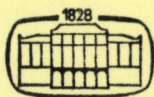


MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

62 KÖTET
1-3. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1982

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, KÉZDI ÁRPÁD, PROHÁSZKA JÁNOS, VÁMOS TIBOR

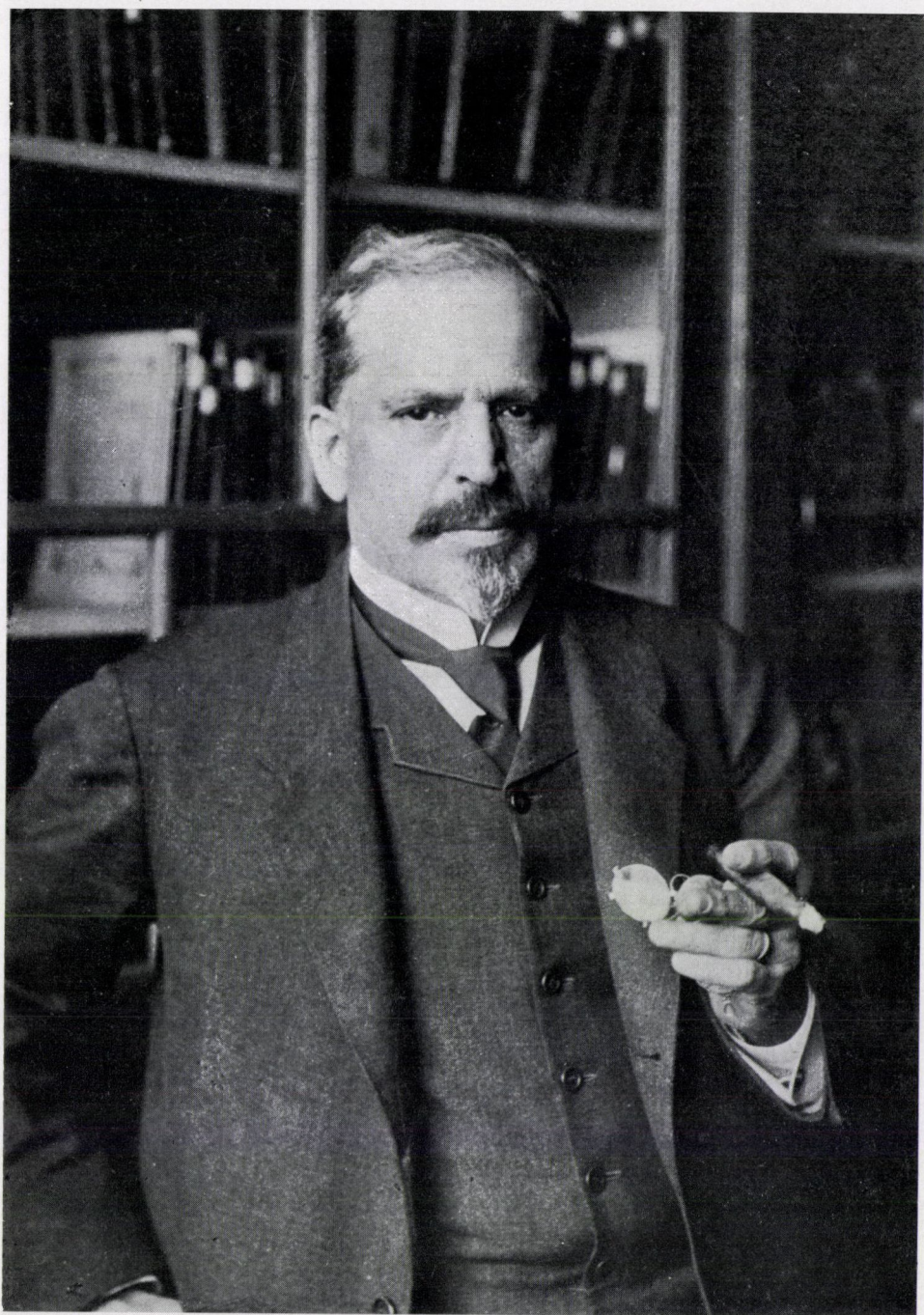
SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* jelen 62. kötet kiadásával a továbbiakig egyelőre szünetel.

További kéziratokat a szerkesztőség egyelőre nem fogad el.

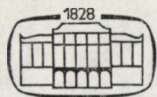
A 41.—62. kötetek összefoglaló tartalmjegyzékét jelen 62. kötet 4. füzeté tartalmazza.



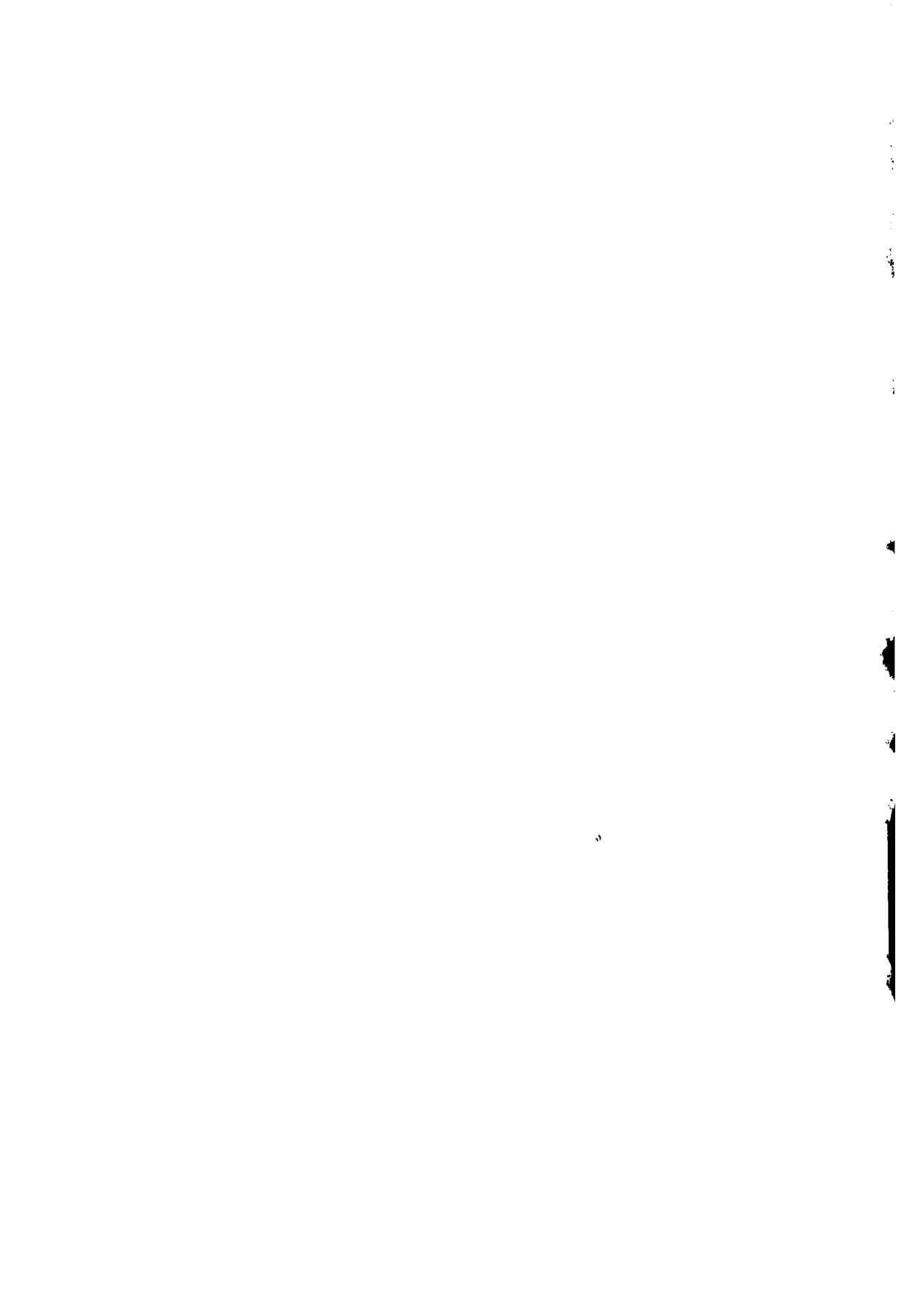


MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1982



MEGEMLÉKEZÉS BÁNKI DONÁTRÓL HALÁLÁNAK 60. ÉVFORDULÓJA ALKALMÁBÓL

BÁNKI Donát a Műegyetem nemzetközi hírű tanára, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja, korának egyik legnagyobb gépészmérnöke hatvan évvel ezelőtt, 1922. augusztus első napján hunyt el.

Illő, hogy az évfordulóval kapcsolatban megemlékezzünk az Akadémia egykori tagjáról, aki bámulatosan sokoldalú munkássága során a gépészet legtöbb ágában eredményeket ért el, megvalósítva az elmélet és gyakorlat egységét.

Technikai alkotásainak és tudományos munkásságának páratlan gazdagságát egy rövid megemlékezés keretében még csak felsorolni sem lehet. Ennek méltatása csak nagyszabású tanulmány keretében volna lehetséges. Így alkotó génuszát csak néhány utalással érzékeltethetjük.

Tudományos munkásságát a gázmotorok elméletének továbbfejlesztésével kezdte. E téren írt tanulmányai sorából elég arra utalnunk, hogy a négyütemű Otto-motorok megjelenése után 10 évig BÁNKIRA várt annak a haladás szempontjából fontos ténynek a megállapítása, hogy e motorok üzemanyag-fogyasztását a kompressziónyomás növelésével javítani lehet. Időközben CSONKA Jánossal együttműködve a magyar gázmotorgyártás megindítását teremtik meg, szabadalmaikat a Ganz-gyárnak eladva. Ezt követően a folyékony tüzelőanyag felhasználását tette lehetővé a Bánki—Csonka-motor és annak lényeges részét képező, a világon elsőként készített karburátor. BÁNKI és CSONKA együttműködése nemcsak egy új magyar iparágat teremtett, hanem találmányuk az automobilizmus alapját is megvetette.

BÁNKI további tudományos érdemei közül áramlástanai munkásságát és alkotásait kell elsősorban kiemelni. Jelentős része volt a gőzturbinák elméletének továbbfejlesztésében, elsősorban a fellépő súrlódási veszteségek analízisa révén. Itt kell megemlíteni „Vízgőz táblázat” c. munkáját, amelyet a tervezés megkönnyítésére dolgozott ki az expanzió munkájának különböző nyomáshatárok közötti egyszerű megállapítására. Táblázatát a dugattyús hűtőgépekkel dolgozó hűtőrendszerek számításánál ma is használják, de aligha tudják, hogy ezt BÁNKI készítette. Ez a munkássága nemzetközi szaktekintéllyé tette a gőzturbinák területén. Áramlástanai munkásságának eredményei közé tartozik a Bánki-turbina. Ez a kettős átömlésű szabadsugar turbina különle-

ges helyet foglal el a vízturbinák családjában, mivel a szabadsugár Pelton-turbina és a réstúlnyomásos Francis-turbina között foglal helyet. Maga BÁNKI is határturbinának nevezte. A Bánki-turbina alkalmas volt az akkoriban még nagy számban alkalmazott vízikerekek helyettesítésére.

BÁNKI sokoldalú munkásságát olyan témák kidolgozásai is tükrözik, amelyek a kedvezőtlen körülmények, vagy korát meghaladó elgondolásai miatt nem valósulhattak meg. Ilyen volt a Kissármás–Budapest közötti gázvezeték terve, amelynek kidolgozása során az ilyen csővezetékek tervezésének elméletét is lefektette. A közben kitört az első világháború miatt végleg elestünk a hazai föld eme kincsétől. A jövő számára alkotta meg „Vaskapu-víz-erő tervezete” c. lenyűgöző méretű elgondolását, amelynek megvalósítását ugyancsak a világháború akadályozta meg. Korát megelőző munkásságai közé sorolhatók a repülőgépek gépi kormányzásával, a repülőgép stabilizáló berendezéssel, a magasságszabályozóval, a gépkocsik első kerékajtásával foglalkozó tanulmányai és kísérletei.

Hiányos volna megemlékezésünk tanári munkájának és közéleti tevékenységének megemlítése nélkül. Az oktatás és a gépészmérnökök képzése BÁNKI tanári kinevezésével sokat nyert. Nagy ipari tapasztalata, konstruktóri tevékenysége és tudományos munkái, alkotásai révén a hallgatók konstrukciós készségét tudta eredményesen fejleszteni. Nagy érdeme a laboratóriumi képzés bevezetése a saját tervei szerint épített laboratóriumban, amelynek alaptervezései még ma is üzemben vannak. A háborúból visszatért hallgatói felkészülését segítette elő saját kezűleg írt és rajzolt litografálással sokszorosított terjedelmes jegyzettel, amelyben az „Energiaátalakulások folyadékokban” c. könyve második kötetének anyagát készítette elő. Dékáni jövedelmének nagy részét szegény diákjainak támogatására fordította.

A mérnöki kar helyzetét, műszaki tudományok fejlődését, a mérnök-képzést állandóan figyelemmel kísérte. Erről számos írása tanúskodik. Mélyen bántotta a műszaki tudományok elismerése körüli vita. Akadémiai székfoglaló előadásának bevezető szavai is erre utalnak.

BÁNKI Donát munkásságának óriási terjedelmét és sokrétűségét e pár sorral aligha lehet érzékeltetni. Száznál több tudományos munkája, kísérleteinek hosszú sora, alkotásai, csak száraz adalékok annak a rejtélynek a megértéséhez, hogyan tudott ennyit alkotni korának kezdetleges ipari és közgazdasági állapotában. Talán abban van e rejtély kulcsa, hogy folyton dolgozott, és új utakat kereső géniusza szerencsésen egyesítette az elmélet és gyakorlat szempontjait.

A Budapesti Műszaki Egyetem bicentennáriumi ünnepségén a rektor az Egyetem egyik sok nemzetközi elismerést hozó korszakát így jellemezte: „Tanár és tanítvány, Bánki és Kármán”. Ez a lakonikus utalás egyben Bánki Donát legtalálóbb méltatása.

Varga József

FÁZISMOZGÁSOK TALAJOKBAN

KÉZDI ÁRPÁD

[Beérkezett: 1982. október 21-én]

A talajok mint szemcsés közegek, több, különböző halmazállapotú anyag részecskéiből állnak. Ezek a részecskék különböző hatásokra mozgást végeznek; e mozgások nagysága és iránya szabja meg azt, hogy a fázisos összetétel, ami a talaj állapotát jellemzi, a hatások következtében milyen változást szenved. Ha például egy lőszerrege terhelést működtetünk, akkor a fázisos összetétel változása tömörebb talajt eredményez, a kezdeti állapotra jellemző (s_0, v_0, l_0) számhármassal megváltozik, de a talaj víztartalma ugyanaz marad. Ha a terhelés alatt álló lösz felülről vízzel árasztjuk el, akkor a roskadás és összenyomódás miatt a fázisos összetétel újból — és jelentősen — módosul, a változást a háromszögdiagram szemléletesen bemutatja (1. ábra).

Ha a fázismozgást egészen általánosan definiáljuk, akkor könnyen belátható, hogy az alakváltozások és a törési folyamatok is fázismozgás kíséretében mennek végbe: gondoljunk pl. a gátalatti szivárgásra, egy agyagréteg összenyomódására, egy alaptest alatti alaptörésre stb.

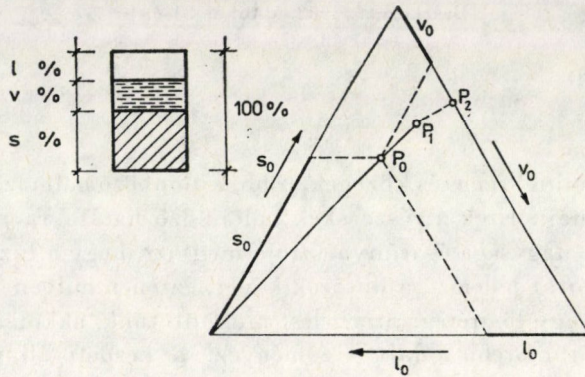
Ha ismernénk a talaj három fázisában működő feszültségeket, és az egyes fázisok — esetleg pontonként változó — elmozdulásainak nagyságát, irányát és sebességét a vizsgált talajtömeg minden egyes térfogatelemében, akkor kezünkben lenne minden talajmechanikai probléma megoldásának kulcsa. Sajnos, az az állapotegyenlet, amely a földtömeg minden egyes pontjára leírja az összefüggést a feszültség és az alakváltozás között, minden pontra és minden egyes fázisra vonatkozóan még nem ismert. Egyelőre tehát olyan részproblémákat oldhatunk meg, melyek gyakorlati szempontból fontosak. Reméljük, hogy ezek a részproblémák később hozzá fognak segíteni az általános megoldás kidolgozásához.

• Ez a cikk is két részprobléma megoldását mutatja be; az egyik: *vízmozgás telítetlen talajokban*, a másik: *vízbehatolás duzzadó talajokba*.

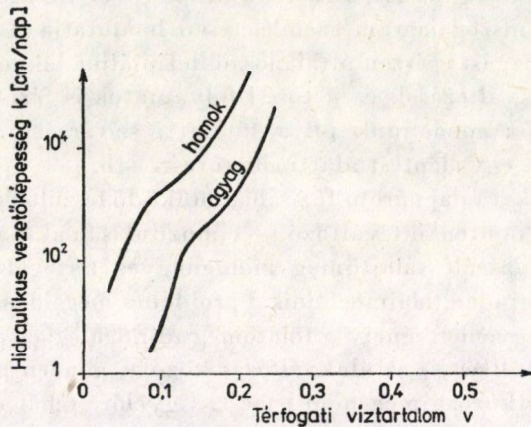
Ha egy száraz talaj felszínén víz szivárog be a talajba, akkor ez általában nem telíti a megnedvesített talajt, és így a vízmozgás telítetlen talajban megy végbe. A „telített” talaj hézagjaiban is van levegő; nem ritkán 2—12% térfogatszázalékban ($l = 2—12\%$).

A vízmozgás — már mint a cseppfolyós fázisnak a mozgása — sok esetben a *kapilláris potenciál* miatt következik be. A kapilláris potenciál gradiense

a víztartalomban jelentkező *különbség* függvénye. A kapillaris vízmozgás fogalma magában foglalja azt a vízmozgást, amely a *kapillaris potenciál gradiense* miatt jön létre, tetszőleges irányban, ha a vízmozgás gradiense nem zérus, vagyis ha a talaj nem telített.



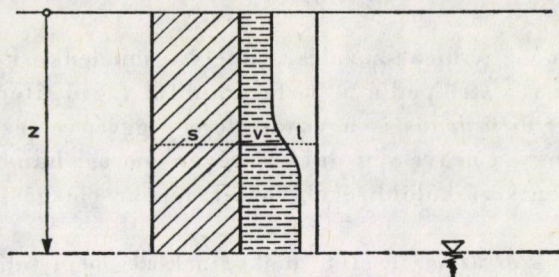
1. ábra. Löss fázisváltozásai sztatikus terhelés ($P_0 - P_1$) és vízelárasztás hatására ($P_1 - P_2$)



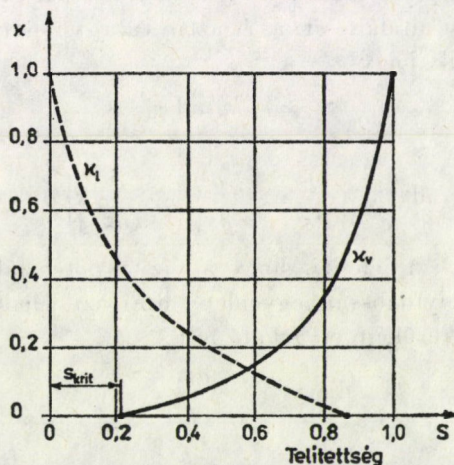
2. ábra

A nem telített talajban a *Darcy-törvény* nem érvényes, a *k* átteresztőképességi együttható nem állandó; hanem a víztartalom csökkenésével szintén csökken, vagy amikor a talajvíz negatív potenciálja is csökken. Ezt az összefüggést a 2. ábra mutatja be. Minthogy az átteresztőképesség a pórusok átmérőjének hatványával arányos (l. pl. a *Koženy—Carman-féle* összefüggést), az átfolyt vízmennyiség zömét a nagy pórusok szolgáltatják. Ez magyarázza meg, hogy miért alakul ki egy közel állandó víztartalom a talajban a térszínen (l. 3. ábra).

Ha bevezetjük a *relatív-víz*, ill. *levegő-áteresztőképesség* fogalmát, mely a tényleges áteresztőképességi együttható és a telített talajban érvényesülő áteresztőképességi együttható viszonya, akkor ez értékeknek a *telítettség függvényében* való ábrázolása jól rámutat a jelenség sajátosságaira.



3. ábra. A talaj fázisos összetételének változása a magasság függvényében a talajvíz szintje fölött



4. ábra

Mint a 4. ábrán látható, a $\kappa_{\text{v}}_{\text{v}}_{\text{íz}}$ mennyiségének van egy küszöbértéke, melynél kisebb telítettség mellett a bejutó víz kezdetben csak a telítettség növelésére fordítódik, folyamatos áramlás nem lép fel. A κ_1 mennyiségnek viszont van egy felső értéke, amely mellett a talaj már *kvázi-telített*, összefüggő légszatórnák nincsenek, s a levegőt a talaj csak úgy bocsátja át, ha a levegőáram először a víz egy részét kisajtolja a talajból, tehát annak telítettségét csökkenti.

A telítetlen talajban az egydimenziós vízmozgás leírásához két állandóra van szükség: az *áteresztőképességre* és a *diffuzivitásra*. Ezeket az egydimenziós

vízmozgás esetére a következő összefüggésekkel definiáljuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -k(v) \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}}, \\ \mathbf{v} &= D(v) \frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Az egyenletben v a víz térfogatszázaléka, amely a mindenkori víztartalom és a távolság függvénye; $k(v)$ pedig a víztartalomtól függő áteresztőképességi együttható. A $D(v)$ *diffuzivitás* is a víztartalom függvénye (ez a diffuzivitás nem azt jelenti, hogy a nedvesség diffúzió révén mozog, hanem azt, hogy a víztartalomban jelentkező különbségek hozzák létre a mozgást). A v érték a szivárgási sebesség.

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a közeg nem telített, de a vízmozgás során — vagy annak következtében — a talaj vázszerkezetében változás nincsen, tehát *térfogatváltozás sem következik be*. A folyamat elemzéséhez közelítően feltesszük, hogy a Darcy-törvény a telítetlen talajban is érvényes. A hidraulikus gradienst általánosítva, és azt a talaj-víz-potenciál gradiensevel helyettesítve felírhatjuk, hogy

$$\mathbf{v} = -k \text{grad } \psi \quad (2)$$

Itt \mathbf{v} a sebességvektor, és

$$\text{grad } \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \psi.$$

A negatív előjel azt jelenti, hogy a víz a potenciál csökkenő értékei irányában folyik. A folytonosság egyenlete, ami azt jelenti, hogy nincs térfogatváltozás, a következőképpen írható fel:

$$\text{div } \mathbf{v} = - \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (3)$$

ahol

$$\text{div } \mathbf{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \mathbf{v}.$$

Itt v a térfogat szerinti víztartalom.

Ha a (3) egyenletet a (2) összefüggésbe helyettesítjük, akkor megkapjuk az általános háromdimenziós diffúziós egyenletet:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \text{div} (k \text{grad } \psi). \quad (4)$$

Vízszintes irányú vízmozgás esetében a *nehézségi erő potenciálja zérus*. Ekkor a (4) egyenlet egyszerűsödik:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(D(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (5)$$

Az egyenlet megoldását megkönnyíti, ha bevezetjük a víz diffúziós együtthatóját:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \psi),$$

$$D(v) = k(v) \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right). \quad (6)$$

Ekkor

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(v) \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (8)$$

A (7) egyenlet megoldása grafikus (és kísérleti) úton lehetséges; ekkor $v = f(x)$ alakban kapjuk meg az eredményt. Az egyenlet függőleges vízmozgás esetére is levezethető; ekkor

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial k}{\partial z}. \quad (9)$$

Ez az egyenlet a kerületi feltételek figyelembevételével *analitikusan* is megoldható. Újból rá kell viszont mutatni a levezetés során használt feltevésekre: ezek (1) a Darcy-féle törvény érvényes és (2):

$$D = D(v),$$

ami a

$$D(v) = k(v) \frac{\partial \psi}{\partial v} \quad (10)$$

definícióból következik.

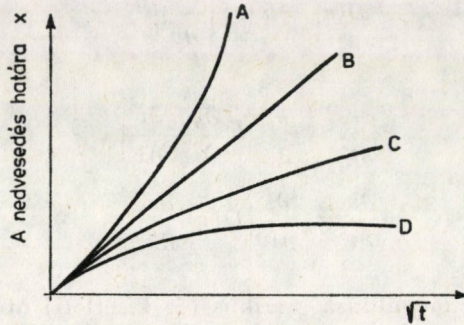
Azokban az esetekben, amelyekben nincs térfogatváltozás, a beszívárgás mértéke és az ehhez szükséges idő négyzetgyöke között *lineáris összefüggés* van. (L. KÉZDI: Soil Physics, Selected Topics. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.)

A teljes megoldás csak térbeli koordinátarendszerben lenne ábrázolható. A teljes víztartalom egy adott időpontban a $v - z - \sqrt{t}$ felülettel határolt test köbtartalmából számítható.

A telítetlen talajban létrejövő vízmozgás, mint az előbbi pontban láttuk, a $\sqrt{t} - x$ koordinátarendszerben egyenessel ábrázolható (5. ábra; B jelű vonal).

Az A és C vonal esetében az egyenestől való eltérés azért jön létre, mert az áramlás folyamán *térfogatváltozás* lép fel. Ez a térfogatváltozás lehet *roskadás*, mint pl. laza talajok esetében, amikor a szerkezet az állandó vízutánpótlás hatására a nedves front előrehaladása során *roskad* (A vonal), vagy térfogat-

növekedés, duzzadó talajban (C görbe). A D jelű vonal az arra az esetre jellemző, amikor a talaj vízzel nem telített, és duzzadásra hajlamos, a duzzadás bekövetkeztét pedig megakadályozzuk. Ilyen körülmények között duzzadási nyomás lép fel, s ennek megfelelően változnak a vízmozgás karakterisztikái.



5. ábra

A (3) egyenlet tehát egyik esetben sem érvényes, úgy kell megváltoztatni, hogy szerepeljen benne a térfogatváltozás. A térfogatváltozást úgy fogjuk fel, mint a *szilárd szemcsék mozgását*, áthaladását a $(dx \cdot dy \cdot dz)$ elemi hasábon. Ha egydimenziós mozgást vizsgálunk, az x irányban, az elemi hasáb ki kell, hogy elégítse az anyagmegmaradás törvényét, vagyis

$$\frac{\partial v_{sx}}{\partial x} = - \frac{1}{s} \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (11)$$

ahol v_{sx} a talajrészecskék sebessége az x irányban. Minthogy

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad (12)$$

ahol v a fajlagos térfogatváltozás, felírható, hogy

$$\frac{\partial v_{sx}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (13)$$

A folyadék sebessége két részből tevődik össze: (a) a mozgó talajrészecskékhez viszonyított *folyadékmozgás* és (b) a *szilárd részecskék mozgása* a cseppfolyós fázisban:

$$v_x = v_{vsx} + v v_{sx}. \quad (14)$$

Differenciálva és figyelembe véve a Darcy-féle törvényt (a folyadék sebességét a mozgó szilárd szemcsék sebességéhez képest értelmezve) azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial t} .$$

A D diffúziós állandóra ugyanazt a feltevést használva, mint a (9) egyenletben,

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial v}{\partial t} . \quad (15)$$

A folytonossági egyenlet most azt fejezi ki, hogy a víztartalom változik az időben, vagyis ∂_v/∂_t egyenlő kell, hogy legyen a (15) egyenletben szereplő $\partial v_x/\partial x$ mennyiséggel, hisz a megfelelő térfogatváltozást már figyelembe vettük. Így a

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial t}$$

egyenlőségből megkapjuk az egydimenziós vízszintes vízmozgás esetében telítetlen állapotra vonatkozó diffúziós egyenletet:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial v}{\partial x} \right) - v \frac{\partial v}{\partial t} . \quad (16)$$

Ez tehát az általánosított diffúziós *egyenlet*, mely figyelembe veszi a *térfogatváltozást is*. Ha a talajvíz-rendszer *merev* marad, vagyis a vízmozgás során térfogatváltozás nem lép föl, akkor $\partial_v/\partial_t = 0$, és ekkor a korábban felírt alakhoz jutunk, a D , k , v értékeket meg tudjuk határozni. Az erre vonatkozó megállapításokkal, a kísérleti meghatározás módjával és alkalmazásokkal a szerző egy későbbi alkalommal fog foglalkozni.

KVÁZISZIMMETRIA KIHASZNÁLÁSÁN ALAPULÓ KÖZELÍTŐ SZÁMÍTÁSI MÓDSZER VASÚTI KOCSIK KERESZTIRÁNYÚ REZGÉSEINEK VIZSGÁLATÁRA

MICHELBERGER PÁL*—FERENCZI MIHÁLY**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1981. március 14-én]

Cikkünkben egy vasúti koci keresztirányú rezgéseit leíró modellen mint példán, olyan módszert és vele szerzett tapasztalatokat mutatunk be, amelyek a kváziszimmetria hatását alkalmas transzformációkkal redukálva teszik lehetővé a modell kis elhanyagolással történő független részekre való bontását. Feladatunk nemcsak mint kváziszimmetrikus lineáris rezgőrendszer, hanem mint sorozatos analízissel megoldott szintézisfeladat is, tágabb feladatosztályba tartozik.

1. Bevezetés

Járművek statikai és dinamikai vizsgálatának egyik alapvetően meghatározó lépése az alkalmas számítási modell megválasztása. A modell valóság-szerűségét két — inkább csak technikai okból különválasztott — tényező: a minőségi és a mennyiségi részletezettség határozza meg. Az előbbi lényegében a figyelembe vett fizikai jelenségek, az utóbbi pedig a részekre bontás mélysége útján befolyásolható.

Véges szabadságfokú rendszerek esetében a felbontás részletezettségének növelése kézenfekvő és gyakran alkalmazott módszer (pl.: síkbeli modelltől térbeli modellre áttérés, az önkényesen diszkretizált kontinuumon a felosztás sűrítése stb.).

A modell kezelésében manapság döntő szerepet játszó számítástechnikai eszközök hatása kettős: egyfelől egy, a korábbinál teljesítőképebb eszköz az addig szokásos méretű és bonyolultságú feladat kedvezőbb kezelése révén nagyobb feladatok kitűzése irányába ösztönöz, másfelől azonban az ily módon megnövekedett anyagi, szellemi, számítási és kiértékelési ráfordítások csökkentését igényli, minthogy a gépi erőforrások növekedését általában csak jelentős késéssel, vagy egyáltalán nem követi a többi erőforrás (pl.: a gyártmánytervezés módszere, ill. a gyártmány előállítási technológiája által biztosított pontosság).

Minthogy az esetek zömében a vizsgált jelenség kielégítő leírása már önmagában is adott bonyolultsági foknál egyszerűbb modelleket gyakorlatilag kizár, ugyanakkor a vizsgálat megkívánt mélysége, az eredmények adott fizikai környezetre való értelmezhetősége szintúgy a megfelelően finomított modelle-

* Prof. Dr. Michelberger Pál 1111 Budapest, Egri J. u. 19–21.

** Dr. Ferenczi Mihály 1107 Budapest, Rabinovics J. u. 14.

zés irányába mutat, ezért a számítási és elemzési munkaráfördítés csökkentésének a modell szimplifikálása útján történő megközelítése napjainkban már csak előtanulmányként fogadható el.

A megoldást tehát elsősorban a modellek kezelésének technikája terén kell keresni. Erre — egymást kiegészítve — alkalmasak a matematikai modellel végrehajtott transzformációk és a hatékony, kifinomult gépi módszerek.

Cikkünkben egy geometriailag szimmetrikus, állandó sebességgel haladó vasúti kocsik keresztirányú rezgéseit leíró kváziszimmetrikus, lineáris modell olyan transzformációját mutatjuk be, amely a modellezési pontosság észrevehető romlása nélkül — könnyen előállítható — közelítőleg független alrendszereket eredményezve, jelentősen redukálja a feladat megoldásához szükséges számítási munkát.

A vasúti kocsik modell és a rajta végzett vizsgálatok két szempontból is tág feladatosztályból származónak tekinthetők. A tágabb feladatosztályba sorolás egyik alapja a közelítő szerkezeti szimmetria. Ismeretes, hogy nemcsak a vasúti kocsik, hanem a szárazföldi, vízi és légi járművek többsége legalább egy síkra szembetűnően szimmetrikus, illetve a vázszerkezet tekintetében kváziszimmetrikus.

Szimmetrikusnak nevezzük a szerkezetet és egyben a feladatot is, ha található olyan koordináta-rendszer és koordinátasorrend, melyben a „leíró egyenlet” (statikai vagy dinamikai) együttható mátrixa a mellékátlóra is szimmetrikus, azaz az $n \times n$ elemű mátrix elemeire teljesül az

$$a_{i,k} = a_{k,i} = a_{n-i+1, n-k+1} = a_{n-k+1, n-i+1} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2 \dots n \\ k = 1, 2 \dots n \end{array} \quad (a)$$

összefüggés.

Kváziszimmetrikusnak tekintjük a feladatot, ha az előzőek szerint választott koordináta-rendszerben és -sorrendben n -hez képest kevés elemre nem teljesül az (a) összefüggés, azaz

$$a_{ik} = a_{ki} \neq a_{n-i+1, n-k+1} = a_{n-k+1, n-j+i+1} \quad (b)$$

néhány i -re és k -ra. A szimmetriazavarok lokálisak és a szerkezet vizsgálatakor sok esetben önkényesen szimmetrizált modelleket alkalmaznak.

Korábbi cikkünkben [1] megmutattuk, hogy a szimmetria, illetve kváziszimmetria lineáris modell alkalmazása esetében a számítási és kiértékelési munkai igény lényeges csökkentését teszi lehetővé.

A tágabb feladatosztályba tartozás azonban a feladat más jellemzője alapján is felvethető. Vizsgálataink technikája sorozatos analízis, bizonyos tulajdonságok extremálása céljából, illetve adott feltételeknek eleget tévő szerkezet felkutatása, változtathatónak tekintett paramétereinek sorozatos értékadása és azt követő analízis révén. Ez valójában szintézisfeladatok megoldásának keresése sorozatos analízis útján.

A fenti okok miatt — bár feladatunkat vasúti kocsik keresztirányú szabad rezgéseinek vizsgálatára alkalmas modellre tűzzük ki, és vizsgálatainkat is egy ilyen modellen konkretizáljuk —, megállapításaink, illetve a feladatmegoldás technikája általánosságban a kváziszimmetrikus lineáris rendszerek és az ilyen modellek sorozatos analízisével megoldható szintézisfeladatok tág körére alkalmazhatók.

2. Vasúti kocsik keresztirányú mozgásai

Mintegy másfélszáz év óta ismeretes az, hogy a (szokásos) kúpos felületű kerékpárokkal szerelt vasúti kocsik hibamentes, sík, egyenes pályán, állandó sebességgel történő előrehaladása során — lényegében tehát külső gerjesztés hiányában is — zavaró oldalirányú mozgásokat végez. E jelenség — ismert nevén: kigyózás, szinuszfutás — egyszerűbb megközelítésben úgy modellezhető, hogy a rúgózott részeket (forgóvázkeretek és kocsiszekrény) a kerékpároknak azon periodikus mozgása gerjeszti, amelynek frekvenciája csak a pálya és a jármű geometriai paramétereitől, valamint a haladási sebességtől függ; e gerjesztésre a rúgózott részeknek nincs számottevő visszahatásuk [2, 3].

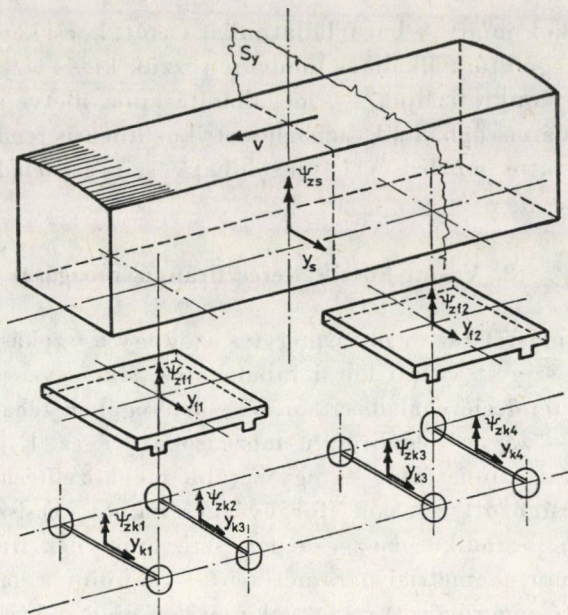
Az említett modellképzés majdnem száz évig szinte egyeduralkodó volt, azonban közel két évtized óta egyre szélesebb körben alkalmaznak olyan modelleket a tágabb értelemben vett kigyózási jelenség leírására, amelyek a kerék és a sín helyi rugalmas deformációja révén a rúgózott részek és a kerékpárok között létrejövő visszacsatolást is figyelembe veszik. Minden más — többnyire másodlagos befolyású — jelenség (pl.: pörgettyűhatás) figyelmen kívül hagyása mellett is az említett hatás lineáris modellezése a rendszerben, illetve annak mozgásegyenleteiben merevségi aszimmetriaként, valamint a haladási sebességtől függő járulékos csillapítás formájában [2, 3] jelenik meg.

A valóságos járműszerkezet olyan, hogy az azonos funkciójú fődarabok (forgóvázkeretek, kerékpárok) kapcsolati rendszereikkel együtt a kocsiszekrényt keresztben átszelő szimmetriasíkra nézve felcserélhetőek, vagyis a jármű szimmetrikus (1. ábra). Az erős külső szimmetria alapján azt várjuk, hogy előző cikkünkben [1] vázoltak nyomán tudunk olyan kongruens transzformációsorozatot szerkeszteni, amely néhány (véges számú) lépés után lehetővé teszi, hogy a dinamikai vizsgálatot is széteső — vagyis legalább felezett méretű — modellpáron végezhesük.

A jármű vízszintes, egyenes pályán, állandó sebességgel történő előrehaladásához tartozó (öngerjesztett) keresztirányú mozgásokat lineáris közelítés mélységéig az

$$M\ddot{y} + K(v)\dot{y} + Sy = 0 \quad (1)$$

differenciálegyenlet jellemzi, ahol M a tömeg, K a csillapítás-, S a merevségi mátrixot, y a választott koordináták vektorát, v pedig a haladási sebességet



1. ábra

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ \underline{\underline{M}} = & \langle m_k, \theta_{zk}, m_k, \theta_{zk}, m_f, \theta_{zf}, m_s, \theta_{zs}, \theta_{zf}, m_f, \theta_{zk}, m_k, \theta_{zk}, m_k \rangle \\ \underline{\underline{Y}} = & \left[\ddot{Y}_{k1}, \ddot{\psi}_{zk1}, \ddot{Y}_{k2}, \ddot{\psi}_{zk2}, \ddot{Y}_{f1}, \ddot{\psi}_{zf1}, \ddot{Y}_s, \ddot{\psi}_{zs}, \ddot{Y}_{f2}, \ddot{\psi}_{zf2}, \ddot{Y}_{k3}, \ddot{\psi}_{zk3}, \ddot{Y}_{k4}, \ddot{\psi}_{zk4} \right]^T \end{array}$$

2. ábra

jelöli. Amennyiben a kocsiszekrényt, a forgóvázkereteket és a kerékpárokat is kétszabadságfokú merev testként modellezzük, úgy, hogy egyik koordináta a súlypont keresztirányú (y) transzlációja, a másik pedig a súlyponton átmenő függőleges tengely körüli (ψ) rotáció, akkor a mozgásegyenletek részletezve a 2., 3. és 4. ábrán láthatók. A mátrixokban található jelölések részben geometriai, részben merevségi, csillapítási és tömeg(eloszlási) jellemzőket tartalmaznak; közülük vizsgálatunk szempontjából definiálandókkal később foglalkozunk, míg az itt most érdektelenek tekintetében a [2] irodalomra hivatkozunk.

3. A mozgásegyenletek transzformációs lehetőségei

A járműmodellképzés szempontjából részletezett — vázlatot, valamint a szimmetriaviszonyokat és kiindulási koordinátaválasztást az 1. ábra mutatja.

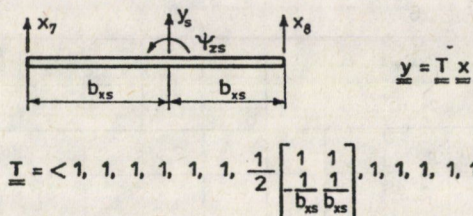
Szembetűnő, hogy az „ S_y ” sík által jelzett fő geometriai szimmetriát elsősorban két tényező bontja meg: egyfelől a kocsiszekrény y_s, ψ_{zs} transzlációs-

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | |
|----|--------------------|-------------------------------|--------------------|-------------------------------|---------------------|---|-----------------|------------------------|---|---------------------|--------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------|--------------------|
| 1 | $2k_{yk} + 2F_0/v$ | | | | $-2k_{yk}$ | $-2k_{yk}b_{x1}$ | | | | | | | | | \dot{y}_{k1} |
| 2 | | $2k_{yk}b_{yk} + 2F_0e_0^2/v$ | | | | $-2k_{yk}b_{yk}^2$ | | | | | | | | | $\dot{\psi}_{zk1}$ |
| 3 | | | $2k_{yk} + 2F_0/v$ | | $-2k_{yk}$ | $2k_{yk}b_{x1}$ | | | | | | | | | \dot{y}_{k2} |
| 4 | | | | $2k_{yk}b_{yk} + 2F_0e_0^2/v$ | | $-2k_{yk}b_{yk}^2$ | | | | | | | | | $\dot{\psi}_{zk2}$ |
| 5 | $-2k_{yk}$ | | $-2k_{yk}$ | | $4k_{yk} + 2k_{ys}$ | | $-2k_{ys}$ | $-2k_{ys}b_{xs}$ | | | | | | | \dot{y}_{t1} |
| 6 | $-2k_{yk}b_{x1}$ | $-2k_{yk}b_{yk}^2$ | $2k_{yk}b_{x1}$ | $-2k_{yk}b_{yk}^2$ | | $k_t + 4k_{yk}b_{x1}^2 + 4k_{yk}b_{yk}^2$ | | $-k_t$ | | | | | | | $\dot{\psi}_{zt1}$ |
| 7 | | | | | $-2k_{ys}$ | | $4k_{ys}$ | | | $-2k_{ys}$ | | | | | \dot{y}_s |
| 8 | | | | | $-2k_{ys}b_{xs}$ | $-k_t$ | | $2k_t + 4k_{ys}b_{xs}$ | $-k_t$ | $2k_{ys}b_{xs}$ | | | | | $\dot{\psi}_{zs}$ |
| 9 | | | | | | | | $-k_t$ | $k_t + 4k_{yk}b_{x1}^2 + 4k_{ys}b_{yk}^2$ | | $-2k_{yk}b_{yk}^2$ | $-2k_{yk}b_{x1}$ | $-2k_{yk}b_{yk}^2$ | $2k_{yk}b_{x1}$ | $\dot{\psi}_{zt2}$ |
| 10 | | | | | | $-2k_{ys}$ | $2k_{ys}b_{xs}$ | | | $4k_{yk} + 2k_{ys}$ | | $-2k_{yk}$ | | $-2k_{yk}$ | \dot{y}_{t2} |
| 11 | | | | | | | | | $-2k_{yk}b_{yk}^2$ | | | $2k_{yk}b_{yk}^2 + 2F_0e_0^2/v$ | | | $\dot{\psi}_{zk3}$ |
| 12 | | | | | | | | | $-2k_{yk}b_{x1}$ | $-2k_{yk}$ | | $2k_{yk} + 2F_0/v$ | | | \dot{y}_{k3} |
| 13 | | | | | | | | | $-2k_{yk}b_{yk}^2$ | | | | $2k_{yk}b_{yk}^2 + 2F_0e_0^2/v$ | | $\dot{\psi}_{zk4}$ |
| 14 | | | | | | | | | $2k_{yk}b_{x1}$ | $-2k_{yk}$ | | | | $2k_{yk} + 2F_0/v$ | \dot{y}_{k4} |

3. ábra

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | |
|----|--------------------------------|--------------------|--------------------------------|--------------------|---------------------|---|-----------------|--------------------------|---|---------------------|--------------------|-------------------|--------------------------------|--------------------------------|--------------|
| 1 | $2S_{yk}$ | $-2F_0$ | | | $-2S_{yk}$ | $-2S_{yk}b_{x1}$ | | | | | | | | | y_{k1} |
| 2 | $2F_0 \frac{\lambda e_0}{r_0}$ | $2S_{yk}b_{yk}^2$ | | | | $-2S_{yk}b_{yk}^2$ | | | | | | | | | ψ_{zk1} |
| 3 | | | $2S_{yk}$ | $-2F_0$ | $-2S_{yk}$ | $2S_{yk}b_{x1}$ | | | | | | | | | y_{k2} |
| 4 | | | $2F_0 \frac{\lambda e_0}{r_0}$ | $2S_{yk}b_{yk}^2$ | $-2S_{yk}b_{yk}^2$ | | | | | | | | | | ψ_{zk2} |
| 5 | $-2S_{yk}$ | | $-2S_{yk}$ | | $4S_{yk} + 2S_{ys}$ | | $-2S_{ys}$ | $-2S_{ys}b_{xs}$ | | | | | | | y_{t1} |
| 6 | $-2S_{yk}b_{x1}$ | $-2S_{yk}b_{yk}^2$ | $2S_{yk}b_{x1}$ | $-2S_{yk}b_{yk}^2$ | | $S_t + 4S_{yk}b_{x1}^2 + 4S_{yk}b_{yk}^2$ | | $-S_t$ | | | | | | | ψ_{zt1} |
| 7 | | | | | $-2S_{ys}$ | | $4S_{ys}$ | | | $-2S_{ys}$ | | | | | y_s |
| 8 | | | | | $-2S_{ys}b_{xs}$ | $-S_t$ | | $2S_t + 4S_{ys}b_{xs}^2$ | $-S_t$ | $2S_{ys}b_{xs}$ | | | | | ψ_{zs} |
| 9 | | | | | | | | $-S_t$ | $S_t + 4S_{yk}b_{x1}^2 + 4S_{yk}b_{yk}^2$ | | $-2S_{yk}b_{yk}^2$ | $-2S_{yk}b_{x1}$ | $-2S_{yk}b_{yk}^2$ | $2S_{yk}b_{x1}$ | ψ_{zt2} |
| 10 | | | | | | $-2S_{ys}$ | $2S_{ys}b_{xs}$ | | | $4S_{yk} + 2S_{ys}$ | | $-2S_{yk}$ | | $-2S_{yk}$ | y_{t2} |
| 11 | | | | | | | | | $-2S_{yk}b_{yk}^2$ | | | $2S_{yk}b_{yk}^2$ | $2F_0 \frac{\lambda e_0}{r_0}$ | | ψ_{zk3} |
| 12 | | | | | | | | | $-2S_{yk}b_{x1}$ | $-2S_{yk}$ | $-2F_0$ | $2S_{yk}$ | | | y_{k3} |
| 13 | | | | | | | | | $-2S_{yk}b_{yk}^2$ | | | | $2S_{yk}b_{yk}^2$ | $2F_0 \frac{\lambda e_0}{r_0}$ | ψ_{zk4} |
| 14 | | | | | | | | | $2S_{yk}b_{x1}$ | $-2S_{yk}$ | | | $-2F_0$ | $2S_{yk}$ | y_{k4} |

4. ábra



$$\underline{T}^T \underline{M} \underline{T} = \langle m_k, \theta_{z_k}, m_k, \theta_{z_k}, m_f, \theta_{z_f}, \frac{1}{4} \begin{bmatrix} m_s + \frac{\theta_{z_s}^2}{b_{xs}^2} & m_s - \frac{\theta_{z_s}^2}{b_{xs}^2} \\ m_s - \frac{\theta_{z_s}^2}{b_{xs}^2} & m_s + \frac{\theta_{z_s}^2}{b_{xs}^2} \end{bmatrix}, \theta_{z_f}, m_f, \theta_{z_k}, m_k, \theta_{z_k}, m_k \rangle$$

$$\underline{T}^T \underline{K} \underline{T} =$$

| | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----|------------|------------------------|---------------------------|---------------------------|------------------------|------------|
| 5 | | | | $-2k_{ys}$ | | |
| 6 | | | $\frac{k_t}{2b_{xs}}$ | $-\frac{k_t}{2b_{xs}}$ | | |
| 7 | | $\frac{k_t}{2b_{xs}}$ | $k_t/2b_{xs}^2 + 2k_{ys}$ | $-\frac{k_t}{2b_{xs}^2}$ | $\frac{k_t}{2b_{xs}}$ | $-2k_{ys}$ |
| 8 | $-2k_{ys}$ | $-\frac{k_t}{2b_{xs}}$ | $-\frac{k_t}{2b_{xs}^2}$ | $k_t/2b_{xs}^2 + 2k_{ys}$ | $-\frac{k_t}{2b_{xs}}$ | |
| 9 | | | $\frac{k_t}{2b_{xs}}$ | $-\frac{k_t}{2b_{xs}}$ | | |
| 10 | | | $-2k_{ys}$ | | | |

5. ábra

rotációs koordinátapárja, másfelől a jármű lényegéből adódó meghatározott, forgóvázanként azonos futásirány. (Az y_s és ψ_{zs} koordináták nem alkotnak szimmetrikus párt, mert a szimmetria síkhoz viszonyítva y_s szimmetrikus, míg ψ_{zs} antiszimmetrikus elmozdulást írnak le. A v járműsebesség vektor és a belőle származtatott erők is antiszimmetrikusok.) Ahhoz, hogy a koordináták megválasztása jobban harmonizáljon a domináns geometriai szimmetriával, kézenfekvő, hogy az említett szekrény-koordinátákat szimmetrikussá kell tenni; ennek lépéseit az 5. ábrán a csillapítási mátrix érintett részén mutatjuk be.

A szimmetrikus koordinátapárok kiválasztása azonban modellünk esetében ezután sem egyértelmű, ugyanis a geometriailag megnyilvánuló szimmetria ellentmond az azonos futásirány miatti erőtanai aszimmetriának. Az, hogy a szétesés az alkalmasnak vélt transzformációk végrehajtása nyomán nem következett be, kétségtelenné tette azt, hogy a látszólagos szimmetria ellenére is a modell kváziszimmetrikus, ugyanis a kerékpárok és a sín között ébredő kapcsolati erők nem követik a geometriai szimmetriát, hanem e tekintetben

inkább az azonos helyeken (pl. forgóvázanként előlfutó) levő kerékpárok társulnak, illetve társíthatók (6. és 7. ábra).

A fentiek alapján a pontos szétválasztás helyett meg kellett elégednünk azzal, hogy lehetőség szerint kedvező közelítést alkalmazzunk.

Optimumfeltételként a szétesés (független egyenletcsoportokra bomlás) ellen működő kapcsolatok számának minimalását felvéve, a legalkalmasabb transzformáció kiválasztása a következő egymásba ágyazott ciklusok szerint végezhető:

a) Az eredeti koordináták egy részhalmazát szimmetrikus koordinátapárokkal helyettesítjük. A koordinátaválasztás szimmetriája a megoldandó feladatra (most keresztirányú mozgás) nézve domináns fő-, illetve alszerkezeti szimmetria (1. ábra).

b) Az új koordinátákat a feltételezett szimmetria szerint párokba (egy-más mellé) rendezzük, majd végrehajtjuk az összegző—különbségképző (8. ábra) koordinátatranszformációt.

c) Megvizsgáljuk a transzformációt követően nem zérus kapcsolóelemek számát, pontosabban azokét, amelyek a legalább két független egyenletcsoportra való bomlást — zérustól különböző értékűek lévén — megakadályozzák.

Az optimumfeltétel finomíthatóságára, illetve más optimumfeltételek kitűzésére nem térünk ki. Jelen választásunkat az indokolja, hogy a szóban forgó optimumfeltétel paraméterértékektől függetlenül is vizsgálható, ezáltal könnyen kiértékelhető; valójában a matematikai modell szerkezeti sajátosságaival áll közelebbi kapcsolatban. Ugyanez a helyzet a transzformációk vonatkozásában is: ismert, hogy kitűzött részfeladatunknak — vagyis a matematikai modell független részekre bontásának — van pontos megoldása. A saját vektorok, illetve fővektorok koordinátarendszerében a mozgásegyenlet együtthatóiként diagonális mátrixok, illetve (Jordan-féle) blokkokból álló diagonális hiper-mátrixok adódnak. Ahhoz azonban, hogy ezeket a transzformáló mátrixokat adott modellhez, illetve a modellparaméterek adott értékéhez megszerkesszük, meglehetősen nagy munkát kell elvégezni: meg kell oldani a teljes, általánosított algebrai saját értékfeladatot. Ez az út olyan esetben, amikor a modellparaméterek változtatása a vizsgálat lényeges része, nem ajánlható, mivelhogy a saját vektorok koordináta rendszerébe átvivő transzformáció kivitelezéséhez szükséges előzetes számítások jóval munkaigényesebbek, mint a tényleges elemzés a kiindulási (kváziszimmetrikus) modell alapján, és a modellparaméterek bármelyikének megváltoztatása a transzformáló mátrixok újraszámítását és ezáltal a transzformáció ismételt elvégzését követeli meg. Korábbi [1] cikkünkben és a jelenlegiben is éppen e hátrány kiküszöbölésére olyan — a feladatban szereplő mátrixok hiperdiagonizálása irányába haladó — véges transzformációsorozatot keresünk, illetve vizsgálunk, amely a feladat (és annak matematikai modellje) paraméterfüggetlen sajátosságain (most: do-

$\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{P}} =$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---------------------------|---------------------------|--|--|--|--|--|--|---------------------|---|---|---------------------------|---------------------------|--------------------------|------------------------|
| 1 | $2k_{yx} + 2F_0/\sqrt{v}$ | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | $2k_{yx} + 2F_0/\sqrt{v}$ | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | $2k_{yx}b_{yk}^2 + 2F_0e_0^2/\sqrt{v}$ | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | $2k_{yx}b_{yk}^2 + 2F_0e_0^2/\sqrt{v}$ | | | | | | | | | | | |
| 5 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | ⋮ | | | | | | | | $4k_{yx} + 2k_{ys}$ | | | | | $-2k_{ys}$ | |
| 10 | ⋮ | | | | | | | | $4k_{yx} + 2k_{ys}$ | | | | $-2k_{ys}$ | | |
| 11 | ⋮ | | | | | | | | | $k_1 + 4k_{yx}b_{yk}^2 + 4k_{yx}b_{yk}^2$ | | | $\frac{k_1}{2b_{xs}}$ | $-\frac{k_1}{2b_{xs}}$ | |
| 12 | ⋮ | | | | | | | | | | $k_1 + 4k_{yx}b_{yk}^2 + 4k_{yx}b_{yk}^2$ | | | $\frac{k_1}{2b_{xs}}$ | $-\frac{k_1}{2b_{xs}}$ |
| 13 | ⋮ | | | | | | | | $-2k_{ys}$ | $\frac{k_1}{2b_{xs}}$ | $\frac{k_1}{2b_{xs}}$ | $k_1/2b_{xs}^2 + 2k_{ys}$ | | $-\frac{k_1}{2b_{xs}^2}$ | |
| 14 | ⋮ | | | | | | | | $-2k_{ys}$ | $-\frac{k_1}{2b_{xs}}$ | $-\frac{k_1}{2b_{xs}}$ | $-\frac{k_1}{2b_{xs}^2}$ | $k_1/2b_{xs}^2 + 2k_{ys}$ | | |

6. ábra

$\underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{S}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{P}} =$

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|--------------------------------|--------------------------------|-------------------|-------------------|--|--|--|--|---------------------|---|---|---------------------------|---------------------------|--------------------------|------------------------|
| 1 | $2S_{yk}$ | | $-2F_0$ | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | $2S_{yk}$ | | $-2F_0$ | | | | | | | | | | | |
| 3 | $2F_0 \frac{\lambda e_0}{f_0}$ | | $2S_{yx}b_{yk}^2$ | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | $2F_0 \frac{\lambda e_0}{f_0}$ | | $2S_{yx}b_{yk}^2$ | | | | | | | | | | | |
| 5 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | ⋮ | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | ⋮ | | | | | | | | $4S_{yk} + 2S_{ys}$ | | | | | $-2S_{ys}$ | |
| 11 | ⋮ | | | | | | | | $4S_{yk} + 2S_{ys}$ | | | | $-2S_{ys}$ | | |
| 12 | ⋮ | | | | | | | | | $S_1 + 4S_{yx}b_{yk}^2 + 4S_{yx}b_{yk}^2$ | | | $\frac{S_1}{2b_{xs}}$ | $-\frac{S_1}{2b_{xs}}$ | |
| 13 | ⋮ | | | | | | | | | | $S_1 + 4S_{yx}b_{yk}^2 + 4S_{yx}b_{yk}^2$ | | | $\frac{S_1}{2b_{xs}}$ | $-\frac{S_1}{2b_{xs}}$ |
| 14 | ⋮ | | | | | | | | $-2S_{ys}$ | $\frac{S_1}{2b_{xs}}$ | $\frac{S_1}{2b_{xs}}$ | $S_1/2b_{xs}^2 + 2S_{ys}$ | | $-\frac{S_1}{2b_{xs}^2}$ | |
| 14 | ⋮ | | | | | | | | $-2S_{ys}$ | $-\frac{S_1}{2b_{xs}}$ | $-\frac{S_1}{2b_{xs}}$ | $-\frac{S_1}{2b_{xs}^2}$ | $S_1/2b_{xs}^2 + 2S_{ys}$ | | |

7. ábra

$$\begin{aligned}
 \underline{D} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{matrix} 1 & 2 & \dots & 7 \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, & \dots, & \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \right\rangle \\
 \underline{D}^T \underline{A} \underline{D} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\langle \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\rangle, \dots, \left\langle \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\rangle \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & b & c & d & & & & \\ b & a & d & c & & & & \\ \hline e & f & g & h & & & & \\ f & e & h & g & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \end{array} \right] \left\langle \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\rangle, \dots, \left\langle \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} = \\
 &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} a+b & 0 & c+d & 0 & & & & \\ 0 & a-b & 0 & c-d & & & & \\ \hline e+f & 0 & g+h & 0 & & & & \\ 0 & e-f & 0 & g-h & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

8. ábra

mináns külső szimmetria) alapszik. Annak, hogy pusztán a matematikai modell szerkezete alapján — függetlenül a benne szereplő paraméterek konkrét értékeitől — módunk van legalább két (esetleg csak majdnem) független részrendszerre vezető transzformációt találni, az az előnye, hogy a transzformációt mindössze egyszer, paraméteres alakban kell elvégeznünk, és a továbbiakban a modellparaméterek bármely értékére az eredeti, nagy méretű feladat megoldását független részfeladatok megoldásaiból állítjuk elő. Amennyiben a keresett mennyiségek az alkalmazott transzformációsorozatra nézve nem invariánsak (esetükben nem ez a helyzet), akkor a megoldások visszafelé haladó transzformációját is el kell végezni.

Megjegyezzük, hogy amennyiben a szimmetria nyújtotta kezelési előnyök kiaknázására egy kváziszimmetrikus modellt úgy próbálnánk előkészíteni, hogy pl. egy szerkezeti mechanikai feladatban a pontos szimmetria megteremtése érdekében önkényesen szerkezeti elemeket (rúgókat, csillapítókat) hagyunk el, vagy pótlólag felveszünk, akkor az ilyen „fizikai” beavatkozás nyomán az eredeti feladatot többnyire rosszul közelítő modellt, illetve megoldást nyerünk. Vizsgált modellünk esetében az ez irányú próbák sikertelensége meggyőző volt a tekintetben, hogy ez utóbbi módszer általában nem javasolható.

Az általunk javasolt kiválasztási algoritmus (3. pont a), b), c)) felfogható úgy is, mint valószínű esetek halmazából az ellenpéldák olyan részhalmozának explicit előállítását, amely végeredményben hatékonyan leszűkíti a közelítőleg célravezető és ezért részletesebben megvizsgálendő konkrét transzformációk körét.

Modellünk esetében négy koordinátatranszformációt (1. eredeti koordináták változatlanul; 2. szekrény-koordináták transzformálása; 3. szekrény-és forgóvázkeret koordináták transzformálása; 4. szekrény, forgóvázkeret és kerékpár koordináták transzformálása), valamint minden egyes koordinátaválasztás mellett 6 különböző párosítást (sorrendet) vizsgáltunk. (A paraméte-

res számítások csökkentése, illetve a tévesztések elkerülése érdekében a kereső algoritmus lépéseit számítógépre programoztuk. A modellparamétereknek *véletlen számértékeket* adva, kiválaszthatók voltak a kedvezőnek ítélt esetek, ugyanis a széteső struktúrától távol álló megoldások ellenpéldaként jelezték, hogy mely esetek *biztosan nem* vezetnek a kívánt irányba.) A megvizsgált 24

$$\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{D}} = \langle m_k, m_k, \theta_{z_k}, \theta_{z_k}, m_k, m_k, \theta_{z_k}, \theta_{z_k}, m_f, m_f, \theta_{z_f}, \theta_{z_f}, \frac{m_s}{2}, \frac{\theta_{z_s}}{2b_{15}^2} \rangle >$$

9. ábra

esetből a kapcsoló elemek számának minimum-kritériuma egyértelmű megoldást hozott, ugyanis csak egy olyan eset adódott, amikor egyetlen elempáron múlt az egyenletek két, független csoportba való rendezhetősége, mégpedig akkor amikor:

α) Csak a szekrény koordinátákat transzformáltuk az 5. ábrán bemutatottak szerint ($\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$).

β) Az így nyert \mathbf{v} vektor koordinátái 1-12; 2-11; 3-14; 5-10; 6-9; 7-8; módon alkottak közelítőleg szimmetrikus párokat ($\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{u}$), amelyhez tartozó transzformált csillapítási és merevségi mátrixokat a 6. és 7. ábrán mutatjuk be.

γ) A szétválasztást eredményező \mathbf{D} mátrix és jellemző sajátossága a 8. ábrán látható. Megvizsgálva a 6. és 7. ábrát, adódik, hogy csupán a szaggatott vonallal kiemelt blokkpár olyan szerkezetű, amely az utolsó transzformációs lépést követően a csatolást okozza.

δ) Az $\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{z}$ transzformáció nyomán adódó végeredményben (9., 10., 11. ábrák) csak a (11; 14) és (14; 11) elempár okoz csatolást, amely legegyszerűbben a szóban forgó mátrixelemek zérussá tételével szüntethető meg. (Az ábráról megállapítható, hogy a mátrixok zérustól különböző elemei a jelzett két elem kivételével a sakktáblának egyik színén helyezkednek el, így valóban majdnem széteső mátrixot nyertünk.) Ezen lehetőség mellett megvizsgáltunk még nyolc olyan esetet is, amely a 6. és 7. ábrákon szaggatott vonallal jelzett blokkoknak alkalmas előjelcserékkel fő- és mellékátlójukra szimmetrikussá (tehát a \mathbf{D} mátrixszal széteső szerkezetűvé transzformálható) tételével adódtak, ugyanis a blokkbeli elemek abszolút értéke azonos.

ε) Későbbi numerikus elemzéseink azt mutatták, hogy az így nyerhető kilenc különböző közelítés nem lényegesen eltérő, nagyon közel fekszik egymáshoz, azonban más feladat kapcsán az elhanyagolással szemben a kiegészítés esetleg jobb eredményt szolgáltathat.

Megjegyezzük, hogy a transzformációt paraméteres alakban — összhangban korábbi vizsgálatunkkal — csupán ebben az egy esetben hajtottuk végre. Az esetleges tévedések kiszűrése érdekében a megelőző gépi számítást numerikus utóellenőrzésként is alkalmaztuk.

$$\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{S}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{D}} =$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|----|-------------------------------------|-------------------------------------|----------------------|----------------------|------------------|------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|--|--|----------------------|--------------------------------|
| 1 | $2S_{y_k}$ | | $-2F_0$ | | | | | | $-2S_{y_k}$ | | $-2S_{x_k}b_{x1}$ | | | |
| 2 | | $2S_{y_k}$ | | $-2F_0$ | | | | | | $-2S_{y_k}$ | | $-2S_{x_k}b_{x1}$ | | |
| 3 | $2F_0 \frac{\lambda \theta_0}{r_0}$ | | $2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | | | | | | | $-2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | |
| 4 | | $2F_0 \frac{\lambda \theta_0}{r_0}$ | | $2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | | | | | | | $-2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | |
| 5 | | | | | $2S_{y_k}$ | | $-2F_0$ | | $-2S_{y_k}$ | | $2S_{x_k}b_{x1}$ | | | |
| 6 | | | | | | $2S_{y_k}$ | | $-2F_0$ | | $-2S_{y_k}$ | | $2S_{x_k}b_{x1}$ | | |
| 7 | | | | | | | $2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | | | $-2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | |
| 8 | | | | | | | | $2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | | | $-2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | |
| 9 | $-2S_{y_k}$ | | | | $-2S_{y_k}$ | | | | $4S_{y_k} + 2S_{y_s}$ | | | | | $-2S_{y_s}$ |
| 10 | | $-2S_{y_k}$ | | | | $-2S_{y_k}$ | | | | $4S_{y_k} + 2S_{y_s}$ | | | | $2S_{y_s}$ |
| 11 | $-2S_{y_k}b_{x1}$ | | $-2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | $2S_{y_k}b_{x1}$ | | $-2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | | $S_{y_k} + 4S_{x_k}b_{x1}^2 + 4S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | $-\frac{S_{y_k}}{b_{x_s}}$ |
| 12 | | $-2S_{y_k}b_{x1}$ | | $-2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | $2S_{y_k}b_{x1}$ | | $-2S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | | $S_{y_k} + 4S_{x_k}b_{x1}^2 + 4S_{x_k}b_{y_k}^2$ | | |
| 13 | | | | | | | | | $-2S_{y_s}$ | | | | $2S_{y_s}$ | |
| 14 | | | | | | | | | | $2S_{y_s}$ | $-\frac{S_{y_k}}{b_{x_s}}$ | | | $2S_{y_s} + S_{y_k}/b_{x_s}^2$ |

10. ábra

$$\underline{\underline{D}}^T \underline{\underline{P}}^T \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{T}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{D}} =$$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|----|----------------------------|----------------------------|--|--|----------------------------|----------------------------|--|--|-----------------------|-----------------------|--|--|----------------------|--------------------------------|
| 1 | $2K_{y_k} + 2F_0/\sqrt{v}$ | | | | | | | | $-2K_{y_k}$ | | $-2K_{x_k}b_{x1}$ | | | |
| 2 | | $2K_{y_k} + 2F_0/\sqrt{v}$ | | | | | | | | $-2K_{y_k}$ | | $-2K_{x_k}b_{x1}$ | | |
| 3 | | | $2K_{x_k}b_{y_k}^2 + 2F_0e_0^2/\sqrt{v}$ | | | | | | | | | $-2K_{x_k}b_{y_k}^2$ | | |
| 4 | | | | $2K_{x_k}b_{y_k}^2 + 2F_0e_0^2/\sqrt{v}$ | | | | | | | | | $-2K_{x_k}b_{y_k}^2$ | |
| 5 | | | | | $2K_{y_k} + 2F_0/\sqrt{v}$ | | | | $-2K_{y_k}$ | | $2K_{y_k}b_{x1}$ | | | |
| 6 | | | | | | $2K_{y_k} + 2F_0/\sqrt{v}$ | | | | $-2K_{y_k}$ | | $2K_{y_k}b_{x1}$ | | |
| 7 | | | | | | | $2K_{x_k}b_{y_k}^2 + 2F_0e_0^2/\sqrt{v}$ | | | | | $-2K_{x_k}b_{y_k}^2$ | | |
| 8 | | | | | | | | $2K_{x_k}b_{y_k}^2 + 2F_0e_0^2/\sqrt{v}$ | | | | | $-2K_{x_k}b_{y_k}^2$ | |
| 9 | $-2K_{y_k}$ | | | | $-2K_{y_k}$ | | | | $4K_{y_k} + 2K_{y_s}$ | | | | | $-2K_{y_s}$ |
| 10 | | $-2K_{y_k}$ | | | | $-2K_{y_k}$ | | | | $4K_{y_k} + 2K_{y_s}$ | | | | $2K_{y_s}$ |
| 11 | $-2K_{y_k}b_{x1}$ | | $-2K_{x_k}b_{y_k}^2$ | | $2K_{y_k}b_{x1}$ | | $-2K_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | | $K_{y_k} + 4K_{x_k}b_{x1}^2 + 4K_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | $-\frac{K_{y_k}}{b_{x_s}}$ |
| 12 | | $-2K_{y_k}b_{x1}$ | | $-2K_{x_k}b_{y_k}^2$ | | $2K_{y_k}b_{x1}$ | | $-2K_{x_k}b_{y_k}^2$ | | | | $K_{y_k} + 4K_{x_k}b_{x1}^2 + 4K_{x_k}b_{y_k}^2$ | | |
| 13 | | | | | | | | | $-2K_{y_s}$ | | | | $2K_{y_s}$ | |
| 14 | | | | | | | | | | $2K_{y_s}$ | $-\frac{K_{y_k}}{b_{x_s}}$ | | | $2K_{y_s} + K_{y_k}/b_{x_s}^2$ |

11. ábra

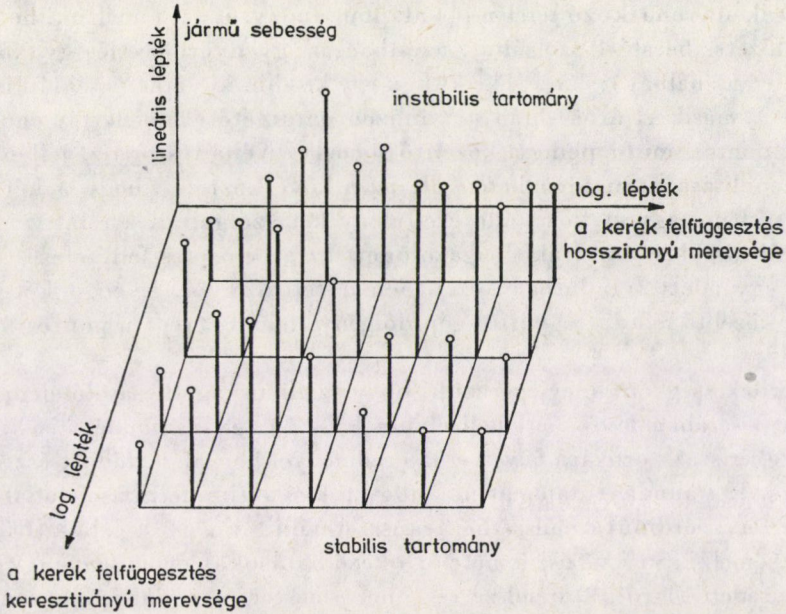
4. A közelítő modell alkalmazása

A vasúti kocsik keresztirányú rezgéseivel kapcsolatos vizsgálatok mintegy két évtizede kerültek a kutatások homlokterébe, amikor is lényegében bizonyítást nyert, hogy e vizsgálatok nélkül ma már nem lehet megfelelő vasúti járműveket építeni [5, 6, 7]. A keresztirányú mozgással kapcsolatban vázolt kétféle modellképzés (lásd: 2. pont) bármelyikét is választjuk, a (közelítő) szétválasztás lehetősége komoly előnyöket hoz magával.

A régebbi keletű modellképzés — mint azt már vázoltuk — figyelmen kívül hagyja a rúgózott részeknek a kerékpárokra történő visszahatását, ezáltal a kerékpárok szerepe lényegében csak arra korlátozódik, hogy azok keresztirányban a sebességtől függő frekvenciájú és fáziseltolású külső gerjesztőként viselkedjenek. Ilyen esetben tehát az (1) egyenletből a kerékpárokra vonatkozó sorok és oszlopok hiányoznak, ezáltal egy hat szabadságfokú, úngerjesztett, szimmetrikus mechanikai rezgőrendszer (amely *pontosan* szétválasztható) vizsgálatát kell elvégeznünk.

A rezgőrendszer vizsgálatát a hat szabadságfokú modell helyett, két db három szabadságfokú, illetve (más transzformáció nyomán) három db két szabadságfokú rezgőrendszer segítségével végezhetjük el, akár a saját értékek számítása (e vizsgálatban a képzetes rész mint általánosított saját frekvencia játszik szerepet), akár az idő, akár a frekvenciatartományban történő átviteli tulajdonságok elemzése a feladat.

A másodikként tárgyalt modellképzés a tágabb értelemben vett kigyózási jelenséget öngerjesztett mozgásnak tekinti. A szokásos kérdésfelvetések közül leglényegesebb az, hogy adott értékű, illetve adott tartományba eső konstrukciós paraméterek esetében mekkora az a legnagyobb haladási sebesség, amely mellett az (1) egyenlet megoldásfüggvényei az idő növekvő értékeire zérushoz tartanak, vagyis a rendszer stabil. Az ilyen elemzés a konstrukciós paramétervektor egyetlen értéke mellett is több (a haladási sebesség néhányszor tíz értékének megfelelő) algebrai saját értékfeladat megoldását igényli. Számításba kell venni azonban azt, hogy adott paramétervektor melletti elemzés az esetek többségében csak része egy átfogó számításnak: a dinamikai stabilitás tekintetében legkedvezőbb járműparamétervektor körülhatárolásának, meghatározásának. Ez utóbbi, amely lényegében egy szintézisfeladat, általában a saját értékek néhány száz esetben történő meghatározását igényli. Ismeretes, hogy a stabilitás eldöntéséhez nem szükséges okvetlenül a saját értékek numerikus kiszámítása (hiszen csak a valós rész előjele eldönti a stabilitást), numerikus tapasztalataink azonban azt mutatták, hogy az adott feladatnál a legkönnyebben programozható és legkevesebb gépi időt igénylő eljárás — az általunk vizsgáltak közül — a saját értékek kiszámítása volt. A stabilitás szempontjából mellékeredményként adódó saját frekvenciák a vasúti kocsik tervezésénél más szempontból igen hasznos információkat szolgáltatnak.



12. ábra

Ilyen vizsgálatot mutat be a 12. ábra [2], ahol a kitűzött feladat kapcsán 840 esetben került sor átlagosan 3 perc gépidő jellegű számításra; ez összesen 42 gépórát vett igénybe.

Megmutatjuk, hogy az ismertetett transzformációkat követő közelítő szétválasztás és enyhébb pontossági követelmények esetében a gépidőszükséglet az előzőnek negyedére szorítható, továbbá, hogy megadható olyan stratégia, amely a pontosság észrevehető romlása nélkül képes a gépidőt a korábbiak közel felére redukálni.

4.1. A közelítő modellel szerzett numerikus tapasztalatok

A vasúti kocsival jellemzett jármű stabilitásának elégséges feltétele, hogy az

$$A = \left[\begin{array}{c|c} -M^{-1}K & -M^{-1}S \\ \hline E & O \end{array} \right] \quad (2)$$

mátrix összes saját értékének valós része negatív legyen. Numerikus vizsgálataink a saját értékek explicit előállításán alapultak, minthogy korábbi vizsgálatok [2] kimutatták, hogy mind pontosság, mind gépidőigény szempontjából ez a módszer a legkedvezőbb.

A pontosnak tekintett és a közelítéssel szétválasztott modellek eltérését két módon vizsgáltuk. Az egyik eljárás OSTROWSKYNAK a közelítő mátrixok

saját értékeire vonatkozó tételén [4] alapult, amelytől azt reméltük, hogy megfelelő előzetes becslést szolgáltat, azonban az így nyert becslés gyakorlatilag nem volt használható; ezt a [1] cikkben egy kisebb, követhető példán is bemutattuk. A másik eljárás során ugyanazon paraméterek mellett megoldottuk mind a pontos, mind pedig a közelítő modellt. Néhányszor tíz, jellemző eset összehasonlítása után levonható volt az a következtetés, hogy a két modell e tekintetben nagyon közel álló eredményeket szolgáltat, a relatív eltérések 0,1%-nál kisebbre adódtak. Beigazolódott az az előzetes feltételezés, hogy a gépidő egy adott feladatban közelítően n^2 -tel arányos, lévén a két felezett méretű közelítő feladat együttes gépidőigénye fele az eredeti, pontos feladaténak.

Érdekességként megjegyezzük, hogy az elhanyagolt csatoló elem normál esetben a sorában levő főátlóbeli elemnél 1—2 nagyságrenddel kisebb, azonban értékét százszorosára növelve az eredményekben alig adódott észrevehető változás. Ezt annak tulajdonítjuk, hogy a kváziszimmetrikus feladatot sikerült olyan koordinátarendszerbe transzformálni, amely a feladatbeli szimmetriát emeli ki, a kváziszimmetriát okozó hatásokat pedig legyengíti, szemben az eredeti koordinátarendszerrel, ahol a mesterséges (önkényes) szimmetrizálás nem használható eredményeket szolgáltatott.

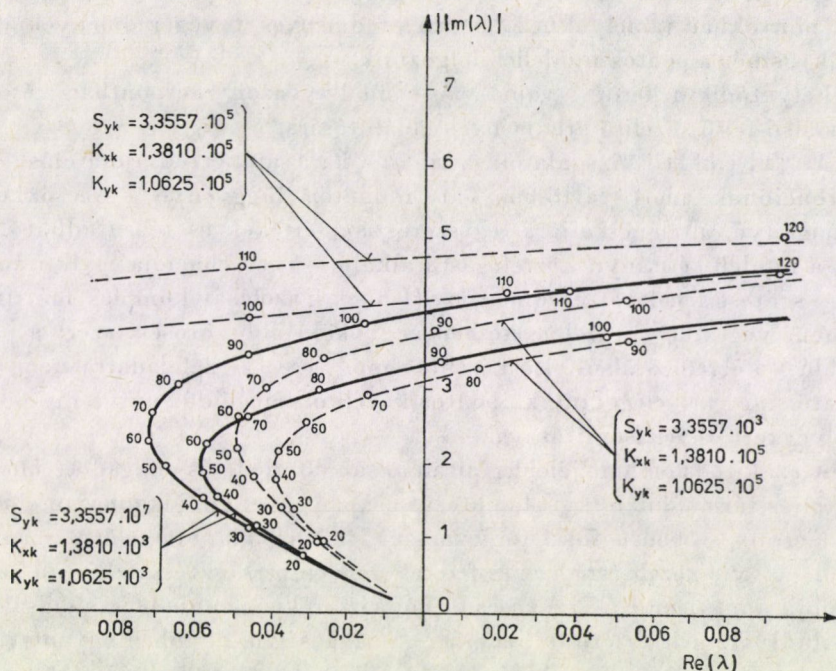
4.2. Stratégia kváziszimmetrikus feladatok számítására

Egy sorozatos analízis (paraméter tanulmányozás) során, változtathatónak tekintett modellparaméterek az összes modellparaméter (a paramétervektor lehetséges értékei) által kifeszített térben alteret határoznak meg. Vizsgálunk úgy tekinthető, hogy e térrész, mint értelmezési tartomány felett valamely többváltozós függvény — például a dinamikai stabilitás adott haladási sebességnél történő fennállásának „igen—nem” logikai függvényértéke — kitüntetett (többnyire extrémális) értékeihez tartozó modellparaméterek meghatározása a szűkebb értelemben vett számítási célkitűzés.

A tényleges számítást a szóban forgó altér — általában valamilyen szabályszerűség alapján — képzett pontsorozatának elemeire végezzük el. Gyakori, hogy egy-egy paraméter önkényesen felvett alsó és felső korlátja között (többnyire ugyancsak önkényesen diszkrét) felosztást készítünk. Ily módon az eredetileg általában kontinuum térrészt egy olyan véges ponthalmazzal helyettesítettük, amelynek pontjai szabályszerűen helyezkednek el. A kétdimenziós analógok mintájára ezt röviden rácsnak, illetve hálónak nevezzük.

Modellünk esetében a változtatott paraméterek (a kerékpárvezetés hossz- és keresztirányú merevsége, valamint a jármű haladási sebessége) által kifeszített háromdimenziós altérben a rácspontok bejárásának egy kitüntetett módja adódik: egy-egy rögzített merevségi paraméter-pár (vagyis ezzel egy adott jármű) mellett növekvő haladási sebességeket vizsgálunk. A járműmodellhez

tartozó gyökhelygörbék számítása révén kapunk választ a dinamikai stabilitásra. Minthogy a görbék a számunkra érdekes sebességtartományban (13. ábra) viszonylag lassú változásúak, így egyik sem változó paraméter tekinteté-



13. ábra

ben sem kell a pontosság érdekében a hálósztást erősen sűríteni, ezáltal meg lehetőségen durva osztású rács használható.

A vasúti kocsi modellel szerzett tapasztalatok általánosításaként kváziszimmetrikus modellek szintézisfeladatának számítás útján történő megoldására a következő eljárást javasoljuk:

a) A domináns szimetriára alapozva az adott modellhez olyan egyszerűen konstruálható koordinátatranszformációt keresünk, amely felezett méretű, közelítőleg független részrendszereket eredményez.

b) Egy nagyon durva osztású paraméterháló pontjában vizsgáljuk a pontos és közelítő feladat megoldása közötti egyezést. Amennyiben az egyezés kielégítő, akkor a c) pontbeli lépést hajtjuk végre, ellenkező esetben további, alkalmasabb közelítő modellt kell keresnünk.

c) A sűrűbb, finomabb felosztáshoz tartozó háló csomópontjaiban a közelítő modellel számolunk. Amennyiben a b) lépésben a két, félméretű feladat megoldásával kapott eredmények is eléggé közeliek, akkor elegendő csupán az egyik félméretű feladat megoldásait kiszámítani. (A két félméretű feladat

(7+7) saját értéke 7 közelítő párt alkot, a párokon belüli egyezés a vizsgálat szempontjából kielégítő.)

d) A közelítő modellel nyert eredmények behatárolják a változtatott paraméterek kedvező értékeinek tartományát. A rácspontok közötti, interpolált pontokban (amelyekhez tartozó eredményeket végeredményeknek tekintjük) ismét a pontos modellel dolgozunk.

Felvetődik a kérdés, vajon van-e mód egyazon rácspontban kétoldali, vagyis alsó-felső közelítő eredmények előállítására.

Az [1] cikkbeli vizsgálatok szerint — ha a saját érték a csatolást okozó perturbációnak adott tartományban monoton függvénye — csökkentett munkaigényű, általános eljárás egyszeres saját értékek esetében adható, amikor is a modell kétirányú közrefogásra alkalmas perturbációja egyik irányban egyben széteső feladatot eredményez. (Ennek igazolását komplex mátrixokra még nem végeztük el.) Jelen esetben a gyökök többszörösek, ezért a pontos megoldást közrefogó alsó-felső közelítés módszere [1] a feladatra nem alkalmazható, meg kell elégednünk „pontos-közelítő” megoldás durva rácspontokban elvégzett összehasonlításával.

A szakirodalomban jelenleg általánosan elterjedt és elfogadott módszer, hogy teljes jármű dinamikai stabilitását csupán egyetlen, alkalmasan előkészített alacsony szabadságfokú forgóvázszerű modell alapulvételével számítják anélkül, hogy e közelítésnek akár fizikai (modellszerkesztési), akár numerikus kontrollja adott lenne. (A szokásos forgóváz-kerékpár modell 6 szabadságfokú, az általunk vizsgált „széteső” rendszer 7 szabadságfokú, ebben ugyanis jelentkezik a kocsiszekrény visszahatás is. Mégis indokolt a „forgóvázszerű” modell elnevezés használata, hiszen e modell mérete kevéssé különbözik a 6 szabadságfokútól, viszont lényegesen eltér a teljes 14 szabadságfokú modelltől.)

Eljárásunk ehhez képest kétségkívül előrelépést jelent, minthogy megadja mindkét — egymáshoz relatíve közelálló, de mégis eltérő — forgóvázszerű modellt, amelyekkel (együttesen) a jármű viselkedése jól leírható. Ily módon eljárásunk a szakirodalombeli heurisztikus szabadságfokredukció algoritmikus részletezettségű végrehajtásaként és az így létrejött modellezési hiba becsléseként is alkalmazhatónak mutatkozik.

IRODALOM

1. MICHELBERGER, P.—FERENCZI, M.: Utilization of Quasi-symmetry in the Analysis of Linear Mechanical Systems. *Periodica Polytechnica* (Transp. Eng.), 9 (1981) (Közlés alatt)
2. FERENCZI M.: Vasúti kocsik keresztirányú rezgéseinek stabilitásvizsgálata. (Doct. Diss.) Budapest 1977, 147
3. FERENCZI M.: Vasúti kocsik keresztirányú szabad rezgéseinek stabilitása. *Járművek, Műszaki Tudomány* 28 (1981), 63—69.
4. SZIDAROVSKY F.: Bevezetés a numerikus módszerekbe. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest 1974
5. WICKENS, A. H.: Stability of High-Speed Trains. *Physics in Technology*, The Institute of Physics, Bristol 1973, Vol 4, No. 1, pp. 1—17

6. MÜLLER, C. TH.: Wo stehen wir in der Gleislauftechnik? Das Schlingerproblem. *Glaser's Annalen* 82 (1958), No 2, 31—47
7. JOLY, R.: Untersuchungen der Querstabilität eines Eisenbahnfahrzeuges bei hohen Geschwindigkeiten. *Schienen der Welt* 3 (1972), No. 3, 168—204

An Approximate Calculation Method Based on the Utilization of the Quasi-Symmetry to the Investigation of the Lateral Oscillation of a Railcar. — On a mathematical model describing the lateral oscillation of a railcar, as an example, a method and the experiences made therewith are described, which by reducing with adequate transformations the effect of the quasi-symmetry, permit to divide the model into independent parts by a insignificant neglect. The problem belongs not only as a quasi-symmetrical oscillating system, but also as a problem of synthesis solved by a series of analyses, to a wider class of problems.

Ein auf die Ausnutzung der Quasisymmetrie basierendes annäherndes Berechnungsverfahren zur Untersuchung der Querschwingungen eines Eisenbahnwagens. — Auf einem die Querschwingungen eines Eisenbahnwagens beschreibenden Modell, als Beispiel, werden eine Methode und die durch dasselbe gebrachten Erfahrungen beschrieben, die durch Reduzierung mit geeigneten Transformation die Wirkung der Quasisymmetrie, und die Zerlegung auf unabhängige Teile des Modells mit unbedeutender Vernachlässigung ermöglichen. Die Aufgabe gehört nicht nur als ein quasisymmetrisches lineares Schwingungssystem, sondern als auch durch eine Reihe von Analysen gelöste Synthesenaufgabe zu einer mehr verbreiteten Aufgabenklasse.

ÚJABB KUTATÁSI EREDMÉNYEK A FOGASKERÉK-HAJTÓMŰVEK MÉRETEZÉSÉBEN TEKINTETTEL AZ ENERGIA-TAKARÉKOSSÁGRA*

H. WINTER**

[Béérkezett: 1982. április 12-én]

Az energia-takarékosságból következő intézkedés: a hatásfok javítása. Minthogy a mechanikus hajtómű nagyon jó hatásfokú (pl. a fogaskerék-hajtóművek 98...99%-úak), és az általában beépített villamos motorok is nagyon gazdaságosan dolgoznak, a munkagépekben van mód az eredményes javításra. Számos jellemző adat mellett (mint az átvitt teljesítmény, áttétel, fordulatszám, illetve kerületi sebesség, továbbá a teljesítménysúly és -térfogat) az 1. táblázat különféle hajtóművek hatásfokértékeit is mutatja. Látható, hogy ezek gondosan kent, gyorsfordulatszámú homlokfogaskerekes hajtóművek esetében 99% körül vannak, és lassú hajtóműveken, amelyek zsírkenésűek vagy megmunkálásuk alacsony minőségű, 93%-ra csökkennek. A bolygóműveknek itt az a többletelőnyük, hogy a teljesítmény egy része kapcsolóteljesítmény, amellyel automatikusan a hatásfok még tovább javul. Ha ez 99%-os, akkor a javulás minden esetre csak ezrelékekben fejezhető ki. Mindezek a hatásfokértékek azonban mindig a névleges teljesítményekre vonatkoznak.

Más a helyzet a hipoid-hajtóművekben, amelyekben a tengelytávnak megfelelő nagy csúszófelületek a hatásfokot lényegesen lecsökkenthetik; a gépkocsik hátsótengelyeinél szokásos tengelytávokkal a hatásfok 85...96% között van. Ezek az adatok olyan szokásos üzemtartományra érvényesek, amelyekben a közepes üzemi hőmérséklet már kialakult, továbbá a névleges teljesítményre. Ha azonban a gépkocsik részterheléseire és a gyakori városi indításokra gondolunk, akkor a hatásfok 50%-ra is csökkenhet. Ezért a gépkocsiiparban az az irányzat kezd érvényesülni, hogy a tengelyeltolások kisebbedjenek, és végül is a kúpkerék-hajtómű legyen beépíthető, mert bebizonyosodott, hogy ezzel néhány %-nyi hatásfok-javulás következik be. A másodlagos következményekről, hogy ti. ugyanakkor nagyobb zajjal kell számolni, még szó lesz.

Hasonló a helyzet a csigahajtóművekben, amelyekben kb. 50...96% a hatásfok. Ha egyetlen lépcsővel akarunk nagy áttételt megvalósítani, akkor az önzárás területére kerülhetünk, és még normális előrehajtáskor is kisebb a hatásfok 50%-nál. Ezért szokás ma a csigahajtásokat széles tartományban,

* A Magyar Tudományos Akadémián 1981. május 14-én elhangzott előadás.

** Technische Universität München, Gépelemek Intézete, Fogaskerék- és Hajtómű-kísérleti Állomás.

I. táblázat

Állandó áttételű hajtóművek alkal-

| | | Fogaskerekes | | | | |
|---|---------|-----------------------|-----------------------|----------------------|--|----------------------|
| | | Hengeres fogask. hm. | Bolygómű | Kúp-k. hm. | Hipoid hm. | Kúp-heng.-s hm. |
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Teljesítmény [kW] | normál | 3 000 | 2 000 | 500 | 300 | 500 |
| | extrém | 65 000 | 25 000 | 4 000 | 500 ^h 1 000 ^j | 3 000 |
| Áttétel | normál | 1...800 ^b | 3...13 ^d | 1...5 | 4...8 | 5...700 ^k |
| | extrém | 1000 ^{a, b} | 3...35 ^e | 8 ^a | 1...50 ^a | 800 ^b |
| Kerületi sebesség [m s ⁻¹] | normál- | 50 | 50 | 40 | 30 | l. |
| | extrém- | 210 | 100 | 130 | 50 | ① és ③ |
| Max. fordulatszám [min ⁻¹] | | 150 · 10 ³ | 100 · 10 ³ | 50 · 10 ³ | 20 · 10 ³ | l. ① és ③ |
| Összhatásfok [%] ^q | | 93...99 ^c | 98...99 | 97...98 | 50 ^h ...90 ^j 85 ^h ...96 ^j | l. ① és ③ |
| Térf.-telj.-arány [dm ³ kW ⁻¹] | | 0,6...0,2 | 0,4...0,15 | 0,7...0,4 | 0,8...0,5 | 0,7...0,3 |
| Tömeg-telj.-arány [kg kW ⁻¹] | | 1,8...0,4 | 1...0,2 | 2,5...0,6 | 3...0,7 | 2...0,5 |

a = egylépcsős; b = a lépcsők számától függően; c = normál (olajkenéssel: 98...99%, kettős bolygókerékes hajtómű; f = gépszerkezetekben; g = turbinákban, repülőgépekben; (gyorsuláskor 5...15); m = η csökken növekvő áttétellel; p = legtöbbször hajtómű-motorok párosításra vonatkozik; s = korlátozott szíjszélességgel; t = normál esetre (keskeny ékszí-

különösen nagy teljesítmények esetében — amelyekben a teljesítményvesztés hőhatása különös problémákat okoz — kúpkerék-homlokkerék hajtóművekkel kiváltani (olyan esetekben tehát, amikor a tengelytáv 160...200 mm). Csigahajtóműveknek akkor van elsőbbségük, ha a másik kritérium, a kedvezőbb zajállapot a fontosabb, és a hatásfok a másodrangú.

A lánc-, szíj- és dörzshajtások hatásfokértékei nagy általánosságban eléri a 98%-ot. Ha van is pl. kb. 4%-os eltérés a lapos- és az ékszíjhajtás hatásfoka között, ez nem jelentős.

A különféle változtatható áttételű hajtóművekben azonban az eltérések lényegesen nagyobbak, amint azt az 1. ábra mutatja (amelyben az egy-, illetve kétfokozatú fogaskerék-hajtóművek szerepelnek összehasonlításként).

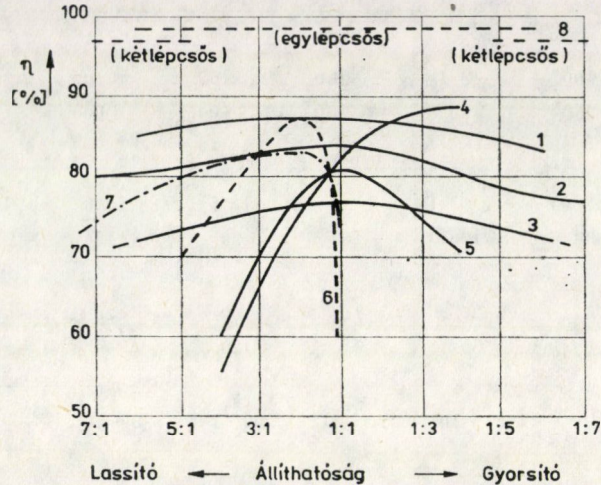
mazási tartományai és jellemzői

| hajtóművek | | | | Szíjhajtóművek | | | Dörzs- hajtómű |
|--|-------------------------|-------------------------------|----------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|
| Csigahm. | Csiga-heng.-s hm. | Heng.-s csav.-kerék hm. | Lánc hajtómű | Lapos | Ék | Fogazott | |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 120 | 100 ^p | 8 | 200 | 150 | 100 | 100 | 25/10 ^f |
| 1 000 | 250 ^p | 80 | 4 000 | 3 600 | 4 000 | 400 ^s | 200 |
| 5...50 ^l | (40...280) ^b | 1...5 | 1...6 | 1...5 | 1...8 | 1...8 | 1...6 |
| 1...300 ^l | > 1000 ^b | 100 | 10 | 20 | 15 | 12 | 10/18 ^f |
| 25 | l. | 20 | 10 | 60 | 25 ^l | 40 | 25 |
| 70 | ① és ⑥ | 50 | 40 | 120 | 40 ^l | 70 | 50 |
| 40 · 10 ³ | l. ① és ⑥ | 20 · 10 ³ | 10 · 10 ³ | 200 · 10 ³ | 8 · 10 ³ | 30 · 10 ³ | 10 · 10 ³ |
| 50...20 ^m 96...97 ^m | l. ① és ⑥ | 50...95 | 97...98 | 96...98 | 92...94 | 96...98 | 90...98 |
| 0,5...0,2 | 0,6...0,3 | 2,5...1,0 | 2...0,5 | 4...2,5 | 3...0,4 | 1...0,25 | 20...3 |
| 4,5...2 | 10...4 | 3...1,5 | 10...6 | 6...1,5 | 5...1 | 4...1 | 30...8 |

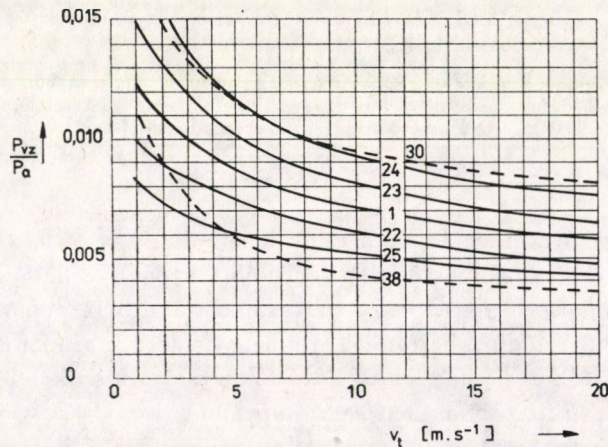
nagyon lassú fordulatú kerekkel: 93...95%); d = normál, egykarú bolygómű; e = egykarú h = nagy áttételekre; j = kis áttételekre; k = három hengereskerék-lépcsővel; l = lassító esetén (léghűtés nélkül); q = lépcsőnkint; r = a számláló acél-acél, a nevező acél/műanyag jakra + 20%)

Előnyös a fogazott lánc (1), amelynek nemcsak nagy az abszolút hatásfok-értéke, hanem ez az érték viszonylag széles állíthatóság mellett csaknem állandó marad. Hasonlóan előnyösek — a hatásfokuk azonban valamivel kisebb — a szíjhajtások (2). A dörzshajtómű (4) műanyag-acél kerékpárosítással — kedvező áttétel esetében — nagyon jó hatásfokú, de csak szűk állíthatósági területen belül. Ha kiküszöbölik azt a gyakori hibát, hogy ti . a vevő mindenáron széles állíthatóságot kíván, mert rugalmasságra törekszik, és ugyanakkor a gyakorlatban kiderül, hogy csak szűk határok között van szükség az állíthatóságra (amely gyakori eset), akkor a hajtómű állíthatóságát a szükséges és legkedvezőbb szakaszra tervezhetjük meg, és ezt simítjuk a megfelelő fordulatszámhoz. Ilyenkor kétszeres a gazdaságosság, mert a legjobb hatásfokok érhe-

tők el és a szűk állíthatóságú hajtómű olcsóbb is. A gyakorlatban úgy járunk el, hogy a berendezés prototípusához a hajtóművet széles állíthatósággal látjuk el, és ezzel határozzuk meg a szükséges állíthatósági szakaszt és a szükséges áttételt. Csak ezután választjuk meg a végleges, gazdaságosabb megoldást.



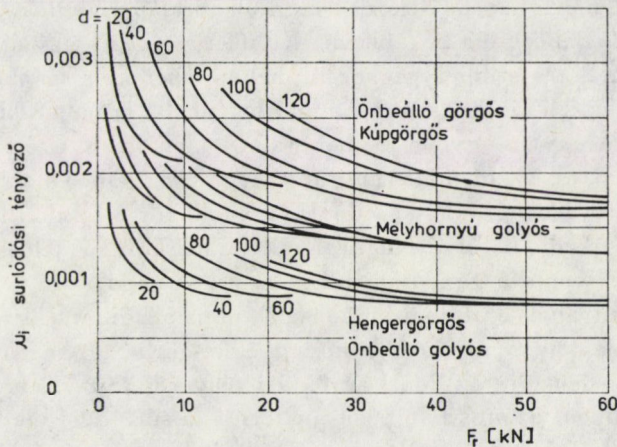
1. ábra. Állítóművek hatásfokai teljes terhelés, 2...7,5 kW teljesítmény-tartomány esetén, összehasonlítva fogaskerék-hajtóművekkel (1 = fogazatlánc-hajtómű, 2 = szíjhatás, 3 = tömörfém-dörzshajtómű (kenéssel), 4 = műanyag/acél-dörzshajtómű (szárason), 5 = kapcsolóműves hajtómű, 6 = hidrodinamikus hajtómű, 7 = hidrosztatikus hajtómű, 8 = egy- és kétlépcsős fogaskerék-hajtómű)



2. ábra. Fogaskerék veszteségtényezője a kerületi sebesség függvényében [1 jelű görbe: $z_1 = z_2 = 20$, $m = 4,5$ mm, $\alpha_w = 22,43^\circ$, $\beta = 0$, $\varepsilon_\alpha = 1,5$, edzett, köszörült, finom haránt csiszolással ($R_a = 0,3 \dots 0,35$ m), ásványolaj B, viszkozitás $\eta_c = 40$ mPa · s, fogerő $F_{bt} = 100$ N mm⁻¹ (fogszélességre vonatkoztatva); 22 jelű görbe: $\varepsilon_\alpha = 1,1$; 23 jelű görbe: $\varepsilon_\alpha = 1,8$; 24 jelű görbe: $m = 6$ mm ($z_1 = z_2 = 15$); 25 jelű görbe: $m = 3$ mm; 30 jelű görbe: haránt csiszolással ($R_a = 1,5$ μm); 38 jelű görbe: szintetikus olaj F (poliéter)]

A már említett eléggé szűk határok között a fogaskerék-hajtóművekben %-osan viszonylag jelentéktelen hatásfok-javítás érhető el, amely azonban nagy teljesítményátvitelű esetén így is lényeges lehet. A fogazás minőségének javításával és megfelelő kenőanyag-választással a fogaskerék veszteségtényezője (P_{vz}/P_a) csökkenthető (2. ábra). Ezen az ábrán a hatásfok változása a főpontbeli kerületi sebesség függvényében látható. A görbét OHLENDORF állapította meg mérésekkel, egyenes külső fogazatú hengereskerékekre (91,5 mm tengelytávval és $m = 4,5$ mm modullal), pontosan meghatározott paraméterekkel, mint pl. kenőanyag, fogazatpontosság stb. Az ábra jól mutatja, hogy pl. egy szintetikus kenőanyaggal (poliéterrel a 38-as görbének megfelelően) kisebb súrlódási tényezők érhetőek el. Az ilyen kenőanyagok problémája, másrésről a drágasága (5...10-szerese az ásványi olajokénak), továbbá az a tény, hogy előállításukhoz sokkal nagyobb energia kell. Ugyanakkor következetesen a megtakarítás abszolút értékét kell vizsgálnunk, vagyis az előállítás nagyobb ráfordítását le kell vonni az üzem energianyereségéből, illetve energiefelhasználás-csökkenéséből.

A beépített csapágyak megválasztása is befolyásolja a hajtómű, illetve a teljes gép súrlódási veszteségeit. A 3. ábrán a μ_1 súrlódási tényező alakulása látható a radiális csapágyterhelés függvényében. Ha a kis terhelésű tartományt figyelmen kívül hagyjuk, akkor felismerhető, hogy a hengergörgős és önbeálló golyóscsapágyak súrlódási tényezője 0,001 körüli érték, mélyhornyú golyóscsapágyaké már lényegesen nagyobb, és kúpögögős-, illetve önbeálló görgős-csapágyaké már 0,002, vagyis kétszer akkora. A tömör tűgörgős csapágyak ($\mu = 0,004$) súrlódási tényezője ismét kétszerese az előzőeknek, vagyis négyszerese az elsőeknek, és ez már az a terület, ahol a siklócsapágyak súrlódási tényezői nagyjából elkezdődnek. Természetesen — abszolút értéküket tekintve — ezek még mindig nagyon kis súrlódási tényező értékek és egyúttal nagyon kis veszteségreszletet adnak.



3. ábra. A gördülőcsapágyak μ_1 súrlódási tényezője a radiális csapágyterhelés függvényében

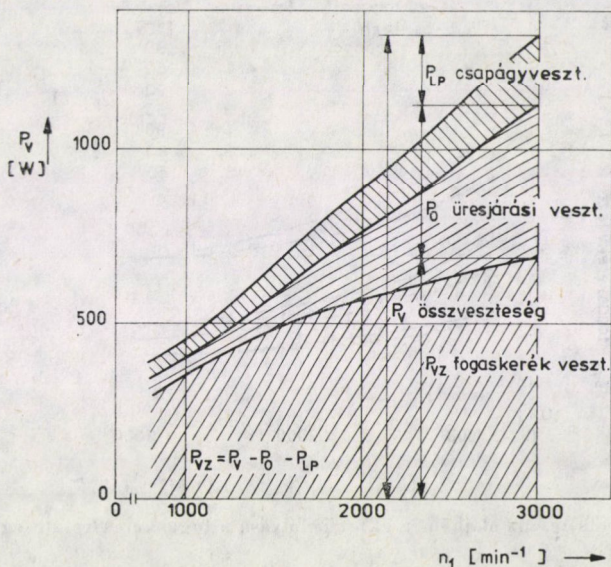
Ha egy fogaskerék-hajtómű teljesítményvesztését csökkenteni akarjuk, akkor elsősorban a hajtómű különféle részvesztéseit kell ismernünk az összvesztéshez képest, továbbá ezeknek függését a különböző paramétereiktől. A 4. ábrán hipoid-hajtómű összvesztéseire viszonyítva láthatók ezek a részvesztések a hajtó kerék fordulatszámának függvényében. Felismerhető, hogy a fogazat-súrlódás okozta veszteségrész egészében degresszív jellegű, ugyanakkor az üresjárás veszteségrész progresszív lefolyású. Ha ezeket a görbéket a turbóhajtóművek kb. 150 m s^{-1} kerületi sebességű tartományára kiterjesztjük, akkor megállapítható, hogy ott az összvesztést gyakorlatilag kizárólag az üresjárás veszteségek — azaz nyomásvesztések, ventilációs veszteségek stb. — és egyéb veszteségek okozzák. Vagyis pl. a fogazatsúrlódási veszteségek elhanyagolhatók. Ez pl. akkor válik érdekessé, ha egy turbóhajtóművet 150 m s^{-1} sebesség mellett zérusról a névlegesre terhelünk, amikor a teljesítményvesztés gyakorlatilag állandó marad. Ezért célszerű az üresjárás során a teljesítményvesztés csökkentése.

A veszteségtényezőnek a fogazatgeometriától való függését — ugyancsak hipoid-hajtóműre — az 5. ábra mutatja, amelyen a fogazat veszteségtényezője különböző tengelyeltolásra egyébként azonos paraméterek esetében a hajtó kerék fordulatszáma függvényében látható. Amint már említettük, a fogazatvesztések kisebbedő tengelyeltolással csökkennek, és így kúpkerék-hajtóművekkel (zérus tengelyeltolással) érhető el a legkedvezőbb érték. Különlegesség a két 25,4 mm tengely távú fogaskerék-hajtómű (IV, illetve IVb1, ahol IV a felület foszfátózását, IVb1 a foszfátlan felületre utal). Szemmel láthatóan a foszfátózott fogfelületek jobban bejáratódnak, úgyhogy ezekben a kísérletekben a teljesítményvesztés 1...2%-kal csökkenthető volt.

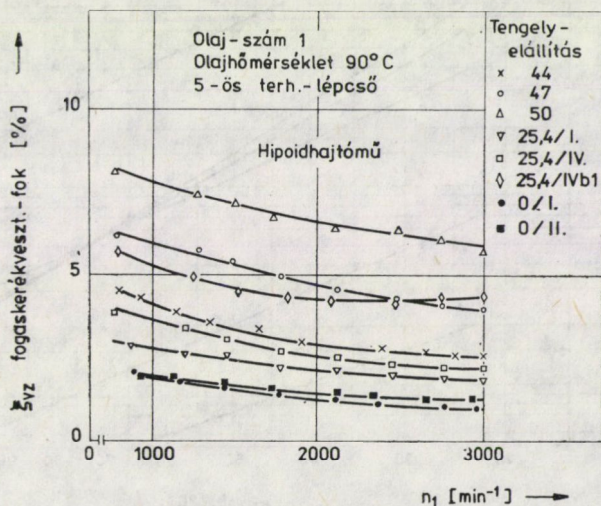
A hatásfokjavítás eddigi módszerei olyanok voltak, amelyekkel közvetlenül a fogazaton próbálkoztunk. Más lehetőség a kenőanyag megváltoztatása. A 6a ábrán látható, hogyan kisebbedik a teljesítményvesztés a csökkenő viszkozitással, amelyhez a viszkozitások a 6b ábrából veendőek. További szavaltolt olajokat foglal össze a 2. táblázat. Ebből következik egy újabb felismerés, amelynek trendjét a személygépkocsi-iparban lehet megfigyelni, azaz hogy a kenőolajok a kisebb viszkozitásúakra mennek át. Itt is valamiképpen kompenzálni kell a hátrányt, vagyis a kis berágódási ellenállást. Ezért kell EP-adalékot belekeverni, és ezzel ismét számítani lehet az öregedési stabilitás csökkenésével, a kenőanyagok drágábbá válnak, ugyanakkor a felületi teherbíróképesség (pitting) csak alig befolyásolható. Ezeket a másodlagos jelenségeket éppúgy figyelembe kell venni a gazdasági számítások esetében.

A kenőanyagok esetében különösen fontos a hőmérsékletbefolyás. Kedvező a kenőolaj, ha a viszkozitás/hőmérséklet-görbe lapos. Továbbá az olaj egyik fontos jellemzője az adott súrlódási tényezője. A 7. ábra megmutatja, hogy — egyébként azonos feltételek mellett — a súrlódási tényező a kenőolaj molekuláris felépítésétől függ. Itt a μ súrlódási tényező a v_1-v_2 csúszósebesség

fajlagos értéke függvényében látható. A csúszósebesség két, egymáson gördülő hengeres tárcsa kerületi sebességeinek különbsége, miközben F_N erővel szorítjuk össze őket, és a különböző csúszásértékek beállíthatók. Az ábra két fajta kenőanyagra mutatja a mérési eredményeket, amely anyagok gondosan kiszámított vegyi eljárással készültek, amennyiben olyan molekulaegységekből

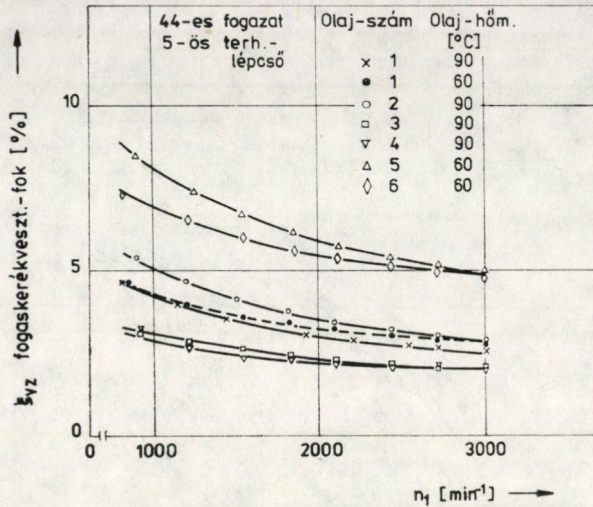


4. ábra. Fogaskerék teljesítményvesztéseinek eloszlása a hajtó fogaskerék fordulatszámának függvényében

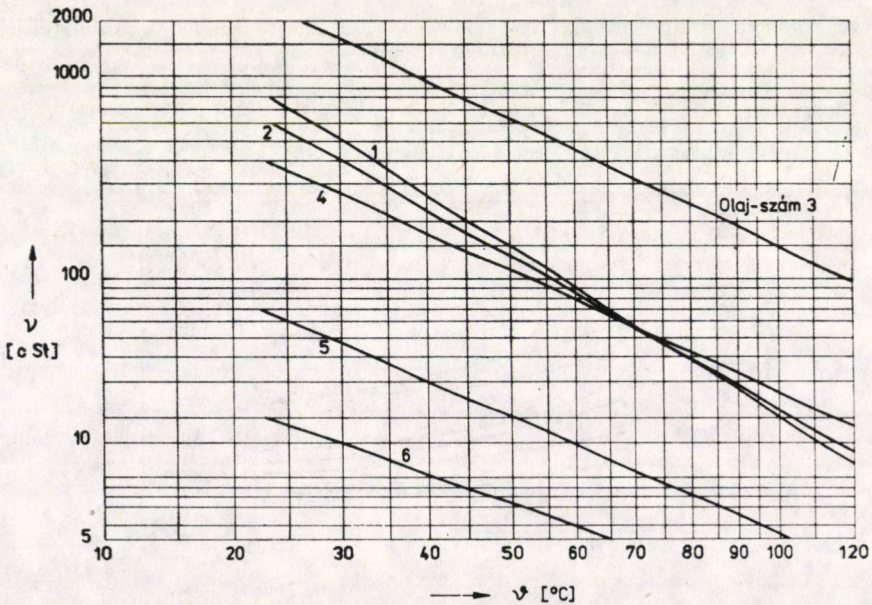


5. ábra. A fogazatgeometria befolyása a veszteségtényezőre

rakták össze őket, mint azt az ábra mutatja. Látható, hogy mindkét olaj viszkozitása gyakorlatilag azonos, sőt a kisebb sűrűdési tényezőjű kicsit viszkozusabb. Ebből felismerhető, milyen nagymértékben különböznek az olajok sűrűdési tényezői egyébként azonos viszkozitás mellett. Mindkét olaj a hajtóművekben fontos szerepet tölthet be, az alsó (kisebb sűrűdési tényezővel) a



6a ábra. Az olaj és az olajhőmérséklet befolyása a fogaskerék-vesztégtényezőre



6b ábra. A vizsgált olajok viselkedése a hőmérséklet függvényében

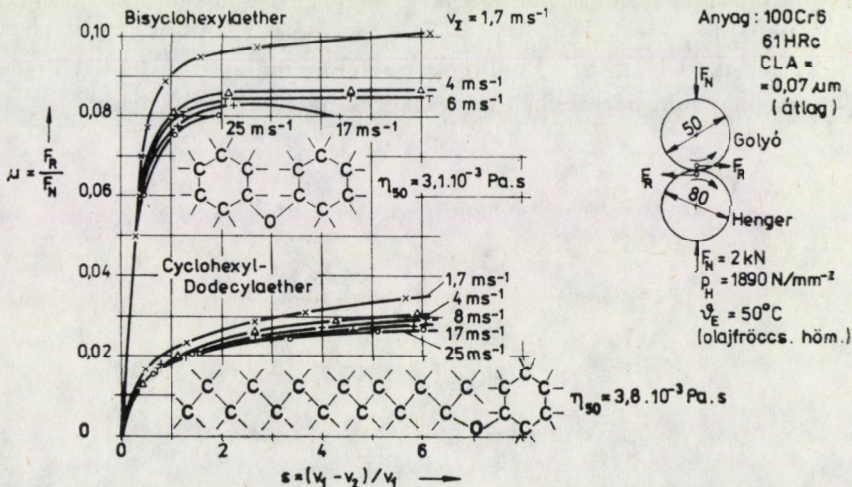
2. táblázat
A mérőolajok jellemzői

| Olaj-számozás | Elnevezés | Jellemző | FZG-besorolás |
|---------------|--|----------------------------|---------------|
| 1 | Veedol alapolaj Nr. 17 + 0,5% R 1612 (Deog.) | Alacsonyötv. ásványolaj | 11 |
| 2 | Esso GX90 | Magasötv. hipoidolaj | 12 |
| 3 | Polyran M400 (Bayer) | Nagyviszk. szint. olaj | 10 |
| 4 | Syntheso D110 EP (Klüber) | Szintetikus ásványolaj | 12 |
| 5 | Santotrac 50 (Monsanto) | Szintetikus ásványolaj | 10 |
| 6 | Mobilfluid 62 | Kisviszk. ásványolaj | 7 |

Megjegyzés: FZG = A Fogaskerék- és Hajtóműkísérleti Állomás (München, Műszaki Egyetem Gépelemek Tanszéke) német elnevezésének rövidítése.

fogaskerék-hajtóművekben, a másik pedig ún. trakciós folyadék a dörzshajtásokhoz, amellyel nagy teljesítmény sűrűség érhető el erőzárással.

Felmerülnek fáradozások mellékjelenségekre, amely fáradozásokkal az energiavesztéseket csökkenteni, illetve a hatásfokot javítani akarják, ezek természetük szerint lehetnek pozitív és negatív hatásúak. Példa lehet a pozitív hatásokra a gépkocsi kardántengelyei mint hossz tengelyek, amelyek tehát a hajtóművet összekapcsolják a hátsó tengelyekkel, ahol többnyire nagyobb

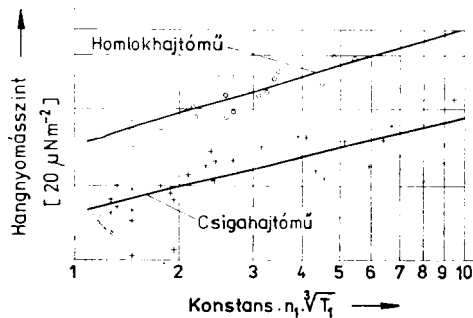


7. ábra. A kenőanyagok molekulaszerkezetének befolyása a súrlódási tulajdonságokra

hajlásszögek fordulhatnak elő. Habár a kerékajtásokhoz különböző okok miatt szinkronizált kardántengelyeket építenek be, amelyek gazdaságossági szempontból részben előnyösebbek, hossztenegelyként mégsem váltak be, mert hőmérsékleti okból problémák adódtak. Egyébként azonos körülmények között kereszt-csuklós tengelyekkel kb. 40 °C-ot, a szinkronizált csuklós tengelyekkel 90...100 °C-ot mérhetünk. És itt nem is a kereszt-csuklós tengely jobb hatásfoka a döntő, hanem a nagyobb hőmérsékleten fellépő problémák (kenés, tömítés stb.). Ezért hossztenegelyként — amelyek rosszul hűthetők természetes módon — túlnyomórészt kereszt-csuklós tengelyt alkalmaznak.

A negatív jelenségekre példákat már részben említettünk, pl. a kisebb viszkozitású kenőanyagok kisebb berágódástűrését. Ide sorolható az is, amikor bolygóművet alkalmazunk a közönséges fogaskerék-hajtómű helyett, mert a kapcsolóteljesítmény javítja az összhatósfokot, másrésztől viszont egy bonyolultabb hajtóműhöz jutunk, amely kisebb teljesítmények esetén gazdaságtalan, egyszerűen azért, mert a szerkezeti anyag kiadásai nem különböznek lényegesen, a darabszám nagyobb és a gyártási költségek is nagyobbak. Nagy forgatónyomatékoknál ez a helyzet ellenkezőre válhat, mert a bolygóművön belüli teljesítmény-elágaztatással lényeges anyagkiadások takaríthatók meg, ebben az esetben tehát a mellékjelenség pozitívvá válhat.

Különösen negatív mellékjelenség, amikor a kedvezőtlenül nagy csúszású gördülés átmege a tiszta gördülésbe, mint ahogyan ez a hipoid- és csigahajtások esetében bekövetkezik, mert a zajállapot megromlik (ha ugyanis nagy a csúszófelület, akkor javul a zajhelyzet). A 8. ábrán a hangnyomásszint változása látható a homlokfogaskerék-hajtóművekre és a csigahajtóművekre egy olyan konstans függvényében, amely tartalmazza a fordulatszámot és a nyomatékot. Összehasonlító mérésekről van szó, amelyet a David Brown cég hajtott végre Angliában saját termékeivel. Látható, hogy a csigahajtómű hangnyomásszintje 10 dB-lel lejjebb fekszik. Itt — mint annyiszor — dönteni kellett egyrészt a környezetvédelem, ill. a kisebb energiafelhasználás és kisebb költségek között, mert nagyobb méretekkkel a fogaskerék-hajtómű költségesebb.



8. ábra. Hengeres fogaskerék-hajtóművek és csigahajtóművek zajsztintje

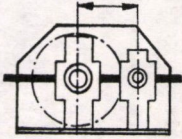
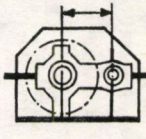

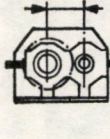
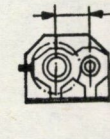

Amint már többször említettük, az energiavizsgálatok során nem szabad csak a hatásfokra szorítkozni, hanem tekintetbe kell venni a fejlesztés, a gyártás, a karbantartás, a javítás, a leírás stb. szükséges energiáit is. Kérdéses tehát, milyen mélységig sikerül ezeket a költségeket értékelni, és egyáltalán, vajon az energiamegtakarítás egyes egyedül a költségekkel kifejezhető-e? Ha pl. a gyártás energiaszükségletét költség formában adjuk meg, akkor a hajtómű darabköltségeit kell összehasonlítani. Ezért a 9. ábrán különböző homlokfogaskerék-hajtómű összehasonlítása látható, amelyeknek azonos a funkciója, és azonos nyomatékokat szolgáltatnak azonos fordulatszám mellett. A különbségek elsősorban abból adódnak, hogy a hajtó kerék és a hajtott kerék szerkezeti anyagai és hőkezelései eltérők. A legnagyobb hajtómű ötvözetlen acélú, a legkisebb betétedzésű, köszörült kerekek esetében adódik. A hajtómű súlya, illetve tömege kb. 8,5 Mg-tól 1,6 Mg-ig csökken. Az ár — egyedi konstrukcióként kalkulálva őket — nemesített acélú kerekek esetén 100%-ról 63%-ra csökken, vagyis a tömeg erősebben kisebbedik, mert a költséget a nagyobb előállítási költségek (hőkezelések, köszörülés) terhelése nem engedi annyira csökkenni. Ezeknek a hajtóműveknek a hatásfokuk 99% körül van, a különbségek mindenesetre nagyon kicsik.

A nagyobb teljesítmény-sűrűségű (kisebb) hajtómű esetében további problémák lépnek föl: az egyre csökkenő tengelytávokkal a csapágyerők nőnek, azaz a gördülőcsapágyak nagyobbak és drágábbak, szélsőséges esetben már el sem helyezhetők, mert külső gyűrűik metszik egymást.

Megkérdendő természetesen, miért alkalmaznak akkor egyáltalán még edzetlen fogaskerekeket? Alapvető ok, hogy a betétedzésű kerekek drága beruházásokat (köszörűgépeket és saját hőkezelő berendezést) igényelnek, ha el akarjuk kerülni a külső nagy költségeket, amelyek egyben bizonyos függőséget is jelentenek. Ehhez jön még, hogy ezek a hajtóművek — tekintettel a túlterhelhetőségükre — eltérő módon viselkedhetnek. Pl. a nemesített kerekek különösen érzéketlenek lökésre, élfelfekvésre stb., ugyanakkor az azonos kifaradási határra tervezett gáznitrált kerék általában érzékenyebb a gyártási hibákra és a túlterhelési lökésekre. A nitridált fogak károsodási vonala nagyon lapos.

A nagy méretű hajtóművek, vagyis a normalizáltak és nemesítettek, kimondottan jóindulatú „társak”, amelyek konstrukciós fogyatékoságokat is „megbocsátanak”, amely alatt foghosszmenti egyenlőtlen terheléseloszlást kell érteni, mert bejárátódnak. A még kevés tapasztalatú hajtómű-tervezők számára ezek az igaziak, mert a bonyolultabb fogazatok lényegesen érzékenyebbek és rendkívüli know-how-t igényelnek.

Látható, hogy ebben az összefüggésben a hatásfokvizsgálaton túlmenő dolgok is lényeges szerepet játszanak. Ha abból indulunk ki, hogy a költségviszonyok az ilyen termékek fejlesztési és gyártási befektetett energiáinak a mértékei, akkor ez lényeges kritérium, amelyet az energiatakarékossági meg-

| Szerkezeti anyag | Hajtó/hajtott kerék | | | | | |
|---------------------|---|---|--|---|---|---|
| | C 45 | 42 CrMo 4 | 20 MnCr 5 42 CrMo 4 | 31 CrMoV 9 | 34 CrMo 4 | 20 MnCr 5 |
| Hőkezelés | normalizált | nemesített | ①betétedzett ②nemesített | gáznitrált | indukciós felületi edzés | betétben edzett |
| Megmunkálás | lefejtő marás | lefejtő marás | ①kőszörülés ②lefejtő marás | finommarás | marás (lappolva) | kőszörülés |
| Tengelytáv [mm] | 830 | 650 | 585 | 490 | 470 | 390 |
| Körvonal nagyság |  |  |  |  |  |  |
| Tömeg [Mg] | 8,51 | 4,86 | 3,47 | 2,62 | 2,39 | 1,58 |
| Viszonyított ár [%] | 132 | 100 | 85 | 78 | 66 | 63 |
| Biztonsági tényező | | | | | | |
| S_G | 1,3 | 1,3 | 1,3 | 1,3 | 1,4 | 1,6 |
| S_B | 6,1 | 5,7 | 3,9 | 23, | 2,3 | 2,3 |

9. ábra. Hengeres fogaskerék-hajtóművek összehasonlító adatai különféle szerkezeti anyagok, de azonos nyomaték és fordulatszám esetén (a hajtóművek tervezési adatai: $M_{1\text{név}} = 21$, kN m, $n_1 = 500 \text{ min}^{-1}$, $i = 3$, $K_A = 1,25$, hegesztett hajtóműház, $S_{B\text{min}} = 2,3$ $S_{G\text{min}} = 1,3$)

gondolások során figyelembe kell vennünk. Nemcsak a határfok, hanem az előállítási költségek is figyelembe veendőek. Ezek mellőzése olyan hiba, amelyet gyakran elkövetnek a nyilvános energiavitákon. Azt mondják: „Napenergiát használjunk, amely nem kerül semmibe, csak egyszer kell hozzá beruházás.” Ugyanakkor nem veszik figyelembe, hogy a beruházási költségeket, illetve azokat az energiákat is figyelembe kell venni, amelyek ezek mögött vannak; az élettartamra is figyelemmel kell lenni, és a leírás, karbantartás, javítás stb. költségeire, amikor összehasonlításokat hajtanak végre.

Még egy példa az „összlétesítmény-költségek”-hez a gördülőcsapágyakból: a 30-as évek közepéig az önbeálló hengergörgőcsapágyak terhelhetőségét illetően közepesen 37%-os növekedést céloztak meg azonos méretek mellett. Vagyis a befektetett energiát, amely közelítően azonos maradt, lényegesen hatékonyabban használták ki.

Az itt tárgyalt téma komplex voltához hozzátartozik még egy megfontolás, vajon valóban a leggazdaságosabb módszer, hogy egy termék műszaki teljesítményét mindig az optimumálsra kell-e vonatkoztatni, vagy nem lehetséges-e néhány esetben, hogy ettől az optimumtól kissé eltérve, olyan megtakarításhoz jussunk, amely a kis veszteséget is megéri („behozza”). Más szavakkal: ha pl. egy kissé kisebb teherviselőképességet kapunk ugyan, másrészt viszont a rész gyártási költsége és ezzel az energiafelhasználás lényegesen olcsóbb. Példaként idézhetünk egy FVA-kutatási tervből, amelyből — nagyon általánosan — kitűnik, hogy 100%-os teherviseléshez 100%-os betétedzési mélység szükséges. Ha azonban a betétedzési mélységet 50%-ra csökkentjük, még mindig megmarad a teherviselőképesség 90%-a.

A kisebb (csak 50%-nyi) betétedzési vastagság lényegesen kevesebb kemenceidőt, vagyis kisebb energiát, mégpedig számottevően kisebbet (!) igényel (kb. fele annyit). Ugyanakkor csökkennek a vetemedések, úgyhogy elmaradhat a felületek köszörülése és elegendő az edzés előtti hántolás.

A leglényegesebb tehát, hogy az ember megpróbálja a műszakilag legkedvezőbbet elérni és mindinkább a gazdaságossági szemlélet uralkodjék!

IRODALOM

- DITTRICH, O.: Grundsätzliches über Funktion, Bauarten und Eigenschaften stufenloser Getriebe. Fachtagung Antriebstechnik 1974. Kongressband anlässlich Hannover Messe 1974, 45—55
- NIEMANN, G.—WINTER, H.: Maschinenelemente Band II—III, Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo 1983
- LIGHTOWLER, K.: Luftgekühlte Schneckengetriebe und ihre Einsatzmöglichkeiten. Optimaler Einsatz von Getrieben und Antriebsselementen. Eurotrans und Deutsche Messe- und Ausstellungs-AG. Hannover 1975
- OHLENDORF, H.: Verlustleistung und Erwärmung bei Stirnradgetrieben. Dissertation TH München 1958
- RICHTER, M.: Verzahnungswirkungsgrad und Freßtragfähigkeit von Hypoid- und Schraubradgetrieben — Versuchsergebnisse und Berechnungsmethoden, Dissertation TU München 1976

WINTER, H.—VOJACEK, H.: Influence of the Molecular Structure on the Traction Characteristics of Lubrication Fluids. International Symposium on Gearing & Power Transmissions, Tokyo 1981

DUBBEL: Taschenbuch für den Maschinenbau 14. Auflage 1981

Energy saving with Modern Solutions of Gear-drives. — The direct steps to save energy consists in an improvement of the efficiency of all transmission elements. The efficiency of gears e.g. depends on diametral pitch, tooth geometry, accuracy, surface roughness, offset of hypoid pinion. It can be assumed that synthetic lubricants developed in a systematic way will be of special importance. The no load power losses dominate at high speeds. Considerably lower efficiencies must be accepted at low load and starting conditions (low temperatures). Overrated drives and short time operation therefore are especially unfavorable. Continuously variable drives arrive at a grade of efficiency which is 10 to 20% below that of a spur gear. It is important that the range of variation is not chosen unnecessarily large. In a wider sense energy can be saved by suitable steps in development, manufacturing, maintenance, repair, etc. More compact gears and ball bearings of higher load capacity can be taken as examples for steps of energy saving in this meaning.

Energieeinsparung durch moderne Lösungen der Antriebstechnik. — Die direkte Maßnahme zur Energieersparnis besteht darin, den Wirkungsgrad der Antriebselemente zu verbessern. Zum Beispiel hängt der Verzahnungswirkungsgrad ab von Modul, Verzahnungsart, Genauigkeit, Flankenrauheit, Achsversetzung bei Hypoidgetrieben. Besondere Bedeutung dürften hier systematisch entwickelte synthetische Schmierstoffe haben. Bei großen Umfangsgeschwindigkeiten dominieren die Leerlaufverluste. Wesentlich niedrigere Wirkungsgrade sind im Teillastbereich und bei Anfahrzuständen (niedrigen Betriebstemperaturen) zu erwarten. Überdimensionierte Antriebe und Kurzzeitbetrieb sind daher bezüglich des Energieverbrauchs besonders ungünstig. Stufenlos verstellbare Getriebe liegen im Wirkungsgrad 10 bis 20% unter denen von Zahnradgetrieben. Wichtig ist, daß hier kein unnötig großer Stellbereich gefordert wird. Im weiteren Sinne muß man fragen, wieviel Energie für Entwicklung, Fertigung, Wartung, Reparatur usw. aufgewendet werden muß. Getriebe größerer Leistungsdichte und Wälzlager höherer Tragfähigkeit sind Beispiele für Energieersparnis in diesem Sinne.

A SZÁMÍTOTT ÉS MÉRT SÜLLYEDÉSEK STATISZTIKAI ÉRTÉKELÉSE

RÉTHÁTI LÁSZLÓ*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1982. február 2-án]

A szerkezetek méretezése terén egyre inkább előtérbe kerülnek a valószínűség-elmélet alapján álló megoldások. Ez a geotechnika területén is szükségessé teszi, hogy minden feladat-típushoz korszerű vizsgálati metodikát dolgozzunk ki. Mivel a süllyedések korlátozásához jelentős gazdasági érdekek fűződnek, ennek a kérdésnek igen nagy jelentősége van. A cikk azokat a problémákat kísérel meg feltárni, amelyek megoldásához az új szemlélet többlet-információkat nyújthat.

Bevezetés

A helyszíni megfigyelések azt bizonyítják, hogy az épületek károsodását szinte soha sem a *talajtörés*, hanem a nagy mértékű és/vagy egyenlőtlen süllyedések okozzák. Annak a néhány épületnek, amely talajtörés következtében ment tönkre, a többsége siló volt (a talaj nyírószilárdságának radikális csökkenése a hirtelen terhelés hatására). A mai felfogás szerint azzal, hogy a süllyedést egy határérték alatt tartjuk, egyben a talajtörés ellen is védve vagyunk. Ezért kell különös gondot fordítanunk arra, hogy a süllyedések *előrejelzése* megbízható legyen.

A prognózis elkészítése során abból kell kiindulnunk, hogy mind a teher, mind a talajfizikai jellemzők *valószínűségi változók*. Ez azt jelenti, hogy a süllyedés (vagy süllyedéskülönbség) várható értékén kívül meg kell határoznunk az ettől eltérő, különböző valószínűséggel várható értékeket is. Ezek értékelése a tervezőnek és az üzemeltetőnek egyaránt hasznos információkat nyújthat.

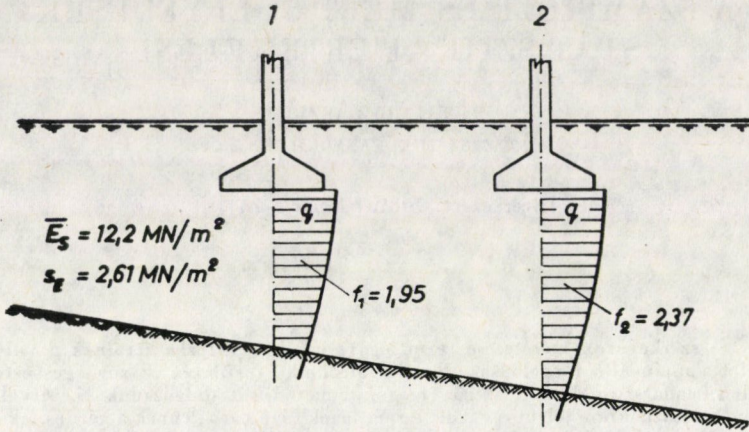
1. A süllyedések előrejelzése

1.1. Az átlagos süllyedés megbízhatósága

Induljunk ki a leggyakrabban használt képletből, mely szerint

$$s = \frac{B \cdot q \cdot f}{E_s},$$

* Dr. Rétháti László 1092 Budapest, Ráday u. 43.



1. ábra. Kiindulási adatok az 1.1. fejezet számpéldájához

- ahol s — a számított süllyedés,
 B — az alaptest szélessége,
 q — a talpfeszültség,
 f — az ún. süllyedési hatástényező,
 E_s — a talaj összenyomódási modulusa.

Tegyük fel, hogy az 1. ábrán látható 1. sz. alaptest süllyedését akarjuk előre jelezni, és E_s -re — véletlenszerű térbeli eloszlással — az 1. táblázatban feltüntetett értékeket mértük. Az összenyomódási modulus statisztikai paraméterei ezek szerint a következők:

$$\begin{aligned}\bar{E}_s &= 12,2 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \text{ (várható érték);} \\ \sigma_E &= 2,61 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2 \text{ (szórás);} \\ C_{vE} &= 0,214 \text{ (variációs tényező);} \\ C_s &= -0,008 \text{ (ferdeségi együttható);} \\ C_k &= -0,83 \text{ (lapultsági együttható).}\end{aligned}$$

A süllyedés és a szórás megkülönböztetése céljából az utóbbi σ -val van jelölve, annak ellenére, hogy empirikus szórásról van szó.

Az 1. táblázat 2. oszlopában a tíz E_s -értékhez számított süllyedések láthatók. Statisztikai paramétereik a következők:

$$\begin{aligned}\bar{s} &= 4,676 \text{ cm}, & \sigma_s &= 1,065 \text{ cm}, \\ C_{vs} &= 0,228, & C_s &= 0,725 \text{ és } C_k = -0,31.\end{aligned}$$

Eszerint a variációs tényező C_{vE} -hez képest alig változott, ugyanakkor az s -sor már korántsem szimmetrikus; ugyanez elmondható a \sqrt{s} - és $\ln s$ -sorra.

1. táblázat
Kiindulási adatok az 1.1. és 1.2. fejezetek számpéldájához

| E_s (MN/m ²) | s (cm) | \sqrt{s} | $\ln s$ |
|----------------------------|----------|------------|---------|
| 14,2 | 3,845 | 1,961 | 1,3468 |
| 13,8 | 3,957 | 1,989 | 1,3755 |
| 16,3 | 3,350 | 1,830 | 1,2090 |
| 14,9 | 3,664 | 1,914 | 1,2986 |
| 9,5 | 5,747 | 2,397 | 1,7487 |
| 11,3 | 4,832 | 2,198 | 1,5753 |
| 12,4 | 4,403 | 2,098 | 1,4823 |
| 8,1 | 6,741 | 2,596 | 1,9082 |
| 9,9 | 5,515 | 2,348 | 1,7075 |
| 11,6 | 4,707 | 2,170 | 1,5491 |

Bizonyítható [9], hogy a süllyedések reciprokaiból képezett sor ferdeségi együtthatója közel zérus, így a süllyedés képlete szerint E_s eloszlásától csak egy állandóban különbözik.

Ezek után az átlagos süllyedés *konfidencia-intervallumát* a következőképpen számíthatjuk. Mivel a mérések száma viszonylag kicsi ($n = 10$), a Student-eloszlást kell használni. A valószínűségi szintet $\alpha = 0,05$ -ra választva $t_\alpha = 1,833$, így

$$E_s = 12,2 \pm 1,833 \frac{2,61}{\sqrt{10}} = 12,2 \pm 1,5 \text{ MN/m}^2.$$

Ezek szerint 90%-os valószínűséggel állíthatjuk, hogy a várható süllyedés nem kisebb

$$100 \frac{1,4 \cdot 200 \cdot 1,95}{13,7 \cdot 10^3} = 4,0 \text{ cm-nél}$$

és nem nagyobb

$$100 \frac{1,4 \cdot 200 \cdot 1,95}{10,7 \cdot 10^3} = 5,1 \text{ cm-nél.}$$

A konfidencia-intervallum olyan esetekben értelmezhető, amikor E_s -nek *nincs vízszintes értelmű trendje*, és egy-egy alaptest *átlagos süllyedéséről* (valamint ennek megbízhatóságáról) akarunk számszerű adatokat nyerni. Így kell eljárunk, ha pl. merev alaptesten átvezetett cső részére kialakított elliptikus nyílás méreteit kívánjuk meghatározni.

1.2. A süllyedéskülönbség előrejelzése

Ez a feladat kétféleképpen oldható meg, aszerint, hogy *a)* egy merev alapról vagy *b)* két különálló alaptestről van szó.

Ad a) Tételezzük fel, hogy az 1. táblázat 1. oszlopának első nyolc értékét nem egyetlen alap környezetében, hanem egy merev sávalap tengelyében, egy-

mástól d távolságra mérték. Az egyes s_i értékekre meghatározott regressziós egyenes egyenlete ekkor:

$$s = 0,346 d + 3,01,$$

a korrelációs együttható pedig $r = 0,73$.

Az egyenlet szerint az 1. pont helyén várható süllyedés $s_1 = 3,36$ cm, a 8. pont helyén $s_8 = 5,78$ cm, a süllyedéskülönbség várható értéke tehát $\Delta s = 2,42$ cm.

A regressziós együttható szórása

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sigma_r^2}{(n-1)\sigma_d^2}} = \sqrt{\frac{0,792^2}{(10-1)2,45^2}} = 0,108,$$

minthogy a σ_r reziduális szórás:

$$\sigma_r = \sigma_s \sqrt{1 - r^2} = 1,159 \sqrt{1 - 0,73^2} = 0,792.$$

Eszerint 90%-os valószínűséggel állíthatjuk, hogy a regressziós együttható (a) nem nagyobb

$$0,346 + 1,28 \cdot 0,108 = 0,484\text{-nél},$$

és Δs nem nagyobb

$$(8 - 1)0,484 = 3,39 \text{ cm-nél}.$$

Ad b) Tegyük fel, hogy az 1. ábrán látható két alaptest általaját az 1. táblázat tíz — véletlen térbeli eloszlású — E_s -értéke jellemzi. A süllyedéskülönbség várható értéke ekkor

$$\bar{\Delta s} = 100 \frac{q \cdot B}{\bar{E}_s} (f_2 - f_1) = \frac{200 \cdot 1,4}{12,2 \cdot 10^3} (2,37 - 1,95) = 0,96 \text{ cm}.$$

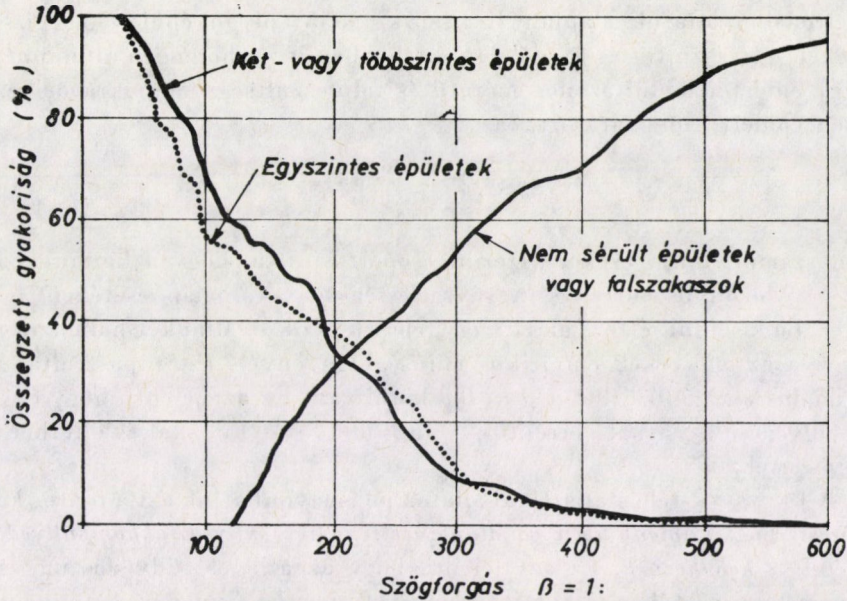
Az 1. sz. alap süllyedésének varianciája (ha q és B szórását elhanyagoljuk):

$$\sigma_1^2 = - \left(\frac{qBf_1}{\bar{E}_s^2} \right)^2 \sigma_E^2 + \left(- \frac{qBf_1}{\bar{E}_s^2} \right)^2 \frac{2qBf_1}{\bar{E}_s^3} C_{sE} \sigma_E^2 = 91,98 \cdot 10^{-6},$$

így $\sigma_1 = 0,00959$, vagyis 0,959 cm. Hasonlóképpen eljárva, a 2. jelű alap süllyedésének szórására $\sigma_2 = 1,164$ cm-t kapunk.

Az a Δs különbség, amelynél nagyobb érték bekövetkezésének valószínűsége 10%, a következő:

$$\begin{aligned} \Delta s &= (\bar{\Delta s} + t_\alpha \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}) 100 = \\ &= (0,96 + 1,28 \sqrt{0,00959^2 + 0,01164^2}) 100 = 2,9 \text{ cm}. \end{aligned}$$



2. ábra. A kritikus szögforgás meghatározása az ép és sérült épületeken (falakon) mért szögforgások empirikus eloszlásfüggvényei segítségével (Rétháti 1977)

A tervezési gyakorlatban a számított süllyedéseket a süllyedéskritériumok határértékeivel szokás összehasonlítani. A szögforgás határértékeinek megállapítására jó alkalmat nyújtott a Magyarországon vizsgált több 100 károsodott épület [8]. Felrajzolva a károsodott és a sértetlenül maradt épületeken (falakon) mért szögforgások empirikus eloszlásfüggvényeit (2. ábra), a kettő metszéspontjához tartozó β tekinthető a veszélyes érték felső határának.

1.3. Véletlen jellegű mozgáskomponensek homogén talajon

A homogén talajon álló, azonos felületű és terhelésű tömbalapok süllyedését a hagyományos (determinisztikus) méretezési eljárás során *azonosnak* tekintjük.

Ez a feltételezés igen távol áll a valóságtól. A helyszíni megfigyelések azt bizonyítják, hogy süllyedéskülönbségek ilyen esetekben is kialakulnak, és általában nem is mm-, hanem cm-nagyságrendben. Ennek főbb okai a következők:

- a „homogenitás” tényét viszonylag kevés minta vagy helyszíni vizsgálat alapján deklaráljuk;
- a hasznos teher, de nemegyszer a holt teher eloszlása is véletlen jellegű;
- az egyes alapok kivitelezése során kialakuló körülmények nem azonosak (egyik-másik munkagödör beázhat vagy fellazulhat stb.);
- egyes alapokat előre nem látható lokális hatások érhetnek (a felszíni vízhozáfolyás mértéke pl. nem azonos).

Irodalmi adatok alapján LEUSSINK (1955) olyan épületeket vizsgált, melyeket — vízszintes és függőleges értelemben is — homogén altalajon álló, egy-egy épületen belül azonos méretű és talpfeszültségű alapokra helyeztek. Minden épületre meghatározta az

$$\alpha = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{\bar{s}}$$

viszonyszámot, majd ezeket aszerint csoportosította, hogy a kompresszibilis réteg egy bizonyos mélység (a sáv szélesség fele, talpalap esetében $B/2$ és $L/4$ közül a kisebbik érték) alatt vagy felett fekszik-e. Mindkét halmazra meghatározva az α értékek empirikus sűrűségfüggvényét, azt tapasztalta, hogy ezek módusza $\alpha = 0,3$, illetve $\alpha = 0,9$ körül van. Ez azt jelenti, hogy egy-egy alap süllyedése a várható értéktől $\pm 15\%$, illetve $\pm 45\%$ -kal is eltérhet, ami jelentős érték.

A LEUSSINK-féle statisztikai adatokból is levonhatjuk azt a fontos következtetést, hogy, *amennyiben az alapozási rendszer süllyed, akkor süllyedéskülönbségek is keletkeznek.* Ez azt jelenti, hogy az átlagos süllyedés nagyságát homogén talaj esetében is korlátoznunk kell, mégpedig nemcsak funkcionális (pl. csővezetékek csatlakozása) vagy egyéb okokból, hanem azért is, hogy az építményt nemkívánatos egyenlőtlen mozgásoktól megvédjük. A *megtűrhető maximális \bar{s}* a következőképpen számítható [6].

SKEMPTON és MACDONALD [14] igen részletes statisztikai vizsgálatai szerint agyagon, illetve homokon (tehát lassan és gyorsan konszolidálódó talajon) álló alapokra a *megengedhető maximális süllyedéskülönbség*

$$\Delta s_{\max} = 4,5 \text{ cm, illetve } 3,2 \text{ cm.}$$

Ezeket az értékeket egyenlővé téve a LEUSSINK-féle értékekkel, a következő egyenlőségek írhatók fel:

$$4,5 = 0,9 \bar{s}, \text{ illetve } 3,2 = 0,9 \bar{s}.$$

Ez azt jelenti, hogy agyagra $\bar{s} = 5,0$ cm, homokra $\bar{s} = 3,5$ cm a megengedhető átlagos süllyedés. Hasonló eredményt kapunk, ha SKEMPTON és MACDONALD másik, nevezetesen az épületen belül mérhető *maximális süllyedésre* vonatkozó kritériumából indulunk ki. E szerzők szerint ennek megengedhető mértéke agyagra 7,6 cm, homokra 5,1 cm, így az alábbi egyenlőségeket kapjuk:

$$7,6 = \bar{s} + 0,45 \bar{s}, \text{ illetve } 5,1 = \bar{s} + 0,45 \bar{s}.$$

Az \bar{s} -ra ezekből kapott értékek (5,2 és 3,6 cm) közel azonosak az előzőekben meghatározott kritikus \bar{s} -gal.

RESENDIZ és HERRERA [5] egyenletesen megoszló teherrel igénybe vett solitair alap mozgáskomponenseit vizsgálják arra az esetre, amikor a talaj alakváltozási jellemzőinek *nincs vízszintes trendje*. Képleteik segítségével számítható az átlagos süllyedésnek, valamint az x és y irányú billenésnek (Θ_x és Θ_y) a varianciája. (Míg s várható értéke véges érték, Θ_x és Θ_y várható értéke természetesen zérus.) Az eljárásnak az a figyelemre méltó alap gondolata, hogy egy zérus várható értékű esemény bekövetkezéséhez *zérustól különböző valószínűséget* rendelünk. A valószínűségelméletnek azért van ilyen esetekben nagy jelentősége, mert ezek a feladatok *determinisztikus módszerekkel nem oldhatók meg*.

2. A mért süllyedések értékelése

A süllyedésmérés a cikk bevezetőjében említett feladatokon kívül számos más probléma megoldását is elősegíti: lokális hatások kimutatását (pl. közeli építkezés esetén), új szerkezetek, technológiák vagy alapozási rendszerek megfigyelését, a süllyedés sebességének meghatározását (pl. az épület helyreállítása előtt) stb. Ezek közül itt négy kérdéssel fogunk részletesebben foglalkozni.

2.1. A mért konszolidációs görbe extrapolálása

A biztonság fokozatos csökkenése sok esetben szükségessé teszi a mozgáskomponensek *végleges értékének* ismeretét, hogy a szükséges intézkedéseket idejében megtehessek.

Az itt ismertetett két módszer — főleg az első [7] — szigorúan véve csak az *egydimenziós konszolidáció* esetére használható.

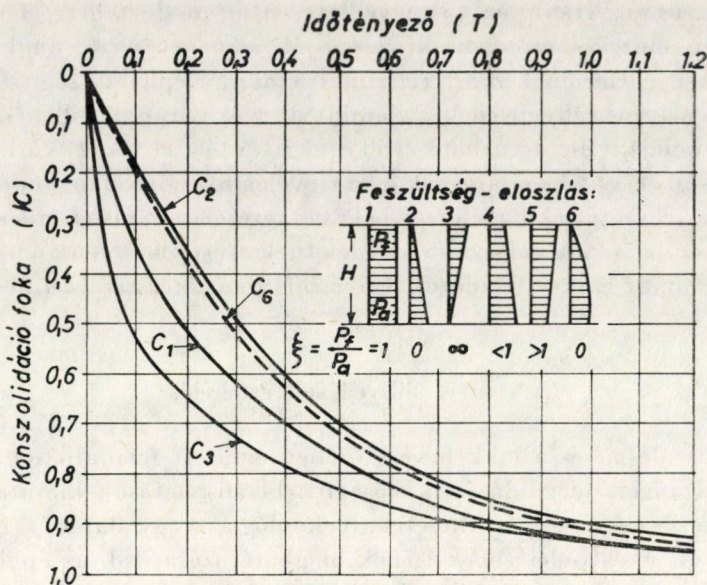
Az *első* szerint eljárva a mérések alapján megbecsüljük az s_u végleges süllyedést, majd számítjuk a különböző t_i időpontokhoz tartozó

$$\alpha_i = \frac{s_i}{s_u}$$

hányadost. Ezekhez a 3. ábrából leolvassuk a kerületi feltételeknek megfelelő T_i időtényezőket, majd képezzük az

$$\alpha_i = \frac{t_i}{T_i}$$

hányadosokat. Az s_u süllyedés megbízhatósága az α_i értékek variációs tényezőjével, vagyis a $C_v = \sigma_\alpha / \bar{\alpha}$ hányadossal jellemezhető. Változtatva s_u -t, azon értékét tekintjük legvalószínűbbnek, amelyre $C_v = \text{minimum}$.



3. ábra. Összefüggés az időtényező (T) és a konszolidáció foka (U) között, egydimenziós konszolidáció esetén

Tegyük fel, hogy a függőleges feszültségek eloszlása a 3. ábra 5. jelű esetének felel meg, $\xi = p_f/p_a = 2$, vagyis

$$u_i = u_1 - \frac{\xi - 1}{\xi + 1} (u_1 - u_2) = \frac{2}{3} u_1 + \frac{1}{3} u_2.$$

Tegyük fel továbbá, hogy az építés kezdetétől eltelt t_i (hónap) időpontokban mért s_i süllyedések idősora a 2. táblázatnak megfelelő. Ugyanezen táblázat 3–7. soraiában találjuk az $s_u = 6,6$ – $7,2$ cm-hez tartozó α_i -értékeket, ezek szórását és variációs tényezőjét. Ezek szerint $s_u = 6,8$ cm tekinthető a legvalószínűbb értéknek.

A második módszer azon alapul, hogy az egydimenziós esetben a görbe második szakasza exponenciális függvénnyel közelíthető. Így jogosan várhatjuk, hogy a süllyedések az

$$s = s_u (1 - e^{-AtF})$$

kifejezéssel jól leírhatók. Mivel ez a függvény sem linearizálható, ismét úgy járhatunk el, hogy s_u -t megbecsüljük, majd az

$$A = - \frac{\ln \left(1 - \frac{s}{s_u} \right)}{t}$$

képletből számítjuk a t_i , s_i értékpárokhoz tartozó A_i értékeket. Meghatározzuk ezeknek a különböző s_u -hoz tartozó variációs tényezőit, azt a becslést fogadjuk el, amelyre $C_v = \text{minimum}$.

2. táblázat

A végleges süllyedés meghatározása (számpélda)

| s_u (cm) | t_i (hónap): 3 s_i (cm): 1,8 | 4,7 2,7 | 7,5 4,0 | 9,5 4,4 | 12 4,8 | σ_x, σ_A | C_{vz}, C_{rA} |
|---------------|-------------------------------------|------------|------------|------------|-----------|----------------------|------------------|
| 6,0 | $\alpha = 24,0$ | 21,4 | 17,6 | 18,6 | 19,0 | 2,58 | 0,128 |
| 6,6 | 27,3 | 25,4 | 22,1 | 22,4 | 23,5 | 2,20 | 0,091 |
| 6,8 | 27,3 | 26,1 | 22,1 | 23,8 | 25,5 | 2,05 | 0,082 |
| 7,0 | 30,0 | 27,6 | 24,2 | 24,7 | 26,7 | 2,34 | 0,088 |
| 7,2 | 31,6 | 27,7 | 25,0 | 26,8 | 28,2 | 2,42 | 0,087 |
| 6,0 | $A = 0,1189$ | 0,1272 | 0,1465 | 0,1391 | 0,1341 | 0,0106 | 0,0799 |
| 6,8 | 0,1025 | 0,1076 | 0,1183 | 0,1096 | 0,1020 | 0,0066 | 0,0614 |
| 7,0 | 0,0991 | 0,1037 | 0,1130 | 0,1043 | 0,0965 | 0,0063 | 0,0611 |
| 7,2 | 0,0959 | 0,1000 | 0,1081 | 0,0994 | 0,0916 | 0,0061 | 0,0618 |

A 2. táblázat 8–11. soraiban feltüntetett adatok szerint $s_u = 7,0$ cm a legvalószínűbb érték, jó egyezésben az első módszerrel kapott értékkel.

s_u és A ismeretében meghatározható a tetszőleges t_i -hez tartozó süllyedés vagy a κ konszolidációs fokhoz tartozó idő. Segítségükkel a számítás megbízhatóságát is jellemezni tudjuk; a második módszer esetében pl. a mért (s_m) és számított (s_c) süllyedések a következő értékpárokat alkotják:

$$\frac{s_m}{s_c} \left| \begin{array}{cccccc} 1,80 & 2,70 & 4,00 & 4,40 & 4,80 \\ 1,86 & 2,68 & 3,76 & 4,36 & 4,96 \end{array} \right.$$

Eszerint a korrelációs együttható $r = 0,993$, a reziduális szórás pedig mindössze $\sigma_r = 0,15$ cm.

2.2. A számítási modellek ellenőrzése

A számított és mért értékek összehasonlításával számos szerző foglalkozott, felmérve a modell egyes elemeinek (határmélység stb.) megbízhatóságát.

A vizsgálatok egy része *homokon* álló épületek süllyedésével kapcsolatos, amikor is a talaj alakváltozási tulajdonságait többnyire *szondázás* segítségével határozzák meg.

WU [16] számos irodalmi adatból meghatározta a számított és mért süllyedések $\mu = s_c/s_m$ arányát, majd ezek eloszlásfüggvényét. A süllyedést az $s_c = q/q_c$ hányadossal vette azonosnak, ahol q a talpfeszültség, q_c pedig a TERZAGHI és PECK [15] által javasolt

$$q_c = 0,36 (N - 3) \left(\frac{B + 1}{2B} \right)^2$$

alakú képletből számítható, a max. 1 inch süllyedést előidéző feszültség. (A képletben N a „standard penetration test” során a 30 cm behatoláshoz tartozó ütészám, B pedig az alap szélessége lábban helyettesítve.)

Az eloszlásfüggvények alapján becslést tudunk adni annak valószínűségére, hogy a süllyedés nem lépi túl az általunk megszabott *küszöbértéket*. A görbék arra is rámutatnak, hogy a képlet igen konzervatív, mintegy háromszoros biztonságot rejt magában.

SCHULTZE és SHERIF [12] egy lépéssel tovább mennek: új, általánosabb érvényű összefüggést keresnek N és s között. Képletüket a matematikai statisztika módszereivel határozták meg, amennyiben

- a) négy állandóját *többszörös korrelációból* számították;
 - b) az ötödiket — *véletlen számként* kezelve — r_{\max} -ot adó értékével vették azonosnak;
 - c) a képlet *megbízhatóságát* statisztikai paraméterrel jellemezték.
- A képlet végleges alakja:

$$s \text{ (cm)} + \frac{p \cdot f}{1,71 N^{0,87} \sqrt{B}} \frac{1}{(1 + 0,4t/B)},$$

ahol p a teljes talpfeszültség kN/m²-ben kifejezett értékének 1/100-a, f a süllyedési hatástényező, B (cm) az alaptest szélessége, t (cm) az alapozás mélysége.

Az s_c/s_m hányadost érzékeltető 4. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy az előrejelzés hibája az esetek többségében 40%-nál kisebb. (A többszörös korrelációs együttható 0,938 volt !)

A képlet szerint s lineárisan változik p -vel, ami azt jelenti, hogy a talaj ágyazási együtthatója a talpfeszültségnek nem függvénye.

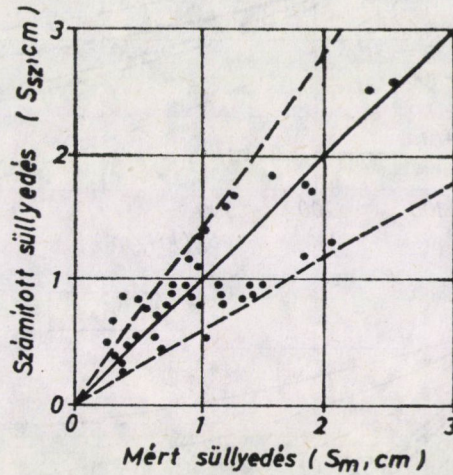
A szórást vizsgálva arra kell törekednünk, hogy a μ értékeket a fizikai vagy egyéb jellemzők szerint differenciáljuk. Jó példa erre 105, löszön álló alap mért süllyedéseinek értékelése [2]. A $\bar{\mu}$ -ra kapott nagy érték ($\vartheta = 4,3$) arra utalt, hogy az ödométeres vizsgálat löszre irreális értéket ad, ugyanakkor feltűnt az is, hogy a legnagyobb értékek a *nagy felületű* alapokhoz tartoznak (5. ábra). Ez a jelenség többek között arra utal, hogy a függőleges feszültségek *határmélysége* (m_o) annál kisebb az általunk feltételezettnél, minél nagyobb az alap felülete. Meggyőzően igazolják ezt ALTES [1] vizsgálatai, aki 132 mérés eredményét dolgozta fel. *Többszörös korrelációval* meghatározott empirikus képlete

$$m_o/B = f(p, F, E_s, B/L)$$

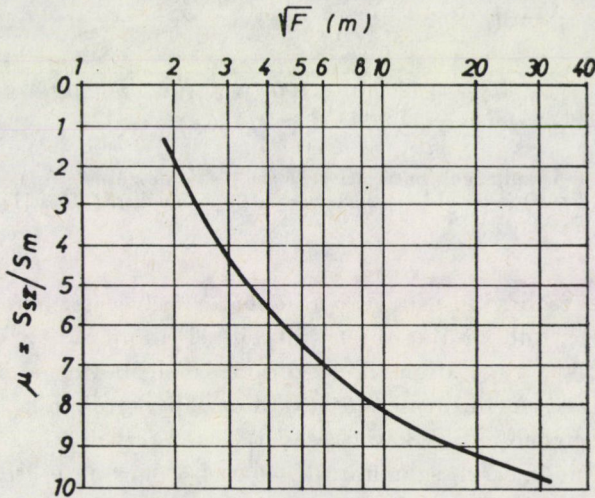
alakban írható fel, ahol — az eddigi jelöléseken kívül — B , L és F az alaptest rövidebb és hosszabb oldala, illetve felülete. (A többszörös korrelációs együttható 0,82 volt.)

