KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

69. évfolyam 4. szám Budapest, 2019. április

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.,
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Melyik nagyobb az óriások közül?

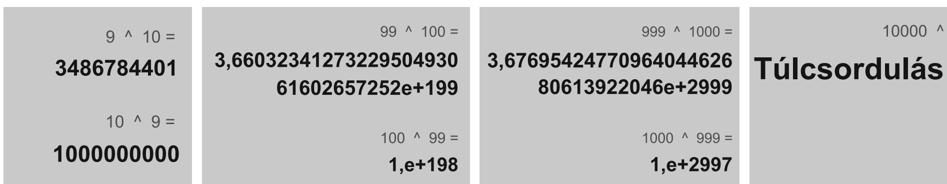
Bevezető

2015 májusában, egy kellemesen napsütötte hétvégén meglátogattam a Cambridge-i Egyetem híres matematikai intézetét. Az épületkomplexum leginkább egy marsbéli űrbázist idézett fel bennem, aminek élesen ellentmondani látszott egy csillogó görbét rajzoló csiga és egy kerítésoszlopon érdeklődve szemlélődő mókus. Amint körülsétáltam az épületeket, az egyik süllyesztett szint üvegajtaján keresztül két színes plakát ragadta meg a figyelmem.

Óriások és negatív számozású kocka. A bal oldali plakát kérdéseit kigyűjtöttem alább:

- Melyik nagyobb: 9^{10}, vagy 10^9?
- Számológéppel eldönthető-e, melyik nagyobb: 99^{100}, vagy 100^{99}?
- Döntsük el, hogy 999^{1000}, vagy 1000^{999} a nagyobb.

Amint hazaértem smallfieldi szobámba, a kíváncsiság nem hagyott, elkezdtem tesztelni a Win10 számológépét. A kalkulátor az *1. ábrán* látható válaszokat adta. Az első kérdésben szereplő mennyiségeket – egész aritmetikát használva – gond nélkül kiértékelte. A második és harmadik kérdésben szereplő hatványok kiszámításához normálalakot használt és amikor a 10000^{9999} hatványt kérdeztem, túlcsordulási hibával leállt. Végül is mindhárom kérdésre választ találtam – $9^{10} > 10^9$, $99^{100} > 100^{99}$ és $999^{1000} > 1000^{999}$ –, úgyhogy hátradőlhettem volna elégedetten székemben.



1. ábra. Számológépem válaszai

Nem ez történt. Felrémlett egy klasszikus figyelmezető példa a számelméletből. Az $x^2 + x + 41$ polinom $x = 0, 1, 2, \ldots, 39$ esetén prímszámot eredményez, azonban $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41^2$, ami nem prím. Szóval attól, hogy tudok valamit az $N = 1, 2, 3$ esetekre, nem lehetek biztos benne, hogy a felismert törvény megmarad nagyobb hatványkitevőkre is. Ahhoz, hogy ezzel a kérdéssel érdemben tudjunk foglalkozni, meg kell alkotnunk a probléma általános matematikai formalizmusát és az eddigi tapasztalatainknak megfelelő sejtést kell bebizonyítanunk. Az általános probléma formálisan a következő:

Legyen N pozitív egész és $A_N = \left(10^N - 1\right)^{10^N}$, valamint $B_N = \left(10^N\right)^{10^N-1}$. Melyik nagyobb az A_N és B_N számok közül? Volt eredetileg három kérdésünk, most pedig végtelen sok lett hirtelen. A matematikai bizonyítás ereje éppen ebben rejlik: egyetlen bizonyítás keretében képes megválaszolni – ebben az esetben – megszámlálhatóan végtelen sok kérdést. Mivel ismerjük a választ az $N = 1, 2, 3$ speciális esetekben, indokoltnak tűnik azt sejteni, hogy A_N általában is nagyobb, mint B_N, továbbá vegyük észre, hogy $A_1 > 3B_1$, $A_2 > 30B_2$ és $A_3 > 300B_3$. Most, hogy megalkottuk a pontos matematikai modellt a problémához, az maradt hátra, hogy bizonyítást találjunk sejtésünkre, ami a munka nagyobb, nehezebb és érdekesebb része. A fent megfogalmazott kérdés inspirált egy nagyobb lélegzetvételű munkát, mely teljes egészében a BCME9 2018 (British Congress of Mathematics Education, Warwick University, 3–6 April 2018, `https://www.bcme.org.uk/`) konferencián hangzott el. Ezen előadásom anyagából választottam két fejezetet, amik ezen írás gerincét alkotják.

A számjegyek száma

Össze szeretnénk hasonlítani két természetes számot nagyságrendileg. Az egyik legegyszerűbb mód az, ha összehasonlítjuk a számjegyeik számát valamilyen előre lerögzített számrendszerben. Jelen esetben decimális rendszert fogunk használni és a tömörebb leírás érdekében bevezetjük a számjegyek számát megadó függvényt (jelölése $\#$). A formális definíció az alábbi: $\# : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $\#(n) = n$ számjegyeinek száma. Például $\#(0) = 1$, $\#(9) = 1$ és $\#(2019) = 4$. Egyszerűen ellenőrizhető a következő alternatív formák érvényessége:

$$\#(n) = \max\{k \geqslant 0 :\ 10^k \leqslant n\} + 1 = \max\left\{k \geqslant 0 : k \leqslant \lg(n)\right\} + 1 = \left\lfloor \lg(n) \right\rfloor + 1.$$

Itt és a továbbiakban $\lg(.)$ a 10-es alapú logaritmust jelöli, $\lfloor x \rfloor$ pedig az x valós szám alsó egészrésze, azaz az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobb. Például

$$\#(9^{10}) = \left\lfloor \lg(9^{10}) \right\rfloor + 1 = \lfloor 10 \lg(9) \rfloor + 1 = \lfloor 10 \cdot 0{,}954242\ldots \rfloor + 1 = 9 + 1 = 10$$

és nyilvánvalóan $\#(10^9) = 10$. Azt kaptuk, hogy a két szám ugyanolyan hosszú, mindkettő tíz számjeggyel írható fel a decimális rendszerben és mivel a legkisebb ilyen tulajdonságú szám a 10^9, következésképp $9^{10} \geqslant 10^9$. Ugyanakkor 9^{10} utolsó jegye nem 0, emiatt $9^{10} > 10^9$. Az $N = 1$ eset fenti elemzése már mutat valamit ezen megközelítés stílusából. Az alábbi összefoglaló táblázatban rögzítettük az $N = 1, 2, 3$ esetekre a számjegyek számát:

N	1	2	3
$\#(A_N)$	10	200	3000
$\#(B_N)$	10	199	2998

A táblázatbeli értékek alapján az alábbi tételt tudjuk megfogalmazni:

1. tétel. *Legyen $N \geqslant 1$ egész szám, $A_N = \left(10^N - 1\right)^{10^N}$ és $B_N = \left(10^N\right)^{10^N-1}$. Ekkor minden $N \geqslant 1$-re a következő egyenlőség áll fenn:*

$$\#(A_N) - \#(B_N) = N - 1.$$

Bizonyítás. Kezdjük az egyszerűbbel, B_N számjegyei számának a meghatározásával.

$$\#(B_N) = \#\Big[\big(10^N\big)^{10^N-1}\Big] = \#\Big[10^{N(10^N-1)}\Big] = N\big(10^N-1\big)+1 = N10^N-(N-1)$$

Ezek alapján elég azt bizonyítani, hogy $\#(A_N) = N10^N$. Ezt két lépésben tesszük. Az *a*) részben megmutatjuk, hogy $\#(A_N) \leqslant N10^N$, ami az egyszerűbb, aztán a *b*) részben a $\#(A_N) \geqslant N10^N$ egyenlőtlenséget, ami kissé technikásabb.

a) Induljunk ki a nyilvánvaló $\lg\big(10^N-1\big) < N$ egyenlőtlenségből, amit 10^N-nel szorozva $10^N\lg\big(10^N-1\big) < N10^N$, azonban $10^N\lg\big(10^N-1\big) = \lg\Big[\big(10^N-1\big)^{10^N}\Big] = \lg(A_N)$, így $\big\lfloor \lg(A_N)\big\rfloor \leqslant N10^N-1$, ahonnan $\#(A_N) = \big\lfloor \lg(A_N)\big\rfloor + 1 \leqslant N10^N$.

b) Elegendő megmutatni, hogy

$$10^N\lg\big(10^N-1\big) > N10^N-1. \tag{1}$$

Először belátjuk, hogy (1) ekvivalens a következővel:

$$\lg\left[\left(1+\frac{1}{10^N-1}\right)^{10^N-1}\right] < 1-\frac{1}{10^N}. \tag{2}$$

Ehhez helyettesítsünk

$$\lg\big(10^N-1\big) = \lg\left[10^N\left(1-\frac{1}{10^N}\right)\right] = N+\lg\left(1-\frac{1}{10^N}\right)\text{-t}$$

(1)-be és egyszerűsítsünk a mindkét oldalon fellépő $N10^N$ taggal. Így:

$$10^N\lg\left(1-\frac{1}{10^N}\right) > -1 \;\Leftrightarrow\; -\lg\left(1-\frac{1}{10^N}\right) = \lg\left(1+\frac{1}{10^N-1}\right) < \frac{1}{10^N},$$

amit $\big(10^N-1\big)$-gyel szorozva kapjuk (2)-t. Az e szám tárgyalásakor mindenki találkozik a következő, ismertnek feltételezett egyenlőtlenséggel: $\big(1+\frac{1}{k}\big)^k < 3$ minden $k \geqslant 1$ esetén. Alkalmazzuk most ezt $k = 10^N-1$-re, ahonnan

$$\lg\left[\left(1+\frac{1}{10^N-1}\right)^{10^N-1}\right] < \lg(3) \approx 0.4771 < \frac{1}{2} < 1-\frac{1}{10^N} \quad (\forall N \geqslant 1),$$

így (1) fennáll és következésképp

$$\#(A_N) = \Big\lfloor 10^N\lg\big(10^N-1\big)\Big\rfloor + 1 \geqslant N10^N,$$

amit bizonyítani szerettünk volna. □

A fenti tétel birtokában és emlékezve az $N=1$ speciális esetre kapott eredményre, válaszunk a végtelen sok esetre röviden: $A_N > B_N \quad \forall N \geqslant 1$.

A hiperkocka

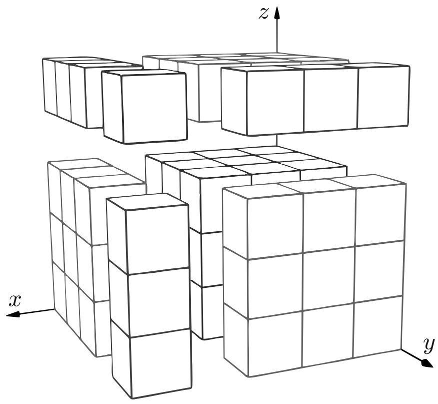
Mielőtt rátérnénk a fejezetcímben szereplő geometriai modell elemzésére, vegyük észre, hogy az eredeti kérdés értelmes hatványok egy sokkal bővebb halmazára: nevezetesen minden természetes számra megkérdezhetjük, hogy vajon n^{n+1}, vagy pedig $(n+1)^n$ a nagyobb. Az előző fejezetben $n = 10^N - 1$ alakú számokra válaszoltuk meg a kérdést. Az alábbi táblázatból a következőt tudjuk kiolvasni: $n = 1, 2$ esetén $n^{n+1} < (n+1)^n$, az $n = 3, 4, 5, 6$ értékekre pedig $n^{n+1} > (n+1)^n$.

n	1	2	3	4	5	6
n^{n+1}	1	8	81	1024	15625	279936
$(n+1)^n$	2	9	64	625	7776	117649

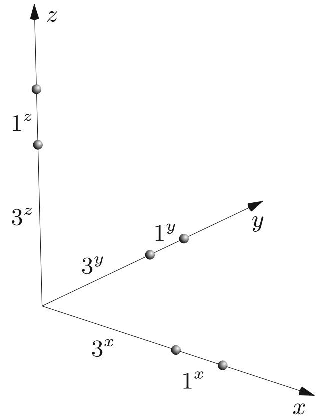
A továbbiakban azt fogjuk bizonyítani, hogy $n^{n+1} > (n+1)^n$ $\forall n \geqslant 3$, felépítve egy érdekes geometriai kapcsolatot az egyenlőtlenségben szereplő hatványok és az $(n+1)$ élhosszúságú n dimenziós hiperkocka egy speciális partíciója között. Először elvégezzük a bizonyítást $n = 3$ dimenzióra, majd az itt szerzett tapasztalatokat átültetjük $\mathcal{R}^n$-be. Azt szeretnénk belátni, hogy $3^4 > 4^3$. Egy pillanatra tekintsünk el attól, hogy nyilvánvalóan mindenki tudja, hogy $3^4 = 81 > 64 = 4^3$. Tekintsünk az egyenlőtlenségre a következő módon: $3 \cdot 3^3 > 4^3$ és interpretáljuk a 4^3 mennyiséget mint a $(0, 0, 0)$ és $(4, 4, 4) \in \mathcal{R}^3$ átellenes csúcspontok által kifeszített 4 egység élhosszúságú kocka térfogatát.

Ebben az értelmezésben az egyenlőtlenség azt mondja, hogy ez a kocka összerakható 3 db $3 \times 3 \times 3$ -as kockát alkotó, összesen 3×27 egységkockából úgy, hogy legalább egy közülük felesleges (szigorú egyenlőtlenség). A továbbiakban minden előforduló kockát és téglatestet úgy tekintünk, hogy egységkockákból összeragasztással keletkezik. Szét tudjuk őket szedni és más formában újra összerakni. A *2. ábrán* (mely a borítón színesben látható) világosan lehet követni, ahogyan a kiindulási $4 \times 4 \times 4$-es kocka felépíthető egy $3 \times 3 \times 3$-as (kék) kockából; 3 db $3 \times 3 \times 1$-es (piros) téglatest ad egy másik $3 \times 3 \times 3$-as kockát; és végül maradt 3db $3 \times 1 \times 1$-es (zöld) tégla valamint egy $1 \times 1 \times 1$-es (lila) sarok kocka, amik együttesen (10) kevesebb egységkockát tartalmaznak, mint a harmadik $3 \times 3 \times 3$-as kocka (27). Ez a konstrukció valóban azt mutatja, hogy $3^4 = 3 \cdot 3^3 > 4^3$. Könnyen követhető, hogy mi történik, amint az alkotórészeket összerakjuk. Először felhasználunk 27 egységkockát (kék), majd $3 \cdot 9 = 27$ egységkockát (piros) és még szükségünk van $3 \cdot 3 = 9$ (zöld) plusz 1 (lila) egységkockára. $27 + 3 \cdot 9 + 3 \cdot 3 + 1 = 64$. Vegyük észre azt is, hogy a beépített alkotórészek száma $1, 3, 3, 1$. Ez könnyen eszünkbe juttathatja a Pascal-háromszög harmadik sorát és a binomiális tételt. Ahhoz, hogy a fenti módszert általánosítani tudjuk, néhány előkészületre lesz szükségünk. Bevezetjük a következő jelöléseket:

- x^i az i-edik koordinátatengely $\mathcal{R}^n$-ben.
- $n^i = [0, n)^i$ és $1^i = [n, n+1]^i$, ahol az i index arra utal, hogy a szóbanforgó intervallumok az i-edik tengelyen, x^i-n vannak.
- $\mathrm{a}(w) = \mathrm{a}\, w$ szimbólum előfordulásainak száma egy kifejezésben; például ha $e = w \times n \times w$, akkor $\mathrm{a}(w) = 2$ és $\mathrm{a}(n) = 1$. Az $\mathrm{a}(.)$ függvény használatakor részletezni fogjuk, hogy pontosan mit is számol az adott helyzetben.



2. ábra. Kocka reprezentáció 3D



3. ábra. Intervallumok 3D-ben

- Legyen $A \subseteq \mathcal{R}^n$ egy mérhető részhalmaz, Vol(A) az A térfogata.
- $\bigtimes_{j=1}^{m} A_j$ az A_j részhalmazok Descartes-szorzata.
- $3^x \oplus 1^x = 4^x$ jelentése: $3^x = [0,3)^x$-hez ragasztjuk az $1^x = [3,4]^x$ egységintervallumot, ami így a $[0,4]^x$-t eredményezi; 3D-ben a szokásos x, y, z tengelyreferenciát fogjuk használni. Nyilvánvalóan érvényesek az $A \oplus B = B \oplus A$ és $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$ azonosságok (*3. ábra*)

Az eddig leírtakat a fenti fogalmakkal és műveletekkel lehet elegáns matematikai formába önteni. A 3. ábrán szereplő intervallumok Descartes-szorzataival elő tudjuk állítani a 2. ábrán látható alkotórészeket. Kezdjünk megint a 3D esettel. Jelölje C_3 a $[0,4] \times [0,4] \times [0,4]$ kockát. Ekkor

$$
\begin{aligned}
C_3 = \times_{i=1}^{3}(3^i \oplus 1^i) &= (3^x \oplus 1^x) \times (3^y \oplus 1^y) \times (3^z \oplus 1^z) = \\
&= \overbrace{(3^x \times 3^y \times 3^z)}^{\text{kék}} \oplus \\
&\oplus \overbrace{(3^x \times 3^y \times 1^z)}^{\text{piros}} \oplus \overbrace{(3^x \times 1^y \times 3^z)}^{\text{piros}} \oplus \overbrace{(1^x \times 3^y \times 3^z)}^{\text{piros}} \oplus \\
&\oplus \overbrace{(3^x \times 1^y \times 1^z)}^{\text{zöld}} \oplus \overbrace{(1^x \times 3^y \times 1^z)}^{\text{zöld}} \oplus \overbrace{(1^x \times 1^y \times 3^z)}^{\text{zöld}} \oplus \\
&\oplus \overbrace{(1^x \times 1^y \times 1^z)}^{\text{lila}}.
\end{aligned}
$$

Legyen most $n \geqslant 3$ tetszőleges és C_n jelölje az n dimenziós hiperkockát, melyet a $(0, 0, \ldots, 0)$ és $(n+1, n+1, \ldots, n+1)$ pontok feszítenek ki. Ekkor ezen kocka térfogatára:

$$(n+1)^n = \mathrm{Vol}(C_n) = \mathrm{Vol}\left[\bigtimes_{i=1}^{n}(n^i \oplus 1^i)\right] = \mathrm{Vol}\left[\bigoplus_{u\in\{n,1\}}(u^1\times u^2\times\cdots\times u^n)\right] =$$

$$= \mathrm{Vol}\left[\bigoplus_{k=0}^{n}\bigoplus_{\substack{u\in\{n,1\}\\ \mathrm{a}(1)=k}}(u^1\times u^2\times\cdots\times u^n)\right] = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Vol}\left[\bigoplus_{\substack{u\in\{n,1\}\\ \mathrm{a}(1)=k}}(u^1\times u^2\times\cdots\times u^n)\right].$$

A fenti és a további formulákban az összeragasztási műveletre bevezetett $\bigoplus$ alatti $a(1)=k$ az u formális változó helyettesítésekor előforduló 1-esek számát adja, ami itt éppen k. Ahhoz, hogy használható felső becslést tudjunk adni, vegyük észre a következőket:

a) Ha $k=0,1,\dots,n-2$, akkor

$$\mathrm{Vol}\left[\bigoplus_{\substack{u\in\{n,1\}\\ \mathrm{a}(1)=k}}(u^1\times u^2\times\cdots\times u^n)\right] = \sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} n^{n-k} \leqslant \sum_{1\leqslant i_1\leqslant\ldots\leqslant i_k\leqslant n} n^{n-k} =$$

$$= n^k\times n^{n-k} = n^n.$$

b) A $k=n-1$ és $k=n$ indexekre

$$\binom{n}{n-1}\cdot n^1 + \binom{n}{n}\cdot n^0 = n^2+1 < n^n \quad \text{ha} \quad n\geqslant 3,$$

következésképpen az alábbi becslést kapjuk:

$$(n+1)^n < (n-1)\cdot n^n + n^n = n\cdot n^n = n^{n+1}.$$

Emlékeztetőül: az $n=3$ esetre vázolt bizonyítás végén megjegyeztük, hogy a $4\times4\times4$-es kocka partíciójában szereplő alkotórészek darabszámai 1, 3, 3, 1, a Pascal-háromszög 3. sora. Hol szerepelnek a binomiális együtthatók az n-dimenziós esetben? Tudunk valamit mondani az $n^{n+1}/(n+1)^n$ hányadosról? Ezekre a kérdésekre keresünk választ a hátralévő részben. Mivel $\binom{n}{k}$-féleképpen tudunk k indexet kiválasztani az $\{1,2,\dots,n\}$ halmazból, így egyrészt

$$\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_k\leqslant n} n^{n-k} = \binom{n}{k} n^{n-k},$$

ami azt mutatja, hogy a fenti bizonyítás ekvivalens az $(n+1)^n$ binomiális tétel szerinti kifejtésével. Másrészről a következő felső becslés adható:

$$\binom{n}{k} n^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} n^{n-k} \leqslant \frac{1}{k!} n^k n^{n-k} = \frac{1}{k!} n^n.$$

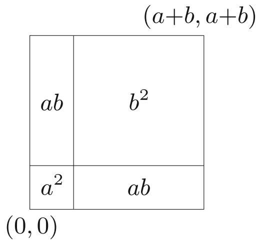
Innen azt kapjuk, hogy

$$(n+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{n-k} \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right) n^n < en^n < 3n^n,$$

ahonnan végül az alábbi becslés nyerhető:

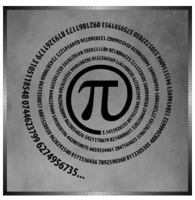
$$\frac{n}{3} < \frac{n}{e} < \frac{n}{s_n} < \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n},$$

ahol s_n a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ sor n-edik részletösszegét jelöli. Visszatérve egy pillanatra az eredeti kérdéshez, a fenti becslés alapján az $n = 10 - 1 = 9$, $10^2 - 1 = 99$, $10^3 - 1 = 999$ értékekre 9^{10}, 99^{100}, 999^{1000} rendre legalább $3, 33, 333$-szor nagyobb, mint 10^9, 100^{99}, 1000^{999}. A pontos hányadosok 4 tizedesjegyre kerekítve 3,4867, 36,6032, 367,6954. Az e számot használó becslésre a faktorok: 3,3109, 36,4201, 367,5116. Ez a becslés igen pontos abban az értelemben, hogy $\left\lfloor \frac{n}{e} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} \right\rfloor$. A hiperkocka modell egy másik előnye, hogy a fenti gondolatmenet mentén a $(0, 0, \ldots, 0)$, $(a+b, a+b, \ldots, a+b)$ szemközti csúcsokkal rendelkező hiperkockát partícionálva a binomiális tétel geometriai bizonyítása nyerhető és az azonos típusú alkotórészek száma éppen a Pascal-háromszög egy sorában található binomiális együtthatókkal egyezik meg.



