KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

68. évfolyam 2. szám — Budapest, 2018. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Projektvezető: NAGYNÉ SZOKOL ÁGNES
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Emlékeim Császár Ákosról

Császár Ákos professzort nagyon komoly, szinte megszólíthatatlan, a végtelenségig kötelességtudó, szavatartó, kiemelkedően nagy tudású embernek tartottam egyetemista koromban. Nem volt módom jobban megismerni, engem a másik analízis tanszék oktatói tanítottak az ELTE-n.

Vagy tizenöt évvel később mint a Bolyai János Matematikai Társulat elnöke többször beszélt velem a KöMaL centenáriuma, angol nyelvű számai és persze a kiadás anyagi gondjai kapcsán. Így történt, hogy ő lett a MATFUND Alapítvány egyik alapítója. Ezzel hozzájárult ahhoz, hogy a magyar matematika egyik nagy kincse, hagyománya, a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok (sok más külföldi társlappal ellentétben) életben maradt. Több éven át ő tartotta a KöMaL ankétok megnyitóját, átadva a legjobbaknak a díjakat.

Császár Ákos első publikációja minden bizonnyal a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban jelent meg. A KöMaL adatbázisában megtalálható a XV. évfolyam 1939. március 15-i száma, benne a 15 éves Császár Ákos egyetlen, a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokban megjelent megoldása, egy tévedéssel: az iskolája nevét eltévesztették. A megoldás a borítón látható. A KöMaL archívumának tanúsága szerint 1938 novembere és 1939 májusa között 35 matematika gyakorlat jó megoldását küldte be.

Erről így emlékezett a *Miért lettem matematikus* című könyv (Szerkesztette: Róka Sándor, kiadta a Typotex kiadó 2003-ban) egyik írásában: „A matematikus hivatás gondolata korán megjelent bennem. A gimnáziumot a ciszterci rend Budapesti Szent Imre Gimnáziumában végeztem 1934 és 1942 között, s már az első (a mai számozásnak megfelelő ötödik) osztályban kiváló matematikatanár tanított … A matematikát az ötödikben Lovas Ambró tanár úr vette át, aki szintén igen jó, színvonalas pedagógus volt. Ő ismertette meg velem a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat, amelynek rövidesen szorgalmas megoldója lettem; sajnos csak egy évig, mert a lapot már a következő ősszel, papírhiányra hivatkozva (de bizonyára a szerkesztő [1] származására tekintettel, politikai okból) megszüntették. Így azután egyetlen feladatmegoldás jelent csak meg az én nevem alatt (sajnos tévesen megjelölt iskolai hovatartozással) …

Az érettségi évében több tanulóversenyen is sikeresen szerepeltem. Első díjat nyertem az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen matematikából, majd ugyancsak első díjat kaptam az akkor Eötvös-versenynek nevezett, ma Kürschák József Verseny néven ismert tanulóversenyen.

A fentiekből úgy látszhat, hogy a matematika iránt egyoldalúan érdeklődő tanuló voltam. Ez nincs így: tulajdonképpen minden (vagy majdnem minden) érdekelt, amit az iskolában tanultunk. Ennek eredményeképpen mind a nyolc osztályban én kaptam az egyes osztályok legjobb tanulójának járó jutalomkönyvet a tanév végén.”

Azt hiszem, egész életében „mintatanuló” maradt. Nagyon szeretett kirándulni, a növénytan kitűnő ismerője volt, de nemcsak ez volt a hobbija. Eredetileg el szerette volna végezni a Zeneakadémiát zeneszerzés szakon, és bár ezt feladta, a koncertekre partitúrával a kezében ült be, hogy a zenét is pontosan követhesse.

Nem mindennapi életrajza elolvasható a Wikipédián vagy az MTA nekrológjában [2].

A Pázmány Péter Tudományegyetemen szerezte meg matematika-fizika szakos középiskolai tanári diplomáját 1947-ben (természetesen summa cum laude), tíz év múlva pedig már egyetemi tanárnak nevezték ki az akkorra már Eötvös Loránd nevét viselő tudományegyetemen. Több évtizeden át volt az analízis tanszék vezetője, egyúttal az MTA Matematikai Kutatóintézet topológia osztályának vezetője. 1996-ban lett professor emeritus.

Még az 50-es években kandidátusi, majd akadémiai doktori címet szerzett, 1970-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező, 1979-ben rendes tagjává választották. Mind az MTA-n, mind a tudományos közélet egyéb területein elnökségi, elnöki szerepeket töltött be. A Kossuth-díj csak egyike volt öt évtized alatt kapott számos rangos kitüntetésének.

Matematikusként a valós függvénytan és a topológia nemzetközi hírű kutatója lett. Nevéhez fűződik a Császár-féle test, az egyetlen, átló nélküli nem konvex poliéder megtalálása [3].

A KöMaL archívumában található Szilassi Lajos 2008-ban megjelent cikke, amelyben többek között szó van a Császár-poliéderről is [4].

Tudományos munkásságát nem az én tisztem méltatni, de több, mint 180 referált publikációja önmagáért beszél.

A matematika tudományának öt jeles képviselője, Aczél János, Császár Ákos, Fuchs László, Gaál István és Horváth János mindegyike 1924-ben született. A Big Five-nak nevezett csoport 80. születésnapja alkalmából 400 év matematika címmel rendeztek konferenciát az MTA Rényi Matematikai Kutatóintézetben, 2004-ben. Akkor a tudományos ülésen mind az öt neves tudós előadást tartott. A Big Five elnevezés Fejér Lipót (1880–1959) iskolateremtő magyar matematikustól, az MTA rendes tagjától származik, 1947-es végzős évfolyama öt legtehetségesebbnek tartott tanítványát tisztelte meg vele. 2014-ben pedig az MTA Matematikai Tudományok Osztálya rendezett konferenciát az Akadémián, az öt 90 éves tudós tiszteletére. Császár Ákos ekkor már nem szerepelt a nyilvánosság előtt. 2017 decemberében, 94 éves korában csendben elment közülünk.

Tiszteletére emlékülést rendeznek 2018. február 26-án [5].

Hivatkozások

[1] Az 1893-ban alapított, középiskolásoknak szóló matematikai lapot az első világháború után újraindító Faragó Andorról, a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok szerkesztőjéről a KöMaL 2017 októberi számának hátsó borítóján, az Érintő elektronikus matematikai lapok 2. és 3. számában (`http://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2016-12/365-farago-andorrol-ket-tetelben-i-felkeszules-a-tanari-palyara-a-xix-szazad-vegen` és `http://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2017-03/405-farago-andorrol-ket-tetelben-2-tanar-es-lapszerkeszto-a-xx-szazadban`), valamint legutóbbi, hatodik számában is (`http://ematlap.hu/index.php/interju-portre-2017-12/627-arckep-helyett`) lehet olvasni.

[2] http://mta.hu/mta_hirei/elhunyt-csaszar-akos-matematikus-az-mta-rendes-tagja-108334.

[3] Császár, Á.: *A polyhedron without diagonals,* Acta Sci. Math. Universitatis Szegediensis, **13** (1949–50), pp. 140–142.

[4] http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=201002, https://www.komal.hu/cikkek/2008-01/toroid.h.shtml.

[5] http://www.bolyai.hu/meghivo_Csaszar%20emlekules.pdf.

Oláh Vera

Thiry Imréné (1930–2018)

Thiry Gabi búcsúztatása

Drága Gabika, Gabi néni, ahogy Te is hívtad magad mindig, akkor is, amikor még nem voltál „néni” korban.

Nálad jobb, érzékenyebb, segítőkészebb, empatikusabb, figyelmesebb, szeretnivalóbb embert nem ismertem, és ezzel így vannak mindenkori kollégáid, tanítványaid, és szüleik is.

Kevés embert ismerünk, akit Nálad többen szerettek, tiszteltek volna. Sugárzó bizalmad, jóhiszeműséged, figyelmességed fényében mindenki fontos embernek érezte magát, és ezért nagyon hálás volt/nagyon hálásak voltunk Neked, és mindenki megpróbált egy kicsit olyan értékessé, jóvá, tehetségessé, ügyessé, okossá válni, amilyennek Te láttad.

Kiváló tanár, pedagógus voltál. Képes voltál tanítványaidba átsugározni a matematika szeretetét, a logikus gondolkodás, a pontos munkavégzés, a szorgalom, a másik ember – legyen az felnőtt vagy gyerek – tiszteletét, az önfegyelem és a segíteni akarás igényét. Kristálytiszta gondolatmenetedet a feladatok megoldása során minden gyerek megértette. Aki nem, annak külön, tanórán kívül segítettél. Türelmed végtelen volt. A tehetséges gyerekek számára megmutattad a sikerhez vezető utat, és szakmai segítséggel, edzéssel, biztatással elindítottad őket az úton. Amikor a várva várt siker bekövetkezett, megtanítottad őket együtt élni a sikerrel, és akinek munkája ellenére elmaradt a várt eredmény, segítettél elviselni és feldolgozni a kudarcot. Soha nem hazudtál tanítványaidnak képességeikre vonatkozóan, de mindig az értékeiket, a jövőben legígéretesebben kibontakoztatható tehetségmorzsákat hangsúlyoztad, tudatosítottad.

Félelmetes memóriád valamennyi tanítványodat megőrizte, nemcsak a nevüket, az érettségi évét, a matematika tantárgyhoz való hajdani viszonyukat, hanem karrierjük állomásait, sikereiket, kudarcaikat, magánéletük Veled megosztott örömeit és gondjait is. Lehetetlen még megbecsülni is azon tanítványaid számát, akik felnőtt korukban is kapcsolatot tartottak veled, felkerestek tanácsért, biztató szóért, vagy azért, hogy beszámoljanak életük alakulásáról.

Értő figyelmed előtt nem maradhattak titokban kollégáid gondjai, problémái sem, hiába próbáltuk azokat eltitkolni a külvilág előtt. Egy-egy nehéz, problémákkal terhelt napunk végén, este megcsörrent a telefon. Te hívtál, mert aggódtál értünk, láttad, hogy valami nincs rendben körülöttünk, bennünk. És akkor mindent el kellett mondani neked őszintén. Megnyugtató szavaid, bölcs tanácsaid nyomán elvonultak a viharfelhők a fejünk fölül, mert minden szavadból optimizmus, életszeretet, a problémák megoldhatóságába, és önmagunk erejébe és képességeibe vetett hit sugárzott. Ettől kezdve a probléma megoldásáig, a beteg családtagunk gyógyulásáig, magánéleti vagy iskolai problémánk rendeződéséig mellettünk voltál, fogtad a kezünket.

Te azonban nem engedted meg, hogy segítsünk neked. A „hogy vagy" kérdésünkre mindig ugyanaz, a csillogó szemmel mondott válasz érkezett: „Pompásan vagyok". Akkor is, amikor örömben vagy sikerben volt részed, és akkor is, amikor problémákkal küzdöttél, amikor már nehéz volt számodra az élet. Végtelen szerénységed nem engedte meg, hogy másokat terhelj a magad problémáival.

Nem kényeztetett el az élet. Imádott férjed korai elvesztésétől kezdve a tanítás, az iskola, a tanítványok, a kollégák és a matematika töltötte ki az életedet, és Te így éltél teljes életet. Nyaranta, amikor nem az iskola foglalta el a napjaidat, második otthonod, Balatonakarattya, a Balaton, az úszás, régi tanítványok és kollégák látogatásai, és a fennmaradó időben a „példázgatás" töltötte ki az életedet, és tartott meg nyugodt, derűs embernek.

Drága Gabika! A matematika munkaközösség azon szerencsés tagjai, akik részesei lehettek, nem felejtik az akarattyai közös bográcsozásokat, az általad gondosan megtervezett közös játékot, a szomszédok irigységét is kiváltó nagy nevetéseket, a nagy beszélgetéseket. Köszönjük, hogy olyan „Gabi nénis" egyszerűséggel és természetességgel, sugárzó jósággal próbáltad mindvégig közösséggé formálni ezt a sokszínű, zabolátlanságra hajlamos csapatot.

Azon kevés kollégák egyike voltál, akit a Fazekas minden dolgozója tisztelt és szeretett. Soha nem bántottál meg senkit, és soha nem felejtettél el osztozni mások örömében, elismerni mások munkáját, teljesítményét, sikereit. Figyelmességeddel sok kellemes percet tudtál szerezni másoknak.

Kísérjen utolsó utadon mindenkori tanítványaidnak, még aktív, és már nyugdíjas Fazekasos, vagy volt Fazekasos kollégáidnak, az iskola minden dolgozójának soha el nem múló szeretete, hálája, tisztelete.

Drága Gabika! Te, aki angyal voltál itt a földön, vigyázz ránk onnan fentről, és mi ígérjük, hogy igyekszünk méltók lenni a belénk vetett bizalmadra.

Nyugodj békében.

2018. január **Hámori Veronika**

Jelentés a 2017. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2017. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 6-án, középeurópai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő huszonkét helyszínen: Békéscsaba, Budapest, Cambridge, Csíkszereda, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Kolozsvár, Miskolc, Nagykanizsa, Nyíregyháza, Pécs, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szolnok, Szombathely, Tatabánya, Veszprém és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Fleiner Tamás* (elnök), *Frenkel Péter, Kós Géza, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál, Pelikán József.* A bizottság szeptember 13-diki ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Legyen ABC tetszőleges háromszög, és válasszuk az A', B' és C' pontokat egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással rendre a BC, CA és AB oldalakról. A sík Z pontja esetén jelölje $p(Z)$ annak a valószínűségét, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek által határolt háromszög tartalmazza Z-t. Határozzuk meg az ABC háromszögnek azt a Z belső pontját, amelyre $p(Z)$ a lehető legnagyobb.*

2. *Vannak-e olyan $f(x)$ és $g(x)$ valós együtthatós polinomok, amelyekre az $f(x)^3 - g(x)^2$ polinom elsőfokú?*

3. *Egy $n \times n$-es T táblázat mezőibe egy-egy számot írtunk úgy, hogy egyik sorban sem szerepel kétszer ugyanaz a szám. Bizonyítsuk be, hogy át lehet rendezni a T-ben szereplő számokat úgy, hogy az átrendezés utáni T^* táblázat minden sorában pontosan ugyanazok a számok álljanak, mint amelyek T megfelelő sorában álltak, de T^* semelyik oszlopában se szerepeljen kétszer ugyanaz a szám.*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, november 23-i ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a sikeresen bevezetett előregisztrációt követően a 140 jelentkezőtől összesen 115 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen a számos versenyző által megoldott első feladat bizonyult a legkönnyebbnek. Azonban a második feladatra nemcsak megoldás, de még értékelhető részeredmény sem érkezett. Ugyanakkor a harmadik feladatot hatan oldották meg vagy jutottak a megoldás közelébe. Mindezekre tekintettel a versenybizottság idén nem ad ki I. díjat.

Három versenyző oldotta meg helyesen az első és a harmadik feladatot. Ezért

II. díjban és fejenként 30 000 Ft pénzjutalomban részesülnek

Janzer Orsolya Lili, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Szűcs Gábor, Pósa Lajos* és *Janzer Barnabás*);

Matolcsi Dávid, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Kiss Géza* és *Kiss Gergely*); valamint

Molnár-Sáska Zoltán, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Pósa Lajos* és *Szűcs Gábor*).

Egy versenyző az első feladat megoldása mellett a harmadik feladatot is megoldotta, azonban az indoklása hiányos. Ezért a teljesítményéért

III. díjban és 25 000 Ft pénzjutalomban részesül

Kerekes Anna, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, (tanárai *Dobos Sándor, Kiss Géza* és *Kiss Gergely*).

Két további versenyző akadt, aki a harmadik feladatban jelentős részeredményt ért el. Ennek megfelelően

Dicséretet és fejenként 10 000 Ft pénzjutalmat kapnak

Alexy Marcell, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán* és *Szűcs Gábor*) az első feladat hiányos és a harmadik feladat lényegében helyes megoldásáért, illetve

Záhorsky Ákos, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán* és *Szűcs Gábor*) az első feladat helyes és a harmadik feladat hiányos megoldásáért.

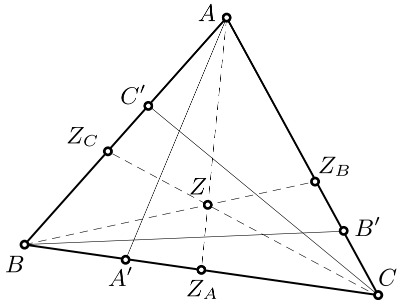
A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző és felkészítő tanár munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva szívből gratulál.”

A 2017. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. *Legyen ABC tetszőleges háromszög, és válasszuk az A', B' és C' pontokat egymástól függetlenül, egyenletes eloszlással rendre a BC, CA és AB oldalakról. A sík Z pontja esetén jelölje $p(Z)$ annak a valószínűségét, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek által határolt háromszög tartalmazza Z-t. Határozzuk meg az ABC háromszögnek azt a Z belső pontját, amelyre $p(Z)$ a lehető legnagyobb.*

Megoldás. Legyenek Z_A, Z_B és Z_C rendre az AZ, BZ és CZ egyenesek metszéspontjai az ABC háromszög szemközti oldalával. Jelölje

$$\alpha := \frac{BZ_A}{BC}, \quad \beta := \frac{CZ_B}{CA} \quad \text{és} \quad \gamma := \frac{AZ_C}{AB}$$



azt, hogy ezek a pontok milyen arányban osztják az egyes oldalakat. Ekkor

$$\frac{Z_AC}{BC}=\frac{BC-BZ_A}{BC}=1-\frac{BZ_A}{BC}=1-\alpha,$$

és hasonlóan

$$\frac{Z_BA}{CA}=1-\beta,\quad \text{illetve}\quad \frac{Z_CB}{AB}=1-\gamma.$$

A Ceva-tétel alapján

$$1=\frac{BZ_A}{Z_AC}\cdot\frac{CZ_B}{Z_BA}\cdot\frac{AZ_C}{Z_CB}=\frac{BZ_A}{BC}\cdot\frac{BC}{Z_AC}\cdot\frac{CZ_B}{CA}\cdot\frac{CA}{Z_BA}\cdot\frac{AZ_C}{AB}\cdot\frac{AB}{Z_CB}=$$
$$=\frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

adódik, azaz

$$\alpha\beta\gamma=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma). \tag{1}$$

Könnyen látható, hogy az AA', BB' és CC' egyenesek által határolt (esetleg elfajuló) háromszög pontosan akkor tartalmazza a Z pontot, ha vagy $BA'\leqslant BZ_A$ és $CB'\leqslant CZ_B$, valamint $AC'\leqslant AZ_C$ teljesül; vagy akkor, ha $BA'\geqslant BZ_A$, $CB'\geqslant$ $\geqslant CZ_B$ és $AC'\geqslant AZ_C$ áll fenn. Ez azt jelenti, hogy

$$p(Z)=\alpha\beta\gamma+(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=2\alpha\beta\gamma=2(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma),$$

az utóbbi egyenlőségek (1) miatt teljesülnek. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből

$$\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}}=\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}\leqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},\quad \text{illetve}$$
$$\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}}=\sqrt[3]{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}\leqslant\frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3}$$

következik, ahonnan

$$2\sqrt[3]{\frac{p(Z)}{2}}\leqslant\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}+\frac{3-\alpha-\beta-\gamma}{3}=1$$

alapján $p(Z)\leqslant\frac{1}{4}$ adódik. Egyenlőség pedig akkor állhat, ha mindkét számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségnél egyenlőség áll, azaz ha $\alpha=\beta=\gamma$ teljesül. Ekkor azonban (1) miatt $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$, azaz Z az ABC háromszög súlypontja. Könnyen ellenőrizhető, hogy a súlypontra minden fenti becslés csakugyan egyenlőséggel teljesül. Ez pedig azt igazolja, hogy a feladat kérdésére a súlypont a válasz. □

Megjegyzés. A feladat könnyen megoldható a baricentrikus koordináták segítségével. Legyenek tehát α, β, γ az Z baricentrikus koordinátái, azaz $\overrightarrow{Z}=\alpha\overrightarrow{A}+\beta\overrightarrow{B}+\gamma\overrightarrow{C}$, ahol $\overrightarrow{X}$ jelöli az X ponthoz tartozó helyvektort és $\alpha+\beta+\gamma=1$. Ekkor a

$$p(Z)=2\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}$$

kifejezést kell maximalizálni. Márpedig a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\geqslant 2\sqrt{\alpha\beta}\cdot 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot 2\sqrt{\gamma\alpha}=8\alpha\beta\gamma$$

adódik, ahonnan

$$p(Z)=2\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}\leqslant 2\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{8\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{4}$$

következik, egyenlőség pedig kizárólag $\alpha=\beta=\gamma$ esetén áll. A kérdezett valószínűség tehát $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{3}$ esetén, azaz a súlypontra maximális.

2. *Vannak-e olyan $f(x)$ és $g(x)$ valós együtthatós polinomok, amelyekre az $f(x)^3-g(x)^2$ polinom elsőfokú?*

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy nincsenek ilyen polinomok. Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy

$$f(x)^3-g(x)^2=ax+b,\qquad \text{ahol}\quad a\neq 0. \tag{2}$$

Ez a formula akkor volna jól kezelhető, ha a jobb oldalon teljes négyzet ellentettje állna. Ennek érdekében bevezetjük az y változót, és alkalmazzuk az $x=\big(-y^2-b\big)/a$ helyettesítést. Ekkor

$$f(x)=f\left(\frac{-y^2-b}{a}\right)=F\big(y^2\big),\quad \text{illetve}\quad g(x)=G\big(y^2\big)$$

teljesül alkalmas F és G polinomokra, ahonnan

$$F\big(y^2\big)^3=G\big(y^2\big)^2-y^2=\Big(G\big(y^2\big)-y\Big)\cdot\Big(G\big(y^2\big)+y\Big) \tag{3}$$

adódik. A bal oldali polinom fokszáma 6-tal osztható, ezért G nem lehet konstans. Ha F konstans tagja 0, akkor ugyanez G-re is igaz. Ám ekkor a bal oldalon álló polinom legalacsonyabb fokú tagjának foka 6-tal osztható, míg a jobb oldalon álló esetében ez a fok pontosan 2. Ezért a G polinom nem konstans, de van konstans tagja. A jobb oldali két tényező relatív prím, hiszen ha egy polinom mindkettőt osztja, akkor a különbségüket és az összegüket, a $2y$ és a $2G\big(y^2\big)$ polinomokat is osztja, ám ez utóbbi polinomok relatív prímek, hisz $2G\big(y^2\big)$ konstans tagja nem nulla.

