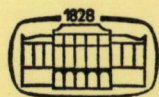


MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

59. KÖTET
1-4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1980

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, KÉZDI ÁRPÁD, PROHÁSZKA JÁNOS, VÁMOS TIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

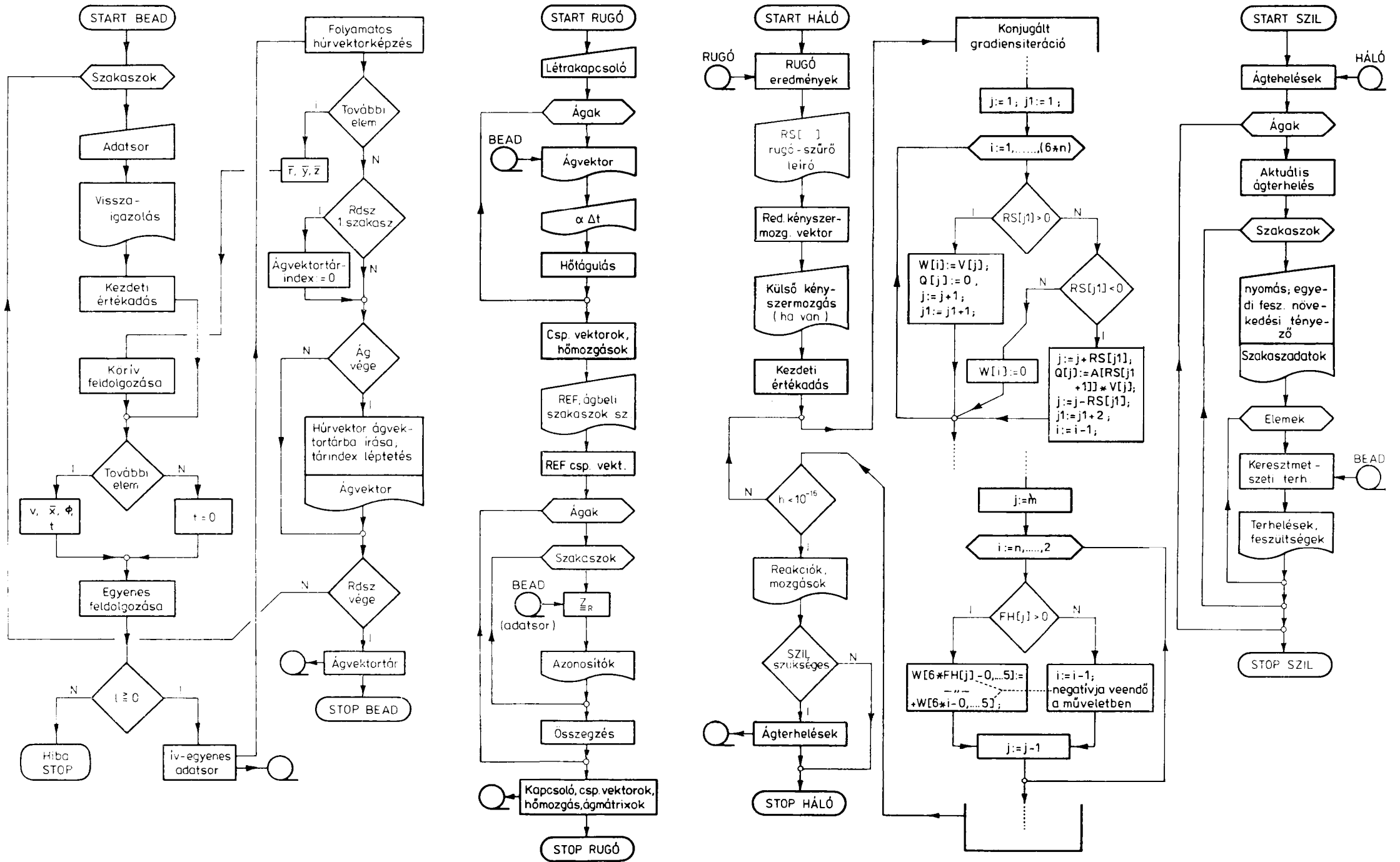
A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 100 Forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488). külföldi megrendelések a KULTURA Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.



10. ábra



WACŁAW OLSZAK

1902—1980



Szomorú hír adta tudtul, hogy Wacław OLSZAK, a varsói műegyetem professzora, a Mechanikai Tudományok Nemzetközi Központjának (CISM) rektora, a Magyar Tudományos Akadémia tiszteletbeli tagja 1980. december 8-án Udinében elhunyt.

Wacław OLSZAK 1902. október 24-én a kelet-sziléziai Karnovinában született. Mérnöki tanulmányait Bécsben, majd Párizsban végezte, de egyidejűleg komoly zenei tanulmányokat is folytatott, és mint hegedű virtuóz sikereket ért el. 1933-ban a bécsi, 1937-ben pedig a varsói egyetemen műszaki doktori címmel tüntették ki, majd 1934-ben a krakkói akadémián magántanári fokozatot szerzett. 1946-ben a krakkói, majd 1953-ban a varsói műegyetem professzorává nevezték ki.

1952-ben vezetője, majd igazgatója lett a Lengyel Tudományos Akadémia által alapított — lényegében véve általa életre hívott — varsói kontinuummechanikai kutatóintézetnek, ahol maga köré gyűjtötte tanítványait és szakmája legkiválóbbjait. Az általa irányított lelkes kutató gárda élén élénk tevékenységet fejtett ki a mechanikai tudományok eladdig kevésbé művelt területein, főleg a képlékenységtan terén. Ez a tevékenysége alapvető jelentőségű.

nek bizonyult és az általa vezetett intézetet „a képlékenységtan lengyel iskolája” néven világszerte ismertté tette.

Kutató tevékenysége színterét 1969-ben Udinébe helyezte át, ahol az azóta elhunyt Prof. Luigi SOBRERÓVAL karöltve az olasz és lengyel kormány hatékony támogatásának birtokában a mechanikai tudományok művelésére nemzetközi központot szervezett. Ez a központ — a CISM — Waclaw OLSZAK rektor irányítása és vezetése alatt rövid időn belül az elméleti és alkalmazott mechanika minden ágát felölelő világszerte elismert kutató intézménnyé fejlődött.

Prof. OLSZAK tudományos munkásságának eredményeit többszáz dolgozatban, számos értékes monográfiában tette közzé. Ezekkel a nagyrészt angol nyelvű kiadványokkal az újabb mechanikai tudományok alapvető forrásmunkáit teremtette meg. Bennük általános érvényű, olyan elméletet állított fel, amely figyelembe veszi az anyagok nemhomogén, anizotrop voltát, nem különben az időtényezőtől függő jelenségeket. Ezáltal a mérnöki gyakorlatban felmerülő számos olyan jelenség vált tárgyalhatóvá, amelyeknek számításal való nyomon követésére eladdig alig nyílt lehetőség.

Több tanulmánya jelent meg a magyar szaklapokban is. 1953-ban az *Acta Technica* hasábjain (53. kötet, 3—37. o.) a képlékenységtannak a mérnöki gyakorlat szempontjából fontosabb problémáit és azok megoldásmódját ismertette. Az *Acta Technica* egy másik számában (26. kötet, 55—77. o.), szerzőtársával A. SAWCZUKKAL, az ortotrop hengerhéjak határteherhírását tárgyalta különböző képlékenységi feltételek fennforgása esetében. Az *Acta Technica* jubileumi kötetében (50. kötet, 263—281) a csavarásra igénybe vett anizotrop rudakban keletkező derékfeszültségeknek a csavarószilárdságra gyakorolt hatását ismertette. A *Műszaki Tudomány* hasábjain (52. kötet, 353—370. o.) A. SAWCZUKKAL írt tanulmányában azokat az újszerű elméleteket tárgyalta, amelyek a klasszikus elmélettől eltérőleg nem feltételezik az anyagtulajdonosságokat lineárisnak és az időtényezőtől függetleneknek.

Élénk tevékenységet fejtett ki a mérnököközélet számos különböző területén. Tagja és alapítója volt több tudományos egyesületnek (RILEM, IASS, LUTAM, IVBH), előadóként vagy elnökként részt vett azok közel félszáz kongresszusán. Megindítója volt a Lengyel Tudományos Akadémia két folyóiratának és tevékenyen részt vállalt több nemzetközi folyóirat szerkesztő bizottságában.

Tudományos munkássága elismeréseként Waclaw OLSZAK professzort a Lengyel Tudományos Akadémia 1954-ben levelező tagjává, 1956-ban rendes tagjává, 1960-ban az elnökség tagjává választotta, a lengyel kormány pedig 1965-ben állami díjjal, 1966-ban annak első fokozatával jutalmazta.

1964-ben tiszteletbeli tagjává választotta a Magyar Tudományos Akadémia is, amellyel mindenkor szoros összeköttetést tartott fenn. Főként az Akadémia vendégeként tizenegy alkalommal fordult meg Magyarországon.

Az egyik nyarat is hazánkban, Balatonszemesen töltötte. Egyébként egyike volt azoknak a külföldi tudósoknak, akik a második világháború után először vették fel a kapcsolatot a hazai tudományos körökkel. Alaposan ismerte hazánk történetét és lelkesen ápolta a magyar—lengyel barátságot.

Legutóbb 1977-ben találkoztunk vele Budapesten, ahol „On Evaluation of New-Classical Yield Criteria” címen a műszaki egyetem Építőipari Laboratóriában tartott előadást, majd kerekasztal konferencia keretében meghallgatta és megjegyzésekkel kísérte a mechanikai tudományok hazai képviselőinek referátumait.

Akkor még nem sejtettük, hogy a kitűnő testi-lelki frissességnek örvendő életvidám tudós barátunkat Waclaw OLSZAK professzort többé nem üdvözölhetjük körünkben. Halálának híre őszintén megrendített mindannyiunkat, akik fájó emlékezéssel gondolunk vissza a körében eltöltött meghitt órákra, végtelenül szerény, szeretetre méltó személyére, a mechanikai tudományok nemzetközileg elismert fáradhatatlan kiváló művelőjére.

Emlékét szívünkbe zárjuk, nemes személyét követendő mintaképnek tekintjük.

Csonka Pál

Waclaw Olszak nevezetesebb művei

1. Prestressing Applied to Bound Columns, Gdansk 1947
2. Konstrukcje wstepnie sprezone. Penstwowe ustrojow sprezonych, Warszawa 1955
3. Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity. Symposium Warsaw 1958. Pergamon Press 1959 (mint szerkesztő)
4. Recent Trends in the Development of the Theory of Plasticity. Pergamon Press 1962 (társ-szerzők: Mráz, Z. és Perzyna, P.)
5. Theory of Prestressed Structures 1962 (társszerzőkkel)
6. Non-Classical Shell Problems. Proceedings, Symposium Warsaw 1962 (szerkesztőtárs: Sawczuk, A.)
7. Theory of Plasticity 1965 (szerzőtársakkal)
8. Inelastic Behaviour in Shells. Groningen, Nordhoff 1967 (szerzőtárs: Sawczuk, A.)
9. Micropolar Elasticity. Proceedings Symposium Udine, 1972 (szerkesztőtárs: Nowacki, W.)

WILLIBALD LICHTENHELDT

1901—1980



1980. november 1-én elhunyt Willibald LICHTENHELDT, a Drezdai Műszaki Egyetem nyugalmazott professzora, a Német Demokratikus Köztársaság Tudományos Akadémiájának rendes tagja. Halálával nagy veszteség érte a nemzetközi tudományos világot, mindenek előtt a mechanizmusok tudományát, amelynek világhírű és kiemelkedő tekintélyű tudósa volt.

Ez a veszteség bennünket is komolyan érint.

Az 1950-es évek elejére CSEBISEV, ASSZUR, ZSUKOVSKIJ, ARTOBOLEV-SZKIJ, illetve REULEAUX, BURMESTER, MOHR, ALT és sok más neves kutató munkássága nyomán — mintegy száz év alatt — lényegében véve kialakult és egységes tudománnyá fejlődött a síkbeli mechanizmusok elmélete.

Amikor hazánkban a mechanizmusok elmélete 1952—53-ban a gépészmérnöki oktatás kötelező tantárgya lett, nálunk a fentihez hasonló, elismert nevekkal fémjelzett hagyományok csaknem teljesen hiányoztak. Ezért mind az oktatás, mind a tudományos kutatás megszervezése, kialakítása számára jórészt a külföldi példákat kellett alapul vennünk. Az első magyar nyelvű mechanizmus-szakkönyv pl. Sz. N. KOZSEVNYIKOV „Mechanizmusok és gépek elmélete” c. oroszról magyarra fordított könyve volt 1952—53-ban.

Willibald LICHTENHELDT ez időben a Drezdai Műszaki Egyetem rendes tanára volt, az „Institut für Getriebelehre, Feinmechanik und Textilmaschinen”, vagyis az akkor összevontan működő mechanizmusok elmélete, finommechanika és textilgépek intézetének vezetőjeként. Igen szívesen vette a magyar szakemberek közeledését, akik elsősorban tanulni akartak tőle, és ki nem mondottan is a segítségét, tanácsait és bírálatát kérték saját munkájukhoz.

Az 1950-es évek végén jelentősen megélnékült a nemzetközi tudományos élet. A mechanizmusok területén színes és nagyon mozgalmas konferencia-sorozat vette kezdetét, amelybe nagyon sok európai ország, köztük hazánk is, bekapcsolódott. A németeknél a mechanizmus-konferenciáknak már hagyományai voltak, hiszen a világviszonylatban is első „Getriebetagung”-ot 1926-ban rendezték Drezdában. Ekkor még élt Ludwig BURMESTER, a konferenciát pedig Hermann ALT rendezte. LICHTENHELDT neve e másik kettőtől ma már elválaszthatatlan. BURMESTER az 1880-as években vetette meg egy azóta róla elnevezett tervező eljárás kristálytiszta geometriai alapjait, amelyet ő maga egyenesben vezető mechanizmusok szerkesztésére használt, és amelyről jóval később az 1920-as években ALT mutatta ki, hogy az sokkal általánosabb gép-tervezői feladatok megoldására is alkalmas. ALT, LICHTENHELDT és mások munkássága nyomán ma már közismert tény, hogy a kinematikai géptervezői feladatoknak igen széles köre létezik, amelyben ennek az eljárásnak a segítségével valamilyen előírt mozgást jó megközelítéssel megvalósító mechanizmusok konstruálhatók.

Az 1920-as években LICHTENHELDT mérnökiskolát (Ingenieurschule) végzett, konstruktőrként a szövőiparban tevékenykedett. Az ott felmerülő számos mozgástani feladat vezette el őt a Burmester—Alt-eljárás megismeréséhez és alkalmazásához. Világosan felismerte az eljárás és ennek nyomán ALT kezdeményezésének jelentőségét. 1931 és 1942 között hat egymást követő konferencián tartott előadást a szövőszékek hajtóműveinek, mechanizmusainak elméleti és gyakorlati problémáiról. Ezekkel a munkáival nagy tekintélyt szerzett magának a szakemberek körében.

33 éves korában határozta el, hogy gépészeti ismereteinek teljesebbé tétele végett megszerzi a gépészmérnöki diplomát. Tanulmányainak befejezésével követte mesterét, ALT professzort a berlini műszaki főiskolára, tanársegédként. Berlinben is igen élénk tudományos és oktatói munkát végzett. 1940-ben doktori címet szerzett „Einfache Konstruktionsverfahren zur Ermittlung der Abmessungen von Kurbelgetrieben” (Egyszerű szerkesztő eljárás forgattyús mechanizmusok méreteinek meghatározására) című dolgozatával. E munkáját igen nagy hazai és nemzetközi elismerés kísérte. A világ mechanizmus-szakirodalmát lapozva megállapíthatjuk, hogy ez az egyik legtöbbet idézett mű, amely máig megőrizte jelentőségét, mert egyszerű és jó alapokat teremt kedvező kiinduló megoldások keresésére, amelyeket a ma már rendel-

kezésre álló számítógépekkel más szempontok figyelembevételével is optimálni lehet.

1942-ben benyújtott habilitációs dolgozatában ismét a szövőgépek hajtómű problémáihoz tért vissza. Még ebben az évben professzori meghívást kapott a megüresedett drezdai mechanizmus-tanszékre.

Szerette és megértette az ifjúságot. Kiváló előadói képességei voltak s mindez érthetővé teszi, hogy miért lettek az előadásai olyan rendkívül népszerűek. A mechanizmusok elméletén kívül a finommechanika, a textiltégek és az ábrázoló geometria témakörében is tartott előadásokat. Mechanizmus előadásainak érett anyagát összefoglaló és nagyon gyorsan népszerűvé vált „Konstruktionslehre der Getriebe” (A mechanizmusok tervezésének elmélete) c. könyve 1961-ben jelent meg, és azóta újabb négy kibővített kiadást ért meg. Orosz nyelvre is lefordították.

Mintegy 80 tudományos dolgozata jelent meg. Tudományos érdemei elismerésül a Német Demokratikus Köztársaság Tudományos Akadémiája 1956-ban levelező, 1959-ben rendes tagjává választotta. Több állami kitüntetésben részesült. Így pl. 1962-ben nemzeti díjat kapott, 1978-ban „a nép kiváló tudósa” lett. Egyik legnagyobb büszkesége mégis az volt, hogy az NDK műszaki főiskoláin mindenütt az ő tanítványai — korábbi tanszéki munkatársai — töltik be a mechanizmus-tanszékeket s az ő szellemét ápolják tovább az oktatásban és kutatásban.

A második világháború óta a két német állam lényegében évenként felváltva rendez a mechanizmus-konferenciákat. Az 1950-es évek második felében ezek mindkét oldalon erősen nemzetközi jellegűvé váltak, híven tükrözve a tudományág nemzetközi bázisának jelentős kiszélesedését. A legelső külföldiek egyikeként az 1958-as drezdai konferencián TERPLÁN Zénó a magyarországi mechanizmus-oktatás és kutatás eredményeiről számolt be, LICHTENHELDT meghívásának téve eleget.

Ennek az előadásnak kedvező visszhangja és nemzetközi kapcsolataink további erősödése érlelték meg azt az elhatározásunkat, hogy 1960-ban a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetemen megrendezzük az első hazai, nemzetközi részvételű mechanizmus-konferenciát. Munkánk pozitív értékelését láttuk abban, hogy a nagy múltú szovjet és német iskolák képviselői elfogadták meghívásunkat és előadásokkal jelentkeztek. Ez a tény egyszerre nemzetközi rangot adott addigi eredményeinknek. LICHTENHELDT három munkatársával együtt jelent meg, és három előadást is tartottak. Ezek középpontjában ezúttal is a Burmester-féle eljárás állott, s ez nagy impulzust adott ahhoz, hogy ez, a nálunk akkor még csak kevéssé ismert elmélet, a magyarországi kutatásnak szerves részévé váljék. TERPLÁN Zénó 1962-ben a Mérnöki Továbbképző Intézet egyik előadásorozatán ismertette a Burmester-elméletet a maga teljességében magyar nyelven, magyar mérnökök számára. A 70-es években egy világviszonylatban is sikeres kandidátusi disszertáció született e témakörben,

míg jelen megemlékezés szerzője abban a megtiszteltetésben részesült, hogy 1966-ban és 76-ban, LICHTENHELDT professzor 65., illetve 75. születésnapja alkalmából a tiszteletére rendezett drezdai jubileumi konferenciákon tarthatott előadásokat a Burmester-elmélet körében.

1960 és 1980 között LICHTENHELDT több alkalommal és mindig örömmel járt Magyarországon, akár hivatalos minőségben, akár magánemberként érkezett.

1967-es nyugalomba vonulását megelőzően még aktívan részt vett a „mechanizmusok” tudományos világszervezete, az IFTOMM (International Federation for Theory of Machines and Mechanisms) megalapításának szervezési munkáiban. Később e szervezetnek első tiszteletbeli tagja lett.

Mind a tudományos közéletben, mind az egyetemi oktatásban csaknem haláláig aktívan részt vett. 1979-ben még megjelent a drezdai „Getriebetechnik und Maschinendynamik” konferencián, de egyetemi előadásait 1979 januárjában abbahagyta.

Halálával a kiváló tudóstól, a nagyszerű oktatótól és a melegszívű embertől kellett búcsút vennünk.

Emlékét szeretettel megőrizzük.

Sályi István

ANYAGKÖLCSONHATÁSOK A FÉM-SZILÍCIUMDIOXID-SZILÍCIUM (MOS) SZERKEZETŰ ELEKTRONIKAI ESZKÖZÖKBEN

SZÉP IVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1980. március 3-án]

A tanulmány áttekinti azokat a leglényegesebb anyagi kölcsönhatásokat, amelyek a szilícium alapú mikroelektronikai eszközök egyik fontos reprezentánsának, a fém-oxid-szilícium (MOS) szerkezetű alkatrészeknek előállítása, tárolása, valamint üzemeltetése során felléphetnek és az egyszerű fizikai modellétől eltérő tulajdonságokat okozhatnak. A szerző több mint másfél évtizedes vizsgálatai alapján kimutatja, hogy a nagyszámú kölcsönhatás közül döntő az oxid kialakításának módja, a technológiai műveletek alatt a MOS-rendszert ért hőhatások és azok körülményei, továbbá a fém felvitelének módja, minősége. E hatásokat kiváltó folyamatok mibenlétére, azok befolyásolásának módjára a szerző kísérletileg alátámasztott értelmezést ad. A tanulmány következtetéseiben a szerző kiemeli az érintett tudományágak interdiszciplináris kapcsolatának erősítését, amely feltétele a vizsgált rendszerben lejátszódó anyagkölcsonhatások további felderítésének és irányíthatóságának.

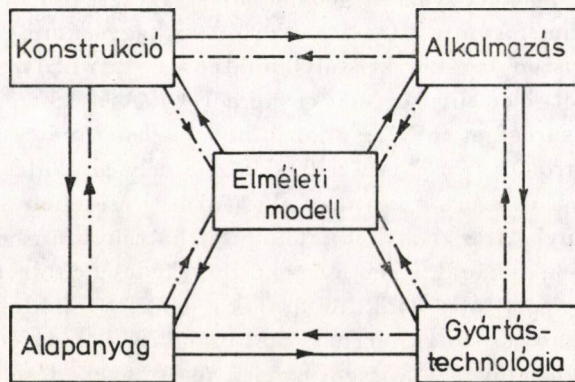
A félvezető eszközök korszerű választékában kiemelkedő szerepet töltenek be a fém-szilíciumdioxid-szilícium (MOS) rétegszerkezetek tulajdonságain alapuló diszkrét és integrált eszközök. A számítástechnikai berendezésekben használatos különböző memória áramkörök, a vezérlési és automatizálási feladatok megoldásában nélkülözhetetlen mikroprocesszorok legfejlettebb változatai MOS-szerkezetűek. A MOS-áramkörök rohamos elterjedésüket annak köszönhetik, hogy gyakorlatilag egyetlen építőelemből, a MOS-tranzisztorból konstruálhatók, amely egyszerű geometriai szerkezete miatt igen kis helyet vesz igénybe, ennél fogva a MOS-áramkörökben nagyszámú tranzisztor integrálható össze viszonylag kis kristályfelületen (LSI, VLSI). Napjainkban az 1 cm^2 -re számított elemsűrűség már elérte a 10^6 -t. A MOS-tranzisztor felépítésén kívül ezt a sűrűséget még az a körülmény is lehetővé teszi, hogy a MOS-tranzisztor elektromos térrel vezérelt eszköz, amely működés közben igen kis energiát disszipál és ezért még nagy elemsűrűség esetében sem szabadul fel annyi hő, amennyi a tranzisztorok működését hátrányosan befolyásolná.

Az integráció fokának ilyen mértékű növekedésében azonban más tényezők is fontos szerepet játszottak. Az áramkör-elmélet fejlődése funkcionálisan egyre összetettebb, ugyanakkor a korábbinál kisebb helyigényű áramkörök tervezését tette lehetővé. A fajlagos elemsűrűség növekedése viszont olyan új technológiai eljárásokat követelt, amelyekkel a korábbinál kisebb méreteket is megbízhatóan elő lehetett állítani. A fotolitográfiai műveletekhez például

érzékenyebb fotoreziszt anyagokra, nagyobb fényerejű, kisebb torzítású lencse-rendszerekre, nagyobb mechanikai pontosságú illesztő-léptető berendezésekre volt szükség. A poliszilícium-rétegeket alkalmazó technológiákban az ún. önillesztéses konstrukciók bevezetésével a kémiai marási technika okozta pontatlanságokat sikerült csökkenteni. A korábbi technológiai eljárásokban az egyes műveletekben keletkező különböző magasságú oxid-lépcsők az összekötő fémzésben szakadásokat okoztak, amit a lépcsők lankás kialakításával ki lehetett ugyan küszöbölni, de csak a hasznos felület kárára. Ezen a helyzeten a szilícium domborzatos előmarásával lehetett javítani, amelyben gyakorlatilag lépcsőmentes, egysíkban fekvő oxidfelületek alakíthatók ki („planox”, „isoplanar” eljárások).

Mindezek és más, itt fel nem sorolt új technológiai eljárások bevezetése tette lehetővé újfajta áramkörök létrehozását, az áramköri konstrukciók fejlődését. A MOS-rendszerek fizikai és kémiai vizsgálata ugyanakkor adatokat szolgáltatott e rendszerek tulajdonságait befolyásoló sok olyan tényezőről, amelyekkel a MOS-tranzisztor fizikai alapmodellje nem számolt, és így az alapmodell alapján levezetett elmélet és a MOS-rendszerek gyakorlatban mutatkozó tulajdonságai között tapasztalható eltérések nagy része ezek alapján értelmezhető volt.

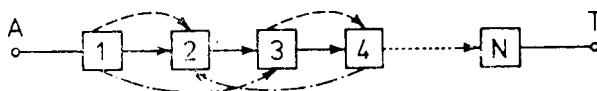
Szerző évekkkel ezelőtt [1] felhívta a figyelmet arra a hibás szemléletre, amely a félvezető eszközöket a félvezető fizika alapegyenleteivel leírható, egyszerűen modellezhető rendszereknek tekinti, holott ezek előállítási technológiájuk bonyolultságától függő mértékben összetett fizikai-kémiai anyag-rendszert alkotnak, amelynek viselkedését az alapanyag előállításától kezdve a technológiai készítés lépéseinek kölcsönhatásán keresztül a végtermék használatának módjáig, számos tényező befolyásolja, meghatározva ezáltal az eszköz használati tulajdonságait és az alapul vett elmélet érvényességi határait.



I. ábra. A félvezető eszközök tulajdonságait meghatározó kölcsönhatások rendszere.
→ közvetlen ráhatás iránya; - - - -> visszahatás iránya

A félvezető eszközök tulajdonságait ténylegesen meghatározó kölcsönhatások kapcsolatát, azok eredetét az 1. ábra szemlélteti. Egy meghatározott célra alkalmazni kívánt félvezető eszköz létrehozásához célszerűen egy *elméleti modellből* indulunk ki. A modell megválasztásakor figyelembe kell vennünk az *alkalmazás feltételeit* (elektromos, termikus paraméterek, határértékek), amelyek alapján megtervezhető az eszköz *konstrukciója*. Ennek korlátait az *alapanyag tulajdonságai* és a *gyártástechnológia lehetőségei* szabják meg. Utóbbiak döntően meghatározzák, hogy az alkalmazás célja által kitűzött követelmények mennyire teljesíthetők. Gondoljunk pl. a fotolitográfia mindenkori méretkorlátai és a létrehozható elemsűrűség közötti összefüggésre. Ez a körülmény ismét visszahat a konstrukcióra, amelyet a lehetőségeknek megfelelően módosítani kell. A vázolt kölcsönhatások végeredményben a kiindulási modell finomítását teszik szükségessé, olyan új elemekkel bővítve azt, amelyek a fizikai alapelvekből többnyire nem következnek.

A kölcsönhatások önálló láncolatát jelentik azok a gyártási műveletek közben vagy a használat során fellépő fizikai-kémiai jellegű anyagkölcsonhatások, amelyek a végtermék vagy a közbelső termékek tulajdonságait jó és rossz irányban egyaránt befolyásolhatják (2. ábra). Ezek a kölcsönhatások



2. ábra. Gyártási műveletlánc. *A* – alapanyag, *T* – termék – - - - -> mellékhatások, - - - - -> determináló kölcsönhatás, + - - - -> visszaható kölcsönhatás

sokkal nehezebben ismerhetők fel nemcsak a technológiai műveletek nagy száma miatt, hanem gyakran azért, mert csak több lépés után jelentkeznek, és így nehezen állapítható meg közvetlen okuk. Pl. a kémiai tisztításhoz használt vegyszerekből már a gyártási folyamat kezdetén kicsapódhatnak a tisztítandó félvezető felületre a nehéz fémek, de hatásossá csak a hőkezelések után válnak, maga a hatás (pl. nagy visszaram) azonban csak a készterméken állapítható meg.

A használat vagy tárolás módja is oka lehet olyan fizikai-kémiai változásoknak, amelyek a késztermék minőségét károsítják. A megengedettnél nagyobb áramok, feszültségek, túl magas vagy alacsony üzemhőmérséklet, nedves környezet elindíthatnak olyan folyamatokat, amelyek idővel az eszköz tönkremenéséhez vezetnek.

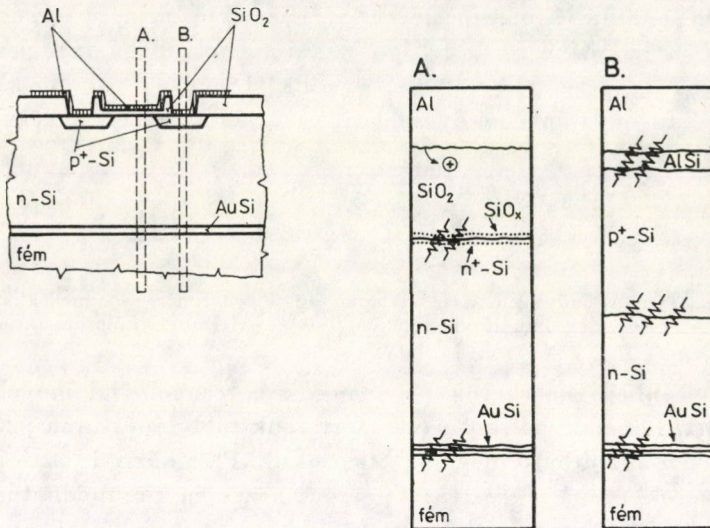
A kölcsönhatások egy közvetett példája a szilárdtestek kémiájában, az anyagtudományban és főleg a vizsgálati és diagnosztikai módszerekben bekövetkezett az a nagyarányú fejlődés, amelyet éppen a fent említett anyagkölcsonhatások és folyamatok felderítésére irányuló törekvések ösztönöztek. A félvezető eszközökben lejátszódó átalakulások kutatása lendítette fel a

kristályhibák vizsgálati metodikáját, a különböző elektron- és röntgen diffrakciós módszereket, az oxidáció, a diffúzió kinetikájára vonatkozó vizsgálatokat. A félvezető technológia igényeinek kielégítésére dolgoztak ki új fényérzékeny lakkokat, fotolemezeket, extrém tisztaságú vegyszereket, nagy felbontóképességű optikai berendezéseket, elektron-, ionsugaras, plazmás technológiai módszereket.

A továbbiakban a MOS-rendszerekben fellépő legfontosabb anyagköcsönhatásokról lesz szó.

Modell és valóság

Egy MOS-tranzisztor fizikai alapmodellje és a reális tranzisztorban néhány kölcsönhatás következtében kialakult valóságos szerkezet a 3. ábrán látható. Az ábra bal oldalán látható metszet alapján az eszköz működése



3. ábra. Néhány kölcsönhatás MOS-rendszerben

egyszerűnek tűnik. Ha az N típusú szilícium kristályban kialakított két P típusú tartományt feszültségforrással kötjük össze, nem folyhat áram (eltekintve egy minimális visszarámtól), mert az egyik PN -átmenet mindig záróirányú előfeszültséget kap. Ha azonban a két P -szakasz között a vékony szigetelő oxidrétegen keresztül egy fémelektrod segítségével a szilíciumkristályban negatív előjelű elektromos teret létesítünk, a felület közeléből az elektronok eltávoznak, egy meghatározott térerősségnél a termikusan generált pozitív lyukak kerülnek túlsúlyba, a két P -rész között vékony vezető, ún. inverziós csatorna jön létre, amelyen át megindul az áram. A MOS-tranzisztor fizikai alapmodellje szerint a tranzisztor áram-feszültség karakterisztikái a szilícium

mint félvezető, a szilíciumdioxid mint szigetelő és az elektródfém néhány anyagi paraméterével kifejezhetők. Ez az elmélet nem tételez fel semmilyen anyagkölcsonhatást az egyes alkotórészek között.

$$I_D = \frac{C_0 \mu_n W}{L} \left[V_{DS}(V_{GS} - V_X) - \frac{V_{DS}^2}{2} \right],$$

ahol

$$V_X = \varphi_{MS} + 2\varphi_F$$

I_D — draináram, C_0 — oxidkapacitás, μ_n — elektronmobilitás az inverziós csatornában, W — csatorna szélessége, L — csatorna hossza, V_{DS} , V_{GS} — drain-source, ill. gate-source feszültség, φ_{MS} — fém-félvezető kontaktpotenciál különbség, φ_F — szilícium felületi potenciálja.

A valóságban, mint ez a 3. ábrán kinagyított A és B jelű szelvényeken látható, a technológiai műveletek alatt olyan kölcsönhatások mehetnek végbe, amelyek az elemi elmélettől eltérő tulajdonságokat hoznak létre a rendszerben. Az A szelvényben vázlatosan jelzett kölcsönhatások közül az egyik az alumínium fémelektrod és a SiO_2 réteg között végbemenő kémiai folyamat, amely alumíniumból és oxigénből álló pozitív ionok és elektronok képződésével jár, amelyek töltésükkel az oxid szigetelő tulajdonságait módosítják. A SiO_2 és a Si határán jelentkező kölcsönhatás az oxidáció során nem-sztöchiometrikus határrejteget hoz létre, amely a SiO_2 -ben helyhez kötött pozitív töltések létrejöttét okozza. A határrejtegen a szilícium eredeti adalékanyag-eloszlása is megváltozik az oxidáció, ill. a SiO_2 és a Si eltérő affinitása miatt. A foszfor pl. a térfogati koncentrációjához képest a szilícium felületnél feldúsul, a bór elszegényedik. A SiO_2 és a Si közötti rácsparaméter különbség miatt a szilícium felületénél diszlokált, mechanikai feszültség alatt álló kristályszerkezet alakul ki, hasonlóképpen a kristály felforrasztott oldalán, ahol a forraszfém (többnyire arany-szilícium eutektikum) okoz rácsdeformációt.

Hasonló rácsdeformációk keletkeznek a B szelvényben is, ahol a P -rétegen alumíniumból kialakított kontaktus Al—Si eutektikum képződésével jár, melynek mechanikai tulajdonságai mind a szilíciumétól, mind az alumíniumétól eltérnek. A P és N rétegek határán az adalékatomok jelentős koncentrációkülönbsége miatt rácstorzulás lép fel, amely diszlokációháló képződésével és a tranzisztor elektromos tulajdonságainak romlásával jár.

A MOS-rendszer előállításánál során fellépő kölcsönhatások nagyságrendje, befolyása különböző mértékű lehet; felismerésük után hatásukat sok esetben a technológia megfelelő módosításával részben kompenzálni tudják. Nem hagyható persze figyelmen kívül, hogy az ilyen módosítások új tényezők megjelenésével járnak, amelyek új kölcsönhatások láncolatát indíthatják el. Mindezekről függetlenül azonban a MOS-rendszerekben a technológiai műveletek *elsődleges*, egy kitűzött cél elérésére irányuló, és *másodlagos*, az előbbivel párhuzamosan jelentkező hatásuk szempontjából szelektálhatók. A rendelkezésre

álló hatalmas tapasztalati és irodalmi anyag alapján megállapítható, hogy a MOS-rendszerek tulajdonságait alapvetően három technológiai műveletcsoport minősége és jellege határozza meg:

- a) a szigetelőréteg kialakításának módja;
- b) mindazok a hőbehatást igénylő műveletek, amelyek a szigetelővel bevont szilíciumlemezt érik;
- c) a fémréteg (M) felvitelének módja, minősége.

A továbbiakban szemelvénytyszerűen foglalkozunk néhány olyan hatással, amelyek a felsorolt csoportokban domináló jellegűek.

A szigetelőréteg kialakítása

A MOS-rendszerek szigetelőrétegének kialakítására számos módszerrel kísérleteztek. Az 1. táblázatban a szilíciumdioxid réteg létrehozására leggyakrabban alkalmazott eljárásokat tüntettük fel, a folyamatokra jellemző anyag-

1. táblázat

Szigetelő rétegek létrehozása szilíciumalapú MOS rendszerekben

Módszer	Anyagkölcsonhatás	Alkalmasság
1. Termikus oxidáció (800 ÷ 1200 °C) vízgőzben v. száraz oxigénben	Si → SiO ₂ átalakulás felületi reakcióban. Határfelületen nem-sztóhiometrikus átmenet, mech. feszültség és rácshibák	temperálás után igen jó
2. Oxidáció folyadékfázisban a) oxidálószerrel b) elektrokémiai anódizálással	Si → SiO ₂ átalakulás a) felületi reakcióban b) Si ⁴⁺ + 4OH ⁻ ionreakcióval	korlátozott nem jó
3. Oxidlecsapatás piro-lízissel (TEOS; SiH ₄)	egyenetlen tapadás; sok töltés	korlátozott, első-sorban védőbevonat
4. Porlasztás (SiO ₂)	egyenetlen tapadás, csökkent átütési szilárdság	korlátozott, első-sorban védőbevonat

kölcsonhatásokkal, valamint a MOS-rendszer céljára való alkalmasságuk megjelölésével. A MOS-rendszer dielektrikumának céljára mindmáig a klasszikus, termikus úton előállított SiO₂ a legalkalmasabb [2]. Az oxidációs folyamatot gázfázisban vízgőz vagy oxigén áramban, esetleg klórtartalmú adalék jelenlétében végzik 800 ÷ 1200 °C-on. Ezen a módon 30 nm ÷ 1,5 μm vastag rétegek megbízhatóan előállíthatók.

Az egyes konstrukciókhoz szükséges vastagságú szilíciumdioxid réteg gázfázisú oxidációval történő előállítása magas hőmérsékletet és viszonylag

hosszú időt (1 ÷ 2 óra) igényel. Mint alább még látni fogjuk, ez jelentős változásokat okoz a szilícium szerkezeti tulajdonságaiban, és nehezen kielemezhető befolyást gyakorol a SiO_2/Si struktúra elektromos jellemzőire. Ezért számosan próbálkoztak a SiO_2 réteg más módszerrel történő létrehozásával. Kézenfekvőnek tűnt a folyadékfázisban végrehajtott oxidáció (pl. salétromsavval, hidrogénperoxiddal) [3]. Ilyen módon azonban csak 5 nm-nél vékonyabb rétegeket sikerült elfogadható időtartam alatt előállítani, azonkívül tulajdonságaik stabilizálásához ezeket a rétegeket magasabb hőfokon hőkezelní is kellett. Ilyen feltételek mellett sem voltak egyenértékűek a termikusan előállított SiO_2 rétegekkel.

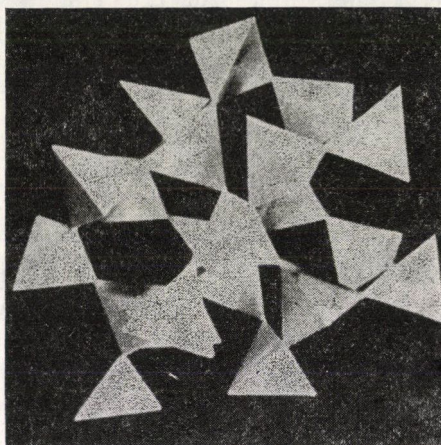
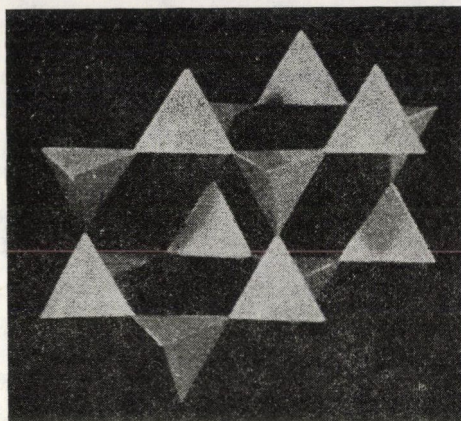
Nem bizonyultak egyenértékűnek az elektrokémiai anódizálással előállított SiO_2 rétegek sem. A vizsgálatok szerint [4] ezen folyamat során a szilíciumatomoknak ion alakban a képződő oxidrétegen át kell diffundálni, és ez lényegesen rosszabb szigetelőképességű oxidot eredményez, mint a termikus oxidáció esetében, ahol ionizált oxigénatomok diffundálnak a szilíciumfelülethez.

Ezek a módszerek a hordozó szilíciumlemez anyagából hozzák létre az oxidréteget. Sok olyan módszer is ismeretes, ahol az oxidot valamilyen más szilícium forrásból állítják elő, és egyidejűleg vagy külön műveletben viszik rá a szilíciumfelületre. Ilyenek pl. a pirolitikus eljárások [5], ahol valamilyen gáz alakú vagy illékony szilíciumvegyületet oxigén jelenlétében elbontanak és a keletkező SiO_2 a szilíciumfelületre rácsapódik. A tapadóképeség a reakciófolyamat és a szubsztrát hőmérséklet érzékeny függvénye. SiO_2 bevonatok szerves szilíciumvegyületeknek és lakkoknak oldatából is előállíthatók, az oldatnak a szilícium lemez felületére történő rárétegzése, beszárítása és ráégetése útján. További módszer tömör SiO_2 -tárcsa (pl. kvarc) katódporlasztása rádiófrekvenciás elektromos térben [6].

Ezek az eljárások alkalmasak ugyan oxidréteg előállítására, azonban az így készített oxidok gyengébb elektromos tulajdonságaik miatt nem felelnek meg a korszerű MOS-rendszerek szigetelőrétegének céljaira. A megengedhetőnél nagyobb kötött elektromos töltés, a vizes oxidációs módszereknél az oxid nagy hidroxil-tartalma, más esetekben a szerkezeti inhomogenitás a fő kifogás ezek ellen az oxidok ellen. Ugyanakkor pirolitikus oxidok előnyösen használhatók a MOS-rendszerek technológiájában védőbevonat céljára, többretegű fémezésnél elválasztó szigetelőréteggént, a vékony, kémiai úton készített oxid pedig alagúthatással átjárható az elektronok számára, amit pl. a szilíciumnitrid-szilíciumoxid kettős szigetelőjű MNOS típusú memória-áramkörökben hasznosítanak [7].

Mai ismereteink szerint MOS-rendszerekben a szigetelő szilíciumdioxid réteget legelőnyösebben *termikus oxidációval* lehet előállítani. Ez a SiO_2 réteg általában nem rendezett szerkezetű, legfeljebb bizonyos rövid távú rendezettség mutatható ki benne [8]. A SiO_2 kristályos módosulatai általában üreges vázstruktúrákat képeznek (4. ábra). Ezek építőeleme a SiO_4 csoport, amely

tetraéder elrendezésű, a tetraéder belsejében a Si atom, csúcsain az O atomok foglalnak helyet. A krisztobalit nevű kristályos SiO_2 módosulatban (amely egyébként alkáli nyomok hatására a rendezetlen SiO_2 -ből is keletkezik) (4A. ábra) a SiO_4 tetraéderek a gyémántrácsnak megfelelő elrendezésben találhatók, amelyek csúcsaikon közös O atomokkal kapcsolódnak egymáshoz. A kris-

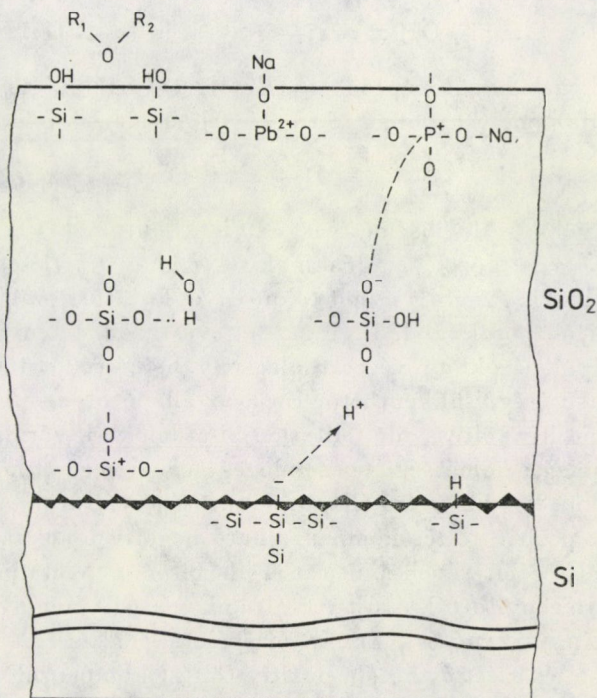


4. ábra. A — krisztobalitrács térbeli modellje; B — kvarcraács térbeli modellje

tályos kvarcban az egymással összekapcsolt SiO_4 tetraéderek háromszögű elrendezésében bal, ill. jobb menetű csavarpályán helyezkednek el (4B. ábra). A SiO_4 tetraéderek között kialakult üregek, csatornák idegen ionok, gázatomok, vízmolekulák befogadására képesek; ugyanakkor a térbeli rendezettség sem teljes, pl. megszakadt O-hidak oxigénjéhez könnyen kapcsolódik proton vagy a Si-hoz hidroxil, esetleg proton. Ezáltal $\equiv\text{SiOH}$, $\equiv\text{SiH}$ véggyökök képződnek, amelyek további kémiai átalakulásokban vehetnek részt, pl. a protont nátriumionra cserélik ki. Az OH és H gyökök könnyen mozognak a SiO_4 váz

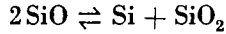
üregében, valószínűleg hidrogénkötés közvetítésével. Nagy vákuumban magasabb hőmérsékleten a vízmolekulák jelentős része kitudál ezekből az üregekből. Munkatársainkkal kimutattuk [9], hogy proton-akceptor anyagok (mint pl. az alifás éterek, aminok) gőzeinek jelenlétében már szobahőmérsékleten is bekövetkezik a SiO_2 réteg dehidratálódása. Valószínűleg ez a dehidratáció az oka az ilyen körülmények között tapasztalt rendezési és kristályosodási hajlamnak. Szekunder-ion tömegspektroszkópiai mérések szerint [10] a víz fokozatosan távozik a SiO_2 rétegből, ami valószínűleg felületi adszorpció, majd hidrogénkötés által megkönnyített felületi deszorpció hatására indul meg. Vízmolekulák jelenlétében a SiO_2 felszíne nagyszámú szilanol-gyököt tartalmaz (5. ábra), a proton-akceptor molekulák adszorpciója a vízmolekulák lehasadását segíti elő, amelyek deszorbeálódnak. Ezáltal a felület elszegényedik OH-gyökökben, a réteg belsejéből diffúzió indul meg az egyensúly helyreállítására, ennek eredményeképpen a H-tartalom egy nagyságrenddel is csökkenhet.

A termikusan előállított SiO_2 réteg ismeretesen kb. $10^{11}/\text{cm}^2$ nagyságrendű kötött pozitív töltést tartalmaz. Ennek eredetéről megoszlanak a vélemények [11], de nagyon valószínű, hogy a Si/ SiO_2 határfelületnél a reakciómechanizmus miatt fellépő nem-sztochiometrikus Si : O aránnyal függ össze



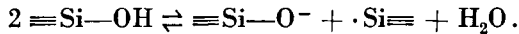
5. ábra. Fizikai-kémiai kölcsönhatások a SiO_2/Si rendszerben

[12]. Elektromos és radioaktív vizsgálatok egyaránt kimutatták, hogy a kötött töltések a Si felülettől 20 nm-t meg nem haladó távolságban találhatóak. Számuk függ a felület kristálytani orientációjától, az oxidáció hőmérsékletétől, ami nyilvánvalóvá teszi a $\text{Si} \rightarrow \text{SiO}_4$ folyamattal való kapcsolatot. A $\text{SiO}_{x < 2}$ összetételű rétegben a le nem semlegesített Si atomok eredményezhetnek pozitív töltést. A

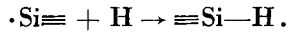


folyamat semleges gázban végzett hőkezelés hatására mehet végbe. Ez megmagyarázná a pozitív töltés csökkentésére alkalmazott hőkezelések hatásmechanizmusát. Az atomos Si kiválása nem jár töltésképződéssel, mivel szilárd oldatban van jelen.

A termikus oxidáció sebességére jelentős hatást gyakorol a vízgőz jelenléte. Az ún. nedves oxidáció sebessége egy nagyságrenddel nagyobb, mint a száraz oxigénben végzett folyamaté [13]. Ez arra mutat, hogy az oxidációt víz, esetleg protonok katalizálják, melynek során a proton $-\text{OH}$ -gyököt képezve beleépül a SiOSi láncokba. Infravörös abszorpciós mérésekkel kimutatták, hogy a SiO_2 rétegben az OH csoportok száma a $10^{19}/\text{cm}^3$ -t is meghaladja. Révész szerint [14] a $-\text{SiOH}$ csoportok felelősek a pozitív kötött töltésért az alábbi folyamat eredményeképpen:



A diszproporcionálódással képződött „háromvegyértékű” Si-gyök a pozitív töltés hordozója, amely azonban hidrogén felvételével semlegesíthető:



Az infravörös reflexiós mérések azt is kimutatták [9], hogy a $\equiv \text{SiH}$ csoportok a Si felület közelében dúsulnak fel, míg a $\equiv \text{SiOH}$ -gyökök 20 nm-en belül alig találhatóak. A $\equiv \text{SiH}$ csoportokat egyes kutatók összefüggésbe hozzák az ún. felületi állapotokkal [15]. Ez a feltevés azon a tényen alapul, hogy hidrogéntartalmú gázokban végzett alacsony hőmérsékletű temperálással a felületi állapotsűrűség csökkenthető. Ezek az állapotok azonban valószínűleg nem a kötött pozitív töltést adó telítetlen Si-atomoktól származnak. A kötött töltés ugyanis magas hőmérsékleten semleges gázban végzett hőkezeléssel csökkenthető anélkül, hogy a gyors állapotok sűrűsége változna.

A kötött pozitív töltés kompenzálható negatív ionoknak a SiO_4 tetraéderek közé való beépítésével, mint ezt szerzőnek SOLT Katalinnal együtt végzett kísérletei bizonyították [16]. Az általuk vizsgált anion a $(\text{PbO}_3)^{4-}$ ion volt, amely NÁRAY-SZABÓ és KÁLMÁN vizsgálatai [17] szerint az ólomüvegekben is jelen van, és ezért érthető a pozitív töltést kompenzáló hatás. Hasonló mechanizmussal magyarázható a MOS technológiában stabilizálásra használt foszforpentoxidos hőkezelés hatása [18], amelynél (PO_4) tetraéderek épülnek be

a SiO_4 vázba. Az ötvegyértékű P-atom azonban polarizáló hatást gyakorol a környező SiO_4 csoportokra, ami deformálja a közeli O-hidakat, ahol ezáltal befogódhatnak és immobilizálódnak az instabilitást okozó Na-ionok (5. ábra). Ugyancsak ionos kölcsönhatás immobilizálja a Na-ionokat a klór jelenlétében végzett oxidációknál, valószínűleg kompenzáló negatív tértöltés formájában.

A hőhatások szerepe

A MOS-rendszerekben anyagkölcönhatások elsősorban azoknál a technológiai műveleteknél jönnek létre, amelyek magasabb hőmérsékleten történnek. E műveletek elsődleges hatását — termikus oxidréteg létrehozása, adalékok diffúziója, temperálási műveletek — másodlagos effektusok kísérik, amelyek nagysága a hőmérséklet függvénye. Minthogy a technológiai folyamatban egyes műveletek ismétlődhetnek, a hőhatások összegződése miatt nehezen áttekinthető viszonyok alakulnak ki. A technológiai kulcsműveletek során jelentkező kumulatív hatásokat a 2. táblázatban foglaljuk össze. Mint

2. táblázat

Hőkezeléssel járó műveletek kumulatív hatása MOS-rendszerekben

Művelet	Elsődleges hatás	Másodlagos hatás
1. Termikus oxidáció aktív gázokban (vízgőz, O_2 , + HCl + Cl_2) ($T = 800 \div 1200 \text{ }^\circ\text{C}$)	Felületi SiO_2 réteg kialakítása; Q_{ox} , N_{ss} minimalizálása; felületi hibák csökkentése	Nem-sztöhiometrikus ($\text{SiO}_{x < 2}$) határ-réteg. Si-ben felületi hibák, SiO_2 -ben H_2O , Cl^- , OH^- -gyök beépülése. Határ-rétegben adalékszegregáció.
2. Adalékok (B, P, As) diffúziója	Adalékolt (n, p) rétegek létrehozása	Si-rács kontrakciója; borid, foszfid képződés. Diszlokációk, illeszkedési és ponthibák. Reakciók SiO_2 -vel; morfológiai átalakulások (krisztobalit)
3. Temperálás: ($500 \div 1100 \text{ }^\circ\text{C}$)	Szerkezeti rendezetlenség csökkentése	SiO_x diszproporcionálódása. —SiOH, —SiH-gyökök, rácshibák részleges kiküszöbölése. Si-ben szennyezők (C, SiO_x , Cu, Fe) szegregációja
a) iners gázban (N_2 , Ar, He)	Q_{ox} , N_{ss} csökkentése	
b) stabilizáló anyaggal (PSG)	Mozgó ionok (Na^+ , K^+) lekötése	Vízgőzérzékenység, hajlam töltéspolarizációra

látható, a *termikus oxidáció* elsődleges célja felületi SiO_2 réteg kialakítása. A különböző technológiai változatok *elsődleges hatása* a kötött pozitív töltés és a határfelületi állapotok minimalizálása, az oxid letörési feszültségét és a szilícium felületközeli rétegében a kisebbségi töltéshordozók élettartamát le- rontó felületi rácshibák csökkentése. A *másodlagos hatások* közé tartozik az oxidációnál keletkező, már említett nem-sztöhiometrikus összetételű ($\text{SiO}_{x < 2}$)

határréteg keletkezése, a deformációs feszültségek hatására a szilícium felületén megjelenő illeszkedési rácshibák, a különböző idegen gyökök beépülése a SiO_2 rétegbe, az eltérő oldékonyosság okozta adalékszegregáció a Si/SiO_2 határfelület két oldalán. A termikus oxidáció különböző kivitelezési módszerei a rácshibák és az idegen atomok hatását bizonyos mértékben csökkenteni tudják. A többi hatás tartós velejárója a folyamatnak.

A *P* és *N* típusú rétegek létrehozására alkalmazott *adalékdifúzió* szintén magas hőmérsékleteket igényel. A leggyakrabban használt adalékanyagok atomjai (B, P, As) méreteikben, elektromos töltésükben eltérnek a szilíciumatomoktól, így beépülésük a szilíciumrácsba jelentős rácstorzulással jár. Ennek következtében az adalékolt és a nem adalékolt térrészek között mechanikai feszültségek lépnek fel, amelyek a difúzió hőmérsékletén összetett diszlokáció hálózatok kialakulásához vezetnek. Ezek hátrányosan befolyásolják pl. a PN-átmenetek visszaramát, a kisebbségi töltéshordozók élettartamát. Nagyobb adalékkoncentrációk hatására a szilícium felületén vegyületképződés — borid, foszfid, arzenid — indul meg, ami technológiai bonyodalmakat okoz. A difúzióhoz használt adalékanyagok általában oxid alakjában vannak jelen, ezek az oxidok viszont a difúziót gátló lokális szilíciumoxiddal reagálni tudnak; különféle üvegek (foszforüveg, bórüveg) képződnek, amelyek technológiai tulajdonságai különböznek a megszokott SiO_2 tulajdonságaitól. Bizonyos esetekben pl. a bóroxid morfológiai átalakulásokat indukál, az amorf szilíciumdioxidban helyi átkristályosodás indul meg, ami pl. kristobalitszemcsék keletkezéséhez vezet [19].

Tapasztalati felismerések nyomán a MOS-rendszerek technológiájában egyes műveletek után különböző *temperálási* (hőkezelési) lépéseket alkalmaznak. Ezek célja az előző műveletben létrejött kedvezőtlen vagy előnytelen tulajdonság mérséklése vagy kiküszöbölése. Korábban már említettük a kötött pozitív töltés csökkentését célzó hőkezelést, amelyet iners gázban 1100°C körüli hőmérsékleten hajtanak végre. Ennél a folyamatnál mind a szubsztóhiometrikus szilíciumoxid diszproporcionálódása, mind a szilanol és a szilíciumhidroxid-gyökök bomlása, átrendeződése a kívánt eredménnyel végbemehet. A hőkezelés hőmérsékletén magában a szilíciumban is gyógyulási folyamatok játszódhatnak le, amelyek az eredeti vagy a művelet létrehozott rácshibák részleges kiküszöbölését eredményezik. A hőkezelésnek lehet azonban negatív hatása is. Ilyen pl. az intersticiálisan oldott, eddig ártalmatlan szennyezések (Cu, C, Fe) összecsomósodása és kicsapódása. Magasabb hőmérsékleten igen élénknek válik a szilíciumegykristály készítésekor oldott oxigén atomok difúziója, amely fokozatosan a SiO_2 -nek mikroszemcsék alakjában történő kiválásához vezet. Ez nagy mértékben lerontja a szilícium alapanyag elektromos paramétereit. Érdekes módon a szilárd szilícium oxigéngázban történő oxidációja nem jár az oxigénatomoknak a szilícium belsejébe történő bediffundálásával, mint ezt szerző BÁRSONY Istvánnal együtt infravörös abszorpció mérés

segítségével kimutatta [10]. Ennek alapján úgy tűnik, mintha a Si/SiO₂ határfelület oxigénatomokra nézve impermeábilis lenne. Ez érthető, ha figyelembe vesszük, hogy 1000 °C körüli hőmérsékleteken a szilícium elektronkoncentrációját tekintve már fémként viselkedik, a szilíciumdioxid pedig a szerkezeti (intrinsic) félvezetőkre jellemző sajátosságokat mutat, kb. 10⁹ ÷ 10¹⁰/cm³ rendű elektron és lyuk koncentrációval. Emiatt a mindenkor Si/SiO₂ határfelületen tértöltésréteg alakul ki, melynek SiO₂ felőli oldalát a nagyobb mozgékonyaságú elektronok képezik. Az oxidrétegen átdiffundáló oxigénmolekulák a határfelületnél ionizálódnak és a kettősréteg terén áthaladva reagálnak a valenciasáv szilíciumatomjaival: SiO, majd SiO₂ képződik, az elektronok pedig rekombinálódnak a lyukakkal.

A felületi állapotok számának csökkentésére alkalmazott alacsony hőmérsékletű, hidrogéntartalmú gázokban végzett hőkezeléseknél feltehetően a szilíciumfelületnél elhelyezkedő, lekötetlen elektront tartalmazó szilíciumatomok semlegesítése megy végbe protonbefogással [21]. Ez a kötés azonban nem túl erős, amit a felületi állapotsűrűségnek viszonylag enyhe termikus behatásoktól, alacsony energiájú sugárzásoktól való érzékeny függése is bizonyít.

Említettük, hogy a MOS-eszközök karakterisztikáinak „csúszását” okozó alkáli-ionok lekötésére az oxidréteget foszforpentoxid bevonattal ellátva hőkezelik. Ennél a műveletnél rendkívül kritikus a foszforpentoxid mennyisége; 4 ÷ 5 mólszázalék felett a foszforatom nagyobb vegyértéke miatt töltéspolarizáció léphet fel, ami a SiO₂ rétegben kötött töltéstöbbletet jelent. Még nagyobb foszfortartalom esetében a mindenhol jelenlevő vízgőz reagál a foszforoxiddal foszforsav keletkezése mellett, ez pedig elbontja az alkáli-szilanol kötést, alkáli kationok és foszfát anionok válnak szabaddá, ionos instabilitást eredményezve.

A fémezéssel kapcsolatos kölcsönhatások

A MOS-rendszerek fémezésének minősége az elemi elmélet szerint csak a fém és a félvezető közötti kontaktpotenciált befolyásolja, amely a fém és a szilícium kilépési munkáinak különbségével egyenlő. Előbbi a fémmre jellemző anyagi állandó, utóbbi a szilícium vezetési típusának és töltéshordozó koncentrációjának függvénye. Ebből kifolyólag a fém-félvezető kontaktpotenciál (φ_{MS}) pozitív és negatív előjelű is lehet, ami pl. egy MOS-tranzisztor küszöb-feszültségének befolyásolására is módot nyújt. Ez a küszöb-feszültség (V_T) függ még a szilíciumfelület Fermi-potenciáljától (φ_F), amely függvénye a helyi adalékkoncentrációnak, továbbá a szilíciumban kialakuló kiürített réteg ionizált adalékkoncentrációjától (Q_B), valamint a szilíciumdioxid kötött és mozgó töltésétől (Q_{ox}).

$$V_T = \varphi_{MS} + \varphi_F - \frac{Q_{ox}}{C_{ox}} - \frac{Q_B}{C_{ox}}$$

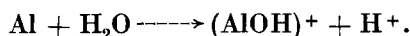
A MOS-rendszerek technológiájában a felületi összeköttetést szolgáló fém kiválasztása elsősorban műszaki és gazdasági mutatók szerint történt. A műszaki mutatók különböző technológiai előnyökkel kapcsolatosak, mint az alacsony párolgási hőmérséklet, duktilitás, jó elektromos vezetőképesség, a fő gazdasági mutatók pedig a beszerezhetőség, az ár és a minőség. Így esett a választás az alumíniumra. Meg kell mondani, hogy ez a választás jelentős gondok forrása lett, elsősorban a lehetséges kölesönhatások nem ismerése vagy figyelmen kívül hagyása miatt.

A korai MOS-rendszerekben jelentkező elektromos karakterisztika instabilitás eredetét sikerült részben visszavezetni az alumínium fémezés előállítási körülményeire. Kiderült, hogy a nagyvákuumban izzó volfrámspirálról elpárologtatott alumínium nemcsak sajátmaga alkáliákkal szennyezett, hanem a volfrámból is kioldja az alkálszennyezést és az a bevonat létesítése közben a szilíciumdioxid felületére jutva, ott mozgó töltést létesít. Mivel a fémezés után a MOS-rendszerek hőbehatásnak is ki vannak téve (chip-felforrasztás, huzal kötés), az alkáli-ionok a SiO_2 réteg belsejébe is be tudnak diffundálni, elektromos tér hatására vándorolnak és ellenőrizhetetlen módon befolyásolják a küszöb feszültség értékét. A hőhatások azonban közvetlen kémiai folyamatokat is indukálhatnak az alumínium és a szilíciumdioxid között. Ismeretes az ipari gyakorlatból, hogy magasabb hőmérsékleten az alumínium redukálni képes a szilíciumdioxidot. A vizsgálatok szerint a MOS technológiában kialakított alumínium rétegek és a SiO_2 között már 450° körül elindul ez a folyamat [22], amely pozitív ionok képződésével jár, valószínűleg az alábbi reakció szerint:

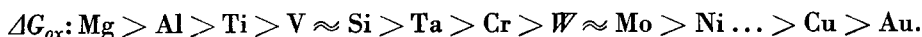


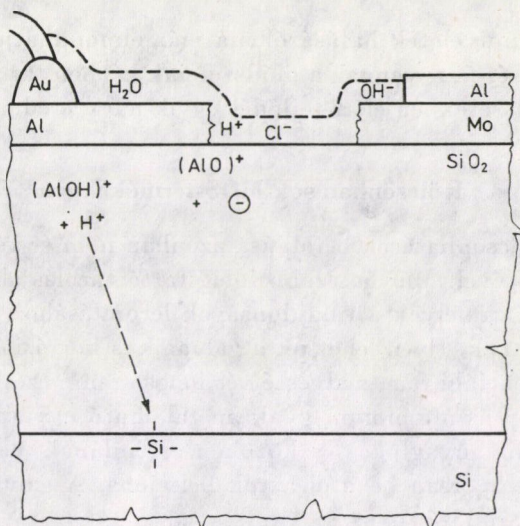
600° körül a reakció már Al_2O_3 képződéséhez vezet. Pozitív előfeszítés mellett végzett hőkezeléskor kimutatták a pozitív $(\text{AlO})^+$ ionnak a szilíciumfelület felé való vándorlását, amit SIMS-vizsgálatok is igazoltak. Fontos megfigyelés, hogy a fémezést megelőzően 600°C fölött hőkezelt SiO_2 -felületeken a redukációs folyamat sokkal gyorsabban megy végbe, amit a SiO_2 α -módosulatának megjelenésével hoznak összefüggésbe [23].

Víz tartalmú gáztérben 500°C -on végezve a hőkezelést a felületi állapotok számának jelentős csökkenését tapasztalták. Mivel a korábban mondottak értelmében ez a telítetlen Si-gyök és egy proton reakciójának az eredménye, a feltevés [24] szerint az ehhez szükséges hidrogénatomot az alumínium és a víz reakciója szolgáltatja (6. ábra):



Az alumínium fokozott reakcióképessége miatt más fémek alkalmasságát is vizsgálni kezdték. A szóbanjövő fémek oxidjaik képződési szabad energiájának nagysága szerint az alábbi sorba rendezhetők:





6. ábra. Fizikai-kémiai kölcsönhatások fém/SiO₂ rendszerben

Mindegyik fém a sorban utána következő oxidját képes redukálni. Ebből a szempontból tehát a szilícium utáni fémek kedvezőbbek, viszont mechanikai tulajdonságaik az alumíniuménál (az aranyat kivéve) kedvezőtlenebbek. Ezek figyelembevételével szerző a munkatársaival olyan kétrétegű fémezési eljárást dolgozott ki [25], ahol az első réteg molibdénből készült, a második pedig alumíniumból. A molibdén alapréteg nem reagál a szilíciumdioxiddal, védelmet nyújt az alkáli szennyezéssel szemben, míg a rajta kialakított alumínium-összeköttetés biztosítja az alumínium korábbi szereléstehnológiai előnyeit. A többréteges fémezés más megoldásai is ismeretessé váltak azóta, különösen nagyobb hőterhelésnek alávetett MOS-rendszerekben, pl. a Ti—Mo—Au, Ti—Pd—Au fémrendszerek, ahol a titán alapréteg a SiO₂-hoz a kötést biztosítja, a Mo, ill. a Pd megakadályozzák az Au eutektikus reakcióját a Si-vel esetleges túlyukakon keresztül, az Au pedig jó elektromos és mechanikai tulajdonságai miatt alkalmas fedőfém. A túlyukokon keresztül történő eutektikus reakció az alumínium esetében is létező veszély, amit a szükséges hőkezelések 500 °C-t meg nem haladó hőmérsékletre való korlátozásával lehet kiküszöbölni.

Magának a fémezési műveletnek is lehetnek technológiai kölcsönhatást kiváltó mellékhatásai. Már említettük a volfrámszállból kipárolgó alkálishennyezés hatását. Ezt a tényezőt speciális körülmények között előállított volfrám és nagy tisztaságú alumínium használatával sikerült korlátozni. Ugyanilyen eredményt értek el az elektronsugaras párologtató források bevezetésével. Itt viszont káros sugárhatások — elektronbombázás és lágy röntgensugárzás — éri a SiO₂ felületét, amelyek kikezelése további technológiai műveletet igényel [26].

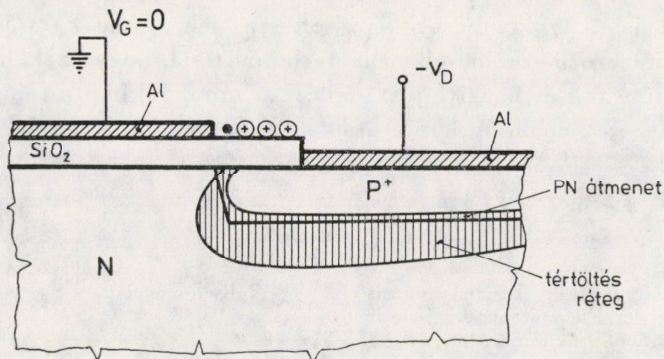
A fémzési műveletek hatásáról ma már elmondhatjuk, hogy ismerjük a ható tényezőket és meg vannak a módszereink kézben tartásukra. Ez kétségkívül a MOS-rendszerekben elért fejlődés egyik nagy eredménye.

Kölcsönhatások MOS-termékekben

Az anyagkölsönhatások befolyása azonban nem ér véget a technológiai folyamat befejezésével. Már hosszabb ideig tartó tárolás alatt is felléphetnek olyan folyamatok, amelyek a tulajdonságok leromlásához, az eszköz tönkremeneteléhez vezetnek. Ilyen lehet pl. a galvanikus korrózió, amely két különböző elektródpotenciálú fém, nedvesség és ionos szennyezés jelenlétében megy végbe [22]. Arany és alumínium gyakran található együtt a MOS-eszközökben (6. ábra), a műanyagtokos eszközökön a fémlábak mentén pedig a nedvesség viszonylag gyorsan behatol a tok belsejébe. A galvanikus korrózió az alumínium szétmaródását okozza.

Elektrolitikus korrózió keletkezik a MOS-eszközök használata közben a pozitív feszültségnek kitett fémrészekben, nedvesség és a felületen található idegen ionok jelenlétében [27]. A felületi vízrétegben ionáram alakul ki feszültségesés hatására. Ha pl. az alumíniumréteg pozitív potenciálon van, oxidációs folyamat indul meg. Ha klorid-ion van jelen, ez depolarizáló hatású, az oxidhártya felszakad és az oxidáció folytatódhatik az alumínium elfogyásáig. Na^+ ionok jelenlétében a katódos oldalon is létre jön korróziós folyamat a hidroxilionok megnövekedett koncentrációja miatt. Az ilyen korróziós folyamatok ellen a kristályfelület alacsony olvadáspontú üveggel történő bevonásával vagy hermetikus fém-kerámia tokok használatával védekeznek.

A MOS-eszközök tönkremenetelét okozhatják a nem megfelelően megválasztott üzemeltetési körülmények, a maximálisan megengedett áram és feszültség határértékek túllépése. Különösen érzékeny a túlfeszültségre a kapuelektrod alatti szigetelőréteg, amelynek átütési szilárdsága hibamentes oxid esetében a $7 \cdot 10^6$ V/cm-t is eléri, felületi rácshibákat, ionos szennyezést tartalmazó helyeken azonban 10^6 V/cm alá esik. Újabb vizsgálatok [28] szerint az átütési szilárdság maximális értékét a Si—O kötés disszociációs energiája határozza meg ($\approx 3 \cdot 10^7$ V/cm). Ionos szennyezők jelenlétében a letörés időfüggő lehet. Pozitív kapufeszültség esetében a Na^+ ionok a szigetelőrétegen keresztül a szilíciumfelülethez vándorolnak, és ott elősegítik elektronok hidegemisszióját a szilíciumból, ami letöréshez vezet. Ionszennyezéstől mentes pl. sósavgázos oxidációval előállított szilíciumdioxid rétegek letörési feszültsége egy nagyságrenddel nagyobb, mint az egyszerű oxidációval előállított oxidrétegeké. Az ionszennyezés nemcsak a kapuszigetelő viselkedését befolyásolja hátrányosan. A drain-kontaktust körülvevő oxidréteg felületén ionok halmozódhatnak fel [25], pl. a negatív előfeszültség által létesített tér hatására pozitív ionok (7. ábra). Ezek elektrosztatikus megosztással a szigetelőrétegen át, ellen-



7. ábra. Felületi letörés MOS-rendszerben pn-átmenetében (indukált ionhatás)

kező előjelű töltéseket indukálnak a félvezető felületi rétegében. Így a PN-átmenet *N*-oldalán elektron feldúsulás, *P*-oldalán lyukelszegényedés következik be, ennek következtében a PN-átmenet letörési feszültségének csökkenését okozza.