4. ábra. Az $n = 2$ dimenziós hiperkocka partíciója

Zoltan Retkes
26, Moore Road, Barwell, UK
e-mail: tigris35711@gmail.com



A Matematika Nemzetközi Napja – π-nap

A Nemzetközi Matematikai Unió (IMU) létrehozta a Matematika Nemzetközi Napját „π-nap” (International Day of Mathematics – IDM) elnevezéssel, melyet minden év március 14-én ünnepelnének. Az UNESCO is jóváhagyta, így az első π-napot 2020. március 14-én rendeznék.

Minden évben egy nem kötelező, de ajánlott témakör köré építenék a π-nap programját.

Az IMU most felhívással fordul a tagegyesületekhez, javaslatokat várnak a 2020-ban elsőként megrendezendő π-nap témájára.

A javaslatokat 2019. április 30-ig várják, ötleteiket a

`bolyai.tarsulat@renyi.mta.hu`

címre várjuk, azokat összesítjük és továbbítjuk az IMU felé.

Társulatunk – csatlakozva az IMU felhívásához – szintén szervezne olyan eseményt a π-nap alkalmából, mellyel növeljük a matematika láthatóságát. Ehhez is várunk javaslatokat, ötleteket a fenti e-mail címre.

Bolyai János Matematikai Társulat

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

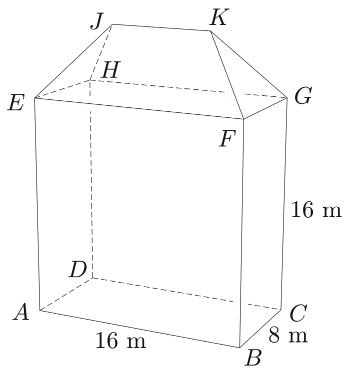
I. rész

1. *a*) A 2, 0, 1, 9 számjegyekből az összes lehetséges módon háromjegyű természetes számokat képeztünk. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a képzett számok közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, annak számjegyei különbözők. (*3 pont*)

b) Oldjuk meg a $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ halmazon a $\sin(x+2019\pi)=-\frac{1}{2}$ egyenletet. (*8 pont*)

2. A Regéci Vár egy 1300 körül épült vár, ahol II. Rákóczi Ferenc fejedelem a gyermekkorát töltötte. Az *1. ábrán* ennek a várnak a XIV. századi állapota látható, a *2. ábrán* pedig egy vázlatos képet láthatunk annak tornyáról.

1. ábra



2. ábra

A torony az $ABCDEFGH$ téglatestből és az $EFGHJK$ tetőből áll. A tornyot alkotó téglatest külső méretei: $AB=16$ m, $BC=8$ m és $CG=16$ m.

a) Mekkora az oldalfalak térfogata, ha a fal vastagsága 2 m és az összes faltérfogatot az ablakok, ajtók és lőrések 5%-kal csökkentik? (*4 pont*)

Tudjuk, hogy az $EFGHJK$ tető magassága 5 méter, és az EJH és FKG egyenlő szárú háromszögek síkjai 50°-os szöget zárnak be az $EFGH$ síkkal.

b) Mekkora a JK szakasz hossza? (*5 pont*)

A vár 2018-as rekonstrukciója során gimnazisták több napon keresztül segítették a régészek munkáját. A diákok 60%-a ásásban, 30%-a feltárásban, és 45%-a talicskázásban segített. Egyféle munkát 29-en végeztek, pontosan kétféle munkafolyamatban a tanulók $\frac{1}{5}$ része, mindháromban pedig 7,5%-a vett részt.

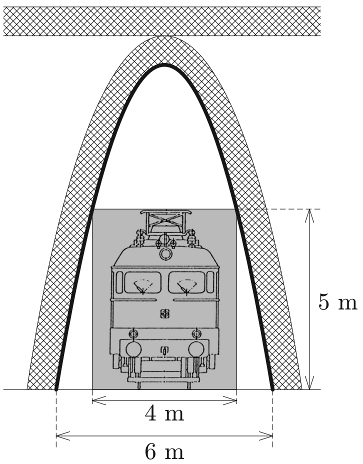
c) Hány tanuló vett részt összesen a munkálatokban? (*3 pont*)

3. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.

$$\log_2 x \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(4x) \qquad (7\ pont)$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert, ahol x és y nemnegatív valós számok.

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x}-\sqrt{y}&=8,\\ \sqrt{xy}&=33. \end{aligned}\right\} \qquad (7\ pont)$$



4. A vasúti szaknyelvben űrszelvénynek nevezik a szerelvények akadálytalan áthaladásához szükséges térnek a vágányokra merőleges keresztmetszetét. A nemzetközi szabványok szerint az űrszelvény jellemzően 4 m széles és 5 m magas. Az alakja általában követi a szerelvény alakját, de az egyszerűség kedvéért ez legyen most az ábrán szürkével jelzett téglalap. A vasút egy olyan híd alatt halad át, amelynek acél tartószerkezete parabolaív alakú. A tartószerkezet belső íve (az *ábrán* vastag fekete vonallal) a sínek szintjén 6 m széles és éppen nem lóg be az űrszelvénybe.

a) Milyen magas a híd tartószerkezete a belső ívének középső, legmagasabb pontján? (*8 pont*)

A vasútvonal áthalad egy olyan 24 méter hosszú, egyenes alagúton is, amelynek keresztmetszete parabolaszelet alakú. A parabolaszeletet a koordináta-rendszerben megadott

$$y=-\frac{1}{2}x^2+8$$

egyenletű parabola és az x tengely határolja. A koordináta-rendszerben 1 egység 1 métert jelent.

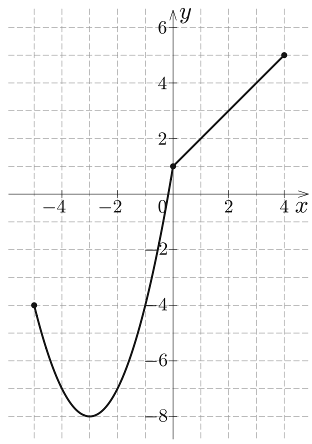
b) Hány m^3 követ kellett kitermelni az alagút építése közben? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

II. rész

5. *a*) Határozzuk meg azt a legkisebb, különböző számjegyekből álló 6-jegyű természetes számot, amely a 0; 1; 2; 3; 4; 5 számjegyekből áll és osztható 12-vel. (*5 pont*)

b) A $\{0;1;2;3;4;5\}$ halmaznak hány részhalmaza tartalmaz legalább 1 db páratlan számot? (*3 pont*)

c) Adjuk meg az *ábrán* látható függvény hozzárendelési szabályát, és számítsuk ki a függvény $E(-1;-4)$ pontjában húzott érintőjének meredekségét. (*8 pont*)



6. Tekintsük az $a_n = n^2 + 2$ sorozatot.

a) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n}$ határértéket. Válaszunkat indokoljuk. (*2 pont*)

b) Számítsuk ki az (a_n) sorozat első száz tagjának összegét. (*4 pont*)

Az (a_n) sorozat egymást követő tagjai segítségével a $b_n = a_{n+1} - a_n$ sorozatot képeztük.

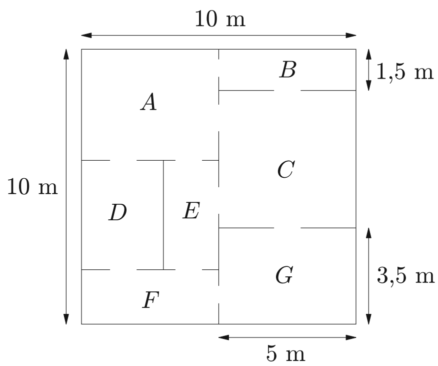
c) Igazoljuk, hogy a (b_n) sorozat számtani sorozat. (*3 pont*)

d) Igazoljuk teljes indukcióval, hogy az (a_n) sorozat $a_1 = 3$ és $n > 1$ esetén megadható az

$$a_n = \left(1 + \frac{2n-1}{n^2-2n+3}\right) \cdot a_{n-1}$$

rekurzióval is. (*7 pont*)

7. Az *ábrán* egy családi ház földszintjének alaprajza látható a benne lévő hét helyiséggel és az ajtókkal együtt. A rajzon feltüntettük a földszint és néhány helyiség méretét is. (A földszinti bejárati ajtó nem szerepel az ábrán, mert a megoldáshoz az nem szükséges.)



a) A házban lévő helyiségeket és az ajtókat egy gráffal szemléltethetjük úgy, hogy a gráf csúcsai (A, B, C, D, E, F, G) a helyiségeket jelölik, a gráf két csúcsa között pedig pontosan akkor vezet él, ha a két csúcsnak megfelelő helyiség között van ajtó. Rajzoljuk fel a családi ház földszintjének gráfját (a csúcsok azonosításával együtt), és határozzuk meg a felrajzolt gráfban a fokszámok összegét. (*3 pont*)

A lakás fölött a földszinttel megegyező méretű padlás, a ház alapterületének negyede alatt pince is van. A család macskája a pince padlóján fele olyan szívesen, a padláson viszont kétszer olyan szívesen van, mint a földszinten.

b) Mekkora valószínűséggel fekszik a macska a C jelű szobában? (*8 pont*)

c) Legalább hány élt kell kitörölni egy 7 csúcsú teljes gráfból ahhoz, hogy az már ne legyen összefüggő? Állításunkat igazoljuk. (*5 pont*)

8. Az alábbi *táblázat* hazánk napsütéses óráinak átlagos mennyiségét mutatja órában mérve az egyes évszakokban.

Tavasz	Nyár	Ősz	Tél
575,2	845,7	403	180,1

a) Határozzuk meg a napsütéses órák mennyiségének átlagát és szórását. (*4 pont*)

Az *ábrán* látható napóra egy magyar városban található. A napóra mutatójának hossza 60 cm, északi irányba áll és a vízszintes talapzattal 60°-os szöget zár be. A tavaszi nap-éj egyenlőség idején (2018. március 20-án) a Nap delelési magassága 42° volt. A Nap delelési magasságán a Nap irányába mutató félegyenesnek a vízszintessel bezárt szögét értjük.

b) Milyen hosszú volt ekkor a napóra mutatójának árnyéka a vízszintes alaplapon? (*5 pont*)

A napóra felületének koszolódását úgy szeretnék csökkenteni, hogy talapzatra helyezik a napórát. A talapzat egy olyan téglatest alakú betontömb, amelynek fedőlapját és oldallapjait 2 cm vastag márványlappal borítják be. A márvánnyal beborított betontömb alaplapja 1 m oldalhosszúságú négyzet, magassága 80 cm. A márványbevonat készítése közben a megvásárolt mennyiség 10%-a hulladék lesz.

c) Mennyibe kerül a betontömb beborításához szükséges márvány, ha 1 m^3 2 cm vastag márványlap ára 540 000 Ft? Válaszunkat *tízezer* forintra kerekítve adjuk meg. (*7 pont*)

9. Az alábbi táblázatban a gyorshajtás miatt bekövetkezett halálos közúti balesetek száma látható a Nyugat-Dunántúlon 2010-től 2018-ig a megadott időszakban.

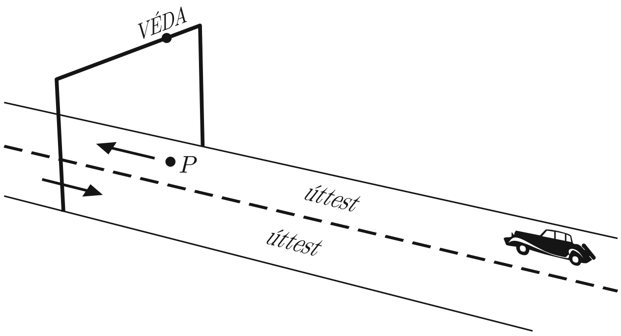
Halálos közúti balesetek száma 2010-től 2018-ig 01.01-től 02.28-ig (Nyugat-Dunántúl)

Év	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Balesetek száma	9	8	12	7	18	14	15	12	8

a) Határozzuk meg a balesetek számának mediánját és terjedelmét. (*3 pont*)

Hazánkban a rendőrség rendszámtábla alapján azonosítja a gyorshajtókat. Egy sebességmérés alkalmával az úttesten szabályosan közlekedő autós éppen szemben van a mérést végző készülékkel, amit VÉDÁ-nak hívnak. A 6,5 m magas állványra szerelt sebességmérő berendezésből 15°-os lehajlási szögben érkezik az úttestre a lézernyaláb.

(A lézernyaláb szélességétől az egyszerűség kedvéért most tekintsünk el.)



b) Érzékeli-e a sebességmérő berendezés az ebben a pillanatban a P ponttól 40 m távolságban az úttest közepén a VÉDA irányába közlekedő személyautót? (*4 pont*)

Egy biztosító honlapján a következőket olvashatjuk:

„Az autóbiztosítással rendelkező ügyfeleink 65 százalékát férfiak, 35 százalékát nők teszik ki. Balesetek szempontjából a férfiak a károkozók 69 százalékát teszik ki. Úgy tűnik, a hölgyek biztonságosabban vezetnek, ugyanis a károkozók körében csak 31 százalékos az arányuk."

c) Vizsgáljuk meg, hogy (a leírtak alapján) az alábbi két esemény közül melyiknek nagyobb a valószínűsége. (*9 pont*)

I. Ha hölgy vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.

II. Ha férfi vezeti az autót, akkor ő okozza a balesetet.

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2019/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenleteket:*

a) $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{6}{1-x^2}$, (*4 pont*)

b) $\cos(2x)+5\sin x=3$, (*5 pont*)

c) $|x-2|+x=4\sqrt{x}-2$. (*5 pont*)

Megoldás. *a*)

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{3}{x+1}=-\frac{6}{(x-1)(x+1)}\qquad \Big/\cdot(x-1)(x+1),\quad x\neq\pm1$$

$$2x(x+1)+3(x-1)=-6;\quad 2x^2+5x+3=0;\quad x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{4}.$$

$x_1=-1$, ez a kikötés miatt nem gyöke az egyenletnek; $x_2=-\frac{3}{2}$. Az egyenlet megoldása: $x=-1{,}5$. (Ellenőrzés: $-4{,}8=-4{,}8$.)

b) $$1-2\sin^2x+5\sin x=3;\quad 0=2\sin^2x-5\sin x+2;$$

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}.$$

$(\sin x)_1=2$ nem lehetséges; $(\sin x)_2=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ x_1=\frac{\pi}{6}+2k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$; $x_2=\frac{5\pi}{6}+2l\pi$, $(l\in\mathbb{Z})$. (Ellenőrzés: $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$.)

c) Kikötés: $0\leqslant x$. Ha $2\leqslant x$, akkor $x-2+x=4\sqrt{x}-2$; $2x=4\sqrt{x}$, innen $\sqrt{x}\big(\sqrt{x}-2\big)=0\ \Rightarrow\ x_1=0$; $x_2=4$; az x_1 kisebb 2-nél, tehát nem megoldás, a 4 azonban igen.

Ha $x<2$, akkor $-(x-2)+x=4\sqrt{x}-2$; ebből a $4=4\sqrt{x}$ egyenletet kapjuk, aminek a megoldása $x_3=1$. Az egyenlet gyökei tehát $x_2=4$; $x_3=1$. (Ellenőrzés: $2=2$, illetve $6=6$.)

2. *Egy háromszögben az egyik oldal kétszer akkora, mint egy másik oldal; az előbbivel szemközti szög* 60°*-kal nagyobb az utóbbival szemközti szögnél. A háromszög területe* $2\sqrt{3}$ *területegység. Mekkorák a háromszög oldalai és szögei?*

(*12 pont*)

Megoldás. Legyen a c oldal kétszerese a-nak, így $\gamma=\alpha+60^\circ$, írjuk fel a szinusz-tételt:

$$\frac{\sin(\alpha+60^\circ)}{\sin\alpha}=\frac{2a}{a},\quad \sin(\alpha+60^\circ)=2\sin\alpha;$$

$$\sin\alpha\cdot\cos60^\circ+\cos\alpha\cdot\sin60^\circ=2\sin\alpha;\quad \sin\alpha\cdot\frac{1}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sin\alpha;$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\alpha=\frac{3}{2}\sin\alpha\quad\Big/\cdot\frac{2}{3},\ :\cos\alpha\neq0;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \Rightarrow\ \alpha=30^\circ;\quad \gamma=90^\circ;\quad \beta=60^\circ.$$

Alkalmazzuk a trigonometrikus területképletet: $\frac{a\cdot(2a)\sin60^\circ}{2}=2\sqrt{3}$; $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$; innen $a^2=4\ \Rightarrow\ a=2$, $c=4$, $b=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot4=2\sqrt{3}$. Megkaptuk a keresett adatokat.

3. *a) Igaz-e az A, B kijelentések tetszőleges logikai értékénél, hogy*

$$\big((\neg A \to \neg B) \wedge A\big) \to B = \text{i}?$$

($\neg A = $ nem A.) (*5 pont*)

b) Igaz-e, ha $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 0$, *akkor* $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = 0$*? Válaszunkat indokoljuk.* (*3 pont*)

c) Hány pontja lehet annak az egyszerű, összefüggő gráfnak, amelynek 8 éle van? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A válasz: NEM, az indoklás:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	$(\neg A \to \neg B) \wedge A$	$\big((\neg A \to \neg B) \wedge A\big) \to B$
i	i	h	h	i	i	i
i	h	h	i	i	i	h
h	i	i	h	h	h	i
h	h	i	i	i	h	i

Azaz, ha $A = $ i, $B = $ h, akkor a művelet eredménye hamis.

Megjegyzés. Itt az *a tipikusan hibás* következtetés van kicsit átfogalmazva, amit gyakran tapasztalhatunk: „Ha A, akkor B, mivel nem A, tehát nem B”.

b) A válasz: NEM. Elég egy megfelelő ellenpéldát mutatni.

Pl.: $a_n = 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$; $b_n = 0, -1, 0, -1, 0, -1, \ldots,$ vagy
pl.: $a_n = n + \frac{1}{n}$; $b_n = -n,$ vagy
pl.: $a_n = 2^{-n} - \sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)$; $b_n = \sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\right)$ stb.

c) A pontok száma nem lehet 4, vagy annál kevesebb, mert az ilyen gráfok éleinek száma legfeljebb 6 lehet (ha a 4 pontú gráf teljes gráf). Az n pontú legkevesebb élt tartalmazó összefüggő gráf (fa gráf) éleinek száma $n-1$. Ha $n-1=8$, akkor $n=9$. A gráf pontjainak száma nem lehet 9-nél nagyobb, mert akkor nem lenne összefüggő. A megoldás tehát: $5 \leqslant n \leqslant 9$, azaz legalább 5 és legfeljebb 9. Ezek mindegyike előállítható.

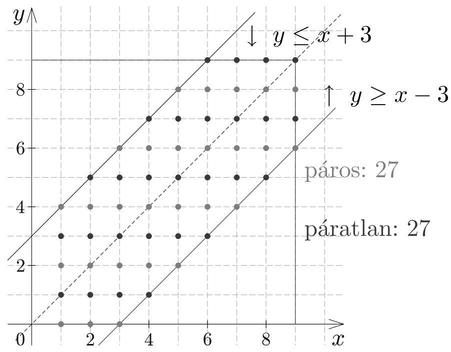
4. *a) Hány olyan kétjegyű szám van, amelyben a számjegyek különbségének abszolút értéke legfeljebb* 3*?* (*8 pont*)

b) Ha ezek közül véletlenszerűen kiválasztunk kettő különböző számot, mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik páros, a másik páratlan lesz? (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a kétjegyű szám első jegye x, a második y, ahol $1 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$ és $x, y \in N$.

$$|x-y| \leqslant 3, \quad \text{ha } y \leqslant x \text{, akkor } x - y \leqslant 3 \;\Rightarrow\; y \geqslant x - 3;$$
$$\text{ha } x \leqslant y \text{, akkor } y - x \leqslant 3 \;\Rightarrow\; y \leqslant x + 3.$$

Ábrázolva az egyeneseket, a megadott tartományban 54 rácspont van, azaz 54 ilyen szám van.



b) Az *ábráról* az is könnyen leolvasható, hogy 27 páros, 27 páratlan szám van közöttük, így

$$P(A) = \frac{\binom{27}{1} \cdot \binom{27}{1}}{\binom{54}{2}} = \frac{27 \cdot 27}{\frac{54 \cdot 53}{2 \cdot 1}} = \frac{27}{53}.$$

II. rész

5. *Egy téglalap oldalainak mérőszáma egész szám. Ezt a téglalapot oldalaival párhuzamos egyenesekkel egységnégyzetekre daraboltuk, majd a széleken levőket fehérre, a többit feketére festettük.*

a) *Mekkorák a téglalap oldalai, ha kétszer annyi fekete négyzet lett, mint amennyi fehér?* (*9 pont*)

b) *Az a*) *részben kapott téglalapokból kiválasztottuk azt, amelynek oldalméretei között legkisebb a különbség, majd egy 8 egység sugarú piros körlap közepére erősítettük. Az így kapott eszközt céltáblának használjuk, ahol a telitalálatot az jelenti, ha fehér mezőbe csapódik a lövedék. Feltesszük, hogy minden lövés eltalálja a céltáblát, és annak minden pontját egyenlő valószínűséggel. Mekkora a valószínűsége, hogy Vilmos négy lövésből legalább kétszer telitalálatot ér el? Az eredményt százalékban egészre kerekítve fejezzük ki.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A téglalap oldalainak hosszát jelölje n, k ($n, k \in \mathbb{Z}^+$), a fekete négyzetek száma $(n-2)(k-2)$, ez kétharmada az összes négyzet számának, vagyis

$$\frac{2}{3} n \cdot k = (n-2)(k-2); \quad 2nk = 3(nk - 2n - 2k + 4);$$

$$0 = nk - 6n - 6k + 12 \quad \big/ + 24;$$

$$24 = nk - 6n - 6k + 36; \quad 24 = (n-6)(k-6); \quad 24 = 2^3 \cdot 3,$$

ezért a 24-nek 8 pozitív osztója van. A lehetséges párosítások:

$$n-6=1,\ \ k-6=24; \qquad\qquad n-6=2,\ \ k-6=12;$$

$$n-6=3,\ \ k-6=8; \qquad\qquad n-6=4,\ \ k-6=6.$$

(A többi ugyanezeket a számpárokat adja felcserélve.)