A különböző F - és E_s -értékekre szerkesztett grafikonokból (6. ábra) a következőket állapíthatjuk meg:

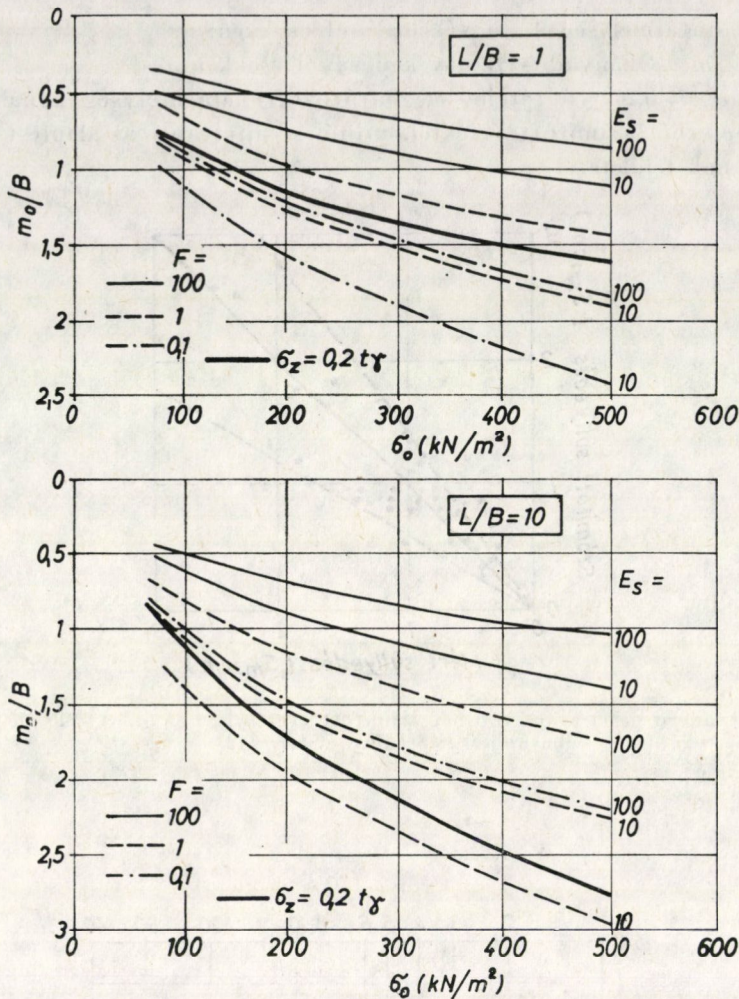
- a) a határmélység E_s növekedésével csökken;
 b) az m_0/B hányados B növekedésével csökken;
 c) a $\sigma_z = 0,2 z\gamma$ feltétellel meghatározott határmélység annál jobban eltér a képletből számított értéktől, minél nyújtottabb az alaptest és minél nagyobb ennek felülete.



4. ábra. A standard penetration test-ből számított és ténylegesen mért süllyedések összehasonlítása (Schultze—Sherif [12])



5. ábra. Makro porózus löszön álló alapok ödométeres vizsgálat alapján számított süllyedésének és a mért süllyedésnek a hányadosa az alapfelület négyzetgyökének függvényében (Egri—Rétháti [2, 3])



6. ábra. A függőleges feszültségek határmélysége (m_0) a talpfeszültség (σ_0), az alaptest felülete (F , m^2) és az oldalak L/B aránya függvényében (Ates [1])

SCHULTZE és SIEVERING [13] különböző süllyedésszámítási módszereket hasonlított össze, 148 épület mért süllyedései alapján. Az összenyomódási modulusok statikus vagy dinamikus szondázásból, illetve ödométeres vizsgálatból származtak. A határmélységet lemezalap esetében a B szélességgel, solitaire alap esetében ennek kétszeresével vették figyelembe. A süllyedéseket 10 különböző módszerrel számították. Az első három esetben $E_s = \text{const}$ feltételezéssel számoltak, a süllyedési hatástényezőt a Fröhlich-féle koncentrációs tényező (ν) és a Poisson-tényező (μ) következő kombinációiban véve fel: $\nu = 3, \mu = 0$; $\nu = 5, \mu = 0$; $\nu = 3, \mu = 0,3$. A másik három eset ezektől abban

3. táblázat

A különböző módszerekkel számított és a tényleges (mért) süllyedések arányának átlaga, szórása és variációs tényezője SCHULTZE—SIEVERING 1977)

| Számítási módszer-jele | Az összes alapra | | | Lemezalapra | | | Tömbalapokra | | |
|------------------------|------------------|----------------|-------|-------------|----------------|-------|--------------|----------------|-------|
| | $\bar{\mu}$ | σ_{μ} | C_v | $\bar{\mu}$ | σ_{μ} | C_v | $\bar{\mu}$ | σ_{μ} | C_v |
| 1 | 1,82 | 1,43 | 0,79 | 1,99 | 1,54 | 0,78 | 1,51 | 0,79 | 0,52 |
| 2 | 2,16 | 1,66 | 0,77 | 2,28 | 1,78 | 0,78 | 2,07 | 1,05 | 0,51 |
| 3 | 1,49 | 1,15 | 0,77 | 1,60 | 1,24 | 0,78 | 1,31 | 0,69 | 0,52 |
| 4 | 1,41 | 1,12 | 0,79 | 1,56 | 1,21 | 0,77 | 1,05 | 0,52 | 0,50 |
| 5 | 1,63 | 1,27 | 0,78 | 1,78 | 1,37 | 0,77 | 1,36 | 0,66 | 0,49 |
| 6 | 1,13 | 0,89 | 0,78 | 1,24 | 0,96 | 0,77 | 0,89 | 0,44 | 0,50 |
| 7 | 3,71 | 3,37 | 0,91 | 4,30 | 3,64 | 0,85 | 2,05 | 1,05 | 0,51 |
| 8 | 1,70 | 1,45 | 0,85 | 1,92 | 1,58 | 0,82 | 1,06 | 0,49 | 0,46 |
| 9 | 0,55 | 0,49 | 0,90 | 0,64 | 0,53 | 0,82 | 0,35 | 0,16 | 0,46 |
| 10 | 2,02 | 1,75 | 0,87 | 2,31 | 1,90 | 0,82 | 1,27 | 0,59 | 0,46 |

különbözik, hogy E_s -t a mélységgel lineárisan változóknak vették fel. A 7–10. jelű számításokhoz felhasznált képletek:

$$s = 3,5 \frac{p_n^R H}{E_s};$$

$$s = \frac{L \cdot B \cdot p}{E_s(L + B)};$$

$$s = 2,3 \frac{p}{2E_s(L - B)} \log \frac{2B + z}{2E_s + z} \frac{L}{B}$$

$$s = \frac{0,6pB}{E_s}.$$

A számított és mért süllyedések μ hányadosainak a különböző számítási módszerekre meghatározott átlagai 0,55 és 3,71 között változtak (3. táblázat). Egy-egy csoporton belül a μ értékek Poisson-eloszlást, a talpalapokra normális eloszlást követnek. Az alaptesteket típusuk szerint különválasztva a szórás csökken. A mért és számított süllyedésekre meghatározott

$$s_m = a + bs_c$$

összefüggésekre a korrelációs együttható $r = 0,81-0,87$, és mivel $a \sim 0$, minden számítási módszerhez egy korrekciós tényező rendelhető (l. a táblázatot).

2.3. Az összenyomódási modulus utólagos meghatározása

A számítási metodikát a *talajviszonyoktól* és a *süllyedésmérési módszertől* függően kell megválasztani. Az utóbbi történhet *a)* folyamatos műszeres méréssel vagy *b)* az eredetileg vízszintes szerkezeti elem (pl. lábázat) egyszerű szintezésével. A következőkben a számítási metodikára látunk példákat (RÉTHÁTI [9]–[11]).

a) Homogén rétegződés

Ha az *alapok terhelése és felülete azonos*, a következő példa szerint járhatunk el. Egy csarnok 21 pilléréen mért süllyedések átlaga $\bar{s} = 27,0$ mm, szórása pedig $\sigma = 4,22$ mm volt. Így a konfidencia-határok (ha a valószínűségi szint $\alpha = 0,05$) a süllyedésre

$$s = 27 \pm 2,086 \frac{4,22}{\sqrt{20}} = 27 \pm 1,92 \text{ (mm)},$$

az összenyomódási modulusra pedig

$$\frac{F}{27 + 1,92} \leq E_s \leq \frac{F}{27 - 1,92},$$

ahol F a feszültségi ábra területe. A tényleges értékeket helyettesítve a következőket állapíthatjuk meg: 95% a valószínűsége annak, hogy az E_s érték 10,3 és 11,9 MN/m² közé esik.

Ha *különböző terhelésű és/vagy felületű* alapokról van szó, a következő két módszer valamelyikét követhetjük.

1. Minden alaptestre számítjuk E_s -t, és ezek átlagát a *szórással jellemezzük*.

2. F és s között *korrelációs kapcsolatot* létesítünk (l. később).

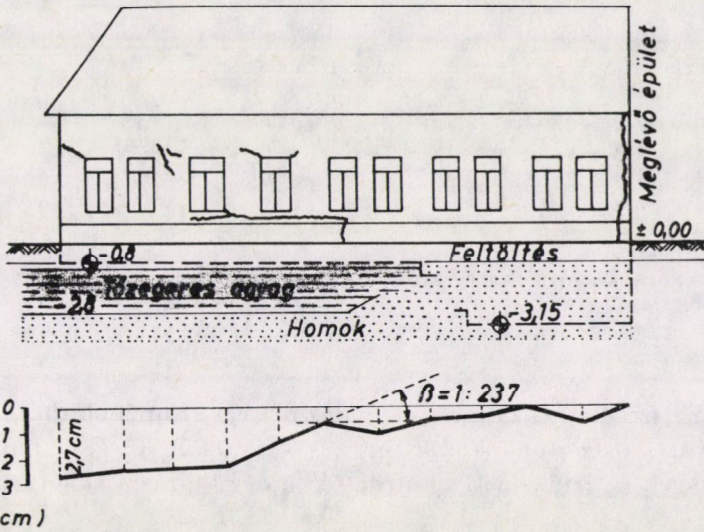
b) A rétegek egyike nagy kompresszibilitású

Ebben az esetben a süllyedést az erre a rétegre jutó feszültségekkel hozzuk kapcsolatba, a többi réteg alakváltozását pedig elhanyagoljuk. A számítás menete attól függ, *hány egyenlet* írható fel E_s -re.

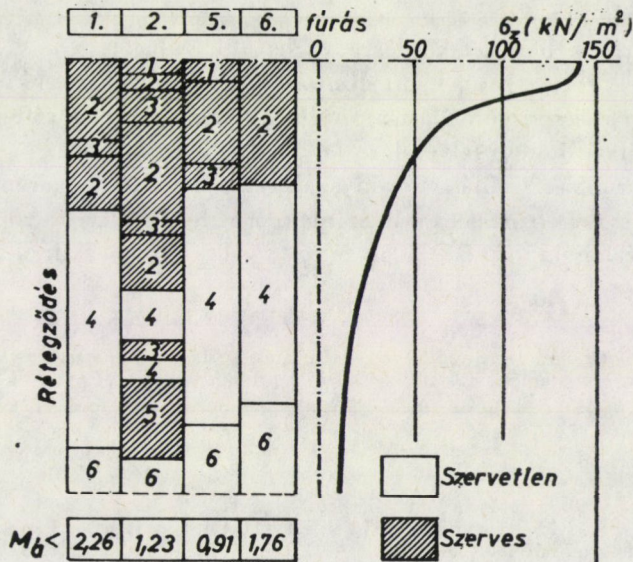
A 7. ábrán látható károsodott épület $B = 0,45$ m széles, 146 kN/m terhet átadó sávalapjai az alápincézett részen homokon, a többi szakaszon tözegetes agyagon ($\bar{w} = 53\%$, $w_p = 38\%$) állnak. A lábázat szintezése szerint $\Delta s = 2,7$ cm, így

$$E_s = \frac{F}{s} \cong \frac{F}{\Delta s} = \frac{0,0848}{0,027} = 3,14 \text{ MN/m}^2.$$

A 8. ábra egy jelentős süllyedést ($\Delta s = 15$ cm) szenvedett épület körül mélyített négy fúrás vázlatos szelvényét tünteti fel. A Duna egykori holtmedre finom homokkal töltődött fel, amelybe tőzegerek települtek. A lábazat szintje



7. ábra. Az összenyomódási modulus utólagos meghatározása a lábazat deformációs vonalából, egyetlen kompresszibilis réteg esetén



8. ábra. E_s utólagos meghatározása a relatív süllyedésekből, négy-négy fúrás-szelvény és Δs -érték ismeretében

zése segítségével minden fúrásszelvényhez egy-egy Δs relatív süllyedést, ezekhez pedig — a szerves rétegekhez tartozó feszültségi ábrák területeit összegezve — egy-egy F -értéket rendelhetünk:

| Fúrás | F (kN/mm) | Δs (mm) | $F/\Delta s$ |
|-------|-------------|-----------------|--------------|
| 1. | 135,4 | 60 | 2,26 |
| 2. | 184,1 | 150 | 1,23 |
| 3. | 109,7 | 120 | 0,91 |
| 4. | 105,6 | 60 | 1,76 |

A két változóra kapott regressziós egyenes egyenlete:

$$\Delta s = 0,792 F - 8,4 \quad (r = 0,64).$$

A tengelymetszészről ($-8,4$) 90%-os valószínűségi szinten állítható, hogy *nem különbözik szignifikánsan zérustól*, így $\Delta s \sim s$, tehát az $F/\Delta s$ hányadosok a szerves rétegek E_s értékeinek tekinthetők. A négy fúrásra kapott érték átlaga és szórása:

$$\bar{E}_s = 1,54 \text{ MN/m}^2 \quad \text{és} \quad \sigma_E = 0,59 \text{ MN/m}^2.$$

A regressziós egyenes iránytangensének reciproka 1,26, ami a legkisebb négyzetek módszerével meghatározott E_s -nek felel meg.

c) Két vagy több kompresszibilis réteg

Ebben az esetben két kérdésre várhatunk választ:

- melyik réteg szerepe volt döntő a süllyedések (károk) kialakulásában,
- milyen összenyomódási modulus jellemzi ezeket a rétegeket.

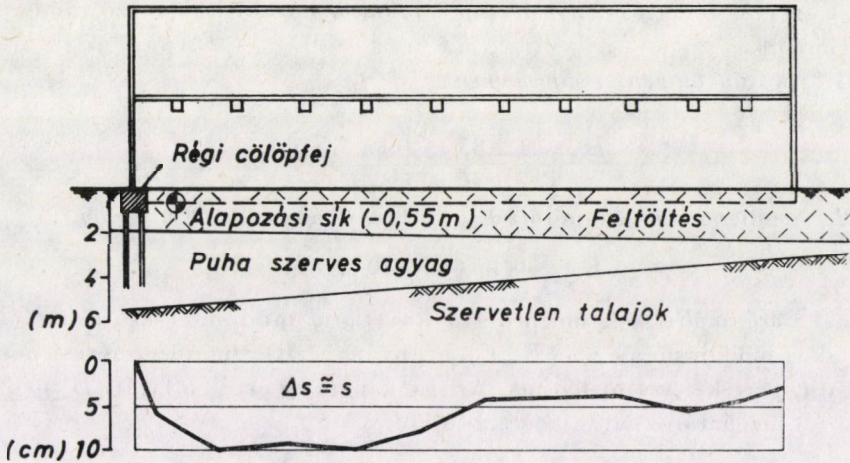
A számítási modell felvételére *két példát* fogunk látni.

Egy csarnok 12 pillért hordó szalagalapja és földemgerendái az építés után kb. egy évvel eltörtek, a válaszfalakon pedig igen széles repedések jelentek meg. A szalagalapot ($B = 0,50 \text{ m}$, $q = 100 \text{ kN/m}^2$) egyik oldalon egy régi

4. táblázat

Egy csarnok pilléreinek relatív süllyedései (Δs , mm), a feltöltés és a szerves réteg vastagsága (v_1 és v_2 , m), valamint a feszültségi ábra lamelláinak területe (F_1 és F_2 kN/mm)

| Pillér jele | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\Delta s \approx s$ | 107 | 98 | 103 | 82 | 42 | 41 | 49 | 56 | 41 | 30 |
| v_1 | 1,3 | 1,35 | 1,35 | 1,35 | 1,4 | 1,4 | 1,45 | 1,5 | 1,55 | 1,6 |
| v_2 | 3,1 | 2,85 | 2,6 | 2,4 | 1,95 | 1,7 | 1,45 | 1,15 | 0,9 | 0,8 |
| F_1 | 58,7 | 59,7 | 59,7 | 59,7 | 60,7 | 60,7 | 61,7 | 62,7 | 63,7 | 64,7 |
| F_2 | 37,2 | 34,7 | 32,8 | 31,1 | 26,6 | 23,6 | 20,6 | 16,7 | 13,4 | 11,9 |



9. ábra. Egy csarnok altalajviszonyai és a pilléreken mért relatív süllyedések

cölöpfejhez kötötték, többi szakasza alatt 1,2–1,8 m vastag, téglatörmelékes-homokos feltöltés van, melyet 0,8–3,8 m vastag szerves agyag követ (9. ábra). Az utóbbi réteg fizikai jellemzői a következők: $w = 76\%$, $w_p = 42\%$, $I_{om} = 11\%$.

A pillérek relatív süllyedését, az alattuk elhelyezkedő feltöltés és szerves réteg vastagságát, valamint a feszültségi ábra megfelelő részeinek területét a 4. táblázat tünteti fel. A $\Delta s \approx s$ egyenlőség azt kívánja kifejezni, hogy az 1. jelű pillért tartó cölöpfej feltehetően mozdulatlan.

A két kompresszibilis réteg szerepét *korrelációs számítással* vizsgálhatjuk meg, ahol s a függő, F a független változó. A feltöltésre kapott regressziós egyenes egyenlete:

$$s = -12,1 F_1 + 806 \quad (r = -0,80),$$

A korrelációs együttható (r) negatív előjele arra utal, hogy a süllyedéskülönbséget nem a feltöltés alakváltozása idézte elő. (Δs és F ellentétes értelemben változnak!)

A *szerves agyagra* kapott regressziós egyenes egyenlete:

$$s = 2,85 F_2 - 5,9,$$

és $r = 0,88$, ami *igen szoros kapcsolatra* utal. (Gondoljunk arra, hogy a réteg heterogenitása, a mérés korlátozott pontossága, a réteghatárok meghatározása is mind hibaforrást jelent!) A tengelymetszékről ($b = -5,9$) bizonyítható, hogy nem különbözik szignifikánsan zérustól, így a $\Delta s \approx s$ feltételezés reális.

Hasonlóan szoros a v_2, s kapcsolat is ($r = 0,90$), ahol v_2 a szerves réteg vastagsága.

A szerves réteg összenyomódási modulusát három különböző módszerrel számíthatjuk.

1. Az *iránytangens reciprokaként*:

$$E_{s2} = 1/2,85 = 0,35 \text{ MN/m}^2.$$

2. A pillérenként számított $E_{s2} = F_2/A_s$ hányadosok *átlagaként*:

$$\bar{E}_{s2} = 0,40 \pm 0,112 \text{ MN/m}^2.$$

3. *Szórásanalízissel*, mégpedig a következő módon. A két réteg összenyomódási modulusának $\alpha = E_{s1}/E_{s2}$ arányát rögzítve minden mérési ponton egy-egy E_{s2} értéket számíthatunk. Az így kapott 10 érték átlagát (\bar{E}_{s2}) és szórását (σ_E) meghatározva az adott α -hoz egy

$$C_v = \frac{\sigma_E}{\bar{E}_{s2}}$$

variációs tényezőt rendelünk. α változtatásával a vizsgált paraméterek a következőképpen alakulnak:

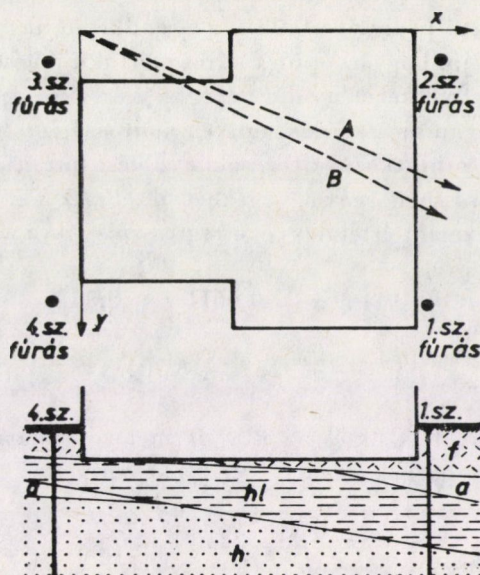
| α | \bar{E}_{s2} | σ_E | C_v | E_{s1} |
|----------|----------------|------------|-------|----------|
| 2 | 0,98 | 0,30 | 0,309 | 1,97 |
| 3 | 0,79 | 0,23 | 0,294 | 2,37 |
| 4 | 0,69 | 0,19 | 0,280 | 2,77 |
| 5 | 0,63 | 0,17 | 0,273 | 3,17 |
| 10 | 0,52 | 0,13 | 0,258 | 5,20 |
| ∞ | 0,41 | 0,11 | 0,265 | ∞ |

Jogosan feltételezhetjük, hogy a valóságos E_{s2} értéket az az \bar{E}_{s2} közelíti meg legjobban, melyre $C_v = \text{minimum}$. A táblázat szerint ez a szélső érték létezik, mégpedig $\alpha = 10$ és $\alpha \rightarrow \infty$ közé esik. Ez azt jelenti, hogy

$$0,41 < E_s < 0,52 \text{ (MN/m}^2\text{)}.$$

A *második példa* olyan esetre vonatkozik, amikor az épület merev testként elbillent.

Egy 10 emeletes épület panelszerelésének befejezését követő második hónapban kiderült, hogy a felvonó aknája 12 cm-es dőlésben van. Az épület négy sarkának közelében lemélyített fúrások szerint a *lemezalap* alatt 0,15–1,35 m vastag *feltöltés* van, amit *iszap*, majd 2,5 ÷ 3,0 m vastag homok követ (10. ábra). A feltöltés finom homokból, salakból, valamint épülettörmelékéből áll, és igen laza szerkezetű. Az iszap hézagtenyezője $e = 0,80 \div 0,92$, ami szintén laza településre utal.



10. ábra. Egy panelépület műszerrel mért (A) és a kompresszibilis réteg vastagságából számított (B) dőlésiránya (a rétegszelvényen: f — feltöltés, c — agyag, si — iszap, s — homok)

Az épület élére meghatározott *dőlésszögek*ből kiszámítható a négy sarok relatív süllyedése (Δs , mm). A fúrásszelvények alapján megállapítható a sarokok alatt a feltöltés és az iszap vastagsága (v_1, v_2 m), valamint a függőleges feszültségek ábrájának részterületei (F_1, F_2 kN/mm). Az összetartozó értékek a következő táblázatban foglalhatók össze:

| Fúrás | Δs | v_1 | v_2 | F_1 | F_2 |
|-------|------------|-------|-------|-------|-------|
| 3. | 0 | 1,35 | 0 | 224,1 | 0 |
| 4. | 24,3 | 0,15 | 1,75 | 24,9 | 290,5 |
| 2. | 87,9 | 0,30 | 2,85 | 49,8 | 473,1 |
| 1. | 124,8 | 0,90 | 3,20 | 149,4 | 531,2 |

A két kedvezőtlen laza réteg szerepét a billenés kialakulásában *korrelációs számítás*al határozhatjuk meg. A feltöltésre kapott regressziós egyenes egyenlete:

$$\Delta s = -0,115 F_1 + 72,2,$$

a korrelációs együttható pedig $r = -0,19$. A negatív előjel fizikailag nem értelmezhető, tehát a feltöltésnek a billenés kialakulásában *nem volt szerepe*.

Az *iszapra* kapott regressziós egyenes egyenlete:

$$\Delta s = 0,223 F_2 - 13,0,$$

a korrelációs együttható pedig $r = 0,93$. Ez a rendkívül nagy korrelációs érték egyértelműen bizonyítja, hogy az épület káros mértékű dőlése az iszap egyenlőtlen vastagságának a következménye.

Felmerül ezek után az a kérdés, milyen pontossággal határozzák meg az iszap vastagságában mutatkozó eltérések a dőlés főirányát. A vizsgálatot háromváltozós korreláció segítségével végezhetjük el. Az x és y vízszintes koordinátákat a 10. ábra szerint értelmezve, a regressziós síkra a következő egyenletet kapjuk:

$$v_2 = 0,1169 x + 0,0611 y + 0,348.$$

Ha $v_2 = 0$,

$$y = -1,915 x - 5,704,$$

ami a v_2 értékekre fektetett sík és az x, y sík metszéspontjának az egyenlete. Az egyenes iránytangensének negatív reciproka $m' = 0,5223$, a v_2 -sík dőlésszöge tehát

$$\alpha = \arctan 0,5223 = 27,6^\circ.$$

Mivel a geodéziai mérések szerint a dőlés főiránya $23,3^\circ$ -ot zár be az x -tengellyel, megállapíthatjuk, hogy a réteg vastagságának változása igen pontosan meghatározza az épület dőlésszögét.

Ez a példa azt is bizonyítja, hogy a dőlés várható iránya és mértéke már a tervezés stádiumában is jó közelítéssel számítható. A matematikai statisztika nemcsak e két paraméter várható értékét, hanem szórását, tehát az előrejelzés pontosságát is megadja.

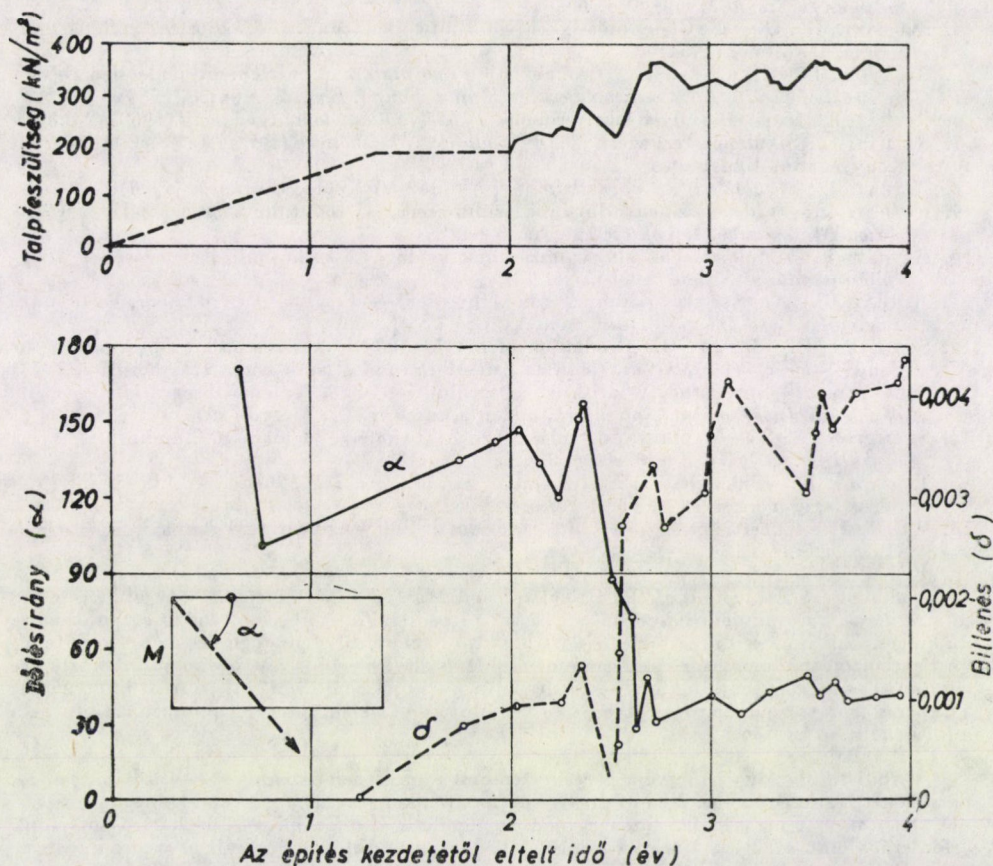
2.4. A billenés geometriai értékelése

Ha az alapozási rendszer vagy a félszerkezet kellően merev, az épület egésze is merev testként viselkedik. Ha ugyanakkor az alapokra jutó teher nem centrikus, vagy a rétegződés nem egyenletes, a talaj alakváltozása az építmény billenéséhez vezet. (Az 1. fejezet szerint elegendő, ha a talaj „véletlenszerűen” heterogén.)

Ez a mozgástípus — amellett, hogy esztétikailag sem kívánatos — veszélyeztetheti az épület állékonyságát és rendeltetésszerű használatát. Ennek megítéléséhez ismernünk kell a mozgás geometriai adatait, mind a pillanatnyi, mind a konszolidált állapotra vonatkozóan.

Az egyes pontokon mért s_i süllyedések egy síkot határoznak meg, melynek egyenletét háromváltozós korrelációval határozhatjuk meg. A dőlés főiránya ennek és az x, y síknak a metszéspontjára merőleges. (A számítás menete azonos a 2.3. fejezet számpéldájában követett eljárással.) A dőlés főirányával párhuzamos egyenes-sereg vízszintessel bezárt hajlásszöge az épület függőleges tengelyének szögelfordulásával azonos. A mozgás teljes folyamatáról úgy kapunk

átfogó képet, hogy a dőlésiránynak az x (vagy y) tengellyel bezárt szögét és a függőleges tengely szögelfordulását ugyanazon koordinátarendszerben az idő függvényében ábrázoljuk.



11. ábra. Egy siló dőlésirányának és dőlésszögének változása a teher jellegétől és nagyságától függően (M — a géptorony helye)

Egy silóra vonatkozó példát a 11. ábra mutat be. Jól megfigyelhető, hogy a siló az *önsúly* hatására a géptorony felé billent, majd — a *hasznos teher* hirtelen felhordásával párhuzamosan — az ellenkező irányba. Ugyanebben az időszakban következett be a dőlésszög jelentős mértékű növekedése is.

A korrelációs számítás, mivel a *linearitás* mértékét is ellenőrzi, arról is felvilágosítást nyújt, hogy az épület valóban merev testként billent-e el. Erre a kérdésre a reziduális szórás és a mérési pontosság összevetésével kapunk választ.

IRODALOM

1. ALTES, J.: Die Grenztiefe bei Setzungsberechnungen — *Bauingenieur* (1976), No. 3
2. EGRI GY.—RÉTHÁTI L.: Az FTI süllyedésméréseinek statisztikai feldolgozása — *Mélyépítéstudományi Szemle* (1959), No. 1—2
3. EGRI GY.—RÉTHÁTI L.: A süllyedésmérésekből levonható következtetések — *Mélyépítéstudományi Szemle* (1960), No. 6
4. LEUSSINK, H.: Über die Gleichmässigkeit von Bauwerksetzungen — *Vorträge der Baugrundtagung*, Hamburg (1954)
5. RESENDIZ, D.—HERRERA, I.: A Probabilistic Formulation of Settlement-controlled Design — *Proc. of the 7th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.*, 2, Mexico (1969)
6. RÉTHÁTI L.: Korszerű süllyedéskritériumok — *Mélyépítéstudományi Szemle* (1968), No.8—9
7. RÉTHÁTI L.: Síkalapok tervezése — In *Az alapozás kézikönyve* (Rózsa L. szerk.). Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
8. RÉTHÁTI L.: *Altalaj eredetű épülethárok* — Akadémiai Kiadó, Budapest (1977)
9. RÉTHÁTI L.: Ferde eloszlású adatsorok szimmetrikussá tétele hatványozással — *Alkalmazott Matematikai Lapok* (1979), No. 3—4
10. RÉTHÁTI L.: A talajrétegek alakváltozásának utólagos összehasonlító elemzése — *Mélyépítéstudományi Szemle* (1980), No. 9
11. RÉTHÁTI, L.: Analyse der Kippung von Gebäuden — *Proc. of the Int. Conf. on Found. Eng.* '81, *Vysoké Tatry*. Dom techniky ČSVTS, Košice
12. SCHULTZE, E.—SHERIF, G.: Prediction of Settlements from Evaluated Observation for Sand — *Proc. of the 8th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.*, 1.3., Moscow (1973)
13. SCHULTZE, E.—SIEVERING, W.: Statistical Evaluation of Settlement Observations — *Proc. of the 9th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.*, 1., Tokyo (1977)
14. SKEMPTON, A. W.—MACDONALD, D. H.: The Allowable Settlement of Buildings — *Proc. of the Institute Civil Engineering*, 5. (1956)
15. TERZAGHI, K.—PECK, R. B.: *Soil Mechanics in Engineering Practice* — John Wiley and Sons, New York 1948
16. WU, T. H.: Uncertainty, Safety and Decision in Soil Engineering — *Proc. of the ASCE* (1974), No. GT3

Statistical Evaluation of the Calculated and Measured Settlements. — In dimensioning of structures, the solutions based on the theory of probability come into the foreground more and more. This makes it necessary to work out also in the field of geotechnics an up-to-date investigation methodology for each type of problems. Since significant economic interests are connected with the limitation of the settlements, this problem has a rather great importance. The paper tries to clear up the problems, to the solution of which, the new approach may furnish additional informations.

Statistische Auswertung der gerechneten und gemessenen Setzungen. — Im Bemessungsbereich der Konstruktionen die auf der Wahrscheinlichkeitstheorie basierenden Lösungsmethoden treten immer mehr in den Vordergrund. Demgemäß ist es auch im Bereich der Geotechnik erforderlich eine moderne Untersuchungsmethodologie für allerlei Aufgabentypen zu entwickeln. Da sich wichtige Wirtschaftsinteressen an der Begrenzung der Setzungen knüpfen, ist dieses Problem von einer sehr großen Bedeutung. Der Autor versucht die Probleme aufzuklären, zur Lösung derselben die neue Anschauungsweise Mehrinformation liefert.

BÁNYATURBÓLÉGHŰTŐK ELMÉLETE ÉS GYAKORLATI MEGVALÓSÍTÁSA

PÁSZTOR ENDRE*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1981. november 8-án]

1. Bevezetés

A mély és meleg bányák hűtött levegővel történő légkondicionálása napjainkban egyre aktuálisabb feladat. A bányák művelési mélysége egyre növekszik, a közet hőmérséklet már nem elhanyagolható mértékben emelkedik, a mélyfekvésű bányák klímája emberi tartózkodásra, de elsősorban tevékenységre egyre alkalmatlanabbá válik. Az a mélységi határ, ahol a kondicionálatlan levegővel történő szellőzés már nem elégséges, a közetviszonyoktól függően, Magyarországon 800—1000 m körül van. Ilyen mélységben a föld felszínén üzemelő ventilátorok segítségével lejtuttatott bármilyen nagy mennyiségű levegő már nem kondicionál megfelelően, mivel a szállítás közben, a több kilométer hosszú csővezetékben (bányavágatban) gyakorlatilag a bánya légterének (kőzetfalának) hőmérsékletére melegszik fel, még hőszigetelt vezetékek esetében is.

A levegőnek földfelszínén történő lehűtése a problémát gyakorlatilag nem oldja meg, mert a levegő ilyenkor is felmelegszik, amikor tényleges felhasználási helyére kerül.

A levegő szállítás közben történő felmelegedésének minél teljesebb mértékű megakadályozása érdekében a hűtőgép egységeket lehetőleg a lehűtött levegőt szállító csővezeték hosszának rövidítése érdekében, minél közelebb telepítik a felhasználási helyhez. Mélyfekvésű bányák nagy kiterjedésű munkahelyeinek hűtési teljesítményigénye minimálisan $200 \div 500$ kW között van. Az ilyen teljesítményű hűtőgépek gőznemű munkaközeggel (freon, ammónia stb.) működő kompresszoros hűtőgépek nagy térfogatúak és súlyúak, telepítésük időigényes, munkahelyek közötti szállításuk, illetve időben változó munkahelyeken történő üzembehelyezésük nehézkes, felfutásuk lassú. Állandó vagy csak ritkán változó telepítés esetében kiválóan megfelelnek, és nagy hűtőteltjesítmény esetén csak ilyen típusú hűtőgépek alkalmazása kerülhet szóba.

Időben gyorsan változó, vagy ritkán használt munkahelyek esetében (kutatófúrások, kísérleti vágatok, olyan munkahelyek, ahol nem mindig tar-

* Dr. Pásztor Endre, 1221 Budapest, Honfoglalás út 48/B

tózkodik személyzet, pl. raktárak stb.) felmerül az igény könnyen mozgatható és telepíthető, gyors felfutású, kis térfogatú és súlyú, kis hűtőteltjesítményű hűtőgépek alkalmazására. Ilyen esetekben előnyösen alkalmazhatók a csak levegővel mint munkaközeggel üzemelő ún. *turbólég-hűtők*.

A Budapesti Műszaki Egyetem Járműgépészeti Intézetének Aero- és Termotechnika Tanszéke több év óta végez kutatómunkát turbólég-hűtők fejlesztésének témakörében [1, 2, 3] és a turbólég-hűtők elmélete és gyakorlata terén elért eredményekre támaszkodva, hazai igények kielégítése érdekében, a magyar bányáipar támogatásával két különböző típusú bányaturbólég-hűtőt hozott létre. Az e területen elért elméleti és gyakorlati eredményekről kíván e cikk beszámolni.

2. A turbólég-hűtők, alapvető jellemzői, körfolyamatuk, veszteségeiknek analízise

A gáznemű közeggel működő hűtőgépek gyakorlatilag egyidősek a gőznemű hűtőgépekkel. Körfolyamatuk egyszerű, felfutásuk gyors, fajlagos súlyuk és térfogatuk jelentősen kisebb a gőzüzemű hűtőgépekénél. Fajlagos teljesítményfelvételük azonban nagyobb, illetve fajlagos hűtőteltjesítményük kisebb a gőzüzemű hűtőgépekénél.

Ez a hátrány, mely a két különböző működésű hűtőgép egymástól eltérő körfolyamatának következménye, jelentősen hátráltatta és hátráltatja a gázüzemű hűtőgépek (turbólég-hűtők) elterjedését. Nagyobb fajlagos teljesítményfelvételük következtében folyamatos (állandó) üzemre nem gazdaságosak. Előnyeik ott nyilvánulnak meg, ahol az átlagosan kicsi üzemidő, illetve időszakos működés következtében a turbólég-hűtő fenti előnyei kezdenek kidomporodni és nem jelentkezik alapvető hátrányként a nagyobb energiafogyasztás. Tipikusan ilyen területek a mélyfekvésű bányák időszakos, területileg is gyorsan változó kísérleti munkahelyei, ahol a gyors telepíthetőségből és a könnyű üzembehelyezésből, a gyakorlatilag zérus felfutási időből származó előnyök mellett a nagyobb energiafogyasztásból származó hátrány csökkenő jelentőségű.

A turbólég-hűtők általános elméletével itt csak a bányaturbólég-hűtők tárgyalásához szükséges mértékben foglalkozunk, az Irodalom rovatban hivatkozott munkák: [1, 2, 3, 5, 6, 8] ezeket a kérdéseket részletesen tárgyalják.

A turbólég-hűtők alapvető körfolyamata és a körfolyamatot megvalósító gépegség vázlata az 1. ábrán látható. A valóságos körfolyamat (1-2) adiabatikus (ideális esetben izentropikus) kompresszióból, (2-3) izobar visszahűtésből és (3-4) adiabatikus expanzióból áll. A körfolyamatot létrehozó gáz (levegő) a (2) expanziós gépből (légturbinából) alacsonyabb hőmérsékleten kerül ki, mint amilyennel az (1) légkompresszorba belépett. A kettő közötti

hőmérsékletkülönbségből származó entalpiakülönbség az 1 kg munkaközegre vonatkoztatott hűtőtéljesítmény

$$q_0 = c_p (T_0 - T_4).$$

A körfolyamat fenntartásához szükséges munka (W) a kompresszor és turbina munka különbsége, melyet a (4) meghajtómotor biztosít:

$$W = W_k - W_t = c_p [(T_2 - T_1) - (T_3 - T_4)]. \quad (1)$$

A turbóléghűtő energetikai gazdaságossága a fajlagos hűtőtéljesítménnyel (ε) jellemezhető:

$$\varepsilon = \frac{q_0}{W} = \frac{T_0 - T_4}{(T_2 - T_1) - (T_3 - T_4)}. \quad (2)$$

A valóságos turbóléghűtőben a következő legfontosabb veszteségek keletkeznek (felsorolás sorrendje a munkaközeg áramlási iránya szerint), és ezek a veszteségek a következőképpen fejezhetők ki:

— nyomásvesztés a szívócsőben

$$\sigma_{01} = p_1/p_0,$$

— örvénylési, áramlási veszteség a kompresszorban

$$\eta_{isk} = \frac{T_2^* - T_1}{T_2 - T_1},$$

— nyomásvesztés a visszahűtőben

$$\sigma_{23} = p_3/p_2,$$

— örvénylési, áramlási veszteség a turbinában

$$\eta_{ist} = \frac{T_3 - T_4}{T_3 - T_4^*},$$

— nyomásvesztés a turbina utáni csővezetékben

$$\sigma_{45} = p_5/p_4,$$

— össz-nyomásvesztési tényező

$$\sigma = \sigma_{01} \cdot \sigma_{23} \cdot \sigma_{45},$$

— a visszahűtőben a munkaközeg nem hűthető vissza a hűtőközeg hőmérsékletéig (hőfoklépcső)

$$\varphi = \frac{T_2 - T_3}{T_2 - T_3'}$$

Az ideális turbólégűtő fajlagos hűtőtéljesítménye (ε_{id}) csak a nyomásviszony függvénye [2]; [3]; [8]

$$\varepsilon_{id} = \frac{1}{\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1}, \quad (3)$$

ahol $\kappa = c_p/c_v$.

Az ideális turbólégűtő fajlagos hűtőtéljesítménye a nyomásviszony csökkenésével egyértelműen növekszik és $p_2/p_0 = 1$ -nél ε_{id} végtelen értéket ér el.

A veszteséges turbólégűtő fajlagos hűtőtéljesítménye az ideálisnál jelentősen kisebb. A viszonylag csekély mértékű visszahűtés következtében a kompresszor és turbina munka egymástól nem jelentős mértékben különbözik. Ilyen esetben a kettő különbsége ($W = W_k - W_t$), vagyis a körfolyamat fenntartásához szükséges munka valóságos (veszteséges) esetben többszöröse az ideálisnak, mivel a kompresszor munka nő, a turbina munka pedig csökken a veszteségek miatt. Az 1. ábrából következően a turbólégűtő hűtőtéljesítménye is csökken ($T_4 > T_4^* > T_4'$), így egyértelműen érthető a valóságos fajlagos hűtőtéljesítmény (ε_{wirk}) jelentős csökkenése:

$$\varepsilon_{id} \gg \varepsilon_{wirk}$$

A 2. ábra az ideális és valóságos turbólégűtő fajlagos hűtőtéljesítményét ábrázolja a kompresszor nyomásviszonyának függvényében, különböző veszteségek esetében [3]. Az egyes görbék növekvő számai a táblázat adatai szerint egyre csökkenő veszteségeket jelentenek. A lapátos gépek jelenleg optimális fejlettségi szintjének a ③ görbe adatai felelnek meg, így az 1. ábrán látható legegyszerűbb munkafolyamat szerinti turbólégűtő valóságos fajlagos hűtőtéljesítményének csúcserőértéke $\varepsilon_{wirk} \approx 1$. A gőzös kompresszoros hűtőgépek valóságos fajlagos hűtőtéljesítménye $\varepsilon_{wirk} = 3 \div 4$, így a turbólégűtő energiafogyasztása többszöröse a gőzös kompresszoros hűtőgépének.

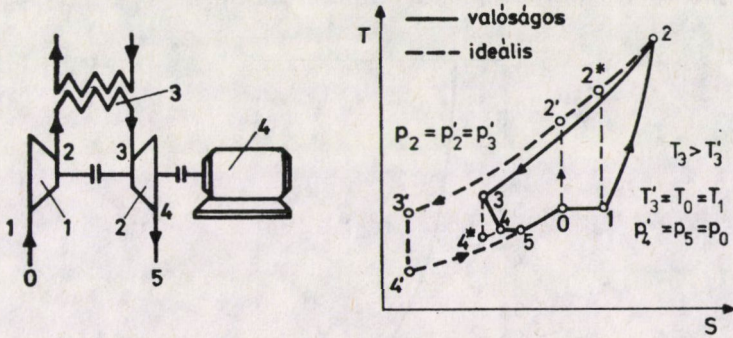
Létezik olyan p_2/p_1 nyomásviszony, ahol a turbólégűtő határozott maximális ε_{wirk} értékkel rendelkezik. Ezt az optimális nyomásviszonyt a körfolyamat nyomásvesztése hozza létre, de értéke a többi veszteségtől is függ [3].

A 2. ábrával kapcsolatban egy ún. „összvesztési tényezőt” (ψ_{ges}) vezetünk be, melyet az egyes veszteségi tényezők szorzataként definiálunk:

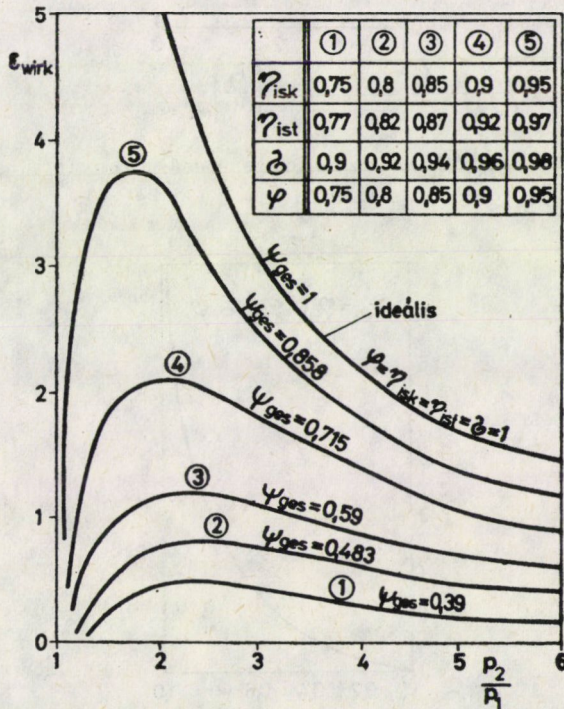
$$\psi_{ges} = \eta_{isk} \cdot \eta_{lst} \cdot \sigma \cdot \varphi. \quad (4)$$

A ψ_{ges} értékeit a 2. ábrában paraméterként is feltüntettük. A ψ_{ges} optimális értéke, figyelembe véve a jelenlegi és a jövőben várható technikai színvonalat, $0,5 \div 0,55$ közötti.

A 3. ábra az optimális nyomásviszony $(p_2/p_1)_{opt}$ és a maximális fajlagos hűtőtéljesítmény ($\epsilon_{wirk\ max}$) összetartozó értékeit ábrázolja. A körfolyamat



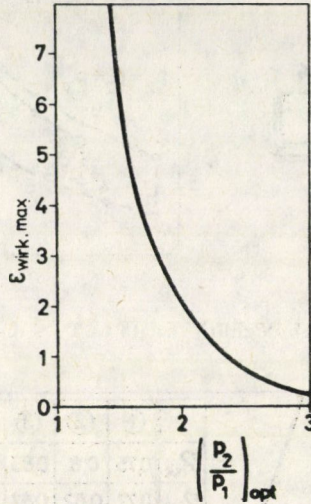
1. ábra. A turbóléghűtő vázlatja és T-s diagramja



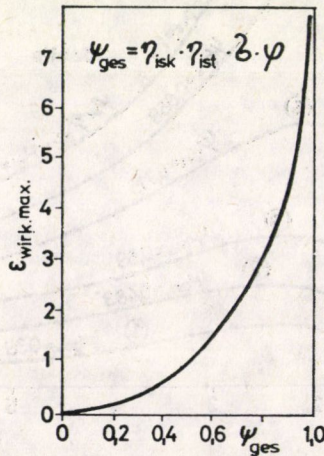
2. ábra. A valóságos fajlagos hűtőtéljesítmény (ϵ_{wirk}) alakulása a kompresszor nyomásviszonya függvényében különböző össz-veszteségi tényezők (ψ_{ges}) esetében

veszteségei csökkentésével az optimális nyomásviszony is csökken. Ez a tény kedvező konstrukciós kialakítást tesz lehetővé, mivel a lapátos (áramlástan) kompresszorral nem kell nagy nyomást létrehozni.

A 4. ábrán a fajlagos hűtőteltjesítmény adott nyomásviszonyhoz tartozó optimális értékének ($\varepsilon_{\text{wirk max}}$) változása látható a ψ_{ges} függvényében. A turbólégítő fajlagos hűtőteltjesítményét (lényegében gazdaságosságát, mint azt már előzőleg termikus megfontolásokkal is kimutattuk) az egyes gépegységek vesz-



3. ábra. A maximális $\varepsilon_{\text{wirk}}$ változása az optimális nyomásviszony $(p_2/p_1)_{\text{opt}}$ függvényében



4. ábra. A maximális $\varepsilon_{\text{wirk}}$ változása a körfolyamat ψ_{ges} össz-veszteségi tényezőjének függvényében

teségi tényezői, illetve az itt definiált ψ_{ges} össz-veszteségi tényező döntően befolyásolja. A turbóléghűtő fajlagos hűtőteljesítményének növelése kizárólag az egyes gépegségek veszteségeinek csökkentésével érhető el.

3. A bányaturbóléghűtők működése, meghajtásuk lehetőségei, alapvető konstrukciós kialakításuk

A bányaturbóléghűtők működési elve megegyezik a 2. pontban ismertetett és az 1. ábrán látható általános turbóléghűtő működési elvével, a különbség a meghajtás módjában van. A lapátos gépek (kompresszorok és turbinák) közismerten nagy fordulatszámú gépek, fordulatszámuk az átáramló közegmennyiség csökkenésével jelentősen növekszik. A bányászathban igényelt, a kutatómunka során kifejlesztett turbóléghűtők hűtőteljesítménye $\dot{Q} \approx 20 \div 30$ kW, ehhez a hűtőteljesítményhez, illetve gépmérethez tartozó fordulatszám $n \approx 900 \div 1100/\text{s}$.

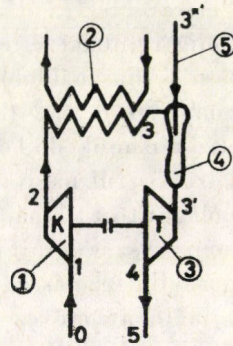
Ilyen fordulatszámot gyorsító áttétel segítségével, villanymotorral elérni igen nehéz műszaki probléma. A gyorsító áttétel súlya és térfogata nagyobb lenne a tényleges turbóléghűtő méreteinél, ez az út tehát nem járható.

A bányában azonban mindig rendelkezésre áll sűrített levegő, amely a turbóléghűtő hajtására előnyösen felhasználható. A turbóléghűtő kompresszorának szükséges nyomásviszonya $p_2/p_1 \approx 2$ (2. ábra), ennél nagyobb általában nem szükséges. A föld felszínén működő kompresszorokkal összesűrített levegő nyomásviszonya $5 \div 6$ közötti, túl nagy ahhoz, hogy a Diesel-motorok turbótöltőjéből kialakított turbóléghűtő turbinájába közvetlenül beáramoljon, és ott expandálva létrehozza a kompresszor és turbina teljesítmény-egyensúlyát.

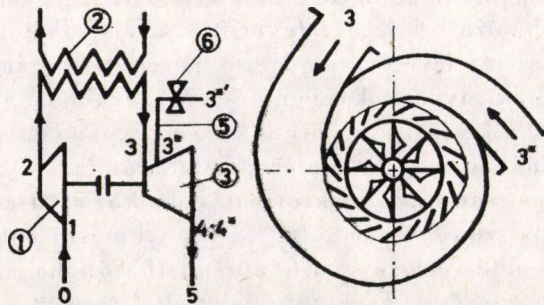
A sűrített levegő gazdaságos felhasználására két mód kínálkozik. Az egyik megoldás szerint (5. ábra) az ⑤ hálózati csővezetékbe érkező sűrített levegő szükségesnél nagyobb energiájának egy részét a ④ injektorban hasznosítjuk. A hálózati sűrített levegő expanziója az injektorban arra a nyomásra csökken, amelyet az injektorban az ① kompresszorral termelt, a ② visszahűtőből az injektorba áramló p_3 nyomású levegő alakít ki. Az így expandáló veszített nagy mennyiségű hálózati levegő felgyorsítja a visszahűtőből kiáramló ① kompresszorral sűrített levegőt, majd ezek keveredése után az injektor diffúzorában lelassulnak, nyomásuk megnő és a ③ turbinába $p'_3 > p_3$ nyomáson áramlanak be, ahol a kétféle levegőáram közösen expandál, forgatják a kompresszort és a turbinából $T_5 < T_0$ hőmérséklettel áramlanak ki. Így az injektor bizonyos mértékben (sajnos, az injektor hatásfoka közismerten alacsony) hasznosítja a $p_3^* < p_3$ viszonyból adódó $(p_3^* - p_3)$ nyomáskülönbség egy részét.

A másik megoldási lehetőség a 6. ábrán látható, ahol az ⑤ hálózati 3^{**} állapotú sűrített levegő és az ① kompresszor által termelt 3 állapotú sűrített levegő a turbina két részre osztott állólapatkoszorúján külön-külön áramlik be,

majd a turbina forgólapátjaiban külön-külön expandálva, a turbinából már közösen ömlik ki. Az ábrában feltüntettük a centripetális turbina két részre osztott állólapátkoszorújának (csigaházának) konstrukciós vázlatát is. Ezen megoldás energetikailag kedvezőbb lehet az injektorosnál, azonban hátránya, hogy a turbina forgó lapátjai, a körülmények kedvezőtlen összejárása esetében, jelentős, rezgésből származó, fárasztó igénybevételt szenvedhetnek. Azon állólapátokból ugyanis, amelyekbe a 3^* állapotú, hálózati sűrített levegő áramlik be, a közeg jelentősen nagyobb sebességgel áramlik ki ($p^* > p_3$), így a forgólapátokra periodikusan változó nagyságú impulzus erő hat, mely a lapátokat fárasztja. E fárasztó igénybevétel csökkentése érdekében nem célszerű a teljes hálózati nyomású levegőt a csigaházba vezetni. A levegő nyomásának ($p : < p_3^*$) csökkentése gyakorlatilag fojtással történhetik, ez pedig jelentős veszteséggel jár, így a két különböző nyomású közeg turbinában történő szétválasztott expanziójából származó energetikai előny a fojtás növekedésével csökken. Elméleti és gyakorlati (mérési) eredményeink szerint kedvezően kialakított injektor segítségével közel ugyanolyan energetikai viszonyok érhetők el, mint amikor a hálózati közeg nyomását fojtással ($p_3^* < p_3^{*'}$) olyan mérté-



5. ábra. Az injektoros bányaturbóléghűtő kapcsolási vázlat



6. ábra. Az osztott csigaházú, injektor nélküli bányaturbóléghűtő kapcsolási vázlat

küre csökkentjük, hogy a turbina forgólapátjaiban ne keletkezzék figyelembe veendő mértékű fázasztó igénybevétel.

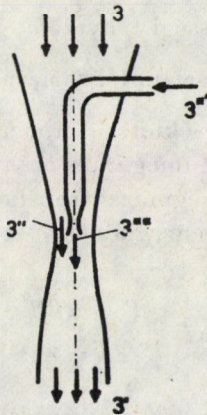
A Budapesti Műszaki Egyetem Aero- és Termotechnika Tanszéke mindkét típusú turbóléghűtőt kifejlesztette a magyar bányászati szervek (Mecseki Ércbányászati Vállalat és Bányászati Aknamélyítő Vállalat) támogatásával. A turbóléghűtők a gázturbinák konstrukciós jellegzetességeit viselik magukon, kis súlyúak és térfogatúak, könnyen telepíthetők és szállíthatók, felfutási idejük $1 \div 2$ s. A kifejlesztett turbóléghűtők eredményesen szolgálták és szolgálják a mély fekvésű bányák mikro-klimatizálását.

4. A bányaturbóléghűtők áramlási- és hőtechnikai, valamint energetikai jellemzőinek meghatározása

4.1. Az injektoros bányaturbóléghűtő energetikai analízise

Az injektoros bányaturbóléghűtő kapcsolási vázлата az 5. ábrán, az injektoron belül alkalmazott jelölésrendszer a 7. ábrán látható. Az injektorba be, illetve abból kilépő közegek jelölései a két ábrán azonosak.

Az injektorból kilépő közeg termikus jellemzőinek meghatározásához ismerni kell a primer (hajtó) és a secunder (hajtott) közeg tömegáramait. A primer és secunder közegek tömegei, illetve tömegarányai azonban csak a turbina és a kompresszor energiaegyensúlyi egyenletéből határozhatók meg, azonban ehhez az injektorból kilépő, illetve a turbinába belépő közeg $3'$ állapotjelzőinek ismerete szükséges. A problémát e megfontolás szerint iterációval kell megoldani. Az injektor számításához fel kell vennünk a két közeg arányát, amelynek helyes felvételét a turbina és kompresszor energiaegyensúlyi egyenle-



7. ábra. Az injektor jelölésrendszere

tének felírásakor ellenőrizhetjük, mivel abból a tömegek aránya meghatározható. Eltérés esetében a pontosságot iteráció útján növeljük.

A visszahűtőből kiáramló secuder közeg lefékezett (dinamikus) jellemzői ($p_3; T_3$) ismeretesek. Felvéve az injektor keverő torkában a secuder közeg C_3'' sebességét, meghatározhatók a C_3'' sebességgel áramló közeg statikus (nem lefékezett) jellemzői. A statikus jellemzőket a továbbiakban „st” jellel jelöljük:

$$T_{3st}'' = T_3 - \frac{c_3''^2}{2c_p}, \quad (5)$$

illetve

$$P_{3st}'' = \frac{P_3}{\left(\frac{T_3}{T_{3st}''}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}. \quad (6)$$

A primer közeg fúvókájából (jelen viszonyok között Laval-fúvóka) kilépő közeg sebessége azon feltételtől határozható meg, hogy a primer közeg fúvókájában a közeg a secuder közeg által meghatározott P_{3st}'' nyomásig expandál:

$$\frac{c_3^{**2}}{2} = \beta^2 c_p T_3^{*'} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{P_3^{*'}}{P_{3st}''}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \right], \quad (7)$$

ahol β a fúvóka sebességi tényezője.

A keverőtér végén a két közeg közös sebessége:

$$c_3' = \left(\frac{c_3'' + \alpha c_3^{**}}{1 + \alpha} \right) \psi, \quad (8)$$

ahol ψ a keverőszakasz sebességi tényezője

$$\alpha = \frac{\dot{m}_{pr}}{\dot{m}_{sec}} = \text{a primer és secuder tömegáramok aránya.}$$

A keverék T_3' lefékezett hőmérséklete a primer és secuder közeg lefékezett hőmérsékletei, valamint az α tömegáram arányából határozható meg, azon feltételtől kiindulva (energia megmaradása), hogy a keverék össz-energiája a primer és secuder közeg össz-energiáinak összegével egyenlő

$$T_3' = \frac{T_3 + \alpha T_3^{*'}}{1 + \alpha}. \quad (9)$$

A keverék lefékezett nyomása (össz-nyomása) azon jó közelítő feltételtől határozható meg, hogy az áramló közegek egymás közti impulzus-átadása, ill.

a közös sebesség kialakulása a keveredő közegek egymásközt egyenlő és állandó statikus nyomásán történik, vagyis:

$$p_{3st}'' = p_{3st}^{**} = p_{3st}'.$$

A keveredés utáni közeg össz-nyomása (lefékezett nyomása), izentropikus lefékezést véve figyelembe (a keverőszakasz veszteségeit a ψ sebességi tényezővel vettük figyelembe):

$$p_3' = p_{3st}' \left(\frac{T_3'}{T_{3st}'} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad (10)$$

ahol: $T_{3st}' =$ az áramló közeg keveredés utáni statikus hőmérséklete:

$$T_{3st}' = T_3' - \frac{c_3'^2}{2 c_p}. \quad (11)$$

Miután meghatároztuk a közeg keveredés utáni állapotjelzőit, a turbóléghűtő kompresszorának és turbinájának energiaegyensúlyi egyenletéből meghatározhatjuk a primer közeg azon mennyiségét, amely az egyensúlyi állapot fenntartásához szükséges.

Az 5. ábra jelöléseivel a valóságos hőmérsékletek segítségével α -ra felírt energiaegyensúlyi egyenlet:

$$\alpha = \frac{(T_2 - T_1) - (T_3' - T_4)}{(T_3' - T_4)}. \quad (12)$$

Az injektoros gép ε_{inj} fajlagos hűtőteljesítménye a (2) egyenlet segítségével:

$$\varepsilon_{inj} = \frac{(1 + \alpha) (T_0 - T_4)}{\alpha T_0 \left[\left(\frac{p_3^{*'}}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] \frac{1}{\eta_{keff}}}, \quad (13)$$

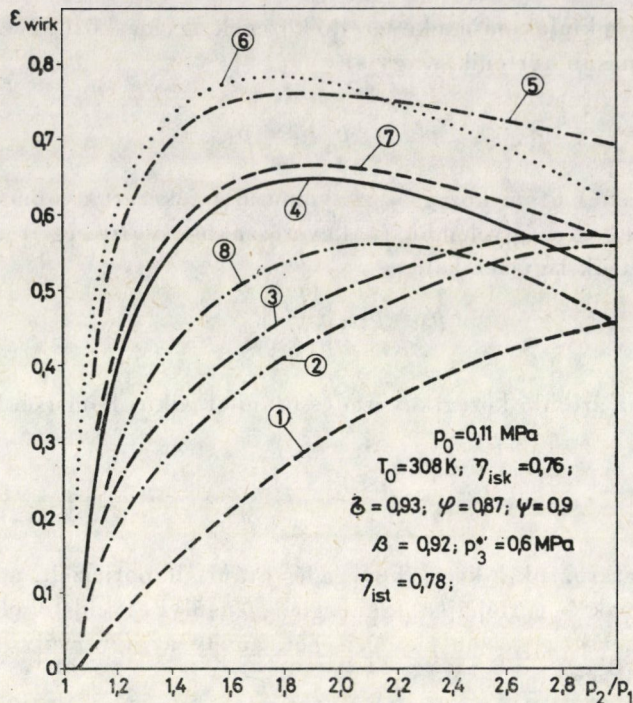
ahol $\eta_{keff} =$ a hálózati sűrített levegőt termelő kompresszor effektív hatásfoka.

Az injektor üzemi viszonyainak analízise szerint a c_3' sebesség növekedésekor előálló impulzusvesztés csökkenés miatt növekszik p_3' értéke, javulnak az energetikai viszonyok, ezért vizsgálatainkat különböző c_3' sebességek esetére végeztük el.

A számításaink folyamán az egyes jellemzőkre, ill. tényezőkre az alábbi, reális értékeket vettük fel:

$$\eta_{isk} = 0,76; \quad \eta_{ist} = 0,78; \quad \sigma = 0,93; \quad \varphi = 0,87; \quad p_0 = 0,11 \text{ MPa}; \quad T_0 = 308 \text{ K}; \\ \psi = 0,9; \quad \beta = 0,92; \quad p_3^{*'} = 0,6 \text{ MPa}$$

A hálózati levegő $p_3^{*'}$ nyomása a teljes vizsgálat alatt állandó volt.



8. ábra. A különböző megoldású bányaturbóléghűtők valóságos fajlagos hűtőteljesítményének (ϵ_{wirk}) változása a kompresszor nyomásviszonyának (p_2/p_1) függvényében

- ① A hálózati levegő nyomása fojtással csökkentve, $p_3^* = p_3$, $p_3^{*\prime} = 0,6$ MPa
- ② Injektoros megoldás, $c_3'' = 80$ m/s
- ③ Injektoros megoldás, $c_3'' = 200$ m/s
- ④ Tengelyhajtású turbóléghűtő
- ⑤ Nincs fojtás, $p_3^* = p_3^{*\prime} = 0,6$ MPa, $\eta_{\text{ist3}} = \eta_{\text{ist3}^*} = 0,78$
- ⑥ Nincs fojtás, $p_3 = p_3^* = p_3^{*\prime}$
- ⑦ Nincs fojtás, $p_3^{*\prime} = p_3^* = 0,6$ MPa, $\eta_{\text{ist3}} > \eta_{\text{ist3}^*}$
- ⑧ Részleges fojtás, $p_3^{*\prime} = 0,6$ MPa, $p_3^* = 0,4$ MPa, $\eta_{\text{ist3}} = 0,78$, $\eta_{\text{ist3}^*} = 0,7$

A számítások eredményeit a 8. ábra mutatja. Az ábrán a 4.2. pontban elemzésre kerülő osztott csigaházú (6. ábra) turbóléghűtő (a hálózati sűrített levegő közvetlenül turbinában expandál injektor közbeiktatása nélkül) eredményeit is ismertetjük a kényelmes összehasonlítás érdekében. A ② és ③ jelű görbe az injektoros turbóléghűtő eredményeit ábrázolja. A ② jelűnél az injektor legszűkebb keresztmetszetében $c_3'' = 80$ m/s, míg a ③ jelűnél $c_3'' = 200$ m/s. Egyéb adatok azonosak, így a ③ jelű görbe kedvezőbb értékei olyan módon jöttek létre, hogy a c_3'' sebesség növekedése következtében csökkent az injektorban keletkező impulzus-csere miatti veszteség. Az injektorban keletkező nagymértékű veszteség miatt a turbóléghűtő kompresszora p_2/p_1 nyomásviszonyának optimális értéke 3 ÷ 3,5 közötti. Ez az eredmény egyezik a 2. és a 3. ábrában bemutatott eredményekkel, ahol látható, hogy az össz-veszteség növekedésével (ψ_{ges} csökkenése) növekszik a p_2/p_1 nyomásviszony optimális

értéke. A 8. ábrából kiolvashatóan hálózati sűrített levegővel történő meghajtás esetén injektor alkalmazásakor, reális $p_2/p_1 = 1,8 \div 2$ közötti nyomásviszony mellett ε_{inj} maximális értéke 0,5 körül várható.

4.2. Osztott csigaházú, injektor nélküli bányaturbólégűtő energetikai analízise

A turbólégűtő energetikai analízisének alapját ebben az esetben is a turbólégűtő forgórészének (kompresszor-turbina) egyensúlyi egyenlete képezi, vagyis az össz-turbina munka egyenlő a kompresszor munkafelvételével:

$$(T_2 - T_1) = (T_3 - T_4) + \alpha(T_3^* - T_4^*), \quad (14)$$

ahol T_4 a visszahűtőből kiáramló sűrített levegő expanzió utáni hőmérséklete, míg a hálózati sűrített levegő expanzió utáni hőmérséklete T_4^*

Az α tényezőt, a turbólégűtő fajlagos sűrített levegő szükségletét itt is pontosan úgy használjuk, mint ahogy azt az injektoros turbólégűtőnél már definiáltuk.

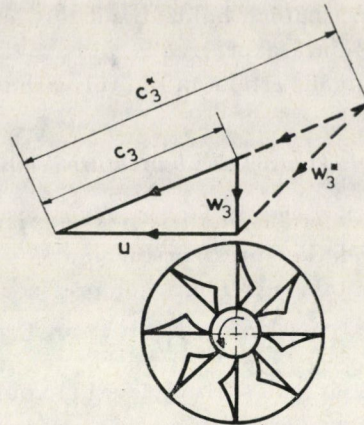
A 6. ábrán látható turbina osztott csigaházába beáramló p_3 nyomású levegő állapotjelzői az ① kompresszor és a ② visszahűtő folyamatainak figyelembevételével egyértelműen meghatározhatók [2]; [3], ezért ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk. A sűrített levegő hálózatából érkező (3*) levegő nyomása ellenben attól függ, hogy a csigaház előtt milyen mértékű fojtást alkalmazunk. A hőmérséklet a fojtással nem változik, így T_3^* igen jó közelítéssel azonos a mély fekvésű bánya légtérének hőmérsékletével.

A sűrített levegő p_3^* nyomásával kapcsolatos megfontolások a következők:

a) A fojtással csökkentett nagynyomású ($p_3' = 0,6$ MPa) hálózati sűrített levegő turbina előtti nyomása (p_3^*) mindig azonos a ② visszahűtőből érkező p_3 nyomású sűrített levegővel ($p_3 = p_3^*$). Ebben az esetben a két közeg közös csigaházban expandálhat, nincs szükség osztott csigaházra, a két levegőáram expanziójának hatásfoka (η_{ist}) is első közelítésben azonos lehet.

Ilyenkor az igen megnövekedett fojtási veszteségek miatt az ε fajlagos hűtőteljesítmény nagyon alacsony. Ezeket az energetikai viszonyokat mutatja a 8. ábra ④ jelű görbéje. A számítások kiinduló adatai azonosak az injektoros eset energetikai vizsgálatokor felvettekkel, természetesen itt a β és ψ tényezők nem szerepelnek, mivel azok csak az injektor jellemzői. Meghatároztuk azon eset energetikai jellemzőit is, amikor $p_3 = p_3^* = p_3'$, vagyis a föld felszínén üzemelő, hálózati sűrített levegőt termelő kompresszor ellennyomása mindig azonos a turbólégűtő visszahűtőjéből kikerülő levegő nyomásával. Ilyenkor elmaradnak a fojtási veszteségek, ezért ez a turbólégűtő energetikailag a legkedvezőbb. A viszonyokat a 8. ábra ⑥ jelű görbéje mutatja.

b) Másik szélső eset az, amikor nem csökkentjük fojtással a hálózati sűrített levegő nyomását, és ez a nyomás független a p_3 nyomás értékétől ($p_3 = p_3^* = \text{const} = 0,6$ MPa).



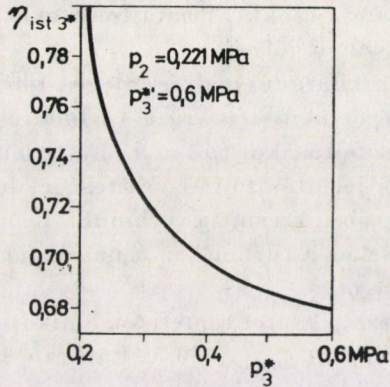
9. ábra. Sebességi háromszögek alakulása a magas és alacsony nyomású turbina részben

A 6. ábrán látható osztott csigaház 3^* jelű csatornáján a teljes hálózati nyomású levegő áramlik be ($p_3 \ll p_3^* = p_3^{*'}).$ Ez energetikailag kedvező, mivel elmarad a fojtási veszteség.

A 8. ábra (5) görbéje ezt az esetet mutatja, olyan feltétellel, hogy az alacsony és nagy nyomású turbinarész hatásfoka azonos ($\eta_{ist3} = \eta_{ist3}^*).$

Az (5) és (6) görbe összehasonlításából tehát az a következtetés vonható le, hogy fojtási veszteség nélkül, a két turbinarész (alacsony és magas nyomású) azonos hatásfoka mellett az ε fajlagos hűtőteljesítmény lényegében független a hálózati sűrített levegő nyomásától. A 8. ábra (5) és (6) görbéje közötti, az optimum környékén, nem jelentős eltérés abból származik, hogy a hálózati nyomás növekedésével csökken a hálózati levegő szükséges mennyisége, viszont a turbinából kilépő hálózati levegő hőmérséklete is csökken. A két hatás a hűtőteljesítmény szempontjából nem teljes mértékben kompenzálja egymást, innen származik a nem lényegbeli eltérés a két görbe között.

A valóságban azonban a $p_3 \ll p_3^* = p_3^{*'}$ feltétel mellett a nagy nyomású turbinarész η_{ist3^*} hatásfoka nem marad állandó, hanem a 3. pontban már ismertetett forgólapát kifáradási jelenségek mellett, csökken a nagy nyomású turbinarész η_{ist3^*} hatásfoka is. A hatásfokcsökkenés okát a 9. ábra szemlélteti. A p_3^* nyomású közeg az állólapátokból szükségképpen nagyobb abszolút sebességgel áramlik ki mint a p_3 nyomású ($c_3^* > c_3$). Ennek megfelelően az azonos u kerületű sebességgel mozgó forgólapátokba valamelyik w relatív sebesség (a 9. ábrán a w_3^*) ütközéssel áramlik be. Ennek következtében a nagy nyomású rész hatásfoka csökken. Az ütközésből származó veszteség mértékét a [10] alattiak felhasználásával határoztuk meg. A hálózati levegő hőesése (entalpia esése) a forgólapátok között is megnövekszik, mivel az állólapátokban a nyomásesés csak valamivel lehet nagyobb, mint a kritikus. A nyomásesésnek nem jelentősen a kritikus fölé történő növekedését a ferdén levágott állólapátokból kilépő közeg sugárelhajlása eredményezi. A hálózati levegő forgó-



10. ábra. A magas nyomású turbina η_{ist3^*} hatásfokának alakulása a magas nyomású turbina előtti nyomás (p_3^*) függvényében

lapátokban megnövekedett hőesése a járókerékből nem optimális kiömlést eredményez, emiatt is csökken a nagynyomású turbinarész hatásfoka.

Az alacsony nyomású turbinarész hatásfoka most is azonos az előző vizsgálatokban felvettekkel ($\eta_{ist3} = 0,78$), a nagynyomású turbinarész hatásfoka (η_{ist3^*}) azonban a $p_3 \ll p_3^* = p_3^{*'} = 0,6$ MPa nyomású közegnél a fent elemzett veszteségek miatt vizsgálataink szerint $\eta_{ist3^*} \approx 0,68$. Részleges fojtáskor ($p_3 < p_3^* < p_3^{*'}$) a nagy nyomású rész hatásfoka javul. Elemzéseink és számításaink szerint (ennek ismertetése messze túlhaladja e tanulmány kereteit) η_{ist3^*} értéke állandó $p_2 = 0,221$ MPa érték mellett ($p_2/p_1 = 2,1$, tehát jó átlagérték) a 10. ábra szerint változik. A $p_2 = \text{konst}$ nyomást úgy választottuk meg, hogy az a turbóléghűtő optimális, energetikailag legfontosabb p_2/p_1 nyomásviszonyai (8. ábra) körül legyen.

A 10. ábrából láthatóan a nagynyomású turbinarész hatásfoka a p_3^* növekedésével először jelentősen, majd csökkenő mértékben romlik. Ez azzal függ össze, hogy az állólapátokból kilépő közeg c_3^* abszolút sebessége az állólapát nyomásviszonya növekedésével egyre kisebb mértékben növekszik, jelentősebben a kritikus nyomásviszony fölött pedig gyakorlatilag állandó.

Ennek megfelelően változnak a w_3^* relatív sebesség irányváltozásából keletkező ütközési veszteségek is.

A 8. ábra (7) görbéje azt az esetet mutatja, amikor $p_3^* = p_3^{*'}$ = 0,6 MPa, tehát a hálózati sűrített levegő fojtás nélkül áramlik a turbinába, azonban a nagynyomású turbinarész hatásfoka a 10. ábrának megfelelően csak $\eta_{ist3^*} = 0,68$. A 8. ábra (5) és (7) görbéi között tehát csak a nagynyomású turbinarész hatásfokában van különbség.

Az injektor nélküli bányaturbóléghűtő eddigi elemzése szerint a $p_3^{*'}$ (6. ábra) nyomású hálózati sűrített levegő a (6) fojtószelep teljesen nyitott helyzetekor $p_3^* = p_3^{*'}$ nyomással ömlik a turbinába. Ilyenkor veszteséget csak

a nagynyomású turbinarész csökkent hatásfoka okoz. Ezeket a viszonyokat tünteti fel a 8. ábra (7) számú görbéje.

A turbina lapátok kifáradásának, esetleges törésének veszélye miatt a $p_3^* = p^*$ nyomású levegőt nem célszerű a turbinára engedni. A 6. ábra (6) fojtószelepének részleges fojtásakor ($p^* < p^*$) a turbinára csökkent nyomású levegő ömlik. A nagyon jelentős fojtási veszteséget bizonyos mértékig ellensúlyozza az, hogy a 10. ábra szerint a turbinába beömlő p_3^* nyomású levegő nyomásának csökkentésekor a turbinában a nagynyomású levegő expanziójának hatásfoka ($\eta_{\text{ist } 3^*}$) javul.

A 8. ábra (8) görbéje azt az esetet tünteti fel, amikor $p_3^* = 0,4$ MPa, és ennek megfelelően a 10. ábra szerint $\eta_{\text{ist } 3^*} = 0,7$. Látható, hogy a fojtási veszteség ($p^* < p_3^*$) jelentősen csökkenti ε értékét, és számításaink szerint ilyen mértékű, reális és szükséges fojtáskor ε értéke az injektoros és injektor nélküli megoldásnál gyakorlatilag azonos. Az injektor nélküli turbólégűtő konkrét kialakításánál ezt a megoldást alkalmaztuk.

í

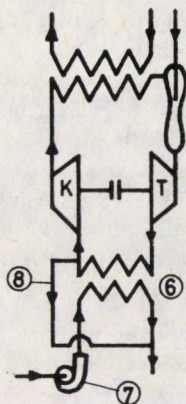
5. A megvalósított bányaturbólégűtőkkel elért gyakorlati eredmények

5.1. Az injektoros megoldású bányaturbólégűtő mérési eredményei, következtetések

Az injektoros megoldású bányaturbólégűtő tényleges kiviteli vázlata az 5. ábrának megfelelő volt, azzal a különbséggel, hogy a tényleges kivitelnél a 11. ábrának megfelelően a (6) hőcserélőt iktattuk közbe, annak érdekében, hogy a bányaturbólégűtő sújtólégveszélyes környezetben is tudjon üzemelni. Az előzetes, (6) hőcserélő nélküli méréseknél ugyanis azt tapasztaltuk, hogy a levegőben lebegő porszemcskék a turbina járókerékéhez ütközve szikrákat hoznak létre, melyek sújtólégveszélyes bányában veszélyesek lehetnek. Az injektorba bevitt, hálózati sűrített levegőt a rendszerből a (8) szikraoltó csővezetéken vezettük el, így ez a turbólégűtő félig zárt munkafolyamattal működött. A (6) hőcserélő „meleg” oldalán a levegőt a (7) sűrített levegő meghajtású ventillátor segítségével áramoltattuk. A turbinából kiáramló teljes levegőmennyiséget kockázatos lett volna szikraoltón keresztül vezetni, ezért alkalmaztunk hőcserélőt, illetve félig zárt munkafolyamatot. Minthogy a (6) hőcserélő és a (8) megcsapolás a turbólégűtő termikus-áramlástanai viszonyait mérhető módon nem befolyásolja, ezért a mérési eredményeket az 5. ábrán látható vázlat alapján ismertetjük.

A mérési eredmények ismertetésekor csak a legfontosabb eredmények bemutatására szorítkozunk, a mérések részletes analizisétől helyszűke miatt, sajnos el kell tekintenünk. A levegő relatív nedvességtartalma oly minimális volt, hogy figyelembevételétől eltekintettünk.

A legfontosabb mért értékek a következők:



11. ábra. A sújtólégbiztos bányaturbólegyhűtő kapcsolási vázlata

$p_1 = p_0 = 0,1$ MPa; $T_0 = T_1 = 301$ K; $p_2 = 0,16$ MPa; $T_2 = 361$ K;
 $p_3 = 0,156$ MPa; $T_3 = 308$ K; $T'_3 = 306$ K; $p'_3 = 0,185$ MPa; $T_4 = 269,5$ K;
 $p_4 = 0,1$ MPa; $m_3^{*'} = 0,29$ kg/s (a hálózati sűrített levegő mennyisége);
 $p_3^{*'} = 0,53$ MPa; $T_3^{*'} = 306$ K; $\dot{m}_0 = \dot{m}_3 = 0,45$ kg/s (a turbólegyhűtő saját
kompresszorával termelt levegő mennyisége).

A mért adatokból az alábbi következtetések vonhatók le: A turbólegyhűtő (2) hőcserélőjének mért nyomásvesztési tényezője $\sigma_{23} = 0,975$. Figyelembe véve, hogy a megvalósított rendszeren (11. ábra) a (6) hőcserélőnek és a (2) hőcserélőnek nyomásvesztési tényezője lényegében azonos, a mért össz-nyomásvesztés nem haladja meg a számításban felvett $\sigma = 0,93$ össz-nyomásvesztési tényezőt.

A kompresszor izentropikus hatásfoka $\eta_{isk} = 0,72$. Ez a hatásfok 4%-kal kisebb a számításainkban felvettnél.

A turbina hatásfoka $\eta_{ist} = 0,74$, ez is 4%-kal alacsonyabb a tervezettnél. Vizsgálataink szerint sem a kompresszor, sem a turbina nem üzemelt optimális üzemállapotban (karakterisztika probléma). Az üzemállapotok optimális beállításával ezek a hatásfokok a tervezett értékek közelébe hozhatók.

A turbina előtti, illetve az injektor utáni számított és mért nyomás és hőmérséklet értékek a mérési hibán belül egyeztek egymással, így a dolgozatban bemutatott számítási módszer ilyen injektorok számára jól felhasználható.

A bányalégelhűtő hűtőteljesítménye, a teljes ($T_1 - T_4$) hőmérsékletkülönbséget figyelembe véve:

$$\dot{Q} = 23,31 \text{ kW}.$$

A hálózati sűrített levegőt előállító kompresszor valóságos teljesítményszükséglete (a kompresszor hatásfokát $\eta_{eff} = 0,7$ értékkel vettük figyelembe):

$P_{\text{eff}} = 76,2 \text{ kW}$. A bányaturbólégűtő valóságos fajlagos hűtőtéljesítménye

$$\varepsilon_{\text{wirk}} = \frac{\dot{Q}}{P_{\text{eff}}} = 0,306.$$

A valóságos fajlagos hűtőtéljesítmény ($\varepsilon_{\text{wirk}}$) számított értéke (8. ábra) (0,35 ÷ 0,42) között mozog. A valóságban az egyes gépegységek hatásfokai mérhetően kisebbek voltak az előzetesen felvettnél, ennek köszönhető a megvalósított alacsonyabb $\varepsilon_{\text{wirk}}$. A kompresszor és turbina üzemállapotának kedvezőbb beállításával (a hatásfokaik növelésével), viszonylag könnyen elérhető a számított fajlagos hűtőtéljesítmény.

5.2. Osztott csigaházú, injektor nélküli turbólégűtő mérési eredményei

Az osztott csigaházú, injektor nélküli bányaturbólégűtő tényleges megoldása a 6. ábrán vázolttal azonos volt, így a mérési eredményeket a 6. ábrán látható jelölések segítségével ismertetjük. A kísérleti méréseket a Ganz-Mávag Gyár Hő- és Áramlástechnikai Kutatási Osztályának laboratóriumában végeztük. A mérési eredmények a következők voltak:

$$\begin{aligned} p_0 = p_1 = p_4 = 0,1 \text{ MPa}; T_0 = T_1 = 297,5 \text{ K}; p_2 = 0,168 \text{ MPa}; T_2 = 364 \text{ K}; \\ p_3 = 0,166 \text{ MPa}; T_3 = 294 \text{ K}; p_3^{*'} = 0,6 \text{ MPa}; T_3^{*'} = 296,8 \text{ K}; \\ p_3^* = 0,37 \text{ MPa}; T_3^* = T_3^{*'} = 296,8 \text{ K}; \dot{m}_3^{*'} = 0,27 \text{ kg/sec}; \\ m_0 = \dot{m}_3 = 0,2925 \text{ kg/sec}; T_4 = 263 \text{ K}. \end{aligned}$$

A ② hűtő nyomásvesztése gyakorlatilag alig volt mérhető, $\sigma = 0,99$. A kompresszor hatásfoka 0,715, alacsonyabb a számításainkban felvett értéknél.

A turbinában két közegnek, egymástól jelentős mértékben független expanziója megy végbe. A két közeg expanziója azért nem független teljesen egymástól, mivel bizonyos mértékű (max. 10%) keveredésük már a járókerékben történő expanzió alkalmával végbemeegy.

Az expanziók hatásfokainak meghatározása a valóságos expanzió vég-hőmérsékletek ismeretében lehetséges. Mérés segítségével csak a keverék T_4 hőmérséklete határozható meg.

Az ismeretlen hőmérsékletek (T_{4h} és T_{4n} a magas és alacsony nyomású expanzió valóságos vég-hőmérséklete) meghatározása érdekében két látszólag egymástól független egyenlet írható fel.

A turbinából kiömlő keverék energiaegyenlete

$$\dot{m}_3 T_{4n} + \dot{m}_3^* T_{4h} = (\dot{m}_3 + \dot{m}_3^*) T_4, \quad (15)$$

a kompresszor és turbina energia-egyensúlyi egyenlete pedig

$$\dot{m}_3(T_2 - T_0) = \dot{m}_3(T_3 - T_{4n}) + \dot{m}_3^*(T_3^* - T_{4h}). \quad (16)$$

A két egyenlet megoldása azonosságra vezet (a két egyenlet információtartalma azonos), több egyenlet nem áll rendelkezésre, így a két expanzió hatásfoka külön-külön nem határozható meg.

A turbina átlagos izentropikus hatásfoka a következő megfontolás alapján határozható meg:

$$\bar{\eta}_{\text{ist}} = \frac{\Delta \bar{T}_{\text{ist}}}{\bar{T}_3 - T_4}, \quad (17)$$

ahol: $\Delta \bar{T}_{\text{ist}}$ a tömegáramok szerint átlagos izentropikus hőmérsékletesés a turbinában:

$$\Delta \bar{T}_{\text{ist}} = \frac{\dot{m}_3 T_3 \left[1 - \left(\frac{p_4}{p_3} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] + \dot{m}_3^* T_3^* \left[1 - \left(\frac{p_4}{p_3^*} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]}{\dot{m}_3 + \dot{m}_3^*}. \quad (18)$$

Itt \bar{T}_3 az expanzió tömegáramok szerint átlagos kezdeti hőmérséklete.

A turbina fentiek szerint számolt átlagos hatásfoka $\bar{\eta}_{\text{ist}} = 0,497$. Ebben az igen alacsony hatásfokban jelentős szerepet játszanak a 9. ábrán bemutatott ütközési veszteségek, melyek a két levegőáram különböző nagyságú expanziója következtében jönnek létre. Ezek a veszteségek a valóságban, sajnos nagyobb hatásfokcsökkenést eredményeztek, mint ahogy azt a 10. ábrán bemutattuk. A turbina alacsony hatásfoka és a hálózati sűrített levegő fojtása miatt bekövetkező fojtási veszteség miatt az injektor nélküli bányaturbóléghűtő $\varepsilon_{\text{wirk}}$ valóságos fajlagos hűtőteltjesítménye nem lesz kedvezőbb az injektorosénál.

A hűtőteltjesítmény $\dot{Q} = (\dot{m}_3 + \dot{m}_3^*) c_p(T_0 - T_4)$ definíció szerint számolva $\dot{Q} = 19,4$ kW. A hálózati kompresszor effektív teljesítményfelvétele abban az esetben, ha $p_3^* = 0,6$ MPa, $P_{\text{eff}} = 76,8$ kW. Az $\varepsilon_{\text{wirk}}$ valóságos fajlagos hűtőteltjesítmény $\varepsilon_{\text{wirk}} = 0,2526$, sajnos rosszabb, mint az injektorosé.

Abban az esetben, ha a hálózati sűrített levegő nyomása $p_3^* = 0,37$ MPa lenne és így elmaradna a fojtási veszteség ($p_3^* = p_3^*$), $\varepsilon_{\text{wirk}}$ értéke növekednék, mivel csökkenne a hálózati kompresszor teljesítményfelvétele. Ebben az esetben $P_{\text{eff}} = 52,1$ kW és $\varepsilon_{\text{wirk}} = 0,372$. A $p_3^* > p_3$ körülmény miatt fennálló, turbinában bekövetkező ütközés miatti többlet veszteség most is létrejön, de elmarad a fojtási veszteség.

A 8. ábra ⑧ görbéje ezt az esetet ábrázolja. Az ott meghatározott nagyobb $\varepsilon_{\text{wirk}}$ értékek az expanziós turbina kedvezőbb hatásfokának következményei.

Az elméleti és kísérleti eredmények egybevetéséből megállapítható, hogy a visszahűtők nyomásvesztése és hőcserélési foka (hőfoklépcsője) eléri, sőt

túlhaladja az elméleti vizsgálatainkban felvett értékeket, a kompresszorok és turbinák hatásfoka azonban minden esetben alatta marad a relatíve kedvező effektív (valóságos) fajlagos hűtőtéljesítmény eléréséhez szükséges értékeknek.

Elméleti vizsgálataink szerint [1]; [2]; [3]; [11] a turbólégűtők fajlagos hűtőtéljesítménye döntő mértékben a kompresszió és expanzió hatásfokától függ, mivel az egymástól nem jelentős mértékben különböző kompresszor és turbina munka különbségét ($W_k - W_l$) a hatásfokok, szélső esetben, közel nagyságrendileg is befolyásolhatják.

A tanulmányban vizsgált körfolyamatú, ténylegesen megvalósított turbólégűtők esetében $\varepsilon_{\text{wirk}} = 0,4 \div 0,5$ fajlagos hűtőtéljesítmény optimális érték. Ennél kedvezőbb, $0,5 \div 0,6$ MPa nyomású sűrített levegő hálózat esetében, az injektorban (7. ábra), illetve a kettős beömlésű turbinában (9. ábra) keletkező veszteségek miatt, lényegében nem érhető el.

A hálózati sűrített levegő és a saját kompresszorral termelt sűrített levegő nyomásának azonossága esetében a pótlólagos veszteségek elmaradnak, ilyenkor a valóságos fajlagos hűtőtéljesítmény optimális (maximális) értéke $\varepsilon_{\text{wirk}} \approx 0,75 \div 0,85$. Ennél kedvezőbb $\varepsilon_{\text{wirk}}$ érték ilyen körfolyamat esetében az áramlástechnikai gépek jelenlegi fejlettségi szintjén nem valósítható meg.

IRODALOM

1. PÁSZTOR E.: Turbólégűtők. *BME Tudományos Évkönyv*, 1960
2. Пастор, Э.: Кондиционирование автобусов турбовоздушным охладителем. *Periodica Polytechnica Transportation Engineering* (1976) 4, No. 2
3. PÁSZTOR, E.: Analyse des Arbeitsprozesses von Kältemaschinen mit Luftzyklus, und ihre Anwendungsmöglichkeiten. *Acta Techn. Hung.* 84 (1977), 221—239
4. Прохоров, В. И.: О применении воздушных холодильных машин в системах кондиционирования воздуха. *Холодильная техника* (1969) № 1
5. COAD, W. J.: Terminal Effectiveness of a Vapor Compression Cycle-Heating. *Piping Air Conditioning* 48 (1976), p. 34
6. EDWARDS, T. S.—MCDONALD, A. T.: Rotor Coder a New Rotary Vane Open Reversed Brayton Cycle Air Conditioning and Refrigeration System. *The 13th Refrigeration Congress*. Washington USA, 1972
7. Дубинский, М. Г.: Анализ реальных циклов воздушных холодильных машин для кондиционирования воздуха. *Холодильная техника* (1975) № 12
8. Прохоров, В. И. и др.: Копределению энергетически целесообразных режимов работы систем кондиционирования воздуха с воздушными холодильными машинами. *Холодильная техника*. (1979) № 9
9. HILBERT, G. S.: Zur Praxis der Kältetechnische Ausrüstung von Klimaanlage. *Gesund. Ing.* (1962), 83, No. 12
10. Митрохин, В. Т.: Выбор параметров и расчет центростремительной турбины. *Машиностроение* (1966)
11. Пастор, Э.: Анализ рабочего процесса воздушных турбохолодильных установок (ВТХУ) и их применение для наземного кондиционирования воздуха на самолетах. *Periodica Polytechnica. Transportation Engineering*. 9. (1981) № 1

Theory and Realization of Mine Air Cooling Turbo Radiators. — The author recaptulates the theory on air turbo coolers (air cycle radiators), then deals with the theoretical and practical problems of mine turbo air radiators driven by air conduit compressed air. The way of utilization of the turbosuperchargers of the internal combustion piston engines for the realization of turbo air coolers is analysed. The possible limits of the construction of mine turbo air

coolers operated by compressed air taken from high pressure air ducts and the optimum values of the specific cooling performance to be attained therewith are determined. The practical achievements obtained by two realized mine turbo air coolers of different cycles are analysed and compared with the values to be obtained by the theory.

Theorie und praktische Ausführung von Grubenturboflütkühler. — Der Autor faßt die Theorie der Kreislauluftkühler (Luftkreislaufkühlapparate) zusammen und beschäftigt sich mit den theoretischen und praktischen Problemen der mit Hilfe von Netzpressluft angetriebenen Grubenkreislauluftkühler. Es wird die Möglichkeit analysiert, ob auf welche Weise die Turbolader der Verbrennungskolbenmotoren zur praktischen Ausführung der Kreislauluftkühler angewandt werden können. Die Herstellungsmöglichkeiten der mit Hochdrucknetzpressluft angetriebenen Grubenkreislauluftkühler werden begrenzt und die Optimalwerte der mit denselben erreichbaren spezifischen Kühlleistung ermittelt. Die mit zwei hergestellten verschiedenen Grubenkreislauluftkühler erreichten praktischen Resultate werden analysiert und mit den theoretisch erhaltenen Werten gegenübergestellt.

FELSŐ KORLÁT A VÁLTOZÓ KERESZTMETSZETŰ RÚD DINAMIKUS HÚZÁSI MEREVSÉGÉRE

ECSEDI ISTVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. szeptember 19-én]

E tanulmány tárgya lineárisan rugalmas, izotrop anyagú, változó keresztmetszetű rúd. A változó keresztmetszetű inhomogén anyagú rúd dinamikus húzási merevségére vonatkozó egyenlőtlenségi reláció bizonyítása döntően a Schwarz-egyenlőtlenség és a Rayleigh-hányados minimum tulajdonságának a felhasználásával történik.

Fontosabb jelölések

| | |
|---------------------------|--|
| x, y, z | derékszögű koordináták, |
| $\varrho = \varrho(z)$ | sűrűség, |
| $E = E(z)$ | Young modulus, |
| t | idő, |
| ω | terhelés körfrekvenciája, |
| l | a rúd hossza, |
| $A = A(z)$ | a rúd keresztmetszetének területe, |
| $\bar{w} = \bar{w}(z, t)$ | tengely irányú elmozdulás, |
| $w = w(z)$ | tengely irányú elmozdulási amplitúdó, |
| R | a rúd dinamikus húzási merevsége, |
| $H = 1/R$ | a rúd dinamikus húzási „hajlékonysága”, |
| α_1 | a longitudinális rezgő mozgást végző rúd <i>legkisebb</i> saját körfrekvenciája, |
| $b = b(z), f = f(z)$ | segéd függvények. |

Az egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmezi.

1. Bevezetés

Az 1. ábra változó keresztmetszetű rudat szemléltet. A rúd keresztmetszeteinek síkjai az xy síkkal párhuzamosak, a rúd tengelye pedig a z tengely.

A rúd végső $z = l$ koordinátával kijelölt keresztmetszetét az időben harmonikusan változó $\bar{F} = F \cos \omega t$ erő terheli.

A rúd keresztmetszetek elmozdulását leíró $\bar{w} = \bar{w}(z, t)$ kétváltozós függvényt a következő peremérték feladattal hozhatjuk kapcsolatba ([1], [2]):

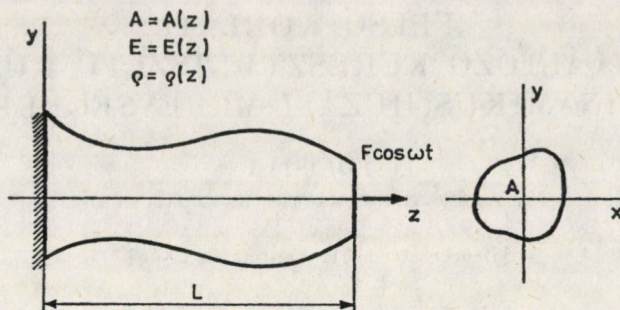
$$\varrho^A \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(A E \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \quad 0 < z < l, \quad (1.1)$$

$$0 < t < \infty,$$

$$\bar{w}(0, t) = 0 \quad 0 < t < \infty, \quad (1.2)$$

$$\left[A E \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right]_{z=l} = F \cos \omega t, \quad 0 < t < \infty. \quad (1.3)$$

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonféhéritő út 24 IV/1



I. ábra. Harmonikus gerjesztő erővel terhelt rúd

Az indítási feltételek,

$$\bar{w}(z, 0) \quad \text{és} \quad \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)_{t=0}$$

alkalmas megválasztásával elérhető, hogy az (1.1), (1.2), (1.3) egyenletek által kijelölt peremérték feladat megoldása

$$\bar{w}(z, t) = w(z) \cos \omega t \quad (1.4)$$

alakú legyen.

A terhelés ω körfrekvenciájával kapcsolatban egyelőre csak azt tételezzük fel, hogy nem egyezik meg az 1. ábrán vázolt rúd szabad rezgéséhez tartozó egyetlen α_i ($i = 1, 2, \dots$) saját körfrekvenciával sem.

Az (1.4) alakú megoldás az \bar{F} harmonikus gerjesztőerőhöz tartozó „állandósult” állapotnak megfelelő mozgást írja le.

A $w = w(z)$ ($0 \leq z \leq l$) elmozdulási-amplitúdóra az (1.4) alakú megoldásnak az (1.1), (1.2), (1.3) egyenletekbe való helyettesítésével a következő peremérték feladatot vezethetjük le:

$$\frac{d}{dz} \left(AE \frac{dw}{dz} \right) + \rho \omega^2 A w = 0, \quad 0 < z < l, \quad (1.5)$$

$$w(0) = 0, \quad (1.6)$$

$$\left[AE \frac{dw}{dz} \right]_{z=l} = F. \quad (1.7)$$

Tekintsük a

$$b(z) = \frac{w(z)}{F} \quad (0 \leq z \leq l) \quad (1.8)$$

előírással értelmezett egyváltozós függvényt.

Ez a függvény a

$$\frac{d}{dz} \left(AE \frac{db}{dz} \right) + \rho \omega^2 Ab = 0, \quad 0 < z < l, \quad (1.9)$$

$$b(0) = 0, \quad (1.10)$$

$$\left(AE \frac{db}{dz} \right)_{z=l} = 1 \quad (1.11)$$

kerületérték feladat megoldásával határozható meg. Az (1.8) képletből kiolvasható, hogy

$$F = \frac{1}{b(l)} w(l), \quad (1.12)$$

vagyis az F erő-amplitúdó és $w(l)$ elmozdulás-amplitúdó egymással arányos. Az (1.13)

$$R = \frac{1}{b(l)} = \frac{F}{w(l)} \quad (1.13)$$

előírással értelmezett mennyiségeket a változó keresztmetszetű rúd dinamikus húzási merevségének nevezzük.

A dinamikus húzási „hajlékonyságot” pedig a

$$H = \frac{1}{R} \quad (1.14)$$

képlettel értelmezzük.

Az (1.14) képlet alapján belátható, hogy az R mennyiség a rúd anyagának, hosszának, alakjának és az ω körfrekvenciának a függvénye, továbbá, hogy R pontos (szigorú) értékének meghatározásához az (1.9), (1.10), (1.11) egyenletek által kijelölt kerületérték feladatot kell megoldanunk. Azonban az (1.9) változó együtthatójú másodrendű közönséges differenciálegyenlet zárt alakú megoldását igen gyakran nem ismerjük, emiatt nagy jelentősége van olyan egyenlőtlenégi relációknak, amelyek R becslését segítik elő.

E tanulmány elsődleges célja olyan egyenlőtlenégi reláció levezetése, melynek alkalmazásával R számára, az (1.9), (1.10), (1.11) egyenletek által kijelölt peremérték feladat megoldásának ismerete nélkül is felső korlátot tudunk képezni.

A következőkben a $H = b(l)$ mennyiség számítására alkalmas újabb képletet vezetünk le. Az (1.9) egyenlet alapján azt írhatjuk, hogy

$$b \frac{d}{dz} \left(AE \frac{db}{dz} \right) + \omega^2 \rho Ab^2 = \frac{d}{dz} \left(AE b \frac{db}{dz} \right) - AE \left(\frac{db}{dz} \right)^2 + \omega^2 \rho Ab^2 = 0. \quad (1.15)$$

Az (1.15) egyenletből integrálással az

$$\int_0^l AE \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \rho Ab^2 dz = dz = \left\{ AE b \frac{db}{dz} \right\}_{z=0}^{z=l} \quad (1.16)$$

egyenletet kapjuk. A fenti egyenlet és (1.14), (1.13) képletek, valamint az (1.10), (1.11) peremfeltételek kombinálásával levezethetjük a

$$H = \int_0^l AE \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \rho Ab^2 dz \quad (1.17)$$

képletet.

A Rayleigh-hányados minimum tulajdonságának a felhasználásával kimutatjuk, hogy H pozitív, ha

$$\omega^2 < \alpha_1^2.$$

A Rayleigh-hányados minimum tulajdonságából kifolyólag az

$$\alpha_1^2 \leq \frac{\int_0^l AE \left(\frac{dg}{db} \right)^2 dz}{\int_0^l A \rho g^2 dz} \quad (1.18)$$

egyenlőtlenség fennáll, bármely a $0 \leq z \leq l$ zárt intervallumban folytonos, a $0 < z < l$ nyitott intervallumban szakaszonként folytonosan differenciálható a $g(0) = 0$ homogén peremfeltételt kielégítő nem azonosan zérus egyváltozós függvényre. Az (1.18) egyenlőtlenségi relációban az egyenlőség jele csak akkor érvényes, ha $g = g(z)$ a rúd legkisebb α_1 saját körfrekvenciához tartozó saját függvényét jelöli.

Az (1.18) egyenlőtlenségi reláció közvetlen következménye az (1.19) egyenlőtlenség:

$$\int_0^l AE \left(\frac{dg}{dz} \right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l A \rho g^2 dz > 0, \quad (1.19)$$

hiszen

$$\omega^2 < \alpha_1^2.$$

Legyen $g = b(z)$. Ekkor az 1.19) alapján a

$$H = \int_0^l AE \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l A \rho b^2 dz > 0, \quad (1.20)$$

összefüggést írhatjuk, ui.

$$\left(AE \frac{db}{dz} \right)_{z=l} \neq 0. \quad (1.21)$$

2. Felső korlát

Tétel: Legyen $\omega^2 < \alpha_1^2$. Legyen továbbá $f = f(z)$ a $0 \leq z \leq l$ zárt intervallumban folytonos, a $0 < z < l$ nyílt intervallumban pedig szakaszonként folytonosan differenciálható, az

$$f(0) = 0 \tag{2.1}$$

$$f(l) \neq 0 \tag{2.2}$$

feltételeket kielégítő egyváltozós függvény. Ebben az esetben azt állítjuk, hogy fennáll az

$$R \leq \frac{\int_0^l AE \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \rho Af^2 dz}{[f(l)]^2} \tag{2.3}$$

egyenlőtlenségi reláció.

Bizonyítás: Mivel

$$\int_0^l AE \left(\frac{dg}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \rho Ag^2 dz > 0, \tag{2.4}$$

a Schwarz-féle egyenlőtlenség alapján azt írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^l AE \left(\frac{db}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \rho Ab^2 dz \right) \cdot \\ & \left(\int_0^l AE \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \rho Af^2 dz \right) \geq \\ & \geq \left\{ \int_0^l AE \frac{db}{dz} \frac{df}{dz} dz - \omega^2 \int_0^l \rho Abf dz \right\}^2. \end{aligned} \tag{2.5}$$

A (2.5) alatti Schwarz-féle egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő integrált az alábbi módon átalakítjuk:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^l AE \frac{db}{dz} \frac{df}{dz} dz - \omega^2 \int_0^l \rho Abf dz \right\}^2 = \\ & = \left[\left[fAE \frac{db}{dz} \right]_{z=0}^{z=l} - \int_0^l \left[\frac{d}{dz} \left(AE \frac{db}{dz} \right) + \omega^2 \rho Ab \right] f dz \right]^2 = [f(l)]^2. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Az

$$R = \frac{1}{\int_0^l AE \left(\frac{db}{dz}\right)^2 dz - \omega^2 \int_0^l \rho b^2 dz} \tag{2.7}$$

képlet, a (2.6) és a (2.5) kombinálásával közvetlenül a bizonyítandó (2.3) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

3. Megjegyzések a dinamikus húzási merevséggel kapcsolatban

3.1. Rögzítve a rúd anyagát, alakját, hosszát, a merevség csak a terhelés ω körfrekvenciájának függvénye lesz, vagyis

$$R = R(\omega^2). \quad (3.1)$$

Az $R = R(\omega^2)$ függvény az alábbi tételben rögzített monotonitási tulajdonságú.

Tétel: Legyen

$$\omega_1^2 < \omega_2^2 < \alpha_1^2. \quad (3.2)$$

Ebben az esetben azt állítjuk, hogy fennáll az

$$R(\omega_1^2) \geq R(\omega_2^2) \quad (3.3)$$

egyenlőtlenségi reláció.

Bizonyítás: Jelölje az (1.9), (1.10), (1.11) egyenletek által kijelölt kerületérték feladat megoldását

$$b_i = b_i(z), \quad \text{ha} \quad \omega = \omega_i.$$

A (2.3) egyenlőtlenségi reláció alapján azt írhatjuk, hogy

$$R(\omega_2^2) \leq \frac{\int_0^l AE \left(\frac{db_1}{dz} \right)^2 dz - \omega_2^2 \int_0^l \rho A b_1^2 dz}{[b_1(l)]^2}. \quad (3.4)$$

A (3.4) egyenlőtlenségi reláció jobb oldalán szereplő kifejezést átalakítjuk:

$$\frac{\int_0^l AE \left(\frac{db}{dz} \right)^2 dz - \omega_2^2 \int_0^l \rho A b_1^2 dz}{[b_1(l)]^2} = \frac{\int_0^l AE \left(\frac{db_1}{dz} \right)^2 dz - \omega_1^2 \int_0^l \rho A b_1^2 dz}{[b_1(l)]^2} - (\omega_2^2 - \omega_1^2) \frac{\int_0^l \rho A b_1^2 dz}{[b_1(l)]^2}. \quad (3.5)$$

A (3.5) egyenletből kiolvasható, hogy

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^l AE \left(\frac{db_1}{dz} \right)^2 dz - \omega_2^2 \int_0^l \rho A b_1^2 dz}{[b_1(l)]^2} \leq \\ & \leq \frac{\int_0^l AE \left(\frac{db_1}{dz} \right)^2 dz - \omega_1^2 \int_0^l \rho A b_1^2 dz}{[b_1(l)]^2} = R(\omega_1^2), \quad (\omega_1^2 < \omega_2^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A (3.4) és a (3.6) egyenlőtlenségek kombinálásával a bizonyítandó (3.3) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

3.2. Az $\omega^2 = 0$ helyettesítéssel a *statikus* S húzási merevségre jutunk:

$$S = R(0) . \tag{3.7}$$

Legyen $\omega^2 < \alpha_1^2$. Ebben az esetben az előbbieken bizonyított (3.3) egyenlőtlenségi reláció alapján azt írhatjuk, hogy

$$R(\omega^2) < S . \tag{3.8}$$

4. Néhány példa felső korlát képzésére

4.1. Az (1.9), (1.10), (1.11) peremérték feladat megoldása az $\omega^2 = 0$ esetben a

$$b(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{A(\zeta)E(\zeta)} \tag{4.1}$$

függvény.

Elemi számítással az adódik, hogy

$$S = R(0) = \frac{1}{b(l)} = \frac{1}{\int_0^l \frac{d\tau}{A(\zeta)E(\zeta)}} . \tag{4.2}$$

A (3.8) egyenlőtlenségi reláció és a (4.2) képlet kombinálásával azt írhatjuk, hogy

$$R(\omega^2) \leq \frac{1}{\int_0^l \frac{d\zeta}{A(\zeta)E(\zeta)}} , \quad (\omega^2 < \alpha^2) , \tag{4.3}$$

4.2. Igen egyszerű szerkezetű felső korlátot kapunk az R mennyiség számára a (2.3) egyenlőtlenségi relációból a

$$f(z) = z \tag{4.4}$$

alakú függvénnyel számolva:

$$R(\omega^2) \leq \frac{1}{l^2} \left(\int_0^l AE dz - \omega^2 \int_0^l \rho Az^2 dz \right) . \tag{4.5}$$

IRODALOM

1. TONG, KIN. N.: Teorija mehanicseszkih kolebanij. Goszudarsztvennoe naucsno-tehnicseszkoe izdatelszva masinosztroitelnoj literaturi. Moszkva 1963, 219 o.
2. БАБАКОВ, I. M.: Teorija kolebanij. Izdatelszvo nauka. Glavnaja redakcija. Fiziko-matematicseszkaj literaturi. Moszkva 1968, 233—2530.

An Upper Bound for the Dynamic Tensile Stiffness of a Bar of Variable Cross Section. — A bar of linearly elastic and of isotropic material with a variable cross section is treated. The verification of the inequality relation representing the dynamic tensile stiffness of a bar having a variable cross section and being of inhomogeneous material takes definitely place with the aid of the Schwartz-inequality and by making use of the minimum propriety of the Rayleigh ratio.

Eine obere Grenze für die dynamische Dehnsteife eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. — Die Abhandlung bezieht sich auf einen linearelastischen Stab von isotropischem Material und veränderlichem Querschnitt. Die auf die Dehnsteife des Stabes von veränderlichem Querschnitt und inhomogenem Material wird auf eine entscheidende Weise durch die Benutzung der Schwartzschen Ungleichheit und der Minimumeigenschaft der Rayleighschen Quotient nachgewiesen.

A BALATON-VÍZGYŰJTŐ HIPOTETIKUS TÁROZÓRENDSZERÉNEK VIZSGÁLATA

DOMOKOS MIKLÓS* és GILYÉNNÉ HOFER ALICE*

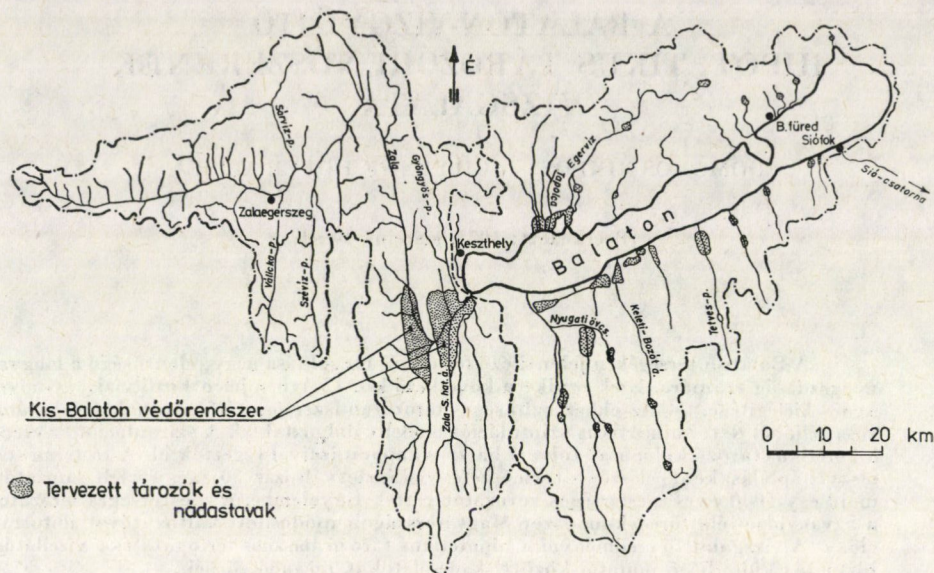
[Beérkezett: 1982. március 4-én]

A Balaton térségében jelentkező feladatok megoldása nagy jelentőségű a magyar népgazdaság számára. Ezek egyike a következő kb. 15 évben jelentkező vízigény-növekedés kielégítése. — Az ehhez szükséges tározórendszer összetérfogatának meghatározása céljából determinisztikus szimulációs modellt dolgoztak ki. A szimulációt az eredő hipotetikus tározó különböző felvett hasznos kapacitásaival végezték el. A tó természetes víztáplálásaként először a természetes vízkészletváltozás 50 éves észlelt sorozatát, majd egy 1000 éves mesterséges sorozatot vettek figyelembe. A mesterséges sorozatot a Szvanyidze-féle töredék-módszer Magyarországon módosított változatával állították elő. — A vizsgálat fő eredményei a hipotetikus tározó hasznos térfogata és a vízellátási biztonságot különböző mutatói közötti kapcsolatokat megadó görbék.

A síófoki zsilip szelvényéhez tartozó, 5774 km² területű Balaton-vízgyűjtő vízkészlet-gazdálkodásának mennyiségi és minőségi vonatkozásai az utóbbi évtizedekben nemcsak a vízgazdálkodás, hanem a legkülönbözőbb népgazdasági ágazatok érdeklődésének és tevékenységének is a homlokterében állnak (OVH, 1979). Ennek oka a tónak és közvetlen környezetének kiemelkedő üdülési jelentősége és részben az ebből fakadó, részben az általános fejlődéssel — főleg az egész vízgyűjtőn jelentkező vízigények növekedésével és a mezőgazdaság kemizálásával — együttjáró problémák sokasodása. Az utóbbiak leküzdésére irányuló koncepciókat, terveket, intézkedéseket a VITUKI 1980. évi kiadványa ismerteti összefoglalóan.

A Balaton-vízgyűjtő (1. ábra) felszíni vízkészlet-gazdálkodási rendszerének főbb mennyiségi elemei: a Balaton az öt tápláló vízfolyáshálózattal és a szabályozható leeresztő zsilippel, a vízgyűjtőn települt ivó-, ipari, öntözési és halgazdasági vízhasználók vízkivételei és vízbevezetései, a bányászat vízkészletet módosító hatásai, végül a vízhasznosítási, a vízminőségvédelmi és a vegyes célú tározók időbeli vízkészlet-átcsoportosításban és párolgási többletvesztésben jelentkező hatásai.

* Vízgazdálkodási Tudományos Kutatóközpont (VITUKI) Vízrajzi Intézete, 1095 Budapest, Kvassay J. út 1.

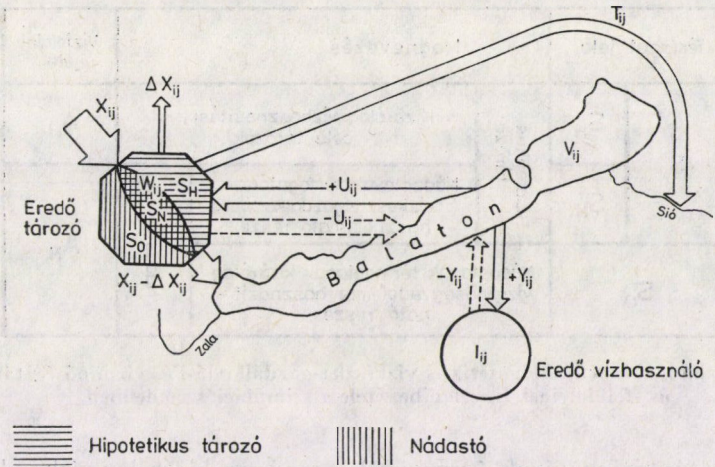


I. ábra. A Balaton-vízgyűjtő

I. A vizsgálat célja és előzményei

Jelen tanulmányunk célja: annak felderítése, hogy a vízhasználók 1990-re előirányzott fejlesztési szintjén a fentiekben jellemzett vízkészlet-gazdálkodási rendszer eredményességét mennyiségi szempontból jellemző mutatók — megfelelő vízkormányzás esetében — hogyan függnek a Balaton-vízgyűjtőn létesíthető vízhasznosítási tározók rendszerét helyettesítő ún. hipotetikus (eredő) tározó hasznos térfogatától. A vizsgálatot — a hipotetikus tározótér fogat különböző feltételezett értékeivel — a rendszer működésének szimulációja útján végezzük, aminek során a tó természetes víztáplálását egyrészt az 1921—70. időszakban észlelt adatsorral, másrészt az utóbbiból mesterségesen előállított (generált) adatsorokkal vesszük figyelembe.

Hasonló célkitűzésű és módszerű korábbi tanulmányunktól (GILYÉNNÉ, DOMOKOS, 1981) a jelen vizsgálat főképpen abban tér el, hogy az amannak alapjául elfogadott munkahipotézisek számát, illetve egyszerűsítésük durvaságát csökkentve a vízkészletforgalom valóságos folyamatainak valamivel jobb közelítésére, a működési változatok számának generált víztáplálás-adatsorok felhasználásával történő növelésével viszont az eredmények statisztikai értékelhetőségére törekszik. Emellett a vízkészlet-gazdálkodási rendszer működésének eredményességét a korábbi vizsgálaténál árnyaltabb mutatórendszerrel jellemezzük. Korábbi vizsgálatunktól eltérően ugyanakkor most nem vizsgáljuk a bányászat aktív vízvédelme érdekében folyó vízemelés várható meg-



2. ábra. A Balaton-vízgyűjtő egyszerűsített vízforgalmi modellje

szüntetése következtében csak rövid időre (egy-két évre) előáll, vízkészlet-gazdálkodási szempontból legkedvezőtlenebb helyzetet, valamint a Balaton medrében — a szabályozási vízszinttartomány felső határának megemelésével — történő vízkészlet-tározás lehetőségeit.

2. Kiindulási munkahipotézisek

Jelen szimulációs vizsgálatunk alapja a 2. ábrán bemutatott, még mindig számos durva egyszerűsítést tartalmazó determinisztikus vízforgalmi modell. A modell főbb kiindulási munkahipotézisei a következők:

— A vizsgálat a rendszer vízkészlet-gazdálkodásának mennyiségi oldalára szorítkozik, vagyis figyelmen kívül hagyja a vízhasználók vízminőség iránti követelményeit, az általuk kibocsátott használt vizek esetleges vízkészletrontó hatásait stb. A vízminőség-védelszemponatok a vizsgálatban csupán annyiban érvényesülnek, hogy figyelembe vesszük a Balaton eutrofizáció elleni védelmére előírányzott nádastó-rendszer (VÁTI, 1978) párologási veszteségét.

— A vízgyűjtő vízfolyásait egyetlen eredő víztáplálással, vízhasználóit egyetlen eredő vízhasználóval, végül vízhasznosítási tározóit és vízminőség-védelmi tározóinak vízkészlet-gazdálkodási célra hasznosítható térfogatrészeit együttesen egyetlen eredő (hipotetikus) tározóként vesszük figyelembe, vagyis figyelmen kívül hagyjuk a vízkészlet-gazdálkodási rendszer elemeinek területi szétszórtságából adódó belső kapcsolatokat s az ezekből adódó műszaki-gazdasági problémákat (SZESZTAY, 1962).

— A hipotetikus tározó hasznosítható térfogata egyenlő a különböző rendeltetésű tényleges, illetve létesíthető tározók vízkészlet-gazdálkodási célra

| Térfogat jele | | Megnevezés | | Vízfelület jele |
|---------------|-------|---|---|-----------------|
| S | S_H | Hipotetikus tározó | Kizárólag vízhasznosítási célú tározók | A_H |
| | S_N | | Nádastavak térfogatának vízkészletgazdálkodásra hasznosítható része | A_N |
| S_0 | | Nádastavak térfogatának kizárólag vízminőségvédelemre hasznosítható része | Nádastó | |

3. ábra. A Balaton-vízgyűjtő hipotetikus vízkészlet-gazdálkodási és vízminőségi tározótereinek és -felületeinek figyelembevétele a szimulációs modellben

hasznosítható térfogatának összegével, vagyis a kizárólag vízkészlet-gazdálkodási célú tározókon kívül tartalmazza a Balaton eutrofizáció elleni védelmére előirányzott ún. nádastavak vízhasznosításra igénybe vehető térfogatrészét, de nem tartalmazza azok kizárólag vízminőségi célokra fenntartandó térfogatrészét (3. ábra). Feltesszük továbbá, hogy a hipotetikus tározó vízkészlet-gazdálkodási eredő hatás szempontjából is egyenértékűen helyettesíti a tényleges, illetve létesíthető tározókat.

— Nem vizsgáljuk az összetevő (tényleges, illetve létesíthető) tározók létesítésének és működésének topográfiai, hidrológiai, területhasználati és gazdasági feltételeit.

— A szimulációs vizsgálatot havi vízmennyiségekkel (1 hónapos lépésekben) végezzük, vagyis nem törődünk a vízforgalom hónapon belüli alakulásával.

3. A vizsgálatban alkalmazott jelölések és mértékegységek

3.1 Futó indexek:

- i — az évet azonosító index
 j — a hónapot azonosító index ($j = 1, 2, \dots, 12$)
 k — a szimulációs vizsgálat sorszáma ($k = 1, 2, \dots, 16$)
 n_k — az egy-egy szimulációs vizsgálatban figyelembe vett évek száma ($n_1, n_2, \dots, n_6 = 50; n_7, n_8, \dots, n_{16} = 100$).

3.2 Időtartam [s]

- Δt — 1 átlagos hónap, a szimulációs vizsgálat időegysége, amelyet állandó hosszúságúnak veszünk ($\Delta t = 2,63 \cdot 10^6$ s)

3.3 Vízállások [cm]

- H_{ij} — a Balaton vízállása az i -edik év j -edik hónapjának végén, a síófoki vízmérce „0” szintje felett („0” = 103,42 m B. f.)
 H_{aj}, H_{fj} — a Balaton 1977. január 1. óta érvényes szabályozási vízszinttartományának alsó, illetve felső határa a j -edik hónapban
 $\Delta H_{ij} = \max(0, H_{aj} - H_{fj})$ — az alsó szabályozási vízszint megsértésének mértéke

3.4 Víz-tömegek, térfogatok [10^6 m^3]

- V_{ij} — a Balaton medrében levő víztömeg az i -edik év j -edik hónapjának végén
 V_{aj}, V_{jj} — a j -edik havi H_{aj} , illetve H_{jj} szabályozási vízszintekhez tartozó víztömeg a tómederben
 $V_0 = V_{-1,12}$ — a szimulációs vizsgálat kezdetén a Balaton medrében levő, feltételezett vízmennyiség (kezdeti teltség)
 S — a hipotetikus (eredő) tározó vízkészlet-gazdálkodási célra hasznosítható tározótérel, amelynek összetevői a 3. ábra szerint:

$$S = S_H + S_N \quad (1)$$

- S_H — a hipotetikus tározó hasznosítható térfogatának kizárólag vízhasznosítási célú tározókban biztosított része
 S_N — a hipotetikus tározó hasznosítható térfogatának a vízminőség-védelmi célú nádistavakban (járulékosan) biztosított része
 S_k — a hipotetikus tározó hasznos térfogatainak sorozatában a k -edik elem (önkéntesen felvett, de egy-egy 50, illetve 100 éves szimulációs vizsgálat folyamán állandóként kezelt érték)
 S_0 — a nádistavak csak vízminőség-védelmi célt szolgáló, vízkészlet-gazdálkodásra nem hasznosítható térfogata
 $W_{ij} \leq S$ — a hipotetikus tározó medrében levő víztömeg az i -edik év j -edik hónapjának a végén
 $W_0 = W_{-1,12}$ — a szimuláció kezdetén a hipotetikus tározóban levő, feltételezett vízmennyiség (kezdeti teltség)

3.5 Vízfelületek [$\text{km}^2 = 10^6 \text{ m}^2$]

- A_B — a Balaton vízfelülete
 A_H — az S_H térfogatú, kizárólag vízhasznosítási célú tározó vízfelülete
 A_N — a Balaton eutrofizáció elleni védelmét szolgáló $S_0 + S_N$ térfogatú tavak vízfelülete (3. ábra)

3.6 A vízforgalom tételei (mértékegységük általában: [$10^6 \text{ m}^3/\text{hónap}$], az ettől eltérő mértékegységeket külön feltüntetjük)

- X_{ij} — a Balaton ún. havi természetes vízkészletváltozása, vagyis a vízgyűjtőről természetes úton a tóba érkező havi vízmennyiség (amelynek pozitív összetevői: a vízfolyások vízzsárlítása, a felszín alatti víztáplálás és a tófelszínre hulló csapadék, negatív összetevője: a tófelszínről történő párolgás). Meghatározásából következően X_{ij} értéke pozitív vagy negatív is lehet. Szimulációs vizsgálatunk egy részében ($k = 1, 2, \dots, 6$) az $n = 50$ éves észlelt $\{X_{ij}\}_1 = \dots = \{X_{ij}\}_n$ adatsort alkalmazzuk. A többi vizsgálathoz ($k = 7, 8, \dots, 16$) az 5.2 szakaszban ismertetendő módszerrel 100–100 éves $\{X_{ij}\}_k$ adatsorokat állítunk elő;
 $x_{ij} = 10^3 \cdot X_{ij}/A_B$ — a havi természetes vízkészletváltozás tó-mm-ben kifejezett értéke [tó-mm/hónap]

- $X_{Ti} = \sum_{j=1}^{12} X_{ij}$ — az i -edik év tenyészidőszakában a vízkészletváltozások összege [$10^6 \text{ m}^3/6$ hónap]
 $x_{Ti} = 10^3 X_{Ti}/A_B$ — a tenyészidőszaki vízkészletváltozás tó-mm-ben kifejezett értéke [mm/6 hónap]
 ΔX_{ij} — a vízhasznosítási célú tározók és a nádistavak vízfelszín-párolgásának X_{ij} értékét csökkentő hatása, amelynek számítási módját az 5.3 szakaszban részletezzük
 X_0 — a vízkészletváltozás önkényesen felvett állandó értéke (az adatsor-generálás segédmennyisége)
 $Z_{ij} = X_{ij} + X_0$ — a mesterséges vízkészletváltozás-adatsor előállításához használt segédváltozó
 Z_i — a $\{Z_{ij}\}$ adatsor i -edik évi átlagértéke
 \bar{Z} — a $\{Z_i\}$ adatsor sokévi átlagértéke
 I_j — a Balaton-vízgyűjtő vízhasználói 1990. évi rögzített fejlesztési szinten várható összesített (eredő) j -edik havi vízigényeinek, vagyis a vízkivételek, valamint a

bányászati- és használtvíz-bevezetések algebrai összegének *sokévi átlagértéke* (I_j értéke negatív is lehet). I_j értéke a következő összetevők összegeként számítható:

$$I_j = I_j^{(k)} + I_j^{(ip)} + I_j^{(hf)} + I_j^{(hp)} + I_j^{(\text{önt})}, \quad (2a)$$

ahol a jobboldalon is a j -edik havi várható eredő (pozitív vagy negatív) vízigények sokévi átlagai állnak, éspedig:

- $I_j^{(k)}$ — a rendszer közüzemi víz- és csatornaművei által kivett és bevezetett vízmennyiségek algebrai összegének átlagos j -edik havi értéke
- $I_j^{(ip)}$ — a rendszer ipari és bányászati üzemei által kivett és bevezetett vízmennyiségek algebrai összegének átlagos j -edik havi értéke
- $I_j^{(hf)}$ — a rendszer halastavainak feltöltéséhez kivett, ill. leürítésükkor visszavezetett havi vízmennyiségek átlagos j -edik havi értéke
- $I_j^{(hp)}$ — a rendszer halastavai párolgási veszteségének pótlásához szükséges átlagos j -edik havi vízmennyiség
- $I_j^{(\text{önt})}$ — a rendszer öntözőtelepeinek átlagos j -edik havi vízigénye.
- I_{ij} — a Balaton-vízgyűjtő vízhasználói 1990. évi rögzített fejlesztési szinten várható összesített (eredő) *konkrét* havi vízigénye az i -edik év j -edik hónapjában. I_{ij} értékét vizsgálatunkban a következő összetevők összegeként számítjuk:

$$I_{ij} = I_{ij}^{(k)} + I_{ij}^{(ip)} + I_{ij}^{(hf)} + I_{ij}^{(hp)} + I_{ij}^{(\text{önt})}, \quad (2b)$$

amelyben a fentebb még nem definiált jelölések jelentése:

- $I_{ij}^{(hp)}$ — a rendszer halastavai párolgási veszteségének pótlásához szükséges konkrét havi vízmennyiség
- $I_{ij}^{(\text{önt})}$ — a rendszer öntözőtelepeinek konkrét havi vízigénye
- $I_i^{(hp)} = \sum_{j=4}^9 I_{ij}^{(hp)}$ — a halastavak párolgási veszteségének pótlásához szükséges vízmennyiség az i -edik évben [$10^6 \text{ m}^3/\text{év}$]. Számításának módját az 5.5 szakaszban ismertetjük.
- $I_i^{(\text{önt})} = \sum_{j=4}^9 I_{ij}^{(\text{önt})}$ — az öntözőtelepek vízigénye az i -edik évben [$10^6 \text{ m}^3/\text{év}$]. Számításának módját az 5.4 szakaszban ismertetjük.
- $I_i^{(hp)}$ — a halastavak párolgási veszteségének pótlásához 1990. évi fejlesztési szinten, átlagos évben szükséges vízmennyiség [$10^6 \text{ m}^3/\text{év}$]
- $I_{1990}^{(\text{önt})}$ — az öntözőtelepek vízigénye átlagos évben, 1990. évi fejlesztési szinten [$10^6 \text{ m}^3/\text{év}$]
- $I_{1975}^{(\text{önt})}$ — az öntözőtelepek vízigénye átlagos évben, az 1964–75. időszak fejlesztési szintjén [$10^6 \text{ m}^3/\text{év}$]
- Y_{ij} — a vízhasználók részére ténylegesen kiszolgáltattott (negatív előjellel: a vízhasználóktól a Balatonnak átadott) havi vízmennyiség: $Y_{ij} \leq I_{ij}$
- U_{ij} — a Balatonból a hipotetikus tározóba (negatív előjellel: a tározóból a Balatonba) átvezetett havi vízmennyiség
- T_{ij} — a rendszerből a Sión lebocsátott (fölös) havi vízmennyiség.

3.7 A vízforgalom tételeinek számításához felhasznált segédmennyiségek és állandók:

- c_{ij} — a Balaton-vízgyűjtőre hulló havi csapadékösszeg területi átlaga [mm/hónap]
- p_{ij} — a Balaton vízfelületének havi párolgása [mm/hónap]
- e_{ij} — a Balaton-vízgyűjtő havi evapotranspirációjának területi átlaga [mm/hónap]
- $q_j \geq 1$ — tapasztalati állandó: a nádastó és a szabad vízfelület párolgásának hányadosa a j -edik hónapban [—]

$\alpha_j^{(hp)}$ — az $I_{ij}^{(hp)}/I_i^{(hp)}$ viszonyszám sokévi átlaga [—].

$$\left(\sum_{j=1}^{12} \alpha_j^{(hp)} = 1 \right).$$

$\alpha_j^{(\text{önt})}$ — az $I_{ij}^{(\text{önt})}/I_i^{(\text{önt})}$ viszonyszám sokévi átlaga [—].

$$\left(\sum_{j=1}^{12} \alpha_j^{(\text{önt})} = 1 \right)$$

β_{ij} — az $I_{ij}^{(hp)}$ és $I_{ij}^{(önt)}$ mezőgazdasági vízigényeknek az 5.5 és az 5.4 szakaszban ismertető számításához felhasznált empirikus mutató, amely az i -edik év j -edik hónapja meteorológiai feltételeinek a j -edik hónapok sokévi átlagos feltételeihez való viszonyát fejezi ki [—]

$\gamma_{ij} = Z_{ij}/Z_i$ — a mesterséges $\{X_{ij}\}$ adatsor generálásánál alkalmazott viszonzszám [—]

$\lambda_i(j) = \sum_{j=1}^j (\gamma_{ij} - 1)$ — a γ_{ij} viszonzszámok i -edik évi maradék-tömeggörbéje [—]

λ_i — a $\lambda_i(j)$ maradék-tömeggörbe értékkészletének tágassága [—]

γ_{ij} — a γ_{ij} viszonzszám irányított véletlenszámmal módosított változata [—]

ζ_i — véletlenszám ($0 \leq \zeta_i \leq 1$) [—]

a, b — tapasztalati lineáris összefüggések állandói

σ — az előállított, illetve alkalmazott tapasztalati lineáris függvénykapcsolatok szorosságát jellemző relatív szórás:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum \left(\frac{y_i - y_i^j}{y_i} \right)^2}, \quad (3a)$$

ahol y_i , illetve y_i^j az y függő változónak a független változók ugyanazon halmazához tartozó észlelt, illetve számított értéke [—]

r — korrelációs tényező [—]

$r_{95\%}$ — az r korrelációs tényező $r = 0$ körüli ingadozási tartományát 95%-os szignifikancia-szinten határoló érték, amelyet az 5.2 szakaszbeli adatsorgenerálásnál használunk fel [—]

r_1 — elsőrendű autokorrelációs tényező [—]

3.8 A rendszer működésének eredményességét jellemző mutatók

R — a vízigény-kielégítés biztonsága:

$$R = 100 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{12} Y_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{12} I_{ij}} [\%] \quad (4)$$

\vartheta — a Balaton szabályozási vízszinttartománya megsértésének relatív tartama:

$$\vartheta = \frac{100}{12 \cdot n} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{H_{ij} < H_{sd} \\ 1 \leq j \leq 12}} 1 [\%]. \quad (5)$$

\delta — a Balaton szabályozási vízszinttartománya megsértésének mértéke:

$$\delta = \frac{\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{12} \Delta H_{ij}^2 \right]^{1/2}}{12 \cdot n} [\text{cm}] \quad (6)$$

T — a Sión évente lebocsátott vízmennyiségek (vagyis a rendszer évi túlfolyásainak) sokévi átlaga:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{12} T_{ij}}{n} [10^6 \text{m}^3/\text{év}] \quad (7)$$

$F_{\eta}(x) = \text{prob}(\eta < x)$ — az η valószínűségi változó tapasztalati vagy simuló eloszlásfüggvénye

4. A vizsgálat matematikai modellje

4.1 A modell leírása

A 2. ábra szerint a rendszer az i -edik év j -edik hónapjában X_{ij} mennyiségű (pozitív vagy negatív előjelű) víztáplálást kap. Ebből ΔX_{ij} mennyiség a hipotetikus tározó, illetve a nádastó többletpárolgása következtében elvész, úgyhogy a Balatonba $X_{ij} - \Delta X_{ij}$ víztáplálás jut és módosítja (növeli vagy csökkenti) a tónak a vizsgált hónap kezdetén meglévő V_{ij-1} vízkészletét. Ha a $V_{ij-1} + (X_{ij} - \Delta X_{ij}) \cdot \Delta t$ érték meghaladja az adott hónapra előírt V_{aj} alsó szabályozási határértéket és I_{ij} pozitív, akkor a tóból kielégítjük az I_{ij} vízigényt. Ha ennek megtörténte után a tó vízkészlete még mindig meghaladja a V_{aj} alsó határértéket, akkor az adott hónap vízforgalom-szimulációja véget ért. Ha viszont a vízigeny-kielégítés után a tó vízkészlete V_{aj} alá csökkenne, akkor ki kell egészíteni a hipotetikus tározóból V_{aj} -ig, hacsak a tározóban levő W_{ij-1} vízmennyiség erre elegendő. Ha nem elegendő, akkor a tározót ki kell üríteni ($-U_{ij} \cdot \Delta t = W_{ij-1}$), az öntözések és halgazdaságok vízszolgáltatását pedig csökkenteni kell ($I_j^{(k)} + I_j^{(ip)} \leq Y_{ij} < I_{ij}$), hogy a V_{aj} szint elérését vagy legalább megközelítését ezáltal biztosítsuk. Szélsőségesen kedvezőtlen helyzetben az is előfordulhat, hogy a V_{aj} szint tartása a mezőgazdasági vízhasználók teljes vízkorlátozása árán sem biztosítható ($Y_{ij} = I_j^{(k)} + I_j^{(ip)}$, $V_{ij} \leq V_{aj}$).

Másrészről előfordulhat, hogy a tó vízkészlete az $(X_{ij} - \Delta X_{ij}) \cdot \Delta t$ víztáplálás fogadása és az I_{ij} vízigeny teljes mértékű kiegyenlítése (illetve negatív I_{ij} érték esetén a vízhasználóktól származó vízkészlet fogadása) után meghaladná az adott hónapra előírt V_{fj} felső szabályozási határértéket. Ez esetben a tó V_{fj} fölötti vízmennyiségét a hipotetikus tározóba kell vezetni ($+U_{ij}$). Ha a tározó ennek következtében nem telik meg ($W_{i,j+1} \leq S$), akkor az adott hónap vízforgalmának szimulációja véget ért. Ellenkező esetben a tározó fölötti vízmennyiségét a Sióba kell továbbvezetni (T_{ij}). (A modell szerint tehát a Balaton H_{fj} felső szabályozási vízszintjének megsértése nem lehetséges.)

A szimulációt $n_k = 50$, illetve $n_k = 100$ évre elvégezve, kiszámíthatók a vízkészlet-gazdálkodási rendszer eredményességét adott $S = S_k$ tározótér-fogat esetén jellemző R , ϑ , δ és T mutatók.

4.2 A modellben foglalt módszertani feltevések

A vízforgalom szimulációjának fenti vázlatos leírásából is kitűnnek az alkalmazott modell szerkesztésének alapjául vett — a 2. szakaszban megfogalmazott kiindulási munkahipotéziseken túlmenő — modellezéstechnikai, módszertani feltevések, illetve absztrakciók:

(a) A teljes X_{ij} víztáplálás először a hipotetikus tározóba, illetve a nádastóba érkezik. (Ez az absztrakció különösen mesterkéltnek tűnhet, hiszen

X_{ij} a tápláló vízfolyások vízszállítása mellett a Balaton felszínére hulló csapadékot és a róla elpárolgó vízmennyiséget is tartalmazza. Megfontolásunk szerint azonban ez a mesterkélttség nem ronthatja érezhetően a modell működésével kapott eredmények megbízhatóságát.)

(b) A hipotetikus tározó és a nádistavak ΔX_{ij} párolgási többletvesztései után fennmaradó teljes $X_{ij} - \Delta X_{ij}$ vízmennyiség ezután a Balatonba jut, vagyis ebben a lépésben a hipotetikus tározónak még nincs döntésektől függő vízforgalom-szabályozó funkciója, hanem csupán „automatikusan” csökkenti — a nádistóval együtt — a Balaton természetes víztáplálásának mértékét.

(c) A hipotetikus tározó, mint vízforgalom-szabályozó létesítmény, csak a Balatonból tölthető fel ($+U_{ij}$), és vagy a Balatonnak ($-U_{ij}$), vagy a Siónak (T_{ij}) adhat át vizet.

(d) A vízhasználók és a rendszer egyéb elemei közötti minden — pozitív vagy negatív előjelű — vízmennyiség-csere a Balaton és a vízhasználók között valósul meg.

(e) A Balatonban tárolt vízmennyiség előírt (V_{aj} , V_{fj}) tartományban való tartásának követelménye elsőbbséget élvez a mezőgazdasági vízigények kielégítésével szemben (OVH, 1979), a lakossági és ipari vízigények kielégítése viszont megelőzi a vízszinttartás követelményét.

(f) A rendszer — V_{fj} és S együttes elérésekor jelentkező — fölös vízkészletét a hipotetikus tározó adja le a Siónak.

(g) A szimulációs vizsgálat az X_{ij} víztáplálás 1 hónapos időelőnyű, 100%-os biztonságú előrejelzését tételezi fel.

4.3 A modell algoritmus

A 4.2. szerinti feltevések alapján felépített determinisztikus szimulációs modell algoritmus a következő:

$$Y_{ij} = \begin{cases} I_j^{(k)} + I_j^{(p)}, & \text{ha } V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} + W_{ij-1} \leq V_{aj} \\ V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} + W_{ij-1} - V_{aj}, & \text{ha} \\ I_j^{(k)} + I_j^{(p)} < V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} + W_{ij-1} - V_{aj} < I_{ij} \\ I_{ij}, & \text{ha } V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} + W_{ij-1} - V_{aj} \geq I_{ij} \end{cases} \quad (8)$$

$$U_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } V_{aj} \leq V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} \leq V_{fj} \\ V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} - V_{fj}, & \text{ha } V_{ij-1} + \\ & + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} > V_{fj} \\ -W_{ij-1}, & \text{ha } 0 \leq W_{ij-1} \leq V_{aj} - V_{ij-1} - X_{ij} + \Delta X_{ij} + I_{ij} \\ - (V_{aj} - V_{ij-1} - X_{ij} + \Delta X_{ij} + I_{ij}), \\ & \text{ha } V_{aj} > V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} \\ & \text{és } W_{ij-1} > V_{aj} - V_{ij-1} - X_{ij} + \Delta X_{ij} + I_{ij} \end{cases} \quad (9)$$

$$V_{ij} = \begin{cases} V_{fj}, & \text{ha } V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} \geq V_{fj} \\ V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij}, & \text{ha } V_{aj} < V_{ij-1} + \\ & + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} < V_{fj} \\ V_{aj}, & \text{ha } V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} \leq V_{aj} \leq V_{ij-1} + \\ & + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_j^{(k)} - I_j^{(ip)} + W_{ij-1} \\ V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} + W_{ij-1} - I_j^{(k)} - I_j^{(ip)}, & \text{ha} \\ V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} + W_{ij-1} - I_j^{(k)} - I_j^{(ip)} < V_{aj} \end{cases} \quad (10)$$

$$W_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} + W_{ij-1} - I_{ij} \leq V_{aj} \\ W_{ij-1} + V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} - V_{fj}, & \text{ha} \\ & 0 < W_{ij-1} + V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} - V_{fj} < S \\ S, & \text{ha } W_{ij-1} + V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} - V_{fj} \geq S \\ S - (V_{aj} - X_{ij} + \Delta X_{ij} + I_{ij} - V_{ij-1}), & \text{ha} \\ & V_{aj} - V_{ij-1} - X_{ij} + \Delta X_{ij} + I_{ij} > 0 \end{cases} \quad (11)$$

$$T_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } W_{ij-1} - V_{fj} + V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} \leq S \\ V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} - V_{fj} + W_{ij-1} - S, & \text{ha} \\ & W_{ij-1} - V_{fj} + V_{ij-1} + X_{ij} - \Delta X_{ij} - I_{ij} > S \end{cases} \quad (12)$$

Az egyszerűség kedvéért a $m^3/\text{hónap}$ dimenziójú mennyiségeknél (vízigény, vízkészlet-változás, vízszolgáltatás, víztovábbengedés, a segédtározó és a Balaton közötti vízforgalom) a Δt -vel való szorzás feltüntetésétől eltekintettünk, mivel ez az egyértelműséget nem zavarja.

5. A bemenő adatok beszerzése és képzése

Ebben a szakaszban — a 3. szakaszbeli definíciók értelemszerű sorrendjében — először felsoroljuk a szimulációs modell működtetéséhez szükséges adatok közül a más forrásból átvett és az önkényes döntéssel felvett adatok beszerzési forrásait, majd ismertetjük a szimuláció céljára általunk generált adatok előállításai módszereit.

5.1 Készen átvett és önkényesen felvett adatok

A Balaton havonta változó szabályozási vízszinttartományának H_{aj} és H_{fj} határértékeit az OVH (1979) előírásából vettük.

Az előbbi vízszint-határértékekhez tartozó V_{aj} és V_{fj} értékeket a VITUKI (1976) kiadványban közölt vízállás-víztömeg görbéről olvastuk le.

Valamennyi 50, illetve 100 éves szimulációs vizsgálathoz a Balaton kezdeti $V_0 = V_{-1,12}$ víztömegét — a VITUKI (1977) tanulmány példáját követve — a $H = 85$ cm-es tó-vízálláshoz tartozó $V_0 = 2030 \cdot 10^6$ m^3 értékkel vettük fel (7/c. ábra).

A hipotetikus tározó térfogatát az észlelt 50 éves X_{ij} víztáplálás-adatokkal futtatott programokban a következő — korábbi vizsgálatunk (GILYÉNNÉ—DOMOKOS, 1981) tapasztalatai alapján önkényesen megválasztott — S_k érték

kekkel szerepeltettük: $S_1 = 0$, $S_2 = 50 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $S_3 = 80 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $S_4 = 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $S_5 = 150 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $S_6 = 200 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. A 10 generált 100 éves X_{ij} adatsorral végzett $k = 7, 8, \dots, 16$ sorszámú vizsgálatban egységesen ugyanazt az értéket: $S_7 = S_8 = \dots = S_{16} = 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ -t vettünk fel.

A nádistavak csak vízminőségvédelmi célra hasznosítható térfogatrésze a VÁTI (1978) szerint: $S_0 \approx 70 \cdot 10^6 \text{ m}^3$. (Ez az érték egyébként vizsgálatunk szempontjából érdektelen, mivel a nádistavak modellünk szerint csak A_N felületük párologtatása révén vesznek aktív részt a vízforgalomban.)

Valamennyi szimulációs vizsgálatához a hipotetikus tározó kezdeti $W_0 = W_{-1,12}$ víztömegét esetenként $W_{0,k} = 0,75 \cdot S_k$ -nak vettük fel.

A Balaton A_B vízfelülete a $70 \text{ cm} \leq H \leq 100 \text{ cm}$ -es szabályozási vízszinttartományban gyakorlatilag ($\pm 2 \text{ km}^2$ -es eltéréssel) állandó érték: $A_B = 590 \text{ km}^2$ (VITUKI, 1976).

A k -adik szimulációs vizsgálatban az $S_{H,k}$ térfogatú, kizárólag vízhasznosítási célú tározó vízfelületét — a VÁTI (1978) tanulmány adatai alapján $1,3 \text{ m}$ -es átlagos vízmélységgel és $S_N = 25 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ -rel számolva — az

$$A_{H,k} = 0,75 \cdot (S_{H,k} - 25) \quad (13)$$

értékkel vettük figyelembe. (Az A_H vízfelületnek a mindenkori W_{ij} tározóteltségtől függő változásait elhanyagoltuk.)

A Balaton eutrofizáció elleni védelmét szolgáló — részben vízhasznosítási célú tározórészt is biztosító — nádistavak vízfelületét a VÁTI (1978) tanulmányban közölt adatok összegzésével, $A_N = 95 \text{ km}^2$ állandó értékkel szerepeltettük.

A Balaton X_{ij} havi természetes vízkészletváltozásának (vagyis nettó víztáplálásának) 50 éves (1921—70. évi) észlelt, ill. rekonstruált adatsorát a VITUKI (1977) tanulmánya közli. (Az idézett tanulmány a havi vízkészletváltozás-értékeket a tó vízfelületére vetített x_{ij} tó-mm/hónap mértékegységben adja meg, amelyekből az X_{ij} értékeket értelemszerűen az

$$X_{ij} = 10^{-3} \cdot A_B \cdot x_{ij} \cdot [10^6 \text{ m}^3/\text{hónap}] \quad (14)$$

összefüggéssel számítottuk át.) A 10 db egyenként 100—100 év terjedelmű mesterséges $\{X_{ij}\}$ adatsornak ebből az 50 éves észlelt adatsorból való előállítására alkalmazott módszert az 5.2 szakaszban ismertetjük.

Az átlagos j -edik havi I_j eredő vízigények 1990. évi fejlesztési szinten várható értékeit és ezek $I_j^{(k)}$, $I_j^{(ip)}$, $I_j^{(hf)}$, $I_j^{(hp)}$ és $I_j^{(önt)}$ összetevőit a VITUKI (1977) munkájából vettük.¹ A szimulációs időszak konkrét hónapjaira jellemző

¹ A VITUKI 1977. évi tanulmányában 1990-re előrejelzett vízigény-értékek 1990-ben való bekövetkezésének valószínűsége — a beruházások, köztük az öntözés- és halgazdaság-fejlesztések időközben mérsékeltebbé vált üteme miatt — valamelyest romlott. Más megbízható vízigény-előrejelzések hiányában mégis ezeket az adatokat használjuk fel tanulmányunkban, hiszen ezek a módszertani eredményeket nem érintik, hanem legfeljebb azt eredményezik, hogy nem az 1990. évi, hanem valójában egy valamivel későbbi vízgazdálkodási állapotot modellezzünk.

I_{ij} értékek számításához felhasznált, a kb. rögzített fejlesztési szintűnek tekinthető 1964—75. időszakra vonatkozó $I_{ij}^{(hp)}$ és $I_{ij}^{(önt)}$ mennyiségeket ugyanez a tanulmány közli. Az 1990. évi fejlesztési szintre vonatkozó $I_{ij}^{(hp)}$ és $I_{ij}^{(önt)}$ értékek számításának módját az 5.4 és 5.5 szakaszban részletezzük.

Az 1921—70. közötti észlelési időszakra vonatkozóan a Balaton-vízfelület p_{ij} párolgás- és c_{ij} csapadék-értékeit, továbbá a Balaton-vízgyűjtő e_{ij} evapotranspiráció-értékeit a VITUKI (1977) tanulmányból vettük át. A vízgyűjtőre — s ezen belül a leendő tározók vízfelületére — hulló c_{ij} csapadékértékeket azonosnak tekintettük a tóra hulló csapadékéval.

A nádastó és a szabad vízfelület párolgásának arányát jellemző q_j értékeket Baranyi (1970) tanulmánya közli.

Végül a modellünkben, a többi vízigény-összetevőtől eltérően, az időjárástól függően évről évre változónak tekintett $I_{ij}^{(hp)}$ és $I_{ij}^{(önt)}$ vízigény-összetevők számításához szükséges — az egyes hónapoknak a teljes évi vízigényből való részesedését sokévi átlagértékként megadó — $\alpha_{ij}^{(hp)}$ és $\alpha_{ij}^{(önt)}$ segédszámokat a Balaton-vízgyűjtőn érdekelt vízügyi szervek közös tapasztalatait összegző VITUKI (1977) tanulmányból vettük.

5.2 A szintetikus $\{X_{ij}\}$ víztáplálás-adatsorok előállítás

Mivel az eredmények statisztikai értékelhetősége érdekében célunk volt a szimulációs futtatások számának szaporítása, a rendelkezésünkre álló 50 éves észlelt, ill. rekonstruált $\{X_{ij}\}$ természetes vízkészlet-változás adatsor (VITUKI, 1977) felhasználásával további 10, egyenként 100—100 év terjedelmű mesterséges $\{X_{ij}\}$ adatsort állítottunk elő. Az előállításához az eredetileg vízhozam-adatsorok generálására kidolgozott Szvanyidze-féle ún. töredék-módszert a hazai vízjárási viszonyokra adaptáló KARDOS (1973) eljárást alkalmaztuk, feladatunknak megfelelő értelemszerű módosításokkal:

(a) Az észlelt $\{X_{ij}\}$ természetes vízkészlet-változás adatsornak negatív elemei is vannak, az alkalmazni kívánt adatgeneráló módszert viszont eredetileg nem negatív elemű vízhozamsorozatokra dolgozták ki. Ezért először a

$$Z_{ij} = X_{ij} + X_0 \quad (15)$$

helyettesítéssel egy szintén csak nem-negatív elemeket tartalmazó $\{Z_{ij}\}$ adatsort készítünk, ahol

$$X_0 > |X_{ij, \min}| \quad (16)$$

célszerűen megválasztott mennyiség. Esetünkben $X_0 = 300 \cdot 10^6 \text{ m}^3/\text{hónap}$.

(b) A havi értékek $\{Z_{ij}\}$ adatsorából a

$$Z_i = \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} Z_{ij} \quad (17)$$

képlet alkalmazásával előállítjuk az évi átlagértékek n elemű $\{Z_i\}$ sorozatát.

(c) A $\{Z_i\}$ sorozatnak előállítjuk a következő statisztikai jellemzőit:

— a

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \quad (18)$$

sokévi átlagértéket

— a sorozat r_1 elsőrendű autokorrelációs tényezőjét

— az

$$F_Z(x) = \text{prob} \{[Z_i - \bar{Z}] < x\} \quad (19)$$

tapasztalati eloszlásfüggvényt, amely a könnyebb számítástechnikai kezelhetőség céljából valamilyen simuló eloszlásfüggvénnyel is helyettesíthető. (Esetünkben Pearson III. típusú simuló eloszlásfüggvényt alkalmaztunk.)

(d) Minden egyes i -edik év 12 értéket tartalmazó $\{Z_{ij}\}_i$ sorozatából külön-külön előállítjuk az éven belüli eloszlást jellemző

$$\gamma_{ij} = \frac{Z_{ij}}{Z_i} \quad (20)$$

hányadosok sorozatát

$$\left(\sum_{j=1}^{12} \gamma_{ij} = 12 \right),$$

valamint minden ilyen $\{\gamma_{ij}\}_i$ sorozatból — vagy meghonosodott elnevezéssel „töredékből” — a

$$\lambda_i(j) = \sum_{j=1}^i (\gamma_{ij} - 1) \quad (21)$$

maradék-tömeggörbe értékkészletének tágasságát mérő

$$\lambda_i = \lambda_i(j)_{\max} - \lambda_i(j)_{\min} \quad (22)$$

számot. Meghatározzuk a (Z_i, λ_i) értékpárok $r_{z,\lambda}$ korrelációs tényezőjét és ezt összehasonlítjuk a korrelációs tényező 0 körüli ingadozására 95%-os szignifikancia-szinten megadott Anderson-féle $r_{95\%}(n)$ határértékkel (DYCK—SCHRAMM, 1968). Ha

$$|r_{z,\lambda}| < r_{95\%}(n), \quad (23)$$

akkor λ_i -t Z_i -től függetlennek tekintjük. Ellenkező esetben előállítjuk a $\lambda_i(Z_i)$ regressziós kapcsolatot. Példánk esetében a (23) feltétel teljesült, tehát λ_i a Z_i -től függetlennek bizonyult.

(e) A fenti előkészítő műveletek után, a mesterséges $\{X_{ij}\}$ adatsor generálásának első lépéseként, az évi értékek n_k év terjedelmű mesterséges $\{Z_i\}_k$ adatsora i -edik elemét, ζ_i véletlenszámok ($0 \leq \zeta_i \leq 1$) felhasználásával, a következő képlet alkalmazásával állítjuk elő:

$$Z_i = \bar{Z} + r_1(Z_{i-1} - \bar{Z}) + F_Z(\zeta_i) \sqrt{1 - r_1^2}. \quad (24)$$

(f) A generálás következő lépéseként a már előállított évi Z_i értékeket $\{Z_{ij}\}_i$ havi értéksorokra bontjuk. Mivel (d) szerint esetünkben λ_i független Z_i -től, minden generált Z_i -hez véletlenszerűen választunk ki egyet az észlelt adatok $\{\gamma_{ij}\}_i$ „töredékeinek” a halmazából. Minden ilyen kiválasztott töredékhez $12 - 12 \xi_j$ véletlenszámot veszünk fel ($0 \leq \xi_j \leq 1$) és a töredék j -edik γ_{ij} elemét az „irányított véletlenszámok módszerével” — némileg önkényesen, az éven belüli ingadozási görbék változékonyságának korlátozott növelése céljából — a következőképpen módosítjuk:

$$\gamma'_{ij} = \gamma_{ij} \left(1 + \frac{\xi_j - \frac{1}{12} \sum_{j=1}^{12} \xi_j}{(0,2 + 1,8 \xi_j) \cdot \sum_{j=1}^{12} \xi_j} \right) \quad (25)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{12} \gamma'_{ij} = 12 \right).$$

A generált adatsor i -edik év j -edik hónapjához tartozó Z_{ij} értéket pedig értelemszerűen a

$$Z_{ij} = \gamma'_{ij} \cdot Z_i \quad (26)$$

képlettel számítjuk.

(g) Az így előállított Z_{ij} értékekből a generált vízkészletváltozás-adatsor X_{ij} eleme az

$$X_{ij} = Z_{ij} - X_0 \quad (27)$$

összefüggésből adódik.

A vázolt módszerrel előállított 10 $\{X_{ij}\}_k$ adatsor jellemzőiről az 1. táblázat (3)—(5) oszlopa tájékoztat.

5.3 A tározók okozta ΔX_{ij} párolgási többletvesztés számítása

(a) Az 1921—70 közötti észlelési időszak adataival való futtatások ($k = 1, 2, \dots, 6$) céljára a víztáplálás-csökkenés ΔX_{ijk} havi értékeit a következő képlettel számítottuk:

$$\Delta X_{ijk} = A_{H,k} (p_{ij} - e_{ij}) + A_N (q_j \cdot p_{ij} - e_{ij}). \quad (28)$$

A fenti képletben szereplő valamennyi mennyiség ismert az 5.1 szakasz szerint. A (28) képlet alkalmazásának fő felvetései:

(a1) a létesítendő tározók területének mm-ben kifejezett evapotranspirációja megegyezik az egész Balaton-vízgyűjtőre jellemző átlagértékkel;

(a2) vízfelszín-párolgásuk pedig megegyezik a Balatonéval.

(b) A mesterségesen előállított $\{X_{ij}\}$ adatsorokkal való futtatások ($k = 7, 8, \dots, 16$) ΔX_{ijk} értékeit elvileg ugyancsak a (28) képlettel számítottuk, csakhogy ez esetben már nem álltak rendelkezésünkre észlelt (illetve észlelések-

ből levezetett) p_{ij} és e_{ij} adatsorok, úgyhogy ezeket is az észlelési adatsorból levezetett információkon alapuló segédszámításokkal kellett becsülnünk.