A drain-elektródra adott nagy zárófeszültség olyan térerősséget hozhat létre a kiürített rétegben, hogy a felgyorsult elektronok a félvezetőből ki tudnak lépni a szigetelőbe és rövidzárat képeznek a kapuelektródhoz. Valamennyi felsorolt letörési jelenség hőmérsékletfüggő, azaz növekvő hőmérséklettel intenzívebbé válik, kerülnünk kell tehát a MOS-eszközök mind termikus, mind elektromos túlterhelését.

Túlzottan nagy áramok a fémes vezetők állapotát is hátrányosan befolyásolják, ún. elektromigráció jöhet létre, elektromos áram által kiváltott anyagvándorlás, amely a fémezés megszakadásához vezet [29].

Következtetések

Az elmondottak meggyőzően bizonyítják az anyagkölcsonhatások szerepét a MOS-rendszerek tulajdonságainak és viselkedésének alakításában. Az, hogy felderítésük nagy tudományos erőfeszítéssel folyt és folyik ma is, minden bizonnyal a MOS-rendszer kiemelkedő fontosságával függ össze. A szerzett tapasztalatokból azonban következik, hogy anyagkölcsonhatásokkal az előállítási technológia bonyolultságától függő mértékben, minden elektronikai alkatrésznél számolnunk kell. Ez a felismerés jelentős szemléleti változást igényel. A mai elektronika magas szintű technológiája csak a legkorszerűbb tudományágakra támaszkodva jöhetett létre és csak így fejlődhet tovább. A megoldandó feladatok gyakran olyanok, hogy a tudományoknak új területeket kell nyitniuk megoldásuk érdekében. Az új ágazatok több tudományág között létesítenek interdiszciplináris kapcsolatokat és ezzel az alaptudományok fejlődéséhez is hozzájárulnak. Ez persze nem teszi egyszerűvé a szakemberek

dolgát, sem az új szakemberek képzését. Az elektronika korszakunkat alapvetően meghatározó szerepe elkerülhetetlenné teszi, hogy ezekkel az igényekkel szembenézzünk és hazai kutató-fejlesztő munkánkban általánossá tegyük a MOS-rendszerek példáján bemutatott szemléletet.

IRODALOM

1. SZÉP, I.: Die Festkörper-Schaltung als ein physikalisch-chemisches System. XI. Internat. Tagung der Elektrotechniker, Berlin 1965
2. BALK, P.: *J. of Electronic Mat.* 4 (1975), 51—82
3. OAKLEY, D. E., GODBER, G. A.: *Thin Solid Films* 9 (1972), 287—291
4. COLLINS, F. C.—NAKAYAMA, T.: *J. Electrochem. Soc.* 114 (1967), 167—173
5. MUKHERJEE, S. P.—EVANS, P. E.: *Thin Solid Films* 14 (1972), 105—118
6. PLISKIN, W. A.—DAVIDSE, P. D. et al.: *IBM J. Res. Dev.* 11 (1967), 461—467
7. WALLMARK, J. T.—SCOTT, J. H.: *RCA Review* 30 (1969), 235—250
8. BARNA Á. közlése (MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézete)
9. HOFFMANN, G.—LŐRINCZY, A.—NÉMETH-SALLAY, M.—SZÉP, I. C.: *Thin Solid Films* 59 (1979), 319—325
10. BARNA, Á.—NÉMETH-SALLAY, M.—SZÉP, I. C.—ROMANOVA, G. F. et al.: *Thin Solid Films* 55 (1978), 355—360
11. DEAL, B. E.: *J. Electrochem. Soc.* 121 (1974), 198—205
12. SIGMON, W. T.: *Appl. Phys. Lett.* 24 (1974), 105—107
13. LIGENZA, J. R.—SPITZER, W. G.: *J. Phys. Chem. Solids* 14 (1969), 131—136
14. RÉVÉSZ, A. G.—ZAININGER, K. H.: *RCA Review* 29 (1968), 22—76; RÉVÉSZ, A. G.: *Thin Solid Films* 41 (1977), 43—47
15. SVENSSON, CH. M.: Proc. Int., Conf. „The Physics of SiO₂ and its Interfaces” ed. S. T. Pantelides, Pergamon Press 1978, 328—332
16. SZÉP I.—SOLT Katalin: Int. Conf. Phys. Chem. Semiconductor Heterojunctions, Budapest Akadémiai Kiadó; Vol. V., 205—209
17. NÁRAY-SZABÓ, I.—KÁLMÁN, A.: *Szilicatechnik* 12 (1961), 316—318
18. BALK, P.—ELDRIDGE, J. M.: *Proc. IEEE* 57 (1969), 1558—1563
19. MEEK, R. L.—BRAUN, R. H.: *J. Electrochem.* 119 (1972), 1538—44
20. BÁRSONY, I.—SZÉP, I. C.: *Acta Physica* 29 (1970), 97—106
21. CASTRO, P. L.—DEAL, B. E.: *J. Electrochem. Soc.* 118 (1971), 280—286
22. SZÉP IVÁN: Korszzerű MIS struktúrák előállításának technológiai problémái. „Szilícium alapú MIS rendszerek” iskola, Mátrafüred, 1977. Eötvös Loránd Fizikai Társulat, 225—239 o.
23. UGAJ, J. A.: *Izv. AN SzSzSzR, Neorganiceszkie Materialü* 9 (1973), 168—171.
24. KOOL, E.: *Philips Res. Rept.* 21 (1966), 477—497
25. SZÉP, I. C.—TIHANYI, J.: Proc. Colloque. Internat. Microélectronique Avancée, Paris, ed. Chiron, 1970. Vol. I, 56—62
26. LEE, H. S.: *IEEE Trans. Electron. Dev.* ED-25 (1978), 795—799
27. KOELMANS, H.: Proc. 12th Ann. Reliability Symp. 1974, 168—174
28. SOLOMON, P.: *J. Vac. Sci. Technol.* 14 (1977), 1122—1130
29. d'HEURLE, F. M.—Ho, P. S. in „Thin Films — Interdiffusion and Reaction”, ed. Poate, J. M., Tu, K. N., Mayer, J. W.; New York, Wiley, 1978, 243—303

Material Interactions in the Electronic Devices of Metal-Oxide-Silicon (MOS) Structure. —

In this study the most essential material interactions are reviewed, which can take place during manufacture, storage and operation of metal-oxide-silicon (MOS) devices, representing one very important class in the groups of active microelectronic devices. Such interactions can give rise to properties differing significantly from those foreseen by simple physical models. Based on the results of more than fifteen years of experimental work performed by the author it is shown that the critical interactions occur during the preparation of the oxide, during heat-treatments accompanying different technological operations and depend profoundly on the variety and the way of the deposition of the metal (*M*) layer. The nature of these processes, means how to influence them, are interpreted by the author supported by experimental evidence.

In conclusion, the need for strengthening the interdisciplinary relations between the scientific branches concerned is stressed, this being the condition to elucidate further details and to bring under control material interactions in the MOS system.

Stoffwechselwirkungen in den Bauelementen der Mikroelektronik von Metall-Siliziumoxyd-Silizium (MOS) Struktur. — In dieser Studie werden die wichtigsten Stoffwechselwirkungen überblickt, die bei der Herstellung, Lagerung und Anwendung von Halbleiterbauelementen mit Metall-Oxyd-Silizium (MOS) Struktur — einer der wichtigsten Vertreter der Bauelemente in Mikroelektronik — auftreten können und solche Eigenschaften verursachen, die von denen des einfachen physikalischen Modells abweichen. Auf Grund von mehr als fünfzehn jährigen Untersuchungen des Verfassers wird es bewiesen, daß aus der großen Zahl von Wechselwirkungen jene die wichtigsten sind, die bei der Herstellung der Oxydschicht, bei den verschiedenen Wärmebehandlungen des technologischen Arbeitsganges, und bei der Aufbringung der Metallschicht im MOS System stattfinden. Durch Experimente unterstützt werden auch die Elementarprozesse und die Art und Weise ihrer Beeinflussung erörtert. Als Schlußfolgerung wird vom Verfasser betont, daß zur weiteren Klärung und auch Beherrschung der Stoffwechselwirkungen im MOS System eine stärkere Verknüpfung zwischen den betreffenden wissenschaftlichen Disziplinen nötig sei.

ASZFALTBURKOLATÚ UTAK LEROMLÁSA ÉS ÉLETTARTAMA

IFJ. GÁSPÁR LÁSZLÓ*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1979. szeptember 1-én]

A közúthálózatból kijelölt útszakaszok több éves szubjektív állapotbecslésének idősorai alapján megbecsültük várható élettartamukat. Az élettartam-előrebecslésnél az útszakaszokat attól függően osztottuk csoportokba, hogy pályaszerkezetük tényleges vastagsága és a rajtuk haladó forgalom által igényelt vastagság között mi az arány. Külön foglalkoztunk a burkolatkopás kérdésével. Hatéves mérésorozat eredményei alapján a pályaszerkezet vékonyodásának sebességét több tényezővel összefüggésbe hoztuk. E vizsgálatok eredményei a közúti munkák műszakilag jobb tervezéséhez nyújtanak segítséget.

I. Bevezetés

Az egyre növekvő forgalmi terhelés miatt mind több igényt támasztanak a közutakkal szemben. Ezek közül is kiemelkedik az a kíváncsóság, hogy az út viszonylag hosszú időn keresztül, kedvező használhatósággal rendelkezék. Az említett követelmény nemcsak műszaki és gazdasági szempontokkal indokolható, hanem — az úthasználók kielégítettségi szintje, valamint a komolyabb állapotjavító beavatkozások alkalmával elkerülhetetlen forgalomzavaró hatás miatt — jelentős mértékben politikai kérdés is.

Az út viszonylag lassú leromlási folyamata és megkívánt hosszúságú élettartama csak számos követelmény egyidejű biztosítása esetében érhető el. Már a tervezés időszakában ésszerűen kell a jelenlegi és a jövőbeni körülményeket alapul venni ahhoz, hogy a szerkezet valamilyen vonatkozásban ne legyen „aláméretezett”. Hasonlóképpen az építés és a fenntartás során is lehet olyan hibákat követni, amelyek az útállapot gyors romlását okozzák. Ezenkívül váratlan, illetve előre nem látott igénybevételek (rendkívül nagy forgalmi terhelés vagy különleges időjárási hatások) következményeként is rövidülhet az út élettartama. Korszerű szemlélet szerint az útügynek az említett résztvevőkenységeit — azok hatékony, magas szintű művelése érdekében — egységükben, összefüggésükben kell vizsgálni [1].

A sok változó tényező miatt komoly nehézségekbe ütközik az utak várható élettartamának, akárcsak közelítő ismerete, bár ez, elsősorban a közúti munkák tervezésekor, rendkívül hasznos információ [2].

* Ifj. Dr. Gáspár László. 1158 Budapest Doktor Sándor u. 2

A következőkben néhány olyan kutatási eredményről számolunk be, amely a hazai aszfaltburkolatú utak élettartamával, ill. leromlási folyamatával függ össze.

2. Az utak élettartamának különböző értelmezései

Valamely út élettartamán — klasszikus értelemben és kissé leegyszerűsítve — azt az időszakot értjük, amíg az út a feladatát el tudja látni. Ebből a meghatározásból az következik, hogy az élettartam az út átadás-átvétele és a forgalomra alkalmatlanná válása közötti időszakot jelenti. A kérdés kissé részletesebb vizsgálata felvet néhány problémát, amelyek közül a legfontosabbakat a következőkben vázoljuk.

a) Az utak élettartamának hagyományosan, idő mértékegységben való kifejezése mellett (vagy inkább helyett), az utóbbi időben világszerte terjed a *forgalmi terhelés* dimenzióban történő számolás. Nyilvánvaló ugyanis, hogy az út tönkremenetelét általában elsősorban a rajta lebonyolódó forgalom — annak is főleg a nagy tengelysúlyú része — okozza. Ennek az újabb módszernek a hiányosságaként legfeljebb az a tény említhető, hogy az időnek (pl. az aszfaltrétegekben levő bitumen öregedésének), az időjárásnak (pl. a fagyás-felengedési ciklusok számának) és a rendszeres fenntartási munkának a hatását ez a rendszer nem veszi figyelembe. Az út leromlása szempontjából nem egészen mindegy tehát, hogy például adott nagyságú forgalmi terhelés három hónap alatt vagy pedig nyolc év alatt bonyolódik-e le rajta. Az előbbiekkel az a közismert megfigyelés is alátámasztja, hogy a forgalom nélküli — pl. ívkorrekció miatt felhagyott — útszakaszok is tönkremennek néhány évtized alatt.

b) Az út élettartamának *értelmezése* már nem teljesen egyértelmű, amióta a burkolaterősítés és az utólagos felületi érdesítés általánossá vált. Ebben a tekintetben alapvetően két megoldás kínálkozik. Egyik lehetőség, hogy a szokásos méretű útfenntartási munkát meghaladó minden tevékenység — így a pályaszerkezet erősítése vagy az elsíkcsodott felületű kopóréteg csúszásviszonyainak javítása — szükségességének felmerülése az út élettartamának végét, illetve egy új időszak kezdetét jelenti. Korszerű szemlélet szerint azonban az említett közúti munkák egy út élettartamán belüli tevékenységek, amelyek arra hivatottak, hogy a teljes tönkremenetelt, az állapot időleges javítása révén, elodázzák. Az említett elképzelés alapján már valamely új út tervezésének időszakában célszerű a rendszeres fenntartási tevékenységen kívül, ezeket a „középszintű beavatkozásokat” is megtervezni. Az itt követendő stratégia meglehetősen sok tényezőtől függ [3].

c) Az élettartam *vége* tulajdonképpen az út leromlási folyamatának végső stádiuma. Ennek a folyamatnak a figyelemmel kísérése adhat lehetőséget a még várható élettartam előrebecsülésére [4, 5, 6]. Világszerte követett gyakor-

lat, hogy a pályaszerkezet teherbírását tekintik ebben a tekintetben mértékadó kritériumnak. A hazai pályaszerkezet-méretezési gyakorlatban is ennek a paraméternek van meghatározó jelentősége [7, 8].

Újabban azonban egyes aszfalttechnológiai paraméterek (pl. Hollandiában az ún. kúszási vizsgálat eredményei) is szolgálhatnak az aszfaltburkolatú pályaszerkezetek tervezésekor alapul [9]. Az Amerikai Egyesült Államokból indult ki az a gyakorlat, hogy az utat használók szubjektív kielégítettségi szintjét tekintik mértékadónak az út leromlási folyamatának jellemzésekor [10].

d) Az út élettartamának végét nemcsak a tönkremenetel, a leromlás előrehaladott állapota válthatja ki, hanem a pályaszerkezeti réteg (illetve rétegek) *elkopása* is, bár ez a folyamat hazánkban csak ritkán válik mértékadóvá, miként azt már négy éve tartó kopásméréseink eredményei igazolják [11]. Elméletileg azonban a burkolatkopás jelentősége nem vitatható, hiszen a burkolatkopás esetében nemcsak arról van szó, hogy a szerkezet egy része fizikailag eltűnik és ily módon a teherbírás közvetlenül csökken, hanem a kopás a pályaszerkezetbe való vízbehatolás esélyét is megnöveli, és így közvetve gyorsítja a leromlás folyamatát. A burkolatkopás előrehaladtával két ok miatt is megnő a csapadékvíz szerkezetbe való behatolásának a lehetősége: egyrészt a kopóréteg vékonyodásával egyre kisebb lesz annak a kis hézagtartalmú pályaszerkezeti rétegnek a vastagsága, amely a vízbehatolással szemben „védőpáncél” szerepét tölti be, másrészt a keréknyomvályúk keletkezése miatt eső után a víz hosszabb ideig megáll a burkolaton, ezáltal megnő a beszivárgás veszélye.

e) A *tervezési és a gyakorlati útélettartam* általában jelentős mértékben eltér egymástól. A tervezés stádiumában átlagos építési technológiát, korlátozott mértékig ismert talajviszonyokat és előrebecsült forgalmi terhelést vesznek alapul. Az előbbieken alapján meghatározott élettartam értéke — a tényleges körülményeknek az előzetesen feltételezettől eltérő volta miatt — nagyon ritkán azonos a valóságos élettartammal. Nem ritka az az eset sem, hogy valamilyen különleges (gazdasági, honvédelmi stb.) indok alapján az út korszerűsítésére vagy a pályaszerkezet erősítésére még kevésbé leromlott állapotban sor kerül.

f) Az élettartam-előrebecslés *elméleti alapon* csak nagyon korlátozott pontossággal történhetik, még egyetlen út esetében is. Az élettartam előzetes meghatározására szolgáló általános érvényű módszer, amely minden méretezési eljárás előfeltétele, még kevésbé lehet pontos. Emellett az építési és a fenntartási technológia szakadatlan változása miatt néhány év alatt bármely pályaszerkezet-tervezési (élettartamot előrebecsülő) eljárás kiinduló adatainak helyessége kétséssé válhatik. Indokoltak éppen azért azok a törekvések, amelyek során az útszakaszok tényleges leromlási folyamatát kísérik figyelemmel, és ebből vonnak le gyakorlati hasznú következtetéseket. E cikk is, többek között, ilyen próbálkozásról számol be [12].

g) Az élettartam előrebecslését az a tény is nehezíti, hogy a már rossz állapotú utak *leromlásának sebessége* általában megnő, így a lineáris extrapoláció létjogosultsága vitatható.

h) Nyilvánvaló, hogy annak az útállapotszintnek a megválasztása, amelyet a forgalom számára már elviselhetetlennek tartunk, azaz az *élettartam végének a megállapítása*, többek között gazdasági kérdés is. Erősen korlátozott anyagi lehetőségek esetében természetesen csak igen leromlott állapotban kerülhet sor valamely út korszerűsítésére. (Közismert ugyanakkor, hogy a túlságosan késői beavatkozás milyen mértékű műszaki, gazdasági és társadalmi hátrányokkal jár.)

i) Az 1970-es évek eleje óta, főleg Nyugat-Európában, jellemző tönkremeneteli módnak számít az útburkolatok *maradó alakváltozása*. Ez keréknyomvályú vagy keresztirányú gyűrődések formáját öltheti [13].

Több országban (Hollandia, Nagybritannia, Finnország) a keréknyomvályú-mélység az üzemi élettartam önálló kritériuma.

3. Az élettartamot befolyásoló tényezők

Amint azt már az előzőekben is említettük, az utak (jelen vizsgálat szempontjából elsősorban az aszfaltburkolatú utak) élettartamát, leromlási folyamatának alakulását számos tényező befolyásolja. Teljes körű felsorolásuk helyett, röviden csak a legfontosabbakat vázoljuk.

a) A *tervezés időszakában* nemcsak a pályaszerkezet vastagsági méreteinek van az út élettartama szempontjából meghatározó jelentősége, hanem ebben a tekintetben a burkolat, a padkák szélessége, a víztelenítő rendszer kialakítása és az út geometriai jellemzői (pl. a hossz-szelvény és a helyszínrajz) is szerepet kapnak.

b) Az út *kivitelezésekor* kiemelkedően fontos a megfelelő minőségű munka annak érdekében, hogy az egyes pályaszerkezeti rétegek a tervezett mennyiségi és minőségi paraméterekkel készüljenek el. A felhasznált alapanyagok (ásványi és kötőanyagok) minőségén kívül, a keverőtelepen és a helyszínen végzett gondos munka előfeltétele annak, hogy az út élettartama kivitelezési okok miatt ne rövidüljön le. (Különösen a kopóréteg minőségi hibái — elégtelen kötőanyag-tartalma, túlzott hézagos volta, meg nem engedhető felületi egyenetlenségei stb. — gyorsíthatják meg az út leromlását.)

c) Az *útfenntartási* munkák színvonala szintén befolyással van a leromlás folyamatára. Így pl. a kezdődő burkolatrepedések kiöntésének vagy a padkákon és az árkokban levő növényzet idejében történő lekaszásának elmaradása a pályaszerkezet korai tönkremenetelét segítheti elő. Az út élettartama szempontjából — ha közvetve is — nagy szerepe van a megfelelő sűrűséggel és részletességgel végrehajtott állapotfelvételeknek, amelyek a szükséges jövő-

beni beavatkozások tervezését és a már elvégzett fenntartási tevékenység színvonalának elbírálását lehetővé teszik [14].

d) A *forgalmi terhelés* az egyik legfontosabb az út élettartamát befolyásoló tényezők közül. Elsősorban a nagy tengelysúlyú járművek számának van ebben a tekintetben meghatározó szerepe [15]. A forgalom élettartamot csökkentő hatása gyakran más tényezőkkel kombináltan jelentkezik. (Így pl. a nem elegendő burkolatszélesség következményeként a járműkerek az útfelületnek csak rendkívül szűk sávján járnak, és ezáltal megnő a pályaszerkezet „fajlagos terhelése.”)

Az úton közlekedő járműveknek a pályaszerkezetre gyakorolt káros hatása ugrásszerűen megnövekedhetik, ha a földmű teherbírása — pl. fagyveszélyes talajtípus esetében tavaszi olvadáskor — hirtelen lecsökken. Mechanikai szempontból az egyes járművek súlyából adódó függőleges nyomóerő és a haladáskor, de főleg fékezéskor, illetve gyorsításkor fellépő vízszintes irányú nyíróerő jelenti a pályaszerkezet igénybevételét.

Említést kell még tenni a forgalmi terhelés azon pozitív hatásáról is, hogy a rétegek utántömörítése révén ezek szilárdsági tulajdonságait — korlátozott mértékig — javítja.

e) Az *időjárási körülmények* is hatással vannak az út leromlási sebességére. Elsősorban a csapadék és a szélsőséges léghőmérséklet okozhat ebben a tekintetben problémákat. Az eső és a hólé ugyanis a túlságosan nagy hézagtartalmú burkolatba beszivároghat, sőt — vízelvezetési hiányosságok esetén — a földművet is elnedvesítheti. Nagy hidegben fennáll a burkolat kifagyásának veszélye, de ugyanígy állapotromlást idézhet elő a magas léghőmérséklet is, amikor — főleg a szükségesnél nagyobb bitumentartalom esetében — az aszfaltkopóréteg stabilitása olyan kis értékűvé válhatik, hogy az a forgalom hatására deformálódik. A hőmérséklet-változás ezenkívül az eltérő hőkiterjedésű együtthatójú pályaszerkezeti elemek (pl. aszfaltburkolat és cementbeton anyagú optikai vezetősáv) találkozásánál olyan hézagokat okozhat, amelyek a csapadékvíz behatolását lehetővé teszik és így módon az élettartamot hátrányosan befolyásolják. Egyes hóolvasztó sótipusok is kimutathatóan rövidítik az aszfaltburkolatok élettartamát.

f) Az *időnek* is szerepe van az aszfaltburkolatú utak leromlási folyamatának alakulásában. Az építéskor felhasznált bitumen az idők folyamán öregszik, keményedik. Ennek következtében az aszfaltrétegnek (elsősorban a levegővel közvetlenül érintkező kopórétegnek) egyre nagyobb lesz a rugalmassági modulusa, így repedésre is mind hajlamosabbá válik. Az egyes pályaszerkezeti rétegek kisebb-nagyobb mértékű utántömörödése, valamint a kötött talajú földmű konszolidációja is időben elhúzódóan játszódik le.

Végül megemlítjük, hogy a *nem rendeltetészerű használat* (pl. lánctalpas járműveknek az úton való közlekedtetése) is lehet gyors leromlás okozója.

4. Aszfaltburkolatú utak élettartamának előrebecslése

A KÖTUKI a KPM Közúti Főosztály megbízásából 1972 óta kutatja a hazai aszfaltburkolatú utak leromlási folyamatát. Ennek során a közúthálózatból kijelölt 30–32 db, egyenként 500 fm hosszúságú útszakasz pillanatnyi állapotának évenként kétszeri jellemzésére kerül sor. Az eddigi eredményekről több cikkben, illetve kutatási jelentésben beszámoltunk már [5, 6, 11, 16].

A kijelölt útszakaszok állapotfelvételének egyik fontos része, amikor a helyszíntre kiszállt mérnökcsoport az erre a célra összeállított táblázat kitöltésével, szubjektív alapon adott osztályzatok útján jellemzi az egyes útpálya-paraméterek pillanatnyi minőségi szintjét. Ugyanakkor az összállapotra is adnak 1 és 5 közötti, tizedes pontosságú minőségi osztályzatot. Megítélésünk szerint ezen osztályzat időbeli alakulásának számos útszakasznál való ismerete a következő okok miatt közelítő élettartam-előrebecslésre nyújt lehetőséget:

— a mérnökcsoport több éves gyakorlat alapján viszonylag „objektív” módon jellemzi az útállapotot;

— hat-hét év alatt kapott adatok mennyisége elegendő a megalapozott extrapolációhoz;

— a megfigyelt útszakaszok száma elegendő ahhoz, hogy az adatsoraikból általánosítható következtetéseket vonjunk le;

— több szakasz rendszeres megfigyelését azért kellett abbahagyni, mert leromlott állapota miatt pályaszerkezetét megerősítették; így ismeretes az is, hogy a jelenlegi hazai gyakorlatban megközelítőleg milyen minősítő osztályzattal jellemzett útállapot esetén kerül sor a szokásos fenntartási tevékenységet meghaladó beavatkozásra.

Az élettartam-előrebecsléshez olyan szakaszokon kapott adatokat használtunk fel, amelyeken a szubjektív állapotbecslésre folyamatosan legalább 3 éven keresztül (tehát legalább 6 alkalommal) sor került.

Az 1. táblázat ezeknek az 500 fm hosszúságú szakaszoknak a jegyzékét tünteti fel. Megjegyezzük, hogy azokon a szakaszokon, amelyeken a „rendszeres megfigyelés vége” oszlopban 1979. II. félév került, az állapotjellemzést az 1980. évben is folytatni kívánjuk.

Az útszakaszok leromlási folyamatának figyelemmel kísérése alapján végzett élettartam-előrebecsléshez a következő adattípusokat használtuk fel:

— az útszakasz pillanatnyi állapotára félévenként adott szubjektív minősítő osztályzatokat;

— az útszakasz építési (illetve utolsó korszerűsítési vagy megerősítési) időpontját;

— az útszakasz tényleges forgalmi adatait, illetve a következő években — az érvényes forgalomfejlődési viszonyszámok segítségével számított — várható forgalmi terhelést;

— az útszakasz földművének teherbírását;

- az útszakasz pályaszerkezeti rétegeinek vastagsági adatait;
- azoknak a megerősítésre került útszakaszoknak az utolsó állapotminősítő osztályzatait, amelyeket előzőleg rendszeresen megfigyeltünk.

I. táblázat

Az élettartam-előrebecsléskor figyelembe vett, rendszeresen megfigyelt útszakaszok jegyzéke

Sorszám	Útszakasz helye	Építési (korszerűsítési) időpont	A rendszeres megfigyelés	
			kezdetre	vége
1. M-1 a. út	14+500—15+000	1970	1973. I. félév	1979. II. félév
2. M-1 a. út	48+750—49+250	1970	1973. I. félév	1979. II. félév
3. 1. út	126+500—127+000	1969	1972. II. félév	1976. II. félév
4. 2. út	77+800—78+300	1971	1972. II. félév	1979. II. félév
5. 3. út	23+000—23+500	1968	1973. I. félév	1976. I. félév
6. 3. út	95+360—95+860	1970	1973. II. félév	1979. II. félév
7. 4. út	23+025—23+525	1972	1973. I. félév	1978. II. félév
8. 4. út	23+525—24+025	1972	1972. II. félév	1979. II. félév
9. 4. út	50+650—51+150	1973	1973. I. félév	1979. II. félév
10. 4. út	54+650—55+150	1973	1973. I. félév	1979. II. félév
11. 4. út	113+900—114+400	1971	1973. I. félév	1979. II. félév
12. 4. út	321+800—322+300	1973	1973. I. félév	1978. II. félév
13. 4. út	334+300—334+800	1973	1973. I. félév	1978. II. félév
14. 5. út	28+000—28+500	1973	1973. II. félév	1976. I. félév
15. 5. út	50+500—51+000	1973	1974. I. félév	1979. II. félév
16. 5. út	53+000—53+500	1973	1974. I. félév	1979. II. félév
17. 6. út	67+000—67+500	1972	1973. I. félév	1979. II. félév
18. 70. út	90+000—90+500	1966	1973. I. félév	1979. II. félév
19. 70. út	95+000—95+500	1966	1973. I. félév	1979. II. félév
20. 7. út	116+000—116+500	1968	1972. II. félév	1977. II. félév
21. 8. út	30+500—31+000	1972	1972. II. félév	1979. II. félév
22. 8. út	31+000—31+500	1970	1972. II. félév	1979. II. félév
23. 8. út	59+000—59+500	1972	1973. I. félév	1979. II. félév
24. 15. út	13+000—13+500	1972	1973. I. félév	1979. II. félév
25. 31. út	73+500—74+000	1968	1972. II. félév	1977. I. félév
26. 44. út	127+120—127+620	1973	1973. II. félév	1979. II. félév
27. 44. út	141+750—142+250	1970	1973. I. félév	1979. II. félév
28. 85. út	32+500—33+000	1972	1973. I. félév	1979. II. félév
29. 85. út	36+150—36+650	1972	1973. I. félév	1979. II. félév
30. 87. út	2+800—3+300	1973	1975. I. félév	1979. II. félév
31. 87. út	7+400—7+900	1973	1975. I. félév	1979. II. félév
32. 2101. út	7+200—7+700	1973	1974. II. félév	1979. II. félév

Az elvégzett számítással célunk az volt, hogy a hazánkban követett pályaszerkezet-méretezési eljárás [7] alkalmazása alapján a megfigyelt útszakaszokat négy csoportba osztva, az éveken keresztül végzett megfigyelés során kapott adatok extrapolálása útján a várható élettartamhatárokat megállapítsuk.

A megfigyelt útszakaszok pályaszerkezeti adatai a fúrt magminta vizsgálati, illetve feltárás alapján ismeretesek, így összvastagságuk és ecm-ben kifejezett egyenérték-vastagságuk is meghatározható volt.

A földmű talajfajtájának függvényében a következő CBR-értékeket vettük fel:

— homoktalaj	12%,*
— közepesen kötött talaj	7%,
— vegyes talaj (az ország szárazabb vidékén)	6%,
— vegyes talaj (az ország nedvesebb vidékén)	5%.

Már a megfigyelt útszakaszok kiválasztásakor figyelemmel voltunk arra, hogy közelükben forgalomszámláló állomás legyen, így azok forgalmi terhelése építésük időpontjától kezdve ismeretes. Ezekre az évekre meghatároztuk az F_{10} forgalomnagyságot, azaz a különböző súlyú nehézgépjárműveknek 100 kN (10 Mp) tengelyterhelésre átszámított értékét [7]. Ezek az utak általában 8–12 évvel ezelőtt készültek; a 15 évesnek felvett tervezési élettartam további (1978. évet követő) időszakának várható forgalmi terhelését a jelenleg érvényes forgalomfejlődési viszonzyszámok alapján becsültük előre [17].

Az egyes útszakaszok pályaszerkezetének szükséges egyenérték-vastagságát a 15 év alatt várható összegezett F_{10} forgalmi terhelés a földmű tervezési teherbírása (CBR értéke) alapján a HUMU-ban közölt méretezési diagram segítségével határoztuk meg [7]. Az így kapott szükséges egyenérték-vastagságot a pályaszerkezeti rétegek tényleges adataiból számított egyenérték-vastagsággal hasonlítottuk össze. Ennek az összehasonlításnak az eredménye alapján a rendszeresen megfigyelt útszakaszokat négy csoportra osztottuk, a következők szerint.

a) Túlméretezett útszakaszok

$$\frac{H_e \text{ tényl.}}{H_e \text{ szűks.}} > 1,5;$$

b) megfelelően méretezett útszakaszok

$$0,8 < \frac{H_e \text{ tényl.}}{H_e \text{ szűks.}} \leq 1,5;$$

c) aláméretezett útszakaszok

$$0,6 < \frac{H_e \text{ tényl.}}{H_e \text{ szűks.}} \leq 0,8;$$

d) erősen aláméretezett útszakaszok

$$0,6 \geq \frac{H_e \text{ tényl.}}{H_e \text{ szűks.}} .$$

* Megjegyezzük, hogy a közelmúlt országos teherbírásmérései ezt a CBR-értéket — amelyet a HUMU tartalmaz — túlzottan alacsony értékűnek mutatták.

Az elvégzett számítást példaként egyetlen útszakaszon, a 3. út 95 + 360 — 95 + 860 km szelvények közötti szakaszán mutatjuk be. A 2. táblázat a szakasznak az építéstől számított 15 éves időtartama alatt várható

2. táblázat

A 3. út 95+360—95+860 km szelvényei közötti szakaszának 15 éves időszakra vonatkozó F_{10} forgalma

Év	Autóbuszok	Nehéz tehergépkocsik	Pótkocsis nehéz tehergépkocsik	Nyerges vontatók, kamionok	F_{10}
1970	21 729	63 852	23 177	30 849	139 607
1971	16 343	63 344	15 743	22 386	117 816
1972	28 668	99 604	28 756	30 849	187 877
1973	48 115	128 982	31 304	53 235	261 643
1974	49 576	120 102	30 394	48 048	248 120
1975	65 462	140 526	28 392	31 668	266 048
1976	75 322	148 962	26 208	32 214	282 706
1977	82 416	157 677	29 757	40 404	310 254
1978—1984	653 559	1280 337	241 627	336 161	2 511 684
Az F_{10} értéke a 15 év alatt					4 325 755

Megjegyzések:

1. A táblázat első 8 sorában a 3. sz. út 81+480 km szelvényében felállított forgalomszámláló állomás mérési adatai szerepelnek.

2. A második, a harmadik, a negyedik és az ötödik oszlopban a megjelölt típusból az útszakaszon egyirányban közlekedő járművek évi darabszámának és a HUMU-ban szereplő jármű-átszámítási szorzóknak a szorzatai szerepelnek.

3. Az 1978 és 1984 közötti forgalmi adatokat a jelenleg érvényes forgalomfejlődési viszonyszámok alapulvételével számítottuk.

nehéz forgalmi terhelésének számítását szemlélteti. (Az F_{10} értékének meghatározásakor az 1970 ÷ 1977. években az útszakaszokhoz közeli forgalomszámláló állomás adataira támaszkodtunk, míg az 1978 ÷ 1984. években a jelenleg érvényes forgalomfejlődési viszonyszámok segítségével becsültük előre a forgalmat.)

A 3. sz. út 95 + 360 — 95 + 860 km szelvényei között a pályaszerkezet tényleges egyenérték-vastagsága — a rétegvastagságoknak fűrt magminták alapján végzett méretezése alapján — a következő:

4,2 cm AB-12	× 2,2 ecm/cm = 9,24 ecm
4,9 cm K-20	× 2,2 ecm/cm = 10,78 ecm
5,9 cm JU-35	× 2,0 ecm/cm = 11,80 ecm
8,0 cm BAA	× 1,5 ecm/cm = 12,00 ecm
30,0 cm hom. kavics	× 0,5 ecm/cm = 15,00 ecm

Összesen: H_e tényl. = 58,82 ecm

A 15 éves tervezési időszakra az F_{10} értéke $4,3 \times 10^6$ egységtengely (2. táblázat).

A földmű anyaga sárga homokliszt, így a méretezésnél figyelembe vehető teherbírása: CBR = 7%.

A HUMU méretezési diagramjából, az előbbi adatok alapján, a szükséges pályaszerkezet-vastagság:

$$H_{e \text{ szüks.}} = 52,0 \text{ ecm.}$$

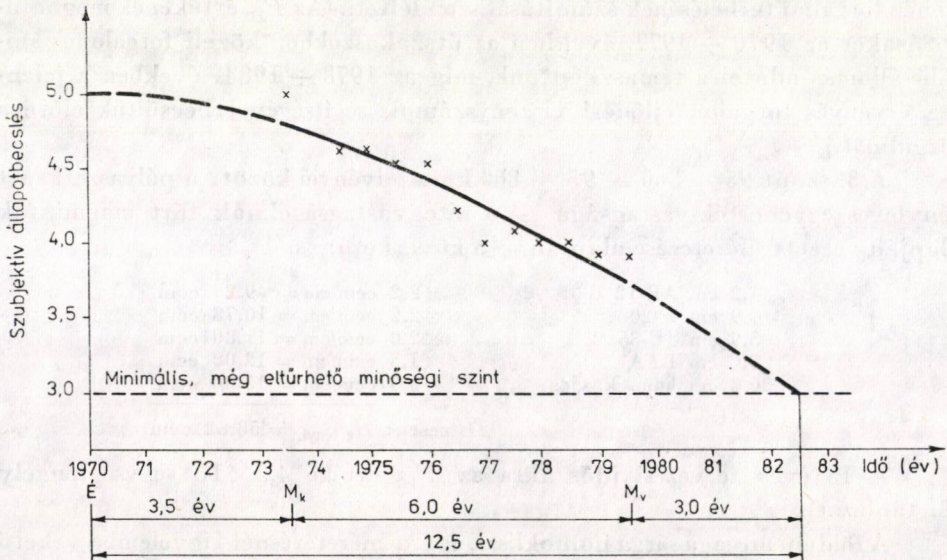
A pályaszerkezet méretezésének utólagos megítélése ezek után a két egyenérték-vastagság arányának kiszámítása alapján lehetséges:

$$\frac{H_{e \text{ tényl.}}}{H_{e \text{ szüks.}}} = \frac{58,82 \text{ ecm}}{52,00 \text{ ecm}} = 1,13.$$

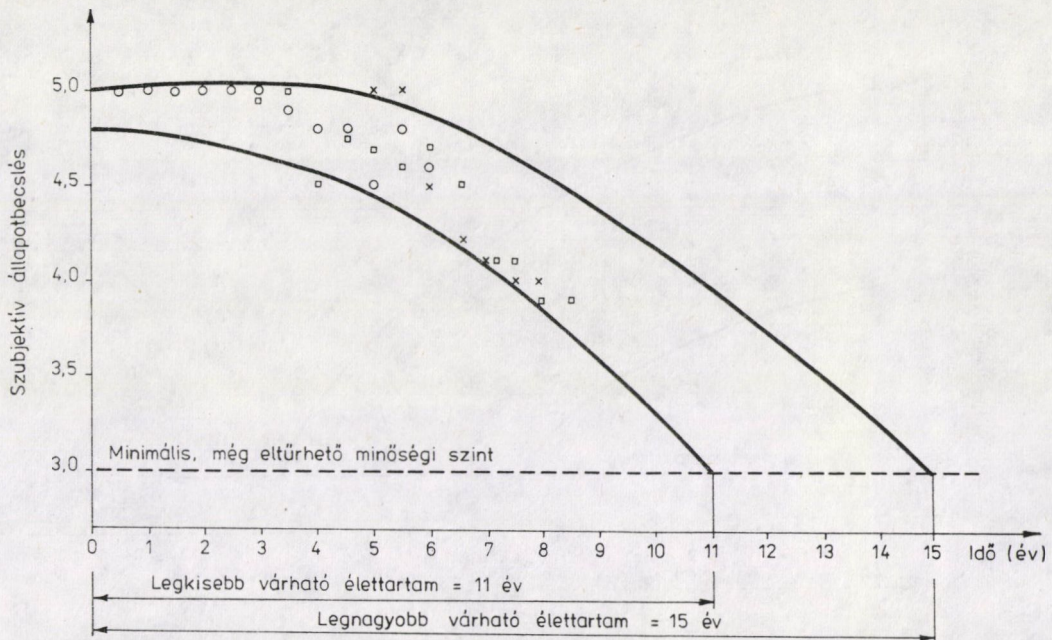
Tehát a 3. sz. út 95 + 360 — 95 + 860 km szelvények közötti szakasza — az előbbieken közölt csoportosítás szerint — megfelelően méretezettnek tekinthető.

Az 1. ábra azt mutatja be, hogy a vizsgált útszakaszon a szubjektív állapotjellemzések során adott minősítő osztályzatok alapján a megfigyelés időszaka alatt hogyan alakult a leromlási folyamata. Ez utóbbi menetét követve, a még várható élettartam 3 évnek adódik. Így előreláthatólag az 1970. évi építést 12,5 évvel követően válik szükségessé az útszakasz pályaszerkezetének az erősítése. (A minimális elfogadható szintet 3,0 minősítő osztályzatnak annak alapján választottuk, hogy három megfigyelt szakaszunknak a megerősítését közvetlenül megelőző értékelő osztályzata megközelítőleg ezen a szinten volt.)

Fő célunk azonban nem az egyes szakaszok élettartamának előrebecslése, hanem a pályaszerkezet tényleges teherbírása és forgalmi terhelés aránya alapján kiválasztott útszakaszcsoportok leromlási folyamatának együttes figyelembevételével általánosabb érvényű élettartamhatárok megállapítása volt.

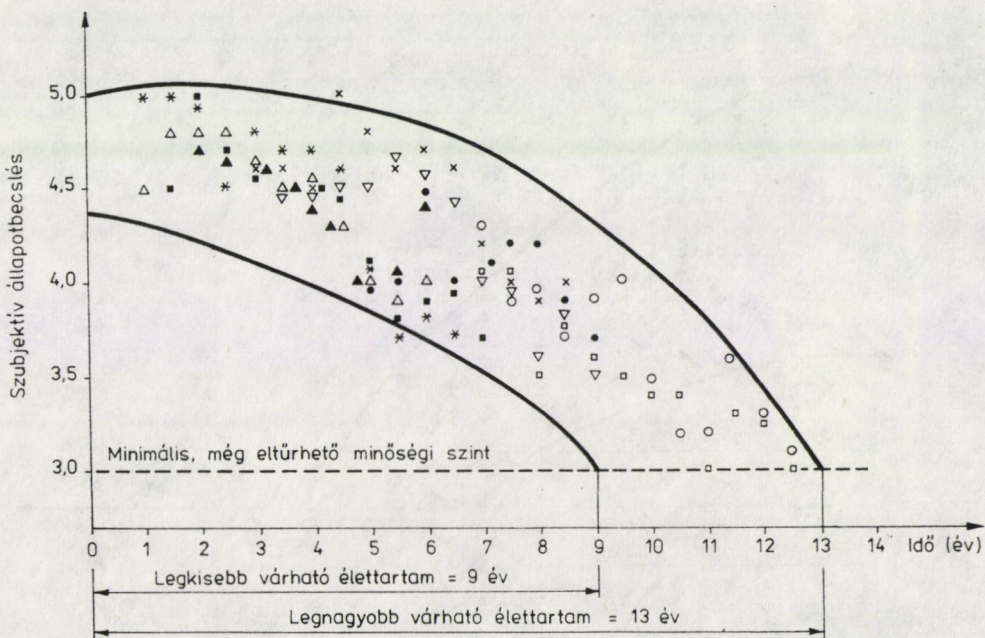


I. ábra

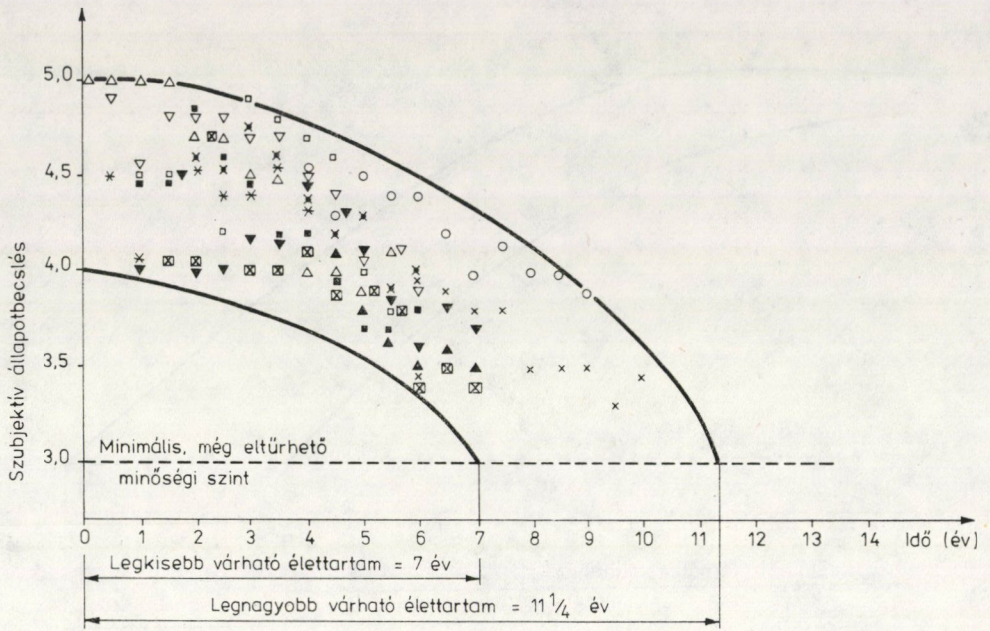


2. ábra.

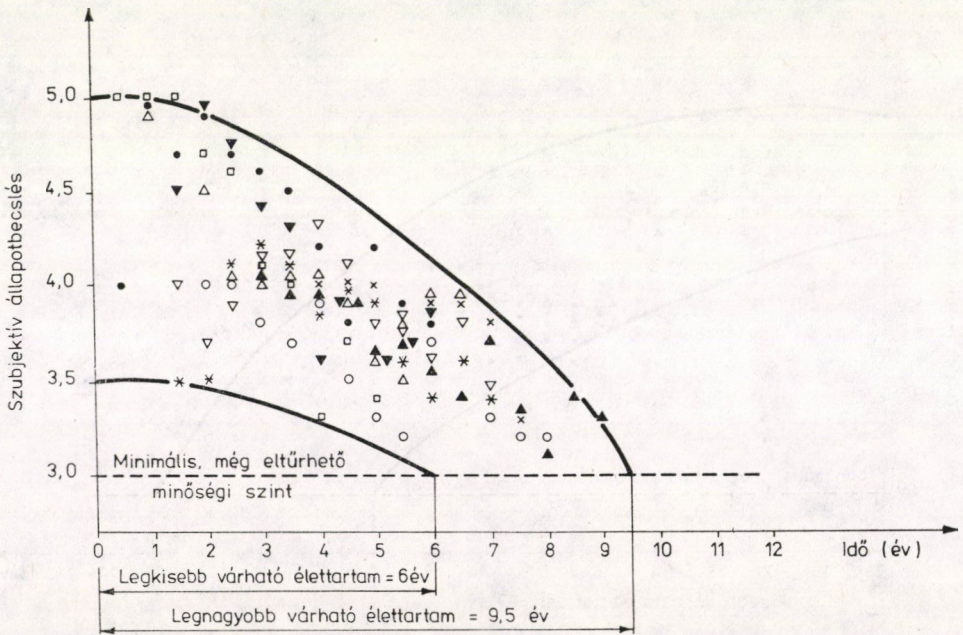
A 2. ábra a túlméretezett, a 3. ábra a megfelelően méretezett, a 4. ábra az aláméretezett és az 5. ábra az erősen aláméretezett útszakaszok várható élettartamhatárait mutatja.



3. ábra.



4. ábra



5. ábra

a) A megfigyelt útszakaszokat a négy kategória valamelyikébe az előbbieken bemutatott példához hasonló módon elvégzett számítás eredménye alapján soroltuk.

b) Az ábrák vízszintes tengelyén az útszakasz építésétől, illetve az utolsó burkolaterősítéstől számított időt tüntettük fel években. (Az esetek többségében a már egy-két éves burkolaton kezdtük meg a rendszeres állapotjellemzést, így az első szubjektív minősítő osztályzat is ezen időpont függőlegesébe került.)

c) A „minimális, még eltűrhető szint”-et, az előbbieken már említettek szerint — a három db, éveken keresztül megfigyelt útszakasz megerősítését megelőző utolsó állapotbecslés alapján — 3,0-nak választottuk.

d) Egy-egy útszakasz állapotjellemzésének idősorát az ábrákon ugyanazzal a szimbólummal (pl. \square vagy \triangle) jelöltük, de nem tartottuk szükségesnek annak feltüntetését, hogy az egyes útszakaszoknál milyen jelzést használtunk.

e) A szubjektív állapotjellemző osztályzatok feltüntetett ponthalmazainak két burkológörbéje metszette ki a 3,0-as szintet jelző vízszintes vonalból azt a két pontot, amelyeknek az abszcisszára való levetítésével kaptuk az egyes útszakasz típusok várható élettartamhatárait.

f) Megállapítható, hogy a tényleges és a szükséges pályaszerkezet egyenérték-vastagság arányával szoros összefüggésben van az útszakasz várható élettartama. Ennek határai ugyanis — az ábrákból láthatóan — a következő értékeknek adódtak:

túlméretezett útszakaszokon	11—15 év,
megfelelően méretezett útszakaszokon	9—13 év,
aláméretezett útszakaszokon	7—11,25 év,
erősen aláméretezett útszakaszokon	6—9,5 év.

g) Az előzetes várakozásnál rövidebbnek adódó élettartam-értékek egyik magyarázataként szolgálhat, hogy a vizsgálat alapjául szolgáló, átlagosan $9 \div 12$ évvel ezelőtt tervezett, illetve méretezett utak várható forgalmát számos esetben alábecsülhették.

A vizsgálat eredménye azonban semmiképpen sem értelmezhető úgy, hogy az akár az érvényes méretezési utasítást, akár pedig a megfigyelt útszakaszok pályaszerkezetét tervezők munkáját bírálja.

5. A burkolatkopás és mérése

Az utak pályaszerkezetének legfelső rétege a forgalom és időjárás hatására kisebb-nagyobb mértékben kopik. A kopás jelensége a leromlás egyik kísérője. Mérése és vizsgálata elsősorban a következő okok miatt jelentős:

— a burkolatkopással a pályaszerkezet teherbírása csökken, így az élettartam megrövidül;

- a burkolatfelület makro- és mikroérdességét is befolyásolja a kopás;
- a pályaszerkezet utántömörödése, deformációja szoros összefüggésben van a burkolatkopással; ezek együttesen okozzák a forgalmilag hátrányos keréknyomvályú képződését;

- a burkolatkopás, a járművek abroncsának kopása és ezeknek a haldás közben keltett zajhatása (ún. gördülőzaj) is összefüggenek egymással.

Hazánkban kiterjedt burkolatkopás-mérés 1974 óta folyik, mióta a KÖTUKI-nak és a BME Útépitési Tanszékének munkatársai mintegy 30 útszakaszon egy-egy keresztmetszelyben (az út felezővonalánál és a két „keréknyomban”) a burkolatba olyan mérőcsapokat helyeztek el, amelyek a burkolatszint időbeli változásának nyomonkövetéséhez állandó alapszintet biztosítanak. A kidolgozott mérési eljárásról már korábban beszámoltunk [5].

6. A burkolatkopást befolyásoló tényezők

A több éven keresztül mért burkolatkopások értékei és az ugyanezekről a szakaszokról ugyanarra az időszakra vonatkozó egyéb tájékoztatók (forgalomnagyság, aszfalttechnológiai jellemzők, a kopóréteg ásványi anyagának kőzettani paraméterei, a burkolatfelület makroérdessége, az időjárás jellemzői stb.) módot nyújtottak a burkolatkopást befolyásoló tényezők vizsgálatára.

A harminckét szakaszon 4 ÷ 6 éve folyó kopásmérések eredményei alapján megállapítottuk, hogy az út felezővonalánál a fajlagos kopásértékek a 0 mm/év és a 0,68 mm/év szélső értékek között ingadoztak. A belső keréknyomban (a járművek kerekei által legjobban igénybe vett sávban) 0,30 mm/év és 2,65 mm/év, a külső keréknyomban pedig 0,19 mm/év és 2,12 mm/év volt a két szélső érték. Egyes, az út felezővonalánál elhelyezett mérőcsapoknál mért viszonylag nagy (0,5 mm/év körüli) kopás magyarázatát vagy az elégtelen burkolatszélesség miatt egyik kerekükkel az út közepén közlekedő járműveknek, esetleg az előzési manőver miatt a felezővonalon áthaladó járműveknek a hatásában, vagy pedig abban lehet megtalálni, hogy a túlságosan nagy hézagtartalmú burkolatban az időjárás okozott károsodásokat.

Először az egyes útszakaszok forgalmi terhelése és a keréknyomokban mért burkolatkopásértékek közötti összefüggést vizsgáltuk. Amikor a forgalomnagyságot az ÁNF átlagos napi forgalommal jellemeztük, ez nem volt kimutatható összefüggésben a fajlagos burkolatkopás értékével. Az útszakasz nagy tengelysúlyú forgalmi terhelését jellemző F_{10} érték már jobb korrelációt mutatott a burkolatkopással — annak bizonyítékaként, hogy elsősorban a nehéz forgalom (kamionok, nyerges vontatók, nehéz tehergépkocsik, pótkocsis tehergépkocsik, autóbuszok) koptató hatása jelentős.

Közismert tény, hogy a kopóréteg aszfalttechnológiai jellemzői is befolyásolják a burkolat kopásának értékét. A megfigyelt útszakaszon kifúrt magminták egyes aszfaltrétegeinek anyagát teljes laboratóriumi vizsgálatnak

vetettük alá. A kapott technológiai paraméterek közül a következő kettőnek vizsgáltuk a kopásértékkel való összefüggését: a kopóréteg szabad hézagartalma (*tf.*%-ban) és a kopóréteg „relatív bitumentartalma”.

Ez utóbbi a szükséges kötőanyag-tartalomtól való eltérés előjeles értéke, amelyet %-ban fejezünk ki. Egyéb, erre a célra alkalmas kiindulási adat hiányában a keverék ásványi anyagának szemeloszlásából, az egyes szemcsefrakciók fajlagos felülete alapján vettük fel a szükséges bitumentartalom szintjét [18].

Mindkét paraméter — amint ez az összetartozó értékpárok grafikus ábrázolásából kitűnt — a fajlagos kopásértékekkel külön-külön laza összefüggést mutatott. Látható volt azonban az a tendencia, hogy a kopóréteg nagymértékű bitumenhiánya, illetve jelentős szabad hézagartalma általában az átlagosnál nagyobb fajlagos burkolatkopással jár együtt.

Következő lépésként azt vizsgáltuk, hogy a fajlagos burkolatkopás, valamint a nagy tengelysúlyú forgalom mértéke és az aszfalttechnológiai jellemzők együttes hatása között milyen az összefüggés. Feltételeztük ugyanis, hogy amennyiben ezt az általunk legfontosabbnak tartott két paramétert együtt szerepeltetjük, a többi — figyelembe nem vett — burkolatkopásra ható tényező (az ásványi anyag szemcséinek alakja, a szemcsék kopási ellenállása, az időjárási viszonyok, a felületre szórt olvasztósó mennyisége stb.) befolyása már kisebb lesz.

Ennek a vizsgálatnak az érdekében két olyan mérőszámot dolgoztunk ki, amely mind a két említett paraméter hatását figyelembe veszi. Az egyik mérőszám

$$F_{10} \left(1 - \frac{B_r}{2} \right),$$

ahol:

F_{10} az útszakaszon a burkolatkopás mérésének időszaka alatt átlagosan évente közlekedő nagy tengelysúlyú forgalom mérőszámát jelenti;

B_r a kopóréteg anyagának relatív bitumentartalma (a tényleges kötőanyag-mennyiségnek az ásványi anyag fajlagos felülete alapján számított bitumenigénytől való előjeles eltérése),

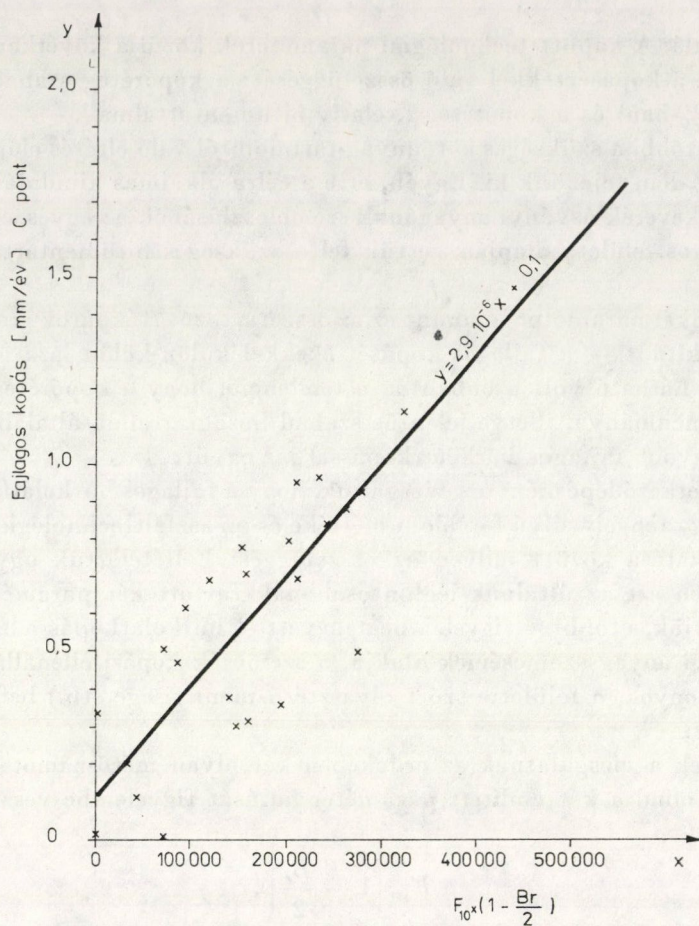
a másik pedig

$$F_{10} \left(1 + \frac{h-2}{3} \right),$$

ahol:

h a kopóréteg szabad hézagartalma, *tf.*%-ban.

A két paraméter értékét olyannak választottuk, hogy az átlagosnak, illetve kívánatosnak tartott aszfalttechnológiai paraméterek esetében a forgalmi terhelés szorzószáma 1,0-val egyezzen meg. A csökkenő bitumentartalom, illetve a növekvő szabad hézagtartalom a mérőszám értékét növeli.



6. ábra

A 6. ábrán a külső keréknyomban (C jelű mérési pontokban) kapott fajlagos kopásértékek és a szóban forgó útszakaszra vonatkozó nehéz forgalmi terhelés (F_{10}), illetve a relatív kopóréteg-bitumentartalmak alapulvételével számított

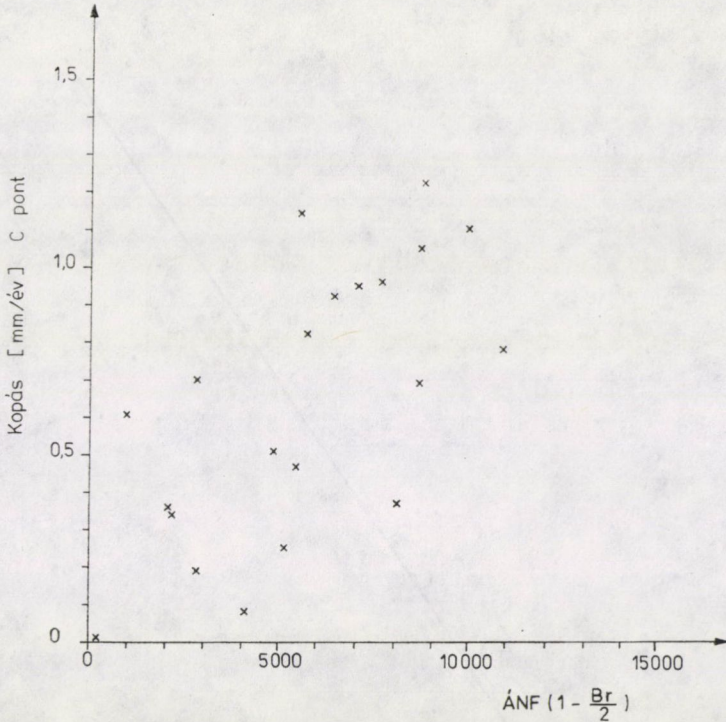
$$F_{10} \left(1 - \frac{B_r}{2} \right)$$

paraméter összetartozó értékeinek pontthalmazát tüntettük fel. A regressziós egyenes egyenlete:

$$y = 2,9 \cdot 10^{-6} x + 0,1,$$

ahol:

y a fajlagos burkolatkopás a külső keréknyomban, mm/év;



7. ábra

x pedig az

$$F_{10} \left(1 - \frac{B_r}{2} \right)$$

mérőszám.

A 7. ábra a külső keréknyom fajlagos kopásértékeinek és az

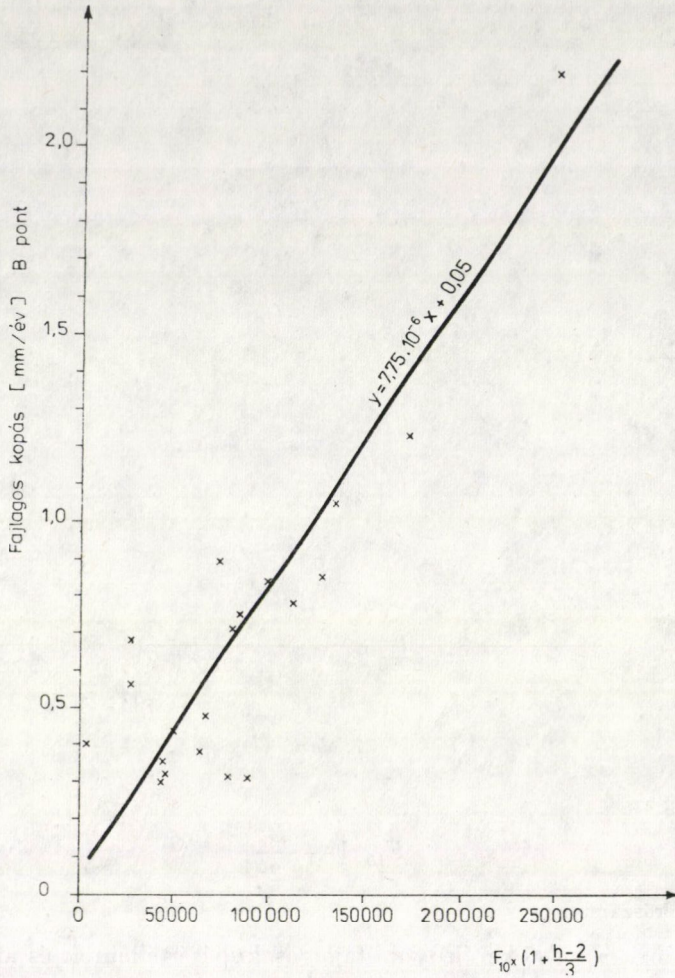
$$\text{ÁNF} \left(1 - \frac{B_r}{2} \right)$$

paramétereknek az összefüggését mutatja be. Az előbbi ábrához képest jóval nagyobb szórást mutató ponthalmaz azt bizonyítja, hogy a nagy tengelysúlyú forgalom (F_{10}) a burkolatkopásra nagyobb hatást gyakorol, mint az összes járművet figyelembe vevő átlagos napi forgalom nagysága.

A 8. ábra a belső keréknyomban (B jelű mérési pontokban) kapott fajlagos kopásértékek és az útszakaszra vonatkozó nehéz forgalmi terhelés (F_{10}), illetve a kopóréteg szabad hézagtartalmának alapulvételével számított

$$F_{10} \left(1 + \frac{h-2}{3} \right)$$

paraméter összetartozó értékeinek ponthalmazát szemlélteti.



8. ábra

A regressziós egyenes egyenlete;

$$y = 7,75 \cdot 10^{-6} x + 0,05,$$

ahol:

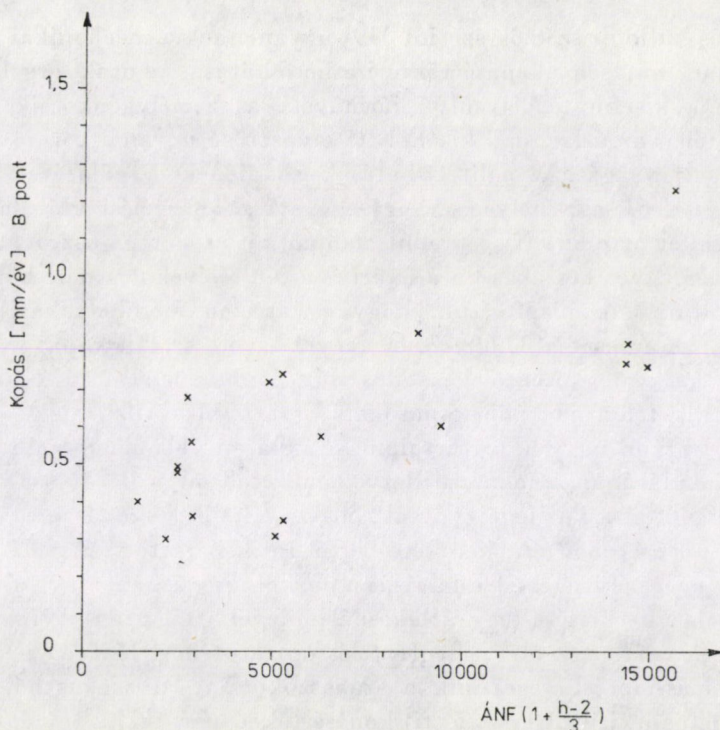
y a fajlagos burkolatkopás a belső keréknyomban, mm/év;

x pedig az

$$F_{10} \left(1 + \frac{h-2}{3} \right)$$

mérőszám.

Mind a 6., mind pedig a 8. ábrán látható, hogy a regressziós egyenes nem az origón megy keresztül, hanem az y -tengelyt kis pozitív értéknél metszi.



9. ábra

Ez a tény is igazolja a burkolatkopásra ható, itt figyelembe nem vett tényezők szerepét.

A 9. ábra a 8. ábrától csak annyiban különbözik, hogy az F_{10} -et az ÁNF-fel helyettesítettük. Ezen az ábrán (ábrapáron) is — akárcsak a 6. és 7. ábra esetében — kimutatható a nehéz forgalom jelentős hatása a pályaszerkezet vékonyodására.

Az előzőekben röviden összefoglalt vizsgálatok legfontosabb tanulsága az, hogy kötőanyagsgégyény, illetve a szükségesnél nagyobb szabad hézagtartalmú kopórétegek építése esetében nemcsak — amint ez közismert — a korai szétfagyás veszélyével kell számolnunk, hanem az átlagosnál nagyobb mértékű kopással is.

Az időjárásnak a burkolatkopásra gyakorolt hatása is jelentős. Ennek vizsgálatára az egyes útszakaszokon mért kopásértékeket abból a szempontból is feldolgoztuk, hogy — a „keréknyomokban” elhelyezett mérősapoknál — milyen volt a téli és a nyári félévben tapasztalható kopásértékek aránya. A termoplasztikus kötőanyagokkal készült kopórétegek kopásellenállása alacsony hőmérsékleten megnő; a réteg rugalmassági modulusa nagyobb lesz, elsősorban a bitumenes habarcs szilárdabbá válása miatt.

Egyes külföldi szerzők szerint [19] ugyanennek a mechanikai ellenállás-növekedésnek nincsen a kopásértékre érezhető hatása. Az utak forgalma — bár elsősorban a kisebb tengelysúlyú járművek, a személygépkocsik száma — általában télen az átlagosnál kisebb. Az olvasztósó ugyanakkor növeli a burkolatkopás nagyságát. Az említett hatások eredőjének vizsgálatára 31 útszakaszon, összesen 61 mérőhelyen az egy-egy évi megfigyelési idő alatt kapott kopásértékeket az emített szempont alapján két csoportba osztottuk szét.

Minden egyes útszakaszon a nyári és a téli félévekben mért kopásértékeket átlagoltuk. Megállapítottuk, hogy ugyanazon mérőhelyeknél a „nyári kopás” értéke az esetek 83,6%-ában nagyobb volt a „téli kopás”-nál; 4,9%-ban a két érték megközelítőleg azonos volt, és mindössze 11,5%-ban (7 esetben) mértünk télen nagyobb kopásokat. Ez utóbbiak közül négy esetben ez a jelenség nagyon nagy hézagtartalmú burkolaton volt megfigyelhető, ahol a kopás kialakulásában a habarcs, illetve ennek téli megszilárdulása viszonylag kisebb szerepet játszik. Megjegyezzük, hogy a téli félév a rendszeres útszakasz-megfigyelések esetében általában októbertől áprilisig tartott; így már a tavaszi forgalom egy része is érezte hatását a burkolatkopásban.

Ennek elkerülésére (egy átlagosnál hidegebb tél után) 1978 februárjában — a tavaszra tervezett megfigyeléssorozatot megelőzően — rendkívüli burkolatkopás-mérést végeztünk a szakaszokon. A 31 szakaszból 24-en elhanyagolhatóan kis (0,1 mm alatti) kopásértéket mértünk, a további 7 szakaszon is csak 0,2—0,4 mm volt az 1977 októbere óta tapasztalt burkolatkopás. Azonban ez a kimondottan „téli kopás” egyetlen útszakaszon sem érte el az elmúlt fél év „nyári kopás” értékét.