A téglalap két oldalának hosszára tehát a következő lehetőségek adódnak:

7, 30,	ekkor	70 fehér, 140 fekete
8, 18,		48 fehér, 96 fekete
9, 14,		42 fehér, 84 fekete
10, 12 (egység),		40 fehér, 80 fekete négyzet keletkezett.

b) A céllaphoz választott téglalap a 10×12-es lesz, itt a legkevesebb a különbség az oldalak hossza között. A középpontokat egymáshoz illesztve látható, hogy a téglalap a körlap belsejében van, a félátló kisebb a sugárnál ($5^2+6^2<8^2$). Annak a valószínűsége, hogy egy lövés telitalálatot ér: $p=\frac{40}{8^2\pi}=0{,}1989$, nem ér telitalálatot: $q=0{,}8011$.

Jelölje ξ azt, hogy a négy lövésből hány telitalálat lett. ξ lehetséges értékei: $0,1,2,3,4$.

$$P(\xi=0)=\binom{4}{0}p^0q^4=0{,}4119;\quad P(\xi=1)=\binom{4}{1}p^1q^3=0{,}4090.$$

A komplementer esemény valószínűsége: $P(\xi=0)+P(\xi=1)=0{,}4119+0{,}4090=$ $=0{,}8209$, ezért az esemény valószínűsége: $1-0{,}8209=0{,}1791$.

Annak a valószínűsége, hogy Vilmos négy lövésből legalább kétszer telitalálatot ér el, 18%.

6. *a*) *Az $f(x)=\frac{x^2}{4}$ függvény grafikonját tükrözzük az $A(2;5)$ pontra. Hol metszi az így kapott görbe az $f(x)$ grafikonját?* (*5 pont*)

b) *Húzzunk érintőt a $P(3;-4)$ pontból $f(x)$ grafikonjához. Írjuk fel az érintők egyenletét.* (*6 pont*)

c) *Mekkora a területe annak a síkidomnak, melyet az $f(x)$ függvény grafikonja és a $P(3;-4)$ ponton átmenő érintők zárnak közre?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Az $f(x)$ függvény grafikonja egy parabola, amelynek tengelypontja az origó, tengelye az y tengely, paramétere 2. Az $A(2;5)$ pontra tükrözve a tengelypontja $T'(4;10)$ lesz, tengelye párhuzamos marad az y tengellyel, lefelé nyílik, így egyenlete: $y-10=-\frac{1}{4}(x-4)^2$, y-ra rendezve: $y=-\frac{1}{4}x^2+2x+6$.

(Ezt megkaphatjuk másképpen is. Legyen a $P(x;y)$ pont tükörképe az $A(2;5)$ pontra nézve $P'(x';y')$, ekkor a felezőpont koordinátáira vonatkozó tétel szerint $\frac{x+x'}{2}=2$, $\frac{y+y'}{2}=5 \Rightarrow x=4-x'$; $y=10-y'$. Ezeket beírva az $y=\frac{1}{4}x^2$-be kapjuk, hogy $4(10-y')=(4-x')^2$, ami rendezve: $y'=-\frac{1}{4}x'^2+2x'+6$, tehát ugyanaz, mint a korábban kapott egyenlet.)

A két görbe metszéspontjait az $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 6$ egyenletből kapjuk. Rendezve:

$$\frac{1}{2}x^2 - 2x - 6 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{1},$$

$$x_1 = 6; \quad y_1 = 9,$$

$$x_2 = -2; \quad y_2 = 1.$$

A metszéspontok: $M(-2;1)$, $N(6;9)$.

b) A $P(3;-4)$ ponton átmenő, m meredekségű egyenes egyenlete: $y-(-4) = m(x-3)$; $y = mx - 3m - 4$. Ezt beírva y helyére $mx - 3m - 4 = \frac{1}{4}x^2$, majd rendezve az $x^2 - 4mx + 12m + 16 = 0$ paraméteres másodfokú egyenletet kaptuk, amelynek egy megoldása van a két görbe érintkezése miatt, vagyis $D=0$, azaz

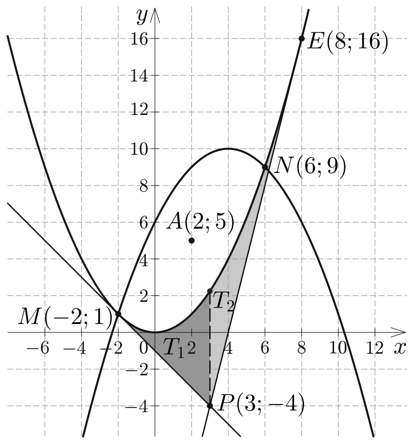
$$(-4m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (12m+16) = 0; \quad 16m^2 - 48m - 64 = 0 \quad \big/ : 16;$$

$$m^2 - 3m - 4 = 0; \quad m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \quad \Rightarrow \quad m_1 = 4;\ m_2 = -1.$$

Az érintők egyenlete: $y = 4x - 16$, $y = -x - 1$.

Eljuthatunk az érintők egyenletéhez más módon is. Az $f(x)$ függvény deriváltja $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x$. A parabola $P_0\left(x_0; \frac{1}{4}x_0^2\right)$ pontjához húzott érintő meredeksége $m = f'(x_0) = \frac{1}{2}x_0$, az érintő egyenlete

$$y - \frac{1}{4}x_0^2 = \frac{1}{2}x_0(x - x_0); \quad y = \frac{1}{2}x_0x - \frac{1}{4}x_0^2.$$



Ennek az egyenesnek pontja a $P(3;-4)$ pont, tehát:

$$-4 = \frac{1}{2}x_0 \cdot 3 - \frac{1}{4}x_0^2;$$

rendezve:

$$x_0^2 - 6x_0 - 16 = 0;$$

$$(x_0)_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2} \quad \Rightarrow$$

$$(x_0)_1 = 8;\ (x_0)_2 = -2.$$

Megkaptuk az érintési pontok első koordinátáit. (Ezek egyébként kellenek majd a *c*) részhez.) Az érintők egyenlete:

$$y=\frac{1}{2}\cdot 8x-\frac{1}{4}\cdot 8^2=4x-16;$$

$$y=\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot x-\frac{1}{4}\cdot(-2)^2=-x-1.$$

c) Az érintési pontok abszcisszái az $x_{1,2}=\frac{4m}{2}$ egyenletből adódnak (illetve a *b*) rész második megoldásából már ismerjük őket), $m=4$ esetén 8; $m=-1$ esetén -2 lesz értékük. A területszámítást két részre bontjuk:

$$T_1=\int\limits_{-2}^{3}\left(\frac{1}{4}x^2-(-x-1)\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{4}\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{3}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{27}{3}+\frac{1}{2}\cdot 9+3-\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{-8}{3}+\frac{1}{2}\cdot 4-2\right)=\frac{125}{12},$$

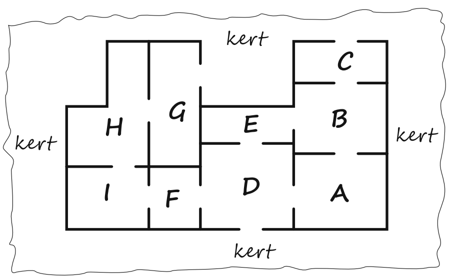
$$T_2=\int\limits_{3}^{8}\left(\frac{1}{4}x^2-(4x-16)\right)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+16x\right]_{3}^{8}=\frac{128}{3}-\frac{129}{4}=\frac{125}{12}.$$

A síkidom területe $T=T_1+T_2=\frac{125}{6}$ területegység lett.

7. *a*) *Mutassuk meg, hogy minden n természetes számra igaz, hogy $3\mid n^3+8n$.* (*6 pont*)

b) *Oldjuk meg a $p+q^n=2019$ egyenletet, ahol p, q pozitív prím, n pozitív egész szám. Használjuk a függvénytáblázatot.* (*6 pont*)

c) *Nagy úr éppen most kísérte végig vendégeit a birtokán, amelynek során minden ajtón pontosan egyszer mentek át. A bemutató végén a nappaliban pezsgővel koccintottak a találkozásra. Melyik helyiség a nappali? A helyiségek betűjelének felsorolásával adjunk meg egy lehetséges bejárási sorrendet.* (*4 pont*)



Nagy úr házának alaprajza

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* $n^3+8n=n(n^2+8)$, az n 3-mal osztva 0-t, vagy ± 1-et ad maradékul. Ha $n=3k$, akkor a szorzat első tényezője osztható 3-mal, így a szorzat is. Ha $n=3k\pm 1$, akkor

$$n^2=(3k\pm 1)^2=9k^2\pm 6k+1;$$

$$n^2+8=9k^2\pm 6k+9=3(3k^2\pm 2k+3),$$

ebben az esetben a második tényező osztható 3-mal. Ezzel bizonyítottuk az állítást.

II. megoldás.

$$n^3+8n=(n^3-n)+9n=n(n^2-1)+9n=n(n-1)(n+1)+9n.$$

Az átalakítás után a kéttagú kifejezés második tagja nyilván osztható 3-mal, az első tagban pedig három szomszédos egész szám szerepel, ezek egyike biztosan osztható 3-mal, így a szorzat is. Mivel két 3-mal osztható szám összege is osztható 3-mal, az állítás igaz.

(*Megjegyzés.* Itt felismerhetjük a „kis Fermat-tétel” $p=3$-ra vonatkozó esetét: $p \mid n^p-n$, ahol p prímszám, n egész szám.)

III. megoldás: teljes indukcióval. $n=0$-ra igaz, tegyük fel, hogy n-re igaz, bizonyítjuk, hogy $(n+1)$-re is igaz:

$$(n+1)^3+8(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+8n+8=$$
$$=(n^3+8n)+3(n^2+n+3).$$

Az első tag az indukciós feltétel miatt osztható 3-mal, a második is osztható 3-mal, így az összeg is.

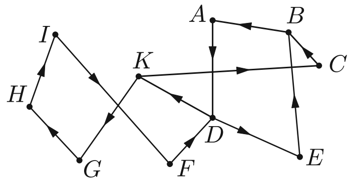
b) Az egyik prímnek 2-nek kell lennie, különben a bal oldal páros volna, nem lehetne az összeg 2019. Legyen $p=2$, ekkor $q^n=2017$. Mivel 2017 prím, így a $q=2017$, $n=1$ megoldást kaptuk. Legyen most $q=2$, ekkor $p=2019-2^n$. Az n értéke legfeljebb 10 lehet, nagyobb n-re p negatív lenne. Az áttekinthetőség kedvéért készítsük el az alábbi táblázatot:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
p	2017	2015	2011	2003	1987	1955	1891	1763	1507	995
	prím	$5\cdot 403$	prím	prím	prím	$5\cdot 391$	$31\cdot 61$	$41\cdot 43$	$11\cdot 137$	$5\cdot 199$

Megjegyzés. A függvénytáblázat 4000-ig felsorolja a prímeket, célszerű használni, de ha nem, akkor a 2015, 1955, 995 nyilván nem prím, a többiek sem oszthatók 2, 3, 5-tel, elég az osztásokat 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43-mal elvégezni $\left(\sqrt{2019}\approx 44{,}93\right)$, ami „rabszolgamunka”, de viszonylag gyorsan elvégezhető.

A megoldások tehát:

p	q	n
2	2017	1
2017	2	1
2011	2	3
2003	2	4
1987	2	5



c) Ábrázoljuk egy 10 pontú gráffal az egyes helyiségek ajtóval való összeköttetéseit (a kert is helyiség) úgy, hogy a pontokat (helyiségek) ott köti össze él, ahol ajtó van közöttük. A gráfban K és B foka 3, D-é 4, a többié 2. Olyan útvonalat keresünk, amely minden élet pontosan egyszer érint, ez csak olyan lehet, amelyik K-ból indul és B-ben végződik, vagy fordítva, mert a többi pont páros foka miatt a végén (vagy elején) nem tartózkodhatnánk ott, hiszen az egyik élen érkeztünk, a másikon távoztunk (a D-nél ezt kétszer).

A nappali tehát a B helyiség. Egy lehetséges útvonal: $KCBADKGHIFDEB$ (nyitott Euler-vonal).

8. *Egy kozmetikai cég saját termékét három változatban forgalmazza a hatóanyag töménységétől, a kiszerelés mennyiségétől és a csomagolástól függően. Az A jelű termék* 150 g*-os,* 10% *töménységű; a B jelű* 100 g*-os,* 20% *töménységű; a C jelű* 50 g*-os,* 30% *töménységű. A hatóanyag és az oldószer a termék árában a mennyiségével egyenes arányban jelenik meg; az A és B jelű termék csomagolása kétszer annyiba kerül, mint a C jelű terméké. Az üzletben az A* 2275 Ft*-ba, a B* 2500 Ft*-ba, a C pedig* 1725 Ft*-ba kerül dobozonként.*

a) Mennyi a hatóanyag és az oldószer grammonkénti ára? (*7 pont*)

Anna egyik nap észrevette, hogy az üzlet egyik polcán az A, B, C jelű termékekből annyi van, hogy számuk egy növekvő mértani sorozat három szomszédos elemével egyenlő. A számok átlaga 14*, szórása* $2\sqrt{14}$*.*

b) Hány termék volt a polcon az egyes fajtákból? (*9 pont*)

Megoldás. *a*) A hatóanyag ára: x Ft/g; az oldószeré y Ft/g; a C jelű termék dobozának ára z.

Az A jelű termékben 15 g hatóanyag és 135 g oldószer van, így az ára: $15x+135y+2z=2275$ (Ft).

A B jelűben 20 g hatóanyag és 80 g oldószer van, ára: $20x+80y+2z=2500$ (Ft).

A C jelűben 15 g hatóanyag és 35 g oldószer van, ára: $15x+35y+z=1725$ (Ft).

A harmadik egyenletet szorozzuk meg (-2)-vel, majd adjuk hozzá a másik kettőhöz. Az elsőből: $-15x+65y=-1175$ $/\cdot 2$; $-30x+130y=-2350$. A másodikból: $-10x+10y=-950$ $/\cdot(-3)$; $30x-30y=2850$. Összeadva $100y=500$. Ebből $y=5$, ezt beírva $-10x+50=-950$-be, x-re 100 adódik. A hatóanyag ára 100 Ft, az oldószeré 5 Ft grammonként. (A C termék csomagolása 50, az A és B terméké pedig 100-100 Ft-ba került.)

Ellenőrzéssel győződhetünk meg az eredmények helyességéről.

b) Jelölje a termékek számát $\frac{a}{q}$, a, aq, ahol $0<a$, $1<q$, $a\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{Q}$.

$$\frac{\frac{a}{q}+a+aq}{3}=14; \quad a\left(q+\frac{1}{q}\right)=42-a; \quad q+\frac{1}{q}=\frac{42}{a}-1;$$

$$\left(q+\frac{1}{q}\right)^2=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}+1; \quad q^2+2+\frac{1}{q^2}=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}+1;$$

$$\text{innen}\quad q^2+\frac{1}{q^2}=\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}-1.$$

$$\sqrt{\frac{\left(14-\frac{a}{q}\right)^2+(14-a)^2+(14-aq)^2}{3}}=2\sqrt{14};$$

$$\left(14-\frac{a}{q}\right)^2+(14-a)^2+(14-aq)^2=168;$$

$$196-\frac{28a}{q}+\frac{a^2}{q^2}+196-28a+a^2+196-28aq+a^2q^2=168;$$

$$a^2\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)-28a\left(q+\frac{1}{q}\right)+a^2-28a+420=0;$$

$$a^2\left(\frac{1764}{a^2}-\frac{84}{a}-1\right)-28a\left(\frac{42}{a}-1\right)+a^2-28a+420=0,$$

$$1764-84a-a^2-1176+28a+a^2-28a+420=0;$$

ebből $1008=84a$, vagyis $a=12$ adódik.

$$q+\frac{1}{q}=\frac{42}{12}-1; \quad q+\frac{1}{q}=\frac{5}{2}; \quad 2q^2-5q+2=0;$$

$$q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \;\Rightarrow\; q_1=2, \;\; q_2=\frac{1}{2};$$

mivel $1<q$, ezért $q=2$.

A polcon az A jelűből 6, a B jelűből 12, a C jelűből 24 doboz volt.

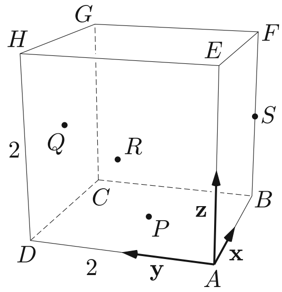
9. *A 2 egység élű $ABCDEFGH$ csúcsú kocka $ABCD$ alaplapjának középpontja P; $DCGH$ oldallapjának középpontja Q; $AEHD$ előlapjának középpontja R; a BF él felezőpontja S. (A-t E-vel, B-t F-fel, C-t G-vel, D-t H-val köti össze él.)*

a) Mekkora az A, P, Q, R, S csúcsú poliéder térfogata? (*8 pont*)

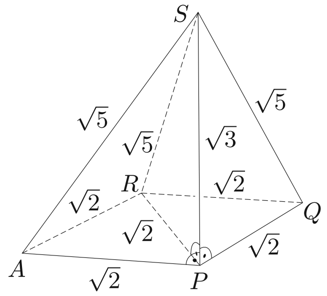
b) Mekkora a poliéderbe írt gömb sugara? (*8 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* A kocka AHC csúcsai egy $2\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszöget alkotnak, amelynek oldalfelező pontjai a P, Q, R pontok (*1. ábra*). Az A, P, Q, R pontok tehát egy síkban vannak, a PQR háromszög és az APR háromszög egy-egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög, ezek együtt adják az $APQR$ rombuszt; így $APQRS$ egy rombusz alapú gúla (*2. ábra*).

Az SQ, SA, SR szakaszok hossza $\sqrt{5}$, mert mindegyikük egy-egy 1 és 2 egység befogójú derékszögű háromszög átfogója. Az SP pedig $\sqrt{3}$ egység hosszú, mert egy egységkocka testátlója.



1. ábra



2. ábra

Az RPS háromszög derékszögű, mert $\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$. Ugyanezért derékszögű az APS és a QPS háromszög is. (Idáig eljuthatunk másként is, lásd az I./a) részmegoldást.)

Az SP merőleges az $APQR$ síkra, mert merőleges a sík két egymást metsző egyenesére (a síkra merőleges egyenes tétele), így ez lesz a gúla magassága.

Egy $\sqrt{2}$ oldalú szabályos háromszög területe:

$$t=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

a poliéder térfogata tehát:

$$V=\frac{2t\sqrt{3}}{3}=\frac{2\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{3}}{3}=1 \quad \text{(térfogategység)}.$$

I./a) részmegoldás. Helyezzük el a kockát egy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ egységvektorok által meghatározott derékszögű koordinátarendszerben, itt $\overrightarrow{AP}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\overrightarrow{AR}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$, $\overrightarrow{AQ}=\mathbf{x}+2\mathbf{y}+\mathbf{z}$,

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=\mathbf{x}+2\mathbf{y}+\mathbf{z}-(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathbf{y}+\mathbf{z}=\overrightarrow{AR} \ \Rightarrow$$

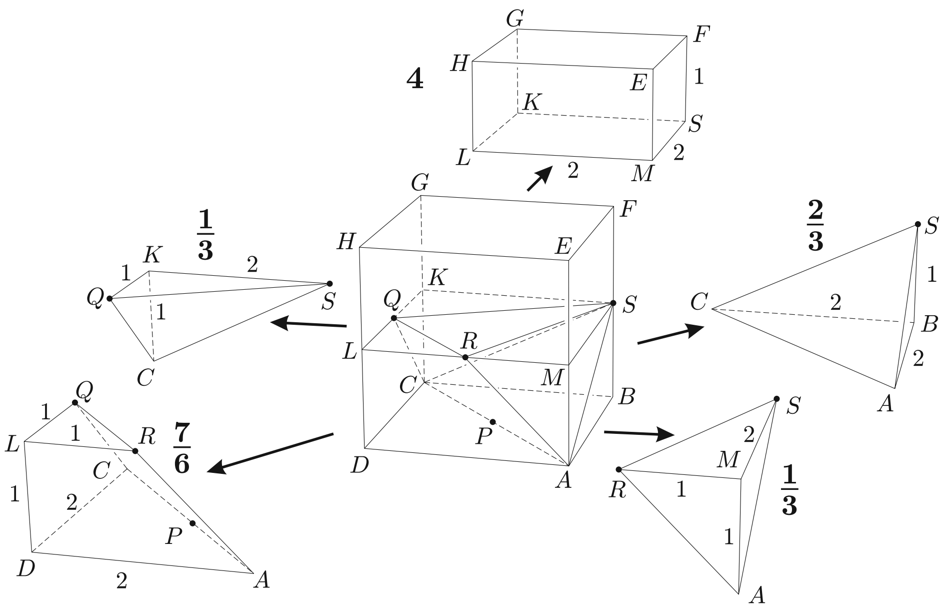
az $APQR$ négyszög paralelogramma, mert két szemközti oldala párhuzamos és egyenlő hosszú. Egy vektor hossza koordinátái négyzetösszegének négyzetgyökével egyenlő, így

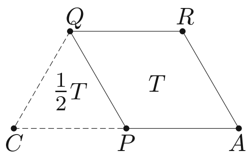
$$|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{AR}|=|\overrightarrow{PR}|=|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{RQ}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2};$$

$$\overrightarrow{PS}=\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{z};\quad |\overrightarrow{PS}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{3};$$

$$|\overrightarrow{AS}|=|\overrightarrow{RS}|=|\overrightarrow{QS}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}\,.$$

a) *II. megoldás.* Megkaphatjuk a poliéder térfogatát úgy is, hogy a kockából levágjuk a megfelelő darabokat az *ábra* szerint.

