KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

67. évfolyam 8. szám — Budapest, 2017. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: OLÁH VERA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Projektvezető: NAGYNÉ SZOKOL ÁGNES
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Közlemény a tanulmányi versenyek feladatainak és eredményeinek megjelenéséről

Mivel mind az Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny, mind az Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai és eredményei megtalálhatóak az interneten, ezért a KöMaL-ban nem jelennek meg. Honlapunkon elérhetőek lesznek, a `http://www.komal.hu/hirek/verseny/index.h.shtml` címen.

Az 58. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása, 2. rész

Második nap*

4. *Legyenek R és S különböző pontok egy Ω körön, amikre RS nem átmérője a körnek. Legyen ℓ az Ω körhöz a R pontban húzott érintőegyenes. Legyen T az a pont, amire teljesül az, hogy S az RT szakasz felezőpontja. Legyen J egy olyan pont az Ω kör rövidebb RS ívén, amire teljesül az, hogy a JST háromszög Γ körülírt köre az ℓ egyenest két különböző pontban metszi. Legyen Γ és ℓ metszéspontjai közül az A pont az, ami közelebb van az R-hez. Az AJ egyenes Ω-val vett második metszéspontja legyen K. Bizonyítsuk be, hogy a KT egyenes érintője a Γ körnek.*

Baran Zsuzsanna megoldása. Először is tegyük teljesebbé az ábrát a „másik metszéspontok” felvételével: legyen $l \cap \Gamma = \{A, A_2\}$ és legyen $A_2J \cap \Omega = \{J, K_2\}$. A megoldás során a szögeket irányítva értelmezzük.

A megoldás sok-sok hasonló háromszögpár észrevételén fog alapulni: az $SAK\triangle \sim SA_2K_2\triangle$, a $SAA_2\triangle \sim SKK_2\triangle$, a $RSK\triangle \sim A_2SR\triangle$, illetve az $SKT\triangle \sim STA_2\triangle$ hasonlóságokat fogjuk sorra belátni.

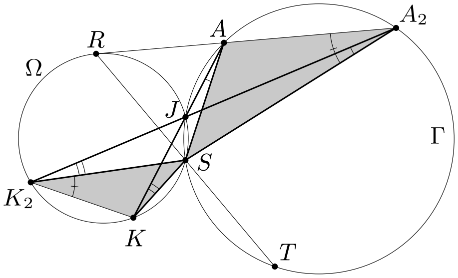
[Ezen a ponton érdemes lehet megpróbálni egyénileg befejezni a megoldást.]

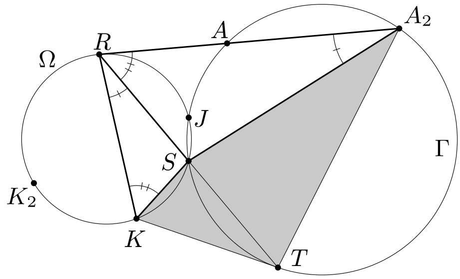
$JK_2S\sphericalangle = JKS\sphericalangle$ és $SA_2J\sphericalangle = SAJ\sphericalangle$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek), ezért $SAK\triangle$ és $SA_2K_2\triangle$ szögei megegyeznek, így $SAK\triangle \sim SA_2K_2\triangle$.

Ekkor $\frac{SA}{SA_2} = \frac{SK}{SK_2}$, továbbá $ASA_2\sphericalangle = KSK_2\sphericalangle$ (hiszen mindkettő $K_2SA_2\sphericalangle - K_2SA\sphericalangle = KSA\sphericalangle - K_2SA\sphericalangle$), emiatt $SAA_2\triangle \sim SKK_2\triangle$.

Ekkor $AA_2S\sphericalangle = KK_2S\sphericalangle = KRS\sphericalangle$. Az RA érinti Ω-t (és RS elválasztja A-t és K-t), ezért $ARS\sphericalangle = RKS\sphericalangle$. Így az $RSK\triangle$ és $A_2SR\triangle$ szögei megegyeznek, ezért $RSK\triangle \sim A_2SR\triangle$.

*Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.





$TSK\sphericalangle = 180^\circ - KSR\sphericalangle = 180^\circ - RSA_2\sphericalangle = A_2ST$, továbbá

$$\frac{ST}{KS} = \frac{SR}{KS} = \frac{SA_2}{RS} = \frac{SA_2}{TS}$$

(itt kihasználtuk, hogy S az RT szakasz felezőpontja), így $SKT\triangle \sim STA_2\triangle$.

Ez utóbbi hasonlóságból következik, hogy $STK\sphericalangle = SA_2T\sphericalangle$, ami éppen azt jelenti, hogy KT érinti a Γ kört. Készen vagyunk.

Erre a feladatra sokféle megoldás elképzelhető. Két további megoldási lehetőség címszavakban:

(1) Belátjuk, hogy $AT \parallel RK$, majd pedig, hogy $ARXT$ paralelogramma, melyben S az átlók felezőpontja. Itt X a KST kör és az RK egyenes másik metszéspontja.

(2) Invertálunk R középponttal, RS sugárral. Belátjuk, hogy a KT egyenes képe és Γ képe egymás tükörképei T'-re nézve. Ehhez belátjuk, hogy $RK'SA_2'$ paralelogramma. Az RK' és $A_2'S$ párhuzamossága kijön RK és AT párhuzamosságából.

5. *Adott egy $N \geqslant 2$ egész szám. $N(N+1)$ futballjátékos, akik között nincs két egyenlő magasságú, valahogyan felállnak egy sorban. Az edző ki akar hagyni ebből a sorból $N(N-1)$ játékost úgy, hogy a megmaradt $2N$ játékos alkotta sor játékosaira teljesüljön az alábbi N feltétel:*

(1) *senki nem áll a legmagasabb és a második legmagasabb játékos között,*

(2) *senki nem áll a harmadik legmagasabb és a negyedik legmagasabb játékos között,*

$\vdots$

(N) *senki nem áll a két legalacsonyabb játékos között.*

Bizonyítsuk be, hogy ez mindig megtehető.

Borbényi Márton megoldása. Készítsünk N csoportot az alábbi módon: az első csoportban legyen a sor szerint első $N+1$ ember, a másodikban a második $N+1$ ember, és így tovább. Célunk, hogy minden csoportból pontosan 2 játékost válasszunk ki, így ők a megmaradó $2N$ embernél egymás mellé kerülnek.

A következő algoritmust alkalmazzuk:

– elkezdjük jelölgetni a játékosokat magasság szerint csökkenő sorrendben;

– amint egy csoportban van két kijelölt focista, megállunk;

– elhagyjuk ebből a csoportból a két kijelölt játékoson kívül az összes embert, és minden más csoportból a csoport legmagasabb emberét;

– a két megjelölt játékossal már nem kell foglalkoznunk, hiszen a megmaradtak között ők ketten a legmagasabbak, és senki nem áll már közöttük; marad $N-1$ csoportunk, mindegyikben N focistával;

– ismételjük a fenti eljárást az eggyel kisebb létszámú, eggyel kevesebb csoportból álló sorra stb.

6. *Egy egész számokból álló* (x,y) *rendezett párt* primitív rácspontnak *nevezünk, ha* x *és* y *legnagyobb közös osztója 1. Ha adott primitív rácspontok egy véges* S *halmaza, bizonyítsuk be, hogy van olyan* n *pozitív egész, és vannak olyan* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *egészek, hogy minden* (x,y) S*-beli pontra teljesül*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 1.$$

Williams Kada megoldása. Szeretnénk tehát egy olyan egész együtthatós nemkonstans homogén $f(x,y)$ polinomot találni, amire $f(x,y)=1$, ha $(x,y)\in S$. (Homogénnek nevezünk egy többváltozós polinomot, ha benne minden tag fokszáma egyenlő.)

Az $f(x,y)$ polinom létezését $|S|$ szerinti indukcióval igazoljuk. Ehhez felhasználjuk az ún. Bézout-lemmát, ami szerint bármely x és y egész számok legnagyobb közös osztója előállítható $ax+by$ alakban, ahol $a,b\in\mathbb{Z}$. Az $|S|=1$ esetből indulunk ki: ha $S=\big\{(x,y)\big\}$, akkor a Bézout-lemma szerint alkalmas $a,b\in\mathbb{Z}$-re $f(x,y)=ax+by$ megfelel.

Tegyük fel ezután, hogy az $S=\big\{(a_1,b_1),\ldots,(a_m,b_m)\big\}$ halmaz minden pontján $g(x,y)=1$, és szeretnénk az (a_{m+1},b_{m+1}) elemet hozzácsatolni. A Bézout-lemma szerint $Aa_{m+1}+Bb_{m+1}=1$ alkalmas $A,B\in\mathbb{Z}$-re. Mivel a

$$h(x,y)=\prod_{i=1}^{m}(a_iy-b_ix)$$

polinom értéke minden S-beli pontban 0, azért $C,K\in\mathbb{Z}$-re az

$$f(x,y)=g(x,y)^K - C\cdot(Ax+By)^{K\cdot\deg g-m}h(x,y)$$

homogén polinom értéke minden S-beli pontban 1 (feltesszük, hogy $K\geqslant m$), míg

$$f(a_{m+1},b_{m+1})=g(a_{m+1},b_{m+1})^K - C\cdot\underbrace{h(a_{m+1},b_{m+1})}_{=:M}.$$

Azt állítjuk, hogy $g(a_{m+1},b_{m+1})$ és $M=h(a_{m+1},b_{m+1})$ egymáshoz relatív prím. Valóban, ha lenne közös p prímosztójuk, akkor $p\mid m$ miatt p osztója lenne az M valamelyik $a_i b_{m+1} - b_i a_{m+1}$ tényezőjének ($1 \leqslant i \leqslant m$). Vegyük észre, hogy ekkor a homogenitás miatt

$$b_i^{\deg g} g(a_{m+1}, b_{m+1}) = g(b_i a_{m+1}, b_i b_{m+1}) \equiv g(a_i b_{m+1}, b_i b_{m+1}) =$$
$$= b_{m+1}^{\deg g} g(a_i, b_i) = b_{m+1}^{\deg g} \pmod p,$$

s így $p \mid g(a_{m+1}, b_{m+1})$-ből $p \mid b_{m+1}$ következik. Hasonlóan kapjuk, hogy $p \mid a_{m+1}$. Ez viszont ellentmond annak, hogy a_{m+1} és b_{m+1} relatív prím.

Ha $M \neq 0$, akkor a relatív prímség miatt $g(a_{m+1}, b_{m+1})^{\varphi(|M|)} \equiv 1 \pmod M$ az Euler–Fermat-tétel szerint, így pl. $K = m\varphi\big(|M|\big)$ választással alkalmas $C \in \mathbb{Z}$-re $f(a_{m+1}, b_{m+1}) = 1$ biztosítható. Ha pedig $M = 0$, akkor a 0-hoz való relatív prímség miatt $g(a_{m+1}, b_{m+1}) = \pm 1$, s így $K = 2$ és $C = 0$ megfelel.

Tehát minden esetben biztosítottuk, hogy $f(a_{m+1}, b_{m+1}) = 1$ is teljesüljön. Tehát az indukciós lépést befejeztük, az indukció teljes.

Megjegyzés. A feladat általánosítása volt a 2017. szeptemberi számban megjelent **A. 703.** feladat. Egy további megoldási módszer olvasható a

`https://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=A703&l=hu`

címen.

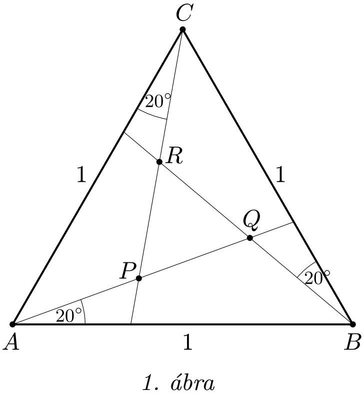
Bizonyítsunk sokféleképpen! – Egy érettségi feladat továbbgondolása

(a 2017. májusi emelt szintű matematika érettségi feladatsor 8.b feladata)

A 2017. májusi emelt szintű érettségi feladatsor egyik feladata a következő volt:

8. b) Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög minden csúcsánál behúztunk egy-egy szögharmadoló egyenest, így az *1. ábrán* látható PQR szabályos háromszöget kaptuk.

Számítsa ki a PQR háromszög oldalának hosszát!

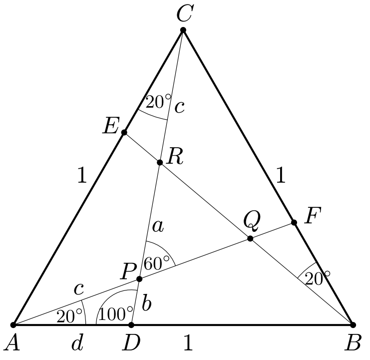


1. ábra

A hivatalos javítási-értékelési útmutató három különböző megoldást közölt a feladatra, ezek megtekinthetők pl. a

`https://www.oktatas.hu/bin/content/dload/erettsegi/feladatok_2017tavasz_emelt/e_mat_17maj_ut.pdf`

címen.



2. ábra

M1. Az első megoldás az ABQ háromszögben felírt két szinusztétel segítségével határozza meg a PQ oldal hosszát (*2. ábra*).

M2. A második megoldásban egy szinusztétel és területszámítás segítségével érünk célt. $T_{ABC} - T_{ABQ} = T_{PQR}$; és a szabályos háromszög területéből az oldalának hossza már számítható.

M3. A harmadik megoldásban szinusztételek többszöri alkalmazásával meghatározzuk a CD, majd a d, c és b szakaszhosszakat, ebből a szabályos háromszög a oldalhossza már számítható.

A javítási útmutatóban a megoldások végén a következő megjegyzés szerepel: „Addíciós tételek felhasználásával bizonyítható, hogy $a = d = 2 \cdot \sin 10°$."

Jelen cikkben egyrészt elvégezzük ezt az addíciós tételek segítségével történő bizonyítást, másrészt további elemi geometriai bizonyításokat mutatunk a szabályos háromszög oldalát meghatározó $a = d$ egyenlőségre.

Megjegyzés. **Az** $a = d = 2 \cdot \sin 10°$ **egyenlőség igazolása** addíciós tételek segítségével.

A bizonyításban felhasználjuk **M3.** részeredményeit:

$$d = \frac{\sin 20°}{\sin 100°} \quad \text{és} \quad a = \frac{\sin 60°}{\sin 100°} - \frac{\sin 20°}{\sin 60°} - \frac{\sin^2 20°}{\sin 60° \sin 100°};$$

valamint alkalmazzuk a $\sin 100° = \sin 80°$ helyettesítést:

$$d = \frac{\sin 20°}{\sin 80°} = \frac{2 \sin 10° \cos 10°}{\cos 10°} = 2 \sin 10°.$$

$$a = \frac{\sin^2 60° - \sin^2 20° - \sin 20° \sin 80°}{\sin 60° \sin 80°} =$$

$$= \frac{(\sin 60° + \sin 20°)(\sin 60° - \sin 20°) - \sin 20° \sin 80°}{\sin 60° \sin 80°} =$$

$$= \frac{2 \sin 40° \cos 20° \cdot 2 \sin 20° \cos 40° - \sin 20° \sin 80°}{\sin 60° \sin 80°} =$$

$$= \frac{\sin 80° \sin 40° - \sin 20° \sin 80°}{\sin 60° \sin 80°} = \frac{\sin 40° - \sin 20°}{\sin 60°} = \frac{2 \sin 10° \cos 30°}{\sin 60°} =$$

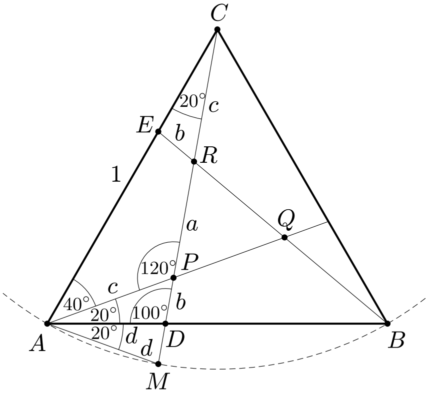
$$= 2 \sin 10°.$$

Ezzel igazoltuk az $a = d = 2 \cdot \sin 10°$ egyenlőséget.

M4. A CER és CDA háromszögek hasonlóak (szögeik 20°, 60°, 100°), így $\frac{b}{c}=\frac{d}{1}$, azaz $b=cd$. A CD egyenes a C középpontú egység sugarú kört M-ben metszi, $AC=CM=1$. $AMD\sphericalangle=80^\circ$, így az MAD háromszög egyenlő szárú, és $AM=d$. Az MAD és ACM háromszögek hasonlóak (szögeik megegyeznek, *3. ábra*), ebből $\frac{MD}{d}=\frac{d}{1}$, azaz $MD=d^2$. Az AP egyenes szögfelezője $MAC\sphericalangle$-nek, így az MAC háromszögben felírható a szögfelező-tétel:

$$\frac{d^2+b}{a+c}=\frac{d}{1}.$$

Innen $d^2+b=da+dc$, amiből a fent kapott $b=cd$ miatt $d^2=da$, azaz $d=a$ következik.

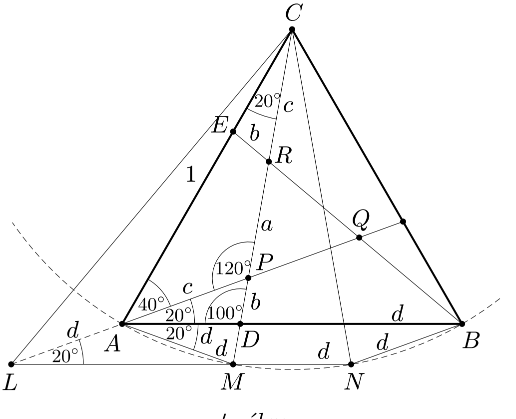


3. ábra

Megjegyzés. A $b=cd$ összefüggés az AMP háromszögben felírt szögfelező-tételből is megkapható, ha felhasználjuk az MAD és ACM háromszögek hasonlóságát:

$$\frac{DP}{PA}=\frac{b}{c}=\frac{DM}{MA}=\frac{MA}{AC}=\frac{d}{1}.$$

A következő bizonyítás előtt segédlépésként vegyük fel az egység sugarú körbe írt szabályos 18-szög oldalait. Az előző megoldás alapján $AM=MN=NB=d$ (*4. ábra*). A szabályos sokszög szimmetriatulajdonságából következik, hogy AB átlója és MN oldala párhuzamos.



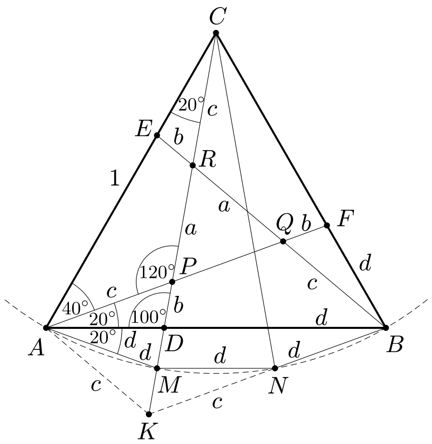
4. ábra

M5. Felmérjük PA-ra A-n túl $AL=d$-t, és azt fogjuk igazolni, hogy $PL=PC$.

LAM egyenlő szárú háromszög, $ALM\sphericalangle=20^\circ$, ezért LM és AB párhuzamosak, és az L, M, N pontok egy egyenesbe esnek. $LNBA$ egyenlő szárú trapéz ($LA = NB$) és nem húrtrapéz, ezért $LNBA$ paralelogramma, és így $LN = 1$. Az LNC háromszög egyenlő szárú,

$$NCL\sphericalangle = NLC\sphericalangle = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ.$$

Továbbá $PCL\sphericalangle = PLC\sphericalangle$ $(= 30^\circ)$, így $PL = PC$, azaz $c + d = a + c$, tehát $a = d$.



5. ábra

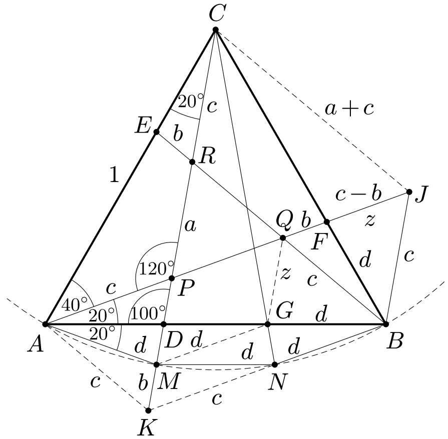
M6. Ismét szükségünk van a szabályos 18-szög oldalainak felvételére (M, N pontok). Felmérjük RP-re P-n túl $PK = c$-t, és azt fogjuk igazolni, hogy $RK = KB$ (*5. ábra*).

APK 60°-os szárszögű egyenlő szárú háromszög, ezért $AK = c$ és AK párhuzamos EB-vel. Így

$$KAM\sphericalangle = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ.$$

Az A és N tükrös helyzetű a KC egyenesre, ezért $KN = c$, $KNM\sphericalangle = 20^\circ$, és így K, N, B egy egyenesre esik. KRB szabályos háromszög (pl. $KR = RB$ és bezárt szögük 60°), így $KR = KB$, $a + c = c + d$, tehát $a = d$.

Megjegyzés. Ha már megkaptuk, hogy K, N, B egy egyenesre esik, akkor a megoldás befejezésére több lehetőség is kínálkozik. Például a KRB háromszög szabályossága abból is következik, hogy szögei 60°-osak; vagy azt is megmutathatjuk, hogy $AKBQ$ paralelogramma.



6. ábra

M7. Felvesszük a szabályos 18-szög oldalait és az előző megoldásbeli K pontot. Jelölje AB és CN metszéspontját G (*6. ábra*). Az $MNBG$ négyszög rombusz, mivel MN és BG oldalai párhuzamosak és egyenlők, és velük azonos hosszúságú az NB oldal is. Így $NB = MG = d$, valamint NB, MG és AF párhuzamosak ($FAB\sphericalangle = ABN\sphericalangle = 20^\circ$ váltószögek.)

Azt fogjuk igazolni, hogy $QGMP$ paralelogramma.

A QG szakasz hossza legyen z. Felmérjük AQ-ra Q-n túl $QJ = c$-t, így a QBJ szabályos háromszöget kapjuk ($QJ = QB$ és a közbezárt szögük 60°). A GBQ és FBJ háromszögek egybevágók, mert c és d oldalaik 40°-os szöget zárnak be, így $FJ = c - b = z$. Mivel az AKM

és APD háromszögek egybevágók (megegyezik d és c oldaluk és a közbezárt szögük 20°), így $KM = b$, azaz $MP = c - b = z$ szintén. A $QGMP$ négyszög egyenlő szárú trapéz (PQ és MG párhuzamosak, $MP = GQ$) és nem húrtrapéz, ezért paralelogramma. Így $PQ = MG$, azaz $a = d$.

