 14Q20, 90C25, 13P15

SZINERGIÁK HATÁSA A SZOFTVERFEJLESZTÉSI PROJEKTEKBEN

KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR, SZALKAI ISTVÁN, KURBUCZ MARCELL TAMÁS

Az emberi erőforrások megfelelő elosztása a szoftverfejlesztési projektek egyik legfontosabb sikertényezője. Bár e kijelentésben jellemzően egyetértés uralkodik a szakirodalomban, a szoftverprojektek tervezését - ezáltal az erőforrás allokációs feladatot - támogató módszerek éppen a probléma „emberi” oldalát hagyják figyelmen kívül, amikor a projekts csapatokat egymástól független munkavállalók összességének tekintik. Jelen tanulmány célja kettős. Egyfelől kiegészíti a szoftverprojekt-ütemezési problémát (angolul: Software Project Scheduling Problem, röviden: SPSP) a munkavállalók közötti - azok teljesítményét befolyásoló - szinergiákkal, majd egy szimulált projektadatbázisból választva, a projektek optimalizálását követően megvizsgálja e szinergiák projektköltségekre gyakorolt hatását. Az eredmények alapján nem csak a munkavállalók közötti kölcsönös függőségek mértéke, hanem a függőségek által meghatározott szinergiahálózat jellemzői - így a hálózat topológiája, mérete és fokszám-központisága - is jelentősen befolyásolják a szoftverfejlesztési projektek költségeit.

1. Bevezetés

A szoftverprojekt-ütemezési probléma (angolul: Software Project Scheduling Problem, röviden: SPSP) [19, 8, 13] a szoftverfejlesztési és karbantartási folyamatokhoz kapcsolódó munkaeő-allokációs [3] és tevékenységütemezési [14] feladatokra vonatkozik. A probléma megoldása során a projekt költségét és időtartamát egyaránt minimalizálni szeretnénk, azonban ezek a célok ellentétben állnak egymással (lásd pl. [2]). Ez a többcélú természet még tovább bonyolítja a tervezést, a szoftverfejlesztési projektek egyre növekvő méretének eredményeként pedig szinte lehetetlenné teszi a kézi ütemezést [26].¹ Bár a témával kapcsolatos kutatások az utóbbi években egyre intenzívebbé váltak, a fent említett okból kifolyólag ezek többnyire a számítógéppel támogatott tervezés technikai fejlesztéseire irányultak (lásd pl. [6, 11, 19]).

¹Az SPSP megoldása NP-nehéz feladat.

Coello és mtsai. [7] és Myszkowski és mtsai. [23] számos metaheurisztikát javasolt a probléma megoldására, míg [19] összehasonlította ezen algoritmusok pontosságát és skálázhatóságát.

Chicano és mtsai. [6] és Luna és mtsai. [19] eredményei alapján általános esetben a PAES (Pareto archived evolution strategy) [15] algoritmus rendelkezik a legjobb skálázhatósággal és segítségével érhetőek el a legjobb (megoldásokat tartalmazó) Pareto halmazok, a széles körben alkalmazott, ún. NSGA-II (non-dominated sorting genetic algorithm II) [10] és SPEA2 (strength Pareto evolutionary algorithm 2) [33] algoritmusok bizonyulnak a legpontosabbnak. Mindazonáltal magas költségvetésű, rövid projektek esetén a PAES-t az NSGA-II, SPEA2 és számos újabb algoritmus, pl. a MOCcell (multi-objective cellular genetic algorithm) [24] is felülmúlta [19].

Míg az SPSP szakirodalma jellemzően ennek a többcélú optimalizálási problémának a megoldására fókuszál (lásd pl. [6] és [19]), kevés figyelem irányul a projektcsapatok összeállításának emberi szempontjaira, így a munkavállalók teljesítményének egymástól való kölcsönös függésére [25]. A munkavállalók kölcsönös függőségeinek vizsgálata a szociometria [22, 27] tudományterületéhez tartozik. Az itt elért eredmények alapján a társadalmi hálózatok központosági mutatói erősebb közvetlen előjelzői a teljesítménynek, mint az egyéni jellemzők (így pl. a funkcionális szerep, státusz vagy a kommunikációs szerep) [1], valamint a decentralizált csoportok jobban teljesítenek az összetett feladatok megoldása esetén, mint a központosított struktúrával rendelkező csoportok [28].

Jelen tanulmány célja kettős. Egyfelől kiegészíti a szoftverprojekt-ütemezési problémát a munkavállalók közötti - azok teljesítményét befolyásoló - szinergiákkal és a képességek mértékeinek (levels) figyelembe vételével, majd egy szimulált projektadatbázisból választva, a projektek optimalizálását követően megvizsgálja a szinergiák projektköltségekre gyakorolt hatását. Az eredmények alapján nem csak a munkavállalók közötti kölcsönös függőségek mértéke, hanem a függőségek által meghatározott szinergiahálózat jellemzői - így a hálózat topológiája, mérete és fókusz-központosága - is jelentősen befolyásolják a szoftverfejlesztési projektek költségeit.

A tanulmány az alábbi felépítést követi. A 2. fejezet bemutatja az SPSP eredeti, illetve a dolgozók szinergiájával kiegészített formáját. A 3. fejezet a probléma megoldására alkalmazott genetikus algoritmust ismerteti. A 4. fejezetben - szimulált projektadatok segítségével - megvizsgáljuk a munkavállalók szinergiájának SPSP-re gyakorolt hatását. Végezetül, tanulmányunk eredményeit az 5. fejezet foglalja össze.

2. A probléma formális leírása

Jelen fejezetben ismertetjük az SPSP-t, valamint annak szinergiákkal való kiterjesztését, az SSPSP-t². A szakirodalomban fellelhető tanulmányokkal ellentétben - a könnyebb áttekinthetőség és rugalmasabb tervezés érdekében - a problémát mátrixos formában tárgyaljuk.

Ennek alapját az ún. multidomain mapping (MDM) módszer [9] nyújtja, melynek lényege a projekttervezési mátrixon belüli egyes tartományok interakciójában rejlik. Jelen tanulmányban a tevékenységek közötti eredetileg csak rugalmatlan kapcsolatokat és biztosan megvalósuló tevékenységeket kezelő módszert (lásd [9, 4]) kiegészítettük a rugalmas kapcsolatok és alacsonyabb prioritású, ún. nem kötelezően végrehajtandó tevékenységek kezelésével (lásd [16, 17, 18]), valamint a tervezési mátrixba egy új, szinergiákra vonatkozó tartományt vezetünk be. Az új projekttervezési mátrixra a továbbiakban **SMM** (synergy mapping model) mátrixként hivatkozunk (lásd 1. ábra). A rugalmas kapcsolatok és a relatív tevékenységprioritások bevezetésére azért van szükség, hogy a javasolt módszertan, a szoftverfejlesztés területén alkalmazott rugalmas - itt agilis, illetve hibrid - megközelítéseket is kezelni tudja, ami megengedi a tevékenységek más projektszakaszba történő átütemezését, illetve a projektstruktúra átrendezhetőségét.

2.1. Jelölések

A jelöléseket az alábbiakban foglaljuk össze:

- $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ a *munkavállalók* (employees) halmaza.
- $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ szimmetrikus, pozitív elemekből álló mátrix, a munkavállalók kölcsönös egymásra gyakorolt hatását (*szinergiákat*) tárolja: $\mathbf{Y}_{i,j} > 1$ pozitív (egymást erősítő), $\mathbf{Y}_{i,j} = 1$ semleges, míg $0 < \mathbf{Y}_{i,j} < 1$ negatív (egymást gyengítő) kölcsönhatást jelez e_i és e_j között ($\mathbf{Y}_{i,i} = 1$). \mathbf{Y} az SMM mátrix *szinergia része* (synergy domain).
- Tetszőleges $\varepsilon \subseteq E$ részhalmaz és $|\varepsilon| \leq 1$ esetén:

$$\bar{Y}_\varepsilon := \sqrt[\eta]{\prod_{i,j \in \varepsilon} \prod_{i < j} [\mathbf{Y}]_{i,j}}, \quad \text{ahol } \eta = \frac{|\varepsilon| \cdot (|\varepsilon| - 1)}{2} \quad (1)$$

az ε munkavállalók szinergiáinak *mértani közepe* (és $\bar{Y}_\varepsilon = 1$, ha $|\varepsilon| = 1$).

- $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_s\}$ a *képességek* (skills) halmaza.
- Az e_i munkavállaló képességeinek halmazát $S(e_i) := \{\sigma_1^{(i)}, \dots, \sigma_{\rho_i}^{(i)}\} \subseteq S$ jelöli.

²Synergy-based Software Project Scheduling Problem

- Az $\ell(e_i, \sigma_k)$ nemnegatív valós szám jelöli az e_i munkavállaló σ_k képességben meglévő *szintjét* (level), ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq s$). Nyilván $\sigma_k \in S(e_i) \iff 0 < \ell(e_i, \sigma_k)$. Ezeket a szinteket *összeadhatónak* tételezzük fel, vagyis e_{i_1} és e_{i_2} együttes munkája esetén a teljesítmény:

$$\mathbf{Y}_{i_1, i_2} \cdot (\ell(e_{i_1}, \sigma_k) + \ell(e_{i_2}, \sigma_k)). \quad (2)$$

Kettőnél több munkavállaló esetén csak közelítő képletet használhatunk³ ($\varepsilon \subseteq E$):

$$\ell(\varepsilon, \sigma_k) := \bar{Y}_\varepsilon \cdot \sum_{i \in \varepsilon} \ell(e_i, \sigma_k). \quad (3)$$

Az $\ell(e_i, \sigma_k)$ számokat az $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times s}$ mátrixban tároljuk: $\mathbf{S}_{i,k} := \ell(e_i, \sigma_k)$, \mathbf{S} az SMM mátrix *képességeket megjelenítő része* (skill domain).

- $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ az elvégzendő *feladatok* (tevékenységek, tasks) halmaza. Ezen belül $A^c \subseteq A$ a *kötelező* (mandatory), míg $A^- := A \setminus A^c$ a *kiegészítő*, *nem kötelező* (supplementary) feladatokat jelöli. A projekt tervezésekor az algoritmus automatikusan fogja eldönteni, hogy mely kiegészítő feladatokat teljesítsük.⁴ Ezt a halmazt $A^{c(O)}$ jelöli. Nyilván a kötelező feladatok esetén nincs választásunk: $A^c \subseteq A^{c(O)}$ szükséges.
- A feladatok között három-féle *kapcsolat* (reláció, dependency) kerülhet meghatározásra: minden $i, j \leq n$, $i \neq j$ indexre: $a_i \prec a_j$ *szigorú* (strict) kapcsolat: a_j csak a_i befejezése után kezdődhet, $a_i \sim a_j$ *semleges* (no) kapcsolat: a_j és a_i elvégzése nem befolyásolja egymást, $a_i \bowtie a_j$ *rugalmas* (bizonytalan, uncertain or flexible) kapcsolat: az *algoritmus* dönti el, hogy az $a_i \bowtie a_j$ relációt $a_i \prec a_j$ vagy $a_j \prec a_i$ vagy $a_i \sim a_j$ kapcsolattá változtatja. Nyilván \prec egy részbenrendezés, ami köröket⁵ nem tartalmaz, \bowtie és \sim szimmetrikusak. Feltehető, hogy $a_i \prec a_j$ esetén $i < j$.
- Az $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixban tároljuk a feladatokat és kapcsolataikat: $\mathbf{A}_{i,i} = 1 \iff a_i$ kötelező, $0 < \mathbf{A}_{i,i} < 1 \iff a_i$ kiegészítő ($\mathbf{A}_{i,i}$ értéke az a_i feladat pontértékét vagy (relatív) prioritását jelentheti), $\mathbf{A}_{i,j} = 1 \iff a_i \prec a_j$, $\mathbf{A}_{i,j} = 0 \iff a_i \sim a_j$, $0 < \mathbf{A}_{i,j} < 1 \iff a_i \bowtie a_j$ ($\mathbf{A}_{i,j}$ értéke, feladattól és a korábbi projekttapasztalatok felhasználásától függően az $a_i \bowtie a_j$ kapcsolat pontértékét, prioritását vagy a valószínűségét jelölheti). \mathbf{A} az SMM mátrix *logikai része* (logical domain). Az *algoritmusnak* az \mathbf{A} mátrix összes 0 és 1 közötti elemét 0-ra vagy 1-re kell változtatnia (többbit változtatlanul hagyva), a *végső* mátrixot $\mathbf{A}(\mathbf{O})$ -val jelöljük ($\mathbf{A}(\mathbf{O}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$).
- Az a_j tevékenységhez szükséges képességek halmazát $S(a_j) :=$

³Bár ezt a formulát később az algoritmus által előállított \mathbf{O} hozzárendelési mátrix módosítani fogja, lásd alább az \mathbf{M} mátrix után.

⁴Pl. az előírt korlátozó feltételek, vagy a célfüggvény optimalizálása miatt.

⁵Mint pl. $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_1$

$\{\sigma_1^{(j)}, \dots, \sigma_{\rho_j}^{(j)}\} \subseteq S$ jelöli, pontosabban: $L(a_j, \sigma_k)$ „egység” kell legalább „ a_j -hez σ_k -ból”. Nyilván $L(a_j, \sigma_k) \in \mathbb{R}_0^+$, $\sigma_k \in S(a_j) \iff 0 < L(a_j, \sigma_k)$ és $L(a_j, \sigma_k) \leq \ell(\varepsilon_j, \sigma_k)$ szükséges (az $\varepsilon_j \subseteq E$ részalmazt is az algoritmus választja).

- A $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ mátrixban tároljuk L értékeit: $\mathbf{W}_{j,k} := L(a_j, \sigma_k)$, \mathbf{W} neve *munkatartalom mátrix* (skilled work domain), $w_{j,k}$ elemei *munkatartalmi elemek* (skilled work elements).
- Az $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix $\mathbf{M}_{i,j}$ elemei adják meg, hogy az e_i munkavállaló munkaidejének *legfeljebb* mekkora *hányadát* töltheti az a_j feladat megoldásával, $0 \leq \mathbf{M}_{i,j} \leq 1$, \mathbf{M} neve *párosítási rész* (matching domain).
- Az SSPSP probléma megoldásakor az algoritmus eldönti, hogy az e_i munkavállaló munkaidejének *ténylegesen* mekkora *hányadát* tölti az a_j feladat megoldásával, ezt az $\mathbf{O} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix (output domain) $\mathbf{O}_{j,i}$ eleme adja meg, nyilván $0 \leq \mathbf{O}_{j,i} \leq \mathbf{M}_{i,j}$ és⁶ $\sum_{j=1}^n \mathbf{O}_{j,i} \leq 1$.
- Az algoritmus által az a_j feladathoz rendelt összes emberi erőforrás:

$$A_j := \sum_{i=1}^m \mathbf{O}_{j,i}, \tag{4}$$

melyet az $\varepsilon_j := \{e_i \in E : 0 < \mathbf{O}_{j,i}\}$ munkavállalók alkotnak.

- A munkavállalók által elvégzett munka *időtartamát* (duration) $a_j^{dur}(\mathbf{O})$ illetve $\bar{a}_j^{dur}(\mathbf{O})$ jelöli: az a_j tevékenység elvégzéséhez szükséges idő (ami az erőforrások és a szinergiák függvénye), képletét (9) és (10) adja meg. $a_j^{start}(\mathbf{O})$ a kezdési időpont⁷, $a_j^{end}(\mathbf{O}) = a_j^{start}(\mathbf{O}) + a_j^{dur}(\mathbf{O})$ a befejezés ideje (lásd még (11)). p_{dur} vagy **TPT** jelöli a *projekt időtartamát* (total project time), p_{cost} vagy **TPC** a *költségét* (total project cost).
- Mindegyik e_i munkavállaló *teljes* munkaidejének $e_i^w := \sum_{j=1}^n \mathbf{O}_{j,i}$ *részében* dolgozik a projekten (az algoritmus megoldása szerint), ami *legfeljebb* $e_i^{maxw} := \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_{i,j}$ lehet, nyilván $0 \leq e_i^w \leq \min\{e_i^{maxw}, 1\}$. e_i^{salary} az e_i munkavállaló havi fizetése.

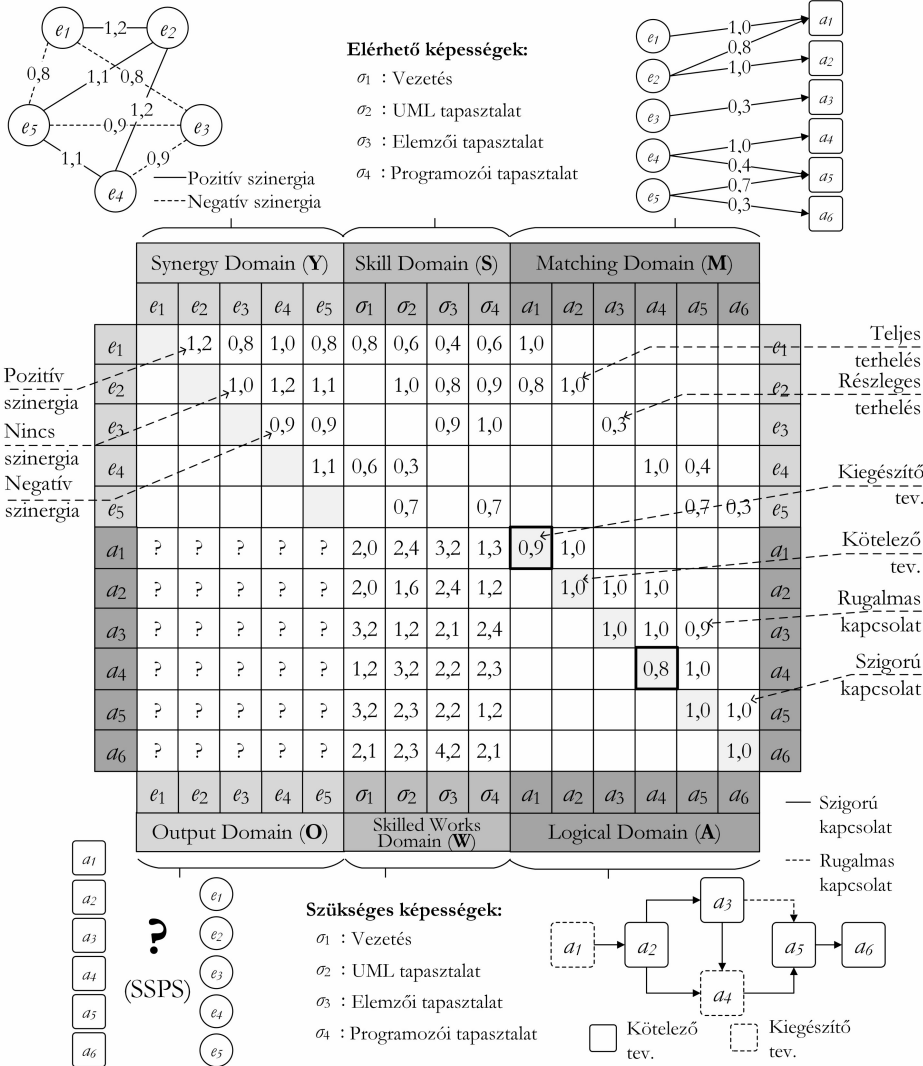
Az 1. ábrán a fenti mátrixok (adatok), mint a feladat részeit (domain) és azok kapcsolatait szemléltetjük.

⁶Persze $\sum_{j=1}^n [M]_{i,j} \leq 1$ nincs megkövetelve.

⁷ $a_i \prec a_j$ esetén $a_i^{end}(\mathbf{O}) \leq a_j^{start}(\mathbf{O})$.

