

# MŰSZAKI TUDOMÁNY

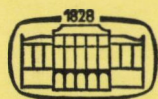
---

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

61. KÖTET

1-4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1981

MŰSZ. TUD.

# MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, KÉZDI ÁRPÁD, PROHÁSZKA JÁNOS, VAMOS TIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia  
Műszaki Tudomány  
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

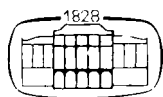
A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 100 Forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó (1363 Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488). külföldi megrendelések a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat (1389 Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.



MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MŰSZAKI MECHANIKAI  
TANSZÉKI KUTATÓCSOPORT  
III. TUDOMÁNYOS  
ÜLÉSSZAKA  
1982. október 7—8.

TANULMÁNYOK



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1982



## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Béda Gyula—Gáti Róbert—Hering József—Pomázi Lajos—Stépán Gábor—Szekeres András—Thamm Frigyes—Új József: Szilárd kontinuumok vizsgálatának néhány kérdése</i> .....	5
<i>Bosznay Ádám—Czeglédi Gyula—Richlik György—Solti József—Tóth György: Szerkezetek sajátfrekvenciáinak néhány szélsőérték tulajdonsága és azok alkalmazása</i> .....	35
<i>Baintner László—Draskóczy András—Peredy József—Salát Géza: Többparaméteres terhekkel kapcsolatos feladatok</i> .....	61
<i>Halász Ottó—Iványi Miklós—Szatmári István: Lemezhorpadásra vonatkozó kísérleti vizsgálatok</i> .....	101
<i>Nédli Péter—Kurutzné, dr. Kovács Márta—Vásárhelyiné, dr. Szabó Anna—Gáspár Zsolt: Előregyártott épületszerkezetek különleges statikai problémáinak megoldása matematikai programozással</i> .....	143
<i>Petrasovits Géza—Soltész Péter: Talajmodellek és a fejlődés irányai</i> .....	185
<i>Sárközi László—Horváth Ferencné: Síkbeli és forgásszimmetrikus rugalmas-izotropikusan felkeményedő szilárdsági feladatok numerikus megoldása végeselemes elmozdulásmódszerrel</i> .....	215
<i>Ecsedi István: Palástjukon tengely irányú erőrendszerrel terhelt prizmatikus rudak</i> ...	231
<i>Petrasovits Géza: A műszaki Mechanikai Tanszéki Kutatócsoport munkája</i> .....	247

## CONTENTS

<i>Béda, Gyula—Gáti, Róbert—Hering, József—Pomázi, Lajos—Stépán, Gábor—Szekeres, András—Thamm, Frigyes—Új, József: Some Aspects of the Study of Deformable Bodies</i> .....	5
<i>Bosznay, Ádám—Czeglédi, Gyula—Richlik, György—Solti, József—Tóth, György: Some Extremal Value Characteristics of Structures Eigenfrequencies and their Application</i> .....	35
<i>Baintner, László—Draskóczy, András—Peredy, József—Salát, Géza: Problems with Multy-parametric Load Systems</i> .....	61
<i>Halász, Ottó—Iványi, Miklós—Szatmári, István: Experimental Analysis of Plate—Buckling Problems</i> .....	101
<i>Nédli, Péter—Mrs. M. Kurutz—Mrs. A. Vásárhelyi—Gáspár, Zsolt: Solution of Special Statical Problems of Prefabricated Building Structures by Mathematical Programming</i> .....	143
<i>Petrasovits, Géza—Soltész, Péter: Ground Models and the Trend of Progress</i> .....	185



<i>Sárközi, László—Mrs. F. Horváth: Numerical Analysis of Plane and Axisymmetrical Problems with Elastic and Isotropically Hardening Material by Finite Element Displacement Method . . . . .</i>	215
<i>Ecsedi, István: Prismatic Bars Loaded by a System of Axial Forces on their Surfaces</i>	231
<i>Petrasovits Géza: The Research Work of the Research Group for Applied Mechanics</i>	247

## INHALTSVERZEICHNIS

<i>Béda, Gyula—Gáti, Róbert—Hering, József—Pomázi, Lajos—Stépán, Gábor—Szekeres, András—Thumm, Frigyes—Új, József: Einige Probleme fester Kontinua . . . . .</i>	5
<i>Bosznay, Ádám—Czeglédi, Gyula—Richlik, György—Solti, József—Tóth, György: Einige Extremaleigenschaften der Eigenfrequenzen von Konstruktionen und deren Anwendungen . . . . .</i>	35
<i>Bainner, László—Draskóczy, András—Peredy, József—Salát, Géza: Die Aufgaben mit dem mehrparametrischen Lastsystemen . . . . .</i>	61
<i>Halász, Ottó—Iványi, Miklós—Szatmári, István: Experimentelle Untersuchung im Gebiet der Ausbeulung der Stahlplatten . . . . .</i>	101
<i>Nédli, Péter—Frau M. Kurutz—Frau A. Vásárhelyi—Gáspár, Zsolt: Untersuchung einiger statischer Probleme vorgefertigter Baukonstruktionen mit mathematischer Programmierung . . . . .</i>	143
<i>Petrasovits, Géza—Soltész, Péter: Bodenmodelle und ihre Entwicklungstendenzen . . . . .</i>	185
<i>Sárközi, László—Horváth, Ferencné: Numerische Untersuchung von flächen- und rotationssymmetrischen Festigkeitsproblemen bei sich elastisch und isotropisch aufhaltenden Materialeigenschaften mit der finiten Verschiebungsmethode . . . . .</i>	215
<i>Ecsedi, István: Untersuchung der am Mantel, durch ein axiales Kraftsystem belasteten, prismatischen Stäbe . . . . .</i>	231
<i>Petrasovits Géza: Über die Tätigkeit der Arbeitsgruppe für technische Mechanik . . . . .</i>	247

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Бéда Дьyла—Гати Роберт—Херинг Йoжсеф—Пoмази Лайoш—Штепан Габор—Секереш Андраш—Тамм Фридеш—Уй, Йoжсеф: Некоторые вопросы исследований твердых сплошных сред . . . . .</i>	5
<i>Бoсзнai Адам—Цегледи Дьyла—Рихлик Дьёрдь—Шолти Йoжсеф—Тот Дьёрдь: Некоторые краевые свойства собственных частот конструкций и их применение . . . . .</i>	35
<i>Байтнер Ласло—Драшкоци Андраш—Переди Йoжсеф—Шалат Геза: Задачи с многопараметрическими нагрузками . . . . .</i>	61
<i>Халас Отто—Ивани Миклош—Сатмари Иштван: Экспериментальные исследования местной потери устойчивости пластин . . . . .</i>	101
<i>Недли Петер—Куруцне, Ковач Марта—Вашархешне, Сабо Анна—Гашипар Жолт: Решение специальных проблем статики сборных строительных конструкций с помощью вычислительных методов . . . . .</i>	143
<i>Петрашович Геза—Шолтес Петер: Модели почвы и тренды развития . . . . .</i>	185
<i>Шаркози Ласло—Хорват Ференце: Численные решения прочностных задач плоских и осесимметричных упругих и изотропически твердеющих тел с помощью метода конечных элементов . . . . .</i>	215
<i>Эчеди Иштван: Призматические стержни, нагруженные поверхностными осевыми силами . . . . .</i>	231
<i>Петрашович Геза: Работа научного объединения по технической механике . . . . .</i>	247

# SZILÁRD KONTINUUMOK VIZSGÁLATÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSE

BÉDA GYULA<sup>1</sup> A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA, GÁTI RÓBERT<sup>2</sup>,

HERING JÓZSEF<sup>3</sup>, A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA, POMÁZI LAJOS<sup>4</sup> A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA,

STÉPÁN GÁBOR<sup>5</sup>, SZEKERES ANDRÁS<sup>6</sup>, THAMM FRIGYES<sup>7</sup>, ÚJ JÓZSEF<sup>8</sup>

A tanszék munkájából három témakörből mutatunk be néhány eredményt:

- a mechanika alapjaira vonatkozó kutatások közül az ideális kényszer általános értelmezését, késleltetett rendszerek stabilitását, a lehetséges anyagtörvény általános tulajdonságainak megfogalmazását és a termodinamika rugalmasságtani alkalmazását;
- a mérnöki, gépészeti alkalmazások körébe tartozó kutatások közül a rotorszerkezetek stabilitását, a spline-interpoláció rugalmasságtani alkalmazását és a szendvics-szerkezetek vizsgálatát;
- a rugalmas kontinuumokkal kapcsolatos kísérleti kutatások közül egyet.

Napjainkban a szilárd kontinuumok vizsgálata sokrétű és igen sokirányú. Ezt a jellegét a mechanikai vizsgálatoknak a technikai fejlődés által felvetett, a megszokottól alapvetően eltérő feladatok idézték elő és az a körülmény, hogy egy nagyhatékonyságú számítástechnikai adottság áll rendelkezésre a mechanikai vizsgálatok lefolytatására.

A mechanikai kutatásokat több szempontból lehet osztályozni. Az áttekinthetőség érdekében három besorolási lehetőséget célszerű figyelembe venni.

A kutatások *egyik iránya* a mechanika alapjaira vonatkozik, amely alatt az alapegyenletek kiegészítését, pontosítását, nem mechanikai jellegű jelenségek figyelembevételét érthetjük. A *másik* kutatási *irány* jellemzője az ismert mechanikai alapok konkrét szerkezetekre, testekre, feladatokra való alkalmazása, amely érinti a modellalkotás kérdését, a célszerű számítástechnika kialakításának a szükségességét és olyan fajta eredményekre való törekvést, amelyek elsősorban a műszaki tudományok területén alkalmazhatóak. A *harmadik* kutatási *irány* az említett mindkettőhöz kapcsolódik és azokat a kísérleti módszereket jelenti, amelyek mind a mechanika alapjaira vonatkozó elméleteket, mind a javasolt modellalkotási, számítási eljárásokat igazolni vagy megingatni hivatott. A mechanikusok körében él az a felfogás, hogy a mechanika nem kísérleti, hanem tapasztalati tudomány. E tekintetben az ezt a felfogást

<sup>1</sup> Dr. Béda Gyula tanszékvezető egy. t. BME MMTnsz. 1121 Bp., Bognár u. 4

<sup>2</sup> Dr. Gáti Róbert adjunktus BME MMTnsz. 1125 Bp., Zalai út 1/c.

<sup>3</sup> Dr. Hering József docens BME MMTnsz. 1221 Bp., Szikla u. 8.

<sup>4</sup> Dr. Pomázi Lajos docens BME MMTnsz. 1112 Bp., Menyecske u. 5.

<sup>5</sup> Stépán Gábor tud. munkatárs BME MMTnsz. 1148 Bp., Bánki Donát u. 14/a.

<sup>6</sup> Dr. Szekeres András tud. munkatárs BME MMTnsz. 1036 Bp., Lajos u. 115.

<sup>7</sup> Dr. Thamm Frigyes adjunktus BME MMTnsz. 1026 Bp., Széplak u. 1.

<sup>8</sup> Új József adjunktus BME MMTnsz. 2040 Budaörs, Lévai u. 17.

vallók a mechanikát a geometriával hasonlítják össze. Kutatóhelyünk azok álláspontjával ért egyet, akik a mechanikát tapasztalati és kísérleti tudománynak tekintik, és így a kísérletek révén kínálkozó megismerési lehetőségeket fontosnak tartjuk és fejlesztésére gondot fordítunk.

A következő összefoglalók egy-egy fontosnak tartott kutatási eredményt mutatnak be. Ezek egy része az első kutatási irányba, másik része az előzőekben körvonalazott második kutatási irányba tartozik. A harmadik kutatási irány csak egy dolgozattal szerepel a következőkben. A szóban forgó összefoglalók közös sajátossága, hogy erőteljesen támaszkodnak a matematika nyújtotta lehetőségekre, mind a mechanikát fejlesztő megállapítások elérése érdekében, mind pedig a felvetett feladatok számítástechnikai adottságok kihasználása vonatkozásában jelentkező megoldhatóság szempontjából. Így az összefoglalók ezen része közvetlenül a mérnöki és azon belül a gépészmérnöki tevékenységet kívánja segíteni.

A mechanika alapjaira vonatkozó kutatások közül bemutatjuk az ideális kényszer általános értelmezésében (Dr. Hering József docens), késleltetett rendszerek stabilitási vizsgálatában (Stépán Gábor tud. m. társ), a lehetséges anyagtörvény általános tulajdonságainak megfogalmazásában (Dr. Béda Gyula tszv. egyetemi tanár) és a termodinamika rugalmasságtani alkalmazásában (Dr. Szekeres András tudományos munkatárs) elért eredményeket.

A mérnöki, gépészeti alkalmazások körébe tartozó kutatások közül röviden ismertetjük a rotorszerkezetek stabilitására (Dr. Gáti Róbert adjunktus), a spline-interpeláció rugalmasságtani alkalmazására (Új József adjunktus) és a szendvicsszerkezetek vizsgálatára (Dr. Pomázi Lajos docens) vonatkozó eredményeket.

A rugalmas kontinuumokkal kapcsolatos kísérleti kutatásokat (Dr. Thamm Frigyes adjunktus) egy összefoglaló képviseli.

### 1. Az ideális kényszer általánosított értelmezése\*

Ha egy  $t$  időpontban  $\mathbf{v}$  sebességgel mozgó,  $m$  tömegű anyagi részecskére (tömegpontra) az

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0 \quad (1.1)$$

kinematikai kényszeregyenlettel meghatározott  $\mathbf{R}$  kényszererő hat, akkor ennek a teljesítménye:

$$P^* = \mathbf{R}\mathbf{v} \quad (1.2)$$

A kényszert általános értelemben ideálisnak fogjuk nevezni akkor, ha az  $\mathbf{R}$  kényszererő  $P^*$  teljesítményének — az (1.1) kényszeregyenlettel összeférő, adott időpont ( $t$ ), helyzet

\* Hering József munkája.



( $\mathbf{r}$ ) és sebesség ( $\mathbf{v}$ ) mellett — egy elég kicsiny  $\Delta t$  idő alatti lehetséges változásai azonosak, ami azt jelenti, hogy a

$$\dot{P}^* = \frac{dP^*}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \mathbf{v} + \mathbf{R}\mathbf{a}$$

kényszerteljesítmény-sebesség stacionárius, vagyis variációja zérus:

$$\dot{P}^* = \mathbf{R}\delta\mathbf{a} = 0 \quad (1.3)$$

Az (1.3) alapján tehát: a kényszert ideálisnak nevezzük, ha a kényszererőnek és a gyorsulás variációjának a szorzata, vagyis a kényszerteljesítmény-sebesség variációja zérus.

Az így definiált ideális kényszer jellemzésére válasszuk ketté a tömegpontra ható  $\mathbf{F}$  aktív erő és az  $\mathbf{R}$  kényszererő hatását. A tömegpont kényszer nélküli — szabad — mozgása az  $\mathbf{F}$  erő hatására  $\mathbf{a}^0$  gyorsulással történik:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}^0 \quad (1.4)$$

Az  $\mathbf{R}$  kényszererő a szabad mozgás  $\mathbf{a}^0$  gyorsulását  $\alpha$  értékkel megváltoztatja:

$$\mathbf{R} = m\alpha \quad (1.5)$$

és így az eredő gyorsulás:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 + \alpha = \frac{\mathbf{F} + \mathbf{R}}{m} \quad (1.6)$$

Az (1.4) összefüggés alapján a gyorsulás variációja:

$$\delta\mathbf{a} = \delta\alpha \quad (1.7)$$

Az (1.5) és (1.7) összefüggéseket (1.3)-ba helyettesítve:

$$\mathbf{R}\delta\alpha = m\alpha\delta\alpha = \delta\left(\frac{1}{2}m\alpha^2\right) = 0 \quad (1.8)$$

vagy

$$\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\mathbf{R}^2}{m}\right) = 0 \quad (1.9)$$

Bevezetve a kényszer okozta

$$S^* = \frac{1}{2}m\alpha^2 \quad (1.10)$$

„gyorsulásenergia” kifejezést, az ideális kényszerre írható, hogy

$$\delta S^* = 0 \quad (1.11)$$

A kapott eredmények alapján az ideális kényszerekre vonatkozólag az alábbi minimum elvek állapíthatók meg:

- az ideális kényszer a tömegpont kényszermentes — az  $F$  aktív erő hatására történő — szabad mozgását a kinematikailag lehetséges legkisebb  $\alpha$  gyorsulással változtatja meg:

$$\delta \left( \frac{1}{2} m \alpha^2 \right) = 0$$

- az ideális kényszer minimális kényszererőt okoz:

$$\delta \left( \frac{1}{2} \frac{R^2}{m} \right) = 0$$

- az ideális kényszer okozta gyorsulásenergia minimális:

$$\delta S^* = 0$$

- az ideális kényszerteljesítmény-sebesség értéke — a kényszer által megengedett — lehetséges gyorsulásmezőben, minimális:

$$\delta \dot{P}^* = 0$$

A fenti megállapítások összefoglalásaként mondhatjuk, hogy az ideális kényszer a tömegpont kényszermentes — szabad — mozgását a lehető legkisebb mértékben zavarja meg (Gauss-elv).

Amennyiben ideális kényszereknek alávetett mechanikai rendszert vizsgálunk, akkor minden tömegpontra írható, hogy:

$$\mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{a}_i = 0,$$

amit a rendszer  $N$  tömegpontjára összegezve:

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \cdot \delta \mathbf{a}_i = 0. \quad (1.12)$$

Mivel az alaptörvény értelmében:

$$\mathbf{R}_i = m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i, \quad (1.13)$$

azért:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i) \delta \mathbf{a}_i = 0. \quad (1.14)$$

Bevezetve a rendszer

$$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i^2 \quad (1.15)$$

„gyorsulásenergiája” kifejezést az (1.14) összefüggés így írható:

$$\delta S = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{a}_i. \quad (1.16)$$

Ha az  $\mathbf{r}_i$  helyvektorokat a rendszer  $n$  szabadságfokával azonos számú  $q_1 \dots q_n$  általános koordináták és  $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$  általános sebességek és a  $t$  idő függvényeként állítjuk elő, azaz:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_k, \dot{q}_k, t) \quad (i=1 \dots N) \quad (1.17)$$

$$(k=1 \dots n)$$

akkor

$$\delta S = \sum_{k=1}^n \frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} \delta \ddot{q}_k \quad (1.18)$$

és

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \ddot{q}_k} \delta \ddot{q}_k = \sum_{k=1}^n Q_k \delta \ddot{q}_k \quad (1.19)$$

ahol bevezettük a

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{a}_i}{\partial \ddot{q}_k} \quad (1.20)$$

általános erő fogalmát. Így, a független általános koordináták bevezetésével, az ideális kényszer általános értelmezése a mechanikai rendszerek legáltalánosabb — holonom és anholonom rendszerekre egyaránt érvényes — mozgásegyenletéhez, az Appell egyenletekhez vezet:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k \quad (k=1 \dots n) \quad (1.21)$$

Amennyiben a mechanikai rendszerben csak geometriai kényszerek vannak, akkor

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_k, t) \quad (i=1 \dots N) \quad (1.22)$$

$$(k=1 \dots n)$$

és így:

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (1.23)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial t}, \quad (1.24)$$

amelyek alapján:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \quad (1.25)$$



és

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_k}. \quad (1.26)$$

Az (1.25) alapján az (1.20) szerinti általános erő:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \ddot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_k} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.27)$$

Bevezetve a

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (1.28)$$

kinetikus energia kifejezést, az (1.25) és (1.26) figyelembevételével:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}, \quad (1.29)$$

vagyis, holonom rendszerek esetén a (1.21) Appell egyenlet a másodfajú Lagrange-egyenletbe megy át:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad (k = 1 \dots n) \quad (1.30)$$

## IRODALOM

1. PAUL APPELL: Traité de Mécanique rationnelle. Tome 2. Paris, 1953.
2. L. A. PARS: Analiticeszkaja dinamika. Nauka, Moszkva, 1971.
3. F. GANTMAHER: Lectures in analytical mechanics. Mir. Moscow, 1975.

## 2. Késleltetett zavarású dinamikai rendszerek stabilitási vizsgálatára kidolgozott módszer\*

Az összefoglalásban olyan dinamikai rendszerekkel foglalkozunk, amelyek gerjesztése a rendszer egy korábbi állapotától függően változik. Ezeket a rendszereket úgynevezett differenciál-differencia egyenletek (vagy általánosabb esetekben funkcionál-differenciálegyenletek) írják le. Az ilyen matematikai modellek átfogó vizsgálata csak három évtizede kezdődött el. Az igény az 1940-es években jelentkezett egységes elmélet kidolgozására. Ezt az igényt jelzi Minorskynak 1942-ben, műszaki stabilizálási feladat kapcsán megjelent cikke, és az, hogy a kutatók ekkoriban kezdtek el foglalkozni

\* Stépán Gábor munkája.

a késleltetett visszacsatolású szabályozási rendszerekkel; a differenciál-differencia egyenletek elmélete azonban érdekes a közgazdaságtudomány, az orvostudomány és a biomatematika számára is.

Munkánk során összefoglaltuk a differenciál-differencia egyenletekre kidolgozott stabilitásvizsgálati eljárásokat, továbbá kidolgoztunk egy az eddigi eljárásoknál általánosabb, azoknál mégis egyszerűbben alkalmazható stabilitásvizsgálati módszert. Ez egyúttal néhány új matematikai tétel megfogalmazását eredményezte. Ezek közül ismertetünk egyet:

Tekintsük a

$$\frac{d}{dt} x(t) + C \frac{d}{dt} x(t-\tau) + Ax(t) + Bx(t-\tau) = 0 \quad (2.1)$$

differenciál-differencia egyenletet, az  $x=0$  megoldás stabilitását vizsgáljuk.  $\tau > 0$  állandó,  $A, B$  és  $C$   $n \times n$  méretű állandó mátrixok,  $x(t)$   $n$  méretű vektor-skalár függvény.  $C$ -re teljesüljön, hogy

$$\sum_{k=1}^n |C_k| < 1,$$

ahol  $C_k$  a  $C$  mátrix  $k$ -edik skalárinvariánsa. A differenciál-differencia egyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$D(z) = \det(zI + Cze^{-\tau z} + A + Be^{-\tau z}) = 0, \quad (2.2)$$

itt  $z$  komplex szám. Legyen

$$M(y) = \operatorname{Re}(D(iy)), \quad S(y) = \operatorname{Im}(D(iy)), \quad (i = \sqrt{-1}), \quad (2.3)$$

valamint páros  $n$  esetén  $y_1$  jelölje az  $M(y)=0$  legnagyobb valós gyökét, páratlan  $n$  esetén pedig  $M(y)$  azon legnagyobb zérushelyét, amely még kisebb  $S(y)=0$  legnagyobb valós gyökénél.  $M(y)=0$  további nem-negatív gyökei  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m \geq 0$ .

Differenciál-differencia egyenletünk  $x=0$  megoldása akkor és csak akkor aszimptotikusan stabilis, ha

$$S(y_k) \neq 0, \quad k = 1, \dots, m$$

és

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \operatorname{sign} S(y_k) + \frac{1}{2} \left( n - 2 \operatorname{int} \frac{n}{2} \right) (-1)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{n}{2} \operatorname{sign} M(y_1 + \varepsilon) = 0, \quad (2.4)$$

ahol  $\varepsilon$  kicsi pozitív szám.

Tételeink alapján előállítottuk másod- és negyedrendű, valamint bizonyos  $n$ -edrendű differenciál-differencia egyenletek stabilitási térképeit. Ennek kapcsán kimutattuk egy- és két-szabadságfokú, holonóm, szkleronóm, késleltetett zavarású mechanikai rendszerek néhány érdekes stabilitási tulajdonságát.

A szakirodalomban közölt eredmények összefoglalásával felépítettük a szerszámkésrengés egy három-szabadságfokú modelljét, megmutatva annak kapcsolatát négy ismert, egyszerűbb modellel.

Tételeink alapján analitikus és numerikus stabilitásvizsgálati módszereket határoztunk meg szerszámkésrengésekre, figyelembe véve azok beépíthetőségét technológiai tervezőrendszerekbe. Az eljárások alapján elkészült a szakirodalom több, eltérő módszerrel meghatározott stabilitási térképe, valamint egy példa kapcsán a technológiai paraméterek operációs terébe transzformált térkép is.

Felhasználva a kidolgozott matematikai tételek általános voltát, egyszerű populációfejlődési, illetve szabályozástechnikai feladatokon megmutattuk stabilitási térkép számítását olyan differenciál-differencia egyenletekhez is, amelyek páratlan rendűek, illetve több időkésleltetést tartalmaznak egyszerre.

Az általános stabilitásvizsgálati eljárás kidolgozásakor a modern matematikai tárgyalásmóddhoz ragaszkodtunk, a későbbiekben az alkalmazásokra, az eredmények érdekes fizikai tartalmára próbáltuk felhívni a figyelmet. Célunk a szerszámkésrengések tárgyalásakor még ezen is túlmutatott: az elméleti matematikai eredményektől kiindulva, a mechanikai modelleken át, megpróbáltunk eljutni egészen addig, hogy lennének mindezek hasznosíthatók az ipari termelésben.

## IRODALOM

1. MINORSKY, N.: Self-Excited Oscillations in Dynamical Systems Possessing Retarded Actions. *J. Appl. Mech.* (1942) 9. 65—72.
2. STÉPÁN, G.: On the Stability of a Differential Equation with Time Lag. *Periodica Polytechnica*, (1978) 22 87—94.
3. TOBIAS, S. A.: Schwingungen an Werkzeugmaschinen, Carl Hauser Verlag, München, 1961.

### 3. A kisalakováltozást végző test lehetséges anyagtvörvényeinek általános tulajdonsága\*

A kisalakováltozást végző test vizsgálatára a tömegmegmaradástörvény, a mozgásegyenlet és a kinematikai (vagy geometriai) egyenletek szolgálnak. Ezekben az egyenletekben szereplő ismeretlen függvények, az alapfüggvények, száma 6-tal több mint az egyenletek száma. Ezért további 6 egyenletre van szükség. Ezek a további egyenletek az anyagtvörvény név alatt foglalhatók össze. Az anyagtvörvényt

\* Béda Gyula munkája.



többféleképpen szokás felvenni, meghatározására is találhatók javaslatok [1]. A következőkben egy az eddigiektől eltérő, a [2] szerinti megfontolások általánosítására törekszünk, változatlanul csak a mechanikai kölcsönhatásokat véve figyelembe.

Tekintettel arra, hogy az alapfüggvények, a  $v_i$  sebesség,  $\sigma_\alpha$  feszültségtenzor koordinátái és  $\varepsilon_\alpha$  alakváltozási tenzor koordinátái a felsorolt ismert általános egyenletekben első hely, illetve idő szerinti deriváltjaival szerepelnek, az  $F_\alpha = 0$  anyagtörvényt az alapfüggvények, azok első deriváltjai és a hely és idő koordináták függvényeként keressük. A helykoordináták legyenek  $x_1, x_2, x_3$ , az idő koordináta  $x_4$ ; összefoglalva  $x_\beta$ . Az  $i$  index 1, 2, 3 értéket vesz fel és  $v_i$  a sebesség Descartes féle derékszögű koordinátája. Az  $\alpha$  index 1, 2, 3, 4, 5, 6 értéket vesz fel és az előbbi koordináta-rendszerben a megfelelő tenzorok koordinátáit jelenti. A  $\sigma_\alpha x_i$  koordináták szerinti parciális deriváltja a  $\frac{\partial \sigma_\alpha}{\partial x_i} \equiv \sigma_{\alpha i}$ , hasonló a hely és idő koordináta szerinti parciális derivált jele más esetben is. Az  $\hat{i}$  index 1, 2, 3, 4 értéket vesz fel. A  $\hat{q}$  kísérő index nem jelent összegezést. A következőkben feltesszük még, hogy létezik, kelthető a testeken gyorsuláshullám [3].

Legyen  $\varphi(x_i) = 0$  a gyorsulás hullámfront. A gyorsuláshullám általánosított amplitúdóját a sebességvektor esetében  $v_i$ , a feszültség derivált tenzor esetében  $\mu_\alpha$  és az alakváltozási derivált tenzor esetében  $\kappa_\alpha$  jelölje. A gyorsuláshullám dinamikai és kinematikai kompatibilitási egyenlete [4] mellé, az anyagi kompatibilitási feltételt is vezessük be. Ez, ha az anyagtörvény hullámfront előtti helyettesítési értéke  $\hat{F}_\alpha = 0$  és a hullámfront mögötti  $F_\alpha = 0$ , akkor az

$$f_\alpha \equiv F_\alpha - \hat{F}_\alpha = 0$$

az anyagi kompatibilitási egyenlet.

Ez a hat egyenlet ugyanazon  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \equiv \varphi_i$  ismeretlen függvényt tartalmazza, s így a hullámfront differenciálegyenlete. Ez a parciális differenciál-egyenletrendszer nem lineáris és csak akkor adja ugyanazt a  $\varphi(x_i)$  függvényt biztosan, ha az  $f_\alpha$  függvények involutorikus függvényrendszert alkotnak [5], [6]. Az  $f_\alpha$  függvényrendszer involutorikus, ha az

$$(f_\alpha, f_\beta) \equiv 0$$

azonosság teljesül [5]. Ebből az anyagtörvény alábbi általános tulajdonságai következnek:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \sigma_{\beta i}} - L_{\beta \gamma}^i \frac{\partial f_\alpha}{\partial \varepsilon_{\gamma i}} = 0 \quad (3.1)$$

és emellett

$$L_{\beta \eta}^i \mu_{\beta i} + \kappa_{\eta i} = 0, \quad (3.2.a)$$

amely mellé csatlakozik a

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial f_x}{\partial \sigma_{\beta i}} - \frac{\partial f_x}{\partial \hat{\sigma}_{\beta i}} \right] \hat{\sigma}_{\beta i \dot{p}} + \left[ \frac{\partial f_x}{\partial \varepsilon_{\beta i}} - \frac{\partial f_x}{\partial \hat{\varepsilon}_{\beta i}} \right] \hat{\varepsilon}_{\beta i \dot{p}} + \\ & + \left[ \frac{\partial f_x}{\partial \sigma_{\beta}} - \frac{\partial f_x}{\partial \hat{\sigma}_{\beta}} \right] \hat{\sigma}_{\beta \dot{p}} + \\ & + \left[ \frac{\partial f_x}{\partial \varepsilon_{\beta}} - \frac{\partial f_x}{\partial \hat{\varepsilon}_{\beta}} \right] \hat{\varepsilon}_{\beta \dot{p}} + f_{x \dot{p}} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Akkor is biztosan involutorikus a függvényrendszer, vagyis létezik a gyorsuláshullám, ha a (3.1) egyenlet mellett

$$L_{\beta \eta}^i \mu_{\beta} + \kappa_{\eta} = 0. \quad (3.2.b)$$

Ebben az esetben a (3.3) egyenletre nincsen szükség. Az egyenletekben szereplő  $L_{\beta \eta}^i$  általában az alapfüggvények, azok deriváltjainak és a hely-időkoordinátáknak lehet a függvénye. A képlet szorzat tagjaiban egybeeső indexek összegezést jelentenek.

Végül két megjegyzés az egyenletekhez. Az anyagtörvény kísérleti előállítására (3.2.a), illetve a (3.2.b) egyenletek alapján a gyorsuláshullám  $\varphi(x_i)$  frontjainak kimérése, a hullám terjedési sebességének és a feszültségi és alakváltozási hullám általánosított amplitúdóinak kimérésével a (3.1) differenciálegyenlet felhasználásával lehetségesnek látszik. A másik megjegyzés a (3.3) egyenlethez kapcsolódik. Ha a test inhomogén és reonom, akkor ez kezdeti alakváltozási, feszültségi mezőhöz kapcsolódik, vagy mindkettőhöz. Az inhomogén reonom teste<sup>17</sup> esetében nem indulhatunk ki a test természetes állapotából. (A természetes állapot fogalmát lásd [7] vagy [8]).

## IRODALOM

1. BÉDA GY.: A szilárd testek anyagtörvényei. *Műszaki Tudomány* 47. 1973.
2. BÉDA GY.: Módszer a képlékeny hullám vizsgálatára. Miskolc, 1959. (Kandidátusi értekezés.)
3. BÉDA GY.: Egy képlékenységtani vizsgálat matematikai módszere. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 5. (1979.)
4. ERINGEN A. C.—SUHUBI E. S.: *Elastodynamics*. Vol. I. Academic Press, New York, London, 1974.
5. KAMKE E.: *Differentialgleichungen II.* kötet. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest und Portig K. G. Leipzig, 1956, 124.
6. BÉDA GY.: Eine Eigenschaft des möglichen Materialgesetzes von Körpern. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry, Ser. D. Natural Sciences*, 1978, Vol. 33.
7. PRAGER W.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik* Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1961.
8. BÉDA GY.—KOZÁK I.: A klasszikus kontinuummechanika általános elmélete. ANTAL J.: *Fizikai kézikönyv műszakiaknak*. Műszaki Könyvkiadó, 1980. (Könyvrészlet)

#### 4. A hőrugalmasságtan dinamikai feladatainak vizsgálata\*

Ismeretes, hogy hőmérsékletváltozás alakváltozást okoz és fordítva. Ezért a rugalmasságtani vizsgálatokban — szigorúan véve — a termodinamikai hatások nem hanyagolhatók el, az alakváltozási — és hőmérsékletmező kapcsoltan kezelendő.

Stacionárius feladatokban azonban a jelenséget leíró differenciálegyenletrendszer szétesik és a hőmérsékletmező külön meghatározható, majd ennek ismeretében az alakváltozási mező előállítható. Kvázi-statisztikus feladatok esetén a megoldás egyszerűsítése érdekében szokás a fenti kapcsolást megvalósító mennyiséget elhanyagolni; ez megbecsülhető pontatlanságot okoz. A szakirodalom megemlíti a nem kapcsolt dinamikai feladatok körét is, ez azonban — pontatlansága miatt — keveset mond a jelenségről. Mindezek alapján a dinamikai hőrugalmasságtani feladatokat kapcsoltaknak is kell tekintenünk [1, 2, 3].

Az utóbbi 10—20 évben előtérbe került a dinamikai feladatok vizsgálatára alkalmas összefüggések bevezetése. Ez részben az alakváltozási és hőmérsékleti mezők összekapcsolását, részben a hővezetési egyenlet dinamikai feladatokhoz alkalmas alakjának előállítását jelentette [4].

A hőrugalmasságtan feladata a következő egyenletrendszerrel írható le: geometriai egyenlet, anyagtörvény, mozgásegyenlet, hővezetési törvény és a termodinamika első és második főtétele. Kis alakváltozásokat és reverzibilis folyamatokat feltételezve, valamint homogén, izotrop, a hőmérséklettől nem függő anyagjellemzőkkel rendelkező kontinuum esetén ezek

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (4.1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha_T T \delta_{ij}, \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij,j} + g_i = \ddot{u}_i, \quad (4.3)$$

$$\dot{q} = w + \kappa T_{,ii} \quad (4.4)$$

$$s = c\rho \ln \frac{T_1}{T_0} + \gamma \varepsilon_{kk} \quad (4.5)$$

$$dq = T_1 ds. \quad (4.6)$$

alakúak.

\* Szekeres András munkája.

A kapcsolt feladat vizsgálatánál kis  $\partial T/\partial s$  érték feltételezése mellett (4.4), (4.5) és (4.6)-ból kapjuk, hogy

$$w + \kappa T_{,ii} = \dot{T} \left[ c\rho \left( 1 + \ln \frac{T_1}{T_0} \right) + \gamma \varepsilon_{kk} \right] + \gamma T_1 \dot{\varepsilon}_{kk}. \quad (4.7)$$

Az egyenlettel kapcsolatban két megjegyzést kell tenni. Az egyik, hogy a legújabb vizsgálatok szerint a (4.7) egyenlet előállítható a „kis  $\partial T/\partial s$ ” kikötésnél gyengébb feltétel mellett is. A másik, hogy a szakirodalom megfelelő egyenleteiben a  $\dot{T}\gamma\varepsilon_{kk}$  tag nem szerepel [1, 2, 3, 5].

A hőrugalmasságtani folyamatokat az  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $T$  és  $s$  mennyiségekkel a (4.8), (4.2'), (4.7) és (4.5) egyenletek írják le, ahol

$$L_{kl}(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) = 0, \quad (4.8)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma T)\delta_{ij}. \quad (4.2')$$

Itt  $L_{kl}$  (4.1) és (4.3) alapján értelmezhető differenciáloperátor.

Izotermikus folyamatnál, amikor  $\dot{T} = 0$ , (4.2) helyett

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (4.9)$$

érvényes. Adiabaticus folyamatoknál pedig, amikor  $\dot{s} = 0$ , (5) alapján írható, hogy

$$dT = - \frac{\gamma T_1}{c\rho} d\varepsilon_{kk}, \quad (4.10)$$

illetve ezzel

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \left( \lambda + \frac{\gamma^2 T_1}{c\rho} \right) \varepsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad (4.11)$$

A (4.10)-es egyenlet mutatja, hogy gyors nyúláshoz (ezen folyamatok adiabaticusnak tekinthetők)  $\gamma$  előjelétől függően tartozhat lehűlés ( $\gamma > 0$ ) és felmelegedés ( $\gamma < 0$ )  $\cdot \gamma$  előjelét a hőtágulási együttható előjele határozza meg.

A szakirodalom szerint izotermikus és adiabaticus folyamatok esetén azonos alakú anyagtörvény érvényes, csak az együtthatók nagysága tér el. (4.9) és (4.11) összevetése megmutatja, hogy ez csak kis hőmérsékletváltozásnál igaz, amikor  $T_0 \cong T_1$ .

Egyébként adiabaticus folyamat számításánál figyelembe kell venni a hőmérsékletváltozást is.

A hővezetés egydimenziós feladatát a Fourier-féle hővezetési törvény alapján az

$$aT_{xx} = T_t \quad (4.12)$$

differenciálegyenlet írja le. Ennek vizsgálata azt mutatja, hogy a hőmérsékleti hullám végtelen sebességgel terjed, ami ellentmondásban van a tapasztalattal. Feloldására a fenti egyenlet helyett az

$$aT_{xx} = T_t + \tau T_{tt} \quad (4.13)$$

összefüggést javasolja a szakirodalom [4, 6]. Eszerint a hőmérsékleti hullám terjedési sebessége véges érték, mégpedig:

$$v_T = \sqrt{\frac{a}{\tau}}. \quad (4.14)$$

Felvetődik a gondolat, hogy ez miként befolyásolja a hőrugalmasságtan dinamikai feladatait.

Vizsgáljunk egydimenziós, dinamikai hővezetési feladatot. Hanyagoljuk el a mechanikai kölcsönhatásokat és tegyük fel, hogy az anyag homogén, izotrop.

A termodinamika 1. főtétele szerint

$$\rho u_t = h_x. \quad (4.15)$$

Általános érvényű tapasztalatok alapján azt vegyük figyelembe, hogy az állapotegyenlet és a hővezetési törvény argumentumában  $T$ ,  $u$  és  $h$ , illetve deriváltjaik szerepelhetnek. Ezek alapján

$$\varphi(u, T, T_x, T_t) = 0, \quad (4.16)$$

$$\psi(h, h_t, T, T_x, T_t) = 0. \quad (4.17)$$

A kitűzött feladat megoldásához a (4.15), (4.16) és (4.17)-ből álló parciális differenciálegyenlet rendszer megoldása révén juthatunk el.

A megszabott feltételek felhasználásával, rendezés után kapjuk a következő egyenleteket (egyenlőtlenséget) [7].

$$\psi_{h_t} \varphi_{T_t} = 0, \quad (4.18)$$

$$\psi_{h_t} \varphi_{T_x} = 0, \quad (4.19)$$

$$\left( \varphi_{T_x} - \frac{\psi_{T_t}}{\rho} \right)^2 + 4(\varphi_{T_t} + \psi_{h_t} \varphi_T) \frac{\psi_{T_x}}{\rho} > 0. \quad (4.20)$$

(4.18), (4.19) és (4.20) összefüggések alkalmazásával a dinamikai feladatok esetén lehetséges és nem lehetséges állapotegyenletek és hővezetési törvények különválaszthatók.

Ezek alapján könnyen belátható, hogy a szokásos

$$u - cT = 0, \quad h - \kappa T_x = 0 \quad (4.21)$$

egyenletek egyidejűleg nem lehetségesek. Lehetségesek azonban pl. az

$$u - cT - c\tau_1 T_t = 0, \quad h - \kappa T_x = 0, \quad (4.22)$$

illetve az

$$u - cT = 0, \quad h + \tau_2 h_t - \kappa T_x = 0 \quad (4.23)$$

egyenletpárok. Mindkét lehetséges eset a (4.13)-as egyenlethez vezet, ha figyelembe vesszük, hogy  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ .

A módosított hővezetési törvény (4.23) szerinti alakja, valamint  $\dot{q} = h_{,i}$  alapján

$$\tau \ddot{q} + \dot{q} = (\kappa_{ij} T_{,j})_{,i} \quad (4.24)$$

adódik.

A hőrugalmasságtan egyenletrendszerét tehát — az adott feltételek mellett — a módosított hővezetési törvénnyel a (4.1), (4.2), (4.3), (4.24), (4.5) és (4.6) egyenletek alkotják.

Az előbbieken bemutatott egyenletek alapján számításokat végeztünk hosszú rúd hűtés soráni viselkedésének vizsgálatára.

Az egyik végén befogott, másik végén hűtéssel terhelt modellre, a megfelelő kiegészítő feltételek mellett oldottuk meg az egyenletrendszert, numerikusan, digitális számológép segítségével.

a) Az acélanyagú, homogén, izotrop rúdra elvégzett számítások eredményéből az alábbi következtetéseket lehet levonni. A hűtés által keltett rugalmas hullám terjedési sebessége  $\sqrt{E/\rho}$ . A rúdvégén bevezetett nagy mennyiségű hő ellenére az  $x=0$  hely kivételével a rúd lehűl. Ennek magyarázata a rugalmas- és hőmérsékleti hullám eltérő sebességében rejlik.

b) Inhomogén, a fentiekkel egyébként megegyező anyagra elvégzett számítások azt mutatták, hogy műszakilag indokolható (pl. hibás gyártástechnológia miatti) inhomogenitás nem ad érdemleges eltérést az alakváltozási és hőmérsékleti állapotban a homogén esethez képest.

c) A módosított hővezetési egyenlet felhasználásával homogén, izotrop acélrúdra végzett számítások a következő eredményt adták. ( $\tau \neq 0$  a módosított,  $\tau = 0$  a Fourier-féle hővezetési törvényt jelenti.) A szakirodalomban található  $\tau = 10^{-14}$  s érték mellett az eredmények a számítás pontosságán belül megegyeznek a  $\tau = 0$ -ra nyert eredményekkel.  $\tau = 10^{-5}$  s értéknél az eltérés kb. 1%-os,  $\tau = 10^{-1}$  s-nél pedig kb. 100%-os. Vizsgálataink szerint acélanyag esetén ez  $\tau$  megfelelő értéke.

Ennek ellenére a Fourier-féle törvényt a fizika egyik legjobb modelljének tartják, aminek a magyarázata a következő lehet. Stacioner és kvázi-statikusan esetben a  $\tau = 0$  és  $\tau \neq 0$  esetek pontosan, illetve közel pontosan egyenlő eredményt adnak. (Lásd a (13)-as egyenletet!) Dinamikai feladatoknál azonban a pontosságot a  $\tau T_{,ii}$  szorzat többi taghoz képesti nagyságrendje határozza meg. Viszonylag lassú dinamikai folyamatoknál, amikor  $T_{,ii}$  kicsi, ugyancsak kevésbé befolyásolja  $\tau$  értéke a vizsgálatok eredményét. Gyors dinamikai folyamatoknál van  $\tau$  pontos értékének jelentősége, ilyen vizsgálat azonban ritkán adódik.

A bemutatott vizsgálat eredményei a következőkben foglalhatók össze.

Rendszerbe foglaltuk a hőrugalmasságtan egyenleteit, melyek segítségével tetszőleges hőrugalmasságtani feladat vizsgálható, így a kapcsolt dinamikai feladatok is.

Ezen utóbbiakra vonatkozó speciális egyenletek diszkussziója alapján megállapítottuk, hogy

a) kapcsolt feladat esetén a  $\dot{T}\gamma_{\varepsilon_{kk}}$  taggal bővített (4.7)-es egyenlet érvényes;

b) nagy hőmérsékletváltozás esetén a (4.11)-es egyenletben levő  $\left(\lambda + \frac{\gamma^2 T_1}{c\rho}\right)$

együttható nem állandó;

c) adiabatikus folyamatnál  $d\varepsilon > 0$ -hoz csak  $\alpha_i > 0$  esetén tartozik hőmérséklet csökkenés (lásd a (4.10)-es egyenletet), azaz a hőtágulási együttható előjelétől is függ.

b) és c) alatti megállapítások nem csak kapcsolt feladatok esetén érvényesek.

Dinamikai feladatoknál szükséges a lehetséges és nem lehetséges hővezetési törvények és állapotegyenletek szétválasztása. Erre módszert dolgoztunk ki, amelynek segítségével megállapítottuk, hogy

d) a szokásos alakú hővezetési törvény és állapotegyenlet egyidejűleg nem lehet érvényes, azonban pl. (4.22), vagy (4.23) lehetséges;

e) a módosított hővezetési törvénnyel a hőrugalmaságtani feladatokat a (4.1), (4.2), (4.24), (4.5) és (4.6) egyenletek írják le, ahol (4.24) a módosított hővezetési törvény.

Az egyenletrendszer felhasználásával hosszú rúd hűtésével kapcsolatban végzett számítások a következőket mutatták.

f) A rúd végén bevezetett nagy mennyiségű hő ellenére az  $x=0$  hely kivételével a rúd mindenütt lehűl. Ennek oka a rugalmas és hőmérsékleti hullám terjedési sebességének eltérése.

g) A Fourier-féle hővezetési törvény dinamikai feladatok esetén pontatlan. Amikor  $\tau T_{tt}$  és  $aT_{xx}$  nagysága összemérhető (azaz gyors dinamikai folyamatoknál), akkor a módosított hővezetési törvénnyel kell számolni.

h) Műszakilag indokolható inhomogenitás nem eredményez jelentékeny eltérést a homogén esethez képest.

## IRODALOM

1. NOWACKI, W.: Thermoelasticity. Pergamon Press, 1962.
2. BOLEY, B. A.—WEINER, J. H.: Theory of Thermal Stresses. John Wiley and Sons, 1960.
3. PARKUS, H.: Thermoelasticity. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts—Toronto—London, 1968.
4. BRAUN, M.: Zur Ausbreitung von Unstetigkeitsflächen in thermoelastischen Stoffen. Doktori értekezés, Stuttgart, 1974.
5. BIOT, M. A.: Thermoelasticity and Irreversible Thermodynamics. *Journal of Applied Physics*. 1969, Vol. 27. No. 3.
6. MAURER, M. J.: Relaxation Model for Heat Conduction in Metals. *Journal of Applied Physics*. 1969, Vol. 40. No. 13.
7. PETROVSKIJ, J. G.: Előadások a parciális differenciálegyenletekről. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.



### 5. Rotor stabilitásvizsgálata szinkronizáció esetén\*

A rotorok dinamikájával közel 100 éve foglalkoznak. A megjelent publikációkra az a jellemző, hogy a nagy fordulatszámú forgórészt — a rotort — zárt, környezetétől elszigetelt mechanikai rendszernek tekintik. Sok esetben viszont az a jellemző, hogy a rotor környezetével kölcsönhatásban van, tehát nem zárt mechanikai rendszer. Ebben az esetben a rotor dinamikai vizsgálata az ún. szinkronizációs jelenségek témakörébe sorolható. Meglehetősen bő ennek a szakterületnek az irodalma. BLECHMAN [1] monográfiája több mint 500 cikket elemez és foglal egységes rendszerbe. Kijelenti, hogyha a rotor tengelyét valamilyen forgástól független, külső hatás rezgeti, akkor ez „elfajult szinkronizációs” jelenségnek tekinthető. Ugyanakkor azt is megjegyzi, hogy a jelenség kivizsgálása a valóságot jól közelítő — általában — nemlineáris differenciál egyenletrendszer — továbbiakban d.e.r.-megoldását jelenti. Példaként, igen röviden merev kiegyensúlyozatlan rotor vizsgálatát ismerteti.

Mozgó szerkezetek — pl. járművek — esetén a rotor környezetével kölcsönhatásban van. Ezért megvizsgáljuk a hajlító és csavaró merevséggel rendelkező rugalmas tengelyre ékelt két merev, kiegyensúlyozatlan tárcsából álló rotort, ha a tengelyvégekre a környezetről átadódó harmonikus gerjesztés működik. Az 5.1. ábrán látható szerkezet helyzetét az  $y_1, y_2, \varphi$  egymástól független Lagrange koordinátákkal jellemezzük. A holonom-szkleronom mechanikai rendszer másodfajú Lagrange egyenletei

$$\left. \begin{aligned} \ddot{Y}_1 + \frac{K_1}{\omega^2} Y_1 - \frac{K_2}{\omega^2} Y_2 &= K_3 \frac{K_1 - K_2}{\omega^2} \sin \frac{\beta}{\omega} T + K_4 \sin T \\ \ddot{Y}_2 + \ddot{F} \cos(T + F) - (1 + \dot{F})^2 \sin(T + F) + \frac{K_5}{\omega^2} Y_2 - \frac{K_6}{\omega^2} Y_1 &= \\ &= K_3 \frac{K_5 - K_6}{\omega^2} \sin \frac{\beta}{\omega} T \\ \ddot{F}(1 + K_7) + \ddot{Y}_2 \cos(T + F) + \frac{K_8}{\omega^2} F &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

ahol  $Y_1, Y_2, F$  — dimenzióatlanított koordináták,

$K_i, i=1..8$  — a mechanikai rendszertől és a gerjesztéstől függő állandók,

$\frac{\beta}{\omega}$  — a szinkronizáció mértéke.

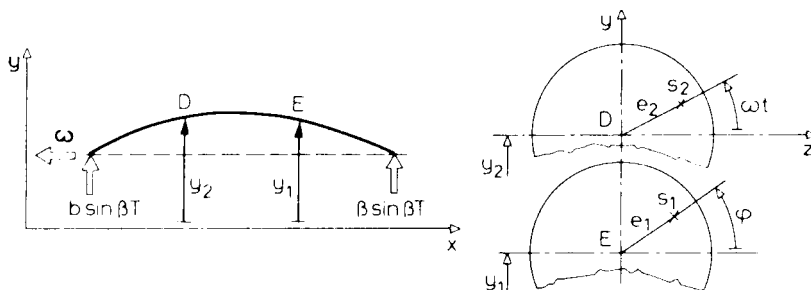
Az (5.1) d.e.r.-t negyedrendű Runge—Kutta eljárással — megfelelő előkészítő algoritmusok alkalmazásával — megoldva mind a tranzienst, mind a jó közelítéssel

\* Gáti Róbert munkája.

állandósult állapotnak tekinthető állapotban a következő — konstrukciós szempontból lényeges — mozgástörvényeket állíthatjuk elő:

- a tárcsák súlypontjának elmozdulása,
- a két tárcsa közötti tengelyszakasz torziós lengése.

A vizsgált esetekből következtetéseket lehet levonni, hogy a mechanikai rendszertől és a gerjesztés adataitól függően milyen esetekben megengedett a nemlineáris d.e.r. linearizálása.



5.1. ábra

A d.e.r. valamilyen módon történő megoldásán túlmenően lényeges a megoldás stabilitásának vizsgálata. A stabilitás kivizsgálásának legáltalánosabb módszereit Ljapunov dolgozta ki. Ezen módszerek sikeres alkalmazása a megfelelő „V” Ljapunov függvény előállításán múlik. Nemlineáris d.e.r. esetén a V függvény megalkotása igen problematikus. Ezért az 5.1. ábrán látható esetre a következő vizsgálatot végeztük el.

Az (5.1) mozgásegyenletre vonatkozó perturbált d.e.r., felhasználva az előző számítások eredményeit, átalakítások után

$$\begin{aligned}
 \ddot{y}_1 &= -K_1 y_1 + K_2 y_2 - k_0 \dot{y}_1 \\
 \ddot{y}_2 &= K_8 y_1 - K_7 y_2 + \psi (\cos T(1 + K_6) / + \\
 &\quad + 2\dot{\psi} \sin T - k_0 \dot{y}_2 \\
 \ddot{\psi} &= -K_{11} \psi - k_0 \dot{\psi}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

ahol  $k_0$  — a csillapításra jellemző állandó.

Így a nem-perturbált mozgásegyenletrendszer megoldása akkor tekinthető stabilnak, ha a változó együtthatójú (5.2) d.e.r. megoldásai  $T \rightarrow \infty$  esetén véges függvények. Az (5.2) d.e.r. harmadik egyenlete független az előző kettőtől. Előző vizsgálatok szerint a biztonság felé tévedünk, ha

$$\psi = A \sin \vartheta t
 \tag{5.3}$$

megoldást tételezünk fel. Itt

$\vartheta$  — a „csillapítatlan saját lengés vetítő szögsebessége”,

$A$  — állandó.

Ezt behelyettesítve az (5.2)-be, megfelelő trigonometriai átalakítások után, ugyancsak felhasználva az előző számításokat a nemperturbált d.e.r. stabilitásának a feltételét az alábbiakban foglalhatjuk össze.

A

$$\det(\mathbf{D} - \mathbf{E}\alpha^2) = 0 \quad (5.4)$$

karakterisztikus polinom gyökei nem egyezhetnek meg

$$\vartheta - 1, \text{ ill. } \vartheta + 1 \quad (5.5)$$

„szögsebességekkel”.

Itt  $\mathbf{D}$  — a mechanikai rendszertől, ill. szinkronizáció mértékétől függő mátrix.

A mérnöki gyakorlatban gyakran fordul elő olyan szerkezet, amely az 5.1. ábrán változattal jellemezhető. Levezettünk — a vizsgált esetben — a gyakorlatban is alkalmazható egyszerű stabilitási kritériumot. Ennek segítségével pl. kimutattuk, hogy stabilitás szempontjából a két tárcsa közti tengelyszakasz torziós merevsége szignifikáns.

#### IRODALOM

1. БЛЕХМАН И. И.: Синхронизация динамических систем. Изд. Наука, Москва, 1971.
2. MINORSKY N.: Nonlinear oscillation. D. Van Nostrand Company Inc. Princeton, N. J. U.S.A.

### 6. Rugalmasságtani síkfeladatok megoldása spline-interpolációval\*

A kidolgozott számítógépes eljárás a klasszikus rugalmasságtani síkfeladatok első peremértékfeladatainak megoldására alkalmazható, ha a síktartomány egyszerűen összefüggő, a peremgörbéje sima, folytonos. A kidolgozott eljárás legfontosabb sajátossága, hogy a peremgörbét diszkrét pontokon interpolált spline-függvénnyel írja le, ugyanígy a peremterhelés és a peremfüggvény adott vagy számított diszkrét értékein keresztül is spline-interpolációt alkalmaz. Komplex változós függvények felhasználásával, a peremfüggvénynek a peremen ortonormált függvénytávval való közelítése révén a feszültségmező numerikusan meghatározható.

Az említett interpolációs eljárás harmadfokú paraméteres polinom-spline függvényt alkalmaz (Ferguson-féle spline). Illesztési feltételek: az érintővektor és a görbület folytonosan változik az alappontokban. A spline függvény vektorikus együtthatóinak számítására kapott nemlineáris algebrai egyenletrendszer iterációs eljárással, numerikusan oldható meg.

\* Új József munkája.

Komplex változós függvények alkalmazásával a síkrugalmasságtan első peremértékfeladata

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) \quad (6.1)$$

alakban írható a  $\varphi(z)$  és  $\psi(z)$  komplex potenciálokra, ahol  $t$  a peremgörbe komplex helyvektora,  $z$  egy belső pont komplex helyvektora. Az  $F(z) \equiv \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$  függvényt egy  $\Phi$  teljes függvényrendszerből választott  $F_k(z)$ , ( $k = 1, 2, 3 \dots$ ) függvények lineáris terében állítjuk elő [1]:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} e_k F_k(z), \quad e_k = \bar{e}_k \quad (6.2)$$

alapján úgy, hogy

$$\oint_g \left| \sum_{k=1}^{\infty} e_k F_k(t) - f(t) \right|^2 ds = \text{Min!} \quad (6.3)$$

legyen.

Ha az  $F(z)$  függvényt a  $g$  peremgörbén ortonormált  $F_j^*(z) \in \Phi$  függvények lineáris terében állítjuk elő az

$$\oint_g (\bar{F}_i^* F_j^* + F_i^* \bar{F}_j^*) ds = \delta_{ij} \quad (6.4)$$

ortonormálási feltétellel

$$F_j^*(z) = \sum_{k=1}^j \alpha_{jk} F_k(z), \quad \alpha_{jk} = \bar{\alpha}_{jk} \quad (6.5)$$

alakban, akkor az  $\alpha_{jk}$  együtthatók a Gram—Schmidt-féle ortonormálási eljárással számíthatók.

A felírt minimum-feltételből határozhatók meg az  $e_k$  együtthatók.

Végül a feszültségmező

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \text{Im}(F(z)), \\ \sigma_{22} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \text{Re}(F(z)), \\ \tau_{12} &= -\frac{\partial}{\partial x_1} \text{Im}(F(z)) \end{aligned} \quad (6.6)$$

alapján adódik.

A számítások elvégzésére BASIC-nyelvű gépi program készült. Ez magában foglalja az említett függvények spline-interpolációit, az ortonormálási eljárást és a feszültségmező számítását. A peremgörbén értelmezett integrálokat Romberg-féle numerikus eljárással számítja a program.

A vázolt számítási eljárás olyan síkfeladatok megoldására alkalmazható, amelyeknél

- a síktartomány egyszeresen összefüggő, pereme sima, folytonos görbe;
- a peremterhelés diszkrét pontokban ismert;
- a test anyaga homogén, izotrop, lineárisan rugalmas.

## IRODALOM

1. I. BABUSKA-K. REKTORYS—F. VYČIHLŮ: *Mathematische Elastizitätstheorie der ebenen Probleme*. Akademie Verlag, Berlin, 1960.

### 7. Réteges (sandwich) lemezek statikai és stabilitási vizsgálata\*

A következők az [1] tanulmányhoz is kapcsolódóan

- a) a réteges (sandwich) lemez statikai feladatára,
  - b) a reguláris felépítésű, sokrétegű lemez stabilitásvesztés utáni állapotának vizsgálatára,
  - c) a konstrukciósan ortotrop (egy irányban hajlítással kialakított profilú bordázattal merevített) lemezekkel héjalt, szimmetrikus felépítésű és terhelésű háromrétegű (sandwich) panel stabilitásvizsgálatára
- vonatkozó eredményeket ismertetik. E feladatok megoldásának alapjául a [2]-ben megfogalmazott mechanikai-matematikai modell (peremértékfeladat) és annak [3]-ban összefoglalt megoldási módszere szolgáltak.

*ad. a)* Háromrétegű négyzögletes sandwich-lemez statikai vizsgálata [4]. Az aszimmetrikus felépítésű és terhelésű sandwich-lemez vizsgálatához feltettük, hogy mind a két héj-réteg normális terhelése kettős Fourier sorba fejthető és hasonló alakú sor alakjában kerestük a megoldást jelentő — a kemény rétegek középsíkjához tartozó pontok normális és tangenciális elmozdulásait adó — függvényeket, amelyek ismeretében a lemez alakváltozási és feszültségi állapota is meghatározott. Az alsó és felső kemény réteg normális elmozdulásainak amplitúdóira kapott összefüggéseket szimmetrikus, illetve antiszimmetrikus terhelési majd alakváltozási esetekre vonatkozóan vizsgáltuk.

Megállapítottuk, hogy a sandwich-lemez aszimmetrikus felépítése esetén a terhelés szimmetriájából (antiszimmetriájából) — egyes irodalmi feltevésektől eltérően — nem következik az alakváltozások (lehajlások) szimmetriája (antiszimmetriája). E feltételek teljesüléséhez a szerkezet és terhelés egyidejű szimmetriája szükséges.

Vizsgálataink során egy sajátos alakváltozási esetet is tisztáztunk: bizonyos szerkezeti feltételek esetén a sandwich-lemez terhelt felső rétegének lehajlása mellett a

\* Pomázi Lajos munkája.

terheletlen alsó réteg felhajlik, amit nyilvánvalóan az alsó kemény réteg felső síkján fellépő csúsztatófeszültségek idéznek elő. Ennek jelentősége abban van, hogy a sandwich-lemez anyag és méretparamétereinek alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a felső réteg terhelése és lehajlása ellenére az alsó réteg sík maradjon. Ily módon elérhető például, hogy a felső réteg hang-terhelés miatti mozgása ellenére az alsó réteg nyugalomban (vagy nagyságrenddel kisebb amplitúdójú mozgásban) legyen, aminek a sandwich-lemezek hangszigetelés céljaira való felhasználása szempontjából van jelentősége.

*ad. b)* A reguláris sokrétegű négyszögletes lemez stabilitásvesztés utáni állapota [5]. Kiindulva a reguláris sokrétegű lemez stabilitásvizsgálatának eredményeiből [3], a stabilitásvesztés utáni állapot vizsgálatához a következő további feltevésekkel élünk:

- A kemény rétegek, mint vékony lemezek alakváltozása nemlineáris és rájuk a technikai lemezelméletben ez esetre vonatkozó feltevések állnak fenn.
- A lágy rétegek alakváltozása a lineáris feladatban megfogalmazottal azonos marad.
- A kemény és lágy rétegekre vonatkozó anyagtörvények lineárisak.
- A stabilitásvesztés utáni állapotban a stabilitásvesztéskor kialakult alakváltozási állapot fejlődik tovább és a külső terhelések aránya is változatlan marad.

A feladatot Ritz módszerrel oldottuk meg és a feltevéseinknek megfelelően a rendszer összes mechanikai energiájának minimalizációját a stabilitásvesztés pillanatában kialakult elmozdulásmezőt leíró — a lineáris feladat megoldásaként egy szabad paraméter ( $f$ ) pontosságával kapott — függvények bázisán kerestük, kiegészítve e függvényeket a lemez szemben fekvő peremeinek közeledését leíró lineáris tagokkal. Megjegyezzük, hogy noha a lineáris feladatban az elmozdulásmező amplitúdóit jelentő, az egyes kemény rétegekhez rendelt függvények komplexek is lehetnek, a nemlineáris feladathoz ezek lineáris kombinációjával valós függvények kialakítása szükséges.

A feladat megoldásaként az elmozdulásmező  $f$  amplitúdó-paraméterére az irodalomból ismert alakú

$$f = K \sqrt{m_0} \cdot 1, \quad m_0 = \frac{\beta_0}{\beta_0^*}$$

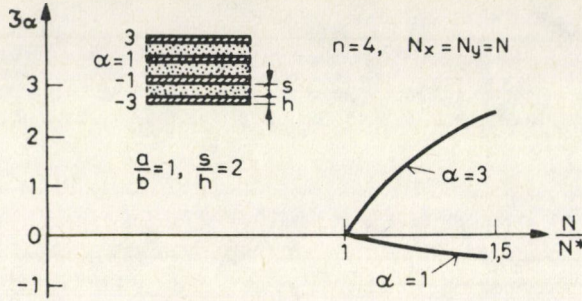
összefüggést kaptuk, ahol  $K$  — a rendszer anyag- és méretparamétereitől igen bonyolult — csak számítógéppel kezelhető — formában függő paraméter,  $\beta_0^*$  — a kritikus állapotot jellemző, a terhelést is magában foglaló paraméter,  $m_0$  pedig az ún. túlterhelési paraméter, amely azt jellemzi, hogy a lemez fajlagos terhelése milyen mértékben haladja meg a kritikus értéket.

Az  $f$  így kapott értékét az elmozdulásfüggvények kifejezéseibe helyettesítve ezekkel a stabilitásvesztés utáni állapot alakváltozási és feszültségi viszonyai is tisztázhatók.

A 7.1. ábra példaként egy  $n$  rétegű sandwich-lemez stabilitásvesztés utáni kezdeti alakváltozását szemlélteti a kemény rétegek relatív normális elmozdulásait adó  $\zeta_x =$

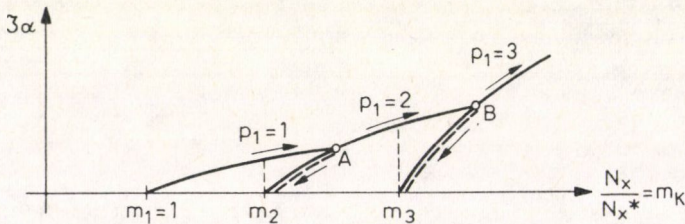
$= w_\alpha/h$  függvény amplitúdójának a terhelési paramétertől való függése útján. Itt  $h$  — a kemény réteg vastagsága, az  $\alpha$  index pedig az egyes rétegekre utal.

Fontos megjegyezni, hogy a stabilitásvesztés utáni állapotban a terhelés (összenyomódás) növekedésével a lemez kihajlási hullámhossza csökken, azaz a hullámszámok növekednek. E jelenség vizsgálata — első közelítésben feltéve, hogy a rendszer rugalmas marad — a lemez egy kijelölt pontja elmozdulásának meghatározásával



7.1. ábra

lehetséges, különböző kihajlási hullámhosszak mellett. Jóllehet a legkisebb kritikus terhelés  $p_2=1$  = állandó, továbbá  $p_1=1$  hullámszám mellett adódik,  $p_1=2$ ,  $p_1=3$  esetére is meghatározhatók kritikus terhelések, amelyek — irodalmi adatok szerint — megfelelő gondossággal elvégzett kísérletek során realizálhatók. Mindezt figyelembe véve  $p_2=1$  mellett az  $x$  irányban bekövetkező kihajlási hullámhossz — rövidülés a 7.2. ábra alapján kísérhető figyelemmel.



7.2. ábra

E szerint a terhelés növelésével a második kritikus terhelést ( $N_{x2}$ ) meghaladó terhelésnél, az  $A$  pontban a lemez átpattan és a kihajlási hullámszám  $x$ -irányban 2-re nő. Ugyanez megismétlődik a  $B$  pontnak megfelelő helyzetben, amikor  $p_1=2$ -ről  $p_1=3$ -ra változik. A lemez által felvett állapotok stabilis állapotok.

A terhelés csökkentésekor a lemez kihajlása  $B$  pontot elhagyva zérusra csökkenhet az  $m_3$  pontban, miközben a lemez állapota labilis és ez fokozódván a



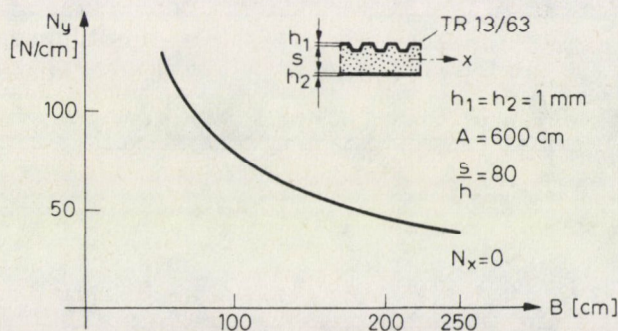
legkisebb zavarás hatására  $p_1 = 2$  hullámszámú állapotra pattan át. Ez megismétlődik az  $A$  pontban is. A szaggatott vonallal jelölt szakaszok a rendszer lehetséges labilis állapotait jelölik. A hullámszám növekedésével kapcsolatos itt jelzett kérdések numerikus és kísérleti vizsgálata a közeljövő kutatási feladatát képezi.

ad. c) Konstrukciósan ortotrop lemezekkel héjalt sandwich-lemez stabilitása [6]. A vizsgálatok tárgyát olyan háromrétegű sandwich-lemez stabilitásának elemzése jelentette, amelynek héjaló kemény rétegei egyirányban hajlítással kialakított bordázattal — egymástól eltérő vagy azonos módon — merevítettek. Feladatként fogalmazódott meg annak tisztázása is, hogy miként viselkedik a lemez, ha csak az egyik kemény rétege terhelt a saját síkjában.

Az igen terjedelmes vizsgálat módja és legfontosabb eredményei a következőben foglalhatók össze:

Mindenekelőtt a kemény rétegek anyagát ortotropnak feltételezve a vonatkozó Hooke törvény inverzeként felírtuk és értelmeztük a kemény rétegek mint ortotrop vékony lemezek húzási-nyírási ( $C_{ik}$ ), kölcsönhatási ( $K_{ik}$ ) és hajlítási-csavarási ( $D_{ik}$ ) merevségeit. A  $K_{ik}$  merevségek a húzás-hajlítás, nyírás-csavarás közötti kölcsönhatásokkal kapcsolatosak.

A lágy réteg anyagát — a korábbiakkal egyezően — transzverzálisan izotropnak tekintettük.



7.3. ábra

A kemény és lágy réteg alakváltozására tett korábbi feltevéseket megőrizve a Trefftz—Bolotin féle variációs elvből levezettük a vonatkozó alapegyenlet-rendszert és értelmeztük a peremfeltételeket.

Az alapegyenletrendszer megoldását Navier típusú peremfeltételek mellett kerestük. A legnagyobb problémát a héjaló lemezek konkrét kialakításától függő ún. „egyenértékű merevségi jellemzők” meghatározása jelentette. E részfeladat megoldása során — a Kirchhoff—Love hipotézist alapul véve — úgy jártunk el, hogy az adott profilokat általánosító profil alakváltozási-feszültségi viszonyaiból adódó alakváltozási energia, valamint a lemezzel azonos vastagságú, ortotrop anyagú héj-lemez



alakváltozási energiájának equivalenciáját irtuk elő és így a héj-profil függvényében értelmezni tudtuk az ortotrop héj-ra visszavezető „egyenértékű merevségi jellemzőket”. Magának a stabilitási feladatnak a megoldása a szokásos módon történt és a terhelés kritikus értékének meghatározását eredményezte.

Az általánosított profil alapján kidolgozott számítógépi program a gyakorlati alkalmazás szempontjából érdekes esetekre lehetővé teszi az egyenértékű merevségi jellemzők gyors meghatározását. E programot beépítettük az alapfeladat megoldását jelentő programba és így aszimmetrikus felépítésű sandwich-lemez stabilitásvizsgálata automatizált módon elvégezhető. Itt jegyezzük meg, hogy a programban arról is gondoskodás történt, hogy a sandwich-lemez egészét terhelő él-terhelés a kemény rétegekre azok sík alakváltozását a stabilitásvesztésig megtartó módon osztódják le — kivéve értelemszerűen azt a részesetet, amikor csak az egyik héj-réteg terhelt.

A 7.3. ábra példaként egy olyan (A szélességű) sandwich-lemez kritikus terhelését szemlélteti a lemez hosszmérete (B) függvényében, amelynek egyik héjrétege síkmez, a másik pedig ugyanebből a lemezből készült szabvány trapéz profilú lemez.

## IRODALOM

1. POMÁZI LAJOS: A szendvicsszerkezetek kutatásának helyzete és feladatai. GTE II. Szendvicsszerkezetek szakértői tanácskozás. Bp. 1976. X. 29. MTE SZ kiadás.
2. BOLOTIN, V. V.: „Procsnoszty, usztojcsivoszty i kolebanija mnogoszlojnüch plasztin” Raszcsotü na procsnoszty 11. pp. 31—63. *Masinosztroenije*.
3. POMÁZI LAJOS: A réteges lemezek stabilitásának vizsgálatáról. Építési kutatás fejlesztés, 1974/3—4.
4. POMÁZI LAJOS: Háromrétegű szendvicselem alakváltozása síkjára merőleges terhelés esetén. A II. Magyar Mechanikai Konferencián (1975. IX. 4—6, Miskolc) elhangzott előadás.
5. POMÁZI LAJOS: On Postbuckling Behaviour of Regularly Multilayered Rectangular Elastic Plates. *Acta Technica, Tom. 87* 1978, 1—2.
6. POMÁZI LAJOS: Stability of Constructionally Orthotropic Sandwich Plate. *Periodica Polytechnica, Tom. 24/3* 1980.

## 8. Rugalmas kontinuumok kísérleti vizsgálatának néhány aktuális kérdése\*

Az elmúlt évtizedekben a kontinuummechanika fejlődése bizonyos fokon nyugovóra jutott. Konvencionális rugalmasságtani és hőrugalmasságtani feladatok megoldására olyan elméleti és kísérleti módszerek állnak rendelkezésre, melyek a műszaki gyakorlat által felvetett problémák túlnyomó részének megoldását lehetővé teszik. Egyes problémacsoportok megoldása számára különböző módszerek is alkalmazhatók, így a különböző módszerek versenyének is tanúi lehetünk. Ennek során a számítástechnika viharos fejlődésének éveiben (1970 körül) olyan szélsőséges vélemény is elhangzott, hogy a numerikus számító módszerek [1], [2], [3] a kísérleti módszereket ki fogják szorítani [4].

\* Thamm Frigyes munkája

A kontinuumszemlélet eredeti megfogalmazásában nem teszi lehetővé a műszaki alkalmazások túlnyomó többségében előforduló tönkremenetel (különösen a kifáradás és rideg törés) leírását. Ez a hiányosság eredményezte a mechanika és az anyagvizsgálat évszázados különállását, ami a műszaki tudományok fejlődésének egyre inkább kerékkötőjévé vált. Ennek a különállásnak a kiküszöbölésére keletkeztek és fejlődnek a kontinuummechanika egyes új irányai, különösen a törésmechanika.

Az elmondottak alapján a következő módszertani trendek látszanak időszerűnek a kontinuummechanika területén:

a) Az egyes vizsgálati módszerek egymáshoz való viszonya, munkaterületük kijelölése, esetleges együttes alkalmazásuk problémái.

b) Az egy adott célra végzett vizsgálat szükséges pontosságának kijelölése és összehasonlítása az alkalmazott módszer hibahatárával.

c) A kontinuummechanika nemkonvencionális feladatok megoldására is alkalmas új irányzatai, különösen tönkremeneteli határállapotok kijelölésére.

ad. a) A numerikus számító módszerek fejlődése különösen azokat a mérési módszereket látszott veszélyeztetni, melyek modellkísérlet jellegűek, tehát, a számításhoz hasonlóan a vizsgált szerkezetnek a valóságoshoz képest való bizonyos mértékű idealizálására kényszerülnek (optikai feszültségvizsgálat, Moiré-módszer, analógias módszerek). Hamar nyilvánvalóvá váltak azonban azok a szempontok is, melyek a számító módszerek mellett a modellkísérletek és különösen az optikai feszültségvizsgálat létjogosultságát igazolták. Erre mutat az optikai módszerekkel foglalkozó előadások magas részaránya az utóbbi évek kísérleti feszültségvizsgálattal foglalkozó konferenciáin. A számító módszerekkel való kapcsolat a modellkísérletek számára új alkalmazási területeket is kijelölt, melyeket durván az alábbi csoportokba sorolhatunk.

A számító módszerek alkalmazásakor tett kerületi feltételek ellenőrzése, ill. iránymutatás a peremfeltételek felvételére. A numerikus számító módszerek ugyanis a vizsgált szerkezetek nagyobb mértékű idealizálására kényszerülnek mint a modellkísérlet. A modellkísérlet tehát hathatósan segíthet a numerikus számításnak a kerületi feltételek felvételében, különösen akkor, ha a kísérleti eredményeket sikerült olyan alakba hozni, amelyik a számítási programba jól beilleszthető.

Pseudo-singularitások környezetében ébredő feszültségeloszlás vizsgálata. Ezek éles sarkok, kis sugarú furatok, hirtelen keresztmetszetváltozás stb. helyein fellépő éles, de véges nagyságú feszültségcsúcsok környezetei. Ezek a numerikus számítás végeelem-jellegéből következően programozási nehézségeket jelentenek, ha a feszültségcsúcs értékét számítással akarjuk túrhető pontossággal meghatározni. A modellkísérlet optikai módszerei ezzel szemben, mivel vizsgálataikat kontinuum jellegű modellen végzik, a feszültségeloszlást az ilyen helyeken is elvileg torzítatlanul, különösebb mérés technikai probléma nélkül szolgáltatják. Ez a számítás és mérés együttes alkalmazását kínálja fel, ami úgy végezhető el, hogy a numerikus számítást a teljes vizsgált alkatrészben, de a pseudo-singularitás helyén pontosságra nem törekedve végzik el. A számítást kiegészítik a singularitás környezetének kísérleti

vizsgálatával — amire különösen az optikai feszültségvizsgálat alkalmas — a modell kerületére felhelyezett kerületi feltételeket a számítás eredményei alapján kijelölve.

Az ismertetett kombinált számító-mérő módszerek számára a „hibrid-sztatika” [5] vagy általában „hibrid-módszer” [6] elnevezés kezd meghonosodni. A hibrid módszer alkalmazásának feltétele, hogy kritériumot sikerüljön felállítani arra vonatkozóan, hogy a kísérlet alkalmával a vizsgált szerkezet mekkora részletét kell modellezni. Erre vonatkozólag több a gyakorlat számára lényeges esetre kritériumot sikerült felállítani [6].

*ad. b)* Valamely vizsgálati módszer hibája mindenkor egy „helyes” értékre van vonatkoztatva. Szilárd testek kontinuummechanikájában végzett vizsgálat esetén ez a „helyes” érték a vizsgált szerkezet névleges (terv szerinti) kivitelére feltételezett alakváltozás- vagy feszültségeloszlás. Ténylegesen kivitelezett műszaki szerkezetek azonban mindig tűréssel készülnek, vagyis méreteik a névlegeshez képest valamilyen tűrésmezőn belül szórnak. Ennek a mérészórásnak a hatását az alakváltozás-, ill. feszültségeloszlásra általában el szokás hanyagolni. Ezért vizsgálatot végeztünk a mérészórás hatásának megbecslésére. Gyakran előforduló szerkezeti elemek esetére elvégzett feszültség-szórás vizsgálatának eredményeit a matematikai statisztika felhasználásával értékeltük [7]. A vizsgálat eredményei azt mutatták, hogy a feszültség-szórásra normáleloszlást és a gyártásra 10% selejtet feltételezve a feszültségértékek közepes szórása  $v_k = 7\%$ -ra adódott. A vizsgálati módszer saját hibájából adódó  $v_k^*$  közepes szórása esetén az eredő közepes szórás értéke az esetleges hibák összegezési törvényéből

$$v_{k\bar{o}} = \sqrt{v_k^2 + v_k^{*2}} \quad (8.1.a)$$

összefüggéssel számítható. Itt  $v_k^*$  a vizsgálat során alkalmazott mérési módszer közepes szórása, ami a mérési pontatlanságokból adódik, numerikus számítási módszer esetén az a szórás, ami a számításkor felvett hálózat hálópontjainak önkényes felvételéből adódik. Hibrid módszer alkalmazásakor mind a mérés eredményeinek  $v_k^*$ , mind a numerikus számítás  $v_k^{**}$  közepes szórása előfordulhat, tehát az eredő közepes szórás

$$v_{k\bar{o}} = \sqrt{v_k^2 + v_k^{*2} + v_k^{**2}} \quad (8.1.b)$$

összefüggés szolgáltatja.

Korábbi, főleg saját vizsgálatokra támaszkodva [8], [9], [10], [11] befejeztük az optikai feszültségvizsgálat mérési hibáinak elemzését [12] és arra az eredményre jutottunk, hogy közepesen gondos modellkészítés esetén két hibaforrás van, mely a fenti határértéket meghaladhatja. Ezek

— a léptékhibák, melyek a modell és a kivitel közötti csak közelítő hasonlóságból adódnak és

— a modell nem pontosan merőleges átvilágításából adódó képhibák.

Az első hibatípus az alkatrész méreteinek nagyságrendjébe eső teherátadások esetében érhet el nagy értéket, ha a modell és a csatlakozó alkatrészek merevségének

viszonya jelentősen eltér a kivitelétől. Nagysága tájékoztató számítás alapján többnyire megbecsülhető és a kísérlet lefolytatása megfelelően módosítható. A nem merőleges átvilágításból adódó képhibák minden esetben kis értékre szoríthatók le, ha éles feszültségcsúcsok helyeit a leképező objektív (általában az alkalmazott fényképező gép objektívje) optikai tengelyének közelébe hozzuk.

A vizsgálat eredményei lehetővé teszik, hogy viszonylag egyszerű eszközökkel (szórt fényű optikai feszültségvizsgáló berendezés, fényképek alapján átrajzolt feszültségoptikai képekből történő kiértékelés) is lehessen műszaki célra teljes értékű feszültségvizsgálatot végezni.

*ad. c)* A nemkonvencionális feladatok kontinuummechanikai megoldására elvileg két út járható.

$\alpha$ ) A tényleges szerkezeti anyagnak a tönkremenetelre jellemző és kontinuumként nem kezelhető hibahelyeit diszkrét szingularitásként kezelve kirekeszteni a vizsgálatból, a szerkezeti elem többi részét továbbra is kontinuumként kezelve. A hibahelyek tulajdonságait kísérletekkel kell tisztázni.

$\beta$ ) Ha a feladat nemkonvencionális jellegét helyi termikus vagy fizikai-kémiai szerkezetváltozás okozza, melyek során a kontinuumjelleg megmarad ugyan, de az állapotváltozások bonyolult volta a kontinuum tulajdonságainak folyamatos követését túl nehézvé tenné, a vizsgálat egyszerűsített kontinuummechanikai modellt feltételezve végezhető, néhány az állapotváltozást jellemző állandó értékét nyitva hagyva. Ezeket a tényezőket a számítások feltételezettel egyező körülmények között a tényleges szerkezeti anyagból elkészített alkatrészen elvégzett kísérleti feszültséganalízis eredményeinek a számítással való összehasonlítása szolgáltatja.

Mindkét eset tehát a kontinuummechanika hibrid módszerének alkalmazását igényli. A tönkremeneteli határállapotok vizsgálatok a vizsgálat hibrid jellegét némileg elfedi a már említett munkamegosztás az anyagvizsgálat és a mechanika művelői között. Tanszékünk így az  $\alpha$ ) alatti feladatok legjelentősebb csoportjának, a törésmechanikának a művelésekor csupán a feladat egyik részének, a kontinuumszemlélet alapján vizsgálható szerkezetjellemzők vizsgálatába kapcsolódott be. Így vizsgáltuk hegesztett szerkezetek varrathibájának a feszültségintenzitási tényezőre gyakorolt hatását (l. pl.: [13]).

A  $\beta$ ) alatti feladatokról maradó feszültségi állapotokat vizsgáltunk. Mivel itt a tönkremenetel határhelyzetét nem vizsgáltuk, a hibrid vizsgálat elméleti és kísérleti részét egyaránt a kontinuummechanika ismert módszereivel tudtuk elvégezni.

Hegesztett és ragasztott kötések varratai körül kialakuló maradó feszültségi állapotok eloszlását vizsgáltuk. Hegesztett kötések esetén a hegesztéskor fellépő inhomogén hőfokeloszlásról való lehűlés során folyamatosan változó anyagtulajdonságok mellett és diszkrét állapotváltozások hatására fellépő inhomogén térfogatváltozás-eloszlás a maradó feszültségi állapotot ezen kívül a lehűlés közben lefolyó képlékeny alakváltozás is befolyásolja.

Ragasztott kötések ragasztórétegében a ragasztóanyag kötésekor lefolyó és szintén térfogatváltozással kísért állapotváltozás idézi elő a maradó feszültségeket. A

kötés folyamán itt is folyamatosan változnak a ragasztóanyag mechanikai tulajdonságai. A térfogatváltozásnak maradó feszültségeket kiváltó részaránya ezért elméleti úton aligha határozható meg a kívánt pontossággal.

A feszültségeloszlás számító módszerrel való meghatározásakor ezért állandó anyagtulajdonság mellett lefolyó fiktív  $\varepsilon_0$  térfogatcsökkenést tételeztünk fel és a fellépő feszültségeloszlást ismeretlen nagyságú  $T_v = E\varepsilon_0 I$  térfogatváltozási gömbtenzorra vonatkoztattuk. Hegesztési varrat esetében szükség van még annak a zónának a szélességére is, melyre a térfogatváltozás kihat. Ennek a zónának a  $h_0$  szélességét, valamint  $T_v$  értékét a számított eloszlásnak tényleges hegesztési varraton mért eloszlással való összehasonlítása útján határoztuk meg. A vizsgálatot tompavarrattal ellátott alumíniumlemezeken végeztük, különböző alapanyagok és hegesztési körülmények esetén. A mérésre nyúlásmérő technikát és a szakirodalomból ismert feldarabolási módszert alkalmazzuk [14], [15].

Ragasztott kötés esetén — fémragasztást feltételezve — a ragasztandó szerkezeti elemek a ragasztóanyaghoz képest tökéletesen merevnek tekinthetők. A ragasztóanyag kötéskor teljes vastagságában egyenlő  $T_v$  térfogatváltozást szenved. A  $T_v$ -re vonatkoztatott feszültségeloszlást a rugalmasságtan variációs elve alapján határoztuk meg. Az igen vékony (kb. 0,1 mm vastag) ragasztóréteg maradó feszültségi állapotát közvetlenül mérni nem tudtuk, ezért modellkísérletet végeztünk. A modellanyagként alkalmazott epoxigyanta ragasztóanyagként is használatos, ezért viselkedése a tényleges ragasztóanyagokkal egyezőnek tekinthető. A vizsgálatot az optikai feszültségvizsgálat módszerével végeztük és annak eredményeit a számítással egybevetve megkaptuk  $T_v$  értékét a ragasztóanyag különböző kikeményedési körülményei esetére. A kísérlet ezen kívül kimutatta még azt is, hogy a kikeményedés során a ragasztóréteg anyagszerkezete nagy mértékű — a műanyagoknál ismert — molekularendeződést szenved, amit a kötés szilárdsági tulajdonságai szempontjából nem szabad figyelmen kívül hagyni [16].

## IRODALOM

1. HOLLAND I.—BELL I.: Finite Element Methods in Stress Analysis. *Tapir-Forlag*. Trondheim, 1970.
2. PRZEMIANIECKI J. S.: Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw-Hill. New York 1968.
3. ZIENKIEWICZ O.: Finite Element Methods in Continuum Mechanics. John Wiley & Sons. New York, 1970.
4. VAN GEEN R.: Interaction Between Experimental Work and Numerical Stress and Strain Analysis. Előadás a VIII. Csehszlovák Kísérleti Feszültségvizsgáló Kongresszuson. Stary Smokovec. 1970. V. 26.
5. LAERMANN K. H.: Entwicklung und Bedeutung der Modellstatik in Theorie und Praxis. VDI-Berichte. 313 (1978). 11—21.
6. THAMM, F.: Hybride Methoden der Spannungs- und Verformungsanalyse. Akademie d. Wiss. d. DDR Inst. f. Mechanik Report R-07/80 Berlin. 1980. 66—7 o.
7. THAMM F.: A kísérleti feszültségvizsgálat célszerűen elő ható pontossági követelményei. GTE VII. Anyagvizsgáló Kongresszus kiadványa. Budapest, 1978. OMKD I . II. kötet, 809—813.

8. HILTSCHER, R.: Spannungsoptischer Apparat für das Forschungs- und Industrielaboratorium. Trans. IMEKO. Stockholm. 1952.
9. THAMM, F.: Die Bildfehler des einfachen Polariskops. *Periodica Polytechnica*. 4 (1960) 1. 19—40.
10. THAMM, F.: Die Abbildungsgrenze des einfachen spannungsoptischen Gerätes. *Periodica Polytechnica*. 14 (1970). 349—360.
11. THAMM, F.: Erreichbare Messgenauigkeit fotografierter Isochromatenbilder. *Periodica Polytechnica*. 17 (1973) 1. 73—90.
12. THAMM, F.: Der Einfluß der Modelldicke auf die Bildfehler der ebenen Spannungsoptik. *Periodica Polytechnica* 24 (1980) 3. sz. 223—235 o.
13. THAMM, F.: Bruchmechanisches Bewerten von Fehlern in Schweißnähten mit Hilfe der Spannungsoptik. Előadás a 15. Csehszlovák Nemzeti Kísérleti Feszültségvizsgálati Konferencián. Plzen. 1977. VI. 16.
14. SIEBERT, D.: Verfahren zum Messen von Eigenspannungen in I-Trägern. HBM. *Messtechnische Briefe* 13 (1977) 40—45.
15. Maradó feszültségek vizsgálata különböző vastagságú alumíniumlemezeken. BME. Műszaki Mechanikai Tanszék KK-Jelentés. 293.505/79. 1980. augusztus.
16. THAMM, F.: Untersuchung der Eigenspannungen in Metallklebverbindungen. *Plaste und Kautschuk*. 27 (1980) 8. 451—457.

**Some Aspects of the Study of Deformable Bodies.** — There are some results from three of the subjects worked out by our department:

— generalization of the ideal constraints, stability of retarded mechanical systems, study of general properties of the possible constitutive equations and the application of thermodynamics in elasticity — in the field of basic mechanical research,

— stability investigation of rotating structures, application of spline-approximation in elasticity and study of sandwich-type plate structures — on the topic of mechanical engineering;

— and experimental results connected with elastic bodies.

**Einige Probleme fester Kontinua.** — Es werden Arbeiten aus drei Themenkreisen vom Arbeitsgebiet des Lehrstuhles gezeigt:

— Von den Forschungen auf dem Gebiet der Grundlagen der Mechanik die allgemeine Interpretation des idealen Zwanges, die Stabilität verzögerter Systeme, die Formulierung der allgemeinen Eigenschaften der möglichen Stoffgesetze und die Anwendung der Thermodynamik in der Elastizitätslehre.

— Aus dem Bereich der Forschungen auf dem Gebiet der ingenieurmässigen Anwendung der Mechanik die Stabilitätsprobleme von Rotoren, die Anwendung der Spline-Interpolation in der Elastizitätstheorie und die Untersuchung von Sandwichkonstruktionen.

— Experimentelle Untersuchung in Verbindung mit elastischen Kontinua.

**Некоторые вопросы исследований твердых сплошных сред.** — В статье приводим некоторые результаты трех научно-исследовательских тем кафедры:

— по теме исследований основ механики: обобщенное толкование идеальной связи; устойчивость задержанных систем, формулировку общих свойств возможного закона материала (определяющего уравнения) и применение термодинамики в теории упругости;

— по теме исследования машиностроительных применений: устойчивость роторных систем, применение сплайн-(spline) интерполяции в теории упругости и исследование многослойных конструкций;

— по теме экспериментальных исследований: экспериментальное исследование упругих сплошных сред.