Megjegyzések. 1. A megoldás során más utakat is követhetünk, bár ezek elvileg nem nagyon különböznek. Például a $QGMP$ négyszögről szögeinek kiszámításával is igazolhatjuk, hogy paralelogramma. Egy másik lehetőség: a C körüli $+60°$-os forgatás a CAP háromszöget a CBJ háromszögbe viszi, ezért CPJ szabályos háromszög. $PJ = JC = a + c$, és ekkor ráismerhetünk az $AKBQ$ és $PKBJ$ paralelogrammákra: az $AQ = a + c$, $KB = c + d$, $PJ = a + c$ szakaszok párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

2. A QJB háromszög konstrukciójából és a GBQ és FBJ háromszögek egybevágóságából következik, hogy

$$GQB\sphericalangle = FJB\sphericalangle = 180^\circ - FBJ\sphericalangle - BFJ\sphericalangle = 60^\circ.$$

A QJB háromszög konstrukciója nélkül is igazolhatjuk a fenti 2. megjegyzésből adódó **segédállítást:** az AQB háromszögben QG szögfelező.

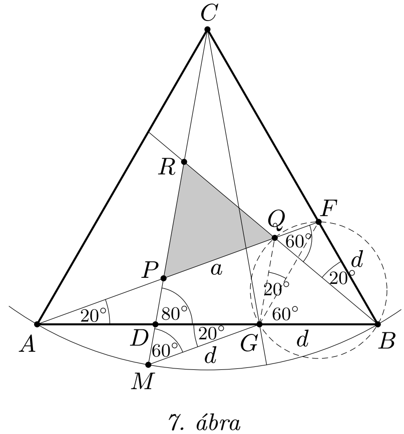
Bizonyítás: Q-ból párhuzamost húzunk CD-vel, ez AB-t G'-ben metszi, és QG' szögfelezője az AQB szögnek. (Azt kell megmutatnunk, hogy G és G' egybeesik.) Jelölje a szakaszok hosszát $QG' = z$, $G'D = y$, $G'B = t$. Az $AG'Q$ háromszögben $\frac{y}{d} = \frac{a}{c}$ (párhuzamos szelők tétele), a BDR háromszögben hasonlóan $\frac{y}{t} = \frac{a}{c}$. A két egyenletből következik, hogy $t = d$; azaz G' egybeesik a G szögharmadoló talpponttal.

M8. A szabályos 18-szög oldalai és G felvétele után ismét azt igazoljuk, hogy $QGMP$ paralelogramma.

A fenti segédállítás miatt (az AQB háromszögben QG szögfelező) QG és PM párhuzamosak, **M7.**-ből ismert MG és PQ párhuzamossága. $QGMP$ paralelogramma, így $PQ = MG$, azaz $a = d$.

M9. Forgassuk el a C pont körül pozitív irányban 20°-kal az ACD háromszöget, így az MCG háromszöget kapjuk, ahol $MG = AD = d$ (*7. ábra*).

A forgatás szöge és iránya miatt MG és AF párhuzamosak. A $BFQG$ négyszög húrnégyszög, mert az FB szakasz Q-ból és G-ből is 60°-os szögben látszik (Q és G ugyanabban a félsíkban vannak FB-hez képest). Tehát $QGF\sphericalangle = QBF\sphericalangle = 20°$ (kerületi szögek tétele), vagyis $QGB\sphericalangle = 80°$. Emiatt PM párhuzamos QG-vel, így a $PMGQ$ négyszögnek két párhuzamos oldalpárja van, vagyis paralelogramma. Tehát $MG = PQ$, vagyis $a = d$.



7. ábra

Megjegyzés. Persze ismét követhetünk más utakat is. Például ha már tudjuk, hogy a $GBFQ$ húrnégyszög, akkor ebben az $FB = d$ húrhoz 60°-os kerületi szög tartozik, így ugyanekkora kerületi szög tartozik a $GB = d$ húrhoz is. Ezért $BQG\sphericalangle = 60^\circ$, és $PQG\sphericalangle = 60^\circ$ szintén. Innen pedig már következik, hogy $PMGQ$ paralelogramma.

A matematika tételkészítő bizottság

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\lg x - \left(1 - \lg^2 x\right) = -1.$$

b) Igazoljuk, hogy a következő egyenletnek nincs valós megoldása:

$$\left|\sin^2 x - \cos x\right| = -x^2.$$

(*11 pont*)

2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben három pont: $A(4;7)$, $B(-6;-4)$, $C(2;-3)$.

a) Számítsuk ki az $ABCD$ paralelogramma AC és BD átlóegyenesének hajlásszögét.

b) Igazoljuk, hogy az $ABCD$ paralelogramma területének mérőszáma egész szám. (*12 pont*)

3. Egy pékségben az öt legnépszerűbb péksütemény az eladási adatok alapján sorrendben: I. sós négyes, II. rozsos zsömle, III. sajtos rúd, IV. óriás kifli, V. kenyérlángos. Az ezekből eladott mennyiség átlaga és mediánja is tegnap 122 db volt, az öt darabszám egyetlen módusza pedig 114. Az egyik termékből átlagos mennyiséget adtak el, az öt adat terjedelme pedig 22.

a) Adjuk meg az egyes péksütemények relatív gyakoriságát három tizedesjegy pontossággal.

b) Mekkora a darabszámok szórása?

c) Ma nyitás után az első hat vásárló mindegyike vásárolt a fenti péksütemények közül egyet. Hányféleképpen tehették ezt meg, ha a vásárlásuk után mindegyik termékből fogyott legalább egy darab? (*14 pont*)

4. Két téglalap alakú grafikáról tudjuk, hogy mindkettőnek 65 cm az átlója. Az egyik oldalainak aránya 3 : 4, a másiknak pedig 5 : 12.

a) Melyiknek nagyobb és mennyivel a területe?

b) Az elsőt úgy szeretnék keretezni, hogy a képet körülvevő szegély területe pontosan a kép területével legyen egyenlő, és a szegély mind a négy oldalon ugyanolyan széles legyen. Mekkora az így kapott, keretezendő kép kerülete?

c) A második kapjon olyan szegélyt keretezés előtt, hogy az oldalak aránya változzon 7 : 16-ra. Ennek a szegélynek a területe 1300 cm^2 legyen, úgy, hogy a bal és jobb oldalon egyenlő, illetve lent és fent is egyenlő szélességű. Milyen széles lesz a szegély a grafika egyes oldalai mentén? (*14 pont*)

II. rész

5. Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = x^2 - 42x + 425$ hozzárendelésű függvény.

a) Igazoljuk, hogy az $f(x)$ függvény képére illeszkedő 15, 20, 24 és 25 abszcisszájú pontok húrnégyszöget határoznak meg. Adjuk meg a körülírható kör középpontját és sugarát.

b) Mekkora területű síkidomot határol az $f(x)$ függvény képe és az x tengely?

c) Adjuk meg az $f(x)$ függvény grafikonját a $(20; -15)$ pontban érintő egyenes egyenletét. (*16 pont*)

6. Egy kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén n^3 darab kisebb, egybevágó kockára vágunk.

a) Hány darab sík mentén történik a vágás? (A vágások alatt a részeket nem mozdítjuk el egymástól.)

Egy kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén kisebb, egybevágó kockákra vágunk.

b) Hány darab kis kockára kell vágnunk a nagy kockát, ha ezáltal a felszín ötszöröződik?

Egy fehérre festett, 9 cm élhosszúságú kockát az oldallapjaival párhuzamos síkok mentén 27 darab egybevágó kis kockára vágtunk szét. A vágásfelületeket úgy festettük pirosra és zöldre, hogy a kis kockákból kirakható legyen egy piros, illetve egy zöld, az eredeti fehér kockával azonos méretű tömör kocka. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az így kialakított készletből véletlenszerűen egy olyan kis kockát választhatunk, amellyel

c) 0,5 valószínűséggel pirosat dobunk;

d) csak kétféle színt dobhatunk?

e) A kis kockákból egy olyan lyukas kockát építünk, hogy minden lap közepén át lehet látni az építményen. Mekkora az így kapott test térfogata, felszíne? (*16 pont*)

7. *a*) Kilenc egymást követő egész szám közül az öt kisebbnek a négyzetösszege egyenlő a négy nagyobbnak a négyzetösszegével. Adjuk meg a kilenc számot.

b) Igazoljuk, hogy kilenc egymást követő egész szám közül a hat kisebbnek a négyzetösszege nem lehet egyenlő a három nagyobbnak a négyzetösszegével.

c) Létezik-e öt olyan gömb, melyeknek sugara centiméterben mérve öt egymást követő egész szám, és a három kisebb gömb térfogatösszege egyenlő a két nagyobb gömb térfogatösszegével?

d) Egy téglatest két élének hossza egymást követő két egész számmal adható meg, a testátlójának hossza pedig az előző két egész szám szorzatánál 1-gyel nagyobb. Igazoljuk, hogy a téglatest harmadik élének hossza is egész számmal adható meg. (*16 pont*)

8. Tóbiás király (akit a mesében a nép csak Palacsintás királynak nevez) nagyon elszegényedett, ezért kénytelen volt január elsején a Derelye főszakács érdekeltségi köréhez tartozó banktól 8 millió fabatka kölcsönt felvenni. A Derelye Bank 12 évi futamidőre, évi 9%-os kamatra adta a kölcsönt, és ezt minden év végén egyenlő összegekkel kell visszafizetnie a királynak. Mennyi lesz az évente visszafizetendő törlesztőrészlet? Mennyi pénzt fizet vissza összesen 12 év alatt a király? (*16 pont*)

9. Bea nagyon szereti a természetet. Az egyik teljesítménytúra alkalmával egy vízszintes, sík tisztás egyik pontjából egy irányba nézve két hegycsúcsot pillantott meg. A közelebbi C hegycsúcs $\gamma = 15°$, a távolabbi D hegycsúcs pedig $\delta = 21°$ emelkedési szögben látszik. Tudjuk, hogy a két hegycsúcs távolsága légvonalban 1000 méter. Anita valamennyivel már közelebb van a C csúcshoz, és ő a két hegycsúcsot egy közös $\alpha = 30°$ emelkedési szögben látja.

a) Milyen magasan vannak a csúcsok Bea és Anita nézőpontjához képest, ha a testmagasságukat azonosnak vehetjük?

b) Mekkora a távolság Bea és Anita között?

c) Egy $1 : 40\,000$ méretarányú turistatérképen bejelöljük Bea helyét. Hány centiméterre van ettől a ponttól a távolabbi hegycsúcs a térképen? (*16 pont*)

Számadó László
Budapest

Megoldásvázlatok a 2017/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget, illetve egyenletet:*

a) $\log_4\left(x^2 - 3x\right) \leqslant 1$; (*5 pont*)

b) $x^2 \cdot |\sin x| = \sin x$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az egyenlőtlenségnek csak akkor van értelme, ha $x^2 - 3x > 0$, azaz $x < 0$ vagy $x > 3$. A 4-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekedő, ezért $x^2 - 3x \leqslant 4$, melyet rendezve $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$.

Az $x^2 - 3x - 4 = 0$ egyenlet gyökei -1 és 4. Mivel az $x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$ egyenlőtlenségben a másodfokú tag együtthatója pozitív, ezért $-1 \leqslant x \leqslant 4$.

A kapott gyököket az értelmezési tartománnyal összevetve az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza

$$[-1; 0[\, \cup\,]3; 4]\,.$$

b) I. megoldás (esetszétválasztással). Ha $\sin x > 0$, akkor $x^2 = 1$, melynek gyökei -1 és 1. A kapott gyököket a feltétellel összevetve csak az 1 jó.

Ha $\sin x < 0$, akkor $x^2 = -1$, melynek nincs megoldása a valós számok halmazán.

Ha $\sin x = 0$, akkor $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalens átalakításokra történő hivatkozás.

II. megoldás (értékkészlet vizsgálattal). Az egyenlet bal oldalán álló kifejezés nemnegatív, ezért a jobb oldalon álló kifejezésnek is nemnegatívnak kell lennie. Mivel $\sin x \geqslant 0$, ezért az abszolútérték-jel elhagyható.

Ha $\sin x > 0$, akkor $x^2 = 1$, melynek gyökei -1 és 1. A kapott gyököket a feltétellel összevetve csak az 1 jó.

Ha $\sin x = 0$, akkor $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalens átalakításokra történő hivatkozás.

2. *Egy ismert hazai társasjáték játéktábláján körben egymás után* 40 *sorszámozott mező található. A játékosok az* 1. *sorszámú START mezőről indulnak, és mindig annyit lépnek előre, amennyit egy szabályos dobókockával dobnak. Ha egy játékos bábujával olyan mezőre lép, ahol már áll egy másik bábu, akkor kiüti azt, és a kiütött bábut a START mezőre visszahelyezi. A játékosok a játékot játékpénzzel játsszák, és annak megkezdésekor mindenki* 20 000 Ft *kezdőösszeggel indul.*

a) Hányféle sorrendben számolhat le a pénztáros Csabának 2 db 5000 Ft*-os,* 8 db 1000 Ft*-os,* 3 db 500 Ft*-os és* 5 db 100 Ft*-os játékpénzt?* (*3 pont*)

b) Hányféle különböző címletezésben kaphatja meg Csaba a kezdőösszeget, ha csak a három nagy címlet (5000 Ft, 1000 Ft *és* 500 Ft) *mindegyikéből kap?* (*4 pont*)

c) Csaba első tizenöt dobásának átlaga 4,2 *volt, és közben egyszer sem ütötték ki. Hányas sorszámú mezőn áll most Csaba figurája?* (*3 pont*)

d) László figurája kettő mezővel áll Csabáé mögött, miután Csaba lépett. Mekkora annak a valószínűsége, hogy László a következő dobásával kiüti Csabát? (*2 pont*)

Megoldás. *a)* A sorrendek száma:

$$\frac{18!}{2! \cdot 8! \cdot 3! \cdot 5!}\ (= 110\,270\,160).$$

b) A lehetséges 27 különböző címletezés a következő táblázatban látható:

5000 Ft	**1000 Ft**	**500 Ft**
3 db	4 db	2 db
3 db	3 db	4 db
3 db	2 db	6 db
3 db	1 db	8 db
2 db	9 db	2 db
2 db	8 db	4 db
2 db	7 db	6 db
2 db	6 db	8 db
2 db	5 db	10 db
2 db	4 db	12 db
2 db	3 db	14 db
2 db	2 db	16 db
2 db	1 db	18 db

5000 Ft	**1000 Ft**	**500 Ft**
1 db	14 db	2 db
1 db	13 db	4 db
1 db	12 db	6 db
1 db	11 db	8 db
1 db	10 db	10 db
1 db	9 db	12 db
1 db	8 db	14 db
1 db	7 db	16 db
1 db	6 db	18 db
1 db	5 db	20 db
1 db	4 db	22 db
1 db	3 db	24 db
1 db	2 db	26 db
1 db	1 db	28 db

c) Ha az első tizenöt dobás átlaga 4,2, akkor az első tizenöt dobás összege 63. Ha Csaba az 1. sorszámú mezőről indul és egyszer sem ütötték ki, akkor 40 lépés után újra az 1. sorszámú mezőn áll, tehát 63 lépés után a 24. sorszámú mezőn áll a figurája.

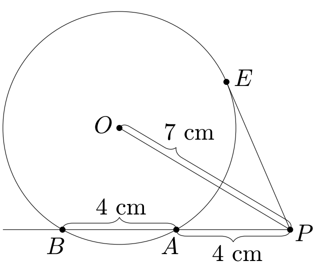
d) Egy szabályos dobókockával dobva 6-féle lehetőségünk van a dobásra (összes eset). László egyféleképpen, egy db 2-es dobással tudja kiütni Csabát (kedvező eset). A keresett valószínűség $\frac{1}{6}$.

3. *Egy körhöz az O középpontjától* 7 cm*-re levő külső P pontból szelőt húzunk. A szelő körrel vett A és B metszéspontjai P-től rendre* 4 cm, *illetve* 8 cm *távolságra vannak.*

a) Milyen hosszú érintőszakasz húzható P-ből a körhöz? (*3 pont*)

b) Mekkora szögben látszik az OB szakasz a P pontból? (*4 pont*)

c) Számítsuk ki az ODE háromszög területét, ahol D az AB húr felezőpontja, E pedig az érintési pont. (*7 pont*)

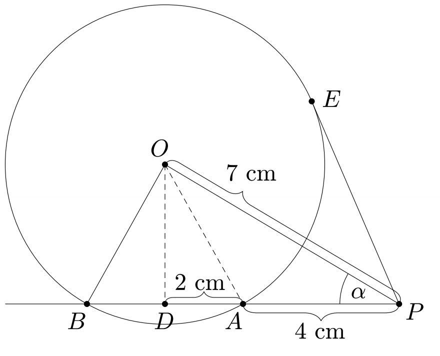


1. ábra

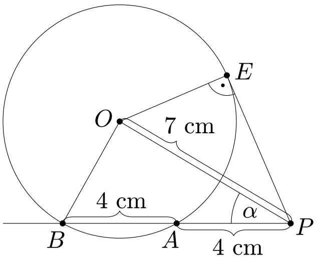
Megoldás. *a*) A körhöz húzott érintő- és szelőszakaszok tétele alapján a PE érintőszakasz hossza: $PE=\sqrt{PA\cdot PB}$, ahonnan $PE=\sqrt{4\cdot 8}=\sqrt{32}$ ($\approx 5{,}66$) cm (*1. ábra*).

b) *I. megoldás.* Az OA szakaszt behúzva, az ABO háromszög egyenlő szárú lesz, melynek alaphoz tartozó OD magassága felezi az AB szakaszt (*2. ábra*). A POD derékszögű háromszögben $\cos\alpha=\frac{6}{7}$, ahonnan $\alpha\approx 31^\circ$.

Az OB szakasz a P pontból körülbelül $31°$-os szögben látszik.



2. ábra



3. ábra

II. megoldás. Mivel a PE érintő merőleges az E érintési pontba húzott OE sugárra, ezért az OEP derékszögű háromszögből Pitagorasz tételének segítségével $OE = OB = \sqrt{49-32} = \sqrt{17}$ (*3. ábra*). A POB háromszögre alkalmazva a koszinusztételt:

$$17 = 49 + 64 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos\alpha, \quad \text{melyből} \quad \cos\alpha = \frac{6}{7},$$

ahonnan $\alpha \approx 31°$.

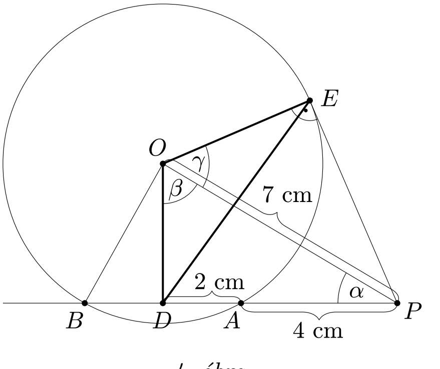
Az OB szakasz a P pontból körülbelül $31°$-os szögben látszik.

c) A POD derékszögű háromszögben $\sin\beta = \frac{6}{7}$, ahonnan $\beta \approx 59°$, valamint a Pitagorasz-tétel miatt

$$OD = \sqrt{49-36} = \sqrt{13}$$

(*4. ábra*). Az OBD derékszögű háromszögből szintén Pitagorasz tétele miatt

$$OB = OE = \sqrt{4+13} = \sqrt{17}\,.$$



4. ábra

Az OEP derékszögű háromszögben $\cos\gamma = \frac{\sqrt{17}}{7}$, ahonnan $\gamma \approx 53{,}9°$.

Az ODE háromszög területe a trigonometrikus területképlet alapján:

$$T_{ODE\triangle} = \frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17} \cdot \sin(\beta+\gamma)}{2} \approx 6{,}85\ \text{cm}^2.$$

4. *Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat első tagja 3, differenciája 5, egy $\{b_n\}$ számtani sorozat első tagja 2, differenciája 1.*

a) Határozzuk meg, hogy hány darab háromjegyű köbszám szerepel az $\{a_n\}$ sorozat első 100 tagja között. (*4 pont*) *b) A $\{b_n\}$ sorozat első 85 tagja közül hányféleképpen lehet 5 különböző számot kiválasztani úgy, hogy a kiválasztott számok mértani sorozatot alkossanak?* *(10 pont)*

Megoldás. *a)* Az $\{a_n\}$ számtani sorozat 100. tagja $a_{100} = 3 + 99 \cdot 5 = 498$. A 100. tagig 3 db háromjegyű köbszám van: 125, 216 és 343, melyek közül csak a 343 tagja a sorozatnak.

b) Olyan növekvő öttagú mértani sorozatot keresünk, amelyben minden tag a $[2; 86]$ intervallumba eső pozitív egész szám.

A mértani sorozat ismert képletét alkalmazva $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, ahol $n = 1, 2, 3, 4$ vagy 5. Mivel a kihúzott számok különbözőek, ezért $q > 1$.

Az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ egész szám, ezért q racionális szám, mely felírható pozitív egészek hányadosaként, $q = \frac{k}{m}$ alakban, ahol k és m relatív prímek.

Ha q nem egész, akkor $m \geqslant 2$, $k \geqslant m + 1$, és ha az $a_1 \cdot \left(\frac{k}{m}\right)^4$ egész, akkor m^4 osztója a_1-nek. Ekkor
$$86 \geqslant \frac{a_1}{m^4} \cdot k^4 \geqslant k^4 \geqslant 3^4 = 81.$$
Az egyetlen ilyen lehetséges eset, ha $k = 3$, $\frac{a_1}{m^4} = 1$; ekkor $m = 2$, $a_1 = 16$, így a keresett számok: 16, 24, 36, 54, 81.

Ha q egész, akkor lehetséges értékei 2 vagy 3, hiszen $4^4 > 86$.

Ha $q = 2$, akkor a_1 lehetséges értékeit is figyelembe véve, a következő 4 sorozat adódik: 2, 4, 8, 16, 32; 3, 6, 12, 24, 48; 4, 8, 16, 32, 64; 5, 10, 20, 40, 80.

Ha $q = 3$, akkor nincs a feltételeknek megfelelő sorozat.

Tehát összesen 5 különböző kiválasztás lehetséges.