A valós együtthatós polinomok körében érvényes a számelmélet alaptétele, ezért (3) jobboldalának mindkét tényezője egy-egy valós együtthatós polinom köbének konstansszorosa. Mivel minden valós konstans előáll valós szám köbeként, azt kapjuk, hogy vannak olyan, valós együtthatós $p(y)$ és $q(y)$ polinomok, amelyekre

$$p(y)^3=G\big(y^2\big)-y,\qquad \text{illetve}\qquad q(y)^3=G\big(y^2\big)+y \tag{4}$$

teljesül. Láttuk, hogy G nem konstans. Ezért a (4) két jobb oldalán álló polinom legmagasabb fokú tagja megegyezik és legalább másodfokú. Ugyanez igaz tehát a két bal oldalon álló polinomra is: $p(y)$ és $q(y)$ legmagasabb fokú nemnulla tagja ugyanaz a cy^n monom, ahol $n \geqslant 1$. Ekkor azonban a

$$(5) \qquad 2y = q(y)^3 - p(y)^3 = \big(q(y) - p(y)\big) \cdot \big(q(y)^2 + q(y)p(y) + p(y)^2\big)$$

egyenlőség jobb oldalán a második tényezőben y^{2n} együtthatója $3c^2 \neq 0$, ezért a jobb oldal nem lehet elsőfokú. A kapott ellentmondás a megoldás elején kimondott állítást bizonyítja. □

II. megoldás. Ismét indirekt bizonyítunk, tegyük fel tehát, hogy

$$(5) \qquad f(x)^3 = g(x)^2 + r(x), \quad \text{ahol } r(x) = ax + b \text{ és } a \neq 0.$$

Nyilván sem f, sem g nem lehet konstans, ezért $\deg f = 2k$ és $\deg g = 3k$ valamilyen pozitív egész k-ra. Legyen $d = \gcd(f, g)$. Ekkor persze $d^2 \mid f^3 - g^2 = r$, ám mivel r elsőfokú, d csak konstans lehet, vagyis f és g egymáshoz relatív prímek. Most (5) mindkét oldalát deriválva az

$$(6) \qquad 3f(x)^2 f'(x) = 2g(x)g'(x) + r'$$

egyenlőséget kapjuk, ahonnan az (5) r'-szereséből kivonva a (6) r-szeresét,

$$f^2\big(fr' - 3f'r\big) = g\big(gr' - 2g'r\big)$$

adódik. A bal oldal osztható azzal az f^2 polinommal, amihez a jobb oldalon álló g relatív prím, tehát

$$(7) \qquad f^2 \mid gr' - 2g'r.$$

Ekkor azonban $\deg f^2 = 4k$, míg $gr' - 2g'r$ foka legfeljebb $3k$. Ráadásul ha a g főegyütthatója d, akkor $(gr' - 2g'r)$-ben a $3k$-adfokú tag együtthatója

$$da - 6kda = (1 - 6k)da \neq 0.$$

Vagyis a $gr' - 2g'r$ polinom nem lehet a nulla polinom, és a foka pontosan $3k$.

Tehát a (7) szerint a $4k$-adfokú f^2 osztója a pontosan $3k$-adfokú, nemnulla $gr' - 2g'r$ polinomnak, ez pedig lehetetlen. □

Megjegyzések. 1. Vannak olyan nem konstans f és g polinomok, amelyekre $f^3 - g^2$ másodfokú, például $(x^2 + 2)^3 - (x^3 + 3x)^2 = 3x^2 + 8$. Igazolható, hogy ez csak úgy lehetséges, ha egyrészt f és g relatív prímek, másrészt pedig ha a fokszámaik $\deg f = 2$ és $\deg g = 3$.

2. A feladat szorosan kapcsolódik az ún. abc-sejtéshez, ami az alábbit mondja ki. Minden pozitív ε-ra van olyan C_ε konstans, hogy ha a, b, c relatív prím pozitív egészek és $a + b = c$, akkor $c < C_\varepsilon \cdot \operatorname{rad}(abc)^{1+\varepsilon}$. Itt $\operatorname{rad}(n)$ az n *radikálját* jelöli, azaz az n különböző prímosztóinak szorzatát. (Pl. $\operatorname{rad}(2016) = 42$, $\operatorname{rad}(2017) = 2017$ és $\operatorname{rad}(2018) = 2018$.) Az abc-sejtésből számos nehéz tétel és sejtés következik. Levezethető belőle például a nagy Fermat-tételt általánosító Beal-sejtés gyengítése, miszerint az $a^n + b^m = c^k$ egyenletnek

csak véges sok olyan megoldása van a pozitív egészek körében, amelyre a, b, c relatív prímek és n, m, k mindegyike legalább 3. Az abc-sejtésre jelenleg nem ismert általánosan elfogadott bizonyítás. Ígéretes fejlemény azonban Mocsizuki Sinicsi japán matematikus 2012-ben publikált 500 oldalas munkája, amelyben egy egészen új elméletet dolgoz ki és bizonyít számos számelméletet érintő sejtést, többek között az abc-sejtést. Mocsizuki elmélete azonban annyira újszerű, hogy még jelenleg is tart annak ellenőrzése. Tekintettel arra, hogy az intenzív munka ellenére még nem találtak benne lényeges hibát, könnyen elképzelhető, hogy a közeli jövőben bejelentik a sejtés megoldását. Ha pedig ez megtörténik, valószínűleg semmi sem mentheti meg a szerzőt egy igen tekintélyes matematikai díjtól, ami persze nem lehet a Fields-érem, hiszen azt 40 év felettiek nem kaphatják.

Ismert és bizonyított azonban az abc-sejtésnek egy polinomos megfelelője, az ún. Mason-tétel. Jelölje $\mathrm{rad}(f)$ az f komplex együtthatós polinom különböző irreducibilis faktorainak szorzatát. (Tehát $\mathrm{rad}(f)$ foka az f különböző komplex gyökeinek száma.) Legyenek f, g és h olyan komplex együtthatós relatív prím polinomok, amelyek nem mindegyike konstans és $f+g=h$. Ekkor a Mason-tétel szerint

$$\max\big(\deg(f), \deg(g), \deg(h)\big) \leqslant \deg\big(\mathrm{rad}(fgh)\big) - 1.$$

A Mason-tétel segítségével a kitűzött feladat könnyen megoldható. Tegyük fel tehát, hogy (5) teljesül. A II. megoldásban láttuk, hogy f, g relatív prímek, tehát f^3, g^2 és r is azok. Nyilván $\deg(f)=2k$, $\deg(g)=3k$ alkalmas k pozitív egészre. A Mason-tétel szerint ekkor

$$\begin{aligned}6k=\max(6k,6k,1) &\leqslant \deg\big(\mathrm{rad}(f^3g^2r)\big)-1=\deg\big(\mathrm{rad}(fgr)\big)-1\leqslant\\ &\leqslant \deg(fgr)-1=\deg(f)+\deg(g)+\deg(r)-1=5k,\end{aligned}$$

ami ellentmondás, így (5) nem teljesülhet.

3. *Egy $n\times n$-es T táblázat mezőibe egy-egy számot írtunk úgy, hogy egyik sorban sem szerepel kétszer ugyanaz a szám. Bizonyítsuk be, hogy át lehet rendezni a T-ben szereplő számokat úgy, hogy az átrendezés utáni T^* táblázat minden sorában pontosan ugyanazok a számok álljanak, mint amelyek T megfelelő sorában álltak, de T^* semelyik oszlopában se szerepeljen kétszer ugyanaz a szám.*

I. megoldás. Egy $n\times n$-es táblázat k-dik oszlopának *hibája* legyen $n-d(k)$, ahol $d(k)$ jelöli a k-dik oszlopbeli különböző számok számát. A *táblázat összhibája* pedig legyen a táblázatbeli oszlopok hibáinak összege. Azt kell igazolnunk, hogy T sorain belül lehet úgy permutálni az ott álló számokat, hogy az így kapott táblázat összhibája 0 legyen. Az alábbiakban egy olyan eljárást mutatunk, amely tetszőleges pozitív összhibájú táblázat esetén bizonyos sorok alkalmas átrendezésével csökkenti az összhibát. Mivel a szóban forgó összhiba egész szám, ezért e hibacsökkentő lépés véges sokszori alkalmazásával a táblázat összhibája 0-ra csökkenthető, és ezzel a feladat állítása bizonyítást nyer.

Tegyük fel tehát, hogy T-ben – mondjuk – az első oszlop hibája pozitív. Ennek oka, hogy legalább két azonos szám (mondjuk két 1-es) szerepel benne. Mivel T minden sorában legfeljebb egy 1-es szerepel, ezért T-nek lesz olyan oszlopa, amiben nem szerepel 1-es. Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a második oszlop ilyen. Egy G irányított gráfot definiálunk a T táblázat első két oszlopában előforduló számok (mint csúcsok) halmazán úgy, hogy ha valamelyik sorban az első két elem i és j (ebben a sorrendben), akkor G-be behúzunk egy i-ből j-be vezető élt.

Induljunk el az így kapott G gráf 1-es csúcsából, és haladjunk az irányított élek mentén. Két eset lehetséges. Előbb-utóbb vagy egy olyan u (nyelő) csúcsba érkezünk, ahonnan nem vezet ki él vagy egy olyan v csúcsba érünk, ahol már korábban jártunk. Mindkét esetben felcseréljük a bejárt éleknek megfelelő sorok első két elemét. Ezáltal az első esetben az első oszlopban csökken az 1-esek száma, míg a második oszlopban megjelenik egy 1-es, továbbá, a második oszlopból egy, az első oszlopban eddig nem szereplő u elem kerül át az első oszlopba. Ettől eltekintve az egyes oszlophoz tartozó számhalmazok nem változnak, tehát T összhibája 2-vel csökken. A második esetben az első két oszlophoz tartozó számhalmazok úgy változnak, hogy egy 1-es átkerül az első oszlopból a másodikba, miközben egy ettől különböző, az első oszlopban már eddig is megtalálható v szám átkerül a második oszlopból az elsőbe. Ezáltal az első oszlopban álló számok halmaza nem változik, tehát az első oszlop hibája is annyi marad amennyi volt. Emellett azonban a második oszlop hibája, és ennek megfelelően a táblázat összhibája eggyel csökken. Ezzel a hibacsökkentő lépést leírtuk, a feladat állítását igazoltuk.

II. megoldás. Készítsük el azt a G_T páros gráfot, amelynek egyik színosztályának $s_1, s_2, \ldots, s_n$ csúcsait a T táblázat sorai, a másik színosztálybeli $a_1, a_2 \ldots$ csúcsokat pedig a T-ben található számok alkotják. Az s_i és a_j csúcsok között pedig akkor fusson él G_T-ben, ha az a_j szám előfordul a T táblázat s_i sorában. Világos, hogy minden s_i csúcs G_T-beli fokszáma pontosan n, míg tetszőleges a_j csúcs fokszáma pedig legfeljebb n, hiszen egyfelől minden sorban pontosan n szám áll, másfelől pedig minden szám legfeljebb n-szer (soronként egyszer) fordul elő a T-ben. Kőnig ismert élszínezési tétele szerint tehát G_T élei kiszínezhetők az $1, 2, \ldots, n$ színek felhasználásával úgy, hogy a közös végponttal rendelkező élek különböző színt kapjanak.

Ennek a színezésnek a segítségével az alábbi módon rendezzük át a T táblázat sorait. Mivel s_i-ből G_T-ben n különböző színű él indul, ezért ezen élek közül pontosan egy (mondjuk $s_i a_j$) kapta a k-dik színt. Legyen ekkor a_j a T^* táblázat v_i sorának k-dik eleme. A G_T definíciója miatt a_j szerepel a T táblázat s_i sorában, tehát az imént definiált átrendezés valóban végrehajtható a T táblázaton. Mivel a fenti T^* minden egyes oszlopában azonos színre színezett éleknek megfelelő számok állnak, ezért T^* egyetlen oszlopában sem állhat két egyforma szám. Nekünk pedig éppen ezt kellett igazolunk.

Megjegyzések. 1. A feladat „hátterét” a II. megoldás mutatja: voltaképp Kőnig élszínezési tételével egyenértékű a bizonyítandó állítás. A trükk annyi, hogy a táblázat által definiált „szokásos” páros gráf helyett (aholis az oszlopok és a sorok felelnek meg a színosztályoknak, és a táblázat mezői pedig az éleknek), itt az egyik színosztályt a sorok, a másikat pedig a mezőkben álló számok alkotják, az éleket pedig az oszopok segítségével határozzuk meg. Érdemes végiggondolni, hogy mit is jelent a feladat állítása a „szokásos” értelmezés szerint. Azt kell igazolnunk, hogy bárhogy is adunk meg a $K_{n,n}$ páros gráf A színosztályának minden csúcsához n különböző színt, a gráf n^2 éle kiszínezhető úgy, hogy az azonos csúcsból induló élek színe különböző legyen és emellett minden él színe az A-beli végponthoz megadott színek közül kerüljön ki.

2. Dinitz sejtése azt mondja ki, hogy ha egy $n \times n$ méretű táblázat mind az n^2 mezejéhez tartozik egy-egy n elemű halmaz, akkor kiválasztható ezen halmazoknak egy-egy eleme úgy, hogy azonos sorban vagy oszlopban álló mezőkhöz tartozó halmazokból ne válasszunk azonos elemet. Világos, hogy a sejtésből azonnal következik a feladat állítása, ha hozzárendeljük minden mezőhöz az adott mező sorában álló számokat. Dinitz sejtését Galvin igazolta, mégpedig abban az általánosabb formában, hogy ha egy G véges, páros gráf minden éléhez legalább akkora színlista tartozik, mint a G-beli legnagyobb fokszám, akkor minden élhez úgy választható a listájából egy-egy szín, hogy az így kapott színezésben azonos színű éleknek ne legyen közös végpontja. Érdemes még megemlíteni, hogy nem páros gráfok esetén ugyanez az állítás azzal a változtatással, hogy a színlisták mérete a G gráf élkromatikus száma (ami páros gráfra Kőnig tétele szerint épp a maximális fokszám), nem más, mint az ún. listaszínezési sejtés, amire a mai napig nem ismert bizonyítás.

3. Többen próbálkoztak n szerinti teljes indukció alkalmazásával oly módon, hogy az indukciós lépésben először azt érik el, hogy az utolsó oszlop elemei különbözők legyenek, majd a bal felső $(n-1) \times (n-1)$-es táblázatra alkalmazzák az indukciós feltevést. Sajnos ebben a megközelítésben semmi sem garantálja, hogy az utolsó sor valamelyik (utolsótól különböző eleme) ne egyezzen meg egy másik elemmel ugyanabban az oszlopban. Működik azonban az n szerinti teljes indukció akkor, ha megfelelően általánosítjuk a feladat állítását: azt igazoljuk, hogy amennyiben egy $k \times n$ méretű táblázat mind a k sorában csupa különböző szám áll, továbbá egyetlen szám sem fordul elő n-nél többször a táblázatban, akkor lehetséges a sorokon belül úgy permutálni a számokat, hogy minden oszlopban csupa különböző szám álljon. Világos, hogy $n = 1$ esetén ez teljesül. Tegyük fel, hogy n-re már igazoltuk az állítást, és tekintsünk egy $k \times (n+1)$ méretű táblázatot. A célunk ekkor az, hogy az utolsó oszlopba úgy rendezzünk be különböző számokat, hogy az első n oszlopra teljesüljön az indukciós feltétel. Ehhez pedig mindössze azt kell elérni, hogy az utolsó oszlopban egyrészt csupa különböző szám álljon, másrészt pedig minden olyan szám, ami pontosan $(n+1)$-szer fordul elő a táblázatban, szerepeljen az utolsó oszlopban. A „szokásos” páros gráfot definiálva, a Hall-tételből könnyen látható, hogy egyrészt lehetséges az utolsó oszlopba csupa különböző számot becserélni, másrészt pedig lehetséges úgy permutálni a sorokat, hogy minden olyan szám, ami $(n+1)$-szer szerepel a táblázatban, az utolsó oszlopban is előforduljon. Az indukciós lépés igazolásához azonban a két tulajdonság együttes fennállása szükséges. Ezt pedig a Mendelsohn–Dulmage tétel biztosítja, amely szerint ha egy G páros gráfban M_1 és M_2 párosítások (azaz közös végpont nélküli élek halmazai), akkor van olyan M párosítás is G-ben, amely fedi az A színosztály minden M_1 által fedett csúcsát és a B színosztály minden M_2 által fedett csúcsát.

4. Érdemes végül rámutatni egy másik, a feladathoz szorosan kapcsolódó kutatási területre. A Rota-sejtés azt állítja, hogy ha egy $n \times n$ méretű táblázat minden mezejéhez egy-egy $\mathbb{R}^n$-beli vektor tartozik azzal a tulajdonsággal, hogy az egy sorban álló vektorokból bármely $\mathbb{R}^n$-beli vektor előállítható skalárral való szorzás és összeadás segítségével, akkor a táblázat sorain belül lehetséges a vektorokat úgy permutálni, hogy minden oszlopra is teljesüljön, hogy bármely $\mathbb{R}^n$-beli vektor előállítható skalárral való szorzás és összeadás segítségével az adott oszlopban álló vektorokból. A versenyen kitűzött feladat felfogható a Rota-sejtés egy igen speciális eseteként. Hasonlóan a listaszínezési sejtéshez, jelenleg az általános Rota-sejtésre sem ismert bizonyítás.

Fleiner Tamás

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

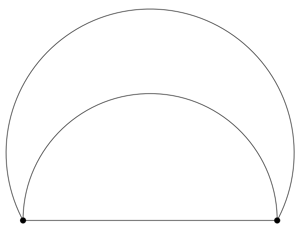
1. Egy bolthálózat húszéves fennállása alkalmából azzal kedveskedik a vásárlóknak, hogy 20% kedvezményt kapnak vásárlásuk összegéből, ha 4 kockával dobva a dobott számok összege legalább 20.

a) Mekkora ennek a valószínűsége?

b) Becsüljük meg, mennyibe kerül a vállalatnak ez az akció a jubileumi évben, ha 38 000 vásárlóra számítanak és a vásárlások összegszerű megoszlását az alábbi *táblázatban* adták meg:

0 – 4999 Ft	12%
5000 – 9999 Ft	36%
10 000 – 14 999 Ft	47%
15 000 – 50 000 Ft	5%

(*11 pont*)



2. Egy LED lámpát úgy alakítottak ki, hogy a LED fényforrásokat egy félgömb felületén helyezték el és azért, hogy a felülete ne legyen vakító, egy gömbszelet alakú opálos burát helyeztek fölé az *ábrának* megfelelően. A két bura falvastagsága elhanyagolható. A félgömb sugara 15 cm, a bura felülete pedig pont kétszerese a félgömb felszínének. A lámpákat a gyárban négyzetes oszlop alakú papírdobozokba csomagolják úgy, hogy a csillárok ne mozdulhassanak el a dobozban. Mekkorák legyenek a dobozok külső méretei, ha a rétegelt papír vastagsága $d = 5$ mm?
(*12 pont*)

3. Egy személyautó fedélzeti számítógépe az átlagfogyasztást az előzőleg megtett 100 km alapján számítja. A tankban lévő üzemanyag mennyiségét is ismerve így azt is jelzi, hogy hány km-t tudunk még autózni a meglévő üzemanyaggal, nevezzük ezt hatótávolság. Egy alkalommal induláskor a hatótáv kijelzett értéke 500 km. Egyenletes sebességgel haladunk autópályán. 50 km megtétele után a kijelző 588 km-es hatótávot jelez. Ezután még 680 km-t teszünk meg ugyanezzel az egyenletes sebességgel, amikor az üzemanyag jelző vészvillogó kigyullad, jelezve, hogy már csak 5 l üzemanyagunk van. Mennyi üzemanyag volt a tankban induláskor?
(*14 pont*)

4. Egy torony csonkakúp alakú kupolája alul 4 m, felül 3 m kerületű, alkotója pedig 2 m. A kupola egyik oldalán egy hangya mászik fel a torony tengelyének síkjában, 47 cm-re van a kupola alsó szegélyétől. A vele átellenes oldalon egy másik hangya mászik felfelé ugyanabban a síkban, és már csak 3 cm hiányzik, hogy elérje a kupola tetejét. Ekkor a két hangya az eredeti úti célt feladva, a lehető legrövidebb úton egymás felé indul. Mekkora távolságot tesznek meg a találkozásig, ha egyenlő sebességgel haladnak? (*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenletet:

$$5|x| = x \cdot \left(3x + 2 - 2\sqrt{8 - 2x - x^2}\,\right).$$

b) Határozzuk meg az $f(x) = -x^2 - 2x + 8$ és a $g(x) = 5|x|$ függvények által közrezárt területrész nagyságát. (*16 pont*)

6. Egy üzemanyag töltő állomás földalatti benzintároló tartálya egy fekvő hengerpalásból és a két végét lezáró két félgömbből áll. Teljes hossza 6 m, sugara 1,2 m.

a) Mekkora a tartály térfogata?

b) Mennyi benzin van benne, ha a szintmérő úszó éppen a sugár felénél áll?

c) Egy tartálykocsiból feltöltik a tárolót. Mennyi benzint engedtek bele, ha a szintmérő 92 cm-rel emelkedett? (*16 pont*)

7. Egy ismeretlen alapú számrendszerben az $\overline{ab}_x$ kétjegyű szám és a számjegyei felcserélésével kapott $\overline{ba}_x$ kétjegyű szám között a következő összefüggések állnak fenn:

1. $$\overline{ab}_x + \overline{ba}_x = \overline{110}_x,$$

2. $$\overline{ab}_x - \overline{ba}_x = \overline{20}_{10}.$$

a) Határozzuk meg a számrendszer alapját.

b) Az ilyen alapú számrendszerekben milyen oszthatósági szabály érvényes a 3-mal és az 5-tel való oszthatóságra?

c) Határozzuk meg a c és d számjegyek értékét úgy, hogy az $\overline{12c45d}_x$ alakú szám a lehető legnagyobb 15-tel osztható szám legyen ezekben a számrendszerekben. (*16 pont*)

8. Péter egy 5,2 millió Ft értékű új autót vásárol egy autókereskedőtől. Az összeg 40%-a az önrész, amit átvételkor ki kell fizetnie, az ár fennmaradó részét 5 év alatt törleszti, évi egyenlő részletekben 8%-os éves kamattal.

a) Mennyi lesz Péter éves törlesztő részlete?

A kereskedő ajánlata, hogy ha 5 év múlva egy ugyanilyen értékű kocsit vesz nála, akkor ezt az autót visszavásárolja tőle, évi 10% értékcsökkenést figyelembe véve és csak az árkülönbözetet kell kifizetnie.

b) Mennyit kell fizetnie Péternek az új autóért 5 év múlva, ha elfogadja az ajánlatot?

Péter elhatározza, hogy elfogadja a kereskedő ajánlatát és előtakarékoskodik az 5 év múlva esedékes autócserére. A bank legjobb ajánlata évi 2,4 %-os kamat 5 éves futamidőre havi egyenlő részletekben történő befizetéssel, havi kamatozással. (A havi kamat az éves kamat tizenketted része.)

Mekkora összeget fizessen be a bankba havonta, hogy az 5 év után kivett összegből fedezni tudja az autó cseréjét? (*16 pont*)

9. Egy 12 pontú egyszerű gráfnak 56 éle van.

a) Legalább hány kilencnél nagyobb fokszámú csúcsa van a gráfnak?

b) Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő.