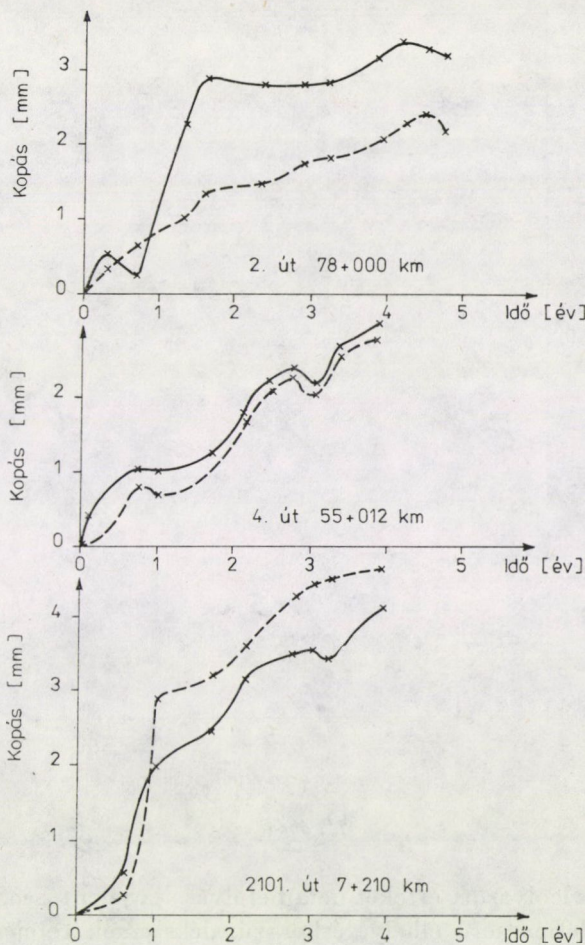
7. A burkolatkopás időbeli lefolyása

Az egyes mérőcsapoknál mért burkolatkopás *időbeli lefolyását* vizsgálva a következő megállapítások tehetők:

a) A szakaszok egy részén a megfigyelés időszakában eléggé egyenletes a kopás sebessége. (Ez az eset általában akkor fordul elő, amikor már több éve forgalom alatt levő útszakaszon kezdtük el a kopásmérést.)

b) Jellegzetesnek tekinthető az az eset is, amikor a kezdeti nagyobb kopás után lelassult a kopóréteg vékonyodásának üteme. (Feltételezhető, hogy az észlelt jelenség magyarázata a burkolatfelületről kiálló zúzalékszemcsék éleinek fokozatos lecsiszolódása, amely egyre növekvő kopási felületet okoz.)

c) Elvértve előfordult, hogy egy-egy fél év alatt burkolatkopás helyett „vastagodást” regisztráltunk. Ennek oka a nagy kötőanyag-tartalmú burkolatokon a kopóréteg deformációja, felgyűrődése lehet; egyéb esetekben pedig az a tény, hogy a szóban forgó időszakban egyáltalán nem volt burkolatkopás, és az alkalmazott mérési módszer jellegéből adódóan a műszerállásokat ilyen



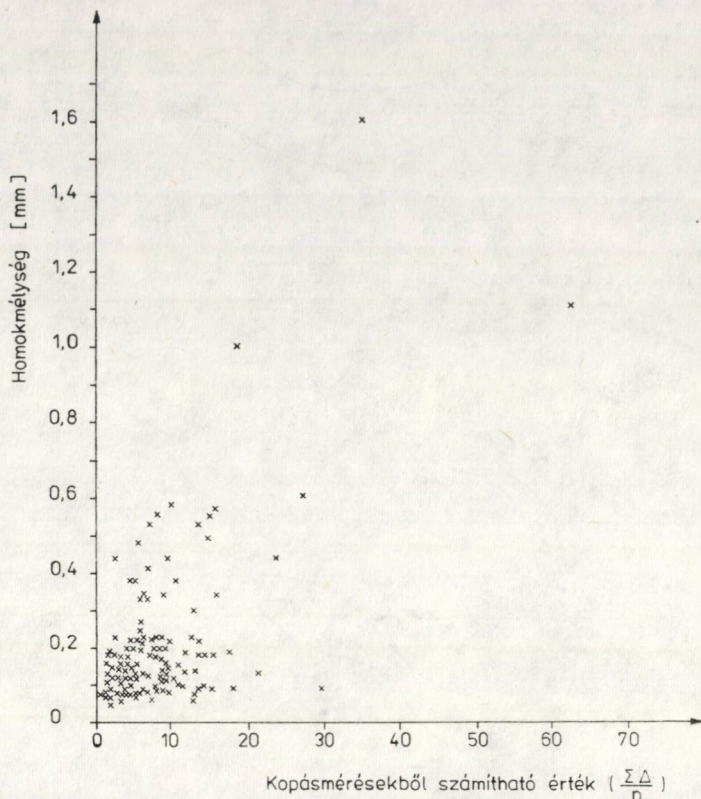
10. ábra

esetekben véletlenszerűen úgy választottuk, hogy a lábak általában zúzalék-szemekre kerültek, nem pedig a közöttük levő völgyekbe.

A 10. ábra példaként néhány jellegzetes kopási folyamatot mutat be.

8. A kopásmérés és a felületi makroérdesség

A kidolgozott kopásmérési eljárás alkalmazásakor kapott eredményeket összefüggésbe hoztuk a burkolatfelület makroérdességét jellemző homokmélység értékkel. A korrelációkeresés elvi alapja annak a felismerése volt, hogy amikor a kopásmérő műszerrel a mérőcsap fölött hat állásban leolvasásokat végzünk, a burkolatfelület érdességi viszonyai befolyásolják, hogy a század mm pontosságú, a műszer mintegy 60°-os elforgatásával kapott leolvasások milyen mértékben térnek el egymástól. Kis makroérdességű burkolat felületén



11. ábra

az indikátorórán leolvasott értéket nem befolyásolja jelentősen, hogy a három műszerláb a véletlenszerű elhelyezéskor zúzalékszemek tetejére kerül, vagy pedig a közöttük levő völgyekbe. Erősen érdes felületű burkolatokon ennek az elhelyezésnek már sokkal nagyobb hatása van a leolvasásra. Az összefüggés pontosabb vizsgálatára kiszámítottuk minden egyes kopásmérés hat indikátoróra leolvasásának átlagát, majd az egyes leolvasásoknak ettől való átlagos eltérését ($\overline{\Delta y}$).

A 11. ábrán ezeknek a $\overline{\Delta y}$ értékeknek és az akkor meghatározott homokmélységnek az összefüggését mutatjuk be a belső keréknyomban elhelyezett mérőrcsapok esetében. Bár a rendszeresen megfigyelt szakaszok burkolatfelületének makroérdessége általában mind nagyon kis érték (0,08–0,20 mm) és a nagy számú, egymáshoz közeli pont nehezíti az összefüggés reális értékelését, az ábra alapján megállapítható, hogy a bemutatott kopásmérési módszer — mintegy „melléktermékként” — megközelítően a burkolatfelület makroérdességét is jellemzi.

Végül megjegyezzük, hogy a még egyértelműbb kapcsolat kimutatását az a tény is akadályozta, hogy a kopásmérés és a makroérdesség jellemzése

— természetszerűleg — a burkolatfelületnek nem pontosan ugyanazon a helyén történt, és a homokmélység egymáshoz közeli pontokban is jelentősen eltérő eredményt adhat.

IRODALOM

1. Ifj. GÁSPÁR László: Az útügy komplex szemlélete. *Mélyéptéstudományi Szemle* (1974), 10
2. Ifj. GÁSPÁR László: Az aszfaltburkolatú utak élettartamának vizsgálata. *Közlekedéstudományi Szemle* (1978) 6
3. CSORDÁS Csaba—Ifj. GÁSPÁR László: A burkolatmegerősítések szervezésének megoldási elvei. *Mélyéptéstudományi Szemle* (1975) 2
4. Ifj. GÁSPÁR László: Aszfaltburkolatú utak állapotfelvétele (Helyzetkép). *Műszaki Tudomány* 58, 1981
5. Ifj. GÁSPÁR László—TAKÁCH Gyula: Hazai utak rendszeres megfigyelésének néhány kérdése. *Mélyéptéstudományi Szemle* (1975) 11
6. GÁSPÁR, L., Jn.—TAKÁCH, Gy.: Langzeitbeobachtung von Fahrbahndecken ausgewählter Straßenabschnitte in der Ungarischen Volksrepublik. *Die Strasse* (1976) 6
7. Hajlékony útpályaszerkezetek méretezési utasítása. Közúti Főosztály, Budapest 1971
8. NEMESDY, E.—KELETI, I.—BOROMISZA, T.—GÁSPÁR, L. Jn.: Trends in the Development of Flexible Pavement Design in Hungary. *Proceedings of Fourth International Conference on Structural Design of Asphalt Pavements*. Ann Arbor (USA) 1977
9. The Shell Pavement Design Manual. London 1978
10. CAREY, W. N.—IRICK, P. E.: The Pavement Serviceability-Performance Concept. *Highway Research Board Bulletin* 250 (1960)
11. Ifj. GÁSPÁR László—TAKÁCH Gyula—TÖRÖK Kálmán: Beszámoló az útmegfigyelés kezdeti eredményeiről. *Mélyéptéstudományi Szemle* (1978) 3
12. Ifj. GÁSPÁR László: Aszfaltburkolatú utak állapotjellemezése és élettartama. Kandidátusi értekezés. 1978.
13. Aszfalt útpályaszerkezetek plasztikus deformációinak keletkezése és megakadályozásuk technológiai lehetőségei. *KTMF* (1979) (Témafelelős: SZIRÁKI László)
14. Ifj. GÁSPÁR László: Az úttáplófelvétel, különös tekintettel az utak üzemeltetésére és fenntartására. *Közlekedéstudományi Szemle* (1975) 11
15. The AASHO Road Test. *Highway Research Board Special Report* 61. C. (1962)
16. Aszfaltburkolatok állapotfelvétele és élettartama. KÖTUKI 83—10. számú téma zárójelentése 1978. (Témafelelős: ifj. GÁSPÁR László)
17. Várható közúti forgalomfejlesztési viszonyszámok meghatározása. KÖTUKI 34-06. számú téma zárójelentése 1976. (Témafelelős: TAKÁCS Ferenc)
18. Építő- és Szerelőipari Kivitelezési Szabályzat VI. kötet 3. munkanem 1971
19. SOLTAU, G.: Verschleißverhalten von Gesteinsplitten in bituminösen Fahrbahndecken. *Strassen und Tiefbau* (1977) 4

Destruction and Service Life of Roads of Bituminous Pavement. — On the basis of the time series of several years' subjective evaluation of the state of road sections selected in the road network, their service life has been estimated. In pre-estimating the service life, the road sections were classified into groups according to the ratio of the effective thickness of the pavement and that required by the traffic load. The question of wear of the pavements is also discussed. On the basis of the measurements carried out over a period of seven years, the rate of thinning down of the pavement structure has been related to several factors. The results of these works serve for better designing of road pavement structures both from engineering and economical viewpoints.

Verderden und Lebensdauer mit Asphaltbelag bedeckter Straßen. — Aufgrund einer Zeitreihe von mehrjährigen subjektiven Zustandsabschätzungen wurde die zu erwartende Lebensdauer der aus dem Straßennetz ausgewählten Strecken abgeschätzt. Bei der Schätzung der Lebensdauer wurden die Straßenstrecken nach dem Verhältnis der effektiven Dicke der Fahrbahnstruktur zur durch den auf diesen Strecken durchfahrenden Verkehr erforderlichen Dicke in Gruppen eingeteilt. Das Problem des Belagverschleißes wurde auch behandelt. Aufgrund der Ergebnisse der sechsjährigen Messungsreihe, die Geschwindigkeit der Verdünnung der Belagstärke wurde mit mehreren Faktoren in Zusammenhang gebracht. Die Untersuchungsergebnisse der Studie bringen Hilfe einer von technischen und wirtschaftlichen Gesichtspunkten besseren Planung.

TÉRBELI RÚDSZERKEZETEK SAJÁTFREKVENCIÁINAK KÖZREFOGÓ SZÁMÍTÁSA, I

CZEGLÉDI GYULA*

[Beérkezett: 1981. március 12-én]

A szervesen kapcsolódó, két részből álló dolgozat jelen első részében kitűzzük a címbeli feladatot, előállítjuk a hosszuk mentén változó jellemzőkkel bíró, egyenes rudakból álló térbeli szerkezetek dinamikai jellemzőit közrefogó számításhoz alkalmas helyettesítő szerkezeteket, majd megszerkesztjük az egyetlen prizmatikus rúd rezgését leíró mátrixos egyenleteket. A prizmatikus rudakból álló szerkezetek rezgéseinek vizsgálatára olyan elméletet mutatunk be, amely dinamikai merevségi és deformáció mátrixokkal dolgozik. Az elmélet kifejtéséhez a kontinuum-modellt használjuk.

1. Bevezetés

Az általános gépészet, a járműipar, a könnyűszerkezetes építésmód bizonyos szerkezetei sok esetben térbeli rúdszerkezetként modellezhetőek. Ezek dinamikai vizsgálatában változatlanul nagy szerep jut a sajátfrekvenciáknak, illetve gerjesztett rezgésnél az állandósult állapotbeli amplitúdóeloszlásnak. Jelen tanulmány hozzájárulás a kontinuuosan modellezett térbeli rúdszerkezetek fent említett dinamikai jellemzőinek meghatározásához.

A terjedelemre való tekintettel a dolgozatot két részben közöljük. A címbeli feladat kitűzése és bizonyos elméleti előkészítés után prizmatikus rudakból álló rúdszerkezetek rezgéseinek vizsgálatára két módszert mutatunk be. Elemezzük az eljárások numerikus tulajdonságait is. Végül a gyakorlati felhasználás szempontjából jobbnak ítélt második módszerrel két egyszerű számpéldát oldunk meg.

2. Térbeli rúdszerkezetek sajátfrekvencia-közrefogó elmélete kontinuum-modell alapján

Rúdszerkezetek dinamikai számítása során újabban egyre inkább azok a módszerek terjednek, amelyek a keresett dinamikai jellemzőkre — így a sajátfrekvenciákra is — alsó és felső korlátokat szolgáltatnak. Ezek nem valamely más, célszerűen hibabecslést is magukba foglaló eljárások, melyeknél a közelítés iránya sok esetben előre nem rögzíthető, és a hibabecslő képletek pontatlanok vagy bonyolultságuk következtében nehezen kezelhetőek. Jelen dolgozatnak az

* Czeglédi Gyula, H-1225 Budapest, Bartók Béla út 3/d.

a célja, hogy a lineáris algebra eszközeinek felhasználásával számítástechnikailag jól áttekinthető és könnyen kezelhető algoritmust adjon térbeli rúdszerkezetek sajátfrekvenciáinak közrefogására. A kitűzött célt az alábbi lépésekkel érjük el:

- A hosszuk mentén változó jellemzőkkel bíró rudakból álló szerkezethez azonos térbeli elrendezésű, egyenes, a hosszuk mentén állandó jellemzőkkel bíró (a továbbiakban: prizmatikus) rudakból felépített két olyan rendszert rendelünk hozzá, amelyek sajátkörfrekvenciái az eredeti szerkezetének alsó, ill. felső korlátait adják.
- Felírjuk a prizmatikus, rúd ω körfrekvenciájú szinuszos rezgését leíró mátrixos egyenleteket.
- Előállítjuk a rúdrendszer frekvenciaegyenletét.

A rendszer frekvenciaegyenletének származtatására — egységes tárgyalásmód alapján — két módszert mutatunk be. Az első lényegében az egzakt elmozdulásmódszer továbbfejlesztett változatának tekinthető, míg a második a differenciálegyenletek elméletében használatos integrációs konstansokra a perem- és illesztési feltételek segítségével felírt lineáris egyenletrendszer kapcsán jut eredményre.

2.1 Helyettesítő szerkezetek származtatása, tulajdonságaik

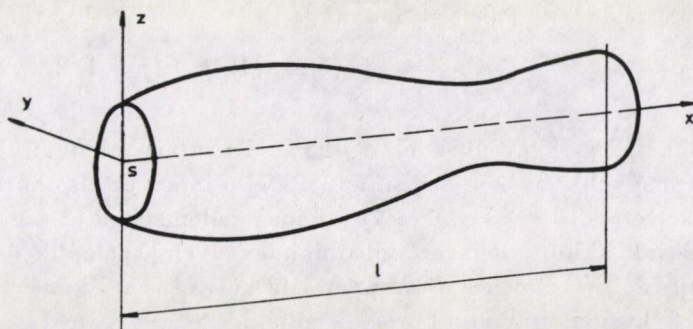
A hosszuk mentén változó jellemzőkkel bíró, egyenes rudakból álló térbeli szerkezetet — a továbbiakban „eredeti szerkezet”-et — közbülső csomópontok (keresztmetszetek) segítségével még tovább osztjuk, és az így kapott részrudakat a csomópontok közt prizmatikus rudakkal helyettesítjük. E helyettesítő rúdszerkezet jellemzőinek alkalmas megválasztásával elérhető, hogy sajátfrekvenciái az eredetijének a kívánt alsó, ill. felső korlátai legyenek. A megválasztási előírások azonban csak az egyes rudak matematikai modelljének birtokában adhatók meg. A rúd-modell meglévő, illetve tudottan hiányzó tulajdonságainak felsorolása helyett egyszerűbb, ha a modellt a megfelelő egyenletekkel definiáljuk. Az egyenleteket a következőképpen választjuk:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x} \left(GI \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} \right) &= -\theta \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial t^2}, \\
 -\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \right) &= -\rho A \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_{\zeta} \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial x^2} \right) &= -\rho A \frac{\partial^2 \bar{\eta}}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_{\eta} \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2} \right) &= -\rho A \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial t^2}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

A fenti négy egyenlet a rúd — egymástól függetlenül végbemenőnek feltételezett — csavaró, hosszirányú és mindkét fősíkban történő hajlító lengéseit írja le. A betűk jelentése:

t az idő;

x, y, z a descartes-i jobbsodrású koordináta-rendszer tengelyei (1. ábra); az origó a végkeresztmetszet súlypontjával, a koordináta-rendszer tengelyei a keresztmetszet súlyponti fő-tengelyeivel esnek egybe a rúd nyugalmi állapotában. (A továbbiakban ezt a rendszert saját-koordináta-rendszernek nevezzük.)



1. ábra. Egy rúd saját-koordináta-rendszere

$\tilde{\varphi}(x, t)$ a keresztmetszet x tengely körüli elcsavarodási szöge;

$\tilde{\xi}(x, t)$ a keresztmetszet x irányú eltolódása;

$\tilde{\eta}(x, t)$ a keresztmetszet y irányú eltolódása;

$\tilde{\zeta}(x, t)$ a keresztmetszet z irányú eltolódása.

$G = G(x)$ a csúsztató rugalmassági modulus;

$GI = GI(x)$ a csavarómerevség;

$\theta = \theta(x)$ a rúdnek az elcsavarodás tengelyére számított (a tengelyirányú méret tekintetében) fajlagos tehetetlenségi nyomatéka;

$E = E(x)$ A Young-féle rugalmassági modulus;

$EI_y = EI_y(x)$ a rúdnek az y tengelyre számított hajlítómerevsége;

$EI_z = EI_z(x)$ a rúdnek a z tengelyre számított hajlítómerevsége;

$A = A(x)$ a keresztmetszeti idom területe;

$\rho = \rho(x)$ a rúdanyag sűrűsége.

A $\tilde{\varphi}$ -hez a jobbcavar-szabály szerint rendelhető vektornak a pozitív irányítása az x tengelyével, s a későbbiekben bevezetendő $\tilde{\psi}$ és $\tilde{\chi}$ a rúdkeresztmetszet y , ill. z tengely menti elfordulásához rendelhető vektornak az irányítása pedig az y , illetve z tengelyek pozitív irányításával essék egybe.

A sajátfrekvenciákra vonatkozó *első korlátok* nyerése céljából az eredeti rendszer i -edik rúdját ($i = 1, 2, \dots, n_i$) a $0 \leq x_i \leq l_i$ tartományban osszuk fel k_i

részre (l_i az i -edik rúd hosszát jelöli), s a j -edik zárt résztartományban a helyettesítő prizmatikus rúdszakaszt válasszuk meg úgy, hogy fennálljanak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{aligned}
 (GI)_{ij}^a &= \min(GI_i(x_i))_j, \\
 (EA)_{ij}^a &= \min(E_i A_i(x_i))_j, \\
 (EI_z)_{ij}^a &= \min(EI_{z,i}(x_i))_j, \\
 (EI_y)_{ij}^a &= \min(EI_{y,i}(x_i))_j, \\
 \theta_{ij}^a &= \max(\theta_i(x_i))_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 (\varrho A)_{ij}^a &= \max(\varrho_i A_i(x_i))_j, \quad (j = 1, 2, \dots, k_i)
 \end{aligned} \tag{2}$$

A min és a max jel a függvényeknek a j -edik zárt intervallumban felvett legkisebb, ill. legnagyobb értékét jelenti, az „a” felső index az alsó korlátra utal.

Ha a helyettesítő szerkezet részrúdjainak jellemzőit a (2) egyenlőségek szerint választjuk, akkor a Poincaré-féle minimax elven [1] alapuló összehasonlító tétel ([2], 7. o.) értelmében a rendszer sajátkörfrekvenciái az eredeti rendszer sajátkörfrekvenciáinak alsó korlátait adják.

Felső korlátokat akkor kapunk, ha a helyettesítő szerkezet rúdjaiknak jellemzőit a (3) feltételek betartásával választjuk:

$$\begin{aligned}
 (GI)_{ij}^f &= \max(GI_i(x_i))_j, \\
 (EA)_{ij}^f &= \max(E_i A_i(x_i))_j, \\
 (EI_z)_{ij}^f &= \max(EI_{z,i}(x_i))_j, \\
 (EI_y)_{ij}^f &= \max(EI_{y,i}(x_i))_j, \\
 \theta_{ij}^f &= \min(\theta_i(x_i))_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\
 (\varrho A)_{ij}^f &= \min(\varrho_i A_i(x_i))_j \quad (j = 1, 2, \dots, k_i)
 \end{aligned} \tag{3}$$

ahol az „f” felsőindex a felső korlátokat jelenti.

A k_i felosztási szám növelésével az alsó korlátok növekednek, a felső korlátok csökkennek. A javítás mértékének a k_i számon keresztül az alkalmazandó számítógép memóriaigénye, ill. a számolási gépidő-igény szab határt. A gyakorlati szerkezeteken, amelyekben az egyes rudak jellemzői a hossz tengely mentén általában nem változnak erőteljesen, a k_i -nek viszonylag kisebb értéke is elegendő lehet.

A hossz tengely mentén állandó jellemzőjű rudakból álló szerkezet esetében természetesen a fenti helyettesítő eljárás értelmét veszti, a sajátkörfrekven-

ciák a 2.3 és 2.4 pontban bemutatásra kerülő eljárásokkal pontosan számíthatók. A továbbiakban tehát mindenképpen prizmatikus rudakból felépített térbeli szerkezetek sajátkörfrekvenciáinak meghatározása a feladatunk.

2.2 Egyetlen prizmatikus rúd rezgésének mátrixos egyenletei

A választott rúdmodellét az (1) egyenletek definiálták. Ha nem az általános, hanem az ún. állóhullámú megoldásokat keressük, akkor az (1) egyenletekből leszámaztathatók az ω körfrekvenciájú, kis kitérésű rezgést végző i -edik rúd (2. ábra) bármely keresztmetszetének eltolódásait és elfordulásait leíró mezőfüggvények:

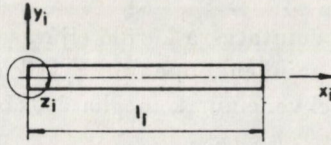
$$\begin{aligned}
 \tilde{\xi}_i &= (A_{1i} \sin \beta_{1i} x_i + A_{2i} \cos \beta_{1i} x_i) \sin \omega t, \\
 \tilde{\eta}_i &= (A_{3i} \sin \beta_{3i} x_i + A_{4i} \cos \beta_{3i} x_i + A_{5i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i + A_{6i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i) \sin \omega t, \\
 \tilde{\zeta}_i &= (A_{7i} \sin \beta_{2i} x_i + A_{8i} \cos \beta_{2i} x_i + A_{9i} \operatorname{sh} \beta_{2i} x_i + A_{10i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i) \sin \omega t, \\
 \tilde{\varphi}_i &= (A_{11i} \sin \beta_{4i} x_i + A_{12i} \cos \beta_{4i} x_i) \sin \omega t, \\
 \tilde{\psi}_i &= (-A_{7i} \beta_{2i} \cos \beta_{2i} x_i + A_{8i} \beta_{2i} \sin \beta_{2i} x_i - A_{3i} \beta_{2i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i - \\
 &\quad - A_{10i} \beta_{2i} \operatorname{sh} \beta_{2i} x_i) \sin \omega t, \\
 \tilde{\chi}_i &= (A_{3i} \beta_{3i} \cos \beta_{3i} x_i - A_{4i} \beta_{3i} \sin \beta_{3i} x_i + A_{5i} \beta_{3i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i + \\
 &\quad + A_{6i} \beta_{3i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i) \sin \omega t,
 \end{aligned} \tag{4}$$

ahol $A_{1i}, A_{2i}, \dots, A_{12i}$ egyelőre ismeretlen együtthatók, és

$$\begin{aligned}
 \beta_{1i} &= \sqrt{\frac{\rho_i}{E_i}} \omega, & \beta_{4i} &= \sqrt{\frac{\theta_i}{GI_i}} \omega, \\
 \beta_{2i} &= \sqrt[4]{\frac{\rho_i A_i}{EI_{yi}}} \omega^2, & \beta_{3i} &= \sqrt[4]{\frac{\rho_i A_i}{EI_{zi}}} \omega^2.
 \end{aligned} \tag{4a}$$

A (4) és (4a) összefüggésekben szereplő „ i ” index a rúdrendszer i -edik rúdjára utal.

A továbbiakban egyenleteink felírására — tömörsége s a gépi számítástechnikában mutatkozó előnyei miatt — általában a mátrixszámítás szimbolizmusát fogjuk használni. Az oszlopmátrixokat — bizonyos előnyei miatt — röviden vektoroknak fogjuk nevezni, mivel jelen munkában ebből félreértés nem származhatik.



2. ábra. Prizmatikus rúd és saját-koordináta-rendszere

A (4) elmozdulásfüggvényeknek az $x_i = 0$ és $x_i = l_i$ (a rúd végei) helyen vett helyettesítési értékeit egy-egy elmozdulás vektorba rendezhetjük:

$$\underline{U}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \bigg|_{x_i=0} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & -\beta_{2i} & & -\beta_{2i} & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & \beta_{3i} & \beta_{3i} & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1i} \\ A_{2i} \\ A_{3i} \\ A_{4i} \\ A_{5i} \\ A_{6i} \\ A_{7i} \\ A_{8i} \\ A_{9i} \\ A_{10i} \\ A_{11i} \\ A_{12i} \end{bmatrix} \sin \omega t ,$$

\underline{U}_i

illetve

$$\underline{V}_i = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \bigg|_{x_i=l_i} = \begin{bmatrix} \sin \beta_{1i} l_i & \cos \beta_{1i} l_i & & & & & & & & & & \\ & & \sin \beta_{3i} l_i & \cos \beta_{3i} l_i & \text{sh } \beta_{3i} l_i & \text{ch } \beta_{3i} l_i & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & \beta_{3i} \cos \beta_{3i} l_i & \beta_{3i} \sin \beta_{3i} l_i & \beta_{3i} \text{ch } \beta_{3i} l_i & \beta_{3i} \text{sh } \beta_{3i} l_i & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \underline{a}_i \sin \omega t ,$$

\underline{V}_i

Rövidebb írásmóddal:

$$\begin{aligned}\vec{u}_i &= U_i a_i \sin \omega t, \\ \vec{v}_i &= V_i a_i \sin \omega t.\end{aligned}\quad (5)$$

(A mátrixok üresen hagyott helyein nullák állnak.) Az (5) összefüggésben szereplő \vec{u}_i és \vec{v}_i tehát a rúd bal, illetve jobb végének eltolódásait és elfordulásait tartalmazó *elmozdulásvektorok*.

A (4) mezőfüggvények segítségével felírhatók a rúd x_i koordinátájú keresztmetszetére az origóval ellentétes oldalról redukált vektorkettős erő és nyomaték komponensei is:

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= A_i E_i \beta_{1i} (A_{11i} \cos \beta_{1i} x_i - A_{21i} \sin \beta_{1i} x_i) \sin \omega t, \\ \vec{G}_i &= -EI_{zi} \beta_{3i}^3 (-A_{3i} \cos \beta_{3i} x_i + A_{4i} \sin \beta_{3i} x_i + A_{5i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i + \\ &\quad + A_{6i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i) \sin \omega t, \\ \vec{H}_i &= -EI_{yi} \beta_{2i}^3 (-A_{7i} \cos \beta_{2i} x_i + A_{8i} \sin \beta_{2i} x_i + A_{9i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i + \\ &\quad + A_{10i} \operatorname{sh} \beta_{2i} x_i) \sin \omega t, \\ \vec{M}_i &= GI_i \beta_{4i} (A_{11i} \cos \beta_{4i} x_i - A_{12i} \sin \beta_{4i} x_i) \sin \omega t, \\ \vec{N}_i &= -EI_{yi} \beta_{2i}^2 (-A_{7i} \sin \beta_{2i} x_i - A_{8i} \cos \beta_{2i} x_i + A_{9i} \operatorname{sh} \beta_{2i} + \\ &\quad + A_{10i} \operatorname{ch} \beta_{2i} x_i) \sin \omega t, \\ \vec{K}_i &= EI_{zi} \beta_{3i}^2 (-A_{3i} \sin \beta_{3i} x_i - A_{4i} \cos \beta_{3i} x_i + A_{5i} \operatorname{sh} \beta_{3i} x_i + \\ &\quad + A_{6i} \operatorname{ch} \beta_{3i} x_i) \sin \omega t.\end{aligned}\quad (6)$$

A (6)-ból meghatározhatók a rúd *végeire működő*, környezetének hatásaként adódó *külső erőhatás-komponensek*, amelyeket az elmozdulásokhoz hasonlóan egy-egy erőhatásvektorba egyesíthetünk:

$$\vec{f}_i = \begin{bmatrix} \vec{F}_i \\ \vec{G}_i \\ \vec{H}_i \\ \vec{M}_i \\ \vec{N}_i \\ \vec{K}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -A_i E_i \beta_{1i} & & & & & \\ & -E J_{zi} \beta_{3i}^3 & E J_{zi} \beta_{3i}^3 & & & \\ & & -E J_{yi} \beta_{2i}^3 & E J_{yi} \beta_{2i}^3 & & \\ & & & & -G I_i \beta_{4i} & \\ & & & -E J_{yi} \beta_{2i}^2 & E J_{yi} \beta_{2i}^2 & \\ & & & & & E J_{zi} \beta_{3i}^2 & -E J_{zi} \beta_{3i}^2 & & & \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix}}_{E_i} \vec{a}_i \sin \omega t,$$

$x_i=0$

2.3 Prizmatikus rudakból felépített rúdszerkezetek rezgésének vizsgálata dinamikai merevségi és deformáció mátrixokkal

Az alábbiakban bemutatandó eljárás egyes részei az irodalomban egzakt elmozdulás-, ill. erőmódszer néven ismertek, azokhoz hasonlatosak. Következésképpen a levezetésre kerülő és táblázatokba foglalandó összefüggések szoros kapcsolatban vannak pl.: a Koloušek-féle függvényekkel [3]. A szokásostól némiképp eltérő kiindulás, rúdszerkezetekre vonatkozó egységes tárgyalásmód és a mindkét fősíkban végbemenő hajlítórezgések, valamint a longitudinális rezgéseken kívül a csavaró rezgések figyelembevétele indokolja — e sorok írója szerint — a részletezést.

A módszer lényege, hogy az (5) és (7) egyenletekből kiküszöböljük az a_i paramétert, ezáltal közvetlen összefüggést kapunk az i -edik rúd végeit támadó szinuszos külső erőhatások és az általuk — a rúdvégeken — létrehozott szinuszos elmozdulások közt.

2.3.1. Egyetlen rúd dinamikai deformáció mátrixa és tulajdonságai

Alkossunk az elmozdulás- és külső erőhatásvektorokból egy-egy hipervektort a következő módon:

$$\tilde{s}_i = \begin{bmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{v}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{U}_i \\ \mathbf{V}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}_i} a_i \sin \omega t, \quad (8)$$

$$\tilde{q}_i = \begin{bmatrix} \tilde{f}_i \\ \tilde{p}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{P}_i \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_i} a_i \sin \omega t;$$

vagy rövidebben:

$$\tilde{s} = \mathbf{S}_i a_i \sin \omega t, \quad (9a)$$

$$\tilde{q} = \mathbf{Q}_i a_i \sin \omega t. \quad (9b)$$

A \mathbf{Q}_i mátrix kvadratikus, rendszáma 12. Létezik inverze, ha $\det(\mathbf{Q}_i) \neq 0$, ez esetben a (9b)-ből $a_i \sin \omega t$ -t kifejezve, s (9a)-ba helyettesítve

$$\tilde{s}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_i^{-1} \tilde{q}_i$$

vagy $\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{Q}_i^{-1} = \mathbf{R}_i$ jelöléssel

$$\tilde{s}_i = \mathbf{R}_i \tilde{q}_i, \quad (10)$$

ahol \mathbf{R}_i a dinamikai deformáció mátrix. Így a kívánt közvetlen összefüggés az i -edik rúd végeire működő \tilde{q}_i szinuszos külső erőhatás s a rúd végeinek \tilde{s}_i szinuszos elmozdulása közt rendelkezésünkre áll. Az \tilde{s}_i a rúdvégeken — mint egy részrendszer pólusain — működő külső hatásokra létrejövő „válasz”.

Megjegyezzük, hogy az R_i dinamikai deformáció mátrixot célszerűbb — mint ahogy az irodalomban is szokásos — közvetlen fizikai megfontolások alapján megalkotni, mintsem az $R_i = S_i Q_i^{-1}$ definícióból kiindulva az S_i , ill. Q_i mátrixok segítségével előállítani.

A bal oldali rúdvéget 1-es, a jobb oldalit 2-es felső indexszel jelölve (ezek az i -edik részrendszer 1 és 2 jelű *pólusai*) a (10) összefüggés részletezésével bemutatjuk az R_i mátrix struktúráját:

$$\begin{bmatrix} F_i^1 \\ \tilde{\varphi}_i^1 \\ S_i^1 \\ \tilde{\varphi}_i^1 \\ \tilde{\psi}_i^1 \\ \tilde{\chi}_i^1 \\ F_i^2 \\ \tilde{\varphi}_i^2 \\ S_i^2 \\ \tilde{\varphi}_i^2 \\ \tilde{\psi}_i^2 \\ \tilde{\chi}_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & & & & r_{17} & & & & \\ & r_{22} & & & r_{26} & r_{28} & & & r_{2,12} \\ & & r_{33} & r_{35} & & & r_{39} & r_{3,11} & \\ & & & r_{44} & & & & r_{4,10} & \\ & & r_{53} & r_{55} & & & r_{59} & r_{5,11} & \\ & r_{62} & & & r_{66} & r_{68} & & & r_{6,12} \\ r_{71} & & & & r_{77} & & & & \\ & r_{82} & & & r_{86} & r_{88} & & & r_{8,12} \\ & & r_{93} & r_{95} & & & r_{99} & r_{9,11} & \\ & & & r_{10,4} & & & & r_{10,10} & \\ & & r_{11,3} & r_{11,5} & & & r_{11,9} & r_{11,11} & \\ r_{12,2} & & & & r_{12,6} & r_{12,8} & & & r_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_i^1 \\ G_i^1 \\ H_i^1 \\ M_i^1 \\ N_i^1 \\ K_i^1 \\ F_i^2 \\ G_i^2 \\ H_i^2 \\ M_i^2 \\ N_i^2 \\ K_i^2 \end{bmatrix}$$

(A nem jelölt elemek helyén nullák állnak.)

A már használt és az

$$N_{2i} = 1 - \cos \beta_{2i} l_i \cdot \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i,$$

$$N_{3i} = 1 - \cos \beta_{3i} l_i \cdot \operatorname{ch} \beta_{3i} l_i,$$

jelölésekkel az elemeket részletesen az I. táblázat tünteti fel. Az elemek fizikai tartalma: egységnyi szinuszos gerjesztő erőhatásra a megfelelő helyen létrejövő állandósult szinuszos elmozdulások amplitúdója.

Az elemek vizsgálatából kitűnik, hogy ha az R_i mátrixot a (10a) összefüggésben feltüntetett módon négy mátrixra particionáljuk, akkor ez a következőképpen írható:

$$R_i = \begin{bmatrix} D & C^T \\ C & D_1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

(11)-ben C^T a C mátrix transzponáltját jelöli; a szimmetrikus D_1 mátrix abban különbözik az ugyancsak szimmetrikus D mátrixtól, hogy a főátlón kívüli, azonos pozíciójú nem nulla elemek a D azonos elemeinek mínusz egyszeresei. A fentiek alapján az is nyilvánvaló, hogy az R_i szimmetrikus.

I. táblázat

A dinamikai deformáció mátrix elemei

		r_{11}	r_{77}	$-\frac{1}{A_i E_i \beta_{1i}} \operatorname{ctg} \beta_{1i} l_i$
		r_{22}	r_{88}	$\frac{1}{E l_{zi} \beta_{3i}^3 N_{3i}} (\cos \beta_{3i} l_i \cdot \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i - \sin \beta_{3i} l_i \cdot \operatorname{ch} \beta_{3i} l_i)$
		r_{33}	r_{99}	$\frac{1}{E l_{yi} \beta_{2i}^3 N_{2i}} (\cos \beta_{2i} l_i \cdot \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i - \sin \beta_{2i} l_i \cdot \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i)$
		r_{44}	$r_{10,10}$	$-\frac{1}{G l_i \beta_{4i}} \operatorname{ctg} \beta_{4i} l_i$
		r_{55}	$r_{11,11}$	$-\frac{1}{E l_{yi} \beta_{2i}^3 N_{2i}} (\cos \beta_{2i} l_i \cdot \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i + \sin \beta_{2i} l_i \cdot \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i)$
		r_{66}	$r_{12,12}$	$-\frac{1}{E l_{zi} \beta_{3i}^3 N_{3i}} (\cos \beta_{3i} l_i \cdot \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i + \sin \beta_{3i} l_i \cdot \operatorname{ch} \beta_{3i} l_i)$
		r_{17}	r_{71}	$-\frac{1}{A_i E_i \beta_{1i}} \cdot \frac{1}{\sin \beta_{1i} l_i}$
r_{26}	r_{62}	$r_{8,12}$	$r_{12,8}$	$\frac{1}{E l_{zi} \beta_{3i}^3 N_{3i}} \sin \beta_{3i} l_i \cdot \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i$
r_{35}	r_{53}	$r_{9,11}$	$r_{11,9}$	$-\frac{1}{E l_{yi} \beta_{2i}^3 N_{2i}} \sin \beta_{2i} l_i \cdot \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i$
		r_{28}	r_{82}	$-\frac{1}{E l_{zi} \beta_{3i}^3 N_{3i}} (\sin \beta_{3i} l_i - \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i)$
		r_{39}	r_{93}	$-\frac{1}{E l_{yi} \beta_{2i}^3 N_{2i}} (\sin \beta_{2i} l_i - \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i)$
$r_{2,12}$	$r_{12,2}$	r_{68}	r_{86}	$-\frac{1}{E l_{zi} \beta_{3i}^3 N_{3i}} (\cos \beta_{3i} l_i - \operatorname{ch} \beta_{3i} l_i)$
$r_{3,11}$	$r_{11,3}$	r_{59}	r_{95}	$\frac{1}{E l_{yi} \beta_{2i}^3 N_{2i}} (\cos \beta_{2i} l_i - \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i)$
		$r_{4,10}$	$r_{10,4}$	$-\frac{1}{G l_i \beta_{4i}} \cdot \frac{1}{\sin \beta_{4i} l_i}$
		$r_{5,11}$	$r_{11,5}$	$-\frac{1}{E l_{yi} \beta_{2i}^3 N_{2i}} (\sin \beta_{2i} l_i + \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i)$
		$r_{6,12}$	$r_{12,6}$	$-\frac{1}{E l_{zi} \beta_{3i}^3 N_{3i}} (\sin \beta_{3i} l_i + \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i)$

Az R_i mátrixot két pólussal s pólusonként hat szabadságfokkal rendelkező rúdként állítottuk elő. Összetettebb szerkezeteken előfordulhatnak olyan rudak is, amelyek csak egyetlenegy pólussal rendelkeznek, mint például a 3. ábrán az 1, 3 és 4 jelűek. Ilyen *egypólusú* rúd R_i dinamikus deformáció mátrixa a *kétpólusúéból* egyszerű úton leszámaztatható. Ha a (10) összefüggésbe az \bar{s}_i és

\tilde{q}_i vektornak a (9)-ben, továbbá az \mathbf{R}_i -nek a (11)-ben szereplő alakját beírjuk, kifejtve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= \mathbf{D}\tilde{f}_i + \mathbf{C}^T \tilde{p}_i, \\ \tilde{v}_i &= \mathbf{C}\tilde{f}_i + \mathbf{D}_1 \tilde{p}_i.\end{aligned}\quad (12)$$

A 3. ábrán a rudakhoz kapcsolt koordinátarendszerek x_i tengelyeit is feltüntetjük. Mindegyik egypólusú rúdra érvényes, hogy $\tilde{u}_i = \mathbf{0}$. A (12) alapján közvetlen összefüggés teremthető \tilde{v}_i és \tilde{p}_i közt:

$$\tilde{v} = (\mathbf{D}_1 - \mathbf{C} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T) \tilde{p}_i.$$

Az általános megfogalmazásnál maradva, most $\tilde{s}_i \equiv \tilde{v}_i$ és $\tilde{q}_i \equiv \tilde{p}_i$, továbbá $\mathbf{R}_i = \mathbf{D}_1 - \mathbf{C} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^T$ jelöléssel:

$$\tilde{s}_i = \mathbf{R}_i \tilde{q}_i.$$

Az itt szereplő \mathbf{R}_i az *egypólusú rúd dinamikai deformáció mátrixa*. Ez az \mathbf{R}_i létezik, ha \mathbf{D} invertálható. A fenti gondolatmenet alapján és a kétpólusú, pólusonként 6 szabadságfokú rúdra felírt dinamikai deformáció mátrix particionálása segítségével más speciális esetre is előállítható a rúd dinamikai deformáció mátrixa.

Az \mathbf{R}_i mátrixok még egy figyelemre méltó tulajdonságáról kell említést tenni. Ha $\tilde{s}_i = \mathbf{0}$ — ez a mindkét végén mereven befogott rúd esete — a

$$\det \mathbf{R}_i = 0$$

egyenlet gyökei nem szolgáltatják a rúd sajátkörfrekvenciáit, mert ebben a esetben az \mathbf{R}_i mátrix nem is létezik. Az \mathbf{R}_i dinamikai deformáció mátrix elemeinek levezetésekor ugyanis kénytelenek voltunk olyan megközelítést alkalmazni, hogy $\tilde{s}_i \neq \mathbf{0}$. Ez a tény közvetlenül is belátható, ha az $\mathbf{R}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{Q}_i^{-1}$ összefüggésben a \mathbf{Q}_i mátrix szerkezetét megvizsgáljuk. Például csak longitudinális rezgés esetében, ha a rúd mindkét vége befogott, $\sin \beta_{1i} l_i = 0$. Ekkor a \mathbf{Q}_i mátrix szinguláris, tehát az inverz nem létezik. Megjegyezzük még, hogy ugyanekkor az \mathbf{S}_i is szinguláris. Ha a fenti értelmezés szerint \mathbf{R}_i nem létezik, természetesen annak inverzéről is értelmetlen beszélni. Ezt a megállapításunkat a 2.3.4 pontban még felhasználjuk.

2.3.2 Egyetlen rúd dinamikai merevségi mátrixa és tulajdonságai

Ha létezik, felírható a (10) inverz kapcsolata is a (9a) és (9b) segítségével:

$$\tilde{q}_i = \mathbf{R}_i^{-1} \tilde{s}_i, \quad (13)$$

ahol $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{S}_i^{-1}$, a dinamikai merevségi mátrix!¹

Két pólusú, pólusonként 6 szabadságfokkal rendelkező rúdmodell \mathbf{R}_i^{-1} dinamikai merevségi mátrixa a (10a)-ban feltüntetett \mathbf{R}_i dinamikai deformáció

mátrixszal azonos struktúrájú, hasonló tulajdonságokkal is rendelkeznek. Az \mathbf{R}_i^{-1} is szimmetrikus, a (11)-ben jelölt particionálásról itt is hasonlók mondhatók el.

Eleméit r'_{ij} -vel jelöltük s a II. táblázatban foglaltuk össze. Fizikai jelentésük: állandósult állapotban egységnyi szinuszos elmozdulásamplitúdó létrehozásához szükséges szinuszos erőhatás amplitúdója. (Az \mathbf{R}_i^{-1} mátrix elemeit is közvetlen mechanikai megfontolások segítségével állítottuk elő a rúd (4) és (6) mezőfüggvényeinek a segítségével és nem a (9a) és (9b) egyenletek felhasználásával.)

II. táblázat

A dinamikai merevségi mátrix elemei

		r'_{11}	r'_{77}	$A_i E_i \beta_{1i} \operatorname{ctg} \beta_{1i} l_i$
		r'_{22}	r'_{88}	$E I_{zi} \beta_{3i}^2 \frac{1}{N_{3i}} (\cos \beta_{3i} l_i \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i + \sin \beta_{3i} l_i \operatorname{ch} \beta_{3i} l_i)$
		r'_{33}	r'_{99}	$E I_{yi} \beta_{2i}^2 \frac{1}{N_{2i}} (\cos \beta_{2i} l_i \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i + \sin \beta_{2i} l_i \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i)$
		r'_{44}	$r'_{10,10}$	$G I_i \beta_{4i} \operatorname{ctg} \beta_{4i} l_i$
		r'_{55}	$r'_{11,11}$	$-E I_{yi} \beta_{2i} \frac{1}{N_{2i}} (\cos \beta_{2i} l_i \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i - \sin \beta_{2i} l_i \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i)$
		r'_{66}	$r'_{12,12}$	$-E I_{zi} \beta_{3i} \frac{1}{N_{3i}} (\cos \beta_{3i} l_i \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i - \sin \beta_{3i} l_i \operatorname{ch} \beta_{3i} l_i)$
		r'_{17}	r'_{71}	$-A_i E_i \beta_{1i} \frac{1}{\sin \beta_{1i} l_i}$
r'_{26}	r'_{62}	$-r'_{8,12}$	$-r'_{12,8}$	$E I_{zi} \beta_{3i}^2 \frac{1}{N_{3i}} \sin \beta_{3i} l_i \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i$
r'_{35}	r'_{53}	$-r'_{9,11}$	$-r'_{11,9}$	$-E I_{yi} \beta_{2i}^2 \frac{1}{N_{2i}} \sin \beta_{2i} l_i \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i$
		r'_{28}	r'_{82}	$-E I_{zi} \beta_{3i}^3 \frac{1}{N_{3i}} (\sin \beta_{3i} l_i + \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i)$
		r'_{39}	r'_{93}	$-E I_{yi} \beta_{2i}^3 \frac{1}{N_{2i}} (\sin \beta_{2i} l_i + \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i)$
$r'_{2,12}$	$r'_{12,2}$	$-r'_{68}$	$-r'_{86}$	$-E I_{zi} \beta_{3i}^2 \frac{1}{N_{3i}} (\cos \beta_{3i} l_i - \operatorname{ch} \beta_{3i} l_i)$
$r'_{3,11}$	$r'_{11,3}$	$-r'_{59}$	$-r'_{95}$	$E I_{yi} \beta_{2i}^2 \frac{1}{N_{2i}} (\cos \beta_{2i} l_i - \operatorname{ch} \beta_{2i} l_i)$
		$r'_{4,10}$	$r'_{10,4}$	$-G I_i \beta_{4i} \frac{1}{\sin \beta_{4i} l_i}$
		$r'_{5,11}$	$r'_{11,5}$	$-E I_{yi} \beta_{2i} \frac{1}{N_{2i}} (\sin \beta_{2i} l_i - \operatorname{sh} \beta_{2i} l_i)$
		$r'_{6,12}$	$r'_{12,6}$	$-E I_{zi} \beta_{3i} \frac{1}{N_{3i}} (\sin \beta_{3i} l_i - \operatorname{sh} \beta_{3i} l_i)$

Az egypólusú rúd dinamikai merevségi mátrixa a kétpólusúéból egyszerű particionálással leszarmaztatható. Ha az \mathbf{R}_i^{-1} 6×6 -os blokkjait — a (11)-hez hasonlóan — itt is \mathbf{C} , \mathbf{D} , \mathbf{D}_1 -gyel jelöljük, akkor a (12)-nek megfelelő kifejtés most

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \hat{\mathbf{D}} \tilde{\mathbf{u}}_i + \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{v}}_i \\ \tilde{\mathbf{p}} &= \mathbf{C} \tilde{\mathbf{u}}_i + \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{v}}_i, \end{aligned} \quad (14)$$

alakú. Az $\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0}$ esetben

$$\tilde{\mathbf{p}}_i = \mathbf{D}_1 \tilde{\mathbf{v}}_i, \quad (15)$$

vagy a szokásos általános megfogalmazásban $\tilde{\mathbf{q}}_i \equiv \tilde{\mathbf{p}}_i$ és $\tilde{\mathbf{s}}_i \equiv \tilde{\mathbf{v}}_i$ miatt

$$\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{R}_i^{-1} \tilde{\mathbf{s}}_i, \quad (16)$$

ahol $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{D}_1$ az egypólusú rúd dinamikai merevségi mátrixa.

Egyik végén befogott, másik végén erőhatásmentes rúd esetében $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$, tehát a

$$\det(\mathbf{R}_i^{-1}) = \det(\mathbf{D}_1) = 0$$

egyenlet a rúd frekvenciaegyenlete. Gyökei a hosszirányú, a hajlító- és a csavarórezgés ismert sajátkörfrekvenciáit adják.

Más kényszerfeltételeknek eleget tevő esetekben a rúd dinamikai merevségi mátrixa az általánosból az egypólusúnál követett gondolatmenet alapján könnyen leszarmaztatható.

Az \mathbf{R}_i mátrixoknál tapasztalt anomália analóg formában itt is fellép. Mindkét végén szabad rúd esetében $\tilde{\mathbf{q}}_i = \mathbf{0}$, a (13) összefüggés alapján a

$$\det(\mathbf{R}_i^{-1}) = 0$$

„frekvenciaegyenlet” hamis, mert ebben az esetben az \mathbf{R}_i^{-1} nem létezik. Az \mathbf{R}_i^{-1} dinamikai merevségi mátrix matematikai levezetésekor ugyanis feltételeztük, hogy $\tilde{\mathbf{q}}_i \neq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{R}_i^{-1} = \mathbf{Q}_i \mathbf{S}_i^{-1}$ definícióban szereplő \mathbf{Q}_i és \mathbf{S}_i mátrixok most is szingulárisak. Az állítás helyessége az \mathbf{R}_i mátrixoknál leírt módon látható be.

Az egyes részrudak dinamikai merevségi mátrixa birtokában a továbbiakban célunk az egész rúdrendszerre vonatkozó egyenletek előállítás.

2.3.3. A rúdrendszer rezgését leíró egyenlet

A rudak dinamikai merevségi mátrixainak birtokában mód nyílik arra, hogy az egész rúdrendszer dinamikai merevségi mátrixát felépítsük, és végezetül a rúdrendszer rezgését leíró egyenletet előállítsuk.

Az e helyen rúdszerkezetekre közlendő gondolatmenet általánosabb formában megtalálható még pl.: [4]-ben, ill. [5]-ben, ezért ezt csak a teljesség kedvéért, főbb vonalakban vázoljuk.

Az egyes rudakra vonatkozó egyenleteinket a rúdhöz kapcsolt saját koordináta-rendszerben írhattuk fel kényelmesen, viszont a rudak végeiknél történő

összekapcsolását kifejező egyenleteket a rendszerhez kapcsolt „közös” koordinátarendszerben célszerű megalkotni. Ez a törekvésünk maga után vonja, hogy az eddig tárgyalt erőhatás- és elmozdulásvektorokat is a közös koordinátarendszerbe kell transzformálni. Ha az x, y, z sajátrendszer egységvektorai e_{1i}, e_{2i}, e_{3i} ; az x, y, z közös rendszeré pedig i, j, k , akkor egy három dimenziós vektort a saját rendszerből a közösbe transzformáló mátrix:

$$t_i = \begin{bmatrix} i e_{1i} & i e_{2i} & i e_{3i} \\ j e_{1i} & j e_{2i} & j e_{3i} \\ k e_{1i} & k e_{2i} & k e_{3i} \end{bmatrix}.$$

Jelöljük a közös koordinátarendszerben s_i -vel és q_i -vel az i -edik rúdhoz tartozó elmozdulás- és erőhatásvektort. A $T_i = \langle t_i, \dots, t_i \rangle$ diagonális hipermátrixszal a rúdvégék elmozdulásai és a külső erőhatások a közös koordinátarendszerben:

$$s_i = T_i \tilde{s}_i, \quad (17)$$

$$q_i = T_i \tilde{q}_i.$$

T_i mérete a rúd póluspontjainak szabadságfokától függ: egypólusú rúd esetében, ha a póluspont 6 szabadságfokú, a méret 6×6 , két pólusú, pólusonként 6 szabadságfokú rúdnál 12×12 .

Mínthogy a T_i mátrix ortogonális, inverze a transzponáltjával egyenlő:

$$T_i^{-1} = T_i^T.$$

A (17) összefüggések inverz kapcsolata ezzel:

$$\tilde{s}_i = T_i^T s_i \quad (18)$$

és

$$\tilde{q}_i = T_i^T q_i.$$

A (18) segítségével a külső erőhatások és a pólusok elmozdulásai közt érvényes (13) összefüggés a közös koordinátarendszerben felírva most így szól:

$$q_i = T_i R_i^{-1} T_i^T s_i. \quad (19)$$

A (19) egyenlet az i -edik rúdra vonatkozik. A rúdrendszer n rúdból épül fel, mindegyik rúdra felírható a (19)-nek megfelelő összefüggés. A könnyebb kezelhetőség végett az n db elmozdulás- és erőhatásvektort foglaljuk össze egy-egy hipervektorba:

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ s_n \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Az

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{T}_1^T & & & \\ & \mathbf{T}_2 \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{T}_2^T & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{T}_n \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{T}_n^T \end{bmatrix}$$

diagonál hipermátrix bevezetésével a (19)-nek megfelelő n egyenlet formálisan a következő mátrixegyenletbe foglalható össze:

$$\mathbf{q} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{s}. \quad (20)$$

Az egyes rudak pólusaikon keresztül kapcsolódnak egymáshoz. A pólusok kapcsolódási pontjait nevezzük *csomópontoknak*. Jelöljük a rendszer csomópontjait csupa nagybetűvel; a hozzájuk tartozó és a közös koordináta-rendszerben értelmezett elmozdulásvektorokat foglaljuk össze egyetlen hipervektorba:

$$\mathbf{s}_n = \begin{bmatrix} s_A \\ s_B \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix}.$$

(A csomópontok számát N jelöli, amely független a rudak számának jelölésére alkalmazott n -től.)

A csomópontokra ható, az egész rendszer tekintetében is külsőnek minősülő *szinuszos* erőhatásvektorokat a csomópontelmozdulás-vektorokhoz hasonlóan tömörítsük egyetlen hipervektorba:

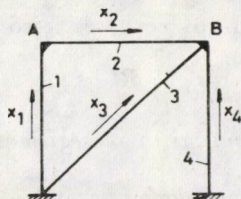
$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} q_A \\ q_B \\ \vdots \\ q_N \end{bmatrix}.$$

A q_A, q_B, \dots, q_N vektorokat is célszerűen a közös koordináta-rendszerben írjuk fel.

A rudak összekapcsolását illetően még két objektum bevezetése szükséges. Jelöljük az egyiket \mathbf{G} mátrixszal. Csak 1-eseket és 0-kat tartalmaz, és azt fejezi ki, hogy a rudak pólusai hézagmentesen illeszkednek a csomópontokhoz. Ha a \mathbf{G} értelmezése szerint az a mátrix, amely az s_0 vektorból az s -t állítja elő, akkor

$$\mathbf{G} \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}. \quad (21)$$

A \mathbf{G} mátrixot *kinematikai kapcsolómátrixnak* nevezhetjük. (A szakirodalomban szokásos a kompatibilitási operátor elnevezés is.)



3. ábra. Egy egyszerű rúdszerkezet vázlata

Szemléltetésképpen a 3. ábra egyszerű rúdszerkezetet ábrázol. Az ábrán feltüntettük az egyes rudak saját-koordinátarendszerének x_i tengelyeit is. Erre a szerkezetre

$$G = \begin{bmatrix} E_6 & O_6 \\ [E_6] & [O_6] \\ [O_6] & [E_6] \\ O_6 & E_6 \\ O_6 & E_6 \end{bmatrix},$$

ahol E az egység-, O négyzetes zérusmátrixot jelöl, az indexekben szereplő 6 a rendszámra utal.

Az említett másik objektumra a csomópontok egyensúlyi egyenletének felírásakor van szükségünk. A q vektor az egyes rudak pólusaira ható — a rudak szempontjából külső, de az egész rúdrendszert illetően valójában belsőerőhatásvektorokat tartalmazza. Mínusz egyszerűen a pólusokon a rudak által kifejtett erőhatásokat jelenti. Azt a körülményt, hogy az összekapcsolás következtében melyik rúd melyik csomópontra fejt ki erőhatást, egy H mátrixszal fejezhetjük ki. A csomópontokat nulla tömegű tömegpontoknak gondolva, felírhatjuk a csomópontok egyensúlyát kifejező egyenletünket:

$$q_0 - Hq = 0. \quad (22)$$

Az energiamérleg felírásával igazolható, hogy a H nem független G -től, hanem éppen annak transzponáltja, azaz

$$H = G^T. \quad (23)$$

A (20) egyenletünk jobb oldalán s helyett írjuk be (21)-et, majd q így kapott kifejezését helyettesítsük (22)-be:

$$q_0 - HR^{-1}Gs_0 = 0.$$

A (23)-ot is figyelembe véve és az

$$R_0^{-1} = G^T R^{-1}G \quad (24)$$

jelöléssel a rúdrendszer szinuszos rezgését leíró egyenlet

$$q_0 = R_0^{-1} s_0, \quad (25)$$

ahol R_0^{-1} a rúdszerkezet dinamikai merevségi mátrixa.

A (25) egyenletünk összefüggést teremt a rúdszerkezet csomópontjainak elmozdulása és a csomópontokra ható külső erőhatások között. Szabad rezgés esetében $q_0 = \mathbf{0}$, így (25)-ből a

$$R_0^{-1} s_0 = \mathbf{0}$$

homogén lineáris egyenletrendszert kapjuk. Ez az egyenlőség kétféleképpen teljesülhet:

$$s_0 = \mathbf{0}, \quad (26)$$

illetve

$$\det(R_0^{-1}) = 0. \quad (27)$$

A (27) egyenlet a rúdrendszer frekvenciaegyenlete. Megjegyezzük még, hogy a G és G^T téglalap alakú mátrixok lévén, a kvadratikus mátrixok szorzatának determinánsára érvényes tételt nem alkalmazhatjuk, hanem csak a (24)-ben kijelölt szorzások elvégzése után számítható R_0^{-1} determinánsa.

A rúdszerkezet R_0^{-1} dinamikai merevségi mátrixának rendszáma $6N$ és transzcendens függvénye ω -nak.

A (25) összefüggés segítségével a rúdszerkezet csomópontjainak állandósult állapotbani válaszát is meghatározhatjuk. Adott q_0 szinuszos amplitúdóvektorú gerjesztőhatás esetében, ha a gerjesztés körfrekvenciája nem egyezik meg a rúdszerkezet valamely sajátkörfrekvenciájával,

$$\det(R_0^{-1}) \neq 0.$$

Ebben az esetben a csomópontok szinuszos elmozdulásvektora kifejezhető a következőképpen:

$$s_0 = R_0 q_0, \quad (28)$$

ahol

$$R_0 = [G^T R^{-1} G]^{-1} \quad (29)$$

a rúdrendszer dinamikai deformáció mátrixa.

Megjegyezzük, hogy a (29)-ben kijelölt invertálás a G nem kvadratikus volta miatt formálisan nem végezhető el, csak a tényezők összeszorozása után.

Gerjesztett rezgéskor az állandósult állapothoz tartozó rezgéskép meghatározása a (28) összefüggés szerint számítástechnikailag sem a legelőnyösebb. Numerikusan mindig a legstabilabb módszert kell kiválasztani a (25) inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszer megoldására.

2.3.4 A sajátfrenkvenciák kiszámításának módja, az eljárás tulajdonságai

A rúdrendszer frekvenciaegyenlete a (27) összefüggés. A frekvenciadetermináns elemei a rezgés ω körfrekvenciájának transzcendens törtfüggvényei. A determinánsfüggvény zérushelyei a rezgés sajátkörfrekvenciái. A zérushelyek meghatározása a függvény alaki tulajdonságai következtében számítástechnikailag nagyobb gondosságot igénylő feladat. A meredek lefutású szakaszokon felül a függvény számos szakadási hellyel is rendelkezik (lásd pl.: [6], 195. o.). Numerikus vizsgálatokra leggyakrabban az ún. „léptető” technika használatos: ω értékét $\Delta\omega$ lépésközzel változtatva, mindig kiszámítjuk a determináns értékét, melynek változása jellegéből következtetünk a számolt helyen gyök előfordulására. A zérushelyeket intervallum-felezési módszer alapján approximációval határoljuk be. Számítástechnikailag alkalmas programozási fogásokkal lehet a páros multiplicitású gyököket meghatározni, továbbá a szakadási helyek környezetében fellépő lebegőpontos túlsordulást elkerülni. Ha *ket-tőnél több* zérushely esik egy $\Delta\omega$ lépésközbe, akkor *számítástechnikai okokból* nem kizárt, hogy valamelyik gyök a számítás során mégis kimarad. $\Delta\omega$ eleendően kicsi (pl.: $\Delta\omega \leq 1$) választása esetében gyakorlati szerkezeteken ez azonban alig fordulhat elő. E problémát oldja meg WITTRICK és WILLIAMS dolgozata [7]. Eljárásukkal ellenőrizhető, hogy a *számítás során* valamely ω^* rögzített érték alatt nem maradt-e ki sajátfrenkvencia, ill. a hiány is megszüntethető.

A determinánsfüggvény szakadásainak fizikai jelentése is megadható. Legyen ω' valamely részrúd egyik sajátkörfrekvenciája, ha végeit befogottnak képzeljük. Amint már a 2.3.1 pontban utaltunk rá, ennél a körfrekvenciánál a rúd dinamikai deformáció mátrixa nincs értelmezve, így nem létezik annak inverze, a merevségi mátrix sem. Az egész szerkezet merevségi mátrixa az egyes rudak merevségi mátrixaiból épül fel, így ω' helyen a szerkezet merevségi mátrixa nincs értelmezve, a determinánsfüggvény szinguláris. A szingularitás matematikai értelemben két fajta lehet: megszüntethető (határérték létezik) és nem megszüntethető (a függvénynek nincs határértéke). A determinánsfüggvény szakadási helyei ez utóbbi típushoz tartoznak, míg a megszüntethető szingularitások a numerikus számításokban, néhány véletlen esettől eltekintve, ki sem derülnek.

Az elmondottak alapján felvetődik a kérdés: vajon a 0-tól valamely ω^* határig kiszámított sajátkörfrekvenciák halmaza biztosan hiánytalan-e, ha a túl nagy $\Delta\omega$ lépésköz okozta sajátkörfrekvencia-kimaradástól eltekintünk? A válasz: nem. Tétélezzük fel ugyanis, hogy a szerkezetnek van olyan sajátkörfrekvenciája, amely egyben sajátkörfrekvenciája valamely részrúdnak is végeit rögzítettnek gondolva. E helyen a determináns függvény szinguláris. A szingularitás lehet nem-megszüntethető, így a számítás során ez a sajátkörfrekvencia kimarad. Ezt az esetet szemlélteti — ugyan diszkrét modelltől kiindulva — [8]

264. old. 3. ábrája. Ha a szingularitás megszüntethető, a határérték akkor sem szükségszerűen nulla (l. — ugyancsak diszkrét modell esetére — [8] 262. old. 2. ábra). *Elvi okokból* kifolyólag tehát nem garantálható a számolt sajátkörfrekvencia-halmaz hiánytalansága.

Állításunk további szemléltetésére álljon itt egy egyszerű példa. Tekintsünk egy L hosszúságú, két végén mereven rögzített prizmatikus rudat. Az egyszerűség kedvéért foglalkozunk csak a csavarórezgésekkel. A rudat osszuk fel l_1 és l_2 hosszúságú darabokra, és az osztási pontot tekintjük csomópontnak. Az ily módon előállított rúdrendszer (csak csavarórezgésre vonatkozó) dinamikai merevségi mátrixa — a különben egyszerű levezetés mellőzésével — egyetlen elemből áll:

$$\mathbf{R}_0^{-1} = [\cotg \delta l_1 + \cotg \delta l_2],$$

ahol

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{G}} \omega.$$

A (27)-nek megfelelő frekvenciaegyenlet a kotangensösszegre vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\frac{\sin \delta L}{\sin \delta l_1 \cdot \sin \delta l_2} = 0.$$

A függvény rezgés szempontjából értelmes zérushelyeit $\delta L = (1 + k)\pi$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$ stb.) összefüggés adja, de a $\delta l_1 = (1 + k)\pi$ és a $\delta l_2 = (1 + k)\pi$ értékek kizárandók a halmazból.

Ha $l_1 = l_2 = L/2$, a zérushelyek $\delta L = (1 + 2k)\pi$ értékeknél adódnak, míg $\delta L = 2k\pi$ értékeknél a függvénynek szakadása van. Így tehát minden második sajátkörfrekvencia kimarad, ezek a körfrekvenciák ugyanis sajátkörfrekvenciái az $L/2$ hosszúságú részrudaknak is. Vagy $l_1 = L/4$ és $l_2 = 3L/4$ felbontás esetében a $\delta l_1 = \delta L/4 = (1 + k)\pi$ és $\delta l_2 = 3\delta L/4 = (1 + k)\pi$ a kizárandó zérushelyek. A determinánsfüggvénynek minden $3/4(1 + k)\pi$ helyen szakadása van, ezek a $3L/4$ hosszúságú, csavarórezgést végző részrúd frekvenciafüggvényének zérushelyei. Az $L/4$ hosszúságú részrúd frekvenciafüggvényének zérushelyei $4(1 + k)\pi$ értékeknél vannak. Tehát a $4\pi, 8\pi, 12\pi$ stb. helyeken a frekvenciaegyenlet számlálójának egyszeres, nevezőjének kétszeres zérushelye van, így a függvénynek nincs határértéke. Ezek a frekvenciák kimaradnak a számítás során.

A részletezett előnytelen tulajdonság a 2.3.3-ban ismertetett módszerben rejlő szabadságfok-redukció következménye. Amint arra a [8] és [9] dolgozatok rámutatnak, a (27) egyenletben szereplő dinamikai merevségi mátrix a rendszernek már redukált merevségi mátrixa, mert a feladatban explicit szerepeltezt szabadságfokok száma a kontinuum-modell végtelen szabadságfokszámával ellentétben véges és egyenlő a csomópontok szabadságfokszám-összegével.

E sorok írójának véleménye szerint az egzakt elmozdulásmódszernek ez a legnagyobb hiányossága, melyre a szerző — saját munkáit kivéve — az irodalomban nem talált utalást.

Megjegyezzük még, hogy a (26) egyenlet teljesülése esetében is lehet rezgés, hiszen speciálisan a rezgési csomópontok egybeeshetnek a szerkezet csomópontjaival. Ez azonban az e pontban már részletezett jelenség egy speciális esete.

IRODALOM

1. POINCARÉ, H.: Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. *American J. Math.* 12 (1890)
2. BAZLEY, N.—FOX, D. W.: Methods for Lower Bounds to Frequencies of Continuous Elastic Systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik.* 17 (1966), 1—37
3. KOLOUŠEK, V.: Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen. Fachbuchverlag GMBH, Leipzig 1953
4. HÜBNER, E.: Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Schwingungssysteme. *Ingenieur-Archiv* 29 (1960), 134—149
5. BOSZNAVY, Á.: Einzelne Probleme der Dynamik zusammengesetzter Systeme. *Periodica Polytechnica. Electrical Engineering* 17 (1973), 7—28
6. CZEGLÉDI Gy.—RICHLIK Gy.: Prizmatikus rudakból felépített térbeli szerkezetek saját-körfrekvenciáinak meghatározása a gépi számítástechnika felhasználásával. MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Munkaközösség I. Tudományos Ülésszakának kiadványa. Budapest 1974, 192—197
7. WITTRICK, W. M.—WILLIAMS, F. W.: A General Algorithm for Computing Natural Frequencies of Elastic Structures. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 24 (1971), 263—284
8. CZEGLÉDI, Gy.: Einige Bemerkungen zur Freiheitsgradreduktion von linear-elastischen mechanischen Modellen. *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering* 19 (1975), 257—266
9. CZEGLÉDI Gy.: Szabadságfokredukción és következményei lineárisan rugalmas szerkezetek analízisében. *Műszaki Tudomány* 54 (1978), 115—124
10. CRANCH, E. T.—ADLER, A. A.: Bending Vibration of Variable Section Beams. *J. Applied Mechanics* (1956), 103—108
11. WEBER, C.—GÜNTHER, W.: Torsionstheorie. F. Vieweg et Sohn. Braunschweig-Akademie Verlag, Berlin 1958

Bracketing of the Eigenfrequencies of Spatial Skeletons, Part I. — This first part of the paper consisting of two parts states the problem, produces substituting structures for bracketing of dynamic characteristics of space frame structures consisting of straight bars with lengthwise varying characteristics, then the matrix equations describing the vibration of a single prismatic bar are established. For the analysis of vibrations of prismatic bar systems a theory applying dynamic stiffness and deformation matrices will be presented, relying on the continuum model.

Einschließung der Eigenfrequenzen von räumlichen Stabwerken, Teil I. — In diesem ersten Teil des Aufsatzes bestehend aus zwei, organisch zusammenhängenden Teilen wird die Aufgabe gesetzt, werden die Ersatzkonstruktionen für die Einschließung der dynamischen Kennwerte von räumlichen Konstruktionen aus geraden Stäben mit längs veränderlichen Kennwerten hergestellt und wird die Matrixgleichung, die die Schwingung von einem einzigen prismatischen Stab, beschreibt aufgestellt. Für die Untersuchung der Schwingungen der Konstruktionen aus prismatischen Stäben wird eine neue Theorie vorgeführt, die mit dynamischen Steifigkeits- und Deformationsmatrizen operiert. Diese Theorie wird mit Hilfe des Kontinuum-Modells dargelegt.

CSŐVEZETÉKRENDSZEREK RUGALMASSÁGI TERVEZÉSE*

I. A TERVEZÉS FELADATA ÉS ESZKÖZEI

KOLONITS FERENC**

A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1981. február 23-án]

A tanulmány jelen első része — főként a hőerművi vezetékek szempontjából — áttekinti a csőtervezés főbb módszertani kérdéseit, vizsgálja a szerkezetek korszerűsödéséből adódó igényeket és a számítástechnika hatékony alkalmazásának lehetőségét.

I. Bevezetés

A csővezeték, mint gőz- vagy gáznemű folyékony vagy annak tekinthető közeg szállítására szolgáló berendezés tervezésének kérdésköre a műszaki fejlődés során mind összetettebbé vált. Bővült és egyre fontosabb szerephez jutott a nagymennyiségű, számottevő hőmérsékletű és nyomású közeg forgalmazását kívánó technológiák köre, főként a hőenergetika és a vegyipar. Az üzemem belüli szállítás, a munkafolyamatot megvalósító főberendezések összekötése mellett egyre nő az üzemközi kapcsolatot megvalósító távvezetékek jelentősége. Utóbbiaknál maga a cső a főberendezés, de az üzemem belüli csővezetékek is kitehetik a technológiai rész értékének harmadát—felét, az összeruházás $15 \div 30\%$ -át [1], más becslések szerint még többet [8].

A tervezési követelmények a *technológiai folyamatból* adódóan elsősorban dimenzionális, topológiai, valamint áramlás- és hőtani jellegűek.

Adott elhelyezésű főberendezéseket kell olyan csőhálózattal összekötni, amelyen a különböző üzemállapotokban szükséges áramlás útja zárószervekkel kijelölhető és a szállítás során fellépő nyomás- és hőveszteségek a folyamat szempontjából megengedhető határok közt maradnak. Ezeket a követelményeket azonban úgy kell megvalósítani, hogy a berendezés létesítése, üzemem *biztonságos és gazdaságos* legyen. A biztonság, tehát hogy a cső maga ne károsodjék, és a környezetet se károsítsa, alapvető szempont, minden más csak ennek keretei közt érvényesülhet. A károsodás kockázata a technológia adott jellemzőitől függően többféle formában jelentkezhetik, de minden esetben közös, így általános és kiemelkedő fontosságú követelmény a kellő szilárdság.