A becslés első segédlet-sorozatánaként az 50 éves párhuzamos észlelési adatsorok adataiból havonkénti

$$p_{ij} = a_j X_j + b_j \quad j = 1, 2, \dots, 12 \quad (29)$$

alakú tapasztalati kapcsolatokat állítottunk elő. Az előállított kapcsolatok szorossága kielégítőnek mondható, mivel a jelentősebb párolgás-értékekkel jellemzett nyári félév hónapjaiban (IV.—IX. hó) az észlelési pontoknak a regressziós egyenesek körüli relatív szóródása viszonylag kicsi ($0,11 \leq \sigma_j \leq 0,25$), míg a téli félév hónapjaira (X.—III. hó) adódott nagyobb relatív szóródások ($0,42 \leq \sigma_j \leq 0,71$) hatása e hónapok kis párolgás-értékei miatt nem jelentős. Kiragadott példaként a január, április és július havi ($j = 1, 4, 7$), (29) típusú kapcsolatot a 4. ábrán mutatjuk be.

A becslés második segédleteként az 50 éves észlelési időszak összetartozó (e_{ij} , p_{ij}) értékpárjai alkotta ponthalmaz kiegyenlítő egyenesét állítottuk elő, havi bontás nélkül. Amint az 5. ábrán is látható, az

$$e_{ij} = 0,74 \cdot p_{ij} \quad (30)$$

alakú regressziós egyenes — várakozásunkkal ellentétben, részben bizonyára az e_{ij} értékek észlelési bizonytalanságai következtében — csak durva becslést adhat ($\sigma = 0,57$), de további, megbízhatóbb információ hiányában ezzel kell beérnünk. A (30) kapcsolat 0,74-es együtthatója egyébként jól egyezik az evapotranspiráció/párolgás viszonyszám szakirodalomból vehető átlagértékével (WMO, 1976).

A mesterségesen előállított X_{ij} értékeket csökkentő ΔX_{ijk} párolgási veszteségek becslésére szolgáló összefüggést ezekután úgy kapjuk, hogy (28)-ba behelyettesítjük (29)-et és (30)-at:

$$\Delta X_{ijk} = A_{H0,k} \cdot 0,26 (a_j X_{ij} + b_j) + A_N (q_j - 0,74) (a_j X_{ij} + b_j). \quad (31)$$

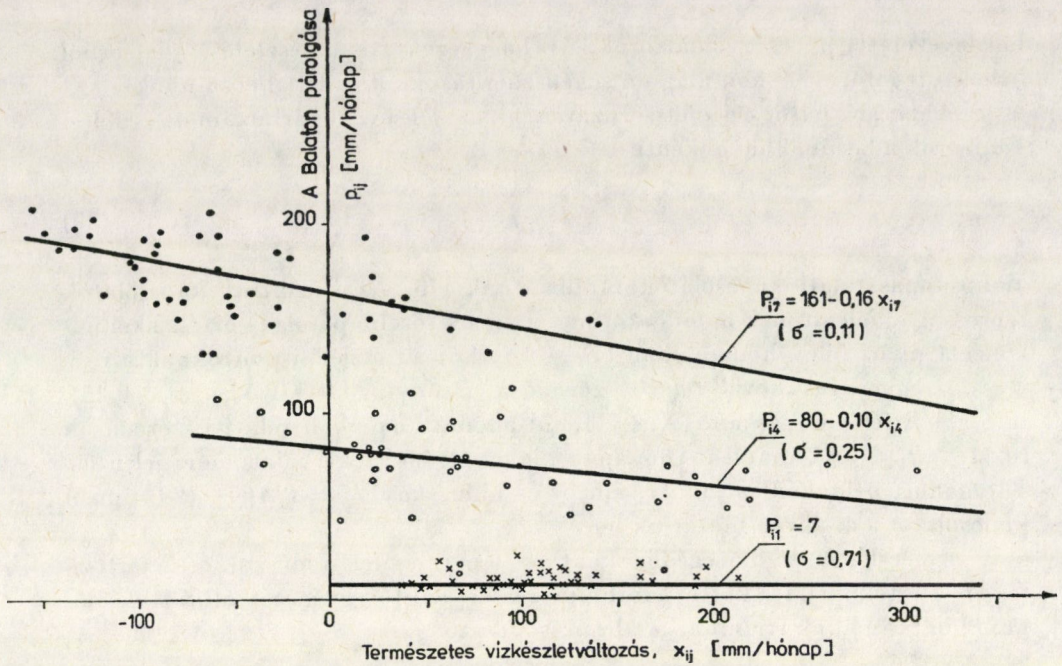
5.4 Az $I_{ij}^{(\delta nt)}$ öntözési vízigény számítása

A VI FUKI (1977) tanulmány

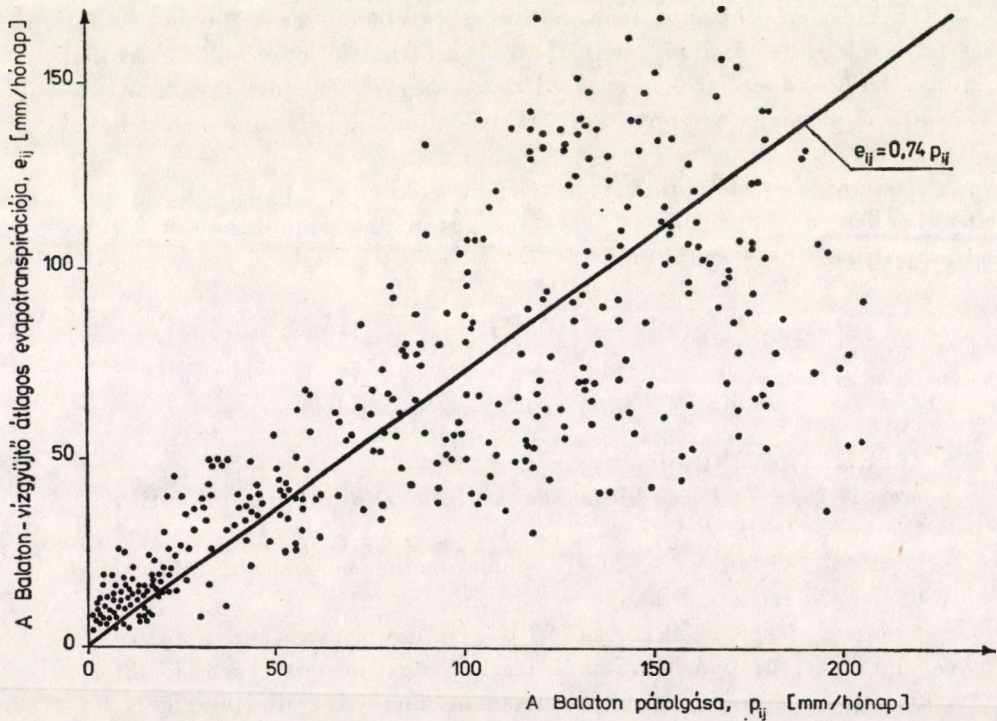
— az 50 éves észlelési időszakra közli a konkrét havonkénti $I_{ij}^{(\delta nt)}$ értékeket,

— az 1990. évi fejlesztési szintre vonatkozóan pedig a sokévi átlagként várható havi $I_{ij}^{(\delta nt)}$ értékeket ad.

Szimulációs vizsgálatunkhoz az 1990. évi fejlesztési szinthez tartozó — és az egyes adott futtatásokhoz felhasznált (észlelt vagy mesterségesen előállított) $\{X_{ij}\}$ vízkészletváltozás-adatsorokkal is összhangban levő 50, ill. 100 éves $\{I_{ij}^{(\delta nt)}\}$



4. ábra. Havonkénti tapasztalati kapcsolatok az x_{ij} vízkészletváltozás és a p_{ij} vízfelszín-párolgás között (kiragadott példák)



5. ábra. Tapasztalati kapcsolat a p_{ij} vízfelszín-párolgás és az e_{ij} területi evapotranspiráció között

adatsorokra volt szükségünk. Ezek előállítását futtatásonként két lépésben végeztük: (a) először előállítottuk az adott $\{X_{ij}\}_k$ adatsorral 1990. évi fejlesztési szinten várhatóan együjtjáró $\{I_{ik}^{(\text{önt})}\}$ évi (= tenyészidei) vízigény-adatsort; (b) az utóbbit — az időjárás viszonyok egyes éveken belüli alakulásának figyelembevételével — $I_{ijk}^{(\text{önt})}$ havi vízigény-értékekre bontottuk.

a) Első lépésként tapasztalati kapcsolatot kerestünk egy — öntözésfejlesztés szempontjából stagnálónak tekinthető, tehát többé-kevésbé homogén vízigény-adatokat szolgáltató — múltbeli időszak X_{Ti} tenyészidőszaki összesített vízkészletváltozásai és $I_i^{(\text{önt})}$ évi (= tenyészidőszaki) összesített öntözővízigényei között. A kiválasztott 1964—75. közötti, 12 éves időszak összetartozó $(X_{Ti}, I_i^{(\text{önt})})$ értékpárjai alkotta pontokat eléggé meggyőzően egyenlíti ki az 1964—75. időszak viszonyait jellemző

$$I_{i,1975}^{(\text{önt})}(X_{Ti}) = 13,1 \cdot e^{-0,0029 X_{Ti}} \quad (32)$$

tapasztalati kapcsolat (6. ábra). Ebből az 1990. évi fejlesztési szintet jellemző kapcsolatot a két időszak tenyészidőszaki vízigényei

$$I_{1990}^{(\text{önt})}/I_{1975}^{(\text{önt})} = 22,1/11,2 = 1,97 \quad (33)$$

arányával való szorzás adja, tehát az 1990-es szintre az

$$I_{i,1990}^{(\text{önt})} = 1,97 \cdot I_i^{(\text{önt})} = 25,8 \cdot e^{-0,0029 X_{Ti}} \quad (34)$$

tapasztalati összefüggést tekintjük érvényesnek.

b) Miután a (34) összefüggéssel minden $\{X_{ij}\}_k$ adatsorhoz előállítottuk az évi (tenyészidei) $I_i^{(\text{önt})}$ értékek n_k elemű sorozatát, minden ilyen $I_i^{(\text{önt})}$ értéket havi $I_{ij}^{(\text{önt})}$ értékekre kellett bontanunk. Ezt az elvi megfontolásokból kiinduló, de csak többszöri próbálgatás után véglegesített

$$I_{ij}^{(\text{önt})} = I_i^{(\text{önt})} (\alpha_j^{(\text{önt})} + 0,5\beta_{ij}) \quad (35)$$

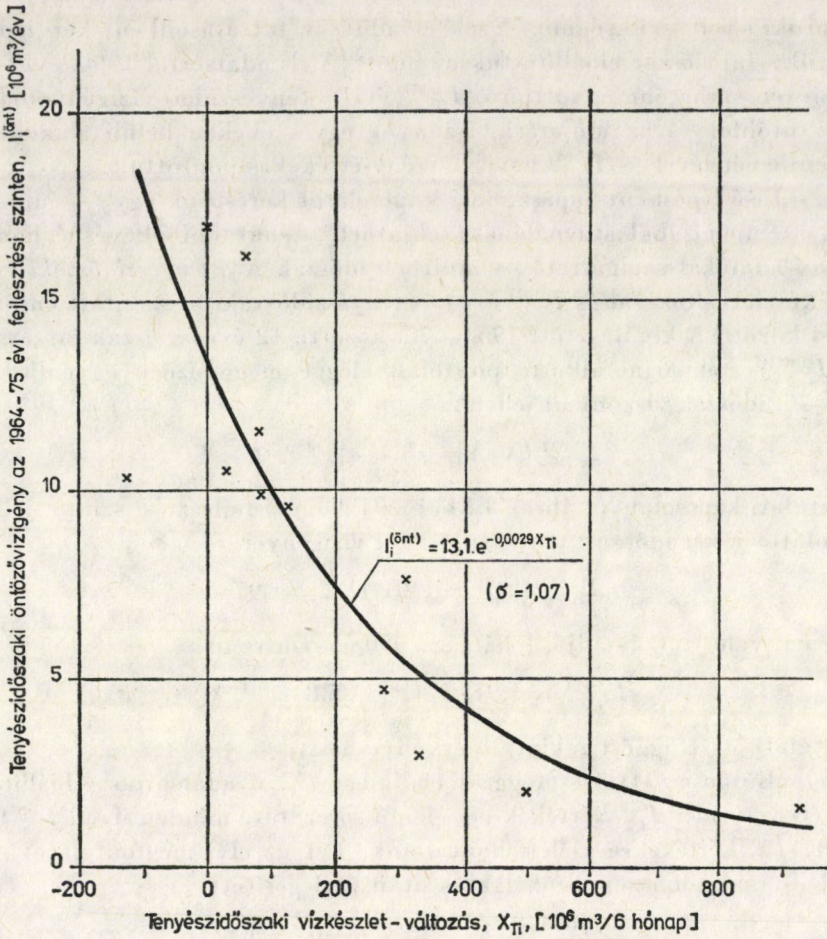
képlet alkalmazásával végeztük, amelyben az $\alpha_j^{(\text{önt})}$ értékek az évi öntözési vízigény hónapok közötti átlagos megoszlását jellemzik

$$\left(\sum_{j=4}^9 \alpha_j = 1 \right),$$

míg a β_{ij} tényező az adott év tenyészidőszaki időjárás-alakulásának az átlagos alakulástól való eltérését hivatott érvényesíteni:

$$\beta_{ij} = \frac{(c_{ij} - p_{ij})}{\sum_{j=4}^9 (c_{ij} - p_{ij})} - \frac{\sum_{i=1}^n (c_{ij} - p_{ij})}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=4}^9 (c_{ij} - p_{ij})} \quad (36)$$

$$\left(\sum_{j=4}^9 \beta_{ij} = 0 \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$



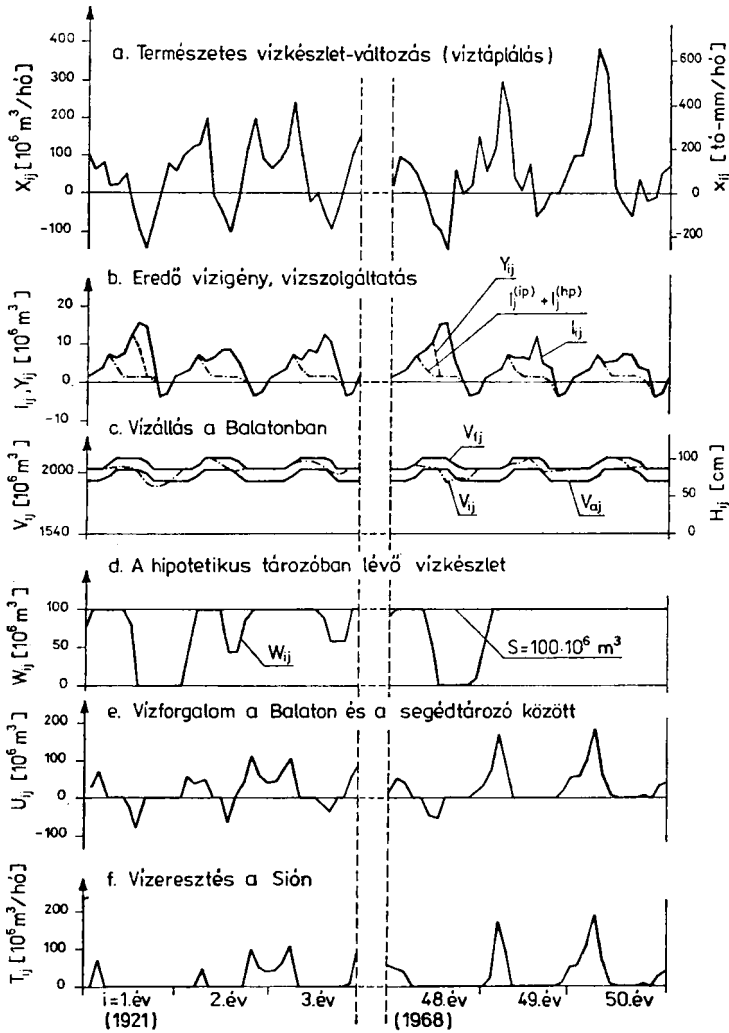
6. ábra. Tapasztalati kapcsolat az x_{Ti} tenyészidei összesített vízkészlet-változás és az $I_{i,1975}^{(ont)}$ tenyészidei összesített öntözési vízigény között az 1964–75. évi fejlesztési szinten

ahol a p_{ij} vízfelszín-párolgás értékek az 5.3 szakasz (29) tapasztalati összefüggésével állítandók elő.

5.5 A halastavak vízpótlását szolgáló $I_{ij}^{(hp)}$ vízigény számítása

Az előző szakaszban tárgyalt $I_{ij}^{(ont)}$ vízigény-értékek számításához hasonlóan az $I_{ij}^{(hp)}$ értékeket is két lépésben állítottuk elő.

(a) Első lépésként most is az egyes évek teljes tenyészidei $I_i^{(hp)}$ vízigényét számítottuk abból a megfontolásból kiindulva, hogy ez az érték lényegében ugyanazoktól az időjárási tényezőktől függ, mint ugyanazon i -edik év $I_i^{(ont)}$



7. ábra. Részlet az $S = 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ -es hipotetikus tározótérfogattal futtatott szimulációs program részeredményeiből

értéke. Ezért az 1990. évi szintre vonatkozó sokévi átlagos vízigények

$$I^{(hp)}/I^{(\text{önt})} = 4,95/22,1 = 0,22 \quad (37)$$

arányszámát alkalmazva, az $I_i^{(hp)}$ értékek előállítására egyszerűen az

$$I_i^{(hp)} = 0,22 \cdot I_i^{(\text{önt})} \quad (38)$$

képletet alkalmaztuk, amelyben $I_i^{(\text{önt})}$ a (34) tapasztalati kapcsolattal már előállított öntözési vízigény.

(b) Az $I_i^{(hp)}$ értékek *hónapokra* való szétoztására — ugyancsak az öntözési és vízpótlási vízigények együttjárására vonatkozó fenti megfontolásból — a (35) képlethez hasonló

$$I_{ij}^{(hp)} = I_i^{(hp)} (\alpha_j^{(hp)} + 0,5 \beta_{ij}) \quad (39)$$

összefüggést alkalmaztuk, amelyben a β_{ij} tényezők azonosak a (38) képlettel már előállított értékekkel.

6. A modell működtetése

A (8)—(12) algoritmus alapján számítógépes szimulációs program készült a VITUKI R10 számítógépére. A program tartalmazza a vízigények (34)—(36) szerinti számítását is.

A vízkészletváltozás-idősorok (17)—(27) szerinti generálását egy másik program végzi.

A szimulációs vizsgálatot — az 5.1 szakaszban felsorolt forrásokból átvett, valamint az 5.2—5.5 szakaszokban részletezett módszerekkel előállított bemenő adatokkal — az $\{X_{ij}\}_k$ víztáplálás-adatsorok és S_k hipotetikus tározótérfogatok 16 különböző kombinációjára végeztük el, amelyekről az 1. táblázat ad áttekintést. Az $S_4 = 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ hipotetikus tározótérfogathoz tartozó, az 50 éves észlelt X_{ij} víztáplálás-adatsort alkalmazó szimuláció egyes részeredményeit — kiragadott példaként, szemléltetésül — a 7. ábrán mutatjuk be.

Egy-egy 100 év terjedelmű szimulációs vizsgálat gépidő-igénye az R 10 gépen 12 perc.

7. Eredmények

Az elvégzett szimulációs vizsgálatok eredménymutatóiról az 1. táblázat (9)—(12) oszlopa tájékoztat.

Az ugyanazon 50 éves (észlelt) $\{X_{ij}\}$ víztáplálás-adatsorral, de különböző S_k hipotetikus tározótérfogatokkal végzett $k = 1, \dots, 6$ vizsgálat eredménymutatóit — az S tározótérfogat függvényében — a 8. ábrán szemléltetjük.

A rögzített $S = 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ -es hipotetikus tározótérfogattal, de 10 különböző generált (egyenként 100-100 éves) $\{X_{ij}\}_k$ víztáplálás-adatsorral kapott eredménymutatók Gauss-típusú simuló eloszlásfüggvényei a 9. ábrán láthatók.

Az 1. táblázatban, valamint a 8. és 9. ábrán bemutatott eredményeket így értékeljük:

1. táblázat

Áttekintés az elvégzett szimulációs vizsgálatokról és azok eredményeiről

| A vizsgálat sorszáma, k | Az adatcsoportok jellege, hossza n_k | Az $\{X_{ij}\}_k$ természetes víztáplálás adatsor | | | Az $\{I_{ij}\}$ vízigény-adatsor | | A hipotetikus tározó térfogata $S_k [10^6 \text{ m}^3]$ | A rendszer működésének eredmény-mutatói | | | |
|---------------------------|---|---|---------|---------|----------------------------------|---------|---|---|---|------------------------------|---|
| | | statistikai jellemzői $[10^6 \text{ m}^3/\text{hónap}]$ | | | | | | Vízigény-kielégítési biztonság $R [\%]$ | A Balaton szabályozási vízszint megsértésének | | Évi átlagos vízeresztés a Sión $T [10^6 \text{ m}^3/\text{év}]$ |
| | | átlag | maximum | minimum | átlag | maximum | | | relatív tartalma $\delta [\%]$ | mértéke $\delta [\text{cm}]$ | |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) | (7) | (8) | (9) | (10) | (11) | (12) |
| 1. | észlelt (rekonstruált), 50 év (1921—70) | 33,3 | 270 | -91 | 4,3 | 17,2 | 0 | 69,5 | 21,3 | 6,0 | 328,8 |
| 2. | | | | | | | 50 | 80,8 | 12,3 | 3,8 | 318,3 |
| 3. | | | | | | | 80 | 86,9 | 8,3 | 2,9 | 309,7 |
| 4. | | | | | | | 100 | 89,0 | 7,0 | 2,3 | 304,9 |
| 5. | | | | | | | 150 | 93,7 | 3,5 | 1,3 | 293,4 |
| 6. | | | | | | | 200 | 97,2 | 1,5 | 0,6 | 282,6 |
| 7. | generált, 100 év | 31,2 | 313 | -116 | 4,7 | 27,0 | 100 | 83,4 | 11,6 | 4,2 | 278,1 |
| 8. | | | | | | | | 84,0 | 10,7 | 5,2 | 294,2 |
| 9. | | | | | | | | 88,0 | 7,4 | 2,6 | 303,7 |
| 10. | | | | | | | | 82,8 | 12,0 | 7,9 | 279,4 |
| 11. | | | | | | | | 87,6 | 7,8 | 3,7 | 292,6 |
| 12. | | | | | | | | 90,7 | 5,9 | 2,8 | 334,4 |
| 13. | | | | | | | | 84,2 | 10,2 | 3,4 | 344,1 |
| 14. | | | | | | | | 89,8 | 7,8 | 2,7 | 312,0 |
| 15. | | | | | | | | 88,1 | 7,1 | 2,6 | 344,7 |
| 16. | | | | | | | | 86,5 | 9,2 | 4,9 | 361,7 |

8*

Műszaki Tudomány 62 (1982)

— A Balaton-vízgyűjtőn létesítendő tározórendszer nélkül az — 1990-es fejlesztési szinten várható — vízigények csak mintegy 69%-os biztonsággal lennének kielégíthetők, valamint az összzidőtartam 21%-ában nem lehetne biztosítani az alsó szabályozási vízszint elérését.

— $S = 200 \cdot 10^6$ m³ hasznos tározótérfogat esetén R várható értéke eléri a 97%-ot és az alsó szabályozási vízszint elérését az összzidőszaknak csupán a 2%-ában nem lehet biztosítani.

— $S = 100 \cdot 10^6$ m³-hez $R = 89\%$ vízigény-kielégítési biztonság és a Balaton alsó szabályozási vízszint megsértésének 7%-os relatív tartama tartozik.

— Mesterséges vízkészletváltozási adatsorok felhasználása esetén az $S = 100 \cdot 10^6$ m³-hez tartozó vízigény-kielégítési biztonság 83% és 91% között változik (átlagosan 87%), a Balaton alsó szabályozási vízszintje megsértésének relatív tartama 6%—12% közötti értékeket vesz fel (átlagosan 9%).

Látható, hogy mesterséges adatsorok felhasználása esetén — mint az várható is volt — átlagosan kisebb biztonság adódik. Ennek oka az, hogy a kétszer olyan hosszú idősorok több szélsőséges esetet tartalmazhatnak.

A mesterségesen előállított vízkészletváltozás-idősorok átlagainak maximális eltérése az észlelt idősorokéhoz képest 12%, átlagosan pedig 2%-kal tér el attól. A mesterséges $\{X_{ij}\}_k$ idősorok maximális értékei az eredeti $\{X_{ij}\}$ idősor maximális értékének a 98%-ától a 186%-áig terjedő értékeket, minimális értékei pedig az eredeti idősor minimális értékeinek 107%—137% közötti értékeket vesznek fel; a mesterséges $\{X_{ij}\}_k$ idősorok átlagosan 126%-kal nagyobb tartományt ölelnek fel (102%—174%).

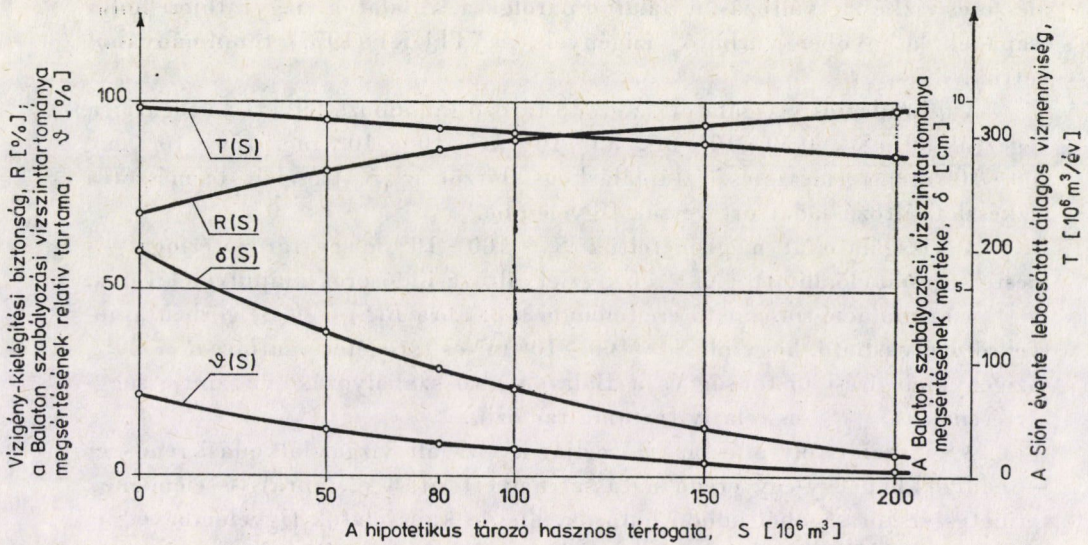
A generált $\{X_{ij}\}_k$ idősorok felhasználásaival előállított $\{I_{ij}\}$ vízigények átlagainak maximális eltérése az észlelt idősorhoz tartozókhöz képest 9%, átlagosan mintegy 4%-os eltéréseket mutat. Az $\{I_{ij}\}_k$ idősor maximális értékei az eredeti vízkészletváltozási idősorhoz tartozó vízigényidősor maximális értékei 145%-tól 202%-ig terjedő értékeket vesznek fel (átlagosan 168%-át).

A 8. ábra $T(S)$ vonalai a Sión mederöblítés, hajózás, angolnafogás stb. céljára szükséges vízeresztések elégségességének megítéléséhez szolgálhatnak támpontul.

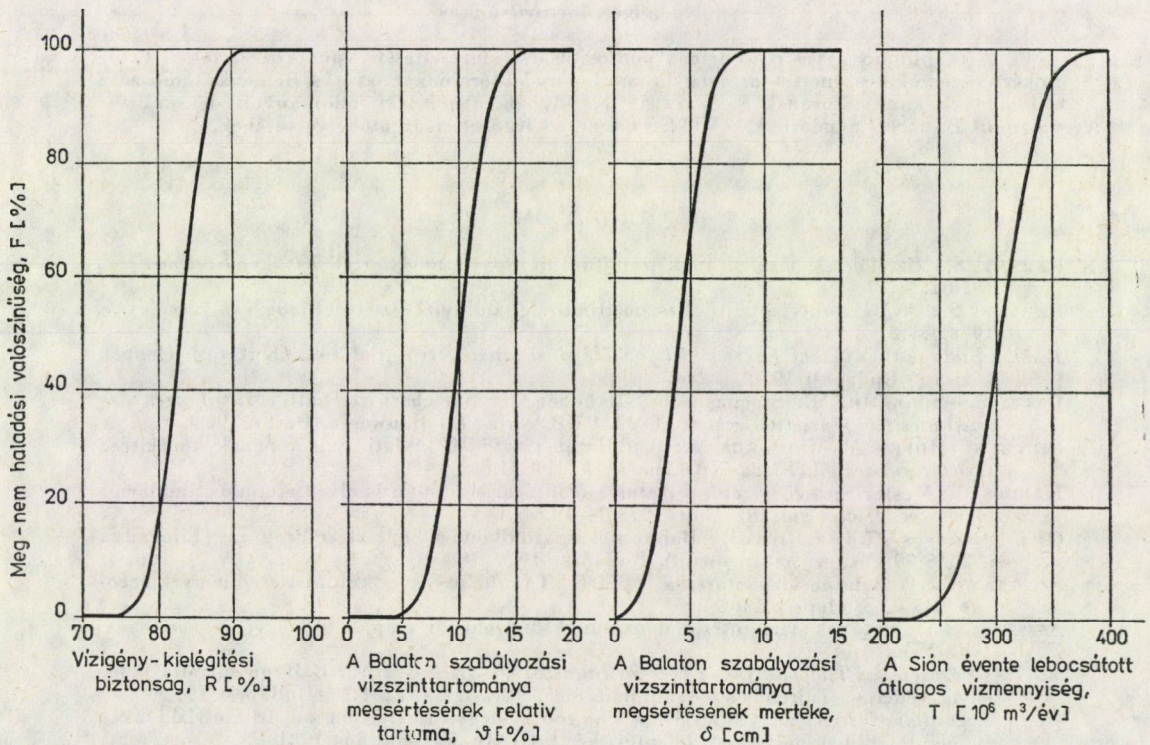
8. Összefoglalás, további feladatok

Tanulmányunkban arra a kérdésre kerestünk választ, hogy a Balaton vízgyűjtőjén létesíthető vízhasznosítási célú tározók mekkora hasznos ösztér-fogatára lenne szükség ahhoz, hogy a vízgyűjtőn várható jövőbeli vízigényeket — a Balaton vízszintszabályozási előírásainak betartására törekedve — kellő biztonsággal ki lehessen elégíteni.

A feladat megoldására a 2. ábrán vázolt, számos közelítésen és egyszerűsítésen alapuló determinisztikus, szimulációs modellt alkalmaztunk, melynek algoritmus a (8)—(12) egyenletrendszer. A szimuláció bemenő adatait (ter-



8. ábra. Kapcsolat a különböző eredmény-mutatók és az S hipotetikus tározótérfogat között



9. ábra. A rögzített $S = 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ hipotetikus tározótérfogattal és 10 különböző generált X_{ij} adatsorral végzett szimulációs vizsgálatok eredménymutatóinak Gauss-típusú simuló eloszlásfüggvényei

mészetes vízkészletváltás, a Balaton párolgása, a Balaton vízgyűjtőjére hulló csapadék, a jövőben várható vízigények) a VITUKI (1977) tanulmányából vettük.

A szimulációs vizsgálatot az eredő tározó különböző felvett térfogataira végeztük el ($S = 0,50 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $80 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $150 \cdot 10^6 \text{ m}^3$, $200 \cdot 10^6 \text{ m}^3$), természetes víztáplálásként először az $\{X_{ij}\}$ észlelt természetes vízkészletváltás-adatsort vettük figyelembe.

A vizsgálatokat megismételtük $S = 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ -es tározótérfogat és mesterségesen előállított $\{X_{ij}\}_k$ vízkészletváltási idősorok alapulvételével is.

A szimuláció-sorozat fő eredményei a 8. ábra $R(S)$ és $\vartheta(S)$ görbéi, amelyekről leolvasható, hogy pl. $S = 100 \cdot 10^6 \text{ m}^3$ -es tározótérfogathoz $R = 89\%$ vízigénykielégítési biztonság és a Balaton alsó szabályozási vízszintje megsértésének $\vartheta = 7\%$ -os relatív tartama tartozik.

A vizsgálat folytatásának fő célja: a vizsgált vízgazdálkodási rendszer — eddigiekben egy-egy eredő hatással helyettesített (2. ábra) — elemeinek területi szétszórtságából adódó hatások, illetve kapcsolatok figyelembevétele, valamint az időközben korszerűsített alapadatok felhasználása lesz.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány egyes részleteinek pontosítására, kiegészítésére vonatkozó értékes tanácsokért a szerzők köszönettel tartoznak a tanulmány lektorainak: CSERMÁK Bélának, a műszaki tudományok kandidátusának és SZESZTAY Károlynak, a műszaki tudományok doktorának, valamint BARANYI Sándornak, a VITUKI Vízirajzi Intézete igazgatóhelyettesének.

IRODALOM

- BARANYI S.: Vízfelületek párolgásának számítása új szovjet módszerrel. *Vízügyi Közlemények*, 1970/1. sz.
- BARANYI S.: A Balaton-vízgyűjtő hasznosítható felszíni vízkészlete. *Vízügyi Közlemények*, 1978/4. sz.
- BME (Budapesti Műszaki Egyetem Vízgazdálkodási tanszéke): A Balaton. (Kutatási jelentés, kézirat.) Budapest 1970
- DYCK, S.—SCHRAMM, M.: Stochastische Methoden der Speicherwirtschaft. *Mitteilungen des Institutes für Wasserwirtschaft*, H. 28. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1968
- GILYÉNNÉ HOFER A.—DOMOKOS M.: A Balaton-vízgyűjtő távlati vízigényeinek kielégítése tározórendszerből. *Vízügyi Közlemények*, 1981/4. sz.
- KARDOS M.: Mesterséges vízhozamsorozatok előállítása. Monte-Carlo elven alapuló szimulációs eljárások. *Hidrologiai Közöny*, 1973/9—10. sz.
- OVH (Országos Vízügyi Hivatal): Balatoni Vízgazdálkodási Fejlesztési Program (Elfogadva 1961/79. Mt. sz. határozattal). Budapest 1979
- SZESZTAY K.: A Balaton vízháztartása. VITUKI Tanulmányok és kutatási eredmények sorozat, 91. sz. Budapest 1962
- SZESZTAY K.: A tavak vízszintszabályozásának hidrológiai alapjai. *Vízügyi Közlemények*, 1962/2 sz.
- VÁTI (Városépítési Tudományos és Tervező Intézet, Plósz S. és tsai): A Balaton eutrofizálódás elleni védelme. Tájérendezési tanulmányterv. Törzsszám: 2281/78. Budapest 1978
- VGI (Vízgazdálkodási Intézet, CSUKA J.): A Balaton és vízgyűjtőjének hasznosítható vízkészlete és jelenlegi kihasználtsága. (Jelentés, kézirat.) Munkaszám: 464/1981
- VITUKI (Vízgazdálkodási Tudományos Kutató Intézet): Vízirajzi Atlasz sorozat. Balaton. I. Hidrográfia, geomorfológia. Budapest 1976

- VITUKI (Vízgazdálkodási Tudományos Kutatóközpont, BARANYI S.): A Balaton hasznosítható felszíni vízkészletének meghatározása. (Kutatási jelentés, kézirat.) Törzsszám: 3084. Budapest 1977*
- VITUKI (Vízgazdálkodási Tudományos Kutatóközpont, szerk. BARANYI S.): A Balaton kutatása és szabályozása. VITUKI Közlemények, (1980) 28. sz. Budapest, 1980*
- VÍZITERV (HAMPEL K.): A Balaton vízszintemelési lehetőségének műszaki vizsgálata (Kézirat). Tervszám: 18.323. Budapest 1973*
- V. NAGY I.: Hidrológia III. Budapesti Műszaki Egyetem jegyzete, 19-723. sz. Tankönyvkiadó, Budapest 1974*
- WMO (Meteorológiai Világszervezet): Hidrológiai eljárások útmutatója. (Magyar nyelvű változat.) Nemzetközi Vízgazdálkodási Sorozat, 2. sz. OVH, Budapest 1976*

Investigation on a Hypothetical Storage Reservoir System in the Watershed of Lake Balaton. — The solving of problems arising in the region of Lake Balaton is of high importance for the Hungarian national economy. One of them is the satisfaction of increased water demands expectable within the next about 15 years. — Aiming to determine the total volumen of the storage reservoir system needed therefore, a deterministic simulation model has been developed. The simulation was carried out by taking into account various capacities of the resulting hypothetical reservoir. As natural water supply to the lake, first the 50 years long observed series of natural resource changes, then a generated 1000 years long series was adopted. The generation of the latter was made by adopting the Hungarian version of SVANIDZE's fragment method. — The main results of the investigation are represented by curves of relationships between utilizable capacity of the hypothetical reservoir and various indices of water supply security.

Untersuchung eines hypothetischen Speichersystems im Balaton-Einzugsgebiet. — Die Lösung der im Raum des Balaton (des Plattensees) anstehenden Probleme ist von hoher Bedeutung für die ungarische Volkswirtschaft. Eines davon bildet die Befriedigung des innerhalb der folgenden rd. 15 Jahre zu erwartenden Wasserbedarf-Zuwachses. Zur Ermittlung des Gesamtvolumens des dazu benötigten. — Speichersystems wurde ein deterministisches Simulationsmodell entwickelt. Die Simulation wurde mit verschiedenen angenommenen Kapazitäten des resultierenden hypothetischen Speichers durchgeführt. Als natürliche Speisung des Sees wurde vorerst die 50jährige beobachtete Reihe der natürlichen Vorratsänderung, dann aber eine 1000jährige künstliche Serie verwendet. Die Herstellung der künstlichen Reihe erfolgte unter Anwendung der in Ungarn modifizierten Variante der Fragment-Methode von SVANIDZE. — Hauptergebnisse der Untersuchung sind Kurven, die Beziehungen zwischen Nutzinhalt des hypothetischen Speichers und den verschiedenen Indizes der Versorgungssicherheit darstellen.



A TÁPANYAGTERHELÉS HATÉKONY CSÖKKENTÉSÉNEK KIVÁLASZTÁSA

BOGÁRDI ISTVÁN* LUCIEN DUCKSTEIN**
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA EGYETEMI TANÁR

és

SZIDAROVSKY FERENC***
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. január 6-án]

I. Bevezetés

A Balaton eutrofizálódásának hatékony csökkentésére hazai és nemzetközi szinten egyaránt kiterjedt kutatásokat végeznek. Ezek sorába tartozik ez a munka is, amely az MTA Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézet és a Nemzetközi Alkalmazott Rendszerelemzési Intézet támogatásával készült.

A vizsgálat célja olyan rendszermodell kialakítása és alkalmazása, amely alkalmas egy tóba jutó tápanyag (foszfor)-terhelés szabályozására szolgáló legcélszerűbb alternatíva kiválasztására, bizonytalan viszonyok esetében.

A természetes vagy mesterséges tavak eutrofizálódását általában a növekvő tápanyag terhelés — elsősorban a foszfor vagy nitrogén — idézi elő (WETZEL, 1975). Sok esetben a teljes terhelés jelentős hányada származik nem pontszerű forrásokból, mint pl. a mezőgazdasági tevékenység (GOLUBEV és társai, 1978). A tápanyagterhelés folyamatában jelentős a természeti bizonytalanság hatása, mint pl. a lefolyás és erózió sztochasztikus jellege. Ennek figyelembevételére sztochasztikus modellt dolgoztunk ki az oldott, valamint az erodált talajhoz kötött foszforterhelés sűrűségfüggvényének becslésére (BOGÁRDI és DUCKSTEIN, 1978a).

A tanulmányt az alábbi részekre osztjuk. A 2. fejezetben az eutrofizálódás csökkentésének feladatát definiáljuk. A 3. fejezet tartalmazza a módszertant, külön bemutatva az állapot- és tevékenység teret, a cél meghatározását és a megoldás algoritmusát. A 4. fejezetben a modellt a Balaton egyik részvízgyűjtőjére alkalmazzuk. Kitérünk a numerikus számítás néhány részletére is, hogy további esetekre megkönnyítsük a konkrét alkalmazást. Az 5. fejezetben rámutatunk a továbbfejlesztés irányaira és értékeljük az eredményeket.

* Dr. Bogárdi István, Tiszadata Számítástechnikai Ágazat.

** Prof. Lucien Duckstein, Arizonai Egyetem, Rendszerelemzési Tanszék, Tucson, Arizona, USA.

*** Dr. Szidarovszky Ferenc, Kertészeti Egyetem, Számítástechnikai Tanszék, Budapest.

2. A feladat megfogalmazása

2.1 Előzmények

Adott olyan víztestet (tavat vagy tározót) tekintünk, amelyben az eutrofizálódás az utóbbi időben rohamosan gyorsul. Az eutrofizálódás folyamatát a tápanyagterhelés növekedése váltja ki, amelyet viszont az idegenforgalom növekedése, a mezőgazdasági vegyi anyagok növekvő használata és más tényezők idéznek elő (lásd pl. TIMMONS és társai, 1968; DAVID és társai, 1979; OVH, 1979). Az illetékes hatóságok felismerve a tavat fenyegető veszélyt, választ keresnek az alábbi kérdések egyikére:

a) Adott időszakra rendelkezésre álló pénzügyi források felhasználásával, mi az eutrofizálódás-csökkentés leghatékonyabb módja?

b) Az eutrofizálódás előírt mértékű csökkentéséhez mi a leghatékonyabb beavatkozás? (A hatékonyságot pl. a költségek minimalizálásával vehetjük figyelembe.)

A tanulmányban megkísérlünk feleletet adni a fenti két kérdésre. A kritikus tápanyagnak a foszfort tekintjük, de a modell más tápanyagokra, pepticidekre vagy nehéz fémekre is alkalmazható (KEMPF és társai, 1978).

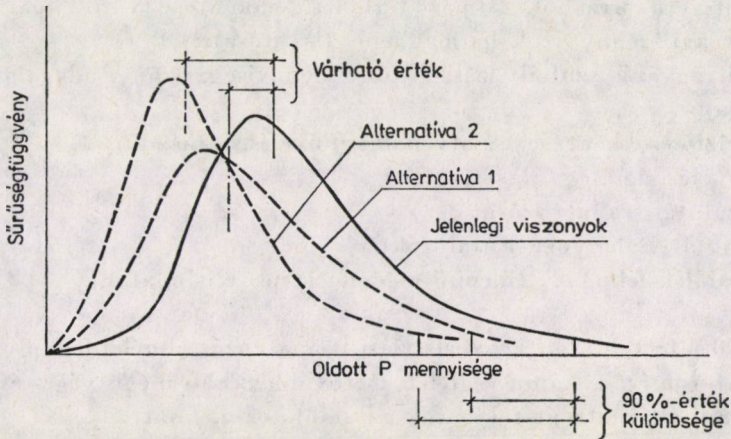
A tó trofitási állapotának javítására szolgáló lehetőségek: a tápanyagterhelés csökkentése, a vízcseré és/vagy a mélység növelése és a belső biológiai védelem pl. kotrással (SERRUYA és SERRUYA, 1975). Azonban a legtöbb esetben a tápanyagterhelés csökkentése a leghatékonyabb és leginkább megvalósítható (VOLLENWEIDER, 1968; JORGENSEN, 1976). Így azt az esetet tekintjük, hogy a tó trofitási állapotát a tóba jutó foszforterhelés jellemzi.

2.2 A foszforterhelés

A P input származhat pontszerű forrásokból, mint pl. állattartó telepek, szennyvíz elhelyezés, vagy nem pontszerű forrásokból, mint pl. a mezőgazdasági vegyi anyagok. Általában mindkét forrás részt vesz a teljes terhelés előidézésében, így a Balatonra pl. JOLÁNKAI (1975) a két forrásból származó mennyiséget közel azonosra becsülte. A nem pontszerű forrásból származó P mennyiségét számos sztochasztikus tényező befolyásolja, különösen a csapadék események mennyisége és időtartama, a lefolyt víztömeg, az árhullámok tetőző vízhozama, a hordalék mennyisége. Nem csoda tehát, hogy a foszforterhelésnek azonos időszakokban észlelt mennyisége nagy változékonyságot mutat és ennek megfelelően változik a tóban az elsődlegestermelés is. Sztochasztikus modellt dolgoztunk ki, szimulációs megoldás alkalmazásával, hogy megállapítsuk a foszforterhelés sűrűségfüggvényét a fenti természeti bizonytalanság esetében (BOGÁRDI és DUCKSTEIN, 1978a).

A foszforterhelés csökkentésének feladatát az 1. ábra mutatja. A meglévő állapotnak megfelelő sűrűségfüggvényt két különböző csökkentési alter-

natívának megfelelő sűrűségfüggvénnyel hasonlítjuk össze. Az 1. ábra mutatja, hogy a csökkentés hatására a P terhelés várható értéke és pl. a 90% valószínűséghez tartozó értéke egyaránt csökken, de a csökkenés mértéke különböző. Kérdés az, hogy ilyen körülmények között az eutrofizálódás csökkentésének hatékonyságát hogyan jellemezzük. Ha csupán a várható értéket tekintjük,



1. ábra

akkor a trofitás állapota átlagosan javul, de továbbra is számolnunk kell ritkán előforduló szélsőséges algavirágzással, halpusztulással, vagy más nem kívánatos hatással. Ha viszont a szórást vagy valamilyen szélsőséges valószínűségi értéket választunk kritériumnak, akkor kiugró káros jelenségek még ritkábban lépnek fel, de átlagosan a trofitási szint kedvezőtlen maradhat. Úgy tűnik tehát, hogy a bizonytalanság valamilyen jellemzését (RECKHOW, 1979), sőt, esetleg az egész sűrűségfüggvényt figyelembe kell venni az alternatívák közötti mérlegeléshez.

2.3 A foszfor szerepe

A foszfor tápanyag az eutrofizálódás folyamatában két fő szerepet játszik (WETZEL, 1975; TÓTH és társai, 1975):

— a lefolyás révén a tóba jutó oldott foszfor bizonyos hányadát a fitoplankton közvetlenül asszimilálja (HOLT és társai, 1970);

— a hordalékhoz kötött foszfor bizonyos része, amely a fenéküledékben tározódik, felszabadulhat és bizonyos körülmények esetében a fitoplankton rendelkezésére áll (ARMSTRONG és WEINER, 1973). Mivel a terhelés csökkentésére szolgáló beavatkozások különböző mértékben hatnak az oldott, illetve kötött foszforra, a modellben ezeket külön-külön számoljuk, addig, míg a tóba nem jutnak.

2.4 Csökkentési lehetőségek

A foszforterhelés csökkentését elérhetjük a keletkezés helyén és a tóba való szállítása során. Ennek megfelelően az alábbi tiszta tevékenységeket vesszük figyelembe:

Csökkentés a keletkezés helyén:

- A1: a pontszerű forrásból származó terhelés csökkentése (városi, ipari és mezőgazdasági szennyvizek harmadlagos tisztítása),
 - A2: a műtrágyázás szabályozása (típus, mennyiség, arány, adagolás ideje és módja),
 - A3: az erózió csökkentése (szintvonalas művelés, teraszok),
 - A4: a művelési ág megválasztása
- A szállítás szabályozása:
- A5: a lefolyás szabályozása (tározók),
 - A6: a hordalék felfogása (ülepítő medencék, pl. Kisbalaton).

Mivel a legtöbb fenti szabályozási beavatkozás elméletileg folytonos jellegű, az alternatívák száma végtelen. A továbbiakban mégis véges és viszonylag kisszámú alternatívát tekintünk az alábbi okok miatt:

- a korábbi vizsgálatok, tervek, irányelvek kijelölték a Balaton esetében alkalmazható alternatívák viszonylag kis számát;
- a folyamatos sztochasztikus irányítási modell megoldása nemlineáris költségfüggvényekkel módszertani nehézségeket okoz, ugyanakkor a számszerű eredmények sürgősek, hogy a döntések minél előbb meghozhatók legyenek.

3. A modell

A foszforterhelés szabályozási modellje négy részből áll: az állapotváltozó, a tevékenységi tér, cél és a megoldás algoritmusából.

3.1 Az állapotváltozó

A 2. fejezetnek megfelelően az állapotváltozó mindegyik részvízgyűjtőre az oldott és kötött foszfor mennyisége. Tekintsük az oldott P (pontszerű és nem pontszerű) mennyiségét:

$$ACP = PP + CP + BCP, \quad (1)$$

ahol PP a pontszerű forrásból származó — determinisztikusnak tekintett oldott P, továbbá CP és BCP a felszíni lefolyásban és az alaplefolyásban, nem pontszerű forrásból származó oldott P.

Az erodált talajhoz kötött foszforról (SP) feltételezzük, hogy a csapadék események által kiváltott erózióból származik és így nincs sem pontszerű, sem alapfolyási összetevője.

Az ACP és SP állapotváltozók sűrűségfüggvényeit sztochasztikus modellel becsülhetjük (lásd részletesen BOGÁRDI és DUCKSTEIN 1978b).

A modell input adatai:

a) A csapadék események (mennyiség, időtartam, események közti idő) statisztikai adatai (vagy származtatott statisztikai jellemzői),

b) a vízgyűjtő jellemzői (talajtani adatok, lejtő kategóriák, földhasználati adatok, összegyülekezési idő, a lefolyásszabályozó tározók hatása),

c) a c_1 oldott P töménység a lefolyásban, illetve alap vízhozamban, továbbá a kötött P c_2 töménysége,

d) a hordalék mennyiségét befolyásoló tényezők (erózió védelem, hordalék leüleptetés stb.),

e) a pontszerű PP mennyiség,

f) tapasztalati összefüggések zápor eseményenkint a V lefolyt víztömeg, Q tetőző vízhozam és S hordalékhozam számítására. Jelenleg V és Q számítására az USA Talajvédelmi Szolgálatának összefüggését alkalmazzuk, és az S értékét a módosított univerzális talajveszteség egyenletből becsüljük (SMITH és társai, 1977).

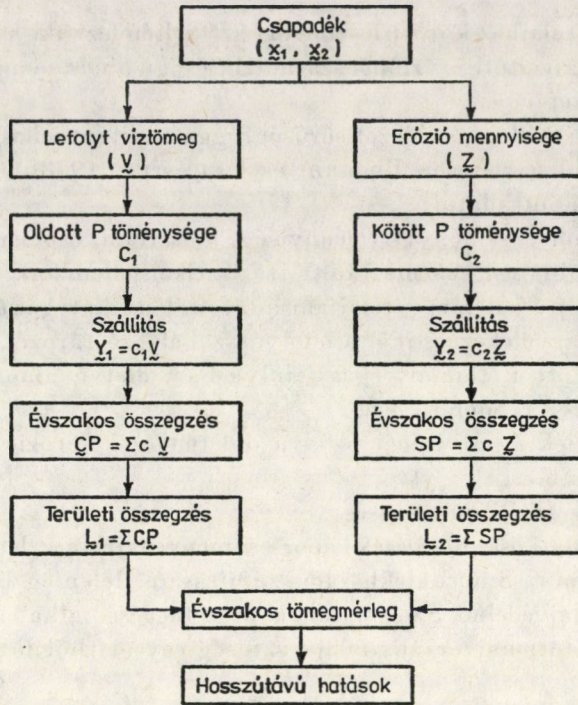
A fenti input adatokat észlelések, számítások vagy esetleg irodalmi adatok alapján állapíthatjuk meg. A 4. fejezetben további részleteket elemzünk az input megállapításához.

Az input adatok ismeretében, analitikus megoldás, ún. elsőrendű elemzés, vagy szimuláció alkalmazható zápor eseményenkint az oldott és kötött P mennyiség eloszlásának meghatározására. Jelen modell szimulációt alkalmaz (DUCKSTEIN és társai, 1978) és a 2. ábra szerint az éves terheléseket az egyes eseményekre vonatkozó véletlen nagyságú terhelések, véletlen számú összegzésével állítottuk elő.

Következő lépésben az évi oldott, illetve kötött P terhelések L_1 és L_2 területi összegeit számítjuk. A tó és vízgyűjtője közötti kapcsolattól függően, három eset különböztethető meg:

a) Egyetlen vízgyűjtő táplálja a víztestet, mint tározók esetében legtöbbször. Ekkor a 2. ábrán mutatott stochasztikus modell $A = 50 \text{ km}^2$ -nél kisebb vízgyűjtőkre alkalmazható. Nagyobb vízgyűjtő esetében, mint pl. a Zala vízgyűjtője, a modellt mindegyik részvízgyűjtőre külön használjuk, és pl. az ún. hordalék szállítási aránnyal (Meta Systems, 1978), vagy hordalék levonulás számításával (NOVOTNY és társai, 1978) becsülhetjük L_1 és L_2 értékét a teljes vízgyűjtő kifolyási szelvényére.

b) Egy vagy több vízgyűjtő a tó adott részét táplálja, amely az eutrofizálódás szempontjából homogénnek tekinthető. Nagy természetes tavaknál, így a Balaton esetében is, ez esetenként feltételezhető. Most tehát L_1 és L_2



2. ábra

a térbeli összegzés (statisztikai értelemben, azaz a csapadék események közötti függőséget az egyes vízgyűjtőket illetően figyelembe véve) az összes vízgyűjtőt tekintve. Ha a tó különböző részei között a keveredés kis mértékű, a szabályozási feladatot külön-külön tekinthetjük az egyes részekre, kiindulva a leginkább eutrofizálódott résszel.

c) A teljes tóra feltételezhető a jó keveredés, és így valamennyi vízgyűjtőről származó terhelés összegezzhető.

Abban az esetben, ha nem tételezhető fel sem kismértékű, sem igen jó keveredés az egyes tórészek között, hidrodinamikai keveredési modell alkalmazása szükséges, lásd pl. SOMLYODI L. (1979) és RAGGIO és HUTTER (1980). Ilyen keveredési modell és a sztochasztikus terhelési modell együttes alkalmazása azonban jelentős nehézségekkel jár.

Felmerül a kérdés, hogy szükséges-e a terhelési modell, ha észlelési adataink vannak, hogy a terhelés sűrűségfüggvényét becsüljük. Ha célunk csupán a jelenlegi helyzet értékelése, előrejelzés vagy döntés elemzés nélkül, valóban nem szükséges ilyenkor a modell. A legtöbb esetben azonban — és természetesen a Balaton sem kivétel — a jövőben várható eutrofizálódás figyelembevételével kell döntéseket hozni.

Ehhez pedig a különböző védekezési alternatívákhoz tartozó jövőbeli foszforterhelések előrejelzése és értékelése szükséges.

3.2 Tevékenység tér

Az oldott P mennyisége, L_1 az alábbi tényezők szabályozásával csökkenthető:

- a lefolyt víztömeg eseményenként, V
- a lefolyásban levő oldott P töménysége, c_1
- a pontszerű terhelés nagysága, PP

A hordalékhoz kötött P mennyiségét, L_2 az alábbi tényezőkkel szabályozhatjuk:

- a lefolyt víztömeg, V
- tetőző vízhozam, Q
- az erodált talaj mennyisége eseményenként, S
- az erózióvédelmi tényező, P_r
- a mezőgazdasági művelési tényező, C
- a hordalék visszatartási tényező, α
- a kötött foszfor c_2 töménysége.

Az egyes tiszta tevékenységekhez rendelkezésre álló anyagi erőforrást az alábbi módon hasznosítjuk.

A1: a pontszerű terhelés csökkentése

Erre a célra felhasználható összeg meghatározza a harmadlagos tisztítási kapacitást; ennek megfelelő PP csökkenés megállapítható.

A2: a műtrágya adagolás

A műtrágya alkalmazásával együtt járó vízszennyezés nem csupán a vegyi anyag mozgásához kapcsolódó fiziko-kémiai szempontokat, hanem a műtrágyázás gazdasági eredményét is befolyásolja. Így erre a tevékenységre jutó pénzüsszegekből kompenzáljuk azt a mezőgazdasági eredménycsökkenést, amelyet a kisebb mennyiségű műtrágyaadagolás okoz. Ennek hatására ugyanakkor a c_1 és c_2 töménység egyaránt csökken, de ennek mértékét még akkor sem tudjuk megfelelő modell nélkül becsülni, ha c_1 és c_2 töménységeket folyamatosan észlelünk. A talajtannal foglalkozó és a környezetvédelmi kutatók a közelmúltban modelleket dolgoztak ki, amellyel a vegyi anyagok, mint pl. a műtrágyák mozgása számítható egy vízgyűjtőn. Az eljárások egyik típusa bonyolult szimulációs eljárás, mint pl. a NOVOTNY és társai által kidolgozott módszer (1978), és ezt nehézkes beépíteni asztochasztikus szabályozási modellbe. Ugyanakkor az ilyen bonyolult modellekben használt alapelvek vezettek a másik típusú módszerek kialakulásához, amelyek laboratóriumi, illetve helyszíni vizsgálatok regressziós elemzéséből állnak (ROMKENS és NELSON, 1974; Meta Systems, 1978; SHARPLEY és társai, 1978). Ezt az utóbbi módszert alkalmazzuk ebben a tanulmányban az alábbi lépésekben:

I. A talaj szorptivitása foszforral szemben elsősorban olyan jellemzőktől függ, mint a pH, az alumínium, a vas, az agyag és a szerves anyag tartalom. Tehát az első lépés a vízgyűjtő talajainak mintavétele és elemzése. Adott talajtulajdonságok esetében a kötött P töménységét, c_2 három különböző módon becsülhetjük:

— a talaj felszínéről (0–1 cm) vett mintából, 0,1 M NaCl-vel extrahált szervesetlen P megállapításával (SHARPLEY és társai, 1978);

— többváltozós regressziós modell alkalmazásával (NOVOTNY és társai, 1978);

— ROMKENS és NELSON (1974) által publikált mérési adatok felhasználásával. Az említett kutatók különböző talajfajtákat elemeztek és az eredményeket grafikus formában közölték.

Az említett három módszer valamelyikével becsült ún. rendelkezésre álló (kötött) P mennyiségét tekintik általában hozzáférhetőnek az algák számára a tóban (WETZEL, 1975; Meta Systems, 1978).

II. Az oldott P töménységét, c_1 becsülhetjük ezután a c_2 töménységből az adszorpciós egyensúlyi pontnál a Langmuir vagy a Freundlich izotermák szerint (NOVOTNY és társai, 1978). A (c_1 , c_2) kapcsolat gyakorlati megállapításához ROMKENS és NELSON (1974) grafikonokat javasol, különböző talajjal végzett laboratóriumi és helyszíni kísérletek alapján.

III. Nagyobb műtrágya-adagolás növeli a kötött foszfor c_2 töménységét és így a c_2 töménység is növekszik. Így a többlet P (műtrágya formájában) hatását a c_1 töménységre ismételt mintavétellel és elemzéssel vagy a ROMKENS és NELSON (1974) által megadott grafikonokkal határozhatjuk meg. Meta Systems (1978) összefüggést javasol c_2 számítására, figyelembe véve a műtrágya adagolás nagyságán kívül, a talajművelés hatékony mélységét.

IV. Az 1 ha-ra jutó tiszta mezőgazdasági eredményt kifejezhetjük a műtrágya adagolás függvényében. A műtrágya gazdálkodás végett rendelkezésre álló pénzösszeg alapján, az I., II. és III. lépések segítségével becsülhetjük az új (csökkentett) műtrágya adagolásnak megfelelő c_1 és c_2 töménységet.

A3: az erózióvédelem

Adott erózióvédelmi költségek esetében, valamint a rendelkezésre álló pénzösszeg ismeretében, kijelölhető az erózióvédelem módja és mértéke. Ennek megfelelően WISCHMEIER és SMITH (1972) szerint állapíthatjuk meg a P_r erózióvédelmi tényezőt, amely az egységgel egyenlő erózióvédelem nélkül.

A4: a művelési ág megválasztása

Erre a célra rendelkezésre álló pénzt arra használjuk, hogy kompenzáljuk azt az eredménykiesést, amely kevesebb jövedelmet biztosító növényfajtaból származik, de amely ugyanakkor kevésbé hajlamos erózióra és így a hordalék-

hoz kötött P mennyisége kisebb lesz. E módszer szerint, azt a megfelelő mezőgazdasági művelési tényezőt, C-t állapítjuk meg (WISCHMEIER és SMITH, 1972), amely tükrözi a figyelembe vett művelési ágakat a vízgyűjtőn.

A5: a lefolyás-szabályozás

Zápor visszatartó tározókat veszünk figyelembe, amelyek a tetőző Q vízhozamot ΔQ -val csökkentik és a lefolyt V víztömeg bizonyos ΔV részét más célra, mint pl. vízellátás vagy öntözés, hasznosítják. A ΔV értéke kizárólag a felhasznált nettó igényt tükrözi. Ha adott a lefolyás-szabályozásra rendelkezésre álló pénzösszeg, becsülhető a tározott vízmennyiség, vagy — ami jobb — a tározók előterve előkészíthető.

Számos módszer áll rendelkezésre ΔQ és ΔV számítására, kezdve egyszerű mérnöki módszerektől, mint a tározó átfolyásvizsgálat (CHOW, 1964), egészen bonyolult tározó rendszerek modelljéig (MURRAY és YAKOWITZ, 1979). Ha ismerjük ΔQ és ΔV értékeit, amelyek gyakran Q és V mennyiségektől függenek, a foszforterhelés sztochasztikus modelljét úgy használjuk, hogy Q és V helyett $Q - \Delta Q$ és $V - \Delta V$ értéket használunk.

A6: a hordalék-visszatartás

A beavatkozások célja visszatartani az erózióból származó hordalékot a vízfolyásokon. Elvileg az A5 tevékenységhez hasonló eljárás alkalmazható, azaz becsüljük az eróziós eseményenként visszatartott ΔS értékeket, majd a sztochasztikus terhelési modellt S helyett $S - \Delta S = \alpha S$ értékkel használjuk, ahol az α hordalék-visszatartási tényező.

3.3 Célfüggvény és a sűrűségfüggvények összehasonlítása

Bár az oldott, illetve kötött foszfor L_1 , L_2 mennyiségét ez ideig külön számítottuk, reálisnak látszik most azt a foszformennyiséget együttesen tekinteni, amely az algák részére rendelkezésre áll (WETZEL, 1965). Ennek megfelelően, legegyszerűbb modellként L_1 és L_2 alábbi lineáris kombinációját tekintjük célfüggvénynek:

$$L = (1 - k_1) L_1 + k_2 L_2, \quad (2)$$

ahol k_1 az oldott P terhelés évi hányada, amely a fenéküledékbe kerül, és k_2 a kötött foszfor átlagos évi hányada, amely a fenéküledékből felszabadul. Megjegyezzük, hogy nincs akadálya annak, hogy pontosabb „tómodellel” jellemezzük a (2) célfüggvényt, de megtehetjük azt is, hogy L_1 és L_2 terheléseket továbbra is külön kezeljük.

Az n számú védekezési alternatíva közül a legjobb kiválasztását az alábbi módon végezhetjük. Legyenek az $1, 2, \dots, n$ alternatívákhoz tartozó (2) cél-függvény értékek L_1, L_2, \dots, L_n valószínűségi változók, a megfelelő f_1, f_2, \dots, f_n sűrűségfüggvényeknek megfelelően. Mivel feltételezhető, hogy a védekezési beavatkozások egymástól függetlenek, L_1, \dots, L_n szintén statisztikailag független. Így annak u_j valószínűségét, hogy L_j terhelés a legkisebb valamennyi alternatíva között, az alábbi módon számíthatjuk:

$$\begin{aligned} u_j &= P [L_j \leq \min_{i \neq j} L_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x_j) \dots \int_{x_j}^{\infty} \prod_{i \neq j} f_i(x_i) \prod_{i \neq j} dx_i dx_j = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_j(x_j) \prod_{i \neq j} [1 - F_i(x_j)] dx_j = E \{ \prod_{i \neq j} [1 - F_i(L_j)] \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Természetesen

$$\sum_j u_j = 1, \quad j = 1, \dots, n$$

A (3) kifejezést numerikusan vagy szimulációval számíthatjuk. Tehát a legjobb alternatíva:

$$u_{j_0} = \max_{i \leq j \leq n} (u_j). \quad (4)$$

A szimulációs eljárás révén az u_j valószínűségeket közvetlenül is becsülhetjük: adott L_1, \dots, L_n szimulált értékek közül minden esetben kiválasztjuk a legkisebbet, N számú szimulációs futtatás esetén legyen K_j az a szám, ahányszor L_j a legkisebb volt. Így u_j valószínűség becsülhető, mint K_j/N .

4. A modell alkalmazása

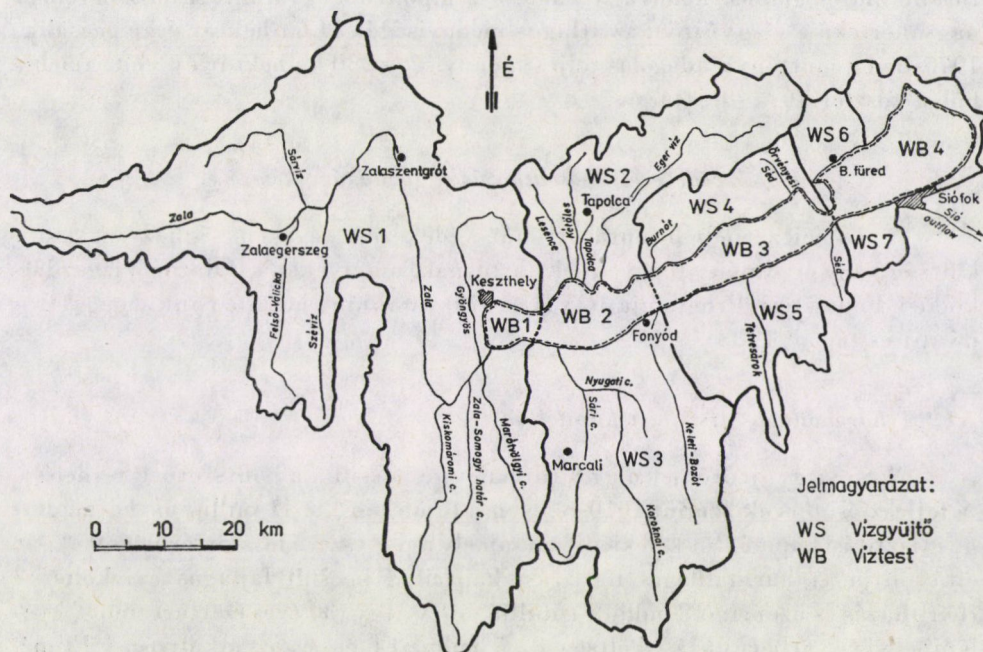
Ez a fejezet négy részből áll: a vízgyűjtő jellemzése, a védekezési alternatívák gazdasági jellemzése, az alternatívákhoz tartozó paraméterek becslése, valamint a számszerű eredmények bemutatása.

4.1 A vízgyűjtő

A vizsgált részvízgyűjtőt (3. ábra) WS5 jelzi a Balaton hidrológiai hierarchikus rendjében (DÁVID és társai, 1979). Megjegyezzük, hogy a sztochasztikus terhelési modellt először a Tetves vízgyűjtőre dolgoztuk ki és alkalmaztuk (BOGÁRDI és DUCKSTEIN, 1978a), amely a vizsgált WS5 vízgyűjtő része.

A tó és a vízgyűjtő közötti kapcsolatot elemezve, feltételezzük, hogy keveredés a tóban olyan kismértékű (a 3. fejezet b. esete), hogy az eutrofizálódás szabályozási modellje a tó más részének szabályozásától függetlenül alkalmazható. Természetesen ez a feltételezés csupán a modell bemutatását szolgálja és a teljes Balaton vizsgálata során változhatik.

A WS5 vízgyűjtő Szántód és Fonyód között a Balaton déli partján, 310 km²-en terül el, amely kerekén 6%-a a tó teljes vízgyűjtőjének. Az 1. táblázatban felsorolt vízgyűjtő-jellemzők mutatják, hogy az üdülés mellett jelentős



3. ábra

1. táblázat

A hidrológiai jellemzők

Vízgyűjtő területe: 310 km²
 A vízgyűjtő szélessége (a tó mentén) = 27 km
 Átlagos hosszúsága: 11,5 km
 Legnagyobb hosszúsága: 25 km
 A fő vízfolyás átlagos esése: 4‰
 Évi átlagos csapadék: 650 mm
 Sokéves átlagos lefolyás: 60 millió m³/év vagy 1,9 m³/s

A földhasználat (1975-ben)

| | | km ² | % |
|--------------------------|------------------------------|-----------------|-----|
| Mezőgazdasági terület: | szántó | 128 | 41 |
| | legelő | 34 | 11 |
| | szőlő és gyümölcsös | 8 | 3 |
| | teljes mezőgazdasági terület | 170 | 55 |
| Erdőterület: | | 120 | 39 |
| Lakott és egyéb terület: | | 20 | 6 |
| Összesen: | | 310 | 100 |

A mezőgazdasági terület lejtőkategóriái

| Lejtés (%) | 0-5 | 5-12 | 12-17 | 17-25 | 25-35 |
|------------------|-----|------|-------|-------|-------|
| Területarány (%) | 30 | 30 | 19 | 15 | 6 |

A talaj: lösz 35%, iszap és agyag 33%, kavics és homok 28%, egyéb 4%.

a mező- és erdőgazdálkodás. Bár ez a vízgyűjtő a teljes vízgyűjtőnek viszonylag kis hányada, a hidrológiai, talaj, földhasználati és lejtési viszonyok tipikusak a tó déli partjára. A vízgyűjtő 4 vízfolyása közül a Tetves patak a legjelentősebb hidrológiai és tápanyag terhelési szempontból egyaránt. A felszíni erózió nagymértékű a vízgyűjtőn: az átlagos mennyiségét 34,6 t/hektár évre becsülik. 1975-ben a műtrágya adagolás teljes mennyisége 280 kg/hektár év volt, amelyből a foszfor 70 kg/hektár/év.

4.2 A védekezési beavatkozások gazdasági elemzése

A 2.4 fejezetben bemutatott hat védekezési tevékenységhez az alábbi költség vagy eredmény függvények tartoznak, amelyeket a Balaton Vízgazdálkodási Fejlesztési Programja (OVH, 1979) alapján határoztunk meg (BOGÁRDI és társai, 1983).

A1. A harmadlagos tisztítási kapacitás

WS5 vízgyűjtőről jelenleg 6 tonna/év-re becsülik a pontszerű P terhelést. A fejlesztési tervek szerint 2010-re ezen a területen kb. 11 millió m³ harmadlagos tisztítási kapacitást kell kiépíteni, amely a pontszerű foszforterhelés 95%-át eltávolítja. A harmadlagos tisztítási kapacitás becsült fajlagos évi költsége (beruházás és üzem): 6,8 millió Ft/millió m³/év. Így, 30 éves élettartamot figyelembe véve, a beruházási költség 83,5 millió Ft és az üzemköltség 4 Ft/m³. A fentiek alapján az alábbi költségfüggvényt alkalmaztuk.

| Pontszerű P terhelés tonna/év | Harmadlagos tisztítási kapacitás 10 ⁶ m ³ /év | Évi költség 10 ⁶ Ft |
|-------------------------------|---|--------------------------------|
| 6 | — | — |
| 5 | 0,8 | 5,4 |
| 4 | 2,0 | 13,6 |
| 3 | 3,7 | 25,2 |
| 2 | 5,8 | 39,4 |
| 1 | 9,0 | 61,2 |
| 0,3 | 11,0 | 74,8 |

A2. A felhasznált foszfor műtrágya mennyisége

A műtrágya optimális adagolása esetében a becsült évi átlagos mezőgazdasági eredmény 4000 Ft/ha. A számérték többféle növényfajta viszonyított átlag és országos műtrágya kísérletek eredménye. Ennek megfelelő optimális műtrágya adagolás 350 kg/ha, amelyből 95 kg foszfor.

A vizsgálatok alapján az alábbi eredmény-függvényt vesszük figyelembe:

| Adagolt műtrágya kg/ha/év | | Tiszta eredmény Ft/ha/év |
|------------------------------|----|--------------------------------|
| összes | P | |
| 350 | 95 | 4000 |
| 340 | 90 | 3800 |
| 320 | 80 | 3500 |
| 300 | 75 | 3000 |
| 280 | 70 | 2600 |
| 240 | 60 | 1800 |
| 200 | 50 | 1000 |

Ez a függvény azt mutatja, hogy mennyi kompenzációt kell fizetni a mezőgazdaságnak az eutrofizálódási csökkentési alaphól. Pl. ha 10 kg/ha foszfor műtrágya-csökkenést hajtunk végre, a mezőgazdasági tiszta eredmény 800 Ft/ha értékkel csökken. Figyelembe véve a vízgyűjtőn levő 17 000 ha mezőgazdasági területet, ennek megfelelő eutrofizálódás csökkentési költség 10,2 mFt.

A3. A szintvonalas művelés területe

A szintvonalas művelés évi költsége (beruházás és üzem) 900 Ft/ha/évre becsülhető (SZABÓ, 1979). A szintvonalasművelés területének felsőhatára 17 000 hektár, ha a vízgyűjtő mezőgazdasági területén, illetve mezőgazdasági célokra használható erdőterületeken vezetjük be.

A4. A művelési ág megváltozása

A jelenlegi művelési ágot az 1. táblázat mutatja. Különböző földhasználatok esetében várható mezőgazdasági eredményre az alábbi becslés adható (SZABÓ, 1979):

| | |
|----------------------|---------------|
| Szántó: | 6000 Ft/év |
| Legelő: | 3000 Ft/év |
| Szőlő és gyümölcsös: | 12 000 Ft/év. |

A vizsgált területen szőlő és gyümölcsös esetében lehetséges legnagyobb lejtés 26%, szántónál 17%. A 26%-nál meredekebb lejtőkön erdőket kell telepíteni. A földhasználat megváltoztatásától (A4 tevékenység) származó tiszta eredménycsökkenést tekinthetjük az eutrofizálódás elleni védekezés költségének.

A5. *A tározó térfogat*

A vízgyűjtő hidrológiai viszonyain alapulva, a tározás révén az alábbi módon csökkenthető a lefolyt víztömeg, illetve a tetőző vízhozam.

| Tározott vízmennyiség millió m ³ | Lefolyt víztömeg csökkenése millió m ³ , ΔV | Tetőző vízhozam csökkenése m ³ /sec, ΔQ |
|--|--|--|
| 0,2 | 0,02 | 1 |
| 0,5 | 0,05 | 2 |
| 0,8 | 0,08 | 4 |
| 1,0 | 0,10 | 5 |
| 1,5 | 0,20 | 7 |
| 3,0 | 0,40 | 10 |
| 7,0 | 0,80 | 15 |
| 10,0 | 1,1 | 18 |
| 15,0 | 2,0 | 20 |
| 20,0 | 3,5 | 22 |

A lefolyás szabályozást úgy tekintjük, hogy a tározók többcélúak, és ezek közül az eutrofizálódás-védelem jelenti az egyik célt. Ennek megfelelően becslésünk szerint az eutrofizálódás-csökkentés tározáshoz fűződő évi összköltsége 1,4 Ft/m³.

A6. *A talajerózió*

A Balaton vízgazdálkodás-fejlesztési terve szerint az erózióvédelem célja a jelenlegi 34,6 tonna/ha/év értéket 15 tonna/ha/évre csökkenteni. Előzetes elemzésünk szerint 15 mFt/év szükséges ahhoz, hogy a WS5 vízgyűjtőn ennek megfelelő erózióvédelmi műveket létesítsenek és üzemeltessenek.

A felsorolt hat fajta beavatkozásból nyolc összetett védekezési alternatívát vettünk figyelembe. Alapfeltételnek tekintjük (bár ez változtatható),

2. táblázat

*A védekezési alternatívák költségei
mFt*

| Védekezési tevékenység | Alternatívák | | | | | | | |
|--------------------------|--------------|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| A1 Harmadfokú tiszt. | — | — | 10 | 10 | 10 | 20 | 20 | 30 |
| A2 Műtrágya adagolás | 10 | 5 | 4 | — | 10 | — | 4 | — |
| A3 Szintvonalas művelés | — | 15 | 4 | — | 6 | — | 3 | — |
| A4 Földhasználat | — | 10 | 4 | — | 4 | — | 3 | — |
| A5 Tározás | 10 | — | 4 | 10 | — | 5 | — | — |
| A6 Hordalék visszatartás | 10 | — | 4 | 10 | — | 5 | — | — |
| Teljes költség | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 | 30 |

hogy a vizsgált 15 éves időszak alatt évente 30 millió Ft használható az eutrofizálódás elleni védekezésre. Ezt a nyolc alternatívát a 2. táblázatban mutatjuk be a pénzforrás megfelelő szétosztása révén. Az alternatívák fizikai jellemzését a 3. táblázat tartalmazza. Egyedül a 8. alternatíva tükröz egyetlen tevékenységet, nevezetesen a rendelkezésre álló teljes összeget harmadlagos tisztítási kapacitás létrehozására. Ezzel szemben a 3. alternatíva mind a hat tevékenység kombinációját tartalmazza. A 2., 5. és 7. alternatíva mezőgazdasági jellegű, kapcsolódva különböző mértékű harmadlagos tisztítással. A 4. és 6. alternatíva a vízgazdálkodásra irányul, de harmadlagos tisztítást és hordalék visszatartást is tartalmaz. Az 1. alternatíva szintén elsősorban vízgazdálkodási jellegű, de harmadlagos tisztítás nélkül.

4.3 A védekezési beavatkozásokhoz tartozó paraméterek

A modell paramétereiket a 3.2 fejezetben bemutatott módszer szerint becsültük. Példaképpen az A2. műtrágyaszabályozás részleteit mutatjuk be.

I. A vízgyűjtő típus talaja az alábbi összetételű: homok 20%, agyag 19%, szerves szén 1.8%, Fe_2O_3 1,2%, Al_2O_3 0,21%, pH 6.9%. Ezután Romkens és Nelson (1974) grafikonját használjuk, hogy a talajtulajdonságok és a jelenlegi 70 kg P/ha műtrágyaadagolás függvényében megállapítsuk a kötött P koncentrációját: $c_2 = 7 \cdot 10^{-2}$ g/m³.

II. Az oldott foszfor lefolyásban levő c_1 töménységét szintén Romkens és Nelson grafikonjaiból becsüljük. Az adott talajtípusnak és $c_2 = 7 \cdot 10^{-2}$

3. táblázat

A védekezési alternatívák fizikai jellemzése

| Védekezési tevékenység | | Egység | Alternatívák | | | | | | | |
|------------------------|--|---------------------------|--------------|--------|------|------|--------|-----|------|-----|
| Jele | Fizikai jellemzés | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| A1 | Harmadfokú tisztítási kapacitás | millió m ³ /év | — | — | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 2.9 | 2.9 | 4.4 |
| A2 | Terület csökkentett műtrágyaadagolással (10 kg/ha P csökkentés) | ha | 16 700 | 8 300 | 6700 | — | 16 700 | — | 6700 | — |
| A3 | Szintvonalas művelés területe | ha | — | 16 700 | 4400 | — | 6 700 | — | 3300 | — |
| A4 | Változtatott földhasználat területe (5000 Ft/ha átlagos eredménycsökkenés) | ha | — | 2 000 | 800 | — | 800 | — | 600 | — |
| A5 | Tározó térfogat | millió m ³ | 7.2 | — | 2.9 | 7.2 | — | 3.6 | — | — |
| A6 | A jelenlegi hordalék-mennyiség csökkentése | tonna/ha/év | 13.1 | — | 5.2 | 13.1 | — | 6.5 | — | — |

4. táblázat

Input adatok

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|--------------------------------|------|------|------|------|------|------|-------|------|
| Oldott pontszerű | 6 | 6 | 4,4 | 4,4 | 4,4 | 3,4 | 3,4 | 2,5 |
| ΔV | 80 | 0 | 30 | 80 | 0 | 35 | 0 | 0 |
| ΔQ | 2,5 | 0 | 1,0 | 2,5 | 0 | 1,2 | 0 | 0 |
| $c_2 \cdot 10^{-2}$ g/kg | 6,2 | 6,6 | 6,7 | 7 | 6,2 | 7 | 6,7 | 7 |
| c_1 g/m ³ | 0,50 | 0,59 | 0,62 | 0,68 | 0,50 | 0,68 | 0,62 | 0,68 |
| Erózióvédelmi tényező Pr | 1,0 | 0,60 | 0,91 | 1,0 | 0,83 | 1,0 | 0,93 | 1,0 |
| Talajművelési tényező C | 0,1 | 0,07 | 0,09 | 0,1 | 0,09 | 0,1 | 0,093 | 0,1 |
| Hordalék visszatartás α | 0,66 | 1,0 | 0,88 | 0,66 | 1,0 | 0,83 | 1,0 | 1,0 |

g/kg koncentrációnak megfelelően $c_1 = 0,68$ g/m³. Megjegyezzük, hogy c_1 becsült értéke elfogadhatóan — a szóráson belül — közelíti a Tetves vízgyűjtőn egy éves időszak alatt észlelt $c_1 = 0,96$ g/m³ középértéket (JOLÁNKAI, 1975).

III. Az 1—8 védekezési alternatívákhoz tartozó műtrágya-adagolásnak megfelelő c_2 és c_1 töménységet a fenti módon becsültük.

Az egyes védekezési alternatívákhoz tartozó input számértékeit a 4. táblázat tünteti fel.

4.4 Számítási eredmények

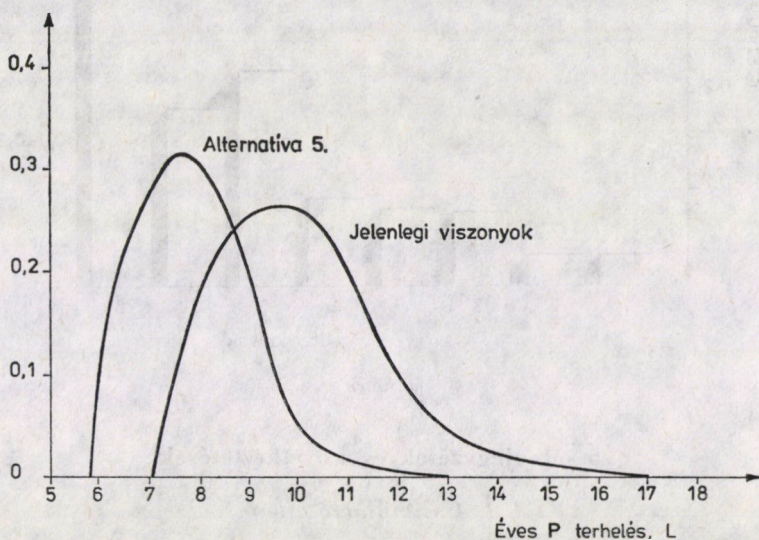
Az évi P terhelés várható értékeit és szórásait az $n = 8$ alternatívára az 5. táblázat tünteti fel. Két paraméteres gammaeloszlás illeszthető a szimulált eloszlásokra (4. ábra); gamma eloszlású L hipotézisét a szokásos szignifikancia szinten az illeszkedésvizsgálat megerősíti. Példaképpen a 4. ábrán bemutatjuk a jelenlegi viszonyokra és az 5. alternatívához tartozó illesztett sűrűségfüggvényeket. Látható, hogy a várható érték és szórás egyaránt jelentősen csökkent. Az 5. táblázat és az 5. ábra azonban mutatja, hogy a várható érték legnagyobb csökkenése (8. alternatíva) ugyanakkor legkevésbé csökkenti a szórást. Annak érdekében, hogy a leghatékonyabb P terhelési csökkentést kiválasszuk, a szimulációs eredményekből számítottuk az u_j valószínűségeket (3. egyenlet).

5. táblázat

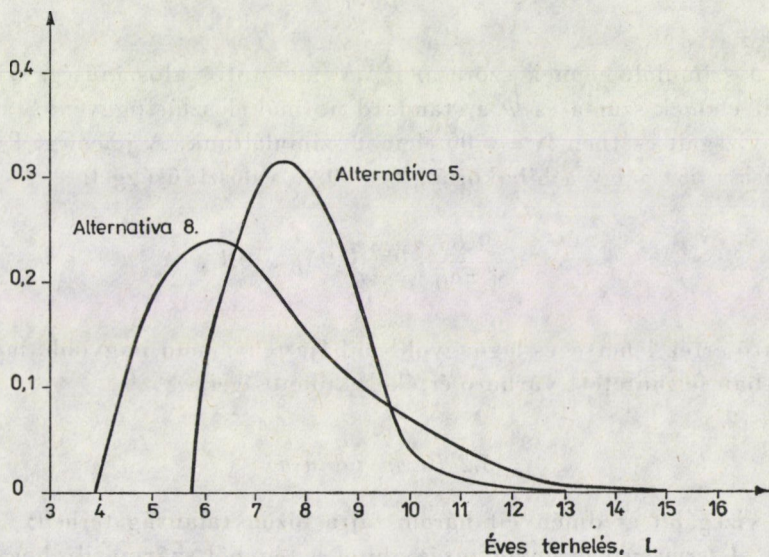
A foszforterhelés szimuláció eredménye

| | Jelenlegi helyzet | Alternatívák | | | | | | | |
|---------------------|-------------------|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Várható érték to/év | 10,0 | 8,5 | 8,8 | 8,2 | 8,2 | 7,8 | 7,4 | 7,5 | 6,8 |
| Szórásnégyzet | 2,7 | 1,6 | 2,2 | 2,5 | 2,7 | 1,7 | 2,9 | 2,3 | 2,7 |

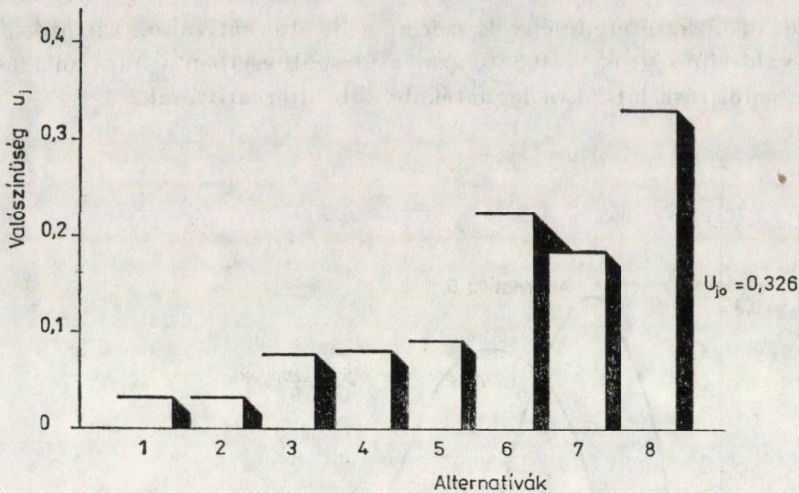
A 6. ábrán látható eredmények szerint a 8. alternatívához tartozik a legnagyobb valószínűség: $u_{j_0} = 0.326$, azaz a vizsgált esetben a harmadlagos tisztítás megvalósítása látszik a leghatékonyabb alternatívának.



4. ábra



5. ábra



6. ábra

5. Megjegyzések és következtetések

5.1 A szimuláció hibája

A számszerű eredmények elfogadása előtt célszerű az alkalmazott szimuláció hibakorlátját is megállapítani. Például a várható érték ε hibakorlátja az alábbi módon becsülhető (SZIDAROVSKY, 1974):

$$\varepsilon = \frac{I^*}{\sqrt{N}} \Phi^{-1} \left(\frac{P_0 + 1}{2} \right), \quad (5)$$

ahol I^* a szimulált elemek szórása, P_0 a választott valószínűségi szint, N a szimulált elemek száma és Φ a standard normál eloszlásfüggvény.

A vizsgált esetben $N = 500$ elemet szimuláltunk. A jelenlegi P terhelés I^* szórása 1,65, és így a hibakorlát $P_0 = 0,90$ valószínűséggel:

$$\varepsilon = \frac{1,65}{\sqrt{500}} \Phi^{-1}(0,95) \cong 0,1. \quad (6)$$

A várható érték lehetséges legnagyobb hibája tehát nem nagyobb, mint az 5. táblázatban feltüntetett várható értékek különbségei.

5.2 Bizonytalanság

A vizsgálat eredményeit három fajta bizonytalanság terheli:

a) *A természeti bizonytalanság* abból a tényből származik, hogy a nem pontszerű tápanyagterhelést véletlen jellegű természeti események, mint pl.

záporok befolyásolják. Az alkalmazott sztochasztikus modell ezt a természeti bizonytalanságot teljes mértékben figyelembe veszi.

b) *A paraméter vagy mintavételi bizonytalanság* abból származik, hogy korlátozott statisztikai információ áll rendelkezésre az L_1 és L_2 sűrűségfüggvények Θ_{L_1} és Θ_{L_2} paramétereinek becslésére. Ezt a bizonytalanságot úgy vehetjük figyelembe, hogy a statisztikai paramétereket magukat is valószínűségi változóknak tekintjük $p(\Theta_{L_1})$ és $p(\Theta_{L_2})$ sűrűségfüggvényekkel. Ezután a Bayes eloszlások használata révén együttesen vesszük figyelembe a természeti és paraméter bizonytalanságot (BENJAMIN és CORNELL, 1970):

$$\bar{f}(L_1) = \int f(L_1 | \Theta_{L_1}) p(\Theta_{L_1}) d(\Theta_{L_1}). \quad (7)$$

Hasonló eloszlás írható fel L_2 -re is. A c_1 és c_2 töménységek sűrűségfüggvénye becslésekor, a paraméter bizonytalanságot illetően, két eset különböztethető meg:

I. Nincsenek észlelési adatok a foszforkoncentrációra. Ebben a példában ezzel az esettel állunk szemben. Ahogy korábban bemutattuk, közelítő modellt használtunk c_1 és c_2 várható értékeinek becslésére. Ezen az úton c_1 és c_2 szórásait is becsülhetjük. A Bayes felfogás szerint, ezek a statisztikai adatok lehetővé teszik c_1 és c_2 statisztikai paramétereit prior eloszlásának megállapítását. Ezt követően c_1 és c_2 prior Bayes eloszlásait szimuláció révén becsülhetjük (SZIDAROVSKY és társai, 1976).

II. Bizonyos mértékű észleléseink vannak a c_1 és c_2 töménységekre. Ebből számított statisztikákat az $l(x/\theta)$ likelihood függvényként kezeljük, ahol x az észlelt adatsor. Ezután a prior információt (lásd I. pont) és likelihood függvényeket a Bayes-képlet segítségével kombináljuk, és így mindkét információt hasznosítjuk.

További problémát okoz, ha a vízgyűjtőn folytatott gazdasági tevékenység és az eutrofizálódás elleni védelem célja, mint a valóságban legtöbbször, nem esik egybe. Ekkor többcélú döntéselemzés alkalmazható, hogy megtaláljuk a lehető legjobb kompromisszumot az eutrofizálódás csökkentése, a mezőgazdasági termelés és más lehetséges célok között (BOGÁRDI és társai, 1980).

A jelenlegi modell hátránya továbbá, hogy a döntési folyamat időbeli dinamizmusát és a védekezési beavatkozások megvalósítása utáni átmeneti helyzetet nem veszi figyelembe.

5.3 A hóolvadás

A hóolvadásból származó lefolyás jelentős mennyiségű oldott foszfort moshat ki az őszi szántás után a talajfelszínen maradt növényzetből (TIMMONS és társai, 1970; Meta Systems, 1978). Mivel ez az oldott P nem kerülhet egyensúlyba a fagyott talajfelszínnel, a korábban alkalmazott összefüggés c_2 és c_1 között most nem alkalmazható. A szántás módja kritikus tényező a hóolvadás-

ből származó oldott foszfor szempontjából, mivel a szántás módjától függően maradnak növényhulladékok a felszínen és teremtik meg a hóolvadás során keletkező oldott foszfor forrását. Viszonylag egyszerű összefüggést dolgoztak ki a hóolvadásból származó évi átlagos P terhelés becslésére (Meta Systems, 1978). Ezzel párhuzamosan a hóolvadás sztochasztikus modellje (CARY és társai, 1977) összekapcsolható az eseményen alapuló foszforterheléssel. Így a hóolvadás eseményekhez tartozó oldott P terhelés mennyiségeit szimulálhatjuk. Ezáltal beépíthetjük a hóolvadásból származó P terhelés hatását is a döntési modellbe.

5.4 A tó modellezése

Tanulmányunkban feltételeztük, hogy a P terhelés jellemzi a tó trofiai állapotát. A valóságban számos más fizikai és kémiai tényező, mint pl. fenéküledék, fény, hőmérséklet is befolyásolja az elsődleges termelést. Részletes szimulációs modelleket dolgoztak ki víztestben lejátszódó eutrofizálódás jellemzésére (pl. IMBODEN és GÄCHTER, 1975; HERODEK és CSÁKI, 1980). Ezeket a modelleket azonban előrejelzésre és/vagy szabályozásra nehéz alkalmazni, mivel számos modell paraméter ismeretlen és a nem stacionárius jelleg a kalibrációt lehetetlenné teszi, továbbá az input változók vagy paraméterek sztochasztikusak lehetnek. A nehézségek kiküszöbölésére számos félempirikus tómodellt használnak. Ezek közül az egyik legegyszerűbb (VOLLENWEIDER, 1968) adja módszerünk alapját. Úgy véljük azonban, hogy a sztochasztikus szabályozási modellek felhasználásával a további kutatások során pontosabb tóleírások is figyelembe vehetők, olyanok, mint amelyeket pl. RECKHOW és CHAPRA (1979) vagy SCHINDLER és társai (1978) mutatnak be.

5.5 Következtetések

Vizsgálatunk alapján az alábbi összefoglaló következtetéseket tesszük:

a) Sztochasztikus modellezés szükséges az eutrofizálódás csökkentésének tervezéséhez, különösen akkor, ha pontszerű és nem pontszerű források egyaránt hozzájárulnak a tápanyagterheléshez.

b) A foszforterhelés sztochasztikus modelljét döntési modellel kapcsolhatjuk össze, hogy kiválasszuk a gazdaságilag leghatékonyabb védekezési alternatívát.

c) Mérnöki létesítményeket (harmadlagos tisztítás, lefolyásszabályozás, hordalékviszatarthatás) és egyéb rendszabályokat (műtrágyaadagolás, földhasználat változtatás) egyaránt figyelembe vettünk, hogy a védekezési alternatívák véges számát megállapítsuk.

d) A terhelés sztochasztikus jellegének megfelelően, a védekezési beavatkozás hatékonyságát az u_j relatív gyakoriság méri, amely szerint a j alternatíva eredményezi a legnagyobb mértékű terheléscsökkenést.

e) A modellt a Balaton egyik részvízgyűjtőjére alkalmaztuk. A figyelembe vett adatok és a részvízgyűjtő viszonyai alapján, a harmadlagos tisztítás bizonyult a leghatékonyabb beavatkozásnak.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmányban ismertetett kutató munkát nagyrészt a Nemzetközi Alkalmazott Rendszerelemzési Intézetben végeztük, ahol O. VASZILJEV, J. KINDER és SOMLYÓDI László tanácsaiért és támogatásáért külön köszönetünket fejezzük ki. A szimulációs algoritmust JIM KEMPF segítségével dolgoztuk ki és futtattuk, akinek biológiai rendszerismeretei az egész kutatás során elengedhetetlen segítséget nyújtottak. A módszer hazai számítógépen futtatható programcsomagja rendelkezésünkre áll.

A tanulmány első szerzője részben az MTA SZTAKI pénzügyi támogatásával vett részt a kutató munkában és ezúton is köszöni a SZTAKI munkacsoport hasznos tanácsait és PRÉKOFA András iránytmutató észrevételeit.

IRODALOM

- ARMSTRONG, D. E.—WEIMAR, W. C. (1973): Storage and Cycling of Pollutants in Water Bodies, *ASCE Trans.*, Paper No. 71-748, pp. 573-577
- BENJAMIN, J. R.—CORNELL, C. A. (1970): *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*, McGraw-Hill, New York, 684 p.
- BOGÁRDI, I.—L. DUCKSTEIN (1978a): Input for a Stochastic Control Model of P Loading, *J. Ecological Modeling* (4), pp. 173-195
- BOGÁRDI, I.—DUCKSTEIN, L. (1978b): A Stochastic Model of Phosphorus Loading from Non-point Sources, Research memorandum RM-78-33, International Institute for Applied Systems Analysis, 2361 Laxenburg, Austria
- BOGÁRDI, J. — DÁVID, L. — DUCKSTEIN, L.: Trade off between Cost and Effectiveness of Control of Nutrient Loading into a Water Body, R. R-83-19, IIASA, p. 36
- CHOW, V. (editor) (1964): *Handbook of Applied Hydrology*, McGraw-Hill, New York
- DAVID, L. (1979): Watershed Development Approach to Control the Eutrophication of Shallow Lakes, *Proceedings, Int'l. Conference on Environmental Mgmt. of Agricultural Watersheds*, Smolenice, Czechoslovakia, April
- DAVID, L.—TELEGDI, L.—VAN STRATEN, G. (1979): A Watershed Development Approach to the Eutrophication Problem of Lake Balaton, CP(in press), Int'l. Inst. for Applied Syst. Analy., 2361 Laxenburg, Austria
- DUCKSTEIN, L., BOGARDI, I.—FOGEL, M. (1978): An Event-based Stochastic Model of Phosphorus Loading into a lake, *Advances in Water Resources* 1, No. 6, December, pp. 321-329
- GOLUBEV, G.—SHVYTA, I.—VASILJEV, O. (1978): Environmental Problems of Agriculture. 1. Water-related Environmental Impact of Agriculture at the Field Level, Int'l. Inst. for Applied Syst. Analy., 2361 Laxenburg, Austria, RM-78-32
- HOLT, R. F.—TIMMONS, D. R.—LATTERELL, J. J. (1970): Accumulation of Phosphates in Water", *J. Agr. Food Chem.*, 18, No. 5, pp. 781-784
- HERODEK, S.—CSÁKI, P. (1980): The BEM Modeling Approach I, *Proceedings, Second joint MTA-IIASA Task. Force Meeting on Lake Balaton Modeling*, Veszprém, Hungary
- IMBODEN, D. M.—GACHTER, R. (1975): Modelling and Control of Lake Eutrophication, Preprint, IFAC 6th Triannual World Congress, Boston
- JOLÁNKAI G. (1975): A Balaton nem pontszerű szennyezésének vizsgálata, VITUKI kutatási jelentés
- JORGENSEN, S. E. (1976): A Eutrophication Model for a Lake, *J. Ecological Modelling* (2), pp. 147-165
- KEMPF, J.—LEONHART, L.—FOGEL, M.—DUCKSTEIN, L. (1978): Water Quality of Runoff from Surface Mined Lands in Northern Arizona, *Hydrology and Water Resources in Arizona and the Southwest*, 8, Proceedings, 1978 meetings of the Arizona Section AWR and Hydrology Section, AAS, Flagstaff, Arizona, April 14-15

- Meta Systems Inc. (1978): Water Quality Impact and Socio-economic Aspects of Reducing Nonpoint Source Pollution from Agriculture, Draft Report and Appendices, Athens, Georgia: U.S. Environmental Protection Agency, R 8050 36-01-1, February
- MURRAY, D.—YAKOWITZ, S. (1979): Constrained Differential Dynamic Programming and its Application to Multireservoir Control, *Water Resources Research*, 15, No. 5, October, pp. 1017—1027
- Országos Vízügyi Hivatal (1979): A Balaton Vízgazdálkodásfejlesztési Programja.
- NOVOTNY, V.—TRAN, H.—SIMSIMAN, G. V. (1978): Mathematical Modeling of Land Runoff Contaminated by Phosphorus, *Journal WPCF*, January
- RACCIO, G.—HUTTER, K. (1980): A Kantorovich Model for the Wave Motion of Homogeneous Lakes of Elongated Shape, submitted for publication, *J. of Fluid Mech.*
- RECKHOW, K. (1979): The Use of a Simple Model and Uncertainty Analysis in Lake Management, *Water Resources Bulletin*, 15, No. 3, June, pp. 601—611
- RECKHOW, K.—CHAPRA, S. (1979): A Note on Error Analysis for a Phosphorus Retention Model, *Water Resources Research*, 15, No. 6, pp. 1643—1646
- ROMKENS, M. J. M.—NELSON, D. W. (1974): Phosphorus Relationships in Runoff from Fertilized Soils, *J. Environ. Quality*, 3, No. 1, pp. 10—13
- SCHLINDER, D. W.—FEE, E. J.—RYSZCZYNSKI, T. (1978): Phosphorus Input and its Consequences for Phytoplankton Standing Crop and Production in the Experimental Lakes Area and in Similar Lakes, *J. Fish. Res. Board Can.*, 135, pp. 190—196
- SERRUYA, C.—SERRUYA, S. (1975): A Comprehensive Limnological Modelling of Lake Kinneret, Preprint, IFAC 6th Triannual World Congress, Boston
- SHARPLEY, A. N.—SYERS, J. K.—TILLMAN, R. W. (1978): An Improved Soil Sampling Procedure for the Prediction of Dissolved Inorganic Phosphate Concentrations in Surface Runoff from Pasture, *J. Environ. Qual.*, 7, No. 13
- SMITH, J., DAVIS, D. and FOGEL, M. (1977): Determination of Sediment Yield by Transferring Rainfall Data, *Water Resources Bulletin*, 13 (3), pp. 529—541
- SOMLYODI, L. (1979): Hydrodynamical Aspects of the Eutrophication Modeling in the Case of Lake Balaton Collaborative Paper, CP-79-1, IIASA, Luxemburg, Austria
- Soil Conservation Service (1972): Hydrology. National Engineering Handbook, U.S. Department of Agriculture, Washington, D.C.
- SZABÓ J. (1979): A melioráció kézikönyve. Mezőgazdasági Kiadó, Budapest
- SZIDAROVSKY F. (1974): *Bevezetés a numerikus módszerekbe*. Közg. és Jogi Könyvkiadó, Budapest
- SZIDAROVSKY, F.—YAKOWITZ, S.—KRZYSZTOFOWICZ, R. (1976): A Bayes Approach for Simulating Sediment Yield, *J. of Hydrological Sciences*, 3, No. 1—2, pp. 33—45
- TIMMONS, D. R.—HOLT, R. F.—LATTERELL, J. J. (1970): Leaching of Crop Residues as a Source of Nutrients in Surface Runoff Water, *Water Resources Research*, 6, No. 5, October, pp. 1367—1375
- TIMMONS, D. R.—BURWELL, R. E.—HOLT, R. F. (1968): Loss of Crop Nutrients through Runoff, *Minn. Sci.*, No. 24, pp. 16—18
- TÓTH L.—OLÁH J.—TÓTH E. (1975): Foszfór körforgás a Balatonban. A Balatoni Vízügyi Bizottság kiadványa, Budapest
- VOLLENWEIDER, R. A. (1968): *Scientific Fundamentals of the Eutrophication of Lakes and Flowing Waters with Particular Reference to Nitrogen and Phosphorus as Factors in Eutrophication*, OECD Technical Report, DAS/SCI/63, 27, p. 159
- WETZEL, R. G. (1975): *Limnology*, W. B. Saunders Company, London
- WISCHMEIER, W. H.—SMITH, D. D. (1972): Predicting Rainfall Erosion Losses from Cropland East of the Rocky Mountains, U.S. Department of Agriculture, Agriculture Handbook No. 282

Selection of the Efficient Reduction of the Nutrient Load. — For the reasonable reduction of the nutrient load causing the eutrophication of lakes, a model is presented and to one of the subcatchment areas of the lake Balaton applied. The system model consists of the following elements. The state vector is composed of the density functions of solved and sediment-bound phosphorus. The field of activity consists of six so-called pure strategies: 1 — point pollution, 2 — feeding of fertilizer, 3 — erosion, 4 — land utilization, 5 — runoff, and 6 — sediment discharge control. From these six pure activities eight combined alternatives are taken into account. The model is applied to one of the subcatchment areas of the lake Balaton and the numerical determination of the model parameters is presented on the basis of the available data and the tables and diagrams to be found in the literature on the subject. The problems connected with the uncertainty of the parameters are also dealt with.

Auswahl der wirksamen Minderung der Speisungsbelastung. — Zur zweckmäßigen Minderung der Eutrophisierung der Seen hervorrufenden Speisungsbelastung wird ein Modell präsentiert und auf ein Teilzuflußgebiet des Plattensees angewandt. Das Systemmodell besteht aus den folgenden Elementen. Der Zustandsvektor stellt sich von der Dichtefunktion der zu den angefösten und erodierten Erdreich verbundenen Phosphorbelastungen zusammen. Der Wirksamkeitsbereich besteht aus sechs sog. reinen Strategien: 1 — punktförmige Verunreinigung, 2 — Kunstdüngerzusammensetzung, 3 — Erosion, 4 — Bodenbenützung, 5 — Abfluß- und 6 — Geschiebedurchflußregelung. Von diesen sechs reinen Wirksamkeiten acht kombinierte Alternative werden in Rücksicht genommen. Das Modell wird auf ein Teilabflußgebiet des Plattensees angewandt und die numerische Ermittlung der Modellparameter beschrieben aufgrund von den zur Verfügung stehenden Angaben oder in der einschlägigen Fachliteratur befindlichen Tabellen und Diagrammen. Es werden auch die mit der Unbestimmtheit der Parameter zusammenhängenden Probleme behandelt.

NÉHÁNY SÍKRUGALMASSÁGTANI ÉRINTKEZÉSI FELADAT MEGOLDÁSA KVADRATIKUS PROGRAMOZÁS SEGÍTSÉGÉVEL

PÁCZELT ISTVÁN*

NÁDORI FRIGYES**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

és

ECSEDI ISTVÁN***

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. június 4-én]

Jelen tanulmányban annak feltételezésével, hogy a testek közötti súrlódás elhanyagolható, az alakváltozások pedig kicsinyek, keressük a testek között kialakuló érintkezési nyomást, az érintkezési tartományt, továbbá a merevtestszerű elmozdulással rendelkező test eltolódásának mértékét a terhelő erő függvényében. A vizsgált rugalmas rendszerek alkotó elemei — általánosított síkfeszültségi állapot feltételezésekor — kör, körgyűrű alakú, köralakú furattal gyengített végtelen kiterjedésű tábla (sík), vagy — síkalakváltozáskor — a fenti geometriák által meghatározott keresztmetszetű hengeres test, illetve köralakú furattal gyengített rugalmas tér. A dolgozat a kvadratikus programozási feladat felállításánál jelentkező hatásfüggvények felépítésére a síkrugalmasságtanban használatos Airy-féle feszültségfüggvényt felhasználva módszert javasol, kitérve a számításoknál fellépő problémákra is. Végezetül az elvégzett számítások az érintkezési feladatok megoldásának fent vázolt útját illusztrálják.

Bevezetés

A gépészmérnöki gyakorlatban számos esetben találkozunk olyan rugalmasnak tekinthető szerkezetekkel, amelyeknek alkotó elemei egymással érintkeznek. Jelen dolgozat olyan érintkezési feladatokkal foglalkozik, melyeknél síkbeli viszonyok tételezhetők fel. Konkrétan vizsgálat tárgya a kör és körgyűrű keresztmetszetű hengeres test érintkezése, valamint ezen testek és a furattal gyengített végtelen tér érintkezése. Az érintkező testek vagy síkalakváltozási (SA), vagy általánosított síkfeszültségi (ÁSF) állapotban vannak. A vizsgálat során feltételezzük, hogy a testek közötti súrlódás elhanyagolható, az alakváltozások és elmozdulások kicsinyek.

Jelen tanulmányban keressük a testek között kialakuló p érintkezési nyomást, az Ω_0 érintkezési tartományt, továbbá a merevtestszerű elmozdulással is rendelkező test $\delta = \delta(F)$ eltolódás-terhelés függvény kapcsolatát.

Mint ismeretes, ha az érintkezési tartomány a testek méretéhez képest nem hanyagolható el, akkor Hertz elmélete már nem alkalmazható.

Az ilyen jellegű érintkezési feladatot először STAERMAN I. Ja. oldotta meg [1]. A [2] alatti tanulmány a gyűrűalakú test és köralakú tárcsa, illetve

* Dr. Páczelt István,
** Nándori Frigyes,
*** Dr. Ecsedi István,

} Nehézipari Műszaki Egyetem, H-3515 Miskolc, Egyetemváros

furattal gyengített sík érintkezési feladatát azzal a feltételezéssel oldja meg, hogy gyűrűnél a radiális irányú elmozdulás két részből tevődik össze, egyrészt a STAERMAN által a teli táblára levezetett „helyi” deformációból, másrészt a gyűrűnek — mint görbevonallú tartónak — hajlítási deformációjából.

Jelen dolgozatban az elmozdulásokat síkrugalmasságtani megoldásokból nyerjük, ami a kitűzött érintkezési feladat pontosabb megoldását szolgáltatja.

Hengeres héj és rugalmas tér együttdolgozásának kérdéseivel a [3]-as tanulmány foglalkozik.

1. Érintkezési feladattal kapcsolatos matematikai programozási feladat megfogalmazása

Annak feltételezésével, hogy az R_1 és az R_2 sugarak (1. ábra) alig különböznek egymástól, az érintkezési feladat a következőképpen fogalmazható meg [1]:

Érintkezés lép fel mindazon pontokban,¹ ahol

$$y \equiv u^{(2)} - u^{(1)} - \delta \cos \varphi + (R_2 - R_1)(1 - \cos \varphi) = 0, \quad p \geq 0 \quad (1)$$

és rés van a testek között, ha

$$y > 0, \quad p = 0. \quad (2)$$

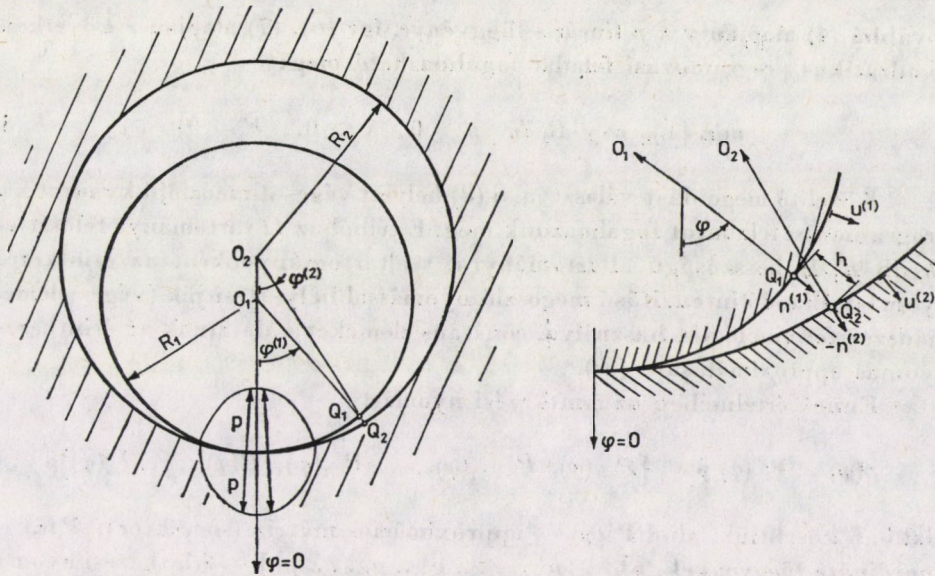
Itt $u^{(1)} = u^{(1)}(R_1, \varphi)$, $u^{(2)} = u^{(2)}(R_2, \varphi)$ — radiális irányú elmozdulások, δ — az 1-es jelű test merevtestszerű eltolódása a $\varphi = 0$ sugár irányában, $(R_2 - R_1) \cdot (1 - \cos \varphi)$ — a kezdeti hézag értéke.

A feladat megoldása céljából fejezzük ki az elmozdulásokat a $p = p(\varphi)$ érintkezési nyomáson keresztül. A $H^{(1)}(\varphi, \psi)$ és a $H^{(2)}(\varphi, \psi)$ Green-függvények bevezetésével ($n^{(1)}(\psi)$, $-n^{(2)}(\psi)$ normális irányú egységnyi terheléshez tartozó radiális irányú elmozdulás az R_1 , illetve R_2 sugarú kör φ helyén) a radiális irányú elmozdulás

$$u^{(b)}(R_b, \varphi) = \int_{(\Omega)} H^{(b)}(\varphi, \psi) p(\psi) R_b d\psi, \quad b = 1, 2, \quad (3)$$

ahol Ω — a szóba jöhető érintkezési tartomány.

¹ Az érintkezésválás (rés) feltételét a testek perempontokbeli elmozdulásainak normális irányú vetületeivel fejezzük ki, azaz csak a radiális irányú elmozdulásokat vesszük figyelembe. Az R_1 és R_2 sugarak kicsiny különbségéből adódóan nem teszünk különbséget a $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ szögek között; ezeket φ -vel jelöljük.



1. ábra. Normál érintkezési feladat megfogalmazása

A (3) figyelembevételével az érintkezést—elválást kifejező integrálegyenlet-egyenlőtlenség az alábbi²

$$y = \int_{(\Omega)} (H^{(1)}(\varphi, \psi) + H^{(2)}(\varphi, \psi)) p(\psi) R_1 d\psi - \delta \cos \varphi + \\ + (R_2 - R_1)(1 - \cos \varphi) \begin{cases} \geq 0, & p(\varphi) = 0, & \varphi \in \Omega_0, \\ = 0, & p(\varphi) \geq 0, & \varphi \in \Omega_p, \end{cases} \quad (4a, b)$$

ahol Ω_0 , Ω_p a rés-, illetve az érintkezési tartományokat jelöli, $\Omega = \Omega_0 + \Omega_p$.
A (4a, b)-ből követően

$$p \cdot y = 0, \quad \varphi \in \Omega, \quad (5)$$

azaz az érintkezési nyomásnak az y relatív elmozduláson végzett munkája az Ω tartomány minden pontjában zérus. A feladat megoldása során az I -es jelű testre felírt

$$\tilde{F} = \int_{(\Omega)} p(\varphi) \cos \varphi V R_1 d\varphi - F = 0 \quad (6)$$

egyensúlyi egyenletet is ki kell elégíteni, ahol F — az I -es testre ható külső erőrendszer $\varphi = 0$ sugár irányú eredője; V — a vizsgált test (tábla) vastagsága.

Mivel az (5) értelmében

$$\int_{(\Omega)} p \cdot y \cdot R_1 d\varphi = 0, \quad p \geq 0, \quad y \geq 0, \quad (7)$$

² Az R_b a $b = 1,2$ sugarak közeli azonossága miatt

$$R_1 d\varphi \cong R_2 d\psi.$$

továbbá (4) alapján y a p lineáris függvénye, így (6), (7) alapján a következő kvadratikus programozási feladat fogalmazható meg:

$$\min \left\{ \int_{(\Omega)} p \cdot y \cdot R_1 d\varphi \mid p \geq 0, y \geq 0, \vec{F} = 0 \right\}. \quad (8)$$

Közelítő megoldást választva, a (8) helyett véges dimenziójú kvadratikus programozási feladatot fogalmazunk meg. E célból az Ω tartományt felosztjuk $2k$ db $R_1 \Delta\varphi$ hosszúságú altartományra, s altartományonként az érintkezési nyomást állandó intenzitású megoszló nyomással helyettesítjük (véges elemek módszer terminológiát használva, constans elemeket választunk az érintkezési nyomás approximálására [4]).

Ennek értelmében az érintkezési nyomást

$$p(\varphi) = \mathbf{P}^T(\varphi) \vec{p} = [P_{-k}(\varphi), P_{-k+1}(\varphi), \dots, P_{-1}(\varphi), P_1(\varphi), \dots, P_k(\varphi)] \vec{p} \quad (9)$$

alakban közelítjük, ahol $\mathbf{P}^T(\varphi)$ — approximációs mátrix (sorvektor), $P_i(\varphi)$ — koordináta függvények, $\vec{p}^T = [p_{-k}, \dots, p_{-1}, p_1, \dots, p_k]$ — érintkezési nyomások vektora.

Jelen esetben a $\varphi = 0$ egyenesre vonatkozó szimmetriából adódóan

$i > 0$ esetében

$$\begin{aligned} P_i(\varphi) &= 0, & \text{ha } 0 \leq \varphi < 2\beta(i-1), \\ P_i(\varphi) &= 1, & \text{ha } 2\beta(i-1) \leq \varphi \leq 2\beta i, \\ P_i(\varphi) &= 0, & \text{ha } 2\beta i < \varphi \leq k \cdot 2\beta = \Phi, \end{aligned} \quad (10a)$$

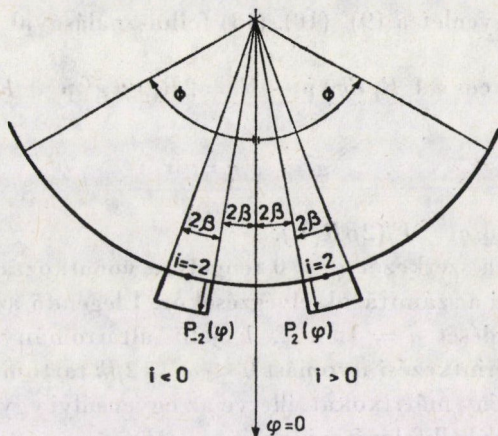
míg $i < 0$ -nál

$$\begin{aligned} P_i(\varphi) &= 0, & \text{ha } 2\beta(i+1) < \varphi \leq 0, \\ P_i(\varphi) &= 1, & \text{ha } 2\beta i \leq \varphi \leq 2\beta(i+1), \\ P_i(\varphi) &= 0, & \text{ha } -2\beta k \leq \varphi < 2\beta i, \\ k &> 0, \end{aligned} \quad (10b)$$

ahol Φ — az érintkezés tekintetében szóba jöhető Ω vizsgált tartomány szélső határához tartozó szög értéke, $2\beta \equiv \Delta\varphi$ (2. ábra).

Ekkor a (7) helyett

$$\begin{aligned} \min \int_{(\Omega)} p \cdot y \cdot R_1 d\varphi &\approx \vec{p}^T \int_{(\Omega)} \mathbf{P}(\varphi) [\int_{(\Omega)} (H^{(1)}(\varphi, \psi) + \\ &+ H^{(2)}(\varphi, \psi)) \mathbf{P}^T(\psi) R_1 d\psi \vec{p} - \delta \cos \varphi + \\ &+ (R_2 - R_1) (1 - \cos \varphi)] R_1 d\varphi = \\ &= \vec{p}^T [(\tilde{\mathbf{H}}^{(1)} + \tilde{\mathbf{H}}^{(2)}) \vec{p} - \delta \vec{g} + \vec{h}] R_1 2\beta = \vec{p}^T \vec{y} R_1 2\beta = 0 \end{aligned} \quad (11)$$



2. ábra. Altartományok kijelölése, a $P_{-2}(\varphi)$, $P_2(\varphi)$ koordinátafüggvény

írható, ahol

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{ij}^{(b)} &= \frac{1}{R_1 2\beta} \mathbf{e}_i^T \int_{(\Omega)} \mathbf{P}(\varphi) \int_{(\Omega)} H^{(b)}(\varphi, \psi) \mathbf{P}^T(\psi) R_1^2 d\psi d\varphi \mathbf{e}_j = \\ &= \frac{1}{2\beta} \int_{(\Omega)} P_i(\varphi) \left(\int_{(\Omega)} H^{(b)}(\varphi, \psi) P_j(\psi) R_1 d\psi \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\beta} \int_{(\Omega)} P_i(\varphi) u_j^{(b)}(\varphi) d\varphi \approx u_j^{(b)}(\varphi_i) . \end{aligned} \tag{12}$$

ha

$$\left. \begin{aligned} i > 0 & \quad 2\beta(i-1) \leq \varphi_i \leq 2\beta i \\ i < 0 & \quad 2\beta i \leq \varphi_i \leq 2\beta(i+1) \end{aligned} \right\} i, j = -k, \dots, k,$$

a $\tilde{\mathbf{H}}^{(b)}$ hatásfüggvény mátrix ij eleme. $u_j^{(b)}(\varphi)$ — a j -k szakasz felett ható egy-ségnyi intenzitású radiális terhelésből származó radiális irányú elmozdulást jelenti, \mathbf{e}_i — olyan vektort, melynek i -ik eleme egységnyi, a többi zérus. A számítógépre történő programozás egyszerűsítése céljából célszerű a φ_i szögek értékét a választott i -ik altartomány középső pontja által kijelölni, vagyis

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \text{sign}(i) \beta + (i - \text{sign}(i)) 2\beta \\ i &= -k, -k + 1, \dots, -1, 1, \dots, k. \end{aligned}$$

A $\tilde{\mathbf{g}}, \tilde{\mathbf{h}}$ vektor i -ik eleme az integrálszámítás középértéktétele értelmében

$$\tilde{g}_i = \frac{1}{2\beta R_1} \int_{(\Omega)} P_i(\varphi) \cos \varphi R_1 d\varphi \approx \cos \varphi_i, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_i &= \frac{1}{2\beta R_1} \int_{(\Omega)} P_i(\varphi) (R_2 - R_1) (1 - \cos \varphi) R_1 d\varphi = (R_2 - R_1) (1 - \cos \varphi_i) \\ i &= -k, -k + 1, \dots, -1, 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{14}$$

A (6) egyensúlyi egyenlet a (9), (10), (13) felhasználásával

$$\left(\int_{(\omega)} \mathbf{p}^T(\varphi) \cos \varphi V R_1 d\varphi \right) \bar{\mathbf{p}} - F = 2R_1 V \beta \bar{\mathbf{g}}^T \bar{\mathbf{p}} - F = 0, \quad (15)$$

illetve

$$\bar{\mathbf{g}}^T \bar{\mathbf{p}} - \bar{q} = 0 \quad (16)$$

alakban írható, ahol $\bar{q} = F/(2\beta R_1 V)$.

A terhelés és a szerkezet $\varphi = 0$ tengelyre vonatkoztatott szimmetriáját érdemes kihasználni a számítások elvégzésekor. Elegendő az érintkezés/elválás feltételének teljesedését $i = 1, \dots, k$ jelű altartományokban ellenőrizni. Ebből adódóan az érintkezési nyomást $0 \leq \varphi \leq 2\beta k$ tartományban közelítjük.

A hatásfüggvény mátrixokat, illetve az egyensúlyi egyenletet szimmetria feltétel esetében úgy kell felépíteni, hogy a $-2k\beta \leq \varphi \leq 0$ tartományon megszóló nyomás hatását is figyelembe vegyünk a $0 \leq \varphi \leq k2\beta$ tartomány felett. Így egyrészt a hatásfüggvény mátrix elemei

$$H_{ij}^{(b)} = u_j^{(b)}(\varphi_i) + u_{-j}^{(b)}(\varphi_i) \quad (17)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, k; b = 1, 2$$

összefüggéssel számíthatók, másrészt a (16) egyensúlyi egyenlet helyett a

$$\mathbf{g}^T \mathbf{p} - q = 0 \quad (18)$$

egyenletet kapjuk, ahol $q = F/4\beta R_1 V$, $\mathbf{p}^T = [p_1, p_2, \dots, p_k]$ — k db altartomány felett kialakuló érintkezési nyomás vektora, $\mathbf{g}^T = [\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \dots, \cos \varphi_k]$, továbbá a \mathbf{h} vektor ($k \times 1$) típusú elemei a (14) összefüggéssel $i = 1, \dots, k$ értékeknél nyernek meghatározást.

A fentiek figyelembevételével a következő programozási feladat fogalmazható meg:

$$\min \{ \mathbf{p}^T \mathbf{y} \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \equiv \mathbf{H} \mathbf{p} - \delta \mathbf{g} + \mathbf{h} \geq \mathbf{0}, \mathbf{g}^T \mathbf{p} - q = 0 \}, \quad (19)$$

vagy más formában a megoldandó algebrai egyenlet/egyenlőtlenség

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{g}^T \\ -\mathbf{g} & \mathbf{H} \end{bmatrix}}_{-\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} - \underbrace{\begin{bmatrix} q \\ -\mathbf{h} \end{bmatrix}}_{-\mathbf{b}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}}_{\mathbf{z}} = \mathbf{0}, \quad (20)$$

$$\delta > 0, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \mathbf{p}^T \mathbf{y} = 0.$$

A δ pozitív értékűsége az érintkezési feladat felállításából következik, ugyanis a merevtestszerű mozgást végző test a kialakuló alakváltozások hatására a $\varphi = 0$ tengely irányába fog elmozdulni.

Mivel a $-A$ mátrix pozitív szemidefinit [5], így a feladat megoldására alkalmazni lehet a Dantzig-féle algoritmust [6], Frank—Wolfe módszerét [7], vagy annak modifikált változatát [8].

Tehát a (20) alapján megfogalmazható kvadratikus programozási feladat³

$$\min \{ \mathbf{x}^T \mathbf{z} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0} \}. \quad (21)$$


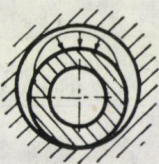
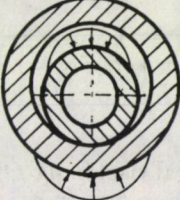


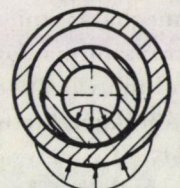
Bizonyítható, hogy (20) alatti egyenletek, egyenlőtlenségek az $\int_{(\omega)} phR_1 d\varphi$ integrállal módosított kiegészítő munkára vonatkozó extrémális elvből is lezármasztathatók [4].

2. A hatásfüggvény mátrix előállításának kérdései

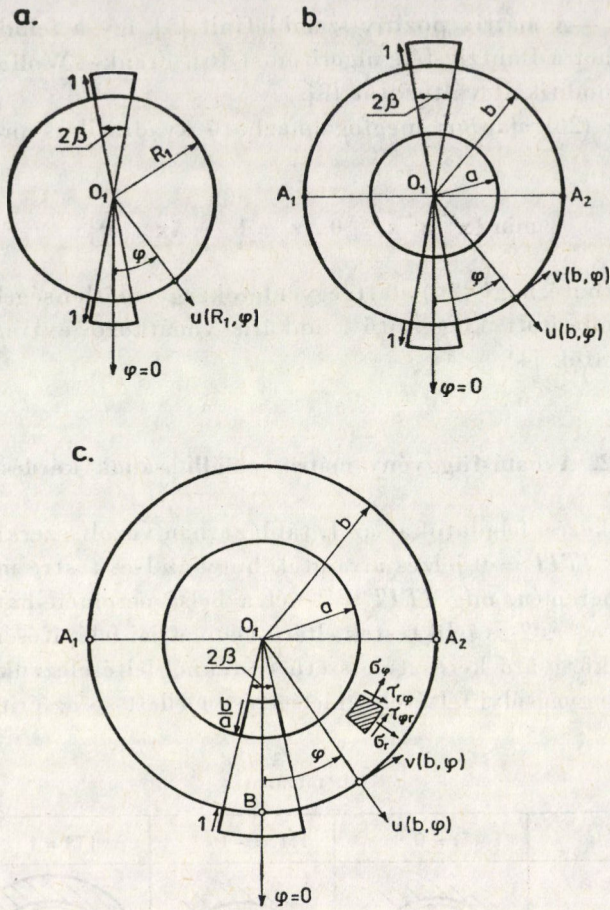
Az érintkezési feladatokat az 1. táblázatban vázolt szerkezetekre fogjuk megoldani. Az $ITIT = 0$ jelzés arra utal, hogy az 1-es testre működő terhelés a test külső peremén, míg $ITIT = 1$ -nél a belső peremén hat. Az $ITI = 0, -1, 1$ jel az 1-es és 2-es jelű testek eltérő geometriai felépítésére utal.

A kör-, körgyűrű keresztmetszetű testeknél feltételezzük, hogy a külső terhelés — az egyensúlyi feltételek kielégítése mellett — az érintkezési feladat

1. táblázat

| | $ITI = 0$ | $ITI = -1$ | $ITI = 1$ |
|------------|---|---|---|
| $ITIT = 0$ |  |  |  |
| $ITIT = 1$ |  |  |  |

³ Általános esetben, amikor a merevtestszerű elmozdulás eltolódásból és elfordulásból tevődik össze, az érintkezési feladat úgyszintén a (21)-el formailag megegyező kvadratikus programozási feladathoz vezethető [4].



3. ábra. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű hengeres testek terhelése a hatásfüggvény mátrix felépítéséhez

megoldásával tisztázott Ω_p érintkezési tartomány által meghatározott ívszakaszon oszlik meg. E miatt elégséges lesz az elmozdulásokat a 3. ábrán vázolt terheléseknél meghatározni, s a (17) alatti hatásmátrix együtthatóit egyszerű koordinátatranszformációval képezni.

A 3a. ábrán vázolt testnél a merevtestszerű eltolódás alatt O_1 pontjának, míg 3b, c ábrákhoz tartozó testeknél az O_1 ponton átmenő vízszintes sík és a külső kör (A_1, A_2) metszéspontjainak függőleges irányú elmozdulását fogjuk érteni. Amennyiben a 3c. ábrán vázolt test merevtestszerű elmozdulást nem végez, úgy a $\varphi = 0$ sugárnak a külső körrel kapott metszéspontját tekintjük állandónak (B pont).

A 3. ábrán vázolt terhelésekhez tartozó elmozdulásokat feszültségfüggvény meghatározásán keresztül fogjuk előállítani. Az r, φ, z polárkoordináta-

rendszerben értelmezett feszültségek az $U = U(r, \varphi)$ feszültségfüggvényből a

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}; & \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\varphi} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right)\end{aligned}\quad (22a-c)$$

összefüggéssel számíthatók. Értelmezésüket a 3c ábra besraffozott részén tüntetjük fel. Sík alakváltozás (SA) esetében az A alakváltozási tenzor koordinátáit az

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{2G} (\sigma_r - \nu (\sigma_r + \sigma_\varphi)), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{2G} (\sigma_\varphi - \nu (\sigma_r + \sigma_\varphi)), \\ \gamma_{r\varphi} &= \tau_{r\varphi}/G\end{aligned}\quad (23a-c)$$

egyenletekből képezzük, ahol G — a csúsztató rugalmassági tényező, ν — a Poisson-féle szám.

A 3b, c ábrákon vázolt testek elmozdulásmezéjét a következőképpen határozhatjuk meg:

Mint ismeretes, az elmozdulásvektor növekménye [9]

$$d\vec{u} = \mathbf{A} \cdot d\vec{r} + \vec{\omega} \times d\vec{r}, \quad (24)$$

illetve

$$d\vec{a} = \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\vec{r}, \quad (25)$$

ahol

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u}, \quad \vec{u} = u \vec{e}_R + v \vec{e}_\varphi.$$

Figyelembe véve, hogy az alakváltozásnak a $\varphi = 0$ tengelyre vonatkozó szimmetriája miatt

$$\left. \begin{aligned}v(r, \varphi = 0) &\equiv 0 \\ \vec{\omega}(r, \varphi = 0) &= \vec{0}\end{aligned} \right\} a \leq r \leq b,$$

így az $r = R$, $0 \leq \vartheta \leq \varphi$ egyenletű peremgörbe mentén való integrálással azt kapjuk, hogy

$$\vec{\omega} = \omega(\varphi) \vec{k},$$

ahol

$$\omega(\varphi) = \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} \cdot r + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r) - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right] \Big|_{r=R} d\vartheta, \quad (26)$$

illetve a (24) alapján a radiális irányú elmozdulás

$$\begin{aligned}
 u(R, \varphi) = & u(R, 0) \cos \varphi - R \cos \varphi \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[\omega(\vartheta) - \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} \right] \cos \vartheta + \\
 & + \varepsilon_{\varphi}(\vartheta) \sin \vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta + R \sin \varphi \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[\omega(\vartheta) - \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} \right] \sin \vartheta - \\
 & - \varepsilon_{\varphi}(\vartheta) \cos \vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta = u(R, 0) \cos \varphi + \check{u}(R, \varphi), \quad (27)
 \end{aligned}$$

a tangenciális irányú elmozdulás pedig

$$\begin{aligned}
 v = v(R, \varphi) = & -u(R, 0) \sin \varphi - R \cos \varphi \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[\omega(\vartheta) - \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} \right] \sin \vartheta - \\
 & - \varepsilon_{\varphi}(\vartheta) \cos \vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta - R \sin \varphi \int_{\vartheta=0}^{\varphi} \left[\omega(\vartheta) - \frac{1}{2} \gamma_{r\varphi} \right] \cos \vartheta + \\
 & + \varepsilon_{\varphi}(\vartheta) \sin \vartheta \Big|_{r=R} d\vartheta = -u(R, 0) \sin \varphi + \check{v}(R, \varphi). \quad (28)
 \end{aligned}$$

Olyankor, amikor a 3c. ábrán vázolt test merevtestszerű mozgást végez,

$$u(R, 0) = \check{v}(R, \pi/2), \quad R = b, \quad (29)$$

mivel az $R = b$, $\varphi = \pi/2$ pont függőleges elmozdulása zérus.

Rögzített esetben

$$u(b, 0) = v(b, 0) = 0, \quad (30a)$$

továbbá az $r = a$ sugarú körön levő elmozdulások számításakor a $\varphi = 0$, $a \leq r \leq b$ szakasz összenyomódása jelenti az $u(a, 0)$ értéket. Így

$$u(a, 0) = \int_b^a \varepsilon_r(r, 0) dr. \quad (30b)$$

Köralakú testnél (3a. ábra) a radiális irányú elmozdulás egyszerűbb úton is meghatározható. Ugyanis ilyenkor a test peremének radiális elmozdulását az O_1 középponthoz képest az $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\varrho, \varphi)$ radiális irányú fajlagos nyúlás φ sugármenti integrálásából képezhetjük:

$$u(\varphi) = R_1 \int_0^1 \varepsilon_r(\varrho, \varphi) d\varrho, \quad (31)$$

ahol $\varrho = r/R_1$, $0 \leq \varrho \leq 1$.

Amennyiben a fenti összefüggésekben ν -t $\nu/(1 + \nu)$ -re módosítjuk, úgy az általánosított síkfeszültségi állapot (ÁSF) feltételezése melletti eredményeket nyerjük.

2.1 *A körkeresztmetszetű hengeres testen fellépő radiális irányú elmozdulások meghatározása, a hatásfüggvény mátrix felépítése*

A 3a. ábrán vázolt, a $\varphi = 0$ és $\varphi = \pi$ környezetében az $R_1 2\beta$ ív mentén megoszló terhelést Fourier sorba fejtve azt kapjuk, hogy

$$p = \check{p}_0 + \sum_{n=2,4,6,\dots} \check{p}_n \cos n\varphi, \quad (32a)$$

ahol

$$\check{p}_0 = \frac{2\beta}{\pi}, \quad \check{p}_n = \frac{4}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n}. \quad (23b-c)$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (32) figyelembevételével választott

$$U = c_0 r^2 + \sum_{n=2,4,6,\dots} (c_n r^n + d_n r^{n+2}) \cos n\varphi \quad (33)$$

feszültségfüggvényből a (22a—c) szerint származtatott feszültségek kielégítik az $r = R_1$ peremen levő feltételeket

$$\sigma_r = \begin{cases} 0 & \beta < \varphi < \pi - \beta, \pi + \beta < \varphi < 2\pi - \beta \\ 1 \text{ N/mm}^2 & -\beta \leq \varphi \leq \beta, \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi + \beta \end{cases} \quad (34a)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (34b)$$

ha a (33) alatti sorbafejtés állandói

$$c_0 = \frac{\beta}{\pi}, \quad c_n = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n(n-1)} R_1^{n+2}, \quad (35a-c)$$

$$d_n = \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n(n+1)} R_1^{-n} \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

értékűek.

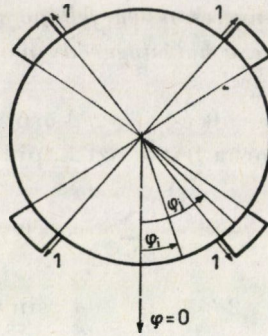
A kapott állandókat felhasználva, egyrészt a feszültségekre a

$$\sigma_r = \frac{2}{\pi} \left[\beta + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\sin n\beta}{n} \varrho^n (2 - n + n\varrho^{-2}) \cos n\varphi \right], \quad (36a-c)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{2}{\pi} \left[\beta + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\sin n\beta}{n} \varrho^n (2 + n - n\varrho^{-2}) \cos n\varphi \right],$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots} \sin n\beta \varrho^n (1 - \varrho^{-2}) \sin n\varphi ;$$

$$(\varrho = r/R_1)$$



4. ábra. Terhelések megoszlása körkeresztmetszetű hengeres testnél a hatásfüggvény mátrix $H_{ij}^{(1)}$ elemének előállításához

másrészt (23a), (31) alapján a radiális irányú elmozdulásra az

$$u(R_1, \varphi) = \frac{2R_1}{\pi G} \left[\beta \left(\frac{1}{2} - \nu \right) + \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\sin n\beta}{n} \frac{2n-1-2\nu(n-1)}{n^2-1} \cos n\varphi \right] \quad (37)$$

összefüggés vezethető le.

Az u értékeket a test peremén $\varphi = 0, 2\beta, 4\beta, \dots, 2k\beta$ helyeken meghatározva, és az érintkezési feladatnál jelentkező szimmetria tulajdonságokat figyelembe véve, (17) alapján a hatásfüggvény mátrixának elemei az alábbi összefüggés segítségével számolhatók (lásd 4. ábra):

$$H_{ij}^{(1)} = u(R_1, \varphi_i - \varphi_j) - u(R_1, \varphi_i + \varphi_j) \quad (38)$$

$$i, j = 1, \dots, k; \varphi_i = \beta + (i-1)2\beta.$$

2.2 A külső peremén véges szakaszokon terhelt körgyűrű hatásfüggvény mátrixa

A 3b. ábrán vázolt z tengelyű hengeres test $r = b$ sugarú körén az alábbi egyensúlyi erőrendszer hat:

$$\sigma_r = \begin{cases} 0, & \beta < \varphi < \pi - \beta, \quad \pi + \beta < \varphi < 2\pi - \beta, \\ 1 \text{ [N/mm}^2\text{]}, & -\beta \leq \varphi \leq \beta, \quad \pi - \beta \leq \varphi \leq \pi + \beta, \end{cases} \quad (39a-b)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (39c)$$

Az $r = a$ sugarú palást terheletlen, így

$$\sigma_r = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (40a-b)$$

A feladat feszültségfüggvénye:

$$U = U(r, \varphi) = c_0 \ln r + d_0 r^2 + \sum_{n=2,4,\dots} (c_n r^n + d_n r^{n+2} + c'_n r^{-n} + d'_n r^{-n+2}) \cos n\varphi. \quad (41)$$

A $\varphi = 0, \varphi = \pi$ környezetében megoszló állandó intenzitású terhelés Fourier-sora megegyezik a (32) alattival.

A feszültségekre a (22a—c) alapján az alábbi összefüggések vezethetők le.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \tau_{r\varphi} \end{bmatrix} = \mathbf{F}_0(r) \mathbf{c}_0 + \sum_{n=2,4,\dots} \Lambda_n(\varphi) \mathbf{F}_n(r) \mathbf{c}_n, \quad (42a)$$

ahol

$$\mathbf{F}_0(r) = \begin{bmatrix} r^{-2} & 2 \\ -r^{-2} & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_n(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & & \\ & \cos n\varphi & \\ & & \sin n\varphi \end{bmatrix} \quad (42b-c)$$

$$\mathbf{c}_0^T = [c_0 \ d_0], \quad \mathbf{c}_n^T = [c_n \ d_n \ c'_n \ d'_n] \quad (42e-f)$$

$$\mathbf{F}_n(r) = \begin{bmatrix} (n-n^2)r^{n-2} & (n+2-n^2)r^n & -(n+n^2)r^{-n+2} & (2-n-n^2)r^{-n} \\ -(n-n^2)r^{n-2} & (n^2+3n+2)r^n & (n+n^2)r^{-n+2} & (n^2-3n+2)r^{-n} \\ (n^2-n)r^{n-2} & (n^2+n)r^n & -(n+n^2)r^{-n+2} & (n-n^2)r^{-n} \end{bmatrix}, \quad (3 \times 4)$$

illetve tömörebb felírással (42g)

(42g)

$$\mathbf{F}_n(r) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{+,n}^{(1)} & \mathbf{F}_{-,n}^{(1)} \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(2)} & \mathbf{F}_{-,n}^{(2)} \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(3)} & \mathbf{F}_{-,n}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (42h)$$

(1×2) (1×2)

A $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_n$ ($n = 2, 4, \dots$) ismeretlen állandók meghatározására a (39a—c), (40a—b) peremfeltételek, továbbá a (32) alatti sorbafejtés segítségével az alábbi algebrai lineáris egyenletrendszereket nyerjük:

$$\begin{bmatrix} a^{-2} & 2 \\ b^2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\beta/\pi \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_0 \mathbf{c}_0 = \check{\mathbf{f}}_0(\beta) \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{+,n}^{(1)}(b) & \mathbf{F}_{-,n}^{(1)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(3)}(b) & \mathbf{F}_{-,n}^{(3)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(1)}(a) & \mathbf{F}_{-,n}^{(1)}(a) \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(3)}(a) & \mathbf{F}_{-,n}^{(3)}(a) \end{bmatrix} \mathbf{c}_n = \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_n \mathbf{c}_n = \check{\mathbf{f}}_n(\beta) \quad (44)$$

Felhasználva a (42), (23a—c) kifejezéseket, továbbá a (43), (44) egyenletrendszerek megoldását, az $r = R = b$ sugarú körön fellépő radiális és tangen-

ciális irányú elmozdulásokra a (27)—(28) alattiak figyelembevételével az alábbi összefüggések vezethetők le:

$$\begin{aligned}
 u(b, \varphi) &= u(b, 0) \cos \varphi + \frac{b}{2G} S (1 - \cos \varphi) + \\
 &+ \frac{b}{2G} \sum_{n=2,4,\dots} \frac{S_n - nL_n}{n^2 - 1} (\cos \varphi - \cos n\varphi) = \\
 &= u(b, 0) \cos \varphi + \check{u}(b, \varphi); \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$\check{v}(b, \varphi) = \frac{b}{2G} \left[S \sin \varphi + \sum_{n=2,4,\dots} \left(\frac{n S_n - L_n}{n^2 - 1} \sin n\varphi + \frac{n L_n - S_n}{n^2 - 1} \sin \varphi \right) \right], \quad (46)$$

ahol

$$\begin{aligned}
 S &= c_0 b^{-2} + d_0 (2 - 4\nu), \\
 S_n &= c_n (n^2 - n) b^{n-2} + d_n (n + 1) (n + 2 - 4\nu) b^n + \\
 &+ c'_n (n^2 + n) b^{-n-2} + d'_n (n - 1) (n - 2 + 4\nu) b^{-n}, \\
 L_n &= c_n (n^2 - n) b^{n-2} + d_n (n + 1) (n + 4 - 4\nu) b^n - \\
 &- c'_n (n^2 + n) b^{-n-2} + d'_n (n - 1) (4 - n - 4\nu) b^{-n}. \quad (47a-c)
 \end{aligned}$$

Amennyiben $u(b, 0) = \check{v}(b, \pi/2)$, úgy a (45), (46) képletek a 3b. ábrán vázolt terhelés okozta elmozdulásokat jelentik.

Ezekután rátérhetünk az érintkezési feladat megoldásához szükséges (17) alatt definiált $H^{(1)}$ hatásfüggvény mátrix tagjainak meghatározására.

Mivel a gyűrű középpontján átmenő vízszintes sík és a gyűrű külső perem metszéspontjának ($R = b, \varphi = \pm \pi/2$) függőleges elmozdulását tekintjük zérusnak, így a 4. ábrán vázolt terhelés alapján a hatásfüggvény mátrix elemei

$$\begin{aligned}
 H_{ij}^{(1)} &= \check{u}(b, \varphi_i - \varphi_j) + \check{u}(b, \varphi_i + \varphi_j) + \\
 &+ [\check{v}(b, \pi/2 - \varphi_j) + \check{v}(b, \pi/2 + \varphi_j)] \cos \varphi_i \quad (48) \\
 & \quad i, j = 1, 2, \dots, k,
 \end{aligned}$$

hiszen a $\pm \varphi_j$ szög kis környezetében ($2b\beta$ ívszakaszon) működő terhelésektől nem 90° -ra helyezkedik el az a pont, amelynek függőleges elmozdulását zérusnak tekintjük, hanem $\pi/2 \mp \varphi_j$ szögre. Megjegyezzük, hogy az alakváltozás szimmetriájából következően

$$\check{v}(b, \pi/2 - \varphi_j) = \check{v}(b, \pi/2 + \varphi_j). \quad (49)$$

2.3 A belső és külső peremén véges szakaszon terhelt körgyűrű hatásfüggvény mátrixa

A 3c. ábrán vázolt testet az alábbi egyensúlyi erőrendszer terheli:
az $r = a$ sugarú körön

$$\sigma_r = \begin{cases} 0 & , \quad \beta < \varphi < 2\pi - \beta \\ -\frac{b}{a} [N/mm^2] & , \quad -\beta \leq \varphi \leq \beta \end{cases} \quad (50a-b)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi ; \quad (50c)$$

míg az $r = b$ sugarú körön

$$\sigma_r = \begin{cases} 0 & \beta < \varphi < 2\pi - \beta \\ -1 [N/mm^2] & -\beta \leq \varphi \leq \beta \end{cases} \quad (51a-b)$$

$$\tau_{r\varphi} = 0 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\beta. \quad (51c)$$

A — radiális irányú $p(r)$ nyomás — terheléseket Fourier-sorba fejtve, azt kapjuk, hogy

$$p(a) = \hat{p}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{p}_m \cos m\varphi = \sigma_r(a), \quad (52a)$$

$$p(b) = \check{p}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \check{p}_m \cos m\varphi = \sigma_r(b), \quad (52b)$$

ahol az együtthatók rendre

$$\hat{p}_0 = -\frac{\beta}{\pi} \frac{b}{a}, \quad \check{p}_0 = -\frac{\beta}{\pi}, \quad (53a-b)$$

$$\hat{p}_m = -\frac{b}{a} \frac{2}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m}, \quad (53c)$$

$$\check{p}_m = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m}. \quad (53d)$$

Kiindulva az elmozdulásmező egyértékűségét biztosító

$$\begin{aligned} U = U(r, \varphi) = & c_0 \ln r + d_0 r^2 + \frac{2d'_1}{\nu-1} r\varphi \sin \varphi + \\ & + (c_1 r + d_1 r^3 + c'_1 r^{-1} + d'_1 r \ln r) \cos \varphi + \\ & + \sum_{m=2,3,\dots} (c_m r^m + d_m r^{m+2} + c'_m r^{-m} + b'_m r^{-m+2}) \cos m\varphi \end{aligned} \quad (54)$$

feszültségfüggvényből, a (22a—c) felhasználásával a feszültségekből a (42a) szerint összeállított σ feszültségvektorra az alábbi kifejezést nyerjük:

$$\sigma = \mathbf{F}_0(r) \mathbf{c}_0 + \Lambda_1(\varphi) \mathbf{F}_1(r) \mathbf{c}_1 + \sum_{m=2,3,\dots} \Lambda_m(\varphi) \mathbf{F}_m(r) \mathbf{c}_m, \quad (55)$$

ahol \mathbf{F}_0 , $\Lambda_m(\varphi)$, $\mathbf{F}_m(r)$, \mathbf{c}_0 , \mathbf{c}_m a (42b—g) alatt definiált mátrixok és vektorok ($m \leftrightarrow n$),

$$\mathbf{c}_1^T = [d_1 \ c'_1 \ d'_1], \quad (56)$$

$$\mathbf{F}_1(r) = \begin{bmatrix} 2r & -2r^{-3} & \frac{1+\nu}{1-\nu} r^{-1} \\ 6r & 2r^{-3} & r^{-1} \\ 2r & -2r^{-3} & r^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{(1)}(r) \\ \mathbf{F}_1^{(2)}(r) \\ \mathbf{F}_1^{(3)}(r) \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Az (50a—c), (51a—c) peremfeltételekből egyrészt az (52a—b), (53a—d) alatti sorbafejtések, másrészt az (55)—(57) alatti feszültségek felhasználásával az ismeretlen együtthatók meghatározására az alábbi egyenletek vezethetők le:

$$\begin{bmatrix} a^{-2} & 2 \\ b^{-2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{\pi} \frac{b}{a} \\ -\frac{\beta}{\pi} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}_0 \mathbf{c}_0 = \mathbf{f}_0(\beta) \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1^{(1)}(b) \\ \mathbf{F}_1^{(3)}(b) \\ \mathbf{F}_1^{(1)}(a) \\ \mathbf{F}_1^{(3)}(a) \end{bmatrix} \mathbf{c}_1 = \mathbf{f}_1(\beta) \Rightarrow \mathbf{B}_1 \mathbf{c}_1 = \mathbf{f}_1(\beta) \quad (59)$$

(4×3)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{+,m}^{(1)}(b) & \mathbf{F}_{-,m}^{(1)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,m}^{(3)}(b) & \mathbf{F}_{-,m}^{(3)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,m}^{(1)}(a) & \mathbf{F}_{-,m}^{(1)}(a) \\ \mathbf{F}_{+,m}^{(3)}(a) & \mathbf{F}_{-,m}^{(3)}(a) \end{bmatrix} \mathbf{c}_m = \mathbf{f}_m(\beta) \Rightarrow \mathbf{B}_m \mathbf{c}_m = \mathbf{f}_m(\beta), \quad (60)$$

ahol

$$\mathbf{f}_j^T(\beta) = \left[-\frac{2}{\pi j} \sin j\beta, 0, -\frac{b}{a} \frac{2}{\pi j} \sin j\beta, 0 \right].$$

Az (59) egyenletrendszerből \mathbf{c}_1 egyértelműen meghatározható, mivel a homogén egyenletrendszernek nincs triviálistól különböző megoldása, s a jobb oldallal bővített együttható mátrix rangja három.

A radiális és tangenciális irányú elmozdulások meghatározására szolgáló (27), (28) összefüggésekben szereplő integrálok kiszámításához — felhasználva az (55)—(57), a (42b—g), illetve a (23a—c) kifejezéseket, továbbá az (58)—(60) algebrai egyenletrendszerek megoldásait — a következő kifejezésekhez jutunk:

$$u(R, \varphi) = u(R, 0) \cos \varphi + \frac{R}{2G} S (1 - \cos \varphi) + \frac{R}{4G} (S_1 - L_1) \varphi \sin \varphi + \\ + \frac{R}{2G} \sum_{m=2,3,\dots} \frac{S_m - mL_m}{m^2 - 1} (\cos \varphi - \cos m\varphi) = \quad (61) \\ = u(R, 0) \cos \varphi + \dot{u}(R, \varphi),$$

$$\dot{v} = \dot{v}(R, \varphi) = \frac{R}{2G} S \sin \varphi + \\ + \frac{R}{4G} [(S_1 - L_1) \varphi \cos \varphi + (L_1 + S_1) \sin \varphi] + \quad (62) \\ + \frac{R}{2G} \sum_{m=2,3,\dots} \left[\frac{m S_m - L_m}{m^2 - 1} \sin m\varphi + \frac{m L_m - S_m}{m^2 - 1} \sin \varphi \right],$$

ahol

$$L_1 = d_1 (10 - 8\nu) R - c'_1 2R^{-3} - d'_1 R^{-1}, \\ S_1 = d_1 (6 - 8\nu) R + c'_1 2 R^{-3} - d'_1 \frac{1 - 3\nu}{1 - \nu} R^{-1},$$

míg S , S_m , L_m a (47a—c) képletekben b -nek R -re, illetve n -nek m -re történő cseréjével számítható ki.

A hatásfüggvény felépítése szempontjából két esetet fogunk megkülönböztetni:

1. A vizsgált test A_1 és A_2 pontjainak függőleges irányú elmozdulása zérus ($R = b$, $\varphi = \pm\pi/2$).

2. A test külső körének $\varphi = 0$ egyenessel történő metszéspontjában az elmozdulás zérus ($R = b$, $\varphi = 0$).

Az első esetben az érintkezési feladat vonatkozásában a merevtestszerű elmozdulással rendelkező 1 jelű testről van szó, míg az utóbbi esetben a merevtestszerű mozgást nem végző 2 -es jelű testről.

Az első esetben a hatásfüggvény mátrixot a fenti megtámasztásoknak megfelelően az $R = a$ külső körön, míg a második esetben az $R = a$ belső körön kell kiszámítani.

Tehát az 1 -jelű testnél, ha az elmozdulásokat az $R = b$ sugarú körön számítjuk ($\dot{u}(b, \varphi)$, $\dot{v}(b, \varphi)$) a (61) és (62) szerint, akkor a hatásfüggvény mátrix elemei a (48) szerint állíthatók elő.

Ha a test a 2-es jelű, akkor a számítás valamelyest bonyolultabbá válik, abból adódóan, hogy az $(R = b, \varphi = 0)$ pont a rögzített és a szóban forgó mátrixot a belső körön kell előállítani.

Az $R = a$ sugarú körön levő elmozdulás számításakor jelentse $u(a, 0)$ — a (30b) alatti falvastagság-változást.

A (23a—b), (55)—(60) összefüggések felhasználásával $u(b, 0) = 0$ mellett

$$\begin{aligned}
 u(a, 0) = \int_b^a \varepsilon_r(r, 0) dr = \frac{1}{2G} & \left\{ c_0 \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) + d_0 (2 - 4\nu) (a - b) + \right. \\
 & + d_1 (1 - 4\nu) (a^2 - b^2) + d'_1 \ln a/b + c'_1 (a^{-2} - b^{-2}) + \\
 & + \sum_{m=2,3,\dots} [c_m (b^{m-1} - a^{m-1}) m + d_m (m - 2 + 4\nu) (b^{m+1} - a^{m+1}) + \\
 & \left. + c'_m (a^{-m-1} - b^{-m-1}) m + d'_m (m + 2 - 4\nu) (a^{-m+1} - b^{-m+1}) \right\}. \quad (63)
 \end{aligned}$$

Vagyis az $\check{u}(b, \varphi)$ olyan elmozdulásmezőt jelent, amelyen $\varphi = 0$ környezetében $\pm\beta$ intervallumban hat a terhelés, és az $R = b, \varphi = 0$ pont elmozdulása zérus. Az $u(a, \varphi)$ az ugyanezen terhelésnél és megtámasztásnál fellépő radiális elmozdulást jelenti, ha $u(a, 0)$ a (63) alapján meghatározott érték.

Ezek után a $\mathbf{H}^{(2)}$ mátrix elemeinek kiszámítási képlete — a terhelés $\varphi = 0$ tengelyre vonatkozó szimmetriájából adódóan — egyszerű geometriai megfontolásból nyerhető:

$$\begin{aligned}
 H_{ij}^{(2)} = (u(a, \varphi_i - \varphi_j) + u(a, \varphi_i + \varphi_j) - 2\check{u}(b, \varphi_j) \cos \varphi_i) a/b, \quad (64) \\
 i, j = 1, \dots, k,
 \end{aligned}$$

ahol az a/b hányadossal való szorzás az $r = a$ sugarú körön elhelyezendő egységnyi intenzitású terhelésre utal. (Az elmozdulás számítására levezetett összefüggések a 3c. ábrán vázolt terhelésre vonatkoztak!)

2.4 A kör alakú furattal gyengített tér hatásfüggvény mátrixának felépítése

Az R_2 sugarú furat peremén (4. ábra) radiális irányú $2R_2\beta$ ív mentén megszóló, egységnyi intenzitású $[N/mm^2]$ terhelés a $\varphi = 0$ pontban

$$\begin{aligned}
 u(R_2, 0) = \frac{R_2\beta}{2\pi G} & \left[1 + \kappa \frac{\sin \beta}{\beta} + \frac{(1 - \kappa)(1 - \cos \beta)(\pi - \beta)}{2\beta} - \right. \\
 & \left. - (1 + \kappa) \frac{\sin \beta}{\beta} \ln \left(2 \sin \frac{\beta}{2} \right) \right], \quad (65a)
 \end{aligned}$$

míg a $\varphi = 0$ -tól különböző pontokban

$$u(R_2, \varphi) = -\frac{R_2 \beta}{2\pi G} \left[(1 + \kappa) \cos \varphi \ln \left(2 \sin \frac{|\varphi|}{2} \right) - \frac{(1 - \kappa)(\pi - \varphi)}{2} \sin \varphi \right] \quad (65b)$$

radiális irányú elmozdulást hoz létre ([10], 251. oldal), ahol $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ÁSF, $\kappa = 3 - 4\nu$ SA esetében.

A $H^{(2)}$ mátrix elemei a (65a, b) összefüggésekkel előállított $u(R_2, \varphi)$ segítségével, a (38) értelemszerű felhasználásával számíthatók ki.

2.5 A H mátrix kiszámításának numerikus problémái

A H előállításához szükséges (37), (45), (46) és (61), (62), (63)-ban szereplő végtelen soroknál a sorbafejtés legnagyobb indexét a σ_r -re vonatkozó peremfeltételek $\varphi = 0$ helyen történő teljesezésének mértékével határozzuk meg. Amennyiben a 3a, b, c ábrákon vázolt terheléseknél, a σ_r feszültség hibája 1% alatt van, vagy pedig, ha a sorbafejtés tagjainak a növelése a számítási és kerekítési hibák miatti pontatlanságból adódóan a σ_r értékét rontaná, a sorbafejtéssel megállunk.

Számítástechnikailag nem kis problémát okoz a (44), (60) algebrai egyenletrendszerek megoldása nagy n , illetve m esetén.

Amennyiben az egyenletrendszer együttható mátrixában szereplő $F_{+,n}^{(\alpha)}(R)$ vektorban szereplő mennyiségek jóval nagyobbak az $F_{-,n}^{(\alpha)}(R)$ -ben szereplőknél ($\alpha = 1, 3$; $R = b, a$; $n \leftrightarrow m$), úgy gépi számítás szempontjából a B_n , illetve B_m mátrix determinánusa zérussá válik. Ez fizikailag azt jelenti, hogy a magas felharmónikusoknál a gyűrű külső és belső pereme „végtelen távol” van egymástól, azaz a c_n, d_n, c'_n, d'_n ($n \leftrightarrow m$) állandókat egymástól függetlenül lehet meghatározni.