Mátrix alapú modellünk csak a meglévő és szükséges képességekkel foglalkozik. Fő célunk a munkavállalók és a feladatok egymáshoz rendelése (allocation).

A munkavállalót úgy kell a feladatokhoz rendelnünk, hogy azok együttes mennyisége ne haladja meg a munkavállaló munkaidejét, a (30)–(33) célfüggvények optimalizálásával.



1. ábra. SMM mátrix (Az Y részmatrixban csak a felső háromszöget jelöltük. A többi részmatrixban az üres cellák értéke alapértelmezés szerint 0.)

2.2. A projekt időtartama

Tegyük fel most, hogy az algoritmus már döntött az összes A^- -beli kiegészítő feladatot és összes $a_i \bowtie a_j$ rugalmas kapcsolatot illetően⁸ valamint az e_i munkavállalók a_j feladatokhoz rendeléséről ($\mathbf{O}_{j,i}$). A továbbiakban egy a_j tevékenységet akkor hívunk elvégzendőnek, az a_i és a_j közötti kapcsolatot pedig szigorúnak ($a_i < a_j$), ha az algoritmus ezeket végül így határozta meg.

[2] feltételezése szerint a munkavállalók feladathoz rendelését a projektben rögzítettnek tekintjük (az algoritmus döntése után).

A képességek és szintjeik nem keverhetők össze, ezért minden σ_k képességre külön-külön ki kell számolnunk az ε_j csapat által, az a_j feladatban elvégezhető munkát⁹ (szinergiák nélkül):

$$A_j^w(k) := \sum_{i=1}^m ([\mathbf{S}]_{i,k} \cdot [\mathbf{O}]_{j,i}) = \sum_{i \in \varepsilon_j} \ell(e_i, \sigma_k) \cdot [\mathbf{O}]_{j,i}, \quad (5)$$

és szinergiákkal:

$$A_j^{w,adj}(k) := \bar{Y}_{\varepsilon_j} \cdot A_j^w(k) = \bar{Y}_{\varepsilon_j} \cdot \sum_{i=1}^m ([\mathbf{S}]_{i,k} \cdot [\mathbf{O}]_{j,i}). \quad (6)$$

Mivel az a_j feladathoz a σ_k képességből $L(a_j, \sigma_k) = [\mathbf{W}]_{j,k}$ „mennyiség” kell, az ε_j csapatnak a_j elvégzéséhez szükséges idő (szinergiák nélkül):

$$a_{j,k}^{dur}(\mathbf{O}) = \frac{L(a_j, \sigma_k)}{A_j^w(k)} = \frac{[\mathbf{W}]_{j,k}}{\sum_{i=1}^m ([\mathbf{S}]_{i,k} \cdot [\mathbf{O}]_{j,i})}, \quad (7)$$

míg a szinergiákkal módosított idő:

$$a_{j,k}^{dur,adj}(\mathbf{O}) = \frac{L(a_j, \sigma_k)}{A_j^{w,adj}(k)} = \frac{[\mathbf{W}]_{j,k}}{\bar{Y}_{\varepsilon_j} \cdot \sum_{i=1}^m ([\mathbf{S}]_{i,k} \cdot [\mathbf{O}]_{j,i})}. \quad (8)$$

Feltételezzük, hogy mindegyik e_i a képességeit egyszerre használja¹⁰, ezért a_j elvégzéséhez szükséges összidő (szinergiák nélkül):

$$a_j^{dur}(\mathbf{O}) = \max_{k \in S(a_j)} \{a_{j,k}^{dur}(\mathbf{O})\}, \quad (9)$$

⁸az input az \mathbf{A} mátrixban, az algoritmus döntése az $\mathbf{A}(\mathbf{O})$ mátrixban található.

⁹az összegezést nyugodtan írhatjuk az összes i -re, hiszen $i \notin \varepsilon_j$ esetén $[\mathbf{O}]_{j,i} = 0$.

¹⁰és $S(a_j) \subseteq \bigcup_{i \in \varepsilon_j} S(e_i)$, mert $k \notin \bigcup_{i \in \varepsilon_j} S(e_i)$ esetén (7) és (8) nevezői nullák. Ez (21) a C_2 feltételben.

illetve (szinergiákkal):

$$\bar{a}_j^{dur}(\mathbf{O}) := a_j^{dur,adj}(\mathbf{O}) = \max_{k \in S(a_j)} \{a_{j,k}^{dur,adj}(\mathbf{O})\}. \quad (10)$$

Tehát $a_j^{end}(\mathbf{O}) = a_j^{start}(\mathbf{O}) + \bar{a}_j^{dur}(\mathbf{O})$, ahol:

$$a_j^{start}(\mathbf{O}) \geq a_j^{start}(\mathbf{O})_{\min} := \begin{cases} 0 & \text{ha } \nexists a_i \in A, a_i \prec a_j \\ \max\{a_i^{end}(\mathbf{O}) : a_i \prec a_j\} & \text{máskor} \end{cases}. \quad (11)$$

A fenti képletekben feltételezzük a munkavállalók egyidejű (párhuzamos) munkavégzését az a_j feladatokban, és ne feledjük, hogy \mathbf{S} és \mathbf{O} az összes képességet és munkavállalót figyelembe veszi.

A *projekt* kezdő időpontja 0, (össz-) *időtartama*:

$$\text{TPT} := p_{dur} = \max\{a_j^{end}(\mathbf{O}) : j = 1, \dots, n\}. \quad (12)$$

Kiemeljük, hogy a (11) és (12) képletekkel meghatározott $a_j^{start}(\mathbf{O})$ és TPT értékek a legkorábbi kezdésekre ($a_j^{start}(\mathbf{O})_{\min}$) érvényesek, ugyanakkor az erőforrás-allokáció során fontos lehet, hogy az átfutási időt lehetőleg nem túllépve, a tevékenységek tényleges kezdését ($a_j^{start}(\mathbf{O})_{ALG}$) eltoljuk, például azon okból, hogy az adott erőforrás-korlátot ne lépjük túl:

$$a_j^{start}(\mathbf{O})_{ALG} \geq a_j^{start}(\mathbf{O})_{\min}, \quad (13)$$

ahol $a_j^{start}(\mathbf{O})_{ALG}$ az a_j feladat *tényleges* kezdési ideje. Nyilván:

$$\bar{a}_j^{dur}(\mathbf{O})_{ALG} = \bar{a}_j^{dur}(\mathbf{O})_{\min}, \quad (14)$$

$$a_j^{end}(\mathbf{O})_{ALG} = a_j^{start}(\mathbf{O})_{ALG} + \bar{a}_j^{dur}(\mathbf{O})_{ALG}, \quad (15)$$

és

$$a_j^{start}(\mathbf{O})_{ALG} \geq \begin{cases} 0 & \text{ha } \nexists a_i \in A, a_i \prec a_j \\ \max\{a_i^{end}(\mathbf{O})_{ALG} : a_i \prec a_j\} & \text{máskor} \end{cases}. \quad (16)$$

A kezdési időpontok (valós számok egy) sorozatát:

$$(a_1^{start}(\mathbf{O})_{ALG}, \dots, a_n^{start}(\mathbf{O})_{ALG}) \quad (17)$$

ütemezett kezdésidő sorozatnak (scheduled start time sequence, **SST**) nevezzük. A továbbiakban nem írjuk ki a *min* és *ALG* indexeket, de mindig az *ALG* értékekről beszélünk, ha mást nem jelzünk.

2.3. A projekt költsége

A projekt összköltsége (TPC, p_{cost}) a munkavállalók összesen, időarányosan kifizetett bére. Mivel pozitív szinergiák csökkentik, negatív szinergiák növelik az a_j^{dur} és \bar{a}_j^{dur} időtartamokat, a költséget kiszámolhatjuk szinergiák nélkül és azokkal is:

$$TPC_{syn} = TPC := p_{cost} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (e_i^{salary} \times [\mathbf{O}]_{j,i} \times \bar{a}_j^{dur}(\mathbf{O})), \quad (18)$$

$$TPC_{nosyn} := \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (e_i^{salary} \times [\mathbf{O}]_{j,i} \times a_j^{dur}(\mathbf{O})). \quad (19)$$

2.4. Feltételek

Az SSPSP projekt megtervezésekor több korlátozó feltételt is figyelembe *kell* vennünk.

C_1 : Mindegyik feladathoz legalább egy munkavállalót rendelniük kell:

$$\varepsilon_j \neq \emptyset, \quad \text{ha } a_j \in A^{c(O)}. \quad (20)$$

C_2 : A munkavállalók képességei felhasználásával el kell végezni a feladatokban foglalt munkatartalmakat, azaz minden $a_j \in A^{c(O)}$ esetén:

$$S(a_j) \subseteq \bigcup_{\{i: 0 < [\mathbf{O}]_{j,i}\}} S(e_i). \quad (21)$$

C_3 : A munkavállalók feladatokhoz való hozzárendelhetősége időben korlátos:

$$e_i^w(\tau) := \sum_{\{j \mid a_j^{start} \leq \tau \leq a_j^{end}, a_j \in A^{c(O)}\}} \mathbf{O}_{j,i} \leq e_i^{maxw} \quad (22)$$

minden $0 \leq \tau \leq p_{dur}$ időpontban.

A $C_4 - C_6$ feltételekhez meg kell adnunk (megfelelő) C_s, C_p, C_c, C_t és K^w korlátokat (valós számokat), valamint további definíciókra és jelölésekre van szükségünk.¹¹ és $S(a_j) \subseteq \bigcup_{i \in \varepsilon_j} S(e_i)$, mert $k \notin \bigcup_{i \in \varepsilon_j} S(e_i)$ esetén (7) és (8) nevezői nullák. Ez (21) a C_2 feltételben.

¹¹Ne feledjük, hogy a bemeneti adatokat A^c és \mathbf{A} tartalmazza, az algoritmus végeredménye pedig $A^{c(O)}$ és $\mathbf{A}(\mathbf{O})$ -ban található. Természetesen $A^c \subseteq A^{c(O)} \subseteq A$.

- Az $a_i \in A^{c(O)}$ megvalósított feladat *pontértéke* (score value) $\mathbb{S}_i := \mathbf{A}_{i,i}$, a kihagyott $a_i \in A \setminus A^{c(O)}$ feladaté pedig $\mathbb{S}_i := 1 - \mathbf{A}_{i,i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).
- Az $a_i \bowtie a_j$ (input) kapcsolat ($a_i, a_j \in A^{c(O)}$) *pontértéke* $p_{i,j} := \mathbf{A}_{i,j}$ abban az esetben, ha az algoritmus ezt a kapcsolatot $a_i \prec a_j$ vagy $a_j \prec a_i$ -re változtatja, és $p_{i,j} := 1 - \mathbf{A}_{i,j}$ akkor, ha $a_i \sim a_j$ -re változtatja.

C₄: A projekt *össz pontértéke* (total project score) legalább C_s (lásd még (32)):

$$\text{TPS} := \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \mathbb{S}_i} \geq C_s. \quad (23)$$

C₅: A *projektstruktúra pontértéke* legalább C_p :

$$\sum_{a_i, a_j \in A^{c(O)}, i \neq j} p_{i,j} \geq C_p. \quad (24)$$

C₆: Az *összesített túlmunka* nem lépheti át az adott K^w felső korlátot, egy adott $\epsilon^K > 0$ tűréshatárt megengedve. Legyen $0 \leq \tau \leq p_{dur}$ esetén:

$$\text{overwork}(\tau) := \begin{cases} \sum_{i=1}^m e_i^w(\tau) - K^w & \text{ha } \sum_{i=1}^m e_i^w(\tau) > K^w \\ 0 & \text{máskor} \end{cases}, \quad (25)$$

és összesítve:

$$p_{over} := \int_{\tau=0}^{\tau=p_{dur}} \text{overwork}(\tau) d\tau. \quad (26)$$

Tehát C_6 : az összesített túlóra ϵ^K -nál kisebb:

$$p_{over} < \epsilon^K. \quad (27)$$

C₇: A projekt *összköltsége* (total project cost, TPC) legfeljebb C_c lehet:

$$\text{TPC} := p_{cost} \leq C_c. \quad (28)$$

C₈: A projekt *összideje* (total project time, TPT) legfeljebb C_t lehet:

$$\text{TPT} := p_{dur} \leq C_t. \quad (29)$$

A TPT_{\min} , TPC_{\min} és TPS_{\max} mennyiségek a következők. TPT_{\min} -t úgy érhetjük el, hogy az összes kiegészítő feladatot elhagyjuk (azaz $A^{c(O)} := A^c$), a rugalmas kapcsolatokat (\otimes) párhuzamosítjuk (\sim), és a lehető legtöbb munkavállalót a projekthez rendelünk ($\mathbf{O}_{j,i} = \mathbf{M}_{i,j}$). Hasonlóan TPC_{\min} eléréséhez $A^{c(O)} = A^c$ javasolt, míg TPS_{\max} pl. az $A^{c(O)} = A$ feltétel esetén teljesül.

Modellünk célfüggvénye összetett. Célunk (leegyszerűsítve) a *legnagyobb pontértékkel, lehető legkisebb átfutási idővel és projektköltséggel rendelkező projekterv* megtalálása:

$$TPT \rightarrow \min, \quad (30)$$

$$TPC \rightarrow \min, \quad (31)$$

$$TPS \rightarrow \max. \quad (32)$$

A fenti optimalizálási problémákat az alábbi célfüggvényben egyesítjük:

$$z := 1 - \sqrt[3]{\left(\frac{C_t - TPT}{C_t - TPT_{\min}}\right) * \left(\frac{C_c - TPC}{C_c - TPC_{\min}}\right) * \left(\frac{TPS - C_s}{TPS_{\max} - C_s}\right)} \rightarrow \min \quad (33)$$

a $\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_8$ feltételek mellett, ahol C_s , C_p , C_c és C_t adott megfelelő konstansok.

Egyszerűsítés végett, az SPSP irodalomhoz hasonlóan, az emberi képességek (időbeli) állandóságát tételezzük fel. [5] munkában a képességek fejlődésével is számolnak, jelen modellünk szintén kiterjeszthető ilyen irányba is.

3. Az alkalmazott genetikus algoritmus bemutatása

Ahogy már a szinergiákat, rugalmas kapcsolatokat és tevékenység-előfordulásokat figyelembe nem vevő eredeti SPSP feladat is NP-nehéz feladat, a kiterjesztett SSPSP feladat is NP-nehéz. Amely nem jelenti azt, hogy ne lenne egzakt megoldása az eredeti problémának (lásd pl. [30]), ugyanakkor a feladat már 10-es nagyságrendű tevékenységszám esetén sem oldható meg belátható időn belül. Éppen ezért a kutatók figyelme a metaheurisztikus, ezen belül is a genetikus [2] és a hangyakolónia [32] algoritmusok irányába fordult. Jelen tanulmányunk a feladat összetettsége miatt a genetikus algoritmusok módszerét alkalmazta, ahol az ütemtervet egy Nelder–Mead algoritmussal finomítottuk tovább.

3.1. A genetikus algoritmus operátorai és hiperparaméterei

Célfüggvény: A genetikus algoritmus jósági függvénye (33). A GA eredményeként kapott \mathbf{O} mátrixot felhasználva az erőforrás-korlátot nem túllépő, lehető legkorábbi kezdést keressük Nelder–Mead algoritmussal. A megvalósításra a MATLAB programcsomag Global Optimization Toolboxát alkalmaztuk. Itt felhasználtuk, hogy a genetikus algoritmus valamennyi előre megadott hiperparamétere és

operátora beállítható. A részletes leírás azt a célt szolgálja, hogy ezekkel a beállításokkal az algoritmus reprodukálható legyen. A hiperparaméterek beállítását megelőzte egy validációs szakasz, ahol megvizsgáltuk a konvergencia sebességét, valamint az eredményt (szinergiák és rugalmas kapcsolatok nélkül) összehasonlítottuk az egzakt megoldást adó [30] algoritmusának eredményével (lásd: 3. fejezetet).

Egyedek kromoszómáinak felépítése: A kromoszómák három részből állnak. Az első részben, ahol arról döntünk, hogy a rugalmas kapcsolatok és tevékenység-előfordulások közül mely tevékenységeket valósítjuk meg, és mely kapcsolatokat írjuk elő, ott a lehetséges értékek 0 és 1 bináris értékek lehetnek. A következő szakasz az \mathbf{O} mátrix elemei, amelyek 0 és 1 között bármilyen értéket felvehetnek. Az utolsó szakasz a tevékenységek tényleges kezdési idejét adja meg, amely bármely valós szám lehet. E három szakasz elkülönítése azért fontos, mert más operátorok szükségesek a bináris és a folytonos szakasz kezelésére.

Populáció: A populációban lévő egyedek kezdetben véletlenszerűek. Ugyanakkor eltároljuk egy elit halmazba a megengedett megoldásokat, amelyek célfüggvényértéke a legjobb 5%-ban van. Ezeket abban az esetben használjuk fel, amennyiben a keresés során a populáció többi része nem tartalmaz megengedett megoldást. A populációk 1000-1000 egyedet tartalmaztak.

Kiválasztás: Kiválasztás elsősorban a megengedett megoldásokból körmérvkőzés alapján történik. A kiválasztásba a megengedett megoldások 10-szer nagyobb súllyal kerülhetnek be. Összesen egy ilyen körmérvkőzésben 10-10 egyed került összehasonlításra. Az előkelőbb helyen végző egyed a célfüggvényértékei alapján számítva, nagyobb valószínűséggel került be a kiválasztott egyedek közé.

Keresztezés: A keresztezés során az egyes szakaszokra más módszert alkalmaztunk. A bináris szakasznál az egyenletes, a folytonos szakasznál az aritmetikai keresztezést alkalmaztuk. A keresztezésnél is a megengedett megoldások 10-szer nagyobb valószínűséggel vettek részt a kereszteződésben.

Mutáció: Itt is szükség volt a bináris és a folytonos szakasz kezelésének szétválasztására. Először annak a szakasznak a kiválasztása történt meg véletlenszerűen, amely mutálódhat. E szakasz hossza 1% volt a hiperparaméterek optimalása után. A kiválasztott bináris szakaszon ez a mutáció $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$ váltást jelentett, míg folytonos szakaszon egy véletlenszerű \pm érték hozzáadását.

Mutáció-rekombináció arány: Fontos hiperparaméter a mutáció-rekombináció arány, mely esetünkben 1:5 arányt jelentett, vagyis a futások során 5-ször több rekombináció (kereszteződés) történt, mint mutáció.

Következő generáció, megállási feltétel: A mutáció, keresztezés és a szelekció során kapott új egyedek, valamint a legjobb 100 egyed is bekerült a következő populációba. A leállást két esemény idézhette elő. Vagy elértük a maximális iterációs számot, amely jelen esetben 100 volt, vagy a célfüggvényérték változása az egyes populációkban 10^{-8} alá került.

3.2. Hiperparaméterek beállítása

Hiperparaméterek közül be kellett állítani az elit egyedek arányát, a mutáció-rekombináció arányát, a megengedett megoldások dominanciáját, a populáció nagyságát, valamint az iterációk maximális számát. A paraméterek beállításánál a konvergencia gyorsasága, valamint a célfüggvényérték nagysága játszott szerepet.

3.3. Ütemezés finomhangolása

A genetikus algoritmus (33) célfüggvényre nézve egy jó megengedett (ún. good feasible) megoldást szolgáltat, ugyanakkor a tevékenységek többféle kezdése esetén is teljesülhet a célfüggvényérték maximuma. Így a NM algoritmust arra használtuk, hogy találja meg a tevékenységek lehető legkorábbi kezdését, ahol az erőforráskorlátok nem sérülnek.