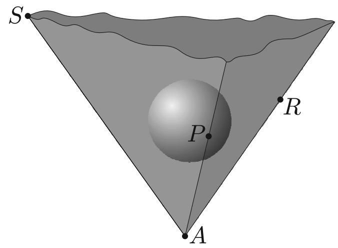




Az egyes darabok térfogatát a melléjük vastagon írt számok mutatják, ezek kiszámítása triviális. A maradék test térfogata a poliéder térfogatának $\frac{3}{2}$-szerese, mert alapjuk között is ez a viszony áll fenn. Felírhatjuk, hogy $4+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{7}{6}+\frac{3}{2}V=8$. Ebből $V=1$ adódik.

b) Be kell látni, hogy létezik beírt gömb.

Az nyilvánvaló, hogy a poliéder szimmetrikus az RPS síkra, ha van érintő gömb, akkor középpontjának ebben a síkban kell lennie. Vegyük az A pontból induló AP, AS, AR félegyenesek által meghatározott triédert. Síkjainak szögfelező síkjai egy A-ból induló, a triéder belsejében haladó félegyenest határoznak meg, mert síkok metszésvonala egyenes, másrészt az egyenlőség tranzitív, tehát, ha az O pont egyenlő távol van az ASP és ASR síkoktól, akkor az APR síktól is ugyanakkora távolságra van.



Ez a félegyenes döfi az RPS síkot, ez az O pont lesz tehát a beírt gömb középpontja. (Szemléletesen „indokolható" a beírt gömb léte úgy is, hogy egy „szögletes tölcsérbe" beleejthetünk egy pingpong labdát, amit aztán megfelelő méretűre „fújunk" fel.)

A beírt r sugarú gömb középpontját (O) kössük össze a poliéder csúcsaival, így azt az oldallapok alapú, O csúcsú gúlákra daraboltuk fel.

Az ARS háromszög olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek AR alapja $\sqrt{2}$ hosszú, szárai $\sqrt{5}$ hosszúak, így az alapjához tartozó m magasságra felírhatjuk:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2, \quad \text{ahonnan} \quad m = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Az $APQR$ alapú, O csúcsú gúla térfogata $V_1 = \frac{\sqrt{3}r}{3}$; az APS alapú, O csúcsú gúla térfogata

$$V_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}r}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}r$$

(ekkora a PQS alapú gúláé is); az ARS alapú, O csúcsú gúla térfogata

$$V_3 = \frac{\frac{\sqrt{2}\frac{3}{\sqrt{2}}}{2}r}{3} = \frac{1}{2}r$$

(egyenlő az RQS alapú gúláéval).

Mivel $V_1 + 2V_2 + 2V_3 = V$;

$$\frac{\sqrt{3}}{3}r + 2\frac{\sqrt{6}}{6}r + 2\frac{1}{2}r = 1; \quad r\left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3} + 1\right) = 1.$$

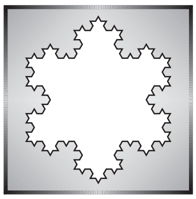
Ebből

$$r = \frac{3}{\sqrt{3} + \sqrt{6} + 3} = \text{(két lépésben gyöktelenítve a nevezőt)} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \approx 0{,}42.$$

(*Megjegyzés.* Minden olyan poliéderre, amelynek van minden lapját érintő beírt gömbje igaz, hogy $\frac{Ar}{3} = V$.)

Németh László
Fonyód



C gyakorlat megoldása

C. 1489. *Egy sakktábla bal alsó sarkában áll egy sötét futó, jobb alsó sarkában pedig egy világos futó. Mindkét futó a saját színén haladva egyesével lép felfelé haladva a táblán véletlenszerűen jobbra vagy balra, míg el nem érik a felső sort. Mennyi a valószínűsége, hogy a sötét futó a világos futótól jobbra érkezik a felső sorba?*

Megoldás. A futó ugyanakkora valószínűséggel lép balra felfelé, mint jobbra felfelé, ha mindkét irányba léphet egy mezőről. Vannak azonban olyan mezők, ahonnan csak az egyik irányba mehet.

Nézzük először a sötét futót. Annak a valószínűsége, hogy a bal alsó mezőn járt, 1, hiszen onnan indul. Innen csak egy irányban haladhat tovább: a 2. sor 2. mezőjére, ezért annak a valószínűsége is 1, hogy a 2. sor 2. mezőjén járt:

$$p_{(1,1)} = p_{(2,2)} = 1.$$

Innen két irányba mehet, mindkettőbe $\frac{1}{2}$ valószínűséggel:

$$p_{(3,1)} = p_{(3,3)} = \frac{1}{2}.$$

A 3. sor 1. mezőjéről biztosan a 4. sor 2. mezőjére megy, ahová még ezen kívül a 3. sor 3. mezőjéről is léphet. Ezért ennek a valószínűsége

$$p_{(4,2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

a 4. sor 4. helyének pedig

$$p_{(4,4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Hasonlóan számolható a többi valószínűség is:

$$p_{(5,1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}, \qquad p_{(5,3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{8},$$

$$p_{(5,5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}; \qquad p_{(6,2)} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} = \frac{10}{16},$$

$$p_{(6,4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16}, \qquad p_{(6,6)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16};$$

$$p_{(7,1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{16} = \frac{10}{32}, \qquad p_{(7,3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} = \frac{15}{32},$$

$$p_{(7,5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{6}{32}, \qquad p_{(7,7)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{32};$$

$$p_{(8,2)} = \frac{10}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{32} = \frac{35}{64}, \qquad p_{(8,4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{32} = \frac{21}{64},$$

$$p_{(8,6)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{32} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{7}{64}, \qquad p_{(8,8)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{64}.$$

Látható, hogy minden sorban a sötét mezőkre lépés valószínűségének összege 1.

Szimmetria miatt a világos futó utolsó sorba eső valószínűségeit könnyű megadni.

Ha a sötét futó a 8. mezőn van, akkor a világos bárhol lehet, mindig tőle balra lesz. Ennek a valószínűsége

$$\frac{1}{64}\cdot 1=\frac{1}{64}.$$

Ha a sötét futó a 6. mezőn van, akkor a világos az 1., 3., vagy 5. mezőn lehet, így ennek a valószínűsége

$$\frac{7}{64}\cdot\left(\frac{1}{64}+\frac{7}{64}+\frac{21}{64}\right)=\frac{203}{64^2}.$$

Ha a sötét futó a 4. mezőn van, akkor a világos az 1., vagy a 3. mezőn lehet, így ennek a valószínűsége

$$\frac{21}{64}\cdot\left(\frac{7}{64}+\frac{1}{64}\right)=\frac{168}{64^2}.$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
8	$\frac{1}{64}$	$\frac{35}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{35}{64}$	$\frac{1}{64}$
7	$\frac{10}{32}$		$\frac{15}{32}$		$\frac{6}{32}$		$\frac{1}{32}$	
6		$\frac{10}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{1}{16}$		
5	$\frac{3}{8}$		$\frac{4}{8}$		$\frac{1}{8}$			
4		$\frac{3}{4}$		$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$					
2		1						
1	1							

Végül, ha a sötét futó a 2. mezőn van, akkor a világos csak az 1. mezőn lehet, ennek a valószínűsége pedig $\frac{35}{64}\cdot\frac{1}{64}=\frac{35}{64^2}$.

Tehát

$$\frac{1}{64}+\frac{203}{64^2}+\frac{168}{64^2}+\frac{35}{64^2}=\frac{470}{64^2}\approx 0{,}115$$

annak a valószínűsége, hogy a sötét futó a világostól jobbra érkezik.

Ajtai Boglárka (Földes Ferenc Gimn., Miskolc, 11. évf.)

Megjegyzés. Nagyon sokan kiszámították, hogy az egyes futók hány különböző útvonalon juthatnak el a sakktábla legfelső sorának egyes mezőire, majd ezt osztották az összes lehetséges eljutás útvonalainak számával, és így jutottak az egyes mezőkre vett eljutási valószínűségekhez. Azonban a feladat szövege szerint a futók nem az útvonalak közül választhattak véletlenszerűen, hanem minden egyes lépésben aközött, hogy jobbra fel vagy balra fel lépjenek (amennyiben ez nem jelentette a sakktábláról való lelépésüket). A sakktábla szélén csak egyféle lépés volt lehetséges 1 valószínűséggel, ami azt eredményezte, hogy az egyes útvonalak nem azonos valószínűséggel következtek be. Így ez a megoldás hibás.

27 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 3 versenyző: Ajtai Boglárka, Molnár István, Spányik Teodor. 3 pontos 19, 2 pontos 4, 1 pontos 1 dolgozat.

Valószínűségszámítás a honlapon és a KöMaL-archívumban

A valószínűségszámítási feladatok megoldásaiban általában a szokásosnál több szokott lenni a hibás gondolatmenet. Aki szeretné magát kicsit képezni ebben a témában, több cikket is tudunk ajánlani. (Hasonlóan kigyűjthetők a feladatok megoldásainak a szövegei is.)

A honlapon található cikklistában* a következő ilyen témájú cikkek találhatók:

- *Csatár Katalin – Harró Ágota – Hegyi Györgyné – Lövey Éva – Morvai Éva – Széplaki Györgyné – Ratkó Éva:* Valószínűségszámítási feladatok kezdőknek.
- *Vancsó Ödön:* Lesz-e olyan pillanat, amikor minden táncos „halott"?

A KöMaL-archívumban (`http://db.komal.hu/KomalHU/`) a cikk címében a „valószínűség" szóra rákeresve szintén több találatot kapunk. Ezek többségét elolvasni csak a szkennelt változatban (`db.komal.hu/scan`) lehet. Az 1984. január utáni cikkek már gépelt változatban is elérhetők, Mozillában nyílnak meg jól, de a pdf formátum is jó, és bármilyen böngészőből letölthető.

- 1908. december: *Dr. Bozóky Endre:* Tételek és feladatok a valószínűségi számítás köréből 1.
- 1909. február: *Dr. Bozóky Endre:* Tételek és feladatok a valószínűségi számítás köréből 2.
- 1909. június: *Dr. Bozóky Endre:* Tételek és feladatok a valószínűségi számítás köréből 3.
- 1930. január: *Dr. Szűcs Adolf:* A valószínűségszámítás néhány fontos tételéről.
- 1930. december: *Dr. Jordan Károly:* Megjegyzés a „Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok" 598. számú valószínűségszámítási feladatához.
- 1953. február: *Prékopa András:* A valószínűség elemei (1. közl.).
- 1953. április: *Prékopa András:* A valószínűség elemei (2. közl.).
- 1960. szeptember: *Vermes Miklós:* Valószínűségszámítási feladat csillólámpával.
- 1997. január: *Benczúr Péter:* A valószínűségszámítás meg az újságárusítás művészete.

Ilyen témájú cikk még többek között (lehet a szövegre is keresni):

- 1948. május: *Rényi Alfréd:* Játék a véletlennel 1.
- 1948. szeptember: *Rényi Alfréd:* Játék a véletlennel 2.
- 1992. január: *ifj. Benczúr András:* Algoritmikus vagy véletlen? I. rész.
- 1992. február: *ifj. Benczúr András:* Algoritmikus vagy véletlen? II. rész.
- 1994. március: *Vancsó Ödön:* Mit lehet nyerni, ha egy kicsit engedünk a biztosból?
- 1994. április: *Vancsó Ödön:* Mit lehet nyerni, ha egy kicsit engedünk a biztosból? 2. rész.
- 1994. május: *Vancsó Ödön:* Mit lehet nyerni, ha egy kicsit engedünk a biztosból? 3. rész.
- 2003. március: *Velkeyné Gréczi Alice:* Egy reklámfogás, és ami mögötte van.

---
*`https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

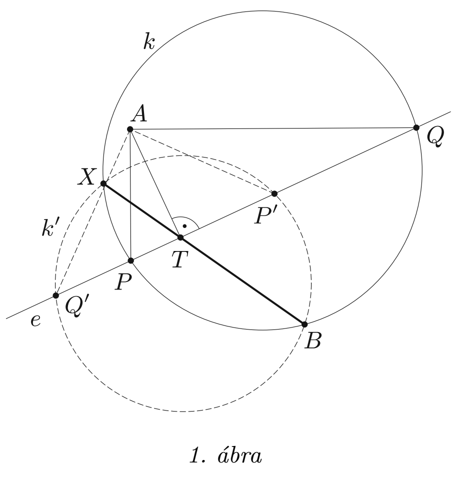
Matematika feladatok megoldása

B. 4970. *Adott a síkon két pont A és B, továbbá egy ezeket elválasztó e egyenes. Válasszunk az e egyenesen P és Q pontokat úgy, hogy $PAQ\sphericalangle=90^\circ$ teljesüljön. Mutassuk meg, hogy létezik egy olyan, B-től különböző pont, amelyen a B, P és Q pontokra illeszkedő kör – a P és Q pontok választásától függetlenül – áthalad.*

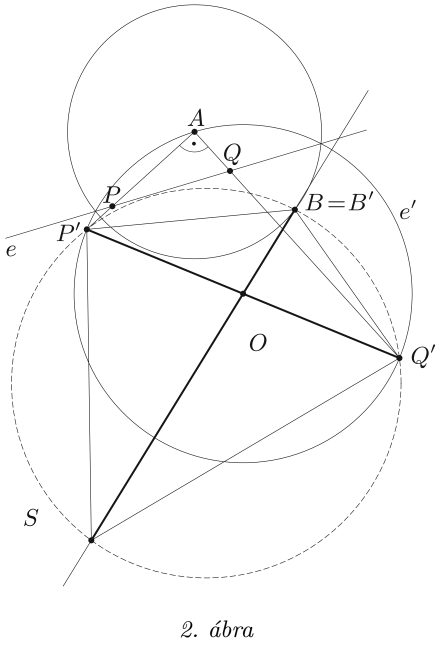
(*5 pont*) Javasolta: *11. C. osztály,* Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

I. megoldás. Legyen az A pont merőleges vetülete az e egyenesre T. Mivel PAQ egy derékszögű háromszög, a PAT és AQT háromszögek hasonlóak, tehát $\frac{PT}{TA}=\frac{AT}{TQ}$, amiből $PT\cdot TQ=AT^2$ (*1. ábra*).

Mivel a T pont helyzete változatlan, így AT^2 állandó P és Q bármely választása esetén, ezért a T pont BPQ körökre vonatkozó hatványa is állandó. Vegyünk két tetszőleges BPQ és $BP'Q'$, a feltételeknek megfelelő kört és legyen ezek B-től különböző metszéspontja X. Az XB egyenes átmegy a T ponton, mert az XB egyenes a két kör hatványvonala, és T hatványa a két körre megegyezik. Tegyük fel, hogy van olyan, a feltételeknek megfelelő BP^*Q^* kör, amely a BPQ kört egy X-től különböző X' pontban metszi. Ennek az új körnek és a BPQ körnek a hatványvonala az $X'B$ egyenes. Azonban ez ellentmondás, mert X és X' a BPQ kör



1. ábra



2. ábra

különböző pontjai, így $T \notin X'B$, és ezzel T hatványa a két körre nem lehetne egyenlő, pedig egyenlő kell, hogy legyen. Így X' egybeesik az X ponttal. Tehát mindegyik kör átmegy az X ponton.

Márton Dénes (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján.

II. megoldás. Invertáljuk az e egyenest és a B pontot az A középpontú, AB sugarú körre. Ekkor B képe önmaga, e képe pedig egy, az A ponton átmenő kör lesz (*2. ábra*).

Legyen ennek a körnek a középpontja O. Az inverzió szögtartó tulajdonsága miatt és $PAQ\sphericalangle = 90°$ következtében $P'AQ'\sphericalangle = 90°$, így a Thalész-tétel megfordítását felhasználva tudjuk, hogy P' és Q' az e' kör egy átmérőjének két végpontja.

A B', P', Q' pontokra illeszkedő kör messe az $B'O$ egyenest S-ben. Ebben a körben a szelőtétel miatt $OP' * OQ' = OB' * OS$, ebből

$$OS = \frac{OP' * OQ'}{OB'}.$$

Mivel az e' körben P' és Q' egy átmérő két végpontja, ezért OP' és OQ' független a P és Q pontok választásától, továbbá OB' is független a P és Q pontok választásától, azaz OS is független a P és Q pontok választásától.

Ezzel beláttuk, hogy a B', P' és Q' pontokra illeszkedő kör a P és Q pontok választásától függetlenül áthalad S-en, továbbá még egyszer invertálva: a B, P és Q pontokra illeszkedő kör a P és Q pontok választásától függetlenül áthalad S inverz képén.

Csertán András (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Összesen 57 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 45, 4 pontot 1, 3 pontot és 2 pontot szintén 1-1 tanuló. 1 pontos 3, 0 pontos 5, nem értékeljük 1 tanuló dolgozatát.

B. 4978. *Legyen $n \geqslant 3$ egész szám és α tetszőleges valós szám. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}.$$

(*5 pont*)

Megoldás. A kétszeres szögeke vonatkozó $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ azonosságot $2\cos^2 x = \cos\ 2x + 1$ formában tagonként alkalmazva kapjuk, hogy

$$2\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2\cos^2\left(\alpha + \frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n}\right) + 1\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha + \frac{4k\pi}{n}\right)\right) + n.$$

Pontosan azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

A megoldás további részében a komplex számok trigonometrikus alakját használjuk. Legyen

$$z=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

Ekkor algebrai azonosság alapján

$$\frac{\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1}{\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{n}\right)-1}=\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=\sum_{k=0}^{n-1}z^{2k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right).$$

Az $n\geqslant 3$ feltétel miatt $\frac{4}{n}$ nem lehet páros egész szám, így a nevezőben szereplő $\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1\neq 0$. Viszont a számláló, $\cos(4\pi)+i\cdot\sin(4\pi)-1=0$, tehát

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

Most használjuk fel a trigonometrikus alakban adott komplex számok szorzására vonatkozó azonosságot tagonként:

$$0=\big(\cos(2\alpha)+i\cdot\sin(2\alpha)\big)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left((\cos(2\alpha)+i\cdot\sin(2\alpha))\left(\cos\left(\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{4k\pi}{n}\right)\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)+i\cdot\sin\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)+i\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sin\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right).$$

Tudjuk, hogy ez a komplex szám nulla, emiatt a valós része is nulla:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\cos\left(2\alpha+\frac{4k\pi}{n}\right)\right)=0.$$

Az eredeti állításhoz visszatérve tehát beláttuk, hogy

$$2\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=n,\quad\text{vagyis}\quad\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)=\frac{n}{2}.$$

Weisz Máté (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 62 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 38, 4 pontot 10 versenyző. 3 pontos 5, 2 pontos 5 dolgozat. 1 pontot 3, 0 pontot 1 tanuló kapott.

B. 4983. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$x^2+2x-3-\sqrt{\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3}}=\frac{2}{x^2-2x-3}.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Laczkó László* és *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás. Először vizsgáljuk meg, hogy a gyökjel alatt álló tört milyen valós x-ekre lesz nagyobb vagy egyenlő, mint 0. Ez csak akkor lehet, ha mindkettő pozitív vagy negatív (a számláló lehet 0 is, a nevező viszont nem).

A számláló és a nevező is szorzattá alakítható:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3),$$
$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3).$$

Ha az ezekből adódó függvényeket ábrázoljuk, látható, hogy a megoldások csak a $(-\infty;-3]$, a $(-1;1]$, illetve a $(3;\infty)$ intervallumokból kerülhetnek ki. Induláskor megengedhetjük, hogy a számláló 0 legyen, de mivel ekkor az egyenlet jobb oldala nem 0, ezért sem az $x=-3$, sem az $x=1$ nem gyöke az egyenletnek.

Ezek után szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát (x^2-2x-3)-mal.

Két eset lehetséges: ha negatív, illetve ha pozitív számmal szoroztunk. Vizsgáljuk részletesen először azt az esetet, amikor x^2-2x-3 pozitív. Ekkor tudjuk, hogy $x>3$, vagy $x<-1$. Beszorzás és rendezés után azt kapjuk, hogy:

$$(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)-\sqrt{(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)}-2=0.$$

Legyen $a=\sqrt{(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)}$. Így az egyenlet a következő lesz:

$$a^2-a-2=0.$$

Ennek gyökei: $a_1=2$ és $a_2=-1$. A második gyök nem megfelelő, hiszen a gyökös kifejezés csak pozitív lehet. Ebből az következik, hogy $a^2=4$. Tehát a megoldandó egyenlet a következő lesz:

$$(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)=4.$$

Ha kibontjuk és 0-ra rendezzük az egyenletet azt kapjuk, hogy:

$$x^4-10x^2+5=0.$$

Ez x^2-re másodfokú:

$$x_{1,2}^2 = 5 + 2\sqrt{5} \quad \text{és} \quad x_{3,4}^2 = 5 - 2\sqrt{5}\,.$$

Ezekből négy gyököt kapunk:

$$x_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,, \quad x_2 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,, \quad x_3 = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,, \quad x_4 = -\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\,.$$

Közülük azonban csak kettő esik megfelelő intervallumba, így csak az $x_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ és az $x_2 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ megoldásai az eredeti egyenletnek.

Most nézzük meg, mi történik akkor, ha a nevező, amivel szorzunk negatív. Mivel a gyökjel alatt pozitív szám (vagy 0) lehet, ezért az $x^2 + 2x - 3$ is negatív. Ekkor az egyenlet úgy néz ki, hogy (-1)-et kiemelve tudjuk az $(x^2 - 2x - 3)$-at a gyökjel alá vinni:

$$(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x - 3) + \sqrt{(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x - 3)} - 2 = 0.$$

Így a gyökjel alatt két negatív szám szorzata áll, ami adhat újabb megoldásokat. Ismét új ismeretlent bevezetve: legyen $b = \sqrt{(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 2x - 3)}$. A kapott egyenlet most

$$b^2 + b - 2 = 0.$$

Ennek pozitív megoldása csak $b = 1$ (a $b = -2$ értéket nem veheti fel a gyökös kifejezés). A megoldandó egyenlet az lesz, hogy:

$$x^4 - 10x^2 + 8 = 0.$$

Ezt x^2-re megoldva kapjuk, hogy:

$$x_1^2 = 5 + \sqrt{17} \quad \text{és} \quad x_2^2 = 5 - \sqrt{17}\,.$$

Ebből azt a 4 gyököt kapjuk, hogy:

$$x_1 = \sqrt{5 + \sqrt{17}}\,, \quad x_2 = -\sqrt{5 + \sqrt{17}}\,, \quad x_3 = \sqrt{5 - \sqrt{17}}\,, \quad x_4 = -\sqrt{5 - \sqrt{17}}\,.$$

Ezek közül csak kettő esik megfelelő intervallumba, az $x_3 = \sqrt{5 - \sqrt{17}}$ és az $x_4 = -\sqrt{5 - \sqrt{17}}\,.$

Tehát az eredeti egyenletnek összesen 4 gyöke van:

$$x_1 = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,, \quad x_2 = -\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}\,, \quad x_3 = \sqrt{5 - \sqrt{17}}\,, \quad x_4 = -\sqrt{5 - \sqrt{17}}\,.$$

Major Botond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A leggyakrabban előforduló hiba a dolgozatokban és általában is az, hogy azt a két megoldást is adó esetet figyelmen kívül hagyják, amikor mindkét másodfokú kifejezés negatív értéket vesz fel.