Egy asztalitenisz csapatnak 6 férfi és 6 nő versenyzője van.

c) Az edzőnek két férfi, két női és két vegyes párost kell kiválasztania egy közelgő versenyre. Egy versenyző legfeljebb két különböző típusú párosban játszhat. Hányféle kiválasztás lehetséges?

d) Mennyi az esélye annak, hogy az egyik női versenyző, Tímea, egyik párosba sem kerül be? (*16 pont*)

Lorántfy László
Dabas

Megoldásvázlatok a 2018/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:*

$$4\cdot 2^x+5^y=2,$$
$$8\cdot 2^x+3\cdot 5^y=5. \qquad (5\ pont)$$

b) *Oldjuk meg a* $[\pi;2\pi]$ *intervallumon az alábbi egyenletet:*

$$3\cdot \operatorname{tg}^2 x-2\sqrt{3}\cdot \operatorname{tg} x-3=0. \qquad (5\ pont)$$

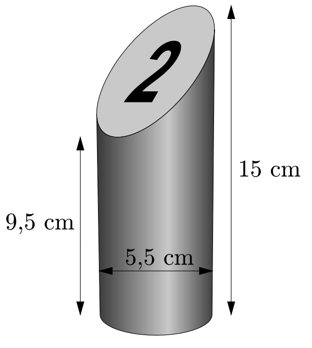
Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Az első egyenletből $5^y=2-4\cdot 2^x$, melyet a második egyenletbe helyettesítve és rendezve $4\cdot 2^x=1$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x=-2$, $y=0$. Az eredeti egyenletrendszerbe történő behelyettesítés után láthatjuk, hogy a kapott számpár valóban megoldás.

II. megoldás. Az első egyenlet háromszorosából a második egyenletet kivonva: $4\cdot 2^x=1$. Az exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt $x=-2$, $y=0$. Az eredeti egyenletrendszerbe történő behelyettesítés után láthatjuk, hogy a kapott számpár valóban megoldás.

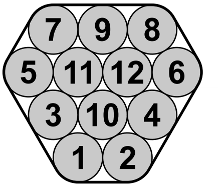
b) Az egyenlet $\operatorname{tg} x$-ben másodfokú, melynek gyökei: $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ és $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
$\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$ a $[\pi;2\pi]$ alaphalmazon pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{4\pi}{3}$,
$\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ a $[\pi;2\pi]$ alaphalmazon pontosan akkor teljesül, ha $x=\frac{11\pi}{6}$.

A két értéket behelyettesítve az eredeti egyenletbe meggyőződhetünk róla, hogy mindkettő megoldás.

2. *A* Mölkky *egy finn ügyességi játék, amit tizenkét darab fabábuval játszanak. A bábukat* 5,5 cm *átmérőjű,* 15 cm *magas egyenes körhenger alakú fából készítik úgy, hogy a henger tetejét az* 1. ábrán *látható módon* 45°*-os szögben levágják, majd a bábuk tetejére* 1–12*-ig sorszámokat rajzolnak.*



1. ábra



2. ábra

a) Mekkora egy, a játékhoz használt fabábu térfogata? (*4 pont*)

A játék kezdetén a bábukat a 2. ábrán *látható elrendezésben egy keret segítségével szorosan egymás mellé illesztik, hogy azok érintsék egymást.*

b) Mekkora a keret kerülete? (*4 pont*)

A játék elején a játékosok egy dobófával (Mölkky*-vel*) *próbálják feldönteni a keretben elhelyezkedő tizenkét számozott fabábut. A keretet a dobás előtt leveszik a bábukról. Az egymásra vagy a dobófára támaszkodó bábuk nem számítanak feldőltnek, a szabályosan feldőlt bábunak párhuzamosnak kell lennie a talajjal. Ennek következtében bármilyen kombinációban fel lehet dönteni a bábukat.*

c) Hányféleképpen lehet egy dobásból három bábut feldönteni úgy, hogy a feldöntött bábukon szereplő számok szorzata négyzetszám legyen? (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A játékhoz használt fabábuk egy 5,5 cm átmérőjű 9,5 cm magasságú egyenes körhengerből, és egy 5,5 cm átmérőjű és 5,5 cm magasságú „félhengerből” állnak.

Egy 5,5 cm átmérőjű 9,5 cm magas egyenes körhenger térfogata:

$$V_1 = 2{,}75^2 \cdot \pi \cdot 9{,}5 \ (\approx 225{,}7\ \text{cm}^3).$$

Egy 5,5 cm átmérőjű és magasságú „félhenger” térfogata:

$$V_2 = \frac{2{,}75^2 \cdot \pi \cdot 5,5}{2} \ (\approx 65{,}3\ \text{cm}^3).$$

Egy, a játékhoz használt fabábu térfogata kerekítve: $V_1 + V_2 \approx 291\ \text{cm}^3$.

Megjegyzés. A keresett térfogat úgy is számolható, hogy egy 5,5 cm átmérőjű, 15 cm magas egyenes körhenger térfogatából kivonjuk egy 5,5 cm átmérőjű és magasságú „félhenger” térfogatát.

b) A keret 3 db $4r$ és 3 db $2r$ hosszúságú egyenes szakaszból, valamint 6 db r sugarú α középponti szögű körcikkből áll. Az egyes körcikkek középponti szöge 60°, ezért a hat körcikk együtt egy r sugarú (teljes) kört ad ki.

A keret kerülete: $K = 3 \cdot 4 \cdot 2{,}75 + 3 \cdot 2 \cdot 2{,}75 + 2 \cdot 2{,}75 \cdot \pi \approx 66{,}78$ cm.

c) A feldöntött bábukon szereplő 3 szám szorzata négyzetszám lesz, ha 3 db különböző négyzetszámmal jelölt bábut döntünk fel, mely pontosan 1-féleképpen lehetséges: $(1;4;9)$.

Ha 2 db négyzetszámmal és 1 db nem négyzetszámmal jelölt bábut döntünk fel, akkor a szorzat nem lehet négyzetszám.

Ha 1 db négyzetszámmal és 2 db nem négyzetszámmal jelölt bábut döntünk fel, akkor ez utóbbi két szám között nem szerepelhet az 5, 7, 10 és 11 egyike sem (5 és 10 együtt sem).

A megmaradó 2; 3; 6; 8; 12 számok közül kiválasztható 10 számpár közül csak a $(2;8)$ és $(3;12)$ felel meg, így a lehetséges esetek: $(1;2;8)$, $(1;3;12)$, $(4;2;8)$, $(4;3;12)$, $(9;2;8)$, $(9;3;12)$.

Ha 0 db négyzetszámmal és 3 db nem négyzetszámmal jelölt bábut döntünk fel, akkor ezek között az 5 és 10 csak egyszerre szerepelhet, és ekkor a harmadik szám 2 vagy 8 lehet. A 2; 3; 6; 8; 12 számok közül kiválasztható 10 számhármas közül csak négy felel meg, így a lehetséges esetek: $(2;3;6)$, $(2;5;10)$, $(2;6;12)$, $(3;6;8)$, $(5;8;10)$, $(6;8;12)$.

Tehát összesen 13-féle különböző feldöntés lehetséges.

3. *Adott a derékszögű koordináta-rendszerben két pont: $A(1;-2)$ és $B(3;12)$.*

a) Határozzuk meg az x tengely azon P pontjának koordinátáit, melyre az ABP háromszög egyenlő szárú. *(7 pont)*

b) Számítsuk ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz. *(7 pont)*

Megoldás. *a*) Ha $AP = BP$ (vagyis az egyenlő szárú háromszög alapja AB) és $P(x;0)$, akkor $(x-1)^2 + 4 = (x-3)^2 + 144$, melyből $x = 37$.

Ha $AB = AP$ (vagyis az egyenlő szárú háromszög alapja BP) és $P(x;0)$, akkor $4 + 196 = (x-1)^2 + 4$, melyből x értékei -13 és 15.

Ha $AB = BP$ (vagyis az egyenlő szárú háromszög alapja AP) és $P(x;0)$, akkor $4 + 196 = (x-3)^2 + 144$, melyből x értékei $3 + 2\sqrt{14}$ ($\approx 10{,}48$) és $3 - 2\sqrt{14}$ ($\approx -4{,}48$).

Tehát a keresett pontok kerekítéssel: $P_1(37;0)$; $P_2(-13;0)$; $P_3(15;0)$; $P_4(10{,}48;0)$ és $P_5(-4{,}48;0)$.

b) *I. megoldás.* A keresett Q pont koordinátáit (a Thalész-tétel megfordítása miatt) az AB szakasz fölé, mint átmérő fölé rajzolt kör és az x tengely metszéspontja adja meg.

A kör középpontja az AB szakasz felezőpontja: $\left(\frac{1+3}{2}; \frac{-2+12}{2}\right) = (2;5)$. A kör sugara:

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(3-1)^2 + (12+2)^2}}{2} = 5\sqrt{2}\,.$$

A kör egyenlete: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 50$.

A kör x tengellyel való metszéspontját az $y = 0$ helyettesítéssel kapjuk, így $(x-2)^2 = 25$, melyből $x_1 = -3$ és $x_2 = 7$.

Tehát a keresett pontok: $Q_1(-3;0)$ és $Q_2(7;0)$.

II. megoldás. Mivel a Q pont az x tengelyen van, így a második koordinátája 0, vagyis $Q(x;0)$. $\overrightarrow{AQ}=(x-1;2)$ és $\overrightarrow{BQ}=(x-3;-12)$.

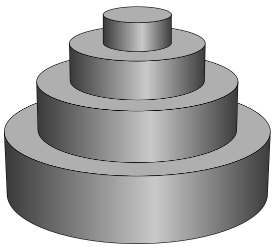
Az $\overrightarrow{AQ}$ és $\overrightarrow{BQ}$ vektorok pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, vagyis $(x-1)\cdot(x-3)+2\cdot(-12)=0$.

Az előbbi egyenletet rendezve $x^2-4x-21=0$, ahonnan $x_1=-3$ és $x_2=7$.

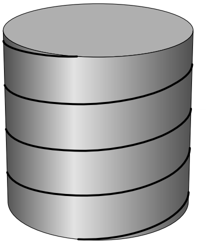
Tehát a keresett pontok: $Q_1(-3;0)$ és $Q_2(7;0)$.

4. *A* 3. ábrán *egy négyemeletes,* 60 cm *magas esküvői torta látható, melynek szintjei különböző magasságú és sugarú egyenes hengerek. Az egyes szintek magasságainak hosszai mértani sorozatot alkotnak.*

a) Milyen magasak az egyes emeletek, ha a legfelső szint 4 cm *magas, és a többi szint magasságának mérőszáma is egész szám?* (*9 pont*)



3. ábra



4. ábra

Az esküvői torta 16 cm *átmérőjű,* 4 cm *magas legfelső szintjét a* 4. ábrán *látható módon díszítéssel látják el.*

b) Milyen hosszú a legfelső szintre tekert díszítőcsík, ha a szélességétől eltekintünk? (*5 pont*)

Megoldás. *a) I. megoldás.* Jelölje q a mértani sorozat hányadosát. A feladat szövege alapján a mértani sorozat összegképletébe helyettesítve: $60=4\cdot\frac{q^4-1}{q-1}$ $(q\neq 1)$, melyet rendezve: $15q-q^4=14$, majd q-t kiemelve: $q(15-q^3)=14$.

Mivel az egyes szintek magasságainak mérőszáma egész szám, ezért az előbbi szorzótényezők 14 pozitív osztói. A lehetséges osztópárok:

q	1	2	7	14
$15-q^3$	14	7	2	1

Ezek közül a harmadik és negyedik eset nem ad jó megoldást (a kétféleképpen számított q érték nem egyezik meg).

Ha $q=1$, akkor egy állandó tagú mértani sorozatot kapunk, mely a feladat szövegének nem felel meg.

Ha $q=2$, akkor az esküvői torta egyes szintjeinek magassága 4 cm; 8 cm; 16 cm; 32 cm, mely megfelel a feladat feltételeinek.

II. megoldás. Jelölje q a mértani sorozat hányadosát. A feladat szövege alapján a mértani sorozat összegképletébe helyettesítve:

$$60=4\cdot\frac{q^4-1}{q-1}\quad(q\neq 1).$$

A nevezetes azonosságok segítségével a számlálót szorzattá alakítva:

$$15 = \frac{(q^2-1)(q^2+1)}{q-1},$$

majd egyszerűsítve $15 = (q+1)\cdot(q^2+1)$.

Mivel az egyes szintek magasságainak mérőszáma egész szám, ezért az előbbi szorzótényezők 15 pozitív osztói. A lehetséges osztópárok:

$q+1$	1	3	5	15
q^2+1	15	5	3	1

Ezek közül az első, harmadik és negyedik eset nem ad jó megoldást (a kétféleképpen számított q érték nem egyezik meg).

Ha $q=2$, akkor az esküvői torta egyes szintjeinek magassága 4 cm; 8 cm; 16 cm; 32 cm, mely megfelel a feladat feltételeinek.

b) A torta legfelső szintjét alkotó egyenes henger palástját a díszítővonal két végpontját összekötő alkotó mentén történő felvágással (kiterítve), egy 16π cm széles, 4 cm magas téglalapot kapunk, amelyen négy egyforma hosszúságú vonal húzódik párhuzamosan. Tekintsünk egy 16π cm és 1 cm befogójú derékszögű háromszöget, melyben a Pitagorasz-tétel szerint a díszítővonal hossza $\sqrt{(16\pi)^2+1^2}$ (cm). Tehát a díszítővonalak összhosszúsága $4\cdot\sqrt{(16\pi)^2+1^2}$, melynek egy tizedesjegyre kerekített értéke 201,1 cm.

II. rész

5. *Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:*

$$f(x) = 5-2x \quad \textit{és} \quad g(x) = 2x^2-3x+1.$$

a) Adjuk meg a $g\circ f$ függvény zérushelyeit. (*4 pont*)

b) Számítsuk ki a $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1}\big(g(x)+1\big)\,\mathrm{d}x$ *határozott integrált.* (*4 pont*)

c) Írjuk fel a g függvény f függvényre merőleges érintőjének egyenletét. (*8 pont*)

Megoldás. *a)* $(g\circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = 2(5-2x)^2-3(5-2x)+1 = 8x^2-34x+36.$

A $8x^2-34x+36=0$ egyenlet gyökei a keresett zérushelyek, melyek $x_1=2$ és $x_2=\frac{9}{4}$.

b)

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-1}^{1}\big(g(x)+1\big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1}(-2x^2+x+3)\,\mathrm{d}x = \left[-2\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(-2\cdot\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+3\cdot 1\right) - \left(-2\cdot\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{2}+3\cdot(-1)\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)+6 = \frac{14}{3}.$$

c) I. megoldás. Az f függvény grafikonja olyan egyenes (mely nem párhuzamos a koordinátatengelyekkel), melynek meredeksége -2, ezért az f függvény grafikonjára merőleges érintő egyenes $y=\frac{1}{2}x+b$ alakú, ahol b valós paraméter.

Az előbbi egyenesek közül az lesz a parabola érintője, amelynek egy közös pontja van a megadott parabolával.

Az előbbiek miatt az alábbi egyenletrendszernek csak egy valós számpár lehet a megoldása:

$$y=2x^2-3x+1,$$

$$y=\frac{1}{2}x+b.$$

A két jobb oldali kifejezés egyenlőségéből: $2x^2-3x+1=\frac{1}{2}x+b$, melyből $4x^2-7x+2-2b=0$. Az előbbi paraméteres másodfokú egyenletnek pontosan akkor van egy valós gyöke, ha diszkriminánsa 0, azaz: $(-7)^2-4\cdot 4\cdot(2-2b)=0$, melyből $b=-\frac{17}{32}$.

A keresett érintő egyenlete: $y=\frac{1}{2}x-\frac{17}{32}$.

II. megoldás. Az f függvény grafikonja olyan egyenes (mely nem párhuzamos a koordinátatengelyekkel) melynek meredeksége -2, ezért az f függvény grafikonjára merőleges érintő meredeksége $\frac{1}{2}$. A parabola $P_0(x_0;y_0)$ pontban húzott érintőjének meredekségét a g deriváltfüggvényének az x_0 helyen felvett helyettesítési értéke adja meg: $g'(x_0)=4x_0-3$. A meredekségek egyenlősége miatt: $4x_0-3=\frac{1}{2}$, melyből $x_0=\frac{7}{8}$.

Az érintési pont második koordinátája a parabola egyenletébe történő $x_0=\frac{7}{8}$ helyettesítésből: $y_0=-\frac{3}{32}$. Az adott ponton átmenő, adott iránytangensű egyenes egyenletébe helyettesítve:

$$y+\frac{3}{32}=\frac{1}{2}\cdot\left(x-\frac{7}{8}\right),$$

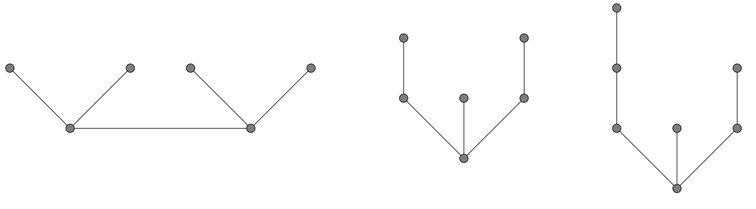
melyből a keresett érintő egyenlete: $y=\frac{1}{2}x-\frac{17}{32}$.

6. *a) Egy* 6 *pontú fagráfban a csúcsok fokszámainak terjedelme* 2*, módusza* 1*. Hány ilyen különböző* 6 *pontú fagráf létezik, ha csúcsaikat nem különböztetjük meg egymástól?* (*8 pont*)

b) Hány csúcsa van annak a fagráfnak, amelyben az össze nem kötött pontpárok száma kétszerese az élek számának? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Ha a módusz 1, a terjedelem 2, akkor a legkisebb fokszám 1, a legnagyobb pedig 3.

Három darab olyan különböző (páronként nem izomorf) 6 pontú (5 élű) fagráf van, amelyben a legnagyobb fokszám 3:



Ezek közül mindhárom megfelelő.

b) Az n pontú fagráf éleinek száma $n-1$. Ha az n pontú teljes gráf éleinek számából kivonjuk az n pontú fagráf éleinek számát, megkapjuk a fagráf össze nem kötött pontpárjainak a számát, ezért a mi esetünkben:

$$\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=2(n-1).$$

Az egyenletet 2-vel szorozva, majd rendezve: $n(n-1)=6(n-1)$, melyből $(n-1)(n-6)=$ $=0$, melynek megoldásai $n_1=1$ és $n_2=6$.

Ha 1 pontú a fagráf, akkor 0 éle van. Ekkor az össze nem kötött pontpárok száma is 0, és ez kétszerese az élek számának.

Ha 6 pontú a fagráf, akkor az éleinek száma 5. Ekkor az össze nem kötött pontpárok száma 10, és ez kétszerese az élek számának.

7. *Egy iskolai büfé italautomatájában hétféle rostos üdítő, kétféle ásványvíz és háromféle szénsavas frissítő kapható, mindegyikből pontosan* 8 db.

a) *Hányféle sorrendben vehet ki Emese mindegyik rostos üdítőből pontosan egyet?* (*2 pont*)

b) *Hányféleképpen választhat ki Emese* 3 db *innivalót tetszőleges összeállításban, ha az automatában lévő összes üdítőt különbözőnek tekintjük?* (*5 pont*)

Az italautomaták elég gyakran elromlanak. Egy italautomatákat szervizelő cégnél 0,05 *annak a valószínűsége, hogy egy adott napon nincs javítanivaló;* 0,2, *hogy pontosan egy;* 0,6, *hogy pontosan két javítanivaló automata van.*

c) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy öt egymást követő munkanapon nincs javítanivaló?* (*3 pont*)

d) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy három nap alatt összesen két gépet kell megjavítaniuk?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel Emese mindegyik fajta rostos üdítőből pontosan egyet választ, ezért 7 különböző elem ismétlés nélküli permutációját kell kiszámítani. Emese $7!$ $(=5040)$-féle sorrendben veheti ki az üdítőket.

b) Mivel egy italautomatából adott sorrendben potyognak ki az üdítők, ezért a következő lehetőségek vannak.

Három ugyanolyan üdítőt választ, ezt 12-féleképp teheti meg.

Kettő ugyanolyat és egy másmilyet választ, ezt $12\cdot 11=132$-féleképp tudja megtenni.

Végül, ha mindhárom üdítőital különböző típusú, arra $\binom{12}{3}=220$ lehetőség van.

Összesen 364-féleképpen választhatja ki a 3 üdítőt tetszőleges összeállításban..

c) Annak a valószínűsége, hogy egy adott napon nincs javítanivaló 0,05; annak, hogy van 0,95. Annak a valószínűsége, hogy 5 egymást követő napon nincs javítanivaló: $0{,}05^5=0{,}000\,000\,312\,5$.

d) Két esetet különböztethetünk meg:

1. a három nap közül az egyiken van két javítanivaló és a másik két napon semmi, vagy

2. két napon van egy-egy javítanivaló és egy napon semmi.

Mindkét esetben a napok sorrendje 3-féle lehet, ezért az első eset bekövetkezésének valószínűsége $3\cdot 0{,}05\cdot 0{,}05\cdot 0{,}6$ $(=0{,}0045)$, míg a második eset bekövetkezésének valószínűsége $3\cdot 0{,}05\cdot 0{,}2\cdot 0{,}2$ $(=0{,}006)$.

A kérdezett valószínűség az előbbi két valószínűség összege, vagyis 0,0105.

8. *Egy egyetem gólyatáborában két csoport szkanderbajnokságot játszik egymással. Azért, hogy felmérjék az erőviszonyokat, először a két csoporton belül mindenki mindenkivel egyszer játszik, majd ezt követően a csoportok tagjai megmérkőznek a másik csoport tagjaival. A játék során a csoportokban összesen* 144, *míg a csoportok között* 156 *megmérettetésre kerül sor.*

a) Hányan vannak az egyik, és hányan a másik csoportban? (*9 pont*)

A bajnokság megkezdése előtt minden versenyző kap egy sorszámot.

b) Botond azt állítja, hogy az egyjegyű sorszámot kapott versenyzők közül ki lehet választani hatot úgy, hogy bárhogy párosítjuk őket, a párokban szereplő versenyzők sorszámainak összege három különböző szám lesz. Igaza van-e? (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje az egyik csoportban lévők számát n, míg a másikét m. Ekkor a feladat szövege alapján:

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}=144,$$

$$n\cdot m=156.$$

Az első egyenletet átalakítva $(n^2+m^2)-(n+m)=288$, majd az $(a+b)^2=$ $=a^2+2ab+b^2$ azonosságot alkalmazva az egyenlet $(n+m)^2-(n+m)-2nm=288$ alakban írható.

Az $n\cdot m=156$ helyettesítéssel és rendezéssel az előbbi egyenlet a következőképpen írható: $(n+m)^2-(n+m)-600=0$, mely $(n+m)$-ben másodfokú, megoldásai $n+m=25$ és $n+m=-24$.

Mivel $n,m>0$, ezért az utóbbi nem lehetséges.