A szilárdsági méretezés mikéntje természetesen ahhoz igazodik, milyen igénybevételek hatnak a csőre. Ezek megállapításához alkalmazási területen-

* Referátum a MTA Gépszerkezettani Bizottsága 1980. ápr. 21-i ülésén.

** Dr. Kolonits Ferenc, 1112 Budapest, Cirmos u. 4.

ként más és más vizsgálatok szükségesek. A kérdéskörön belül azonban körülhatárolható bizonyos „közös rész”, amely általánosságban a környezettől eltérő hőmérsékletű és nyomású közeg szállításának funkciójából eredő hatásokat elemzi. Az elemzés azonban nem szorítkozik a hatások és szilárdsági következményeik egyszerű megállapítására: ez egyéb szaktudományok, elsősorban a műszaki mechanika feladata. A csövek szilárdsági méretezése ezek általánosabb tételeinek specializálásán és az egyszerű összegzésen túlmenő elemet tartalmaz: mindezt alkalmas eljárás módba foglalja a vezeték méreteinek és egyéb jellemzőinek előírása és tényleges megvalósítása végett. Nem csupán fejezet a műszaki mechanikából (amely maga is a mechanika műszaki alkalmazásban felmerülő, de ennek megfelelően tovább is fejlesztett része), hanem az alkalmazást még inkább előtérbe állító „műszakibb” mechanika. A többékevésbé egzakt tudományos alapokon túl a méretezés jelentősen támaszkodik a tapasztalatokra és a szubjektív invencióra, hiszen az előbbiek nem minden kérdésben igazítanak el, még napjainkban sem.

A különböző alkalmazási területek közül talán a hőerőművek csővezetékei azok, ahol ezen általános kérdések legnagyobb arányban és mértékben megjelennek — ilyen értelemben a „műszaki csőtan” egyfajta modelljének tekinthető. A továbbiakban ezt vesszük alapul.

Megfontolásainkban a csőtervezés kérdéskörének két vonatkozását kívánjuk vizsgálni; a jelen részben azt, hogy a fokozódó követelmények milyen változásra vezethetnek a jelenlegi tervezési módszerekben, ill. milyen tendencia mutatkozik a számítógéppel segített tervezés (CAD) vonatkozásában. Jelen tanulmányunk második részében épp ezen tendenciák alapján új módszert alakítunk ki az egyik legbonyolultabb tervezői számításra, a csőhálózatok rugalmassági elemzésére.

2. A tervezés menete és eszközei

2.1. Általános észrevételek

A tervező munkájának kiindulópontja a megvalósítani kívánt berendezésre vonatkozó konkrét funkcionális követelmények és a megvalósításhoz rendelkezésre álló anyagok, gyártáslehetőségek, továbbá a kialakítandó berendezés jellegének ismerete. Ezek adott esetben már korábbi tervezői döntések következményei. Területünkön maradvá tehát adott, hogy bizonyos szállítási feladatot célszerű csővezetékkel megoldani (ha ugyan volt is más alternatíva, pl. nyitott csatorna), milyen technológiájú és anyagú csöveket lehet beszerezni, milyen hőmérsékletű és nyomású közeget kell szállítani. A tervező feladata, hogy egymásra épülő döntések sorozatával meghatározza a berendezés kivitelezéséhez és üzemeltetéséhez szükséges valamennyi paramétert: a

konkrét anyagot, méreteket stb., és ezeket minden részletre kiterjedő ellentmondásmentes rendszerbe, tervbe foglalja.

Döntéseinél a tervező köteles követni az érvényes szabványok és más hatósági rendelkezések előírásait és legalábbis ajánlatos szem előtt tartania a „tudomány és technika jelen állását”. Hogy utóbbiból mit és hogyan alkalmaz, az határolja, — mennyire képes és mennyit érdemes — egyebek mellett kockázatvállalás és műszaki etika kérdése [2].

A „tudomány és technika jelen állása” különböző elméleti és tapasztalati összefüggések mellett nehezen vagy jelenleg egyáltalán nem számszerűsíthető elvek, célszerű elrendezésformák stb. alakjában jelenik meg. Lényeges részét képezik a korábban létrehozott berendezésekkel kapcsolatos pozitív vagy negatív tapasztalatok.

A tervezési munka semmiképp sem determinisztikus jellegű olyan értelemben, hogy az alapadatokból a „jelen állás” összefüggéseinek kellő alkalmazásával egyértelműen következtetni lehetne a szóban forgó berendezés minden előírandó jellemzőjére, mintegy sokismeretlenes egyenletrendszer vagy optimumfeladat megoldása útján. A felhasználható ismeretek, még ha teljesen számszerűsíthetők vagy logikailag algoritmizálhatók lennének is, olyan feltételrendszert eredményeznek, ami egyszerre hiányos és ellentmondó, emellett többnyire a rendelkezésre álló számítástechnikai, idő- és anyagi lehetőségek alapján kezelhetetlen.

A hagyományos megközelítés az ismeretek korábbi, kizárólag tapasztalati jellege és a feltételrendszer hiányos volta miatt kézenfekvően adódott: a célkitűzésből való direkt következtetés helyett fel kell venni a berendezés adatait, majd ezt elméleti vagy kísérleti úton ellenőrizni. Ha az ellenőrzésnél lényeges feltételek nem teljesülnek, úgy helyesbíteni kell, majd újra ellenőrizni s.t.

Ez az eljárás tulajdonképpen heurisztikus iteráció vagy még inkább a mindenkori legveszélyesebb negatívumra koncentráló relaxáció, ami ha a konvergencia és az egyértelműség, ill. teljesség kérdését tisztáztuk, a direkt módszerrel teljesen egyenértékű. Alkalmazása mellett szól az is, hogy az alapul szolgáló összefüggések többnyire elemző jellegűek: az objektum paramétereiből következtetnek a bennük lefolyó jelenségekre. A „konstruktív”, szintetizáló következtetés éppen fordított irányú lenne: milyen paraméterek szükségesek, hogy a jelenségeknél bizonyos helyzeteket elkerüljünk, vagy éppen előidézzünk. Egyszerű összefüggésnél, ha a szóban forgó hatás a többitől legalábbis feltételesen elkülöníthető, ezt kellő átrendezéssel el lehet érni. A csöveknél a falvastagságot a belső túlnyomásból lehet számítani a feszültségképlet átalakításával (kazánformula): más további igénybevétel szempontjából a többtenegelyű feszültségállapot sajátosságai miatt ez a fal még számottevő tartalékkal rendelkezik. Általánosságban azonban nemcsak a teljes konstrukciós folyamat, hanem még az egyes részlépések ilyenfajta invertálása is problematikus vagy legalábbis igen munkaigényes.

A szabatos értelemben vett iterációnál egyértelműen elő van írva, hogyan kell az ellenőrzésnél kapott eltérés függvényében a kiinduló adatokat helyesbíteni. A konstrukcióban ilyen előírás lehetőségei korlátozottak, inkább arról lehet szó, hogy sorozatos vizsgálatokkal tendenciájában tisztázzuk az egyes tényezők befolyását. A „tanuló algoritmus” konvergenciakritériuma a konstruktőr műszaki érzéke és józan kockázatvállalása. Ugyanez jut döntő szerephez a megoldás teljességét illetően. Még matematikailag egzakt kitűzésű problémáknál is, ha több megoldás létezik, a kezdeti érték felvételével akaratlanul eldöntöttük, melyiket fogjuk eredményül kapni, a többiről esetleg tudomást sem veszünk — sőt az is előfordulhat, hogy különösen kedvezőtlen felvételnél az eljárás egyáltalán nem konvergál. A konstrukciós feladatnál a „megoldás” a paraméterek terében igen bonyolult alakú tartomány, amelynek minden pontja egy-egy megvalósítható szerkezet, és ami további optimalizációs feltételekkel szűkíthető, ha ugyan ezek eleve nem szerepelnek a feltételrendszerben (de „merev” optimum előzetes kikötése esetén sokszor kiderül, hogy az eredmény más szempontból kívánivalókat hagy maga után). A gyakorlatban azonban, pl. csőnyomvonal-tervezésnél többnyire csak arra van mód, hogy a feltételeket egyáltalán kielégítő megoldásig jussunk, esetleg néhány alternatívát vizsgáljunk, többre nemigen van idő és nagy a kockázat, hogy sok munkával kevés javulást nyerünk. Kisebb részrendszereknél a munkaigény ugyan kisebb, de a többi korábban vagy párhuzamosan tervezett részhez illeszkedni kell, ami csökkenti a manőverezési lehetőségeket. A tervekbe kerülő megoldás végül attól függ, milyen irányból lépünk be a lehetséges tartományba; a konstruktóri közhely szerint „ami elég jó, az jó”. Ezt pedig nagyrészt eldönti a kezdeti és a módosításokban ugyancsak szerepet játszó felvétel: felvenni azonban csak azt lehet, amit láttunk, vagy abból kiindulva el tudunk képzelni. A lehetséges megoldások halmazából a korábban megvalósított szerkezetekhez bizonyos értelemben legközelebbi elemhez jutunk, „a szerkesztésben nincs ugrás”, különlegesen invenciózus konstruktőr esetét kivéve.

Újabb tudományos eredmények, elemzési módszerek bevonása nem szükségképp vezet jobb konstrukcióhoz, csak akkor, ha a tervező az ily módon felszabaduló „kockázati alapját” merészebb, a felismerhető lehetőségeket jobban kihasználó felvételbe fekteti — egyébként ellenőrizhet egy római vízvezetékét a legmodernebb számítógépen, az most sem lesz másmilyen, hiszen annakidején „elég jó” volt.

A tudományt alkalmazó konstrukcióból akkor lesz tudományos konstrukció, ha legalábbis részműveletenként lehetővé teszi a felvételek szubjektív tapasztalati jellegének csökkentését a célokból és feltételekből való visszakövetkeztetés javára. Ez nem szükségképp matematikai értelemben vett invertálás: ha valamilyen számítás a korábbinál egyszerűbben és gyorsabban végrehajtható, a konstruktőr adott időben és költséggel részletesebben felmérheti a lehetőségeket, amelyek közt olyan is akadhat, amit korábban elképzelni sem tudott.

2.2. A csőtervezés menete és a kompenzáció kérdése

A csővezetékrendszerek tervezése a teljes létesítmény tervezésének keretében, a párhuzamosan folyó egyéb tervezőmunkával folyamatos kölcsönhatásban történik. A tervezés ennek megfelelően gyakorlati tapasztalatok alapján kialakított, egymásra épülő szakaszokra bomlik. Ezek kezdetén összefoglalják és ha szükséges, összhangba hozzák a korábbi szakaszban különböző szakágakban kialakult tervezői döntéseket, ennek alapján részletesebb felvételt tesznek és újabb döntésekkel mindinkább konkretizálják a létrehozandó rendszert. A későbbiekben eldöntendő paraméterek hatását előrebecslik. A szakaszok lényeges tartalmát a viszonylagosan független vizsgálat lehetősége mellett a tervező apparátus konkrét szervezete, szakosodási struktúrája és a helyenként-országonként eltérő hagyományok is befolyásolják [3].

A tényleges tervezés első szakasza a *hősséma* (elvi technológiai séma) kialakítása. Eldöntik a főberendezések: kazán, turbina stb. jellemzőit, ez legtöbbszörre adott típus kiválasztását jelenti, esetleg kisebb módosításokkal — mindez a séma felépítését nagy vonalakban megszabja. A csővezetékek ebben többé-kevésbé üres „fekete dobozként” jelennek meg, amelyekről feltételezik, hogy a technológiai paramétereket nem befolyásolják, vagy ezt a hatást a nyomás- és hőveszteség előrebecslésével közelítőleg veszik számításba. A sémaszámítások eredményeként adódnak az egyes berendezések közt szállítandó közegmennyiségek, a hőmérsékletek és nyomások, ami a következő, most már érdemi csőtervezési szakasz „kezdeti feltétele”.

A továbbiakban kijelölik a főberendezések helyét és megkezdődik az épület tervezése. Ezzel párhuzamosan folyik a csőtervezés második szakasza: a *csősséma* kialakítása. Ennek során a rendelkezésre álló anyag- és méretválaszték figyelembevételével eldöntik, hogy az egyes szállítási útvonalakat milyen anyagú, átmérőjű és falvastagságú csővel (vagy párhuzamosan kapcsolt csővelekkel) valósítják meg. A hőssémán szereplő „elvi csőrendszert” a berendezések konkrét követelményeinek megfelelően kiegészítik és további szükséges, ill. célszerű gyűjtő, átkapcsoló stb. vezetékekkel bővítik. Végeredményben kialakítják a csőhálózat topológiáját, feltüntetik a leágazások és zárószervek helyzetét.

A csőátmérőket úgy állapítják meg, hogy az áteresztendő közegáram sebessége ne lépjen túl bizonyos tapasztalati értéket, ami korlátozza a nyomásveszteség és lengéscsillapítás kockázatát. A falvastagság méretezése szabványos eljárással a belső túlnyomásra történik (figyelembevétel az anyag teherbírását üzemi hőmérsékleten).

A következő szakasz az *elrendezési tervek* elkészítése. A közben kialakított épületszerkezethez alkalmazkodva rajzban felveszik a csősséma szerinti vezetékrendszer tényleges nyomvonalát, előírányozzák a hőszigetelést, a csőtartók (és fixpontok) helyét. Megállapítják a csőtartózásra jutó súlyterhelést (általá-

ban hálózatszámítás nélkül, közelítő eljárásokkal), megtervezik vagy a szükséges mértékig felveszik a csőtartószerkezeteket és elvégzik a gátolt hőtágulásból eredő reakciók, mozgások, feszültségek számítását. Ha mind a cső, mind a esatlakozó berendezések és tartószerkezetek terhelése megfelel, véglegesítik a csőtartószerkezetek terveit. A számítás szükség szerint további áramlás- és hőtechnikai ellenőrzésre is kiterjed. Ezután készülnek a részletes *kiviteli tervek*, anyaglisták stb. A munka során folyamatos egyeztetés folyik az építész, a villamos-automatikus stb. tervezőcsoportokkal.

Ha azt vizsgáljuk, hogyan hatott a műszaki fejlődés a szilárdsági mércetézés követelményeire, megállapíthatjuk, a hőerőműveknél (de más üzemeknél is) növekedtek az alkalmazott közeghőmérsékletek és nyomások, nőtt az egységteljesítmény. Az előbbieken azonban már vagy két évtizede elérték a még gazdaságosan uralható értékeket, sőt a szuperkritikus paraméterek tartományából némi visszalépésre is sor került. Az egységteljesítmények, ezzel együtt az átáramló anyagmennyiségek ugyanakkor folyamatosan és igen nagy mértékben megnövekedtek. A hőmérséklet anyagjellemzőkre gyakorolt hatását, a nagyobb igénybevétel, drágább csőanyagok miatt szükséges részletesebb feszültségelemzés elveit feldolgozták és szabványokba foglalták [4]—[7]. A pontosabb feszültségvizsgálat igénye mellett a mennyiségek, következőképp a csőátmérők növekedése mindinkább előtérbe állította a rendszer rugalmassági számítását és méretezését. A probléma ugyan megoldható különleges, kis erővel deformálható csőelemek, pl. hullámcsöves kompenzátorok beépítésével, ez azonban költségek és egyéb tényezők miatt nem mindig jöhet szóba — többnyire magát a nyomvonalat kell úgy kialakítani, hogy a rákényszerített deformációk hatására ne lépjenek fel a csövet vagy a csatlakozó berendezéseket károsítani képes terhelések.

Nézzük, hogyan alakulnak közelítőleg az igénybevételek az átmérőhöz képest kis falvastagságú csőveknél. A méretezés fenti menetében *p* *belső nyomásra*, *D* középtátmérő, σ_m hőmérsékletfüggő megengedhető feszültségre megállapított *falvastagság*

$$s = \frac{Dp}{2\sigma_m} \quad (2.1)$$

minden említett tendencia miatt növekszik. Az *önsúlyból* eredő hajlító nyomaték *q* fajlagos nyomvonal súly, *l* közepes támaszköz mellett $ql^2/10$ -re becsülhető [8]. Ha a csőanyag sűrűsége σ_c , a töltet pedig ρ_t , úgy a szigeteléstől eltekintve a hajlítófeszültség

$$\sigma_s = \frac{l^2}{D} \left(0,4\rho_c + 0,2 \frac{\sigma_m}{p} \rho_t \right) g \quad (2.2)$$

csökkenő irányzatú, és a támaszközzel egyebektől függetlenül befolyásolható.

A hőtágulások nagyságrendje *L* jellemző hossz méret, α hőtágulási tényező és *t* üzemi hőmérséklet mellett (egyszerűség kedvéért 0 °C-on való szerelést

feltételezve) $L\alpha t$, ilyen mértékben deformálják a rendszert a fellépő reakcióerők. M reakciónyomaték (vagy erő) az I inerciájú, E rugalmassági tényezőjű csővön $c_a(L^n)/(IE)$ deformációt létesít, ahol c_a és n a nyomvonal alakjától és a deformáció, ill. ható reakció értelmezésétől függ (forgás v. eltolódás, utóbbira $n \geq 1$). A keletkező reakció, feltéve természetesen, hogy a nyomvonal nem egyenesen megy befogástól befogásig, ami tengelyirányú befeszülést eredményezne, hanem oldalkitérésekkel mód van hajlítónyomaték kialakulására,

$$P, M = \frac{\pi}{8} D^3 s \frac{L}{c_a} (E\alpha t), \quad (2.3)$$

a kompenzációs (hajlítónak vett) feszültség

$$\sigma_k = \frac{1}{2} D \frac{L}{c_a} (E\alpha t), \quad (2.4)$$

E és α a hőmérséklettel csökken, ill. nő, az $E\alpha t$ szorzat — főként, ha ausztenites anyagokra térünk át — növekszik. Megállapítható, hogy a fejlődés tendenciái mind a reakciókat, mind a feszültségeket növelik.

A belső nyomásnál megoldást jelentő falvastagság-növelés itt hatástalan vagy épp ront a helyzeten, egyedül a L/c_a csökkentése, azaz rugalmasabb nyomvonal-kialakítás jöhet szóba. Az utóbbi a konstruktőrök körében köztudott, az előbbit pedig tapasztalják.

A fentiekből azonban az is leszűrhető, hogy a reakciók és a feszültségek viszonya $D^3 p/\sigma_m$ -szel arányos, azaz erőteljesen növekvő. A paraméterek és egyégteljesítmények növekedtével a főberendezések egyre kevésbé „monolitikusak” és főként a forgógépek mind érzékenyebbek a külső terhelésre. Ezért a gyártók a csatlakozásokon megengedett erőt és nyomatékot korlátozzák, és az előbbieket miatt igen valószínű, hogy a korlátok viszonylagosan mind szigorúbb feltételt jelentenek. Ennek alapján szükségszerűen következett be a gyakorlatban már tapasztalt szituáció, hogy a reakciók élesebb követelményt jelentenek, mint a cső szilárdsága.

Látszatra mindkét problémát csökkenti, ha a vezetékeket hideg állapotban a hőtágulás e -edrésszével előfeszítjük — ennek pontos végrehajtása jelentős nehézséggel jár — és az eredeti meleg állapotú R reakciót $(1 - e) R$ -re csökkentjük. A hideg állapotban ellenirányú eRE_h/E_m reakció adódik, és a feszültségek is arányosan alakulnak, feltéve, hogy nincs képlékeny alakváltozás. A cső szilárdságát azonban a legtöbb korszerű előírás a kompenzációs feszültségek teljes változási tartománya alapján értékeli, megengedve a vezeték elvileg egyszeri képlékeny alakváltozással történő önelfeszülését, amit más szakterületen beállásnak neveznek [9], [10], az előfeszítéssel ezt csupán megelőzzük. Reakciók vonatkozásában pedig a gyártó többnyire korlátozza a hideg állapotot is, nem ritkán 100% relaxáció kötelező figyelembevételével. A kezdeti meleg reakciókat valóban lehet előfeszítéssel a korlátérték alá csökkenteni,

amíg a hideg reakciók még megengedhetőek; utóbbiak növekedése azonban a rugalmassági modulusok arányában nagyobb, mint az előbbieké csökkenése. A teljes relaxáció a hideg állapotra nézve azt jelenti, hogy a korábban alkalmazott előfeszítésre való tekintet nélkül fellép RE_n/E_m , amit csakis a rendszer rugalmas kialakításával befolyásolhatunk.

Az utóbbi hazai nagyerművek főgőzvezetékeinél mindezen tendenciák kézzelfoghatóan mutatkoztak. A turbina reakciókorlátai gyakorlatilag kizárták az előfeszítést és a szükséges rugalmasság térbeli „líraszzerű” vezetéssel, önmagában csak szilárdsági szempontból kihasználatlan hosszú nyomvonallal, elhelyezhetőség, nyomásesés és költségek szempontjából kedvezőtlenül lett volna biztosítható. A tervező (FEKETE JÁNOS, ERŐTERV) ezért olyan nyomvonalból indult ki, amely szilárdságilag tartalékkal rendelkezett, de nem volt abszurdan túlméretezett, majd sorozatos számítással megállapított kellő helyen és irányban kikötötte a csöveket a tartószerkezethez. Az alkalmazott DARU típusú állandó vagy állítható karakterisztikájú csőtartók lehetővé tették a súlyterhelés és táguláskorlátozás független kezelését, az erők módosítását. Így sikerült a kezdetben nagy reakciókat a megengedett értékre csökkenteni. A nyomvonalát magát mindez nem befolyásolta, közben folyhatott a kiviteli tervezés és gyártás, ami kockázatot, de időmegtakarítást is jelentett [11], [12], [13].

2.3. A számítógépek alkalmazásának lehetőségei

A mérnöki konstrukciós munka számítástechnikailag két évtizeddel ezelőtt a logarléc-re meg szerkesztő eljárásokra támaszkodott és ezen a mai szemmel igen korlátozott, a közhely szerint „maximum egycollos formulákra” építő eszköztárral nemegyszer rendkívüli szellemességgel oldotta meg feladatait. Elméleti eredményeket olyan formában kellett és olyan határig lehetett a tervezésbe vonni, hogy ezen az alapon uralhatók legyenek. A számítómunka nem vagy csak a tervezőcsoporton belüli munkamegosztásban különül el. Az alapvető eszköz, a logarléc, az időről időre feltűnő különleges variánsok ellenére, néhány szakágilag kismértékben eltérő, kiforrott típusban szerepel, kezelésének célszerű fogásai „alaki kiképzés” jelleggel a műszaki oktatás része.

A számítógépek gyorsütemű fejlődése új helyzetet teremtett, és ma már világos, hogy a lehetőségek kihasználásához és a fokozódó követelmények kielégítéséhez a tervezőmunka egészének az új szempontok szerinti elemzése szükséges [14]. Az eszközök változása magával vonja a módszerek, célkitűzések változását, emellett megfelelően képzett személyzetet kíván, alkalmas szervezetben. Ezen kérdéseknek már nagy múltja van egy más területen: a hadtudományban [15] — sajátos, hogy az ott kialakult kategóriák és terminológia milyen sűrűn bukkan fel „civil” alkalmazásban. A számítógéppel a tervező apparátusban először vált szükségessé „általános fegyverzetváltás”. Ennek

kezdeten az új eszköz valamilyen régi, nagyobb hatású variánsaként, az annak megfelelő célra és módon alkalmazták (mint a benzinmotor „ló”-erejét a hintó alakú kocsiban). Ezután kiderül, hogy az eszköz többre és másra is képes — a lehetőségek feltárulásával differenciálódik. Az előállítás olcsóbbodásával, a kezeléshez szükséges ismeretek terjedésével, megkezdődik a tömeges alkalmazás. Ekkor kerül napirendre a tevékenység legcélszerűbb módozatai és a megfelelő szervezet kialakítása.

A számítógépesítés most a fenti folyamat közepetáján tart. A differenciálódásban alapvető, hogy megváltozott a Grosch-törvényként ismert gazdasági tendencia, amely szerint a kis feladatokat olcsóbb összegyűjteni és nagy gépen „részdőben” megoldani: ma a feladat nagyságához és körülményeihez illeszkedő gép gazdaságos [16], [17]. Kialakultak az elkülönült számológéppontban üzemelő, különleges szakképzettséget igénylő *nagygépek*, amelyek üzemi rendje a minél teljesebb kihasználtságot célozza. Szükségképp nem illeszkedhetik egy adott tervező munkájához, igénybevétele személyi áttételekkel és meglehetősen kötött adminisztrációval jár. Kihelyezett terminálokkal a hazai tapasztalatok — nem utolsósorban költségigény miatt — szűkösek, de a fentieket csak részben módosítják. Ezzel ellentétben az ár és kezelési követelmény mérsékeltebb volta *asztali gépeknél* lehetővé teszi, hogy ezeket bizonyos tervezői szervezeti egységek használatába adják. Megítélésük nem pusztán a kihasználtság, hanem a velük felszerelt egység teljesítménye alapján célszerű: mekkora többletet jelent a „formalitásmentes”, állandó, közvetlen rendelkezésre állás, azaz a tervezőmunkába aktuális igény szerinti betagozódás. Egyéni eszközként a logarlécet gyakorlatilag felváltották a *zsebgépek*, amelyek jelenleg elterjedt típusai már megvalósítják ennek technikai minimumát (elemi függvények, rövidebb műveletsorok „leolvasásmentes” végrehajtása). Különös figyelmet érdemel azonban a továbblépés, hiszen a tervezőmunkában mindenképpen maradnak olyan szakaszok, ahol a heurisztikus és számszerűsíthető elem „rövid sorozatokban vagy célzott egyeslővésként” kapcsolódik a döntések kimunkálásában. Az ún. programozható zsebgépek tömegtípusainak jó része „álprogramozható” [18], de mindenesetre megkívánják a program esetenkénti manuális bevitelét, ezzel gyakorlatilag kizárják előregyártott algoritmusok részletismeretek nélküli alkalmazását. A korszerű táruk ráadásul „illanékonyak”: kikapcsoláskor törlődnek. Az „előre betározott lőszerrel, egy mozdulattal használatra kész” mágneskártyás zsebgép ma még drága, de a maga idejében minden típus az volt. Egyre inkább felmerül az egységesítés és a logarléccel áttekinthetőség, ergonómia szempontjából is egyenértékű típusok kialakítása [19]. Mindent egybevéve a tömeges alkalmazás megkezdődött, bár hazai viszonylatban az asztali gépek némileg szűk keresztmetszetet jelentenek.

Személyi vonatkozásban a helyzet jellemzője, hogy napjainkra számottevővé vált azon műszakiak részaránya, akik érdemleges gyakorlattal rendel-

keznek és alapképzést már a számítástechnika közegében, nem csupán hagyományos eljárás módra építő oktatásban kaptak. Szervezeti síkon ez a generáció az alsósintű vezetésben most áll a „kapuk előtt”, a helyzet minden objektív és szubjektív problémájával egyetemben. Mindenesetre ilyen oldalról is javul annak a lehetősége, hogy a számítástechnika, ahol ez célszerű, közvetlenül a tervezői szervezethez kapcsolódják és a „gépterem paradicsomából történt kiűzetés” után új módon valósuljon meg a közvetlen érintkezés. Mellesleg ez teret nyit az igen pozitívan értékelt „lelkes amatőrizmus” előtt [16].

Az általános géptervezést [14] jelen dolgozat 2.1. részéhez hasonló premisszákon koncepciókialakítási, tervezési és kidolgozási fázisok szerint vizsgálja. A középsőben megkülönbözteti a tulajdonképpeni számítómunkát (ezen belül az ellenőrző, méretező — tehát „részben invertált”, továbbá az ezt magasabb szinten megvalósító optimalizáló algoritmusokat), az információ-tárolást és a szerkezetkialakítás folyamatát. A géphasználat *kötegelt* (adattól végeredményig automatikus) és *interaktív* (aza a tervező heurisztikus döntései-nek a számításfolyamathoz vitelére módot adó) *formájának* figyelembevételével, a fázisok algoritmizálhatósága szerint javasol fejlesztési irányokat. Jelen tanulmány konkrétabb területén mód nyílik a feladatok, szervezet és gépválaszték részleteit is figyelembe vevő elemzésre. Megfontolásainkból kirekesztjük az átfogó koncepcionális döntések és a hőséma kialakítását. Ezek a szoros értelemben vett csőtervezésnek inkább előzményei, semmint részei. A továbbiak szempontjából annyi a lényeges, hogy ezek a nagy adattömeg miatt a mai géphelyzetben szinte biztosan nagygépes feladatnak tekinthetők, tehát a végrehajtó intézmény számolóközponttal szükségképp kapcsolatban áll.

A géphasználati formát és a tervezési fázisok algoritmizálhatóságát célszerű a számításfolyamat megszakításainak jellegéből kiindulva vizsgálni. Egyáltalán érdemileg folyamatnak tekinthető, mechanikus képletkiszámításon túlmenő számítás csak akkor lehetséges, ha az előbbieket összefűzését szolgáló eredményeiktől determinisztikusan függő döntések a gépen belül végrehajthatók — ez különbözteti meg a programozható gépet az álprogramozhatótól. Az esetek egy — ma még nem túl nagy — részében a tervezés valamely nagyobb, viszonylag elkülönülő művelete többé-kevésbé egyben programozható, a gépmunka közvetlenül a végcélra irányul. Idő- és tárigény miatt erre általában nagy gép szükséges, ami ember—gép viszonylatban egyszersmind elégséges is, hiszen az illető művelet egészében kikerült a tervezés emberi bonyolításának folyamatából. Az eredmények később, a következő fázis meg-alapozásában, majd találkoznak a párhuzamos egyéb tervezői műveletekével — az általános ütemet többnyire az utóbbiak szabják meg. Ilyen esetekben a számítás megszakítása *teljes*: a feladat programja, adatai, eredményei kiírásra vagy törlésre kerülnek.

Ha van lehetőség a program *részleges* megszakítására, azaz a futás adott helyzetben való felfüggesztésére, úgy mód nyílik a nem-öndeterminált, tehát

korábbi más számítástól függő vagy heurisztikus döntések végrehajtására, ezzel a teljes megszakitással határolt számításfolyamat meghosszabbítására. A „részlegesség” már implikálja, hogy fokozatai vannak, ez pedig az, hogy az aktuális programinformációkból mennyit kell a kezelő tudomására hozni, hogy dönthessen, valamint, hogy döntései milyen mértékben befolyásolják azokat. Az igényelt technika a számkijelzéstől a színes display-ig, ill. nyomógombtól a fényceruzáig terjedhet és a tervező közvetlen jelenléte szükséges, ami asztali gépet vagy terminált jelent. Ha mindennek költsége meghaladja azt, amit a tervezés reális igényeinek gyorsabb kielégítésével nyerni lehet, változatlanul a kötegelt üzemmódot kell előnyben részesíteni. A gépkategóriát az ily módon „körüljáró jellegűnek” maradó, ismétlődő számítások nagytömegű adatának egyszerűbb kezelhetősége szabja meg.

Az asztali gépek eleve rendelkeznek az interaktivitás némi technikai, ill. a tervezői kapcsolat szervezeti lehetőségével. Munkaszervezést tekintve annál jobb, minél kevésbé lesz „házi számológéppont” jellege. A szakszerű programfejlesztés-algoritmizálás ugyan megkívánja mellettük szakosodott munkatársak alkalmazását, ezek érdekeltsége azonban a kiszolgált szervezeti egység teljesítményéhez kapcsolódik. Célszerű a programok előállításába, de főként a futtatás-közbenő értékelésbe a lehetőségig bevonni a tervezőket, mégpedig elsősorban személyes, „nem-formális” munkakapcsolat keretében, inkább a kölcsönös konzultatív jelleget hangsúlyozva [20]. Mindez akkor valósul meg leginkább, ha — parkinsoni fogalmazással — *a tervezők és a gépüzem legkisebb közös főnökének rangja minimális.*

A csőtervezés problémakörét áttekintve megállapíthatjuk, hogy elsősorban az információgyűjtés-rendszerezés, valamint a kidolgozás fázisában igen nagy adattömeg kezelése szükséges, emellett a szükséges jegyzékek, kiírások, költségvetések stb. elkészítése hatalmas manuális ráfordítást igényel. Ezen munka keretében, ha a normatív kiválasztás szempontjai adottak, bizonyos szilárdsági méretezési kérdések is megoldhatók [21]. A kapacitásigény általában nagygép, de az asztali típusok tömegtárolási lehetőségeinek fejlődése már a belátható jövőben elképzelhetővé teszi alkalmazásukat.

A szűkebb értelemben vett csőkonstrukciós munka nagyrészt olyan szoros összefüggésben tartalmaz heurisztikus, algoritmikus és bonyolult rajzokban megjelenő, ill. megoldandó problémákat, hogy komplex gépesítésére, legalábbis a rajz-digitalizáló technika jelentős továbbfejlődéséig és olcsóbbodásáig elvi lehetőség sem igen van. A számszerűsíthető részproblémák közt kapacitásigény és bonyolultság szempontjából a csőhálózati rugalmassági számítást lehet a jelenlegi tervezési színvonal mellett mérvadó maximumnak tekinteni. A rutinszerű tervezői számítások java része elemi szilárdsági vagy áramlástan ellenőrzés, általában jobb kézigépen elvégezhető. Igényesebb algoritmusok szélesebb körű alkalmazására, a méretező jelleg jobb előtérbe kerülésére csak akkor lehet számítani, ha a tervező mágneskártyán rögzített programot

kap, amelyeket részletismeretek és idővesztés nélkül, figyelmét a célra összpontosítva használhat. Ha ilyen számítássorozatokat célszerű és lehetséges is lenne nagyobb interaktív programokba szervezni, ezek kapacitásigényei nem valószínű, hogy meghaladják a rugalmassági számításét. Ugyanez mondható más jellegű (pl. hidraulikai) egyszerűbb hálózatszámítási feladatokról.

Előadódnak természetesen olyan feladatok is, amelyek ezt a mérvadó-nak nevezett szintet meghaladják. Ilyen a rugalmassági számítással elveiben azonos, de a súlyterhelést, esetleg szélterhet és további hatásokat számbavevő általános csőstatikai elemzés. A forgalmazott mennyiségek növekedése, a gazdaságosabb anyagfelhasználásra törekedve tervezett kevésbé robusztus szerkezetek, eddig vis majornak tekintett hatások, mint földrengés és egyebek kockázatának csökkentése is nagyságrenddel bonyolultabb rezgéstani és hidrodinamikai kérdéseket vet fel. Ezen vizsgálatok azonban egyelőre — részben a tervezés objektív és szubjektív korlátai, részben a kivitelezés adott körülményei közt elérhető pontosság miatt — nem tekinthetők ilyen színvonalon a ma korszerű tervezés integráns részének. Ha a körülményeket figyelembe véve szükségesek, úgy a tervezőapparátustól viszonylagosan elkülönült, szakosodott csoportok végzik, végellenőrző jelleggel. A tulajdonképpeni konstrukcióban olyan egyszerűsített formulákban vagy irányelvekben jelenhetnek meg, amelyek ezen végellenőrzés esélyeit növelik (tipikusan ilyen az önsúly figyelembevétele a csőtartózás kiosztásánál).

A rugalmassági számítás igénye két formában merül fel a tervezés során. Vannak, és a csőrendszer nagyobb részét jelentik az olyan vezetékek, amelyek viszonylag kisebb hőmérsékletük és méreteik következtében nem jelentenek kompenzáció szempontjából érdemleges kockázatot, nagyobb gond az, hogy egyáltalán, hogy és merre menjenek a mindig fennálló helyszűke közepette, hogy ne ütközzenek és ellenőrizhetők, armatúráik kezelhetők legyenek — alkalmazkodniuk kell az adott lehetőségekhez. Vannak viszont főberendezésnek minősíthető, nagy terhelésű, következőképp gondos tervezést és ennek megfelelő kivitelezést, más berendezési elemek hozzájuk alkalmazását indokoltan elváró vezetékek (erőműveknél ilyenek minősülnek az ún. nagynyomású vezetékek: a főgőz-, a nagynyomású előmelegítő- és táprendszer csövei).

Mindkét kategória nyomvonala az elrendezést tervező rajztáblán születik meg: jellegét tekintve heurisztikus döntés, felvétel. Elméletibb megalapozása (számítással) a jelenlegi technikai feltételeket tekintve, nehezen lenne elképzelhető. Egyszerűbb alakzatok, mint L , Z , líra kompenzációs tulajdonságainak jobb minőségi, esetleg arányszerű jelleggel történő figyelembevétele, főként azonban a korábbi elrendezések méretviszonyai és saját halmozódó tapasztalata motiválják a tervező döntéseit. Gyakorlott elrendezők figyelemreméltó módon „érik” a kompenzáció követelményeit. Az [5] előírás mellőzhetőnek mondja két befogás közti, hőtágulásban különben nem gátolt állandó D átmérőjű csőszakasz részletesebb számítását, ha Y felveendő összhőtágulás,

L kiterített nyomvonalhossz és Q fixponttávolság esetén

$$DY/(L - Q)^2 \leq 2,08 \cdot 10^{-4}. \quad (2.5)$$

Konkrét vezetékrendszereknél próbaképp — az alkalmazási feltételeket ugyan szabadon értelmezve — megvizsgáltuk a teljesülését, és ha jókora szórással is, de úgy tűnik, hogy ez nagyjából a „tervezői szemmérték” középértéke (egyéb-ként [9] alapján egyszerű alakzatok burkolójaként értelmezhető). A szemmértékbe a gyakorlattal finomabb részletek, mint az alkalmazott csőanyag, kis sugarú ívek feszültségkoncentrációja is bekerülhetnek, természetesen egyre bizonytalanabb, szubjektívebb módon.

Az „általános” kategóriában a rugalmassági számítás: végellenőrzés, ami általában pozitív eredményt ad. Az alkalmazkodás kényszere, főberendezések kikerülése amúgy is növeli a beépített hosszat, a gyengébb minőségű csőanyag gazdaságilag nem teszi indokolttá a hatalmas volumenek mellett időbe se férő feszebb tervezést. Az ellenőrzés a tervezéstől elkülönülhet, a nagy adatmennyiségek futószalagszerű feldolgozására általában nagygépeknél vannak megfelelő perifériák.

Más a helyzet a nagynyomású vezetékeknel: a feltételek szükséges szoros kielégítése, különösen a megengedhető reakciónál — amelyek az előbbi kategóriában többnyire fel sem merülnek — általában túlesik a konstruktóri szemmérték „felbontóképességén”. Van lehetősége és gazdaságilag értelme is nyomvonalváltozatok végigszámolásának. A továbbiakhoz kiindulásul szolgáló „vad” nyomvonal kiválasztása az anyagfelhasználás és nyomásvesztesség szempontja mellett a szilárdsági tartalék és a beavatkozási lehetőségek előzetes mérlegelését kívánja: a kikötésekkel történő „megfékezés” viszonylag kevés adat rendszeres változtatásával végzett sorozatszámítás alapján tervezhető. Az eljárás egészében véve heurisztikus. A helyesbítések módját a vezetékágak kimozdulásának jellegéből lehet becsülni; kikötés vagy mozgáskorlátozó felütköztetés ellentétes értelmű reakcióerőt jelent, amely a korlátozandó reakciókat is módosítja. Valószínű, hogy a cső többi részén a fékezetlen állapothoz képest többletigénybevétel adódik, hiszen a járulékos kényszerek az alakváltozásokat „újra elosztják”, a kritikus helyektől távolabbi részen egymást részben kiegyenlítő erőrendszert képeznek, itt valósul meg a teljes cső deformációjának a korábbinál nagyobb része és a védendő helyek reakcióinak kisebb feladat jut — ezért célszerű kellő szilárdsági tartalékot biztosítani a manőverezéshez. Ha mondjuk egyenes szakaszba helyezett líra szárait csuklósan, merev rúddal egymáshoz kötjük, ki lehet választani olyan helyzetet a líra fejéhez közel, amikor a líra úgy veszi fel az egyenes cső hőtágulását, hogy a befogásokra tengelyirányú erő nem hat — természetesen a líra fejrészen lényegesen megnőnek az igénybevételek. A líra szárai a csuklópontok körül emelőszerűen elfordulva, összhangba hozzák a fej és az alapegyenesek hőtágulását. Egyszerűbb alakzatok tanulmányozása gondolatokat adhat bonyolultabb, térbeli problémák megoldásánál.

Mindenesetre a dolgok jelen állása elkerülhetetlenné teszi a gép és a konstruktor folyamatos együttműködését. Ezért annak ellenére, hogy számos jól és hatékonyan működő csőhálózatszámító program létezik, célszerűnek mutatkozott az ismert alapok újvizsgálásával olyan algoritmust kialakítani, ami asztali gépen megvalósítható. Ezt a tanulmány következő részében ismertetjük: a számítás helyigényét sikerült erősen csökkenteni, az időigény alakulása nem egyértelmű, de nem is eleve kedvezőtlen.

Az eljárást a viszonylag kicsi, 8kB-os EMG-71666 típusú asztali számológépen meg is valósítottuk és rendszeresen alkalmazzuk ERŐTERV tervezési munkáiban (jelenleg a Paksi Atomerőmű kivitelezésével és — FEKETE János konstruktori irányítása mellett — a Salmisaari finn exporterőmű főgőzterveivel kapcsolatos számítások folynak). A tapasztalatok szerint fenti típus alkalmazása inkább a módszer lehetőségeit igazoló „félüzemi kísérlet”. A nyomvonal geometriai adatainak klaviatúráról történő bevitele fáradságos és hibalehetőségeket rejt; a kis kapacitás szükségessé tette a program szegmentálását, a háttértárolóként szóba jövő egyetlen kazettás magnószalag-egység a felmerülő igényekhez képest lassú és körülményes elérésű, az üzembiztonság adott volumenek mellett nem teszi tanácsossá az elvben megvalósítható automatikus overlay alkalmazását. Számításba kell venni azonban, hogy ezek a hazai első, mintegy évtizedes asztali gépkonstrukció korlátai. Korszerű asztali gép beállítása csőtervező szervezeti egységnél az egyéb, tervezői együttműködést, ill. felügyeletet igénylő feladatok miatt is mindenképpen megalapozottnak tekinthető. A típus kiválasztásánál elsősorban az általános üzembiztonságot, a megbízható, kellő kapacitású háttértárolókat és legalább alapváltozatok nemklaviatúrás bevitelét lehetővé tevő input-perifériát kell szempontnak tekinteni. Az adatok ellenőrzése és interaktivitás szempontjából kedvező a rajzos, az eredmények „szállítható”, újragépelést megtakarító kivitelére pedig szükséges a hard-copy output periféria. Az operatív tárigény nő az igényesebb vezetékek-nél hálózatszámítással ajánlatos önsúlyvizsgálat miatt is. A tendenciának azonban határt szab, hogy a gyakorlatban előadódó nagy csőrendszereket konstrukciós okból több helyen befogják, így az egyben számolandó rendszer nem ér el extrém nagyságot (ezért lehet az asztali kategóriában maradni). Teljesítőképes input perifériák és tömegtároló eszközök a sorozatszámításokat és a csőtervezésben mind fontosabb nyilvántartó-adatfeldolgozó munkák házi kezelését is lehetővé teszik. A fenti követelmények már a ma szélesebb forgalomban levő korszerű asztali géptípusokkal kielégíthetők.

További fejlődést jelentene a nyomvonalfelvétel jobb elméleti megalapozása. Ez megkísérélhető lenne (2.5.) az L befogások közé építendő csőhosszra való átalakításával, egzaktabb alapon a rugalmassági számítások mátrix- és vektormennyiségeinek különféle normákon alapuló, skaláris becsléseket lehetővé tevő összefüggéseinek vizsgálatával. A folyó munka javításán túl ez elősegítené nagyobb mértékben automatizálható tervezési eljárások kialakítását.

IRODALOM

1. PERRY, J. H. (szerk.): Vegyész mérnökök kézikönyve, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969
2. SVÁB J.: A mérnöki kockázatvállalás etikai vonatkozásai, *Gép* 30 (1978), 6, 201—202
3. HIRSCH E.: Hőerőművek csővezetékei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1959
4. GOSZGORTEHNADZOR SzSzSzR-Számítási normák az atomerőművek, kísérleti és kutató reaktorok, valamint létesítmények reaktor-, gőzgenerátor-, edény- és csővezeték elemeinek szilárdsági méretezésére, AEEBF kiadvány, Budapest 1974
5. ANSI B31.1 (Power Piping) 1967—73
6. ANSI B31.7 (Nuclear Power Piping) 1969—71
7. TGL 22160/01-07, Rohrleitungen aus Stahl, Festigkeitsberechnung, Nov. 1975
8. KELLOGG Co. — Design of Piping Systems, Wiley, N. Y. 1956
9. MARKL, A. R. C.: Piping-Flexibility Analysis, *Trans. ASME* 77 (1955), 2, 127—149
10. KALISZKY S.: Képlékenységtan, Akadémiai Kiadó, Budapest 1975
11. FEKETE J.: Főgőzvezetékek szilárdságtani kérdései, *Energia és Atomtechnika* 17 (1964), 5, 221—226
12. FEKETE J.: Untersuchungen der elastischen Formänderung von Rohrleitungen und Rohrnetzwerken, *Fortschr. Ber. VDI*, R. 7 Nr. 5 Juli 1967
13. FEKETE J.: Főgőzvezetékek hazai tervezésének jelentősége, *ERŐTERV Közlemények* 12 (1975), 69—73
14. VARGA L. és mt.: A számítógépek géptervezői alkalmazásának tervezésméleti kérdései, *Gép* 31 (1979), 11, 416—421
15. BAGRAMJAN, I. H. (szerk.): A háborúk és a hadművészet története, Zrínyi Könyvkiadó, Budapest 1975
16. MÜNNICH A.: A mikroszámítógépes forradalom, *Számítástechnika* 9 (1978), 11, p. 14, 12, p. 7
17. BARTHOLD, L. O.: Software Products for Electric Power Systems, Előadás a Magyar Elektrotechnikai Egyesületben, 1977. nov. 30.
18. — ÁL —: Hogyan vásároljunk zsebszámológépet, *Számítástechnika* 9 (1978), 7—8. p. 12
19. GERLE Gy.: Halotti beszéd egy hűséges munkatársunk felett, *Műszaki Élet* 34 (1979), 17 (aug. 24.)
20. WEINBERG, G. M.: A számítógép-programozás pszichológiája, Közgazdasági-Jogi Könyvkiadó, Budapest 1979
21. VEGYTERV — Csőtervezés számítógépes módszerei, Programdokumentációk (07655 üi. sz.) 1978—79, Budapest

Versability in Designing Pipeline Systems, Part 1 — Purpose and Means of Designing. — The 1st part of the present paper reviews — mainly from the aspect of the pipelines of thermal power-plants — the significant methodological problems of designing pipelines, examines the demands arising from the modernization of constructions as well as the potentialities of the efficient application of the computer technique.

Planung von Rohrleitungen, t. I. Teil: Das Ziel und die Mittel der Planung. — Der erste Teil der vorliegenden Abhandlung gibt einen Überblick — hauptsächlich vom Gesichtspunkt der Rohrleitungen von Wärmekraftwerken — über die Hauptprobleme der Methodologie der Planung von Rohrleitungen, untersucht die durch die Modernisierung entstandenen Anforderungen, sowie die Möglichkeiten des wirksamen Einsatzes der Rechentechnik.

A LAMÉ-EGYENLETEK MEGOLDÁSA TELJES n -ED FOKÚ POLINOMMAL

LÁMER GÉZA*

[Beérkezett: 1980. november 11-én]

Jelen dolgozatban megmutattuk, hogy a Lamé-egyenletek megoldhatók teljes n -ed fokú polinom szerinti sorbafejtéssel. Bebizonyítottuk, hogy tetszőleges n esetén $3 \times (2n + 1)$ szabad paraméterrel jellemezhető az n -ed fokú polinomból nyert megoldás.

Megmutattuk a szabad paraméterek kiválasztásának egy lehetséges esetét, bármely együttható szabad paraméterekkel való kifejezésének és az együtthatókra vonatkozó lineáris egyenletrendszer felépítésének módját. Bebizonyítottuk a megoldás egyértelműségét.

A Lamé-egyenletekre vonatkozó peremérték-feladat megoldásának két módszerét mutattuk be. A kettő összehasonlítása alapján a tanulmányban nyert megoldást inkább a végeelem módszerben célszerű alkalmazni.

Jelölések

- x, y, z — Descartes koordináták
- u, v, w — elmozduláskomponensek a Descartes-féle koordináta rendszerben
- μ — harántkontrakciós tényező
- u_n, v_n, w_n — n -ed fokú teljes polinommal jellemzett elmozduláskomponensek
- a, b, c — a polinomok együtthatói
- p, q, r — együttható indexek és hatványkitevők
- n — polinom fokszáma
- f — szabad paraméterszám
- i, j, k — mátrix soroszlop index
- D — determináns

A további jelöléseket a szöveg közben értelmezzük.

I. Bevezetés

A rugalmasságtan egyenletei kis alakváltozás esetében a Lamé-egyenletekre vezethetők vissza (elmozdulás módszer) [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (1 - 2\mu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (1 - 2\mu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + (1 - 2\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

* Lámer Géza, 1088 Budapest, Vas u. 15/B.

Az elmozduláskomponensek legszélesebb függvényosztálya, amely még kielégíti a Lamé-egyenleteket, biharmonikus [1]. Az (1) egyenletekből látható, hogy a biharmonitás szükséges, de nem elégséges feltétel (1) kielégítésére. Azaz a három elmozduláskomponensre nyert három biharmonikus függvény nem független egymástól, hanem az (1) egyenleteken keresztül kapcsolódnak egymáshoz. Mivel a biharmonikus függvényeknek ki kell elégíteniük az (1) egyenleteket, így célszerűnek látszik a megoldást mindjárt (1) felhasználásával megkeresni.

2. Az (1) egyenletek megoldása

Keressük az (1) egyenletek megoldását u , v , és w -re nézve teljes n -ed fokú polinom alakjában:

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{p+q+r=n} a_{p,q,r} x^p y^q z^r, \\ v_n &= \sum_{p+q+r=n} b_{p,q,r} x^p y^q z^r, \\ w_n &= \sum_{p+q+r=n} c_{p,q,r} x^p y^q z^r. \end{aligned} \quad (2)$$

Mivel egy teljes n -ed fokú polinom $(n+1)(n+2)/2$ tagot számlál, ezért az elmozduláskomponensek összesen $3 \times (n+1)(n+2)/2$ tagból állanak. Az (1) Lamé-egyenletek az u_n , v_n és w_n polinomok fokszámát 2-vel csökkentik, így azok $3 \times [(n-2)+1][(n-2)+2]/2 = 3 \times (n-1)n/2$ lineáris összefüggést létesítenek az $a_{p,q,r}$, $b_{p,q,r}$ és $c_{p,q,r}$ együtthatók között. Ekkor legalább $3 \times (n+1)(n+2)/2 - 3 \times (n-1)n/2 = 3 \times (2n+1)$ lineárisan független polinomtag (együttható) létezik. Ha a fent említett $3 \times (n-1)n/2$ összefüggés lineárisan nem független egymástól, úgy $3 \times (2n+1)$ -nél több lineárisan független együtthatóval jellemezhető a Lamé-egyenletek (2) alakú megoldása.

3. A $3 \times (2n+1)$ szabad paraméter (független együttható) kiválasztása

A szabad paraméterek megválasztásának elvi szempontjai nincsenek, de a vizsgált differenciálegyenlet ad egy lehetséges kiválasztási módot [2]:

Az u_n teljes n -ed fokú polinom $a_{p,q,r}$ együtthatója kifejezhető a következő alakban:

$$a_{p,q,r} = \frac{1}{p! q! r!} \frac{\partial^n u_n}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}. \quad (3a)$$

Analóg módon nyerünk képleteket a $b_{p,q,r}$ és $c_{p,q,r}$ együtthatókra. A továbbiakban minden $b_{p,q,r}$ és $c_{p,q,r}$ együtthatóra vonatkozó képlet kiírásától eltekintünk. A képlet sorszama mellett „a” index kiírásával jelezzük, ha analóg képlet írható fel a $b_{p,q,r}$ és $c_{p,q,r}$ együtthatókra.

A (3a) kifejezés felírható

$$a_{p,q,r} = \frac{1}{p!q!r!} \cdot \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{p-2} \partial y^q \partial z^r} \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \quad (4a)$$

alakban is. Az (1a) egyenlet felhasználásával az $a_{p,q,r}$ együttható kifejezhető $a_{p-2,q+2,r}$ és $a_{p-2,q,r+2}$ együtthatókkal:

$$a_{p,q,r} = -\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \left(\frac{(q+2)(q+1)}{p(p-1)} a_{p-2,q+2,r} + \frac{(r+2)(r+1)}{p(p-1)} a_{p-2,q,r+2} \right) - \frac{1}{2(1-\mu)} \left(\frac{q+1}{p} b_{p-1,q+1,r} + \frac{r+1}{p} c_{p-1,q,r+1} \right). \quad (5a)$$

Az (1a) egyenlet többszöri alkalmazásával az $a_{p,q,r}$ együttható kifejezhető az

$$a_{0,s,t} \quad s + t = n, \text{ ha } p \text{ páros}, \quad (6a)$$

illetve az

$$a_{1,s,t} \quad 1 + s + t = n, \text{ ha } p \text{ páratlan} \quad (7a)$$

együtthatók lineáris kombinációja, valamint az (1a) egyenlet alkalmazása során „adódó” $b_{p,q,r}$ és $c_{p,q,r}$ együtthatók lineáris kombinációja összegével.

Szabad paramétereknek a (6) és (7) típusú együtthatókat választjuk. A (6) típusú együtthatók száma $3 \times (n + 1)$, míg a (7) típusúé $3 \times n$. Így összesen $3 \times (2n + 1)$ szabad paramétert választunk ki, pontosan annyit, amennyit az egyenletrendszer típusa megenged. Az (5) típusú összefüggésből látható, hogy a (2) alakú megoldás együtthatói nem csak (6) és (7) típusú együtthatókkal fejezhetők ki.

A fent bemutatott algoritmussal az

$$a_{p,q,r}, b_{p,q,r}, c_{p,q,r} \quad (p + q + r = n) \quad (8)$$

együtthatókra egy lineáris egyenletrendszert nyerünk:

$$KX = 0 \quad (9)$$

Megjegyzés: (9) egyenlet felírásakor tetszőleges a , b illetve c együtthatóra csak egyszer alkalmazzuk az (5) összefüggést.

4. A (9) egyenlet vizsgálata

Az X vektorban a (2) alakú megoldás együtthatóit foglaltuk egybe. Az együtthatók sorbarendezését az $a_{p,q,r}$ együtthatókra a következő indexsor alapján végeztük el: $n, 0, 0; n - 1, 1, 0; n - 1, 0, 1; n - 2, 2, 0; n - 2, 1, 1; n - 2, 0, 2$; stb. A $b_{p,q,r}$ és $c_{p,q,r}$ együtthatókra az indexeket ciklikusan felcseréltük egy-egy index-hármason belül. Ezzel elértük, hogy az X vektorban a (6) és (7) típusú együtthatók a megfelelő együtthatók sorában az

utolsó $(2n + 1)$ helyet foglalják el. Az X vektort az a , b és c együtthatóknak megfelelően három vektorra particionáljuk — $X^T = [X_A, X_B, X_C]^T$, majd a (6, 7) típusú együtthatók előtt ismét egy-egy particionálást hajtunk végre. Ezzel a particionálással összhangban tüntettük föl a K együtthatómátrixot is:

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{11}^0 & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{12}^0 & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{13}^0 \\ \hline \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{21}^0 & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{22}^0 & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{23}^0 \\ \hline \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{31}^0 & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{32}^0 & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{33}^0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{C}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (10)$$

Az „ o ” indexű vektorban helyezkednek el a (6) és (7) típusú szabad paraméterek, dimenziójuk $1 \times (2n + 1)$, az index nélküli vektorokban nem független együtthatók, dimenziójuk $1 \times [(n - 1)n/2]$.

A K_{ij} blokkok $[(n - 1)n/2] \times [(n - 1)n/2]$ dimenziójú négyzetes mátrixok, az $L_{ij} = K_{ij}^0$ blokkok $(2n + 1) \times [(n - 1)n/2]$ dimenziójú téglalap mátrixok. A K mátrix azért nem négyzetes, mivel a „ o ” indexű vektorokban összefoglalt együtthatókra az (5) egyenletet nem alkalmazzuk.

Az indexek ciklikus felcserélése miatt:

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{K}_{22} = \mathbf{K}_{33} = \mathbf{K}_1,$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{23} = \mathbf{K}_{31} = \mathbf{K}_2,$$

$$\mathbf{K}_{13} = \mathbf{K}_{21} = \mathbf{K}_{32} = \mathbf{K}_3.$$

valamint a null indexű K_{ij}^0 mátrixot L_{ij} -vel jelölve

$$\mathbf{L}_{11} = \mathbf{L}_{22} = \mathbf{L}_{33} = \mathbf{L}_1,$$

$$\mathbf{L}_{12} = \mathbf{L}_{23} = \mathbf{L}_{31} = \mathbf{L}_2,$$

$$\mathbf{L}_{13} = \mathbf{L}_{21} = \mathbf{L}_{32} = \mathbf{L}_3.$$

Így a (10) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\mathbf{K}'X = -\mathbf{L}X_0,$$

azaz

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 \\ \hline \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \\ \hline \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 & \mathbf{K}_1 \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \hline \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} \end{bmatrix} = - \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 \\ \hline \mathbf{L}_3 & \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 & \mathbf{L}_1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 \\ \hline \mathbf{B}_0 \\ \hline \mathbf{C}_0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

A (11) egyenlet megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy az ismeretlenek együtthatómátrixa — \mathbf{K}' — nem szinguláris. Ezt oly módon bizonyítjuk, hogy megmutatjuk — a \mathbf{K}' mátrixnak létezik inverze.

Az \mathbf{L} mátrixról elégséges bizonyítani, hogy nem zérusmátrix.

A $\mathbf{K}_i, \mathbf{L}_i$ részmatrixok tulajdonságait az (5) egyenletekből olvashatjuk ki:

1° A \mathbf{K}_1 és \mathbf{L}_1 részmatrixok blokkos struktúrával rendelkeznek; a blokkok többsége zérusmátrix. A szerkezetüket a függelékben mutatjuk be. Megjegyezzük, hogy a \mathbf{K}_1 részmatrix determinánsa azonosan 1.

2° A \mathbf{K}_2 és \mathbf{K}_3 részmatrixok minden egyes sorában és oszlopában maximálisan egy-egy elem foglalhat helyet. Ha az i -edik oszlop üres, akkor az i -edik sor tartalmaz nullától különböző elemet. Kivételt képez az első sor és az első oszlop, amelyeknek minden eleme nulla. A nulla elemű sorok és oszlopok száma (az i, j, k indexben a $j = 0$ esete) $(n - 1)$. Ebből következik, hogy az \mathbf{L}_2 és az \mathbf{L}_3 részmatrixoknak $(n - 1)$ sorában és oszlopában $(n - 1)$ nullától különböző elem áll.

3° Végül, ha a \mathbf{K}_2 mátrix (i, j) pozíciójában nullától különböző elem áll $[k_{ij}^{(2)} = -(q + 1)/2(1 - \mu)p]$, akkor a \mathbf{K}_3 mátrix (j, i) pozíciójában is nullától különböző elem áll $[k_{ji}^{(3)} = -p/2(1 - \mu)(q + 1)]$. Azaz jelölje $\widehat{\mathbf{K}}_2$ azt a mátrixot, amelyet a következőképp definiálunk

$$\widehat{\mathbf{K}}_{ij}^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } k_{ij}^{(2)} = 0 \\ 1, & \text{ha } k_{ij}^{(2)} \neq 0. \end{cases}$$

Analóg módon értelmezve a $\widehat{\mathbf{K}}_3$ mátrixot, az előző tulajdonság mátrix alakban:

$$\widehat{\mathbf{K}}_2 = \widehat{\mathbf{K}}_3^T \tag{12}$$

Az 1° és 2° következménye, hogy \mathbf{L} nem zérusmátrix.

Az (5) egyenlet és 3° tulajdonság többszöri alkalmazásával bizonyítható, hogy a \mathbf{K}' mátrix determinánsának meghatározása során \mathbf{K}_1 mátrix főátlón kívüli értékei nem játszanak szerepet. Így elégséges, ha a

$$\mathbf{K}'' = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{E} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 \\ \hline \mathbf{K}_3 & \mathbf{E} & \mathbf{K}_2 \\ \hline \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_3 & \mathbf{E} \end{array} \right]$$

mátrix inverzének létezését bizonyítjuk. Felhasználva a \mathbf{K}_2 és \mathbf{K}_3 mátrixok tulajdonságait, és az (5) egyenletet belátható, hogy a \mathbf{K}'' mátrix (i, j, k) sorában és

oszlopában a következő séma szerint helyezkednek el a zérustól különböző elemek:

$$\begin{array}{ccc}
 (i) & (j) & (k) \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \diagdown & & & & & \\
 & 1 & c_1 & c_3 & & \\
 & & & & & \\
 & c_2 & 1 & c_5 & & \\
 & & & & & \\
 & c_4 & c_6 & 1 & & \\
 & & & & & \diagdown
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} (i) \\ (j) \\ (k) \end{array}
 \end{array}$$

Itt a $c_1 \dots c_6$ együtthatók egyszerre nem lehetnek zérus értékűek. A (c_1, c_2) , (c_3, c_4) és (c_5, c_6) párban vagy mindkettő nulla vagy mindkettő nullától különbözik.

A K^n mátrix invertálható, ha a nem zérus c_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) elemeiből alkotott

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{q+1}{p} & \frac{1}{2(1-\mu)} & -\frac{r+1}{p} & \frac{1}{2(1-\mu)} \\ -\frac{p}{q+1} & \frac{1}{2(1-\mu)} & 1 & -\frac{r+1}{q} & \frac{1}{2(1-\mu)} \\ -\frac{p}{r+1} & \frac{1}{2(1-\mu)} & -\frac{q}{r+1} & \frac{1}{2(1-\mu)} & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

mátrix nem szinguláris.

A C mátrix determinánása

$$D_c = 1 - \frac{1}{8(1-\mu)^3} \left(\frac{q+1}{q} + \frac{q}{q+1} \right) - \frac{3}{4(1-\mu)^2}, \quad (14)$$

átalakítva

$$D_c' = -\frac{2\kappa q^2 + 2\kappa q + 1}{8(1-\mu)^3 q(q+1)}, \quad (15)$$

ahol $\kappa = \mu(9 - 9\mu + \mu^2) (\geq 0)$, valamint $q \geq 1$, egész. Ezért $D_c < 0$. ($q = 0$ esetben a fenti séma szerinti jelölésben csak a (c_3, c_4) pár különbözik nullától. Megmutatható, hogy a C mátrix akkor is invertálható.) Ezzel bebizonyítottuk, hogy

létezik a \mathbf{C} mátrixnak inverze. A fenti levezetésből következik, hogy akkor a \mathbf{K}' és a \mathbf{K} mátrixoknak is léteznek inverzei. Ez azt jelenti, hogy a (11) mátrix-egyenlet egyértelműen megoldható.

Így bizonyítást nyert, hogy a Lamé-egyenletek (2) alakú függvényekkel való megoldása létezik és tetszőleges n esetén mindig $3 \times (2n + 1)$ szabad paraméterrel jellemezhető.

5. Megoldások az $n = 1, 2, 3$ esetre

A megoldásokat egy téglatest alakú résztartományra adjuk meg, és ennek a résztartománynak a felületein ébredő feszültségek eloszlásával jellemezzük az egyes állapotokat.

Az egyes n polinom fokszámhoz tartozó szabad paraméterek számát f_n -nel jelöltük.

$$n = 0, f_0 = 3 \qquad u_0 = a_{0,0,0} \qquad (16a)$$

Ez a téglatest súlypontjának merevtestszerű eltolódását írja le.

$$n = 1, f_1 = 9 \qquad u_1 = a_{1,0,0}x + a_{0,1,0}y + a_{0,0,1}z. \qquad (17a)$$

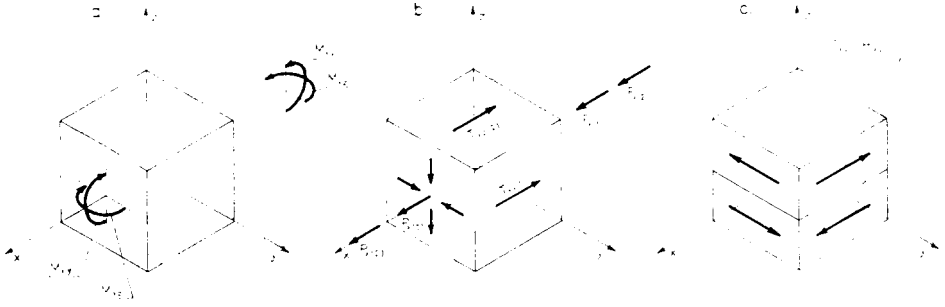
Ez az eltolódás komponens a téglatest merevtestszerű elfordulását és a konstans — az egész téglatesten belül — feszültség-állapotokat írja le. Ezeket a konstans feszültség-állapotokat háromtengelyű húzás-nyomás és a tiszta nyírás állapotokként értelmezhetjük.

$$n = 2, f_2 = 15 \qquad u_2 = a_{2,0,0}x^2 + a_{1,1,0}xy + a_{1,0,1}xz + a_{0,2,0}y^2 + a_{0,1,1}yz + a_{0,0,2}z^2 \qquad (18a)$$

$$a_{2,0,0} = -\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}(a_{0,2,0} + a_{0,0,2}) - \frac{1}{2(1-\mu)}\left(\frac{1}{2}b_{1,1,0} + \frac{1}{2}c_{1,0,1}\right). \qquad (19a)$$

Ezek az eltolódáskomponensek olyan feszültség-állapotokra bonthatók fel, amelyekben a feszültségek a koordináták lineáris függvényei, ezért tiszta hajlítás, csavarás és $\sigma - \tau$ állapotokként értelmezhetjük. Ezeket az állapotokat az 1. ábrán tüntettük fel. A téglatest felületén ható feszültségeknek csak az eredőit jelöltük.

$$n = 3, f_3 = 21 \qquad u_3 = a_{3,0,0}x^3 + a_{2,1,0}x^2y + a_{2,0,1}x^2z + a_{1,2,0}xy^2 + a_{1,1,1}xyz + a_{1,0,2}xz^2 + a_{0,3,0}y^3 + a_{0,2,1}y^2z + a_{0,1,2}yz^2 + a_{0,0,3}z^3 \qquad (20a)$$



1. ábra. $n = 2$ esetében a 15 paraméteres feszültségállapot egy lehetséges felbontása egy téglatest alakú résztartomány felett. a. A lapokon lineárisan változó normálfeszültség (tisztá hajlítás); b. A lapokon lineárisan változó nyírőfeszültség a két lap között lineárisan változó normálfeszültséggel ($\sigma - \tau$ állapotok); c. Mind a négy lapon lineárisan változó nyírőfeszültségek (csavarás)

$$a_{3,0,0} = -\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \left(\frac{1}{3} a_{1,2,0} + \frac{1}{3} a_{1,0,2} \right) - \frac{1}{2(1-\mu)} \left(\frac{1}{3} b_{2,1,0} + \frac{1}{3} c_{2,0,1} \right) \quad (21a)$$

$$a_{2,1,0} = +\frac{4(1-\mu)^2}{4(1-\mu)^2-1} \left\{ -\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} (3a_{0,3,0} + a_{0,1,2}) - \frac{1}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{2} c_{1,1,1} - \right. \\ \left. -\frac{1}{2(1-\mu)} \left[-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} (3b_{3,0,0} + b_{1,0,2}) - \frac{1}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{2} c_{1,1,1} \right] \right\} \quad (22a)$$

$$a_{2,0,1} = +\frac{4(1-\mu)^2}{4(1-\mu)^2-1} \left\{ -\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} (a_{0,2,1} + 3a_{0,0,3}) - \frac{1}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{2} b_{1,1,1} - \right. \\ \left. -\frac{1}{2(1-\mu)} \left[-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} (c_{1,2,0} + 3c_{3,0,0}) - \frac{1}{2(1-\mu)} \cdot \frac{1}{2} b_{1,1,1} \right] \right\}. \quad (23a)$$

Az $n = 3$ -hoz tartozó megoldások is felbonthatók az 1. ábrának megfelelően „elemi” feszültségekre, illetve alakváltozásokra. Ettől eltekintünk, mivel a tanulmányunknak nem célja ilyen felbontások vizsgálata.

$n = 4$ esetében a képletek tovább bonyolódnak. Alkalmazott megoldás esetében célszerű numerikus megoldáshoz folyamodni. A szabad paraméterek mindig az elmozdulás komponensek egy-egy polinom tagját, illetve csoportját jellemzik, de mindig végrehajtható az áttérés a feszültségekre is.

6. A Lamé-egyenletekre vonatkozó peremérték-feladatok

A peremérték-feladatok kitűzéséhez az (1) egyenletrendszeren kívül szükséges a

$$\sigma_{ij} \mathbf{n}_i = T_j^*, \quad \mathbf{x}_i \in S_T \quad (24)$$

dinamikai és az

$$u_i = u_i^*, \quad x_i \in S_u \quad (25)$$

kinematikai peremfeltételek ismerete.

6.1 Sorfejtés. A peremfeladat megoldását az

$$\{u_k\}_{k-1}^\infty = \{u_k, v_k, w_k\}_{k-1}^\infty \quad (26)$$

függvényrendszer szerinti sorbafejtett alakban keressük:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k. \quad (27)$$

Itt a (26) képletben az egyes u_k, v_k, w_k függvényeket a (6) és a (7) típusú szabad paraméterekkel jellemzett polinomok növekvő fokszámaik szerint rendeztük sorba; ezek a függvények magukat a szabad paramétereket nem tartalmazzák.

Mivel a (26) alapmegoldásokat a polinomok teljes és független függvényrendszeréből hoztuk létre, így a (26) függvényrendszer teljes a megoldások terében.

A peremfeltételek kielégítése céljából vezessük be az η és a ζ általánosított függvényeket [5]:

Az η függvényt értelmezzük, mint

$$0 \leq \eta \leq 1 \text{ és } \eta = 1, \text{ ha } x \in S/S_u, \quad (28)$$

$$\eta = 0, \text{ ha } x \in S_u,$$

valamint a ζ függvényt, mint

$$0 \leq \zeta \leq 1 \text{ és } \zeta = 1, \text{ ha } x \in S/S_T, \quad (29)$$

$$\zeta = 0, \text{ ha } x \in S_T,$$

A megoldás szempontjából feltétel, hogy a $u * \eta$ és $u * \zeta$ komvolúciók értelmesek legyenek. Ez esetben

$$u = \sum_k c_k^\eta u_k * \eta + \sum_k c_k^\zeta u_k * \zeta \quad (30)$$

alakban keressük a megoldást a

$$\sum c_k^\eta \alpha_j \frac{\partial u_k}{\partial n_j} * \eta = T^* \quad (31)$$

dinamikai, és

$$\sum c_k^\zeta u_k * \zeta = u^* \quad (32)$$

kinematikai peremfeltételekkel.

A c_k^η és c_k^ζ együtthatók meghatározása a (31, 32) egyenletekből az S_u és S_T felületeken értelmezett skalárszorzatok segítségével történhetik.