# SZERKEZETEK SAJÁTFREKVENCIÁINAK NÉHÁNY SZÉLSŐÉRTÉK TULAJDONSÁGA ÉS AZOK ALKALMAZÁSA

BOSZNYAY ÁDÁM<sup>1</sup> A MŰSZ. TUD. DOKTORA, CZEGLÉDI GYULA,<sup>2</sup>  
RICHLIK GYÖRGY,<sup>3</sup> SOLTI JÓZSEF,<sup>4</sup> TÓTH GYÖRGY<sup>5</sup>

A dolgozat a BME Villamosmérnökkari Műszaki Mechanika Tanszékén 1975—80-ban végzett fő kutatási témáról ad tömör áttekintést.

Felhasználva a kontinuummodellel kezelt szerkezetekhez rendelt mechanikai rezgési sajátfrekvenciák egyes szélsőérték tulajdonságait — kitér a sajátfrekvenciák javítható közrefogása egy direkt módszerének ismertetésén kívül az ún. frekvenciaegyenletet nem igénylő sajátfrekvencia számítás néhány olyan esetére, amely előírt számú sajátfrekvencia számítását teszi lehetővé, s amely az illető eljárás hibájára is lehetőleg gyakorlatias felvilágosítást ad. Foglalkozik továbbá az ún. inverz sajátérték probléma megoldásával, azaz felvilágosítást ad előírt sajátfrekvenciákkal rendelkező szerkezet konstruálását illetően. Elemzi a sajátfrekvenciák meghatározásakor fellépő, a számításban éppen alkalmazott szabadságfok okozta nehézségeket és felhívja a figyelmet egy lehetséges megkerülési módra.

## 1. Bevezetés, célkitűzés

A szerkezetek mechanikai rezgésszámítása során újabban egyre inkább kontinuum modelleket alkalmaznak. A következőkben olyan feladatokat tekintünk, amelyekben sajátfrekvenciák definiálhatók. Ismeretes, hogy ilyen esetekben a sajátfrekvenciák ismerete a szerkezet lehetséges mozgásainak és a mozgás során előálló mechanikai feszültségi állapotainak számítását megkönnyítheti, mind ez mind a tranzienst, mind a determinisztikus gerjesztés hatására előálló állandósult rezgésre vagy a sztochasztikus gerjesztés hatására kialakuló mozgásra egyaránt érvényes.

A dolgozat — felhasználva a szerkezetekhez rendelt sajátfrekvenciák szélsőérték tulajdonságait — kitér a sajátfrekvenciák javítható közrefogása egy direkt módszerének ismertetésén kívül az ún. frekvencia-egyenletet nem igénylő sajátfrekvencia számítás néhány olyan esetére, amely előírt számú — nemcsak egy-két — sajátfrekvencia számítását teszi lehetővé, s amely az illető eljárás hibájára is ad lehetőleg gyakorlatias felvilágosítást. Foglalkozik továbbá az ún. inverz sajátérték probléma megoldásával, azaz felvilágosítást ad előírt sajátfrekvenciákkal rendelkező szerkezet

<sup>1</sup> Dr. Bosznay Ádám tanszékvezető egy. t. BME VMM Tnsz. 1123 Bp. Győri út 12.

<sup>2</sup> Dr. Czeglédi Gyula tudományos mtárs BME VMM Tnsz. 1225 Bp. Bartók B. út 3/d.

<sup>3</sup> Richlik György tudományos mtárs BME VMM Tnsz. 1073 Bp. Akácfa u. 59.

<sup>4</sup> Solti József tanársegéd BME VMM Tnsz. 2623 Verőcemasar Kossuth L. u. 116.

<sup>5</sup> Tóth György tudományos mtárs BME VMM Tnsz. 1016 Gellérthegy u. 20.



konstruálását illetően. Elemzi a sajátfrekvenciák meghatározásakor fellépő, a számítás során éppen alkalmazott szabadságfok okozta nehézségeket és felhívja a figyelmet egy lehetséges megkerülési módra.

## 2. A szerkezet matematikai modellje, tulajdonságai

Tegyük fel, hogy az  $\alpha$  körfrekvenciájú szinuszosan változónak vett időfaktor leválasztásával az alábbi, csak a térbeli változóktól függő sajátértékfeladatra jutunk:

$$\mathcal{A}\mathbf{u} - \alpha^2 \mathcal{B}\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.1)$$

$\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  valós együtthatós lineáris differenciáloperátorok;  $\mathcal{A}$  a szerkezet rugalmas visszatérítő sajátságainak,  $\mathcal{B}$  a tehetetlenségi (tömeg-) hatásoknak felel meg;  $\mathcal{P}$  valós lineáris operáció; a homogén peremfeltételeket, illetve, ha a szerkezetet több részből összekapcsoltnak tekintjük, akkor még az ugyancsak homogén illesztési feltételeket fejezi ki. Vizsgálatunk tárgya tehát minden olyan rugalmas kontinuus elemekből felépített szerkezet, amelyhez a fentiekben definiált matematikai modell hozzárendelhető.

A (2.1) differenciálegyenlet rendszáma a gyakorlati esetekben páros,  $2r$ -el fogjuk jelölni. A perem és illesztési feltételeket egyes esetekben fel lehet bontani ún. lényegesekre (amelyek legfeljebb  $r-1$ -edrendű deriváltakat tartalmaznak) és dinamikaiakra (amelyek az  $r$ -edik és magasabb rendű deriváltakat tartalmazzák).

$\mathbf{u}$  a keresett  $\alpha^2$  sajátértékhez tartozó valós elmozdulási amplitúdó mező függvény; ha a feladat úgy kívánja,  $\mathbf{u}$  oszlopvektor; ez esetben  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  mátrix operátorok,  $\mathcal{P}$  pedig mátrixos operáció. Feltesszük, hogy  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  önadjungált differenciáloperátorok, továbbá, hogy a  $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  feltételnek eleget tevő, elegendő sokszor differenciálható és nem zérus  $\mathbf{u}$ -kra

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0, \quad (\mathcal{B}\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0. \quad (2.2)$$

A gömbölyű zárójel itt skalárszorzatot jelöl az

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_T \mathbf{u}^* \mathbf{v} d\tau \quad (2.3)$$

formula szerint, ahol  $T$  a szerkezet-modell által elfoglalt térbeli tartomány, és a  $*$  transzponálást jelent.

Az operátorok önadjungáltságának feltevése mechanikai értelmezésben annak a feltevésnek felel meg, hogy a szerkezet egyes részei is, és a perem- és illesztési feltételeket létrehozó szerkezetek is olyanok, hogy egy periódusidő alatt sem energia-elnyelés, sem betáplálás nem történik a szerkezetbe.

A tett feltevések biztosítják, hogy a (2.1) feladatnak megszámlálhatóan végtelen sok, egyenként véges sokszorosságú pozitív sajátértéke van. Ezeket — mindegyiket

annyiszor felírva, ahányszoros — az alábbi egyenlőtlenség-láncba rendezhetjük:

$$\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_v^2 \leq \dots \quad (2.4)$$

Az egyes sajátértékekhez tartozó sajátvektorokat (amelyek komponensei természetesen függvények)  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_v, \dots$ -vel jelölve érvényes, hogy

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0 \quad \text{és} \quad (\mathcal{B}\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = 0, \quad \text{ha} \quad i \neq j,$$

azaz a különböző indexű sajátvektorok mind az  $\mathcal{A}$ , mind a  $\mathcal{B}$  operátor közvetítésével általánosított értelemben ortogonálisak. Továbbá: a sajátvektorok teljes rendszert alkotnak.

A vizsgált feladattípus sajátértékeire vonatkozó Poincaré—Pólya-féle minimax elvre támaszkodva lehetséges az eredeti szerkezethez két olyan „alsó”, illetve „felső” alapszerkezetet rendelni, amelyekhez tartozó, (2.1)-nek megfelelő sajátértékfeladat operátorai állandó együtthatóságok, amelyeknek elegendően sok lengési sajátértéke viszonylag könnyen számolható kellő pontossággal, s ugyanakkor e két sajátértékhalmoz alsó és felső korlátokat szolgáltat (2.4) számára.

A Poincaré—Pólya-féle minimax elv szerint a (2.1) sajátértékfeladat (2.4) szerinti indexezéssel vett  $v$ -edik sajátértékére fennáll:

$$\alpha_v^2 = \min_{T_v \in \mathcal{G}_A} \left( \max_{\mathbf{u} \in T_v} \frac{(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})}{(\mathcal{B}\mathbf{u}, \mathbf{u})} \right). \quad (2.5)$$

(2.5) alapján tehát a (2.1) sajátértékfeladat  $v$ -edik sajátértékét úgy kapjuk, hogy sorba vesszük a Rayleigh-féle hányados maximumait, miközben  $\mathbf{u}$ -t a  $\mathcal{G}_A$ -nak minden lehetséges  $T_v$   $v$  dimenziós alterén változtatjuk, majd kikeressük e maximumok minimumát.  $\mathcal{G}_A$  jelöli itt az  $(\mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{u})$  funkcionál értelmezési tartományát.

(2.5) alapján az alábbi ún. összehasonlító tétellel kifejezett elégséges feltétel adható meg a (2.1) feladattal megegyező típusú

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \mathbf{u} - \alpha_1^2 \mathcal{B}_1 \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \mathcal{P}_1 \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \text{és} & & & \\ \mathcal{A}_2 \mathbf{u} - \alpha_2^2 \mathcal{B}_2 \mathbf{u} &= \mathbf{0}, & \mathcal{P}_2 \mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.6)$$

két sajátértékfeladat  $\alpha_{1v}^2$  és  $\alpha_{2v}^2$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) sajátértékei között fennálló egyenlőtlenségre:

$$\begin{aligned} \alpha_{1v}^2 &\leq \alpha_{2v}^2, & v &= 1, 2, \dots, \\ \text{ha} & & & \\ (\mathcal{A}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u}) &\leq (\mathcal{A}_2 \mathbf{u}, \mathbf{u}), & \mathbf{u} &\in \mathcal{G}_A, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{A_1} &\supseteq \mathcal{G}_{A_2}, \\ \text{és} & \\ (\mathcal{B}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq (\mathcal{B}_2 \mathbf{u}, \mathbf{u}). \end{aligned}$$

A fentiekben a  $\mathcal{A}_{A_1}$  és  $\mathcal{A}_{A_2}$  tartományok definíciója értelemszerűen ugyanaz, mint a (2.5) kapcsán megadott  $\mathcal{A}$ -é.

A (2.5)-ben felírt Rayleigh-hányadosnak a komparatív  $\mathbf{u}$ -k halmazán felvett minimumtulajdonságát kihasználó ún. Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással bizonyíthatóan felső korlátok nyerhetők (2.4) számára. Ha pl. az első  $n$  számú  $\alpha_1^2, \dots, \alpha_n^2$  sajátértékhez akarunk felső korlátokat meghatározni, akkor találnunk kell  $n$  db.  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  lineárisan független vektort úgy, hogy  $\mathcal{P}\mathbf{v}_v = \mathbf{0}$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) teljesüljön. Ezek után erre az  $n$ -dimenziós altérre történő vetítéssel a

$$\sum_{i=1}^n [(\mathcal{A}\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) - \alpha_j^2(\mathcal{B}\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)]c_i = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

finit sajátértékfeladathoz jutunk. (2.8)  $\alpha_{f_v}^2$  ( $v = 1, \dots, n$ ) gyökei pozitív valós számok és fennáll, hogy

$$\alpha_v^2 \leq \alpha_{f_v}^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{f_v}^2 = \alpha_v^2, \quad v = 1, \dots, n. \quad (2.9)$$

Nyilvánvaló, hogy (2.8)  $\alpha_{f_v}^2$ -hez tartozó  $\mathbf{w}_{f_v}$  sajátvektora a

$$\mathbf{w}_{f_v} = \sum_{i=1}^n c_{iv} \mathbf{v}_i \quad (2.10)$$

alakba írható, ahol  $c_{iv}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) a (2.8) egyenlet  $\alpha_{f_v}^2 = \alpha_{f_v}^2$ -nél vett megoldása.

Megjegyezzük, hogy a  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  lineárisan független rendszer elemeit sok esetben elegendő úgy megválasztani, hogy csak a lényeges perem és illesztési feltételeket elégítsék ki. Ennek egy elégséges feltételét adja az ún.  $K$ -definitéség fennállása.  $K$ -definit probléma esetén a  $\mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  egyenletrendszerből az  $r$  vagy annál magasabb rendű deriváltak kiküszöbölhetők a legfeljebb  $r-1$ -edrendű deriváltak segítségével.

Írjuk át most (2.1)-et a

$$\mathcal{K}\mathbf{u} - \mu\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{P}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

alakba, és tegyük fel, hogy  $\mathcal{K} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}$  pozitív kompakt operátor,  $\mu = 1/\alpha^2$ . (Nem minden, a (2.1)-et és (2.2)-t kielégítő feladat felel meg e feltevésnek.) Világos, hogy a (2.8) megoldásaiként kapható  $\mu_{av} = 1/\alpha_{f_v}^2$  ( $v = 1, \dots, n$ ) értékek most alsó korlátokat szolgáltatnak (2.11) sajátértékei számára.

Legyen most  $\{\mathbf{v}_i\}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) teljes ortonormált vektorrendszer. Ekkor Fichera [12] szerint — tetszőleges pozitív egész  $n$  és  $s$  értékekre — az

$$I_s^n(\mathcal{K}) = \frac{1}{s!} \sum_{k_1, \dots, k_s} \det(\mathcal{K}^n \mathbf{v}_{k_i}, \mathbf{v}_{k_j}), \quad i, j = 1, \dots, s, \quad (2.12)$$

és

$$I_0^n(\mathcal{K}) = 1$$

formulákkal definiált  $I_s^n(\mathcal{K})$  érték független a  $\{\mathbf{v}_i\}$  ortonormált rendszertől, azaz  $I_s^n(\mathcal{K})$  a  $\mathcal{K}$  operátor ún.  $s$ -edrendű,  $n$ -edfokú ortogonális invariánsa. Belátható, hogy  $I_s^n(\mathcal{K}) < +\infty$  akkor és csakis akkor, ha  $I_1^n(\mathcal{K}) < +\infty$ . Azt mondjuk, hogy egy  $\mathcal{K}$  pozitív kompakt operátor a  $\tau^n$  osztályba tartozik, ha  $I_1^n(\mathcal{K}) < +\infty$ . A továbbiakban feltesszük, hogy az általunk definiált  $\mathcal{K}$  operátor ilyen tulajdonságú.

Ha  $\mathcal{K}_1$  és  $\mathcal{K}_2$   $\tau^n$  osztálybeli pozitív kompakt operátorok és a

$$(\mathcal{K}_1 \mathbf{u}, \mathbf{u}) < (\mathcal{K}_2 \mathbf{u}, \mathbf{u})$$

egyenlőtlenség teljesül, akkor tetszőleges  $n$  és  $s$  esetén

$$I_s^n(\mathcal{K}_1) \leq I_s^n(\mathcal{K}_2). \quad (2.13)$$

Az így bevezetett ortogonális invariáns alkalmas arra, hogy (2.11) sajátértékei számára elvileg felső korlátokat adhassunk. Legyen ugyanis  $\{\mathbf{w}_k\}$  egy teljes lineárisan független generátorrendszer és  $\mathcal{P}_v$  egy — a  $\{\mathbf{w}_k\}$  által kifeszített tér  $v$ -dimenziós alterére vetítő — projektor operátor;

$$\mu_1^{(v)} \geq \mu_2^{(v)} \geq \dots \geq \mu_v^{(v)} \quad (2.14)$$

pedig a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással (2.11) sajátértékei számára nyert alsó korlátokat adó sorozat. Tekintsük a  $\mathcal{P}_v \mathcal{K} \mathcal{P}_v$  operátor (2.14) sajátértékeihez tartozó  $\mathbf{w}_1^{(v)}, \dots, \mathbf{w}_v^{(v)}$  sajátvektorait. Jelölje a  $\mathbf{w}_1^{(v)}, \dots, \mathbf{w}_{k-1}^{(v)}, \mathbf{w}_{k+1}^{(v)}, \dots, \mathbf{w}_v^{(v)}$  vektorok által generált  $v-1$ -dimenziós alterre vetítő projektor operátort  $\mathcal{P}_v^{(k)}$ . Ekkor Fichera szerint — rögzített  $n > 0$  és  $s > 0$  esetén — (2.11) sajátértékei számára felső korlátokat szolgáltat a

$$\sigma_k^{(v)} = \left[ \frac{I_s^n(\mathcal{K}) - I_s^n(\mathcal{P}_v \mathcal{K} \mathcal{P}_v)}{I_{s-1}^n(\mathcal{P}_v^{(k)} \mathcal{K} \mathcal{P}_v^{(k)})} + (\mu_k^{(v)})^n \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2.15)$$

formula minden  $v \geq s$ -re. (Pontosabban (2.15) a felső korlátokat adó sorozat  $k$ -adik elemét számítja.) Megemlítjük, hogy a (2.15)-ben fellépő ortogonális invariánsok zárt alakban történő előállítás az esetek többségénél nem lehetséges.

A már említett, s a későbbiekben tárgyalásra kerülő módszerek közös jellemzője, hogy a feladat matematikai megfogalmazása során sok változós egyenletekhez jutunk. Nagyméretű feladat kezelése a rendelkezésre álló modern számítástechnika mellett sem mindig problémamentes. Célszerű ezért olyan technikák alkalmazása, amelyek segítségével a változók száma csökkenthető. E módszereket összefoglalóan *szabadságfokredukciónak* nevezik. Véges szabadságfokú modelleket tekintve a szabadságfokredukció lehetséges módjai közül most *kettőt* emelünk ki.

A *lineáris szabadságfokredukció* a szabadságfok csökkentésének az a módja, amely az eredeti modellhez tisztán matematikai eszközökkel csökkentett szabadságfokú másik modellt rendel hozzá, így matematikai eszközökkel a modell szabadságfokát fizikai értelemben is csökkenti. Ezzel a módszerrel az eredeti feladat frekvenciaspektrumát felülről közelíti. A leghatásosabb ilyen eljárás azokat az elmozdulásokat

küszöböli ki, amelyek nem gyakorolnak lényeges befolyást a kinetikus energiára. A vizsgálatok azt mutatják, hogy az eliminálandó elmozdulásokat célszerű a szerkezet legkisebb dinamikus rugalmassággal bíró területeiről választani.

A másik, a *nemlineáris szabadságfokredukció* csak matematikai értelemben csökkenti a fokszámot, azaz az egyenletekben explicit szerepeltetett szabadságfokok száma kisebb, mint a modell szabadságfoka. Ennél a módszernél az eredeti modellhez nem rendelünk hozzá egy újabb, fizikailag is csökkentett fokszámú modellt. Ezzel az eljárással egy nemlineáris sajátértékfeladatot kapunk. Megoldása nagyobb időigénnyel jár, de a pontosság növelésének nincs elvi akadálya. Egy, a későbbiekben részletezendő (lásd 3. pont) nemkívánatos mellékhatással azonban számolnunk kell.

Összetett rendszerek (kontinuum modellek) rezgésanalízisének egy lehetséges elvi módja az, hogy a végtelen szabadságfokú szerkezetet csomópontok felvételével olyan részrendszerekre bontjuk, melyek szabad vagy gerjesztett rezgését leíró mezőfüggvényei ismertek. A 3. pont részletesen foglalkozik ezen eljárással, s olyan módszert ismertet, amelyik nem tartalmaz szabadságfokredukciót.

### 3. Sajátfrekvenciák behatárolásának egy direkt módszere

A következőkben célul tűzzük ki, hogy a lineáris algebra eszközeinek felhasználásával számítástechnikailag jól áttekinthető és könnyen kezelhető algoritmust adjunk (2.1) sajátértékeinek javítható közrefogására; feltéve, hogy a (2.1)-ben szereplő  $\mathcal{B}$  operátor pozitív szorzó operátor. Ilyen tulajdonságú szerkezet például a kontinuumnak modellezett, változó jellemzőkkel rendelkező, rugalmas rudakból felépített térbeli rúdszerkezet. A kitűzött célt az alábbi lépésekkel érjük el:

- A (2.1) sajátértékfeladathoz hozzárendelünk az összehasonlító tételnek megfelelően két olyan sajátértékfeladatot, amelyekben szereplő operátorok állandó együtthatósok, és sajátérték spektrumainak közrefogják (2.4)-et.
- Előállítjuk az új sajátértékfeladathoz tartozó frekvenciaegyenleteket (a gyakorlat szempontjából legfontosabb esetre, a térbeli rúdszerkezetre szorítkozva).

A frekvenciaegyenletek származtatására két módszert mutatunk be. Az első lényegében az egzakt elmozdulásmódszer továbbfejlesztett változatának tekinthető, míg a második a differenciálegyenletek elméletében használatos integrációs konstansokra a perem- és illesztési feltételek segítségével felírt lineáris egyenletrendszer kapcsán jut eredményre.

#### 3.1 Hozzárendelt sajátértékfeladatok származtatása

Tekintsük a (2.1)-nek megfelelő — több részből összekapcsoltnak feltételezett — szerkezet  $i$ -edik elemét. Legyen a szerkezet-modell által elfoglalt térbeli tartomány  $T_i$ , s az  $\mathcal{A}$ , illetve  $\mathcal{B}$  operátorok erre vett megszorítása  $\mathcal{A}_i$ , illetve  $\mathcal{B}_i$ . A sajátértékekre vonatkozó alsó korlátok nyerése céljából felosztjuk ezt az elemet a  $T_i$  tartományon  $k_i$

részre, s helyettesítjük az  $\mathcal{A}_i$  operátor térbeli változókból függő együtthatóit a  $T_{ij}$  ( $j = 1, \dots, k_i$ )  $j$ -edik résztartományon felvett legkisebb értékekkel; a  $\mathcal{B}_i$  operátor térbeli változóktól függő együtthatóit pedig a  $T_{ij}$ -n felvett legnagyobb értékekkel. Az így konstruált — most már állandó együtthatós — operátorokat tekinthetjük, mint bizonyos  $\mathcal{A}_a$  illetve  $\mathcal{B}_a$  állandó együtthatós operátorok  $T_{ij}$ -re vett megszorításait. Ha tehát az eredeti szerkezethez ilyen módon rendelünk ún. helyettesítő szerkezetet, akkor az összehasonlító tétel értelmében az

$$\mathcal{A}_a \mathbf{u} - \alpha^2 \mathcal{B}_a \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{P}_a \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

állandó együtthatós operátor egyenlet sajátértékei (2.1) sajátértékeinek alsó korlátait adják.

Hasonló módon eljárva felső korlátokat akkor kapunk, ha az  $\mathcal{A}_i$  operátor együtthatófüggvényeit a  $T_{ij}$ -n felvett legnagyobb értékekkel, a  $\mathcal{B}_i$  operátor együtthatófüggvényeit pedig a  $T_{ij}$ -n felvett legkisebb értékekkel helyettesítjük. Az így nyert állandó együtthatós sajátértékfeladat

$$\mathcal{A}_f \mathbf{u} - \alpha^2 \mathcal{B}_f \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \mathcal{P}_f \mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

A továbbiakban tehát elegendő egy olyan (2.1)-nek megfelelő feladattal foglalkoznunk, ahol  $\mathcal{A}$  és  $\mathcal{B}$  állandó együtthatós operátorok, s ismeretes a  $\mathcal{P}$  operáció.

### 3.2 A frekvenciaegyenlet előállításának két útja [7]

Tekintve egy rúdszerkezet  $i$ -edik rúdját, s tudva, hogy  $\mathcal{A}_i$  és  $\mathcal{B}_i$  állandó együtthatós operátorok, felírhatjuk bármely keresztmetszetének eltolódásait és elfordulásait leíró mezőfüggvény amplitúdókat:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_i(x_i) &= A_{1i} \sin \beta_{1i} x_i + A_{2i} \cos \beta_{1i} x_i, \\ \tilde{\eta}_i(x_i) &= A_{3i} \sin \beta_{3i} x_i + A_{4i} \cos \beta_{3i} x_i + \\ &\quad + A_{5i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i + A_{6i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i, \\ \tilde{\zeta}'_i(x_i) &= A_{7i} \sin \beta_{2i} x_i + A_{8i} \cos \beta_{2i} x_i + \\ &\quad + A_{9i} \operatorname{sh} \beta_{2i} x_i + A_{10i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i, \\ \tilde{\psi}_i(x_i) &= -\tilde{\zeta}'_i(x_i), \\ \tilde{\chi}_i(x_i) &= \tilde{\eta}'_i(x_i), \end{aligned} \quad (3.3)$$

ahol  $T_1 = \{x_i; 0 \leq x_i \leq l_i\}$ ;  $l_i$  az  $i$ -edik rúd hossza,  $\beta_{ki}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ )  $\alpha$ -tól, geometriai és anyag jellemzőktől függő tényező;  $A_{ji}$  ( $j = 1, \dots, 12$ ) ismeretlen együttható. (Vesszővel  $x_i$ -szerinti deriválást jelöltünk.)

Az  $x_i = 0$ -helyen  $\tilde{\mathbf{u}}_i$ -vel, az  $x_i = l_i$ -helyen  $\tilde{\mathbf{v}}_i$ -vel jelölve a rúd általánosított elmozdulás amplitúdó vektorát (az eltolódás és elfordulás amplitúdókat tartalmazó

hipervektort) az

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{u}}_i &= \mathbf{U}_i \mathbf{a}_i, \\ \tilde{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{V}_i \mathbf{a}_i\end{aligned}\quad (3.4)$$

összefüggéseket nyerjük, ahol  $\mathbf{a}_i = [A_{1i}, \dots, A_{12i}]$ ;  $\mathbf{U}_i$  és  $\mathbf{V}_i$  mátrixok elemei pedig a 0, 1 számok, valamint a  $\beta_{ki} l_i$ -nek különböző trigonometrikus és hiperbolikus függvényei közül valók.

A rúd két végén működő általánosított erők amplitúdó vektora (erő és nyomaték amplitúdó vektorokat tartalmazó hipervektorok) az előbbiekhöz hasonlóan képezhető:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{f}}_i &= \mathbf{F}_i \mathbf{a}_i, \\ \tilde{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{P}_i \mathbf{a}_i.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Bevezetve az

$$\tilde{\mathbf{s}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_i \\ \tilde{\mathbf{v}}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{q}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_i \\ \tilde{\mathbf{p}}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{P}_i \end{bmatrix}$$

jelöléseket, a (3.4) és (3.5) egyenletek

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{s}}_i &= \mathbf{S}_i \mathbf{a}_i \\ \tilde{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{Q}_i \mathbf{a}_i\end{aligned}\quad (3.6)$$

alakba tömöríthetők.

Belátható, hogy  $\mathbf{S}_i$  és  $\mathbf{Q}_i$  kvadratikus mátrix. Ha nem szingulárisak, akkor létezik  $\mathbf{S}_i^{-1}$  és  $\mathbf{Q}_i^{-1}$ , s így a (3.6) egyenletekből  $\mathbf{a}_i$  kiküszöbölhető:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{s}}_i &= \mathbf{R}_i \tilde{\mathbf{q}}_i \\ \tilde{\mathbf{q}}_i &= \mathbf{R}_i^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_i.\end{aligned}\quad (3.7)$$

Itt  $\mathbf{R}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_i^{-1}$  az ún. dinamikai deformáció mátrix,  $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{S}_i^{-1}$  pedig az ún. dinamikai merevségi mátrix.

Ha most az  $i$ -edik rúdra nyert eredményeinket általánosítani akarjuk az egész rúdszerkezetre, akkor közös koordináta-rendszerbe kell transzformálnunk eddigi összefüggéseinket.  $\mathbf{T}_i$  ortogonális transzformációs mátrix segítségével

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{T}_i \tilde{\mathbf{s}}_i,$$

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{T}_i \tilde{\mathbf{q}}_i,$$

és így

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{R}_i^{-1} \mathbf{T}_i^* \mathbf{s}_i.$$

Egy  $n$  számú rúdból álló szerkezet esetén bevezetve az  $\mathbf{s} = [\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n]$  és  $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n]$  hipervektorokat, valamint az

$$\mathbf{R}^{-1} = \langle \mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{T}_1^*, \dots, \mathbf{T}_n \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{T}_n^* \rangle$$

hipermátrixot, kapjuk a

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s} \quad (3.8)$$

összefüggést. Teljesen hasonlóan nyerhető az  $\mathbf{s} = \mathbf{R}\mathbf{q}$  egyenlet is.

Jelölje  $\mathbf{s}_0$  a csomópontok elmozdulásvektoraiból alkotott hipervektort és legyen  $\mathbf{q}_0$  a csomópontokra ható, az egész rendszer tekintetében is külsőnek minősülő szinuszos erőhatásvektorokból alkotott hipervektor. Ekkor

$$\mathbf{s} = \mathbf{G}\mathbf{s}_0, \quad (3.9)$$

és

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{H}\mathbf{q}, \quad (3.10)$$

ahol  $\mathbf{G}$  a kompatibilitási,  $\mathbf{H}$  pedig a csomóponti egyensúlyi feltételeket tartalmazó mátrix. (Bizonyítható, hogy  $\mathbf{H} = \mathbf{G}^*$ ).

Behelyettesítve (3.8)-at, majd (3.9)-et (3.10)-be a

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}\mathbf{s}_0$$

összefüggést nyerjük, amelyet az  $\mathbf{R}_0^{-1} = \mathbf{H}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{G}$  jelölés bevezetésével a

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{s}_0 \quad (3.11)$$

alakba írhatunk.  $\mathbf{R}_0^{-1}$  a rúdszerkezet dinamikai merevségi mátrixa.

Szabad rezgés esetében ( $\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$ )

$$\mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{s}_0 = \mathbf{0}.$$

Feltéve, hogy  $\mathbf{s}_0 \neq \mathbf{0}$  kapjuk a

$$\det [\mathbf{R}_0^{-1}] = 0 \quad (3.12)$$

frekvenciaegyenletet.

Az így nyert frekvenciaegyenletből elvileg sem számolható ki hiánytalanul valamennyi sajátérték. Tegyük fel ugyanis, hogy a szerkezetnek létezik olyan sajátértéke, amely egyben sajátértéke valamely részrúdhoz tartozó sajátértékfeladatnak is; a rúd végeit rögzítettnek gondolva. E helyen a determináns függvénynek meg nem szüntethető szakadása van, ez a sajátérték a számításnál kimarad. Hasonló módon járunk, ha  $\mathbf{R}_0^{-1}$  helyett  $\mathbf{R}_0$ -at alkalmazzuk.

Ezen nehézségek elkerülése végett tekintsük még egyszer az

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{U}_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{V}_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{f}_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{F}_i \mathbf{a}_i \\ \mathbf{p}_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{P}_i \mathbf{a}_i \end{aligned} \quad (3.13)$$

paraméteres egyenletrendszer. A következőkben vázolt módszer lényege éppen abban áll, hogy az egyenletek paramétereit ( $\mathbf{a}_i$ -ket) nem küszöböljük ki, hanem azokkal, mint a mezőfüggvény amplitúdók ismeretlen együttthatóival operálunk, így a megoldásban a



szerkezet rúdjaianak amplitúdóeloszlása közvetlenül rendelkezésre áll. (3.13)-ból formálisan nyerhető  $n$  rúdra  $a$

$$\mathbf{b} = \mathbf{M}\mathbf{a} \quad (3.14)$$

egyenlet. Azt a körülményt, hogy az egyes rudak hogyan kapcsolódnak össze egy szerkezeté, célszerűen egy  $\mathbf{K}$  kapcsolómátrixszal fejezhetjük ki, amelynek elemei a  $-1$ ,  $0$ ,  $1$  számok közül valók.  $\mathbf{c}_0$ -al jelölve a csomópontokra ható szinuszos külső hatások amplitúdó hipervektorát (3.14)-ből  $a$

$$\mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{c}_0 \quad (3.15)$$

lineáris inhomogén egyenletrendszert kapjuk.  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{0}$  (szabadrezgés,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ) esetén

$$\det(\mathbf{K}\mathbf{M}) = 0 \quad (3.16)$$

a rúdrendszer frekvenciaegyenlete. A (3.16) frekvenciaegyenlet — ellentétben (3.12)-vel — elvileg valamennyi sajátértéket megadja.

Gerjesztett rezgésnél a rendszer csomópontjainak válaszát állandósult állapotban meghatározhatjuk mindkét módszer segítségével. Ez utóbbi eljárás esetén, ha a gerjesztőhatás körfrekvenciája nem esik egybe a rúdrendszer valamelyik sajátkörfrekvenciájával, a (3.16) lineáris inhomogén algebrai egyenletrendszer  $\mathbf{K}\mathbf{M}$  együtthatómátrixa nem szinguláris, így létezik egyértelmű megoldása. Az eredményül kapott  $\mathbf{a}$  vektor az egyes rudak mezőfüggvényeinek együtthatóit tartalmazza. Ennek birtokában a (3.4) összefüggés segítségével a rúdvégek elmozdulásai — azaz a csomópontok elmozdulásai — meghatározhatók.

Lényegesnek tartjuk megemlíteni, hogy a most bemutatott eljárás kiindulási alapul szolgálhat a következőkben tárgyalt, ún. közbenső operátorokat felhasználó módszerek számára is.

#### 4. Véges elem módszer alkalmazása sajátfrekvenciák behatárolására [3]

A véges elem módszer ún. (tiszta) elmozdulás eljárása — mint ismeretes — a kontinuumnak modellezett szerkezet előírt számú sajátfrekvenciájára felső korlátot szolgáltat. E felső korlátok az elemszám növelésével és/vagy az elemen belüli elmozdulásmező paramétereinek növelésével javíthatók. Az egyoldali korlátok (numerikus) javíthatósága azonban nem ad hibabecslést. Felmerül tehát a hibabecslés olyan megoldásának szükségessége, hogy a javítható felső korlátok mellé javítható alsó korlátokat is tudjunk adni.

Induljunk ki a már definiált (2.1) sajátértékfeladatból. Az ott felsoroltak mellé még tegyük fel, hogy  $\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B} \in \tau^n$  szigorúan pozitív kompakt operátor. Jelöljük az első  $m$  számú sajátértéknek (pl. a véges elem módszerrel kiszámított) felső korlátját  $\alpha_{f_v}^2$ -el,

$v=1, 2, \dots, m$ . Fichera szerint — mint az (2.15)-ből kiolvasható —  $\alpha_{av}^2$ -el jelölhető alsó korlátokat kaphatunk az alábbi formulából:

$$\alpha_{av}^2 = R[I_s^n(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}), \alpha_{f_1}^2, \dots, \alpha_{f_m}^2], \quad (4.1)$$

ahol  $R$  a szögletes zárójelbe tett számok racionális kifejezését jelenti.

A (4.1) formula gyakorlati alkalmazásának akadályát jelenti, hogy  $I_s^n(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B})$  zárt alakban nem állítható elő. Közelítőleg kell kiszámítani; a közelítés csak felülről történhet, ha (4.1) alsó korlát adó tulajdonságát meg akarjuk őrizni.

A felső megközelítés megoldására két fő módszert ismertetünk. Az előbbi alkalmazhatóságához olyan különleges követelményeket kell kielégíteni, amiket igen egyszerű szerkezet esetén sikerül csak megtenni. Az utóbbi a szokásos szerkezeteknél akadálytalanul alkalmazható, azért a továbbiakban ezt követjük.

A módszer abból indul ki, hogy az  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{P}$  operátorokhoz — a (2.5) Poincaré—Pólya-féle minimax elv és a közvetlen szemlélet alapján — olyan  $\mathcal{A}_{a_0}$ ,  $\mathcal{B}_{a_0}$ ,  $\mathcal{P}_{a_0}$  operátorokat rendelünk hozzá, hogy  $\mathcal{A}_{a_0}$  állandó együtthatós, pozitív differenciáloperátor,  $\mathcal{B}_{a_0}$  állandó elemű, pozitív szorzó operátor legyen; az  $\mathcal{A} - \mathcal{A}_{a_0}$  és  $\mathcal{B}_{a_0} - \mathcal{B}$  különbségoperátorok is pozitívak kell, hogy legyenek, továbbá  $D(\mathcal{A}_{a_0}) \subset D(\mathcal{A})$ ,  $T_{a_0} = T$  kell, hogy fennálljon.  $T_{a_0}$  és  $T$  azoknak a térbeli tartományoknak a jele, amelyeket a hozzárendelt és az eredeti szerkezet modelljei elfoglalnak. Fichera (2.13) egyenlőtlenségéből

$$I_s^n(\mathcal{A}_{a_0}^{-1}\mathcal{B}_{a_0}) > I_s^n(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}) \quad (4.2)$$

következik. A (4.1)-ben szükséges felső korlát tehát elvben rendelkezésre áll, de sajnos (4.2) bal oldalát nem tudjuk zárt alakban kiszámítani. E nehézség megkerülésére első lépésben (4.2) bal oldalát egy „kissé” még tovább növeljük.

A további növelés céljából  $\mathcal{A}_{a_0}^{-1}$  helyett egy újabb,  $\mathcal{A}_{a_0}^{-1}$ -el jelölt operátort vezetünk be úgy, hogy

$$(\mathcal{A}_{a_0}^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{r}) \geq (\mathcal{A}_{a_0}^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{r}) \quad (4.3)$$

legyen. Fichera említett egyenlősége alapján (4.3)-ból

$$I_s^n(\mathcal{A}_{a_0}^{-1}\mathcal{B}_{a_0}) \geq I_s^n(\mathcal{A}_{a_0}^{-1}\mathcal{B}_{a_0}) \quad (4.4)$$

következik. (4.3) kielégítését úgy segítjük elő, hogy  $\mathcal{A}_{a_0}^{-1}$ -et  $\hat{\mathbf{H}}_{a_0}$  Green-féle manggal állítjuk elő

$$\mathcal{A}_{a_0}^{-1}\mathbf{r} = \int_{\tau} \hat{\mathbf{H}}_{a_0}(t, t_1)\mathbf{r}(t_1)dt_1 \quad (4.5)$$

alakban.

$\mathcal{A}_{a_0}^{-1}$ -et úgy értelmezhetjük, mint az  $\mathcal{A}_{a_0}\mathbf{u}=\mathbf{r}$  statikai feladat közelítő megoldását szolgáló inverz operátort. (Ha pl. ez a közelítő megoldás véges elem módszer, akkor  $\mathcal{A}_{a_0}^{-1}$  felépítésében impliciten benne van az elemképzés módja, az elemek közötti kapcsolat előírása.) A közelítő megoldási módszerek választása után a (4.3) egyenlőtlenség kielégítéséről kell gondoskodni úgy, hogy keresni kell az  $\mathbf{r}$ -eknek

olyan tartományát, amelyen belül ez lehetséges. A (4.3)-al előírt majorizálás nem hajtható végre akármilyen  $\mathcal{A}_{a_0}^{-1}$ -el, ezért már a közelítő megoldási módszer kiválasztásában is tekintettel kell lenni erre.

(4.3) bal oldala a közelítő megoldáshoz rendelt közelítő szerkezetben, jobb oldala az eredeti szerkezetben felhalmozott alakváltozási energia kétszerese. Ha  $\mathcal{A}_{a_0}^{-1}$ -et az eredeti szerkezethez rendelt véges elem módszer egyensúlyi eljárásának megfelelően számítjuk, akkor a (4.3)-al előírt majorizálás az alakváltozási energiára érvényes felső korlát tétel alapján automatikusan kielégül.

Akárcsak  $I_s^n(\mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{B}_{a_0})$ ,  $I_s^n(\mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{B}_{a_0})$  sem számítható ki zárt alakban, ezért  $I_s^n(\mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{B}_{a_0})$  és  $I_s^n(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B})$  közé a  $k_1$  és  $k_2$  természetes számoktól függő  $I_s^n(\mathcal{A}_{k_1}^{-1} \mathcal{B}_{k_2})$  közbenső ortogonális invariánsokat szerkesztjük úgy, hogy  $I_s^n(\mathcal{A}_{k_1}^{-1} \mathcal{B}_{k_2})$ -t téve (4.1)-be  $I_s^n(\mathcal{A}^{-1} \mathcal{B})$  helyébe

$$\lim_{m, k_1, k_2 \rightarrow \infty} \alpha_{av}^2 = \alpha_v^2, \quad v = 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

legyen.

(4.6)-ot Fichera tételei alapján az ún. Aronszaj-féle közbenső operátorok szerkesztésével érhetjük el. Azt, hogy a közbenső ortogonális invariáns hogyan számítható ki zárt alakban, az alábbiakban —  $s = n = 1$  helyettesítéssel elve — röviden ismertetjük. A bizonyítást mellőzzük, csak az eljárás tömör vázlatát közöljük.

Legyen  $\mathbf{p}_r$  ( $r = 1, \dots, k_1$ ) és  $\mathbf{s}_t$  ( $t = 1, \dots, k_2$ ) — a számoló által alkalmasan megválasztott — lineárisan független, komparatív vektorrendszer, és vezessük be a

$$\mathcal{C}_{a_0} = \mathcal{A} - \mathcal{A}_a,$$

$$\mathcal{M}_{a_0} = \mathcal{B}_{a_0} - \mathcal{B}$$

pozitív operátorokat. Legyenek továbbá

$$\Psi_l = \psi_l^{(1)}, \quad \Phi_l = -\varphi_l^{(1)}, \quad l = 1, \dots, k_2,$$

$$\Psi_l = \psi_l^{(2)}, \quad \Phi_l = -\varphi_l^{(2)}, \quad l = k_2 + 1, \dots, k_2 + k_1,$$

$$\Psi_l = \psi_l^{(3)}, \quad \Phi_l = \varphi_l^{(3)}, \quad l = k_2 + k_1 + 1, \dots, k_2 + 2k_1,$$

ahol

$$\Phi_s = \mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{M}_{a_0} \mathbf{s}_s, \quad s = 1, \dots, k_2,$$

$$\Psi_s = \sum_{r=1}^{k_2} [\mathcal{M}_{a_0} \mathbf{s}_l, \mathbf{s}_m]_{rs}^{-1} \mathcal{M}_{a_0} \mathbf{s}_r, \quad l, m = 1, \dots, k_2,$$

$$\Phi_s = \Phi_s = \sum_{j=1}^{k_1} [\mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{A} \mathbf{p}_r, \mathcal{C}_{a_0} \mathbf{p}_m]_{js}^{-1} \mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{C}_{a_0} \mathbf{p}_j,$$

$$r, m, s = 1, \dots, k_1,$$

$$\Psi_s = \mathcal{B}_{a_0} \mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{C}_{a_0} \mathbf{p}_s, \quad s = 1, \dots, k_1,$$

$$\Psi_s = \sum_{r,l=1}^{k_2} [\mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{A} \mathbf{p}_l, \mathcal{C}_{a_0} \mathbf{p}_m]_{rl}^{-1} \mathcal{M}_{a_0} \mathbf{s}_l (\mathcal{M}_{a_0} \mathbf{s}_r, \mathcal{A}_{a_0}^{-1} \mathcal{C}_{a_0} \mathbf{p}_s),$$

$$l, m = 1, \dots, k_2$$

$$s = 1, \dots, k_1.$$

Ezeket felhasználva az

$$I_1^1(\mathcal{A}_{k_1}^{-1} \mathcal{B}_{k_2}) = \int_T \text{Spur } \hat{\mathbf{H}}_{a_0}(t, t) dt + \sum_{i=1}^{k_2+2k_1} (\Psi_i, \Phi_i)$$

formula szolgáltatja a közbenső ortogonális invariáns értékét.

### 5. A Trefftz—Fichera módszer alkalmazása [9]

Tegyük fel a továbbiakban, hogy a (2.1) sajátértékfeladatban szereplő  $\mathcal{B}$  operátor pozitív szorzó operátor. Mint azt már a 3. pontban megemlítettük, számunkra a legfontosabb ilyen tulajdonságú szerkezet a térbeli rüdszerkezet. Célul tűzzük ki, hogy a szerkezet sajátfrekvenciái számára kellő számú és pontosságú felső korlát birtokában a Trefftz—Fichera módszer felhasználásával hasonló pontosságú alsó korlátokat nyerjünk.

(2.1.)-ből kiindulva az  $\mathcal{A}$  operátorhoz tartozó  $\mathcal{A}^{-1}$  inverz operátor ( $\mathcal{A}$  mondott tulajdonságai miatt létezik) ismeretében a feladat integráloperátoros egyenlete:

$$\mathcal{K} \mathbf{u} = \mu \mathbf{u}, \quad \mathcal{P} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (5.1)$$

ahol

$$\mu = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \mathcal{K} \mathbf{u} = \int_T \mathbf{K} \mathbf{u} d\tau.$$

Az integráljel mögött szereplő  $\mathbf{K}$  magfüggvény mátrix — a  $\mathcal{K}$  operátor  $\mathcal{K} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}$  felbontását figyelembe véve — akkor és csakis akkor szimmetrikus a már említett egyéb feltételek mellett, ha  $\mathcal{B}$  konstans szorzó operátor. Abban az esetben, ha  $\mathcal{B}$  együtthatói függvények (5.1)-t transzformálni kell, amely minden esetben megtehető új elmozdulásvektor bevezetésével.

Feltehetjük a továbbiakban, hogy  $\mathcal{K}$  szimmetrikus, pozitív szemidefinit, teljesen folytonos integráloperátor és első  $k$  darab

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_k$$

sajátértékéhez rendelt

$$\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_k \quad (5.2)$$

alsó korlátok — melyeket pl. az előzőekben elemzett Poincaré—Rayleigh—Ritz módszerrel már meghatároztunk — ismertek. (2.12) szerint a  $\mathcal{K}$  operátorhoz rendelt elsőrendű és elsőfokú ortogonális invariáns az

$$I_1^1(\mathcal{K}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \int_{\mathcal{D}} \text{Spur } \mathbf{K} d\vartheta \quad (5.3)$$

összefüggés segítségével számolható.  $n \leq k$  esetén (5.3) felhasználásával a

$$\mu''_n = \mu'_n + I_1^1(\mathcal{K}) - \sum_{i=1}^k \mu'_i \geq \mu_n \quad (5.4)$$

becslést kapjuk az  $n$ -edik sajátértékre. Az  $I_1^1(\mathcal{K})$  kiszámításához a  $\mathbf{K}$  mátrix explicit ismerete szükséges. Ez elérhető az

$$\mathcal{A}\mathbf{K} = \mathcal{B}\delta, \quad \mathcal{P}\mathbf{K} = \mathbf{O} \quad (5.5)$$

operátor egyenlet megoldásával, ahol a  $\delta$  mátrix főátlójában levő elemek Dirac disztribúciók, főátlón kívüli elemei zérussal egyenlők.

A következőkben két egyszerű szerkezetet vizsgálva mutatjuk be a módszer gyakorlati alkalmazhatóságát, s közben általános érvényű módszert mutatunk a  $\mathbf{K}$  mátrix elemeinek explicit meghatározását illetően. Megjegyezzük, hogy az ortogonális invariáns értékének meghatározása után a frekvencia korlátok megadása már nem okoz nehézséget.

### 5.1 Példa [8]

Tekintsük az 1. ábrán vázolt, hajlító lengést végző rudat. Ebben az esetben

$$\mathcal{A}v = \frac{d^2}{dx^2} \left( p \frac{d^2}{dx^2} v \right), \quad \mathcal{B}v = qv,$$

ahol  $p(x)$  és  $q(x)$  a hajlító merevség és a tömegeloszlás pozitív függvényei;  $x \in [0, 1]$ . A feladathoz tartozó peremfeltételek:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(1) = 0, \quad v'''(1) = 0. \quad (5.6)$$

(Vesszővel  $x$ -szerinti deriválást jelöltünk.) Az (5.1)-nek megfelelő egyenlet:

$$\mathcal{K}v = \int_0^1 K(x, t)v(t)dt = \mu v(x). \quad (5.7)$$

(5.5) alapján a  $K(x, t)$  magfüggvény a

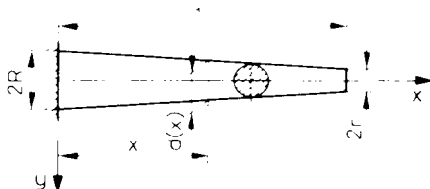
$$(p(x)K''(x, t))' = q(t)\delta(x-t)$$

differenciálegyenletből határozható meg a

$$K(0, t) = 0, \quad K'(0, t) = 0, \quad K''(1, t) = 0, \quad K'''(1, t) = 0$$

feltételi egyenletek segítségével. Megoldásul a

$$K(x, t) = q(t) \left[ h(x-t) \int_t^x \int_t^u \frac{s-t}{p(s)} ds du + \int_0^x \int_0^u \frac{t-s}{p(s)} ds du \right] \quad (5.8)$$



1. ábra

függvényt nyerjük, amelyben  $h(x-t)$  a Heaviside disztribúció. Némi számolással belátható, hogy (5.8) felírható

$$K(x, t) = q(t)G(x, t) \quad (5.9)$$

alakban, ahol  $G(x, t) = G(t, x)$  az (5.6) peremfeltételek mellett az  $\mathcal{A}$  operátorhoz tartozó Green függvény.

(5.7)-ből (5.9) segítségével

$$\int_0^1 q(t)G(x, t)v(t)dt = \mu v(x).$$

Az egyenletet beszorozva  $\sqrt{q(x)}$ -el és a  $w(x) = \sqrt{q(x)}v(x)$  helyettesítést alkalmazva az

$$\int_0^1 \sqrt{q(x)q(t)}G(x, t)w(t)dt = \mu w(x)$$

egyenletet kapjuk. Az így végzett transzformáció során a sajátértékek nem változnak, viszont az új

$$Q(x, t) = \sqrt{q(x)q(t)}G(x, t)$$

mag szimmetrikus. A  $Q(x, x) = K(x, x)$  azonosság miatt a  $\mathcal{K}$  integráloperátorhoz rendelt ortogonális invariáns

$$I_1^1(\mathcal{K}) = \int_0^1 K(x, x)dx$$

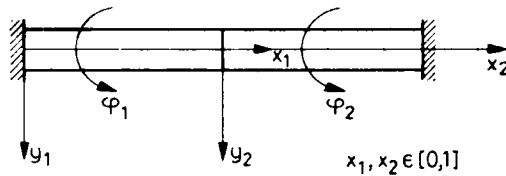
összefüggéssel számolható.

## 5.2. Példa

A rúdszerkezethez rendelt  $\mathbf{K}$  magfüggvény mátrix megszerkesztését a 2. ábrán látható csavaró lengést végző prizmatikus rúdon — amelyet két rúdból összetett szerkezetként kezelünk — mutatjuk be. Összhangban eddigi jelöléseinkkel, legyen

$$\mathbf{u} = [\varphi_1, \varphi_2], \quad \mathcal{A}\mathbf{u} = [-p\varphi_1'', -p\varphi_2''], \quad \mathcal{B}\mathbf{u} = [q\varphi_1, q\varphi_2],$$

ahol  $p$  és  $q$  az egyszerűség kedvéért állandónak tekintett csavarómerevség és inercianyomaték.



2. ábra

A feladathoz tartozó perem- és illesztési feltételek:

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1(1) = \varphi_2(0), \quad \varphi_1'(1) = \varphi_2'(0), \quad \varphi_2(1) = 0.$$

Az (5)-nek megfelelő egyenlet:

$$\mathcal{K}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \int_0^1 K_{11}(x_1, t_1) dt_1 & \int_0^1 K_{12}(x_1, t_2) dt_2 \\ \int_0^1 K_{21}(x_2, t_1) dt_1 & \int_0^1 K_{22}(x_2, t_2) dt_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1(t_1) \\ \varphi_2(t_2) \end{bmatrix} = \mu \mathbf{u}.$$

Könnyen belátható, hogy a továbbiakban a változók indexekkel való megkülönböztetésének nincs jelentősége, ezért a későbbiekben mindenütt  $x$ -et és  $t$ -t használunk  $x_1$ ,  $x_2$  valamint  $t_1$ ,  $t_2$  helyett. (5.5) alapján a  $\mathbf{K}$  mátrix elemei a

$$\begin{aligned} -pK''_{11}(x, t) &= q\delta(x-t), & -pK''_{12}(x, t) &= 0, \\ -pK''_{22}(x, t) &= q\delta(x-t), & -pK''_{21}(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

differenciálegyenletekből határozhatók meg, figyelembe véve a

$$\begin{aligned} K_{11}(0, t) &= K_{21}(1, t) = K_{12}(0, t) = K_{22}(1, t) = 0, \\ K_{11}(1, t) - K_{21}(0, t) &= 0, & K'_{11}(1, t) - K'_{21}(0, t) &= 0, \\ K_{22}(0, t) - K_{12}(1, t) &= 0, & K'_{22}(0, t) - K'_{12}(1, t) &= 0 \end{aligned}$$

feltételi egyenleteket. Megoldásul a

$$K_{11}(x, t) = q \left( \frac{t-x}{p} h(x-t) + \left( 1 - \frac{t}{2} \right) \frac{x}{p} \right),$$

$$K_{22}(x, t) = q \left( \frac{t-x}{p} h(x-t) + (1-t) \frac{1+x}{2p} \right),$$

$$K_{12}(x, t) = q \frac{1-t}{2p} x, \quad K_{21}(x, t) = qt \frac{1-x}{2p}$$

függvényeket kapjuk. Az ortogonális invariáns értéke:

$$I_1^1(\mathcal{K}) = \int_0^1 K_{11}(x, x) dx + \int_0^1 K_{22}(x, x) dx = \frac{2q}{3p}.$$

Ezt jelen esetben nagyon könnyen ellenőrizhetjük, ugyanis a vizsgált rúd csavaró lengését leíró differenciálegyenlet

$$-p\varphi'' = \alpha^2 q\varphi,$$

megoldása

$$\varphi = a \sin \kappa x + b \cos \kappa x, \quad \kappa^2 = \frac{q}{p} \alpha^2.$$

A  $\varphi(0) = \varphi(2) = 0$  peremfeltételek figyelembevételével a  $b=0$  és  $\kappa = n\pi/2$  ( $n=1, 2, \dots$ ) értékeket nyerjük. (5.3) alapján, felhasználva a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

összefüggést kapjuk, hogy valóban

$$I_1^1(\mathcal{K}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q}{p} \frac{4}{\pi^2 n^2} = \frac{2q}{3p}.$$

## 6. Inverz sajátérték probléma megoldása a közbenső operátorok segítségével [10]

Célunk előírt rezgési sajátkörfrekvenciákkal bíró kontinuum alakjának meghatározása. Az előírt sajátértékeket Weinstein, Bazley és Fox értelemben vett közbenső problémához tartozó sajátérték feladattal azonosítjuk; tehát azokat a sajátértékeket írjuk elő, amelyeket egy lineáris algebrai sajátérték feladat definiál. Egy speciális alap operátor teszi lehetővé, hogy a kontinuumnak éppen az első  $m$  sajátértéke legyen előre



adott. Az alakot meghatározó ismeretlen paramétereket egy alkalmas függvénycsaládban keressük. Az ismeretlen együtthatók értékei egy nemlineáris algebrai egyenletrendszer megoldásaiként adódnak. A követendő módszert egy transzverzális lengést végző egyenes rúd példáján illusztráljuk.

Az Euler—Bernoulli rúdmodellét alapul véve — a (2.1)-nek megfelelő — kiinduló egyenletünk

$$(\mathcal{A} - \alpha^2 \mathcal{B})v = 0, \quad \mathcal{K}v = 0, \quad (6.1)$$

ahol

$$\mathcal{A}v = (EI(z)v''(z))'', \quad \mathcal{B}v = \rho A(z)v(z).$$

Az alkalmazott jelölések:

$E$  a Young-féle modulusz,

$A(z)$  a keresztmetszeti idom (ismeretlen) területe,

$q$  a rúdanyag sűrűsége,

$I(z)$  a keresztmetszeti síkidom súlyponti főtengelyére számított (ismeretlen) másodrendű nyomatéka,

$v(z)$  az amplitúdó eloszlás függvény,

$\alpha$  a sajátkörfrekvencia.

A (6.1)-ben szimbolizált peremfeltételek legyenek:

$$v(-l) = v(l) = v''(-l) = v''(l) = 0, \quad (6.2)$$

itt  $2l$  jelöli a rúd hosszát.

Ha  $\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots$  jelöli (6.1) ismeretlen sajátértégeit,  $\alpha_{p_1}^2 \leq \alpha_{p_2}^2 \leq \dots$  az előírt sajátértégeket, akkor feladatunk meghatározni az  $EI(z) > 0$ ,  $\rho A(z) > 0$  függvényeket úgy, hogy

$$\alpha_i^2 = \alpha_{p_i}^2, \quad i = 1, \dots, m. \quad (6.3)$$

### 6.1 Az alapeladat megválasztása

Mint ismeretes, a (3.1) és (3.2) alapeladatok fontos szerepet játszanak a közbenső operátorok elméletében. Inverz sajátértékfeladatunk esetében azonban ezek szintén ismeretlenek. Ahhoz, hogy tovább léphessünk, írjuk fel a (3.1)-nek megfelelő

$$(\mathcal{A}_a - \alpha^2 \mathcal{B}_a)v = 0, \quad \mathcal{K}v = 0$$

alapeladatot, s tegyük az

$$\alpha_{ai}^2 \leq \alpha_{pi}^2, \quad i = 1, \dots, m \quad (6.4)$$

kikötést. A Bazley—Fox-féle „special choice”-módszer következtében egy közbenső feladat sajátértékei két rendszerből származnak. Az egyik rendszer

$$\alpha_{ai}^2, \quad i = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots;$$

a másik rendszer egy  $m_0$ -rendű lineáris algebrai sajátértékfeladatból számítható. Jelölje ez utóbbiakat

$$\alpha_{k_1 k_2 j}^2, \quad j = 1, \dots, m_0 \quad (6.5)$$

és az elmélet szerint érvényes rájuk az

$$\alpha_{k_1 k_2}^2 \geq \alpha_{aj}^2, \quad j = 1, \dots, m_0 \quad (6.6)$$

egyenlőtlenség. A  $k_1$  és  $k_2$  indexek jelzik, hogy a (6.5) értékek a  $k_1$  és  $k_2$  egész számoktól függenek.

A továbbiakban tegyük az

$$\alpha_{p_1}^2 = \alpha_{k_1 k_2 1}^2, \dots, \alpha_{p_m}^2 = \alpha_{k_1 k_2 m}^2 \quad (6.7)$$

előírást, miközben  $m \geq m_0$ . (Célszerű, gyakorlati szempontokat figyelembe véve az  $m = m_0$  választás.) (6.7) kielégítéséhez szükséges az

$$\alpha_{a, m+1}^2 > \alpha_{p_m}^2 \quad (6.8)$$

feltétel, amely teljesíthető a  $\mathcal{B}_a$  operátor egy speciális konstrukciójával.

(6.4) és (6.8) teljesítéséhez általában két lépésben juthatunk. Az első lépésben konstruálunk egy kísérleti alapfeladatot, majd a másodikban módosítjuk, ha szükséges.

Tekintsük (6.1)-nek megfelelően az

$$EI_a v^{IV} - \alpha_a^{*2} \rho A_a v = 0, \quad \mathcal{K}v = 0 \quad (6.9)$$

kísérleti alapfeladatot, ahol  $EI_a = \text{konst.}$ ,  $\rho A_a = \text{konst.}$  (6.9)  $\alpha_{ai}^{*2}$  sajátértékei és normált  $u_{ai}^*$  sajátélemei az

$$\alpha_{ai}^{*2} = \frac{EI_a}{\rho A_a} \frac{i^4 \pi^4}{2^4 l^4}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (6.10)$$

$$u_{ai}^* = \frac{1}{\sqrt{\rho A_a l}} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{i\pi}{2l} z, \quad i = \begin{cases} 2, 4, 6, \dots \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

formulák szerint számíthatók.

Ez a kísérleti alapfeladat könnyen kielégítheti (6.4)-et, pl. az

$$\frac{EI_a}{\rho A_a} \frac{m^4 \pi^4}{2^4 l^4} \leq \alpha_{p_1}^2$$

elégséges feltétel segítségével, amelyből  $EI_a$  és  $\rho A_a$  alkalmas értékei felvehetők. (Egy további követelményt is ki kell majd elégíteni.)

Ellenőriznünk kell még, vajon ilyen  $EI_a/\rho A_a$  mellett  $-\alpha_{a, m+1}^2$  helyébe  $\alpha_{a, m+1}^{*2}$ -et írva — teljesül-e (6.8). Ha igen, akkor (6.9) megfelelő számunkra és az

$$\alpha_{ai}^2 = \alpha_{ai}^{*2}, \quad u_{ai} = u_{ai}^*, \quad i = 1, \dots, m, \dots, \quad (6.11)$$

valamint az

$$\mathcal{A}_a = (EI_a \cdot \cdot)''', \quad \mathcal{B}_a = \rho A_a \quad (6.12)$$

választásokkal élhetünk.

Ha (6.8) nem teljesül, akkor (6.9) sajátértékeit az

$$\alpha_{ai}^2 = s_i \alpha_{ai}^{*2}$$

összefüggés alapján mesterségesen változtatjuk.

Itt

$$s_i \begin{cases} = 1, & i = 1, \dots, m \\ > \frac{\alpha_{pm}^2}{\alpha_{a,m+1}^{*2}} > 1 & i = m+1, m+2, \dots \end{cases} \quad (6.13)$$

A sajátelemelek (6.11) szerintiek maradhatnak, míg

$$\mathcal{A}_{a \cdot} = (EI_{a \cdot} \cdot \cdot)''',$$

$$\mathcal{B}_{a \cdot} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i (\cdot, \rho A_a u_{ai}) \rho A_a u_{ai}. \quad (6.14)$$

Ez utóbbi esetben az alapfeladathoz mechanikai képként egy változó keresztmetszetű rudat rendelhetünk; a keresztmetszet változását leíró függvényt azonban nem szükséges ismernünk.

A következőkben ezzel a komplikáltabb esettel foglalkozunk.

## 6.2 A közbenső sajátérték probléma

A közbenső operátorokat az elkövetkezendő számítások viszonylagos egyszerűsítésére az alábbi módon definiáljuk. Tekintsük az

$$\mathcal{A}_a + \mathcal{R}_a^{\text{adj}} \mathcal{P}_{ck_1} \mathcal{R}_a - \alpha^2 (\mathcal{B}_a - \mathcal{M}_a^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}_{mk_2} \mathcal{M}_a^{\frac{1}{2}}) v = 0, \quad \mathcal{K} v = 0 \quad (6.15)$$

alakú közbenső sajátértékfeladatot, ahol  $\mathcal{R}_a$ -t az  $(\mathcal{R}_a v, \mathcal{R}_a v) = (\mathcal{C}_a v, v)$  egyenlőség definiálja;  $v$  a  $\mathcal{C}_a = \mathcal{A} - \mathcal{A}_a$  operátor értelmezési tartományába esik.  $\mathcal{M}_a = \mathcal{B}_a - \mathcal{B}$  pozitív operátor, amelyet felhasználva —  $\mathcal{M}_a$  tartományába eső  $u$  esetén — rövid számolás után

$$(\mathcal{M}_a u, u) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 (s_i - 1) \quad (6.16)$$

adódik, ahol  $a_i - k$  az  $u_{ai}$  teljes ortonormált függvényrendszer szerint felírt  $u$  együtthatói. A  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$  sor konvergens,  $s_i - 1 = 0$   $i = 1, \dots, m$  esetén és  $s_i - 1 > 1$ , ha  $i = m + 1, m + 2, \dots$ . Így (6.16) abszolút konvergens sor. Továbbá az  $\mathcal{R}_a$ -hoz tartozó adjungált operátort

$$\mathcal{R}_a^{\text{adj}} = [(EI(z) - EI_a)^{\frac{1}{2}}]''$$

definiálja, a megfelelő adjungált peremfeltételek az

$$u(l) = 0, \quad u(-l) = 0 \quad (6.17)$$

választással kielégíthetők.

Az  $\mathcal{M}_a^{\frac{1}{2}}$ ,  $\mathcal{M}_a^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\mathcal{M}_a^{-1}$  operátorok létezése következik  $\mathcal{M}_a$  pozitivitásából; explicit előállításuk azonban nem szükséges a számításokhoz.

$\mathcal{P}_{ck_1}$  a lineárisan független, (6.17)-et kielégítő  $c_1, \dots, c_{k_1}$  elemek által kifeszített altérre vetítő:  $\mathcal{P}_{mk_2}$  a lineárisan független,  $\mathcal{M}_a^{\frac{1}{2}}$  tartományába eső  $m_1, \dots, m_{k_2}$  elemek által generált altérre vetítő projektor operátor. Az  $m_1, \dots, m_{k_2}$  bázis helyett a továbbiakban a  $p_j = \mathcal{M}_a^{\frac{1}{2}} m_j$ ,  $j = 1, \dots, k_2$  bázist használjuk, ahol  $\mathcal{M}_a^{\frac{1}{2}}$  pozitív, szimmetrikus.

(6.15) sajátértékeinek részhalmaza egy  $m$ -edrendű lineáris algebrai sajátérték-feladatból származik, ha  $c_j$ -k és  $p_j$ -k kielégítik a következő Bazley—Fox egyenleteket:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_a^{\text{adj}} c_j &= \sum_{v=1}^m \gamma_{jv} \mathcal{B}_a u_{av}, \\ p_j &= \sum_{\mu=1}^m \beta_{j\mu} \mathcal{B}_a u_{a\mu}, \end{aligned} \quad j = 1, \dots, m, \quad (6.18)$$

ahol  $\gamma_{jv}$  és  $\beta_{j\mu}$  valós állandók a későbbiekben kerülnek kiszámításra. Ezek a sajátértékek a

$$\det [A_a + G^*CG - \alpha_{k_1, k_2}^2 (E - B^*MB)] = 0 \quad (6.19)$$

polinom  $\alpha_{k_1, k_2}^2$  gyökei. Itt  $A_a = \langle \alpha_{ai}^2 \rangle$   $i = 1, \dots, m$ ;

$$G^* = [\gamma_{jv}] \quad j = 1, \dots, m, \quad v = 1, \dots, k_1;$$

$$B^* = [\beta_{j\mu}] \quad j = 1, \dots, m, \quad \mu = 1, \dots, k_2;$$

$$C = [(c_k, c_l)]^{-1} \quad k = 1, \dots, k_1, \quad l = 1, \dots, k_1;$$

$$M = [(p_k, \mathcal{M}_a^{-1} p_l)]^{-1} \quad k = 1, \dots, k_2, \quad l = 1, \dots, k_2$$

és  $E$  egységmátrix. ( $C$  és  $M$  léteznek, hiszen Gram mátrixok inverzei.)

### 6.3 Feltevések az inverz probléma megoldása számára

Az  $EI(z)$  és  $\rho A(z)$  ismeretlen függvényeket bizonyos függvénycsaládból fogjuk választani. A (6.6) egyenlőtlenség kielégítéséhez szükséges feltételek  $z \in [-l, l]$  esetén

$$EI(z) - EI_a \geq 0, \quad \rho A_a - \rho A(z) \geq 0. \quad (6.20)$$

A minél egyszerűbb kiszámíthatóság végett legyen

$$EI(z) - EI_a = \left( \sum_{i=0}^{n_1-1} e_i z^i \right)^{-2},$$

$$\rho A_a - \rho A(z) = \left( \sum_{j=0}^{n_2-1} r_j z^j \right)^{-2},$$
(6.21)

ahol  $e_i$  ( $i=0, 1, \dots, n_1-1$ ) és  $r_j$  ( $j=0, 1, \dots, n_2-1$ ) ismeretlen együtthatók,  $n_1$  és  $n_2$  ismeretlen kitevők. Nyilvánvaló, hogy (6.21) teljesíti (6.20)-at.

Problémánk megoldása ekvivalens ezen valós ismeretlenek meghatározásával úgy, hogy a fenti polinomoknak ne legyen gyöke a  $[-l, l]$  zárt intervallumban.

Behelyettesítve (6.21)-et (6.18)-ba, azután alkalmazva (6.14)-et, (6.10)-et és integrálva kétszer (az integrációs konstansokat zérusnak választva), kapjuk:

$$c_j = - \left( \sum_{i=1}^{n_1-1} e_i z^i \right) \frac{4l}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho A_a}{l}} \sum_{v=1}^m \frac{\gamma_{jv}}{v^2} \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \frac{v\pi}{2l} z,$$

$$j = 1, \dots, k_1, \quad v = \begin{cases} 2, 4, 6, \dots, \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$
(6.22)

Ezek a  $c_j$ -k kielégítik a (6.17) adjungált peremfeltételeket. (6.22) jobb oldala az  $m$  számú

$$\sum_{k=0}^{n_1-1} e_k z^k \frac{1}{v^2} \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \frac{v\pi}{2l}, \quad v = \begin{cases} 2, 4, 6, \dots, \\ 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

függvény egy lineáris kombinációja. Ezek lineárisan függetlenek  $[-l, l]$ -ben, ha legalább egy  $e_k \neq 0$ . (6.22)  $k_1 \leq m$  számú  $c_j$ -t definiál, ha  $\text{rang}(\mathbf{G}) = k_1$ . Ebből a feltételből — nem egyértelműen —  $\mathbf{G}$  előállítható.

$\mathbf{C}^{-1}$  elemei:

$$(c_k, c_l) = A_1^{kl} e_0^2 + A_2^{kl} 2e_1 e_0 + A_3^{kl} (2e_0 e_2 + e_1^2) +$$

$$+ A_4^{kl} 2(e_0 e_3 + e_1 e_2) + A_5^{kl} [2(e_0 e_4 + e_1 e_3) + e_2^2] +$$

$$+ \dots + A_{2n_1-1}^{kl} e_{2n_1-1}^2,$$
(6.23)

ahol  $A_i^{kl}$  numerikus integrálás eredményeként adódik.

$\mathcal{M}^{-1}$  elemeit a  $(p_k, \mathcal{M}_a^{-1} p_l)$  skalárszorzat segítségével számíthatjuk. (6.18)-ból  $\mathcal{M}_a^{-1}$  alkalmazásával

$$\mathcal{M}_a^{-1} p_l = \rho A_a \sum_{\mu=1}^m \beta_{l\mu} \mathcal{M}_a^{-1} u_{a\mu},$$
(6.24)

ahol

$$\mathcal{M}_a^{-1} u_{a\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j u_{aj}.$$
(6.25)

Itt az  $\varepsilon_j$  együtthatók egyértelműen meghatározottak. Alkalmazva  $\mathcal{M}_a$ -t (6.25)-re, felhasználva (6.14)-et és az  $u_{ai}$ -k ortogonalitását, nyerjük:

$$\varepsilon_j = 0, \text{ ha } j \neq \mu \text{ és } \varepsilon_\mu = \frac{1}{\rho A_a - \rho A(z)}.$$

Behelyettesítve ezt (6.25)-be és aztán ez utóbbit (6.24)-be — felhasználva közben (6.21)-et — kapjuk:

$$\mathcal{M}_a^{-1} p_l = \rho A_a \left( \sum_{i=0}^{n_2-1} r_i z^i \right)^2 \sum_{\mu=1}^m \beta_{l\mu} u_{a\mu}.$$

Ez utóbbi segítségével

$$\begin{aligned} (p_k, \mathcal{M}_a^{-1} p_l) &= B_1^{kl} r_0^2 + B_2^{kl} 2r_1 r_0 + B_3^{kl} (2r_0 r_2 + r_1^2) + \\ &+ B_4^{kl} 2(r_0 r_3 + r_1 r_2) + B_5^{kl} [(2r_0 r_4 + r_1 r_3) + r_2^2] + \\ &+ \dots + B_{2n_2-1}^{kl} r_{2n_2-1}^2, \end{aligned}$$

ahol  $B_i^{kl}$ -k tartalmazzák a  $\beta_{l\mu}$ -ket és numerikus integrálás eredményeként adódnak. (6.18) és (6.14) alapján

$$p_l = \sum_{\mu=1}^m \beta_{l\mu} \rho A_a u_{a\mu}, \quad (6.26)$$

ahol alkalmaztuk (6.13)-at és az  $u_{ai}$ -k ortogonalitását. Minthogy  $k_2 \leq m$  lineárisan független  $p_j$ -re van szükségünk és  $\text{rang}(\mathbf{B}) = k_2$ , valamint  $u_{a\mu}$ -k lineárisan függetlenek következik, hogy (6.26)-ból  $\beta_{l\mu}$  meghatározható.

#### 6.4 A feladat megoldása

Először konstruálni kell az adott  $\alpha_{pi}^2$  ( $i = 1, \dots, m$ ) sajátértékekkel egy  $m$ -edrendű lineáris algebrai sajátértékfeladatot. Ilyen

$$(\mathbf{A}_m - \alpha^2 \mathbf{B}_m) \mathbf{y} = \mathbf{0},$$

ha mindkét mátrix diagonális és  $a_{ii}$  valamint  $b_{ii}$  elemeikre

$$\alpha_{pi}^2 = \frac{a_{ii}}{b_{ii}}, \quad i = 1, \dots, m$$

teljesül. Ha a numerikus szempontok azt szükségessé teszik, akkor  $\mathbf{A}_m$  és  $\mathbf{B}_m$  helyett az  $\mathbf{R}^* \mathbf{A}_m \mathbf{R}$  és  $\mathbf{R}^* \mathbf{B}_m \mathbf{R}$  mátrixokat használhatjuk, ahol  $\mathbf{R}$  tetszőleges valós elemű reguláris mátrix.

Ezután keressük  $C$ -t és  $M$ -t úgy (lásd 6.19), hogy

$$\begin{aligned} A_a + G^*CG &= R^*A_mR, \\ E - B^*MB &= R^*B_mR \end{aligned} \quad (6.27)$$

teljesüljön. Előírásainknak megfelelően:  $\text{rang}(G) = k_1$ ,  $\text{rang}(B) = k_2$ ;  $k_1, k_2 \leq m$ , léteznek  $G^*$  és  $B^*$  bal oldali,  $G$  és  $B$  jobb oldali inverzei. Megfelelő beszorzásokkal

$$\begin{aligned} C &= (GG^*)^{-1}G(R^*A_mR - A_a)G^*(GG^*)^{-1}, \\ M &= (BB^*)^{-1}B(E - R^*B_mR)B^*(BB^*)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

A (6.28) jobb oldala numerikusan ismert mátrixokból áll és invertálható, mert  $C$  és  $M$  reguláris. A jobb oldal három kvadratikus faktor szorzata, s ezért

$$\begin{aligned} C^{-1} &= GG^*[G(R^*A_mR - A_a)G^*]^{-1}GG^*, \\ M^{-1} &= BB^*[B(E - R^*B_mR)B^*]^{-1}BB^*. \end{aligned} \quad (6.29)$$

(6.29) bal oldala tartalmazza az  $e_0, e_1, \dots, r_0, r_1, \dots$  ismeretlen együtthatókat.  $C$  és  $M$  szimmetriájának következtében (6.29)-ből  $(k_1^2 + k_1)/2$ , illetve  $(k_2^2 + k_2)/2$  nemlineáris algebrai egyenlet adódik  $e_i$ , illetve  $r_i$  számára. Ha nincsenek további előírások, amelyeket ki kell elégíteni, akkor praktikus az

$$n_1 = \frac{k_1^2 + k_1}{2}, \quad n_2 = \frac{k_2^2 + k_2}{2}$$

választás. Egyéb esetekben  $n_1$  és  $n_2$  alkalmasan nagyobbra választható.

Végezetül megemlítjük, hogy a jelen paragrafusban tárgyalt módszer alkalmas különböző optimalizálási feladatok (pl. súly minimalizálás) megoldására is.

## 7. Egy speciális inverz sajátértékfeladat [11]

A továbbiakban adott peremfeltételekkel ellátott (pl. mindkét végén befogott) körkeresztmetszetű egyenes rúd kapcsán vetjük fel a feladatot és adunk rá egy, a 6-ban ismertetettől eltérő, közelítő megoldási módszert. Keressük a transzverzálisan lengőnek vett egyenes rúd keresztmetszeti változásának azt a törvényét, amellyel az első  $r$  számú sajátkörfrekvencia előírt  $\alpha_p$  ( $p = 1, \dots, r$ ) értékű lesz.

Megoldási módszerünk iteratív jellegű. A számítás során két, szakaszonként állandó keresztmetszetű, egyre több lépcsővel ellátott rúdsorozatot kapunk eredményül. Az egyik rúdsorozat első  $r$  sajátkörfrekvenciája felülről, a másiké alulról tart  $\alpha_p$ -khez. Az egyszerűség kedvéért körkeresztmetszettel dolgozunk.

Első lépésként  $r$  darab  $d_i$  állandó átmérőjű rudat keresünk, melyeknek a  $p$ -edik, sajátkörfrekvenciája megegyezik az általunk előre rögzített  $\alpha_p$ -vel. Ezek meghatározá-

sa után kiválasztjuk a legnagyobb és a legkisebb átmérőjűt, majd a következő módon megválasztjuk az alsó és felső korlátot:

$$\text{ha} \quad d_{a1} < \min d_i, \quad \text{akkor} \quad \alpha_{a1} < \alpha_i,$$

valamint

$$\text{ha} \quad d_{f1} > \max d_i, \quad \text{akkor} \quad \alpha_{f1} > \alpha_i.$$

Ezek az egyenlőtlenségek (2.6)-ból és (2.7)-ből következnek.

Következő lépésként a rúd egy szakaszát — pl. felső közelítésnél  $d_{f1}$  átmérővel — állandó keresztmetszetűnek véve a másik szakaszán az átmérőket úgy változtatjuk, hogy újra az előző feltételnek — a rúd  $p$ -edik sajátkörfrekvenciája egyezzen meg az  $\alpha_p$ -vel — feleljen meg. Így kapunk egy olyan egylépcsős rúdsorozatot, melynek az egyik része  $d_{f1}$  átmérőjű, a másik pedig  $r$  különböző átmérőjű lehet. Ezek közül szintén kiválasztjuk a legnagyobb átmérőjűt (felső korlátnál) és azt is rögzítjük.

Most rendelkezésünkre áll egy egylépcsős rúd, melynek átmérői — az egyszerűség és a könnyebb számítás kedvéért —  $\frac{l}{n}$  hosszúságú szakaszon  $d_{f1}$ ,  $\frac{(n-1)l}{n}$  hosszúságú szakaszon  $d_{f2}$  átmérőjű. Az  $l$  a rúd hossza,  $n$  pedig az előre meghatározott lépcsőszám, amellyel a rudat közelíteni szeretnénk.

A lépcsőzést tovább folytatva általánosítható összefüggéseket kapunk. Ez azt jelenti, hogy minden egyes új szakasz belépésekor csak egy ún. szakaszmátrixot kell alkalmazni.

A számítógép feladata minden lépcsőzésnél egy determináns zérushelyeinek megkeresése. A determináns méretszáma a szóban forgó lépcsőszám négyszerese + négy lesz.

#### IRODALOM

1. BOSZNAY Á.: Szerkezetek sajátfrekvenciáinak kontinuummodellrel alkalmazó számítása. *Műszaki Tudomány* 55, (1978) 249—264.
2. BOSZNAY, Á.: Improvable bracketing of the eigenfrequencies of a space frame structure consisting of rods with varying cross section Part I—III. *Acta Techn. Ac. Sc. Hung.* 83, (1976) 31—48, 187—203, 393—399.
3. BOSZNAY Á.: Véges elem módszer alkalmazása a sajátfrekvenciák behatárolására. *Műszaki Tudomány* 54, (1978) 23—27.
4. KOVÁCS M.—RICHLIK GY.—TAKÁCS F.—TÓTH GY.: Egyenes tengelyű, a hossza mentén változó jellemzőkkel bíró, hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása. *Műszaki Tudomány* 54, (1978) 37—42.
5. BOSZNAY Á.—RICHLIK GY.—TÓTH GY.: Egyenes tengelyű, a hossza mentén változó jellemzőkkel bíró, hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása. II. rész. *Műszaki Tudomány* 56, (1978) 263—268.
6. CZEGLÉDI GY.: Szabadságfokredukció és következményei lineárisan rugalmas szerkezetek analízisében. *Műszaki Tudomány* 54, (1978) 115—124.
7. CZEGLÉDI GY. Térbeli szerkezetek sajátfrekvenciáinak közrefogó számítása. Egyetemi doktori értekezés, 1978.
8. RICHLIK GY.—TÓTH GY.: A Treffitz—Fichera módszer alkalmazása hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható behatárolására. *Műszaki Tudomány* 56, (1978) 131—142.



9. RICHLIK GY.—TÓTH GY.: A Trefftz—Fichera módszer alkalmazása rúdszerkezetek sajátfrekvenciáinak javítható behatárolására. Előadás az MTA Műszaki Mechanikai Bizottságának 1980. június 16-i ülésén.
10. BOSZNAY, Á.: Solving of inverse eigenvalue problems via intermediate operators. Előadás az Elméleti és Alkalmazott Mechanika Nemzetközi Uniója XV. Nemzetközi Kongresszusán, Toronto 1980. aug.
11. SOLTÍ J.: Egy speciális inverz sajátértékfeladat megoldása. Előadás a III. Magyar Mechanikai Konferencián, Miskolc, 1979. szept. 5—7.
12. FICHERA, G.: Linear Elliptic Differential Systems and Eigenvalue Problems. Lecture Notes in Mathematics 8, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1965.
13. SZERVÁNSZKY, GY.: Some Results in the Host Institution I-II. In: *Euromech Colloquium*. Nr. 112 Mátrafüred (Hungary) 21—23 February 1979. Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Structures (Editor: BOSZNAY, Á.) Bp. Akadémiai Kiadó. 1980. I. pp. 539—556, II. pp. 557—576.

**Some Extremal Value Characteristics of Structures' Eigenfrequencies and their Application.** — In the paper there is a concise summary about the main research topic treated at the Department of Engineering Mechanics of the Faculty for Electrical Engineering of the Technical University of Budapest between 1975 and 1980.

Besides the review of a direct method for improvable bracketing of eigenfrequencies it touches upon some cases of the so called eigenfrequency calculation not needing frequency equation, which make possible the calculation of eigenfrequencies of a prescribed number and which gives, if possible, practical informations about the error of the procedure in question, using some of the extremal value characteristics of the mechanical vibrational eigenfrequencies yielded to structures treated as continuum model. The solution of the so called inverse eigenfrequency problem is also dealt with, that is, information is given about the construction of structures having prescribed eigenfrequencies. The difficulties arising at the determination of the eigenfrequencies, caused by the number of degrees of freedom used in the calculation are analysed and attention is scoped on a possible method avoiding it.

**Einige Extremaleigenschaften der Eigenfrequenzen von Konstruktionen und deren Anwendungen.** — Die Arbeit gibt einen kompakten Überblick über die Hauptforschungsthemen — behandelt in den Jahren 1975—80 — des Lehrstuhls für Technische Mechanik der Elektroingenieur Fakultät der Technischen Universität Budapest.

Ausgehend von einigen Extremaleigenschaften der Eigenfrequenzen von mechanischen Schwingungen des zur Konstruktion zugeordneten Kontinuum-modells, wird sowohl auf eine direkte Methode der Verbesserungsfähigen Eigenfrequenzbestimmung eingegangen, als auf einige solche Fälle der Eigenfrequenzberechnung, die die sogenannte Frequenzgleichung nicht benötigen und ermöglichen die Berechnung einer vorgeschriebenen Zahl von Eigenfrequenzen, gebend sogleich eine möglichst praktische Information über den Fehler des betreffenden Verfahrens.

Ferner befasst sich der Artikel mit der Lösung der inversen Eigenwertaufgabe, das heisst gibt einige Richtlinien zur Realisierung einer Konstruktion mit vorgegebenen Eigenfrequenzen.

Die Schwierigkeiten verursacht von der aktuell angewandten Zahl der Freiheitsgrade die bei der Berechnung von Eigenfrequenzen auftreten, werden analysiert und die Aufmerksamkeit wird auf ein mögliches Umgehen dieser Probleme gelenkt.

**Некоторые краевые свойства собственных частот конструкций и их применение.** — Доклад дает сжатый обзор о главных научно-исследовательских темах, разработка которых проходила на кафедре технической механики электротехнического факультета Будапештского политехнического университета в 1975—1980 гг.

Используя некоторые краевые свойства собственных колебаний механических конструкций, где моделью является континуум, доклад описывает не только прямой метод двухстороннего приближения собственных частот, но и некоторые случаи расчета собственных частот без частотных уравнений, позволяющие подсчет предписанного количества собственных значений частот. Это последнее практически объясняет также и ошибки данного метода. Занимается также и решением так называемой проблемы обратной (инверз) собственной частоты, то есть дает необходимые сведения для создания конструкции с предписанными собственными частотами. Анализирует трудности, возникающие при определении собственных частот с примененной степенью, а также обращает внимание на то, каким образом можно этого избежать.

# TÖBBPARAMÉTERES TERHEKKEL KAPCSOLATOS FELADATOK

BAINTNER LÁSZLÓ,<sup>1</sup> DRASKÓCZY ANDRÁS,<sup>2</sup>  
PEREDY JÓZSEF A MŰSZ. TUD. KAND.<sup>3</sup>, SALÁT GÉZA<sup>4</sup>

Az épületek tartószerkezetire különböző teherfajták, ill. ezek különböző kombinációi működnek. A szerkezettervező mérnöknek ismernie kell, hogy a szerkezet élettartama folyamán várhatóan milyen teherkombinációk fognak hatni, és ezekkel szemben a szerkezet teherbírása megfelelő-e. A dolgozat első része az állandó, hó, hasznos, szél és hőmérsékleti terhek terhelési tartományát írja le a többparaméteres teherrendszer többdimenziós terében. A második rész a vasbeton oszlopok és gerendák teherbírási tartományának a felállításával foglalkozik, míg a harmadik rész a teljes szerkezet teherbírási tartományát vizsgálja a többparaméteres teherrendszer terében.

Tartószerkezeteinkre általában olyan terhek működnek, amelyek jellemzéséhez nem egy, hanem számos paraméter szükséges. Vannak állandó és esetleges terhek, az esetleges terhek között szerepelnek a hasznos terhek és a meteorológiai terhek különböző fajtái stb. Mindezen terhek a tartószerkezet különböző részeire egyidejűleg is különböző értékkel működhetnek, és a tartószerkezet élettartama során általában igen sok különböző teherelrendeződésnek van kitéve. A szabályzataink a különböző jellegű terhek alapértékeinek megadásával, a biztonsági, egyidejűségi stb. tényezők előírásával lényegében a figyelembe veendő teherelrendeződések sokaságának „tartományát” kívánják körülhatárolni.

A mérnöki gyakorlatnak a lehetséges teherelrendeződések sokféleségére tekintettel kell lennie, és törekszünk is e követelménynek eleget tenni. Ezért a tartószerkezetek tervezésekor vagy ellenőrzésekor több „mértékadó teherállásra” vonatkozóan végzünk vizsgálatot. E mértékadó teherállások a figyelembe veendő teherelrendeződések tartományának jellegzetes (többnyire sarok) pontjai. A méretezés során számszerűen figyelembe vett mértékadó teherállások kiválasztása azonban sok esetben (például sokszintes épületvázaknál) inkább a gyakorlati tapasztalatok, a mérnöki érzék alapján történik, s a pontosabb vizsgálatok helyes felvételükhöz nem adnak elegendő iránymutatást. Ismereteink jelenlegi állása még kevésbé teszi lehetővé

<sup>1</sup> Dr. Baintner László adjunktus BME Szilárdságtani és Tartószerkezetek Tnsz 1149 Bp. Hاندzár u. 10.

<sup>2</sup> Dr. Draskóczy András tud. munkatárs BME Szilárdságtani és Tartószerkezetek Tnsz 2092 Budakeszi, Erdő u. 80.

<sup>3</sup> Dr. Peredy József docens BME Szilárdságtani és Tartószerkezetek Tnsz 1124 Bp. Somorjai u. 8/a.

<sup>4</sup> Dr. Salát Géza adjunktus TTI 1124 Bp. Lejtő út 7.

olyan kérdések megválaszolását, hogy valamely adott szerkezet milyen jellegű terhek viselésére alkalmas, a szerkezet merevségi és teherbírási viszonyainak változása a teherbírást a különböző jellegű terhek szempontjából miként módosítja, a figyelembe veendő teherelrendeződésekre tekintettel miként célszerű a szerkezet merevségi és teherbírási viszonyait kialakítani stb. Általában megállapíthatjuk, hogy a szerkezetek s a többparaméteres teherrendszerek viszonyát illetően ismereteink bővíthetők és szemléletmódunk fejlődése a célszerűbb konstrukciós tevékenységet segítené.

A BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszékén az MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Kutatócsoport keretében rendelkezésre álló lehetőségeket is felhasználva — több munkatárs foglalkozott az elmúlt években a többparaméteres teherrendszerekre való méretezés különböző kérdéseivel. Ha ugyanis a többparaméteres terhekre történő méretezés elősegítésére mindinkább igénybe kívánjuk venni az egzaktabb megfontolásokat és módszereket, számos problémával találjuk szembe magunkat.

Az első probléma mindjárt az, hogy a többparaméteres teherrendszer esetén (a kinematikai terheket is ideértve) maguk a terhelési tartományok is csak közvetetten és esetenként hiányosan vannak körülírva a szabályzati előírásokban s általában a mérnöki gyakorlatban; így a terhelési tartományok matematikai formában való megadása sok esetben kutatási jellegű feladat. Hasonló problémával találjuk szembe magunkat akkor is, ha valamely geometriai és szilárdságtani paramétereivel adott szerkezeti elem (keresztmetszet, rúd) teherbírási tartományát kívánjuk előállítani. A használatos gyakorlati módszerek és a szabályzati előírások jelenleg általában számítanak arra, hogy alkalmazásuk mérnöki ismeretekkel és „érzékkel” bíró személy által történik s így nem annyira egzaktak és teljeseek, hogy a teherbírási tartományokat egyértelműen leírják. Így ezen elemi teherbírási tartományok leírása sem csak matematikai probléma, hanem a tartószerkezeti anyagok viselkedésének mélyebb ismeretét, esetenként ezen ismeretek kiegészítését, továbbfejlesztését, újrafogalmazását igényli.

A többparaméteres teherrendszerre való méretezés során a terhelést és a teherbírást kell egybevetni. A terhelési tartomány a szerkezet egészére nézve jelentkezik, a teherbírás fogalma pedig túlnyomórészt az egyes kisebb-nagyobb szerkezeti elemek geometriai és szilárdságtani paramétereire vonatkozik közvetlenül. A kettő között a szilárdságtani ismeretek segítségével tudunk kapcsolatot teremteni: előállíthatjuk a szerkezet egészének teherbírási tartományát az elemek teherbírási alapján, vagy lebonthatjuk a szerkezet terhelési tartományát az elemek terhelési (igénybevételi) tartományaira. Ha az „elem” kifejezést tágabb értelemben értjük, azaz pl. egy olyan rudat is elemnek tekintünk, amelynek teherbírása keresztmetszeteinek, csomópontjainak teherbírására vezethető vissza, akkor nyilvánvaló, hogy a terhelés és a teherbírás egybevetése nemcsak a teljes szerkezetre vonatkozóan, vagy éppen a legegyszerűbb elemekre (pl. elemi szálakra) vonatkozóan történhet, hanem számos közbenső szinten is (pl. keresztmetszetenként, rudanként, esetleg nagyobb szerkezeti egységenként).