3.4. Genetikus algoritmus tesztelése

A feladat komplexitása miatt nagyon nehéz meghatározni az optimális megoldást. Szinergiák figyelembevétele nélkül 5-10 tevékenységre vonatkozóan ugyanakkor léteznek már egzakt megoldók. Ilyen pl. [30] módszere. Ugyanakkor ezek a megoldók nem alkalmazhatók nagyobb számú tevékenység esetén. Az 1. táblázat bemutatja a különböző méretű feladatok esetén a futási időket. Meg kell jegyezni, hogy 10, illetve 30 tevékenység esetén az általunk javasolt módszer is megtalálta az optimális megoldást. Ugyanakkor további tevékenységek esetén csak a konvergenciát tudtuk tesztelni, mely a 3. fejezetben bemutatott hiperparaméterek esetén adta a legjobb konvergenciát.

Tevékenység	Alkalmazott módszer (futásidő, ms)		
	Egzakt (ns)	GA+NN (ns)	GA+NN (s)
10	51 260	1 053	1 077
30	854 992	6 385	6 411
50	–	18 055	18 153
100	–	33 062	33 174

1. táblázat. Futási idők összehasonlítása, (ns): szinergiák nélkül, (s) szinergiákkal való futtatás (5. generációs i5 Intel processzoros számítógépen tesztelve).

4. Tesztelési eredmények

A tesztelés során a vonatkozó szakirodalomban tárgyalt szinergia-struktúrák projektköltségekre gyakorolt hatását vizsgáltuk. Az ehhez szükséges adatokat a [23] iMOPSE, szabadon elérhető projekt generáló szoftverének segítségével állítottuk elő. Ez a szoftver legenerálja a projektstruktúrát, a képességeket, valamint az elvárt munkatartalmat, illetve azt, hogy a munkavállaló maximálisan mekkora mértékben vonható be egy feladat végrehajtásába. Lényegében tehát, bár nem mátrixos formában, de megkapjuk az SMM mátrixból az **A**, **M**, **S** és **W** mátrixokat. Ugyanakkor e generáló nem kezel rugalmas tevékenység-végrehajtásokat, illetve rugalmas kapcsolatokat.

4.1. Vizsgált szimulációs adatbázis bemutatása

A generált adatbázis nem tartalmazta sem a szinergikus hatásokat leíró hálózatokat, sem pedig a rugalmas kapcsolatokat, így azokat nekünk kellett beállítani. A rugalmas kapcsolatok/tevékenység-előfordulások arányát $ff = \{0, 1; 0, 2; 0, 3\}$ mértékben határoztuk meg. A javasolt mátrix-modell két mátrixszal bővíti az eredeti modellt. Az **O** mátrixot az algoritmus keresi, ugyanakkor az **Y** mátrix is hiányzott az eredeti modelltől, amely a munkavállalók közötti szinergiákat határozzák meg. Mi a szakirodalomban fellelhető és vizsgált 20 struktúrára vonatkozóan számoltunk mátrixot. A struktúrák szomszédsági mátrixai képezték szinergia mátrixot úgy, hogy ahol nem volt kapcsolat a vizsgált struktúra elemei között, ott a cellák értéke 1 volt, míg a többi helyen, negatív szinergia esetén 1-nél kisebb pozitív szám, míg pozitív szinergia esetén 1-nél nagyobb számot generáltunk. Az 1-től való maximális eltérés mind pozitív, mind negatív irányban maximum 0,3 volt úgy, hogy azok negatív, vagy pozitív hatásai az időigényre vonatkozóan átlagban kiejtsek egymást. Így lehetőség volt a pozitív és a negatív hatások összehasonlítására is.

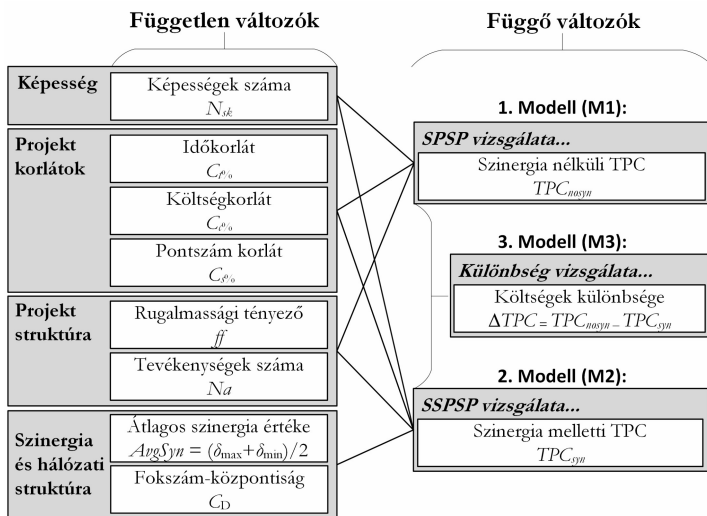
A projektstruktúra meghatározásánál egyrészt [29] kutatási eredményét, másrészt a rugalmas projektek tervezésére vonatkozó módszertanokat [31] vettük alapul. [29] valós projekteket tartalmazó adatbázison kimutatta, hogy a szoftverprojektek esetén tevékenységek végrehajtása inkább párhuzamosan zajlik, ugyanakkor a rugalmas projekttervezési módszerek maximálják az egy időben végrehajtható tevékenységek számát 3-5 tevékenységre. Másrészt a rugalmas szoftverek projektszakaszai (ún. sprintek) általában lezajlanak 2-5 hét alatt [12], ez pedig megköti a tevékenységek számát, amely jelen esetben 30-50 tevékenység volt a szimuláció során. A munkavállalók számát a szinergia-hálózatok csúcspontjai határozták meg. A korlátokat úgy határoztuk meg, hogy a szinergikus hatást, valamint a rugalmas kapcsolatokat nem figyelembe véve mekkorák lennének a projekt (idő-, költség-, erőforrás-igény) paraméterei [23] által számított módszerrel, majd e minimális értékek 1, 1,25 és 1,5-szeresét felhasználva határoztuk meg az aktuális korlátokat, így biztosítva, hogy a feladatnak legyen megoldása. Tesztelés céljából az időre, illetve

költségre optimalva, a rugalmas kapcsolatokat nem figyelembe véve összehasonlítottuk [23] eredményeit az általunk javasolt algoritmussal, melyek célfüggvényértékbeli eltérése 1% alatt volt. Ugyanakkor a későbbi vizsgálatokban mi az általunk javasolt (33) összetett célfüggvényértéket javasoltuk, így az összehasonlításban a szinergikus hatásokra, koncentráltunk.

A beállításokkal összesen 69 984 problémát kaptunk. Valamennyi problémát a genetikus algoritmussal 10-szer megoldottuk.

4.2. Eredmények ismertetése

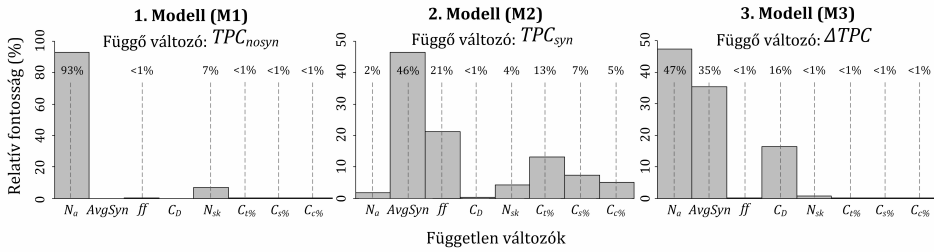
Az optimális projekttervek meghatározását követően megvizsgáltuk, hogy a projektek mely jellemzői és milyen mértékben hatottak a projektek teljes költségére (TPC). Három esetet különböztettünk meg. Míg az első kettő (M1 és M2) abban tért el egymástól, hogy számítások során figyelembe vettük-e a munkavállalók szinergiahálózatát, a harmadik esetben (M3) az első két eset különbségét, vagyis a szinergiahálózat hatását vizsgáltuk (lásd 2. ábra).



2. ábra. Eredmények vizsgálatának modelljei

A függő változók relatív fontosságának meghatározására a Matlab Regression Learner App [20] regression tree ensemble algoritmusát használtuk.¹² Az egyes modellek esetén meghatározott relatív fontossági értékeket a 3. ábra szemlélteti.

¹²A számítás során 10-szeres keresztvalidációt használtunk, a hiperparaméterek meghatározása pedig bayesi optimalizálás segítségével történt. A változók relatív fontosságát a Matlab *predictorImportance* függvényével jellemeztük [21].

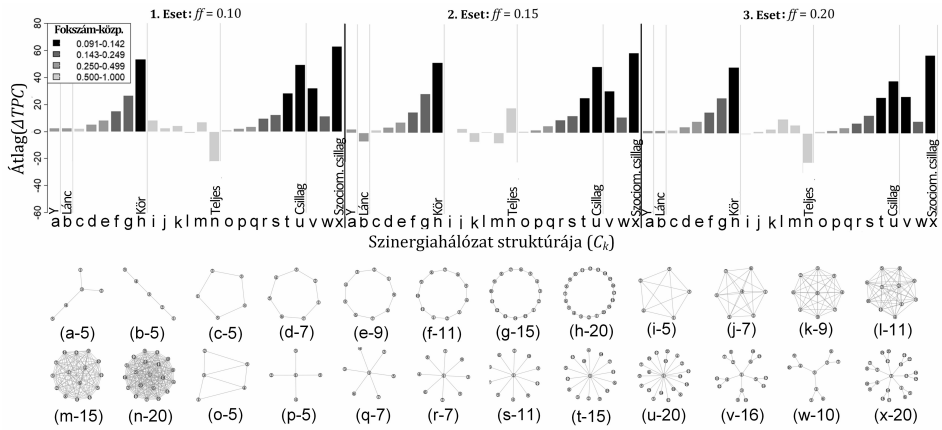


3. ábra. Függő változók relatív fontossága

Míg az eredeti SPSP esetében (lásd 3. ábra – M1) a projekt mérete (N_a) és a munkavállalók képességeinek száma (N_{sk}) gyakorolta a legnagyobb hatást a projektek költségeire, a munkavállalók közti szinergiák figyelembevétele mellett (lásd 3. ábra – M2) a legfontosabb változónk maga az átlagos szinergiaérték ($AvgSyn$) lett. Az utóbbi esetben továbbá mind a rugalmassági tényező (ff), mind pedig az egyes korlátok ($C_{t\%}$, $C_{s\%}$, $C_{c\%}$) fontosabbnak bizonyultak, mint a projektméret (N_a) és a képességek száma (N_{sk}). E két modell költségeinek különbségét (lásd 3. ábra – M3) legerősebben a projekt mérete ($N_a - 47\%$), az átlagos szinergia értéke ($AvgSyn - 35\%$), valamint a szinergiahálózat fokszám-központisága ($C_D - 16\%$) befolyásolta.

A fenti eredmények a szinergia-alapú megközelítés fontosságát hangsúlyozzák, hiszen amellet, hogy a szinergiával kapcsolatos paraméterek jelentős hatást gyakorolnak a projektek költségeire, a strukturális paraméter (C_D) esetén mért fontosság összhangban áll a vonatkozó szakirodalommal (lásd pl. [1]). Annak érdekében, hogy mélyebb ismereteket szerezzünk a szinergiahálózat költségekre gyakorolt hatásáról, megvizsgáltuk továbbá azok struktúrája és a projektköltség között fennálló kapcsolatot. A 4. ábra a szinergiahálózat struktúrájának (C_k) és központisági értékének (C_D , lásd színezés), valamint a projekt rugalmasságának (ff) ΔTPC -re (lásd 3. ábra – M3) gyakorolt hatását szemlélteti.

A 4. Ábra alapján az alacsony fokszám-központiság általában a költségek nagyobb csökkenéséhez vezet, azonban ez jelentősen függ a szinergiahálózat topológiájától (C_k) is. Bár a relatív fontosságok vizsgálata során (lásd 3. ábra) megállapítottuk, hogy a projekt rugalmassága (ff) elhanyagolható mértékben befolyásolja a ΔTPC -t (lásd 3. ábra), a 4. ábra alapján a lánc- és a teljes gráf hálózatok még e jelentéktelen változásokra is érzékenyen reagálnak. Néhány topológia esetében megfigyelhetjük, hogy TPC_{syn} nagyobb, mint TPC_{nosyn} , ami negatív ΔTPC -t eredményez. Ez ellentétes Sparrowe és mtsai. [28] megállapításával, hiszen a modellben a decentralizált hálózatok (pl. kör és teljes) nem képesek olyan mértékben csökkenteni a költségeket, mint a centralizált hálózatok (pl. a csillag és a szociometrikus csillag). Továbbá a véletlenszerűen kedvező és kedvezőtlen szinergiákat tartalmazó hálózatok esetében a leginkább decentralizált topológia (teljes hálózat)



4. ábra. Szinergiahálózat struktúrájának hatása a projektköltségre

vezet a legrosszabb eredményre, hiszen ez a struktúra különösen érzékeny a negatív szinergiákra.

5. Összefoglalás

A javasolt algoritmus két ponton egészíti ki a meglévő módszertant. Lehetőséget teremt arra, hogy figyelembe vegyünk egyrészt a munkavállalók közötti pozitív, vagy negatív szinergiát, másrészt, a szoftverprojekteknél egyre inkább elterjedt rugalmas tervezési megközelítéseket. Az eredmények nem csak a kölcsönös szinergia projektköltségekre gyakorolt jelentős – kedvező és kedvezőtlen – hatására mutatnak rá, de a szinergia-hálózat struktúrájának szerepét is hangsúlyozzák.

Az eltérő hálózatok különböző módon erősíthetik, vagy gyengíthetik a szinergikus hatásokat, amely a projektcsapatok összeállítása során fontos információt szolgáltat a projektmenedzserek számára.

A különböző szoftverfejlesztési módszertanok (pl. spirál modell, vízéses modell, V modell) esetén eltérőek lehetnek a tevékenység számok, valamint a projektben résztvevő személyek száma is. Ilyen vizsgálatokat jelen tanulmányunk nem tartalmaz. Jelen tanulmányunk a rugalmas, agilis környezetet vizsgálja, ahol a tevékenységkapcsolatok is lehetnek rugalmasak. Ugyanakkor láthattuk, hogy a flexibilitás szerepe a többi tényezőhöz képest mérsékelt, így felvethető, érdemes-e ezt a megközelítést más szoftverfejlesztési környezetre is kiterjeszteni. Ezt a felvetést egy következő tanulmányban vizsgáljuk meg.

Köszönetnyilvánítás

A közlemény megjelenését a TKP2020-NKA-10 sz. projekt keretében a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alap 2020-4.1.1-TKP2020 sz. Tématerületi Kiválóság Programja finanszírozta, valamint az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-3 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült. Külön köszönjük Dr. Dósa György Professzor hasznos szóbeli megjegyzéseit.

Hivatkozások

- [1] M.K. AHUJA, D.F. GALLETTA AND K.M. CARLEY: *Individual centrality and performance in virtual R&D groups: An empirical study*, Management Science, Vol. **49**, No. **1**, pp. 21–38 (2003). DOI: 0.1287/mnsc.49.1.21.12756
- [2] E. ALBA AND J.F. CHICANO: *Software project management with GAs*, Information Sciences, Vol. **177**, No. **11**, pp. 2380–2401 (2007). DOI: 10.1016/j.ins.2006.12.020
- [3] S. BOUAJAJA AND N. DRIDI: *A survey on human resource allocation problem and its applications*, Operational Research, Vol. **17**, No. **2**, pp. 339–369 (2017). DOI: 10.1007/s12351-016-0247-8
- [4] T.R. BROWNING: *Managing complex project process models with a process architecture framework*, International Journal of Project Management, Vol. **32**, No. **2**, pp. 229–241 (2017). DOI: 10.1016/j.ijproman.2013.05.008
- [5] C.K. CHANG, H. JIANG, Y. DI, D. ZHU AND Y. GE: *Time-line based model for software project scheduling with genetic algorithms*, Information and Software Technology, Vol. **50**, No. **11**, pp. 1142–1154 (2008). DOI: 10.1016/j.infsof.2008.03.002
- [6] F. CHICANO, F. LUNA, A.J. NEBRO AND E. ALBA: *Using multi-objective metaheuristics to solve the software project scheduling problem*, Proceedings of the 13th Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation, Vol. **50**, pp. 1142–1154 (2008). DOI: 10.1145/2001576.2001833
- [7] C.A. COELLO, G.B. LAMONT AND D.A. VELDHIJZEN: *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems (Genetic and Evolutionary Computation)*, Springer-Verlag New York (2006).
- [8] B. CRAWFORD, R. SOTO, F. JOHNSON, E. MONFROY AND F. PAREDES: *A max-min ant system algorithm to solve the software project scheduling problem*, Expert Systems with Applications, Vol. **41**, No. **15**, pp. 6634–6645 (2014). DOI: 10.1016/j.eswa.2014.05.003
- [9] M. DANILOVIC AND T.R. BROWNING: *Managing complex product development projects with design structure matrices and domain mapping matrices*, International Journal of Project Management, Vol. **25**, No. **3**, pp. 300–314 (2007). DOI: 10.1016/j.ijproman.2006.11.003
- [10] K. DEB, A. PRATAP, S. AGARWAL AND T. MEYARIVAN: *A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II*, IEEE Transactions on Evolutionary Computation, Vol. **6**, pp. 182–197 (2002). DOI: 10.1109/4235.996017

- [11] M. DI PENTA, M. HARMAN AND G. ANTONIOL: *The use of search-based optimization techniques to schedule and staff software projects: an approach and an empirical study*, Software: Practice and Experience, Vol. **41**, No. **5**, pp. 495–519 (2011). DOI: 10.1002/spe.1001
- [12] T. DINGSØYR, S. NERUR, V. BALIJEPALLY AND N.B. MOE: *A decade of agile methodologies: Towards explaining agile software development*, Journal of Systems and Software, Vol. **85**, No. **6**, pp. 495–519 (2012). DOI: 10.1016/j.jss.2012.02.033
- [13] M. HAPKE, A. JASZKIEWICZ AND R. SLOWINSKI: *Fuzzy project scheduling system for software development*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. **67**, No. **1**, pp. 101–117 (1994). DOI: 10.1016/0165-0114(94)90211-9
- [14] S. HARTMANN AND D. BRISKORN: *A survey of variants and extensions of the resource-constrained project scheduling problem*, European Journal of Operational Research, Vol. **207**, No. **1**, pp. 1–14 (2010). DOI: 10.1016/j.ejor.2009.11.005
- [15] J.D. KNOWLES AND D.W. CORNE: *Approximating the nondominated front using the pareto archived evolution strategy*, Evolutionary Computation, Vol. **8**, No. **2**, pp. 149–172 (2000). DOI: 10.1162/106365600568167
- [16] KOSZTYÁN, Zs.T.: *Exact algorithm for matrix-based project planning problem*, Expert Systems with Applications, Vol. **42**, No. **9**, pp. 4460–4473 (2015). DOI: 10.1016/j.eswa.2015.01.066
- [17] KOSZTYÁN, Zs.T., PRIBOJSZKI-NÉMETH, A. AND SZALKAI, I.: *Hybrid multimode resource-constrained maintenance project scheduling problem*, Operations Research Perspectives, Vol. **6**, pp. 100–129 (2019). DOI: 10.1016/j.orp.2019.100129
- [18] KOSZTYÁN, Zs.T. AND SZALKAI, I.: *Multimode resource-constrained project scheduling in flexible projects*, Journal of Global Optimization, Vol. **76**, No. **1**, pp. 211–241 (2020). DOI: 10.1007/s10898-019-00832-8
- [19] F. LUNA, D.L. GONZÁLEZ-ÁLVAREZ, F. CHICANO AND M.A. VEGA-RODRÍGUEZ: *The software project scheduling problem: A scalability analysis of multi-objective metaheuristics*, Applied Soft Computing, Vol. **15**, pp. 136–148 (2014). DOI: 10.1016/j.asoc.2013.10.015
- [20] MATHWORKS: *Regression Learner App* (2019).
URL: <https://www.mathworks.com/help/stats/regression-learner-app.html> [Letöltve: 2020. augusztus 25.]
- [21] MATHWORKS: *Predictor importance* (2019).
URL: <https://www.mathworks.com/help/stats/compact-regressionensemble-predictorimportance.html> [Letöltve: 2020. augusztus 25.]
- [22] J.L. MORENO: *The Sciometry Reader*, EGlencoe, Illinois: The Free Press (1960).
- [23] P.B. MYSZKOWSKI, M. LASZCZYK, I. NIKULIN AND M. SKOWROŃSKI: *IMOPSE: a library for bicriteria optimization in multi-skill resource-constrained project scheduling problem*, Soft Computing, Vol. **23**, No. **10**, pp. 3397–3410 (2019). DOI: 10.1007/s00500-017-2997-5
- [24] A.J. NEBRO, J.J. DURILLO, F. LUNA, B. DORRONSORO AND E. ALBA: *Design issues in a multiobjective cellular genetic algorithm*, International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization, Springer, pp. 126–140 (2007).
- [25] L.D. OTERO, G. CENTENO, A.J. RUIZ-TORRES AND C.E. OTERO: *A systematic approach for resource allocation in software projects*, Computers & Industrial Engineering, Vol. **56**, No. **4**, pp. 1333–1339 (2009). DOI: 10.1016/j.cie.2008.08.002