A vizsgált test tetszőleges geometriai alakja esetében ez a módszer két szempontból is nehézkessé válik. Az egyik ok, hogy reális problémánál $n \rightarrow \infty$ feltételt kellene alkalmazni. (Ez számítógépes gyakorlatban $n \sim 10^3 - 10^4$ nagyságrenddel azonos.) A másik nehezen elkerülhető probléma, hogy a (26) megoldás nem ortogonális az S_u és S_T felületek felett. Így a megoldásfüggvények Grammátrixa teljes mátrix lesz.

6.2 Végeselem módszer. Ezt a két problémát egyidejűleg tudja megoldani a végeselem módszer: A résztartományokon felvett bázisfüggvények csoportjai ortogonálisak egymásra, így a Grammátrix diagonális hipermátrix. A felosztás finomításával, illetve a bázisfüggvények számának a növelésével (egy résztartomány felett) a szükséges pontosság elérhető.

Amennyiben a résztartományra osztást úgy végezzük el, hogy az egyes résztartományok téglatest alakúak, úgy a tanulmányban nyert megoldásokat választhatjuk bázisfüggvényeknek $k = 2, 3$, esetleg $k = 5, 6$ -ig bezárólag.

A bázisfüggvények ismeretlen együtthatóit variációs elv segítségével határozzuk meg. Kiindulásként tekinthetjük a Hu-Washizu-féle funkcionált. Mivel a funkcionálban a térfogati integrálokat a tanulmányban nyert megoldások kielégítik, így elégséges a felületi integrálokat meghagyni. Természetesen nem csak a külső, hanem a belső, az egyes résztartományok felületeit is magába foglaló felületi integrálokat. Ezután a funkcionál első variációja segítségével az elemeken felvett bázisfüggvények együtthatói már meghatározhatók [6].

Összefoglalás

Jelen tanulmányban megmutattuk, hogy a Lamé egyenletek megoldhatók n -ed fokú polinomokkal. Bebizonyítottuk, hogy tetszőleges n fokszám esetében $3 \times (2n + 1)$ szabad paraméterrel jellemezhető az n -ed fokú polinomtól nyert megoldás.

Megmutattuk a szabad paraméterek kiválasztásának egy lehetséges esetét, valamely tetszőleges együttható szabad paraméterekkel való kifejezésének és az együtthatókra vonatkozó lineáris egyenletrendszer felépítésének módját. Bebizonyítottuk a megoldás egyértelműségét.

Néhány n -re feltüntettük az együtthatók közötti összefüggést is.

A tanulmányban nyert megoldással, illetve annak ortogonalizált változatával elvileg tetszőleges peremértékfeladat megoldható.

Megmutattuk, hogy sorfejtés alkalmazása tetszőleges geometria és peremértékek mellett igen nehézkes. Ellenben a végeselem-módszer rendelkezik azokkal a tulajdonságokkal, amelyek a fenti nehézségeket kiküszöböli. Rámutattunk arra, hogy a tanulmányban nyert megoldások téglatest alakú résztartományok esetén bázisfüggvényekként alkalmazhatók. Ekkor a bázisfüggvények ismeretlen együtthatóit variációs elv segítségével határozzuk meg.

IRODALOM

1. Лейбензон, Л. С.: Курс теории упругости ОГИЗ-ГОСТЕХИЗДАТ, Москва, 1947г.
2. Тихонов, А. Н.— Самарский, А. Н.: Уравнения математической физики. Наука, Москва, 1972 г.
3. RÓZSA PÁL: Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974
4. MIKOLÁS MIKLÓS: Valós függvények és ortogonális sorok, Tankönyvkiadó, Budapest 1978
5. VLAGYIMIROV, V. Sz.: Bevezetés a parciális differenciálegyenletek elméletébe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1979
6. SCHARLE Péter: Építőmérnöki kontinuumfeladatok numerikus vizsgálatának néhány kérdése. *ÉTI Közlemények* 84, Budapest 1976

FÜGGELÉK

1	2	3	4	5	6	7
1	0	K_{11} 0 K_{12}	0	0	0	0
1	1	0	K_{21} 0 K_{23} 0 0 K_{32} 0 K_{34}	0	0	0
	1	1	0	K_{41} 0 K_{43} 0 0 0 K_{52} 0 K_{54} 0 0 0 K_{63} 0 K_{65}	0	0
		1	1	0	K_{71} 0 K_{73} 0 0 K_{82} 0 K_{84} 0 0 K_{93} 0 K_{95} 0 0 K_{104} 0 K_{106}	0
			1	1	0	K_{111} 0 K_{113} 0 0 K_{122} 0 K_{124} 0 0 K_{133} 0 K_{135} 0 0 K_{144} 0 K_{146} 0 0 K_{155} 0 K_{157}

A K_1 és L_1 mátrixok struktúrája ($n = 7$ esetén)

Tetszőleges n esetében a K_1 mátrix ($n - 2$) blokkoszlopot tartalmaz, a diagonális blokkjai rendre az 1, 2, ..., ($n - 5$) rendű egységmátrixok. Az L_1 mátrix két blokkoszlopból áll. Szerkezete szerves folytatása a K_1 mátrix szerkezetének. Mindkét mátrix ($n - 2$) blokkosort tartalmaz.

Solution to Lamé's Equations with the Aid of Series Development According to a General Polynomial of n -Degree. — It is pointed out that Lamé's equations could be solved with the aid of series development according to a general polynomial of n degree. It has been proved that for any value of n , the solution yielded by the n -degree polynomial might be characterized by the free parameter $3 \times (2n + 1)$. A possible case of the selection of the free parameters and the way of expression of any coefficient by free parameters, as well as the way of the establishment of a system of linear equations have been shown. The uniqueness of the solution has been proved. Two methods for the solution to the boundary condition problem related to Lamé's equations have been presented. As a result of a comparison between the two methods, it has been found preferable to apply the solution obtained by the author in the finite element method.

Lösung der Laméschen Gleichungen mit Hilfe eines absoluten Polynoms n -ten Grades.
— Es wird nachgewiesen daß die Laméschen Gleichungen durch eine Reihenentwicklung nach einem generellen Polynom n -ten Grades gelöst werden können, und für irgendwelchen Wert von n die von einem Polynom n -ten Grades erhaltene Lösung durch den freien Parameter $3 \times (2n + 1)$ charakterisiert werden kann. Ein möglicher Fall für die Auswahl und die Methode der Ausdrückung irgendwelcher Koeffizienten durch freie Parameter, sowie der Aufbau des auf die Koeffizienten bezüglichen linearen Gleichungssystems werden demonstriert. Die Eindeutigkeit der Lösung wird bewiesen. Zwei Lösungsmethoden der Randbedingungsaufgaben sind in Zusammenhang mit den Laméschen Gleichungen vorgeführt. Aufgrund der Gegenüberstellung derselben kann es festgesetzt werden daß die Benutzung der in der Abhandlung vorgeschlagenen Lösung in der F. E. Methode zweckmässiger ist.

RÚDSZERKEZETEK KÉPLÉKENYSÉGTANI PROBLÉMÁINAK MÁTRIXALGEBRAI ESZKÖZÖKKEL TÖRTÉNŐ TÁRGYALÁSA

NÉDLI PÉTER*

[Beérkezett: 1981. március 3-án]

Lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, csomópontjain terhelt rúdszerkezetek esetében az elsőrendű elmélet és a linearizált képlékenységi feltétel alkalmazásával a képlékenységtani problémák lineáris programozási, illetve lineáris komplementer feladatra vezetnek. Jelen tanulmány bemutatja a problémák megfogalmazását, megoldását és a módszer alkalmazását számítógépes mintapéldával illusztrálva.

I. Bevezetés

Rúdszerkezetek képlékenységtani problémái, hasonlóan a rugalmasságtani feladatokhoz, megfogalmazhatók és megoldhatók mátrixalgebrai eszközökkel.

Ez a megközelítés lehetővé teszi az idevonatkozó matematikai apparátus hatékony alkalmazását mind elméleti, mind gyakorlati vonatkozásban és a feladatok számítógéppel történő megoldását. A képlékenységtani feladatok memória és gépidő igénye azonban általában jóval nagyobb, mint a rugalmas megoldásé.

A jelen dolgozatban lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú, csomópontjain terhelt rúdszerkezetek

- képlékeny határállapot vizsgálatát
- a képlékeny határállapoton alapuló optimális tervezését
- beállási határállapot-vizsgálatát és
- rugalmas képlékeny állapotváltozás vizsgálatát

mutatjuk be az elsőrendű elmélet keretein belül, linearizált képlékenységi feltétel és a képlékenységi feltételhez a plasztikus potenciálemlélettel kapcsolódó folyási törvény esetére.

Ezek a problémák matematikailag lineáris programozási, illetve lineáris komplementer feladatra vezetnek.

* Dr. Nédli Péter, 1118 Budapest XI., Homoród utca 20.

2. A képlékenységi feltétel és a folyási törvény rúdszerkezetek esetében

A képlékenységtani összefüggések és fogalmak lényegüket tekintve természetesen rúdszerkezetek esetében sem különböznek a képlékenységtan általánosan ismert összefüggéseitől, de formailag, a mátrixalgebrai tárgyalásmód sajátosságainak megfelelőek.

Ennek megfelelően a szerkezet *képlékenységi feltétele*:

$$\varphi = N^* s - k \leq 0$$

alakú, ahol

N^* : a folyási mátrix

φ : a plasztikus potenciál

s : a belső erők vektora

k : a szerkezet teherbírás-jellemzőit tartalmazó vektor.

Ez az összefüggés úgy jön létre, hogy a képlékenységi feltételt

- csak a szerkezet egyes pontjaiban (a rudak kezdő és végpontjaiban) vizsgáljuk,
- egy pontban a sima folyási felületet konvex poliéderrel helyettesítjük.

A szerkezet *folyási törvénye* hasonlóan mátrix összefüggésekkel írható le.

Jelölje J azon indexek halmazát melyekre

$$\varphi_j = 0 \quad (J : \{j \mid \varphi_j = 0\}) .$$

Ekkor a folyási törvény

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \begin{matrix} N & \dot{\lambda} \\ [j] & [j] \end{matrix}, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \\ \dot{\varphi} &\leq 0, \quad \dot{\lambda} * \dot{\varphi} = 0 \\ &\begin{matrix} [j] & [j] \end{matrix} \end{aligned}$$

alakú, ahol

N : a folyási mátrix (a képlékenységi mátrix transzponáltja)

\dot{p} : a képlékeny alakváltozás-sebességek vektora

$\dot{\lambda}$: a képlékeny szorzók vektora

$\dot{\varphi}$: a képlékeny potenciálssebességek vektora

J : azon indexek halmaza, ahol folyás van, mert a folyási törvény csak ezen helyekre vonatkozik.

3. Képlékeny határállapot vizsgálat

Képlékeny határállapoton azt az állapotot értjük, amelyben még teljesülnek az egyensúlyi egyenletek és a képlékenységi feltételek, de egyben létezik egy ún. folyási mechanizmus is. Egyparaméteres terhelés esetében ez a következő összefüggésekkel írható le:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* \mathbf{s} + m \mathbf{q}_0 &= \mathbf{0} && \text{— egyensúlyi egyenlet} \\ \mathbf{N}^* \mathbf{s} &\leq \mathbf{k} && \text{— képlékenységi feltétel} \\ \mathbf{G} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N} \dot{\lambda} &= \mathbf{0}, \dot{\lambda} \geq \mathbf{0} && \text{— kompatibilitási egyenlet} \\ \mathbf{q}_0^* \dot{\mathbf{u}} &= 1 && \text{— a lehetséges affin mechanizmusok közül ki} \\ &&& \text{kell jelölni egyet.} \end{aligned}$$

A még nem szerepelt új jelölések a következők:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^*: & \text{ az egyensúlyi mátrix} \\ m: & \text{ a teherparaméter} \\ \mathbf{q}_0: & \text{ az alapterher} \\ \mathbf{G}: & \text{ a geometriai mátrix (az egyensúlyi mátrix transzponáltja)} \\ \dot{\mathbf{u}}: & \text{ az elmozdulássebességek} \end{aligned}$$

A fenti összefüggésrendszer ekvivalens a következő duális lineáris programozási feladatpárral

$$\begin{aligned} m \geq 0, \left[\begin{array}{cc} \mathbf{G}^* & \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{N}^* & \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{s} \\ m \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \end{array} \right] \left| \left[\begin{array}{cc} \mathbf{G} & \mathbf{N} \\ \mathbf{q}_0^* & \mathbf{0}^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} \right], \dot{\lambda} \geq \mathbf{0} \right. \\ \left. \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}^* & \mathbf{1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{s} \\ m \end{array} \right] = \max! \right| \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0}^* & \mathbf{k}^* \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\lambda} \end{array} \right] = \min! \end{aligned}$$

mely megfelel a statikai, ill. a kinematikai tételnek.

Erőműdszer alkalmazásával a kinematikai tételre alapuló összefüggésekből a nem előjelkorlátos $\dot{\mathbf{u}}$ ismeretlen kiküszöbölhető, és így a feladat a klasszikus

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}^* \mathbf{x} = \min!$$

alakú lineáris programozási problémára egyszerűsödik, melyre már közvetlen alkalmazható a szimplex algoritmus:

$$\left[\begin{array}{ccc} \mathbf{N}_s - \mathbf{G}_s & \mathbf{G}_k^{-1} & \mathbf{N}_k \\ -\mathbf{q}_0 & \mathbf{G}_k^{-1} & \mathbf{N}_k \end{array} \right]_{j_i} \dot{\lambda} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{array} \right], \mathbf{k}^* \dot{\lambda} = \min!$$

Itt

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{G}_k \\ \mathbf{G}_s \end{array} \right]$$

a szerkezet geometriai mátrixának egy statikailag határozott törzstartó szerinti particionálását jelenti és az N mátrixot ennek megfelelően kell particionálni.

4. A képlékeny határállapoton alapuló optimális tervezés

A minimális súlyú szerkezet meghatározását célul kitűző optimális tervezési feladathoz a képlékeny határállapot vizsgálat statikai tételéből kiindulva juthatunk:

$$\begin{aligned} G^* s &= -q \\ N^* s - k &\leq 0 \\ l^* k &= \min! \end{aligned}$$

ahol a célfüggvény azt fejezi ki, hogy a szerkezet súlyát a teherbírást jellemző adatok lineáris függvényének tekintjük. A feladat ismeretlenjeit a k és s vektorok jelentik. Mivel a szerkezetben általában azonos elemek is vannak $k = M^* \kappa$ alakban írható, és a feladat kevesebb számú ismeretlent tartalmazva a következő lesz:

$$\begin{aligned} G^* s &= -q, \\ N^* s - M^* \kappa &\leq 0, \\ l^* \kappa &= \min! \end{aligned}$$

A kapott lineáris programozási feladat megoldása a képlékeny határállapot-vizsgálathoz hasonlóan végezhető.

5. Beállási határállapot-vizsgálat

Beállási határállapoton azt az állapotot értjük, amelyben a maximális rugalmas igénybevételek és a szerkezetben a képlékeny alakváltozások hatására létrejövő ún. saját-igénybevétel eloszlás együttese még kielégíti a képlékenységi feltételeket, és egyidejűleg kialakul egy, a halmozódó képlékeny alakváltozásoknak megfelelő folyási mechanizmus is, amely természetesen nem azonos a képlékeny határállapotban értelmezett folyási mechanizmussal.

A probléma matematikailag szintén lineáris programozási feladatra vezet, mely a következő

$$\begin{aligned} G^* s &= 0 & Gu + N\lambda &= 0 \\ N^* s + m r_0 &\leq k & r_0^* \lambda = 1, \lambda &\geq 0 \\ m &= \max! & k^* \lambda &= \min! \end{aligned}$$

Itt r_0 a terhelési folyamat során a rugalmas alapon számolt maximális igénybe-

vételeket jelenti az alapterher figyelembevételével:

$$r_0 = \max(N^* s_{e0}).$$

A feladat gyakorlati megoldása analóg a képlékeny határállapot vizsgálattal.

6. Rugalmas-képlékeny állapotváltozás-vizsgálat

A rugalmas-képlékeny állapotváltozás vizsgálattal valamely ismert állapotban adott tehersebességek hatására keletkező állapotjellemző sebességeket tudjuk meghatározni. Az erre vonatkozó összefüggések a következők:

$$J: \{j \mid \varphi_j = 0\}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \mathbf{G}^* & \cdot \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} & \mathbf{N}_{[j]} \\ \cdot & \mathbf{N}_{[j]}^* & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_{[j]} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{[j]} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{[j]} \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_{[j]} \geq \mathbf{0} \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{[j]}^* \dot{\boldsymbol{\lambda}}_{[j]} = \mathbf{0}. \end{array}$$

A fenti összefüggésrendszer egy ún. lineáris komplementer problémát alkot. A nem előjelkorlátos változók mátrixműveletekkel kiküszöbölhetők és a rendszer:

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

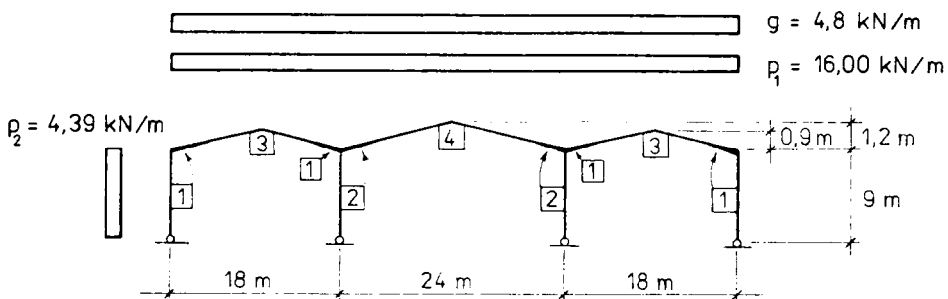
alakra hozható. Ez a feladat pedig a szimplex algoritmussal megoldható.

A kapott állapotjellemző sebességek addig érvényesek míg a tehersebesség nem változik, ill. míg újabb folyás nem történik. Ekkor a vizsgálatot meg kell ismételni.

7. Számítógépes tapasztalatok

Mind a négy probléma megoldására programot készítettünk az MTA CDC 3300 számítógépére síkbeli keretszerkezetek esetére.

Példaként egy háromhajós földszintes keret optimális tervezését, képlékeny határállapot és beállás vizsgálatát mutatjuk be. A szerkezetet 33 csomópontra bontottuk. A számítás mindegyik esetben kb. 7 percet igényelt.



1. ábra

A szerkezetet először az optimális tervezési programmal megterveztük, majd szelvény-táblázat alapján szelvényeket választottunk és az így kapott szerkezeten képlékeny határ-állapot- és beállásvizsgálatot hajtottunk végre.

A terhelés képlékeny határállapot esetében $g + m(p_1 + p_2)$, beállás vizsgálatnál pedig $g + m(p_1$ és p_2 tetszőleges kombinációja) volt. Az eltérő keresztmetszetű elemek törőnyomaté-kait az alábbi táblázatba foglaltuk össze:

Elem	M tervezett kNm	M alkalmazott kNm
1	574,7	581,8
2	956,6	966,9
3	287,4	321,3
4	478,3	581,8

Az egyes határállapothoz tartozó paraméterek pedig a következők voltak: m_t -tervezett = 1,0; m_t -tényleges = 1,20; m -beállási = 1,16; m -rugalmas = 0,8.

Matrix Methods for the Plastic Analysis of Frames. — In case of linearly elastic perfectly plastic frames loaded at their nodes, by applying the first order theory and linearized plasticity condition, the plasticity problems lead to linear programming, or to a linear complementary problem. The present paper deals with the formulation and solution of the problems, and demonstrates the application through a computerized example.

Behandlung von Plastizitätsproblemen der Stabwerke mit Hilfe von matrixalgebraischen Mitteln. — Im Fall von auf den Knotenpunkten belasteten, linearelastischen Stabwerken von vollkommen plastischem Material, führen die Elastizitätsprobleme durch die Anwendung der Theorie erster Ordnung und der linearisierten Plastizitätsbedingung zur linearen Programm-fertigungs-, bzw. Komplementäraufgabe. Die vorhandene Studie stellt die Formulierung und Lösung der Probleme und die Anwendung der Methode mit Hilfe eines Zahlenbeispiels dar.

ÁLTALÁNOSÍTOTT FELTÉTELES KAPCSOLATOKKAL RENDELKEZŐ SZERKEZETEK ÁLLAPOTVÁLTOZÁS-VIZSGÁLATA

KURUTZNÉ DR. KOVÁCS MÁRTA*

[Beérkezett: 1981. március 3-án]

Az általánosított feltételes kapcsolatokkal rendelkező szerkezetek állapotváltás-vizsgálata gépidőigényes feladat. Jelen dolgozat bemutatja az állapotváltás vizsgálatának egy gépidő-megtakarításos módszerét, amely minden lépésben az eredeti merevségi mátrixot használja fel. Megmutatja, hogy a feladat egy kvadratikus programozási feladatnak megfelelő lineáris komplementer problémára vezet, és hogy a bemutatott, a kinematikai terhek segítségével történő megoldási módszer a szimplex algoritmus egy kézenfekvő változata. A módszer alkalmazását bőséges számpéldá-nyag illusztrálja.

A teherviselő szerkezetek számításakor a képlékeny tulajdonságok figyelembevétele mellett az előregyártás térhódítása következtében a helyszíni kapcsolati helyeken fellépő, bizonytalan jellegű elmozdulások számításbavétele is indokolt. Mindkét jelenség befolyásolja a szerkezet erőjátékát: a szerkezet merevségének a megváltozásával jár, és figyelembevétele nagyobb szerkezetek esetében igen gépidőigényes feladat. Tekintve a két jelenség között fennálló fizikai és matematikai dualitást, célszerűnek tűnt ennek felhasználásával olyan módszert kidolgozni, amelynek alapján jelentős gépidő-megtakarítás mellett a fenti két jelenséget magábanfoglaló ún. általánosított feltételes kapcsolatokkal rendelkező szerkezetek állapotváltozása egészen a törőterhelésig nyomon követhető. A módszert elsősorban rúdszerkezetekre alkalmaztuk, de a [2] alapösszefüggéseire támaszkodva, az mindenfajta, véges elem módszerrel számítható szerkezetre általánosítható. Az eljárás egyparaméteres terhelést feltételez, de többparaméteres terhelési folyamatra is alkalmazható, szakaszonkénti egyparaméteres lépcsőkben.

1. Az általánosított feltételes kapcsolat

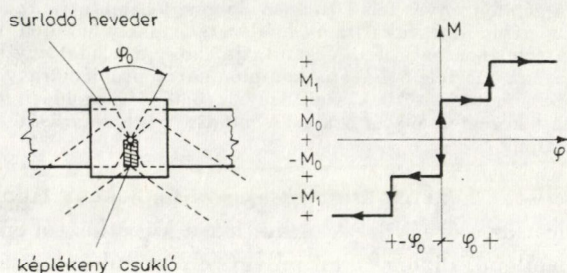
Az általánosított feltételes kapcsolatok fizikai és matematikai viselkedését az [1] dolgozatban leírt összefüggésekre támaszkodva röviden az alábbiakban foglaljuk össze.

Feltételes kapcsolatnak nevezzük valamely szerkezet azon elemeit, amelyekben a fellépő igénybevételek vagy elmozdulások, illetve ezek kombinációi előre meghatározott feltételtől függő értéket érhetnek el. A feltétel jellegéből adódóan beszélhetünk szilárdsági, geometriai, illetve általánosított feltételes kapcsolatokról.

* Kurutzné dr Kovács Mária, 1118 Serleg u. 8.

Az 1. ábrán egy szilárdsági és geometriai feltételek kombinációjaként előálló, egyszabadságfokú általánosított feltételes kapcsolatot ábrázoltunk, az alábbi feltételekkel:

- ha $-M_0 \leq M \leq M_0$, akkor $\varphi = 0$, és
- ha $|M| = M_0$, akkor $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$, továbbá
- ha $|\varphi| = \varphi_0$, akkor $M_0 \leq |M| \leq M_0 + M_1$, és
- ha $|M| = M_0 + M_1$, akkor φ tetszőleges lehet.

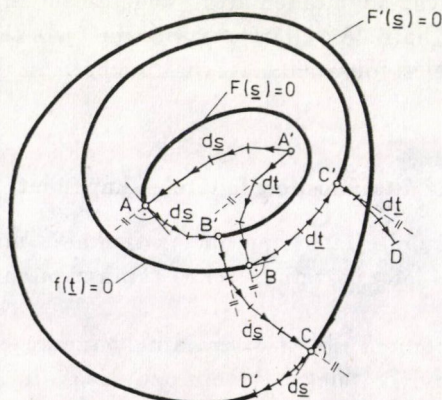


1. ábra.

Összetett igénybevételi, illetve elmozdulási állapot esetén a szilárdsági és geometriai feltételek az

$$F(\underline{s}) \leq 0 \quad \text{és} \quad f(\underline{t}) \leq 0$$

alakban írhatók fel, ahol $\underline{s}(s_1, s_2, \dots, s_n)$ a kapcsolati helyen fellépő általánosított erők és $\underline{t}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ az ugyanott fellépő általánosított relatív elmozdulások vektora.



2. ábra.

A 2. ábrán e feltételeket ábrázolva az s_1, s_2, \dots, s_n , illetve a t_1, t_2, \dots, t_n koordináta-rendszerben egy-egy zárt, konvex hiperfelületet nyerünk. A terhelési

folyamat során az egyes kapcsolati helyek aktivizálódása pillanatában a kapcsolat jellegének megfelelő s , illetve t vektor végpontja a megfelelő hiperfelületre esik, és a neki megfelelő dt , illetve ds növekményvektorok a hiperfelület külső normálisának irányába esnek.

A továbbiakban szakaszonként lineáris, vagyis konvex poliéderrel ábrázolható, linearizált feltételekkel foglalkozunk.

2. Az általánosított feltételes kapcsolatú szerkezet

A továbbiakban a [2]-ben leírt alapösszefüggésekhez és jelölésrendszerhez igazodva rúdszerkezetekkel foglalkozunk. Az algoritmus kidolgozása során az [5]-ben ismertetett képlékenységtani alapelvekre támaszkodunk.

A számítás modellje olyan szerkezet, amelyen a bizonytalan jellegű mozgásokat, illetve folyást okozó igénybevételeket a feltételes kapcsolatok helyére koncentráltuk, a szerkezet többi részén pedig folytonos alakváltozásokat és rugalmas viselkedést tételeztünk fel. A kapcsolatok között előfordulhatnak tisztán szilárdsági vagy tisztán geometriai típusú kapcsolatok is az általánosított feltételes kapcsolatok mellett. Legyen a szerkezetnek r db általánosított kapcsolata, ekkor a feltételek:

$$\left. \begin{array}{l}
 F_i(s_m) \leq 0 \text{ és } f_i(t_m) \leq 0, \text{ vagyis} \\
 \text{ha } F_i(s_m) < 0, \text{ akkor } dt_m = 0 \text{ és} \\
 \text{ha } f_i(t_m) < 0, \text{ akkor } ds_m = 0 \text{ azonban} \\
 \text{ha } F_i(s_m) = 0, \text{ akkor } dt_m \\
 \text{ha } f_i(t_m) = 0, \text{ akkor } ds_m
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 i = 1, 2, \dots, r, \\
 \text{a fenti feltételek sorrend-} \\
 \text{jétől függően, azon belül} \\
 \text{tetszőleges lehet}
 \end{array}$$

ahol m a kapcsolat szabadságfoka. Ha a fenti két feltételben szereplő szabadságfokok különbözőek, akkor a fennmaradó szabadságfokra vonatkozóan külön szilárdsági vagy geometriai feltétel írható elő.

Tekintetbevéve [2] alapján a rúdszerkezet alapegyenletét

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} \ \mathbf{F} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

amely megadja az összefüggést a szerkezet adott q erő- és t kinematikai terhei, valamint a keletkező u elmozdulásai és s belső erői között, a fenti feltételek az alábbi alakot öltethetik.

Legyen az i -edik kapcsolati helyre vonatkozó szilárdsági feltétel az alábbi linearizált képlékenységi feltétel [6]:

$$F_i(s_i^j) = N_i s_i^j - k_i \leq 0,$$

ahol s_i^j az i -edik kapcsolati helyhez tartozó s_i belső erők közül a korlátozás alá tartozókat jelöli. N_i mátrix rögzíti az utóbbiak kombinációit azáltal, hogy a konvex poliéder egyes hipersíkjaihoz tartozó normális egységvektorokat tartalmazza. A k_i vektor a hipersíkoknak az origótól való távolságát adja meg. Például, ha $N_i = E$, vagyis az identitás mátrixa, akkor a hipersíkok normálisai éppen a koordinátatengelyek, így a feltétel csupán a keletkező igénybevételeknek a törőigénybevételekkel való numerikus összehasonlítását írja elő.

Legyen az i -edik kapcsolati helyre vonatkozó geometriai feltétel a relatív elmozdulásokra vonatkozó linearizált alak

$$f_i(t_i^j) = M_i t_i^j - l_i \leq 0,$$

ahol t_i^j az i -edik kapcsolati helyen fellépő t_i relatív elmozdulások közül a korlátozás alá tartozókat jelöli. M_i írja elő ezek kombinációit az adott l_i konstansokhoz viszonyítva.

3. A szerkezet állapotváltozás-vizsgálata kinematikai terhek segítségével

A szerkezet állapotváltozás-vizsgálatát a terhelési folyamat végigkövetése útján végezzük. Az egyes lépésekhez tartozó tehernövekmény nagyságának a fenti feltételek szabnak határt, vagyis, ahol

$$F_i(s_i^j) < 0, \quad \text{ott} \quad F_i(s_i^j + ds_i^j) \leq 0,$$

illetve ahol

$$f_i(t_i^j) < 0, \quad \text{ott} \quad f_i(t_i^j + dt_i^j) \leq 0.$$

E feltételekből határozható meg az a tehernövekmény, amelynek hatására egy újabb kapcsolati hely aktivizálódik. Egy-egy ilyen lépés során a szerkezet kapcsolatai átrendeződnek, ami a merevségi mátrix megváltozását vonja maga után. Ismert tény, hogy amíg szilárdsági típusú kapcsolatok aktivizálódásakor a szerkezet merevsége csökken, addig geometriai típusú kapcsolat aktivizálódása során növekszik. Általánosított feltételes kapcsolat esetében a merevség növekedése és csökkenése váltakozva fordulhat elő. Tekintve továbbá, hogy a feltételes kapcsolatok aktivizálódása megfordítható folyamat, a merevségi mátrix megváltozását a korábban aktív feltételes kapcsolatok újbóli inaktivitása (tehermentesítés) is okozhatja.

A merevségi mátrix lépésenkénti változtatása és ismételt felbontása igen gépidőigényes feladat, ezért olyan módszert dolgoztunk ki, amely a lépésenként változó merevségű szerkezet vizsgálatát minden lépésben az eredeti szerkezet merevségi mátrixán végzi. A kapcsolatok aktivizálódását kinematikai terhekkel helyettesítjük, így az egyes vizsgálati lépésekben csupán a szabad vektorokkal végzünk műveleteket. A lépésenként szükséges kinematikai terhek meghatározása ugyan mindig egy-egy lineáris egyenletrendszer megoldását igényli, ennek

lépésenként változó mérete azonban nagyságrenddel kisebb a merevségi mátrix méreténél.

A módszer ismertetésekor — egyszerűség kedvéért — tekintsünk egy olyan szerkezetet, amelynek feltételes kapcsolatai *szilárdsági* jellegűek. A terhelési folyamat egy közbenső lépésében a szerkezet s belső erőinek egy s_k része a már képlékeny, míg a fennmaradó s_r része viszont a még rugalmas állapotú (és az eredetileg feltétel alá nem is kerülő) elemekhez tartozik. Ha az eredeti t kinematikai terhelés zérus volt, akkor a még rugalmas állapotú elemekhez $t_r = 0$ kinematikai teher tartozik, míg a képlékeny elemek állapotának fenntartását t_k biztosítja. Az ennek megfelelő partició:

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{G}_r^* & \mathbf{G}_k^* \\ \mathbf{G}_r & \mathbf{F}_r & \\ \mathbf{G}_k & & \mathbf{F}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Növeljük most a \mathbf{q} terhelést $d\mathbf{q}$ mértékkel, amely az s erők ds növekedését idézi elő. Tételezzük fel — és ez a feltételezés egyparaméteres teher esetén a legtöbbször meg is tehető — hogy az s_k erőkhöz már nem következik be változás, vagyis az $F(s_k) = 0$ feltétel a $d\mathbf{q}$ tehernövelés során változatlan. Tegyük fel, hogy a ds_r erőnövekmény mellett az i -edik kapcsolati helyen teljesül az

$$F(s_{ri} + ds_{ri}) = 0$$

egyenlőség, de ezen egyenlőség fennmaradását a teher újabb $\Delta\mathbf{q}$ növelése esetében már valamely $\Delta\mathbf{t}_{ki}$ kinematikai tehernek kell biztosítania. E folyamatnak az alábbi partició felel meg:

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{G}_r^* & \mathbf{G}_i^* & \mathbf{G}_k^* \\ \mathbf{G}_r & \mathbf{F}_r & & \\ \mathbf{G}_i & & \mathbf{F}_i & \\ \mathbf{G}_k & & & \mathbf{F}_k \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_r \\ \mathbf{s}_{ri} \\ \mathbf{s}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\mathbf{s}_r \\ d\mathbf{s}_{ri} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{s}_r \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{t}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{q} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ d\mathbf{t}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{t}_{ki} \\ \Delta\mathbf{t}_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Tekintsük a harmadik és negyedik mátrixegyenletet az i -edik elem aktivizálódásának pillanatában:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i(\mathbf{u} + d\mathbf{u}) + \mathbf{F}_i(\mathbf{s}_{ri} + d\mathbf{s}_{ri}) &= 0 \\ \mathbf{G}_k(\mathbf{u} + d\mathbf{u}) + \mathbf{F}_k \mathbf{s}_k + (\mathbf{t}_k + d\mathbf{t}_k) &= 0 \end{aligned}$$

és további Δq tehernövelés mellett:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_i(\mathbf{u} + d\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) + \mathbf{F}_i(\mathbf{s}_{ri} + d\mathbf{s}_{ri}) + \Delta\mathbf{t}_{ki} &= 0, \\ \mathbf{G}_k(\mathbf{u} + d\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) + \mathbf{F}_k \mathbf{s}_k + (\mathbf{t}_k + d\mathbf{t}_k + \Delta\mathbf{t}_k) &= 0, \end{aligned}$$

amelyből az következik, hogy

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{t}_{ki} &= -\mathbf{G}_i \Delta\mathbf{u}, \\ \Delta\mathbf{t}_k &= -\mathbf{G}_k \Delta\mathbf{u}, \end{aligned}$$

vagyis a $\Delta\mathbf{t}_k$ és $\Delta\mathbf{t}_{ki}$ értékek a $\Delta\mathbf{u}$ -ból az eredeti merevségi mátrix alapján állíthatók elő. A $d\mathbf{s}_{ri}$ igénybevétel-növekmény a folyási feltétel alapján határozható meg, ezáltal a lépéshez tartozó teherparaméter ismertté válik. A $d\mathbf{t}_k$ kinematikai teher \mathbf{t}_k -ből a teherparaméter figyelembevételével számítható.

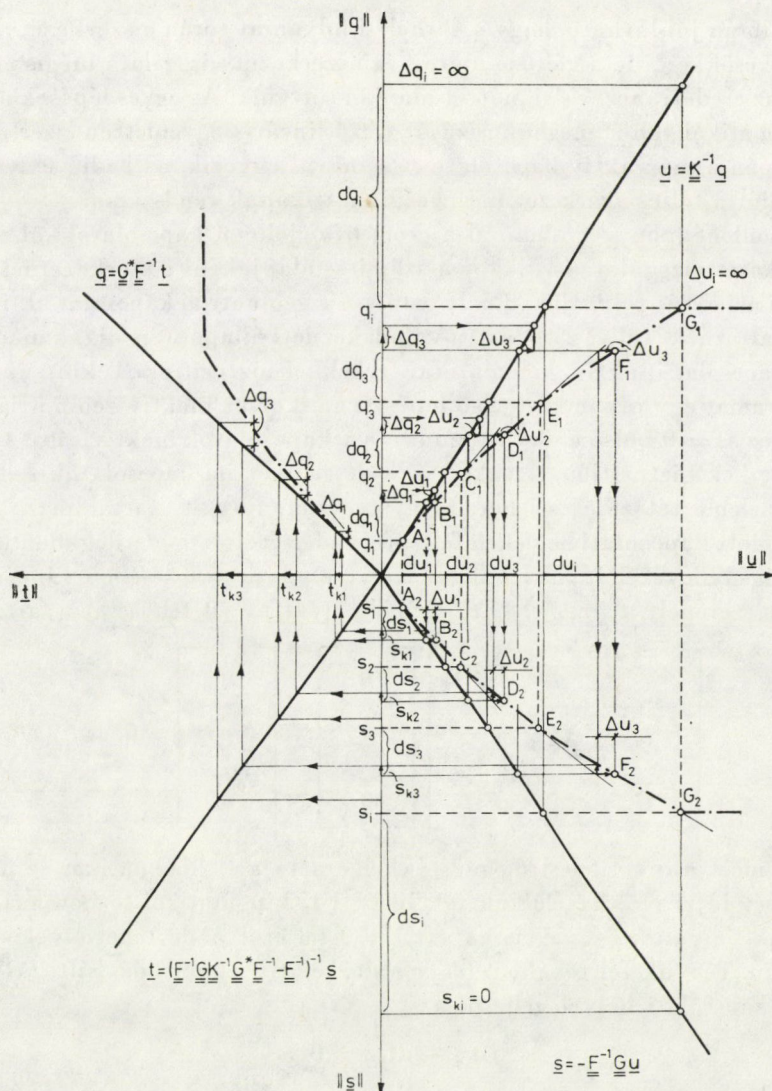
A számítás további lépései hasonlóképpen történnek. Az egyes lépések során szükséges azonban a már aktív kapcsolati helyeken fellépő relatív elmozdulások ellenőrzése, mivel az esetleges előjelváltás a kapcsolat tehermentesülésére utal, és ekkor újból inaktívnak tekintendő.

Az eljárás jobb megvilágítása érdekében a folyamatot grafikus ábrázolásban is megpróbáltuk érzékeltetni.

A 3. ábrán a külső és belső erők, illetve elmozdulások közötti összefüggéseket leíró lineáris transzformációkat ábrázoltuk úgy, hogy az egyes koordinátatengelyeken a megfelelő vektorok normáit tüntettük fel.

A terhelési folyamat első lépcsőjeként eljutunk ahhoz a q_1 teherértékhez, amelynek dq_1 mértékű növelése mellett már egy (esetleg egyszerre több) szilárd-sági kapcsolat aktív állapotba kerül (A_1 , A_2 pontok). A $q_1 + dq_1$ teherhez $u_1 + du_1$ elmozdulások és $s_1 + ds_1$ belső erők tartoznak. Azonban az aktívvá vált kapcsolatok helyén bizonyos s_{k1} belső erők a további teherviselésben a rájuk vonatkozó feltétel szerint vesznek részt, ez viszont a fennmaradó $ds_1 - s_{k1}$ erők átrendeződését vonja maga után. Az s_{k1} erőkre előírt feltételt t_{k1} kinematikai teherként vesszük figyelembe, amely viszont Δu_1 elmozdulást okoz, amellyel megnövelve $u_1 + du_1$ -et, megkapjuk a $q_1 + dq_1$ -hez tartozó elmozdulást a megváltozott merevségű szerkezeten (B_1 pont). Az új merevségi mátrixnak megfelelő transzformációt az $\overline{A_1 B_1}$ egyenes mutatja. A Δu_1 elmozdulásváltozás a ds_1 -ben bekövetkezett átrendeződést fejezte ki (B_2 pont), ez viszont kijelöli az $\overline{A_2 B_2}$ egyenesnek megfelelő transzformációváltozást.

A teher további növelése során q_2 értéknél újabb kapcsolat aktivizálódik, és a dq_2 tehernöveléshez tartozó ds_2 belső erők egy s_{k2} része feltétel alá kerül. Az s_{k2} -re előírt, valamint az előző lépésben aktivizálódott kapcsolatoknál még fennálló feltételeket egy t_{k2} kinematikai teher biztosítja, amely Δu_2 elmozdulás-



3. ábra

növekményt eredményez (D_1, D_2 pontok). Így a transzformációk változását a $C_1 D_1, C_2 D_2$ egyenesek adják meg.

Az eljárás hasonló lépésekkel mindaddig folytatódik, amíg a szerkezet vagy annak egy része labilissá nem válik. Ez úgy jelentkezik, hogy a soronkövetkező dq_i tehernövekményhez tartozó s_{ki} belső erők zérust adnak, azaz $s_{ki} = 0$, továbbá Δq_i -hez $\Delta u_i = \infty$ tartozik. Ez azt jelenti, hogy további kapcsolat már nem aktivizálódik: a szerkezet további teher és belső erők felvételére képtelen, és tetszőleges nagy elmozdulásokat végez.

Az ábrán jól látható, hogy a terhelési folyamat során a szerkezet merevsége egyre csökken, de a változó merevségű szerkezet vizsgálata mégis minden lépésben az eredeti merevségi mátrix alapján történik. Az egyes lépésekhez tartozó kinematikai teher meghatározását célzó lineáris egyenletrendszer mérete pedig csupán a már aktív kapcsolatok számával egyezik, az pedig lényegesen kisebb, mint a teljes szerkezet merevségi mátrixának rendszáma.

Hasonlóképpen végezhető el a *geometriai* jellegű kapcsolatokkal rendelkező szerkezet vizsgálata is. Ekkor a számítás alapjaként a szerkezetnek azt a merevségi mátrixát tekintjük, amely az összes geometriai kapcsolat aktív állapothoz tartoznék (teljes záródás), a valódi kezdeti állapotot pedig, amikor még minden kapcsolat inaktív, kinematikai terhekkal biztosítjuk. Tekintsük a terhelési folyamat egy olyan közbenső lépését, amikor az inaktív geometriai kapcsolatokhoz $s_g = 0$ belső erők tartoznak, és a kapcsolatok inaktivitását t_g kinematikai terhek biztosítják. Az aktívvá vált geometriai kapcsolatok helyén s_r megfelelő eleme tetszőleges lehet. Megjegyezzük, hogy s_r tartalmazza a már aktivizálódott kapcsolati helyeken fellépő és a feltételtől eredetileg mentes kapcsolatok igénybevételeit. Mivel a szerkezet eredeti terhelésében kinematikai teher nem szerepelt, t_r megfelelő t'_r elemei az $f(t'_r) = 0$ feltételhez tartoznak:

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{G}_r^* & \mathbf{G}_g^* \\ \mathbf{G}_r & \mathbf{F}_r & \\ \mathbf{G}_g & & \mathbf{F}_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t}_r \\ \mathbf{t}_g \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Növeljük most a \mathbf{q} terhelést $d\mathbf{q}$ mértékkel, amely a \mathbf{t}_g kinematikai terhek $d\mathbf{t}_g$ csökkenését idézi elő. Tételezzük fel, hogy a \mathbf{t}'_r kinematikai terhen már nem következik be változás, vagyis az $f(\mathbf{t}'_r) = 0$ feltétel a $d\mathbf{q}$ tehernövelés során változatlan. Tegyük fel továbbá, hogy a $d\mathbf{t}_g$ relatív elmozdulásváltozás során az i -edik kapcsolati helyen teljesül az

$$f(\mathbf{t}_{gi} + d\mathbf{t}_{gi}) = 0$$

egyenlőség, de ezen egyenlőség fennmaradása a teher újabb $\Delta\mathbf{q}$ növelése esetében a fennmaradó $\Delta\mathbf{t}_g$ kinematikai terhek átrendeződését jelenti. Ehhez a folyamathoz az alábbi partició tartozik:

$$\begin{bmatrix} & \mathbf{G}_r^* & \mathbf{G}_i^* & \mathbf{G}_g^* \\ \mathbf{G}_r & \mathbf{F}_r & & \\ \mathbf{G}_i & & \mathbf{F}_i & \\ \mathbf{G}_g & & & \mathbf{F}_g \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s}_r \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{u} \\ d\mathbf{s}_r \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\mathbf{s}_r \\ \Delta\mathbf{s}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t}_r \\ \dots \\ \mathbf{t}_{gi} \\ \dots \\ \mathbf{t}_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d\mathbf{q} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ dt_{gi} \\ \dots \\ dt_g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{q} \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \mathbf{0} \\ \dots \\ \Delta\mathbf{t}_g \end{bmatrix} = 0$$

Tekintsük a harmadik és negyedik mátrixegyenletet az i -edik kapcsolat aktivizálódásának pillanatában:

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{u} + d\mathbf{u}) + \mathbf{t}_{gi} + dt_{gi} = 0,$$

$$\mathbf{G}_g(\mathbf{u} + d\mathbf{u}) + \mathbf{t}_g + dt_g = 0,$$

és további $\Delta\mathbf{q}$ tehernövelés mellett:

$$\mathbf{G}_i(\mathbf{u} + d\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) + \mathbf{F}_i \Delta\mathbf{s}_i + \mathbf{t}_{gi} + dt_{gi} = 0$$

$$\mathbf{G}_g(\mathbf{u} + d\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}) + \mathbf{t}_g + dt_g + \Delta\mathbf{t}_g = 0,$$

amelyből az következik, hogy

$$\mathbf{F}_i \Delta\mathbf{s}_i = -\mathbf{G}_i \Delta\mathbf{u},$$

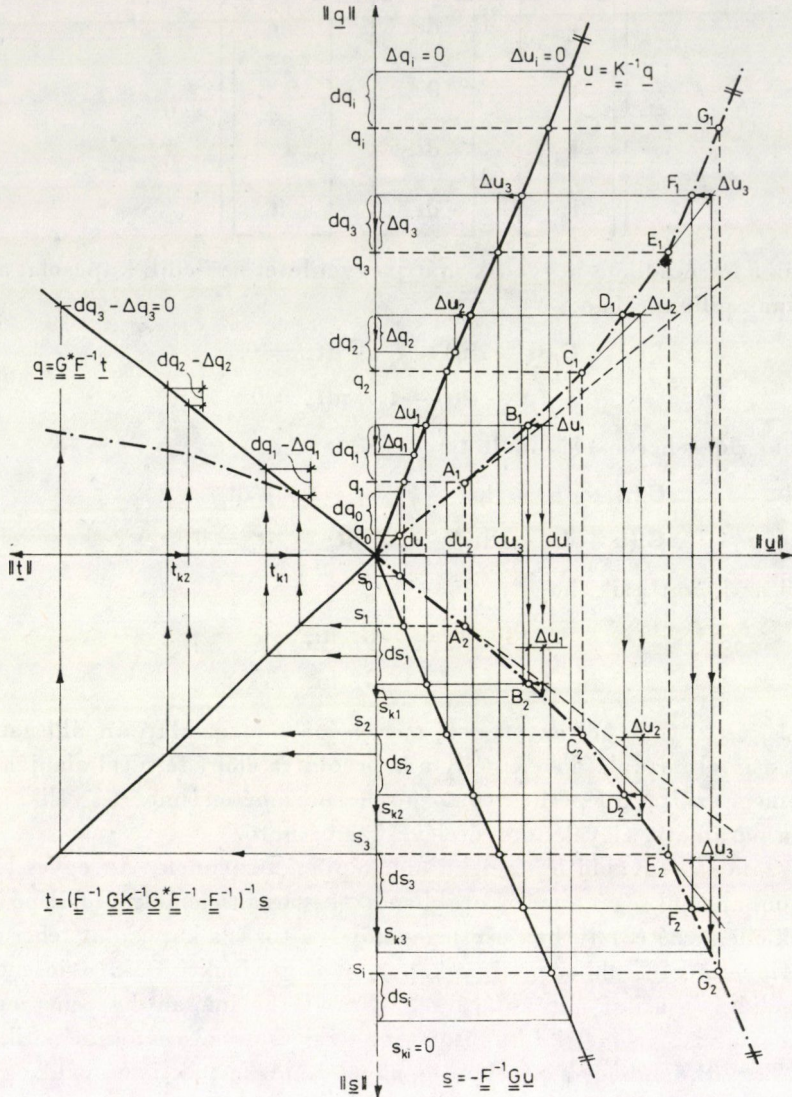
$$\Delta\mathbf{t}_g = -\mathbf{G}_g \Delta\mathbf{u},$$

vagyis $\Delta\mathbf{s}_i$ és $\Delta\mathbf{t}_g$ $\Delta\mathbf{u}$ -ból az eredeti merevségi mátrix alapján állítható elő. A dt_{gi} relatív elmozdulásnövekmény a kapcsolatra előírt feltétel alapján határozható meg, ezáltal a lépéshez tartozó teherparaméter ismertté válik, így dt_g a \mathbf{t}_g -ből a paraméter figyelembevételével számítható.

A számítás további lépései hasonlóképpen történnek. Az egyes lépések során azonban szükséges a már korábban aktívvá vált elemeknél fellépő igénybevételek ellenőrzése, mivel az esetleges előjelváltozás a kapcsolat tehermentesülésére figyelmeztet, ekkor pedig a kapcsolat ismét inaktívnak tekintendő.

Az eljárás grafikus ábrázolását a 4. ábrán láthatjuk, ahol q_1 teher már tartalmazza az összes geometriai kapcsolat inaktivitását biztosító kinematikai terheket is. Tegyük fel, hogy a q_1 teher dq_1 növelése mellett aktívvá válik egy geometriai kapcsolat, vagyis a dq_1 -nek megfelelő ds_1 belső erőnövekményen kívül még s_{k1} erők is fellépnek az aktívvá vált elemeken. Így csökken az inaktív kapcsolatok száma, ezáltal pedig a t_0 kinematikai terhelés is t_{k1} -re csökken. Ez az elmozdulások csökkenését is eredményezi a t_0-t_{k1} -nek megfelelő Δu_1 mértékben. Így a $q_1 + dq_1$ -nek most $u_1 + du_1 - \Delta u_1$ felel meg (B_1 pont), és ezáltal a merevségi transzformáció megváltozásához jutottunk ($\overline{A_1 B_1}$ egyenes). A Δu_1 elmozdulásváltozás megadja az erőkre vonatkozó transzformációváltozást is ($\overline{A_2 B_2}$ egyenes).

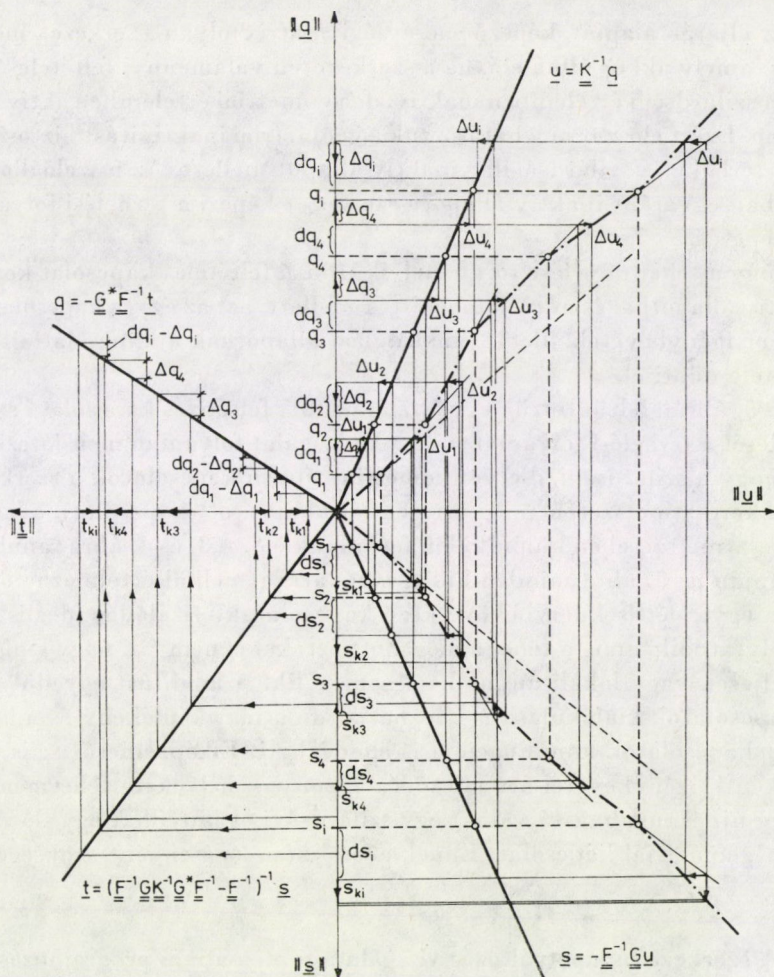
A teher további növelése során a q_2 értéknél újabb kapcsolat aktivizálódik és a dq_2 tehernöveléshez tartozó ds_2 erőknél kívül az újonnan aktivizálódott kap-



4. ábra

csolatoknál újabb s_{k2} erők is fellépnek. Ezáltal ismét csökkent a feltételek miatt korlátozott erők száma, csökkent az inaktív kapcsolatokat helyettesítő kinematikai terhelés is, amely Δu_2 elmozduláscsökkenést okoz, amely viszont a transzformációk változását adja meg (C_1D_1, C_2D_2 egyenesek).

Az eljárás hasonlóképpen folytatódik mindaddig, amíg minden kapcsolat aktívvá nem válik, ha ez létrejöhet egyáltalán. Ez úgy következik be, hogy a soronkövetkező dq_i tehernövekmény hatására a belső erőkben nem áll elő tovább-



5. ábra

bi növekmény, vagyis $s_{ki} = 0$. Ekkor minden kapcsolat aktivizálódott, ezáltal pedig az inaktivitást biztosító kinematikai teher is zérusra csökkent. Ekkor $\Delta q_i = \Delta u_i = 0$, és a szerkezet merevsége a helyettesítő szerkezet merevségével egyező, a két transzformáció párhuzamos. Ekkor a szerkezet az utolsó állapotnak megfelelő merevséggel — bizonyos határig — tetszés szerinti nagyságú terhet képes viselni.

A lépésenként növekvő merevségű szerkezet vizsgálata minden lépésben az eredeti merevségi mátrix alapján történik. Az egyes lépésekhez tartozó kinematikai terhelés meghatározására szolgáló lineáris egyenletrendszer mérete pedig csupán a még inaktív kapcsolatok számával egyezik.

Az általánosított feltételes kapcsolatokkal rendelkező szerkezetek vizsgálata az előző két eljárás kombinációjaként áll elő.

Az eljárás alapját képező merevségi mátrix olyan szerkezet merevségi mátrixa, amely akkor állna elő, ha a szerkezeten valamennyi feltételes kapcsolati elem szilárdsági értelemben inaktív, de geometriai értelemben aktív állapotban lenne. Ezért először meghatározzuk a geometriai inaktivitást biztosító kinematikai terheket a szilárdságilag inaktív állapot mellett. Az így előállott, kapcsolataiban egyaránt inaktív állapotú szerkezet képezi a terhelési folyamat kiinduló lépését.

Hogy a teher növelése során melyik típusú feltételes kapcsolat kerül elsőként aktív állapotba, és milyen teherérték mellett, azt az egyes kapcsolatfajtáknál fellépő igénybevételi, illetve elmozdulási állapotnak a kapcsolatfajta előírt feltétele dönti el.

Az 5. ábrán feltüntettük egy általánosított feltételes kapcsolatú szerkezet viselkedését a terhelési folyamat során. A vizsgálat folyamán nem játszik szerepet az, hogy a szilárdsági, illetve geometriai típusú kapcsolatok a szerkezetnek egyazon keresztmetszetében együttesen (általánosított kapcsolat), avagy más-más keresztmetszetében külön-külön fordulnak elő. A 3. és 4. ábra tanulmányozása alapján az 5. ábra minden külön magyarázat nélkül értelmezhető.

Az egyes lépésekben bekövetkező kapcsolataktivizálódás ideális esetben addig folytatódik, amíg a teher a megadott értéket el nem éri, vagy amíg a szerkezet teljesen vagy lokálisan labilissá nem válik. A labilitást egyedül a képlékeny kapcsolatok kialakulása is okozhatja, de a már képlékeny és a még nem záródott kapcsolatok kombinációja is előidézheti. Elképzelhető az is, hogy a lépésenkénti igénybevétel-átrendeződés bizonyos helyeken tehermentesülést okoz, így újból rugalmassá válhat egy szilárdsági és kinyílnak egy előzőleg már záródott geometriai kapcsolat. Ennek ellenőrzése lépésenként szükséges.

4. A szerkezet állapotváltozás vizsgálata matematikai programozással

Az állapotváltozás vizsgálatának matematikai programozással való megközelítésében a [8] értekezésben lefektetett alapelvekre támaszkodtunk.

Tekintsük a kapcsolatok aktivizálódása során fellépő ds , illetve dt növekményvektorokat (2. ábra), amelyek rendre:

$$ds = d\lambda \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{és} \quad dt = dA \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s},$$

ahol λ az ún. szilárdsági és A a geometriai szorzó, a keletkező belső erő, illetve relatív elmozduláskomponensek kombinációira vonatkozóan. Egyszabadságfokú kapcsolatnál magával a növekménnyel egyenlő.

A terhelési folyamat során az állapotjellemzők \mathbf{q} , \mathbf{t} , \mathbf{u} , \mathbf{s} $\dot{\lambda}$ és \dot{A} sebességei (növekményei) közötti összefüggések az általánosított feltételes kapcsolatok

szilárdsági értelmű aktivizálódásának folyamatában:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} & \mathbf{N}_K^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_K & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\lambda}_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ -\dot{\mathfrak{F}}_K \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{a})$$

ahol K jelöli azon indexek halmazát, ahol $\mathfrak{F}_K = 0$. Továbbá

$$\dot{\lambda}_K \geq 0, \quad \dot{\mathfrak{F}}_K \leq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\lambda}_K^* \dot{\mathfrak{F}}_K = 0,$$

valamint az $\mathfrak{F}_{\bar{K}} < 0$ állapotú elemeken

$$\dot{\lambda}_{\bar{K}} = 0,$$

ahol \bar{K} jelöli K komplementer halmazát a feltételek által érintett összes indexek halmazára vonatkozóan. Az (a) összefüggések az egyensúlyi, kompatibilitási és a kapcsolatokra előírt szilárdsági feltételt kifejező egyenletekből állnak. Kifejezésre jut, hogy a kapcsolatok szilárdsági értelmű aktivizálódása során a kompatibilitási egyenlet egészül ki az aktív kapcsolatoknál keletkező relatív elmozdulások sebességével.

Tekintsük most az állapotjellemzők sebességei közötti összefüggéseket az általánosított feltételes kapcsolatok *geometriai* értelmű aktivizálódásának folyamatában:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* & \mathbf{G}^* \mathbf{M}_j^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_j \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\lambda}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ -\dot{\mathbf{f}}_j \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{b})$$

továbbá

$$\dot{\lambda}_j \geq 0, \quad \dot{\mathbf{f}}_j \leq 0 \quad \text{és} \quad \dot{\lambda}_j^* \cdot \dot{\mathbf{f}}_j = 0,$$

valamint az $\mathbf{f}_j < 0$ állapotú elemeken:

$$\dot{\lambda}_{\bar{j}} = 0.$$

A (b) összefüggések az egyensúlyi, a kompatibilitási és a kapcsolatokra előírt geometriai feltételt kifejező egyenletekből állnak. Látható, hogy a kapcsolatok geometriai értelmű aktivizálódása során az egyensúlyi egyenlet egészül ki az aktív kapcsolatoknál keletkező belső erők sebességével.

Most vizsgáljuk meg az összefüggést az állapotjellemzők sebességei között abban az esetben, ha *szilárdsági és geometriai* értelmű aktivizálódás egyaránt lejátszódik a szerkezetben:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* & \mathbf{0} & \mathbf{G}^* \mathbf{M}_j^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} & \mathbf{N}_K^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_K & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_j \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{s}} \\ \dot{\lambda}_K \\ \dot{\lambda}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ -\dot{\mathfrak{F}}_K \\ -\dot{\mathbf{f}}_j \end{bmatrix} = 0, \quad (\text{c})$$

továbbá

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_K \\ \dot{\lambda}_J \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}}_K \\ \dot{\mathcal{F}}_J \end{bmatrix} \leq \mathbf{0} \quad \text{és} \quad [\dot{\lambda}_K \quad \dot{\lambda}_J] \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}}_K \\ \dot{\mathcal{F}}_J \end{bmatrix} = 0.$$

Megállapítható, hogy ez esetben mind az egyensúlyi, mind a kompatibilitási egyenletek kiegészültek a megfelelő igénybevétel-, illetve relatív elmozdulássebességekkel. A továbbiakban a J és K indexeket elhagyjuk.

Küszöböljük ki a (c) egyenletrendszerből a nem előjelkorlátos ismeretleneket. Ekkor az alábbi egyenletet nyerjük:

$$\begin{bmatrix} \text{NF}^{-1}\text{GK}^{-1}\text{G}^*\text{F}^{-1}\text{N}^* - & \left| \begin{array}{c} -\text{NF}^{-1}\text{GK}^{-1}\text{G}^*\text{M}^* \\ \dots\dots\dots \\ -\text{MGK}^{-1}\text{G}^*\text{F}^{-1}\text{N}^* \end{array} \right. \\ \dots\dots\dots & \left| \begin{array}{c} \text{MGK}^{-1}\text{G}^*\text{M}^* \\ \dots\dots\dots \\ \text{MG}[\text{K}^{-1}(\dot{\mathbf{q}} - \text{G}^*\text{F}^{-1}\dot{\mathbf{t}})] \end{array} \right. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\text{N}[\text{F}^{-1}\text{GK}^{-1}(\dot{\mathbf{q}} - \text{G}^*\text{F}^{-1}\dot{\mathbf{t}}) + \text{F}^{-1}\dot{\mathbf{t}}] \\ \dots\dots\dots \\ \text{MG}[\text{K}^{-1}(\dot{\mathbf{q}} - \text{G}^*\text{F}^{-1}\dot{\mathbf{t}})] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}} \\ \dot{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

amelyet egyszerűbb alakra hozva:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^* \\ \mathbf{B} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dot{\mathcal{F}} \\ \dot{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

Még egyszerűbben:

$$\mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0},$$

ahol

$$\dot{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \dot{\mathbf{x}}^* \dot{\mathbf{y}} = 0.$$

Ez a feladat megfelel az alábbi lineáris komplementer problémának:

$$\text{LK: } \{ \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}}^* \dot{\mathbf{y}} = 0 \},$$

amely egyenértékű a következő kvadratikus programozási feladat primál-duál feladatpárjával:

$$\text{K1: } \min \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^* \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{d}}^* \dot{\mathbf{x}} \mid \dot{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \right\},$$

$$\text{K2: } \min \left\{ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^* \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} \mid \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{d}} \leq \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0} \right\}.$$

A lineáris komplementer problémával ekvivalens lineáris programozási feladat megoldását a szimplex algoritmussal egyenértékű eljárás alapján végeztük. A szimplex algoritmus fizikai tartalma ugyanis megfelel az előző pontban ismertetett kinematikai terhekkel történő megoldásnak.

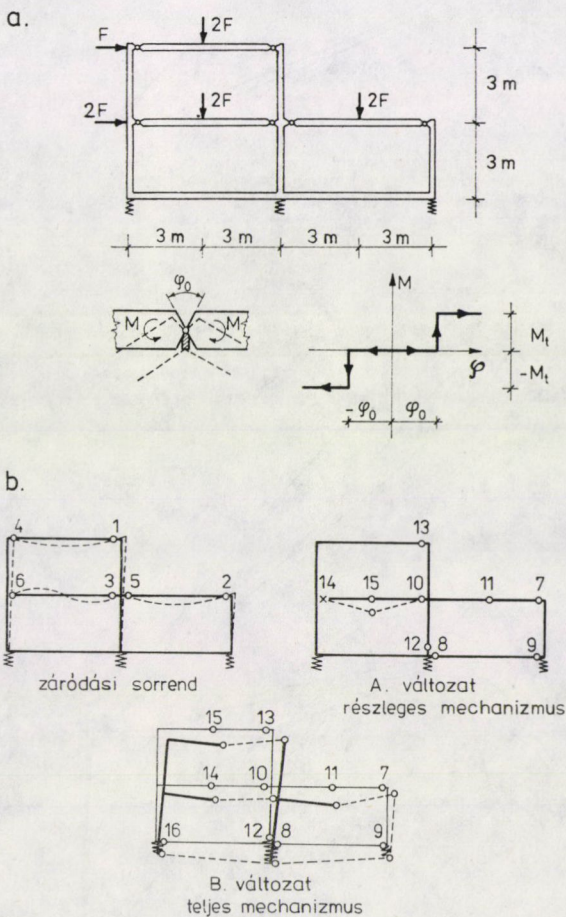
5. Alkalmazások

A fenti módszer alkalmazására számítógépes programokat dolgoztunk ki.

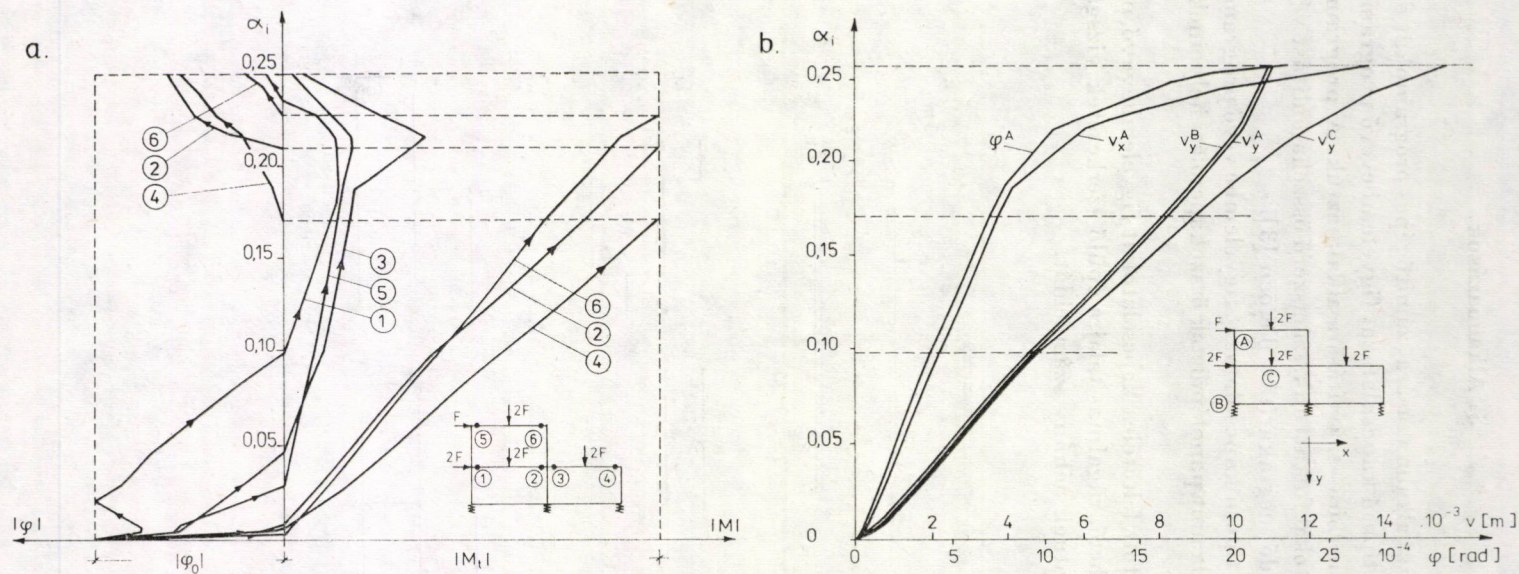
A szilárdsági típusú kapcsolatokat figyelembevevő programot rúdszerkezetek képlékeny teherbírás-számítására alkalmaztuk. A program segítségével nagyméretű feladatokat futtattunk, számszerű összehasonlítást végezve a módszer nyújtotta gépidő megtakarítást illetően [3].

A geometriai típusú kapcsolatokat figyelembe vevő programot előregyártott keretváz, valamint panelépületek összekapcsolási helyeinek vizsgálatára alkalmaztuk [4].

Az általánosított feltételes kapcsolatokat figyelembevevő programot keretvázal modellezhető, rugalmas talajra épülő szerkezetek vizsgálatára alkalmaztuk. Erre mutatunk néhány számpéldát.



6. ábra



1. Példa

A 6. ábrán feltüntetett, előregyártott gerendákból álló síkbeli szerkezet adatai az alábbiak:

	Keresztmetszeti terület [m ²]	Inercia-nyomaték [m ⁴]
Talpgerenda	1,2	0,06
Felsőbb gerendák	0,6	0,03
Oszlopok	0,6	0,03

A talaj rugalmas tulajdonságait OHDE szerint figyelembevéve a jellemzők:

$$E_{szerk} = 3 \cdot 10^7 \text{ KN/m}^2,$$

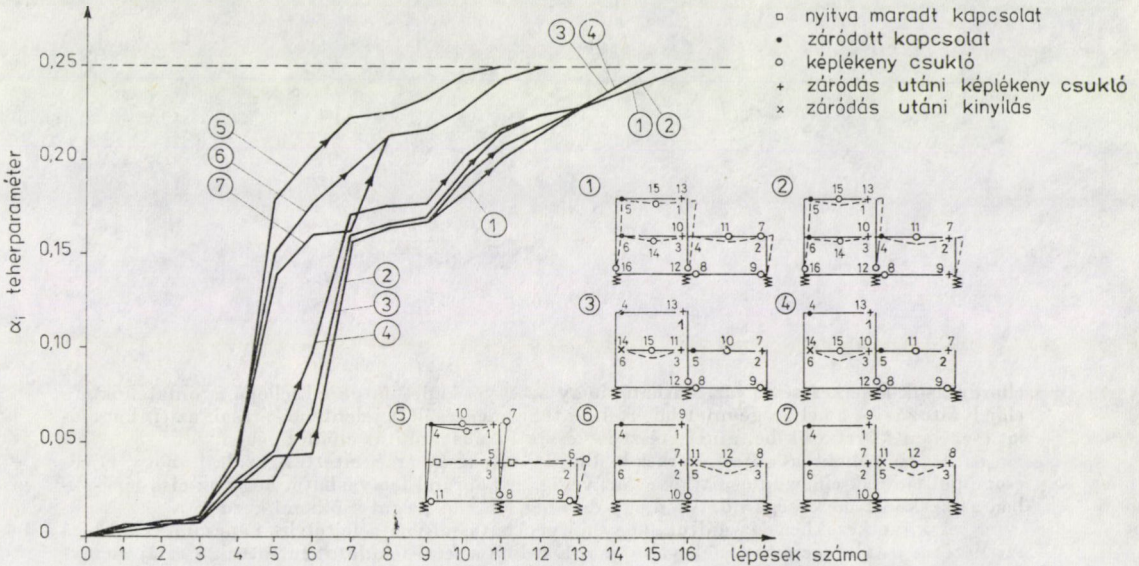
$$E_{talaj} = 10^3 \text{ KN/m}^2,$$

$$\nu_{szerk} = \nu_{talaj} = 0,15.$$

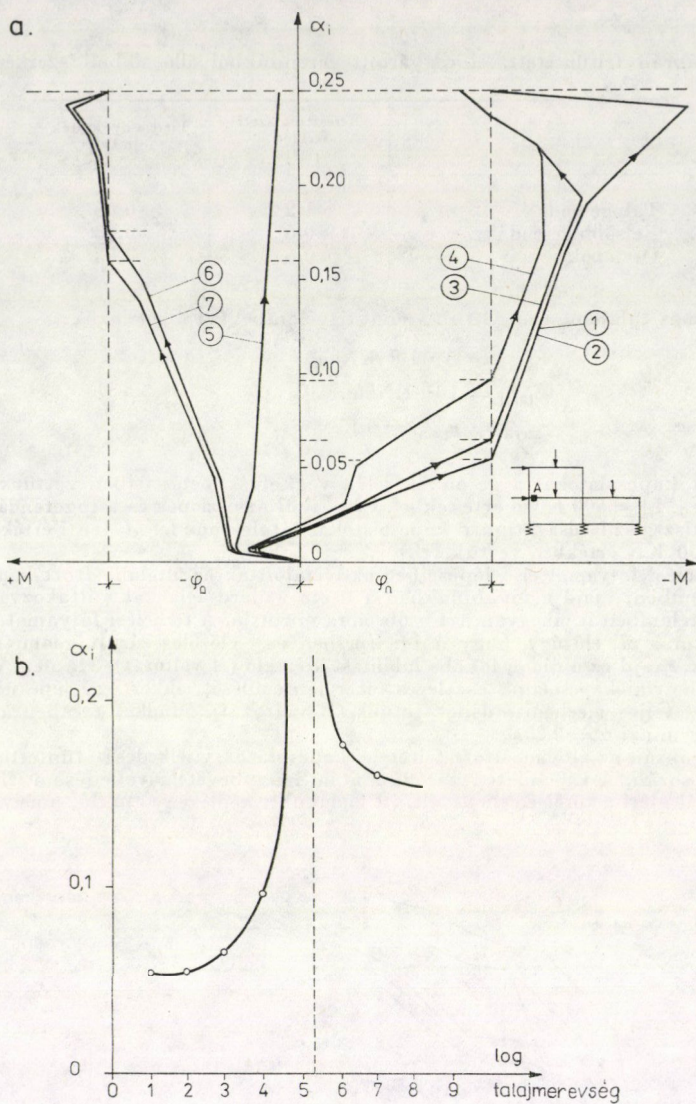
Általánosított kapcsolatokat a gerendák jelölt végkeresztmetszeiben vettünk fel, egyaránt $|\varphi_0| = 10^{-4}$ és $|M_t| = 500 \text{ KNm}$ értékekkel. Ezenkívül az oszlopok és talpgerendák végkeresztmetszeinél tiszta szilárdsági típusú kapcsolatokat tételeztünk fel M_t fenti értékével. A terhelést $F_0 = 1000 \text{ KN}$ értékben vettük fel.