Mint említettük, a terhelési és a teherbírási tartományokat a szilárdságtani ismeretek segítségével transzformálhatjuk olyan alakra, hogy összevethetők legyenek. Ennek szokásos módja az, hogy a mértékadó teherállásokhoz (a terhelési tartomány jellegzetes pontjaihoz) meghatározzuk az igénybevételeket, illetve a feszültségeket, és ezeket vetjük össze a határigénybevételekkel, ill. határfeszültségekkel (azaz a teherbírási tartománnyal). Ilyenkor tulajdonképpen az történik, hogy a terhelési tartományt (vagy legalábbis egyes pontjait) szilárdságtani ismereteink segítségével a viszonylag egyszerű szerkezeti elemek (keresztmetszetek, anyagi pontok) szintjére transzformáljuk. A szilárdságtani ismeretek megfogalmazása, a szokásos számítási módszerek jórészt az ilyen típusú transzformáció igényeihez igazodnak. Ha egy fordított irányú transzformációt kívánunk alkalmazni, s elő kívánjuk állítani a szerkezet egészének globális teherbírási tartományát, esetenként meglehetősen szokatlan szilárdságtani feladathoz jutunk.

Így a teherbírási és terhelési tartományok különböző szinteken való egybevetése a szilárdságtani módszerek fejlesztését is igényli.

Ha a terhelési és teherbírási tartományokat azonos szintre transzformáltuk, felmerül a kérdés, hogy a teherbírási tartomány tartalmazza-e a terhelési tartományt. Sokdimenziós terhelési és teherbírási tartományok esetén e feladat sem oldható meg szemléletesen, hanem megfelelő számítási módszerek kidolgozását igényli. A terhelési és teherbírási tartományok egybevetése az ellenőrzésen túl akkor szolgálja közvetlenebbül a tervezői munkát, ha képet tud adni arról, hogy a szerkezet egyes geometriai és szilárdságtani paraméterei hogyan befolyásolják a szerkezet egészének teherbírását s valamely terhelés elviselésére mely szerkezetek (a szerkezetet meghatározó geometriai és szilárdságtani paraméterek mely értékészletei) alkalmasak. Vizsgálatainkat igyekeztünk lehetőség szerint e fontos, de nem éppen könnyen kezelhető kérdéskörre is kiterjeszteni.

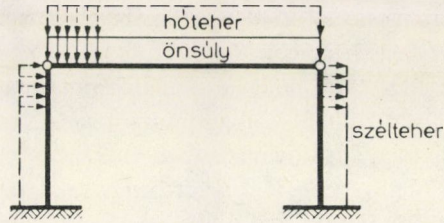
## 1. Terhelési tartományok

A terhelési tartomány — egy tartószerkezet méretezésénél figyelembe veendő teherkombinációk sokasága — egy  $n$  dimenziós tér tartományaként ábrázolható. Az alábbiakban egy földszintes csarnok példáján bemutatjuk, hogyan állítható össze a terhelési tartomány a terhek szintjén, és ez hogyan transzformálható az igénybevételek szintjére.

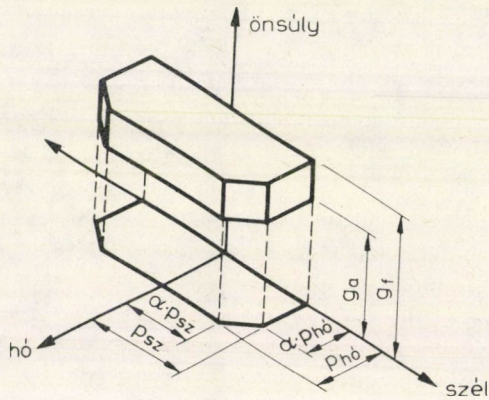
Földszintes csarnok esetén három jelentős terhet említhetünk meg: önsúly, hóteher, szélteher (1.1. ábra).

Minden egyes teherfajtát külön koordinátangelyen ábrázolva egy téglatestet kapunk terhelési tartományként. Szabályzatunk szerint a mértékadó teherkombinációban csak egy esetleges terhet kell teljes értékkel figyelembe venni, a többi esetleges terhet egyidejűségi csökkentő tényezővel. Így a terhelési tartományt le szabad sarkítani (1.2. ábra).

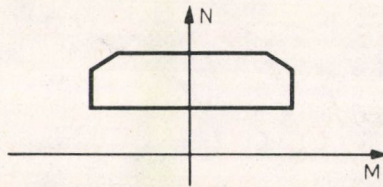
A mértékadó terhek tartományát célszerű az igénybevételek koordináta-rendszerébe átváltatni. Erre szolgálnak a szilárdságtan jól ismert módszerei. Alul befogott pillérű csarnokoknál az oszlop alsó keresztmetszetében ébrednek a legnagyobb igénybevételek. Ennek a keresztmetszetnek a terhelési tartományát az 1.3. ábra mutatja.



1.1. ábra



1.2. ábra



1.3. ábra

A statikai számításnak azt kell bizonyítani, hogy a terhelési tartományt teljes egészében tartalmazza a teherbírési tartomány.

A terhelési tartomány előállítása térbeli, bonyolultabb szerkezeteknél célszerű, mert ezekben az esetekben nem tudjuk kellő biztonsággal meghatározni a szerkezetre legveszélyesebb mértékadó teherkombinációt.

A terhelési tartományok segítségével módszeresen előállíthatjuk az összes mértékadó kombinációt és ellenőrizhetjük ezekre a szerkezetet. Bonyolultabb esetekben célszerű számítógép alkalmazása.

Merevítés nélküli csarnok esetében a pillérek két irányban dolgoznak, ferdén külponosan nyomottak. Így a széliránytól is függ a pillérek igénybevétele, önmagában is kétparaméteres teher. Ezért részletesebben foglalkozunk a szél terhelési tartományával.

### *A szél terhelési tartománya*

A szél terhelési tartományát az egymásra merőleges falakkal határolt lapos tetűjű zárt épületre határozzuk meg. Ugyanezek a megfontolások használhatók más épülettípus esetén is.

A szél terhelési tartományát három részből állítjuk elő:

- a szélszívás-nyomás
- a szélsúrlódás az oldalfalakon
- a szélsúrlódás a tetőn.

Ezek mind más jellegűek, ezért célszerű külön-külön foglalkozni velük.

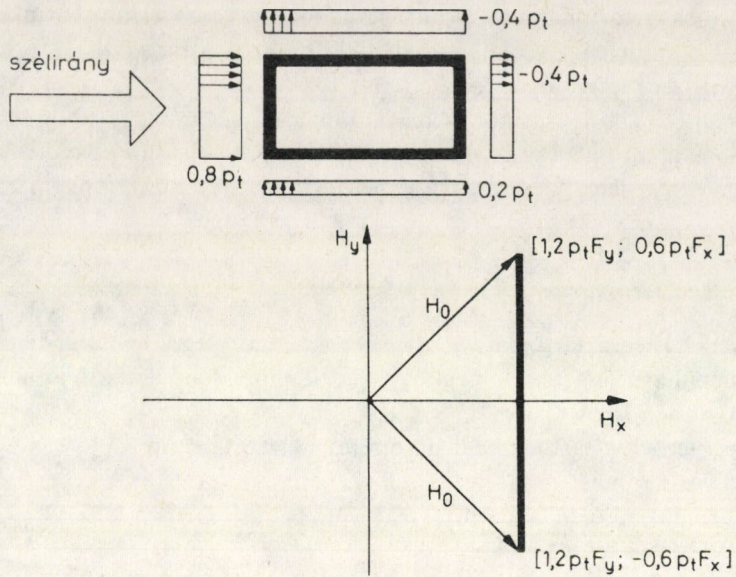
### *A szélszívás-nyomás terhelési tartománya*

A vizsgált esetben minden falnak, ill. falszakasznak van párja, ami vele párhuzamos, de ellentétes irányú szélterhet kap. Ezekre a falszakaszokra alkalmazható a szélszívás, ill. szélnyomás együttes alaki tényezője az MSZ alapján. Meg kell jegyezni, hogy míg az egyik irányú falaknak a széliránnyal bezárt szöge  $\alpha$ , addig a rá merőleges falaké  $90^\circ - \alpha$ . Jelentse  $H$  az épületre ható eredő szélterhet, melynek  $x$  irányú komponense  $H_x$ ,  $y$  irányú komponense  $H_y$ . A  $[H_x; H_y]$  koordináta-rendszerben ábrázolható egy tartomány, mely megmutatja, hogy különböző szélirányok esetén mekkora  $H_x$ , ill.  $H_y$  szélterhet kell számításba venni. Amennyiben a szél iránya egybeesik az  $x$  tengellyel, a szélterhet  $H_x$  komponensét 1,2-es együttes alaki tényező figyelembevételével kell meghatározni az  $Y$  tengellyel párhuzamos falfelületeken. A  $H_y$  komponens meghatározásánál az  $X$  tengellyel párhuzamos falfelületeken működő szélszívás-nyomást vesszük figyelembe. Akkor kapjuk a legnagyobb  $H_y$  irányú erőt, ha az egyik felületen 0,2-es, a másik falon  $-0,4$ -es alaki tényezőt veszünk figyelembe. De ez tetszőleges irányban működhet (1.4. ábra).

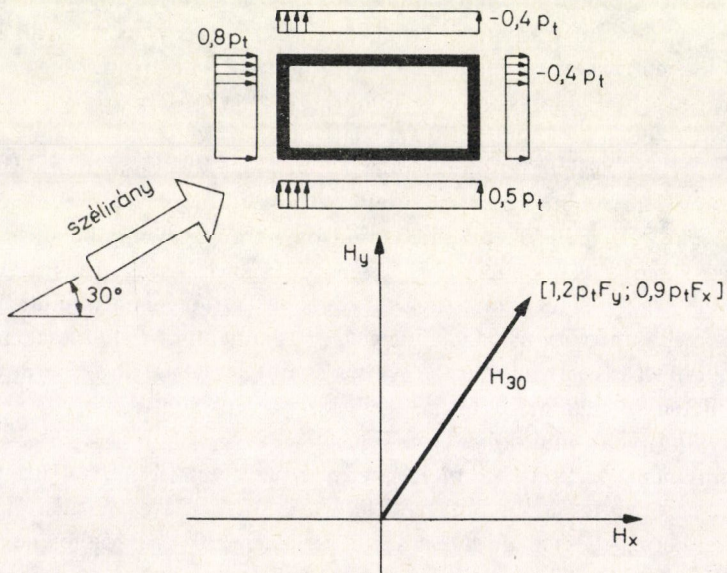
Amennyiben a szélirány kis mértékben eltér az  $X$  tengelytől, a 4. ábrán látható, hogy az 1,2-es együttes alaki tényező változatlanul érvényes a szélirányra közel merőleges felületre, egészen addig, amíg a szélirány  $30^\circ$ -os szöggel nem tér el a merőlegestől. A széliránnyal közel párhuzamos felületeken viszont erősen változik az alaki tényező.  $30^\circ$ -os szélirány esetén az együttes alaki tényező egészen 0,9-ig növekszik fel (1.5. ábra).

Látható, hogy a  $30^\circ$ -os szélirány esetén nagyobb szélterhet adódik, mint a felületekkel párhuzamos, ill. merőleges szélirány esetén.  $0$  és  $30^\circ$  között a szélterhet  $H_x$





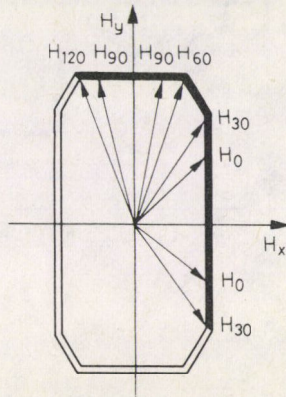
1.4. ábra



1.5. ábra



irányú komponense változatlan, a  $H_y$  irányú komponens változik.  $60^\circ$ -os szélirány esetén már a  $H_y$  irányú komponens eléri maximumát, és a  $H_x$  irányú komponenst kell 0,9-es együttes alaki tényezővel számítani. Az 1.6. ábrán vastag vonallal jelöltük az első síknegyedben meghatározható szélerő-eredőket. Látható, hogy a terhelési tartománynak két sarokpontja van egy síknegyedben, és ezek a sarokpontok a tengelyekre tükrözhetőek, így kapjuk meg a szélszívás-nyomás nyolcszögű terhelési tartományát, amit kettős vonallal jelöltünk.



1.6. ábra

Tehát az MSZ előírásai a szél terhelési tartományaként szívásra és nyomásra egy nyolcszöget határoznak meg, melynek csúcspontjai a  $30^\circ$ , ill.  $60^\circ$ -os szélirányhoz tartozó eredő szélerők. Ilyen irányú szél esetén az egyik irányban 1,2-es, a másik irányban 0,9-es együttes alaki tényezővel kell számolni.

Ez úgy is megfogalmazható, hogy a főirányokban számított szélterheket 0,75-ös egyidejűségi tényező alkalmazásával kell működtetni.

A továbbiakban ezt a nyolcszögű terhelési tartományt nevezzük a szélszívás-nyomás terhelési tartományának. A további számításokban ezt vesszük alapul, és ezt a terhelési tartományt egészítjük ki a többi teher és hatás terhelési tartományával.

Így megkapjuk a szélszívás-nyomás terhelési tartományát az épület egy kitüntetett pontjára. Ez a pont a homlokzati felületeknek a következő szabály szerint vett súlypontja:

$$x_s = \frac{\sum x_i \xi_i}{\sum x_i}$$

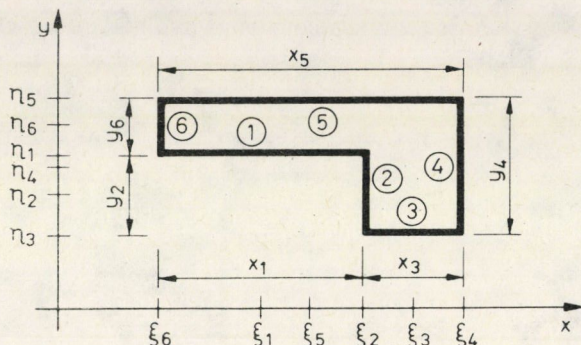
$$y_s = \frac{\sum y_i \eta_i}{\sum y_i}$$

ahol  $x_i$  és  $y_i$  — az egyes homlokzati felületek hossza



$\xi_i$  és  $\eta_i$  — a homlokzati felületeknek az alaprajzi értelemben vett súlypontjának koordinátái

$x_s$  és  $y_s$  — a szélszívás-nyomásból származó szélerek eredőjének helye.  
Egy adott épület esetén a különböző mennyiségek értelmezése:



1.7. ábra

Miután az épületre ható legnagyobb vízszintes erő a szélszívás-nyomás eredője, az épület kialakításánál törekedni kell arra, hogy a homlokzati felületek súlypontja essen egybe az épület csavarási középpontjával.

A szélteher terhelési tartományát fel lehet írni az épület tetszőleges pontjára, ebben az esetben minden vízszintes erőkombinációhoz egy csavarónyomaték is tartozik, ami a földem síkjában működik.

#### *A szélsúrlódás terhelési tartománya*

A szélsúrlódás hatása sokkal kisebb, ezért a legnagyobb szélszívás-nyomáshoz tartozó szélirányhoz vesszük fel a súrlódó szélerek nagyságát. Az épület oldalfalain a teljes szélsúrlódás  $\sin 30^\circ$ , ill.  $\cos 30^\circ$ -szorosát vesszük fel, a tetőfödém pedig a szélerek eredőjét  $30^\circ$ , ill.  $60^\circ$ -osnak tételezzük fel. Tehát a szélirányt mindig  $30^\circ$ , ill.  $60^\circ$ -osnak tételezzük fel.

Az épület oldalfalain keletkező szélsúrlódás eredője szintén az épület egy kitüntetett pontján megy át, ez általában nem egyezik meg a szívásból, ill. nyomásból származó szélerek támadáspontjával. Az előbbit a következő összefüggésekből számíthatjuk, hasonló módon, mint a szélszívás-nyomás esetén (1.7. ábra).

A tetőfödém keletkező szélsúrlódás eredője a tetőfödém súlypontján megy át.

A különböző szélterhek eredője adja a szél együttes terhelési tartományát, amelyet centrális nyolcszög ír le a kétirányú vízszintes erők  $[H_x; H_y]$  koordináta-rendszerében. Attól függően, hogy az épület melyik pontjára írjuk fel ezt a terhelési tartományt, ennek minden sarokpontjához más csavarónyomaték tartozik.

### *Vízszintes hatások*

A szerkezetekben fellépő hőmérsékletváltozás hatására létrejövő igénybevételeket számításba kell venni. A figyelembe veendő hőmérsékletváltozás nagyságát az épületfizikai tervező szolgáltathatja. Számításainkban csak a teljes födémhárcsa egyenletes hőmérsékletváltozásával számolunk, a beton lineáris hőtágulását vesszük figyelembe:

$$\Delta l = \alpha l \Delta t$$

Ebből a hatásból származó vízszintes erőket az igénybevétel-számítás során vesszük figyelembe.

Az előregyártott épületek 1—2 hetes — gyakran hőérlelt — elemekből épülnek. Ezért a nagyobb épületeknél jelentős igénybevételek keletkezhetnek a födém zsugorodásából. A számításokban feltételezhető, hogy a zsugorodás fele már lejajlott, és a továbbiakban a másik féltérteket vesszük számításba. A beton zsugorodásának hatása nagyon hasonlít a hőmérsékletváltozáshoz, hiszen mindkét hatás a födémhárcsa hosszváltozását eredményezi. Célszerű a két hatás együttes figyelembevétele. 20 °C-os lehülés éppen 0,02%-os fajlagos alakváltozást okoz, tehát ennyivel nagyobb mértékű lehülést fogunk számításba venni. Nem lehetetlen, hogy régebbi, több hónapos elemekből készül az épület födém szerkezete, ezért az épület felmelegedését teljes értékkel vesszük figyelembe, a zsugorodás hatását ebben az esetben elhanyagoljuk.

### *A szélteher és a hőmérsékletváltozás együttes hatásának figyelembevétele*

A szélteher és a hőmérsékletváltozás egymástól függetlenül felléphet a szerkezeteken. Ezért a szélteher nyolcszögletű tehertartományát ki kell egészíteni a hőmérsékletváltozás terhelési tartományával. A szélteher kétparaméteres teher, a hőmérsékletváltozás egyparaméteres teher. A teljes terhelési tartomány szintén kétparaméteres lesz, és úgy kaphatjuk meg, hogy a szélteher terhelési tartományát eltoljuk a hőmérsékletváltozás-vektor meghatározta irányokba. Az így kapott tartományok burkolója lesz a vízszintes terhek teljes terhelési tartománya, aminek 10 sarokpontja lesz, hiszen lesz két pont, amelyet mindkét irányban el kell tolni, a többi sarokpontoknak pedig csak egy új felel meg.

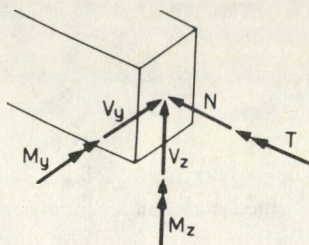
Amennyiben a függőleges terhek hatását is figyelembe vesszük, a terhelési tartomány kibővül a derékerők tengelyével.

Külponos függőleges erők esetén a terhelési tartomány az origótól eltolódik és eltorzul. Ennek követése csak számítógéppel lehetséges. Tanszékünkön elkészült egy számítógépi program, mely mindezek figyelembevételével határozza meg egy földszintes csarnok pillérének terhelési tartományát.



## 2. Vasbeton rudak teherbírési tartományai

Térbeli erőjátékú rúdszerkezet esetén a keresztmetszeti szintű terhelési tartományok hatdimenziós koordináta-rendszerben írhatók le. A koordináta irányok a következő igénybevétel komponenseknek felelnek meg (2.1. ábra)



N: derékerő  
M: hajlítónyomaték  
V: nyíróerő  
T: csavarónyomaték

2.1. ábra

Szokásos szerkezeti kialakítás és statikai-kinematikai teherrendszer mellett a fenti igénybevétel komponensek „súlya” az egyes szerkezeti elemek jellegétől függően eltérő.

A függőleges tengelyű oszlopokban a hajlítónyomatékok és a derékerő hatása dominál, a nyíróerő összetevők és a csavarónyomaték a gyakorlati esetek jelentős részében elhanyagolható. A vízszintes tengelyű rúdelemek — gerendák — keresztmetszeteiben viszont a vízszintes síkban működő nyíróerő és hajlítónyomaték, valamint a derékerő hatását nem veszik figyelembe a tervezői gyakorlatban.

A három fennmaradó igénybevétel különböző terhelési eseteknek megfelelő kombinációi már mindkét szerkezeti elem esetén jól szemléltethetők térbeli koordináta-rendszerben.

Az egyes szerkezeti elemek keresztmetszeteinek teherbírési ellenőrzését akkor tudjuk a terhelési és teherbírési tartományok összehasonlításának módszerével elvégezni, ha teherbírési tartományukat a megfelelő terhelési tartomány változóinak terében állítjuk elő. A következőkben vasbeton oszlop- és gerendaelemek teherbírési tartományainak kérdéseivel foglalkozunk.

### 2.1. Vasbeton oszlopok teherbírési tartománya

#### 2.1.1. A határállapot egzakt definíciója

Az MSZ 15022/71 szabványlap 3.2 fejezetének értelemszerű alkalmazásával megnyugtatóan sikerült megfogalmazni az axiális igénybevételű keresztmetszet teherbírési határállapotának algoritmusát. Mivel ez szemléletében és néhány kisebb

jelentőségű tartalmi vonatkozásban is eltér a szabványban közöltektől, célszerűnek tartjuk a teherbírási határállapotnak — az általunk alkalmazott — algoritmikus szemléletű definícióját közölni.

Alapelvek: a sík keresztmetszetek (általában) síkok maradnak; az anyagok viselkedését az idealizált diagram írja le; az egyensúlyi követelményeknek teljesülni kell.

A teherbírási határállapotot a 2.2. ábra foglalja össze, illetve szemlélteti.

A fenti alapelveket az alábbiak szerint értelmeztük:

- a) Az eredetileg sík keresztmetszet sík marad. A fajlagos alakváltozást ábrázoló síkot egy egyenes és egy pont határozza meg: egyrészt a *nyomott betonöv határvonala* (ahol  $\varepsilon_{b0} = -0,5\%$ ), másrészt az ettől legtávolabbi *nyomott betonszál vagy húzott acélbetét* közül az, amelyikben a fajlagos alakváltozás először éri el a szabvány 1.31 szakaszban közölt határértékeket ( $\varepsilon_{bH} = -2,5\%$ ,  $\varepsilon_{aH} = +25\%$ ). Az elfordulási tengely ( $\varepsilon = 0$ ) a keresztmetszeten kívül is lehet, központos nyomás esetén a végtelenben. Abban az esetben, ha az  $\varepsilon_{aH}$  mértékadó, akkor  $\varepsilon_{b\max} < 2,5\%$ , ezért az elfordulási tengely szélső száltól mért távolsága nagyobb lesz, mint a szabvány 10. ábráján közölt  $x_0 = 1,25x$ .
- b) A betonkeresztmetszet nyomott övének határvonala ott van, ahol  $\varepsilon_b = \varepsilon_{b0} = 0,5\%$ . A határvonal a keresztmetszeten kívül is lehet (külpontos húzás vagy kis külpontosságú nyomás esetén).
- c) Az *acélbetétek feszültségét* a fajlagos alakváltozás síkja határozza meg:

$$\sigma_{ai} = E_a \varepsilon_i, \quad \text{de} \quad \sigma'_{aH} \leq \sigma_{ai} \leq \sigma_{aH}$$

ahol

$$\varepsilon_i = \frac{t_i}{x_0 - x} 0,0005$$

Ha a nyomott acélbetét átmérője  $d < 12$  mm (e. gy. szerkezetnél  $d < 10$  mm) vagy a kengyeltávolság  $t_k > 12d$ , akkor  $\sigma_{ai} = 0$ .

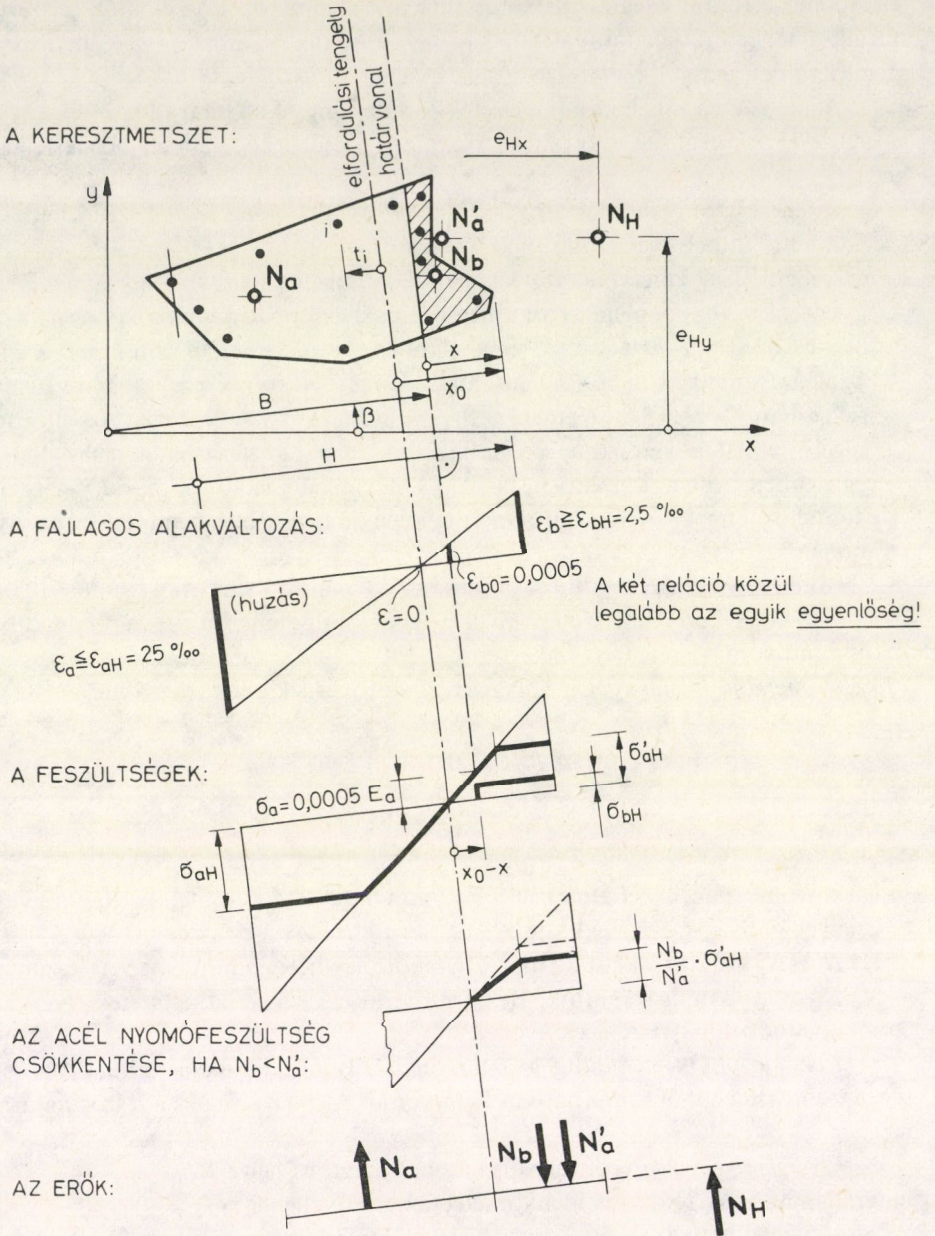
- d) Ha  $N'_a > N_b$  adódna, akkor az összes nyomott acélbetét számításba vett feszültségét  $N'_a/N_b$  arányban csökkentjük. Ez ellentmond a sík keresztmetszetek elvének, az ebből adódó hiba viszont elenyésző.

*Kiinduló adatként* mindig a határvonal helyét tekintjük ismertnek, az összes többi mennyiség ebből számítható. A határvonalat a  $B$  távolság és a  $\beta$  szög határozza meg.

*Eredmény* a belső erők eredőjének nagysága és helye ( $N_H$ ,  $e_{Hx}$ ,  $e_{Hy}$ ), azaz a határállapotot okozó axiális igénybevétel (az eredő ellentettje).

Megfigyelhető az ábrán, hogy a belső erők eredője és az összetevők ( $N_a$ ,  $N'_a$ ,  $N_b$ ) nem esnek egy síkba, ezért a „hajlítás síkja” nem értelmezhető, de nincs is rá szükség. Ha  $e_{Hx}$  és  $e_{Hy}$  helyett  $M_{Hy}$  és  $M_{Hx}$  hajlítónyomatékokat kívánunk alkalmazni, akkor önkényes középpontot kell fölvenni (pl. az  $N_{H0}$  nyomóerő helyét, vagy a „geometriai középpontot” — ez utóbbi pl. U vagy T alakú szelvénynél nehezen értelmezhető).





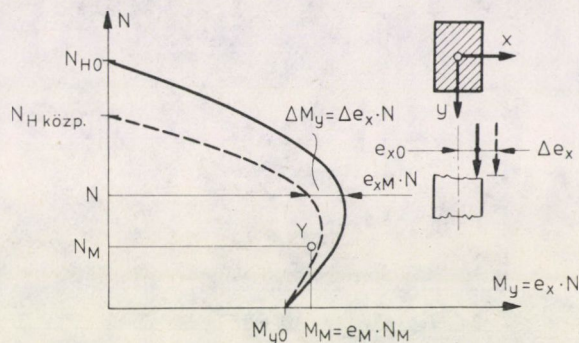
2.2. ábra



Látható az is, hogy a nyomott beton határvonalának helyzete különböző lehet (általában nem merőleges a „hajlítás síkjára”). Az  $x$ ,  $x_0$ ,  $t_i$ ,  $h$  stb. méreteket — jobb híján — a határvonalra merőleges helyzetűnek tekintjük.

### 2.1.2. A teljes teherbírési tartomány

Axiálisan igénybevett keresztmetszet teherbírásának dokumentálására elterjedt és bevált az  $N$ — $M$  teherbírési határvonal, vagy röviden *teherbírési vonal*. Itt  $N$  és  $M$  az egyidejűleg fellépő nyomóerő és hajlítónyomaték. A teherbírési vonalat általában szimmetriasíkba eső és erre merőleges irányú külpontosságokhoz szerkesztik, a hajlítás síkjában felvett koordináta-rendszerben (2.3. ábra folytonos vonallal rajzolt



2.3. ábra.  $N$ — $M$  teherbírési határvonal

görbe). A vonal azokat az  $N_H$ — $M_H$  értékpárokat ábrázolja, amelyek hatására a keresztmetszet teherbírési határállapotba kerül. Ha egy adott  $N_M$ — $M_M$  értékpár a vonalon belüli teherbírési tartományba esik, akkor a keresztmetszet még biztosan nem kerül teherbírési határállapotba, azaz teherbírása megfelelő (2.3. ábra,  $Y$  jelű pont).

Ha a rúd befogási viszonyai ismertek, a  $\Delta e = \Delta e_0 + \Delta e_t$  külpontosság-növekmény előre kiszámítható. Ekkor célszerű ábrázolni a „redukált” teherbírési vonalat is, hogy a tervezőnek a teherbírás ellenőrzése közben csak az  $e_0 = M_M/N_M$  „tervezett” külpontosságot kelljen meghatároznia, és ne kelljen külpontosság növekménnyel bajlódnia (2.3. ábra, szaggatott vonal). Ez a lehetőség fennáll pl. típusszerkezetek oszlopainál.

Szükség esetén egyes ferde irányokhoz tartozó teherbírési vonalakat is megadnak (2.4. ábra, éta irány). E vonalak az  $N$ — $M_x$ — $M_y$  teherbírési felület  $N$  tengellyel párhuzamos (függőleges) síkmetszetei. A zárt felület a teherbírési tartományt határolja.

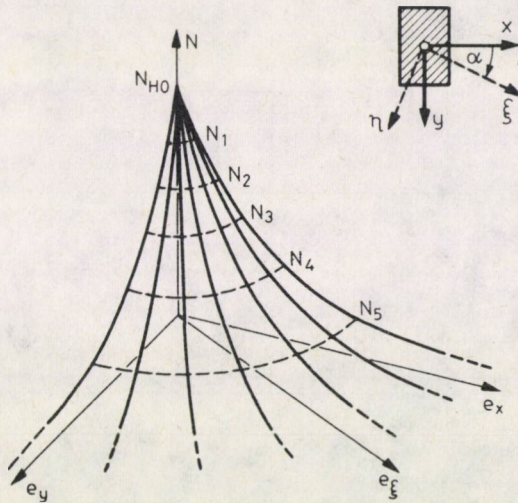
A 2.4. ábrán a felület egy szegmensét vázoltuk. A hagyma alakú felület ábrázolása azonban nagyon nehézkes. A teherbírési felületen még egyetlen általános helyzetű pontot — teherbírési határállapotot okozó igénybevétel kombinációt — meghatározni is hosszadalmas művelet.







Az adott nagyságú nyomóerő határközpontosságait ábrázoló görbét a továbbiakban központossági határvonalnak, vagy röviden *központossági vonalnak* nevezzük. A vonalon belüli terület teherbírási vagy központossági tartománynak nevezhetjük. A 2.6. ábrán látható, hogy a központossági vonalak az  $N - e_x - e_y$  teherbírási felület  $N$  tengelyre merőleges (vízszintes) síkmetszetei (szintvonalai). Az  $N - M_x - M_y$  teherbírási felület szintvonalai ugyanazon  $N$  erő központossági vonalához hasonló görbék, ugyanis  $\alpha$  irányú központosság esetében  $M\eta = e\xi$ .  $N$ , azaz  $M\eta$  és  $e\xi$  között lineáris összefüggés van (2.3. ábra).



2.6. ábra

Elég sűrűn megrajzolt központossági vonalakkal a teherbírás ellenőrzése egyszerű és szemléletes:

- adott helyzetű nyomóerő határértéke a kifelé következő központossági vonalra írt érték (pl. a 2.7. ábráról leolvasható, hogy az  $\alpha$  irányban  $e_M = e_x$  központosságú nyomóerő határértéke éppen  $N_H = N_4$ );
- adott nagyságú nyomóerő határközpontosságát a hajlítási sík és a megfelelő központossági vonal metszéspontja jelöli ki (pl. a 2.7. ábráról leolvasható, hogy az  $\alpha$  irányban központos  $N_M = N_4$  nagyságú nyomóerő központosságának határértéke  $e_H = e_x$ ).

Két központossági vonal között lineáris interpolációt lehet alkalmazni.

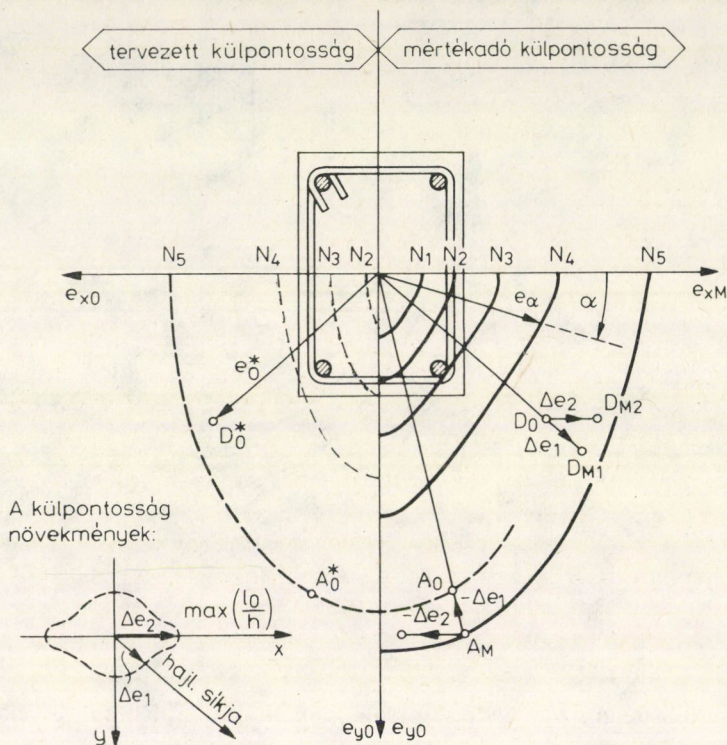
A szabvány 3.21 szakaszában előírt központosság-növekmény számításba vétele is egyszerű. A dőfspontot a tervezett központosság (2.7. ábra,  $D_0$  pont) helyéről elmozdítjuk: először  $\Delta e_1$  értékkel a hajlítás síkjának megfelelő 1., majd  $\Delta e_2$  értékkel a legnagyobb  $l_0/h$  hajlékonyságnak megfelelő 2. irányban ( $D_{M1}$ , ill.  $D_{M2}$ ). Az a mértékadó központosság lesz veszélyes, amelyik közelebb esik a következő központossági



vonalhoz. Ábránkon pl. a  $D_{M2}$  döféspont helyzete veszélyesebb, de még ez is az  $N_5$  erőhöz tartozó teherbírási tartományon belül van.

Vajon az  $N-e_x-e_y$  teherbírási felület aszimptotikus tulajdonsága nem akadály-e a szintvonalas ábrázolásnak? Könnyen belátható, hogy nem.

Oszlopokban tiszta hajlítás ritkán keletkezik. Általában megadható az a legkisebb nyomóerő, ami egy szerkezeti rendszer oszlopaiban előfordulhat. Az ehhez



2.7. ábra. A külpontossági határvonalak

tartozó külpontossági tartomány még nem nagyméretű (általában 1 méternél kisebb átmérőjű), ezért kényelmesen ábrázolható akár  $M = 1:1$  vagy  $1:2$  léptékben is. A kicsi nyomóerők határkülpontosságainak ábrázolására oszlopok esetében nincs szükség, bár ez is megoldható más léptékkel. A 2.5. ábra jobb oldalán megjelöltük azt az ordináta szakaszt, ahol az  $M_M$  értékek elhelyezkedhetnek. Az  $N-e$  diagramnak (felületnek) ez a része kb.  $45^\circ$ -os helyzetű, ami szintvonalas ábrázolásra ideális.

Az általános axiális igénybevétel teherbírási felületének gyakorlati célú ábrázolását már javasolták, azonban nem a teherbírási felületet, hanem egyes paramétereit ábrázolták. Ez a módszer körülményessége miatt gyakorlati felhasználásra alig alkalmas.

Gyakran a rúd befogási viszonyai előre ismeretesek (sorozatban gyártott szerkezetek, típusszerkezetek). Ekkor a külpontosság növekményeket mindegyik irányban célszerű előre meghatározni, és táblázatosan vagy grafikusán közölni. Ilyen grafikon látható a 2.7. ábra bal alsó részén.

A teherbírás ellenőrzése tovább egyszerűsödik, ha a külpontossági vonalakat redukáljuk a külpontosság-növekmények értékével, azaz megkeressük azokat az  $e_0$  tervezett külpontosságokat, amelyek megnövelésével a külpontossági vonal pontjai létrejöhetnek. Pl. a 2.7. ábrán jelölt  $A_M$  pont mértékadó külpontosságából levonjuk először a  $\Delta e_1$ , majd a  $\Delta e_2$  növekményt. A veszélyesebb elmozdulást jelentő növekmény — példánkban a  $\Delta e_1$  — kijelöli a tervezett külpontosságot — példánkban az  $A_0$  pontot. Az így kapott pontokat összekötő görbe a *redukált külpontossági vonal* (szaggatott vonalak a 2.7. ábra bal oldalán).

A redukált külpontossági vonalak egyesítve tartalmazzák a vasbeton szabványban előírt mindkét irányú külpontosság-növekmény hatását; ugyanígy lehetőség van a külpontosság-növekménynek a szabványban előírtnál pontosabb — éppen ezért bonyolultabb — számításba vételére is, anélkül, hogy a tervező munkája bonyolódna.

Redukált külpontossági vonalak alkalmazásával a tervezőnek mindössze az  $e_{x0} = N_M/M_{yM}$  és az  $e_{y0} = N_M/M_{xM}$  tervezett külpontosságokat kell kiszámítani. Ezután — a keresztmetszet rajzával azonos léptékben — ábrázolni kell a dőféspontot, majd a kifelé következő külpontossági vonalról leolvasható az  $N_H$  értéke. A módszert egyszerűnek és szemléletesnek tartjuk, mert nem kell segédmennyiségeket kiszámítani, továbbá az ábrán a távolság távolságot jelent (nem nyomatóékat, erőt stb.).

A leírt redukálás eredménye úgy is megfogalmazható, hogy amíg a külpontossági vonalak a keresztmetszet teherbírását, addig a redukált külpontossági vonalak a szerkezeti elem (oszlop) teherbírását ábrázolják.

### 2.1.3. A teherbírési tartomány előállítása

A teljes teherbírési tartomány gyakorlati célú előállítására számítógépes és rajzoló program készült a fenti elvek alapján, R 10 számítógépre és CALCOMP 936/925 rajzolóautomatára. A program tetszőleges keresztmetszetű vasbeton oszlophoz kiszámítja és lerajzolja:

- az adott  $\alpha$  irányokhoz tartozó  $N_H - M_H$  nyomásvonalakat;
- vagy az adott  $N_M$  nyomóerők  $e_{Hx} - e_{Hy}$  határkülpontosságait;
- vagy az adott  $N_M$  erők mellett megengedhető  $M_{Hy} - M_{Hx}$  hajlítónyomatékok diagramjait;
- kívánság esetén a fönti vonalak „redukált” változatát.

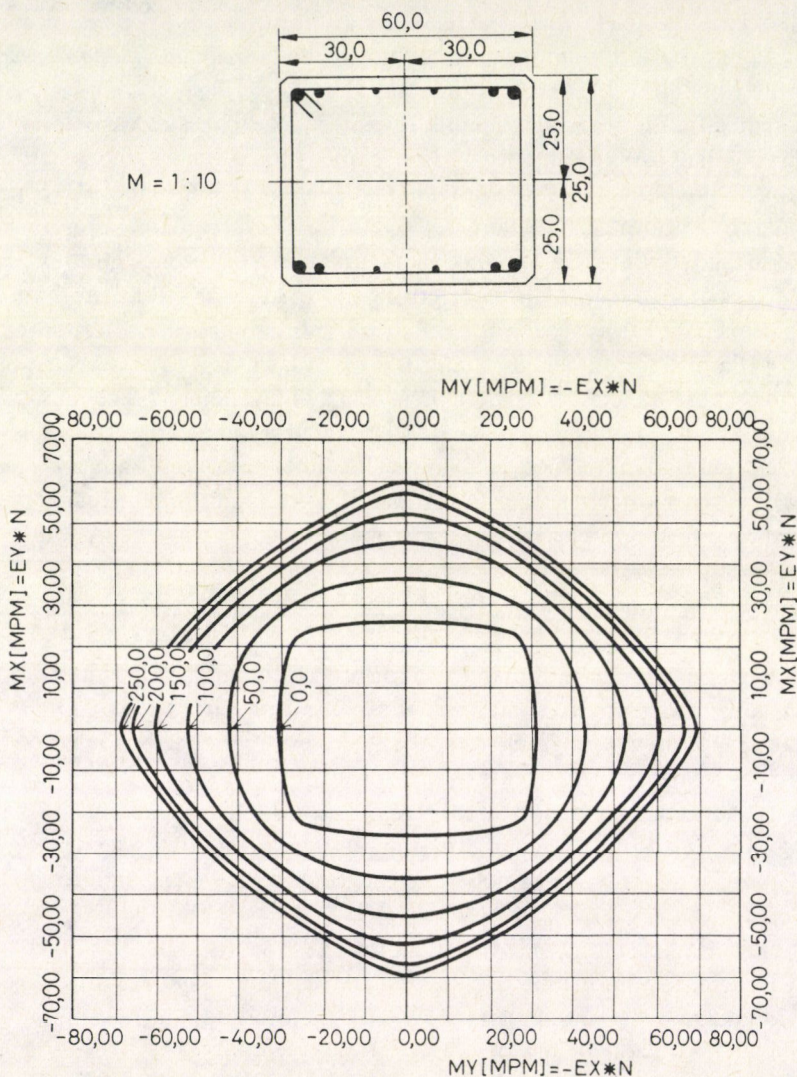
A programot harmadik éve használják, és nagyszámú oszlop teherbírását kiszámították. Azok a statikus tervezők, akiknek módjuk van hozzáférni, szívesen fordulnak ehhez a szolgáltatáshoz.

Példaként a 2.8. ábrán bemutatjuk az OK 12-50/60 jelű előre gyártott vasbeton oszlop keresztmetszetének teherbírési diagramját: az egyes görbék azt mutatják, hogy



a fölírt nyomóerő mellett a különböző irányokban mekkora hajlítónyomatékok működnek. A nyomóerő 0,0 Mp-tól 250,0 Mp-ig változik.

Ennek a programnak egy változatát beépítettük a BVM-TIP építési rendszer tartószerkezettervezési programrendszerébe. Itt előállítjuk valamennyi rendszerkomponens pillérkeresztmetszet teljes teherbírási tartományát (az  $N_H - M_{Hy} - M_{Hx}$  felület negyedrészenek mintegy 20 pontjával jellemezve), és ezt adattárban őrizzük. Az egyes konkrét épületpillérek terhelési tartományairól (amelyeket megnövelünk a  $\Delta M = \Delta e N_M$  értékkel) megállapítjuk, hogy belül vannak-e a teherbírási tartományon.



2.8. ábra

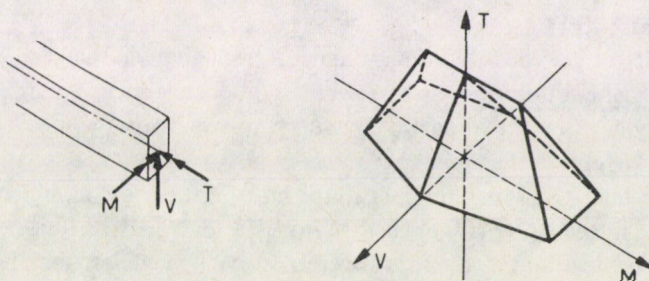


Az összehasonlítás során lehetőség van a teherbírás mennyiségi értékelésére is: grafikusan ábrázoljuk a terhelési és teherbírási tartomány azonos „szintjeit” (vízszintes síkmetszeteit), amelyek távolsága és viszonya a kihasználtsággal van összefüggésben. Jelenleg dolgozunk olyan módszereken, amelyekkel a terhelési és teherbírási tartomány viszonya skaláris mérőszámokkal minősíthető.

## 2.2. Vasbeton gerendák teherbírási tartománya

### A teherbírási tartomány számítása

A vasbeton gerendák keresztmetszeteinek teherbírási tartománya egy olyan térbeli koordináta-rendszerben ábrázolható, amelynek koordinátatengelyei a függőleges irányú nyíróerőnek, a rúdtengelyt tartalmazó függőleges síkban hajlító nyomatéknak és a rúdtengely körül csavaró nyomatéknak felelnek meg (2.9. ábra).



2.9. ábra

A vasbeton gerendakeresztmetszet teherbírásának meghatározása összetett igénybevétel esetén olyan vasbeton-elméleti probléma, amellyel számos kutatóhelyen foglalkoznak; esetenként még a koordinátatengelyekkel alkotott metszéspontok meghatározására kidolgozott módszerek sem teljesen megnyugtatók.

Kutatásaink során elfogadtuk a vasbetonszerkezetek teherbírásának számítására vonatkozó hazai szabványok (MSZ 15022/1 és MSZ 15022/4) előírásait.

A következő kérdésekre kerestünk választ:

1. Miért célszerű a vasbeton gerendák keresztmetszeteinek teherbírási tartományát előállítani?
2. Szabványelőírásaink alapján *egyértelműen meghatározható-e* a hajlított — nyírt — csavart vasbeton keresztmetszet teherbírási tartománya?
3. Milyen módszerrel célszerű a teherbírási tartományt előállítani?

1. Külpontosan nyomott keresztmetszet teherbírási tartományát fősíkban történő hajlítás esetén a tervezői gyakorlatban már hosszabb ideje alkalmazzák (nyomásvonal). Az — azonos síkban — hajlított-nyírt keresztmetszet határteherbírását nem szokták diagrammal ábrázolni. Ennek részben az összefüggés

egyszerűsége, részben az lehet az oka, hogy a keresztmetszet nyírási teherbírásának a gyakorlatban a hajlító határnyomatékhoz tartozó határnyíróerőt tekintjük, amivel általában a biztonság javára követünk el kisebb hibát. Ily módon a teherbírás tartomány egyetlen pontját állítjuk elő, amit valóban nem érdemes diagramon ábrázolni. Hajlítót—nyírt—csavart keresztmetszet háromdimenziós teherbírás tartománya a nagyszámú korlátozó feltétel miatt már nehezen áttekinthető. Ábrázolása emellett azért is célszerű lehet, mert támpontot adhat a meghatározása során alkalmazott teherbírás feltételek kritikai vizsgálatához.

Nagy számban alkalmazott — tipizált — szerkezetek esetén igen jelentős számítási megtakarítást jelent a teherbírás tartomány előállítás. Ez esetben ugyanis adaptáláskor már csak a terhelési és teherbírás tartomány összehasonlítását kell elvégezni.

További — a teherbírás tartomány szemléltetése mellett szóló — érv, hogy ismerete fejleszti a konstrukciós készséget; a terhelési tartományra való „igazítása” — mint ahogy azt már külpontosan nyomott elemek esetén is említettük — gazdasági előnyök forrása lehet.

2. A határigénybevétel komponensek általában képlékeny — esetenként rugalmas — állapotban érvényes egyensúlyi feltételekből határozhatók meg. E feltételek egyike sem tartalmazza egyszerre mindhárom igénybevételi összetevőt, amiből arra következtethetünk, hogy az igénybevételek egymásra hatása sok esetben még tisztázatlan. Mindemellett megállapítható volt, hogy a teherbírás feltételek körültekintő, megfelelő sorrendben történő és a logikai összefüggéseket figyelembe vevő alkalmazásával a magyar szabványelőírásoknak megfelelő teherbírás tartomány meghatározható.

3. A teherbírás tartományt határoló felület analitikusan nem állítható elő. A numerikus számítás a határfelület jellegzetes pontjainak meghatározására kell irányuljon. A kellő sűrűségben kiszámított pontok között közelítésképpen lineáris összefüggést feltételezünk, ami összhangban van a képlékenységtan konvexitási tételével. Mivel egy-egy kontúrpontra meghatározása is jelentős számítási ráfordítást igényel, a teherbírás tartomány számítására érdemes számítógépet alkalmazni.

A vasbeton gerendák hosszvasalásában a hajlító- és csavaróigénybevételből, harántirányú kengyelezésében pedig a nyíró- és csavaróigénybevételből ébrednek húzófeszültségek.

Mivel a csavaróigénybevétel felvételéhez mindkét típusú vasalásra szükség van, és másrészt az egyes határigénybevétel komponensek nem fejezhető ki a többivel explicit formában, célszerű a számítását úgy irányítani, hogy mindig ismert csavarónyomatékhoz tartozó határnyomatékot és határnyíróerőt kelljen csak meghatározni. Ezt úgy érjük el, hogy először

— a nulla nyíróerőhöz és hajlítónyomatékhoz tartozó csavaró határnyomatékot számítjuk ki ( $T_{ru}^0$ ), majd a  $T = \text{konstans}$  ( $\leq T_{ru}^0$ ) síkokban állítjuk elő a határfelület jellegzetes pontjait.

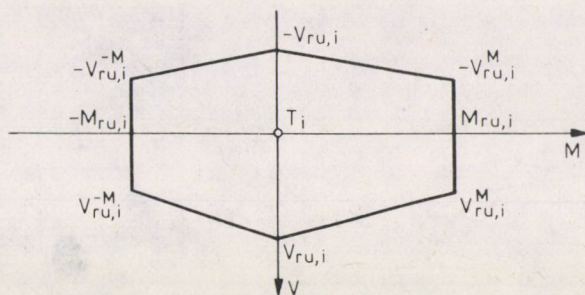


A teherbírasi testet ezáltal a csavarónyomatéki tengelyre merőleges szeleteivel írjuk le.

Egy-egy ilyen síkmetszet jellegzetes pontjai:

- a nulla hajlítónyomatékhoz tartozó pozitív és negatív határnyíróerő;
- a nulla nyíróerőhöz tartozó pozitív és negatív hajlító határnyomaték;
- a hajlító határnyomatékhoz tartozó pozitív és negatív határnyíróerő.

E jellegzetes pontok között a teherbírás változását közelítően lineárisnak tekintjük. A csavarónyomatéki tengelyre merőleges síkmetszeteket tehát nyolc pont határozza meg, amelyek közül 3—3 egy egyenesre esik, így a pontok egy hatszöget határoznak (2.10. ábra). Mivel a csavarónyomaték előjele közömbös, a teherbírasi test



2.10. ábra

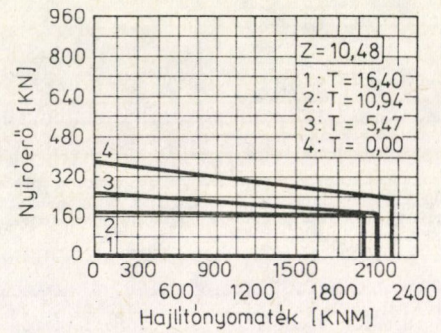
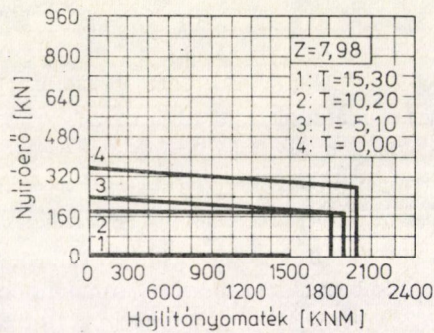
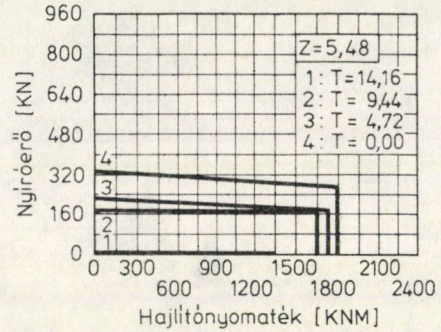
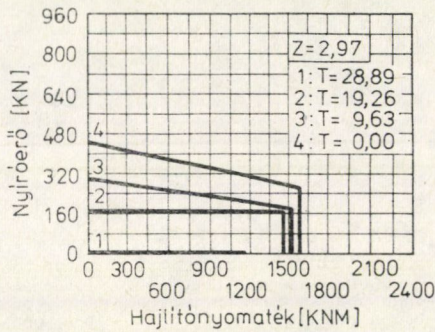
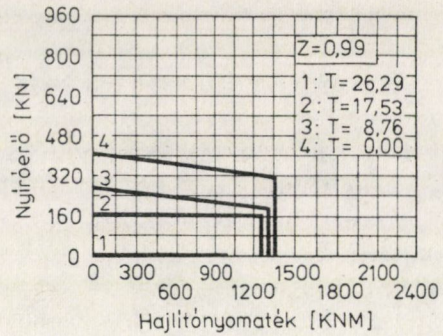
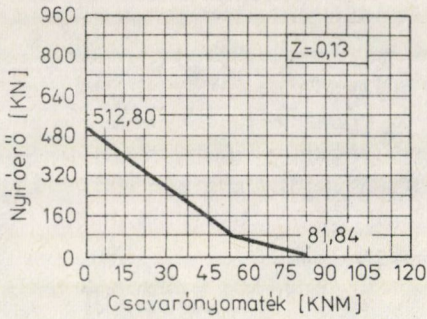
a  $T=0$  síkra szimmetrikus: elegendő csak a  $T \geq 0$  feltérbe eső részt ábrázolni. Ha a keresztmetszet vízszintes szimmetriatengellyel rendelkezik, a tartomány az  $M=0$  síkra is szimmetrikus, ami további egyszerűsítést tesz lehetővé. Végül ha a nyírási vasalás merőleges a rúdtengelyre, és az alsó és felső öv a rúdtengellyel párhuzamos, a  $V=0$  sík is szimmetriasík lesz. A fenti feltételek együttes teljesülése esetén elégséges a teherbírasi test egy tényolcadba eső részét számítani, illetve ábrázolni.

A mértékadó igénybevételek előjele esetenként előre ismert a statikai modellek és a várható terheknek megfelelően. Ilyenkor a testnek csak a megfelelő koordináta-irányokba eső részét érdemes előállítani. A határfelületet a csavarónyomatéki tengely irányában úgy linearizáljuk, hogy a síkmetszetek megfelelő pontjait egyenesszakasszokkal kötjük össze. Az eddigi tapasztalatok azt mutatják, hogy elegendő — egyenlő osztásközzel — négy síkmetszetet felvenni.

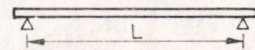
#### *Alkalmazási példa, tanulságok*

A 2.11. ábrán a BVM-TIP építési rendszerbe tartozó SIBf 30/152 jelű változó keresztmetszetű feszített vasbeton gerenda néhány keresztmetszetének teherbírasi tartománya látható. A számítások a Tervezésfejlesztési és Típustervező Intézet R 10 típusú számítógépére írt programmal készültek. A fenti alkalmazás a Tervezésfejleszté-





Jelölések:



$Z$  [M]

$T$ : Csavarónyomaték [KNM]

2.11. ábra

si és Típustervező Intézet megbízása keretében történt, amelynek során a BME Szilárdságtani és Tartószerkezeti Tanszéke kidolgozta a BVM-TIP építési rendszer tartószerkezettervezési programrendszerét.

Az elemszintű teherbírasi tartomány vasbeton gerendák esetén négydimenziós térben írható le. A negyedik dimenzió a teherbírasi rúdtengely irányú változása. A

keresztmetszetek teherbírási tartományát a rúdtengely mentén alkalmas helyeken felvett diszkrét pontokban határozzuk meg. Kellő sűrűségű osztás esetén az egyes keresztmetszetekhez tartozó teherbírási felületek megfelelő pontjai között lineáris interpoláció hajtható végre.

A szerkezeti elem teherbírását esetünkben hat keresztmetszet teherbírási tartományával közelítettük. A statikai modellnek — kéttámaszú tartó — és a várható terhek jellegének megfelelően a testnek csak a pozitív ténylegcsadba eső részét határoztuk meg, sőt ez elméleti támasz keresztmetszetében — mivel ott a mértékadó hajlítónyomaték nulla — csak e részttest  $M = 0$  síkmetszetét állítottuk elő. A szerkezeti elem szimmetriáját úgy használtuk ki, hogy a hat keresztmetszetet a tartó egyik felén jelöltük ki. Az elméleti támaszok közötti keresztmetszetek háromdimenziós teherbírási tartományának felületét — a számítás korábban ismertetett menetével összefüggésben —  $T = \text{állandó}$  szintvonalaival ábrázoltuk. Négy ilyen síkban számítottuk ki a metszetek csúcspontjait: a maximális csavarónyomaték harmadpontjaiban. A trapéz alakú síkmetszet maximális csavarónyomaték mellett egyenesszakasszá fajult.

A rendszerkomponensek teherbírási tartományainak kirajzoltatása több szempontból is előnyös:

- a nagyvolumenű számítások eredményeinek gyors, vizuális ellenőrzését teszi lehetővé: hasonló keresztmetszetek teherbírása közötti kirívó különbségek hibás bemenő adatokra — esetleg programhibára — engednek következtetni;
- a szerkezeti elemek teherbírási tartományaiból összeállított katalógus jó segítséget nyújt a hagyományos — kézi — adaptációs tervezés során. Megjegyzendő, hogy esetünkben a rajzoltatás önmagában semmilyen adatelőkészítő munkát nem igényelt: a rajzolóprogram az adatokat — amelyek a határigénybevételeket számító program eredményei — háttértárolóról olvassa be.

A teherbírási tartományok megjelenítése ugyanakkor felhívta a figyelmet a számítási modell fogyatékoságaira. Különösen feltűnő a kétdimenziós teherbírási tartomány konkáv jellege, de a háromdimenziós tartományok konkávitása is érzékelhető. E jelenségek okainak azonosítása részben megtörtént. További vizsgálatok szabványkiegészítő, illetve -módosító javaslatok kidolgozásához vezethetnek.

### **3. A terhelési és teherbírási tartományok egybevetése a teljes szerkezet szintjén**

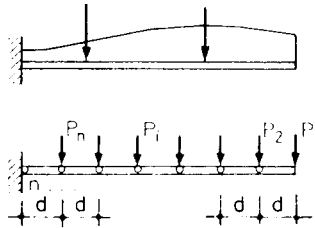
Mint említettük a terhelési és teherbírási tartományok egybevetése történhet oly módon is, hogy előállítjuk a teljes szerkezet teherbírási tartományát. Ennek során a teherbírást befolyásoló tényezők viszonylag szemléletesen jelentkeznek, ugyanakkor a feladat meglehetősen szokatlan, hiszen az általános módszer a szerkezetek méretezésénél éppen ennek ellenkezője: nem a teljes szerkezet teherbírási tartományát szoktuk az elemek teherbírásaiból felépíteni, hanem inkább a terhelést „bontjuk le” a szerkezeti elemek szintjére az igénybevételek, ill. feszültségek meghatározása



formájában. A jelen fejezetben a kevésbé szokásos utat kívánjuk követni, azonban e célra egy egyszerű szerkezeti modellt választunk, amelynél az általános probléma alapvető jellegzetességei viszonylag tisztán kidomborodnak.

### 3.1. Igénybevétel és teherbírás összefüggése statikailag határozott szerkezeten

Tekintsünk először is egy statikailag határozott konzoltartót, tetszőlegesen változó keresztmetszeti méretekkel és tetszőleges rúdtengelyre merőleges terheléssel. Ezen elemi feladatot is tovább egyszerűsítjük egy rugalmas csuklóból és azokat összekötő merev rudakból álló diszkrét modell felvételével. A diszkrét modellen a terhek is csak a rugalmas csuklók pontjaiban működnek (3.1. ábra).



3.1. ábra

A diszkrét modellek felvétele a tartószerkezetek vizsgálatának széles körben használt, a „mérnöki érzék” által is jogosnak elfogadott módszere. A diszkrét és a folytonos szerkezet viszonyának kérdéseivel a jelen cikkben nem kívánunk közelebbről foglalkozni, s figyelmünket a diszkrét modellre fordítjuk. A diszkrét modellünkön valamennyi, a szilárdságtani vizsgálat során szóba jövő jellemző a felvett rugalmas csuklók számának megfelelően  $n$  darab paraméterérték megadásával írható le, s ezeket az  $n$  skaláris értékből álló értékészleteket a szemléletes tárgyalás érdekében célszerű  $n$  dimenziós euklideszi terek vektorainak tekinteni. Így, ha a szerkezetre valamely adott teher működik, ennek leírásához meg kell adni az egyes rugalmas csuklók helyén (ill. a tartóvégen) működő  $P_1, P_2, \dots, P_n$  terheket, az  $n$  dimenziós teherter egy  $\bar{p}$  vektorát.

A teher hatására e szerkezeten nyomatékok ébrednek. Csak a rugalmas csuklókban ébredő nyomatékoknak van modellünk esetében jelentőségük, így a nyomatékra egy  $\bar{m} = M_1, M_2, \dots, M_n$  vektorral írható le. A teherter és a nyomatékter vektorai között — kis alakváltozások esetén — kölcsönösen egyértelmű lineáris megfelelés van, egyszerű statikai úton minden  $P_1, P_2, \dots, P_n$  teherhez meg tudjuk határozni a rugalmas csuklókban ébredő  $M_1, M_2, \dots, M_n$  nyomatékokat, és ha az utóbbiak vannak adva, azokból a terhek ismét visszaszámíthatók.

$$\bar{A} \bar{p} = \bar{m}, \quad \bar{A}^{-1} \bar{m} = \bar{p}.$$

A tartó teherbírását modellünk esetében a rugalmas csuklók határnyomatékai korlátozzák. Ha az egyes csuklók — előjeltől eltekintve — rendre  $M_{1H}, M_{2H}, \dots, M_{nH}$  nyomatéki értéket tudnak elviselni, a tényleges nyomatékokra nézve fenn kell állni az

$$M_1 \leq M_{1H}, M_2 \leq M_{2H}, \dots \text{ és } M_n \leq M_{nH}$$

feltételeknek.

E feltételek a nyomatékok  $n$  dimenziós terében egy „hiper-téglatestet” határoznak meg, amelynek (egydimenziós) élei párhuzamosak az  $M_1, M_2, \dots, M_n$  koordinátatengelyekkel, középpontja pedig az origó. Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy az adott szerkezet azon nyomatékrendszerek viselésére képes, amelyek nyomatékvektora

$$\bar{m} = [c_1 M_{1H}, c_2 M_{2H}, \dots, c_n M_{nH}] \quad (1)$$

alakú, ahol is

$$-1 \leq c_1 \leq 1, \quad -1 \leq c_2 \leq 1, \quad \dots \quad -1 \leq c_n \leq 1,$$

azaz a  $c_1, c_2, \dots, c_n$  paraméterek  $-1$  és  $+1$  közé esnek.

Kérdés, hogy szerkezetünk mely  $P_1, P_2, \dots, P_n$  terhek elviselésére alkalmas? E feladat megoldása érdekében először is határozzuk meg azon tehervektorokat, amelyek egy, és csakis egy rugalmas csuklóban (rendre az elsőben, másodikban,  $\dots$   $n$ -edikben) ébresztenek egységnyi nyomatékot. E tehervektorokat karakterisztikus tehervektoroknak nevezzük és  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n$  jellel jelöljük, annak megfelelően hogy hanyadik rugalmas csuklóban ébredő egységnyi nyomatéknak felelnek meg. Tekintsük azt az esetet, amikor az  $i$ -edik csuklóponban ébred egységnyi nyomaték (3.2. ábra). Ekkor két rúdszakasz terhelt, az  $i$ -edik és az  $i+1$ -edik. Ezen rúdszakaszok egyensúlyának biztosítására a csomópontban ébredő nyomatékok mellett még rúdvégi erőkből álló erőpárok szükségesek. Így ahhoz, hogy az  $i$ -edik csomópontban egységnyi nyomaték ébredjen, a  $P_i$  erőnek  $-1/d$ , a  $P_{i+1}$  erőnek  $+2/d$  és végül a  $P_{i+2}$  erőnek ismét  $-1/d$  értékkel kell működnie, a többi csomóponti erő pedig zérus. Ennek tanulságait felhasználva (és  $d$  értékét 1-nek véve) a karakterisztikus terhek vektorai rendre a következők:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1 &= [-1, 2, -1, 0, \dots, 0, 0, 0] \\ \bar{q}_2 &= [0, -1, 2, -1, \dots, 0, 0, 0] \\ &\vdots \\ \bar{q}_{n-2} &= [0, 0, 0, 0, \dots, -1, 2, -1] \\ \bar{q}_{n-1} &= [0, 0, 0, 0, \dots, 0, -1, 2] \\ \bar{q}_n &= [0, 0, 0, 0, \dots, 0, 0, -1] \end{aligned} \quad (2)$$

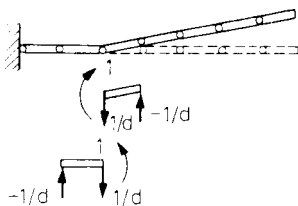
A szerkezetünkön az egyes rugalmas csuklóban nem egységnyi, hanem maximum  $M_{1H}, M_{2H}, \dots, M_{nH}$  abszolút értékű nyomatékok ébredhetnek. Így mindazon  $\bar{p}$

vektorral jellemezhető terrendszer megengedhető a szerkezetre, amelyek a

$$\bar{p}^* = c_1 M_{1H} \bar{q}_1 + c_2 M_{2H} \bar{q}_2 + \dots + c_n M_{nH} \bar{q}_n \dots \quad (3)$$

alakban előállíthatók a  $c_1, c_2, \dots, c_n$  paraméterek  $-1$  és  $+1$  közé eső értékei mellett. (E képlet (1) és (2) egybevetéséből közvetlenül adódik.)

Vizsgáljuk meg kissé közelebbről, hogy a (3) képlet — figyelemmel a  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n$  vektorok lineáris függetlenségére és a  $c_1, c_2, \dots, c_n$  paraméterekre vonatkozó korlátozó feltételekre — milyen testet, jobban mondva milyen  $n$  dimenziós



3.2. ábra

„hiper testet” határoz meg a terhek terében. E testet  $(n-1)$  dimenziós „hiper oldallapok” határolják. Egy „oldallap” képletünkéből úgy adódik, hogy egy paraméter értékét a lehetséges szélső értékek valamelyikében (azaz  $+1$ -ben vagy  $-1$ -ben) rögzítjük, a többi (azaz  $n-1$ ) paraméter pedig befutja teljes megengedett értékészletét. Következésképpen  $2 \cdot n$  hiperoldallap van, s ezek párosával (az ugyanazon paraméter  $+1$  és  $-1$  értékhez tartozó oldallapok alkotnak egy párt) párhuzamosak. A megengedhető terhek testjének (egydimenziós) élei a (3) képlet alapján úgy vezethetők le, hogy egy kivételével valamennyi paraméter értékét  $+1$ -ben vagy  $-1$ -ben rögzítjük. Így minden egyes paraméterhez  $2^{(n-1)}$  él tartozik, ezek mind párhuzamosak az illető paraméternek megfelelő karakterisztikus terhektorral, és az  $n$  paraméternek megfelelően összesen  $n \cdot 2^{(n-1)}$  él van. A megengedhető terhek testje egy „hiper rombold”, vagy „hiper paralelepipedon”, amelynek középpontja az origó, élei pedig rendre a karakterisztikus terhek vektoraival párhuzamosak, általában tehát ferdeszögűek, élhosszai pedig rendre  $2M_{1H}, 2M_{2H}, \dots, 2M_{nH}$ .

Érdeemes megfigyelni, hogy a megengedhető terheket ábrázoló testet  $n$  vektor, nevezetesen a karakterisztikus terhek vektorainak a rugalmas csuklók határnyomatékaival való szorzataként adódó  $M_{1H} \bar{q}_1, M_{2H} \bar{q}_2, \dots, M_{nH} \bar{q}_n$  vektorok egyértelműen meghatározzák. E vektorok — s velük a hiperparalelepipedon éleinek — iránya független a tartó teherbírási jellemzőitől (az  $M_{1H}, M_{2H}, \dots, M_{nH}$  határnyomatékoktól), s csak a tartótengely általános geometriai viszonyaitól (egyenes voltától, a rugalmas csuklók egymás közti távolságától) függ. Az  $M_{1H}, M_{2H}, \dots, M_{nH}$  határnyomatékok a teherbírási test nagyságát, közelebbről élhosszúságát befolyásolják.

A teherbírási paralelepipedon magában foglalja mindazon terheket, amelyek viselésére a szerkezet alkalmas. Nem könnyű azonban eldönteni, hogy valamely adott

$\bar{p}$  teher a teherbírási paralelepipedonon belül fekszik-e vagy sem. E célból általában úgy járhatunk el, hogy az adott  $\bar{p}$  vektort előállítjuk a  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n$  karakterisztikus tehervektorok lineáris kombinációjaként, azaz előállítjuk a  $\bar{q}_1, \bar{q}_2 \dots \bar{q}_n$  bázis (ferdeszögű koordináta-rendszer) szerinti koordinátáit

$$\bar{p}^* = k_1 \bar{q}_1 + k_2 \bar{q}_2 + \dots + k_n \bar{q}_n,$$

és megvizsgáljuk, hogy a  $c_1 = k_1/M_{1H}, c_2 = k_2/M_{2H}, \dots, c_n = k_n/M_{nH}$  paraméterek mindegyike  $-1$  és  $+1$  közé esik-e. Ezen eljárás csak megfogalmazásában különbözik a mérnöki gyakorlat szokásos eljárásmódjától, nevezetesen attól, hogy ismert statikai úton meghatározzuk az egyes rugalmas csuklóknál a  $\bar{p}$  teher hatására ébredő nyomatékokat és ezeket rendre egybevetjük a megfelelő határnyomatékokkal.

Az adott tehervektornak a karakterisztikus tehervektorok rendszerében értett koordinátái ugyanis éppen az egyes rugalmas csuklóknál ébredő nyomatékok,

$$k_1 = M_1, \quad k_2 = M_2, \quad \dots \quad k_n = M_n$$

és kiszámításukhoz is pontosan ugyanazon számítási lépések elvégzése szükséges.

Jelöljük a  $\bar{q}_1, \bar{q}_2 \dots \bar{q}_n$  karakterisztikus tehervektorokból, mint oszlopvektorokból álló mátrixot  $\bar{A}^{-1}$  jellel. Ehhez a  $\bar{p}$  tehervektornak a  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n$  bázis szerinti koordinátái  $\bar{A}^{-1}$  inverze, azaz  $\bar{A}$  segítségével számíthatók

$$\bar{A} \bar{p} = \bar{k}$$

(ahol is  $\bar{k}$  a  $k_1, k_2, \dots, k_n$  értékeket összefoglaló oszlopvektor). Mivel  $\bar{k} = \bar{m}$ , valóban jogos a  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_n$  karakterisztikus tehervektorok mátrixát  $\bar{A}^{-1}$ -gyel jelölni, azaz az adott teherhez tartozó nyomatékokat a statikai egyensúlyi feltételek alapján előállítható  $\bar{A}$  egyensúlyi mátrix inverzének tekinteni. (Ez egyébként a  $\bar{q}_1, \bar{q}_2 \dots \bar{q}_n$  karakterisztikus tehervektorok megkonstruálásának módjából is következik.)

Az adott teher esetén a rugalmas csuklóknál ébredő nyomatékok számítását leíró  $\bar{A}$  mátrix  $n$  sorvektora a teherbírási paralelepipedon  $n$  hiper-oldallapjának normálisa. Egy hiper-oldallapot ugyanis az  $\bar{A}^{-1}$  mátrix  $(n-1)$  oszlopvektora ír le, és az  $\bar{A}$  mátrix egy megfelelő sorvektora, (mivel az  $\bar{A}$  és az  $\bar{A}^{-1}$  inverz mátrixok szorzata az egységmátrix) ezek mindegyikére merőleges. Ebben az értelemben az  $\bar{A}$  mátrix sorvektorai — melyeknek elemei eredeti jelentésük szerint a nyomatékszámításnál szereplő karok — a terhek terének vektorai (s mint ilyeneket  $\bar{q}_1, \bar{q}_2 \dots \bar{q}_n$  jellel fogjuk jelölni őket). E vektorok iránya — mint előbb láttuk — szoros összefüggésben van a teherbírási hiperparalelepipedonnal, mint oldallapjainak normálisa. Nagyságukat úgy hozhatjuk összefüggésbe a teherbírási paralelepipedonnal, ha rendre meghatározzuk az  $e$  vektorokkal jellemzett félsugaraknak a megfelelő oldallapokkal való dőféspontjait. Ezt — figyelemmel arra, hogy az oldallapon a megfelelő, mondjuk  $i$ -edik rugalmas csuklóban éppen  $M_{iH}$  határnyomaték fog ébredni — úgy határozhatjuk meg,

hogy a  $\bar{q}^i$ -t egyszer sorvektornak, egyszer oszlopvektornak fogva fel, képezzük önmagával való (skaláris) szorzatát, (ami tulajdonképpen a  $\bar{q}^i$  teherből az  $i$ -edik csuklóban ébredő nyomaték), és  $\bar{q}^i$ -t  $M_{iH}/\bar{q}^{i2}$  arányban redukáljuk.

Az eddig elmondottakat összefoglalva tehát megállapíthatjuk, hogy a teherbírási hiper-parallelepipedon jellemzésére két különböző vektorkészletet használhatunk. Egyrészt leírhatjuk a teherbírási parallelepipedont az  $\bar{A}^{-1}$  mátrix  $\bar{q}_1$  oszlopvektorai alapján képezhető

$$\bar{k}_i = M_{iH} \bar{q}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

módosított karakterisztikus tehervektorokkal, másrészt az  $\bar{A}$  mátrix sorvektorai alapján képezhető

$$\bar{k}^i = \frac{1}{M_{iH}} \bar{q}^i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

módosított lapnormális vektorokkal. A  $\bar{k}_i$  rendszert mint egy bázist (ferdeszögű koordináta-rendszert) használhatjuk. Egy  $\bar{p}$  vektorral adott teher viselésére akkor alkalmas e szerkezet, ha a  $\bar{k}_i$  rendszerben értelmezett koordinátái közül abszolút értékre nézve egy sem nagyobb 1-nél.

### 3.2. Alakváltozási korlátozások

Vizsgáljuk a továbbiakban szerkezetünk rugalmas alakváltozásait. A rugalmas csuklók elfordulásai és a nyomatékok között arányosság áll fenn, tehát az előzőekben szerepeltetett  $M_{1H}, M_{2H}, \dots, M_{nH}$  értékek egyaránt kifejezhetnek nyomatékokra vagy szögelfordulásokra vonatkozó korlátozást. Mindenesetre a szögforgások és a nyomatékok közötti arányossági tényező az egyes rugalmas csuklóknál más és más lehet. Így a tényleges alakváltozások tárgyalásakor legcélszerűbb, ha az egyes rugalmas csuklókra vonatkozóan az  $M_{1H}, M_{2H}, \dots, M_{nH}$  nyomatéki határértékek mellett a nekik megfelelő  $\varphi_{1H}, \varphi_{2H}, \dots, \varphi_{nH}$  szögforgási határértékeket is megadjuk.

Térjünk rá az egyes rugalmas csuklók tartótengelyre merőleges elmozdulásainak vizsgálatára. Jelöljük a szabad tartóvég, ill. a rugalmas csuklópontok elmozdulásait rendre  $f_1$ -gyel,  $f_2$ -vel,  $\dots$   $f_n$ -nel. Ezek az elmozdulások, az elmozdulások  $n$  dimenziós terében egy  $\vec{f}^* = f_1, f_2, \dots, f_n$  vektorral ábrázolhatók. Ha az egyes rugalmas csuklópontok tartótengelyre merőleges elmozdulásait illetően egymástól független korlátok vannak adva, azaz  $f_{1aH} \leq f_1 \leq f_{1fH}, f_{2aH} \leq f_2 \leq f_{2fH}, \dots, f_{naH} \leq f_n \leq f_{nfH}$ , akkor ezek együttesen az elmozdulások terében egy derékszögű „hipertéglatest”-et határoznak meg. A rugalmas csuklók  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  szögelfordulásainak terére úgy térhetünk át, ha előállítjuk az  $i$ -edik rugalmas csuklópont egységnyi elmozdulásához, azaz a

$$f_k = 1 \quad \text{ha} \quad k = i$$

$$f_k = 0 \quad \text{ha} \quad k \neq i \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

tartóalakhoz tartozó tengelyfordulásokat, mint karakterisztikus tengelyelfordulás-vektorokat. Ezek — mint a 3.3. ábra alapján is látható — a következők:

$$\bar{s}_1^* = 1, 0, 0, 0, \dots 0, 0, 0$$

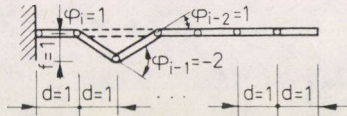
$$\bar{s}_2^* = -2, 1, 0, 0, \dots 0, 0, 0$$

$$\bar{s}_3^* = 1, -2, 1, 0, \dots 0, 0, 0$$

$$\bar{s}_4^* = 0, 1, -2, 1, \dots 0, 0, 0$$

$$\bar{s}_5^* = 0, 0, 0, 0, \dots 1, -2, 1$$

Az  $\bar{s}_i$  karakterisztikus tengelyelfordulás-vektorok és a korábban tárgyalt  $\bar{q}_1$  karakterisztikus tehervektorok felépítésében nagy a hasonlóság. Így könnyen belátható, hogy az elmozdulásokra vonatkozó, az elmozdulások terében hipertéglatesttel ábrázolható



3.3. ábra

korlátozásoknak a tengelyelfordulások terében egy olyan hiper-parallelepipedon felel meg, melynek élei rendre az  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots \bar{s}_n$  karakterisztikus tengelyelfordulás vektorokkal párhuzamosak, élhosszuk pedig  $f_{1aH} + f_{1fH}, f_{2aH} + f_{2fH}, \dots f_{naH} + f_{nfH}$ . A tengelyelfordulások teréről a nyomatékok terére igen egyszerűen áttérhetünk, az egyes koordináta irányokban kell rendre az  $r_1 = M_{1H}/\varphi_{1H}, r_2 = M_{2H}/\varphi_{2H}, \dots r_n = M_{nH}/\varphi_{nH}$  arányoknak megfelelő léptékváltást (zsugorítást vagy nyújtást) végrehajtani. Így, ha egy szerkezetre vonatkozóan mind nyomatéki-szögelfordulási, mind pedig elmozdulási korlátozások adva vannak, akkor a nyomatékok terében az előbbieket egy hipertéglatesttel, az utóbbiakat egy hiper-parallelepipedonnal ábrázolhatók, s mindkét feltételrendszernek eleget tevő nyomatékvektorok a kettő közös részébe esnek.

E közös rész ismét egy „hiper test”, egy maximum  $4n$  „lapú” hiperpoliéder. Ha a nyomatékok terében már a követelményrendszereknek eleget tevő vektorok „hiper testje” adva van, áttérhetünk a terhek terére és megszerkeszthetjük a szerkezetre a követelményrendszerek figyelembevételével megengedhető tehervektorokat magában foglaló teherbírási hipertestet. A nyomatéki tér koordináta egységvektorainak a terhek terében a karakterisztikus tehervektorok felelnek meg, s ezzel az áttérés (lineáris leképezés) egyértelműen rögzített.

### 3.3. Statikailag határozatlan szerkezetek

Az elmozdulási korlátozások között különös figyelmet érdemel az az eset, amikor bizonyos elmozdulásokra vonatkozóan zérus értéket írunk elő. Ily módon ugyanis a megtámasztások okozta kényszert fejezhetjük ki, s a statikailag határozatlan szerkezeteket a statikailag határozott szerkezetekre vonatkozó alakváltozási korlátozó feltételek speciális rendszerével jellemezhetjük. E gondolatmenet alapján a statikailag határozatlan szerkezetek már az előző pontban mondottakban benne foglaltattak, mint az alakváltozási korlátozások speciális esetei. Gyakorlati fontosságuk és különleges sajátosságaik miatt azonban érdemes velük közelebbről foglalkozni.

Vizsgáljunk tehát egy olyan szerkezetet, amelyen az  $n$  rugalmas csuklóban a már eddig is tárgyalt nyomatéki (szögelfordulási) feltételek

$$-M_{iH} \leq M_i \leq M_{iH}, \quad \text{vagy} \quad -\varphi_{iH} \leq \varphi_i \leq \varphi_{iH} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

mellett  $m$  csuklópontban (a  $j_1, j_2, \dots, j_m$  indexű csuklópontokban) támaszt alkalmazunk, azaz a tartó tengelyre merőleges elmozdulások értékére zérust írunk elő.

$$f_{j_1} = 0, \quad f_{j_2} = 0, \dots, \quad f_{j_m} = 0.$$

E szerkezet  $m$ -szeresen határozatlan statikailag.

Ezen alakváltozási korlátozó feltevéseket a szögelfordulások terében egy  $(n-m)$  dimenziós lineáris alter írja le. Ezen alteret úgy kaphatjuk meg, hogy az  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_n$  karakterisztikus szögelfordulás-vektorok közül az előírt támaszoknak megfelelően a  $j_1, j_2, \dots, j_m$  indexűt elhagyjuk, s a maradék  $(n-m)$  karakterisztikus szögelfordulás-vektor feszíti ki a szóban forgó lineáris alteret. Ezen lineáris alteret a megengedett alakváltozások alterének nevezzük.

A szerkezeten az alakváltozási és a nyomatéki (szögelfordulási) korlátozó feltételek egyszerre érvényesek. A nyomatéki (szögelfordulási) feltételeket a szögelfordulások terében — mint láttuk — egy hiper-téglatest írja ki. A statikailag határozatlan szerkezetünkön azon szögelfordulás rendszerek engedhetők meg, amelyek vektora a hiper-téglatest által a megengedett alakváltozások lineáris alteréből kimetszett  $(n-m)$  dimenziós test belsejébe (vagy határára) esik.

A megengedhető szögelfordulás rendszereket ábrázoló  $(n-m)$  dimenziós test alakjával célszerű közelebbről megismernedni. E célból — az egyszerűbb írásmód érdekében — átindexeléssel rendezzük át a karakterisztikus szögelfordulás-vektorokat úgy, hogy az új indexek sorrendjében az első  $(n-m)$  vektor feszítse ki a megengedett alakváltozások lineáris alterét, azaz legyen ezen alter egy tetszőleges vektora a

$$\bar{t} = f_1 \bar{s}_1 + f_2 \bar{s}_2 + \dots + f_{(n-m)} \bar{s}_{(n-m)}$$

alakban előállítható, ahol is  $f_1, f_2, \dots, f_{(n-m)}$  tetszőleges paraméterek. Látható, hogy a megengedett alakváltozások alterének helyzete a szögforgások  $n$  dimenziós terében teljesen független a szerkezet szilárdságtani jellemzőitől, a határszögforgásoktól,



kizárólag a szerkezet legáltalánosabb geometriai és megtámasztási viszonyaitól függ, amelyek az  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_{n+m}$  vektorokban jutnak kifejezésre.

Érvényesítsük a szögelfordulási határértékekre vonatkozó feltételeket:

$$-\varphi_{1H} \cong f_1 s_{1,1} + f_2 s_{2,1} + \dots + f_{(n-m)} s_{(n-m),1} \cong \varphi_{1H}$$

$$-\varphi_{2H} \cong f_1 s_{1,2} + f_2 s_{2,2} + \dots + f_{(n-m)} s_{(n-m),2} \cong \varphi_{2H}$$

$$\vdots$$

$$-\varphi_{nH} \cong f_1 s_{1,n} + f_2 s_{2,n} + \dots + f_{(n-m)} s_{(n-m),n} \cong \varphi_{nH}$$

A megengedett alakváltozások  $(n-m)$  dimenziós alteréből ezen egyenlőtlenségek egy, az egyes egyenlőtlenségeknek megfelelő  $(n-m-1)$  dimenziós hipersík oldallappárokkal határolt testet metszenek ki. Láthatjuk, hogy e testnek legfeljebb  $n$  ilyen oldallapp-párja, azaz  $2n$  oldala van, az  $n$  egyenlőtlenségpárnak megfelelően. Nincs azonban okvetlenül meg mind az  $n$  oldallapp-pár. Vizsgáljuk ugyanis például az első  $n-m$  egyenlőtlenség párt. Ezek — a karakterisztikus szögelfordulás-vektorok lineárisan függetlenek lévén — meghatározzák az  $f$  paraméterek egy tartományát

$$-f_{1H} \cong f_1 \cong f_{1H},$$

$$-f_{2H} \cong f_2 \cong f_{2H},$$

$$\vdots$$

$$-f_{(n-m)H} \cong f_{(n-m)} \cong f_{(n-m)H}.$$

A fennmaradó  $m$  szögelfordulás mindegyikére vonatkozóan kiszámítható azon legnagyobb  $\varphi'_j$  (és legkisebb  $-\varphi'_j$ ) szögelfordulás, amely az  $f$  paraméterek adott tartományon belüli értékeivel előállítható. Ha valamely rugalmas csukló szögelfordulására előírt korlátozás

$$\varphi'_j \cong \varphi_{jH}$$

— a szabad lehajlásában is korlátozott statikailag határozatlan szerkezeten — nem jelent ténylegesen újabb megkötöttséget (a szerkezet határozatlan jellegéből s a többi csukló határozott szögforgásából adódóan e feltétel mindig teljesül).

Az ilyen csuklóknak megfelelő határolólapok hiányoznak. Így a megengedett alakváltozások alteréből a szögforgási korlátozások által kimetszett testnek legfeljebb  $n$  lappárja van, de ezek nem minden esetben vesznek részt mind a megengedett szögforgások testjének lehatárolásában, egyes lappárok hiányozhatnak. Biztosan van viszont  $(n-m)$  lappár, ennyi egyenlőtlenség ugyanis okvetlenül kell a  $t_1, t_2, \dots, t_{n-m}$  paraméterek tartományának lehatárolásához.

Vizsgáljuk meg, hogy a megengedett szögelfordulások testjének egy — mondjuk az első korlátozó egyenlőtlenség párnak megfelelő — oldallapp-párját milyen módon írhatjuk fel karakterisztikus szögelfordulás-vektorokkal. Tekintsük először is az

$$\bar{d}_k = \bar{s}_k - (S_{k,1}/S_{i,1})\bar{s}_i$$

vektorokat, ahol is  $k=1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, (n-m)$ , az  $\bar{s}_i$  pedig egy tetszőleges



olyan vektor, amelynél  $S_{i,1} \neq 0$ . Az ily módon előállított  $\vec{d}_k$  vektorok mindegyiknél  $D_{k,1} = 0$ .