II. rész

5. *Adott a nemnegatív valós számok halmazán értelmezett $f(x) = 2x - x\sqrt{x}$ függvény.*

a) Adjuk meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis): *(8 pont)*

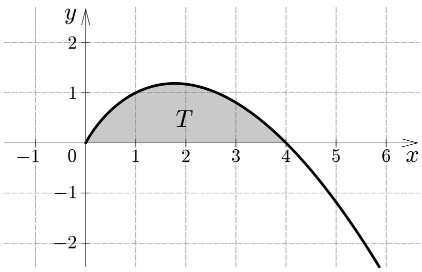
Az $A(-1; 5)$ és $B(4; 0)$ pontokra illeszkedő egyenes éppen az f függvény B pontbeli érintője.

b) Számítsuk ki az f függvény grafikonja és az x tengely által határolt korlátos síkidom területét. *(8 pont)*

Megoldás. *a)* A két pontra illeszkedő egyenes egyenletébe behelyettesítve: $(x + 1) \cdot (0 - 5) = (y - 5) \cdot (4 + 1)$, melyből az egyenes egyenlete $y = -x + 4$. A B-ben húzott érintő meredekségét az f deriváltfüggvényének az $x = 4$ helyen felvett helyettesítési értéke adja meg:
$$f'(x) = 2 - \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ahonnan} \quad f'(4) = 2 - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{4} = -1.$$
Az érintő egyenlete: $y - 0 = (-1) \cdot (x - 4)$, vagyis $y = -x + 4$.

Tehát az állítás igaz.

b) Az f függvény és az x tengely metszéspontjait a $2x - x\sqrt{x} = 0$ egyenlet gyökei adják. Az egyenletet szorzattá alakítva: $x(2 - \sqrt{x}) = 0$, melynek gyökei 0 és 4.



Mivel a $(0; 4)$ intervallumon

$$x(2 - \sqrt{x}) > 0,$$

ezért itt az f függvény grafikonja az x tengely felett helyezkedik el. Tehát a keresett T terület:

$$T = \int_0^4 \left(2x - x\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x = \left[x^2 - \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \left(4^2 - \frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}}\right) - 0 = 3{,}2.$$

6. *Az alábbi táblázatban egy nagyáruházban dolgozók havi bruttó bérének gyakorisága látható.*

Bruttó bér (ezer Ft)	95	110	120	125	160	200	230
Gyakoriság	7	4	2	5	3	2	1

a) *Melyik az a bérérték, amelynél a dolgozók legalább fele nem keres kevesebbet, legalább fele pedig nem keres többet?* (*2 pont*)

b) *Mennyivel változik a havi bruttó bérek szórása, ha a dolgozók egységesen 10%-os béremelést kapnak?* (*4 pont*)

Az áruházban számos furfangos trükköt alkalmaznak a termékek elhelyezésére azért, hogy a vásárlók pontosan azokat az árucikkeket vegyék meg, amelyeken a bolt a legtöbbet keresi. Az egyik ilyen trükk a polcok különböző zónákra osztása, melyet az alábbi táblázatban láthatunk.

Zónák	**Vásárlási valószínűség az adott polcról**	**A polcon található termékek átlagára**
Nyújtózkodási zóna	0,1	1400 Ft
Szemmagassági zóna	0,5	900 Ft
Kézzel elérhető zóna	0,3	700 Ft
Lehajló zóna	0,1	400 Ft

c) *Mekkora a vásárlási összeg várható értéke egy áru fenti polcrendszerről történő vásárlása esetén?* (*2 pont*)

A nagyáruházban az egyik délután megfigyelték, hogy 65% annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vásárló nő. Ebben az időszakban a nőknél 70% az esélye, hogy kártyával fizetnek, míg a férfiak csak 40%-ban fizetnek kártyával.

d) *Mekkora annak a valószínűsége, hogy a pénztárnál sorban álló 8 ember közül pontosan 5 nő?* (*3 pont*) *e) Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vásárló kártyával fizet?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A keresett bérérték a medián, ami 120 000 Ft.

b) Ha minden dolgozó bérét 10%-kal megemelik, akkor az átlagkereset is 10%-kal nő, mert

$$\overline{x}' = \frac{1{,}1 \cdot x_1 + 1{,}1 \cdot x_2 + \ldots + 1{,}1 \cdot x_n}{n} = \frac{1{,}1 \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n} = 1{,}1 \cdot \overline{x}.$$

Az előbbiek miatt a bérek szórása is 10%-kal nő, hiszen

$$\sigma' = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (1{,}1 \cdot x_i - 1{,}1 \cdot \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 1{,}1^2 \cdot (x_i - \overline{x})^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n} \cdot 1{,}1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = 1{,}1 \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}.$$

c) A vásárlási összeg várható értéke az egyes polcokon levő termékek árának és az onnan történő vásárlási valószínűségek szorzatainak összege:

$$E(x) = 1400 \cdot 0{,}1 + 900 \cdot 0{,}5 + 700 \cdot 0{,}3 + 400 \cdot 0{,}1 = 840 \text{ Ft.}$$

d) Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vásárló nő $p = 0{,}65$, annak a valószínűsége, hogy férfi $q = 0{,}35$. A binomiális eloszlás alapján a keresett valószínűség:

$$\binom{8}{5} \cdot 0{,}65^5 \cdot 0{,}35^3 \approx 0{,}2786.$$

e) *I. megoldás (feltételes valószínűség nélkül).* Tekintsünk 200 főt, akik a vizsgált időszakban az áruházban vásároltak. Ekkor a vásárlók közül 130 fő nő, 70 fő pedig férfi. A nők közül 91 fő vásárolt kártyával, míg a férfiak közül 28 fő. A kártyával vásárlók száma az összes vásárló számának $\frac{119}{200} = 0{,}595$-ed része.

A kiszámított arány független a konkrét darabszámtól, az csupán az eloszlástól függ, így a keresett valószínűség 0,595.

II. megoldás (feltételes valószínűséggel). Jelölje A azt az eseményt, hogy a kiválasztott vásárló nő, B azt, hogy a kiválasztott vásárló férfi, K pedig azt, hogy a kiválasztott vásárló kártyával fizet.

A feladat szövege alapján $P(A) = 0{,}65$, $P(B) = 0{,}35$, $P(K \mid A) = 0{,}7$, illetve $P(K \mid B) = 0{,}4$.

A feltételes valószínűség definíciója alapján:

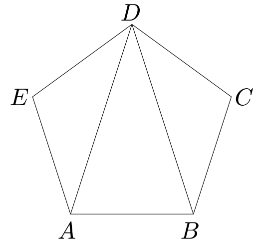
$$P(K \mid A) = \frac{P(KA)}{P(A)}, \quad \text{valamint} \quad P(K \mid B) = \frac{P(KB)}{P(B)}.$$

Annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen választott vásárló kártyával fizet:

$$P(K \mid A) \cdot P(A) + P(K \mid B) \cdot P(B) = 0{,}7 \cdot 0{,}65 + 0{,}4 \cdot 0{,}35 = 0{,}595.$$

7. *Adott az* ábrán *látható szabályos ötszög.*

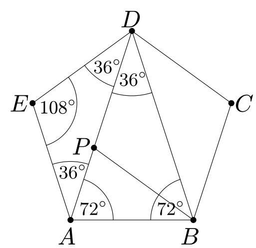
a) Igazoljuk, hogy az ötszögben $AB^2 = AP \cdot AD$, *ha* P *az* AD *átló és az* ABD *háromszög* B *csúcsából induló belső szögfelezőjének metszéspontja.* (*8 pont*)



b) Hány különböző kört határoznak meg egy 5 *pontú teljes gráf élei?* (*8 pont*)

(Két kört azonosnak tekintünk, ha mindkettőben ugyanazok a csúcsok és ugyanazok az élek szerepelnek.)

Megoldás. *a*) A szabályos ötszög belső szögei 108°-osak, ezért az ABD egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei 72°-osak, szárszöge pedig 36°-os.



Az ABD háromszög B csúcsából induló belső szögfelezőjét behúzva, a megfelelő szögek egyenlősége miatt az ABP és BDP háromszögek is egyenlő szárúak lesznek, amiből következik, hogy $AB = BP = PD$.

A szögfelezőtétel szerint: $\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{BD}$, valamint $PD = AB$ és $BD = AD$, amit behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AB}{AD}, \quad \text{ahonnan} \quad AB^2 = AP \cdot AD.$$

Megjegyzés: A bizonyítandó állítás geometriai jelentése, hogy a P pont éppen az aranymetszés arányában osztja két részre az AD átlót.

b) Számoljuk össze a köröket a bennük szereplő élek száma alapján.

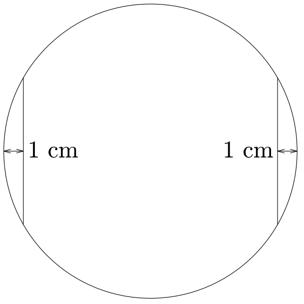
1 és 2 hosszú kör nyilván nincs a gráfban, ezek lennének ugyanis a hurokélek és a többszörös élek.

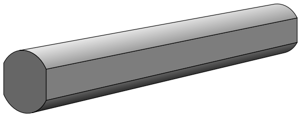
A 3 hosszú körök száma $\binom{5}{3} = 10$, hiszen bármely három pont pontosan egy kört határoz meg.

A 4 hosszú körök száma $\binom{5}{4} \cdot 3 = 15$, hiszen 4 pontot $\binom{5}{4}$-féleképpen választhatunk ki, és pl. az A–B–C–D; B–C–D–A; C–D–A–B; D–A–B–C; D–C–B–A stb. körök megegyeznek, de különböznek az A–B–D–C és az A–C–B–D és az azokkal megegyező köröktől, vagyis 4 ponthoz 3 különböző kört rendelhetünk hozzá.

5 csúcsot 5!-féleképpen rendezhetünk sorba. A ciklikus szimmetria miatt egy-egy kört 5 sorrend is meghatároz, illetve minden kör két irányba is bejárható: pl. az A–B–C–D–E kör és az A–E–D–C–B kör is megegyezik. Tehát az 5 hosszú körök száma $\frac{5!}{5 \cdot 2} = 12$.

Tehát a kérdéses körök száma 37.





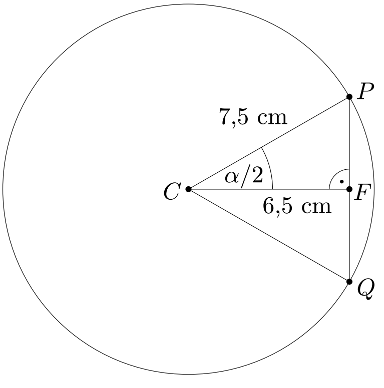
8. *Egy erdei turistautat átszelő patak fölött az erdészet hidat készít, amihez* 22 db 15 cm *átmérőjű, henger alakú farönköt használnak, melyek hossza* 1,2 m. *A jobb illesztés érdekében a rönköket a forgástengelyükkel párhuzamosan,* 1-1 cm-*es maximális mélységben, teljes hosszukban az* ábra *szerint mindkét oldalon legyalulják, és ezeknek az egyenes felületeknek a mentén fogatják össze a darabokat. A híd két végénél lévő két farönköt csak az egyik oldaluknál gyalulják le.*

a) *Mennyi faanyagot tartalmaz a híd elkészített állapotában?* (*8 pont*)

A farönkök legyalulása után azok mindegyikének teljes felületét egyesével lefestik.

b) *Mekkora lesz az összes lefestett felület nagysága?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Számítsuk ki a 22 farönk térfogatát, majd vonjuk ki belőle a gyalulás során keletkező hulladék térfogatát.



A CFP derékszögű háromszögben $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{6{,}5}{7{,}5}$, amiből $\alpha\approx 59{,}85°$. Mivel egy körben a középponti szög nagysága egyenesen arányos a hozzátartozó körcikk területével, ezért

$$T_{\text{körcikk}}=\frac{\alpha\cdot 7{,}5^2\cdot\pi}{360°}\quad\big(\approx 29{,}38\ \text{cm}^2\big),$$

valamint

$$T_{CPQ\triangle}=\frac{7{,}5^2\cdot\sin\alpha}{2}\quad\big(\approx 24{,}32\ \text{cm}^2\big),$$

így egy körszelet területe:

$$T_{\text{körszelet}}=T_{\text{körcikk}}-T_{CPQ\triangle}\approx 5{,}06\ \text{cm}^2.$$

A keresett térfogat:

$$V=22\cdot 7{,}5^2\cdot\pi\cdot 120-21\cdot 2\cdot T_{\text{körszelet}}\cdot 120\approx 0{,}44\ \text{m}^3.$$

A híd kb. 0,44 m^3 faanyagot tartalmaz elkészített állapotában.

b) A lefestett felület nagyságának meghatározásához számítsuk ki a 22 farönk (20 db „középső” és 2 db „szélső”) felszínét. A CFP derékszögű háromszögben egyrészt $PF=\sqrt{PC^2-FC^2}\approx 3,74$ cm, amiből $PQ\approx 7,48$ cm; másrészt $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{6{,}5}{7{,}5}$, amiből $\alpha\approx 59{,}85°$.

Mivel egy körben az adott középponti szöghöz tartozó ív hossza egyenesen arányos a kör kerületével, ezért

$$i_\alpha = \frac{\alpha \cdot 2 \cdot 7{,}5 \cdot \pi}{360^\circ} \ (\approx 7{,}83 \text{ cm}), \qquad T_{\text{körcikk}} = \frac{i_\alpha \cdot 7{,}5}{2} \ \big(\approx 29{,}38 \text{ cm}^2\big),$$

$$T_{CPQ\triangle} = \frac{7{,}5^2 \cdot \sin\alpha}{2} \ \big(\approx 24,32 \text{ cm}^2\big),$$

így $T_{\text{körszelet}} = T_{\text{körcikk}} - T_{CPQ\triangle} \approx 5{,}06 \text{ cm}^2$.

Egy „középső” farönk felszíne:

$$T_{\text{alap (középső)}} = 2 \cdot \big(7{,}5^2 \cdot \pi - 2 \cdot T_{\text{körszelet}}\big) \ \big(\approx 333,19 \text{ cm}^2\big),$$

$$T_{\text{palást (középső)}} = (2 \cdot 7{,}5 \cdot \pi - 2 \cdot i_\alpha + 2 \cdot PQ) \cdot 120 \ \big(\approx 5570{,}87 \text{ cm}^2\big),$$

$$A_{\text{középső}} = T_{\text{alap (középső)}} + T_{\text{palást (középső)}} \ \big(\approx 5904,06 \text{ cm}^2\big).$$

Egy „szélső” farönk felszíne:

$$T_{\text{alap (szélső)}} = 2 \cdot \big(7{,}5^2 \cdot \pi - T_{\text{körszelet}}\big) \ \big(\approx 343{,}31 \text{ cm}^2\big),$$

$$T_{\text{palást (szélső)}} = (2 \cdot 7{,}5 \cdot \pi - i_\alpha + PQ) \cdot 120 \ \big(\approx 5612{,}87 \text{ cm}^2\big),$$

$$A_{\text{szélső}} = T_{\text{alap (szélső)}} + T_{\text{palást (szélső)}} \ \big(\approx 5956 \text{ cm}^2\big).$$

A lefestendő összes felület nagysága:

$$A = 20 \cdot A_{\text{középső}} + 2 \cdot A_{\text{szélső}} \approx 13 \text{ m}^2.$$

A lefestett felület nagysága kb. 13 m^2.

9. *Tekintsük az*

$$a_n = \left\{ \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} \right\}$$

sorozatot, ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

a) Igazoljuk, hogy az $\{a_n\}$ *sorozat első* n *tagjának összege* $S_n = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$.
(9 pont)

b) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)$ *határértéket, majd adjuk meg, hogy a sorozat tagjai hányadik tagtól kezdve esnek a határérték* $\varepsilon = 0{,}01$ *sugarú környezetébe.*
(7 pont)

Megoldás. *a) I. megoldás (teljes indukcióval).*

1. lépés: nézzük meg, hogy az állítás $n = 1$-re igaz-e:

$$a_1 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = S_1,$$

tehát az állítás $n = 1$-re igaz.

2. lépés: Tegyük fel, hogy az állítás $n=k$-ra igaz, azaz az első k tag összege $S_k = 1-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$. Ez lesz az indukciós feltevés.

3. lépés: Nézzük meg, hogy $n=k$-ról $n=(k+1)$-re „öröklődik"-e az állítás. Bizonyítandó, hogy:

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}\right)+$$
$$+\frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k+2}}=1-\frac{\sqrt{k+2}}{k+2}.$$

A zárójelben szereplő összeg az indukciós feltevés miatt $S_k = 1-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$, ekkor

$$1-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}+\frac{1}{(k+2)\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k+2}}=$$
$$=1-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}+\frac{(k+2)\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k+2}}{(k+2)^2(k+1)-(k+1)^2(k+2)}=$$
$$=1-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}+\frac{(k+2)\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k+2}}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=1+\frac{(k+2)\sqrt{k+1}-(k+1)\sqrt{k+2}-(k+2)\sqrt{k+1}}{(k+1)(k+2)}=$$
$$=1-\frac{(k+1)\sqrt{k+2}}{(k+1)(k+2)}=1-\frac{\sqrt{k+2}}{k+2}.$$

Ezt szerettük volna belátni.

II. megoldás. Tekintsük az $\{a_n\}$ sorozat tetszőleges tagját:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}.$$

A tört nevezőjét gyöktelenítve:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}=$$
$$=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}=\frac{\sqrt{k}}{k}-\frac{\sqrt{k+1}}{k+1}.$$

Az előbbiek ismeretében a sorozat első n tagjának összege a következőképpen írható:

$$S_n=\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}.$$

A teleszkópikus összeg közbülső tagjai „kiesnek”, így $S_n = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$. Ezt szerettük volna belátni.

b) A tört számlálójában és nevezőjében minden tagot n-nel elosztva kapjuk, hogy:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}}\right)=1-\frac{0}{1}=1.$$

A határérték definíciója alapján:

$$\left|1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}-1\right|<\frac{1}{100},\quad \text{vagyis}\quad \left|\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}\right|<\frac{1}{100}.$$

Mivel n pozitív egész, ezért $\frac{\sqrt{n+1}}{n+1} < \frac{1}{100}$, melyet rendezve $0 < n^2 - 9998n - 9999$. Az egyenlőtlenség pozitív zérushelye 9999, így az ennél nagyobb természetes számok megfelelnek küszöbértéknek.

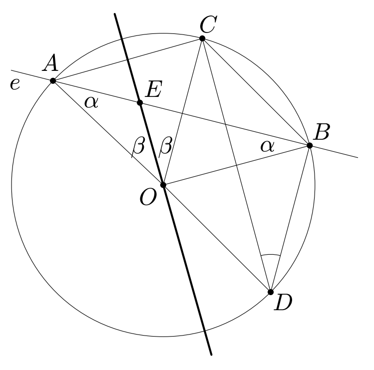
Varga Péter
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 4841. *Az O középpontú k kör az e egyenest az A és B pontokban, az OB szakaszfelező merőlegesét pedig a C és D pontokban metszi. Mutassuk meg, hogy a $COA\sphericalangle$ szögfelezője és az e egyenes* 60 *fokos szöget zárnak be.*

(*3 pont*)

Megoldás. Az OCB háromszög szabályos, ugyanis $OC = OB$ sugarak, továbbá $OC = CB$ is teljesül, mert C az OB szakaszfelező merőlegesének egy pontja. Tehát $BOC\sphericalangle = 60^\circ$.



Az AOB háromszög egyenlő szárú, mert AO és OB a kör sugara. Legyen $OAB\sphericalangle = OBA\sphericalangle = \alpha$.

A $COA\sphericalangle$ szögfelezője a szöget két egyenlő β szögre bontja.

Most használjuk fel, hogy az AOB háromszögben a belső szögek összege 180°:

$$OAB\sphericalangle + OBA\sphericalangle + AOB\sphericalangle = 2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 180^\circ.$$

Ebből azonnal adódik, hogy $\alpha + \beta = 60^\circ$.

Egy háromszög külső szöge egyenlő a két nem mellette fekvő belső szög összegével, ezt az AEO háromszög $OEB\sphericalangle$ külső szögére alkalmazva:

$$OEB\sphericalangle = \alpha + \beta = 60^\circ.$$

Ha a C és D pontok helyét felcseréljük, a megoldás menete változatlan marad.

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 115 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 108, 2 pontot 3 versenyző, továbbá 1 pontos 4 tanuló dolgozata.

B. 4854. *Legyenek* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *valós számok. Tekintsük az ezekből képezett* $2^n - 1$ *(nemüres) összeget. Hány lehet ezek közül pozitív?*

(*5 pont*)

Megoldás. Kiindulási pontként tekintsük a $2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 2^0 = 1$ számokat. Ezeket alkalmasan előjelezve megmutatjuk, hogy 0-tól 2^{n-1}-ig bármennyi lehet a nemüres összegek közül pozitív.

Először vegyük az $a_1 = -2^{n-1}$, $a_2 = -2^{n-2}, \ldots, a_n = -2^0$ sorozatot, amelyben a sorozat tagjai mind negatívak, vagyis közülük választva egyetlen pozitív nemüres összeg sincs.

Ha ezután bármely más előjelezés mellett nézzük a nemüres összegeket, akkor egy ilyennek az előjele csak a legnagyobb abszolút értékű tag előjelétől függ, mivel az összes nála kisebb abszolút értékű tag összegének az abszolút értéke kisebb, mint ennek az egynek az abszolút értéke.

Bármely 0 és 2^{n-1} közötti pozitív egész szám egyértelműen felírható kettes számrendszerben legfeljebb n darab jeggyel. Ha a kettes számrendszerben felírt szám $M = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_p}$ alakú (ahol $k_1 > k_2 > \ldots > k_p$), akkor $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_p}$ előjelét pozitívnak, az összes többit pedig negatívnak választva pontosan azok az összegek lesznek pozitívak, amelyek tagjainak legnagyobb indexe valamelyik k_j. Adott j-re az ilyen összegek száma 2^{k_j}, összesen tehát $2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_p} = M$ darab ilyen összeg van.

Sulan Ádám (Nagykanizsa, Batthyány Lajos Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 63 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 46, 4 pontot 5 versenyző. 3 pontos 3, 2 pontos 6 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott 2, 0 pontot 1 tanuló.

B. 4855. *Egy táblázatot* 0 *és* 1 *számokkal töltöttünk ki úgy, hogy nincs két azonos sor, azonban bármelyik két oszlop és négy sor által meghatározott* 4×2*-es résztáblázatban van két azonos sor. Igazoljuk, hogy van olyan oszlop, amelyben az egyik szám pontosan egyszer fordul elő.*

(*6 pont*) Javasolta: *Lelkes Ádám*

Megoldás. Legyen k sora a táblázatnak. Bebizonyítom, hogy ha a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyben pontosan $n < k$ darab 0 vagy pontosan n darab 1-es van, akkor olyan oszlopa is létezik, amelyben kevesebb mint n darab, de legalább 1 darab 0 vagy kevesebb mint n darab, de legalább 1 darab 1-es van.