A terhelési folyamat első lépéseiben aktivizálódtak az általánosított kapcsolatok geometriai értelemben, majd a továbbiakban a tiszta szilárdságiakkal váltakozva, némelyikük szilárdsági értelemben is, ahogyan azt a 6b. ábra mutatja. A terhelési folyamat végén részleges mechanizmus áll elő úgy, hogy a 14. lépésben egy előzőleg zárult geometriai kapcsolat ismét kinyílik, majd ez a rúdon lokális labilitást idéz elő (A változat). Ha nem vesszük figyelembe a geometriai kapcsolat esetleges tehermentesülését, akkor egy lépéssel tovább tart a folyamat és teljes mechanizmushoz jutunk (B változat). Mindkét esetben a végső teherparaméter ugyanaz: $\alpha = 0,25$.

A 7a. ábrán az általánosított feltételes kapcsolatok viselkedését tüntettük fel a terhelési folyamat során. A kapcsolatok záródása utáni igénybevételnövekedése a ② ④ és ⑥ jelű kapcsolatoknál eléri a törőigénybevételt, itt kialakul a képlékeny csukló, amely ismét relatív



8. ábra

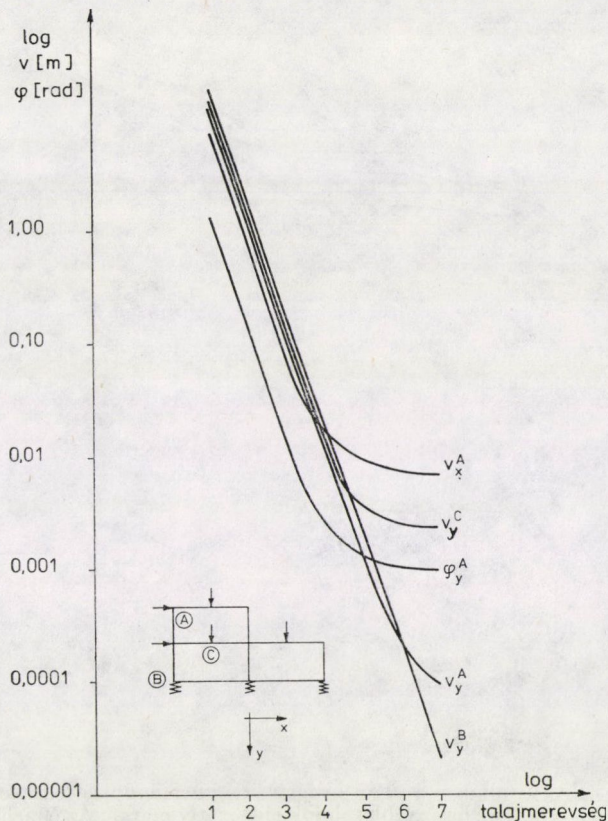


9. ábra

elfordulások keletkezésével jár. Látható, hogy az egyes kapcsolatoknál fellépő nyomatékokban előjelváltás — amely a geometriai értelmű tehermentesülést jelentené — csak az ① kapcsolat esetében következik be, amely részt is vesz a lokális labilitás előidézésében.

A 7b. ábrán a teljes szerkezet állapotváltozását érzékeltettük azáltal, hogy egyes csomópontjainak elmozdulásait követtük végig. Az ábráról leolvasható, hogy az első lépésekben a szerkezet merevsége nő, majd egy darabig állandó, végül csökkenni kezd.

A következőkben vizsgáltuk, hogy milyen hatással van a feltételes kapcsolatokkal bíró szerkezetre a talaj merevségének változása. E célból a fenti feladatot futtattuk a talaj merevségének csökkentése és növelése mellett. Ha a fenti talajmerekvést tekintjük egységnyinek, akkor az egyes vizsgálati lépésekhez tartozó merevségi szorzószám:

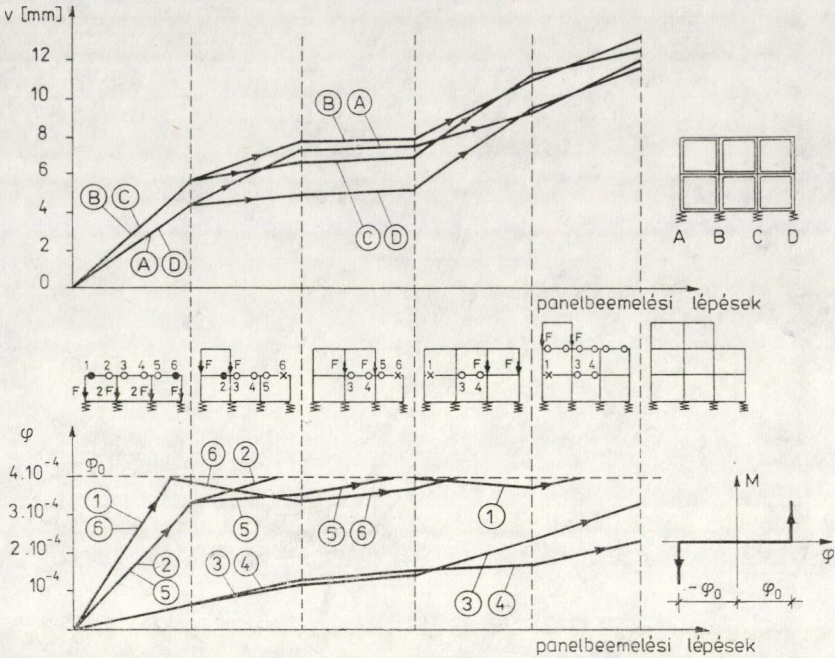


10. ábra

1	10^{-3}
2	10^{-2}
3	10^{-1}
4	1
5	10
6	10^2
7	10^3

A vizsgálat során azt tapasztaltuk, hogy a talaj merevségétől függően más-más lépésszámban és más-más sorrendben más-más teherparaméter mellett aktivizálódnak az egyes kapcsolatok, de a folyási mechanizmusok — amelyek szintén más-más alakban jönnek létre — mindig ugyanazon törőintenzitás mellett alakulnak ki. Ez — minthogy a talaj törésével nem foglalkozunk — várható volt. A 8. ábrán az egyes lépésekhez tartozó teherparaméterek változását, továbbá a kapcsolatok aktivizálódásának sorrendjét tüntettük fel.

A 9a. ábrán azt ábrázoltuk, hogy hogyan viselkedik egyetlen kapcsolat a talajmerekvség változásának függvényében. Az ábrán A-val jelölt általánosított kapcsolat záródási folya-



11. ábra

mata azt mutatja, hogy minden esetben negatív irányban indul a záródás, majd a puhább talajoknál átvág pozitívba, a keményebb talajoknál negatív marad. Az ⑤ jelű közepes keménységű talaj esetében igen nagy teherparaméter mellett záródik. Záródás után a megfelelő előjelű nyomatókrok lépnek fel, ezek változását is feltüntettük. A 9b. ábrán szemilogaritmikusan azt ábrázoltuk, hogy a vizsgált kapcsolat záródási teherparamétere hogyan függ a talajmerevségtől. Itt már jól látható, hogy az ⑤ és ⑥ közötti aszimptota arra utal, hogy létezik olyan talajmerevség, amely mellett egy kapcsolat nyitva marad bármely nagy teherérték mellett is.

A 10. ábrán a szerkezet jellemző pontjainak végső — a terhelési folyamat végén előálló — elmozdulásait ábrázoltuk logaritmikusan a talajmerevség függvényében. Érdekes megfigyelni, hogy lágyabb talajok esetében a végső elmozdulásokban a szerkezeti merevség alig játszik szerepet, míg keményebb talajoknál az elmozdulások már kevésbé korrelálnak a talpgerenda süllyedésével.

2. Példa

Az ismertett számítási eljárással lehetőség van a *többparaméteres* jellegű terhelési folyamat vizsgálatára is akkor, ha a terhelési folyamat szakaszokként egyparaméteres. Így követhető végig például egy, a panelek sorozatos beemelése folytán többparaméteres terhelésű épület állapotváltozása a terhelési folyamat során.

Példaként tekintünk azt a panelszerkezetű falat, amelyet a 6. ábra szerinti keretmodellel helyettesítettünk. A szerkezet anyagának és a talaj rugalmas tulajdonságainak jellemzői megegyeznek az ott közölt értékekkel.

A 11. ábrán a panelbeemelési folyamatot tüntettük fel, minden lépésben vizsgálva, hogy az addig felépült épület terhelésének megfelelően kialakult kapcsolati állapotban milyen változást okozott az új panel beemelése. Így az egyes terhelési lépéseket külön-külön vizsgálva, egy-egy egyparaméteres teher melletti vizsgálatról van szó. Ábránkon a terhelési folyamat első néhány panelbeemelési lépését követtük nyomon, feltüntetve az egyes kapcsolati állapotokat, valamint a támaszok süllyedésének változását.

IRODALOM

1. KALISZKY, S.: The Analysis of Structures with Conditional Joints. *J. Struct. Mech.* **6** (1978), 195—210
2. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Anwendung der Matrizenrechnung auf Stabwerke. Akadémiai Kiadó, Budapest 1978
3. KURUTZ, M.: Analysis of Plastic Load Capacity of Plane Frameworks by Kinematic Loading, *Periodica Polytechnica.* **18** (1974), 71—81
4. KURUTZ M.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek gépi számítása kinematikai terhekkel. *Magyar Építőipar* **24** (1975), 455—461
5. KALISZKY S.: Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest 1975
6. NÉDLI, P.: Elasto-plastic Analysis of Frames by Wolfe's Short Algorithm. *Periodica Polytechnica* **20** (1976), 127—134.
7. KALISZKY, S.—NÉDLI, P.: Analysis of Elasto-plastic Structures by Mathematical Programming. *Acta Techn. Hung.* **83** (1976), 205—212
8. KALISZKY S.: Panelvázás épületek vizsgálata diszkrét modellek segítségével. *Építés- és Építészettudomány II* (1979), 187—207
9. NÉDLI P.: Lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagú rúdszerkezetek számítása matematikai programozással. Egyetemi doktori értekezés. Budapest 1976.

State Change Analysis of Structures with Generalized Conditional Joints. — This paper presents a running time saving method for tracking the state change of structures with generalized conditional joints, on the basis of the original stiffness matrix of the structure. It points out that the problem leads to linear complementary problem corresponding to a quadratic programming problem, as well as that the presented method making use in the solution of the kinematic loads, is an obvious variant of the simplex algorithm. The use of the method is demonstrated by a great number of numerical examples.

Untersuchung der Zustandsänderung von Konstruktionen mit verallgemeinerten, bedingten Verbindungen. — Die vorliegende Abhandlung behandelt eine Methode, mit deren Hilfe bei der Zustandsänderungsuntersuchung eine Maschinenzersparnis erreicht werden kann, wobei die Konstruktionsuntersuchung in jedem einzelnen Schritt, aufgrund der Steifheitsmatrix durchgeführt wird. Es wird nachgewiesen, daß die Aufgabe zu einem der quadratischen Programmierungsaufgabe entsprechenden Linearkomplementäproblem führt und daß die dargestellte die kinematischen Belastungen benutzende Lösungsmethode eine offenbare Variante des Simplexalgorithmus ist. Die Anwendung der Methode wird durch ein reichliches Beispielmateriale illustriert.

PANELSZERKEZETEK HATÁRÁLLAPOT-VIZSGÁLATA SZTOCHASZTIKUS PROGRAMOZÁSSAL

VÁSÁRHELYINÉ DR. SZABÓ ANNA*

[Beérkezett: 1981. március 3-án]

Paneles szerkezetek lineáris rugókkal összekapcsolt merev testek sorozatával modellezhetők. A határállapot vizsgálata abban az esetben, ha a kapcsoló rugók folyási határa valószínűségi változó, sztochasztikus programozási feladatra vezet. A dolgozat bemutatja a feladat mechanikai és matematikai megfogalmazását, valamint a megoldás számítógépes módszerét egy mintafeladaton.

1. Bevezetés

Paneles szerkezetek erőjátékát a kapcsolatok kialakítása döntő mértékben befolyásolja. Míg a panelek házgyárakban, jól ellenőrizhető technológia mellett készülnek, a kapcsolatokat a helyszínen szerelik. Így itt az anyagállandók szórása lényegesen nagyobb. A következőkben azt vizsgáljuk, hogy a kapcsolatok folyási határának bizonytalansága milyen hatással van képlékeny állapotban a szerkezet törőparaméterének értékére.

Egyszerűség kedvéért síkbeli panelszerkezetekkel foglalkozunk. A kapcsolatok folyási határát valószínűségi változóknak tekintjük. Az ismertetendő módszer lényegesen bonyolultabb, mintha a folyási határt adott állandónak tekintenénk, azonban a számítási eredmények azt mutatják, hogy determinisztikus feltételezés esetén a biztonság kárára követünk el hibát.

2. Feltételezések és a feladat mechanikai váza

Számításainkat a merevtest modell alapján végezzük [1]. Vagyis a paneleket merev testeknek tételezzük fel, melyeket lineáris rugók kapcsolnak össze. Egy panelél mentén a keletkező húzó-nyomó, ill. nyíró erőket az 1. ábra szerint három rugóval vesszük fel.

Feltételezzük:

- a) a szerkezet terhelése egyparaméteres, kinematikai teher nem hat.
- b) minden egyes rugó alsó és felső folyási határa valószínűségi változó, ismert várható értékkel és szórással.
- c) az egy-egy panelél mentén levő rugók folyási határai nem független valószínűségi változók, korrelációs mátrixuk adott.
- d) a felső és alsó folyási határ független valószínűségi változók.

* Vásárhelyi Péterné, 1126 Budapest, Kiss János alt. u. 34

Határállapot problémák általános megoldási módszere a matematikai programozás. E módszer használatát a statikai és kinematikai tétel teszi lehetővé. Feladatunkat a statikai tétel alapján oldjuk meg, mely szerint a teherparaméter maximális értéke kisebb a törőparaméter értékénél vagy egyenlő azzal. Írjuk fel a szerkezet egyensúlyi egyenletét:

$$\mathbf{G}^* \cdot \mathbf{s} + \alpha \cdot \mathbf{q} = 0$$

Itt n : rugók száma
 m : panelek száma
 \mathbf{G}^* [$3m, n$]: szerkezet geometriai mátrixa
 \mathbf{s} [n]: belső erők mátrixa
 \mathbf{q} [$3m$]: terhelés mátrixa
 α : teherparaméter

Minden egyes erőre korlátot jelent az alsó [k_a] és felső [k_f] folyási határ értéke

$$k_a(i) \leq s(i) \leq k_f(i).$$

Keressük a teherparaméter maximális értékét

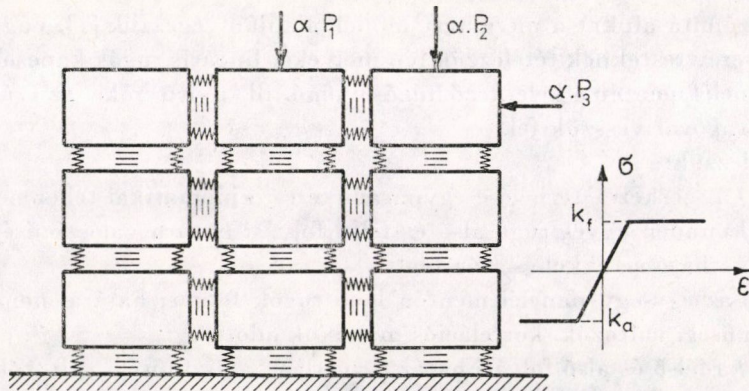
$$\alpha \rightarrow \max.$$

Az így felállított feladat, ha eltekintünk a feltételektől, lineáris programozási feladat.

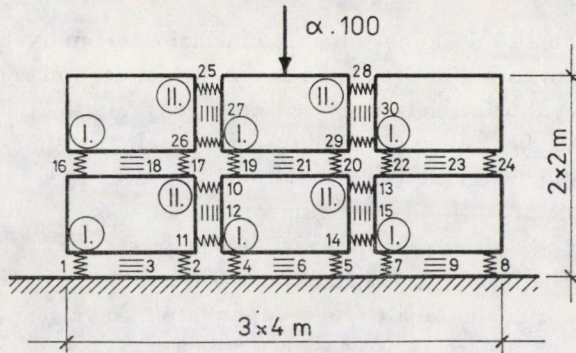
3. A feladat megoldásának matematikai módszere

Sztochasztikus programozásról beszélünk, ha a lineáris vagy nemlineáris programozás legalább egy paramétere valószínűségi változó.

Feladatunk valószínűséggel korlátozott sztochasztikus programozási feladat. Ennek matematikai modelljét PRÉKOPA [2] állította fel.



1. ábra



2. ábra

Feladatunk esetében

$$G^* \cdot s + \alpha q = 0,$$

$$P(k_a \leq s \leq k_f) \geq p,$$

$$(-\alpha) \rightarrow \min,$$

ahol p egy előírt valószínűségi érték.

A „ d ” feltétel miatt — k_a és k_f független valószínűségi változók — a sztochasztikus feltétel a következő alakban írható:

$$P(k_a \leq s) P(s \leq k_f) \geq p.$$

A szorzat első tényezője definíció szerint az eloszlásfüggvény függvényértéke s -nél. A második tényező egyenlőtlenségét — l -gyel szorozva, szintén eloszlásfüggvény függvényértéke — s -nél:

$$P(k_a \leq s) P(-k_f \leq -s) \geq p.$$

Az ismert várható értékek és szórások felhasználásával standard normális eloszlásra transzformáljuk a feltételt. Bevezetve a

$$\xi(i) = \frac{k_a(i) - E_k(i)}{D_{k_a}(i)} \quad \eta(i) = \frac{-k_f(i) + E_{k_f}(i)}{D_{k_f}(i)}$$

$$\tilde{s}(i) = \frac{s(i) - E_{k_a}(i)}{D_{k_a}(i)} \quad \tilde{\tilde{s}}(i) = \frac{-s(i) + E_{k_f}(i)}{D_{k_f}(i)}$$

jelöléseket, a sztochasztikus feltétel alakja:

$$P(\xi(i) \leq \tilde{s}(i), i = 1 \dots f) P(\eta(i) \leq \tilde{\tilde{s}}(i), i = 1, \dots, f) \geq p.$$

További kérdés, hány képlékenységi feltétel együttes bekövetkezését tartalmazza egy sztochasztikus feltétel, vagyis mennyi legyen az f értéke.

Ha $f = n$, akkor az összes képlékenységi feltételt egyetlen sztochasztikus feltétel tartalmazza. Ez lenne a feladat szempontjából a legjobb, a való-

sághoz legközelebb álló. Ekkor azonban n dimenziós normális eloszlás függvény értékét kell kiszámítani, ámde ez a művelet $n = 9$ felett, ami szerkezetek esetén mindig fennáll, gyakorlatilag a nagy számításigény miatt kivihetetlen.

Ha $f = 1$, vagyis ha egy képlékenységi feltételt tartalmaz egy sztochasztikus feltétel, akkor a feladat leegyszerűsödik ugyan, de egyrészt a változók közti korrelációt nem tudjuk figyelembe venni, másrészt — mint PRÉKOPA [2] bebizonyítja, nagy az elhanyagolás a biztonság kárára.

Az $f = 3$ választást — amit a „c” feltétel tartalmaz — a fenti okok indokolják. Így az egy panelél mentén levő kapcsolatok korrelációját — ami a legszorosabb, mivel kivitelezésük egyszerre történik — figyelembe tudjuk venni, ugyanakkor csak 3 dimenziós normális eloszlásfüggvény-értéket kell számítani.

Vagyis a megoldandó feladat:

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \alpha \cdot \mathbf{q} = 0$$

$$P(\xi_i < \bar{s}_i, i = k + 1, k + 2, k + 3)_j P(\eta_j < \bar{s}_j, j = k + 1, k + 2, k + 3) \geq p_j, \\ j = 1 \dots n/3, \\ (-\alpha) \rightarrow \min \quad k = 3(j - 1).$$

Ezt a sztochasztikus programozási feladatot a FIACCO és MCCORMICH által kidolgozott SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) módszerrel oldottuk meg. Ezzel az eljárással az alábbi büntető függvény minimumát lehet megkeresni

$$P(\mathbf{x}^{(k)}, r^{(k)}) = F(\mathbf{x}^{(k)}) + \frac{1}{r^{(k)}} \sum_{i=1}^n H_i^2(\mathbf{x}^k) - r^k \sum_{i=n+1}^m \ln G_i(\mathbf{x}^k),$$

ahol $F(\mathbf{x})$ célfüggvény
 H_i i -edik egyenlőségi feltétel
 G_i i -edik egyenlőtlenségi feltétel

Az $r^{(i)}$ pozitív súlyfaktorok az iteráció során monoton csökkenő sorozatot alkotnak ($r^{(0)} > r^{(1)} > r^{(2)} > 0$).

A minimumkeresés gradiens módszerrel történik.

A háromdimenziós, adott korrelációjú standard normális eloszlásfüggvény értékét MILTON [3] módszerével határozzuk meg. A háromdimenziós normális eloszlásfüggvényt transzformáltuk egy kétdimenziós függvény improprius integráljának és egy egydimenziós normális eloszlásfüggvénynek a szorzatára. Az utóbbi közvetlenül számítható, a kétdimenziós integrálást Simpson szabállyal közelítettük.

A háromdimenziós normális eloszlásfüggvény gradiens számítását SZÁNTAI [4] levezetése alapján visszavezettük kétdimenziós normális eloszlásfüggvény függvényértékének meghatározására.

4. Numerikus tapasztalatok

Az ismertetett eljárással oldottuk meg a következő feladatot:

A vízszintes panelelék mentén levő I. típusú kapcsolatok, a függőlegesek mentén levő II. típusú kapcsolatok adatai a következők:

	Húzási, ill. nyomási rúgók				Nyírási rúgók			
	E_{k_a}	D	E_{k_j}	D	E_{k_a}	D	E_{k_j}	D
I. típus	-80	1	6	1	-7	0,5	7	0,5
II. típus	-50	1	20	1	-5	0,5	5	0,5

Korrelációs mátrix az egy él mentén levő rugók közt:

$R =$	Húzás, nyomás	Húzás, nyomás	Nyírás
Húzás, nyomás	1	0,2	0,7
Húzás, nyomás	0,2	1	0,7
Nyírás	0,7	0,7	1

A sztochasztikus feltételeknél $P \geq 0,95$.

A feladatot mind sztochasztikus változókat feltételezve, mind a folyási határokat determinisztikusnak véve megoldottuk.

Eredmények egyes rugóerőknél:

	s_1	s_2	s_3	s_{12}	s_{13}	s_{23}	s_{123}	α
Determinisztikus eset	12,7	-21,3	-3,7	-76,39	-32,1	20,0	5,0	1,63
Sztochasztikus eset	10,3	-20,7	-5,2	-73,42	-35,7	18,6	4,76	1,47

Mint látható, a jelenlegi szórásadatok esetében a teherparaméter értéke nem lényegesen kisebb sztochasztikus esetben, mint determinisztikus esetben. Ugyanakkor nagy eltérések mutatkoznak az egyes rugóerőknél, ami a korreláció feltételezésének eredménye.

A program CDC-3300-as gépen futott, 3064 sec. CPU időt vett a számítás igénybe. A konvergencia gyorsasága a kezdővektor felvételétől erősen függ.

IRODALOM

1. KALISZKY, S.: Analysis of Panel Buildings by the Use of Rigid Panel Model. *Periodica Polytechnica* (1979), II
2. PRÉKOFA A.: Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról. Matematikai doktori értekezés, Budapest 1970

3. MILTON, R. G.: Computer Evaluation of the Multivariate Normal Integral. *Technometrics* 4 (1972), No 4
4. SZÁNTAI T.: Egy eljárás a többdimenziós, normális eloszlásfüggvény és gradiense értékeinek meghatározására. *Alkalmazott Matematikai Lapok* (1976) 2
5. BOLOTIN, V. V.: Statisztikai módszerek a szerkezetek mechanikájában. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1970

Plastic Limit State Analysis of Panel Constructions by Stochastic Programming. — Panel constructions can be modeled by a series of rigid elements connected by linear springs. The investigation of the limit state, in case where the yield stress of the connecting springs is a random variable, leads to a stochastic programming problem. The paper presents the mechanical and mathematical formulation as well as the computerized method to the solution on an example.

Grenzzustandsuntersuchung von Paneelkonstruktionen mit Hilfe stochastischer Programmierung. — Paneelkonstruktionen können durch Serien von mit Linearfedern verbundenen Starrkörpern modelliert werden. Die Untersuchung des Grenzzustands führt im Fall, wo die Fließgrenze der verknüpfenden Federn eine Zufallsänderliche ist, zu einer stochastischen Programmfertigungsaufgabe. Die Abhandlung stellt die mechanische und die mathematische Formulierung, sowie die Rechenmaschinenmethode der Lösung durch ein Zahlenbeispiel dar.

LONGITUDINÁLISAN REZGŐ VISZKOELASZTIKUS RÚD LÁTSZÓLAGOS KOMPLEX YOUNG-MODULUSA*

PRITZ TAMÁS**

[Beérkezett: 1981. február 6-án]

A Love-féle közelítő elmélet alapján tárgyaljuk viszkoelasztikus rudak longitudinális rezgését azokon a frekvenciákon, amelyeken az oldalirányú méret összemérhető a viszkoelasztikus hullám hosszával. Meghatározzuk azt a frekvenciatartományt, amelyben a Love-féle elmélet jó közelítést ad, és közöljük a közelítés hibáját. Az elmélet szerint a hullámterjedést a viszkoelasztikus rúdban az anyag komplex Young-modulusának egy látszólagos értéke szabályozza nagyobb frekvenciákon, az oldalirányú mozgás következtében. Megmutatjuk, hogy a látszólagos dinamikai Young-modulus kisebb, a látszólagos veszteségi tényező pedig nagyobb, mint az anyag valódi jellemzője. A látszólagos és valódi értékek eltérése az oldalirányú méretnek és a hullámhossznak az arányától, valamint az anyag komplex rugalmas állandóitól függ.

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az ideálisan rugalmas vagy viszkoelasztikus anyagú rudak longitudinális rezgését az elemi rúdelmélet csak addig a frekvenciáig írja le kielégítő pontossággal, amíg a rúd oldalirányú mozgásának hatását el lehet hanyagolni, azaz amíg az oldalirányú méret jóval kisebb, mint a hullámhossz. Ezekon a frekvenciákon a fázissebesség pl. a rugalmas rúdban az anyag dinamikai Young-modulusával arányos és a frekvenciától függetlenül állandó, feltéve, hogy a Young-modulus se függ a frekvenciától. A rugalmas rudak longitudinális rezgését tárgyaló pontosabb elméletekből [1–10] és ezek kísérleti ellenőrzéséből [11–14] ismeretes, hogy a fázissebesség csökken azokon a nagyobb frekvenciákon, amelyeken az oldalirányú méret összemérhetővé válik a hullámhosszal. Ezt a jelenséget úgy is lehet értelmezni, hogy ekkor a rugalmas hullám terjedését nem közvetlenül az anyag Young-modulusa, hanem annak egy látszólagos — kisebb — értéke szabályozza. A rugalmas anyagú rudakra kidolgozott elméleteket viszonylag egyszerűen lehet általánosítani a viszkoelasztikus rudakra is oly módon, hogy a rugalmas állandókat a komplex megfelelőekkel helyettesítjük [15–18]. Ezzel a módszerrel elméletileg kimutatták, hogy a viszkoelasztikus rudak csillapítási állandója növekszik az oldalirányú mozgás hatására a fázissebesség csökkenése mellett [16, 17]. Ezt a jelenséget

* A 7. Akusztikai Kollokviumon (Budapest 1979. március 26–30) tartott előadás átdolgozott anyaga.

** Pritz Tamás, 1158 Budapest, Órjárt u. 27/Á.

korábban már kísérletileg is tapasztalták [19]. Ebből következik, hogy a hullámterjedést a viszkoelasztikus rúdban a nagyobb frekvenciákon nem közvetlenül az anyag komplex Young-modulusa, azaz a dinamikai Young-modulusa és veszteségi tényezője, hanem ezek látszólagos értékei szabályozzák [17].

Ebben a cikkben viszonylag egyszerű módon levezetjük és megvizsgáljuk a viszkoelasztikus rudak látszólagos komplex Young-modulusát azzal a feltételezéssel, hogy valamennyi rugalmas állandó komplex mennyiség. Az itt közölt egyszerű analízis a Love-féle rúdelméleten alapul, amely matematikailag viszonylag egyszerű, bár nem pontos, de gyakorlati szempontból jó közelítéssel írja le a hullámterjedést abban a frekvenciatartományban, ahol az oldalirányú méret kisebb, mint a hullámhossz [1, 3, 17, 18]. Ezért a látszólagos komplex Young-modulus vizsgálata előtt meghatározzuk azt a frekvenciatartományt, amelyben a Love-féle elmélet jó közelítést ad és itt a közelítés hibáját. Az itteni elméleti vizsgálat eredményei közvetlenül felhasználhatók a gyakorlatban azoknál a méréseknél, amelyek során viszkoelasztikus anyagok komplex Young-modulusát határozzák meg rúdszerű próbatestek longitudinális rezgésének vizsgálatával.

2. A Love-féle elmélet

A Love-féle elmélet csak közelítő pontossággal és csak korlátozott frekvenciatartományban írja le a rudak longitudinális, lineáris rezgését az oldalirányú mozgás számításbavételével. Ezért az elmélet alkalmazása előtt meghatározzuk azt a frekvenciatartományt, ahol jó közelítést kapunk és meghatározzuk itt a közelítés hibáját. Ezt oly módon végezzük, hogy összehasonlítjuk a közelítő Love-féle elmélet és egy pontos elmélet alapján számított fázissebesség — illetve a csillapítási állandó-frekvencia függvényeket. Ezelőtt azonban áttekintjük röviden az elemi és a Love-féle elméletet.

A legegyszerűbb elemi elmélet nem veszi számításba a rúd oldalirányú mozgásának hatását. A longitudinális hullámmozgást leíró differenciálegyenlet levezetésekor feltételezik, hogy a tengelyirányú feszültség és deformáció hányadosa az anyag Young-modulusával egyenlő. Szinuszos rezgőmozgás esetében a differenciálegyenlet az alábbi:

$$\frac{d^2 \hat{\xi}(x)}{dx^2} = -\frac{\rho}{E} \omega^2 \hat{\xi}(x), \quad (1)$$

ahol

$\hat{\xi}$ az x irányú (a rúd hossz tengelyének az iránya) rezgéselmozdulás komplex amplitúdója,
 $\omega = 2\pi f$; f a frekvencia Hz-ben,

ρ a sűrűség és

E a Young-modulus, amely általános esetben komplex mennyiség, azaz

$$E = E_d(1 + j\eta_E). \quad (2)$$

Itt

E_d az anyag dinamikai Young-modulusa,

η_E a veszteségi tényező és

$j = \sqrt{-1}$ a képzetes egység.

A differenciálegyenlet megoldásával a viszkoelasztikus hullám fázissebességére az alábbi összefüggést kapjuk:

$$c_f = c_{f_0} \frac{\sqrt{2} D}{\sqrt{D+1}}, \quad (3)$$

ahol c_{f_0} a fázissebesség az ideálisan rugalmas anyagú (veszteség nélküli) rúdiban:

$$c_{f_0} = \sqrt{\frac{E_d}{\rho}}, \quad (4)$$

továbbá

$$D = \sqrt{1 + \eta_E^2}. \quad (5)$$

A csillapítási állandó pedig

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E_d} \frac{\sqrt{D-1}}{\sqrt{2} D}}. \quad (6)$$

A fenti fázissebesség nem függ a frekvenciától, a csillapítási állandó pedig lineárisan arányos azzal, feltéve, hogy mind a dinamikai Young-modulus, mind a veszteségi tényező a frekvenciától függetlenül állandó. Az elemi elmélet ezen következtetései azonban csak addig a frekvenciáig érvényesek, amíg a rúd oldalirányú mérete jóval kisebb, mint a hosszirányban terjedő hullám hossza.

A Love-féle közelítő elmélet számításba veszi bizonyos mértékben a rúd oldalirányú mozgásának hatását. A Love-féle differenciálegyenlet az alábbi [1, 3, 4, 17, 18]:

$$\rho \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - (v_i)^2 \frac{\partial^4 \xi}{\partial x^2 \partial t^2} \right] = E \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^2}, \quad (7)$$

ahol

t az idő,

ν a Poisson-szám

i a rúd keresztmetszetének az x tengelyre számított inerciasugara. (Körkeresztmetszet esetében $i = a/2\sqrt{2}$, ahol a az átmérő; négyzetkeresztmetszet esetében, $i = b/\sqrt{6}$, ahol b az oldalhosszúság.)

A Love-féle elméletet eredetileg rugalmas rudakra dolgozták ki [1], de azt egyszerűen lehet általánosítani a viszkoelaszticitásra oly módon, hogy a rugalmas állandókat a komplex megfelelőikkel helyettesítjük. Teljesen általános esetben a Poisson-szám is komplex, azaz

$$\nu = \nu_d(1 + j\eta_\nu), \quad (8)$$

ahol ν_d a dinamikai Poisson-szám és η_ν a hozzátartozó veszteségi tényező. Szinuszos rezgés esetében a Love-féle differenciálegyenlet az alábbi alakban írható:

$$\frac{d^2 \hat{\xi}(x)}{dx^2} = - \frac{\varrho}{E \left[1 - \frac{\varrho}{E} (\omega \nu i)^2 \right]} \omega^2 \hat{\xi}(x). \quad (9)$$

A fázissebességet és a csillapítási tényezőt a (9) differenciálegyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Jelöljük ezeket c_f -vel, illetve α' -vel. Azokat az összefüggéseket, amelyeket most átrendezett formában az itteni jelölésekkel felhasználtunk korábban SNOWDON [18] vezette le. A c_f fázissebességet és az α' csillapítási tényezőt a c_f -re, illetve az α -ra normalizált formában adjuk meg:

$$\frac{c_f'}{c_f} = \left[\frac{A + (A^2 + B^2)^{1/2}}{2} \right]^{-1/2}, \quad (10)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = - \frac{1}{d} \left[\frac{-A + (A^2 + B^2)^{1/2}}{2} \right]^{1/2}, \quad (11)$$

ahol

$$A = \frac{(1 - d^2)\Gamma - 2d\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2}, \quad (12)$$

$$B = \frac{-(1 - d^2)\Omega - 2d\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2}, \quad (13)$$

$$\Gamma = 1 - \frac{4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda_0'} \right)^2}{1 + 4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda_0'} \right)^2} \left(\frac{\sqrt{D+1}}{\sqrt{2}D} \right)^2 [(1 - d^2)(1 - \eta_\nu^2) + 4d\eta_\nu], \quad (14)$$

$$\Omega = 2 \frac{4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda_0'} \right)^2}{1 + 4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda_0'} \right)^2} \left(\frac{\sqrt{D+1}}{\sqrt{2}D} \right)^2 [d(1 - \eta_\nu^2) - (1 - d^2)\eta_\nu] \quad (15)$$

és

$$d = \sqrt{\frac{D-1}{D+1}}. \quad (16)$$

Ezekben az egyenletekben bevezettük az i/λ_0' mennyiségét, mint változót, ahol λ_0' a hullámhossz az ideálisan rugalmas anyagú rúdban az oldalirányú mozgás számításbavételével.

A közelítő Love-féle elmélet frekvenciatartományának és pontosságának vizsgálata elvégezhető oly módon, hogy a fenti összefüggésekkel számítható

fázissebesség és csillapítási tényező értékeket összehasonlítjuk azokkal, amelyeket egy pontos elmélet alapján számítunk. Rudak longitudinális rezgését a Pochhammer—Chree-elmélet [3–9] írja le pontosan, amely azonban csak végtelen hosszú rugalmas rudakra vonatkozik, és a viszkoelaszticitásra történő általánosítása matematikailag igen bonyolult [16]. Mivel a szakirodalomból csupán a hengeres, rugalmas rúd pontos fázissebesség függvénye ismeretes — amelyet a pontos Pochhammer—Chree-féle frekvenciaegyenlet megoldásával határoztak meg [9] —, ezért a Love-féle elmélet vizsgálatát is az ezzel való összehasonlítás alapján végezzük.

Az ideálisan rugalmas anyagú rúd fázissebességét a Love-féle elmélet alapján a (10), (12)–(16) egyenletekből kapjuk az $\eta_E = 0$ és $\eta_\nu = 0$ helyettesítésével. Így:

$$\frac{c'_{f_0}}{c_{f_0}} = \left[1 + 4\pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{i}{\lambda'_0} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (17)$$

amely hengeres rúd esetében:

$$\frac{c'_{f_0}}{c_{f_0}} = \left[1 + \frac{1}{2} \pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{a}{\lambda'_0} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (18)$$

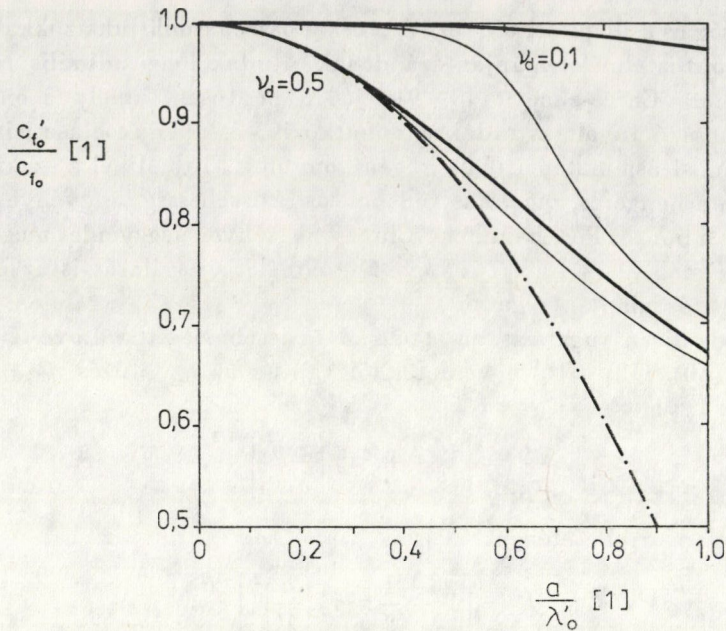
Ez utóbbi egyenlet gyakran az alábbi formában használatos:

$$\frac{c'_{f_0}}{c_{f_0}} \cong 1 - \frac{1}{4} \pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{a}{\lambda'_0} \right)^2, \quad (19)$$

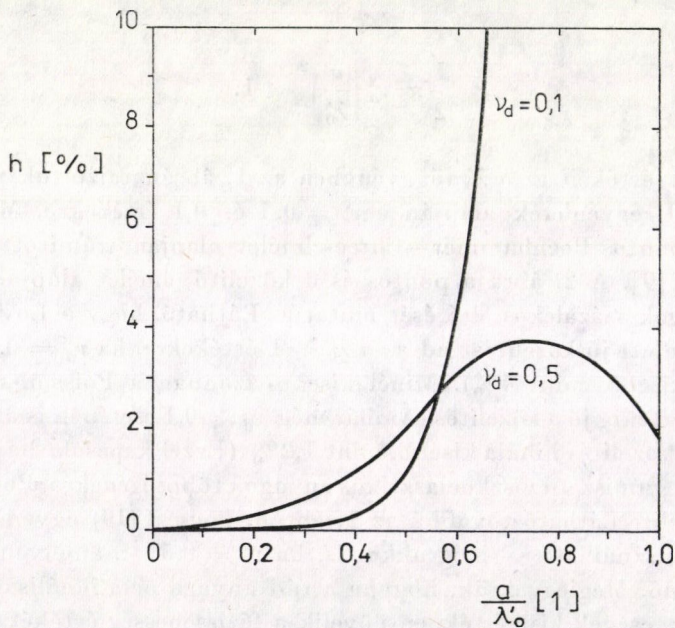
feltéve, hogy:

$$\frac{1}{2} \pi^2 \nu_d^2 \left(\frac{a}{\lambda'_0} \right)^2 \ll 1.$$

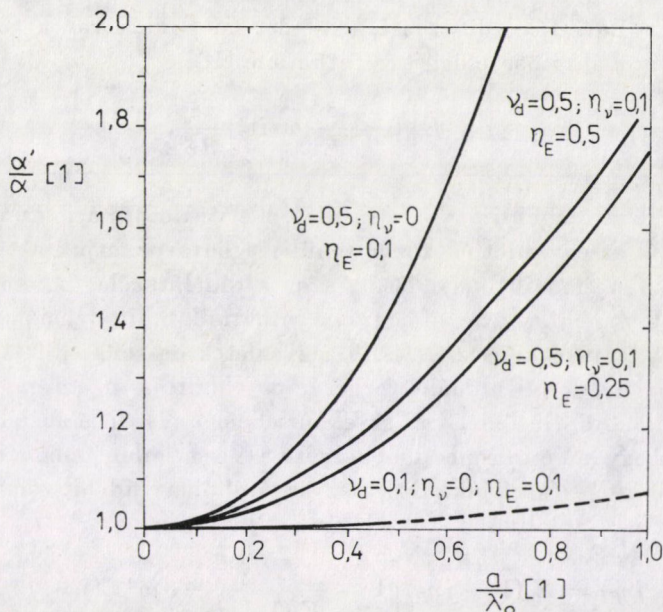
A c'_{f_0}/c_{f_0} értékeit az a/λ'_0 függvényben az 1. ábrán rajzoltuk meg a (18), illetve a (19) egyenletek alapján a $\nu_d = 0,5$ és $0,1$ értékekre. Megrajzoltuk ugyanitt a pontos Pochhammer—Chree-elmélet alapján számított c'_{f_0}/c_{f_0} függvényeket is [9]. A 2. ábra a pontos és a közelítő elmélet alapján számított fázissebességek százalékos eltérését mutatja. Látható, hogy a Love-féle elmélet (18 egyenlet) jó közelítést ad az $a/\lambda'_0 < 1$ értékekre, ha $\nu_d = 0,5$ (a közelítés hibája kisebb, mint 4%). Minél kisebb azonban a Poisson-szám, annál kisebb a/λ'_0 értékig jó a közelítés. Ámbár még $\nu_d = 0,1$ esetében is az $a/\lambda'_0 < 0,5$ értékekre a közelítés hibája kisebb, mint 1,2%. (Ezzel kapcsolatban megemlítjük, hogy a gumyszerű viszkoelasztikus anyagok többségének a Poisson-száma 0,5-höz közeli.) Látható továbbá az 1. ábrán, hogy a (19) egyenlet csak kb. 0,5 a/λ'_0 -ig használható — még akkor is, ha $\nu_d = 0,5$ —, amelyen túl a hiba rohamosan nő. Megjegyezzük, hogyha a rúd anyaga nem ideálisan rugalmas, akkor a veszteségek kismértékben növelik a fázissebesség értékét [17], és így befolyásolhatják a Love-féle közelítés hibáját is.



1. ábra. A longitudinális hullám fázissebessége hengeres, ideálisan rugalmas rudakban. c_{t_0}' : fázissebesség az oldalirányú mozgás elhanyagolásakor (elemi elmélet), c_{t_0} : fázissebesség az oldalirányú mozgás számításbavételével; —, Pochhammer—Chree-elmélet [9]; — — — és - · - · -, Love-elmélet, (18), illetve (19) egyenlet



2. ábra. A fázissebességek százalékos eltérése. $h = [c_{t_0}'(L.) / c_{t_0}'(P. C.) - 1] \cdot 100$ [%], ahol $c_{t_0}'(L.)$ és $c_{t_0}'(P. C.)$ a közelítő Love-elmélet és a pontos Pochhammer—Chree-elmélet [9] alapján számított fázissebesség



3. ábra. A longitudinális hullám csillapítási tényezője hengeres, viszkoelasztikus rudakban α : csillapítási tényező az oldalirányú mozgás elhanyagolásakor (elemi elmélet), α' : csillapítási tényező az oldalirányú mozgás számításbavételével (Love-elmélet)

A teljesség kedvéért a 3. ábrán megrajzoltuk néhány hengeres, viszkoelasztikus rúd normalizált csillapítási tényezőjét (α'/α) az a/λ_0 függvényében. A számításokat a (11) . . . (16) összefüggésekkel végeztük. Látható, hogy a viszkoelasztikus rúd csillapítási tényezője nő az oldalirányú mozgás következtében, és a növekedés mértéke függ a rúd anyagának dinamikai jellemzőitől (ν_d, η_ν, η_E) is.

3. A látszólagos komplex Young-modulus

Láttuk, hogy nagyobb frekvenciákon az oldalirányú mozgás következtében a viszkoelasztikus rúdban a fázissebesség kisebb, a csillapítási tényező pedig nagyobb annál, mint ami az elemi elméletből következik. A fázissebesség alapvetően az anyag dinamikai Young-modulusával, a csillapítási tényező pedig a veszteségi tényezővel kapcsolatos. Ezért ezeken a frekvenciákon a viszkoelasztikus hullám terjedését a rúdban úgy is tekinthetjük, hogy azt nem közvetlenül az anyag komplex Young-modulusa, hanem annak egy látszólagos értéke szabályozza. Erre a tényre először PLASS és STEYER [3] hívta fel a figyelmet, akik a Love-féle elmélet alapján igazolták, hogy rugalmas anyagú rúdban az oldalirányú mozgás következtében a tengelyirányú feszültség és deformáció hányadosa nem azonos a Young-modulussal. A viszkoelaszticitásra

általánosított Love-féle differenciálegyenlet megoldásával a tengelyirányú feszültségre az alábbi összefüggés vezethető le [18]

$$\hat{\sigma} = E \left[1 - \frac{\rho}{E} (\omega v i)^2 \right] \frac{d\hat{\xi}}{dx}, \quad (20)$$

ahol $\hat{\sigma}$ és $d\hat{\xi}/dx$ a tengelyirányú feszültség, illetve deformáció komplex amplitúdója. Ebből az egyenletből közvetlenül meghatározhatjuk a tengelyirányú feszültség és deformáció hányadosát, azaz a rúd látszólagos komplex Young-modulusát. Ugyanehhez az eredményhez juthatunk a differenciálegyenlet megoldása nélkül, egyszerűen az (1) és (9) egyenletek összehasonlításával is. Látható, hogy a rúd longitudinális rezgését az oldalirányú mozgás figyelembevételével formálisan le lehet írni az elemi elmélet (1) differenciálegyenletével oly módon, hogy a Young-modulus helyére a (9) egyenlet jobb oldalának nevezőjében lévő kifejezést írjuk. Ezért ez az utóbbi a rúd látszólagos komplex Young-modulusa, amelyet E' -vel jelölünk. Tehát

$$E'_d(1 + j\eta'_E) = E_d(1 + j\eta_E) \left[1 - \frac{\rho}{E_d(1 + j\eta_E)} \omega^2 v_d^2 (1 + j\eta_\nu)^2 i^2 \right]. \quad (21)$$

A valós és képzetes részek szétválasztása után megkapjuk a rúd látszólagos dinamikai Young-modulusát és veszteségi tényezőjét. Ezeket célszerűen az anyag valódi dinamikai jellemzőire normalizálva adjuk meg:

$$\frac{E'_d}{E_d} = 1 - \frac{\rho}{E_d} \omega^2 (v_d i)^2 (1 - \eta_\nu^2), \quad (22)$$

$$\frac{\eta'_E}{\eta_E} = \frac{1 - \frac{\rho}{E_d} \omega^2 (v_d i)^2 2 \frac{\eta_\nu}{\eta_E}}{1 - \frac{\rho}{E_d} \omega^2 (v_d i)^2 (1 - \eta_\nu^2)}. \quad (23)$$

Gyakorlati szempontból célszerű a hullámhossz függvényében megadni a fenti összefüggéseket. Matematikailag azonban rendkívül bonyolult lenne a viskoelasztikus hullám hosszának bevezetése általános esetben ($\eta_E \neq 0$, $\eta_\nu \neq 0$). Ezért definiálunk egy fiktív hullámhosszat, amely E'_d ismeretében egyszerűen számítható:

$$\lambda'_f = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{E'_d}{\rho}}. \quad (24)$$

(Ha $\eta_\nu = 0$, akkor $\lambda'_f = \lambda'_0$). Vegyük figyelembe továbbá, hogy

$$\frac{\rho}{E_d} \omega^2 = \frac{E'_d}{E_d} \left(\frac{2\pi}{\lambda'_f} \right)^2,$$

ezekkel

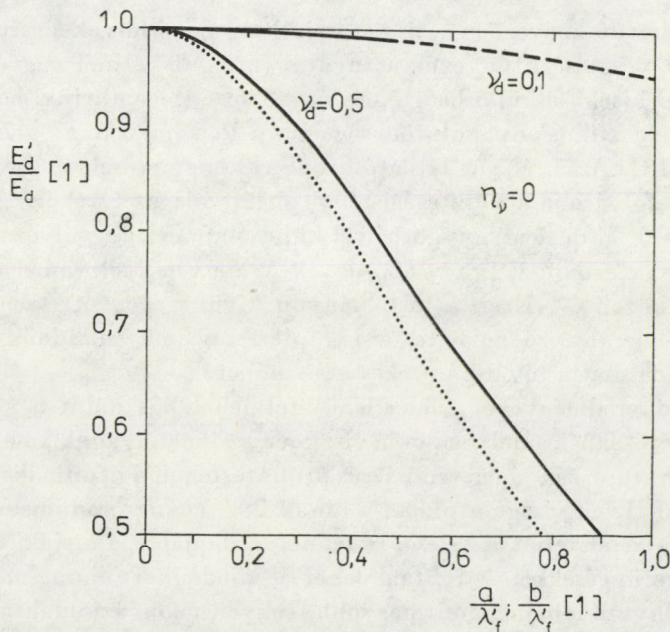
$$\frac{E'_d}{E_d} = \left[1 + 4\pi^2 v_d^2 \left(\frac{i}{\lambda'_f} \right)^2 (1 - \eta_v^2) \right]^{-1} \quad (25)$$

és

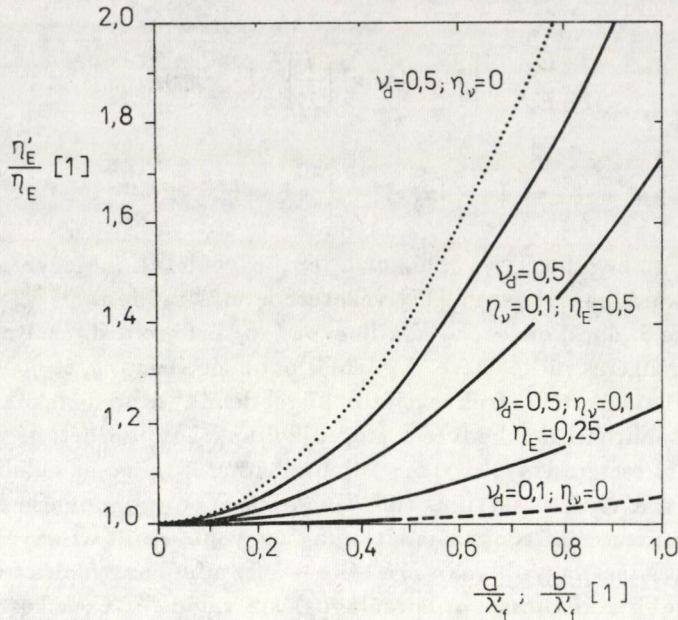
$$\frac{\eta'_E}{\eta_E} = 1 + 4\pi^2 v_d^2 \left(\frac{i}{\lambda'_f} \right)^2 \left(1 - \eta_v^2 - 2 \frac{\eta_v}{\eta_E} \right). \quad (26)$$

Megjegyezzük, hogyha $\eta_v = 0$, akkor a fenti egyenletek megegyeznek azokkal, amelyeket korábban HUSZTY [17] vezetett le más módon.

A 4. és 5. ábrán az E'_d/E_d , illetve η'_E/η_E értékeit ábráztuk a/λ'_f függvényében, hengeres rúd esetére. A görbék paramétere: v_d , η_v és η_E . (A komplex rugalmas állandókat a frekvenciától függetlenül, állandónak tekintettük.) Az összehasonlíthatóság kedvéért megrajzoltunk egy görbét négyzetkeresztmetszetű rúd esetére is ($v_d = 0,5$, $\eta_v = 0$). Látható, hogy az oldalirányú mozgás hatására a viszkoelasztikus rúd dinamikai Young-modulusa látszólag kisebb, míg a veszteségi tényezője látszólag nagyobb, mint az anyagra jellemző valódi érték. Minél nagyobb az a/λ'_f értéke — azaz minél nagyobb a frekvencia —, annál nagyobb a különbség a látszólagos és a valódi értékek között. Látható továbbá a 4. és 5. ábrán, hogy E'_d/E_d csökken, míg η'_E/η_E nő a Poisson-szám növelésével. A Poisson-szám veszteségi tényezője viszont alig befolyásolja



4. ábra. Viszkoelasztikus rudak látszólagos dinamikai Young-modulusa (E'_d) az oldalirányú méret-hullámhossz arány függvényében. —, körkeresztmetszet;, négyzetkeresztmetszet



5. ábra. Viszkoelasztikus rudak látszólagos veszteségi tényezője (η'_E) az oldalirányú méret-hullámhossz arány függvényében. — körkeresztmetszet; négyzetkeresztmetszet

E'_d/E_d értékét, de kedvezően „visszatartja” az η'_E/η_E növekedését. Ez utóbbi hatás függ a veszteségi tényezők arányától (η_v/η_E) is. Minél nagyobb az η_v/η_E értéke, annál kisebb a különbség η'_E és η_E között. Megemlítjük, hogy a gumi-szerű viszkoelasztikus anyagok többségének a Poisson-száma valós vagy az η_v kis értékű [18]. Az 5. ábrán látható azonban, hogy η_v -nek még kis értéke is jelentősen befolyásolja a veszteségi tényező látszólagos értékét.

A 4. és 5. ábra függvénygörbéivel kapcsolatban hangsúlyozni szükséges, hogy ezek csak azon a/λ_f (vagy b/λ_f) értékekre érvényesek, amelyekre fennáll a Love-féle közelítés. (Ezen a tartományon kívül szaggatott vonallal húztuk az $\nu_d = 0,1$ -hez tartozó görbét.) A komplex rugalmas állandók frekvenciafüggése módosíthatja továbbá ezeket a görbéket.

A fenti eredményeket közvetlenül fel lehet használni a gyakorlatban azoknál a méréseknél, amelyek során viszkoelasztikus anyagok komplex Young-modulusát határozzák meg, rúdszerű próbatestek longitudinális rezgésének vizsgálatával. Ezen vizsgálatokban a dinamikai Young-modulust és a veszteségi tényezőt rendszerint az elemi rúdelmélet alapján számítják. Ekkor tehát a fenti összefüggésekkel számítani lehet a dinamikai Young-modulus és a veszteségi tényező hibáját, amit nagyobb frekvenciákon az oldalirányú mozgás hatásának elhanyagolása okoz. Ha pedig ismert ezen hiba megengedett értéke, akkor a vizsgálat felső határfrekvenciáját lehet meghatározni. Ebből a célból megadtuk a hibák néhány százalékos értékét az I. táblázatban ($\nu_d = 0,5, \eta_v = 0$).

I. táblázat

Viszkoelasztikus rúd látszólagos dinamikai Young-modulusának és veszteségi tényezőjének százalékos eltérése az anyag valódi dinamikai jellemzőihez képest

$$(\nu_d = 0,5, \eta_\nu = 0), h_E = \left(\frac{E'_d}{E_d} - 1 \right) 100 [\%], h_\eta = \left(\frac{\eta'_E}{\eta_E} - 1 \right) 100 [\%].$$

$\frac{a}{\lambda'_0}$ vagy $\frac{b}{\lambda'_0}$	Körkeresztmetszet		Négyzetkeresztmetszet	
	h_E [%]	h_η [%]	h_E [%]	h_η [%]
0,1	-1,22	1,2	-1,62	1,64
0,15	-2,70	2,77	-3,57	3,70
0,2	-4,70	4,93	-6,17	6,58
0,25	-7,16	7,7	-9,32	10,28
0,3	-10,0	11,1	-12,9	14,8

Ebből látható például, hogyha a vizsgálat felső frekvenciahatárának — szokásos módon — az $a/\lambda'_0 = 0,1$ (ill. $b/\lambda'_0 = 0,1$)-et tekintjük, akkor az E_d és η_E számított értékének hibája kisebb, mint 1,7%. (Itt $\lambda'_f = \lambda'_0$, mivel $\eta_\nu = 0$.) Ha viszont kb. 10% hibát engedünk meg a dinamikai jellemzők számított értékében, akkor a vizsgálatot azon frekvenciáig végezhetjük — az elemi rúd elmélet alapján —, amíg $a/\lambda'_0 < 0,3$ (henger), illetve $b/\lambda'_0 < 0,25$ (négyzetkeresztmetszet). Megjegyezzük, hogy bár ez a hibaszámítás a közelítő Love-féle elméleten alapul, mégis kielégítő pontosságúnak tekinthetjük a gyakorlat szempontjából, mivel a közelítés pontossága az illető frekvenciatartományban igen jó. (A Love-féle közelítés hibája csupán 0,1% a $0,1a/\lambda'_0$ -nél és 0,71% a $0,3a/\lambda'_0$ -nél, ha $\nu_d = 0,5$.) Ezért tehát az elemi elmélet alapján számított dinamikai jellemzőket helyesbíthetjük is a (25), illetve (26) egyenletek alapján a Love-közelítés frekvenciatartományában, feltéve, hogy ismert a komplex Poisson-szám értéke.

IRODALOM

1. LOVE, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Dover Publications, New York 1944.
2. LORD RAYLEIGH: Theory of Sound. Dover Publications, New York 1945.
3. ABRAMSON, H. N.—PLASS, H. J.—RIPPERGER, E. A.: Stress Wave Propagation in Rods and Beams. Advances in Applied Mechanics, Vol. V. New York 1958.
4. REDWOOD, M.: Mechanical Waveguides. Pergamon Press, Oxford 1960.
5. KOLSKY, H.: Stress Waves in Solids. Dover Publications, New York 1963.
6. MEITZLER, A. H.—MEEKER, T. J.: Guided Waves in Elongated Cylinders and Plates. Physical Acoustics, Vol. 1A, Ed. Mason, W. P., Academic Press, New York 1964.
7. SKUDRZYK, E. J.: Simple and Complex Vibratory Systems. The Pennsylvania State University Press, University Park and London 1968.
8. ACHENBACH, J. D.: Wave Propagation in Elastic Solids. North-Holland/American Elsevier Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York 1975.

9. BANCROFT, D.: The Velocity of Longitudinal Waves in Cylindrical Bars. *Physical Review* **59** (1941), 588—593.
10. Гриченко, В. Т., Мелешко, В. В.: Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины. *Акустический Журнал* **24** (1978), 861—866
11. ZEMANEK, JR. J., RUDNICK, I.: Attenuation and Dispersion of Elastic Waves in a Cylindrical Bar. *The Journal of the Acoustical Society of America* **33** (1961), 1283—1288.
12. ZEMANEK, JR. J.: An experimental and Theoretical Investigation of Elastic Wave Propagation in a Cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America* **51** (1972), 265—283.
13. BOOKER, R. E., SAGAR, F. H.: Velocity Dispersion of the Lowest Order Longitudinal Mode in Finite Rods of Circular Cross Section. *The Journal of the Acoustical Society of America* **49** (1971) 1491—1498.
14. Похлебкин, В. Н. — Чернышев, Е. В. — Шегай, В. В.: О продольных колебаниях упругих цилиндров конечной длины. *Акустический Журнал* **22** (1976), 943—944
15. EDMONS, P. D.: On Correlating the Loss Factor of Cylindrical and Spherical Resonators. *The Journal of the Acoustical Society of America* **33** (1961), 615—622.
16. COQUIN, G. A.: Attenuation of Guided Waves in Isotropic Viscoelastic Materials. *The Journal of the Acoustical Society of America* **36** (1964), 1074—1080.
17. HUSZTY, D.: Über die Wellenfortpflanzung in viskoelastischen Stäben. *Proceedings of the Conference on Acoustics of Solid Media*, Warsaw, 1966. 57—66.
18. SNOWDON, J. C.: *Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems*. John Wiley and Sons, New York 1968.
19. NAAKE, H. J., TAMM, K.: Sound Propagation in Plates and Rods of Rubber Elastic Materials. *Acustica* **8** (1958), 65—76.

Apparent Complex Young's Modulus of a Longitudinally Vibrating Viscoelastic Rod. — The longitudinal vibration of viscoelastic rods is dealt with on the basis of Love's approximate theory, at frequencies, at which the lateral dimension might be compared with the viscoelastic wavelength. The frequency range is defined wherein Love's theory yields a close approximation, and the error of the approach is presented. According to the theory, the propagation of the wave in the viscoelastic rod is, at higher frequencies, controlled by an apparent value of the complex Young's modulus of the material, due to lateral movement. It is pointed out that the value of the apparent dynamic Young's modulus is smaller and the apparent loss factor is higher than the actual characteristics of the material. The deviation of the apparent and actual values depends on the ratio of the lateral dimension and the wavelength, as well as on the complex elastic constants of the material.

Der virtuelle, komplexe Young-Modul einer Längsschwingung vollführenden visko-elastischen Stabs. — Behandelt wird die Längsschwingung von visko-elastischen Stäben aufgrund der Loveschen Näherungstheorie an den Frequenzen, wo die Lateraldimension mit der visko-elastischen Wellenlänge vergleichbar ist. Der Frequenzbereich wird ermittelt, wo die Love-Theorie eine gute Näherung liefert, und der Näherungsfehler dargestellt ist. Nach der Theorie wird die Wellenfortpflanzung im visko-elastischen Stab, infolge der Seitenbewegung in den höheren Frequenzen durch einen scheinbaren Wert des komplexen Young-Moduls des Materials gesteuert. Es wird bewiesen, daß der Wert des virtuellen dynamischen Young-Moduls kleiner, und der virtuelle Verlustbeiwert größer als der Wert der Materialeigenschaft ist. Die Abweichung zwischen den wirklichen und virtuellen Werten hängt vom Verhältnis der Lateraldimension und der Wellenlänge sowie von den komplexen Elastizitätskonstanten des Materials ab.

TÉRBELI RÚDSZERKEZETEK SAJÁTFREKVENCIÁINAK KÖZREFOGÓ SZÁMÍTÁSA, II.

CZEGLÉDI GYULA*

[Beérkezett: 1981. március 12-én]

Jelen dolgozat folytatása az ugyanebben a folyóiratban megjelent első résznek. A kontinuumokként modellezett prizmatikus rudakból álló rúdszerkezetek rezgéseinek vizsgálatára most egy másik elméletet mutatunk be. Ez a differenciálegyenletek alaprendszerére támaszkodik és kiküszöböli az előző módszernél említett hátrányokat. Az utolsó fejezet a gyakorlati alkalmazásra mutat be két egyszerű számpéldát. Az egyes fejezetek, ábrák, képletek és táblázatok számozása az első résznél alkalmazottak folytatása.

2.4 Prizmatikus rudakból felépített rúdszerkezetek rezgéseinek vizsgálata a differenciálegyenletek alaprendszerével

A jelen fejezetben bemutatásra kerülő eljárás matematikai alapjai a differenciálegyenletek elmélete témakörből származnak. Gondolatmenetünk: a rúdrendszer minden egyes rúdjaára felírjuk a peremfeltételeket, így elegendő egyenletet kapunk a mezőfüggvények integrációs konstansainak meghatározására.

A következőkben visszatérünk a rúdvégekre ható külső erőhatásokat és a rúdvégek elmozdulásait tartalmazó (5) és (7) paraméteres egyenletrendszerhez. A jelen módszer lényege éppen abban áll, hogy az egyenletek paramétereit nem küszöböljük ki, hanem azokkal, mint a mezőfüggvények ismeretlen együtthatóival dolgozunk, így a megoldásban a szerkezet rúdjaainak amplitúdóeloszlása közvetlenül rendelkezésre áll. A csomópontok elmozdulásamplitúdóit a mezőfüggvények segítségével számíthatjuk.

2.4.1. A rúdrendszer alkotórészeihez tartozó elmozdulásokat és erőhatásokat magában foglaló egyenletrendszer

Az (5) és (7) egyenletben szereplő elmozdulás- és erőhatásvektorokat a rúd saját koordinátarendszerében írtuk fel kényelmesen, viszont a rudak összekapcsolását kifejező egyenleteket most is a közös koordináta rendszerben állítjuk fel. A T_i transzformáló mátrixszal az (5) és (7)-ben szereplő elmozdulás- és erőhatásvektorokat a közös koordinátarendszerbe transzformáljuk:

$$u_i = T_i \tilde{u}_i = T_i U_i a_i \sin \omega t,$$

$$v_i = T_i \tilde{v}_i = T_i V_i a_i \sin \omega t,$$

* Dr. Czeglédi Gyula, H-1225 Budapest, Bartók Béla út 3/d.

$$\begin{aligned} f_i &= \mathbf{T}_i \tilde{f}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{F}_i a_i \sin \omega t, \\ p_i &= \mathbf{T}_i \tilde{p}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{P}_i a_i \sin \omega t, \end{aligned} \quad (30)$$

ahol — a 2.3.3 pontban használt t_i -vel —

$$\mathbf{T}_i = \langle t_i, t_i \rangle.$$

A (30) képletcsoport 4 egyenlete a rendszer i -edik rúdjaára vonatkozik. Az n rúdból álló rendszer minden egyes rúdjaára előállíthatók a fenti egyenletek, és formálisan a következő mátrixegyenletbe foglalhatók össze:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \underline{u}_1 \\ \underline{u}_2 \\ \vdots \\ \underline{u}_n \\ \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \vdots \\ \underline{v}_n \\ \underline{f}_1 \\ \underline{f}_2 \\ \vdots \\ \underline{f}_n \\ \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \\ \vdots \\ \underline{p}_n \end{array} = \begin{array}{c} \boxed{\underline{I}_1 \underline{U}_1} \\ \boxed{\underline{I}_2 \underline{U}_2} \\ \vdots \\ \boxed{\underline{I}_n \underline{U}_n} \\ \boxed{\underline{I}_1 \underline{V}_1} \\ \boxed{\underline{I}_2 \underline{V}_2} \\ \vdots \\ \boxed{\underline{I}_n \underline{V}_n} \\ \boxed{\underline{I}_1 \underline{F}_1} \\ \boxed{\underline{I}_2 \underline{F}_2} \\ \vdots \\ \boxed{\underline{I}_n \underline{F}_n} \\ \boxed{\underline{I}_1 \underline{P}_1} \\ \boxed{\underline{I}_2 \underline{P}_2} \\ \vdots \\ \boxed{\underline{I}_n \underline{P}_n} \end{array} \begin{array}{c} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{array} \sin \omega t \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_b \quad \underbrace{\hspace{10em}}_A \quad \underbrace{\hspace{10em}}_a$

vagy rövidebben:

$$b = Aa \sin \omega t. \quad (31b)$$

A (31b) egyenlet tartalmazza tehát az n darabból álló rúdrendszer szétválasztott rúdjaain a rúdvégek elmozdulásait és rúdvégekre ható, a rudak szempontjából külsőnek minősülő erőhatásokat.

2.4.2 A rúdrendszer rezgését leíró egyenlet

A (31a) összefüggésben definiált b és A mátrixok birtokában a rúdrendszer szétválasztott rúdjaait most ismét összekapcsoljuk, és előállítjuk az egész rendszer rezgését leíró egyenletet.

Azt a körülményt, hogy az egyes rudak miként kapcsolódnak össze egyetlen szerkezetté, célszerűen egy \mathbf{K} kapcsolómátrixszal fejezhetjük ki.

A \mathbf{K} mátrix a rúdszerkezet peremfeltételeinek és a rudak csomóponti illeszkedéseinek tulajdonságait, valamint a csomópontok egyensúlyát tartalmazza. Információtartalmát tekintve tehát többet mond, mint a 2.3.3 pontban használt \mathbf{G} kinematikai kapcsolómátrix és \mathbf{G}^T transzponáltja együtt, mert még a peremfeltételeket is magában foglalja. Megalkotásának módját példaképpen a 3. ábrán (69. old.) látható négy rúdból álló, végeiknél eltolódás- és elfordulás-tartó módon összekapcsolt síkbeli keretszerkezeten világítjuk meg.

A feltüntetett perem- és illesztőszervezetek tulajdonságait az

$$\begin{aligned} u_1 &= \mathbf{0}, & v_2 &= v_3 \\ u_3 &= \mathbf{0}, & v_2 &= v_4 \\ v_1 &= u_2, & u_4 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (32a)$$

egyenletek fejezik ki, a csomópontok egyensúlyát pedig a

$$\begin{aligned} p_1 + f_2 &= q_A, \\ p_2 + p_3 + p_4 &= q_B \end{aligned} \quad (32b)$$

egyenletek mutatják, ahol q_A az A , q_B a B jelű csomópontra ható szinuszos külső erőhatás amplitúdó vektora. A (32a) és (32b) egyenleteket is felírhatjuk mátrixos alakban:

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_A \\ q_B \\ c \\ c \\ c \\ c \\ c \\ c \\ c \\ c \end{bmatrix}$$

\mathbf{K}

\mathbf{b}

vagy röviden

$$\mathbf{K}b = c \quad (33)$$

Itt a \mathbf{K} az említett kapcsolómátrix. A \mathbf{K} -ban levő \mathbf{E} -k hatodrendű egységmátrixok, a k_i nem írt elemek hatodrendű négyzetes zérusmátrixok.