Összesen 163 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 39, 3 pontot 32 tanuló. 2 pontos 45, 1 pontos 34 tanuló dolgozata. 0 pontos 7, nem versenyszerű 5 dolgozat, nem értékeljük 1 tanuló dolgozatát.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1539–1545.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1539. Az $ABCD$ négyzet AB oldalának A-hoz közelebbi negyedelőpontját jelölje E, F pedig legyen a BD átló tetszőleges pontja. Határozzuk meg az $AF+EF$ összeg minimumát.

C. 1540. Az ax^2+bx+c másodfokú polinom együtthatói egész számok, közülük $a>0$. A polinomnak két különböző, 1-nél kisebb pozitív gyöke van. Határozzuk meg a lehetséges legkisebb értékét.

Feladatok mindenkinek

C. 1541. Bizonyítsuk be, hogy létezik 2019 egymást követő pozitív egész szám, melyek között pontosan 19 darab prím található.

C. 1542. Az ABC derékszögű háromszög befogóinak hossza 5 és 12. A P, Q és R pontok a háromszög beírt körén helyezkednek el úgy, hogy a PQR háromszög hasonló az ABC háromszöghöz. Határozzuk meg a PQR háromszög oldalainak hosszát.

C. 1543. Az n pozitív egész kitevő mely értékei esetén lesz 2^n+1 vagy 2^n-1 osztható 9-cel?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1544. Az $ABCD$ érintőtrapéz átlóinak metszéspontja E. Az ABE, BCE, CDE és DAE háromszögekbe beírt körök sugarai rendre r_1, r_2, r_3 és r_4. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}.$$

C. 1545. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

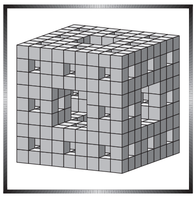
$$x^2-y^2=\log_2\frac{y}{x},$$

$$3^{x^2+y^2-1}-4\cdot 3^{xy}+9=0.$$

(*Román versenyfeladat*)

❄

Beküldési határidő: 2019. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5022–5029.)

B. 5022. Adott a síkon néhány egységsugarú kör, mindegyik középpontját kékre színezzük. A körvonalakon megjelölünk néhány pontot pirossal úgy, hogy minden körvonalra pontosan 2 piros pont illeszkedjen. Legfeljebb mekkora a kék pontok száma, ha összesen 25 színezett pont van?

(*3 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5023. Az ABC háromszögben $ACB\sphericalangle = 90^\circ$ és $AC > BC$. A háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontja X. A CX-re X-ben állított merőleges a CA egyenest a P pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $AP = BC$.

(*3 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 5024. Legyen p egy páratlan prímszám. A $\binom{p-2}{0}, \binom{p-2}{1}, \ldots, \binom{p-2}{p-2}$ számok mindegyikét maradékosan elosztjuk p-vel. Hányféle különböző maradékot kapunk?

(*4 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* és *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5025. Az ABC háromszög beírt körének középpontja I, a kör a BC, CA és AB oldalakat rendre a D, E és F pontokban érinti. Legyen M a BC oldal tetszőleges, D-től különböző belső pontja, a DI és EF egyenesek metszéspontja T, az MT szakasz felezőpontja K. Bizonyítsuk be, hogy a DEF, TDM és KIT körök egy ponton mennek át.

(*5 pont*) Javasolta: *Murad Agazade* (Azerbajdzsán)

B. 5026. Adott ellipszis nagytengelyének végpontjaitól különböző tetszőleges P pontját kössük össze az F_1, F_2 fókuszpontokkal. Az $F_1PF_2\sphericalangle$ szögfelezője E-ben metszi F_1F_2-t. A P-n átmenő, F_1F_2-t E-ben érintő kör PF_1-et G-ben, PF_2-t H-ban metszi. Mutassuk meg, hogy GH hossza nem függ P megválasztásától.

(*4 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5027. Gombóc Artúr az Édes utca 1. szám alatt lakik, a csokibolt pedig az utca másik végén, az n-edik szám alatt található. Artúr minden nap a következő fitneszedzést tartja: elindul a 2-es számú ház elől. Ha a k-adik számú ház előtt áll (ahol $1 < k < n$), akkor feldobja lejárt szavatosságú, de szabályos csokiérméjét. Fej esetén átmegy a $(k-1)$-es számú, míg írás esetén a $(k+1)$-es számú ház elé. Ha a csokibolt elé ér, akkor betér, és legurít egy csokigolyót, majd az $(n-1)$-es számú ház elé megy. Ha hazaér, vége az edzésnek. Naponta átlagosan hány csokigolyót gurít le Artúr?

(*5 pont*)

B. 5028. Ha P az XYZ hegyesszögű háromszög YZ oldalának egy pontja, akkor jelölje $f(P;XYZ)$ a P-ből az XY, illetve XZ egyenesekre bocsátott merőlegesek talppontjaira illeszkedő egyenest.

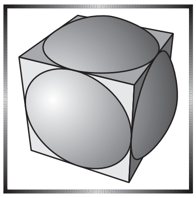
Legyen az ABC háromszög magasságpontja H, talpponti háromszöge $A'B'C'$. Legyen $A'' \equiv f(B';HCA) \cap f(C';HAB)$. Hasonlóan definiáljuk a B'' és C'' pontokat. Mutassuk meg, hogy az AA'', BB'' és CC'' egyenesek egy ponton mennek át.

(*6 pont*) Javasolta: *K V Sudharshan*

B. 5029. Tegyük fel, hogy egy focicsapat eddigi története során 1000 mérkőzést játszott és összesen 1000 pontot szerzett. (Győzelem esetén 3 pontot, döntetlen esetén 1 pontot kap, vereség esetén pedig nem kap pontot egy csapat.) Bizonyítsuk be, hogy a meccseken szerzett pontok sorozata legfeljebb $(2{,}9)^{1000}$-féle lehet.

(*6 pont*)

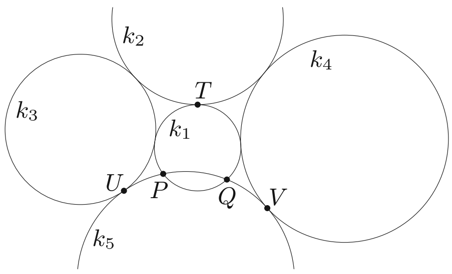
Beküldési határidő: 2019. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (749–751.)

A. 749. Adott két poliominó. Az egyik egy három négyzetből álló L-alak, a másik legalább két négyzetből áll. Bizonyítsuk be, hogy ha n és m relatív prímek, akkor az $n\times n$-es és az $m\times m$-es tábla közül legfeljebb az egyik rakható ki a két poliominó eltoltjaival.

Javasolta: *Imolay András, Matolcsi Dávid, Schweitzer Ádám* és *Szabó Kristóf* (Budapest)



A. 750. Legyen $k_1,\dots,k_5$ öt kör a síkban úgy, hogy k_1 és k_2 kívülről érintik egymást a T pontban, k_3 és k_4 kívülről érinti a k_1-et és a k_2-t is, k_5 az U, illetve a V pontban kívülről érinti k_3-at, illetve k_4-et, továbbá k_5 a P és a Q pontban metszi k_1-et az *ábra* szerint.

Mutassuk meg, hogy

$$\frac{PU\cdot PV}{QU\cdot QV}=\frac{PT^2}{QT^2}.$$

A. 751. Legyen $c>0$ valós szám, és tegyük fel, hogy bármely n pozitív egész esetén az $1^c, 2^c, 3^c, \ldots, n^c$ számoknak legalább az egy százaléka egész. Bizonyítsuk be, hogy c egész szám.

Beküldési határidő: 2019. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 481 (É). A minap képek kerültek elő egy 1980-as évekbeli lövöldözős számítógépes játékról. A programban a játékos a képernyő bal széléről elindított egy űrhajót, amelynek a megsemmisülést elkerülve kellett eljutnia a képernyő jobb szélére – ezért járt a pont. Az űrhajó útját „felülről” hulló bombák akadályozták. Az első két találatot még túlélte, a harmadiknál viszont megsemmisült. Ha egy űrhajó utolért egy másik, nála lassabb űrhajót, akkor mindkettő megsemmisült.

Ebben a feladatban könnyebb dolgunk van, mint az egykori játékosoknak, pontosan ki tudjuk számítani a bombák becsapódási idejét és az elindított űrhajók útját.

A honlapunkról letölthető `ur.txt` fájlban megtaláljuk a bombák és az elindított űrhajók adatait. Az első sor két számot tartalmaz: az első a bombák B, a második az űrhajók U száma. A következő B sorban soronként három egész szám és egy karakter, a bombák adatai szerepelnek: az első a bomba becsapódásának az űrhajó indítási helyétől mért távolsága, a következő az indítás magassága, a harmadik az indítás időpontja, a negyedik a bomba típusa, amely a becsapódáskor észlelt színhatással egyezik. Minden bomba egységnyi idő alatt egységnyi távolságot tesz meg. Az első három egész szám, az utolsó pedig egyetlen karakter. Tudjuk, hogy egy időpontban adott távolságban csak egy bomba robban. A következő U sorban soronként két egész szám, az űrhajók adatai láthatók. Az első szám az indítás időpontja, a második az űrhajó sebessége (a táv, amelyet egységnyi idő alatt megtesz, értéke 1 és 5 közötti). A fájlban a bombák adatai a távolság, azon belül az indítás magassága szerint rendezettek, az űrhajók pedig indítási sorrendben vannak.

1. Olvassuk be és tároljuk el az `ur.txt` fájl tartalmát.
2. Jelenítsük meg, hogy az indítás helyéhez legközelebbi és legtávolabbi olyan helyen, ahol indítottak bombát, összesen hány bombát indítottak.
3. Határozzuk meg, hogy hol robbant az első bomba.
4. Olvassunk be egy időpontot és határozzuk meg, hogy abban a pillanatban hol, milyen típusú bombák robbannak.

5. Határozzuk meg, hogy mely űrhajók semmisülnek meg az első 100 egységnyi távolságon belül egy másik űrhajóval való ütközés miatt.
6. Készítsük el az `eredmeny.txt` fájlt, amelybe űrhajónként jegyezzük meg, hogy mely helyeken milyen bombák találták el. Minden találathoz két szám tartozik, az első a távolság, a második a típus. Ha az űrhajó egy találatot sem kapott, a sor maradjon üresen. (Az űrhajók közötti ütközéseket ne vegyük figyelembe.)
7. Olvassunk be egy sebességadatot. Határozzuk meg, hogy mikor van az első olyan indítási időpont, amikor ezzel a beolvasott sebességgel haladva az űrhajó átjut a túloldalra. (Az űrhajók közötti ütközéseket most ne vegyük figyelembe.)

Beküldendő egy `i481.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 482. A mérgezett csoki egy nagyon egyszerűen leírható kétszemélyes játék. A játékosok felváltva „harapnak" a táblából és az veszít, aki kénytelen a mérgezett csokoládécikket „kiharapni". Ismert, hogy a kezdőnek van nyerő stratégiája, de az csak az $N\times N$ és a $2\times N$ méretű tábla esetén fogalmazható meg egyszerűen, más méretű táblát használva a játék valós izgalmat hordoz.

A játékról bővebben például a

`http://web.cs.elte.hu/szakdolg/ghorvath.pdf`

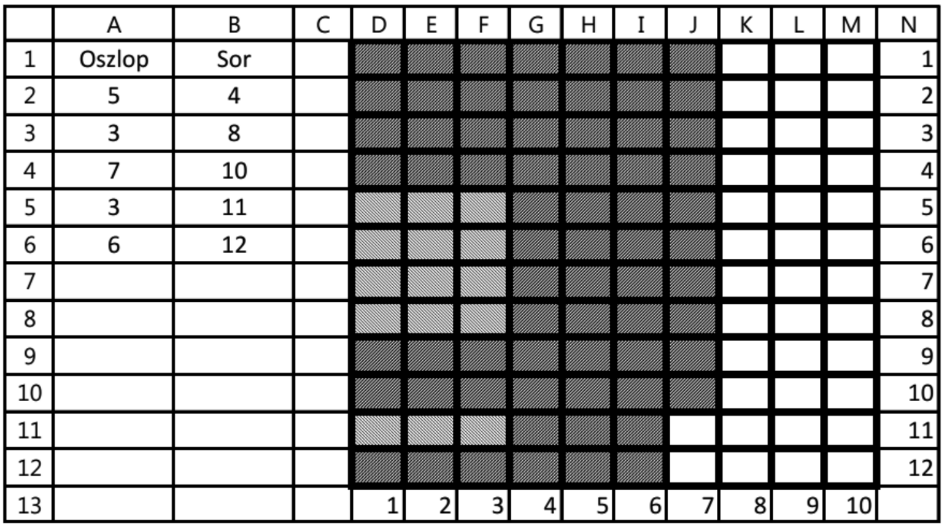
oldalon olvashatunk.

Ebben a feladatban a következő formában játszunk:

- a csokoládé tábla N sorból és M oszlopból áll;
- az egyes csokoládécikkeket két egész számmal azonosítjuk;
- a mérgezett csokoládécikk az (M,N) helyen található;
- a táblából minden lépésben legalább egy cikket „harapunk" ki, a harapást a jobb felső sarokkal adjuk meg (i,j). Ekkor minden olyan még meglévő (x,y) csokoládécikket elveszünk, amelyre $x\leqslant i$ és $y\leqslant j$.

A játékot most táblázatkezelő program segítségével valósítsuk meg* egy 10 oszlopból és 12 sorból álló tartományban. A táblát a munkafüzet Játék munkalapján jelenítsük meg a D1:M12 tartományban. A játékosok lépéseiket felváltva jegyzik be az A és B oszlopba az alábbi mintának megfelelően. A játékot kezdő játékos színe sárga, a másiké a zöld. Jelöljük sárga háttérrel a kezdő játékos lépéseinek sorait az A és a B oszlopban, valamint a játéktáblán az általa „kiharapott" csokoládécikkeket. Ugyanezeket a másik játékos esetén zölddel valósítsuk meg. A még meglévő csokoládécikkek színe legyen barna. Ha valamelyik játékos szabálytalanul lép, azaz egyetlen cikket sem harap ki, a lépés sora legyen piros. Ha valaki a mérgezett cikket veszi el és így a játék befejeződik, a lépés sora legyen fekete háttérrel és fehér karakterekkel megjelenítve. A szabálytalan és a játékzáró lépést követő sorok háttér- és szövegszíne egyaránt fehér legyen. (A minta a jobb olvashatóság érdekében csak a tábla színezését mutatja.)

*A témával foglalkoztunk már az **I. 466.** feladatban.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Oszlop	Sor												1
2	5	4												2
3	3	8												3
4	7	10												4
5	3	11												5
6	6	12												6
7														7
8														8
9														9
10														10
11														11
12														12
13				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

A szükséges segédszámításokat a Segéd munkalapon végezzük, amihez tetszőleges számú cellát használhatunk. A megoldáshoz csak beépített függvényeket alkalmazhatunk. A megoldás során törekedjünk másolható képletek használatára. (A felhasznált cellák és képletek száma a megoldás értékelését nem befolyásolja.)

Beküldendő egy `i482.zip` tömörített állományban a megoldást tartalmazó `i482` munkafüzet és a dokumentációt magában foglaló `i482.pdf` fájl. A dokumentáció tartalmazza a használt táblázatkezelő nevét, verziószámát és a megoldás során használt képleteket és azok szerepének rövid leírását.

I. 483. A címer általában pajzs alakú, szabályok szerint megszerkesztett jelvény, melyet egy intézmény vagy testület a saját maga azonosítására örökletesen, állandó jelleggel használ. A címertannal a heraldikusok foglalkoznak. Készítsük el iskolánk címerét egy SVG típusú képállományba vektorgrafikus rajzolóprogrammal. Ha az iskolai címer nem alkalmas alakzatokkal való elkészítésre, akkor helyette városi, kerületi címert is választhatunk. A rajzon használhatunk rasztergrafikus elemeket is, de minél több részletet magunk készítsünk el. A megoldáshoz ajánljuk az Inkscape (internetről ingyenesen letölthető és fölhasználható) vektorgrafikus rajzolóprogramot.

Értékelés: a pontok 80%-a kapható, ha a rajz csoportbontással összetevőkre bontható és további 20%, ha animáció mutatja be az összetevőkből a rajz összeállítását. Az animáción az alakzatok olyan sebességgel mozogjanak (forgás vagy eltolás), hogy a rajz kialakulása megfigyelhető legyen. Ilyen feladattal foglalkozott az **I. 357.** feladat.

Beküldendő a képállomány (`i483.svg`), valamint egy rövid leírás (`i483.txt`, `i483.pdf`, …), amely tartalmazza az interneten elérhető eredeti címer hivatkozását.

I/S. 35. Adott N darab téglalap a koordinátasíkon. A téglalapok oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Adjuk meg, hogy a téglalapok összesen mekkora területet fednek le.

Standard bemenet: az első sor tartalmazza az N számot. A következő N darab sor egy-egy téglalap bal fölső és jobb alsó alsó sarkának x és y koordinátáit tartalmazza. *Kimenet:* adjuk meg, hogy a téglalapok közösen mekkora területet fednek le.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`2` `0 5 4 1 / 2 4 6 2`	`20`

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10$, $-10\,000 \leqslant \text{koordináták} \leqslant 10\,000$, egész értékek. *Időlimit:* 0,5 mp.

Beküldendő egy `is35.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztő környezetben futtatható.

S. 134. Szeretnénk új könyveket venni. Egy boltban N féle könyvet árusítanak, az i-ediket P_i forintért. Szerencsére rendelkezünk K darab kuponnal. Ha az i-edik könyv megvételekor elhasználunk egy kupont, akkor azt P_i helyett R_i forintért tudjuk megvásárolni. Egy könyvnél csak egy kupont tudunk elhasználni. Adjuk meg, hogy legföljebb hány könyvet tudunk megvásárolni M forintért.

A standard bemenet első sora tartalmazza az N, K, M számokat; a következő N darab sor tartalmazza a P_i és R_i számokat. A kimeneten adjuk meg, hogy legfeljebb hány könyvet tudunk megvenni.

Példa:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`4 1 7` `3 2 / 2 2 / 8 1 / 4 3`	`3`

Korlátok: $1 \leqslant K \leqslant N \leqslant 50\,000$, $1 \leqslant M \leqslant 10^{14}$, $1 \leqslant R_i \leqslant P_i \leqslant 10^9$. *Időlimit:* 0,5 mp.

Beküldendő egy `s134.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztő környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2019. május 10.

❄

A 2019. évi Kunfalvi Rezső olimpiai válogatóverseny elméleti feladatai[1]

1. Buborékok képződése és mozgása pezsgőben

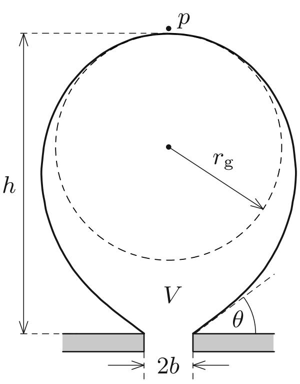
Szilveszteri koccintáskor megfigyelhetjük, hogy a pezsgőben buborékfonalak alakulnak ki, azaz a buborékok a pohár aljának vagy oldalfalának bizonyos pontjairól indulva libasorban emelkednek a felszín felé. A buborékok képződésének oka, hogy a pezsgő előállításakor az italt nagy (2-5 atmoszféra) nyomás alatt szén-dioxiddal telítik, ami légköri nyomáson túltelített oldatot eredményez, így a CO_2 gáz formájában fokozatosan kiválik a folyadékból. Ez a kiválás a pohár belső falának mikroszkopikus egyenetlenségeinél, szennyeződéseinél történik meg legnagyobb valószínűséggel, ezek az ún. nukleációs magvak. Ha egy buborékkezdemény már kialakult, akkor a gáz-folyadék határfelületen tovább folytatódik a CO_2 kiválása egészen addig, amíg a buborék olyan nagyra hízik, hogy nagy része leválik a magról. Ekkor csak egy apró buborékkezdeményt hagy maga után, amely szintén növekedésnek indul.

Ebben a feladatban a buborékok leválásának és emelkedő mozgásának leírásával foglalkozunk egy olyan egyszerű modell segítségével, amely bizonyos feltételek mellett a részletes számolások és kísérletek szerint is jól közelíti a valóságot.

1.A. Buborékok képződése és leválása

Tegyük fel, hogy a pohár alján lévő egyik nukleációs mag egy kicsiny, b sugarú, kör alakú bemélyedés, amelyen *lassan* egy buborék fejlődik (*1. ábra*). Egy adott pillanatban a buborék térfogata V, magassága h, görbületi sugara a legfelső pontjában r_g, illeszkedési szöge a pohár aljához képest θ. A folyadék nyomása közvetlenül a buborék tetejénél p.

A buborékra a folyadék hidrosztatikai nyomásától származó F_1 erő, a bezárt CO_2-gáz nyomásából származó F_2 erő, illetve a bemélyedésnél ható, felületi feszültségből származó F_3 erő hat.