- [26] X. SHEN, L.L. MINKU, N. MARTURI, Y. GUO AND Y. HAN: *A Q-learning-based memetic algorithm for multi-objective dynamic software project scheduling*, Information Sciences, Vol. **428**, pp. 1–29 (2018). DOI: 10.1016/j.ins.2017.10.041
- [27] R.S. JAMES: *Task demands, group interaction and group performance*, Sociometry, Vol. **34**, No. **4**, pp. 483–495 (2018). DOI: 10.2307/2786194
- [28] R.T. SPARROWE, R.C. LIDEN, S.J. WAYNE AND M.L. KRAIMER: *Social networks and the performance of individuals and groups*, Academy of Management Journal, Vol. **44**, No. **2**, pp. 316–325 (2001). DOI: a 10.2307/3069458
- [29] M. VANHOUCKE: *Measuring the efficiency of project control using fictitious and empirical project data*, International Journal of Project Management, Vol. **30**, No. **2**, pp. 252–263 (2012). DOI: 10.1016/j.ijproman.2011.05.006
- [30] M.Á. VEGA-VELÁZQUEZ, A. GARCÍA-NÁJERA AND H. CERVANTES: *Measuring the efficiency of project control using fictitious and empirical project data*, International Journal of Production Economics, Vol. **202**, pp. 145–161 (2018). DOI: 10.1016/j.ijpe.2018.04.020
- [31] R.K. WYSOCKI: *Effective Project Management: Traditional, Agile, Extreme*, John Wiley & Sons (2011).
- [32] J. XIAO, X. AO AND Y. TANG: *Solving software project scheduling problems with ant colony optimization*, Computers & Operations Research, Vol. **40**, No. **1**, pp. 33–46 (2013). DOI: 10.1016/j.cor.2012.05.007
- [33] E. ZITZLER, M. LAUMANN AND L. THIELE: *SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm*, TIK-report, Vol. **103** (2001). DOI: 10.3929/ethz-a-004284029



Prof. Kosztyán Zsolt Tibor az MTA-PE Budapest Rangsor Kutatócsoport tudományos főmunkatársa, valamint a Pannon Egyetem Kvantitatív Módszerek Intézeti Tanszék tanszékvezető egyetemi tanára. Kutatási területe: komplex rendszerek menedzsmentje, hálózatos modellezése, különös tekintettel a projekt-, termelés- és karbantartás-menedzsment problémák hálózatalapú modellezésére. Kutatási területe ötvözi az alkalmazott informatika, a hálózattudományok és a menedzsment tudományok területeit. MTA-VEAB év kutatója 2013. Magyary Zoltán, Bolyai János és Új Nemzeti Kiválóság Programok posztdoktori ösztöndíjasa. A Neumann János Számítógéptudományi Társaság, Gazdaságinformatikai Oktatási és Kutatási Fórum (<http://gikof.njszt.hu>), a Gazdaságmodellezési Társaság, valamint a PMUni International Network for Professional Education and Research in Process and Project Management szervezetek elnökségi tagja.

PROF. KOSZTYÁN ZSOLT TIBOR

Pannon Egyetem
8200 Veszprém, Egyetem utca 10.
kosztyan.zsolt@gtk.uni-pannon.hu

MTA-PE Budapest Rangsor Kutatócsoport
8200 Veszprém, Egyetem utca 10.
kosztyan.zsolt@gtk.uni-pannon.hu



Dr. Szalkai István 1984-ben végzett az ELTE TTK matematikus szakán, 1993-ban egyetemi doktori (ELTE, halmazelmélet), 2013-ban PhD (Reakciómechanizmusok, PE) fokozatot szerzett. A Pannon Egyetem (Veszprém) Matematika Tanszékén oktat 1987 óta, egyetemi docens 2014 óta. Fő kutatási területei absztrakt algebra, diszkrét matematika és a matematika népszerűsítése, oktatási kérdések. A Bolyai Társulat Veszprém Megyei Tagozatának elnöke, a Mathematical Association of America "Lester R. Ford Award" díjának tulajdonosa.

DR. SZALKAI ISTVÁN

Pannon Egyetem
8200 Veszprém, Egyetem utca 10.
szalkai@almos.uni-pannon.hu



Kurucz Marcell Tamás jelenleg a PE GSDI doktorjelöltje, valamint a Wigner FK tudományos segédmunkatársa. Doktori tanulmányait megelőzően elvégezte az ELTE TáTK közgazdasági elemző mesterképzését, valamint a PE GTK műszaki menedzser és emberi erőforrások alapképzéseit. Fő kutatási területe a komplex hálózatok elemzése. Tudományos munkájáért 2015-ben Pro Scientia Aranyéremmel tüntették ki.

KURBUCZ MARCELL TAMÁS

Pannon Egyetem
8200 Veszprém, Egyetem utca 10.
kurucz.marcell@gtk.uni-pannon.hu

Wigner Fizikai Kutatóközpont
1121 Budapest, Konkoly-Thege Miklós út 29-33.
kurucz.marcell@wigner.hu

SYNERGIES IN SOFTWARE PROJECT SCHEDULING

ZSOLT TIBOR KOSZTYÁN, ISTVÁN SZALKAI, MARCELL TAMÁS KURBUCZ

In the literature on software development, the common issue of resource allocation and task scheduling is referred to as the software project scheduling problem (SPSP). While most of the software projects are managed in an agile framework, the SPSP ignores the two main features of this approach: the flexibility of planning and the complexity of teamwork. This paper focuses on these two possible approaches to extend the traditional SPSP. First, a general form of the SPSP assumes fixed logic plans; however, applying flexible dependencies and using task priorities instead of fixed occurrences will result in more flexible project plans consistent with the agile approach. Second, while software development projects and particularly software development projects using the agile approach place a greater emphasis on teamwork than the traditional methods, in the SPSP, employees are regarded as independent resources. To understand the impact of synergies on project scheduling, the solutions of the traditional and extended SPSPs are analyzed and compared on a simulated project database.

Keywords: Software Project Scheduling; Synergy Network; Genetic Algorithm

A THURSTONE MÓDSZER ÁLTALÁNOSÍTÁSAI

MIHÁLYKÓ CSABA, MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA, GYARMATI LÁSZLÓ

Páros összehasonlításokat gyakran alkalmaznak a döntéshozatalban, a véleményezések során, de páros összehasonlításoknak tekinthetjük sportmérkőzések végeredményeit is. Az összehasonlítások eredményeinek kiértékelésére többféle módszer alkalmazható. Az egyik ilyen eljárás a Thurstone módszer, amely az egyes kiértékelt objektumok mögé látens valószínűségi változót illeszt, így valószínűségszámítási alapon értékeli ki az objektumokat. Ez alkalmas több döntési kategória alkalmazására valamint előny, illetve hátrány beépítésére. Cikkünkben egy olyan általános modellt fogalmazunk meg, amely tetszőleges számú kategóriát tud kezelni, nem specifikált eloszlásokat használ és magában foglalja az esetlegesen meglévő előnyt, illetve hátrányt. Modellünket alkalmazzuk futballbajnokság eredményeinek kiértékelésére.

1. Bevezetés

Páros összehasonlításokat gyakran alkalmaznak különféle területeken. Történetileg a pszichológiai értékelések skálázásának szubjektivitása okán adódott Thurstone azon korszakalkotó ötlete, amely szerint a kiértékelések során érdemes páronként összehasonlítani az objektumokat, s az így kialakult véleményeket valamilyen módszerrel kiértékelni. Az ő elgondolása szerint az objektumok erősségei valószínűségi változók, amiknek a különbségéről mondanak véleményt az összehasonlítás során ([1]). Thurstone kétfajta véleményt engedett meg, az egyik az erősebb (jobb), a másik az ellentettje, a gyengébb (rosszabb). Gyakran azonban több kategóriát is célszerű figyelembe venni, például az egyformát (sportban a döntetlent), vagy a sokkal erősebb (sokkal jobb)/sokkal gyengébb (sokkal rosszabb) kategóriákat. Rendkívül népszerű az ilyen jellegű módszerek között az Analytic Hierarchy Process (AHP) módszer, ami Saaty nevéhez kapcsolódik ([2]). Ennél a módszernél az egyes objektumok összehasonlításakor végső soron azt adjuk meg, hogy az egyik objektumot hányszor gondoljuk jobbnak a másikinál. Saaty az 1, 3, 5, 7 és 9 faktorokat használta. Az i -dik és j -dik objektum összehasonlításakor így kapott a_{ij} számokból felépített páros összehasonlítási mátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektorának koordinátái szolgáltatták nagyság szerint rendezve az objektumok sorrendjét. A módszernek vitathatatlanul sok előnye mellett vannak

hátrányai is. Csak teljes összehasonlítás mellett (vagyis amikor minden objektum minden objektummal össze van hasonlítva) lehet alkalmazni, szubjektív és így kisé nehézkés a szorzófaktorok helyes megállapítása az egyes összehasonlításkor, ami ráadásul gyakran vezet inkonzisztenciához. A nemteljesség problémáját többféleképpen fel lehet oldani, utalunk itt Bozóki és szerzőtársai cikkére és az abban található releváns irodalomra ([3]). Az inkonzisztencia kérdéskörével pedig többek között Temesi összefoglaló cikke és több, benne hivatkozott cikk foglalkozik ([4]), de található ebben a cikkben a nemteljességgel kapcsolatos hivatkozás is. További hátrány, ami a mostani cikkünk kapcsán releváns, hogy az esetleges előny beépítése az AHP keretén belül nem megoldott. Thurstone módszerébe azonban ez az általánosítás beépíthető.

A Thurstone módszer esetében az egyes véleményeknek a számegyenesen egy-egy intervallumot feleltethetünk meg, például két kategória esetén a jobb azt jelenti, hogy a látens valószínűségi változók különbsége pozitív (a megfelelő sorrendben kivonva őket), a rosszabb pedig azt, hogy ez a különbség negatív. Három kategória alkalmazásakor az egyforma (döntetlen) esetében a különbség egy nulla körüli szimmetrikus intervallumba esik, a rosszabb az intervallum alsó vége alatti értéket, a jobb az intervallum felső végét meghaladó különbséget jelenti. (Megjegyezzük, hogy a módszer esetében ezt az értéket is az adatok alapján becsüljük, vagyis nem önkényesen jelöljük ki a kategóriák intervallumhatárait). Ez a felfogás könnyen általánosítható. Az egyes intervallumokba esés valószínűsége alapján a valószínűségi változók várható értéke meghatározható, ezek sorrendje adja az objektumok sorrendjét.

Thurstone normális eloszlást alkalmazott a látens valószínűségi változókra, a Bradly–Terry modellben logisztikus eloszlást alkalmaznak ([5]), Stern gamma eloszlásokkal dolgozott ([6]), de ezeket nagymértékben általánosíthatjuk szigorúan logkonkvá sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlások alkalmazásával ([7]). Jelen cikkünkben ezt az eloszlásfüggvény típust használjuk.

Általános jelenség, hogy – például a sportban, vagy tenderek elbírálásánál – bizonyos körülmények előnyt biztosíthatnak az egyik fél számára. Ilyen a sakkban a kezdés lehetősége, csapatsportoknál a hazai pálya előnye. Ezt a jelenséget kívánjuk oly módon beépíteni Thurstone továbbfejlesztett módszerébe, hogy az egyúttal alkalmas legyen arra, hogy jelezze az előny meglétét anélkül, hogy azt a priori feltételeznénk, és adott esetben kimutassa és számszerűsítse a jelenlétét, ha az valóban létezik. Ezt a következő feltételezésre alapozva hajtjuk végre: az előny folytán az előnyben levő objektum várható értéke megnő, hátrány esetén lecsökken. Ez alapján lehetőség nyílik arra, hogy a növekedés, illetve csökkenés mértéke újabb paraméterek bevezetésével jellemezhető legyen. Ez a megközelítés már a legegyszerűbb, úgynevezett konstans előnyös formában három kategória esetére ki lett dolgozva ([8]), most azonban olyan módon általánosítjuk, amikor minden egyes objektum esetében bevezetünk egy-egy, az objektumra jellemző előnyt, illetve hátrányt megadó paramétert. Ezen új paraméterek becslése után már számszerűsíthe-

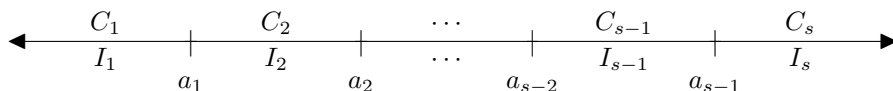
tővé válik az előny mértéke, és például ez a számszerűsített érték figyelembe vehető az egyes objektumok összehasonlítási eredményei valószínűségének számolásakor.

Cikkünkben a 2. fejezetben ismertetjük az általános modellt, majd kitérünk a megoldás egyértelmű létezésének feltételeire a 3. fejezetben, a 4. fejezetben alkalmazzuk módszerünket futballbajnokság eredményeinek kiértékelésére. Végül egy összefoglalóval zárjuk cikkünket.

2. Az általános modell

Jelölje n a kiértékelendő objektumok számát, magukat az objektumokat jelöljék az $1, 2, \dots, n$ számok. Ezek az objektumok páronként össze vannak hasonlítva akár véleményezőök által, akár sportmérkőzések eredményei által. Mi a megfogalmazásunkban az első változatot fogjuk használni.

Gondolatban képzeljünk minden objektum mögé egy látens valószínűségi változót. Az objektumról alkotott vélekedés egy véleményező szemében egy adott pillanatban egy véletlen mennyiség, amely időben is, de a körülményektől függően is változhat, továbbá ugyanazt az objektumot más-más ember másként értékeli. Jelölje az i -edik objektum mögé képzelt valószínűségi változót ξ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ és legyen a várható értékük m_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Az objektumok átlagos erősségét a valószínűségi változók várható értéke jellemzi, ezek nagyság szerinti sorrendje adja az objektumok sorrendjét is. Az összehasonlítás során s ($2 \leq s$) féle véleményt engedünk meg, jelöljük ezeket C_1, C_2, \dots, C_s -sel, és nevezzük őket (vélemény)kategóriáknak. Ezek a kategóriák például: rosszabb/egyforma/jobb $s = 3$ esetén. Több kategória esetén az elnevezések tovább bővülnek. Ezek a kategóriák kizárják egymást, továbbá teljesül rájuk egyfajta szimmetria: például ha i jobb j -nél, akkor j rosszabb i -nél. A kategóriák számszerűsítése érdekében a kategóriáknak intervallumokat feleltetünk meg a következőképpen: a valós számok halmazát (\mathbb{R}) felbontjuk s diszjunkt intervallumra, ezeket jelöljük I_i -vel, $i = 1, 2, \dots, s$, ahol $I_j \cap I_k = \emptyset$, ha $j \neq k$, és $\mathbb{R} = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_s$. Ha az i -edik és a j -edik objektum összehasonlításának eredménye C_k , akkor a $\xi_i - \xi_j$ különbség az I_k intervallumba esik. Az intervallumokat meghatározzák a végponjaik, ezeket $-\infty = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{s-1} < a_s = \infty$ -nel jelöljük. $I_1 = (a_0, a_1)$, $I_k = [a_{k-1}, a_k)$, $k = 2, \dots, s$, valamint $a_i = -a_{s-i}$. Világos, hogy ha s páros, akkor $a_{\frac{s}{2}} = 0$. A kategóriák és a nekik megfeleltetett intervallumok az 1. ábrán láthatók.



1. ábra. A kategóriák és a nekik megfeleltetett intervallumok

Az egyes kategóriák kialakulásának, azaz a különbség adott intervallumokba való esésének valószínűsége a $\xi_i - \xi_j$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye segítségével kiszámolható. Ha a ξ_i valószínűségi változókat az alábbi alakban írjuk, $\xi_i = m_i + \xi'_i$, akkor ξ'_i már nulla várható értékű valószínűségi változó lesz, és $\xi_i - \xi_j = m_i - m_j + \xi'_i - \xi'_j$. $\xi'_i - \xi'_j$ (és egyben $\xi_i - \xi_j$) eloszlását Thurstone normális eloszlásnak feltételezte, mi most ezeket általános, kétszer folytonosan differenciálható szigorúan logkonkáv sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlásfüggvényekre általánosítjuk. Vagyis előny figyelembe vétele nélkül

$$\xi_i - \xi_j = m_i - m_j + \xi'_i - \xi'_j, \quad (1)$$

ahol $\xi'_i - \xi'_j$ eloszlásfüggvénye $i, j \ i \neq j$ pár esetén F_{ij} .

Az előny, illetve a hátrány azt jelenti, hogy az előnyben levő objektum várható értéke egy rá jellemző konstanssal megnő, a hátrányban levőé pedig egy rá jellemző konstanssal lecsökken. Jelölje ezeket e_i illetve $h_i, i = 1, 2, \dots, n$. Feltételezzük, hogy az összehasonlított objektumok egyike előnyben, másika hátrányban van egy összehasonlítás során. Természetesen beépíthető lenne az is, ha létezne semleges összehasonlítás, vagy olyan eset, amikor az egyik előnye nem vonná maga után a másik hátrányát, de ezekkel az esetekkel jelen publikációban nem foglalkozunk.

Ekkor (1) a következőképpen módosul (a felső indexszel jelöltük a körülményeket):

$$\xi_i^e - \xi_j^h = m_i + e_i - (m_j - h_j) + \xi'_i - \xi'_j; \quad (2)$$

$$\xi_i^h - \xi_j^e = m_i - h_i - (m_j + e_j) + \xi'_i - \xi'_j. \quad (3)$$

Természetes feltételezés lenne $0 \leq e_i, 0 \leq h_i, i = 1, 2, \dots, n$, azonban nem élünk ilyen feltevésekkel. Előfordul ugyanis, hogy az előnynek gondolt körülmény a tapasztalat alapján mégsem az. Mivel megengedjük az $e_i = 0$ és $h_i = 0$ értékeket, ezért ez a modell az előnyt figyelembe nem vevő modell általánosítása.