Ha $n+m=25$ és $n\cdot m=156$, akkor a szimmetriától eltekintve pontosan egy olyan pozitív valós számpár van, mely kielégíti az eredeti egyenletrendszert, mégpedig: $n=12$ és $m=13$. A szöveg alapján történő ellenőrzéssel meggyőződhetünk, hogy a számpár megoldása a feladatnak.

b) Mivel $1+9=2+8=3+7=4+6$, ezért ha az 1 és a 9 is szerepel a hat szám között, akkor a $(2;8)$, $(3;7)$, $(4;6)$ számpárok mindegyikéből pontosan egy szám szerepel, és ezeken kívül még az 5-ös. Mivel $1+5=6$, ezért a 2 és a 4 közül csak az egyik van benne; illetve 5+9=14, ezért a 6 és a 8 közül is az egyik van benne. Ha a $(2;8)$ párból a 2 van benne, akkor a 4 nincs, tehát a 6 van. Viszont $5+6=9+2$. Tehát ez nem megfelelő.

Ez azt jelenti, hogy az 1 és a 9 közül vagy az egyik, vagy egyik sincs a hat szám között. Ha az egyik benne van, akkor a szimmetria miatt feltehető, hogy az 1-es az. Mivel $1+8=2+7=3+6=4+5$, ezért ha a 8 szerepel, akkor a $(2;7)$, $(3;6)$ és $(4;5)$ számpárok mindegyikéből pontosan az egyik van benne, és még a 9-es, de a 9-est már kizártuk. Így a 8-as sem szerepelhet. Tehát az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számokból kellene megfelelő hatot kiválasztani. Elég megnézni, hogy melyik az az egy szám, ami kimarad. A szimmetria miatt elég megvizsgálni, hogy a 4, 5, 6 vagy 7 megfelelő-e. Ha a 4 marad ki, akkor a maradék számok között $3+5=2+6$. Ha az 5, akkor a $4+6=3+7$, ha a 6, akkor $2+4=1+5$, végül a 7 esetén $3+6=4+5$. Tehát egyik sem jó.

Ha egyik sincs benne, akkor a 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 közül kell kiválasztani azt az egyet, ami kimarad. Mivel $2+5=3+4$, illetve $5+8=6+7$, ezért az 5 kimarad. De ekkor $4+6=3+7$, ami nem jó.

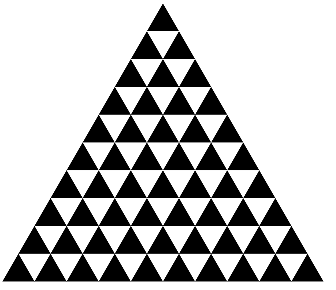
Tehát nem lehet kiválasztani hat versenyzőt a feltételnek megfelelően, Botondnak nincs igaza.

9. *Egy szabályos háromszög alakú céltábla oldalait n ($n > 1$, $n \in \mathbb{N}$) egyenlő részre osztottuk. Ezután az osztópontokon át a háromszög oldalaival párhuzamosan szakaszokat húztunk, melynek végpontjai a megfelelő osztópontok. Az így keletkező egybevágó szabályos kisháromszögeket balról jobbra, egyesével, felváltva feketére és fehérre színezzük úgy, hogy minden sorban az első kisháromszög fekete.*

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a céltáblára egyetlen lövést leadva, az fekete mezőt talál el, feltéve, hogy a lövés eltalálja a céltáblát? (*9 pont*)

b) Határozzuk meg a és b értékét, ha tudjuk, hogy a kapott p valószínűségre minden $n > 1$ egész esetén teljesül, hogy $a < p \leqslant b$, ahol a a lehető legnagyobb, b pedig a lehető legkisebb ilyen szám? (*7 pont*)

Megoldás. a) A feladat megértését tükröző *ábra:*



A keresett A_n valószínűséget a fekete kisháromszögek területének aránya adja meg a T területű céltáblán.

A céltábla T területe: $T = t \cdot n^2$, ahol t a felosztás során keletkező egy kisháromszög területe. Az ábrát vizsgálva látszik, hogy a céltábla egyik csúcsától lefelé haladva az egymást követő sorokban a fekete háromszögek száma (és így területösszegük is) számtani sorozatot alkot, melynek első tagja és differenciája is t.

Annak a valószínűsége, hogy a lövedék fekete mezőt talál el, a számtani sorozat első n tagjának összegével arányos, ezért az összegképletbe behelyettesítve:

$$S_n = \frac{t + nt}{2} \cdot n = t \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

A keresett A_n valószínűség:

$$\frac{t \cdot \frac{n(n+1)}{2}}{t \cdot n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

b) Felhasználva a korábban kapott összefüggést:

$$A_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Mivel az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat szigorúan monoton csökken és 0-hoz tart, ezért a fenti valószínűséget megadó $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$ sorozat is konvergens és szigorúan monoton csökken, melynek határértéke:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

Az előbbiek miatt az $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right)$ sorozat maximális értékét $n = 2$ esetén veszi fel, ami $\frac{3}{4}$, ezért a keresett valószínűség: $\frac{1}{2} < A_n \leqslant \frac{3}{4}$.

Varga Péter
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 4848. *Keressük meg az összes olyan P konvex poliédert, aminek a belsejében létezik egy olyan O pont, hogy P minden O-ra illeszkedő síkkal vett metszete O középpontú paralelogramma.*

(*6 pont*)

Megoldás. Jelölje $\langle XYZ\rangle$ az X, Y és Z pontok által feszített síkot.

Először is belátjuk, hogy P középpontosan szimmetrikus O-ra. Legyen X tetszőleges pont P-ben, és tekintsünk egy OX-re illeszkedő S síkot. A $P\cap S$ síkmetszet a feltétel szerint O középpontú paralelogramma, így tartalmazza X-nek O-ra vonatkozó X' tükörképét. Ebből $X'\in P$ is következik, ami igazolja a középpontos szimmetriát.

Legyen P egy lapjának három egymást követő csúcsa (ilyen sorrendben) A, B és C, az AB és BC élek felezőpontjai X és Y. A pontok O-ra vonatkozó tükörképei értelemszerűen A', B', C', X' és Y'.

Az XY egyenes P határát pontosan az XY szakaszban metszi, ezért $\langle OXY\rangle\cap P$ éppen az $XYX'Y'$ paralelogramma, vagyis az XY' szakasz P határára illeszkedik.

Másrészről az A, B, B' és C' pontok nem egy síkba esnek. Valóban, ha C' illeszkedik az $\langle ABB'\rangle$-ra, akkor $C'\in\langle ABB'\rangle\cap\langle A'B'C'\rangle=A'B'$, ami nem lehet. Így viszont az XY' szakasz az $ABB'C'$ tetraéder két kitérő élének felezőpontját összekötő szakasz, amely a tetraéder, és így egyúttal P belsejében halad. Ezzel ellentmondásra jutottunk, így nem létezik ilyen P poliéder.

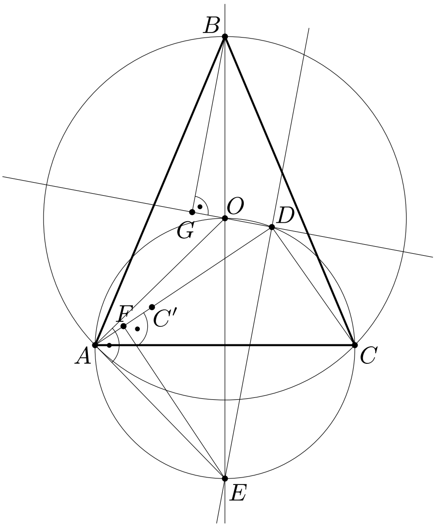
Imolay András (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

21 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 13 versenyző: Baran Zsuzsanna, Borbényi Márton, Gáspár Attila, Hoffmann Balázs, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Kocsis Júlia, Nagy Nándor, Schrettner Jakab, Simon Dániel Gábor, Tóth Viktor, Weisz Máté. 5 pontos 4, 4 pontos 1, 3 pontos 2, 2 pontos 1 dolgozat.

B. 4863. *Az ABC háromszögben $AB=BC$. A D pont úgy helyezkedik el a háromszög belsejében, hogy $ADC\sphericalangle=2ABC\sphericalangle$. Bizonyítsuk be, hogy a B pontnak az $ADC\sphericalangle$ külső szögfelezőjétől való távolsága az AD és DC szakaszok számtani közepe.*

(*5 pont*) (*Kvant*)

Megoldás. Legyen O az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja, és használjuk az *ábra* jelöléseit. A kerületi- és középponti szögek tétele miatt $ADC\sphericalangle = 2ABC\sphericalangle = AOC\sphericalangle$, ezért az A, C, D és O pontok egy körre illeszkednek. Az $AD = DC$ esetben $D = O$, az állítás triviális, ezért a továbbiakban az általánosság megszorítása nélkül feltesszük, hogy $AD > DC$.



Az $ADC\sphericalangle$ szögfelezője az ADC kört az O-val átellenes E pontban metszi, ami felezi az AC ívet. A C pont DE-re vonatkozó C' tükörképe illeszkedik AD-re. Így $AE = CE = C'E$, s ezért az AC' szakasz F felezőpontjára $EFC'\sphericalangle = 90°$ teljesül. Innen egyrészt a felezés miatt

$$DF = \frac{DC' + DA}{2} = \frac{DC + DA}{2},$$

másrészt definíció szerint $DF = DE \cdot \cos(FDE\sphericalangle)$.

Mivel OE átmérő, a Thalész-tétel miatt $ODE\sphericalangle = OAE\sphericalangle = 90°$. A külső és a belső szögfelezők merőlegesek egymásra, így OD éppen a D-nél lévő külső szögfelező. Legyen G a B merőleges vetülete OD-n. A szimmetria miatt B, O és E kollineárisak, így az $ODE\triangle$ és a $OGB\triangle$ szögei páronként megegyeznek, ezért a háromszögek hasonlóak. Ezt kihasználva

$$BG = \frac{BO}{OE} \cdot DE = \frac{AO}{OE} \cdot DE = \cos(AOE\sphericalangle) \cdot DE = \cos(FDE\sphericalangle) \cdot DE =$$

$$= \frac{DC + DA}{2},$$

amivel az állítást beláttuk.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.)

46 dolgozat érkezett. 5 pontos 37, 4 pontos 4, 3 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

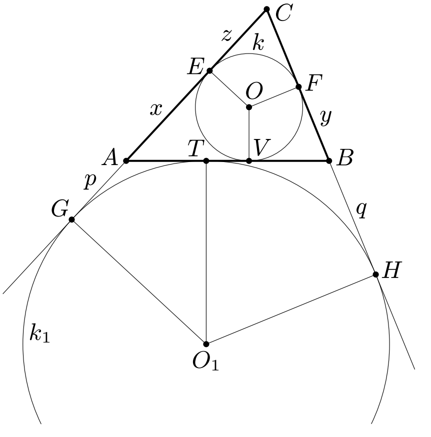
B. 4889. *Az $ABCD$ érintőtrapéz beírt köre az AB alapot a T, a vele párhuzamos CD alapot az U pontban érinti. Legyen M az AD és BC száregyenesek metszéspontja, és legyen V az AB oldal és az MU egyenesek metszéspontja. Mutassuk meg, hogy $AT = VB$.*

(*4 pont*)

Megoldás. Először lássunk be egy segédtételt. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.

Tétel. *A háromszög beírt és hozzáírt körének egy oldalra eső érintési pontjai szimmetrikusan helyezkednek el, tehát* $AT = VB$.

Bizonyítás. Legyen a háromszög oldalainak hossza a szokásos jelölések szerint a, b, c, a beírt kör érintőszakaszainak hossza x, y, z, a hozzáírt kör érintőszakaszainak hossza p és q, a háromszög kerülete k, és $s = \frac{k}{2}$.



1. ábra

$CG = CH$, mivel a k_1 körhöz C pontból húzott érintőszakaszok.

$CG + CH = CA + AT + TB + BC = k = 2s$, ezért $CG = CH = s$, amiből $AT = p = s - b$.

$2x + 2y + 2z = k$, vagyis $x + y + z = s$.

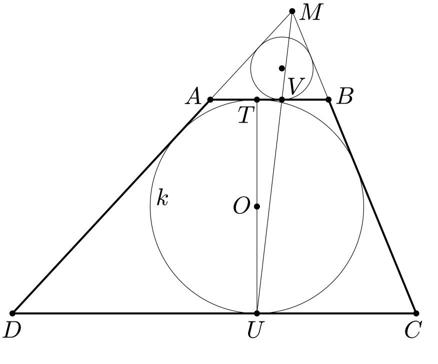
$BV = y = s - (x + z) = s - b$, tehát $AT = BV$.

Két esetre bontjuk a feladat bizonyítását.

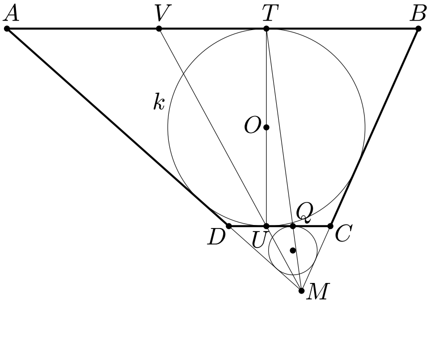
1. eset: $AB < CD$. Használjuk a *2. ábra* jelöléseit. Legyen k a beírt kör.

Ebben az esetben az M metszéspont az AB egyenes C és D pontokat nem tartalmazó oldalára esik. A k kör az MAB háromszög AB oldalához írt köre.

Nagyítsuk az ABM háromszöget az M pontból $\lambda = \frac{MD}{MA}$ arányban. Ekkor az MAB háromszög beírt köre k-ba megy át. Az AB egyenes képe a CD egyenes, hiszen $AB \parallel CD$ és AB érinti a beírt kört, CD pedig érinti k-t. A V pont képe U lesz, hiszen a pont és a képe, valamint M egy egyenesen vannak, és V rajta van az AB egyenesen, így a képe rajta van a CD egyenesen. Tehát az AB egyenest az MAB háromszög beírt köre a V pontban érinti.



2. ábra



3. ábra

Használjuk a segédtételünket. A beírt kör érintési pontjának távolsága az egyik csúcstól egyenlő a hozzáírt kör távolságával a másik csúcstól, vagyis $AT = VB$.

2. eset: $AB > CD$. Használjuk a *3. ábra* jelöléseit.

Most M a CD egyenes A és B pontot nem tartalmazó oldalán lesz. Ekkor k az MCD háromszög hozzáírt köre.

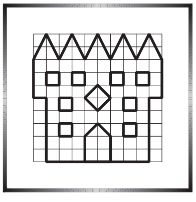
Nagyítsuk az MCD háromszöget az M pontból $\lambda = \frac{MA}{MD}$ arányban. Ekkor MCD beírt köre k-ba megy át. A CD egyenes képe az AB egyenes lesz. Mivel CD érinti a beírt kört, AB pedig érinti k-t, az U pont képe V, a Q pont képe pedig T lesz.

Pontosan akkor igaz, hogy $AT = VB$, ha $DQ = CU$. Utóbbi a segédtételünk értelmében igaz, így $AT = VB$ is teljesül.

Ha $AB = CD$, akkor $ABCD$ paralellogramma, azaz nem létezik az M pont.

Kerekes Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és
Döbröntei Dávid Bence (Pápa, Türr István Gimn. és Koll., 12 évf.)
dolgozata alapján

92 dolgozat érkezett. 4 pontos 57, 3 pontos 22, 2 pontos 2, 1 pontos 3, 0 pontos 8 dolgozat.



A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (577–582.)

K. 577. Xavér kivett három lapot egy csomag francia kártyából, és letette őket egymás mellé az asztalra. A letett lapokról az alábbi információkat árulta el:

– A három lap között van egy király, amelyiktől közvetlenül jobbra 1 vagy 2 dáma található.
– A három lap között van egy dáma, amelyiktől közvetlenül balra 1 vagy 2 dáma található.
– A három lap között van egy kőr, amelyiktől közvetlenül balra 1 vagy 2 pikk található.
– A három lap között van egy pikk, amelyiktől közvetlenül jobbra 1 vagy 2 pikk található.

Balról jobbra haladva milyen lapok lehetnek az asztalon?

K. 578. Egy $2 \times n$-es táblázat felső sorába beírjuk a pozitív egész számokat 1-től n-ig növekvő sorrendben, az alsó sorába pedig csökkenő sorrendben. Hány olyan 50-nél kisebb n pozitív egész szám van, melyre minden felső sorban lévő szám és az alatta lévő szám relatív prím?

K. 579. 105 lányt és 95 fiút tetszőlegesen 100 párba osztunk. A fiú párok kezet fognak, a lány párok pacsiznak, a vegyes párok pedig elkezdenek táncolni. Mutassuk meg, hogy 5-tel kevesebb kézfogás történik, mint pacsi.

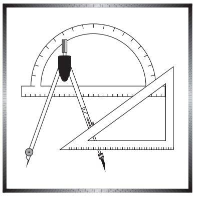
K. 580. Mely derékszögű háromszögekre igaz, hogy $x > 2(z-y)$, feltéve, hogy $z > y \geqslant x$?

K. 581. Adjuk meg az összes ABBA alakú négyjegyű négyzetszámot.

K. 582. Milyen hosszú lehet az a szó, amelynek betűi pontosan 180-féleképpen rendezhetők sorba? Keressünk ilyen értelmes magyar szót.

Beküldési határidő: 2018. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1462–1468.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1462. Egy számtani sorozat első tagja $a_1 = 3$, differenciája 9. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat tagjai között minden természetes k szám esetén szerepel $3 \cdot 4^k$.

C. 1463. A szabályos ABC háromszög belsejében található M pontból az AB, BC és CA oldalakra állított merőlegesek talppontja rendre H, K és P. Bizonyítsuk be, hogy

(*i*) $|AH|^2 + |BK|^2 + |CP|^2 = |HB|^2 + |KC|^2 + |PA|^2$;

(*ii*) $|AH| + |BK| + |CP| = |HB| + |KC| + |PA|$.

Mathematical Competitions in Croatia

Feladatok mindenkinek

C. 1464. Azt mondjuk, hogy egy tetszőleges A természetes számból a nála kisebb B természetes szám *kiolvasható,* ha A számjegyei közül néhányat letörölve, majd a megmaradó jegyeket a sorrend megváltoztatása nélkül összeolvasva megkapjuk B-t. Melyik a legkisebb olyan természetes szám, melyből bármely háromjegyű szám kiolvasható?

C. 1465. A PQR szabályos háromszög és a $QRST$ négyzet csúcsain áthaladó PS és RT egyenesek metszéspontja legyen M. Igazoljuk, hogy a PTM háromszög egyenlőszárú.

C. 1466. Egy bizottság az év folyamán tizenkét alkalommal ülésezett. A tagok közül minden ülésen 10-en vettek részt, és bármelyik két tag legfeljebb egyszer volt együtt jelen. Legalább hány tagból áll a bizottság?

Feladatok 11. évfolyamtól

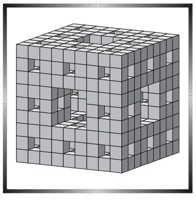
C. 1467. Az O középpontú, $2r$ sugarú és az O-n áthaladó, $r+1$ sugarú körök metszéspontjai legyenek A és B. Mekkora lehet r, ha az AB szakasz a kisebbik kör átmérője?

C. 1468. Igazoljuk, hogy ha a és b nemnegatív számok, akkor

$$\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b) \geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\,.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Beküldési határidő: 2018. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4930–4938.)

B. 4930. Bergengóciában, „Turágus” faluban három vallás képviselői a Napimádók, a Holdimádók és a Földimádók. A vallási előírások szerint a szentélynek a falu valamennyi házától vett távolságösszege a lehető legkisebb kell, hogy legyen (függetlenül attól, hogy a házban milyen vallás hívei élnek.) Igazoljuk, hogy ha a Napimádóknak, és a Holdimádóknak már van egy-egy szentélye a faluban, akkor a Földimádók is tudnak építeni egy újabb szentélyt. (A falu sík terepen terül el, és a szentély, illetve a falu házai is pontszerűnek tekintendőek.)

(*3 pont*)

B. 4931. Mutassuk meg, hogy egy háromszög a, b, c oldalaira teljesül, hogy

$$\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc}>3.$$

(*3 pont*)

B. 4932. A Nagy Meseországi Bestiáriumban az év minden hetére jut egy-egy sárkány. A legfiatalabb sárkány, Alajos 13-fejű, a következő sárkány Botond 14-fejű … (és így tovább, minden újabb idősebb sárkánynak eggyel több feje van, mint az előzőnek), míg a legidősebb sárkány Zoárd 64-fejű. A meseországi szerzetesek elkészítették a Nagy Sárkánymesés Kódexet. A Kódexbe csak az a mese kerülhet be, amelyben szereplő sárkányok fejeinek a száma pontosan 1001. Bármely két mese esetén van legalább egy olyan sárkány, ami csak az egyik mesében szerepel. Miután a Kódexbe a fenti feltételeknek megfelelő összes lehetséges mesét lejegyezték, a 13-fejű Alajos, vagy a 14-fejű Botond szerepel-e több mesében?

(*5 pont*)

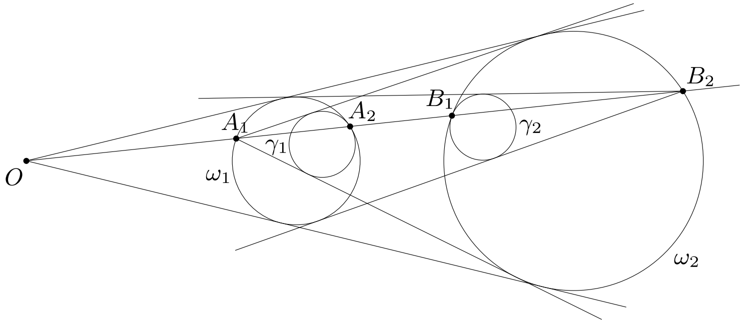
B. 4933. Határozzuk meg az egységnégyzetbe írt maximális kerületű szabályos háromszög területét.

(*4 pont*)

B. 4934. Tetszőleges n és k pozitív egészek esetén jelölje $f(n,k)$ azt, hogy egy $n \times k$-as rácstéglalap egyik átlója hány egységnégyzet belsején halad keresztül. Hány olyan n, k számpár van, amelyre $n \geqslant k$, és $f(n,k) = 2018$?

(*4 pont*)

B. 4935. Adott az O csúcsú szög szárai közé írt két érintő kör, ω_1 és ω_2. Egy, az O pontból induló félegyenes az ω_1 kört az A_1 és a B_1, az ω_2 kört az A_2 és a B_2 pontban metszi úgy, hogy $OA_1 < OB_1 < OA_2 < OB_2$ (lásd az *ábrát*). A γ_1 kör belülről érinti az ω_1 kört és érinti az ω_2 kör A_1 ponton átmenő érintőit. A γ_2 kör pedig belülről érinti az ω_2 kört és érinti az ω_1 kör B_2 ponton átmenő érintőit. Bizonyítsuk be, hogy a γ_1 és γ_2 körök sugara egyenlő.