Jelöljük  $\vec{e}_1$ -el az éppen vizsgált rugalmas csukló szögelfordulásainak megfelelő koordináta-egységvektort. Képezzük a

$$\begin{aligned} \vec{t} = & u_0 \vec{e}_1 + u_1 \vec{d}_1 + u_2 \vec{d}_2 + \dots + u_{i-1} \vec{d}_{i-1} + u_{i+1} \vec{d}_{i+1} + \\ & + \dots + u_{n-m} \vec{d}_{n-m} \end{aligned}$$

vektort. E vektor nyilván mindaddig eleget tesz a szóban forgó rugalmas csukló szögelfordulási korlátozó feltételeinek, amíg

$$-\varphi_{1H} \leq u_c \leq \varphi_{1H}.$$

A megengedett szögforgások testjének egy határlapját tehát a

$$\begin{aligned} \vec{t} = & \varphi_{1H} \vec{e}_1 + (u_1 \vec{d}_1 + \dots + u_{i-1} \vec{d}_{i-1} + u_{i+1} \vec{d}_{i+1} + \dots + \\ & + u_{n-m} \vec{d}_{n-m}) \end{aligned}$$

alakban előállítható vektorok végpontjai írják le, mialatt az  $u_1, \dots, u_{i-1}, \dots, u_{n-m}$  paraméterek (összesen  $n-m-1$  paraméter) lefutják teljes értékészletüket. Az  $(n-m-1)$  dimenziós oldallap térbeli „irányát” a  $\vec{t}$  vektor képletében a zárójelbe foglalt tagok, illetőleg az ezekben szereplő  $\vec{d}_k (k=1, \dots, i-1, i+1, \dots, n-m)$  vektorok szabják meg. Az oldallap mindig párhuzamos a  $\vec{d}_k$  vektorok által kifeszített  $(n-m-1)$  dimenziós altérrel, függetlenül a  $\varphi_{1H}$  szögelfordulási határértékektől. Ha meggondoljuk, hogy a  $\vec{d}_k$  vektorokat a karakterisztikus szögelfordulás-vektorokból pusztán ezen vektorok tulajdonságait felhasználva konstruáltuk, s a karakterisztikus szögelfordulás-vektorok készlete csak a tartó általános geometriai és megtámasztási adataitól függ, megállapíthatjuk, hogy a megengedett szögelfordulások testjeinek határlapjai irányuk tekintetében függetlenek minden szilárdságtani adattól ( $\varphi_H$ -któl,  $M_H$ -któl). Az egyes rugalmas csuklók  $\varphi_{iH}$ -szögelfordulási határértékei a megengedett szögforgások testjének méreteit, oldallapjainak az origótól vett távolságát, valamint a test lehatárolásában ténylegesen résztvevő oldallapok számát (és azt, hogy ha nem valamennyi lehetséges irányú oldallap szerepel tényleges lehatárolólapként, melyek a tényleges oldallapok a lehetségesek közül) szabják meg.

A megengedett szögelfordulások testjének ismeretében a már bemutatott módon térhetünk rá a teherbírási poliéder meghatározására. Először is a szögelfordulások teréről a nyomatékok terére kell áttérni az  $r_1 = M_{1H}/\varphi_{1H}$ ,  $r_2 = M_{2H}/\varphi_{2H}$ ,  $\dots$ ,  $r_n = M_{nH}/\varphi_{nH}$  faktoroknak megfelelő koordinátaléptékváltásokkal, majd a nyomatéki koordináta egységvektoroknak a hozzájuk tartozó karakterisztikus tehervektorokat feleltetve meg, transzformáljuk a megengedett nyomatékok testjét a terhek terébe s így előállítjuk a teherbírási poliédert.

Statikailag  $m$ -szeresen határozatlan,  $n$  rugalmas csuklóból összetevődő szerkezetünk teherbírási poliédere a terhek  $n$  dimenziós terének egy  $n-m$  dim. lineáris alterében helyezkedik el. (E lineáris altér a megengedett alakváltozások alterének

transzformáltja.) Így tulajdonképpen az  $n$  dimenziós teher térben nem „igazi” test. Hagyjuk el a teher térből azon koordináta-irányokat, amelyek az elmozdulásukban megakadályozott, azaz megtámasztott tartótengelypontoknak felelnek meg. Így tulajdonképpen a támaszerőket hagyjuk figyelmen kívül, és csak az aktív terhek alterét tekintjük, amely egy  $(n-m)$  dimenziós lineáris koordináta-altér. Vetítsük le (a támaszerőknek megfelelő koordinátákat 0-ra véve) ezen altérre a teherbírási poliédert. Az aktív terhek  $n-m$  dimenziós alterében az  $(n-m-1)$  dimenziós lapokkal határolt vetületi teherbírási poliéder már valódi test. Tulajdonképpen e vetületi teherbírási poliédert kell az igazi teherbírási tartománynak tekinteni, mert ez mondja meg, hogy az aktív terhek mely kombinációit tudja szerkezetünk elviselni. Az eredeti teherbírási poliéder ettől csak annyiban különbözik, hogy az aktív terhek megengedhető kombinációihoz a megfelelő támaszerő értékeket is hozzárendeli.

Az aktív terhekre vonatkoztatott teherbírási tartomány megszerkesztésénél vázolt eljárás rávilágít arra, hogy a szerkezet jellemzői a teherbírást miként befolyásolják. A karakterisztikus szögelfordulás vektorok és a karakterisztikus tehervektorok a szerkezet legáltalánosabb és legállandóbb jellemzői, csak a szerkezet tengelyvonalának egyenes voltával és a rugalmas csuklók egyenletes kiosztásával vannak összefüggésben. A megtámasztások azt befolyásolják, hogy a karakterisztikus szögelfordulás-vektorok közül melyek feszítik ki a megengedett alakváltozások alterét. A  $\varphi_{iH}$  határszögforgások a teherbírási tartomány határoló lappárjainak számát és a lappárok relatív helyzetét szabják meg. Végül az  $M_{iH}$  határnyomatékok a karakterisztikus tehervektorok, mint bázis által megszabott ferdeszögű koordináta-rendszer egyes koordinátatengelyeinek léptékét adják meg, ezzel kialakítva a teherbírási tartomány tényleges méreteit. Mindez — szerző véleménye szerint — módot ad a szerkezet, a szilárdsági jellemzők, a teher és a teherbírási összefüggésének szemléletes áttekintésére, az ellenőrzési és a konstrukciós munka segítésére. Ennek általánosságban való kifejtésével egy következő dolgozatban kíván a szerző foglalkozni, most — befejezésül — egy szemléltető példa kapcsán tekintsük át az eddig elmondottakat. Ez egyben módot ad az alkalmazási lehetőségek érzékeltetésére is.

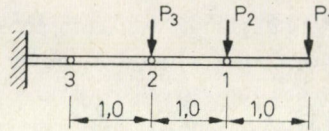
### 3.4. Szemléltető példa

Tekintsük a 3.4. ábrán bemutatott, három rugalmas csuklót tartalmazó modell-szerkezetet. A karakterisztikus tehervektorok a következők:

$$\bar{q}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ és } \bar{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

E vektorok az  $\bar{A}$  egyensúlyi mátrix inverzének oszlopvektorai

$$\bar{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$



3.4. ábra

E mátrix adja meg, hogy a rugalmas csuklóban ébredő adott  $\bar{m}^* = [M_1, M_2, M_3]$  nyomatékrendszerhez milyen  $\bar{p}$  terherendszer tartozik

$$\bar{p} = \bar{A}^{-1} \bar{m},$$

vagyis

$$\bar{p} = M_1 \bar{q}_1 + M_2 \bar{q}_2 + M_3 \bar{q}_3.$$

Ha a rugalmas csuklók nyomatékbírására adva vannak az

$$|M_1| \leq M_{1H}, \quad |M_2| \leq M_{2H} \quad \text{és} \quad |M_3| \leq M_{3H}$$

határok, akkor ezek a nyomatékok háromdimenziós térben egy derékszögű téglalapot határoznak meg, amit a  $\bar{p} = \bar{A}^{-1} \bar{m}$  transzformáció a terhek — ugyancsak háromdimenziós — terébe viszi át, és ott ferdeszögű paralelepipedonként jelentkezik. A 3.5. ábra a terhek terében ábrázolja a  $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3$  karakterisztikus tehervektorokat a 3.6. ábra pedig — folytonos vonallal — az  $M_{1H} = M_{2H} = M_{3H} = 1$  esetnek megfelelő teherbírású paralelepipedont tünteti fel. A szaggatott vonallal jelzett teherbírású paralelepipedon akkor áll elő, ha az  $M_{3H}$ -t 1-ről 2-re növeljük.

Szerkezetünk alakváltozásainak vizsgálatánál az

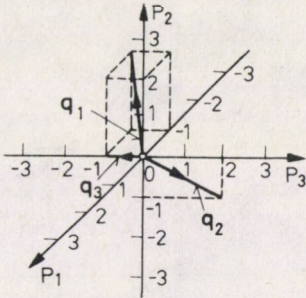
$$\bar{s}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{s}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{s}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

karakterisztikus elmozdulásvektorokból indulunk ki. Ezeket a  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  szögforgások terében a 3.7. ábra ábrázolja. Jellegzetes, hogy az  $\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3$  oszlopvektorokból alkotható mátrix az  $\bar{A}$  egyensúlyi mátrix inverzének transzponáltja:

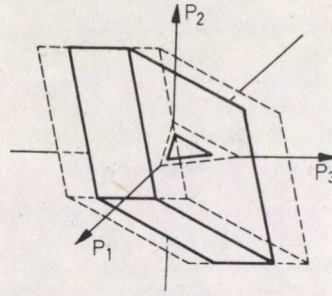
$$\bar{A}^{-1*} = [\bar{s}_1, \bar{s}_2, \bar{s}_3].$$



Térjünk most át az eredeti statikailag határozott modellszerkezetről egy statikailag határozatlanra oly módon, hogy a  $P_1$  erő támadáspontjának függőleges elmozdulását egy megtámasztás beiktatásával megakadályozzuk. (3.8. ábra) Ez azt jelenti, hogy a karakterisztikus elmozdulásvektorok közül az  $\bar{s}_1$  csak zérus együtthatóval szerepelhet, azaz az  $\bar{s}_1$  vektort a megengedhető alakváltozásvektorok közül el kell hagynunk. Így



3.5. ábra



3.6. ábra

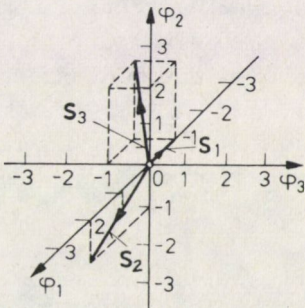
azok a szögelfordulások jöhetnek létre, amelyek a „maradék” karakterisztikus elmozdulásvektorok lineáris kombinációjaként előállíthatók:

$$\bar{t} = f_2 \bar{s}_2 + f_3 \bar{s}_3$$

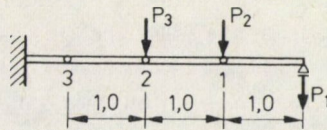
E képletben az  $f_2$  és  $f_3$  paraméterek éppen az elmozdulásban nem gátolt pontoknak (a  $P_2$  ill. a  $P_3$  erők támadáspontjainak) függőleges elmozdulásai. A rugalmas csuklóknban ébredő nyomatékok korlátozott volta egyben maga után vonja a  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  relatív előfordulások korlátozottságát is:

$$|\varphi_1| \leq \varphi_{1H}, \quad |\varphi_2| \leq \varphi_{2H}, \quad |\varphi_3| \leq \varphi_{3H}.$$

E korlátozó feltételek a szögelfordulások terében egy téglateetet határoznak meg. A 3.9. ábrán szaggatott vonallal a  $\varphi_{1H} = \varphi_{2H} = \varphi_{3H} = 1$  esetnek megfelelő kockát, folytonos



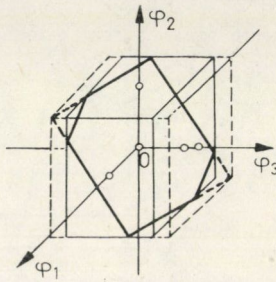
3.7. ábra



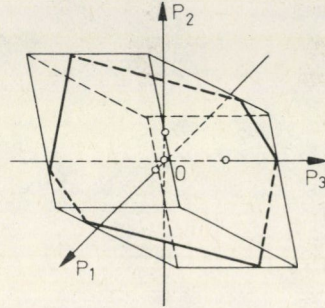
3.8. ábra



vonallal pedig a  $\varphi_{1H} = \varphi_{2H} = 1$ ,  $\varphi_{3H} = 0,75$  értékek mellett adódó téglatestet tüntettünk fel. Ugyanezen ábrán ábrázoltuk azt az origón átmenő síkot is, amelyet az  $\bar{s}_2$  és  $\bar{s}_3$  karakterisztikus elmozdulásvektorok határoznak meg. E sík — statikailag határozatlan szerkezetünk esetén — a megengedett alakváltozások altere. Helyzetét a szögelfordulások terében kizárólag a szerkezet hálózati rajza, a rugalmas csuklók elhelyezkedése szabja meg. A szilárdsági jellemzők, nevezetesen a  $\varphi_{1H}$ ,  $\varphi_{2H}$ ,  $\varphi_{3H}$



3.9. ábra



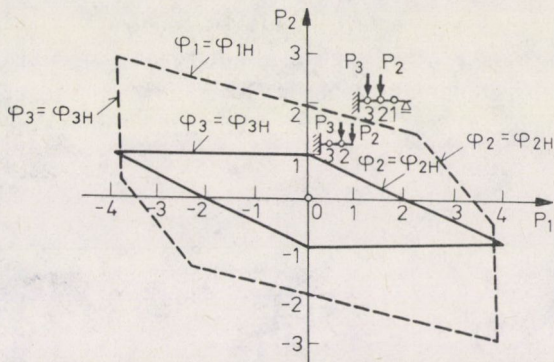
3.10. ábra

határszögelfordulások a megengedett alakváltozások síkjának helyzetét nem befolyásolják. Az ábra azonban azt is szemlélteti, hogy különböző határszögelfordulások esetén a korlátozó feltételek téglatestje más és más síkidomot metsz ki a megengedett alakváltozások síkjából. (Az ábrán a megengedett alakváltozások síkját tulajdonképpen e síkidomok révén ábrázoltuk.) A  $\varphi_{1H} = \varphi_{2H} = \varphi_{3H} = 1$  esetben egy romboldot, míg ha  $\varphi_{3H}$ -t 0,75-re csökkentjük, egy hatszöget kapunk, amelynek szemben fekvő oldalai páronként párhuzamosak. Térjünk át ezek után a terhek terére és állapítsuk meg, hogy szerkezetünk mely terhek viselésére képes. Ehhez a szerkezet valamennyi szilárdságtani adatára szükség van. Tekintsük azt az esetet, amikor egyrészt  $\varphi_{1H} = \varphi_{2H} = 1$  és  $\varphi_{3H} = 0,75$  (a 3.6. ábrán folytonos vonallal ábrázolva), másrészt  $M_{1H} = M_{2H} = 1$  és  $M_{3H} = 2$  (a 3.6. ábrán szaggatott vonallal feltüntetve). Mivel a határnyomatékok és a határszögforgások a szerkezet egy és ugyanazon állapotát jellemzik (két különböző szempontból), a 3.9. ábra folytonos vonallal jelzett téglatestje megfelel a 3.6. ábra szaggatott vonallal ábrázolt ferdeszögű paralelepipedonjának. Ha ez utóbbiba a 3.9. ábra arányainak megfelelően berajzoljuk a megengedett alakváltozások síkjából kimetszett hatszöget, megkapjuk a teherbírasi poliédert, azaz most síkidomot (3.10. ábra). Ezt másképpen úgy is mondhatjuk, hogy a  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  szögelfordulások teréből a  $\varphi_1$  egységvektort  $(M_{1H}/\varphi_{1H})\bar{q}_1 = \bar{q}_1$  vektornak, a  $\varphi_2$  egységvektort az  $(M_{2H}/\varphi_{2H})\bar{q}_2 = \bar{q}_2$  vektornak, s végül a  $\varphi_3$  egységvektort az  $(M_{3H}/\varphi_{3H})\bar{q}_3 = 2,6\bar{q}_3$  vektornak feleltetve meg, lineáris transzformációval térünk át a  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  terhek terére.

A 3.10. ábrán vázolt síkidom mint teherbírasi tartomány kifejezi azt, hogy minden  $P_2$  és  $P_3$  értékpárhoz csak egy szigorúan meghatározott  $P_1$  teher tartozhat, ami természetes is, hiszen  $P_1$  erő nem aktív teher, hanem támaszerő. Ha a



támaszerőkkel nem kívánunk közelebbről foglalkozni, és figyelmünket arra kívánjuk összpontosítani, hogy a tényleges (aktív) terhek tekintetében mi szerkezetünk teherbírása, akkor legcélszerűbb a tényleges teherbírasi tartományt az aktív terhek alterére, esetünkben a  $P_2P_3$  síkra vetíteni. A 3.11. ábrán feltüntettük az aktív terhekre vonatkoztatott hatszögű teherbírasi tartományt szaggatott vonallal. Ugyanezen ábrán — összehasonlításként — feltüntettük a teherbírasi tartományt arra az esetre is, ha az 1



3.11. ábra

jelű rugalmas csukló helyett tényleges (korlátlan szögfordulást megengedő, nyomtérk felvételére nem képes) csukló van (ez tulajdonképpen egy két rugalmas csuklót tartalmazó konzolnak felel meg).

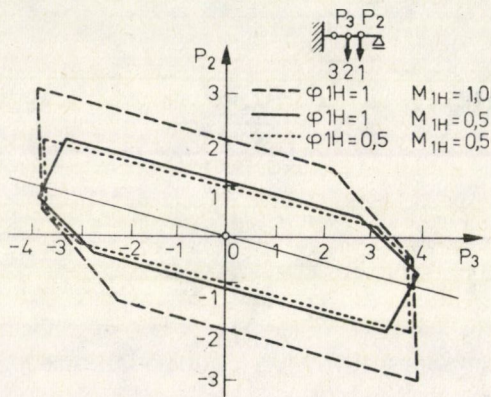
Az elmondottakat áttekintve, bizonyos következtetések adódnak arra vonatkozóan, hogy az egyes szilárdságtani jellemzők (modellszerkezetünk esetén a  $\varphi_{1H}, \varphi_{2H}, \varphi_{3H}$  határszögelfordulások és az  $M_{1H}, M_{2H}, M_{3H}$  határnyomatékok) miként befolyásolják a szerkezet teherbírását. Statikailag határozott szerkezetnél a teherbírásra az  $M_{1H}, M_{2H}, M_{3H}$  határnyomatékok vannak elsősorban hatással. A teherbírasi tartomány oldallapjainak „iránya” adott, valamely határnyomaték változtatása a neki megfelelő oldallapot önmagával párhuzamosan eltolja (lásd 3.6. ábra). Gondolatmenetünk keretében ezáltal jut kifejezésre az a közismert tény, hogy a statikailag határozott szerkezet keresztmetszeti méretei egyszerűen tervezhetők: mindössze képezni kell az előírt terhek tartományának az egyes oldallapok normálisára vett vetületét, és a határnyomatékokat ezen vetületekkel egyenlőnek véve tervezhetjük meg a határnyomatékokat, illetőleg a keresztmetszeteket.

Statikailag határozatlan szerkezet esetében törvényszerűen mind a  $\varphi_{1H}, \varphi_{2H}, \varphi_{3H}$  határszögelfordulások, mind az  $M_{1H}, M_{2H}, M_{3H}$  határnyomatékok befolyásolják a teherbírását. A teherbírasi tartomány megszerkesztéséről mondottakat áttekintve beláthatjuk, hogy valamely rugalmas csukló szögelfordulási határértékét és határnyomatékát egyidejűleg változtatjuk, úgy, hogy arányuk (az  $r_i = M_{iH}/\varphi_{iH}$  érték) állandó maradjon, akkor a teherbírasi tartomány megfelelő határoló oldala ugyanúgy



önmagával párhuzamos eltolódást szenved, a többi oldal pedig ugyanúgy változatlan helyzetű marad, mint a statikailag határozott esetben. Tehát a statikailag határozatlan szerkezeteknél is van lehetőség egy hasonlóképpen egyszerű tervezési eljárásra, mint a határozott esetben, feltéve, hogy a keresztmetszetek szögelfordulási és nyomatékbírási határértékeit egyszerre és arányosan kívánjuk változtatni.

Más a helyzet akkor, ha a határnyomatékokat és a határszögelfordulást nem arányosan változtatjuk. Tekintsük azt az esetet, amikor a határszögelfordulást állandónak vesszük, s csak a határnyomatékokat módosítjuk. (Erre és az előző bekezdésben érintett arányos változtatásra minden más eset is visszavezethető.) A bemutatott gondolatmenet alapján a teherbírási tartomány módosulása ez esetben is szemléletesen követhető. A 3.12. ábrán azt vizsgáltuk, hogy miként változik a



3.12. ábra

teherbírási tartomány, ha az 1. rugalmas csukló határnyomatékát felére csökkentjük. Valamely határnyomaték változtatása tulajdonképpen azt jelenti, hogy az illető rugalmas csuklóhoz tartozó karakterisztikus tehervektor más szorzóval szerepel. Az eredeti (szaggatott) és a módosított (folytonos vonallal jelölt) teherbírási tartomány sarokpontjait összekötő vektorok a 3.12. ábrán tehát mindig párhuzamosak és megfelelnek a  $\bar{q}_1$  karakterisztikus tehervektor  $P_2P_3$  síkra vetett vetületének. A sarokpontokat összekötő vektorok nagysága attól függ, hogy az illető sarokpontnak megfelelő teher a szóban forgó 1. rugalmas csuklóban mekkora szögelfordulást ébreszt. Mivel azon oldal mentén, amely a 1. rugalmas csuklóban ébredő korlátozó feltételnek felel meg mindenütt, éppen  $\varphi_1 = \varphi_{1H}$ , ez az oldal önmagával párhuzamosan tolódik el, miközben  $M_{1H} = -$  ról az  $M_{1H} = 0,5$  esetre térünk át. A teherbírási tartomány többi oldala mind az origótól mért távolságát, mind irányát változtatja, jellegzetes viszont, hogy a megfelelő „rég” és „új” oldalak metszése egy, az origón átmenő és az 1. rugalmas csuklóhoz megfelelő határoló oldallal párhuzamos egyenesre esik. Az összehasonlítás kedvéért pontozott vonallal feltüntetjük a 3.12. ábrán azt az esetet is,

amikor az  $M_{1H}$  csökkenésével  $\varphi_{1H}$  is arányosan csökken. Ekkor csak az 1. rugalmas csuklónak megfelelő határoló oldal tolódik közelebb az origóhoz, némileg erősebben mintha  $\varphi_{1H}$  változatlan maradna.

A teherbírási tartomány alakjának a különböző szilárdsági paramétereiktől való függése tehát áttekinthető, követhető és mindez segítheti a gyakorlati konstrukciós munkát.

**Problems with the multy-parametric load system.** — The structures of a building are subjected to different types of loading acting in different combinations. The structural engineer has to determine the possible load combinations which are likely to occur during the lifetime of the structure, and to judge whether the loadbearing capacity of the structure is sufficient in view of all these load-combinations or not. The first chapter of the paper describes the possible combinations of dead, wind, live, snow and thermal loads as a domain of the multy-parametric load-space. The next chapter investigates the domain of load-bearing capacity of reinforced concrete beams and columns on the level of internal forces. In the last chapter the domain of the load bearing capacity is studied on the level of the whole structure, i.e. in the space of the multi-parametric load system.

**Die Aufgaben mit dem mehrparametrischen Lastsystems.** — Die Tragwerke sind durch viele Lasttypen, welche in verschiedenen Lastkombinationen wirken, beansprucht. Der Statiker muss die Lastkombinationen, welche während der geplanten Lebensdauer der Konstruktion voraussichtlich vorkommen, kennen, und fähig sein zu beurteilen, ob die Tragfähigkeit der Konstruktion anetracht dieser Lastkombinationen hinreichend ist, oder nicht. Erstens werden die zu berücksichtigenden Kombinationen von ständigen, Nutz-, Schnee-, Wind- und Temperaturbelastungen als ein Bereich im Raume des mehrparametrischen Lastsystems beschrieben. Im weiteren werden die Tragfähigkeitsbereiche von Stahlbeton Strukturelementen (Balken, Säulen) aufgestellt, und die Tragfähigkeit eines Tragwerkes im Ganzen, d.h. in dem mehrdimensionalen Raume des mehrparametrischen Lastsystems untersucht.

**Задачи с многопараметрическими нагрузками.** — На сооружения зданий воздействуют нагрузки различного типа в различных сочетаниях.

При конструировании должно быть известным, какие комбинации нагрузок действуют вероятно в течении службы здания, а такие является ли достаточной несущая способность конструкций ввиду этих возможных комбинаций.

В первой части статьи описывается совокупность возможных комбинаций нагрузок (собственный вес, снег, ветер, воздействие температуры) в детерминированном виде в пространстве многопараметрических нагрузок. Во второй части излагается несущая способность сечений железобетонных столбов и балок в случае многопараметрических усилий. В третьей части изучается несущая способность сооружения в целом, т.е. в пространстве многопараметрических нагрузок.





# LEMEZHORPADÁSRA VONATKOZÓ KÍSÉRLETI VIZSGÁLATOK

HALÁSZ OTTÓ,<sup>1</sup> AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA, SZATMÁRI ISTVÁN,<sup>2</sup> A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA,  
IVÁNYI MIKLÓS,<sup>3</sup> A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA

Acél- és fémszerkezetek stabilitásvizsgálata területén a gyakorlati igényekhez alkalmazkodó „cél-modellek” kerültek alkalmazásra, mivel az egyensúly-elágazás teherparaméterének erősen korlátozott az információtartalma. Emiatt megnövekszik a kísérleti kutatások szerepe.

A vékony, merevítetlen gerincű tartók teherbírásának meghatározására 1974—1980 között kiterjedt vizsgálatok folytak a BME Acélszerkezetek tanszékén. A kísérleti vizsgálatok és az elméleti kutatás eredményeit foglalja össze a cikk, példával szemléltetve a kidolgozott méretezési eljárás alkalmazását.

A bemutatott kísérleti és elméleti vizsgálatok lehetővé teszik, hogy a keretek képlékeny elmozdulás-képességének problémáját a stabilitási és szilárdsági jelenségek kölcsönhatásán keresztül vizsgáljuk, elemezzük a horpadó alkotólemezeket tartalmazó keresztmetszeti elemek hatását a teljes szerkezet viselkedésére.

## 1. Acél- és fémszerkezetek stabilitásvizsgálati módszereinek fejlődése\*

1.1. Acél- és fémszerkezetek stabilitásvizsgálati módszereiben új szemlélet van kialakulóban (MASSONNET 1977; HALÁSZ 1977). A klasszikus stabilitásvizsgálat az egyensúly-elágazás jelenségére és az ezzel kapcsolatos „kritikus” teherparaméter, ill. feszültség ( $F_{kr}$ ,  $\sigma_{kr}$ ) meghatározására alapozta számítási módszereit. E mennyiségek egyszerűbb esetekben zárt formában, pontos vagy közelítő képletekkel, másokban kellően kidolgozott algoritmusok segítségével számíthatók.

1.2. A kritikus teherparaméter információtartalma erősen korlátozott. Lényegében csak arra utal, hogy a valóságos szerkezet és a számítás alapjául választott modell közötti elkerülhetetlen eltérések (pl. geometriai pontatlanságok) — melyeket „kezdeti zavarok”-nak nevezhetünk — a kritikus teherparaméter alatt a számítás eredményeit csak korlátozott mértékben befolyásolják; míg a kritikus teherparaméter környezetében ilyen állítás már nem tehető (BOLOTIN 1965).

Ezért a kritikus teherparamétert a méretezésben — egyéb szilárdsági vizsgálatokhoz képest — csak igen nagy biztonsági tényező alkalmazásával lehetett

<sup>1</sup> Dr. Halász Ottó egyetemi tanár, BME Acélszerkezetek Tnsz 1015 Bp. Batthyány u. 28—30.

<sup>2</sup> Dr. Szatmári István egyetemi docens, BME Acélszerkezetek Tnsz 1118 Bp. Sasadi köz 1.

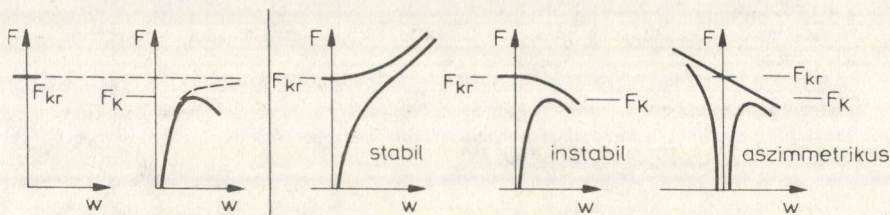
<sup>3</sup> Dr. Iványi Miklós egyetemi docens, BME Acélszerkezetek Tnsz 1111 Bp. Kende u. 18.

\* Dr. Halász Ottó munkája

felhasználni: ez az esetek egy részében gazdaságtalan, más részében még mindig nem kellően biztonságos eredményre vezetett (HALÁSZ—PLATTHY 1974).

1.3. A kritikus teherparaméter ismerete egyszerűbb esetekben — elsősorban rudaknál — lehetőséget adott a fentebb említett (főleg geometriai jellegű) eltérések jobb megbecslésére a  $(1 - F/F_{kr})^{-1}$  alakú nagyító tényező bevezetésével. Ennek alkalmazási köre is korlátozott (KORDA 1977); egyrészt a rugalmas tartományhoz kötődik, másrészt ahhoz, a feladat linearitásából adódó szemlélethez kapcsolódik, hogy a kritikus teherparaméter elérésével a szerkezet korlátlanul nagy elmozdulásokat végezhet.

1.4. Az elágazás jelenségének nemlineáris vizsgálata (KOITER 1945; THOMPSON—HUNT 1973), mely a jelenséget stabil, instabil és aszimmetrikus esetekre bontja (1.1. ábra), az ideális számítási modelltől való eltérések hatásának jobb becslését teszi lehetővé — sajnos csak a rugalmas tartományban.



1.1. ábra

Lemezhorpadás esetében különös bonyodalmat jelentenek az alábbiak.

Ez az elágazás — legtöbb esetben — a jóindulatú, stabil csoportba tartozik: ezért emelkedő posztkritikus út létezik. Ugyanilyen jellegűek a kezdeti zavarással (görbeséggel) bíró lemezek erő-elmozdulás diagramjai is. A  $\sigma_K = F_K/A$  átlagfeszültségnél bekövetkező teherbírás-kimerülés így csak a képlékeny zónák megjelenésére és végül is képlékeny instabilitásra vezethető vissza. A  $\sigma_{kr}$  és  $\sigma_K$  viszonya emellett változó. Zömök lemeznél (a rudak esetéhez hasonlóan)  $\sigma_K < \sigma_{kr}$ ; karcsú lemeznél ellenben  $\sigma_K > \sigma_{kr}$ , sőt  $\sigma_K \gg \sigma_{kr}$  lehet (1.2. ábra). Így az 1.3. pontban említett nagyító tényező érvénytelen, sőt a  $\sigma_{kr}$  kritikus feszültség, mint viszonyítási alap is nagyban veszít jelentőségéből (SKALLOUD 1978); a valódi teherbírás csak a posztkritikus viselkedés elemzésével jellemezhető.

1.5. A „kezdeti” zavarokkal terhelt és véges elmozdulásokat végző lemez teherbírásának számítása így nemlineáris, rugalmas-képlékeny analízist kíván.

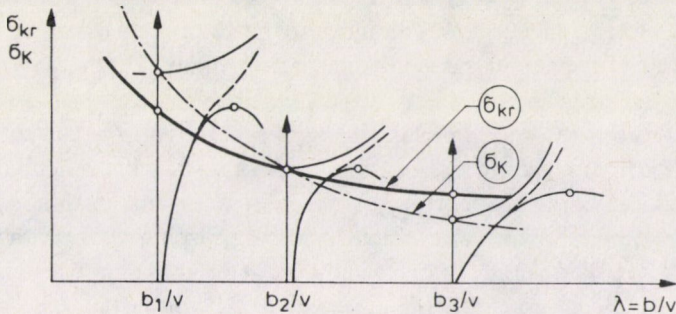
E problémakör kiinduló egyenletei — pl. Kármán 1910-ben felállított nemlineáris horpadási egyenletei (KÁRMÁN 1910):

$$\Delta \Delta w = \frac{v}{D} [\Phi_{yy} w_{xx} + \Phi_{xx} w_{yy} - 2\Phi_{xy} w_{xy}]$$

$$\Delta \Delta \Phi = E [w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy}]$$



(ahol  $w$  a lehajlás,  $\Phi$  az Airy-féle feszültségfüggvény), melyeket MARGUERRE 1937) terheletlen állapotban is görbe lemezre, más szerzők (MAQUOI—MASSONNET 1971) ortotrop lemezre is kiterjesztettek, és amelyek a képlékeny zónában is értelmezhetők (MERRISON 1974) — ismeretesek, és természetesen megfelelő számítástechnikai eszközökkel megoldhatók. Mégis a teherbírás kimerülésének „pontos” nyomon követésén alapuló méretezési eljárások speciális esetektől eltekintve nem mutatkoztak célszerűnek az alábbiak miatt.



1.2. ábra

(i) Egyes alapvető paraméterek (görbeség, maradó feszültségek stb.) szórása igen nagy és statisztikai jellemzésük főleg becsléseken alapul: így ezek pontatlansága nincs összhangban az eljárás matematikai igényességével. Emellett a kezdeti geometriai zavarok nagyságán kívül azok lehetséges alakjának sokfélesége és ennek eltérő hatása okoz további bonyolalmat.

(ii) Az elemzett lemez (lemezcsík, lemezmező) rendszerint valamely teljes szerkezet egy építőeleme (alkotó lemeze, öve, gerinc-szakasza). Amennyiben tehát az építőelem viselkedése csak nagy matematikai apparátussal és rendszerint csak numerikus úton írható le, a teljes szerkezet elemzése nehézkessé válik. A lokális instabilitási jelenség bonyolult taglalása tehát nehezen illeszthető be a teljes szerkezet globális vizsgálatának kereteibe.

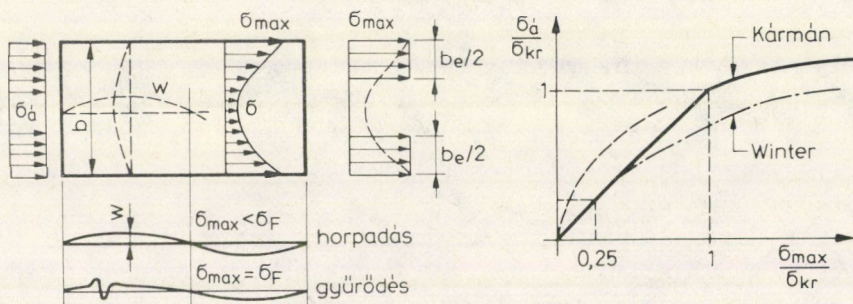
(iii) A lemezhorpadást és főleg a posztkritikus állapotot lényegesen és meghatározó módon befolyásolja a lemezt megtámasztó szerkezeti elemek tényleges viselkedése: a jelenség csak a lemez és annak „peremezése” együttes vizsgálata útján elemezhető. Különösen kényessé válik a kérdés akkor, ha a peremező elemek egyensúlya is elágazást mutathat — pl. fennáll a gerinchorpadás és tartókipfordulás, lemezhorpadás és merevítőborda kihajlás, alkotólemez-horpadás és rúdkihajlás együttes felléptének lehetősége. Ilyen esetben nemcsak a matematikai nehézségek fokozódnak, de a kritikus teherparaméterek egybeesése vagy közeledése a jelenség lényegét gyökeresen módosíthatja és külön-külön „jóindulatú” esetek párosodása „rosszindulatú” együtteseket hoz létre. (AUGUSTI 1964, KOITER—PIGNATARO 1976, VAN DER NEUT 1968).

1.6. Fenti nehézségek miatt a „pontos” modellek helyett általában az adott gyakorlati igényekhez alkalmazkodó, korlátozott körben érvényes és korlátozott



információt szolgáltató „cél-modellek” kerülnek alkalmazásra. Emiatt megnövekszik a kísérleti kutatás szerepe, egyrészt a cél-modellek megalkotásához szükséges fizikai alapot (és sokszor inspirációt) szolgáltatják, másrészt az érvényességi kör lehatárolását teszik lehetővé. Ez utóbbi különösen akkor termékeny, ha — a nemzetközi munkamegosztás révén — viszonylag nagyszámú kísérletre adódik lehetőség. Érdekes megemlíteni, hogy a 70-es években az acélhidépítés egyik akut problémájának, az ortotrop pályalemez horpadásának vizsgálatára kidolgozott nyolc cél-modell érvényességét 9 nagy kutatóintézetben végzett 105 igen nagyléptékű (tehát rendkívül költséges) kísérlettel ellenőrizték, aminek során a matematikai statisztika és valószínűségelmélet megfontolásai is alkalmazhatók voltak (DOWLING—CHATTERJEE 1977).

1.7. Az alkalmazott cél-modellek lényegében két csoportra oszthatók. Az első csoport igen vékony, és ezért lényeges posztkritikus tartalékkal rendelkező lemezek vizsgálatára alkalmas; és közös vonásuk, hogy a teherbírás számításánál csak a membrán-feszültségeket veszik alapul, feltételezve, hogy azok továbbra is a meggömbült lemez eredeti középsíkjában hatnak. A kiinduló gondolat nyomott lemezek esetében Kármántól (1932), nyírt lemezeknél Wagnertől (1922) származik.



1.3. ábra

Előbbi igen termékeny ötlete a posztkritikus „dolgozó szélesség” fogalmának bevezetése volt (1.3. ábra), mely az eredeti, ill. WINTER (1947) által kísérleti alapon korrigált (és ezzel a „kezdeti zavarok” hatását is tükröző)

$$\frac{b_e}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{max}}}, \quad \text{ill.} \quad \frac{b_e}{b} = \sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{max}}} \left( 1 - 0,25 \sqrt{\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{max}}} \right)$$

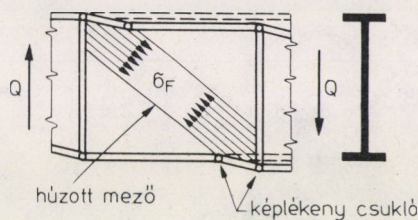
alakú egyszerű képletekkel lehetőséget ad arra, hogy a membránfeszültségek átrendeződését, a lemezszélen bekövetkező folyás és az ennek hatására bekövetkező „gyűrődés” (posztkritikus teherbírásvesztés) jelenségét egyszerűen leírjuk. E gondolaton alapul az igen vékony lemezekből felépített nyomott szerkezetek kísérleti vizsgálatának interpretációja; a zárt szelvényű nyomott rudak kihajlásának és



horpadásának együttes vizsgálata (KLÖPPEL 1969, MAQUOI 1976, SKALLOUD 1967, 1969, 1970, 1977), a gerinchorpadás és kifordulás együttesének elemzése (REIS—ROORDA 1977).

A nyírt lemez posztkritikus vizsgálatának Wagner-féle gondolata — mely szerint a posztkritikus állapotban a nyírást ferde irányú membránfeszültségekből felépülő „húzott mező” veszi fel — BASLER (1961) javaslatai alapján kiterjedt tartószerkezeti alkalmazást nyert és széles körű kísérleti előkészítés után a merevített gerinclemezek horpadásvizsgálatának új diszciplinájává fejlődött.

A rendkívül kiterjedt vizsgálatok tekintetében DOWLING—CHATTERJEE (1977) összefoglalójára kell utalni, kiemelve egyes fontosabb publikációkat (BERGMANN 1948; SKALLOUD 1962, 1965, 1970, 1975, 1977; MASSONNET 1977, ROCKEY—SKALLOUD 1972). A posztkritikus teherbírásvesztés számításának egyik elfogadott cél-modelljét az 1.4. ábra szemlélteti.



1.4. ábra

Hasonló eredményeket értek el kombinált igénybevételű (nyírt és hajlított) lemezmezők esetére is.

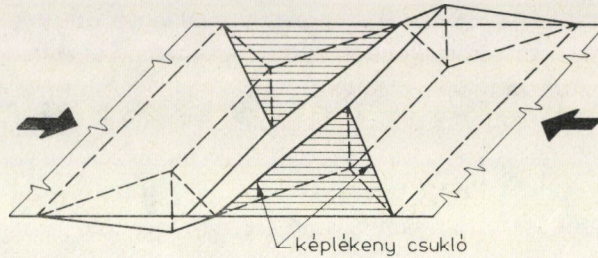
1.8. A cél-modellek második csoportja viszonylag vastag lemezek posztkritikus viselkedésének leírását tűzi ki célul. Mivel ez esetekben a posztkritikus teherbírasi tartalék viszonylag csekély (esetleg nincs is), a horpadás gyakorlatilag a folyással egyidőben jön létre. Az alapkérdés a horpadás utáni alakváltozások jellemzése abból a célból, hogy a „horpadó”, növekvő vagy csökkenő teherbírású szerkezeti elem leegyszerűsített alakváltozási törvényszerűségei a teljes szerkezet elemzésénél felhasználhatók legyenek. Ugyanezek alkalmasak olyan, a lemezvastagság megválasztására szolgáló kritériumok rögzítésére, melyek a horpadás jelenségének vizsgálatát mellőzhetővé teszik.

E cél-modellek jellegzetessége, hogy a membránfeszültségek mellett a meggyömbült lemezben fellépő hajlítónyomatékok szerepét is figyelembe veszik.

A vizsgálat egyszerűsítése — a rüdszerkezetek képlékeny teherbírásvizsgálatánál is alkalmazott — merev-képlékeny „folyási mechanizmusok” segítségével történhet, (1.5. ábra), (IVÁNYI 1979) melyek alapján legalább a csökkenő teherbírás tartományában a lemez alakváltozási állapota egyszerű összefüggéssel jellemezhető. E modellek az ideálisan rugalmas-képlékeny anyag-törvények mellett rugalmas-felkeményedő összefüggések esetére is kiterjeszhetőek.



1.9. A hazai kísérleti kutatás mindkét említett modelltípusra kiterjedt. Az *első csoportban* elsősorban a magasépítési szerkezeteknél lényeges szerepet játszó *merevítés nélküli gerinclemezek* posztkritikus vizsgálatára került sor: az alapproblémák (kéttámaszú tartó, konzol) mellett összetett feladatok (keretszerkezetek) elemzése is



1.5. ábra

megkezdődött. A *második csoportban* az *öv- és gerinclemezek* horpadásának kölcsönhatása, és *horpadó keresztmetszeti elemeket* tartalmazó teljes szerkezetek viselkedésének elméleti és kísérleti kutatása történt meg.

## 2. A vékony, merevítetlen gerincek méretezése törési alapon\*

2.1. A magasépítésben használt, sorozatban gyártott acélszerkezetek gyártása hazánkban az elmúlt két évtizedben igen jelentős fejlődésen ment keresztül, s ma a hazai acélszerkezeti gyártás döntő részét képezi. E szerkezetek tekintélyes részét az ún. vékonyfalú, könnyű acélszerkezetek jelentik, melyeknél az alkalmazott viszonylag kicsiny falvastagságok miatt fokozottan előtérbe kerül a lemezhorpadás jelenségének és ezzel összefüggő méretezési módszereknek a beható vizsgálata.

A merevítőbordákkal részekre osztott lemezmezők vizsgálata az egyensúly elágazási jelenségen alapuló lineáris horpadási elmélettel legalább két okból nem célravezető.

(i) A lineáris horpadási elmélet nem veszi tekintetbe a lemez horpadáson túli tartalékait, pedig azok vékony lemezek esetében rendkívül jelentősek.

(ii) A magasfokú automatizálást feltételező sorozatgyártás megköveteli a gerinclemezen alkalmazott merevítőbordák elhagyását, mert ez utóbbiak beépítése nagy kézi munkaráfordítást igényel, s így a termelékenységét erősen rontja.

A merevítés nélküli gerinclemezzel rendelkező gerendák széles körű elterjedésének előfeltétele volt tehát egy olyan méretezési eljárás kidolgozása, mely figyelembe veszi a horpadáson túli tartalékot, képes változó igénybevételekkel terhelt mezőket

\* Dr. Szatmári István munkája

vizsgálni, biztonságos és ugyanakkor gazdaságos méreteket eredményez, s végül a napi méretezési gyakorlat számára is reális számítási munkával megvalósítható.

A *BME Acélszerkezetek Tanszékén* 1972 óta e témakörben végzett kutatómunka eredményeként 1979-ben *sikerült egy* — a fenti alapelveknek megfelelő — *méretezési módszert kialakítani gerendatartók gerinclemezeinek vizsgálatára.*

2.2. Mint azt az 1. fejezetben már kifejtettük, az általános érvényű elméleti megoldás helyett célravezetőbb volt egy *a feladatra irányuló célmodell megszerkesztése.* Ilyen célmodellek a merevítőbordákkal részekre osztott, s így (közel) állandó nyíró és hajlító igénybevételekkel terhelt lemezmezőkre az irodalomban számos változatban megtalálhatók.

A *hajlítással terhelt lemezmezők* megoldásának közös alapgondolata, hogy a behorpadt lemezrészecskék csak csökkent mértékű hajlításból származó nyomófeszültség felvételére képesek, esetleg teljesen kikapcsolódnak a nyomoték viseléséből. Előbbire példa M. Herzog (HERZOG 1974) javaslata, utóbbira K. Basler és B. Thürlimann (BASLER, THÜRLIMANN 1961) megoldása.

A *közbenső merevítőbordák nélküli gerinclemez teherbírásszámítását először T. Höglund (HÖGLUND 1973) dolgozta ki.* A nyíró teherbírás meghatározására szolgáló megoldásának alapja, hogy a gerinclemez egy síkbeli rúdrendszernek tekintti, és feltételezi, hogy a rúdrendszer húzott rúdjai a folyási határ, nyomott rúdjai a kritikus feszültség elérésekor veszítik el teherbírást. A hajlító teherbírás meghatározása a fent hivatkozott alapelvet követi, s feltételezi, hogy a nyomott gerinclemez zóna egy része a teherviselésből kiesik.

T. Höglund munkája úttörő jelentőségű, de néhány hiányossága a gyakorlati használhatóságot erősen rontja. Ezek:

- a módszer csak kéttámaszú gerendatartókra használható;
- nem veszi tekintetbe az övek hajlítómerevségének hatását a gerinclemez teherbírására;
- a kísérletek szerint ugyanakkor túlzott jelentőséget tulajdonít a végbordák merevségének.

2.3. A tartók méretezése — mint ismeretes — a különböző *lehetséges határállapotok* elemzésén alapul. A vékony, merevítetlen gerincű tartók vizsgálatánál a szokásos szilárdsági, stabilitási és alakváltozási határállapotok közül értelemszerűen kimarad a gerinc nyírási és a gerinc horpadási határállapot, de helyettük három újonnan megfogalmazott határállapot vizsgálata vált szükségessé. Ezek:

- a gerinc (posztkritikus) nyíró-törési határállapota,
- a tartó (posztkritikus) hajlító-törési határállapota,
- a gerinc horpadás-alakváltozási határállapota.

2.4. A gerinclemez posztkritikus nyíró-törési határállapotának vizsgálata kísérleti és elméleti úton történt.

Részint a gerinc nyíró-törési jelenségének tisztázására, részint a kapott számítási eredmények ellenőrzésére 22 db kéttámaszú, 5 db konzol és 5 db befogott tartót törtünk



el egyenletesen megoszló teherrel, lehetővé téve ezzel a kísérletek megbízható, szakszerű végrehajtását.

A kísérletek főbb adatairól és eredményeiről a 2.I., II. és III. táblázat, valamint a hozzájuk csatlakozó ábra ad áttekintést.

A kísérleti tartók viselkedésének elemzése, valamint a végtelen hosszú nyírt lemezsávra kidolgozott elméleti megoldás (VOLMIR 1967) tanulmányozása alapján az egyenletesen megoszló teherrel terhelt merevítés nélküli gerinclemez nyírt szakaszának megoldását az alábbiak szerint fogalmazzuk meg.

(i) A lemez feszültségi állapotát a kritikus teher elérésekor

$$\sigma_{1kr} = -\sigma_{2kr}$$

a kritikuson túli tartományban, a törőteher elérésekor

$$\sigma_{1U} = \sigma_{1F}$$

$$\sigma_{2U} = (1 - \psi)\sigma_{2kr} - \psi\sigma_{1F}$$

2/I. táblázat

Tartó jele	Keresztmetszet típusa	Keresztmetszeti adatok									
		öv						gerinclemez			
		$s$ [mm]	$v$ [mm]	$h$ [mm]	$F_{\delta v}$ [cm <sup>3</sup> ]	$J_{\delta v, x}$ [cm <sup>4</sup> ]	$\sigma_{F\delta v}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ ]	$d$ [mm]	$b$ [mm]	$t$ [mm]	$\sigma_{F\theta}$ [ $\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ ]
G1-1 G1-2 G1-3 G1-4 G1-5	A	120,0	6,10	—	7,41	0,227	27,8	240	234	1,46 1,47 1,49 1,47	26,7 26,7 33,6 33,6 26,7
G2-1 G2-2	B	120,0	1,54	30,6	5,01	8,23	36,7	240	207 210	1,46 1,48	26,7 33,6
G3-1 G3-2 G3-3 G3-4		62,0	1,52	60,0	5,96	26,7	36,7	240	180	1,50 1,50 1,52 1,52	33,6
G4-1 G4-2 G4-3 G4-4	A	6,05	8,13 8,13 8,10 8,10	—	4,92 4,92 5,01 5,01	0,270 0,270 0,274 0,274	30,2	240	232	0,81 0,81 2,12 1,55	28,4 28,4 32,3 33,6
G5-1 G5-2 G5-3 G5-4 G5-5 G5-6 G5-7	B	1215	1,54	30,0	5,75 5,75 5,40 5,40 5,60	8,31 8,31 8,06 8,06 8,20 8,20	36,7	240	210	2,10 2,10 0,81 0,81 1,50 1,50	32,3 32,3 28,4 28,4 33,6 3,36

főfeszültségek jellemzik. Ebből  $\psi \approx 0$  felvételével

$$\sigma_{1U} = \sigma_{1F} \quad \text{és} \quad \sigma_{2U} = \sigma_{2kr}$$

feszültségösszetevők adódnak. A modellnek lényeges sajátossága, hogy  $\sigma_{2kr}$  értéke *elegendően nagy  $w$  alakváltozási tartományban állandónak tekinthető, s így lehetőséget nyújt a  $\sigma_1 = \sigma_{1F}$  húzó folyási főfeszültség kialakulásához.*

(ii) Az azonos előjelű, monoton növekvő nyírőerővel terhelt gerinclemez szakasz a 2.1. ábra szerint két részre tagolható, *egy kritikuson aluli tartományra és egy kritikuson túli tartományra.* A kritikuson aluli tartomány a további vizsgálatok szempontjából merev tárcsának tekinthető.

(iii) A kritikuson túli tartomány egy  $K$  jelű és egy  $S$  jelű tárcsa összegeként fogható fel, melyek az alábbi tulajdonságokkal bírnak.

A törés pillanatában a nyírőerő:

$$T_U = T_K + T_S;$$

Teher adatai				Kísérleti eredmények					Megjegyzés
$L$	$l_1$	$l_2$	$l_c$	$P_u$	$T_u$	$M_u$	$e_1$	$e_2$	
[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	$\left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	[kN]	[kNm]	[mm]	[mm]	
480	240	240	240	12,2	29,3	35,1	7,2	18,0	bordázott gl
	240	120	195	20,0	39,0	38,0	10,0	20,0	
	240	120	195	18,6	36,3	35,3	9,3	19,0	bordázott gl.
	240	120	195	17,8	34,7	33,8	8,9	19,0	
	240	120	195	20,0	39,0	38,0	8,9	20,0	
	240	240	240	18,1	38,6	46,4	18,1	60,0	
	240	240	240	17,6	42,0	60,4	17,2	45,0	
480	240	240	240	14,5	34,8	41,8	~	~	kifordult
	240	240	240	15,6	37,4	44,9	~	~	
	240	180	214	24,0	51,4	55,0	17,0	58,0	kifordult
	180	0	146	38,8	56,6	41,5	10,5	27,5	
480	240	0	180	7,0	12,6	11,3	3,8	10,0	
	240	0	180	7,2	13,0	11,7	3,9	11,5	
	120	0	105	64,0	67,2	35,2	8,2	22,5	
	120	0	105	37,0	38,6	20,3	5,2	15,5	
480	180	0	146	53,3	78,0	57,0	14,0	47,3	
	150	0	126	62,2	78,4	49,1	11,6	26,2	
	240	0	180	10,6	19,1	17,2	5,8	15,4	
	240	0	180	10,7	19,3	17,3	5,8	19,2	
	120	0	105	60,0	52,5	27,5	7,3	25,5	
	210	0	104	30,6	50,2	41,0	12,5	36,0	

2/II. táblázat

K1-1	A	61,5	8,10	—	4,97	0,271	30,2	240	232	1,54	33,6
K2-1	B	121,5	1,54	30,0	5,61	8,23	36,7	240	210	1,46	33,6
K2-2										1,52	33,6
K2-3										1,49	26,7
K3-1	B	61,5	1,52	60,0	5,98	25,8	36,7	240	180	1,53	33,6

2/III. táblázat

B2-1	B	30,5	1,00	15,0	1,18	0,368	44,8	240	225	0,65	27,0
B2-2		30,5	1,00	15,0	1,18	0,368	44,8	165	150	0,65	27,0
B2-3		31,0	1,00	15,0	1,24	0,379	44,8	165	150	1,05	26,9
B2-4		31,0	1,00	15,0	1,24	0,379	44,8	165	150	1,05	26,9
B2-5		41,0	2,00	20,0	2,95	1,510	42,6	240	220	1,05	26,9
B2-51		41,5	2,00	20,0	3,03	1,540	42,6	240	220	1,45	23,3

2/IV. táblázat

GH1-1	A	82,0	9,70	—	3,03	0,035	27,0	222	219	1,05	27,2
GH1-2		80,0	3,70	—	2,96	0,034	27,0	152	149	0,65	25,4
GH2-1	B	41,0	2,02	20,0	3,09	1,51	42,6	240	220	1,05	27,2
GH2-2		41,0	2,01	20,0	2,87	1,48	42,6	169	149	0,65	25,4

a főfeszültségek:

$$(\sigma_{1K}, \sigma_{1S}) = \sigma_{1F}$$

$$(\sigma_{2K}, \sigma_{2S}) = \sigma_{2Kr}$$

A K jelű tárcsa feszültségei:

$$\sigma_{1K} = -\sigma_{2K} = \tau_K = \text{const.}$$

míg az S jelű modell feszültségei:

$$\sigma_{1S} \neq 0; \quad \sigma_{2S} = 0.$$

E definícióból következően az S jelű modellben a gerinclemezek egy — a további számítással meghatározott — darabját kötélzávnak tekinthetjük.

(iv) A fenti elvek és néhány — e helyen nem részletezett — további feltevés eredményeképpen az S jelű modellt egy a 2.2. ábrán vázolt egyszerűen határozatlan keretszerkezetből és a keretszerkezetbe befüggesztett egyetlen kötélzávból álló modellel helyettesítettük.

Ennek a szerkezetnek a teherbírása az (i) alatt kifejtettek figyelembevételével a képlékenységtan módszereivel meghatározható.

240	150	—	150	28,9	43,3	32,4	14,2	32,5	
240	180	—	180	25,7	46,3	41,6	13,4	26,0	
	180	—	180	27,5	49,5	44,6	9,6	29,0	
	210	—	210	19,2	40,3	42,2	11,0	34,0	
240	120	—	120	52,0	62,4	37,4	3,6	16,0	

270	135	135	135	6,76	9,12	6,16	2,1	8,5	bekötés felszakadt
270	135	135	135	6,76	8,68	5,88	2,7	10,5	
270	135	135	135	13,21	17,84	12,04	2,9	10,5	
270	135	135	135	10,20	13,80	9,29	—	—	
270	135	135	135	20,74	28,00	18,90	2,0	16,0	
270	135	135	135	27,11	36,60	24,70	2,2	10,5	

240			120	22,7		16,34	4,4	14,0	
240			120	14,5		10,44	7,5	16,5	
240			120	42,8		30,82	—	—	
240			120	22,0		15,84	7,0	19,5	

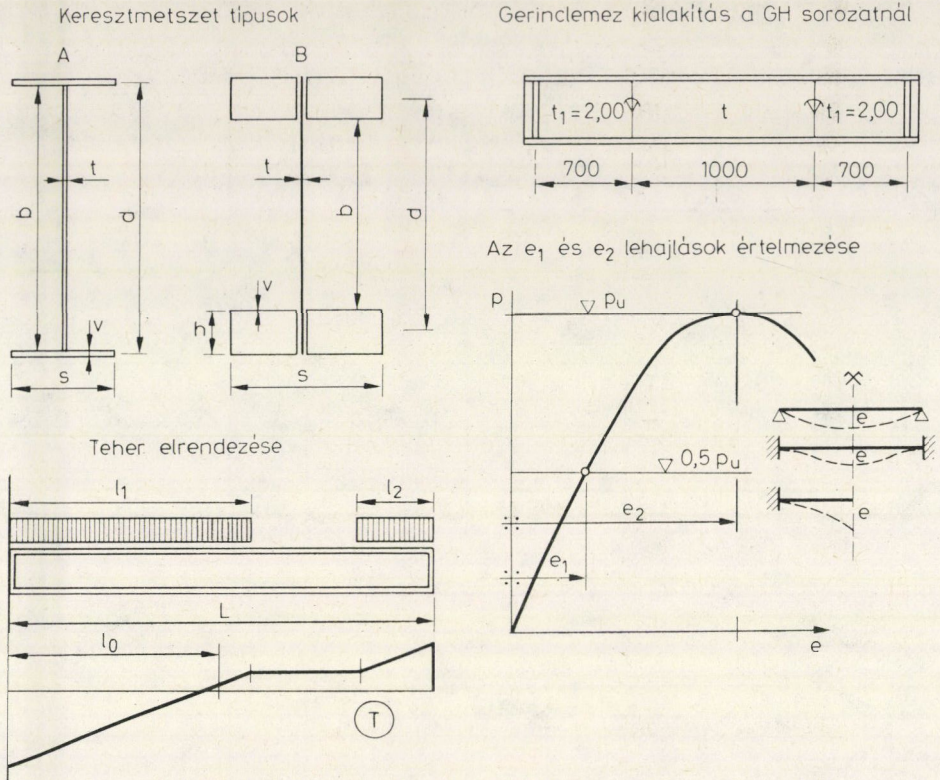
2/V. táblázat

Keret jele:	$P_{U exp}$ [kN]	$P_{H rug}$ [kN]*	$\frac{P_{U exp}}{P_{H rug}}$	$P_{H képl}$ [kN]**	$\frac{P_{U exp}}{P_{H képl}}$	G [kp]	$\frac{P_{U exp}}{G}$
R 2-1	4,23	2,58	1,64	2,50	1,69	64,0	6,6
R 2-2	3,94	1,80	2,19	2,37	1,66	61,0	6,5
R 2-3	5,65	1,61	3,51	3,29	1,72	71,0	8,0
R 2-4	5,15	1,37	3,76	2,94	1,75	72,0	7,1

\*  $\sigma_H = 24,0 \text{ kN/cm}^2$  értékkel számolva

\*\*  $P_{H képl} = \frac{P_{U teor}}{1,5}$  összefüggéssel számolva





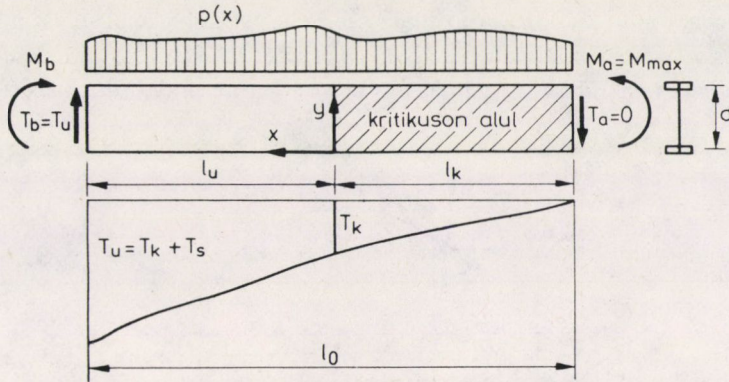
A gerinclemez nyíró teherbírásának a fentiekben vázolt számítása a figyelembe vett paraméterek széles tartományában megfelelően megbízható, azonban a felmerülő számítási munka volumene nem teszi lehetővé a módszer közvetlen alkalmazását a napi tervezői munkában. Ezért szükségesnek tartottuk egy olyan közelítő méretezési módszer kidolgozását, mely a „pontos” számítás elveit és eredményeit alapul véve, egyszerű számítási munkával eredményre vezet.

A közelítő számításban a gerinclemez nyírt szakaszának kritikusan túli részét egy speciálisan „képlékeny” anyagú tárcsának tekintjük. Feltételezzük, hogy a nyíró teherbírást kimerítő egyenletesen megoszló  $p_U$  teher azzal a teherrel egyenlő, mely a gerinclemez legjobban igénybevett pontjában kimeríti a  $\sigma_{1F}$  és  $\sigma_{2kr}$  főfeszültségekkel meghatározott folyási feltételt. Ezt a feltételt ábrázoltuk a 2.3. ábrán látható Mohr-körrel. Könnyen belátható, hogy az elérhető  $\tau_U$  törő nyírófeszültség a fent említett főfeszültségeken kívül egy sajátfeszültség jellegű  $\sigma_x$  és  $\sigma_y$  feszültségösszetevőkkel jellemzett additív feszültségállapottól is függ. Ez utóbbi nagyságát a gerinclemezt határoló övek és végborda teherbírása határozza meg, s szerepe az ábrán bejelölt  $\rho$  iránytangensben jut kifejezésre. A  $\rho$  tényező meghatározására szolgáló összefüggést a kísérleti eredményekre és az elméleti számításra alapozott regressziós számításal határoztuk meg.

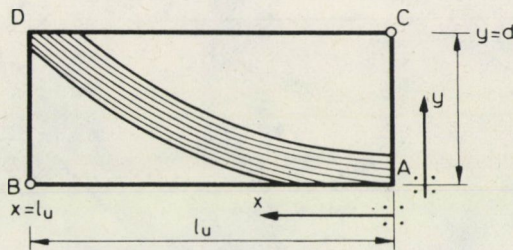


A közelítő számítás és a kísérletek eredményeinek összevetése a 2.4. ábrán látható.

2.5. A hajlított I-tartók a legnagyobb nyomaték helyén — kizárva a fáradás és a kifordulás lehetőségét — kellően zömök alkotólemezek esetén teherbírásukat a korlátozatlan képlékeny alakváltozás formájában veszítik el. Ha e tartót igen vékony



2.1. ábra



2.2. ábra

gerinclemezzel készítjük, akkor a teherbírás kimerülése a gerinclemez és a nyomott öv együttes stabilitásvesztése miatt jön létre. Ezt a jelenséget a *tartó posztkritikus hajlító törésének* nevezhetjük.

Külföldi kísérletek (HÖGLUND 1973; FREY 1977; CHERN 1973), valamint az e téma felderítésére végzett saját kísérleteink (l. 2.IV. táblázat) azt mutatták, hogy a vékony gerinccel készült tartó

- elvesztheti hajlító teherbírását a korlátozatlan képlékeny alakváltozási határállapot, sőt formailag az első folyási határállapot elérése előtt is;
- teherbírása azonban nem függ közvetlenül a gerinc hajlító horpadásától, s a problémát nem oldják meg azok az irodalomból ismert elképzelések (l. 2.2. pont),

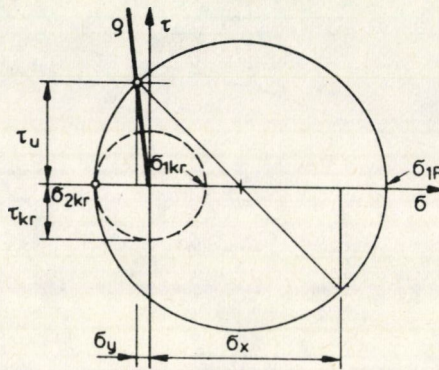


melyek csak a gerinclemezek a hajlítónyomaték viseléséből való részleges vagy teljes kikapcsolódását veszik tekintetbe.

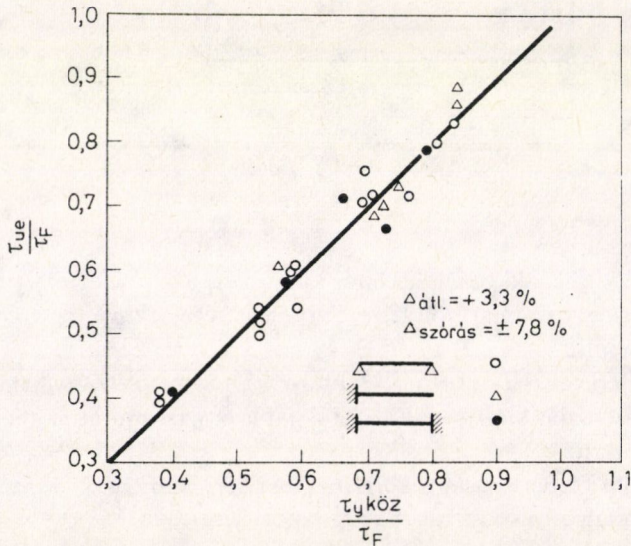
Az általunk javasolt méretezési módszer az alábbiakban foglalható össze:

(i) Általános esetben a tartó posztkritikus hajlító törése a képlékeny törés és a nyomott öv — gerinclemez együttes stabilitásvesztése közötti interakciónak tekinthető.

(ii) A számításhoz szükséges  $p_F$  teher meghatározása a közismert módon történhet, a nyomott öv kihajlását okozó  $p_N$  teher számításának elvét a 2.5. ábrán foglaltuk össze. Ennek értelmében az  $N$  nyomóerővel terhelt övet rugalmasan ágyazott nyomott rúdnak tekintjük. A rugalmas ágyazást a gerinclemez, mint kezdeti excentri-



2.3. ábra



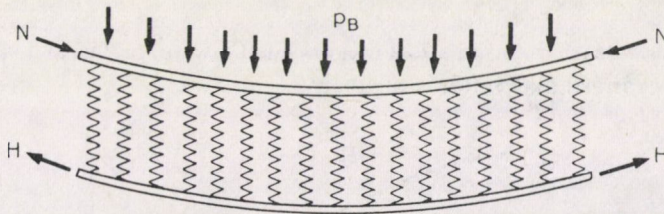
2.4. ábra



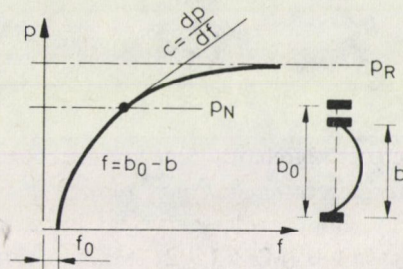
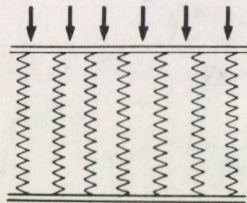
citással rendelkező nyomott rugók sorozata biztosítja, amelynél a rugótényező a  $p$  teherintenzitás függvénye.

(iii) Az interakciós összefüggést a 2.6. ábra szerint úgy határoztuk meg, hogy a számítás a kísérlet eredményeit megfelelő biztonsággal közelítse.

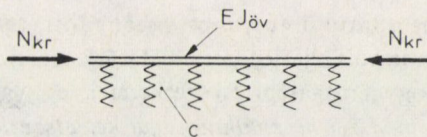
2.6. A lineáris horpadási elméletnek, mint méretezési alapnak a használata automatikusan kiküszöböli a nem kívánt mértékű horpadási alakváltozások felléptét. A posztkritikus tartalék kihasználása azonban szükségessé teszi, hogy külön



a) az öv és gerinc együttes stabilitásvesztése



b) a gerinclemez összeroppanása



c) a rugalmasan ágyazott nyomott öv kihajlása

2.5. ábra

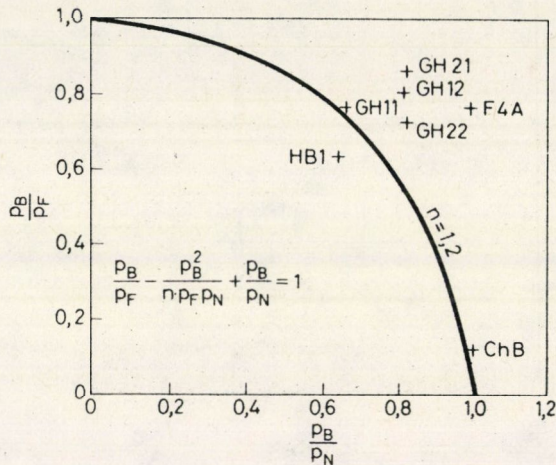


intézkedéssel, a horpadás—alakváltozási határállapot bevezetésével kerüljük el az ilyen túlzott alakváltozásokat.

A nem-lineáris horpadási elmélet alapján, a kísérleti tapasztalatok és eredmények felhasználásával megállapítottuk, hogy a nyírt gerinclemez horpadás-alakváltozási határállapotát a

$$\tau_{uA} = \tau_{kr} + \frac{\pi^2 E \cdot c}{\lambda_A^2}$$

nyírófeszültség elérése jelenti, ahol a  $\lambda_A$  a megengedett  $b/w$  horpadási alakváltozás, a  $c$  a  $b/w_0$  kezdeti (gyártási) alakváltozás függvénye.



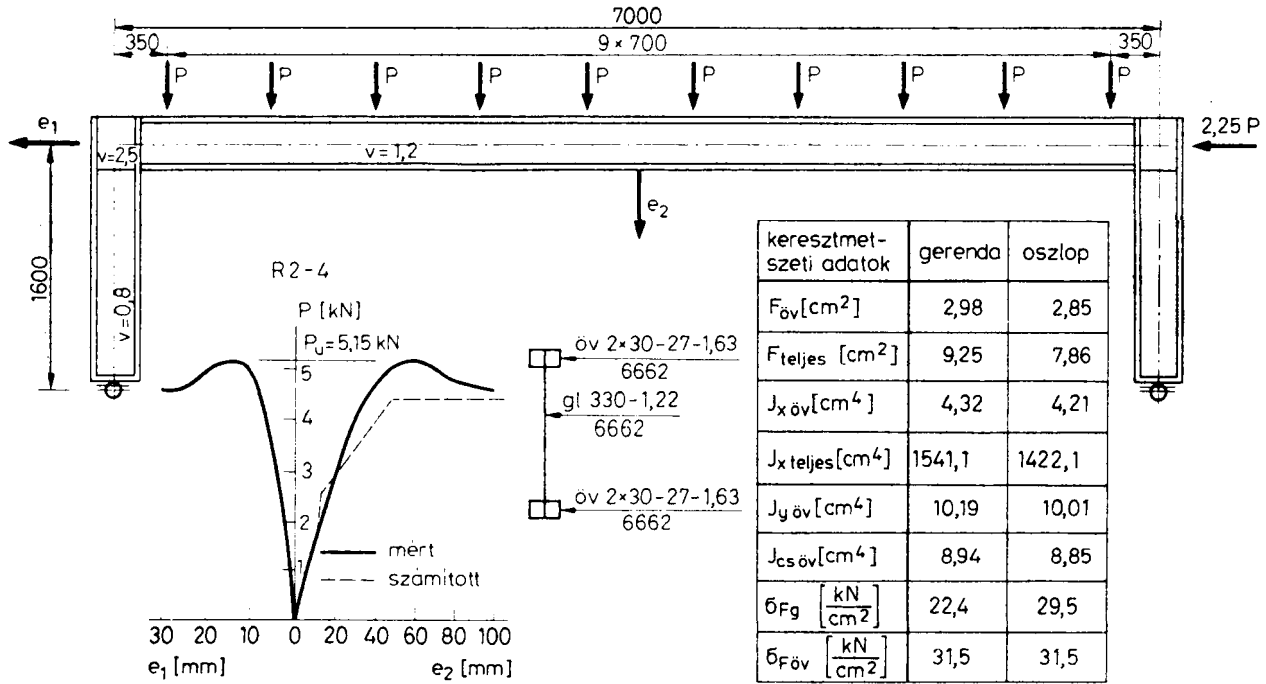
2.6. ábra

2.7. A gyakorlati méretezés végrehajthatósága érdekében meghatároztuk a 2.4—2.6. pontokban vázolt méretezési módszerhez tartozó biztonsági tényezőket és szerkesztési szabályokat úgy, hogy azok szervesen illeszkedjenek a magasépítési szerkezetek méretezési előírásaihoz (MSZ 15021, MSZ 15024).

2.8. Az új méretezési módszer — elsősorban a hajlító horpadási határállapot elhagyása és a posztkritikus hajlító törési határállapot bevezetése miatt — jelentős mértékben megváltoztatja a hajlított tartók keresztmetszetének célszerű arányait, s ezzel együtt a tartók relatív (tehát a tartó önsúlyához viszonyított) teherbírását is.

2.9. A fentiekben bemutatott eljárást gerendatartók vizsgálatára dolgoztuk ki. Tekintettel azonban arra, hogy a magasépítési szerkezetek leggyakoribb tartótípusa a keret, célszerűnek látszik a módszer használhatóságát ketretszerkezetek gerendáira is kiterjeszteni. E kutatómunka kezdeti lépéseiként az elmúlt két évben 4 törőkísérletet hajtottunk végre kétsuklós modellkereteken és 3 további törőkísérletet a Dunai Vasmű közreműködésével eredeti léptékű — 30 m támaszközü — kereteken.





2.7. ábra

Az elvégzett kísérletek célja annak eldöntése volt, hogy ez a méretezési eljárás alkalmazható-e keretgerendák számítására, továbbá, hogy az ilyen vékonygerincű kereteket csak rugalmasan lehet méretezni, vagy lehetséges-e „képlékeny” igénybevétel átrendeződés, s így a képlékenységtan számítási módszereinek használata.

A laboratóriumi kísérletek közül példaként a 2.7. ábrán bemutatjuk az R 2-4 jelű keret adatait, és a keret jellemző eltolódásait. Az ábrán a középső keresztmetszet mért lehajlásán kívül berajzoltuk a képlékeny alapon (I.r. elmélettel) számított lehajlást is.

A 4 kísérlet eredményeiről nyújt áttekintést a 2.V. táblázat.

Az elvégzett kísérletek — miként a bemutatott példákban látszik — egyértelműen bizonyították, hogy

- a kidolgozott méretezési eljárás alkalmas keretgerendák méretezésére is,
- a vékonygerincű keretknél is lehetőség van — amennyiben a képlékeny méretezés egyéb feltételei teljesülnek — a „képlékeny” igénybevétel átrendeződés figyelembevételére, sőt a teherbírás helyes meghatározása ezt kifejezetten igényli.

### **3. Stabilitási és szilárdsági jelenségek kölcsönhatása acélszerkezetek képlékeny teherviselésében\***

#### *A lemezhorpadás szerepe*

Magasépítési és ipari acélszerkezetek méretezésénél a képlékenységtani módszerek elterjedése tapasztalható, amit számos ország külön „képlékeny méretezési előírások” kiadásával segít elő. Mindezt egyrészt gazdaságossági törekvések, másrészt az a szempont indokolja, hogy a szerkezetek tönkremenetellel szembeni biztonsága általában csak képlékenységtani módszerek felhasználásával vizsgálható.

Magyarországon a „Könnyűszerkezetes Kormányprogram” keretében e tárgykörben elméleti és kísérleti kutatómunka került előirányzásra. A tervezett kutatómunka jelentős része a BME Acélszerkezetek Tanszékére hárult, és a vizsgálatok eredményeként megjelent MI-04-188 „Acélszerkezetek képlékeny méretezése” c. Műszaki irányelvek (HALÁSZ, IVÁNYI 1980).

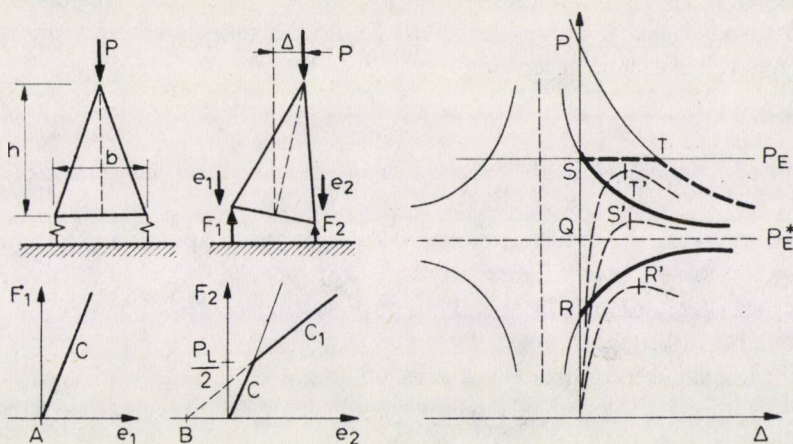
Acélszerkezetek képlékeny teherbírásvizsgálata egy feltételrendszer teljesítését kívánja meg. A feltételrendszer számos részelemből áll, tartalmaz olyan elemeket, amelyek a szerkezet anyagával, a geometriai viszonyaival, mások a terhelési móddal stb. kapcsolatosak. A feltételrendszer jelentős része foglalkozik a stabilitási jelenségekkel, így a stabilitási és szilárdsági jelenségek kölcsönhatásával.

A bonyolult kölcsönhatásokat — elsősorban a lemezhorpadás szerepét — egy példával illusztráljuk, mely egy egyszerű, ún. Shanley-modell viselkedését mutatja (CROLL, WALKER 1972). A modell nyomott rudat vizsgál, az alátámasztó rugók a rúd övlemezeinek viselkedését modellezik, a gerinclemez hatását elhanyagoljuk (3.1. ábra).

\* Dr. Iványi Miklós munkája.

A 2. jelű rugó az övlemez posztkritikus (egyensúlyelágazást követő) viselkedését a rugó-jelleggörbe változtatásával veszi figyelembe. Ha az övhorpadáshoz tartozó ( $P_L$ ) erő elég nagy, akkor viszonylag nagy erő értékig a két rugó egyformán viselkedik és a modell kritikus ereje:

$$P_E = \left(\frac{b^2}{2h}\right) c,$$



3.1. ábra

amely az ún. Euler-féle kritikus erő. Ha azonban  $P_L < P_E$ , akkor  $P = P_L$  erőnél a  $\Delta$  folyamatosan növekedni fog, és a perfekt modell erő-elmozdulás görbéje a  $c$  és  $c_1$  rugótényezőkkel jellemzett erőhöz tart:

$$P_E^* = \left(\frac{b^2}{2h}\right) \frac{2cc_1}{c+c_1}$$

A  $P_L = P_E^*$  erőnél indifferens egyensúlyi állapot alakul ki (Engesser—Kármán-féle kritikus erő).

A modell egyensúlyi állapotát leíró összefüggésben különböző  $P_L$  erő figyelembevételével erő-elmozdulási görbék határozhatók meg.

Ha  $P_L < P_E^*$ , akkor a perfekt-modell egyensúly elágazása  $R$  pontban jön létre. Ehhez az állapothoz az imperfekt modell esetén az  $R'$  csúcspontot elérő görbe tartozik, mely azt mutatja, hogy a posztkritikus állapot stabil jellegének figyelembevételével gazdaságos és kellően biztonságos szerkezet alakítható ki. Ez a „vékony” lemezek esete.

Ha  $P_E^* < P_L < P_E$ , akkor a posztkritikus állapot instabil jellegű, és a perfekt-modell valamint az imperfekt-modell teherbírási értékei között nagy lehet a különbség.



A  $P_E = P_L$  esetben a rúdkihajlás és lemezhorpadás egyszerre következnek be. Az  $S$  és  $S'$  pontok között a különbség nagy, ilyenkor ún. „optimum-erőzioról” beszélhetünk (THOMPSON, HUNT 1973).

Amennyiben  $P_E < P_L$ , a lemezhorpadás csak a perfekt-modell rúdkihajlás hatására bekövetkező egyensúly-elágazást követő állapotát befolyásolja. Megfelelő arányok megválasztásával elérhető, hogy a  $T$  és  $T'$  pontok közel azonos teherbírásiértékhez tartozzanak és az imperfekt-modell is rendelkezzen elmozdulás-képességgel, ez a „vastag” lemezek esete. Így a képlékeny méretezés alkalmazása esetén a lemezhorpadásnak az egyes szerkezeti elem, ill. a teljes szerkezet elmozdulás-képességére gyakorolt hatása lép előtérbe.

### 3.1. Kísérletek acélszerkezetek képlékeny méretezési előírásaihoz

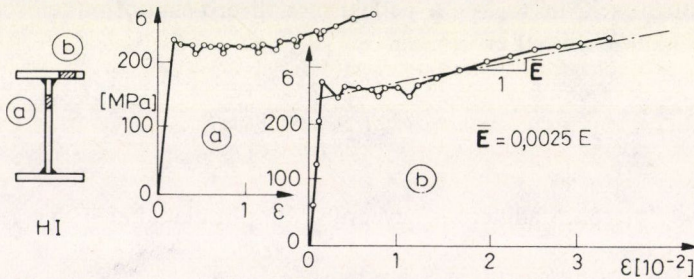
Acélszerkezetek képlékeny méretezési előírásaihoz kapcsolódó kísérleti kutatómunka

— egyes szerkezeti elemek (gerendák, oszlopok, keretsarkok stb.) és

— teljes léptékű keretszerkezetek

kísérleti vizsgálatát irányozta elő. A kísérletek alapvető célja a képlékeny méretezés gyakorlati formája, az ún. elsőrendű képlékeny teherbírásvizsgálat alkalmazási feltételeinek ellenőrzése volt.

3.11. Az acélananyag képlékeny anyagjellemzőinek meghatározását szabványos próbatesteken szakítóvizsgálat segítségével hajtottuk végre. A különböző lemezvastagságokhoz tartozó próbatestek száma összesen 76 db volt (3.2. ábra).

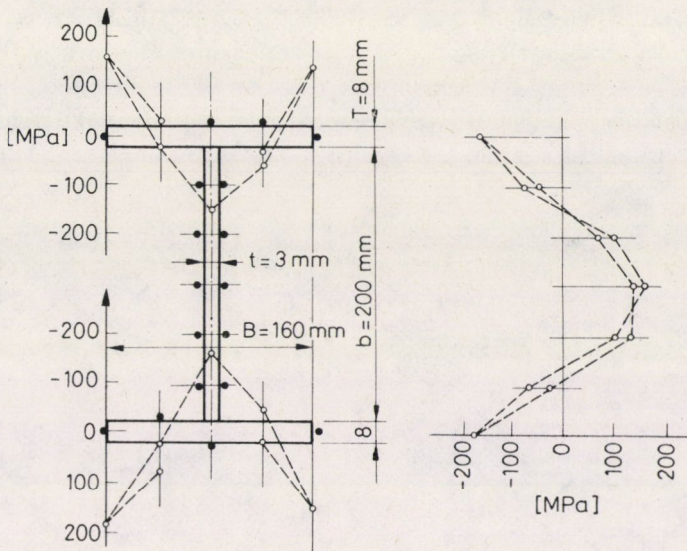


3.2. ábra

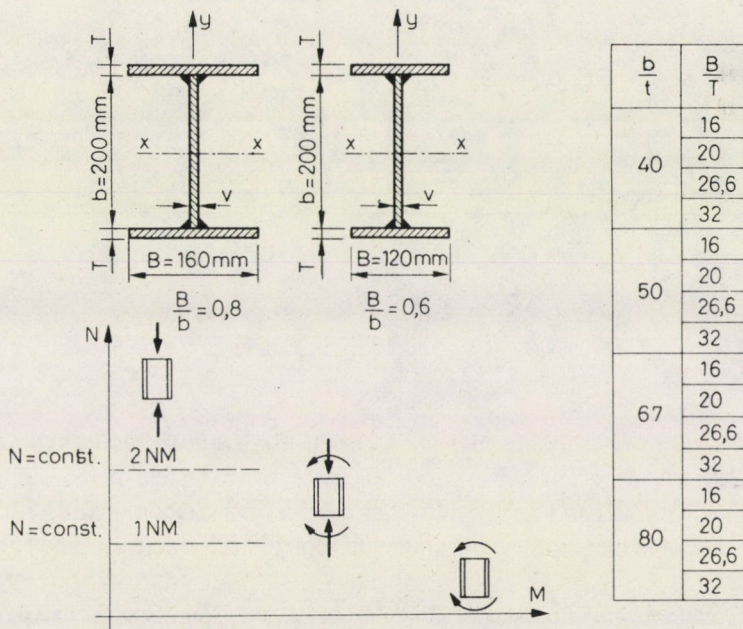
3.12. Hegesztett I-szelvények saját (maradó) alakváltozásait, ill. feszültségeit darabolásos eljárással határoztuk meg. A saját (maradó) alakváltozások befolyásolják mind a szilárdsági, mind a stabilitási jelenségeket. A vizsgálatok során összesen 34 különböző keresztmetszet saját (maradó) alakváltozását határoztuk meg (3.3. ábra)

3.13. Nyomott, hajlított és külpontosan nyomott rudak alkotólemezeinek horpadási vizsgálatát kísérleti módszerekkel hajtottuk végre. A kísérleti program két különböző





3.3. ábra

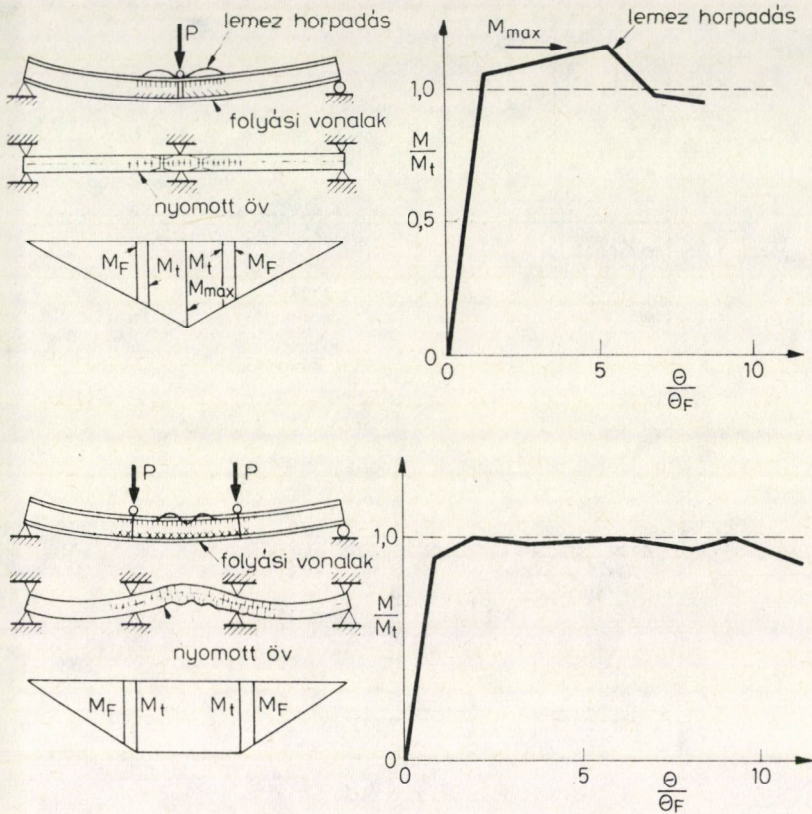


$\frac{b}{t}$	$\frac{B}{T}$
40	16
	20
	26,6
	32
50	16
	20
	26,6
	32
67	16
	20
	26,6
	32
80	16
	20
	26,6
	32

3.4. ábra



befoglalójú *I* szelvény vizsgálatát tűzte ki célul ( $B/b = 0,6; 0,8$ ). Mind a két esethez négy különböző gerinckarcsúság tartozott, és minden gerinckarcsúsághoz négy övkarcsúságot terveztünk (3.4. ábra). Így egy sorozat összesen 32 próbatestből állt, minden próbatest típust négy különböző igénybevétellel terhelünk. A kísérleti program keretében 132 próbatest vizsgálatára került sor.



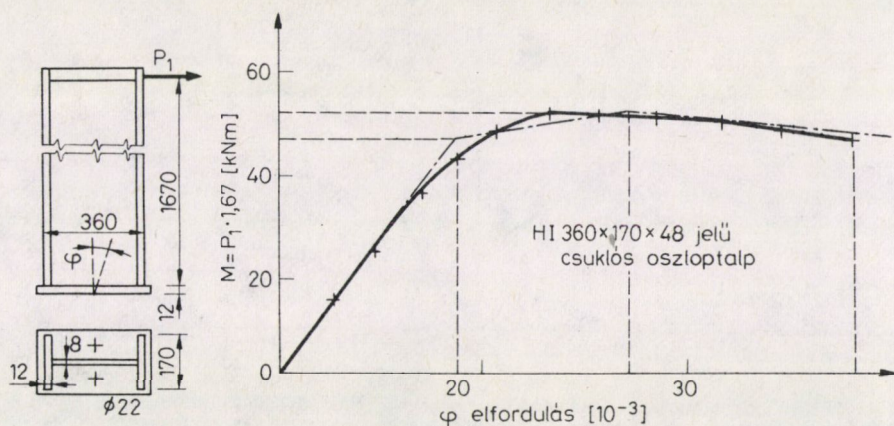
3.5. ábra

3.14. *I*-szelvények törőnyomatékát kísérleti módszerekkel is meghatároztuk. A 3.17. és 3.18. pontokban ismertetett kísérleti próbatestek keresztmetszeteinek törőnyomatékát középen koncentrált teher esetére, és középen állandó nyomatékot adó teher esetére is meghatároztuk. Összesen 9 próbatest vizsgálatára került sor (3.5. ábra).

3.15. *Oszloptalpak* viselkedését kísérleti módszerekkel is meg kellett vizsgálni. A kísérleti kereteket csuklós és befogott oszloptalp feltételezésével tervezték. A vizsgálat során kiderült, hogy ez a feltételezés erős közelítés. A kísérleti programban két csuklós és két befogott oszloptalp vizsgálatát hajtottuk végre (3.6. ábra).



3.16. *Húzott csavaros kapcsolatok* kísérleti vizsgálatát a kísérleti kerettartókból kivágott próbatesteken hajtottuk végre. A kapcsolatok vizsgálatára szolgáló próbatesteket úgy alakítottuk ki, hogy nemcsak a kapcsolat homloklemez, csavar, hanem a környezetük is vizsgálatra került. Két próbatest segítségével a taréjnal levő kapcsolatot, három próbatest segítségével pedig a gerenda és oszlop kapcsolatát vizsgáltuk (3.7. ábra).