1. ábra

1.A.1. *Fejezzük ki az F_1 erőt a folyadék (pezsgő) ϱ sűrűsége, a g nehézségi gyorsulás, valamint az 1. ábrán feltüntetett mennyiségek segítségével!*

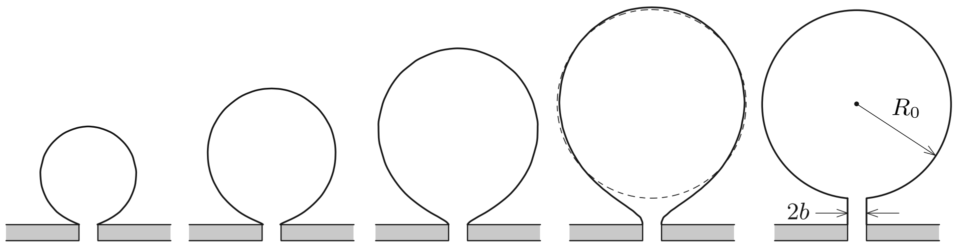
1.A.2. *Fejezzük ki az F_2 erőt a folyadék σ felületi feszültsége és az 1. ábrán látható mennyiségek segítségével!*

1.A.3. *Adjuk meg az F_3 erőt a σ felületi feszültség és az 1. ábrán látható paraméterek segítségével!*

[1] A versenyt a nemzetközi diákolimpiához hasonló körülmények között Budapesten rendezték meg 2019 márciusában. A feladatokat *Vigh Máté* állította össze.

1.A.4. *Az előző alkérdésekre kapott eredmények felhasználásával írjuk fel a buborék egyensúlyát kifejező egyenletet!*

A buborék alakját a hidrosztatikai nyomásból és a felületi feszültségből származó erők együttesen határozzák meg. Ha a buborék mérete sokkal kisebb egy bizonyos κ hosszúságnál, akkor a buborék nagy része (egy vékony „nyaktól" eltekintve) jó közelítéssel gömb alakú marad még a nukleációs magról való leszakadáskor is, ahogy az a *2. ábra* első négy rajzán látható.



2. ábra

1.A.5. *Adjunk becslést κ értékére a pezsgő ϱ sűrűsége, a g nehézségi gyorsulás és a σ feszültség segítségével! (Feltehetjük, hogy a CO_2 gáz sűrűsége jóval kisebb a folyadék sűrűségénél.)*

A továbbiakban tegyük fel, hogy a buborék mérete sokkal kisebb, mint κ! Ekkor a buborék alakja a leválás pillanatában egy R_0 sugarú gömbbel és a hozzá csatlakozó b sugarú, henger alakú, vékony ($b \ll R_0$), rövid nyakkal modellezhető (lásd a 2. ábra utolsó rajzát).

1.A.6. *Fejezzük ki a bemélyedés (és a buborék nyakának) b sugarát az éppen leváló buborék R_0 sugara, valamint ϱ, g és σ segítségével! Használjuk fel, hogy $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$, ha $|\varepsilon| \ll 1$.*

1.A.7. *Számítsuk ki az éppen leváló buborék R_0 sugarát, ha $\varrho = 10^3$ kg/m^3, $g = 9{,}8$ m/s^2, $\sigma = 50$ mN/m és $b = 0{,}5$ μm.*

1.B. Buborékok felszálló mozgásának leírása

A buborék belsejében lévő szén-dioxid mennyisége a nukleációs magról történő leválás után tovább növekszik. Ennek üteme jó közelítéssel arányos a buborék falának A felszínével:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \gamma A,$$

ahol γ egy állandó, ΔN pedig a kicsiny Δt idő alatt a folyadékból kiváló CO_2-molekulák száma.

A feladat következő részében tételezzük fel, hogy a pezsgő (és a benne lévő buborék) hőmérséklete mindvégig az ideális $T = 15$ °C, a buborék jó közelítéssel gömb alakú marad, a légköri nyomás értéke pedig $p_0 = 10^5$ Pa.

1.B.1. *Adjuk meg a buborék $R(t)$ sugarát a leválás után t idő elteltével R_0, γ, T, p_0 és univerzális állandó(k) felhasználásával!*

A felfelé mozgó buborékra a hidrosztatikai felhajtóerő és a v sebességgel arányos nagyságú ún. Stokes-féle közegellenállási erő hat: $F_{\text{Stokes}} = 6\pi R\eta v$, ahol R a buborék pillanatnyi sugara, η pedig a folyadék belső súrlódását jellemző ún. viszkozitás.

1.B.2. *Adjuk meg a buborék $v(t)$ sebességét a leválás után t idő elteltével R_0, γ, T, p_0, ϱ, g, η és univerzális állandó(k) felhasználásával!*

A pohárban $H = 10$ cm magasan áll a pezsgő. A pohár aljáról induló buborék $t_0 = 1{,}2$ s alatt éri el a felszínt. A pezsgő viszkozitása $\eta = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ Pa · s. Ha az **1.A.7.** alkérdésben nem sikerült meghatározni a leváló buborék R_0 sugarát, akkor azt vegyük $R_0 = 0{,}16$ mm-nek!

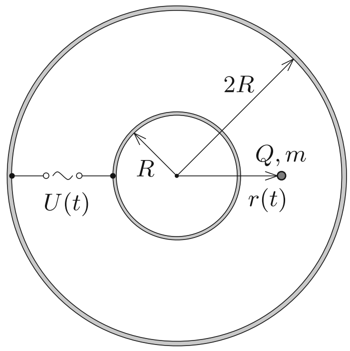
1.B.3. *Mekkora a buborék $R(t_0)$ sugara, amikor eléri a felszínt? Adjuk meg a sugár számszerű értékét is!*

Matematikai segítség: Szükségünk lehet a következő integrálra:

$$\int (a + bx)^n \, \mathrm{d}x = \frac{(a + bx)^{n+1}}{b(n + 1)} + \text{konstans}.$$

2. Ponttöltés mozgása oszcilláló elektromos térben

Egy gömbkondenzátor két koncentrikus, R és $2R$ sugarú, igen jól vezető fémgömbhéjból áll; a gömbök közötti térben vákuum van. A kondenzátor fegyverzetei közé egy váltóáramú feszültségforrást helyezünk, amit egy-egy sugárirányú, egyenes vezetékkel csatlakoztatunk a gömbökhöz (*3. ábra*). A gömbökre kapcsolt feszültség $U(t) = U_0 \cos\omega t$ módon változik az idő függvényében.



3. ábra

2.1. *Határozzuk meg a gömbkondenzátor kapacitását! A választ R és univerzális állandó(k) segítségével adjuk meg!*

Ha a váltakozó feszültség körfrekvenciája nem túl magas, a kondenzátor feszültsége (az igen jól vezető gömbök miatt) „követi” a feszültségforrást, a fáziskésés lényegében zérus (ez a kvázisztatikus eset). Ha azonban a váltakozó feszültség ω körfrekvenciája megközelít egy bizonyos ω_1 értéket, akkor a rendszer induktív ellenállása számottevő lesz, így a kvázisztatikus közelítés nem alkalmazható.

2.2. *Adjunk nagyságrendi becslést ω_1 értékére, ha* $R = 10$ cm. *Ismert továbbá, hogy a vákuum dielektromos állandója* $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ $\mathrm{C^2/(Nm^2)}$, *permeabilitása* $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/(Am).

A továbbiakban tegyük fel, hogy $\omega \ll \omega_1$! A gömbök közötti térben, a feszültségforrással átellenes oldalon egy $+Q$ töltésű, m tömegű kis porszem található. Feltételezhetjük, hogy a porszemre ható nehézségi erő hatása a feladat során végig elhanyagolható. Jelöljük a porszem gömbök középpontjától mért távolságát r-rel! Ha a váltakozó feszültség körfrekvenciája sokkal nagyobb egy bizonyos ω_2 értéknél, akkor a gyöngy mozgása felbontható egy lassú, sodródó mozgásra és egy akörül gyorsan oszcilláló, kis $A(t)$ amplitúdójú rezgőmozgásra: $r(t) = r_0(t) + A(t)\cos\omega t$, ahol $A(t) \ll r_0(t)$, valamint $A(t)$ és $r_0(t)$ lassan változó függvények. Ez azt jelenti, hogy teljesülnek az $\ddot{r}_0(t)$, $\ddot{A}(t)$, $\dot{A}(t)\omega \ll A(t)\omega^2$ relációk (a mennyiség fölé tett pont és kettőspont az első és második idő szerinti deriváltat jelöli).

2.3. *Adjunk nagyságrendi becslést ω_2 értékére m, Q, R és U_0 segítségével! Számítsuk ki ω_2 becsült értékét $R = 10$ cm, $m = 10^{-16}$ kg, $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ C, $U_0 = 1{,}0$ V esetén!*

A következő feladatokban tegyük fel, hogy $\omega_2 \ll \omega \ll \omega_1$! A porszem gyorsulása az

$$\ddot{r}(t) = \frac{\alpha}{r(t)^2}\cos\omega t \tag{2.1}$$

egyenlet szerint változik az idő függvényében, ahol α állandó paraméter.

2.4. *Fejezzük ki az α paraméter értékét m, Q, R és U_0 segítségével!*

2.5. *Az említett közelítések segítségével adjuk meg a gyors oszcilláció $A(t)$ amplitúdóját α, $r_0(t)$ és ω felhasználásával!*

A (2.1) egyenlet egy periódusidőre vett átlagolásával összefüggést állapíthatunk meg a porszem lassú, sodródó mozgását leíró $r_0(t)$ függvény és annak $\ddot{r}_0(t)$ gyorsulása között. A lassan változó mennyiségek – $A(t)$ és $r_0(t)$ – egy periódus alatt alig változnak, így az időátlagolás során állandónak vehetők.

2.6. *Az eddig használt közelítéseket és a* **2.5.** *alkérdés eredményét felhasználva fejezzük ki a lassan sodródó mozgás $\ddot{r}_0(t)$ gyorsulását $r_0(t)$, α és ω segítségével!*

2.7. *Feltételezve, hogy a $t = 0$ időpillanatban a porszem a kisebb fémgömb felületének közeléből indult, határozzuk meg, mekkora sodródási sebességgel ér el a porszem a nagyobb gömbhöz! Az eredményt m, Q, R, U_0 és ω segítségével adjuk meg!*

Matematikai segítség: Szükségünk lehet a következő integrálra:

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{konstans.}$$

2.8. *Adjuk meg a porszem sodródási sebességének számszerű értékét akkor, amikor eléri a nagy gömböt! Legyen $\omega = 2 \cdot 10^5$ 1/s, $R = 10$ cm, $m = 10^{-16}$ kg, $Q = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$ C, $U_0 = 1{,}0$ V!*

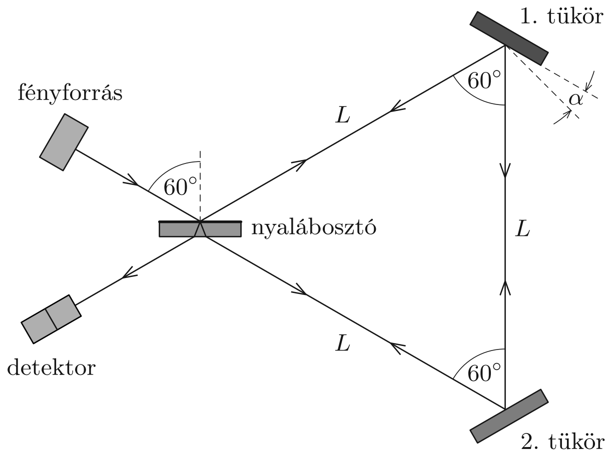
3. Száloptikás giroszkóp

A mechanikus giroszkóp a pörgettyű elvén működő eszköz, amelynek lelke egy olyan lendkerék, amelynek szimmetriatengelye a háromtengelyű felfüggesztésnek köszönhetően szabadon el tud fordulni. A felpörgetett kerék a perdületmegmaradás miatt a felfüggesztés mozgatásakor is megőrzi eredeti forgástengelyét, így alkalmas irányok megtartására és szögsebességmérésre is.

A száloptikás giroszkóp csak a felhasználási módjában hasonlít a mechanikus giroszkópra, hiszen ez is alkalmas egy forgó koordináta-rendszer szögsebességének meghatározására. Az eszköz lényegében egy ún. Sagnac-féle interferométer száloptikás változata, amelyben az interferáló fényhullámok fáziskülönbsége függ a koordináta-rendszerrel együtt forgó eszköz szögsebességétől. Ez a feladat a száloptikás giroszkóp működési elvével foglalkozik.

3.A. A Sagnac-féle interferométer

A Sagnac-féle interferométer egyik változatát a *4. ábra* mutatja. Ez az eszköz két ideális síktükörből és egy nyalábosztóból áll, amelyek egy L oldalú szabályos háromszög alakjában vannak elrendezve. A nyalábosztóra 60°-os beesési szögben I_0 intenzitású, λ hullámhosszúságú monokromatikus síkhullám esik a fényforrásból. A nyalábosztó egy dielektromos (szigetelő) anyagból készült vékony plánparallel lemez, amelynek felső lapja féligáteresztő tükörként viselkedik, azaz a rá eső fény intenzitásának felét visszaveri, másik felét pedig átengedi. A nyalábosztó alsó lapja egy vékony bevonatnak köszönhetően nem tükröző.



4. ábra

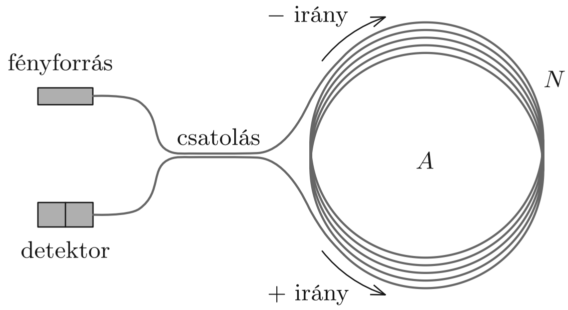
A nyalábosztón való áthaladás után a fény az óramutató járásával megegyező, és azzal ellentétes irányban is végigpattog a tükrökön, míg végül mindkét hullám újra a nyalábosztóhoz érkezik. Itt a hullámok ismét kettéválnak fele-fele intenzitásarányban, így a hullámok egy része a fényforrásba visszajutva egyesül, másik része pedig (egymással interferálva) a detektorba jut.

3.A.1. *Az interferométer alaphelyzetében mekkora intenzitást mér a detektor, és mekkora intenzitású fény jut vissza a fényforrásba?*

3.A.2. *Az interferométer 1. tükrét kicsiny α szöggel elforgatjuk a 4. ábrán látható módon. Változik-e, és ha igen, hogyan változik a detektor által mért intenzitás α függvényében?*

3.B. A száloptikás Sagnac-féle interferométer, mint giroszkóp

A 4. ábrán bemutatott interferométert optikai szálak segítségével is meg lehet valósítani (*5. ábra*). Az optikai szálak fényvezető magjának törésmutatójáról tételezzük fel, hogy 1-hez közeli érték. A használt fény hullámhossza λ, a fényforrásból kiinduló intenzitás a szálban I_0. Az egyenlő intenzitású nyalábosztást két optikai szál közötti csatolással valósítják meg: ha a két szál fényvezető magja elég közel helyezkedik el egymáshoz, az elektromágneses hullám „átcsatolódhat” az egyik szálból a másikba. Ha a csatoláshoz egy bejövő hullám érkezik, akkor a két továbbhaladó hullám egymáshoz viszonyított fáziskülönbsége $\pi/2$ lesz. A fényforrás felől érkező nyaláb két fele az óramutató járásával azonos $(-)$, illetve azzal ellentétes $(+)$ irányban halad végig N darab, egyenként A területű hurkon, míg a csatoláson újra áthaladva a detektorba, valamint a fényforrásba jut.



5. ábra

Ha az 5. ábrán látható interferométert a kör alakú hurkok középpontja körül Ω szögsebességgel megforgatjuk, akkor a + és − irányba haladó hullámok hullámhossza a Doppler-effektus miatt kicsit megváltozik. Így a detektor által mért intenzitás Ω függvénye lesz.

3.B.1. *Határozzuk meg a + és − irányba terjedő hullámok ϕ fáziskülönbségét, amikor a detektorba érnek! A választ λ, A, N és Ω univerzális állandó(k) segítségével adjuk meg!*

3.B.2. *Adjuk meg a detektor által mért intenzitást a + és − irányba terjedő hullámok ϕ fáziskülönbsége és I_0 segítségével!*

3.B.3. Egy tipikus száloptikás giroszkópban 200 m hosszú optikai szál van feltekerve egy $d = 10$ cm átmérőjű, függőleges tengelyű csévetestre. Mekkora fáziskülönbséget mérhetünk a két nyaláb között Budapesten a Föld forgása miatt? (Budapest földrajzi szélessége kb. 47°.)

Fizika gyakorlatok megoldása

G. 652. *Egy test nyugalomból indulva egy egyenes mentén mozog úgy, hogy gyorsulása időben egyenletesen növekszik a kezdeti zérus értékről másodpercenként* $2\ \mathrm{m/s^2}$ *értékkel. Mekkora a test sebessége az indulást követően* 4 *másodperc múlva?* (*4 pont*)

Megoldás. A gyorsulás–idő grafikon alatti terület megegyezik a pillanatnyi sebesség változásával. Esetünkben a test nyugvó helyzetből indul, az $a(t)$ függvény $0 \leqslant t \leqslant t_0$ időtartamra vonatkozó grafikonjának görbe alatti területe éppen $v(t_0)$-t adja meg.

Egyenletesen növekvő gyorsulású mozgásnál (ha a kezdeti gyorsulás nulla) a gyorsulás–idő függvény grafikonja egy (az origón átmenő) egyenes. Az egyenes alatti terület egy olyan derékszögű háromszög területével egyezik meg, amelynek egyik befogója $t_0 = 4$ s, a másik befogó pedig

$$a(t_0) = (4\ \mathrm{s}) \cdot 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A háromszög területe, tehát a gyorsulva gyorsuló test végsebessége:

$$v(t_0) = \frac{1}{2}\,(4\ \mathrm{s}) \cdot \left(8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 16\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Kis-Bogdán Kolos (Pécsi Janus Pannonius Gimn., 10. évf.)

88 dolgozat érkezett. Helyes 51 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 9, hibás 20, nem versenyszerű 3 dolgozat.

G. 655. *Egy* 27 kg *tömegű, tömör téglát vízszintes asztallapra helyezünk. Ha az egyik lapjára fektetjük,* 4500 Pa *nyomást fejt ki az asztallapra. Egy másik lapjára fektetve* 7200 Pa, *a harmadik lapra fektetve pedig* 2700 Pa *lesz a nyomás. Mekkora a tégla sűrűsége?*

(*4 pont*)

Megoldás. Legyen a tégla tömege m, oldalainak hossza a, b és c. Ekkor a térfogata $V = abc$, sűrűsége pedig

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{abc}.$$

Az $a \cdot b$ területű lapjára fektetett tégla

$$p_{ab} = \frac{mg}{ab} = 2700\ \mathrm{Pa} \tag{1}$$

nyomást fejt ki az asztalra, és hasonlóan számolva

$$p_{bc} = \frac{mg}{bc} = 4500\ \mathrm{Pa}, \tag{2}$$

$$p_{ac} = \frac{mg}{ac} = 7200\ \mathrm{Pa}. \tag{3}$$

(A megadott nyomások sorrendje nyilván lényegtelen.)

Az (1) egyenletet (2)-vel elosztva a tömeg kiesik:

$$\frac{p_{ab}}{p_{bc}} = \frac{c}{a}, \tag{4}$$

majd (3) és (4) szorzatából az a oldal hossza kifejezhető:

$$\frac{p_{ab}p_{ac}}{p_{bc}} = \frac{mg}{ac}\cdot\frac{c}{a}, \qquad \text{ahonnan} \qquad a = \sqrt{\frac{p_{bc}}{p_{ab}p_{ac}}\,mg}.$$

Hasonlóképpen adódik a másik két oldal hossza is:

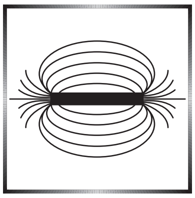
$$b = \sqrt{\frac{p_{ac}}{p_{ab}p_{bc}}\,mg} \qquad \text{és} \qquad c = \sqrt{\frac{p_{ab}}{p_{ac}p_{bc}}\,mg}.$$

A tégla keresett sűrűsége tehát

$$\varrho = \frac{m}{abc} = \sqrt{\frac{p_{ab}p_{bc}p_{ac}}{mg^3}} = 1852\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Hruby Lili (Budapest, ELTE Trefort Ágoston Gyak. Gimn., 10. évf.)

94 dolgozat érkezett. Helyes 74 megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 10, hiányos (2 pont) 5, hibás 2, nem versenyszerű 3 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 5058. *Egy hóbortos alaszkai vállalkozó különleges kalandparkot működtet. Egy nagyon magas jéghegy belsejében csavarvonal alakú bobpályát épít. A csavarvonal tengelye függőleges, átmérője d, menetemelkedése h. A pálya a hegy tetejétől indul, és a hegy aljánál egy rövid, súrlódásmentesnek tekinthető kanyar után s hosszúságú, vízszintes, egyenes szakaszban végződik. A pálya nagyon hosszú (az utasok számára „végtelen hosszúnak” tűnik), és a bobok (amelyeken sem kormány, sem fék nincsen) éppen a vízszintes szakasz végén állnak meg. (Az egyszerűség kedvéért tekintsük a bobokat tömegpontoknak.)*

a) Mekkora a csúszási súrlódási együttható a bob fémteste és a jég között?

b) Mekkora a bobok legnagyobb sebessége?

Adatok: $d = 10$ m, $h = 1{,}5$ m, $s = 270$ m.

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A csavarvonal alakú pályán lecsúszó bob sebessége fokozatosan növekszik, emiatt egyre nagyobb lesz a járművet a pályához szorító „nyomóerő”, és ezzel arányosan növekszik a súrlódási erő is. Az állandósult (maximális) sebességnek megfelelő állapotban (amit a bob természetesen nem ér el, csak megközelíti azt) a súrlódási erő megegyezik a nehézségi erő érintő irányú komponensével, a „mozgatóerővel”.