(*5 pont*) (*Kvant*)

B. 4936. Rögzítsük a k körben az átmérőtől különböző AB húrt, ennek felezőpontja legyen F. A k körvonal A-tól és B-től különböző pontja legyen P. A PF egyenes messe a k kört másodszor X-ben, X tükörképe az AB felezőmerőlegesére Y. Bizonyítsuk be, hogy van a síknak egy olyan pontja, amelyen a PY egyenes P minden helyzetében átmegy.

(*5 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 4937. A síkon kiválasztunk rácsnégyszögeket úgy, hogy igaz rájuk a következő: akárhogy színezzük a rácspontokat véges sok színnel, mindig van olyan kiválasztott négyszög, amelynek minden csúcsa ugyanolyan színű. Bizonyítsuk be, hogy van végtelen sok olyan kiválasztott négyszög, amelyek közül semelyik kettőnek nincs közös csúcsa.

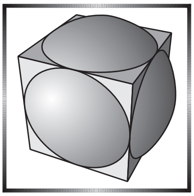
(*6 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 4938. Ismert, hogy a tórusz felületére rá lehet rajzolni a 7 pontú teljes gráfot (lásd pl. a Császár-poliédert). Egy sárga görbe bögre oldalán kijelölünk 7 pontot, és bármelyik kettőt össze akarjuk kötni egy-egy görbével úgy, hogy semelyik két görbének ne legyen közös belső pontja. Legalább hány görbét kell ennek eléréséhez átvezetnünk a görbe bögre fülén?

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2018. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (716–718.)

A. 716. Az ABC háromszög belsejében, az A-ból induló szögfelezőn felvettünk egy D pontot. Legyen a BD és AC egyenesek metszéspontja E, a CD és AB metszéspontja F. Az ABC háromszög körülírt körét az EF egyenes a P és Q pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy ha O a DPQ kör középpontja, akkor OD merőleges BC-re.

Javasolta: *Michael Ren* (Andover, Massachusetts, USA)

A. 717. Egy pozitív egészt *lustának* nevezünk, ha nincs 3-nál nagyobb prímosztója. Mutassuk meg, hogy két szomszédos négyzetszám között legfeljebb két lusta szám lehet.

Javasolta: *Gyenes Zoltán* és *Kós Géza* (Budapest)

A. 718. Jelölje $\mathbb{R}[x,y]$ a kétváltozós, valós együtthatós polinomok halmazát. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R}[x,y]$ polinomnak az (a,b) számpár *zérushelye,* ha $f(a,b)=0$.

Igaz-e, hogy ha a $p,q \in \mathbb{R}[x,y]$ polinomoknak végtelen sok közös zérushelye van, akkor létezik olyan nem konstans $r \in \mathbb{R}[x,y]$ polinom, ami kiemelhető p-ből és q-ból is?

❄

Beküldési határidő: 2018. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Monte-Carlo-módszerek 1.

Monte-Carlo híres a kaszinóiról és az ott folyó szerencsejátékról. A szerencsejátékok kapcsolata a matematikával a XVII. században Pascal és Fermat munkásságával kezdődött. A szerencsejátékok, és általában a véletlen jelenségek több érdekes és nehezen megoldható matematikai problémát eredményeztek. A megoldásukkal olyan kérdésekre kaptak választ, melyek régóta foglalkoztatták a játékosokat. A kedvelt játékokról megállapították, hogy melyik fél számára mennyire „nyerő”. Természetesen az is nyilvánvaló volt, hogy a kiszámított valószínűségeket egyetlen játékra nincs értelme alkalmazni, hanem sok játék eredményét kell följegyezni és összegezni. A játékok nem vesztettek varázsukból, ugyanakkor igazi kihívás volt a matematikusoknak egy-egy valószínűség kiszámítása.

A XX. század közepén a számítógépek megjelenésével a szerencsejáték és a matematika is új lehetőségeket nyert. A kiszámított valószínűségeket „ellenőrizni” is lehetett nagyszámú kísérlettel. Csak meg kellett tanítani a számítógépet kockát dobni: a gép N-szer elvégez egy kísérletet, és minden kísérletben véletlenszerűen választ a lehetőségek közül. Az így nyert relatív gyakoriságok és a matematikai úton számított valószínűségek összevethetők voltak.

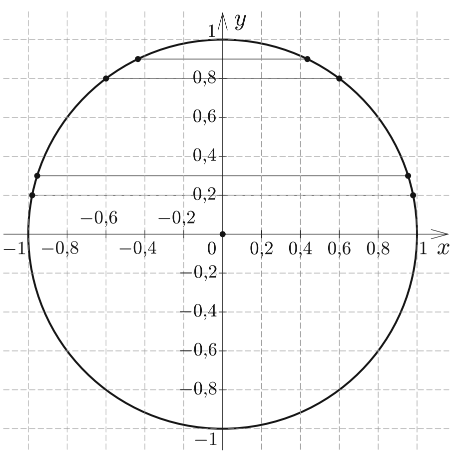
A Monte-Carlo-módszerek egy speciális problémamegoldási lehetőséget jelentenek, melyeket sikerrel alkalmaztak a matematika, fizika valamint az informatika területén. Az alapgondolat az előbbi „ellenőrzés” fordítottja. Mit tehetünk akkor, ha a vizsgált jelenség bizonyos értékei nem kiszámíthatók, tehát nincs zárt, könnyen kiértékelhető formula az eredmény meghatározására? Az egyik út már ismert volt a számítógépek előtt: numerikus módszerekkel meg lehetett határozni olyan számítási lépéseket, melyek megfelelő pontossággal megközelítik a keresett mennyiségeket. A numerikus módszerek alkalmazásában is nagy segítség volt a számítógép. A Monte-Carlo-módszer mást javasol: szimuláljuk sokszor a problémához kapcsolható kísérletet, és a kapott eredmények alapján adjunk közelítést a keresett ismeretlen értékekre.

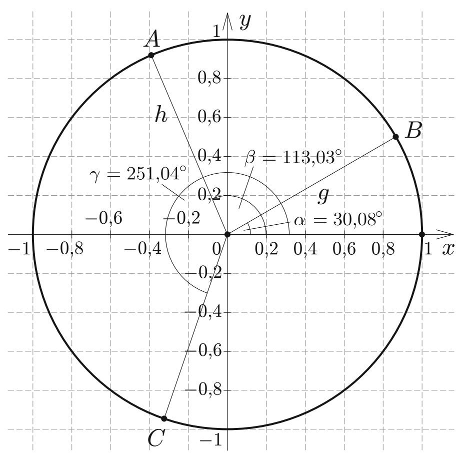
Lássuk először egy klasszikus valószínűségszámítás feladatnál a módszer működését: a 2008. márciusi számunkban megjelent **B. 4080.** feladat: A körvonalon egymástól függetlenül véletlenszerűen kiválasztunk 3 pontot. Mi annak a valószínűsége, hogy az általuk meghatározott háromszög hegyesszögű?

A feladat több szép megoldása olvasható honlapunkon, ezért nem volna szükségünk a Monte-Carlo-módszerre, hogy az eredményt közelítsük, mégis tanulságos a példa. A kísérletben véletlenszerűen elhelyezünk pontokat egy egységsugarú körön, majd meghatározzuk a kapott háromszög szögeit, és megállapítjuk, hogy hegyesszögű-e. A kísérletet N-szer elvégezve megszámoljuk a hegyesszögű háromszögeket. Ha ezek száma k, akkor a kísérletsorozatban a hegyesszögű háromszögek előfordulásának k/N relatív gyakoriságát kapjuk, ami elég nagy N esetén megfelelően pontos lesz. Kérdés ugyanakkor, hogy pl. két tizedesjegy pontossághoz milyen N értéket érdemes megadni, de ezt hagyjuk későbbre, most foglalkozzunk a kísérletsorozatot megvalósító programmal.

Próbáljuk meg elkészíteni a számítógépes programot. Legyen egy egységkör a koordináta-rendszer kezdőpontjában, és $A(ax, ay)$, $B(bx, by)$ és $C(cx, cy)$ a véletlenszerűen választott csúcsok. A legtöbb programozási nyelvben megtalálhatók véletlenszámok, pl. egy valós értéket kaphatunk a $[0; 1[$ intervallumból (jelöljük ezt RND-vel). Azt a kérdést, hogy a számítógép miként állít elő véletlen értéket, hagyjuk későbbre. Amit biztosan tudnunk kell RND-ről, hogy egy futó program N egymást követő RND értékét ábrázolva az egység intervallumon, azok nagyjából egyenletes sűrűséggel helyezkednek el. Azaz minél nagyobb a pontok N száma, annál jobban teljesül, hogy az intervallum bármely szakaszának hossza, és a rajta megtalálható pontok száma között egyenes arányosság áll fönn. Első ötletünk, hogy RND értékét 2-vel megszorozva és 1-gyel csökkentve máris adódik mindhárom csúcs y koordinátája. Az x koordináták számításához használjuk a Pitagorasz-tételt, illetve egy-egy másik véletlenszámot: ha ez utóbbi 0,5-nél kisebb, akkor a pozitív, egyébként a negatív x koordinátát válasszuk. Így véletlenszerűen kijelöltünk három pontot a köríven, már csak a szögeket kell kiszámolni. A kísérletet sokszor elvégezve egy relatív gyakorisággal tudjuk közelíteni a keresett értéket.

Gondoljuk meg, hogy helyesen jártunk-e el. Tanulmányainkból tudjuk, hogy a valószínűség klasszikus kiszámítási módja, a kedvező és összes esetek hányadosa csak akkor adja a valószínűséget, ha a kísérletben szereplő elemi események mind egyenlő valószínűséggel következnek be. Hasonlóan figyelnünk kell a geometriai valószínűség meghatározásakor is. Mivel jelen esetben a csúcsok egy köríven helyezkednek el, ezért szükséges, hogy ott bármely két azonos hosszúságú ívre „közel" azonos számú pont kerüljön. A koordináták előbbi megválasztásával azonban ezt az íveknél nem teljesítettük (ld. bal oldali ábra), mivel ott két azonos hosszúságú szakaszhoz két különböző hosszúságú ív tartozik. Akkor járunk el helyesen, ha az RND értékét adó $[0; 1[$ intervallumot a körívnek feleltetjük meg. Tehát egy véletlen csúcsot pl. az x tengelytől adott irányban fölmért $[0; 2\pi[$ szög jelöl ki a körvonalon.





A program feladata a következő: N számú kísérletet végez, és minden esetben megállapítja, hogy a kapott pontok egy hegyesszögű háromszög csúcsai-e. Megszámolja ezeket, és a kapott k darabszámot a végén elosztja N-nel.

```
Eljárás Hegy3korvonal(N)
    k := 0        (hegyesszögű háromszögek száma)
    Ciklus h := 1-től N-ig
        alfa := 2π * RND(0, 1)
        ax := cos(alfa) : ay := sin(alfa)
        beta := 2π * RND(0, 1)
        bx := cos(beta) : by := sin(beta)
        gamma := 2π * RND(0, 1)
        cx := cos(gamma) : cy := sin(gamma)
        Ha hegyes(ax,ax,bx,by,cx,cy) akkor k := k+1
    Ciklus vége
    Ki: k/N
Eljárás vége
```

Az eljárásban szereplő hegyes() függvény megállapítja, hogy a kapott koordinátákkal jellemzett háromszög hegyesszögű-e. Ehhez a szögek pontos nagyságát nem kell meghatározni, csak azt, hogy derékszögnél nagyobb, kisebb, vagy vele egyenlő-e. Például az A csúcsnál lévő szögről elég információt ad az $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ skaláris szorzat előjele. A függvény mindhárom skaláris szorzat pozitív értéke esetén ad igaz választ. Ennek elkészítését az olvasóra bízzuk.

Változtassuk meg a feladatot úgy, hogy most a pontok egy körlapon találhatók! Akkor járunk el helyesen, ha biztosítjuk, hogy a körlapon véletlenszerűen helyezkedjenek el a csúcsok. Minél több kísérletet végzünk, annál jobban teljesülnie kell, hogy a véletlenszerűen választott pontok „egyenletes sűrűséggel" vannak elszórva a körlapon. Pontosabban fogalmazva: legyen a körlap egy T_1 és T_2 területű részére eső véletlen pontok száma P_1 és P_2. A kísérletek számának növelésével a P_1/P_2 hányados közelíti a T_1/T_2 értékét, miközben N értéke növekszik.

A körvonalnál láttuk, hogy a kapott $[0, 1[$ intervallumot kibővítettük $[0, 2\pi[$ intervallummá. Most területekről van szó, így jó gondolatnak tűnik, hogy egy véletlen csúcs x és y koordinátáját jelentse egy-egy RND érték. Ekkor azonban egy egység oldalú négyzeten oszlanak el egyenletesen a pontok. Ez nem jelent gondot, ha az egységsugarú körön kívüli pont esetén újra próbálkozunk, és egy másik véletlen számpárt kérünk. Ezzel persze tovább tart a program futása, de a megoldás a kitűzött feladatot oldja meg. A program ezek alapján a következő:

```
Eljárás Hegy3korlap(N)
    k := 0        (hegyesszögű háromszögek száma)
    Ciklus h := 1-től N-ig
        ax := RND(0,1) : ay := RND(0,1)
        Ciklus amíg ax² + ay² > 1
            ax := RND(0,1) : ay := RND(0,1)
        Ciklus vége
        ... hasonlóan a másik két csúccsal
```

```
        Ha hegyes(ax,ax,bx,by,cx,cy) akkor k := k+1
    Ciklus vége
    Ki: k/N
Eljárás vége
```

A feladat tovább bővíthető, pl. fölvethető, hogy a körvonalon vagy a körlapon véletlenszerűen választott pontok átlagosan mekkora kerületű, területű háromszöget határoznak meg. Ez utóbbi feladatok eredménye összetett számításokkal kapható, míg Monte-Carlo-módszerrel az eddigiekhez hasonlóan.

Lapunk korábbi számaiban foglalkoztunk a témával, a megjelent cikkek közül most Cserti László: *A munkára fogott véletlen,* I. részét[1] ajánlanánk, amelyben több jó példát láthatunk a módszer használatára.

Schmieder László

Informatikából kitűzött feladatok

I. 448 (É). Egy fanatikus kosárlabda-szurkoló előre szeretné megvenni a belépőjegyeket a bajnokság februártól májusig terjedő időszakának bizonyos mérkőzéseire. Kedvenc csapata a `Voros_Rokak`, de szívesen nézi a `Computerbonto` és a `Bohocok` meccseit is. Rendelkezésünkre áll, és honlapunkról letölthető a `naptar.txt` állomány, amely a mérkőzések adatait és a szurkolónak a belépők megvásárlására tervezett maximális pénzkeretét tartalmazza.

Az állomány első sorában a naptárban szereplő mérkőzések száma N ($1 \leqslant N \leqslant 100$) és a jegyvásárlásra szánt maximális pénzkeret P ($2000 \leqslant P \leqslant 50\,000$) található. Az ezt követő N sor az egyes mérkőzések négy adatát tartalmazza: a hazai csapat neve, az ellenfél csapatának neve, a nap sorszáma az éven belül és a jegyár. A mérkőzések egy napon belül sem kezdődnek egyszerre, a szervezők biztosítják, hogy elvileg mindegyik megtekinthető legyen.

Készítsünk programot `i448` néven, amely megoldja az alábbi feladatokat, amelyekkel a szurkoló jegyválasztását segítjük. A képernyőre írást igénylő részfeladatok eredményének megjelenítése előtt írjuk a képernyőre a feladat sorszámát (például `4. feladat:`). A beolvasás előtt a várt tartalomra vonatkozó üzenetet jelenítsünk meg.

1. Olvassuk be a `naptar.txt` állomány adatait és a következő feladatokat ezek alapján oldjuk meg.

[1] `http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200459`.

2. Írjuk ki a képernyőre, hogy a vizsgált időszakban a `Voros_Rokak` csapat hány mérkőzést játszik, és hogy mennyibe kerülne, ha a rajongó minden mérkőzésükre venne jegyet.
3. Határozzuk meg, hogy a `Voros_Rokak` melyik nap játssza először és utoljára otthon a mérkőzését.
4. Adjuk meg az adatok alapján, hogy mikor lesz utoljára olyan meccs, amikor a három kedvenc csapatból kettő egymás ellen mérkőzik.

Fanatikus szurkoló barátunk a megvásárlandó jegyek kiválasztásához a következő módszert alakította ki, amíg a pénze elegendő:

– Időrendben megveszi a `Voros_Rokak` minden mérkőzésének jegyét.
– Ár szerint növekvő sorrendbe állítja a `Computerbonto` és a `Bohocok` otthoni mérkőzéseit és ezeket veszi meg sorrendben, amíg a pénzéből futja.
– Azonos árú jegyek esetén először a `Computerbonto`, majd a `Bohocok` mérkőzésére, ezen belül időrendben vesz.

5. Adjuk meg szóközzel elválasztva, egy sorban, azon napok sorszámát növekvően rendezve, amelyekre jegyet fog venni.
6. Írjuk ki, hogy a három kedvenc csapatát (külön-külön) hány mérkőzésen fogja látni.

Beküldendő egy tömörített `i448.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Letölthető fájl: `naptar.txt`

I. 449. A helyi önkormányzati választásokon különböző szervezetek (nem feltétlenül csak pártok) indíthatnak jelölteket. A jelöltek egy része a választókerületekben méri össze népszerűségét, az lesz képviselő, aki a legtöbb szavazatot kapja.

Választási rendszerünkben azonban a többi jelöltre leadott szavazat sem vész kárba. Ezeket jelölőszervezetenként összeadják, az így kapott szám a jelölőszervezet ún. töredékszavazatainak száma. Minden jelölőszervezet készít egy ún. kompenzációs listát, ahonnan a kialakult töredékszavazatok számától függően a kiosztott mandátumok mellett még további képviselőket juttathat be az képviselőtestületbe. A töredékszavazatok alapján a mandátumok szétosztásáról a törvény a következőképpen rendelkezik:

a) Össze kell állítani egy táblázatot, amelyben minden lista neve alatt képezni kell egy számoszlopot. A számoszlop első száma az adott lista szavazatainak száma. A számoszlop következő számai az adott lista szavazatainak száma elosztva hárommal, öttel, héttel, rendre az új osztó az előző osztó kettővel megnövelt értéke.

b) Meg kell keresni a táblázatban előforduló legnagyobb számot, és amelyik lista számoszlopában találjuk meg azt, az a lista kap egy mandátumot. Ezt követően meg kell keresni a következő legnagyobb számot. Amelyik lista oszlopában találjuk, az a lista kap egy mandátumot. Ezt az eljárást kell folytatni mindaddig, míg kiosztásra kerül az összes mandátum.

(*2010. évi L. törvény 15.§ (4)*)

Feladatunkban tudjuk, hogy egy adott településen hat szervezet indított jelölteket (ezek legyenek rendre A, B, C, D, E és F). Ismerjük továbbá az egyes jelölőszervezetekre jutó töredékszavazatok számát és azt, hogy összesen hány további képviselő szerezhet mandátumot. (A mintán ezeket az adatokat a szegélyezett A2:J3 tartomány tartalmazza.)

Határozzuk meg a fenti számítási mód alapján, hogy az egyes jelölőszervezetek hány főt juttathatnak be a képviselőtestületbe a kompenzációs listájukról (a minta 4. sora). Feltételes formázással emeljük ki a táblázatban a mandátumot jelentő cellákat.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Jelölő szervezet:	A	B	C	D	E	F		Listahely:	12
3	Töredékszavazat:	500	981	2000	4000	8000	5000			
4	Bejutott képviselők:	0	0	1	2	3	2			
5										
6	1	500	981	2000	4000	8000	5000			
7	3	166,667	327	666,667	1333,33	2666,67	1666,67			
8	5	100	196,2	400	800	1600	1000			
9	7	71,4286	140,143	285,714	571,429	1142,86	714,286			

Beküldendő egy tömörített `i449.zip` állományban a megoldást tartalmazó munkafüzet és a megoldás rövid leírását bemutató dokumentáció.

I. 450. A képen látható egyszemélyes „játékot” bárki megvásárolhatja. A játék hat, teljesen egyforma, közös tengelyen elhelyezett „hengerből” áll, amelyek palástja pontosan ugyanannyi részre oszlik. Az első, a harmadik, az ötödik és a hatodik henger minden helyen számjegyeket tartalmaz, a második műveleti jeleket, a negyedik pedig relációs jeleket. A hengereket úgy kell elforgatni egymáshoz képest, hogy a kialakuló sorok mindegyikében az első három által mutatott kifejezés és az utolsó két számjegy által alkotott szám között a negyedik helyen szereplő reláció álljon fenn.

Írjunk programot, amely a fenti játék síkbeli változatát valósítja meg. A program indításakor a játékos beállítja a sorok számát, amely 3 és 10 közötti szám lehet. Ezt követően a program véletlenszerűen generál egy kiindulási állapotot, majd megjeleníti az alábbi mintának megfelelően (bal oldali ábra). A generálásnál ügyelnünk kell arra, hogy a feladat megoldható legyen. A játék során a játékos által választott oszlopot (annak tartalmát) eggyel elcsúsztatja a többihez képest. (A kicsúszó elem az ellenkező oldalon megjelenik.) A játék befejeződik, ha a játékosnak sikerül elérnie, hogy minden sorban teljesüljön a reláció (jobb oldali ábra). A játékos a játékot feladhatja, ekkor a programnak meg kell jelenítenie a megoldást.

2	-	5	=	0	3
8	+	7	>	2	5
3	*	4	<	7	6

generált

2	+	4	=	0	6
8	*	5	>	2	3
3	-	7	<	7	5

kész

A feladat megoldásaként a versenykiírásban szereplő eszközökkel elkészíthető alkalmazások mellett a webes vagy mobil applikációkat is elfogadjuk.

Beküldendő egy `i450.zip` tömörített állományban a program forráskódja és a működéséhez szükséges egyéb fájlok, továbbá a hozzá kapcsolódó felhasználói dokumentáció, valamint a leírás, amely tartalmazza, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Az értékelésben 7 pont jár a feladat leírásának megfelelő megoldásokért, 3 pont pedig a megoldás kifinomultsága, ötletessége, használhatósága alapján kerül kiosztásra.

I/S. 24. Egy hosszú alagútban egy vágányon közlekedhetnek a vonatok egy irányban. Az érkező vonatok nem egyforma hosszúak és gyorsak, ezért az alagúton különböző idő alatt érnek át. A vonatok adott időpontban jönnek az érkezési oldalon és az alagúton való áthaladás után azonnal továbbhaladnak. Az alagútban egyszerre csak egy vonat tartózkodhat, tehát amikor az átjutott, akkor indulhat a következő. Az érkezési oldalon lévő vonatoknak így általában várakozniuk kell. Az alagút mindkét oldalán elegendő számú vágány van, tehát az érkezési oldalon megoldott a vonatok várakoztatása, illetve az alagúton történő átjutás után a kilépő vonatok megfelelő irányban való továbbhaladása. Így elvileg csak az alagút foglaltsága miatt kell várni, minden más vonatmozgás elhanyagolható ideig tart, és nem okoz fönnakadást.