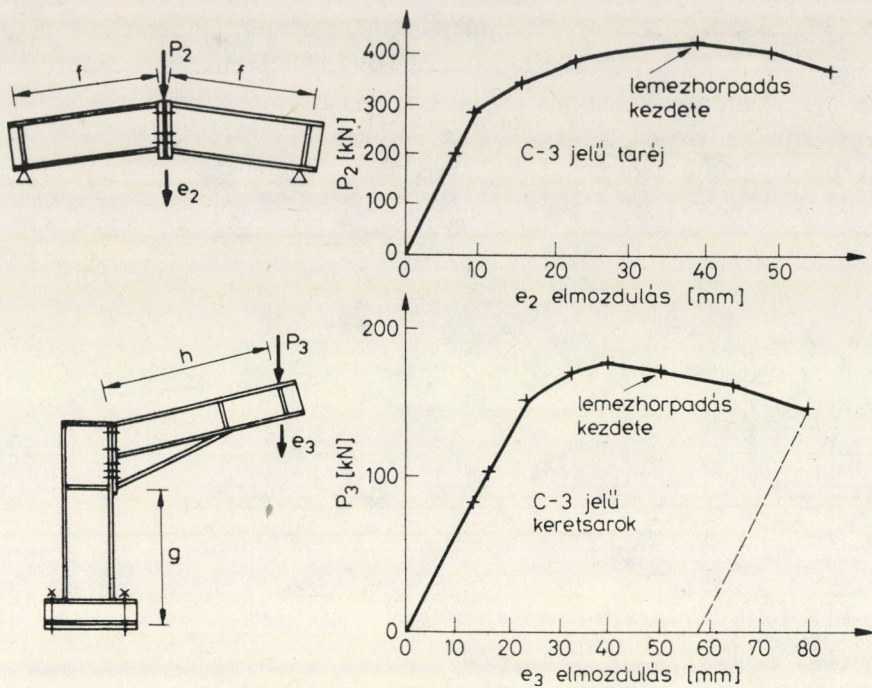
3.6. ábra

3.17. *Statikailag határozott keretszerkezet* képlékeny viselkedését kísérleti módszerekkel is vizsgáltuk. A vizsgálat során kitértünk a keret teherbírásának, az oldalirányú megtámasztások hatásának, a különböző kialakítású keretsarkok hatásának elemzésére. Az A-jelű keretkísérleti program során négy próbatestet vizsgáltunk (3.8. ábra).

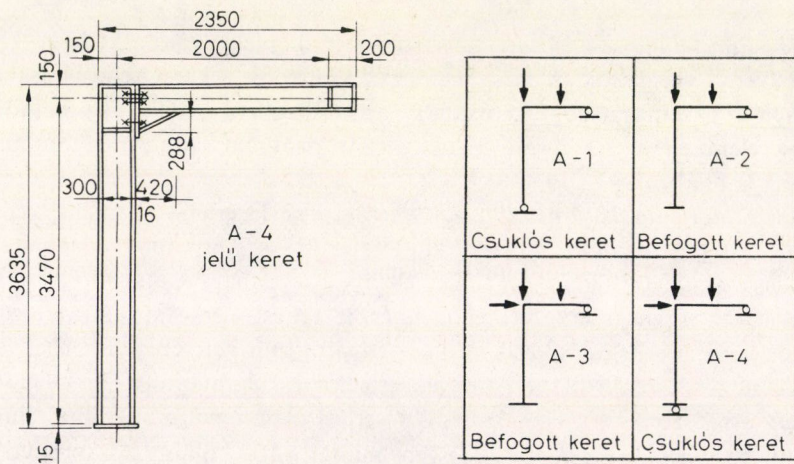
3.18. *Statikailag határozatlan keretszerkezetek* kísérleti vizsgálata keretében vizsgáltuk a korlátolatlan folyás határállapotát, a képlékeny alakváltozások halmozódásának határállapotát, a képlékeny állapotban lejátszódó instabilitási jelenségeket, az egyes szerkezeti elemek és a teljes szerkezet alakváltozásának képességét, a daruterhelés hatását. A kísérleti program keretében 14 teljes léptékű keretszerkezet törésére került sor. Az egyes keretek vizsgálata során a keret oldalirányú megtámasztási viszonyait is elemeztük. A kísérleti programot a 3.9. ábra mutatja.

3.19. A kísérleti program első részébe mintegy 100 különböző anyagvizsgálat, saját (maradó) alakváltozás mérés tartozott (3.11. és 3.12. pontok). A program második részébe közel 170 különböző vizsgálat tartozott (3.13—3.18. pontok), ebbe a csoportba tartozó kísérleti vizsgálatok döntő többségénél a lemezhorpadás volt a próbatest tönkremenetelének közvetlen oka, ill. okozata. A rúd tengelye mentén változó intenzitású hajlítónyomaték hatására a maximális igénybevétel környezetében alakult



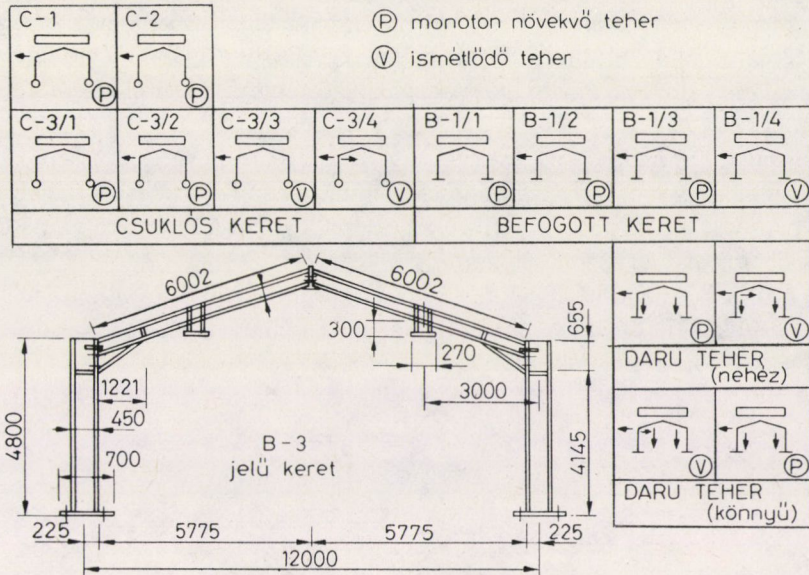


3.7. ábra



3.8. ábra





3.9. ábra

ki lemezhorpadás. Állandó intenzitású hajlítónyomaték hatására pedig először kifordulás következett be, majd a végleges tönkremenetel lemezhorpadás hatására alakult ki.

### 3.2. A lemezhorpadás vizsgálati folyási mechanizmusok segítségével

3.21. Acélszerkezetek képlékeny teherbírásvizsgálatánál a rudak szilárdsági tulajdonságainak vizsgálata mellett fontos feladat az elmozdulás-képesség elemzése is.

A teherbírás-képességhez hasonlóan az elmozdulás-képességet is számos tényező befolyásolja. Ilyenek lehetnek a szerkezet geometriájában keletkező kedvezőtlen változások (kihajlás, kifordulás), valamint a keresztmetszet geometriájában bekövetkező kedvezőtlen változások (horpadások) is.

Továbbiakban a nyomott rudak valamint hajlított rudak keresztmetszeti geometriájában bekövetkező változások hatásával foglalkozunk. Feltételezzük, hogy a rúd már képlékeny állapotba került és a rúd keresztmetszetét alkotó lemezek horpadásai a képlékeny alakváltozások korlátolatlan kialakulását akadályozzák. A rudakat alkotó lemezek horpadásai hatására kialakuló folyási mechanizmus görbe (Yield-Mechanism Curve) megállapítása a feladat.

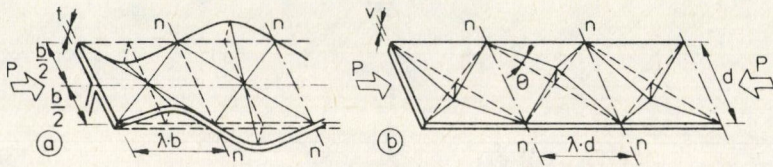
3.22. Nyomott lemezek horpadását a lemez geometriai arányai és a szomszédos lemez-részek megtámasztó hatásai befolyásolják, ezért az elmozdulás-képesség kérdését elsősorban a fenti jellemzőkön keresztül vizsgálhatjuk.



Haaijer, G. (1957), valamint Lay, M. G. (1965) feltételezték, hogy a lemezhorpadási feladatot mint a stabilitási probléma egyenűly-elágazási feladatát lehet megoldani. Ben Kato (BEN KATO, 1965) vizsgálatai során más oldalról közelítette meg a problémát.

Valóságos lemezknél, ha a vastagság-szélesség arány meglehetősen kicsi, a folyás megindulásakor csekély „gyűrődéseket” (hullámosodásokat) lehet megfigyelni. A lemez nem veszti el azonnal teherbíróképességét, hanem a folyást előidéző terhet bizonyos deformáció lejátszódásáig hordozni képes.

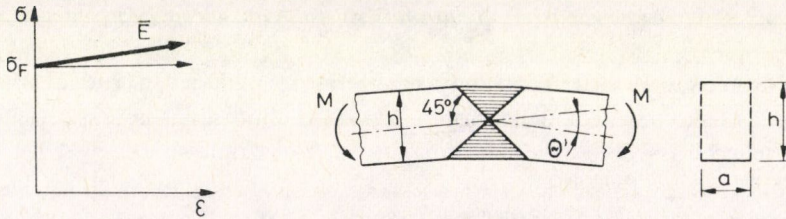
A „gyűrődés” tulajdonképpen egy folyási mechanizmusnak tekinthető, melynek képlékeny csuklóiban (hullámgerinceken) nem állandó, hanem a felkeményedés miatt egyre növekvő „törőnyomaték” működik.



3.10. ábra

Az övlemezekre feltételezett alakot a 3.10/a, a gerinclemezre pedig a 3.10/b ábra mutatja.

A Ben Kato által kialakított modell egyik legnagyobb fogyatékossága, hogy az I-keresztmetszet alkotólemezeiben bekövetkező horpadások — feltételezése szerint — geometriailag egymástól függetlenül alakulnak ki.



3.11. ábra

3.23. A vonalszerű képlékeny csukló viselkedését a képlékenységtan szélsőérték tételi közül a kinematikai tétel segítségével határozzuk meg.

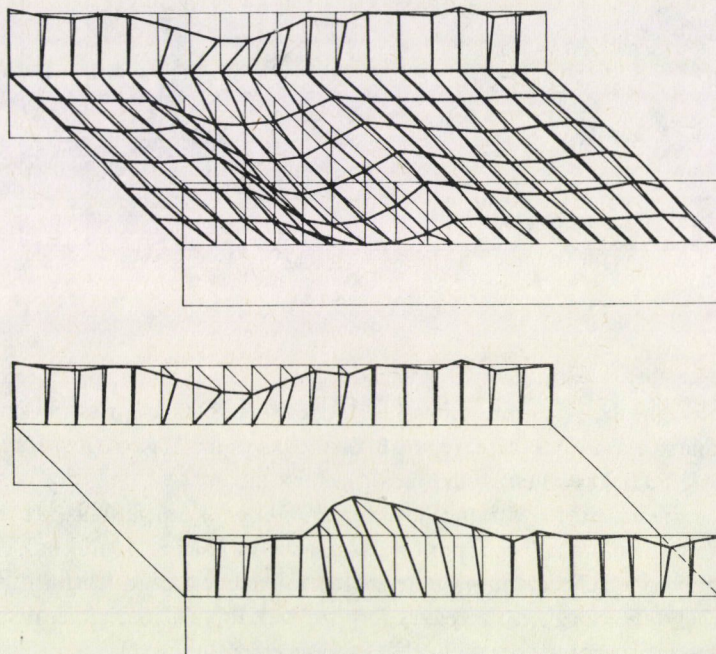
Folyási mechanizmust választunk, úgy, hogy az a lehető legjobban feleljen meg a geometriai feltételeknek és a feltételezett folyási kritériumnak. A fenti módszert Ben Kato mellett használták hengerhajak vizsgálatánál (ALEXANDER 1960), valamint öszvértartók acéltartó-részének a negatív támasznyomaték hatására bekövetkező horpadásvizsgálatánál (CLIMENHAGA, JOHNSON 1972). Az alkalmazott módszert egy egyszerű példára a 3.11. ábra mutatja.



A rúd anyaga izotrop, összenyomhatatlan, merev-képlékeny tulajdonságú. A merev és képlékeny zónák a rúd hossz tengelyével  $45^\circ$ -os szöget zárnak be. Felírhatjuk az alakváltozási energiát, valamint a helyzeti energiát, és adódik

$$M = \frac{a h^2}{4} \sigma_F$$

ismert összefüggés.



3.12. ábra

Merev-felkeményedő anyag esetén (3.11. ábra)

$$\sigma_x = \sigma_F + \varepsilon_x \bar{E} \quad \text{és} \quad M = \frac{a h^2}{2} (\sigma_F + \frac{1}{2} \Theta \bar{E})$$

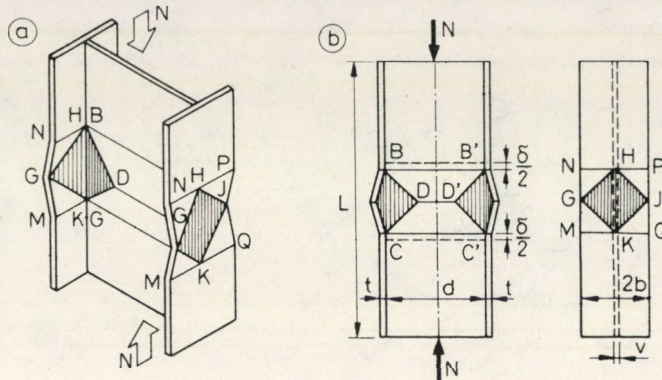
3.24. A bemutatott gondolatmenet szerint nyomott rúd alkotólemezeinek horpadásvizsgálatát is elvégezhetjük. A kísérleti eredmények alapján választhatunk folyási mechanizmust. A 3.13. pontban bemutatott kísérletsorozat N-7 jelű próbatestjének kihorpadt alakját a 3.12. ábra mutatja.

A választott folyási mechanizmust pedig a 3.13. ábra mutatja. A vonalkázott területeken képlékeny alakváltozás jön létre; ha ezen zónák határvonala —



deformálatlan állapotban — a rúd hossz tengelyével  $45^\circ$ -os szöget zár be, akkor a 3.23. pontban leírt modell alkalmazható, ez érvényes az ábrában vastagon kihúzott vonalakra is, melyeket vonalszerű képlékeny csuklónak tekintünk.

A gerinclemezben a  $BCD$  és  $B'C'D'$  zónákban jön létre képlékeny alakváltozás, és a  $BD$ ,  $B'D'$ ,  $CD$ ,  $C'D'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  és  $DD'$  képlékeny csuklók alakulnak ki.



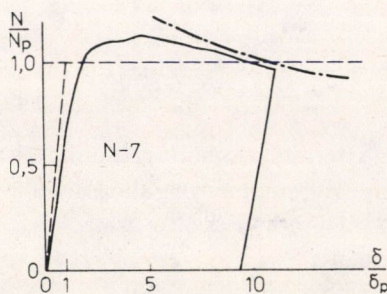
3.13. ábra

Az övlemezben (szimmetrikus viselkedést feltételezve a rúd hossz tengelyére) a  $KGHJ$  zónában jön létre képlékeny alakváltozás és az  $MK$ ,  $KQ$ ,  $NH$ ,  $HP$  valamint  $GK$ ,  $GH$ ,  $JK$ ,  $JH$  képlékeny csuklók alakulnak ki.

A gerinclemez folyási mechanizmusa akkor kompatibilis az övek folyási mechanizmusaival, ha a  $B$  és  $C$  pontok összeesnek a  $H$  és  $K$  pontokkal, ezzel az egész szelvény folyási mechanizmusa határozottá válik. Ezek után felírhatjuk az alakváltozási és helyzeti energiákat az egyes lemezrészecskék folyási mechanizmusaira.

Az N-7 jelű próbatestre a kísérleti és elméleti eredményeket a 3.14. ábra mutatja.

A vizsgálatok során számos közelítést alkalmaztunk, így a feltételezett feszültség és alakváltozási állapot csak „kis mozgás” esetén érvényes, bár néhány képlékeny



Gerinclemez:

$$200-5; \quad \frac{b}{t} = 40$$

Övlemez:

$$120-5; \quad \frac{B}{T} = 26,6$$

3.14. ábra

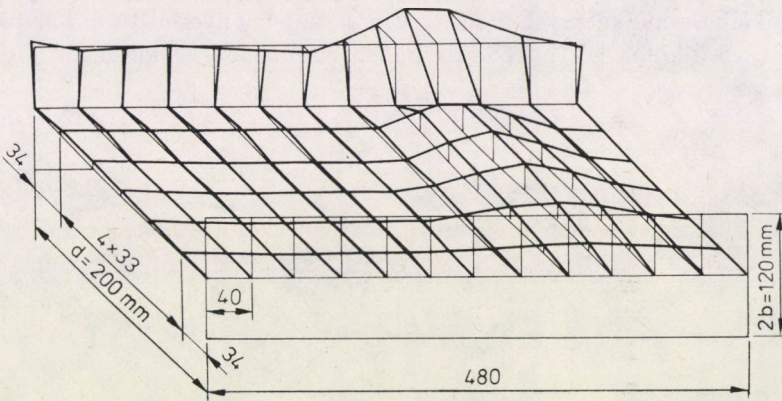


csúrlóban nagy elfordulás is létrejöhet, melyeket korlátozni kell. A képlékeny csuklókban keletkező nyomaték egyidejű nyomóerő miatti redukcióját, és azt a másodrendű hatást is elhanyagoltuk, mely a folyási mechanizmus térbeli állapotából adódik.

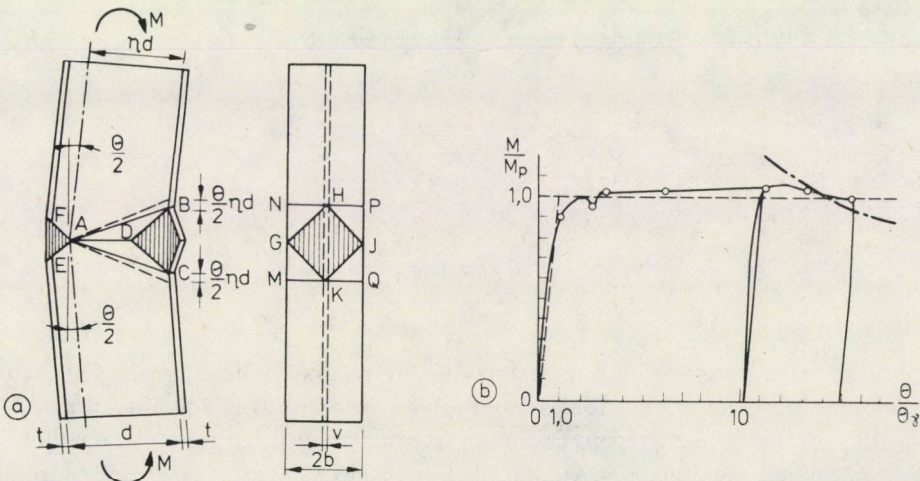
3.25. Hajlított gerenda alkotólemezeinek horpadásvizsgálatát is elvégezhetjük a folyási mechanizmus segítségével. Haaijer, G. és Thürlimann, B. (HAAIJER, THÜRLIMANN, 1958) foglalkoztak azzal a kérdéssel, hogy hajlított rudak gerinclemezei milyen lemezkarcsúság mellett adnak megfelelő elmozdulás-képességet.

A 3.13. pontban bemutatott kísérletsorozat M-13 jelű próbatestjének kihorpadt alakját a 3.15. ábra mutatja.

A választott folyási mechanizmust a 3.16/a ábrán láthatjuk.



3.15. ábra



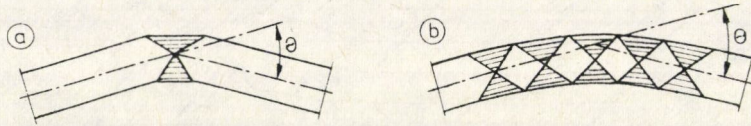
3.16. ábra



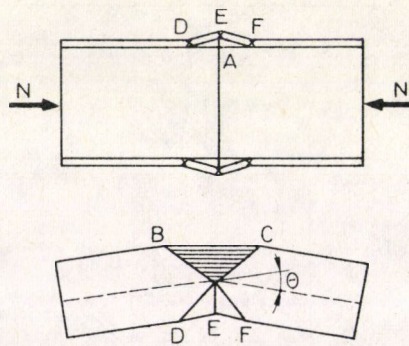
Az M-13 próbatestre az elméleti és kísérleti eredményeket a 3.16/b ábra mutatja.

A vizsgálatok során számos közelítést alkalmaztunk; a feltételezett feszültség és alakváltozási állapot csak „kis alakváltozás” esetén érvényes, a képlékeny csuklóban elfordulását korlátozni kell. Mindez elkerülhető lenne, ha a 3.17/a ábrában feltételezett képlékeny csukló helyett a 3.17/b ábra szerinti képlékeny csuklókat alkalmaznánk. Így azonban a feltételezett modell vizsgálata jóval nehezebb lenne, ugyanakkor a többi közelítés, valamint a kísérleti eredmények ezt a finomítást nem indokolják. A képlékeny csuklóknál keletkező nyomaték egyidejű nyomóerő miatti redukcióját elhagytuk. Elhanyagoltuk azt a másodrendű hatást is, mely a folyási mechanizmus térbeli állapotából adódik.

3.26. A nyomott és hajlított rúd vizsgálatánál feltételeztük, hogy a gerinclemez az eredeti síkban marad, csak a folyási mechanizmus környezetében következik be a gerinc síkjából való kitérés. Lehetőség van arra, hogy nyomott rúd kihajlása során bekövetkező alkotóelem horpadást modellezzünk a folyási mechanizmus módszer



3.17. ábra



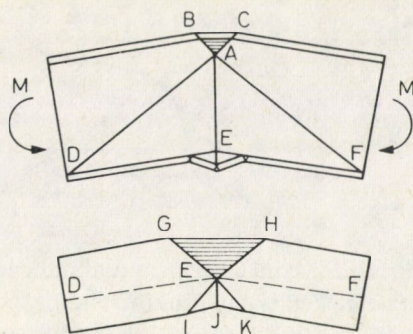
3.18. ábra

segítségével. A rúd végeinek megtámasztását mindkét tehetetlenségi főirányban csuklósnak képzelve a 3.18. ábra szerinti folyási mechanizmus alak jön létre.

A 3.19. ábrán egy két végén csuklósnak megtámasztott hajlított gerenda folyási mechanizmusát mutatjuk be. A felrajzolt folyási mechanizmus a gerendakifordulás jelenségét modellezi.



3.27. A folyási mechanizmus módszer segítségével lehetőség adódik arra, hogy az alkotólemez horpadás, a gerendakifordulás hatását elemezzük. A módszer segítségével meghatározott igénybevétel-elmozdulás összefüggés lehetővé teszi, hogy a rúd szilárdsági viselkedését jellemző állapotot lehatároljuk. Amennyiben a rúd adott keresztmetszetében képlékeny csukló kialakulhat, a folyási mechanizmus módszer



3.19. ábra

segítségével megállapított összefüggés megadja azt a határt és megadja a jelleggörbe további alakját, amitől az alkotólemez horpadása, vagy a gerenda kifordulás bekövetkezése megváltoztatja a képlékeny csukló viselkedését. A 3.14. pontban bemutatott kísérletek eredményeit ezzel a módszerrel értékelhetjük.

A folyási mechanizmus módszer lehetőséget ad arra is, hogy a rudak alkotólemezei horpadásának egymásra hatását, valamint a kihajlás, ill. kifordulás kölcsönkapcsolatát meghatározzuk.

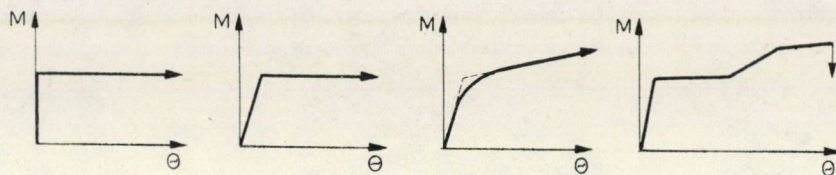
### 3.3. A lemezhorpadás hatása keretszerkezetek képlékeny teherbírásának meghatározásánál

3.31. Acélszerkezetek képlékeny teherbírásszámítása olyan feladatok megoldását tűzi ki célul, melyekben a teherbírás a korlátozatlan folyás fellépte miatt merül ki. KAZINCZY G. (1914) zseniális meglátása, a képlékeny csukló fogalmának megalkotása nyitotta meg az utat a szerkezetek képlékeny teherbírásvizsgálata előtt. A pontosabb vizsgálatok igénye felvetette, hogy különböző képlékeny csukló viselkedést is számításba vegyünk (3.20. ábra), ezek a csukló-modellek az acélanganyag felkeményedési tulajdonságát, véges szakadónyúlását figyelembe vették, de nem tartalmazzák a keresztmetszet geometriájában bekövetkező kedvezőtlen változások (horpadások) hatását.

3.32. Egy szerkezet korlátozatlan folyási határállapota kialakulásához szükséges (de nem elégséges) feltétel, hogy a rúdelemek (keresztmetszetek) nyomatéki te-

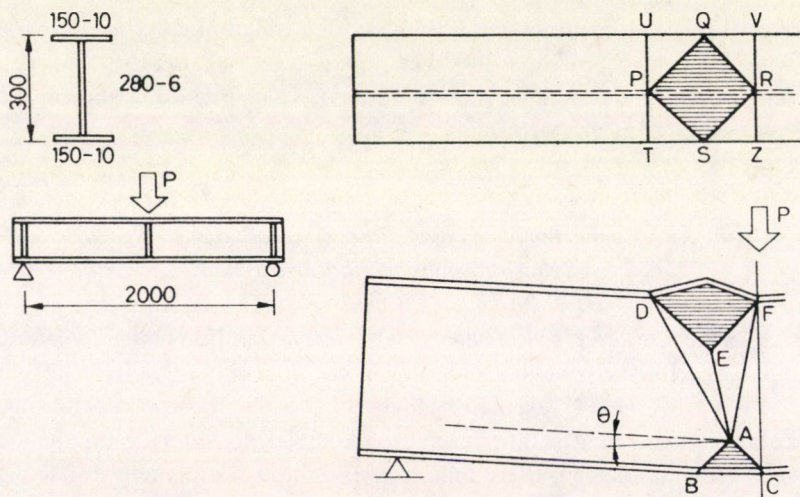


herbírást egyrészt a törőnyomaték nagysága, másrészt az jellemezze, hogy ezt a törőnyomatékat „megfelelő” nagyságú képlékeny csukló-elfordulás bekövetkezéséig a rúdelem tartani is tudja. Ezért szükséges azt is vizsgálni, hogy a rúdelem nyomatéki teherbírást hogyan „rontja le” lemezhorpadás vagy kifordulás. Változó nyomatéki ábra esetében elsősorban lemezhorpadás jelentkezik, míg állandó nyomatéki ábra



3.20. ábra

esetén először gerendakifordulás, majd a végleges tönkremenetel oka ebben az esetben is a lemezhorpadás. A kétféle „képlékeny csukló” viselkedését — kontroll-gerendák segítségével — kísérleti módszerekkel is vizsgáltuk (3.14. pont). A gerendák rugalmas-felkerülőnyomaték-elfordulás jelleggörbéjét a lemezhorpadás hatását figyelembe vevő folyási mechanizmus elmélet alapján meghatározott jelleggörbéig alkalmazzuk, majd a továbbiakban a lemezhorpadás hatására kialakuló jelleggörbét vesszük figyelembe (1.3.2. fejezet).



3.21. ábra

3.21. A gerenda hossza mentén változó nyomatékkal terhelt kísérleti gerendát és a tönkremeneteléhez tartozó lemezhorpadás folyási mechanizmust a 3.21. ábra, a középső keresztmetszetben keletkező nyomaték-elfordulás jelleggörbét pedig a 3.22. ábra mutatja.

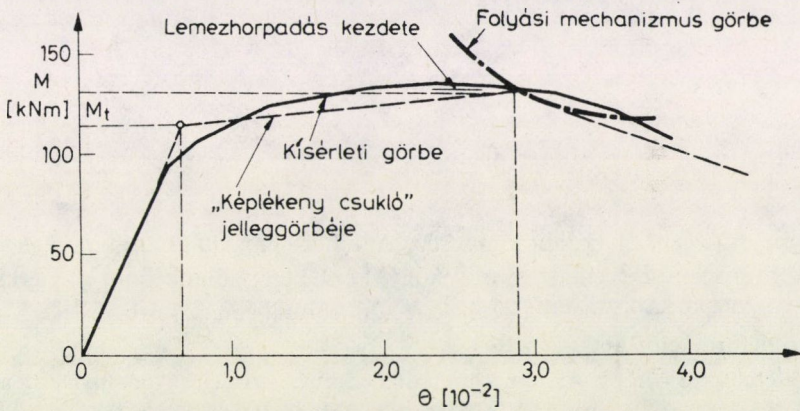


3.322. A gerenda hossza mentén állandó nyomatókkal terhelt kísérleti gerenda tönkremeneteléhez tartozó lemezhorpadási folyási mechanizmust a 3.23. ábra mutatja.

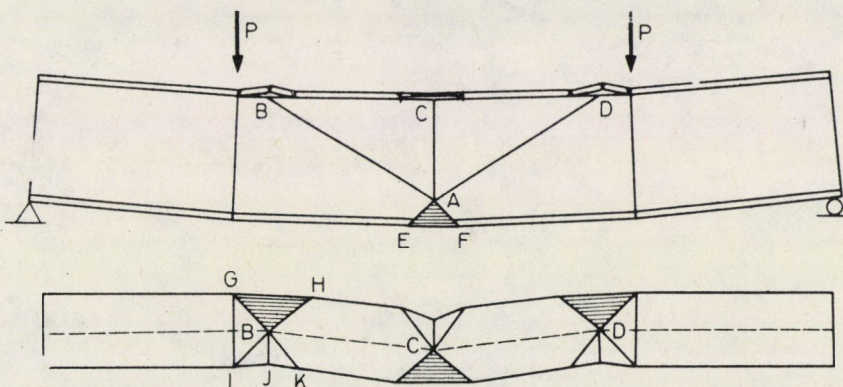
3.33. A képlékeny állapotban bekövetkező lemezhorpadás hatását az alábbi módszerekkel vehetjük figyelembe:

3.331. A gerenda rugalmas-felkeményedő lemezhorpadási szakaszait olyan, a hagyományos képlékeny csuklóhoz hasonlóan ideális tartószakasszal helyettesítjük, amelynek a legnagyobb nyomatók helyén ébredő része felkeményedő, majd a lemezhorpadás miatt csökkenő teherbírási állapotban van. A vizsgálatok során alkalmaztuk az „egyenértékű konzol” módszert (HORNE, CHIN; 1967).

3.332. A gerenda azon szakaszaira, ahol az  $M_t$  nyomatóknál nagyobb nyomatók keletkeznek, a felkeményedés, vagy a lemezhorpadás hatására csökkenő teherbírási állapot a mértékadó. Ezekre a szakaszokra redukált nyomatóki ábrát határozhatunk



3.22. ábra

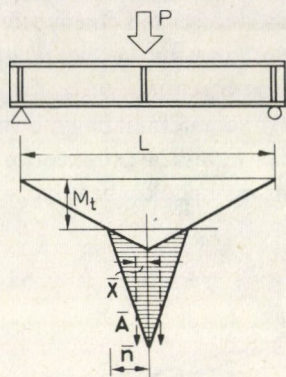


3.23. ábra

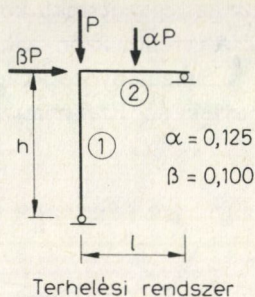


meg. A 3.24. ábra a gerenda hossza mentén változó nyomatékmal terhelt gerenda redukált nyomatéki ábráját mutatja. Az egyszerűség kedvéért a nyomaték-elfordulás jelleggörbét egyenesekkel helyettesíthetjük (l. 3.22. ábra).

3.34. Statikailag határozott keretszerkezet viselkedését a 3.332. pontban leírt módszer alapján vizsgáljuk. A vizsgált tartó A-4 jelű keret (l. 3.17. pont), az alkalmazott



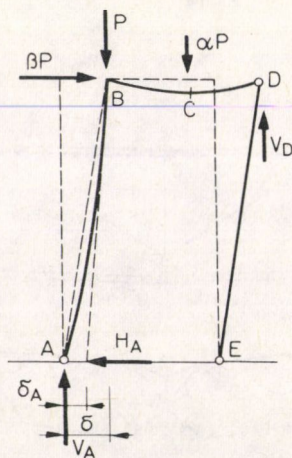
3.24. ábra



3.25. ábra

terhelés rendszerét a 3.25. ábra mutatja. A teher-elmozdulási diagram meghatározásánál figyelembe kellett venni, hogy képlékeny állapotban a szerkezetek elmozdulásai jelentősen megnövekednek. A 3.26. ábrán bemutatjuk a terhelés hatására kialakuló deformációs alakot.

Feltételezzük, hogy  $M_B$  az ismeretlen, melyet az (1) egyensúlyi egyenletből határozhatunk meg (RODERICK, 1960). A  $\delta P$  a deformáció hatására kialakuló



3.26. ábra



többletnyomatékot jelenti. A (2) egyenletben a második tag a redukált nyomaték tétel alapján a rugalmas szakaszt követő rész viselkedését jellemzi. A (3) és (4) egyenletek a  $B$  sarokpont elfordulását írják fel az oszlop és a gerenda oldaláról, külön-külön. A (4)-ben az utolsó tag a rugalmas szakaszt követő rész többlet-elfordulásait tartalmazza.

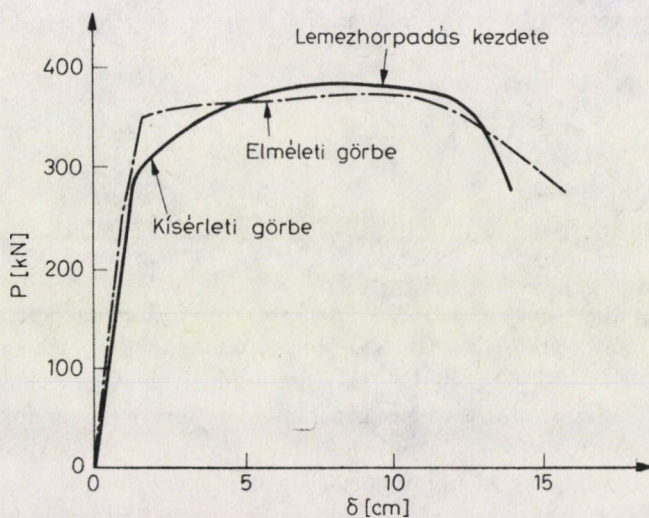
$$(1) \quad M_B = \beta h P + \delta P$$

$$(2) \quad \delta_A = \frac{1}{EI} \left( \frac{M_B h^2}{3} + \bar{A}_1 \bar{X}_1 \right)$$

$$(3) \quad \Theta_B = \frac{1}{h} (\delta - \delta_A)$$

$$(4) \quad \Theta_B = \frac{1}{EI} \left( \frac{M_B l}{3} + \frac{\alpha P l^2}{16} + \bar{A}_2 \right).$$

A számítást iterációval hajthatjuk végre. A 3.27. ábrában néhány jellegzetes pontra végrehajtott számítás eredményét hasonlítjuk össze a kísérleti eredményekkel.



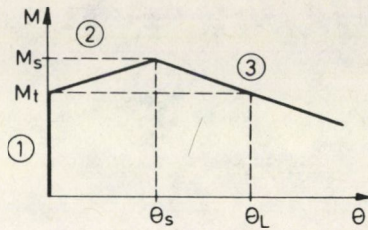
3.27. ábra

Megjegyezzük, hogy ha a feltételezett „képlékeny csukló” viselkedést nem egyenesekkel jellemeznénk, a számított teher-deformáció összefüggés jobban simulna a kísérleti eredményekhez.

3.35. Statikailag határozatlan keretszerkezet képlékeny teherbírását, a nyomatékátrendeződés folyamatát a lemezhorpadás is befolyásolja. A vizsgálatot a 3.331. pontban leírt módszer alapján hajthatjuk végre.



A kidolgozott eljárás a síkbeli rúdszerkezet elmozdulásmódszer szerinti megoldására épül. (SZABÓ—ROLLER 1971). Lényege az, hogy a fokozatosan kialakuló „képlékeny csuklók” következtében átalakuló szerkezet eredeti merevségi mátrixát érintetlenül hagyva, a lépésenként változó kapcsolatokat kinematikai terhekkel imitálja (KURUTZ 1974). A kinematikai terheket a szerkezetben kialakuló „képlékeny csuklókra” a 3.28. ábra alapján határozhatjuk meg.



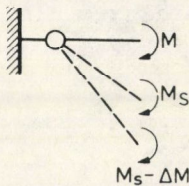
A „képlékeny csukló” elfordulási merevsége:

$$C = \frac{\Delta M}{\Delta \theta}$$

$$C_1 = +\infty$$

$$C_2 = \frac{M_s - M_t}{\theta_s}$$

$$C_3 = -\frac{M_s - M_t}{\theta_L - \theta_s}$$



$$C = \infty \quad 0 \leq M \leq M \quad \theta = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ zóna: } t = 0$$

$$C = C_2 \quad M_t \leq M \leq M_s \quad 0 < \theta < \theta_s$$

$$\textcircled{2} \text{ zóna: } t = -\frac{1}{C_2} M_t$$

$$C = C_3 \quad M \leq M_s \quad \theta \geq \theta_s$$

$$\textcircled{3} \text{ zóna: } t = \theta_s - \frac{1}{C_3} M_s$$

3.28. ábra

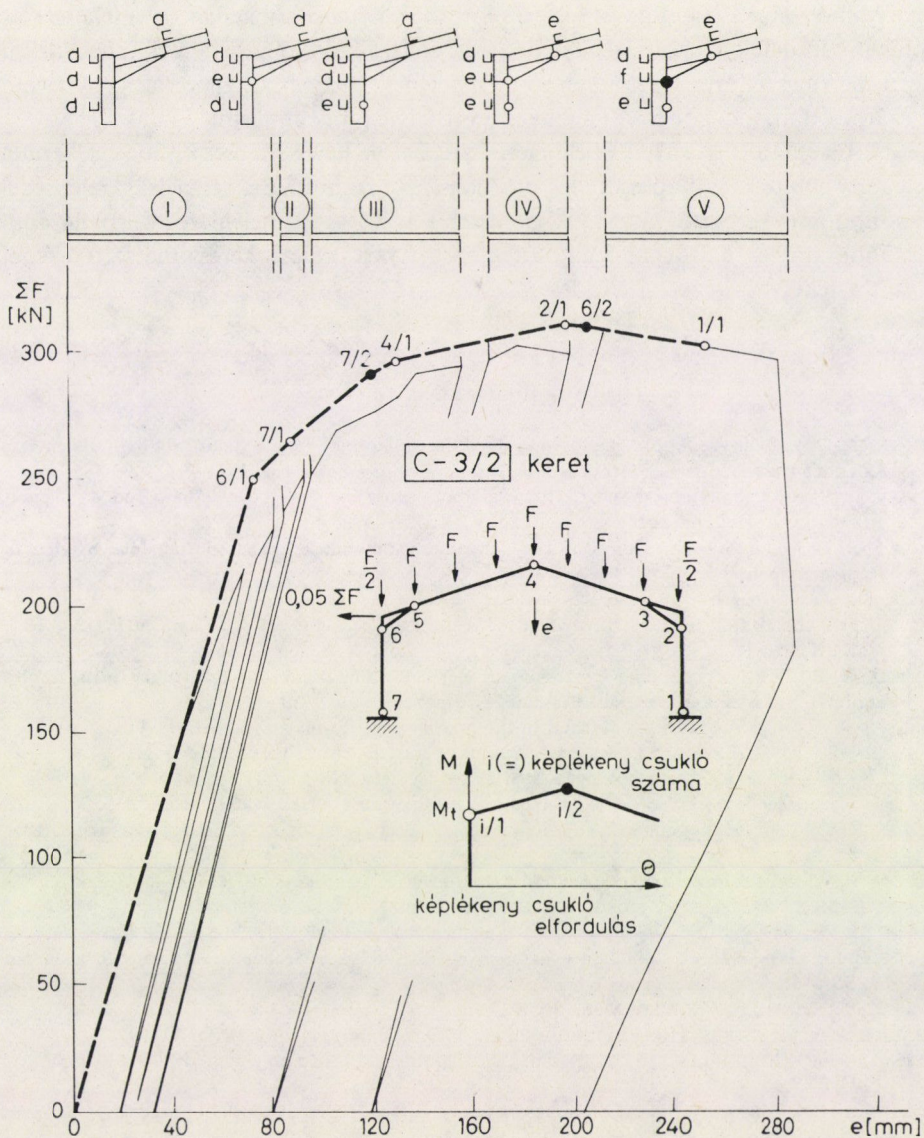
A vizsgálat eredményét a 3.18. pontban szereplő C-3/2 jelű keretszerkezet esetére mutatjuk be, mely szerkezetet a CONDER licence alapján tervezték és gyártották. Az elméleti számításokat R-32 és PDP 11/34 számítógépek segítségével hajtottuk végre. A keretszerkezet állapotváltozását az egyparaméteres rendszer fokozatos változtatásával követhettük. A vizsgálatot egy alkalmas  $P_k$  kezdőértéktől kezdve  $\Delta P$  értékkel növeljük mindaddig, míg valamely potenciális képlékeny csuklóban az  $M$  nyomaték eléri az  $M_t$  értéket. Ekkor a csuklóba beiktatjuk a megfelelő  $t$  kinematikus terhet és a megfelelő csuklóelfordulási merevséget az új értékre változtatjuk.

A  $P$  értékét tovább növelve rendre elvégezzük a módosításokat, mindaddig, míg valamely módosítás után a merevségi mátrix determinánsa negatív értéket vesz fel. Ez azt jelenti, hogy innen kezdve a  $P$  nem növelhető, ezért innen kezdve  $-\Delta P$  értékkel változtatjuk a rendszerparamétert.

Az elméleti és kísérleti vizsgálatok eredményeit a 3.29. ábrában hasonlítjuk össze. (Meg kell jegyezni, hogy a kísérleti programban szerepelt az oldalirányú merevítési rendszer elhelyezésének és merevségének kérdése, így a kísérleti vizsgálat során egyre merevbb merevítési rendszert alkalmaztunk; ez okozza a kétféle vizsgálat



## Keretsarok merevítési rendszerek:



3.29. ábra

eredményeinek eltéréseit, hiszen az elméleti számításokat a végleges merevítőrendszer figyelembevételével hajtottuk végre.)

Az elméleti számításokban a keretszlop talpának kialakítását nem ideális csuklónak képeztük, hanem a 3.15. pontban bemutatott kísérleti eredmények alapján vettük figyelembe.

3.36. A képlékeny méretezés esetében alkalmazott stabilitási követelmények szigorúbbak, mint a rugalmas méretezés esetében. Biztosítani kell, hogy a feltételezett képlékeny csuklók keresztmetszetében az elért törőnyomaték csökkenés nélkül elegendően nagy elfordulás jöhessen létre, amelynek eredményeképpen az igénybevételek számított átrendeződése és a feltételezett folyási mechanizmus kialakulhat.

A bemutatott kísérleti és elméleti vizsgálatok lehetővé teszik, hogy a keretek képlékeny elmozdulás-képességének problémáját a stabilitási és szilárdsági jelenségek kölcsönhatásán keresztül vizsgáljuk, elemezzük az öv- és gerinclemezek horpadásának kölcsönhatását és a horpadó alkotólemezeket tartalmazó keresztmetszeti elemek hatását a teljes szerkezet viselkedésére.

#### IRODALOM

- ALEXANDER, J. M.; 1960: An Approximate Analysis of the Collapse of Thin Cylindrical Shells under Axial Loading. *Quarterly Jrl. of Mechanical and Applied Mathematics* Vol., 13.
- ALEXEEV, S.; 1956: Rugalmas lemezek posztkritikus állapota (orosz nyelven). A Szovjetunió Tud. Akadémiája Alkalmazott Mechanikai Intézete kiadványa XX. 673—679.
- AUGUSTI, G.; 1964: Stabilità di strutture elastiche elementari in presenza di grandi spostamenti. *Atti Acc. Sci. fis. mat. Napoli* 3, 4, 5.
- BASLER, K.; 1961: Strength of plate girders in shear ASCE St. 7. 151—180.
- BASLER, K.—THÜRLIMANN, B.; 1961: Strength of plate girders in bending. *Jrl. of Struct. Div. Proc. of ASCE* Vol. 87. No. ST6.
- BELSZKI, G. E.; 1973: O predelnüh szosztojanijah elementov metaliceszkij konstrukcij pri szsztatii sz izgibom. Sztroitelnaja mehanika i rascset szobruzenij.
- BEN KATO; 1965: Buckling strength of plates in the plastic range. Publications, IABSE, Vol. 25.
- BERGMANN, S.; 1948: Behaviour of buckled rectangular plates. Doctoral thesis, Stockholm.
- BLEICH, F.; 1952: Buckling strength of metal structures. McGraw Hill.
- BOLOTIN, V. V.; 1956: Voproszi obsej teorii uprugoj usztojsivoszti. *Prikl. Mat. u. Mech.* 20.5, 561—577.
- BOLOTIN, V. V.; 1958: Nyelinejnaja teoria uprugoj usztojsivoszti v bolsom. *Raszcsoti na procsnoszt* 3., 310—354.
- BOLOTIN, V. V.; 1965: Sztatisticeszkie metodi v sztroitelnoj mechanike. *Izd. Lit. Sztroitj.* Moskva.
- BROUDE, B. M.; 1953: Pregyelnie szosztojanie sztalnich balok Moskva, *Sztrojizdat.*
- BROUDE, B. M.; 1949: Usztojsivoszt plasztinok v elementach sztalnich konsztrukcij. *Massztroizdat.*
- BROUDE, B. M.; 1961: Lemezek stabilitása (orosz nyelven) Sztroitelnaja Mechanika i Raszcsot Szooruzsenia 6., 35—46.
- BRYAN; 1891: Proceedings London Math. Soc. 22.
- BÜRGERMEISTER, G.—STEUP, H.—KRETZSCHMAR, H.; 1957: Stabilitätstheorie. Berlin, DVW.
- CHERN, C.—KUNAPONGSIRI, V.; 1973: Experiments on unstiffened thin web girders. *Welding Journal*, Apr. 1973.
- CLIMENHAGA, J. J.—JOHNSON, P.; 1972: Moment-rotation curves for locally buckling beams. *Jrl. of Struct. Div. ASCE*, Vol. 98. ST6.
- CROLL, J. G. A.—WALKER, A. C.; 1972: Elements of structural stability Wiley, London.
- CSELLÁR, Ö.—HALÁSZ, O.—RÉTI, V.; 1965: Vékonyfalú acélszerkezetek. Műszaki Könyvkiadó Bp.
- CSELLÁR, Ö.—HALÁSZ, O.; 1967: Die Stabilitätsuntersuchung gedrückter dünnwandiger Stäbe. *Acta Technica XXXV.*
- CSELLÁR, Ö.—HALÁSZ, O.; 1969: Vékonyfalú nyomott rudak stabilitásvizsgálata. *Mélyépítéstud. Szemle XIV.*
- DJUPEK, J.—KODNÁR, R.; 1965: Solution of non-linear theory of slender webs by variational methods Publ. House SAV, Bratislava.
- DJUPEK, J.; 1966: Deformation of rectangular slender web plates with boundary members flexible in the web plate plane. *The Aeronautical Quarterly* Vol. 17.



- DJUBEK, J.; 1974: Non-linear problem of rectangular webs stiffened along their edges. *Acta Techn. CSAV*, No. 1., 32—63.
- DJUBEK, J.—SADOVSKY, Z.—RAVINGER, J.; 1975: Non-linear problems of reinforced webs and shallow shells. Research report of the USTARCH SAV.
- DJUBEK, J.—BALAZ, I.; 1977: Compressed orthotropic rectangular webs of steel bridges. *Proc. of Reg. Coll. on Stability of Steel Structures*, Budapest 263—272.
- DJUBEK, J.—SKALOUD, M.; 1977: Czechoslovak approach to the design of longitudinally stiffened compression flanges of steel box-girder bridges. Prel. Publ. of the International Coll. on Stability of Steel Structures, Liège, 12—15 April.
- DOWLING, P. J.—CHATTERJEE, S.; 1977: Design of box girder compression flanges. Design of webs of plate and box girders. Second International Coll. on Stability of Steel Structures Introductory Report Liège, 153—208.
- DZSANELIDZE, G. J.; 1955: Usztojcsivoszt ravnoveszia nelinejno deformirüemich szisztem. Trudi Leningrad, Politechnik Int. 178.
- FALTUS, F.—SKALOUD, M.; 1973: Accidents on steel bridges and lessons to be drawn out of them (cseh nyelven) Inzenyrské stavby, No. 2.
- FALTUS, F.—SKALOUD, M.; 1975: Insegnamenti da trarsi da alcuni dissesti di travate da ponte in lamiera irrigidita d'acciaio. *Costruzioni metalliche*, No. 2.
- FILONENKO, BORODICS, M. M.; 1949: Kírsz szoprotivlenija materialov Gosztechizdat.
- FISCHER, M.; 1967: Das Kipp-Problem querbelasteter exzentrisch durch Normalkraft beanspruchter I-Träger bei Verzicht auf die Voraussetzung der Querschnittstreue. *Der Stahlbau*, Vol. 36., 77—86.
- FREY, F.; 1977: Shear tests on unstiffened plate girders. Stability of Steel Structures, Liège, April 1977. Prel. Report.
- GOLDBERG, J. E.—BOGDANOV, J. L.—GLAUZ, W. D.; 1964: Lateral and torsional buckling of thin walled beams. Publications, *IABSE*, Vol. 24., 92—100.
- GOODIER, J. N.—BARTON, M. V.; 1944: Effect of web deformation on the torsion of I-beams. Transaction, *ASME* Vol. 66., 35—40.
- HAAIJER, G.; 1957: Plate buckling in the strain-hardening range. *Jrl. of Eng. Mech. Div. ASCE*, Vol. 83. EM 2.
- HAAIJER, G.—THÜRLIMANN, B.; 1958: On inelastic buckling in steel. *Jrl. of Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 84. EM 2.
- HALÁSZ, O.—PLATTHY, P.; 1974: A számítási modellek megbízhatóságának néhány elvi kérdése acélszerkezetek esetében. *Mélyépítéstud. Szemle XXIV*. 89—95.
- HALÁSZ, O.; 1977: Stability problems in national specifications. Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Budapest Final Report 9—13.
- HALÁSZ, O.—IVÁNYI, M.; 1979: Tests with simple elastic-plastic frames. *Periodica Polytechnica* Vol. 23. No. 3—4. 151—182.
- HALÁSZ, O.—IVÁNYI, M.; 1980: Acélszerkezetek képlékeny méretezése. M1-04-188; *Műszaki Irányelvek*.
- HANCOCK, G. J.; 1978: Local, distortional and lateral buckling of I-beams. *Jrl. of Struct. Div. ASCE*, Vol. 104. No. ST11. 1787—1798.
- HANCOCK, G. J.—BRADFORD, M. A.—TRAHAIR, N. S.; 1980: Web distortional and flexural-torsional buckling. *Jrl. of Struct. Div. ASCE*, Vol. 106. No. ST7. 1557—1571.
- HERCOG, M.; 1974: Die Traglast unversteifter und versteifter, dünnwandiger Blechträger unter reinem Schub und Schub mit Biegung nach Versuchen. *Bauingenieur*, 49.
- HORNE, M. R.—CHIN, M. W.; 1967: Plastic design of portal frames allowing for frame instability and strain-hardening effects. *Proc. Inst. of Civ. Eng.* 163—182.
- HÖGLUND, T.; 1971: Livets verkningssätt och bärförmaga HOS tunnväggig I-balk. *Meddelande* Nr. 93. Inst. för Byggnadstatik; Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm.
- HÖGLUND, T.; 1973: Design of thin plate I girders in shear and bending with special reference to web buckling. *Meddelande* Nr. 94. Inst. för Byggnadstatik; Kungl. Tekniska Högskolan, Stockholm.
- HUSEYN, K.; 1975: Non-linear theory of elastic stability. Nordhoff Int. Publ.
- HUTCHINSON, J. W.—KOITER, W. T.; 1970: Postbuckling theory. *Appl. Mech. Reviews* 23. 1353—1366.
- HUTCHINSON, J. W.; 1974: Plastic buckling. *Adv. in Appl. Mech.* Vol. 14. Academic Press New York.
- JOHNSON, C. P.—WILL, K. M.; 1974: Beam buckling by finite element procedure. *Jrl. of Struct. Div. ASCE*, Vol. 100. No. ST3 669—685.
- IVÁNYI, M.; 1977: Limits of plate slenderness in plastic design. Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Final Report, Budapest Hungary.

- IVÁNYI, M.; 1979: Yield mechanism curves for local buckling of axially compressed members. *Periodica Polytechnica, Civil Eng.* Vol. 23. No. 3—4. 203—216.
- IVÁNYI, M.; 1979: Moment-rotation characteristics of locally buckling beams. *Periodica Polytechnica, Civil Eng.* Vol. 23. No. 3—4. 217—230.
- KACHANOV, L. M.; 1971: Foundations of the theory of plasticity. North-Holland Publ. Co., Amsterdam—London.
- KÁRMÁN, T.; 1910: Festigkeitsprobleme im Maschinenbau. *Enzykl. der Math. Wiss.* IV. 348—351.
- KÁRMÁN, T.—SECHLER, E. E.—DONELL, L. H.; 1932: The strength of thin plates in compression. *Transactions Am. Soc. Mech. Eng.* 54.
- KAZINCZY, G.; 1914: Kísérletek befalazott tartókkal. *Betonszemle*, II. évf.
- KOITER, W. T.; 1945: Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht. *Thesis. Delft.*
- KOITER, W. T.—PIGNATARO, M.; 1976: A general theory for the interaction between overall and local buckling of stiffened panels. *Rep. 556. Delft, Univ.*
- KOLLBRUNNER, C. F.—HAJDIN, N.; 1968: Die Verschiebungsmethode in der Theorie der dünnwandigen Stäbe und ein neues Berechnungsmodell des Stabes mit seinen ebenen deformierbaren Querschnitten. *Publications, IABSE*, Vol. 28. II. 87—100.
- KORDA, J.; 1977: Design of rigid frame columns. *Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Hungary. Proceedings*, 111—119.
- KLÖPPEL, K.—SCHEER, I.; 1960: Beulwerte ausgesteifter Rechteckplatten. Berlin.
- KLÖPPEL, K.—SCHMIED, R.—SCHUBERT, J.; 1969: Die Traglast mittig und außermittig gedrückter dünnwandigen Stützen. *Der Stahlbau*, Nr. 1.3.
- KURUTZ, M.; 1974: Analysis of plastic load capacity of plane frameworks by kinematic loading *Periodica Polytechnica*, Vol. 18. No. 1—2. 71—81.
- KURUTZNÉ, KOVÁCS MÁRTA; 1975: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek gépi számítása kinematikai terhekkel. *Magyar Építőipar*, XXIV. évf. 7—9. 455—461.
- LAY, M. G.; 1965: Flange local buckling in wide-flange shapes. *Jrl. of Struct. Div. ASCE*, Vol. 91. ST6.
- MAQUOI, R.—MASSONNET, CH.; 1976: Interaction between local plate buckling and overall buckling in thinwalled compression members. *IUTAM Symp. Cambridge, Springer.*
- MAQUOI, R.—MASSONNET, CH.; 1971: Theorie non-lineaire de la résistance postcritique des grandes poutres au caissons raidies. *IABSE, Publ. Zürich* 3-II.
- MARGUERRE, K.; 1937: Die mittragende Breite des gedrückten Plattenstreifens. *Luftfahrtforschung* 14.
- MASSONNET, CH.; 1968: Thin-walled deep plate girders. *Prel. Publ. IABSE*, New York, 194—208.
- MASSONNET, CH.—SKALLOUD, M.—DONEA, J.; 1968: Comportement postcritique d'une plaque raidie cisailée uniformément. *IABSE, Publ. Vol. 27.* 187—210. *Vol. 28.* 137—156.
- MASSONNET, CH. et alia; 1977: Plate and box girders. *Introductory Report, Second Int. Coll. on Stability of Steel Structures, Liège*, 145—208.
- MASSONNET, CH.; 1977: Design practices in Europa. *Int. Coll. on Stability of Structures, Washington. Proceedings*, 503—531.
- MERRISON, A. W. et alia; 1974: Inquiry into the basis of design and method of erection of steel box girder. *Report, London.*
- MOISEEV, B. I.; 1977: Usztojcsivoszt za predelom uprugoszti szenok i pojaszov. *Proc. Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Hungary*, 273—279.
- PFLÜGER, A.; 1959: Thin-walled compression members. *M. Techn. Hochschule, Hannover.*
- PUGESLEY, A.—MACAULAY, M.; 1960: The large-scale crumpling of thin cylindrical columns. *Quarterly Jrl. of Mechanical and Applied Mathematics*. Vol. 13.
- RAJASEKARAN, S.—MURRAY, D. W.; 1973: Coupled local buckling in wide-flange beam-columns. *Jrl. of Struct. Div. ASCE*, Vol. 99. No. ST6, 1003—1023.
- REIS, A. J.—ROORDA, J.; 1977: The interaction between lateral-torsional and local plate buckling in thin-walled beams. II. *Int. Coll. on Stability of Steel Structures, Liège*, 415—427.
- ROCKEY, K. C.—SKALLOUD, M.; 1972: The ultimate load behaviour of plate girders in shear. *The Structural Engineer*, Vol. 50. No. 1.
- ROORDA, J.; 1972: Concepts in elastic structural stability. *Mechanics today*. Pergamon Press, 332—372.
- ROORDA, J.—HANSEN, J. S.; 1972: Random buckling behaviour. *J. Spacecraft and Rockets*, 9. 88—91.
- RODERICK, J. W.; 1960: The elasto-plastic analysis of two experimental portal frames. *The Structural Engineer*.

- RZSANICIN, A. R.; 1949: Usztojcsivoszt tonkosztennich Szterzsnej za predelom uprugoszi. *CNIP Sz. Sztroizdat.*
- RZSANICIN, A. R.; 1964: Izgib i szlozsnoe szoprotivlenie . . . Raszcsot tonkosztennüh prosztr. konzstr. *Sztrójizdat.*
- SCHMIED, R.; 1967: Die Gesamtstabilität von zweiachsig aussermittig gedrückten dünnwandigen I-Stäben unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung nach der nichtlinearen Plattentheorie. *Der Stahlbau*, Vol. 36. 1—11.
- SEWELL, M. J.; 1972: A survey of plastic buckling. Stability, Studies Series Univ. Waterloo. 86—195.
- SKALOUD, M.; 1962: Pokritická pevnost sten ocelových nosniku. *N. CSAV.*
- SKALOUD, M.; 1962: Interaktion der Ausbeulung von Wänden und der gesamten Formänderung gedrückter und gebogener Stäbe. *Acta Technica CSAV*, No. 1.
- SKALOUD, M.; 1965: Effet d'une courbure initiale sur le compostement post-critique. *Acier* 5. 249—254.
- SKALOUD, M.; 1967: The limiting state of thin-walled columns with regard to the interaction of the deformation of the column as a whole with the buckling of its plate elements. *Stav. casopis* No. 8. Bratislava.
- SKALOUD, M.—ZÖRNEROVÁ, M.; 1969: Experimentální vysetrování interakce vzperu tenkostěnných prutu a boulení jejich sten. Final Res. Report Czechoslovak Academy of Sciences Inst. of Theor. and Appl. Mech. Prague.
- SKALOUD, M.—ZÖRNEROVÁ, M.; 1970: Experimental investigation into the interaction of the buckling of compressed thin-walled columns with the buckling of their plate elements. *Acta Technica CSAV*, No. 4.
- SKALOUD, M.; 1970: Postbuckled behaviour of stiffened webs. *Transactions of CSAV*, Vol. 80. 1—154.
- SKALOUD, M.—ZÖRNEROVÁ, M.; 1972: Postbuckled behaviour of webs in shear. *Transactions of CSAV*, Vol. 82. No. 3. 1—96.
- SKALOUD, M.—NOVAK, P.; 1975: Post-buckled behaviour of webs under partial-edge loading. *Transactions CSAV*, No. 3. Vol. 85. 1—94.
- SKALOUD, M.—ZÖRNEROVÁ, M.; 1976: Optimum rigidity of longitudinal stiffeners of compression flanges. *Acta Technica CSAV*, No. 5. 549—580.
- SKALOUD, M.—NAPRSTEK, J.; 1977: Limit state of compressed thin-walled steel columns with regard to the interaction between column and platebuckling. II. Int. Coll. on Stability of Steel Structures, Liège, 405—414.
- SKALOUD, M.; 1978: General report on plate and box girders. Final Report of Reg. Coll. on Stability of Steel Structures.
- SZABÓ, J.—ROLLER, B.; 1971: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Bp.
- SZATMÁRI, I.; 1974: Hajlított tartók merevített gerinclemezeinek vizsgálata. MTA Tud. Ülészak, Bp.
- SZATMÁRI, I.; 1975: Experimentelle Untersuchungen an dünnwandigen Balkenträgern mit unversteiftem Stegblech. TU, Budapest.
- SZATMÁRI, I.; 1976: Kéttámaszú hajlított tartók vékony, merevítetlen gerinclemezeinek teherbírása. *Mélyépítéstudományi Szemle* XXVI. No. 9.
- SZATMÁRI, I.; 1977: Ultimate load tests of girders with thin unstiffened webs. Proc. Reg. Coll. on Stability of Steel Structures, Hungary, 251—261.
- SUZUKI, Y.—OKUMURA, T.; 1968: Influence of cross-sectional distortion on flexural-torsional buckling. Final Report *IABSE*, New York.
- THOMPSON, J. M. T.—HUNT, G. W.; 1973: A general theory of elastic stability. John Wiley and Sons.
- THOMPSON, J. M. T.—HUNT, G. W.; 1975: Towards a unified bifurcation theory. *ZAMP* 26. 5. 581—604.
- VAN DER NEUT, A.; 1968: The interaction of local buckling and column failure of thin-walled compression members. Proc. XII. Int. Congr. Appl. Mech. Stanford.
- VLASZOV, V. Z.; 1938: Krucsenie i usztojcsivoszt tonkosztennich otrkritich profilej. *Sztróit. prom.* 6—7.
- VLASZOV, V. Z.; 1939: Krucsenie usztojcsivoszt i kolebania tonkosztennovo szterzsna. *Pril. Mat. i Mech.* 3.1.
- VLASZOV, V. Z.; 1940: Tonkosztennie uprugie szterzsni. *Fizmatgiz*. Moszkva.
- VOLMIR, A. Sz.; 1962: Gibkie plasztinki u obolocksi GITTTL, Moszkva.
- VOLMIR, A. Sz.; 1967: Usztojcsivoszt deformiruemich szisztem. Izd. Nauka, Moszkva.
- WAGNER, H.; 1922: Ebene Blechwandträger mit sehr dünnem Stegblech. *Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt*, 20.
- WINTER, G.; 1947: Strength of thin steel compression flanges. *Trans. ASCE*, 112. 527.
- WINTER, G.; 1968: Thin-walled steel structures. Prel. Publication *IABSE*, New York.



**Experimental Analysis of Plate-Buckling Problems.** — According to practical needs approximate models in stability analysis of steel and metal structures are widely used as information given by bifurcation theory is limited. Thus the role of experimental research is of increasing importance.

Between 1974—1980 extended research was carried out in the Department for Steel Structures of the TU Budapest regarding the ultimate load of plate girders. Results of experimental and theoretical analysis are summarized, giving example for the proposed methods of analysis as well.

Experimental and theoretical investigations are shown, making the analysis of plastic deformation capacity of frames with due regard to interaction of strength and stability phenomena possible, including the effect of local buckling of plate elements of sections on the response of the whole structure.

**Experimentelle Untersuchungen im Gebiet der Ausbeulung der Stahlplatten.** — Im Bereich der Stabilitätsuntersuchungen der Stahl- und Metallkonstruktionen werden sog. „Ziel-Modelle“ angewandt, die zum Bedarf der Ingenieurpraxis angepasst sind, weil der Informationsinhalt der Lastparameter der Gleichgewichtsverzweigung sehr begrenzt ist. Deswegen spielen die experimentellen Methoden immer grössere Rolle.

Um die Traglast der dünnwandigen Balkenträger mit unversteiftem Stegblech zu bestimmen, wurden ausgedehnte Untersuchungen am Lehrstuhl für Stahlkonstruktionen der TU Budapest in den Jahren 1974—80 durchgeführt. Die Ergebnisse dieser experimentellen und theoretischen Untersuchungen sind im Artikel zusammengefasst, um, mit einem Beispiel ergänzt, die praktische Verwendung der Bemessungsmethode zu illustrieren.

Die vorgeführten experimentellen und theoretischen Untersuchungen ermöglichen die Probleme der Verzerrungsfähigkeit der Rahmen durch die Wechselwirkung der Stabilitäts- und Festigkeitserscheinungen zu studieren, und die Wirkung der ausbeulenden Platten enthaltenden Querschnittselemente auf die Tragbarkeit der ganzen Konstruktion zu analysieren.

**Экспериментальные исследования местной потери устойчивости пластин.** — При проверке устойчивости стальных и металлических конструкций применены по требованиям практики так называемые «цель-модели», потому что информационное содержание параметра нагрузки при бифуркации сильно ограничено. Из-за этой причины значение экспериментальных исследований увеличивается.

В 1974—80 гг. на кафедре стальных конструкций БТУ были исполнены расширенные испытания для определения несущей способности балок тонкой стенки без ребер жесткости. В статье составлены результаты экспериментальных и теоретических исследований и пример иллюстрирует применение расчетного метода.

Представленные экспериментальные и теоретические исследования позволяют анализ проблемы способности пластичного поворачивания через взаимодействие явлений устойчивости и анализ влияния сечений на поведение полной конструкции, имеющих выпучиванные листы.

# ELŐREGYÁRTOTT ÉPÜLETSZERKEZETEK KÜLÖNLEGES STATIKAI PROBLÉMÁINAK MEGOLDÁSA MATEMATIKAI PROGRAMOZÁSSAL

NÉDLI PÉTER<sup>1</sup>, KURUTZNÉ KOVÁCS MÁRTA<sup>2</sup>, VÁSÁRHELYINÉ SZABÓ ANNA<sup>3</sup>,  
GÁSPÁR ZSOLT<sup>4</sup>, A MŰSZ. TUD. KAND.

Rúdszerkezetek képlékenységtani problémái hasonlóan a rugalmasságtani feladatokhoz, megfogalmazhatók és megoldhatók mátrixalgebrai eszközökkel. Ez a megközelítés lehetővé teszi a feladatok számítógéppel történő megoldását, amelyet mintapéldával illusztrálunk.

Az általánosított feltételes kapcsolatú kontinuumok állapotváltozás-vizsgálati alapösszefüggéseit a variációs elvek alapján vezetjük le, majd ismertetjük az érintkezési probléma matematikai programozási vonatkozásait is. Az alapösszefüggések alkalmazását véges dimenziós modellen mutatjuk meg.

A folyási határokat valószínűségi változóknak tekintve figyelembe vehetjük határállapot-vizsgálat és optimális tervezés esetén az anyagminőség ingadozásának hatását. Sztohasztikus képlékenységi feltétel bevezetésével a statikai tételek alapján felírható a feladatok sztohasztikus programozási modellje. Numerikus eredményeket panelszerkezetek számításánál mutatunk be.

A Budapesti Műszaki Egyetem Építőmérnöki Karának Mechanika Tanszékén már hosszabb idő óta foglalkozunk az előre gyártott épületszerkezeti tartórendszerek vizsgálatával. Az első problémakör a merev alapra helyezett, keretvázal vagy panelrendszerrel modellezett merevítőfal vizsgálata volt, amelyet részint a rúdszerkezetek általános elméletére alapozott programmal, részint véges elem programokkal oldottak meg. Később meggyőződtek arról, hogy a talaj engedékenysége a szerkezet erőjátéka szempontjából nem elhanyagolható, továbbá az is befolyásolja a viszonyokat, hogy ha figyelembe veszik a szintek egymás feletti szakaszos építését. Mindezekre a problémákra számítási programokat dolgoztak ki és folyamatosan egyeztetik az eredményeket részben a valóságban megépült panelépületek, illetve toronyházak elmozdulási viszonyaival, részben legújabbban annak a kísérleti épületnek az igénybevételeivel és elmozdulásaival, amelyet az ÉTI szentendrei laboratóriumában eredeti nagyságban megépítettek. — Ezekben a ma már részben nyugvóponton levőnek tekinthető kutatásokon kívül a tanszék a rúdszerkezetű keretvázak és a merevnek tekinthető panelekből összeállított falak kérdései közül négy csoport foglalkoztatja:

<sup>1</sup> Dr. Nédli Péter tudományos munkatárs BME Építőmérnöki Mechanika Tanszék, 1118 Bp. Homoród utca 20.

<sup>2</sup> Kurutzné Dr. Kovács Márta egyetemi adjunktus BME Építőmérnöki Mechanika Tanszék 1118 Budapest Serleg u. 8.

<sup>3</sup> Vásárhelyiné Dr. Szabó Anna, tudományos munkatárs ÉGSZI Bp. Csalogány u. 9., 1126. Bp. Kiss János altbn. u. 34.

<sup>4</sup> Dr. Gáspár Zsolt tud. főmunkatárs BME Építőmérnöki Mechanika Tanszék 1025 Bp. Kapy u. 40/b.

- a) A rúdszerkezetek képlékenységtani problémáinak mátrixalgebrai eszközökkel történő tárgyalása,
- b) az általánosított feltételes kapcsolatokkal rendelkező szerkezetek állapotváltozási vizsgálata,
- c) a panelszerkezetek határállapotvizsgálata sztochasztikus programozással,
- d) a katasztrófaelmélet alkalmazása rugalmas szerkezetek tökéletlenség-érzékenységének vizsgálatánál.

A négy problémát négy különálló, de egymással szorosan összefüggő fejezetben mutatjuk be, ezek együttesen képezik annak a kutatásnak a beszámolóját, amelyet a tárgyban az 1976—80 évek közti ötéves tervidőszakban végeztünk. Az irodalmi hivatkozásokat mind a négy fejezethez külön adjuk meg.

## RÚDSZERKEZETEK KÉPLÉKENYSÉGTANI PROBLÉMÁINAK SZÁMÍTÓGÉPES MÓDSZEREI\*

### 1. Bevezetés

Rúdszerkezetek képlékenységtani problémái, hasonlóan a rugalmasságtani feladatokhoz, megfogalmazhatók és megoldhatók mátrixalgebrai eszközökkel.

Ez a megközelítés lehetővé teszi az idevonatkozó matematikai apparátus hatékony alkalmazását mind elméleti, mind gyakorlati vonatkozásban és a feladatok számítógéppel történő megoldását. A képlékenységtani feladatok memória és gépidő igénye azonban általában jóval nagyobb mint a rugalmas megoldásé.

A jelen dolgozatban lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, csomópontjain terhelt rúdszerkezetek:

- képlékeny határállapot vizsgálatát
- a képlékeny határállapoton alapuló optimális tervezését
- beállási határállapotvizsgálatát
- rugalmas képlékeny állapotváltozás vizsgálatát

mutatjuk be az elsődrendű elmélet keretein belül, linearizált képlékenységi feltétel és a képlékenységi feltételhez a plasztikus potenciálmérettel kapcsolódó folyási törvény esetére. A rugalmas képlékeny állapotváltozás témakörében kitérünk a geometriai nemlinearitás figyelembevételére is.

Ezek a problémák matematikailag lineáris programozási, illetve lineáris komplementaritási feladatra vezetnek.

\* Dr. Nédli Péter munkája.



## 2. A képlékenységi feltétel és a folyási törvény rúdszerkezetek esetén

A képlékenységtani összefüggések és fogalmak lényegüket tekintve természetesen rúdszerkezetek esetében sem különböznek a képlékenységtan általánosan ismert összefüggéseitől, de formailag, a mátrixalgebrai tárgyalásmód sajátosságainak megfelelőek.

Ennek megfelelően a szerkezet *képlékenységi feltétele*:

$$\varphi = \mathbf{N}^* \mathbf{s} - \mathbf{k} \leq 0$$

alakú, ahol  $\mathbf{N}^*$ : a folyási mátrix

$\varphi$ : a plasztikus potenciál

$\mathbf{s}$ : a belső erők vektora

$\mathbf{k}$ : a szerkezet teherbírásjellemezőit tartalmazó vektor.

Ez az összefüggés úgy jön létre, hogy a képlékenységi feltételt

— csak a szerkezet egyes pontjaiban (a rudak kezdő és végpontjai) vizsgáljuk,  
— egy pontban a sima folyási felületet konvex poliéderrel helyettesítjük.

A szerkezet *folyási törvénye* hasonlóan mátrix összefüggésekkel írható le.

Jelölje  $J$  azon indexek halmazát melyekre  $\varphi_j = 0$  ( $J: \{j | \varphi_j = 0\}$ ). Ekkor a folyási törvény

$$\underset{[j]}{\dot{\mathbf{p}}} = \underset{[j]}{\mathbf{N}} \underset{[j]}{\dot{\boldsymbol{\lambda}}}, \quad \underset{[j]}{\dot{\boldsymbol{\lambda}}} \geq 0,$$

$$\underset{[j]}{\varphi} \leq 0, \quad \underset{[j]}{\dot{\boldsymbol{\lambda}}}^* \underset{[j]}{\dot{\varphi}} = 0$$

alakú, ahol  $\mathbf{N}$ : a folyási mátrix (a képlékenységi mátrix transzponáltja)

$\mathbf{p}$ : a képlékeny alakváltozásebességek vektora

$\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ : a képlékeny szorzók vektora

$\dot{\varphi}$ : a képlékeny potenciálebességek vektora

( $J$ ): azon indexek halmaza, ahol folyás van, mert a folyási törvény csak ezen helyekre vonatkozik.

## 3. Képlékeny határállapot vizsgálat

Képlékeny határállapoton azt az állapotot értjük, amelyben még teljesülnek az egyensúlyi egyenletek és a képlékenységi feltételek de egyben létezik egy ún. folyási mechanizmus is. Egyparaméteres terhelés esetén ez a következő összefüggésekkel írható le:

— egyensúlyi egyenlet  $\mathbf{G}^* \mathbf{s} + m \mathbf{q}_0 = 0$

— képlékenységi feltétel  $\mathbf{N}^* \mathbf{s} \leq \mathbf{k}$

— kompatibilitási egyenlet  $\mathbf{G} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N} \dot{\boldsymbol{\lambda}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} \geq 0$

— a lehetséges affín mechanizmusok közül ki kell jelölni egyet  $\mathbf{q}_0^* \dot{\mathbf{u}} = 1$ .

A még nem szerepelt új jelölések a következők:

$G^*$ : az egyensúlyi mátrix

$m$ : a teherparaméter

$q_0$ : az alapteher

$G$ : a geometriai mátrix, (az egyensúlyi mátrix transzponáltja)

$\hat{u}$ : az elmozdulássebességek

A fenti összefüggésrendszer ekvivalens a következő duális lineáris programozási feladatpárral.

$$m \geq 0, \quad \begin{bmatrix} G^* & q_0 \\ N^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ m \end{bmatrix} = \max!$$

$$\begin{bmatrix} G & N \\ q_0^* & 0^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\lambda} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} 0^* & k^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = \min!$$

mely megfelel a statikai, ill. kinematikai tételnek.

Erőmódszer alkalmazásával a kinematikai tételre alapuló összefüggésekből a nem előjelkorlátos  $\hat{u}$  ismeretlen kiküszöbölhető és így a feladat a klasszikus  $Ax = b, x \geq 0, c^*x = \min!$  alakú lineáris programozási problémára egyszerűsödik, melyre már közvetlen alkalmazható a szimplex algoritmus:

$$\begin{bmatrix} N_s - G_s G_k^{-1} & N_k \\ -q_0^* & G^{-1} & N_k \end{bmatrix} \hat{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad k^* \hat{\lambda} = \min!$$

Itt  $\begin{bmatrix} G_k \\ G_s \end{bmatrix}$  a szerkezet geometriai mátrixának egy statikailag határozott törzstartó szerinti particionálását jelenti és az  $N$  mátrixot ennek megfelelően kell particionálni.

#### 4. A képlékeny határállapoton alapuló optimális tervezés

A minimális súlyú szerkezet meghatározását célul kitűző optimális tervezési feladathoz a képlékeny határállapot vizsgált statikai tételéből kiindulva juthatunk:

$$G^* s = -q$$

$$N^* s - k \leq 0$$

$$l^* k = \min!,$$

ahol a célfüggvény azt fejezi ki, hogy a szerkezet súlyát a teherbírást jellemző adatok lineáris függvényének tekintjük. A feladat ismeretlenjeit a  $\mathbf{k}$  és  $\mathbf{s}$  vektorok jelentik. Mivel a szerkezetben általában azonos elemek is vannak  $\mathbf{k} = \mathbf{M}^* \boldsymbol{\kappa}$  alakban írható és a feladat kevesebb számú ismeretlent tartalmazva a következő lesz:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* \mathbf{s} &= -\mathbf{q} \\ \mathbf{N}^* \mathbf{s} - \mathbf{M}^* \boldsymbol{\kappa} &\leq \mathbf{0} \\ \mathbf{l}^* \boldsymbol{\kappa} &= \min! \end{aligned}$$

A kapott lineáris programozási feladat megoldása a képlékeny határállapotvizsgálat-hoz hasonlóan végezhető.

### 5. Beállási határállapotvizsgálat

Beállási határállapoton azt az állapotot értjük amelyben a maximális rugalmas igénybevételek és a szerkezetben a képlékeny alakváltozások hatására létrejövő ún. sajátigénybevétel eloszlás együttese még kielégíti a képlékenységi feltételeket és egyidejűleg kialakul egy, a halmazódó képlékeny alakváltozásoknak megfelelő folyási mechanizmus is, amely természetesen nem azonos a képlékeny határállapotban értelmezett folyási mechanizmussal.

A probléma matematikailag szintén lineáris programozási feladatra vezet, mely a következő

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* \mathbf{s} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^* \mathbf{s} + m \mathbf{r}_0 &\leq \mathbf{k} \\ m &= \max! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{N} \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_0^* \boldsymbol{\lambda} = 1 \quad \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{k}^* \boldsymbol{\lambda} &= \min! \end{aligned}$$

Itt  $\mathbf{r}_0$  a terhelési folyamat során a rugalmas alapon számolt maximális igénybevételeket jelenti az alapteher figyelembevételével:  $\mathbf{r}_0 = \max(\mathbf{N}^* \mathbf{s}_{e0})$ .

A feladat gyakorlati megoldása analóg a képlékeny határállapot vizsgálatával.

### 6. Rugalmas-képlékeny állapotváltozás vizsgálat

A rugalmas-képlékeny állapotváltozás vizsgálatlaltal egy ismert állapotban adott teherbességek hatására keletkező állapotjellemező sebességeket tudjuk meghatározni. Az erre vonatkozó összefüggések a következők:



$$J: \{j | \varphi_j = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \mathbf{G}^* & \cdot \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} & \mathbf{N}_{[j]} \\ \cdot & \mathbf{N}_{[j]}^* & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\lambda}_{[j]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\Phi}_{[j]} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\dot{\Phi}_{[j]} \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\lambda}_{[j]} \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\Phi}_{[j]}^* \dot{\lambda}_{[j]} = 0$$

A fenti összefüggésrendszer egy ún. lineáris komplementer problémát alkot. A nem előjelkorlátos változók mátrixműveletekkel kiküszöbölhetők és a rendszer:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^* \mathbf{y} = 0$$

alakra hozható. Ez a feladat pedig a szimplex algoritmussal megoldható.

A kapott állapotjellemző sebességek addig érvényesek míg a tehersebesség nem változik, ill. míg újabb folyás nem történik. Ekkor a vizsgálatot meg kell ismételni.

A geometriai nemlinearitás figyelembevétele esetén az [5]-ben rugalmas anyagú szerkezetekre ismertetett módszer és az előző relációk alapján az állapotváltozás összefüggései a következők:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}^* & \cdot \\ \mathbf{L} & \mathbf{F} & \mathbf{M}_{[j]} \\ \cdot & \mathbf{N}_{[j]}^* & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\lambda}_{[j]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\Phi}_{[j]} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \mathbf{t} \\ \Delta \Phi \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

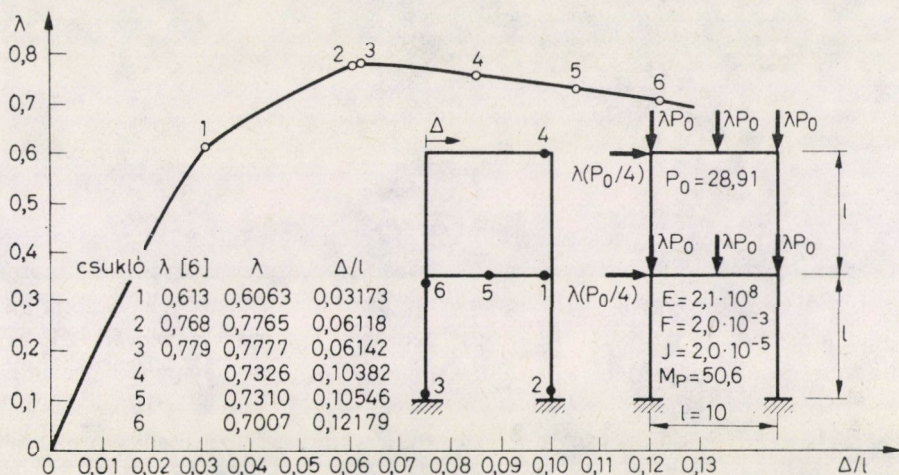
$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_{[j]} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\lambda}_{[j]} &= \mathbf{0}, \\ \dot{\Phi}_{[j]}^* \dot{\lambda}_{[j]} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Az általánosított igénybevételeknek és alakváltozásoknak az 5-ben alkalmazott definíciója következtében az egyensúlyi ( $\mathbf{G}^*$ ) és a kompatibilitási ( $\mathbf{L}$ ), valamint a képlékenységi ( $\mathbf{N}^*$ ) és a folyási ( $\mathbf{M}$ ) mátrixok nem transzponáltjai egymásnak. A  $\mathbf{D}$  geometriai merevségi mátrix és az  $\mathbf{F}$  hajlékonysági mátrix pedig nem szimmetrikus.  $\Delta \mathbf{q}$ ,  $\Delta \mathbf{t}$ ,  $\Delta \Phi$  az egyensúlyi, kompatibilitási és a folyási hibákat jelenti. Az  $\mathbf{F}$  mátrix és az  $\Delta \mathbf{t}$  vektor csak numerikusan állítható elő. Az állapotváltozási összefüggések által meghatározott lineáris komplementer probléma megoldásával a szerkezetnek a tehernövekmények hatására bekövetkező visszahatása meghatározható. A terhelési folyamat végigkövetése pl. a Newton—Raphson módszer alapján végezhető, a fellépő hibák ( $\Delta \mathbf{q}$ ,  $\Delta \mathbf{t}$ ,  $\Delta \Phi$ ) adott határokon belül való tartásával.



## 7. Számítógépes tapasztalatok

Mind a négy probléma megoldására számítógépes programot készítettünk síkbeli keretek esetére. A programokat az MTA CDC 3300, ill. a Műszaki Mechanikai Tanszéki Kutatócsoport PDP 11/34 számítógépére írtuk.



1. ábra

Példaként egy az irodalomban [6] kevésbé pontos (másodrendű) módszerrel megoldott síkbeli keretnek a geometriai nemlinearitás figyelembevételével végzett rugalmas-képlékeny állapotváltozásának vizsgálatát mutatjuk be, képlékenységi feltételként a klasszikus képlékeny csukló hipotézis alkalmazásával.

## IRODALOM

1. SZABÓ J.—ROLLER B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Budapest, Műszaki Könyvkiadó, 1971.
2. KALISZKY S.: Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
3. G. MAIER: Shakedown theory in perfect elastoplasticity. Meccanica 1969. 3. sz.
4. M. CAPURSO—G. MAIER: Incremental elastoplastic analysis and quadratic optimization. Meccanica, 1970. jún.
5. GÁSPÁR Zs.: Rugalmas rúdszerkezetek nagy elmozdulásának vizsgálata. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1976.
6. CORRADI L.: On a stability condition for elastic plastic structures. Meccanica, March 1977.

**Computer methods for the plastic analysis of framed structures.** — The plastic analysis of framed structures can be formulated and solved by matrix methods similarly to the elastic case. This approach makes possible the computer solution of those problems which are illustrated by a numerical example.

**KONTINUUM ÁLLAPOTVÁLTOZÁS-VIZSGÁLATI  
ALAPÖSSZEFÜGGÉSEI  
ÁLTALÁNOSÍTOTT FELTÉTELES KAPCSOLATI MEZŐK MELLETT\***

Az általánosított feltételes kapcsolatú kontinuumok állapotváltozás-vizsgálati alapösszefüggéseit a variációs elvek alapján vezetjük le, majd ismertetjük az érintkezési probléma matematikai programozási vonatkozásait is. Az állapotváltozás-vizsgálati alapösszefüggések alkalmazását véges dimenziós modellen mutatjuk meg.

### **Bevezetés**

Az alábbiakban tárgyalásra kerülő jelenség a mechanika érintkezési problémái körébe tartozik. Az építési mechanikában vizsgált szerkezeteknél gyakran előfordul, hogy bizonyos hatásokra a szerkezet egyes részein kontaktusok jönnek létre vagy szűnnek meg, ezáltal a szerkezet viselkedése legtöbbször lényegesen megváltozik. Ilyen érintkezési probléma például a súrlódás, amelynek leküzdése után megszűnik a kontaktus, vagy a képlékennyé válás, amelynek során szintén a kapcsolat fellazulásáról beszélhetünk. De érintkezési probléma a talajtól elváló gerenda vagy alaptest viselkedése is, amelynél a hiányzó kontaktus bizonyos hatásokra mégis létrejöhet. Az említett példák alapján érzékelhető, hogy a kapcsolat létrejötte vagy megszűnése mindig valamilyen feltétel függvénye, ezért az ilyen kapcsolatokat feltételes kapcsolatoknak nevezzük.

A feltételes kapcsolatok viselkedése a terhelési folyamat függvénye, figyelembevétele jelentős matematikai nehézségekkel jár. Tekintve azonban a feltételes kapcsolatok egyes típusai között fennálló fizikai és matematikai dualitást, egységes kezelésük a vizsgálatot általánossá és egyben egyszerűbbé teszi.

Az alábbiakban a legáltalánosabb esetből indulunk ki: bemutatjuk a feltételes kapcsolatmezőkkel rendelkező test állapotváltozási alapegyenleteit és az alapösszefüggéseket a variációs elvek alapján, a vonatkozó matematikai programozási problémákat, majd ezek alkalmazását véges szabadságfokú modellre.

Jelöléseinkben a tenzorszámítás szokásos összegzési és deriváltképzési konvencióit alkalmazzuk, ortonormált koordináta-rendszerre vonatkozóan.

## **1. Az általánosított feltételes kapcsolat**

A feltételes kapcsolatok fizikai és matematikai modelljének általánosítását PRAGER [1] után KALISZKY [2] alkotta meg, vizsgálatainkban az általuk megadott összefüggésekre támaszkodunk.

\* Kurutzné, Dr. Kovács Márta munkája



A test egy pontjának mechanikai állapotát a pont helyén létrejövő  $\sigma_{ij}$  feszültségtenzor és  $\varepsilon_{ij}$  alakváltozástenzor jellemzi. Az általánosított feltételes kapcsolat helyén a  $\sigma_{ij}$  feszültségeket az

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha) \leq 0 \quad (1)$$

szilárdsági, és az  $\varepsilon_{ij}$  alakváltozásokat az

$$f(\varepsilon_{ij}, \beta) \leq 0 \quad (2)$$

geometriai feltétel korlátozza. Az összefüggésekben  $\alpha$  anyagi,  $\beta$  pedig szerkezeti állandó, és minthogy értékük a testben pontról pontra változik, skalármezők elemei (pl.  $\alpha$  lehet folyási határ,  $\beta$  pedig illesztési hézag). A tenzorok skalárfüggvényeként megadott  $\mathcal{F}$  az ún. *folyási függvény*,  $f$  pedig az ún. *záródási függvény*.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az

$$\mathcal{F}(\sigma_{ij}, \alpha) = 0, \quad \text{illetve} \quad f(\varepsilon_{ij}, \beta) = 0 \quad (3)$$

függvényeket a  $\sigma_{ij}$  feszültség-, illetve az  $\varepsilon_{ij}$  alakváltozásterben egy-egy zárt, konvex hiperfelület ábrázolja. A hiperfelületek által határolt hipertér a feltételes kapcsolat kezdeti állapotának megfelelő origót is magában foglalja.