A 3c. ábrán vázolt terhelésnél a (60)-ból az említett fizikai tény miatt c_m, d_m -re az

$$\begin{bmatrix} F_{+,m}^{(1)}(b) \\ F_{+,m}^{(3)}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_m \\ d_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (66)$$

míg c'_m, d'_m -re az

$$\begin{bmatrix} F_{-,m}^{(1)}(a) \\ F_{-,m}^{(3)}(a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c'_m \\ d'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} \frac{2}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

egyenletrendszerek írhatók fel. Megoldásuk rendre

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m(m-1)} b^{-m+2}; & d_m &= -\frac{1}{\pi} \frac{\sin m\beta}{m(m+1)} b^{-m}; \\ c'_m &= -\frac{b}{a\pi} \frac{\sin m\beta}{m(m+1)} a^{m+2}; & d'_m &= \frac{b}{a\pi} \frac{\sin m\beta}{m(m-1)} a^m. \end{aligned} \quad (68a-d)$$

A kapott megoldásokat behelyettesítve az eredeti (60) egyenletrendszerbe, egyenletenként a hiba mértéke a következő:

$$\begin{aligned} 0_1 &= 0_1 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{m-2} \right], & 0_2 &= 0_2 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{m-1} \right], \\ 0_3 &= 0_3 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{m-2} \right], & 0_4 &= 0_4 \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{m-1} \right], \end{aligned} \quad (69a-d)$$

vagyis a legnagyobb hiba mértéke $(a/b)^{m-1}$ -el arányos, mivel $a/b < 1$.

A 3b. ábrán vázolt terhelésnél $n \gg 2$ esetében (44)-ből hasonlóan állíthatók elő a c_n, d_n, c'_n, d'_n állandók meghatározására szolgáló egyenletrendszerek.

Az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{+,n}^{(1)}(b) \\ \mathbf{F}_{+,n}^{(3)}(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

egyenletből

$$c_n = -\frac{2}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n(n-1)} b^{-n+2}, \quad (71a)$$

$$d_n = \frac{2}{\pi} \frac{\sin n\beta}{n(n+1)} b^{-n} \quad (n \text{ páros}) \quad (71b)$$

míg

$$c'_n = d'_n = 0, \quad (71c)$$

mivel a (67)-hez hasonló egyenletrendszer homogén, együtthatómátrixának determinánsa zérustól különböző. (Nyilvánvalóan a (71a, b) alatti c_n, d_n értékeknek meg kell egyezniük a (35b, c) alatti a_n, b_n állandók értékével, hiszen az $r = a$ sugarú furat hatásával $n \gg 2$ nem számolunk, mintha furat nélküli testről volna szó.)

A (71a, d) megoldásoknak a (44) egyenletekbe történő behelyettesítésével meggyőződhetünk arról, hogy a hiba maximális értéke $(a/b)^{n-2}$ -vel arányos. Így látható, hogy mindkét terhelési típusnál (3b, c ábrák) $\left\{ \frac{n}{m} \right\} \rightarrow \infty$ esetében a hiba zérushoz tart.

3. A $\delta = \delta(F)$ függvénykapcsolat előállítása

A gyakorlati problémák (pl. szerszámgép körvezetékek [12]) mechanikai modelljének előállításakor igényként merülhet fel a 2. fejezetben vizsgált rugalmas rendszer l -jelű alkotó elemére vonatkozó merevtestszerű eltolódás mértékének ismerete az F terhelő erő függvényében. A kérdéses $\delta = \delta(F)$ „rugó karakterisztikát” a következő megfontolások alapján tudjuk előállítani:

A diszkrét F_i terhelés mellett kapott δ_i eltolódásokat ($i = 1, \dots, NST$) a

$$\delta = \sum_{j=1}^{JF} \alpha_j (F)^j \quad (72)$$

polinommal közelítjük. (A zárójel melletti felső index hatványozást jelöl.)

Az α_j állandók a hibanégyzet minimuma elve alapján határozhatók meg. Ezen elv értelmében keressük az

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{NST} \left(\sum_{j=1}^{JF} \alpha_j (F_i)^j - \delta_i \right)^2$$

funkcionál minimumát, azaz az algebrai egyenletrendszer

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_l} = 0, \quad l = 1, \dots, JF,$$

ami részletesebben

$$\sum_{j=1}^{JF} \alpha_j \sum_{i=1}^{NST} (F_i)^j (F_i)^l = \sum_{i=1}^{NST} \delta_i \cdot (F_i)^l, \quad l = 1, \dots, JF \quad (73)$$

alakot ölti.

A $\delta = \delta(F)$ függvény nem-linearitásának mértéke az F terhelés mértékétől függ. Ezért célszerű az NST számú terhelésnél (teherlépcsőnél) kapott pontokra ültetett polinom α_j tényezőinek maximális számát (JF) valamilyen hiba mértékkel megállapítani, pl.

$$r_l = \left| \delta_i - \sum_{j=1}^{JF} \alpha_j (F_i)^j \right| \leq 0,05 \delta_i. \quad (74)$$

Nem érdektelen hangsúlyozni, hogy a hibanégyzet elv alapján meghatározott „rugókarakterisztikát” csak azon terhelési intervallum felett alkalmazhatjuk, amely felett az α_j ($j = 1, \dots, JF$) állandók meghatározást nyertek.

4. Számítási eredmények

A fentiekben ismertetett módszerrel az 1. táblázatban foglalt (ITI, ITIT) állandókkal jellemzett eseteket vizsgáltuk SA és ÁSF állapot feltételezése mellett.

A rugalmas testek geometriai méretei:

Az 1-jelű test belső és külső sugara $R_0 = 20$ mm, $R_1 = 40$ mm; a 2-jelű test belső és külső sugara $R_2 = 40,01425$ mm, $R_3 = 55$ mm, továbbá vastagságuk $V = 20$ mm; a testek anyaga azonos, a csúsztató rugalmassági tényező $G = 0,73575 \cdot 10^5$ N/mm², a Poisson-féle tényező $\nu = 0,3$.

Az F terhelés az 1. táblázat szerinti helyen hat a V vastagságú rendszerre. A terhelés maximális értéke $F_{\max} = 10$ kN, melyet 10 db teherlépcsőben viszünk fel. Az érintkezési feladat felállításánál az altartományok (elemek) osztásszöge $2\beta = 3^\circ$; ily módon a számításokhoz maximálisan $k = 20$ db altartomány felvétele elegendőnek bizonyul.

Az (ITI, ITIT) = (0,0) illetve (ITI, ITIT) = (0,1) esetekben ÁSF állapot feltételezésével elvégzett számítások eredményeit a 2. és 3. táblázatok tartalmazzák, továbbá a 6. és 7. ábrákon az $F = 5$ kN és $F = 10$ kN terhelésnél kialakuló érintkezési nyomás megoszlását láthatjuk a φ szög függvényében. Az említett ábrák tartalmazzák a Hertz-elmélet alapján [11]

2. táblázat

| ÁSF állapot ITI = 0, ITIT = 0 | | $V = 20$ mm, $R_1 = 40$ mm | | | |
|--|--|----------------------------|--------|--------|--|
| Teherlépcső kN | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Max. érintkezési nyomás N/mm ² | 3,724 | 5,365 | 6,670 | 7,828 | |
| 1-jelű test elmozdulása $\delta_i \cdot 10^3$ mm | 0,856 | 1,492 | 2,049 | 2,557 | |
| Érintkező altartományok száma $\varphi > 0$ intervallumon | 4 | 6 | 7 | 8 | |
| Rugókarakterisztika állandói | $\alpha_1 = 0,92285270 \cdot 10^{-6}$ mm/N $\alpha_2 = -1,0606171 \cdot 10^{-10}$ mm/N ² , | | | | |
| Rugókarakterisztika hibája $r_i \cdot 10^3$ mm | 0,029 | -0,007 | -0,016 | -0,008 | |

3. táblázat

| ÁSF állapot ITI = 0, ITIT = 1 | | $V = 20$ mm, $R_1 = 40$ mm | | | |
|--|--|----------------------------|--------|--------|--|
| Teherlépcső kN | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Max. érintkezési nyomás N/mm ² | 3,737 | 5,823 | 7,657 | 9,255 | |
| 1-jelű test elmozdulása $\delta_i \cdot 10^3$ mm | 0,590 | 0,989 | 1,334 | 1,649 | |
| Érintkező altartományok száma $\varphi > 0$ intervallumon | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| Rugókarakterisztika állandói | $\alpha_1 = 0,63878141 \cdot 10^{-6}$ mm/N, $\alpha_2 = -0,87291444 \cdot 10^{-10}$ mm/N ² , | | | | |
| Rugókarakterisztika hibája $r_i \cdot 10^3$ mm | 0,029 | -0,006 | -0,016 | -0,008 | |

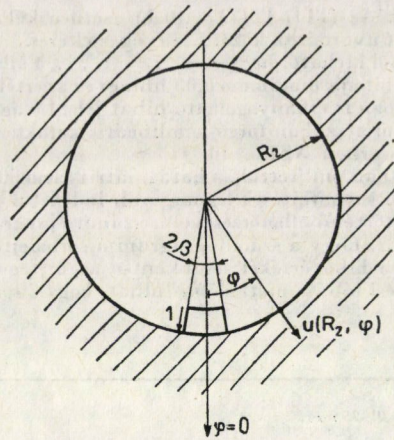
kapott nyomás értékeket is. Az (ITI, ITIT) = (0,1) esetben különösen jól látható a Hertz-elmélet és az általunk kapott nyomások közötti lényeges eltérés.

A 2. és 3. táblázatokból látható, hogy az α_i , $i = 1, \dots, 4$ állandókkal képzett (72) alatti nem-lineáris karakterisztika hibája maximum $0,03 \mu\text{m}$, és ez az érték az 1-jelű test δ_1 eltolódásához képest $\%$ -os viszonyításban is elhanyagolható hibát jelent, vagyis a hibanégyzet minimum elvét sikerrel lehet alkalmazni a szóban forgó nemlineáris karakterisztikák előállítására. Jelen esetben a (73) egyenletrendszerben NST = 10, JF = 4.

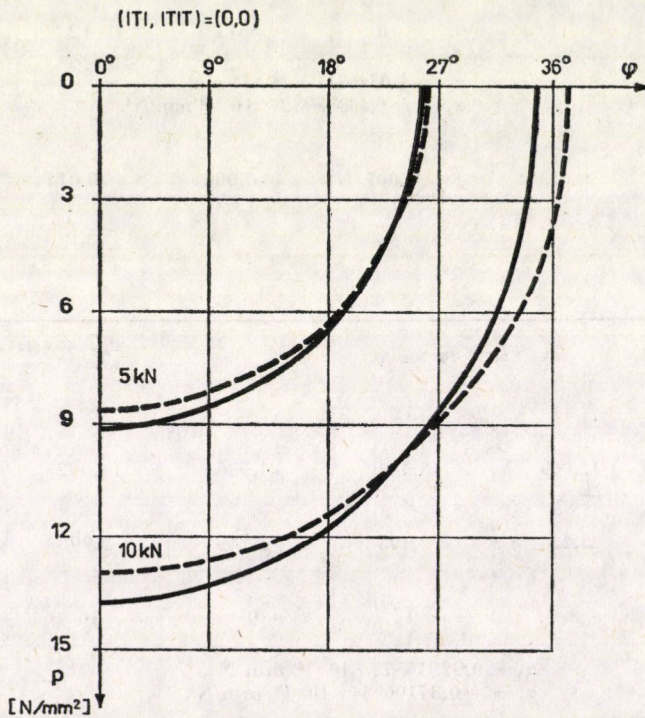
Amint már a 2.5 pontban említettük, a hatásmátrix elemeinek meghatározásakor használatos (37), (61)–(64) alatti sorbafejtések legnagyobb indexét a σ_i -re vonatkozó peremfeltétel $\varphi = 0$ helyen (helyeken) történő ellenőrzésével a számítógép automatikusan állapítja meg. Olyan megoldással élünk, hogy a számítógép a sorbafejtés tagjainak 20-szal történő növelése után megvizsgálja a hiba értékét: csökkent-e az új tagok belépésével, avagy nem. Ugyanis számítási és kerekítési hibák miatt előfordulhat, hogy a sorbafejtés tagjainak belépése

| $R_1 = 40,01425 \text{ mm}, 2\beta = 3^\circ,$ | | | | | | $G = 7,3575 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2,$ $\nu = 0,3, k = 20$ | | | | | |
|--|-------|--------|--------|--------|--------|--|-------|--------|--------|--------|--------|
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 8,878 | 9,863 | 10,806 | 11,709 | 12,596 | 13,436 | 8,878 | 9,863 | 10,806 | 11,709 | 12,596 | 13,436 |
| 3,031 | 3,480 | 3,908 | 4,314 | 4,713 | 5,092 | 3,031 | 3,480 | 3,908 | 4,314 | 4,713 | 5,092 |
| 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 12 |
| $\alpha_3 = 1,0546311 \cdot 10^{-14} \text{ mm/N}^3,$ $\alpha_4 = -0,40835932 \cdot 10^{-18} \text{ mm/N}^4.$ | | | | | | | | | | | |
| 0,005 | 0,013 | 0,007 | -0,008 | -0,011 | 0,007 | 0,005 | 0,013 | 0,007 | -0,008 | -0,011 | 0,007 |

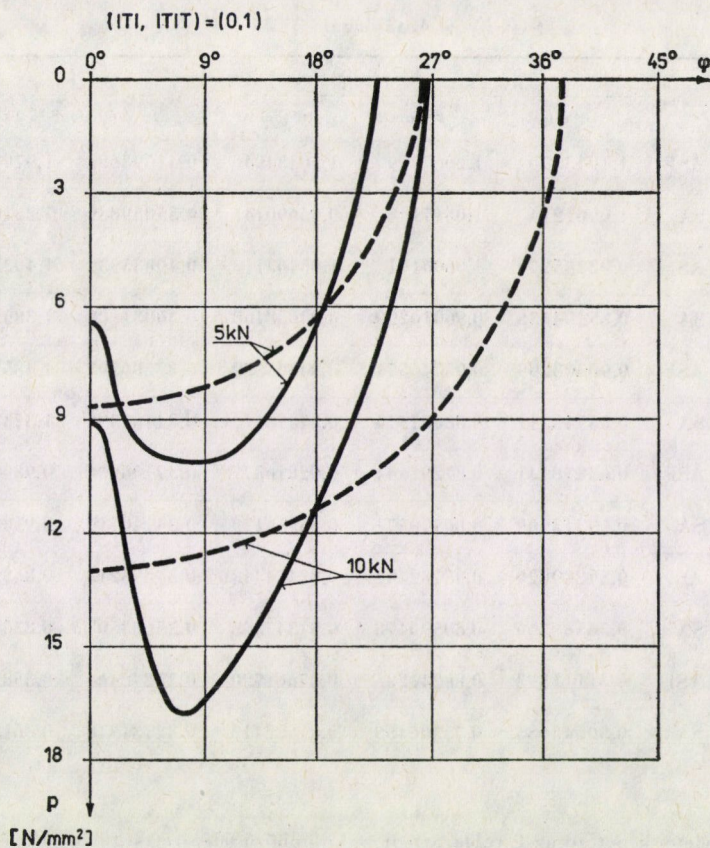
| $G = 7,3575 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2,$ | | | | | | $R_1 = 40,01425 \text{ mm},$ $2\beta = 3^\circ, \nu = 0,3, k = 20$ | | | | | |
|---|--------|--------|--------|--------|--------|---|--------|--------|--------|--------|--------|
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 10,730 | 12,069 | 13,388 | 14,536 | 14,692 | 16,782 | 10,730 | 12,069 | 13,388 | 14,536 | 14,692 | 16,782 |
| 1,947 | 2,226 | 2,493 | 2,749 | 2,998 | 3,236 | 1,947 | 2,226 | 2,493 | 2,749 | 2,998 | 3,236 |
| 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 | 8 | 8 | 9 | 9 | 10 | 10 |
| $\alpha_3 = 0,92816577 \cdot 10^{-14} \text{ mm/N}^3,$ $\alpha_4 = -0,37106934 \cdot 10^{-18} \text{ mm/N}^4.$ | | | | | | | | | | | |
| 0,007 | 0,011 | 0,006 | -0,006 | 0,011 | 0,007 | 0,007 | 0,011 | 0,006 | -0,006 | 0,011 | 0,007 |



5. ábra. Az $u(R_2, \varphi)$ radiális irányú elmozdulás meghatározására szolgáló terhelés, furattal gyengített tér esetében



6. ábra. Az érintkezési nyomás eloszlása (0,0) típusú szerkezetnél $F = 5, 10$ kN terhelés esetében, —: constans elem használatakor, - - -: a Hertz-elmélet alapján



7. ábra. Az érintkezési nyomás eloszlása (0,1) típusú szerkezetnél $F = 5, 10$ kN terhelés esetében
 —: constans elem használatakor, - - : a Hertz-elmélet alapján

nem csökkenti, hanem növeli a hibát. Ebben az esetben a számítóprogram a sorbafejtés tagjainak számát nem növeli, hanem a pontosabban kielégített peremfeltételt adó sorbafejtési tagokkal számolja ki az elmozdulásokat.

Az általunk vizsgált esetben teli táblánál a hiba $\sigma_H^{(1)} = 1 - \sigma_r(\varphi = 0, R = R_1) = -0,0145$ N/mm², azaz abszolút értékét tekintve, 1,5%-nál kisebb; gyűrűnél [lásd (50b) – (51b) alatti peremfeltételeket]

$$\sigma_H^{(1)} = -\frac{R_3}{R_2} + \sigma_r(\varphi = 0, R = R_2) = -0,0093 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_H^{(2)*} = -1 + \sigma_r(\varphi = 0, R = R_3) = 0,0093 \text{ N/mm}^2,$$

míg a sorbafejtés legnagyobb indexe 180.

Az 1. táblázatban felsorolt többi szerkezeti megoldásoknál is hasonló nagyságrendű hibákat kapunk, amelyek jól mutatják a sorbafejtés pontosságát.

A 4. táblázat a 6 fajta szerkezetnél — SA és ÁSF állapotoknál — elvégzett számítási eredményekből kiragadott α_i $i = 1, \dots, 4$ rugókarakterisztika állandókat, továbbá az 1-es test általunk kiválasztott pontjainak $(\varphi = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}; R = R_1)$ $F = 2$ kN és 4 kN terheléseknél kapott függőleges δ elmozdulását tartalmazza. Szerkezet típusokként az utóbbiak összevetéséből jól látható a nemlinearitás.

4. táblázat

| Típus | Állapot | A rúgókarakterisztika állandói | | | | $\delta_{\text{m}} \mu\text{m}$ | |
|----------|---------|------------------------------------|--|--------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------|----------|
| | | $\alpha_1 \cdot 10^6 \text{ mm/N}$ | $-\alpha_2 \cdot 10^{10} \text{ mm/N}^2$ | $\alpha_3 \cdot 10^6 \text{ mm/N}^3$ | $-\alpha_4 \cdot 10^8 \text{ mm/N}^4$ | F = 2 kN | F = 4 kN |
| ITI = -1 | ÁSF | 1,1943376 | 1,2067079 | 1,1043494 | 0,41598684 | 1,9791 | 3,4396 |
| ITIT = 0 | SA | 1,0961214 | 1,0617148 | 0,94690141 | 0,35039889 | 1,8310 | 3,1959 |
| ITI = 0 | ÁSF | 0,92285270 | 1,0606171 | 1,0546311 | 0,40835932 | 1,4921 | 2,5575 |
| ITIT = 0 | SA | 0,85294536 | 0,96010299 | 0,94058468 | 0,36031108 | 1,3865 | 2,3777 |
| ITI = 1 | ÁSF | 0,90308299 | 0,95746571 | 0,94305882 | 0,37286593 | 1,4851 | 2,2850 |
| ITIT = 0 | SA | 0,83545211 | 0,88857474 | 0,87478172 | 0,34467396 | 1,3733 | 2,3845 |
| ITI = 0 | ÁSF | 0,63878141 | 0,87291444 | 0,92816577 | 0,37106934 | 0,9899 | 1,6491 |
| ITIT = 1 | SA | 0,59313669 | 0,80970571 | 0,85564179 | 0,34140719 | 0,9183 | 1,5300 |
| ITI = -1 | ÁSF | 0,59289829 | 0,95782491 | 0,97454443 | 0,37893213 | 0,8682 | 1,3581 |
| ITIT = 1 | SA | 0,56588260 | 0,89590478 | 0,91347363 | 0,35603505 | 0,8358 | 1,3180 |
| ITI = 1 | ÁSF | 0,31111393 | 0,80241235 | 0,87601720 | 0,35242464 | 0,3583 | 0,4249 |
| ITIT = 1 | SA | 0,30543655 | 0,75306459 | 0,81622418 | 0,32731346 | 0,3618 | 0,4519 |

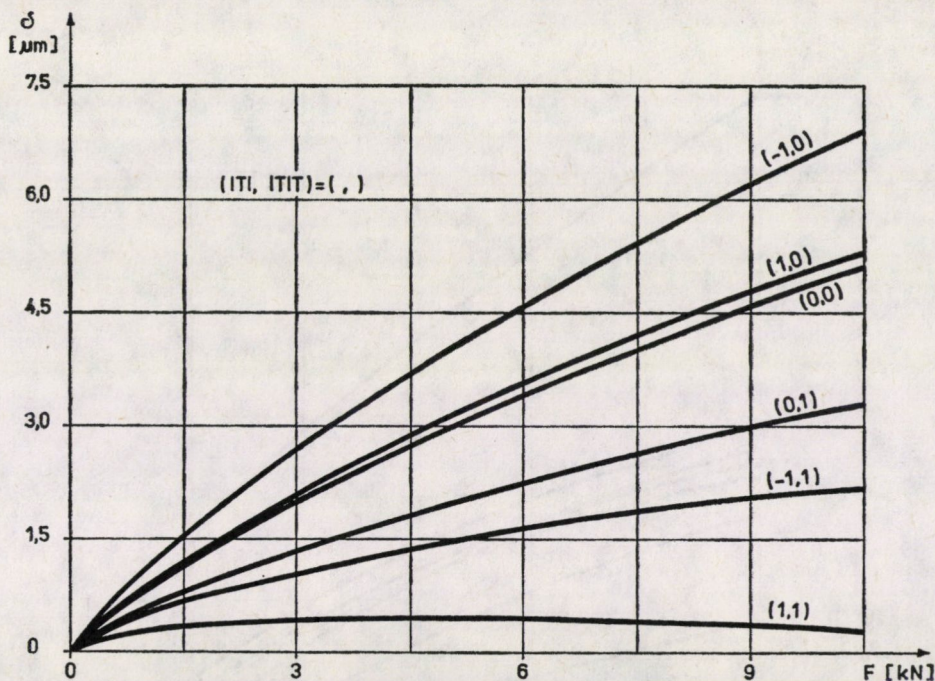
Szemléletes képet ad az 1. táblázatbeli — különböző felépítettségű és terhelésű — rugalmas rendszerek merevségéről a 8. ábra, amely a $\delta = \delta(F)$ függvénykapcsolatot. „rúgókarakterisztikát” szemlélteti. Leglágább (ITI, ITIT) = (-1,0) rendszer s legmerevebb az (1,1) típusú. Ez könnyen magyarázható. A (-1,0) típusnál az ismert terhelés az 1-jelű gyűrűre a külső peremen, míg az (1,1)-nél a belső peremen hat, továbbá a (-1,0)-nál a 2-jelű test a végtelen távoli pontban, míg a másiknál a ($\varphi = 0, R = R_3$) pontban van megfogva; a terheléssel egyensúlyt tartó reakcióerők a végtelenben, illetve a 2-jelű gyűrű külső peremén az érintkezési tartomány által meghatározott sugár által kijelölt ív mentén működnek. Az is világos, hogy a terhelés és a rendszer felépítettségéből adódóan páronként a (-1,0) típustól az (1,0), továbbá a (0,0)-tól a (0,1), s végezetül a (-1,1)-től az (1,1) típusnak kell merevebbnek lennie. Ezt a tényt a $\delta = \delta(F)$ függvények is jól érzékeltetik.

Külön figyelmet érdemlő az (1,1) típusnál a ($\varphi = \pi/2, R = R_1$) pont δ függőleges elmozdulásának változása az F terhelőerő függvényében. A gyűrűalakú testek bonyolult deformációinak következtében — amire a 7. ábrán vázolthoz hasonló jellegű p érintkezési nyomáseloszlás is utal — a $\delta = \delta(F)$ függvény egy bizonyos F értékén túl „lágylul” karakterisztikával rendelkezik.

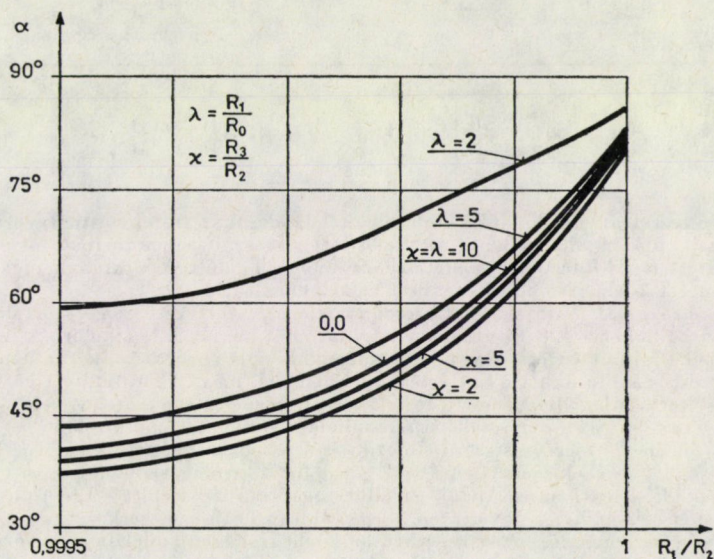
Megjegyzendő, hogy a 6. ábrán vázolt alakú p függvényt a (0,0)-n kívül a (-1,0), (-1,1) típusoknál, míg a 7. ábrán vázolt alakút a (0,1) és az (1,1) típusokon kívül a (1,0)-nál is találunk.

Természetesen a 8. ábrán vázolt $\delta = \delta(F)$ függvénytől eltéréket kapunk akkor, ha az 1-es test merevtestszerű elmozdulását a jelen számításban szereplő $\left(\varphi = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}, R = R_1\right)$ pontok helyett pl. a ($\varphi = 0, R = R_1$) vagy ($\varphi = \pi, R = R_1$) pontokat választjuk. Ezekbe az esetekben a hatásfüggvénymátrix elemeit a 2. pontban leírtak értelemszerű módosításával lehet kiszámolni. Ettől a dolgozat jelenlegi keretein belül eltekintünk.

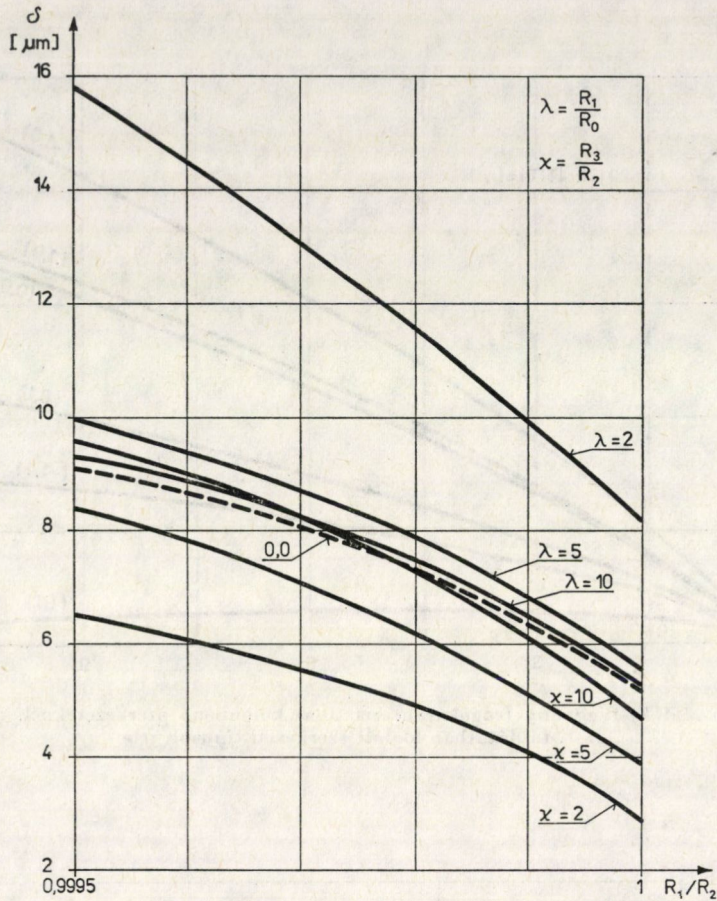
Az alábbiakban a (-1,0) és a (0,1) típusú feladatokat különböző $\lambda = R_1/R_0, \chi = R_3/R_2$ értékeknél fogjuk vizsgálni az R_1/R_2 függvényében. A terhelés mindegyik esetben $F = 10 \text{ kN}$,



8. ábra. A $\delta = \delta(F)$ függvény (rugókarakterisztika) különböző szerkezeteknél. (ITI, ITIT) az 1. táblázatban foglalt szerkezeti típusok jele



9. ábra. Az érintkezési tartomány felének átfogási szöge az R_1/R_2 függvényében $(-1,0)$ és $(0,1)$ szerkezet típusnál különböző $\lambda = R_1/R_0$, $\chi = R_3/R_2$ értékeknél



10. ábra. $\delta = \delta\left(R_1/R_2, \begin{cases} \lambda = \text{áll.} \\ \chi = \text{áll.} \end{cases}\right)$ eltolódás függvénye a $\begin{Bmatrix} (-1,0) \\ (-0,1) \end{Bmatrix}$ szerkezet típusoknál

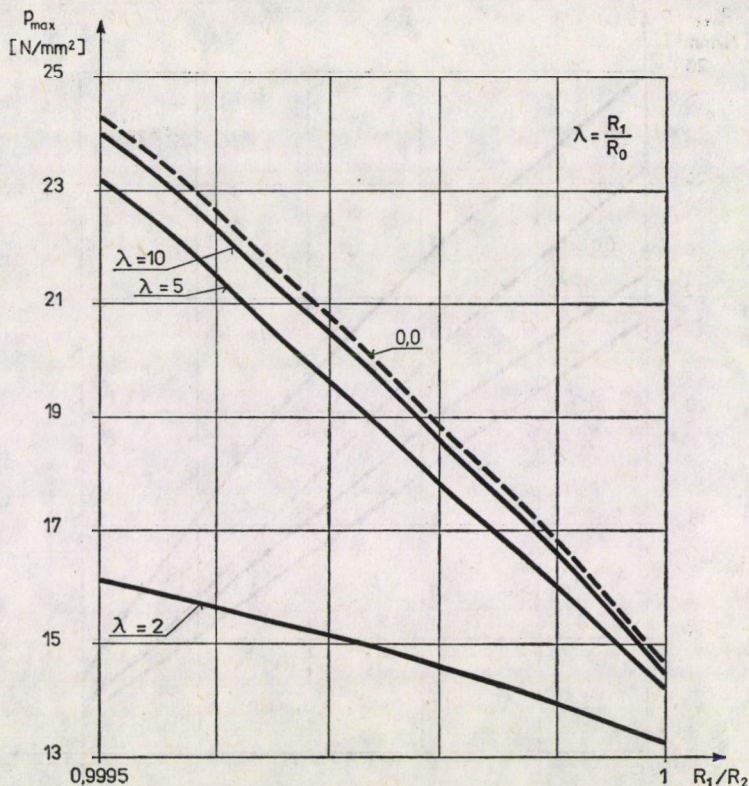
az 1- és 2-jelű testek anyagállandói a korábbiakkal azonosak; a testek vastagsága $V = 10$ mm, a bennük kialakuló feszültségállapot általánosított síkfeszültséghez tartozó.

Rögzített R_1 és R_2 értékek mellett $\lambda \rightarrow \infty$ -nél az 1-jelű test furatának sugara zérushoz, míg $\chi \rightarrow \infty$ -nél a 2-jelű test külső sugara a végtelenhez tart.

A 9. ábra az Ω_p érintkezési tartomány felének α átfogási szögét tartalmazza R_1/R_2 függvényében, különböző λ és χ értékeknél. Jól látható, hogy a $\lambda = \text{áll.}$ görbék felülről, míg a $\chi = \text{áll.}$ görbék alulról közelítik meg a (0,0) típusnál kapott görbét. A diagramban felvitt pontok az elvégzett számításokból nyert értékeknek felelnek meg. A feltüntetett görbék jól érzékeltek, hogy terheletlen állapotban, a testek közötti hézag értéke erőteljes befolyást gyakorol az α értékére, továbbá az α maximális értéke minden esetben 90° -nál kisebb.

A 10. ábrán a δ merevtestszerű elmozdulás értékeit szemléltetjük az R_1/R_2 függvényeken különböző λ, χ értékek mellett. A $\lambda = 2$ görbe fut a legmagasabban, a $\chi = 2$ pedig a legalacsonyabban. Első esetben az 1-jelű test falvastagsága a legkisebb (-1,0) típusú szerkezet, második esetben a 2-jelű test úgyszintén a legkisebb (0,1) típusú szerkezet. Az elmozdulások közti különbség nyilvánvaló: az első esetben az 1-jelű test igen hajlékony, második esetben a 2-jelű test ($\varphi = 0, R = R_3$) pontja nem mozdul el, továbbá δ a 2-jelű test $\varphi = 0$ sugárirányú falvastagságváltozásából és az 1-jelű test $\varphi = 0$ sugárirányú összenyomódásából tevődik össze.

A $\lambda \rightarrow \infty$ felülről közelíti meg a (0,0)-nál kapott görbét, jóllehet az $R_0 \rightarrow 0$ átmenetnél nem kapjuk meg a teli táblához tartozó feszültségmezőt (a gyűrűhöz tartozó megoldás $R = R_0$



11. ábra. A $(-1,0)$ szerkezet típusnál $\varphi = 0$ -nál ébredő p_{\max} maximális érintkezési nyomás változása az R_1/R_2 függvényében különböző $\lambda = R_1/R_0$ értékeknél

sugarú körön $\sigma_r = 0$, $\tau_{r\varphi} = 0$ peremfeltételt elégít ki, míg a teli táblánál az $R = 0$ helyen $\sigma_r = \sigma_\varphi \neq 0$; lásd (36a, b) képletet). Gyakorlatilag a feszültségmezők különbsége az $R = R_1$ sugarú perem elmozdulására már nem gyakorol észlelhető befolyást.

A $\chi \rightarrow \infty$ alulról „nem tisztán” közelíti a $(0,0)$ jelű görbét, amit a gyűrűre és a furattal gyengített síkra vonatkozó megoldások felépítésének különbségével lehet magyarázni. A gyűrűnél a külső peremnek csak az érintkezési tartomány által meghatározott szakaszán hat normálirányú feszültség, míg a furattal gyengített síknál a végtelenben „mindenütt” ébrednek feszültségek.

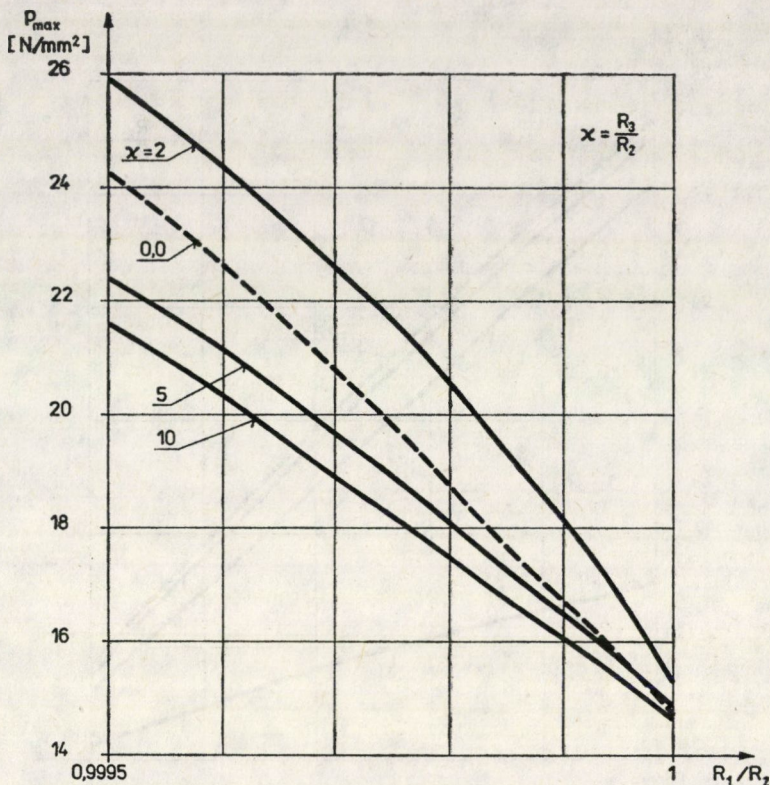
Végezetül a 11. és 12. ábrán vázolt diagramok a maximális érintkezési feszültségeket tüntetik fel. A $\lambda = \text{áll.}$ görbéknel a p_{\max} a $\varphi = 0$ helyen ébred, míg a $\chi = \text{áll.}$ görbéknel $\varphi = 0$ -tól különböző helyeken. Mivel a $\lambda = 2$ -nél volt az α a legnagyobb, így nincs mit csodálkoznunk azon, hogy ennél a geometriánál kapjuk a legkisebb értékű maximális érintkezési nyomást. A növekvő értékű λ görbék alulról közelítik meg a $(0,0)$ jelűt. Ennek fordítottja a 12. ábrán vázolt $\chi = \text{áll.}$ görbéknel már nem áll fenn a korábban vázolt (7. ábra) nyomásnak a $(0,0)$ -nál kapottól (6. ábra) eltérő megoszlásából adódóan.

Az

$$\alpha = \alpha \left(R_1/R_2, \left\{ \begin{array}{l} \lambda \\ \chi \end{array} \right\} \right) \quad \text{és} \quad p_{\max} = p_{\max} \left(R_1/R_2, \left\{ \begin{array}{l} \lambda \\ \chi \end{array} \right\} \right)$$

görbék összhangjára utal az is, hogy növekvő R_1/R_2 -nél α nő, p_{\max} csökken. Érdekes tényként említhetjük meg, hogy a diszkrét λ és χ görbék közötti különbség R_1/R_2 növekedésével szintén csökken.

* * *



12. ábra. A (0,1) szerkezet típusnál keletkező $p_{\max} = p_{\max}(R_1/R_0, \chi = \text{áll.})$ függvény

A jelen dolgozat megszületését elősegítette a Szerszámgépipari Művek Fejlesztő Intézete megbízásából a Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszéke által elkészített Sam. 159-XXVIII-3/1975. számú szerződéses munka.

IRODALOM

1. Штаерман, И. Я.: Контактная задача теории упругости, Гостехиздат М. Л. 1946
2. Косов, М. Г.: Некоторые контактные задачи теории упругости применительно к телам повышенной изгибной податливости Сб. «Валновые передачи» Московский станкоинструментальный институт М. 1970
3. Божкова, Л. В., Паненкова, Т. П.: О контактом взаимодействии цилиндрической оболочки упругого основания. Труды VII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок, Днепропетровск 1969, издательство «Наука» М. 1970
4. PÁCZELT, I.: Some Remarks on the Approximate Solution of Frictionless Elastic Contact Problems. *Acta Techn. Scien. Hung.* **83** (1976), 337—355
5. PÁCZELT, I.: Solution of Elastic Contact Problems by the Finite Element Displacement Method. *Acta Techn. Scien. Hung.* **82** (1976), 353—375
6. DANTZIG, G. B.: Linear Programming and Extensions. Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1963
7. KÜNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962
8. PÁCZELT, I.: Some Remarks to the Solution of Quadratic Programming Problems. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Series D. Natural Sci.* **33** (1979), 137—156

9. Лурье, А. И.: Теория упругости, издательство «Наука», М., 1970
 10. Вайнберг, Д. В.: Справочник по прочности, устойчивости и колебаниям пластин
 Издательство «Будивельник», Киев 1973
 11. Расчёты на прочность в машиностроении, издательство «МАШГИЗ», Москва 1958
 12. Левина, З. М.— Решетов, Д. Н.: Контактная жёсткость машин, издательство «Машиностроение», Москва 1971

Solution of Some of the Theories of Plane Elasticity Contact Problems. — By assuming that the friction between bodies may be neglected and the deformations are small, the contact pressure developed resulting between the bodies, the region of contact, further, the degree of displacement of a body possessing a rigid-body-like displacement are looked for depending on the loading force. In case of assuming a generalized plane stress pattern, the parts of the elastic systems investigated are circle, annular, a plane of infinite extension weakened by a circular hole or, in case of a plane deformation, a cylindrical body defined by the above geometries or an elastic space weakened by a circular hole. For the establishment of the action functions presenting themselves in building up the quadratic programming problem, by making use of the Airy stress function a suggestion is made also including the problem occurring in the calculations. Finally, the calculations demonstrate the way of solving the contact problems outlined above.

Lösung einiger Kontaktprobleme der Planelastizitätslehre mit Hilfe der quadratischen Programmierung. — Mit der Annahme, daß die zwischen den Körpern auftretende Reibung vernachlässigt werden kann und die Verformungen klein sind, werden der Kontaktdruck, der Kontaktbereich, weiters die Größe der Versetzung des eine starrkörperartige Verschiebung besitzenden Körpers in Abhängigkeit der Belastungskraft gesucht. Die Teile der untersuchten elastischen Systeme sind bei Voraussetzung von eines ebenen Spannungszustands — eine kreisförmige, kreisringförmige, mit einem kreisförmigen Loch abgeschwächte Scheibe von unendlicher Ausdehnung — oder im Fall von ebener Verformung, ein zylindrischer Körper mit durch die obenerwähnten Geometrien definiertem Querschnitt bzw. durch ein Kreisloch abgeschwächter elastischer Raum. Zum Aufbau bei der Aufstellung der Programmierungsaufgabe vorkommender Wirkungsfunktion schlagen die Autoren eine Methode bei Anwendung der Airyschen Spannungsfunktion vor, die bei den Berechnungen angewendet werden können. Schließlich demonstrieren die durchgeführten Berechnungen die obengeschilderte Art der Lösung der Kontaktprobleme.

KRITIKUS TÖKÉLETLENSÉGI TARTOMÁNY

GÁSPÁR ZSOLT*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. október 21-én]

1. Bevezetés

Rugalmas szerkezetek statikai vizsgálatakor a következő kérdések merülhetnek fel:

- a) Adott tehet hatására mekkorák az elmozdulások és feszültségek?
- b) Mekkora a kritikus teher?
- c) Az elkerülhetetlen tökéletlenségek hatására mennyire csökkenhet a kritikus teher?
- d) A posztkritikus állapotban esetleg mennyire fokozható még a terhelés?

A fenti kérdések általában megválaszolhatók a diszkretizált konzervatív rendszerek potenciálfüggvényének vizsgálata alapján [1, 2].

Az elmozdulásokat általában egy nemlineáris egyenletrendszer megoldásai adják. Az egyparaméteresnek feltételezett teher kritikus paraméterét szintén egy nemlineáris egyenletrendszer határozza meg, de megoldására egy saját értékeladat megoldását is magába foglaló iterációs eljárás javasolható.

A tökéletlenség-érzékenység vizsgálatakor — mely e cikk témája — a katasztrófaelmélet [3, 4, 5] eredményeit használjuk fel. A posztkritikus állapot vizsgálatakor az elágazott egyensúlyi utak elemzésére is szükség van. A mérnöki létesítményeken a következő katasztrófafajták jöhetnek létre:

Egy megépült szerkezeten csak egy paraméter (az idő) van, így Thom-tétele szerint csak a ránc katasztrófa létrejötte valószínű. A mérnökök azonban gyakran terveznek szimmetrikus szerkezeteket, vizsgálnak szimmetrikus hatásokat. Ilyenkor a „tökéletes szerkezeten” csúcs katasztrófa is létrejöhet. Az optimalizációs eljárás során a tervező gyakran arra törekszik, hogy a szerkezet a stabilitását ugyanannál a tehernél veszítse el a különböző stabilitásvesztési módokban [6]. Két kihajlási mód összeesése általában hiperbolikus vagy elliptikus köldök létrejöttét eredményezi. Ha azonban mindkét elágazási irányban szimmetrikus a szerkezet, akkor kettős csúcs katasztrófa keletkezhetik. Ezzel, bonyolultsága miatt, nem foglalkozunk ebben a cikkben.

A diszkretizált szerkezet teljes potenciális energiája

$$V(q, \lambda, \alpha), \quad (1)$$

* Dr. Gáspár Zsolt, 1111 Budapest, BME Műegyetem rkp. 3.

ahol $q = [q_1, \dots, q_n]$ az elmozdulásokat leíró általánosított koordináták vektora, λ az egyparaméteresnek feltételezett teher paramétere, $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ az általánosított tökéletlenség-koordináták vektora. Tökéletes szerkezetnek az $\alpha = 0$ esetet nevezzük. A potenciálfüggvény a λ teherparaméter lineáris függvénye.

Jelölje λ^c azt a teherparamétert, melynél a tökéletes szerkezet a λ fokozatos növelésével először jut kritikus állapotba. A hozzá tartozó elmozdulás q^c . Az (1) potenciálfüggvényt a $(q^c, \lambda^c, 0)$ pont környezetében fogjuk vizsgálni. A vizsgálathoz először a

$$q = q^c + \hat{q}, \quad \lambda = \lambda^c + \lambda$$

transzformációkkal az origót a vizsgálandó pontba toljuk, majd a q változók szerint sorbafejtjük a függvényt. POSTON és STEWART [5] 154. oldala alapján ránc katasztrófa, elliptikus és hiperbolikus köldök esetében a sorfejtést elegendő a harmadfokú tagokig végezni, a csúcskatasztrófánál a negyedfokú tagok is kellenek.

Az aktív és passzív koordináták szétválasztása történhetik THOMPSON és HUNT [6] vagy POSTON és STEWART [5, 150. o.] algoritmus alapján. A vizsgálatainkat csak a leválasztott, az aktív koordinátákat tartalmazó résszel végezzük.

2. A kritikus tökéletlenségi tartomány

A szerkezetnek és a terheknek a tervezettől való eltérését (tökéletlenséget) az α általánosított koordinátákkal jellemezzük. Hatásukat igyekszünk figyelembe venni az olyan alacsonyabb fokú tagokban, melyek együtthatója $\alpha = 0$ esetében zérus. Ha túl sok paraméter adódik, akkor a számítás kezelhetősége érdekében a magasabb fokú tagok zavarását nem vesszük figyelembe, ugyanis ezeknek általában kisebb a hatásuk ([7] 93. o.). Az energiafüggvényen olyan transzformációkat végzünk, hogy a független paraméterek számát minimalizáljuk. A valóságos szerkezet eltérése a tervezett (tökéletes) szerkezettől korlátozott. E korlátok a paramétertér egy résztartományával megadhatók.

Valamely teherparaméterhez tartozó *kritikus tökéletlenségi tartomány* pontjait azon tökéletlenségek alkotják, melyek esetében a kritikus teher paramétere kisebb e teherparaméternél. Kritikus tehernek azt a legkisebb terhet tekintjük, amelynél a kezdeti stabil egyensúlyi helyzet labilissá válik.

A kritikus tökéletlenségi tartomány a következő lépésekben határozható meg:

a) Megállapítandó a katasztrófa típusa, és meg kell határozni azokat a transzformációkat, amelyek e katasztrófa egy kanonikus alakját az aktuális potenciálfüggvény alakjára transzformálják.

b) A kanonikus alak elágazási halmazából el kell hagyni azokat a részeket, melyeken keresztülhaladva a minimumpontok száma nem változik. Fel kell írni a megmaradt rész egyenletét (általában paraméteres alakban).

c) Meg kell állapítani, hogy a megmaradt elágazási halmaz által a paraméterterben kialakított tartományok közül melyekben van minimumpont, és ellenőrizendő, hogy a tökéletes szerkezet kritikus terhénél kisebb teher esetében valóban stabil volt-e az egyensúlyi állapot.

d) A teherparaméter változtatása a paraméterterben egy görbét határoz meg. Megállapítandó, hogy az elágazási halmazon való keresztülhaladás milyen típusa szünteti meg az eredeti minimumpontot.

e) Az elágazási halmaz paraméteres alakjának és a korábban meghatározott transzformációk ismeretében megállapítandó, hogy rögzített teherparaméter esetében hogy néz ki a kritikus tökéletlenségi tartomány, valamint az, hogy a teherparaméter függvényében hogyan változik a tartomány.

A 3—6. pontokban a ránc, a csúcs, a hiperbolikus és az elliptikus köldök esetében e lépésekkel kritikus tökéletlenségi tartományokat határozunk meg. Némelyik esetben egy-egy lépés triviális is lehet, de mindegyik lépést jelezzük az $a—e$ betűkkel.

Az egyes katasztrófák esetében egy adott teherparamétert felvéve, a tökéletlenségi paraméterek terét három tartományra osztjuk, és ezeket a következők szerint sorszámozzuk is:

1. Az adott teherparaméterhez tartozó kritikus tökéletlenségi tartomány.
2. Azon tökéletlenségek, melyeknél a kritikus teher kisebb a tökéletes szerkezet kritikus terhénél, de nagyobb az adott tehernél.
3. Azon tökéletlenségek, melyeknél a tökéletes szerkezet kritikus terhénél kisebb teher esetén nincs stabilitásvesztés.

A 2. és 3. tartomány megkülönböztetése elvileg nem lényeges, de általában jól szemlélteti a kritikus tökéletlenségi tartomány változásának szabályait.

A legveszélyesebb lehetséges tökéletlenség és a hozzá tartozó (minimális) kritikus teher meghatározása annak a paraméternek a kikeresését jelenti, amelyhez tartozó kritikus tökéletlenségi tartomány érinti a paraméterter azon résztartományát, amely a megengedett eltéréseket mutatja.

3. Ránc katasztrófa

A ránc katasztrófa egy kanonikus alakja:

$$f(u, a) = \frac{1}{3} u^3 - au. \quad (2)$$

a) A vizsgálandó potenciálfüggvénynek a kritikus pontban ránc katasztrófa alakja van, ha az általános alakja:

$$V' = c_1 x^3 + \varepsilon_1' x^2 + \varepsilon_2' x - \lambda (c_2 x^2 + c_3 x), \quad (3)$$

ahol x az egyetlen aktív általánosított koordináta, $c_1 \neq 0$, ε'_1 és ε'_2 az α tökéletlenségek függvénye, és $\varepsilon'_1(0) = \varepsilon'_2(0) = 0$. A tökéletes szerkezeten általában $c_3 \neq 0$, de kivételes esetekben nulla is lehet. Ha $c_3 = 0$, akkor az a tipikus, hogy $c_2 \neq 0$. A $c_2 = c_3 = 0$ esettel nem foglalkozunk. A $c_3 \neq 0$ és a $c_3 = 0$ esetet külön tárgyaljuk. Először a $c_3 \neq 0$ esetet tárgyaljuk.

a1. Először a függvényt egyszerűbb alakra transzformáljuk. A (3) egyenletet elosztjuk a $3c_1(1 + c_2x/c_3)$ kifejezéssel, és a korábbiaknak megfelelően az x -ben harmadnál magasabb fokú tagokat elhagyhatjuk, továbbá az egység mellett a tökéletlenségeket az együtthatókban elhanyagoljuk. Az x -től nem függő tagok a vizsgálat szempontjából érdektelenek, ezért itt is és a továbbiakban is elhagyjuk azokat. Így

$$V'' = \frac{1}{3}x^3 + \varepsilon_1''x^2 + \varepsilon_2''x - \lambda cx \quad (4)$$

adódik, ahol

$$\varepsilon_1'' = \frac{c_3 \varepsilon'_1 - c_2 \varepsilon'_2}{3c_1 c_3}, \quad \varepsilon_2'' = \frac{\varepsilon'_2}{3c_1}, \quad c = \frac{c_3}{c_1}.$$

Az $x = y - \varepsilon_1''$ lineáris transzformációval (4)

$$V(y, \lambda, \varepsilon) = \frac{1}{3}y^3 + \varepsilon y - \lambda cy \quad (5)$$

alakú lesz, ahol $\varepsilon = \varepsilon_2'' - (\varepsilon_1'')^2$. ε magába foglalja a (3) függvényben szereplő összes tökéletlenséget. (2) és (5) ekvivalens, mert az

$$\begin{aligned} u &= y, \\ a &= \varepsilon - c\lambda \end{aligned} \quad (6)$$

Aanszformációkkal

$$f(u, a) = V(y, \lambda, \varepsilon).$$

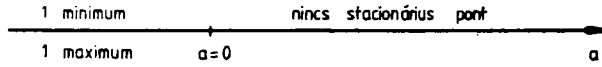
b1. Az (1) ránc katasztrófa esetében a kinyitási (unfolding) tér egydimenziós, az elágazási halmaz egy pont:

$$a = 0. \quad (7)$$

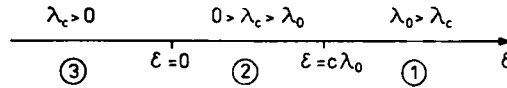
Az 1. ábra mutatja, hogy a kinyitási tér mely tartományban milyen stacionárius pontok vannak. Az elágazási halmaz két oldalán a minimumpontok száma különbözik.

c1. Csak az $a < 0$ esetben van minimumpont, így $\varepsilon = 0$, $\lambda < 0$ esetben negatív a értéket kell kapni, tehát $c < 0$ kell hogy legyen.

d1) Egy negatív a értékből indulva, az elágazási halmazt elérve, a minimumpont találkozik a másik stacionárius ponttal, keresztülhaladva a halmazon, mindkettő megszűnik.



1. ábra



2. ábra

e1) A (6)–(7) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a változót, és kifejezzük az ε változót:

$$\varepsilon = c\lambda. \tag{8}$$

Rögzített $\lambda_0 < 0$ esetében az $\varepsilon_0 = c\lambda_0$ pont adja meg azt a tökéletlenséget, amely esetében a kritikus teher paramétere éppen $\Lambda^c + \lambda_0$. Az ε_0 pontnak az origótól mért távolsága λ_0 lineáris függvénye. A tökéletlenségi tér három tartományát a 2. ábra szemlélteti.

A következőkben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a tökéletes szerkezeten a (3) egyenletben $c_3 = 0$, de $c_2 \neq 0$.

a2) Ekkor $c_3 = \varepsilon'_3$ a tökéletlenségek függvénye. A (3) függvényt elosztva $3c_1$ -gyel, majd az $x = y - \varepsilon'_1/(3c_1)$ lineáris transzformációt alkalmazva

$$V(y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{3} y^3 + \varepsilon_1 y - \lambda (cy^2 + \varepsilon_2 y) \tag{9}$$

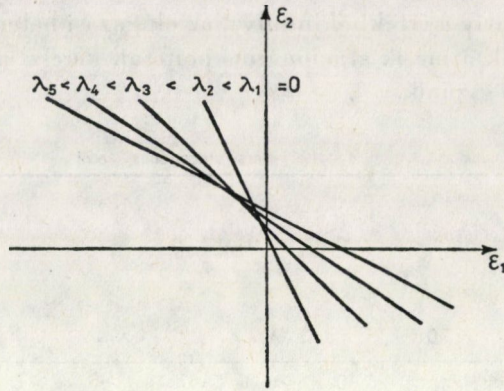
adódik, ahol

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon'_2}{3c_1} - \frac{(\varepsilon'_1)^2}{9c_1^2}, \quad c = \frac{c_2}{3c_1},$$

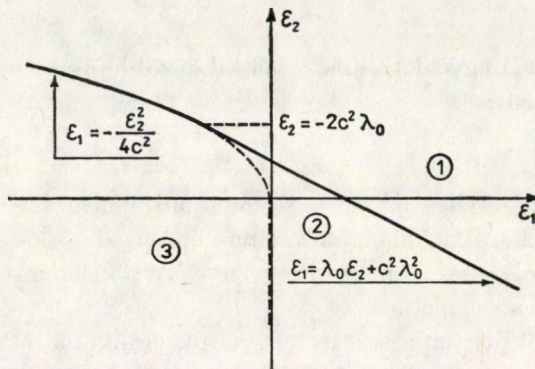
$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon'_3}{3c_1} - \frac{2c_2 \varepsilon'_1}{9c_1^2}.$$

A (9) kifejezésben ε_1 és ε_2 magába foglalja a (3) függvényben szereplő mindhárom tökéletlenséget ($\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, c_2 = \varepsilon'_3$). A (2) és (9) ekvivalens, mert az

$$\begin{aligned} u &= y - c\lambda, \\ a &= \varepsilon_1 - \lambda \varepsilon_2 - c^2 \lambda^2 \end{aligned} \tag{10}$$



3. ábra



4. ábra

transzformációkkal

$$f(u, a) = V(y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \gamma(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

b2. lásd b1.

c2. Csak az $a < 0$ esetben van minimumpont, így $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\lambda < 0$ esetben negatív értéket kell kapni. Ez a feltétel bármely $c \neq 0$ esetében teljesül.

d2. lásd d1.

e2. A (6), (10) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a változót, és kifejezzük az ε_1 változót:

$$\varepsilon_1 = \lambda \varepsilon_2 + c^2 \lambda^2. \quad (11)$$

Rögzített $\lambda_0 < 0$ esetében (10) az $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ síkban egy egyenest határoz meg. Az egyenes helyzetét néhány λ értéknél a 3. ábra mutatja. Határozzuk meg a (11) egyenessereg burkológörbéjét! A (11) egyenlet λ szerinti deriváltja:

$$\varepsilon_2 + 2c^2 \lambda = 0. \quad (12)$$

A $\lambda < 0$ miatt $\varepsilon_2 > 0$. A (11), (12) egyenletrendszerből kiküszöbölve λ -át

$$\varepsilon_1 = -\frac{\varepsilon_2^2}{4c^2}. \quad (13)$$

A tökéletlenségi tér három tartományát a 4. ábra tünteti fel. A (13) egyenlettel meghatározott burkológörbe független a λ_0 értékétől. Adott tökéletlenségek esetében a megfelelő érintő egyenest kell megkeresni. Az egyenes és az ε_1 tengely metszéspontja alapján λ_c számítható.

4. Csúcs katasztrófa

A csúcs katasztrófa egy kanonikus alakja:

$$f(u, a, b) = \pm \left(\frac{1}{4} u^4 + \frac{1}{2} au^2 + bu \right). \quad (14)$$

Pozitív előjel esetében standard csúcsnak, negatív előjel esetében duális csúcsnak hívják. A két esetben a minimum- és maximumpontok szerepe felcserélődik, ezért ezeket külön kell tárgyalni.

a) A vizsgálandó potenciálfüggvénynek a kritikus pontban csúcs katasztrófa alakja van, ha az általános alakja:

$$V' = c_1 x^4 + \varepsilon_1' x^3 + \varepsilon_2' x^2 + \varepsilon_3' x - \lambda (c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4 x), \quad (15)$$

ahol x az egyetlen aktív általánosított koordináta, $c_1 \neq 0$, ε_1' , ε_2' , ε_3' az α tökéletlenségek függvénye és $\varepsilon_1'(0) = \varepsilon_2'(0) = \varepsilon_3'(0) = 0$. $c_1 > 0$ esetében standard, $c_1 < 0$ esetén duális csúcs katasztrófa van.

Csúcs katasztrófa általában akkor adódik a szerkezeten, ha a szerkezet és a teher együtt egy szimmetrikus rendszert alkot. Ekkor a tökéletes szerkezetnél csak x páros hatványai szerepelnek. Ezért feltesszük, hogy $c_3 \neq 0$ a tökéletes szerkezetnél, $c_2 = \varepsilon_4'(\alpha)$, $c_4 = \varepsilon_5'(\alpha)$ és $\varepsilon_4'(0) = \varepsilon_5'(0) = 0$. A vizsgálat kezelhetősége érdekében az ε_4' tökéletlenség hatását elhagyjuk (ez általában sokkal kisebb, mint ε_5' hatása).

A (15) függvényt $4 |c_1|$ -gyel elosztva, majd az $x = y - \varepsilon_1'/(4c_1)$ lineáris transzformációt alkalmazva

$$V(y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \alpha \left(\frac{1}{4} y^4 + \varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 y - \lambda (c y^2 + \varepsilon_3 y) \right) \quad (16)$$

adódik, ahol

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\varepsilon'_2}{4c_1} - \frac{3(\varepsilon'_1)^2}{32c_1^2}, & \alpha &= \text{sign } c_1, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon'_3}{4c_1} - \frac{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2}{8c_1^2} + \frac{(\varepsilon'_1)^3}{32c_1^3}, & c &= \frac{c_3}{4c_1}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\varepsilon'_5}{4c_1} - \frac{c_3 \varepsilon'_1}{8c_1^2}.\end{aligned}$$

A (16) függvény a c_2 kivételével magába foglalja a (15) függvényben szereplő tökéletlenségeket. A (14) és (16) ekvivalens, mert az

$$\begin{aligned}u &= y, \\ a &= 2(\varepsilon_1 - \lambda c),\end{aligned}\tag{17}$$

$$b = \varepsilon_2 - \lambda \varepsilon_3\tag{18}$$

transzformációkkal

$$f(u, a, b) = V(y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Először a standard csúcs esetét tárgyaljuk.

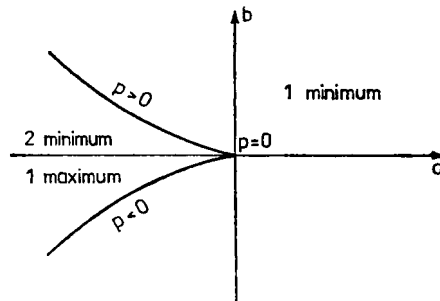
b1) A (14) csúcs katasztrófa esetében a kinyitási tér kétdimenziós, az elágazási halmaz paraméteres alakja:

$$a = -3p^2,\tag{19}$$

$$b = 2p^3.\tag{20}$$

Az 5. ábra mutatja, hogy a kinyitási tér mely tartományában milyen stacionárius pontok vannak. Az elágazási halmaz két oldalán a minimumpontok száma különbözik.

c1) A kinyitási tér mindkét tartományában van minimumpont, tehát bármelyik pontból indulhattunk. A tökéletes szerkezeten ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$)



5. ábra

$b = 0$, tehát a (17) képletben c előjele mutatja, hogy melyik tartományból indultunk. Ha $c > 0$ és $\lambda < 0$, akkor $a > 0$, vagyis az egy minimumpontot tartalmazó tartományból indultunk, ha $c < 0$, akkor a csúcs belsejéből indultunk.

A két esetet külön tárgyaljuk. Először a $c > 0$ esetet vizsgáljuk.

d1.1) A 6. ábra három lehetséges utat tüntet fel. Az A útnál a csúcsponton áthaladva a minimumpont három stacionárius ponttá ágazik, tehát kritikus állapot van. A B útnál egy ránc ponton áthaladva, az eredeti minimumponttól távolabb két újabb stacionárius pont keletkezik, majd az elágazási halmaz ugyanazon ágán kijöve, a két új stacionárius pont szűnik meg, tehát nincs stabilitásvesztés. A C útnál a belépési pontnál megint két új stacionárius pont keletkezik, majd az elágazási halmaz másik ágán kijöve, az eredeti minimumpont és az új maximumpont szűnik meg, tehát e másodszori keresztezésnél stabilitásvesztés van.

e1.1) A (17)—(20) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a és b változót, és kifejezzük az ε_1 és ε_2 változót:

$$\varepsilon_1 = c\lambda - 3p^2/2, \quad (21)$$

$$\varepsilon_2 = \lambda\varepsilon_3 + 2p^3. \quad (22)$$

Rögzített $\lambda_0 < 0$ esetében (21) és (22) az $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ térben egy felületet határoz meg, mely p és ε_3 paraméterekkel van megadva. A felületet a 7. ábra mutatja. A felület minden, az ε_3 tengelyre merőleges síkkal való metszete egybevágó, mégpedig az 5. ábrán bemutatott csúcsnak az ε_1 irányban felére zsugorított változata. Az él egyenes, és az ε_1 tengelyre merőleges. λ_0 csökkentésével a felület a $-\varepsilon_1$ irányban eltolódik, az él pedig mindig az

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1\varepsilon_3/c \quad (23)$$

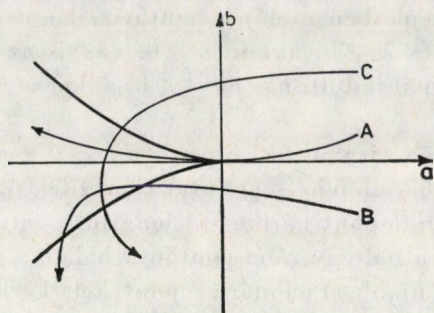
torzfelületen van.

A 8. ábra egy rögzített $\varepsilon_3 > 0$ esetében szemlélteti a metszet változását. Csak a vastagon jelölt görbeszakasz pontjain halad keresztül egy kisebb λ esetében a másik ág, anélkül, hogy a saját ág újbóli keresztülhaladása megelőzné ezt. Így a $(p_t, 0)$ paraméterekkel határolt görbeszakasz adja meg azokat a tökéletlenségeket, melyekhez azonos kritikus teher tartozik. A p_t pontban a görbe érintője párhuzamos a (23) egyenessel, tehát

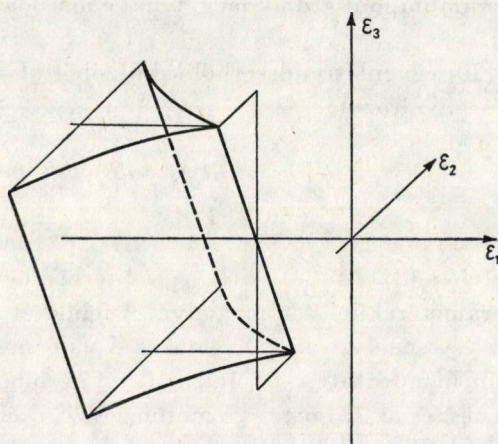
$$\frac{\varepsilon_3}{c} = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \frac{d\varepsilon_2}{dp} \left(\frac{d\varepsilon_1}{dp} \right)^{-1}.$$

Felhasználva a (21) és (22) egyenletet

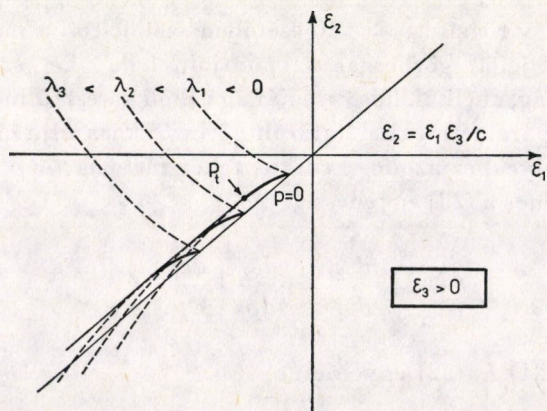
$$p_t = -\frac{\varepsilon_3}{2c}. \quad (24)$$



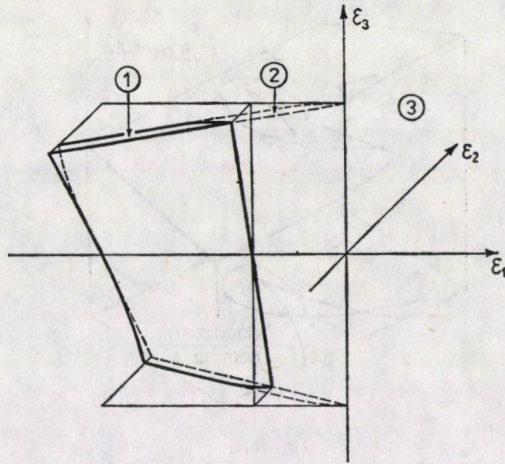
6. ábra



7. ábra



8. ábra



9. ábra

A tökéletlenségi tér három tartományát a 9. ábra mutatja. A kritikus tökéletlenségi tartományt határoló három felület egyenlete:

$$1. \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_3 / c + \varepsilon_3^3 / (8c^3) \quad \varepsilon_1 \leq c\lambda_0 - 3\varepsilon_3^2 / (8c^2), \quad (25)$$

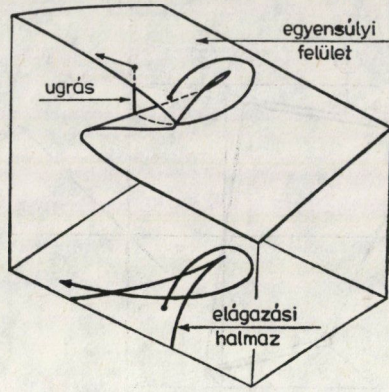
$$2. \left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= c\lambda_0 - 3p^2/2 \\ \varepsilon_2 &= \lambda_0 \varepsilon_3 + 2p^3 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -\varepsilon_3 / (2c) &\leq p \leq 0, & \text{ha } \varepsilon_3 \geq 0 \\ 0 &\leq p \leq -\varepsilon_3 / (2c), & \text{ha } \varepsilon_3 < 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$3. \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_3 / c \quad \varepsilon_1 \leq \lambda_0 c. \quad (27)$$

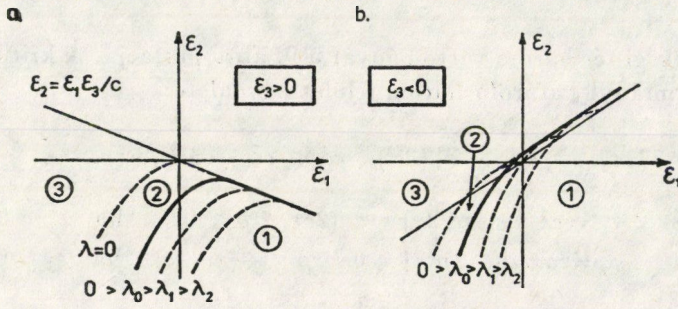
Megállapítható, hogy $\varepsilon_1 \geq 0$ esetében nincs a tökéletes szerkezet kritikus terhénél kisebb kritikus teher, továbbá, ha $\varepsilon_2 = 0$ (illetve $\varepsilon_3 = 0$), akkor a kritikus tökéletlenségi tartománynak csak az $\varepsilon_3 = 0$ (illetve $\varepsilon_2 = 0$) esetben van pontja, és ekkor az ε_1 -től való függés a 2. ábra szerint alakul.

A továbbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor a (15) képletben $c_1 > 0$, vagyis standard csúcs van, de a (17) egyenletben $c < 0$, vagyis $\lambda < 0$ esetében a tökéletes szerkezet függvénye az 5. ábrán látható csúcs belsejében levő ponttal jellemezhető.

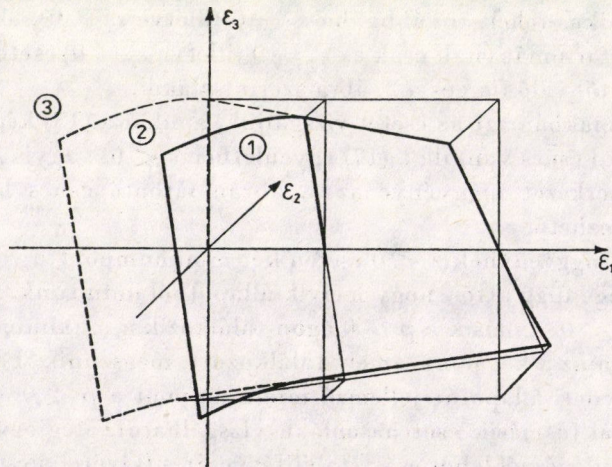
dl.2. A függvénynek $\lambda < 0$ esetén két minimumpontja volt, és a szerkezet érzékenysége függ attól, hogy melyik állapotból indultunk. Az egyik minimumpont a $p < 0$, a másik a $p > 0$ ágon találkozik a maximumponttal, és az ágon áthaladva az a két pont, amely találkozott, megszűnik. Feltesszük, hogy a szerkezet eredeti állapotát jellemző minimumpont a $p < 0$ ágon találkozik a maximummal (a másik eset hasonlóan vizsgálható). Megjegyezzük, hogy a csúcsból való kilépésnél lehet csak stabilitásvesztés (kivétel a csúcsponton való belépés), így például a 10. ábrán feltüntetett útnál a másik ágon lesz a stabili-



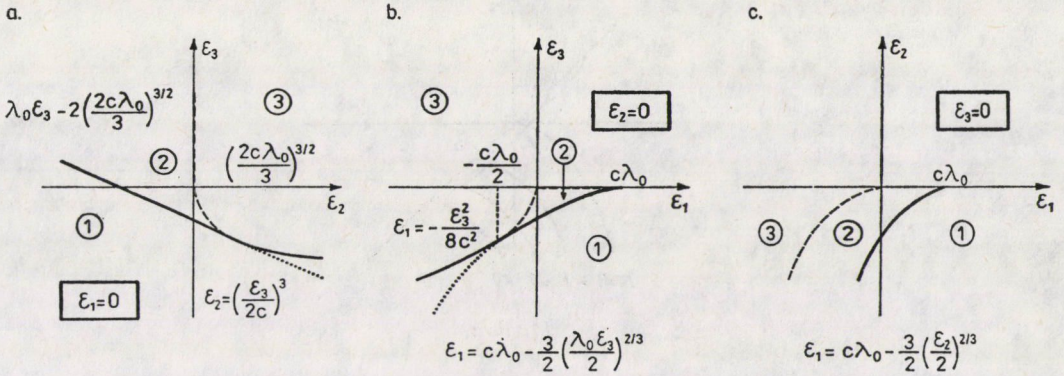
10. ábra



11. ábra



12. ábra



13. ábra

tásvesztés. Ilyen jellegű út esetünkben nem jöhet létre, így az 5. ábrán látható elágazási halmaznak a $p \leq 0$ felét kell csak vizsgálnunk.

e1.2) A (17)–(20) egyenletrendszer most is a (21), (22) felületre vezet, de csak a $p \leq 0$ felét kell vizsgálnunk és $c < 0$. Rögzített $\epsilon_3 > 0$ esetében a 11a. ábra, rögzített $\epsilon_3 < 0$ esetében a 11b. ábra mutatja a metszet változását. A p_i paramétert most is (24) adja meg. A tökéletlenségi tér három tartományát a 12. ábra szemlélteti. A kritikus tökéletlenségi tartományt most is a (25)–(27) felületek határolják, de a paraméterek korlátai a következők:

- 1. felület: $\epsilon_3 < 0$ és $\epsilon_1 > c\lambda_0 - 3\epsilon_3^2/(8c^2)$,
- 2. felület: $p < 0$, ha $\epsilon_3 \geq 0$,
 $p < -\epsilon_3/(2c)$, ha $\epsilon_3 < 0$,
- 3. felület: $\epsilon_3 > 0$ és $\epsilon_1 \geq c\lambda_0$.

A felületnek az $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0$ és $\epsilon_3 = 0$ síkkal való metszetét a 13. ábra mutatja. A 13a. és 13b. ábrán van egy-egy λ_0 -tól független parabola, melyet egy λ_0 -tól függő egyenes, illetve görbe érint.

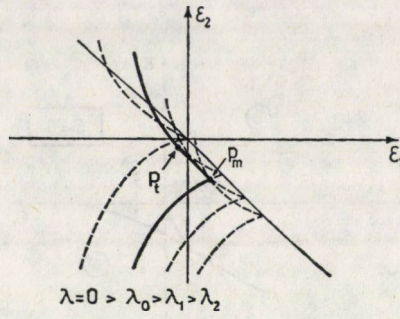
A következőkben a duális csúcs esetét tárgyaljuk ($c_1 < 0$ a (15)-ben).

b2) A duális csúcsonál is (19) és (20) adja meg az elágazási halmazt, de az 5. ábrán a minimum és maximum szó felcserélendő. Az elágazási halmaz oldalán a minimumpontok száma különbözik.

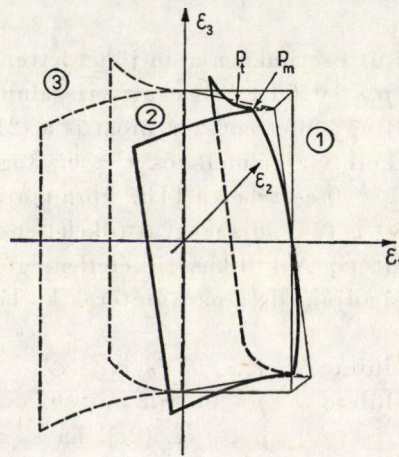
c2) A kinyitási térben csak a csúcson belül van minimumpont. A tökéletes szerkezetnél ($\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$) $b = 0$, így $\lambda < 0$ esetében negatív a értéket kell kapni, tehát $c < 0$ kell, hogy legyen.

d2) Az elágazási halmaz első keresztezésekor megszűnik a minimumpont.

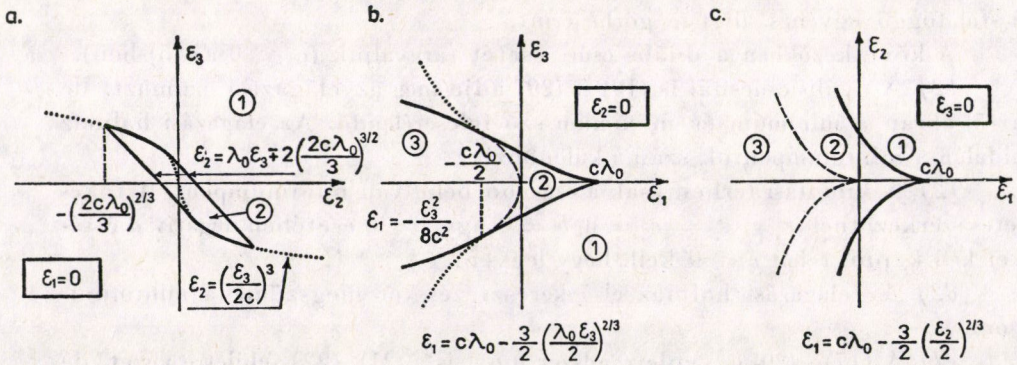
e2) A (17)–(20) egyenletrendszer most is a (21), (22) felületre vezet, de most p minden értékét vizsgálni kell és $c < 0$.



14. ábra



15. ábra



16. ábra

A 14. ábra rögzített $\varepsilon_3 > 0$ esetében tünteti fel a metszet változását. A p_t paramétert most is (24) adja meg, a metszéspont p_m paraméterét az

$$\frac{\varepsilon_3}{c} = \frac{\varepsilon_2(p_m) - \varepsilon_2(p_t)}{\varepsilon_1(p_m) - \varepsilon_1(p_t)}$$

feltételből határozzuk meg. Felhasználva a (21) és (22) egyenletet,

$$p_m = \frac{\varepsilon_3}{3c}.$$

A tökéletlenség-tér három tartományát a 15. ábra szemlélteti. A kritikus tökéletlenségi tartományt határoló felületek egyenleteit a (25) és (26) képletek mutatják, de a paraméterek korlátai a következők:

$$\begin{aligned} (25) \text{ képletnél } & c\lambda_0 - 3\varepsilon_3^2/(8c^2) \leq \varepsilon_1 \leq c\lambda_0 - 3\varepsilon_3^2/(32c^2), \\ (26) \text{ képletnél } & p_t < p < p_m, \text{ ha } \varepsilon_3 \geq 0, \\ & p_m < p < p_t, \text{ ha } \varepsilon_3 < 0. \end{aligned}$$

A felületnek az $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ és $\varepsilon_3 = 0$ síkkal való metszetét a 16. ábra mutatja. A 16a. és 16b. ábrán van egy-egy λ_0 -tól független parabola, melyet két λ_0 -tól függő egyenes, illetve görbe érint.

5. Hiperbolikus köldök katasztrófa

A hiperbolikus köldök katasztrófa egy kanonikus alakja

$$f(u, v, a, b, c) = u^3 + v^3 + auv + bu + cv. \quad (28)$$

a) THOMPSON és HUNT munkáinak [8, 9, 10] megfelelően csak a következő alakú potenciálfüggvénnyel foglalkozunk:

$$V' = c_1 \hat{y}^3 + c_2 \hat{x}^2 \hat{y} - \tilde{\lambda} (c_3 \hat{x}^2 + c_4 \hat{y}^2) + \hat{\varepsilon}_1 \hat{x} + \hat{\varepsilon}_2 \hat{y}, \quad (29)$$

ahol \hat{x} és \hat{y} a két aktív általánosított koordináta, $c_1 c_2 \neq 0$, $c_3 > 0$, $c_4 > 0$. Hiperbolikus köldök esetében $c_1 c_2 > 0$. Az

$$\begin{aligned} \hat{x} &= c_1^{-1/3} c_3^{-1/2} c_4^{1/2} x, & \hat{\varepsilon}_1 &= c_1^{1/3} c_3^{1/2} c_4^{-1/2} \varepsilon_1, \\ \hat{y} &= c_1^{-1/3} y, & \hat{\varepsilon}_2 &= c_1^{1/3} \varepsilon_2, \\ \tilde{\lambda} &= c_1^{2/3} c_4^{-1} \lambda, & A &= |c_1^{-1} c_2 c_3^{-1} c_4| \end{aligned} \quad (30)$$

normalizálás után (29)

$$V(x, y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = y^3 + Ax^2y - \lambda(x^2 + y^2) + \varepsilon_1x + \varepsilon_2y \quad (31)$$

alakú lesz. (28) és (31) ekvivalens, mert az

$$u = 2^{-1/3} \left(y - \sqrt{\frac{A}{3}} x - \frac{3+A}{6A} \lambda \right),$$

$$v = 2^{-1/3} \left(y - \sqrt{\frac{A}{3}} x - \frac{3+A}{6A} \lambda \right),$$

$$a = 2^{-1/3} (3 - A) \lambda / A, \quad (32)$$

$$b = 2^{-2/3} \left(\varepsilon_2 + \sqrt{\frac{3}{A}} \varepsilon_1 + \frac{(3+A)(1-A)}{4A^2} \lambda^2 \right), \quad (33)$$

$$c = 2^{-2/3} \left(\varepsilon_2 - \sqrt{\frac{3}{A}} \varepsilon_1 + \frac{(3+A)(1-A)}{4A^2} \lambda^2 \right) \quad (34)$$

transzformációkkal ([11]):

$$f(u, v, a, b, c) = V(x, y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \gamma(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

b) A (28) hiperbolikus köldök esetében a kinyitási tér háromdimenziós, az elágazási halmaz parametrizált alakja ([5] 185. o.):

$$a = 6p, \quad (35)$$

$$b = -3p^2(2q^{-1} + q^2), \quad (36)$$

$$c = -3p^2(2q + q^{-2}). \quad (37)$$

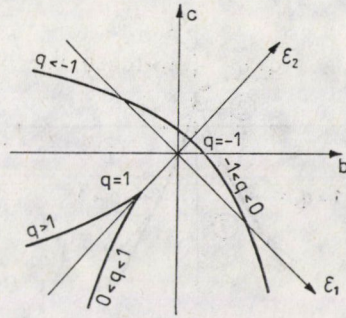
A 17. ábra mutatja a halmaznak egy $a = \text{const} \neq 0$ síkkal való metszetét. A 18. ábra szemlélteti, hogy a kinyitási tér mely tartományában milyen stationárius pontok vannak. Az elágazási halmaznak csak a fele olyan, amelynek két oldalán különböző a minimumpontok száma. E félnek paramétertartománya: $pq > 0$.

c) Ha $A = 3$, akkor a mindig nulla. Ez nem univerzális kinyitás [10, 11], ezért ezt az esetet nem vizsgáljuk. A tökéletes szerkezetnél ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) $b = c$. $\lambda < 0$ esetében csak akkor van minimumpont, ha

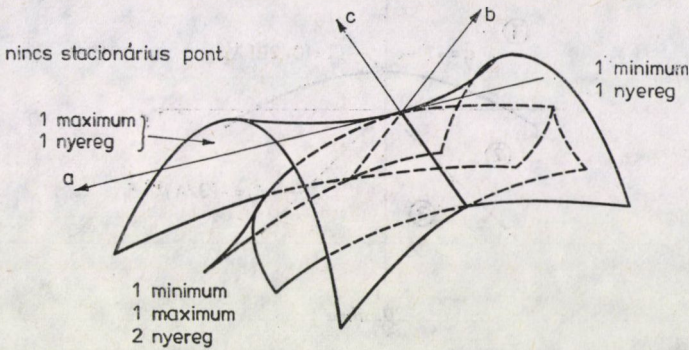
$$\text{vagy } a > 0 \text{ és } b < -a^2/4, \quad (38)$$

$$\text{vagy } a < 0 \text{ és } b < a^2/12. \quad (39)$$

Az $A > 3$ esetében a (38), $A < 3$ esetében a (39) feltétel teljesül.



17. ábra



18. ábra

d) Az elágazási halmaz érdekes felének első keresztezésekor megszűnik a minimumpont. A c pont, a (35) egyenlet és a $pq > 0$ feltétel alapján $A > 3$ esetében a $p > 0, q > 0$; $A < 3$ esetében a $p < 0, q < 0$ paramétertartományra leírt felületrész veendő figyelembe.

e) A (32)–(37) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a, b, c és p változót, és kifejezzük az ε_1 és ε_2 változót:

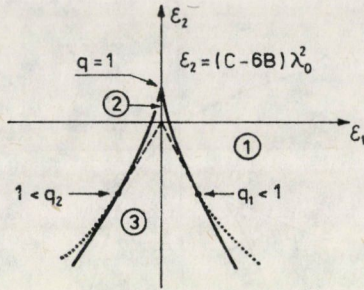
$$\varepsilon_1 = B(A/3)^{1/2} (-q^2 + 2q - 2q^{-1} + q^{-2}) \lambda^2, \quad (40)$$

$$\varepsilon_2 = (C - B(q^2 + 2q + 2q^{-1} + q^{-2})) \lambda^2,$$

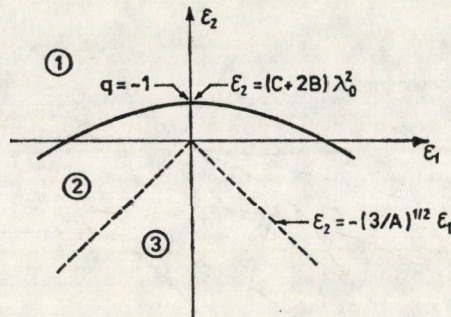
ahol

$$B = \frac{(3 - A)^2}{24A^2}, \quad C = \frac{(3 + A)(A - 1)}{4A^2}$$

Rögzített $\lambda = \lambda_0$ esetében a (40) és a (41) egyenlet a 17. ábra lineárisan torzított változatát adja, ahol az origó is el van tolva az ε_2 tengelyen. A λ_0 változtatásával a pontoknak az origótól való távolsága a λ_0^2 -tel arányosan változik. A tökéletlenségi tér három tartományát $A > 3$ ($q > 0$) esetében a 19. ábra,



19. ábra



20. ábra

$A < 3$ ($q < 0$) esetében a 20. ábra mutatja. A q_1 és q_2 ($= q_1^{-1}$) paramétert az

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \left(\frac{d\varepsilon_1}{dq} \right) \left(\frac{d\varepsilon_1}{dq} \right)^{-1}$$

feltételből lehet meghatározni. Felhasználva a (40) és a (41) egyenletet, (42) a

$$q^2 + \left(1 - \frac{C}{2B} \right) q + 1 = 0$$

másodfokú egyenletre vezet, melynek gyökei q_1 és q_2 . A 19. és a 20. ábrán a két-két félegyenes független λ_0 értékétől.

6. Elliptikus köldök katasztrófa

Az elliptikus köldök katasztrófa egy kanonikus alakja

$$f(u, v, a, b, c) = v^3 - 3u^2v + a(u^2 + v^2) + bu + cv. \quad (43)$$

a) THOMPSON és HUNT munkáinak megfelelően itt is a (29) alakú függvénnyel foglalkozunk. Elliptikus köldök esetében $c_1c_2 < 0$. A (30) normalizálás

után

$$V(x, y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \gamma^3 - Ax^2y - \lambda(x^2 + y^2) + \varepsilon_1x + \varepsilon_2y \quad (44)$$

alakú lesz. (43) és (44) ekvivalens, mert az

$$u = (A/3)^{1/2}x, \quad (45)$$

$$v = y + (3 - A)/(6A)\lambda, \quad (46)$$

$$a = -(A + 3)/(2A)\lambda, \quad (45)$$

$$b = (3/A)^{1/2}\varepsilon_1, \quad (46)$$

$$c = \varepsilon_2 + (A + 1)(3 - A)/(4A^2)\lambda^2 \quad (47)$$

transzformációkkal ([11]):

$$f(u, v, a, b, c) = V(x, y, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) + \gamma(\lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

b) A (43) elliptikus köldök esetében a kinyitási tér háromdimenziós, az elágazási halmaz parametrizált alakja ([5] 183. o.):

$$a = a, \quad (48)$$

$$b = 3^{-1}a^2(\sin 2\Theta - 2 \cos \Theta), \quad (48)$$

$$c = 3^{-1}a^2(\cos 2\Theta - 2 \sin \Theta). \quad (49)$$

A 21. ábra mutatja a halmaznak egy $a = \text{const} \neq 0$ síkkal való metszetét. A 22. ábra szemlélteti, hogy a kinyitási tér mely tartományában milyen stacionárius pontok vannak. Az elágazási halmaznak csak a fele olyan, amelynek két oldalán különböző a minimumpontok száma. E félnek paramétertartománya $a \geq 0$.

c) A tökéletes szerkezetnél ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) $b = 0$. $\lambda < 0$ esetében csak akkor van minimumpont, ha

$$-a^2 < c < a^2/3.$$

Ez a feltétel minden $0 < A < \infty$ esetében teljesül.

d) Az elágazási halmaz első keresztezésekor megszűnik a minimumpont.

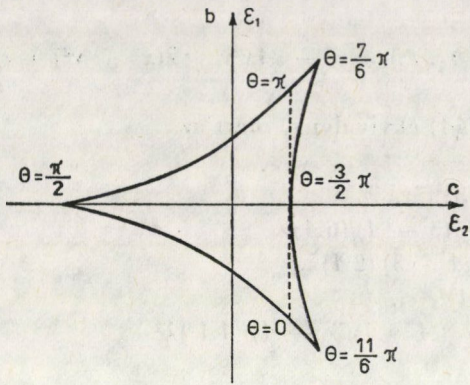
e) A (45)–(49) egyenletrendszerből kiküszöböljük az a, b, c változót, és kifejezzük az ε_1 és ε_2 változót:

$$\varepsilon_1 = B(A/3)^{1/2}(\sin 2\Theta - 2 \cos \Theta)\lambda^2, \quad (50)$$

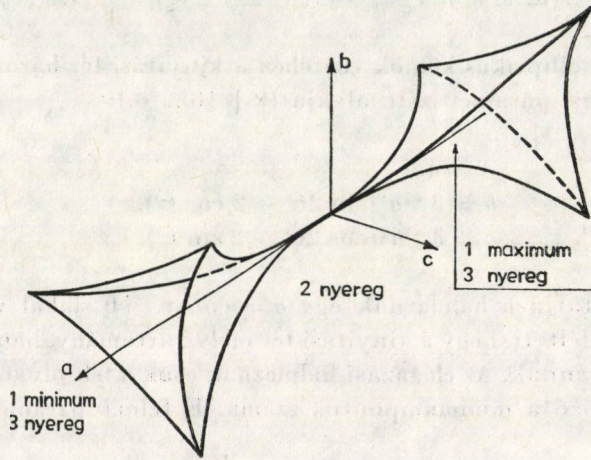
$$\varepsilon_2 = (C + B(\cos 2\Theta - 2 \sin \Theta))\lambda^2, \quad (51)$$

ahol

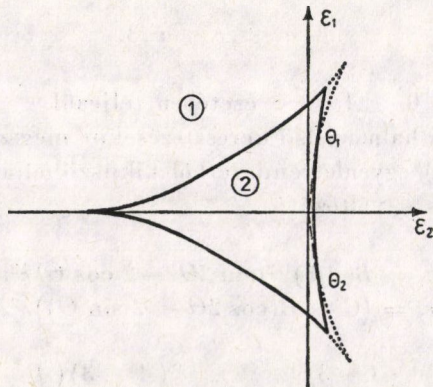
$$B = \frac{(A + 3)^2}{12A^2}, \quad C = \frac{(A - 3)(A + 1)}{4A^2}.$$



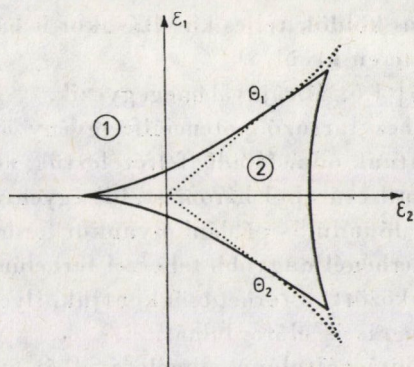
21. ábra



22. ábra



23. ábra



24. ábra

Rögzített $\lambda = \lambda_0$ esetében az (50) és az (51) egyenlet a 21. ábra lineárisan torzított változatát adja, ahol az origó is el van tolva az ε_2 tengelyen. A λ_0 változtatásával a pontoknak az origótól való távolsága a λ_0^2 -tel arányosan változik. A tökéletlenségi tér két tartományát $A > 3$ ($C > 0$) esetében a 23. ábra, $A \leq 3$ ($C \leq 0$) esetén a 24. ábra mutatja. Egyik esetben sincs olyan tökéletlenség, amelynek hatására ne csökkenne a tökéletes szerkezet kritikus terhe. A Θ_1 és $\Theta_2 (= \Pi - \Theta_1)$ paramétert a (42) feltételből lehet meghatározni. Felhasználva az (50) és (51) egyenletet [11] (33) képlete szerint

$$\Theta_1 = \arcsin(2A^2(A + 3)^{-2} - 1).$$

A 21. ábra szerint a $\Pi/2 < \Theta_1 < 3\Pi/2$ megoldást kell választanunk. A 23. és a 24. ábrán a két-két szakaszt tartó egyenesek függetlenek λ_0 értékétől.

7. Megjegyzések

A cikk célja kettős: egyrészt megadni a kritikus tökéletlenségi tartomány szerkesztésének szabályait, másrészt bemutatni a használatát a legfontosabb esetekben. A kritikus tökéletlenségi tartomány előnye a tökéletlenség-érzékenység felületekkel szemben az, hogy bár egy dimenzióval kevesebbet használ, mégis a másikkal hasonló információt szolgáltat.

A 2. ábrának megfelelő vizsgálat csak a teljesség kedvéért szerepel. Legjobban a kétdimenziós tartományok használhatók, ezért adjuk meg a háromdimenziós tartományok jellegzetes metszeteit. A háromdimenziós tartományok a szokásosnál több hatás figyelembevételét teszik lehetővé. Háromdimenziós tartományokkal jellemezhető az elliptikus és hiperbolikus köldök, ha egy új szétválasztó paramétert is számításba veszünk ([12]), vagy a gömbhéj feltétel teljesülése esetében univerzális kinyitásra törekszünk [10, 11]; valamint a fecs-

kefarok és a parabolikus köldök teljes kinyitásakor is három paraméterre van szükség a teherparaméteren kívül.

A 16a. ábra a [7] 4.6. ábrájával megegyezik.

A kritikus teherhez tartozó potenciálfüggvény önmagában nem jelzi, hogy milyen úton jutottunk oda. Mindig feltételeztük, hogy stabilis állapotból érkeztünk, de a standard csúcsból három stabil egyensúlyi út indul. A standard csúcs belsejéből való indulás például olyankor fordulhat elő, ha valamely szerkezetet a kritikus terhénél nagyobb teherrel terhelünk, majd (esetleg megváltozott körülmények között) a terhet csökkentjük. Ilyenkor lehet folyamatos állapotváltozás is, de ugrás is előfordulhat.

A rugalmas stabilitás általános elméletével és a katasztrófaelmélettel a University College London (J. M. T. THOMPSON és G. W. HUNT) és a University of Warwick-i (E. C. ZEEMAN, I. N. STEWART) tanulmányutaim alatt ismerkedtem meg. A kapott segítséget mind a négyüknek köszönöm.

IRODALOM

1. KOITER, W. T.: On the Stability of Elastic Equilibrium, Dissertation, Delft, Holland, 1945 (Angol fordítás, NASA, Tech. Trans. F10, 833, 1967)
2. THOMPSON, J. M. T., HUNT, G. W.: A General Theory of Elastic Stability, Wiley, London 1973
3. THOM, R.: Stabilité structurelle et morphogénèse, Benjamin, Reading 1972
4. ZEEMAN, E. C.: Catastrophe Theory: selected papers (1972—1977), Addison-Wesley, Reading Mass. 1977
5. POSTON, T.—STEWART, I. N.: Catastrophe Theory and its Applications, Pitman Publishing, London 1978
6. THOMPSON, J. M. T.—HUNT, G. W.: A Bifurcation Theory for the Instabilities of Optimization and Design, *Synthese* 36 (1977), 315—351
7. STEWART, I. N.: Applications of Catastrophe Theory to the Physical Sciences, Preliminary version of a survey paper prepared for *Physica (D: nonlinear phenomena)* (1980)
8. THOMPSON, J. M. T.—HUNT, G. W.: Towards a Unified Bifurcation Theory, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 26 (1975), 581—604
9. HUNT, G. W.: Imperfection-sensitivity of Semi-symmetric Branching, *Proc. R. Soc. London A.* 357 (1977), 193—211
10. THOMPSON, J. M. T.—TAM, J. K. L.—LIM, K. C.: On the Topological Classification of Postbuckling Phenomena, *J. Struct. Mech.* 6 (4) (1978), 383—414
11. GÁSPÁR, ZS.: Computation of Imperfection-sensitivity at Two-fold Branching Points *ZAMM* 63 (1983), 359—370
12. HUNT, G. W.: Imperfections and Near-coincidence for Semi-symmetric Bifurcations, *Annals of the New York Academy of Sciences* 316 (1977), 572—589

Critical Imperfection Territory. — Under the effect of the unavoidable imperfection, the critical loading of the elastic structures may decrease. The critical imperfection territory is constituted by those imperfections in case of which the parameter of the critical load is less than the value prescribed. These territories should be determined on the basis of examining the potential function by making use of the results of the catastrophe theory. The general rules of the construction are described, therefore, in the most significant cases (fold, cusp, elliptic and hyperbolic umbilic catastrophe), also presents the actual critical imperfection territories. These give in a space less by one dimension information similar to the imperfection sensitivity surfaces.

ADALÉKOK AZ EKVIVALENS LINEÁRIS REZGŐ RENDSZEREK FELÉPÍTÉSÉNEK MÓDSZEREIHEZ

PATKÓ GYULA*

[Beérkezett: 1982. február 6-án]

A dolgozat első része bemutatja a Panovko-féle direkt linearizálási módszer egy általánosítását és bevezeti a fázisgörbe feletti linearizálás módszerét. Az utóbbi módszer alapján javaslatot tesz a nemlinearitás mértékének egy definíciójára. A dolgozat második része elemzi a független változó transzformációjának szerepét a fázisgörbe feletti linearizálás esetében. Megmutatja, hogy több, a nemlineáris rezgések vizsgálatára használt módszernek szemléletes geometriai jelentése van.

Jelölések

| | |
|----------------------------------|--|
| m | tömeg |
| α | saját körfrekvencia |
| Ω | a gerjesztés körfrekvenciája |
| F | a gerjesztő erő amplitúdója |
| $g(x)$ | nemlineáris rugókarakterisztika |
| $h(\dot{x})$ | nemlineáris csillapítási karakterisztika |
| $f(x, \dot{x})$ | nemlineáris jellegfelület |
| A | integrálási tartomány |
| s | fázisgörbe |
| $\varrho(x), \kappa(x, \dot{x})$ | súlyfüggvények |

Egyéb jelöléseket a szövegben értelmezzünk.

1. Bevezetés

1.1 A mérnöki gyakorlat a korábbi évtizedekben általában arra törekedett, hogy az előforduló lengésjelenségeket olyan lineáris dinamikai modell segítségével írja le, amelynek mozgásegyenlet-rendszere állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszer. Az ilyen jellegű munkák során szerzett sok évtizedes tapasztalat megtanította a mérnököket arra, hogy az ilyen modellezés közben elkerülhetetlen kisebb-nagyobb elhanyagolások, közelítések a gyakorlati élet számos területén — legalább első közelítésben — megengedhetők.

A gépek és szerkezetek iránti igények fokozódásával azonban egyre több esetben vált nyilvánvalóvá, hogy az ilyen típusú dinamikai modellek a jelenségeknek egy részét még azon a tartományon belül sem képesek elfogadható pontossággal leírni, amely a műszaki gyakorlat számára értékes. Ezért az idő múlásával egyre inkább előtérbe került a nemlineáris dinamikai modellek

* Patkó Gyula, 3529 Miskolc Középszer u. 60, IV. 3.

alkalmazásának és az ezek vizsgálatára alkalmas matematikai módszerek kidolgozásának szükségessége. Nagymértékben elősegítette a nemlineáris modellek használatát az utóbbi 2—3 évtizedben a modern számítástechnikai eszközök elterjedése.

Nagy nehézséget jelent a nemlineáris modell vizsgálatok az a körülmény, hogy a tulajdonságait leíró nemlineáris differenciálegyenletek elmélete még az egyváltozós másodrendű esetben sincs általánosan kidolgozva, bár számos értékes részeredmény már napvilágot látott. Sajnos, olyan zárt alakú egzakt megoldások, mint amilyenek az állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek esetén rendelkezésre állnak és a rezgő rendszer tulajdonságairól gyors és pontos áttekintést adnak, a nemlineáris differenciálegyenleteknél csak kivételes esetekben ismeretesek. Lehetségesek végtelen sor vagy végtelen iterációs sorozattal előállítható megoldások, ezek azonban többnyire nélkülözik a mérnök számára szükséges gyors áttekinthetőséget.

1.2 A műszaki gyakorlatnak mindig az a kényszerű igénye, hogy felvetődő problémáira a fenti nehézségek ellenére is találjon valamilyen műszakilag elfogadható megoldást. Ezért alakultak ki — zömmel az utóbbi évtizedekben, de bizonyos gyökereket tekintve LAGRANGE-ig visszavezethetően — olyan úgynevezett mérnöki módszerek is, amelyek szigorú matematikai megalapozása sok esetben hiányos (vö. [12], 115. o.). Éppen ezért a szokásosnál élesebben vetődik fel az eredmények ellenőrzésének kérdése.

1.3 Áttekintve a műszaki gyakorlatban ma használatos módszereket megállapítható, hogy azoknak alapját — közvetlenül vagy közvetve — az esetek nagy részében valamilyen sorozatos közelítés képezi. A teljesség igénye nélkül két ilyen eljárást érdemes egymással szembeállítani:

a) Ma már hatékony számítógépi programok állnak rendelkezésre a mozgásegyenletek *numerikus* megoldására, amelyek rögzített kezdeti feltételekhez korábban el sem képzelhető pontossággal előállítják a nemlineáris differenciálegyenlet megoldását. Az eljárásnak kétségtelen előnyei (pl. nagyfokú pontossága) mellett hátránya, hogy csak diszkrét megoldás előállítására képes és sok esetben — különösen gyengén csillapított rendszerek esetén — költséges [6].

b) A mérnöki gyakorlatban sokszor szükség van a megoldások olyan halmazának vizsgálatára, amelynek alapján áttekinthető, hogy a megoldások milyen függvényei a műszaki paramétereknek. Ez a feladat elvileg az említett végtelen sorozat analitikus előállítását kívánná meg. E követelmény tökéletes teljesítése a közismert nehézségekbe ütközik. Ilyen módszerek mégis elterjedten használatosak, és ez annak a gyakorlati tapasztalatnak a következménye, amely szerint a nemlineáris dinamikai jelenségek tulajdonságaira sokszor a közelítések első lépései rávilágítanak, esetenként már az első lépés is jelentős információkat szolgáltat.

1.4 Van az analitikusnak minősíthető eljárásoknak egy csoportja, amelyek nem sorolható a fokozatos közelítések kategóriájába. Ezek a *linearizálási*

módszerek. Nem törekszenek pontos megoldásra, csupán a megoldásoknak a gyakorlatban jól használható első közelítését kívánják előállítani úgy, hogy az eredeti nemlineáris mozgásegyenlethez valamilyen megfontolással egy — általában ekvivalensnek nevezett — lineáris differenciálegyenletet rendelnek hozzá. A hozzárendelésnek mindig az a célja, hogy az ilyen módon linearizált mozgásegyenlet egyik megoldásával az eredeti nemlineáris mozgásegyenlet keresett megoldását lehetőleg jól közelítsük. A linearizálás végrehajtása arra vezet, hogy a nemlineáris mozgásegyenletben szereplő nemlineáris függvények x és \dot{x} -től függő tagjait ezen változók lineáris függvényeivel helyettesítjük. A linearizálásnak számos változata alakult ki ([1], [4], [5], [16], [18], [23]).

Meg kell említeni, hogy a sorozatos közelítést alkalmazó módszerek között is vannak olyanak, amelyek első lépésüket tekintve egy-egy linearizálási módszerrel egyenértékűek, de tárgyalásmódjuk a nem matematikus szemléletű mérnökök számára olykor nehezen áttekinthető.

1.5 A fentiekben vázolt mérnöki módszereknek matematikai szemmel nézve bizonyára több hiányossága van. Ezek közül a teljesség igénye nélkül kettőt megemlítünk:

a) A mérnöki gyakorlat igényei az esetek túlnyomó többségében periodikus megoldások vizsgálatára szorítkoznak, többnyire a nélkül, hogy a periodikus megoldások létezésének feltételeit elméleti úton megvizsgálják. A mérnök az ilyen természetű matematikai vizsgálatokat sok esetben a gyakorlatból vett tapasztalattal helyettesíti.

b) Annak eldöntésére, hogy az előállított „közelítő” megoldás mennyiben közelíti az eredeti nemlineáris differenciálegyenlet keresett megoldását, általában további vizsgálatokra van szükség. Vannak esetek, rendelkezésre állnak a hiba becslésére alkalmas matematikai módszerek (vö. [8], [13], [14], [21], [25]), más esetekben ezek ma még hiányoznak. A mérnök nagyon sok esetben nem tekinti feladatának ilyen matematikai módszerek kidolgozását, hanem megelégszik azzal, hogy közelítő eredményeit vagy közvetlenül a tapasztalattal, vagy más, a szakirodalomban már elfogadott eredményekkel veti egybe.

1.6 Jelen dolgozat a PANOVKO által javasolt direkt linearizálási módszerre épül. A módszert 1952-ben [15] publikálta orosz, majd [1] angol nyelven. Számos további munka (pl.: [2], [3], [16], [17], [22], [23]) — amelyek egyrészt a módszerrel elérhető eredményekről, másrészt a módszer finomítását célzó gondolatokról számolnak be — bizonyítja, hogy ez az eljárás ismertté és népszerűvé vált. A hivatkozott munkák ismeretében azonban az is kiderül, hogy a Panovko-féle eljárásnak — a mérnök számára egyébként szimpatikus tulajdonságai mellett — fogyatékoságai is vannak.

A jelen dolgozatnak az a törekvése, hogy az eljárást javítsa.

Az irodalomban a módszert egymástól matematikailag különválasztott nemlineáris rugó, illetve csillapítási karakterisztikák esetén használják. Jelen

dolgozat általánosítja a módszert olyan rugó-csillapítás jellegfelület esetére, amely nem bontható fel önálló (csak helytől függő) rugókarakterisztika és (csak sebességtől függő) csillapítási karakterisztika együttesére.

Ez az általánosítás mindenekelőtt azt a kérdést veti fel, hogy hogyan kell a Panovko-féle eljárásban lényeges szerepet játszó hibakiegyenlítést az általános esetben értelmezni. Ennek számos módja lehetséges. Ezek közül az egyik a jelen dolgozatban ismertetett fázisgörbe feletti kiegyenlítés. Ezt az eljárást a továbbiakban *a fázisgörbe feletti linearizálás* módszerének nevezzük. A dolgozat ezzel kapcsolatban igyekszik megmutatni az alábbiakat:

— Az eljárás kézenfekvő és szemléletes utasítást ad a linearizálás végrehajtására, és a kapott eredmények az irodalomban általánosan elfogadott eredményekkel összhangban vannak.

— Segítségével kimutatható, hogy több, széles körben használt más módszernek is szemléletes geometriai jelentése van.

— Bevezethető a nemlinearitás mértékének egy olyan definíciója, amely az irodalomban ismert definícióknál általánosabb és a tapasztalattal inkább összhangban van.

Jelen dolgozatban a fázisgörbe feletti linearizálás módszerét egy szabadságfokú mechanikai rendszerekkel kapcsolatban tárgyaljuk, bár maga a módszer több szabadságfokú rendszerek esetében is alkalmazható.

2. Előzmények

2.1 A PANOVKO által javasolt direkt linearizálási módszer az

$$m\ddot{x} + g(x) = 0 \quad (2.1)$$

nemlineáris mozgásegyenlethez egy lineáris

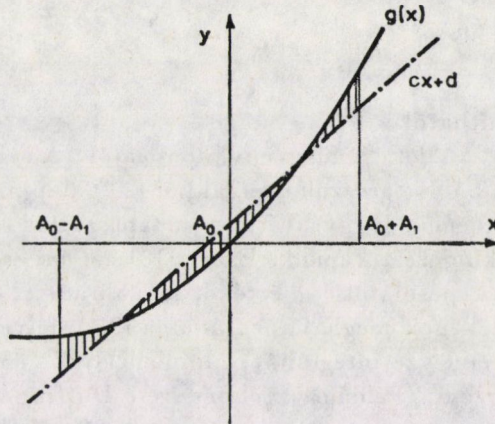
$$m\ddot{x} + cx + d = 0 \quad (2.2)$$

alakú differenciálegyenletet rendel hozzá. A módszernek az itt leírt gondolatmenete egy kicsit eltér a szokásos (vö. [1], [2], [15], [16]) tárgyalásmódtól. Jelen gondolatmenet azonban a továbbiak szempontjából célszerűbbnek látszik. Bevezetve az $\alpha^2 = c/m$ jelölést, a (2.2) általános megoldása

$$x = A_0 + A_1 \cos(\alpha t - \vartheta_1)$$

alakban írható. Az A_0 a

$$cA_0 + d = 0 \quad (2.3)$$



1. ábra

összefüggésből adódik, A_1 és θ_1 pedig a kezdeti feltételektől függő állandók. A c és d mennyiségek abból a feltételből határozhatók meg, hogy az

$$r(x) = g(x) - (cx + d) \quad (2.4)$$

eltérések (1. ábra) négyzetintegrálja az $[A_0 - A_1; A_0 + A_1]$ intervallumon minimális legyen. Így az

$$I_1 = \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} [g(x) - (cx + d)]^2 dx \stackrel{!}{=} \text{minimum} \quad (2.5)$$

feltételből a $\partial I_1 / (\partial c) = 0$ és $\partial I_1 / (\partial d) = 0$ összefüggések alapján a

$$c = \frac{3}{2A_1^3} \left[\int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) x dx - A_0 \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) dx \right] \quad (2.6)$$

és

$$d = \frac{1}{2A_1} \left[\left(1 + 3 \frac{A_0^2}{A_1^2} \right) \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) dx - 3 \frac{A_0}{A_1^2} \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) x dx \right] \quad (2.7)$$

kifejezéseket kapjuk. Ha (2.6)-ot és (2.7)-et a (2.3)-ba helyettesítjük, azt kapjuk, hogy az A_0 és A_1 állandók között fenn kell állnia az

$$\int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) dx = 0 \quad (2.8)$$

összefüggésnek. Ez azt jelenti, hogy az $A_0 + A_1$ és az $A_0 - A_1$ helyeken a (2.1) rendszer potenciális energiái megegyeznek. Így a c és d állandók a

$$c = \frac{3}{2A_1^3} \int_{A_0 - A_1}^{A_0 + A_1} g(x) x dx \quad (2.9)$$

és

$$d = c A_0 \quad (2.10)$$

kifejezésekből számíthatók.

2.2 Ha az $A_0 = A_0(A_1)$ függvénykapcsolatot (2.8)-ból, c és d értékeit pedig (2.9) és (2.10)-ből határozzuk meg, akkor (2.2) alapján a (2.1) rezgő rendszer amplitúdó-frekvencia függvényére — a tapasztalat szerint — általában nagyon pontatlan kifejezést kapunk. Ezért [15] azt javasolja, hogy az $A_0 = A_0(A_1)$ függvénykapcsolatot és d értékét továbbra is (2.8), illetve (2.10)-ből számítsuk, de c értékének meghatározásához a (2.4) helyett az $r(x)\varrho(x - A_0)$ súlyozott eltérések négyzetintegrálját minimalizáljuk, ahol $\varrho(x)$ alkalmasan választott súlyfüggvény. Például az előfeszített Duffing-rendszer rezgésének periódusideje [3] szerint $\varrho(x) = x$ választásával 5%-nál kisebb hibával határozható meg.

2.3 A $g(x)$ nemlineáris karakterisztika ismeretében a $\varrho(x)$ súlyfüggvény megválasztható olyan módon, hogy a (2.2)-ben szereplő c paraméter optimális legyen [23]. A súlyfüggvények úgy is megválaszthatók, hogy a kapott c értékek más linearizálási módszerek eredményeivel egyezzenek meg [23], [17]. Ezért [17] a Panovko-féle direkt linearizálási módszert a többi linearizálási módszer általánosításaként kezeli.

2.4 A direkt linearizálás módszerének a 2.1 pontban vázolt alapfogólata gerjesztett rendszerek, többszabadságfokú csillapításmentes rendszerek [15] és $h(x)$ alakú nemlineáris csillapítást tartalmazó rendszerek [22] esetében is használható.

2.5 A direkt linearizálási módszer számos gyakorlati rezgéstani feladat megoldásában eredményesen alkalmazható [1], [17]. Nagy előnye, hogy egyszerű, és szemléletes geometriai jelentése van.

3. A direkt linearizálási módszer egy általánosítása

3.1 A gyakorlatban olyan nemlineáris rezgések is előfordulnak, amelyek mozgásegyenletében szereplő $f(x, \dot{x})$ nemlinearitásra fennáll, hogy

$$f(x, \dot{x}) \neq f(x) + h(\dot{x}),$$

tehát nem bontható fel egy csak helytől és egy csak sebességtől függő tag összegére. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a PANOVKO által javasolt direkt linearizálási módszer ebben az esetben is alkalmazható, de általánosabb alakban kell megfogalmazni.

Az általánosítást a harmonikusan gerjesztett rezgések esetére mutatjuk be, de a módszer szabad rezgések esetében is használható.

Tekintsük azt a nemlineáris rezgő rendszert, amelynek mozgását az

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F \cos \Omega t \quad (3.1)$$

mozgásegyenlet írja le. Rendeljük hozzá (3.1)-hez az

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = F \cos \Omega t \quad (3.2)$$

lineáris differenciálegyenlettel leírható rezgő rendszert. A (3.2) állandósult rezgéseit leíró partikuláris megoldás az

$$x = a_0 + a_1 \cos(\Omega t - \vartheta_1) \quad (3.3)$$

alakba írható, ahol — mint ismeretes — az a_0 , a_1 és ϑ_1 állandók b , c és d ismeretében az

$$a_0 = -\frac{d}{c}, \quad (3.4)$$

$$a_1 = \frac{F}{\sqrt{(c - m\Omega^2)^2 + (b\Omega)^2}}, \quad (3.5)$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{b\Omega}{c - m\Omega^2} \quad (3.6)$$

összefüggésekből számíthatók. A (3.3) alapján

$$\dot{x} = -a_1 \Omega \sin(\Omega t - \vartheta_1) \quad (3.7)$$

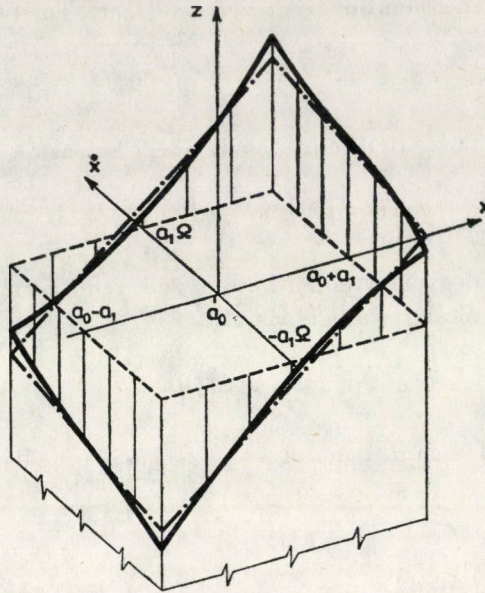
írható, ahol $a_1 \Omega$ a sebességamplitúdót jelenti.

A b , c és d mennyiségeket most úgy határozzuk meg, hogy az x , \dot{x} , z koordinátarendszerben a $z = f(x, \dot{x})$ jellegfelületet a $z = b\dot{x} + cx + d$ sík a $a_0 - a_1 \leq x \leq a_0 + a_1$; $-a_1 \Omega \leq \dot{x} \leq a_1 \Omega$ tartományon (2. ábra) elég jól közelítse. Ezért előírjuk, hogy a

$$q(x, \dot{x}) = f(x, \dot{x}) - (b\dot{x} + cx + d)$$

különbség négyzetintegrálja a fenti A tartományon minimális legyen. Így az

$$I_2 = \iint_{(A)} [f(x, \dot{x}) - (b\dot{x} + cx + d)]^2 dx d\dot{x} \stackrel{!}{=} \text{minimum}$$



2. ábra

feltételből a $\partial I_2/(\partial b) = 0$, $\partial I_2/(\partial c) = 0$, $\partial I_2/(\partial d) = 0$ összefüggések alapján a

$$b = \frac{3}{4a_1^4 \Omega^3} \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) \dot{x} dx d\dot{x}, \quad (3.8)$$

$$c = \frac{3}{4a_1^4 \Omega} \left[\iint_{(A)} f(x, \dot{x}) x dx d\dot{x} - a_0 \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) dx d\dot{x} \right] \quad (3.9)$$

$$d = \frac{1}{4a_1^2 \Omega} \left[\left(1 + 3 \frac{a_0^2}{a_1^2} \right) \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) dx d\dot{x} - 3 \frac{a_0}{a_1^2} \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) x dx d\dot{x} \right] \quad (3.10)$$

kifejezéseket kapjuk. A (3.9) és (3.10)-et a (3.4)-be helyettesítve az adódik, hogy az a_1 és a_0 között fenn kell állnia az

$$\iint_{(A)} f(x, \dot{x}) dx d\dot{x} = 0 \quad (3.11)$$

összefüggésnek. Így a c és d állandókra a (3.9) és (3.10)-ből a

$$c = \frac{3}{4a_1^4 \Omega} \iint_{(A)} f(x, \dot{x}) x dx d\dot{x}, \quad (3.12)$$

$$d = -ca_0 \quad (3.13)$$

kifejezéseket kapjuk.

3.2 Ha $f(x, \dot{x}) = g(x)$, azaz a nemlinearitás olyan, hogy az \dot{x} -től nem függ, akkor (3.8)-ból $b = 0$, a (3.9)—(3.13)-ból pedig a (2.6)—(2.10) összefüggések adódnak. Ha az $f(x, \dot{x})$ nemlinearitás

$$f(x, \dot{x}) = g(x) + h(\dot{x})$$

típusú, azaz felbontható egy rugókarakterisztika és egy csillapítási karakterisztika összegére, akkor

$$\int_{-a_1\Omega}^{a_1\Omega} h(\dot{x}) d\dot{x} = 0 \quad (3.14)$$

feltétel teljesülése esetében a (3.9)—(3.13) összefüggésekből ismét a (2.6)—(2.10) kifejezések adódnak. Könnyen belátható, hogy ha a (3.14) tetszőleges $a_1\Omega$ esetben fennáll, akkor $h(\dot{x})$ páratlan függvény. Ebben az esetben a $h(\dot{x})$ csillapítási függvény a 2.1 pontban leírt elv alapján egy origón átmenő egyenessel közelíthető.

3.3 A 3.1 pontban elmondottak a 2.1 pontban vázolt direkt linearizálási módszer formális általánosításának tekinthetők. Minthogy a direkt linearizálási módszer 2.1 alatti formájában — azaz súlyfüggvények nélkül — alkalmazva igen megbízhatatlannak bizonyult, tulajdonképpen ugyanez várható a módszer fentiekben leírt általánosításától is.

A 2.2 pontban említett súlyfüggvények önkényesen választhatók meg. A 3.1 pontban leírt általánosítás pedig egy további önkényességet is tartalmaz. A 2.1 pontban kézenfekvőnek látszott, hogy a $g(x)$ függvényt az

$$A_0 - A_1 \leq x \leq A_0 + A_1$$

intervallumban közelítjük egyenessel. A 3.1 pontban szereplő kettős integrálok integrálási tartományául azért választottuk az

$$a_0 - a_1 \leq x \leq a_0 + a_1, \quad -a_1\Omega \leq \dot{x} \leq a_1\Omega$$

téglalapot, mert ilyen módon a 2.1 pont eredményei speciális esetként kiadódtak. Ez az első pillanatra talán tetszetős választás azonban semmilyen biztosítékot sem jelent a közelítés pontosságára nézve. Így az általánosítás során kapott eredmények két különböző úton is javíthatók.

A 3.1 pont eredményei — a 2.2 pontban leírtakhoz hasonlóan — súlyfüggvények segítségével módosíthatók. Ebben az esetben az $a_0 = a_0(a_1)$ függvényt és a d értékét továbbra is a (3.11) és (3.13)-ból számoljuk, c és b meghatározásához pedig a $q(x, \dot{x})$ helyett a $q(x, \dot{x})\kappa(x - a_0, \dot{x})$ súlyozott eltérések négyzetintegrálját minimalizáljuk. A $\kappa(x, \dot{x})$ súlyfüggvény alkalmas megválasztásához nyilván megfelelő tapasztalatra van szükség. Hangsúlyozzuk, hogy az ilyen módon elvégzett linearizálásnak — a tapasztalat szerint — az az előnye, hogy nagyon egyszerű számításokhoz vezet.

Másik lehetőségként kínálkoznék, hogy az $f(x, \dot{x})$ felületet a fentiekől eltérő tartományon közelíthetnénk egy $b\dot{x} + cx + d$ síkkal. Más tartományon közelítve, a kapott rezgés amplitúdó-frekvencia függvénye is más lesz. Ennek megfelelően esetleg található olyan tartomány, amelynél a b , c és d értékekhez tartozó (3.2) lineáris mozgásegyenlet megoldása a (3.1) által leírt rezgést a legjobban közelíti.

Úgy tűnik azonban, hogy a fenti megfontolások ugyanúgy, mint a nemlineáris rezgésstanban szokásos megfontolások jelentős része, sok önkényességet takarnak.

3.4 Az alábbiakban a kiegyenlítő sík megválasztására egy kevesebb önkényességet tartalmazó javaslatot teszünk. Az eljárás lényege az alábbiakban vázolt gondolatmenet során alakult ki. A fentiekben az $f(x, \dot{x})$ nemlineáris felületet az (x, \dot{x}) fázissík egy tartománya felett úgy közelítettük síkkal, hogy a 3.1-ben leírt közelítés során a jellegfelületnek egy tartomány feletti minden pontját figyelembe vettük, pedig egy konkrét periodikus megoldás során a felületnek csupán csak a fázisgörbe feletti görbéje „vesz részt” a mozgás kialakításában. Két különböző, egymástól erősen eltérő mechanikai rendszernek, amelyeknek például csak a fenti görbéje közös, megfelelő indítás mellett ez az egy mozgása pontosan azonos módon lehetséges. Ez a körülmény kényszerítően arra a gondolatra vezet, hogy egy konkrét mozgás vizsgálatakor a jellegfelületnek csak a fázisgörbe feletti görbét szabad figyelembe venni a kiegyenlítő sík megválasztására felhasznált utasítás megszövegezésekor.

Mivel azonban a valóban kialakuló mozgást nem ismerjük, eleve csak közelítéssel élhetünk. Minden olyan esetben, amelyben feltételezhető, hogy a valódi mozgás és az ekvivalens differenciálegyenlet által meghatározott mozgás elegendően közel állnak egymáshoz, megengedhetőnek látszik az a közelítés, hogy a valódi fázisgörbe helyett az ekvivalens mozgás fázisgörbét vegyük figyelembe. E szerint a kiegyenlítő sík megválasztására a nemlineáris jellegfelületnek azokat a pontjait fogjuk felhasználni, amelyek a várható ekvivalens mozgás fázisgörbéje felett fekszenek. Kimutatható, hogy az ilyen módon közelített megoldás a szakirodalom által elfogadott és jónak minősített eredményekkel összhangban van. A módszer egyik előnye az, hogy a kiegyenlítő sík megválasztására adott utasítás szemléletes marad.

Az eljárás részleteivel a 4. és 5. pontban foglalkozunk.

4. Linearizálás a fázisgörbe felett

4.1 Tekintsük a (3.1) és (3.2) mozgásegyenleteket. A (3.2)-ben a b , c és d értékeket most úgy akarjuk meghatározni, hogy az $f(x, \dot{x})$ és a $b\dot{x} + cx + d$ felületek közötti eltérés a (3.2) megoldásának fázisgörbéje felett kicsi legyen.

Vezessük be a $\tau = \Omega t$ dimenzió nélküli időkoordinátát! Ekkor (3.1) és (3.2) az

$$m\Omega^2 x'' + f(x, \Omega x') = F \cos \tau, \quad (4.1)$$

$$m\Omega^2 x'' + b\Omega x' + cx + d = F \cos \tau \quad (4.2)$$

alakúvá lesz, ahol vessző a τ szerinti deriválást jelöli. A (4.2) állandósult rezgését

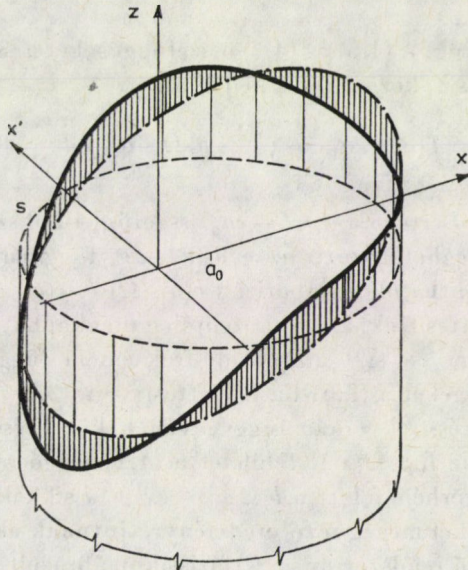
$$x = a_0 + a_1 \cos(\tau - \vartheta_1) \quad (4.3)$$

írja le, ahol b , c és d ismeretében az a_0 , a_1 , ϑ_1 állandók a (3.4)–(3.6) összefüggésekből számíthatók. A (4.3)-ból

$$x' = -a_1 \sin(\tau - \vartheta_1) \quad (4.4)$$

adódik. Mivel x és x' azonos dimenziójú, az $x - x'$ koordinátarendszerben értelmezhető az ívelem.

Ábrázoljuk az $f(x, \Omega x')$ jellegfelületet és az azt közelítő $b\Omega x' + cx + d$ síkot az (x, x') fázissík felett (3. ábra). A (4.3) és (4.4)-nek megfelelő s fázis görbe $(a_0, 0)$ középpontú, a_1 sugarú kör. A fölé emelt körhenger az $f(x, \Omega x')$ felületből a folytonos vonallal rajzolt térgörbét a $b\Omega x' + cx + d$ síkból pedig az eredményvonallal rajzolt ellipszist metszi ki. Rögzített a_0 , a_1 és Ω esetén azon b , c és d értékeket keressük, amelyeknél az ellipszis a térgörbét jól közelíti. A közelítésre többféle feltételt szabhatunk. Egyik lehetőség, hogy a henger-



3. ábra

palástnak a két görbe közé eső — az ábrán sraffozott — felületét minimalizáljuk. Előírhatjuk például, hogy az eltéréseknek a fázisgörbe felett vett négyzet-integrálja legyen minimális, azaz

$$J_1 = \oint_{(s)} [f(x, \Omega x') - (b\Omega x' + cx + d)]^2 ds \stackrel{!}{=} \text{minimum.}$$

A rövidebb írásmód kedvéért vezessük be a $\psi = \tau - \vartheta_1$ jelölést, és vegyük figyelembe, hogy az (x, x') fázissíkon a (4.3) és (4.4)-hez tartozó $ds = a_1 d\psi$. Így a

$$\frac{\partial J_1}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J_1}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial J_1}{\partial d} = 0$$

feltételek alapján a

$$b = -\frac{1}{\pi a_1 \Omega} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (4.5)$$

$$c = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (4.6)$$

$$d = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) d\psi - \frac{a_0}{a_1 \pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (4.7)$$

összefüggéseket kapjuk. A (4.6) és (4.7) összefüggéseket a (3.4)-be helyettesítve, az adódik, hogy a_0 és a_1 között fenn kell állnia az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) d\psi = 0 \quad (4.8)$$

összefüggésnek. Így d értéke a $d = -ca_0$ összefüggésből számítható.

A (4.8)-ból meghatározott $a_0 = a_0(a_1, \Omega)$ függvényt (4.5) és (4.6)-ba helyettesítve, kiszámíthatók a linearizált $b(a_1, \Omega)$ és $c(a_1, \Omega)$ mennyiségek. Ha ezeket (3.5)-be helyettesítjük, akkor közelítőleg megkaphatjuk a (3.1) nemlineáris rezgő rendszer $a_1 = a_1(\Omega)$ amplitúdó-frekvencia függvényét. A $b(a_1, \Omega)$ és $c(a_1, \Omega)$ mennyiségeket a (3.6)-ba helyettesítve a (3.1) nemlineáris rendszer $\vartheta_1 = \vartheta_1(\Omega)$ fáziseltérés-frekvencia függvényének közelítése számítható.

A fentiekben az $f(x, \Omega x')$ felületet a (4.2) rezgő rendszer (x, x') fázissíkon ábrázolt fázisgörbéje felett a $b\Omega x' + cx + d$ síkkal közelítettük. Belátható, hogy a fentiekkel megegyező eredményre jutnánk akkor is, ha az $f(x, \dot{x})$ felületet a (3.2) rezgő rendszer $(x, \dot{x}/\Omega)$ fázissíkon ábrázolt fázisgörbéje felett a $b\dot{x} + cx + d$ síkkal közelítenénk.

4.2 A 4.1 pontban leírtakat autonóm rendszerek periodikus megoldásainak közelítő előállítására is használhatjuk. Ebben az esetben az

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.9)$$

nemlineáris mozgásegyenlethez az

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0 \quad (4.10)$$

állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenletet rendeljük hozzá. Az utóbbinak periodikus-megoldása csak $b = 0$ esetben van, de a továbbiak szempontjából hasznos, ha benne a b -t — mint paramétert — megtartjuk. A $b = 0$ esetben (4.10) általános megoldása

$$x = a_0 + a_1 \cos(\alpha t - \theta_1), \quad (4.11)$$

ahol a_1 és θ_1 a kezdeti feltételektől függő állandók, a_0 -ra pedig fennáll a

$$ca_0 + d = 0 \quad (4.12)$$

összefüggés. A (4.9) által leírt nemlineáris rezgés periodikus megoldásainak α körfrekvenciáját a (4.10) és (4.11) alapján közelítőleg az

$$\alpha^2 = \frac{c}{m} \quad (4.13)$$

kifejezésből számíthatjuk.

Vezessük be a $\tau = \alpha t$ dimenzió nélküli időkoordinátát. Így (4.9) és (4.10) az

$$\alpha^2 m x'' + f(x, \alpha x') = 0 \quad (4.14)$$

egyenlet

$$\alpha^2 m x'' + b \alpha x' + cx + d = 0 \quad (4.15)$$

alakúvá lesz, ahol a vessző a τ szerinti differenciálást jelöli. A (4.11) alapján

$$x = a_0 + a_1 \cos(\tau - \theta_1) \quad (4.16)$$

és

$$x' = -a_1 \sin(\tau - \theta_1) \quad (4.17)$$

írható. A 4.1 pontban leírtakhoz hasonlóan ábrázoljuk az $f(x, \alpha x')$ jellegfelületet az (x, x') fázissík felett (vö. 3. ábra). A (4.10), illetve (4.15)-ben szereplő b, c, d állandókat úgy határozzuk meg, hogy a (4.16) és (4.17)-hez tartozó s

fázisgörbe felett vett

$$\oint_{(s)} [f(x, \alpha x') - (bx' + cx + d)]^2 ds \quad (4.18)$$

vonaleintegrál minimális legyen. Így a 4.1 ponthoz hasonlóan a

$$b = -\frac{1}{\pi a_1 \alpha} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (4.19)$$

$$c = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (4.20)$$

$$d = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) d\psi - \frac{a_0}{a_1 \pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (4.21)$$

kifejezéseket kapjuk. A (4.20) és (4.21)-et a (4.12)-be helyettesítve pedig az adódik, hogy az a_0 és a_1 között az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) d\psi = 0 \quad (4.22)$$

összefüggésnek kell fennállnia.

A (4.22)-ből előállítható $a_0 = a_0(a_1, \alpha)$ függvényt a (4.20)-ba helyettesítve meghatározhatjuk a linearizált merevségek $c = c(a_1, \alpha)$ függvényét. Ezt a (4.13)-ba helyettesítve, az

$$m\alpha^2 = c(a_1, \alpha) \quad (4.23)$$

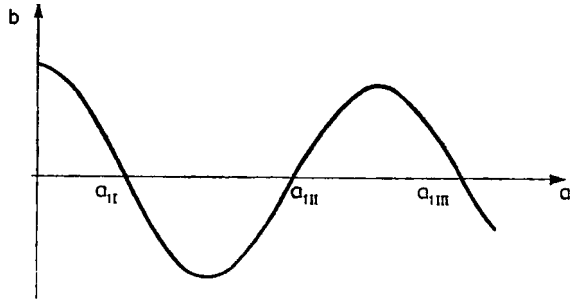
kifejezés adódik. Mivel a (4.10)-ből (4.11) alakú periodikus rezgéseket csak $b = 0$ esetben kapunk, a (4.19) alapján fenn kell állnia az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \alpha \sin \psi) \sin \psi d\psi = 0 \quad (4.24)$$

összefüggésnek. A (4.22)–(4.24) egyenletekből meghatározhatók azok az a_1 és α értékek, amelyeknél a fenti közelítés szerint a (4.9)-nek periodikus megoldása, vagy az (x, x') fázisíkon határciklusa lehetséges.

Ha a (4.23)-ból előállítható $\alpha = \alpha(a_1)$ függvényt a (4.19)-be helyettesítjük, akkor egy $b = b(a_1)$ egyváltozós függvényt kapunk (4. ábra). Ezen függvény zérushelyei adják a periodikus megoldások amplitúdóit. Közelítsük a

kiegyenlítő sík megválasztásakor a fázisgörbét b kis értékei esetében is a fenti a_1 sugarú körrel. Így a zérushelyek környezetében a $b(a_1)$ függvény viselkedéséből ([20] 92. o.) gondolatmenetét követve, a határciklus stabilitására következtethetünk. Könnyen belátható, hogy a 4. ábra szerint az a_{III} amplitúdó stabil. Ha az a_{III} kis környezetében $a_1 > a_{III}$, akkor a linearizált b csillapítási tényező



4. ábra

pozitív, és ez a (4.10)-ben az amplitúdók csökkenéséhez vezet. Ha pedig $a_1 < a_{III}$, akkor $b < 0$ és ez az amplitúdók növekedését vonja maga után. Hasonlóan látható be, hogy az a_{II} és a_{III} amplitúdójú periodikus megoldások instabilak.

Ha a (4.24) identikusan teljesül, akkor (4.23) a nemlineáris rezgő rendszer amplitúdó-frekvencia függvényét adja.

4.3 A rezgésstanban gyakran találkozunk olyan nemlineáritásokkal, amelyek a koordinátarendszer kezdőpontjára szimmetrikusak, azaz eleget tesznek az

$$f(x, \dot{x}) = -f(-x, -\dot{x}) \quad (4.25)$$

feltételnek. Könnyen belátható, hogy ebben az esetben az

$$a_0 = 0$$

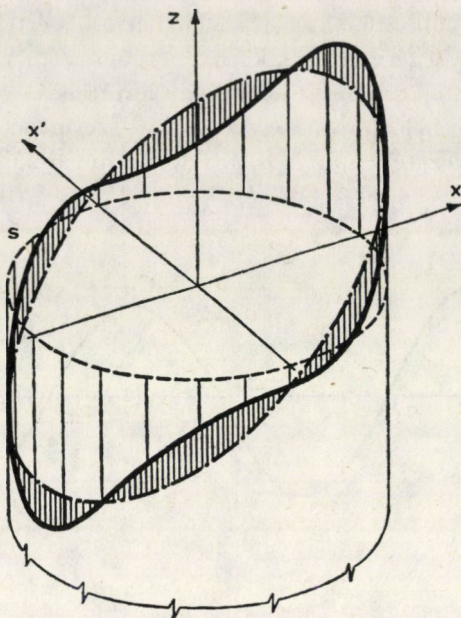
megoldása a (4.8)-nak. Így a (4.5)–(4.7) összefüggések a

$$b = -\frac{1}{\pi a_1 \Omega} \int_0^{2\pi} f(a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad (4.26)$$

$$c = \frac{1}{\pi a_1} \int_0^{2\pi} f(a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi, \quad (4.27)$$

$$d = 0 \quad (4.28)$$

alakot öltik.



5. ábra

Autonóm rezgések vizsgálatakor — a 4.2 pontnak megfelelően — a (4.26), (4.27)-ben Ω helyébe α kerül.

A (4.25) típusú $f(x, \dot{x})$ nemlineáris jellegfelületből az (x, x') fázisgörbére emelt körhenger palástja olyan térgörbét metsz ki, amely a fentiek alapján az origón átmenő síkban fekvő ellipszissel közelíthető (5. ábra).

4.4 A 4.1 pontban leírt közelítés mértékének egyik jellemzője a hengerpaláston mért eltérések

$$M = \sqrt{\frac{1}{2\pi a_1} \oint_{(s)} [f(x, \Omega x') - (b\Omega x' + cx + d)]^2 ds} \quad (4.29)$$

négyzetes integrálközepértéke. Ezen négyzetes integrálközepértékhez tartozó relatív hibát pedig az

$$e_r = \sqrt{\frac{\oint_{(s)} [f(x, \Omega x') - (b\Omega x' + cx + d)]^2 ds}{\oint_{(s)} f^2(x, \Omega x') ds}} \quad (4.30)$$

összefüggés adja.

Autonóm esetben a (4.29), (4.30) összefüggésekben Ω helyébe α kerül.

A (4.30) összefüggést a nemlinearitás mértékének jellemzésére is használhatjuk. Lineáris $f(x, \dot{x})$ esetében e_r zérus. Gyengén nemlineáris $f(x, \dot{x})$ függvény

esetében az e_r nyilván a zérus közelében levő kis érték. Ebben az értelemben az e_r nagyságától függően beszélhetünk erősen nemlineáris és gyengén nemlineáris rezgő rendszerekről.

Az irodalomban (vö. [11] 147. o.) a nemlinearitás mértékének jellemzésére az

$$f(x, \dot{x}) = kx + \mu g(x, \dot{x}) \quad (4.31)$$

alakban felírt nemlineáris függvény esetében a μ dimenziótlan paramétert használják. Fontosnak tartjuk, hogy a nemlinearitás mértékének (4.30) definíciója olyan esetben is használható, amikor az $f(x, \dot{x})$ nemlineáris függvény nem bontható fel egyértelműen a (4.31) alakra.

4.5 Példaként vizsgáljuk meg, hogyan változik a nemlinearitás mértéke az

$$m\ddot{x} + kx + \varepsilon x^3 = 0 \quad (4.32)$$

autonóm Duffing-rendszer esetében. Most az

$$f(x, \dot{x}) = kx + \varepsilon x^3 \quad (4.33)$$

nemlineáris függvény az \dot{x} -től nem függ. A (4.32)-höz az

$$m\ddot{x} + cx = 0 \quad (4.34)$$

lineáris mozgásegyenletet rendeljük hozzá. A $\tau = \alpha t$ bevezetésével (4.32) és (4.34) az

$$\begin{aligned} m \alpha^2 x'' + kx + \varepsilon x^3 &= 0 \\ m \alpha^2 x'' + cx &= 0 \end{aligned}$$

alakba írhatók. A vessző most is τ szerinti differenciálást jelent. A fenti mozgásegyenletek megoldását

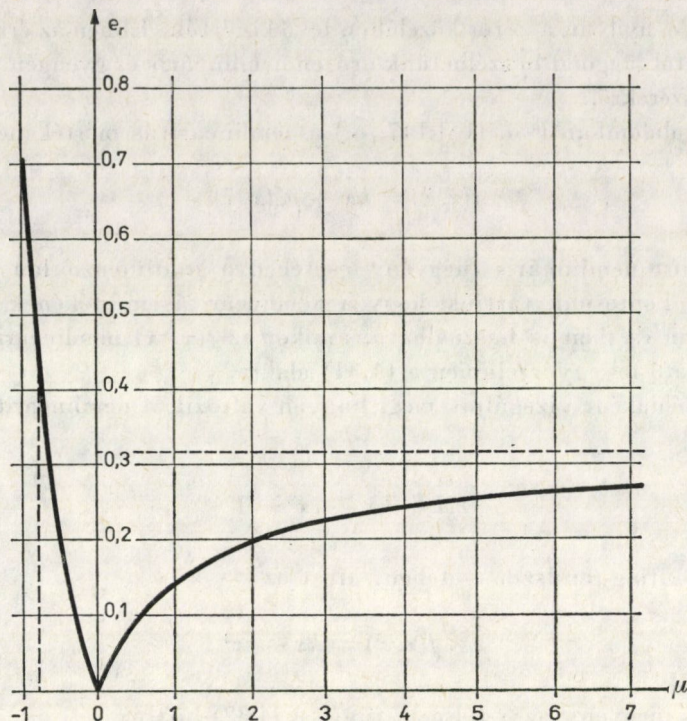
$$x = a \cos \psi \quad (4.35)$$

alakban keressük, ahol $\psi = \tau - \vartheta_1$. A (4.27)-ből

$$c = k + \frac{3}{4} \varepsilon a^2 \quad (4.36)$$

adódik. A (4.33), (4.35), (4.36) kifejezéseket a (4.30)-ba helyettesítve, a

$$\mu = \frac{\varepsilon}{k} a^2$$



6. ábra

jelölés bevezetésével, az

$$e_r = \frac{|\mu|}{\sqrt{2(8 + 12\mu + 5\mu^2)}} \quad (4.37)$$

összefüggéshez jutunk. Az $e_r = e_r(\mu)$ függvényt a 6. ábrán szemléltetjük. Az ábrából is látható, hogy az olyan Duffing-rendszerek közül, amelyeknek (4.32) differenciálegyenletei csak az ε előjében különböznek, az $\varepsilon < 0$ -hoz tartozó erősebben nemlineáris, mint az $\varepsilon > 0$ -hoz tartozó. Példaként az alábbiakra hivatkozunk.

WEIGAND (vö. [10] 43–50. o.) a (4.32) rendszert vizsgálva arra az eredményre jutott, hogy a $\mu = 2$ esetében a (4.32) mozgásegyenlet megoldása jobban hasonlít egy cosinus függvényhez, mint a $\mu = -0,8$ esetén kapott megoldás. Ez az eredmény a fentiekkel összhangban van. A 6. ábra szerint a $\mu = -0,8$ esetében a (4.32) rendszer erősebben nemlineáris, mint $\mu = 2$ esetében.

4.6 A 4.1 és 4.2 pontokban a b , c és d értékeket úgy határoztuk meg, hogy a hengerpalást által kimetszett térgörbét az ellipszis elég jól közelítse. Ebből a célból előírtuk, hogy a fázisgörbe felett az

$$f(x, \Omega x') - (b \Omega x' + cx + d) \quad (4.38)$$

különbség négyzetintegrálja — autonóm esetben a (4.18) — minimális legyen.

A fenti térgörbének ellipszisszel való közelítésére nyilván más feltételeket is szabhatunk. Előírhatjuk például, hogy a (4.38) eltérések *abszolút értékének* a fázisgörbe feletti vonalintegrálja legyen minimális. Azt is előírhatnánk, hogy a fázisgörbe felett a (4.38) eltérések közül az abszolút értékben legnagyobb legyen a minimális. Ezekben az esetekben várható, hogy a 4.1 és 4.2 pontokban kapottaktól eltérő eredményekre jutnánk.

Megemlítjük, hogy ha az $f(x, \dot{x})$ jellegfelületet közelítő síkot úgy választjuk meg, hogy a fázisgörbe feletti maximális eltérés legyen minimális, akkor nincs szükség a t független változó transzformációjára, azaz a τ dimenziótlan idő bevezetésére.

Az optimális linearizálás kapcsán a fent említett módszerek összehasonlítására IWAN és PATYLA [7] numerikus vizsgálatokat végzett. Arra a megállapításra jutottak, hogy a különböző kiegyenlítő módszerekkel kapott eredmények nem mutatnak lényeges különbséget. A számítások azonban akkor járnak a legkevesebb fáradsággal, ha az eltérések négyzetintegrálját minimalizáljuk. Nyilván a 4.1 és 4.2 pontban leírtak esetében is hasonló eredmények várhatók.

A 4.1 és 4.2 pontban választott közelítésnek az egyszerűségeen túl az az előnye, hogy általa több, a nemlineáris rezgések vizsgálatára használt módszer geometriai szemléltetéséhez jutunk. Ennek vizsgálatára a 6. pontban visszatérünk.

5. A független változó transzformációjának szerepe a fázisgörbe feletti linearizálás esetében

5.1 A 4.1 és 4.2 pontokban az $f(x, \dot{x})$ jellegfelület közelítése előtt bevezettük a

$$\tau = \Omega t, \quad \text{illetve} \quad \tau = \alpha t \quad (5.1)$$

dimenzió nélküli időkoordinátát. Ilyen módon az (x, \dot{x}') fázissíkon értelmezhető az ívelem. Az (5.1) transzformációk azt is biztosítják, hogy az (x, \dot{x}') fázissíkon a fázisgörbe kör és ez a számításokat jelentősen leegyszerűsíti. A független változó fenti transzformációjának megválasztása önkényes. Más transzformációt is választhatunk.

5.2 Vezessük be a (3.1) és (3.2) mozgásegyenletekben a

$$\tau = \nu t$$

dimenzió nélküli időkoordinátát, ahol ν egyelőre ismeretlen állandó. Így (3.1) és (3.2) a

$$m \nu^2 x'' + f(x, \nu x') = F \cos \left(\frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1 \right), \quad (5.2)$$

$$m \nu^2 x'' + b \nu x' + cx + d = F \cos \left(\frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1 \right) \quad (5.3)$$

alakba írható. A vessző ismét a τ szerinti differenciálást jelöli. Az (5.3) állandósult rezgéseit

$$x = a_0 + a_1 \cos \left(\frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1 \right) \quad (5.4)$$

írja le, ahol b, c, d ismeretében az a_0, a_1, ϑ_1 állandók a (3.4)–(3.6) összefüggésekből számíthatók. Az (5.4)-ből

$$x' = -a_1 \frac{\Omega}{\nu} \sin \left(\frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1 \right) \quad (5.5)$$

adódik. Az (x, x') fázissíkon az (5.4) és (5.5)-höz tartozó s fázisgörbe az

$$\left(\frac{x - a_0}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{\nu x'}{a_1 \Omega} \right)^2 = 1$$

ellipszis. A fázisgörbére emelt elliptikus henger az $f(x, \nu x')$ felületet egy térgörbében, a $b \nu x' + cx + d$ síkot ellipsziszben metszi. A b, c és d értékeket úgy határozzuk meg, hogy a hengeralástnak a két görbe közé eső felszíne kicsi legyen. Ezért előírjuk, hogy a

$$J_2 = \oint_{(s)} [f(x, \nu x') - (b \nu x' + cx + d)]^2 ds \quad (5.6)$$

integrál értéke legyen minimális. Vezessük be a

$$\psi = \frac{\Omega}{\nu} \tau - \vartheta_1$$

jelölést. Így (5.4) és (5.5) szerint az s fázisgörbe íveleme

$$ds = a_1 \frac{\Omega}{\nu} \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 - \nu^2}{\Omega^2} \sin^2 \psi} d\psi \quad (5.7)$$

alakú. Mivel az (5.6) integrál minimalizálása során elliptikus integrálokra jutunk, célszerű különválasztani a $\nu < \Omega$ és $\nu > \Omega$ eseteket. A

$$k^2 = 1 - \left(\frac{\nu}{\Omega} \right)^2, \quad p^2 = \left(\frac{\nu}{\Omega} \right)^2 - 1 \quad (5.8)$$

jelölésekkel (5.7) a

$$ds = a_1 \frac{\Omega}{\nu} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \quad \text{ha } \nu < \Omega$$

és

$$ds = a_1 \frac{\Omega}{\nu} \sqrt{1 + p^2 \sin^2 \psi} d\psi, \text{ ha } \nu > \Omega$$

alakba írható. A

$$\frac{\partial J_2}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial J_2}{\partial d} = 0 \tag{5.9}$$

feltételek alapján a $\nu < \Omega$ esetben

$$b = -\frac{3}{4\Omega a_1} \frac{k^2}{(1 - k^2) F(k) - (1 - 2k^2) E(k)} \cdot \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \tag{5.10}$$

$$c = \frac{3}{4a_1} \frac{k^2}{(1 + k^2) E(k) - (1 - k^2) F(k)} \cdot \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi, \tag{5.11}$$

$$d = -ca_0 \tag{5.12}$$

kifejezések adódnak, továbbá az a_0 és a_1 között fenn kell állnia az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} d\psi = 0 \tag{5.13}$$

összefüggésnek. Az $F(k)$ és $E(k)$ a k moduluszú első- és másodfajú teljes elliptikus integrálokat jelölik.

A $\nu > \Omega$ esetén az (5.9) feltételekből a

$$b = -\frac{3}{4\Omega a_1} \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2} \left[(1 + 2p^2) E\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) - F\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) \right]} \cdot \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi \cdot \sqrt{1 + p^2 \sin^2 \psi} d\psi, \tag{5.14}$$

$$c = \frac{3}{4a_1} \frac{p^2}{\sqrt{1 + p^2} \left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) - (1 - p^2) E\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\right) \right]} \cdot \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi \cdot \sqrt{1 + p^2 \sin^2 \psi} d\psi, \tag{5.15}$$

$$d = -ca_0 \tag{5.16}$$

kifejezéseket kapjuk. Az a_0 és a_1 között pedig fenn kell állni az

$$\int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cdot \sqrt{1 + p^2 \sin^2 \psi} \, d\psi = 0 \quad (5.17)$$

összefüggésnek.

Ismert ν esetén az (5.10)—(5.17) alapján kapott $a_0 = a_0(a_1, \Omega)$, $b = b(a_1, \Omega)$, $c = c(a_1, \Omega)$ függvények segítségével előállíthatók a (3.1) nemlineáris rendszer $a_1 = a_1(\Omega)$ amplitúdó-frekvencia, illetve $\vartheta_1 = \vartheta_1(\Omega)$ fáziseltérés-frekvencia függvényének közelítő alakjai (vö. 4.1 pont).

Autonóm rendszer esetén a fenti összefüggésekben Ω helyére α kerül. A stabilis határciklusok a 4.2 pontban leírtakhoz hasonlóan kereshetők.

5.3 A ν értékét a fenti számítások során szabad paraméternek tekintettük. Rá nézve további előírásokat tehetünk. A linearizált $b(a_1, \Omega)$ csillapítási tényező és $c(a_1, \Omega)$ rugómerevség, továbbá az $a_0 = a_0(a_1, \Omega)$ mennyiség — rögzített a_1 és Ω -nál — ν változtatásával változik. Ezért, ha a ν értékét helyesen választjuk meg, akkor a fenti eredmények pontosabbak lehetnek, mint a 4. pont eredményei (vö. 5.4 pont). Ilyen módon a ν szerepe a 2. és 3. pontban ismertett súlyfüggvények szerepéhez hasonlít.

Természetes, hogy a 2. és 3. pontban leírtakhoz hasonlóan a fentieket súlyfüggvény bevezetésével is módosíthatjuk. Ekkor az s fázisgörbe felett vett súlyozott eltéréseket minimalizálva, a b , c , d értékeket a

$$J = \oint_{(s)} \{ [f(x, \nu x') - (b\nu x' + cx + d)] \kappa(x, x') \}^2 ds \stackrel{!}{=} \text{minimum}$$

feltételből kapjuk.

Az 5.2 pont eredményei például a 4.1 pontban leírt gondolatmenetet felhasználva is megkaphatók, ha ott a

$$\kappa(x, x') = \sqrt{\left[\frac{\Omega}{\nu} (x - a_0) \right]^2 + x'^2} \quad (5.18)$$

súlyfüggvénnyel súlyozott eltéréseket minimalizáljuk az $(a_0, 0)$ középpontú a_1 sugarú kör felett. Arra a kérdésre, hogy a ν értékét hogyan kell jól megválasztani, a fent elmondottak nem adnak feleletet. A 4. pontban választott $\nu = \Omega$ és $\nu = \alpha$ értékek a számításokat jelentősen leegyszerűsítették. A számításoknak ez az egyszerű elvégezhetősége ν megválasztásának egyik szempontja is lehet.

5.4 Példaként közelítsük az

$$\ddot{x} + \alpha_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (5.19)$$

mozgásegyenletet az

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = 0 \quad (5.50)$$

állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlettel.

Most $f(x, \dot{x}) = \alpha_0^2 x + \varepsilon x^3$, tehát az \dot{x} -től nem függ. Az $a_0 = 0$ megoldása az (5.13) és (5.17)-nek, amely azt jelenti, hogy a maximális kitérések az origóra szimmetrikusan helyezkednek el. Így $d = 0$ adódik.

A $b = 0$ esetben (5.20) általános megoldása

$$x = a_1 \cos(\alpha t - \vartheta_1), \quad (5.21)$$

ahol $\alpha = \sqrt{c}$, a_1 és ϑ_1 pedig a kezdeti feltételektől függő konstansok. Vezessük be a $\tau = \nu t$ dimenzió nélküli időkoordinátát. A τ szerinti deriváltat ismét vesszővel jelölve, (5.19) és (5.20) a

$$\nu^2 x'' + \alpha_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0 \quad (5.22)$$

$$\nu^2 x'' + b \nu x' + cx = 0 \quad (5.23)$$

alakba írhatók. Az (5.21) az

$$x = a_1 \cos\left(\frac{\alpha}{\nu} \tau - \vartheta_1\right) \quad (5.24)$$

alakot ölti, amelyből

$$x' = -a_1 \frac{\alpha}{\nu} \sin\left(\frac{\alpha}{\nu} \tau - \vartheta_1\right). \quad (5.25)$$

Vezessük be a

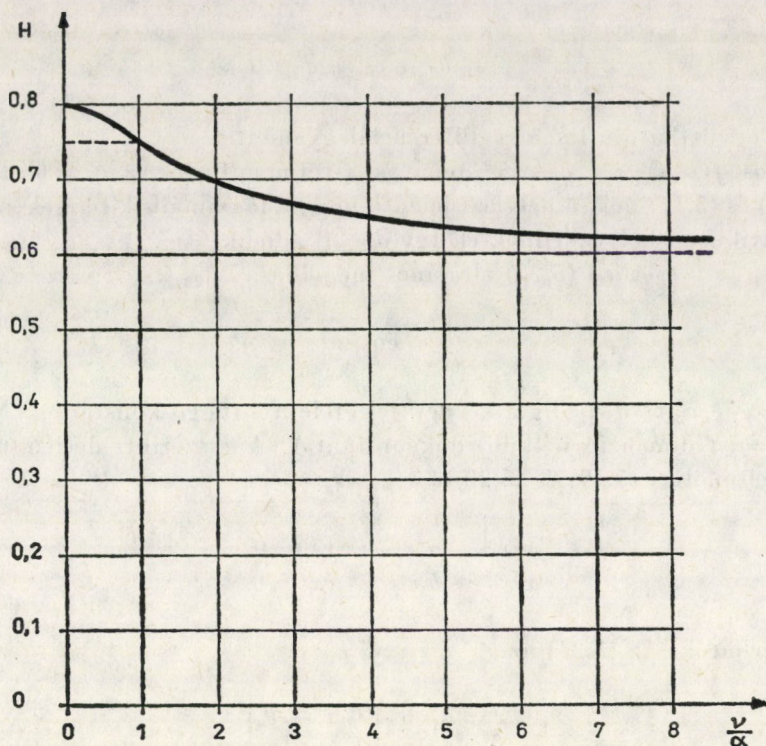
$$\psi = \frac{\alpha}{\nu} \tau - \vartheta_1, \quad k^2 = 1 - \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^2, \quad p^2 = \left(\frac{\nu}{\alpha}\right)^2 - 1 \quad (5.26)$$

jelöléseket. Mivel autonóm rendszert vizsgálunk, az (5.10)–(5.17) összefüggésekben Ω helyett α kerül. Az s pedig az (5.24) és (5.25)-höz tartozó fázisgörbe lesz. Így (5.10) és (5.14) szerint $b = 0$ adódik. Ez az eredmény nyilvánvaló, hiszen (5.19) konzervatív rendszert ír le. A $\nu < \alpha$ esetén (5.11)-ből

$$c = \alpha_0^2 + \varepsilon a_1^2 \frac{2(1-k^2)(1-3k^2)F(k) + (3k^4 + 7k^2 - 2)E(k)}{5k^2[(1+k^2)E(k) - (1-k^2)F(k)]}, \quad (5.27)$$

$\nu > \alpha$ esetén pedig (5.15)-ből

$$c = \alpha_0^2 + \varepsilon a_1^2 \frac{2(1+3p^2)F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) + (3p^4 - 7p^2 - 2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)}{5p^2\left[F\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right) - (1-p^2)E\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right)\right]} \quad (5.28)$$



7. ábra

értékeket kapjuk [19]. Az (5.27), (5.28) összefüggéseket egyetlen összefüggésbe írva, az α saját körfrekvencia négyzetének közelítő értékére az

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + \varepsilon a_1^2 H \left(\frac{\nu}{\alpha} \right) \quad (5.29)$$

kifejezést kapjuk. A $H(\nu/\alpha)$ értelmezése az (5.29) és az (5.26)—(5.28) egybevetéséből látható. A $H(\nu/\alpha)$ függvényt a 7. ábrán ábráztuk. Mivel ν értékét nem rögzítettük, rá vonatkozóan további előírást tehetünk. Megválaszthatjuk például úgy, hogy (5.29) az (5.19) saját körfrekvenciájának négyzetét minél jobban közelítse.

Például az $\alpha_0 = 0$ esetben $\nu/\alpha = 1$ -nél (5.29)-ből

$$\alpha^2 = 0,75 \varepsilon a_1^2$$

adódik. Az (5.19) mozgásegyenlet megoldása és a megoldás amplitúdó-frekvencia függvénye pontosan is előállítható. A pontos megoldás alapján $\alpha_0 = 0$ esetében az

$$\alpha^2 = 0,7178 \varepsilon a_1^2 \quad (5.30)$$

összefüggéshez jutunk (vö. [2] 85.). A fenti közelítő számítást alkalmazva, az (5.30) eredményt $\nu/\alpha = 1,5629$ esetén kapjuk.