A forgalomirányítók feladata megadni, hogy mikor melyik vonat haladjon át az alagúton. Ismerik minden vonat érkezési idejét, illetve tudják, hogy mennyi idő alatt halad át az alagúton. Úgy döntöttek, hogy a vonatok összes várakozási idejét minimalizálják, és ez alapján határozzák meg a vonatok áthaladási sorrendjét. Készítsünk programot, amely megoldja a forgalomirányítást.

A program standard bemenete az adott időszakban érkező vonatok N száma, majd a következő N sorban az i-edik vonat t_i érkezési és h_i áthaladási ideje található perc mértékegységben. Az adatok az érkezési idő szerinti sorrendben vannak. A program adja meg a standard kimenet első sorában a legkevesebb összes várakozási időt, majd a második sorában a vonatok áthaladási sorrendjét a sorszámuk fölsorolásával.

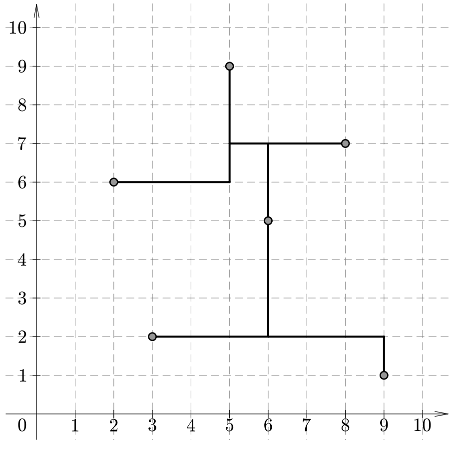
Példa (az újsor karaktereket / jelöli):

Bemenet	Kimenet
`4 / 3 10 / 5 4 / 7 4 / 8 8 /`	`25 / 2 3 4 1 /`

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 1000$, $1 \leqslant t_i, h_i \leqslant 10^5$, egész számok.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb N érték esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `is24.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.



S. 123. Egy ország sík területen fekszik, minden városa egy képzeletbeli négyzetháló egész koordinátákkal rendelkező csúcsában helyezkedik el. A közlekedési miniszter javaslatára felújítják az úthálózatot úgy, hogy minden városból minden városba el lehessen jutni. A tervek szerint a városok közötti utak az elképzelt négyzetháló élei mentén haladnának, egymással párhuzamosan, vagy egymásra merőlegesen. Az utak egy-egy egész koordinátájú pontban találkozhatnak akár egy városban, akár a városon kívül. A miniszter szeretné a legkisebb költséggel elkészíteni az új úthálózatot, ezért az utak összhosszának a lehető legkevesebbnek kell lennie. Készítsünk programot, amely megadja ezt a legkisebb értéket.

A program standard bemenete az ország városainak N száma, majd a következő N sorban az i-edik város helyének x_i és y_i egész koordinátái. A program adja meg a standard kimeneten az összeköttetéshez szükséges legrövidebb úthálózat teljes hosszát.

Példa (az újsor karaktereket / jelöli):

Bemenet	Kimenet
`6 / 3 2 / 9 1 / 6 5 / 2 6 / 8 7 / 5 9 /`	`21 /`

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 1000$, $1 \leqslant x_i, y_i \leqslant 10^5$, egész számok.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb N érték esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `s123.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2018. március 10.

❄

ERICSSON-DÍJ 2018

Felhívás díjazandó tanárok ajánlására

Beérkezési határidő: 2018. március 11. (éjfél)

Az Ericsson Magyarország 2018-ban ismét 8 kiváló pedagógust díjaz összesen 2 000 000 forinttal.

Az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága által 1999-ben alapított díjat általános-, vagy középiskolákban fizikát vagy matematikát oktató pedagógusok nyerhetik el. Az elismerés azért jött létre, hogy támogassa, elismerje és erősítse a magyarországi, világviszonylatban is kiemelkedő matematikai és természettudományos alapképzést. Az Ericsson Magyarország elkötelezte magát a hazai oktatás fejlesztése mellett; vállalásának fontos része ez a díj. A kétezer fős hazai vállalat nemcsak a telekommunikációs ipar egyik legnagyobb munkáltatója, hanem 1400 fős Kutatás-Fejlesztési Központjával a legnagyobb telekommunikációs és informatikai kutatással, szoftverfejlesztéssel foglalkozó szellemi centrum Magyarországon. Számára ezért elengedhetetlen a kiválóan képzett fiatal diplomás munkaerő. A díjra esélyes pedagógusok szakmai munkája és emberi hozzáállása teszi lehetővé, hogy a hazai műszaki és természettudományi diplomával rendelkezők tudása megfelelő szellemi értéket képviseljen, és vonzóvá tegye a beruházást infokommunikációs csúcstechnológiák kutatás-fejlesztésébe Magyarországon.

Az ERICSSON-DÍJAKAT 2018-ban két kategóriában ítélik oda:

1. „Ericsson a matematika és fizika népszerűsítéséért” díj

2 matematikát és 2 fizikát tanító pedagógus (általános vagy középiskolai) részére egyenként 250 000 Ft-tal járó díj.

Azok kaphatják, akik tanítványaikkal aktívan bekapcsolódtak a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS folyóiratának pontversenyeibe, vagy a tanítás mellett évek óta a legtöbbet teszik a tantárgyuk iránti érdeklődés felkeltéséért és megszerettetéséért.

2. „Ericsson a matematika és fizika tehetségeinek gondozásáért” díj

2 matematikát és 2 fizikát tanító pedagógus (általános vagy középiskolai) részére egyenként 250 000 Ft-tal járó díj.

Azok kaphatják, akiknek tanítványai a legjelentősebb hazai vagy nemzetközi egyéni versenyeken, például a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok vagy az ABACUS versenyek; a Varga Tamás, Kalmár László, Zrínyi Ilona, Arany Dániel matematikaversenyek; matematika vagy fizika OKTV; Öveges József, Jedlik Ányos, Mikola Sándor, Szilárd Leó fizikaversenyek; a Nemzetközi Matematika vagy Fizika Diákolimpiák, a Kürschák József matematikai tanulóversenyek vagy az Eötvös Loránd fizikaversenyek valamelyikén a 2012–2013-as tanévtől kezdődően elnyerték az első öt díj egyikét.

A díjakat a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány ítéli oda, a Bolyai János Matematikai Társulat és az Eötvös Loránd Fizikai Társulat Ericsson-díjbizottságainak ajánlása alapján. A díjazandókra írásos javaslatot nyújthatnak be szakmai és társadalmi szervezetek, a javasolt tanár tevékenységét ismerő kollégák, tanítványok. **Az ajánlásnak tartalmaznia kell a javasolt személy részletes szakmai jellemzését,** különös tekintettel azokra a szempontokra, amelyek alapján a díjra érdemesnek tartják. Pályázatot csak a különböző kategóriák elektronikus „Pályázati adatlapjain” nyújthatnak be. A pályázati űrlapok elérhetők 2018. február 10-től a `www.komal.hu` oldalon. Ha a korábbi években már javasolt tanár nem kapott díjat, a felterjesztést (aktualizálva) kérjük, ismételjék meg! Rátz-életműdíjas tanárt kérjük, ne jelöljenek Ericsson-díjra! Viszont Ericsson-díjas tanár 8 év elteltével újra felterjeszthető az Ericsson-díjra.

A pályázati adatlapok 2018. március 11. éjfélig (23:59) lesznek elérhetők. A pályázatokat kizárólag online lehet benyújtani. Kérdés esetén a következő e-mail címre írhatnak: `matfund@komal.hu`. A szakmai bizottságok a benyújtott írásos javaslatok alapján részletes indoklást mellékelve javaslatot tesznek a jelöltek sorrendjéről, mely alapján a MATFUND kuratóriuma 2018. április 15-ig dönt a díjazandók személyéről. A díjkiosztó ünnepségre 2018. május végén, június elején kerül sor.

„Egy álom megvalósul”
Tájékoztató az Ericsson meghívásos pályázatáról

A 2018. évi Ericsson-díjazott tanárok iskolái kísérleti, informatikai eszközök beszerzésére meghívásos pályázatot adhatnak be. A pályázóknak be kell mutatniuk, hogy milyen programot terveznek a következő tanévben az általuk szükségesnek tartott eszközökkel, és hogy ez a tevékenység hogyan járul hozzá az iskolában a matematika, a természettudományok, vagy az informatika népszerűsítéséhez, oktatásához vagy tehetségeinek gondozásához.

A 2018-as Ericsson-díjazottak iskoláinak igazgatói értesítést kapnak a díj odaítéléséről, és ezzel egy időben megkapják a részletes pályázati felhívást. A pályázói körbe tartozó legfeljebb 8 iskola közül egyetlen nyertest hirdet ki az Ericsson 2018 őszén. A pályázatokat az Ericsson Magyarország Kutatás-Fejlesztési Igazgatósága bírálja el a pályázati útmutatóban leírt szempontok alapján. Az Ericsson fenntartja a jogot, hogy nem megfelelő minőségű pályázatok esetén ne ítélje oda ezt az összeget.

Fizika becslési verseny Sárospatakon

A Sárospataki Árpád Vezér Gimnázium és Kollégium 1995-ben egy nem szokványos fizikaversenyt indított el. Ez a – minden évben megrendezett – becslési verseny, amelynek célja a becslési, valamint a gondolkodási és a kísérletezőképesség fejlesztése.

Az első évben a verseny a határon túli testvériskolák (Kassa, Nagykapos, Királyhelmec, Munkács és Temesvár) magyar diákjai és iskolánk csapata között zajlott. Később bekapcsolódott Székelykeresztúr és Zenta is. A 2001/2002-es tanévtől az Arany János Tehetséggondozó Programban tanuló iskolák részvételével a verseny két kategóriában zajlik.

Minden évben egy-egy kiemelkedő magyar fizikusról, tudósról emlékezünk meg. Kivétel volt a 2005-ös év, amikor *Albert Einsteinre* emlékeztünk az Einstein-év kapcsán. Az elmúlt években *Jedlik Ányos, Eötvös Loránd, Szilárd Leó, Mikola Sándor, Bolyai János, Öveges József, Lénárd Fülöp, Bánki Donát, Teller Ede, Békésy György, Gábor Dénes, Bay Zoltán, Déri Miksa, Bláthy Ottó, Zipernowsky Károly, Bródy Imre, Zsigmondy Richárd, Hevesy György* élete és munkássága képezte a verseny témáját. Az idei tanévi verseny *Segner János András* életével és munkásságával foglalkozott halálának 240. évfordulója alkalmából. A háromfős csapatok otthoni előzetes „kreatív feladata” Segner életét és tevékenységét bemutató poszter elkészítése, és egy elektromos Segner-kerék működtetése volt, amit saját készítésű leideni palack feltöltésével hozhattak forgásba, valamint egy mechanikus Segner-kerék készítése, amelyet egy műanyag flakonból kiáramló víz forgat. Az írásbeli feladatot (életrajzi totó, fizikai totó) egyénileg oldották meg a versenyzők, amelyre az előre megadott irodalom alapján készülhettek fel. A szóbeli feladatokat ismét csapatonként oldották meg a diákok. Két példa a 14 szóbeli feladatból:

1. feladat. *a*) Hogyan kapcsolódik az *ábrán* látható kép Segner János András munkásságához?

b) Egy hegyi patak vize 0,1 m^2 keresztmetszetű sugárban 7 m/s sebességgel csapódik a malomturbina 4 m/s sebességű lapátjára. Becsüld meg, mekkora erőt fejt ki a víz a lapátokra! Becsüld meg a teljesítményt!

10. feladat. Becsüld meg, mennyi a 30 cm hosszú műanyag vonalzó tömege, ha a 200 Ft-os pénzérme tömege 9 g. A becsléshez csak az asztalt és a pénzérmét használhatod fel.

A legnagyobb sikert – mint mindig – most is a *Szeder László* vezette iskolai csapatmunka hozta. A csapatok háromórás, nagyon aktív együttes munkával (fúrás, faragás, tervezés, szerelés) „Széllel szemben haladó jármű szerelését, építését” végezték el. Az alapösszeállítási rajz csak a szerkezet egyszerűsített sablonját tartalmazta; a síklapátok, áttételek megvalósítása egyéni feladat volt.

A diákok és a tanárok kikapcsolódásként nagy érdeklődéssel nézhették *Härtlein Károly* (BME) kísérleti bemutatóját a hullámok és a hangtan témakörből. A verseny egyben lehetőséget nyújt a fizikaszakos tanárok tapasztalatcseréjére is. *Dr. Kirsch Éva* (DE Kossuth Lajos Gyakorló Gimnázium) tartott módszertani előadást és műhelyfoglalkozást. A kreatív szerelési munkából a tanárok sem maradtak ki. Szeder László irányításával „Schrödinger-macskáját” szerelték össze. Ennek a készüléknek semmi köze nincs Schrödinger elhíresült macskájához, legfeljebb annyi, hogy egy macskaalakot vágott ki az egyébként tréfás kedvű tanár úr. Valójában ez egy „nitinol-gép” (nikkel-titán ötvözetet tartalmazó hőerőgép). A gép működésének alapja az úgynevezett emlékezőfém, amely különleges ötvözetből készült, és melegítés hatására (kb. 55 °C-os vízbe téve) a gép egyik fémkerekének anyaga átkristályosodik. A fémben a belső szerkezeti változás hatására mechanikai feszültség jön létre, amely egy csigán meghajló fémszálat kiegyenesíteni igyekszik.

A verseny évenkénti megszervezése nagymértékben *Tóth Tamás* intézményvezetőnek köszönhető, aki figyelemmel kíséri és szívügyének tekinti a fizikát kedvelő tanulók ezen komplex versenyét.

Bigus Imre
a feladatok kitűzője

Gyakorló feladatsor emelt szintű fizika érettségire

Tesztfeladatok*

1. Mekkora egy függőlegesen feldobott acélgolyó gyorsulása?

A) Mindvégig g.
B) Felfelé g, lefelé $-g$, a tetőponton nulla.
C) Mindvégig nulla, mert a szabadon eső testek súlytalanok.
D) Csak az acélgolyó tömegének ismeretében határozhatjuk meg.

2. Egy rugós játékpuskával h magasságra lőhetünk ki egy kis lövedéket, ha a játékpuska rugóját x-szel összenyomjuk. Mennyire kell a játékpuska rugóját összenyomnunk, hogy ugyanazt a kis lövedéket $2h$ magasságra lőhessük fel?

A) $\sqrt{2}x$; *B*) $2x$; *C*) $2\sqrt{2}x$; *D*) $4x$.

3. Egy m tömegű testet rögzítünk egy elhanyagolható tömegű, merev rúd egyik végére. A rúd másik vége egy rögzített, vízszintes tengely körül súrlódásmentesen elfordulhat. A rudat függőlegesen felállítjuk, majd a testnek egy kicsiny,

*A válaszok közül minden esetben pontosan egy a helyes.

elhanyagolható kezdősebességet adunk. Mekkora lesz a rúd szögsebessége vízszintes helyzetében?

A) $2\sqrt{g}$. *B*) $2g$. *C*) $\sqrt{2mg}$.
D) A választ csak a rúd hosszának ismeretében adhatjuk meg.

4. Két műhold körpályán kering a Föld körül, az egyik pályájának sugara legyen r_1, a másiké pedig r_2. Hogy aránylik egymáshoz ennek a két műholdnak a sebessége?

A) $\frac{v_1}{v_2}=\frac{r_2}{r_1}$; *B*) $\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}$; *C*) $\frac{v_1}{v_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}$.
D) Az előző válaszok mind hibásak.

5. Egy rugóhoz erősített tömegből álló rezgő rendszer energiája melyik fizikai mennyiséggel áll egyenes arányosságban?

A) A rezgés amplitúdójával
B) A tömeg négyzetével.
C) A frekvencia négyzetével.
D) Az amplitúdó és a rugóállandó szorzatának négyzetével.

6. Egy víz alatti hangforrás valamilyen magasságú, hallható hangot kelt. A hang eléri a víz felszínét, ahol a hanghullám egy töredéke kijut a szabad levegőre. Tudjuk, hogy a hang terjedési sebessége vízben 1450 m/s, levegőben pedig 340 m/s. Hogyan változik meg a kilépő hang hullámhossza és frekvenciája?

A) A hullámhossz nem változik, a frekvencia megnő.
B) A hullámhossz nem változik, a frekvencia lecsökken.
C) A frekvencia nem változik, a hullámhossz megnő.
D) A frekvencia nem változik, a hullámhossz lecsökken.

7. Egy tartályban 0,1 mol H_2 és 0,1 mol O_2 gáz van termodinamikai egyensúlyi állapotban. Melyik megállapítás helyes?

A) A tartályban a hidrogén- és az oxigénmolekulák átlagos mozgási energiája azonos.

B) A tartályban a hidrogén- és az oxigénmolekulák átlagos sebessége megegyezik.

C) A tartályban az oxigénmolekulák átlagos mozgási energiája 16-szorosa a hidrogénmolekulák mozgási energiájának.

D) A tartályban a hidrogénmolekulák átlagos mozgási energiája 16-szorosa az oxigénmolekulák mozgási energiájának.

8. Két különböző méretű, koncentrikus vezető hurok ugyanabban a síkban fekszik. A külső hurokban az óramutató járásával megegyező irányban egyre növekvő nagyságú áram folyik. Milyen az indukált áram a belső hurokban?

A) Nulla.
B) Az óramutató járásával megegyező irányú.
C) Az óramutató járásával ellentétes irányú.
D) Az indukált áram iránya a hurkok méretének arányától függ.

9. Áramütések okozta sérülések esetén melyik fizikai mennyiség határozza meg döntően a sérülés súlyosságát?

A) Az áramerősség. *B*) A feszültség. *C*) A feszültség polaritása. *D*) A frekvencia.

10. Hányszor nagyobb egy 400 keV mozgási energiájú elektron sebessége, mint a 100 keV mozgási energiájú elektroné?

A) Kétszer; *B*) négyszer; *C*) több, mint négyszer; *D*) kevesebb, mint kétszer.

11. Válasszuk meg a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás igaz legyen! Ha egy fénysugár egy plánparalel lemezre 30°-os beesési szöggel érkezik, akkor kilépéskor a törési szög

A) 30°; *B*) 45°; *C*) 60°. *D*) Csak a törésmutató ismeretében adható meg.

12. Válasszuk meg a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás igaz legyen! Ha egy izotóp felezési ideje 6 óra, és a megfigyelés első 6 órájában 10^{10} db részecske bomlott el, akkor a következő 6 órában elbomló részecskék száma hozzávetőleg

A) 10^{10}; *B*) 10^5; *C*) $5 \cdot 10^9$; *D*) $\ln 2 \cdot 10^{10}$.

13. Hogyan nevezzük egy elektron és egy pozitron találkozásakor létrejövő jelenséget?

A) Szétsugárzás; *B*) párképződés; *C*) radioaktív sugárzás; *D*) elektronbefogás.

14. Milyen tulajdonságú kép keletkezik a szem ideghártyáján?

A) látszólagos, kicsinyített, egyenes állású;
B) valódi, kicsinyített, egyenes állású;
C) látszólagos, kicsinyített, fordított állású;
D) valódi, kicsinyített, fordított állású.

15. Egy testet rugós erőmérőre függesztünk, megmérjük a súlyát a levegőben. Ezután a testet víz alá merítjük, és azt tapasztaljuk, hogy a súlya a harmadára csökkent. Mekkora a test sűrűsége?

A) 3 g/cm^3; *B*) 2 g/cm^3; *C*) 1,5 g/cm^3; *D*) 4/3 g/cm^3.

Számolásos feladatok

1. Egy vízszintes, súrlódásos asztalon vízszintes helyzetű fonál segítségével 0,5 m sugarú körpályán 1 m/s sebességgel egyenletesen húzunk egy 0,6 kg tömegű testet. A test és az asztal közötti csúszási súrlódási együttható értéke 0,25.

a) Mekkora nagyságú a fonálerő?
b) Mekkora szöget zár be a fonál a test sebességvektorával?
c) Mekkora a fonálerő pillanatnyi teljesítménye?

2. Egy hosszú egyenes rézvezeték vastagsága 2 mm, a vezetőben 20 A áram folyik, ami a vezeték keresztmetszetén egyenletesen oszlik el.

a) Mekkora a mágneses indukcióvektor nagysága a vezeték középvonalától 3 mm távolságra?

b) A vezeték belsejében hol vannak azok a pontok, ahol a mágneses indukció ugyanakkora, mint a vezeték középvonalától 3 mm-re (vagyis a vezetéken kívül)?

3. Egy 10 km-es, nyugatról kelet felé haladó földalatti kábel két vezetékből áll. A kábelek kilométerenkénti ellenállása 13 Ω. Valahol a két kábel között, a nyugati oldaltól mérve x távolságra, átvezetés jön létre, melynek ellenállását jelöljük R-rel. Ha a nyugati oldalon mérjük meg a két kábelkivezetés közötti ellenállást, akkor 100 Ω-ot kapunk, ha a keleti oldalon, akkor 200 Ω-ot.

a) Hol van az átvezetés, vagyis mekkora x?

b) Mekkora az átvezetés R ellenállása?

4. A mikroszkópokkal elvileg elérhető felbontóképességet a mikroszkóp üzemelésekor használatos hullámhosszúság korlátozza (a felbontóképesség a hullámhossz nagyságrendjébe esik). Tegyük fel, hogy valaki egy 100 pm átmérőjű atom belsejébe akar „nézni”. Ha sikerül a felbontóképességet 10 pm-re javítani, akkor már sikeres lehet az eljárás.

a) Elektronmikroszkópot használva, minimálisan mekkora energiájú elektronokra lenne szüksége?

b) Fénymikroszkópot használva, minimálisan mekkora energiájú fotonokra lenne szüksége?

c) Valóban sikeres lesz ez az eljárás? Létrehozhatunk-e képet az atom belsejéről 10 pm-es hullámhosszúságú elektron- vagy fényhullámokkal?

Honyek Gyula
Budapest

Mérési feladat megoldása

M. 370. *Mérjük meg legalább háromféle szemcsés élelmiszer (például rizs, mák, liszt, kristálycukor, porcukor) rézsűszögét!*

(*6 pont*) Közli: *Részegh Anna,* Vácduka

Megoldás. *1. A mérési feladat meghatározása:* A mérés során kristálycukor, búzadara és konyhasó rézsűszögét mértem. Amikor ezen anyagokat kicsiny nyílású tölcsérből sík, vízszintes, súrlódásos felületre öntjük, akkor a kiöntött anyag közelítőleg egyenes körkúp alakot igyekszik felvenni. A rézsűszög ezen kúp alkotóinak a vízszintes síkkal bezárt szögét jelenti; feladatunk ennek a szögnek a megmérése.