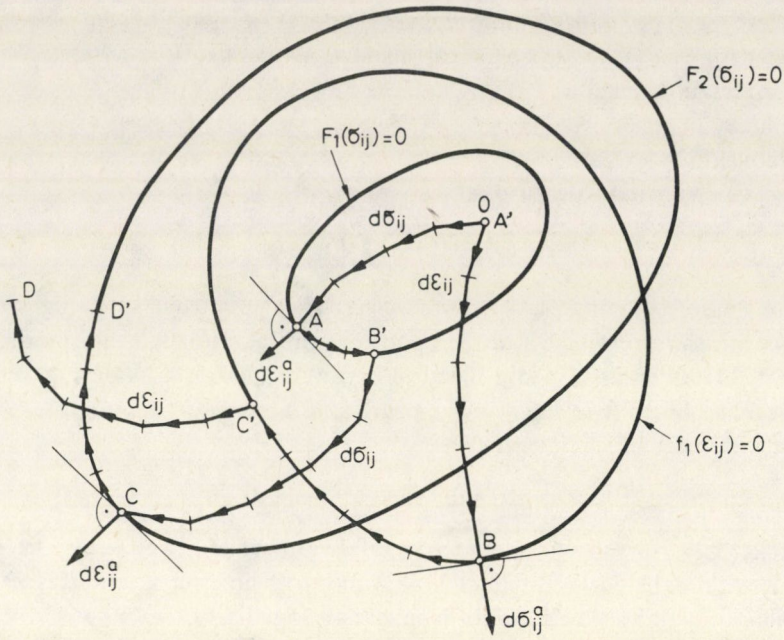
A szilárdsági és geometriai korlátozásokat egy általánosított feltételes kapcsolat esetén közös feltételbe is foglalhatjuk:

$$g\{\mathcal{F}_k(\sigma_{ij}, \alpha_k), f_l(\varepsilon_{ij}, \beta_l)\} \leq 0 \quad (4)$$

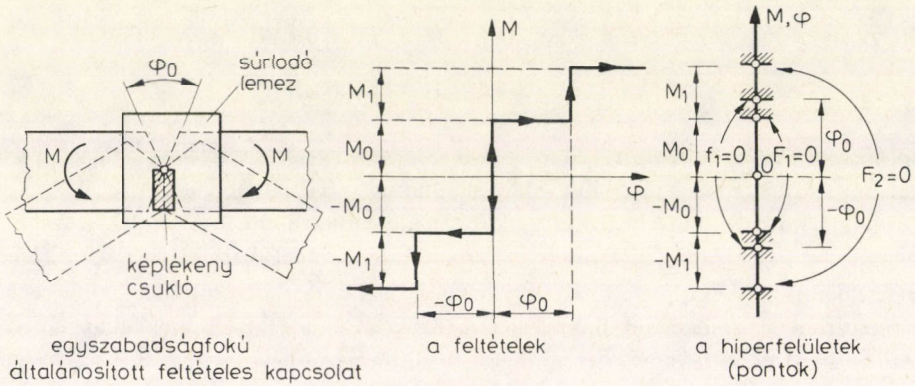
$$k = 1, 2, \dots, m; \quad l = 1, 2, \dots, n;$$

ahol  $m$  és  $n$  a kapcsolatra előírt szilárdsági, illetve geometriai feltételek száma, tehát  $g$  az általános *aktivizálódási függvény*. Ha valamennyi  $g=0$  feltételt a  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  koaxiális koordináta-rendszerben ábrázoljuk, akkor a kapcsolatra előírt feltételek számának megfelelő  $m+n$  elemből álló konvex hiperfelület-sereget kapunk, az 1. ábrának megfelelően. Az egyes hiperfelületek egymáshoz viszonyított helyzetében jut kifejezésre a kapcsolatra előírt feltételek precedenciája. Az 1. ábrán a  $g=0$  feltételeket ábrázoltuk  $m=2$  és  $n=1$  mellett, vagyis azt az esetet, amikor a test egy pontjában — a vizsgált kapcsolatban — két szilárdsági feltétel közrefog egy geometriai feltételt. A 2. ábrán a fenti általánosított feltételes kapcsolatnak egy egyszerű, egyszabadságfokú változatát tüntettük fel a megfelelő feltételekkel és hiperfelületekkel együtt, amely utóbbiak — a koaxialitásnak és az egytengelyű állapotnak megfelelően — csupán egy-egy pontpárként ábrázolhatók.

Az állapotváltozás vizsgálatokor az egyes állapotjellemezőknek a terhelési folyamat során bekövetkező változását kell követnünk. Hogy kölcsönösen egyértelmű összefüggést adhassunk meg a terhelés és az egyes állapotjellemezők között, valamennyit az idő függvényének kell tekintenünk, és az állapotváltozást az egyes állapotjellemezők sebességével kell leírnunk. Idő változó alatt azonban bármilyen más,



1. ábra



2. ábra

monoton változó paramétert, például teherintenzitást is érthetünk, így módon a sebesség és növekmény fogalma tárgyalásunkban azonos szerepet tölt be.

Így az  $\mathcal{F}$ , illetve  $f$  aktivizálódási függvényeknek megfelelően értelmezzük azok sebességét az ún. aktivizálódási potenciálsebességeket:

$$\dot{\mathcal{F}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \mathcal{F}_{,ij} \dot{\sigma}_{ij}, \quad \text{ill.} \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} = f_{,ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (5)$$

ahol  $\mathcal{F}_{ij}$  és  $f_{ij}$  az  $\mathcal{F}$  ill.  $f$  skalárfüggvény tenzor szerinti gradiensei, maguk is másodrendű tenzorok, így  $\mathcal{F}$  és  $f$  skalármennyiségek.

Amint az az 1. ábrán is látható, a kapcsolat szilárdsági értelmű aktivizálódása során  $\dot{\varepsilon}_{ij}^a$  alakváltozás-növekmények, geometriai értelmű aktivizálódása során  $\dot{\sigma}_{ij}^a$  feszültségnövekmények lépnek fel:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^a = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij}, \quad \text{ill.} \quad \dot{\sigma}_{ij}^a = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = \dot{\lambda} f_{ij} \quad (6)$$

ahol  $\dot{\lambda}$  és  $\dot{\lambda}$  nemnegatív skalárok, az aktivizálódási állapotjellemzők *szorzósebességei*. A (6) összefüggés az *aktivizálódási törvény*, amely szerint az aktivizálódási függvény az aktivizálódási állapotjellemző-növekmények potenciálfüggvénye. Ez a *normalitási törvénynek* felel meg, hiszen az  $\mathcal{F} = 0$  illetve  $f = 0$  hiperfelületek külső normálisát az  $\mathcal{F}$  ill.  $f$  függvények  $\mathcal{F}_{ij}$  illetve  $f_{ij}$  gradiense adja meg, így (6) geometriailag azt fejezi ki, hogy  $\dot{\varepsilon}_{ij}^a$  az  $\mathcal{F} = 0$ ,  $\dot{\sigma}_{ij}^a$  az  $f = 0$  felület külső normálisának irányába mutat. Az *ortogonalitási törvénynek* megfelelően viszont az aktivizálódási állapotjellemző és duálisának sebességvektorai skalárszorzata zérus:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^a \dot{\sigma}_{ij}^a = 0, \quad \text{illetve} \quad \dot{\sigma}_{ij}^a \dot{\varepsilon}_{ij}^a = 0, \quad (7)$$

vagyis (5) és (6) értelmében:

$$\dot{\lambda} \mathcal{F} = 0, \quad \text{illetve} \quad \dot{\lambda} f = 0. \quad (8)$$

Az általánosított feltételes kapcsolat viselkedése tehát az aktív és tehermentesülő állapotot magában foglalóan így jellemezhető:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \leq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \text{de} \quad \mathcal{F} \dot{\lambda} = 0, \\ \text{illetve} \\ f \leq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \text{de} \quad f \dot{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

## 2. A feltételes kapcsolatú test vizsgálata

Egyetlen kapcsolat viselkedésének leírása után vizsgáljuk meg a feltételes kapcsolatokkal rendelkező kontinuum viselkedését. Az inhomogén test anyagának szilárdság tulajdonságai az időtől függetlenek, az anyag izotrop, lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny, az elmozdulások kicsinyek. A teher egyparaméteres, monoton növekvő (csökkenő), kvázistatikus.

Az összefüggések levezetése során a legáltalánosabb variációs elvből, a Hu-Washizu-féle [3] energiafunkcionálból indulunk ki és arra törekszünk, hogy az aktivizálódási törvénnyel kapcsolatos fenti összefüggéseket is a variációs elvek alapján fogalmazhassuk meg. Ezért kiindulásként az aktivizálódási törvénnyel kapcsolatosan csak a triviális feltételezésekre szorítkozunk.

Legyen a vizsgált test a háromdimenziós tér egy  $V$  résztartománya a megfelelő  $S$  határfelülettel. Ismeretes, hogy a szilárd test egy pontjának mechanikai állapotvál-



tozását az állapotjellemző sebességek határozzák meg. Ha  $e$  pont feltételes kapcsolat, akkor  $e$  pont mechanikai viselkedését az állapotjellemzőkre, illetve azok sebességeire vonatkozó (1), (2), ill. (4) feltételek szabályozzák. Tételizzük fel, hogy a vizsgált test bármely pontja feltételes kapcsolat lehet, így a kontinuum mechanikai állapotának jellemzéséhez az állapotjellemző-sebességekhez tartozó tenzormezőkön kívül az általánosított feltételmezők ismerete is szükséges. A továbbiakban  $\mathcal{F}$  és  $f$  az általánosított feltételmezőt, vagyis tenzorok skalárfüggvénymezőit jelöli.

A  $V$  tartományon értelmezett feszültség-, illetve alakváltozás-sebesség mezők (6) értelmében:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^a, \quad \text{illetve} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^a \quad (10)$$

ahol  $\dot{\sigma}_{ij}^e$  és  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$  az aktivizálódás által pillanatnyilag nem érintett — rugalmas — sebességek tenzora. Az aktivizálódási szorzósebességek  $\dot{\lambda}$ , illetve  $\dot{\lambda}$  skalármezőire vonatkozóan feltételezzük, hogy

$$\dot{\lambda} \in V_{\mathcal{F}}, \quad \text{illetve} \quad \dot{\lambda} \in V_f \quad (11)$$

ahol  $V_{\mathcal{F}}$ , illetve  $V_f$  a  $V$  tartomány azon részét jelenti, ahol  $\mathcal{F} = 0$ , illetve  $f = 0$ , továbbá

$$V_{\mathcal{F}} \cap V_f = 0 \quad (12)$$

azaz  $V_{\mathcal{F}}$  és  $V_f$  diszjunkt tartományok.

A  $V$  tartományban értelmezzük még a  $g_i$  térfogati erőrendszert, amelyről feltételezzük, hogy  $\dot{g}_i \neq 0$ , továbbá az  $\dot{u}_i$  elmozdulássebesség-mezőket.

A  $V$  tartomány  $S$  határfelületén az alábbi függvényeket definiáljuk, ha

$$S = S_u + S_\sigma \quad \text{és} \quad S_u \cap S_\sigma = 0, \quad (13)$$

$\dot{p}_i \in S_\sigma$  az  $S$  határfelület  $S_\sigma$  részén előírt tehersebességvektor;  $\dot{v}_i \in S_u$  az  $S$  felület  $S_u$  részén előírt elmozdulássebesség-vektor;  $\dot{r}_i \in S_u$  az  $S$  felület  $S_u$  részén keletkező reakciósebesség-vektor.

A  $V$  tartományon definiáljuk továbbá az  $\dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij})$  alakváltozási és a  $\dot{B}(\dot{\sigma}_{ij})$  komplementer alakváltozási teljesítménysűrűség függvényét az alábbiak szerint:

$$\begin{aligned} \dot{B}(\dot{\sigma}_{ij}) &= \dot{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij}) \quad \text{és} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= \frac{\partial \dot{A}}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}}, \quad \text{illetve} \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \dot{B}}{\partial \dot{\sigma}_{ij}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Itt

$$\begin{aligned} \dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij}) &= \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^e a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{\lambda} f_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^e \\ \dot{B}(\dot{\sigma}_{ij}) &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} F_{ij} \cdot \dot{\sigma}_{ij}^e - \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^e a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \end{aligned}$$

így

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{ij} &= a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e + \dot{\lambda} f_{ij} \quad \text{és} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \cdot F_{ij}\end{aligned}$$

s ezáltal az anyagtörvényt rögzítettük.

A lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny anyagú általánosított feltételes kapcsolatú test alapösszefüggéseinek levezetésénél induljunk ki a Hu-Washizu-elvből [3], [4], hiszen a lineárisan rugalmas testekre érvényes energiatételek a lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny testekre is érvényesek, ha azokat nem egy meghatározott állapothoz tartozó energiára, hanem az állapotváltozást jellemző energiasebességekre vonatkoztatjuk [5]:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_{HW} &= \int_V \dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_V \dot{g}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_\sigma} \dot{p}_i \dot{u}_i dS - \\ &- \int_V \left[ \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \right] \dot{\sigma}_{ij} dV - \\ &- \int_{S_u} (\dot{u}_i - \dot{v}_i) \dot{r}_i dS\end{aligned}\quad (15)$$

amelyben az első tag az alakváltozási energia, a második és harmadik tag a belső és külső erők potenciális energiája, a negyedik és ötödik tag a diszlokációs energia sebessége. Figyelembe véve a (10) összefüggéseket, a 6-mezős  $\dot{\pi}_{HW}$  funkcionál:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_{HW}(\dot{\sigma}_{ij}^e, \dot{\varepsilon}_{ij}^e, \dot{u}_i, \dot{r}_i, \dot{\lambda}, \dot{\lambda}) &= \int_V \dot{A}(\dot{\varepsilon}_{ij}) dV - \int_V \dot{g}_i \dot{u}_i dV - \\ &- \int_{S_\sigma} \dot{p}_i \dot{u}_i dS - \int_V \left[ \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \right] (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) dV - \\ &- \int_{S_u} (\dot{u}_i - \dot{v}_i) \dot{r}_i dS\end{aligned}\quad (16)$$

A funkcionálban szereplő  $\dot{\sigma}_{ij}^e$ ,  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ ,  $\dot{u}_i$ ,  $\dot{r}_i$ ,  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\lambda}$  független mezők, így a  $V$  tartomány (vagy annak bizonyos résztartományai) felett szabadon variálhatók, hiszen csak a (6) és (10) feltételt vettük figyelembe és nem írtuk elő az egyes mezők (7), (8), ill. (9) szerinti függőségét. Képezzük tehát  $\dot{\pi}_{HW}$  első variációját, hogy a stacionaritási feltételekhez jussunk:

$$\delta \dot{\pi}_{HW} = \delta_\sigma \dot{\pi}_{HW} + \delta_\varepsilon \dot{\pi}_{HW} + \delta_u \dot{\pi}_{HW} + \delta_r \dot{\pi}_{HW} + \delta_\lambda \dot{\pi}_{HW} + \delta_\lambda \dot{\pi}_{HW}$$

$$\delta_\varepsilon \dot{\pi}_{HW} = \int_V (a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e - \dot{\sigma}_{ij}^e) \delta \dot{\varepsilon}_{ij}^e dV = 0$$

$$\delta_j \dot{\pi}_{HW} = - \int_V \left[ \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \lambda \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \right] \delta \sigma_{ij}^e dV = 0$$

$$\delta_i^v \dot{\pi}_{HW} = - \int_V [\dot{\sigma}_{ij,j}^e + \lambda f_{ij,j} + \dot{g}_i] \delta \dot{u}_i dV = 0$$

$$\delta_\lambda \dot{\pi}_{HW} = - \int_V [(\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) \mathcal{F}_{ij}] \delta \lambda dV = 0$$

$$\delta_i \dot{\pi}_{HW} = - \int_V \left[ \lambda \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) f_{ij} \right] \delta \dot{\lambda} dV = 0$$

$$\delta_i^S \dot{\pi}_{HW} = - \int_{S_\sigma} [\dot{p}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) n_j] \delta \dot{u}_i dS -$$

$$- \int_{S_u} [\dot{r}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) n_j] \delta \dot{u}_i dS = 0,$$

$$\delta_i^v \dot{\pi}_{HW} = - \int_{S_u} (\dot{u}_i - \dot{v}_i) \delta \dot{r}_i dS = 0, \quad (17)$$

ahol  $a_{ijkl} = a_{kijl}$  az anyagállandók negyedrendű szimmetrikus izotrop tenzora. Amint az (17)-ből nyilvánvaló, a  $\delta_i \dot{\pi}_{HW} = 0$  stacionaritási feltételek a lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, általánosított feltételes kapcsolatú test *állapotváltozási alapegyenleteivel* egyenértékűek.

Tekintsük rendre az alapegyenleteket.

*Az anyagegyenlet:*

$$a_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e = \dot{\sigma}_{ij}^e \quad V\text{-ben.} \quad (18)$$

*A kompatibilitási egyenlet:*

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e + \lambda \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) = 0 \quad V\text{-ben.} \quad (19)$$

*Az egyensúlyi egyenlet:*

$$(\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij})_{,j} + \dot{g}_i = 0 \quad V\text{-ben} \quad (20)$$

*A peremfeltételek:*

$$\dot{p}_i = (\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) n_j \quad S_\sigma\text{-n} \quad (a)$$

$$\dot{r}_i = (\dot{\sigma}_{ij}^e + \lambda f_{ij}) n_j \quad S_u\text{-n} \quad (b) \quad (21)$$

$$\dot{u}_i = \dot{v}_i \quad S_u\text{-n} \quad (c)$$

ahol  $n_j$  az  $S$  normálisa.

A (17) variációs egyenlőségekből megkapjuk az *aktivizálódási törvénynek* megfelelő *mellékfeltételeket* is, ha tekintetbe vesszük, hogy  $\lambda$  csupán  $V_\mathcal{F}$  és  $\dot{\lambda}$  csupán  $V_f$



felett variálható szabadon, továbbá, hogy  $V_{\mathcal{F}} \cap V_f = 0$ :

$$\sigma_{ij}^e \mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F} \leq 0 \quad \text{és} \quad \lambda \geq 0 \quad V_{\mathcal{F}}\text{-ben} \quad \text{és} \quad \mathcal{F} \lambda = 0 \quad V\text{-ben,} \quad (a)$$

illetve

$$\varepsilon_{ij}^e f_{ij} = f' \leq 0 \quad \text{és} \quad \lambda \geq 0 \quad V_f\text{-ben} \quad \text{és} \quad f' \lambda = 0 \quad V\text{-ben.} \quad (b)$$

E fontos összefüggéspár az aktivizálódási feltételeknek megfelelő hiperfelületekkel kapcsolatos ortogonalitási törvényt írja le, vagyis azt, hogy aktív állapotban — amikor  $\lambda$ , ill.  $\lambda$  szabadon variálhatók — az aktivizálódási állapotjellemző és duálisának sebességvektorai ortogonálisak. Másképp fogalmazva, aktív állapotban a potenciálsebesség zérus. Ekkor  $\delta \lambda \dot{\pi}_{HW} \leq 0$ , ill.  $\delta \lambda \dot{\pi}_{HW} \leq 0$   $V_f$ -ben ill.  $V_{\mathcal{F}}$ -ben, mert itt  $\lambda$  és  $\lambda$  csak az aktív állapot fennmaradása ( $\mathcal{F} = 0$ , ill.  $f' = 0$ ) mellett variálhatók szabadon, és a tehermentesülésnek ( $\mathcal{F} < 0$ , ill.  $f' < 0$ ) megfelelően nem lehetnek tetszőlegesek, hanem ekkor a  $\delta \lambda \geq 0$  ill.  $\delta \lambda \geq 0$  értékeket kell felvenniük. A tehermentesülést is magában foglaló  $\mathcal{F} \leq 0$ , ill.  $f' \leq 0$  feltételek figyelembevétele *matematikai programozási feladathoz* vezet [6].

A  $\sigma_{ij}^e$ ,  $\lambda$ ,  $\dot{\pi}_i$  mezők *statikailag lehetségesek* (egyensúlyiak), ha eleget tesznek a (20) és (21.a.b) egyensúlyi feltételeknek, és *statikailag elérhetőek* is, ha még a (22.a) feltételeket is kielégítik.

Az  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\lambda$ ,  $\dot{u}_i$  mezők *kinematikailag lehetségesek* (kompatibilisek), ha eleget tesznek a (19) és (21.c) kompatibilitási feltételeknek, és *kinematikailag elégségesek* is, ha még a (22.b) feltételeket is kielégítik.

A  $\sigma_{ij}^e$ ,  $\lambda$ ,  $\dot{\pi}_i$ ,  $\varepsilon_{ij}^e$ ,  $\lambda$ ,  $\dot{u}_i$  mezők *ténylegesek*, ha a megfelelők statikailag elérhetőek, ill. kinematikailag elégségesek és a (18) anyagegyenlet által megszabott kapcsolatban állnak egymással. Minthogy a  $\delta \pi_{HW} = 0$  feltétel csak az összes egyenlet kielégülésével érhető el, a  $\dot{\pi}_{HW}$  energiasebesség-funkcionált a tényleges mezők teszik stacionáriussá.

Megmutattuk, hogy a Hu-Washizu elvből kiindulva nemcsak az állapotváltozás-vizsgálat alapegyenleteit kaptuk meg, hanem az aktivizálódási törvénnyel kapcsolatos — korábban ismertetett — mellékfeltételekhez is eljutottunk.

A továbbiakban tekintsük át az állapotváltozásvizsgálat *matematikai programozási problémaként* való megfogalmazását.

E célból a (16)  $\dot{\pi}_{HW}$  funkcionál független mezői közül némelyeket függőségbe hozunk egymással az alapegyenletek megfelelőinek kielégítése útján, miáltal  $\dot{\pi}_{HW}$  funkcionálban a független mezők száma csökken, de a mellékfeltételek száma nő.

Tekintsük először az anyagegyenlet melletti kompatibilis, sőt, kinematikailag elégséges mezőket, ezáltal a 6 mezős  $\dot{\pi}_{HW}$  funkcionál a 2 mezős  $\dot{\pi}_p(\varepsilon_{ij}^e, \lambda)$ , vagy a  $\dot{\pi}_p(\dot{u}_i, \lambda)$  a potenciális energiasebesség funkcionáljára egyszerűsödik a (18), (19), (21.c) és (22.b) feltételek kielégítése révén. Leegyszerűsített geometriai értelmezésben ez azt jelenti, hogy keressük a  $\dot{\pi}_{HW}$  funkcionálnak megfelelő „felület” extrémális pontját a (18), (19), (21.c) és (22.b) mellékfeltételeknek megfelelő „metszévonalak” mentén. Kiterjesztve az összefüggéseket a tehermentesítés esetére is, az állapotváltozás-

vizsgálat alapösszefüggéseit a *potenciális energiasebesség minimumának tétele* alapján tehát így foglалhatjuk össze:

$$\begin{aligned} \pi_p &= \int_V \dot{A}(\dot{\epsilon}_{ij}) dV - \int_V \dot{g}_i \dot{u}_i dV - \int_{S_\sigma} \dot{p}_i \dot{u}_i dS = \min! \quad V\text{-ben,} \\ a_{ijkl} \dot{\epsilon}_k^e - \dot{\sigma}_{ij}^e &= 0 \quad V\text{-ben} \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) &= 0 \quad V\text{-ben} \\ \dot{u}_i - \dot{v}_i &= 0 \quad S_u\text{-n,} \\ \dot{\lambda} \geq 0, \quad f' = f_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e \leq 0, \quad f' \dot{\lambda} &= 0 \quad V\text{-ben,} \\ \dot{\lambda} \geq 0 \quad V\text{-ben.} \end{aligned} \tag{23}$$

Egy lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, általánosított feltételes kapcsolatú test kinematikailag lehetséges és az aktivizálódási törvényt kielégítő, tehát kinematikailag elégséges alakváltozás-sebességmezői közül az a tényleges, amely a potenciális energia sebességét minimummá teszi. Minthogy a potenciális energia sebességének a kifejezése az ismeretlen állapotjellemző mezők kvadratikus függvénye, és ezen mezőkre egyenlőtlenségi mellékfeltételek is érvényesek, a (23) feladat kvadratikus programozási problémára vezet.

Tekintsük most az anyagegyenlet melletti egyensúlyi, sőt, statikailag elérhető mezőket, vagyis követeljük meg a (18), (20), (21.a.b) és (22.a) feltételek teljesülését. A (16) 6 mezős  $\pi_{HW}$  funkcionál, így ismét 2 mezőre egyszerűsödik:  $\dot{\pi}(\dot{\sigma}_{ij}^e, \dot{\lambda}) = -\dot{\pi}_c$ , ahol  $\dot{\pi}_c$  a hagyományosan értelmezett komplementer energia sebessége. Kiterjesztve az összefüggéseket a tehermentesítés esetére is, az állapotváltozás-vizsgálat alapösszefüggéseit a *komplementer energiasebesség minimumának tétele* alapján tehát így foglалhatjuk össze:

$$\begin{aligned} -\dot{\pi}_c &= \max! \quad \text{vagyis} \\ \dot{\pi}_c &= \int_V \dot{B}(\dot{\sigma}_{ij}) dV - \int_{S_u} \dot{v}_i \dot{r}_i dS = \min! \quad V\text{-ben,} \\ a_{ijkl} \dot{\epsilon}_k^e - \dot{\sigma}_{ij}^e &= 0 \quad V\text{-ben,} \\ \dot{\sigma}_{ij,j}^e + \dot{\lambda} f_{ij,j} + \dot{g}_i &= 0 \quad V\text{-ben,} \\ \dot{p}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) n_j &= 0 \quad S_\sigma\text{-n,} \\ \dot{r}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) n_j &= 0 \quad S_u\text{-n,} \\ \dot{\lambda} \geq 0, \quad \mathcal{F}' = \mathcal{F}_{ij} \dot{\sigma}_{ij}^e \leq 0, \quad \mathcal{F}' \dot{\lambda} &= 0 \quad V\text{-ben,} \\ \dot{\lambda} \geq 0 \quad V\text{-ben.} \end{aligned} \tag{24}$$

Egy lineárisan rugalmas tökéletesen képlékeny anyagú, általánosított feltételes kapcsolatú test statikailag lehetséges és az aktivizálódási törvényt kielégítő, tehát statikailag elérhető feszültségsebesség-mezői közül az a tényleges, amely a kiegészítő potenciális energia sebességét minimummá teszi.

A komplementer energia sebességének kifejezése az ismeretlen állapotjellemező mezők kvadratikus függvénye, így a (24) feladat szintén kvadratikus programozási feladatra vezet.

A fenti két energiatételt leegyszerűsített geometriai értelmezésben a következőképpen foglalhatjuk össze: a  $\pi_{WH}$  funkcionálnak a tényleges mezők felett nyeregpontja van, ez a pont egyben a kinematikailag elégséges (azaz a szilárdságilag aktív, ill. tehermentesülő kompatibilis) mezők feletti minimumot, a statikailag elérhető (azaz a geometriailag aktív, ill. tehermentesülő egyensúlyi) mezők feletti maximumot reprezentálja.

Megemlítjük még, hogy a Hu-Washizu-elv alapján jó néhány különböző variációs elv vezethető le, amelyek természetesen valamennyien a  $\pi_{HW}$  ugyanazon nyeregpontját jelölik ki, de más-más bázisban, így más-más jellegű extrémummal.

Írjuk most fel a Hu-Washizu-féle funkcionált tisztán az aktivizálódási állapotjellemező-sebességek függvényében. Ez egy hibrid elvhez vezet, minthogy itt az anyagegyenlet által leírt kapcsolatban levő egyensúlyi, illetve kompatibilis mezőket feltételezünk, és ahol az ismeretlen mezők az aktivizálódási állapotjellemező mezők feszültségi és alakváltozási jellegű szorzósebességei. Ez a (18), (19), (20), (21) feltételek érvényességét jelenti. Így a 2 mezős ún. *aktivizálódási energiasebesség* funkcionáljához jutunk, és az alapösszefüggések így foglalhatók össze:

$$\begin{aligned} \pi_{\text{akk}}(\dot{\lambda}, \dot{\lambda}) &= \int_V \dot{\lambda} (\dot{\epsilon}_{ij}) dV - \int_V (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij}) dV = \text{extr!} & V\text{-ben,} \\ a_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e - \dot{\sigma}_{ij}^e &= 0 & V\text{-ben,} \\ \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij} + \dot{g}_i &= 0 & V\text{-ben,} \\ \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\lambda} \mathcal{F}_{ij} - \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) &= 0 & V\text{-ben,} \\ \dot{p}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) n_j &= 0 & S_\sigma\text{-n,} \\ \dot{r}_i - (\dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\lambda} f_{ij}) n_j &= 0 & S_u\text{-n,} \\ \dot{u}_i - \dot{v}_i &= 0 & S_u\text{-n,} \\ \left. \begin{aligned} \dot{\lambda} &\geq 0 \\ \dot{\lambda} &\geq 0 \end{aligned} \right\} & V\text{-ben} \end{aligned} \tag{25}$$

Egy lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, általánosított feltételes kapcsolatú test statikailag és kinematikailag lehetséges, az anyagegyenletet is kielégítő



aktivizálódási állapotjellemző-sebességei közül az a tényleges vagyis statikailag elérhető és kinematikailag elégséges, amely az aktivizálódási állapotjellemző sebességmezők függvényében felírt energiasebességet stacionáriussá teszi.

### 3. Alkalmazás véges szabadságfokú modellre

Kontinuumfeladatunk véges szabadságfokú modelljét úgy képzeljük el, mint véges méretű elemek illeszkedő összességét, ahol az egyes elemek érintkező felületeinek bizonyos pontjaiban folytonossági követelményeket elégitünk ki. E pontok a csomópontok. Az állapotjellemzőket tehát e csomópontokra vonatkoztatott véges méretű vektorokkal jellemezhetjük. Célszerűen ugyanezen pontokra vonatkoztatjuk az aktivizálódási feltételeket is. Az aktivizálódási feltételeknek megfelelő hiperfelületeket konvex poliéderseregként vesszük fel, ezáltal a feltételeket linearizáljuk. Ennek megfelelően a *linearizált feltételek* az alábbiak lesznek:

$$\mathcal{F} = \mathbf{N}\sigma - \alpha \leq 0,$$

illetve

$$\mathbf{f} = \mathbf{M}\varepsilon - \beta \leq 0$$

ahol  $\mathbf{N}$  és  $\mathbf{M}$  az ún. gradiens hipermátrixok:

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \sigma}, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varepsilon} \quad (26)$$

vagyis az aktivizálódási hiperfelületeknek megfelelő konvex poliédereket alkotó síkok normálvektorait — függvényeket — tartalmazó hipermátrixok, továbbá  $\alpha$  és  $\beta$  ugyanezen síkok origótól való távolságát — skalárokat — tartalmazó hipervektorok.

Az aktivizálódási törvény véges szabadságfokú modellre érvényes alakja:

$$\dot{\varepsilon}^a = \mathbf{\Lambda}^* \mathbf{N}, \quad \text{ill.} \quad \dot{\sigma}^a = \dot{\lambda}^* \mathbf{M} \quad (27)$$

az aktivizálódási potenciálssebességek pedig:

$$\mathcal{F} = \mathbf{N}\dot{\sigma}^e, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{f} = \mathbf{M}\dot{\varepsilon}^e \quad (28)$$

Az állapotjellemző-sebességek így

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \dot{\sigma}^e + \dot{\sigma}^a \\ \dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^a \end{aligned} \quad (29)$$

Az alábbiakban a legegyszerűbb véges szabadságfokú rendszerre, a rúdszerkezetre alkalmazva mutatjuk be az állapotváltozás-vizsgálat alapösszefüggéseit.

Tekintetbe véve [7] alapján a rúdszerkezet alapegyenletét

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (30)$$

amely megadja az összefüggést a szerkezet adott  $\mathbf{q}$  erő- és  $\mathbf{t}$  kinematikai terhei, valamint a keletkező  $\mathbf{u}$  elmozdulásai és  $\mathbf{s}$  belső erői között, a kapcsolati feltételek az alábbi alakot ölthetik.

Legyen az  $i$ -edik kapcsolati helyre vonatkozó *szilárdsági* feltétel az alábbi linearizált képlékenységi feltétel [8]:

$$\mathcal{F}_i = \mathbf{N}_i \mathbf{s}_i^j - \mathbf{k}_i \leq \mathbf{0} \quad (31)$$

ahol  $\mathbf{s}_i^j$  az  $i$ -edik kapcsolati helyhez tartozó  $\mathbf{s}_i$  belső erők közül a korlátozás alá tartozókat jelöli.  $\mathbf{N}_i$  mátrix rögzíti az utóbbiak kombinációit azáltal, hogy a konvex poliéder egyes hipersíkjaihoz tartozó normális egységvektorokat tartalmazza. A  $\mathbf{k}_i$  vektor a hipersíkoknak az origótól való távolságát adja meg. Például, ha  $\mathbf{N}_i = \mathbf{E}$ , vagyis az identitás mátrixa, akkor a hipersíkok normálisai éppen a koordinátatengelyek, így a feltétel csupán a keletkező igénybevételeknek a törőigénybevételekkel való numerikus összehasonlítását írja elő.

Legyen az  $i$ -edik kapcsolati helyre vonatkozó *geometriai* feltétel a relatív elmozdulásokra vonatkozó alábbi linearizált alak:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{M}_i \mathbf{t}_i^j - \mathbf{l}_i \leq \mathbf{0} \quad (32)$$

ahol  $\mathbf{t}_i^j$  az  $i$ -edik kapcsolati helyen fellépő  $\mathbf{t}_i$  relatív elmozdulások közül a korlátozás alá tartozókat jelöli.  $\mathbf{M}_i$  írja elő ezek kombinációit az adott  $\mathbf{l}_i$  konstansokhoz viszonyítva.

Tekintsük a kapcsolatok aktivizálódása során az  $\mathbf{s}^a$  illetve  $\mathbf{t}^a$  növekményvektorokat:

$$\mathbf{s}^a = \lambda^* \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{t}} = \lambda^* \mathbf{M} \quad \text{és} \quad \mathbf{t}^a = \Lambda^* \cdot \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{s}} = \Lambda^* \mathbf{N} \quad (33)$$

ahol  $\lambda$  az ún. szilárdsági és  $\Lambda$  a geometriai szorzósebesség, a keletkező belső erő, illetve relatív elmozduláskomponensek kombinációira vonatkozóan. Egyszabadságfokú kapcsolatnál magával a növekménnyel egyenlő.

A terhelési folyamat során az állapotjellemzők  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{s}$ ,  $\lambda$  és  $\Lambda$  sebességei (növekményei) közötti összefüggések az általánosított feltételes kapcsolatok aktivizálódásának folyamatában:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* & \mathbf{0} & \mathbf{G}^* \mathbf{M} \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} & \mathbf{N}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \\ \Lambda \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \\ \mathcal{F} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (34)$$

továbbá

$$\begin{bmatrix} \Lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad \text{és} \quad [\Lambda \ \lambda] \begin{bmatrix} \mathcal{F} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} = 0 \quad (34.a)$$



4. SCHARLE, P.: An Example for Constructing the Variational (Energetic) Error Principle, *Acta Technica*. Tom. 86. No. 3—4. 395—400. (1978).
5. KALISZKY, S.: Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1975).
6. KALISZKY, S., NÉDLI, P.: Analysis of Elasto-Plastic Structures by Mathematical Programming. *Acta Technica* Tom. 83. (3—4) 205—212. (1976).
7. SZABÓ, J., ROLLER, B.: Anwendung der Matrizenrechnung auf stabwerke. Akadémiai Kiadó, Budapest, (1978).
8. NÉDLI, P.: Lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú rüdszerkezetek számítása matematikai programozással. Egyetemi doktori értekezés (1976).
9. KURUTZ, M.: Analysis of Plastic Load Capacity of Plane Frameworks by Kinematic Loading, *Periodica Polytechnica*. Vol. 18. (1—2) 71—81. (1974).
10. KURUTZ, M.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek gépi számítása kinematikai terhekkel. *Magyar Építőipar*. XXIV. évf. 7—8. sz. 455—461. (1975).
11. KURUTZ, M.: State Change Analysis of Structures with Generalized Conditional Joints. *Periodica Polytechnica* Vol. 25. No. 3—4. 169—189. (1981).
12. KURUTZ, M.: Általánosított feltételes kapcsolatokkal rendelkező szerkezetek állapotváltozás-vizsgálata. *Műszaki Tudomány* (megjelenés alatt).
13. KURUTZ, M.: State Change Analysis of Elasto-Plastic Structures with Generalized Conditional Joints. *ZAMM* (megjelenés alatt).
14. CAPURSO, M.: Extremum Theorems for the Solution of the Rate Problem in Elastic-Plastic Fracturing Structures, *J. Struct. Mech.* 7 (4) 411—434 (1979).
15. PANAGIOTOPOULOS, P., TALASLIDIS, D.: A Linear Analysis Approach to the Solution of Certain Classes of Variational Inequality Problems in Structural Analysis. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 16. 991—1005. (1980).

**Basis relations of state change analysis of continua with generalized conditional joint field.** — The basic relations of the state change analysis of continua with generalized conditional joints, obtained from the variational principles, and the mathematical programming relations of the contact problem are presented. The applications of the basic relations are illustrated on discret models.

## DISZKRÉT MODELLEKKEL LEÍRHATÓ TARTÓSZERKEZETEK KÉPLÉKENY HATÁRÁLLAPOT-VIZSGÁLATA ÉS OPTIMÁLIS TERVEZÉSE SZTOHASZTIKUS PROGRAMOZÁSSAL\*

### 1. Bevezetés

Az anyag- és energiatakarékosság miatt egyre nagyobb jelentősége van az anyagminőség megbízhatóságának. Ebben a dolgozatban képlékeny határállapot-vizsgálat és optimális tervezés esetén azt vizsgáljuk, hogy az anyagminőség ingadozása milyen hatással van a szerkezetekre. A folyási határértékeket valószínűségi változóknak tekintjük, így szükségessé vált egy sztohasztikus képlékenységi feltétel bevezetése. A feladatokat sztohasztikus programokkal oldjuk meg.

\* Vásárhelyiné dr. Szabó Anna munkája.



## 2. Képlékenységi feltétel sztohasztikus feladatok esetén

Szerkezeti elemek (ill. keresztmetszetek) vizsgálatánál csak véges számú pontban szoktuk a feszültségeket számítani, és feltételezzük, hogy az elemeknek csak ezen kitüntetett pontjai játszanak szerepet a képlékenységi feltételeknél.

Feltételezzük továbbá:

- Egy keresztmetszet ezen pontjaiban a folyási határértékek nem független valószínűségi változók.
- A folyási határok együttes eloszlása normális, a várható értékek, szórások és a változók közötti korrelációk értékei ismertek.

Egy elem képlékenységi feltételei determinisztikus esetben:

$$\begin{aligned} \tau_{a1}^f &\leq \tau_1 \leq \tau_{f1}^f \\ \tau_{a2}^f &\leq \tau_2 \leq \tau_{f2}^f \\ \tau_{a3}^f &\leq \tau_3 \leq \tau_{f3}^f \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \tau_{an}^f &\leq \tau_n \leq \tau_{fn}^f \end{aligned} \quad (1)$$

ahol  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  az egyes elemeket reprezentáló pontok maximális nyíró feszültségei.

Legyen egy elem megbízhatóságának valószínűségi szintje adott ( $p$ ), vagyis legalább  $p$  valószínűséggel az elem teherviselő.

Írjuk fel annak a valószínűségét, hogy az anyagi pontra jellemző folyási függvény értéke nem lehet pozitív:

$$\begin{aligned} g(\tau, \tau_f) &= P(\tau_{a1}^f \leq \tau_1, \tau_{a2}^f \leq \tau_2, \tau_{a3}^f \leq \tau_3 \dots \\ &-\tau_{f1}^f \leq -\tau_1, -\tau_{f2}^f \leq -\tau_2 \dots, -\tau_{fn}^f \leq -\tau_n) \geq p \end{aligned} \quad (2)$$

Mint látható, a (2) összefüggés definíciószerűen az eloszlásfüggvény értéke, a főnyírófeszültség értékeitől függő helyen. A b) feltételben normális eloszlást tételeztünk fel, a (2) standardizált változókkal egyszerűbb alakra hozható.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{ai}^f - E(\tau_{ai}^f)}{D(\tau_{ai}^f)} &= \xi_i & \frac{-\tau_{fi}^f + E(\tau_{fi}^f)}{D(\tau_{fi}^f)} &= \eta_i, \\ \frac{\tau_i - E(\tau_{ai}^f)}{D(\tau_{ai}^f)} &= x_i, & \frac{-\tau_i + E(\tau_{fi}^f)}{D(\tau_{fi}^f)} &= y_i. \end{aligned}$$

A fenti jelölésekkel (2) a következő alakra hozható:

$$P(\xi_i \leq x_i, \eta_i \leq y_i, i = 1, \dots, n) \geq p \quad (3)$$

A standard normális eloszlásfüggvény ( $\Phi$ ) szokásos jelölésével (3) a következő formában is írható:

$$\Phi^{(0,1,R)}(\hat{x}_i, i = 1, \dots, 2n) \geq p \quad (4)$$

ahol az  $\hat{x}$  vektorban az  $x$  és  $y$  vektort foglaltuk össze. Így egy normális eloszlásfüggvény értékét kell számolnunk. Ez matematikailag lehetséges, de igen számításigényes. Ezért a gyakorlat szempontjából megfelelőbb, ha feltételezzük, hogy az alsó és felső folyási határok értéke független valószínűségi változók. Ekkor a (4) összefüggés a független valószínűségi változók szorzatára vonatkozó tétel értelmében a következőképp írható:

$$\Phi^{(0,1,R)}(x_i, i = 1, \dots, n) \Phi^{(0,1,R)}(y_i, i = 1, \dots, n) \geq p \quad (5)$$

illetve

$$P(\xi_i \leq x_i, i = 1, \dots, n) P(\eta_i \leq y_i, i = 1, \dots, n) \geq p \quad (6)$$

PRÉKOPA [1] munkájának 3. fejezet 18. tételében bizonyítja, hogy (6) konvex felületet alkot.

### 3. Képlékeny határállapot-vizsgálat

A képlékenységtan legrégebben használt, legalaposabban ismert területe a képlékeny határállapot-vizsgálat. Feladata a szerkezetek teherbírási kapacitásának meghatározása, arányosan növekvő terhelés mellett. Ez a fejezet először a 3.1 pontban ismerteti a determinisztikus feladatok esetén a határállapot-problémák megoldását lineáris programozással. A 3.2 részben a folyási határok értékeiről tételezzük fel, hogy valószínűségi változók.

#### 3.1 Képlékeny határállapot-vizsgálat determinisztikus feladatok esetén

Határállapot-vizsgálat esetén keressük azt a maximális teherparaméter értéket, amely mellett a szerkezet még éppen nem válik labilissá — még éppen nem lépnek fel korlátlan képlékeny alakváltozások. Ekkor a képlékeny alakváltozások mellett a szerkezet rugalmas alakváltozásai nem játszanak szerepet, ezért elegendő a vizsgálatot merev-ideálisan képlékeny anyagú szerkezeten elvégezni. Ha a teher egyparaméteres, és a paraméter monoton növekvő, akkor csak egyszer alakulhat ki határállapot, és ezt a teherparaméter szélső értéke jellemzi.

A képlékeny határállapot-vizsgálat két alapvető tétele a statikai és a kinematikai tétel. Ezek alapján felírható az a lineáris programozási feladatpár, amellyel a feladatok megoldhatók. A továbbiakban a statikai tételre lesz szükségünk. A statikai tétel értelmében a törőintenzitás a statikailag lehetséges teherintenzitások maximuma. Statikailag lehetséges az a teherintenzitás, amelyhez található olyan belső erőeloszlás, amely kielégíti az egyensúlyi egyenleteket és a képlékenységi feltételeket.

Ennek alapján felírható a feladat lineáris programozás primál feladatának megfelelő megfogalmazása:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \alpha \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (7/a)$$

$$\mathbf{k}_a \leq \mathbf{N}^* \mathbf{s} \leq \mathbf{k}_f \quad (7/b) \quad (7)$$

$$\alpha \rightarrow \max. \quad (7/c)$$

### 3.2 Képlékeny határállapot-vizsgálat abban az esetben, ha a folyási határok valószínűségi változók

A határállapot-vizsgálat a (7) összefüggésekkel leírt statikai tétel alapján végezhető el.

A szerkezet egyensúlyi egyenletei (7/a) változatlanok maradnak. A (7/b) képlékenységi feltétel helyett most a 2. fejezetben levezetett sztohasztikus képlékenységi feltételt használjuk. A (7/c) célfüggvény változatlan. Így a sztohasztikus programozási feladat a következőképp írható fel:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \alpha \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (8/a)$$

$$P^i(\mathbf{k}_a^i \leq \mathbf{N} \mathbf{s}^i \leq \mathbf{k}_f^i) \geq p^i \quad i = 1 \dots n \quad (8/b) \quad (8)$$

$$(-\alpha) \rightarrow \min. \quad (8/c)$$

Bővítsük az ismeretlen belső erők vektorát a teherparaméterrel, a geometriai mátrix transzponáltját pedig a tehervektorral.

$$\hat{\mathbf{G}}^* = [\mathbf{G}^* \quad \mathbf{q}]; \quad \hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Ekkor a feladat egyszerűbb formában írható fel:

$$\hat{\mathbf{G}}^* \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (9/a)$$

$$P^i(\mathbf{k}_a^i \leq \mathbf{N} \mathbf{s}^i \leq \mathbf{k}_f^i) \geq p^i \quad i = 1 \dots n \quad (9/b) \quad (9)$$

$$(-\hat{s}_{m+1}) \rightarrow \min. \quad (9/c)$$

Ez a feladat megfelel Prékopa valószínűségi változókkal korlátozott M1 jelű sztohasztikus programozási modelljének [1].

## 4. Optimális tervezés

A szerkezettervezés célja a szerkezeti elemek szükséges képlékeny teherbírási értékeinek meghatározása oly módon, hogy a szerkezet statikai szempontból megfelelő legyen, ugyanakkor eleget tegyen gazdasági vagy egyéb optimum-kritériumoknak.

Csak a minimális súlyra való optimális feladattal foglalkozunk, s felhasználjuk azt az általánosan elfogadott közelítést, hogy a szerkezet súlya felírható a teherbírás-jellemzők lineáris kombinációjaként.

#### 4.1 Optimális tervezés determinisztikus feladatok esetén

A klasszikus, minimális súlyú szerkezetek optimális tervezési feladata esetén adottnak tekintjük a terheket, a szerkezet geometriáját (geometriai mátrixát) a képlékenységi feltételeket (képlékenységi mátrixát) és keressük a szerkezet teherbírását jellemző értékeket (folyási határok értékeit) úgy, hogy az egyensúlyi egyenletek és a képlékenységi feltételek teljesüljenek, a teherbírás-jellemzők lineáris kombinációja minimális legyen. Vagyis a lineáris programozási primál feladat a következőképp állítható fel.

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (10/a)$$

$$\mathbf{N}^* \mathbf{s} - \mathbf{k} \leq \mathbf{0} \quad (10/b) \quad (10)$$

$$\mathbf{l}^* \mathbf{k} \rightarrow \min. \quad (10/c)$$

Ez megfelel az optimális tervezés statikai tételének, melynek értelmében annak a szerkezetnek a súlya, amelyhez található egy, az egyensúlyi és képlékenységi feltételeket kielégítő belsőerő-eloszlás, nagyobb vagy egyenlő, mint a minimális súly.

#### 4.2 Optimális tervezés abban az esetben, ha a folyási határok értékei valószínűségi változók

A determinisztikus feladat megfogalmazásától ez a sztohasztikus feladat annyiban tér el, hogy most a folyási határok várható értékeit keressük. A szórások és a korrelációk értékeit ismertnek tételezzük fel. Az optimális tervezési feladatunk kiindulópontját a (10) összefüggésekkel leírt statikai tétel jelenti.

A szerkezet (10/a) egyensúlyi egyenletei változatlanok maradnak. A (10/b) képlékenységi feltétel helyett a 2. fejezetben bevezetett sztohasztikus képlékenységi feltételt használjuk. A célfüggvény felírásakor a következő gondolatmenetet kövessük: A szerkezet súlya annál kisebb, minél jobban megközelítik a belső erők a folyási határok értékeit. Ezt az eltérést — a valószínűségi változójú folyási határértékek és a belső erők közti különbséget — mint büntető függvényt tekintjük. Feltételezzük, hogy az eltéréstől a büntetés lineárisan függ. A büntetések összegének várható értékét az alsó folyási határ esetén a következőképp írhatjuk fel:

$$P_e^{(1)} = \sum_{i=1}^m (N_i s_i - E(k_{ai})) \int_{-\infty}^{N_i s_i} (N_i s_i - v) dF_i^{k_{ai}}(v). \quad (11)$$



Analóg módon a felső folyási határtól való eltérés esetén a büntetés a következő alakú:

$$P_e^{(2)} = \sum_{i=1}^m (E(k_{fi}) - N_i s_i) \int_{N_i s_i}^{\infty} (v - N_i s_i) dF_i^{k_{fi}}(v). \quad (12)$$

Így a célfüggvény (11) és (12) összegeként felírható. A Stieltjes-integrálokat a sűrűségfüggvények segítségével Riemann-integrálokká átalakítva és parciálisan integrálva (11) és (12) egyszerűbb alakban írható, kihasználva azt, hogy  $vF(v) \rightarrow 0$ , ha  $v \rightarrow -\infty$ , illetve  $v(1-F(v)) \rightarrow 0$ , ha  $v \rightarrow \infty$ .

$$P_e^{(1)} = \sum_{i=1}^m (N_i s_i - E(k_{ai})) \int_{-\infty}^{N_i s_i} F_i^{k_{ai}}(v) dv, \quad (13)$$

illetve

$$P_e^{(2)} = \sum_{i=1}^m (-N_i s_i + E(k_{fi})) \int_{-\infty}^{N_i s_i} (1 - F_i^{k_{fi}}(v)) dv. \quad (14)$$

Végül a sztohasztikus programozási feladat a következő:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (15/a)$$

$$P^j(k_{ai}^j \leq N s_i \leq k_{fi}^j) \geq p^j \quad j = 1 \dots n \quad (15/b)$$

(15)

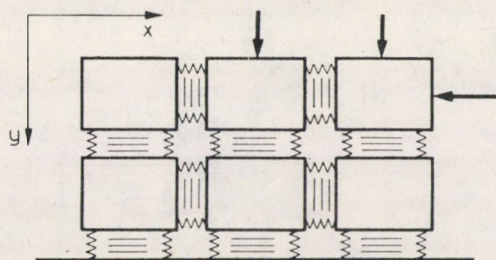
$$P_e^{(1)} + P_e^{(2)} = \sum_{i=1}^m (N_j s_j - E(k_{aj})) \int_{-\infty}^{N_j s_j} F_j^{k_{aj}}(v) dv + \\ + \sum_{j=1}^m (E(k_{fj}) - N_j s_j) \int_{-\infty}^{N_j s_j} (1 - F_j^{k_{fj}}(v)) dv \rightarrow \min. \quad (15/c)$$

Ez a feladat Prékopa M11-es modelljének felel meg [1].

## 5. Numerikus tapasztalatok panelszerkezetek számításánál

A 3., illetve 4. fejezetben ismertetett eljárásokat panelszerkezetek számításánál mutatjuk be. A szerkezeteket a merev tárcsa modellel közelítettük [2]. Ekkor a paneleket olyan merev testeknek tekintjük, melyeket élei mentén három ideálisan képlékeny rugó kapcsol össze az 1. ábra szerint. A rugók közül kettő a húzást-nyomást, egy pedig a nyírást veszi fel.

Ha két panelél csatlakozását mint egy keresztmetszetet fogjuk fel, ahol a képlékenységi feltételeket a rugóknál számítjuk, határállapot-vizsgálat esetén a (8) optimális tervezéskor a (15) összefüggésekkel felírt sztohasztikus programozási feladatot kell megoldanunk.



1. ábra

### 5.1 Panelszerkezetek határállapot-vizsgálata

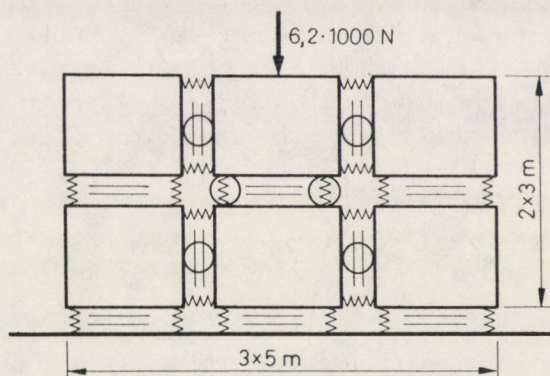
Azt vizsgáltuk, hogy az egy panelél mentén levő három rugó közötti korreláció, majd a szórásértékek hogyan befolyásolják a törőteher értékét.

a) Korrelációs mátrix hatása a törőparaméter értékére és a folyási mechanizmus kialakulására

Determinisztikus folyási határnak a várható értéket tekintettük (2. ábra). Sztohasztikus esetekben a szórások értékeit nem változtattuk, az egyes korrelációs mátrixokat az ábrák mellett tüntetjük fel. A korrelációs mátrix sorai illetve oszlopai rendre a bal oldali, jobb oldali húzási rugóra, bal oldali húzási rugókra és a nyírási rugókra vonatkoznak.

A folyási határok várható értékei és szórásai a vízszintes panelélek mentén

	várható érték	szórás
nyomás:	$-2080,0 \text{ N/cm}^2$	25,5
húzás:	$820,0 \text{ N/cm}^2$	25,5
nyírás:	$\pm 1470,0 \text{ N/cm}^2$	25,5



2. ábra

Függőleges panelélek mentén:

	várható érték	szórás
nyomás:	$-2000,0 \text{ N/cm}^2$	18,0
húzás:	$820,0 \text{ N/cm}^2$	18,0
nyírás:	$\pm 1020,0 \text{ N/cm}^2$	14,0

Az előírt biztonság ( $p$ ) minden esetben 95%. Egy panelélen belül körrel jelöljük azt a rugót, ahol a folyás bekövetkezett (3. ábra).

A korrelációs mátrix változásával a törőparaméter értéke is változott, az eltérés elérte a 26%-ot is. Vagyis a minőség egyenletessége előnyösen befolyásolja a szerkezet viselkedését.

A folyási mechanizmusok igen változatos képet mutatnak. Sztohasztikus esetben még ilyen egyszerű tartó és teher esetén se megjósolható, hogy határállapotban milyen törési kép alakul ki. Érdeemes rámutatni, hogy sztohasztikus esetben sokkal több helyen alakul ki folyás, mint a determinisztikus számításokban.

b) Szórás hatása a törőparaméter értékére

Számításokat végeztünk különböző szórások esetére. Az előbbi feladatban a 4-es korrelációs mátrixot használtuk, a várható értékek változatlanok voltak. Ekkor a következő törőparaméterértékek és folyásmechanizmusok alakultak ki (4. ábra).

Mint látható, a törőparaméter értéke rohamosan növekszik a szórások csökkenésével. Vagyis az anyag minőségének állandósága igen előnyösen befolyásolja a szerkezet viselkedését. Érdeemes rámutatni, hogy a gyakorlatban előforduló szórásértékek esetén (függőleges éleknél 25—30, vízszintes éleknél 30—35) a feladatnak nem volt lehetséges megoldása, vagyis teljesen megjósolhatatlan a szerkezet viselkedése.

### 5.2 Panelszerkezetek optimális tervezése

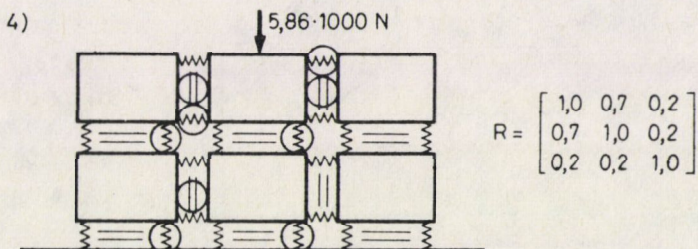
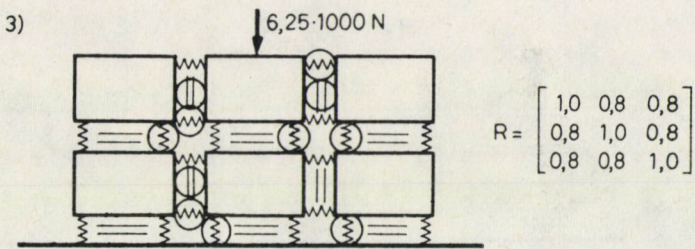
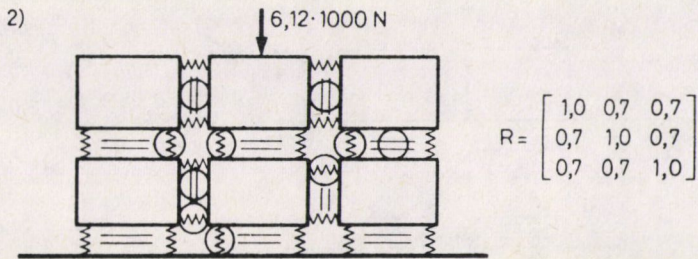
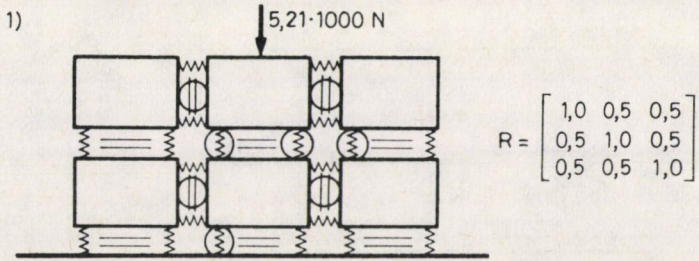
A bemutatott eljárással a következő feladatot oldottuk meg determinisztikus és sztohasztikus esetben (5. ábra).

Sztohasztikus esetben a folyási határok szórásértéke a vízszintes élek mentén 25,5, függőleges élek mentén 18,0 volt minden egyes rugónál. Az egy él mentén levő rugók folyási határai közötti korrelációs mátrixot a következőképp vettük fel:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 1 \end{bmatrix}$$

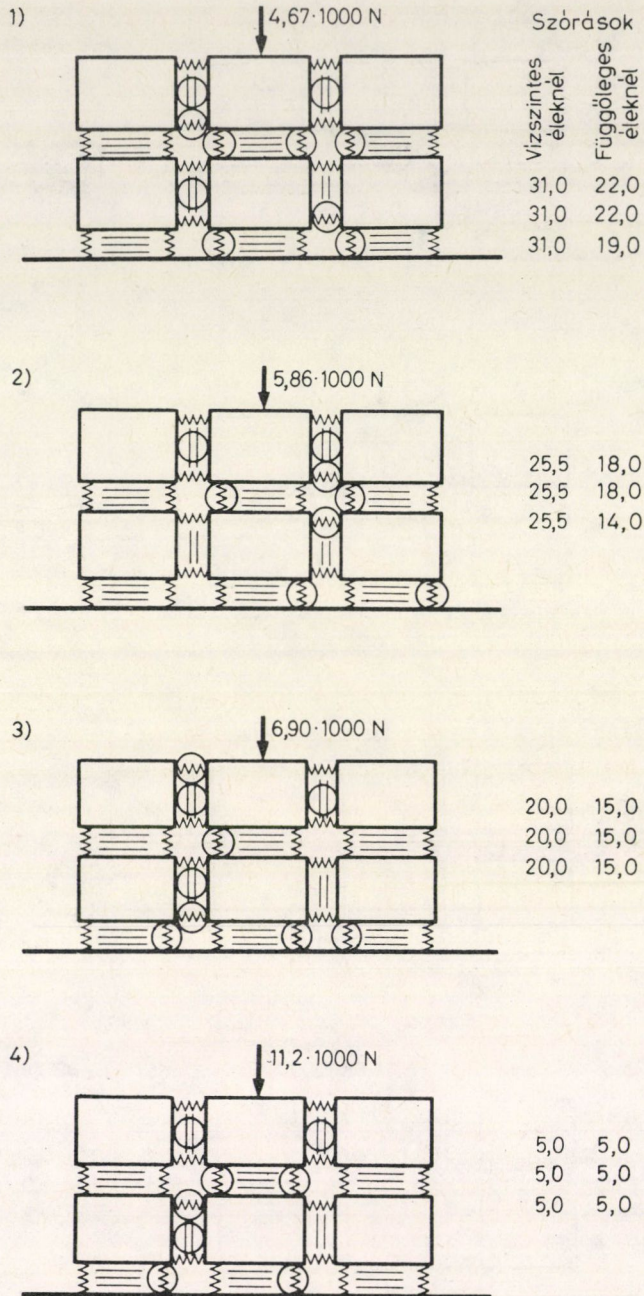
Mind determinisztikus, mind sztohasztikus feladat esetén a súlyozó faktort ( $I$ ) egységnyinek vettük.



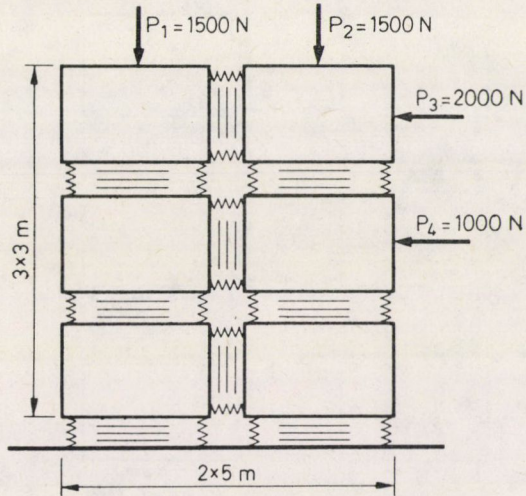


3. ábra





4. ábra

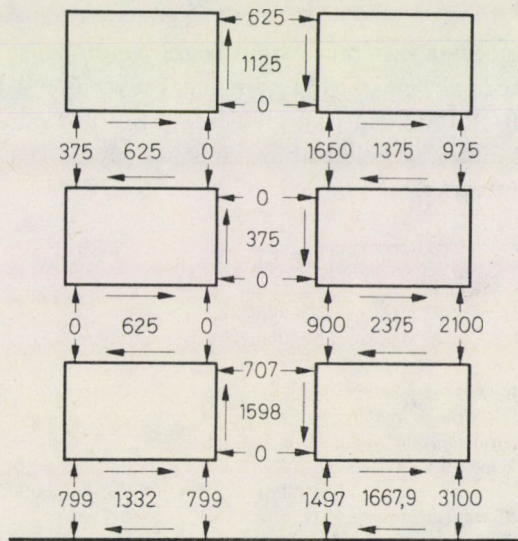


5. ábra

Determinisztikus feladat megoldása (6. ábra).

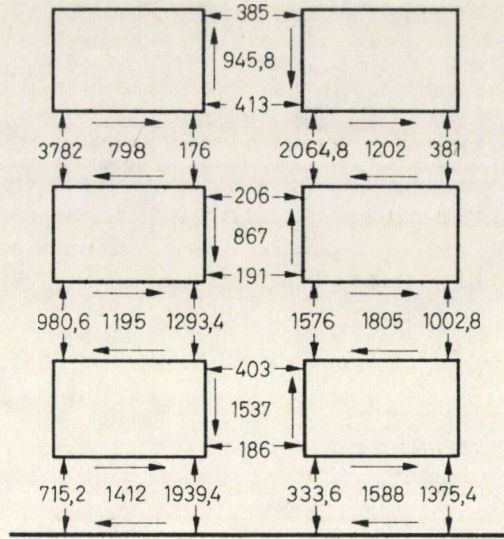
A célfüggvény értéke — vagyis a folyási határok értékeinek összege — 2462,62.

Sztohasztikus feladat esetén (7. ábra) a folyási határok értékeinek összege 2535,28. Az eredmények azt mutatják, hogy különböző rugók folyási határértékei között a különbség lényegesen alacsonyabb sztohasztikus esetben (187,88), mint



6. ábra





7. ábra

determinisztikus esetben (310,07), vagyis a szerkezet egyenletesebben „kívánja” az anyagot. Igaz ugyan, hogy a  $\Sigma k$  érték valamivel magasabb volt sztohasztikus esetben, mint determinisztikus esetben, de a gyakorlatban olyan szerkezetet nem lehet építeni, ahol a folyási határ értéke nulla, így legalább egy él mentén — de általában nagyobb egységekre bontva a szerkezetet — azonos minőségű anyagot szoktak használni. Ekkor azonban a sztohasztikus feladat megoldása kedvezőbb, mert a legmagasabb folyási határérték itt 206,48, míg determinisztikus esetben 310,07.

A feladatok megoldásához a módosított Lagrange-módszert használtuk fel [3]. A háromdimenziós normális eloszlásfüggvény függvényértékét a Hilton-féle transzformáció segítségével állítottuk elő [4], gradiensét Szantai módszerével határoztuk meg [5]. Az egyes feladatok megoldásához szükséges gépidő-igény erősen függött a korreláció- és szórásértékektől is.

#### Jelölések

A jelek a latin, majd a görög abc alfabetikus sorrendjében a következők:

$a$	panel $x$ irányú mérete
$b$	panel $y$ irányú mérete
$D(\xi)$	$\xi$ szórásnégyzete
$E(\xi)$	$\xi$ várható értéke
$f_j^{k_{ai}}(v), f_j^{k_{fi}}(v)$	$i$ -edik csomópont $k_{ai}$ alsó, illetve $k_{fi}$ felső folyási határának sűrűségfüggvénye ( $j$ =dimenziószám)
$F_j^{k_{ai}}(v), F_j^{k_{fi}}(v)$	$i$ -edik csomópont $k_{ai}$ alsó, illetve $k_{fi}$ felső folyási határának eloszlásfüggvénye ( $j$ =dimenziószám)



$g(\tau, k)$	folyási függvény
<b>G</b>	geometriai mátrix
$i, j$	indexek
$k_{ai}, k_{fi}$	$i$ -edik csomópont alsó, illetve felső folyási határa
$l_i$	lineáris kombinációban az $i$ -edik együttható
$m$	belső erők száma
$n$	csomópont-szám vagy belső panelélek száma
<b>N</b>	képlékenységi mátrix
$p_i$	$i$ -edik előírt valószínűségi érték
<b>P</b>	valószínűség
<b>q</b>	tehervektor
$r$	panelek száma
<b>R</b>	korrelációs mátrix
<b>s</b>	belső erők vektora
$x, y$	koordináta-rendszer
$\alpha$	teherparaméter
$\xi_i, \eta_i$	valószínűségi változók
$\tau$	nyírófeszültség
$\tau^f$	tiszta nyírás esetén a folyási határ értéke
$\tau_{ai}^f, \tau_{fi}^f$	$i$ -edik alsó, illetve felső folyási határ értéke
$\tau_{\max}$	maximális nyírófeszültség
$\Phi$	standard normális eloszlás-függvény
$\cdot$	idő szerinti derivált
$x$	transzponálás

## IRODALOM

1. PRÉKOPA A.: Sztohasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról. Matematikai doktori értekezés, Budapest, 1970.
2. KALISZKY S.—WOLF K.: Analysis of Panel Buildings by the Use of Rigid Panel Models. Periodica Polyt. Vol. 23, No 2, Budapest, 1979. (89—100).
3. HIMMELBLAU, D.: Applied Nonlinear Programming McGraw-Hill, 1972.
4. MILTON, R. C.: Computer Evaluation of the Multivariate Normal Integral. Technometrics, Vol. 14, No 4, 1972. (881—888).
5. SZÁNTAI T.: Egy eljárás a többdimenziós normális eloszlásfüggvény és gradiense értékek meghatározására. Alk. Mat. Lapok, Budapest, 1976/2 (27—39).

**Collapse load analysis and optimal design of discretised structures by stochastic programming. —**

In the case of plastic collapse load analysis and optimal design the effects of uncertainties of material quality can be taken into consideration if the yield conditions are random variables. The stochastic programming models of the above problems can be solved on the base of statistical theorems introducing the stochastic yield condition. Numerical results are presented for panel structures.

**Plastische Grenzstand-Untersuchung und optimale Planung diskreter modelierbarer Tragwerke**

Untersuchung und optimaler Planung beachtet werden indem man die Fließgrenze als Wahrscheinlichkeitsveränderlichen betrachtet. Mit der Einführung stochastischer plastischer Bedingungen können die stochastischen Programmierungsmodelle dargestellt werden. Numerische Ergebnisse werden mit Panelkonstruktionsberechnungen vorgezeigt.



**Анализ и оптимальное проектирование конструкций в пластичном состоянии с помощью дискретной модели и стохастического программирования.** — Счита́я пределы текучести вероятностными перемспными, можем учесть влияние изменения качества материала при анализе предельного состояния и при оптимальном проектировании. Записав вероятностное условие пластичности, на основании статических теорем можно записать модель стохастического программирования. Численные результаты демонстрируются на примере расчета панельных копструкций.

## A KATASZTRÓFAELMÉLET ALKALMAZÁSA RUGALMAS SZERKEZETEK TÖKÉLETLENSÉG-ÉRZÉKENYSÉGÉNEK VIZSGÁLATÁNÁL\*

Az elliptikus és a hiperbolikus köldök katasztrófa kanonikus alakja esetén az elágazási halmaz egyenletei ismertek. A szerkezet teljes potenciális energiájának függvénye e kanonikus alakra transzformálható az ilyen típusú katasztrófa pontok környezetében. E transzformációk felhasználásával algoritmust adunk a tökéletlen szerkezetek kritikus terhének számítására. A katasztrófaelmélet eredményeit felhasználva megadjuk a kritikus tökéletlenségi tartományokat. E tartományokat azok a tökéletlenségek alkotják, melyeknél a kritikus teher paramétere egy előírt értéknel kisebb. Ha a tökéletlenségek sűrűségfüggvénye ismert, akkor a kritikus tökéletlenségi tartományok segítségével ki lehet a stabilitásvesztés valószínűségét is számolni.

### Bevezetés

KOITER (1945) kidolgozta a rugalmas kontinuumok általános stabilitáselméletét, majd ezt THOMPSON és HUNT (1973) kiterjesztette diszkrét rendszerekre is. Mindkét elmélet a szerkezet teljes potenciális energiafüggvényét használja fel ahhoz, hogy meghatározza az adott teherhez tartozó egyensúlyi helyzetet, az egyparaméteresnek tekintett teher kritikus értékét, az egyensúlyi utak számát és elhelyezkedését a kritikus pont környezetében, valamint a tökéletlenség-érzékenységi összefüggéseket. Ez utóbbiak mutatják meg, hogy egy tökéletlen (a tervezettől eltérő) szerkezet kritikus terhe mennyire tér el a tervezett szerkezet kritikus terhétől, melyek a legveszélyesebb tökéletlenségek.

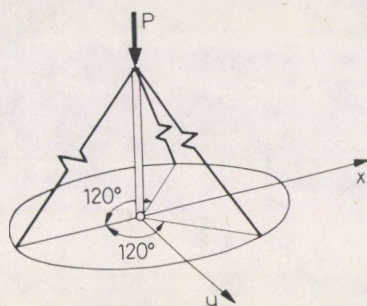
Az elemi katasztrófaelmélet (THOM 1972, ZEEMAN 1977, POSTON és STEWART 1978) is gradiens potenciálisfüggvények szingularitásaival foglalkozik. A szingularitásokat osztályozza, megadja az univerzális szétnyitásokat (az ehhez szükséges paraméterek számát, helyét) és az elágazási halmazokat (azokat a paraméterértékeket, melyeknél a függvénynek szingularitása van).

A rugalmas stabilitás elméletének és a katasztrófaelméletnek a kapcsolatát THOMPSON és HUNT (1975) mutatta ki. Azóta számos cikk foglalkozott e közös területtel. E cikk célja, hogy egy rövid áttekintést adjak saját, e témakörben kifejtett tevékenységemről.

\* Dr. Gáspár Zsolt munkája.

### Modellek

Az egyes stabilitásvesztési típusok szemléltetésére, vizsgálatára nagyon hasznosak az egyszerű modellek. THOMPSON és HUNT (1973) így mutatja be a határpontot és a nemszimmetrikus elágazási pontot (rác katasztrófákat), a stabil és instabil szimmetrikus elágazási pontot (a csúcs és a duális csúcs katasztrófát), sőt, az Augusti-modellel még a kettős csúcs katasztrófa egy típusát is. Az ellenhajlású elágazási pontra (elliptikus köldök katasztrófa) egy három rugóval megtámasztott merev rúd nyújt modellt (1. ábra), az egyhajlású elágazási pontra (hiperbolikus köldök katasztrófa) egy



1. ábra

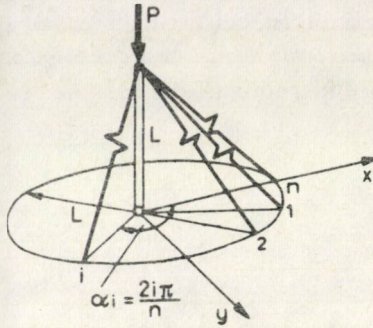
merevített lemez (THOMPSON és HUNT 1975). Újabb típusok bemutatására az egy rúdból és három rugóból álló szerkezetet általánosítottuk, mégpedig két irányban.

Az első esetben (GÁSPÁR 1977) megtartottuk a rugók szimmetrikus elhelyezkedését, de a rugók számát ( $n$ ) növeltük (2. ábra).  $n=3$  az eredeti esetet adja,  $n=4$  az Augusti-modellelnek megfelelő csúcs katasztrófát.  $n > 4$  esetén a kettős csúcs katasztrófa egy elfajuló esete (POSTON és STEWART 1976, 136. oldal,  $(x^2 + y^2)^2$  típusú esete) jön létre, és a triviális egyensúlyi utat mindig  $n$  másodlagos egyensúlyi út metszi. Ezzel kimutattuk, hogy kettős csúcs katasztrófa esetén tetszőleges számú másodlagos egyensúlyi út létrehozható. Megjegyezzük, hogy SAMUELS és STEVENS (1982) később bebizonyította, hogy a kettős csúcs katasztrófánál ezen elfajuló eset kivételével a másodlagos egyensúlyi utak száma mindig 2 vagy 4.

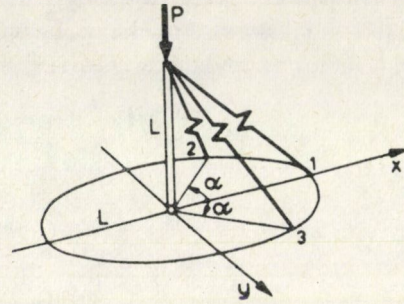
A szerkezet második általánosításánál (THOMPSON és GÁSPÁR 1977) három rugó maradt, de az elhelyezkedésüket folyamatosan változtattuk (3. ábra). Ekkor a kettős kritikus pont biztosításához a rugók merevségét is változtatni kellett. Az  $\alpha$  paraméter folyamatos változása során rendre a következő szingularitások jönnek létre: egyenhajlású (a három másodlagos egyensúlyi út a szimmetriasíkra vetítve egy irányban hajlik), háromszoros út (a három út egyesül, legalábbis az elágazásnál közös az érintőjük), egyhajlású (csak egy másodlagos egyensúlyi út marad), szimbolikus köldök (az eddig meglévő másodlagos egyensúlyi úttól távol megjelenik egy kétszeres út, illetve az elágazásnál közös érintővel rendelkező két út), ellenhajlású (a három



másodlagos egyensúlyi út a szimmetriasíkra vetítve különböző irányban hajlik), parabolikus köldök (az elágazásnál az egyik út érintője vízszintes) és végül újra egyenhajlású elágazási pont. Megmutattuk, hogy az egy szimmetriasíkkal rendelkező rendszereket jellemző pontok hogyan helyezkednek el a (transzformált) paramétertérben Zeeman köldökszerű karperecéhez (ZEEMAN 1977) viszonyítva.



2. ábra



3. ábra

Megjegyezzük, hogy ezeket a vizsgálatokat SAMUELS (1979) nemszimmetrikus szerkezetekre is általánosította. Modellünket is még két irányban általánosították. HUNT, REAY és YOSHIMURA (1979) a rugók merevségét változtatva a majdnem egybeeső kritikus pontok esetét vizsgálta, SAMUELS (1980) pedig a rugók elhelyezkedésében még meglevő szimmetriát is megszünteti.

### Tökéletlenség-érzékenységi felületek

Egyszeres kritikus pontnál az egyetlen „fő tökéletlenség” függvényében felírható a kritikus teher változása, és adott szerkezetnél a tökéletlenség-érzékenységi görbe könnyen felrajzolható (THOMPSON és HUNT 1975). Kétszeres kritikus pontnál a tökéletlenség-érzékenység még a legegyszerűbb esetekben is (elliptikus és hiperbolikus köldök) csak bonyolult felületekkel ábrázolható (THOMPSON és HUNT 1975, HUNT 1977). Új szerkezetnél új felületet kell rajzolni, analizálni. A katasztrófaelmélet bebizonyította, hogy az azonos típusú katasztrófák elágazási halmazai diffeomorfak. Ezért javasoltuk (GÁSPÁR 1983a) — amit THOMPSON, TAN és LIM (1978) ábrái is sugallnak —, hogy az elliptikus és hiperbolikus köldök katasztrófák esetén csak egy-egy kanonikus alakra rajzoljuk fel az elágazási halmazt (ezek egyenletét POSTON és STEWART (1978) megadja), és az egyes szerkezeteknél a koordináta-rendszert transzformáljuk. Itt és a továbbiakban is elhagyjuk az elágazási halmazok azon részeit, melyek két oldalán a minimumpontok száma megegyezik, hiszen a teherparamétert

változtatva ezen felületeken való áthaladáskor a stabil egyensúlyi helyzet nem változik meg.

Bebizonyosodott, hogy a tökéletlenségek tengelye egyenes marad és a teherparaméter tengelye mindig egy rögzített síkban fekvő parabola. A szerkezet változtatásánál a parabola egyetlen paramétere változik. GÁSPÁR (1983a) megadja az egyes alosztályokhoz tartozó paramétertartományokat és algoritmust ad az adott tökéletlenségekhez tartozó kritikus teher számítására.

### Kritikus tökéletlenségi tartomány

Határozzuk meg azokat a tökéletlenségeket, melyek hatására a kritikus teher egy előírt értéknél kisebb. Az e tökéletlenségek által alkotott tartományt nevezzük kritikus tökéletlenségi tartománynak. E tartományok határvonalai nem mindig az elágazási halmazok szintvonalai, hiszen a tökéletlenség-érzékenységi felület többértékű függvény is lehet. Azt tapasztaltuk, hogy a gyakorlatban legfontosabb eseteknél elegendő csupán egy kritikus tökéletlenségi tartomány meghatározása, és a teherparaméter függvényében megadható egy jól meghatározott, szemléletes változási szabály (GÁSPÁR 1983b).

Első lépésként a potenciális energiafüggvényből az irodalomnak megfelelően a passzív változókat kell kiküszöbölni. Az aktív rész vizsgált esetei a következők.

A ránc katasztrófánál a határpont

$$V = c_1 x^3 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 x - \lambda(c_2 x^2 + c_3 x)$$

és a nemszimmetrikus elágazási pont

$$V = c_1 x^3 + \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 x - \lambda(c_2 x^2 + \varepsilon_3 x).$$

A

$$V = c_1 x^4 + \varepsilon_1 x^3 + \varepsilon_2 x^2 + \varepsilon_3 x - \lambda(c_2 x^2 + \varepsilon_4 x)$$

alakú csúcs katasztrófánál három esetet vizsgálunk (az instabil szimmetrikus elágazást és a stabil szimmetrikus elágazást az elsődleges vagy másodlagos egyensúlyi útból kiindulva).

Az elliptikus és hiperbolikus köldök katasztrófáknál a potenciális energiafüggvény általános alakja:

$$V = c_1 y^3 + c_2 x^2 y - \lambda(c_3 x^2 + c_4 y^2) + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y.$$

A fenti képletekben  $x$ ,  $y$  az aktív koordináták,  $\lambda$  a teherparaméter,  $\varepsilon_i$ -k a tökéletlenségek,  $c_j$ -k a konstansok, a tökéletes szerkezeteknél  $\lambda = 0$ ,  $\varepsilon_i = 0$  és  $c_j \neq 0$ .

A következő lépés a fenti függvények kanonikus alakra való transzformálása, az ehhez szükséges képleteket, valamint a kanonikus alakokhoz tartozó kritikus tökéletlenségi tartományok egyenleteit és a változási szabályokat GÁSPÁR (1983b) megadja.



Példaként bemutatjuk az elliptikus köldök katasztrófa esetét. Az elágazási halmaz szintvonala mindig egy háromszögű hipociklois, melynek paraméteres ( $\Theta$ ) alakja

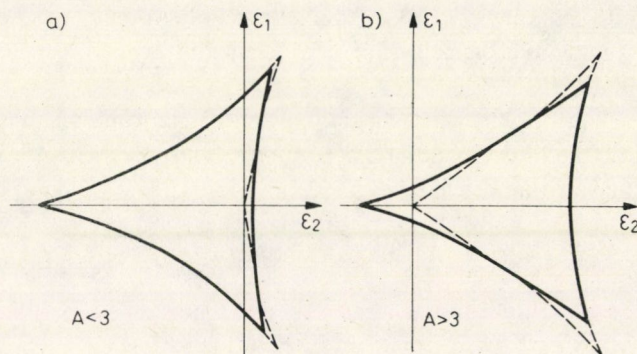
$$\varepsilon_1 = B(A/3)^{1/2} (\sin 2\Theta - 2 \cos \Theta) \lambda^2$$

$$\varepsilon_2 = (C + B(\cos 2\Theta - 2 \sin \Theta)) \lambda^2,$$

ahol

$$A = -\frac{c_2 c_4}{c_1 c_3}, \quad B = \frac{(A+3)^2}{12A^2}, \quad C = \frac{(A-3)(A+1)}{4A^2}.$$

Minden pontnak az origótól mért távolsága  $\lambda$  négyzetével arányosan változik, így általában a háromszögű hipocikloisok metszik egymást. Minden tökéletlenségél a legkisebb kritikus teher a mértékadó, ezért a háromszögű hipocikloisoknak két csúcsát a 4. ábra szerint az origóból induló érintőkkel le kell vágni. A kritikus tökéletlenségi tartomány a határvonalon kívül fekvő terület, tehát  $\lambda \leq 0$  esetén az egész tökéletlenségi sík.



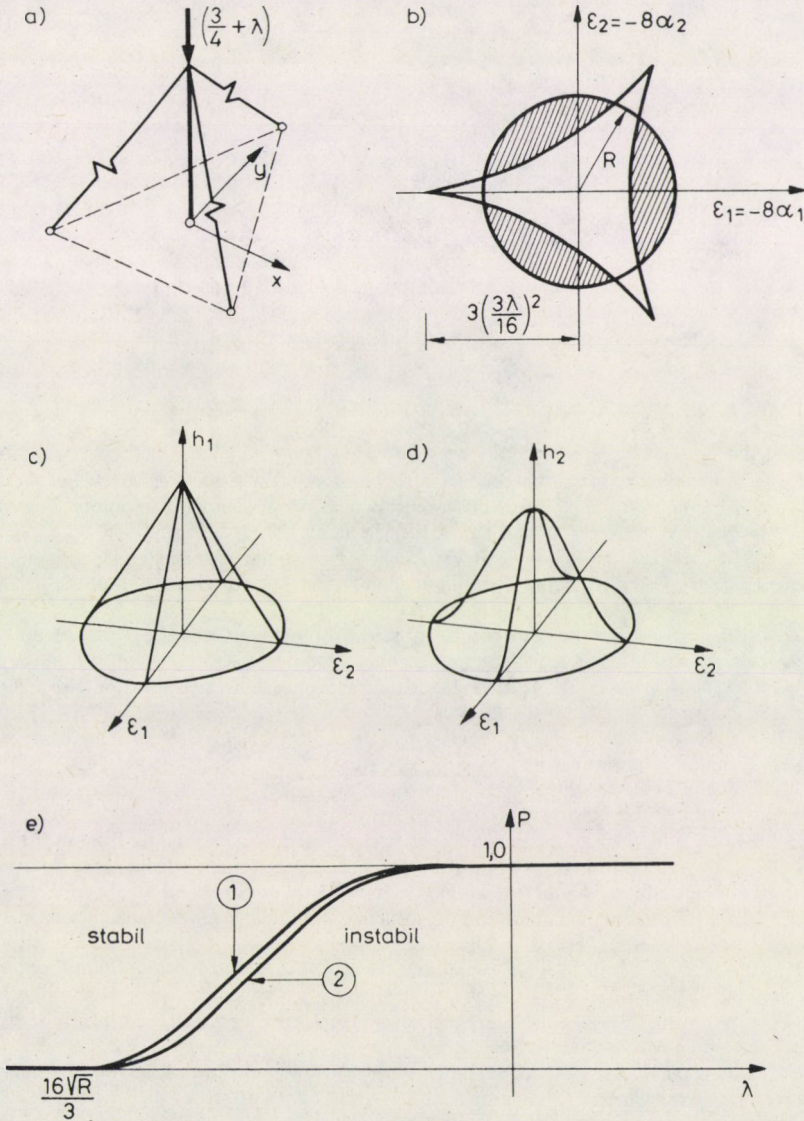
4. ábra

### A stabilitásvesztés valószínűsége

A tervezett és a valóságos szerkezet eltérése adott határok közé kell, hogy essék, különben a szerkezetet nem megfelelőnek (selejtnek) tekintjük. Ezek a korlátozott tökéletlenségek a tökéletlenségi paraméterek síkjában egy területtel adhatók meg (megengedett tökéletlenségi tartomány). A szerkezet biztos elbír stabilitásvesztés nélkül egy adott terhet, ha e teherhez tartozó kritikus tökéletlenségi tartománynak és a megengedett tökéletlenségi tartománynak nincs közös pontja. Ha közös területük is van és ismerjük a tökéletlenségek valószínűségi sűrűségfüggvényét, akkor a stabilitásvesztés valószínűségét a sűrűségfüggvénynek a közös területen vett határozott integrálja adja. Ezeket az értékeket néhány teherparaméter esetén kiszámolva a valószínűségfüggvény felrajzolható (GÁSPÁR 1983c).



*Példa.* A vizsgált modell egy egységnyi hosszú merev rúdból és három körülötte szimmetrikusan elhelyezkedő,  $45^\circ$  hajlásszögű, egységnyi merevségű rugóból áll, amit egy függőleges erő terhel (5/a. ábra). A szerkezet bármely helyzete egyértelműen megadható a rúd tetejének koordinátaival ( $x, y$ ). A tökéletes szerkezeteknél terheletlen esetben a rúd függőleges, tökéletlen szerkezetnél  $x = \alpha_1, y = \alpha_2$ . A rugókat terheletlen állapotban mindig feszültségmentesnek tételezzük fel.



5. ábra

E szerkezet speciális esete a (GÁSPÁR 1977) által vizsgált szerkezetnek. Annak alapján az energiafüggvény:

$$V = \frac{3}{32} \left( y^3 - 3x^2y - \frac{16}{3} \lambda(x^2 + y^2) - 8\alpha_1x - 8\alpha_2y \right).$$

Ennek az  $\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda = 0$  pontban elliptikus köldök katasztrófa pontja van.

Az 5/b. ábra mutatja a megengedett és a kritikus tökéletlenségi tartományt, közös részük vonalkázott. Két sűrűségfüggvényt vizsgáltunk (5/c, d ábra):

$$h_1 = \frac{3(R - \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2})}{R^3\pi}$$

$$h_2 = \frac{10}{3\pi} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{3(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)}{R^4} + \frac{2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^3}{R^5} \right).$$

Mindkét esetre az 5/e. ábra mutatja a teherparaméter függvényében a stabilitásvesztés valószínűségét.

#### IRODALOM

- GÁSPÁR, Zs., 1977: Buckling models for higher catastrophes. *Journal of Structural Mechanics*, **5**, 357—68.
- GÁSPÁR, Zs., 1983a: Computation of imperfection-sensitivity at two-fold branching points. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **63**, megjelenés alatt.
- GÁSPÁR, Zs., 1983b: Critical imperfection territories. *Journal of Structural Mechanics*, **11**, megjelenés alatt.
- GÁSPÁR, Zs., 1983c: Probability of the instability of imperfect structures. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, **63**, megjelenés alatt.
- HUNT, G. W., 1977: Imperfection-sensitivity of semi-symmetric branching. *Proceedings of the Royal Society of London*, Ser. A. 357, 193—211.
- HUNT, G. W., REAY, N. A., YOSHIMURA, T., 1979: Local diffeomorphisms in the bifurcational manifestations of the umbilic catastrophes. *Proceedings of the Royal Society of London*, Ser. A. 369, 47—65.
- KOITER, W. T., 1945: *On the stability of elastic equilibrium*. Dissertation, Delft, Holland: (English translation: NASA Technical Translations F10, 1—833, 1967).
- POSTON, T., STEWART, I. N., 1976: Taylor expansions and catastrophes. *Research Notes in Mathematics* **7**, London: Pitman Publishing.
- POSTON, T., STEWART, I. N., 1978: *Catastrophe Theory and its Applications*. London: Pitman Publishing.
- SAMUELS, P., 1979: The relationship between postbuckling behavior at coincident branching points and the geometry of an umbilic point of the energy surface. *Journal of Structural Mechanics*, **7**, 297—324.
- SAMUELS, P., 1980: Bifurcation and limit point instability of dual eigenvalue third order systems. *International Journal of Solids Structures*, **16**, 743—56.
- SAMUELS, P., STEVENS J., 1982: Instability of dual eigenvalue fourth order systems. *Journal of Structural Mechanics*, **10**, 209—225.
- THOM, R., 1975: *Structural Stability and Morphogenesis*. (Translated from the French edition by D. H. Fowler) Reading Massachusetts: Benjamin.
- THOMPSON, J. M. T., GÁSPÁR, Zs., 1977: A buckling model for the set of umbilic catastrophes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **82**, 497—507.

- THOMPSON, J. M. T., HUNT, G. W., 1973: *A General Theory of Elastic Stability*. London: Wiley.
- THOMPSON, J. M. T., HUNT, G. W., 1975: Towards a unified bifurcation theory. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 26, 581—604.
- THOMPSON, J. M. T., TAN, J. K. Y., LIM, K. C., 1978: On the topological classification of postbuckling phenomena. *Journal of Structural Mechanics*, 6, 383—414.
- ZEEMAN, E. C., (1977): *Catastrophe Theory: selected papers (1972—1977)*. Reading Massachusetts: Addison-Wesley.

**Imperfection-sensitivity of elastic structures using the catastrophe theory.** —The equations of the bifurcation sets at the canonical forms of the elliptic and hyperbolic umbilic catastrophes are known. The total potential energy function can be transformed into these forms in the neighbourhoods of these types of catastrophes. Using these transformations algorithms are given to compute the critical loads of imperfect systems.

Using the results of the catastrophe theory critical imperfection territories can be given. These territories include imperfections resulting in a smaller parameter of the critical load than a prescribed value.

If the density functions of the imperfections are known, then the probability of the instability can be computed by the help of the critical imperfection territory, as well.

**Die Anwendung der Katastrophentheorie bei der Imperfektion-Sensibilität der elastischen Tragwerke.**

—Im Falle der kanonischen Form von elliptischen und hyperbolischen Umbilikkatastrophen sind die Gleichungen der Verzweigungsmengen wohl bekannt. In der Umgebung von solcher Katastrophenpunkten kann die Funktion der gesamten potentiellen Energie auf diese kanonische Gestalt transformiert werden. Mittels Verwendung dieser Transformationen liefern wir ein Algorithm für die Berechnung der kritischen Last von Tragwerken mit Imperfektionen.

Wenden wir die Resultaten der Katastrophentheorie an, so beschreiben wir die Bereiche der kritischen Imperfektionen. Diese Bereiche werden durch diejenigen Imperfektionen gestaltet, bei welchen der kritische Lastparameter kleiner als ein vorgegebener Wert ist. Ist die Dichtefunktion der Imperfektionen bekannt, so kann man auch die Wahrscheinlichkeit des Stabilitätsverlustes mit Hilfe der kritischen Imperfektionsbereichen berechnen.





# TALAJMODELLEK ÉS A FEJLŐDÉS IRÁNYAI

PETRASOVITS G.<sup>1</sup> A MŰSZ. TUD. DOKTORA—SOLTÉSZ P.<sup>2</sup>

A tanulmány áttekintést ad a síkalapok méretezésénél figyelembe vehető főbb talajmodellekről, az ágyazási tényező és a rugalmas féltér használatán alapuló módszerekről, azok elméletéről és alkalmazhatóságáról.