Legyen r a véleményezőők száma. Az u -adik véleményező véleménye ($u = 1, 2, \dots, r$) az i -edik és a j -edik objektum összehasonlításakor ($i < j$) mind az i -edik objektum előnye, mind az i -edik objektum hátránya esetén egy-egy s dimenziós vektor, amelynek minden koordinátája 0 vagy 1, és azon koordináta egyenlő 1-gyel, ahányadik kategóriát mondja a megfigyelő véleményként. A megfigyelésekből alkotott mátrix tehát egy négydimenziós X mátrix, amelynek elemei $i = 1, 2, \dots, n - 1, j = i + 1, \dots, n, k = 1, 2, \dots, s, u = 1, 2, \dots, r$ esetén

$$X_{i,j,k,u}^e = \begin{cases} 1, & \text{ha az } u\text{-adik véleményező véleménye } C_k \\ & i \text{ és } j \text{ összehasonlítása és } i \text{ előnye esetén} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

és

$$X_{i,j,k,u}^h = \begin{cases} 1, & \text{ha az } u\text{-adik véleményező véleménye } C_k \\ & i \text{ és } j \text{ összehasonlítása és } i \text{ hátránya esetén} \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Ha $j \leq i$, akkor a mátrixelemek legyenek 0 értékűek. Természetesen előfordulhat, hogy $X_{i,j,k,u}^e = 0$ és/vagy $X_{i,j,k,u}^h = 0$ minden $k = 1, 2, \dots, s$ esetén, ha $i < j$. Ez azt jelenti, hogy az u -adik véleményező nem hasonlította össze az (i, j) párt i előnye és/vagy hátránya esetén. Az e , illetve a h felső index itt is az előnyre, illetve a hátrányra utal. Ha mindkét érték nulla minden u esetén, akkor egyáltalán nem történt összehasonlítás a két objektum között. Megjegyezzük, hogy ez még nem feltétlenül akadály a sorrend eldöntésének.

Legyenek $A_{i,j,k}^e = \sum_{u=1}^r X_{i,j,k,u}^e$ és $A_{i,j,k}^h = \sum_{u=1}^r X_{i,j,k,u}^h$, vagyis ahány vélemény esetén a C_k kategória alakul ki i előnyös, illetve hátrányos helyzetében a véleményezések során. Annak a valószínűsége, hogy ez a minta alakul ki, független véleményeket feltételezve a következő:

$$\begin{aligned} L(X^e, X^h | m_1, m_2, \dots, m_n, a_1, \dots, a_{s-1}, e_1, e_2, \dots, e_n, h_1, h_2, \dots, h_n) &= \\ &= \prod_{k=1}^s \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n (P(\xi_i^e - \xi_j^e \in I_k))^{A_{i,j,k}^e} \cdot (P(\xi_i^h - \xi_j^h \in I_k))^{A_{i,j,k}^h}. \end{aligned} \quad (4)$$

A paraméterek maximum likelihood becslése az a $3n + s - 1$ dimenziós vektor, amely a (4) függvényt maximalizálja az $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$, $(a_1, a_2, \dots, a_{s-1})$, (e_1, e_2, \dots, e_n) , (h_1, h_2, \dots, h_n) változóknban az $a_i = -a_{s-i}$, $i = 1, 2, \dots, s-1$ feltételek mellett. Az $F_{ij}(-\infty) = 0$ és $F_{ij}(\infty) = 1$ jelölésekkel élve

$$\begin{aligned} P(\xi_i^e - \xi_j^h \in I_k) &= P(a_{k-1} \leq \xi_i^e - \xi_j^h < a_k) = \\ &= F_{ij}(a_k - (m_i + e_i - (m_j - h_j))) - F_{ij}(a_{k-1} - (m_i + e_i - (m_j - h_j))), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} P(\xi_i^h - \xi_j^e \in I_k) &= P(a_{k-1} \leq \xi_i^h - \xi_j^e < a_k) = \\ &= F_{ij}(a_k - (m_i - h_i - (m_j + e_j))) - F_{ij}(a_{k-1} - (m_i - h_i - (m_j + e_j))), \end{aligned} \quad (6)$$

amiket (4)-be helyettesítve a paraméterek maximum likelihood becslése

$$\begin{aligned} &(\widehat{m}_1, \dots, \widehat{m}_n, \widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_{s-1}, \widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n, \widehat{h}_1, \dots, \widehat{h}_n) = \\ &= \underset{(\underline{m}, \underline{a}, \underline{e}, \underline{h}), -\infty < a_1 < a_2 < \dots < a_{s-1} < \infty, a_i = -a_{s-i}}{\arg \max} L(X^e, X^h | \underline{m}, \underline{a}, \underline{e}, \underline{h}). \end{aligned} \quad (7)$$

ahol $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{s-1})$, $\underline{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $\underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

3. A maximum likelihood becslés létezése és egyértelműsége

Természetesen a páros összehasonlítások kiértékelése érdekében nagyon fontos, hogy a likelihood függvénynek, illetve a logaritmusának létezzen a maximuma és az egyértelmű legyen.

Mivel látható, hogy mind (5), mind (6) pozitívak, azért (4) értékei pozitívak, így a likelihood függvény helyett annak logaritmusát vizsgálhatjuk. A két függvény maximuma egyszerre létezik, és a maximumhely egyértelműsége egyszerre teljesül. A log-likelihood függvény vizsgálatakor a szorzótényezőkből összeadandók lesznek, a kitevők szorzótényezőkké szelődülnek, s ha nincs megfelelő összehasonlítási eredmény, az összegből az annak megfelelő tag hiányzik.

Mivel a likelihood függvény csak a várható értékek különbségétől függ, ezért az egyik várható érték rögzíthető, például $m_1 = 0$. Azonban ekkor is könnyű olyan példát mutatni, amikor a maximumhely nem létezik, vagy nem egyértelmű ([9]). A log-likelihood függvény maximumának létezése a paraméterhalmaz korlátos zárt halmazra való szűkíthetőségén múlik. Az egyértelműség bizonyításának alapötlete pedig az, hogy a sűrűségfüggvények szigorú logkonkávítása biztosítja az eloszlásfüggvények szigorú logkonkávítását ([10]), valamint ezek alapján az $F(x, y) = F(x) - F(y)$ kétváltozós függvény szigorú logkonkávítását mindkét változóban ([7]). A szigorúan logkonkáv függvények maximuma pedig ha létezik, akkor egyértelmű.

A [7] publikációban $\underline{e} = \underline{0}$, $\underline{h} = \underline{0}$, $a_k - a_{k-1} = 2d$, $k = 2, 3, \dots, s-1$ feltételek mellett adtunk elégséges feltételt a maximum létezésére és a helyének egyértelműségére. A [11] publikáció szintén előny és hátrány figyelembe vétele nélkül, $s = 2, 3, 4, 5$ kategória esetén ad feltételeket az egyértelmű létezésre normális eloszlású látens valószínűségi változókat feltételezve, de nem feltétlenül egyforma hosszúságú intervallumok esetén. Ezek az esetek a gyakorlati problémák kezelésekor többnyire elegendőnek bizonyulnak. A [8] publikációban három kategória megengedésével, minden objektumnál egyforma előny és ugyanakkora hátrány megengedésével mutattunk be a paraméterek becslésének egyértelműségét biztosító elégséges feltételt. Általános s esetén nem tudunk megfogalmazni elégséges feltételt a (4) függvény maximumának egyértelmű létezésére, de az egyenlő osztásközök feltételezése mellett, ha az objektumok esetén ugyanakkora mértékű az előny, mint a hátrány, de ezek objektumonként különbözhetnek, akkor az előnyt és hátrányt megengedő modellben az alábbi állítás fogalmazható meg. Az előny és a hátrány egyforma mértéke az általánosság korlátozása nélkül feltételezhető.

Legyen $e_i = h_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Ez azt jelenti, hogy az előnyben levő i objektum várható értéke $e_i + e_j$ többlettel rendelkezik j -vel szemben.

Definiáljunk egy G gráfot az alábbi módon. A gráf csúcsai az értékelendő objektumok. Az i -edik és a j -edik ($i < j$) csúcs akkor legyen összekötve, ha van köztük összehasonlítás mind i előnyös, mind i hátrányos helyzete esetén, továbbá

$$0 < A_{i,j,k}^e \text{ valamely } 1 < k < s \text{ esetén, vagy } 0 < A_{i,j,1}^e \cdot A_{i,j,s}^e \quad (8)$$

és

$$0 < A_{i,j,k}^h \text{ valamely } 1 < k < s \text{ esetén, vagy } 0 < A_{i,j,1}^h \cdot A_{i,j,s}^h, \quad (9)$$

azaz (8) és (9) mindegyike teljesül. Megjegyezzük, hogy (8) és (9) azt fejezi ki, hogy előnyben is és hátrányban is nem csak egyoldalú szélső helyzetű döntés születik. Ekkor az alábbi tétel bizonyítható ([12]):

3.1. TÉTEL. *Legyenek F_{ij} -k olyan eloszlásfüggvények, amelyre $0 < F_{ij}(x) < 1$ teljesül, háromszor folytonosan differenciálhatók \mathbb{R} -en, valamint sűrűségfüggvényük nullára szimmetrikus és logaritmusa szigorúan konkáv. Legyen $3 \leq s$. Tegyük fel, hogy van olyan $i_1 < j_1$ pár, amelyre $0 < A_{i_1,j_1,k}^e + A_{i_1,j_1,k}^h$, valamely $1 < k < s$ esetén, valamint van olyan $i_2 < j_2$ és $k < l - 1$ pár, amelyre $0 < A_{i_2,j_2,k}^e \cdot A_{i_2,j_2,l}^e$ vagy $0 < A_{i_2,j_2,k}^h \cdot A_{i_2,j_2,l}^h$ teljesül. Legyen $\underline{e} = \underline{h}$. Rögzítsük az m_1 értékét nullának. Amennyiben az előzőekben definiált G gráf összefüggő, valamint nem fa, akkor (4) függvény a $0 < d = a_k - a_{k-1}$, $a_k = -a_{s-k}$ $k = 2, \dots, s-1$, $a_0 = -a_s = -\infty$ feltételek mellett felveszi a maximumát az \underline{m} , d és \underline{e} változóiban, és a maximumhely egyértelmű.*

A tételben szereplő (i_1, j_1) és (i_2, j_2) párokra vonatkozó két feltétel azt mondja ki, hogy legalább egy párnál van „nem szélsőséges” döntés, valamint van olyan pár, amelynél van két egymást nem követő intervallumba eső döntés akár előnyös, akár hátrányos helyzetben. Ez a két feltétel azt biztosítja, hogy a d paraméterben való optimalizálás korlátos, zárt halmazra szűkíthető. (8) és (9) együtt biztosítják a gráfban szereplő élekhez tartozó indexpárok esetén az $m_i - m_j$ valamint az $e_i + e_j$ mennyiségek korlátosságát. A gráf összefüggősége $m_1 = 0$ mellett az m_i értékek $i = 1, 2, \dots, n$ korlátosságát is eredményezi. Mindezekből következik a maximum létezése.

Megjegyezzük, hogy a korlátosságot úgy is biztosíthatjuk, ha egy összefüggő részgráfhoz kapcsolunk elemeket például közbülső intervallumba eső eredményekkel mind előnyben, mind hátrányban, azonban a kapcsolódás különböző elemekhez is történhet. A szigorú logkonkávitás gyengébb feltételek mellett is teljesül, elegendő hozzá (8) és (9) feltételek vagyval való összekapcsolása, de szükséges, hogy mind előnyben, mind hátrányban legyen mérkőzés. Az a feltétel, hogy legyen kör a gráfban amiatt szükséges, hogy az egyértelműen meghatározott $e_i + e_j$ értékekből az e_i $i = 1, 2, \dots, n$ kifejezhető legyen.

Megjegyezzük, hogy két kategória megengedése esetén analóg állítás mondható ki. A d -beli optimalizálás okafogyottá válik, így kevesebb paramétert használunk. Az $s = 2$ miatt értelmezhetetlenné váló feltételeket elhagyva a gráf az előzőeknek megfelelően definiálandó, az egyértelműség elégséges feltétele a gráf összefüggősége mellett az, hogy ne legyen fa.

4. Alkalmazás

Az előnyt figyelembe vevő modell alkalmazását mutatjuk be egy példán, esetünkben a magyar labdarúgó bajnokság első osztálya (OTP Bank Liga) 2019/20-as szezonjának eredményeire. Azzal az implicit feltételezéssel élünk, hogy a csapatok minden mérkőzés esetében a tőlük telhető legjobb eredményre törekszenek.

A bajnokságban 12 csapat vett részt. Az előnyt a haza pálya jelentheti. Bár esetünkben mindenki játszott mindenkivel előnyben és hátrányban is, mégis a kiértékelések eredménye nem feltétlenül létezik: ha például valamelyik csapat minden mérkőzését megnyerte volna, az ML becslés kiértékelésének eredménye nem létezne. A likelihood függvény ugyanis nem venné fel a maximumát, mert amennyiben a csapathoz tartozó valószínűségi változó várható értéke nő, a likelihood függvény értéke is nő. Vagyis a sorrend megállapítható lenne, de a csapat jósága nem lenne számszerűsíthető. Ebben a bajnokságban azonban nem ez az eset áll fenn.

Az adatokat a [13] honlapról töltöttük le.

A modellek esetén $s = 3$ kategóriát engedtünk meg, a vereség, a döntetlen és a győzelem, mint eredmény kifejezésére. Ez esetben egy közbülső intervallum és két szélső intervallum van a számegyenesen, egy paraméter ($0 < d$) segítségével jelöljük ki a határaikat.

Minden csapat esetén ugyanakkora előnyt feltételeztünk, mint hátrányt, vagyis $e_i = h_i, i = 1, 2, \dots, n$. A különbségek eloszlását normálisnak választottuk 1 szórással, vagyis $F_{ij}(x) = \Phi(x)$. A T -vel jelölt modellben $e_i = h_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. A T^{KE} -vel jelölt modellben $e_i = h_i = x$, azaz minden csapatnak egyforma előnyt jelentett a hazai pálya. A T^{DE} -vel jelölt modellben $e_i = h_i = x_i, i = 1, 2, \dots, n$ de az x_i értékek egymástól különbözhetnek. Ez esetben más-más csapatok különbözőképpen profitálhatnak a hazai pálya körülményéből.

A paraméterek ML becslése $m_1 = 0$ rögzítése után egyértelmű. Mivel az alfabetikus sorrendben a Debrecen van elől, ezért ezt a csapatot jelöltük az 1-es számmal.

Az előny nélküli Thurstone módszer esetén $\hat{d} = 0,334$, a T^{KE} modell esetén $\hat{d} = 0,337$, a T^{DE} modell esetén $\hat{d} = 0,350$, vagyis az egyforma kategória határai nagyon közel esnek egymáshoz.

A pontszámok alapján az első négy helyezett kiemelkedik, az 5–10. hely pontszámai tömörülést mutatnak, a 12. helyezett Kaposvár nagyon leszakadt (ld 1. Táblázat 2. oszlopa).

Látható, hogy a csapatok sorrendjeiben az egyes kiértékelések között nincs nagy különbség. Az első négy csapat minden kiértékelés szerint ugyanaz, mint ahogy a két utolsó is. Az is látható, hogy amint a szerzett pontokat tekintve, úgy az átlagos erősség tekintetében (\hat{m}_i) is kiemelkedő a Ferencváros és leszakadó a Kaposvár. A tömörülésben mutatkoznak az eltérések a kiértékelési eredmények között. A T, T^{KE} módszer esetén az első eltérés az Újpest és a Zalaegerszeg (6. hely és 7. hely) között látható. Pontszámában a kettő csapat ugyanannyit ért el,

Csapatok		T		T^{KE}		T^{DE}		
hivatalos sorrend	pont		\hat{m}_i		\hat{m}_i		\hat{m}_i	\hat{x}_i
1. Ferencváros	76	1	1,095	1	1,124	1	1,252	0,399
2. MOL Fehérvár	63	2	0,700	2	0,720	2	0,759	-0,101
3. Puskás Akadémia	54	3	0,488	3	0,516	3	0,563	-0,169
4. Mezőkövesd	50	4	0,363	4	0,372	4	0,472	-0,217
5. Honvéd	44	5	0,214	5	0,229	6	0,270	-0,156
6. Újpest	43	7	0,148	7	0,156	7	0,228	-0,092
7. Zalaegerszeg	43	6	0,203	6	0,213	5	0,281	0,168
8. Kisvárdá	42	9	0,097	9	0,109	9	0,190	0,289
9. Diósgyőr	41	10	0,053	10	0,074	10	0,154	0,126
10. Paks	41	8	0,116	8	0,136	8	0,194	0,274
11. Debrecen	39	11	0	11	0	11	0	0,290
12. Kaposvár	14	12	-0,884	12	-0,882	12	-0,845	0,223

1. táblázat. A kiértékelések eredményei

azonban a páros összehasonlítási módszerek esetén számít, hogy a Zalaegerszeg jobb csapatok ellen tudott döntetlent, illetve győzelmet elérni. A Zalaegerszeg döntetlent játszott egyszer a legerősebb Ferencvárossal, valamint kétszer megverte a 3. helyen végzett Puskás Akadémiát, így került az Újpest elé. Ez az eltérés a T^{DE} modellben is megjelenik. Részben hasonló okok (a Paks győzelme a MOL Fehérvár ellen) alapján előzi meg a 10. helyezett Paks a 9. helyezett Diósgyőrt és a 8. helyezett Kisvárdát mindhárom Thurstone módszerrel történő kiértékelésnél a hivatalos sorrendhez képest. A fentiekén kívül a T^{DE} modellben még egy eltérés tapasztalható, a Zalaegerszeg nem csak az Újpestet előzi meg, hanem a hivatalos sorrendben kettővel előtte levő Honvédot is.

Az előny számszerűsítékor kapott számérték konstans előny esetén, azaz a T^{KE} modellben 0,072 lett, ami azt jelenti, hogy a teljesítmény várható értéke ennyivel nő a modell szerint hazai pálya esetén és ugyanennyivel csökken idegen pálya esetén.

Amikor csapatonként más és más előny/hátrány származik a hazai, illetve az idegenben játszott meccsek esetén, meglepve tapasztalhatjuk több esetben is, hogy az optimum a negatív argumentumnál van! Ez azt jelenti, hogy ezeknek a csapatoknak az idegen pályán való teljesítménye átlagosan jobb, mint a hazai pályán mutatott teljesítménye. Átböngészve a részletes eredményeket tartalmazó honlapot ([14]), valóban azt tapasztaljuk, hogy ezen csapatok gyakrabban nyernek idegenben, mint hazai pályán.

Példaként álljon itt Mezőkövesd esete. A csapat otthon hét győzelem mellett elért három döntetlent és kikapott hétszer. Azonban idegenben határozottan

jobban teljesített, mert csak négyszer kapott ki az öt döntetlen és a hét győzelem mellett. Vagyis valóban, az otthoni teljesítménye kimondottan rosszabb, mint az idegenbeli, ami összhangban van a táblázatbeli $\hat{x}_i = -0,217$ értékkel.

Ezzel épp ellenkezőleg, ha megvizsgáljuk a Ferencváros meccseinek eredményét, azt láthatjuk, hogy hazai pályán a mérkőzéseit mind megnyerte három kivétellel, akkor döntetlent játszott, de idegen pályán 16 mérkőzéséből három vereséggel és négy döntetlennel végződött. Ez alátámasztja a nagy, közel 0,4-es értékűnek számolt többletet, amivel nő a teljesítménye hazai pályán.

Hasonlóan szemügyre véve a Kaposvár eredményeit, győzelmet csak a Diósgyőr és a Debrecen ellen tudott elérni, ezek közül három hazai, egy idegenbeli mérkőzés volt. Látható azonban, hogy a Kaposvár átlagos teljesítménye a többiekéhez képest oly kicsi, hogy még a fentiekből fakadó, átlag ($=0,086$) feletti $\hat{x}_i = 0,223$ érték sem emeli a többiek fölé. Ezek a példák azt mutatják, hogy a kapott \hat{x}_i értékek teljes összhangban vannak a csapatok otthoni és idegenbeli mérkőzéseinek eredményével.