Legyen például az A oszlopban n darab 0 és $k-n$ darab 1-es. Válasszunk ki kettőt ebből az A-ban nullás n sorból; legyenek ezek a c-edik és a d-edik sorok. Mivel a táblázat sorai mind különbözőek, lesz olyan oszlop, amelyikben különböző értéket vesz fel e két sor cellája – legyen ez a B oszlop.

Ha van kettő olyan sor – mondjuk az e-edik és az f-edik – amelyek A oszlopában 1-es, a B-be eső oszlopában pedig két különböző szám áll, akkor a c-edik, d-edik, e-edik és f-edik sorok, valamint az A és B oszlopok által meghatározott 4×2-es résztáblázatban nincs két azonos sor. Ezért a B oszlopban azonos értéket vesz fel ez a $k-n$ sor. Így a B oszlopban 0-ból vagy 1-ből legalább $k-n+1$ van, ezért a másik számból legfeljebb $n-1$, de legalább 1 darab. A bizonyított állítást ismételten alkalmazva az A helyett a B oszlopra stb., eljutunk addig, hogy az egyik oszlopban az egyik szám pontosan egyszer fordul elő.

A bizonyított állítást csak akkor nem tudnánk alkalmazni, ha feltételei a táblázat egyik oszlopára sem teljesülnek. Ez pontosan azt jelentené, hogy mindegyik oszlop vagy csupa 0, vagy csupa 1 elemből áll, azaz a táblázat valamennyi sora azonos.

Beke Csongor (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)

30 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 21 versenyző: Baran Zsuzsanna, Beke Csongor, Borbényi Márton, Döbröntei Dávid Bence, Fuisz Gábor, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Klász Viktória, Kovács Benedek, Németh Balázs, Saár Patrik, Szemerédi Levente, Tiszay Ádám, Tóth Balázs, Tóth Viktor, Vári-Kakas Andor, Velkey Vince, Weisz Máté. 5 pontos 3, 4 pontos 2, 2 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 4860. *Tegyük fel, hogy $a<b<c<d$ és $a+d\neq b+c$. Mutassuk meg, hogy az*

$$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}-\frac{1}{c-x}+\frac{1}{d-x}=0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van, amelyek közül az egyik a (b,c) intervallumba, a másik pedig az (a,d) intervallumon kívül esik.

(*3 pont*)

Megoldás. Az egyenletet rendezzük először úgy, hogy mindkét oldalon két-két tört szerepeljen.

$$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}-\frac{1}{c-x}+\frac{1}{d-x}=0,$$

$$\frac{1}{a-x}-\frac{1}{b-x}=\frac{1}{c-x}-\frac{1}{d-x}.$$

A két oldalon külön-külön közös nevezőre hozva így olyan törtkifejezéseket kapunk, amelyeknek számlálója már nem tartalmaz ismeretlent:

$$\frac{b-a}{(a-x)(b-x)}=\frac{d-c}{(c-x)(d-x)}.$$

A nevezőkkel történő beszorzás és egy oldalra rendezés után rögtön látható, hogy ($a + d \neq b + c$ miatt) egy másodfokú $P(x)$ polinom zérushelyeit keressük.

$$(b-a)(c-x)(d-x) = (d-c)(a-x)(b-x),$$
$$P(x) = (b-a)(c-x)(d-x) - (d-c)(a-x)(b-x).$$

Ezek a zérushelyek egyben az eredeti egyenlet összes megoldásai is, mivel az eredeti egyenlet értelmezési tartományában nem szereplő a, b, c, d értékek egyikére sem lesz $P(x) = 0$. A polinomba behelyettesítve az egyes értékeket kapjuk, hogy $P(b) > 0$ és $P(c) < 0$, ezért az egyenletnek két megoldása van, amelyek közül az egyik a (b, c) intervallumba esik. A másik nem eshet ebbe az intervallumba, mert ha a polinom mindkét gyöke ebbe az intervallumba esne, akkor b-ben és c-ben ugyanolyan előjelű értéket kellene felvennie. Az egyenlet másik gyöke viszont nem eshet sem az (a, b), sem a (c, d) intervallumba, mert pl. az (a, b) intervallumon azt látjuk, hogy $b - a > 0$, $c - x > 0$, $d - x > 0$, azaz $(b-a)(c-x)(d-x) > 0$, továbbá $d - c > 0$, $a - x < 0$, $b - x > 0$, azaz $(d-c)(a-x)(b-x) < 0$, tehát ezen az intervallumon $P(x)$ pozitív értékeket vesz fel, itt nem lehet zérushely. Hasonlóan a (c, d) intervallumot vizsgálva láthatjuk, hogy itt $P(x)$ csak negatív értékeket vesz fel, így itt sem lehet gyök.

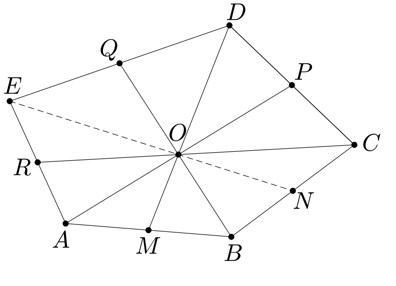
$P(x)$-ről tudjuk, hogy pozitív és negatív értéket is felvesz, így megállapítottuk, hogy két különböző gyöke van. Mivel se (b, c)-be, se (a, b)-be, se (c, d)-be nem eshet a másik gyök, azért biztos, hogy (a, d)-n kívül esik.

Noszály Áron (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 35 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott Csahók Tímea, Fekete Balázs Attila, Fülöp Anna Tácia, Noszály Áron, Póta Balázs, Simon Dániel Gábor, Tiderenczl Dániel, Tiszay Ádám, Vári-Kakas Andor, Várkonyi Dorka, Velkey Vince, Zólomy Kristóf és Zsigri Bálint. 2 pontot kapott 6 versenyző, továbbá 1 pontos 13 és 0 pontos 3 tanuló dolgozata.

B. 4862. *Az $ABCDE$ konvex ötszög AB, BC, CD, DE, illetve EA oldalainak felezőpontjai rendre M, N, P, Q, illetve R. Mutassuk meg, hogy ha az AP, BQ, CR és DM szakaszok egy közös pontban metszik egymást, akkor ez a pont rajta van az EN szakaszon is.*

(*5 pont*) *Róka Sándor* (Nyíregyháza)



Megoldás. Legyen a szakaszok metszéspontja O. Mivel $EQ = QD$, az $EQO\triangle$ és $QDO\triangle$ alapja és magassága megegyezik, tehát a területük egyenlő. Hasonlóan látható, hogy $T_{EQB\triangle} = T_{QDB\triangle}$, így a megfelelő különbségekre

$$T_{EOB\triangle} = T_{EQB\triangle} - T_{EQO\triangle} =$$
$$= T_{QDB\triangle} - T_{QDO\triangle} = T_{BOD\triangle}.$$

Ezen az úton sorra belátható, hogy

$$T_{EOB\triangle} = T_{BOD\triangle} = T_{DOA\triangle} = T_{AOC\triangle} = T_{COE\triangle}.$$

A továbbiakban felhasználjuk a területek egyenlőségéből, hogy $T_{EOB\triangle} = T_{COE\triangle}$. Az OE félegyenes az $ROQ\sphericalangle$ szögtartományban van, ezért az EO egyenes másik félegyenese a $COB\sphericalangle$ szögtartományban van. Ennek megfelelően az EO egyenes a BC szakaszt egy N' belső pontban metszi.

$$T_{BN'O\triangle} = T_{N'CO\triangle} \cdot \frac{BN'}{N'C}, \quad \text{és} \quad T_{BN'E\triangle} = T_{N'CE\triangle} \cdot \frac{BN'}{N'C},$$

ezért

$$T_{EOB\triangle} = T_{COE\triangle} \cdot \frac{BN'}{N'C}.$$

Így $BN' = N'C$, vagyis az N' a BC felezőpontja, tehát $N = N'$.

Gáspár Attila (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 33 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 19 tanuló: Baran Zsuzsanna, Borbényi Márton, Busa Máté, Csiszár Zoltán, Fülöp Anna Tácia, Gáspár Attila, Győrffy Ágoston, Imolay András, Janzer Orsolya Lili, Kerekes Anna, Kővári Péter Viktor, Nagy Nándor, Schrettner Jakab, Szabó Dávid, Szemerédi Levente, Tanács Viktória, Tóth Viktor, Tubak Dániel, Weisz Máté. 4 pontot szerzett 6 versenyző, 1 pontos 3, 0 pontos 5 tanuló dolgozata.

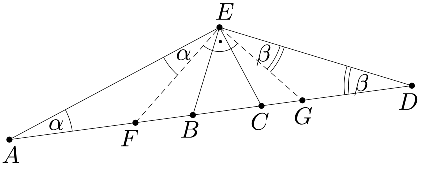
B. 4877. *Az A, B, C és D pontok ebben a sorrendben illeszkednek egy egyenesre. Az egyenesen kívül eső E pontra*

$$AEB\sphericalangle = BEC\sphericalangle = CED\sphericalangle = 45°.$$

Legyen az AC szakasz felezőpontja F, a BD szakasz felezőpontja pedig G. Mekkora az FEG szög?

(*3 pont*) Javasolta: *Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11.c.*

Megoldás. Az *ábra* jelölései szerint $AEC\sphericalangle = AEB\sphericalangle + BEC\sphericalangle = 45° + 45° = 90°$, az $AEC\triangle$ derékszögű.



Ugyanígy a $BED\triangle$ is derékszögű. A derékszögű háromszögek szögeire

$$ACE\sphericalangle = 90° - \alpha, \quad \text{és} \quad DBE\sphericalangle = 90° - \beta.$$

Az AED háromszög AED szöge a feltételek alapján 135°, így $\alpha + \beta = 45°$.

Most rajzoljuk be az EF szakaszt. Az F pont az AEC derékszögű háromszög átfogójának felezőpontja, egyben a Thalész-tétel miatt köréírt körének középpontja. Ebből következően az AFE egyenlő szárú háromszög, $AEF\sphericalangle = \alpha$.

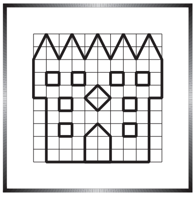
Ugyanígy az EG behúzása után látható, hogy az EDG háromszög is egyenlő szárú és $GED\sphericalangle = \beta$.

A keresett $FEG\sphericalangle$ az ábra és az eddigiek alapján:

$$FEG\sphericalangle = AEB\sphericalangle + BEC\sphericalangle + CED\sphericalangle - AEF\sphericalangle - GED\sphericalangle =$$
$$= 45^\circ + 45^\circ + 45^\circ - \alpha - \beta = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ.$$

Olosz Adél (Pécs, PTE Gyak. Ált. Isk., Gimn., SZKI és Óvoda, 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 70 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 67 tanuló, 2 pontos 2, 1 pontos 1 tanuló dolgozata.



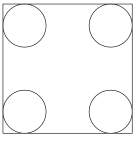
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (559–564.)

K. 559. Hány olyan legfeljebb hatjegyű szám van, amelyben szerepelnek az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek, mindegyik pontosan egyszer?

K. 560. Egy vizsgán 30 fő vett részt. Azok, akik megbuktak, 60 pontos átlagot teljesítettek, míg azok, akik átmentek, 84-et. A vizsga átlagpontszáma 80 lett. Hányan mentek át a vizsgán?

K. 561. Egy regény három kötetben jelent meg. Az oldalakat a három kötetben az első oldaltól az utolsóig folyamatosan számozták meg (1-essel kezdve a számozást). A második kötet 50 oldallal vastagabb, mint az első, a harmadik pedig 1,5-szer olyan vastag, mint a második. A három kötet első oldalszámainak összege 893. Hány oldalas a regény? Hány számjegyet használtak fel az oldalszámozás leírásához?

K. 562. Alíz elindult vásárolni, csupa 10 és 1000 forintossal (mindegyikből volt nála legalább egy). Elköltötte a pénze felét, majd észrevette, hogy ismét csupa 10 és 1000 forintos van nála. Megszámolta a pénzt, és látta, hogy pont annyi 10 forintosa lett, mint ahány 1000 forintossal elindult, és pontosan feleannyi 1000 forintosa lett, mint amennyi 10 forintossal elindult. Hány forintot költött el Alíz, ha a feltételeknek megfelelő lehető legkevesebb pénzt költötte?



K. 563. Egy 18 cm oldalú négyzet alakú lemezből kivágtak a négyzet csúcsainál egy-egy 3 cm sugarú kört az *ábrának* megfelelően. A csúcsoknál keletkező hulladéklemez darabokat eldobták. Mekkora a megmaradt rész területe?

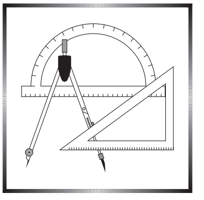
K. 564. Egy póknak összesen 8 db egyforma zoknit és 8 db egyforma cipőt kell a lábaira felhúzni indulás előtt (minden lábára kell hogy jusson zokni és cipő). Egy adott lábra a zoknit előbb kell felhúzni, mint a cipőt, de nem feltétlenül a cipő felhúzását közvetlenül megelőzően. Hányféle sorrendben veheti fel a pók az összes zoknit és cipőt? (Két felöltözést csak a lábak sorrendje különböztet meg.)

❄

Beküldési határidő: 2017. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1441–1447.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1441. Egy kávézóban különböző alapanyagokból különböző kávékülönlegességeket készítenek. Tudjuk, hogy az itallapon szereplő bármely kávét kiválasztva pontosan három olyan másik kávét találhatunk, amelynek a kiválasztottal van közös alapanyaga. Azt is tudjuk, hogy ha két kávénak nincs, akkor található hozzájuk egy harmadik, amellyel mindkettőnek van közös alapanyaga. Legfeljebb hány különböző kávékülönlegesség lehet az itallapon?

C. 1442. Egy háromszög a, b és c oldalaira teljesül a következő összefüggés:

$$1 = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}.$$

Igazoljuk, hogy ekkor $r \cdot R = \frac{1}{2}$, ahol r a háromszög beírható, R pedig a köré írható körének sugara.

Javasolta: *Tatár Zsuzsanna Mária* (Felsőgöd)

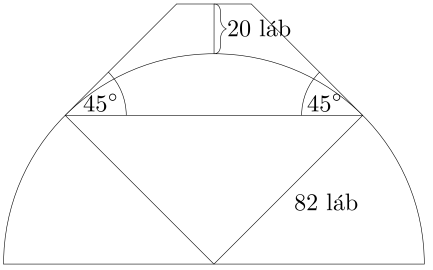
Feladatok mindenkinek

C. 1443. Hányféleképpen írható föl 2017^3 egymást követő pozitív páratlan számok összegeként?

Hommer László (Kemence) ötlete alapján

C. 1444. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x \leqslant 96.$$



C. 1445. Az „Egy angol, aki dombra ment fel, de hegyről jött le” című filmben egy walesi falu mellett lévő hegyet, miután lemérték a magasságát, a földmérők dombnak minősítettek. A falusiak büszkék voltak a hegyükre, és ebbe nem nyugodtak bele. Elhatározták, hogy 984 lábról 1004 lábra emelik a magasságát. Földet hordanak fel a 82 láb sugarú félgömbnek tekinthető dombtetőre olyan csonkakúp alakban, amelynek alkotója a félgömb érintője, és 45°-os szöget zár be a vízszintessel. Így a magasság meghaladja majd az 1000 lábat, és a dombot újra hegynek lehet nevezni. Hány köbláb földet kellett felhordaniuk a dombra?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1446. Az $ABCD$ paralelogramma belsejében vegyük fel a Q pontot úgy, hogy $AQB\sphericalangle + CQD\sphericalangle = 180°$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy $QBA\sphericalangle = QDA\sphericalangle$ és $QAD\sphericalangle = QCD\sphericalangle$.

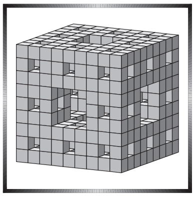
C. 1447. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a VALÓSZÍNŰSÉG, illetve SZÁMÍTÁS szavak mindegyikéből két-két véletlenszerűen választott karaktert véletlenszerűen egymás mellé írva ugyanazt a két „szót” kapjuk?

❄

Októberi számunkban a **C. 1437.** feladat hiányosan jelent meg. A feladatot újra kitűzzük, a megoldását a novemberi feladatokkal együtt várjuk.

C. 1437. Kilenc különböző egyenes mindegyike $2:3$ arányban osztja egy négyzet területét úgy, hogy egyik egyenes sem vág le háromszög alakú részt a négyzetből. Igazoljuk, hogy az egyenesek között van három olyan, amelyek egy ponton mennek keresztül.

Beküldési határidő: 2017. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (4903–4911.)

B. 4903. Határozzuk meg azokat az a, b, c, d pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy $abcd - 1 \mid a + b + c + d$.

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 4904. Egy S síkidomnak pontosan kettő szimmetriatengelye van. Mutassuk meg, hogy S középpontosan is szimmetrikus.

(*3 pont*)

B. 4905. Legyen $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2n-1} \geqslant a_{2n} \geqslant 0$, illetve $\sum_{i=1}^{2n} a_i = 1$. Igazoljuk, hogy

$$a_1a_2 + 3a_3a_4 + 5a_5a_6 + \ldots + (2n-1)a_{2n-1}a_{2n} \leqslant \frac{1}{4}.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

(*4 pont*)

B. 4906. Az $ABCD$ konvex négyszög BC és CD oldalainak felezőpontja rendre E és F. Az AE, EF és AF szakaszok a négyszöget négy olyan háromszögre bontják, melyek területeinek mérőszáma négy egymást követő egész szám. Legfeljebb mekkora lehet az ABD háromszög területe?

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 4907. Bizonyítsuk be, hogy egy $a \times b$ méretű téglalapon legfeljebb $[a] \cdot [b]$ darab olyan 1×1-es négyzet helyezhető el átfedés nélkül, melyek oldalai párhuzamosak a téglalap oldalaival (ahol $[x]$ az x szám egész részét jelenti).

(*5 pont*)

B. 4908. Legyen C az AB átmérőjű körvonal tetszőleges pontja. A C pont merőleges vetülete az AB szakaszra legyen T. Rajzoljuk meg a C középpontú, T-n átmenő kört és a két kör metszéspontjai legyenek P és Q. Bizonyítsuk be, hogy a PQ egyenes felezi a CT szakaszt.

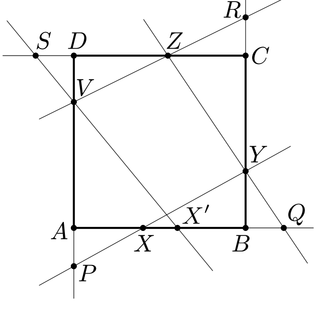
(*4 pont*) (*Kvant*)

B. 4909. Adjuk meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely minden $x \neq 0$ és y esetén kielégíti az alábbi egyenletet:

$$x \cdot f(y) - y \cdot f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

(*6 pont*) (*Kvant*)

B. 4910. Az $ABCD$ négyzet oldalegyenesein vegyük fel a P, Q, R és S pontokat az *ábra* szerint úgy, hogy $AP = BQ = CR = DS$. Az AB oldal tetszőleges belső X pontjából kiindulva a PX egyenes messe BC egyenesét Y-ban, QY messe CD egyenesét Z-ben, RZ a DA egyenest V-ben, végül SV az AB egyenest X'-ben. Bizonyítsuk be hogy ha X' és X egybeesnek, akkor $XYZV$ négyzet.



(*5 pont*)

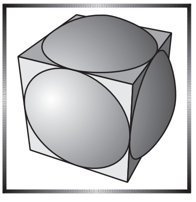
B. 4911. Egy 8×8-as sakktáblára bábukat helyeztünk úgy, hogy minden sorba és minden oszlopba is páratlan számú bábu került. Bizonyítsuk be, hogy a sötét mezőkön összesen páros sok bábu áll.

(*5 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2017. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (707–709.)

A. 707. 100 betyár áll a hortobágyi síkságon. Mindegyik illető egy 100°-os szögtartományt lát. Az összes betyár felírja egy-egy papírra, hogy hány másik betyárt lát, majd mi összeadjuk ezt a 100 számot. Mi a lehető legnagyobb összeg, amit ily módon kaphatunk?

A. 708. Legyen S racionális számokból álló véges halmaz. Minden k pozitív egészre legyen $b_k = 0$, ha választható k darab (nem feltétlenül különböző) S-beli szám, melyek összege 0, és $b_k = 1$ egyébként. Mutassuk meg, hogy a $0{,}b_1b_2b_3\ldots$ kettedestört racionális szám. Igaz marad-e az állítás, ha S-ről nem kötjük ki, hogy véges?

A. 709. Legyen $a > 0$ valós szám. Határozzuk meg azt a legkisebb C_a számot, amire a

$$C_a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - x_{k-1}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{k+a}{x_k}$$

egyenlőtlenség teljesül tetszőleges n pozitív egész és $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ valós számok esetén.

❄

Beküldési határidő: 2017. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 439. Egy hosszú egyenes folyón utazunk folyásirányban lefelé egy kevés benzinnel rendelkező motorcsónakon. A folyószakasz hosszú, ezért csak időnként kapcsoljuk be a motort, különben csak az áramlás sebességével utazunk (sodródunk) lefelé. Amikor a motor működik, akkor a parthoz viszonyított sebesség az áramlás sebességének és a motorcsónak vízhez viszonyított sebességének összege lesz, mivel a csónak mindig az áramlás irányában áll.

Készítsünk programot, amely a különböző folyószakaszok v_i áramlási sebességének, a motorcsónak vízhez viszonyított v_m sebességének és maximális működtetési idejének ismeretében megadja a kiindulási helytől L távolságra lévő célba érkezés minimális idejét.

A standard bemenet első sora négy számot tartalmaz: a megteendő folyószakasz L ($1 \leqslant L \leqslant 100$) hosszát (km), a motorcsónak $1 \leqslant v_m \leqslant 10$ sebességét (km/h) a vízhez képest, a motor T ($1 \leqslant T \leqslant 10$) maximális üzemeltetési idejét (h) és a különböző sodrási sebességű folyószakaszok N ($1 \leqslant N \leqslant 50$) számát. Az ezt követő N sor soronként két számot tartalmaz: az adott sodrású folyószakasz elejének a kiindulási helytől mért távolságát ($0 \leqslant E_i \leqslant L$) (km) és a folyószakasz sodrási sebességét v_i ($1 \leqslant v_i \leqslant 10$) (km/h).

A standard kimenetre írjuk ki a célba érkezés minimális idejét órában, három tizedesjegy pontossággal.