Bemutatja a tanulmány a különböző talajmodellek terhelés — alakváltozási folyamatának pontosabb követését lehetővé tévő fejlesztési lehetőségeket és különös gondot fordít az ún. kombinált modellek tárgyalására, amelyek a talaj inhomogén tulajdonságait is figyelembe tudják venni.

## Bevezetés

A tanulmány célja, hogy áttekintést adjon a síkalapozás területén kialakult talajmodellezés főbb irányairól. Kitérünk ugyan a nagy számítógépigényű módszerekre is, de fő célkitűzésünk a gyakorlati feladatok megoldásában egyszerűen felhasználható újabb talajmodell, illetve eljárás csoport részletesebb bemutatása. Ezeknek az ún. kombinált talajmodelleknek a vizsgálatával, illetve az ezeken alapuló síkalapméretezési eljárások kidolgozásával az MTA Műszaki Mechanikai Kutatócsoportja keretében a Budapesti Műszaki Egyetem Geotechnikai Tanszéken több éve foglalkozunk.

Tanulmányunkban a hangsúlyt az egyes modellek bemutatására helyezzük, ezért az egyszerűség kedvéért mindig síkbeli vagy tengelyszimmetrikus rugalmassági esetet tételezünk fel.

A gyakorlatban alkalmazott talajmodellek felülvizsgálatát és újabb modellek felkutatását, ill. kidolgozását az indokolja, hogy a hagyományos talajmodelleken alapuló számítási módszerek sok esetben igen kedvezőtlen méretezési megoldásokhoz vezetnek. Mint látni fogjuk, ezek a módszerek, — bár a biztonság növelés irányába hatva — a valóság erősen torzított modelljeit építették be a méretezési eljárásokba. A kiválasztandó talaj modellcsoporttal szemben két követelményt támasztunk:

- a gyakorlati tervezés által megkívánt egyszerűséget, valamint
- a fizikai-mechanikai folyamatok jó követését.

A teljes feszültség-analízis megadása helyett elsősorban az alapsüllyedések és az alaptestben fellépő igénybevételek meghatározására irányítjuk figyelmünket. Megmu-

<sup>1</sup> Dr. Petrasovits Géza egyetemi tanár BME Talajmechanikai Tnsz. 1091 Bp. Ifjú munkás u. 20.

<sup>2</sup> Dr. Soltész Péter tud. mtárs BME Talajmechanikai Tnsz. 1082 Tömő u. 81.

tatjuk, hogy e feltételek mellett természetes úton adódik az ún. kombinált talajmodell csoport alkalmazásának célszerűsége.

A térbeli feszültségállapotokra, ill. az összetettebb geometriai feltételek esetére vonatkozóan csak a gyakorlati megvalósíthatóság szempontjából utalunk egyes talajmodelleknél.

A dolgozat témakörének további korlátozását jelenti, hogy nem térünk ki az időtényező hatásának elemzésére. A konszolidációs jelenségektől való eltekintés azt jelenti, hogy ennek megfelelően szemcsés közegekre vagy kevéssé konszolidálódó agyagtalajokra szorítkozunk. Megjegyezzük azonban, hogy a tárgyalásokra kerülő talajmodellek nagy részénél a konszolidáció figyelembevételének elvi lehetősége adott.

Az újabb talajmodelleknél röviden utalunk majd a paramétermeghatározásra, kiemelve, hogy, a fejlettebb modellek éppen a paraméterek számának és fizikai tartalmának megváltozása miatt állnak közelebb a valósághoz. Ezzel összhangban itt megbízhatóbb és a helyszíni próbatelhelési kísérletekkel jobb egyezést mutató laboratóriumi kísérletek javasolhatók.

## 1. Ágyazási együtthatós modellen alapuló eljárások

A klasszikus talajmodellek kialakulásánál döntő szerepet játszott, hogy a homogén, állandó inerciájú és a talaj illesztéséhez, a tartóegyenletről és a talaj terhelés-süllyedés egyenletéből álló rendszer megoldása technikailag nem egyszerű feladat. Mivel a tartó egyenlete adott, azért a talajmodellt jellemző összefüggés kezelhetőségét és az előzőhöz való csatlakoztatását kell biztosítani. Ezzel indokolható az az erősen egyszerűsíthető feltevés, amely az ún. ágyazási együtthatós eljárások kialakulásához vezetett. Eszerint a talaj adott pontbani süllyedése arányos az ugyanebben a pontban ható függőleges erővel:

$$y = Lq = \frac{q}{K}$$

ahol  $K$  a talaj ágyazási paramétere.

E klasszikus ún. Zimmermann—Winkler-féle modell egyszerű terhelések esetén analitikus megoldásra ad lehetőséget. Ezt HETÉNYI [11] nyomán vázoljuk.

### 1.1 Hetényi analitikus megoldása

Fennáll tehát a feltevés

$$q = Ky$$

ahol  $q$  a talajra jutó feszültség,  $y$  a felület süllyedése. Ezzel a tartó differenciálegyenlete

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -q = -Ky \quad 1.1$$

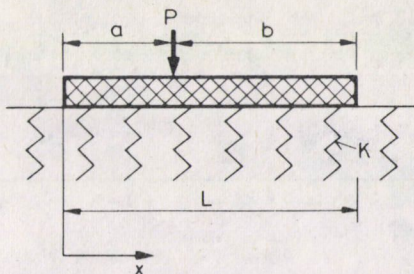
Az 1.1 egyenlet általános megoldása

$$y = e^{\lambda x}(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) + e^{-\lambda x}(C \cos \lambda x + D \sin \lambda x)$$

ahol

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{KB'}{4EI}}$$

$B'$  az alap szélessége,  $E$ ,  $I$  az alap merevségi tényezői. Tegyük meg például, hogy a  $P$  pontszerű teher hat a tartóra. 1. ábra. Ehhez a terheléshez és a nyomatékokra, ill. a



1. ábra. Ágyazási együtthatós számítás modellje

nyíróerőkre vonatkozó megfelelő peremfeltételekhez tartozó megoldás a következő alakú:

$$y = \frac{P\lambda}{KB'} \frac{1}{\text{sh}^2 \lambda L - \sin^2 \lambda L} \times$$

$$\times \{ 2 \text{ch} \lambda x \cos \lambda x (\text{sh} \lambda L \cos \lambda a \text{ch} \lambda b - \sin \lambda L \text{ch} \lambda a \cos \lambda b) +$$

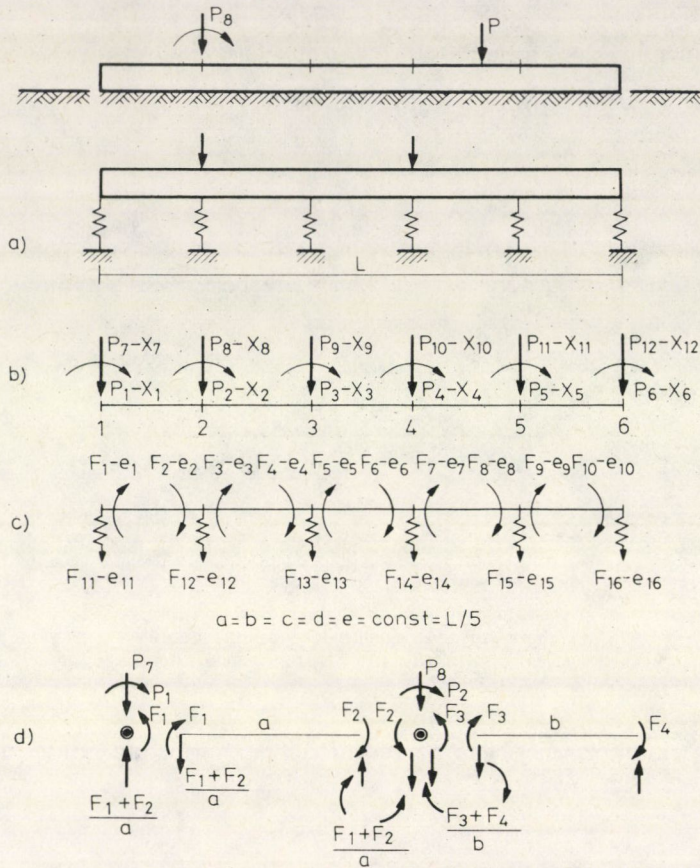
$$+ (\text{ch} \lambda x \sin \lambda x + \text{sh} \lambda x \cos \lambda x) [\text{sh} \lambda L (\sin \lambda a \text{ch} \lambda b - \cos \lambda a \text{sh} \lambda b) +$$

$$+ \sin \lambda L (\text{sh} \lambda a \cos \lambda b - \text{ch} \lambda a \sin \lambda b)] \}$$
1.2

Az analitikus megoldás gyakorlati szempontból több előnytelen tulajdonsággal rendelkezik. Például a tartó változó inerciája nem vehető figyelembe, valamint az erősen egyszerűsített talajmodell a valóságot tapasztalati adatok szerint csak puha talajokban közelíti. A tapasztalattal szemben áll az a feltevés, hogy egy pontban a süllyedés csak az abban a pontban ébredő feszültségtől függ.

A Winkler-féle ágyazási eljárást több irányban fejlesztették tovább. Egyik általánosítási lehetőség a változó ágyazási együtthatók módszere. Ehhez természetesen előre ismerni kell a tartó hossza mentén változó  $K(x)$  ágyazási együttható függvényt, melynek meghatározása éppoly pontatlan és nehéz feladat, mint a  $K$  paraméteré. Az analitikus eljárás korlátai miatt az ún. finitizáló módszer bevezetése vált szükségessé. Röviden bemutatjuk az ún. mátrix-megoldást, mely a 2. ábrán követhető.





2. ábra. Winkler-féle modell a csomópontokba redukált erőkkel és nyomatékokkal

### 1.2 Mátrixos eljárás

Praktikus numerikus eljárást vázolunk BOWLES [3] nyomán. A talajt a kijelölt csomópontokon csatlakozó rugók helyettesítik. Esetünkben a külső koncentrált erőket is e csomópontokba kell áthelyeznünk, az áthelyezés miatt működtetendő nyomatékkal együtt. A b) ábrarész a  $P-X$  diagram a külső nyomatékok —  $P_1 \dots P_6$  — az erők —  $P_7 \dots P_{12}$  — és az elfordulások —  $X_1 \dots X_6$  —, valamint a függőleges elmozdulások —  $X_7 \dots X_{12}$  diagramja. A c) ábrarész a belső erők (nyomatékok) és deformációk diagramja, ahol  $F_1 \dots F_{10}$  belső elemvég nyomatékok.

$F_{11} \dots F_{16}$  belső rugóerők,  $e_1 \dots e_{10}$  elemvégi rotációk, végül  $e_{11} \dots e_{16}$  a rugó-összenyomódások. A módszer feltételezi, hogy a  $P$  külső erők és az  $F$  belső erők vektora között lineáris összefüggés áll fenn:

$$P = AF,$$

ahol  $A$  a feladat statikai mátrixa, mely a 2d. ábrarész segítségével állítható össze.

Hasonlóan lineáris kapcsolatot tételezünk fel a belső deformációk és a külső csomóponti elmozdulások között:

$$e = BX .$$

Kimutatható, hogy  $B$  az  $A$  transzponáltja, így

$$e = A^T X .$$

Végül hasonlóan lineáris összefüggést képzelünk a belső erők és deformációk között:

$$F = Se .$$

Ide helyettesítve az előző összefüggést

$$F = SA^T X .$$

Majd  $P = AF$  felhasználásával

$$P = ASA^T X$$

amit megoldva

$$X = [ASA^T]^{-1} P$$

kapjuk az elmozdulásokat, majd visszahelyettesítéssel a belső értékeket.

Hátravan az  $A$  és az  $S$  mátrix meghatározása. A d) ábrarész szerint az 1. szélső pontra  $P_1 = F_1$  a nyomaték zérus voltát kifejező egyenlet, míg

$$P_7 = \frac{F_1}{a} + \frac{F_2}{a} - F_{11}$$

a függőleges erők egyensúlyát fejezi ki. A 2. csomópontra

$$P_2 = F_2 + F_3$$

a nyomatékokra és

$$P_8 = -\frac{F_1}{a} - \frac{F_2}{a} + \frac{F_3}{a} + \frac{F_4}{a} - F_{12}$$

az erőkre. Így végighaladva a csomópontokon a 6. pontra kapjuk

$$P_6 = F_{10}$$

és

$$P_{12} = -\frac{F_9}{a} - \frac{F_{10}}{a} - F_{16} .$$

Ezzel az  $A$  mátrixot összeállítottuk.

Az  $S$  mátrix összeállításához tekintsük át a következőket.

A konjugált-tartó elv alkalmazásával az első tartóelemre ( $L = a$ )

$$\frac{F_1 a}{3EI} - \frac{F_2 a}{6EI} = e_1 \quad -\frac{F_1 a}{6EI} + \frac{F_2 a}{3EI} = e_2$$

Ezt  $F_1, F_2$ -re megoldva

$$F_1 = \frac{4EI}{a} e_1 + \frac{2EI}{a} e_2 \quad F_2 = \frac{2EI}{a} e_1 + \frac{4EI}{a} e_2$$

Hasonlóan adódik  $F_3, F_4 \dots F_9, F_{10}$ .

Az  $F_{11}$  rugóerőre vonatkozóan fennáll

$$F_{11} = K_1 e_{11}$$

ahol  $K_1$  az első csomópont alatti ágyazási tényezőből számítható az elem felületével való szorzással:

$$K_1 = aBk_1$$

( $B$  a tartó szélessége).

Hasonlóan  $F_{12} = K_2 e_{12} \dots F_{16} = K_6 e_{16}$ .

Ezzel az  $S$  mátrixot felépítettük. Míg az utolsó lépésnél a változó ágyazási együttható, addig az előzőnél a darabonként változó inercia figyelembevétele automatikusan lehetővé vált.

Külön említést érdemel az ágyazási együtthatós eljárások között az a SZOBOLJEV [30] nevéhez fűződő kísérlet, melyben valószínűség-számítási eszközök alkalmazására kerül sor.

### 1.3 Valószínűség-számítási eljárás

A módszer a már használt

$$Ely^{IV}(x) + K(x)y(x) = p(x)$$

( $p(x)$  a külső terhelés)

egyenletben a  $K_{(x)}$  ágyazási együttható függvényt valószínűségi változónak tekinti. Az eljárás elterjedésének fő akadályá éppén a valószínűségi függvény korrelációs függvényének és várható értékének meghatározása. Ehhez az átlagosnál lényegesen több kísérleti munkára van szükség — minden egyes talajtípus esetén. Ha azonban ismerjük a  $K_{(x)}$  függvény e tulajdonságait, akkor az eloszlására tett egyszerűsítő feltevés mellett Szoboljev meghatározza a süllyedésfüggvény valószínűségi jellemzőit s ebből adott kritikus nyomtatékok kialakulásának valószínűségét, és így tovább.

Áttérünk a talajmodellek másik klasszikus csoportjára.

## 2. A talajt rugalmas homogén, izotrop féltérnek tekintő eljárások

Ezen elméletek kifejlődését az tette lehetővé, hogy a rugalmas közegekre egy viszonylag jól kidolgozott matematikai apparátus állt rendelkezésre. Így ezek a tartószámítások természetesen átvették a rugalmasságtan hiányosságait, például azt,



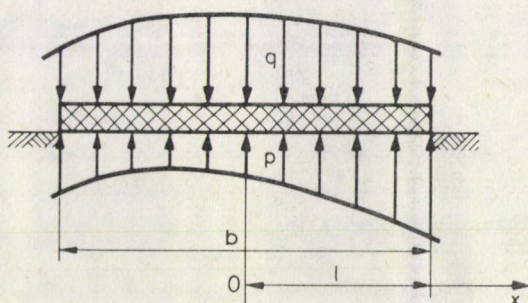
hogyan az alapvető összefüggések itt elvileg csak infinitezimális mennyiségek között állnak fenn — a másod- és magasabb rendű tagokat elhanyagolva. Alapvető anomália az ismert Boussinesque-féle formula tapasztalattal szemben álló jellege, nevezetesen az, hogy a rugalmas féltéren működő koncentrált erő alatt végtelen elmozdulás és feszültség értékeket ad. Ez a hatás jelentkezik a tartószámításoknál, amikor a tartó szélénél végtelen nagy talpfeszültségeket kapunk. Ennek ellenére több talajtípusnál is a benyomódások a valósághoz közeli értékűek. A később tárgyalandó továbbfejlesztések egyik feladata éppen az említett hiányosságok kiküszöbölése.

Azon elméletek áttekintését, amelyek a talajt homogén izotrop, rugalmas féltérnek tételezik fel, kezdjük egy, a Szovjetunióban szélesben alkalmazott ún. félanalitikus módszerrel.

### 2.1 Gorbunov-Poszadov [24] eljárása

A talaj homogén, izotrop rugalmas közeg, azaz két paraméterrel, az  $E_0$ —Young modulussal és a Poisson-tényezővel jellemezhető. (3. ábra.) A tartó egyenlete:

$$E_1 I y^{IV}(\xi) = q(\xi) - p(\xi)$$



3. ábra. A rugalmas féltér elvi modellje

- $E_1$  és  $I$  — a tartó merevségi paramétereit,
- $l$  — a félhossza,
- $b$  — a szélessége,
- $\xi$  —  $X/l$  dimenziómentes koordináta
- $p(\xi)$  — a talpfeszültség
- $q(\xi)$  — a külső terhelés.

A talajmodell karakterisztikus egyenletét a rugalmas féltér vonalterhelésére ismert ún. Flamant-formula integrálásából kapjuk:

$$\omega(\xi) = -\frac{2l(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \int_{-(1+\xi)}^{1-\xi} p(\rho) \ln \rho d\rho + C.$$

Itt  $E_0$  és  $\nu_0$  a talajparaméterek.

A síkbeli rugalmassági feladatok igen hátrányos elvi tulajdonsága, hogy csak relatív elmozdulások számíthatók, ezért szerepel a  $C$  ismeretlen állandó.

Feladat a két egyenletben szereplő  $p(\xi)$  és  $y(\xi)$  ismeretlen függvények meghatározása amellet a feltétel mellett, hogy a tartó és a talajfelszín deformációi megegyeznek:

$$y(\xi) = \omega(\xi)$$

Mivel a később tárgyalandó kombinált modelleknél ez az eljárás alkalmazást nyert, azért a módszer alap gondolatát röviden vázoljuk.

A módszer a  $p(\xi)$  ismeretlen függvényt hatványsor alakjában keresi

$$p(\xi) = a_0 + a_1 \xi + \dots + a_n \xi^n + \dots$$

ahol az  $a_i$  együtthatókat kell meghatározni. Ezért helyettesítsük  $p(\xi)$  hatványsorát a két megoldandó egyenletbe, ezután  $y(\xi)$  és  $\omega(\xi)$  hatványsora integrálással adódik. Az illeszkedési feltétel miatt e két hatványsor azonos kell legyen, tehát a megfelelő hatványok együtthatói egyenlők. Az így adódó rendszerhez járul még a két statikai egyensúlyt kifejező egyenlet. A rendszer két részre bomlik — a páros és a páratlan fokszámú tagok együtthatóira adódó rendszerre.

Közelítő számítások esetén ezekből leválasztandó két véges rendszer az együtthatókra. Gorbunov—Poszadov számításai azt mutatják, hogy az esetek többségében elegendő egy hat és egy öt egyenletből álló rendszert leválasztani, ami azt jelenti, hogy a  $p(\xi)$  talpfeszültség-függvény hatványsorát tizedfokú polinommal helyettesítjük. Természetesen a módszer akkor vihető végig, ha a külső terhelés is polinom formában van megadva. Ez azt jelenti, hogy elsősorban a koncentrált terhek esetén interpolációs polinomokkal történő közelítésre van szükség. A módszer elterjedtségét a részletesen kidolgozott táblázatok használata segítette.

E módszer is, mint minden a rugalmas féltér elméletén alapuló eljárás rendelkezik azok hátrányaival, így pl. az alaptest széleinél — a polinom-közelítés ellenére — a valóságosnál lényegesen nagyobb talpfeszültségek adódhatnak. Cütovcics megállapítása szerint a módszer elsősorban elég tömör, kemény talajok esetében ad helyes eredményt szemben az ágyazási együtthatós eljárásokkal, melyek gyenge, erősen összenyomható talajoknál adnak a valósághoz közel álló eredményt.

## 2.2 Numerikus eljárások

Két lényegét tekintve nem eltérő eljárás csoportot mutatunk be a nyugati országok gyakorlatában szereplő Ohde-Kany [16, 13] módszercsoportot és a Szovjetunióban elterjedt ZSEMOSKIN [25] eljárást.

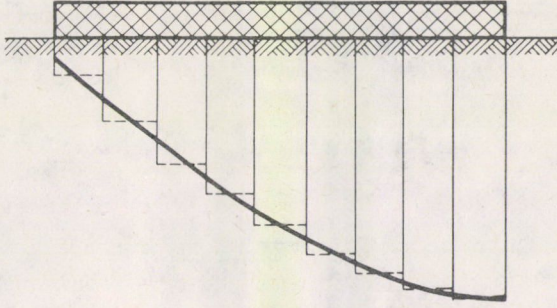
Emlékeztetünk, hogy a rugalmas féltéren alapuló megközelítések elsősorban azért váltak szükségessé, mert nem volt igazolható az a feltevés, hogy a benyomódás egy pontban csak az ott ható erőtől függjön. Ha most a süllyedés az  $x$  pontban függ a



többi pontban működő talpfeszültségtől is, akkor ezt a függvénykapcsolatot a következő formában indokolt keresni

$$y(x) = C \int p(\xi) K |x - \xi| d\xi$$

ahol a  $K|x - \xi|$  magfüggvény van hivatva kifejezni a kölcsönhatásokat, és az integrálást az egész terhelt felületre kell kiterjeszteni.



4. ábra. Talpfeszültség közelítése lépcsős függvénnyel

Az *Ohde-módszer* abból indul ki, hogy a vizsgált tartót véges sok részre bontja, és a süllyedési vonalat egyetlen mezőn működő egységnyi terhelésre határozza meg, majd szuperpozíciót alkalmaz. Így, ha  $n$ -részre osztottuk a tartót, akkor az  $l$ -ik rész süllyedésére

$$y_i = \sum_{v=1}^i c_{i-v} q_v + \sum_{v=i+1}^n c_{v-1} q_v$$

A módszert ismertsége miatt tovább nem részletezve azt emeljük ki, hogy ez az egyenlet lép most a fenti integrál-összefüggés helyébe. Itt a  $c_1$  a kölcsönhatást mutató paraméterek meghatározása történhet elméleti úton (Boussinesque-képletéből) és kísérleti-tapasztalati vizsgálatokból.

Kany szerint a  $c_1$ -re a következő tapasztalati összefüggés áll fenn:

$$c_i = \frac{e_0}{1 + k_i^{1,5}}$$

A  $c_0$  érték a  $q_0$  = egység terhelésből és az  $y_0$  középpont-süllyedésből számítható vissza  $c_0 = y_0/q_0$  szerint.  $k$  is a talajviszonyoktól függő állandó. A képletben szereplő 1,5-es kitevő De Beer szerint is jó átlagérték, adott talajoknál a kitevő pontosításával a számítás és a tapasztalat közti eltérés csökkenthető. Megemlítjük, hogy az *Ohde-módszer*t Kany igen sok partikuláris esetre és lemezek — térbeli probléma — esetére is kidolgozta és táblázatrendszerrel egyszerűen alkalmazhatóvá tette.

A széles körben alkalmazott finitizáló eljárás a Szovjetunióban ZSEMOCSKIN nevéhez fűződik.

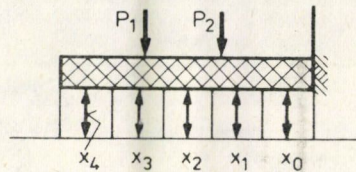
A folytonos talpfeszültség-függvényt lépcsős függvénnyel közelítjük (4. ábra).



A talaj és a tartó közti kapcsolatot kis rudakkal biztosítjuk. A terhelést szimmetrikusnak tételezzük és felveszünk a tartó közepén egy fiktív merevítést. A rudakat az ismeretlen  $X_0, X_1 \dots X_4$  erőkkel helyettesítjük. (5. ábra.)

Az elmozdulások függnek az  $X_1$  erőktől, a külső terhelésektől és az  $y_0$  süllyedéstől, amit a tartó a merevítéssel együtt végez. Az ábrán látható tartóra a következő kanonikus egyenletrendszer adódik.

$$\begin{aligned} \partial_{00}x_0 + \partial_{01}x_1 + \dots + \partial_{04}x_4 - y_0 &= 0 \\ \partial_{10}x_0 + \partial_{11}x_1 + \dots + \partial_{14}x_4 - y_0 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \vdots & \\ \partial_{40}x_0 + \partial_{41}x_1 + \dots + \partial_{44}x_4 - y_0 + \Delta_{4p} &= 0. \end{aligned}$$



5. ábra. Zsemocskin-féle számítási modell

Továbbá teljesülni kell az egyensúlyi egyenletnek:

$$-\sum_0^4 x_i + \Sigma P_i = 0.$$

Ebben az öt egyenletből álló rendszerben 6 ismeretlen van,  $X_0 \dots X_4, y_0$ . Az első egyenletben  $\Delta_{0p}$  hiányzik, ami csak azt a feltevést jelenti, hogy a külső teher hatására  $X_0$  irányban nincs elmozdulás. (Itt van a fiktív rögzítés).  $\delta_{ki}$  az  $X_k$  erő helyén az  $X_i$  erő helyén ható egységnyi erőből bekövetkező elmozdulás. Két összetevőből áll:

$$\delta_{ki} = y_{ki} + v_{ki}$$

ahol  $y_{ki}$  az alap süllyedésből  $v_{ki}$  pedig a tartó áthajlásából következik.

A süllyedésből származó elmozdulások a rugalmasságtan módszereivel számíthatók, a már említett Flamant formula szerint. Erre Zsemocskin táblázatokat ad. Most még a  $v_{ki}$  áthajlásokra van szükség. (6. ábra.)

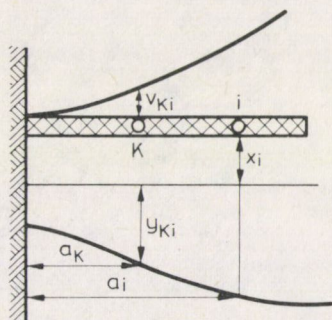
Az  $i$ -ik pontban ható egységnyi erőtől a  $k$ -ik pontban bekövetkező áthajlás a Maxwell—Mohr összefüggésből adódik:

$$v_{ki} = \int \frac{M_k M_i}{E_1 I} dx$$



ahol  $E_1 I$  a tartó merevségi jellemzője. Ha koncentrált erők szerepelnek, az  $\int M_k M_i$  értékek táblázatba foglalhatók. Ha a tartó inerciája változó, azt itt az integrálon belül kell figyelembe venni.

A külső terhelés hatására bekövetkező tartóáthajlások számításához hasonlóan történik, ugyanazokkal a táblázatokkal. Végül a relatív elmozdulások az egyenletrend-



6. ábra. Áthajlás számítás elvi ábrája

szerből számíthatók. A néhány kiemelt eljárás — minden előnyös tulajdonsága ellenére — magán viseli a homogén izotrop lineárisan rugalmas közeg feltételezéséből fakadó hátrányokat. A továbblépés tehát akár itt, akár az ágyazási tényezős modelleknél egy vagy több alapfeltevés elvetésétől volt várható.

A következő fejezetekben a klasszikus talajmodellek és eljárások továbbfejlesztési lehetőségeiről szólnunk:

### 3. A klasszikus talajmodellek egyes továbbfejlesztési lehetőségei

#### 3.1 Két ágyazási tényezős modell

A modell kidolgozása Pasternak és tanítványai (27) nevéhez fűződik. A modell azt a szemléletet hivatott kielégíteni, hogy a talaj függőleges teherbírása nem kizárólag az abban a pontban támadó függőleges nyomással szemben mutatott ellenálló képességétől függ, hanem a nyírással szembeni ellenállásból is. Az elképzelést a 7. ábra szemlélteti.

Pasternak alap gondolata egy második ágyazási tényező felvétele. Az első a talaj függőleges visszahatását adja  $w$  elmozdulásra

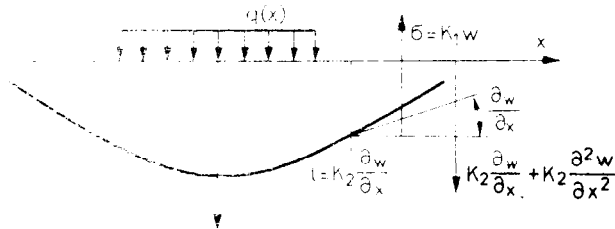
$$\sigma = K_1 w$$

míg a  $K_1$ -től független  $K_2$  konstans az elnyíródásból adódó talajreakciót jellemzi:

$$t = K_2 \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Érezhető, hogy  $K_2$  a talaj belső súrlódással lesz kapcsolatban. (7. ábra.)

A  $K_1$ -et tartalmazó összefüggés azt a benyomást kelti, mintha  $K_1$  semmiben sem különbözne a klasszikus Winkler-féle ágyazási tényezőtől. Ez azonban nem így van,



7. ábra. Pasternák-féle kétágyazási együtthatós számítási modell

ugyanis a  $K_2$  új tényező bevezetésével megváltozik  $K_1$  jellege is és együttes használatuk megszabadítja a modellt a klasszikus ágyazás több hiányosságától. A paraméter értelmének megváltozására új együttható bevezetése esetén jó példa lesz a későbbiekben a kombinált modelleknél. Mint majd ott is hangsúlyozzuk, az ésszerűen bevezetett új együttható előnyöket rejt a paraméterek kísérleti meghatározása szempontjából. Pasternak a  $K_1, K_2$  együtthatók meghatározására próbaterhelési — elsősorban helyszíni — kísérletekből történő visszszámítási eljárást dolgozott ki. Kétségtelen, hogy a hagyományos Winkler-féle együtthatóhoz képest a paraméterek nagyobb biztonsággal határozhatók meg. A helyszíni próbaterhelési kísérletek nehézkesek és költségesek. Ezek nélkül a talaj függőleges inhomogenitását el kell hanyagolni. Pasternak szerint tisztán laboratóriumi kísérletekkel történő paramétermeghatározásra kevés lehetőség van.

A következő fejezetben bemutatandó kombinált modell egyik igen értékes tulajdonsága éppen az, hogy a szintén újszerű talajparaméterek hagyományos laboratóriumi kísérletekkel is meghatározhatók.

Pasternak és tanítványai az elméletet egy- és kétdimenziós esetre is kidolgozták. Az adódó egyenletek abban térnek el a klasszikustól, hogy az elmozdulásfüggvény és negyedik deriváltja mellett a függvény második deriváltja is szerepel. Látni fogjuk, hogy egészen más irányból, más alapfeltevések mellett is el lehet jutni ehhez a típusú egyenlethez.

A rugalmas féltér-koncepció általánosításait két csoportra oszthatjuk. Sok kísérlet történt az általánosabb esetekre analitikus vagy legalábbis félanalitikus nem nagy számítógép igényű eljárások kidolgozására, másfelől elkezdődött a véges elemes módszer alkalmazása a síkalapozásban is.



### 3.2 Homogén, rugalmas, nem izotrop féltér

Nem izotrop féltéren itt ún. kereszt-anizotrópiát értünk, ami a vízszintes és a függőleges irányban érvényes rugalmassági paraméterek eltérését jelenti. A témakörben analitikus eredmény kevés van, elsősorban nagy számítógépes programok készültek pl. MILOVICS [15].

Mégis GERRARD és HARRISON [7, 8] sok egzakt eredményt közöl kereszt-anizotrop közegre sáv- és kőralapok esetére. A témakör áttekintését adja HOOPER [12]. Megállapítható, hogy a kereszt-anizotropitás figyelembevétele analitikusan igen nehéz és csak extrém esetekben ad jelentős eltérést az alaptest süllyedése és igénybevétele szempontjából az izotrop esettől. Megjegyezzük, hogy a kereszt-anizotrop közegek rugalmassági paraméterei a konkrét esetekben — különösen a nyírási modulus — nehezen megközelíthetők.

### 3.3 Nem-lineárisan rugalmas és rugalmas-tökéletesen plasztikus homogén, izotrop közegek

A modellek lényeges megkülönböztető tulajdonsága a lineárisan rugalmas közegektől abban áll, hogy a deformációk növekménye nemcsak a feszültség növekményétől, hanem a teljes feszültségértéktől is függ. Függetlenül terhelt alapoknál a fő feszültségnövekmények iránya az alap jelentős része alatt függőleges, függetlenül attól, hogy a közeg elasztikus vagy plasztikus. MAJID, GRAIG [14]. Ezért ebben a fontos esetben a feszültségek és a deformációk tengelyei egybeesnek, ami azt jelenti, hogy az alap igénybevételei szempontjából nem lényegesen eltérő eredmények adódnak. Ferde terhelések esetén a fenti gondolatmenet nem érvényes. Születtek eljárások a plasztikus hatás analitikus kezelésére (pl. STAIERMAN [32]). A nagy technikai nehézségek ellenére megállapítható, hogy a lineárisan rugalmas homogén izotrop közeghez képest mind a süllyedésre, mind az igénybevételekre vonatkozólag realisabb eredmények adódnak. Látni fogjuk azonban, hogy a lineáris rugalmasságtanon belül maradván, jóval egyszerűbb apparátus segítségével is a valóság jó közelítését állíthatjuk elő.

Az említetteket összevetve azzal, hogy a nemlineárisan rugalmasságot vagy a plasztikus hatásokat általánosabb esetekben már csak nagy számítástechnikai apparátus segítségével lehet követni, megállapíthatjuk, hogy a sikalapozási gyakorlat számára viszonylag egyszerűen használható és a tapasztalattal jó összhangot mutató modelleket nem itt kell keresni.

Bemutatunk röviden egy sok lehetőségei magába rejtő variációs eljárást.

### 3.4 Egy variációs módszer

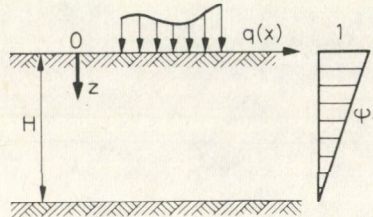
Rugalmas közegek deformációinak számítására VLASZOV [23] kidolgozott egy igen általános fizikai alapokon nyugvó eljárást. Vizsgáljunk síkbeli deformációs esetet.

(8. ábra)  $U$  és  $W$  legyenek az elmozdulás függvényei, ezeket a következő alakban keressük:

$$U(x, z) = \sum_{i=1}^m U_i(x) \varphi_i(z) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$W(x, z) = \sum_{k=1}^a W_k(x) \Psi_k(z) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

Itt az  $U_i, W_k$  függvényeket tekintjük ismeretlennek, míg a  $\varphi_i, \psi_k$  ún. általánosított koordinátafüggvényeket előzőleg, a feladat kinetikus feltételeinek megfelelően választjuk meg. Az  $U_i, W_k$  ismeretlen függvények meghatározásához szükséges egyenletek egy  $dx=1$  szélességű kimetszett sávegyensúlyi egyenleteiből adódnak.



8. ábra. Vlaszov-féle számítási modell

A fent megadott formájú elmozdulások esetén a kivágott sáv az  $o$  síkjában min. szabadsági fokkal rendelkezik, más szóval a sáv lehetséges elmozdulásait az  $m+n$  darab  $\varphi_i, \psi_k$  függvénnyel jellemezhetjük. Így az egyensúly általános feltétele  $n+m$  egyenlettel adható meg.

Egy egyrétegű rugalmas talajmodell esetén lehetséges pl. a következő koordinátafüggvény választás:

$$\varphi_i(z) = 0 \quad \psi_1(z) = \frac{H-z}{H}$$

$$\psi_k(z) = 0 \quad k \neq 1$$

Ekkor az elmozdulásfüggvények:

$$U(x, z) = 0 \quad W(x, z) = W_1(x) \psi_1(z).$$

Ha most felírjuk a nem részletezett egyensúlyi feltételt (itt csak egy van), akkor  $q(x)$  külső terhelés esetén a következő egyenlet adódik:

$$2tW'' - kW + q = 0$$

ahol  $t$  és  $k$  rugalmassági paraméterek. Ezt a tartó

$$EI W^{IV} - p(x) + q(x) = 0$$

egyenletével a szokásos módon összekapcsolva a tartó behajlására a

$$W^{IV} - r_1 W'' + r_2 W = r_3 p$$

negyedfokú egyenlet adódik  $r_1, r_2, r_3$  rugalmassági paraméterekkel.

Látjuk, hogy a nyírási ellenállást külön figyelembe vevő két-ágyazási együtt-hatós, Pasternak modellhez hasonlóan a klasszikus ágyazási eljárásokhoz képest megjelent az egyenletben az elmozdulásfüggvény második deriváltja.

A fentiekből kitűnik, hogy a  $\varphi_i, \psi_k$  általánosított koordinátafüggvények megváltoztatása új talajmodellhez vezet. Így pl. több réteg esetén a függvények megfelelő megválasztásával a modell számítható. Nyitva áll a lehetőség, hogy a  $\varphi_i, \psi_k$  függvények megválasztása a talaj mind több talajmechanikai tulajdonságát vigyük be, ezzel mind jobb modellhez jutva. A  $\varphi_i, \psi_k$  függvények és a fellépő rugalmassági együttthatók meghatározása az egyes talajtípusok esetére tudásunk szerint kevésbé kidolgozott, ezért a módszer a gyakorlat számára nehezen megközelíthető.

#### 4. Inhomogén, lineárisan rugalmas izotrop közegek

Ebben a fejezetben jutunk el tanulmányunk fő céljához, az ún. kombinált modellek bemutatásához. Ez egyben megkívánja különböző inhomogén felteterekre vonatkozó vizsgálatok áttekintését, bizonyos párhuzamok feltárását.

A két hagyományos, a gyakorlatban legtöbbször alkalmazott talajmodell a Winkler—Zimmermann-féle rugós ágyazat és a homogén rugalmas féltér, ill. az ezeken alapuló eljárások áttekintésekor láttuk, hogy mindkét modell lényeges hiányosságokkal rendelkezik. Továbbá akár a talpfeszültségek, akár a süllyedések vizsgálatánál megállapítható, hogy a két modellnél ellenkező oldalú szélsőséges értékek lépnek fel. Nyilvánvaló tehát a gondolat, hogy a két modell valamilyen „keverékével” próbáljuk meg e hiányosságokat kölcsönösen megszüntetni, ill. letompítani. Így jutunk el az első kombinált modellhez, melynek elméleti alapjait REPNYIKOV [29] rakta le, teljes analízise és kidolgozása igen általános gyakorlati esetekre a szerzők [17, 18, 19] cikkeiben található meg.

##### 4.1 Repnyikov-féle kombinált talajmodell

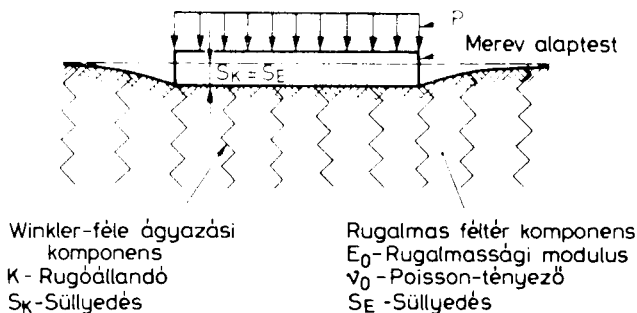
A Repnyikov-modell a két legelterjedtebben alkalmazott talajmodell, a Winkler-féle rugós ágyazat és a rugalmas (homogén, izotrop) féltér ún. párhuzamos kombinációjának tekinthető (9. ábra); azaz, rugókkal átszótt rugalmas féltér. Paraméterei:  $E_0$  rugalmassági modulus,  $\nu_0$  Poisson-tényező,  $K$  ágyazási tényező.

Az eddigi vizsgálatok alapján elmondható, hogy ez a modell sajátos módon egyesíti a két említett klasszikus eljárás pozitív tulajdonságait, miközben megszüntet több azoknál meglevő anomáliát és tompít több szélsőséges tulajdonságot. Az ilyen típusú kombinált modell az eddigieknél jobban közelíti meg a talaj tényleges viselkedését. Ezt az állítást alátámasztja, hogy fontos kapcsolat mutatható ki a Repnyikov-féle modell és a mélységgel növekvő rugalmassági modulus felteterek között, amelyeket később tárgyalunk.



Hangsúlyozzuk eddigi vizsgálataink egyik lényeges következtetését, mely szerint a kombinált modellre helyezett alaptestekben adódó mértékadó nyomoték a hagyományos eljárásokkal kapotthoz képest jelentősen kisebb — és ez gazdaságosabb méretezési eljáráshoz vezet.

Az előzőekben közölt állítások alátámasztására néhány modelltulajdonságot mutatunk be.



9. ábra. Rugós ágyazattal kombinált rugalmas féltér

Tekintsük a síkbeli rugalmassági feladatot. Rugalmas félsík esetén a süllyedések és a terhelések közti összefüggést koncentrált terhelésnél a vonalterhelésre jól ismert Flamant-formula adja

$$y = \frac{2P(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \ln \frac{d}{r}.$$

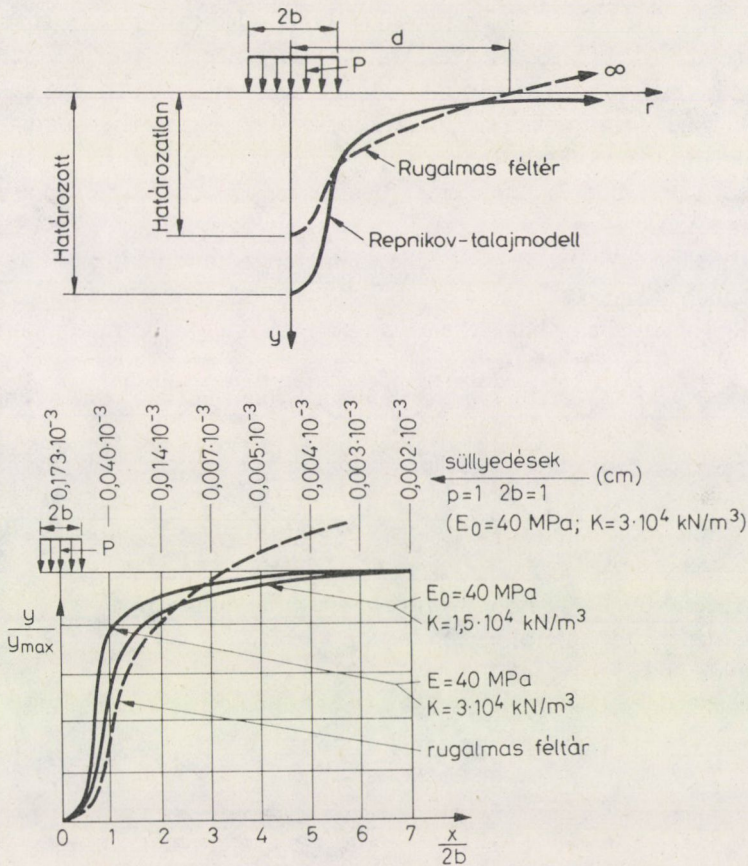
Itt  $E_0$ ,  $\nu_0$  — a talaj rugalmassági modulusa és Poisson-tényezője. (Síkbeli deformáció esete.)

$r$  — a  $P$  erő támadáspontja és a vizsgált pont távolsága, míg  $d$  — egy határozatlan állandó.

A képlet szerint  $d$  a zérus süllyedésű pont távolságát adja az erő támadáspontjától. Ha most integrálással áttérünk egy egyenletesen terhelt sáv esetére, akkor a határozatlan állandó változatlanul jelen van, amely nem teszi lehetővé az abszolút süllyedések számítását. Továbbá a rögzített  $d$  mellett  $r$ -rel végtelenhez tartva a „süllyedés” végtelen kiemelkedéshez tart, amely esetben nem végezhető el az egymástól távol eső pontok elmozdulásának valós vizsgálata. (10/a ábra.)

Ezekkel szemben, ha a kombinált modell síkbeli változata pontszerű erővel terhelt, megmutatható, hogy  $r \rightarrow \infty$  esetén a felszín elmozdulással zérushoz közelednek. Továbbá az egyenletesen terhelt szakasz esetén a határozatlan állandó eltűnik, mivel  $d$ -vel, azaz a zérus süllyedésű ponttal  $\infty$ -hez tartva a terhelt szakasz alatti süllyedések igen gyorsan konvergálva, véges értékhez közelednek. Másrészt ez a jelenség fizikai szempontból is igen jelentős. Tudjuk, hogy a rugalmas végtelen féltéren alapuló

számításoknál az alaptest szélétől kifelé távolodva a süllyedések lecsengése igen lassú, ami ellentétben áll a tapasztalattal. Ezzel szemben a Repnyikov-modell esetén az alap szélétől kifelé távolodva a süllyedések gyorsabb csökkenése figyelhető meg, ami jó megegyezést mutat a tapasztalatokkal. Ezt a jelenséget két számpéldán — két  $E_0$ ,  $K$  párra mutatja be a 10/b ábra. Mivel azonos terhelés alatti süllyedések két különböző



10. ábra. a) Elvi süllyedéskép alakulása. b) A talajparaméterek hatása a süllyedési tartomány alakjára és kiterjedésére sávalapok alatt

paraméterpár mellett természetesen különböznek, azért az összehasonlíthatóság végett úgy vannak megválasztva a terhelések, hogy a maximális süllyedések megegyezzenek. Összevetés céljából itt is felvettük a tisztán rugalmas félsíkra adódó süllyedési görbét, amelyet az előzőekkel közös pontból indítunk.

A Repnyikov-modellen alapuló számítási eljárást igen általános feltételek között — tetszőleges terhelésű és változó inerciájú tartók esetére is kidolgoztuk.

A sáv- és köralapra, valamint a keresztben merevnek tekintett gerenda esetére kidolgozott számítási eljárásaink félanalitikusok és asztali számítógépen végrehajt-

hatók. Ezekben a már említett Gorbunov—Poszadov módszert építettük be. Az eljárások menetétől eltekintünk (17, 18) csak az eredményekből mutatunk be néhányat. Minden irányban hajlékony lemezek, változó lemezmerevség és tetszőleges terhelés esetére numerikus eljárást dolgoztunk ki. A módszerrel tetszőleges geometriájú lemez és több lemez kölcsönhatása is számítható. Nagy előnye, hogy memóriai igénye a talajt véges sok elemre bontó numerikus módszerekhez képest összehasonlíthatatlanul kisebb, hiszen csak a lemezt, ill. a felszín síkját bontja elemekre, míg a talajt a modellel veszi figyelembe. Az eljárásaink lényeges tulajdonsága még, hogy a  $K = 0$  esetben tiszta rugalmas féltérről lévén szó, visszaadja az előző fejezetben tárgyalt módszereket. Ezt az eljárásunkat még nem publikáltuk, de gyakorlati alkalmazása folyamatban van.

Az eredmények kiértékeléséhez és a modell fizikai hátterének megvilágosításához szükség van a modellparaméterek vizsgálatára. Ehhez végezzük el a következő gondolatmenetet.

Tekintsünk egy zárt területű, teljesen merev, a kombinált modellre helyezett alaptestet, melyre  $p$  megoszló terhelés hat. Ekkor a terhelésből  $\lambda p$  rész az ágyazat rugóit terheli, míg  $(1 - \lambda)p$  a rugalmas féltéren oszlik el. A  $\lambda$  tényező mutatja tehát a teher megoszlását.

A merev alaptest alatt a rugalmas féltér az ismert Schleicher-féle képlet szerint

$$y_E = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \Omega B (1 - \lambda) p \quad 4.1$$

egyenletes süllyedést szenved. Itt

$\nu_0$  — a rugalmas féltérkomponens Poisson-tényezője,

$E_0$  — a rugalmas féltérkomponens rugalmassági modulusa,

$\Omega$  — az alaptest formájától függő süllyedési szorzó,

$B$  — az alaptest szélessége.

A rugós ágyazati komponens süllyedése  $\lambda \cdot p$ -nagyságú terhelésnél

$$y_K = \frac{\lambda p}{K}. \quad 4.2$$

Itt  $K$  az ágyazási tényező.

A két süllyedést egyenlővé téve a  $\lambda$ -tényező meghatározható:

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{E_0}{BK\Omega(1 - \nu_0^2)}}. \quad 4.3$$

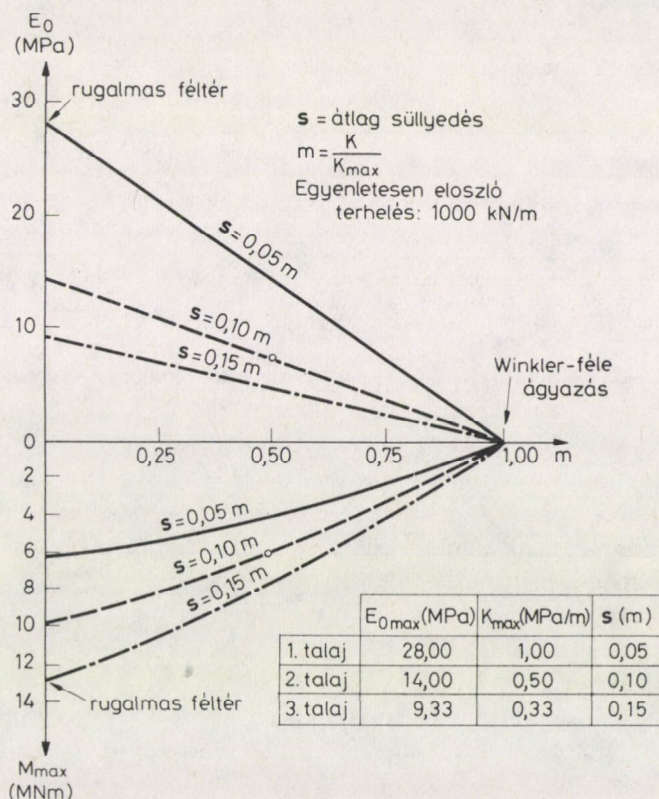
Látjuk, hogy a megoszlás csak  $E_0$ ,  $\nu_0$  és  $K$  függvénye. Visszahelyettesítve a  $\lambda$ -ra kapott kifejezést, akár az (4.1), akár a (4.2) képletbe, a következő összefüggés adódik:

$$y = \frac{p}{K + \frac{E_0}{(1 - \nu_0^2)\Omega B}}. \quad 4.4$$



Elemelve a (4.3) képletet a következő megállapításokat tehetjük. Ha az alaptest mérete csökken (ez  $B \rightarrow 0$ -nak felel meg), akkor a rugalmas féltér játszik egyre nagyobb szerepet ( $\lambda \rightarrow 0$ ), míg az alap méretének növekedésével ( $B \rightarrow \infty$ ) az ágyazat viselkedése egyre inkább a Winkler-féle közegéhez közelít ( $\lambda \rightarrow 1$ ).

A  $\nu_0$  Poisson-tényezőt rögzítsük. (A  $\nu_0$  hatására későbbiekben kitérünk.) Ekkor a 4.4 képlet mutatja, hogy rögzített  $y$  süllyedés mellett az  $E_0$  és  $K$  modellparaméterek



11. ábra. A kombinált modellnek a rugalmas féltérhez viszonyított nyomatécscsökkentő hatása

között lineáris összefüggés áll fenn. Ez azt jelenti, hogy egy adott süllyedés — rögzített terhelés és Poisson-tényező mellett — több  $E_0$ ,  $K$  értékpárra valósulhat meg, azonban ezek egy egyenesen helyezkednek el. Helyes általánosítás a nem teljesen merev alaptest esetére a 4.4 képletbe  $y$  helyére az  $\bar{s}$  átlagsüllyedést tenni.

Alkalmazzuk számítógépi eljárásunkat egy 40 m hosszú, 10 m széles,  $10^8$  kNm<sup>2</sup> hajlító merevségű alaptestre,  $F = 1000$  kN/m egyenletesen megosztó terheléssel 3 olyan talajcsoportra, amelyeknél az  $\bar{s}$  átlagsüllyedés 0,05 m, 0,1 m, ill. 0,15 m. A fentiek szerint mindegyik  $\bar{s}$  értékhez egy  $E_0$ ,  $K$  egyenes tartozik. Bevezetve az  $m = \frac{K}{K_{\max}}$

jelölést, a három egyenest a 11. ábra felső része szemlélteti. Látható, hogy a tengelyeken levő pontok a tiszta rugalmas féltér, illetve a tiszta Winkler-féle ágyazat esetének felelnek meg. Kiszámítottuk az egyes eseteknek megfelelő maximális nyomatékokat, és feltüntettük azokat a 11. ábra alsó részén. Jól látható, hogy az alaptestben az adott átlagsüllyedésnél a legnagyobb nyomaték a tiszta rugalmas féltérnél adódik, míg a tiszta Winkler-féle ágyazat esetében nyomaték nincs. Látszik tehát a Repnyikov-féle modell nyomatékcsökkenő hatása a hagyományosan alkalmazott rugalmas féltérhez képest. Az is kitűnik azonban, hogy a nyomatékok szempontjából igen lényeges az  $E_0$  és  $K$  viszonyának meghatározása.

A nagyméretű helyszíni kísérleteket különböző méretű alapokkal és több terhelési lépcsővel elvégezve az  $E_0/K$  viszony megbízhatóan meghatározható. A vizsgálati költségeket jelentősen csökkenti, ha ezt a már megépült házak süllyedésmérési adataiból történő visszszámítással adjuk meg. A Repnyikov-féle kombinált modell rövid bemutatása után bemutatunk néhány érdekes párhuzamot e modell és az inhomogén, függőlegesen növekvő rugalmassági modulusú féltérek között.

#### *4.2 Analógiák vizsgálata a párhuzamos kombinált modell és a mélységgel növekvő rugalmassági modulusú féltérek között*

##### *4.2.1 Lineárisan változó rugalmassági modulus*

Általános tapasztalat, hogy a talaj nem tekinthető homogén rugalmas féltérnek, hanem elsősorban a mélységgel változó összenyomódási modulusú közeg. Az ilyen inhomogén rugalmas közegek analitikus vizsgálata nagy technikai nehézségeket támaszt, s ezért az eredmények hatóköre is igen korlátozott. Ezért találjuk igen fontosnak a kombinált modell(ek) vizsgálatát, hiszen ezek — mint arra a Repnyikov modell esetében rámutattunk — technikailag relatíve egyszerűbben kezelhetők, másrészt igen érdekes hasonlóságokat, sőt egybeeséseket mutatnak az említett inhomogén közegekkel.

A mélységgel változó rugalmassági modulusú féltérek között a legegyszerűbb a lineáris változású eset. Ezek közül is akkor adható zárt alakú eredmény, ha a rugalmassági modulus a felszínen zérus. Erre az esetre vonatkozik GIBSON (9) már klasszikusnak számító analitikus eredménye. Lineáris rugalmassági modulusváltozás esetére vonatkozó véges elemes vizsgálatokat végzett CARRIER és CHRISTIAN [4]. GIBSON megmutatta, hogy egy  $E/z = E_1 z$  lineárisan változó modulusú függvénnyel jellemzett rugalmas féltér és egy  $K$  ágyazási tényezőjű Winkler-féle ágyazat egymással ekvivalens, ha fennállnak a

$$v_0 = 0,5 \quad \text{és} \quad K = \frac{2}{3} E_1$$

összefüggések. (12. ábra.) Hangsúlyozandó, hogy ez az eredmény csak térfogatállandó,

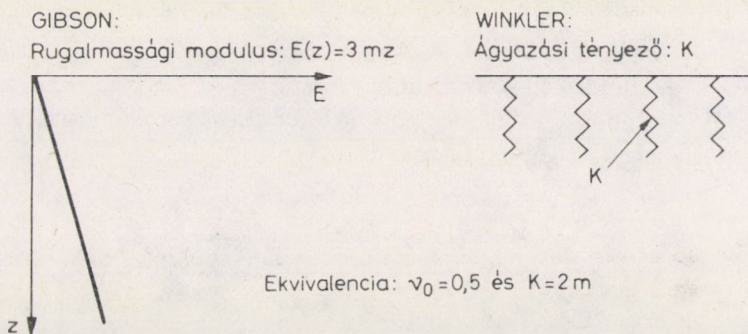


$\nu_0 = 0,5$  anyagra érvényes. Nem zérusról induló modulusfüggvény esetére hasonló eredmény nem ismert, mégis a Gibson-féle analógiából a Repnyikov-féle modellel a következő — elhanyagolásokat tartalmazó — közelítés kínálkozik:

Tegyük fel, feltér rugalmassági modulusát leíró függvény  $\nu_0 = 0,5$  mellett a következő alakú:

$$E(z) = E_0 + E_1 z. \quad 4.5$$

Tekintsük ezt a feltér két egymással párhuzamosan működő  $E = E_0$ , illetve  $E = E_1 z$  modulusfüggvényű feltér közelítésének. Ez a párhuzamosan működő együttes a



12. ábra. Gibson-féle analógia a lineárisan inhomogén rugalmas feltér és a Winkler-ágyazat között

Gibson eredmény miatt éppen egy Repnyikov modell. Ez azt jelenti, hogy ha a talaj modulusa (4.5) alakú, akkor  $E_0$ -ból és  $E_1$ -ből közelítő érvénnyel átszámítható a Repnyikov-féle modell két paramétere. Meg kell jegyeznünk, hogy (4.5) fennállása esetén valójában nem párhuzamos kapcsolatról van szó, hanem olyan belső egyszerre működésről, melynél a komponensek süllyedése mindenütt megegyezik. A párhuzamos modellre történő áttéréssel tehát elhanyagoljuk a két feltér közti belső kapcsolatokat, azaz valójában csökkentett merevséggel dolgozunk. Ez a biztonság javára okoz eltérést a tervezendő alaptest szempontjából. Végül tehát kimondhatjuk, hogy lényegében lineárisan növekvő rugalmassági modulus és  $\nu_0 = 0,5$  közelében levő Poisson-tényező esetén első közelítésként javasolható ez az analógia.

#### 4.2.2 Nem lineárisan változó rugalmassági modulus

##### 4.2.2.1 A rugalmassági modulus értéke a felszínen nulla

Nem lineárisan változó modulusú inhomogén feltérekre vonatkozóan az első elméleti eredmények Klein [26] nevéhez fűződnek. Klein vizsgálja az  $E(z) = E_n z^n$  modulusfüggvényű feltéreket. Ez a Gibson által vizsgált eset általánosításának tekinthető, bár a rugalmassági modulus a felszínen itt is zérus. A talajokra



vonatkozólag megállapítható, hogy ott  $n$  értéke 0 és 2 közé esik. A problémát Klein igen általánosan a rugalmasságtani alapegyenletek megoldása felől közelítette, tehát a klasszikus Boussinesque-féle utat kívánta járni. Eredményei szerint ha az  $E_n z^n$  modulusfüggvényű féltérre  $P$  pontszerű terhelés hat, megadható a feszültségkomponensekre vonatkozó egyenletrendszer megoldása

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{APz^A}{2\pi R^{A+2}} & \sigma_r &= \frac{APz^{A-2}r^2}{2\pi R^{A+2}} \\ \sigma_\theta &= 0 & \tau_{rz} &= \frac{APz^{A-2}}{2\pi R^{A+1}} \end{aligned} \quad 4.6$$

ahol  $r$  és  $z$  a cilindrikus koordináták, míg  $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ . A (4.6) formulák a deformációk folytonosságát kifejező egyenleteket csak speciális,  $A$ -ra,  $v_0$ -ra és  $n$ -re vonatkozó feltételek mellett elégítik ki:

$$A = n + 3 \quad \text{és} \quad v_0 = \frac{1}{2 + n} \quad 4.7$$

vagy

$$A = n + 2 \quad \text{és} \quad v_0 = \frac{1}{1 + n}.$$

Tehát adott  $n$  mellett  $A$  és  $v_0$  értéke már csak a (4.7)-szerinti lehetőségek szerint választható, azaz a (4.6) egzakt formulák csak a (4.7) által megszabott esetekben érvényesek. A (4.6) képletekből az ismert módon számítható a süllyedés — függőleges elmozdulás —  $z_0$  mélységben:

$$y = \int_{-\infty}^{z_0} \frac{1}{E(z)} (\sigma_z - v_0 \sigma_r) dz + F(r) \quad 4.8$$

$Fr=0$  és  $z_0=0$  esetén adódik a felszín süllyedése. A 4.6 és a 4.8-ból az  $n \neq 0$  esetre kapható formulák az  $n=0$  esethez tartozó homogén rugalmas féltérre vonatkozó jól ismert Boussinesque-féle formulák általánosításai.

#### 4.2.2.2 A rugalmassági modulus értéke a felszínen nem nulla

Célunk most a Repnyikov-féle modell és a mélységgel változó rugalmassági modulusú félterek közti analógiák teljes feltárása, tetszőleges Poisson-tényező esetére. Az ehhez szükséges alapvető analitikus eredmények PLEVAKO [28] nevéhez fűződnek. Plevako nemlineárisan változó rugalmassági modulusú félterekre vonatkozóan kereste a rugalmasságtani alapfeladatok megoldását harmonikus függvények segit égével. Az  $E/z = E_0(1 + Cz)^\beta$  függvénnyel leírt modulusú rugalmas félterekre

végzett vizsgálatainál azt találta, hogy a  $\beta$  kitevő és a  $v_0$  Poisson-tényező speciális összetartozó értékeinél a rugalmassági feladat megoldása zárt alakban megadható. Ezek közül a legegyszerűbb — és a gyakorlat számára is használható — eset

$$a \beta = 2 \quad v_0 = 0,25$$

értékeknél adódik.

Az eredmények további ismertetéséhez be kell vezetnünk a talajmodell magfüggvényének a fogalmát. Legyen egy talajmodell egy  $\pi$  tartományon a  $p(X, Y)$  megoszló terhelésnek alávetve. Ha van olyan  $J(r)$  függvény,  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  hogy tetszőleges  $(X, Y)$  pontban a felszínsüllyedés az

$$y(x, y) = \iint_{\pi} p(\xi, \eta) J(r) dr \quad 4.9$$

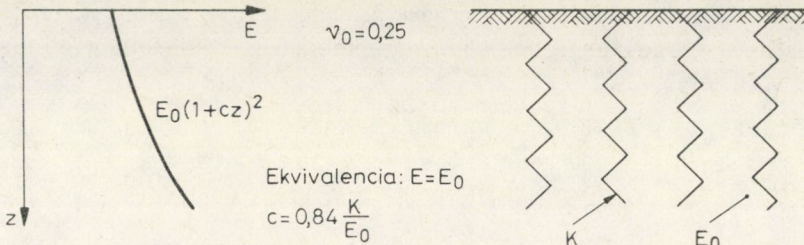
formában állítható elő, akkor a  $J(r)$  függvényt az adott talajmodell magfüggvényének nevezzük. Belátható, hogy a rugalmas homogén féltér magfüggvénye — Boussinesque nyomán —  $1/r$ -ből, a Winkler-féle ágyazatoké  $1/K$ -ből ( $K$  állandó) származtatható. A Gibson-féle fentebb tárgyalt analógiából következőleg az  $E(z) = E_1 z$  modulusfüggvényű inhomogén féltér magfüggvénye —  $K = 2/3 E_1$  esetén — szintén  $1/K$ -ből származtatható. A talajmodellek magfüggvényének vizsgálatával és ezen keresztül egyes modellek közti kapcsolatok feltárásával BARVASOV [21, 22] két tanulmányban foglalkozik.

Barvasov az egymásra helyezett ágyazati komponensekből képzett modellt sorosan kapcsolt modellnek, míg az egymásba szőtt komponensek alkotta modellt párhuzamosan kapcsolt modellnek nevezi. Az elektromos ellenállások példájából vett szóhasználat indoklása a következő. Kimutatható, hogy a kombinált modellek magfüggvényeinek bizonyos egyszerű transzformáltjai úgy származtathatók a komponensek magfüggvényeinek transzformáltjaiból, amint sorosan, illetve párhuzamosan kapcsolt ellenállásokból az eredő ellenállás származtatható. Ez az állítás a sorbakapcsolt modelleknél nem érvényes, ha olyan komponens is szerepel, melynek összenyomódása a mélységben nem állandó. Az általában használt modellek közül ilyen csak a rugalmas réteg. A rugalmas rétegekből álló kombinált modellnek külön pontot szentelünk. Ennek az állításnak a bebizonyítása után Barvasov a párhuzamos kapcsolás szabálya szerint előállította a Repnyikov-féle modell magfüggvényét. Másrészt — Plevako említett eredményét felhasználva — Barvasov előállította az  $E(z) = E_0(1 + Cz)^2$  modulusfüggvényű inhomogén féltér magfüggvényét a  $v_0 = 0,25$  esetre. Az eredmények összevetéséből azt kapta, hogy  $v_0 = 0,25$  esetén az  $E_0, K$  paraméterű Repnyikov-féle modell magfüggvénye gyakorlati szempontból tökéletes egybeesést mutat egy  $E(z) = E_0(1 + Cz)^2$  modulusfüggvényű féltér magfüggvényével, hacsak a  $C = 0,84 K/E_0$  egyenlőség fennáll. E nagy jelentőségű analógiát szemléltetjük a 13. ábrán.

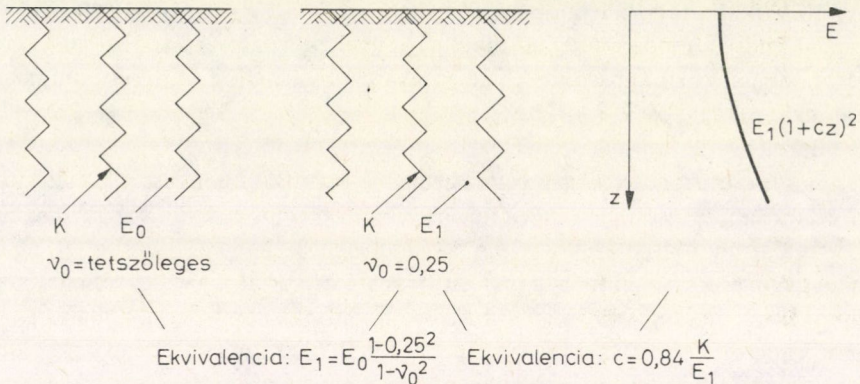
A szerzők az [18] cikkben megmutatták, hogy tetszőleges  $v_0$  Poisson tényezőjű Repnyikov-modell megfeleltethető — egy kétlépéses megfeleltetéssel — egy  $v_0 = 0,25$

Poisson-tényezőjű a mélységgel parabolikusan növekvő rugalmassági modulusú féltérnek. Ezt az analógiát szemlélteti a 14. ábra.

Hangsúlyozzuk, hogy ezen analógiák feltárásával lehetőség nyílt a Repnyikov-féle kombinált talajmodell paramétereinek laboratóriumi meghatározására a növekvő mélységből vett talajminták összenyomódási tulajdonságain keresztül.



13. ábra. Barvasov-féle analógia a parabolikusan inhomogén rugalmas féltér és a Repnyikov-féle kombinált modell között



14. ábra. Általános analógia az inhomogén féltér és a párhuzamosan kapcsolt modell között

A mélységgel közelítőleg lineárisan vagy parabolikusan növekvő modulusú talajoknál — eredeti kikötésünk szerint elhanyagolható konszolidáció esetén — a Repnyikov-féle kombinált modell a felszínsüllyedéseket és ezen keresztül az alaptestek igénybevételeit viszonylag egyszerű eljárással igen valóságghűen szolgáltatja. Ezért a gyakorlati tervezésbe történő bevezetése célszerű.

Áttérünk egy olyan modell tárgyalására, amely az eddigiektől eltérő típusú inhomogenitás esetén is lehetőséget nyújt aránylag egyszerű számítási eljárás kidolgozására.



### 4.3 Egymásra helyezett rugalmas rétegek esete (Sorosan kapcsolt kombinált modell)

Említettük, hogy ha a sorosan kapcsolt modellben rugalmas réteg is szerepel komponensként, akkor a kombinált modell magfüggvényének kiszámítására vonatkozó szabály nem érvényes. Ezért szükséges eltérő jellegű eljárás kidolgozása. A bemutatandó módszer annyiban általánosabb az előzőnél, hogy a modell belsejében is számíthatók feszültségek és elmozdulások. Mégis pl. tengelyszimmetrikus esetben aránylag kis memóriaigényű számítógépi programot igényel. Ezt fogjuk vázolni.

A modell tehát  $n$  egymásra helyezett rugalmas rétegből áll, amelyek mindegyike homogén izotrop közeg a következő jellemzőkkel:  $G_k$  nyírási modulus,  $\nu_k$  Poisson tényező,  $h_k$  vastagság. Minden réteghez csatoljuk az  $r_k$ ,  $\Theta_k$ ,  $z_k$  lokális koordináta-rendszert. ( $z_k$  a modell belsejébe irányítva.)

Tengelyszimmetrikus esetben a rugalmassági alapfeladat megoldását a harmonikus függvényekkel operáló Popkovicz—Neiber-féle képletek adják:

$$\begin{aligned}
 2Gu_r &= -\frac{\partial\varphi}{\partial r} - z\frac{\partial\Phi}{\partial r} \\
 2Gu_z &= -\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (3-4\nu)\Phi - z\frac{\partial\Phi}{\partial z} \\
 \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-2\nu)\Phi - \frac{\partial\varphi}{\partial z} - z\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right] \\
 \sigma_z &= 2(1-\nu)\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \\
 \sigma_\theta &= 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\varphi + z\Phi) \\
 \sigma_r &= 2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial r^2}(\varphi + z\Phi),
 \end{aligned}
 \tag{4.10}$$

ahol  $\varphi$  és  $\psi$  a  $\Delta^*\varphi = \Delta^*\psi = 0$  egyenletnek tesz eleget, ahol

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

A feladatot Hankel-transzformációval oldjuk meg. Az első négy egyenletet transzformálva oly módon, hogy az első és a negyedik egyenletre elsőrendű, a második és harmadik egyenletre nulladrendű transzformációt alkalmazunk  $r$ -ben, akkor elérhető,

hogy a jobb oldalon csak nulladrendű transzformált álljon. (Az ötödik és hatodik egyenletet nem vesszük tovább) ( $\bar{\varphi}$  jelenti a nulladrendű,  $\bar{\varphi}^{(1)}$  az elsőrendű Hankel-transzformáltat.)

$$\begin{aligned}
 2G\bar{u}_r^{(1)}(\xi, z) &= \xi[\bar{\varphi} + z\bar{\Phi}] \\
 2G\bar{u}_z(\xi, z) &= -\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z} + (3-4\nu)\bar{\Phi} - z\frac{d\bar{\Phi}}{dz} \\
 \bar{\sigma}_z(\xi, z) &= 2(1-\nu)\frac{d\bar{\Phi}}{dz} - \frac{d^2\bar{\varphi}}{dz^2} - z\frac{d^2\bar{\Phi}}{dz^2} \\
 \bar{\tau}_{rz}^{(1)}(\xi, z) &= -\xi\left[(1-2\nu)\bar{\Phi} - \frac{d\bar{\varphi}}{dz} - z\frac{d\bar{\Phi}}{dz}\right]
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

A  $\varphi$ -re és  $\psi$ -re vonatkozó Laplace-egyenletek a következő közönséges egyenletbe mennek át:

$$\frac{d^2\bar{\Phi}}{dz^2} - \xi^2\bar{\Phi} = 0
 \tag{4.12}$$

$$\frac{d^2\bar{\varphi}}{dz^2} - \xi^2\bar{\varphi} = 0$$

Ezek általános megoldása:

$$\bar{\Phi} = A \operatorname{sh} \xi z + B \operatorname{ch} \xi z
 \tag{4.13}$$

$$\bar{\varphi} = C \operatorname{sh} \xi z + D \operatorname{ch} \xi z$$

Az egyes rétegekre (4.11) és (4.13) segítségével adódó általános megoldásokat illesztjük össze úgy, hogy a réteghatárokon a

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_z(\xi, z) \\ \bar{\tau}_{rz}^{(1)}(\xi, z) \\ \bar{U}_z(\xi, z) \\ \bar{U}_r^{(1)}(\xi, z) \end{bmatrix}$$

vektor folytonos legyen, míg az egész kombinált rendszer alsó és felső határán előírt peremfeltételek ki legyenek elégítve. Ehhez természetesen a peremfeltételek Hankel-transzformáltját is ismerni kell. A technikai részleteket mellőzve megállapítható, hogy az eljárás eredményeképpen a keresett elmozdulás és feszültségfüggvények Hankel-transzformáltjai adódnak. A végeredményt inverztranszformációval kapjuk.

Láttuk, hogy a párhuzamos kombinált modell akkor alkalmazható, ha a mélységgel növekvő modulusú féltérrel van dolgunk, míg a sorosmodellnél ilyen

kikötés nincs. A párhuzamos modell lényegesen több esetre nyert már kidolgozást, ezért a soros modellt elsősorban abban az esetben javasoljuk, ha a mélységgel lazább rétegek is előfordulnak.

A 4. fejezetben bemutatott modellekkel és eljárásokkal azt kívántuk alátámasztani, hogy egyfelől a talaj szempontjából a kombinált modellekkel a gyakorlatban előforduló inhomogenitások többsége modellezhető, másfelől bizonyos típusú sicalapok és terhelések esetén aránylag egyszerű, kis-számítógépes eljárások dolgozhatók ki. Ezért tartjuk fontosnak a kombinált modellek további vizsgálatát, s a kidolgozott programcsomagnak a gyakorlati tervezési rendszerekbe történő beépítését. Előfordulhat természetesen olyan eset, amelyekre a kombinált modellek hatóköre nem terjed ki, és a finomabb megközelítést is lehetővé tevő véges elemes eljárások alkalmazása indokolt.

### 5. Véges elemes modellek a sicalapozásban

Az előző fejezetben igyekeztünk rámutatni, hogy a gyakorlatban előforduló esetek nagy többségében az esetnek megfelelő kombinált modell a tervezés számára megfelelően egyszerű eszköz s egyszersmind a fizikai valóságot is megfelelően tükrözi. Éppen a két követelmény szemben álló jellege miatt vannak a kombinált modelleknek — elsősorban elméleti — hiányosságaik.

A kombinált modellek nem — vagy csak igen nehézkesen — tudják követni a lokális inhomogenitásokat a talajok speciális deformációit, például a repedéseket, vagy azokat a tulajdonságokat, amelyek szerint egyes talajoknak nincs húzási ellenállásuk. Ami a plasztikus jelenségeket illeti, már utaltunk rá, hogy az igénybevételek szempontjából az alaptestnek általában kis része alatt fellépő plasztikus folyamatok — függőleges terhelés esetén — nem okoznak jelentős eltéréseket. [14].

Adott esetben mégis szükség lehet pontosabb vizsgálatokra. Ezeknek a vizsgálatoknak az eszköze a nagy számítógépigényű véges elemek módszere. Röviden vázoljuk előnyeit és lehetőségeit. Az eljárások egyik előnyös tulajdonsága, a bonyolult geometriai feltételek követése a sicalapozási feladatoknál általában — a relatív egyszerűbb geometria miatt — nem érvényesül.

Ismeretes, hogy a véges elemek módszere olyan közelítő eljárás, mely első formájában a rugalmas alakváltozásokat határozza meg, a felosztás finomságától függő pontossággal közelítve az elméleti értékeket. Mivel a talaj alakváltozásai legalábbis a teljes vizsgált tartományban ritkán rugalmasak, ezért szükségessé vált a véges elemes eljárás és az egyre pontosabb talajtörvények összekapcsolása. A nemlineáris rugalmasság leírására a legismertebb modell a Duncan-féle [6]. Talán ennél is megfelelőbb — bár még nagyobb előkészítést igényelnek azok a próbálkozások, amelyek a kísérletekből származó görbéket közvetlenül viszik a véges elemes programba, ezzel irányítva minden egyes elemen belül a folyamatot. Erre példa Boulon és társai munkája [2], melyben — ugyan cölöpökre vonatkozólag — végeztek ilyen



vizsgálatokat. Hasonló modell kiépítésén dolgozunk jelenleg ágyazott tartók, alaptestek esetére.

Az előző fejezetekben tárgyalt eljárások közös hátránya, hogy repedések, elcsúszások figyelembevételére alkalmatlanok. A véges elemes eljárások erre is képessé tehetők.

Akár a Duncan modellel és az abba épített speciális kontakelemekkel [10] dolgozó modellel, akár a Boulon által leírt eljárás lényege az, hogy ha egy felületen a nyírófeszültség kimerül — például a Mohr-elmélet szerint — az érintkező felületek elválhatnak egymástól, mintegy elengedik egymást. Ilyen módon foghatók meg az elcsúszási jelenségek pl. cölöpök köpenye mentén vagy a tartó és a talaj találkozásánál.

E rövid fejezetben a részletek tárgyalását mellőzve az elméleti kutatás fejlődésének egy szerintünk jelentős irányát próbáltuk érzékeltetni.

#### IRODALOM

1. DE BEER E. E.: Calcul de Poutres reposant sur le sol Annales de Travaux Publics de Belgique 1948, June, 1952. Oct. Dec.
2. BOULON M.—DARVE F.—DESRUÉS Z.—FORAY P.: Soil-structure coupling. Non linear rheological relationships and boundary conditions in soil mechanics. *Computers and Structures* Vol. 9. (1978) 293—303.
3. BOWLES Z. F.: Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering, Mc Graw Hill, 1974. 147—185.
4. CARRIER W. D.—CHRISTIAN Z. T.: Rigid circular plate resting on a non-homogeneous elastic half space, *Geotechnique*, Vol. 23., 1973.
5. DAVIS, E. H.—POULOS, H. G.: The use of elastic theory for settlement prediction under three dimensional conditions. *Geotechnique*, Vol. 18. (1968) No. 1.
6. DUNCAN I. M.—CHANG C. Y.: Nonlinear analysis of stress and strain in soils. I. *Soil. Mech. and Found. Div., Proc. ASCE* Vol. 96. (1970) No. SM5.
7. GERARD. C. M.—HARRISON, W. J.: Circular loads applied to a cross-anisotropic half space. CSIRO Australia, *Div. App. Geomech. Tech. Paper*, No 8., 1970.
8. GERARD C. M.—HARRISON W. J.: Stresses and displacements in a loaded orthotropic half-space, CSIRO Australia, *Div. App. Geomech. Tech. Paper* No. 9. 1970.
9. GIBSON R. E.: Some results concerning displacement and stresses in a non-homogeneous elastic half-space, *Geotechnique* 1967. 17.
10. GOODMAN R. E.—TAYLOR R. L.—BREKKE T. L.: A model for the mechanics of joined rock, *I. Soil. Mech. and Found. Div. Proc. ASCE* Vol. 94. (1968) No. SM3.
11. HETÉNYI M.: Beams on an elastic foundation. Oxford University Press, 1946.
12. HOPPER J. A.: Elastic settlement of a circular raft in adhesive contact with a transversely isotropic medium. *Geotechnique*, Vol. 25. (1975) No. 4.
13. KANY M.: Berechnung von Flachengründungen. Berlin, 1972.
14. MAJID K. I.—CRAIG J. S.: An incremental finite element analysis of structural interaction with soil of non-linear properties. *Proc. Symp. Int. of Struct. and Found.* Birmingham, 1971.
15. MILOVIC D. M.: Stress-strain analysis in soil mechanics. Vojvodine—Subotica, 1974.
16. OHDE J.: Die Berechnung der Solldruckverteilung unter Grundkörpern Bauingenieur Heft 1416, 1942.
17. PETRASOVITS G.—SOLTÉSZ P.: Kombinált talajmodell alkalmazása síkalapok vizsgálatára a térbeli feszültségállapot figyelembevételével. *Műszaki Tudomány* 56. 1978.
18. PETRASOVITS G.—SOLTÉSZ P.: Síkalapok méretezése kombinált talajmodellel alapuló módszerrel. *Magyar Építőipar*, 1981. 5. 282—287. old.
19. PETRASOVITS G.—SOLTÉSZ P.: Kombinált talajmodell paramétereinek kísérleti meghatározása modell-analógiák vizsgálata alapján. *Magyar Építőipar*, 1981. 7. 411—417. old.
20. ZIENKIEWICZ O. C.: The finite element method in engineering science, Mc. Graw Hill, London, 1971.

21. Барвашов, В. А.: Комбинированные модели грунтового основания. Оснивания, *Фундаменты и Механика грунтов*, 1976/1. 1976.
22. Барвашов, В. А.: К расчету осадок грунтовых оснований, представленных различными моделями. Основания, *Фундаменты и Механика грунтов*, 197/4.
23. Власов, В. Э.—Леонтьев, Н. Н.: Балки, плиты и оболочки на упругом основании, Госстройиздат, 1960.
24. Горбунов—Посадов, М. И.—Маликова, Т. А.: Расчет конструкций на упругом основании, Москва, Стройиздат, 1973.
25. Жемочюин, В. Н.—Синицын, А. Н.: Практические методы расчета балок и плит на упругом основании. Госстройиздат, Москва. 1962.
26. Клейн, Г. К.: Учет неоднородности, разрывности деформации и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сложном основании, *Сборник трудов МИСИ № 14*, 1956.
27. Пастернак, Р. Л.: Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели, Госстройиздат, 1964.
28. Плевако, В. П.: О возможности использования гармонических функций при решении задач теории упругости неоднородных сред. *Прикладная математика и механика* 36. 1972.
29. Репников, Л. Н.: Расчет балок на упругом основании, объединяющем деформативные свойства основания Винклера и линейно деформируемой среды, Основания, *Фундаменты и Механика грунтов* 1967/6.
30. Симвулиди, И. А.: Приближенный метод расчета балок, лежащих на упругом основании, *Сборник трудов МИСИ*. 1956.
31. Соболев, Д. Н.: К расчету конструкций лежащих на статистически неоднородном основании, *Строительная механика и расчет сооружений № 1*. 1965.
32. Филоненко—Бородович, М. М.: Простейшая модель упругого основания, способная распределять нагрузку. *Сб. Трудов МЭМИИТ вып. 53*, 1945.
33. Штаерман, И. Я.: Распределение давления под фундаментом при наличии пластической зоны. *Сб. трудов МИСИ № 14*. 1956.

**Soil models and the trends of development.** — The paper gives a survey on the main types of soil models, the subgrade coefficient method and the elastic half space method which can be taken into consideration for the dimensioning of spread foundations. It discusses the theory and the applicability of these methods.

The paper presents the possibilities of development of the soil models to describe more correctly the load-deformation process and special emphasis is put on the so called combined models which are able to take into account the inhomogeneous properties of the soil.

**Bodenmodelle und die Richtungen der Entwicklung.** — Der Aufsatz gibt eine Übersicht von Bodenmodellen, die bei der Bemessung von Flachfundamenten angewendet werden können. Es wird eine an der Kombination des Bettungsziffers und an den Eigenschaften des elastischen Halbraums basierende Methode vorgetragen und ihre Theorie sowie Anwendungsmöglichkeiten besprochen.

Vorgeführt wird weiterhin die Möglichkeit der Entwicklung einer genaueren Beschreibung des Belastung-Formänderungsprozesses von verschiedenen Bodenmodellen und mit besonderer Aufmerksamkeit werden die sogenannten kombinierten Modelle behandelt, mit denen auch die inhomogene Eigenschaften der Boden berücksichtigt werden können.

**Модели грунтов и тенденции развития.** — В исследованиях взаимодействия между конструкциями и грунтами, грунт замещается упрощенными моделями.

Работа рассматривает основные модели грунтов, применяемых в области плоских фундаментов, методы коэффициента постели и применения упругого полупространства, их теорию и применимость.

Показываются возможности более точного следования за процессом деформации грунтовых моделей под нагрузкой, и их развития без значительного затруднения расчетов, в частности, с особым учетом т. н. комбинированных моделей, способных принимать во внимание и неоднородные свойства грунта.





# SÍKBELI ÉS FORGÁSSZIMMETRIKUS RUGALMAS-IZOTROPIKUSAN FELKEMÉNYEDŐ SZILÁRDSÁGI FELADATOK NUMERIKUS MEGOLDÁSA VÉGESELEMES ELMOZDULÁSMÓDSZERREL

SÁRKÖZI LÁSZLÓ<sup>1</sup>  
HORVÁTH FERENCNÉ<sup>2</sup>

A tanulmány tárgya egy végeselemes számítási eljárás bemutatása lineárisan rugalmas-izotropikusan felkeményedő anyagmodellre vonatkozóan. A kidolgozott program kétváltozós szilárdsági feladatok megoldását teszi lehetővé. A bemutatott számpéldák igazolják a módszer megbízhatóságát.

## 1. Bevezetés

A végeselemes módszer kezdeti eredményes próbálkozásai rugalmasságtani feladatok numerikus megoldásaira hamarosan felvetették a képlékenységtani alkalmazás lehetőségét is. A témával kapcsolatos első publikációk a 60-as évek második felében jelentek meg. A számítási algoritmusok kidolgozásában alapvető szerepet játszott az a tény, hogy a folyáshatáron túl érvényes anyag törvényt differenciális formában kell megfogalmazni, amint arra a jól ismert képlékenységtani tankönyvek (például: [1]) is rámutatnak. A numerikus, programozott eljárásokban a testre, szerkezetre működő terhelést természetesen csak véges méretű tehernövekmények formájában lehet működtetni, és így az egyes teherlépcsők hatásainak számítása során valamilyen iterációs eljárásra van szükség. Az eredetileg kidolgozott iterációs eljárások — a kezdeti alakváltozások módszere [2], — a tangenciális merevségi módszer [3], — a kezdeti feszültségek módszere [4].

Ezek mindegyike matematikailag egy Newton—Raphson vagy egy módosított Newton—Raphson eljárás ([5]). Lényegileg az itt említettek közül felépített kombinatív típusú numerikus stratégiákat alkalmazták ma is a nagy, nemlineáris programrendszerek [6], kiegészítve különféle konvergenciagyorsító és tehernövekmény-optimalizáló eljárásokkal.

Az alapvető végeselemes szakkönyvek (például: [5], [7]) részletesen tárgyalják az ún. izoparametrikus végeselem-modelleket, melyek kidolgozása a nemlineáris típusú szilárdságtani alkalmazás szempontjából újabb előnyöket biztosított, más elemmodellekhez képest. Nevezetesen, az izoparametrikus elemek gyakorlatában

<sup>1</sup> Dr. Sárközi László, 3530 Miskolc, Vörösmarty u. 72. II/1.

<sup>2</sup> Horváth Ferencné, 3529 Miskolc, Lévy J. u. 32.

alkalmazott, Gauss-pontokhoz kötött numerikus integrálás viszonylag egyszerűen teszi lehetővé, hogy egy adott terheléstörténetet követő terhelési szinten az egyes elemek különböző pontjaiban az eltérő anyagtörvényt számításba lehessen venni. Így a számítás például nyomon követheti, hogy a rugalmas és a képlékeny tartományt elválasztó felület metszi az elemek tartományait.

Jelen dolgozat célja egy rugalmas-izotropikusan felkeményedő (vagy határesetben egy rugalmas-tökéletesen képlékeny) típusú kvázistatikus szilárdságtani peremértékfeladatok megoldására szolgáló számítási eljárás rövid bemutatása. A program

- általánosított síkfeszültségi állapotú, vagy
- síkalakváltozási, vagy
- térbeli forgásszimmetrikus

feladatok számítására alkalmas, tetszés szerint Tresca, Mises, Mohr—Coulomb, vagy Drucker—Prager-féle folyási feltétel figyelembevételével. A vizsgált testet kis elmozdulások és alakváltozások feltételezése mellett, a feladat jellegétől függően koncentrált erők, továbbá élek és felületszakaszok mentén, valamint térfogaton megoszló erők és előírt elmozdulások terhelhetik.

## 2. A képlékenységtani folyáselmélet összefüggései

A végeeselemes képlékenységtani számításokhoz szükséges növekményes me-revségi kapcsolat megadásához mindenképp a folyáselmélet alapján felírható, természetesen növekményes formátumú, anyagtörvényre van szükség. E fejezet célja a lineárisan rugalmas-izotropikusan felkeményedő anyagra vonatkozó, tenzorikusan felírható anyagtörvény származtatása.

### 2.1. Kiindulási feltételek

A képlékenységtani folyáselmélet alapvetően *három fő feltételezésen* alapszik:

— Az *első feltételezés* szerint az alakváltozások  $d\varepsilon_{kl}$  növekménye egy rugalmas és egy képlékeny részre bontható.

$$d\varepsilon_{kl} = d\varepsilon_{kl}^{el} + d\varepsilon_{kl}^{pl} \quad (2.1)$$

A rugalmas alakváltozási tenzorból szokásos módon, a Hooke-törvény segítségével a teljes  $\sigma_{ij}$  feszültségi tenzor állítható elő:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{el}; \quad D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{il}) \quad (2.2)$$

$D_{ijkl}$  az anyagjellemzők négyindexes tenzora.

$\lambda$ ,  $\mu$  az  $E$  rugalmassági modulussal és a Poisson-tényezővel kifejezhető Lamé-állandók:

$$\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

E feltételezéshez kiegészítésképpen posztulálandó, az az elsősorban fémek viselkedésére jellemző megfigyelés, hogy a képlékeny alakváltozások nem okoznak térfogatváltozást:

$$d \varepsilon_{kk} = 0 \quad (2.3)$$

— A második feltételezés szerint a 9 méretű feszültségi térben létezik egy  $F$  terhelési függvény, melynek aktuális értékétől függően az elemi tömeg állapota rugalmas, ha  $F < 0$  és képlékeny, ha  $F = 0$ . Az  $F > 0$  nem megvalósítható állapotot jelent. Az egyenlőség fennállása egyúttal — asszociatív típusú képlékenységi elméletről lévén szó — a felkeményedési (folyási) függvény egzisztenciáját is biztosítja. A képlékeny állapot fennállása esetén egy infinitézimális  $d\sigma^{kl}$  feszültség megváltozáskor a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} d\sigma^{kl} &> 0 && \text{képlékeny felterhelést} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}} d\sigma^{kl} &= 0 && \text{semleges (rugalmas) feszültségváltozást} \\ &< 0 && \text{(rugalmas) tehermentesítést jelent.} \end{aligned}$$

— A harmadik feltételezés szerint érvényes a Drucker-féle stabilitási posztulátum, mely a következőket mondja ki: „Egy elemi tömeget — adott feszültségállapotból kiindulva — egy kvázistatikus felterhelésből és tehermentesítésből álló ciklusnak alávetve, a külső erők munkája nem negatív.” A stabilitási posztulátumnak három fontos következménye a *konvexitás*, a *konzisztencia* és a *normalitás*. Az első szerint a folyási függvény mindig konvex, a második szerint képlékeny alakváltozáskor  $dF = 0$  és a harmadik szerint a plasztikus alakváltozásnövekmény a feszültségi térben mindig merőleges  $F$ -re:

$$d \varepsilon^{kl} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2.4)$$

Itt  $d\lambda$  egy nem negatív skalár, szokásos elnevezés szerint képlékenységi szorzó.