Látható, hogy a független változó (5.1) transzformációi a számításokat jelentősen leegyszerűsítik. Az 5.2 pont alapján több fáradsággal pontosabb eredményeket kaphatunk, de a ν helyes megválasztásához megfelelő tapasztalatra van szükség.

5.5 Ha az 5.4 pontban tárgyalt feladatot a 4.2 pont gondolatmenetét követve az (5.18)-nál egyszerűbb

$$\kappa(x, x') = \sqrt{\left[\frac{\alpha}{\nu}(x - a_0)\right]^2 + x'^2}$$

súlyfüggvény felhasználásával oldjuk meg, akkor egyszerű számítások után az

$$\alpha^2 = \alpha_0^2 + \varepsilon a_1^2 \frac{5 + \frac{\nu^2}{\alpha^2}}{2 \left(3 + \frac{\nu^2}{\alpha^2}\right)}$$

kifejezést kapjuk. Az $\alpha_0 = 0$ esetben pontosnak tekinthető (5.30) összefüggést $\nu/\alpha = 1,2619$ választásánál kapjuk.

6. A fázisgörbe feletti linearizálás egybevetése néhány más módszerrel

6.1 Az idők folyamán kialakultak olyan kvantitatív módszerek, amelyek — vagy azok egyes változatai — lényegében azonos eredményekre vezetnek. Ezek kétfélék.

Az egyik csoportba tartozók a közvetlen linearizálásból indulnak ki. Ezek célja, hogy a nemlineáris differenciálegyenletet valamilyen módon lineáris differenciálegyenlettel helyettesítsék. Ilyen pl. a PANOVKO által javasolt direkt linearizálás módszere [15], a harmonikus linearizálás módszere [18], az ekvivalens, illetve optimális linearizálás módszere [4–6] stb. Ebbe a csoportba tartozik a fázisgörbe feletti linearizálás módszere is.

A másik csoport analitikus jellegű, többféle matematikai forrásból származik, és többnyire az az igényük, hogy magasabb rendű közelítéseket is előállítsanak. Ilyen pl. a Bubnov—Galerkin-módszer, a harmonikus egyensúly módszere [16], Poincaré perturbációs módszere [11], a Krülov—Bogoljubov-féle aszimptotikus módszer [20] stb. Az utóbbi eljárások első lépései általában — az irodalomban megszokott módon — megkonstruálhatók úgy, hogy az első csoport eredményeivel azonos vagy közel azonos eredményeket adnak. Ezek

a műveletek — mint ahogy arról esetenként egy-egy vizsgálat meg is győz (lásd 6.4 pont) — egy közvetlen linearizálással egyenértékűek.

Az elmondottak alapján a fázisgörbe feletti linearizálás jelentőségét első sorban abban látjuk, hogy

— több, a fenti osztályozás első csoportjába tartozó módszer geometriai jelentését adja,

— segítségével több, a második csoportba tartozó módszer első lépéséhez geometriai szemléltetés rendelhető.

A 6.2 és 6.4 pontokban példaként részletesen is bemutatjuk a fenti osztályozás egy-egy módszerének a fázisgörbe feletti linearizálással való egybevetését.

6.2 Számos feladat megoldásában eredményesen alkalmazzák a harmonikus linearizálás módszerét (vö. pl. [18]), amely a harmonikus egyensúly módszerének speciális esete, és abból például az alábbi módon vezethető le.

A harmonikus egyensúly módszerével az

$$m\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F \cos \Omega t \quad (6.1)$$

mozgásegyenlet periodikus megoldását az

$$x = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n \Omega t + B_n \sin n \Omega t) \quad (6.2)$$

alakban keressük. A (6.2) kifejezést (6.1)-be helyettesítjük. Az $f(x, \dot{x})$ függvényt Fourier-sorba fejtjük és (6.1)-ben előírjuk az egyes harmonikusok együtthatóinak egyenlőségét. Így az A_0, A_n, B_n ($n = 1, 2, \dots$) együtthatókra nemlineáris algebrai egyenletrendszert kapunk. A végtelen sok ismeretlen meghatározása nehézségekbe ütközik, ezért a gyakorlatban a (6.2) sornak csak egy szeletét használják.

Keressük (6.1) megoldását közelítőleg az

$$x = A_0 + A_1 \cos \Omega t + B_1 \sin \Omega t \quad (6.3)$$

alakban. A továbbiak szempontjából célszerű (6.3)-at az

$$x = a_0 + a_1 \cos \psi \quad (6.4)$$

alakba írni, ahol a trigonometrikus függvényeket egy rezgéssé alakítottuk és bevezettük a korábban már alkalmazott $\psi = \Omega t - \vartheta_1$ és $a_0 = A_0$ jelöléseket. Helyettesítsük (6.4)-et (6.1)-be, és fejtsük $f(x, \dot{x})$ -ot az

$$f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) = c_0 + c_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi + \dots \quad (6.5)$$

Fourier-sorba, amelynek együtthatói a

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) d\psi, \quad (6.6)$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \cos \psi d\psi, \quad (6.7)$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a_0 + a_1 \cos \psi, -a_1 \Omega \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (6.8)$$

stb. összefüggésekből számíthatók. A közelítő megoldás (6.3), illetve (6.4) alakjával összhangban a (6.5) Fourier-sorban is csak a nulladik és az első harmonikusokat tartjuk meg. Így (6.1) a

$$-m_1 \Omega^2 a_1 \cos \psi + c_0 + c_1 \cos \psi + b_1 \sin \psi = F \cos(\psi + \vartheta_1) \quad (6.9)$$

alakba írható. Az a_0, a_1, ϑ_1 mennyiségek (6.9)-ből az egyes harmonikusok együtthatóinak egyenlősége alapján számíthatók. Vezessük be a

$$b = -\frac{b_1}{a_1 \Omega}, \quad c = \frac{c_1}{a_1}, \quad d = c_0 - ca_0 \quad (6.10)$$

jelöléseket! Így (6.9) a

$$-m \Omega^2 a_1 \cos \psi + c(a_0 + a_1 \cos \psi) - ba_1 \Omega \sin \psi + d = F \cos(\psi + \vartheta_1) \quad (6.11)$$

alakba írható, amelyből az a_0, a_1, ϑ_1 mennyiségekre a (3.4)—(3.6) összefüggések adódnak.

Könnyen belátható, hogy a (6.11) egyenletre jutunk akkor is, ha (6.1) helyett az

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx + d = F \cos \Omega t \quad (6.12)$$

lineáris differenciálegyenlet (6.4) alakú periodikus megoldását keressük, és (6.12)-ben a b, c, d mennyiségeket a (6.10) és (6.6)—(6.8) összefüggések értelmezik.

Minden (6.1) alakú nemlineáris differenciálegyenlethez hozzárendelhető egy (6.12) alakú lineáris differenciálegyenlet úgy, hogy a két differenciálegyenletnek a (6.4) alakban keresett megoldásai megegyeznek. A (6.12)-t a (6.1)-hez tartozó harmonikusan linearizált differenciálegyenletnek nevezik. Az a módszer pedig, amellyel a (6.1)-ből kiindulva a (6.12) lineáris differenciálegyenlethez jutunk, a harmonikus linearizálás módszere.

A (6.10) és (6.6)—(6.8) összefüggésekkel értelmezett b, c és d mennyiségek megegyeznek a (4.5)—(4.7) eredményekkel. A fentiekben a harmonikus lineari-

zálással kapott eredmények pedig megegyeznek a fázisgörbe feletti linearizálás 4.1 pontban kapott eredményeivel. Tehát a fázisgörbe feletti linearizálás 4.1 pontban leírt változata a 6.1 pontban mondottakkal összhangban valóban fel-fogható úgy is, mint a fentiekben ismertetett harmonikus linearizálás geometriai szemléltetése.

6.3 Hasonló módon belátható, hogy az optimális [4], illetve az ekvivalens linearizálás módszerének [5], [6] is szemléletes geometriai jelentés adható.

6.4 Az alábbiakban a Krülov—Bogoljubov-féle aszimptotikus módszer [20] első közelítését vizsgáljuk meg.

6.4.1 Ez a módszer feltételezi, hogy az $f(x, \dot{x})$ gyengén nemlineáris függvény, azaz

$$f(x, \dot{x}) = kx + \varepsilon g(x, \dot{x}) \quad (6.13)$$

alakú, ahol $k > 0$, és ε kis paraméter. Autonóm esetben tehát (4.9) helyett

$$m\ddot{x} + kx + \varepsilon g(x, \dot{x}) = 0 \quad (6.14)$$

írható. Vezessük be a

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad \text{és} \quad \frac{g(x, \dot{x})}{m} = f_1(x, \dot{x}) \quad (6.15)$$

jelöléseket. Így (6.14) az

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \varepsilon f_1(x, \dot{x}) = 0 \quad (6.16)$$

alakot ölti. (6.16)-ból nyilvánvaló, hogy ω az $\varepsilon = 0$ esethez tartozó lineáris rendszer körfrekvenciája.

A módszer első közelítésében a megoldást az

$$x = a \cos \psi$$

alakban keressük, ahol a és ψ a

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \sin \psi \, d\psi$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi a\omega} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a\omega \sin \psi) \cos \psi \, d\psi$$

differenciálegyenletekből számíthatók (vö. [20], 51. o.).

A továbbiakban csak az állandósult rezgésekkel foglalkozunk. Állandósult rezgések esetén $da/(dt) = 0$ és $d\psi/(dt) = \alpha$. Ebben az esetben a rezgések

amplitúdója az

$$0 = \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (6.17)$$

körfrekvenciája pedig az

$$\alpha = \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (6.18)$$

összefüggésből számítható. Ha ε második hatványát elhanyagoljuk, akkor (6.18)-ből

$$\alpha^2 = \omega^2 + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} f_1(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (6.19)$$

adódik. Ha (6.17) és (6.19)-ben figyelembe vesszük a (6.13) és (6.15) jelöléseket, akkor a

$$0 = \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (6.20)$$

$$m\alpha^2 = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (6.21)$$

összefüggésekhez jutunk. A (6.20) és (6.21) kifejezések hasonlítanak a (4.2) pontban kapott eredményekhez. Tegyük fel, hogy $f(x, \dot{x})$ -ra fennáll (4.25), azaz $a_0 = 0$. Ha a (6.20) és (6.21) jobb oldalán a helyébe a_1 -et és ω helyébe α -t írunk, akkor a (4.24) és (4.23) összefüggéseket kapjuk.

6.4.2 [20] (109. o.) kimutatja, hogy az első közelítéssel megegyező eredményre jutunk, ha (6.14) helyett az

$$m\ddot{x} + \lambda_e(a) \dot{x} + k_e(a) x = 0 \quad (6.22)$$

ekvivalens lineáris differenciálegyenletet oldjuk meg, ahol $\lambda_e(a)$ és $k_e(a)$ a

$$\lambda_e(a) = -\frac{\varepsilon}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} g(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$k_e(a) = k + \frac{\varepsilon}{\pi a} \int_0^{2\pi} g(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

vagy — tekintettel a (6.13) jelölésre — a

$$\lambda_e(a) = -\frac{1}{\pi a \omega} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (6.23)$$

$$k_e(a) = \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi, -a \omega \sin \psi) \cos \psi d\psi \quad (6.24)$$

összefüggésekből számíthatók. A (6.23) és (6.24) alapján számolt linearizált csillapítási tényező és rugómerevség $a_0 = 0$ esetében csak abban különbözik a (4.19) és (4.20)-tól, hogy a jobb oldalukon a nemlineáris rendszer α saját körfrekvenciája helyett az $\varepsilon = 0$ esethez tartozó lineáris rendszer ω saját körfrekvenciája szerepel.

6.4.3 A (6.20), (6.21) összefüggésekhez a 4.2 pont gondolatmenetét követve geometriai megfontolások alapján is eljuthatunk. Vezessük be a (6.14) és (6.22) differenciálegyenletekben a $\tau = \omega t$ dimenzió nélküli időkoordinátát, ahol $\omega = \sqrt{k/m}$. Így (6.14) és (6.22) az

$$m \omega^2 x'' + kx + \varepsilon g(x, \omega x') = 0, \quad (6.25)$$

$$m \omega^2 x'' + \lambda_e \omega x' + k_e x = 0 \quad (6.26)$$

alakba írható. (Vessző a τ szerinti deriválást jelöli.) Az $\varepsilon = 0$ esetben (6.25) megoldása

$$x = a \cos(\tau - \vartheta_1) \quad (6.27)$$

alakú, ahol a és ϑ_1 állandók, az utóbbiból pedig

$$x' = -a \sin(\tau - \vartheta_1) \quad (6.28)$$

következik. A (6.27), (6.28) fázisgörbe az (x, x') fázissíkon kör. Erre az s fázisgörbére emelt körhenger az $f(x, \omega x') = kx + \varepsilon g(x, \omega x')$ felületet térgörbében a $\lambda_e \omega x' + k_e x$ síkot pedig ellipsziszben metszi. Ha a λ_e és k_e mennyiségeket úgy választjuk meg, hogy a hengerpalástnak az ellipszis és a térgörbe közé eső felülete kicsi legyen, akkor a

$$\oint_{(s)} [f(x, \omega x') - (\lambda_e \omega x' + k_e x)]^2 ds \stackrel{!}{=} \text{minimum}$$

feltétel alapján a λ_e és k_e mennyiségekre a (6.23) és (6.24) összefüggéseket kapjuk.

Ezek a megfontolások a Krülov—Bogoljubov-módszer első közelítésének szemléletes geometriai jelentést adnak.

A fentieknek a 4.2 ponttal való egybevetése világosan mutatja, hogy a Krülov—Bogoljubov-módszer első közelítése és a fázisgörbe feletti linearizálás (illetve a vele azonos eredményt adó módszerek) között elvi különbségek vannak. Ezek alapját az adja, hogy az egyik esetben $\tau = \omega t$, a másikban $\tau = \alpha t$ transzformációt alkalmazunk, és ennek megfelelően az ekvivalens sík megválasztásához az egyik esetben ω , a másikban α körfrekvenciájú rezgéseket veszünk alapul.

A Krülov—Bogoljubov-módszer magasabb közelítéseinél is fennáll az, hogy a megoldások előállításában az $f(x, \omega x')$ nemlineáris függvénynek és

deriváltjainak csak a (6.27), (6.28) fázisgörbére lokalizált értékei szerepelnek. Ez a fázisgörbe állandósult rezgéseknél a magasabb közelítések esetén is a sugarú kör.

Az alkalmazások során előfordul, hogy az $f(x, \dot{x})$ függvény (6.13) alakban nem bontható fel, mert k értéke nem határozható meg egyértelműen. Ebben az esetben több szerző (vö. pl. [18] 142. o.) azt javasolja, hogy a Krülov—Bogoljubov-módszer gondolatát az $\omega = \alpha$ választásával alkalmazzuk. Belátható, hogy ilyenkor a Krülov—Bogoljubov-módszer első közelítésével az állandósult rezgésekre kapott eredmények az $a_0 = 0$ esetben a 4.2 pont eredményeivel megegyeznek.

Megemlíjtük még, hogy a gerjesztett rendszerek 4.1 pontban leírt vizsgálatát a Krülov—Bogoljubov-módszer eredményeivel egybevetve, a fentiekhez hasonló megállapításokra juthatunk.

6.5 Érdemes még megemlíteni, hogy speciális esetekben a Poincaré-módszer és a harmonikus linearizálás módszere (vö. [9] 102. o.), továbbá a Poincaré-módszer és a Krülov—Bogoljubov-módszer (vö. [24]) azonos eredményekre vezet. Így a 6.2 és 6.4 pontokban leírtakhoz hasonló módon a Poincaré-módszer első lépésének is szemléletes geometriai jelentés adható.

6.6 A fentiekben láttuk, hogy vannak olyan közelítő módszerek, amelyek a fázisgörbe feletti linearizálással azonos eredményt adnak. Az ilyen fajta közelítések várhatóan annál jobb eredményt szolgáltatnak, minél jobban megközelíthető ellipszissel a fázisgörbére emelt körhenger által az $f(x, \dot{x})$ jellegfelülethől kimetszett térgörbe (vö. 3. és 5. ábra). Fel szokás tétélezni, hogy ez a feltevés az ε kis értékeinél általában teljesül. A geometriai szemlélet alapján kézenfekvőnek látszik, hogy az $f(x, \dot{x})$ függvény felépítésétől függően nem kell ε kis értékeire szorítkoznunk. Ezért előfordulhat, hogy mindazok a módszerek, amelyek feltételezik, hogy a nemlineáris függvény egy kis paramétert tartalmaz, első közelítésben a kis paraméter nagy értékeinél is jó eredményt adnak.

7. Következtetések

7.1 A Panovko-féle direkt linearizálási módszer alapgondolatát a helytől és sebességtől is függő általános alakú $f(x, \dot{x})$ nemlinearitás esetén is alkalmazhatjuk. Ebben az esetben az $f(x, \dot{x})$ jellegfelületet egy $b\dot{x} + cx + d$ síkkal közelítjük az (x, \dot{x}) fázissík valamilyen tartománya felett. Az a tartomány, amely felett a közelítést elvégezzük, többféleképpen is megválasztható. Ezen tartomány és a súlyfüggvény alkalmas megválasztásakor speciális esetekben a PANOVKO által kapott eredmények adódnak.

7.2 Ekvivalens lineáris rendszerek más — az eddigiektől eltérő — úton is felépíthetők. A nemlineáris mozgásegyenlethez ebben az esetben is hozzárendelünk egy lineáris mozgásegyenletet. Utóbbinak együtthatóit úgy határozzuk

zuk meg, hogy a megoldás fázisgörbéje felett a nemlineáris függvény és az őt közelítő lineáris függvény közötti eltérések legyenek minimálisak. A fázisgörbe feletti eltérések minimalizálását több úton is elvégezhetjük. Egy egyszerű változatot részletesen a 4. és 5. pontokban mutatunk be. Ebben az esetben az eltérések négyzetének a fázisgörbe feletti vonalintegráljait minimalizáljuk. Ahhoz, hogy a fázisikon a vonalelem értelmezhető legyen, egy transzformáció bevezetésére van szükség. Ez a transzformáció többféleképpen is megválasztható.

7.3 A fázisgörbe feletti linearizálás elvégzése után előállítható az eltérések négyzetes integrálközepének relatív hibája. A relatív hiba nagysága a nemlinearitás mértékéről ad tájékoztatást. A nemlinearitás mértékének ez a (4.30) definíciója egy korábbi, az irodalomból ismert, definíciónál általánosabb esetekben is használható.

7.4 A fázisgörbe feletti linearizálásra támaszkodva több — a nemlineáris rezgések vizsgálatában használt — módszer szemléletes geometriai jelentéséhez jutunk.

IRODALOM

1. PANOVKO, YA. G.: A Review of Applications of the Method of Direct Linearization, *Appl. Mech. Proc., XI. Int. Congr. Appl. Mech.*, Munich (1964), 167—171
2. PANOVKO, YA. G.: Elements of the Applied Theory of Elastic Vibration, *Mir*, Moscow (1971)
3. BAPAT, V. A.—SRINIVASAN, P.: Effect of Static Deflection on Natural Frequency of Non-linear Spring Mass System by Direct Linearization Method, *Journal of Sound and Vibration* 10 (1969) (3), 443—454
4. BLAQUIÈRE, A.: Une nouvelle méthode de linéarization locale des opérateurs non-linéaires; approximation optimale. *2nd Conf. Nonlinear Vibrations* (Warsaw 1962), Warsaw 1964
5. IWAN, W.: On Defining Equivalent Systems for Certain Ordinary Nonlinear Differential Equations, *Int. J. Non-Linear Mechanics* 4 (1969), 325—334
6. SPANOS, P.-T. D., IWAN, W.: Harmonic Analysis of Dynamic Systems with Non-symmetric Nonlinearities, *J. Dynamic Systems, Measurement Control* 101 (1979) 31—36
7. IWAN, W.—PATULA, E. J.: The Merit of Different Error Minimization Criteria in Approximate Analysis, *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), 257—262
8. IWAN, W.—PATULA, E. J.: On the Validity of Equation Difference Minimization Techniques, *Int. J. Non-Linear Mechanics* 7 (1972), 1—17
9. LURJE, A. I.: Einige nichtlineare Probleme aus der Theorie der selbsttätigen Regelung, Akademie Verlag, Berlin 1957
10. WEIGAND, A.: Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen, Band I. VEB Verlag Technik, Berlin 1959
11. ANDRONOW, A. A.—WITT, S. E.—CHAIKIN, S. E.: Theorie der Schwingungen, Teil II. Akademie Verlag, Berlin 1962
12. FORBAT, N.: Analytische Mechanik der Schwingungen, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1966
13. SAGIROW, P.: Zur Frage der Fehlerabschätzung beim Verfahren der harmonischen Balance, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 40 (1960), 451—453
14. URABE, M.: Galerkin's Procedure for Nonlinear Periodic Systems, *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 20 (1965), 120—152
15. Пановко, Я. Т.: Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний, *Инженерный сборник*, том XIII. (1952), 113—122
16. *Вибрации в технике, Справочник в 6. томах*, том 2.: Блехман, И. И.: Колебания нелинейных механических систем, Машиностроение, Москва 1979
17. *Вибрации в технике, Справочник в 6. томах*, том 3.: Диментберг, Ф. М., Колесников, К. С.: Колебания машин конструкций и их элементов, Машиностроение, Москва 1980

18. Попов, Е. Н.—Пальтов, И. П.: Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, Москва 1960
19. Градштейн, И. С.—Рыжик, И. М.: Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, Москва 1963
20. Боголюбов, Н. Н.—Митропольский, Ю. А.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Наука, Москва 1974
21. Розенwasser, Е. Н.: Колебания нелинейных систем, Наука, Москва 1969
22. Лойцянский, Л. Г.: Свободные и вынужденные колебания при наличии квадратичного и промежуточного между линейным и квадратичным законов сопротивления, *Инженерный сборник, ХУлла* (1954), 139–148
23. Карaban, В. Н.—Дубовицкий, А.Ю.: О способах линеаризации при расчетах свободных колебаний нелинейных систем, В кн.: *Теория механизмов и машин* 23 Харьков, Вища школа, (1977), 35–39
24. Проскураков, А. П.: Сравнение периодических решений квазилинейных систем, построенных методом Пуанкаре и методам Крылова-Боголюбова, *Прикладная математика и механика* 28, вып. 4. (1964), 765–770
25. Гарбер, Е. Д.: Оценка погрешности метода гармонического баланса, *Автоматика и телемеханика*, XXIV. (1963), 482–492

Contribution to the Methods of Construction of Equivalent Linear Oscillating Systems. —

In the first part of the paper a generalization of the Panovko method for direct linearization is presented and one method of the linearization above the phase curve is introduced. On the basis of this latter a suggestion is made to define the degree of the non-linearity. The second part deals with the role of the transformation of the independent variable in case of the linearization above the phase curve. It is pointed out that several methods used for the examination of the non-linear oscillations have a demonstrative geometrical meaning.

Beitrag zu den Methoden der äquivalenten Linearisierung für Schwingungssysteme. —

In der Arbeit wird eine Verallgemeinerung der direkten Linearisierungsmethode von Panovko vorgestellt, und es wird die Methode der Linearisierung über der Phasenkurve eingeführt. Auf Grund der letzten Methode wird eine Definition des Maßes der Nichtlinearität vorgeschlagen. Bei der Linearisierung über der Phasenkurve wird die Bedeutung der Transformation der unabhängigen Variablen untersucht. Es wird gezeigt, daß mehrere zur Untersuchung der nichtlinearen Schwingungssysteme angewandten Methoden eine anschauliche geometrische Deutung haben.

LONGITUDINÁLISAN REZGŐ, A VÉGÉN TÖMEGGEL TERHELT VISZKOELASZTIKUS RÚD DINAMIKAI DEFORMÁCIÓJA

PRITZ TAMÁS*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1982. április 6-án]

A cikkben elméletileg vizsgáljuk a dinamikai deformációját azon longitudinálisan rezgő viszkoelasztikus rúdnak, amelynek az egyik végéhez egy tömeg van rögzítve. A harmonikus rezgésre gerjesztés a másik végen történik állandó rezgéselmozdulással. A rúd rezgőmozgását leíró egydimenziós hullámegyenlet megoldásával levezetjük a dinamikai deformáció függvényét. Ennek vizsgálatával megmutatjuk, hogy a rúd deformációja a gerjesztés helyén, az antirezonancia-frekvenciákon a legnagyobb. A kis veszteség esetére közelítő olyan összefüggéseket vezetünk le, amelyekkel a legnagyobb deformációt egyszerűen számítani lehet a veszteségi tényező ismeretében.

I. Bevezetés

Az akusztikai célra használt szigetelőanyagok, valamint egyéb viszkoelasztikus anyagok komplex Young-modulusának meghatározását gyakran rúdalakú próbatestek longitudinális rezgésének vizsgálatával végzik. A próbatest egyik végéhez sok esetben egy tömeg csatlakozik, amelyet vagy a statikus feszültségkeltés céljából alkalmaznak [1], vagy amely csupán a rúdvég rezgését mérő gyorsulás-érzékelő tömege [2, 3]. A rezgésre gerjesztés a rúd másik végén történik, általában elektrodinamikus rázóasztallal [1—2]. Ismeretes, hogy a viszkoelasztikus anyagok zöme nemlineáris oly módon, hogy a komplex Young-modulus értéke egy adott deformáció felett függ a deformáció nagyságától. Ismeretes továbbá, hogy a rúdalakú próbatest igénybevétele általános esetben nem egyenletes, azaz a deformáció maximális és minimális értékek között változik a rúd hossza mentén az állóhullámú képnek megfelelően. A komplex Young-modulus lineáris értékének meghatározásához tehát gondoskodni kell arról, hogy a próbatest legnagyobb deformációja se lépje túl az anyag linearitásának határát. Ehhez viszont ismerni kell a deformáció változását a rúd mentén, azt a helyet, ahol a deformáció legnagyobb és ennek számítására szolgáló összefüggéseket.

Korábban NORRIS és YOUNG [2] vizsgálta a fenti rúd dinamikai deformációját, de csak numerikusan és csak meghatározott frekvenciákon. Ezért ebben a cikkben megvizsgáljuk általánosan, elméleti úton az olyan rúd dinamikai deformációját, amelyet az egyik végén egy elmozdulásgenerátor longi-

* Dr. Pritz Tamás, 1158 Budapest, Órjárt u. 27/Á

tudinálisan harmonikus rezgésre gerjeszt, míg a másik véghez egy tömeg csatlakozik. A vizsgálat során az elemi rúdelméletből indulunk ki, azaz feltételezzük, hogy a longitudinális rezgőmozgást a jól ismert egydimenziós hullámegyenlet írja le. Ennek a megoldása viszkoelasztikus esetben viszont olyan komplex transzcendens egyenletekhez vezet, amelyekből — általános esetben — nem lehet közvetlenül kifejezni a legnagyobb deformáció helyét és értékét. Megmutatjuk azonban, hogy a viszonylag kis veszteség feltételezésével — amely több akusztikai szigetelőanyagra teljesül — viszonylag egyszerű és gyakorlati szempontból kielégítően pontos összefüggéseket lehet levezetni a rúd legnagyobb deformációjának számítására.

2. Általános rész

2.1 *A hullámegyenlet és megoldása*

Tekintsük az 1. ábrán vázolt l hosszúságú rudat, amelyet az egyik végén longitudinális rezgésre gerjesztünk. A gerjesztést rezgéselmozdulás-generátor végzi, amely harmonikus rezgőmozgást végez az x irányban állandó ξ_1 amplitúdóval. A másik véghez M tömeg csatlakozik. A rúd dinamikai deformációjának vizsgálatához feltételezzük, hogy:

- a rúd keresztmetszete állandó,
- a rúd anyaga homogén és izotrop,
- a tengelyirányú feszültség és deformáció közötti összefüggés lineáris és azt a komplex Young modulussal lehet megadni,
- az oldalirányú méret jóval kisebb, mint a hullámhossz és végül
- a rúd végénél (a generátorhoz, illetve a tömeghez csatlakozásnál) nincs megakadályozva az oldalirányú elmozdulás.

Ekkor a rúd tengelyére merőleges keresztmetszet ξ rezgéselmozdulását — a rúdhoz képest rögzített x koordinátatengely irányában — az alábbi jól ismert hullámegyenlet írja le:

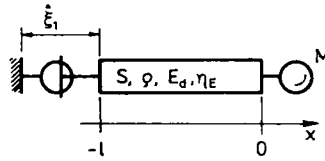
$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

ahol t az idő és c a terjedési sebesség, amely

$$c = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Itt ρ a sűrűség és E a komplex Young-modulus, amely általános esetben függ a frekvenciától;

$$E = E_d (1 + j\eta_E), \quad (3)$$



1. ábra. Az egyik végén M tömeggel terhelt, a másik végén elmozdulás-generátorral longitudinális rezgésre gerjesztett viszkoelasztikus rúd modellje

ahol E_d a dinamikai Young-modulus, η_E a veszteségi tényező és $j = \sqrt{-1}$ a képzetes egység.

Az (1) egyenlet megoldását az ismert formában keressük, azaz

$$\xi(x, t) = \hat{\xi}(x) e^{j\omega t}, \quad (4)$$

ahol ω a frekvencia R/s -ban és $\hat{\xi}(x)$ a rezgéselmozdulás komplex amplitúdója. Ezzel (1)-ből az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk

$$-\frac{d^2 \hat{\xi}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \hat{\xi}(x), \quad (5)$$

ahol γ a komplex terjedési állandó, amely

$$\gamma = j \frac{\omega}{c} = \alpha + j\beta \quad (6)$$

és itt α a csillapítási tényező és β a fázistényező.

Az (5) differenciálegyenlet megoldása az alábbi:

$$\hat{\xi}(x) = \xi_+(e^{-\gamma x} - r e^{\gamma x}), \quad (7)$$

ahol ξ_+ a gerjesztési feltételtől függő állandó és r a feszültség hullámra vonatkozó reflexiós tényező az $x = 0$ helyen, mely komplex mennyiség; azaz

$$r = |r| e^{j\varphi} = \frac{j\omega M - Z_0}{j\omega M + Z_0} \quad (8)$$

és itt Z_0 a rúd hullámimpedanciája:

$$Z_0 = S\rho c, \quad (9)$$

ahol S a rúd keresztmetszete. A ξ_+ értékét az $x = -l$ helyre vonatkozó határfeltétel alapján határozzuk meg, amely: $\hat{\xi}(-l) = \hat{\xi}_1$. Ezzel azt kapjuk (7)-ből,

hogy

$$\hat{\xi}_+ = \hat{\xi}_1 \frac{1}{e^{\gamma l} + re^{-\gamma l}}. \quad (10)$$

A deformáció (ε) függvényét a rezgéselmozdulás ismeretében határozhatjuk meg, ugyanis

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \xi(x, t).$$

A deformáció komplex amplitúdóját tehát (7)-ből kapjuk az x szerinti deriválás és (10) helyettesítése után

$$\hat{\xi}(x) = -\gamma \hat{\xi}_1 \frac{e^{-\gamma x} + re^{\gamma x}}{e^{\gamma l} - re^{-\gamma l}}. \quad (11)$$

Látható, hogy a rúd dinamikai deformációja függ a gerjesztési amplitúdótól, a terjedési állandótól és a reflexiók tényezőtől. A továbbiakban megvizsgáljuk ezek kapcsolatát a frekvenciával és a rúd jellemzőivel.

2.2 A hullámparaméterek

Ebben a pontban megmutatjuk a hullámparaméterek, azaz a terjedési állandó és sebesség, valamint a hullámimpedancia kapcsolatát az anyag dinamikai rugalmas jellemzőivel, elsősorban a veszteségi tényezővel.

A komplex terjedési állandót (6)-ből kapjuk (2) és (3) helyettesítésével

$$\alpha + j\beta = j\omega \left[\frac{\rho}{E_d(1 + j\eta_E)} \right]^{1/2}. \quad (12)$$

Az α -t és β -t a jobb oldal valós és képzetes részre bontásával határozzuk meg:

$$\beta = \beta_0 \frac{\sqrt{D+1}}{\sqrt{2}D}, \quad (13)$$

$$\alpha = \beta_0 \frac{\sqrt{D-1}}{\sqrt{2}D}, \quad (14)$$

ahol bevezettük a

$$\beta_0 = \omega \left(\frac{\rho}{E_d} \right)^{1/2}, \quad (15)$$

és

$$D = \sqrt{1 + \eta_E^2} \quad (16)$$

jelöléseket. A komplex terjedési sebességet (6)-ból fejezzük ki, majd célszerű átalakítások után a:

$$c = \frac{c_f}{1 + d^2} (1 + jd), \quad (17)$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$d = \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{D - 1}{D + 1} \right)^{1,2} \quad (18)$$

és c_f a fázissebesség, amely

$$c_f = \frac{\omega}{\beta}, \quad (19)$$

vagyis

$$c_f = \frac{\sqrt{2} D}{\sqrt{D + 1}} c_{f_0}, \quad (20)$$

ahol

$$c_{f_0} = \frac{\omega}{\beta_0} = \left(\frac{E_d}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

A komplex hullámimpedanciát (9)-ből kapjuk a (17) terjedési sebesség helyettesítése és célszerű átalakítások után:

$$Z_0 = Z_{0x} + jZ_{0y} = Z_{00} \frac{\sqrt{D + 1}}{\sqrt{2}} (1 + jd), \quad (22)$$

ahol

$$Z_{00} = S_0 c_f, \quad (23)$$

Tehát a hullámimpedancia valós része

$$Z_{0x} = Z_{00} \frac{\sqrt{D + 1}}{\sqrt{2}} \quad (24)$$

és a képzetes rész:

$$Z_{0y} = dZ_{0x}. \quad (25)$$

Látható, hogyha a rúd anyaga ideálisan rugalmas ($\eta_E = 0$, $E = E_d$), akkor $D = 1$, $d = 0$, tehát $\alpha = 0$, $\beta = \beta_0$, $c_f = c_{f_0}$ és így $Z_0 = Z_{00}$. A veszteség hatására a csillapítási tényező nő, míg a fázistényező csökken. Az α és β értékének változását — β_0 -ra normalizálva — az η_E függvényében a 2. ábra mutatja.

Ha a rúd anyaga nem ideálisan rugalmas, de a veszteségi tényező olyan kicsi, hogy $\eta_E^2 \ll 1$, akkor sorfejtéssel az alábbi közelítő összefüggéseket kap-

juk D -re és d -re:

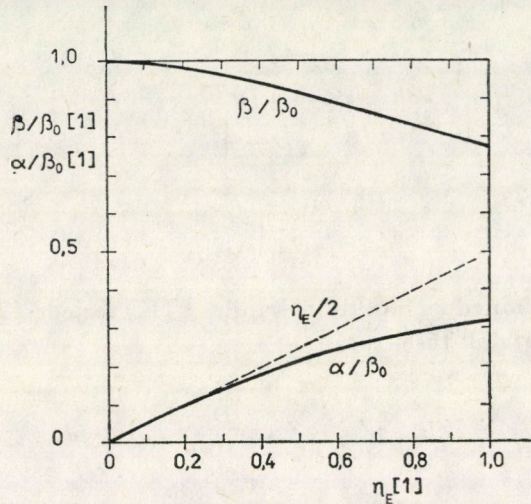
$$D \approx 1 + \eta_E^2/2 \quad (26)$$

és $d \approx \eta_E/2. \quad (27)$

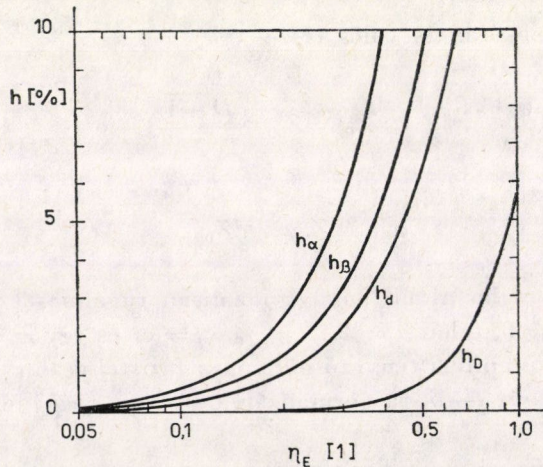
Ekkor $\beta \approx \beta_0 \quad (28)$

és $\alpha \approx \beta_0 \eta_E/2. \quad (29)$

Ezen közelítések %-os hibáját a 3. ábrán adjuk meg az η_E függvényében. Látható, hogy mindegyik közelítés hibája kisebb, mint 1%, ha $\eta_E < 0,1$. Ha



2. ábra. A fázis- és csillapítási tényező a veszteségi tényező függvényében



3. ábra. A (26) ... (29) közelítő, összefüggésekkel számított D , d , β és α értékek százalékos eltérése a pontos értékekhez képest

viszont kb. 5% hibát engedünk meg, akkor az $\eta_E < 0,3$ értékek esetében is használhatjuk a közelítő összefüggéseket. Tehát kis veszteségen η_E fenti értékeit, elsősorban az $\eta_E < 0,1$ -et értjük a továbbiakban.

2.3 A reflexiós tényező

A reflexiós tényező az $x = 0$ helyen csak a rúd hullámimpedanciájától és a végéhez kapcsolt M tömeg mechanikai impedanciájától függ. Az r abszolút értékét és fázisát (8)-ból kapjuk a (22), (24) és (25) helyettesítésével és célszerű átalakításokkal.

$$|r| = \left(\frac{1 + A^2}{1 + B^2} \right)^{1/2}, \quad (30)$$

$$\vartheta = -\pi - \vartheta', \quad (31)$$

ahol

$$\vartheta' = \arctan A + \arctan B, \quad (32)$$

$$A = \frac{M}{m} \beta l (1 + d^2) - d, \quad (33)$$

$$B = \frac{M}{m} \beta l (1 + d^2) + d \quad (34)$$

és m a rúd tömege.

Jelöljük $\eta_E = 0$ esetében a reflexiós tényező abszolút értékét és fázisát $|r_0|$ -tal, illetve ϑ_0 -val. Ekkor

$$A = B = \frac{M}{m} \beta_0 l, \quad (35)$$

tehát $|r_0| = 1$, a fázis pedig

$$\vartheta_0 = -\pi - \vartheta_0', \quad (36)$$

ahol

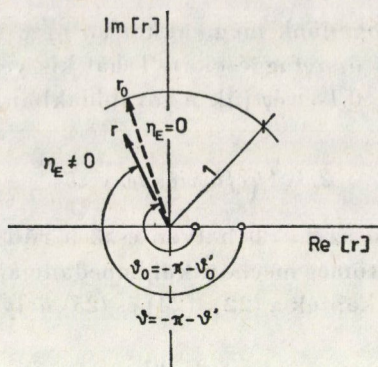
$$\vartheta_0' = 2 \arctan \frac{M}{m} \beta_0 l. \quad (37)$$

A (30)...(34) összefüggésekből látható, hogyha a rúd anyaga nem ideálisan rugalmas, akkor $|r| < 1$ és $\vartheta < \vartheta_0$. A veszteség tehát csökkenti mind a reflexiós tényező abszolút értékét, mind a fázisát (negatív szögeket tekintve). Ezt szemlélteti a 4. ábra.

Vizsgáljuk a továbbiakban a kis veszteségű esetet. Ekkor $d^2 \ll 1$ és a (27) valamint a (28) összefüggések figyelembevételével írható, hogy

$$A \approx \frac{M}{m} \beta_0 - \frac{\eta_E}{2}, \quad (38)$$

$$B \approx \frac{M}{m} \beta_0 l + \frac{\eta_E}{2}. \quad (39)$$



4. ábra. A reflexiós tényező vektor

Ezeket (30)-ba helyettesítve kapjuk $|r|$ közelítő összefüggését célszerű átalakítások után:

$$|r| \approx \left[\frac{\frac{M}{m} \beta_0 l \left(\frac{M}{m} \beta_0 l - \eta_E \right) + 1}{\frac{M}{m} \beta_0 l \left(\frac{M}{m} \beta_0 l + \eta_E \right) + 1} \right]^{1/2} \quad (40)$$

A fázist hasonlóan kapjuk,

$$\vartheta' \approx 2 \arctan \left(\frac{M}{m} \beta_0 l \right), \quad (41)$$

tehát $\vartheta' \approx \vartheta'_0$, azaz $\vartheta \approx \vartheta_0$. Megállapíthatjuk tehát, hogy a kis veszteségű esetben számolhatunk a ϑ_0 fázisszöggel, de az η_E hatását a reflexiós tényező abszolút értékére számításba kell venni.

Az $|r|$ lehetséges értékeinek meghatározásához vizsgáljuk meg a reflexiós tényezőt a komplex számsíkon! Tekintsük ehhez a (8) összefüggést kissé átalakított formában:

$$r = \frac{Z' - 1}{Z' + 1}, \quad (42)$$

ahol

$$Z' = \frac{j\omega M}{Z_0} = |Z'| e^{j\vartheta'}. \quad (43)$$

A (42) a komplex függvénytanból jól ismert konformis leképezést valósítja meg, azaz a Z' síkot, vagy annak egy tartományát az r síkba, illetve annak egy tartományába viszi át. A Z' tartományának meghatározásához írjuk fel Z' abszolút értékét és fázisszögét. Ezeket (43)-ból kapjuk (22) és (23) helyettesí-

tése és átalakítások után:

$$Z' = \frac{M}{m} \beta l (d + j), \quad (44)$$

tehát

$$|Z'| = \frac{M}{m} \beta l \sqrt{1 + d^2} \quad (45)$$

és

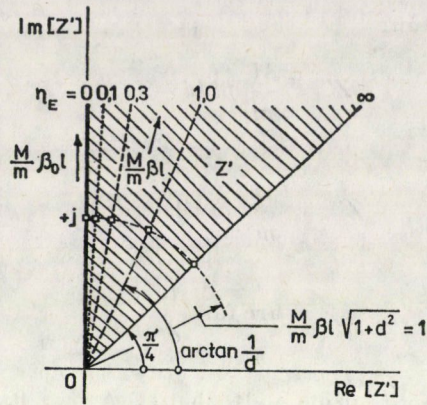
$$\varphi_{Z'} = \arctan \frac{1}{d}. \quad (46)$$

A $(M/m)\beta l$ értéke 0 és ∞ között változhatik. A $d = 0$, ha $\eta_E = 0$ és $d \rightarrow 1$, ha $\eta_E \rightarrow \infty$. Ezekből következik, hogy $0 \leq |Z'| < \infty$ és $\pi/4 < \varphi_{Z'} \leq \pi/2$. A Z' értéktartományát a komplex síkon az 5. ábra mutatja. A tartományt a pozitív képzetes tengely ($\eta_E = 0$) és a 45° -os egyenes ($\eta_E \rightarrow \infty$) határolja, amely nem része annak. Az ábrán példaként megrajzoltuk továbbá az $\eta_E = 0,1$; $0,3$ és $1,0$ értékekhez tartozó egyeneseket, amelyeken négyzettel megjelöltük azokat a pontokat, ahol $|Z'| = 1$.

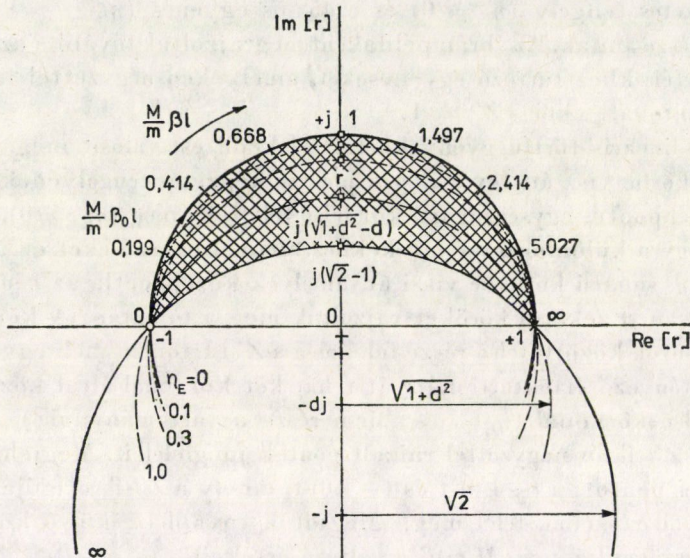
A (42) lineáris törzfüggvény körtartó leképezést valósít meg, tehát kört és egyenest körbe visz át. Így a Z' sík pozitív képzetes tengelyének az r síkon az origó középpontú, egység sugarú kör felső fele felel meg ($\eta_E = 0$). Belátható továbbá, hogy a különböző η_E értékekhez tartozó egyeneseket ez a leképezés olyan $\sqrt{1 + d^2}$ sugarú körökbe viszi át, amelyek középpontja az r sík $(0, -dj)$ pontjaiban van. Ezeket a köröket rajzoltuk meg a 6. ábrán. A körök $(+1,0)$ és $(-1,0)$ pontok közötti felső része felel meg a Z' tartománybeli egyeneseknek. A reflexiós tényező értéktartományát tehát két körvonal által közrezárt rész adja. (Az alsó körvonal ($\eta_E \rightarrow \infty$) nem része a tartománynak.) Az r síkon bejelöltük a Z' síkon négyzettel rajzolt pontok megfelelőit. Megjelöltünk még két nevezetes pontot: a $(-1,0)$ -t és $(+1,0)$ -t, amely a Z' sík origójának, illetve végtelen távoli részének felel meg. Megadtuk továbbá a külső kör ($\eta_E = 0$) mentén $\pi/8$ szögenként a $(M/m)\beta_0 l$ változó értékeit.

A 6. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy az $|r|$ 1 és $(\sqrt{2}-1)$ a ϑ pedig $-\pi$ és -2π között vehet fel értékeket. Az ábrán jól látható az $|r|$ értékének változása egyrészt $(M/m)\beta l$ -lel (tehát M/m -mel, vagy a frekvenciával), másrészt az η_E veszteségi tényezővel. Az ábrát tekintve két fontos következtetést vonhatunk le. Az egyik az, hogy — bár $|r|$ értékét az η_E általában jelentősen befolyásolja, de ha $(M/m)\beta l$ elég kicsi vagy nagy 1-hez képest, akkor $|r| \approx 1$ az η_E értékétől függetlenül. Másrészt látható, hogy $|r|$ a lehetséges legkisebb értékét a négyzettel jelölt pontokban veszi fel, azaz ahol $(M/m)\beta^l \sqrt{1 + d^2} = 1$. Itt

$$|r|_{\min} = \sqrt{1 + d^2} - d, \quad (47)$$



5. ábra. A Z' normalizált impedancia értéktartománya



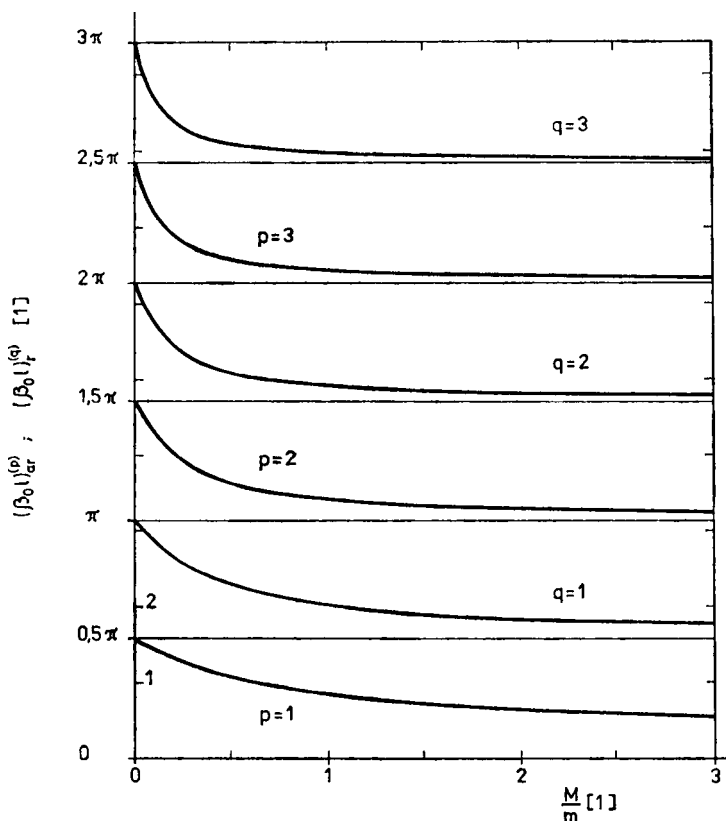
6. ábra. Az r reflexió tényező értéktartománya

és ha $\eta_E < 0,3$, akkor

$$|r|_{\min} \approx 1 - \frac{\eta_E}{2} \tag{48}$$

2.4 Antirezonancia- és rezonanciafrekvenciák

A dinamikai deformáció vizsgálatához szükségünk lesz a rúd rezonancia- és antirezonancia-helyeinek ismeretére. Ismeretes, hogy kis veszteség esetében ezek a frekvenciák elhanyagolhatóan kis mértékben térnek el az ideálisan



7. ábra. A rúd antirezonancia- és rezonancia-helyeinek változása a M/m függvényében

rugalmas anyagú rúd megfelelő frekvenciáitól [1, 4]. Az ideálisan rugalmas rúd antirezonancia- és rezonancia-helyeit az alábbi összefüggések adják [1, 2]:

$$\operatorname{ctan}(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} = \frac{M}{m} (\beta_0 l)_{ar}^{(p)}, \quad (49)$$

$$\tan(\beta_0 l)_{ar}^{(q)} = -\frac{M}{m} (\beta_0 l)_r^{(q)}, \quad (50)$$

ahol $p = 1, 2, 3, \dots$ az antirezonancia rendszáma és $q = 1, 2, 3, \dots$ a rezonancia rendszáma. A fenti egyenletek megoldását — azaz a $(\beta_0 l)_{ar}^{(p)}$ és a $(\beta_0 l)_r^{(q)}$ értékek változását a M/m hányadossal a 7. ábra mutatja a p és $q \leq 3$ értékekre. Az ábráról leolvasható, hogy

$$(p-1)\pi < (\beta_0 l)_{ar}^{(p)} \leq (2p-1)\frac{\pi}{2} \quad (51)$$

és

$$(2q - 1) \frac{\pi}{2} < \beta_0 l)_r^{(q)} \leq q\pi. \quad (52)$$

Látható továbbá, hogyha $M/m \gg 1$, akkor $(\beta_0 l)_{ar}^{(1)} \ll 1$. Ekkor (49)-ből sorfejtéssel azt kapjuk, hogy

$$(\beta_0 l)_{ar}^{(1)} \approx \left(\frac{m}{M} \right)^{1/2}, \quad (53)$$

amely közelítés hibája kisebb, mint 2%, ha $M/m \geq 10$. Ebben az esetben az első antirezonancián a rudat rugóval lehet helyettesíteni, amely az M tömeggel együtt a jól ismert egyszabadságfokú antirezonáns rezgőrendszert alkotja. Igazolható továbbá, hogyha $M/m \geq 1$, akkor az antirezonanciahelyek már annyira „lecsúsznak”, hogy $p \geq 2$ -re 9%-nál kisebb hibával írható, hogy

$$(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} \approx (p - 1)\pi. \quad (54)$$

(A hiba p növelésével gyorsan csökken, $p = 3$ -nál már csak 2,4%.) A rezonanciahelyek vizsgálatával hasonlóan megállapítható, hogyha $M/m \geq 1$, akkor $q \geq 2$ -re 5%-nál kisebb hibával fennáll, hogy

$$(\beta_0 l)_r^{(q)} \approx (2q - 1) \frac{\pi}{2}. \quad (55)$$

(A hiba q növelésével itt is gyorsan csökken, $q = 3$ -nál már csak 1,7%.)

Végül fejezzük ki az antirezonanciahelyeket a reflexiós tényező ϑ_0 fázisszögével. Ehhez a (49)-t célszerűen átalakítjuk:

$$(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} = (2p - 1) \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{M}{m} (\beta_0 l)_{ar}^{(p)}.$$

A jobb oldali második tag a 2.3 pontban definiált ϑ'_0 szög fele. Ezt a fenti kifejezésbe írva kapjuk a keresett összefüggést:

$$(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} = p\pi + \frac{\vartheta_0}{2}. \quad (56)$$

A rezonanciahelyekre hasonlóan kapjuk (50)-ből:

$$(\beta_0 l)_r^{(q)} = (2q + 1) \frac{\pi}{2} + \frac{\vartheta_0}{2}. \quad (57)$$

3. A rúd dinamikai deformációja

3.1 Az általános összefüggés

A hullámparaméterek, a reflexiók tényező értéktartománya és a rezonancia-, antirezonancia-helyek ismeretére szükségünk van a rúd dinamikai deformációjának vizsgálatához. Célunk az, hogy meghatározzuk a dinamikai deformáció változását a rúd hossza mentén, és megkeressük azt a helyet, ahol a deformáció legnagyobb, és végül, hogy meghatározzuk ezt az értéket. A vizsgálatot a dinamikai deformáció általános összefüggésének levezetésével kezdjük.

A hullámegyenlet megoldásával a 2.1 pontban a rúd dinamikai deformációjára a (11) összefüggést vezettük le. Írjuk ebbe γ és r helyére (6)-ot, illetve (8)-at, majd alakítsuk át az exponenciális függvényeket hiperbolikus függvényekké, és alkalmazzuk az addíciós összefüggéseket. Ezzel:

$$\hat{\varepsilon} = -\frac{\hat{\xi}_1}{l} \beta l (d + j) \frac{\cosh a \cos b + j \sin h a \sin b}{\sinh a_l \cos b_l + j \cosh a_l \sin b_l}, \quad (58)$$

ahol

$$a = d\beta l \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \ln |r|, \quad (59)$$

$$a_l = d\beta l - \frac{1}{2} \ln |r|, \quad (60)$$

$$b = \beta l \frac{x}{l} + \frac{\vartheta}{2}, \quad (61)$$

$$b_l = \beta l - \frac{\vartheta}{2}. \quad (62)$$

Az (58) . . . (62) felírásánál felhasználtuk az $\alpha = d\beta$ összefüggést és bevezettük a βl és x/l változókat. A továbbiakban a komplex amplitúdónak csak a mérés-technikai szempontból érdekes abszolút értékével foglalkozunk. Ezt (58)-ból az ismert módon kapjuk a trigonometrikus és hiperbolikus függvények átalakítása után:

$$|\hat{\varepsilon}| = \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \beta l \sqrt{1 + d^2} \left(\frac{\cosh 2a + \cos 2b}{\cosh 2a_l - \cos 2b_l} \right)^{1/2}. \quad (63)$$

3.2 Dinamikai deformáció a rúd hossza mentén

Ismeretes, hogy általános esetben a deformáció maximális és minimális értékek között változik a rúd hossza mentén. A (63) összefüggés alapján keressük meg azokat az x/l helyeket, ahol $|\hat{\varepsilon}|$ -nak szélsőértéke van. Az x/l szerinti deriválás után az ismert módszerrel a szélsőérték helyének meghatározására az

alábbi egyenletet kapjuk:

$$\sin \left(2 \beta l \frac{x}{l} + \vartheta \right) = d \sinh \left(2 d \beta l \frac{x}{l} + \ln |r| \right). \quad (64)$$

Ezt a transzcendens egyenletet kis veszteség esetében viszonylag egyszerűen meg lehet oldani grafikusán. Helyettesítsük ehhez a (64)-be (27)-et és (28)-at, valamint ϑ helyére ϑ_0 -t és vegyük figyelembe, hogy $|r|$ helyére nem írhatjuk $|r_0| = 1$ -et (2.3 pont). Ekkor a (64) közelítő grafikus megoldása az alábbi két lineáris egyenlethez vezet:

$$2 \beta_0 l \left(\frac{x}{l} \right)^{(P)} + \vartheta_0 + 2P\pi \approx \frac{\eta_E}{2} \left[\eta_E \beta_0 l \left(\frac{x}{l} \right)^{(P)} + \ln |r| \right], \quad (65a)$$

$$- 2 \beta_0 l \left(\frac{x}{l} \right)^{(Q)} - \vartheta_0 - (2Q + 1) \pi \approx \frac{\eta_E}{2} \left[\eta_E \beta_0 l \left(\frac{x}{l} \right)^{(Q)} + \ln |r| \right], \quad (65b)$$

ahol P és Q a szélsőérték-helyek sorszáma, a tömeghez csatlakozó rúdvégtől számítva; P és $Q = 0, 1, 2, 3, \dots$. Belátható — pl. a szabad végű rúd vizsgálatával —, hogy (65a) megoldása adja a maximumhelyeket, míg (65b) a minimumhelyeket, tehát:

$$\left(\frac{x}{l} \right)_{\max}^{(P)} \approx -P \frac{\pi}{\beta_0 l} \left(1 + \frac{\eta_E^2}{4} \right) - \frac{\vartheta_0}{2\beta_0 l} \left(1 + \frac{\eta_E^2}{4} \right) + \frac{\ln |r|}{2\beta_0 l} \frac{\eta_E}{2} \left(1 + \frac{\eta_E^2}{4} \right), \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{l} \right)_{\min}^{(Q)} &\approx - (2Q + 1) \frac{\pi}{2\beta_0 l} \left(1 - \frac{\eta_E^2}{4} \right) - \\ &- \frac{\vartheta_0}{2\beta_0 l} \left(1 - \frac{\eta_E^2}{4} \right) - \frac{\ln |r|}{2\beta_0 l} \frac{\eta_E}{2} \left(1 - \frac{\eta_E^2}{4} \right), \end{aligned} \quad (67)$$

amelyeknél alkalmaztuk az

$$(1 \pm \eta_E^2/4)^{-1} \approx 1 \mp \eta_E^2/4$$

sorfejtést. Az $|r|$ értéktartományának ismeretében igazolható, hogy mindkét összefüggésben az utolsó tagot el lehet hanyagolni. Láttuk ugyanis a 2.3 pontban, hogy

$$|r|_{\min} \approx 1 - \eta_E/2,$$

tehát

$$(\ln |r|)_{\max} \approx \ln (1 - \eta_E/2) \approx -\eta_E/2$$

és így

$$(\eta_E \ln |r|)_{\max} \approx -\eta_E^2/2 = -0,045,$$

amely jóval kisebb az első két tag számlálójának összegénél. Ez akkor is fennáll, ha ezen összeg 0-hoz tart, mert ez csak akkor lehetséges, ha $\vartheta_0 \rightarrow -\pi(Q=0)$, vagy $\vartheta_0 \rightarrow -2\pi(P=1)$, amikor is $|r| \rightarrow 1$, tehát $\ln|r| \rightarrow 0$.

A deformáció maximális és minimális értékeinek meghatározásához írjuk fel a (63) összefüggést a kis veszteségű esetre:

$$|\hat{\varepsilon}| \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \beta_0 l \left(\frac{\cosh 2a_0 + \cos 2b_0}{\cosh 2a_{i_0} - \cos 2b_{i_0}} \right)^{1/2}, \tag{68}$$

ahol most

$$a_0 = \frac{\eta_E}{2} \beta_0 l \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \ln|r|, \tag{69}$$

$$a_{i_0} = \frac{\eta_E}{2} \beta_0 l - \frac{1}{2} \ln|r|, \tag{70}$$

$$b_0 = \beta_0 l \frac{x}{l} + \frac{\vartheta_0}{2}, \tag{71}$$

$$b_{i_0} = \beta_0 l - \frac{\vartheta_0}{2}. \tag{72}$$

Nézzük (68)-at az $(x/l)_{\max}^{(P)}$ helyeken. Ekkor a (68) számlálójában $\cos 2b_0 \approx 1$, mivel

$$2b_0 = 2\beta_0 l \left(\frac{x}{l} \right)_{\max}^{(P)} + \vartheta_0 \approx -2P\pi - s,$$

ahol

$$s = \frac{\eta_E^2}{4} (2P\pi + \vartheta_0) \ll 2P\pi.$$

Ezt (68)-ba helyettesítjük és a számlálót átalakítjuk, így a deformáció maximális értékei:

$$|\hat{\varepsilon}|_{\max}^{(P)} \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \beta_0 l \left(\frac{2}{\cosh 2a_{i_0} - \cos 2b_{i_0}} \right)^{1/2} \cosh \frac{1}{2} \left[\eta_E \beta_0 l \left(\frac{x}{l} \right)_{\max}^{(P)} + \ln|r| \right]. \tag{73}$$

A minimális értékeket hasonlóan kapjuk:

$$|\hat{\varepsilon}|_{\min}^{(Q)} \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \beta_0 l \left(\frac{2}{\cosh 2a_{i_0} - \cos 2b_{i_0}} \right)^{1/2} \sinh \frac{1}{2} \left[\eta_E \beta_0 l \left(\frac{x}{l} \right)_{\min}^{(Q)} + \ln|r| \right]. \tag{74}$$

A deformáció maximális értékei általános esetben tehát \cosh , a minimális értékek pedig \sinh függvény szerint nőnek a gerjesztett vég felé haladva. Ebből

következik, hogy a rúd deformációja a gerjesztés helyén vagy annak a közelében a legnagyobb. A maximális deformáció helyét és értékét a (66), illetve (73) összefüggéssel bármely frekvencián számítani lehet.

A 8a. és b. ábrákon a rúd normalizált deformációját ($|\hat{\varepsilon}|/|\hat{\xi}_1|l^{-1}$) ábrázoltuk az x/l függvényében az első három antirezonanciára, illetve rezonanciára ($M/m = 1$, $\eta_E = 0,01$ és $0,1$). (A függvényeket számítógép segítségével rajzoltuk meg a (63) általános összefüggés alapján.) A 8a. ábrákon látható, hogy az antirezonancia-frekvenciákon a rúd deformációja a gerjesztés helyén a legnagyobb, és annál nagyobb, minél kisebb a veszteségi tényező. Látható továbbá, hogy a $p \geq 2$ rendszámú antirezonanciákon a deformáció legnagyobb értékei közel azonosak a rúd mentén. Ezen érték meghatározásához az antirezonancia (56) feltételét a (73) nevezőjében levő \cos függvény argumentumába írjuk, amely ekkor: $2b_i = 2p\pi$, tehát $\cos 2b_i = 1$, és így:

$$|\hat{\varepsilon}|_{\max}^{(P)} \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} (\beta_0 l)_{ar}^{(p)} \frac{\cosh \frac{1}{2} \left[\eta_E (\beta_0 l)_{ar}^{(p)} \left(\frac{x}{l} \right)_{\max}^{(P)} + \ln |r| \right]}{\sinh \frac{1}{2} [\eta_E (\beta_0 l)_{ar}^{(p)} - \ln |r|]} . \quad (75)$$

Ezt az összefüggést egyszerűsíteni lehet a $p \geq 2$ rendszámú antirezonanciákra. Az előbb láttuk ugyanis, hogy $(\ln |r|)_{\max} \approx \eta_E/2$, a 2.4 pontban pedig, hogy $(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} > \pi$, ha $p \geq 2$. Ezért a (75) nevezőjében

$$\eta_E (\beta_0 l)_{ar}^{(p)} \gg \ln |r| . \quad (76)$$

Tételezzük fel továbbá, hogy $M/m \geq 1$, így $(M/m)(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} > \pi$ és a 6. ábrán látható, hogy ekkor $\ln |r| \approx 0$. Ezért még az $x = 0$ hely közelében is fennáll, hogy

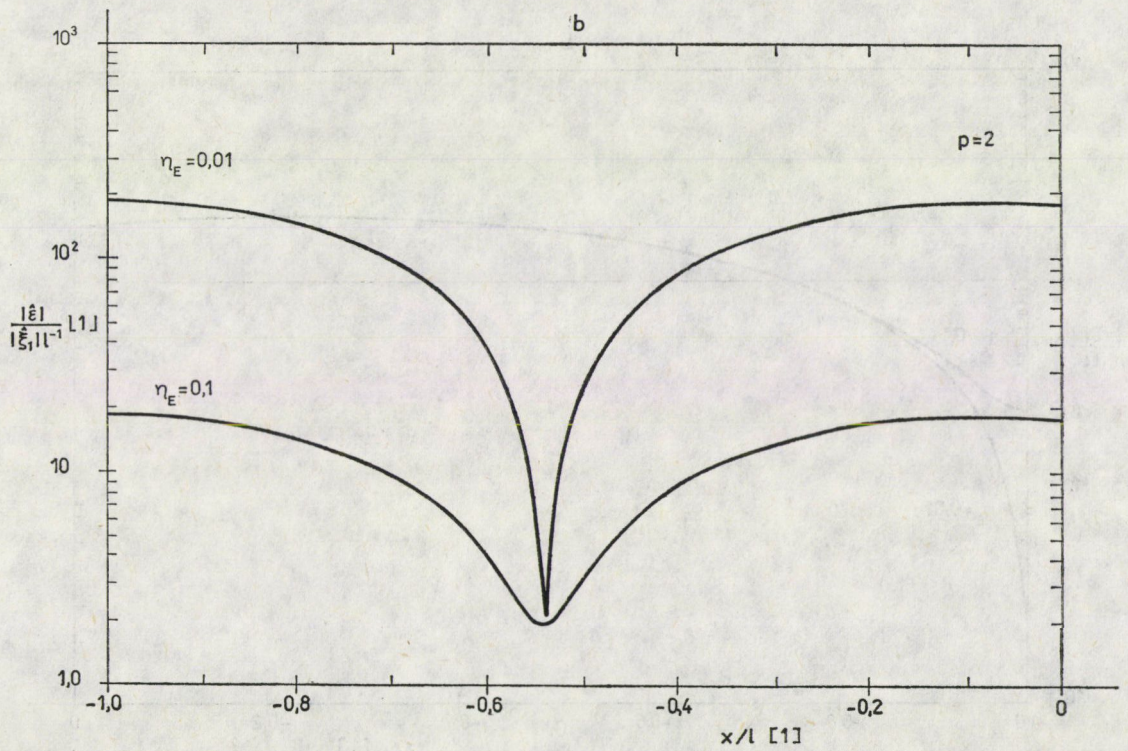
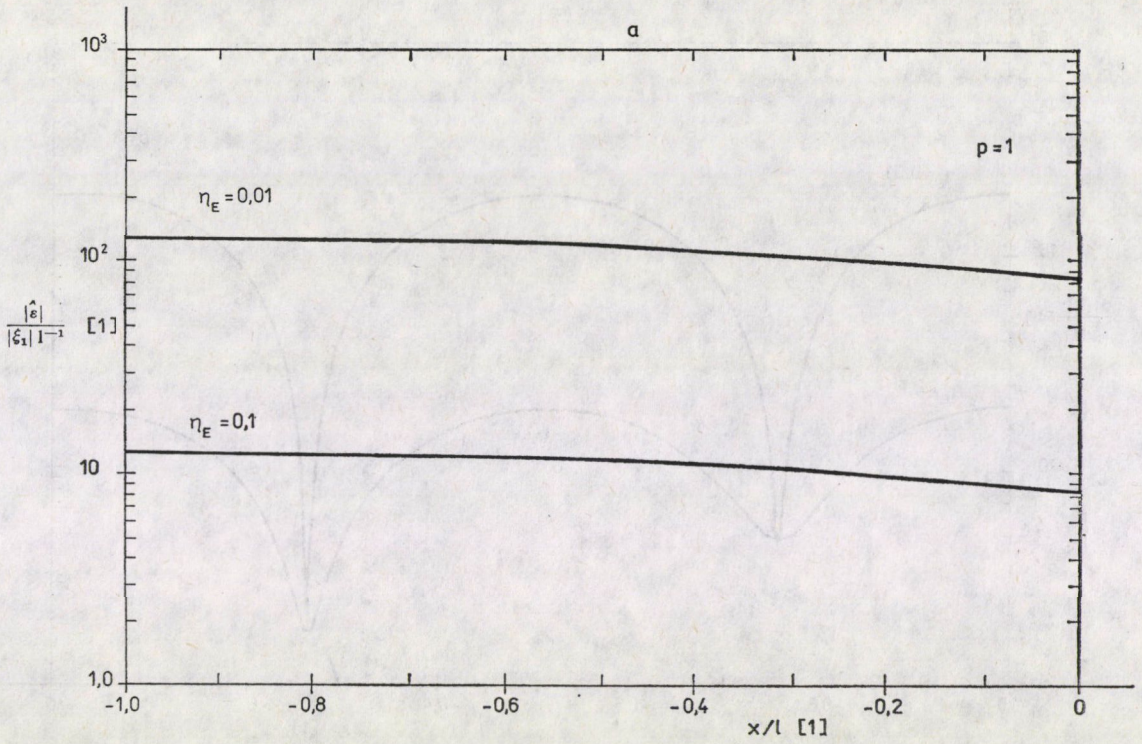
$$\eta_E (\beta_0 l)_{ar}^{(p)} (x/l)_{\max}^{(P)} \gg \ln |r| ,$$

tehát az $\ln |r|$ nemcsak a \sinh , de a \cosh függvény argumentumában is elhanyagolható. E függvényeket hatványsoruk első tagjával helyettesítjük és így kapjuk, hogy bármely $(x/l)_{\max}^{(P)}$ helyen:

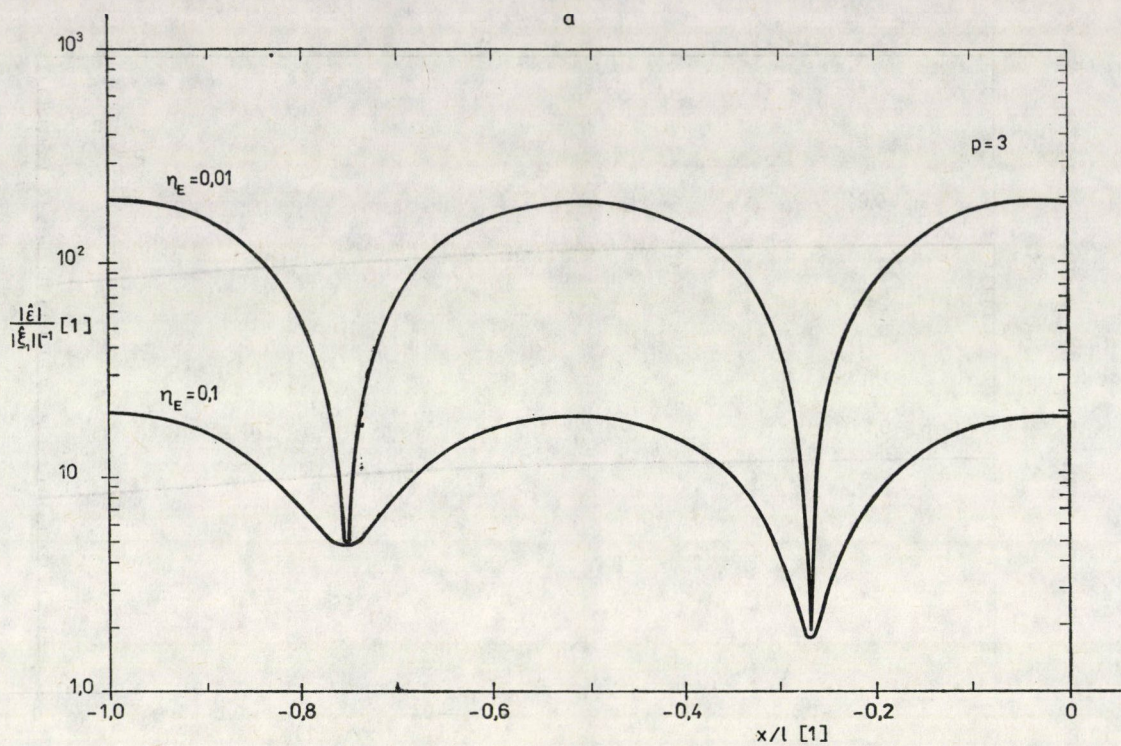
$$|\hat{\varepsilon}|_{\max}^{(P)} \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \cdot \frac{2}{\eta_E} . \quad (77)$$

A fenti sorfejtés 10%-nál kisebb hibát okoz azokon az antirezonanciákon, amelyeken

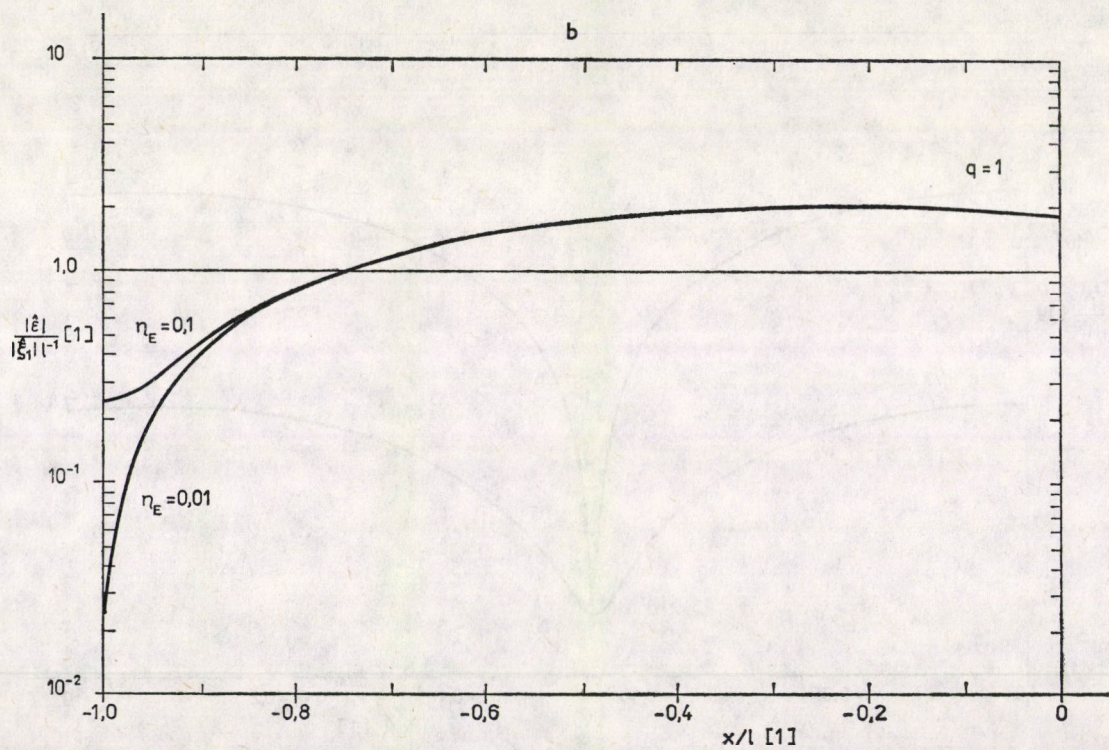
$$(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} < \frac{0,8}{\eta_E} . \quad (78)$$

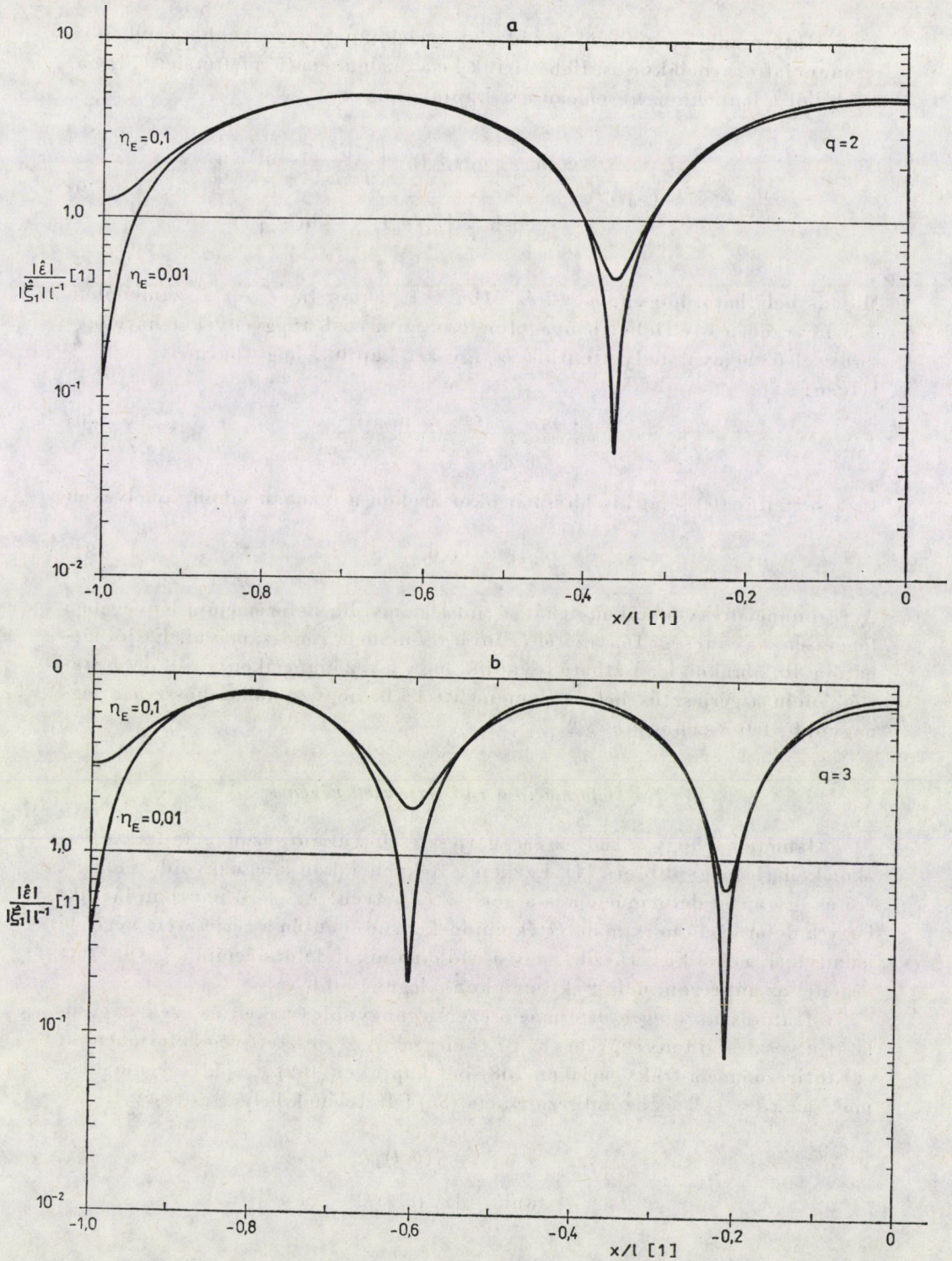


a



b





8. ábra. A dinamikai deformáció változása a rúd hossza mentén az első három a) antirezonancia- és b) rezonanciafrekvencián ($M/m = 1$)

Határozzuk meg végül a rúd deformációjának legnagyobb értékeit a rezonanciafrekvenciákon is. Ehhez írjuk be a rezonancia (57) feltételét (73)-ba, amelyből a fentiekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy:

$$|\hat{\varepsilon}|_{\max}^{(P)} \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} (\beta_0 l)_r^{(q)} \frac{\cosh \frac{1}{2} \left[\eta_E (\beta_0 l)_r^{(q)} \left(\frac{x}{l} \right)_{\max}^{(P)} + \ln |r| \right]}{\cosh \frac{1}{2} \left[\eta_E (\beta_0 l)_r^{(q)} - \ln |r| \right]}. \quad (79)$$

Most is belátható, hogyha $q \geq 2$ és $M/m \geq 1$, akkor $\ln |r|$ -ot a számlálóban és a nevezőben is el lehet hanyagolni. Ezután a \cosh függvényeket hatvány-soruk első tagjával helyettesítjük, és így azt kapjuk, hogy bármely $(x/l)_{\max}^{(P)}$ helyen:

$$|\hat{\varepsilon}|_{\max}^{(P)} \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} (\beta_0 l)_r^{(q)}. \quad (80)$$

Ez a sorfejtés 10%-nál kisebb hibát okoz azokon a rezonanciákon, amelyeken

$$(\beta_0 l)_r^{(q)} < 0,9/\eta_E. \quad (81)$$

A rezonanciafrekvenciákon tehát a rúd legnagyobb deformációja lényegében független a veszteségi tényezőtől és nő a rezonancia rendszámával. Ez jól látható a 8b ábrákon is. Látható továbbá, hogy a rezonanciákon a rúd deformációja nem a gerjesztés helyén, hanem attól kb. negyed-hullámhosszra a legnagyobb, feltéve, hogy $q \geq 2$.

3.3 Deformáció a rúd gerjesztett végénél

Ismeretes, hogy a rúd rezgésre gerjesztéséhez az antirezonancia-frekvenciákon kell a legnagyobb erő [4]. Ezeken a frekvenciákon a legnagyobb tehát az erő és így a rúd deformációja is a gerjesztés helyén. Az előző pontban láttuk, hogy a deformáció maximális értékei nőnek a rúd mentén a gerjesztett vég felé haladva. Ezekből következik, hogy a rúd dinamikai deformációja a gerjesztett végénél az antirezonancia-frekvenciákon a legnagyobb.

Határozzuk meg a deformáció ezen legnagyobb értékeit és ezek kapcsolatát a veszteségi tényezővel és az M tömeggel. A gerjesztett vég deformációját az antirezonancia-frekvenciákon (68)-ból kapjuk a (69) . . . (72) argumentumok, az $x/l = -1$ és az antirezonancia (56) feltételének helyettesítésével:

$$|\hat{\varepsilon}_1| \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \frac{(\beta_0 l)_{ar}^{(p)}}{\tanh \frac{1}{2} \left[\eta_E (\beta_0 l)_{ar}^{(p)} - \ln |r| \right]}. \quad (82)$$

Vizsgáljuk először a deformáció értékét az első antirezonancián, ha $M/m \gg 1$. A 2.4 pontban láttuk, hogy ekkor a rudat rugóval lehet helyettesíteni, mivel $(\beta_0 l)_{ar}^{(1)} \approx (m/M)^{1/2} \ll 1$. Ezért a tanh függvény argumentumában $\eta_E (\beta_0 l)_{ar}^{(1)} \ll 1$, amely mellett szintén fennáll, hogy $\ln |r| \ll 1$. Ez utóbbi közelítő értékének meghatározásához az $\ln |r| \approx |r| - 1$ -be $|r|$ helyére (40)-et írjuk és elhanyagoljuk a másodrendűen kicsiny mennyiségeket. Így azt kapjuk, hogy az első antirezonancián:

$$\ln |r| \approx - \frac{\eta_E}{\frac{M}{m} (\beta_0 l)_{ar}^{(1)}} \quad (83)$$

Ezt a (82)-be helyettesítjük, majd az összegezés után a tanh függvényt — igen jó közelítéssel — az argumentumával helyettesítjük. Ezzel

$$|\hat{\epsilon}_1| \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \frac{1}{\eta_E}, \quad (84)$$

amely megegyezik az egyszabadságfokú antirezonáns rezgőrendszer rugójának deformációjával az antirezonancia-frekvencián [5]. Látható, hogy minél kisebb a veszteségi tényező, annál nagyobb a deformáció, amelyet a $|\hat{\xi}_1|$ gerjesztési amplitúdóval szabályozni lehet. Egy másik egyszerű összefüggést kapunk a deformációra az első antirezonancián, ha $M/m \ll 1$. Ekkor ugyanis

$$(\beta_0 l)_{ar}^{(1)} \approx \pi/2, \text{ tehát } (M/m) (\beta_0 l)_{ar}^{(1)} \ll 1,$$

ezért $|r| \approx 1$ (6. ábra), vagyis $\ln |r| \approx 0$. Ezért (82)-ben most

$$\ln |r| \ll \eta_E (\beta_0 l)_{ar}^{(1)}$$

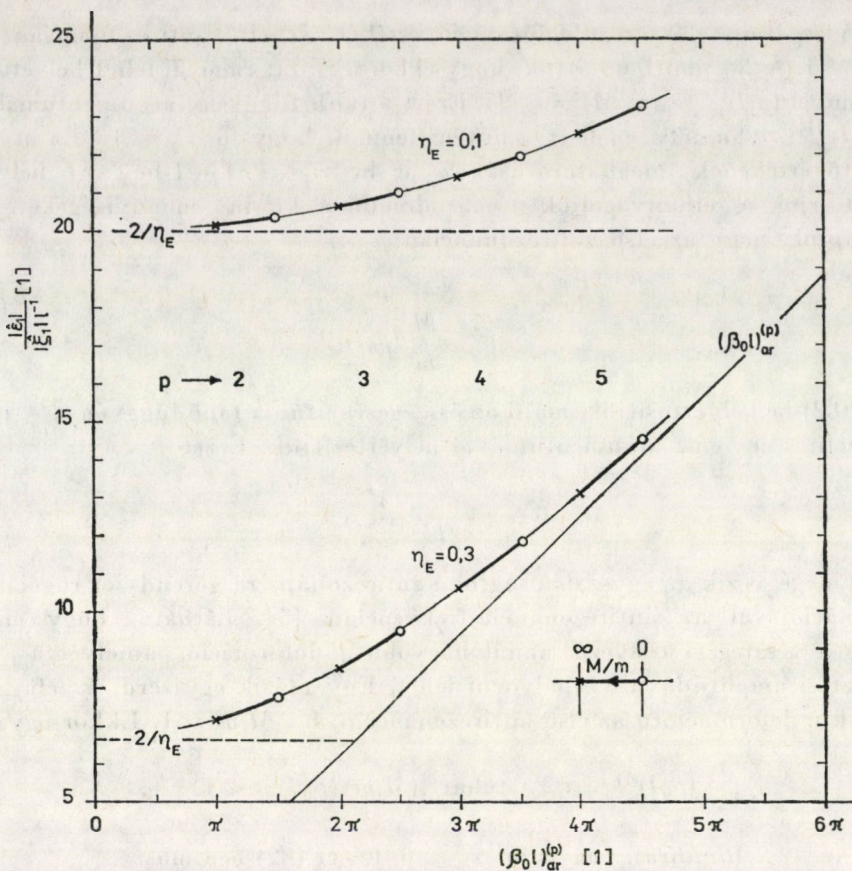
és 2%-nál kisebb hibával a tanh függvény az argumentumával helyettesíthető. Így

$$|\hat{\epsilon}_1| \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \frac{2}{\eta_E}. \quad (85)$$

Az M/m fentiekthől eltérő értéke esetében az első antirezonancián a deformáció értéke (84) és (85) között van, amelyet a (82) összefüggéssel lehet számítani.

A második és annál nagyobb rendszámú antirezonanciákon viszont M/m értékétől függetlenül el lehet hanyagolni $\ln |r|$ -t a (82) tanh függvényének argumentumában, mivel ekkor fennáll a 3.2 pontban igazolt (76) egyenlőség. Tehát:

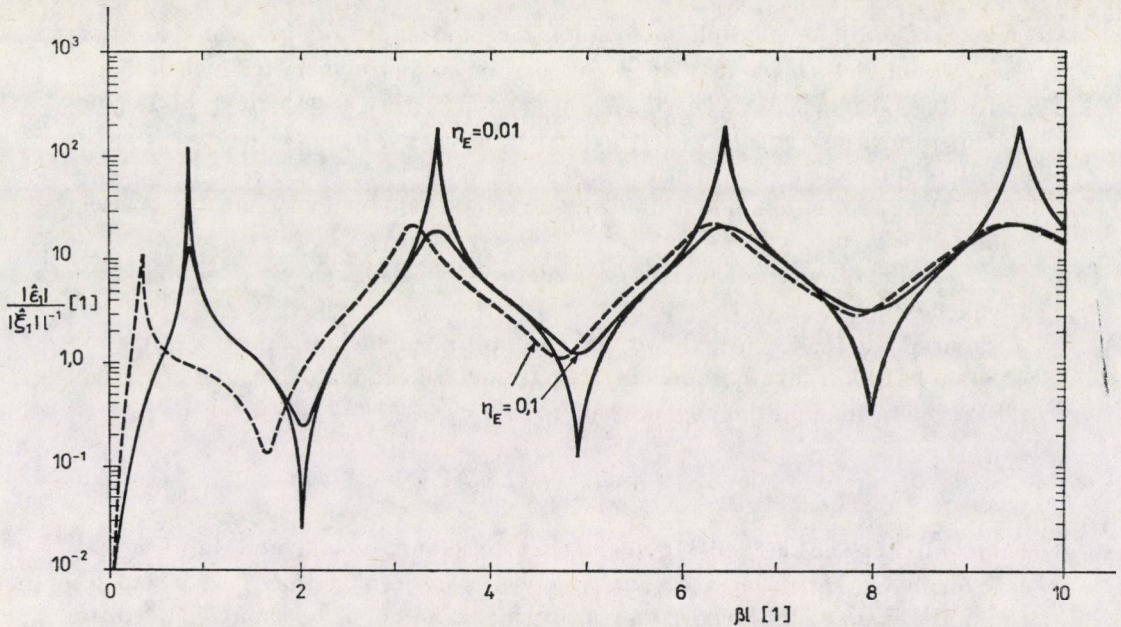
$$|\hat{\epsilon}_1| \approx \frac{|\hat{\xi}_1|}{l} \frac{(\beta_0 l)_{ar}^{(p)}}{\tanh \left[\frac{\eta_E}{2} (\beta_0 l)_{ar}^{(p)} \right]}. \quad (86)$$



9. ábra. A dinamikai deformáció a rúd gerjesztett végénél nő az antirezonancia rendszámával és csökken a M/m növelésével

Azokon az antirezonanciákon, amelyeken $(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} < 1,2/\eta_E$, a tanh függvényt — 10%-nál kisebb hibával az argumentumával helyettesíthetjük továbbá, és ekkor ismét (85)-öt kapjuk. (Ha pl. $\eta_E = 0,3$, akkor csak a második antirezonancián használhatjuk (85)-öt, feltéve, hogy $(\beta_0 l)_{ar}^{(2)} < 4$. Ha viszont $\eta_E = 0,1$, akkor még a 4. antirezonancián is számolhatunk (85)-tel.) A (85) összefüggés megegyezik az $(x/l)_{max}^{(P)}$ helyek deformációjára levezetett (77)-tel ($M/m \geq 1$, $P \geq 2$). Tehát a (78) feltételt kielégítő antirezonancia-frekvenciákon a rúd deformációja bármely $(x/l)_{max}^{(P)}$ helyen kb. azonos a gerjesztett vég deformációjával.

A gerjesztett vég normalizált deformációját ($|\hat{\xi}_1|/|\hat{\xi}_1|^{(P)} l^{-1}$) a (86) alapján a 9. ábrán vázoltuk a $(\beta_0 l)_{ar}^{(p)}$ lehetséges értékeire, a 2...5 antirezonanciákra ($\eta_E = 0,1$ és $0,3$). Az ábráról leolvasható, hogy a rúd dinamikai deformációja a gerjesztés helyén nő a $(\beta_0 l)_{ar}^{(p)}$ értékével, és a növekedés mértéke annál nagyobb,



10. ábra. A gerjesztett rúdvég dinamikai deformációja a βl függvényében. — $M/m = 1$; --- $M/m = 10$.

minél nagyobb az η_E . (Az ábrán látható, hogy ez a deformáció nagyobb, mint a (85)-tel számítható.) Nagyobb rendszámú antirezonanciákon tehát a deformáció is nagyobb. Egy adott antirezonancián viszont csökken a gerjesztési hely deformációja az M tömeg növelésével, mivel ekkor csökken a $(\beta_0 l)_{ar}^{(p)}$ értéke (7. ábra). Ezek a megállapítások megegyeznek NORRIS és YOUNG [2] numerikus tapasztalatával, és jól láthatók a 10. ábrán is, ahol a gerjesztett vég normalizált deformációját ábráztuk a βl függvényében ($M/m = 1$, $\eta_E = 0,01$ és $0,1$; $M/m = 10$, $\eta_E = 0,1$). A függvényeket számítógép segítségével rajzoltuk meg az $x/l = -1$ helyen vett (63) általános összefüggés alapján.

A 8. és 10. ábra görbéivel kapcsolatban befejezésül megemlítjük, hogy az azokról leolvasott maximális értékeket összehasonlítottuk az egyszerűsített, közelítő összefüggésekkel számítottakkal. Ezek jó egyezése igazolja azt, hogy ezekkel a közelítő összefüggésekkel a gyakorlati szempontból kielégítő pontossággal lehet számítani a rúd legnagyobb deformációját.

4. Következtetések

A cikkben megvizsgáltuk azon longitudinálisan rezgő viszkoelasztikus rúd dinamikai deformációját, amelynek az egyik végéhez egy tömeg csatlakozik. A rezgésre gerjesztés a másik végén történik elmozdulásgenerátorral.

Az egydimenziós hullámeqyenlet megoldásának analízisével igazoltuk, hogy a rúd deformációja a legnagyobb az antirezonancia-frekvenciákon a gerjesztett végénél. A viszonylag kis veszteség esetére ezen legnagyobb deformáció számítására egyszerűsített összefüggéseket vezettünk le, és ezek alapján megállapítottuk, hogy

— a rúd dinamikai deformációja a gerjesztés helyén nő az antirezonancia rendszámával,

— adott antirezonancián ez a deformáció csökken a M/m hányados növekedésével.

A deformáció legkisebb értékét az első antirezonancián akkor kapjuk, ha $M/m \gg 1$. Ekkor a rudat koncentrált paraméterű rugóval lehet helyettesíteni, tehát a deformációja homogén, amely

$$|\hat{\epsilon}_1| \approx (|\hat{\xi}_1|/l)(1/\eta_E).$$

Ennél kb. kétszer nagyobb a deformáció az első antirezonancián, ha $M/m \ll 1$, és azokon az antirezonanciákon, amelyekre teljesül a $(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} < 1,2/\eta_E$ feltétel. Ennél nagyobb rendszámú antirezonanciákon a deformáció a fentitől nagyobb és nő a

$$(\beta_0 l)_{ar}^{(p)} / \tanh [(\eta_E/2)(\beta_0 l)_{ar}^{(p)}]$$

függvény szerint.

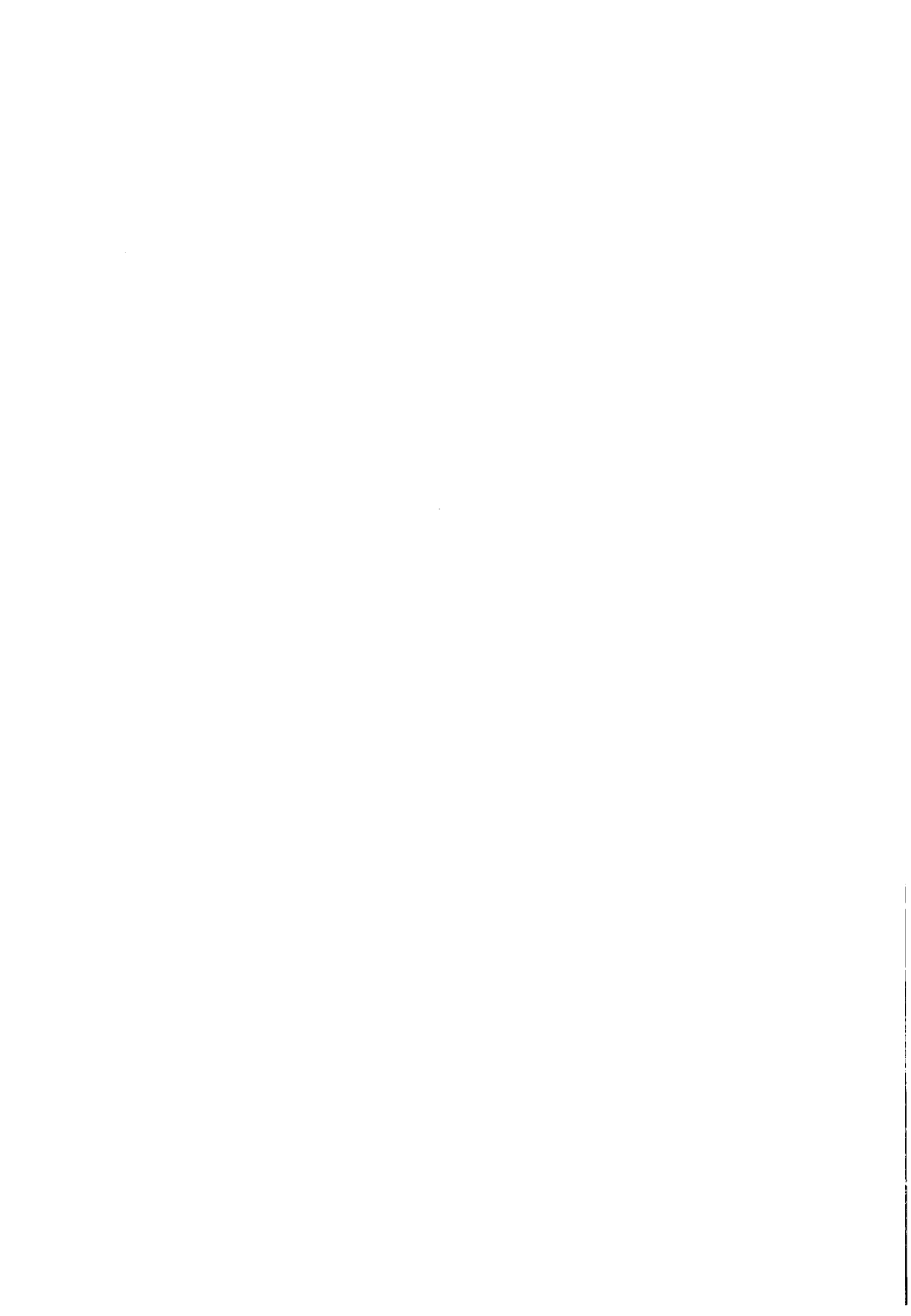
Az antirezonanciától eltérő frekvenciákon a deformáció legnagyobb értéke a gerjesztett vég közelében jelentkezik, amely helyet és a deformáció itteni értékét a (71), illetve (78) összefüggésekkel lehet számítani.

IRODALOM

1. Росин, Г.С.: Измерение динамических свойства акустически х материалов. Изд. Лит. по строительству, Москва 1972
2. NORRIS, D. M. JR.—WUN-CHUNG YOUNG: Longitudinal Forced Vibration of Viscoelastic Bars with End Mass. *Cold Regions Research and Engineering Laboratory*, Special Report 135. Hanover, New Hampshire 1970
3. NORRIS, D. M. JR., WUN-CHUNG YOUNG: Komplex Modulus Measurement by Longitudinal Vibration Testing. *Experimental Mechanics* 10 (1970), 93—96
4. SNOWDON, J. C.: Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems. John Wiley and Sons, New York 1968
5. PRITZ, T.: Transfer Function Method for Investigating the Complex Modulus of Acoustic Materials: Spring-like Specimen. *Journal of Sound and Vibration* 72 (1980), 317—341

Dynamic Strain of a Longitudinally Vibrating Viscoelastic Rod with an End Mass. — The dynamic strain of a viscoelastic rod excited into longitudinal simple harmonic vibration, a constant amplitude displacement being maintained by a shaker at one end and a mass terminating the other end, is theoretically investigated in this paper. The general equation of the strain distribution in the rod is derived by solving the onedimensional wave equation. It is shown that the strain in the rod is the largest at the excited end, at the antiresonant frequencies. Simplified approximate equations are derived for the low loss case to calculate the largest strain in the rod with knowledge of the loss factor.

Die dynamische Verformung des an einem Ende mit einer Masse belasteten, in der Längsrichtung schwingenden viscoelastischen Stabes. — Die dynamische Verformung eines in der Längsrichtung schwingenden viscoelastischen Stabes wird theoretisch untersucht an einem Ende desselben eine Masse befestigt ist. Die Erregung auf harmonische Schwingung trifft am anderen Ende des Stabes zu mit konstanten Schwingungsverschiebungen. Durch die Lösung der Schwingungsbewegung des Stabes beschreibenden Eindimensionswellengleichung, wird die Funktion der dynamischen Verformung abgeleitet. Durch die Untersuchung derselben wird es nachgewiesen, daß die Verformung des Stabes an den Antiresonanzfrequenzen am Punkt der Erregung am größten ist. Für den Fall eines wenigen Verlustes Näherungsbeziehungen werden abgeleitet, mit Hilfe derselben, bei Kenntnis des Verlustfaktors, die größte Verformung einfach berechnet werden kann.



CSŐ HAJLÍTÁSA, FŐLEG NAGY ALAKVÁLTOZÁSSAL

TREER MÓR FERENC
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1982. április 27-én]

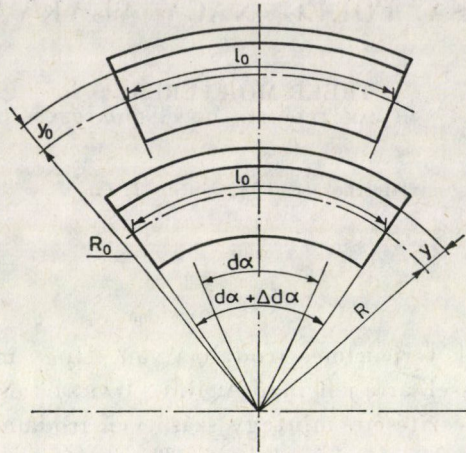
Cső hajlításának terjedelmes irodalma van. Hogy milyen sokan foglalkoztak ezzel a kérdéssel, arra jellemző A. R. C. MARKL tanulmánya [3], aki az USA szabvány előkészítésére mintegy százötven irodalmi hivatkozást sorol fel. Messze vezetne a vonatkozó irodalom dokumentálása, mi Markl tanulmányán kívül két munkára hivatkozunk: KÁRMÁNra [1], akinek elmélete immár hetven éve alapjaiban változatlanul vonul végig az egész világirodalmon, és HOVGAARDra [2], aki KÁRMÁNNál később, de hasonló eredményekkel az amerikai irodalomban építette fel elméletét. Figyelemmel vagyunk továbbá CSIRMAZra [4], akinek könyve magyar nyelven foglalja össze ennek a kérdésnek sokoldalú elméleti és gyakorlati vonatkozásait.

Három okból vesszük fel a kérdés tanulmányozását. Először, mert az eddigi elméletben elhanyagolások történtek, melyek elkerülhetők vagy csökkenthetők. Másodszor, mert az elmélet — éppen az egyik elhanyagolás következtében — csak ívcsővekre alkalmazható, egyenes csőre nem. Harmadszor, mert matematikai modellre törekszünk, mely nagy alakváltozásnál is lehetővé teszi a kérdés tanulmányozását.

Tanulmányunk menete az lesz, hogy először az eddigi elméleten haladunk végig, rámutatva azonban az elhanyagolásokra és egyszerűsítésekre, azután a pontos számításokat lehetővé tevő matematikai modellt állítjuk össze, végül ennek segítségével kimutatjuk az elhanyagolások és egyszerűsítések által okozott hibákat, és kiértékelünk néhány erős alakváltozást.

1. Az irodalomban szokásos szilárdsági számítások

Ívcső deformálásának legegyszerűbb mechanikai modelljét úgy alakíthatjuk, hogy egy R_0 sugarú hengerről sok menetből álló csövet vékonyabb R sugarú hengerre csévélünk át. A csőnek közepes hossza nem változik, hanem a vékonyabb R sugarú hengeren több menetből áll a cső. Ahhoz, hogy erről a vékonyabb hengerről a cső vissza ne lazuljon az eredeti R_0 sugarára, a csövet ráfogni kell az R sugarú hengerre, vagyis rá végig egyforma hajlítónyomatékot kell kifejtenünk. Számításainkat a cső l_0 hosszúságú gyűrűalakú részére fogjuk végezni.



1. ábra

Az 1. ábra mutatja egy ilyen gyűrűrészletnek deformálás előtti és utáni alakját. Az R_0 középsugarú gyűrűrészletnek l_0 ívhossza a deformálás által nem változik, amíg ellenben terheletlen állapotban az l_0 hosszúságú ívhez $d\alpha$ középponti szög tartozott, addig az ívet R sugárra deformálva $d\alpha + \Delta d\alpha$ középponti szög tartozik hozzá. Ezek szerint:

$$R(dx + \Delta dx) = R_0 dx = l_0 \quad (1)$$

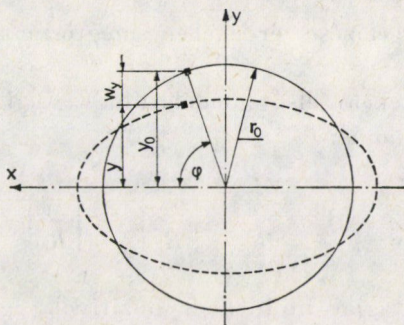
A gyűrűrészletnek egy olyan eleme azonban, amely a terheletlen gyűrű tengelyétől $R_0 + y_0$ távolságban van, nyúlik, még pedig hosszúsága $(R_0 + y_0)d\alpha$ -ról $(R + y)(d\alpha + \Delta d\alpha)$ hosszúságra változik. A kettőnek különbsége az (1) egyenlet figyelembevételével:

$$y(dx + \Delta dx) - y_0 dx. \quad (2)$$

A fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon = \frac{y(dx + \Delta dx) - y_0 dx}{(R_0 + y_0) dx} = \frac{1}{R_0 + y_0} \left[y - y_0 + y \frac{\Delta dx}{dx} \right]. \quad (3)$$

Hajlítás által azonban nemcsak a gyűrűrészlet egyes elemeinek hossza változik és a görbületi sugara a hajlítás síkjában, hanem deformálódik a cső keresztmetszete is a terheletlenül köralakról ovális alakra a 2. ábrán látható módon. A keresztmetszet síkja a csőnek, és ennek részeként a gyűrűrészletnek tengelyén fekszik úgy a hajlítás előtt, mint azután. A keresztmetszet az x tengely a gyűrűrészlet tengelyével párhuzamos, az y tengely rá merőleges. Az 1. ábrán körívként rajzolt gyűrűelem a 2. ábrán keresztmetszetben jelent-



2. ábra

kezik, távolsága az x tengelytől terheletlenül y_0 , a hajlítás után w_y változással y lett, vagyis $y = y_0 + w_y$. Miután az alakváltozás a 2. ábrán láthatóan laposodás, w_y a mi vizsgálatainkban mindenkor negatív. Így a fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 + y_0} \left[w_y + (y_0 + \bar{w}_y) \frac{\Delta dx}{dx} \right]. \quad (4)$$

A (4) képletben van azonban két tag, melyeket eddig az irodalomban úgy KÁRMÁN [1], mint HOVGAARD [2], valamint az őket követő szerzők elhanyagoltak, mi azonban figyelembe vesszük őket.

Általában azokat az értékeket, melyeket mi megtartunk a levezetéseinkben, az irodalomban azonban elhagyják, vagy másként helyettesítik, fentvonással jelöljük. Nevezetesen az irodalomban $\bar{y}_0 = 0$, $\bar{w}_y = 0$ és $\bar{R} = R_0$.

Az egyik \bar{w}_y , az $(y_0 + \bar{w}_y) \Delta dx/dx$ tag a (4) egyetletben.

KÁRMÁN-nál [1] az elhanyagolás azért keletkezik, hogy tanulmányának 1891. oldalán az elemi szál nyúlását a (3a.) képletében a deformálás előtti helyzetből számítja. HOVGAARD [2] a $w_y \Delta dx/dx$ tagot másodrendűen kicsinek állítja tanulmányának 74. oldalán azon az alapon, hogy $\Delta dx/dx$ elsőrendűen kicsi, és w_y is az. Ha azonban az 1. ábránkat szemléljük, észrevehetjük, hogy amint a cső terheletlen állapotú R_0 sugara nő, vagyis ha egy íveső görbülete kisebb, tehát az R_0 nagyobb, az l_0 ívhosszhoz tartozó da a nullához közeledik, Δdx ellenben változatlan marad, így $\Delta dx/dx$ nem hogy elsőrendűen kicsi lenne, minden határon túl növekedhet. A $w_y \Delta dx/dx$ tagot tehát nem fogjuk elhanyagolni.

A másik tag a (4) képletben az $1/(R_0 + y_0)$ tényezőben az \bar{y}_0 tag. Ennek az a jelentősége, hogy ívesőveknél a külső oldalon, ahol $y > 0$, az elemi szál hosszabb, mint a belső oldalon, ahol $y < 0$, evvel a fajlagos nyúlás a külső oldalon kevesebb, mint a belső oldalon, és ennek megfelelően a hajlításkor a külső oldalon a húzófeszültség kevesebb, mint a belső oldalon a nyomófeszültség. Avval az elhanyagolással, hogy $y_0/R_0 \approx 0$, a különbség eltűnik. Ez egyenes csőnél tényleg fennáll, ívesőveknél azonban a nem túlzott matema-

tikai bonyolultság megelőzése érdekében megtörtént. Lehetőleg azonban figyelembe vesszük.

Megközelítő értékeként első gondolatunk egy $1/(1 + y_0/R_0)$ kifejezés sorbafejtése lehet, amikor is:

$$\frac{R_0}{R_0 + y_0} = 1 - \frac{y_0}{R_0} + \left(\frac{y_0}{R_0}\right)^2 - \left(\frac{y_0}{R_0}\right)^3 \dots$$

A sor páratlanszámú tagjai mindenkor pozitívok, így párosszámú tagtól elhanyagolva a tört értékére kisebbet kapunk, mintha pontosan számítanánk, miután az első elhanyagolt tag pozitív. Szilárdsági számításoknál ez félrevezető lenne, ezért a sorbafejtéssel való megközelítést nem alkalmazzuk.

Az ívcső terheletlen keresztmetszete kör, tehát: $y_0 = r_0 \sin \varphi$, evvel:

$$\frac{R_0}{R_0 + y_0} = 1 - \frac{y_0}{R_0 + r_0 \sin \varphi} \approx 1 - \frac{r_0}{R_0 + r_0} \sin \varphi. \quad (5)$$

Annai történt, hogy a nevezőbe $\sin \varphi = +1$ értéket írtunk. Ez megközelítés ugyan, de az eredmény soha sem kevesebb a pontos számítás szerinti értéknél.

Az $R_0/(R_0 + y_0)$ tagnak nem minden esetben van jelentősége. Egyenes csőre az értéke identikusan egy, miután ekkor $R_0 = \infty$. Ívcsőre az alakváltoztatási munka számításánál az (5) szerinti megközelítést alkalmazva az integrálásakor szintén eltűnik az $r_0 \sin \varphi / (R_0 + y_0)$ tagnak a hatása, amint azt a (22a) egyenletet követően majd megállapíthatjuk. Az $R_0/(R_0 + y_0)$ pontos értékével az alakváltoztatási munka számításánál marad azonban néhány százalékos különbség, ezt figyelembe is vesszük a (29), (31), (33) egyenletekben. Lényeges a jelentősége ennek a tagnak a feszültségek számításánál, és miatta a húzó és nyomó feszültség egymástól eltérő értékűvé válik.

Hogy a további képletek műszakilag jobban érthetők legyenek, a $d\alpha$ és $\Delta d\alpha$ értékeket a cső hajlítása előtti R_0 , és hajlítás utáni R görbületi sugarával fejezzük ki. Az (1) egyenlethől, illetőleg az 1. ábrából:

$$1 + \frac{\Delta d\alpha}{d\alpha} = \frac{R_0}{R}. \quad (5a)$$

Evvel a (4) egyenletben:

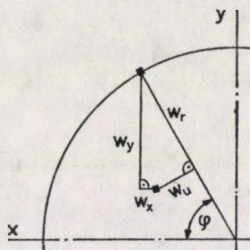
$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[y_0 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right) + w_y \frac{R_0}{R} \right]. \quad (6)$$

A gyűrűelemnek a gyűrűrészlet tengelyével párhuzamos w_y elmozdulását radiális és tangenciális elmozdulások komponenseire bontjuk. Ecélből a 2. ábra megfelelő részét kinagyítva a 3. ábrában megrajzoltuk a w_y , az x tengellyel

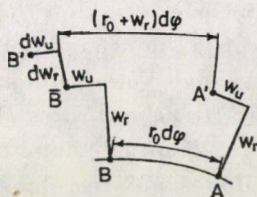
párhuzamos w_x , a radiális w_r és a w_u elmozdulásokat. Az ábrából:

$$w_y = w_u \cos \varphi + w_r \sin \varphi \quad (7)$$

A hajlítás által megváltozik a cső keresztmetszetének alakja, de változatlan marad a keresztmetszetben az ívhossz. Figyeljük meg a 4. ábrában az



3. ábra



4. ábra

A és \bar{B} pont elmozdulását a deformálás folyamán. Az A pont w_r és w_u elmozdulásokkal az A' pontba jut. Tőle $r_0 d\varphi$ távolságban levő B pont a \bar{B} pontba jutna, ha az elmozdulása ugyanaz volna, mint az A ponté, távolságuk ekkor $(r_0 + w_r) d\varphi$ lenne. A B pontban azonban az elmozdulás már több dw_r és dw_u értékekkel, így a B pont a B' pontba jut. Az ívhossz csak akkor nem változik, ha a két pont távolsága egyforma marad, vagyis ha $AB = A'B'$, tehát ha: $r_0 d\varphi = (r_0 + w_r) d\varphi + dw_u$. Innen

$$w_r = - \frac{dw_u}{d\varphi} \quad (8)$$

Ennek figyelembevételével a fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[\left(\frac{R_0}{R} - 1 \right) r_0 \sin \varphi + \left(w_u \cos \varphi - \frac{dw_u}{d\varphi} \sin \varphi \right) \frac{R_0}{R} \right] \quad (9)$$

Az ezáltal keletkező húzófeszültség:

$$\sigma_t = E\varepsilon \quad (10)$$

Ezen húzófeszültség létesítéséhez szükséges munka: $dU_t = \sigma^2 V / (2E)$, hol a gyűrűelem térfogata $V = lv \Delta s$, v a cső falvastagsága, $l = l_0(R_0 + \bar{y}_0)/R_0$ a gyűrűelem hossza, Δs a gyűrűelem ívhossza, ami a neki megfelelő terheletlen körív hosszával egyenlő: $\Delta s = r_0 d\varphi$. Ezeknek figyelembevételével:

$$\begin{aligned} U_t &= \frac{l_0 v r_0}{2E} \cdot \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} \int_0^{2\pi} E^2 \left(\frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\bar{R}_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left(w_u \cos \varphi - \frac{dw_u}{d\varphi} \sin \varphi \right) \frac{1}{R} \right]^2 d\varphi = \\ &= \frac{E}{2} l_0 v \int_0^{2\pi} \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left(w_u \cos \varphi - \frac{dw_u}{d\varphi} \sin \varphi \right) \frac{1}{R_0} \right]^2 r_0 d\varphi. \end{aligned} \quad (11)$$

Egyenes csőre ($R_0 = \infty$), az irodalomban szokásosan $\bar{R} = R_0$ helyettesítéssel a (11) egyenlet [] zárójel értéke $[r_0 \sin \varphi / R]$ alakra redukálódik, vagyis a szükséges munkát úgy számítja, mintha deformáció nem lenne. A (11) egyenletben a deformáció figyelembevétele különösen egyenes csőnél tehát csakis elhanyagolás nélkül, $\bar{R} = R$ helyettesítéssel lehetséges. Az elméletnek ezen hiányossága miatt az US számítási szabvány egyenes csőnél eltekint a keresztmetszeti alak deformálódásának figyelembevételétől.

Keresztirányú hajlításhoz szükséges nyomaték:

$$M = E \kappa F r_0^2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{\varrho} \right), \quad (12)$$

hol E a rugalmassági tényező, F a keresztmetszet területe, r_0 a görbületi sugár terhelés előtt, ϱ ugyanez terhelés után,

$$\kappa = - \frac{1}{F} \int_F \frac{y dF}{r_0 + y}. \quad (13)$$

A cső hajlításánál a keresztmetszet téglalap, $F = lv$, hol l a cső gyűrűrészletének vizsgált eleméhez tartozó hosszúság, v a cső falvastagsága. Ezeknek figyelembevételével végezve az integrálást:

$$\kappa = - \frac{1}{vl} \int_{-v/2}^{v/2} \frac{y l dy}{r_0 + y} = -1 + \frac{r_0}{v} l \left(1 + \frac{2v}{2r_0 + v} \right). \quad (14)$$

Ha a (12) egyenletben szereplő $\kappa F r_0^2$ kifejezést képezzük, és $\lim v/r_0 \rightarrow 0$ felé haladunk, a ln sorbajfejtésénél eltűnnek az összes tagok, melyekben a v/r_0 másodiknál magasabb hatvány, $\kappa F r_0^2 = l_0 v^3 / 12 = J_q$. További levezeté-

seinkben ezt a képletet használjuk, megtartva pontosabb számításokhoz a (14) alkalmazásának lehetőségét.

A gyűrűelem keresztirányú hajlításához szükséges munka:

$$dU_q = \frac{r_0}{2EJ_q} \cdot M_q^2 d\varphi. \quad (16)$$

A hajlítást létesítő nyomatékot a (12)-ből helyettesítve:

$$dU_q = \frac{EJ_q}{2} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} \right)^2 r_0 d\varphi = \frac{El_0 v^3}{24} \cdot \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} \cdot \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} \right)^2 r_0 d\varphi, \quad (17)$$

hol a gyűrűelem hossza $l = l_0(R_0 + \bar{y}_0)/R_0$ az (1) egyenlet és az 1. ábra figyelembevételével.

Az $1/\varrho - 1/r_0$ kifejezést az irodalomban szokásos módon egyszerűsítjük integrálásra alkalmas formába. A görbület poláris koordinátarendszerben:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{[r^2 + (r')^2]^{3/2}}$$

Helyettesítve $r = r_0 + w_r$, $r' = w'_r$, $r'' = w''_r$ kifejezéseket, és elhanyagolva a magasabb rendű tagokat:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r_0 + 2w_r - w''_r}{r_0(r_0 + 3w_r)}$$

Így

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} = \frac{r_0 + 2w_r - w''_r}{r_0(r_0 + 3w_r)} - \frac{r_0 + 3w_r}{r_0(r_0 + 3w_r)} = \frac{-w_r - w''_r}{r_0(r_0 + 3w_r)}$$

Elhanyagolva továbbá a nevezőben a $3w_r$ értéket, és figyelembe véve a (8) egyenletet:

$$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} = \frac{-w_r - w''_r}{r_0^2} = \frac{w'_u + w'''_u}{r_0^2}$$

Ezt behelyettesítve a (17) egyenletbe a keresztirányú hajlításához szükséges munka:

$$U_q = \frac{El_0 v^3}{24 r_0^2} \int_0^{2\pi} \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} (w'_u + w'''_u)^2 d\varphi. \quad (18)$$

Az összes alakváltoztatási munka a (11) és (18) egyenletek összege:

$$\begin{aligned} \bar{U} = U_t + U_q = & \frac{El_0 v r_0}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R} \left(w_u \cos \varphi - \frac{dw_u}{d\varphi} \sin \varphi \right) \right]^2 d\varphi + \frac{v^2}{12} \int_0^{2\pi} \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} \left(\frac{w'_u + w'''_u}{r_0^2} \right)^2 r_0 d\varphi \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Ezen munka minimuma adja meg a cső deformált keresztmetszetének alakját. Feltételezzük — Kármán nyomán —, hogy ez az alak poláris koordináta-rendszerben kifejezhető harmonikus sor, tehát:

$$r = r_0 + C_1 \cos 2\varphi + C_2 \cos 4\varphi + \dots \quad (20)$$

Számításainkban másodfokú megközelítésig, vagyis a sor első három tagjáig mentünk. Az eredményeket később a számszerű kiértékeléseknél közölni is fogjuk, a túlságos matematikai bonyolultság elkerülésére azonban a következőkben csak az elsőfokú megközelítést tárgyaljuk.

Ennek megfelelően:

$$r = r_0 + C \cos 2\varphi = r_0 + w_r \quad (20a)$$

Az r változásai pedig a (8) egyenlet figyelembevételével:

$$w_u = -C \sin 2\varphi/2 = c \sin 2\varphi, w'_u = 2c \cos 2\varphi \text{ és } w''_u = -8c \cos 2\varphi \quad (21)$$

Ezen értékeket a (19) egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned} U = & \frac{El_0 v r_0}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \right. \\ & + \frac{1}{R} (c \cos \varphi \sin 2\varphi - 2c \cos 2\varphi \sin \varphi) \left. \right]^2 d\varphi + \\ & \left. + \frac{v^2}{12} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{R}_0 + \bar{y}_0}{R_0 r_0^4} (2c \cos 2\varphi - 8c \cos 2\varphi)^2 d\varphi \right\} \quad (22) \end{aligned}$$

$c \sin 2\varphi \cos \varphi - 2c \cos 2\varphi \sin \varphi = 2c \sin \varphi (\cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi + 1) = 2c \sin^3 \varphi$,
tehát:

$$\begin{aligned} U = & \frac{El_0 v r_0}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2c}{R} \sin^3 \varphi \right]^2 \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0 r_0^4} \cdot 3v^2 c^2 + \cos^2 2\varphi \right\} d\varphi. \quad (22a) \end{aligned}$$

Az

$$\frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} = 1 - \frac{r_0 \sin \varphi}{R_0 + r_0}$$

megközelítésben megállapodtunk az (5) egyenletben. Behelyettesítve ezt és megszorozva a (22a) egyenlet szögletes zárójelének négyzetével, sorozatot kapunk $\sin \varphi$ páros, és utána páratlan hatványaival. Hasonló a helyzet az egyenlet második részében is, miután $y_0 = r_0 \sin \varphi$. Tudjuk azonban, hogy

$$\int_0^{2\pi} \sin^{2n+1} \varphi d\varphi = 0.$$

Így $\sin \varphi$ páros hatványait megtartva egyenletünk lényegesen egyszerűsödik:

$$U = \frac{El_0 vr_0}{2} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 r_0^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + 4 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \frac{r_0 c}{R} \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi + \frac{4c^2}{R^2} \int_0^{2\pi} \sin^6 \varphi d\varphi + \right. \\ \left. + \frac{3v^2 c^2}{r_0^4} \int_0^{2\pi} \cos^2 2\varphi d\varphi \right]. \quad (22b)$$

Az integrálást elvégezve és rendezve:

$$U = \frac{El_0 vr_0 \pi}{2} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^2 r_0^2 + 3 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \frac{r_0 c}{R} + \frac{3v^2 c^2}{r_0^4} + \frac{5c^2}{2R^2} \right]. \quad (22c)$$

Az optimum:

$$\frac{dU}{dc} = \frac{El_0 vr_0^2 \pi}{2\bar{R}^2} \left[3\bar{R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) + 5 \frac{c}{r_0} + 6 \frac{v^2 \bar{R}^2}{r_0^4} \cdot \frac{c}{r_0} \right] = 0. \quad (23)$$

Innen

$$\left(\frac{c}{r_0} \right)_{\text{opt}} = \frac{-3\bar{R} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)}{5 + \frac{6v^2 \bar{R}^2}{r_0^4}}. \quad (24)$$

Az irodalomban szokásosan $\bar{R} = R_0$ így:

$$\frac{c}{r_0} = \frac{-3 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right)}{5 + 6 \frac{v^2 R_0^2}{r_0^4}}. \quad (24a)$$

Kis görbeségű csöveknél azonban a görbület sugár (R_0) terhelés előtt sokkal nagyobb, mint terhelés után az R , így irreálisakká válnak a c/r_0 értékek, sőt egyenes csőre pedig nem is alkalmazható a (24a) képlet. Ennek az elhanyagolás az okai, melyekre a (4) egyenletet követően rámutattunk. Evvel szemben $\bar{R} = R$ helyettesítéssel:

$$\frac{c}{r_0} = \frac{-3 \left(1 - \frac{R}{R_0} \right)}{5 + 6 \frac{v^2 R^2}{r_0^4}}. \quad (24b)$$

Így ívesövekre a görbületi sugár kismértékű változásánál c/r_0 értékére közel ugyanannyit kapunk, mint az irodalomnak megfelelő (24a) helyettesítésével, ellenben ez a (24b) képlet helyesen alkalmazható kis görbületű és egyenes csövekre is.

2. Szilárdsági számítások integrálás helyett összegezéssel

Elvégeztük az előzőkben cső hajlításánál a szilárdsági számításokat Kármán [1] által lefektetett, az irodalomban azóta általánosan elfogadott módon. Rámutattunk közben egyes elhanyagolásokra, melyek kiküszöbölésére, illetőleg legalább részben való figyelembevételére törekedtünk. A keresztirányú alakváltoztatási munka számításánál végigvezettük az irodalomban szokásos módon az integrálás lehetővé tételére szükségelt egyszerűsítést.

A következőkben ezen elhanyagolások és egyszerűsítés megtétele nélkül vezetünk le összefüggéseket. Eljárásunk az lesz, hogy az elhanyagolásokat és egyszerűsítést megelőzően használt képletekből kiindulva egy bizonyos előre felvett deformált alakhoz kiszámítjuk a deformáláshoz szükséges munkát, és keressük ennek legkisebb értékét az előre felvett deformált alak paramétereinek változtatásával. Természetesen a deformált alak előre való felvétele nem történik önkényesen, hanem abból a deformált alakból indulunk ki, amelyet elhanyagolások és egyszerűsítés segélyével nyertünk. Azután ehhez az alakhoz pontosan számítjuk a deformálási munka értékét, és a paraméterek változtatásával ezen munka minimumát.

A deformált alak egyenletének két szilárdsági követelményt kell kielégítenie. Az egyik az, amit a (8) egyenlet levezetésénél alapul vettünk, hogy a hajlított cső keresztmetszetének ívhossza a deformálásnál változatlan maradjon. A másik, hogy a deformáláshoz szükséges munka minimum legyen.

Először vizsgáljuk meg az első követelményt. Legyen a deformált alak poláris egyenlete egy harmonikus sor első tagjával közelítve:

$$r = \psi r_0 + C \cos 2\varphi = \psi r_0 \left(1 + \frac{C}{\psi r_0} \cos 2\varphi \right). \quad (25)$$

A keresztmetszet elemi darabjának ívhossza:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi} &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2} = \\ &= \psi r_0 \sqrt{1 + 2 \frac{C}{\psi r_0} \cos 2\varphi + \left(\frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \cos^2 2\varphi + 4 \left(\frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \sin^2 2\varphi}. \end{aligned}$$

Sorbafejtve, $C/(\psi r_0)$ kis értékénél a magasabb rendű tagokat elhanyagolva és integrálva:

$$s = \psi r_0 \left[2\pi + \pi \left(\frac{C}{\psi r_0} \right)^2 + \frac{3}{2} \pi \left(\frac{C}{\psi r_0} \right)^4 \right].$$

Miután terheletlenül a cső keresztmetszetének közepes ívhossza $2\bar{p} \kappa_0$, a (8) egyenlet levezetésekor történt feltételünknek, hogy a keresztmetszet ívhossza terhelés alatt változatlan maradjon, a fenti kifejezés csak akkor tehet eleget, ha:

$$2\pi r_0 = 2\pi r_0 \psi \left[1 + \frac{5}{4} \left(\frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \right].$$

A ψ tényező csak a harmonikus sor állandóinak a cső középsugarához való viszonyától (C_i/r_0) függ. Értékét C/r_0 kis értékeinél a

$$\psi \left[1 + \frac{5}{4} \left(\frac{C}{\psi r_0} \right)^2 \right] = 1$$

kifejezésből számíthatjuk.

A harmonikus sornak ez a sajátossága az irodalomban eddig figyelmen kívül maradt, a (25) egyenletben mindenkor $\psi = 1$ értékkel számolva. Számításainkban azonban figyelembe vesszük, megközelítőleg a fenti kifejezés szerint, pontosabban a (25) poláris egyenletből a keresztmetszet közepes ívhosszának meghatározásával. Az ilyen számításokban az

$$r = \psi r_0 \left[1 + \sum \frac{C_i}{\psi r_0} \cos 2 i \varphi \right]$$

poláris egyenletben $C_i/(\psi r_0)$ paraméterre veszünk kerek számértékeket.

A ψ tényezőnek a (25) egyenletbe való bevezetése sem az irodalomnak eddigi, sem a mi megelőző levezetéseinkben zavart nem okoz, mert a (22) egyenletrendszerünkben mindenütt az r differenciálhányadosai kerülnek alkalmazásra.

A deformált alak egyenletének — amint említettük — másik követelménye, hogy a deformáláshoz szükséges alakváltoztatási munka, a hosszirányúnak és keresztirányúnak összege minimum legyen.

Deformálás következtében az elem hosszúsága — amint ezt a (2) egyenlettel kapcsolatban megállapítottuk — $(R_0 + y_0)d\alpha$ nagyságról $(R + y)(d\alpha + \Delta d\alpha)$ -ra változik. Ezt a változást két részre bontjuk. Először azt a nyúlást írjuk fel, ami akkor keletkezik, ha az elemi rész megmarad az y_0 távolságban, azután azt a nyúlást, amely azáltal keletkezik, hogy az elemi rész távolsága y_0 -ról y -ra módosul:

$$\begin{aligned} (R + y_0)(dx + \Delta dx) + (y - y_0)(dx + \overline{\Delta dx}) - R_0 + y_0) dx = \\ = y_0(dx + \Delta dx) - y_0 dx + (y - y_0)(dx + \overline{\Delta dx}), \end{aligned}$$

az (1) egyenlet alkalmazásával. Innen a fajlagos nyúlás:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[(y - y_0) \left(1 + \frac{\Delta dx}{dx} \right) + y_0 \frac{\Delta dx}{dx} \right] = \\ &= \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[y_0 \frac{\Delta dx}{dx} + w_y \left(1 + \frac{\Delta dx}{dx} \right) \right].\end{aligned}$$

Evvel a (4) egyenlethez jutottunk. A felülvonással jelölt tagok azok, amelyek az irodalomban a levezetésekben hiányoznak, ezeket a továbbiakban elhanyagolásként fogjuk feltüntetni.

Helyettesítve a szöveget görbületi sugarakkal az (5a) szerint:

Pontosan:

$$\varepsilon = \frac{1}{R_0 + \bar{y}_0} \left[y - y_0 + y \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right) \right] = \frac{R_0}{R_0 + y_0} \left[\frac{y - y_0}{R_0} + y \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right]. \quad (26)$$

Elhanyagolással:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{R_0} \left[y - y_0 + y_0 \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right) \right] = \frac{R_0}{R_0} \left[\frac{y - y_0}{R_0} + y_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right]. \quad (26a)$$

Az elhanyagolás tehát abban áll, hogy a képlet második tagjában figyelmen kívül hagyjuk a keresztmetszetben előálló deformálódást, az y és y_0 közti eltérést. Az íveső kismértékű görbítésénél, vagyis ha R és R_0 egymástól nem nagyon különböznek, az elhanyagolás kevés lehet. Egyenes csőre azonban $R_0 = \infty$, így:

$$\varepsilon = \frac{y}{R} \quad \text{és} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{y_0}{R}. \quad (27) \text{ és } (27a)$$

Elhanyagolás által tehát egyenes csőnél a keresztmetszet deformálódása teljesen figyelmen kívül marad.

A feszültség:

$$\sigma_l = E\varepsilon = \frac{ER_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[\frac{y - y_0}{R_0} + y \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right]. \quad (28)$$

A cső hosszirányú alakváltoztatásához szükséges munka: $\Delta U_l = \sigma_l^2 V / (2E)$, hol a gyűrűelem térfogata

$$V = l_0 \frac{R_0 + \bar{y}_0}{R_0} v \Delta s,$$

vagyis a gyűrűelem hosszának $[l_0(R_0 + \bar{y}_0)/R_0]$, a cső falvastagságának (v) és a deformált keresztmetszetből a gyűrűelemhez tartozó ívhossz (Δs) szorzata. Ezeket behelyettesítve:

$$U_l = \frac{El_0 v}{2} \sum \frac{R_0}{R_0 + y_0} \left[\frac{y - y_0}{R_0} + y \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) \right]^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \quad (29)$$

Egyenes csőre:

$$U_l = \frac{El_0 v}{2} \sum \frac{y^2}{R^2} \cdot \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi = \frac{El_0 v^3}{24 r_0^2} \cdot \frac{12 r_0^4}{R^2 v^2} \sum \left(\frac{y}{r_0} \right)^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \quad (30)$$

A (22a) egyenlet első részéből

$$\bar{U}_l = \frac{El_0 v r_0}{2} \int_0^{3\pi} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \frac{2c}{R_0} \sin^3 \varphi \right]^2 d\varphi. \quad (30a)$$

A keresztirányú munka a (17) egyenletből figyelembe véve, hogy a (10) és (29) egyenletekkel kapcsolatosan a megállapításunk: $r_0 d\varphi = \Delta s = ds \Delta\varphi/d\varphi$:

$$\begin{aligned} U_q &= \frac{El_0 v^3}{24} \sum \frac{R_0 + y_0}{R_0} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r_0} \right)^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi = \\ &= \frac{El_0 v^3}{24 r_0^2} \sum \frac{R_0 + y_0}{R_0} \left(\frac{r_0}{\varrho} - 1 \right)^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \end{aligned} \quad (31)$$

A (22a) egyenlet második részéből:

$$\bar{U}_q = \frac{El_0 v r_0}{2} \int_0^{2\pi} 3 \frac{v^2 c^2}{r_0^4} \cos^2 2\varphi d\varphi. \quad (31a)$$

Ezeket a kifejezéseket össze fogjuk hasonlítani az irodalomban szokásos kifejezésekkel, melyeknek elhanyagolásaira az előzőkben több helyen említést tettünk. A (30) és (31) egyenletek a pontos kifejezések, a (30a) és (31a) egyenletek tartalmazzák az irodalomban szokásos elhanyagolásokat az összehasonlítások céljaira.

Az integrálás helyett a (30a) és (31a) képletekben is összegezést végzünk. Ellenőriztük, hogy a kiértékeléseknél használt $\Delta\varphi = \pi/12$ értékkel összegezésnél is kellő pontosságot érünk el. Kiértékeléseinkben a méreteket úgy választjuk, hogy $r_0 = 1$ és $El_0 v^3/(24 r_0^2) = 1$. Így számításainkat egyszerűsítjük és áttekinthetővé tesszük. Ugyancsak az áttekinthetőség érdekében $C = -2c$

és $\lambda = v\bar{R}/(r_0^2)$ jelöléseket vezetjük be. Az utóbbiban \bar{R} helyettesítésével kapcsolatos bonyodalmakra a (24.) képlet disszkusziójánál már kitértünk.

Ezen átalakításokkal az alakváltoztatási munka egyenes csőre:

$$U_l + U_q = \frac{12}{\lambda^2} \sum y^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi + \sum \left(\frac{1}{\varrho} - 1 \right)^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi = \frac{12}{\lambda^2} H + K \quad (32)$$

$$\bar{U}_q = 9C^2 \sum \cos^2 2\varphi \Delta\varphi = \bar{K} \quad (32a)$$

Figyeljük meg, hogy ebben a két egyenletben H , K és \bar{K} függetlenek a $12/\lambda^2$ alakváltoztatási tényezőtől, csakis a deformáció C mértékétől függenek. Meghatározzuk őket külön-külön, akkor látni fogjuk U_l alakulását az egyenes cső deformációjának fokozódása szerint a terhelési tényező különböző értékeinél, K és \bar{K} összehasonlításával pedig megállapíthatjuk, hogy mit okoznak az egyszerűsítések a keresztirányú alakváltoztatási munka számításánál.

A hosszirányú alakváltoztatási munka összehasonlító számításánál azonban nehézségeink támadnak. Tárgyaltuk már a (11) és (24) egyenletekkel kapcsolatban, hogy az irodalomban szokásos elhanyagolásokkal levezetett képleteket egyenes csőre alkalmazni nem lehet. Így a (30) és (30a) egyenleteket egyenes csőnél nem tudjuk összehasonlítani. Ezért a hosszirányú alakváltoztatási munka összehasonlító számításánál ívcsőre kell képleteket levezetni és kiértékelni.

A (22a) egyenlet első részéből:

$$\Delta U_l = \frac{El_0 v}{2} \int_0^{2\pi} \frac{R_0}{R_0 + \bar{y}_0} \left[\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) r_0 \sin \varphi + \frac{2c}{R} \sin^3 \varphi \right]^2 r_0 d\varphi,$$

hol $r_0 d\varphi$ értékére a (10) egyenlet után megállapítottuk, hogy ez a gyűrűelem hossza, tehát pontosabb számításhoz: $\Delta s = ds \cdot \Delta\varphi/d\varphi$, egyszerűsítéssel pedig: $\Delta s = r_0 \Delta\varphi$. Így algebrai átalakításokkal az összehasonlító képletek: Pontosabban:

$$\Delta H_i = \Delta U_{l1} = \frac{El_0 v r_0^2}{2R} \cdot \frac{R_0}{R_0 + y_0} \left[\left(1 - \frac{R}{R_0} \right) \sin \varphi - \frac{C}{r_0} \sin^3 \varphi \right]^2 \frac{ds}{d\varphi} \Delta\varphi. \quad (33)$$

Elhanyagolással:

$$\Delta H_i = \Delta \bar{U}_{i1} = \frac{El_0 v r_0^2}{2R} \left[\left(1 - \frac{R}{R_0} \right) \sin \varphi - \frac{R}{R_0} \cdot \frac{C}{r_0} \sin^3 \varphi \right]^2 r_0 \Delta\varphi. \quad (33a)$$

Látjuk, hogy az irodalomban szokásos elhanyagolásoknak lényeges következménye az, hogy a (33a) egyenletben a négyzetes kifejezés második tagját R/R_0 tényezővel vesszük számításba. Miután pedig R/R_0 mindenkor kisebb egynél, az elhanyagolás által az alakváltoztatási munka nagyobbodik.

Ezt az R/R_0 értéket azonban egyelőre nem ismerjük. Visszamegyünk tehát a (22a) egyenlethez, elvégezzük ennek c szerinti differenciálását a (22c) egyenletnek megfelelően, akkor a (24) egyenletben $\bar{R} = R$ helyettesítéssel összefüggést kapunk C és R/R_0 között. Az összefüggés az ívcső $\lambda_0 = \nu R_0/(r_0^2)$ kifejezést is tartalmazza, ez az ívcső méreteitől függ, ezt $\lambda_0 = 1$ értékkel számoltuk.

A másik elhanyagolás a (33a) egyenletben az $R_0/(R_0 + y_0)$ tag hiánya. Ha ezt a tagot figyelembe vesszük, ez azt eredményezi, hogy a koordináta-rendszer első és második negyedében kisebb, a harmadik és negyedik negyedében nagyobb az alakváltoztatási munka, mert itt az y_0 negatív. Ha az $R_0/(R_0 + y_0)$ tagot az (5) szerint közelítjük, akkor kiegyenlítődik a különbség, amint ez a (22a) egyenlet integrálásánál be is következett. Az integrálás helyett azonban a tagnak pontos értékével számolva adódik is egy kevés különbség, amint azt az (5) egyenlet diszkussziójánál is említettük, ezt ezután számításba vettük.

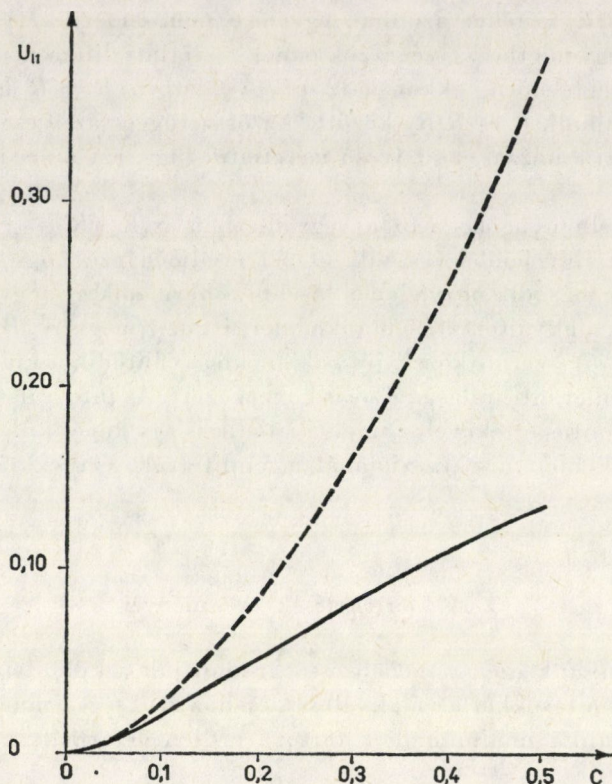
3. A kiértékelések eredményei

Tanulmányunk ezen részében összehasonlítjuk a különböző módszerekkel végzett számításokkal az alakváltoztatáshoz szükséges munkát, és felrögzöljük ezen munka minimumához tartozó erősen deformált keresztmetszeti alakot.

A pontos és az elhanyagolásokkal a hosszirányú és a keresztirányú alakváltoztatásoknál végzett összehasonlító kiértékelések eredményei az 5. és 6. ábrákon találhatóak. Az ábrák a deformálás mértékétől (C értékétől) függően mutatják az alakváltoztatási munka nagyságát. Ezen és a következő ábrákon az ordináták számértékeit a (31a) képlet után kifejtettek szerint számítottuk, erre utal az ordinátákon az 1 index. Teljes vonallal kihúzva a pontos számítás, szaggatott vonallal az elhanyagolásokkal, illetőleg az egyszerűsítéssel nyert eredmények.

A hosszirányú munka értékét az 5. ábra mutatja a (33) és (33a) képletekből számítva. Az elhanyagolásokkal számított értékek a deformálás nagybodásával eleinte kevésbé, később azonban igen erősen eltérnek a pontosan számítottaktól. Az eltérés már $C = 0,05$ -nél is 12%, $C = 0,30$ -nál eléri a 100%-ot, $C = 0,50$ -nél 183%. Az elhanyagolásokat tehát kerülnünk kell, ha elfogadható eredményeket akarunk. Egyenes csőnél a (30), illetőleg $R_0 = \infty$ helyettesítéssel a (33) képletből számíthatjuk a hosszirányú alakváltoztatási munkát.

A keresztirányú munka értékét a 6. ábra mutatja a (31) és (31a) képletekből számítva. Az eltérés eleinte igen kevés, $C = 0,05$ -nél 1%, $C = 0,15$ -től emelkedik 5% fölé, de ezután rohamosan növekszik, $C = 0,50$ -nél 118%.

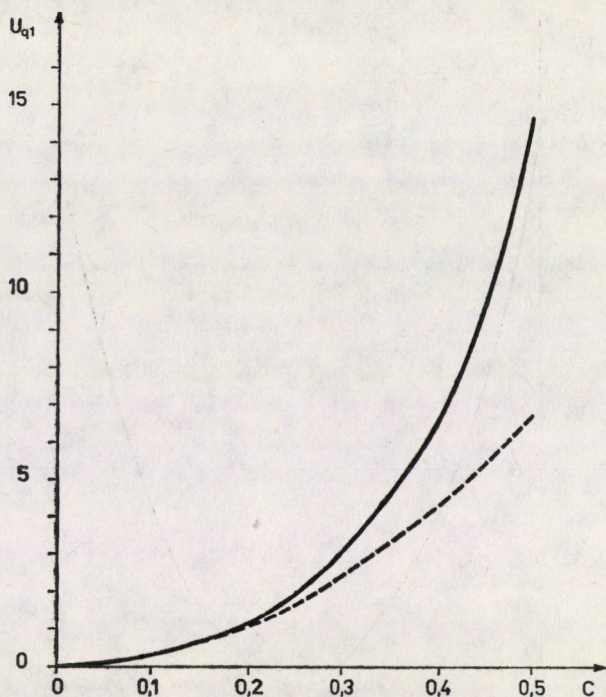


5. ábra

Ezek az értékek egyenes csőre vonatkoznak, ívcsőre a geometriai értéktől függően pár %-kal kisebbek lehetnek. A (19) egyenletben az integrálás lehetővé tétele érdekében történt egyszerűsítések tehát megengedhetők, ha a deformálás mértéke $C = 0,15$ alatt marad, ezen felül azonban az integrálással nyert C_{opt} értékek csak tájékoztató jellegűek lehetnek.

Tekintettel a kimutatott eltérésekre a következőkben az elhanyagolások és egyszerűsítés kiküszöbölésével végezzük a kiértékeléseket a (32) egyenlet alkalmazásával az alakváltoztatási munka minimumának megállapítására, és ezt követően a deformált keresztmetszeti alakot számítjuk különböző alakváltoztatási tényezők ($12/\lambda^2$) esetében.

A kiértékelésekhez elsősorban az alakváltoztatási tényezőnek ($12/\lambda^2$) számszerű értékében kell megállapodnunk. Az az érték, amellyel a célok folyáshatárig történő deformálásnál lehet számítani, integrálással kapott $C = 0,05$ -nek megfelelő $12/\lambda^2 = 0,626$. A deformált keresztmetszet leginkább ellaposodik $C = 0,20$ -nak megfelelő $12/\lambda^2 = 2,88$ értéknél, és a keresztmetszet piskóta-



6. ábra

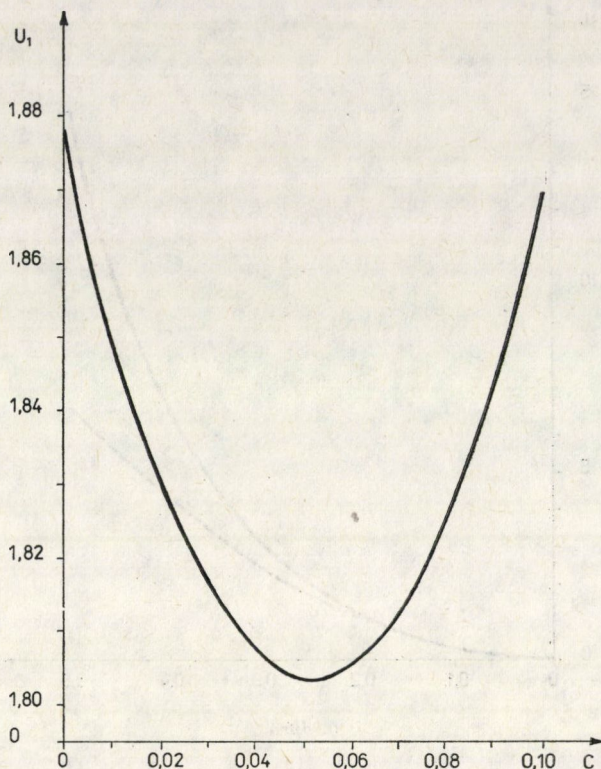
alakja áll elő, de még az összegezésnek számításainknál szokott részletességénél megengedhetően $C = 0,50$ -nek megfelelő $12/\lambda^2 = 10,2857$ értéknél.

Kis alakváltoztatási tényező ($12/\lambda^2 = 0,626$) számítási eredményeit a 7. ábra mutatja. Az alakváltoztatási munka ($U_1 = U_{11} + U_{q1}$) nagysága a deformálás (C) fokozódásával parabolikus jellegű. A lefutás megítélésére úgy ennél, mint a következő két ábránál az ordináta nem a nullvonalnál kezdődik, hogy a különbségek jobban láthatók legyenek. A minimum $C = 0,05$ környezetében van, ugyanott, ahol azt integrálással kaptuk.

Közepes alakváltoztatási tényezőnél ($12/\lambda^2 = 2,88$) a 8. ábrán találjuk a számítási eredményeket. Az ábra felépítése az előzőhöz hasonló, csak itt az alakváltoztatási munka minimuma $C = 0,18$ -nál van, tehát érezhetően kevesebb, mint az integrálással kapott $C = 0,20$ érték.

Nagy alakváltoztatási tényezőnél ($12/\lambda^2 = 10,2857$) az alakváltoztatási munka értékének alakulása a 9. ábrán ugyanaz, mint az előző ábrákon, csak itt a minimum $C = 0,33$ körül van, tehát sokkalta alacsonyabban, mint az integrálással kapott $C = 0,50$ érték.

Meghatározva az alakváltoztatási munka minimumát, fel tudjuk rajzolni a deformált keresztmetszetek alakját a 10. ábrán. Az ábra a keresztmet-



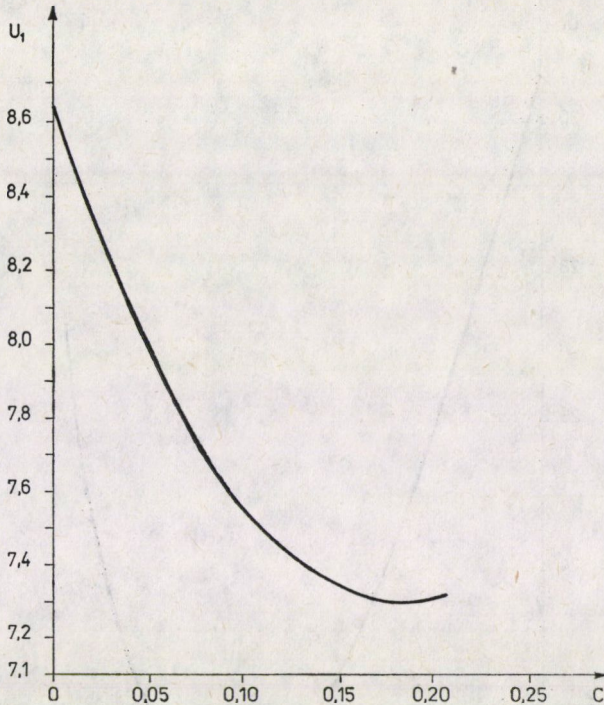
7. ábra

szeteknek csak negyedét mutatja, a többi negyed szimmetrikus a szomszédossal. Láthatjuk, hogy a terheletlenül ($12/\lambda^2 = 0$) körkeresztmetszet hogyan deformálódik előbb oválissá, azután mind laposabbá, végül piskótaalakúvá.

Ez a piskótaalak, vagyis a keresztmetszet behorpadása a $\varphi = \pm 90^\circ$ helyeken felveti azt a kérdést, hogy mennyiben elvárható egy ilyen alak a deformálásnál és mennyiben az az oka, hogy csak az első tagig mentünk el a harmonikus sor képzésénél. Ezért másodfokú megközelítéssel is számításokat végeztünk, vagyis a $C_2 \cos 4\varphi$ tagot is hozzáfűztük az előzőhöz.

Ebben az esetben tehát $r = \psi r_0 + C_1 \cos 2\varphi + C_2 \cos 4\varphi$. A számítás lényegesen bonyolultabb nemcsak minden egyes érték számításánál, hanem mert most C_1 és C_2 által képzett kétszeresen végtelen sokaságból kell kikeresnünk az alakváltoztatási munka minimumát. Nem is végeztük el teljes részletességgel a számítást, hanem csak annyira, hogy tájékozódást nyerjünk az erősen deformált keresztmetszet alakulásának kérdésében.

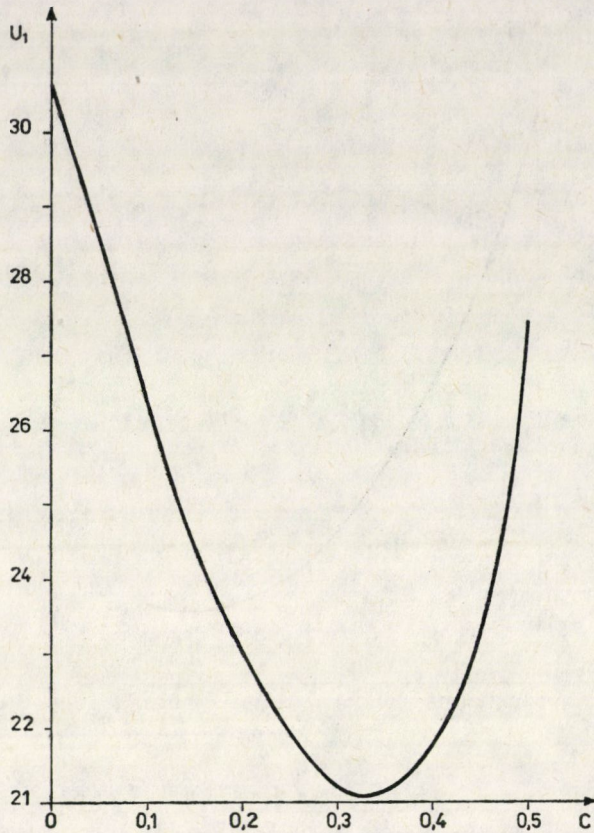
A számítás eredményeit a 11. ábra mutatja. Az alakváltoztatáshoz szükséges munkát (U_1) a C_2/C_1 -től függően vittük fel, még pedig ettől a viszonyszám-



8. ábra

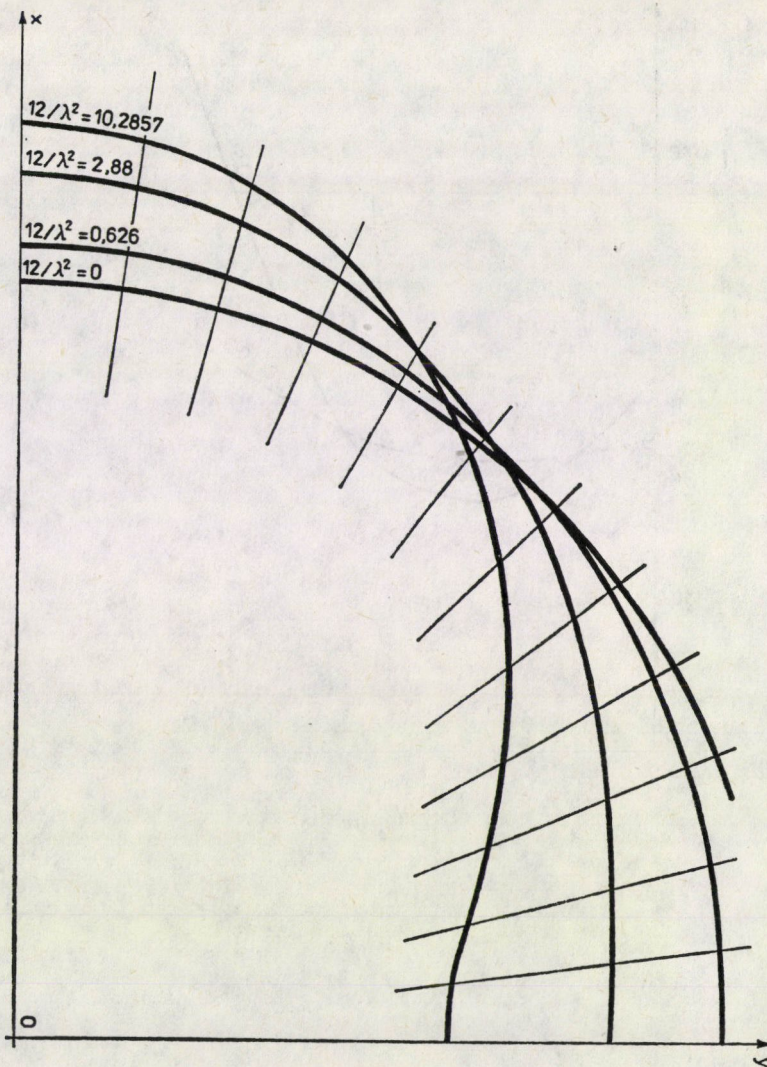
től függően azért, mert a levezetések folyamán kialakult, hogy ez a viszonyszám az, amelytől C_{opt} a terhelési tényezőtől és a deformálás mértékének változtatásától csak kis mértékben függ. Az ábrán három görbét látunk. Mind a három ugyanavval a $12/\lambda^2 = 10,2857$ alakváltoztatási tényezővel van számítva, csak a szaggatott vonallal kihúzott görbénél $C_1 = 0,3$, a teljes vonallal kihúzottnál $C_1 = 0,5$, a pontozott vonallal kihúzottnál $C_1 = 0,7$ a deformált keresztmetszeti alak első állandójának az értéke. Látjuk tehát, hogy ha egy bizonyos alakváltoztatási tényezővel különböző C_1 állandókkal a C_2 állandót növeljük, hogyan változik az alakváltoztatáshoz szükséges munka. Kimutattuk az előzőekben, hogy $12/\lambda^2 = 10,2857$ alakváltoztatási tényezőnél $C_1 = 0,33$ -nál van az alakváltoztatási munka minimuma. Ha növeljük a C_1 -et, az alakváltoztatási munka eleinte csökken, kb. $C_2/C_1 = 0,2$ -nél minimuma van, azután növekszik, még pedig annál hirtelenebbül, minél nagyobb mértékben tértünk el a $C_1 = 0,33$ -tól.

Másodfokú megközelítéssel kisebb alakváltoztatási munkaminimumot tudunk elérni, mint az elsőfokú megközelítéssel. Amíg elsőfokú megközelítéssel $12/\lambda^2 = 10,2857$ alakváltoztatási tényezővel a 9. ábrából leolvashatóan $U_1 = 21,1$ az alakváltoztatási munka minimuma, addig a 11. ábrából leolvas-

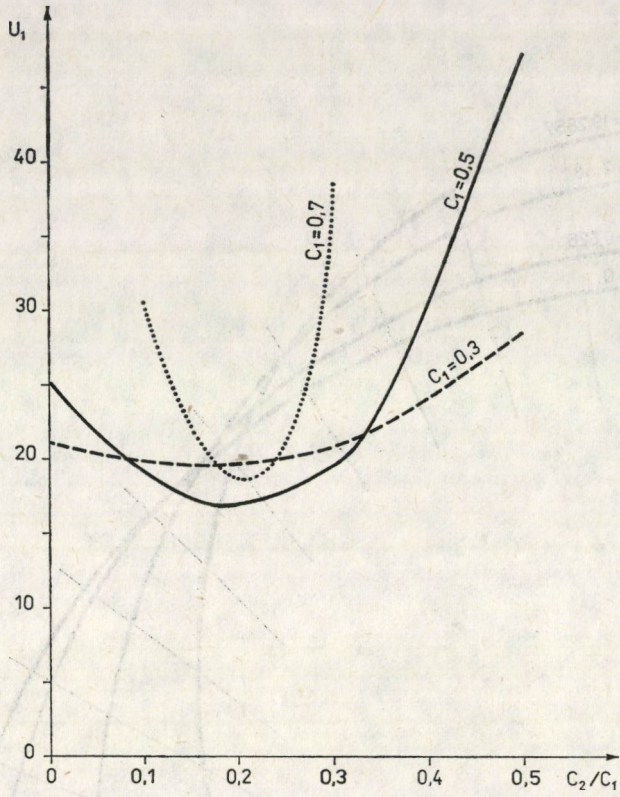


9. ábra

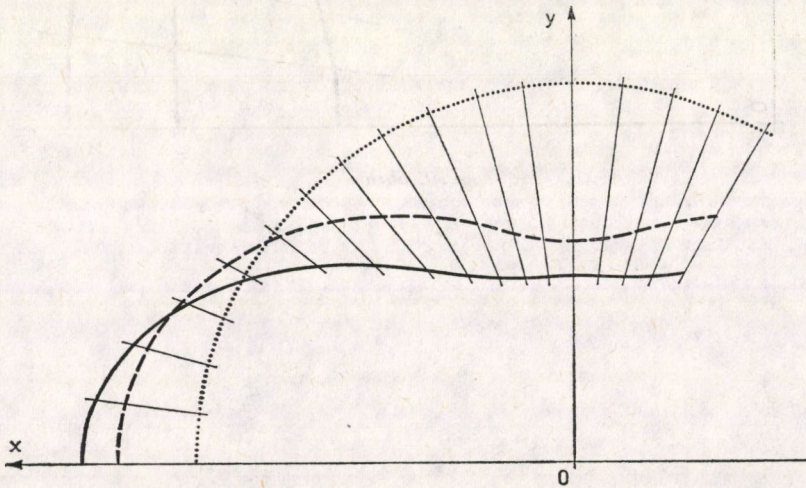
hatóan $U_1 = 17,5$ is elérhető. A két minimumnak megfelelő keresztmetszeti alakot a 12. ábrán láthatjuk. Pontozottan a terheletlen körkeresztmetszet, szaggatott vonallal az elsőfokú, és teljes vonallal a másodfokú megközelítés. Horpadás mind a kettőnél megvan, de a lapos rész a másodfokú megközelítésnél lényegesen szélesebb. A cső keresztmetszeti alakja tehát igen nagymértékű hajlításnál: széles lapos rész a középben ($\varphi = \pi/2$ környezetében), és egy kis, de véges görbületi sugár a széleken ($\varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$ helyeken).