A becsült \underline{m} , d , és \underline{e} paraméterek segítségével lehetőségünk nyílik az előnyben/hátrányban győzelem, döntetlen és vereség kialakulása valószínűségének becslésére az (5) és a (6) képletekbe való behelyettesítéssel. Másik becslése az említett valószínűségeknek a relatív gyakoriság. Hasonlítsuk össze kvantitatív módon ezeket a becsléseket az összes csapat esetén, illetve a legjobb csapat esetén!

	Győzelem	Döntetlen	Vereség
Relatív gyakoriság	0,43434	0,22222	0,34343
T^{KE}	0,43589	0,22031	0,34380
T^{DE}	0,43487	0,22182	0,34331

2. táblázat. Az előnyben levő csapat győzelmének/döntetlen eredményének/vereségének becsült valószínűségei

Mint a 2. Táblázatból látható, mindkét Thurstone módszer esetén a becsült valószínűségek nagyon közel esnek a relatív gyakoriságokhoz, eltéréseket csak az ezredekben tapasztalunk. Mivel az előnyben levő csapat győzelme egyben a hátrányban levő csapat veresége, a hátrányban levő csapatok szempontjából a Győzelem és a Vereség oszlopok megcserélődnek.

Vizsgálhatjuk csapatonként is a győzelem/döntetlen/vereség valószínűségének becsléseit előnyben, illetve hátrányban. A Ferencváros esetében kapott eredményeket a 3. és a 4. Táblázatok tartalmazzák.

A 4. Táblázat alapján láthatjuk, hogy hátrányban a T^{DE} modell alapján becsült valószínűségek mindhárom esetben 0,03-nál kisebb hibával közelítik a relatív gyakoriságokat, továbbá az eltérések a relatív gyakoriságok és a becsült valószínűségek között a T^{DE} modell esetén jóval kisebbek, mint a T^{KE} modell esetén.

	Győzelem	Döntetlen	Vereség
Relatív gyakoriság	0,82353	0,17647	0
T^{KE}	0,76674	0,1481	0,08516
T^{DE}	0,84667	0,10512	0,04821

3. táblázat. A Ferencváros előnye esetén a csapat győzelmének/döntetlen eredményének/vereségének becült valószínűségei

	Győzelem	Döntetlen	Vereség
Relatív gyakoriság	0,56250	0,25000	0,1875
T^{KE}	0,67539	0,18805	0,13656
T^{DE}	0,58742	0,22726	0,18532

4. táblázat. A Ferencváros hátránya esetén a csapat győzelmének/döntetlen eredményének/vereségének becült valószínűségei

A 3. Táblázatból azt láthatjuk, hogy előny esetén a Ferencváros győzelmének és vereségének esélye a relatív gyakorisághoz a T^{DE} modell esetén van közelebb, de döntetlen esetén fordított a helyzet. Összességében azonban a csapatonkénti előny figyelembe vételével alkotott modell mutatkozik jobbnak.

5. Összefoglalás

Egy, az összehasonlítandó objektumok sorrendjét és erősségét, valamint az esetlegesen meglévő előny mértékét meghatározni képes, páros összehasonlításokon alapuló, általánosított Thurstone módszert adtunk meg cikkünkben.

Az általános megközelítés kiterjed arra, hogy a véleménykategóriák száma tetszőleges lehet, továbbá arra, hogy a módszer képes kezelni az objektumok összehasonlításakor esetleg előforduló, külső körülmények által meghatározott (objektumonkénti, vagy közös) előnyt, illetve hátrányt. Mindezeket úgy, hogy az objektumok mögött lévő látens valószínűségi változók esetében általános eloszlásfüggvény-típust engedtünk meg.

Mivel a sorrend megállapítása egy likelihood függvény maximalizálásával történik, ezért fontos, hogy sikerült a maximumhely egyértelmű létezésére széles körben használható elégséges feltételt adnunk.

Módszerünket alkalmaztuk futballbajnokság csapatai egymás elleni eredményeinek kiértékelésére, amely során a sorrend és az egyes csapatok erősségeinek meghatározásán túl számszerűsíteni tudtuk a hazai pálya előnyét (bizonyos csapatoknál inkább hátrányát) is.

Köszönetnyilvánítás

A publikáció elkészítését, megjelenését támogatta az Innovációs és Technológiai Minisztérium a Tématerületi Kiválósági Program keretében az NKFIH-843-10/2019 sz. támogatói okirat alapján. A támogatást a szerzők ezúton is köszönik. A szerzők továbbá köszönetet mondanak az EFOP-3.6.1-16-2016-00015 számú projekt anyagi támogatásáért.

Hivatkozások

- [1] L.L. THURSTONE: *A law of comparative judgment*, Psychological Review, Vol. **34** No. **4**, pp. 273–286 (1927).
- [2] T.L. SAATY: *How to make a decision, the Analytic Hierarchy Process*, European Journal of Operational Research, Vol. **48** No. **1**, pp. 9–26 (1990). DOI: 10.1016/0377-2217(90)90057-I
- [3] S. BOZÓKI, J. FÜLÖP AND L. RÓNYAI: *On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices*, Mathematical and Computer Modelling, Vol. **52** No. **1**, pp. 318–333 (2010). DOI: 10.1016/j.mcm.2010.02.047
- [4] TEMESI J.: *Páros összehasonlítások a döntéshozatalban*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **37** No. **2**, pp. 1–10 (2020). DOI: 10.37070/AML.2020.37.2.01
- [5] R.A. BRADLEY AND M.E. TERRY: *Rank analysis of incomplete block designs: I. The method of paired comparisons*, Biometrika, Vol. **39** No. **3/4**, pp. 324–345 (1952). DOI: 10.2307/2334029
- [6] H. STERN: *A continuum of paired comparisons models*, Biometrika, Vol. **77** No. **2**, pp. 265–273 (1990). DOI: 10.2307/2336804
- [7] É. ORBÁN-MIHÁLYKÓ, C. MIHÁLYKÓ AND L. KOLTAY: *Incomplete paired comparisons in case of multiple choice and general log-concave probability density functions*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27** No. **2**, pp. 515–532 (2019). DOI: 10.1007/s10100-018-0568-1
- [8] MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN É. AND MIHÁLYKÓ CS.: *A Thurstone módszer általánosítása előnyök figyelembe vételére*, Szigma, Vol. **52** No. **1**, pp. 49–62 (2021).
- [9] É. ORBÁN-MIHÁLYKÓ, C. MIHÁLYKÓ AND L. KOLTAY: *A generalization of the Thurstone method for multiple choice and incomplete paired comparisons*, Central European Journal of Operations Research, Vol. **27** No. **1**, pp. 133–159 (2019). DOI 10.1007/s10100-017-0495-6
- [10] A. PRÉKOPA: *Logarithmic concave measures and functions*, Acta Scientiarum Mathematicarum, Vol. **34** No. **1**, pp. 334–343 (1973).
- [11] MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN É., MIHÁLYKÓ CS. ÉS KAJTÁR P.: *Általánosított Thurstone módszer alkalmazásokkal*, Alkalmazott Matematikai Lapok, Vol. **36** No. **2**, pp. 255–262 (2019). DOI: 10.37070/AML.2019.36.2.09
- [12] MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN É. ÉS MIHÁLYKÓ CS.: *Elégséges feltétel a maximum likelihood becslés létezésére és egyértelműségére bizonyos Thurstone módszerek esetében* (kézirat)
- [13] <https://allsportsapi.com>, letöltés: 2020. szeptember 30.
- [14] <https://focimagazin.hu/otp-bank-liga-nb1-201920-eredm%C3%A9nyek-tabella> letöltés: 2021.01.21.



Dr. Mihálykó Csaba 1962-ben született Veszprém-ben. 1987-ben szerzett az Eötvös Loránd Tudományegyetemen okleveles matematikus végzettséget, majd 1996-ban alkalmazott matematika területén PhD-t ugyanott. 1994-ben Farkas Gyula emlékdíjat, 2000-ben Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat, 2019-ben Mestertanár Aranyérmet kapott. 1987 óta dolgozik Veszprém-ben a Pannon Egyetemen, illetve jogelődjein, jelenleg a Matematika Tanszéken egyetemi docensként. Kutatási területei: kockázati folyamatok, döntésmélet, matematikai model-

lezés. Eddig több mint 150 tudományos közleménye jelent meg, ezek közül 55 tudományos folyóiratban. Összes független hivatkozásainak száma meghaladja a 250-t, Hirsch-indexe 8.

MIHÁLYKÓ CSABA

Pannon Egyetem, Műszaki Informatikai Kar,
Matematika Tanszék,
Veszprém, Egyetem u. 10. H8200.
mihalyko@almos.uni-pannon.hu



Dr. Mihálykóné dr. Orbán Éva 1964-ben született Pápán, és 1987-ben végzett az ELTE matematikus szakán. 1991-ben egyetemi doktori címet, 2004-ben PhD fokozatot szerzett. 1987 óta a veszprémi egyetem (ma Pannon Egyetem) Matematika Tanszékén oktat főként valószínűségszámítást és matematikai statisztikát, jelenleg egyetemi docensi beosztásban. Kutatási területe a sztochasztikus modellek témaköre. 2020-ig bezárólag több, mint 70 publikációja jelent meg, melyek közül 33 referált folyóiratcikk. Munkáira több, mint 120 hivatkozást kapott, Hirsch-indexe 6.

MIHÁLYKÓNÉ ORBÁN ÉVA

Pannon Egyetem, Műszaki Informatikai Kar,
Matematika Tanszék,
Veszprém, Egyetem u. 10. H8200.
orbane@almos.uni-pannon.hu



Gyarmati László 1996-ban született Veszprémben. BSc tanulmányait a Pannon Egyetem Műszaki Informatika Karának programtervező informatikus szakán végezte, és 2020-ban megszerezte diplomáját. Diplomájának témája a Thurstone módszer alkalmazása rangsorolásra két és négy kategória esetén előny nélküli, konstans és csapatonkénti előnyös modellek segítségével. Már az egyetem utolsó félévében a Secudit Kft.-nél dolgozott részmunkaidőben, ezt teljes állásban folytatta 2020 második felében. Munkája során a Windows sebezhetőségeivel foglalkozott, és matematikai modellt hozott létre gépek sebezhetőségének pontszámával való értékelésére.

GYARMATI LÁSZLÓ

Pannon Egyetem, Műszaki Informatikai Kar,
Veszprém, Egyetem u. 10. H8200
xdktdk96@gmail.com

ON THE GENERALIZATIONS OF THE THURSTONE METHOD

CSABA MIHÁLYKÓ, ÉVA ORBÁN-MIHÁLYKÓ, LÁSZLÓ GYARMATI

Paired comparisons are often used in decision making to evaluating opinions, but the results of sport matches can also be regarded as paired comparisons. Several methods can be applied for evaluations. One of the possible methods is the Thurstone's method. It is based on the idea of latent random variables and it uses probabilistic method for the evaluations. This method is appropriate to build in possible advantages/disadvantages. In this paper we present a Thurstone model with arbitrary number of categories and with the possibility of advantage/disadvantages. We apply it for evaluating football results.

Keywords: paired comparison, Thurstone method, maximum likelihood estimation, advantages/disadvantages.

Mathematics Subject Classification (2000): 62J15, 62H15

RITKASÁGI MATROIDOKRÓL

MIHÁLYKÓ ANDRÁS

Egy $G = (V, E)$ gráfot (k, ℓ) -ritkának nevezünk, ha $i_G(X) \leq k|X| - \ell$ teljesül minden $|X| \geq 2$ csúcshalmazra, ahol $i_G(X)$ a G gráf X által feszített éleinek számát jelenti. Ezen ritkasági feltételek minden $k \in \mathbb{Z}_+$ és $\ell < 2k$ egész mellett matroidot alkotnak a G gráf élein. Ezek az úgynevezett ritkasági matroidok (count matroid). Ritkasági matroidok feltételei számos helyen megjelennek a kombinatorikus optimalizálásban, például a feszítőfáknál és párosításoknál, vagy a merevségelméletben. Célunk most a ritkasági matroidok részletesebb bemutatása a definícióktól néhány ismert eredményen keresztül egészen a nyitott problémákig.

1. Bevezetés

Gráfok ritkasági tulajdonságainak vizsgálata gyakori a gráfelméletben. Elég csak egy összefüggő gráf feszítőfájára gondolni, amit könnyen egy ritkasági tulajdonságként lehet felfogni. Tekintsük ugyanis a $G = (V, E)$ összefüggő gráf egy tetszőleges (V, F) feszítőfáját. Ismert, hogy $|F| = |V| - 1$, míg minden $X \subseteq V$ részalmazra $i_F(X) \leq |X| - 1$, ahol $i_F(X)$ az X halmaz által feszített élek számát jelöli az F élhalmazból. (Hasonló módon $i_G(X) := i_E(X)$.) Így tehát az F feszítőfa élei „ritkák” a G gráfban. Hasonló ritkasági feltételek több helyen is előfordulnak merevségelmélettől páros gráfok párosításáig. Célunk most ezeknek egy közös általánosítását bemutatni, aminek segítségével egységesen kezelhetjük ezen gráfokat. Ezen közös platformot az úgynevezett ritkasági matroidok (angolul count matroid) szolgáltatják.

A ritkasági matroidokat Lorea vezette be [12] és Whiteley általánosította 1986-ban ([17, Appendix]). Azóta számos helyen felhasználták és több irányba is tovább általánosították őket. Például Frank irányított gráfokra bővítette ki a definíciót [5, 13.5 fejezet], amely általánosítás segítségével például egy súlyozott irányított gráf minimális költségű gyökeresen k -összefüggő részgráfját lehet megtalálni. A szimmetrikus merevség témaköréből kiindulva csoportelemekkel címkézett gráfokra általánosították a ritkasági matroidot ([8],[16], [18]).

Ritkasági matroidokra néhány olyan feladatot is meg tudunk oldani polinomiális időben, amelyek megoldásának bonyolultsága általános matroidokra nem ismert

vagy NP-nehéz. Mivel a ritkasági matroidok számos speciális osztálya jól ismert és széles körben vizsgált, ez reményt adhat újabb problémák megoldásához, hiszen az ismert osztályokra használt ötletek esetleg kiterjeszthetők a teljes matroid családra.

Tekintsük például a következő egyszerű feladatot: adott egy F feszítőfa, tegyük 2-él-összefüggővé minimális számú új él hozzáadásával. (Egy $G = (V, E)$ gráf 2-él-összefüggő, ha tetszőleges $e \in E$ élet törölve a gráfból $G - e$ továbbra is összefüggő marad.) Ennek alkalmazása lehet, ha például biztonságra törekszünk, és egy kapcsolat esetleges meghibásodása esetén is fenn akarjuk tartani a gráf összefüggőségét. A kérdés egyszerűen megválaszolható feszítőfára, de megmutatjuk, hogyan általánosodik egyéb ritkasági feltételekre, az úgynevezett redundánssá növelési feladat keretében.

A cikk első felében bevezetjük a ritkasági matroidokat, második felét a redundánssá növelési feladat bemutatásának szánjuk, végül néhány nyitott kérdést ismertetünk. A fejezet további részében a matroidokat definiáljuk, majd a 1.2. alfejezetben bemutatjuk a cikk további részében használt példákat. A 2. fejezetben a ritkasági matroidokat vezetjük be, részben Frank munkájára [5] támaszkodva, majd a 2.1. alfejezetben ezt kiterjesztjük hipergráfokra is. A 3. fejezetben a ritkasági matroidok redundáns növelését tárgyaljuk, amely eredmények szorosan kapcsolódnak Király és Mihálykó 2020-as cikkéhez [10]. A 4. fejezetben ritkasági matroidokkal kapcsolatos nyitott kérdéseket teszünk fel.

1.1. Matroidok

A matroidok a lineáris algebrából ismert lineáris függetlenség koncepcióját általánosítják. A kombinatorikus optimalizálás területén gyakran megjelennek és algoritmikus szempontból közkedveltek. Például mohó algoritmussal lehet rajtuk optimalizálni tetszőleges költségfüggvény mellett. Egy másik közismert eredmény az Edmonds-féle matroid metszet tétel [2], amely segítségével két matroid közös struktúráját vizsgálhatjuk algoritmikusan. A matroidokról és kapcsolatukról a szubmoduláris függvényekkel az olvasó részletes bevezetést talál Frank könyvében [5].

1.1. Definíció. Adott egy S alaphalmaz és részhalmazainak \mathcal{F} rendszere. Az (S, \mathcal{F}) párt matroidnak nevezzük, ha a következő három axiómát teljesíti:

$$A1) \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$A2) \text{ Ha } X \in \mathcal{F} \text{ és } Y \subset X, \text{ akkor } Y \in \mathcal{F}$$

$$A3) \text{ Minden } X \subseteq S \text{ részhalmazra az } \mathcal{F}\text{-nek } X\text{-ben fekvő, } X\text{-ben legbővebb tagjai azonos elemszámúak.}$$

Ezen tulajdonságok az úgynevezett függetlenségi axiómák, az \mathcal{F} elemei a független halmazok. Könnyű látni, hogy az A1), A2) és A3) feltételeket a lineárisan

független halmazok rendszere teljesíti. Az A3) axióma lecserélhető a következő A3') axiómára, ekvivalens definíciót eredményezve [5]:

A3') Ha $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, és $|F_1| < |F_2|$, akkor létezik olyan $f \in F_2 - F_1$, hogy $F_1 \cup \{f\} \in \mathcal{F}$.

A tartalmazásra nézve minimális nem független halmazokat köröknek nevezzük.

1.2. Példák

Matroidok gyakran előfordulnak gráfelméleti kontextusban. Három közismert példát hozunk, amelyek – mint később kiderül – mind ritkasági matroidok speciális esetei.

Grafikus matroid Legyen G egy irányítatlan gráf, és legyen \mathcal{F} a G -beli erdők éleinek családja. Könnyen látható, hogy ezek a G élein mint alaphalmazon teljesítik a függetlenségi axiómákat. Az így kapott matroidot grafikus matroidnak nevezzük. Ha G összefüggő, akkor a maximális független halmazok éppen a feszítőfák élei.

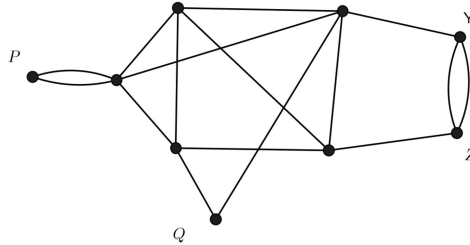
Transzverzális matroid Tekintsük a $G = (S, T, E)$ páros gráfot. Egy $I \subseteq S$ részhalmazt párosíthatónak nevezzük, ha létezik olyan párosítás G -ben, amely fedi az I elemeit. Legyen \mathcal{I} az S párosítható részhalmazainak családja. Az (S, \mathcal{I}) pár teljesíti a függetlenségi axiómákat [5]. Az így kapott matroid az úgynevezett transzverzális matroid.

Kétdimenziós merevségi matroid Matroidok a merevségelméletben is fontos szerepet játszanak. Ha egy kétdimenziós rúd-csukló szerkezet merevségét szeretnénk meghatározni (generikus pozícióban lévő csuklók esetén), akkor ezt a rúd-csukló szerkezet által meghatározott gráf alapján megtehetjük. Egy egyszerű hurokmentes $G = (V, E)$ gráfot $(2, 3)$ -ritkának nevezzük, ha $i_G(X) \leq 2|X| - 3$ minden $X \subseteq V$ halmazra, amire $|X| \geq 2$. Pollaczek-Geiringer [15] és Laman [13] tételei alapján G pontosan akkor minimálisan merev, ha $(2, 3)$ -ritka és $|E| = 2|V| - 3$. A $(2, 3)$ -ritka gráfot alkotó élek halmazai a G gráfban teljesítik a függetlenségi axiómákat E alaphalmazon, így kapjuk az úgynevezett kétdimenziós merevségi matroidot. Részletes bevezetésért a kétdimenziós merevségi matroidhoz a merevség fogalmainak precíz definiálásával Jordán cikkét [9] javasoljuk. Meg kell jegyeznünk e ponton, hogy a merevségi matroid értelmezhető magasabb dimenziókban is, de ennek tárgyalása meghaladja e dolgozat kereteit.