Példa bemenet (a / jel új sort helyettesít)	**Kimenet**
`20 2 3 5 / 0 2 / 3 1 / 7 2 / 12 1 / 15 2`	`8.167`

Beküldendő egy tömörített `i439.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 440 (É). A feladat a `gsmotthon.hu` (utolsó letöltés: 2017.10.22.) weboldalról származó mobiltelefonok adatait összefoglaló táblázat feldolgozása lesz táblázatkezelő program segítségével. A forrásállomány egy-egy sorában rendelkezésre állnak különböző telefonok legfontosabb adatai.

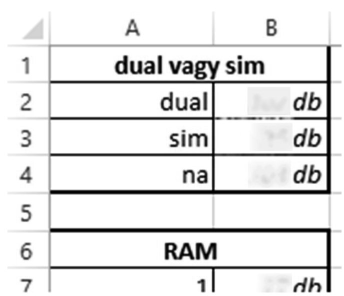
1. Töltsük be a honlapunkról letölthető mobiltelefonok.txt szövegfájlt, mely UTF-8 kódolású és tabulátorokkal tagolt, a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően. A megjelenítés év.hónap formátumban történjen (pl. 2016.08.). Munkánkat `i440` néven mentsük a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Azokban a cellákban, ahol a nyers táblázat nem tartalmazott adatot, és még nincsen benne, jelenjen meg az „`na`”, nincs adat felirat. Kivétel a kódnév oszlop,

ahol ezt nem kell megtenni, hiszen megszokott dolog, hogy egy telefonnak nem adnak másodlagos nevet.

3. A rendelkezésre álló szöveges adatok között előfordulnak elírások, például fekete helyett fekte, Android helyett Andorid, ezeket javítsuk ki.
4. Oszloponként jelöljük a megfelelő mértékegységeket. A RAM és a háttértár mérete GB-ban, az ár forintban (Ft), a kamerák képfelbontása megapixelben (MP), a kijelző inchben (″), a súly grammban (g), a méretek milliméterben (mm) vannak megadva. A bővíthetőségnél elég azt megjeleníteni, hogy hány GB-ig bővíthető (pl. igen, 32 helyett, 32 GB-ig), és az akkumulátor kapacitása milliamperórában van megadva (mAh).
5. A telefonok árát a készpénz kerekítés szabályai szerint kerekítsük 0-ra, vagy 5-re egy új oszlopba a jelenlegi ár mellé. (A kerekítés szabályai szerint az 1-re, 2-re végződőket 0-ra, a 3-ra, 4-re, 6-ra és 7-re végződőket 5-re, míg a 8-ra és 9-re végződő árakat 10-re kell kerekíteni.)
6. Android telefonok esetében az operációs rendszer típusánál a verziószám helyett jelenjen meg az elnevezése. Az alábbi táblázatot illesszük a megoldásba, és használjunk megfelelő függvényeket a megoldáshoz.
7. Feltételes formázást használva változtassuk meg a betűszínét zöldre azon soroknak, ahol minden adat meg van adva. (Ha csak a kódnév nincsen megadva, attól még jelöljük ki a sort.)
8. Rendezzük a táblázatot a márka, azon belül pedig a típus neve szerinti ABC sorrendbe.

Verzió	**Elnevezés**
2.2	Froyo
2.3.3-2.3.7	Gingerbread
4.0.3-4.0.4	Ice Cream Sandwich
4.1	Jelly Bean
4.4	KitKat
5.0.0-5.0.2 5.1-5.1.1	Lollipop
6.0	Marshmallow
7.0 7.1	Nougat
8.0	Oreo

9. A következő feladatot egy új munkalapon oldjuk meg. Gyűjtsük ki kategóriák szerint az előző munkalap adatait felhasználva, hogy összesen hány készülék tartozik az egyes típusokhoz. Ily módon készítsünk – a színek és operációs rendszer mellett – még három általunk választott kategóriát. Minden kategóriának adjunk oszlopcímet és formázzunk a mintán látható módon. Színeknél a kötőjellel jelölt színek azt jelzik, hogy a telefon elő- és hátlapja eltérő színű, ezek a kötőjeles színek egy külön kategóriaként jelenjenek meg. A dupla hátlapi kamerával rendelkező mobiloknál a készülék jelenjen meg mindkét kategóriánál, ha azt választjuk.



10. Készítsünk diagramot új munkalapra, mely szemlélteti, hogy melyik évben hány telefont adtak ki a rendelkezésre álló adatok alapján.

Beküldendő egy tömörített `i440.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkezelő nevét és verzióját.

I. 441. Az Első Rend kutatói egy veszélyes sugárfegyvert fejlesztettek ki, amely minden eddig ismert védőpajzson áthatol. Az Ellenállás egy olyan szilárd anyagból álló pajzson kísérletezik, amely a sugárzást visszaveri vagy elnyeli. Tudósaik megállapították, hogy a sugárzás csak két anyag részecskéivel lép reakcióba. Amikor a sugárzás nagy energiájú, akkor a T anyag részecskéi, amikor már kisebb energiájú, akkor az N anyag részecskéi tudják befogni. Mindkét esetben a befogás után nem sokkal a részecskék is kibocsátanak sugárzást: az N anyag sugárzása veszélytelen, míg a T anyag kibocsát egy, a fegyvertől származó sugárzással egyező tulajdonságú, de kisebb energiájú sugárzást. Úgy is tekinthetjük, hogy a T anyag részecskéi visszaverik a nagy energiájú sugarakat, míg a kis energiájúak áthatolnak rajta. Az N anyag részecskéi elnyelik a kis energiájú sugarakat, de a nagy energiájúak áthatolnak rajta. Megmérték, hogy a fegyver sugárzása a T részecskékkel történő ötszöri reakció után válik kis energiájúvá.

A T és az N anyag nagyon ritka a Galaxisban, az Ellenállás csak igen keveset tudott beszerezni belőlük. A tudósok terve az, hogy az N és a T anyag részecskéit elkeverik egy olyan anyagba, amelyen áthatol a sugárzás. Az így kialakított pajzs – megfelelő vastagság, illetve megfelelő számú N és T részecske esetén – alkalmas lenne arra, hogy a sugárzás döntő részét elnyelje, vagy szétszórja, visszaverje. Mivel sem idő, sem megfelelő mennyiségű anyag nem áll rendelkezésre, ezért számítógépes szimulációval vizsgálják, hogy adott N és T részecskemennyiség, valamint falvastagság mellett a bejövő sugárzás mekkora része hatolna át a falon.

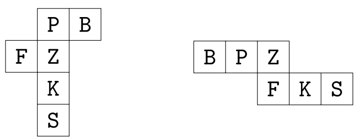
A tudósok szerint a jelenséget jól leírja egy síkbeli modell: a fal egy $a \times b$ oldalú téglalap, a sugárzás a téglalap egyik b hosszúságú oldalán érkezik, és a téglalap belseje felé tart. A téglalapot gondolatban $a \times b$ darab egységnyi négyzetre bontjuk. Mindegyik ilyen négyzet vagy üres (itt áthatol a fegyver sugárzása), vagy T típusú (egy T részecskét tartalmaz, amely a nagy energiájú sugárzást elnyeli), vagy N típusú (egy N részecskét tartalmaz, a kis energiájú sugárzást nyeli el). A T típusú szórás azt jelenti, hogy csökkent energiával, ugyanakkor véletlenszerű irányba történik az elnyelést követő kisugárzás. A sugárzás egyenes irányba terjed, minden négyzetet, amelyet érint, vizsgálni kell az előbbiek alapján. Ha a sugárzás a téglalap a hosszú oldalain kilép, akkor az ellenkező oldalon bejövő sugárzásként folytatja útját. Ha a sugárzás elnyelődik, vagy azon a b hosszú oldalon lép ki, amelyen beérkezett, akkor a fal hatékonyan működik. Ha a bejövő sugárzás a b hosszúságú másik oldalon lép ki, akkor átjutott a falon.

Készítsük el a szimulációt végző programot. A program standard bemenete a falat modellező téglalap a szélessége ($10 \leqslant a \leqslant 100$), és b magassága ($100 \leqslant b \leqslant 10\,000$), valamint az N és T típusú részecskét tartalmazó négyzetek száma a téglalapon ($a \cdot b/10 \leqslant \mathrm{N} + \mathrm{T} \leqslant a \cdot b$). A program adja meg a standard kimeneten, hogy 100 000 beérkező sugárzásból átlagosan hány sugár jut át a falon.

Példa bemenetek	Példa kimenetek
10 150 100 100	63495
10 150 100 100	63414
20 150 200 400	23339
20 150 200 400	22930
50 5000 3000 10000	36083
50 5000 3000 10000	35997

Beküldendő egy tömörített `i441.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 21. Adott két kiszínezett kocka. Mindkét kocka külső oldalai vannak színezve, egy kockán belül nincs két azonos színű oldal. Elkészítjük a két kocka síkbeli hálóját – bizonyos élek mentén történő felvágással – úgy, hogy egy összefüggő síkidomot kapjunk. Két lehetséges hálót mutat az alábbi ábra:



Írjunk programot, amely eldönti, hogy a két hálóból összeállítható-e hajtogatással két egyező színezésű kocka.

A program a hálók leírását a standard bemenetről olvassa. A bemenet 10, 5 karakter hosszú sorból áll, az első 5 sor az első kocka, a következő 5 sor a második kocka hálóját adja meg. A lapok helyén az angol ábécé egy-egy nagybetűje szerepel, amely a színt jelöli, a többi helyre pedig a * (csillag) karakter kerül.

Ha a két háló azonos színezésű kockát határoz meg, akkor a standard kimenet egyetlen sorába az „`igen`” szó kerüljön, egyéb esetben pedig annyi sorból álljon, ahány lap színének módosítása legalább szükséges a második kockán az elsővel egyező színezés kialakításához. Minden sorba két karakter kerüljön, az első azt a színt adja meg, amit cserélni kell, a második pedig azt, amire változtatni kell.

Példa bemenet	Példa kimenet	Példa bemenet	Példa kimenet
*PB**	B S	*PB**	Igen
FZ***	S B	FZ***	
*K***		*K***	
*S***		*S***	
*****		*****	
*****		*****	
BPZ**		SPZ**	
**FKS		**FKB	
*****		*****	
*****		*****	

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt.

Beküldendő egy `is21.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

S. 120. Egy különös autóbusz különc utasok elszállításán dolgozik. A megállókban utasok várakoznak, mindegyikben legalább egy. Néhány megálló között közvetlen buszközlekedés van, tehát a busz más megállók érintése nélkül halad közöttük. Bármely két megálló között pontosan egy útvonal van. Az utasok azért különcök, mert az odaérkező buszra a várakozók közül mindig pontosan egy száll föl. A busz is különös, mert útja során nem halad át olyan megállón, amelyben már nincs várakozó. Nincs menetrend, a buszvezető feladata, hogy a megállókat olyan sorrendben érintse, hogy a lehető legtöbb utast tudja fölvenni.

A megállókat 1-től kiindulva pozitív egészekkel azonosítjuk, az utolsó megálló sorszáma M. Az autóbusz kezdetben az 1-es megállóban tartózkodik, és induláskor fölvesz egy embert. Minden megállóról tudjuk, hogy milyen más megállókkal van közvetlen buszkapcsolatban. Kezdetben minden megállóban legalább egy, legföljebb U utas várakozik, akik türelmesen várják a buszt, nem hagyják el a megállót. Az autóbusz az utasok összegyűjtése után az 1-es megállóba tér vissza.

A program standard bemenete M és U, majd a következő M sor mindegyikében az adott megállóban várakozó utasok száma, utána az adott sorszámú megállóból közvetlen buszjárattal elérhető megállók sorszáma szerepel. A program standard kimenete legyen a legtöbb fölvehető utas száma.

Példa bemenet (a sortöréseket `/` jellel helyettesítettük)	Példa kimenet
`12 10 / 3 2 3 6 7 / 6 1 / 2 1 4 / 5 3 / 4 6 / 4 5` `1 9 10 11 4 1 8 / 6 7 12 / 6 6 / 5 6 / 2 6 / 3 8`	`26`

Korlátok: $2 \leqslant M \leqslant 100\,000$, $1 \leqslant U \leqslant 30$.

Értékelés: a megoldás lényegét leíró dokumentáció 1 pontot ér. További 9 pont kapható arra a programra, amely a korlátoknak megfelelő bemenetekre helyes kimenetet ad 1 másodperc futásidő alatt. Részpontszám kapható arra a programra, amely csak kisebb M és U érték esetén ad helyes eredményt 1 másodpercen belül.

Beküldendő egy `s120.zip` tömörített állományban a megoldást leíró dokumentáció és a program forráskódja.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2017. december 10.

❄

Európai Uniós Természettudományos Diákolimpia (EUSO)

Az Európai Uniós Természettudományos Diákolimpia (European Union Science Olympiad, EUSO) egy sok szempontból különleges verseny: témája nem egy tantárgy, hanem a biológia, fizika és kémia együtt; nincsenek elméleti feladatok, csak mérések; és a versenyzők nem egyedül dolgoznak, hanem közösen, csapatban. További sajátosságok, hogy a versenyen csak az Európai Unió tagországai vehetnek részt, országonként két háromfős csapattal, és a versenyzők a versenyt megelőző év december 31-én legfeljebb 16 évesek lehetnek, tehát ez a nemzetközi diákolimpiáknál fiatalabb korosztály versenye.

A versenyt *Michael Cotter* alapította, és 2003-ban az első versenyt is ő rendezte meg Dublinban, akkor még csak hét ország részvételével. A verseny alapelvei azóta is változatlanok, de ma már néhány kivételtől eltekintve az összes EU-tag részt vesz. Minden országot két háromfős csapat (*Team A* és *Team B*), valamint három tanár (*Mentor*) képvisel. A biológia-, fizika- és kémiaszakos tanárok közül az egyik a csapatért felelős, a rendező országgal kapcsolatot tartó nemzeti koordinátor (*Country Coordinator*). Részvételi díj nincs, a verseny költségeit – az utazáson kívül – a fogadó ország fedezi.

A verseny a nemzetközi olimpiákhoz hasonlóan két versenynapból áll. Mindkét alkalommal a megelőző napon a rendező ország ismerteti a feladatokat, ezt az összes tanárból álló bizottság (*Governing Body*) megvitatja, szükség esetén kisebb-nagyobb módosításokról dönt, majd elfogadja a véglegesített angol szöveget. Ezután (általában éjszaka, sokszor hajnalig) mindenki lefordítja a húsz-harminc oldalas szöveget a saját anyanyelvére: a versenyzők ezt kapják meg másnap a versenyen. A feladatok – ellentétben a nemzetközi olimpiával – mindkét versenynapon elsősorban gyakorlati teendőket, kísérleteket, megfigyeléseket és méréseket tartalmaznak. Elméleti kérdések legfeljebb a mérésekhez kapcsolódóan fordulnak elő.

A háromfős csapatok (célszerűen egy-egy kiemelkedően jó biológus, fizikus és kémikus) közösen oldják meg a feladatot. Természetesen el lehet osztani a feladatokat egymás között, lehet párhuzamosan két vagy három feladatot végezni, de a végén egy közös válaszlapot kell a csapatnak beadnia. Az egyes években változó, hogy a csapattagoknak mennyire kell kooperálnia: van olyan, hogy szinte egymástól függetlenül dolgozik a biológus, a fizikus és a kémikus, de a jobb versenyeken a feladatok egy része csak együttműködve, egymást segítve vagy közösen oldható meg. Más olimpiákhoz hasonlóan itt is fontos az idő beosztása. A csapattagok ebben is segíthetnek egymásnak: aki már kész van, vagy egy kísérlet közben várnia kell, az segíteni tud a többieknek.

A verseny után a mentorok megkapják a dolgozatok másolatát, és a közösen megvitatott javítási útmutató alapján értékelik és pontozzák a megoldásokat. A fogadó ország tanárai szintén kijavítják a megoldásokat. A két pontozás közötti esetleges különbségek megbeszélésére szolgál a „moderáció”, ahol a csapatvezetők és a szervezők végül közös megállapodásra jutnak, megállapítják a végső pontszámot. Az EUSO szabályai szerint minden csapat érmet kap: a legjobb 10% aranyérmet, a következő 30% ezüstérmet (ezeknek a csapatoknak közlik a sorrendjét), a többiek bronzérmet (abc-sorrendben). Ezen kívül az abszolút első csapat egy évre megkapja a verseny vándorserlegét. Így a versenynek vannak győztesei, de nincsenek vesztesei.

A versenynapokon kívül a rendezők sok programot szerveznek: az ünnepélyes megnyitón és a díjkiosztó ünnepségen kívül kirándulások, kulturális programok, sportolási lehetőségek vannak – részben csak a diákoknak (amikor a tanárok fordítanak) és részben külön a tanároknak (a versenynapokon). Emellett vannak olyan közös programok, amelyeken kifejezetten a helyi sajátosságok megismerése a cél: egy helyi iskolában az ott tanuló diákok által szervezett est, gasztronómiai kalandok, tánctanulás. A diákoknak külön helyi segítője (*Guide*) is van, akik csoportos programokat (pl. városnézés) is szervezhetnek.

Magyarországot már 2004-ben, az EU-tagság megszerzése után hívták a versenyre, de az első próbálkozás a minisztériumban nem járt sikerrel. Másodszorra azzal érveltem, hogy ennek a versenynek három olyan jellegzetessége van, amelyek nagyon fontosak a tudományos munkában, és amelyekről Magyarországon is sokat *beszélnek:* interdiszciplinaritás, kísérletezés és csapatmunka. Ekkor már zöld utat kaptunk, és miután 2008-ban megfigyelőként részt vettem a ciprusi EUSO-n, 2009-ben már teljes csapattal utaztunk Spanyolországba.

A csapatok kiválasztása országonként különböző: van ahol (egy iskolából jövő) háromfős csapatok versenyeznek egymással. Ennek előnye, hogy a csapattagok jól ismerik egymást. Mi a magyar versenyhagyományoknak (szaktárgyi versenyek) megfelelően két-két biológus, fizikus és kémikus diákot választunk ki, és belőlük alakítjuk ki a két csapatot. A válogatásra azokat hívjuk meg, akik eredményesen szerepeltek az előző évi hazai versenyeken. Nekik először házi feladatokat kell megoldaniuk, majd a legjobbak részt vehetnek a Szegeden (biológia és kémia), valamint Budapesten (fizika) megrendezett válogatóversenyen. A csapatok biológus, kémikus és fizikus tagjai egy szegedi vagy budapesti csapattalálkozón ismerkedhetnek meg egymással.

A versenyen való sikeres szerepléshez a megfelelő elméleti tudás mellett más képességek is kellenek: mérési gyakorlat, pontos és rendezett munka, együttműködési készség – tehát kicsit mások a hangsúlyok, mint a „nagy” olimpiákon. Ennek ellenére az EUSO jó gyakorlás a későbbi versenyekre: a csapattagok nagyobb része később bekerül az IBO, IPhO vagy IChO csapatba is.

Magyarország a 2009 és 2017 közötti kilenc versenyen kimagaslóan sikeresen szerepelt: a csapatok eddig tíz aranyérmet, hét ezüstérmet és egy bronzérmet szereztek, és háromszor (háromévente egyszer, legutóbb idén) valamelyik csapatunk megnyerte a versenyt, elhozta a vándorserleget is. Az idei verseny már a 15. volt, így a tagországok többsége már rendezett (Írország kétszer is), vagy a következő években fog rendezni EUSO-t. Magyarországra reményeink szerint 2021-ben kerül sor, de még nincs végleges döntés. Azt tervezzük, hogy Szegeden, a Szegedi Tudományegyetemen lesz a verseny.

A feladatok minden évben hosszúak (bevezető rész, néhány fontos elméleti ismeret, gyakorlati tudnivalók és balesetvédelmi utasítások, majd végül a tényleges feladatok, kérdések), így itt terjedelmi okokból nem tudjuk közölni, de egy *kísérleti* feladat kipróbálásához amúgy is szükség lenne a hozzá való eszközökre is. (Az eddigi feladatok teljes szövege azonban megtalálható – angolul – a cikk végén megadott honlapokon.) Itt csak – a verseny stílusának érzékeltetésére – a 2016-os verseny (Tartu, Észtország) feladatainak rövid összefoglalása következik.

1. *A tej napja.* (Általában egy versenynap feladatai egy-egy fogalomhoz kapcsolódnak. Korábbi években volt már többek közt a szél, a jég, a sör, az olívaolaj, a borostyánkő is központi fogalom.) A feladat négy részből állt: az első három rész *többé-kevésbé* behatárolható módon a fizikus, biológus és kémikus szakértőnek, az utolsó pedig egy összegző feladat, amelyhez a másik három eredménye szükséges. Az első (fizikus) részben a versenyzők a tejben lévő zsírcseppek méretét határozták meg optikai módszerekkel: részben az apró cseppeken való fényszóródás, másrészt az áthaladó fény intenzitásának csökkenése alapján. Az egyik mérési eljárás kalibrálásához apró, megadott méretű üveggolyók álltak rendelkezésre, az ezen végzett mérések alapján lehetett a tejben lévő zsírcseppek méretét is meghatározni. A második (biológus és részben kémikus) részben sajtkészítés volt a feladat, a tejet centrifugával bontották összetevőire, majd a tejben lévő különböző fehérjék koncentrációját határozták meg. A harmadik (tisztán kémikus) feladat a tejcukor mennyiségének meghatározása jodometriás titrálással. Az utolsó feladatban az eddigi eredmények alapján kellett a különböző tejmintákat értékelni, a tejtermelőknek „tanácsot adni”. A teljes feladatlap 28 oldal, sok részfeladattal.

2. *Az elemek napja.* Ezen a napon a fizikus csapattagnak az volt a feladata, hogy állítson elő egy alumínium–levegő galvánelemet, majd próbálja ki egy játék versenyautóban. Az értékelésben azért is járt pont, hogy kinek milyen messzire gurult el az autója az általa gyártott elemmel. Az elem előállítása sok gyakorlati lépésből (hosszas előkészítés, ragasztás, hőkezelés présben stb.) állt, ahol többször is a csapattársak segítségére volt szükség. A galvánelemeket az elkészítésük után – az autóversenyen kívül – elektromos mérésekkel is vizsgálták. A biológus feladata egy baktériumokkal működő elem vizsgálata volt. De még mielőtt a tenyészetben lévő baktériumtörzseket mikroszkópos megfigyelés és különböző kémiai tesztek alapján beazonosították volna, a versenyzők az elemek elektromos tulajdonságait vizsgálták meg. Az elem U–I karakterisztikájára Excel segítségével (notebookon) egyenest illesztettek, és ez alapján olvasták le a paramétereket (ebben a fizikus csapattag tudta a kapott segítséget viszonozni). A mindkét csapattársának segítő kémikus feladata ezen a napon aránylag rövid volt: megadott adatok alapján a lehető legnagyobb feszültséget biztosító vizes oldat alapú elemet kellett kiválasztani és előállítani, majd – ismét a fizikus segítségével – megvizsgálni.