2. A mérési elrendezés (vázlatosan): A rézsűszöget (α) legegyszerűbben a kúp h magasságának, illetve az alapkör d átmérőjének mérésével határozhatjuk meg:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{d}.$$

Feladatunk tehát az, hogy valamilyen módon megmérjük az „anyaghalmaz" magasságát és az alapkörének átmérőjét. Számíthatunk arra, hogy esetleg nem kapunk pontosan kör alapú kúpot, ezért két (egymásra merőleges) irányban is mértem a halmaz átmérőjét. Ezeket a méreteket a-val és b-vel jelöltem, és a d átmérőt a számtani közepükkel közelítettem. A rézsűszöget a mért adatokból az

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4h}{a+b}$$

képlet szerint számoltam.

3. A méréshez szükséges eszközök:

– Háromféle, kellő mennyiségű szemcsés anyag (esetünkben kristálycukor, búzadara és konyhasó);
– kellően nagy sík felület;
– A4-es nagyságú milliméterpapír;
– kettő darab 40 cm-es egyenes vonalzó és egy derékszögű vonalzó;
– celluxragasztó;
– Bunsen-állvány és egy hosszabb kémcsőfogó;
– műanyag tölcsér.

4. A mérés menete: Először előkészítettem a terepet. A mérést az iskolánkban végeztem, a kémia laborban, órák után, egyedül, eszközhasználati engedéllyel. Az ottani padok rögzítve vannak, felületük szinte teljesen sima. Egy ilyen pad sarkához közel, oldalaival párhuzamosan helyeztem el az A4-es méretű milliméterpapírt, amit négy sarkánál celluxszal lerögzítettem. Emellett a milliméterpapír két, egymásra merőleges éléhez egy-egy 40 cm hosszú vonalzót tettem, melyeket szintén ragasztóval tartottam a helyükön. A milliméterpapír és a vonalzók együtt az „átmérő" két mért értékének gyorsabb és könnyebb leolvasását biztosították. A kémcsőfogó segítségével a Bunsen-állványhoz rögzítettem a műanyag tölcsért. Az állványt úgy állítottam be, hogy a két vonalzótól 100 mm távolságra legyen az a pont, ahova a tölcséren át lepergő szemcsés anyag esik. Ebben az elrendezésben a különböző minőségű és mennyiségű szemcsés anyagok – a tölcséren keresztül átöntve – ugyanabban a pontban érkeznek le a milliméterpapírra, majd egy kis idő elteltével magára a kupacra. Ezáltal elérjük, hogy megközelítőleg kör alapú, egyenes kúpot kapjunk, melynek csúcspontja ismert lesz.

A tölcsér kivezető nyílását a milliméterpapírtól 40 mm magasan helyeztem el. A derékszögű vonalzót celluxszalag segítségével – a tölcsér közelében – az asztal széléhez rögzítettem, így lehetővé vált az anyaghalmaz magasságának leolvasása.

Ezek után először a kristálycukrot, majd a búzadarát, végül pedig a konyhasót vizsgáltam. Az anyagokat lassan öntöttem át a tölcséren. A mérést közel 40 mm átmérőjű kúpoknál kezdtem elvégezni. Itt megálltam, mértem, öntöttem még egy kicsit, majd újra megálltam mérni. Ezt addig folytattam, amíg 5 lépésben elértem egy kb. 75 mm átmérőjű kúpot. Anyagonként háromszor végeztem el ezt a mérési sorozatot.

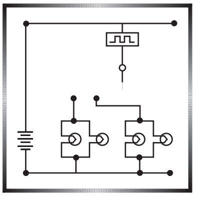
A mérési adatokat (a, b és h értékeit, illetve a belőlük számított α szögeket) táblázatba foglaltam. (Ezt a táblázatot a jegyzőkönyv tartalmazza, de itt terjedelmi okokból nem közöljük. – A szerk.)

5. A mért adatok kiértékelése: A két (egymásra merőleges irányban mért) átmérő eltérése nem volt nagyobb 2 mm-nél, tehát a körkúpalak feltételezése jogosnak bizonyult. Azt tapasztaltam, hogy a rézsűszög nagysága független az anyaghalmaz magasságától (vagy ez a függés olyan kicsi, hogy nem lehet észlelni). Ezek után anyagonként kiszámoltam (a mérésenként kapott rézsűszögértékek számtani közepét képezve) az *átlagos* rézsűszögeket. A mérés pontosságára a mérési adatok statisztikus ingadozásából és a mért mennyiségek leolvasási pontosságából lehet következtetni.

Összegezve az eredményeket, végül a kristálycukor rézsűszöge $33{,}3^\circ \pm 0{,}4^\circ$, a búzadara rézsűszöge $36{,}2^\circ \pm 0{,}4^\circ$, a konyhasóé pedig $40{,}2^\circ \pm 0{,}3^\circ$ nagyságúnak adódott.

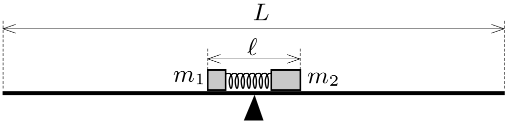
Kondákor Márk (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

23 dolgozat érkezett. Helyes Fajszi Bulcsú, Kondákor Márk, Krasznai Anna, Marozsák Tóbiás, Morvai Orsolya, Olosz Adél, Osváth Klára megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 11, hibás 2 dolgozat.



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 604. *Közepén ékkel alátámasztott,* $L = 3$ m *hosszú, vízszintes deszkán egy* $m_1 = 0{,}2$ kg *tömegű és egy* $m_2 = 0{,}3$ kg *tömegű, kis méretű test található. Közöttük egy* $\ell = 0{,}3$ m*-re összenyomott, fonállal rögzített, elhanyagolható tömegű, de erős rugó van. Az ék éppen a rendszer tömegközéppontja alatt van.*



A fonalat elégetve az m_1 *tömegű testet* $v_1 = 2$ m/s *sebességgel löki el a rugó. Melyik oldal felé és mennyi idő múlva billen meg a deszka? (A súrlódás elhanyagolható.)*

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros

Megoldás. A rendszerre nem hat vízszintes irányú külső erő, így a vízszintes irányú impulzus állandó marad. Ha az m_2 tömegű test sebessége a fonál elégetése után v_2 lesz (jobbra), akkor felírhatjuk, hogy

$$m_1v_1 - m_2v_2 = 0, \quad \text{ahonnan} \quad v_2 = \frac{m_1}{m_2}v_1 = 1{,}33\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Az ék a 3 méteres deszka közepénél, éppen a rendszer tömegközéppont alatt helyezkedik el. A deszka forgatónyomatéka az ékre nulla, tehát a két kis méretű test eredő forgatónyomatéka is nulla kell hogy legyen a rugó szétlökődése előtt. Ha az m_1 tömegű test x távolságra volt az éktől (balra), akkor a forgatónyomatékok egyensúlyának feltétele:

$$x \cdot m_1 = (\ell - x) \cdot m_2,$$

ahonnan az adatok behelyettesítése után

$$x = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\ell = 0{,}18\ \mathrm{m}$$

adódik. A kisebb tömegű test tehát $s_1 = 1{,}32$ m távolságra volt a deszka bal oldali szélétől, a nehezebb pedig $s_2 = 1{,}38$ m távolságra a deszka jobb oldali szélétől.

A deszka és a rajta lévő testek közös tömegközéppontja akkor fog megváltozni, amikor az egyik test elhagyja a deszkát. Ez a kisebb tömegű testtel történik meg hamarabb, nevezetesen

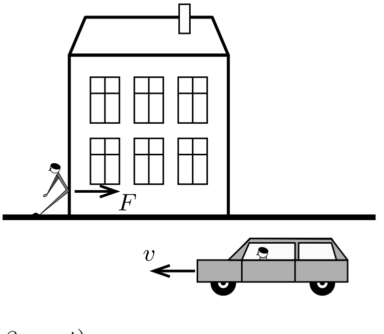
$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = 0{,}66\ \mathrm{s}$$

idővel a fonál elégetése után, hiszen – súrlódás hiányában – egyenes vonalú egyenletes mozgással mozog a deszka széle felé. Ennyi idő alatt a nagyobb tömegű test még nem éri el a deszka másik szélét, ugyanis (a lendületmegmaradás törvénye szerint) a kezdősebessége kisebb, a deszka szélétől mért kezdeti távolsága pedig nagyobb, mint a kisebb tömegű testé.

A deszka tehát a fonál elégetése után 0,66 s elteltével jobbra fog megbillenni.

Vida Tamás (Győr, Kazinczy F. Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

20 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1 dolgozat.



G. 609. *Az ábrán látható ember sajátos módon támaszkodik egy házfalnak, arra F erőt fejt ki. Ha a talajhoz rögzített koordináta-rendszerből nézzük, a falnak támaszkodó ember nem végez munkát, mivel az elmozdulása nulla. Az autóban v sebességgel utazó megfigyelő szerint az ember hosszú úton folyamatosan fejti ki az erőt, tehát munkát végez. Miért nem fárad ki az így pihenő ember?*

(*3 pont*)

Megoldás. Sem a ház, sem az ember mechanikai energiája nem változik, hiszen gyorsulásuk nulla. (Ez a megállapítás éppúgy érvényes a talajhoz rögzített „álló” koordináta-rendszerben, mint az autó „mozgó” rendszerében.) A munkatétel szerint $W = \Delta E$, így $W = 0$. Tehát sem az ember, sem a ház „nem fárad el”.

Több dolgozat alapján

29 dolgozat érkezett. Helyes Baráth László, Beke Zsolt és Osváth Klára megoldása. Hiányos (1–2 pont) 5, hibás 21 dolgozat.

G. 614. *Egy D direkciós állandójú, elhanyagolható tömegű rugó végeihez azonos, m tömegű korongokat erősítettünk. A rugót és a korongokat a rugó nyújtatlan állapotában egy légpárnás asztalra helyezzük, és a rugó tengelyének irányában v_0 sebességű mozgásba hozzuk. Egy adott pillanatban a hátul lévő korongot hirtelen megállítjuk, és fogva tartjuk.*

a) Mennyi idő múlva fordul vissza a másik test?

b) Mekkora lesz a rugó legnagyobb megnyúlása, és legfeljebb mekkora rugalmas energiával rendelkezik a rugó?

Adatok: $D = 16$ N/m, $m = 0{,}25$ kg, $v_0 = 2$ m/s.

(*3 pont*)

Megoldás. *a*) A rugó és a korongok eleinte egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek. Miután az egyik korongot megfogtuk, a rugó másik végéhez rögzített korong harmonikus rezgőmozgásba kezd, amit az elmozdulással arányosan növekvő rugóerő biztosít. A mozgás a rugó nyújtatlan állapotában indul, a rugó legnagyobb megnyúlása, vagyis a korong visszafordulása a mozgás periódusidejének negyede,

$$T = \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}{4} \approx 0{,}20 \text{ s}$$

idő múlva következik be.

b) A rugónak és a korongnak eredetileg $E = \frac{1}{2}mv_0^2 = 0{,}5$ J energiája van. (A rugónak ekkor még nincs rugalmas energiája és az elhanyagolható tömege miatt a mozgási energiája is nullának vehető.) Az energiamegmaradás törvénye alapján a rugónak nem lehet E-nél több rugalmas energiája, és pontosan E nagyságú akkor, amikor a korong éppen megáll (visszafordul). A rugó megnyúlása is ekkor lesz a legnagyobb. A rugó rugalmas energiájának $E = \frac{1}{2}Dx^2$ képletét átrendezve megkapjuk a maximális megnyúlást:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{D}} = 0{,}25 \text{ m}.$$

Jánosik Máté (Győr, Révai M. Gimn., 8. évf.)

43 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 14, hiányos (1 pont) 12, hibás 4 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 4956. *Egy csillagászati távcső f fókusztávolságú parabolatükrének tengelye egy adott pillanatban éppen függőleges. A tükör pereme ekkor H-val magasabban van, mint a tükör legmélyebb pontja. Egy m tömegű kis test a tükör peremétől indulva súrlódásmentesen lecsúszik a tükör középpontjáig. Mekkora erővel nyomja ott a tükröt?*

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

I. megoldás. A súrlódásmentesen lecsúszó test sebességét a parabolatükör legmélyebb pontjában az energiamegmaradás törvényéből számíthatjuk ki:

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2, \qquad \text{ahonnan} \qquad v = \sqrt{2gH}.$$

A pálya legalsó pontjának közelében a test mozgása egyenletes körmozgással közelíthető. A körpálya sugara (a parabola simulókörének R sugara) megegyezik a parabola p paraméterével, ami a fókusztávolság kétszerese (lásd pl. `https://hu.wikipedia.org/wiki/Fókusztávolság`):

$$R = p = 2f.$$

(Ugyanezt az összefüggést a gömbtükör fókusztávolságának ismert képlete alapján is megkaphatjuk.)

A körmozgás dinamikai feltétele (az *1. ábra* jelöléseit használva):

$$N - mg = m\frac{v^2}{R},$$

ahonnan a keresett nyomóerő:

$$N = mg + m\frac{v^2}{2f} = mg + m\frac{2gH}{2f} = mg\left(1 + \frac{H}{f}\right).$$

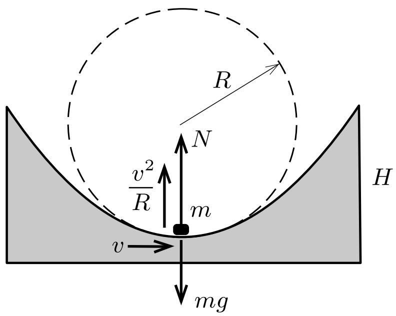
Kolontári Péter (Pécs, Leővey Klára Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy hány metszéspontja lehet egy f fókusztávolságú parabolának és a parabolát a talppontjánál érintő r sugarú körnek! A görbék egyenlete

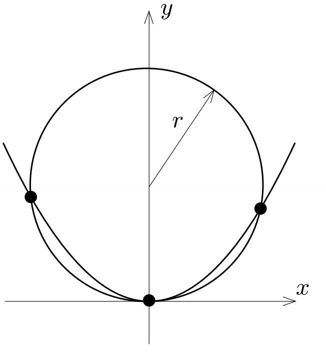
$$4fy = x^2, \qquad \text{illetve} \qquad x^2 + (y - r)^2 = r^2,$$

ahonnan a metszéspont(ok) y koordinátáját megadó összefüggés:

$$y^2 = 2y(r - 2f).$$



1. ábra



2. ábra

Innen látható, hogy ($y \geqslant 0$ miatt) a két görbének csak akkor lesz egynél több metszéspontja, ha $r - 2f > 0$ (*2. ábra*). A legnagyobb kör, amelynek csak egyetlen közös pontja van a parabolával (ez felel meg a simulókörnek) $R = 2f$ sugarú.

Az energiamegmaradás alapján a test sebessége a pályájának legalsó pontjában $v = \sqrt{2gH}$. Newton II. törvénye szerint

$$N - mg = m\frac{2gH}{2f},$$

innen a nyomóerő

$$N = mg\frac{H+f}{f}.$$

Póta Balázs (Győr, Révai M. Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. A parabola talppontjának közvetlen közelében a test vízszintes irányú sebességét állandónak, $v = \sqrt{2gH}$ nagyságúnak tekinthetjük, a vízszintes irányú elmozdulást tehát minden pillanatban az

$$x(t) = vt = t\sqrt{2gH}$$

összefüggésből számíthatjuk ki. Másrészt tudjuk, hogy a tükör forgásfelületének vezérgörbéje egy olyan parabola, amelynek egyenlete:

$$y = \frac{x^2}{4f}.$$

Ebből a két egyenletből megkapjuk (közelítőleg) a test függőleges irányú elmozdulását az idő függvényében:

$$y(t) = \frac{x(t)^2}{4f} = \frac{1}{2}\left(\frac{H}{f}g\right)t^2 \equiv \frac{a}{2}t^2.$$

Látjuk, hogy a kis test $a = Hg/f$ nagyságú, függőlegesen felfelé irányuló gyorsulással mozog. Ilyen mozgást az

$$N - mg = ma$$

mozgásegyenlet szerint

$$N = mg + ma = mg\left(1 + \frac{H}{f}\right)$$

erő képes létrehozni, tehát ekkora erővel nyomja a tükör a kis testet, és ugyanekkorával nyomja az is a tükröt.

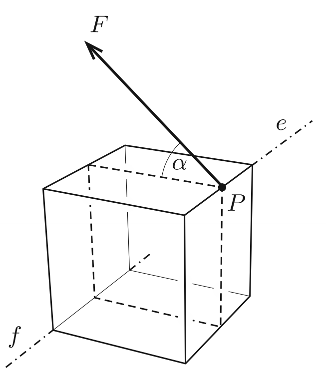
Berke Martin (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

45 dolgozat érkezett. Helyes 40 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

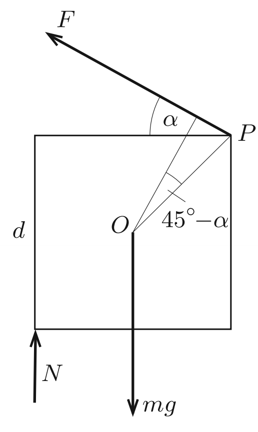
P. 4964. *Legalább mekkora erővel lehet felborítani egy jégen csúszó jégkockát? (A súrlódás elhanyagolható.)*

(*5 pont*) *Példatári feladat*

Megoldás. Belátható, hogy a csúszó jégkocka akkor borítható fel a legkönnyebben, ha a borulást előidéző erő a kocka egyik felső e élének P felezőpontjában, az e élre merőleges (függőleges) síkban hat. Határesetben, valamekkora F nagyságú és a vízszintessel alkalmasan választott α szöget bezáró erő hatására a jégkocka még éppen nem billen meg az e-vel átellenes f él körül, és függőleges irányban sem gyorsul. F-et bármilyen kevéssel meghaladó nagyságú erő hatására a jégkocka megbillen, a tömegközéppontja megemelkedik, és a továbbiakban ezek a mozgások egyre gyorsabban folytatódnak, tehát a jégkocka felborul (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

A jégkockára ható erők (az F erő, az mg nehézségi erő és az f élnél ható, a talaj által kifejtett függőleges irányú N nyomóerő) mindegyike az e élre merőleges síkban hat. Tekintsük ezeket a (síkbeli) erőket a felborulás határhelyzetében (*2. ábra*).

A d oldalélű kocka O tömegközéppontjára felírt forgatónyomatékok összege nulla:

$$N\frac{d}{2} = F\cos(45^\circ - \alpha)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}d.$$

A tömegközéppont függőleges irányú gyorsulása nulla, így

$$mg - N - F\sin\alpha = 0.$$

Ezekből (N kiküszöbölése után) az F erőre α függvényében

$$F(\alpha) = \frac{mg}{\sin\alpha + \sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)} = \frac{mg}{2\sin\alpha + \cos\alpha}$$

adódik. Ezen kifejezés minimumát, vagyis a nevezőjének maximumát keressük.

A $2\sin\alpha + \cos\alpha$ kifejezés legnagyobb értéke $\sqrt{5}$, amit $\alpha \approx 1{,}1$ radiánnál, vagyis kb. 63°-nál vesz fel*. A szélsőértéket differenciálszámítással, trigonometrikus átalakítások felhasználásával, vagy elemi geometriai megfontolásokkal is meg lehet határozni.

A szabadon csúszó jégkocka felborításához tehát legalább $F = \frac{mg}{\sqrt{5}}$ erő szükséges, ez a jégkocka súlyának kb. 47 százaléka.

Póta Balázs (Győr, Révai M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

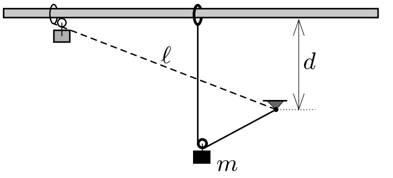
58 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–3 pont) 32, hibás 4, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 4972. *Egy ℓ hosszúságú, könnyű és nyújthatatlan fonál egyik végét felfüggesztjük, a másikat pedig egy kicsiny gyűrűhöz kötjük, amely súrlódásmentesen csúszhat egy – a felfüggesztési pont felett $d < \ell$ magasságban található – vízszintes rúdon. Az ily módon elhelyezett fonálra kifeszített állapotban egy kicsiny csiga közvetítésével m tömegű súlyt akasztunk a rúd közvetlen közelében, majd a rendszert magára hagyjuk.*

a) Mekkora lesz a test sebessége a pálya legalsó pontjában?

b) Milyen görbe mentén mozog a súly?

c) Mekkora erő feszíti a fonalat a pálya legalsó pontjánál?

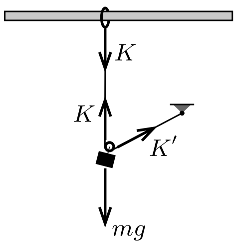


(*5 pont*)

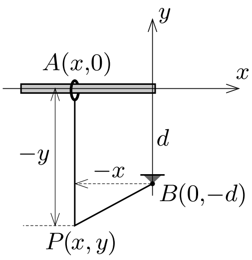
Közli: *Németh Róbert,*
Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

Megoldás. Mivel a kicsiny gyűrű súrlódásmentesen csúszhat a vízszintes rúdon, a rúd és csiga közötti fonál a mozgás első szakaszában (amíg a test el nem éri pályájának legalsó pontját) folyamatosan függőleges lesz. Ha ez nem teljesülne, akkor az *1. ábrán* látható K erőnek lenne vízszintes komponense is, ami az elhanyagolható tömegű gyűrűt nagyon nagy (határesetben „végtelen nagy") gyorsulással mozgatná; ez nyilván nem lehetséges. A csiga és a rögzített végpont közötti fonáldarabban ható K' erő kicsiny (elhanyagolható tehetetlenségi nyomatékú) csiga esetében K-val azonos nagyságú, ellenkező esetben a csigára ható eredő forgatónyomaték „végtelen nagy" szöggyorsulást eredményezne.

*Lásd pl. `http://www.wolframalpha.com/input/?i=maximum+2sinx%2Bcosx`.



1. ábra



2. ábra

b) Határozzuk meg először az m tömegű test pályájának alakját! Vegyünk fel egy olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek x tengelye illeszkedik a rúdra, az y tengely $(0, -d)$ pontja pedig a fonál gyűrűzetlen felfüggesztési pontja (*2. ábra*). Legyen $P(x, y)$ a test pályájának egy tetszőleges pontja a 3. síknegyedben ($x \leqslant 0$ és $y \leqslant 0$.)