Jelöljük a csavarvonal érintőjének a vízszintes síkkal bezárt szögét α-val! Mivel a csavarvonal vízszintes vetületének sugara $r = d/2$, a görbe meredeksége:

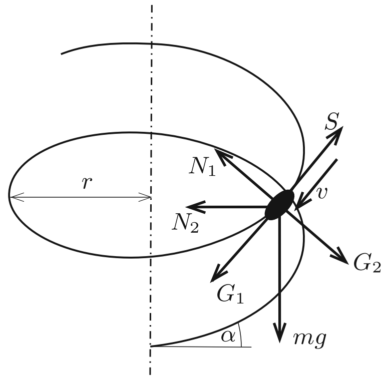
$$(1)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2r\pi}, \quad \text{ebből} \quad \alpha = 2{,}73^\circ.$$

A mozgatóerő (ha a bob és az utasának együttes tömege m) az mg nagyságú nehézségi erőnek a mozgás irányába eső összetevője

$$(2)\qquad G_1 = mg\sin\alpha,$$

a pálya érintőjére merőleges komponense pedig

$$(3)\qquad G_2 = mg\cos\alpha.$$

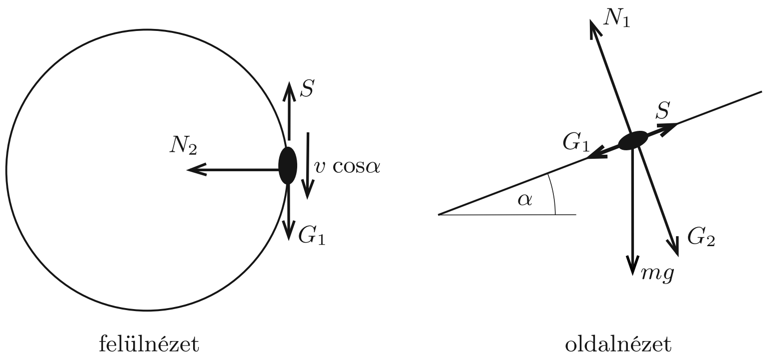


1. ábra

Jelöljük a jégpálya által a bobra kifejtett nyomóerőt $\boldsymbol{N}$-nel, aminek a pálya érintősíkjába eső, de az érintőre merőleges komponense N_1, az erre merőleges (a csavarvonal függőleges tengelye felé mutató) összetevője pedig N_2. A súrlódási erő:

$$(4)\qquad S = \mu|\boldsymbol{N}| = \mu\sqrt{N_1^2 + N_2^2}.$$

Megjegyzés. Feltételezzük, hogy a jéghegyben az alagút kör keresztmetszetű, így a kanyarodó bob a szabadtéri pályákhoz hasonlóan „be tud állni” a pálya megfelelő részébe.



2. ábra

A mozgásegyenletek (a *2. ábrán* látható irányokban):

$$(5)\qquad G_1 - S = 0,$$

$$(6)\qquad G_2 - N_1 = 0,$$

$$(7)\qquad N_2 = \frac{m(v_{\max}\cos\alpha)^2}{r}.$$

Felírhatjuk még a munkatételt a vízszintes pályaszakaszon történő fékeződésre:

$$\mu m g \cdot s = \frac{1}{2} m v_{\max}^2. \tag{8}$$

Az (1)–(8) összefüggésekből algebrai átalakítások után μ-re a következő (hiányos) negyedfokú egyenletet kapjuk:

$$16 \frac{s^2 \cos^4 \alpha}{d^2} \mu^4 + \mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0,$$

ami $x = \mu^2$-re nézve másodfokú. Az adatok behelyettesítése után ezt kapjuk:

$$11\,611{,}14\, x^2 + 0{,}997\,7\, x - 0{,}002\,27 = 0.$$

Ennek pozitív gyöke: $x = 4 \cdot 10^{-4}$, ahonnan a csúszási súrlódási együttható $\mu = 0{,}02$. A bobok legnagyobb sebessége (8)-ból számolható:

$$v_{\max} = \sqrt{2\mu g s} = 10{,}4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 37\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn. 10. évf.)
dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 15, hiányos (1–3 pont) 17 dolgozat.

P. 5059. *Mennyi idő alatt esik be egy test a Napba, ha a Naptól* 50 CSE *távolságból, kezdősebesség nélkül indul? Mennyi idő alatt teszi meg a pályája felét?*

(*5 pont*) *Némedi István* (1932–1998) feladata nyomán

Megoldás. A Napba esést felfoghatjuk egy elfajult (elhanyagolhatóan kicsi kistengelyű) ellipszispályán való keringésként. A Napba esés ideje a T keringési idő fele. Kepler III. törvénye szerint a $2a$ nagytengelyű ellipszisnél

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{állandó} = 1\ \frac{\text{év}^2}{\text{CSE}^3}.$$

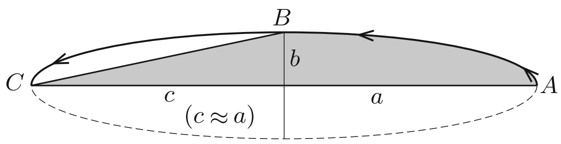
(Az állandó nagyságát a Föld adataiból kaptuk meg.)

Az 50 CSE távolságból a Napba eső test mozgásának ideje megegyezik az $a = 25$ CSE félnagytengelyű ellipszis menti mozgás keringési idejének felével:

$$T_{\text{esés}} = \frac{1}{2} \sqrt{1\ \frac{\text{év}^2}{\text{CSE}^3} \cdot (25\ \text{CSE})^3} = 62{,}5\ \text{év}.$$

Kepler II. törvénye szerint az *ábrán* látható $A \to B$ és $A \to C$ utak megtételéhez szükséges időtartamok aránya a szürkén jelölt rész területének és a fél ellipszis területének arányával egyezik meg:

$$\frac{T_{AB}}{T_{AC}} = \frac{\frac{ab\pi}{4} + \frac{bc}{2}}{\frac{ab\pi}{2}} \approx \frac{\frac{ab\pi}{4} + \frac{ab}{2}}{\frac{ab\pi}{2}} = \frac{\pi + 2}{2\pi} = 0{,}818.$$

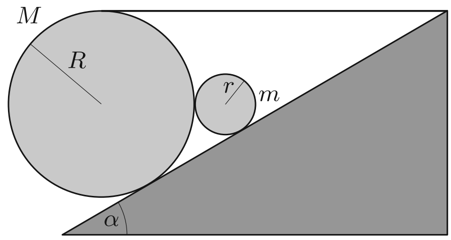


(Kihasználtuk, hogy $b \ll a$ esetén $c \approx a$.) A pálya felének megtételéhez szükséges idő tehát $0{,}818 \cdot 62{,}5$ év $= 51{,}1$ év.

Boros Máté (ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn. és Koll., 12. évf.)

52 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 16, hibás 4 dolgozat.

P. 5069. *Egy α hajlásszögű lejtőre M tömegű, R sugarú, tömör hengert helyeztünk, amit egy vízszintes kötél köt össze a lejtő tetejével az* ábrán *látható módon. A test mellett található még egy m tömegű, r sugarú tömör henger. A két henger közötti súrlódás elhanyagolható, és az M tömegű henger nem emelkedik meg. Legalább mekkora az R sugarú henger és a lejtő közötti tapadási súrlódási együttható, ha a hengerek nem csúsznak meg a lejtőn?*



Adatok: $\alpha = 30°$, $R = 3r$, $M = 3m$.

(*5 pont*) Közli: *Takács Árpád,* Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium

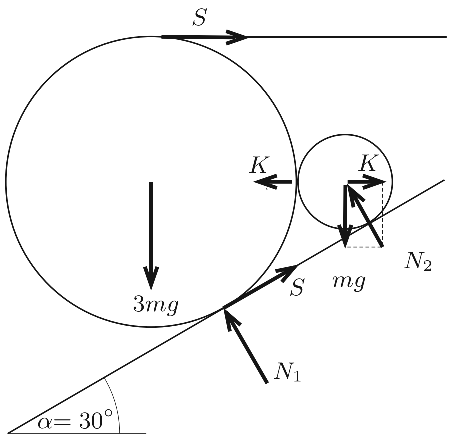
Megoldás. A geometriai adatokból következik, hogy a hengerek tengelye ugyanolyan magasságban van. Mindkét test nyugalomban van, tehát a rájuk ható erők eredője és ezen erők eredő forgatónyomatéka a két hengerre külön-külön nulla. A vektorok összege akkor lehet nulla, ha a vízszintes és a függőleges vektorkomponensek előjeles összege külön-külön nulla.

Mielőtt felírnánk ezeket az összefüggéseket, a következő megállapításokat tehetjük:

– A két henger között ható erő vízszintes (az érintősíkjukra merőleges), hiszen a hengerek közötti súrlódás elhanyagolható.

– A kis henger és a lejtő között nem hat súrlódási erő, még akkor sem, ha a felületük nem csúszós. Ha ugyanis fellépne ilyen erő, akkor annak lenne forgatónyomatéka a kis henger szimmetriatengelyére, míg a másik két erő (a nehézségi erő és a nagy henger által kifejtett erő) hatásvonala átmegy a szimmetriatengelyen, tehát a forgatónyomatékuk nulla.

– A nagy hengerre ható erők közül csak a lejtő által kifejtett (a lejtő esésvonalával párhuzamos) súrlódási erőnek és a kötél által kifejtett (vízszintes irányú) kényszererőnek van (a henger szmmetriatengelyére vonatkoztatott) forgatónyomatéka. Mivel az erőkarok egyenlő (R) hosszúságúak, a két erő nagysága is ugyanakkora.



Vegyük fel a hengerekre ható erőket – a fentiek figyelembevételével – az *ábrán* látható módon!

A kis hengerre ható három erő zárt vektorháromszöget alkot, emiatt

$$K = mg\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{mg}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

A nagy hengerre ható vízszintes erőkomponensek egyensúlyából

$$S(1+\cos 30^\circ) - K - N_1 \sin 30^\circ = 0,$$

vagyis (1)-et is felhasználva

$$S\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}N_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}mg. \tag{2}$$

Végül a függőleges erők egyensúlyának feltétele:

$$\frac{1}{2}S + \frac{\sqrt{3}}{2}N_1 = 3mg. \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenletrendszer megoldása:

$$N_1 = \left(4 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) mg \approx 2{,}85\,mg, \qquad S = \frac{4}{2+\sqrt{3}}mg \approx 1{,}07\,mg.$$

(Látható, hogy a nagy henger valóban nem emelkedik fel a lejtőről, hiszen $N_1 > 0$.)

A nagy henger nem csúszik meg a lejtőn, ha $S \leqslant \mu N_1$, vagyis a tapadó súrlódási együttható

$$\mu \geqslant \frac{S}{N_1} = \frac{4\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-2\right)} = \frac{18-8\sqrt{3}}{11} \approx 0{,}38.$$

Horváth Ádám (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 10. évf.) és
Jánosik Áron (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

64 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 15, hiányos (1–3 pont) 12, hibás 1 dolgozat.

P. 5076. *Egy optikai rácsot a résekre merőlegesen, de a rács síkjához képest ferdén, 45°-os szögben világítunk meg monokromatikus, λ hullámhosszúságú lézerfénnyel. Határozzuk meg az elhajlási kép intenzitásmaximumainak számát és irányát, ha a rácsállandó*

a) $d = \lambda$;

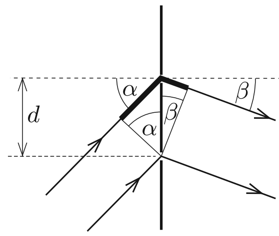
b) $d = 5\lambda$.

(*5 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc* (Budapest)

Megoldás. Akkor keletkezik intenzitásmaximum, ha az *1. ábrán* vastagabban jelölt rész (optikai útkülönbség) a hullámhossz egész számú többszöröse:

$$d\sin\alpha + d\sin\beta = m\lambda \quad (m \in \mathbb{Z}),$$

$$\beta = \arcsin\left(m\frac{\lambda}{d} - \sin\alpha\right).$$



1. ábra

Készítsünk táblázatot $\beta(m)$-ről a $-1 \leqslant m\frac{\lambda}{d} - \sin\alpha \leqslant +1$ tartományba eső egész m-ekre! (A kiszámított szögeket egész fokra kerekítve adtuk meg.)

a) $d = \lambda$:

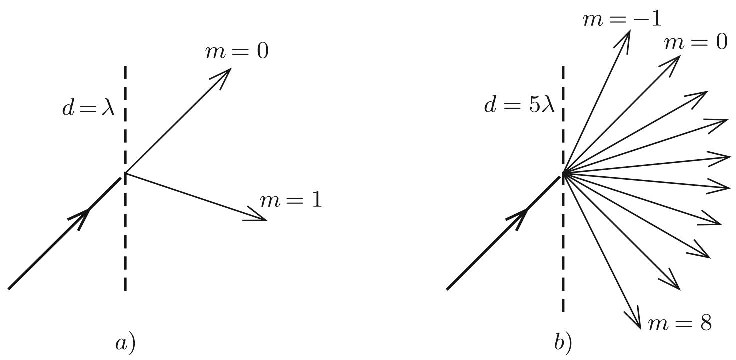
m	0	1
β [°]	−45	17

b) $d = 5\lambda$:

m	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
β [°]	−65	−45	−30	−18	−6	+5	+17	+29	+44	+63

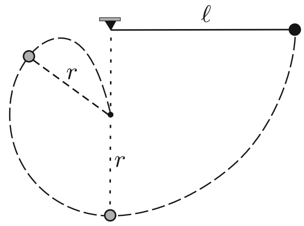
Fülöp Sámuel Sihombing (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Az elhajlási kép intenzitásmaximumai mind a beeső fénysugárhoz képest, mind pedig a rács síkjához képest aszimmetrikusan helyezkednek el (*2. ábra*). Az elhajlási maximmok száma $2d/\lambda$-hoz közeli egész szám.



2. ábra

9 dolgozat érkezett. Helyes Csépányi István, Fülöp Sámuel Sihombing, Makovsky Mihály és Olosz Adél megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2 pont) 2, hibás 2 dolgozat.

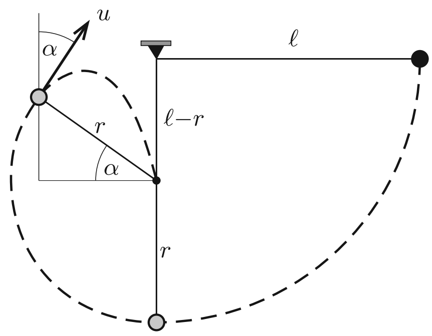


P. 5088. *Egy ℓ hosszúságú fonálingát vízszintesen kitérítünk, majd elengedünk. Amikor a fonál eléri a függőleges helyzetét, egy szögbe ütközik, s innen kezdve már csak az alsó, r hosszúságú része lendül tovább.*

Mekkora az r/ℓ arány, ha az ingatest, miután felfelé haladva letér valahol a körpályáról, szabadon mozogva pontosan a szögbe ütközik?

(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Legyen a körpályáról való letérés pillanatában a test sebessége u, a fonálnak a vízszintessel bezárt szöge pedig α (lásd az *ábrát*).



A körpályáról letérésnek pillanatában a fonálerő nulla, tehát a test fonálirányú gyorsulását a nehézségi erő fonálirányú komponense biztosítja:

$$mg\sin\alpha+0=m\frac{u^2}{r},$$

vagyis

$$u^2=rg\sin\alpha. \tag{1}$$

A test további pályája a ferde hajításnak megfelelő parabola, amely áthalad a fonalat megakasztó szög pontján.

$$ut\sin\alpha=r\cos\alpha,$$

$$\frac{g}{2}t^2-ut\cos\alpha=r\sin\alpha.$$

Az idő kiküszöbölése után kapjuk, hogy

$$\frac{r^2g}{2u^2}\,\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}-r\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=r\sin\alpha,\quad \text{vagyis}\quad \frac{rg}{2u^2}=\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha},$$

majd ebből (1) felhasználásával

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \text{tehát}\qquad \alpha=35{,}26^\circ,$$

valamint

$$u^2=rg\sin\alpha=\frac{rg}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

adódik.

Az energiamegmaradás szerint

$$\frac{1}{2}mu^2 = mg(\ell - r - r\sin\alpha),$$

ahonnan (2)-t is felhasználva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{2}\,\frac{rg}{\sqrt{3}} = g\left(\ell - r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right).$$

Innen a keresett arány:

$$\frac{r}{\ell} = 2\big(2-\sqrt{3}\big) \approx 0{,}54.$$

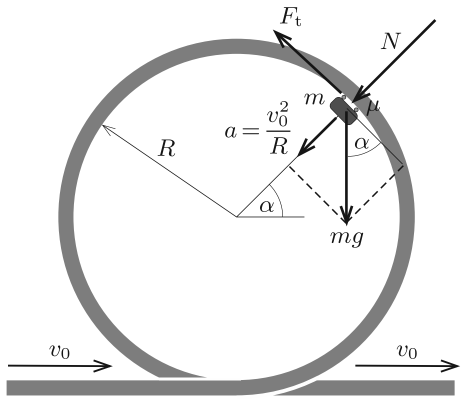
Marozsák Tádé (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

39 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 5 dolgozat.

P. 5099. *Egy hullámvasút kocsija egy függőleges síkban fekvő, kör alakú pályán halad úgy, hogy a saját motorját és fékjét használva a sebességét állandó értéken tartja. Legalább mekkora sebességet kell tartania ahhoz, hogy az R sugarú pályán megcsúszás nélkül tudjon végighaladni, ha a tapadó súrlódás együtthatója μ? Hol csúszna meg, ha a sebessége ennél kicsit kisebb lenne? A kocsi elég kicsi a pálya sugarához képest.*

(*6 pont*) Közli: *Takács László,* Baltimore, USA

I. megoldás. Tekintsük az *1. ábrán* látható módon az α szöggel jellemzett helyen a kocsira ható erőket, és bontsuk fel ezeket sugárirányú (radiális) és érintőirányú (tangenciális) összetevőkre! (A körpálya középpontja irányába mutató radiális vektorkomponenseket, illetve az óramutató járásával ellentétes irányú tangenciális komponenseket tekintjük pozitívnak.)



1. ábra

Ha a kocsi állandó v_0 sebességgel mozog, a mozgásegyenletei:

$$(1)\qquad mg\cos\alpha - F_t = 0,$$

$$(2)\qquad \frac{mv_0^2}{R} = N + mg\sin\alpha.$$

(Itt F_t a kocsira ható tapadó súrlódási erő, N pedig a sínek által kifejtett radiális nyomóerő.) Mivel a csúszásmentesség feltétele $|F_t| \leqslant \mu N$, (1) és (2) alapján fennáll:

$$\mu mg|\cos\alpha| \leqslant \mu\frac{mv_0^2}{R} - \mu mg\sin\alpha,$$

vagyis

$$\mu\frac{v_0^2}{Rg} \geqslant \mu\sin\alpha + |\cos\alpha|. \tag{4}$$

A továbbiakban ($\cos\alpha$ előjelétől függően) két esetet kell vizsgálnunk.

1. Ha $\cos\alpha > 0$, vagyis a kocsi a motorját használva a pálya jobb oldali részén felfelé halad, akkor

$$\mu\frac{v_0^2}{Rg} \geqslant \mu\sin\alpha + \cos\alpha. \tag{5}$$

A súrlódási együtthatót érdemes $\mu = \operatorname{tg}\varepsilon$ alakban felírni (ε az ún. súrlódási határszög), mert ennek segítségével (5) így írható:

$$\frac{v_0^2}{Rg}\,\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} \geqslant \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\sin\alpha + \cos\alpha,$$

azaz

$$\frac{v_0^2}{Rg}\cdot\sin\varepsilon \geqslant \sin\alpha\sin\varepsilon + \cos\alpha\cos\varepsilon \equiv \cos(\alpha-\varepsilon). \tag{6}$$

Ennek az egyenlőtlenségnek minden $-90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$ szögre, így $\alpha = \varepsilon$ esetén is fenn kell állnia. Ekkor a csúszásmentes mozgás sebességére a

$$v_0 \geqslant \sqrt{\frac{Rg}{\sin\varepsilon}} = \sqrt{Rg\sqrt{\frac{\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon}{\sin^2\varepsilon}}} = \sqrt{Rg\sqrt{\frac{1}{\mu^2}+1}} \tag{7}$$

alsó korlátot kapjuk. Ha ez a feltétel *éppen* nem teljesül, akkor a hullámvasút kocsija az $\alpha_{1.\mathrm{krit.}} = \varepsilon = \operatorname{arctg}\mu$ kritikus helyzet közelében megcsúszik.

2. Ha $\cos\alpha < 0$, vagyis a kocsi a fékeit használva a pálya bal oldali részén lefelé halad, akkor

$$\mu\frac{v_0^2}{Rg} \geqslant \mu\sin\alpha - \cos\alpha, \tag{8}$$

vagyis

$$\frac{v_0^2}{Rg}\sin\varepsilon \geqslant \sin\alpha\sin\varepsilon - \cos\alpha\cos\varepsilon \equiv -\cos(\alpha+\varepsilon). \tag{6}$$

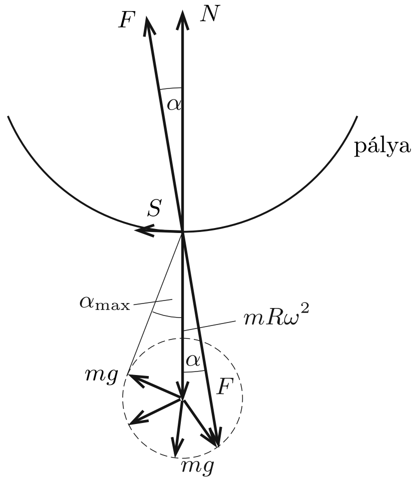
Ennek az egyenlőtlenségnek minden $90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 270^\circ$ szögre, így $\alpha = 180^\circ - \varepsilon$ esetén is fenn kell állnia. Ekkor a sebességre ismét a (7)-nek megfelelő alsó korlátot kapjuk. Ha ez a feltétel *éppen* nem teljesül, akkor a hullámvasút kocsija az

$$\alpha_{2.\mathrm{krit.}} = 180^\circ - \varepsilon = 180^\circ - \operatorname{arctg}\mu$$

kritikus helyzet közelében megcsúszik.

Bokor Endre (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Írjuk le a mozgást a hullámvasút kocsijában ülő ember vonatkoztatási rendszerében. Ebben a rendszerben az összesen m tömegű, ω szögsebességgel mozgó kocsira állandó $mR\omega^2$ nagyságú és mindig „lefelé" (a kör középpontjával ellentétes irányba) mutató „centrifugális erő", valamint egy mg nagyságú, de változó irányú (egyenletesen körbeforduló) nehézségi erő hat (*2. ábra*).