Akinek felkeltette az érdeklődését az EUSO, az a verseny nemzetközi honlapjáról (általános információk, az összes korábbi verseny feladatai: `http://euso.eu`) vagy a magyar honlapról (magyar válogatóversenyek, elérhetőségek, eddigi magyar eredmények: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/euso.htm`) tud tájékozódni.

Vankó Péter

Megoldásvázlatok
a 2017/7. szám emelt szintű fizika gyakorló feladatsorához

Tesztfeladatok

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	B	C	C	C	B	A	A	C	C	D	C	A	C

Számolásos feladatok

1. *a*) A két test sebessége (ha az SI mértékegységeket nem írjuk ki) az eldobásuk után 1 másodperccel egy alkalmasan választott koordináta-rendszerben a

$$\boldsymbol{v}_1 = (3; 9{,}81) \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{v}_2 = (-4; 9{,}81)$$

vektorokkal adható meg, a sebességkülönbség nagysága pedig $|\Delta\boldsymbol{v}| = 7$. A sebességvektorok által bezárt szöget a koszinusztétel segítségével számíthatjuk ki:

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{v}_1|^2 + |\boldsymbol{v}_2|^2 - |\Delta\boldsymbol{v}|^2}{2|\boldsymbol{v}_1|\,|\boldsymbol{v}_1|} \approx 0{,}78, \qquad \text{tehát} \qquad \alpha \approx 39°.$$

b) A két test mozgási energiájának aránya:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{|\boldsymbol{v}_1|^2}{|\boldsymbol{v}_2|^2} \approx 0{,}94.$$

c) Ha a

$$(3; 9{,}81 \cdot t) \qquad \text{és} \qquad (-4; 9{,}81 \cdot t)$$

vektorok merőlegesek egymásra, akkor a Pitagorasz-tétel szerint fennáll

$$\left(3^2 + 9{,}81^2 \cdot t^2\right) + \left(4^2 + 9{,}81^2 \cdot t^2\right) = 7^2,$$

ahonnan megkapjuk, hogy eddig a pillanatig az eldobástól számítva $t = 0{,}35$ s idő telt el. Ezalatt a két test $|\Delta\boldsymbol{v}|t \approx 2{,}5$ méterre távolodott el egymástól.

2. *a*) Ha az m tömegű, q töltésű gyöngy a Q töltésű test felett x távolságban egyensúlyban van, fennáll

$$mg = k\frac{qQ}{x^2},$$

ahonnan

$$x = \sqrt{\frac{kqQ}{mg}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-7}}{10^{-4} \cdot 9{,}81}}\ \text{m} \approx 9{,}6\ \text{cm}.$$

b) A megadott távolságban a gyöngyre $1{,}2 \cdot 10^{-4}$ N elektrosztatikus erő hat függőlegesen felfelé, a nehézségi erő $9{,}8 \cdot 10^{-4}$ N függőlegesen lefelé, így a 10^{-4} kg tömegű gyöngy kezdeti gyorsulása $8{,}6\ \text{m/s}^2$ függőlegesen lefelé.

3. *a*) A leképezési törvény alapján

$$\frac{1}{t_a}+\frac{1}{k}=\frac{1}{f},$$

ahol $t_a=45$ m, f pedig a domború tükör fókusztávolsága ($f<0$). A nagyítás (amit a látszólagos kép miatt negatív előjelűnek kell tekintsünk):

$$\frac{k}{t_a}=\frac{f}{t_a-f}=-\frac{1}{3},$$

ahonnan $f=-t_a/2=-22{,}5$ m, a keresett görbületi sugár pedig $r=2|f|=45$ m.

b) Amikor

$$\frac{k}{t_b}=\frac{f}{t_b-f}=-\frac{1}{2},$$

a tükörtől mért távolság $t_b=-f=22{,}5$ m.

4. *a*) A Föld életkora a megadott felezési időnek 6,34-szerese, tehát a kérdezett arány $2^{6{,}34}\approx 81$.

b) A bomló atommag tömegének és a bomlástermékek össztömegének különbsége:

$$\Delta m=m\left({}^{235}_{92}\mathrm{U}\right)-m\left({}^{231}_{90}\mathrm{Th}\right)-m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right)=0{,}005\,017\ \mathrm{u}=8{,}331\cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}.$$

Ez a tömegkülönbség (Einstein képlete alapján)

$$\Delta E=\Delta m\cdot c^2=7{,}5\cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

„energiafelszabadulásnak” felel meg (c a fénysebesség vákuumban), ennyi lesz a bomlástermékek összes mozgási energiája.

c) Mivel Δm a könnyebb bomlástermék (az α-részecske) tömegénél is sokkal kisebb, a reakciótermékek sebessége a fénysebesség mellett elhanyagolható, tehát számolhatunk a klasszikus (newtoni) képletekkel. Az energia- és lendületmegmaradás törvénye szerint

$$\Delta E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2,\qquad \text{illetve}\qquad mv=MV,$$

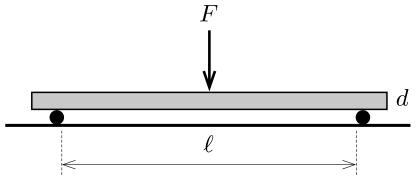
ahol m és v az α-részecske tömege és sebessége, M és V a tóriumatommag adatai. Innen kifejezhető az α-részecske mozgási energiája:

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{M}{M+m}\Delta E=\frac{231}{235}\Delta E=7{,}4\cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}.$$

Látható, hogy a bomlás során felszabaduló energiát majdnem teljes egészében a könnyebb bomlástermék, az alfa-részecske „viszi el”.

Honyek Gyula
Budapest

Mérési feladat megoldása



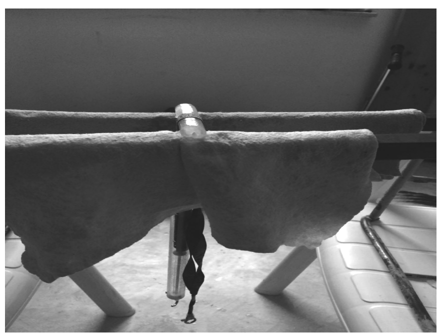
M. 367. *Készítsünk hengeres jégpálcákat (pl. mélyhűtőben fagyasztott vízből, lezárt végű műanyagcső segítségével)! A két végén alátámasztott pálcát a közepénél fokozatosan terheljük meg annyira, hogy eltörjön. Adjuk meg a töréshez szükséges erőt több, különböző hosszúságú és átmérőjű jégpálcára!*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. A mérés első szakasza, hogy „legyártsuk” a jégrudakat. A jégrudak előállítására különböző műanyag (általában PVC) csöveket használtam. Különböző átmérőjű csövekből különböző hosszúságú darabokat vágtam le. A vízzel töltött csövek végét parafa dugó, szilikondugó vagy ragasztószalag segítségével zártam le. Nagyon fontos volt, hogy a bezárt víz „légmentes” legyen, ne maradjon mellette légbuborék, különben a mérés pontatlan lesz.

Minden ilyen műanyag csövet legalább 24 óráig hűtöttem a mélyhűtőben, majd kivettem és langyos vizet csurgattam a műanyag oldalára. Egy pálca segítségével eltávolítottam a jeget a műanyagcsőből. Ezzel elkészült a hengeres jégpálca, amit – ha a mérés igényelte – megfelelő hosszúságúra vágtam fűrésszel. Ezután feljegyeztem a hosszát és az átmérőjét. A jégpálca hosszát (L) colstok segítségével határoztam meg, míg az átmérőjét (d) tolómérő segítségével.

A mérés második szakaszában a jégrúd eltöréséhez szükséges erőt mértem meg. Kerestem két vasrudat, majd azokat hőszigetelő anyagba (rongyba) csomagoltam. Azért választottam vasrudakat, mert azok a terhelőerő hatására nem görbülnek el, mint a fa. Azért kellett hőszigetelő anyagba becsomagolni a vasrudakat, mert a fémek jól vezetik a hőt, és gyorsan megolvasztották volna a jégpálcát.



A két vasrudat egymással párhuzamosan egy emelvényre helyzetem, hogy a keresztben rájuk fektetett jégpálcát egy erőmérő segítségével lefele tudjam húzni. A jégpálcára rátettem egy hurkot, amit gondosan a pálca közepére igazítottam. A hurokra egy erőmérőt akasztottam, majd bekapacsoltam egy lassított felvételt (másodpercenként 240 képkockát) készítő videokamerát, amelyet pontosan az erőmérőre irányítottam.

Elkezdtem húzni az erőmérőt egészen addig, amíg a jégrúd el nem tört. (A rugós erőmérővel nem tudtam 110 N-nál nagyobb erőt mérni.) Ezután megállítottam és visszanéztem a felvételt, amelyből egyértelműen kideríthető, hogy mekkora F erőnél tört el a jégrúd. Minden jégpálcát egyszer használtam fel. A méréseket egyszer végeztem el (jóllehet azok megismétlése nagyobb pontosságot eredményezne), mert a mélyhűtőnk mérete és a rendelkezésre álló idő korlátai miatt nem tudtam több jégpálcát legyártani.

A mérési adatokat táblázatba foglaltam:

F [N]	d [cm]	L [cm]	F [N]	d [cm]	L [cm]
108	1,5	4	28	1	4
78	1,5	6	25	1	6
54	1,5	8	21	1	8
40	1,5	10	18	1	10
28	1,5	12	16	1	12
18	1,5	14	14	1	14
14	1,5	16	10	1	16
10	1,5	18	12	1	18
6	1,5	20	9	1	20

F [N]	d [cm]	L [cm]	F [N]	d [cm]	L [cm]
4,8	1,5	19	4,8	1	17
8	1,2	19	10	1,2	17
16	1,5	19	21,8	1,5	17
22	1,7	19	34	1,7	17
36	2	19	60,5	2	17
54	2,3	19	100	2,3	17
70	2,5	19			

Szerettem volna összefüggést találni különböző átmérőjű, de azonos hosszúságú jégpálcák esetén az F törőerő és a d átmérő között, illetve F és L között adott jégátmérő mellett. Ezért grafikonon ábrázoltam az összetartozó F és d, illetve F és L értékpárokat, és a mérési pontokra számítógéppel különböző függvényeket illesztettem. (A jegyzőkönyvben szereplő grafikonokat és a függvényillesztések eredményét terjedelmi okokból itt nem közöljük. – A szerk.)

A mérés pontossága, hibabecslés

A mérés leolvasási hibái: a rúgós erőmérő pontatlansága ±1 N, a colstok pontatlansága ±0,1 cm, a tolómérő pontatlansága ±0,01 cm. Statisztikus hiba becslésére nem volt lehetőségem, mert a mérést nem tudtam sokszor megismételni.

További megjegyzések: A mérés során figyelni kell a következőkre:

1. Ne keletkezzen buborék a jégpálcában.

2. A jégpálca mindenhol ugyanolyan vastag legyen.

3. A megfelelő méréshatárú rúgós erőmérőt használjam (10 20, 30, 40, 50 és 100 N közül választhattam.) Nem szabad túl erős rugót választani, mert akkor pontatlanabb lesz a mérés. Mindig a legkisebb méréshatárú erőmérővel érdemes kezdeni a mérést.

4. A jégpálca mindig a végénél (annak közelében) legyen alátámasztva.

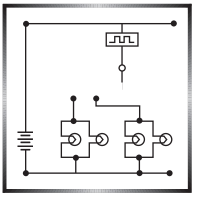
5. A műanyag cső melegítése során a víz langyos, vagy inkább hideg legyen, különben eltörik a csőben a jégpálca.

6. A kamera mindig szemből „nézzen" az erőmérőre.

Fekete Balázs Attila (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

12 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott Fehér Szilveszter, Fekete Balázs Attila, Kovács Péter Tamás, Kozák Áron és Páhoki Tamás megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (3–4 pont) 5 dolgozat.

Fizika gyakorlat megoldása



G. 594. *A tornateremben egy rugalmas gumikötél lóg le a mennyezettől. Norbika rácsimpaszkodik, és függőlegesen lengedezik* 5 *másodperces periódusidővel.*

Mit tegyen, hogy 3 *másodpercesre csökkentse a periódusidőt?*

(*3 pont*)

Megoldás. Tegyük fel, hogy a gumikötél tömege sokkal kisebb, mint Norbika tömege, továbbá érvényes az $F=-D\cdot x$ lineáris erőtörvény. Ekkor a periódusidő

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

alakú, ahol m Norbika tömege. Ezt a tömeget rövid idő alatt Norbika nem tudja megváltoztatni, a periódusidő csökkentéséhez tehát a D rugóállandót kell növelnie.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{5}{3}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{D_5}}}{2\pi\sqrt{\frac{m}{D_3}}}=\sqrt{\frac{D_3}{D_5}},$$

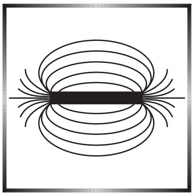
ahol D_5 és D_3 az 5, illetve 3 másodperces periódushoz tartozó érték. Innen

$$D_3=\frac{25}{9}D_5.$$

Egy homogén anyagú rugó rugóállandója fordítottan arányos a hosszával, tehát $\ell_3 = \frac{9}{25}\ell_5 = 0{,}36\,\ell_5$. Norbikának tehát az eredeti kötélhossz 36 százalékáig, majdnem a gumikötél *felső harmadáig* fel kell másznia, hogy a kívánt periódusidő-csökkenést elérhesse.

Veres Kristóf (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 9. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes Békési Péter, Garamvölgyi István Attila, Kozák Áron és Veres Kristóf megoldása. Kicsit hiányos (2 pont) 11, hiányos (1 pont) 7, hibás 9 dolgozat.



Fizika feladatok megoldása

P. 4882. *Egy atomerőműben az uránmagok hasadásakor felszabaduló gyors neutronok mozgási energiája* MeV *nagyságrendű. Ahhoz, hogy ezek a neutronok további maghasadást idézhessenek elő, le kell lassítani őket az ún. „termikus energiaszintre", amikor a sebességük már csak kb.* 2,2 km/s.

A neutronok lassítása könnyű elemek (például a nehézvízben található deutérium) atommagjaival (deuteronokkal) történő rugalmas ütközéssel valósítható meg.

a) Hozzávetőleg hány ütközés után lassul le egy hasadási neutron a termikus energiaszintre? (Feltételezhetjük, hogy a deuteronok mozgási energiája az ütközések előtt elhanyagolható, továbbá az ütközések centrálisak.)

b) Nagyságrendileg mekkora a termikus neutronok mozgási energiája, és mekkora a „hőmérsékletük"?

(4 pont) *Versenyfeladat nyomán*

Megoldás. A neutron kezdeti mozgási energiája $E_0 = 1\ \text{MeV} = 1{,}6\cdot 10^{-13}$ J, tömege (táblázatba foglalt érték): $m_\text{n} = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg.

$$E_0 = \frac{1}{2}m_\text{n}v_0^2, \qquad v_0 = \sqrt{\frac{2E_0}{m_\text{n}}} \approx 1{,}4\cdot 10^4\ \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

A neutron kezdeti mozgási energiája sokkal kisebb, mint a nyugalmi energiája (ami kb. 1 GeV), ezért jogosan használtuk a mozgási energia klasszikus (nemrelativisztikus) képletét.

A gyorsan mozgó neutron rugalmasan ütközik egy álló ${}^2_1$H deutérium-atommaggal (deuteronnal), amelynek tömege $m_\text{H} \approx 2m_\text{n}$. Felírhatjuk az ütközésre a lendület és a mechanikai energia megmaradásának törvényét:

$$m_\text{n}v_0 = m_\text{n}v_1 + m_\text{H}u_1, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}m_\text{n}v_0^2 = \frac{1}{2}m_\text{n}v_1^2 + \frac{1}{2}m_\text{H}u_1^2, \tag{2}$$

ahol v_1 a neutron, u_1 pedig a deuteron sebessége az ütközés után.

Az (1) egyenletből kifejezhetjük u_1-et, és azt (2)-be behelyettesíthetjük. A tömegek ismert arányát is felhasználva algebrai átalakítások után azt kapjuk, hogy

$$0 = (3v_1 + v_0)(v_1 - v_0).$$

A $v_1 = v_0$ (és az ezzel járó $u_1 = 0$) „megoldás” annak felel meg, hogy nem is történik ütközés, ezt a lehetőséget elvethetjük.

Ha a neutron ténylegesen ütközik a deuteronnal, akkor $v_1 = -\frac{1}{3}v_0$, tehát egyharmad részére csökken a neutron sebességének nagysága. Ez minden további ütközésnél megismétlődik (hacsak nem a már korábban meglökött deuteronnal ütközik a neutron; ennek lehetőségét nem vesszük számításba). Ilyen körülmények között minden ütközésnél harmadolódik a neutron sebessége, és N ütközés után

$$v_N = \frac{v_0}{3^N}$$

lesz a sebesség nagysága. Innen kiszámíthatjuk a neutronok lelassításához szükséges ütközések számát:

$$N = \frac{\log(v_0/v_N)}{\log 3} \approx 8.$$

b) Termikus energiaszinten a neutronok mozgási energiája

$$E_T = \frac{1}{2} m_{\mathrm{n}} v_N^2 \approx 4 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}.$$

Ha a neutronokat $f = 3$ szabadsági fokú, T hőmérsékletű gáznak tekintjük, akkor az egyes részecskékre jutó átlagos mozgási energia

$$E_T = \frac{3}{2}kT$$

összefüggéséből a neutrongáz hőmérsékletére $T \approx 195$ K-t kapunk. Ez nagyságrendileg megegyezik a 300 K-es szobahőmérséklettel; éppen ezért nevezik az ilyen mértékben lelassított részecskéket *termikus* neutronoknak.

Bukor Benedek (Révkomárom, Selye János Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

45 dolgozat érkezett. Helyes 30 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

P. 4896. *Egy kicsi sportrepülőgép „szembeszélben”* 3 óra *alatt tud A-ból pontosan észak felé B-be repülni, visszafelé „hátszélben”* 2 óra *alatt ér B-ből A-ba. Mennyi idő alatt tenné meg az utat oda-vissza, ha állandóan északkeleti szél fújna? (A szél sebessége mindvégig ugyanakkorának tekinthető.)*

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Jelöljük az AB távolságot s-sel, a repülő, illetve a szél sebességét pedig $v_{\text{repülő}}$-vel és $v_{\text{szél}}$-lel. Felírhatjuk az észak felé, illetve a dél felé haladó repülőgépre az út–idő–sebesség kapcsolatot:

$$s = (v_{\text{repülő}} - v_{\text{szél}}) \cdot 3\ \text{óra},$$
$$s = (v_{\text{repülő}} + v_{\text{szél}}) \cdot 2\ \text{óra}.$$

A fenti két egyenletből

$$2(v_{\text{repülő}} + v_{\text{szél}}) = 3(v_{\text{repülő}} - v_{\text{sz}}),$$

vagyis

$$v_{\text{repülő}} = 5\, v_{\text{szél}} \qquad \text{és} \qquad s = v_{\text{szél}} \cdot 12 \text{ óra}$$

következik.

Ha mindvégig állandó nagyságú északkeleti szél fúj, akkor a szél sebességének nyugat felé mutató komponense

$$v_{\text{szél}}^{(\text{nyugat})} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{\text{szél}}.$$

Ugyanekkora nagyságú a repülőgép levegőhöz viszonyított sebességének kelet felé mutató komponense, hiszen a repülőgép eredő sebessége tisztán északi, illetve visszafelé jövet tisztán déli irányú. Eszerint a repülőgép levegőhöz viszonyított sebességének észak (vagy dél) felé mutató komponense

$$v_{\text{repülő}}^{(\text{észak–dél})} = \sqrt{v_{\text{repülő}}^2 - \frac{1}{2} v_{\text{szél}}^2} = \frac{7}{\sqrt{2}} v_{\text{szél}}.$$

Ha ebből a sebességkomponensből levonjuk a szél sebességének dél felé mutató

$$v_{\text{szél}}^{(\text{dél})} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_{\text{szél}}$$

komponensét, illetve ha hozzáadjuk azt, megkapjuk a repülő talajhoz viszonyított sebességét északkeleti (ferde) szembeszélben, illetve északkeleti (ferde) hátszélben:

$$v_1 = \left(\frac{7}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) v_{\text{szél}} = \frac{6}{\sqrt{2}} v_{\text{szél}},$$

$$v_2 = \left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) v_{\text{szél}} = \frac{8}{\sqrt{2}} v_{\text{szél}}.$$

A teljes menetidő ilyen sebességek mellett:

$$T = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2} = \frac{12 \text{ óra}}{\frac{6}{\sqrt{2}}} + \frac{12 \text{ óra}}{\frac{8}{\sqrt{2}}} \approx 4{,}95 \text{ óra}.$$

Makai Enikő (Csongrád, Batsányi J. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

83 dolgozat érkezett. Helyes 44 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 28, hibás 4 dolgozat.

P. 4897. *Függőlegesen álló, felül nyitott, henger alakú edényből az alul lévő csapon keresztül folyik ki a víz. Hogyan változik a víz felszínének süllyedési sebessége? Ha T idő alatt folyik ki a víz fele az edényből, mennyi idő alatt ürül ki teljesen az edény?*

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Jelöljük az edény belsejének keresztmetszetét A-val, a csap keresztmetszetét A_0-lal, a vízfelszín folyamatosan változó nagyságú sebességét v-vel, a csapból kiáramló víz sebességét pedig V-vel.