10. ábra



11. ábra



12. ábra

IRODALOM

1. v. KÁRMÁN, TH.: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre insbesondere federnder Ausgleichrohre. *VDI Zeitschrift* 55 (1911), 1889—1895
2. HOVGAARD, W.: The Elastic Deformation of Pipes. *Journal of Math. Physics.* 6 (1926/1927), 69
3. MARKL, A. R. C.: Piping-Flexibility Analysis. *Transactions of American Society Mechanical Engineers*, 1955 Febr.
4. CSIRMAZ J.: Kompenzátorok méretezése és ezzel kapcsolatban a vékonyfalú ívcsövek feszültségi viszonyainak vizsgálata

Pipe Bending Chiefly with Large Deformation. — The paper examines once again the problem of pipe bending dealt with so much, so far. It deduces the solution in the way currently used by the literature on the subject, refers to the neglects and simplifications which have been used by the authors at that time, in order to assure an explicit solution to be used in practice. Suggestions are made to eliminate or to reduce them. A mathematical model has been constructed which permits to determine those values of a harmonic series which best fulfil the requirements of the solution. The effects of the neglects and simplifications used by the professional literature in case of different degrees of bending of the pipe are discussed and the deformation of the pipe at different rates of bending are shown. In case of a very strong deformation, the parameters of the deformed shape are calculated by an approximation of second degree. The deformed shape associated with the most favourable parameters is represented in case of approximations of the first and second degrees.

Rohrbiegung hauptsächlich mit großer Verformung. — Der Aufsatz untersucht das Problem der bisher oftmals behandelten Rohrbiegung. Die Lösung wird auf die in der Fachliteratur gebrauchte Art abgeleitet; es wird auf die Vernachlässigungen und Vereinfachungen hingewiesen, die seinerzeit die Autoren gemacht haben um eine explizite und praktisch brauchbare Lösung zu erreichen. Der Autor des vorhandenen Aufsatzes bringt deren Beseitigung oder Ermässigung in Vorschlag. Ein mathematisches Modell wird konstruiert, mit Hilfe desselben die Werte der Parameter einer harmonischen Reihe bestimmt werden können, die die Erfordernungen der Lösung am besten befriedigen. Behandelt werden auch die Auswirkungen der durch die Fachliteratur allgemein gebrauchten Vernachlässigungen und Vereinfachungen für die zu verschiedenen Maßen gebogenen Rohre. Die bei verschiedener Stärke der Biegung eintreffenden Verformungen des Rohres sind vorgeführt und bei sehr starken Verformungen die Parameter der Verformung werden auch durch eine Näherung zweiten Grades berechnet. Die den günstigsten Parametern entsprechende Verformung wird für den Fall einer Näherung ersten und zweiten Grades präsentiert.

A TEHERBÍRÁSCSÖKKENÉS PARADOXONÁRÓL VASBETON, ILLETVE ACÉL ANYAGÚ KERESZTMETSZETEK AXIÁLIS TEHERBÍRÁSÁNAK CSÖKKENÉSE A BETONACÉL, ILLETVE A FELÜLET NÖVELÉSE ESETÉN

KOLLÁR LÁSZLÓ* P.

[Beérkezett: 1982. március 14-én]

A szerző azzal az eddig még nem ismert paradoxonnal foglalkozik, hogy bizonyos vasbeton- és acél anyagú keresztmetszetek valódi (nem „rugalmas”) teherbírása csökken, ha a területét megnöveljük. Ez nemcsak a szabványnak megfelelő egyszerűsített anyagmodell esetén mutatható ki, hanem a valóságos anyagtvörvények esetében is. A szerző megadja a paradoxon létrejöttének szükséges és elégséges felételeit, valamint a teherbírás-csökkenés lehetséges maximumát.

1. A teherbírás fogalma

Az elemi rugalmasságtan elvein alapuló — hagyományos — keresztmetszetretezés (2a. ábrának megfelelő $\sigma(\varepsilon)$ diagram) esetében gyakran egy, már régóta jól ismert paradox jelenség mutatható ki: ha bizonyos keresztmetszeteknek a semleges tengelytől legtávolabb eső részeit eltávolítjuk, akkor a nyomatéki teherbírásuk növekszik [1]. Például az 1b. ábrán vázolt keresztmetszet esetén a szélső háromszögek eltávolításával a teherbírás

$$\xi = \frac{K_1}{K_2} - 1 = 11,$$

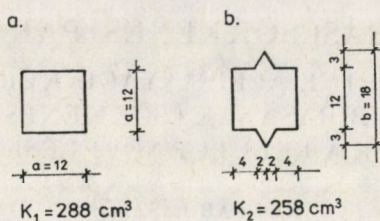
8%-kal megnő. (További példák [1]-ben találhatók.)

Ha a méretezést a *képlékenységtan* elvei alapján végezzük, akkor ez a — szemlélettel ellenkező — paradoxon létre sem jöhet. A képlékenységtan egyik alaptétele, az úgynevezett statikai tétel ([2], 111. o.) értelmében a keresztmetszet növelése nem csökkentheti a teherbírását.

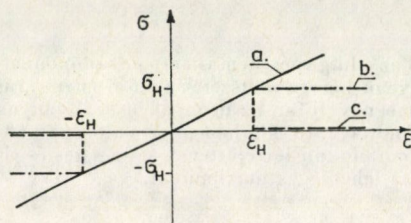
A *rugalmasságtan* elvein alapuló méretezés tulajdonképpen akkor tekinti a keresztmetszetet *tönkrementnek*, ha valamely szélső szálában a nyúlás vagy az összenyomódás eléri a σ_H -hoz tartozó ε_H -értéket (2. ábra), és nincs tekintettel a keresztmetszet további viselkedésére.

Ha megengedjük a szélső szál tönkremenetelét, de $\varepsilon > \varepsilon_H$ esetén $\sigma(\varepsilon) = 0$, vagyis a *rugalmas—rideg* anyagtvörvény szerint méretezünk (2c. ábra), akkor a keresztmetszet még vehet fel további terhet, ezt a többletet nevezzük *rugalmas teherbírási tartaléknak*.

* Kollár László P. 1122 Budapest, Karap u. 9.



1. ábra. A rugalmas elvek alapján történő méretezés paradoxona



2. ábra. Anyagtörvények. a) rugalmas, b) rugalmas—képlékeny, c) rugalmas—rideg anyag-törvény

A *képlékenységtan* — amely feltételezi, hogy $\varepsilon > \varepsilon_H$ esetén $\sigma(\varepsilon) = \sigma_H$ (2b. ábra) —, akkor tekinti a szerkezetet tönkrementnek, ha a külső teher változatlan értéke mellett az alakváltozás korlátlanul növekedhetik. A keresztmetszetek képlékeny teherbírása mindig nagyobb vagy egyenlő, mint a rugalmasságtan alapján számított teherbírás, ezt a többletet nevezzük *képlékeny teherbírás tartaléknak*.

Vizsgáljuk az 1a. és 1b. ábrán vázolt keresztmetszetek nyomatéki teherbírásait a különböző számítási feltételezésekkel.

Az 1a. ábrán vázolt keresztmetszet által a maximálisan felvehető nyomaték a hagyományos módszerrel (2a. ábrán látható $\sigma(\varepsilon)$ diagram alapján) számolva

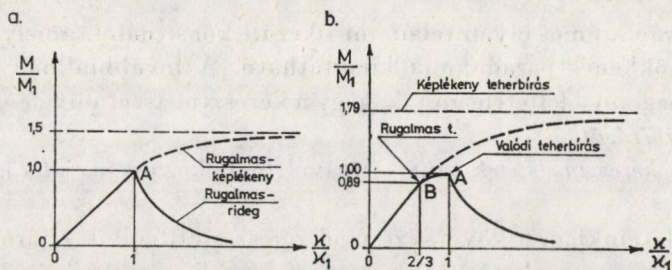
$$M_1 = K_1 \cdot \sigma_H = E \cdot I_1 \varkappa_1,$$

ahol

$$\varkappa_1 = \frac{\varepsilon_H}{\frac{a}{2}}.$$

A nyomaték és a szögelfordulás kapcsolatát a 3a. ábrán ábrázoljuk. Az *A* pont jelenti a *rugalmas tönkremenetel* helyét. A kapcsolat *O* és *A* között lineáris.

Ha *rugalmas—képlékeny* anyag (2b. ábra) feltételezésével számolunk, akkor az *A* pont után tovább emelkedik a nyomaték (szaggatott vonal). A keresztmetszetnek — amint a 3a. ábra mutatja — 50%-os *képlékeny teherbírás tartaléka* van.



3. ábra. A különféle teherbírás értelmezések összehasonlítása

Ha a „rugalmas—rideg” anyag törvény (2c. ábra) szerint vizsgáljuk a teherbírást, akkor a szélső szál tönkremenetele után a keresztmetszet által felvehető nyomaték rohamosan ($1/\kappa^2$ szerint) csökken.

Vizsgáljuk most az $M(\kappa)$ összefüggést az 1b. ábrán látható keresztmetszetre vonatkozóan az imént részletezett anyag törvények feltételezésével (3b. ábra).

A rugalmasságtani alapon számított tönkremenetel most $0,89 M_1$ -nél következik be (B pont).

Rugalmas—képlékeny anyag törvény feltételezésével (2b. ábra) a B pont után a diagram a szaggatott vonal szerint tovább emelkedik. (A keresztmetszet képlékeny teherbírás-tartaléka 100%.)

Ha a 2c. ábra szerinti $\sigma(\varepsilon)$ diagramot vesszük figyelembe, akkor a keresztmetszet által felvett nyomaték nagysága a B pont után is növekszik, éppen M_1 -ig (A pont) és csak onnantól kezd gyorsan csökkenni. Vagyis a 2b. ábrán vázolt keresztmetszetnek rugalmas teherbírás-tartaléka van!!!

Az előbbi példák többféle tönkremenetelét figyelembe véve tisztázzuk a jelen dolgozatra vonatkozóan a teherbírás fogalmát.

A keresztmetszet teherbírásán azt az igénybevételt értjük, amelynél nagyobb a keresztmetszet nem tud felvenni, függetlenül attól, hogy a keresztmetszet szélén az anyag tönkrement-e vagy sem. Ezt a továbbiakban valódi teherbírásnak nevezzük.

Ez a „valódi teherbírás” definíció a teherbírás olyan értelmezését is magába foglalja, amelynél — pl. a későbbiekben vizsgált általánosabb $\sigma(\varepsilon)$ anyag törvények szerint számolva — a keresztmetszet egyik része sem megy tönkre, de további alakváltozás csak csökkenő keresztmetszeti igénybevétel mellett lehetséges. Ilyenkor tulajdonképpen „szilárdsági stabilitásvesztés” következik be.

Az [1]-ben bemutatott paradoxon — a keresztmetszet csökkentése növeli a teherbírását — az imént vizsgált keresztmetszeteknél nem mutatkozik a valódi teherbírás számításakor, hiszen a háromszögek tönkremenetele után a négyzet viseli a terhet (3b. ábra). Felvethető azonban a kérdés, hogy a valódi teherbírással kapcsolatban bekövetkezhetik-e hasonló paradox jelenség? Vizs-

gálataink során számos olyan feladatot sikerült konstruálni, amelynél a valódi teherbírás-csökkenés paradoxona kimutatható. A továbbiakban általánosan vizsgáljuk meg, mi a feltétele annak, hogy a keresztmetszet növelése csökkentse a valódi teherbírását.

Csak a keresztmetszetek teherbírásával foglalkozunk axiális igénybevétel esetén.

Vizsgálatainkban a következő módszer szerint fogunk eljárni: valamely keresztmetszethez meghatározunk egy, a valódi teherbírásának megfelelő igénybevételt (vagy igénybevétel párt). Ezután megnöveljük a keresztmetszetet és az igénybevétel hatásvonalát (vagy az igénybevétel pár egyikét) változatlanul tekintve, meghatározzuk az új keresztmetszet valódi teherbírásának megfelelő igénybevételt, s ezt összehasonlítjuk a korábbival.

A továbbiakban feltételezzük a Bernoulli—Navier-hipotézist, vagyis hogy a keresztmetszetek síkok maradnak. Arról az anyagról, amellyel a keresztmetszetet megnöveljük — ez lehet a keresztmetszet eredeti anyagától különböző is — feltesszük, hogy a $\sigma(\varepsilon)$ diagramjának az elejére igaz a

$$\sigma(\varepsilon) \neq 0 \quad (1)$$

feltétel. (Ez rugalmas, merev—képlékeny, szinuszos stb. anyagtörvényekre nyilvánvalóan igaz.)

2. Vasheton anyagú téglalap keresztmetszet-vizsgálata

Feltételezzük, hogy a keresztmetszet anyaga csak nyomást tud felvenni.

2.1. Tetszőleges — leszálló ággal is rendelkező — $\sigma(\varepsilon)$ diagramú anyagból készült téglalap keresztmetszet-vizsgálata

A keresztmetszet anyagának $\sigma(\varepsilon)$ diagramja a 4. ábrán látható. ε_i az az alakváltozás, amely F_{ti} törőteher hatására a keresztmetszet nyomott szélő szálában keletkezik.

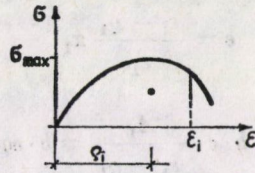
Definiáljuk a következő mennyiségeket, amelyek csak a $\sigma(\varepsilon)$ diagramtól függenek:

$$A_i = \int_0^{\varepsilon_i} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \quad (2)$$

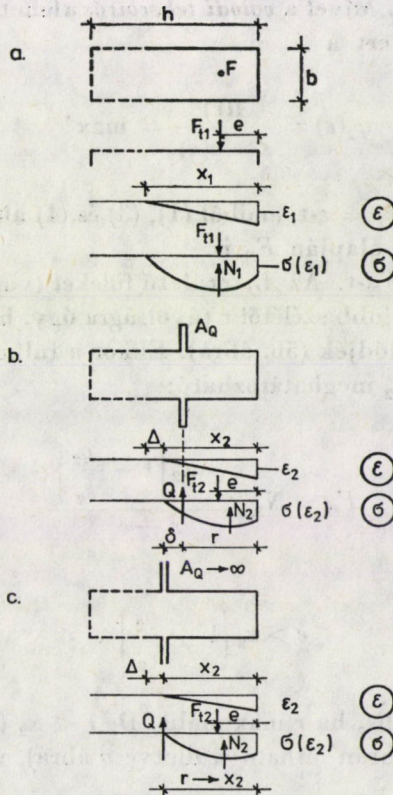
$$Q_i = \frac{\int_0^{\varepsilon_i} \varepsilon \sigma(\varepsilon) d\varepsilon}{A_i} \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$\alpha_i = \frac{\varepsilon_i}{Q_i} \quad (4)$$

Működjek F nyomóerő az 5a. ábrán felrajzolt, csak nyomásnak ellenálló téglalap keresztmetszet középvonalában a keresztmetszet jobb szélétől e távolságban. Tételezzük fel, hogy a semleges tengely — a keresztmetszet elfordulási tengelye — a keresztmetszeten belül helyezkedik el. A keresztmetszet valódi teherbírását jelöljük F_{t1} -gyel. Módosítsuk a keresztmetszet alakját az 5b. ábra szerint, és a megnövelt keresztmetszet teherbírását jelöljük F_{t2} -vel.



4. ábra. Csak nyomást felvevő anyag $\sigma(\epsilon)$ diagramja



5. ábra. A teherbírás-csökkenés vizsgálata

Határozzuk meg F_{i1} -et, F_{i2} -t, majd a kettő hányadosát:

• Az 5a. ábra alapján a vetületi egyensúly:

$$F_{i1} = N_1 = b \cdot A_1 \cdot \frac{x_1}{\varepsilon_1}. \quad (5)$$

A nyomatéki egyensúly alapján:

$$e = \frac{\varepsilon_i - \varrho_1}{\varepsilon_1} x_1. \quad (6)$$

(5)-ből és (6)-ból:

$$F_{i1} = b \cdot e \cdot \frac{A_1}{\varepsilon_1 - \varrho_1} = b \cdot \varphi_1(\varepsilon_1), \quad (7)$$

ahol

$$\varphi_1(\varepsilon_1) = \frac{A_1}{\varepsilon_1 - \varrho_1},$$

e és b pedig konstansok. Mivel a *valódi teherbírást* a lehetséges teherintenzitások közül a legnagyobb, ezért a

$$\varphi_1(\varepsilon) = \frac{A(\varepsilon)}{\varepsilon - \varrho(\varepsilon)} = \max! \quad (8)$$

feltételből kapjuk meg $\varepsilon_1 = \varepsilon$ -t, amiből (1), (3) és (4) alapján A_1 , ϱ_1 és α_1 meghatározhatók, majd (7) alapján F_{i1} is.

Határozzuk meg F_{i2} -t. Az A_Q területű füleket (vagy acélbetétet) helyezük el a keresztmetszet jobb szélétől r távolságra úgy, hogy a semleges tengely $\Delta = \mu x_1$ -gyel jobbra tolódjék (5b. ábra). Ekkor a fülben Q erő ébred. A nyomatéki egyensúlyból F_{i2} meghatározható:

$$F_{i2} = N_2 \frac{r - x_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varepsilon_2}\right)}{r - e}.$$

Mivel

$$e > x_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varepsilon_2}\right),$$

ezért F_{i2} akkor minimális, ha r maximális. De $r < x_2$ (ellenkező esetben nem alakulhatna ki az 5b. ábrán látható ε , illetve σ ábra), vagyis

$$\delta = (x_2 - r) \rightarrow 0$$

esetén lesz F_{12} minimális, ekkor a vetületi egyensúly csak úgy tud létrejönni, ha $A_Q \rightarrow \infty$, amiben (1) értelmében erő fog ébredni, és δ akkora lesz, hogy A_Q -ban éppen a vetületi egyensúly miatt megkívánt Q erő ébredjen (5c. ábra).

A nyomatéki egyensúly:

$$F_{12} \cdot (x_2 - e) = N_2 \cdot \varrho_2 \cdot \frac{x_2}{\varepsilon_2}.$$

F_{12} -t kifejezve:

$$F_{12} = b \cdot \frac{x_2^2}{x_2 - e} \cdot \frac{A_2 \cdot \varrho_2}{\varepsilon_2^2} = b \cdot \frac{x_2^2}{x_2 - e} \cdot \varphi_2(\varepsilon_2), \quad (9)$$

ahol

$$\varphi_2(\varepsilon_2) = \frac{A_2 \cdot \varrho_2}{\varepsilon_2^2}.$$

Mivel a *valódi teherbírás* esetén lehetséges a legnagyobb teherintenzitás adja a törőterhet, ezért a

$$\varphi_2(\varepsilon) = \frac{A_Q}{\varepsilon^2} = \max! \quad (10)$$

feltételből tudjuk meghatározni $\varepsilon_2 = \varepsilon$ -t, majd (2), (3) és (9)-ből rendre A_2 -t, ϱ_2 -t, és F_{12} -t.

A továbbiakban vizsgáljuk F_{12} és F_{11} hányadosát.

$$\kappa = \frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{A_2 \cdot \varrho_2 \cdot x_2^2 b}{(x - e) \cdot \varepsilon_2^2} \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varrho_1}{A_1 e b}.$$

Kiküszöböljük κ -ból a keresztmetszet jellemzőit. Behelyettesítve (6)-ot és $x_2 = x_1 - \mu x_1$ -et, rendezés után a következőt kapjuk:

$$\kappa = \left[\frac{A_2 \cdot \varrho_2}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \frac{A_1 \cdot \varrho_1}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1} \right] \cdot \left[\frac{(1 - \mu)^2}{1 - \alpha_1 \mu} \right] = \gamma(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \beta(\alpha_1; \mu), \quad (11)$$

ahol az első zárójelet γ -val, a másodikat β -val jelöltük.

A teherbírás akkor csökken, ha $\kappa < 1$. Határozzuk meg a

$$\beta = \frac{(1 - \mu)^2}{1 - \alpha_1 \mu}$$

kifejezés minimumát μ szerint. Ekkor a

$$\frac{d\beta}{d\mu} = 0$$

összefüggésből

$$\mu = \begin{cases} 1 \\ \frac{2 - \alpha_1}{\alpha_1} \end{cases} \quad (11)$$

adódik. A $d^2\beta/d\mu^2$ vizsgálatából kiderül, hogy $\alpha > 1$ esetében

$$\mu = \frac{2 - \alpha_1}{\alpha_1} \quad (12)$$

adja a minimumot. Így

$$\beta = \frac{4(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1^2}.$$

Ezt (11)-be helyettesítve:

$$\kappa = \gamma(\varepsilon_1; \varepsilon_2) \beta(\alpha_1) = \left[\frac{A_2 \cdot \varrho_2}{\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2} \cdot \frac{A_1 \cdot \varrho_1}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1} \right] \cdot \left[\frac{4(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1^2} \right] \quad (13)$$

Kimondhatjuk, hogy a *teherbíráscsökkenés általános feltétele az, hogy a keresztmetszet anyagának anyagtörvényére igaz legyen a*

$$\kappa < 1,$$

ahol κ (13) alapján határozható meg, és csak az anyag $\sigma(\varepsilon)$ diagramjának jellemzőitől függ; ezek közül ε_1 , A_1 , α_1 és ϱ_1 (8) alapján határozható meg, ε_2 , A_2 és ϱ_2 pedig (10) alapján. A teherbíráscsökkenés relatív nagyságát a

$$\xi = \frac{F_{11} - F_{12}}{F_{11}} = 1 - \kappa$$

képlettel tudjuk számítani.

$$\gamma \geq 1,$$

mivel (10) alapján

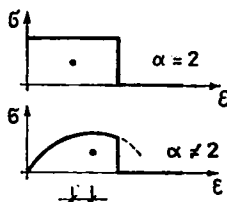
$$\frac{A_2 \varrho_2}{\varepsilon_2^2} = \max \left(\frac{A \varrho}{\varepsilon^2} \right).$$

Ha a $\sigma(\varepsilon)$ diagramnak *nincs leszálló ága*, akkor $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{\max}$ miatt $\gamma = 1$ adódik. Tehát a leszálló ág rontja a teherbíráscsökkenést. Ennek nagyságát számpéldán fogjuk vizsgálni.

Ha $\gamma = 1$, vagyis $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, akkor a teherbíráscsökkenés csak β -tól függ:

$$\kappa = \frac{4(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1^2} \quad (14)$$

$\alpha < 1$, ha $\alpha_1 \neq 2$! Vagyis a teherbírás-csökkenés szükséges feltétele $\gamma = 1$ esetén, hogy a (dolgozó) ábra súlypontja ne essék egybe a tökéletesen kitöltött $\sigma(\varepsilon)$ diagram súlypontjával (6. ábra). Ez szemléletes formában — az esetek többségére — fogalmazza meg az előző általános feltételt.



6. ábra. A teherbírás-csökkenés feltétele

Bizonyítás nélkül megemlítjük, hogy ha a $(0, \Delta)$ tartományba ($\Delta = \mu x_1$, $\mu \rightarrow (12)$) bármilyen kicsi fület is teszünk, a teherbírás mindenképpen csökken. Nagysága természetesen kisebb, mint $A_Q \rightarrow \infty$ esetén.

2.2. Vizsgálat az MSZ. 15022/1—71 alapján

A beton $\sigma(\varepsilon)$ diagramja a 12b. ábrán látható, ahol a szabvány előírása szerint

$$\varepsilon_t = 2,5\text{‰}.$$

A továbbiakban azokkal az esetekkel foglalkozunk, melyekben a keresztmetszetben eredetileg nem volt acélbetét. Ha volt ui. a keresztmetszetben eredetileg acélbetét, akkor tulajdonképpen már nem négyszögkeresztmetszetet vizsgálunk; erre vonatkozóan a 4. fejezetben található megállapítások.

Első eset. Téglalap keresztmetszet teherbírás-csökkenése végtelen területű acélbetét hatására

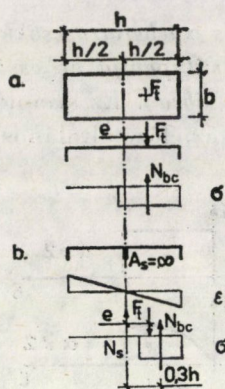
A 12b. ábrának megfelelő $\sigma(\varepsilon)$ diagram esetén $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ miatt $\gamma = 1$ adódik. (2), (3) és (4) alapján

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varrho_1} = \frac{2,5}{1,5} = 1,667,$$

innen (14) alapján a maximális relatív teherbírás-csökkenés:

$$\xi = 1 - \alpha = 1 - \frac{4(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1^2} = 4\%.$$

Határozzuk meg a téglalap keresztmetszet teherbírási vonalait (az $F(M)$ függvényt).



7. ábra. Téglalap keresztmetszet vasalása

A külpontosságot (e) a tartó geometriai középpontjától mérjük (7. ábra). *-gal a dimenzióatlanított mennyiségeket jelöljük:

$$F^* = \frac{F}{b \cdot h \cdot \sigma_{bH}},$$

$$M^* = \frac{M}{b \cdot h^2 \cdot \sigma_{bH}},$$

$$e^* = \frac{e}{h}.$$

Vasalatlan tartó (7a. ábra) esetében a nyomóerőt csak a beton veszi fel. Az egyensúlyi egyenletből

$$|M_t^*| = \frac{F_t^* - F_t^{*2}}{2}$$

adódik. Ez az „ a ” vonalnak megfelelő görbe, amit 8a. és 8b. ábrákon felrajzoltunk.

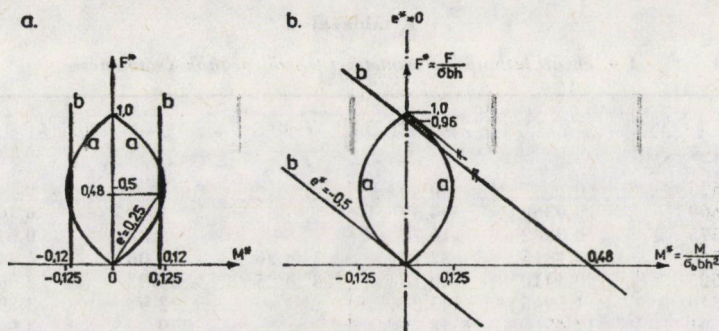
Középre helyezett végtelen területű vas esetében (7b. ábra) az ϵ ábrának át kell mennie a geometriai középponton, mivel ellenkező esetben A_s -ben végtelen nagyságú erő ébred. Ezért az egyensúlyi egyenlet a következőképpen alakul:

$$F_t \cdot e = \pm 0,4 \cdot h \cdot b \cdot \sigma_{bH} \cdot 0,3 h.$$

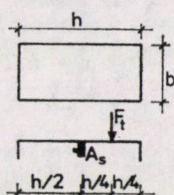
Átrendezve:

$$\frac{F_t}{b \sigma_{bH} h} \cdot \frac{e}{h} = \pm 0,12,$$

$$M_t^* = F_t^* \cdot e^* = \pm 0,12.$$



8. ábra. Téglalap keresztmetszet teherbírásának csökkenése az MSZ 15022/1-71 alapján
 a) középre elhelyezett végtelen területű vas hatására; b) bal szélre elhelyezett végtelen területű vas hatására



9. ábra. A keresztmetszet kialakítása

Ezt a 8a. ábrán a „b” vonallal ábrázoltuk. A teherbírás-csökkenés tartományát a vonalkázott rész mutatja.

A 8b. ábrán az „a” vonal a vasalatlan keresztmetszet teherbírási vonala, a „b” vonal a bal oldalon, a tartó legszélén, végtelen területű vasalással meg erősített keresztmetszetnek a teherbírási vonala. A teherbírás-csökkenés maximuma 4%.

Második eset. Téglalap keresztmetszet teherbírás-csökkenése véges területű acélbetét hatására

Tekintsük a 9. ábrán levő keresztmetszetet, amire $h/4$ külpontossággal nyomóerő hat. Tartó teherbírása:

$$F_{t1} = \frac{h}{2} \cdot b \cdot \sigma_{bH}$$

Helyezzünk A_s területű acélt a keresztmetszet geometriai középpontjába. Ekkor az x tengely jobbra toódik, és a tartó teherbírása a korábban tárgyalt okokból csökkenni fog.

Statikai egyenletek:

$$F_{t2} = 0,8 x b \sigma_{bH} + N_s,$$

$$N_s h/4 = b \sigma_{bH} \cdot 0,8 x \left(\frac{h}{4} - 0,4 x \right).$$

1. táblázat

A 9. ábrán látható keresztmetszet teherbírásának csökkenése

| x/h | η | A_s [cm ²] | Vasalás | μ [%] | ξ [%] |
|--------|--------|--------------------------|---------------------|-----------|-----------|
| 0,625 | 0 | 0 | | 0 | 0 |
| 0,600 | 0,0360 | 4,39 | | 2,195 | 0,16 |
| 0,575 | 0,0882 | 10,75 | | 5,38 | 0,64 |
| 0,550 | 0,1815 | 22,12 | 7 \varnothing 20 | 11,06 | 1,44 |
| 0,525 | 0,4410 | 50,46 | 10 \varnothing 25 | 25,23 | 2,56 |
| 0,510 | 1,1965 | 145,8 | | 72,9 | 3,39 |
| 0,501 | 12,45 | 1518 | | 759 | 3,94 |
| 0,5001 | 124,95 | 15231 | | 7620 | 3,994 |

Geometriai egyenlet:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_h \cdot \frac{x - h/2}{h}$$

Fizikai egyenlet:

$$N_s = E_a \varepsilon_a A_s$$

Fejezzük ki A_s -t és ξ -t x függvényében:

$$A_s = \frac{b \cdot 3,2 \sigma_{bH} h}{\varepsilon_h E_a} \frac{\left(0,25 - 0,4 \frac{x}{h}\right) x^2}{\left(\frac{x}{h} - 0,5\right) h^2} = \vartheta \cdot \eta$$

A relatív teherbírásnövekedés:

$$\xi = \frac{F_{t2} - F_{t1}}{F_{t1}} = 1 - 2 \left[0,8 \frac{x}{h} + 3,2 \left(1 + 0,5 \frac{h}{x} \right) \right]$$

A keresztmetszet adatai legyenek a következők:

$$h = 500 \text{ mm,}$$

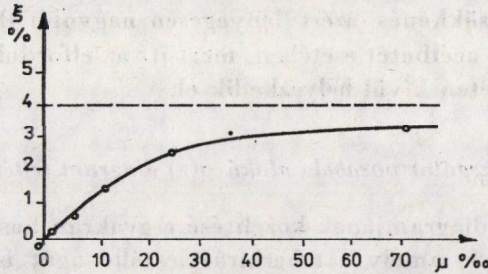
$$b = 400 \text{ mm,}$$

$$\varepsilon_h = 2,5 \cdot 10^{-3}$$

$$E_a = 210\,000 \text{ N/mm}^2,$$

$$\text{B 200 esetén } \sigma_{bH} = 10 \text{ N/mm}^2$$

Ekkor $\vartheta = 121,9$ -re adódik. $x = 0,625 h$ -től $0,5 h$ -ig változhatik. Vizsgáljunk meg néhány értéket (lásd 1. táblázat, ill. 10. ábrát).



10. ábra. A teherbírás csökkenése a vashányad függvényében

2.3. Vizsgálat a II. feszültségi állapotnak megfelelő diagram feltételezésével

A II. feszültségi állapotnak megfelelő beton $\sigma(\epsilon)$ diagramja a 12f. ábrán látható.

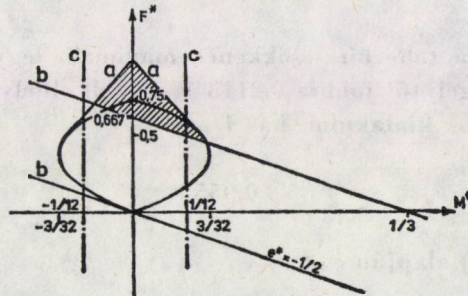
A teherbírási vonal a 11. ábrának megfelelően alakul, ahol az „a” vonal a vasalatlan keresztmetszet teherbírási vonala, „b” a keresztmetszet bal szélén végtelen mennyiségű vassal megváltoztatott keresztmetszeté, a különpontosságot a geometriai középponttól mérve, „c” pedig a geometriai közép-pontban végtelen mennyiségű vassal ellátott keresztmetszeté.

Az „a” vonal $F^* = 0$ -tól $F^* = 0,5$ -ig parabola, e fölött ehhez érintőle-gesen csatlakozó egyenes.

A „c” vonal megmutatja, hogy középre tett vasalás esetében a maxi-málisan felvehető nyomaték nagysága 11,1%-kal csökken. A 11. ábrán a kö-zépre helyezett vasalás esetében bekövetkező teherbíráscsökkenés tartomány az „a” és a „c” vonal közé essék.

A „b” vonalat vizsgálva azt látjuk, hogy a maximális relatív teherbírás-csökkenés $e = 0$, azaz $M = 0$ esetén 33%!

A 11. ábrán a bal szélre elhelyezett acélbetét esetében a teherbíráscsök-kenés tartományát vonalkázással jelöltük.



11. ábra. Téglalap keresztmetszet teherbírási vonalai a II. feszültségi állapot anyagtvörvényeit feltételezve

A teherbíráscsökkenés azért lényegesen nagyobb (háromszoros), mint a középbe helyezett acélbetét esetében, mert itt az elfordulási tengely kezdetben a keresztmetszeten kívül helyezkedik el.

2.4. Vizsgálat parabola alakú $\sigma(\varepsilon)$ diagram feltételezésével

A beton $\sigma(\varepsilon)$ diagramjának közelítésére gyakran használják a parabola alakú anyagtörvényt, amely a teherbírási leszálló ágát is figyelembe veszi.

Legyen a $\sigma(\varepsilon)$ diagram $\sigma = 2\varepsilon - \varepsilon^2$ alakú (12g. ábra). Határozzuk meg (2), (3), (4)-et:

$$A_i = \int_0^{\varepsilon_i} (2\varepsilon - \varepsilon^2) d\varepsilon = \varepsilon_i^2 \cdot \frac{3 - \varepsilon_i}{3},$$

$$Q_i = \frac{\int_0^{\varepsilon_i} \varepsilon(2\varepsilon - \varepsilon^2) d\varepsilon}{A_i} = \frac{\varepsilon_i}{4} \frac{8 - 3\varepsilon_i}{3 - \varepsilon_i},$$

$$\alpha_i = \frac{4(3 - \varepsilon_i)}{8 - 3\varepsilon_i}.$$

Határozzuk meg (8) alapján φ_1 -et:

$$\varphi_1 = \frac{A_i}{\varepsilon_i - Q_i} = \frac{4}{2} \cdot \frac{\varepsilon_i^3 - 6\varepsilon_i^2 + 9\varepsilon_i}{4 - 3\varepsilon_i} = \max!$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\varepsilon_i} = 0 \text{ — ből:}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_i = 1,2679.$$

Innen:

$$\alpha_1 = 1,6511.$$

(12) alapján:

$$\mu = \frac{2 - 1,6511}{1,6511} = 0,2113.$$

Vagyis, hogy a teherbíráscsökkenés maximális legyen, a füleket az eredeti elfordulási tengelytől jobbra 0,2113 x_1 -re kell elhelyezni, és itt fog az új elfordulási tengely is kialakulni, ha $A_Q \rightarrow \infty$.

(13) alapján:

$$\beta = 0,9553.$$

Képezzük (10) alapján φ_2 -t:

$$\varphi_2 = \frac{A_i Q_i}{\varepsilon_i^2} = \frac{8\varepsilon_i - 3\varepsilon_i^2}{12} = \max!$$

$$\frac{d\varphi_2}{d\varepsilon_i} = 0\text{-ből:}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_i = \frac{4}{3}$$

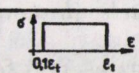
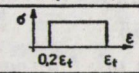
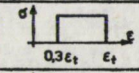
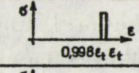
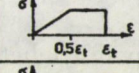
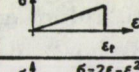
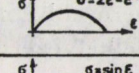
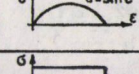
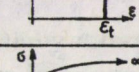
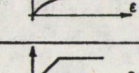
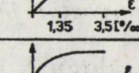
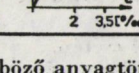
(12)-ből:

$$\gamma = 1,00241.$$

A relatív teherbírásnövekedés:

$$\xi = 1 - \kappa = 1 - \gamma \cdot \beta = 1 - 1,00241 \cdot 0,9553 = 4,24\%$$

Ha $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ közelítéssel élünk, akkor $\gamma = 1$, a teherbírásnövekedés 4,47 %-ra adódnék, vagyis ε^i változásának figyelembevétele alig (5%-os relatív hibával) változtatja meg a teherbírásnövekedést.

| | Anyagtörvény | Kitértés ség [%] | Teherbí- rásnö- vekedés [%] |
|----|---|---------------------|-----------------------------------|
| a. |  | 90 | 1 |
| b. |  | 80 | 4 |
| c. |  | 70 | 9 |
| d. |  | 0,2 | 99,6 |
| e. |  | 75 | 4,9 |
| f. |  | 50 | 11,1 |
| g. |  | | 4,24 |
| h. |  | | 5,13 |
| i. |  | 100 | 0 |
| j. |  | (->100) | 0 |
| k. |  | 80,7 | 3,15 |
| l. |  | 81,0 | 2,83 |

12. ábra. Különböző anyagtörvények összehasonlítása

2.5. Különböző anyagtörvények összehasonlítása

A 12. ábrán látható, hogy különböző anyagtörvények esetében mekkora a lehetséges teherbíráscsökkenés. Ha az anyagtörvényt matematikailag egy Dirac-féle impulzus függvény írja le, $\sigma = \delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$, akkor a teherbíráscsökkenés 100%.

Merev — korlátozottan képlékeny (12i. ábra) és tökéletesen képlékeny (12j. ábra) anyagtörvény esetén nincs teherbíráscsökkenés.

A teherbírás-csökkenés lehetséges értéke annál nagyobb, minél kevésbé mutat az anyag képlékeny tulajdonságokat. Ezért jöhet létre a II. feszültségi állapot alapján történő méretezés esetén sokkal nagyobb (nyolcszoros) teherbíráscsökkenés, mint a III. feszültségi állapot anyagtörvényét figyelembe véve.

3. Acél anyagú téglalap keresztmetszet vizsgálata

3.1 A teherbíráscsökkenés feltétele általános anyagtörvény esetén

Vizsgálódásunkban csak azzal az esettel foglalkozunk, mely akkor forog fenn, ha a $\sigma(\varepsilon)$ diagram monoton nő.

Ha a $\sigma(\varepsilon)$ diagramú anyag *nem tökéletesen képlékeny*, (vagyis létezik egy olyan ε_T , hogy ha $\varepsilon > \varepsilon_T$, akkor $\sigma(\varepsilon) = 0$, a húzott és nyomott részre egyaránt) *ezenkívül a húzott és a nyomott rész közül legalább az egyik nem merev-képlékeny*, akkor létezik olyan igénybevétel, amelynek a valódi teherbíráshoz tartozó értéke csökkenni fog, ha a keresztmetszet valamely meghatározott helyére fület teszünk.

Ebben az esetben is annál nagyobb lehet a teherbíráscsökkenés, minél kevésbé mutat az anyag képlékeny tulajdonságokat.

A fentiek bizonyítását a levezetés hosszadalmassága miatt nem közöljük.

Az előbbi feltétel lényegesen erősebb, mint a csak nyomást felvevő anyagra tett, ahol bármilyen helyre felhelyezett fül esetén van olyan igénybevétel, amelynek a valódi teherbíráshoz tartozó intenzitása csökken.

13a., 13b. ábra esetén nem jön létre, 13c., 13d. és 13e. ábra esetén létrejöhét a teherbíráscsökkenés.

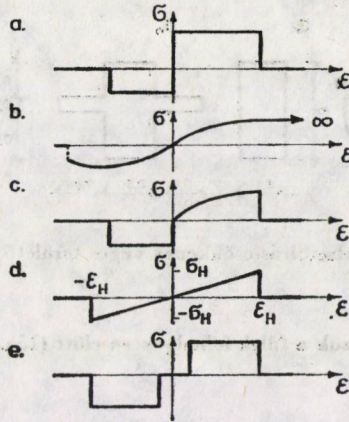
A feltétel természetesen igaz a csak nyomást felvevő anyagokra is; ekkor a húzott rész nem lehet merev-képlékeny, ami megegyezik az $\alpha \neq 2$ feltétellel.

3.2. Vizsgálat lineáris anyagtörvény feltételezésével

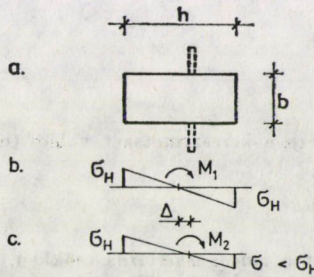
Az anyagtörvény legyen a 13d. ábrának megfelelő.

3.2.1. Számpélda végtelen területű fül esetén.

A keresztmetszet kialakítását a 14a. ábrán vázoltuk.



13. ábra. Különböző $\sigma(\epsilon)$ diagramok



14. ábra. Lineáris anyagtörvény vizsgálata

A fül felhelyezése előtt a nyomatékra

$$M_1 = \frac{\sigma_H \cdot b \cdot h^2}{6}$$

érték adódik.

A végtelen területű fül felhelyezése után:

$$M_2 = \left[\frac{(0,5 + \mu)^2}{2} \frac{2}{3} + \frac{(0,5 - \mu)^2}{2} \frac{2}{3} \frac{0,5 - \mu}{0,5 + \mu} \right] b \cdot h^2 \sigma_H$$

A teherbíráscsökkenés akkor maximális, ha a fül helyét meghatározó $\mu = \Delta/h$ arány:

$$\mu = 0,0774.$$

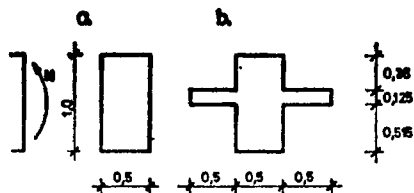
Ekkor

$$\xi = \frac{M_1 - M_2}{M_1} = 7,18 \%$$

adódik.

3.2.2. Számpélda véges területű fül esetén.

Tekintsük a 15. ábrán látható keresztmetszeteket. (Az anyagtörvény legyen most is a 13d. ábrán vázolt lineárisan rugalmas.) A felhelyezett fülek hatására a felülete 25%-kal meg-



15. ábra. Teherbírás-csökkenés véges területű fül esetén

nőtt. A keresztmetszeti jellemzők a fülek felhelyezése előtt (15a. ábra):

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 0,5 \text{ m}^2, \\
 y_1 &= 0,5 \text{ m}, \\
 I_1 &= \frac{0,5}{12} \text{ m}^4, \\
 K_1 &= \frac{1}{12} \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

A fülek felhelyezése után (15b. ábra):

$$\begin{aligned}
 F_2 &= 0,625 \text{ m}^2, \\
 y_2 &= 0,5155 \text{ m}, \\
 I_2 &= 0,04243 \text{ m}^4, \\
 K_2 &= 0,08231 \text{ m}^3.
 \end{aligned}$$

A felület növelése ellenére a keresztmetszet valódi (nyomatéki) teherbírása csökken:

$$\xi = 1 - \frac{K_2}{K_1} = 1,23\%!$$

Hangsúlyozzuk, hogy itt a *valódi teherbírás* csökken, és ez merőben más, mint az 1. ábrán vázolt keresztmetszet esetén bekövetkező *rugalmas teherbírás*csökkenés, ahol a füleket a szélső szálak közelében helyeztük el és nem a semleges tengely közelében.

4. Nem téglalap keresztmetszet vizsgálata

A dolgozat korábbi levezetései (2. és 3. fejezet) csak a négyszög keresztmetszetre vonatkoztak. Vizsgáljuk most meg a teljesség igénye nélkül, hogy a keresztmetszet teherbírásának csökkenése hogyan függ a tartó alakjától.

4.1. Vizsgálat lineáris anyagtörvény feltételezésével

Legyen a keresztmetszet $\sigma(\varepsilon)$ diagramja lineáris (13d. ábra).

Bizonyítható, hogy kétszeresen szimmetrikus keresztmetszet esetén a maximális relatív teherbírás-csökkenés végtelen területű „fül” esetében következik be. Értéke

$$\xi = 1 - 0,5 (\sqrt{a^2 + 4a} - a), \quad (15)$$

ahol

$$a = \frac{Ah^2}{I_y}.$$

(A betűk értelmezését lásd a 16. ábrán.)

A relatív teherbíráscsökkenés maximuma (15) alapján csak a keresztmetszet kialakításától függ. $\xi(a)$ a vizsgált tartományon monoton csökken, tehát akkor a maximális, ha a -t a lehető legkisebbre választjuk. a akkor kicsiny, ha a keresztmetszet területe kicsi, inercianyomatéka pedig nagy. Ennek szélső értéke a 0 gerincvastagságú, úgynevezett „ideális I szelvény”-nél van; ennél

$$a = 4.$$

Ebben az esetben a teherbíráscsökkenés akkor a legnagyobb, ha a végtelen területű fül a semleges tengelytől

$$\delta h = 0,2071 h$$

távolságra kerül, ekkor (15) szerint:

$$\xi = 17,1\%!$$

A 16. ábrán néhány keresztmetszet esetén a teherbíráscsökkenés maximuma megtalálható.

Szám példa

A keresztmetszet kialakítását lásd a 17a. ábrán.

A keresztmetszeti adatok:

$$F_1 = 184\,000 \text{ mm}^2,$$

$$I_1 = 5,7743 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4,$$

$$K_1 = \frac{I}{2050} = 2,8168 \cdot 10^6 \text{ mm}^3.$$

Helyezzünk el egy további övet a 17b. ábra szerint, ekkor a keresztmetszeti adatok:

$$F_2 = 243\,200 \text{ mm}^2,$$

$$I_2 = 6,1542 \cdot 10^{11} \text{ mm}^4,$$

A súlypont eltolódása $y_s = 178,5 \text{ mm}$,




$$K_2 = \frac{I_2}{2228,5} = 2,6993 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

A valódi relatív teherbíráscsökkenés:

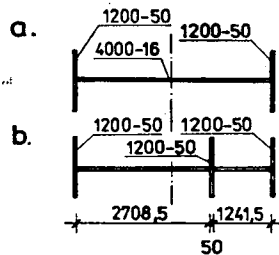
$$\xi = 1 - \frac{K_2}{K_1} = 4,17\%.$$

Ha a gerinc vastagsága zérus, akkor a harmadik — a másik kettővel azonos területű — fül hatására bekövetkező relatív teherbíráscsökkenés 7,18%.

Általánosabb anyagtörvény esetére a vizsgálatot e dolgozatban nem végezzük el. Néhány megjegyzést azonban ehhez is fűzünk.

| Kereszt- metszet | $\alpha = Ah^2/l$ | ξ [%] |
|---|-------------------|-----------|
|  | 12 | 7,1 |
|  | 8 | 10,1 |
|  | 4 | 17,1 |

16. ábra. Néhány keresztmetszet összehasonlítása



17. ábra. A keresztmetszet kialakítása

A teherbíráscsökkenés létrejöttének lehetősége továbbra is — a keresztmetszet alakjától függetlenül — csak az anyagtvörvényről függ a 3.1. szerint. A keresztmetszet alakja csak a teherbíráscsökkenés nagyságát befolyásolja, azt viszont jelentős mértékben.

A legveszélyesebb (legnagyobb teherbíráscsökkenést lehetővé tevő) keresztmetszet az ideális I szelvény. A két öv lehet különböző területű, és általános esetben a veszélyes teherállás a külpontos nyomás lesz.

5. A jelenség viszonya a képlékenységtanhoz

Látszólag ellentmondásba kerültünk a képlékenységtannak — az 1. fejezetben említett — statikai tételével, mivel azt találtuk, hogy bizonyos esetekben a keresztmetszet teherbírása, mégpedig a valódi teherbírása anyag hozzáadása esetében csökken. Az ellentmondásnak az az oka, hogy a képlékenységtan tétele csak tökéletesen képlékeny anyagokra vonatkozik, az általunk vizsgált jelenség viszont csak korlátozott alakváltozó képességű anyagok esetében következik be. A tökéletesen képlékeny anyagú keresztmetszeteknél a valódi teherbírás azonos a képlékeny teherbírással, véges nyúlóképesség esetén viszont különbözhet attól.

A szerkezetépítésben használt — és egyáltalán a természetben található — anyagok sohasem tökéletesen képlékenyek. Ez arra figyelmeztet bennünket, hogy a képlékenységtan tételeit — illetve annak szemléletét — csak bizonyos kritikával alkalmazzuk a valódi építőanyagokra.

IRODALOM

1. CSONKA PÁL: A képlékenységtan alkalmazása az építőipari gyakorlatban. *Építési és Közlekedéstudományi Közlemények* (1966), 527—539
2. KALINSZKY SÁNDOR: Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest 1975

Paradox of the Load-bearing Capacity of Cross-sections. — The paper deals with the paradox unknown up to now, that the real (not „elastic”) load-bearing capacity of some reinforced concrete and steel cross sections decreases if their area is increased. This phenomenon comes about not only in the case of simplified material laws, prescribed in the Building Codes, but also in the case of actual material laws. The necessary and sufficient conditions for the coming about of this paradox and the possible maximum of the decrease of the load-bearing capacity are given.

Paradox der Abnahme der Tragfähigkeit bei Vergrößerung des Querschnittes. — Es wird das bisher unbekannte Paradox untersucht, daß die wirkliche (nicht „elastische”) Tragfähigkeit gewisser Stahlbeton- und Stahlquerschnitte abnimmt, falls ihre Fläche vergrößert wird. Das kommt nicht nur bei vereinfachten Stoffgesetzen laut der Bestimmungen zustande, sondern auch bei wirklichen Stoffgesetzen. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Zustandekommen dieses Paradoxes und das mögliche Maximum der Tragfähigkeitsabnahme werden angegeben.

KIEGÉSZÍTÉSEK A KÖZVETLEN BEFECSKENDEZÉSŰ FELTÖLTÉSES DIESEL HAJÓMOTOROK GYULLADÁSI ÉS ÉGÉSFOLYAMATAIHOZ

LOSONCI PÁL*

[Beérkezett: 1981. június 24-én]

Az osztatlan égésterű többsugaras fűvókával üzemelő Diesel hajómotorok égésterében lezajló keverékképzési-, gyulladási- és égésfolyamatokra vonatkozó mai elméletek is meglehetősen bonyolultak. E cikk kísérletet tesz e bonyolultságok részleges feloldására, kihangsúlyozva a tüzelőanyag-részecskéknek a nagysebességű felmelegedési folyamatában jelentős szerepet játszó világító láng hősugárzó hatását, a keverékképzés folyamatában lényegesnek ítéltető nagysebességű párolgási folyamatot, az ún. gőzrobbanást, ami a keverékképzési és égési folyamatokat önfenntartóvá teszi.

Bevezetés

Sajnos, a Diesel-motorok égésterében lejátszódó keverékképzési, gyulladási és égésfolyamatokat részleteiben ma sem ismerjük, az új motor tervezésekor az égéstér, a befecskendező rendszer kialakítása főleg kísérleti úton történik. Kétségtelen tény, hogy a megelőző évtizedek kutatási, kísérletezési erőfeszítései, minőségileg sok újat eredményeztek, a keverékképzési-, a gyulladási- és égési folyamatok megismerése területén. Ennek ellenére még mindig vannak a keverékképzésnek, a gyulladásnak és égésnek olyan részterületei, ahol a jelenleg ismert kutatási eredmények, megalkotott elméletek kiegészítésre, esetleg pontosításra szorulnak. Ilyen részterületnek ítéltető a közvetlen befecskendezésű Diesel-motorban kialakuló égés folyamatában az égés önfenntartó tulajdonsága, különösképpen az égés utolsó fázisában akkor, amikor az égési levegő oxigén koncentrációja a minimumhoz tart és a még el nem égett tüzelőanyag részecskék, párák egyre nehezebben jutnak szabad oxigén molekulához.

Jelen cikk rövid áttekintést kíván nyújtani a közvetlen befecskendezésű Diesel *kisfordulatszámú hajómotorok* égésterének gyulladási és égési sajátosságairól, a kapcsolatos kísérleti megfigyelésekről, eredményekről, valamint a kísérleti mérések eredményeiből levonható következtetésekről.

* Losonci Pál, 1118 Budapest, Otthon u. 37.

**1. Rendezett légmozgással nem rendelkező
közvetlen befecskendezésű égésterek néhány gyulladási
és égési sajátossága, különös tekintettel a kis fordulatszámra**

Kiindulásképpen először hasonlítsuk össze egy nagyfordulatszámú gyorsjárású és egy kisfordulatszámú középgyors járású hajó Diesel-motor aktuális paramétereit. Az összehasonlítást az 1. táblázat tartalmazza.

Az 1. táblázat adataiból kiemelhető:

- a kisfordulatszámú Diesel-motorok égésterai többszörösen nagyobbak, mint a nagyfordulatszámú Diesel-motorok égésterai,
- az egy ciklus alatt befecskendezett tüzelőanyag-mennyiség is többszörösen nagyobb,
- az égéstérben sokkal nagyobb távolságra kell eljuttatni a tüzelőanyagot,
- többszörösen nagyobb térfogatban kell a jó keverékképzést megvalósítani,
- a nagyobb mennyiségű befecskendezett tüzelőanyag elégetéséhez, többszörösen hosszabb idő áll rendelkezésre,
- többszörösen hosszabb a tüzelőanyag geometriai befecskendezési ideje.

A fentiekből egyértelműen következik:

a) A nagyobb távolságra történő tüzelőanyag-befecskendezés igénye megköveteli a nagyobb behatolási mélységű tüzelőanyag-sugár létrehozását. A nagyobb behatolási mélységű tüzelőanyag-sugár átlagosan nagyobb mennyiségben tartalmaz nagyobb méretű tüzelőanyag-részecskéket. Nehezebb megvalósítani a nagyobb méretű tüzelőanyag-részecskéknek a kedvező elpárologtatását, a gyújtását és a füstmentes elégetését. A nagyobb méretű részecskék még osztódásuk után is nagyobb valószínűséggel juthatnak a viszonylag hidegebb égéstérfalakra, ahol lecsapódnak és veszteséget okoznak.

b) A rendezett légmozgással nem rendelkező, közvetlen befecskendezésű kisfordulatszámú Diesel-motorok esetében, különösen a befecskendezés utolsó fázisában — amikor az égési levegő oxigénkoncentrációja a minimumhoz tart

1. táblázat

| N ^o | Fordulatszám f/perc | Dugattyú- közép- sebesség m/s | Kompresz- zió viszony ϵ | Égéstér térfogat cm ³ | Tüzelő- anyag ciklus adagja cm ³ | Geo- metriai befecskend. idő 10 ⁻³ s | Effektív közép- nyomás bar |
|----------------|------------------------|--|---|--|---|---|-------------------------------------|
| 1. | 1800 | 12,6 | 12 | 455 | 0,36 | 1,4 | 9,0 |
| 2. | 400 | 6,0 | 12 | 3200 | 2,5 | 11,25 | 10,7 |

Az 1. és 2. motorjellemzők közötti viszonyszámok értékei:

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|---|------|-------|--------|------|
| 1/2 | 4,5 | 2,1 | 1 | 0,14 | 0,144 | 0,1244 | 0,84 |
|-----|-----|-----|---|------|-------|--------|------|

— a hengerbe érkező tüzelőanyag-részecskék, illetve párák elkeverése és füstmentes elégetése jelent nehezebb feladatot.

c) A párolgási, gyulladási és égési folyamatok lezajlását kedvező irányban befolyásolja a többszörösen nagyobb rendelkezésre álló idő.

d) A hengerbe érkező első tüzelőanyag-részecskék párolgása, gyulladása, lényegesen kedvezőbb körülmények között megy végbe, a rendelkezésre álló égési levegőnek a többszörösen nagyobb mennyisége és a nagyobb hőtartalma miatt.

2. Vizsgálatok és kísérleti megfigyelések hajó Diesel-motorokon

A vizsgálatokhoz és a kísérletekhez rendelkezésre bocsátott motor főbb adatai:

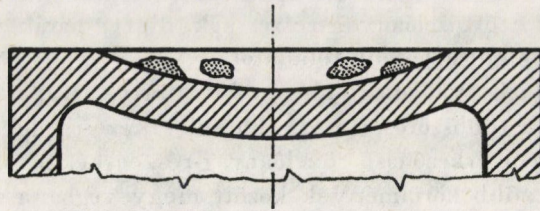
| | |
|---|---|
| Hengerek száma: | $z = 8$ |
| Effektív tartós teljesítmény: | $P_e = 736 \text{ kW (1000 LE)}$ |
| Tartós üzemi fordulatszám: | $n = 400 \text{ f/min}$ |
| Teljesítmény 1 órás túlterhelésnél: | $P'_e = 810 \text{ kW (1100 LE)}$ |
| Túlterhelési fordulatszám: | $n' = 412 \text{ f/min}$ |
| Fajlagos tüzelőanyagfogyasztás: | $b_e = 231 \text{ g/kWxh; } +5,5\% \text{ (170 g/LExh; } +5,5\%)$ |
| Furat: | $D = 315 \text{ mm}$ |
| Lökét: | $S = 450 \text{ mm}$ |
| Összlökettérfogat: | $V_\delta = 281 \text{ l}$ |
| Kompresszió viszony: | $\varepsilon = 10,8$ |
| Effektív középnyomás: | $p_e = 8,0 \text{ bar}$ |
| Feltöltő levegő nyomása (túlnyomás): | $p_f = 0,4 \text{ bar}$ |
| Égési végnyomás: | $p_\ell = 53 + 2 \text{ bar}$ |
| Kompresszió végnyomás: | $p_c = 36 \text{ bar}$ |
| Égéstér rendszere: | Osztatlan korongalakú, a könnyűfém dugattyútetőben fél lencseformájú teknővel, közvetlen befecskendezéssel, rendezett légmozgás a hengerben nem volt. |
| Befecskendező fúvóka típusa: | Bosch DL T 183 ($6 \times 0,4 \times 120^\circ$) |
| Befecskendező szivattyú típusa: | Bosch PF 1 W 190; hengerenként önálló szivattyú |
| Feltöltés rendszere: | lüktető, két-két henger közös csőbe kapcsolva. Motorra szerelve 1 db BBC VTR 320 típusú turbófeltöltő. Levegő-visszahűtés nincs. |
| Szelepek száma: | egy szívó-, egy kipufogó szelep |
| Szelepösszenyitás mértéke: | $\Delta\varphi = 150 \text{ főtengely fok}$ |
| Fajlagos kenőolaj-fogyasztás: | $b_{ek} = 4,08 \text{ g/kWxh; } +10\%$ |
| Dugattyú középsebesség: | $c_k = 6 \text{ m/s}$ |

2.1. A motor üzeme során szerzett — a tüzelőanyag gyulladása és égése témakörébe tartozó — tapasztalatok és levont következtetések

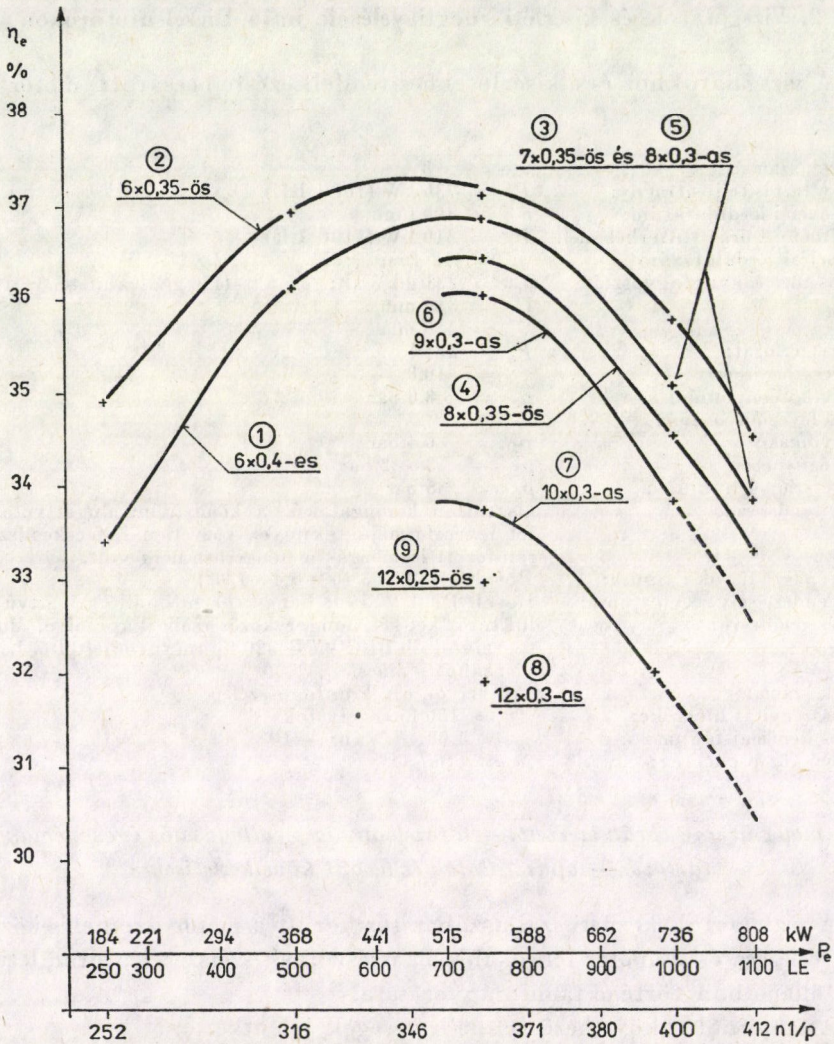
A vizsgálatok kezdeti szakaszában sor került a motor üzemelés közbeni megfigyelésére és a motor fontosabb alkatrészeinek szétszerelés után letisztítatlan állapotban történő tanulmányozására.

A motornál a következő rendellenességek jelentkeztek:

— a motor a tartós üzemi teljesítményen és még részterhelési állapotban is mérsékelten füstölt,



1. ábra. Kokszdombocskák a dugattyútetőn



2. ábra. A motor effektív hatásfokának változása az eredeti és kísérleti fűvőkákkal történt mérések során

— a dugattyútetőn a befecskendező fúvóka furatszámával megegyező számú kokszdombocskák képződtek (1. ábra).

A felsorolt rendellenességekből az volt a levonható következtetés, hogy vizsgálatokat kell végezni

— az égési légviszonyokra és

— a motor keverékképzési és égési fázisaira vonatkozóan.

A motor „ m_{ϵ} ” égési és „ m_i ” teljes légviszonyát $P_{\epsilon} = 736 \text{ kW}$ és $n = 400 \text{ f/p}$ jellemzőknél vizsgáltuk, már előzetesen elvégzett mérések eredményei alapján. E részvizsgálatok a teljes légviszonyra

$$m_i = 2,45,$$

az égési légviszonyra — közelítő számítás alapján —

$$m_{\epsilon} = 1,75 - 1,8$$

értéket adtak.

E számszerű eredmények alapján égési léghiányból eredő füstölésre nem lehetett gondolni.

2.2. A tüzelőanyag befecskendező-rendszer elemeinek vizsgálata

A 2.1. pontban leírtak alapján égési rendellenességekre lehetett következtetni. Mivel a befecskendezés az égést jelentősen befolyásolja, célszerűnek látszott felülvizsgálni a befecskendező fúvókának az égéstérhez, illetve az égéshez való illeszkedését.

Erre alapozva több különböző típusú fúvóka beszerzésére és kísérleteire került sor.

2.3. A kísérletek új típusú befecskendező fúvókái és a végrehajtott mérések eredményei

A fúvókakísérletekhez 8 féle, az alapfúvókától eltérő geometriai jellemzőkkel rendelkező fúvókát alkalmaztunk. E fúvókátípusok főbb geometriai jellemzőit a 2. táblázat tartalmazza.

Az 1. sz. fúvóka az alapmotor eredeti alkatrésze volt.

A 2. táblázatban felsorolt fúvókákkal végrehajtott kísérletek eredményeit a 2. ábra mutatja.

A fúvóka kísérletek során állandó értékű volt:

— a befecskendezési nyitónyomás,

— az előbefecskendezési szög,

— a befecskendezés geometriai törvényszerűsége.

A fenti paraméterek állandósága mellett, a befecskendezés más jellemzői természetesen változtak.

2. táblázat

A kísérleti fűvókák geometriai jellemzői

| S. sz. | Fűvókátípus | Furatok összekeresztmetszete | | Furatok elrendezése |
|--------|-----------------|------------------------------|-------------|---|
| | | mm ² | %-os aránya | |
| 1. | 6 × 0,4 × 120 | 0,756 | 100 | szimmetrikusan egy kúp-paláston |
| 2. | 6 × 0,35 × 120 | 0,576 | 76 | szimmetrikusan egy kúp-paláston |
| 3. | 7 × 0,35 × 120 | 0,6723 | 89 | szimmetrikusan egy kúp-paláston |
| 4. | 8 × 0,35 × 120 | 0,767 | 101 | szimmetrikusan egy kúp-paláston |
| 5. | 8 × 0,30 × 120 | 0,564 | 75 | szimmetrikusan egy kúp-paláston |
| 6. | 9 × 0,30 × 120 | 0,634 | 84 | szimmetrikusan egy kúp-paláston |
| 7. | 10 × 0,30 × 120 | 0,705 | 92 | szimmetrikusan váltakozva két kúppaláston |
| 8. | 12 × 0,30 × 120 | 0,846 | 112 | szimmetrikusan váltakozva két kúppaláston |
| 9. | 12 × 0,25 × 120 | 0,588 | 78 | szimmetrikusan váltakozva két kúppaláston |

A fűvókák egyes jellemző számjegyeinek értelmezése:

- az első számjegy a furatok darabszáma
- a második számjegy a furat átmérője mm-ben
- a harmadik számjegy a befecskendezés kúpszöge (szögfokban)

2.4. A kísérleti eredményekhez kapcsolódó megállapítások, feltevések

— az effektív hatásfok legkedvezőbb értékét a 2. sz. fűvókánál sikerült elérni. A motor füstölése és a dugattyútetőn a kokszdombocskák képződése a teljes üzemi tartományban megszűnt. Ennek alapján kimondható, hogy rendezett légmozgással nem rendelkező középgyors járású közvetlen befecskendezésű hajó Diesel-motornál kiválasztható egy optimális fűvóka, amely jó hatásfokú füstmentes égést garantál;

— a fűvóka geometriai összekeresztmetszetének változása nem gyakorolt egyértelmű hatást az effektív hatásfokra,

— a furatok darabszámának növelése kezdetben mérsékelt, majd rohamos effektív hatásfok-romlást eredményezett. Ezért az optimális effektív hatásfok elérése érdekében kiválasztható egy optimális furatszámú rendelkező fűvóka,

— a furatok átmérőjének csökkenése a 2. sz. fűvóka esetében javította az effektív hatásfokot, azonban amint az átmérő csökkenés együtt járt a furatok darabszámának növelésével, az effektív hatásfok számottevő csökkenést mutatott.

A fentiek alapján megállapítható, hogy a középgyors járású, közvetlen befecskendezésű, többsugaras fúvókával üzemelő, feltöltéses hajó Diesel-motoroknál, ahol az égéstérben nincs rendezett légmozgás, nem szabad törekedni arra, hogy a keverékképzés során a lehető legegyszerűbben osszunk el az égéstérbe juttatott tüzelőanyagot.

Ez a megállapítás teljesen ellentmond a többsugaras fúvókával üzemelő Diesel-motor égéstérben végbemenő keverékképzési és égési folyamatok klaszikus szemléletének.

2.5. Más motorokon végrehajtott fúvókakísérletek során szerzett tapasztalatok

2.5.1. Az M 50-F típusú többcélú mechanikus feltöltéses közvetlen befecskendezésű Diesel-motor kísérleten szerzett tapasztalatok:

A motor főbb adatai

| | |
|-------------------------------------|----------------------------|
| Effektív tartós teljesítmény: | $P_e = 736 \text{ kW}$ |
| Tartós üzemi fordulatszám: | $n = 1700 \text{ l/p}$ |
| Teljesítmény 1 órás túlterhelésnél: | $P'_e = 808 \text{ kW}$ |
| Túlterhelési fordulatszám: | $n' = 1800 \text{ l/p}$ |
| Fajlagos tüzelőanyag-fogyasztás: | $b_e = 258 \text{ g/kWxh}$ |
| Hengerek száma és elrendezése: | $2 \times 6 \text{ V}$ |

| |
|--------------------------------------|
| $D = 180 \text{ mm}$ |
| $S = 200; 209,8 \text{ mm}$ |
| $V_{\sigma} = 62,4 \text{ l}$ |
| $\varepsilon = 12,2$ |
| $p_e = 8,3 \text{ bar}$ |
| $p_f = 0,65 \text{ bar}$ (túlnyomás) |
| $p_i = \text{nem ismeretes}$ |
| $p_c = 51 \text{ bar}$ |

Égéstér rendszere:

osztatlan, Hesselman égéstér, közvetlen befecskendezéssel, rendezett légmozgás a hengerben nincs.

Feltöltés rendszere:

mechanikus, levegő visszahűtés nincs.

Szelepek száma:

két szívó, két kipufogó szelep

Dugattyú középssebesség:

$c_k = 12 \text{ m/s}$

Befecskendező fúvóka:

$8 \times 0,35 \times 140^\circ$

Szelepösszenyitás:

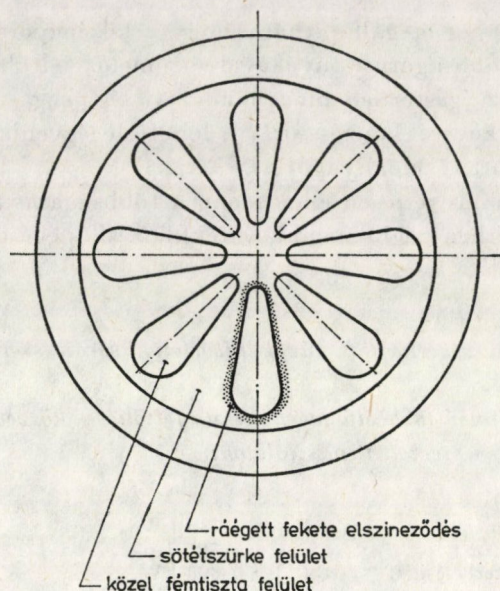
$\Delta\varphi = 100 \text{ főtengely fok}$

E motoron végrehajtott befecskendező fúvókakísérletek egyértelműen azt mutatták, hogy a legkedvezőbb eredményeket a $8 \times 0,35 \times 140^\circ$ -os fúvóka szolgáltatta. Ekkor a motor szemmel látható füstölés nélkül üzemelt és a kipufogó gázok hőmérséklete a legkisebb volt.

Ebben az esetben a makrokeverék jósági száma [9]:

$$\frac{V_c}{V \text{ sugár összes}} = 5,8 \text{ értékre adódott.}$$

A dugattyútetőn a csúcspól kiindulva ráégett, nem egyenletes fekete elszíneződések jelentkeztek, a fúvóka 8 db. sugarának irányában (3. ábra). Megállapítható volt, hogy a sugarakba befecskendezett tüzelőanyag egy része a dugattyú-



3. ábra. A dugattyútetőn keletkezett elszíneződések vázlata

tetőre kenődik fel, ott elpárolog, kis mennyisége esetleg krakkolódik, de emellett is füstmentesen ég el. Megvizsgálva a sugarak és a dugattyútető geometriai helyzetét, abból az tűnt ki, hogy a tüzelőanyag-részecskék az ún. „hideg” befecskendezési pályán haladva nem juthatnak közvetlenül a dugattyútetőre. A dugattyútetőn keletkezett színeződésekből arra a következtetésre kellett jutni, ezek csakis azáltal keletkezhetnek, hogy a befecskendezés előrehaladottabb fázisában — amikor a dugattyú még a felső holtpont környezetében tartózkodik — a tüzelőanyag égése során a sugarak eredeti térfogatuk 3—4-szeresére is terjeszkednek. Ezzel a dugattyú közelében haladó tüzelőanyag-részecskék bizonyos mennyiségének a pályája olymértékben változik meg, hogy azok felkenődnek a forró dugattyútetőre és ott elpárolognak és elégnek, miközben az említett elszíneződést okozzák.

2.5.2. A 6LD 315 RNF típusú Diesel hajómotor kísérleteinél szerzett tapasztalatok

Hasonló jelenség volt észlelhető a 2. pontban leírt motorcsalád nagyföltöltésű egységénél is.

E motor főbb adatai a következők voltak (csak az eltéréseket soroljuk fel):

| | |
|---------------------------------|----------------------------|
| A típus jelzése: | 6 LD 315 RNF |
| Hengerszám: | $z = 6$ |
| Fajlagos tüzelőanyagfogyasztás: | $b_e = 209 \text{ g/kWxh}$ |
| Összlökettérfogat: | $V_\delta = 211 \text{ l}$ |

| | |
|---|--|
| Kompresszióviszony: | $\varepsilon = 12$ |
| Effektív középnyomás | $p_e = 10,7 \text{ bar}$ |
| Feltöltő levegő nyomása: (túlnyomás) | $p_f = 0,67 \text{ bar}$ |
| Égési végnyomás: | $p_i = 88 \text{ bar}$ |
| Kompresszió végnyomás | $p_c = 49 \text{ bar}$ |
| Égéstér rendszere: | osztatlan, Hesselman közvetlen befecskendezéssel, rendezett légmozgás a hengerben nem volt. |
| Befecskendező fúvóka típusa: | Bosch $6 \times 0,5 \times 120^\circ$ |
| Befecskendező szivattyú típusa: | Bosch PF 1W 220, hengerenként önálló szivattyú |
| Feltöltés rendszere: | lűktető, három-három henger közös kipufogó csőbe kapcsolva, motorra szerelve 1 db. Napier MS/HP 204 tip. turbófeltöltő. Levegő visszahűtés: $\Delta t = 40^\circ \text{C}$ |
| Szelepek száma: | két szívó, két kipufogó szelep |
| Szelepösszenyitás mértéke: | $\Delta \varphi = 110$ főtengely fok |

E motornál a makrokeverék jósági száma: [9]

$$\frac{V_c}{V. \text{ sug. } \ddot{o}.} = 12 \text{ értéket ért el.}$$

A következőkben tekintsük át az egyes fizikai állapotjelzők változásait, amelyek egyrészt a hengertöltetnél, másrészt a befecskendezett tüzelőanyagnál végbemennek.

3. A hengertöltet és a befecskendezett tüzelőanyag egyes fizikai állapotjelzőinek változása a befecskendezés és égés során

A befecskendezés és égés tartama alatt a hengertöltet és a tüzelőanyag-részecskék fizikai jellemzőiben változások sorozata következik be [1], [2].

Kövessük nyomon e változásokat.

3.1. A hengertöltet fizikai jellemzőinek változása

A hengertöltet átlagos nyomásának változása mérhető és számítható, az átlagos hőmérsékletének változása elegendő pontossággal számítható.

A 2.5.2. pontban bemutatott nagyfeltöltésű hajó Diesel-motorra vonatkozóan megbízható adatok a 4. ábrán láthatók [5].

A keverékképzés során figyelembe kell venni a hengertöltetben fellépő következő mozgásokat, változásokat:

— a szívás üteme alatt keletkezett és a befecskendezés és égés fázisában még meglevő rendezetlen örvénylő mozgást,

— a hengertöltetnek a befecskendezett tüzelőanyag-részecskék által előidézett bizonyos mértékű helyi mozgását,

— a gyulladás pillanatától keletkezett és a tartós, folyamatos égés során felerősödött rendezetlen belső áramlásokat (turbulencia).

A fenti állapotjelzőknek és jellemzőknek a változásával kapcsolatban meg kell jegyezni, hogy a hengertérben a gyulladási és égési centrumokban és közvetlen környezetükben az átlagos értékekhez képest — rövid időre — lényegesen nagyobb helyi nyomás-, hőmérséklet- és sebességértékek alakulnak ki, majd az égés során folyamatosan és annak befejeztével az átlagos értékekre kiegyenlítődnek.

— A hengertöltet oxigénkoncentrációja az égés folyamán csökken és egy minimális értékhez konvergál.

— A gyulladás pillanatában megjelenik a világítóláng, ami hőszugárzás útján a tüzelőanyag-részecskéknek további számottevő hőfelvételt tesz lehetővé.

3.2. A tüzelőanyag-részecskékben végbemenő változások

A befecskendezés folyamán a hengertérbe juttatott tüzelőanyag-részecskék minden időpillanatban más-más állapotú közegen haladnak át [1].

A 4. ábrát vizsgálva látható, hogy a hengertérbe befecskendezett tüzelőanyag-részecske a megtett útja során egyre növekvő nyomású (sűrűségű), hőmérsékletű levegővel, gázzal érintkezik, miközben sebessége számottevően csökken. A töltet növekvő nyomásának és növekvő hőmérsékletének hatására a tüzelőanyag-részecskékben is nő a nyomás és a hőmérséklet.

A gyulladás, folyamatos égés pillanatától a töltet nyomása és hőmérséklete meredeken emelkedik.

A töltet nyomása, a legnagyobb értékének elérése után meredeken csökken, miközben a töltet hőmérséklete még tovább emelkedik, majd tartósan közel állandó értékre áll be. Jelentős csökkenés csak ezután következik, ami elsősorban a folyamatosan elégtő tüzelőanyag mennyiségének csökkenéséből és a töltet expanziójának növekedéséből ered. A rohamos nyomáscsökkenés a tüzelőanyag-részecskében is jelentkezik, miközben hőmérséklete emelkedik.

A tüzelőanyag-részecske a hengertérben megtett útja során a folyamatos és egyre növekvő hőfelvétel következtében felmelegszik és párolog.

A párolgás mértékét, törvényszerűségét a hőfelvételen kívül számottevően befolyásolják a tüzelőanyag fizikai jellemzői is.

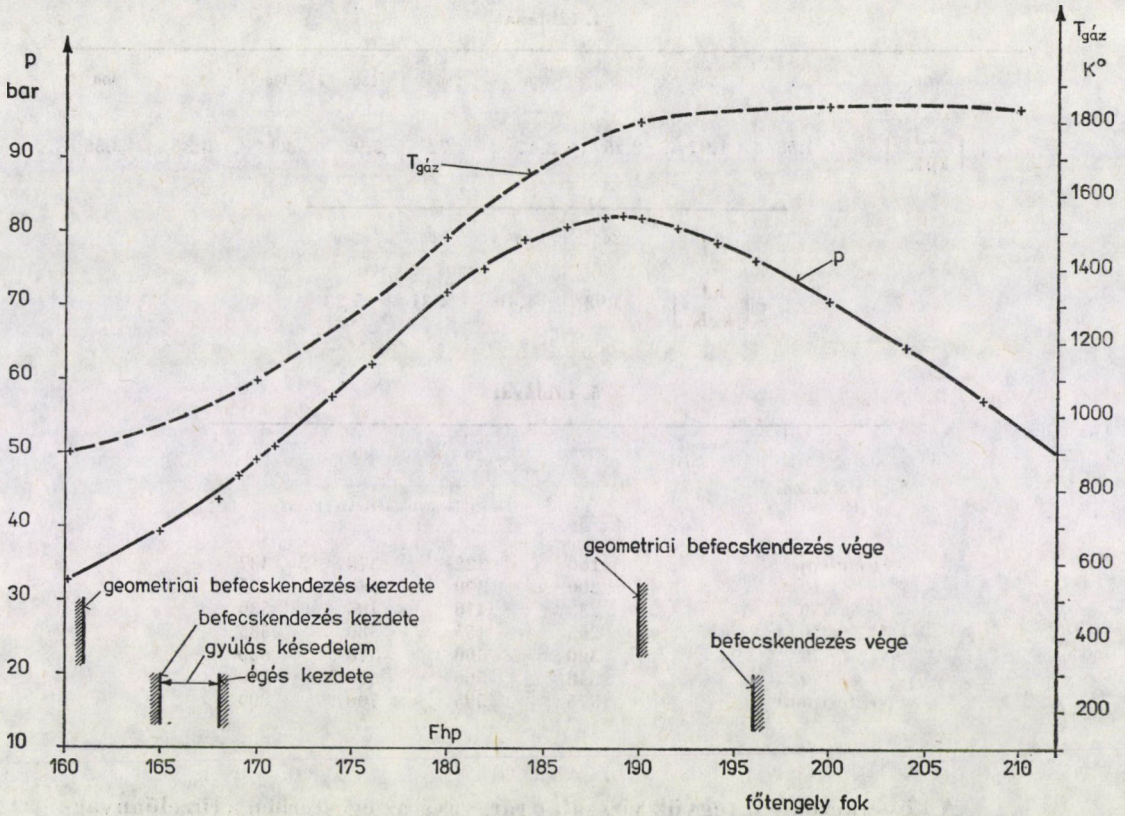
Tekintsük át a következő táblázatokat, amelyekben a tüzelőanyag egyes fizikai jellemzőinek változása látható részben (számított értékek [11]).

A *gázolaj sűrűsége* a nyomás növekedésével mérsékelten nő, a hőmérséklet növekedésével rohamosan csökken (3. táblázat).

A *gázolaj fajhője* a hőmérséklet növekedésével rohamosan növekszik (4. táblázat).

A *gázolaj desztillációs hőmérséklete* a nyomás növekedésével rohamosan növekszik (5. táblázat).

A tüzelőanyag-részecske mérete, alakja az általa megtett út során folyamatos változáson megy keresztül. A részecske mérete az elpárolgás mértékétől



4. ábra. A hengertöltet nyomásának és hőmérsékletének változása a motor keverékképzési és égési fázisában

függően csökken, a felmelegedés mértékétől függően viszont növekszik. A befecskendezés első pillanataiban még meglévő, közel gömb alakja megváltozik, a nagyobb méretű részecskék útjuk során osztódnak.

A részecske felszínén a párolgás következtében az alakjától függő, változó vastagságú gőzréteg képződik.

3. táblázat

| Hőmérséklet (C) | Nyomás (bar) | A gázolaj sűrűsége (kg/dm ³) | | | |
|--------------------|-----------------|--|-------|-------|-------|
| | | 1 | 20 | 40 | 60 |
| 20 | | 0,830 | 0,832 | 0,835 | 0,841 |
| 200 | | 0,695 | 0,700 | 0,704 | 0,718 |
| 300 | | 0,600 | 0,629 | 0,641 | 0,653 |
| 400 | | 0,455 | 0,547 | 0,559 | 0,577 |

4. táblázat

| (C) | 0 | 20 | 100 | 150 | 200 | 250 | 300 | 350 | 400 |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $c \left(\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)$ | 1,88 | 1,97 | 2,26 | 2,47 | 2,72 | 2,93 | 3,14 | 3,35 | 3,56 |

| t (C) | 500 | 600 | 700 | 800 |
|---|------|------|------|------|
| $c \left(\frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right)$ | 3,98 | 4,40 | 4,81 | 5,23 |

5. táblázat

| Átdesztillált térfogat (%) | Nyomás (bar) | | | |
|-------------------------------|-----------------------------|-----|-----|-----|
| | 1 | 20 | 40 | 60 |
| | Desztillációs hőmérséklet C | | | |
| első csepp | 160 | 322 | 378 | 437 |
| 10 | 200 | 390 | 440 | 475 |
| 30 | 233 | 410 | 485 | 530 |
| 50 | 265 | 455 | 530 | 585 |
| 70 | 300 | 500 | 570 | 630 |
| 90 | 348 | 560 | 660 | 740 |
| végforrpon | 375 | 595 | 700 | 800 |

A következőkben tegyük vizsgálat tárgyává az égésterben a tüzelőanyag-részecske hőfelvételi viszonyait, figyelemmel arra, hogy a konvekciós hőfelvétel mellett, a világító láng megjelenésének pillanatától a sugárzás útján történő hőfelvételt külön tárgyaljuk. Elhanyagoljuk az égésteret határoló falaktól sugárzás útján felvett, illetve azoknak sugárzás útján átadott hőmennyiséget.

3.3. A tüzelőanyag-részecske hőfelvételi viszonyai

A tüzelőanyag-részecske konvekciós- és sugárzásos úton vesz fel hőt a környezetétől és párolgás útján bizonyos mennyiséget lead. A tüzelőanyag-részecske felmelegítésére fordított hőmennyiség:

$$Q_f = Q_k + Q_s - Q_p. \quad (kJ) \quad (1)$$

A tüzelőanyag-részecske a világító láng megjelenésének pillanatáig a munkaközegből csak konvekciós úton vesz fel számottevő hőt. A konvekciós hőfelvétel nagyságának a meghatározásához kiindulásul a következő ismert alapösszefüggést használjuk:

$$Q_k = \alpha_k A (t_g - t_{cs}) \tau. \quad (1)$$

A sugárzásos hőfelvétel közelítő értékének a meghatározásánál:

$$Q_s = \sigma \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_{cs} \cdot A \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{cs}}{100} \right)^4 \right] \cdot \tau \quad (2)$$

ismert összefüggésből indulunk ki [6].

A jelölések értelmezése:

- Q_f = a tüzelőanyag-részecske felmelegítésére fordított hőmennyiség (kJ)
 Q_k = a tüzelőanyag-részecskének a hengertöltetből konvekciós úton felvett hőmennyisége (kJ)
 Q_s = a tüzelőanyag-részecske által sugárzásos hőcserével felvett hőmennyiség (kJ)
 Q_p = a tüzelőanyag-részecskéből párolgással elvont hőmennyiség
 α_k = konvekciós hőátadási tényező (kJ/m² Kh)
 A = a tüzelőanyag-részecske hőátvevő felülete (m²)
 t_g = a hengertöltet átlagos hőmérséklete (C)
 t_{cs} = a tüzelőanyag-részecske átlagos hőmérséklete (C)
 τ = idő (10⁻³ s)
 σ = hősugárzási együttható [20,8 · 10⁻⁸ kJ/m²(K)⁴ h
 ε_1 = a sugárzó láng emissziós tényezője, számítva az $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 (1 - e^{-k \cdot p \cdot l})$ összefüggéssel. [10]
 ε_{cs} = a tüzelőanyag feketeségi tényezője (felvéve 0,9-re)
 $T_{\phi,l}$ = a világító láng abszolút hőmérséklete (K)
 T_{cs} = a tüzelőanyag-részecske abszolút hőmérséklete (K)
 ρ_g = a hengertöltet sűrűsége (kg/dm³)
 k = $k(m, \Delta\varphi)$ értéke függ a légviszonytól (m) és a főtengely elfordulási szögétől ($\Delta\varphi$). [10., 4. ábra]
 p = nyomás az égéstérben (kg/cm²)
 l = közepes sugárhossz az égéstérben a következő formula szerint:
 $l = \frac{3,6 V}{A}$, ahol
 V = az égéstér pillanatnyi térfogata (m³)
 A = az égéstér pillanatnyi határoló felülete (m²)

3.3.1. A konvekciós hőátvitel

Az (1) egyenlet tényezői a befecskendezés fázisában állandó jelleggel változnak, így:

— a *csepp átlagos hőmérséklete* a megtett útja során emelkedő tendenciát mutat. Miután a csepp különböző fizikai állapotú mikrokozmoszokban halad át, a tendencia megmaradása mellett a hőmérsékletének emelkedése a mikrokozmoszokban való áthaladásnak megfelelően más-más törvényszerűség szerint valósul meg;

— az elpárolgási folyamat kezdetéig a *gáz átlagos hőmérsékletének* változása a politropikus kompresszió törvénye szerint következik be. Ettől a pillanattól kezdve az *első gyulladás centrum megjelenéséig* a hőmérséklet-emelkedés más törvényszerűség szerint zajlik. Megint más törvényszerűség szerint változik a *gáz átlagos hőmérséklete* a gyulladás pillanatától a maximális hőmérséklet eléréséig, majd megint másképpen az expanziónak az égés végét jelentő szakaszáig;

— a *csepp átlaghőmérséklet* közvetlenül a felvett hőmennyiségtől és a párolgás során elvont hőmennyiségtől függ;

— a gáztól konvekciós úton átvett hőmennyiség az átvevő felület nagyságától A -tól is függ. Figyelembe véve, hogy a csepp a hengertérbe való bejutása pillanatától, hőmérsékletének növekedésével párolgásnak indul, ezért A értéke kisebb mértékben növekszik, mint amilyen mértékű növekedést a csepp hőmérséklet-emelkedésének a hatására bekövetkező térfogatnövekedéstől várni lehetne;

— a *csepp felülete függ a csepp alakjától*. A nagyobb cseppek osztódásának fázisában a felület nagysága állandó változáson megy keresztül. Változik a hőátvitel szempontjából aktív és kevésbé aktív felület is;

— a világító láng megjelenésével a sugárzó hőfelvétel hatására a csepp felülete még egy újabb törvényszerűség szerint változik és megint más törvényszerűség válik uralkodóvá, ha a csepp felszíné már lánggal ég. A csepp felszínén akkor minden bizonnyal kialakul a felszínhez közeli rétegek nagyon gyors felmelegedésének hatására egy, a forrási állapothoz hasonló jelenség. Az elpárolgás ezekből a rétegekből olyan nagy sebességgel történhetik meg, hogy a csepp több darabra esik szét, illetve „felrobban”. (Gőzrobbanás [9].)

— a *csepp párolgása* során a felszínen gőzburok képződik, amely csökkenti a konvekciós hőfelvételt;

— az α_k hőátadási tényező értéke a tüzelőanyag-részecskéknek a hengertérben megtett útja során, illetőleg az idő függvényében változik [1].

A változást előidéző fontosabb tényezők:

— a csepp mértékadó sebessége,

— a csepp mértékadó átmérője, alakja,

— a gőzburok vastagsága,

— a töltet sűrűsége,

— a részecske felszínének égése.

A fentiek figyelembevételével a tüzelőanyag-részecske konvekciós hőfelvételét a következő bonyolult függvénnyel jellemezhetjük:

$$Q_k = Q_k(A; \alpha_k; t_{cs}; t_g; \tau). \quad (3)$$

Ez az egyenlet azzal válik bonyolulttá, hogy A ; α_k ; t_{cs} ; t_g , egyrészt az időnek, τ -nak a függvénye, másrészt A ; és t_{cs} még Q_k -nak és a fajhőnek, c -nek is függvénye, azaz

$$A = A(Q_k; t_{cs}; \tau; c); \quad (4)$$

$$t_{cs} = t_{cs}(Q_k; \tau; \alpha_k); \quad (5)$$

illetve

$$\alpha_k = \alpha_k(A; \lambda; w; \rho_g; \delta_{gb}; \tau); \quad (6)$$

Esetünkben:

λ a levegő (gáz) hővezetési tényezője
 w a tüzelőanyagcsepp változó relatív sebessége
 δ_{pb} a tüzelőanyagcsepp palástja mentén kialakuló gőzburok vastagság
 ρ_g a hengertöltet sűrűsége.

Sajnos, meg kell állapítani, hogy a (3), a (4), az (5) és a (6) függvények ma még nem ismeretesek.

3.3.2. *A sugárzásos hőátvitel elemzése*

A befecskendezés kezdetétől az első égési centrumok, illetőleg a világító láng megjelenéséig terjedő idő csak egy töredéke a befecskendezés és égés összidejének [1]. A világító láng megjelenésével a tüzelőanyag-részecskéknek egy másik hőleadó forrás is rendelkezésre áll, a világító láng hőszugárzása.

A tüzelőanyag-részecske hőszugárzás útján történő hőfelvételét — a (2) összefüggés figyelembevételével — a következő függvénnyel jellemezhetjük:

$$Q_s = Q_s(A; T_{cs}; \tau).$$

Ez az összefüggés azáltal válik bonyolulttá, hogy A és T_{cs} is Q_s -nek függvénye, továbbá T_{cs} még külön a részecske c fajhőjétől is függ. A fajhő viszont T_{cs} értéktől függ.

Ez tovább bonyolítja a tüzelőanyag-részecske felmelegedési viszonyainak számítási eljárását. Ezekután, ha összevetjük a tüzelőanyag-részecskének a konvekciós és sugárzásos hőfelvételi viszonyait, megállapíthatjuk, hogy az egymástól többszörösen függő tényezők — a mai ismereteink szerint — nem teszik lehetővé a részecske felmelegedésének pontos számítását.

3.4. *A konvekciós és a sugárzásos hőfelvétel összevetése*

A 3.3.1. és a 3.3.2. pontokban külön taglalt konvekciós és sugárzásos hőfelvétel a keverékképzés és égés idejének a legfontosabb fázisában, a világító láng megjelenésének pillanatától az égés befejezéséig tartó szakaszában, nagyon bonyolult kapcsolattal együtt van jelen.

Vizsgáljuk meg 10, 20 és 30 μ átmérőjű tüzelőanyagcseppek felmelegedését a következő feltevésekkel:

- a csepp gömbalakú marad és nem veszi körül gőzburok,
- a csepp átmérője nem változik, tömege állandó,
- a gázhőmérséklet-változást figyelembe vesszük,
- a fajhőváltozást figyelembe vesszük,
- a hengertöltet hőmérsékletét a 4. ábra alapján:
 - a) növekvő tendenciával a gyulladás pillanatától,
 - b) a maximális állandó értékkel vesszük figyelembe

— a csepp hőmérsékletének kiinduló értékét minden esetben 150 °C-ra választjuk, az a) esetben α_k hőátadási tényezőt [1]:

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= 50,4 - 53,0 \cdot 10^3 \text{ kJ/m}^2\text{K h} \\ \alpha_{20} &= 25,2 - 26,3 \cdot 10^3 \text{ kJ/m}^2\text{K h} \\ \alpha_{30} &= 16,74 - 17,56 \cdot 10^3 \text{ kJ/m}^2\text{K h}\end{aligned}$$

értékkel, b) esetben, maximális hőmérséklet tartományban

$$\begin{aligned}\alpha_{10} &= 74,7 \cdot 10^3 \text{ kJ/m}^2\text{K h} \\ \alpha_{20} &= 37,3 \cdot 10^3 \text{ kJ/m}^2\text{K h} \\ \alpha_{30} &= 24,9 \cdot 10^3 \text{ kJ/m}^2\text{K h}\end{aligned}$$

értékekkel vesszük figyelembe [1], [6].

— elhanyagoljuk a töltet sűrűség-növekedéséből eredő α_k hőátadási tényező növekedését.

A felmelegedést $1,2 \times 10^{-3}$ s időtartam alatt vizsgáljuk, a láng hőmérsékletét számos mérés eredménye alapján 2500 K-ra választjuk [7], [10].

A számítást többszöri közelítéssel, a közepes hőmérsékleti értékkel és a hozzájuk tartozó közepes fajhő értékkel végeztük.

A számítás menete a következő volt: $0,1 \times 10^{-3}$ s rész idő-intervallumot volt célszerű kijelölni. A konvekciós és a sugárzásos hőfelvétel számítása párhuzamosan történt. A töltet hőmérsékletének növekedésével figyelembe vettük α_k növekedését is. A csepp kiinduló 150 C-os hőmérsékletének ismeretében meghatároztunk egy konvekciós és sugárzási hőmennyiséget, majd egy becsült fajhő értékkel a csepp felmelegedését közelítőleg számítottuk.

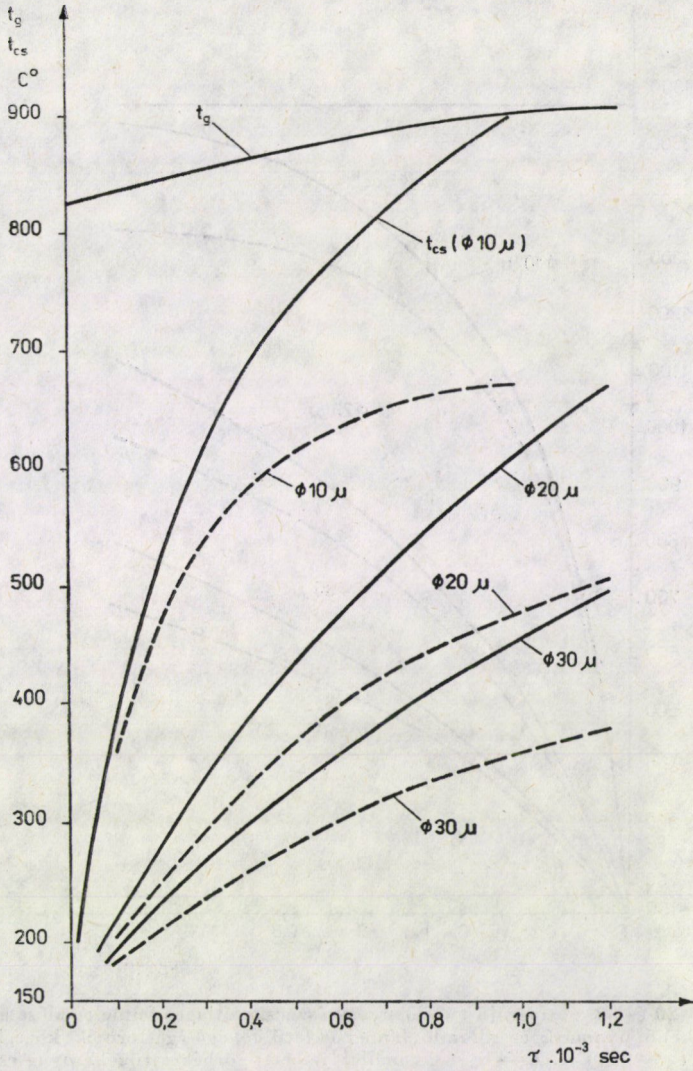
A számítást iterációs módszerrel javítottuk a megkívánt pontosság eléréséig.

Kettő, maximum három ilyen közelítéssel teljesen elegendő pontosságot értünk el.

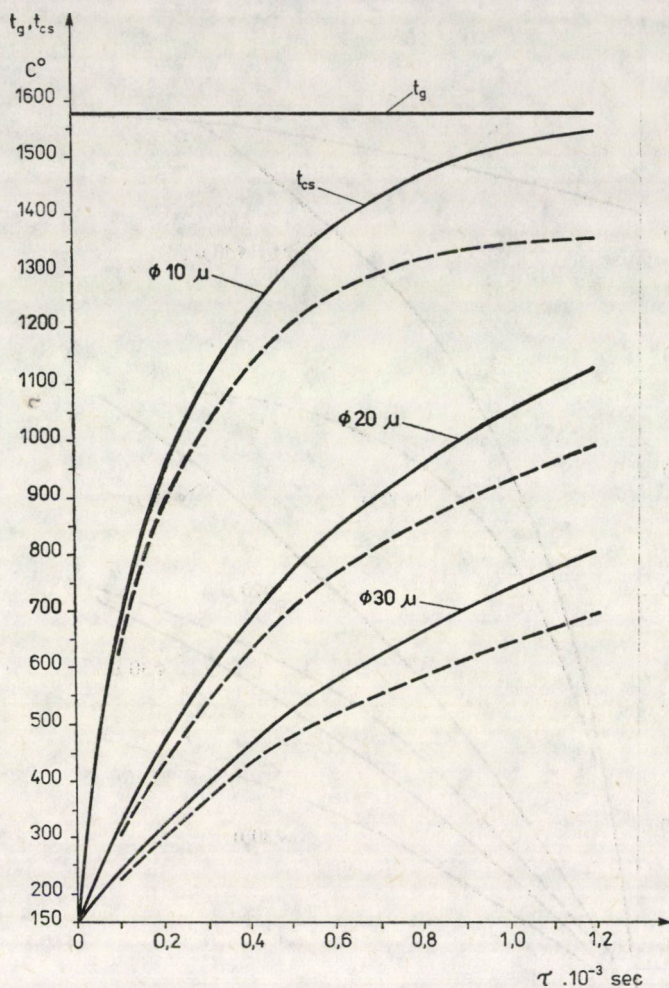
A középhőmérséklet ismeretében már adódott az intervallum végére vonatkozó tüzelőanyagcsepp számított hőmérséklete, amely egyúttal megadta a következő intervallum kezdetére vonatkozó tüzelőanyagcsepp közelítő hőmérsékletét.

A közelítő számítás eredményei az 5. és 6. ábrán láthatóak. A 3. táblázatban feltüntettük az 5. ábra felmelegedési törvényszerűségeihez figyelembe vett paraméterek felhasználásával közelítő számítás eredményeképpen nyert tüzelőanyag csepp elméleti párolgási időket [1].

| Csepp méret | 10 μ | 20 μ | 30 μ |
|---------------|----------------------|------------------------|----------------------|
| Párolgási idő | $1 \cdot 10^{-3}$ s. | $3,3 \cdot 10^{-3}$ s. | $8 \cdot 10^{-3}$ s. |



5. ábra. A 10-, a 20- és 30 μ átmérőjű tüzelőanyag-részecskék átlagos felmelegedésének változása az idő függvényében, növekvő nyomású és hőmérsékletű levegő-égéstermék közegben. A láng hőmérséklet $T_l = 2500$ K. A --- vonallal jelzett görbék a tüzelőanyag-cseppek csak a konvekciós részfelmelegedését ábrázolják



6. ábra. A 10–20 és 30 μ átmérőjű tüzelőanyag-részecske átlagos felmelegedése az idő függvényében, csökkenő nyomású és állandó hőmérsékletű levegő-égéstermék közegben. A láng-hőmérséklet: $T_l = 2500$ K. A — — — vonallal jelzett görbék a tüzelőanyag-cseppeknek csak a konvekciós részfelmelegedését ábrázolják

4. A vizsgálatok alapján tett megállapítások

— A 20 μ és ennél nagyobb átmérőjű tüzelőanyag-részecskéknek az adott idő alatti felmelegedése lényegesen kisebb, mint a 10 μ átmérőjű részecskék felmelegedése azért, mert a 10 μ átmérőjű cseppeknek kedvezőbb a felület-tömeg arányuk, valamint az α_k hőátadási tényező értéke — a kisebb csepp-átmérő miatt — lényegesen nagyobb [1].

A tökéletesebb keverékképzés érdekében célszerű volna az, hogy a befecskendezés első fázisában kis méretű, gyorsan párolgó cseppeket állítsunk elő, ezzel a gyúlési késedelem csökken.

A tüzelőanyag öngyulladás utáni fázisokban, a töltet nyomásának rohamos növekedése következtében egyre nagyobb méretű tüzelőanyagcseppek előállítása a kívánatos. Ezek nagyobb behatoló képessége garancia lehet arra, hogy a tüzelőanyag-részecskék eljussanak az égéstérnek a fűvókától távolabbi résztérfogataiba is.

— A világító láng megjelenésének pillanatától a részecskék hőfelvétele számottevően megnő, a világító láng hőszugárzásának hatására.

— A $10\ \mu$ -nál nagyobb átmérőjű részecskék az égéstérbe való bejutásuk után feltehetőleg osztódnak.

Az osztódás főbb okai a következők:

— a nagysebességgel befecskendezett részecske palástja mentén kialakuló változó nyomások hatására a részecske deformálódik. A közel gömb alak nem tud tartósan fennmaradni,

— a részecske felmelegedése igen nagy sebességgel történik,

— a Diesel-olaj sokféle kisebb és nagyobb forráspontú komponensekből áll.

A nagy sebességű hőfelvétel következtében a kisebb forráspontú alkotók gőzbuborékai a cseppecskéből nagy sebességgel, robbanásszerűen igyekeznek távozni. Ezek felszaggatják a cseppecske felszínét és ezzel elősegítik az osztódást, így a cseppecske képes felrobbanni és kedvező keverékképzés esetén a „lángtengerben” tökéletesen elégni.

A tüzelőanyag-részecskének az átlagos felmelegedését vizsgálva (5. ábra) megállapítható, hogy a világító láng megjelenésének pillanatától a hőszugárzás útján felvett hőmennyiség a

$D = 10\ \mu$ átmérőjű részecskénél az összes átlagos felmelegedés 30,5%-át,

$D = 20\ \mu$ átmérőjű részecskénél az összes átlagos felmelegedés 31,2%-át,

$D = 30\ \mu$ átmérőjű részecskénél az összes átlagos felmelegedés 33,8%-át

adja.

Abban az esetben, ha a hengertöltet hőmérséklete elérte a legnagyobb értékét, a tüzelőanyag-részecske átlagos felmelegedéséből már kisebb hányad jut a hőszugárzásból adódó felmelegedésre (6. ábra).

Ebben az esetben:

$D = 10\ \mu$ átmérőjű részecskénél az összes átlagos felmelegedésnek 13,5%-át,

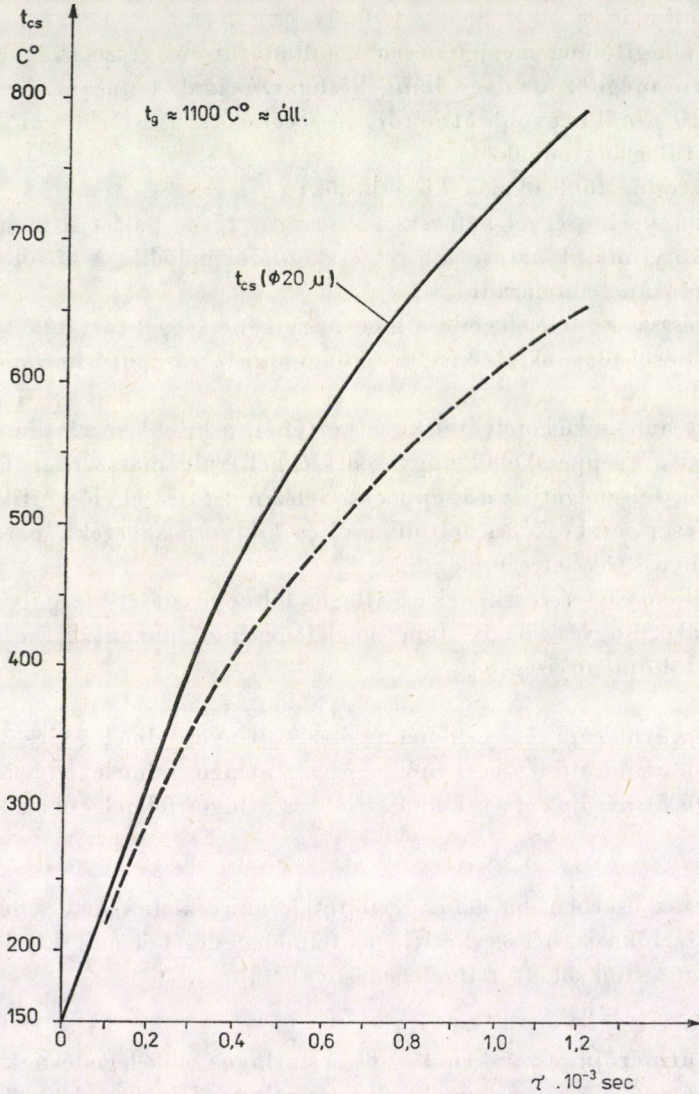
$D = 10\ \mu$ átmérőjű részecskénél az összes átlagos felmelegedésnek 14,2%-át,

$D = 30\ \mu$ átmérőjű részecskénél az összes átlagos felmelegedésnek 16,7%-át

adja a hőszugárzásból adódó felmelegedés.

A következőkben vizsgáljuk meg egy 20μ átmérőjű tüzelőanyag-részecske átlagos felmelegedését a világító láng kialvásának pillanatai előtt, feltételezve azt, hogy ebben a fázisban még létezik tüzelőanyag, csepp alakban.

A közelítő számításokat a 3. pontban körvonalazott feltételekkel végeztük. A gáz hőmérsékletét, annak kismértékű csökkenésére való tekintettel, állandó értékűre vettük fel. Továbbá



7. ábra. A 20μ átmérőjű tüzelőanyag-részecske átlagos felmelegedése az idő függvényében, csökkenő nyomású és közel állandó hőmérsékletű levegő-égéstermék közegben. A láng hőmérséklet: $T_l = 2500 \text{ K}$. A — — — vonallal jelzett görbe a tüzelőanyag-cseppnek csak a konvekciós részfelmelegedését ábrázolja

a [7] és [1] alapján: $T_l = 2500 \text{ K}$.

$p_g = \text{csökken,}$

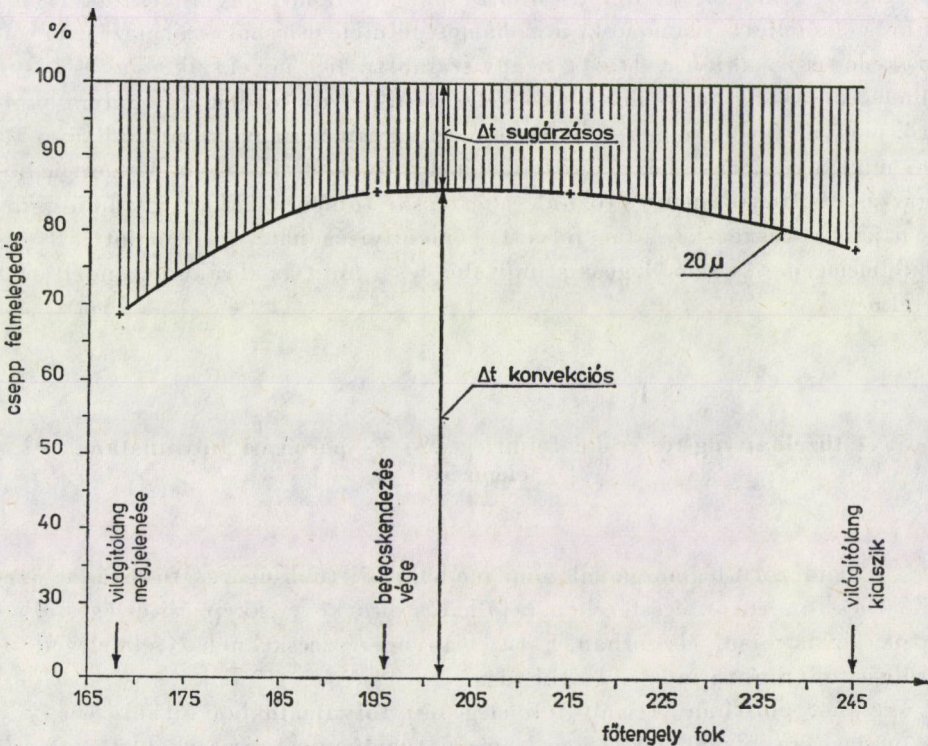
míg az α_k értékére a következő adat vehető számításba [1]:

$$\alpha_{20} = 28,2 \cdot 10^3 \text{ kJ/m}^2 \text{ Kh.}$$

A közelítő számítás eredményeit a 7. ábrán rajzoltuk fel. Ebből az ábrából kiolvasható még, hogy a világító lánggal történő égés utolsó pillanataiban $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ alatt a részecske sugárzásos úton történő átlagos részfelmelegedése 21,7%-át képezi a részecske teljes átlagos felmelegedésének.

A számítások részeredményeit célszerű összevonni és egy ábrán szemléltetni.

Az 5., 6. és 7. ábrák alapján felépíthető a 8-as ábra. Ezen az ábrán egy 20μ átmérőjű tüzelőanyag-részecske konvekciós és sugárzásos úton történő átlagos felmelegedésének közelítő %-os megoszlása látható, a világító láng megjelenésének pillanatától a láng kialvásának pillanatáig terjedő időszak alatt. A 2.5.2. pontban jelzett motorhoz tartozó, a láng kialvásának főtenge



8. ábra. Egy 20μ átmérőjű tüzelőanyag-részecske konvekciós és sugárzásos úton történő átlagos részfelmelegedésének %-os megoszlása a keverékképzés és égés II., III. és IV. fázisában. A felmelegedés ideje: $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ s}$

fokban jellemzett értéke becslésen alapul [8]. A 8. ábrából kiolvasható, hogy a Diesel-motorokban lejátszódó keverékképzési és égési folyamatokban a világítólag hőszugárzása a teljes égés fázisában lényeges szerepet tölt be. A hőszugárzás jelentősége különösen számottevő a világítólag megjelenésének pillanatától a maximális hőmérséklet eléréséig terjedő fázisban és az égés befejező fázisában, amikor az égési légviszony a minimális értékhez tart.

Megjegyzés:

A világítólag gyújtó- és hőszugárzó hatása kedvezően érvényesül a gázturbinák égőtérceiben és kazánok tüzelőtérceiben kialakuló keverékképzési és égési folyamatoknál is. A gyújtó és hőszugárzó hatás a tüzelőanyag-részecskét az égőtérbe történő belépésétől az elézésig terjedő idő alatt folyamatosan éri.

A közelítő számításakor több elhanyagolást tettünk. Ezek közül az egyik elhanyagolás az, hogy a részecske átlaghőmérsékletének növekedése ellenére a részecske tömegét és az átmérőjét is állandó értékűnek vettük. Ha a részecske tömegét a párolgás miatt csökkenő tendenciával vesszük figyelembe és emellett számolunk a rohamos felmelegedésből származó átmérő-növekedéssel is, akkor a $\Delta t_s / \Delta t_\delta$ arány számottevően növekszik, és a részecske felmelegedése még nagyobb sebességgel történik. Ez a tendencia azzal indokolható, hogy a részecske méretnövekedésével ugyan α_k nagyobb arányban csökken, mint a részecske hőátvevő felületének növekedési aránya, viszont a hőszugárzási viszonyok nem változnak, a részecske tömege csökken, így a hőszugárzás útján a részecske által felvett hőmennyiség hatására előállott átlagos részfelmelegedés viszonylagosan nagyobb lesz, mint az ábrákon szemléltetett esetekben.

5. A tüzelőanyag-részecske felmelegedési és párolgási folyamatának elemzése

A rendezett légmozgással nem rendelkező, többsugaras fúvókával üzemelő Diesel-motorok égésterében a jó hatásfokú keverékképzési és égésfolyamatok kialakulása, elsősorban a tüzelőanyag-részecskéknek a felmelegedési-párolgási folyamata intenzitásától függ.

A 3.4. pontban vizsgált felmelegedési folyamatokból látható, hogy a viszonylagosan kisebb méretű és tömegű tüzelőanyag-részecskék átlagos felmelegedése igen nagy sebességgel történik, különösen a világítólag megjelenésének pillanatától.

A megelőzőekben már szözlottunk a tüzelőanyag-részecskék nagy sebességű elpárolgásáról, az ún. gőzrobbanásról. A következőkben ejtsünk néhány szót a gőzrobbanást kiváltó okokról.

Tekintve, hogy a hőátadás törvényei a tüzelőanyag-részecskén belül is érvényesek, ezért a csepp számított átlaghőmérséklete csak feltételezett érték. A valóságban hőmérséklet-különbség alakul ki a részecske külső és belső rétegei között. A külső réteg hőmérséklete lényegesen nagyobb sebességgel növekszik, mint az átlaghőmérséklet.

A keverékképzés és égés III. és IV. fázisában, amikor a részecske felmelegedése változatlanul nagy sebességgel történik, az elpárolgási sebességet tovább növeli az égéster nyomásának rohamos csökkenése, mivel az egyes párlatok desztillációs hőmérséklete a nyomással együtt rohamosan csökken.

Figyelembe véve az 5. táblázat adatait, látható, hogy a gázolaj könnyebb frakciói a cseppen belül forrásba jöhetnek, ha a csepp hőmérséklete eléri az 500—550 °C értéket. Ennek a számítások szerint meg van a reális valószínűsége. Ezért feltételezhető, hogy lassújárású motorokban a cseppekben bekövetkezik a forrási állapot, túlhevülés esetében pedig a csepp robbanása. Ilyen robbanást vízcseppeken már korábban megfigyeltek.

6. A többsugaras fúvókával üzemelő Diesel-motorokban végbemenő keverékképzési és égési folyamatok egyszerűsített elmélete

A Diesel-motorokban lejátszódó keverékképzési és égési folyamatokra kidolgozott elméletek meglehetősen bonyolultak. E bonyolultság többek között onnan ered, hogy:

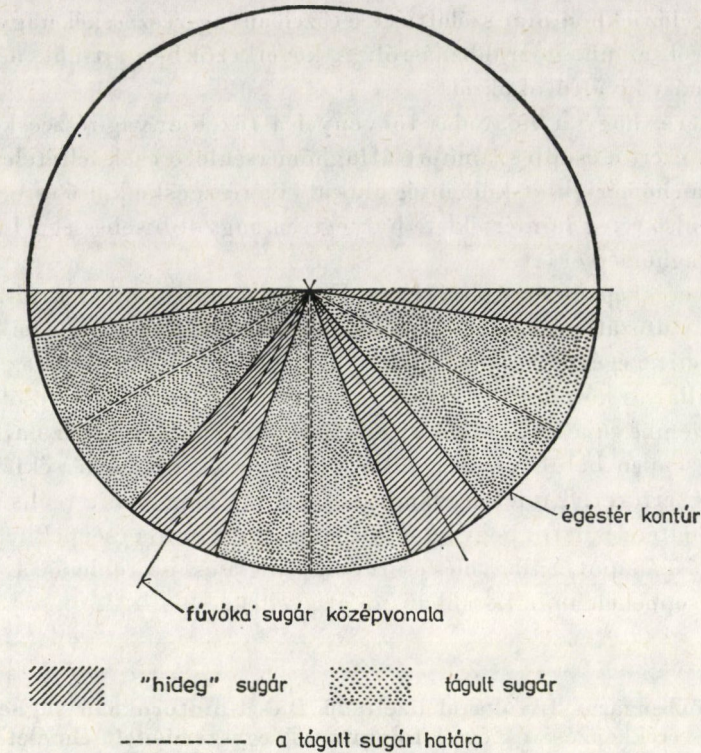
- ma még nem ismeretesek pontosan a folyékony, többalkotós tüzelőanyagoknak a nagy nyomású és nagy hőmérsékletű térben történő viselkedése, a keverékképzés és égés különböző fázisaiban, folyamatosan csökkenő légviszony esetében, különös tekintettel az igen nagy sebességű hőfelvételre,

- nem ismerjük a befecskendezés során a kis méretű tüzelőanyag-részecskékben kialakuló áramlási és hőcsere folyamatokat,

- nem ismeretesek a párolgási-, gyulladási- és az égési folyamatok sorozatának kapcsolódása, egymásrahatása, különös tekintettel arra, hogy az egymást követő, az égésterbe jutó tüzelőanyag-részecskék közül nincs két olyan részecske, amely azonos körülmények között párologna, gyulladna és égne el,

- ma még nincsenek ismereteink arra vonatkozóan, hogy miképpen alakulnak a konvekciós hőátadási viszonyok a tüzelőanyagcsepp felülete mentén akkor, mikor az már lánggal ég.

Jelentkeznek ellentmondó tendenciák. Például: a szerző kísérleti eredményei; nevezetesen a makrokeverék egyenletesebbé tételére és a mikrokeverék finomítására tett erőfeszítések erős füst és kokszképződést eredményeztek,



9. ábra. A befecskendező-fúvóka sugarak tágulása, füstmentes, jó hatásfokú égés esetében

amikor a makrokeverék jóság száma 6-ról fokozatosan 3-ra csökkent. A motor összhatófoka erősen romlott.

A 2.5.1. pontban leírt befecskendezési sugár terjeszkedés egyértelműen bizonyított tény (3. és 9. ábra). Az optimálisnál nagyobb darabszámú furattal rendelkező fúvóka esetében a keverékképzés és égés során az a helyzet állt elő, hogy a sugarak tágulása következtében két szomszédos sugár olyan közel került egymáshoz, hogy az égés során kialakuló lángfrontok egymásra zavarólag hatottak. Ez a jelenség a keveréknek helyi dúsulását okozta és az égés abban a környezetben nem volt tökéletes, a motor füstölt. Ez a jelenség ellentmond a klasszikus égésszemléletnek, amely szerint törekedni kell az egyenletes makrokeverék és a minél finomabb mikrokeverék előállítására.

(A többsugaras keverékképzés- és égésszemléletben meglévő bonyolultságok egy részének feloldására a szerző a következőkben megfogalmazott, egyszerűsített keverékképzési és égési elméletet, az ún. „dinamikus égésszemléletet” ajánlja.)

A befecskendezés során az égéstérbe különböző méretű tüzelőanyag-részecskék jutnak. A különböző méretű részecskék közül vannak olyanok,

amelyeknek *optimálisak a párolgási, a gyulladási és égési körülményeik*. Egy részüknek nem annyira kedvező és vannak olyan részecskék, amelyek kedvezőtlen tulajdonságúak. A kedvezőtlen tulajdonságú részecskék az osztódás során kedvezőbb tulajdonságúakká válnak.

Az optimális tulajdonságú részecskékre jellemző, hogy a párolgási, keverékképzési, a gyulladási és égési tulajdonságaik — adott motort, égésteret, befecskendező rendszert figyelembe véve — optimálisak és a részecskék füstmentesen, jó hatásfokkal égnék el. Minden bizonnyal állítható, hogy az optimális tulajdonságú részecskék mérete más az I. gyulladási késedelem —, más a II. az égésnek a világitóláng megjelenésének pillanatától a körfolyamat maximális nyomásáig terjedő —, más a III. a körfolyamat maximális hőmérsékletéig terjedő —, és más a IV. az égés befejező szakaszában.

A jó hatásfokú, füstmentes égés csakis úgy mehet végbe, hogy a befecskendező fúvóka zömmel optimális méretű tüzelőanyag-részecskéket állít elő, és a keverékképzés és égés során a nagyobb méretű részecskék is optimális, illetve ahhoz közelálló méretűvé formálódnak, osztódnak.

Tekintsük át az egyszerűsített elmélet részleteit a keverékképzés és égés egyes fázisaiban.

I. fázis. A gyulladási késedelem

E fázisra jellemző a tüzelőanyag-részecskék viszonylag lassú felmelegedése és elpárolgásuk kezdő folyamata, amikor is a könnyebb párlatok egy része gőz állapotba kerül és fokozatosan kialakulnak a gyulladásra képes centrumok. Ezek a centrumok a sugárkúp palást külső részében, de ahhoz közeli térfogatokban helyezkednek el ott, ahol a légviszony a legkedvezőbb az öngyulladás számára.

A gyúlási késedelem fázisában a részecske átlagos felmelegedése, illetve a külső rétegének felmelegedése lényegesen kisebb sebességgel történik — a töltet kisebb hőmérséklete miatt —, mint a folyamat későbbi fázisaiban.

A gyúlási késedelem fázisában a részecskékből elpárolgott könnyebb tüzelőanyag-párának egy része leszakad a még nagysebességgel haladó részecskéről és lefékeződik, illetőleg diffúzió révén eloszlik a környezetben. Egy másik része a részecske körül kialakult gőzburkot alkotja. A képződött tüzelőanyag-párákat segítenek elkeverni a szívás üteme során keletkezett, de még meglevő légmozgások.

A tüzelőanyag-részecskék csökkenő mérettel az ún. „hideg” pályán haladnak, a párák pedig zömmel a befecskendezési sugár térfogatában és annak környezetében helyezkednek el és fokozatosan érik el a gyulladási hőmérsékletet.

E fázisban célszerű a lehető legkisebb méretű, kis behatoló képességű részecskék előállítás, a viszonylag kicsiny hőmérséklet-különbség mellett is

a gyors elpárolgás megvalósítására. A nagy behatoló képességű részecskéknak a még csepp alakban levő része eljuthat a hengerpersely falra és ott lecsapódva veszteséget okoz.

II. fázis. Az égés kezdete és a körfolyamat maximális nyomása közötti szakasz

E fázisra jellemző: a képződött tüzelőanyagpárák öngyulladásra és égés kifejlődése, folyamatossága.

Ha a tüzelőanyag-párák elérték az öngyulladási hőmérsékletet, akkor minden bizonnyal a befecskendezési sugárkúp palástjának környezetében meggyulladnak és az égésük detonációszerűen történik. A gyulladás pillanattáig kialakult keverékben főleg a legkisebb desztillációs hőmérséklettel bíró tüzelőanyag-párlatok helyezkednek el és ezeknél következik be az öngyulladás. A detonáció jellegű égés oka a térfogati öngyulladás. Hogy a detonáció mégsem fejlődik tovább, annak az oka — szemben az Ottó motoron helytelen viszonyok folytán bekövetkező detonációval —, hogy a gyúlési késedelem alatt bejuttatott tüzelőanyag-mennyiség csak közel egytizedrésze a teljes tüzelőanyag-mennyiségnek és a bejuttatott mennyiségnek is csak egy része kerül gőz állapotba. A gyulladás után az égés a világító láng megjelenésével folyamatossá válik.

A világító láng megjelenésével a láng gyújtó- és hőszugárzó hatása révén új elem lép be a keverékképzés és égés folyamatába.

A keverékképzésnek és égésnek ebben a szakaszában a töltet nyomása eléri a legnagyobb értékét, a hőmérséklet pedig közeledik a legnagyobb értékéhez. Az újonnan keletkező cseppek felmelegedése és párolgása gyorsan következik be. Az átlagos légviszony folyamatosan csökken.

Ebben a fázisban már kedvező a nagyobb behatoló-képességű tüzelőanyag-részecskék előállítására elsősorban azért, hogy a tüzelőanyag eljusson a hengerperselyfal közelében levő levegőrétegekbe is.

A rendezett légmozgással nem rendelkező Diesel-motorokon a befecskendezés során a tüzelőanyagot a kompresszió-térfogat egy kisebb részébe juttatjuk be, és az égés időbeni lefolyása biztosításához szükséges egy automatikus folyamat, ami a jó minőségű keverékképzést nagysebességgel folyamatosan fenntartja, illetőleg kiterjeszti az égést az égéstérnek keverékkel kitöltött térfogatára.

Az automatikus keverékképző folyamatot a tüzelőanyag-részecskék nagy sebességű felmelegedése által hozza létre, hogy egyrészt a sugár kitérül, másrészt a cseppek egy részének párolgása robbanásszerűen „gőzrobbanás”-sal megy végbe. Ez azt eredményezi, hogy égő tüzelőanyag-pára és égő tüzelőanyag-részecske is kijut a geometriai befecskendezési sugárkúp palástján kívüli térfogatokba.

Természetesen a tüzelőanyag-párak diffúziója a környező térfogatokba változatlanul tart, jóllehet ezek gyulladása a diffúziót bizonyos mértékig akadályozza.

Az égéstérbe érkező újabb és újabb tüzelőanyag-részecskéket ebben a fázisban már valóságos „lángtenger” fogadja, és röviddel a belépésük után már a felszínük lángbaborul. Ez a jelenség tovább javítja a keverékképzés és égés minőségét. A felszíni égés a konvekciós és sugárzó hőhatással együtt ugyanis segíti a részecske osztódását és a „gőzrobbanást”.

Az átlagos égési légviszony csökkenése és a folyamatos gyulladás-égés azt eredményezi, hogy mérséklődik az égés sebessége. Detonációs jellegű égés azért nem tud létrejönni, mert az elkevert tüzelőanyag-párak térfogata korlátozott.

III. fázis. A maximális nyomás helyétől a maximális hőmérséklet végéig terjedő szakasz

E fázisra jellemző, hogy a töltet nyomása rohamosan csökken, a töltet hőmérséklete eléri maximumát és a fázis végéig közel állandó értékű marad. Befejeződik a tüzelőanyag befecskendezése.

Ebben a fázisban alakulnak ki a legkedvezőbb feltételei a keverékképzésnek és égésnek. A robbanásszerű elpárolgás itt a korábbiaknál nagyobb sebességgel történik, amelyet elősegít a töltet nyomásának rohamos csökkenése következtében előálló tüzelőanyag desztillációs hőmérsékletcsökkenés.

A bejuttatott tüzelőanyag egyre nagyobb mennyisége ég el, ezzel az oxigénkoncentráció folyamatosan csökken és ezáltal a keverékképzés feltételei a fázis utolsó részében nehezebbé válnak, de a robbanásszerű elpárolgás segíti a keverékképzés jó hatásfokkal történő lefolyását.

Az I., a II. és a III. fázisban esetleg keletkezett szén-, koks- és korom-részecskék jól hangolt befecskendező fúvóka esetében még ebben a fázisban tökéletesen elégnak.

IV. fázis. A maximális hőmérséklettől a láng kialvásáig terjedő szakasz

E fázisra jellemző:

- a nyomás és a hőmérséklet csökkenése,
- a befecskendezett tüzelőanyag elégése befejeződik, a láng kialszik,
- a légviszony értéke eléri a minimumot.

Az égésnek ebben a szakaszában a hőmérséklet csak mérsékelten csökken, a nyomás rohamos csökkenésének hatására a még csepp alakban levő tüzelőanyag-részecskéknek robbanásszerű elpárolgása tovább folytatódik, és ez a jelenség automatikusan gondoskodik arról, hogy a zömmel optimális tulajdonságú tüzelőanyag-részecskékkel a keverékképzés és égés jól hangolt befecskendező fúvóka esetében koromképződés nélkül, jó hatásfokkal fejeződjék be.

A fentiekben megfogalmazott égésmechanizmust a szerző kísérleti eredményei támasztják alá. Így pl. a különböző lyukszámú ($6 \times 0,35$, $7 \times 0,35$, $8 \times 0,35$) porlasztókkal végzett kísérletek szerint a keverékképzés és a hatásfok romlott, ha a sugarak egymásba értek, s ezzel a szabad keverékképzési felületük csökkent. A jól megválasztott porlasztóknál a lyukátmérő a szükséges behatolási mélységet és cseppméretet biztosítja, míg a sugarak számának a teljes szabad keverékképzési felületet kell biztosítania.

Hosszabb úton a sugár kitágulása nagyobb, kúpszöge növekszik. Ezért a nagyobb átmérőjű égéstérben kisebb lyukszámú ($6 \times 0,35$, illetve $6 \times 0,5$) míg a kisebb átmérőjű hengerben a nagyobb lyukszámú ($8 \times 0,35$) porlasztó adta az optimumot.

IRODALOM

1. SITKEI GY.: Keverékképzés és égés lefolyása Diesel-motorokban. Akadémiai Kiadó, Budapest 1960
2. LÖHNER, K.: Brennkraftmaschine. VDI 1963
3. BRODSZKY D.: Feltöltött Diesel-motorok. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1970
4. MEURER, S.: Der Wendel in der Vorstellung vom Ablauf der Gemischbildung und Verbrennung in Diesel-motor. *MTZ.*, Heft 4, 1966.
5. KALMÁR I.: Munkafolyamatok elektronikus számításával nyert néhány eredmény. *Budapesti Műszaki Egyetem tudományos ülésszaka*, I. kötet, 1967.
6. SITKEI GY.: Hőátadás és hőterhelés belsőégésű motorokban. Akadémiai Kiadó, Budapest 1962
7. KALMÁR I.: Munkafolyamatok szimulációjának kérdései. *Műszaki Tudomány* 47 (1973)
8. AEPLER, E.—BATURIN, CN.: Optische Methode zur Untersuchung der Russkonzentration in Brennraum von Dieselmotoren
9. SITKEI GY.: Flammenstrahlung in Diesel-motoren. *Archiwum Procesow Spalania* 5 (1974), Nr. 2
10. MAXWELL, J. B.: DATA Book on Hydrocarbons, D. Van Nostrand Co. Princeton, N. J. 1950
11. PISCHINGER, A.: Alte und neuere Vorstellungen über die Gemischbildung im Diesel-motor. *Österreichische Ingenieur Zeitschrift* 10, Heft 7
12. LOSONCI P.: Hajó Diesel-motoron végrehajtott áramlástechnikai és égéstechnikai változtatásoknak az effektív hatásfokra gyakorolt hatásai. *Periodica Polytechnica* (1980)

Contribution to the Ignition and Combustion Processes of the Direct Injection Supercharged Diesel Driving Engines. — The current theories relating to the formation of mixture, processes of ignition and combustion taking place in the combustion chamber of the diesel driving engines, working with integral combustion chamber and multiple-hole nozzle, are rather intricate. This paper tries to partially resolve these complexities accentuating the heat radiation effect of the lighting flame playing a significant part in the high-speed warming process of the fuel particles, the high-speed evaporation process to be deemed as significant in the process of the formation of the mixture, the so-called steam explosion which makes the processes of formation of the mixture and the combustion to be self maintained.

Beitrag zu den Zündungs- und Verbrennungsprozessen der kompressionslosen Diesel-Schiffsantriebsmotoren. — Auf die in der ungeteilten Verbrennungskammer der mit Mehrlochdüsen arbeitenden Diesel-Schiffsantriebsmotoren verlaufenden Gemischbildungs-, Zündungs- und Verbrennungsprozesse bezügliche derzeitige Theorien sind ziemlich verwickelt. Diese Abhandlung versucht diese Verwickelungen partiell aufzulösen und betont den Wärmestrahlungseffekt des im raschen Erwärmungsprozess der Brennstoffteilchen eine wichtige Rolle spielenden Wärmestrahlungsprozesses der Leuchtflamme den im Gemischbildungsprozess, als bedeutend erachtbare raschen Verdampfungsprozess, die sog. Dampfexplosion, die die Gemischbildungs- und Verbrennungsprozesse selbstwirkend macht.

LEFOLYÁSI MODELLEK VALÓSZÍNŰSÉG-ELMÉLETI ALAKJAI

KONTUR ISTVÁN*

[Beérkezett: 1982. szeptember 13-án]

A dolgozat a Nash-féle kaszkádmódelnek megfelelő valószínűségi modelleket elemzi. Először a diszkrét tározók és diszkrét idők esetét, majd a diszkrét tározók és folytonos idő esetét tárgyalja. Részletesen foglalkozik a tározó sorozat modellek alkalmazási feltételeivel, a Poisson folyamat és tározó sorozatmodell kapcsolatával. Az általános lineáris kaszkádmódellek további kutatást igényelnek.

Bevezetés

A cím megfogalmazása is kételyeket vethet föl, hogy valóban csak *alaki összefüggésről* van-e szó, vagy inkább a lefolyási modellek valószínűségi *alapjairól* kellene beszélni. Ennek a kérdésnek a megválaszolása messzire vezetne és a hidrológia folyamatainak teljes, a valószínűségelmélet alapjain álló újraértékelését tenné szükségessé. Ebbe a széles és szerteágazó témába belebonyolódni nem akarván, választottuk a kevésbé teljességre törekvő szerényebb alakjai megfogalmazást. Természetesen a formai hasonlóságok alapvető tartalmi különbözőséget takarnak, amit mindenképpen szeretnénk kihangsúlyozni. (Megjegyezzük, hogy a hidrológiai folyamatok modellezésének valószínűségelméleti megalapozására az 1973. évi Bogdánfy-pályázatra benyújtott tanulmányunkban tettünk kísérletet [4].)

1. Diszkrét tározók, diszkrét idő

A hidrológiai gyakorlatban jól ismert a Nash—Kalinyin-féle tározó sorozat modell, más elnevezéssel homogén lineáris kaszkád modell [8, 13]. A linearitás azt jelenti, hogy a tározóból történő kifolyás a tározott vízmennyiséggel arányos:

$$y_j = q \cdot S_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

ahol y_j — a j -dik tározóból kifolyó vízmélység Δt időegység alatt [m^3]
 S_j — a j -dik tározóban tározott vízmennyiség [m^3]
 q — a lefolyási tényező, ami kifejezi, hogy egy időegység alatt a tározott vízmennyiségnek hányad része kerül lefolyásra.
 n — a sorba kapcsolt tározók száma.

A tározó sorozat homogenitása azt jelenti, hogy mindegyik képzetes tározó hidraulikai viselkedése azonos, tehát q változatlan.

* BME, Vízgazdálkodási és Vízépítési Intézet.

Ebben a pontban diszkrét időpontokban figyeljük meg és írjuk le a rendszert, így a tározott vízmennyiségek és a tározóból túlfolyó vízmennyiségeket is t_i időpontokban $i = 0, 1, 2, \dots, N$ határozzuk meg, ahol

$$t_i - t_{i-1} = \Delta t = 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

feltétellel élünk, amit az általánosítás megszorítása nélkül tehetünk. A továbbiakban tehát $i = 0, 1, 2, \dots$ időpontokról fogunk egyszerűen beszélni.

A j -dik tározóra felírt folytonossági egyenlet:

$$S_{ji} = S_{j,i-1} + y_{j-1,i-1} - y_{j,i-1} = S_{j,i-1} + q S_{j-1,i-1} - q S_{j,i-1}. \quad (1.2)$$

A tározott vízmennyiségeket az i -dik időpontban s_i -vel, az $(i-1)$ -dik időpontban s_{i-1} -vel jelölve és felhasználva a folytonossági egyenletet, a tározók állapota az alábbi formában írható fel:

$$s_i = A \cdot s_{i-1}, \quad (1.3)$$

ahol

$$s_i = \begin{bmatrix} S_{1,i} \\ S_{2,i} \\ \vdots \\ S_{n,i} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1-q & & & 0 \\ q & 1-q & & \\ & q & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & q & 1-q \end{bmatrix}.$$

Az A mátrix az állapotátmeneti mátrix, ami felírható egy egységmátrix és egy alsó nilpotens mátrix összegeként:

$$A = (1-q)E + qN. \quad (1.4)$$

Az s_0 kiindulási állapotból az m időpontban levő állapotvektort az állapotátmeneti mátrix hatványozásával kapjuk:

$$s_m = A^m s_0. \quad (1.5)$$

Az A mátrix felbontása alapján ez a hatvány:

$$\begin{aligned} A^m &= [(1-q)E + qN]^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (1-q)^{m-i} \cdot q^i N^i = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i} (1-q)^{m-i} q^i N^i, \end{aligned} \quad (1.6)$$

ahol felhasználtuk a nilpotens mátrixok azon tulajdonságát, hogy $N^m = 0$, ha $m \geq n$, ami azt jelenti, hogy csak az első n összeget kell képezni, de ezek is a fődiagonálissal párhuzamos átlók szerint különválnak. Az A^m , $m \geq n$ esetén alsó háromszög mátrix lesz.

A hidrológiai számítás számára, ahol a homogén lineáris kaszkádmodell mint képzetes, elvi modell szerepel az n -dik tározóból kifolyó vízhozam, vízmennyiség idősor érdekes; feltételezve, hogy a 0-dik időpillanatban az első tározóban adott (egységnyi) térfogatú víz volt:

$$\begin{aligned}
 y_{n,m} &= q \cdot S_{n,m-1} = \\
 &= q \binom{m-1}{n-1} (1-q)^{m-1-n+1} \cdot q^{n-1} \cdot S_{1,0}, \text{ ha } m \geq n \\
 y_{n,m} &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{ha } m < n.
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

A fenti kifejezés a homogén lineáris tározó sorozat modell súlyfüggvénye, ha $S_{1,0} = 1$, vagyis ez teljesen leírja a rendszert. Figyeljük meg, hogy diszkrét állapotú esetben az n -dik időpontot megelőzően a kifolyás zérus, természetes is, mivel csak diszkrét időpontokban való vízmennyiség-továbbhaladást tételezünk fel és akkor is csak az egyik tározóból a másikba. Megemlítjük még azt a speciális esetet, amikor $n = 1$, vagyis egyetlen tározónk van, ebben az esetben az $S_{1,0} = 1$ -re adott válaszfüggvény:

$$y_{1,m} = (1-q)^{m-1}. \tag{1.8}$$

A következőkben bemutatjuk, hogy (1.7) összefüggés a *negatív binomiális eloszlás* és a (1.8) összefüggés pedig a *geometriai eloszlás*. Azért, hogy ne csupán a formai analógia alapján lássuk igazolva állításunkat, az alábbiakban a valószínűségi alapokból indulunk ki [9].

Tekintsünk egy kísérletet, amelynek két kimenetele van: a és b ; ezek valószínűségeit jelöljük q és $p = 1 - q$ számok. A kísérletet egymástól függetlenül végtelen sokszor elvégezve (legalábbis gondolatban) tekintsük ezt egyetlen kísérletnek. Ennek minden kimenetele az a és b számokból alkotott egy-egy végtelen sorozattal jellemezhető. Jelölje η annak a kísérletnek a sorszámát, amelyben először fordul elő az a lehetőség. Ha a kísérleteket 1-től kezdve számozzuk, akkor η az 1, 2, . . . értékeket veheti fel. Mivel az egyes kísérletek egymástól függetlenek, következik hogy

$$P_m = P(\eta = m) = q \cdot p^{m-1} = q(1-q)^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots \tag{1.9}$$

geometriai eloszlás. Egyetlen kaszkád esetében a kísérlet abból áll, hogy megfigyeljük, hogy egy adott vírzészecske a kaszkádból kifolyt-e (a eset) vagy sem (b eset). A kísérleteket egymástól függetlenül egymást követő időpontokban végezzük, vagyis η értéke felveheti az 1, 2, . . . , m értéket annak megfelelően, hogy a vírzészecske hanyadik időpillanatban jelenik meg (vagyis, hogy bekövetkezik-e az a esemény). Az egyetlen vírzészecske is, és az S_1 számú (tömegű,

mennyiségű) vízrészecske is a linearitás feltételezéséből adódóan ugyanúgy viselkedik, tehát ha azt kérdezzük, hogy mi a valószínűsége annak, hogy Δt időszak alatt egyetlen vízrészecske lép ki a tározóból, akkor az ugyanannyi, mint az S_1 tározott térfogat és a kifolyt víztérfogat aránya:

$$q = \frac{y_1}{S_1}, \quad (1.10)$$

ami megfelel a valószínűségszámítás klasszikus számítási eljárásának: kedvező esetek száma osztva az összes esetek számával.

A (1.10) összefüggés a (1.1) kifejezéssel azonos, de ebben a valószínűségi szemléleti módban q nem a tározott és a Δt időegység alatt kifolyt víztérfogat aránya, hanem valószínűségi érték, és értéke 0 és 1 között változik, ami különben a fizikai megfontolások alapján is teljesen természetes.

Ha több tározót sorba kapcsolunk és ezek mindegyikében a továbbáramlás törvényszerűségét geometriai eloszlás írja le, akkor az n -edik tározóból kilépő vízrészecskék időbeli eloszlását *negatív binomális eloszlás* fogja leírni. Vagyis legyen megint a az az esemény, ha a jelzett vízrészecske megjelenik a kifolyási szelvényben és b , ha nem. Egy tározó esetén láttuk q a esemény bekövetkezésének valószínűsége és $1 - q$ b eseményé egy kísérlet alkalmával. A jelzett vízrészecske megjelenéséig eltelt időszakok száma az első tározó esetében η_1 , a másodikban η_2, \dots stb., így az n -edik tározó után:

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n,$$

vagyis az n darab valószínűségi változó összegeként kapjuk meg azt, hogy hányadik kísérletre találjuk a kifolyási szelvényben a vizsgált vízrészecskét. A ξ valószínűségi változó az $n, n + 1, n + 2$ értékeket veheti fel. Az $\xi = n + k$ esemény úgy jöhet létre, hogy a kísérletsorozatot reprezentáló a és b (megjelent a vízrészecske, vagy nem) betűkből álló sorozat $n + k$ -adik eleme, vagyis az utolsó elem a , az első $n + k - 1$ elem között pedig $n - 1$ darab a és k darab b szám szerepel:

$$\underbrace{bb \dots ba}_{\eta_1} \underbrace{bb \dots ba}_{\eta_2} \dots \underbrace{bb \dots ba}_{\eta_n}.$$

Minden ilyen sorozat valószínűsége $q^k p^n$. Az ilyen sorozatok száma pedig annyi, mint ahány különböző módon az utolsó a betű előtti betűket permutáljuk. Ez a szám

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}.$$

Így

$$P(\xi = n + k) = \binom{n+k-1}{k} p^k q^n, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Mivel mi úgy számoltunk, hogy $m = n + k$, könnyen belátható, hogy (1.7) és (1.11) összefüggés teljesen azonos. Ez az azonosság az előbbieken vázolt vízrészecske bolyongási modellje alapján nem csak formai, hanem szükségszerű is.

Ezek szerint megállapíthatjuk, hogy a diszkrét állapotú, homogén lineáris kaszkád modell súlyfüggvénye, vagyis az egységimpulzusra adott válasza negatív binomiális eloszlás n és q paraméterekkel. A valószínűségi változó a diszkrét időpontokban felvett idő: $m = 0, 1, 2, \dots$. Az egységugrás-függvény idő tengelyre vett első és második centrális nyomatéka megegyezik a valószínűségi változó első és második centrális momentumával:

$$M(\xi) = \frac{n}{q} ; \quad D^2(\xi) = \frac{np}{q^2} , \quad (1.12)$$

ami a gyakorlati számítások esetében az n és q meghatározásában döntő jelentőségű.

2. Diszkrét tározók, folytonos idő

A következőkben is a Nash-féle klasszikus tározó modell esetét fogjuk megvizsgálni. Ez egy homogén lineáris rendszer, ha az idő folytonos, az 1. pontban a diszkrét rendszerre felírt hidraulikai egyenlet (1.1) és folytonossági egyenlet (1.2) bizonyos fokig módosul:

$$y_j(t) = K \cdot S_j(t) , \quad (2.1)$$

ahol $y_j(t)$ — a j -dik tározóból kifolyó vízhozam idősora [m^3/s]
 $S_j(t)$ — a j -dik tározóban tározott vízmennyiség idősora [m^3]
 K — az ún. tározási tényező [$1/s$]

Homogén rendszer esetén minden tározó tározási tényezője azonos. A folytonossági egyenlet úgy írható fel, hogy a j -edik tározó tározás-megváltozása egyenlő a befolyó és kifolyó vízhozamok különbségével:

$$\dot{S}_j = \frac{d S_j(t)}{dt} = y_{j-1}(t) - y_j(t) + x_j(t) = K S_{j-1}(t) - K S_j(t) + x_j(t) . \quad (2.2)$$

Itt $x_j(t)$ — a j -edik tározóba érkező külső hozzáfolyás. A $j = 1, 2, \dots, n$ tározóra felírt n szám folytonossági egyenlet egy állandó együtthatómátrixú differenciálegyenlet-rendszert alkot, aminek megoldása egyszerű [10]. A differenciálegyenlet-rendszer alakja:

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1(t) &= -KS_1(t) && + x_1(t) \\
 \dot{S}_2(t) &= KS_1(t) - KS_2(t) && + x_2(t) \\
 &\vdots && \\
 \dot{S}_n(t) &= && KS_{n-1}(t) - KS_n(t) + x_n(t).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tömörebben

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{s}(t) + \mathbf{x}(t),$$

ahol

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{S}_1(t) \\ S_2(t) \\ \vdots \\ \dot{S}_n(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -K & & 0 \\ K & -K & \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & K & -K \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

A (2.3) differenciálegyenlet-rendszer megoldása az állandó együttható mátrixú differenciálegyenlet-rendszer megoldásaként adódik. A \mathbf{B} együttható mátrix elemei állandók, tehát a felcserélhetőségi reláció triviálisan teljesül és a rezolvens mátrix

$$e^{\mathbf{B}(t-t_0)}$$

alakú.

A tározósorozat modell megoldására tehát az alábbi adódik:

$$\mathbf{S}(t; t_0; \mathbf{S}_0) = e^{\mathbf{B}(t-t_0)} \cdot \mathbf{S}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{B}(t-\tau)} \mathbf{x}(\tau) d\tau, \tag{2.4}$$

ahol \mathbf{S}_0 , a tározók t_0 időpontbeli kezdeti állapotát írja le. Az itt szereplő exponenciális mátrixfüggvények kanonikus felbontását aszerint kell elvégezni, hogy a \mathbf{B} mátrix minimálegyenletének gyökei egyszeresek-e, vagy sem. Ha a \mathbf{B} mátrix minimálegyenletének csupa egyszeres gyöke van, akkor a Lagrange-féle mátrixpolinomok alkalmazásával érünk célt. Ha a \mathbf{B} mátrix minimálegyenletének többszörös gyökei is vannak, akkor az Hermite-féle mátrixpolinomokat alkalmazzuk. Esetünkben az utóbbival állunk szembe, így ezt részletezzük. Az Hermite-féle mátrixpolinomok együtthatói az itt szereplő függvény deriváltjainak a λ_k helyen felvett értékei. Hangsúlyozni kell, hogy a függvény λ szerinti deriváltjait kell képezni. A λ_k saját értékek a \mathbf{B} mátrix γ_k multiplicitású gyökei.

Mivel a differenciálegyenlet-rendszer (2.4) megoldásában

$$e^{\mathbf{B}(t-t_0)} \quad \text{és} \quad e^{\mathbf{B}(t-\tau)}$$

alakú függvények szerepelnek, ezért most az

$$e^{\lambda(t-t_0)} \quad \text{és} \quad e^{\lambda(t-\tau)}$$

függvényeket kell λ szerint deriválni. (A mátrixfüggvények előállítására szempontjából a differenciálegyenlet független változója — vagyis t — csupán paraméter.) Tehát ebben az általános esetben a megoldásban az $e^{\lambda_k(t-t_0)}$ alakú függvények mellett

$$(t-t_0) e^{\lambda_k(t-t_0)}; (t-t_0)^2 e^{\lambda_k(t-t_0)} \dots \text{ stb.}$$

alakú függvények is fellépnek. A (2.4) megoldás alakja tehát a következő:

$$\begin{aligned}
 S(t; t_0, S_0) &= \sum_{k=1}^s e^{\lambda_k(t-t_0)} \sum_{\nu=0}^{\gamma_k-1} (t-t_0)^\nu H_{k\nu}(\mathbf{B}) \cdot S_0 + \\
 &+ \sum_{k=1}^s \int_{t_0}^t e^{\lambda_k(t-\tau)} \sum_{\nu=0}^{\gamma_k-1} (t-\tau)^\nu H_{k\nu}(\mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Számítsuk ki \mathbf{B} mátrix λ_k sajátértékeit és határozzuk meg a gyökök γ_k multiplicitását, majd előállítjuk a $H_{k\nu}$ polinomokat.

A \mathbf{B} mátrix karakterisztikus polinomja:

$$D(\lambda) \equiv |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\lambda \mathbf{E} - K(\mathbf{N} - \mathbf{E})| = |(\lambda + K) \mathbf{E} - K \cdot \mathbf{N}| = 0$$

A karakterisztikus egyenlet megoldása: $\lambda_k = -K$

$k = 1, 2, \dots, n$, vagyis $-K$ a \mathbf{B} mátrix egyetlen és éppen ezért n multiplicitású gyöke:

$$\gamma_k = n.$$

A $H_{k0}(\mathbf{B})$ Hermite-féle mátrixpolinomok α_k rangú projektorok, vagyis érvényes rájuk az alábbi összefüggés:

$$H_{k0}(\mathbf{B}) \cdot H_{l0}(\mathbf{B}) = \delta_{kl} H_{k0}(\mathbf{B}),$$

továbbá igaz az, hogy a $H_{k\nu}(\mathbf{B})$ Hermite-féle mátrixpolinomok kifejezhetők a $H_{k0}(\mathbf{B})$ mátrixpolinomok segítségével az alábbi formában:

$$H_{k\nu}(\mathbf{B}) = \frac{1}{\nu!} (\mathbf{B} - \lambda_k \mathbf{E})^\nu H_{k0}(\mathbf{B}),$$

ami esetünkben:

$$H_{k\nu}(\mathbf{B}) = \frac{1}{\nu!} (K(\mathbf{N} - \mathbf{E}) + K\mathbf{E})^\nu H_{k0}(\mathbf{B}) = \frac{1}{\nu!} K^\nu \mathbf{N}^\nu,$$

ahol $H_{k\nu}(\mathbf{B})$ -re a legegyszerűbb projektor mátrixot, az egységmátrixot vettük fel.

Ezek után semmi akadály, hogy a folytonos homogén lineáris kaskád állapotváltását leíró egyenlet végső általános alakját megfogalmazzuk:

$$\begin{aligned}
 S(t; t_0, S_0) &= e^{-K(t-t_0)} \sum_{\nu=0}^{n-1} (t-t_0)^\nu \frac{1}{\nu!} K^\nu \mathbf{N}^\nu S_0 + \\
 &+ \int_{t_0}^t e^{-K(t-\tau)} \sum_{\nu=0}^{n-1} (t-\tau)^\nu \frac{1}{\nu!} K^\nu \mathbf{N}^\nu \mathbf{x}(\tau) d\tau.
 \end{aligned}
 \tag{2.6a}$$

A fentiekben levezetett végeredmény általános formában tartalmazza a Nash-féle végeredményt, és elkerültük azt a fáradságos utat, amit a differenciálegyenletek tározóról tározóra való egyenkénti megoldása jelentene [13].

A (2.6) összefüggés speciális esetét kapjuk, ha úgynevezett magára hagyott – vagy külső erőhatás nélküli – rendszert vesszük tekintetbe, ebben az esetben $\mathbf{x}(t) \equiv 0$, tehát csak a képlet első tagjával kell foglalkozni. Továbbá az a szerencsés körülmény is fönnyorog, hogy az alsó nilpotens mátrix hatványait kell összegezni, ez pedig mint tudjuk azt fogja jelenteni, hogy a fődiagonálissal párhuzamos diagonálisokban azonos elemek állnak, továbbá a mátrix felső háromszög része zérus, tehát egy kontinuuás alsó háromszög mátrix a végeredmény. Részletebben kiírva:

$$\begin{bmatrix} S_1(t) \\ S_2(t) \\ S_3(t) \\ \vdots \\ S_n(t) \end{bmatrix} = e^{-K(t-t_0)} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ \frac{K(t-t_0)}{1} & 1 & & & 0 \\ \frac{K^2(t-t_0)^2}{2!} & \frac{K(t-t_0)}{1} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{K^{n-1}(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{K(t-t_0)}{1} & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1(t_0) \\ S_2(t_0) \\ S_3(t_0) \\ \vdots \\ S_n(t_0) \end{bmatrix}.
 \tag{2.6b}$$

Hasonló formában írható fel az integrál alatti mennyiség is, ha inhomogén differenciálegyenlet-rendszeréről van szó (tehát $x_1(t) \neq 0$). Az integrálást természetesen tagonként kell elvégezni annak megfelelően, hogy az $(t - \tau)^n \cdot e^{-K(t-\tau)} x(\tau)$ milyen alakú függvény. Közvetőleg jegyezzük meg, hogy ha nem csupán $x_1(t)$, hanem $x_2(t)$, $x_3(t)$ stb. is létezik, akkor már nem a klasszikus értelemben vett ikonikus (képi-képzetes) modellről van szó, hanem valamelyest valóságos kaszkádmodellről, ahol az oldalirányú (laterális) hozzáfolyás is megengedett. Az itt bemutatott levezetés és általános végeredmény természetesen mindezeket az eseteket tartalmazza.

Az n tározóból álló kaszkád kifolyási időszora $y_n(t)$. Ezt úgy kapjuk, hogy az n -edik tározóban a t időpillanatban tározott vízmennyiséget $S_n(t)$ -t megszorozzuk a K tározási tényezővel, a (2.1) lineáris hidraulikai összefüggés szerint.

Az n tározóból álló homogén lineáris kaszkád súlyfüggvénye kétféle úton is számítható, vagy $S_1(t_0) = 1$ és $S_2(t_0) = 0$, $S_3(t_0) = 0$, stb., vagy $x_1(t_0) = \delta$ a Dirac delta egységimpulzus függvény és $x_2(t_0) = 0$, $x_3(t_0) = 0$, ... stb. Bármelyik utat is véve, a végeredmény:

$$y_n(t) = K S_n(t) = K \frac{K^{n-1} (t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-K(t-t_0)}. \quad (2.7)$$

A végeredmény természetesen teljesen megegyezik a klasszikus végeredménnyel [8, 13].

Formailag talán annyit érdemes hozzátenni, hogy $t_0 = 0$ és $K = 1/K'$ átírással a szokásos alakhoz jutunk:

$$y_n(t) = \frac{1}{K'} \frac{(t/K')^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\frac{t}{K'}}. \quad (2.8)$$

(Az itt jelzett K' az általunk bevezetett K [1/idő] reciproka, tehát idő dimenziójú.)

A Nash-féle homogén lineáris kaszkád modell egység impulzus függvénye és a folytonos valószínűségi változókra alkalmazott gamma függvény közötti azonosságra már korábban rámutattunk [3, 5].

Ha ismételten visszatérünk a vízrészecskék bolyongási modelljéhez, akkor a folytonos esetnek az felel meg, ha a tározókon való átvonulási időt exponenciálisnak vesszük

$$F(t) = P(\eta < t) = 1 - e^{-\lambda t}, \text{ ha } t > 0, \quad (2.9)$$

Itt η a vízrészecske egy tározón való átvonulásának valószínűségét jelenti. Az átvonulási idők sűrűségfüggvénye:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \text{ ha } t > 0. \quad (2.10)$$

Világosan kell látnunk, hogy a csupán formai oldaltól való analógiát teljes mértékben alátámasztja az, hogy az exponenciális eloszlás levezetésének alapjául

ugyanaz a differenciálegyenlet adódik, mint a lineáris tározók differenciálegyenletére. Amennyiben nem egy tározón halad keresztül a vízrészeecske, hanem több tározón, akkor az átvonulási idők összeadódnak, vagyis:

$$\xi = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n,$$

ahol $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ azaz $1, 2, \dots, n$ tározón való áthaladási idők. Ha mindegyik tározó hasonló, vagyis ugyanaz az exponenciális eloszlás írja le a vízrészecskék átvonulási idejének eloszlását, akkor a sűrűségfüggvények kompozíciója alapján a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye:

$$f_n(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}; \text{ ha } t > 0. \tag{2.11}$$

Azt az eloszlást, amelynek sűrűségfüggvénye a fenti függvény, n -edrendű gammaeloszlásnak nevezzük.