2. ábra

Ezen két erő $\boldsymbol{F}$ eredőjével tart egyensúlyt a sínek által kifejtett $\boldsymbol{N}+\boldsymbol{S}$ erő, amelynek a „felfelé" iránnyal bezárt α szöge legfeljebb $\operatorname{arctg}\mu$ lehet, hiszen $|\boldsymbol{S}|\leqslant\mu|\boldsymbol{N}|$.

A 2. ábrán látható, hogy α legnagyobb értékét akkor veszi fel, amikor a centrifugális erő és a nehézségi erő vektora derékszögű háromszöget határoz meg, és

$$\operatorname{tg}\alpha_{\max}=\frac{mg}{\sqrt{\left(mR\omega^2\right)^2-\left(mg\right)^2}}\leqslant\mu.$$

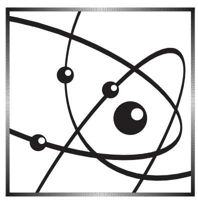
Innen kapjuk, hogy a kocsi sebessége:

$$v_0=R\omega\geqslant\sqrt{Rg\sqrt{\frac{1}{\mu^2}+1}}\,.$$

Ha a sebesség a kritikus értéknél egy kicsit kisebb, a kocsi a pálya azon pontjánál csúszik meg, ahol kör középpontjából nézve a vízszintessel bezárt szög éppen $\operatorname{arctg}\mu$.

Hisham Mohammed Almalki (Rijád, Manarat Al-Riyadh School, 11. évf.)

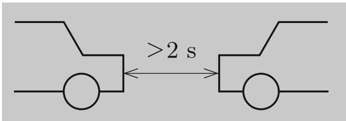
24 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 6 dolgozat.



Fizikából kitűzött feladatok

M. 386. Készítsünk egy minél hosszabb lengésidejű, a levegőben lengő torziós ingát, és méréssel határozzuk meg a lengésidőnek a torziós szál hosszától való függését!

(*6 pont*) *Eötvös Loránd* (1848–1919) nyomán



G. 669. Autópályák információs tábláin gyakran látható a mellékelt *rajzhoz* hasonló figyelmeztetés a megfelelő követési távolság betartására. Hogyan lehetséges a követési távolságot másodpercben megadni? Miért éppen 2 s, vagy annál nagyobb a megfelelő „követési távolság”?

(*3 pont*)

G. 670. Összeöntünk 1 liter 10 °C-os, 2 liter 20 °C-os, 3 liter 30 °C-os, 4 liter 40 °C-os, 5 liter 50 °C-os, 6 liter 60 °C-os, 7 liter 70 °C-os, 8 liter 80 °C-os és 9 liter 90 °C-os vizet. Mennyi lesz a közös hőmérséklet, ha mindenféle hőveszteségtől eltekinthetünk?

(*3 pont*)

G. 671. Két nagy méretű, függőleges síkú síktükör egymással párhuzamos, a tükrök egymás felé néznek, a közöttük lévő távolság 1 m. Ha a két tükör között középen állva oldalra kinyújtott tenyerünk tükörképére nézünk az egyik tükörben, akkor igen sok képet látunk. Milyen távolságra vannak egymástól a *tenyerünk* tükörképei?

(*3 pont*)

G. 672. Egy szobának három ajtaja van, mindhárom mellett van egy kapcsoló, amellyel egymástól függetlenül tudjuk fel-, illetve lekapcsolni a szobamennyezet közepén lévő csillárt. Hogyan oldható ez meg ún. váltókapcsolók és keresztváltókapcsolók felhasználásával? Nézzünk utána, hogyan működnek ezek a kapcsolók, és adjuk meg a kapcsolási rajzot!

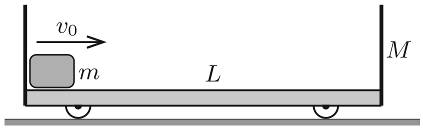
(*4 pont*)

P. 5122. Egy autó fékútja száraz, vízszintes aszfalton 50 km/h sebességnél legalább 13 méter, azaz ennyi utat tesz meg az autó a fékezés megkezdésétől a megállás pillanatáig. (A fékút definíciójában nem szerepel sem az ember, sem az autó reakcióideje.)

Mekkora ugyanennek az autónak a minimális fékútja 20 km/h sebességnél egy szokatlanul meredek, 30°-os hajlásszögű (kb. 58%-os!) lejtőn?[1] Vizsgáljuk a felfelé és a lefelé haladás esetét is!

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

[1]A világ legmeredekebb utcája az Új-Zélandon, Dunedin városában található, 350 méter hosszú Baldwin Street, ami 38°-os, tehát 78%-os meredekségű.



P. 5123. Vízszintes felületen lévő, oldalfalakkal határolt, $M=1$ kg tömegű, $L=0{,}3$ m hosszúságú kiskocsi bal oldalán egy $m=0{,}25$ kg tömegű, kis méretű test található. A kocsi a talajon súrlódásmentesen mozog, kerekeinek mérete és tömege elhanyagolható.

Egy adott pillanatban az m tömegű testet $v_0=1$ m/s sebességgel jobbra elindítjuk. A test és a kocsi közötti súrlódási tényező $\mu=0{,}1$. A test és a kocsi ütközését tekintsük rugalmasnak.

a) Mekkora sebességgel mozog a kocsi, miután az m tömegű test a kocsihoz viszonyítva nem mozog?

b) Milyen távol van ekkor a test a kocsi bal oldali falától?

c) Mekkora a testek sebessége az első rugalmas ütközés utáni pillanatban?

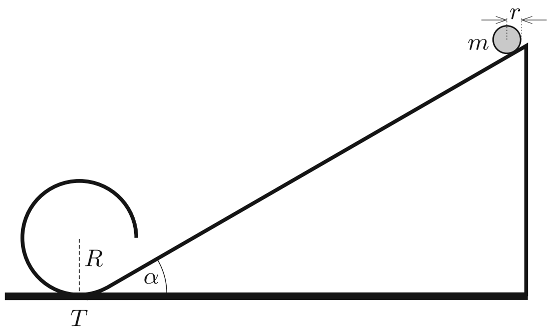
(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5124. *a*) Vízszintes asztallapra két egyforma, tömör hengert helyezünk közvetlenül egymás mellé, majd óvatosan egy ugyanilyen, harmadik hengert rakunk rájuk. Legalább mekkora legyen a hengerek közötti, illetve a hengerek és az asztal közötti súrlódási együttható, hogy ez az elrendezés egyensúlyban maradhasson?

b) Vízszintes asztallapra három egyforma, tömör gömböt helyezünk közvetlenül egymás mellé, majd óvatosan egy ugyanilyen, negyedik gömböt rakunk rájuk. Legalább mekkora legyen a gömbök közötti, illetve a gömbök és az asztal közötti súrlódási együttható, hogy ez az elrendezés egyensúlyban maradhasson?

(*5 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

P. 5125. Egy $\alpha=30^\circ$ hajlásszögű, súrlódó lejtő érintőlegesen csatlakozó, $R=32$ cm sugarú hengerfelületben folytatódik az *ábra* szerint. A henger keresztmetszete a T talpponttól mérve háromnegyed körívet alkot. A hengerfelület ideálisan sima. A lejtőre helyezett r sugarú, m tömegű, homogén, tömör korongot lökésmentesen elengedjük. (A tapadási súrlódás elegendően nagy, a korong nem csúszik meg a lejtőn. A gördülő ellenállás elhanyagolható.)



a) Mekkora a korong sugara, ha az éppen átfér a hengerfelület alatt?

b) A talajtól mérve legalább milyen magasról kell indítani a korongot, hogy az függőleges irányú sebességgel érkezzen vissza a lejtőre?

c) Ebben az esetben mekkora sebességgel éri el a lejtőt?

(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5126. Egy 20 cm belső átmérőjű, 1 m magas, hőszigetelő anyagból készült, csúszós falú, kör keresztmetszetű, függőlegesen álló, alul zárt, felül nyitott cső belseje 0 °C-os jéggel van tele. A cső alját 335 W teljesítménnyel melegíteni kezdjük.

Határozzuk meg, hogy ennek hatására mekkora állandósult sebességgel mozog a jéghenger teteje lefelé!

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5127. Egy hőlégballon össztömege (ballon + kosár + teher) 320 kg. Kezdetben a ballonon belül és kívül a levegő nyomása $1{,}01 \cdot 10^5$ Pa, sűrűsége pedig 1,29 kg/m^3. A felemelkedéshez a ballonban lévő levegőt melegítik fel egy gázégővel. A forró levegővel töltött ballon térfogata 650 m^3, belül a nyomás nem változik.

Mekkora hőmérsékletre kell melegíteni a ballonban lévő levegőt, hogy a ballon emelkedni kezdjen?

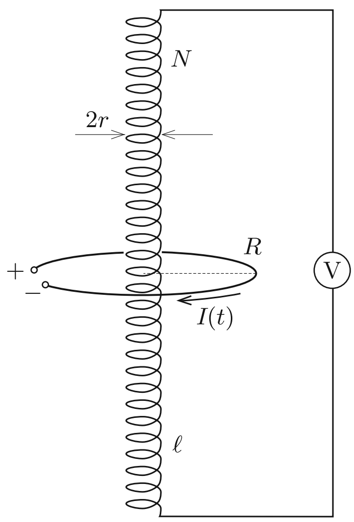
(*4 pont*) *Tornyai Sándor verseny,* Hódmezővásárhely

P. 5128. Vákuumban egy Q és egy $-3Q$ nagyságú ponttöltés egymástól d távolságra helyezkedik el. Határozzuk meg a Q töltéstől $d_1 = d/3$ távolságra elképzelt, $r = d/2$ sugarú körlapon áthaladó elektromos fluxust! A körlap középpontja a két töltést összekötő szakaszra esik, és síkja merőleges erre a szakaszra.

(*5 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

P. 5129. Egy r sugarú, N menetszámú, igen hosszú, $n=N/\ell$ menetsűrűségű szolenoidot az *ábrán* látható módon egy $R\ll\ell$ sugarú körvezetővel vettünk körül. Mekkora értéket mutat a szolenoid végpontjai közé kapcsolt ideális voltmérő, ha a körvezetőbe időben egyenletesen, $I(t)=\alpha\cdot t$ módon változó áramot vezetünk?

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest



P. 5130. Hány fényév távolságra van tőlünk az a galaxis, amelynek egyik csillagáról hozzánk érkező sugárzásban a hidrogén 4d → 2p átmenetnek megfelelő fény hullámhossza 513 nm?

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5131. Három azonos, állandó hőkapacitású test közül kettőnek a hőmérséklete 300 K, a harmadiké 100 K. Fel lehet-e melegíteni valamelyik testet 400 K hőmérsékletre külső hő és munka befektetése nélkül, csupán termodinamikai gépeket (hőerőgép, hűtőgép) működtetve a testek között?

(*6 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Áprilisi pótfeladat.[*] Tréfásan fogalmazva: az akcióhős Chuck Norris fekvőtámasz végzésekor nem is a saját testét emeli meg, hanem valósággal eltolja a Földet. Mennyi az igazság ebben?

Közli: *Vass Miklós,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2019. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 69. No. 4. April 2019)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition C (see page 226): **Exercises up to grade 10: C. 1539.** Let E denote the point on side AB of a square $ABCD$ which divides the side $1:3$, with the shorter segment lying closer to A. Let F be an arbitrary

[1] A megoldás beküldhető, de nem számít bele a pontversenybe.

point of diagonal BD. Determine the minimum of the sum $AF+EF$. **C. 1540.** The coefficients of the quadratic expression ax^2+bx+c are integers, and $a>0$. It has two distinct positive roots smaller than 1. Find the smallest possible value of a. **Exercises for everyone: C. 1541.** Prove that there exists a sequence of 2019 consecutive positive integers that includes exactly 19 primes. **C. 1542.** The lengths of the legs in a right-angled triangle ABC are 5 and 12. Let P, Q and R be points on the inscribed circle of the triangle such that triangle PQR is similar to triangle ABC. Determine the lengths of the sides of triangle PQR. **C. 1543.** For what values of the positive integer n will 2^n+1 or 2^n-1 be divisible by 9? **Exercises upwards of grade 11: C. 1544.** The diagonals of a circumscribed trapezium $ABCD$ intersect at E. The radii of the inscribed circles of triangles ABE, BCE, CDE and DAE are r_1, r_2, r_3 and r_4, respectively. Prove that $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$. **C. 1545.** Find the real solutions of $x^2-y^2=\log_2\frac{y}{x}$, $3^{x^2+y^2-1}-4\cdot 3^{xy}+9=0$. (*Romanian competition problem*)

New exercises – competition B (see page 227): **B. 5022.** Given some unit circles on the plane, we coloured each centre blue. On the circumferences of the circles, we marked some points red such that there should be exactly 2 red points on the circumference of each circle. What is the maximum possible number of blue points if there are 25 coloured points altogether? (*3 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5023.** In a triangle ABC, $\angle ACB=90^\circ$ and $AC>BC$. Let X be the midpoint of the arc AB of the circumscribed circle that does not contain C. The perpendicular drawn to CX at X intersects line CA at P. Show that $AP=BC$. (*3 points*) (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **B. 5024.** Let p denote an odd prime. If each of the numbers $\binom{p-2}{0},\binom{p-2}{1},\ldots,\binom{p-2}{p-2}$ are divided by p, how many different remainders are obtained? (*4 points*) (Proposed by *Z. Gyenes* and *B. Hujter,* Budapest) **B. 5025.** The inscribed circle of triangle ABC is centred at I, and touches sides BC, CA and AB at points D, E and F, respectively. Let M be an arbitrary point in the interior of side BC, different from D. Let the lines DI and EF intersect at T, and let K denote the midpoint of line segment MT. Prove that the circles DEF, TDM and KIT are concurrent. (*5 points*) (Proposed by *M. Agazade,* Azerbaijan) **B. 5026.** Let P be an arbitrary point of a given ellipse, different from the endpoints of the major axis. P is connected to the foci F_1 and F_2. The angle bisector of angle $\angle F_1PF_2$ intersects F_1F_2 at E. The circle which passes through P and touches F_1F_2 at E intersects PF_1 at G and PF_2 at H. Show that the length of GH does not depend on the choice of P. (*4 points*) (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **B. 5027.** Arthur Dumpling (Hungarian cartoon character: a fat bird who loves chocolate of all kinds) lives at 1 Sweet Street. The chocolate shop is operating at number n, the far end of the street. Arthur's daily fitness programme is as follows: he starts in front of number 2. When he stands in front of number k (where $1<k<n$), he tosses a fair chocolate coin. If it shows heads, he moves to number $(k-1)$. If it shows tails, he moves to number $(k+1)$. If he reaches the chocolate shop, he enters and throws a chocolate ball down his throat, and then moves to number $(n-1)$. If he arrives back home, the fitness programme terminates. On average, how many chocolate balls does Arthur throw down his throat per day? (*5 points*) **B. 5028.** Let us define a function f as follows. For any acute-angled triangle XYZ, if P is a point on YZ, then $f(P;XYZ)$ is defined as the line joining the feet of perpendiculars from P to lines XY; XZ. Let ABC be a triangle with orthocenter H. Let $A'B'C'$ be the orthic triangle of ABC. Let $A''\equiv f(B';HCA)\cap f(C';HAB)$. Similarly, points B''; C'' are defined. Show that the lines AA''; BB''; CC'' are concurrent. (*6 points*) (Proposed by *K. V. Sudharshan*) **B. 5029.** Assume that a certain football team have played 1000 games

altogether, and scored 1000 points altogether since the team was founded. (A team score 3 points for every game they win, 1 point for a draw and no points for games they lose.) Prove that there are at most $(2.9)^{1000}$ possible sequences of the 1000 scores. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 228): **A. 749.** Given are two polyominos, the first one is an L-shape consisting of three squares, the other one contains at least two squares. Prove that if n and m are co-prime then at most one of the $n \times n$ and $m \times m$ boards can be tiled by translated copies of the two polyominos. (Proposed by: *András Imolay, Dávid Matolcsi, Ádám Schweitzer* and *Kristóf Szabó,* Budapest) **A. 750.** Let $k_1, \ldots, k_5$ be five circles in the plane such that k_1 and k_2 are externally tangent to each other at point T, k_3 and k_4 are externally tangent to both k_1 and k_2, k_5 is externally tangent to k_3 and k_4 at points U and V, respectively, moreover k_5 intersects k_1 at P and Q, like shown in the *figure.* Show that $\frac{PU \cdot PV}{QU \cdot QV} = \frac{PT^2}{QT^2}$. **A. 751.** Let $c > 0$ be a real number, and suppose that for every positive integer n, at least one percent of the numbers $1^c, 2^c, 3^c, \ldots, n^c$ are integers. Prove that c is an integer.

Problems in Physics

(see page 249)

M. 386. Make a long-period torsion pendulum, which swings in air. With measurement determine how the period of the pendulum depends on the length of the thread.

G. 669. Signs similar to the one shown in the figure can often be seen on highways to warn drivers to maintain a safe following distance. How can the following distance be given in seconds? Why is it that the appropriate “following distance” is two or more seconds? **G. 670.** Different amount of samples of water of different temperature values are mixed. The corresponding volume and temperature data are the following: 1 litre water at 10 °C, 2 litres water at 20 °C, 3 litres water at 30 °C, 4 litres water at 40 °C, 5 litres water at 50 °C, 6 litres water at 60 °C, 7 litres water at 70 °C, 8 litres water at 80 °C and 9 litres water at 90 °C. What is the common temperature of the mixture if heat losses are negligible? **G. 671.** Two large, vertical and parallel plane mirrors are facing opposite to each other at a distance of 1 m. If you stand exactly midway between the mirrors outstretching your hand sideways, and observe the image of your palm reflected in one of the mirrors, you see quite a lot of images. What are the distances between the images of your *palm*? **G. 672.** A room has three doors, and next to each door there is a switch. With each of them the chandelier in the room can be switched on or off separately. In order to build such a circuit, multiway switches, namely 3-way and 4-way switches should be used. How can this circuit be built? Look up in literature how these switches work, and give the diagram of their connections.

P. 5122. The braking distance of a car moving along dry and horizontal, asphalt-covered road at a speed of 50 km/h is at least 13 m, that is, the distance the car covers from the instant when the brakes are applied to when it comes to a complete stop. (In the definition of the braking distance the reaction time of neither the driver nor the vehicle are included.) What is the minimum braking distance of the same car at a speed of 20 km/h on an unusually steep slope of angle of elevation of 30° (approximately 58% slope)? Investigate both the upward and downward motions. **P. 5123.** There is a small object of mass $m = 0.25$ kg at the left end of a trolley of mass $M = 1$ kg and of length $L = 0.3$ m. The trolley has vertical walls at its sides, and moves frictionlessly along the horizontal plane. Its small wheels are of negligible mass and size. At a given instant the small object of mass m is given an initial speed of $v_0 = 1$ m/s towards the right. The coefficient of friction between the trolley and the object is $\mu = 0.1$. The collision between the object and the trolley can be considered elastic. *a*) What is the speed of the trolley, when the object of mass m on it does not move with respect to the trolley? *b*) How far is the object of mass m from the left wall of the trolley in the above asked case? *c*) What are the velocities of the objects right after the moment of the first collision? **P. 5124.** *a*) Two alike solid cylinders are placed to the level tabletop next to each other and then carefully a third similar cylinder is placed to the top of the other two. What are the least values of the coefficient of static friction between the cylinders and between a cylinder and the table so that the arrangement stays at rest? *b*) Three alike solid spheres are placed to the level tabletop next to each other and then carefully a fourth similar sphere is placed to the top of the other three. What are the least values of the coefficient of static friction between the spheres and between a sphere and the table so that the arrangement stays at rest? **P. 5125.** A slope of angle of elevation of $\alpha = 30^\circ$ is followed by a cylindrical surface of radius $R = 32$ cm as shown in the *figure.* The cross section of the cylinder is three-quarters of a circular path started at the lowermost point of the circle T, and the tangent to the circle at point T is in the plane of the slope. A uniform solid disc of mass m and of radius r is released without any initial speed from the plane. (Static friction is big enough everywhere, so the disc rolls down the slope without sliding. Rolling friction is negligible. The cylindrical surface is ideally smooth.) *a*) What is the radius of the disc if it just passes the gap below the cylinder? *b*) What is the least height, measured from the ground, from which the disc should be released in order that it arrive back to the slope at a vertical velocity? *c*) In this case what is the speed of the disc when it reaches the slope? **P. 5126.** The inside part of a circular-base vertical tube of height 1 m and of inner diameter 20 cm is filled with ice of temperature 0 °C. The wall of the tube is slippery and is made of some insulating material. The tube is open at its top and closed at its bottom. We start heating the bottom of the tube at a rate of 335 W. At what constant speed will the top of the ice-cylinder move downwards? **P. 5127.** The total mass of a hot-air balloon (envelope + basket + load) is 320 kg. Initially the pressure inside and outside the envelope is $1.01 \cdot 10^5$ Pa and its density is 1.29 kg/m^3. In order to raise the hot-air balloon a gas burner is used to heat the air inside the balloon. The volume of the envelope filled with hot air is 650 m^3, and the pressure inside does not change. To what temperature must the air inside the balloon be heated in order that the balloon begin to rise? **P. 5128.** Two point-like charges of charge values Q and $-3Q$ are at a distance of d in vacuum. Determine the electric flux through a disk of radius $r = d/2$ at a distance of $d_1 = d/3$ from charge Q. The centre of the disk is on the line segment which joins the two charges and the plane of the disk is perpendicular to the line segment. **P. 5129.** There is a circular conducting loop of radius $R \ll \ell$ around a very long solenoid of radius r, with number of turns N and of turn density $n = N/\ell$, as shown in the *figure.* What is the reading on an ideal voltmeter connected across the terminals of the solenoid, if the current that flows in the circular loop is changing uniformly in time, according to the formula $I(t) = \alpha \cdot t$? **P. 5130.** The detected wavelength of the radiation coming from a star in a distant galaxy, and belonging to the electron transition of 4d → 2p of the hydrogen atom is 513 nm. How far is the galaxy from us in light years? **P. 5131.** Three objects have the same, constant thermal heat capacities. Two of them have a temperature of 300 K, whilst the third one has a temperature of 100 K. Is it possible to heat one of them to a temperature of 400 K only by operating heat engines or heat pumps between the objects, so without adding external heat or performing external work?