## 2.2. A folyási kritérium és a felkeményedési törvény

Az  $F$  függvény argumentumában a feszültségi tenzor koordinátái (pontosabban a feszültségi tenzor első és a deviátor tenzor második és harmadik skalárinvariánsai) mellett a plasztikus alakváltozási tenzor koordinátái  $\varepsilon_{kl}^{pl}$ , valamint egy  $\kappa$  felkeményedési paraméter található.

Mivel ez utóbbi  $\sigma^{kl}$  és  $\varepsilon_{kl}^{pl}$ -el mindig kifejezhető, ezért

$$F = F(\sigma^{kl}, \varepsilon_{kl}^{pl}).$$

A konzisztencia értelmében

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}^{pl}} d\varepsilon_{kl}^{pl} = 0. \quad (2.5)$$

Ezen összefüggésbe (2.4)-et behelyettesítve, felkeményedő anyagra általánosan írható

$$d\lambda = - \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}{\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{kl}^{pl}} \frac{\partial F}{\partial \sigma^{kl}}}. \quad (2.6)$$

(2.6) kifejezéshez az  $F$  függvény konkretizálására van szükség. Példaként a Mises-féle folyási függvénnyel dolgozva:

$$F = S_{II} - \tau_F^2 = 0, \quad (2.7)$$

ahol  $\tau_F$  a nyírási folyáshatár,  $S_{II}$  pedig az

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (2.8)$$

feszültségi deviátor második skalár invariánsa.

Izotropikus felkeményedést feltételezve az  $F$  függvény egyenletesen kitágul, mint ahogyan az 1. ábrán látható. A plasztikus alakváltozási munka szerinti felkeményedés elmélete szerint a tágulás (felkeményedés) mértéke a  $W^{pl}$  plasztikus alakváltozási munka:

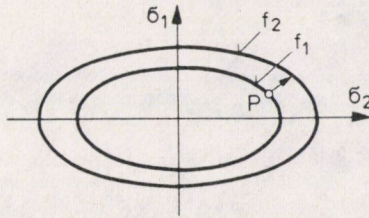
$$W^{(pl)} = \int_0^{\varepsilon_{kl}^{pl}} \sigma_{kl} d\varepsilon_{kl}^{pl}$$

vagy ezzel egyenértékűen

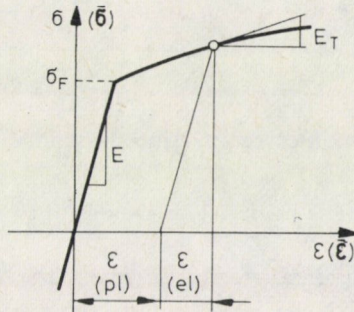
$$W^{(pl)} = \int_0^{\bar{\epsilon}} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}, \quad (2.9)$$

ahol  $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{kl} s^{kl}}$  a feszültségi tenzor intenzitását és

$\bar{\epsilon} = \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{pl}^{kl} \epsilon_{pl}^{kl}}$  a plasztikus alakváltozási tenzor intenzitását jelenti.



1. ábra. Folyásfelület változása izotropikus felkeményedéskor



2. ábra. Idealizált szakítódiagram rugalmas-felkeményedő anyagra

A nyírási folyáshatárról a könnyebben mérhető  $\sigma_F$  húzási folyáshatárra áttérve (Mises-feltétel esetén  $\sigma_F = \sqrt{3}\tau_F$ ) ez utóbbi

$$\sigma_F = G(W^{(pl)}) \quad (2.10)$$

szerint változik a felkeményedés mértéke alapján.

Más oldalról, a plasztikus alakváltozás mértéke szerinti felkeményedéskor

$$\sigma_F = H(\bar{\epsilon})_{pl} \quad (2.11)$$

ahol

$$\bar{\varepsilon}_{pl} = \int_0^{\bar{\varepsilon}_{pl}} d\bar{\varepsilon}_{pl}.$$

Mises feltétele esetén (2.10) és (2.11)-ről belátható, hogy ekvivalensek [8], és így (2.7)

$$F = \bar{\sigma} - H(\bar{\varepsilon}_{pl}) = 0 \quad (2.12)$$

alakban is írható.

A számításokhoz az egytengelyű  $\sigma - \varepsilon$  húzó vizsgálat általánosításával kapott  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$  intenzitások közötti diagramra van szükségünk, amely alapján meghatározható a

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_{pl}} \quad (2.13)$$

felkeményedési modulus. A 2. ábrán látható adatok alapján

$$d\bar{\sigma} = E_T d\bar{\varepsilon} = E_T \left( \frac{d\bar{\sigma}}{E} + d\bar{\varepsilon}_{pl} \right) \quad (2.14)$$

és így

$$\frac{1}{H'} = \frac{1}{d\bar{\sigma}} = \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \quad (2.15)$$

ahol  $E_T$  a képlékeny szakaszon érvényes érintő modulus.

### 2.3. A növekményes feszültség-alakváltozás kapcsolata

Az  $F$  függvény kiválasztásával és a  $H'$  értelmezésével a (2.6) összefüggésben szereplő parciális deriváltakat elő lehet állítani. Egyszerű algebrai átalakításokkal  $d\lambda$ -ra a következő összefüggés adódik:

$$d\lambda = \frac{d\bar{\sigma}}{H'}$$

Ezt (2.4)-be helyettesítve a normalitási szabály az alábbi:

$$d\varepsilon^{kl}_{pl} = \frac{3}{2} \frac{s^{kl} d\bar{\sigma}}{H' \bar{\sigma}}.$$

Ezen kifejezés a Mises-feltétel alkalmazásakor érvényes, izotropikusan felkeményedő anyagra vonatkozó Prandtl—Reuss-egyenletekkel azonos, mely kapcsolatot jelent a

plasztikus alakváltozásnövekmények és a feszültségállapot-növekmények között. A végeleemes elmozdulásmódszerhez azonban a teljes alakváltozás- és feszültségnövekmények közti kapcsolatra van szükség. A szükséges algebrai átalakításokat nem részletezve az alábbi kifejezés adódik

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{(ep)} dc^{kl}, \quad (2.16)$$

ahol a  $D_{ijkl}^{(ep)}$  a rugalmas-képlékeny anyagállandó-mátrix. Képletszerűen:

$$D_{ijkl}^{(ep)} = D_{ijkl} - \frac{9\mu^2 s_{ij} s_{kl}}{\bar{\sigma}^2 (H' + 3\mu)}. \quad (2.17)$$

(2.17) tökéletesen képlékeny anyag ( $H' = 0$ ) esetében is érvényes. Amennyiben a második tag zérus értékű, akkor (2.16) egyszerűen a Hooke törvénnyel azonos.

### 3. Számítási stratégia a feladat megoldásához

A virtuális munka elvének növekményes formáját használva a végeleemes elmozdulásmódszer rugalmas képlékeny feladatok esetén egy

$$\mathbf{K}(\hat{\mathbf{u}})\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{f} = 0$$

nemlineáris algebrai egyenletrendszerhez vezet. A félkövér betű mátrixokat és vektorokat jelöl.  $\mathbf{K}(\hat{\mathbf{u}})$  az érintő merevségi mátrix, mely függvénye az  $\hat{\mathbf{u}}$  csomóponti általánosított elmozdulásvektornak;  $\mathbf{f}$  a csomóponti általánosított tehervektor. Fenti mennyiségeket a szerkezeti analízisben szokásos összegzési eljárások szerint az elemekre vonatkozó mennyiségekből állítjuk elő. Az egyenletrendszer megoldását a Bevezetőben is említették szerint egy kombinatív típusú megoldási eljárással állítjuk elő. Lényege a következőkben foglalható össze:

- A testre ható teljes terhelést tehernövekményekre bontva működtethetjük. Egy  $n$ -edik tehernövekmény jele  $\Delta \mathbf{f}_{(n)}$ .
- Egy új tehernövekményre vonatkozó számítások elején meghatározzuk az aktuális érintő merevségi mátrixot,  $\mathbf{K}_{T(n)}$ -t, majd ezt követően
- változatlan érintő merevségi mátrixszal ún. módosított Newton—Raphson iterációs eljárást végzünk. Ennek egy  $j$ -edik lépésében az elmozdulásnövekmény

$$\Delta \hat{\mathbf{u}}^{(j+1)} = \mathbf{K}_{T(n)}^{-1} \Delta \mathbf{f}_{(n)}^{(j)},$$

ahol

$$\Delta \mathbf{f}_{(n)}^{(j)} = \mathbf{f}_{(n)} - \mathbf{f}_{(n)}^{(j)}.$$

$\Delta \mathbf{f}_{(n)}^{(j)}$  alatt az ún. kiegyensúlyozatlan belső erők vektorát értjük,  $\mathbf{f}_{(n)}^{(j)}$  pedig az aktuális anyag törvényt kielégítő feszültségállapothoz tartozó fiktív csomóponti tehervektor.



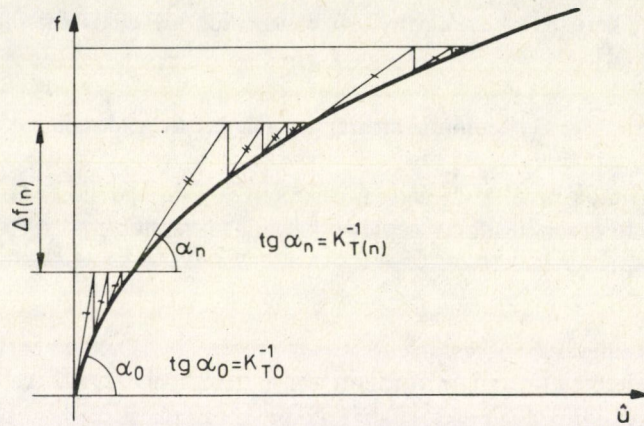
Az új elmozdulásvektor egyszerű összegzéssel állítható elő

$$\hat{u}^{(j+1)} = \hat{u}^{(j)} + \Delta \hat{u}^{(j+1)}$$

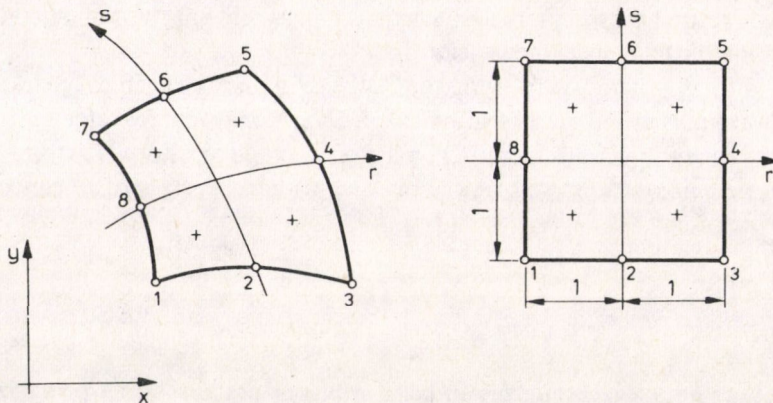
A megoldási stratégiát egyszabadságfokú esetre a 3. ábra mutatja. Konvergenciakritériumként a

$$\frac{\sum_N |\Delta f_{(n)}^{(j)}|^2}{\sum_N |f_n|^2} \leq 0,001$$

összefüggést vettük alapul, ahol  $N$  a csomóponti szabadságfokok száma. Ezek szerint egy  $n$ -edik tehernövekménynek megfelelő számítás során a  $j$ -edik ciklusban számított



3. ábra. Numerikus stratégia a nemlineáris feladat megoldásához



4. ábra. Kvadrátikus izoparametrikus elemmodell a Gauss-pontok feltüntetésével

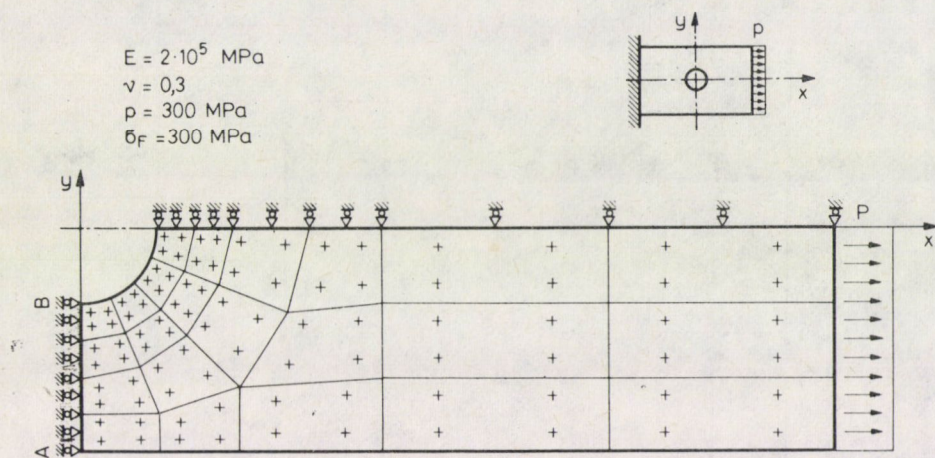


elmozdulás- alakváltozás- és feszültségállapotot akkor fogadjuk el megoldásként, ha a kiegyensúlyozatlan csomóponti belső erők normája 0,001-szer kisebb, mint az  $n$ -edik lépéssel bezáróan működtetett összerhelésből származó csomóponti tehervektor normája.

A feladatok megoldásakor 8 csomópontú 16 szabadságfokú izoparametrikus elemmodellt használtunk, melynek elemi merevségi mátrixait és tehervektorait  $2 \times 2$ , illetve 2 pontos, korlátozott pontosságú numerikus integrálásokkal állítottuk elő. Az elemmodellt a 4. ábra tünteti fel, a Gauss integrációs pontokkal együtt. A feszültségeket a priori a Gauss pontokban állítottuk elő. A számítások alapján tehát először ezen pontokról határozhatók meg, hogy képlékeny állapotba kerültek-e.

#### 4. Számpéldák

A kidolgozott számítási programmal elsőként egyszerű lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny anyagú, ismert analitikus és egzakt megoldással rendelkező feladatok számítására került sor. A tapasztalatok igen kedvezőek voltak. Például egy belső nyomással terhelt vastagfalú gömbtartályra vonatkozó feladatot hengerkoordin-



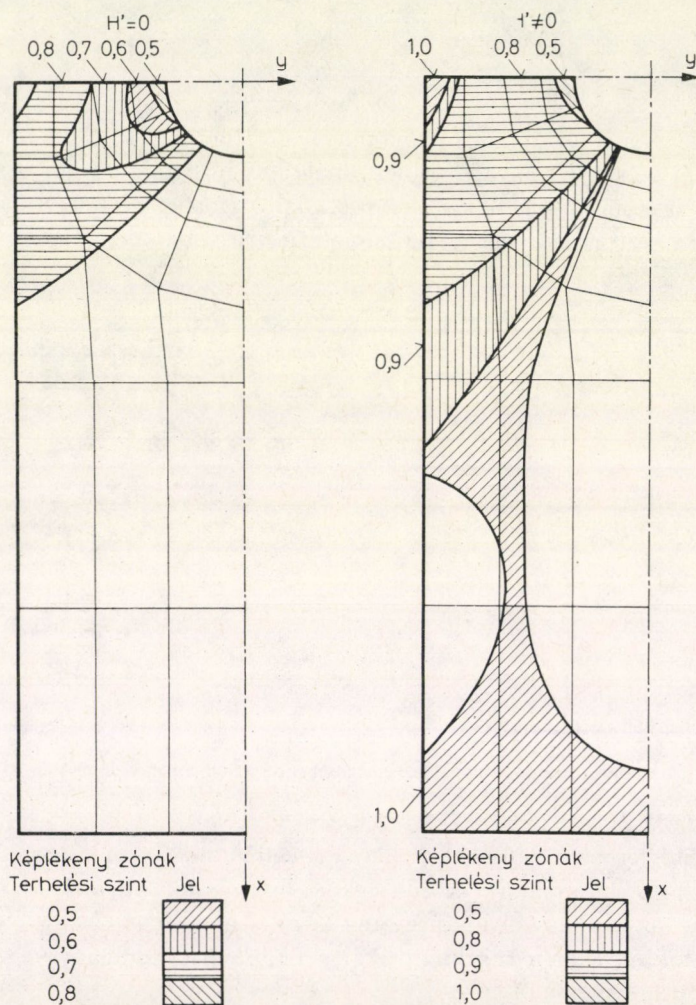
5. ábra. Kör alakú nyílással gyengített tárcsafeladat és a végelemes felosztás

dináta-rendszerben megoldva a vastagság mentén mindössze három elemet felvéve a Gauss-pontokban számított feszültségkoordináták maximum öt ezreléknyi eltérést mutattak az [1]-es hivatkozásban közölt analitikus összefüggések alapján számíthatóktól, akár a rugalmas, akár a képlékeny tartományon belüli értékeket hasonlítottuk össze.

Az 5. ábra egy kör alakú nyílással gyengített, húzással terhelt, egységnyi vastagságú tárcsára vonatkozó feladatot mutat a végelemes felosztással és a Gauss-



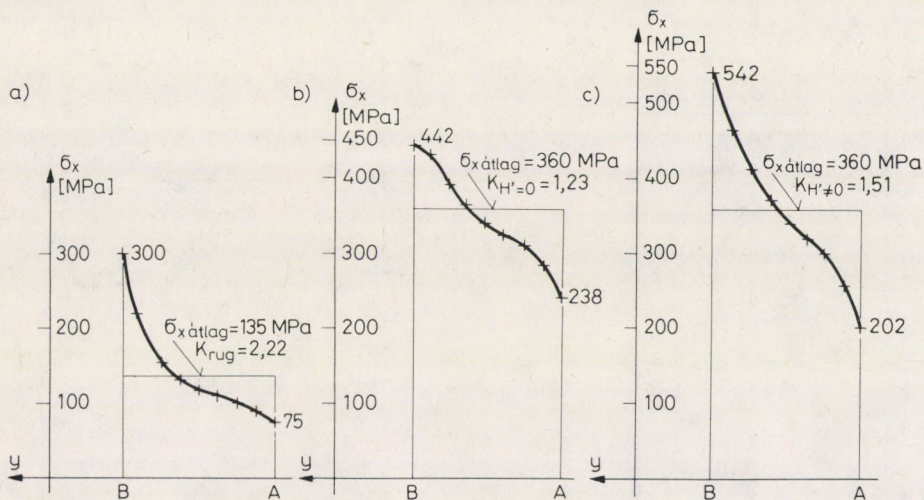
pontok elhelyezkedésével együtt. A szimmetriatulajdonságok kihasználásával elegendő volt csak *egy* negyedrészt vizsgálni. Két számításra került sor, első esetben rugalmas- tökéletesen képlékeny ( $H' = 0$ ), a második esetben rugalmas- lineárisan felkeményedő ( $H' \neq 0$ ) anyagmodellre vonatkozóan, a Mises-féle folyási (felkeményedési) függvény alkalmazásával. Az alapterhelés  $p = 300$  MPa volt. A 6. és 7. ábrák az egyes teherlépcsők működtetésekor képlékennyé vált tartományokat jelzik.  $H' = 0$  esetben  $0,9 p$  alkalmazásakor az  $y$  tengely menti keresztmetszet teljesen képlékennyé vált, ami korlátlan képlékeny folyás megindulását jelzi. (Ezt a jelenséget az iterációs



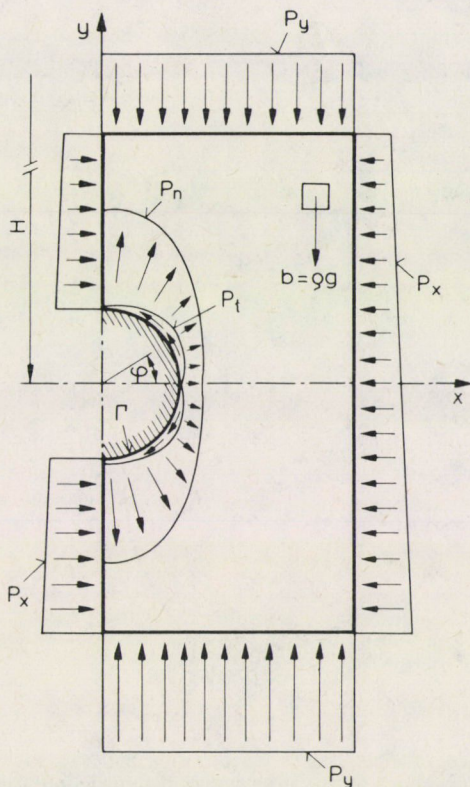
6. ábra. Az 5. ábrán kijelölt feladat megoldásával kapott képlékeny tartományok  $H' = 0$  esetben

7. ábra. Az 5. ábrán kijelölt feladat megoldásával kapott képlékeny tartományok  $H' \neq 0$  esetben



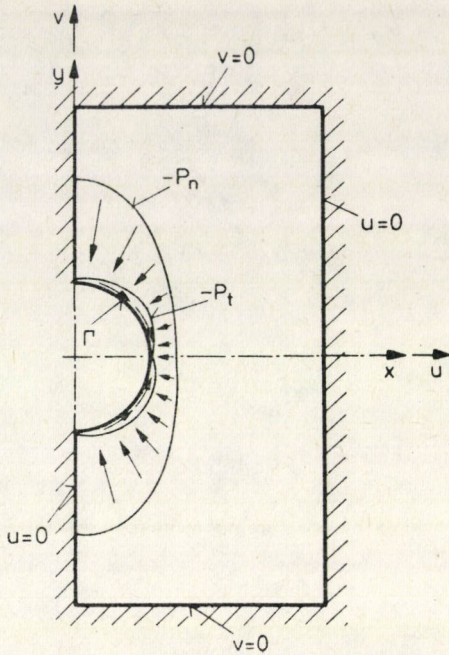


8. ábra. Az 5. ábrán kijelölt feladat megoldásával kapott  $\sigma_x$  eloszlások az  $y$  tengely mentén; a) rugalmas, b)  $H' = 0$ , c)  $H' \neq 0$  esetekben

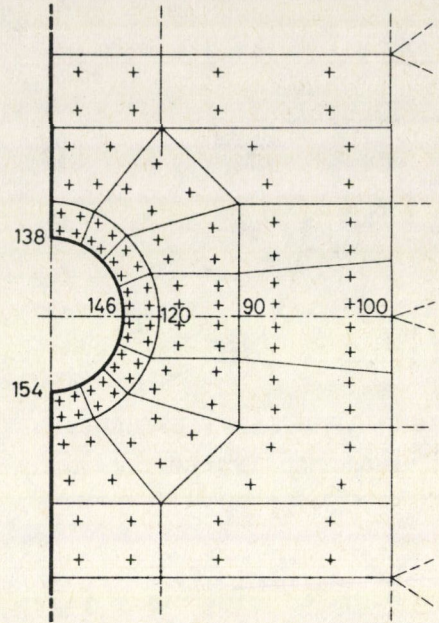


9. ábra. Körvágat hatásának ellensúlyozásához szükséges peremfeltételek

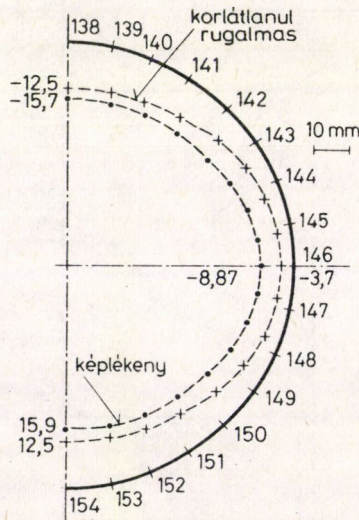




10. ábra. Körvágat számításához szükséges peremfeltételek



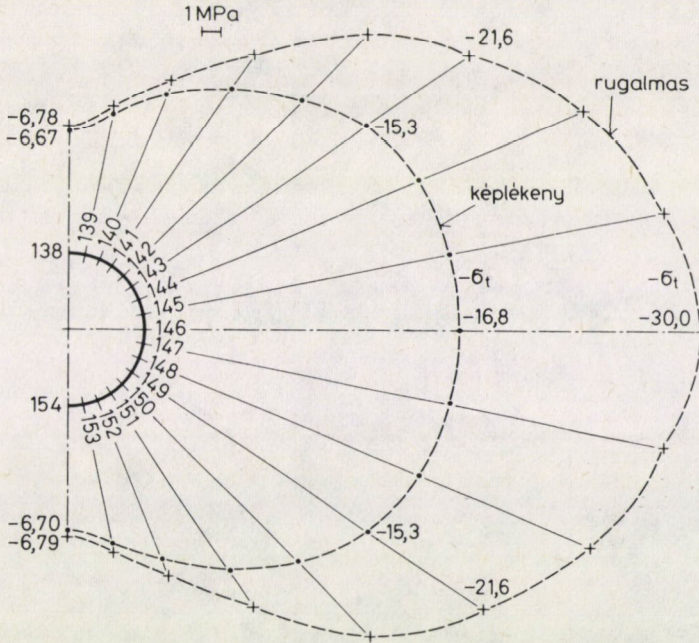
11. ábra. A körvágat körüli végelemes felosztás néhány csomópont-sorszám feltüntetésével



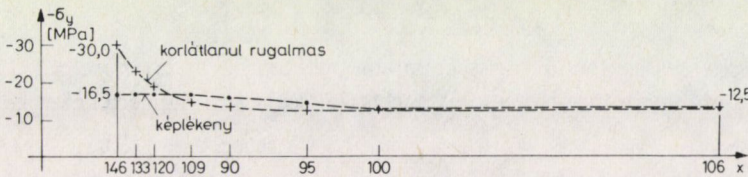
12. ábra. A körvágat peremének deformálódott alakjai



eljárás divergenciája jelezte.)  $H' \neq 0$  esetben természetesen a jelenség nem következik be, hiszen ekkor a testet minden határon túl felkeményedőnek tekintjük. A terhelést 1,0  $p$ -ig folytatva a be nem sraffozott rész mutatja a rugalmasan maradt tartományt. A 8. ábra az  $y$  tengely menti  $\sigma_x$  feszültségek eloszlásait mutatja



13. ábra. A körvágat peremén ébredő tangenciális feszültségek eloszlásai



14. ábra.  $\sigma_y$  feszültségek eloszlásai az  $x$  tengely mentén

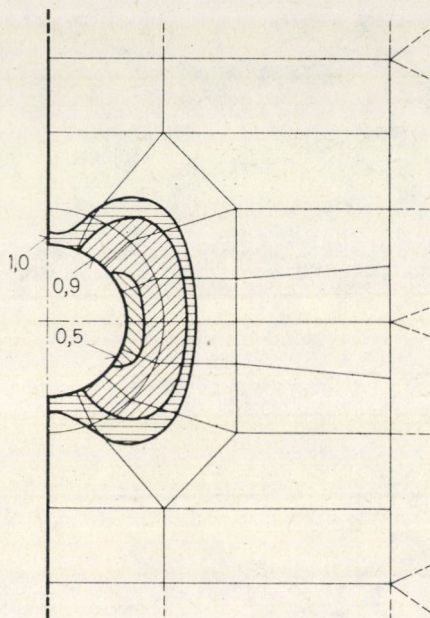
- 0,3  $p$  értékénél rugalmas esetben
- 0,8  $p$  értékénél  $H' = 0$  esetben
- 0,8  $p$  értékénél  $H' \neq 0$  esetben

a program számítási adatai alapján értelmezett alaktényezők feltüntetésével együtt.

A következő feladat egy homogén izotrop önsúlyos rugalmas feltérben létesítendő kör alakú vágat hatására létrejövő szilársági állapotváltozás elemzésére szolgál. Két megoldásra került sor; először korlátlanul rugalmas, másodsor rugalmas-



lineárisan felkeményedő anyagot vettünk figyelembe. Utóbbi esetben a Drucker—Prager-féle felkeményedési feltétellel együtt. A 9. és a 10. ábrák a peremértékfeladat kijelölését magyarázzák. A körvágatot tartalmazó elegendően nagy (a szimmetricitást is kihasználó) tartományt kijelölve a peremek mentén az üregnyitás előtti állapotot reprezentáló  $p_x, p_y$  valamint a térfogaton megoszló  $b$  sűrűségű megoszló erőket



15. ábra. A képlékeny zónák kialakulása a vágat körül

működtetve és a létesítendő vágat  $\Gamma$  pereme mentén zérus értékű elmozdulásokat előírva a tartomány pontjaiban a jól ismert feszültségkoordináta értékeket kapjuk: (9. ábra)

$$\sigma_y = -\rho g(H-y); \quad \sigma_x = \frac{v}{1-v} \sigma_y; \quad \tau_{xy} = 0. \quad (3.1)$$

$\rho$  a sűrűséget

$g$  a gravitációs gyorsulást jelenti.

A  $\Gamma$  mentén ébredő  $p_n$  és  $p_t$  intenzitású reakcióerőket analitikusan egyszerű trigonometrikus összefüggések formájában lehet előállítani:

$$p_n = \sin^2 \varphi \sigma_y + \cos^2 \varphi \sigma_x; \quad p_t = \sin \varphi \cos \varphi (\sigma_y - \sigma_x)$$

Mármost feltételezve ezek után, hogy a tartomány pontjaiban kezdetben zérus elmozdulás és alakváltozásállapot, valamint (3.1) szerinti kezdeti (primer) feszültségál-

lapot van jelen, megoldandó a 10. ábrán kijelölt peremértékfeladat. Az aktív erők a  $\Gamma$  mentén ható  $-p_n$  és  $-p_t$ . Rugalmas feladat esetében ezek természetesen egy lépcsőben, rugalmas-képlékeny feladat esetén több lépcsőben működtetendők. A 11. ábra a körvágat környezetének felosztását, a 12. ábra a vágatperem deformálódott alakjait, a 13. ábra a vágatperem menti tangenciális irányú feszültségek eloszlását, a 14. ábra a  $\sigma_y$  feszültségek  $x$  tengely menti eloszlását mutatják. Ez utóbbi részletesebb elemzése a várakozásnak megfelelően, integrálértelemben jó közelítéssel azonos mértékű áthárított nyomást eredményezett mindkét esetben. A képlékeny tartomány növekedését a 0,5; 0,9 és 1,0-szoros teherlépcsőkre vonatkozóan a 15. ábrán láthatjuk.

## IRODALOM

1. KALISZKY, S.: Képlékenységtan, Akadémiai Kiadó, Bp. 1975.
2. ARGYRIS, J. M.: Elasto-plastic matrix displacement analysis of three dimensional continua, *J. R. Aer. Soc.* 69. (1965) 633—636.
3. MARCAL, P. V.—KING, I. P.: Elastic-Plastic analysis of two dimensional stress systems by the FEM, *Int. J. Mech. Sci.* 10 (1968) 343—354.
4. ZIENKIEWICZ, O. C.—VALLIAPPAN, S.—KING, I. P.: Elasto-Plastic solutions of engineering problems. Initial-stress finite element approach, *Int. J. Num. Meth. in Engng*, 1. (1969) 75—100.
5. ZIENKIEWICZ, O. C.: The Finite Element Method. 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill, London, 1977.
6. NOOR, A. K.: Survey of computer programs for solution of nonlinear structural and solid mechanics problems. *Comp. and Struct.* 13. (1981) 425—465.
7. BATHE, K. J.—WILSON, E. L.: Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
8. HILL, R.: The Mathematical Theory of Plasticity, Clarendon Press, Oxford, 1950.

**Numerical analysis of linearly elastic-isotropic hardening plain and axisymmetric boundary problems by the finite element displacement method.** — The paper presents the application of the finite element method for linearly elastic-isotropic hardening material.

The applied program gives possibility to the solution of two-dimensional strength problems. The numerical examples presented show the effectiveness of the suggested method.

**Numerische Untersuchung von Flächen- und rotationssymmetrischen Festigkeitsproblemen bei sich elastisch und isotropisch aufhärtenden Materialeigenschaften mit der finiten Verschiebungsmethode.** — In der Studie wird ein Rechenverfahren mit finiten Elementen besprochen, das sich auf Modelle mit sich linear-elastischen und isotropisch aufhärtenden Materialeigenschaften bezieht. Das entwickelte Programm ermöglicht die Untersuchung von Festigkeitsproblemen mit zwei Veränderlichen. Die Zuverlässigkeit der Methode ist an Hand der gegebenen Rechenbeispiele bewiesen.

**Численные решения прочностных задач плоских и асимметричных упругих и изотропически твердеющих тел с помощью метода конечных элементов.** — В докладе показывается метод конечных элементов в применении к модели такого материала, который линейно упруг и изотропически твердеющий. Разработанная программа делает возможным решение прочностных задач с двумя переменными. Представленные численные примеры подтверждают пригодность предложенного метода.





# PALÁSTJUKON TENGELY IRÁNYÚ ERŐRENDSZERREL TERHELT PRIZMATIKUS RUDAK

ECSEDI ISTVÁN

A tanulmány tárgya homogén, izotrop, lineárisan rugalmas anyagú prizmatikus rudakra vonatkozik. Palástjukon zérus eredőjű tengely irányú megoszló erőrendszerrel terhelt prizmatikus rudak feszültségállapotának meghatározása a *Laplace-féle* parciális differenciálegyenlettel kapcsolatos *Dirichlet-féle* kerületérték feladatra van visszavezetve. A tanulmány egy közelítő eljárást is ismertet a vékonyfalú zárt keresztmetszetű, több mezős prizmatikus rudakra.

## 1. Fontosabb jelölések

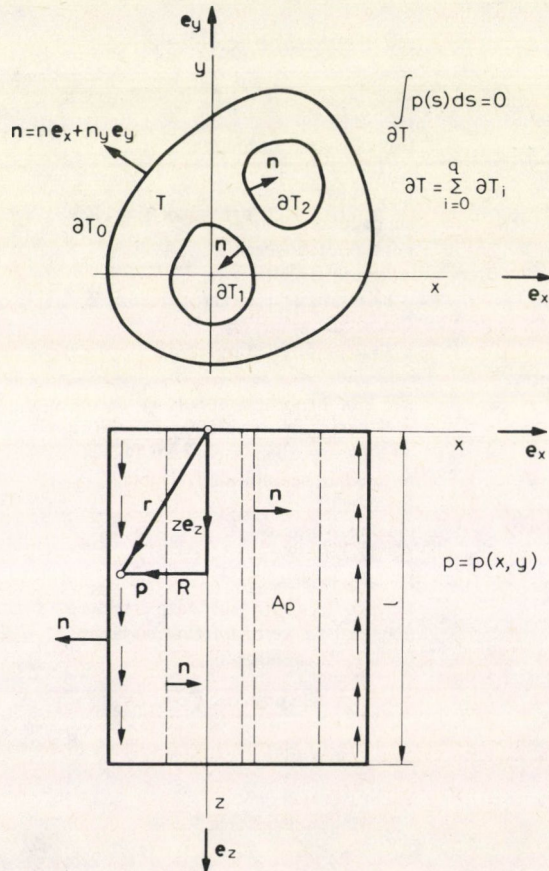
$x, y, z$ $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r})\mathbf{e}_x + v(\mathbf{r})\mathbf{e}_y + w(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$ $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ $T$	derékszögű koordináták, egységvektorok, helyvektor, elmozdulás vektor, normál feszültségek, csúsztató feszültségek, a prizmatikus rúd keresztmetszete, $(q+1)$ -szeresen összefüggő $xy$ síkbeli tartomány, a $T$ tartomány határgörbéje,
$\partial T$ $\partial T = \partial T_0 + \partial T_1 + \dots + \partial T_p,$ $\mathbf{n}$ $\mathbf{e}$ $s$ $\partial/\partial n$ $\mathbf{F} = F_x\mathbf{e}_x + F_y\mathbf{e}_y$ $M$ $U = U(x, y)$ $f = f(s)$ $B_i = B_i(x, y)$ $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ $C_i$	a $\partial T$ határgörbe normális egységvektora, a $\partial T$ határgörbe érintő egységvektora, a $\partial T$ határgörbén értelmezett ívkordináta, $\mathbf{n}$ irányban számolt derivált jele, nyíró erő, csavarónyomaték, feszültségfüggvény, felületi terhelés, a $\partial T_i$ peremgörbe szakaszon értelmezett függvény, helyvektor a keresztmetszet síkjában, ( $i = 1, 2, \dots, q$ ) állandó,
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z$	<i>Hamilton-féle</i> differenciáloperátor,
$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$	<i>Laplace-féle</i> differenciáloperátor,
„.” „×”	skaláris szorzás jele, vektoriális szorzás jele,

dr. Ecsedi István Miskolc, Vászonfehéritő u. 24. IV/1.

$T_i$	a $\partial T_i$ zárt görbe belsejének területe.
$G$	csúsztató rugalmassági modulus,
$\nu$	Poisson szám,
$\tau_{nz}, \tau_{sz}$	csúsztató feszültségek,
$h_{jk}$	falvastagság,
$g_{jk}$	az $A_j$ és $A_k$ mezők határvonala,
$g_{0k}$	az $A_k$ mező szabad peremszakasza,
$a_{0k}, a_{jk}, b_k$	segédmennyiségek,
$g_k$	az $A_k$ mezőt határoló középgörbe szakasz.
Egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmezi.	

### 2. Bevezetés

E tanulmány palástjukon tengelyirányú erőrendszerrel terhelt prizmatikus rudakra vonatkozik (1. ábra). A rúd keresztmetszete az  $xy$  síkbeli többszörösen összefüggő  $T$  tartomány (2. ábra).



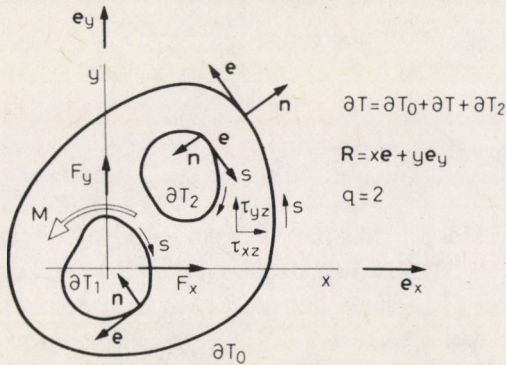
1. ábra. Prizmatikus rúd



Az elasztosztatika szokásos feltevéseit alkalmazzuk, vagyis feltesszük, hogy az elmozdulások és az alakváltozások kicsinyek, hőhatások elhanyagolhatók, kezdeti feszültségek értéke zérus, az anyag homogén izotrop, lineárisan rugalmas stb.

Az elasztosztatika  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$  elmozdulásvektorra felírt (térfogati terhelés zérus)

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \mathbf{r} \in T \quad (2.1)$$



2. ábra. Prizmatikus rúd keresztmetszete

Navier-féle parciális differenciálegyenletének megoldását

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = w(x, y) \mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

alakban keressük. A (2.2) alakú megoldás létezésének szükséges feltétele, hogy  $w = w(x, y)$  síkbeli harmonikus függvény legyen, vagyis

$$\Delta w = 0 \quad \mathbf{r} \in T. \quad (2.3)$$

Miután a továbbiakban valamennyi változó csak az  $x, y$  koordináták függvénye a Hamilton-féle differenciáloperátort és a Laplace-féle operátort két méretűnek tekintjük, azaz

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

A (2.2) formula és a geometriai egyenletek kombinálásával a következő eredményeket kapjuk:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{xy} = 0, \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.5), (2.6)$$



Az általános *Hooke-törvény* és a (2.4), (2.5), (2.6) egyenletek felhasználásával nyerjük a (2.7), (2.8), (2.9) egyenleteket:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad (2.7)$$

$$\tau_{xz} = G \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = G \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (2.8), (2.9)$$

A rúd palástján működő  $\mathbf{p} = p_x \mathbf{e}_x + p_y \mathbf{e}_y + p_z \mathbf{e}_z$  felületi terhelés értékére a

$$p_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = 0, \quad (2.10)$$

$$p_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = 0, \quad (2.11)$$

$$p_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = G \frac{\partial w}{\partial n} \quad (2.12)$$

eredményeket kapjuk. Más szóval a rúd palástján tengelyirányú megoszló terhelésnek kell működnie, hogy a (2.2) alakú elmozdulásvektorral jellemzett egyensúlyi állapot kialakuljon. Előírt  $p_z = f(s)$  felületi terhelés esetén az elmozdulások és feszültségek meghatározása tekintettel a (2.3) és a (2.12) egyenletekre a következő kerületérték problémára vezet:

$$\Delta w = 0 \quad (x, y) \in T, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{G} f(x, y) \quad (x, y) \in \partial T. \quad (2.14)$$

E kerületérték feladat a *Laplace-féle* parciális differenciálegyenlettel kapcsolatos *Neumann-féle* probléma. Megoldhatóságának szükséges feltétele, hogy

$$\int_{\partial T} f(s) ds = 0 \quad (2.15)$$

fennálljon [1]. Ezen feltételi egyenlet az  $l$  hosszúságú prizmatikus rúd egyik egyensúlyi egyenletével kapcsolatos,  $Z = 0$ . Könnyen kimutatható, hogy a

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad (2.16)$$

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0$$

egyensúlyi egyenletek fennállnak, ha (2.13), (2.14) és (2.15) teljesül. A fenti egyenletekben  $X, Y, Z$  az  $l$  hosszúságú prizmatikus rúdra ható erők  $x, y, z$  irányú vetületeinek összegeit  $M_x, M_y, M_z$  pedig ugyanezen erők  $x, y, z$  koordinátatengelyekre számolt nyomatékait jelölik.

### 3. Dirichlet-féle kerületérték feladat felállítása

Az előző pont eredményei szerint zérus eredőjű tengely irányú megoszló erőrendszerrel terhelt prizmatikus rúd feszültségállapotát a nem azonosan zérus  $\tau_{xz} = \tau_{xz}(x, y)$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y)$  csúsztató feszültségek jellemzik, a feszültségi tenzor többi skalárkoordinátája zérus.

A tengely irányú megoszló terheléssel kapcsolatban még kiemelő, hogy a rúd hossza mentén nem változik. A mechanikai egyensúly szükséges feltételeit ebben az esetben az alábbi egyenletek fejezik ki:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (x, y) \in T, \quad (3.1)$$

$$\tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y = f(x, y) \quad (x, y) \in \partial T, \quad (3.2)$$

$$F_x = \int_T \tau_{xz} dT, \quad F_y = \int_T \tau_{yz} dT, \quad (3.3), (3.4)$$

$$M = \int_T (x\tau_{yz} - y\tau_{xz}) dT. \quad (3.5)$$

A fenti formulákban  $F_x$ ,  $F_y$  a rúd keresztmetszetét terhelő nyírőerőt,  $M$  pedig a rúd keresztmetszetét terhelő csavarónyomatékot jelöli.

A (3.1) egyensúlyi egyenlet identikusan kielégül, ha a  $\tau_{xz}$  és a  $\tau_{yz}$  csúsztató feszültségeket a

$$\tau_{xz} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (3.6), (3.7)$$

formulák alapján származtatjuk egy legalább kétszer folytonosan differenciálható  $U = U(x, y)$  kétváltozós függvényből. A (3.6), (3.7) és a (3.2) egyenletek kombinálásával kapjuk a (3.8) formulát:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = f(x, y) \quad (x, y) \in \partial T. \quad (3.8)$$

A (3.8) egyenlet szerint a (3.2) statikai peremfeltétel is ki van elégítve, ha az  $U = U(x, y)$  feszültségfüggvény  $\partial T$  görbe mentén számolt deriváltja előírt  $f = f(x, y)$  értékű. A (3.8) egyenletből integrálással nyerjük a következő egyenleteket:

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= B_0(x, y), & (x, y) &\in \partial T_0, \\ U(x, y) &= B_1(x, y) + C_1, & (x, y) &\in \partial T_1, \\ \vdots & & \vdots & \\ U(x, y) &= B_p(x, y) + C_p, & (x, y) &\in \partial T_p. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

A fenti egyenletekben

$$\left. \begin{aligned} B_0(s) &= \int_0^s f(\sigma) d\sigma, \\ B_1(s) &= \int_0^s f(\sigma) d\sigma, \\ &\vdots \\ B_p(s) &= \int_0^s f(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

megjegyezvén, hogy a  $\partial T_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, q$ ) görbéken az integrálások kezdőpontja tetszőlegesen kijelölhető, továbbá  $\partial T_0$  görbén az óramutató járásával ellentétes, a  $\partial T_i$  ( $i=1, 2, \dots, q$ ) görbéken pedig az óramutató járásával megegyező értelemben történik az integrálás.  $C_1, C_2, \dots, C_q$  az integrálási állandókat jelölik.

A (2.8), (2.9) és (3.6), (3.7) formulák kombinálásával kapjuk a (3.11), (3.12) egyenleteket:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \frac{\partial U}{\partial y}, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G} \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (3.12)$$

Az elmozdulásmező egyértékűségéből következik, hogy a  $T$  tartományban futó bármely zárt  $g$  görbét tekintve [2]:

$$\int_g \left( \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right) = \frac{1}{G} \int_g \left( \frac{\partial U}{\partial y} dx - \frac{\partial U}{\partial x} dy \right) = 0. \quad (3.13)$$

Ez utóbbi feltétel biztosan teljesül, ha

$$\Delta U = 0 \quad (x, y) \in T, \quad (3.14)$$

$$\int_{\partial T_i} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0, \quad (3.15)$$

( $i=1, 2, \dots$ )

egyenletek fennállnak. A (3.14) egyenletet a kompatibilitás lokális, a (3.15) egyenletrendszer egyenletei pedig a kompatibilitás úgynevezett nagybani feltételeit fejezik ki a vizsgált rugalmasságtani problémánál.

Az eddigi eredmények az alábbiakban összegezhetők: Zérus eredőjű tengely irányban nem változó tengelyirányú megoszló erőrendszerrel terhelt prizmatikus rúd

rugalmasságtani feladata a következő *Dirichlet* típusú kerületérték problémára vezethető vissza.

$$\Delta U = 0 \quad (x, y) \in T, \quad (3.16)$$

$$U = B_0(x, y) \quad (x, y) \in \partial T_0, \quad (3.17)$$

$$U = B_k(x, y) + C_k \quad (x, y) \in \partial T_k, \quad (3.18)$$

$$\int_{\partial T_k} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0, \quad (3.19)$$

$$(k = 1, 2, \dots, q).$$

#### 4. Az igénybevételek és a feszültségfüggvény kapcsolata

Az  $U = U(x, y)$  feszültségfüggvény és az  $\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y$  nyíróerő kapcsolatát az

$$\mathbf{F} = \int_T (\nabla U \times \mathbf{e}_z) dT = - \int_{\partial T} U \mathbf{e}_s ds \quad (4.1)$$

formula fejezi ki. A fenti összefüggés és az

$$U \mathbf{e} = U \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d}{ds} (U\mathbf{R}) - \mathbf{R} \frac{\partial U}{\partial s} =$$

$$= \frac{d}{ds} (U\mathbf{R}) - \mathbf{R} f(s) \quad (4.2)$$

azonosság felhasználásával nyerjük a nyíróerő végleges értékét:

$$\mathbf{F} = \int_{\partial T} f(s) \mathbf{R} ds. \quad (4.2)$$

A rúd  $A_p$  palást felületén működő terhelés  $xyz$  koordináta-rendszer kezdőpontjára számolt  $\mathbf{M}_0$  nyomatéka az alábbi (1. ábra):

$$\mathbf{M}_0 = \int_{A_p} \mathbf{r} \times f(s) \mathbf{e}_z dA = l \left( \int_{\partial T} \mathbf{R} f(s) ds \right) \times \mathbf{e}_z$$

$$= l \mathbf{F} \times \mathbf{e}_z. \quad (4.3)$$

A (4.3) egyenletből igen fontos következtetés vonható le: Ha a tengely irányú terhelés egyensúlyi erőrendszer, akkor a rúd keresztmetszeteinek igénybevétele tiszta csavarás, annak ellenére, hogy a keresztmetszet nem fordul el, hiszen  $u = v = 0$  a rúd minden



pontjában. A csavarónyomaték a következő kapcsolatba hozható az  $U = U(x, y)$  feszültségfüggvénnyel:

$$M = - \int_T \mathbf{R} \cdot \nabla U dT = 2 \int_T U dT - \int_{\partial T} \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} U ds. \quad (4.4)$$

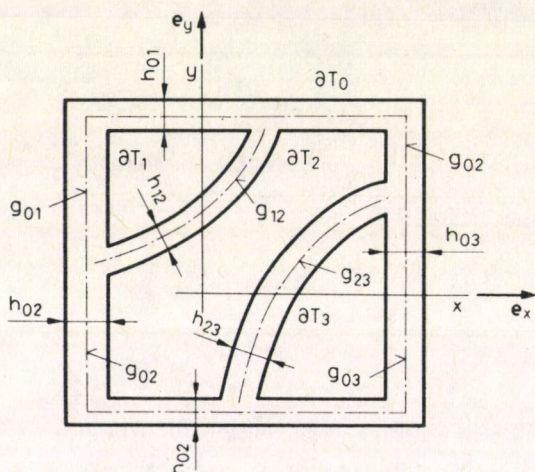
A (4.4) formula még felírható az

$$M = 2 \left( \int_T U dT + \sum_{i=1}^q C_i T_i \right) - \sum_{i=1}^q \int_{\partial T_i} \mathbf{n} \cdot \mathbf{R} B_i ds \quad (4.5)$$

alakban is.

### 5. Közelítő megoldás, vékonyfalú zárt keresztmetszetű prizmatikus rúdra

A 3. ábra egy vékonyfalú többszörösen összefüggő keresztmetszetű prizmatikus rudat szemléltet. A többszörösen összefüggő keresztmetszet zárt szelvények egymáshoz való csatolásával alakítható ki. A tanulmány fejtegetései nem vonatkoznak a 4. ábrán szemléltetett esetre, amikor a keresztmetszet nyílt szelvényeket is tartalmaz. A



3. ábra. Vékonyfalú zárt keresztmetszet

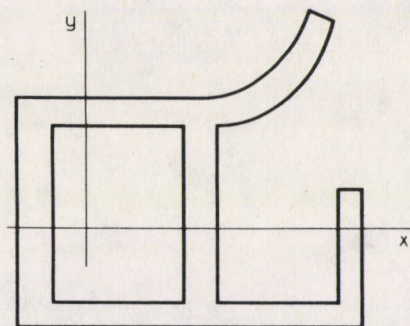
vékonyfalú zárt keresztmetszet fontos jellemzője a keresztmetszet középgörbéje. A középgörbe normálisán mindkét irányban felmérve a  $h$  szelvény vastagság felét a keresztmetszet határoló görbéinek pontjait nyerjük (6. ábra). A vékonyfalú szelvény középgörbéjét az 5. ábra szemlélteti. A keresztmetszet  $A_k$  mezejét a középgörbe  $g_k$  zárt szakasza határolja (6. ábra)

$$g_k = g_{0k} + \sum_l g_{lk}.$$

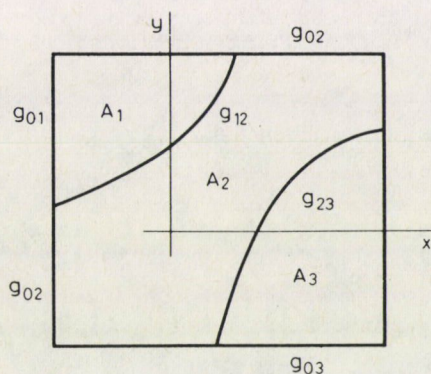


Az  $A_k$  és  $A_j$  mezőket a középgörbe  $g_{jk}$  szakasza választja el. Az  $A_k$  mező „szabad” peremszakasza a középgörbe  $g_{0k}$  szakasza.

A közelítő megoldással kapcsolatos fontosabb feltevéseket az alábbiakban tudjuk összegezni:



4. ábra. Vékonyfalú keresztmetszet



5. ábra. Vékonyfalú szelvény középgörbéje

1.  $U = U(x, y)$  a szelvény vastagsága mentén lineárisan változik.

$$2. \quad \tau_{sz} = \tau_{sz}(s) = -\frac{\partial U}{\partial n}, \quad (5.1)$$

$$\tau_{nz} = \tau_{nz}(s, \zeta) = \frac{1}{1 + \kappa\zeta} \frac{\partial U}{\partial s} \ll \tau_{sz}, \quad (5.2)$$

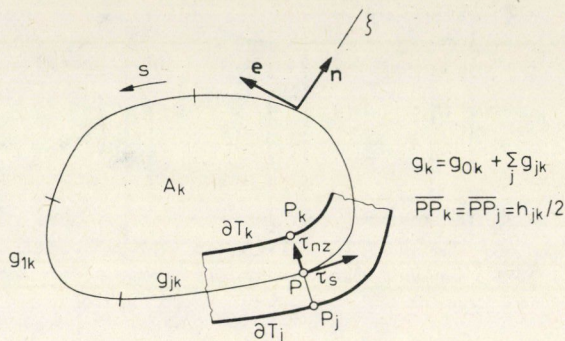
$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{U_j(s) - U_k(s)}{h_{jk}(s)}, \quad (5.3)$$

$$1 + \kappa\zeta \cong 1 \quad -h_{jk}|2 \leq \zeta \leq h_{jk}|2. \quad (5.4)$$



A felírt formulákban (6. ábra):

- $s$  a  $g_k$  görbe mentén mért ívkoordináta,
- $\kappa$  a  $g_k$  görbe  $T$  pontbeli görbülete,
- $\zeta$  a  $g_k$  görbe  $\mathbf{n}$  normálisa mentén mért koordináta,
- $U_j$  az  $U(x, y)$  függvény értéke a  $P_j$  pontban,
- $U_k$  az  $U(x, y)$  függvény értéke a  $P_k$  pontban.



6. ábra. Egy mező szemléltetése

3. A (3.19) kompatibilitási feltételből kifolyólag a középgörbe bármely zárt  $g$  görbe szakaszát tekintve

$$\int_g \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0. \quad (5.5)$$

A (3.17), (3.18) statikai peremfeltételekből következik, hogy  $U_k = U_k(s)$  és  $U_j = U_j(s)$  ismert értékű.

Könnyen kimutatható, hogy az (5.5) kompatibilitási feltétel biztosan teljesül, ha bármely  $A_k$  mezőt véve

$$\int_{g_k} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0, \quad (5.6)$$

$(k = 1, 2, \dots, q).$

A (3.17), (3.18), (5.3), (5.6) egyenletek kombinálásával az alábbi lineáris egyenletrendszert tudjuk levezetni a feszültségfüggvényt meghatározó  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ) állandókra:

$$-a_{0k} C_k + \sum_j a_{jk} (C_j - C_k) = -b_k, \quad (5.7)$$

$(k = 1, 2, \dots, q).$

A (39) egyenletrendszerben

$$a_{0k} = \int_{g_{0k}} \frac{1}{h_{0k}} ds, \quad (5.8)$$

$$a_{jk} = \int_{g_{jk}} \frac{1}{h_{jk}} ds, \quad (5.9)$$

$$b_k = \int_{g_{0k}} \frac{B_0 - B_k}{h_{0k}} ds + \sum_j \int_{g_{jk}} \frac{B_j - B_k}{h_{jk}} ds. \quad (5.10)$$

Az (5.10) lineáris egyenletrendszer megoldásából meghatározott  $C_1, C_2 \dots C_q$  állandók ismeretében a  $\tau_{sz}$  csúsztató feszültséget közvetlenül megkapjuk a

$$\tau_{sz} = \frac{C_k - C_j}{h_{jk}} + \frac{B_k(s) - B_j(s)}{h_{jk}} \quad (5.11)$$

formulából (6. ábra).

## 6. Példák

P1. A 7. ábra egy négyzet keresztmetszetű prizmatikus rudat szemléltet. A rúd  $y=2a$  koordinátával kijelölt felső lapján szakaszonként állandó sűrűségű felületi terhelés működik, vagyis

$$p_z = -f \quad y=2a \quad 0 \leq x < a, \quad (6.1)$$

$$p_z = f \quad y=2a \quad a < x \leq 2a, \quad (6.2)$$

( $f$  = állandó).

A rúdpalást felületének többi része terheletlen. A megoldandó kerületérték feladat jelen esetben az alábbi:

$$\Delta U = 0 \quad 0 < x < 2a \quad 0 < y < 2a, \quad (6.3)$$

$$U = 0 \quad x = 0 \quad 0 \leq y \leq 2a, \quad (6.4)$$

$$U = 0 \quad x = 2a \quad 0 \leq y \leq 2a, \quad (6.5)$$

$$U = 0 \quad 0 \leq x \leq 2a \quad y = 0, \quad (6.6)$$

$$U = fx \quad 0 \leq x < a \quad y = 2a, \quad (6.7)$$

$$U = f(2a - x) \quad a \leq x \leq 2a \quad y = 2a. \quad (6.8)$$

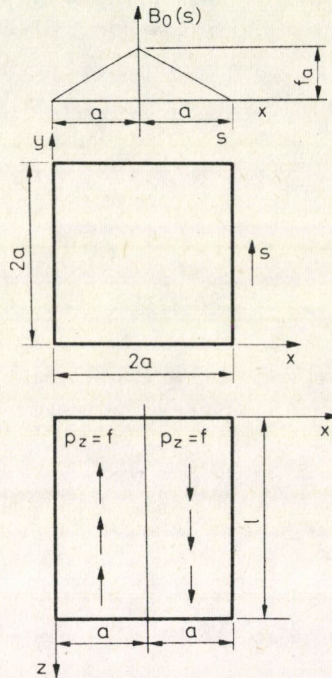


A változók szétválasztásának jól ismert módszerét alkalmazva közvetlenül megkapjuk a (6.3), (6.4), (6.5), . . . (6.8) egyenletek által kijelölt kerületérték feladat megoldását zárt alakban:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \frac{(2k-1)\pi}{2a} x \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2a} y, \quad (6.9)$$

$$D_k = \frac{16fa}{\pi^2} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \frac{1}{\operatorname{sh}(2k-1)\pi}, \quad (6.10)$$

$$(k=1, 2, \dots).$$



7. ábra. Négyzet keresztmetszetű prizmatikus rúd

A keresztmetszet síkján megoszló csúsztató feszültségek pedig a következő formulákból számíthatók:

$$\tau_{xz} = \sum_{k=1}^{\infty} E_k \sin \frac{(2k-1)\pi}{2a} x \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi}{2a} y, \quad (6.11)$$

$$\tau_{yz} = - \sum_{k=1}^{\infty} E_k \cos \frac{(2k-1)\pi}{2a} x \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2a} y \quad (6.12)$$



$$E_k = \frac{8f (-1)^k}{\pi (2k-1) \operatorname{sh}(2k-1)\pi}, \quad (6.13)$$

$$(k=1, 2, \dots).$$

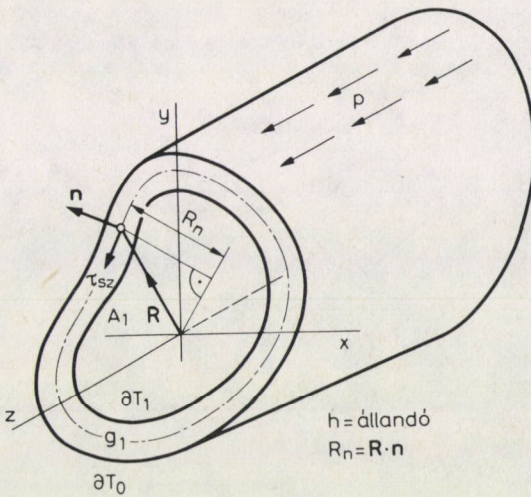
A keresztmetszetet terhelő nyírőerő koordinátáira a (4.2) formula alkalmazásával az

$$F_x = fa^2, \quad F_y = 0 \quad (6.14), \quad (6.15)$$

eredményeket nyerjük.

A keresztmetszetet terhelő csavarónyomatékot pedig a (4.5) formulából célszerű számolni:

$$M = \frac{256fa^3}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)} \left( \frac{1}{\operatorname{th}(2k-1)\pi} - \frac{1}{\operatorname{sh}(2k-1)\pi} \right). \quad (6.16)$$



8. ábra. Egyvezős keresztmetszet

P2. A 8. ábra egyvezős vékonyfalú zárt keresztmetszetű prizmatikus rudat szemléltet. A rúd külső palástján  $p_z = f(s)$  sűrűségű, tengely irányban nem változó, zérus eredőjű erőrendszer működik:

$$\int_{\partial T_0} f(s)ds \cong \int_{g_1} f(s)ds = 0 \quad (6.17)$$

A (5.10) egyenletrendszert jelen feladatra vonatkoztatva írhatjuk, hogy

$$C_1 = \frac{1}{l_1} \int_{g_1} B_0(s)ds, \quad (6.18)$$

$$l_1 = \int_{g_1} ds \quad (6.19)$$



feltéve, hogy a szelvény  $h$  vastagsága nem változik. A (6.18) formulában szereplő  $B_0 = B_0(s)$  függvény értéke a

$$B_0(s) = \int_0^s f(\sigma) d\sigma \quad (6.20)$$

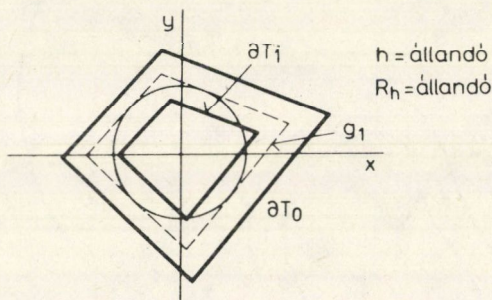
összefüggés alapján határozható meg. A keresztmetszet

$$\mathbf{F} = \int_{g_1} \mathbf{R} f(s) ds \quad (6.21)$$

formulából kiszámítható nyíróerő terheli. Az  $M$  csavarónyomatékot pedig az

$$M = \int_{g_1} R_n \tau_{sz} h ds \quad (R_n = \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) \quad (6.22)$$

formula alapján célszerű számolni.



9. ábra.  $R_n = \text{állandó}$  tulajdonságú keresztmetszet

A (6.22) és a

$$\tau_{sz} = \frac{C_1 - B_0(s)}{h} \quad (6.23)$$

formula kombinálásával nyerjük a (6.24) formulát:

$$M = 2C_1 \bar{T}_1 - \int_{g_1} R_n B_0(s) ds. \quad (6.24)$$

A fenti formulában

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{2} \int_{g_1} R_n ds \quad (6.25)$$

a  $g_1$  zárt görbe belsejének területe.

A (6.28) formula a (6.12) egyenlet felhasználásával átalakító az alábbi alakba:

$$M = \frac{2\bar{T}_1}{l_1} \int_{g_1} B_0(s) ds - \int_{g_1} R_n B_0 ds. \quad (6.25)$$



Tekintsünk olyan keresztmetszetet, melynél  $R_n(s) = \text{állandó}$ . Ilyen keresztmetszetre példát a 9. ábra mutat. Ez esetben nyilván

$$R_n = \frac{2\bar{T}_1}{l_1}. \quad (6.26)$$

A (6.25) és (6.25) kombinálásával azt kapjuk, hogy

$$M = 0 \quad (6.27)$$

függetlenül attól, hogy a tengelyirányú terhelés egyensúlyi-e vagy sem.

### 7. Egy megjegyzés

Az  $l$  hosszúságú rugalmas anyagú prizmatikus rúd *de Saint-Venant*-féle csavarási feladata a következő kerületérték problémára vezet:

$$\Delta\Phi = 0 \quad (x, y) \in T, \quad (7.1)$$

$$G \frac{\partial\Phi}{\partial n} = G\vartheta \frac{\partial}{\partial s} \frac{x^2 + y^2}{2} \quad (x, y) \in \partial T. \quad (7.2)$$

A (7.1), (7.2) egyenletekben  $\Phi = \Phi(x, y)$  a keresztmetszet öblösödési függvénye,  $\vartheta$  a relatív elcsavarodás szöge,  $G$  a rúd anyagának csúsztató rugalmasmodulusa. A (2.13), (2.14) egyenletek által kijelölt kerületérték feladatok alapján kimondható, hogyha a rúd palástját

$$p_z = f(x, y) = G\vartheta \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{x^2 + y^2}{2} \right) \quad (x, y) \in \partial T \quad (7.3)$$

formula által előírt tengelyirányú megoszló erőrendszerrel terheljük, akkor a keresztmetszet  $w = w(x, y)$  vetemedése a *de Saint-Venant*-féle csavarási feladathoz tartozó  $\Phi = \Phi(x, y)$  vetemedéssel egyezik meg.

### IRODALOM

1. FRANK—MISES: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei. Műszaki Könyvkiadó. Budapest 1966. 680—682 o.
2. А. И. ЛУРЬЕ: Теория упругости. Изд. Наука. Москва. 1970 стр 366—461.

**An elasticity problem of prismatical bars.** — The present study is concerned with homogeneous isotropic bars of linearly elastic material. Determination of the displacement and stress of the prismatical bars that are loaded with an axially distributed force system is reduced to, Dirichlet and Neuman's boundary value problems related to the Laplace equation. Results of this study are equally applicable to prismatic bars having cross sections either simply and multiply connected domain.

**Untersuchung der am Mantel, durch ein axiales Kräftesystem belasteten, prismatischen Stäbe.** — In der Studie werden homogene, isotrope, prismatische Stäbe aus linear-elastischem Baustoff behandelt. Die Ermittlung der an ihrem Mantel durch ein verteiltes Kräftesystem mit der in Achsrichtung resultierenden Null belasteten prismatischen Stäbe wird nach der partiellen Differentialgleichung von Laplace auf die Randwertaufgabe von Dirichlet zurückgeführt. Für die dünnwandigen, prismatischen Stäbe bei mehreren Feldern und geschlossenem Querschnitt wird auch ein Näherungsverfahren besprochen.

**Призматические стержни, нагруженные поверхностными осевыми силами.** — Предметом доклада являются однородные изотропные линейно-упругие призматические стержни. Определение напряженного состояния призматических стержней, нагрузкой которых является рахпределенная система сил в осевом направлении, где равнодействующей системой является нуль, сведено к краевой задаче Дирихле относительно частотных дифференциальных уравнений Лапласа. Показывается также и приближенный метод для решения задач призматических стержней многопольных тонкостенных с закрытой профилею.

# A MŰSZAKI MECHANIKAI TANSZÉKI KUTATÓCSOPORT MUNKÁJA

DR. PETRASOVITS GÉZA, A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

E tanulmány a kutatócsoport tevékenységi keretének ismertetése után áttekintést ad a kutatási eredményekről, különös tekintettel azok gyakorlati alkalmazására. Részletesen tárgyalja a nemzetközi kapcsolatok helyzetét és alakulását, befejezésül pedig a kutatás eredményességét segítő néhány kérdést érint.

## A kutatócsoport tevékenységének keretei

A négyévenként rendszeresen megszervezett tudományos ülésszak jó lehetőséget ad a kutatócsoport munkájának, eredményeinek, a hazai és a nemzetközi szakmai-tudományos közéletben végzett tevékenységének áttekintésére, valamint arra, hogy fontosabb teendőinkről is szóljunk.

Jól ismert a műszaki tudományokkal szemben támasztott az az igény, hogy közvetve vagy közvetlenül segítse a műszaki fejlődést és járuljon hozzá a gazdasági feladatok jobb megoldásához. A kutatócsoportunk kollektívája ennek szellemében választja ki kutatási témáit és végzi munkáját.

Ennek érdekében alapvető feladatunknak tekintjük, hogy

- a szilárd testek mechanikáját elméleti és kísérleti kutatásokon alapuló újabb eredményekkel továbbfejlesszük;
- a saját és a külföldi elméleti és kísérleti vizsgálatok eredményeire támaszkodva a gyakorlatban alkalmazható számítási módszereket dolgozzunk ki és működünk közre ezen eljárások bevezetésében,
- kezdeményezzük a hasznosítható kutatási eredményeknek műszaki ajánlásokba, irányelvekbe, előírásokba foglalását;
- előadások, szimpozionok rendezésével segítsük elő szakterületünk fontosabb új tudományos eredményeinek hazai elterjesztését, a tudományos közgondolkodás fejlődését,
- tevékenyen működünk közre szakterületünk nemzetközi tudományos életében, mint például a jelentősebb külföldi konferenciákon tanulmányokkal, előadások tartásával, valamint a nemzetközi tudományos egyesületek bizottságai, vezető testületei munkájában való aktív részvétellel.

Fentiekén kívül igen fontos, hogy jó munkakapcsolatot alakítsunk ki szakterületünk nemzetközileg elismert külföldi kutatóhelyeivel, illetve vezető szakembereivel.

Prof. Dr. Petrasovits Géza, az MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Kutatócsoportjának vezetője, Budapest, 1026, Tüske u. 5.

Az MTA Műszaki Mechanikai Kutatócsoport 1982. évi október 7–8-i III. Tudományos ülésszakának megnyitó előadása.



Ezek a kapcsolatok hozzájárulnak saját eredményeink nemzetközi megismertetéséhez, valamint a tehetséges kutatóink szakmai fejlődéséhez.

A kutatócsoportunk elérkezett arra a szintre, amikor a kutatási témák kidolgozásakor egyre gyakrabban tűzhetjük ki célul olyan eredmények elérését, amelyeket a szakterület nemzetközi színvonalán állók is újaknak, illetve újabb gondolatokat hordozónak tekintenek.

További igen fontos feladatunk, hogy a kutatási eredmények mellett igényes ipari megbízások elvégzésében való részvételünkkel közvetlenül is nyújtsunk támogatást az élenjáró gyakorlatnak és eredményesen működünk közre nagy jelentőségű népgazdasági feladatok műszakilag helyes megalapozásában, illetve megvalósításában.

Itt kell megemlíteni, hogy a mechanikai kutatási eredmények népgazdasági hasznosítása több feltétel egyidejű teljesülése esetén biztosítható, amely már a témaválasztáskor megkezdődik. Ekkor kell megvizsgálni, hogy a kutatás eredményei hazai adottságaink mellett hol és hogyan alkalmazhatók és milyen kapcsolatban vannak a népgazdaság műszaki fejlesztési irányjaival.

Műszaki tudományos eredményeknek ugyanis azok tekinthetők, amelyek társadalmi hasznossága népgazdasági feladatok jobb megoldásában, tudományos eredményt tartalmazó szabadalomban, tudományos fokozatban, tanulmányokban, illetve a konferenciákon kellő elismerést kiváltó előadásokban realizálódik.

Kutatócsoportunk a Budapesti Műszaki Egyetem

Acélszerkezetek,

Építőmérnökkari Mechanika,

Geotechnika,

Gépészkarri Mechanika,

Szilárdságtani és Tartószerkezeti,

Vasbetonszerkezetek,

Villamosmérnökkari Műszaki Mechanika

tanszékei kutatómunkájának ad megfelelő szervezeti keretet. A kutatócsoportban 66 fő akadémiai állományú dolgozik, amelyből 40 egyetemi végzettségű.

A négy tudományos főmunkatárs és 29 tudományos munkatárs közül háromnak három, nyolcnak pedig két állami nyelvvizsgálója van.

Kandidátusi fokozattal öt kutató rendelkezik, további 15 kutató pedig egyetemi doktori címet szerzett.

A kutatásban részt vevő oktatók szerepe meghatározó. Különösen kiemelkedik a kutatócsoporthoz tartozó tanszékekről az MTA két rendes tagjának, egy levelező tagjának, hat akadémiai doktornak, valamint kilenc kandidátusnak munkája. Ezenkívül még az oktatók és más egyetemi állományúak nagyobb csoportja vesz részt rendszeresen és igen eredményesen a kutatásban.

A kutatásban részt vevő oktatóknak az új ismeretek szerzésén, valamint az elért kutatási eredményeik gyakorlati alkalmazásán túl lehetőségük van arra is, hogy tudományos eredményeiket oktatómunkájukban is felhasználják. Így nemcsak a kész

kutatási eredményeket tudják közölni a hallgatókkal, hanem a feladat-megfogalmazástól a végrehajtáson keresztül jutva el a megoldásig, eredményesebben segíthetik a hallgatók önálló gondolkodásának, kombinációs készségnek fejlődését.

A tevékenységünk kereteiről szólva utalni kell arra is, hogy a kutatás anyagi támogatásának intenzitása kutatócsoportunknál az elmúlt négy évben csökkent. A műszerpark korszerűsítése az elkövetkező néhány évben nagyobb gondot jelent majd és ez komoly erőfeszítést kíván mindannyiunktól.

### **A kutatási eredmények és gyakorlati alkalmazásai**

A kutatás nálunk 13 átfogó téma köré csoportosítva folyik. A feladatok megfogalmazásakor figyelembe vettük a témák jellegét, adottságainkat, valamint a valós társadalmi igényt is. Ugyanis nemcsak az igaz, hogy „a ma tudománya a holnap technikája”, hanem legalább annyira igaz „a ma technikája a holnap tudománya” állítás is, mivel annyi problémát és megoldandó feladatot vet fel egy-egy új szerkezet, vagy technológiai eljárás kifejlesztése és ezek működési mechanizmusának tisztázása és igazolása, amely a holnap kutatójának is jelentős tennivalót hagy. Ez a kettős szemlélet érvényesül a kutatócsoport témaválasztásában is.

A témák egyik csoportjánál a hangsúly az elvi-elméleti kutatáson van, a másikon pedig a kutatás az összetett szerkezetek, illetve szerkezeti elemek viselkedését modellező kísérleti vizsgálatokra támaszkodva folyik.

Új vonása a nálunk folyó kutatásnak, hogy az utóbbi években nőtt az átfogóbb témák aránya és a kérdések megoldását több oldalról közelítő team-jellegű munka. Megemlítendő, hogy az elméleti kutatást végzők közül mind többen keresik eredményeik gyakorlati alkalmazásának területeit, míg az eredményeket elsősorban a hasznosíthatóság szempontjából értékelők az elméleti kutatásokra fordítanak több figyelmet. Ez utóbbiak változatlanul a kísérleti vizsgálatokkal alátámasztott, gyakorlatban alkalmazható szerkezeti megoldások, méretezési eljárások, illetve numerikus módszerek kidolgozását tekintik elsődleges céljuknak.

Ezt a folyamatot tükrözi a III. Tudományos Ülésszakunk kiadványának 6 átfogó tanulmánya és az ülésszakon szereplő 31 előadás is.

Megemlítendő, hogy a hosszú évek óta tartó jó munkakapcsolat alapján kértük fel a Miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszék kutató kollektíváját, hogy közöljenek két tanulmányt az ülésszak kiadványában és vegyenek részt az ülésszak munkájában.

A következőkben az elért kutatási eredményeink gyakorlati alkalmazásáról, ill. alkalmazhatóságáról szólunk:

„Fémszerkezetek méretezési kérdései” c. témában a legfontosabb gyakorlati eredmény, hogy a képlékeny méretezés, valamint a képlékeny lemezhorpadás vizsgálat területén végzett többéves kutatómunkára támaszkodva elkészült a Műszaki Irányelv: Acélszerkezetek képlékeny méretezése (MI 04188). Az előírás lehetővé teszi

többszörös gerendák, keretek méretezését a képlékenység elvének figyelembevételével. Ugyancsak e téma keretében került kidolgozásra a hidak hegesztett elemeinek egységes méretezés elmélete, mely segíti a tervező munkáját.

„Talajok fizikai tulajdonságai” c. témában kapott eredmények magyar és idegen nyelvű könyvekben, publikációkban, egyetemi doktori értekezésben kerültek alkalmazásra, melyek igen jelentős és jó nemzetközi visszhangot keltettek.

„A talaj és teherátadó szerkezet kölcsönhatásának kutatása” c. témában elért eredmények közül jelentősek a kombinált talajmodellek vizsgálata terén elért eredmények. E kutatás alapján kidolgozott számítási módszer gyakorlati alkalmazása a népgazdaságnak ez ideig több tízmillió forint megtakarítást eredményezett. Ezen eredmények felhasználásával elkészült az „Épületek sicalapozásának tervezése kombinált talajmodellen alapuló módszerrel” (MI 04168) c. Műszaki irányelv.

Nemzetközileg is jó visszhangot kapott az injektált horgonyok terhelés alatti viselkedésével kapcsolatos kutatás. A témavezetőt felkérték a Nemzetközi Feszítettbeton Szövetség (FIP) keretében működő „A talajhorgonyok tervezése és építése” című nemzetközi munkabizottságban való részvételre. A munkabizottsági ajánlás a FIP külön kiadványaként a fenti cím alatt megjelent.

„Rugalmas állapotú tartószerkezetek statikai és dinamikai vizsgálata” c. témában programokat és programrendszereket dolgoztunk ki a rúdszerkezetek lassú alakváltozásának, illetve nagy elmozdulásokkal járó állapotváltozásainak számítására. Részletes elméletet és programokat dolgoztunk ki a lemezeknek és lemezműveknek a véges sávok módszerével történő vizsgálatára, továbbá csarnokvázak és raktári állványok automatikus tervezésére.

„Képlékeny állapotú tartószerkezetek statikai és dinamikai vizsgálata” c. téma keretében programrendszert készítettünk acél keretszerkezetek rugalmas-képlékeny vizsgálatára és ennek során eljárást és algoritmust dolgoztunk ki a rúdszerkezetek harmadrendű elmélet alapján elvégzendő rugalmas-képlékeny állapotváltozás-vizsgálatára. Behatóan foglalkoztunk az előregyártott panelvázak szerkezetek progresszív összeomlásával és a földrengés okozta lineáris és nem lineáris alakváltozásainak meghatározásával.

„Nem-lineáris kontinuumok alap- és alkalmazott mechanikai kérdései” c. témában több eredmény született. Ezek közül kiemelendő a képlékeny hullám vizsgálata alapján az anyagtörvény további pontosítása, számítási és mérési módszer kidolgozása, az izotróptest gyorsulás-hullám utáni viselkedése, anizotróppá válása. E téma keretében egy akadémiai doktori, két kandidátusi és két egyetemi doktori értekezés készült.

„Vasbetonszerkezetek viselkedésének leírására szolgáló számítási modellek fejlesztése” c. téma kutatási eredményei a hazai méretezési előírások korszerűsítésekor hasznosíthatók. Ugyancsak a tartószerkezetek tervezésében közvetlenül felhasználásra kerülnek azok az eredmények, melyeket a „Kedvező szerkezeti kialakítást szolgáló számítási módszerek kutatása” c. témában értek el.



Az „Elméleti és kísérleti kutatások a vasbetonépítés korszerű továbbfejlesztésére” c. témában a tervezésben felhasználható eredmények születtek a héjszerkezetek, valamint a feszített vasbeton tartók számításához. E témához kapcsolódik az „Elemekből összeállítható (változtatható) támaszközű üvegszálás poliészter héjiv” című kidolgozott és elfogadott szabadalom.

„A valószínűségelméleten alapuló méretezési móddal kapcsolatos kutatások” c. téma eredményei több magyar és KGST szabványba bedolgozásra kerültek.

„A lineárisan rugalmas kontinuum rendszerek . . .” c. témában megbízható eljárást dolgoztak ki a rezgésstanilag kritikus állapotok behatárolására olyan területekre is, amelynek számítással való meghatározására a lehetőség igen korlátozott volt.

Az elmúlt négy év kutatási eredményeinek áttekintése után röviden a kutatási témákhoz kapcsolódó és a tárgyalt időszakban megjelent publikációkról.

Magyarul 13; idegen nyelven 9 könyv jelent meg. Emellett a 122 magyar és 104 idegen nyelvű tanulmány is jól jelzi a kutatók és a kutatásban részt vevő oktatók igen eredményes munkáját. A könyvek a nemzetközi szakkörökben igen komoly elismerést arattak és ugyanez mondható el a tanulmányok többségéről is.

### Nemzetközi kapcsolataink

Kutatócsoportunk a nemzetközi kapcsolatok elég széles körű rendszerét alakította ki. A jelenlegi nemzetközi kapcsolataink igen jól és közvetlenül segítik kutatómunkánkat. A tartalmas kapcsolat, a gyors és folyamatos tájékozódás és tájékoztatás jó alapjául szolgál.

Az elmúlt években a nemzetközi tudományos kapcsolatainkat az jellemezte, hogy

- a külföldi kutatóhelyekkel a közvetlen együttműködés, a közös kutatások aránya növekedett. Igen jók azok a kétoldalú együttműködések, ahol a fenntartásukhoz fűződő érdek mindkét félnél közel azonos, vagy ahol a témavezetők között jó szakmai — személyi kapcsolat alakult ki. Ily módon lehetőség van kutatók küldésére nemzetközileg elismert kutatókhoz, illetve kutatóintézetekhez;
- a nemzetközi tudományos egyesületek munkájában aktívabban vettünk részt. Nyolc jelentős nemzetközi szervezet munkájában működtünk közre. Többen több alkalommal kaptak felkérést különböző nemzetközi munkabizottságok munkájában való részvételre, illetve a szervezet konferenciáin megtisztelő feladatok ellátására, és végül gyakran kaptunk meghívást külföldről előadások tartására, illetve tanulmányok kiküldésére.

A nemzetközi kapcsolatok érdemi fenntartásának anyagi következményei is vannak. A legutóbbi időben azonban elég gyakran az utazási költségeket sem tudják az illetékesek biztosítani, bár a kiutazáshoz igen jelentős tudományos érdek fűződne.

Külön és részletesebben kell szólni a szocialista országok mechanikai intézeteivel kialakított kapcsolatainkról.

A szocialista országok tudományos akadémiai mechanikai kutatóintézetek vezetői 1974 óta rendszeresen tájékoztatták egymást a kutatómunkáról.

Erre az együttműködésre alapozva a szocialista országok tudományos akadémiáinak főtitkárai, az 1979-ben megtartott tanácskozásukon felvették a „Gépek, szerkezetek és technológiai folyamatok mechanikájának tudományos alapjai” elnevezésű komplex problémát a sokoldalú együttműködési tervbe. A Problémabizottság munkájáért felelős a SZUTA Mechanikai Problémák Intézete (Moszkva), elnöke: A. Ju. Iszlinszkij akadémikus. A Problémabizottság tagjai egyben a Problémabizottság nemzeti tagozatainak az elnökei is (magyar részről Petrasovits Géza).

A Problémabizottságban nyolc témabizottság működik, amelyek mindegyike egy-egy téma koordinálását végzi.

A 2. téma: „Vékonyfalú és térbeli rúd-szerkezetek mechanikája” koordinátora a mi kutatócsoportunk.

A következő négy témacsoport munkájában veszünk részt:

1. téma: „Szilárd testek mechanikája és fizikája”
3. téma: „Szilárd testekből álló rendszerek dinamikája, szerkezetek rezgései és megbízhatósága, mechanikus rendszerek megbízhatósága és optimalizációja”
7. téma: „A mechanikában alkalmazott számítástechnikai módszerek”
8. téma: „Talajok és kőzetek mechanikája, valamint szerkezetek és alapok kölcsönhatásai”.

A Problémabizottság által koordinált munkákban a legelismertebb szovjet, lengyel, német, csehszlovák, bolgár, román, sőt újabban vietnami és kubai elméleti és alkalmazott mechanikai kutatóintézetek, illetve nemzetközileg elismert tudósok és kutatócsoportok vesznek részt. A sokoldalú együttműködésben való részvétel nyújtotta lehetőségek számunkra igen jelentősek és fontosak.

Az együttműködés hatékonysága növelésének egyik feltétele a közös kutatásokban való kölcsönös részvétel, amely a jelenleg számunkra biztosított MTA utaztatási keretek (szocialista) megemelését feltételezi és igényli. Figyelembe véve az elméleti és alkalmazott mechanikai kutatások igen magas színvonalát a partner szocialista országokban, célszerű és gazdaságos ezeknek a tőkés devizát nem igénylő lehetőségeknek az eddiginél jobb kihasználása.

A Problémabizottság II. ülését ez év májusában Frunzéban (Kirgiz SzSzk) tartotta, amelyhez tudományos ülészak kapcsolódott. A résztvevő 7 ország szakembereitől 15 összefoglaló és 73 szűkebb témájú előadás hangzott el. Az ülészakon 5 magyar előadó tartott előadást. Az előadásokat magas színvonalú vita követte.

A Problémabizottság mellett ugyancsak sokoldalú egyezmény alapján működik az „Uszpehi mehaniki” folyóirat, a lengyel tudományos akadémia kiadásában, nemzetközi szerkesztőséggel. Ez a rövid idő alatt elismert orosz–angol nyelvű, igen

magas színvonalú tudományos folyóirat megfelelő fóruma a Problémabizottság keretében folyó tudományos együttműködés eredményeinek is.

Említést érdemel a tudományos nemzetközi kapcsolatunknak egy sajátos formája. A Vietnami Tudományos Központ főtitkárának kérésére az MTA illetékes vezetői 1980-ban hozzájárultak ahhoz, hogy kutatócsoportunk Geotechnikai részlege a Tudományos Központ Hanoi Mechanikai Kutatóintézetében, a talajmechanikai kutatások megindítását egy laboratóriumi komplexum adományozásával segítse elő.

Részben új, illetve jelentős saját munkával felújított eszközökből és műszerekből néhány munkatársunkkal együtt összeállítottuk a fontosabb talajmechanikai vizsgálatok elvégzésére alkalmas laboratóriumot, majd a berendezéseket a helyszínen szállítottuk és két munkatársunk a helyszínen 1981 novemberében a laboratóriumot üzembe helyezte, valamint a kezelőszemélyzetet betanította. A laboratórium vietnami vezetője jelenleg egyéves továbbképzésen tanszékünkön dolgozik. A laboratórium felszereltségi szintje az átlagos európai szintet eléri, és az adományt a laboratórium átadásakor a Vietnami Tudományos Központ elnöke és főtitkára igen magasra értékelt.

### **További feladataink**

A műszaki mechanika területén a kutatás célja a gyakorlatot gazdagító újabb eredmények elérése. Jelentős eredménynek a gyakorlatban közvetve vagy közvetlenül alkalmazható elméleti és kísérleti eredmények tekinthetők.

Ezért a témák gondos kiválasztását, a feladat pontos megfogalmazását, a feladat megoldására alkalmas módszer, ill. módszerek helyes megválasztását, a szükséges és a rendelkezésre álló szellemi és anyagi erők helyes felmérését tekintjük a sikeres és hatékony kutatás legfontosabb feltételeinek. Ez a munka a témavezetőkre hárul. A jelenlegi helyzetünkben, amikor nő a népgazdaság igénye a műszaki kutatással, illetve eredményességével szemben, a rendelkezésre álló szellemi és anyagi lehetőségeinket ennek megfelelően kell hasznosítani. Ez azonban nem jelentheti, hogy ad hoc-szerűen felvetődő rövid lejáratú részfeladatok megoldására fordítsuk kutatói kapacitásunkat.

A kutatócsoport állományába tartozók főfeladata a hosszabb távra szóló, nagy fontosságú problémák kutatása, amelyhez szervesen kapcsolódik még oktatási és ipari megbízásból adódó feladat.

Az ország jelenlegi gazdasági helyzetében különösen aktuális a két évvel ezelőtt létrehozott Műszerfejlesztési Bizottságunk munkájának intenzívebbé tétele. E bizottság munkájában részt vesznek mindazok, akik a műszeres méréseket, illetve a kutatásainkhoz szükséges korszerű mérés technikai módszerek, illetve rendszerek kialakítását végzik. Közülük többen a közelmúltban, a kutatásainkhoz szükséges egyes célműszereket saját maguk fejlesztették ki. Indokolt, hogy a jövőben az ilyen jellegű tevékenységet az eddiginél jobban segítsük és elismerjük.

Végezetül kutatóink felkészültségéről és továbbfejlődésükről néhány szóban.



Kutatóink idegen nyelvi ismerete jó. Mindannyian jól tudják, hogy az mind a nemzetközi szakirodalom eredményes tanulmányozásának, mind a nemzetközi kapcsolataik alakításának fontos feltétele.

A meglévő jó szakmai felkészültség a kutatóink egy részénél sem tanulmányokban, sem tudományos fokozatban nem tükröződik kellőképpen. Néhány kutatónk eredményei azt mutatják, hogy ők a közeljövőben feljebb lépnek a tudományos fokozatok lépcsőjén. A jelentősebb eredményeket elérő kutatóinknak az átlagosnál több támogatást adtunk az elmúlt években és így szándékozunk tenni a jövőben is.

Befejezésül köszönetet kell mondanunk

- a témavezetőknek az éveken át végzett jelentős munkájukért, akik sok esetben az elért eredmények kovácsai voltak;
- az ülészaki kiadvány tanulmányai szerzőinek és az ülészaki előadóknak eredményes munkájukért, valamint
- azoknak, akik az ülészak előkészítésének és lebonyolításának szerteágazó munkájában közreműködtek.

**The research work of the Research Group for Applied Mechanics.** — The paper deals with the range of action of the Research Group, and gives a review on the results of the research work with special respect to the practical applications. The development of international relations of the Research Group and finally the factors of its efficiency are discussed.

**Über die Tätigkeit der Arbeitsgruppe für Technische Mechanik.** — Der Aufsatz befaßt sich mit der Tätigkeit der Forschungsgruppe. Zuerst wird ein Überblick von den Versuchsergebnissen mit spezieller Rücksicht auf die praktischen Anwendungen gegeben. Ausführlich beschäftigt sich das Referat mit der Lage und Entwicklung der internationalen Verbindungen, endlich berührt es einige Fragen der Wirksamkeit der Forschungsarbeiten.

# ÉPÍTÉS-, ÉPÍTÉSZETTUDOMÁNY

A Magyar Tudományos Akadémia  
Műszaki Tudományok Osztályának közleményei

*Szerkeszti: Major Máté*

Az Osztály keretében működő, építészeti és építőmérnöki témákkal foglalkozó bizottságok tudományterületeit fogja össze: az építészettörténet és -elmélet, az építészettudomány, a talaj- és kőzetmechanika, a tartószerkezetek mechanikája, továbbá a településtudomány témaköreiből közöl tanulmányokat.

*Alapítva: 1957*

*Magyar nyelven*

*Megjelenik évente 1 kötet, 4 füzetben*

*Évi előfizetési díja: 140,- Ft*

*Előfizethető az Akadémiai Kiadónál*

*Budapest, Alkotmány utca 21. 1054*

*Pénzforgalmi jelzőszám: 215-11488*

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Sándor István

A kézirat nyomdába érkezett: 1982. VI.17. Terjedelem: 22,40 (A/5) ív

---

83.10941 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György





100.— Ft

INDEX: 26.499  
ISSN 0027—5085

*Megjelent 1983. VI. 25.*