A (2.11) képletet a (2.7) képlettel összehasonlítva, láthatjuk, hogy $\lambda = K$ helyettesítéssel élve a két kifejezés azonos.

Mint ismeretes az exponenciális eloszlás első két momentuma:

$$M(\eta) = \frac{1}{\lambda} \text{ és } D^2(\eta) = \frac{1}{\lambda^2},$$

vagyis egy tározó esetében $K = 1/M(\eta)$ az átlagos átvonulási idő reciprokával egyenlő az ún. tározási tényező, illetve a $K' = 1/K = M(\eta)$ Nash-féle tározási tényező éppen az egy tározón való átvonulási idő átlaga.

Néha hasznos lehet az átvonulási idő és az ún. felezési idő kapcsolata. Ha $t_{1/2}$ az ún. felezési idő, vagyis az az időtartam, amely alatt egy magára hagyott lineáris tározó *fél*ig kiürül, akkor

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = K = \frac{1}{K'},$$

tehát $K = 0.69315/t_{1/2}$ és $K' = t_{1/2}/0,69315$ képletek érvényesek a felezési idővel való számítás esetén.

Az n -ed rendű gammaeloszlásnak, amely a negatív binomiális eloszlás folytonos analogója, az első két momentuma:

$$M(\xi) = \frac{n}{\lambda} \text{ és } D^2(\xi) = \frac{n}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda} M(\xi).$$

Ezek szerint, ha ismerjük valamely átfolyási rendszer átvonulási idejének első két momentumát, akkor abból n és $\lambda = K$ meghatározhatók, feltételezve, hogy

az átfolyás leírására a homogén lineáris kaszkádmodell alkalmazása mellett döntöttünk. Az illeszkedés jóságáról, a modell alkalmazhatóságáról külön vizsgálattal kell meggyőződnünk.

Az n -ed rendű gammaeloszlás alakjára jellemző a szórás és a várható érték aránya:

$$C_v = \frac{D(\xi)}{M(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

A negatív binomiális eloszlás esetében a variációs tényező:

$$C_v = \frac{D(\xi)}{M(\xi)} = \frac{\frac{\sqrt{n \cdot p}}{q}}{\frac{n}{q}} = \sqrt{\frac{p}{n}}.$$

3. Tározó sorozat modellek alkalmazási feltételei

Az előzőek lezárásaként szeretnénk rámutatni arra, hogy folytonos rendszerleírás esetében, vagy ami ezzel azonos, exponenciális átvonulási idejű tározó sorozat feltételezése mellett a rendszer súlyfüggvénye — egységimpulzus válaszfüggvénye — a $t = 0$ időállapotban kezdődik. (A (2.4)–(2.7) képletekben $t = t_0$ kezdő időpontban.) Ezeket úgynevezett rögtönhatású rendszereknek nevezük, ellentétben az ún. késleltetett — vagy késleltetett kezdetű — rendszerekkel, amelyek a hatás pillanatában még nem reagálnak rögtön. Láthattuk, hogy a diszkrét leírású homogén lineáris kaszkádmodell, vagy ami ezzel azonos, a negatív binomiális eloszlást követő átvonulási idejű rendszerek esetében a kezdeti késleltetés $n\Delta t = T_0$, ahol n a tározók száma és Δt a választott számítási idő alap. Ha meggondoljuk, hogy az n -edrendű gammaeloszlás a negatív binomiális eloszlás analogonja a $\Delta t \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$ és $p \rightarrow 1$ határátmenettel valóban T_0 is tart a nullához a tározók számának változatlanul hagyása mellett. A határátmenet képzésével intuitív alapon a λ érték $q/\Delta t$ hányados határátmenete, miközben q és Δt is tart a nullához:

$$\frac{q}{\Delta t} \longrightarrow \lambda = K, \quad (3.1)$$

$$\begin{matrix} q \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0 \end{matrix}$$

ami igaz is, ha meggondoljuk, hogy egy tározón való átvonulási idő várható értéke diszkrét eloszlás esetében $\bar{t} = \Delta t/q$ és exponenciális eloszlás esetén pedig $\bar{t} = 1/\lambda$. A rögtönhatású és a késleltetett kezdetű rendszerek közötti megkülönböztetés a hidrológiai gyakorlat számára is fontos, hiszen nem elegendő, ha a

fizikai valóság leírására különböző hipotetikus modelleket konstruálunk és alkalmazzuk azokat több-kevesebb sikerrel, hanem a fizikai valóság hű követéséhez az is hozzátartozik, hogy az alapvető hidrológiai, hidraulikai jelenségeket lehetőség szerint tekintetbe vegyük. Így arra a következtetésre kell jutnunk, hogy egy hosszabb 20—50 km-es folyószakasz modellezése esetében, alkalmazva a homogén lineáris kaszkád modellt, előnyben kellene részesítenünk a késleltetett kezdetű rendszert a rögtönhatású rendszerrel szemben, hiszen bármilyen gyorsnak is tekintjük a nyomáshullám terjedését, ami alapján rögtönhatású rendszerről lehetne beszélni, a tapasztalat is azt mutatja, hogy egy-egy árhullám levonulása során a felső szelvényben jelentkező vízállás-növekedést jól meghatározható késleltetéssel követi az alsó szelvényben levő vízállás-növekedés [11, 12]. Még inkább így van a vízrészecskék tényleges mozgásával kapcsolatban, amelyre teljes bizonyossággal állíthatjuk, hogy csak véges sebességű.

A véges sebesség feltételezésével, pl. felvéve egy v_{\max} értéket, meghatározhatunk egy T_0 minimális átvonulási időt, ebben az esetben is megtarthatjuk azt a feltételt, hogy a T_0 időt követően az átvonulási idők már exponenciálisak, vagyis az átvonulási idő tározónként két részből tevődik össze: az egyik a T_0 minimális átvonulási idő, t pedig az exponenciális eloszlást követő átvonulási idő. Ez elvezet a hidrológiai gyakorlatban oly sűrűn alkalmazott három paraméteres gammaeloszláshoz, ahol az n és λ paraméteren kívül szerepel még a kezdeti érték paraméter is. Esetünkben ez a koordináta eltolási érték:

$$T_0 = L/v_{\max},$$

ahol L — az egy tározóval jellemzett szakasz hossza [m], v_{\max} — a szakaszon való átáramlás — hatás továbbterjedés — maximális sebessége [m/s].

Természetesen ezek után a szakaszon való áthaladási idő várható értéke nem $1/\lambda$, hanem:

$$\bar{t} = T_0 + \frac{1}{\lambda}.$$

Figyelembe véve, hogy n elemű homogén lineáris kaszkád modellel írjuk le a rendszert

$$\bar{t} = n \cdot T_0 + \frac{n}{\lambda} = n \left(T_0 + \frac{1}{\lambda} \right).$$

A szórásnégyzetek természetesen a koordinátaeltolással nem változnak meg. Végeredményben tehát ugyanazt a gammaeloszlás függvény alakot alkalmazhatjuk abban az esetben is, ha késleltetett kezdetű rendszert használunk, ha ismerjük ezt a kezdeti késleltetés mértékét ($n \cdot T_0$), illetve a maximális átvonulási sebességet és szakaszhosszat.

Természetesen a kétféle gammaeloszlás nem lesz azonos, hiszen ha a rendszert \bar{t} átlagos átvonulási idő és $\sigma_t^2 = D^2(\xi)$ második momentum jellemzi, akkor rögtönhatású rendszer esetében:

$$\lambda = \frac{\bar{t}}{\sigma_t^2} \quad \text{és} \quad n = \frac{\bar{t}^2}{\sigma_t^2} .$$

Ezzel szemben a késleltetett kezdetű rendszer esetében:

$$\lambda' = \frac{\bar{t} - n' T_0}{\sigma_t^2} \quad \text{és} \quad n' = \frac{(\bar{t} - n' T_0)^2}{\sigma_t^2} .$$

A két úton számított paraméterek természetesen eltérnek egymástól. (Az utóbbi kifejezésben n' implicit szerepel, ezért vagy iterálva határozhatjuk meg λ' és n' értékét, vagy további átrendezéssel másodrendű egyenletet oldunk meg.)

Az ún. minimális átvonulási idő felvétele a fizikai modellben azt jelenti, hogy ún. lineáris csatornát alkalmazunk, ami az árhullámot csak időben tolja el, de nem késlelteti (lapítja), ez nem más, mint Dooge által javasolt lineáris csatorna—lineáris kaszkádmódel.

A maximális átvonulási idő felvételét *Szigyártó Z.* vizsgálataiból [11] kiindulva, már korábban is alkalmaztuk [3, 5], a vízhozamidősor előállítását tulajdonképpen a valószínűségi gondolatmenetre építettük fel, de mint látjuk, ennek fizikai-ikonikus-modell megfelelője a Dooge-féle kaszkádmódel.

A hidrológiai folyamatok fizikai megjelenítésével kapcsolatban adósak vagyunk még a homogén lineáris kaszkádmódel csapadéklefolyás modellezésben való alkalmazása során felmerülő értékeléssel, pedig a klasszikus Nash-féle kaszkádmódel is ezt a gyakorlati célt volt hivatva elérni. A homogén lineáris kaszkádmódellek függetlenül attól, hogy diszkrét, vagy folytonos állapotúak-e, egyaránt előfordulnak a csapadéklefolyás-modellezésben. A csapadéklefolyás fizikai képének sarkalatos pontja az, hogy a csapadéklefolyás folyamata karakterisztikusan térben megosztott folyamat, aminek koncentrált paraméterekkel való leírása meglehetősen erős közelítést tartalmaz.

Ennek előrebocsátása mellett kell megvizsgálunk az előbb említett rögtönhatású és késleltetett kezdetű rendszerek közötti megkülönböztetést, csapadéklefolyás-módellek esetében. Visszatérve arra a kérdéskörre, ami folyók esetében a nyomáshullám terjedése, és a vízrészecske tényleges mozgási sebesség között van, a kisvízgyűjtőkön—vízgyűjtő területi összegyűlekezés alkalmával még inkább arról kell meggyőződnünk, hogy az árhullám kialakulását, az árhullám kezdetének jelentkezését nem hozhatja létre nyomáshullám, hanem csak a ténylegesen odaérkező vízrészecskék tömege. Így ez azt jelenti, hogy az összegyűlekezési folyamatban — vízgyűjtő területi lefolyás modellezésében — a minimális átvonulási időnek még nagyobb szerepe van, mint folyók árhullám transzformációs feladatainak megoldása során. Az hogy a koncent-

rált paraméterű csapadéklefolyás-kapcsolatokban is jó eredménnyel használhatók a rögtönhatású rendszereket leíró gamma árhullámkép-alakok — annak ellenére, hogy egyáltalán nem beszélhetünk rögtönhatású rendszerről a víz-részecskék összegyülekezési sebességét szem előtt tartva — annak a különös véletlennek köszönhető, hogy a koncentrált csapadéklefolyás-modell egybe-mossa a kifolyási szelvényhez közel fekvő területek és a távolabbi területek hatását. A kifolyási szelvény közvetlen közelében levő területekről történő lefolyás a teljes rendszer szempontjából úgy hat, mint a rögtönhatású rendszer kimenete.

A gamma árhullámkép alkalmazása osztott paraméterű lefolyási modellek esetében meghatározható az 1975. évi közleményünkben, így erről itt több szót nem ejtünk [5].

Meggondolva azt, hogy a homogén lineáris kaszkádmódellet a hidrológia különböző területein alkalmazzuk a parcellányi vízgyűjtő terület csapadéklefolyás-kapcsolatának leírásától a nagy folyók vízállás—vízállás, vagy vízhozam—vízhozam kapcsolatának számításáig, bizonyos mértékben elgondolkoz-tató, hogy ezt a minimális átvonulási időt, vagy minimális ok-okozat időt (hatásidőt) hogyan vesszük fel. Láttuk, hogy folytonos esetben a gamma ár-hullámmódellet $n T_0$ értékkel tolandó el, míg diszkrét leírású rendszerben — alkalmazva a negatív binomiális eloszlást, ez a minimális hatásidő $n \Delta t$. Az utóbbi esetben tehát ez azt jelenti, hogy ha ismerjük a minimális hatásidőt, valamint a számítás alapjául szolgáló Δt időlépcsőt már felvettük (pl. 1 óra, 1 nap stb.), akkor ebből a kaszkádok száma már azonnal adódik: $n = T_0/\Delta t$, és így a negatív binomiális eloszlásnál már csak az első momentumra van szükség q valószínűség becsléséhez.

4. Poisson folyamat és tározó sorozatmodell kapcsolata

A homogén lineáris tározó sorozatmodell folytonos esetének megoldása-ként kapott súlyfüggvény

$$y_n(t) = K \cdot \frac{(K t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-Kt}, \quad \text{ha } t > 0. \quad (4.1)$$

Amint láttuk, ez megegyezik az exponenciális eloszlások konvolúciójaként kapott gammaeloszlással

$$f_n(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad \text{ha } t > 0. \quad (4.2)$$

Ebben az esetben a valószínűségi változó a t , az idő. Az eloszlás két paramétere közül n , az exponenciális eloszlást követő valószínűségi változók számát, a

fizikai modell esetében a kaszkádok számát jelenti. A gammaeloszlás másik paramétere λ , az exponenciális eloszlások várható értékének reciproka, a fizikai modellben ez megfelel K -nak, vagyis a tározási tényezőnek, ami kifejezi a tározott vízmennyiség és az egységnyi idő alatt kifolyó hozamnak az arányát.

Írjuk fel ezek után a *Poisson* eloszlást:

$$P_k(\mu) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.3)$$

Itt k a valószínűségi változó és az eloszlás paramétere, μ , ami egyúttal az eloszlás várható értéke és szórásnégyzete is:

$$M(\xi) = \mu, \quad D^2(\xi) = \mu; \quad c_v = \sqrt{\mu}.$$

A (4.1) vagy a (4.2) összevetése (4.3)-val csak felületes ránéző számára sugallhatja azt, hogy ugyanarról van szó. Ilyen értelemben nem pontos az a következtetés, hogy a „Nash-féle kaszkádmodell és a Poisson-függvényekből felépített átfolyás-elméleti modell azonos” [13].

Vágás I. önszabályozó átfolyásos rendszer-láncolatnak valószínűségi jellemzése című cikkében helyesen ismeri fel, hogy a vízrészecskék véletlen jellegű, vonalmenti bolyongásával modellezhető a tározó sorozatban történő vízmozgás: „Tekintsük a bolyongási tengelyvonal pontjainak a láncolatba kapcsolt átfolyásos medencék egységeit, sorszámuknak megfelelően”, továbbá „a részfolyamatok eredője a vízrészecskék összességének az adott időben és az adott sorszámú láncolati elemekben való tartózkodásának valószínűségi elmélete” [15].

Vágás I. a vízrészecske egységnyi elmozdulását u_1 -vel, a helyben maradás valószínűségét $u_2 = 1 - u_1$ -vel jelöli, és a Δt időlépcsőt véve alapul megállapítja, hogy $u_1 = \Delta t/t_d$, ahol t_d az átlagos átvonulási idő. Az előző pontban mi ugyanerre az eredményre jutottunk, a (3.1) képletben:

$$q = u_1, \quad t_d = \bar{t} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{K} = K';$$

$$q = \lambda \cdot \Delta t = \frac{\Delta t}{\bar{t}}. \quad (4.4)$$

Visszatérve a (4.2) és (4.3) képlet kapcsolatára láthatjuk, hogy az átírás a

$$\mu = \lambda t = \frac{t}{\bar{t}} \quad \text{és} \quad k = n - 1 \quad (4.5)$$

azonosságok alapján történhetik, ez tehát azt jelenti, hogy a Poisson-eloszlás paramétere μ , a relatív — a várható értékhez viszonyított idő, és itt ebben az

esetben nem valószínűségi változó, hanem paraméter. A valószínűségi levezetés Vágás I. gondolatmenetéhez hasonlóan fogalmazható meg: mi a valószínűsége annak, hogy az n számú kaszkád közül a vízrészecskét a 0-adik, 1-edik, 2-edik . . . $(n - 1)$ -edik tározóban találjuk. (A Poisson eloszlás számozásához igazodva a tározókat nem 1, 2, . . . stb.-vel, hanem 0, 1, 2 . . . jelöltük.) Tehát annak valószínűsége, hogy a $t = 0$ időpillanatban a 0-adik tározóban található vízrészecske a t időpillanatban a k -edik tározóban van egyenlő P_k -val. És P_k a k -ad rendű, λt paramterű Poisson eloszlás. Ez azt jelenti, hogy a tározókban tározott vízmennyiségeket a *hossz-szelvény mentén Poisson eloszlás írja le*, ha a lefolyási hosszát szakaszokra osztjuk. A szakasz felosztásának sűrűsége, illetve finomsága tetszőleges lehet, hiszen a ΔL szakaszon való átlagos átvonulási időn $\bar{t} = 1/\lambda$ keresztül szabályozni tudjuk a végeredményt.

A Poisson-eloszlás várható értéke és szórása is $\mu = \lambda t = t/\bar{t}$, vagyis t növekedésével a momentumok növekednek, de mivel bennünket csak az n elemű kaszkád érdekel, így elegendő a Poisson-eloszlás tagjait ismernünk 0-tól $(n - 1)$ -ig. A Poisson-eloszlás alakja egyre elnyúltabbá válik, hogyan a t idő növekszik, de ezen valószínűségi értékek közül csak az $(n - 1)$ -től balra levők érdekelnek minket, vagyis a Poisson-eloszlás lassan „kiúszik” a képből, annak megfelelően, hogy az n tározón belül egyre kisebb valószínűséggel található a vízrészecske, ahogyan a kezdeti időponttól távolodunk.

Arra vonatkozóan, hogy a Poisson-eloszlás éppen a tározókban található vízrészecske valószínűségét írja le, jó bizonyíték az is, hogy a determinisztikus levezetésnél kapott (2.6b) végeredmény éppen ugyanezeket a függvényeket adja meg a tározókban tartózkodó vízmennyiségekre. Az $S_1(t_0) = 1$ -et felvéve a végső formula is ugyanaz.

Mint ismeretes, a Poisson-eloszlás egyik származtatási útja az, amikor a *binomiális* eloszlásból kapjuk a végeredményt. Ez esetünkben szintén elképzelhető út, de mielőtt elhamarkodottan teljes értékűnek vennénk az analógiát, valamelyest részletesebben kell megvizsgálnunk a kiindulási alapokat.

Legyen n tározónk egymással sorbakapcsolva és legyen a esemény az, hogy az adott vízrészecskét a tározóban találtuk és b annak valószínűsége, hogy nem. Ezek egymást kizáró alternatív események. Az a esemény valószínűsége legyen p , a b eseménye legyen $q = 1 - p$. Mint ismeretes, ebben az esetben a Bernoulli-problémával állunk szemben, és ha azt kérdezzük, mi a valószínűsége annak, hogy a vízrészecskét a k -edik tározóban találjuk, akkor a klasszikus összefüggés szerint:

$$P_k = P(\xi = k) = \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.6)$$

Az is könnyen belátható, a binomiális tétel figyelembevételével, hogy ha a valószínűségi változó a 0, 1, 2, . . . $n - 1$, érték közül valamelyiket biztosan

felveszi, akkor a (4.6) valószínűségek összege 1-gyel egyenlő:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} = 1. \quad (4.7a)$$

De az általunk választott megfogalmazásban is van egy feltétel, mégpedig az, hogy a ξ valószínűségi változó a $0, 1, 2, \dots, n-1$ közül felveszi valamelyik értéket, vagyis hogy a vízrészecske valamelyik tározóban megtalálható. Ez azonban nem igaz, mert *nem* zárt rendszerről van szó, és így bizonyos valószínűséggel a vízrészecske már a rendszeren kívül is tartózkodhatik, vagyis már átfolyt az n tározón és az $(n-1)$ -edik tározót is elhagyta. Jelöljük annak valószínűségét P_n -nel, hogy a vízrészecske a rendszeren kívül tartózkodik, akkor a teljes valószínűség tétele (4.7) most már így írandó föl, hogy:

$$(1 - P_n) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} + P_n = 1. \quad (4.7b)$$

Itt $1 - P_n$ — annak valószínűsége, hogy a vízrészecske — valahol — a rendszeren belül tartózkodik. Ez a megkötés teljesen ésszerű, hiszen bizonyos P_n valószínűséggel a vízrészecske elhagyja az n kaszkádból álló tározó sorozatot. Sőt, éppen azt is mondhatjuk, hogy az n tározóból álló ikonikus-modell számára éppen ez a P_n valószínűség az érdekes, hiszen ez fogja megadni a kifolyási idősró integrálgörbéjét, vagy más szavakkal élve, a kifolyás összegzett valószínűségét.

Az előzőekben bemutattuk, hogy az egyes tározókban való tartózkodás valószínűségét éppen a $P_k(\mu)$ k -ad rendű μ paraméterű Poisson-eloszlás adja meg. A μ paraméterben λt -t, vagy Kt -t írva, az idő ebben az esetben mint paraméter szerepel. (Talán nem érdektelen visszautalni arra, hogy a 2. pontban az Hermite-féle interpolációs polinomok alkalmazása esetén a feladat megoldása során a t idő szintén csak mint paraméter szerepelt.) Mivel a vízrészecske P_0, P_1, \dots, P_{n-1} valószínűséggel tartózkodhatik a $0, 1, \dots, n-1$ tározókban, ezért annak valószínűsége, hogy a vízrészecske a t időpillanatban a rendszeren belül tartózkodik, a P_0, P_1, \dots, P_{n-1} valószínűségek összege:

$$1 - P_n = P_0 + P_1 + \dots + P_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k(\mu) = 1 - \frac{\Gamma_\mu(n)}{(n-1)!} \quad (4.8)$$

Itt $\Gamma_\mu(n)$ a nem teljes gammafüggvény:

$$\Gamma_\mu(n) = \Gamma_{\lambda t}(n) = \int_0^{\lambda t} (\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t} d(\lambda t).$$

A felső határban t -re áttérve, $d(\lambda t)$ helyett λdt írandó és így P_n -re végeredményben az alábbi összefüggést kapjuk:

$$P_n(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^t \tau^{n-1} e^{-\lambda \tau} d\tau. \quad (4.9)$$

Ez a kifejezés nem más, mint a gamma sűrűségfüggvény (2.11) integrálja a nullától t -ig, tehát éppen annak a valószínűsége, hogy a t időpontig a vízrészecske már kifolyt a rendszerből. Ezek után tehát binomiális eloszlás alapján a vízrészecske egyes tározóban való tartózkodásának valószínűsége a (4.6 a) módosítás útján:

$$P_k(t) = (1 - P_n(t)) \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (4.10a)$$

Most már csupán annak megválaszolása a feladat, hogy q miképpen függ össze az egyes tározókat jellemző $\lambda = K = 1/\bar{t}$ tározási, vagy átvonulási idő jellemzővel és a t időponttal. (Ismét figyelmeztetünk arra, hogy itt a valószínűségi változó a tározó sorszáma, vagy száma, és a t idő csak paraméter.) A (4.4) összefüggés szerint $q = \lambda t/\bar{t}$, de mivel az i -edik időpontban $t = i\Delta t$; q értéke: $q = i \Delta t/\bar{t} = t/\bar{t}$. És mivel q valószínűségi érték, így ez csak 1-nél kisebb lehet, ez azt jelenti, hogy csak $t > \bar{t}$ értékek esetében számolhatunk a (4.10) képlettel.

Annyit kell még a 4.10 összefüggéshez hozzáfűzni, hogy p és q választása miatt $p = q$ és $q = p$ betűcserét kell alkalmaznunk, ha azt akarjuk, hogy a víz 0-adik tározóból folyék az $(n-1)$ -edik felé (különben fordított is lehet, ez csak konvenció kérdése):

$$P_k(t) = (1 - P_n(t)) \binom{n-1}{k} \left(\frac{t}{\bar{t}}\right)^k \left(1 - \frac{t}{\bar{t}}\right)^{n-1-k}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{és} \quad t > \bar{t}. \quad (4.10b)$$

A fenti összefüggés a bionimális eloszlás alkalmazása esetében adja meg a vízrészecske t időpontban a k -adik tározóban való tartózkodásának valószínűségét, ahol $P_n(t)$ a (4.9) képlet szerint az ún. nem teljes gammafüggvény alapján számítható és t az egy tározón való áthaladás átlagos időtartama.

5. Összefoglalás

Midőn a szerző ezt a tanulmányt írta, 1981 júniusában, még nem álltak rendelkezésére Szöllösi-Nagy András cikkei: a folytonos Nash-kaszád adekvált diszkretizálásáról és a kinematikus hullám és a Kalinyin—Miljukov—Nash-modell ekvivalenciájáról, így azok gondolatait nem szőhette bele a lefolyási modellek valószínűségelméleti alakjainak vizsgálatába. Időközben a szerző Szigyártó Zoltántól is sok hasznos észrevételt kapott munkáját illetően. Kétségtelen, hogy a szerző az általa kidolgozott vízhozam-hullámképek meghatáro-

zása valószínűségelméleti alapon című munkájából már korábban is sokat merített. Az itt bemutatásra került, lényegében lineáris kaszkádmodellek esetén az átvonulási idők valószínűségi változók, de míg Szigyártó Zoltán vízhozam-változásokról beszél, addig itt vízrészecskékről van szó, s ez utóbbi természetesen csak képzetesen értendő. A kiindulási megközelítés különbözősége a formailag azonos végeredményeket is különböző megvilágításba helyezi. Ez további vizsgálódások tárgyát fogja képezni.

Ebben a dolgozatban csupán a Nash-féle kaszkád modellnek megfelelő valószínűségi modelleket elemeztük. Kutatásainkat a jövőben ki kívánjuk terjeszteni az általános lineáris kaszkádmodellekre is, amellyel az alulról való befolyásolás is modellezhető.

IRODALOM

1. AMBRUS S.: Lineáris lefolyási modell paraméterbecslése és néhány alkalmazása. *Tudományos Diákköri Dolgozat* (1976), Budapesti Műszaki Egyetem
2. AMBRUS S.—KONTUR I.: Lefolyási modellek stabilitás vizsgálata. Magyar Hidrológiai Társaság, VII. Ifjúsági Napok, Szeged 1979, július
3. KONTUR I.: Sztochasztikus hidrológiai rendszer-modellek. *Hidrológiai Közöny* (1974), 2. sz., 87—90
4. KONTUR I.: A hidrológiai körfolyamat sztochasztikus modellje. *Hidrológiai Közöny* (1975), 2. sz., 77—82
5. KONTUR I.: Hidrológiai rendszervizsgálati modell vízhozamidősor előállítására I., II. *Hidrológiai Közöny* (1975), 12. sz., 551—555 (1976), 1. sz., 17—20
6. KONTUR I.: A lefolyás általános lineáris kaszkádmodellje. *Hidrológiai Közöny* (1977), 9. sz., 404—412
7. KONTUR, I.: Stochastic Model for the Water Cycle. *Periodica Polytechnica* 24 (1980), No. 3—4, 239—252
8. NASH, J. E.: The Form of Instantaneous Unit Hydrograph. *IASH Publ. No. 45* (1957), 114—121
9. PRÉKOPA A.: Valószínűségelmélet műszaki alkalmazásokkal. *Műszaki Könyvkiadó, Budapest* 1962
10. RÓZSA P.: Lineáris algebra és alkalmazásai. *Műszaki Könyvkiadó, Budapest* 1974
11. SZIGYÁRTÓ Z.: Vízhozam-hullámképek meghatározása valószínűségelméleti alapon. *Építés-és Közlekedéstudományi Közlemények* (1965), 3—4. sz., 387—432
12. SZIGYÁRTÓ Z.: A lökeshullám ellapulásának leírása az átvonulási-elmélet segítségével. *Hidrológiai Közöny* (1978), 1. sz., 1—6
13. SZÖLLŐSI-NAGY A.: A lefolyás jelenségeinek modellezése és rövid távú előrejelzése Nash-féle kaszkádokkal. *Hidrológiai Közöny* (1979), 4. sz., 164—175
14. SZÖLLŐSI-NAGY, A.: State Space Models of the Nash-Cascade Kinematic and Diffusion Waves. Research Report, *University of Luleå, Serie A No 68* (1981), április
15. VÁGÁS I.: Önszabályozó átfolyásos rendszerláncolatok valószínűségi jellemzése. *Hidrológiai Közöny* (1970), 9. sz.

Runoff Models Based on the Theory of Probability. — Starting from Nash's linear cascade model, first the cases of the discrete reservoirs, discrete times are analysed and is pointed out that in such cases the response given to the unit pulse agrees with the negative binomial distribution function well known from the statistics. Thereafter it has been verified that in case of a discrete reservoir and continuous time the gamma distribution function to be obtained as the sum of the response given to the unit pulse and the exponential random variables agree with each other. Then the connection between the systems of discrete and continuous time are presented, and is pointed out that in the model series of reservoirs the stored water quantities exhibit Poisson's distribution where the random variable is the serial number of the reservoir (numbered from above to down). Finally, further research objectives have been referred to.

Wahrscheinlichkeitstheoretische Gründe von Abflussmodellen. — Ausgehend von dem Nashschen linearen Kaskadenmodell, erstens wurde der Fall der diskreten Speicher und Zeiten analysiert, nachdem wurde präsentiert, daß in diesem Fall auf den Einheitsimpuls gegebene Antwort und die aus der Statistik wohlbekannte negative binomische Verteilungsfunktion übereinstimmen. Hiernach ist es nachgewiesen, daß im Fall von einem diskreten Speicher und einer kontinuierlichen Zeit die als die Summe der auf den Einheitsimpuls gegebene Antwort und der exponentiellen Zufallsveränderlichen erhaltene Gammaverteilungsfunktion auch übereinstimmen. Nachdem wurde der Zusammenhang zwischen den Systemen von diskreter und kontinuierlicher Zeit beschrieben und nachgewiesen, daß in der Serie der Speichermodelle dem Einheitsimpuls folgend die in den Speichern gespeicherten Wasservorräte eine Poisson-sche Verteilung aufweisen, wo die Zufallsvariable die Serienzahl des Speichers ist (mit Numerierung von oben nach unten). Schließlich wurden weitere Forschungsziele angegeben.

A GUMISZERŰ ANYAGOK FIZIKAI EGYENLETE ÉS POISSON-SZÁMA

PÓSFALVI ÖDÖN*

[Béérkezett: 1982. június 30-án]

A lineáris rugalmasságtan szerint a gumiszerű anyagok Poisson-száma állandó: $\nu = 0,5$. A gumi a teljes alakváltozási tartományát tekintve azonban nemlineárisan rugalmas testként viselkedik, és felmerül a kérdés, hogy ebben az esetben hogyan határozzuk meg a Poisson-féle anyagjellemző egyenletét? A választ a gumi fizikai egyenlet-rendszer alapján kapjuk meg, és ez esetben a „Poisson-szám” az alakváltozásfüggvénye. A dolgozatban a Poisson-számra vonatkozó elméleti eredmények és kísérleti adatok összehasonlítását is elvégezzük.

1. Bevezetés

Gumiszerű testek rugalmasságtani tárgyalásakor többféle anyagjellemzőt használunk, ezek közül az egyik a Poisson-szám. A definíció szerint a Poisson-szám a lineárisan rugalmas anyag lineáris feszültség-állapota esetében a kereszt- és a hosszirányú fajlagos nyúlás hányadosa [1].

Előjáróban megjegyezzük, hogy a homogén, izotrop gumi a teljes alakváltozási tartományát figyelembe véve nemlineárisan rugalmas mechanikai testként viselkedik, ezért a lineáris anyagtörvény csak a kezdeti, lineárisnak tekinthető alakváltozási tartományban érvényes a gumiszerű testekre. Az elmondottakhoz hozzáfűzzük, hogy a gumiszerű anyagokat a deformációs képesség tekintetében a relatíve kis feszültségekkel létrehozható véges rugalmas alakváltozás és a deformáció során — jó közelítéssel — a térfogatállandóság jellemzi.

Ezek után felvetődik az a kérdés, hogy a klasszikus Poisson-szám gumiszerű testek esetében hogyan értelmezhető az alakváltozás kezdeti szakaszán kívüli tartományban? Az alábbi vizsgálat során erre a kérdésre igyekszünk választ adni.

Legyen a $K(Ox_1x_2x_3)$ egyenestengelyű derékszögű koordinátarendszer az alakváltozási főtengek vonatkoztatási rendszere, amelynek tengelyeit rendre az e_a egységvektorok jelölik ki ($a = 1, 2, 3$).

A fenti koordinátarendszerben a Poisson-számokat a következő egyenletek szerint értelmezzük ortotrop, homogén mechanikai test esetében

* Dr. Pósfalvi Ödön, 1119 Budapest, Szakasits Á. u. 20. VIII. 25

1. táblázat

A különböző gumifajták Poisson-száma

| A gumi fajtája | A Poisson-szám | Megjegyzés |
|------------------|-----------------|----------------------------|
| Lágy gumi | $\nu = 0,49989$ | WOOD és MARTIN szerint [3] |
| Természetes gumi | $\nu = 0,49935$ | |
| Butadién | $\nu = 0,49894$ | HILLBERRY szerint [4] |
| Stirén | $\nu = 0,49894$ | |
| Butil gumi | $\nu = 0,49691$ | |
| Neoprén | $\nu = 0,49950$ | |
| Nitril gumi | $\nu = 0,49712$ | |

Ha

$$\sigma_a \neq 0 \quad (1)$$

és

$$\sigma_b = \sigma_c = 0, \quad (2)$$

akkor

$$\nu_{ab} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a}, \quad (3)$$

$$\nu_{ac} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_a}, \quad (4)$$

 $(a \neq b \neq c)$ $(a, b, c = 1, 2, 3)$

A rugalmasságtan szerint a homogén, izotrop, inkompresszibilis, lineárisan rugalmas test Poisson-száma [2]

$$\nu_{ab} = \nu_{ac} = \nu = 0,5. \quad (5)$$

Az ideális testre vonatkozó (5) eredményt többféle gumiminőség esetében megvizsgálták a kutatók, és az alábbi eredményeket kapták (1. táblázat).

2. A gumiszerű testek fizikai egyenlete

A térfogatállandóság pontos geometriai egyenlete szilárd mechanikai testek véges, homogén alakváltozása esetében

$$1 = \lambda_a \lambda_b \lambda_c, \quad (6)$$

ahol

$$\lambda_a = 1 + \varepsilon_a,$$

$$\lambda_b = 1 + \varepsilon_b,$$

$$\lambda_c = 1 + \varepsilon_c,$$

az alakváltozási főtengelyek irányában a nyúlásarányok kifejezései,

$$(a \neq b \neq c)$$

$$(a, b, c = 1, 2, 3)$$

A gumyszerű testek a mechanikai igénybevételek viselése során általában számottevő véges deformációt szenvednek, ezért az alakváltozás előtti és utáni geometriai adataik lényegesen különböznek egymástól. A fenti megállapítás értelmében a (6) egyenlet segítségével felírjuk a σ_a látszólagos normál feszültség és a t_a valódi normál feszültség kapcsolatát a gumyszerű testek térfogatállandóság feltétele alapján

$$\sigma_a = \lambda_b \lambda_c t_a = \frac{1}{\lambda_a} t_a \quad (7)$$

$$(a \neq b \neq c)$$

$$(a, b, c = 1, 2, 3),$$

ahol a σ_a látszólagos feszültség az eredeti, deformálatlan területre vonatkozik, a t_a valódi feszültség az alakváltozás következtében megváltozott területre tartozik.

Gumiszerű testek Poisson-számának és fizikai egyenletének vizsgálatához szükséges a Cauchy—Green-féle alakváltozás tenzor skalár invariánsainak ismerete. Ezek az invariánsok a nemlineárisan rugalmas anyagokra vonatkoznak [5]:

$$\begin{aligned} \text{I}(\lambda) &= \lambda_a^2 + \lambda_b^2 + \lambda_c^2 \\ \text{II}(\lambda) &= \lambda_a^2 \lambda_b^2 + \lambda_b^2 \lambda_c^2 + \lambda_c^2 \lambda_a^2 \\ \text{III}(\lambda) &= (\lambda_a \lambda_b \lambda_c)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

$$(a, b, c = 1, 2, 3)$$

$$(a \neq b \neq c)$$

Határozzuk meg a (8) invariánsoknak az alakváltozás kezdetére vonatkozó határértékét

$$\lim \text{I}(\lambda) = \text{I}(1) = 3$$

$$\lambda_a \rightarrow 1$$

$$\lambda_b \rightarrow 1$$

$$\lambda_c \rightarrow 1$$

$$\lim_{\lambda_a \rightarrow 1} \lim_{\lambda_b \rightarrow 1} \lim_{\lambda_c \rightarrow 1} \Pi(\lambda) = \Pi(1) = 3 \quad (9)$$

$$\lambda_a \rightarrow 1$$

$$\lambda_b \rightarrow 1$$

$$\lambda_c \rightarrow 1$$

$$\lim_{\lambda_a \rightarrow 1} \lim_{\lambda_b \rightarrow 1} \lim_{\lambda_c \rightarrow 1} \text{III}(\lambda) = \text{III}(1) = 1$$

$$\lambda_a \rightarrow 1$$

$$\lambda_b \rightarrow 1$$

$$\lambda_c \rightarrow 1$$

A gumyszerű testek w alakváltozási energia sűrűség függvényét a [8] invariánsokkal az alábbi alakban kapjuk meg KAWABATA szerint [6]

$$w = w[\text{I}(\lambda), \text{II}(\lambda), \text{III}(\lambda)]. \quad (10)$$

Nyilvánvaló, hogy a (9) figyelembevételével

$$w[\text{I}(1), \text{II}(1), \text{III}(1)] = 0. \quad (11)$$

Képezzük a σ_a látszólagos feszültség kifejezését a (10) egyenlet figyelembevételével

$$\sigma_a = \frac{\partial w}{\partial \lambda_a} = \frac{\partial w}{\partial \text{I}} \frac{\partial \text{I}}{\partial \lambda_a} + \frac{\partial w}{\partial \text{II}} \frac{\partial \text{II}}{\partial \lambda_a} + \frac{\partial w}{\partial \text{III}} \frac{\partial \text{III}}{\partial \lambda_a} \quad (12)$$

$$(a = 1, 2, 3)$$

A (8), (10), (12) alapján a nagyrugalmasságú anyagok fizikai egyenletének szimbolikus alakja így írható:

$$\sigma_a = 2\lambda_a \left[\frac{\partial w}{\partial \text{I}} + (\lambda_b^2 + \lambda_c^2) \frac{\partial w}{\partial \text{II}} + \lambda_b^2 \lambda_c^2 \frac{\partial w}{\partial \text{III}} \right] \quad (13)$$

$$(a \neq b \neq c)$$

$$(a, b, c = 1, 2, 3)$$

A gumi fizikai egyenletrendszerét a (13) szerint a (6) térfogatállandóság figyelembevételével a főtengelyek koordináta rendszerében az alábbi alakban kapjuk meg:

$$\sigma_1 = 2\lambda_1 \left[\frac{\partial w}{\partial \text{I}} + \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \frac{\partial w}{\partial \text{II}} \right] \quad (14)$$

$$\sigma_2 = 2\lambda_2 \left[\frac{\partial w}{\partial \text{I}} + \left(\frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} + \lambda_1^2 \right) \frac{\partial w}{\partial \text{II}} \right] \quad (15)$$

$$\sigma_3 = 2 \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \left[\frac{\partial w}{\partial \text{I}} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial w}{\partial \text{II}} \right]. \quad (16)$$

HALÁSZ [7] szerint a gumyszerű anyagok fizikai egyenletének a legáltalánosabb alakja

$$t_a = \lambda_a \frac{\partial w}{\partial \lambda_a} + p, \quad (17)$$

$$(a = 1, 2, 3)$$

ahol p a hidrosztatikus nyomás.

3. A gumyszerű testek „Poisson-száma”

Gumyszerű anyagok Poisson-számát $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ lineáris feszültségállapot esetében határozzuk meg és ez esetben a (15), (16) fizikai egyenletből a következő kifejezést kapjuk:

$$(\lambda_1 \lambda_2^2 - 1)(\lambda_1 \lambda_2^2 + 1) = 0. \quad (18)$$

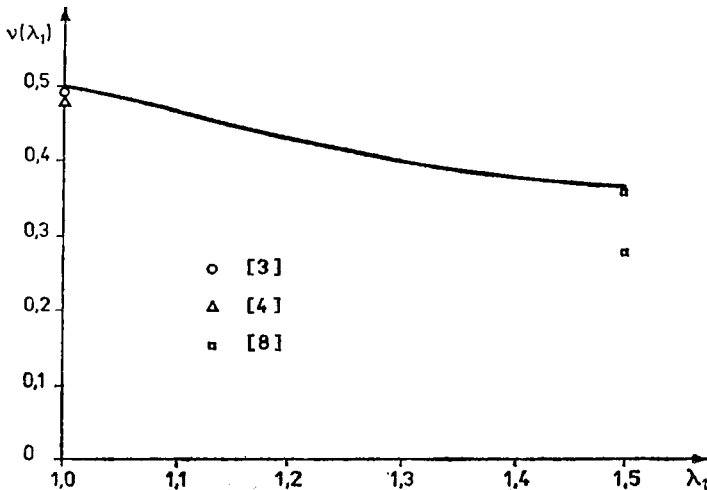
Megjegyezzük, hogy a (18) összefüggést a (17) egyenletrendszer megoldásából is megkaphatjuk.

A „Poisson-szám” egyenlete a (3), (18) alapján

$$\nu(\lambda_1) = \frac{\lambda_2 - 1}{\lambda_1 - 1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}(\sqrt{\lambda_1} + 1)}, \quad (19)$$

ahol $\lambda_1 \geq 1$.

A (19) összefüggés arra hívja fel a figyelmet, hogy a gumyszerű testek $\nu(\lambda_1)$ „Poisson-szám” kifejezése a rugalmas alakváltozás tartományában a λ_1 nyúlásarány függvénye. A (19) szerint a $\nu(\lambda_1)$ anyagjellemzőt monoton csökkenő függvény írja le a deformáció során (1. ábra).



1. ábra. A gumi $\nu(\lambda_1)$ Poisson-szám függvénye

2. táblázat

A gumira vonatkozó „Poisson-szám” értékei

| λ_1 | 1,0 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
|--------------------|-------------------------|--------|--------|--------|--------|---------|
| $\nu(\lambda_1)$ | 0,5000 | 0,4653 | 0,4356 | 0,4098 | 0,3871 | 0,3670 |
| $\nu(\lambda_1)$ | FREUDENTHAL szerint [8] | | | | | 0,3650 |
| $\nu_1(\lambda_1)$ | | | | | | 0,2671* |

* A számadat a gumi kristályos állapotára vonatkozik.

Vizsgáljuk meg az (5) és a (19) kapcsolatát, ezért határozzuk meg a (19) függvényt az alakváltozás kezdetére vonatkozó határértékét:

$$\lim_{\lambda_1 \rightarrow 1} \nu(\lambda_1) = \nu(1) = 0,5 \quad (20)$$

Az (5), (20) eredményekből megállapítható, hogy a lineárisan rugalmas inkompresszibilis test ν Poisson-száma és a gumyszerű anyagokra vonatkozó $\nu(1)$ „Poisson-szám” — az alakváltozás kezdetén — egymással egyenlő.

A 2. táblázat 1—2 sorában a λ_1 nyúlásarány és a (19) $\nu(\lambda_1)$ függvény számított diszkrét értékeit foglaltuk össze az $1 \leq \lambda_1 \leq 1,5$ alakváltozási tartományban.

Irodalmi adatok szerint FREUDENTHAL [8] kísérleti úton vizsgálta a gumyszerű anyagokra vonatkozó $\nu(\lambda_1)$ „Poisson-szám”-ot. A 3—4. sorban feltüntetett eredmények a $\lambda_1 = 1,5$ nyúlásarányra vonatkoznak.

Összefoglalva az elvégzett vizsgálatokat, megállapítjuk, hogy a gumyszerű testek a teljes alakváltozási tartományukat figyelembe véve nem lineárisan rugalmas testként viselkednek. Felvetődik tehát a kérdés, hogy a klasszikus Poisson-szám ilyen rugalmasságtani feltétel esetében hogyan értelmezhető?

Ezért megvizsgáltuk egytengelyű feszültségállapot esetében ($\sigma_1 \geq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) a gumi fizikai egyenletrendszerét és a nyúlásarányok közötti kapcsolat alapján képeztük a gumira jellemző $\nu(\lambda_1)$ „Poisson-szám”-ot. Az ilyen anyagjellemző az alakváltozás függvénye, és tendenciáját a deformáció során monoton csökkenő függvény írja le.

IRODALOM

1. KALINSZKY S.—SEBESTYÉN GY.: Építési mechanika. Akadémiai Kiadó, Budapest 1980
2. MUTNYÁNSZKY Á.: Szilárdságtan. Tankönyvkiadó, Budapest 1964
3. TÓTH L.: Súrlódási jelenségek „Neotopf” rendszerű saruk kamrafalain. *Építés-Építészettudomány* 61 (1974), 165—185

4. HARRIS, C. M.—CREDE, CH. E.: Shock and Vibration Handbook, McGraw-Hill Book Company, New-York 1976
5. GREEN, A. E.—ADKINS, J. E.: Large Elastic Deformations and Non-linear Continuum Mechanics. Clarendon Press, Oxford 1960
6. KAWABATA, S.—KAWAI, H.: Advances in Polymer Science. Springer Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1977
7. HALÁSZ L.—MOLNÁR L.—MONDVAI I.: A polimerek feldolgozásának reológiai alapjai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1968
8. FREUDENTHAL, A. M.: Introduction to the Mechanics of Solids. John Wiley and Sons, New York 1966
9. PÓSFALVI, Ö.: Über die Bestimmung der Poisson Zahl in Gummi/Cord Systemen. *Kautschuk, Gummi, Kunststoffe* 28 (1975), 580—584
10. PÓSFALVI, Ö.: The Poisson Ratio for Rubber-Cord Composites. *Rubber Chemistry and Technology* 50 (1977), 224—232

Physical Equation and Poisson's Ratio of Rubberlike Materials. — According to the theory of elasticity the value of Poisson's ratio of the rubberlike materials is constant. However, the rubber behaves in the whole region of deformation as a nonlinearly elastic solid, and the question arises how in this case the equation of Poisson's ratio of the material properties could be determined. The answer might be obtained on the basis of the set of physical equations of the rubber and, in this case, the value of Poisson's ratio depends on the deformation. In the paper, in connection with Poisson's ratio also the comparison of the theoretical and test results has been carried out.

Die physikalische Gleichung und die Poissonsche Zahl der gummiartigen Materialien. — Gemäß der linearen Elastizitätslehre ist der Wert der Poissonschen Zahl der gummiartigen Stoffe unveränderlich: $\nu = 0,5$. Der Gummi benimmt sich jedoch hinsichtlich des ganzen Verformungsbereichs als ein nichtlinearer Körper, daher stellt sich die Frage, ob in diesem Fall, auf welche Weise die Gleichung des Poissonschen Werkstoffskennwerts ermittelt werden sollte. Die Antwort wird aufgrund des physischen Gleichungssystems des Gummis erhalten und, in diesem Fall, hängt die „Poissonsche Zahl“ von der Verformung ab. In der Abhandlung werden die auf die Poissonsche Zahl bezüglichen theoretischen und Versuchsergebnisse einander gegenübergestellt.

ALSÓ ÉS FELSŐ KORLÁT A PEREMÉN VÉKONY HÉJJAL ERŐSÍTETT, VÁLTOZÓ ÁTMÉRŐJŰ, KÖR KERESZTMETSZETŰ RÚD CSAVARÁSI MEREVSÉGÉRE

ECSEDI ISTVÁN*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. szept. 19-én]

E tanulmány tárgya változó átmérőjű, peremén vékony héjjal erősített, lineárisan rugalmas anyagú, kör keresztmetszetű rúdra vonatkozik. A Michell-féle elmélet alapján meghatározható csavarási merevség számértékére vonatkozó korlátok bizonyításai döntően a matematikai analízis jól ismert tételeinek az alkalmazásaival vezethetők le. A bizonyított korlátok alkalmazását példák szemléltetik.

Fontosabb jelölések

r, φ, z henger koordináták.

$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ egységvektorok

$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \varphi, z) = u(r, \varphi, z)\mathbf{e}_r + v(r, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi + w(r, \varphi, z)\mathbf{e}_z$ elmozdulásvektor

$\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ normál feszültségek,

$\tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}$ csúsztató feszültségek,

G, I csúsztató rugalmassági modulusok,

$\psi = \psi(r, z) = v(r, z)/r$ szögelfordulás,

$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$ Hamilton-féle differenciál-operátor,

$\varphi \equiv \Phi(r, z)$ feszültségfüggvény,

„ \cdot ” skaláris szorzás jele,

„ \times ” vektoriális szorzás jele,

T a rúd meridián metszete által meghatározott rz síkbeli tartomány,

$\partial T \equiv \partial T_1 + \partial T_2 + \partial T_3 + \partial T_4$ a T tartomány határgörbéje,

s a ∂T görbén értelmezett ívkoordináta,

$\mathbf{t} = t_r \mathbf{e}_r + t_z \mathbf{e}_z$ érintő egységvektor,

$\mathbf{n} = n_r \mathbf{e}_r + n_z \mathbf{e}_z$ normális egységvektor,

$\partial/\partial n$ \mathbf{n} irányban számolt derivált jele,

$h = h(s)$ rétegvastagság,

S csavarási merevség,

$H = 1/S$,

M csavarónyomaték,

$r = R(z), 0 \leq z \leq l$ a ∂T_2 határgörbe egyenlete,

$F = F(r, z)$ segédfüggvény,

$\mathbf{b} = \mathbf{b}(r, z) = b_r(r, z)\mathbf{e}_r + b_z(r, z)\mathbf{e}_z$ síkbeli vektormező,

$B = B(r, z)$ segédfüggvény,

l a rúd hossza.

Az egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmezi.

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfahéritő u. 24. IV/1.

1. Bevezetés

E tanulmány tárgya az 1. ábrán vázolt, peremén vékony héjjal erősített lineárisan rugalmas anyagú, változó átmérőjű kör keresztmetszetű rúd csavarási problémája.

A változó átmérőjű, peremén vékony héjjal erősített rugalmas anyagú rudak csavarási feladatainak megoldását O. C. ZIENKIEWICZ és B. SCHIMMING a Michell-féle elmélet eredményeinek általánosításával [1], [3] adta meg. A szóban forgó elmélet eredményei szerint az

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \varphi, z) = u(r, \varphi, z) \mathbf{e}_r + v(r, \varphi, z) \mathbf{e}_\varphi + w(r, \varphi, z) \mathbf{e}_z$$

elmozdulás vektor,

$$\mathbf{u} = v(r, z) \mathbf{e}_\varphi \quad (1.1)$$

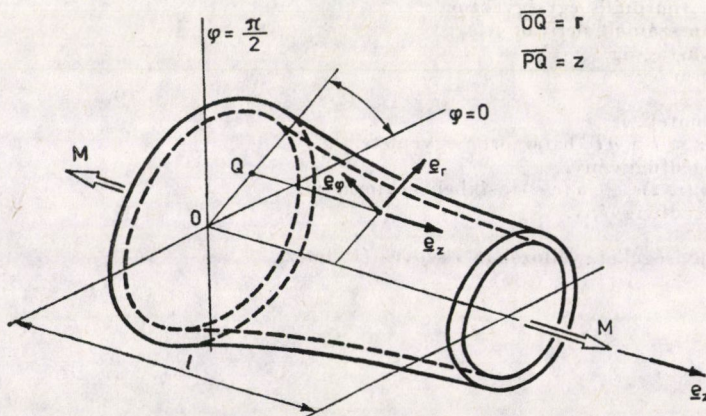
alakban állítható elő. A geometriai egyenletek és az általános Hooke-törvény alkalmazásával az (1.1) egyenletekből elemi számítással a

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad (1.2)$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}(r, z), \quad \tau_{z\varphi} = \tau_{z\varphi}(r, z). \quad (1.3), (1.4)$$

összefüggéseket kapjuk.

A tanulmány a változó átmérőjű, peremén rugalmas anyagú héjjal erősített kör keresztmetszetű rúd csavarásának azt a különleges esetét vizsgálja, mely akkor forog fenn, amikor a $z = 0$ koordinátával kijelölt keresztmetszet fixen megfogott, a $z = l$ koordinátával kijelölt keresztmetszet pedig a z tengely körül θ szöggel elfordul, miközben a rúd palástfelülete terheletlen. A rúd tetszész



1. ábra. Változó méretű, peremén rugalmas héjjal erősített kör keresztmetszetű rúd

szerinti φ szöggel kijelölt meridiánsíkba eső meridián metszetét a 2. ábra szemlélteti.

A Michell-féle elmélet, valamint O. C. ZIENKIEWICZ és B. SCHIMMING eredményeinek a felhasználásával, tekintettel a rúd végső keresztmetszeteire vonatkozó geometriai peremfeltételekre, a rúd palást terheletlenségére a fentiekben kitűzött csavarási problémát a következő kerületérték feladattal hozhatjuk kapcsolatba ([2], [3]):

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^2} \nabla \Phi \right) = 0 \quad (r, z) \in T, \quad (1.5)$$

$$\Phi = 0 \quad (r, z) \in \partial T_1, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (r, z) \in \partial T_1 + \partial T_4, \quad (1.7)$$

$$\Phi + \frac{\Gamma h}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \quad (r, z) \in \partial T_2. \quad (1.8)$$

A rúd anyagának csúsztató rugalmassági modulusát G , a h vastagságú forgáshéj anyagának csúsztató rugalmassági modulusát pedig Γ jelöli. A $\Phi = \Phi(r, z)$ feszültségfüggvény ismeretében a rugalmas anyagú rúd P pontjában ébredő $\tau_{r\varphi}$ és $\tau_{z\varphi}$ csúsztató feszültségek a

$$\tau_{r\varphi} = - \frac{M}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (1.9)$$

$$\tau_{z\varphi} = \frac{M}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (1.10)$$

képletek alapján számíthatók. A h vastagú vékony réteg Q pontjában ébredő $\tau_{s\varphi}$ csúsztató feszültség pedig a

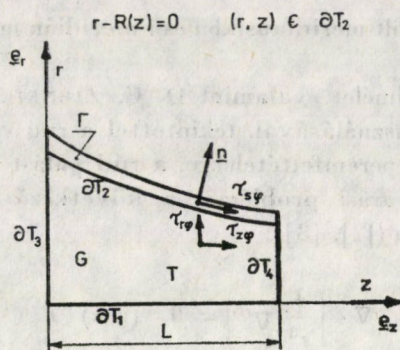
$$\tau_{s\varphi} = \frac{MG}{R^2 \Gamma h} \left(\Phi - \frac{1}{2\pi} \right) \quad (1.11)$$

képlettel állapítható meg [2].

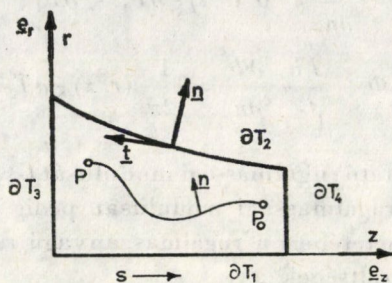
A fenti egyenletekben M a rúd végső keresztmetszeteit terhelő csavarónyomaték (1. ábra). Az ismert ([1], [2])

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{rG} \tau_{r\varphi} = - \frac{M}{r^3 G} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{rG} \tau_{z\varphi} = \frac{M}{r^3 G} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (1.13)$$



2. ábra. Meridiánmetszet

3. ábra. A P_0P görbe szemléltetése

összefüggésekből, ahol

$$\psi(r, z) = \frac{v(r, z)}{r} \quad (1.14)$$

egyszerű számítással azt kapjuk, hogy

$$\psi(r, z) - \psi(r_0, z_0) = -M \int_{P_0}^P \frac{1}{Gr^3} \frac{\partial \psi}{\partial n} ds. \quad (1.15)$$

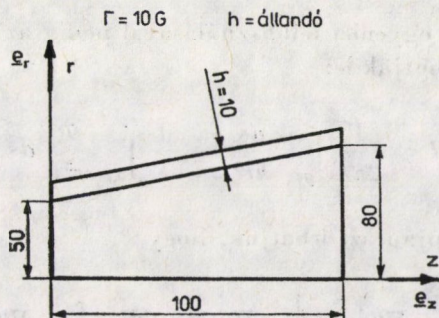
A $\widehat{P_0P}$ görbét a 3. ábra szemlélteti.

Az (1.15) képletnek a ∂T_2 peremgörbére való alkalmazásával az alábbi egyenletet vezethetjük le:

$$\vartheta = M \int_{\partial T_2} \frac{1}{Gr^3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds. \quad (1.16)$$

Az

$$S = \frac{M}{\vartheta} \quad (1.17)$$



4. ábra. Peremén vékony héjjal erősített kúpos rúd

előírással értelmezett mennyiséget a változó átmérőjű, peremén vékony héjjal erősített kör keresztmetszetű rúd csavarási merevségének nevezzük.

S meghatározására az

$$S = \frac{1}{G \int_{\partial T_z} \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds} \quad (1.18)$$

képlet alapján történik.

Kényelmi okokból célszerű bevezetni a

$$H = \frac{1}{S} \quad (1.19)$$

egyenlettel definiált *hajlékonysági együtthatót*. E tanulmány elsődleges célja alsó és felső korlátok levezetése az (1.17) képlet által értelmezett csavarási merevség számára.

Az S csavarási merevség pontos (szigorú) értékének meghatározásához az (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) egyenletek által kijelölt kerületérték feladatot kell megoldanunk.

Azonban az (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) egyenletek által kijelölt kerületérték feladat zárt alakú megoldását, beleértve a megoldás függvény soralakú előállítását is, csak igen különleges esetekben ismerjük [2]. Ez utóbbi miatt nagy jelentősége van olyan módszereknek és elveknek, amelyek alkalmazásával a $\Phi = \Phi(r, z)$ megoldás függvény ismerete nélkül a csavarási merevség számértékére alsó és felső korlátok nyerhetők. A korlátok képzésére szolgáló egyenlőtlenségek levezetése előtt néhány képletet ismertetünk a H együtthatóval kapcsolatban.

Az (1.18) és az (1.19) egyenletek kombinálásával a

$$H = \frac{1}{G} \int_{\partial T_z} \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (1.20)$$

összefüggést, az (1.8) egyenlet felhasználásával pedig az (1.20) egyenletből az alábbi képletet vezethetjük le:

$$H = \frac{1}{2\pi\Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{ds}{hr^3} - \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{\Phi}{r^3 h} ds. \quad (1.21)$$

Az (1.5) egyenlet alapján azt írhatjuk, hogy

$$\nabla \cdot \left(\Phi \frac{1}{r^3} \nabla \Phi \right) - \frac{1}{r^3} |\nabla \Phi|^2 = \Phi \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla \Phi \right) = 0. \quad (1.22)$$

Az (1.22) egyenletből integrálással és a Gauss-féle integrál átalakítási tétel alkalmazásával az

$$\int_{\partial T_1} \frac{1}{r^3} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla \Phi|^2 dT, \quad (1.23)$$

egyenletet kapjuk, ui., minthogy

$$\int_{\partial T_1 + \partial T_2 + \partial T_3} \frac{1}{r^3} \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0. \quad (1.24)$$

Az (1.23) egyenletből elemi átalakítással az (1.8) peremfeltételre való tekintettel a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla \Phi|^2 dT = \frac{1}{2\pi G} \int_{\partial T_1} \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds - \int_{\partial T_1} \frac{\Gamma h}{G^3} \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 ds. \quad (1.25)$$

Az (1.20) képlet és az (1.25) egyenlet kombinálásával a H együttható számítására az alábbi képlethez jutunk:

$$H = \frac{2\pi}{G} \left(\int_T \frac{1}{r^3} |\nabla \Phi|^2 dT + \int_{\partial T_1} \frac{\Gamma h}{G} \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 ds \right). \quad (1.26)$$

Az (1.26) képletből az (1.8) egyenlet felhasználásával a következő képletet vezethetjük le:

$$H = 2\pi \left(\frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla \Phi|^2 dT + \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{1}{r^3 h} \left(\frac{1}{2\pi} - \Phi \right)^2 ds \right). \quad (1.27)$$

Az (1.26), (1.27) képletekből az is kiolvasható, hogy $H = 1/S$ sohasem lehet negatív.

A korlátokat kifejező képleteket csak a $H = 1/S$ mennyiségre írjuk fel.

2. Felső korlát

Tétel: Bármely, a $T + \partial T$ tartományban folytonosan differenciálható, a ∂T_1 görbén eltűnő $F = F(r, z)$ függvénnyel fennáll a

$$H \leq 2\pi \left\{ \frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla F|^2 dT + \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T} \frac{1}{hr^3} \left(\frac{1}{2\pi} - F \right)^2 ds \right\} \quad (2.1)$$

egyenlőtlenség.

Bizonyítás. Tekintsük a következő előírással definiált $L = L(r, z)$ kétváltozós függvényt:

$$L(r, z) = F(r, z) - \Phi(r, z). \quad (2.2)$$

Elemi számítással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2\pi \left\{ \frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla F|^2 dT + \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T} \frac{1}{hr^3} \left(\frac{1}{2\pi} - F \right)^2 ds \right\} = \\ = 2\pi \left\{ \frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla \Phi|^2 dT + \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T} \frac{1}{hr^3} \left(\frac{1}{2\pi} - \Phi \right)^2 ds + \frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla L|^2 dT + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T} \frac{1}{hr^3} L^2 ds + \frac{2}{G} \int_T \frac{1}{r^3} \nabla \Phi \cdot \nabla L dT - \right. \\ \left. - \frac{2}{\Gamma} \int_{\partial T} \frac{1}{hr^3} \left(\frac{1}{2\pi} - \Phi \right) L ds \right\} = H + \\ + 2\pi \left(\frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla L|^2 dT + \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T} \frac{1}{hr^3} L^2 ds \right). \quad (2.3) \end{aligned}$$

A (2.3) egyenlet felírásakor alkalmaztuk az (1.27) képletet és a Gauss-féle integrálatalakítási tétel, valamint a szorzatfüggvény deriválási szabályának együttes alkalmazásával levezethető

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} \nabla \Phi \cdot \nabla L dT - \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T} \frac{1}{r^3 h} \left(\frac{1}{2\pi} - \Phi \right) L ds = \\ = \frac{1}{G} \int_T \nabla \cdot \left(L \frac{1}{r^3} \nabla \Phi \right) dT - \frac{1}{G} \int_T L \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \nabla \Phi \right) dT - \\ - \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T} \frac{1}{r^3 h} \left(\frac{1}{2\pi} - \Phi \right) L ds = \frac{1}{G} \int_{\partial T} L \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds - \\ - \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T} \left(\frac{1}{2\pi} - \Phi \right) \frac{L}{r^3 h} ds = \int_{\partial T} \frac{L}{r^3} \left(\frac{1}{G} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma h} \left(\frac{1}{2\pi} - \Phi \right) \right) ds = 0, \quad (2.4) \end{aligned}$$

egyenletet. A (2.4) egyenlet levezetésekor még felhasználtuk az (1.5), (1.7), (1.8) egyenleteket, valamint az $F = F(r, z)$ függvényre kirótt

$$F(r, z) = 0 \quad (r, z) \in \partial T_1 \quad (2.5)$$

feltételből következő

$$L(0, z) = F(0, z) - \Phi(0, z) = 0 \quad 0 \leq z \leq l \quad (2.6)$$

egyenletet is.

A (2.3) egyenletből és a nyilvánvaló

$$\frac{1}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla L|^2 dT + \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{L^2}{hr^3} ds \geq 0 \quad (2.7)$$

egyenlőtlenségből közvetlenül következik a (2.1) egyenlőtlenségi reláció helyesége.

3. A (2.1) felső korlát élesítése

Alkalmazzuk a (2.1) egyenlőtlenséget az

$$\hat{F}(r, z) = pF(r, z) \quad (3.1)$$

függvényre, ahol p valamely tetszőleges, valós paraméter. Elemi számítással a következő eredményt vezethetjük le:

$$H < p^2 \left\{ \frac{2\pi}{G} \int_T \frac{1}{r^3} |\nabla F|^2 dT + \frac{2\pi}{\Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{1}{r^3 h} F^2 ds \right\} - p \frac{4\pi}{\Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{F}{2r^3 h \pi} ds + \frac{1}{2\pi \Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{ds}{hr^3} \quad (3.2)$$

A (3.2) egyenlőtlenség jobb oldala rögzített $F = F(r, z)$ függvény esetében a p változó másodfokú racionális egész függvénye, mely a p változó alkalmas megválasztásával minimálissá tehető. A szóban forgó minimum értéke alapján az alábbi felső korlátot írhatjuk, feltéve, hogy F nem azonosan zérus a $T + \partial T$ tartományban:

$$H < \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{ds}{r^3 h} - \frac{\left(\int_{\partial T_1} \frac{F}{\Gamma r^3 h} ds \right)^2}{\int_T \frac{|\nabla F|^2}{Gr^3} dT + \int_{\partial T_1} \frac{F^2}{\Gamma r^3 h} ds} \right\} \quad (3.3)$$

A (3.3) egyenlőtlenségi relációból kiolvasható az alábbi egyszerű szerkezetű felső korlát is:

$$H \leq \frac{1}{2\pi\Gamma} \int_{\partial T_1} \frac{ds}{r^3 h} \quad (3.4)$$

4. Alsó korlát

4.1 Tétel. Legyen

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(r, z) = b_r(r, z)\mathbf{e}_r + b_z(r, z)\mathbf{e}_z$$

olyan nem azonosan zérus vektorral egyenlő rz síkbeli vektormező, amely kielégíti az alábbi egyenleteket

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{b} \right) = 0, \quad (r, z) \in T \quad (4.1)$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (r, z) \in \partial T_3 + \partial T_4. \quad (4.2)$$

Állítjuk, hogy ebben az esetben fennáll a

$$H > \frac{1}{2\pi G} \frac{\left(\int_{\partial T_1} \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}{r^3} ds \right)^2}{\int_T \frac{1}{r^3} \mathbf{b}^2 dT + \int_{\partial T_2} \frac{\Gamma h}{r^3 G} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})^2 ds} \quad (4.3)$$

egyenlőtlenségi reláció

Bizonyítás. A (4.3) egyenlőtlenségi reláció igazolásának alapja az

$$E(\alpha) E(\beta) \geq \{E(\alpha, \beta)\}^2 \quad (4.4)$$

Schwarz-féle egyenlőtlenségi reláció, ahol

$$E(\alpha, \beta) = \int_T \frac{1}{r^3} \alpha \cdot \beta dT + \int_{\partial T_2} \frac{\Gamma h}{G} \frac{1}{r^3} (\alpha \cdot \mathbf{n})(\beta \cdot \mathbf{n}) ds, \quad (4.5)$$

$$E(\alpha) = E(\alpha, \alpha), \quad E(\beta) = E(\beta, \beta). \quad (4.6) \quad (4.7)$$

A (4.5), (4.6), (4.7) integrálokban

$$\alpha = \alpha(r, z) = \alpha_r(r, z)\mathbf{e}_r + \alpha_z(r, z)\mathbf{e}_z$$

és

$$\beta = \beta(r, z) = \beta_r(r, z)\mathbf{e}_r + \beta_z(r, z)\mathbf{e}_z$$

olyan rz síkbeli vektormezőket jelölnek, melyekre a szóban forgó integrálok léteznek és véges értékűek.

Legyen a (4.4) egyenlőtlenségben

$$\alpha = \nabla\Phi, \quad \beta = \mathbf{b}. \quad (4.8)(4.9)$$

Könnyen kimutatható az (1.26) képlet felhasználásával, hogy

$$E(\nabla\Phi) = \frac{G}{2\pi} H. \quad (4.10)$$

(4.4) és (4.10), valamint (4.8), (4.9) egyenletek kombinálásával azt írhatjuk, hogy

$$\frac{G}{2\pi} HE(\mathbf{b}) \geq \left\{ \int_T \frac{1}{r^3} \nabla\Phi \cdot \mathbf{b} dT + \int_{\partial T} \frac{G}{\Gamma h r^3} \frac{\partial\Phi}{\partial n} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) ds \right\}^2. \quad (4.11)$$

A (4.11) egyenlet jobb oldalán szereplő integrált az (1.6), (1.8) (4.1), (4.4) egyenletek, valamint a szorzatfüggvény deriválási szabályának és a Gauss-féle integrálatalakítási tételnek az alkalmazásával így alakíthatjuk át:

$$\begin{aligned} & \int_T \frac{1}{r^3} \nabla\Phi \cdot \mathbf{b} dT + \int_{\partial T} \frac{G}{\Gamma h r^3} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial n} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) ds = \\ & = \int_T \nabla \cdot \left(\Phi \frac{1}{r^3} \mathbf{b} \right) dT - \int_T \Phi \nabla \cdot \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{b} \right) dT + \\ & + \int_{\partial T} \frac{G}{\Gamma h} \frac{1}{r^3} \frac{\partial\Phi}{\partial n} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) ds = \\ & = \int_{\partial T} \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}{r^3} \left(\Phi + \frac{G}{\Gamma h} \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial T} \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}{r^3} ds. \end{aligned} \quad (4.12)$$

A (4.11) és (4.12) képletek kombinálásával közvetlenül a bizonyítandó (4.3) egyenlőtlenséget kapjuk, ha tekintettel vagyunk az

$$E(\mathbf{b}) = \int_T \frac{1}{r^3} \mathbf{b}^2 dT + \int_{\partial T} \frac{G}{\Gamma h r^3} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})^2 ds \quad (4.13)$$

összefüggésre.

4.2 Tétel. Legyen $B = B(r, z)$ a $T + \partial T$ zárt tartományban legalább egyszer, a T tartományban pedig legalább kétszer folytonosan differenciálható, nem azonosan állandó olyan kétváltozós függvény, amely a ∂T_3 és ∂T_4 peremgörbe szakaszokon állandó értékű, vagyis kielégíti a

$$B(r, 0) = B_3 \quad 0 \leq r \leq R(0), \quad (4.14)$$

$$B(r, l) = B_4 \quad 0 \leq r \leq R(l) \quad (4.15)$$

peremfeltételeket. Állítjuk, hogy ebben az esetben fennáll a

$$H \geq \frac{1}{2\pi G} \frac{(B_3 - B_4)^2}{\int_T r^3 |\nabla B|^2 dT + \int_{\partial T_1} \frac{\Gamma h}{G} r^3 \left(\frac{\partial B}{\partial s} \right)^2 ds} \quad (4.16)$$

egyenlőtlenségi reláció.

Bizonyítás: Tekintsük a (4.3) egyenlőtlenségi relációban a

$$\mathbf{b} = r^3 \nabla B \times \mathbf{e}_\varphi \quad (4.17)$$

előírással értelmezett $\mathbf{b} = \mathbf{b}(r, z)$ vektort. Elemi számolással kimutatható, hogy a fenti alakú \mathbf{b} vektor — kétszer folytonosan differenciálható $B = B(r, z)$ függvényt feltételezve — identikusan kielégíti a (4.1) differenciálegyenletet.

A (4.2) egyenlet értelmében ui.

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = r^3 (\nabla B \times \mathbf{e}_\varphi) \cdot \mathbf{n} = r^3 \nabla B \cdot \mathbf{t} = r^3 \frac{\partial B}{\partial s} = 0 \quad (r, z) \in \partial T_3, \quad (4.18)$$

azaz

$$B(r, z) = B_3 = \text{állandó} \quad (r, z) \in \partial T_3. \quad (4.19)$$

Hasonló számítással kimutatható, hogy a \mathbf{b} vektorral kapcsolatos ∂T_4 peremgörbe-szakaszra vonatkozó előírás is ki van elégítve, ha

$$B(r, z) = B_4 = \text{állandó} \quad (r, z) \in \partial T_4. \quad (4.20)$$

Elemi számítással belátható, hogy

$$\int_T \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}}{r^3} ds = \int_{\partial T_1} \frac{\partial B}{\partial s} ds = B_3 - B_4, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \int_T \frac{1}{r^3} \mathbf{b}^2 dT + \int_{\partial T_1} \frac{G}{\Gamma h r^3} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n})^2 ds = \\ = \int_T r^3 |\nabla B|^2 dT + \int_{\partial T_1} \frac{G}{\Gamma h} r^3 \left(\frac{\partial B}{\partial s} \right)^2 ds. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A fenti eredmények és a (4.3) egyenlőtlenség kombinálásával közvetlenül a bizonyítandó (4.16) egyenlőtlenséget kapjuk.

5. Példák korlátok képzésére

5.1 A (2.1) egyenlőtlenségből az

$$F(r, z) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{r}{R(z)} \right\}^4 \quad (5.1)$$

függvénnyel a következő felső korlátot vezethetjük le H számára:

$$H \leq \frac{2}{G\pi} \int_0^l \left\{ 1 + \frac{2}{3} (R'(z))^2 \right\} \frac{dz}{[R(z)]^4} \quad (5.2)$$

Megjegyzendő, hogy az (5.1) képlettel adott $F = F(r, z)$ függvény, a szükséges

$$F(0, z) = 0 \quad 0 \leq z \leq l \quad (5.3)$$

peremfeltételen kívül az

$$F(r, z) = \frac{1}{2\pi} (r, z) \in \partial T \quad (5.4)$$

feltételnek is kielégíti, így a (2.1) egyenlőtlenségi reláció jobb oldalán szereplő ∂T_2 peremgörbére vonatkozó integrál jelen esetben zérus lesz.

5.2 A (3.3) egyenlőtlenségi relációt az

$$F(r, z) = r^4 \quad (r, z) \in T + \partial T \quad (5.5)$$

függvényre alkalmazva, a következő felső korláthoz jutunk:

$$H \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{\sqrt{1 + [R'(\xi)]^2}}{h(\xi) [R(\xi)]^3} d\xi - \frac{\left(\frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{R(\xi)}{h(\xi)} \sqrt{1 + [R'(\xi)]^2} d\xi \right)^2}{\int_0^l \left(\frac{4}{G} + \frac{1}{l} \frac{R(\xi)}{h(\xi)} \sqrt{1 + [R'(\xi)]^2} \right) [R(\xi)]^4 d\xi} \right) \quad (5.6)$$

5.3 A (4.16) egyenlőtlenségi relációban legyen

$$B(r, z) = z \quad (r, z) \in T + \partial T. \quad (5.7)$$

Közvetlenül adódik, hogy

$$B_3 = 0, \quad B_4 = l. \quad (5.8), (5.9)$$

Ebben az esetben elemi számítással azt kapjuk, hogy

$$H \geq \frac{1}{G\pi} \frac{l^2}{\int_0^l \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2l}{G} \frac{h(\xi)}{R(\xi)} \frac{1}{\sqrt{1 + [R'(\xi)]^2}} \right\} [R(\xi)]^4 d\xi} \quad (5.10)$$

5.4 Legyen a (4.16) egyenlőtlenségi relációban

$$B(r, z) = f(z) \quad (r, z) \in T + \partial T, \quad (5.11)$$

ahol $f = f(z)$ az alábbi peremfeltételeknek tesz eleget:

$$f(0) = 0, \quad f(l) = 1. \quad (5.12), (5.13)$$

Hosszadalmas, de elemi számítással a

$$H \geq \frac{1}{G\pi C} \quad (5.14)$$

korláthoz jutunk, ahol

$$C = \int_0^l [f'(\xi)]^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2\Gamma}{G} \frac{h(\xi)}{R(\xi)} \frac{1}{\sqrt{1 + [R'(\xi)]^2}} \right) [R(\xi)]^4 d\xi \quad (5.15)$$

A variációszámítás ismert eredményeinek felhasználásával kimutatható, hogy az (5.14) korlát akkor a legélesebb, ha

$$f(z) = \frac{\int_0^z \left(\frac{1}{2} + \frac{2\Gamma}{G} \frac{h(\xi)}{R(\xi)} \frac{1}{\sqrt{1 + [R'(\xi)]^2}} \right) [R(\xi)]^4 d\xi}{\int_0^l \left(\frac{1}{2} + \frac{2\Gamma}{G} \frac{h(\xi)}{R(\xi)} \frac{1}{\sqrt{1 + [R'(\xi)]^2}} \right) [R(\xi)]^4 d\xi} \quad (5.16)$$

A fenti függvénnyel képzett korlát alapján az alábbi eredményt írhatjuk:

$$H \geq \frac{1}{G\pi} \int_0^l \left(\frac{1}{2} + \frac{2\Gamma}{G} \frac{h(\xi)}{R(\xi)} \frac{1}{\sqrt{1 + [R'(\xi)]^2}} \right) [R(\xi)]^4 d\xi \quad (5.17)$$

5.5. A 4. ábrán vázolt meridiángörbével rendelkező forgástest (kúp alakú tengely) S csavarási merevségére a (5.6) és az (5.17) képletek alkalmazásával az

$$5,68 \cdot 10^{-5} \text{mm}^{-3} < HG < 6,02 \cdot 10^{-5} \text{mm}^{-3}$$

eredményt vezethetjük le, feltéve, hogy $\Gamma = 10G$.

5. Kiegészítő megjegyzés

A $h = 0$ esetet E. REISSNER tanulmányozta [4]. E. REISSNER a potenciális energia és a kiegészítő energia funkciókkal kapcsolatos minimum tételek alkalmazásával vezetett le az alsó és felső korlátot változó átmérőjű körke-

resztmetszetű rúd csavarási merevségére. E. REISSNER nem vezette le a feszültségfüggvény és a csavarási merevség kapcsolatát kifejező képleteket, így tanulmánya nem tartalmazza pl. az (1.26) képletből a $h = 0$ helyettesítéssel levezethető tömör körkeresztmetszetű, változó átmérőjű rúdra vonatkozó

$$H = \frac{2\pi}{G} \int_T \frac{1}{r^3} (\nabla\Phi)^2 dT \quad (6.1)$$

képletet sem.

IRODALOM

1. TIMOSHENKO, S. P.—GOODIER, I. N.: *Theory of Elasticity*. 3rd Ed. 341—349. McGraw Hill, New York 1970
2. ARUTJUNAN, N. H.—ABRAMJAN, B. L.: Krucsenie uprugih tel. Izd. Fiz. Mat. Lit. Moszkva 1963, 448—486
3. ZIENKIEWICZ, O. C.—SCHIMMING, B.: Torsion of Non-homogeneous Bars with Axial Symmetry. *Int. Journ. of Mechanical Sciences* 4 (1962), 15—23
4. REISSNER, E.: On Bounds for the Torsional Stiffness of Shafts of Varying Circular Cross Section. *Journal of Elasticity* 8 (1978), 211—219

Lower and Upper Bounds for the Torsional Stiffness of a Bar of Circular Cross Section of Varying Diameter Strengthened by a Thin Shell at its Perimeter. — A bar of circular cross section with varying diameters strengthened by a thin shell, made from linearly elastic material is dealt with. The proofs for the bounds of the numerical value of the torsional stiffness to be determined by using Michell's theory may be deduced by the application of the well known theorems of the mathematical analysis. The application of the bounds verified are demonstrated by examples.

Untere und obere Grenzen für die Verdrehungssteifheit eines durch eine dünne Schale verstärkten Kreisprofilstabes von veränderlichem Durchmesser. — Der Autor beschäftigt sich mit einem auf dem Rande durch eine dünne Schale verstärkten, aus linearelastischem Material hergestellten Stab von veränderlichem Durchmesser. Auf die Zahlenwertgrenzen der Verdrehungssteifheit (die mit Hilfe der Michellschen Theorie ermittelt werden können) bezüglichen Nachweise können grundsätzlich durch die Anwendung der wohlbekanntenen Lehrsätze der mathematischen Analyse gewonnen werden. Die Anwendungen der nachgewiesenen Schranken sind durch einige Beispiele demonstriert.

A LINEÁRIS MIKROPOLÁRIS RUGALMASSÁGTAN DUÁL VARIÁCIÓS ELVEI

SZEIDL GYÖRGY

[Beérkezett: 1981. március 13-án]

A dolgozat előállítja a lineáris mikropoláris rugalmasságtan teljes duál egyenletrendszerét térbeli feladatok esetében. A duál egyenletrendszer ismeretében a kiegészítő energia funkcionál és a Lagrange-féle multiplikátorok módszerének felhasználásával felépítésre kerül a duál egyenletrendszerrel ekvivalens, szabad variációs feladat funkcionálja. A különböző mellékfeltételek mellett érvényes duál funkcionálok a szabad variációs feladat funkcionáljának részeseteiként jelennek meg. A duál funkcionálok feszültségfüggvények szerinti variációiból az alakváltozásmozgók kompatibilitása következik.

I. Bevezetés, előzmények

1.1. A lineáris klasszikus rugalmasságtan duál variációs elveinek megfogalmazása több szerző nevéhez fűződik [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. A teljes kiegészítő energia funkcionál, mint alapvető duál funkcionál variációja során először SOUTHWELL, R. V. használt feszültségfüggvényeket statikailag lehetséges feszültségmezők előállítására [1]. Eljutott ezáltal az ún. „Southwell paradoxonhoz”. Ennek az a lényege, hogy tetszőleges feszültségmező képezhető három — a MAXWELL- és MORERA-féle — feszültségfüggvények segítségével, ugyanakkor azonban a hat SAINT-VENANT-féle kompatibilitási mezőegyenlet mint a teljes kiegészítő energia minimumának elvéből következő EULER-egyenlet fennállásához hat feszültségfüggvényre van szükség. További duál funkcionálok javasol TONTI, E. [2], ODEN, J. T.—REDDY, J. N. [3] és ABOVSZKIJ, N. P.—ANDREJEV, N. P.—DERUGA, A. P. [4]. Utóbbi a szerzők a feszültségfüggvény tenzor [8] mind a hat független koordinátáját zérustól különbözőnek tekintik és variálják, biztosítva ezáltal mind a hat SAINT-VENANT-féle kompatibilitási mezőegyenlet teljesülését (megkerülve tehát a „SOUTHWELL paradoxont”).

KOZÁK, I. egyrészt kimutatta [5], hogy az elmozdulásmozgó egyértékűségéhez szükséges és elégséges a három alkalmasan választott SAINT-VENANT-féle kompatibilitási mezőegyenlet, mint független mezőegyenletek és az ún. kompatibilitási peremfeltételek fennállása, másrészt megoldást adott a „SOUTHWELL-féle paradoxonra” [6] igazolva formális számításokkal, hogy a kiegészítő energia elvből következik az elmozdulásmozgó egyértékűségéhez szükséges és elégséges három kompatibilitási mezőegyenlet és a kompatibilitási peremfeltételek teljesülése akkor is, ha a statikailag lehetséges feszültségmező képzése során a feszültségfüggvény tenzor hat független koordinátája

közül, három alkalmasan választott koordináta értékét zérusnak tekintjük [8], és a fennmaradó hármat variáljuk.

További dolgozatában [7] KOZÁK, I. pontosította a [2, 3, 4]-ben bevezetett duál funkcionálokat, amennyiben olyan feszültségfüggvény tenzort alkalmazott, melynek csak három alkalmasan választott koordinátája különbözött zérustól és a kompatibilitási peremfeltételekre tekintettel részletesen megvizsgálta a test peremének állapotát.

1.2. A lineáris mikropoláris elasztostatika duál variációs elveinek megfogalmazása során fentiek alapján több kérdésre kell választ adni. nevezetesen:

a) meg kell vizsgálni, hogy a statikailag lehetséges feszültségmezők feszültségfüggvény tenzormezők segítségével történő képzése során a feszültségfüggvény tenzorok hány koordinátájának kell zérustól különböznie tetszőleges statikailag lehetséges feszültségmezők előállításához;

b) meg kell állapítani az elmozdulásmezők egyértékűségének (mrevtest-szerű mozgástól eltekintve) független, szükséges és elégséges feltételeit;

c) meg kell vizsgálni, hogy a teljes kiegészítő energia minimumának elvéből mint alapvető duál variációs elvből milyen EULER-egyenletek és peremfeltételek következnek, ha a statikailag lehetséges feszültségmezőket feszültségfüggvényekkel képezzük;

d) a további duál variációs elvek előállítása érdekében fel kell írni a lineáris mikropoláris elasztostatika duál egyenletrendszerét;

e) végezetül képezni kell a további, a [2, 3, 4, 7]-ben megfogalmazott duál variációs elvek mikropoláris esetre történő általánosításának tekinthető, duál variációs elveket.

Az első három kérdés tekintetében KOZÁK, I. és a szerző közös dolgozata ad választ [9]. A dolgozat a továbbiakban először röviden ismerteti a *d* és *e* alatti problémák megoldása érdekében a [9] munka főbb megállapításait.

1.3. Jelölje a vizsgált test térfogati tartományát V , határfelületét S . Feltételezzük, hogy a V tartomány egyszeresen összefüggő, és hogy a zárt S felület véges számú sima részből tevődik össze.

A testhez kötött tetszőleges (x^1, x^2, x^3) görbe vonalú koordinátarendszerben a szokásos jelöléseket és jelölésbeli megállapodásokat alkalmazzuk: latin index értéke 1, 2, 3 lehet, összegezési konvenció áll fenn néma indexpárra, a kovariáns deriváltakat pontosvevő után álló index jelzi.

Legyen a bevezetett koordinátarendszerben u_k az elmozdulásmező, φ^a a forgásmező (u_k és φ^a együtt elmozdulásmezők), γ_{kl} az elmozdulási alakváltozásmező, α_a^b a forgási alakváltozásmező (γ_{kl} és α_a^b együtt alakváltozásmezők), t^{kl} a feszültségmező, μ_a^b a feszültségpár mező (t^{kl} és μ_a^b együtt feszültségmezők) és jelölje x a helykoordináták összességét, g^{kl} , g_{pq} a mértéktenzorokat, ε^{klm} , ε_{pqr} a permutációs tenzorokat, n_k az S felület külső normális egységvektorát.

Feltételezzük, hogy a test anyaga homogén centroszimmetrikus, és hogy a testet a b^l térfogati erőrendszer és c_b térfogati erőpárrendszer terheli.

ODEN és REDDY dolgozata [3] TONTI nyomán [16] a matematikai fizika peremérték-feladatainak primál és duál megfogalmazását különbözteti meg az alapváltozó jellege szerint. A lineáris klasszikus elasztostatika esetén a primál peremérték-feladat alapváltozója az elmozdulásmező, elsődleges közbenső változója az alakváltozásmező, másodlagos közbenső változója a feszültségmező, a duál peremérték-feladat alapváltozója a feszültségfüggvény tenzormező, elsődleges közbenső változója a feszültségmező, másodlagos közbenső változója az alakváltozásmező. A primál peremérték-feladathoz a primál variációs elvek és funkcionálok (HU-WASHIZU-elv, HELLINGER—REISSNER-elv, a LAGRANGE-elv és funkcionáljai), a duál peremérték-feladathoz a duál variációs elvek és funkcionálok [3], [7] rendelhetők.

A lineáris mikropoláris elasztostatika primál egyenletrendszerét a klasszikus esettel analóg módon az u_k, φ^a elmozdulásmezőkkel mint alapváltozókkal, a γ_{kl}, κ_a^b alakváltozás-mezőkkel mint elsődleges közbenső változókkal, a $t^{kl}, \mu_{a,b}^a$ feszültségmezőkkel mint másodlagos közbenső változókkal az alábbiak szerint írhatjuk fel:

kinematikai egyenletek:

$$u_{l,k} + \varepsilon_{lks} \varphi^s = \gamma_{kl} \quad x \in V \quad (1.1)_1$$

$$\varphi_{a;b}^a = \kappa_b^a \quad (1.1)_2$$

elmozdulási peremfeltételek:

$$u_k = \hat{u}_k, \quad \varphi^a = \hat{\varphi}^a \quad x \in S_u \quad (1.2)_{1,2}$$

anyagtvörvény:

$$a_{-1}^{klpq} \gamma_{pq} = t^{kl} \quad x \in V \quad (1.3)_1$$

$$c_{-1}^{abpq} \kappa_{pq} = \mu^{ab} \quad (1.3)_2$$

feszültségi peremfeltételek:

$$n_k t^{kl} = \hat{t}^l, \quad n_a \mu_{a,b}^a = \hat{\mu}_b \quad x \in S_t \quad (1.4)_{1,2}$$

egyensúlyi egyenletek:

$$t^{kl};_k + b^l = 0 \quad x \in V \quad (1.5)_1$$

$$\mu_{a,b}^a;_a + \varepsilon_{bpq} t^{pq} + c_b = 0 \quad (1.5)_2$$

ahol $a_{-1}^{klpq}, c_{-1}^{abpq}$ az anyagállandók tenzorai, \hat{u}_k és $\hat{\varphi}^a$ az S_u peremrészen megadott elmozdulások, \hat{t}^l és $\hat{\mu}_b$ az S_t peremrészen megadott terhelés. $S_u \cup S_t = S$, $S_u \cap S_t = 0$ és g a két peremrész közös görbéje.

A lineáris mikropoláris elasztostatika (1.1)–(1.5) primál egyenletrendszerhez tartozó primál variációs elvek a HU-WASHIZU-elv, a HELLINGER—REISSNER-elv, a LAGRANGE-elv általánosításai¹ mikropoláris esetre [10], [11].

¹ A [10] dolgozat eléggé általános peremfeltételek mellett értelmezi és rendszerezi a lineáris mikropoláris elasztostatika primál variációs elveit. Értelmezi továbbá a primál peremértékfeladat gyenge (általánosított) megoldását és kimutatja annak létezését és unicitását.

1.4. A $t^{kl}(x)$, $\mu_a^b(x)$ feszültségmezőket egyensúlyinak [statikailag lehetségesnek] nevezzük, ha kielégítik az (1.5) egyensúlyi egyenleteket [és az (1.4) feszültségi peremfeltételeket]. Egyensúlyi [statikailag lehetséges] feszültségmezők feszültségfüggvény tenzorok segítségével képezhetők [12], [13], [14]. A GÜNTHER által adott megoldás teljessé tételével egymástól függetlenül egyidejűleg SCHAEFER, H. és CARLSON, D. E. igazolta, hogy az (1.5) egyensúlyi egyenletek bármely megoldása előállítható az elegendően sima, egyébként tetszőleges $h_y^l(x)$, $f_{yb}(x)$ feszültségfüggvény tenzorokkal:

$$t^{kl} = \varepsilon^{kmy} h_{y,m}^l + \dot{t}^{kl} \quad x \in V \quad (1.6)_1$$

$$\mu_a^b = \varepsilon^{apy} (f_{yb;p} + \varepsilon_{bpl} h_y^l) + \dot{\mu}_a^b \quad x \in V \quad (1.6)_2$$

ahol \dot{t}^{kl} és $\dot{\mu}_a^b$ az (1.5) egyensúlyi egyenletek partikuláris megoldásai. Ezek az (1.8) feltételeket kielégítő $p^l(x)$, $q_b(x)$ vektormezőkből az alábbiak szerint képezhetők:

$$\dot{t}^{kl} = p^l_{;m} g^{mk}, \quad x \in V \quad (1.7)_1$$

$$\dot{\mu}_a^b = g^{am} (\varepsilon_{mby} p^y + q_b; m) \quad x \in V \quad (1.7)_2$$

$$g^{mn} p^l_{;mn} = -b^l, \quad g^{mn} q_b; mn = -c_b \quad x \in V. \quad (1.8)_{1,2}$$

Az (1.5)-be történő visszahelyettesítésekkel ellenőrizhető, hogy a $t^{kl}(x)$, $\mu_a^b(x)$ feszültségmezők fenti előállításai egyensúlyiak.

A dolgozat a \dot{t}^{kl} , $\dot{\mu}_a^b$ partikuláris megoldásokat továbbiakban ismertnek tételezi fel.

Kimutatható [9], hogy a kilenc h_y^l , illetve ugyancsak kilenc f_{yb} feszültségfüggvény közül három-három, az AB, illetve KL indexpárokkal jelölt f_{AB} , illetve h_K^L zérusnak választható.² Az AB és KL indexpárok nem lehetnek tetszőlegesek. Értéküket úgy kell megválasztani, hogy az

$$r^L_{;K} = \beta^L_{K}(x) \quad x \in V \quad (1.9)_1$$

$$w_{B;A} + \varepsilon_{BA}s r^s = \alpha_{AB}(x) \quad x \in V \quad (1.9)_2$$

egyenleteknek tetszőleges $\beta^L_{K}(x)$ és $\alpha_{BA}(x)$ függvények esetén is legyen az $r^l(x)$ és $w_b(x)$ vektormezőkre megoldásuk. Ily módon elegendő azzal a hat h_S^T , illetve f_{XY} feszültségfüggvénnyel számolni, melyek ST és XY indexpárjai a KL és AB indexpárokkal együtt az y_b , illetve y_l indexpárok valamennyi lehetséges értékét kiadják.

Fentiekkel összhangban feltételezzük, hogy az f_{yb} , h_y^l feszültségfüggvény tenzorok olyan szerkezetűek, hogy csak hat-hat független koordinátájuk külön-

² Abból kell kiindulni, hogy az $r^l(x)$, $w_b(x)$ elegendően sima vektormezőekkel képzett

$$h_y^l = r^l_{;y}(x), \quad f_{yb} = w_{b;y}(x) + \varepsilon_{bys} r^s(x) \quad x \in V$$

feszültségfüggvény tenzorokhoz azonosan zérus feszültségmezők tartoznak.

bőzik zérustól. A zérustól különböző és azzal megegyező koordinátákat az (x_1, x_2, x_3) koordinátarendszerben továbbiakban is fentiek szerint jelöljük.

1.5. A test határfelületén vett egyenleteket, valamint az ugyanitt végzett számításokat áttekinthetőbbé teheti alkalmas felületi koordinátarendszer bevezetése [5, 9].

Legyen az $x^k = x^k(\xi^1, \xi^2)$ egyenletű határfelületen (ξ^1, ξ^2) a felületi paraméterek, illetve az annak közvetlen környezetére kiterjedő V_S tartományban (ξ^1, ξ^2, ξ^3) a felülethez kötött koordinátarendszer, ahol ξ^3 a külső n normális egységvektor mentén mért előjeles távolság és S -en $\xi^3 = 0$. A ξ^k koordináták összességét jelölje (ξ) . Görög index értéke megállapodás szerint 1, 2 lehet.

Továbbiakban a határfelületen vett egyenletek írásakor elsősorban a (ξ) koordinátarendszert alkalmazzuk anélkül azonban, hogy erre előzetesen felhívni a figyelmet. Az egyes vektorok, tenzorok betűjelei változatlanok. Nyilvánvaló, hogy a felületi koordinátarendszerben $n_3 = 1$ és $n_\alpha = 0$.

A másodrendű C tenzor (ξ) és (x) koordinátarendszerben írható $C_{,l}^k, C_{,q}^p$ koordinátái között fennállnak a

$$C_{,l}^k = C_{,q}^p \sigma_p^k \tau_l^q \tag{1.10}_1$$

$$C_{,q}^p = C_{,l}^k \tau_k^p \sigma_q^l \tag{1.10}_2$$

$$\det \tau_e^k \neq 0, \sigma_p^k \tau_k^l = \delta_p^l \tag{1.10}_{3,4}$$

transzformációs formulák. $(\tau_l^q$ és σ_p^k a transzformáció tenzorai.)

A feszültségfüggvény y tenzorok tekintetében az alábbi képletek írhatók

$$h_\eta^i(\xi) = h_S^T(x) \tau_\eta^S \sigma_T^i \tag{1.11}_1$$

$$h_3^i(\xi) = h_S^T(x) \tau_3^S \sigma_T^i \tag{1.11}_2$$

$$f_{\eta b}(\xi) = f_{XY}(x) \tau_\eta^X \tau_b^Y \tag{1.11}_3$$

$$f_{3b}(\xi) = f_{XY}(x) \tau_3^X \tau_b^Y. \tag{1.11}_4$$

A dolgozat feltételezi, hogy az $(1.11)_1, (1.11)_3$ egyenletek kölcsönösen egyértelmű függvénykapcsolatot adnak a h_η^i és h_S^T , illetve az $f_{\eta b}$ és f_{XY} feszültségfüggvények között. Ez esetben ugyanis a hat független nem azonosan zérus h_S^T feszültségfüggvényhez hat egymástól független, nem azonos zérus h_η^i feszültségfüggvényt rendelünk és viszont. Hasonló megállapítás érvényes az f_{XY} és $f_{\eta b}$ feszültségfüggvények tekintetében.

A h_3^i és f_{3b} feszültségfüggvények a test határfelületén írt egyenletekben nem jelennek meg.

1.6. A $\gamma_{kl}(x), \alpha_a^b(x)$ alakváltozásmezőket {kompatibilisnek} (kinematikailag lehetségesnek) nevezzük, ha a

$$\gamma_{kl}(x) = u_{l;k} + \varepsilon_{lks} \varphi^s \quad x \in V \tag{1.12}_1$$

$$\alpha_a^b(x) = \varphi^a_{;b} \quad x \in V \tag{1.12}_2$$

differenciálegyenleteknek van megoldásuk az u_k és φ^a elmozdulásmezőkre [és a megoldás kielégíti az (1.2) kinematikai peremfeltételeket].

Kompatibilis (kinematikailag lehetséges) alakváltozásmezők ismeretében az elmozdulásmezők a CEZARO-formulák segítségével képezhetők [11].

Jelölje e^{ab} és d^y_l az inkompatibilitási tenzorokat:

$$e^{yb}(x) = \varepsilon^{ypa} \varkappa_{a;p}^b, \quad x \in V \quad (1.13)_1$$

$$d^y_l(x) = \varepsilon^{ymk} (\gamma_{kl;m}^i - \varepsilon_{hls} \varkappa_m^s) \quad x \in V. \quad (1.13)_2$$

A $\gamma_{kl}(x)$, $\varkappa_{ab}(x)$ alakváltozásmezők kompatibilitásának független, szükséges és elégséges feltételeit a [9] dolgozat adta meg. Eszerint az alakváltozásmezőkre nézve fenn kell állnia hat-hat kompatibilitási mezőegyenletnek és a kompatibilitási peremfeltételeknek:

kompatibilitási mezőegyenletek:

$$e^{XY}(x) = 0, \quad d^S_T(x) = 0 \quad x \in V \quad (1.14)_{1,2}$$

kompatibilitási peremfeltételek:

$$n_Y e^{Yb}(x) = 0, \quad n_Y d^Y_l(x) = 0 \quad x \in S \quad (1.15)_{1,2}$$

Az (1.14) egyenletekben az XY , ST indexpárokat ugyanolyan szabály szerint kell megválasztani, mint azt az f_{yb} , h_y^T feszültségfüggvény tenzorok nem azonosan zérus f_{XY} , h_S^T koordinátái esetén az 1.4. pontban láttuk.

Vegyük észre, hogy az alakváltozásmezők kompatibilitásához — a klasszikus esethez hasonlóan — elegendő az $e^{yb} = 0$, $d^y_l = 0$ kompatibilitási egyenletek egy részének és a kompatibilitási peremfeltételeknek fennállása. Ez esetben ugyanis a fennmaradó

$$e^{AB}(x) = 0, \quad d^K_L(x) = 0 \quad x \in V \quad (1.16)_{1,2}$$

kompatibilitási egyenletek is teljesülnek.

2. A lineáris mikropoláris elasztostatika duál egyenletrendszere

2.1. A lineáris klasszikus elasztostatika duál egyenletrendszerében alapváltozónak a feszültségfüggvény tenzormezőt, elsődleges közbenső változónak a feszültségmezőt, másodlagos közbenső változónak az alakváltozásmezőt tekintik [2, 3, 7]. A teljes, peremfeltételekben is korrekt duál egyenletrendszerhez KOZÁK, I. lényegében úgy jutott el, hogy a klasszikus elasztostatika feszültségmezőre megfogalmazott peremérték-feladatában a feszültségmezőt a szokásos módon [1, 2, 3] feszültségfüggvény tenzor segítségével fejezte ki, ügyelve egyúttal a feszültségfüggvény tenzor azonosan zérus és nem zérus koordinátáinak megválasztására és a peremfeltételek helyes felírására is. A lineáris mikropoláris elasztostatika duál peremérték-feladatának felírásánál dolgozat lényegében ugyanezt az utat követi.

2.2. A mikropoláris elasztostatika feszültségmezőkre felírt peremérték-feladatának mezőegyenleteit és peremfeltételeit az alábbi egyenletek alkotják kompatibilitási egyenletek:

$$e^{XY}(x) = \varepsilon^{Xpa} \varkappa_{a';p}^y = 0 \quad x \in V \quad (2.1)_1$$

$$d^S_T(x) = \varepsilon^{Smk}(\gamma_{kT;m} + \varepsilon_{kTs} \varkappa_m^s) = 0 \quad x \in V \quad (2.1)_2$$

kompatibilitási peremfeltételek:

$$n_y e^{yb}(\xi) = e^{3b} = \varepsilon^{3\pi\alpha} \varkappa_{\alpha';\pi}^b = 0 \quad \xi \in S \quad (2.2)_1$$

$$n_y d^y_l(\xi) = d^3_l = \varepsilon^{3vX}(\gamma_{Xl;v} + \varepsilon_{Xls} \varkappa_v^s) \quad \xi \in S \quad (2.2)_2$$

elmozdulási peremfeltételek:

$$u_k = \hat{u}_k \quad \varphi^a = \hat{\varphi}^a \quad S_u \quad (2.3)_{1,2}$$

HOOKE-törvény:

$$\gamma_{kl} = a_{klpq} t^{pq}, \quad \varkappa_{ab} = c_{abpq} \mu^{pq} \quad x \in V \quad (2.4)_{1,2}$$

feszültségi peremfeltételek:

$$n_k t^{kl} = \hat{t}^l, \quad n_a \mu^a_b = \hat{\mu}_b \quad \xi \in S_t \quad (2.5)_{1,2}$$

egyensúlyi egyenletek:

$$\begin{aligned} t^{kl}_{;k} + b^l &= 0, \\ \mu^a_b{}_{;a} + \varepsilon_{bpq} t^{pq} + c_b &= 0. \end{aligned} \quad x \in V \quad (2.6)_{1,2}$$

Fentiekből a duál egyenletrendszerhez két további körülmény és az (1.6) egyenletek felhasználásával juthatunk el.

I. A

$$\gamma_{\chi l} - \hat{u}_{l;\chi} - \varepsilon_{l\chi s} \hat{\varphi}^s = 0 \quad \xi \in S_u \quad (2.7)_1$$

$$\varkappa_{\alpha'}^b - \hat{\varphi}^b{}_{;\alpha} = 0 \quad \xi \in S_u \quad (2.7)_2$$

egyenletek fennállása esetén teljesülnek egyrészt a (2.2) kompatibilitási peremfeltételek az S_u peremrészén, másrészt a CEZARO-formulákkal³ [9, 11] a (2.3) elmozdulási peremfeltételeket kielégítő elmozdulásmezők képezhetők.

Megjegyezzük, hogy a $\gamma_{kl}(x)$, $\varkappa_a^b(x)$ alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltához fentieket is figyelembe véve (2.1) V -n, (2.2) S_t -n és (2.7) S_u -n történő fennállása szükséges.

II. Válasszuk meg a $\hat{h}_{\eta'}^l(\xi)$, $\hat{f}_{\eta b}^l(\xi)$ $\xi \in S_t$ nem azonosan zérus feszültség-függvény tenzorokat oly módon, hogy fennálljanak az alábbi egyenletek:

$$\hat{t}^l - \hat{t}^l = \varepsilon^{3v\eta} \hat{h}_{\eta'}^l{}_{;v} \quad \xi \in S_t \quad (2.8)_1$$

$$\hat{\mu}_b - \hat{\mu}_b = \varepsilon^{3\pi\eta} (\hat{f}_{\eta b}^l{}_{;\pi} + \varepsilon_{b\pi l} \hat{h}_{\eta'}^l) \quad \xi \in S_t \quad (2.8)_2$$

³ A [11]-ben közölt képletek egyenesvonalú koordinátarendszerre vonatkoznak.

ahol

$$\dot{t}^i = \dot{t}^{3i}, \quad \dot{\mu}_b = \dot{\mu}_b^3 \quad \xi \in S. \quad (2.9)$$

Tételezzük fel, hogy a $\hat{h}_\eta^i(\xi)$, $\hat{f}_{\eta b}(\xi)$ feszültségfüggvény tenzorok ismeretesek. Ebben az esetben az

$$\varepsilon^{3m}(\hat{h}_\eta^i - \hat{h}_\eta^i)_{;v} = 0 \quad \xi \in S_t \quad (2.10)_1$$

$$\varepsilon^{3m}(f_{\eta b;\pi} - \hat{f}_{\eta b;\pi}) + \varepsilon_{b\pi l}(\hat{h}_\eta^l - \hat{h}_\eta^l) = 0 \quad \xi \in S_t \quad (2.10)_2$$

egyenletek ekvivalensek a (2.5)_{1,2} feszültségi peremfeltételekkel ha a $t^{kl}(\xi)$, $\mu_{a,b}^a(\xi)$ feszültségmezőket az (1.6) formulák segítségével képezzük.

2.3. A lineáris mikropoláris elasztostatika duál egyenletrendszerének mezőegyenleteit és peremfeltételeit a (2.1)–(2.6) egyenletekből (1.6) és az I., II. alatt mondottak figyelembevételével kapjuk:

mezőegyenletek;

$$\varepsilon^{kmy} h_{y^i}^i{}_{;m} = t^{kl} - \dot{t}^{kl} \quad x \in V \quad (2.11)_1$$

$$\varepsilon^{apy}(f_{yb;p} + \varepsilon_{bpl} h_{y^i}^i) = \mu_{a,b}^a - \dot{\mu}_{a,b}^a \quad x \in V \quad (2.11)_2$$

$$a_{klpq} t^{pq} = \gamma_{kl} \quad x \in V \quad (2.12)_1$$

$$c_{abpq} \mu^{pq} = \kappa_{ab} \quad x \in V \quad (2.12)_2$$

$$e^{XY} = e^{Xpa} \kappa_{a^i}^i{}_{;p} = 0 \quad x \in V \quad (2.13)_1$$

$$d_{;T}^S = \varepsilon^{Smk}(\gamma_{kT;m} + \varepsilon_{kTs} \kappa_m^s) = 0 \quad x \in V \quad (2.13)_2$$

peremfeltételek:

$$\gamma_{\chi l} - u_{l;\chi} - \varepsilon_{l\chi s} \hat{\varphi}^s = 0 \quad \xi \in S_u \quad (2.14)_1$$

$$\kappa_{\alpha}^b - \hat{\varphi}_{;\alpha}^b = 0 \quad \xi \in S_u \quad (2.14)_2$$

$$\varepsilon^{3mz} \kappa_{\alpha^i}^i{}_{;\pi} = 0 \quad \xi \in S_t \quad (2.15)_1$$

$$\varepsilon^{3v\chi} (\gamma_{\chi l}{}_{;v} + \varepsilon_{\chi ls} \kappa_v^s) = 0 \quad \xi \in S_t \quad (2.15)_2$$

$$\varepsilon^{3m}(\hat{h}_\eta^i{}_{;v} - \hat{h}_\eta^i{}_{;v}) = 0 \quad \xi \in S_t \quad (2.16)_1$$

$$\varepsilon^{3m} [f_{\eta b;\pi} - \hat{f}_{\eta b;\pi} + \varepsilon_{b\pi l}(\hat{h}_\eta^l - \hat{h}_\eta^l)] = 0 \quad \xi \in S_t \quad (2.16)_2$$

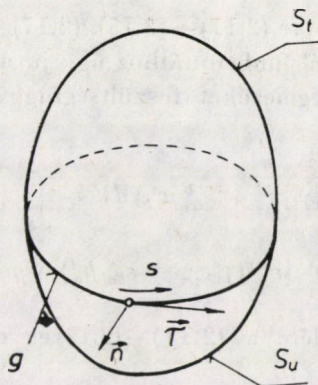
folytonossági feltétel a g görbe (1. ábra) mentén:

$$\tau^\alpha(\kappa_{\alpha}^b - \hat{\varphi}_{;\alpha}^b) = 0 \quad \xi \in g \quad (2.17)_1$$

$$\tau^{\chi l}(\gamma_{\chi l}^i - \hat{u}_{l;\chi} - \varepsilon_{l\chi s} \hat{\varphi}^s) = 0 \quad \xi \in g \quad (2.17)_2$$

ahol τ^α a g görbe érintő egységvektora (1. ábra).

Megjegyezzük, hogy a (2.17) egyenletek azt a magától értetődő feltételt fejezik ki, hogy a γ_{kl} , κ_a^b mezők a g görbén történő áthaladáskor folytonosan változnak.



1. ábra

Vegyük észre, hogy a $(2.8)_{1,2}$ egyenletek nem határozzák meg egyértelműen a \hat{h}_η^l és $\hat{f}_{\eta b}$ feszültségfüggvények értékét, hiszen az ismeretlenek száma tizenkettő és az egyenletek száma hat. E tény szem előtt tartásával a

$$h_\eta^l - \hat{h}_\eta^l = 0 \quad \xi \in S_t \quad (2.18)_1$$

$$f_{\eta b} - \hat{f}_{\eta b} = 0 \quad \xi \in S_t \quad (2.18)_2$$

peremfeltételeket is előírhatjuk $(2.16)_{1,2}$ helyett. Mondottak alapján vagy a $(2.11) - (2.17)$ egyenletrendszert vagy a $(2.11) - (2.15)$, $(2.17) - (2.18)$ egyenletrendszert tekintjük duál egyenletrendszernek.

A duál egyenletrendszer alapváltozói a h_y^l, f_{yb} feszültségfüggvény mezők, elsődleges közbenső változói a t^{kl}, μ_a^a feszültségmezők, másodlagos közbenső változói a γ_{kl}, κ_a^b alakváltozásmezők.

3. A lineáris mikropoláris elasztostatika duál variációs elvei

3.1. A lineáris mikropoláris elasztostatika alapvető duál variációs elve a kiegészítő energia minimumának elve. A

$$K = \frac{1}{2} \int_V (\gamma_{kl} t^{kl} + \kappa_a^b \mu_a^b) dV - \int_{S_u} (n_k t^{kl} \hat{u}_l + n_a \mu_a^b \hat{\varphi}^b) dS \quad (3.1)$$

teljes kiegészítő energia funkcionál a statikailag lehetséges $t^{kl}(x), \mu_a^b(x)$ feszültségmezők függvénye, mivel γ_{kl}, κ_a^b értékeit a statikailag lehetséges feszültségmezőkből a (2.12) anyagtörvény segítségével képezzük. A teljes kiegészítő energia minimumának elve szerint fenti funkcionálnak a tényleges megoldásnál, vagyis ha a statikailag lehetséges feszültségmezőkből számított statikailag lehetséges alakváltozásmezők egyúttal kinematikailag is lehetségesek, szigorú minimuma van.

A (2.11)–(2.17), illetve (2.11)–(2.15), (2.17)–(2.18) duál egyenletrendszerekhez tartozó első duál funkcionálhoz úgy jutunk (3.1)-ből, hogy a statikailag lehetséges feszültségmezőket feszültségfüggvények segítségével képezzük (2.11) alapján:

$$K = \frac{1}{2} \int_V (\gamma_{kl} t^{kl} + \kappa_a^b \mu_a^b) dV - \int_{S_a} \{ (\varepsilon^{3\eta} h_{\eta,;\nu}^l + \dot{t}^l) \hat{u}_l + [\varepsilon^{3\eta} (f_{\eta b,;\pi} + \varepsilon_{b\pi l} h_{\eta}^l) + \dot{\mu}_b] \hat{\varphi}^b \} dS. \quad (3.2)$$

Továbbiakban egyelőre a (2.11)–(2.17) egyenletrendszerre korlátozzuk a figyelmet.

Ez esetben a (3.2) funkcionálhoz mellékfeltételként mint mezőegyenletek a (2.11), (2.12) egyenletek, mint peremfeltételek pedig a (2.16) egyenletek tartoznak.

Kimutatta ui. KOZÁK, I. és a szerző [9], hogy a (3.2) funkcionál stacionaritásának feltételéből mint EULER-egyenletek — figyelembe véve, hogy a feszültségfüggvényt tenzorok egyes koordinátái azonosan zérusok — a (2.13)_{1,2} mezőegyenletek, és mint természetes peremfeltételek a (2.14), (2.15) peremfeltételek következnek, továbbá fennáll a (2.17) folytonossági egyenlet is. Más szóval a (3.2) funkcionál stacionér voltából a $\gamma_{kl}(x)$, $\kappa_a^b(x)$ alakváltozásmezők kinematikailag lehetséges voltának feltételeit kapjuk.

3.2. Szabad — mellékfeltételeket nem tartalmazó — variációs feladathoz (funkcionálhoz) a LAGRANGE-féle multiplikátorok módszerével juthatunk [4, 15]. Jelölje az egyelőre ismeretlen, egyértékű LAGRANGE multiplikátorokat rendre

$$\overset{(t)}{\lambda}{}^{kl}, \overset{(\mu)}{\lambda}{}_{ab}, \overset{(\gamma)}{\lambda}{}_{kl}, \overset{(\kappa)}{\lambda}{}_a^b, \overset{(u)}{\lambda}{}_l, \overset{(\varphi)}{\lambda}{}^b.$$

Ezek segítségével és a mellékfeltételeket adó (2.11), (2.12) és (2.16) egyenletek felhasználásával (3.2)-ből az alábbi funkcionál építhető fel:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_4(\gamma_{kl}, \kappa_a^b, t^{kl}, \mu_a^b, h_y^l, f_{yb}, \hat{h}_\eta^l, \hat{f}_{\eta b}, \overset{(\gamma)}{\lambda}{}_{kl}, \overset{(\kappa)}{\lambda}{}_a^b, \overset{(t)}{\lambda}{}^{kl}, \overset{(\mu)}{\lambda}{}_{ab}, \overset{(u)}{\lambda}{}_l, \overset{(\varphi)}{\lambda}{}^b) = \\ = \tilde{J}_4^{V1} + \tilde{J}_4^{V2} + \tilde{J}_4^U + \tilde{J}_4^T \end{aligned} \quad (3.3)_1$$

ahol

$$\begin{aligned} \tilde{J}_4^{V1} = \frac{1}{2} \int_V (t^{kl} \gamma_{kl} + \mu_a^b \kappa_a^b) dV + \frac{1}{2} \int_V [\overset{(t)}{\lambda}{}^{kl} (a_{klpq} t^{pq} - \gamma_{kl}) + \\ + \lambda^{ab} (c_{abpq} \mu^{pq} - \kappa_{ab})] dV \end{aligned} \quad (3.3)_2$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_4^{V2} = - \int_V \{ \overset{(\gamma)}{\lambda}{}_{kl} (t^{kl} - \hat{t}^{kl} - \varepsilon^{kmy} h_{y,;\pi}^l) + \overset{(\kappa)}{\lambda}{}_a^b [\mu_a^b - \\ - \dot{\mu}_a^b - \varepsilon^{apy} (f_{yb,;\pi} + \varepsilon_{b\pi s} h_y^s)] \} dV \end{aligned} \quad (3.3)_3$$

$$J_4^U = - \int_{S_n} \{ (\varepsilon^{3\nu\eta} h_{\eta,;\nu}^l + \dot{t}^l) \dot{u}_l + [\varepsilon^{3\nu\eta} (f_{\eta b ; \pi} + \varepsilon_{b\pi s} h_{\eta}^s) + \dot{\mu}_b] \dot{\varphi}^b \} dS \quad (3.3)_4$$

$$J_4^T = \int_{S_t} \{ \varepsilon^{3\nu\eta} (h_{\eta,;\nu}^l - \dot{h}_{\eta,;\nu}^l) \lambda_l + \varepsilon^{3\nu\eta} [f_{\eta b ; \pi} - \dot{f}_{\eta b ; \pi} + \varepsilon_{b\pi s} (h_{\eta}^s - \dot{h}_{\eta}^s)] \lambda^b \} dS. \quad (3.3)_5$$

A J_4 funkcionál a (6.2), (6.3), (6.4) összefüggések felhasználásával, rendezések után az alábbi alakra hozható:

$$J_4 = J_4^{V1} + J_4^{V21} + J_4^{V22} + J_4^{T1} + J_4^{U1} + J_4^{G1} + J_4^{T2} + J_4^{G2}. \quad (3.4)_1$$

Itt

$$J_4^{V21} = - \int_V [\lambda_{kl}^{(\gamma)} (t^{kl} - \dot{t}^{kl}) + \lambda_a^b (\mu_a^a - \dot{\mu}_a^a)] dV \quad (3.4)_2$$

$$\tilde{J}_4^{V22} = \int_V [\varepsilon^{ypa} \lambda_{a;p}^{(\kappa)} f_{yb} + \varepsilon^{ymk} (\lambda_{kl;m}^{(\gamma)} + \varepsilon_{kls} \lambda_{m; \cdot y}^{(\kappa)})] dV \quad (3.4)_3$$

$$J_4^{T1} = - \int_{S_t} [\varepsilon^{3\eta} (\lambda_{\chi l}^{(\gamma)} + \lambda_l ; \chi + \varepsilon_{l\chi s} \lambda^s) h_{\eta}^l + \varepsilon^{3\alpha\eta} (\lambda_a^b + \lambda^b ; a) f_{\eta b}] dS \quad (3.4)_4$$

$$J_4^{U1} = - \int_{S_u} [\varepsilon^{3\eta} (\lambda_{\chi l}^{(\gamma)} - \dot{u}_l ; \chi - \varepsilon_{l\chi s} \dot{\varphi}^s) h_{\eta}^l + \varepsilon^{3\alpha\eta} (\lambda_a^b - \dot{\varphi}^b ; a) f_{\eta b} + \dot{t}^l \dot{u}_l + \dot{\mu}_b \dot{\varphi}^b] dS \quad (3.4)_5$$

$$J_4^{G1} = \oint_g [(\lambda_l + \dot{u}_l) h_{\eta}^l \tau^\eta + (\lambda^b + \dot{\varphi}^b) f_{\eta b} \tau^\eta] dS \quad (3.4)_6$$

$$J_4^{T2} = \int_{S_t} [\varepsilon^{3\eta} (\lambda_l ; \chi + \varepsilon_{l\chi s} \lambda^s) \dot{h}_{\eta}^l + \varepsilon^{3\alpha\eta} \lambda^b ; a f_{\eta b}] dS \quad (3.4)_7$$

$$J_4^{G2} = \oint_g (\lambda_l \dot{h}_{\eta}^l \tau^\eta + \lambda^b \dot{f}_{\eta b} \tau^\eta) ds. \quad (3.4)_8$$

3.3. Az ismeretlen LAGRANGE multiplikátorok meghatározása érdekében képezzük a \tilde{J}_4 funkcionál γ_{kl} és κ_a^b alakváltozásmozók, t^{kl} és μ_a^b feszültségmozók, továbbá a $h_{\eta}^l, f_{yb}, \dot{h}_{\eta}^l, \dot{f}_{\eta b}$ feszültségfüggvények szerinti variációját (a multiplikátorok szerinti variációk a stacionaritás kihasználásával a mellékfeltételeket adják) és használjuk ki a stacionaritás feltételét.

Figyelembe kell venni a számítások során, hogy

– a h_{η}^l, f_{yb} feszültségfüggvény tenzorok csupán hat-hat nem azonosan zérus koordinátája variálható;

– a $h_{\eta}^l, f_{\eta b}$ feszültségfüggvények variációi a (2.11)₁, (2.12)₁ transzformációs formulák szerint a h_{η}^l, f_{yb} hat-hat nem azonosan zérus koordinátáinak

variációival kölcsönösen egyértelmű módon kifejezhetők (erre tekintettel h_{η}^i és $f_{\eta b}$ -t szabadon variáljuk S_I -n);

— a $\hat{h}_{\eta}^i, \hat{f}_{\eta b}$ feszültségfüggvények — ha nem is szabadon, de — variálhatók S_I -n.

Utóbbi szempont magyarázatra szorul.

A dolgozat feltételezi, hogy

$$\delta \hat{t}^{kl} = 0, \delta \hat{u}^a_b = 0. \tag{3.5}$$

Mivel az S_I -n előírt felületi terhelések variációja szükségképp zérus, fenn kell állnia a (2.8)_{1,2} feszültségi peremfeltételek variációjával adódó

$$\varepsilon^{3\eta\gamma} \delta \hat{h}_{\eta}^i{}_{;\nu} = 0 \quad \xi \in S_I \tag{3.6}_1$$

$$\varepsilon^{3\eta\gamma} (\delta \hat{f}_{\eta b}{}_{;\pi} + \varepsilon_{b\pi l} \delta \hat{h}_{\eta}^l) = 0 \quad \xi \in S_I \tag{3.6}_2$$

egyenleteknek. Legyen \hat{r}^i, \hat{w}_b az S_I -n értelmezett egyébként tetszőleges vektormező. Könnyen ellenőrizhető, hogy mindig teljesülnek a (3.6)_{1,2} egyenletek, ha

$$\delta \hat{h}_{\eta}^i = \delta \hat{r}^i{}_{;\eta} \quad \xi \in S_I \tag{3.7}_1$$

$$\delta \hat{f}_{\eta b} = \delta \hat{w}_b{}_{;\eta} + \varepsilon_{b\eta l} \delta \hat{r}^l \quad \xi \in S_I \tag{3.7}_2$$

Képezhetjük most már a J_4 funkcionál megfelelő variációit.⁴

A stacionaritás

$$\delta_{t,\mu} J_4 = \delta_{t,\mu} J_4^{V1} + \delta_{t,\mu} J_4^{V21} = 0 \tag{3.8}_1$$

$$\delta_{\gamma,\kappa} J_4 = \delta_{\gamma,\kappa} J_4^{V1} = 0 \tag{3.8}_2$$

$$\delta_{h,f} J_4 = \delta_{h,f} J_4^{T1} + \delta_{h,f} J_4^{U1} + \delta_{h,f} J_4^{G1} = 0 \tag{3.8}_3$$

feltételeiből fentebb mondottak és a (3.3)₂, (3.4)_{2,...,5} összefüggések kihasználásával, a variációk tetszőleges volta alapján rendre az alábbi egyenleteket és peremfeltételeket kapjuk;

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \gamma_{kl} + \frac{1}{2} \lambda^{pq} a_{pqkl} - \lambda_{kl} &= 0 \\ \frac{1}{2} \kappa_a{}^b + \frac{1}{2} \lambda^{pq} c_{pqa}{}^b - \lambda_a{}^b &= 0 \end{aligned} \right\} x \in V \tag{3.9}_{1,2}$$

$$t^{kl} - \lambda^{kl} = 0, \mu^a{}_b - \lambda^a{}_b = 0 \quad x \in V \tag{3.9}_{3,4}$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^{Xpa} \lambda_{a;\rho}^Y &= 0 \\ \varepsilon^{Smk} (\lambda_{kT;m}^{(\gamma)} + \varepsilon_{kTs} \lambda_m^{(\kappa)s}) &= 0 \end{aligned} \right\} x \in V \tag{3.10}_{1,2}$$

⁴ A δ mellett jobbra lenn álló indexek külön is jelzik, hogy a variáció mely változók szerint történik.

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{xl}^{(\gamma)} + \lambda_l^{(u)}; x + \varepsilon_{lx^s} \lambda^s &= 0 \\ \lambda_x^{(\kappa)b} + \lambda^b; x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \xi \in S_l \quad (3.10)_{3,4}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{xl}^{(\gamma)} - \hat{u}_l; x - \varepsilon_{lx^s} \hat{\varphi}^s &= 0 \\ \lambda_x^{(\kappa)b} - \hat{\varphi}^b; x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \xi \in S_u \quad (3.10)_{5,6}$$

$$\lambda^l + \hat{u}^l = 0 \quad \lambda^b + \hat{\varphi}^b = 0 \quad \xi \in g \quad (3.10)_{7,8}$$

A (6.5) és (6.6) azonosságok felhasználásával belátható, hogy

$$\delta_{\hat{h}_i^j} J_4 = \delta_{\hat{h}_i^j} J_4^{T^2} + \delta_{\hat{h}_i^j} J_4^{G_2} \equiv 0. \quad (3.11)$$

Mivel fenti egyenlet azonosság, \hat{h}_i^l és \hat{f}_{η^b} variálásával nem kapunk további egyenletet.

A (3.9), (3.10) egyenletekből és a (2.11), (2.12), (2.16) mellékfeltételekből, figyelembe véve, hogy a (3.10)_{3,4} és (3.10)_{7,8} egyenletek alapján CEZARO-formuláival [9, 11] számított $\lambda_l^{(u)}$ és $\lambda^b^{(\varphi)}$ $\xi \in S_l$ vektormezők az u_l, φ^b tényleges megoldást adják, az ismeretlen LAGRANGE multiplikátorokra az alábbi eredmény adódik:

$$\lambda^{kl}{}^{(l)} = t^{kl}, \quad \lambda_{a,b}^{(\mu)} = \mu_{a,b}^a \quad x \in V \quad (3.12)_1$$

$$\lambda_{kl}{}^{(\gamma)} = \gamma_{kl} \quad \lambda_a^{(\kappa)b} = \kappa_a^b \quad x \in V \quad (3.12)_2$$

$$\lambda_l^{(u)} = -u_l \quad \lambda^b^{(\varphi)} = -\varphi^b \quad \xi \in S_l \quad (3.12)_3$$

3.4. A (3.12) összefüggések alapján a LAGRANGE-féle multiplikátorok (3.3)-ból kiküszöbölhetők. A multiplikátorok visszahelyettesítése után a (2.11)–(2.17) egyenletrendszerrel ekvivalens variációs elv \check{J}_4 funkcionáljához jutunk:

$$\check{J}_4 = \check{J}_4(\gamma_{kl}, \kappa_a^b, t^{kl}, \mu_a^b, h_y^l, f_{yb}, \hat{h}_i^l, \hat{f}_{\eta^b}, u_l, \varphi^b) = \check{J}_4^V + \check{J}_4^{V'} + \check{J}_4^U + \check{J}_4^T \quad (3.13)_1$$

ahol

$$\begin{aligned} \check{J}_4^V &= \frac{1}{2} \int_V (\gamma_{kl} t^{kl} + \kappa_a^b \mu_a^b) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V [t^{kl}(a_{klpq} t^{pq} - \gamma_{kl}) + \mu^{ab}(c_{abpq} \mu^{pq} - \kappa_{ab})] dV \end{aligned} \quad (3.13)_2$$

$$\begin{aligned} \check{J}_4^{V'} &= - \int_V \{ \gamma_{kl}(t^{kl} - \hat{t}^{kl} - \varepsilon^{kmy} h_{y,l}{}^m) + \\ &+ \kappa_a^b [\mu_a^b - \hat{\mu}_a^b + \varepsilon^{apy}(f_{yb;p} + \varepsilon_{bps} h_{y^s})] \} dV \end{aligned} \quad (3.13)_3$$

$$\dot{J}_4^U = J_4^U \tag{3.13}_4$$

$$J_4^T = - \int_{S_t} \{ \varepsilon^{3\nu\eta} (\dot{h}_{\eta^i, \nu}^i - \dot{h}_{\eta^i, \nu}^i) u_i + \varepsilon^{3m} [f_{\eta b; \pi} - \dot{f}_{\eta b; \pi} + \varepsilon_{b\pi s} (\dot{h}_{\eta^s}^s - \dot{h}_{\eta^s}^s)] \hat{\varphi}^b \} dS. \tag{3.13}_5$$

A $\delta \dot{J}_4 = 0$ stacionaritási feltételből következik a (2.11)–(2.17) duál egyenletrendszer teljesülése. Ennek belátásához a (3.9), (3.10) egyenleteket adó gondolatmenet ismétlése szükséges. A számításokat nem részletezve röviden áttekintjük, hogy a \dot{J}_4 funkcionál egyes változók szerinti variációiból a duál egyenletrendszer milyen egyenletei és peremfeltételei következnek.

A

$$\delta_{t, \mu} \dot{J}_4 = 0, \quad \delta_{\gamma, \kappa} \dot{J}_4 = 0 \tag{3.14}_1$$

egyenletek (2.11)_{1,2} és (2.12)_{1,2} fennállását biztosítják.

A

$$\delta_{h, f} \dot{J}_4 = 0 \tag{3.14}_2$$

egyenletből (2.13)_{1,2}, (2.14)_{1,2}, továbbá

$$\begin{aligned} \gamma_{\chi i} - u_i;_{\chi} - \varepsilon_{i\chi s} \varphi^s &= 0 & \kappa_a^b - \varphi^b;_{,a} &= 0 & \xi \in S_t \\ u_i = \dot{u}_i & & \varphi^b = \dot{\varphi}^b & & \xi \in g \end{aligned}$$

következik. Utóbbi egyenletek teljesülése esetén identikusan teljesülnek a (2.15)_{1,2} kompatibilitási peremfeltételek és fennáll (2.17)_{1,2} is.

Megjegyezzük, hogy az u_i, φ^b tényleges elmozdulásmező a CEZARO-formulák [9, 11] segítségével határozható meg.

A

$$\delta_{u, \varphi} \dot{J}_4 = 0 \tag{3.14}_3$$

egyenletből (2.16)_{1,2}-t kapjuk, míg a

$$\delta_{\dot{h}, \dot{f}} \dot{J}_4 = 0 \tag{3.14}_4$$

egyenlet azonosság és így nem ad további egyenletet.

3.5. Ha a (2.11)–(2.15), (2.17)–(2.18) egyenleteket tekintjük duál egyenletrendszernek, akkor az ekvivalens variációs feladat megfogalmazásánál a (2.11), (2.12) mezőegyenleteket továbbá a (2.18) peremfeltételt⁵ és a

$$\tau^\eta (\dot{h}_{\eta^i}^i - \dot{h}_{\eta^i}^i) = 0, \quad \tau^\eta (f_{\eta b} - \dot{f}_{\eta b}) = 0 \quad \xi \in g \tag{3.15}$$

⁵ A célszerű alak:

$$\varepsilon^{2\alpha\eta} (\dot{h}_{\eta^i}^i - \dot{h}_{\eta^i}^i) = 0, \quad \varepsilon^{2\alpha\eta} (f_{\eta b} - \dot{f}_{\eta b}) = 0 \quad \xi \in S_t$$

folytonossági feltételt kell a (3.2) funkcionálhoz csatlakozó mellékfeltételként figyelembe venni. Szabad variációs feladathoz ismét a LAGRANGE-féle multiplikátorok módszerével lehet eljutni [4, 15]. A hosszadalmas formális számításokat nem részletezve, végül a szabad variációs feladat

$$J_4 = J_4(\gamma_{kl}, \alpha_a^b, t^{kl}, \mu_a^b, h_{\eta}^l, f_{yb}, \hat{h}_{\eta}^l, \hat{f}_{\eta b}) = J_4^V + J_4^{V'} + J_4^U + J_4^T + J_4^G \quad (3.16)_1$$

funkcionáljához jutunk, ahol

$$J_4 = \dot{J}_4^V \quad J_4^{V'} = \dot{J}_4^{V'} \quad (3.16)_{2,3}$$

$$J_4^V = \dot{J}_4^U = J_4^U \quad (3.16)_4$$

és

$$J_4^T = \int_{S_t} [\varepsilon^{32\eta}(\hat{h}_{\eta}^l - \dot{h}_{\eta}^l) \gamma_{lx} + \varepsilon^{32\eta}(f_{\eta b} - \hat{f}_{\eta b}) \alpha_a^b] dS \quad (3.16)_5$$

$$J_4^G = - \oint_g [\hat{u}_l(\hat{h}_{\eta}^l - \dot{h}_{\eta}^l) \tau^n + \hat{\varphi}^b(f_{\eta b} - \hat{f}_{\eta b}) \tau^n] sp. \quad (3.16)_6$$

Megjegyzés: Olyan funkcionál is konstruálható, amely a (2.11)–(2.15) és (2.17)–(2.18) egyenletek mellett (2.8) teljesülését is biztosítja.

A (6.2), (6.3) és (6.4) összefüggések alkalmazásával a J_4 funkcionál az alábbi alakra hozható:

$$\begin{aligned} J_4 &= J_4(\gamma_{kl}, \alpha_a^b, t^{kl}, \mu_a^b, h_{\eta}^l, f_{yb}, h_{yb}, \hat{h}_{\eta}^l, \hat{f}_{\eta b}) = \\ &= J_4^{V1} + J_4^{V1'} + J_4^{U1} + J_4^{T1} + J_4^{G1} \end{aligned} \quad (3.17)_1$$

ahol

$$J_4^{V1} = J_4^{V1} \quad (3.17)_2$$

$$\begin{aligned} J_4^{V1'} &= - \int_V [\gamma_{kl}(t^{kl} - \dot{t}^{kl}) + \alpha_a^b(\mu_a^b - \dot{\mu}_a^b)] dV + \\ &+ \int_V [\varepsilon^{\gamma pa} \alpha_a^b{}_{;p} f_{yb} + \varepsilon^{\gamma mk}(\gamma_{kl;m} + \varepsilon_{kls} \alpha_m^s) h_{\eta}^l] dV \end{aligned} \quad (3.17)_3$$

$$J_4^{U1} = - \int_{S_u} [\varepsilon^{32\eta}(\gamma_{\lambda l} - \hat{u}_{l;\lambda} - \varepsilon_{l\lambda s} \hat{\varphi}^s) h_{\eta}^l + \varepsilon^{32\eta}(\alpha_a^b - \hat{\varphi}^b{}_{;\alpha}) f_{\eta b}] dS \quad (3.17)_4$$

$$J_4^{T1} = \int_{S_t} (\varepsilon^{32\eta} \gamma_{\lambda l} \hat{h}_{\eta}^l + \varepsilon^{32\eta} \alpha_a^b \hat{f}_{\eta b}) dS \quad (3.17)_5$$

$$J_4^{G1} = \oint_g (\hat{u}_l h_{\eta}^l \tau^n + \hat{\varphi}^b f_{\eta b} \tau^n) ds. \quad (3.17)_6$$

Ha képezzük a J_4 funkcionál egyes változók szerinti variációt, akkor a stacionaritás feltételéből a variációk tetszőlegessége miatt a (2.11)–(2.15), (2.17)–(2.18) duál egyenletrendszer fennállása következik.

Valóban a

$$\delta_{\gamma, \kappa} J_4 = \delta_{\gamma, \kappa} J_4^V + \delta_{\gamma, \kappa} J_4^T = 0 \quad (3.18)_2$$

$$\delta_{t, \mu} J_4 = \delta_{t, \mu} J_4^V + \delta_{t, \mu} J_4^{V'} = 0 \quad (3.18)_1$$

$$\delta_{h, f} J_4 = \delta_{h, f} J_4^{V1'} + \delta_{h, f} J_4^{U1} = 0 \quad (3.18)_3$$

$$\delta_{\hat{h}, \hat{f}} J_4 = \delta_{\hat{h}, \hat{f}} J_4^{T1} + \delta_{\hat{h}, \hat{f}} J_4^{G1} = 0 \quad (3.18)_4$$

egyenletekből rendre kapjuk a duál egyenletrendszer (2.11), (2.18), (2.12), (2.13), (2.14), (2.15) mezőegyenleteit és peremfeltételeit, ha a h_y^i és f_{yb} feszültségfüggvény tenzorok szerkezetére vonatkozó megállapodásokat szem előtt tartjuk és (3.18)₄ esetén (3.7) és (6.7), (6.8)-ra is tekintettel vagyunk.

Továbbiakban a J_4 funkcionálból levezethető nem szabad variációs feladatok funkcionáljait képezzük.

3.6. Előírhatjuk mint mellékfeltételt a (2.12) anyagtörvény teljesülését. Ez esetben J_4 -ből az alábbi funkcionálhoz jutunk:

$$J_3 = J_3(\gamma_{kl}, \kappa_a^b, h_y^i, f_{yb}, \hat{h}_\eta^i, \hat{f}_\eta^i) = J_3^V + J_3^U + J_3^T + J_3^G \quad (3.19)_1$$

ahol

$$J_3^V = -\frac{1}{2} \int_V (\gamma_{kl} a_{-1}^{klpq} \gamma_{pq} + \kappa_{ab} c_{-1}^{abpq} \kappa_{pq}) dV + \\ + \int_V \{ \gamma_{kl} (\dot{t}^{kl} + \varepsilon^{kmy} h_{y,;m}^i) + \kappa_a^b [\dot{\mu}_b^a + \varepsilon^{apy} (f_{yb, p} + \varepsilon_{bps} h_y^s)] \} dV \quad (3.19)_2$$

és

$$J_3^U = J_4^U, \quad J_3^T = J_4^T, \quad J_3^G = J_4^G, \quad (3.19)_3$$

vagy

$$J_3 = J_3'(t^{kl}, \mu_a^b, h_y^i, f_{yb}, h_\eta^i, f_\eta^i) = \dots \quad (3.19)_4$$

A $\delta J_3 = 0$ egyenlet mint variációs elv a (2.12) anyagtörvény kivételével a (2.10)–(2.15), (2.17)–(2.18) duál egyenletrendszer valamennyi egyenletének fennállását biztosítja.

3.7. Ha a (2.18) feszültségi peremfeltételt írjuk elő mellékfeltételként, akkor az alábbi funkcionál adódik:

$$J_2 = J_2(\gamma_{kl}, \kappa_a^b, t^{kl}, \mu_a^b, h_y^i, f_{yb}) = J_2^V + J_2^U \quad (3.20)_{41}$$

ahol

$$J_2^V = J_4^V + J_4^{V'}, \quad J_2^U = J_4^U \quad (3.20)_{2,3}$$

A $\delta J_2 = 0$ egyenlet mint variációs elv a (2.18) feszültségi peremfeltétel kivételével a (2.11)–(2.15), (2.17)–(2.18) duál egyenletrendszer valamennyi egyenletének fennállását biztosítja. Ennek kimutatása korábbiakhoz hasonlóan történhet. Azt kell csupán szem előtt tartani, hogy a h_y^i és f_{yb} feszültségfüggvény tenzorok S_T -n is variálhatók és variációik az S_T -n értelmezett \hat{r}^i , \hat{w}_b vektor-

mezőkkel (3.7) szerint képezhetők. Alkalmazni kell továbbá a (6.7), (6.8) átalakításokat is.

3.8. Ha a (2.11) egyenletet írjuk elő mellékfeltételként, akkor alkalmas transzformáció után a következő funkcionál írható:

$$J_1 = J_1(\gamma_{kl} \kappa_a^b, h_y^l, f_{yb}, \hat{h}_y^l, \hat{f}_{yb}) = J_1^V + J_1^U + J_1^T + J_1^G, \quad (3.21)_1$$

ahol

$$J_1^V = \frac{1}{2} \int_V (\gamma_{kl} t^{kl} + \kappa_a^b \mu_{,a}^b) dV + \\ + \frac{1}{2} \int_V [\gamma_{kl}(t^{kl} - a_{,l}^{klpq} \gamma_{pq}) + \kappa_{ab}(\mu^{ab} - c^{abpq} \kappa_{pq})] dV \quad (3.21)_2$$

és

$$J_1^U = J_4^U, J_1^T = J_4^T, J_1^G = J_4^G. \quad (3.21)_{3,4,5}$$

A $\delta J_1 = 0$ egyenlet mint variációs elv most a (2.11) egyenlet kivételével biztosítja a (2.11)–(2.15), (2.17), (2.18) duál egyenletrendszer teljesülését.

3.9. További három funkcionál képezhető, ha a (2.11), (2.12) és (2.18) mellékfeltételek közül egyidejűleg valamelyik kettő teljesülését írjuk elő. Ezek részletes kiírásától eltekintünk.

Ha a konkurenciába bocsátott mezők a fenti három mellékfeltételt mind teljesítik, akkor (3.16)-ból a teljes kiegészítő energia funkcionál (3.2) alakja következik.

3.10. Ha előírt az $e^{yb}(x)$, $d_y^l(x)$ inkompatibilitási tenzorok értéke a test térfogatán, akkor a J_4 , J_3 , J_2 , J_1 és a fent említett három funkcionálhoz az alábbi integrált hozzá kell adni:

$$\int_V (e^{yb} f_{yb} + d_y^l h_y^l) dV.$$

Az így nyert funkcionálok közül J_4 , J_3 és a K a [7] tanulmány L , M és K jelű funkcionáljának mikropoláris esetre érvényes analogonja.

3.11. A \check{J}_4 funkcionálból rendre képezhetők a J_3 , J_2 funkcionálok \check{J}_3 , \check{J}_2 analogonjai. Fennáll továbbá, hogy $J_1 = \check{J}_1$.

4. Összegezés

4.1. Meghatározza dolgozat a mikropoláris elasztosztatika teljes duál egyenletrendszerét (annak valamennyi mezőegyenletét és peremfeltételét) térbeli feladatok esetén.

4.2. Értelmezi és képezi a dolgozat a (2.11–2.17) és (2.11)–(2.15), (2.17), (2.18) duál egyenletrendszerekkel ekvivalens szabad variációs elvek \check{J}_4 és J_4 jelű duál funkcionáljait, továbbá előállítja a különböző mellékfeltételek

mellett érvényes duál funkcionálok teljes rendszerét. A duál funkcionálok feszültségfüggvény tenzorok szerinti variációiból az alakváltozásmezők kompatibilitása következik.

5. Köszönetnyilvánítás

Ezúton kívánja kifejezni szerző őszinte köszönetét dr. Kozák, I. professzornak (Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc) e dolgozat megírására történő ösztönzéséért, a kritikai észrevételekért és a tanácsokért.

6. Függelék

6.1. A függelék a dolgozat könnyebb áttekinthetősége érdekében a gondolatmenetet megtörő, terjedelmesebb formális számításokat, átalakításokat mutatja be. Jelölések tekintetében általában a korábbi szöveg a mértékadó.

6.2. Felületi integrálok átalakításához szükséges lesz a Stokes-tételre is. Az 1. ábrán vázolt esetben legyen $C_\alpha(\xi^1, \xi^2)$ a teljes S felületen értelmezett elegendően sima vektormező. A STOKES-tételt az alábbi egyenletek fejezik ki:

$$\int_{S_t} \varepsilon^{3\alpha\eta} C_{\alpha;\eta} dS = - \oint_g C_\alpha \tau^\alpha ds \quad (6.1)_1$$

$$\int_{S_u} \varepsilon^{3\alpha\eta} C_{\alpha;\eta} dS = \oint_g C_\alpha \tau^\alpha ds. \quad (6.1)_2$$

Itt s a bejelölt irányban mért ívhossz, τ^α a g görbe érintő irányú egységvektora.

6.3. Parciális integrálással lehet meggyőződni az alábbi egyenlet helyességéről:

$$\begin{aligned} \int_V [\lambda_{kl}^{(\gamma)} \varepsilon^{kmy} h_{y;l}^i;_m + \lambda_a^{(\kappa)b} \varepsilon^{apq} (f_{yb;p} + \varepsilon_{bps} h_y^s)] dV = \\ = \int_V [\varepsilon^{ymk} \lambda_{kl}^{(\gamma)};_m + \varepsilon_{kls} \lambda_m^{(\kappa)s}] h_y^i + \varepsilon^{ypa} \lambda_a^{(\kappa)b};_p f_{yb}] dV - \\ - \oint_g (\varepsilon^{3\alpha\eta} \lambda_{\alpha l}^{(\gamma)} h_{\eta;l}^i + \varepsilon^{3\alpha\eta} \lambda_a^{(\kappa)b} f_{\eta b}) dS. \end{aligned} \quad (6.2)$$

6.4. Ugyancsak parciális integrálással ellenőrizhető a következő két egyenlet:

$$\begin{aligned} \int_{S_t} \{ \varepsilon^{3\alpha\eta} (h_{\eta;l}^i;_v - h_{\eta;l}^i;_v) \lambda_l^{(u)} + \varepsilon^{3\alpha\eta} [f_{\eta b;\pi} - \hat{f}_{\eta b;\pi} + \varepsilon_{b\pi s} (h_{\eta;l}^i - \hat{h}_{\eta;l}^i)] \lambda^b \} dS = \\ = - \int_{S_t} \varepsilon^{3\alpha\eta} (h_{\eta;l}^i - \hat{h}_{\eta;l}^i) (\lambda_l^{(a)};_\alpha + \varepsilon_{l\alpha s} \lambda^s) + \varepsilon^{3\alpha\eta} (f_{\eta b} - \hat{f}_{\eta b}) \lambda^b;_\alpha dS + \\ + \oint_g [\lambda^l (h_{\eta;l}^i - \hat{h}_{\eta;l}^i) \tau^\eta + \lambda^b (f_{\eta b} - \hat{f}_{\eta b}) \tau^\eta] ds, \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \int_{S_u} [\varepsilon^{3\nu\eta} h_{\eta;l}^l; \nu \hat{u}_l + \varepsilon^{3\eta\eta} (f_{\eta b}; \pi + \varepsilon_{b\pi s} h_{\eta}^s)] dS = \\ = - \int_{S_u} [\varepsilon^{3\chi\eta} h_{\eta}^l (\hat{u}_l; \chi + \varepsilon_{l\chi s} \hat{\varphi}^s) + \varepsilon^{3\alpha\eta} f_{\eta b} \hat{\varphi}^b; \eta] dS - \\ - \oint_g (\hat{u}_l h_{\eta}^l \tau^{\beta} + \hat{\varphi}^b f_{\eta b} \tau^{\eta}) ds. \end{aligned} \tag{6.4}$$

6.5. A $\delta \hat{r}^l$ és $\delta \hat{w}_y$ vektormezők deriváltjainak kiküszöbölése érdekében végzett parciális integrálásokkal kimutatható, hogy az alábbi két integrál azonosan zérus:

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{S_t} [\varepsilon^{3\chi\eta} (\lambda_l; \chi + \varepsilon_{l\chi s} \lambda^s) \delta \hat{r}^l; \eta + \varepsilon^{3\alpha\eta} \varepsilon_{b\eta l} \delta \hat{r}^l \lambda^b; \alpha] dS - \\ - \oint_g (\lambda_l \delta \hat{r}^l; \eta \tau^{\eta} + \lambda^b \varepsilon_{b\eta l} \delta \hat{r}^l \tau^{\eta}) ds \equiv 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

$$I_2 = \int_{S_t} \varepsilon^{3\alpha\eta} \delta \hat{w}_b; \eta \lambda^b; \alpha dS - \oint_g \lambda^b \delta \hat{w}_b; \eta \tau^{\eta} ds \equiv 0 \tag{6.6}$$

6.6. A

$$\begin{aligned} - \int_{S_t} (\varepsilon^{3\chi\eta} \gamma_{\chi l} \delta \hat{r}^l; \eta + \varepsilon^{3\alpha\eta} \varepsilon_{b\eta l} \kappa_{\alpha}^b \delta \hat{r}^l) dS + \oint_g (\hat{u}_l \delta r^l; \eta \tau^{\eta} + \hat{\varphi}^b \varepsilon_{b\eta l} \delta \hat{r}^l \tau^{\eta}) ds = \\ = - \int_{S_t} \varepsilon^{3\nu\chi} (\gamma_{\chi l}; \nu + \varepsilon_{\chi l s} \chi_v^s) \delta \hat{r}^l dS + \oint_g (\gamma_{\eta l} - \hat{u}_l; \eta - \varepsilon_{l\eta b} \hat{\varphi}^b) \tau^{\eta} \delta \hat{r}^l ds, \end{aligned} \tag{6.7}$$

és a

$$\begin{aligned} - \int_S \varepsilon^{3\alpha\eta} \kappa_{\alpha}^b \delta \hat{w}_b; \eta dS + \oint_g \hat{\varphi}^b \delta w_b; \eta \tau^{\eta} ds = \\ = - \int_S \varepsilon^{3\pi\alpha} \kappa_{\alpha}^b; \pi \delta \hat{w}_b dS + \oint_g (\kappa_{\alpha}^b - \hat{\varphi}^b; \alpha) \tau^{\alpha} \delta \hat{w}_b ds \end{aligned} \tag{6.8}$$

egyenletek helyességéről szintén a $\delta \hat{r}^l$ és $\delta \hat{w}_y$ vektormezők deriváltjainak kiküszöbölése érdekében végzett átalakításokkal és a (6.1)₁ összefüggés alkalmazásával lehet meggyőződni.

IRODALOM

1. SOUTHWELL, R. V.: Castigliano's Principle of Minimum Strain Energy and the Conditions of Compatibility for Strain, S. Timoshenko 60th Anniversary Volume, The MacMillan Co., 1938.
2. TONTI, E.: Variational Principles in Elastostatics. *Meccanica*, 2 (1967), 201—208
3. ODEN, J. T.—REDDY, J. N.: On Dual Complementary Variational Principles in Mathematical Physics, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 12 (1974) p. 1—29.
4. Абовский, Н. П.—Андреев, Н. П.—Деруга, А. П.: Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек, Москва, Наука, 1978

5. KOZÁK, I.: Notes on the Field Equations with Stresses and on the Boundary Conditions in the Linearized Theory of Elastostatics. *Acta Techn. Hung.*, **90**, (1980), 221—245
6. KOZÁK, I.: Determination of Compatibility Boundary Conditions in Linear Elastostatics with the Aid of the Principle of Minimum Complementary Energy, *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Miskolc, Ser. D. Natural Sciences*, **34** (1980) 83—98
7. KOZÁK, I.: Contributions and Remarks to the Variational Principles of Linear Elastostatics in Terms of Stress Functions. (To be published in *Acta Techn. Hung.*)
8. FINZI, B.: Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. *Rend. Lincei, Ser. 6., Vol. 19* (1934), 578—584; 620—623
9. KOZÁK, I.—SZEIDL, Gy.: The Field Equation and the Boundary Conditions with Force Stresses and Couple Stresses in the Linearized Theory of Micropolar Elastostatics. *Acta Techn. Hung.*, **91**, (1980), 57—80
10. HLAVÁČEK, I.—HLAVÁČEK, M.: On the Existence and Uniqueness of Solution and Some Variational Principles in Linear Theories of Elasticity with Couple Stresses, I. *Aplikace Matematiky*, **14** (1969), 387—410
11. NOWACKI, W.: Theory of Micropolar Elasticity. Springer-Vlg. Wien—New York, Udine 1970
12. GÜNTHER, W.: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums, *Abh. Braunschweig Wiss. Ges.*, **10** (1958), 195—213
13. CARLSON, D. E.: On Günther's Stress Functions for Couple Stresses. *Quart. Appl. Math.* **25** (1967), 139—146
14. SCHAEFFER, H.: Die Spannungsfunktionen eines Kontinuums mit Momentenspannungen I. und II. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des sciences techniques* (1967) p. 63—67; 69—73.
15. COURANT, R.—HILBERT, D.: Methods of Mathematical Physics, Interscience publishers 1953, p. 216—222.
16. TONTI, E.: A mathematical Model for Physical Theories I., II. *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei*, **52** (1972), 175—181, 351—356

Dual Variational Principles in the Linear Theory of Micropolar Elasticity. — In the paper the total system of dual equations of linear micropolar elasticity for three dimensional problems is presented. Having been known the system of dual equations the functional of the free variational problem — being equivalent to the dual equations — is composed by the use of the complementary energy functional. The dual functionals which are valid with subsidiary conditions are part cases of the functional of free variational problem. From variations of dual functionals with respect stress functions follows the compatibility of strains.

Duale Variationsprinzipie der linearen mikropolaren Elastizitätstheorie. — In der Arbeit wird das volle System der dualen Gleichungen der linearen mikropolaren Elastizitätstheorie im Falle der räumlichen Aufgaben angegeben. Im Kenntnis des dualen Gleichungssystems wird das Funktional der freien Variationsaufgabe, die mit dem dualen Gleichungssystem äquivalent ist, mit Hilfe des Funktionals der Komplementärenergie und der Methode der Lagrange-Multiplikatoren aufgebaut. Die dualen Funktionale, die bei unterschiedlichen Nebenbedingungen gültig sind, sind Sonderfälle des Funktionals. Von den Variationen der dualen Funktionale nach der Spannungsfunktionen ergibt sich die Kompatibilität der Verzerrungsfelder.

A BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 200 ÉVES

HÉBERGER KÁROLY

[Béérkezett: 1981. december 30-án]

A mai Budapesti Műszaki Egyetem jogelődje a II. József által 1782-ben alapított Mérnöki Intézet. A tanulmány végigkíséri az alapítástól a máig az egyetem történetét. Tárgyalja az egyetem másik jogelődjét, a József Ipartanodát, majd a két elődintézmény egyesítését. A II. világháború után az egyetem gyors fejlődésnek indult, sok új épülettel gazdagodott, s Magyarország legnagyobb egyetemévé vált. Az illusztrációs anyag bemutatja az elődintézmények alapító levelét és az egyetem épületeit.

A *Budapesti Műszaki Egyetem* 1982-ben ünnepelte a hazai egyetemi szintű mérnökképzés 200. évfordulóját; ez az egyetem már az 1782-ben létesített *Mérnöki Intézet*től számítja eredetét.

Előzmények, a társadalmi és gazdasági körülmények áttekintése

A XVIII. század közepe táján a feltörekvő polgárság beleütközött a feudális abszolutizmus merev, megcsontosodott kereteibe. A létrejött ellentmondás feloldására Európa abszolút monarchiai megkísérelték államaik berendezését és működését a kor új igényeihez igazítani. E folyamat során, a már „felvilágosult abszolutizmus” maga számolta fel a polgári, tőkés fejlődés néhány akadályát. Különös figyelmet fordítottak az oktatásügyre. Így került előtérbe a természettudományok oktatása, s a reáliskolák létesítése. Ezt valósította meg Nagy Frigyes Poroszországban, II. Katalin Oroszországban, Mária Terézia és II. József pedig a Habsburg birodalomban.

A Rákóczi-szabadságharc leverése utáni időszakban a Habsburg birodalom egyes tartományai között gazdasági téren nagyon nagy eltérések keletkeztek. A sziléziai, cseh és osztrák ipar és kereskedelem színvonalához képest a magyar viszonyok messze elmaradtak. Hazánk hatalmas értékű nyersanyagkincsei azonban nélkülözhetetlenek voltak a birodalom fejlődéséhez. Különösen az érc-, só-, majd a szénbányászat kiépítése és fejlesztése került előtérbe. Ehhez azonban jól képzett műszaki szakemberek kellettek. Az igény kielégítésére III. Károly bányatisztképző intézetet létesített 1735-ben.

Mária Terézia, a birodalmi igények kielégítése érdekében 1763-ban határozta el a bányatisztképző iskolának felsőfokú bányászati intézménnyé, akadémiaiá váló fejlesztését.

Országunk egyetlen egyetemén, amely Nagyszombatról 1777-ben Budára költözött, reál tárgyak oktatása is folyt. A felső matematikát, a geometriát és az építészettant külön tárgyként oktatták. Ezt a mérnökképzés előzményének tekinthetjük.

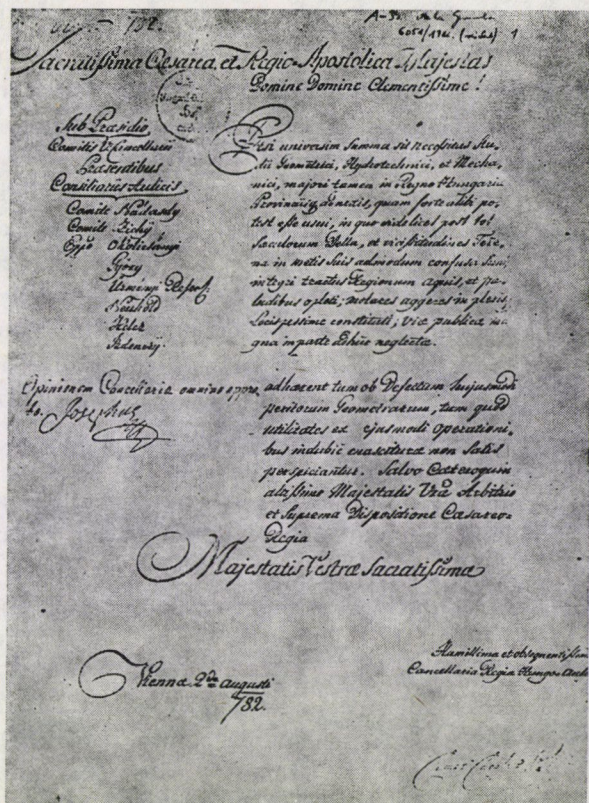
A Habsburg-birodalom az osztrák örökösödési háborúban elvesztette iparilag legfejlettebb tartományát, Sziléziát. Emiatt az osztrák örökös tartományok — Alsó- és Felső-Ausztria, valamint a cseh területek — fejlesztése került előtérbe. A hazai iparfejlesztés pedig messze elmaradt a birodalom egyéb tartományainak fejlődésétől.

Magyarországon az utak elhanyagolt állapota rendkívül megnehezítette a mezőgazdasági termények szállítását, a mezőgazdasági termelést viszont a nagykiterjedésű mocsaras területek és a gyakori árvizek gátolták. Az építkezésekhez pedig nem voltak hazai szakemberek.

Az új uralkodó, II. József adózási rendszere a földterülettől, annak termékenységétől függött. Az adózás megállapítása érdekében országos, mérnöki szintű földmérési munkálatokra volt szükség. Mivel ilyen mérnökképző intézet nem volt, azt létre kellett hozni.

Az Institutum Geometrico-Hydrotechnicum alapítása és működése

A Tudományegyetemen elkészítették az új mérnökképző tanfolyam tervezetét, és azt II. József, 1782. augusztus 30-án, teljes egészében jóváhagyta, s ezzel megalapította hazánkban az első egyetemi szintű mérnökképző intézetet, a Budapesti Műszaki Egyetem első jogelődjét. Az alapítólevélben (1. ábra) az uralkodó részletesen meghatározta az intézmény működésének indokait, utalva a korábbi magyarországi háborúk miatti zavaros birtokviszonyokra, a mocsaras tájakra, a malomgátak rossz szerkesztésére, a közutak elhanyagolt állapotára. Mindezek miatt elméletileg és gyakorlatilag jól képzett mérnökökre van szükség, közölte, majd megindokolta, hogy nem külön intézményt létesít, hanem a Mérnöki Intézetet a Tudományegyetem keretében hozza létre, mert ott a felsőbb matematika oktatása mellett a melléktárgyak kedvező oktatási feltételei is megvannak. Az alapítólevélben még egy rendkívül fontos rész található, mégpedig az, amelyben Magyarországon először határozzák meg rendeletben, hogy nyilvános mérnöki állásra csak olyan személy alkalmazható, aki az előírt matematikai tanulmányok elméletéből és gyakorlatából Budán az Egyetemen a nyilvános vizsgát eredményesen letette, a törvényes bizonyítvánnyal rendelkezik. Az intézet alapításától kezdve tehát a mérnöki pályát egyetemi végzettséghez kötötték.



1. ábra. Az Institutum Geometricum alapítólevelének részlete 1782-ből

Az *Institutum Geometricum*ban az egyetemi szintű mérnökképzés megindítása európai összehasonlításban is jelentős volt, mivel 12 évvel megelőzte az 1794-ben főiskolai rangra emelt *École Centrale des Travaux Publics*, a későbbi nagy hírű *École Polytechnique du Paris* oktatását.