Írjuk fel a Bernoulli-törvényt a h magasságú vízoszlop felszínét és a csapot összekötő valamelyik áramvonalra (*1. ábra*):

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + p_0 + \varrho g h = \frac{1}{2}\varrho V^2 + p_0.$$

(p_0 a külső légnyomás, ϱ a víz sűrűsége.) Felhasználhatjuk még a kontinuitási egyenletet (az anyagmegmaradás törvényét) is:

$$VA_0 = vA.$$

Ezen két összefüggés meghatározza a folyadék felszínének süllyedési sebességét:

$$v(h) = \sqrt{\frac{A_0^2}{A^2 - A_0^2} 2gh}\,,$$

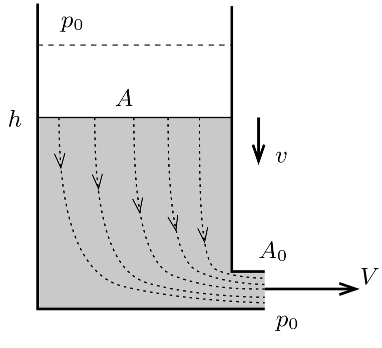
amit

$$v(h) = \sqrt{2g'h}$$

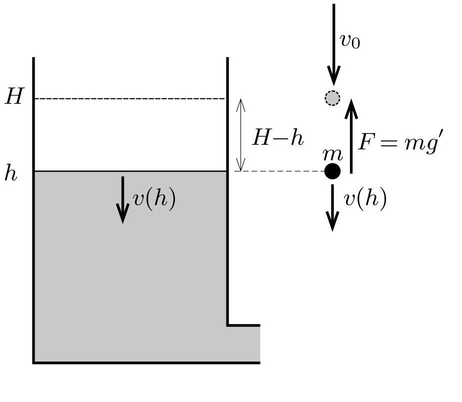
alakban is felírhatunk, ahol

$$g' = \frac{A_0}{\sqrt{A^2 - A_0^2}} g = \text{állandó}.$$

Látható, hogy a folyadék felszínének süllyedési sebessége a magasság *négyzetgyökével* arányos.



1. ábra



2. ábra

Legyen a folyadékfelszín kezdeti magassága az edény aljához képest H. Vizsgáljuk meg egy pontszerű test mozgását egy olyan gravitációs mezőben, amelyben a „nehézségi gyorsulás” nagysága g', iránya pedig ellentétes g-vel (*2. ábra*). Induljon a test $v_0=\sqrt{2g'H}$ kezdősebességgel a kezdeti vízszint magasságától az edény alja felé. A munkatétel szerint:

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=-mg'(H-h).$$

Innen a test h magassághoz tartozó sebessége:

$$v(h)=\sqrt{2g'h}\,.$$

Mivel tetszőleges h magasságban a folyadékfelszín és a kis test sebessége a g' gravitációjú térben megegyezik, ezért ha képzeletben egymás mellé helyezzük őket úgy, hogy a vízre csak a szokásos g gravitációjú tér hasson lefelé, a kis testre pedig csak a g' felfelé, akkor a kis test és a vízfelszín (egyenletesen lassuló mozgással) mindvégig egymás mellett marad, egyformán süllyed lefelé.

A vízfelszín süllyedési sebessége az idő függvényében a kis test sebességével egyezik meg:

$$v(t)=v_0-g't.$$

Amikor a víz fele kifolyik, a kis test $H/2$ magasságba ér, a sebessége tehát $v_1=$ $=\sqrt{g'H}$ lesz. Mivel ez T idő alatt következik be,

$$v_1=v_0-g'T,\quad \text{ahonnan}\quad T=\frac{v_0-v_1}{g'}=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\frac{H}{g'}}\,.$$

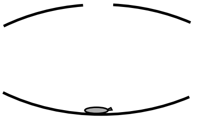
A teljes kiürülés T_0 idejekor a kis test sebessége nulla, vagyis $v_0-g'T_0=0$, ahonnan a keresett időtartam:

$$T_0=\frac{v_0}{g'}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{H}{g'}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}T\approx 3{,}4\,T.$$

Nagy Botond (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

41 dolgozat érkezett. Helyes 32 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 4, hibás 2 dolgozat.

P. 4900. *Érdekes optikai játék két egymással szembefordított, azonos görbületi sugarú, homorú gömbtükör, melyek közül a felső tükör közepén egy néhány centiméter átmérőjű, kör alakú lyuk van. A tükrök olyan távolságra vannak egymástól, hogy az alsó tükör közepére tett kicsiny tárgy (például egy szem cukor) képe a lyukas tükör közepén jelenik meg, miután a tárgyról induló fénynyaláb előbb a felső, azután az alsó tükörről is egyszer visszaverődött.*



a) Milyen messze lehet egymástól a két tükör közepe?

b) Egyenes vagy fordított állású, valódi vagy látszólagos a megjelenő kép, és mekkora a nagyítás?

(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Nevezzük a felső tükröt F tükörnek, az alsó tükröt A tükörnek. A tárgyból kiinduló fénysugarak az F, majd az A tükörről visszaverődve az F tükör közepén hoznak létre képet. Ez a kép csak valódi lehet, mert az A tükörről visszaverődő (ez már a 2. visszaverődés!) fénysugarak nyilván elérik az F tükröt, és csak akkor jöhet létre kép ezen tükör középpontjában, ha a fénysugarak valóban metszik egymást.

A két tükör közepének távolságát nevezzük d-nek, a fókusztávolságukat pedig jelöljük f-fel. Az F tükörre tükrözéskor a tárgytávolság d:

$$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f},$$

innen az első képtávolság, vagyis az A tükör távolsága a létrejövő képtől

$$k_1=\frac{fd}{d-f}.$$

Ha ez nullánál kisebb, vagy d-nél nagyobb, akkor az első tükröződés után nem jön így létre valódi kép, de ez nem befolyásolja a további számolás érvényességét. A második, az A tükör által létrehozott képalkotásnál a tárgytávolság

$$t_2=d-k_1=\frac{2df-d^2}{f-d},$$

a képtávolság pedig $k_2=d$.

$$\frac{1}{t_2}+\frac{1}{d}=\frac{1}{f},$$

amiből t_2 behelyettesítése és algabrai átalakítások után a

$$0=d^2-4fd+3f^2=(d-f)(d-3f)$$

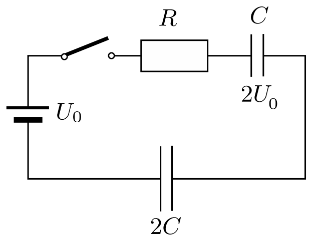
másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai: $d=f$ és $d=3f$.

$d=3f$ esetén az első tükrözés fordított állású, felére kicsinyített képet eredményez a két tükör között félúton ($k_1=\frac{3}{2}f=\frac{1}{2}d$). A második tükröződés visszafordítja és kétszeresére növeli a képet. Végeredményben a létrejövő kép *valódi, egyenes állású* és a tárggyal *megegyező méretű* lesz.

$d=f$ esetén is létrejöhet kép, hiszen az elsőként az F tükörről visszaverődő fénysugarak párhuzamosak lesznek, és a párhuzamos fénysugarakat az A homorú tükör a saját fókuszpontjába gyűjti, ami az F tükör középpontja. A keletkező kép *valódi,* a tárggyal *azonos méretű,* de az előző esettől eltérően *fordított* állású lesz.

Fajszi Bulcsú (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

24 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (2–3 pont) 9 dolgozat.



P. 4904. *Az ábrán látható kapcsolásban a* C *kapacitású kondenzátor feszültsége kezdetben* $2U_0$*, a* $2C$ *kapacitású kondenzátor töltetlen.*

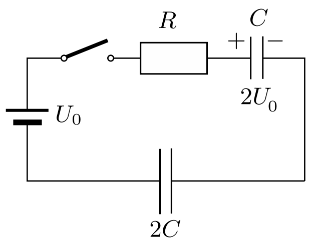
Mennyi hő fejlődik az R *ellenálláson, miután zártuk a kapcsolót?*

(*6 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

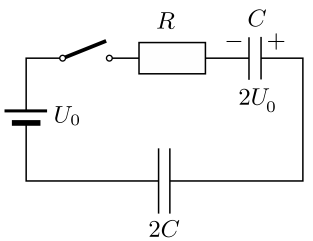
Megoldás. A feltöltött (C kapacitású és $Q_0 = 2CU_0$ töltésű) kondenzátor kezdeti polaritásától függően két eset lehetséges.

I. eset: A kondenzátor pozitív töltésű fegyverzete a bal oldalon van (*1. ábra*).

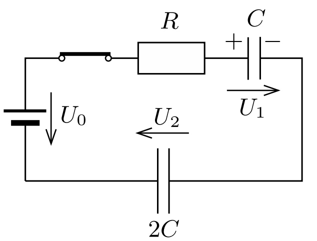
II. eset: A pozitív fegyverzet a jobb oldalra kerül (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra



3. ábra

Vizsgáljuk először az első esetet. A kapcsoló zárása után az áramkörben töltésáramlás indul meg, melynek során mindkét kondenzátor töltött állapotba kerül (*3. ábra*). A folyamat végén a körben már nem folyik áram, ennek következtében az ellenálláson nem esik feszültség. Írjuk fel a huroktörvényt erre az állapotra a 3. ábra jelöléseit használva (az óramutató járásával azonos irányban):

(1) $$U_1 + U_2 - U_0 = 0.$$

Tudjuk továbbá, hogy a két kondenzátort összekötő ágon az összes töltés a kezdeti és végállapotban egyenlő (hiszen a kondenzátor lemezei között nem haladhatnak át töltések):

(2) $$-2CU_0 = -CU_1 + 2CU_2,$$

innen

(3) $$2U_0 = U_1 - 2U_2.$$

Az (1) és (3) egyenletek rendszerének megoldása:

$$U_1 = \frac{4}{3}U_0, \qquad U_2 = -\frac{1}{3}U_0.$$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a $2C$ kapacitású kondenzátoron a lemezek töltése a 3. ábrán jelölthöz képest ellentétes (a bal oldali lemez lesz pozitív töltésű).

Jóllehet az ellenálláson áthaladó áram időben bonyolult módon (belátható, hogy exponenciális függvény szerint) változik, az ellenálláson fejlődő Joule-hő elemi úton (integrálszámítás nélkül) is kiszámítható, ha energetikai megfontolásokat követünk. Feltételezzük, hogy az áramkörből nem jut ki energia (elhanyagolva az áramok által keltett mágneses tér gerjesztette elektromágneses hullámokat), így teljesül a

$$W_{\text{telep}} + W_C + W_{2C} + W_R = 0 \tag{3}$$

mérlegegyenlet. A fenti képletben W_{telep} a telep energiaváltozását, W_C és W_{2C} az egyes kondenzátorok energiaváltozását, W_R pedig az ellenálláson fejlődő hőt jelöli.

A kondenzátorok energiaváltozása:

$$W_C = \frac{1}{2}C\big(U_1^2 - (2U_0)^2\big) = -\frac{10}{9}CU_0^2,$$

$$W_{2C} = \frac{1}{2}2C\big(U_2^2 - 0\big) = \frac{1}{9}CU_0^2,$$

a telep energiaváltozása pedig az U_0 feszültség és a telepen áthaladó töltés szorzata:

$$W_{\text{telep}} = U_0(Q_0 - CU_1) = U_0\left(2CU_0 - C\cdot\frac{4}{3}U_0\right) = \frac{2}{3}CU_0^2.$$

(A pozitív előjel azt jelenti, hogy a telepnek nő az energiája.)

A (3) energiamérleg segítségével kiszámíthatjuk az ellenálláson fejlődő hőt:

$$W_R = -W_{\text{telep}} - W_C - W_{2C} = -\frac{2}{3}CU_0^2 - \left(-\frac{10}{9}CU_0^2\right) - \frac{1}{9}CU_0^2 = \frac{1}{3}CU_0^2.$$

A második esetben az fentiekhez teljesen hasonló módon járhatunk el. A megfelelő egyenletek csak a C kapacitású kondenzátor kezdeti töltését megadó kifejezés előjelében térnek el az első eset egyenleteitől:

$$U_1 + U_2 - U_0 = 0, \tag{1'}$$

$$+2CU_0 = -CU_1 + 2CU_2, \tag{2'}$$

$$2U_0 = 2U_2 - U_1. \tag{3'}$$

Az (1′)–(3′) egyenletek megoldása:

$$U_1 = 0, \qquad U_2 = U_0.$$

(Ez azt jelenti, hogy a kapcsoló zárása után a C kapacitású kondenzátor összes töltése átkerül a másik kondenzátorra.) Az energiaváltozások:

$$W_C = \frac{1}{2}C\big(0 - (2U_0)^2\big) = -2CU_0^2,$$

$$W_{2C} = \frac{1}{2}2C\big(U_0^2 - 0\big) = CU_0^2,$$

$$W_{\text{telep}} = -U_0\cdot 2CU_0 = -2CU_0^2.$$

(A telep energiaváltozása ebben az esetben negatív, hiszen az áram a telepfeszültséggel ellentétes irányban folyik.) Az energiamérlegből:

$$W_R = -W_{\text{telep}} - W_C - W_{2C} = 2CU_0^2 - \big(-2CU_0^2\big) - CU_0^2 = 3CU_0^2.$$

Az ellenálláson fejlődő hő tehát a már kezdetben is feltöltött kondenzátor bekötésétől (polaritásától) függően $\frac{1}{3}CU_0^2$ vagy $3CU_0^2$.

Németh Róbert (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Belátható, hogy ha egy ellenálláson időben exponenciálisan csökkenő áram folyik keresztül (esetünkben éppen ez történik), akkor a teljes kisülési folyamat során fejlődő Joule-hő az ellenállásra eső kezdeti (maximális) feszültség és az ellenálláson átfolyó töltés szorzatának felével egyezik meg.

Valóban, ha az áramerősség

$$I(t) = I_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

az ellenállásra eső feszültség tehát

$$U(t) = RI(t) = RI_0 \mathrm{e}^{-\lambda t},$$

akkor a folyamat során fejlődő Joule-hő (ami az időben változó $P(t) = U(t)I(t)$ teljesítmény integrálja):

$$W_R = \int_0^\infty U(t)I(t)\,\mathrm{d}t = RI_0^2 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{RI_0^2}{2\lambda}.$$

Másrészt a kezdeti (maximális) feszültség az ellenálláson

$$U_{\max} = U(0) = RI(0) = RI_0,$$

a rajta átfolyó töltés pedig

$$Q = \int_0^\infty I(t)\,\mathrm{d}t = I_0 \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{I_0}{\lambda}.$$

Látható, hogy a hivatkozott $W_R = \frac{1}{2}U_{\max}Q$ összefüggés teljesül. A feladatban szereplő kapcsolásnál a keresett hő

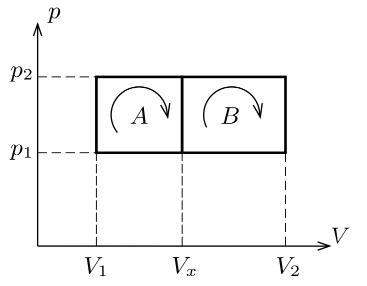
$$\frac{1}{2}(-U_0)\left(-\frac{2}{3}CU_0\right) = \frac{1}{3}CU_0^2, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{1}{2}(3U_0)(2CU_0) = 3CU_0^2.$$

(Sz. K.)

26 dolgozat érkezett. Helyes Elek Péter, Fehér Szilveszter, Fekete Balázs Attila, Jakus Balázs István, Marozsák Tóbiás, Nagy Botond és Németh Róbert, Olosz Adél, Sal Dávid és Szentivánszki Soma megoldása. Kicsit hiányos (4–5 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

P. 4907. *Mekkora V_x térfogat esetén egyezik meg az ábrán látható A és B körfolyamatot végző, állandó tömegű ideális gázzal működő két hőerőgép hatásfoka?*

(*4 pont*) Közli: *Cserti József,* Budapest



Megoldás. Az A körfolyamatban a hőerőgép η_A hatásfoka a gáz által végzett

$$W_A = (p_2 - p_1)(V_x - V_1)$$

hasznos munka és a gáz által felvett hő hányadosa. Hőfelvétel egyrészt az állandó V_1 térfogaton végbemenő izochor állapotváltozáskor történik, ennek nagysága

$$Q_1 = \frac{f}{2} V_1 (p_2 - p_1),$$

másrészt a p_2 nyomáson végbemenő izobár táguláskor, amikor a felvett hő

$$Q_2 = \frac{f+2}{2} p_2 (V_x - V_1).$$

(A fenti képletekben felhasználtuk, hogy az f szabadsági fokú gáz belső energiája $E = (f/2)pV$, és a hőfelvétel $Q = \Delta E + p\Delta V$.) A körfolyamat hatásfoka tehát

$$\eta_A = \frac{W_A}{Q_1 + Q_2} = \frac{(p_2 - p_1)(V_x - V_1)}{\frac{f}{2} V_1 (p_2 - p_1) + \frac{f+2}{2} p_2 (V_x - V_1)}.$$

Hasonló módon számíthatjuk ki a B körfolyamat hatásfokát is. Itt a hőfelvétel a V_x térfogaton végbemenő izochor állapotváltozáskor

$$Q_3 = \frac{f}{2} V_x (p_2 - p_1),$$

illetve az izobár táguláskor felvett

$$Q_4 = \frac{f+2}{2} p_2 (V_2 - V_x)$$

összege, a hasznos munka pedig

$$W_B = (p_2 - p_1)(V_2 - V_x).$$

A hatásfok ennek megfelelően

$$\eta_B = \frac{W_B}{Q_3 + Q_4} = \frac{(p_2 - p_1)(V_2 - V_x)}{\frac{f}{2} V_x (p_2 - p_1) + \frac{f+2}{2} p_2 (V_2 - V_x)}.$$

Ha a két körfolyamat hatásfoka megegyezik, akkor nyilván

$$\frac{1}{\eta_A} = \frac{1}{\eta_B}$$

is fennáll. A hatásfokok fentebb kiszámított kifejezéseit behelyettesítve:

$$\frac{f}{2}\,\frac{V_1}{V_x-V_1}+\frac{f+2}{2}\,\frac{p_2}{p_2-p_1}=\frac{f}{2}\,\frac{V_x}{V_2-V_x}+\frac{f+2}{2}\,\frac{p_2}{p_2-p_1},$$

ahonnan

$$\frac{V_1}{V_x-V_1}=\frac{V_x}{V_2-V_x},$$

$$V_1V_1-V_1V_x=V_x^2-V_1V_x,$$

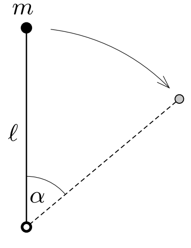
vagyis $V_x=\sqrt{V_1V_2}$ következik.

A keresett V_x érték tehát a V_1 és V_2 térfogatértékek *mértani* közepe.

Bukor Benedek (Révkomárom, Selye János Gimn., 10. évf.)
dolgozata felhasználásával

Megjegyzés. Érdekes, hogy a kapott eredmény sem a nyomások nagyságától, sem pedig a gáz minőségére jellemző f-től nem függ.

48 dolgozat érkezett. Helyes 41 megoldás. Hiányos (2–3 pont) 7 dolgozat.



P. 4908. *Egy ℓ hosszúságú, elhanyagolható tömegű rúd egyik végére m tömegű, pontszerű testet rögzítünk. Másik végét csuklós rögzítéssel látjuk el, mely körül foroghat a rendszer. A függőleges, instabil helyzetéből kimozduló rúd mekkora α szögénél lesz a végén lévő test centripetális gyorsulása egyenlő az érintő irányú gyorsulásával?*

Nyomja vagy húzza ekkor a rúd a testet? (A súrlódástól tekintsünk el!)

(*4 pont*) Közli: *Hegedűs József,* Kaposvár

Megoldás. A feladat *ábráján* látható helyzetben a test sebessége az energiamegmaradás

$$mg\ell(1-\cos\alpha)=\frac{mv^2}{2}$$

törvénye szerint $v=\sqrt{2g\ell(1-\cos\alpha)}$, így a test centripetális gyorsulása

$$a_{\mathrm{cp}}=\frac{v^2}{\ell}=2g(1-\cos\alpha).$$

Az érintőirányú (tangenciális) gyorsulást a nehézségi erő érintőirányú komponense ($mg\sin\alpha$) „hozza létre”, hiszen az elhanyagolható tömegű rúd csak rúdirányú erőt tud kifejteni. A tangenciális gyorsulás nagysága $a_{\mathrm{t}}=g\sin\alpha$.

A kétféle gyorsulás nagysága akkor egyezik meg, ha fennáll:

$$\sin\alpha=2(1-\cos\alpha).$$

Négyzetre emelés után kapjuk, hogy

$$1-\cos^2\alpha = 4-8\cos\alpha+4\cos^2\alpha,$$

vagyis az $x=\cos\alpha$ ismeretlenre az

$$5x^2-8x+3=0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai: $x_1=0$, vagyis $\alpha_1=0$ (ez a függőleges instabil egyensúlyi helyzetnek felel meg, ahol $a_\mathrm{t}=a_\mathrm{cp}=0$), a másik gyök pedig

$$x_2=\frac{3}{5},\qquad \text{azaz}\qquad \alpha_2\approx 53{,}13^\circ.$$

Kezdetben a test nyilván nyomja a rudat, a rúd pedig „nyomja” felfelé a testet. A későbbiekben ez az erő egyre csökken, és valamekkora α_0 szögnél nullává válik, majd húzóerőbe vált át. A határesetet az jellemzi, hogy a centripetális erő éppen egyenlő a nehézségi erő rúdirányú komponensével, vagyis a centripetális gyorsulás megegyezik a nehézségi gyorsulás rúdirányú összetevőjével:

$$\frac{v^2}{\ell}=2g(1-\cos\alpha_0)=g\cos\alpha_0,\quad \text{vagyis}\quad \cos\alpha_0=\frac{2}{3},\quad \alpha_0\approx 48{,}2^\circ.$$

Ennél kisebb α szögeknél a rúd (ferdén felfelé) nyomja a pontszerű testet, nagyobb szögeknél pedig (ferdén lefelé) húzza azt. Mivel a korábban kiszámított szögekre $\alpha_2>\alpha_0$ teljesül, amikor a centripetális gyorsulás nagysága megegyezik az érintőirányú gyorsulással, a rúd már *húzza* a pontszerű testet.

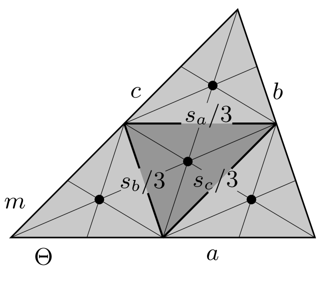
Markó Gábor (Győr, Révai Miklós Gimn., 9. évf.)

71 dolgozat érkezett. Helyes 43 megoldás hiányos (1–3 pont) 24, hibás 4 dolgozat.

P. 4911. *Mekkora a tehetetlenségi nyomatéka egy m tömegű, homogén tömegeloszlású, a, b, c oldalhosszúságú háromszöglapnak a síkjára merőleges, súlypontján áthaladó tengelyre vonatkozólag? (A feladat elemi úton is megoldható.)*

(*5 pont*) Közli: *Fehér Szilveszter,* Budapest, Óbudai Gimnázium

Megoldás. Legyen a keresett tehetetlenségi nyomaték Θ. Húzzuk be a középvonalakat a háromszögben, amik így 4 egybevágó kis háromszögre bontják a nagy háromszöget. A kis háromszögek a nagyhoz hasonlóak, a hasonlóság aránya 1 : 2.