2. Ritkasági matroidok

Legyen $G = (V, E)$ egy hurokmentes irányítatlan gráf, k egy pozitív egész, míg $\ell \in \mathbb{Z}$ egy olyan egész szám, hogy $2k > \ell$. Nevezzük G -t (k, ℓ) -ritkának,

ha $i_G(X) \leq k|X| - \ell$ minden $|X| \geq 2$ csúcshalmazra. Egy olyan (k, ℓ) -ritka gráfot, amelyre $|E| = k|V| - \ell$, nevezzünk (k, ℓ) -kritikusnak. Ezen megnevezések természetes módon halmazokra is értelmezhetők, vagyis egy $X \subseteq V$ halmaz (k, ℓ) -kritikus a G gráfon belül, ha (k, ℓ) -ritka részgráfot feszít, és $i_G(X) = k|X| - \ell$.



1. ábra. Egy $(2, 2)$ -kritikus gráf

2.1. LEMMA. [10, Lemma 2.1] Legyen $G = (V, E)$ egy (k, ℓ) -ritka gráf, és $T_1 = (V_1, E_1)$ illetve $T_2 = (V_2, E_2)$ legyen G két (k, ℓ) -kritikus részgráfja. Ha $|V_1 \cap V_2| \geq 2$, akkor $T_1 \cup T_2$ egy (k, ℓ) -kritikus gráf.

Bizonyítás. Mivel T_1 és T_2 (k, ℓ) -kritikus, $i_G(V_1 \cup V_2) + i_G(V_1 \cap V_2) \geq i_G(V_1) + i_G(V_2) = k|V_1| - \ell + k|V_2| - \ell = k|V_1 \cup V_2| - \ell + k|V_1 \cap V_2| - \ell$. Mivel viszont G (k, ℓ) -ritka, és $|V_1 \cap V_2| \geq 2$, $k|V_1 \cup V_2| - \ell + k|V_1 \cap V_2| - \ell \geq i_G(V_1 \cup V_2) + i_G(V_1 \cap V_2)$, tehát egyenlőség áll fenn, vagyis $T_1 \cup T_2$ (sőt, $T_1 \cap T_2$ is) (k, ℓ) -kritikus. \square

Ezen lemma segítségével be tudjuk bizonyítani, hogy a (k, ℓ) -ritka élhalmazok egy valóban matroid független halmazait alkotják.

2.1. TÉTEL. Legyen $G = (V, E)$ egy hurokmentes irányítatlan gráf, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\ell \in \mathbb{Z}$ és $2k > \ell$. Legyen $\mathcal{F} = \{F \subseteq E \mid (V(F), F) \text{ } (k, \ell)\text{-ritka gráfot alkot}\}$. Ekkor az (E, \mathcal{F}) pár matroidot alkot.

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy az \mathcal{F} halmazai automatikusan teljesítik az A1) és A2) axiómákat. Az A3') axiómát fogjuk bizonyítani. Legyen E_1 és E_2 két (k, ℓ) -ritka élhalmaza G -nek úgy, hogy $|E_1| < |E_2|$. Tegyük fel, hogy nincsen olyan $e \in E_2 - E_1$, amire $E_1 \cup \{e\}$ ritka. Ekkor minden $e \in E_2 - E_1$ élre létezik egy maximális $C_e \subseteq E_1$ élhalmaz, amelyre $(V(C_e), C_e)$ (k, ℓ) -kritikus részgráfot alkot és $V(C_e)$ feszíti e -t. Vegyük a $\mathcal{C} = \{C_e \mid e \in E_2 - E_1\}$ halmazt. Mivel C_e -t maximálisnak választottuk, az 2.1. Lemma alapján $|V(C') \cap V(C'')| \leq 1$ bármely két különböző $C', C'' \in \mathcal{C}$ halmazra. (Az lehet, hogy $C_e = C_f$ némely $e, f \in E_2 - E_1$ -re, de ez nem jelent problémát.) Legyen $E' = \{e \mid e \in E_1 \cap E_2, \text{ és } e \notin C \text{ tetszőleges } C \in \mathcal{C} \text{ esetén}\}$. Így $E_2 - E'$ éleit pontosan egy $V(C)$ halmaz

feszíti, ahol $C \in \mathcal{C}$, továbbá E_2 ritkasága miatt $i_{E_1}(V(C)) \geq i_{E_2}(V(C))$ minden $C \in \mathcal{C}$ -re. $|E_2| = |E'| + \sum_{C \in \mathcal{C}} i_{E_2}(V(C)) \leq |E'| + \sum_{C \in \mathcal{C}} i_{E_1}(V(C)) \leq |E_1|$, ami ellentmond az $|E_1| < |E_2|$ feltételnek, tehát létezik olyan $e \in E_2 - E_1$, amire $E_1 \cup \{e\}$ ritka. Ezzel beláttuk az A1), A2) és A3') axiómákat, vagyis a (k, ℓ) -ritka élhalmazok tényleg matroidot alkotnak E -n, mint alaphalmazon. \square

Vegyük észre, hogy a bevezetőben látott grafikus matroid egy (k, ℓ) -ritkasági matroid a $(k, \ell) = (1, 1)$ értékekre (ezt nevezzük $(1, 1)$ -ritkasági matroidnak). Valóban, az $(1, 1)$ -ritka halmazok pontosan a körmentes részgráfok G -ben, vagyis pontosan a grafikus matroid független halmazai.

Tekintsük most az $(1, 1)$ -ritkasági matroid helyett a (k, k) -ritkasági matroidot. Egy $G = (V, E)$ gráf esetén a ritkaság azt jelenti, hogy minden $\emptyset \neq X \subseteq V$ halmazra $i_G(X) \leq k(|X| - 1)$ (ha $|X| = 1$, akkor mivel G nem tartalmaz hurokélet, $i_G(X) = 0 = k(|X| - 1)$). Egy (k, k) -kritikus gráf (k, k) -ritka és $|E| = k(|V| - 1)$. Ez nyilván teljesül minden olyan gráfra, amelyik k diszjunkt feszítőfa uniója, de Nash-Williams ismert eredménye alapján [14] csak ezekre, vagyis a (k, k) -kritikus gráfok pontosan k diszjunkt feszítőfa uniójából állnak. (Ilyen például az 1. ábrán bemutatott $(2, 2)$ -kritikus gráf is, amely könnyen ellenőrizhetően két feszítőfa uniója.)

Látható, hogy a bevezetőben definiált kétdimenziós merevségi matroid pontosan a $(2, 3)$ -ritkasági matroidnak felel meg. Így például, ha minimális költségű merev részgráfját keressük egy merev gráfnak két dimenzióban, akkor azt mohó módon megtehetjük. Erre fokszámkorlátos irányítások segítségével $O(|V|^2)$ algoritmus ismert [1].

2.1. Hipergráfok

Az ilyen módon bevezetett ritkasági matroidokat könnyen általánosíthatjuk, ha gráfok helyett hipergráfokra értelmezzük őket. Legyen $\mathcal{H} = (V, \mathcal{E})$ egy hipergráf a V csúcshalmazon és az \mathcal{E} hiperéleken. Legyen $k \in \mathbb{Z}_+$, $\ell \in \mathbb{Z}$ és $2k > \ell$. Nevezzünk egy hipergráfot (k, ℓ) -ritkának, ha $i_{\mathcal{H}}(X) \leq k|X| - \ell$ minden olyan $X \subseteq V$ halmazra, amely legalább egy hiperélet feszít (egy halmaz akkor feszít egy hiperéletet, ha annak minden csúcsa a halmazban van). Egy olyan (k, ℓ) -ritka hipergráfot, amelyre $|\mathcal{E}| = k|V| - \ell$ nevezzünk (k, ℓ) -kritikusnak. Tetszőleges \mathcal{H} hipergráf esetén a (k, ℓ) -ritka hiperél halmazok teljesítik a függetlenségi axiómákat, így azok az \mathcal{E} alaphalmazon matroidot alkotnak [5].

Tekintsük most a transzverzális matroidot. Egy $G = (S, T, E)$ páros gráfot a következő hipergráffal reprezentálhatunk: Legyen $V = T$ és s szomszédjai alkossanak egy hiperéletet minden $s \in S$ -re. Így tehát a hiperélek az S pontthalmaz szomszédainak feleltethetők meg, vagyis bijekció áll fenn a hiperélek és az S pontjai között is. Hall tétele alapján egy $S' \subseteq S$ pontthalmaz pontosan akkor párosítható, ha minden $S'' \subseteq S'$ halmazra $|S''| \leq |N_G(S'')|$, ahol $N_G(X)$ az X csúcshalmaz szomszédainak halmazát jelöli. Ez a hipergráfos megfogalmazásban

azt jelenti, hogy az S' hiperél-halmazra teljesül az $(1, 0)$ -ritkasági feltétel. Vagyis a transzverzális matroid megfeleltethető egy $(1, 0)$ -ritkasági matroidnak a megfelelő hipergráfon.

2.2. (m, ℓ) -ritkasági matroid

A (k, ℓ) -ritkaság egy másik általánosítását kapjuk, ha a k konstans helyett egy függvényt vezetünk be a csúcsokon. Legyen $m : V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ egy nemnegatív, egészértékű függvény a $G = (V, E)$ gráf csúcsain és $\ell \in \mathbb{Z}$ egész szám. Legyen tetszőleges $X \subseteq V$ halmazra $\tilde{m}(X) = \sum_{x \in X} m(x)$. Nevezzünk egy gráfot (m, ℓ) -ritkának, ha $i_G(X) \leq \tilde{m}(X) - \ell$ minden $|X| \geq 2$ halmazra. Egy olyan (m, ℓ) -ritka gráfot, amelyre $|E| = \tilde{m}(V) - \ell$ nevezzünk (m, ℓ) -kritikusnak. Az 2.1. Lemma könnyen látható módon átvihető (k, ℓ) -kritikus helyett (m, ℓ) -kritikus részgráfokra is, és így látható, hogy az 2.1. Tétel bizonyítása érvényes marad, tehát az (m, ℓ) -ritka élhalmazok matroidot alkotnak.

Megjegyezzük, hogy az (m, ℓ) -ritkasági matroid is értelmezhető hipergráfokra [5].

3. Ritkasági matroidok redundáns növelése

Egy (k, ℓ) -kritikus gráf olyan szempontból minimálisnak tekinthető, hogy tetszőleges élét elhagyva már olyan gráfot kapunk, amely nem tartalmaz (k, ℓ) -kritikus részgráfot. Néhány esetben arra lehet szükség a rendszer hibatűrő képességének fokozása érdekében, hogy egy él kiesése után is maradjon egy (k, ℓ) -kritikus részgráf. Például a bevezetésben már említett 2-élösszefüggőség ilyen, hiszen egy 2-élösszefüggő gráf tetszőleges élét elhagyva a megmaradt gráf tartalmaz még feszítőt. Egy másik motiváció lehet a merevségelmélet, ahol egy szerkezet merevségét biztosítandó szeretnénk, ha egy tetszőleges él törlésével is merev maradna a gráfunk. A következő elnevezéseket szintén a merevségelméletbeli alkalmazások motiválják.

Egy $G = (V, E)$ gráfot (k, ℓ) -merevnek hívunk, ha tartalmaz feszítő (k, ℓ) -kritikus részgráfot. Egy gráfot (k, ℓ) -redundánsnak nevezünk, ha tetszőleges élét elhagyva (k, ℓ) -merev gráfot kapunk.

Vizsgáljuk most a következő kérdést:

1. *Probléma.* Adott egy $G = (V, E)$ (k, ℓ) -merev gráf. Határozzunk meg egy olyan minimális elemszámú F élhalmazt, amelyre $G + F$ (k, ℓ) -redundáns gráfot eredményez.

A probléma egy könnyebben vizsgálható változatában feltesszük a G gráfról, hogy nemcsak (k, ℓ) -merev, hanem minimálisan (k, ℓ) -merev, vagyis (k, ℓ) -kritikus

is. Az eredeti 1. Problémára fogunk az általános problémaként hivatkozni, míg ezt a változatot megszorított problémának nevezzük.

Az általános, illetve a megszorított problémát számos (k, ℓ) párra vizsgálták már, kezdve az $(1, 1)$ -merev gráfok redundánsná növelésével, amelyet Eswaran és Tarjan oldott meg 1976-ban [4]. Az általános problémára tetszőleges (k, k) érték esetén Frank és Király T. adott megoldást [6], míg a $(2, 3)$ -kritikus gráfok növelését García és Tejel vizsgálta [7]. Az általános probléma vizsgálatát Király Cs. és Mihálykó végezte el [10]. Ez utóbbi cikket követve vázoljuk fel az eredményeket.

3.1. (k, ℓ) -kritikus gráfok növelése

Először vizsgáljuk meg a megszorított problémát. Adott egy $G = (V, E)$ (k, ℓ) -kritikus gráf, célunk egy minimális elemszámú F élhalmaz megtalálása, amire $G + F$ (k, ℓ) -redundáns. Ha a kontextusból egyértelmű, a továbbiakban elhagyjuk a (k, ℓ) előtagot a ritka, kritikus, merev és redundáns jelzők előtt. Egy tetszőleges F' élhalmazra, amire $G + F'$ redundáns, minden $f \in F'$ élre f G néhány élét redundánsná teszi, jelölje ezek halmazát $T(f)$. Mivel $T(f) + f$ egy kört alkot a ritkasági matroidban, könnyű belátni a következő lemmát.

3.1. LEMMA. [10, Lemma 2.3] Legyen $G = (V, E)$ egy (k, ℓ) -kritikus gráf és $i, j \in V$ két csúcs. Ekkor $T(ij) = \{\bigcap T \mid T \subseteq G \text{ kritikus, és } i, j \in V(T)\}$.

Jelölje $R(F^*)$ G redundáns éleit $G + F^*$ -ban. Vegyük észre, hogy $T(f) = R(\{f\})$. Az első lényeges megfigyelés ezt terjeszti ki nagyobb halmazokra:

3.2. LEMMA. [10, Lemma 2.4] $R(\{f_1 \cup \dots \cup f_k\}) = T(f_1) \cup \dots \cup T(f_k)$

Így tehát minden $e \in E$ élre létezik egy olyan $f \in F'$, amire $e \in T(f)$. Vagyis nem létezhet olyan $G' \subsetneq G$ kritikus részgráf, amely F' minden élét feszíti, mert akkor a 3.1. és 3.2. Lemma miatt F' csak G' éleit feszítené, $G - G'$ éleit nem, ellentmondva a $G + F'$ redundánságának.

Nevezzük egy $C \subsetneq V$ halmazt ko-kritikusnak, ha $V - C$ egy kritikus részgráfot feszít. Ekvivalensen C (k, ℓ) -ko-kritikus halmaz, ha $1 \leq |C| \leq |V| - 2$ és összesen $k|C|$ élnek van legalább egyik végpontja C -ben. Ha C ko-kritikus, akkor egy F' élhalmazra, amelyre $G + F'$ redundáns, $C \cap V(F') \neq \emptyset$. Így tehát a következő egyenlőtlenség fennáll.

3.3. LEMMA. Legyen G egy (k, ℓ) -kritikus gráf legalább 4 csúcson. Ekkor

$$\begin{aligned} & \min\{|F| : F \text{ egy élhalmaz, amire } G + F \text{ } (k, \ell)\text{-redundáns}\} \geq \\ & \geq \max \left\{ \left\lceil \frac{|C|}{2} \right\rceil : C \text{ páronként diszjunkt } (k, \ell)\text{-ko-kritikus halmazok családja} \right\}. \end{aligned}$$

Maximum három csúcs esetén az 1. Probléma megoldása tetszőleges (k, ℓ) esetén könnyen kiszámítható, így ezen gráfokkal nem foglalkozunk.

Állítjuk, hogy az előző egyenlőség helyén valójában egyetlen kivételtől eltekintve egyenlőség áll. Az ehhez vezető lépések vázolásához először vizsgáljuk meg a ko-kritikus halmazok struktúráját.

Jelölje \mathcal{C}^* a tartalmazásra nézve minimális ko-kritikus halmazokat G -ben. (Természetesen feltehetjük, hogy a 3.3. Lemmában \mathcal{C} csak \mathcal{C}^* -beli halmazokból áll. Például az 1. ábrán a tartalmazásra nézve minimális ko-kritikus halmazok $\{P\}$, $\{Q\}$ és $\{Y, Z\}$.)

3.4. LEMMA. [10, Theorem 5.5] \mathcal{C}^* halmazai páronként diszjunktak, vagy található olyan $i, j \in V$ csúcspár, amire $\{i, j\} \cap C \neq \emptyset$ minden $C \in \mathcal{C}^*$ ko-kritikus halmazra.

Könnyű bizonyítani, hogy ha nincsen ko-kritikus halmaz G -ben, akkor tetszőleges ij élre $G + ij$ redundáns lesz. Ez az egyetlen kivétel, amikor nem áll egyenlőség a 3.3. Lemmában. Hasonlóképpen egyszerű belátni, hogy ha van legalább egy ko-kritikus halmaz, és létezik 3.4. Lemmában leírt $i, j \in V$ pontpár, vagyis amire $\{i, j\} \cap C \neq \emptyset$ minden $C \in \mathcal{C}^*$ ko-kritikus halmazra, akkor $G + ij$ redundáns [10]. Tehát feltehetjük, hogy \mathcal{C}^* halmazai páronként diszjunktak és $|\mathcal{C}^*| \geq 3$.

Így könnyen vehetünk egy $X \subset V$ halmazt, amire $|C \cap X| = 1$ minden $C \in \mathcal{C}^*$ ko-kritikus halmazra. Belátható, hogy egy olyan F' élhalmazra az X halmazon, amelyre (X, F') összefüggő gráfot alkot, $G + F'$ redundáns gráfot eredményez (lásd [10, Lemma 5.8]). Így már találtunk egy $|\mathcal{C}^*| - 1$ méretű élhalmazt, amely redundánssá növeli G -t. Mivel $|\mathcal{C}^*| - 1$ megegyezik $\left\lceil \frac{|\mathcal{C}^*|}{2} \right\rceil$ -vel, ha $|\mathcal{C}^*| = 3$, így $|\mathcal{C}^*| \leq 3$ esetre az egyenlőséget tudjuk bizonyítani a 3.3. Lemmában. (Így az 1. ábra gráfját optimálisan redundánssá tudjuk növelni, például egy $F = \{PY, YQ\}$ élhalmazzal.)

Feltehetjük most, hogy van legalább négy diszjunkt ko-kritikus halmaz G -ben.

3.5. LEMMA. [10, Lemma 5.9] Legyen $G = (V, E)$ egy (k, ℓ) -kritikus gráf, és legyenek $x_1, x_2, x_3, y \in V$ csúcsok G négy diszjunkt ko-kritikus halmazából. Ekkor, ha $T^* = T(yx_1) \cup T(yx_2) \cup T(yx_3)$, akkor $T^* = T(yx_1) \cup T(x_2x_3)$, vagy $T^* = T(yx_2) \cup T(x_1x_3)$.