Könnyen belátható, hogy ez a \mathbf{K} -nak csak egy lehetséges felírása; mások ettől tartalmilag természetesen nem, csak formailag különböznek. [A (32a) egyenletekben például a $v_2 = v_4$ helyett $v_3 = v_4$ is írható, és így tovább.]

A (33) jobb oldalán álló hiper-oszlop mátrix tehát θ -kat és a csomópontokra ható szinuszos külső erőhatásokat tartalmaz. A c amplitúdóját c_0 -al jelölve, és behelyettesítve b (31b) alatti kifejezését, a (33)-os összefüggés a következőképpen írható:

$$\mathbf{K}A a \sin \omega t = c_0 \sin \omega t .$$

Mozgást feltételezve, $\sin \omega t$ -vel egyszerűsíthetünk, így a rúdrendszer szinuszos rezgését leíró egyenlet a

$$\mathbf{K}A a = c_0 \quad (34)$$

lineáris inhomogén egyenletrendszer.

A (34) összefüggésnek a 2.3 pontban ismertetett módszerben a (25) egyenlet felel meg. E két egyenlet alakilag és tartalmát tekintve is különbözik. Jelen esetben a mátrixegyenlet ismeretlene az integrációs konstansokat tartalmazó a vektor, még a (25) összefüggésben ezt a szerepet a csomópontok elmozdulás-amplitúdóit magában foglaló s_0 vektor tölti be. Természetesen, mindkét egyenlet ugyanannak a fizikai jelenségnek — a rúdrendszer rezgésének — egy-egy fajta matematikai visszatükrözése.

Szabad rezgés esetében $c_0 = \mathbf{0}$, a (34) egyenletünk homogén lesz. A mezőfüggvények ismeretlen együtthatóit tartalmazó a vektor rezgés esetében nem lehet nulla, így a

$$\det (\mathbf{K}A) = 0 \quad (35)$$

feltételnek kell teljesülni, amely a rúdrendszer frekvenciaegyenlete. A négyzetes $\mathbf{K}A$ mátrix rendszáma $12n$.

Gerjesztett rezgésnél a rendszer csomópontjainak válaszát állandósult állapotban e módszer segítségével is meghatározhatjuk. Ha a gerjesztőhatás körfrekvenciája nem esik egybe a rúdrendszer valamelyik saját körfrekvenciájával, a (34) összefüggés által ábrázolt lineáris inhomogén algebrai egyenletrendszer $\mathbf{K} \cdot A$ együtthatómátrixa nem szinguláris, így létezik megoldása. Az eredményül kapott a vektor az egyes rudak mezőfüggvényeinek együtthatóit tartalmazza. Ennek birtokában az (5) összefüggés segítségével a rúdvégek elmozdulásai — azaz a csomópontok elmozdulásai — meghatározhatók.

2.4.3 A sajátfrekvenciák kiszámításának módja, az eljárás jellemzői

A (35) determináns-függvény ω -nak már folytonos függvénye, mert A elemei nem törtek. Elegendő számú zérushelyének meghatározása a 2.3 pontban ismertetett módszerhez viszonyítva számítástechnikailag lényegesen könnyebb, bár ebben az esetben a frekvenciadetermináns rendszáma nagyobb. A módszer lényegéből fakadóan a sajátkörfrekvencia-halmaz *elvi okokból* most nem lehet hiányos.

A zérushelyek keresése itt is a 2.3.4 pontban ismertetett „léptető” technikával történhetik, de ügyelni kell a $\Delta\omega$ elegendően kicsi választására.

Az eljárás könnyen algoritmizálható, jól használható a frekvenciakorlátokat szolgáltató, a 2. pont bevezetőjében vázolt számítási módszerhez. A számítógép önmaga választhatja meg — és növelheti is — a 2.1 pontban említett k_i felosztási számot, önmaga állíthatja elő a frekvenciaegyenletet. A pontosság mértékének csak a gép tárolókapacitása szab határt. A módszer numerikus használhatóságát kívánják igazolni a 3. pontban bemutatandó egyszerű számpéldák.

3. Gyakorlati alkalmazás, számpéldák

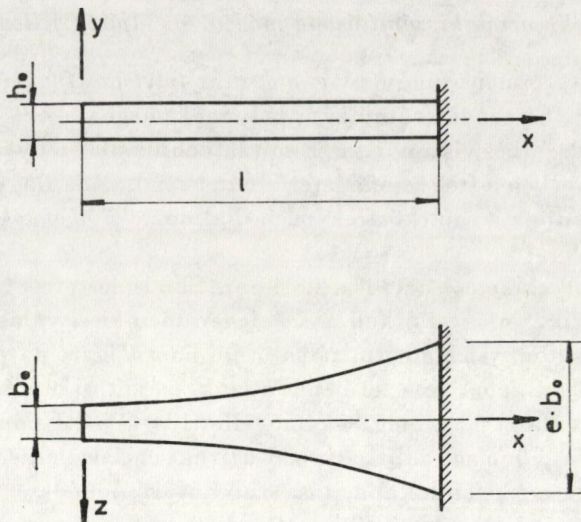
A 2. fejezetben prizmatikus rudakból felépített rúdszerkezetek rezgéseinek vizsgálatára két számítási módszert mutattunk be. Az algoritmusok tulajdonságait a 2.3 és 2.4 pontokban taglaltuk. A két eljárás előnyeinek és hátrányainak elemzése kapcsán arra a megállapításra juthatunk, hogy mind numerikus, mind elvi szempontból célszerűbb inkább a 2.4 pontban bemutatott, a differenciálegyenletek alaprendszerén alapuló módszert választani. Bár mindkét eljárásra készítettünk számítógépi programcsomagot, és mindkét eljárással megoldottunk számpéldákat, e helyütt mégis csak a numerikusan kedvezőbbnek bizonyult algoritmusra készült programmal végzett számítások eredményeit közöljük.

A továbbiakban két számpéldát mutatunk be. Az első a sajátfrekvenciák behatárolását szemlélteti, míg a második feladatban prizmatikus rudakból felépített térbeli rúdszerkezet sajátfrekvenciáit számítjuk ki.

3.1 Egyik végén befogott, változó keresztmetszetű rúd

A sajátkörfrekvencia-korlátok számítására célszerűen olyan feladatot választottunk, amelyet már sikerült analitikus úton pontosan is megoldani. Pl.: egyik végén szabad, másik végén befogott, a hossza mentén exponenciálisan változó, derékszögű négyyszög keresztmetszetű rúd sajátkörfrekvenciáit CRANCH és ADLER már meghatározta [10].

A numerikus számításokhoz a 4. ábrán látható modellt használtuk:



4. ábra. Exponenciálisan változó keresztmetszetű, egyik végén befogott rúd. (A modell adatai: $E = 2,148 \cdot 10^{11}$ Pa; $G = 8,142 \cdot 10^{10}$ Pa; $\rho = 7800$ kg m $^{-3}$; $l = 1$ m; $h_0 = 2 \cdot 10^{-2}$ m, $b_0 = 3 \cdot 10^{-2}$ m)

A z tengely körüli hajlítórengést végző rúd sajátkörfrekvenciái az

$$a + a \cos \frac{1}{b} \operatorname{ch} \frac{1}{c} + 3 \sin \frac{1}{b} \operatorname{sh} \frac{1}{c} + c \sin \frac{1}{b} \operatorname{ch} \frac{1}{c} + b \cos \frac{1}{c} \operatorname{sh} \frac{1}{c} = 0 \quad (36)$$

frekvenciaegyenlettel számíthatók [lásd a [10] dolgozat 106. oldali (31) egyenletét], ahol az

$$a = \sqrt{\gamma^2 - 1}, \quad b = 2\sqrt{\gamma - 1}, \quad c = 2\sqrt{\gamma + 1},$$

illetve a

$$\gamma = 2l\omega \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_{20}}}$$

egyszerűbb jelöléseket alkalmaztuk:

A 4. ábra adataival

$$A_0 = h_0 \cdot b_0,$$

$$I_{20} = \frac{b_0 \cdot h_0^3}{12}.$$

A (36) egyenlet első három gyöke:

$$\gamma = 18,9366261693; 96,8072531389; 255,457961136.$$

A példa számadataival a z tengely körüli hajlítózregés első három sajátkőrfrekvenciája:

$$\omega = 144,8294039; 740,3925409; 1953,770640 \text{ [s}^{-1}\text{]}.$$

A sajátkőrfrekvenciák számára alsó és felső korlátok nyérése céljából a változó keresztmetszetű rudat — a 2.1 pontban bemutatott módon — csomópontok segítségével k darab részre osztottuk fel, és a csomópontok közt prizmatikus részrudakkal helyettesítettük. A helyettesítő részrudak jellemzőit az (2), ill. (3) összefüggések alapján választottuk meg. A téglalap keresztmetszet (GI) csavarási merevségében szereplő I mennyiséget a [11] dolgozat 71. oldali 9,4 összefüggése alapján

$$I = \frac{16}{3} b^3 \left\{ a - b \left[0,6302488761 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 - \text{th} \left(\frac{2i-1}{2b} \cdot \pi \cdot a \right)}{(2i-1)^5} \right] \right\}$$

képlettel számítottuk, ahol „ a ” és „ b ” a keresztmetszet oldalhosszainak fele. A fenti képlet akkor érvényes, ha $a \geq b$.

A számítógépi programmal végzett számítások eredményeit a III. és IV. táblázatban foglaltuk össze. A táblázatok az első öt sajátkőrfrekvenciát tartalmazzák két tizedes pontossággal és feltüntetik a k felosztási számot is. Valamennyi kiszámított sajátkőrfrekvencia a frekvenciaegyenletnek egyszeres gyöke. Az eredmények szemléletesebben az 5—9. ábrákon láthatók.

III. táblázat

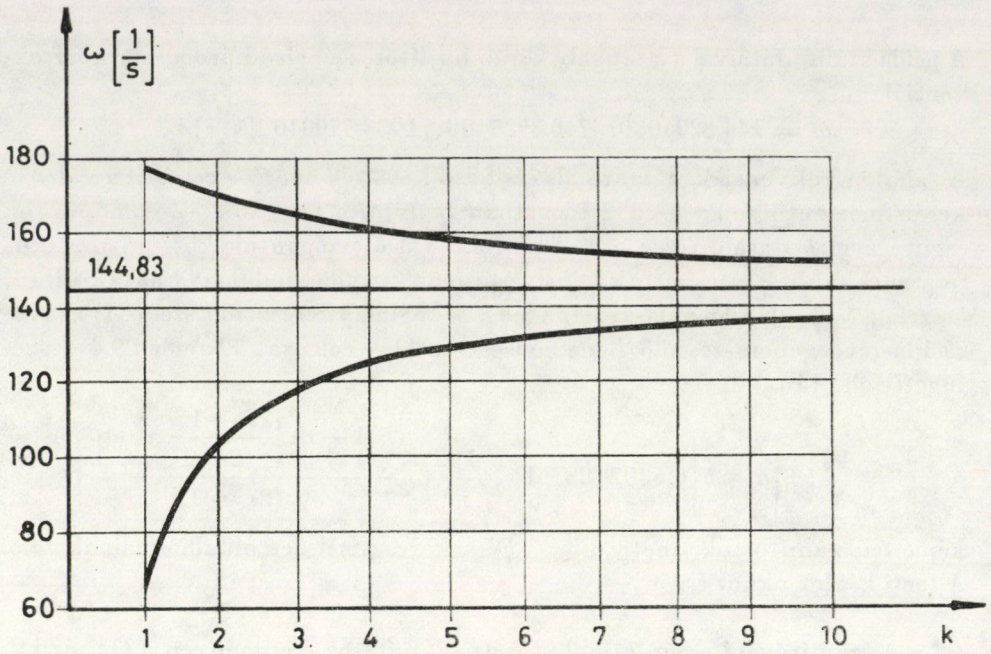
A sajátkőrfrekvenciák alsó korlátai [s⁻¹]

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 8$	$k = 10$
1	65,24	104,22	118,30	125,27	129,37	132,07	135,38	137,34
2	97,86	241,75	309,89	346,89	369,75	385,19	404,63	416,33
3	408,86	533,02	603,99	639,49	660,63	674,55	691,68	701,77
4	613,28	987,54	1303,93	1466,46	1566,11	1633,33	1717,83	1768,57
5	1134,62	1476,40	1697,83	1689,51	1743,93	1780,20	1825,16	1851,77

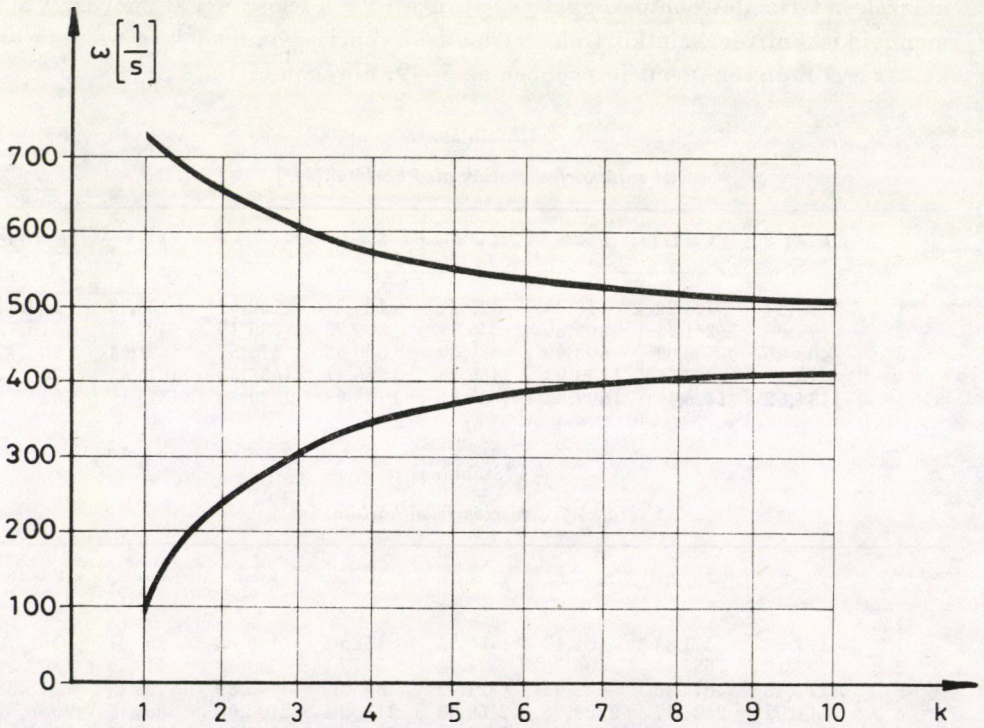
IV. táblázat

A sajátkőrfrekvenciák felső korlátai [s⁻¹]

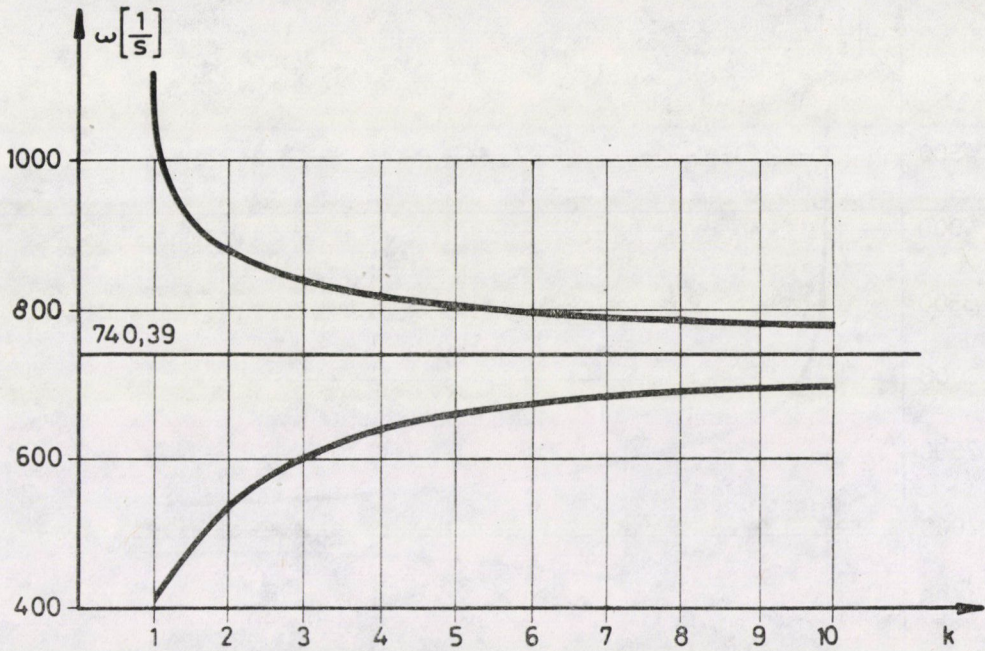
	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 8$	$k = 10$
1	177,34	171,83	165,10	160,85	158,02	156,02	153,41	151,78
2	723,10	657,14	603,58	571,92	551,61	537,58	519,56	508,52
3	1111,38	878,80	842,93	821,12	806,90	796,89	783,78	775,58
4	3111,91	2434,17	2229,96	2169,38	2130,04	2103,06	2068,17	2046,52
5	4531,59	2684,41	2539,71	2417,78	2336,37	2279,50	2205,74	2160,14



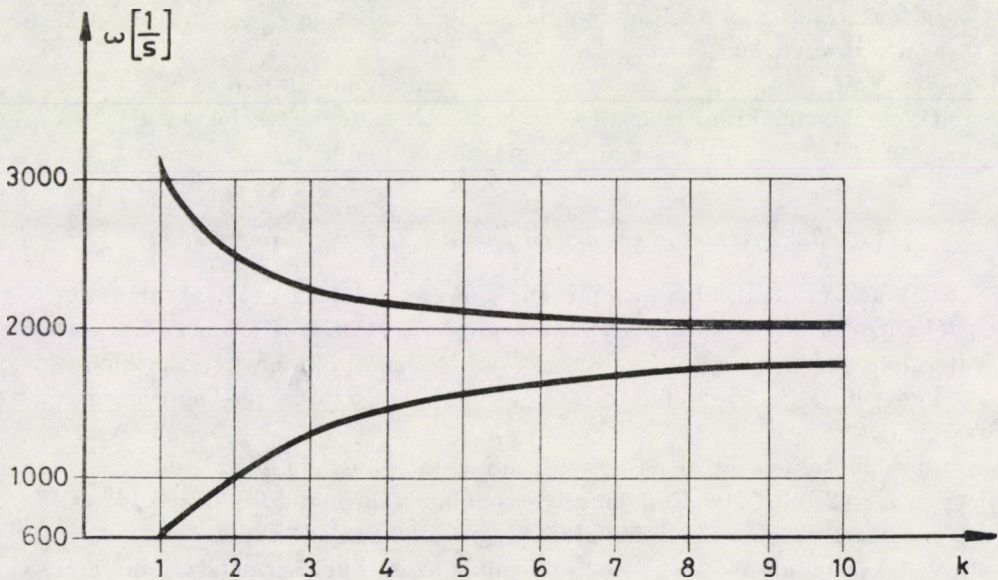
5. ábra. Első sajátkörfrekvencia



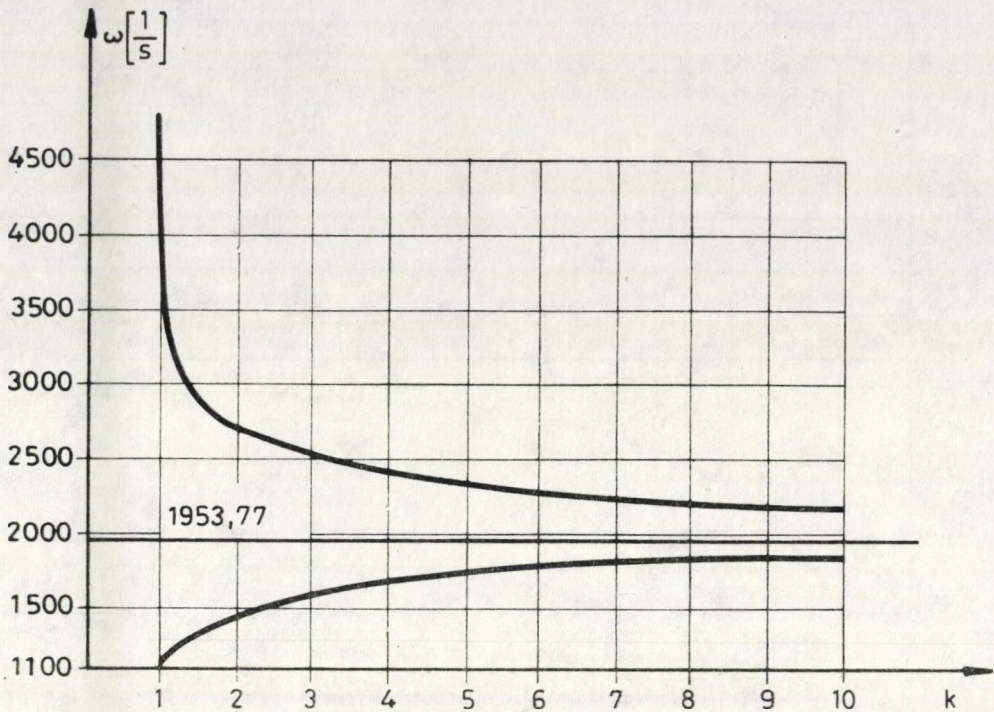
6. ábra. Második sajátkörfrekvencia



7. ábra. Harmadik sajátkörfrekvencia



8. ábra. Negyedik sajátkörfrekvencia



9. ábra. Ötödik sajátkörfrekvencia

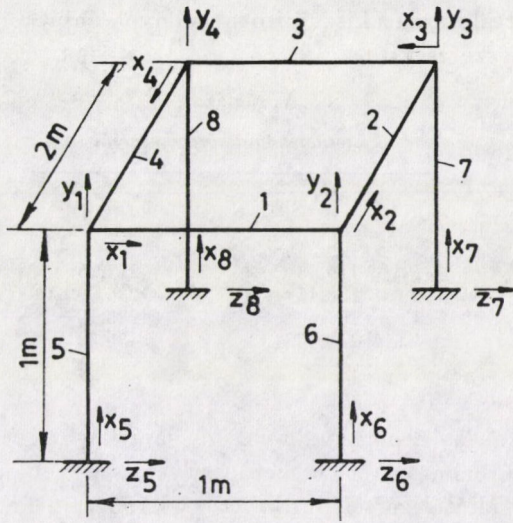
A táblázatok és az ábrák alapján nyilvánvaló, hogy a számított 1., 3. és 5. sajátkörfrekvencia a z tengely körüli hajlítózregés 1., 2. és 3. sajátkörfrekvenciája; a 2. és 4. sajátkörfrekvencia az y tengely körüli hajlítózregés 1. és 2. sajátkörfrekvenciájával lehet azonos. Az 5., 7. és 9. ábrák jól szemléltetik a CRANCH és ADLER által kiszámított sajátkörfrekvenciák közrefogását.

3.2 Prizmatikus rudakból felépített térbeli rúdszerkezet

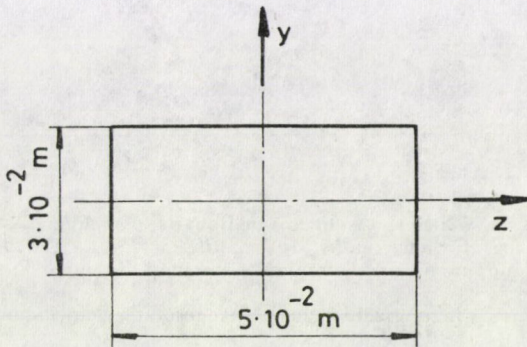
A feladatul kiválasztott térbeli szerkezet vázlata a 10. ábrán látható. A felépítés bizonyos speciális választása (pl.: a szabályos geometriai alakzat) adta előnyöket a számítógépi program nem használja ki, így az az általánosságot nem rontja. Az ábrán feltüntettük a rudak választott saját-koordinátarendszereit is.

A csomópontokban eltolódás- és elfordulás-tartóan kapcsolódó rudak anyaga legyen $E = 2,148 \cdot 10^{11}$ Pa Young-féle rugalmassági modulusú, $G = 8,142 \cdot 10^{10}$ Pa csúsztató rugalmassági modulusú és $\rho = 7800 \text{ kg m}^{-3}$ sűrűségű acél.

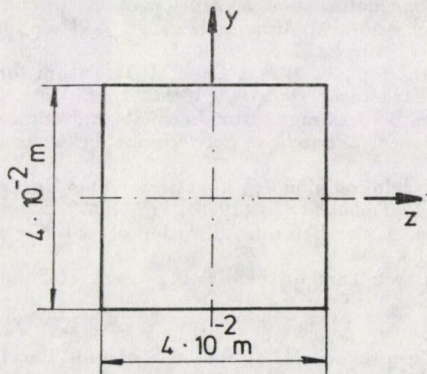
A keretet alkotó 1, 2, 3 és 4 jelű rudak azonos keresztmetszetű méreteit a 11. ábra, míg az azonos lábak keresztmetszetét a 12. ábra mutatja.



10. ábra. Prizmatikus rudakból felépítet térbeli rúdszerkezet



11. ábra. A keretet alkotó rudak keresztmetszete



12. ábra. A láb-rudak keresztmetszete

Az V. táblázat tartalmazza a kiszámított első nyolc sajátkörfrekvenciát, melyek valamennyien egyszerűek.

V. táblázat
A szerkezet sajátkörfrekvenciái

	$\overset{\bullet}{[s^{-1}]}$		$\overset{\bullet}{[s^{-1}]}$
1	110,48	5	217,16
2	120,45	6	235,50
3	157,40	7	283,13
4	210,47	8	456,30

Megjegyezzük még, hogy valamely ω_i sajátkörfrekvenciához tartozó rezgésekép is meghatározható a (34) összefüggés segítségével, ha a szabad rezgésnek megfelelő $c_0 = 0$ feltételezéssel élünk. Az így kapott lineáris homogén egyenletrendszert a mezőfüggvények együtthatóit tartalmazó a vektorra megoldva, majd $a-t$ (5)-be helyettesítve, a rúdvégek — azaz a csomópontok — elmozdulásai meghatározhatók. Ez a számítás — természetesen — mindkét bemutatott példában elvégezhető.

IRODALOM

1. POINCARÉ, H.: Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. *American J. Math.* **12** (1890)
2. BAZLEY, N.—FOX, D. W.: Methods for Lower Bounds to Frequencies of Continuous Elastic Systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **17** (1966), 1—37
3. KOLOUŠEK, V.: Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen. Fachbuchverlag GMBH, Leipzig 1953
4. HÜBNER, E.: Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Schwingungssysteme. *Ingenieur-Archiv* **29** (1960), 134—149
5. BOSZNAY, Á.: Einzelne Probleme der Dynamik zusammengesetzter Systeme. *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering* **17** (1973), 7—28
6. CZEGLÉDI GY.—RICHLIK GY.: Prizmatikus rudakból felépített térbeli szerkezetek sajátkörfrekvenciáinak meghatározása a gépi számítástechnika felhasználásával. MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Munkaközössége I. Tudományos Ülésszakának kiadványa. Budapest 1974, 192—197
7. WITTRICK, W. M.—WILLIAMS, F. W.: A General Algorithm for Computing Natural Frequencies of Elastic Structures. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* **24** (1971), 263—284
8. CZEGLÉDI, GY.: Einige Bemerkungen zur Freiheitsgradreduktion von linear-elastischen mechanischen Modellen. *Periodica Polytechnica, Electrical Engineering* **19** (1975), 257—266
9. CZEGLÉDI GY.: Szabadságfokredukción és következményei lineárisan rugalmas szerkezetek analizisében. *Műszaki Tudomány* **54** (1978), 115—124
10. CRANCH, E. T.—ADLER, A. A.: Bending Vibration of Variable Section Beams. *J. Applied Mechanics* (1956), 103—108
11. WEBER, C.—GÜNTHER, W.: Torsionstheorie. F. Vieweg et Sohn. Braunschweig-Akademie Verlag, Berlin 1958

Bracketing of the Eigenfrequencies of Spatial Skeletons, Part II. — This is the second part of the paper published in this review under the same title. For the investigation of the vibrations of lattice girders consisting of prismatic bars modelled as continua, now another theory is

described which is built upon the basic set of differential equations and which eliminates the disadvantages of the previously presented method. The last chapter contains two simple numerical examples for practical application. Numbering of the chapters, formulas and tables is the continuation of that of the first part.

Einschließung der Eigenfrequenzen von räumlichen Stabwerken, Teil II. — Die vorhandene Studie bildet die Fortsetzung des in derselben Zeitschrift gebrachten ersten Teils. Zur Untersuchung der Schwingungen von aus prismatischen Stäben bestehenden, als Kontinua modellierten Stabkonstruktionen wird nun eine weitere, auf dem Grundsystem der Differentialgleichungen basierende Theorie vorgeführt, die im Zusammenhang mit der vorher behandelten Methode die erwähnte Nachteile beseitigt. Das letzte Kapitel stellt zur praktischen Anwendung zwei einfache Zahlenbeispiele dar. Die Numerierung der Kapitel, Bilder, Formeln und Tabellen ist die Fortsetzung derselben des ersten Teils.

CSŐVEZETÉKRENDSZEREK RUGALMASSÁGI TERVEZÉSE*

II. MEMÓRIATAKARÉKOS HÁLÓZATSZÁMÍTÁS

KOLONITS FERENC**

A MŰSZ. TUD. KANDIDÁTUSA

Jelen tanulmány első részében megállapítottuk, hogy a tervező közvetlen bevonása és a csőtervezés operatív számításigényei egyaránt célszerűvé teszik asztali gép alkalmazását a tervező csoport mellett. A hálózatszámító programok kapacitásigénye tetemes, jelen részben megkíséreljük ennek csökkentését.

Alkalmazott jelölések

- \bar{f} — hatkomponensű (3 eltolódás, 3 elfordulás) mozgásvektor, ill. ezekből alkotott hipervektor
- \bar{p} — hatkomponensű (3 erő, 3 nyomaték) terhelésvektor (dinám), ill. ezekből alkotott hipervektor
- Z — 6×6 -os rugalmassági mátrix, ill. ezekből alkotott hipermátrix
- F — forgatómátrix
- R — vektorszorzást reprezentáló mátrix
- B_{ij} — j -ről i pontra mozgást áthelyező 6×6 -os mátrix
- REF — referenciapont
- S — szűrő diagonálmátrix
- K — szűrt rugalmassági mátrix (kényszereknél)
- n — csomópontok, ill. ágak száma
- k — kényszerkomponensek (ismeretlen reakciók) száma
- \bar{v} — csővektor, ill. megoldáskeresési irány
- \bar{r} — helyvektor, ill. az iterációs maradék vektora
- l — egyenes csődarab hossza
- R — csőív sugara
- Φ — csőív nyílásszöge
- I — csőkeresztmetszet másodrendű nyomatéka
- E — csőanyag rugalmassági modulusa

3. A csőhálózat statikai számítása

3.1. Az ág járuléka

A csőhálózat elemei az *ágak*. Az ág rugalmas egyenes és ívelt csődarabok (elemek), valamint merevnek tekinthető szakaszok, pl. armatúrák folyamatosan kapcsolódó elágazásmentes sora. Az ágak kezdő- és végpontjaikon egy-

* Referátum az MTA Gépszerkezettani Bizottsága 1980. ápr. 21-i ülésén.

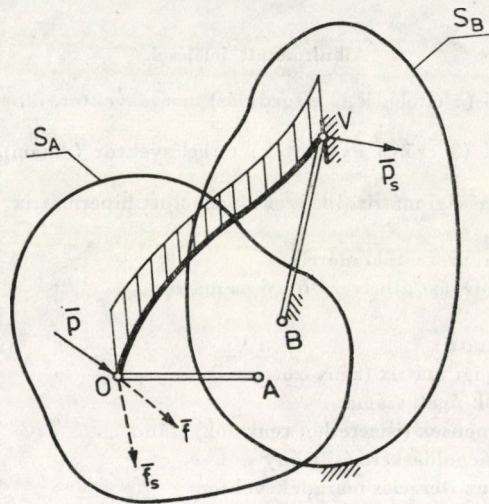
** Dr. Kolonits Ferenc, 1112 Budapest XI., Cirmos u. 4.

máshoz, ill. a környezethez csatlakozhatnak: ezen csatlakozási pontok a hálózat *csomópontjai*.

A későbbiekben felírandó hálózati egyenletrendszer a csomópontokra ható általános (hatkomponensű: erő és nyomaték) terhelés és ezen csomópontok mozgása (eltolódás és elfordulás) közt ad kapcsolatot.

Ezen kapcsolat a csomópontokat összekötő ágak bizonyos jellemzőiből építhető fel, amelyeket — mivel azt mutatják, miként járul hozzá az illető ág a rendszer alakváltozásához és a benne kialakuló erőkhöz — a befogott tartó ismeretes formuláinak mintájára az ág *járulékeinak* nevezhetünk.

A járulékok, amelyek az ág kezdő- és végpontjának terhelési és mozgásállapotáról a fenti célra szükséges és elégséges információt adnak, az ág végét befogottnak feltételezve, az alábbiak (1. ábra):



1. ábra

— A kezdőpontot támadó \bar{p} hatkomponensű (x, y, z erő- és nyomaték) terhelés alatt létrejövő \bar{f} hatkomponensű mozgást (elmozdulást és a keresztmetszet elfordulását)

$$\bar{f} = \mathbf{Z}\bar{p} \quad (3.1)$$

összefüggésben megadó \mathbf{Z} 6×6 -os rugómátrix, amely mindenkor szimmetrikus és pozitív definit.

— Az ágot terhelő, adott törvényszerűség szerint megoszló terhelés (gyakorlatilag legfontosabb az egyenletesen megoszló önsúly) hatására a kezdőponton létrejövő $\bar{f}_{s,0}$ mozgás és a befogáson továbbadódó $\bar{p}_{s,v}$ terhelés. A ketőt összefoglalóan *súlyhatásnak* nevezzük.

— A befogáson a külső \bar{p} terhelés is továbbadódik statikai áthelyezéssel, ennek végrehajtására még visszatérünk. Ez a „járuléék” csak a kezdő- és végpont viszonylagos helyzetétől függ, az ágsajátságoktól nem.

A járuléékok számszerű értéke függ a felírásnál alkalmazott (derékszögű, jobbsodrású) koordinátarendszer irányításától. Ha egy olyan I rendszerre kívánunk áttérni, amelynek tengely-egységvektorai K rendszerben megadva $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, úgy definiálnunk kell (csillaggal transzponáltat jelölve) a

$$F_{IK} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{i}^* \\ \bar{j}^* \\ \bar{k}^* \end{bmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \bar{i}^* \\ \bar{j}^* \\ \bar{k}^* \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

forgatómátrixot; $FF^* = F^*F = E$ (egységmátrix). A transzformált mennyiségek

$$\bar{p}_I = F_{IK} \bar{p}, \quad \bar{p}_K = F_{IK}^* \bar{p}_I \quad (3.3)$$

és ugyanúgy minden terhelés- és mozgásvektorra; a rugómátrixra pedig

$$Z_I = F_{IK} Z_K F_{IK}^*, \quad Z_K = F_{IK}^* Z_I F_{IK}. \quad (3.4)$$

Előadódhatik olyan helyzet, hogy a számítás szempontjából nem az O pont, hanem valamilyen, O -val merev szakasszal összekötött A pont mozgása a lényeges. Az O ponti forgáskomponensek A -nál változatlanul megjelennek, a mozgás azonban az összekötő merev szakasz „kaszálása” következtében megváltozik. Ha a forgások kicsik és az áthelyezést mutató vektor negatívja (\bar{AO})

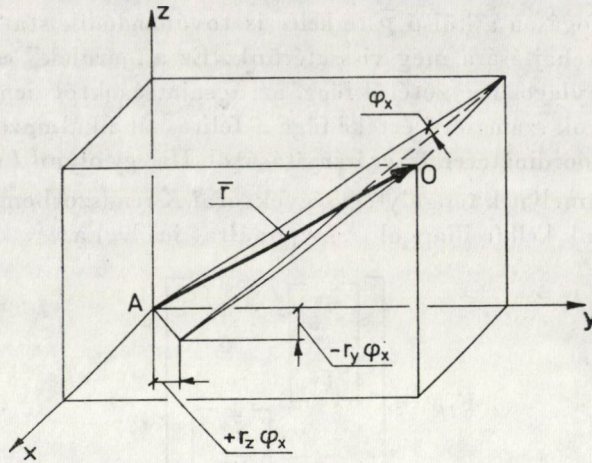
$$\bar{r}^* = [r_x, r_y, r_z],$$

úgy az elmozdulásnövekmény (2. ábra)

$$\left. \begin{aligned} \Delta \bar{F} &= \mathbf{R}_{AO} \bar{\varphi}, \\ \mathbf{R}_{AO} &= \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

összefoglalóan

$$\bar{f}_A = \mathbf{B}_{AO} \bar{f}_O, \quad \mathbf{B}_{AO} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{R}_{AO} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$



2. ábra

A fenti \mathbf{R} mátrix vektoriális szorzat komponenseit képezi mátrixművelettel, oszlopvektorba foglalva:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}\bar{v} &= [\bar{r} \times \bar{v}], \\ \mathbf{R}^* &= -\mathbf{R}. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Ha a terhelés nem az ágvégén, hanem a csatlakozó merev szakasz A végpontjában támad, O pontban ez változatlan erőket, de a statikai áthelyezés következtében megnövekedett nyomatékokat jelent. Az előbbihez hasonlóan kimutatható, hogy

$$\bar{p}_O = \mathbf{B}_{AO}^* \bar{p}_A. \quad (3.8)$$

A korábban említett, külső terhelésből befogáson továbbadódó terhelés (át-helyezéssel)

$$\bar{p}_V = \mathbf{B}_{OV}^* \bar{p}_O. \quad (3.9)$$

A \mathbf{B} áthelyezómátrixokra fennáll

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{AO} \mathbf{B}_{OA} &= \mathbf{B}_{OA}^* \mathbf{B}_{AO}^* = \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}_{AA} &= \mathbf{B}_{AA}^* = \mathbf{E}, \\ \mathbf{B}_{AO} + \mathbf{B}_{OA} &= \mathbf{B}_{AO}^* + \mathbf{B}_{OA}^* = 2\mathbf{E}, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

és tetszőleges C pontra

$$\mathbf{B}_{AO} = \mathbf{B}_{AC} \mathbf{B}_{CO}, \quad \mathbf{B}_{AO}^* = \mathbf{B}_{CO}^* \mathbf{B}_{AC}^*. \quad (3.11)$$

Ha az AO merev rudat az OV ággal egyesítve egyetlen ágnek tekintjük, ennek rugómátrixa

$$\mathbf{Z}_{AO} = \mathbf{B}_{AO} \mathbf{Z}_0 \mathbf{B}_{AO}^*, \quad (3.12)$$

súlyokozta saját mozgása az új végpontra

$$\bar{f}_{s,A} = \mathbf{B}_{AO} \bar{f}_{s,O} \quad (3.13)$$

A befogáson továbbadódó súlyterhen mindez nem változtat, a külső teher át-helyezésénél a kezdőpontváltozás figyelembe veendő.

Az ág rugómátrixán és a saját mozgáson mit sem változtat, ha a befogást nem V -ben, hanem a rúdvéghez VB merev szakaszt csatolva B -ben vesszük fel. A befogáson továbbadódik súlyteherből

$$\bar{P}_{s,B} = \mathbf{B}_{VB}^* \bar{P}_{s,V}, \quad (3.14)$$

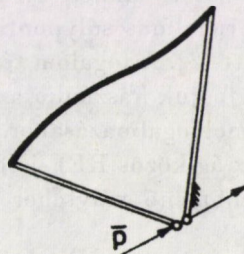
külső teherből

$$\bar{p}_B = \mathbf{B}_{AB}^* \bar{p}_A. \quad (3.15)$$

Az A , B pontra és az eredeti O , V -re értelmezett járulékok kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban állnak, tehát szükséges és elégséges mivoltukban egyenértékűek. Úgy is tekinthetjük, hogy a V ponthoz mereven hozzákötjük a teljes teret (S_B) és ezen teret rögzítjük, az O -hoz ugyancsak a teljes teret, az előbbi egy „fedő terét” (S_A) — ebben hat a külső terhelés. A járulékok ezen két tér kapcsolatát írják le, egy-egy bennük tetszőlegesen felvett pontra vonatkoztatva (1. ábra). Valamely pont mozgása S_B -ben a S_A -beli fedőpontjához képest végzett mozgás.

Lehetséges és célszerű a két vonatkoztatási pont olyan felvétele, hogy ezek a S_A és S_B terekben terheletlen állapotban egymás fedőpontjai legyenek. Más megfogalmazásban: a fizikai csomóponttól csomópontig menő ág mint hálózatelem helyett olyan elemet alkalmazunk, amelynek elejére és végére egyazon REFERenciapontba nyúló merev rudakat kötöttünk. Az eredeti és REF járulékok összefüggése (3.12 . . . 14)-ből adódik, (3.15)-ből pedig az, hogy a kezdőpontot támadó külső erő változatlanul adódik tovább (3. ábra).

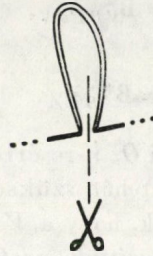
A REF járulékok előállítására a szokásosakhoz képest többletmunkát nem kíván, hiszen az ágakat mindenképp egyenes és ívelt elemeiből összegezve állítjuk elő: közömbös, hogy ezen összegzést a fizikai kezdő- és végpontra vagy máshová vonatkoztatva végezzük.



3. ábra

Az előálló alakzat funkcionálisan hasonló a jávai bábszínház figurájához, amelynek tagjait a játékos hosszú „vajang” pálcákkal mozgatja, a keze a referenciapont.

A fizikai hálózatba a fentebbiek szerint értelmezett elemekhez szükséges vajangokat nehézség nélkül beiktathatjuk. Ha a csövet valahol átvágjuk és az átvágás két partját tetszőleges alakú merev szakasszal összekötjük (4. ábra), ez az alakzat az ép csővel rugalmasságban egyenértékű.



4. ábra

A vajangosított ágon a statikai egyensúly feltétele az áthelyezések elmaradásával a korábbinál egyszerűbb. A támadó erő mintegy „végigfolyik” az ágon és „mátrixosan arányos” mozgáskülönbséget hoz létre a kezdő- és végpont közt. Részletes villamos analógia alakítható ki: (3.1) az Ohm-törvény, a mozgás — feszültség, a terhelés — áram, a rugómátrix — impedancia; a súlyhatások feszültség- és áramgenerátorok. A villamos hálózatok kezelésében kialakított módszerek adaptálhatók.

A Z és \bar{p}_s a kezdő- és végpont felcserélésekor nem változik.

A REF bevezetésének további előnye, hogy a szóbanforgó csőalakzathoz igazodó felvételével a járulékok alakilag egyszerűsödnek. JÜRGENSONN két befogás között hőtágulással befedített síkbeli csőág vizsgálatakor voltaképp REF-nek vette a nyomvonal „rugalmas súlypontját” és ilyen értelmezésben nyomatékmentes reakciót kapott [2]. A fogalom térbeli vezetésekre etekintetben nem általánosítható, de fel fogjuk használni az ágat alkotó elemek járulékeinak minimális terjedelmű megfogalmazásakor. Ezeket alkalmasan illesztett REF-ekre írjuk fel, majd az ág közös REF-jére transzformálva összeadjuk (figyelembevétel, hogy a továbbmenő súlyteher a további elemekre külső teher).

A transzformációs formulák az i (i -ik) egység- és R közös REF között, tekintetbe véve a K közös és az I illeszkedő rendszer közti esetleges forgatást

is (3.3, 4):

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{R,i} &= \mathbf{B}_{Ri} \mathbf{F}_{IK}^* \mathbf{Z}_i \mathbf{F}_{IK} \mathbf{B}_{Ri}^*, \\ \bar{\mathbf{f}}_{s,R,i} &= \mathbf{B}_{Ri} \mathbf{F}_{IK}^* \bar{\mathbf{f}}_{s,i}, \\ p_{s,R,i} &= \mathbf{B}_{Ri}^* \mathbf{F}_{IK}^* \bar{p}_{s,i}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ez a hagyományos eljáráshoz képest csak annyi többletmunkát jelent, hogy meg kell határozni az „alkalmas” egység-REF térbeli helyzetét.

Egyelőre nem sikerült tisztázni, lehetséges, ill. célszerű-e valamilyen optimalizáló megköttést tenni az ág REF felvételére: a Jürgensonn-féle általánosítási problémák miatt ez kevésbé valószínű. Bizonyos azonban, hogy nem szabad szükségtelenül hosszú vajangokat alkalmazni. A számítógép ugyan nagy, de mégis korlátozott számú jeggyel jeleníti meg az egyes mennyiségeket. A forgásokban és erőkből jelentkező kerekítési hibák áthelyezéskor a hosszakkal szorozódnak, a (3.5) szerinti mozgás-, valamint forgásnövekmények hibája a „nagy számok kis különbsége” miatt tovább nőhet. A bábjáték hasonlatot folytatva: még biztos kezű játékos keze is reszket kismértékben, s ez áttételeződéve ráakódik a báb szerep szerinti mozgására. Minél nagyobb az áttétel, annál zavaróbb a véletlenszerű táncolás, ami túlsúlyra jutván felismerhetetlenné teszi a cselekményt. Végeredményben a (3.16) transzformáció a járulékok meghatározottságát rontja.

Célszerű arra törekedni, hogy ez a romlás a szereplő csőrészek összességére a lehető legkisebb legyen: a választott REF a „lehető legközelebb” legyen a nyomvonalhoz. Rugalmasabb darabok nagyságukat meghaladó részarányban befolyásolják az összképet, ugyanígy a súlyosabbak is. Mindezen megfontolások újra csak valamiféle „rugalmas súlyponthoz” vezetnek. A gépi pontosság azonban kellő tartalékot jelent, hogy egzakt optimumra ne legyen szükség — elegendő, ha a REF-et a szereplő összes rugalmas alakzatok középtáján „szemre” vesszük fel. Bizonyos azonban, hogy a járulékok szokásos definíciója a fizikai ág elejére és végére vett vonatkoztatási pontjaival távolról sem optimális.

A tapasztalatok szerint a rugómátrixok általában hajlamosak a gyenge meghatározottságra és ez különösen a későbbiekben alkalmazásra kerülő iterációs módszernél nehézséget jelenthet. A feltételek az algoritmus átgondolt programozásával javíthatók [6]. Megfontolandó, hogy az olyan rendszerek, amelyek bizonyos irányokban kiemelkedően merevek, vagy aránytalanul oszlik meg rugalmasságuk, általában különlegesen kedvezőtlenek, de tisztán konstrukciós szempontból is kerülendők (pontatlan szerelés, helyi túlterhelés kockázata). Függőleges cső több helyen történt merev felkötésénél (helyi axiális befeszülést okozott) éppúgy tapasztaltunk numerikus nehézségeket, mint tévesen, abszurd helyen felvett REF esetében.

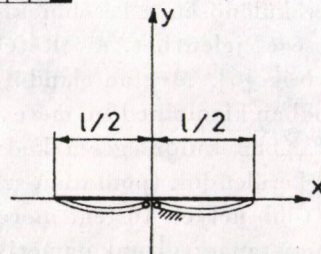
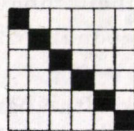
3.2. A járulékok felépítése elemekből

Az egyenes elem járulékait az 5. ábra szerinti rendszerben adjuk meg. A rugómátrix diagonális és a tengelyirányú húzás, hajlítás mellett szokásos elhanyagolása miatt szinguláris; \bar{q} az egységnyi csőhosszra jutó megoszló súlyerő.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z} &= \frac{l}{IE} \langle 0, l^2/12, l^2/12, 1 + \nu, 1, 1 \rangle \\ \bar{f}_s &= \frac{l^3}{6IE} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & l/4 & 0 \\ 0 & 0 & l/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \bar{q}; \bar{p}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \bar{q} \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Megjegyzendő, hogy \mathbf{Z} fenti szingularitása csak akkor eredményezné a rendszermátrix szingularitását, ha egyenes szakaszt akarnánk hőtágulás felvételére kényszeríteni. A gyakorlatban vagy további csatlakozó elemek adják meg az egyenes tengelyirányában az ág szükséges rugalmasságát, vagy egyetlen egyenesből álló ágnál a tengelyirányú mozgás nincs korlátozva: ennek ellenkezője konstrukciós hiba.

A 6. ábra szerinti ívre Castigliano-tétellel számíthatók a járulékok. A k_i , k_0 , k_t tényezők azt mutatják, hogy az ívet síkjában, ill. abból kihajlításra terhelő, valamint csavaró nyomaték hatására hányszorosa nagyobb alakváltozás jön létre, mint egyenes cső hajlításánál. k_i értéke a Kármán-szám reciproka, k_0 ugyanennyi vagy 1 (ez kevésbé elterjedt feltevés), $k_t = 1 + \nu$. Az ismétlődő mennyiségekre rövid jelölést vezetünk be:



5. ábra

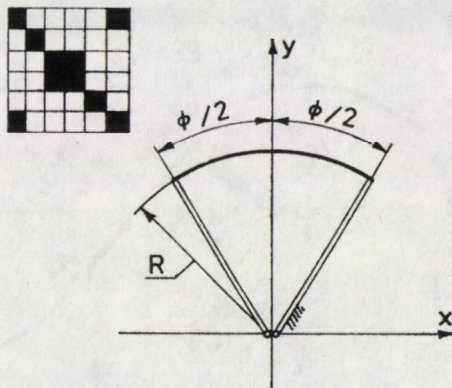
$$\begin{aligned}
 P &= (\Phi + \sin \Phi)/2, \\
 M &= (\Phi - \sin \Phi)/2, \\
 F &= \sin (\Phi/2), \\
 C &= 2[F - (\Phi/2) \cos (\Phi/2)].
 \end{aligned}$$

$$\bar{Z} = \frac{R}{IE} \begin{bmatrix} k_i R^2 P & 0 & 0 & 0 & 0 & 2k_i RF \\ 0 & k_i R^2 M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_i R^2 \Phi & -2k_i RF & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2k_i RF & k_t P + k_0 M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_t M + k_0 P & 0 \\ 2k_i RF & 0 & 0 & 0 & 0 & k_t \Phi \end{bmatrix}$$

$$\bar{f}_s = \frac{R^3}{IE} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & 0 \\ f_{21} & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \\ 0 & 0 & f_{43} \\ 0 & 0 & f_{53} \\ 0 & f_{62} & 0 \end{bmatrix} \bar{q}, \quad \begin{aligned} f_{11} &= k_i R(\Phi P/2 - 2F^2), \\ f_{12} &= -k_i R(M + \Phi F^2)/2, \\ f_{21} &= k_i R(3M - \Phi F^2)/2, \\ f_{22} &= k_i R\Phi M/2, \\ f_{33} &= k_t R(\Phi^2/2 - 2F^2), \\ f_{43} &= (k_0 - k_t) FM, \\ f_{53} &= (k_0 + k_t) C + (k_0 - k_t) M \cos (\Phi/2), \\ f_{62} &= -2k_i C. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\bar{p}_s = R \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{12} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \\ 0 & 0 & p_{43} \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{61} & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{q}, \quad \begin{aligned} p_{11} &= p_{22} = p_{33} = \Phi, \\ p_{43} &= -p_{61} = 2RF. \end{aligned}$$

Az egyenes formulái tovább nem egyszerűsíthetők. Az ív rugómátrixából a REF a súlypontba helyezésével lehetne kiküszöbölni elemeket, de a



6. ábra

maradók bonyolódna. A diagonalizálás ilyen módon nem lehetséges, mivel a sajátvektorok nem külön-külön, hanem együttesen is tartalmazzák a terhelés erő- és nyomatékrészét.

A járulékokat (3.16) szerint áthelyezzük a közös rendszerbe és REF-re. Az összegzés a \mathbf{Z} , \bar{f}_s , \bar{p}_s gyűjtő változóba az alábbiak szerint történik ($:=$ az értékadás jele)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z} &:= \mathbf{Z}_1; \bar{f}_s := \bar{f}_{s,1}; \bar{p}_s := \bar{p}_{s,1}; \\ i &:= 2, \dots, n-re \\ \mathbf{Z} &:= \mathbf{Z} + \mathbf{Z}_i; \bar{f}_s := \bar{f}_s + \bar{f}_{s,i} + \mathbf{Z}_i \bar{p}_s; \bar{p}_s := \bar{p}_s + \bar{p}_{s,i}; \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

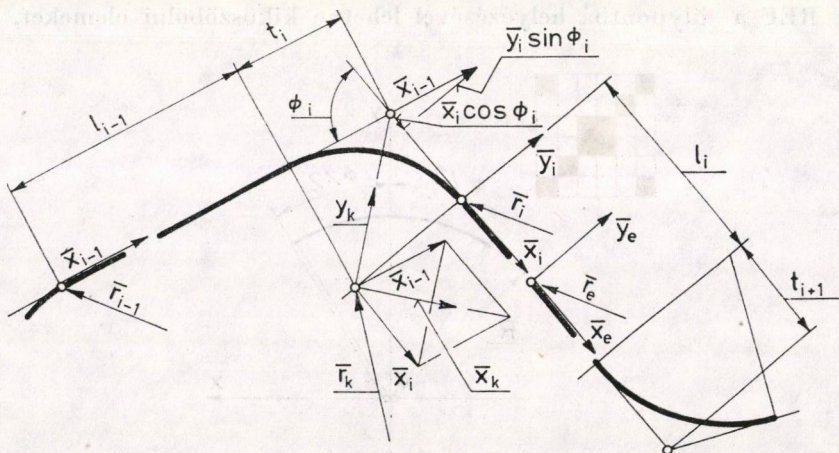
Merev szakasz csak a továbbadódó súlytehernél szerepel, a rugalmas járulékok összegzéséből kimarad.

A nyomvonal megadása célszerűen a kezdőpont (o) referenciaponttól vett \bar{r}_0 helyvektorával, majd a nyomvonalgörbeponttól töréspontig mutató $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots$ csővektorokkal és a kiindulópontjukon érvényes R_1, R_2, \dots nyomvonallekerekítési sugárral történik.

A bevitt vektorokból rendre képezhető (7. ábra)

$$\begin{aligned} v_i &= \sqrt{\bar{v}_i^* \bar{v}_i}, \quad \bar{x}_i = \bar{v}_i/v, \quad \Phi_i = \arccos(\bar{x}_{i-1}^* \bar{x}_i) \\ t_i &= R_i \tan(\Phi_i/2), \quad \bar{y}_i = (\bar{x}_{i-1} - \bar{x}_i \cos \Phi_i)/\sin \Phi_i, \\ \bar{r}_i &= \bar{r}_{i-1} + (l_{i-1} + t_i) \bar{x}_{i-1} + t_i \bar{x}_i, \quad l_i = v_i - t_i - t_{i+1}, \\ \bar{z}_i &= \bar{x}_i \times \bar{y}_i. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Az első egyenes elemnél lekerekítés nem lévén, \bar{y}_0 a fentiek szerint nem képezhető: az \bar{x}_0 -ra mindenkor merőleges $x_{0y} - x_{0z}, x_{0z} - x_{0x}, x_{0x} - x_{0y}$ -val párhuzamos egységvektort vesszük fel.



7. ábra

Az egyenes elem rendszere a fenti i -vel azonos állású: a REF

$$\bar{r}_e = \bar{r}_i + l_i \bar{x}_i / 2. \quad (3.21)$$

A körív illesztett rendszere

$$\begin{aligned} \bar{r}_k &= \bar{r}_i - R\bar{y}_i, \\ \bar{x}_k &= (\bar{x}_{i-l} + \bar{x}) \left/ \left(2 \cos \frac{\Phi_i}{2} \right) \right.; \quad \bar{y}_k = (\bar{x}_{i-1} - \bar{x}_i) \left/ \left(2 \sin \frac{\Phi_i}{2} \right) \right., \\ \bar{z}_k &= \bar{z}_i. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A \bar{q} megoszló terhelést be kell forgatni az egyes elemek rendszerébe. A formulák szélteher vizsgálatára is alkalmasak, ha egyenesnél az axiális komponenst elhagyjuk, ívnél pedig — közelítéssel — a vetületre jutó terhet egyenletesen elosztjuk a nyomvonalon.

3.3 A számított rendszer és a kényszerek

Az általános szóhasználatban *csővezetékrendszernek* csövek valamilyen technológiai szempont szerint körülhatárolt, esetleg közvetlenül össze sem függő együttesét nevezik (pl. főgőz-rendszer). A számítás szempontjából *rendszer* az egy egységben számítandó, egymással összefüggő csövek együttese, az előbbinek többnyire csupán része. Olyan csőalakzat, amely csak helyben maradó vagy ismert mozgású környezeti pontokkal függ össze, más rugalmas csőalakzatok nem hatnak rá. Határán nem szükségszerűen ér véget fizikailag a vezeték: a folytatástól mindenfajta mozgást meggátló környezethez rögzítés (befogás) vagy minden irányban ellenállásmentesen deformálható csőelem (különleges kompenzátor) ugyanúgy elválasztja a rendszert, mintha a vezeték tovább se menne. A környezeti pontokhoz kapcsolódás szerkezetei — a *kényszerek* — a szorosan vett csőhálózattal együtt vizsgálandók.

Az ág járulékaiknak korábbi megfogalmazásából látható, hogy csak végpontjain — azaz a hálózat csomópontjain — tudunk figyelembe venni külső terhelést, ill. számíthatunk mozgásokat. A hálózatot ennek figyelembevételével kell csomópontok kijelölésével ágakra bontani. *Csomópont* tehát,

- ahol a vezeték a környezethez bármilyen:
 - teljes (mind a hat irányban és értelemben) vagy részleges, merev vagy adott rugalmasságú összeköttetéssel: kényszerrel csatlakozik,
- ahol a vezetékre külső koncentrált terhelés hat,
- a vezeték elágazik, vagy fizikailag végetér (ha utóbbira nem hat egyszersmind terhelés vagy kényszer, a csatlakozó ágat a számításból kihagyhatjuk, mint terheletlent),
- ahol a vezeték mozgását valamilyen ok (pl. fenyegető helyszűke) miatt ellenőrizni kívánjuk.

Egy csomópontra a fentiek közül több is érvényesülhet. Az egyöntetűség kedvéért mondhatjuk úgy is, hogy minden csomópontra érvényesül kényszer, csak egyes esetekben olyan, ami minden irányban szabad mozgást enged. A külső koncentrált erők esetét a tárgyalásból kétféleképp is kiiktathatjuk:

- vagy megfelelő módon befoglaljuk a súlyhatásokba,
- vagy igen lágy, kellőképp megfeszített rugót kötünk a csőhöz: ennek kis mozgásai a feszítést nem módosítják lényegesen.

A kényszer a csomópontot és az (általában álló) környezetbeli fedőpontját összekötő különleges ág, amelynek

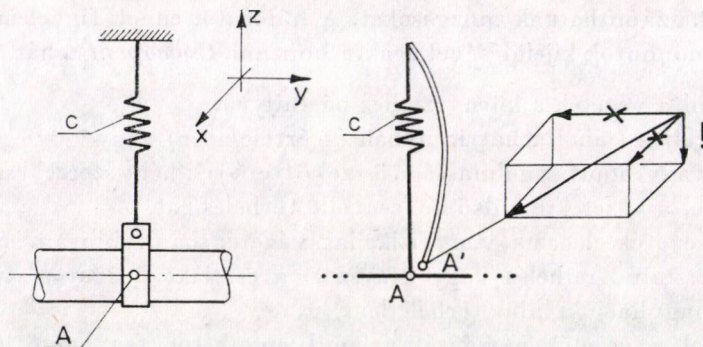
- geometriai hossza zérus,
- súlyhatásai nincsenek,
- rugómátrixa megfelelő koordinátarendszerben diagonális és többnyire szinguláris.

A gyakorlati csőszervezetek többnyire úgy igazodnak az épületszerkezethez, hogy önként kínálkozik olyan derékszögű rendszer, amelynek tengelyeihez a csövek nagy része illeszkedik. A kényszerek zöme felfüggesztés vagy befogás, az oldalirányú kikötések-vezetések ritkábbak, és ezek irányítása sem tér el a főrendszertől. Gyakorlatilag elegendő olyan kényszereket vizsgálni, amely a rendszer egészének leírására használt koordinátarendszer tengelyirányában, ill. azok körül hatnak mereven vagy rugalmasan (általánosságban forgatást kellene beiktatni).

A 8. ábrán látható rugós felfüggesztést a mellette feltüntetett alakzattal modellezhetjük, ahol a rugó külső végét vajanggal az A' fedőponthoz kötötük. A rugómátrix

$$\mathbf{Z} = \langle \infty, \infty, c, \infty, \infty, \infty \rangle. \quad (3.23)$$

A végtelen elemek formálisak, a számításban nincs szerepük. A számítás során azt kell majd vizsgálnunk, hogyan deformálják a rendszert a kényszerekről



8. ábra

átadódó reakcióerők. Olyan reakcióerő viszont eleve nem ébredhet, amely a kényszeren ∞ mozgást idézne elő: a kényszer a lehetséges reakciókat eleve megszüri. Ezt a szűrést egy 0 és 1 elemekből álló

$$\mathbf{S} = \langle 0, 0, 1, 0, 0, 0 \rangle \quad (3.24)$$

diagonálmátrixszal való szorzás valósítja meg. Ha pedig a számításban eleve csak ilyen kompatibilis reakciókat veszünk tekintetbe, használhatjuk a

$$\mathbf{K} = \mathbf{SZ} = \langle 0, 0, c, 0, 0, 0 \rangle \quad (3.25)$$

szűrt rugómátrixot.

A merev kikötés irányában a rugóállandó $\mathbf{0}$. A befogás jellemzői:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}, \mathbf{K} = \mathbf{Z} = \mathbf{0}. \quad (3.26)$$

A minden irányban szabad mozgás „kényszere”:

$$\mathbf{S} = \mathbf{K} = \mathbf{0}. \quad (3.27)$$

A minden irányban rugóval megvalósított kényszerre:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}, \mathbf{K} = \mathbf{Z}. \quad (3.28)$$

A fenti reprezentáció az erőmódszernek felel meg, amikor a reakciókomponenseket tekintjük ismeretlennek. Gyakorlati vezetékelnél az egy-két komponensű részleges kényszerek miatt (aholis négy-öt ismeretlen mozgáskomponens adódik) általában ezúton kell kevesebb ismeretlennel dolgozni, mint a mozgáskomponensek meghatározását célul kitűző mozgásmódszernél. Az utóbbinak egyéb előnyei vannak, amelynek következtében pl. végeselemes mód-szereknél szinte kiszorította az erőmódszert, ilyen egyebek közt a rendszer-mátrix kevéssé kitöltött volta. A továbbiakban kidolgozandó egyenletmegoldási algoritmus mellett ez a különbség kevéssé jut érvényre, ezért nem tűnik szükségesnek eltérni a hagyományos erőmódszertől. Emellett szól az is, hogy a mozgásmódszer alapjául szolgáló \mathbf{Y} merevségi mátrixokat csöveknél nem lehet közvetlenül előállítani, csak a rugómátrix invertálásával. Ezért a mozgásmódszer részleteivel nem foglalkozunk, csupán a teljesség kedvéért a kényszerek kezelését vázoljuk.

A vizsgált kényszer merevségi mátrixa

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \langle 0, 0, 1/c, 0, 0, 0 \rangle \quad (3.29)$$

nehézség nélkül, formálisan adódik. Végtelen elemeket akkor tartalmaz, ha valamelyik komponens merev. Ezekben az irányokban eleve nem vehetünk fel mozgáskomponenszt; a fentiek mintájára \mathbf{S}_m mozgásszűrőt és \mathbf{W} szűrt merevségi mátrixot definiálhatunk (a bemutatott esetre $\mathbf{S}_m = \mathbf{E}$).

Befogásnál

$$\mathbf{S}_m = \mathbf{0}, \mathbf{W} = \mathbf{0}; \quad (3.30)$$

minden irányban szabad mozgást engedő „kényszer” esetében

$$S_m = E, W = Y = O; \quad (3.31)$$

minden irányban rugalmas kényszerre

$$S_m = E, W = Y. \quad (3.32)$$

A szűrt mátrixok összefüggése:

$$KW = SS_m = S + S_m - E = E - (S - S_m)^2. \quad (3.33)$$

A rugó-szűrő információkat igen tömör formában tárolhatjuk hatjegyű bináris számokkal, amelyeknél a sorrendben vett irányokra nézve 0 kényszer hiányára, 1 pedig jelenlétére utal, más kiegészítő információ hiányában merevre. Ily módon 63 a befogás vagy minden irányban rugalmas kényszer, 8 a felfüggesztés, 27 = 011011 az x -irányú mozgás és x körüli forgást megengedő vezetés leírója. A rugózásra vonatkozó információt ebbe a szükségképp pozitív számokból álló leírósorozatba az alábbi módon illeszthetjük. Kijelölünk a rugó-állandók számára egy tárolóvektort (mondjuk A) és ebbe írjuk az összes szereplő állandókat, az ismétlődőket is csak egyszer. Ha valamelyik kényszer rugózott, a szűrő után egy negatív számmal megadjuk, visszafelé hányadik „értékes” kényszerkomponensről van szó, majd a rugóállandó indexét a tárolóvektorban utánaírjuk. A negatív előjel a feldolgozáskor mutatja, hogy nem szűrő, hanem rugómegadás következik.

Legyen egy kényszer merev függesztés, x és y irányban rugózott kikötés és tartalmazza a rugóállandókat az A vektor 2. és 5. eleme. A teljes leíró:

$$\dots, 56, -3, 2, -2, 5, \dots$$

Tekintve, hogy a leíró elemeinek nagysága korlátozott, a használt gép lehetőségeitől függően további tömörítés lehetséges.

A vázolt reprezentációban nem mutatkozott lehetőség a kényszerek merev rúd mentén történő általános áthelyezésére, hogy ily módon a teljes számítást függetlenné lehessen tenni a csomópontok térbeli helyzetétől. Teljes, mind a hat komponensre kiterjedően szabad, rugalmas vagy merev kényszer ugyan át lehet vinni tetszőleges REF-re, részleges kényszernél a szűrés azonban úgy jelenik meg, hogy a REF-nél megengedhető, kompatibilis terhelés komponensei közt lineáris kapcsolatnak kell fennállnia — ezt a lineáris kapcsolatot a csomópont és REF közti áthelyezőmátrixnak a „részlegességhez” igazodó szelete jellemzi.

3.4. A hálózati egyenlet és megoldása

A számítás közvetlen célja, hogy megállapítsuk, milyen terhelések adódnak a rendszerre és hová mozdulnak el a csomópontjai a ható súly- (és koncentrált) erők, valamint a hőtágulás megakadályozása következtében. Az ered-

mények hirtokában az egyes elemek szilárdsági ellenőrzése a keresztmetszeti terhelések megállapításával külön műveletként végezhető.

A szerkezetet először is kellő számú kényszer eltávolításával statikailag határozottá tesszük. Ez elvileg sokféleképp végezhető, gyakorlatilag célszerű egyetlen befogást meghagyni. Ilyen a csőrendszeren extrém kivételektől eltekintve mindig van. Kedvező, ha ez a befogás maga nem mozog (pl. csatlakozó berendezés hőtágulása következtében — ha ilyen nem lenne, a választott befogást ellenkező mozgás teljes rendszerre szuperponálásával „meg kell állítani”). Ha több lehetőség van, tapasztalat szerint célszerű a legmerevebb ághoz tartozó befogást meghagyni.

A kényszerek eltávolítása úgy értendő, hogy az illető csomópont környezetbeli fedőpontját felszabadítjuk. Különleges belső kényszer a zárt hurok. Ezt valamelyik csomópont mellett átvágjuk, így pótlólagos csomópont keletkezik. Az itt ható „reakcióerő”, helyesen hurokerő ellentettje az átvágás másik partján levő csomópontra hat, és nagyságát az szabja meg, hogy megszüntesse a két csomópont közt felléphető mozgáskülönbséget: azok „mereven” kövessek egymást. A kényszerleíróban az új csomópontokhoz 63 tartozik.

Az így szabaddá tett rendszerben az ágak tágulásának és súlyhatásainak később részletezendő összegzésével megállapítható, mennyit mozdulnak el a fedőpontok eredeti környezetbeni helyükhöz képest. A különbözetet tovább növeli, hogy ezek a helyek maguk is mozoghatnak (turbinacsonk stb.). A fedőpontokon olyan reakciók fognak ébredni, amelyek ezeket a mozgáskülönbözetekeket megszüntetik és a fedőpont a környezettel újra összekapcsolható. Hurokátvágásnál az átvágás két partjának mozgáskülönbségét kell megszüntetni: az újonnan keletkezett csomópontot kell a régihez húzni.

A hagyományos eljárás az, hogy az ágak és kényszerek rugómátrixaiból az áthelyezőkkel alkotott hármasszorzatok összegzésével, egységes táblázatba rendezésével és a meg nem engedett reakciókomponensek (amelyek irányában visszatolást sem írhatunk elő, hiszen a mozgás szabad) sorának és oszlopának kihúzásával megkonstruáljuk a rendszer egyesített Z rugómátrixát, majd megoldjuk a

$$Z\bar{p} = \bar{f} \quad (3.34)$$

egyenletet, ahol \bar{p} a megengedett reakciókomponensek, \bar{f} pedig a szükséges visszatolások rendezett vektora. Utóbbiak a fedőponti terhelések és mozgások egyesítésével, a szabad komponensek elhagyásával származtathatók. Méretszámuk a statikai határozatlanságot okozó kényszerkomponensek száma, azaz a rendszer (erőműszerbeni) szabadságfokainak száma, amit a továbbiakban k -val jelölünk.

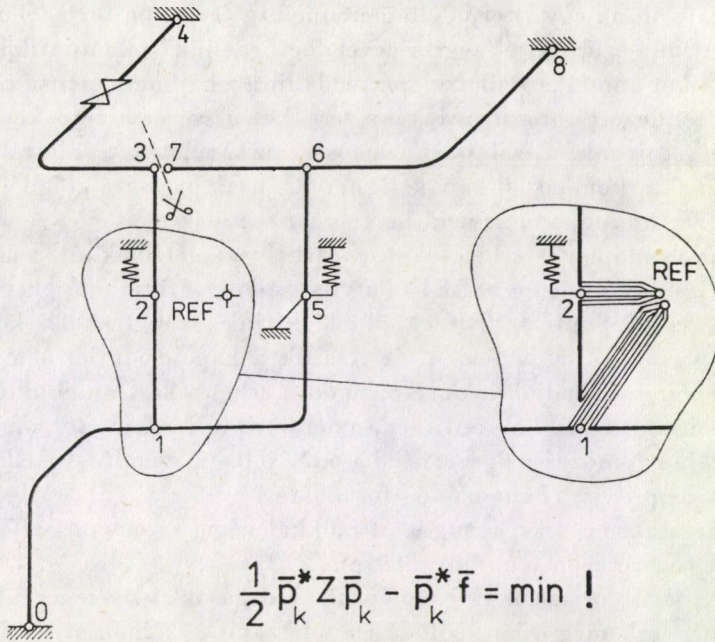
Ha kihasználjuk a szimmetriát, a megoldáshoz szükséges munkarekeszen kívül a mátrix tárolásához $(k + 1)k/2$ számú rekesz kell, de így még nem kaptuk meg a kényszermentes irányokban fellépő mozgásokat. Utóbbihoz a

kihúzott sorokból $(6n - k)k$ terjedelmű részre is szükség van, ahol n a hálózat csomópontjainak száma (eltekintve a megmaradó befogástól).