A kis háromszögek tömege $\frac{1}{4}m$, lineáris méretük fele a nagy háromszög méreteinek, így a kis háromszögek mindegyikének tehetetlenségi nyomatéka a saját súlypontukon átmenő tengelyre vonatkoztatva $\frac{1}{16}\Theta$.

A kis háromszögek tömegközéppontja a nagy háromszög tömegközéppontjától $\frac{1}{3}s_a$, $\frac{1}{3}s_b$ és $\frac{1}{3}s_c$ távolságra van, ahol s_a, s_b és s_c a nagy háromszög súlyvonalai.

A Steiner-tételt alkalmazva adjuk össze a négy kis háromszögnek a nagy háromszög súlypontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát, így megkapjuk a nagy háromszög tehetetlenségi nyomatékát.

$$\frac{1}{16}\Theta+\left(\frac{1}{16}\Theta+\frac{m}{4}\left(\frac{s_a}{3}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{16}\Theta+\frac{m}{4}\left(\frac{s_b}{3}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{16}\Theta+\frac{m}{4}\left(\frac{s_c}{3}\right)^2\right)=\Theta,$$

ahonnan

$$\Theta=\frac{m}{27}\left(s_a^2+s_b^2+s_c^2\right).$$

Egy háromszög a oldalához tartozó súlyvonalának hossza a paralelogrammatételből adódóan

$$s_a^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{2},$$

és hasonlóan kapható meg a többi súlyvonal hossza is. Ezt a fentebb kapott képletbe helyettesítve a háromszöglap tehetetlenségi nyomatékára végül a

$$\Theta=\frac{m}{36}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

eredményt kapjuk.

Póta Balázs (Győr, Révai Miklós Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Hasonló gondolatmenettel kapható meg több más síklemez, illetve homogén test tehetetlenségi nyomatéka is. Egy a és b oldalélű paralelogramma-lemezre például $\Theta=\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$. Ez az eredmény független a paralelogramma szögétől, emiatt egy téglalap alakú lemezre is érvényes.

(*G. P.*)

27 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 2, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 372. Készítsünk egy hengeres műanyag (PET) palackból homokórát. A palack kupakján alakítsunk ki egy (kb. 8-10 mm átmérőjű) lyukat, és azon keresztül pergessük ki a palackból a száraz homokot. Mérjük meg, hogyan függ az időegységenként kiáramló homok mennyisége a palackbeli homokszint magasságától!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

G. 613. Körpályán mozgó jármű állandó, 72 km/h nagyságú sebességgel halad. Mennyi időnként kerül ugyanabba a pontba, ha gyorsulásának nagysága 1,6 m/s^2?

(*3 pont*)

G. 614. Egy D direkciós állandójú, elhanyagolható tömegű rugó végeihez azonos, m tömegű korongokat erősítettünk. A rugót és a korongokat a rugó nyújtatlan állapotában egy légpárnás asztalra helyezzük, és a rugó tengelyének irányában v_0 sebességű mozgásba hozzuk. Egy adott pillanatban a hátul lévő korongot hirtelen megállítjuk, és fogva tartjuk.

a) Mennyi idő múlva fordul vissza a másik test?

b) Mekkora lesz a rugó legnagyobb megnyúlása, és legfeljebb mekkora rugalmas energiával rendelkezik a rugó?

Adatok: $D = 16$ N/m, $m = 0{,}25$ kg, $v_0 = 2$ m/s.

(*3 pont*)

G. 615. 30°-os hajlásszögű, elég hosszú lejtőn gyorsulva csúszik lefelé egy vízzel félig telt tartály. Mekkora szöget zár be a víz felszíne a lejtő síkjával, ha a súrlódás elhanyagolható?

(*3 pont*)

G. 616. Egy vékony falú, elhanyagolható súlyú gimnasztikai labda sugara 30 cm, benne a levegő nyomása $1{,}1 \cdot 10^5$ Pa, a külső légnyomás $1{,}0 \cdot 10^5$ Pa. Mennyivel csökken a labda térfogata, amikor egy 50 kg tömegű személy teljes súlyával ránehezedik, ha ekkor a labda egy 10 cm sugarú körben érintkezik a padlóval? A levegő hőmérséklete állandó.

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 4970. Egy jármű A városból B-be megy. Útja első részén v_1 az átlagsebessége, a hátralévőn pedig v_2. Második útszakaszának hossza hányszorosa az elsőének, ha a teljes útra vonatkozó átlagsebessége a két részútra vonatkozó átlagsebességének

a) számtani közepe;

b) mértani közepe;

c) harmonikus közepe;

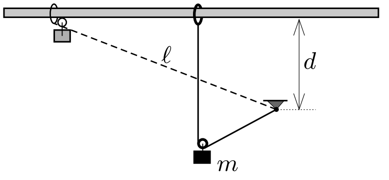
d) $1 : k$ arányú súlyozott számtani közepe?

(*4 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

P. 4971. 30°-os hajlásszögű, elég hosszú lejtőn gyorsulva csúszik lefelé egy vízzel félig telt tartály. Mekkora szöget zár be a víz felszíne a lejtő síkjával, ha a tartály és a lejtő közötti súrlódási együttható 0,2?

(*4 pont*) *Példatári feladat alapján*

P. 4972. Egy ℓ hosszúságú, könnyű és nyújthatatlan fonál egyik végét felfüggesztjük, a másikat pedig egy kicsiny gyűrűhöz kötjük, amely súrlódásmentesen csúszhat egy – a felfüggesztési pont felett $d < \ell$ magasságban található – vízszintes rúdon. Az ily módon elhelyezett fonálra kifeszített állapotban egy kicsiny csiga közvetítésével m tömegű súlyt akasztunk a rúd közvetlen közelében, majd a rendszert magára hagyjuk.



a) Mekkora lesz a test sebessége a pálya legalsó pontjában?

b) Milyen görbe mentén mozog a súly?

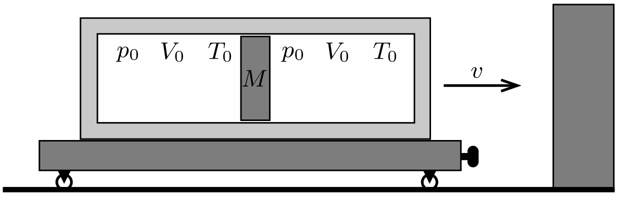
c) Mekkora erő feszíti a fonalat a pálya legalsó pontjánál?

(*5 pont*) Közli: *Németh Róbert,* Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

P. 4973. Baintner Géza (1892–1980) egyetemi előadásán szerepelt az a kísérlet, amikor három gumikötél Y alakban van összekötve, és az Y szimmetrikus végeit ellenkező fázisban rezegtetve, a keletkező két hullám kioltotta egymást, a harmadik ág nyugton maradt. Kérdés: *Hová lett a két hullám energiája?*

(*4 pont*) *Marx György* (1927–2002) feladata

P. 4974. Targoncához erősített, hőszigetelő hengerben $M=20$ kg tömegű, könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú $V_0=50$ liter térfogatú, $T_0=300$ K hőmérsékletű, $p_0=10^5$ Pa nyomású levegőrészeket választ el. A targonca $v=10$ m/s sebességgel halad egy fal felé, amellyel tökéletesen rugalmatlanul ütközik. Legfeljebb mekkora hőmérsékletet ér el a fal felőli részben lévő levegő a folyamat során?



(*5 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 4975. Egy földi laboratóriumi kísérlet során az m tömegű, Q töltésű kicsiny testet vákuumban, B indukciójú, vízszintes irányú, homogén mágneses térben engedjük el. (Feltehetjük, hogy $mg<QBc$, ahol c a fénysebesség.) A test mozgását addig vizsgáljuk, míg eléri legmélyebb helyzetét.

a) Mekkora lesz a test legnagyobb sebessége?

b) Milyen mélyre süllyed?

c) Mekkora átlagsebességgel mozog vízszintes irányban?

d) Mekkora a test gyorsulása pályájának legmélyebb pontján?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

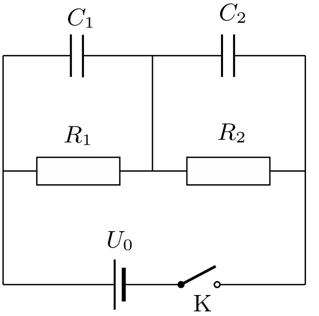
P. 4976. Három kicsiny golyót egy egyenes mentén helyeztünk el úgy, hogy kezdetben nem mozognak, és a szomszédos golyók távolsága d. A golyók tömege és töltése rendre m, $2m$, $5m$, illetve q, q, $2q$.

a) Mekkora lesz a golyók távolsága és sebessége az indulást követő nagyon rövid t_0 idő múlva?

b) Mekkora lesz a golyók sebessége elegendően hosszú idő múlva?

(Az elektrosztatikus erőkön kívül minden más erőhatás elhanyagolható.)

(*5 pont*) *A Kvant nyomán*



P. 4977. Az *ábrán* látható kapcsolásban a kapcsoló zárása előtt a kondenzátorok töltetlenek. Egy adott pillanatban zárjuk a kapcsolót. (Az áramforrás belső ellenállásától, a vezetékek és az ellenállások kapacitásától, továbbá a körben lévő elemek induktivitásától tekintsünk el.)

Ábrázoljuk *vázlatosan* a kondenzátorok feszültségét az idő függvényében!

Adatok: $C_1 = 150\ \mu\mathrm{F}$, $C_2 = 50\ \mu\mathrm{F}$, $R_1 = 40\ \mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 10\ \mathrm{k\Omega}$, $U_0 = 100\ \mathrm{V}$.

(*5 pont*) *Nagy László* (1931–1987) feladata

P. 4978. Az ionrakéta hajtóművében pozitív töltésű nehézionokat gyorsítanak fel, ezek áramlanak ki a fúvókán keresztül, ettől gyorsul fel a rakéta. Ugyanekkor elektrongyorsítót is beszerelnek az ionrakétába, erre miért van szükség?

(*3 pont*) *Némedi István* (1932–1998) feladata

P. 4979. A súlytalanság állapotában egy R sugarú, α felületi feszültségű higanycsepp lebeg. Ha a cseppet gyenge, E_0 térerősségű, homogén elektromos térbe helyezzük, a csepp a térerősség irányában kissé megnyúlik, alakja forgási ellipszoiddal közelíthető. Adjunk becslést, mekkora lesz a megnyúlt higanycsepp hossza.

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Budapest

Beküldési határidő: 2017. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 67. No. 8. November 2017)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 476): **K. 559.** How many at most six-digit numbers are there in which each of the digits 1, 2, 3, 4, 5 occurs exactly once? **K. 560.** There were 30 candidates taking an exam. The average score of those who failed was 60, and the average score of those who passed was 84. The average score of all candidates was 80. How many of them passed the exam? **K. 561.** A novel was published in three volumes. The page numbering started with 1 in the first volume, and in the second and third volumes it continued where the previous volume ended. The second volume was 50 pages thicker than the first one, and the third volume was 1.5 times as thick as the second volume. The sum of the first page numbers in the three volumes was 893. How many pages long is the entire novel? How many digits were used altogether in numbering the pages? **K. 562.** Alice went shopping. She only had 10-forint coins (HUF, Hungarian currency) and 1000-forint notes on her, at least one of each. When she had spent half her money, she noticed that she only had 10-forint coins and 1000-forint notes again. She had as many 10-forint coins as the number of 1000-forint notes she had set out with, and she had half as many 1000-forint notes as the initial number of her 10-forint coins. Given that she had spent the least amount of money that meets the given conditions, how many forints had she spent? **K. 563.** A disc of radius 3 cm has been cut out of each corner of a square plate of side 18 cm as shown in the *figure.* The small pieces falling off at the corners were thrown away. What is the area of the remaining part of the plate? **K. 564.** A spider wears 8 identical socks and 8 identical shoes on its feet. (There needs to be a sock and a shoe on every foot.) In how many different orders may the spider put on his socks and shoes in the morning, provided that for any given foot, the sock needs to be put on before the shoe, but not necessarily directly before that. (Two orders are only distinguished by the order of the feet.)

New exercises for practice – competition C (see page 477): **Exercises up to grade 10: C. 1441.** A coffee shop serves coffee specials made from various ingredients. For any item selected from the menu there exist exactly three others that each have some ingredient in common with the selected item. If two menu items have no ingredient in common then there exists a third one that has an ingredient in common with each of the two. What is the maximum possible number of items on the menu of cofee specials? **C. 1442.** The sides a, b and c of a triangle satisfy $1=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$. Prove that $r\cdot R=\frac{1}{2}$, where r is the inradius and R is the circumradius. (Proposed by *Zs. M. Tatár,* Felsőgöd) **Exercises for everyone: C. 1443.** In how many different ways is it possible to represent 2017^3 as a sum of consecutive positive odd numbers? (Based on the idea of *L. Hommer,* Kemence) **C. 1444.** Solve the following inequality: $x^4-4x^3+8x^2-8x\leqslant 96$. **C. 1445.** The movie "The Englishman Who Went up a Hill but Came down a Mountain" is set in a Welsh village where the neighbouring mountain was designated as a hill by cartographers measuring its height. The villagers were too proud of their mountain to accept this. So they decided to raise its height from 984 feet to 1004 feet. They would carry earth onto the the hilltop shaped like a hemisphere of radius 82 feet, to build a truncated cone with its side tangent to the hemisphere and forming a 45° angle with the horizontal (see the *figure*). Thus the height will exceed 1000 feet and the hill would qualify to be called a mountain. How many cubic feet of earth need to be carried onto the hilltop? **Exercises upwards of grade 11: C. 1446.** Q is a point inside the parallelogram $ABCD$ such that $\angle AQB+\angle CQD=180°$. Prove that $\angle QBA=\angle QDA$ and $\angle QAD=\angle QCD$. **C. 1447.** The Hungarian term for probability theory is "valószínűség-számítás". What is the probability that by selecting and writing down two random characters from each of the words VALÓSZÍNŰSÉG, and SZÁMÍTÁS, the same two-letter string is obtained in both cases?

Problem **C. 1437.** was incorrectly stated in our October issue. Solutions for the corrected problem will be accepted together with those in the November issue.

C. 1437. Each of nine distinct lines divides the area of a square in a ratio 2 : 3 such that no line cuts off a triangle from the square. Prove that three out of the nine lines are concurrent.

New exercises – competition B (see page 478): **B. 4903.** Determine all positive integers a, b, c, d such that $abcd-1\mid a+b+c+d$. (*4 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 4904.** A plane figure S has exactly two axes of symmetry. Show that S has central symmetry, too. (*3 points*) **B. 4905.** Let $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\cdots\geqslant a_{2n-1}\geqslant a_{2n}\geqslant 0$, and $\sum_{i=1}^{2n}a_i=1$. Prove that $a_1a_2+3a_3a_4+5a_5a_6+\cdots+(2n-1)a_{2n-1}a_{2n}\leqslant\frac{1}{4}$. When will the equality hold? (*4 points*) **B. 4906.** The midpoints of sides BC and CD of a convex quadrilateral $ABCD$ are E and F, respectively. The line segments AE, EF and AF divide the quadrilateral into four triangles whose areas are four consecutive integers. What is the maximum possible area of triangle ABD? (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 4907.** 1×1 squares are placed on a rectangle of dimensions $a \times b$, with sides parallel to the sides of the rectangle. Prove that the maximum number of such squares without overlaps is $[a] \cdot [b]$ (where $[x]$ stands for the greatest integer not greater than the number x). (*5 points*) **B. 4908.** Let C denote an arbitrary point on the circumference of a circle of diameter AB. Let T be the perpendicular projection of point C onto the line segment AB. Draw the circle of centre C that passes through T. Let the intersections of the two circles be P and Q. Prove that line PQ bisects the line segment CT. (*4 points*) (*Kvant*) **B. 4909.** Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that the equation $x \cdot f(y) - y \cdot f(x) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ holds for all $x \neq 0$ and y. (*6 points*) (*Kvant*) **B. 4910.** Let P, Q, R and S denote points on the lines of the sides of a square $ABCD$ such that $AP = BQ = CR = DS$, as shown in the *figure.* Starting from an arbitrary interior point X of side AB, let the line PX intersect line BC at Y, let QY intersect line CD at Z, let RZ intersect line DA at V, and finally let SV intersect line AB at X'. Prove that if X' and X coincide then $XYZV$ is a square. (*5 points*) **B. 4911.** We have placed chessmen on a 8×8 chessboard. There is an odd number of chessmen standing in every row, and in every column. Prove that the total number of chessmen on the black fields of the chessboard is even. (*5 points*)

New problems – competition A (see page 480): **A. 707.** 100 betyárs stand on the Hortobágy plains. Every betyár's field of vision is a 100 degree angle. After each of them announces the number of other betyárs they see, we compute the sum of these 100 numbers. What is the largest value this sum can attain? **A. 708.** Let S be a finite set of rational numbers. For each positive integer k, let $b_k = 0$ if we can select k (not necessarily distinct) numbers in S whose sum is 0, and $b_k = 1$ otherwise. Prove that the binary number $0.b_1b_2b_3\ldots$ is a rational number. Would this statement remain true if we allowed S to be infinite? **A. 709.** Let $a > 0$ be a real number. Find the minimal constant C_a for which the inequality $C_a \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k - x_{k-1}} > \sum_{k=1}^{n} \frac{k+a}{x_k}$ holds for any positive integer n and any sequence $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ of real numbers.

Problems in Physics

(see page 506)

M. 372. Make a sandglass from a cylinder-shaped plastic (PET) water bottle. Make a small hole (of diameter approximately 8-10 mm) on the bottle cap through which the dry sand can flow out. Measure how the amount of the out-flowing sand in a unit of time depends on the height of the sand in the bottle.

G. 613. A vehicle undergoes circular motion at a constant speed of 72 km/h. How much time elapses until it gets back to the same point if its acceleration is 1.6 $\mathrm{m/s^2}$? **G. 614.** Disks of equal mass of m were attached to the ends of a negligible-mass spring of spring constant D. The disks and the spring in unstretched position are placed to an air-cushioned table, and they are given a velocity of v_0 in the direction of the axis of the spring. At a certain instant the disk at the back is suddenly stopped and held at rest. *a*) How much time elapses until the other disk turns back? *b*) What is the greatest extension of the spring and at most how much potential energy is stored in the spring? *Data:* $D = 16$ N/m, $m = 0.25$ kg, $v_0 = 2$ m/s. **G. 615.** A container, filled with water halfway, is sliding down (with some acceleration) along a long enough slope of angle of elevation of 30°. What is the angle between the surface of the water and the plane of the slope, if friction is negligible? **G. 616.** The radius of a thin-walled, negligible-mass gymnastic ball is 30 cm, the pressure of the enclosed air is $1.1 \cdot 10^5$ Pa, and the ambient air pressure is $1.0 \cdot 10^5$ Pa. How much does the volume of the ball decrease when a 50 kg person sits upon it with her total weight, if in this case the ball touches the ground along a circle of radius 10 cm? The temperature of the air is constant.

P. 4970. A vehicle travels from city A to city B. During the first part of the journey its average speed is v_1 whilst in the rest of the journey it is v_2. By what factor is the length of the second part of the journey longer than that of the first part if the average speed calculated for the whole journey is *a*) the arithmetic mean; *b*) the geometric mean; *c*) the harmonic mean; *d*) the weighted arithmetic mean of ratio $1 : k$ of the average speeds calculated for the two parts of the journey? **P. 4971.** A container, filled with water halfway, is sliding down with some acceleration along a long enough slope of angle of elevation of 30°. What is the angle between the plane of the slope and the surface of the water if the coefficient of kinetic friction between the container and the slope is 0.2? **P. 4972.** One end of a piece of unstretchable, light thread of length ℓ is suspended, whilst the other end is attached to a small ring which can slide without friction along a horizontal rod – at a height of $d < \ell$ above the point of suspension. The thread is held tight, and next to the rod a small object of mass m is placed by means of a pulley onto the thread, and then the system is released. *a*) What will the speed of the object be at the lowermost point of its path? *b*) Along what kind of curve does the object move? *c*) What is the extension in the thread at the lowermost point of the path? **P. 4973.** During a lecture given by Baintner, Géza (1892–1980) there was an experiment shown, that when three rubber strings are tied in a Y shape, and the two strings at the two symmetrical ends of the Y are vibrated totally out of phase, then the two waves cancel each other, and the third piece of the Y stayed at rest. Question: *What happens to the energy of the two waves?* **P. 4974.** A thermally insulated cylinder is attached to a trolley. In the cylinder an easily moveable, and thermally insulated piston of mass $M = 20$ kg separates two chambers of volume $V_0 = 50$ L, both containing air at a temperature of $T_0 = 300$ K, and at a pressure of $p_0 = 10^5$ Pa. The trolley moves towards a wall with speed $v = 10$ m/s, with which it collides totally inelastically. At most what may the temperature of the air be in that chamber which is closer to the wall? **P. 4975.** During an experiment carried out in a laboratory on the Earth, a small object of mass m and of charge Q is released in uniform horizontal magnetic field of induction B. (It can be assumed that $mg < QBc$ where c is the speed of light.) The motion of the object is observed until it reaches its lowermost position. *a*) What is the greatest speed of the object? *b*) To what depth does it sink? *c*) What is its average speed along the horizontal direction? *d*) What is the acceleration of the object at the lowermost point of its path? **P. 4976.** Three small balls are placed along a straight line, such that initially they do not move, and the distance between two neighbouring balls is d. The masses and the charges of the balls are m, $2m$, $5m$ and q, q, $2q$, respectively. *a*) What is the distance between the balls, and what is their velocity when a very short time of t_0 elapses after the balls start to move? *b*) What is the speed of the balls after a long enough time? (Apart from the electrostatic forces any other forces can be neglected.) **P. 4977.** The capacitors in the circuit shown in the *figure* are uncharged, before turning the switch on. At a certain moment the switch is closed. (Neglect the internal resistance of the voltage supply, the capacitance of the wires and the resistors, and the inductance of any of the elements in the circuit.) *Sketch* a graph of the voltage across the capacitors as a function of time. *Data:* $C_1 = 150\ \mu$F, $C_2 = 50\ \mu$F, $R_1 = 40$ kΩ, $R_2 = 10$ kΩ, $U_0 = 100$ V. **P. 4978.** In the engine of an ion propulsion rocket positive heavy ions are accelerated, such that these ions flow through the nozzle, and this accelerates the rocket. There is an electron accelerator on the rocket as well, why is it necessary? **P. 4979.** A drop of mercury of radius R and of surface tension α is floating in weightlessness. If the drop is placed into weak, uniform electric field of magnitude E_0, then the drop will extend in the direction of the electric field, its shape is nearly a rotational ellipsoid. Estimate the length of the extended mercury drop.