A 3.5. Lemma ötlete megjelenik már García és Tejel munkájában is ([7, Lemma 15]). Ők mutattak rá arra is, hogyan használhatjuk ki ezt a tulajdonságot. Vegyük az X csúcshalmazt, és jelöljünk ki egy $y \in X$ csúcst. Legyen $H = \{yx | x \in X - \{y\}\}$ élhalmaz. Tudjuk, hogy mivel H egy összefüggő gráfot alkot X -en, $G + H$ redundáns. Ekkor addig, amíg y fokszáma H -ban legalább három, alkalmazhatjuk a 3.5. Lemma lépését, hogy két élet egy élre cseréljünk, úgy, hogy a kapott H' élhalmazra $G + H'$ továbbra is redundáns. A végül kapott H^* élhalmazra igaz, hogy minden csúcs fokszáma H -ra nézve legfeljebb egy, kivéve y -t, ami legfeljebb kettő, és $G + H^*$ redundáns. Így $F = H^*$ egy pontosan $\left\lceil \frac{|\mathcal{C}^*|}{2} \right\rceil$

elemszámú élhalmaz, ami redundánssá növeli G -t. Így beláthatjuk a következő tételt.

3.1. TÉTEL. [10, Theorem 5.1] Legyen G egy (k, ℓ) -kritikus gráf. Ekkor vagy G -ben nincsenek (k, ℓ) -ko-kritikus halmazok, és ekkor tetszőleges $i, j \in V$ -re $G + ij$ (k, ℓ) -redundáns, vagy a következő egyenlőség áll:

$$\min\{|F| : F \text{ egy élhalmaz, amire } G + F \text{ } (k, \ell)\text{-redundáns}\} = \\ = \max\left\{\left\lceil \frac{|\mathcal{C}|}{2} \right\rceil : \mathcal{C} \text{ páronként diszjunkt } (k, \ell)\text{-ko-kritikus halmazok családja}\right\}.$$

3.2. (k, ℓ) -merev gráfok növelése

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, ha a bemeneti $G = (V, E)$ gráf nem (k, ℓ) -kritikus, hanem (k, ℓ) -merev, vagyis az általános 1. Problémát. Ha a $(k, \ell) = (1, 1)$ példánál maradunk, ez megfelel annak, hogy nem egy fát, hanem egy összefüggő gráfot akarunk 2-élösszefüggővé növelni. Ebben az esetben a 2-élösszefüggő komponensek összehúzásával egy fát kapunk, amelyet optimálisan 2-élösszefüggővé növelve egy olyan élhalmazt kapunk, amely az eredeti gráfot optimálisan növeli 2-élösszefüggővé. Ezen ötlet általánosítható minden $\ell \leq k$ párra. Első ránézésre talán meglepő módon, egyéb értékekre vannak nehézségi eredmények. Garcıa és Tejel bizonyította [7], hogy $(2, 3)$ -merev gráf növelése redundánssá NP -nehéz, majd az ő módszerüket általánosítva Király és Mihálykó bizonyította, hogy minden $k < \ell$ értékre (k, ℓ) -merev gráf növelése redundánssá nemcsak, hogy NP -nehéz, de már konstans faktorú közelítést adni rá is lehetetlen, ha $P \neq NP$ [10].

Az összehúzás általánosításához szükség van az (m, ℓ) -ritkasági matroidokra. Természetesen minden (k, ℓ) -ritkasági matroid egyben (m, ℓ) -ritkasági matroid is az $m \equiv k$ függvényre.

Ha $\ell \leq k$, az 2.1. Lemma egy általánosítása alapján (lásd [10, Lemma 2.1]) G minden tartalmazásra nézve maximálisan merev részgráfja, így maximális redundáns részgráfjai is csúcdiszjunktak. Legyen $\ell' = \max(\ell, 0)$. Húzzuk össze G tartalmazásra nézve maximális redundáns részgráfjait, és definiáljunk egy m függvényt az így kapott G' gráf csúcsain. Az m függvény legyen a következő: G összehúzott pontjaira legyen $m := \ell'$, míg minden egyéb pontra legyen $m := k$. Bizonyítható, hogy G' (m, ℓ') -kritikus [10, Section 3].

3.2. TÉTEL. [10, Theorem 3.3] Legyen G egy (k, ℓ) -merev gráf $\ell \leq k$ értékekre. Ekkor G optimálisan redundánssá növelhető azzal az élhalmazzal, amely az összehúzások után kapott (m, ℓ') -kritikus G' gráfot (m, ℓ') -redundánssá növeli.

Mivel a 3.1. Tétel általánosabb formában is igaz, ha (k, ℓ) -kritikus gráfok helyett olyan (m, ℓ') -kritikus gráfokra tekintjük, amelyet az előbbi módon kaptunk (lásd [10, Theorem 5.1]), kijelenthetjük, hogy az általános probléma is megoldható, ha $\ell \leq k$.

Ezen eredmények az (k, ℓ) -merev, illetve a (k, ℓ) -kritikus gráfon könnyen általánosíthatók hipergráfokra is.

3.3. Algoritmikus eredmények

Mint a ritkasági matroidok bevezetésénél említettük, egy $(2, 3)$ -merev gráf egy minimális merev részgráfját $O(|V|^2)$ időben megtalálhatjuk [1]. Ezt egy fokszámkorlátos irányításokat használó algoritmus segítségével érhetjük el, mely algoritmus egy függetlenségi orákulumot ad, amely egy új e élről tudja meghatározni, hogy egy már kiválasztott, egyelőre ritka F élhalmazhoz hozzávéve az így kapott $F + e$ élhalmaz ritka-e. Az algoritmus előnye, hogy ha $F + e$ nem ritka, meghatározza a legszűkebb kritikus halmazt, ami miatt nem ritka - vagyis pontosan $T_F(e)$ -t. Ez az algoritmus tetszőleges (k, ℓ) értékre is végrehajtható $O(|V|^2)$ időben, sőt, (m, ℓ) -kritikus gráfok esetén is $O(|V|^2 m^*)$ időben, ahol m^* az m függvény értékének maximuma [5].

Így a redundáns növelési feladat optimálisan megoldható polinomiális időben. Ugyanis polinomiális időben megtalálhatjuk a redundáns éleket, és (m, ℓ') -kritikus gráf esetén $T(e)$ -t is meg tudjuk határozni tetszőleges e élre. A minimális ko-kritikus halmazok meghatározását az segíti, hogy komplementerük G tartalmazásra nézve maximális kritikus részgráfját feszíti [10]. Így a 3.1. alfejezetben definiált X halmaz is megtalálható polinomiális időben. Ha $|X| < 4$, akkor G maximum 2 éllel redundánssá tehető, ami polinomiális időben könnyen megoldható. Ha $|X| \geq 4$, a 3.5. Lemma algoritmusát végrehajtva polinomiális időben kaphatunk egy optimális élhalmazt.

Megemlíjtjük, hogy mind az általános, mind a megszorított redundáns növelési probléma megoldható $O(|V|^2)$ időben egy bonyolultabb algoritmussal, amely mélyebben kihasználja az (m, ℓ) -ko-kritikus halmazok struktúráját [10].

4. Nyitott kérdések

Láttuk, hogy ritkasági matroidok több helyen használhatók, és megismertünk egy olyan eredményt, ahol ténylegesen ki lehetett használni a struktúrájukat egy probléma optimális megoldásához. Most két olyan fontos nyitott kérdést vázolunk fel, amelyre a speciális esetekben ismert válasz talán reményt adhat, hogy más (k, ℓ) értékekre is megoldhatóak.

4.1. Ritka gráfok redundánssá növelése

Egy természetesen adódó kérdés az 1. Probléma megoldása után, hogyan lehet G -t redundánsan merevvé növelni, ha G nem (k, ℓ) -merev, hanem (k, ℓ) -ritka.

2. *Probléma.* Legyen G egy (k, ℓ) -ritka gráf. Határozzunk meg egy minimális

elemszámú F élhalmazt, amire $G + F$ (k, ℓ) -redundáns.

Vegyük észre, hogy ha (k, ℓ) -redundáns helyett (k, ℓ) -merevet kérdeznénk, a válasz azonnal következne a matroid tulajdonságból.

Ha $(1, 1)$ -redundánságot vizsgáljuk, akkor egy erdőt kell 2-élösszefüggővé növelni minimális számú él hozzáadásával, amely könnyen megoldható. Frank és Király megmutatta, hogy a 2. Probléma megoldható (k, k) -ritka gráfok esetén is [6]. Megoldásuk – melyben tetszőleges gráfot növeltek (k, k) -redundánssá – a poliédes kombinatorika mély eredményeire támaszkodott, így érdekes lehetne erre is egy könnyebben átlátható megoldás. Általános (k, ℓ) párokra egyelőre pozitív eredmény nem ismert.

4.2. Minimális vágás

Az eddigi kérdésekkel szemben most nem az a célunk, hogyan lehet egy gráfot még „biztonságosabbá” tenni, hanem próbáljuk meg „tönkretenni”.

3. *Probléma.* Legyen $G = (V, E)$ egy (k, ℓ) -merev gráf. Találjunk egy olyan minimális elemszámú $E' \subset E$ élhalmazát, amelyet törölve G -ből, $G - E'$ már nem (k, ℓ) -merev.

Vegyük észre, hogy az $(1, 1)$ esetben ez pontosan a minimális vágás feladat. Ezért nevezzük a 3. Problémát minimális vágás feladatnak ritkasági matroidokban. Ez a minimális vágás feladat megjelenik az Egres Open Problems [3] között, a feladat részletes leírásával és az eddig elért részeredményekkel, illetve azokról szóló diskuszióval. Közismert, hogy a minimális vágás $(1, 1)$ -merev gráfok esetén polinomiálisan megoldható. Király ezt a hipergrafikus matroidra általánosította [11], amely az $(1, 1)$ -ritkasági matroid hipergráfokon. Sőt, a feladat transzverzális matroidra, vagyis az $(1, 0)$ -hipergrafikus matroidra is megoldható – a megoldás minimális számú csúcs törlése az S halmazból, hogy csökkenjen a párosítás mérete. A merevségelmélet szempontjából érdekes, továbbra is nyitott kérdés viszont a $(2, 3)$ -merev gráfok minimális vágása.

Köszönetnyilvánítás

A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg (EFOP-3.6.3-VEKOP-16-2017-00002). A szerző hálás Jordán Tibornak a kéziratral kapcsolatos sok hasznos észrevételéért.

Hivatkozások

- [1] A.R. BERG AND T. JORDÁN: Algorithms for graph rigidity and scene analysis. In G. Di Battisa and U. Zwick, szerk., *Algorithms - ESA 2003, Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Vol. **2832**, pp. 78–89 (2003). DOI: 10.1007/978-3-540-39658-1_10
- [2] J. EDMONDS: Submodular functions, matroids, and certain polyhedra. In R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, and J. Schönheim, szerk., *Combinatorial Structures and their Applications*. Gordon and Breach, New York (1970). DOI: 10.1007/3-540-36478-1_2
- [3] EGRES: Egres open problems. lemon.cs.elte.hu/egres/open/Destroying_rigidity
- [4] K.P. ESWARAN AND R.E. TARJAN: Augmentation problems. *SIAM Journal on Computing*, Vol. **5** No. **4**, pp. 653–665 (1976). DOI: 10.1137/0205044
- [5] A. FRANK: *Connections in Combinatorial Optimization*. Oxford University Press (2011). DOI: 10.1016/j.dam.2011.09.003
- [6] A. FRANK AND T. KIRÁLY: Combined connectivity augmentation and orientation problems. *Discrete Appl. Math.*, Vol. **131** No. **2**, pp. 401–419 (2003). DOI: 10.1016/S0166-218X(02)00460-2
- [7] A. GARCÍA AND J. TEJEL: Augmenting the rigidity of a graph in \mathbb{R}^2 . *Algorithmica*, Vol. **59** No. **2**, pp. 145–168 (2011). DOI: 10.1007/s00453-009-9300-9
- [8] R. IKESHITA AND S. TANIGAWA: Count matroids of group-labeled graphs. *Combinatorica*, Vol. **38** No. **5**, pp. 1101–1127 (2018). DOI: 10.1007/s00493-016-3469-8
- [9] T. JORDÁN: Combinatorial rigidity: Graphs and matroids in the theory of rigid frameworks. In *Discrete Geometric Analysis*, volume 34 of *MSJ Memoirs*, Mathematical Society of Japan, Japan, pp. 33–112 (2016). DOI: 10.2969/msjmemoirs/03401C020
- [10] CS. KIRÁLY AND A. MIHÁLYKÓ: Sparse graphs and an augmentation problem. Technical Report TR-2020-06, Egerváry Research Group, Budapest (2020). Revision 1 of TR 2019-14. www.cs.elte.hu/egres
- [11] T. KIRÁLY: Computing the minimum cut in hypergraphic matroids. Technical Report (Quick Proof) QP-2009-05, Egerváry Research Group, Budapest (2009).
- [12] M. LOREA: *On matroidal families*, *Discrete Mathematics*, Vol. **28** No. **1**, pp. 103–106 (1979) DOI: 10.1016/0012-365X(79)90190-0
- [13] G. LAMAN: On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering Mathematics*, Vol. **4**, pp. 331–340 (1970). DOI: 10.1007/BF01534980
- [14] C.ST.J.A. NASH-WILLIAMS: Edge-disjoint spanning trees of finite graphs. *Journal of the London Mathematical Society*, Vol. **36**, pp. 445–450 (1961). DOI: 10.1112/jlms/s1-36.1.445
- [15] H. POLLACZEK-GEIRINGER: Über die Gliederung ebener Fachwerke. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. **7** No. **1**, pp. 58–72 (1927). DOI: 10.1002/zamm.19270070107
- [16] S. TANIGAWA: Matroids of gain graphs in applied discrete geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. **367**, pp. 8597–8641 (2012). DOI: 10.1090/tran/6401
- [17] W. WHITELEY: Some matroids from discrete applied geometry. In J.E. Bonin, J.G. Oxley, and B. Servatius, szerk., *Matroid Theory, Contemporary Mathematics*, AMS, Vol. **197**, pp. 171–311 (1996). DOI: 10.1090/conm/197/02540
- [18] T. ZASLAVSKY: Biased graphs II. The three matroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. **51** No. **1**, pp. 46–72 (1991). DOI: 10.1016/0095-8956(91)90005-5



Mihálykó András 1992-ben született Veszprémben. BSc és MSc tanulmányait az ELTE Matematika szakán végezte. MSc diplomája után egy évet programozó/kutatóként dolgozott a SignAll cégnél, ahol automatikus jelnyelvi fordítást fejlesztett. 2018-ban felvételt nyert az ELTE Matematika doktori iskolájába, Jordán Tibor témavezetésével. Témája kombinatorikus merevségelmélet, kifejezetten redundánsan és globálisan merevvé növelő algoritmusokban ért el új eredményeket. 2021-ben az EPFL Lausanne vendég doktori hallgatója lett.

MIHÁLYKÓ ANDRÁS

Eötvös Loránd Tudományegyetem,
Operációkutatási Tanszék,
mihalyko@cs.elte.hu

ABOUT COUNT MATROIDS

ANDRÁS MIHÁLYKÓ

We call a graph $G = (V, E)$ (k, ℓ) -sparse if $i_G(X) \leq k|X| - \ell$ holds for every vertex set, where $|X| \geq 2$ and $i_G(X)$ denotes the number of edges in G spanned by X . These sparsity conditions provide a matroid on E , if $k \in \mathbb{Z}_+$ and $\ell < 2k$ integer. These are the so-called count matroids. Count matroids occur in several applications in combinatorial optimization. For example, in spanning trees, matchings or in rigidity theory. Our goal is to introduce the count matroids from their definition through well known and new results, including the redundant augmentation problem for count matroids up to open problems.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok megjelenését támogatja
a Magyar Tudományos Akadémia Könyv- és Folyóiratkiadó Bizottsága.

A kiadásért felelős a BJMT főtákos
Szedte és tördelte: Moczár Károly

Nyomta a Coradix Kft., Budapest
Felelős vezető: Szűcs Ernőné

Budapest, 2021
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben
100 példányban
HU ISSN 0133-3399

ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A közlésre szánt dolgozatokat és mellékleteiket egy tömörített zip fájlban e-mailen az `aml@renyi.hu` címre kérjük elküldeni.

A részletes instrukciók és a LaTeX minta fájl megtalálható az AML honlapján, a cikkek benyújtása `http://aml.math.bme.hu/?page_id=7` címén. Mivel az Alkalmazott Matematikai Lapokban megjelenő cikkek 2019 óta DOI azonosítót kapnak, az irodalomjegyzékben szereplő minden forrás adatai között szerepeltetni kell a DOI azonosítót is, amennyiben rendelkezik ilyen-
nel.

Kérjük a szerzőket, hogy a cikk benyújtása előtt ellenőrizzék az alábbi elemek meglétét:

A teljes cikk, benne:

magyar nyelvű kivonat

a cikk szövege, valamint ábrák és táblázatok, ha vannak

irodalomjegyzék, DOI azonosítókkal együtt

szerzők bemutatása és fotói, munkahelyei és e-mail címei

angol nyelvű cím és kivonat

Mellékelt fájlok:

a cikk LaTeX forráskódja, és a teljes cikk pdf formátumban

ábrák, képek fájljai

szerzők fotói

A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

TARTALOMJEGYZÉK

Előszó	1
Vizvári Béla köszöntése	3
<i>Csizmadia Zsolt, Takács Szabolcs, Vizvári Béla, Nyolc kérdés, kétszer nyolc válasz</i>	7
<i>Tóth János, Borsószemek a falról</i>	19
<i>Kovács Gergely, Vizvári Béla, Segélycsomagok kiszállítása katasztrófa után teherautó-drón tandemmel</i>	27
<i>T. Kárász Judit, Takács Szabolcs, Adaptív tesztek minimális hosszának, hibájának, értékelési szintjének és a megoldók számának összefüggései – általános megoldási aránnyal</i>	39
<i>Kovács Gergely, Sam Mosallaeipour, Mazyar Ghadiri Nejad, Vizvári Béla, Kételemű ciklusok egyutas gyártórészlegben</i>	59
<i>Nagy Benedek, Digitális távolságok a háromszögrácson</i>	73
<i>Papp Dávid, Polinomiális optimalizálási feladatok és relaxációik</i>	89
<i>Koszttyán Zsolt Tibor, Szalkai István, Kurbucz Marcell Tamás, Szinergiák hatása a szoftverfejlesztési projekteknél</i>	105
<i>Mihálykó Csaba, Mihálykóné Orbán Éva, Gyarmati László, A Thurstone módszer általánosításai</i>	127
<i>Mihálykó András, Ritkasági matroidokról</i>	141

INDEX

Preface	1
Greetings to Béla Vizvári	3
<i>Zsolt Csizmadia, Szabolcs Takács, Béla Vizvári, Eight questions, eight answers twice</i>	7
<i>János Tóth, Water drops off a duck's back</i>	19
<i>Gergely Kovács, Béla Vizvári, Transportation of relief items after disaster by a truck-drone tandem</i>	27
<i>Szabolcs Takács, Judit Kárász T., The relationships of the minimum length, error, evaluation levels and number of respondents of adaptive tests with general solution probability</i> .	39
<i>Gergely Kovács, Sam Mosallaeipour, Mazyar Ghadiri Nejad, Béla Vizvári, Computational analysis for flow shop automated manufacturing cells</i>	59
<i>Benedek Nagy, Digital distances on the triangular grid</i>	73
<i>Dávid Papp, Polynomial optimization problems and their relaxations</i>	89
<i>Zsolt Tibor Koszttyán, István Szalkai, Marcell Tamás Kurbucz, Synergies in software project scheduling</i>	105
<i>Csaba Mihálykó, Éva Orbán-Mihálykó, László Gyarmati, On the generalizations of the Thurstone method</i>	127
<i>András Mihálykó, About count matroids</i>	141