A fonál ismert hosszát kifejezhetjük a P pont koordinátáival:

$$AP + PB = -y + \sqrt{x^2 + (-y-d)^2} = \ell,$$

ahonnan algebrai átalakítások után

$$y = \frac{x^2}{2(\ell - d)} - \frac{\ell + d}{2}$$

adódik. Ebből leolvasható, hogy a pálya egyenlete egy parabolát határoz meg. A parabola tengelye függőleges, paramétere $p = \ell - d$, fókusztávolsága tehát

$$f = \frac{p}{2} = \frac{(\ell - d)}{2}.$$

A parabola csúcspontja a rúd (vagyis az x tengely) alatt, attól

$$h = \frac{\ell + d}{2}$$

távolságra található.

a) A pálya legalsó pontja a rúd alatt h mélységben található. A rúdtól kezdősebesség nélkül induló m tömegű test sebessége a legalsó pontban (a mechanikai energiamegmaradás tétele szerint):

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{g(\ell + d)}.$$

c) A parabola görbületi sugara a pálya legalsó pontjában (a gömbtükörre vonatkozó, ismert optikai összefüggés szerint):

$$R = 2f = \ell - d.$$

A test mozgásegyenlete:

$$2K - mg = m\frac{v^2}{R},$$

ahonnan (v és R kiszámított értékeinek behelyettesítése után) megkapjuk a keresett fonálerőt:

$$K = mg\,\frac{\ell}{\ell - d}.$$

Megjegyzés. Ha a pálya legalsó pontját elérve a fonál függőleges része „beleakad" a rögzített felfüggesztésbe, akkor a test a továbbiakban egy negyedkör alakú pályán fog mozogni. Ennek sugara

$$R^* = \frac{\ell - d}{2},$$

a test mozgásegyenlete

$$2K^* - mg = m\frac{v^2}{R^*},$$

ahonnan a fonálerő (a fonál beakadása után):

$$K^* = mg\,\frac{3\ell + d}{2(\ell - d)}.$$

Látható, hogy a fonál beakadásakor a fonálerő (és ezzel együtt a test gyorsulása is) hirtelen, pillanatszerűen megváltozik, ezen fizikai mennyiségeket leíró függvényeknek tehát *szakadása* van.

Kozák András (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

64 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 19, hiányos (1–3 pont) 29, hibás 1 dolgozat.

P. 4973. *Baintner Géza (1892–1980) egyetemi előadásán szerepelt az a kísérlet, amikor három gumikötél Y alakban van összekötve, és az Y szimmetrikus végeit ellenkező fázisban rezegtetve, a keletkező két hullám kioltotta egymást, a harmadik ág nyugton maradt. Kérdés:* Hová lett a két hullám energiája?

(*4 pont*) *Marx György* (1927–2002) feladata

I. megoldás. A két gumikötelet ellentétes irányú kitérítéssel, ellentétes fázisú rezgésbe hozzuk. Az eredő rezgés amplitúdója ekkor a két részrezgés amplitúdójának különbsége lesz. Ha a két összetevő rezgés amplitúdója megegyezik, a két rezgés „kioltja" egymást, és így a harmadik ág nyugalomban marad. Az Y ágak találkozási pontját (amelyik nem mozog) rögzített pontnak is tekinthetjük, ezért az ide érkező hullámok visszaverődnek, fázisuk egymással is és a beérkező hullámok fázisával is ellentétes lesz. Így a csomóponthoz érkező hullámok energiája nem vész el, a visszavert hullámok energiájában megmarad.

Stiga Viktória (Budapest, Német Nemzetiségi Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A kísérlet kezdetekor (amikor a hullámokat keltjük) az Y szimmetrikus szárainak mozgatása során munkát kell befektetnünk, amelyet a gumikötelek el is tárolnak rugalmas energia, illetve mozgási energia formájában. Ezek után viszont a kötelek végeinek mozgatásakor már nem kell munkát végeznünk (energiát bevinnünk), a munkavégzés időbeli átlaga nulla. A gyakorlatban ez nem egészen pontosan teljesül, hiszen a kötélben ható belső erők munkát végeznek a gumi szerkezetében, amely a gumi hiszterézise folytán hőt fejleszt, melegíti a gumikötelet, továbbá a kötél által megmozgatott levegő is „visz el” energiát. Ha ezektől a veszteségektől eltekintünk, akkor kijelenthetjük, hogy nettó energiabetáplálás a rendszerbe nem történik, hiszen kezeinkkel csak visszaverjük az oda érkező beérkező hullámokat. Az Y középpontja és kezeink között a hullámok csak ide-oda mozognak, következésképpen nincsen nettó betáplált energia, mely el tudna „veszni”.

Póta Balázs (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes Guba Zoltán, Póta Balázs, Stefán Boglárka Abigél, Stiga Viktória és Viczián Anna megoldása. Kicsit hiányos (2 pont) 6, hiányos (1 pont) 17, hibás 3 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 375. Mérjük meg egy ruhacsipesz szorítóerejét nyílásszögének függvényében!

(*6 pont*) Közli: *Légrádi Imre,* Sopron

G. 625. A toronyóra 1,5 m hosszú nagymutatóján az óra középpontjától a mutató vége felé mászik egy pók egyenletesen, 1 mm/s sebességgel. A pók pontban 12 órakor indul.

a) Mennyit mutat az óra, amikor a pók a mutató végére ér?

A mutató végére érve a pók a maga által szőtt fonálon ereszkedik le, melynek az egyik végét a mutató végéhez rögzíti.

b) Milyen sebességgel szője a fonalat, hogy 13 órakor éppen az indulási helyén legyen?

c) Milyen messze volt a pók az óra tengelyétől háromnegyed egykor?

(*3 pont*)

G. 626. Mennyi annak az ℓ hosszúságú fonálingának a lengésideje (kis kitérések esetén), amelynek fonala középen egy szögbe ütközik, miközben áthalad az inga egyensúlyi helyzetén?

(*3 pont*)

G. 627. A Föld felszíne felett milyen magasságban lesz egy testre ható gravitációs vonzóerő éppen ugyanakkora, mint a Hold felszínén?

(*3 pont*)

G. 628. Reggelente mindig ugyanabban az órában megfigyelhetjük, hogy a Vénusz egyre közelebb kerül a Naphoz.

Vajon a Nap „előtt” vagy pedig a Nap „mögött” fog a Vénusz elhaladni?

(*4 pont*) Közli: *Részegh Anna,* Vácduka

P. 5001. Megegyezik a **G. 628.** gyakorlattal.

P. 5002. A Föld középpontja enyhén hullámos ellipszispályán kering a Nap körül.

a) Mi az oka ennek a hullámosságnak?

b) Közelítőleg mekkora egy ilyen hullám amplitúdója?

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5003. Két ℓ hosszúságú fonálinga közvetlenül egymás mögött, egymással párhuzamos síkokban lenghet. Árnyékuk merőlegesen egy falra vetődik, időnként áthalad egymáson. Mindkét ingát ugyanakkora (kicsiny) szögben kitérítjük, majd t_0 időkülönbséggel elengedjük. (t_0 kisebb, mint az ingák lengésideje.)

a) Mikor találkozik az árnyékuk először?

b) Mikor következik be az n-edik találkozás?

(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

P. 5004. Egy 8 méter hosszú, hajlékony fonál két végpontját azonos magasságban, egymástól 4 méter távolságban rögzítjük. A fonálon, arra felfűzve súrlódás nélkül mozoghat egy 0,5 kg tömegű test. A fonalat feszesen tartva a testet kezdősebesség nélkül úgy indítjuk el, hogy az indítási pont és a felfüggesztési pontok egy egyenesbe esnek.

Mekkora erő feszíti a fonalat, amikor a test a legnagyobb sebességgel halad?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5005. Két egyforma, henger alakú, bontatlan üdítőitalos doboz egyikét a mélyhűtőben megfagyasztjuk. Ezután egyszerre, egymás mellől indítjuk el őket egy lejtőn.

Melyik ér le hamarabb?

(*3 pont*) *Példatári feladat*

P. 5006. Egy 200 g tömegű strandlabdát függőlegesen lefelé erősen a talajra dobunk. A labda a legjobban benyomott állapotában egy 10 cm átmérőjű körlap mentén érintkezik a talajjal, és ekkor a labdában lévő levegő nyomása 110 kPa lesz.

a) Mekkora a labda tömegközéppontjának legnagyobb gyorsulása, ha a talaj száraz és egy kicsit göröngyös?

b) Más értéket kapnánk-e a gyorsulásra, ha a talaj sima és nedves volna, és emiatt a labda talajjal érintkező része alatt nem maradna levegő?

(A külső légnyomás 100 kPa.)

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter*, Vácduka

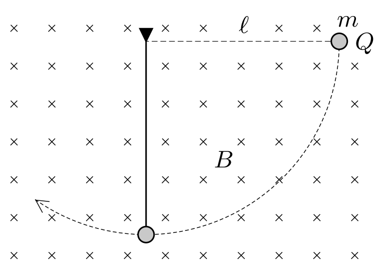
P. 5007. Egy 70°-os törőszögű prizmára lézersugarat bocsátunk. A sugár beesési szöge megegyezik a kilépési szöggel. A lézersugár az eredeti irányától 50°-kal térül el.

Mekkora a prizma anyagának törésmutatója?

(*3 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 5008. Egy egyatomos gázt oly módon melegítünk, hogy a folyamat során a mólhője a gázállandó (R) legyen. Hányszorosára változik a gáz térfogata, ha a hőmérséklete a kétszeresére nő?

(*5 pont*) *Példatári feladat*



P. 5009. Vákuumban $B = 2$ T indukciójú homogén, vízszintes irányú mágneses térben $\ell = 0{,}8$ m hosszú, igen vékony fonalú ingát a $\boldsymbol{B}$-re merőleges síkban vízszintesen kitérítünk, majd kezdősebesség nélkül elengedünk az *ábra* szerint.

a) Mekkora töltést kell adnunk az inga $m = 0{,}1$ g tömegű gömbjének, hogy a legalsó ponton áthaladva a fonálerő a mágneses tér nélküli értékének 99%-a legyen?

b) Mekkora az egymás utáni két áthaladáskor mérhető fonálerők aránya?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5010. Egy ciklotronban protonok felgyorsításához 10 MHz frekvenciájú gyorsítófeszültségre van szükség. Mekkora frekvencia kell a deuteronok, az egyszeresen ionizált héliumatomok, illetve a kétszeresen ionizált héliumatomok felgyorsításához?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

P. 5011. A fémhúros gitár két legvékonyabb húrja az E és a H nagy szakítószilárdságú acélhuzal. A vékonyabb E húrt túlfeszítjük addig, amíg a G hangmagasságot elérve (egy egész hangközzel a 440 Hz-es normál A alatt) elszakad.

a) Milyen hangnál szakad el a H húr, ha azt is túlfeszítjük, és ugyanakkora szakítószilárdságú acélból készült?

b) Mekkora volt az E húr anyagának szakítószilárdsága?

c) A régóta használt húrok általában az alátámasztásnál vagy a hangolókulcsnál szakadnak el. Miért?

d) Miből lehetne még hangszerhúrt készíteni? Keressünk megfelelő anyagot a Függvénytáblázatban és az Interneten!

A gitárhúr rezgő részének hossza (menzúrahossz) 64 cm. Az acélhúr anyagának sűrűsége $7{,}8\cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

(*6 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas

❄

Beküldési határidő: 2018. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 68. No. 2. February 2018)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 92): **K. 577.** Xavier picked three cards out of a deck of French cards, and placed them on the table in a row. He gave the following information on the cards picked: – One of the three cards is a king, and immediately to the right of this king there are one or two queens. – One of the three cards is a queen, and immediately to the left of this queen there are one or two queens. – One of the three cards is a heart, and immediately to the left of this heart there are one or two spades. – One of the three cards is a spade, and immediately to the right of this spade there are one or two spades. What cards may there be on the table, from left to right? **K. 578.** The positive integers 1 to n are written in the fields of the upper row of a $2\times n$ table, in increasing order. The same numbers are written in the lower row, in decreasing order. How many positive integers n smaller than 50 are there for which every number in the upper row is relatively prime to the number directly below? **K. 579.** We form 100 pairs out of 105 girls and 95 boys in a random way. The boy-and-boy pairs shake hands, the girl-and-girl pairs give each other a hug, and the mixed pairs start to dance. Show that the number of handshakes taking place is 5 less than the number of hugs. **K. 580.** For what right-angled triangles is it true that $x>2(z-y)$, provided $z>y\geqslant x$? **K. 581.** Find all four-digit square numbers of the form ABBA. **K. 582.** How long may a word be if its letters can be ordered in exactly 180 ways? Give an example of a meaningful English word of this type.

New exercises for practice – competition C (see page 93): **Exercises up to grade 10: C. 1462.** The first term of an arithmetic sequence is $a_1=3$, and its common difference is 9. Prove that for every natural number k, the number $3\cdot 4^k$ occurs among the terms. **C. 1463.** M is an interior point of a regular triangle ABC. The feet of the perpendiculars dropped from M onto the sides AB, BC and CA are H, K and P, respectively. Prove that *i*) $|AH|^2+|BK|^2+|CP|^2=|HB|^2+|KC|^2+|PA|^2$; *ii*) $|AH|+|BK|+|CP|=|HB|+|KC|+|PA|$. (*Mathematical Competitions in Croatia*) **Exercises for everyone: C. 1464.** We say that a natural number B *can be read out of* a larger natural number A, if it is possible to erase some of the digits of A so that B is obtained by reading the remaining digits, without changing their order.

What is the smallest natural number, such that every three-digit number can be read out of it? **C. 1465.** Let M denote the intersection of the lines PS and RT passing through the vertices of a regular triangle PQR and a square $QRST$. Show that triangle PTM is isosceles. **C. 1466.** A committee had twelve meetings during the course of a year. At every meeting, there were 10 members of the committee present. Any pair of members were present at most once together. What is the minimum possible number of members on the committee? **Exercises upwards of grade 11: C. 1467.** Let A and B denote the intersection of the circle of radius $2r$ centred at O, and the circle of radius $r+1$ passing through O. How long may r be if the line segment AB is the diameter of the smaller circle? **C. 1468.** Prove that for all non-negative numbers a and b $\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$. When will the equality hold?

New exercises – competition B (see page 94): **B. 4930.** Every inhabitant of a village belongs to one of three religious faiths: they either worship the Sun God, the Moon God or the Earth God. Regulations of these faiths require that a shrine should have the minimum possible total distance from all the houses of the village (whatever the faith of those living in the houses). Given that the worshippers of the Sun God already have a shrine in the village, and those of the Moon God have one, too, show that the worshippers of the Earth God can also build a shrine for themselves. (The village lies on flat terrain, and the shrines and the houses of the village can be considered pointlike.) (*3 points*) **B. 4931.** Prove that if a, b, c are the sides of a triangle then $\frac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc}>3$. (*3 points*) **B. 4932.** The Great Bestiary of Wonderland features a dragon for every week of the year. All dragons have different ages. The youngest dragon, named Aloysius has 13 heads. The second youngest one, Bartholomeus has 14 heads, ... (and so on, each dragon in the order of their ages has one more head than the previous one). The oldest dragon, Zebulon has 64 heads. Wonderland monks are writing the Giant Codex of Dragon Tales. A tale may only be included in the Codex if the total number of heads of all the dragons in the tale is exactly 1001. For every pair of tales, the sets of dragons mentioned in the tales are different. Which of the 13-headed Aloysius and the 14-headed Bartholomeus will appear in more tales when the monks are finished with writing down all possible tales? (*5 points*) **B. 4933.** Find the area of a regular triangle of maximum perimeter inscribed in a unit square. (*4 points*) **B. 4934.** For any positive integers n and k, let $f(n,k)$ denote the number of unit squares cut in two by a diagonal of an $n\times k$ lattice rectangle. How many number pairs n, k are there such that $n\geqslant k$, and $f(n,k)=2018$? (*4 points*) **B. 4935.** The given circles ω_1 and ω_2 lie inside an angle of vertex O, touching the arms. A ray drawn from point O intersects circle ω_1 at points A_1 and B_1, and circle ω_2 at points A_2 and B_2, such that $OA_1<OB_1<OA_2<OB_2$ (see the *diagram*). Circle γ_1 touches the circle ω_1 on the inside, and also touches the tangents drawn to circle ω_2 from point A_1. Similarly, circle γ_2 touches the circle ω_2 on the inside, and also touches the tangents drawn to circle ω_1 from point B_2. Prove that the radii of the circles γ_1 and γ_2 are equal. (*5 points*) (*Kvant*) **B. 4936.** Let AB be a fixed chord that is not a diameter in a circle k. The midpoint of AB is F. Let P be a point on the circle k, different from A and B. Let the line PF intersect circle k again at X, and let Y be the reflection of X in the perpendicular bisector of AB. Prove that there exists a point in the plane that lies on the line PY for all P. (*5 points*) (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **B. 4937.** In the plane, a set of lattice quadrilaterals with the following property is selected: however the lattice points are coloured with a finite number of colours, there will always be a selected quadrilateral whose vertices all have the same colour. Prove that there are infinitely many selected lattice quadrilaterals, no two of which have a vertex in common. (*6 points*) (Proposed by *L. Surányi,* Budapest) **B. 4938.** It is known that it is possible to draw the complete graph with 7 vertices on

the surface of a torus (see the Császár polyhedron, for example). 7 points are marked on the side of a mug. We want to connect each pair of points with a curve, so that the curves have no interior points in common. What minimum number of these curves need to lead across the handle of the mug? (*6 points*)

New problems – competition A (see page 96): **A. 716.** Let ABC be a triangle and let D be a point in the interior of the triangle which lies on the angle bisector of $\angle BAC$. Suppose that lines BD and AC meet at E, and that lines CD and AB meet at F. The circumcircle of ABC intersects line EF at points P and Q. Show that if O is the circumcenter of DPQ, then OD is perpendicular to BC. (Proposed by: *Michael Ren,* Andover, Massachusetts, USA) **A. 717.** We say that a positive integer is *lazy* if it has no prime divisor greater than 3. Prove that there are at most two lazy numbers strictly between two consecutive square numbers. (Proposed by: *Zoltán Gyenes* and *Géza Kós,* Budapest) **A. 718.** Let $\mathbb{R}[x, y]$ denote the set of two-variable polynomials with real coefficients. We say that the pair (a, b) is a *zero* of the polynomial $f \in \mathbb{R}[x, y]$ if $f(a, b) = 0$. If polynomials $p, q \in \mathbb{R}[x, y]$ have infinitely many common zeros, does it follow that there exists a non-constant polynomial $r \in \mathbb{R}[x, y]$ which is a factor of both p and q?

Problems in Physics

(see page 122)

M. 375. Measure how the force exerted by the prongs of a clothes peg depends on the angle between the prongs.

G. 625. A spider is crawling at a uniform speed of 1 mm/s along the 1.5-metre minute hand of the tower clock, from the centre of the clock towards the end of the minute hand. The spider starts exactly at 12 o'clock. *a*) What is the time shown by the clock, when the spider reaches the end of the minute hand? Reaching the end of the minute hand the spider descends on a self-made thread attached to the end of the minute hand. *b*) At what rate should the silk of the thread be made in order that the spider reach its starting position exactly at 13? *c*) How far was the spider from the centre of the clock at 12:45? **G. 626.** What is the period of that simple pendulum of length ℓ the thread of which bumps into a peg at the midpoint of the thread when the bob passes the equilibrium position? (The maximum angle that the thread differs from the vertical is small.) **G. 627.** At what height above the surface of the Earth will the gravitational force exerted on an object be exactly the same as that of on the surface of the Moon? **G. 628.** At the same time every morning it can be observed that Venus gets closer to the Sun. Where eventually will Venus pass the Sun, „in front of" or „behind" it?

P. 5001. Same as exercise **G. 628. P. 5002.** The centre of the Earth moves along a bit wavy elliptical path about the Sun. *a*) What is the reason for this waviness? *b*) Approximately what is the amplitude of the wave? **P. 5003.** Two simple pendulums, both having a length of ℓ can swing in parallel, vertical planes, one right behind the other. Their shadows are projected perpendicularly to a wall, and every once in a while the shadows cross each other. Both pendulums are displaced by the same (small) angle and they are released at a time difference of t_0. (t_0 is smaller than the period of the pendulums.) *a*) When do their shadows meet first? *b*) When does the n-th encounter occur? **P. 5004.** The two ends of an 8-meter-long flexible thread are fixed at the same height at a distance of 4 m from each other. A 0.5 kg object is strung on the thread and can move frictionlessly along it. The thread is held tight and the object is released without initial speed such that the starting point and the ends of the thread are collinear. What is the tension in the thread when the object is moving at the greatest speed? **P. 5005.** One of two alike cylinder-shaped, unopened soft drink cans is frozen in the freezer. Then they are released at the same time next to each other from the top of a slope. Which one reaches the bottom of the slope first? **P. 5006.** A 200 g beach ball is strongly thrown downwards, onto the ground. When the ball is in its most compressed state, it touches the ground along a circle of diameter 10 cm, and the pressure in the ball is 110 kPa. *a*) What is the greatest acceleration of the centre of mass of the ball, if the ground is dry and a little bit lumpy? *b*) Would the value of the acceleration be different if the ground was wet and flat, and therefore there was no air left below that part of the ball which was in contact with the ground? (The ambient air pressure is 100 kPa.) **P. 5007.** A laser beam is incident on a prism of vertex angle of 70°. The angle of incidence of the beam is the same as the angle at which the ray emerges from the prism. The laser beam is deflected from its original direction by an angle of 50°. What is the refractive index of the material of the prism? **P. 5008.** A sample of monatomic gas is heated in such a way that during the process its molar heat capacity is the same as the universal gas constant R. By what factor does the volume of the gas change if its temperature is doubled? **P. 5009.** A very thin thread pendulum of length $\ell = 0.8$ m is placed in vacuum. The pendulum is also in a region of uniform, horizontal magnetic field of induction $B = 2$ T; it is displaced horizontally in the plane which is perpendicular to the induction $\boldsymbol{B}$, and then released without initial speed, as shown in the *figure*. *a*) What amount of charge should the pendulum bob of mass $m = 0.1$ g be given in order that the tension in the thread when the bob is at the lowermost point of its path is 99% of the value of the tension without magnetic field? *b*) What is the ratio of the values of the tension in the case of two consecutive passes? **P. 5010.** In a cyclotron the frequency of the voltage used to accelerate protons is 10 MHz. What is the necessary frequency when deuteron, singly ionised helium or doubly ionised helium atoms are accelerated? **P. 5011.** The two thinnest strings of a steel-string guitar (E and B) are made of great tensile strength steel. The thinner E string is overstrained until its pitch reaches sound G (a whole tone below the 440 Hz normal A sound) and it snaps. *a*) At which sound would string B snap if it was also overstrained and it was made of the same tensile strength steel as string E? *b*) What was the tensile strength of the material of string E? *c*) The strings which have been used for a long time usually break at the bridge or at the tuning peg. Why? *d*) From what other materials could the strings be made? Look for appropriate materials on the Internet or in tables. The length of the oscillating part of the string is 64 cm, the density of the material of the steel string is $7.8 \cdot 10^3$ kg/m^3.

Problems of the 2017 Kürschák competition

1. Let ABC be an arbitrary triangle and pick points A', B' and C' independently with uniform distribution on sides BC, CA and AB, respectively. For a point Z in the plane let $p(Z)$ denote the probability that the triangle formed by lines AA', BB' and CC' contains Z. Determine the inner point Z of the triangle ABC that maximizes $p(Z)$.

2. Do there exist polynomials $f(x)$ and $g(x)$ with real coefficients, such that the polynomial $f(x)^3 - g(x)^2$ has degree one?

3. We filled in a number in each field of an $n \times n$ table T such that no number appears twice in the same row. Prove that it is possible to rearrange the numbers in T in such a way that each row of the rearranged table T^* contains the same numbers that the corresponding row of T contained, moreover, no number appears twice in the same column of T^*.