Az *Institutum Geometricum* tanulmányi ideje három év volt. Az intézetbe csak azokat a hallgatókat vették fel, akik a Tudományegyetemen vagy a vidéki Akadémiákon a bölcsészeti tanfolyamot sikeresen elvégezték.

Az intézet tananyaga a mérnöki tárgyak mellett politikai és pénzügyi ismereteket és idegen nyelveket is tartalmazott. Az oktatás korszerű és magas színvonalú volt, amelyet a tanulmányok során a hallgatóknak kötelezően előírt szigorlatok is biztosítottak. A ténylegesen magas színvonalat az is bizonyította, hogy az intézet több tankönyvét külföldön is használták.

Az intézet jelentős szerepet töltött be hazánk gazdasági-műszaki fejlődésében. Az intézetben nyertek oklevelet azok a nagy magyar vízmérnökök, akik a XIX. század első felében hatalmas értékű vízrajzi felméréseket, a század közepétől pedig a nemzetközi összehasonlításokat is kiálló folyószabályo-

zásokat elvégezték. Elsőként kell említenünk VÁSÁRHELYI Pált, akinek nevéhez kapcsolódik az Al-Duna szabályozásának és hajózhatóvá tételének terve. E nagy nevű mérnökgenerációhoz tartoztak: BESZÉDES József, HUSZÁR Mátyás, KECSKÉS Károly, LÁNYI Sámuel, REITTER Ferenc és VEDRES István.

A nagy nevű tanítványokat kiváló tanárok képezték. Említsük meg közülük JEDLIK Ányost, a dinamóelv feltalálóját, aki az első dinamó elkészítésével 6 évvel előzte meg Siemenst, de mivel jelentős felfedezése nem kapott kellő nyilvánosságot, a dinamó felfedezése Siemens nevéhez fűződik. Az intézet tanára volt PETZVÁL József, a fényképezőgépek anasztigmát lencséjének felfedezője, a matematikus DUGONICS András, aki mint költő is ismertté vált, s az első magyar regény írója volt, NEMETZ József többszörös feltaláló, aki új szerkezetű cséplőgépet és fűkaszalógépet szerkesztett és PETZELT József, a későbbi magyar *Hadi Főtanoda* megszervezője.

Az Intézet egy budavári bérelt épületben kezdte meg működését. Az épület korábban dézsmaház volt, helyiségeit rajztermekké is át lehetett alakítani. II. József 1784 nyarán a Tudományegyetem három karát Pestre költöztette. Az Institutum Geometricum előbb a piarista szerzetesek pesti épületébe került, majd 1785. augusztus 11-én a ferences-rendi szerzetesek kolostorának kertjében levő kisebb épületbe költözött. Az intézet azután megszűnéséig ebben az épületben működött.

Az intézet alapítását elrendelő uralkodói rendelet hallgatói ösztöndíjakat is megállapított. Az oktatás megindulása után az érdeklődés fellendült, a hallgatói létszám emelkedett. Az ösztöndíjak összegét azonban nem sikerült felemelni. A nemesi ifjak előtt azonban nem volt vonzó a mérnöki pálya, a kevésbé tehetősek részére viszont a kis összegű ösztöndíjak szinte lehetetlenné tették a mérnökképző intézetbe való beiratkozást.

A megyék nem hajtották végre az uralkodói rendelkezést, s oklevél nélküli személyeket is alkalmaztak mérnöki állásokban. Mindezek hatásaként csökkent az érdeklődés, egyre kevesebben jelentkeztek az intézetbe.

Az intézetben folyó mérnökképzés tanulmányi ideje 1792. július 20-i hatállyal három évről két évre csökkent, ezzel is elindítva az intézet hanyatlását. A visszaesést még fokozta, hogy az intézet felszerelése sem fejlődött a kor követelményeinek megfelelően. Ez az oktatásban olyképpen jelentkezett, hogy szűkült az oktatás köre, a valóban színvonalas oktatás csak a vízépítészetre és a földmérésre szorítkozott. Egy rövid időszakban 1805 és 1826 között azonban kísérlet történt az építészeti oktatás fejlesztésére. Ebben az időben a polgári építészetet külön tárgyként oktatták. Az oktatás színvonalának csökkenését okozta a hallgatók előképzettségbeli gyengesége is. Ez annak a következménye volt, hogy a bölcsészettudományi tanfolyamok tanulmányi ideje is csökkent egyes időszakokban három évről két évre.

A József Ipartanoda felállítása és működése

A gőzgép feltalálása és alkalmazása nemcsak Angliában, hanem Nyugat-Európában is megindította a gyáripar kifejlődését. Ez a hatás Ausztriában is érvényesült. Magyarországon a XIX. század második és harmadik évtizedében kezdődik a preindusztriális fejlődés. A kor szellemi vezetői felismerik az Ausztriától való ipari és mezőgazdasági elmaradottságot s a reformmozgalmak célkitűzésévé teszik a hazai ipar és kereskedelem fejlesztését. Ennek megfelelően a malomipar, a textilipar, a hajóipar és a vasipar, később a vasút fejlődése lassú ütemben megindult. A magyar iparfejlődés viszonylagosságát mutatja azonban, hogy a Habsburg-birodalom területén működő 11 915 kisebb-nagyobb tőkés jellegű vállalkozás közül csak 789 jutott Magyarországra. A fejlődés azonban feltétlen igényelte a műszaki szakembereket.

A Habsburg-birodalom iparilag fejlett tartományában a császári döntés 1803. március 14-én a prágai iskolát emelte műegyetemi rangra, majd az uralkodó 1817. augusztus 31-én hagyta jóvá a bécsi Műegyetem szervezeti szabályzatát. Ez utóbbi intézményben ténylegesen már 1815-től folyt az egyetemi szintű mérnökképzés.

Magyarországon a megindult mezőgazdasági és ipari fejlődés mérnöki igényét nem elégíthette ki az Institutum Geometricumban folyó képzés, ahol közben a színvonal is visszaesett s a létszám sem volt elegendő. A hazaiműszaki pályára igyekvők ezért kénytelenek voltak külföldön tanulni.

A kormány abszolutisztikus törekvéseivel szemben álló nemesi ellenállás eredményeként az országgyűlés a reformkor fontos politikai fórumává vált. A vitákon nagy hangsúlyt kapott a nevelésügy reformálása is. 1830-tól műszaki intézetek felállítását szorgalmazták. Ez időtől kezdve egyre erőteljesebben bontakozik ki az önálló polytechnicum felállításának igénye.

A király, a felfokozott várakozásokkal ellentétben merev elutasító álláspontját közölte azzal, hogy az intézetek alapítása teljes mértékben a király jogköre, s az uralkodó létesít ilyen tanintézeteket, ha szükségesnek látja.

A reformellenzék vezére, Kossuth Lajos, a negyvenes években az iparfejlesztést nemzetünk létkérdésének tekintette, s erről, valamint a természettudományos szakoktatásról gyűjtő hangú cikkeket írt.

Az 1843 májusában összeülő országgyűlés kerületi választmánya körkérdeést intézett a nevesebb gyárosokhoz és kereskedőkhöz a hazai iparfejlesztés legfontosabb feladatairól és a fejlődést gátló tényezőkről. Figyelemre méltó, hogy az iparos és a kialakuló tőkés réteg képviselői válaszukban egyöntetűen szükségesnek tartották és sürgették a Műegyetem felállítását.

Mindez azonban hiábavalónak bizonyult. A bécsi udvar vezető politikusai, Metternich és Kübeck, a magyar ipar fejlesztését nem támogatták, s ezért az ipar fejlődését elősegítő Polytechnicum ügyének előbbrevitelét akadályozták.

1846. november 1-én kerüljön sor. E napon meg is nyílt a régen várt új műszaki oktatási intézet. A megnyitón megjelent Széchenyi István is.

Az ipartanoda tanulmányi ideje három év volt, melyből egy év előkészítő, az alaptudományok osztálya volt. A hallgatók ennek elvégzése után választhattak a három-, kétéves időtartamú osztály (tagozat) közül. A *gazdászati osztály*, a mezőgazdasági, a *műtani osztály* a műszaki, a *kereskedelmi osztály* pedig a gazdaságtani és közgazdasági képzést szolgálta. Az oktatás nyelve magyar volt, a német nyelvet azonban kötelezően hallgatni kellett.

Az intézet szűkös elhelyezéssel működött, a felszereltség szintén gyenge színvonalú volt. Az alapító rendelet a Nemzeti Múzeum és az Egyetem eszközeinek használatát engedélyezte az Ipartanoda oktatásához, de kiderült, hogy azok sem álltak a kor tudományos és technikai színvonalán.

A hallgatók megélhetési gondjai miatt meglehetősen nagy volt a tanulmányaikat abbahagyó hallgatók száma.

Az Institutum Geometricum és a József Ipartanoda egyesítése

A Pesten 1848 márciusában kirobbant polgári forradalomban tevékeny szerepet vállalt az egyetemi ifjúság. Köztük voltak a mérnökhallgatók is. Az Ipartanodában zajlott le a korszak egyik legjelentősebb diákmozgalmi akciója. Az Ipartanoda diáksága 12 pontban fogalmazta meg követeléseit. A márciusi forradalom után napirendre került a mérnökképzés reformja. Az első felelős magyar kormány széles látókörű, reformszellemű kultuszminisztere, Eötvös József tervezte a Mérnöki Intézet és az Ipartanoda egyesítését és korszerű műegyetemmé szervezését.

A politikai helyzet azonban a szépen induló folyamatot megszakította. Az udvar 1848 őszén fegyveres támadást indított a magyar forradalom ellen. Az 1848/49-es tanévben ezért zárva volt az Ipartanoda is, nem volt tanítás. A harcok sebesültjeit ideiglenes kórházakban helyezték el. Az Ipartanoda helyiségeiben is kórházat rendeztek be.

A Habsburg abszolutizmus külső segítséggel eltiporta a magyar forradalmat és szabadságharcot. A megtorlás nehéz időszaka szakadt az országra. Az Ipartanodában is fegyelmi vizsgálatokat indítottak, elbocsátották a tanári kart, nyugdíjazták az igazgatót. Minderre az Ipartanoda tanári karának a szabadságharc alatti hazafias tevékenysége miatt került sor. 1850 tavaszán ismét előtérbe kerültek az oktatásügy kérdései. Az Institutum Geometricum és a József Ipartanoda egyesítését Ferenc József 1850. szeptember 29-én jóváhagyta, s így az rendeltévé vált. Az Institutum Geometricum 68 évi, az Ipartanoda pedig 4 évi működés után egyesült, oly módon, hogy az Institutum kivált az Egyetem kötelékéből és beolvadt a középfokú Ipartanodába. Ismét német nyelven folyt az oktatás. A mérnökképzés ideiglenesen megszűnt, mert az



3. ábra. Az Ipartanoda, később a Műegyetem ideiglenes épületei Budán az Országház utcában

Ipartanoda nem adhatott ki mérnöki oklevelet. Ez az időszak hazánk műszaki felsőoktatásának kegyetlenül nehéz szakasza s minden tekintetben mélypontja volt.

Az Ipartanoda elhelyezése alapításától kezdve kedvezőtlen és elégtelen volt. A két intézmény egyesítése után az Egyetem sürgette a Mérnöki Intézet által elfoglalt helyiségek szabaddá tételét. Az Ipartanoda céljaira ezért új elhelyezést kerestek. Az uralkodó 1850. január 30-án jóváhagyta az Ipartanoda Budára való költözését. Budán, az Országház utcában kijelölt épületet (3. ábra) először átalakították az oktatási célnak megfelelően, s azután 1854 nyarán az Ipartanoda át is költözött új, a korábnál tágasabb otthonába. Itt 18 előadóterem, 1 laboratórium, 3 rajzterem és 17 egyéb helyiség állt az oktatás céljaira.

Az újbóli egyetemmé válás folyamatának lépcsője: a József Polytechnicum

Az egyetemi szintű műszaki oktatás megszüntetése durva reakciója volt az abszolutista udvarnak. A nemzet azonban nem hagyott fel az önálló polytechnicum követelésével, s a körülmények változásával elérte az Ipartanoda egyetemi rangra emelését.

Ferenc József 1856. szeptember 30-án jóváhagyta a k. k. *Josephs Polytechnicum* szervezeti szabályzatát, s így 20 évvel a reform szellemű országgyűlési követelések után végre műegyetemi rangot kapott a főváros „mérnökképző” intézete. Ettől kezdve az intézet a monarchia prágai bécsi, grazi és brünni politechnikumaival egyenrangúvá vált. Az oktatás nyelve azonban még német maradt. Az új szervezet ténylegesen az 1857/58-as tanévben lépett hatályba.

A József Polytechnicumban az oktatás két osztályból állt. Az egyéves időtartamú előkészítő osztályból és az egységes technikai (műtani) osztályból. Ez utóbbi képződmény egyedülálló volt a Monarchia területén, mivel egy keretben nyújtott felsőfokú mérnökképzést, valamint egyetemi szintű kereskedelmi, ill. közgazdasági képzést. Emiatt a szakirányoktól függően a tanulmányi idő is eltérő volt. A kereskedelmi pályára készülők két év, a mérnöki pályára készülők három-öt év alatt végezhatték el a politechnikumot. A földmérői pályán vagy vegyészetre készülők tanulmányi ideje három, az egyéb mérnöki szakterületekre (víz-, út-, polgári építészet, gépészet) készülőkét öt esztendő volt. Szigorlatokat nem tartottak, a tanulmányokat abszolutóriummal fejezték be. Az újjászervezett intézetben ekkor a rendes tanárok száma 12 volt.

Az abszolutista, nemzeti törekvéseket elnyomó uralkodóház az 1850-es évek végére komoly válságba került. Az 1859-es osztrák—olasz—francia háborúban Ausztria vereséget szenvedett s elvesztette Lombardiát. A Habsburg kormányzat engedményekre kényszerült. Ferenc József 1860. október 20-án kiadta az „Októberi Diplomát”, melyben az ország egyes tartományainak nagyobb önkormányzatot és autonómiát ígért. A felsőoktatásban ennek hatásaként novemberben visszaállították a magyar oktatási nyelvet. 1863-ig tartott, amíg a tanácsereket lebonyolították, s végre oktatási nyelvében és tanári karában egyaránt magyarrá vált az intézet, amely ezidőtől kezdve a *Királyi József Műegyetem* nevet használta.

A Helytartótanács 1863. augusztus 15-i rendelkezésével külön mérnöki, gépészeti és vegyészeti csoport alakult. Új tanszékeket létesítettek, melyek közül az 1864 elején alapított mű- és díszépítészet-tanszék az építészeti oktatás magját alkotta és fejlesztését segítette elő. Lassan növelték az oktatószemélyzet létszámát is.

Továbbra is probléma volt azonban, hogy nem tartottak szigorlatokat a Műegyetemen, s így mérnöki okleveleket továbbra sem adtak ki. A Helytartótanács ugyan 1861. május 28-án újra közzétette az 1855-ös rendelkezést, amely szerint az intézet vizsgabizonyítványai egyenértékűek a korábbi mérnöki oklevelekkel. Ez azonban alig változtatott a helyzeten, továbbra is sok bonyodalmat okozott a végzetek elhelyezkedésénél a mérnöki oklevél hiánya.

E korszakban a Műegyetem nyolc tanára volt tagja a Magyar Tudományos Akadémiának, ami jelzi az oktatószemélyzet tudományos színvonalát és igényességét. A Műegyetem vezetősége elérte, hogy külföldi ösztöndíjakat engedélyeztek, melyeket igénybe is vettek. Így jutottak ki külföldi műszaki főis-

kolákra SZILY Kálmán, KRENNER József, WARTHA Vince, az intézmény későbbi neves tanárai.

A diákok nehéz szociális körülmények között éltek az abszolutizmus időszakában. Az önkényuralmi rendszer nem tűrte a hallgatók egyesületi tevékenységét, így akarván elejét venni a diákság politikai szervezkedésének. Csak 1860 után engedélyezte a kormány diák segélyegyletek létesítését, s így 1862. július 19-én jóváhagyták a *Műegyetemi Segélyegylet* alapszabályzatát. A kulturális érdeklődést mutatta, hogy 1865-ben megalakult a *Műegyetemi Dalárda*.

Az 1866 nyarán kitört porosz—osztrák háború elvesztése meggyorsította a magyar nemzet és az uralkodó közötti kiegyezést. 1867. február 12-én kinevezték a felelős magyar miniszteriumot, létrejött a kiegyezés. Ettől kezdődik hazánkban a dualizmus, a kettős hatalom bonyolult politikai korszaka.

Az egyetemi rang újbóli elnyerése

Eötvös József már 1848-ban ígéretet tett a korszerű Műegyetem felállítására. A szabadságharc elbukása miatt ígéretét nem tarthatta meg. A kiegyezés után, ismét mint kultuszminiszter, nekilátott a félbemaradt tervek megvalósításának. A képviselőház 1870. április 7-i ülésén terjesztette be a javaslatot a Műegyetem újjászervezéséről. Eötvös azonban 1871. február 2-án meghalt. Elsősorban az ő halála az oka, hogy a törvényjavaslatból nem lett törvény, ennek alapján uralkodói rendelettel szabályozták a *Műegyetem* új szervezetét. A rendeletet Ferenc József 1871. július 10-én írta alá.

Az új szervezet szerint a Műegyetemen gépészi, mérnöki, építész, vegyész és egyetemes szakosztályok működtek. A szakosztályok élén a tanárok közül választott dékán állt. Míg az egyetem vezetője a tanárok közül választott rektor, akinek kinevezését a kultuszminiszter erősíti meg.

A tanulmányi idő az egyetemes osztályon két év volt, ezután következett a megfelelő szakosztályon három év. Az 1872/73-as tanévben azonban csak az egyetemes, a mérnöki és a gépészmérnöki szakosztály indult meg, az építészeti és a vegyész szakosztály csak a következő tanévben kezdte működését, egyelőre nem is önállóan, mert a vegyész az egyetemes, az építész pedig a mérnöki szakosztályhoz kapcsolódva. Az egyetemes osztályhoz csatlakozva, nem hosszú ideig, természettudományos tanárképzés is folyt.

A Műegyetem első rektorává Dr. SZTOCZEK Józsefet választották meg, aki a politechnikumot akkor már 10 éve vezette.

A hallgatók számának növekedése, valamint újabb tanszékek alapítása a helyhiányt erősen megnövelte, ezért további helyiségeket kellett szerezni. Az Országház utcai épületek mellett ezért újabb két házat béreltek Budán, az egyiket az Űri utcában, a másikat pedig a Bécsikapu utcában.

A korabeli oktatás elemzéséből megállapítható, hogy a laboratóriumi felszerelés — minden igyekezet és fejlődés ellenére — sem volt elegendő a gyakorlati készségek elsajátíttatásához, s ezért a hangsúly a mérnöki alaptudományok színvonalas oktatására terelődött. Ez az irányzat azután a későbbi években is jellegévé vált a magyar Műegyetemnek, és tulajdonképpen ez alapozza meg az intézmény külföldön kialakult jó hírét. Az itt végzett mérnökök ugyanis elsajátították a mérnöki gondolkodást, megszerezték, igen magas színvonalon, az alaptudományok ismeretanyagát, a gyakorlatban viszonylag gyorsan kiegészíthették ismereteiket a praxis megszabta követelményekkel.

Az Eötvös által benyújtott törvényjavaslat tartalmazta egy mű- és ipari múzeum felállítását is, elsősorban az oktatás segítése céljából. Ezt a hasznos javaslatot azonban sohasem sikerült megvalósítani a Műegyetemen.

Az első mérnöki oklevelet a Műegyetemen 1873. november 27-én adták ki, s újabb oklevelek kiadására csak 1875-től került sor.

A király által 1882. június 12-én jóváhagyott új szabályzatban tételesen előírták a tanterveket és a tanrendeket, amelyeket a mérnökhallgatóknak be kellett tartaniuk. A tanulmányi időt újólapon megállapították éspedig négy évben.

HUNYADI Jenő, KÖNIG Gyula, KRUSPÉR István, SZILY Kálmán és SZTOCZEK József professzorok nagyjelentőségű vállalkozásba kezdtek, amikor megalapították a „Műegyetemi Lapok” c. tudományos folyóiratot, lehetőséget biztosítva ezzel a kutatási eredmények közreadására.

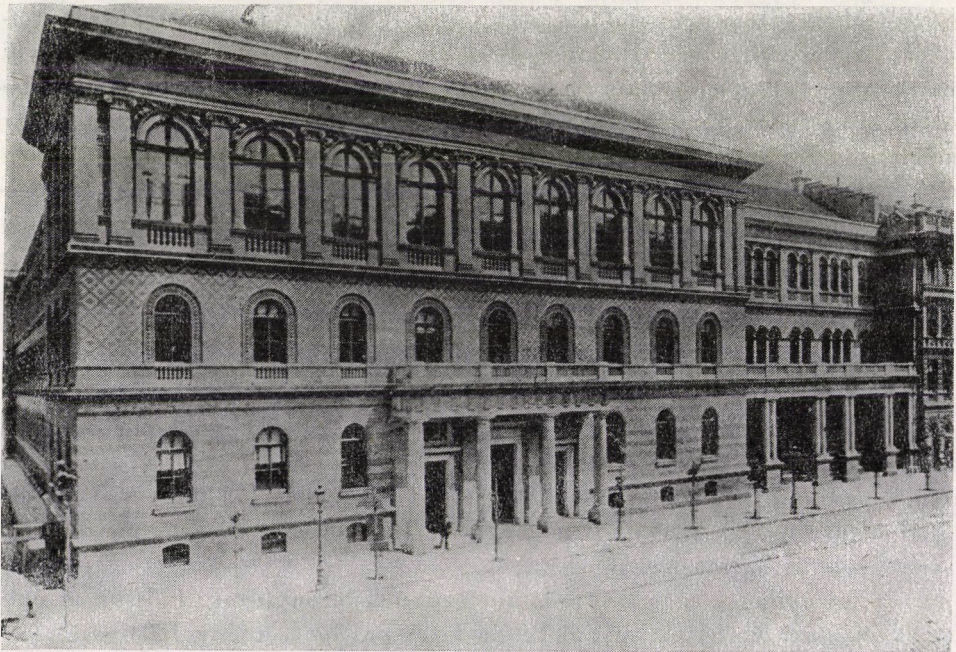
A Műegyetem nem rendelkezett kielégítő épülettel, ezért többször költözött. A várbeli helyét elhagyva, 1872 szeptemberében Pestre a Két nyúl (ma: Szamuely) utca—Csillag (ma: Gönczy Pál) utca sarkán levő Nagel-házba (4. ábra) költözött, amely egy évtizedig adott otthont a Műegyetemnek. Az épület azonban nem volt elégséges, ezért 1873-ban már kibérelték egy közelben levő épület földszintjét a könyvtár céljaira, majd a Vámház-palotában helyezték el a Műegyetem felszerelésének új, féltett eszközét, a szakítógépet. Közben azonban folyt a Műegyetem megfelelő elhelyezése érdekében az agitáció és a küzdelem. 1879-ben Trefort Ágoston kultuszminiszter törvényjavaslatot terjesztett a képviselőház elé a Műegyetem állandó elhelyezése érdekében. A javaslatot elfogadták és az törvénnyé vált.

A Műegyetem új épületeit 600—650 hallgató oktatására méretezték. Az épületeket a Múzeum körút s a mai Puskin utcát környező utcák által határolt telkeken építették fel. Az építkezést 1880 augusztusában kezdték. Először a kémiai pavilont adták át, 1882 őszén, majd a főépület (5. ábra) is elkészült 1883 augusztusára. Az épületeket STEINDL Imre tervezte, s azok ma a tudományegyetemi oktatást szolgálják.

Az új épületek már az átadáskor szűknek bizonyultak. Először az építészek számára építettek egy új kétemeletes pavilont, amely 1893-ban nyílt meg. Ebben kaptak helyet az építészek rajztermei, 4 építészeti tanszék, továbbá



4. ábra. A Nagel-ház, a Két nyúl utca és a Csillag utca sarkán

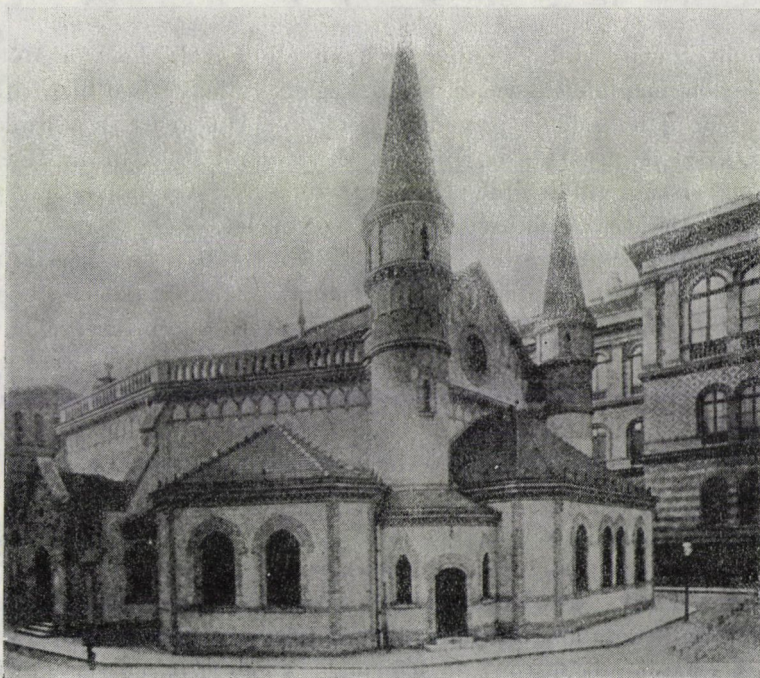


5. ábra. A Múzeum körüti főépület

néhány tanterem. Emeletet építettek a főépület udvarán levő régi épületre, s itt helyezték el a mezőgazdasági géptan és az elektrotechnika tanszéket. A hallgatók elméleti oktatásának kiegészítése céljából Nagymaroson vízmérő állomást létesítettek, s így a mérési gyakorlatok kedvező feltételeit megteremtették. Mindez azonban kevésnek bizonyult. Lakóházakban kellett helyiségeket bérelni az oktatás feltételeinek biztosítása érdekében. A következő években a környező házakban vettek bérbe helyiségeket, s 1897-ben pedig egy újabb épületet adtak át, amely „gólyavár” elnevezéssel ma is funkcionál (6. ábra). Hiába építették azonban az új épületeket, a Műegyetem gyorsan kinőtte azokat, és újólaj felvetődött a végleges elhelyezés igénye.

A folyamatos területbővülés ellenére a gép- és műszerfelszerelés korszerűtlen volt.

A Műegyetemnek a humán egyetemekkel való egyenlő elismertetéséhez hiányzott még a doktorrá avatás joga. Ennek érdekében hosszú küzdelem folyt, mely végül is eredményre vezetett. A doktorátust adományozó tervezetet a király 1901. április 28-án hagyta jóvá. A jelöltek a doktori címet nem a tanulmányok befejezéséként, hanem továbbképző formában, disszertáció elkészítése, valamint egy fő- és két melléktárgyból sikeresen letett szigorlatok alapján nyerhették el. Az első műszaki doktori címet igazoló oklevelet 1902. január 16-án adták ki a Műegyetemen.



6. ábra. Gólyavár

A Műegyetem ezen időszakában az oktatás kötelező tárgyain kívül szép számban meghirdettek választható tantárgyakat is. Ezeket a rendes tanárokon kívül a magántanárok adták elő. Ilyen stúdiumok voltak pl. Alkaloidok, Tüzelőanyagok technológiája, Gázelemzési műveletek, Erjedés, Borászati mikroszkópia, Elektrokémia stb. A választható tárgyak bevezetésével a hallgatók érdeklődésének kielégítése vált lehetővé, s ez a Műegyetem vonzóerejét növelte.

Az 1899/1900-as tanévben bevezették a „technikus ebédet”, amely egészen a felszabadulásig megtartotta szigorúan szociális jellegét, s ezzel jelentősen támogatta az anyagi gondokkal küzdő hallgatókat. Az akciót Kisfaludi-Lipthay Sándor rektor kezdeményezte, s az anyagi alapokat a tanári kar biztosította.

A múlt század utolsó évtizedeiben hazánkban viszonylag gyorsan kezdett kialakulni a modern sportélet. Az egyetem sajátos érdekei azt kívánták, hogy egyetemi sportegyesület alakuljon. Néhány lelkes műegyetemi hallgató, tanáraik és a volt hallgatók közreműködésével megalakították 1897. október 4-én a Műegyetem sportegyesületét, amely 1904 óta Műegyetemi Atlétikai és Football Club (MAFC) néven ma is működik.

A Műegyetem végleges telephelyének kialakítása

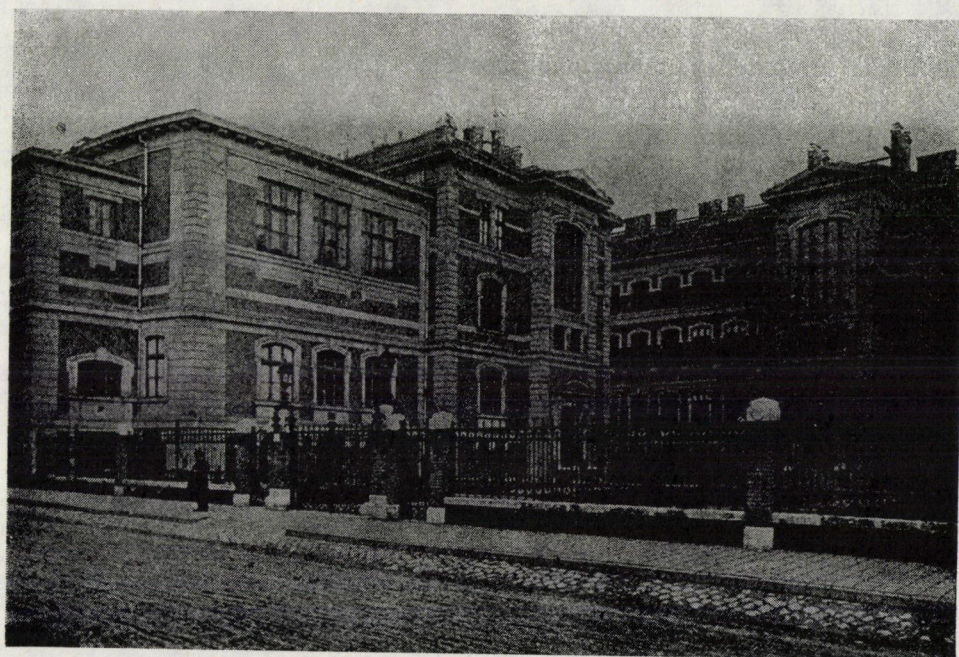
A múlt század utolsó éveiben nyilvánvalóvá vált, hogy a Műegyetem elhelyezése nem megfelelő, s végre méltó, végleges elhelyezését biztosítani kell. A Műegyetem új helyéül — jó választással — a Dunapart és a Budafoki út közötti szakaszt jelölték ki. Az épületek létesítéséről 1902. július 21-én lépett hatályba az országgyűlés által elfogadott törvény. Az épületek tervezésére CZIGLER Győző építész professzor kapott megbízást.

Az építkezés 1902-ben indult meg, s először 1904-ben a kémiai épületet (7. ábra), majd 1906-ban a fizikai épületet adták át (8. ábra). CZIGLER professzor 1905-ben elhunyt, s az épületek tervezését és az építkezések vezetését HAUSZMANN Alajos professzor vette át. Módosította a beépítési tervet, s megalkotta a központi épület (9. és 10. ábra) terveit. A központi épület főbejáratát négy, az egyes szakosztályokat jelképező, kétszeres életnagyságú női alakot ábrázoló szobor díszítette (11. ábra). Bár az épületet a kortársak nem tartották eléggé monumentálisnak és díszesnek, az utókor azonban hálás a tervezőnek; az épület architektúrája és belső kialakítása egyaránt kiállta az idők próbáját.

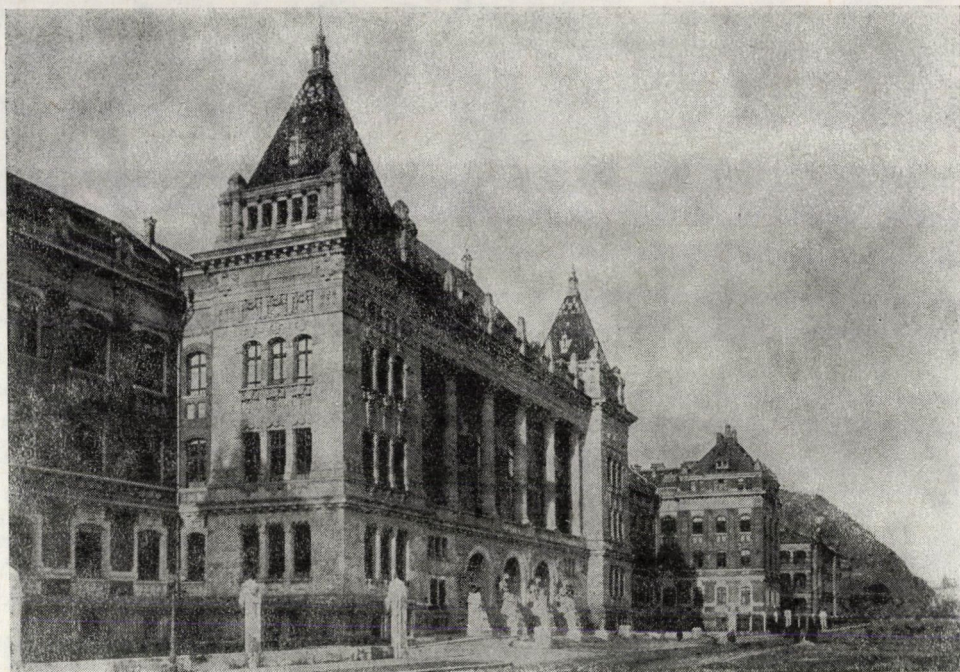
Az egyetemi telep többi épületét PECZ Samu professzor tervezte. Ő alkotta a műszaki mechanika, a mezőgazdasági géptan, a mechanikai technológia, az obszervatórium, a géplaboratórium, a kazánház és a központi könyvtár épületét. Ezek a pavilonok historizáló stílusúak. A geodéziai obszervatórium kis, földszintes épületét 1944-ben bombatámadás pusztította el, s később nem állí-



7. ábra. A kémiai épület



8. ábra. A fizikai épület



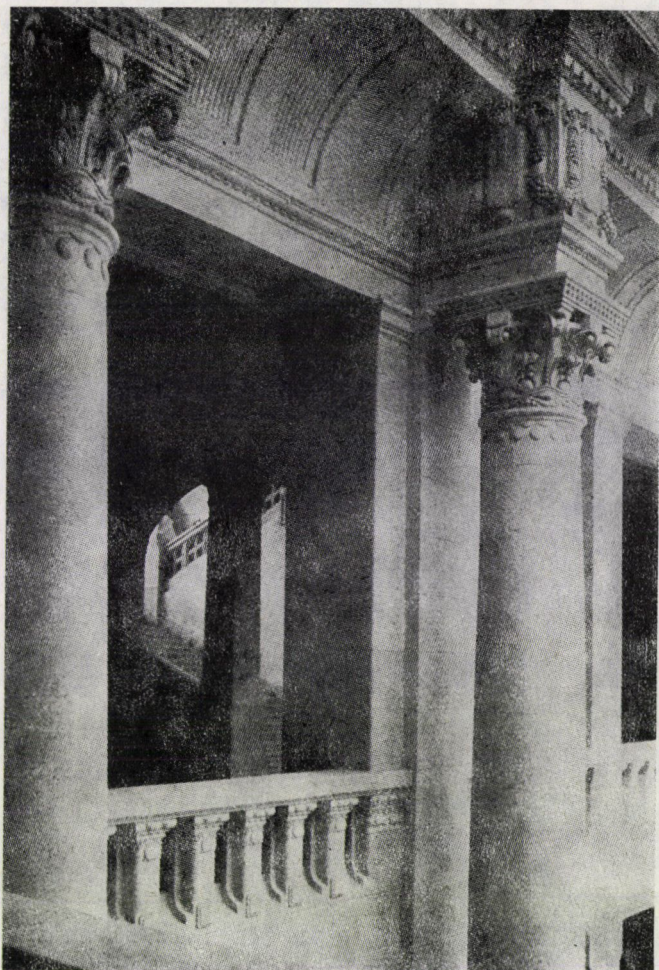
9. ábra. A központi épület

tották helyre. A felsorolt pavilonok közül a központi könyvtár épülete kelt feltűnést (12. ábra). Alaprajzi elrendezése a könyvtári funkciók figyelembevételével nagy szakszerűséggel készült. Nagyolvasótermét RAKSSÁNYI Dezső freskója díszítette (13. ábra). A központi épület és a pavilonok építése párhuzamosan folyt. Példamutatóan rövid idő alatt elkészült a hatalmas építkezés. Az 1908 őszén megindult munkálatok ugyanis 1909 őszére be is fejeződtek.

A Műegyetem oktatási tevékenysége és nevesebb tanárai

Az általános mérnökök — akiket közben kultúrmérnöknek, ma építőmérnöknek neveznek — képzése eredményes múltra tekinthetett vissza. Az oktatás igazodott a társadalmi igényekhez, színvonalas képzést nyújtott. 1898-ban vezettek be új tantervi reformokat. A heti óraszám 30—40 óra volt ekkor. A szakon két szigorlatot kellett letenni a hallgatóknak. Az 1916-ban életbe lépett tantervi változtatások a szigorlati rendet is megváltoztatták. Ekkor három szigorlatot írtak elő a hallgatóknak.

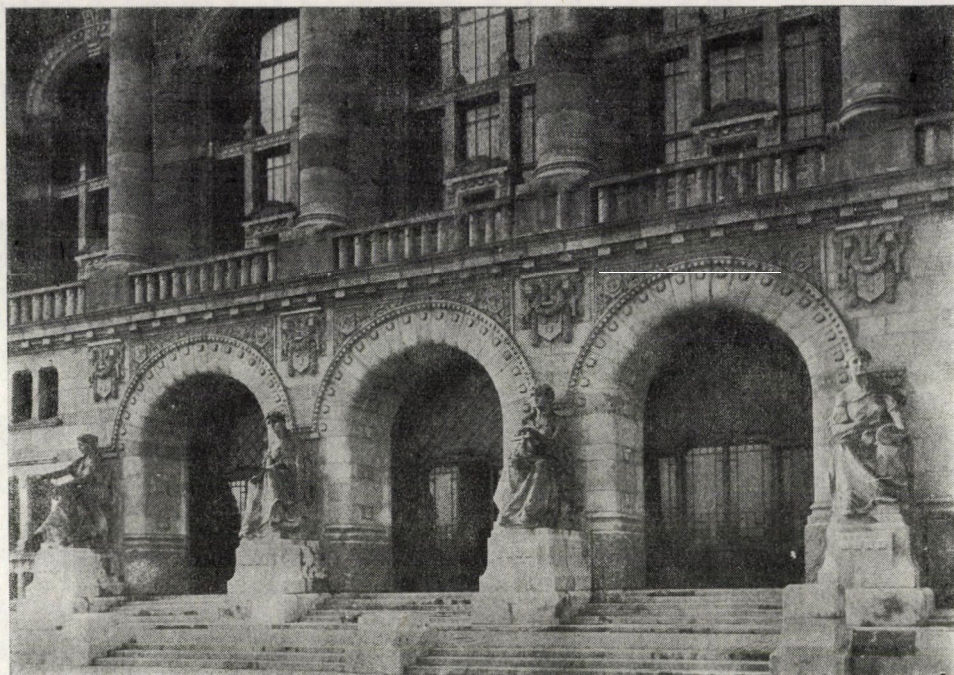
Az építési szakosztály iránt kezdetben alig volt érdeklődés. Később azonban oly mértékben növekedett az építész-hallgatók száma, hogy már a túl-



10. ábra. A központi épület belső részlete

termelés veszélye állott fenn. Az építészképzésben már kezdettől jelentkeztek problémák a művészeti és a mérnöki képzés arányai, módszerei tekintetében. Többen a művészeti képzést önálló mesteriskola keretében látták volna megoldhatónak. Mindazonáltal kifejezésre jutott az a megállapítás, hogy Budapestet a Műegyetemen nevelkedett építészek művei alakították világvárossá.

A hivatalos egyetemi rangra emeléskor a gépészmérnöki szakosztály késedelem nélkül megkezdte működését. Kezdetben a hallgatók száma kevés volt, amit a magyar gépipar lassú kialakulása indokolt. A gépészmérnöki oktatás tárgyai az I. évfolyamon teljesen megegyeztek a mérnöki és építész oktatás tárgyival.



11. ábra. A központi épület főbejárata

Az amerikai mérnökképzésben régóta funkcionáltak géplaboratóriumok. A műegyetemi gépészmérnökök képzésében az új látványos telepen építettek először géplaboratóriumot. Ez az európai intézményekben, a Berlin-Charlottenburgban, ill. a Zürichben létesítettek után a harmadik volt, és jól szolgálta a gépészmérnökök színvonalas képzését.

Az egyetemes szakosztályon a mérnöki alaptárgyak oktatása az 1881/82-es tanévig folyt, amikor is a szakosztály megszűnt.

A vegyész szakosztály az 1873/74-es tanévtől működött. Már kezdettől laboratóriumi kiegészítéssel folyt az oktatás, bár a felszerelések színvonala nem volt kielégítő. A Gellért-téri kémia épületben azonban már a kor színvonalán biztosították a vegyész mérnökök képzését. A szakosztályon 1907-ig vegyész, attól kezdve vegyész mérnöki okleveleket adtak ki.

A Műegyetem a tiszteletbeli műszaki doktorátus adományozásának jogát is megkapta. Az első tiszteletbeli mérnökdoktori címet József királyi herceg nyerte el 1909. december 23-án.

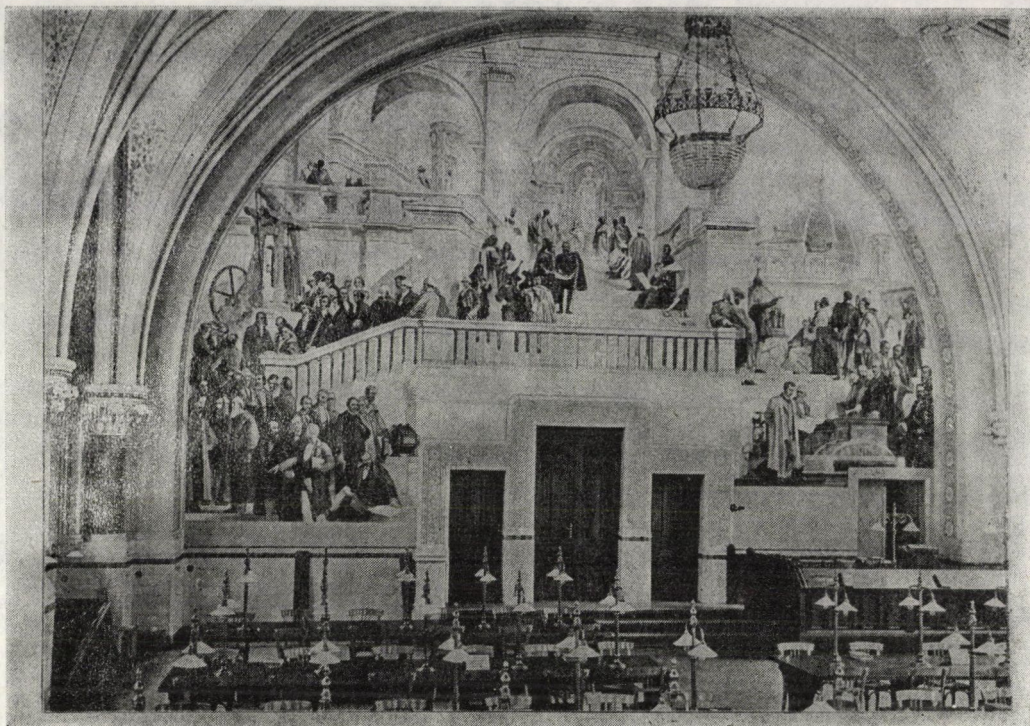
1909 októberében a „sub auspiciis regis” doktorrá avatás jogát is elnyerte a Műegyetem. Ezzel a címmel azokat lehetett kitüntetni, akik tanulmányaikat a doktori szigorlatig bezárólag a legjobb minősítéssel végezték el. A szigorú követelmények miatt azonban senki sem tudott az előírásoknak meg-



12. ábra. A központi könyvtár épülete

felelni, s előbb szűnt meg a királyság hazánkban, minthogy királygyűrűs doktorné avatás történt volna a Műegyetemen.

A Műegyetem tanácsa 1912-ben továbbképző jellegű közgazdasági oktatást javasolt, melyet a király 1914-ben jóváhagyott, s így megalakult a Közgazdasági osztály. A továbbképző formának megfelelően ide csak azok léphetek, akiknek már volt valamilyen szakon szerzett mérnöki oklevelük. Az egyéves kurzust elvégzők a közgazdasági mérnök címet használhatták, sőt, egy újabb tanulmányi év, ill. tudományos tevékenység és disszertáció, valamint a szigorlat letétele alapján a Műegyetemen közgazdaságtudományi doktorátust is lehetett szerezni.



13. ábra. Rakssányi Dezső freskója a központi könyvtár olvasótermében

A Műegyetem, az itt tárgyalt korszakában szerezte meg nemzetközi hírnevét. Indokolt az intézmény hírét megalapozó tanárok közül néhányat megemlíteni. Szólnunk kell elsősorban a matematika kiváló professzorairól: KÖNIG Gyuláról, KÜRSCHÁK Józsefről, RADOS Gusztávról, valamint az egyéb elméleti alaptárgyak és természettudományok professzorairól: HORVÁTH Ignác a műszaki mechanika, SZILY Kálmán a kísérleti fizika, WITTMANN Ferenc a technikai fizika, ZEMPLÉN Győző az elméleti fizika, ILOSVAY Lajos a kémia, KRENNER József és SCHAFARZIK Ferenc a geológia tudományának kiváló művelőiről.

A mérnöki oktatás kiemelkedő professzorai voltak: KHERNDL Antal, KISFALUDI LIPTHAY Sándor, ZIELINSKI Szilárd és BODOLA Lajos.

A gépészmérnök-hallgatókat oktató professzorok közül BÁNKI Donát-nak a motorteknika és a szárnylapátos vízikerek kutatójának, valamint ZIPERNOWSKY Károlynak az elektrotechnika úttörőjének neve vált az ország határain túl is elismertté. LÁZÁR Pál és REJTŐ Sándor a hazai ipar, a mezőgazdasági gépipar, ill. a textilipar fejlesztésében szereztek maradandó érdemeket.

A vegyész-mérnöki osztály professzorai közül 'SIGMOND Eleket „a talajtan magyar klasszikusaként”, WARTHA Vincét pedig a magyar kerámiaipar megteremtőjeként tartják számon.

Az építész-professzorok közül STEINDL Imre, a parlament alkotója, HAUSZMANN Alajos és CZAKÓ Adolf vált híressé.

A Műegyetem jogosan büszkélkedhet e korszakában végzett nagy tanítványok egész sorával. Csak néhányukat említjük meg itt: KVASSAY Jenő a korszerű vízügyi igazgatás megszervezője, SAJÓ Elemér a vízgazdálkodás tervezésének úttörője, KANDÓ Kálmán a vasút-villamosítás, JENDRASSIK György a gázturbina-technika kiemelkedő szakembere volt.

A Műegyetem 1918/1919-ben a polgári köztársaság és a Tanácsköztársaság idején

A Műegyetem szerepének elismerése és oktatásának korszerűsítése 1848 óta, 1918/1919-ben a polgári köztársaság és főleg a Tanácsköztársaság időszakában került az oktatásügyi kormányzat érdeklődésének előterébe. 1918. október 24-én megalakult a Nemzeti Tanács, majd pedig a munkások és a katonák győzelemre vitték a polgári forradalmat. A mérnökök szervezetei és a Műegyetem tanári karának egy része csatlakozott a forradalom gazdasági és műszaki fejlesztésének szolgálatához. Az Országos Munkaügyi Tanács, a Műegyetem dísztermében alakult meg 1919. február 8-án, Károlyi Mihály köztársasági elnök jelenlétében.

A Nagy Októberi Szocialista Forradalom hatására 1919. március 21-én megalakult a Magyar Tanácsköztársaság.

Már a polgári kormányzat átmeneti intézkedései is a műszaki oktatás jelentőségének felismeréséről tanúskodtak. A Tanácskormány nagy vonalú és nagy perspektívát nyújtó műszaki felsőoktatási politikája, a szocialista oktatáspolitikai példájául szolgált. A Közoktatásügyi Népbiztosság LUKÁCS György, FOGARASI Béla és KÁRMÁN Tódor vezetésével általános fejlesztési koncepciót dolgozott ki. Ennek részei: korszerű felvételi rendszer, s olyan általános reform-koncepció, amely a mérnökképzés tanterveiben egyensúlyt kívánt biztosítani a magas szintű szakosított képzés és a természettudományos alapképzés között. Ekkor merült fel először a mérnökképzésben a társadalomtudományi tárgyak oktatásának szükségessége. Nagy súlyt helyeztek a közgazdasági tárgyak oktatására, az üzemszervezési, költségvetési és pénzügyi szakismereteket is beleértve.

A Tanácsköztársaság, 133 napos, nagyon rövid időszaka alatt a Műegyetem és a műszaki felsőoktatás fejlesztése érdekében rendkívül jelentős tervek s részben intézkedések születtek. A Tanácsköztársaság bukása után az ellenforradalom minden haladó intézkedést megszüntetett. A képzés újból a mélypontra zuhant.

A Műegyetem a Tanácsköztársaság bukása után

Az imperialista hatalmak katonai támogatásával és a belső árulás következtében 1919. augusztus 1-vel a Tanácsköztársaság megbukott. Az I. világháború elvesztése, az Osztrák–Magyar Monarchia széthullásával, majd a trianoni békekötés súlyos következményeivel járt országunkra. Hazánk területe mintegy kétharmadával csökkent, s több, mint 3 millió magyar jutott a szomszéd országokban a nemzeti kisebbség sorsára. A korábban határokon túl élő magyarság közül mintegy 250–300 ezer fő települt át, fokozva a veszített háború után amúgy is súlyos gazdasági nehézségeket, növelve a munkanélküliek számát, s ébren tartva a nacionalista szellemet.

A Tanácsköztársaság bukása utáni közvetlen időszakban véres terror uralkodott, e hatás a Műegyetemen is jelentkezett. Az ifjúság jobboldali mozgalmi megerősödtek. Megalakult a Műegyetemen a karhatalmi zászlóalj. Az állandósult zavargások miatt a Műegyetem kapuit is bezárták 1919. szeptember 11-én. Az oktatás szünetelt. Megindultak a fegyelmi vizsgálatok. Még ezek megkezdése előtt a Tanácsköztársaság közoktatásában jelentős szerepet vállaló, haladó professzorok sorra benyújtották lemondásukat. Először LESSNER Manó, majd POGÁNY Móric, HIKISCH Rezső, MÁLNAI Béla, KOZMA Lajos és ÉBER László professzorok lemondottak műegyetemi tanári állásukról. Később a zaklatások hatására PFEIFER Ignác professzor is inkább az ipart választotta munkahelyéül.

A Műegyetem vezetősége segíteni kívánt a hallgatóságnak tanulmányai folytatásában. E célt szolgálták a 3 hónapos tanfolyamok, amelyeket „pótszemeszternek” neveztek. A bezárt Műegyetem engedélyt kapott vizsgák és szigorlatok tartására, s ha oktatás nem is folyhatott, a vizsgáztatással mégis segítettek a hallgatók egy részén. Az oktatást 1920. március 16-án lehetett csak megindítani. Szigorú miniszteri rendelet szabályozta, hogy kiket vehettek fel a hallgatók közül. Egy 1920. február 27-én kelt rendelkezésében HALLER István kultuszminiszter közölte, hogy nők a Műegyetemre további rendelkezésig nem vehetők fel.

A diáknyomor elképesztő méreteket öltött. A társadalom tulajdonképpen érdektelen volt a Műegyetem hallgatóinak elviselhetetlen helyzetét illetően. Csupán magán adományozók enyhítettek valamit a hallgatókon.

Közben készülődtek a szégyenteljes kultúrpolitikai döntés, a „numerus clausus” törvénybe iktatására. A nemzetgyűlés 108. ülésén, 1920. szeptember 22-én harmadszori olvasásban a törvényjavaslatot elfogadták. A vitában hangsúlyozták, hogy az intézkedések nem felekezett ellen irányulnak, s indokként a tanterem- és laboratóriumi férőhelyhiányt hozták fel. Tudjuk azonban, hogy csak a vegyész-mérnökképzésben voltak nehézségek a laboratóriumi helyekkel, a többi szakosztályokon nem. A törvény joggal váltott ki meghotránkozást hazánkban és külföldön egyaránt.

A Műegyetem a konszolidáció és világválság éveiben

Az országot sújtó nyomorúság, a pénz rohamos értéktelenedése egyre nehezebb helyzetbe hozta a Műegyetem diákságát. A szegénysorsú fiatalok minden elképzelhető és elképzelhetetlen munkát elvállaltak létfenntartásuk érdekében.

A kormány csak évek múlva volt abban a helyzetben, hogy tanulmányi ösztöndíjrendszert alapítson. A felsőház 1928. március 27-én fogadta el a közszolgálati alkalmazottak gyermekeinek tanulmányi ösztöndíjáról szóló törvényt.

A háborút megjárt fiatalság között a nyomor, a rossz táplálkozás és lakásviszonyok hatására elterjedtek a betegségek. Ezért nagy jelentőségű volt az egyetem vezetésének döntése, hogy 1925-ben *Egészségvizsgáló Intézet* néven orvosi rendelőintézetet hozott létre. Amikor az orvosi szűrővizsgálatokat is bevezették, s minden hallgató egészségét egyéni lapon regisztrálták, a Műegyetem nemzetközi viszonylatban is jelentős lépést tett a hallgatók egészségének védelme érdekében. Előtérbe került a Műegyetem oktatásának határfoka. A vizsgálatok azt mutatták, hogy 100 beiratkozott hallgató közül a négyéves tanulmányi idő alatt mindössze 18-an végeztek. S bár kétségtelenül nehéz tanulmányi követelményeket állított a Műegyetem oktatási rendje a hallgatók elé, az élet még szigorúbb volt hozzájuk.

Az első világháború után, a harmincas évek világválságáig terjedő időszakban a műegyetemi oktatás alig változott. Hiába érlelődtek a reform elvei már 1916-ban, s fogalmazódtak meg a Tanácsköztársaság idején, 1919 nyarán, nem nyúltak, s anyagiak hiányában nem is nyúlhattak az oktatás alapvető reformjához. A laboratóriumok felszerelése messze elmaradt a korszerűségtől. Ebben az időszakban kevés lehetőség volt új tanszékek szervezésére. A mégis halaszthatatlanul szükséges új tanszékek alapítását a nyugdíjazások, ill. elhalálozások során megürült állások dotációjából fedezték.

Az 1928—1929. években kidolgozott oktatási reform

A Műegyetem oktatásának korszerűsítése már nem tűrt halasztást, hiszen a legutóbbi tényleges reform a Pestről Budára való költözködés időszakában történt.

A lényeges tantervi reform indítéka a hallgatói túlterhelés volt, s megkezdődtek a vizsgálatok a tananyagok csökkentésének lehetőségére. A jószándékú vizsgálatok végül is arra a megállapításra jutottak, hogy semmilyen erőfeszítéssel sem lehet a tananyagot 8 félévben elvégeztetni, s megérlelődött a 9. félév bevezetése. Az egyes osztályok vitái alapján kidolgozott új tantervek bevezetésére az 1929/30-as tanévtől került sor, immár 9 féléves tanulmányi idővel.

Leglényegesebb változás a gépészmérnöki tantervekben történt. A reform eredményeként a 8. félévtől szakosítást vezettek be, és pedig általános (gép-szerkesztői), elektrotechnikai és mezőgazdasági szakirányokban.

A mérnöki tantervekben ugyancsak lehetővé tették a szakosítást, híd-építéstan, út- és vasútépítéstan, vízépítéstan, valamint geodézia szakirányokba.

Az építészmérnökök képzésében a tantárgyak arányos elosztása történt 8 helyett 9 félévre, de kétségtelenül fontos új tantárgyakat is beiktattak, mint pl. az épületek vízellátása és fűtése c. tárgy. Ez pedig mutatta a gyakorlati ismeretek irányába való haladást.

A vegyészmérnöki oktatás tantervét folyamatosan alakították át, s ezért a 9 féléves reform-tantervben nem voltak alapvetően új változtatások.

A közgazdasági osztály oktatásán lényegileg nem változtattak.

A tantervi reform két évtizedig egészen kis változtatásokat leszámítva változatlan maradt és helyesnek is bizonyult. A felsőoktatástörténet nem hibáztatta a Műegyetemet a szakosítás megvalósításáért, sőt megállapította, hogy már akkor bátrabb lépést kellett volna tenniük a villamosmérnöki oktatás kialakítása érdekében.

A Magyar Királyi József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem létrehozása és működése

A korszak állandósult anyagi nehézségei nem tették lehetővé a felsőoktatás fejlesztését, korszerű szintre hozását. Hóman Bálint kultuszminister végül is nagy lépésre szánta el magát, több felsőoktatási intézmény összevonására terjesztett be törvényjavaslatot a képviselőházban. Bár indokolásában nem a takarékoságot, hanem az oktatás racionális érdekeit hangsúlyozta, az intézkedést mégis az anyagi nehézségek determinálták.

A képviselőházban és a felsőházban egyaránt sokat vitatott, s minden érdekelt félben valóságos szorongást kiváltó törvényjavaslat elfogadtatott, s mint az 1934. X. tc. hatályba lépett. A törvénycikk 1. §-a intézkedett arról, hogy a József Műegyetem, a Tudományegyetemi Közgazdaságtudományi Kar, az Állatorvosi Főiskola, valamint a soproni Bányamérnöki és Erdőmérnöki Főiskola az 1934/35. tanévtől kezdve egyesül és *Magyar Királyi József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem* néven működik tovább. A szervezési munkálatok elvégzésére Dr. SZILY Kálmán államtitkárt nevezték ki miniszteri biztosnak.

Az összevont egyetemen sem voltak kedvező lehetőségek a műszaki felsőoktatás fejlődésére. A kultuskormányzat a Horthy-korszak negyedszázada alatt alig fejlesztette a Műegyetem lágymányosi telepét. 1928 novemberében átadták a gyúlékony és robbanó anyagok tároló raktárát. Egy új épület készült el csupán, az Aerodinamikai tanszék, a hozzá csatlakozó laboratóriummal.

A kultuskormányzat egyetemfejlesztési nehézségein némileg segített az ipar azzal, hogy két új tanszék létesítéséhez alapítványt adományozott. Az Egyesült Izzólámpa és Villamossági Rt., az Atomfizikai tanszék, a Goldberger, a Textilkémiai tanszék létesítését finanszírozta.

A rajztermi és tantermi helyhiány enyhítésére a központi épület bővítése nyújtott lehetőséget. CSONKA Pál professzor javaslatára és elgondolása szerint a központi épületre új, harmadik emeletet építettek. Az 1941 nyarán kezdett építkezés 1942 nyarára befejeződött. Néhány tanterem az udvarok beépítésével készült el, 1943 nyaratól, 1944 februárjáig. Ekkor adták át az auditorium-maximum elnevezésű nagy előadótermet.

Az oktatás tartalmát a nagy átszervezés lényegileg nem érintette, a korábbi tantervek voltak továbbra is érvényben. A színvonalas alapképzés, s a kismértékű szakosítás elfogadható volt az ipar számára.

A Műegyetem kiemelkedő tanárai voltak e korszakban ZEMPLÉN Géza, a szervezkémia nemzetközi hírű kutatója, KOTSIS Iván, a korszerű építészeti szemlélet kialakítója, LISKA József a villamosgépek oktatásának megalapozója és PATTANTYÚS Á. Géza, a gépészmérnök nemzedékek elismert nevelője, akinek vitathatatlan érdeme a hazai szaksajtó színvonalas művelése és a mérnöki munkához szükséges alapvető kézikönyvek összeállítása és kiadása.

Nagy nehézségek jellemezték az egyetem sportklubjának, a MAFC-nak a működését is.

A Műegyetem hallgatóinak kulturális tevékenységét legjobban a Műegyetemi Zenekar és az Énekkar reprezentálta. A zenekar általában évente két hangversenyt adott, s gyakran az énekkarral együtt a hivatalos ünnepélyek kultúrműsoraként szerepeltek. Neves karmesterek vezetésével megállták helyüket az amatőr együttesek között. Az énekkar később a tudományegyetemi énekkarral egyesült. Ez a közös kórus 1936. december 26-án elutazott Amerikába, ahol 14 városban sikeres műsort adott. Gyakoriak voltak az énekkar rádiófelvételei is.

A II. világháború eléri a Műegyetemet

A II. világháborút közvetlenül megelőző korszak feltétlen pozitív intézkedése volt a Mérnöki Továbbképző Intézet létesítése. A Vallás- és Közoktatásügyi Minisztérium 1939. július 26-án hagyta jóvá az intézet szervezeti szabályzatát, s az intézet Intéző Bizottságának alakuló ülését 1940. június 17-én tartották meg. Ezen az ülésen MIHAILICH Győző professzort választották meg a Mérnöki Továbbképző Intézet első igazgatójának.

Magyarország szűklátókörű politikai vezetésének tragikus következménye volt a nemzet további sorsára: a Minisztertanács 1941. június 26. ülésén hadat üzent a Szovjetunióknak, s ezzel hazánk is belépett a II. világháborúba. A hábo-



14. ábra. Egy tanterem a háború befejezése után

rús nehézségek a műegyetemi oktatásban is jelentkeztek. A hallgatók egy részét katonai szolgálatra hívták be, más részét munkaszolgálatra kötelezték. Az oktatás fegyelme meglazult. A háborús érdekek siettették a mérnökök kiképzését, ezért ideiglenes tantervi változtatásokkal a tanulmányi időt 8 fél-évre csökkentették.

Az 1944. márciusi német megszállás után féktelen terror uralkodott az országban. Az ellenállási mozgalomban műegyetemi hallgatók is részt vettek, csatlakoztak a Görgey-zászlóaljhoz. Többen életüket áldozták. Emléküket emléktáblák őrzik a Műegyetem központi épületében. A Műegyetem értékeinek mentése érdekében a telki apátság épületeibe 30 autófuvarral 195 láda műszert szállítottak el. A Műegyetem könyvtárából 12 000 kötet könyvet, ill. folyóiratot telepítettek ki Budajenőre.

Az egyetemi autonómiának még a látszata is megszűnt. A német csapatok elhurcolták LAKY Dezsőt, a Műegyetem professzorát, volt közellátásügyi minisztert. A műegyetem épületeit katonai célokra igénybe vették. A német hadvezetésnek az a döntése, hogy Budapestet nem adják fel harc nélkül, a Műegyetemet is katasztrófába sodorta. Harci alakulatok foglalták el az épületeket, ágyúkat helyeztek el laboratóriumokban, géppuskaállásokat az épületek ablakaiban. Ennek következményeként a háborús pusztítás irtózatossá volt (14. ábra). A Műegyetem osztályait jelképező nőtáblák a központi épü-



15. ábra. A központi épület főbejáratánál levő szobrok a háború pusztítása után

let főbejáratánál nagyrészt megsemmisültek (15. ábra), s nem is állították helyre azokat. A háború a művészeti alkotásokat sem kímélte.

A németeket szolgáló nyilas kormányzat elrendelte a Műegyetem nyugatra telepítését. A hallgatókat katonai SAS behívóval kötelezték a kitelepülésre. A parancsnak eleget tevő hallgatókat a Keleti pályaudvarról indították útnak 1944. december 8-án és 14-én keserves, sok nélkülözéssel járó útukra. Agépészmérnök-hallgatók Drezdába kerültek, az építészek Dániába keveredtek el a háborús zűrzavarban.

A Drezdába került hallgatók Budapest felszabadulásának napján, 1945. február 13-án éltek át a szörnyűséges bombázást, amelynek 35 000 halottja volt. Csak a vak szerencse mentette meg a Műegyetem hallgatóit, hogy nem

vesztek oda mindnyájan. A szőnyegbombázás határa éppen a szálláshelyük-nél végződött, így csak néhány halottjuk és sebesültjük volt. A németeket kiszolgáló bűnös politika így tette tönkre hazánk egyetlen Műegyetemét, elpusztítva a nehezen beszerzett, nem világ színvonalú, de mégis nagyon értékes berendezését.

A Műegyetem a felszabadulás utáni években

Budapest 1945. február 13-án szabadult fel. A Műegyetem Budán lakó tanárai és dolgozói a felszabadulás utáni napokban már megjelentek munkahelyükön, és az oktatás megindításának lehetőségét és feltételeit latolgatták. Először a törmelék elhordását végezték, ezzel kezdődött el az újjáépítés.

A háború utáni helyzet legnagyobb réme az infláció volt. A forgalomban levő bankjegyek mennyisége 1945. december 31-én 765 45 milliárd pengő, 1946. június 30-án 6 277 trillió pengő, július 31-én 47,35 quadrillió pengő volt. Ez volt a világ addigi legnagyobb méretű inflációja. A kormány 1946. augusztus 1-vel megteremtette a stabil pénzt, a forintot.

A Műegyetem vezetése a felmérések alapján kérte az újjáépítéshez szükséges összegek folyósítását. A kultuskormányzat azonban nem volt abban a helyzetben, hogy a Műegyetem helyreállítását finanszírozza. Felismerte a Műegyetem fontosságát az újjáépítésben és az iparosításban egyaránt s ezért akciót indított „Munkások a tudományért — tudósok a munkásokért” jelszóval. Ez a lelkes akció tüntette el a háború sebeit, s tette lehetővé az oktatás megindítását.

Az oktatás 1945 áprilisában egy összevont félévvel folytatódott. A következő tanévben már jelentkeztek a nyugatra hurcolt hallgatók, a további tanévekben pedig azok, akik tanulmányaikat a numerus clausus törvény vagy a háborús események katonai szolgálata miatt megszakították. Mindezek következményeként a felvételi létszámokat megemelték, a tanulmányi időt 8 félévben állapították meg. Az egyetemeken, így a Műegyetemen is, megalakultak a társadalmi szervek.

A hallgatók szociális helyzete nehéz volt. Az állami ösztöndíjrendszer és a szervezett kollégiumi ellátás még nem volt kiépítve. Egyedüli, nagyon jelentős rendszeres szociális támogatás a hallgatók étkeztetése volt. Időnként a külföldi segítyből származó ruhanemű és élelmiszer szétosztása folyt.

Közben az országban nagy jelentőségű változások történtek, 1947 júliusában megalakult az Országos Tervhivatal, augusztusban pedig megkezdődött a 3 éves terv. A gyors ipari fejlődésre jellemző, hogy 1946 decemberében a gyár-
ipari munkások száma megközelítette az 1938-as átlagot, egy év múlva azt már 10%-kal meg is haladta. Először a bankokat, majd 1948. március 25-én a 100 főnél több munkást foglalkoztató üzemeket államosították. 1948. június 12–14.

között egyesült a két munkáspárt, megtörtént a fordulat. Hazánk a szocializmus útjára lépett. 1949. augusztus 20-án kihirdették a Magyar Népköztársaság új alkotmányát.

A Műegyetem az egyetemi reform időszakában

A nagy jelentőségű társadalmi változások megteremtették a feltételeit a szocialista iparosításnak és a kulturális forradalomnak. 1948 nyarán megkezdődött a felszabadulás utáni első felsőoktatási reform. Ennek célkitűzései:

- az egyetemek kapuinak megnyitása a munkásság és parasztság számára,
- kötött tanulmányi rend bevezetése, az oktatás tartalmi korszerűsítése és gyakorlatibbá tétele,
- a népgazdasági igényeknek megfelelően a felvételi létszámok tervszerű megállapítása,
- a tanári karok összetételének megváltoztatása az új szakmai és nevelési követelményeknek megfelelően.

A célkitűzések megvalósítása érdekében a Műegyetemet alapvetően érintő szervezeti változások történtek. Az 1948. évi LVII. tc. a Műegyetem Közgazdaságtudományi karából önálló egyetemet létesített *Magyar Közgazdaságtudományi Egyetem* elnevezéssel. Az 1949. évi 22. törvény elrendelte a Budapesti Műszaki Egyetem keretében új tudománykarként Veszprémben *Nehézvegyipari Kar* felállítását. Az 1951. évi 25. tvr. pedig megalapította a *Veszprémi Vegyipari Egyetemet*. Az 1949. évi 23. törvény létrehozta a *Nehézipari Műszaki Egyetemet* Miskolcon. Az 1951. évi 19. sz. törvényerejű rendelet Szegeden *Közlekedési Műszaki Egyetemet* alapított.

A Műegyetem kari szervezete az 1949. 15. sz. tvr. alapján az alábbiak szerint alakult:

- Mérnöki Kar,
- Építésmérnöki Kar,
- Gépésmérnöki Kar,
- Villamosmérnöki Kar,
- Vegyészmérnöki Kar,
- Nehézvegyipari Kar.

A Honvédelmi Minisztérium és a Közoktatásügyi Minisztérium 1950-ben kiadott együttes rendelete létrehozta az egyetem szervezetében a *Hadmérnöki Kart*. S miután a Nehézvegyipari Kar önálló egyetemmé szerveződött, a Műegyetemen a következő években hat kar működött. E szervezeti változtatások nagy jelentőségűek voltak, nagymértékben hozzájárultak az egyes tudományterületek fejlődéséhez. A tananyagok tartalmi korszerűsítése érdekében mindenekelőtt az egyes karokon folyó mérnökképzés szakosítását kellett

eldönteni. A Hadmérnöki Karral együtt összesen 23 szakra készültek el az új tantervek. A 8 féléves oktatás, figyelemmel a bevezetett szakosításra, ténylegesen csökkentette a hallgatók túlterhelését, a gyakorlati foglalkozások növekedése pedig segítette az elméleti ismeretek alkalmazását. Az ifjúsági szervezet kezdeményezésére megkezdődött a tanulósoportos oktatás.

Minden karon bevezették a társadalomtudományi tárgyak és az orosz nyelv oktatását. Mindkét területen nagy nehézséget okozott az oktatószemélyzet hiánya.

Az újjáépítés mellett megkezdődött az új épületek tervezése. Az épületek helyreállítása nagy gonddal történt, figyelembe véve az adott lehetőségeket. A kémiai épületet úgy hozták rendbe, hogy a laboratóriumok működhessenek, de az épület megsérült kupoláját lebontották. Ugyanakkor a központi könyvtár épületénél törekedtek az eredeti állapot visszaállítására, vállalva az ezzel járó költségeket is.

A felszabadulás után az első épületet az Atomfizikai tanszék részére, a fizikai épület udvarában építették fel és 1950. április 4-én adták át. A zsúfoltság csökkentése érdekében hamarosan új épület készült el JANÁKY István tervei alapján. Az St. jelű épületet az 1950/51-es tanév elején adták át rendeltetésének (16. ábra).

Az egyetem gép-műszer ellátottsága javult ugyan, de még nem volt kielégítő. A gyakorlati képzés erősítése érdekében ezért üzemi és terepgyakorlatokat iktattak a tantervbe.

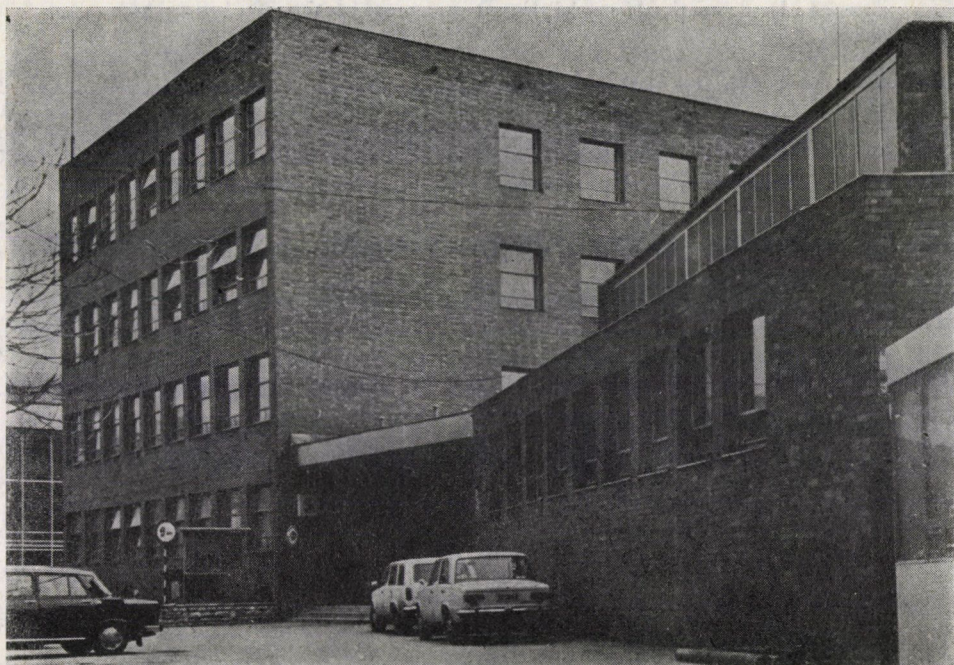
A Közlekedési Műszaki Egyetemnek nem adott igazi otthont Szeged városa, ezért egy év múlva átköltözött Szolnokra. A nemzetközi helyzet hirtelen rosszabbodása kedvezőtlenül hatott országunk belső fejlődésére.

Az ország erejét meghaladó erőfeszítésekre kényszerült. Az iparosításban elkövetett hibák a Műegyetemet elsőrendűen érintették. Az ipar szűkebb specializációjú mérnököket követelt, a politikai helyzet nem volt alkalmas hosszabb meditációkra. Az éppen elkezdett reformot át kellett alakítani. A specializáció fokozódott a már különvált Nehézvegyipari Kar nélkül is, összesen 28 szakon folyt a képzés.

Az átdolgozott tantervek a korábbi heti 40 óra helyett már 50—55 órát rögzítettek, szinte lehetetlenné téve ezzel a hallgatók önálló munkáját. A szakosítás indokolatlan kiterjesztését és a hallgatók túlterhelését eredményező túlzott óraszámú tanterveket az első felsőoktatási reform torzulásaként foghatjuk fel.

A hallgatók szociális segítése fokozatosan javult. Az 1947/48-as tanévtől kialakított ösztöndíj-rendszer már anyagi biztonságot nyújtott. Egyes épületek átalakítása révén bővíteni lehetett a kollégiumokban lakó hallgatók arányát.

A népgazdaság feladatainak ellátásához, gyorsan nagy létszámú szakembergárdát kellett kiképezni. Ennek érdekében a kormányzat átmeneti intézményeket hozott létre. Az államosított vállalatok vezetőinek képzésére



16. ábra. Az „St” jelű épület

a *Gazdasági és Műszaki Akadémia*, a szakmunkásképző intézetek tanárainak képzésére a *Műszaki Tanárképző Főiskola*, a mérnöki igények kielégítésére az *Állami Műszaki Főiskola* szolgált.

Az ipar és a mezőgazdaság gyors fejlődése miatt a mérnökhány egyre nagyobb méretűvé vált. Ennek enyhítése céljából a kormányzat létrehozta a munka melletti mérnökképzést esti, ill. levelező formában. A Műegyetem esti tagozatát a megszüntetett és hozzácsatolt Műszaki Főiskola oktatógárdájából alapították. Az esti oktatás nemcsak a Műegyetemen folyt, hanem kihelyezett tagozatonként néhány nagyüzemben, így Csepelen, Szigethalmon és Győrben is. A nők egyenjogú részvétele a mérnökképzésben csak a felszabadulás után valósult meg. Az első években néhány nőhallgató volt csupán, később már a nők közül is egyre többen választották a mérnöki pályát.

A Mérnöki Továbbképző Intézet ebben az időszakban hatalmas feladatokat teljesített. Ebben az időszakban rendeződött az egyetemi oktatók bonyolult címrendszere, s új tudományos fokozatokat vezettek be. Az Elnöki Tanács 1950. évi 44. sz. törvényerejű rendeletével „a tudományok kandidátusa”, majd az 1951. évi 26. sz. törvényerejű rendelet „a tudományok doktora” elnevezésű fokozatok megszerzésének feltételeit szabályozták. 1950-től a Műegyetemen megszűnt a doktori cím adományozásának joga.

A Budapesti Műszaki Egyetem szervezeti kettébontása

Az újjáépítés jelentős mértékben megnövelte a munkaerőkeresletet a mérnöki-építészmérnöki munkaterületeken. A hároméves terv során megindult nagy arányú építkezések, majd az első öt éves terv hatalmas mély- és magasépítési munkálatai újabb munkarögzítésekkel léptek fel. A kormányzat ezért elhatározta egy önálló építőipari egyetem létesítését. Az Elnöki Tanács az 1952. évi 13. sz. törvényerejű rendeletével létrehozta az *Építőipari Műszaki Egyetemet*. Az új műszaki egyetem szervezetileg külön működött, de a korábbi Műegyetem telephelyén. A Közlekedési Műszaki Egyetem szolnoki elhelyezése sem vált be, ezért az Elnöki Tanács 1955. évi 31. sz. törvényerejű rendeletével az egyetemet megszüntette és karként az Építőipari Műszaki Egyetemhez csatolta. Az új egyetem ettől az időtől kezdve *Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem* néven működött.

E szervezeti változások időszakában gazdasági nehézségek jelentkeztek a népgazdaságban, a politikai légkör sem volt kielégítő. Mindezek a hatások a műszaki felsőoktatásban károsan jelentkeztek. A mérnöklétszámok felfuttatása hirtelen megállt, majd visszaesett, gazdasági kényszerűségből minimálisra csökkentek az esti és levelező hallgatók munkaidő-kedvezményei. A legnagyobb nehézséget mégis az oktatás stabilitásának hiánya jelentette. Rátértek az oktatás tanterveinek és a vizsgarendeknek a tanévenkénti minisztériumi jóváhagyására. A már említett túlhajtott szakosítás, a változó tantervek, az esti tagozat átszervezése mind hozzájárultak ahhoz, hogy néhány év alatt az oktatás szinte teljesen áttekinthetlenné vált. Az oktatás stabilitását meg kellett teremteni.

A műszaki felsőoktatásban ezt a célkitűzést a második felsőoktatási reform keretében oldották meg. E reform során készültek el a mérnökképzés tartós tantervei. Reális mértékre csökkentették a szakok számát. Az 1951/52-es tanévtől a tanulmányi időt ismét 9 félévre emelték, s tantervekben heti 36 órában rögzítették a hallgatók órarendi elfoglaltságát, megállapították a vizsgák maximális számát is.

A Villamosmérnöki Karon 3, a Vegyész-mérnöki Karon 1, a Gépészmérnöki Karon 5, a szervezetileg külön egyetemen működő Építészmérnöki Karon 2, a Mérnöki Karon 4, a még Szolnokon működő egyetemen 2 szakra készítették el a tartós tanterveket. Így e szakok száma 17 volt, a Hadmérnöki Kar szakosítása változatlan maradt. Fontos célkitűzés volt a gyakorlati oktatás növelése óraszámban és színvonalában egyaránt.

A korszerű oktatás megteremtésében alapvető fontosságú volt a szovjet oktatási tapasztalatok alkalmazása. Az oktatásügyi kormányzat kérésére szovjet vendégprofesszrok működtek néhány évig műszaki egyetemeken. M. G. JEFIMOV a vegyipari műveletek, N. A. NAUMOV az épületgazdaságtan, M. A. DINYINA az ipargazdaságtan, A. G. NALCSAN a szerszámgépek, N. B. ARUTJUNOV a műszer szak oktatásának megalapítója volt.

Ugyanebben az időszakban alapvetően változott műszaki egyetemeink tanári összetétele. Nagy számban neveztek ki ipari szakembereket professzornak. Hazatért a Szovjetunióból BENEDIKT Ottó professzor, aki a Különleges villamosgépek, FIKERT Ferenc, aki a Marxizmus—leninizmus tanszék vezetője lett, Olaszországból hazahívták KORACH Mór professzort, aki 1957-től a Kémiai Technológia tanszéket irányította. A személyi változások az oktatás politikai és szakmai tartalmát teljesen átalakították.

Az új oktatási formák, a tanulócsoportos oktatás egyaránt előtérbe állította az oktatás módszertani és nevelési kérdéseinek vizsgálatát. Kiemelkedő professzorok és oktatók bevonásával szakbizottságok alakultak a módszertani problémák megoldására.

Az egyetemen levő s a korszerű oktatásért küzdő, valamint az iparból jött szakemberek oktatást formáló véleménye egyre erőteljesebbé vált. A vegyészmérnökök képzésében ipari üzemek közreműködésével félüzemi laboratóriumokat alakítottak ki. Az első viszonylag még kis méretű ilyen laboratóriumot a Kémiai technológia tanszéken POLINSZKY Károly adjunktus szervezte meg, majd később HOLLÓ János és TETTAMANTI Károly professzorok voltak úttörői az efféle új oktatásnak. A gépészmérnökök képzésében elkezdték egy új gépműhelyi épület létrehozását, amelynek berendezését egy fiatal docens, RÁNKY Miklós állította össze. A korszerű berendezést nem az oktatásügyi tárcá finanszírozta, hanem a nagyüzemek adták át oktatási célra. A villamosmérnökök laboratóriumi felszerelésének kialakításában az erősáramú szakterületen EISLER János, a gyengeáramú szakterületen BARTA István és VÁGÓ Arthur, a műszeroktatás területén KOLOS Richárd jeleskedett.

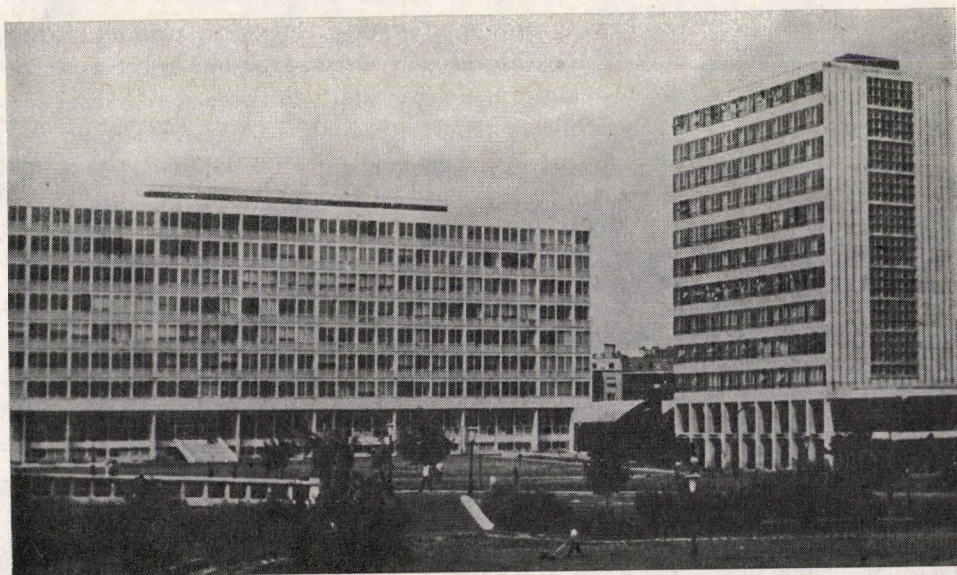
A korszerű tantervek, a tanulócsoportos oktatás és a tudományos kutatás követelményei új épületek létesítését igényelték. 1951-ben folyt a „H” és „T” jelű épületek (17. ábra), valamint a gépműhely építkezése. A három épületet 1952. december 18-án adták át rendeltetésének. Közben már folyt az új nagy kiterjedésű épület tervezése. A Duna partján elterülő „R” jelű épület alapozását 1952 júniusában kezdték, s 1955 szeptemberében készült el (19. ábra). Az új épületek csökkentették a zsúfoltságot, de nem tudták a helyiség-hiányt megoldani.

Az Építőipari Műszaki Egyetem az új épületekből nem részesült. A tervek szerint a Petőfi hídtól délre eső területen létesült volna az új egyetem telepe. A nyilvános pályázatot WEICHINGER Károly professzor terve nyerte el. Az anyagi nehézségek azonban meggátolták a nagyszabású terv realizálását. Az építészmérnökök képzésében a kutatóintézetek segítségét kellett igénybe venni. A laboratóriumi méréseket a hallgatók nagyjából külső intézetekben végezték el. A társadalmi szervek aktív tevékenységet fejtettek ki.

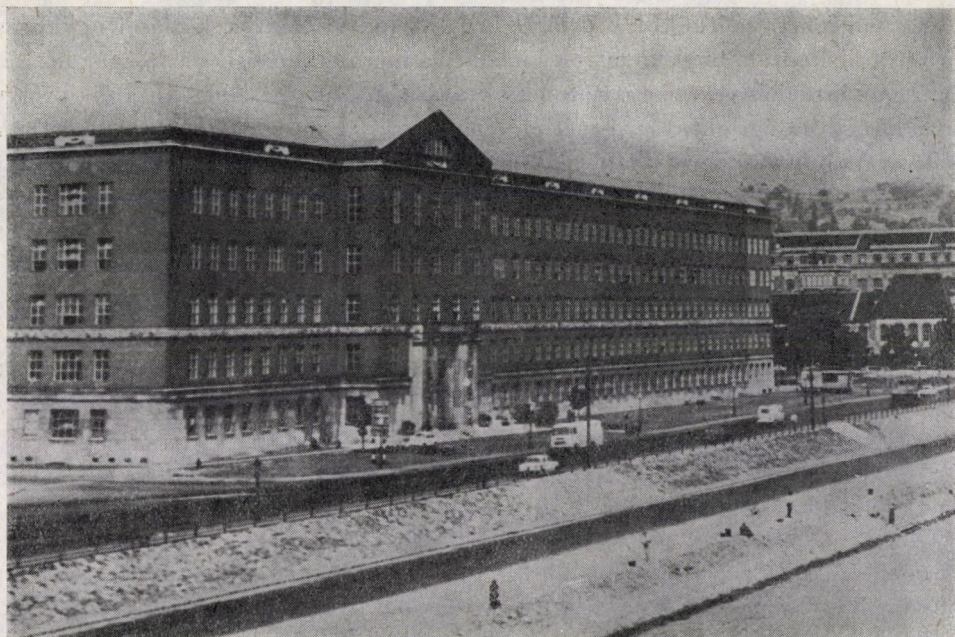
A fiatalok részt vettek nagy jelentőségű társadalmi munkákban, mint pl. a Hanság lecsapolása, egyetemi építkezések, útépítések stb. Az értelmiséggé válás folyamatának fontos állomásai voltak a kollégiumi diákönkormányzatok-



17. ábra. Az „E”, „H”, „T” és „R” jelű épületek



18. ábra. A „V₂” és „E” jelű épületek



19. ábra. Az „R” épület Duna-parti homlokzata

ban való tevékenység, a tandíj- és egyéb diákjóléti bizottságokban való részvétel, politikai szervezőmunka stb. Az ifjúsági szervezet felkarolta a minőségi oktatás célját szolgáló új formát, a tudományos diákköröket. A diákköri munkában résztvevő hallgatók megismerték és feldolgozták egy-egy téma szakirodalmát, és némi gyakorlatot szereztek a kutatómunkához.

A hallgatók szociális körülményei javultak, egyes rétegeknek azonban továbbra is voltak szociális gondjai.

Az új épületek építésével és a laboratóriumok felszerelésével lehetővé vált a kutatómunka megjavítása és fejlesztése. Az ipar, a mezőgazdaság olyan hatalmas feladatok megoldásán dolgozott, amely meghaladta oktató- és tervezőintézeteink kapacitását, s ezért egyre több feladat megoldását igényelte a műszaki egyetemektől. A kutatásokért befolyó bevételből a műszer- és gépi felszerelés korszerűsítését és a kutatásban résztvevők díjazását is meg lehetett oldani. Az ipari kutatások termékenyítőleg hatottak az oktatásra is. A kutatások szakirodalmi háttérét biztosító könyvtár ebben az időben dolgozta fel a tanszéki könyvtárak állományát s központi katalógusban tette áttekinthetővé a mintegy 100 tanszéki könyvtár állományát. Ugyancsak jelentős volt mindkét műszaki egyetemen a tudományos folyóiratok megindítása, biztosítva ezzel a kutatások eredményeinek publikálását.

A végzett mérnökök véleménye és az iparvállalatok közlései egyaránt arról tanúskodtak, hogy nem volt kielégítő a mérnökképzésben a közgazdasági, üzemgazdasági és vezetési ismeretek oktatása. A Műegyetemen korábban folyt már közgazdasági oktatás, ismét előtérbe került annak valamilyen formában való visszaállítása. Egy szakbizottság foglalkozott a témával, és kidolgozta a képzés megoldását posztgraduális formában. A végzett mérnökök kétéves közgazdasági jellegű tanulmányok elvégzése után gazdasági mérnöki oklevelet nyertek.

Az itt közölt folyamatos fejlődésben okozott törést az 1956. évi ellenforradalom. A belső reakció, külső biztatásra, kihasználva a pártvezetés széthúzását és határozatlanságát 1956. október 23-án fegyveres felkelést robbantott ki. Az ellenforradalmi lázadás leverésében a Szovjetunió segítségével nov. 4-vel hozott fordulópontot.

Az ellenforradalom rövid időszaka alatt a Műegyetem katonai telephellyé vált. Sok helyen szétszórták és felégették az iratokat.

Az oktatást 1957. február 4-én indították meg, s ez a csonka félév március 16-ig, a II. félév március 25-től június 29-ig tartott. Ily módon sikerült elérni, hogy a hallgatók évvesszesség nélkül folytathassák tanulmányaikat.

Az oktatószemélyzetnek nem volt könnyű feladata. Az eszmékben megrendült ifjúság politikai szervezete is szétesett. A Kommunista Ifjúsági Szövetség a Budapesti Műszaki Egyetemen 1957. április 25-én, az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetemen április 26-án alakult meg. Ettől az időtől fogva ismét érvényesíthetők voltak az ifjúság demokratikus jogai.

A harmadik felsőoktatási reform előkészítések időszaka, a két műszaki egyetem egyesítése

A Magyar Szocialista Munkáspárt nagy energiával látott hozzá az ellenforradalom okozta károk felszámolásához. A gazdaság helyreállításához a Szovjetunió és a szocialista országok hosszú lejáratú hitelt nyújtottak. A kormányzat első intézkedései alapvető változtatásokat hoztak a műszaki felsőoktatásban. Visszaállították, sőt növelték az esti és levelező hallgatók munkakedvezményeit, 1957-ben visszaadták a doktorraavatás jogát az egyetemeknek s így a műszaki egyetemnek is.

A szocialista társadalom felépítése napirendre tűzte az oktatási rendszer újjászervezését. Ennek megfelelően az országgyűlés elfogadta az 1961. III. törvényt a Magyar Népköztársaság oktatási rendszeréről. A törvény alapján láttak hozzá a harmadik felsőoktatási reform munkálataihoz. Ennek legfontosabb célja az egyes szakok képzési célkitűzéseinek meghatározása mellett a tananyagok korszerűsítése volt. A tartós tantervek elvi alapjai nagyrészt megmaradtak. A szakosítás mértéke a következő volt: A Gépészmérnöki Karon 6,

a Villamosmérnöki Karon 3, a Vegyészmérnöki Karon 1, a Mérnöki Karon 4, az Építészmérnöki Karon 1, a Közlekedési Üzemmérnöki Karon 1 szakra készültek az új tantervek. A Hadmérnöki Kar 1957-ben megszűnt.

A szakosítás megállapításában már az is közrejátszott, hogy a mérnökök szervezett új továbbképzési formájára, a szakmérnökképzésre vonatkozóan 1960-ban kormányhatározat jelent meg. Az új továbbképzési formát a mérnök-közgazdász-képzés kedvező tapasztalatai alapján létesítették. A kétéves, oklevéllel záródó új forma speciális szakirányú továbbképzésre nyújtott lehetőséget, s így a normál mérnökképzésben a szakok számát a gyors technikai fejlődés ellenére sem volt szükséges felemelni.

A harmadik felsőoktatási reform tananyag-korszerűsítési munkája során erőteljesen foglalkoztak az oktatási módszerek korszerűsítésével. Előbb oktatástechnikai csoport, majd osztály alakult. Ez lendületet adott az audio-vizuális módszerek terjesztésének. Oktatófilmek készültek és filmeket vásároltak, ill. kölcsönöztek is a tananyag szemléltetéséhez. Az idegen nyelvoktatás minőségi javítását szolgálta a nyelvi laboratórium üzembeállítása. Örvendetesen bővült a laboratóriumok műszerállománya. Ennek megfelelően a gyakorlati oktatás színvonala jelentősen javult. A korábbi feladatmegoldó tantermi gyakorlatok helyébe általánosan a műszerekkel végzett mérési gyakorlatok léptek. A hallgatók szívesen vettek részt ezeken a foglalkozásokon, mert megismerhették a mérnöki munka szépségeit.

A műszaki egyetemi karok közül leggyorsabban a Villamosmérnöki Kar fejlődött. A nagy hallgatólétszámok feltétlen indokolták új épületek építését. 1954 májusában kezdték el az „A” épülethez hozzáépített V_1 jelű épület (20. ábra) munkálatait, de csak hét évvel későbbben adták át rendeltetésének. Itt kapott helyet a korszerű nagyfeszültségű laboratórium.

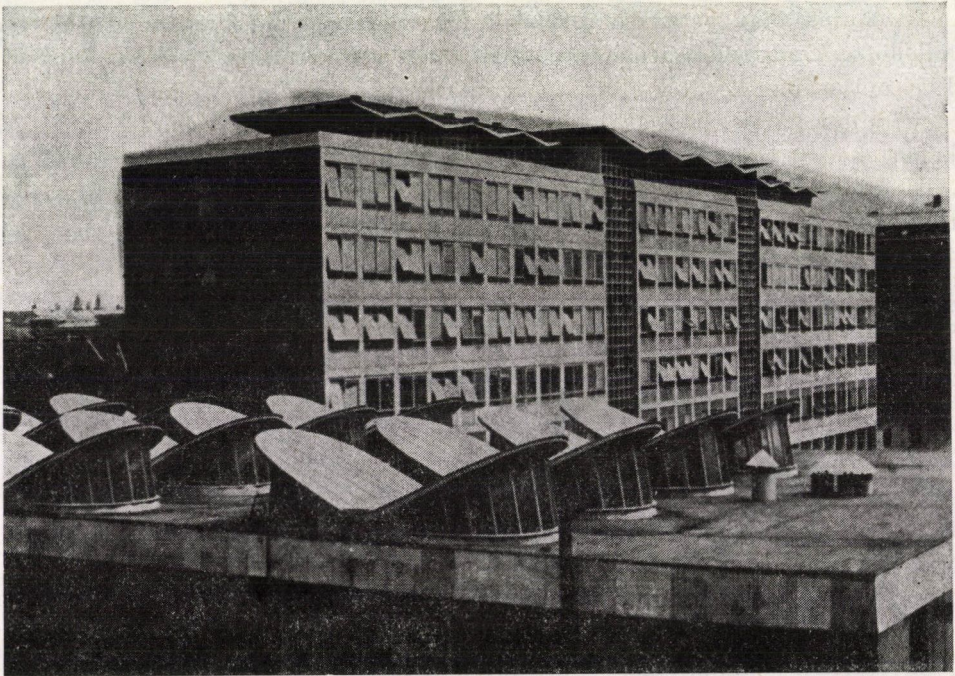
Ezekben az években visszatérő és megoldatlan probléma maradt a rajztermek hiánya. Ennek enyhítésére, a három új épületben a tetőbeépítés révén 40 tanulóköri helyiséget alakítottak ki.

A gépészmérnök képzés helyigényének kielégítése érdekében a Duna-parti rajztermi épülethez merőlegesen csatlakoztatva, 1961-ben új épület földmunkáit kezdték meg, amelyet 1964 decemberében adtak át. Az ötemeletes épülethez (21. ábra) csatlakozó csarnoki szárnyban félüzemi laboratóriumokat létesítettek.

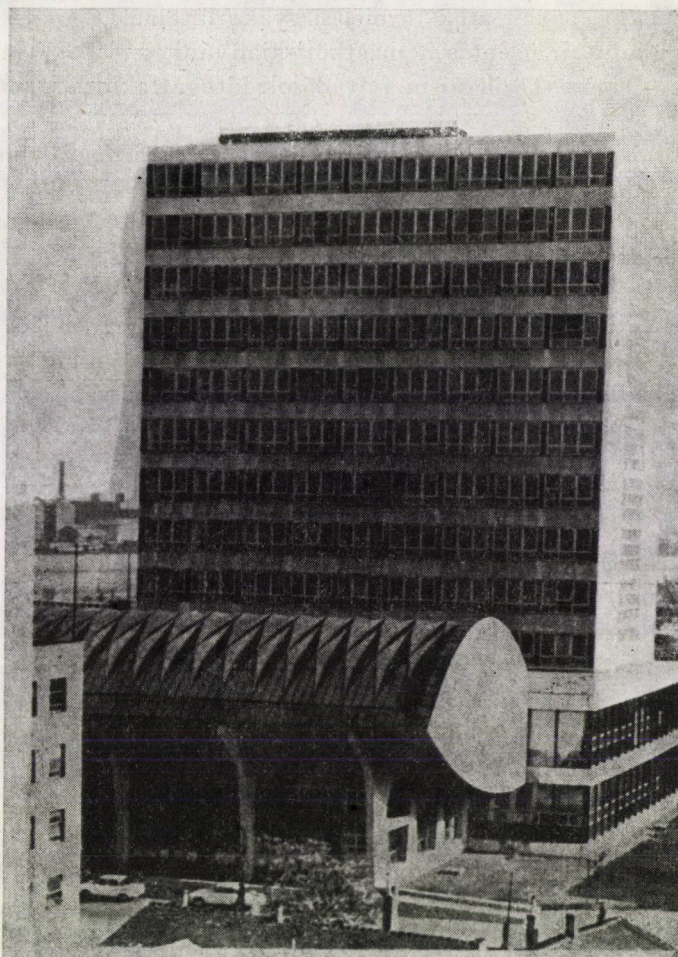
Az eredeti műegyetemi telep lényegesen bővült. A még rendelkezésre álló telekrészek tervszerű beépítése azonban átfogó beruházási tervet igényelt. 1963-ban elkészült a Budapesti Műszaki Egyetem 20 éves távlati fejlesztési terve. A következő években a nagyszabású terv részleteiként kezdték meg az egyetem beruházásait. A fejlesztési terv alapján legfontosabb egy új tanulmányi épület létesítése volt. (22. ábra) Az épülethez csatlakozó csónaktetejű épületrészben 3 audio-vizuális előadóterem található. Az épületet KISDI Pál és PERCZEL Dénes tervezte.



20. ábra. A „V₁” jelű épület, háttérben a „V₂” jelű épülettel



21. ábra. A „D” épület a műhelycsarnok szárnyal



22. ábra. Az „E” jelű épület

Jelentős szociális és diákjóléti építkezések is folytak. Az Irinyi József út mentén kétágyas szobákkal egy 1000 fős, a Sztoczek utcában pedig egy 400 fős kollégium épült. Az 1000 fős épületet 1963-ban kezdték építeni és 1966-ban adták át.

Ugyancsak 1966-ban adták át a Sztoczek utca és Bertalan Lajos utca sarkán épült 2000 adagos menza épületét is. A mérnökhallgatók szociális körülményei már kedvezőek voltak. Lidérces álomnak tűnt a Horthy-korszak hallgatóinak nyomora, a létért való mindennapi küzdelem.

A műszaki egyetemek nemzetközi kapcsolatai erőteljesen fejlődtek. A Szovjetunió és a szocialista országok több egyetemével szocialista együttműködési szerződést kötöttek, amelyekben kölcsönös előadócserét, közös

kutatási témákat, a hallgatók termelési gyakorlatainak cseréjét rögzítették. A központi könyvtár jelentős nemzetközi kiadványcserét kezdeményezett és fejlesztett ki. Nemzetközileg ismert tudósok látogattak a két műszaki egyetemre.

1960-tól ismét adományoztak tiszteletbeli doktori címet kiemelkedő külföldi és hazai tudósok részére. Így kerül sor — többek között — 1962-ben KÁRMÁN Tódor, 1964-ben LISKA József, 1965-ben Ny. Ny. SZEMJONOV Nobel-díjas tiszteletbeli doktorrá avatására. E gesztusok a nemzetközi kapcsolatokat jól szolgálták.

Ebben az időszakban azonban egy nyomasztó gond mégis keletkezett. Nem sikerült megteremteni az építőipari egyetem Győrben létesítendő telepének beruházási feltételeit, ezért a kormányzat a két műszaki egyetem szervezeti egyesítését határozta el. Erről az Elnöki Tanács 1967. évi 14. sz. törvényerejű rendelete intézkedett.

A Budapesti Műszaki Egyetem tevékenysége 1967 után

Az egyesítéssel hazánk legnagyobb egyeteme jött létre. A nagy múltú intézmény a továbbiakban is gyorsan fejlődött. A nemzetközi tapasztalatok különösen kétirányban involválták a fejlődést, a számítógépek és az atomenergia területén. Nagyszabású számítógép programot dolgoztak ki, s a számítógépek bevonultak a kutatás és az oktatás hétköznapijaiba.

Az atomtechnikai oktatás érdekében az Országos Atomenergia Bizottság anyagi támogatásával tanulmányi célú atomreaktor épült a Műegyetemen. A különleges kialakítású épületet 1971 májusában avatták fel. (23. ábra)

Az egyesítés után rövid idő múlva az egyetem belső szervezetében racionális profiilegyszetetés történt. Négy közlekedési profilú tanszék került a *Közlekedésmérnöki karra*, amelynek ez lett a végleges elnevezése. E változás a közlekedésmérnöki képzést jelentősen megerősítette.

A Baján 1962 óta működő Felsőfokú Vizsgadálkodási Technikumot a Kormány az 1033/1970. sz. határozatával *Vizsgadálkodási Főiskolai Karként* a Budapesti Műszaki Egyetemhez csatolta. A Főiskolai kar 1979. január 1-ig tartozott az egyetem szervezetébe, ekkor a Pécsen működő Pollack Mihály Műszaki Főiskolához csatolták.

A korszerű szervezési elveknek megfelelően, az integráció előnyei érdekében, rokonprofilú tanszékek összevonásával intézetek alakultak. A szellemi erők és az eszközök koncentrálását szolgáló intézetek száma 1974-ben 11 volt, 1978-ban további két intézet létesült.

Ebben az időszakban az oktatásügyi kormányzat nem szervezett további központi oktatási reformokat. A Budapesti Műszaki Egyetem azonban hatalmas energiát fordított a képzés korszerűsítésére. A Vegyészmérnöki Karon



23. ábra. A BME Tanreaktora

1969-től kétfokozatú mérnökképzést vezettek be. A 6 féléves tanulmányi idővel üzemmérnöki, a 10 féléves tanulmányi idővel okleveles vegyészmérnöki oklevelet szerezhetnek a hallgatók. Megindult a mérnök-tanári, majd a műszaki tanári képzés is.

A Villamosmérnöki Karon az 1972/73-as tanévben végeztek nagymértékű változást. A hagyományos 10 féléves „A” oktatási forma mellett bevezették a 8 féléves „B” oktatási formát és a „C” kétéves nappali posztgraduális formát is.

A többi karon is lényegbevágó tanterv-korszerűsítési munkát végeztek.

A Budapesti Műszaki Egyetem Tanácsa 1970 decemberében elhatározta, hogy Emlékérmet alapít olyan mérnökök számára, akik az egyetem hírnevét bel- és külföldön növelték.

Az egyetemen a berendezés korszerűsítésével együttjárt az oktatószemélyzet tudományos fejlődése. Hatalmas tudományos kapacitás halmozódott fel az egyetemen. Az egyetem vezetése szervezeten támogatja az oktatókat a tudományos fokozatok megszerzésében. Kihelyezett tagozatot létesítettek az idegen nyelvek és a marxizmus—leninizmus tanulására. Ez az intézkedés fellendítette a tudományos fokozatok megszerzését és általában a kutatómunkát. Imponáló mennyiségű volt az egyetem oktatói és kutatói által írt tanköny-

vek, szakkönyvek, jegyzetek és szakcikkek száma. Növekedett a külföldi és hazai konferenciákon való részvétel és nőtt a bejelentett szabadalmak száma. A Műegyetem kiemelkedő professzorai voltak a felszabadulás után BÖLCSKEI Elemér, CSÁKI Frigyes, CSANÁDI György, CSÜRÖS Zoltán, ERDEY László, GILLEMOT László, GOMBÁS Pál, GYULAI Zoltán, HELLER László, MUTNYÁNSZKY Ádám, NÉMETH Endre, SZÉCHY Károly, VAJTA László, VARGA József, VÁSÁRHELYI Boldizsár.

A Budapesti Műszaki Egyetem 1967 után további épületekkel bővült. A tanulmányi épületek mellett szociális és sportlétesítmények is átadásra kerültek. Időrendben áttekintve az alábbi új épületek szolgálták az egyetem jobb munkáját. Az 1966-ban megkezdett villamosmérnöki profil épületet, a V₂-jelűt 1969-ben adták át rendeltetésének. (18. ábra) 1971-ben befejezték az Építő- és Anyagmozgatógépek Tanszék korszerűsítését. A helyszükén azonban csak úgy tudtak segíteni, hogy a laboratórium korszerűsítése után a tanszéki épületrészen emeletráépítést hajtottak végre, amely 1974-ben készült el.

A dolgozók gyermekeinek óvodai elhelyezésének javítása érdekében a Budapesti Műszaki Egyetem a XI. kerületi tanáccsal közös beruházásként 200 férőhelyes óvodát létesített. Az egyetemi dolgozók üdültetésének színvonalát és mértékét jelentősen emelte az 1974-ben Balatonfüreden átadott üdülőtelep.

A tudományos kutatás és a gyakorlati oktatás színvonalának emelését szolgálták az 1974-ben átadott új laboratóriumok. A központi épület kémiai épület felőli udvarán az út és vízepítési laboratórium földszintes épülete kapott helyet. A Bertalan Lajos utcában pedig átadták a korszerűen felszerelt építőipari laboratórium új épületét. A központi könyvtár helyhiányán a belső építkezések átmenetileg segítettek, távlati megoldást azonban nem nyújtottak.

A sportolási lehetőségek javítását az 1975-ben átadott fedett uszoda szolgáltatta.

A Villamosmérnöki Kar hallgatói részére 1976-ban adták át az új kollégiumot a Sztoczek utca sarkán.

A közlekedésmérnökök képzését segítette elő az 1979-ben átadott új tanulmányi épület, melyben a gépjárműintézetet helyezték el. Az 1981-es évben került átadásra az újabb 1000 fős kollégiumi épület, mely egyben Buda legmagasabb épülete.

A fejlődés továbbra sem állt meg. 1982-ben folyik egy újabb tanulmányi épület, s az egyetemi dolgozók étkeztetési körülményeit javító, új menzaépület építése.

A Műegyetem régi épületei mellett, az új épületek már a másik Duna hídig terjedő területet átfogják, s ezzel kialakult a mérnökképző egyetemi város.

A párt és az állam vezetői rendszeresen látogatták a Műegyetemet, gyakran tartottak politikai, gazdasági és kulturális témákban előadásokat. Néhány alkalommal a párt és a kormány vezetői egésznapos látogatásokkal részletesen

is tájékoztattak az egyetem munkájáról és problémáiról. FOCK Jenő, a kormány elnöke, 1968. február 23-án, KÁDÁR János az MSZMP első titkára 1973. november 11-én, LÁZÁR György, a kormány elnöke, pedig 1979. szeptember 1-én látogatta meg a Műegyetemet.

A Műegyetem fontos szerepet tölt be hazánk műszaki és gazdasági fejlődésében. Az elért eredmények külföldön is elismerést váltottak ki, s megalapozták a Műegyetem nemzetközi hírnevét.

A fent leírtakból kiderül, hogy a Budapesti Műszaki Egyetem, kisebb megtorpanások ellenére is mindig a népgazdasági fejlődés, népünk felemelkedésének szolgálatában állt.

A 200 éves jubileumunk megünneplése nagyon bonyolult világgazdasági körülmények között nyert megrendezést. A világgazdasági hatások elkerülhetetlenül hatnak Magyarországon gazdasági és ezen belül ipari struktúrájára is.

A jubiláló egyetem történelméből fakadóan is megtisztelő, ugyanakkor igen nagy felelősséget jelentő feladata, hogy felkészüljön, elsősorban a századfordulóra a magyar ipar átalakítására, a hatékonyság növelésére és olyan új tudományos-technikai eredmények, találmányok megalkotására, amelyeket elődeink példája nyomán követni kell.

IRODALOM

- ZELOVICH Kornél: A M. Kir. József Műegyetem és a hazai technikai felsőoktatás története. Bp. Pátria Irodalmi Vállalat és Nyomda Rt. 1922, 371 p.
- HODINKA László—KÁROLYI Zsigmond—VÉGH Ferenc: A Budapesti Műszaki Egyetem történetének bibliográfiája I—II. *Budapesti Műszaki Egyetem Központi Könyvtára. Műszaki Tudománytörténeti Kiadványok* 20 (1969), Budapest, BME Sokszt.
- SZÖGI László: A Budapesti Műszaki Egyetem Levéltára. Repertórium I. 1848—1960 (1967). *Budapesti Műszaki Egyetem Központi Könyvtára. Műszaki Tudománytörténeti Kiadványok* 24 (1975), Budapest, BME Sokszt. 263 p.
- A Műegyetem története 1782—1967. I—VIII. Szerk.: HÉBERGER Károly. Bp. BME Közp. Kvtár, Sokszt. 1979. 1994 p. Az egyes fejezetek szerzői: 1—2 fej.: SZÖGI László; 3. fej.: SZABADVÁRY Ferenc; 4. fej.: ZÁDOR Mihály; 5. fej.: VÉGH Ferenc; 6. fej.: HÉBERGER Károly
- HÉBERGER Károly: A Budapesti Műszaki Egyetem története. Szerk.: PALLÓ Gábor. Budapest 1981, 228 p. + 24 ábra. (Kézirat)

The Technical University is 200 Years Old. The predecessor in title of the present Technical University of Budapest was the Institute of Civil Engineering founded by the king Joseph the 2nd, opened in 1782. In the paper the history of the University from its foundation up to now is described. Then another predecessor of the university, the Joseph Industrial Trade School and the interfusion of both institutions have been dealt with. After the 2nd World War the university rapidly began to develop and has been enriched by many new buildings becoming thereby the largest university of Hungary. The illustrations represent the deed of foundation of the predecessor institutions and the university buildings.

Die Budapester Technische Universität ist 200 Jahre alt. — Der Rechtsvorgänger der jetzigen Budapester Technischen Universität war die von Joseph II im Jahre 1782 gegründete Bauingenieuranstalt. In der Abhandlung wurde die Geschichte der Universität von der Gründung bis zu heute verfolgt. Ein anderer Rechtsvorgänger der Universität, die Joseph Gewerbeschule und die Vereinigung der beiden Institutionen wurden auch behandelt. Nach dem zweiten Weltkrieg nahm die Universität eine rasche Entwicklung, bereicherte sich mit vielen neuen Gebäuden, damit wurde sie die grösste Universität Ungarns. Die Illustrationen stellen die Gründungsurkunden der beiden Vorgängerinstitutionen und die Universitätsgebäude dar.

ADATOK AZ ÉPÍTŐMÉRNÖKKARI MECHANIKAOKTATÁS TÖRTÉNETÉHEZ

CHOLNOKY TIBOR és KALISZKY SÁNDOR

A hazai mechanikaoktatás története az 1782. XI. 1-én megnyílt Mérnöki Intézetig — az úgynevezett Institutum Geometricumig — nyúlik vissza, ahol mechanikai tantárgyat is oktattak. Az Intézet Budáról Pestre helyezése után 1784-től kezdve a Mechanikát csak vásár- és ünnepnapokon adták elő, csupán később oktatták rendszeres tantárgyként.

A Mérnöki Intézetben a mechanikai oktatást a tudományegyetem bölcsészeti karának tanárai látták el, mégpedig 1774—1792 közt Horváth János, 1792—1800 közt Domin József Ferenc, 1801—1831 közt Tomcsányi Ádám, 1831—1834 közt Gröber Lőrinc, 1839—1877 közt Jedlik Ányos tanárok.

A József Ipartanodában 1846-tól a Mennyiségtan és Erőműtan Tanszék tanára Arenstein József kegyesrendi pap volt. Ugyanakkor a Fizika és Ökonomie Tanszék tanári teendőit Sztoczek József látta el, aki előzőleg 1841—1848-ig Petzelt Józsefnek, a Mérnöki Intézetben a Geometria és Hidraulika tanárának volt tanársegédje.

A Mérnöki Intézetet 1850-ben beolvasztották a József Ipartanodába. Ekkor a Technikai Fizika tanára Sztoczek József lett, aki 1890-ben hunyt el. Utóda 1892-től kezdve Wittmann Ferenc volt.

A József Műegyetem 1856-ban történt felállítása során 1857-ben az Erőmű- és Géptani Tanszékre Hausmann Vincét nevezték ki tanárnak, kit 1864-től 1905-ig Bielek Miksa követett. Működési területük főleg gépészmérnöki volt.

1862-ben a Kísérleti Természettan (Fizika) ideiglenes tanára, majd 1869-ben tényleges tanára Szily Kálmán lett, 1867-ben felállították a Mechanika és Géptan Tanszékét, amelynek tanárává Horváth Ignácot nevezték ki.

1870-ben Matematikai Természettan Tanszék címen új tanszékot szerveztek. Ennek tanári teendőit Szily Kálmán látta el. Az ő helyére a Kísérleti Fizika Tanszékre Schuller Alajos került.

Horváth Ignác halála után a tanszék Technikai Mechanika és Elméleti Géptan Tanszék néven Nagy Dezső vezetésével működött.

Az 1882-ben életbeléptetett új szervezeti szabályzat szerint két új tanszék létesült: az Analitikai Mechanika Tanszék, valamint a Műszaki Mechanikai és Elméleti Géptani Tanszék.

Szily Kálmán 1890-ben történt nyugalomba vonulása után az Analitikai Mechanika és Elméleti Fizika Tanszék élére Réthy Mór került, aki előzőleg a gépészmérnöki szakosztályhoz tartozó 3. Matematika Tanszéknek volt a tanára.

1895-ben Mérnöki Szerkezetani Tanszék néven új tanszéket szerveztek, melynek ny. rk. tanára Czakó Adolf lett. 1898-ban ezt a tanszéket megszüntették és helyette az Alkalmazott Szilárdságtan Tanszékét állították fel. Ennek ny. r. tanárává Czakó Adolfot nevezték ki. Ez a tanszék eredetileg a gépészmérnöki szakosztályhoz tartozott, de 1913-ban áthelyezték a mérnöki és építészeti szakosztályra.

1895-től kezdve Réthy Mór tanszéke Analitikus Mechanika néven szerepel.

Ifj. Szily Kálmán magántanárt 1906-ban ny. rk. tanári címmel ruházták fel és 1913-ban kinevezték a III. számú Mechanikai Tanszék tanárává. Tanári teendőit 1944-ig látta el.

1945-től kezdve a tanszék Mérnökari Mechanika Tanszék néven folytatta működését. Akkor a Tanszék vezetésével Abody Elődöt bízták meg. 1946-ban a szilárdságtani előadásokat Reuss Endre tartotta, az 1947/48. tanévben és az 1948/49. tanév első felében pedig Abody Előd volt az előadó. Az 1948/49. tanév második félévében Barta József tartotta az előadásokat. Az 1949/50. tanévben Palotás László és Sályi István voltak az előadók.

1950-ben Cholnoky Tibor lett a tanszék intézeti tanára, tanszékvezetője, majd ny. r. tanára. 1971-ben vonult nyugállományba. Tanszékvezetői utóda Kaliszky Sándor lett.

A Budapesti Műszaki Egyetem egyes szervezeti kérdéseiről szóló 15/1967 VI. 11 Korm. rendelet a Mérnöki Kar nevét Építőmérnöki Karra változtatta. Azóta a Tanszék neve: Építőmérnökari Mechanika Tanszék.

A tanszék működési területe az elmúlt 25 évben lényegesen kiszélesedett. A Tartók statikája tárgy oktatása az Acélszerkezetek Tanszékről átkerült a Mechanika tanszékre, és a Számítástechnika tárgy oktatásával is ezt a tanszéket bízták meg. Ennek megfelelően a tanszék keretében Számítástechnikai Csoport alakult, és ez látja el az Építőmérnöki Kar számítógépének üzemeltetését. Ugyanakkor a tanszék a numerikus módszerek, a különleges tartószerkezetek és a képlékenységtan témakörében választható tárgyakat is programjába iktatott, így az első évek oktatásától a diplomatervezésig, illetve az államvizsgáztatásig alapvető szerepet tölt be az építőmérnökök képzésében.

A tanszék a posztgraduális képzésben is aktívan vesz részt. Irányítja a mérnökmatematikai szakmérnöki oktatást, aspiránsoknak, műszaki doktori címre pályázóknak, valamint külföldi ösztöndíjasoknak nyújt rendszeres kutatási lehetőséget.

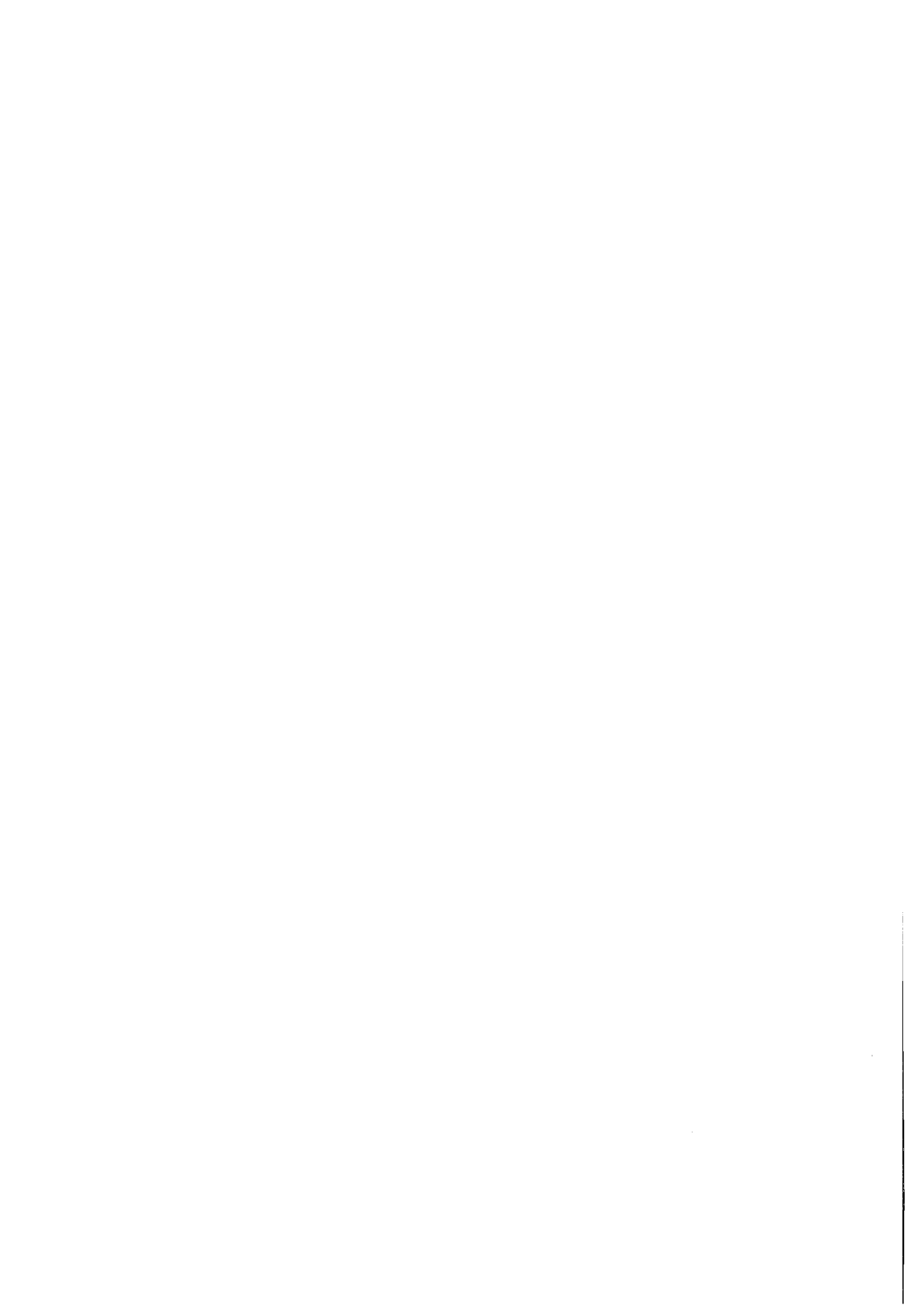
A tanszéken a kutatómunkának régi hagyományai vannak. Réthy Mórnak számos magas színvonalú dolgozata jelent meg a mechanika, fizika és

matematika tárgyköreiben. Ifj. Szily Kálmán 1918-ban saját kezűleg írt, litografálva sokszorosított jegyzete a világháborúból visszaözlő hallgatóknak nyújtott komoly segítséget. Háromkötetes kitűnő Mechanika tankönyvét a Magyar Mérnök- és Építész-Egylet aranyéremmel tüntette ki. Reuss Endre mint a nevezetes Prandtl—Reuss-elmélet kidolgozója vált világszerte ismertté.

A második világháborút követő időszakban a tanszék kutatói tevékenysége igen gyors fejlődésnek indult. Ezt a fejlődést az is jelentősen elősegítette, hogy az 1960-as években az Egyetemen akadémiai mechanikai kutatócsoport alakult, melynek munkájában a tanszék kezdettől fogva aktívan vett részt. A nemzetközi kapcsolatok gyors kiszélesedése is igen kedvező hatással volt a kutatómunkára. A tanszék ma már számos külföldi kutatóhellyel áll közvetlen szakmai kapcsolatban, rendszeresen vesz részt hazai és nemzetközi kongresszusok és kollokviumok szervezésében.

A tanszéken jelenleg 3 egyetemi tanár, 4 docens és 10 adjunktus oktat, és a Műszaki Mechanikai Kutatócsoport keretében 5 kutató dolgozik. A Számítástechnikai Csoportban 4 mérnök látja el az üzemeltetési és fejlesztési feladatokat, így a kisegítő személyzettel együtt a tanszéknek összesen 44 dolgozója van. Ezek közül egy egyetemi tanár az Akadémia rendes tagja, ketten a műszaki tudományok doktorai, heten a műszaki tudományok kandidátusai és öten műszaki doktorok.

Az oktatói és kutatói tevékenység mellett a tanszék oktatói különböző hazai és nemzetközi egyesületekben és bizottságokban is élénk tevékenységet fejtenek ki, gyakran tartanak előadásokat külföldi egyetemeken és rendezvényeken. Mindezek eredményeként az Építőmérnökkari Mechanika Tanszéket a hazai és a nemzetközi tudományos élet aktív és elismert résztvevőjeként tartják számon.



ADATOK AZ ÉPÍTÉSZMÉRNÖKKARI MECHANIKAOKTATÁS TÖRTÉNETÉHEZ

CSONKA PÁL és DEÁK GYÖRGY

Az építészhallgatók mechanikaoktatása a Műegyetem önálló Építészeti Osztályának megalakulásával az 1873/74-es tanévben vette kezdetét. Ekkor — egészen 1885-ig — az építészhallgatók a mechanika tárgyú előadásokat a mérnök- és gépészmérnökhallgatókkal közösen hallgatták. A Műszaki Mechanikát Szily Kálmán, Horváth Ignác, majd Nagy Dezső, a Grapho-Statikát pedig Kherndl Antal adta elő. Valamennyien külföldön végezték tanulmányaikat.

1885-től kezdve a mérnökhallgatók részére külön előadásokat tartottak, az építész- és gépészmérnök hallgatók azonban továbbra is együtt hallgatták Réthy Mór Mechanika és Nagy Dezső Grapho-Statika című előadásait.

Az építészhallgatók oktatásában 1898-ban lényeges változás következett be. Ekkor állították fel az Alkalmazott Szilárdságtani Tanszéket, és ennek ny. r. tanárául a Zürichben végzett Czakó Adolfot nevezték ki, aki előzőleg 1895-től kezdve a Mérnöki Szerkeztani Tanszéknek volt ny. rk. tanára. Czakó Adolf az Alkalmazott Szilárdságtan I. és II. f. című előadásaiban az eddigi tisztán elméleti jellegű oktatás helyett a gyakorlati irányú oktatásra helyezte a súlyt. Célja az volt, „hogya a tervező építész, mint az egész műnek az alkotója, ha a részletes számításokat nem is maga végzi, a kellő szakértelemmel vehessen részt a szóba jövő megoldások mérlegelésében, és ne legyen pusztá szemlélője a mások által koncipiált szerkezeti megoldásnak”.

Czakó Adolf 1898-ban az oktatás határfokának emelésére a Múzeum körúti Műegyetem udvarán felállított ideiglenes épületben kutató laboratóriumot szervezett. Ebben a laboratóriumban a gyakorlatok az előadásokkal párhuzamosan folytak.

1910-ben felépült a Műegyetem budai épülettömbje és az Alkalmazott Szilárdságtani Tanszék, valamint annak laboratóriuma az egyetem egyemeletes Duna-parti épületében nyert elhelyezést.

Időközben, főleg a vasbetonépítészet térhódítása nyomán, szükségessé vált az építészhallgatók mechanika tárgyú előadásait, melyek eddig csak a harmadik és negyedik évfolyamon folytak, újabb előadásokkal kiegészíteni. Az 1915-ben életbe léptetett új tanterv az első éves építészek számára Mechanika címen új tantárgyat vezetett be, melyet kezdetben ifj. Szily Kálmán, majd Anderlik Előd adott elő. Az alkalmazott Szilárdságtan előadásait a máso-

dik és harmadik tanévre hozták elő, a negyedik év tanrendjébe pedig új tárgyként a Vas- és Vasbetonszerkezetek I. és II. f. tárgyakat iktatták be, amelyek előadásait Czakó Adolf, illetve Mihailich Győző tartották.

Az 1928. tanévtől kezdve az Alkalmazott Szilárdságtan Tanszék hatáskörébe vonták az első éves építészhallgatók részére előadandó Matematika tárgy oktatását is, melyet 1939-ig Csonka Pál adott elő. Ugyanőt bízták meg Czakó Adolfnak 1931-ben történt nyugalomba vonulása után az Alkalmazott Szilárdságtan, a Vas- és Vasbetonszerkezetek, majd 1933-tól kezdve a negyedik évfolyam részére előadandó Nagyobb tételhatároló szerkezetek című tárgy oktatásával is.

1931-ben a tanszék laboratóriumát kari laboratóriumként a Mérnök- és Építészmérnöki Kar hatáskörébe utalták és vezetésével a Kar rangidős szakmabeli tanárát, Mihailich Győzöt bízták meg.

1936-ban Csonka Pált az Alkalmazott Szilárdságtan tanszék nyilvános rendkívüli tanárává, 1939-ben e tanszék rendes tanárává nevezték ki. Oktatói tevékenysége eredményeként az épületstatikai munkákat, amelyeket addig úgyszólván kizárólag (építő) mérnökök végeztek, a harmincas évektől kezdve fokozatosan az általa kiképzett építészek vették át. Ebben számottevő segítséget jelentettek az 1932—34 közt a tanszék által kiadott mintalapok és tervezési segédletek.

1948-ban a tanszék neve Szilárdságtan Tanszékre módosult. Ekkor az addig Alkalmazott Szilárdságtan címen tartott előadások elnevezése Szilárdságtanra változott.

A második világháború után a megnövekedett számú hallgatóság miatt a Szilárdságtan tanszékre háruló feladatok is jelentősen megszorodtak. Míg addig a tanszék vezetőjének csak 2—3 segédtanerő állt rendelkezésére, ezt a létszámot 15—16 főre kellett növelni. Halaszthatatlan feladatnak bizonyult a hallgatóságnak jegyzetekkel, majd 1950—54 között tankönyvekkel való ellátása is. Ebben az időszakban a tanszék az oktató munkán kívül számottevő szerepet vállalt különböző ipari feladatok lebonyolításában, de ugyanakkor egyre intenzívebben vett részt különféle tudományos feladatok megoldásában is.

1950-ben a Szilárdságtan Tanszék mellett felállították a Tartószerkezetek Tanszékét és ennek élére Pelikán Józsefet nevezték ki. Ekkor a harmad- és negyedéves hallgatók szerkezzettani oktatását Tartószerkezetek I. és II. f. címen Pelikán József vette át.

1957-ben a Szilárdságtan és Tartószerkezetek Tanszékeket Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék címen összevonták. Ettől kezdve az építészmérnök hallgatóság teljes mechanikai-szerkezzettani oktatását Pelikán József vezetésével ez a tanszék látta el. Az ő nevéhez fűződik a Szerkezzettervezés c. tárgy bevezetése a negyedik évfolyamon.

A 60-as években jelentkezik hazánkban a gépi számítástechnika: első-

sorban a kutatásban és — óvatos próbálkozások formájában — az ipari gyakorlatban. Pelikán József azonnal felismerte az új műszaki lehetőség korszakalkotó jelentőségét, irányítása mellett a tanszék az elsők között kapcsolódott be a műszaki tervezés automatizálására irányuló kutatómunkába.

Pelikán József 1969-ben bekövetkezett halála után Deák György, ill. egy hároméves időszakra Peredy József kapott megbízást a tanszék vezetésére. Tovább folytatódott a már korábban megindult decentralizálódási folyamat: a tanszék oktatói közül mind többen kapcsolódtak be különböző szabadon választható, illetve kötelező tárgyak oktatásába — úgy a Szilárdságtan, mint a Tartószerkezetek tárgykörében.

A „Szilárdságtan” tárgycsoportban a szemléletes, „kézi” számításra is használható módszerek mellett megjelentek a szerkezetek széles köre igénybevételeinek meghatározására alkalmas gépi eljárások, és ezek egyre jelentősebb szerephez jutottak a hallgatók feladatainak megoldásában, valamint a számítási feladatok ellenőrzésében.

A „Tartószerkezetek” tárgycsoportban az építészmérnöki fejlődését követve szintén jelentős fejlődés ment végbe. A tanszék Fém szerkezetek címen új tantárgyat iktatott programjába, a Vasbetonszerkezetek tárgykörét pedig jelentősen kiterjesztette.

Egyrészt az ismeretanyag rohamos növekedése, az építészmérnöki tevékenységben bekövetkező szakosodás, másrészt az egységes építészmérnöki diploma igénye között feszülő ellentmondás feloldása céljából az Építészmérnöki Kar 1973-ban a IV. és V. évfolyamon ágazatos oktatást vezetett be. Ennek keretében mód nyílt különböző kötelező-választható tárgyak bevezetésére, és lehetőség adódott az automatizált műszaki tervezésről, az épületek mechanikai problémáiról, a tartószerkezetek fejlődési irányáról, a korszerű faszerkezetekről, a tartószerkezetek helyszíni és laboratóriumi vizsgálatáról a hallgatóságnak különleges elméleti és gyakorlati ismereteket nyújtani.

1964-ben a Kar tanrendjébe iktatták a kétféléves „Komplex tervezés” c. tárgyat, melynek keretében a hallgatóknak nem csak építészeti, hanem épületszerkezeti, tartószerkezeti, épületgépészeti és technológiai-szervezési szempontból is meg kell oldaniuk feladatukat az illetékes tanszék konzultációja mellett.

1974-től kezdve a tanszék levelező formában kétéves „Építésztatikus” szakmérnöki tanfolyamokat indított. A tanfolyamok célja: a magasépítés területén dolgozó — főleg az építészmérnöki végzettségű — statikusok továbbképzése, specializálása, valamint az újszerű szerkezetfajták, méretezési, szerkesztési, vizsgálati módszerek ismertetése.

A tanszék, mely a hatvanas években csak egy kis modell-laboratóriummal rendelkezett, az 1973-ban üzembe helyezett Építőipari Laboratóriumban már valódi méretű és anyagú elemek vizsgálatára is alkalmas berendezésekhez jutott.

Fejlődés mutatkozott a gépi számítástechnikával való ellátottság terén is. A tanszék, mely már az ötvenes évek elején beszerzett egy ötletes elektromos analógián alapuló célszámoló gépet, immár széles körben használja oktatási és kutatási feladataihoz az egyetem számítógépparkját. Ezen a téren az Építőmérnöki Karral közösen létesítendő új központi egység és hallgatói terminálterem kiépítésével a közeljövőben jelentős fejlődés várható.

A tanszéken jelenleg egy egyetemi tanár, 5 docens, 14 adjunktus, 1 tanársegéd, az MTA Műszaki Mechanikai Kutató Csoport keretében pedig 3 kutató dolgozik. Így a kisegítő személyzettel együtt a Tanszéknek összesen 34 dolgozója van.

A Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszék folytatja a múlt hagyományait: igyekszik kihasználni a szilárdságtani és tartószerkezeti képzés szervezeti egységéből adódó előnyöket; oktatómunkájában érvényesíti a szemléletességet és a statikusi tevékenységhez szükséges absztrakciót; azonos jelentőséget tulajdonít a „méretezés”-nek és a „szerkezettervezés”-nek; tevékenysége célszerű arányban oszlik meg az oktatás, kutatás és a műszaki alkotómunka között.

ZÁRSZÓ

A Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége a jelenlegi nehézségek miatt úgy határozott, hogy a Műszaki Tudomány kiadását 1982. december 31-ével megszünteti.

Midőn e határozatról olvasóinkat, előfizetőinket és kiváló szerzői gárdánkat nem kis rezignációval értesítjük, kötelességünknek érezzük, hogy hálásan emlékezzünk HEVESI Gyula akadémikusra, aki e folyóirat elődjét, *A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményeit* 1952-ben életre hívta és azt két évtizeden át szerkesztette. Elismeréssel gondolunk vissza GELEJI Sándor akadémikusra is, aki mint szerkesztő másfél évtizeden át állt e folyóirat élén. Egyben köszönjük MAJOR Máté akadémikusnak is, hogy mint e lap felelős szerkesztője, 15 éven át önzetlenül folytatta elődei felelősséggel járó munkáját. Végül, de nem utolsósorban, köszönet illeti e lap szerzőit, kik tanulmányaikkal mindenkor hatékonyan és közhasznúan szolgálták a hazai műszaki irodalmat és ezzel a mérnöki haladást.

Folyóiratunk az elmúlt 30 év során jelentős szerepet töltött be a műszaki tudomány különböző ágainak hazai művelésében. Hasábjain — közel 30 000 oldalon — több mint 2000 értékes tudományos tanulmány jelent meg, melyek a műszaki tudomány egész területét felölelték. E tanulmányokon kívül ez a lap közölte az egyes tudományágak helyzetképeit, a Műszaki Tudományok Osztályának működéséről szóló beszámolókat, a műszaki tárgyú akadémiai székfoglalókat, műszaki nagyjaink életrajzait és nekrológjait, a nyilvános akadémiai üléseken, valamint az Akadémia által rendezett konferenciákon elhangzott előadások kivonatait stb. Fontos szerepet töltött be e folyóirat azzal is, hogy felkeltette a fiatal mérnökgenerációknak a műszaki tudományok iránti érdeklődését és rangos helyet biztosított tudományos eredményeik közlésére.

Szeretnénk hinni, hogy a *Műszaki Tudomány* szüneteltetése csak időleges jellegű és a megjelenése elé tornyosuló akadályok elhárítása után ismét elismert publikációs fóruma lesz a hazai műszaki tudomány ágainak.

Cs. P.



Könyvismertetés

Csonka Pál

HÉJSZERKEZETEK

Akadémiai Kiadó, Budapest 1981, 1040 o., 650 ábra, 145 táblázat

A könyv a héjak membránelméletének és a membrán-állapotú héjak megoldására szolgáló kézi, ill. kisgépes számítási módszereknek az összefoglalása. Mint ilyen — mind anyagának gazdagságát, mind stílusának rendkívüli világosságát tekintve — világviszonylatban is kiemelkedő, sőt ismereteim szerint egyedülálló. A kérdéskör világirodalmát, annak legújabb eredményeit szinte teljeskörűen tartalmazza. Anyagában bőven merít a szerző utóbbi évtizedekben végzett kutatómunkájának érett eredményeiből, sok újszerű megoldást is tartalmaz. Különös értéke a könyvnek a tiszta, áttekinthető felépítés, a didaktikai szempontból is szerencsés gondolatvezetés. Kézikönyvként is igen jól használhatónak ígérkezik a mű, mivel az egyes héjformákat tárgyaló fejezetek többnyire csak az elméleti alapokat tartalmazó részekre hivatkoznak, egymástól kevéssé függenek, önállóan is jól érthetőek. Az építési gyakorlat szempontjából igen hasznosak a megvalósított héjszerkezeteket bemutató, szerencsésen összeválogatott példák.

A műszaki szakemberek várhatóan sokoldalúan fogják tudni hasznosítani a könyv gazdag anyagát. A tervező építész is meríthet belőle, hiszen a lehetséges, illetve az építési gyakorlatban szóba jövő héjformák úgyszólván teljes körét bemutatja. Ugyanakkor a matematika valóságos kincsebányója: a nagy elektronikus gépet nem igénylő, mégis hatékony közelítő számítási módszerek széles, rendkívül ötletgazdag választékát tárja elénk. S minden bizonnyal elsősorban kellett volna említeni azt a gondolkodás-formáló hatást, amelyet a könyv tárgyalásmódjával, a tárgy mély átértésén alapuló egyszerűségével olvasóira kifejt. A mű ezen jellemzői a konkrét témakörön túlmutató jelentős helyet jelölnek ki műszaki szakirodalmunkban Dr. Csonka Pál könyve számára.

A gondos és ízléses kiállítású könyv — a nyelvi korlátoktól eltekintve — nemzetközi érdeklődésre tarthat számot. Egy angol nyelvű kiadás — a várható anyagi eredmény mellett — a magyar műszaki szakember-gárda és a műszaki könyvkiadás jó hírnevét is öregbítené.

Dr. Peredy József

B. Beke

THE PROCESS OF FINE GRINDING

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981. 150 oldal.

A világ energiafelhasználásáról megbízható statisztikák nincsenek, de a legtöbb becslés az aprítás és őrlés részesedését a felhasználásból $\approx 5\%$ -ra teszi. E két művelettel az ipar számos területén találkozunk; a cementiparban, a szilikátiparban, az ásványelőkészítés, a vegyipar és kohászat számos területén az aprítási és őrlési technológiáknak meghatározó jelentőségük van. Az őrlésnek és a finomőrlésnek különösen nagy az energiaszükséglete, éppen ezért folyamatuknak a fizikai, a fizikai kémia, a mechanika törvényeinek segítségével való vizsgálata a jövő energiatakarékos őrlési technológiáinak kialakításánál nyújt biztos eligazítást.

Az aprító és őrlőberendezésekről, működésükről számos kiváló szakkönyv jelent meg. A szerző az előszóban leszögezi, hogy az eddigi szakkönyvekben kevés szó esik az aprítandó, őrlendő anyagokról, az azokban végbemenő fizikai és fizikai kémiai változásokról. Pedig a műveletek célja a megfelelő változások előidézése, vagy a felesleges energiafelhasználás megakadályozása érdekében bizonyos változások elkerülése.

A mű húsz fejezetre oszlik.

A szerző az őrlés és a finomőrlés folyamatával az első, második, harmadik, negyedik, ötödik, hatodik, hetedik, nyolcadik, tizedik, tizenegyedik, tizenhatodik és a tizenhetedik fejezetben foglalkozik. Ezek közül több fejezetben tudományos munkásságának eredményeit is összefoglalja, így az őrlés kinetikája, az anyagok őrlhetősége, keverék anyagok őrlhetősége, energiaszükséglet és hatások, körfolyamatos őrlés, finom őrlés gyakorlati módszerei és a nagyon finom őrlés című fejezetekben. Számos új tudományos eredmény közül ki kell emelni azt a felismerést, hogy a Rosin—Rammler függvény n állandóját az anyagok őrlhetőségére jellemző mérőszámnak tekinti, azt egyenletességi tényezőnek nevezi. Ezt a felismerést számos saját és a szakirodalomban található kísérleti eredménnyel igazolja. Az egyenletességi tényező nagysága meghatározó az őrlés kinetikájára, az energia túladagolás hatására létrejövő agglomerációra; végül a (8.2) és (8.3) összefüggések értelmében az energiaszükséglet nagyságára.

Az őrlés és finomőrlés folyamatával foglalkozó fejezetek között a körfolyamatos őrlés tárgyalása előtt a legmodernebb felfogásban az osztályozással és mérőszámaival a kilencedik fejezetben foglalkozik.

Négy fejezetben, a tizenkettedikben, tizenharmadikban, tizennegyedikben és tizenötödikben, a dobmalmok, a gyűrűsmalmok és az ütéssel működő malmok mechanikájával és az ezekben végbemenő folyamatokkal az őrlendő anyagok tulajdonságainak figyelembevételével foglalkozik. — A tizennyolcadik fejezetben az osztályozó berendezésekben végbemenő folyamatokat tárgyalja.

A technológia követelmények kielégítése című tizenkilencedik fejezetben a szerző főleg a cementek és cement nyersanyagok őrlésével kapcsolatos gazdag tapasztalatait foglalja össze.

Az utolsó, huszadik fejezetben az őrlés perspektívájával a kapacitás növelése, a beruházási költségek csökkentése, az energiatakarékosság, a fokozódó minőségi követelmények kielégítése és a számítógépes folyamatirányítás bevezetése szempontjából foglalkozik.

A mű BEKE professzor eddigi munkásságának összegezése. 137 szakirodalmi adatra hivatkozik. A szerző ezek mindegyikét az előszóban közölt célkitűzésnek megfelelően feldolgozta. A szakirodalmi feldolgozás és a saját tudományos eredmények egységes egészet képeznek, ez utóbbiak részben az eddigi eredmények továbbfolytatását, de elsősorban a tudományterület új alapokra való helyezését jelentik.

A könyv tanulmányozása tudományos kutatóknak, szakmájukat magas szinten művelő szakembereknek, egyetemi hallgatóknak ajánlható. Rendszeres tanulmányozásával magasabb szakmai színvonal érhető el, és további kutató munkára ösztönöz.

Dr. Pethő Szilveszter

K. Walz

BETONTECHNISCHE BERICHTE 1978. ÉS 1979.

Beton-Verlag GmbH, Düsseldorf

A két kötet a Forschungsinstitut der Zementindustrie in Düsseldorf (Cementipari Kutató Intézet, Düsseldorf) betontechnológiai kutatási eredményeit tárgyaló és az év folyamán az NSZK-ban megjelenő *beton* című szakfolyóiratban megjelent tanulmányok gyűjteményes kiadása évkönyvek formájában. Az 1978. évi a sorozatban immár a 19., az 1979. évi a 20. kötet.

E kötetekben megjelentetett tanulmányok a betontechnológiai kutatások egyes közérdekű, speciális témájában végzett, újabb kutatásokat és azoknak a gyakorlatban értékesíthető eredményeit tárgyalják. Az évkönyvek a betontechnológusok számára értékes és hasznos kézikönyvekként szolgálnak. Azok a magyar betontechnológiai kutatásokban, fejlesztésekben is hasznosan felhasználhatók és könnyítik a témakör szakirodalmi feltárását.

Az 1978. évi kötet nyolc tanulmányt foglal magába. Az első az intézet által összeállított, ideiglenes technológiai irányelvek a talajszilárdításra cementtel a vízepítésben, elsősorban töltések, föld- és kőgátak stabilizálására, erősítésére.

G. WISCHERS tanulmánya a nyomásra igénybe vett betonpróbatestekben a feszültség-alakváltozási összefüggéseket és a bevitt energiaszükségletet, továbbá acél- és üvegszálak adagolásának azokra kifejtett hatását tárgyalja.

A harmadik J. DAHMS és K. RENDCHEN munkája a különböző nagyságú, laboratóriumi betonkeverők hatásával foglalkozik a friss betonkeverék és a megszilárdult beton tulajdonsá-

gaira és megállapítja, hogy a különböző nagyságú keverőkkel, különböző keverési idő mellett készített betonkeverékek lényegükben azonosak lesznek, tehát nem befolyásolják a beton egyenletességét. Ez a kísérletek számára fontos megállapítás.

U. NECK a beton tűzvédelmi tulajdonságait tárgyalja a negyedik dolgozatban, és tervezetet dolgoz ki a kapott eredmények beépítésére a DIN 4102. szabványba.

S. SPRUNG tanulmányában a nagytömegű tengervíz gazdaságos sótalánításához a beton medencék felhasználásának feltételeit dolgozta ki. Ez a hazai szakköröket nem nagyon érdekli.

K. RENDCHEN az építőiparban és a betontechnológiában alkalmazott mértékegységeknek az SI rendszerre átdolgozott változatait adja meg.

J. BONZEL és J. DAHMS adott képlékenységgű beton keverővíz szükséglete előrebecslésének pontosítására végzett kísérleteket, és azok eredményei alapján arra az eddig ismerteknél pontosabb irányszámokat ismertet.

Az utolsó tanulmány épületek helyiségeinek lélegektromosságára és annak az épület építőanyagától való függőségére végzett újabb kísérletek eredményeit foglalja össze. Megállapítja, hogy zárt helyiségek lélegektromossága független a térelhatároló szerkezetek anyagának árnyékoló hatásától, de függ a geometriai adottságoktól és az emberek tevékenységétől elektromos készülékekkel.

Az 1979. évi gyűjteményes kiadás csak öt munkát ölel fel. Az elsőknek szerzői W. MANNS és K. ZEUS, akik az adalékszerek hatásával foglalkoznak a beton zsugorodási repedéseire. Azok előnyös, vagy hátrányos hatása határozottan kimutatható. Kötésslassítók általában kedvezőtlen hatásúak, zsugorodási repedések keletkezését elősegítik.

J. DAHMS az acél-, műanyag- vagy üvegszálakkal készült betonok kísérletekkel megállapított műszaki jellemzőit mutatja be. E területen sok hazai eredmény is van.

H. WEIGLER a nemzetközi szövetségek (ISO, RILEM, CEB) által kidolgozott és közzétett betontechnológiai műszaki irányelveket és azoknak a DIN előírásoktól eltérő javaslatait ismerteti.

K. WALZ dolgozatában az ACI Committee 201. által közzétett műszaki irányelveket ismerteti, amelyek a különböző hatásokkal szemben ellenálló, tartós betonok készítésére vonatkoznak.

Az utolsó tanulmány J. BONZELTŐL és U. NECKTŐL származik. Az a környezetre káros, elsősorban az iparból származó hulladék iszap-tömegek káros hatásának kiküszöbölésével foglalkozik cement hozzákeverésével. A kísérleti eredmények e módszer eredményességét bizonyítják.

Dr. Gyengő Tibor

HELYREIGAZÍTÁS

A *Műszaki Tudomány* 60., kötetének 11. oldalán Csonka Pál: "Peremén befogott ellipszis lemez" című tanulmányában a nyomatékok közismert képleteinek helyes alakja:

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$m_{xy} = K(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y},$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

TARTALOMJEGYZÉK

| | |
|---|-----|
| Megemlékezés Bánki Donátról halálának 60. évfordulója alkalmából (<i>Varga József</i>) | 3 |
| Kézdi Árpád : Fázismozgások talajokban | 5 |
| <i>Michelberger Pál—Ferenczi Mihály</i> : Kváziszimmetria kihasználásán alapuló közelítő számítási módszer vasúti kocsik keresztirányú rezgéseinek vizsgálatára | 13 |
| <i>Winter H.</i> : Újabb kutatási eredmények a fogaskerék-hajtóművek méretezésében, tekintettel az energia-takarékosságra | 31 |
| <i>Rétháti László</i> : A számított és mért süllyedések statisztikai értékelése | 45 |
| <i>Pásztor Endre</i> : Bányaturbólegyhűtők elmélete és gyakorlati megvalósítása | 67 |
| <i>Ecsedi István</i> : Felső korlát a változó keresztmetszetű rúd dinamikus húzási merevségére | 89 |
| <i>Domokos Miklós—Gilyénné Hofer Alice</i> : A Balaton-vízgyűjtő hipotetikus tározórendszerének vizsgálata | 97 |
| <i>Bogárdi István—Duckstein Lucien—Szidarovszky Ferenc</i> : A tápanyag-terhelés hatékony csökkentésének kiválasztása | 123 |
| <i>Páczelt István—Nándori Frigyes—Ecsedi István</i> : Néhány sikrugalmasságtani érintkezési feladat megoldása kvadratikus programozás segítségével | 147 |
| <i>Gáspár Zsolt</i> : Kritikus tökéletlenségi tartomány | 179 |
| <i>Patkó Gyula</i> : Adalékok az ekvivalens lineáris rezgő rendszerek felépítésének módszereihez | 201 |
| <i>Pritz Tamás</i> : Longitudinálisan rezgő, a végén tömeggel terhelt viszkoeasztikus rúd dinamikai deformációja | 235 |
| <i>Treer Mór Ferenc</i> : Cső hajlítása, főleg nagy alakváltozással | 261 |
| <i>Kollár László</i> : A teherbíráscsökkenés paradoxonáról | 285 |
| <i>Losonci Pál</i> : Kiegészítések a közvetlen befecskendezésű feltöltéses Diesel hajómotorok gyulladási és égésfolyamataihoz | 307 |
| <i>Kontur István</i> : A folyási modellek valószínűség-elméleti alapjai | 335 |
| <i>Pósfalvi Ödön</i> : A gumyszerű anyagok fizikai egyenlete és Poisson-száma | 355 |
| <i>Ecsedi István</i> : Alsó és felső korlát a peremén vékony héjjal erősített, változó átmérőjű, kör keresztmetszetű rúd csavarási merevségére | 363 |
| <i>Szeidl György</i> : A lineáris mikropoláris rugalmasságtan duál variációs elvei | 377 |
| Héberger Károly : A Budapesti Műszaki Egyetem 200 éves | 397 |
| <i>Cholnoky Tibor—Kaliszky Sándor</i> : Adatok az Építőmérnökkari mechanikaoktatás történetéhez | 441 |
| <i>Csonka Pál—Deák György</i> : Adatok az Építészmérnökkari mechanikaoktatás történetéhez | 445 |
| ZÁRSZÓ (<i>Csonka Pál</i>) | 449 |

KÖNYVISMERTETÉS

| | |
|---|-----|
| <i>Csonka Pál</i> : Héjszerkezetek (Dr. Peredy J.) | 451 |
| <i>Beke Béla</i> : The Process of Fine Grinding (Dr. Pethő Sz.) | 451 |
| <i>K. Walz</i> : Betontechnische Berichte 1978—1979. (Dr. Gyengő, T.) | 452 |

CONTENT

| | |
|---|-----|
| In Memory of Donát Bánki for his 60. dying-year (<i>Varga J.</i>) | 5 |
| Kézdí, A. : Phase-movements in Soils | 5 |
| <i>Michelberger, P.</i> — <i>Ferenczi, M.</i> : An Approximate Calculation Method Based on the Utilization of the Quasi-Symmetry to the Investigation of the Lateral Oscillation of a Railcar | 13 |
| <i>Winter, H.</i> : Energy Saving with Modern Solutions of Gear-drives | 31 |
| <i>Réyháti, L.</i> : Statistical Evaluation of the Calculated and Measured Settlements | 45 |
| <i>Pásztor, E.</i> : Theory and Realization of Mine Air Cooling Turbo Radiators | 67 |
| <i>Ecsedi, I.</i> : An Upper Bound for the Dynamic Tensile Stiffness of a Bar of Variable Cross Section | 89 |
| <i>Domokos, M. Mrs. Gilyén</i> : Investigation on a Hypothetical Storage Reservoir System in the Watershed of Lake Balaton | 97 |
| <i>Bogárdi, I. et al.</i> : Selection of the Efficient Reduction of the Nutrient Load | 123 |
| <i>Páczelt, I.</i> — <i>Nándori, F.</i> — <i>Ecsedi, I.</i> : Solution of Some of the Theories of Plane Elasticity Contact Problems | 147 |
| <i>Gáspár, Zs.</i> : A Critical Imperfection Territory | 179 |
| <i>Patkó, Gy.</i> : Contribution to the Methods of Production of Equivalent Linear Oscillating Systems. | 201 |
| <i>Pritz, T.</i> : Dynamic Strain of a Longitudinally Vibrating Visco-Elastic Rod With an End Mass | 235 |
| <i>Treer, M.</i> : Pipe Bending Chiefly with large Deformation | 261 |
| <i>Kollár László</i> : Paradox of the Load-bearing Capacity of Cross Sections | 285 |
| <i>Losonci, P.</i> : Contribution to the Ignition and Combustion Processes of the Direct Injection Supercharged Diesel-driving Engines | 307 |
| <i>Kontur, I.</i> : Runoff Models Based on the Theory of Probability | 335 |
| <i>Pósfalvi, Ö.</i> : Physical Equation and Poisson's Ratio of Ruberlike Materials | 355 |
| <i>Ecsedi, I.</i> : Lower and Upper Bounds for the Torsional Stiffness of a Bar of Circular Cross Section of Varying Diameter Strengthened by a Thin Shell at its Perimeter | 363 |
| <i>Szeidl, Gy.</i> : Dual Variational Principles in the Linear Theory of Micropolar Elasticity | 377 |
| Héberger, K. : The Technical University is 200 Years old | 397 |
| <i>Cholnoky, T.</i> — <i>Kaliszky, S.</i> : Some Data for the History of Teaching-Mechanics at the Department of Civil Engineering | 441 |
| <i>Csonka, P.</i> — <i>Deák, Gy.</i> : Some Data for the History of Teaching-Mechanics at the Department of Architectural-Engineering | 445 |
| BOOK REVIEW | |
| <i>Csonka, P.</i> : Héjszerkezetek (Shell-Structures) (Dr. Peredy, J.) | 451 |
| <i>Beke, B.</i> : The Process of Fine Grinding (Dr. Pethő, Sz.) | 451 |
| <i>K. Walz</i> : Betontechnische Berichte 1978–1979. (Dr. Gyengő, T.) | 452 |

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|--|-----|
| Zur Erinnerung an Donáth Bánki anlässlich seines 60. Todesjahres (<i>Varga J.</i>) | 3 |
| Kézdi, A. : Phasenbewegungen in Böden | 5 |
| <i>Nichelberger, P.</i> — <i>Ferenczi, M.</i> : Ein auf die Ausnutzung der Quasisymmetrie basierendes annäherndes Berechnungsverfahren zur Untersuchung der Querschwingungen eines Eisenbahnwagens | 13 |
| <i>Winter, H.</i> : Energieersparung durch moderne Lösungen der Antriebstechnik | 31 |
| <i>Rétháti, L.</i> : Statistische Auswertung der gerechneten und gemessenen Setzungen | 45 |
| <i>Pásztor, E.</i> : Theorie und praktische Ausführung von Grubenturoloftkühler | 67 |
| <i>Ecsedi, I.</i> : Eine obere Grenze für die dynamische Dehnsteife eines Stabes von veränderlichem Querschnitt | 89 |
| <i>Domokos, M.</i> — <i>Frau Gilyén</i> : Untersuchung eines hypothetischen Speichersystems im Balaton-Einzugsgebiet | 97 |
| <i>Bogárdi, I.</i> — <i>Duckstein, L.</i> — <i>Szidarovszky, F.</i> : Auswahl der wirksamen Minderung der Speisungsbelastung | 123 |
| <i>Páczelt, I.</i> — <i>Nándori, F.</i> — <i>Ecsedi, I.</i> : Lösung einiger Kontaktprobleme der Planelastizitätslehre mit Hilfe der quadratischen Programmierung | 147 |
| <i>Gáspár, Zs.</i> : Kritische imperfekte Region | 179 |
| <i>Patkó, Gy.</i> : Beitrag zu den Methoden der äquivalenten Linearisierung für Schwingungssysteme | 201 |
| <i>Pritz, T.</i> : Die dynamische Verformung des an einem Ende mit einer Masse belasteten, in der Längsrichtung schwingenden viscoelastischem Stabes | 235 |
| <i>Treer, M.</i> : Rohrbiegung hauptsächlich mit großer Verformung | 261 |
| <i>Kollár, L.</i> : Paradox der Abnahme der Tragfähigkeit bei Vergrößerung des Querschnittes | 285 |
| <i>Losonci, P.</i> : Beitrag zu den Zündungs- und Verbrennungsprozesses der kompressionslosen Diesel-Schiffsantriebsmotoren | 307 |
| <i>Kontur, I.</i> : Wahrscheinlichkeitstheoretische Gründe von Abflußmodellen | 335 |
| <i>Pósfalvi, Ö.</i> : Die physikalische Gleichung und die Poissonsche Zahl der gummiartigen Materialien | 355 |
| <i>Ecsedi, I.</i> : Untere und obere Grenzen für die Verdrehungssteifheit eines durch eine dünne Schale verstärkten Kreisprofilstabes von veränderlichem Durchmesser | 363 |
| <i>Szeidl, Gy.</i> : Duale Variationsprinzipie der linearen mikropolaren Elastizitätstheorie..... | 377 |
| Héberger, K. : Die Budapester Technische Universität ist 200 Jahre alt | 397 |
| <i>Cholnoky, T.</i> — <i>Kaliszky, S.</i> : Angaben zur Geschichte des Mechanikunterrichts am Bauingenieur-Fach | 441 |
| <i>Csonka, P.</i> — <i>Deák, Gy.</i> : Angaben zur Geschichte Mechanikunterrichts am Architektenfach | 445 |

BUCHBESPRECHUNG

| | |
|---|-----|
| <i>Csonka, P.</i> : Héjszerkezetek (Dr. Peredy J.) | 451 |
| <i>Beke, B.</i> : The Process of Fine Grinding (Dr. Pethő Sz.) | 451 |
| <i>K. Walz</i> : Betontechnische Berichte 1978—79. (Dr. Gyengő, T.) | 452 |

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó és Nyomda főigazgatója

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat a nyomdába érkezett: 1983. VI. 17. — Terjedelem: 37,90 (A/5) ív
85.12118 Akadémiai Kiadó és Nyomda, Budapest. — Felelős vezető: Hazai György



75,— Ft

ISSN 0027—5085

Megjelent 1985. VI. 25.