A mátrix megkonstruálása elég hosszadalmas művelet és a rugómátrixok meglehetősen hajlamosak a gyengén meghatározottságra, úgyhogy nem lehet eleve kizárni az iteratív javítás szükségességét. (Bár a gyakorlatban azt tapasztaltuk, ha a megoldás pontatlansága már zavaró szintet ért el, akkor olyan gyengén meghatározott volt a rendszer, többnyire konstrukciós hibából kifolyólag, hogy az iteratív javítás sem hozott eredményt.) A REF bevezetésével a mátrixszerkesztés lényegesen egyszerűsíthető. A memóriaigény csökkentése érdekében azonban olyan algoritmust alakítunk ki, amely egy (3.34) transzformációt a mátrix explicit ismerete nélkül elvégez és iteratív eljárást alkalmazunk — ami a fentiek szerint nem eleve rosszabb megközelítés.

Számozzuk be a csomópontokat a megmaradó befogástól mint 0-tól mindenkor kifelé haladva, hurokvágásnál az új csomópont sorszáma legyen mindig nagyobb, mint a másik parton levő régié. Csomópont sorszáma egyszersemind a belőle befogás felé menő ág sorszáma is. A csomópontokról vágjuk le az ágakat és indítsunk végeikről merev rudakat egy az egész hálózatra közös REF-hez, ahol aztán a kapcsolódó ágakat újra összekötjük. Így megjelennek a hálózatban a vajangosított ágak. A fizikai csomópontok és kényszerek maradnak a helyükön, a REF-nél kialakított ágkapcsolódáshoz vajanggal csatlakoznak. Kényszermentes csomópontnál és befogásnál ez mellőzhető lenne, hiszen ezek a REF-en is értelmezhetők lennének, az egyöntetűség miatt ettől eltekintünk (9. ábra).

Az ágak kapcsolódásának rendje tömören leírható az ún. „fa” és „hurok” vektorokkal. Az előbbi rendre minden csomópontra megadja, hogy a befogás felé milyen sorszámú csomóponthoz kapcsolódik — tehát a hálózatból létrehozott fa alakú irányított gráf szerkezetét mutatja. Az utóbbi ugyancsak minden csomópontra megadja, ha az hurokfelvágásnál keletkezett, milyen sorszámú csomópont áll a másik parton; ha nem, a megfelelő vektorelem zérus. Ez jogosabb, mint pusztán helykitöltés, hiszen ezen csomópontok fedőpontját és a megmaradó, helytállóknak tekintett befogást, a 0. csomópontot összekapcsolhatjuk merev szakasszal: a mozgások értelmezhetők úgy, mint a 0. csomóponthoz viszonyított relatív mozgások. Így fiktív hurkok átvágásából lehet származtatni a csomópontokat: a hurok fele a csomóponti erők által a befogásig feszített ágak együttese, a másik fele a környezeten keresztül jövő merev visszavezetés. Az átvágás szigorúan véve nem a csomópont, hanem a fedőpontja mellett történik, a fedőponttal összekötő kényszerek a csomóponton maradnak. A másik parton az eredeti hálózatban nem közvetlen a 0. csomópont áll. Ha mindezt a REF-re átvitt hálózatra vonatkoztatjuk, ott a kényszerek már nem szerepelnek a képben és az átvágás a szóban forgó, valamint 0. csomópont referenciaponti megfelelője közt értelmezhető. Az erőmódszer természetét tekintve éppúgy hurokmódszer, mint a villamos hálózatok áram-



9. ábra

módszere; a mozgásmódszer a feszültségmódszerhez hasonlóan csomópontok egyensúlyát vizsgálja.

A 9. ábra hálózatára a vektorok elemeit a (3.35) táblázat tartalmazza.

Sorszám	1	2	3	4	5	6	7	8
Fa	0	1	2	3	1	5	6	6
Hurok	0	0	0	0	0	0	3	0

(3.35)

Ebből a keretezett rész tekinthető nem-magátólértődő információ hordozójának. Gyakorlati csőhálózatban a hurkok nem túl gyakoriak. A két vektor együttesen tárolható, ha rendre megadjuk a 2. csomóponttól a favektor elemeit, a hurokelemeket, ha vannak, a faelem után negatív előjellel iktatjuk a sorba. A leírók számszerűen korlátozott nagysága itt is lehetővé teszi a gépi sajtáságoktól függő tömörítést.

Egy k terjedelmű kompatibilis rendezett (más szóval: a kényszerek szerint redukált) reakciókomponens-sorozat szorzása az összesített Z -vel, azaz kényszerirányokbeli mozgáskomponensek rendezett vektorává transzformálása az alábbi lépésekben történik:

a) Kijelölünk egy k terjedelmű eredmény- és egy $6n$ terjedelmű munkaterületet. A rugó-szűrő leírók segítségével „betördeljük” a kompatibilis reakciókomponenseket a munkaterületre, hogy előálljon a hatkomponensű csomóponti terhelések rendezett sorozata: a kényszerekkel össze nem férő komponensek helyére zérust írunk. Ezzel párhuzamosan az eredményterületre beírjuk a kényszereknek a kompatibilis reakciókomponensek hatására előálló mozgását; ha a kényszer merev, a megfelelő komponenszt nullázzuk.

b) A csomóponti terheléseket az áthelyezőmátrixokkal rendre végigsorozva a munkaterületen a REFre átvitt csomóponti terheléseket képezzük.

c) A csomóponti terhelésekből előállítjuk az ágterheléseket. A legnagyobb sorszámútól visszafelé sorra vesszük a kapcsolódásleírókat és mindegyik terhelést hozzáadjuk azon csomópont terheléséhez, amelyikre a favektor, és levonjuk abból, ha van ilyen, amelyikre a hurokvektor mutat. (Megjegyezzük, hogy mozgásmódszernél hasonló jellegű számítást kellene végeznünk, csak nem ilyen „halmozódó” formában.)

d) Az ágterheléseket a rugómátrixokkal végigsorozva ágdeformációkat számolunk (ugyanazon munkaterületre).

e) Az ágdeformációkat csomóponti mozgásokká összegezzük, evégből fordítva másszuk meg a kapcsolódásleíró létráját. Az ágdeformáció az ággal azonos sorszámú csomópont mozgása, ha a másik vég rögzített: ez 1.-nél maga a valóságos mozgás. A továbbiakban minden csomópontnál az ott talált mozgáshoz adjuk azon csomópontét, amelyikre a fa- és levonjuk azét, amelyikre a hurokvektor mutat. (Mozgásmódszerrel a c-nél tett megjegyzés érvényes.)

f) A REFen értelmezett csomóponti mozgásokat áthelyezőmátrixokkal a fizikai csomópontokra visszük. Így „melléktermékként” eleve megkapjuk a csomópontok teljes mozgását, amit explicit mátrixos eljárásoknál külön kell számítani.

g) A szűrőleíró segítségével kiemeljük a kényszerirányú mozgáskomponenseket és ezeket az eredménytárolóban már meglevő kényszerdeformációkhoz adjuk.

Ha ez a végeredmény az előírt visszatolásokkal megegyezik, a kiindulásként felvett reakciókomponensek a feladat megoldását adják.

A fenti algoritmust, ill. annak egyes részeit felhasználhatjuk az ágak hőtágulása és a súlyhatások összegzésére, azaz előjelváltás és csonkmozgásokkal helyesbítés után a visszatolások megállapítására. Ezen teljes hatkomponensű visszatolásokból a szűrőleíró segélyével válogatjuk ki azt a k számú komponenszt, amelyet a reakciók meghatározásához előírunk. A f) alatt kapott teljes csomóponti mozgásból is le kell vonni a teljes visszatolást, mert így kapjuk meg, hogy az egyes csomópontok hová mozdulnak el a környezeti fedőpontjukhoz képest (ami lehet, hogy maga is elmozdult) — így ellenőrizhetjük, megengedhető-e a cső kimozdulása a csőtartószerkezeten, faláttörésben stb. Előfeszítést megmaradó befogásból kifelé eső oldalon levő ágvégék ellenértelmű

befogásból kifelé eső oldalon levő ágvégek ellenértelmű kimozdításával vehetünk figyelembe (mindegy ugyanis, hogy egy csőágban bizonyos szakaszt kivágunk és összehúzzuk, vagy a befogásoknál ugyanannyival szétvágjuk, a párhuzamtartás problémáitól eltekintve). Az előfeszítés tényleges helye és az elmozdított ágvégek közti szakaszon a csőtartók számított mozgását megfelelően helyesbíteni kell.

A szokásos iterációs módszerek céljainknak nem felelnek meg, mert a transzformáción kívül a mátrix diagonálelemei vagy olyan egyéb, pl. spektrumra vonatkozó adatok ismeretét kívánják, amelyek kevésbé valószínű, hogy a transzformációból egyszerűen becsülhetők. Célszerűbb a feladatot kvadrátikus alak minimalizálására visszavezetni. Előírt f visszatalások mellett a kényszerekkel összeférő \bar{p}_k terhelések közül az lesz a feladat megoldása, amelyre a

$$Q = \frac{1}{2} \bar{p}_k^* \mathbf{Z} \bar{p}_k - \bar{p}_k^* \bar{f} = \frac{1}{2} (\bar{p}_k - \mathbf{Z}^{-1} \bar{f})^* \mathbf{Z} (\bar{p}_k - \mathbf{Z}^{-1} \bar{f}) - \frac{1}{2} \bar{f}^* \mathbf{Z}^{-1} \bar{f} \quad (3.36)$$

kiegészítő potenciális energia minimális. Az átalakításból látszik, hogy a felület függőleges tengelyű, eltolt, általános-elliptikus paraboloid, amelynek egyetlen minimuma valóban a megoldás. A minimum értéke a potenciális energia negatívja.

A minimum megközelítésére az irány menti csökkentés módszere alkalmas. Valamely \bar{p}_0 kezdeti értéktől \bar{v} vektor irányában továbblépve a felület (\bar{v}, Q) hipersíkkal való metszetét kell vizsgálnunk, ami parabola. A minimális értéket azon $\bar{p}_0 + \alpha \bar{v}$ helyen kapjuk, amelyre

$$\alpha = \bar{v}^* (\bar{f} - \mathbf{Z} \bar{p}_0) / (\bar{v}^* \mathbf{Z} \bar{v}). \quad (3.37)$$

Az irányokat legegyszerűbben úgy vehetjük fel, hogy a k komponens közül rendre egyik egységnyi, a többi nulla. Ez nem egyéb, mint a Gauss—Seidel-módszer körülményes megvalósítása, ami ugyan biztosan konvergens, lévén \mathbf{Z} pozitív definit, csak lassú.

A keresés iránya lehet a Q negatív gradiense, a \bar{p} közelítés hibájaként vagy maradékként is értelmezhető

$$\bar{r} = \bar{f} - \mathbf{Z} \bar{p}. \quad (3.38)$$

Ha azonban a \mathbf{Z} mátrix sajátértékei nagyon különböznek egymástól, azaz durván a csőrendszer különböző irányokban értelmezhető rugalmasságai igen eltérnek, akkor hosszú, keskeny völgyben a negatív gradiens a szemközti fal felé mutat és csak lassan oldalazunk be a mélypontba [4]. Ilyen sajátságok a gyakorlatban el nem kerülhetők — más oldalról szemlélve mindez a gyengén meghatározottsággal egyenértékű. Az önmagában véve lassú konvergencia mellett tehát még a pontatlanságok halmozódása is várható, amire a számított irány mentén csökkentő eljárások különösen érzékenyek, hiszen maga az irány is bizonytalanává válik.

A minimumkeresés irányainak alkalmasabb megválasztásával némi többszámítás árán a konvergencia lényegesen javítható. Legyen az egymástól lineárisan független $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ vektor halmaza olyan, hogy

$$\bar{v}_i^* \mathbf{Z} \bar{v}_j \begin{cases} = 0, & \text{ha } i \neq j \\ \neq 0, & \text{ha } i = j, \end{cases} \quad (3.39)$$

az ilyen vektorokat \mathbf{Z} -ortogonális- vagy \mathbf{Z} -konjugáltaknak mondjuk. A k -dimenziós tér bármely vektora, tehát a \bar{p}_0 kezdeti érték szükséges javítása is előálítható ezen vektorok lineáris kombinációjaként:

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \bar{v}_i + \bar{p}_0 \quad (3.40)$$

(3.39) felhasználásával

$$\alpha_i = \bar{v}_i^* \mathbf{Z} (\bar{p} - \bar{p}_0) / (\bar{v}_i^* \mathbf{Z} \bar{v}_i) = \bar{v}_i^* (\bar{f} - \mathbf{Z} \bar{p}_0) / (\bar{v}_i^* \mathbf{Z} \bar{v}_i), \quad (3.41)$$

ami összhangban áll (3.37)-tel. Ha a \bar{v}_i vektorokat folyamatosan generáljuk és a \bar{p}_0 közelítésből rendre \bar{p}_1, \dots iteratív közelítéseként állítjuk elő (3.40) tagjait, ez az iteráció (konjugált gradiens-módszer) k lépésben pontos eredményhez vezet, $\bar{p}_k = \bar{p}$. A $\bar{v} - k$ valamely k elemű lineárisan független $\bar{n}_1, \dots, \bar{n}_k$ vektorhalmazból a Gram—Schmidt-eljárással képezhetők. Ha \bar{n} -ként a k -dimenziós tér tengelyvektorait választjuk, az eljárás a Gauss-elimináció megfelelője lesz. Ki lehet azonban mutatni, hogy a számítás ellenőrzéséhez amúgyis szükséges maradék- (negatív gradiens) vektorok:

$$\bar{r}_j = \bar{f} - \mathbf{Z} \bar{p}_{j-1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{Z} \bar{v}_i \quad (3.42)$$

ugyancsak lineárisan függetlenek és \bar{n} -kénti alkalmazásukkal a Gram—Schmidt számítási séma nagymértékben egyszerűsödik. A formulákat többféleképpen is kialakíthatjuk, minimális számításigény mellett numerikusan leginkább kedvezőnek a Fletcher—Reeves-változat tűnik. Ennek képletei [4], [7].

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \bar{r}_1 = \bar{f} - \mathbf{Z} \bar{p}_0, \\ &\dots \\ \bar{q}_i &= \mathbf{Z} \bar{v}_i, \\ \alpha_i &= \bar{r}_i^* \bar{r}_i / \bar{q}_i^* \bar{v}_i, \\ \bar{p}_i &= \bar{p}_{i-1} + \alpha_i \bar{v}_i, \\ \bar{r}_{i+1} &= \bar{r}_i - \alpha_i \bar{q}_i, \\ \beta_i &= \bar{r}_{i+1}^* \bar{r}_{i+1} / \bar{r}_i^* \bar{r}_i, \\ \bar{v}_{i+1} &= \bar{r}_{i+1} + \beta_i \bar{v}_i, \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.43)$$

Az eljárás a hibák elkerülhetetlen halmozódása miatt általában nem vezet k lépésben pontos eredményhez, tovább folytatva azonban a maradék csökkenthető, amíg a további javítást a hibahalmozódás lehetetlenné nem teszi. Kedvező esetben megtörténhet (tapasztaltuk is), hogy k -nál jóval kevesebb lépésben igen pontos eredményt kapunk.

A módszer helyfoglalása az explicit mátrixos eljáráshoz képest jóval kevesebb: a $6n$ munkatér meg egy k terjedelmű vektor az adatoknak és eredményeknek mindkettőnél kell, sajátos helyfoglalásként voltaképp a \bar{v} és \bar{q} vektorok $2k$ helyigénye vethető össze a mátrix k -val négyzetesen növekvő és a teljes feladatnál n -től is függő terjedelmével. A számítási idők egybevetése nehéz, mert a mátrix megkonstruálásának és a kiküszöböléses eljárás esetleges iteratív javításának időigényét is vizsgálatba kell vonni egyfelől — szembeállítva másik oldalról a k lépés igen bizonytalanul becsülhető meghaladásából adódó időt is figyelembe vevő igényekkel. Erre csak azonos gépen, nagyszámú vezetéken végzett „összehasonlító lövészet” statisztikája adhatna választ, és ezen a jelen eljárás nem tekinthető eleve esélytelennek.

A fenti eljárást EMG-666-os asztali kisgépen megvalósítottuk, szilárd-sági számítással együtt 4 egymáshoz kapcsolódó program formájában, az adatátvitelt magnószalag végzi. A gép 1008 rekesze 1–1 12 decimális pontosságú lebegőpontos számot vagy 8 gépi utasítást tárolhat. A szűk keresztmetszet a hálózatszámítás, ez a számítható rendszer nagyságát 20 ág mellett $k = 42$ -re korlátozza. A tárkijelölés dinamikus, kisebb k -nál az ágak száma 24-ig nőhet és viszont. Ez a terjedelem extrém esetektől eltekintve a gyakorlat számára elegendő. A maximális időigény nagyjából az asztali géptől várható keretek közt marad (a legnagyobb $n = 19$, $k = 43$ rendszer 66 percet futott). A hibahalmozódás veszélyessége az ágak és kényszerek számától együttesen függ, tapasztalati adatokból a szükséges lépésszám az elméleti k -val szemben

$$K \approx 0,1 (k + n) k \quad (3.44)$$

értékre becsülhető, amelytől kis rendszereknél inkább felfelé, nagyoknál inkább lefelé adódik eltérés. Az egyes lépések időigénye mind n -től, mind k -től függ, az ágmatrixszorzás döntő súlya következtében az elsőtől jobban:

$$t \approx 0,792n + 0,0543k \text{ [s]}. \quad (3.45)$$

Az alapul vett rendszerekben 1 ágra átlagosan 2 kényszerkomponens jutott, az ágszám több mint hétszeres súlyú. A fenti arányban k -t kiküszöbölve és a két becslést egybevonva az összesített időigény

$$Kt \approx 0,09 (k + n) kn. \quad (3.46)$$

A BEAD, RUGÓ, HÁLÓ, SZIL nevű részprogramok blokk-sémáját a 10. ábra mutatja. A konjugált gradiens-iterációban részletezett műveletsorok:

— $V[1 : k]$ kényszerek szerint redukált vektor $W[1 : 6*n]$ munkaterületre helyezése (azaz teljes hatkomponensű mennyiségek sorozatává alakítása),

ill. a $Q[1 : k]$ transzformált vektor $A[. . .]$ rugóállandóktól függő részének betöltése, amit a $RS[. . .]$ rugó-szűrő leíró vezérel;

— REF-csomóponti, W -ben tárolt terhelések ágterheléssé összegzése $FH[1 : m]$ fa-hurokvektor szerint.

A továbbfejlesztés a memóriaigény valamelyes, de k -val még mindig csak egyenesen arányos növelésével lehetséges valamilyen stabilizált konjugált gradiens—változat alkalmazásával (pl. Lánczos-módszer [5]). Lehetőséget adhat a javításra, ha tekintetbe vesszük, hogy a \bar{v} -k és \bar{r} -ek sorozatára bizonyos egyéb összefüggések is érvényesek, továbbá ha egyes kritikus részműveleteket dupla pontosságú aritmetikával végzünk. A konjugált gradiens módszerek területén jelenleg is folynak kutatások, nem elképzelhetetlen hatékonyságuk további javulása.

3.5. Kiegészítő megjegyzések

Az ismertetett megoldási módszer két alapeleme a hálózat vajangosítása és a konjugált gradiensmódszer alkalmazása a hálózatmátrix felírása nélkül, előnye a számításhoz szükséges memóriakapacitás lényeges csökkenése. Valószínű, hogy a hálózat kisebb változtatásai előnyösebben programozhatók — kétségtelen azonban, hogy egyazon hálózat többféle kényszermozgásának értékelésére az explicit mátrixos módszer gyorsabb (más kérdés, hogy ezt az ismételési lehetőséget sok program nem tartalmazza, és gyakorlati jelentősége sem túl nagy).

A vajangok alkalmazásának előzményei, speciális és adhoc jelleggel JÜRGENSONN és HAMPEL [3] módszerében megtalálhatók, de nem fejlesztették átfogó kezelési eljárásá. Általános tartószerkezeti vizsgálatoknál HALL és WOODHEAD [9] alkalmaz rugalmas tartószakasz elejéhez és végéhez csatolt tetszőleges alakú merev elemeket, egyazon pontba futó változatban is, de utóbbival csak a két végen ható terhelés egyensúlyát és a rugalmasság leírási iránytól való függetlenségét szemlélteti. Ugyancsak említi a mátrix (legalábbis közel-)diagonális, számítási munka és meghatározottság szempontjából előnyös kialakításában a rugalmassági középpont és szimmetria, ill. becslés alapján felvett (közelítő) főtengelyek szerepét. Minőségi utalásokon túlmenően csak síkbeli alakzatokat tárgyal, JÜRGENSONN megfogalmazásához hasonlóan. Más irányú általánosítás keretében LIVESLEY [10] a referenciaponti terhelést és mozgást mint rugalmas szakasz feszültségi és alakváltozási állapotát jellemző általános mennyiségek („stress resultant-”, „element deformation vector”) egy megjelenési formáját mutatja be.

Valószínű, hogy a jelen tanulmányban alkalmazott modell hasznos lehet más szerkezeti problémák megoldásakor is, amennyiben a hálózatvizsgálatból kiiktatja a teher és mozgás térbeli áthelyezésből adódó változását.

A konjugált gradiens-módszer lineáris algebrai egyenletekre történő alkalmazását RALSTON úgy kommentálja, eleganciája- és hatékonyságának

elismérése mellett, hogy a klasszikus direkt és iterációs eljárások valamelyike mindenfajta mátrixtulajdonság esetén kedvezőbb. Valószínű, hogy a választott megközelítés: egyenlet helyett direkt szélsőérték-feladat esetében — az általa ismerttetettek közt — viszont a konjugált gradiensmódszer a legalkalmasabb eszköz, és maga a megközelítés annál versenyképesebb lesz, minél hatékonyabbá teszik az eszközt újabb vizsgálatok (a kétségtelen memória-takarékosságon túlmenően). Ennek jelentőségét kiemeli az a tény, hogy a műszaki-fizikai problémák igen széles köre fogalmazható meg szélsőérték-feladatok alakjában; bizonyos felfogásban ez a hagyományos „differenciál-egyenletes” természetleírás általános alternatívája lehet [8]. Javaslatunk azonban végső soron nem a konjugált gradiensmódszerhez kötődik, hanem bármilyenhez, ami a mátrix explicit ismerete nélkül alkalmazható.

Szerző ehelyütt is köszönetét kívánja kifejezni korreferenseinek, dr. BOSZNAY Ádám professzornak és dr. FEKETE Jánosnak, akik munkáját értékes tanácsaikkal és észrevételeikkel segítették.

IRODALOM

1. FEKETE, J.: Untersuchungen der elastischen Formänderung von Rohrleitungen und Rohrnetzwerken, Fortschr. Ber. VDI, R. 7, Nr. 5, Juli 1967
2. JÜRGENSONN, H. v.: Elastizität und Festigkeit im Rohrleitungsbau, Springer, Berlin 1953
3. HAMPEL, H.: Rohrleitungsstatik, Springer, Berlin 1972
4. RALSTON, A.: Bevezetés a numerikus analízisbe, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1969
5. BAHVALOV, N. Sz.: A gépi matematika numerikus módszerei, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1977
6. FORSYTHE, G. E.—MOLER, C. B.: Lineáris algebrai problémák megoldása számítógéppel, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1976
7. MANGASRIAN, O. L.: Techniques of Optimization, *Trans. ASME (Ind.)*, May 1972, 365—372
8. GYARMATI I.: Nemegeyensúlyi termodinamika, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1967
9. HALL, A. S.—WOODHEAD, R. W.: Frame Analysis (2. ed.), Wiley, N. Y. 1967
10. LIVESLEY, R. K.: Matrix Methods of Structural Analysis (2. ed.), Pergamon, Oxford 1975

Versatility in Designing Pipeline Systems, Part II — Memory-Economical Systems Calculation. — In part I of the present paper it has been pointed out that both the direct participation of the designer and the operative calculation demand mean equal motivations for the use of a desk calculator for the planning group. The capacity demand of the network computation program is considerable, in this part of the paper reduction of that is being tried.

Planung von Rohrleitungen, 2. Teil: Speicherekonomische Netzrechnung. — Im Teil 1. der vorliegenden Abhandlung wurde festgesetzt, daß die Benützung einer Tischrechenmaschine neben der Planungsgruppe sowohl durch den unmittelbaren Einsatz des Entwurfsbearbeiters, als auch durch die operativen Rechnungsanforderungen der Rohrleitungsplanung bedingt ist. In diesem Teil der Abhandlung wird versucht die erhebliche Kapazitätsanforderung des Netzrechnungsprogramms zu verringern.

A HAZAI ÁRAMLÁSTECHNIKA NÉHÁNY KUTATÁSI PROBLÉMÁJA

HELYZETKÉP

VAJNA ZOLTÁN* – SZENTMÁRTONY TIBOR**

[Beérkezett: 1980. november 3-án]

Jelen tanulmány négy kiragadott témán keresztül kívánja érzékeltetni az áramlástechnika átütőerejű előrehaladása megtorpanásának az áramló közeg mikrostruktúrája ismeretének hiányában rejlő okát. Az áramlástechnikai gépek megfelelő lapátózásának kialakítása és a gépekben lejátszódó áramlási viszonyok kérdése; a csővezetékben, ill. csővezeték rendszerekben fellépő instacionárius jelenségek vizsgálata; az áramlástechnikai akusztika kérdései, valamint a folyók szennyeződésvizsgálata azok a problémák, amelyekben keresztül jól érzékelhető az egyszerűsített elméleteknek és a kiegészítő méréseknek szükségszerű, szoros kapcsolata, amely az ismeretek mai fokán pótolni hivatott a közeg mikrostruktúrájának részletes ismeretét.

Az áramlástechnika igen sokrétű, nehezen lehatárolható tudományterület gyűjtőfogalma. Így a tanulmányunk címében szereplő „néhány” szócskának hangsúlyt kell adnunk: egy ilyen viszonylag rövid előadásban valóban csak *néhány* probléma ragadható ki erről a hazánkban is sok helyen, sokak által művelt területről.

Ha világviszonylatban vizsgáljuk azt, hogy hol is tart ma az áramlástechnika, akkor azt kell megállapítanunk, hogy az áramló közegek mikrostruktúrája ismeretének hiánya korlátozza csaknem minden téren az átütőerejű előrehaladást. Pl. az áramló közeg belső súrlódására jellemző feszültségi tenzort alakilag helyesen fel tudjuk írni ott, ahol a súrlódásnak nyilvánvaló szerepe van, de egy konkrét feladatnál már nem tudjuk azt megfelelő számokkal behelyettesíteni *elméleti* vagy megfelelően általánosítható *kísérleti* eredmények hiányában. A turbulenciával ma már elsősorban elméleti fizikusok foglalkoznak — de az egyes feladatok megoldásához konkrétan alkalmazható eredmények ma mégis váratnak magukra.

A gyakorlat, az élet azonban konkrét kérdésekre konkrét feleletet vár és nem elégedhetik meg holmi halogató válasszal. Ilyenkor, mint minden tudományterületen, a valóságot lehetőleg jól tükröző közelítést kell tehát alkalmazni, ami a problémák újabb sorozatát indítja el. Azt ugyanis, hogy valamely közelítés mennyire jó, általában csak mérésekkel ellenőrizhetjük, vagy egy mérésekkel már ellenőrzött másik módszerrel való összevetéssel.

* Dr. Vajna Zoltán BME Áramlástan Tsz. 1111 Bpest, Műegyetem rkp. 3.

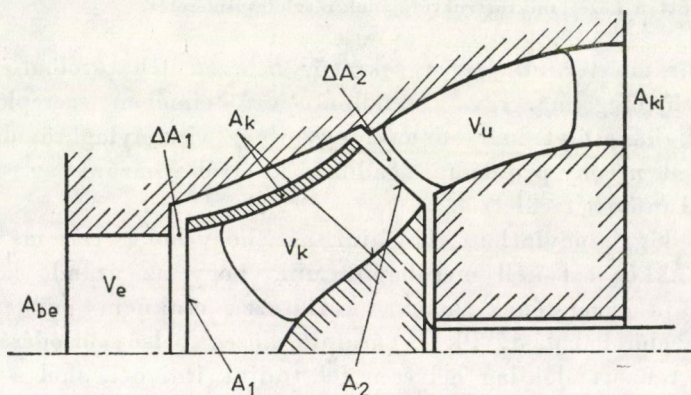
** Prof. Dr. Szentmártony Tibor, 1118 Budapest, Ménési út 68.

Ezek pedig további hibalehetőségeket, nem ritkán szubjektivitást is jelenthetnek.

Tanulmányunkban négy olyan részterülettel szeretnénk foglalkozni példaképpen, amelyben ezek a problémák hangsúlyozottan jelentkeznek, bemutattva a ma járható kivezető utakat is.

Az áramlástechnika egyik, hazánkban is rangos ilyen problémaköre az áramlástechnikai gépek megfelelő lapátozása kialakításának, a gépekben lejátszódó áramlási viszonyoknak a kérdése. Ezekben a gépekben az átáramló közeg nyilván mindig sűrűlódásos, a véges lapátszám miatt a be- és kilépő keresztmetszetben a sebességeloszlás a kerület mentén mindig egyenlőtlen és a lapátosztással periodikusan változó, az abszolút sebesség pedig a járókerékben és ezután mindig instacionárius.

Az áramlástan impulzusnyomatéki és energiaegyenletének felhasználásával a járókerekek ún. turbinaegyenlete a következő alakban írható fel CZIBERE nyomán, részben az 1. ábrán látható jelölésekkel:



1. ábra

$$\int_{(A_1 + A_2)} \left(\frac{c^2}{2} + \mathfrak{S} \right) \rho c dA \mp \int_{(V_k)} \varnothing dV = \int_{(A_1 + A_2)} u c_u \rho c dA. \quad (1)$$

Itt A_1 , ill. A_2 a járókerék be- és kilépő keresztmetszete

V_k a járókerékben foglalt közeftérfogat

c az abszolút sebesség

\mathfrak{S} a nyomásból származó munkavégzőképesség

ρ a közeg sűrűsége

\varnothing az átáramlás sűrűlódása hatására a térfogategységben keletkező hőteljesítmény

u , ill. c_u a kerületi sebesség, ill. az abszolút sebesség kerületmenti összetevője.

A kettős előjelnél a felső az erőgép (turbina), az alsó a munkagép (szivattyú, ill. ventilátor) esete. Az egyenlet azt fejezi ki, hogy pl. turbina esetében a

járókeréken átáramló közeg energiatartalmának és az áramlás súrlódási hőteljesítményének a különbsége hasznosítható a járókerékben forgómozgás alakjában.

Az egész gépre (vezetőlapátok és járókerék) a mechanikai energiák és a veszteségek egyensúlya írható fel:

$$\int_{(A_{be}+A_k)} \left(\frac{c^2}{2} + \mathcal{E} \right) \rho c dA = P_i \pm \int_{(V)} \varnothing dV \pm \int_{(A_k)} \mathbf{u} \sigma dA + \int_{(\Delta A_1 + \Delta A_2)} \left(\frac{c^2}{2} + \mathcal{E} \right) \rho c dA \pm \int_{(V_u)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{c^2}{2} + \mathcal{E} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial t} \right\} dV. \quad (2)$$

Itt az eddigi jelöléseken kívül, az 1. ábra jelöléseivel

A_{be} , ill. A_{ki}	a gép belépő és kilépő csonkjainak keresztmetszete
ΔA_1 , ill. ΔA_2	a járókerék előtti, ill. utáni rész felülete
P_i	a gép tengelyteljesítménye
A_k	a járókerék elő- és hátlapjának külső felülete
V	a csonkokkal lehatárolt átáramolt térfogat
σ	a súrlódási tenzor
t	az idő, és
p	p a nyomás

Az egyenlet azt fejezi ki pl. turbina esetében (ekkor a felső előjelek érvényesek), hogy a gépen átáramló közeg energiatartalma a tengelyteljesítmény és a veszteségek fedezésére szolgál. A veszteségek az átáramlás súrlódási hőteljesítményéből, a tárcsásúrlódásból, a részveszteségből és a járókerék utáni sebesség- és nyomásingadozásból származnak.

Az abszolút áramlás folytonosságát az egész gépre a (3) egyenlet fejezi ki, míg a járókerékre a (4) egyenlet:

$$\int_{(A_{be})} d\dot{m} = \int_{(A_1)} d\dot{m} \pm \int_{(\Delta A_1)} d\dot{m} = \int_{(A_1)} d\dot{m} \pm \int_{(\Delta A_1)} d\dot{m} = \int_{(A_{ki})} d\dot{m}, \quad (3)$$

$$\int_{(A_1)} d\dot{m} = \int_{(A_1)} d\dot{m}. \quad (4)$$

Itt az eddgieken kívül \dot{m} a tömegáram, és a kettős előjelek közül a felső ismét az erőgép, az alsó a munkagép esetében érvényes.

Konkrét pl. tervezési feladatokban az (1) és (2) egyenletekkel kapcsolatban máris megjelent az említett, az áramló közeg mikrostruktúrájával kapcsolatos probléma: sem a súrlódásból adódó hőteljesítményt, sem a feszültségi tenzonnal számítható tárcsásúrlódást, sem a részveszteséget stb. nem tudjuk jelenleg ténylegesen számolni, hanem csak egy-egy hatásfok, ill. veszteségtényező formájában, tapasztalaton alapuló becsléssel, az alapadatok módosításán keresztül figyelembe venni. Tehát egy tervezési feladatban egyrészt a felvett hatásfokoknak és veszteségtényezőknek kell az energiaegyensúly-

egyenletet kielégíteniük, másrészt az abszolút sebesség kerületmenti és meridián-összetevőit kell — mint peremfeltételeket — úgy előírni, hogy azok a tervezési alapadatokkal együtt a turbinaegyenletet és a folytonossági feltételeket kielégítsék. Ezt pedig elmondani lényegesen egyszerűbb, mint megvalósítani. Még nehezebb helyzettel kerülünk szembe akkor, amikor egy belapátozott térrészben (pl. járókerékben vagy terelőlapát-koszorúban) kell az áramképet meghatározunk. Jelenlegi ismereti szintünkön tehát kényszerű egyszerűsítésekkel kell élnünk. Számításaink folyamán az átáramló közeget sűrűlódásmentesnek, a terelőlapát-koszorúban az abszolút sebességet, a járókerékben pedig a relatív sebességet kell stacionáriusnak tekintenünk. Ha ezekkel a jelentős egyszerűsítésekkel írjuk fel a most már érvényes Euler-féle mozgásegyenletet, akkor eredményül a terelőlapátkoszorúra: a

$$\operatorname{rot} \mathbf{c} \times \mathbf{c} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} \left(\frac{c^2}{2} + \mathcal{F} \right), \quad (5)$$

míg a járókerékre: a

$$\operatorname{rot} \mathbf{c} \times \mathbf{w} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} \left(\frac{c^2}{2} + \mathcal{F} - \omega r c_u \right) \quad (6)$$

egyenletet kapjuk,

ahol

\mathbf{c} , ill. \mathbf{w}	az abszolút, ill. relatív sebesség,
\mathbf{f}	a tömegegységre eső térerő és
ω	a forgó kerék szögsebessége.

A feladat láthatóan *háromdimenziós* és a kontinuitási egyenleteket is figyelembe véve a megoldás igen jelentős matematikai nehézségeket okoz. A tényleges számítások ezért további egyszerűsítést igényelnek:

Határozzuk meg a meridiánsíkban az áramvonalakat végtelen lapát-szám, tehát hengersizmetria feltételezésével, majd ezek közül néhányon fektessünk át olyan forgásfelületeket, amelyek a lapátozott kereket megfelelő részkerekre bontják. Ezen részkerek célszerű kiválasztásával és egy koordinátarendszer transzformációval az ezeken belüli áramlás síkáramlásnak tekinthető és alkalmazható a lapátózás számítására a jelenleg legkorszerűbb módszer, az ún. hidrodinamikai szingularitások módszere. Ennek lényege az — mint az valószínűleg sokak által ismeretes —, hogy a lapátokat matematikailag olyan alkalmasan megválasztott szingularitásrendszerrel helyettesítjük, amelynek hatását a tényleges alapáramlásra szuperponálva a lapátkontúrvonalak áramvonalaknak adódnak, azaz az eredő áramkép relatív sebességmegoszlásának a lapátfelületre merőleges összetevője zérus. Ezek a szingularitások lehetnek csak elemi örvényekből vagy örvényekből, forrásokból és nyelőkből álló megoszlások, amelyeket tervezési feladatokban az eddigi ered-

ményeinkből levezethető differenciálegyenlet megoldásához fel kell venni, ill. amelyeket a sebességtér számítását szolgáló ún. ellenőrző feladatokban a levezethető integrálegyenlet megoldása eredményül szolgáltat. A lapátózást egy szingularitás-rendszerrel helyettesítve, a meridiánáramlás örvényes és a végtelennek tekintett lapátszám folytán hengerszimmetrikus lesz.

Mint ismeretes, ilyenkor egy ψ áramfüggvény definiálható, amelynek ki kell elégítenie előbbiek szerint a

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -r (\text{rot } \mathbf{c})_{\varphi}. \quad (7)$$

Poisson-egyenletet az adott peremfeltételek mellett. Itt r a sugárirányú, z a tengelyirányú és φ a kerület menti koordináta.

Az elmondottak szerint itt egy iterációs eljárás váza bontakozott ki: a Poisson-egyenlet megoldásához — a peremfeltételek rögzítése mellett — ismernünk kellene már a lapátózást, hogy az azt helyettesítő örvényrendszerből a relatív sebesség rotációjának φ irányú összetevője (tehát a 7. egyenlet jobb oldala) számítható legyen. Korábban viszont azt mondtuk, hogy a meridiánáramvonalak meghatározása teszi lehetővé a részkerekekre való bontást és azokon belül a lapátózásnak a szingularitások módszerével való számítását. Célszerűen tehát úgy járhatunk el, hogy egy (pl. zérusnak) felvett (7) egyenlet-jobboldallal meghatározzuk a $\psi =$ állandóval jellemzett meridiánáramvonalak egy első közelítését, kijelöljük a részkerekeket, ezeken belül meghatározzuk a részlapátok alakjának egy első közelítését, majd ezek alapján most már a (7) egyenlet jobb oldalának egy második közelítését és így tovább mindaddig, amíg a kapott eltérések elegendően kicsire választott határ alatt nem maradnak.

Itt újra az alkalmazott áramlástan egy gyakori problémájába ütközünk: a feladat összetettsége folytán nem bizonyítható elméletileg az eljárás konvergenciája és csak tapasztalatainkra hivatkozhatunk, amikor itt azt állítjuk, hogy ez a módszer konvergens. A háromdimenziós feladat megoldását így két kétdimenziós feladat összekapcsolt megoldásával közelítettük.

Amíg tehát a fölvázolt módon egy áramlástechnikai gép térbeli lapátózását részekből felfűzve előállítottuk, valóban számos egyszerűsítésre kényszerültünk. Nyilván jogos kérdés a közelítések jósága, ill. az elhanyagolások jogossága. Erre pedig ismereteink jelenlegi fokán egyetlen módon adhatunk csak választ: az így elkészített gépet gondosan legyártva méréseket kell végeznünk és megállapítanunk, hogy a pl. így tervezett gép az előírt alapadatoknak mennyiben felel meg. Az ezirányú, több évtized óta végzett kutatások éppen azért indokoltak, mert a vizsgálatok azt mutatták, hogy az elhanyagolások egy része csak bizonyos alapadat intervallumban engedhető meg és ezen belül is csak bizonyos kiinduló geometriai paraméterek mellett.

Mindez azt bizonyítja, hogy mai ismereteink mellett korszerű áramlás-technikai gépet kifejleszteni csak megfelelő elméleti ismeretekkel és az azokat kiegészítő bőséges gyakorlati tapasztalatokkal lehet.

A hazai kutatások egyik egyre növekvő jelentőségű problémája a hosszú csővezetékben, ill. az ilyenekből álló rendszerekben fellépő *instacionárius* jelenségek elméleti és kísérleti vizsgálata. A korszerűsítés és energiagondok következtében egyre több olaj, gáz és víz távvezeték épül, és ezekben valamilyen gyors beavatkozás törésre vagy más veszélyes helyzetre is vezethető *nyomáshullámokat* gerjeszthet. Így pl. egy távfűtési rendszerben egy áramkimaradás miatti szivattyúleállás *csőtörésre*, egy gázzal fűtött fűtőmű kiesése a környék lakásaiban a gyújtólángok *kioltására* és így utólag robbanásokra vezethet.

Ha egy csőben fel is tételezzük a tengelyszimmetria teljesülését, a feladat még mindig kétdimenziós. Az axiális sebesség sugárirányú változása és a sugárirányú sebességkomponens nyilván csak a súrlódás következménye — ezzel kapcsolatban pedig már megállapítottuk, hogy igen kevés mélyreható ismerettel rendelkezünk. Még lamináris áramlásban is csak kísérletileg megállapított globális csősúrlódási tényezővel tudunk számolni, turbulens áramlásban — ami a gyakoribb — még a kísérleti adatok is igen bizonytalanok. Mivel a tengelyirányú sebesség és annak tengelyirányú változása a tapasztalat szerint lényegesen nagyobb, mint a megfelelő sugárirányú értékek — és ugyanez áll a többi paraméterre is —, ezért még a probléma matematikai megfogalmazása előtt hanyagoljuk el a sugárirányú komponenseket és változásokat. Feladatunkat így a térben egydimenzióssá egyszerűsítettük. A súrlódást mint veszteségforrást nem hanyagoltuk el, csak egyszerűbben kezelhetővé tettük összhangban az ismereteinkkel.

Egy pl. gázvezetékben hat olyan mennyiség van, melynek így a hely (x) és az idő (t) szerinti változását ismernünk kell, a c sebesség, a p nyomás, a T abszolút hőmérséklet, az s entrópia, az u belső energia és a ρ sűrűség. Az általános gáztörvény, a termodinamika első főtétele és az entrópia definíciója csak három áramlástanai egyenlet felírását teszi szükségessé. Ezek a kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

a mozgásegyenlet

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + c \lambda |c| = 0 \quad (9)$$

és az energiaegyenlet:

$$\frac{R}{x-1} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + c \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - c^2 \lambda |c| \right) = 0. \quad (10)$$

Itt már R a gázállandó, κ az állandó nyomáson és állandó térfogaton mért fajhő hányadosa és λ a már hivatkozott csőszűrlődési együttható.

A λ , — szoros kapcsolatban lévén a falmenti csúsztatató feszültséggel, az pedig a sebességgradienssel — időben gyorsan változó jelenségeknél biztosan nem állandó — változásáról azonban olyan keveset tudunk, hogy inkább elhanyagoljuk. Egyenleteink hiperbolikus differenciál-egyenletrendszerre alkotnak.

A közismert karakterisztikák módszerét követve három karakterisztika-vonalasereget határozhatunk meg az $(x-t)$ síkon: kettőt a Mach-vonalak, egyet a részecske pályák alkotnak. Ha egyenleteinket a karakterisztika vonalakra transzformáljuk, akkor az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\frac{dx}{dt} = c + a; \quad dc + \frac{dp}{\rho a} + \left(1 - \frac{\kappa - 1}{a} c\right) c \lambda |c| dt = 0, \quad (11)$$

$$\frac{dx}{dt} = c - a; \quad -dc + \frac{dp}{\rho a} - \left(1 + \frac{\kappa - 1}{a} c\right) c \lambda |c| dt = 0, \quad (12)$$

$$\frac{dx}{dt} = c; \quad ds = \frac{c^2 \lambda |c|}{T} dt, \quad (13)$$

ahol eddigi jelöléseinken kívül a a hangsebesség. Legutolsó egyenletünkben jól látható, hogy ha a sűrűldást elhanyagoljuk, akkor ezzel az állapotváltozásokat izentropikusnak tekintjük.

Egyenletrendszerünknek — egészen speciálisan egyszerű esetektől eltekintve *nincs zárt* alakú megoldása, így *valóságos* problémák esetében mindig csak numerikus utakat járhatunk. Eddig úgy tűnhet, hogy a sűrűldással kapcsolatos problémáinktól eltekintve nem okozhat gondot valamely feladat megoldása. Nem beszéltünk azonban eddig a peremfeltételekről, a súlyos problémák pedig éppen itt lépnek fel.

Van néhány alapeset (lezárt csővég, beszívás, ill. kifúvás a csővégen stb.), amelyek nem okoznak gondot. De a valóságos feladatok nagy részében csak igen egyszerűsített, idealizált módon tudjuk a peremfeltételeket megfogalmazni. Tipikus példaképpen csak két ilyen esetet említünk. Az egyik a csőhálózatban szükségképpen előforduló elágazás. Ismét a mikrostruktúra ismeretének hiányában csak egy globális veszteségi tényezőt definiálhatunk, amelyre azonban mérési eredményeink is csak igen nagy lépcsőzéssel vannak — a veszteségek létrejöttének pontos mechanizmusáról azonban semmi érdemlegeset sem tudunk. Márpedig nyilvánvaló, hogy az áramkép, a reflexiók kialakulásában ez utóbbinak döntő szerepe van. Tapasztalataink egyértelműen bizonyítják, hogy az elágazás paramétereinek kismértékű változtatása a számítási eredményeket jelentősen befolyásolja.

Második példaként említenénk egy automatikus nyomáscsökkentő szelepet. Ennek legszűkebb keresztmetszetében általában hangsebesség lép fel és

az expanzió ún. Mach-hullámokon át megy végbe. Ilyen szelepben is lépnek fel veszteségek, reflexiók, de hogy miként, azt nem ismerjük, és így jelenlegi ismereteink fokán ezeket és az expanzió lefolyását csak igen leegyszerűsítetten tudjuk figyelembe venni. Azt hisszük, világosan látható, hogy ezek a problémák itt is csak méréseken alapuló, ill. azokkal igazolt egyszerűsítő feltevésekkel küszöbölhetők ki: pl. a szelep esetében a szelepelmozdulás függvényében statikus vizsgálattal meghatározható átfolyó tömegáram ismerete a kontrakció jelenségének beható vizsgálatát mellőzhetővé teszi és így felépíthető egy (a gyakorlat számára már kielégítő pontosságú) mechanikai modell.

A most tárgyalt problémakörhöz hasonlóan az áramlástechnika egyik érdekes határterülete, az áramlástechnikai akusztika is felfelé ívelő, ami természetesen nem független az egyre nagyobb hangsúlyt kapó környezetvédelemtől. Úgy gondoljuk, hogy ez a témakör talán még idegenebb, ezért egy kicsit megpróbáljuk összefoglalni, hogy mit is értünk ezen. Az áramlástechnikai akusztika az áramláseredetű hangforrásokkal és az ilyen eredetű zajok csillapítási kérdéseivel foglalkozik. Érdekes módon áramláseredetű hangforrásokkal a klasszikus fizika alig foglalkozott. Gyakorlatilag csupán a zenei hangok előállításának — tehát a tiszta hangok gerjesztésének mechanizmusa állt az érdeklődés középpontjában. Ami a hang terjedését illeti, ezen a téren is csak a nyugvó közegben való terjedést vizsgálták. Egydimenziós, 0.1-es Mach-szám alatti áramlások esetében is még jól használható volt a klasszikus akusztikában is ismert és az elektro-akusztikában is már sikerrel alkalmazott ún. *transzmisszió elmélet*. Ez az elmélet a villamos távvezeték differenciálegyenletének és az akusztikai egydimenziós veszteségmentes csőáramlás összefüggéseinek analógiája alapján a villamos impedanciához hasonló akusztikai impedanciákkal számol. A számított és mért eredmények jól egyeztek és a módszer műszaki szempontból is hasznosnak ígérkezett kipufogócsillapítók számításakor. Ha azonban a Mach-szám nagyobb, mint 0.1 — mint ahogy általában inkább ez a helyzet a kipufogók üzemében —, akkor mind a csillapítás nagysága, mind a frekvencia menet számított értékei eltérnek a mérések eredményeitől.

A tisztán áramlás eredetű zajok matematikai modellje tehát teljesen hiányzott.

LIGHTHILL az 1950-es évek elején az áramlástan tömeg- és impulzuskontinuitási egyenleteiből a klasszikus akusztika homogén differenciálegyenlete helyett egy inhomogén egyenletet vezetett le a gázállapot-egyenlet felhasználásával, amelynek végső alakja az akusztikában általánosan használt Ricci-kalkulus alkalmazásával:

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial F_i}{\partial x_i} + \frac{\partial M}{\partial t}, \quad (14)$$

ahol

a	a hang terjedési sebessége
p	a nyomás
x_i	a vizsgált pont helyvektora
t	az idő
T_{ij}	$= \rho c_i c_j - \tau_{ij}$
F_i	$= f_i + \dot{m} c_i$
M	$= \dot{m} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} (p - a^2 \rho)$

ezen belül

c_i	az áramló részecske sebességvektora
τ_{ij}	a feszültségtenzor
f_i	a tömegegységre eső térerő
\dot{m}	a tömegáram
ρ	a sűrűség

Ebből az alapegyenletből képezhető a Kirchhoff-féle integrálegyenlet:

$$\begin{aligned}
 p(x_i, t) = & \frac{1}{4\pi} \left[\int_{(V)} \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial t} dV - \int_{(A)} \frac{1}{r} \frac{\partial \rho c_n}{\partial t} dA - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{(V)} \frac{1}{r} F_i dV + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{(A)} \frac{1}{r} (P_i + \rho c_i c_n) dA + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int \frac{1}{r} T_{ij} dV \right], \quad (15)
 \end{aligned}$$

ahol az előbbieken kívül

P_i	$= n_j (\delta_{ij} p - \tau_{ij})$
V	a hangkeltő térrészre redukálható végtelen tér
n_j	a felületi normális
δ_{ij}	a Kronecker-szimbólum
A	a szilárd felületek a V térrészben
r	a vizsgált pont távolsága a hangforrástól
c_n	a felületekre merőleges sebességkomponenst jelenti.

Ez az integrálegyenlet rendkívüli jelentőségű, mert minden áramláseredetű akusztikai jelenséget tartalmaz. Jelentőségét emeli az a tény, hogy kimutathatóan az első sor akusztikai monopolust, a második dipolust, a harmadik quadrupolust reprezentál, tehát az összes akusztikai sugárzó-alaptípust tartalmazza. Ezzel sikerült az áramlási hangkeltő jelenségeket akusztikai szingularitásokkal helyettesíteni s a vizsgált teret a klasszikus akusztika módszereivel tárgyalni.

A zajkeltő források alaptípusairól megjegyzendő, hogy *monopolus* az olyan zajforrás, amely mint egy lélegző gömb gömbhullámokat kelt. *Dipolus* például egy lemez, ami úgy rezeg, hogy amikor az egyik oldalán túlnyomás keletkezik, akkor a másik oldalon depresszió jön létre. Ez két, ellenfázisban dolgozó monopolust jelent, igen közel egymáshoz. A *quadrupolus* két, egymástól 90°-kal elforgatott dipolus, ennek megfelelően a hullámalak *síkmetazete* két, merőleges tengelyű 8-as. A keveredési jelenségek tipikusan ilyen típusú sugárzók.

Természetesen, mint első két példánknál, az integrálegyenletben is egy-egy egyszerű alakú kifejezést igen sok egyszerűsítő feltevéssel, méréssel megállapított összefüggéssel lehet csak a gyakorlatban tartalommal megtölteni — ismét a részletek ismerete hiányában. Ha pl. valamely axiális ventilátor zajkeltését vizsgáljuk, azt találjuk, hogy az különböző hangforrásokra vezethető vissza. A lapátsorok egymásrahatása, a turbulens megfűvás *dipolus* jellegű zajforrás. Erősségük csökkentése bizonyos konstrukciós meggondolásokkal lehetséges. A járókeréklapátokról leúszó sztohasztikus jellegű örvénysor örvénykéi jelentéktelen hangteljesítményszintet sugárzó *quadrupolus* sugárzók. A Thomson-féle örvénytétel szerint azonban minden leúszó kis örvény — visszahatásként — cirkulációváltozást, tehát nyomásingadozást okoz a lapáton. Az így keletkező hangot nyomzajnak nevezik.

Ez a nyomzaj — melyet tehát a kis elemi quadrupolusból álló, *összességében dipolus* jellegű leúszó örvénysor sugároz, ismereteink jelenlegi fokán elkerülhetetlennek tekinthető, mivel olyan jelenség velejárója, amely a gép hatásos működését biztosítja áramlástechnikai szempontból. Így, ha minden zajt meg is tudnánk szüntetni, a nyomzajból eredő hangteljesítményszint az a minimális szint, amely adott áramlástechnikai jellemzők mellett egy axiális ventilátoron elvileg elérhető. Hazai kutatások eredményeképpen sikerült a már említett egyenletekre épülő gondolatsorral egy, a gyakorlat számára egyszerűen használható összefüggést felépíteni:

$$L_{P_{\min}} = 27 + 10 \log \dot{V} + 23 \log \Delta p_{\delta} [dB], \quad (16)$$

ahol \dot{V} a szállított térfogatáram m^3/s -ban, Δp_{δ} a létesített össznyomás-növekedés Pascalban. A tudomány és az empiria érdekes találkozását mutatja, hogy a műszaki életben eddig jól bevált tapasztalati képlet a következő volt:

$$L_{P_{\min}} = 40 \pm 4 + 10 \log \dot{V} + 20 \log \Delta p_{\delta} [dB]. \quad (17)$$

Az első állandó alsó értékével (36) a nyert teljesítményszint az elterjedt korszerű ipari axiális ventilátorokon jól megközelíti az elméleti értéket. Az *első* állandó viszonylag nagy eltérését ugyanis kompenzálja a *második* ellentétes irányú eltérése.

Valamely ventilátor azonban általában csővezetékre dolgozik, így azzal szétválaszthatatlan akusztikai egységet képez. A hangforrás hangteljesítmény mérése — tehát a csővezeték végén mérhető hangteljesítményszint — csak ezen tény figyelembevételével értékelhető. Az áramlásakusztikai összefüggések itt kombinálódnak a klasszikus akusztika transzmisszió-vonal összefüggéseivel.

Az átmenet a szabadtéri és a csőben elhelyezett hangforrás viselkedése között ma még tudományos magyarázatra szorul. A szabad térben mért négy-szög-keresztmetszerű rúd, tehát ezen igen egyszerű test zajkeltése is azt az érdekes eredményt hozta, hogy a lapsíkhöz mért 15° -os megfűvási állásszög

mellett volt a zaj *maximális*, holott az ellenállás és felhajtóerő itt a *minimális*. Áramlástechnikai mérésekkel sikerült ugyan kimutatni, hogy ilyen megfűvás mellett van a felületi nyomásingadozás maximuma, de a rezgésszám — vagy helyesebben a jellemző Strouhal-szám — a keltett hangnál és a nyomásingadozásnál eltérő volt. Ha ezzel a rúddal modellezzük, mint egyszerű zajforrással, a szabadban, ill. csőben való sugárzást is, akkor azt tapasztaljuk, hogy a rudat különböző helyekre illesztve a csőben különböző hangteljesítményszint sugárzást regisztrálhatunk.

Még szabadban álló rúd esetében sem ad az elmélet megfelelő felvilágosítást arra nézve, hogy a primer hangforrás vajon a nyom vagy annak visszahatása. A csőben viszont még az akusztikai rendszer összetett tulajdonságai is bonyolítják ezt az amúgy sem tiszta képet.

Az áramlástechnikának ezen a határterületén tehát talán még hangsúlyozottabban tapasztalhatjuk azt, hogy a jelenleg rendelkezésre álló elméleti alapok bár igen hasznos útmutatók, gyakorlati alkalmazásukhoz még igen sok akusztikai és ezzel együtt végzett áramlástan mérési tapasztalatra van szükség.

A környezetvédelem ad kimagasló jelentőséget a folyók szennyeződés-vizsgálatainak is. Áramlástechnikai szempontból érdekes, de ugyanakkor rendkívül bonyolult probléma itt a bevezetett szennyeződések elkeveredésének, szétterülésének vizsgálata. A folyókba ugyanis valahol bevezetik a szennyeződések, máshol különböző célra vízkivételi művet létesítenek. Előbbinek utóbbira gyakorolt hatása az, ami indokolja az ilyen problémák vizsgálatát. A feladat tehát a c koncentráció meghatározása a hely és idő függvényében, a vizsgált tartományban. Ehhez a mozgás- és kontinuitás egyenleten kívül — figyelembe véve, hogy a legtöbb esetben turbulens áramlásról van szó — a turbulens diffúzió egyenletét (más néven a transzport egyenletet) használhatnánk fel, teljes háromdimenziós pompájában és a teljes reménytelenség érzésével. Igen sok próbálkozás történt már ezen a téren, de a három egyenlet együttes megoldása csak egészen speciális — tehát a valóságtól távolálló — esetekben sikerült. Kivezető útnak ismét az elmélet és a kiegészítő mérések összekapcsolása látszik: csak a transzport egyenlettel foglalkozni, és az abban szereplő együtthatókat (diffúziós tényezőket stb.) előszámításokból, mérésekből, empirikus összefüggésekből ismertnek tételezni fel. A cél ekkor olyan megoldás lehet, amely lehetőleg kevés további megkötést tartalmaz a peremmel, peremfeltételekkel és az együtthatók *változásával* kapcsolatban. Még ilyen körülmények között is további egyszerűsítésekre kényszerülünk: legyen az áramlás stacionárius, és mivel a folyók vízmélysége általában jelentősen kisebb szélességüknél és a vizsgálati szakasz hosszánál, a leíró egyenlet függély mentén integrált alakját, az ún. turbulens diszperzió egyenletét használjuk fel. A közelítés pontossága erősebb kanyarok közelében rohamosan csökken, ott a jelenség alapvetően háromdimenziós.

A turbulens diszperzió másodrendű, parabolikus differenciálegyenlete tet-
szőleges, görbe vonalú, ortogonális koordinátarendszerben:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (H_y h v_x c) + \frac{\partial}{\partial y} (H_x h v_y c) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{H_y}{H_x} h D_x \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{H_x}{H_y} h D_y \frac{\partial c}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

ahol c , v_x és v_y már a már említett koncentráció, illetve sebességösszetevők időbeli és mélységbeli integrálátlagai, D_x , D_y a diszperziós tényezők, h a vízmélység, H_x és H_y a Lamé-féle tényezők. Lényegesen egyszerűsíthető a tárgyalásmód, ha a koordinátarendszert speciálisan választjuk meg, legyen az egy (s, b) rendszer, ahol s a \mathbf{v} vektormező áramvonalaiival egyezzen meg, b pedig az ezekre merőleges koordináta. Kimutatható, hogy a hosszirányú diszperzió a keresztirányúhoz képest elhanyagolható, így a feladat megfogalmazása most már a peremfeltételekkel együtt a következő:

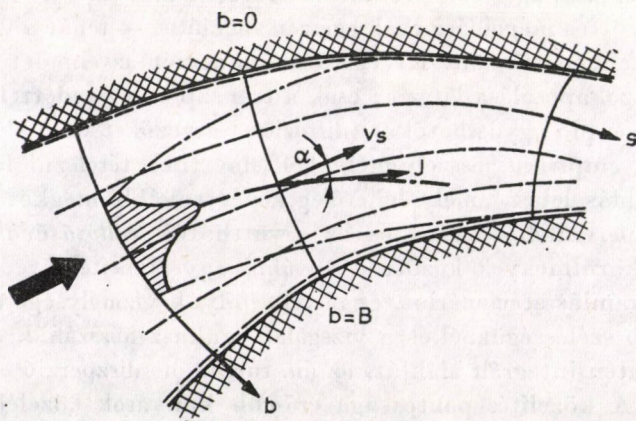
$$\frac{\partial}{\partial s} (H_b h v_s c) \cong \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{H_s}{H_b} h D_b \frac{\partial c}{\partial b} \right), \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial c}{\partial b} \right)_{b=0} = \left(\frac{\partial c}{\partial b} \right)_{b=B} = 0, \quad (20)$$

$$c(s, b) = f(b). \quad (21)$$

SOMLYÓDY nyomait követve vezessük be az igen szellemes anyagáramvonal fogalmát. Erre a kézenfekvő alapot a

$$\operatorname{div} (h \cdot \mathbf{v}) = 0; \quad \operatorname{div} (h \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (22)$$



2. ábra

kontinuitási egyenletek közötti alak hasonlóság nyújt, ahol $\mathbf{J} = c \cdot \mathbf{v}$ az anyagáramsűrűségi vektor. Az anyagáramvonal jellemzője, hogy annak minden pontjában az érintő és a \mathbf{J} vektor egybeesik, és az érintőre merőlegesen anyagátadás nincs (2. ábra).

Ebből az α szétterülési szög, amely bizonyíthatóan mindig hegyesszög

$$\tan \alpha \cong -\frac{H_s}{H_b} \frac{D_b}{cv_s} \frac{\partial c}{\partial b} \cong -\frac{H_s}{H_b} \frac{D_b}{v_s} \frac{\partial}{\partial b} \ln c. \quad (23)$$

Ennek, valamint az anyagáramvonalra merőlegesen zérus anyagátadás feltételéből levezethető

$$\dot{m}(b) \cong \int_0^b hcv_s H_b db; \quad d\dot{m} = 0 \quad (24)$$

egyenletnek a megoldása egyenértékű a feladat eredeti differenciálegyenletének a megoldásával, de annál többet mond a rendkívül szemléletes anyagáramvonalak megadásával, amely értékes képet nyújt az elkeveredés folyamatáról. A bevezetett, pl. szennyvíz a bevezetés helyétől induló, szélesedő csóvát alkotva kerül szét a befogadó folyóban: a csóva széleit egy-egy anyagáramvonal határolja. Ezek az elkeveredés folyamán fokozatosan közelednek a parthoz, majd a peremfeltétellel összhangban ahhoz hozzá is simulnak. Ezt követően a partok most már nemcsak áramvonalak, hanem anyagáramvonalak is. Mivel két szomszédos, tetszőlegesen kijelölt anyagáramvonal között értelemszerűen mindig azonos anyag áramlik, a koncentráció hosszmenti változását a vízhozam anyagáramcsövön belüli módosulása idézi elő. A kiegyenlítődéshez közeledve az anyagáramvonalak az áramvonalakhoz tartanak.

A feladat megoldására kidolgozott numerikus eljárás a véges differenciák módszerén alapszik, amelyben a pontkiosztás nem ekvidisztans, hanem a számítás eredményeként, a folyamat jellegétől függően adódik ki. Így a nagyobb koncentráció változások jól követhetők.

Az elméletileg számolt eredményeket mérésekkel ellenőrizve több, egymástól erősen eltérő esetben is igen jó egyezéseket találtunk.

Az előbb a transzport egyenletre koncentrálva azt mondtuk, hogy az abban szereplő sebességösszetevőket, diszperziós tényezőket ismertnek tekezzük fel. Ezeknek a megállapítása azonban korántsem egyszerű. A sebességösszetevőket modellkísérlettel vagy az első témánkkal kapcsolatban alkalmazott áramvonal számítással lehet egyszerűbb esetekben jó közelítéssel meghatározni. A diszperziós tényezővel kapcsolatban a feladattól függően két lehetőségünk van. Az egyik, hogy a kidolgozott számos empirikus összefüggés egyikét alkalmazzuk. A másik, de lényegesen költségesebb lehetőség az, hogy ha valamely folyó hosszú szakaszára akarjuk a számításokat elvégezni, akkor

a szakaszon belül néhány helyen helyszíni méréseket végzünk, majd az elmondott módszer megfordításával meghatározzuk a diszperziós tényezőket. Végül az így kapott értékek között interpolálgatva alkalmazzuk az egész folyószakaszra az eredeti módszert.

Az áramlástechnikai kutatások ezen röviden vázolt négy problémaköréből, úgy véljük, levonhatjuk azt a következtetést, hogy ott, ahol a jelenségek pontos összefüggéseinek leírásához a mikrostruktúra részletes ismeretére volna szükség, a kényszerű egyszerűsítésekkel élő elmélet és a valóság közötti hidat csak az igen körülményes, alaposan végzett mérések alkothatják ezen a területen éppúgy, mint — azt hisszük — a mechanika csaknem minden területén.

Some Research Problems of the Flaw Technics in Hungary. — The present paper tries to make understand through four selected subjects that the motive, why the fluid mechanics is behind in vigorous progress, resides in the lack of knowledge of the microstructure of the flowing medium. The calculation of the blading of the turbomachines and that of the flow conditions; investigation of the unsteady phenomena in pipelines and in pipeline-networks; the problems of the aeroacoustics as well as the investigation of the pollution of the rivers are the problems which the necessary and close connection of the simplified theories and complementary measurements is readily perceptible which, at the present state of knowledge has to supplement the detailed knowledge of the microstructure of the medium.

Einige Forschungsprobleme der Strömungstechnik in Ungarn. Die Autoren wünschen durch vier ausererwählte Gegenstände erläutern, daß der Grund der sich verlangsamten Entwicklung der Strömungstechnik in der unbekanntem Mikrostruktur des strömenden Mittels liegt. Das Problem der entsprechenden Ausbildung der Schaufelung der strömungstechnischen Maschinen und der in den Maschinen abspielenden Strömungsvorgänge; die Untersuchung der in den Rohrleitungen, bzw. in den Rohrnetzen auftretenden unstationären Bewegungen; die Fragen der Aeroakustik und der Verunreinigung der Ströme sind dieselben, wodurch der notwendige, enge Zusammenhang zwischen den vereinfachten Theorien und den Ergänzungsmessungen erfaßt werden.

KÖNYVISMERTETÉS

Á. Bosznay (szerkesztő)

BRACKETING OF EIGENFREQUENCIES OF CONTINUOUS STRUCTURES

Akadémiai Kiadó, Budapest 1980

Az MTA Műszaki Tudományok Osztálya rendezésében és az MTA Műszaki Mechanikai Tanszéki Kutatócsoport technikai lebonyolításában került sor a 112. EUROMECH Kollokviumra Mátrafüreden 1979. febr. 21—23 között.

A 11 országból 59 résztvevővel rendezett rangos nemzetközi konferencián szóban előadott vagy utólag beküldött tanulmányok többségét tartalmazza a szóban forgó kiadvány 670 oldal terjedelemben.

A dolgozatok az alábbi, a Kollokvium címében megjelölt eljárás-csoport-hoz kapcsolódó témaköröket tárgyalják:

1. a Poincaré—Rayleigh—Ritz-módszer, a közbenső operátorok módszere, az ortogonális invariánsok Fichera-féle módszere újabb változatai, továbbfejlesztései, újabb alkalmazásai vagy hasonló célra szolgáló más módszerek,
2. sajátértékekkel kapcsolatos optimalizálások,
3. adott tartománybeli valamennyi sajátérték meghatározását célzó eljárások.

A résztvevők létszáma s általában az EUROMECH Kollokviumok célkitűzése lehetővé tette, hogy a rendezvényt egy szekcióban bonyolítsák le.

A könyvben az egyes cikkek a szerzők neve szerinti ABC sorrendben követik egymást. Tudományos értékük kiemelkedő, az adott tématerületen a közelmúltban elért magas szintű kutatási eredményeket ismerteti. A színvonalat a szerzők névsora is fémjelzi. Matematikusok, elméleti beállítottságú mérnökök és fizikusok, a mérésekben is járatos mérnökök munkái számos további kutatásra adnak kiindulópontot. Mindez azt is mutatja, hogy időszzerű volt a gyakorlati szempontból is növekvő fontosságú, a nemzetközi tudományos érdeklődés előterében álló témacsoport számára az összefoglalás és a továbbfejlesztés érdekében ilyen fórumot biztosítani.

A „camera ready” technikával készített 38 kézirat többsége jó kiállítású, az ábrák és táblázatok jól áttekinthetők. Látszik, hogy a szerzők a matematikai képletek írásakor az érthetőségre nagy gondot fordítottak, és helyenként kevesebbet törődtek a betűk és indexek alakjával. Összességében mégis elmondható, hogy a könyv kiemelkedő szakmai értékeihez a külalakja is megfelelő. Külön ki kell emelni az Akadémia Kiadó szép és gondos munkáját

Dr. Czeglédi Gyula

TARTALOMJEGYZÉK

W. Olszak	1902—1980 (<i>Csonka P.</i>)	1
W. Lichtenheldt	1901—1980 (<i>Sályi I.</i>)	5
<i>Szép Iván</i> : Anyagkölsönhatások a fém-szilíciumdioxid-szilícium (MOS) szerkezetű elektronikai eszközökben		9
<i>ifj. Gáspár László</i> : Aszfaltburkolatú utak leromlása és élettartama		29
<i>Czeglédi Gyula</i> : Térbeli rúdszerkezetek sajátfrekvenciáinak közrefogó számítása, I.		53
<i>Kolonius Ferenc</i> : Csővezetékrendszerek rugalmassági tervezése, I.		75
<i>Lámer Géza</i> : A Lamé-egyenletek megoldása teljes n -ed fokú polinommal		91
<i>Nédli Péter</i> : Rúdszerkezetek képlékenységtani problémáinak mátrixalgebrai eszközökkel történő tárgyalása		103
<i>Kurutzné dr. Kovács Márta</i> : Általánosított feltételes kapcsolatokkal rendelkező szerkezetek állapotváltozás-vizsgálata		109
<i>Vásárhelyiné dr. Szabó Anna</i> : Panelszerkezetek határállapot-vizsgálata sztochasztikus programozással		131
<i>Pritz Tamás</i> : Longitudinálisan rezgő viszkoelasztikus rúd látszólagos komplex Young-modulusa		137
<i>Czeglédi Gyula</i> : Térbeli rúdszerkezetek sajátfrekvenciáinak közrefogó számítása, II.		149
<i>Kolonius Ferenc</i> : Csővezetékrendszerek rugalmassági tervezése, II.		163
<i>Vajna Zoltán</i> , — <i>Szentmártony Tibor</i> : A hazai áramlástechnika néhány kutatási problémája		187

KÖNYVISMERTETÉS

<i>Bosznay Á.</i> : Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Structures (<i>Czeglédi Gyula</i>)	201
---	-----

CONTENT

W. Olszak	1902—1980 (<i>P. Csonka</i>)	1
W. Lichtenheldt	1901—1980 (<i>I. Sályi</i>)	5
<i>Szép, I.</i> : Material Interactions in the Electronic Devices of Metal-Oxide-Silicon (MOS) Structure		9
<i>Gáspár, L. jr.</i> : Destruction and Service Life of Roads of Bituminous Pavement		29
<i>Czeglédi, Gy.</i> : Bracketing of the Eigenfrequencies of Spatial Skeletons, Part I		53
<i>Kolonius, F.</i> : Versatility in Designing Pipeline Systems, Part I.		75
<i>Lámer, G.</i> : Solution to Lamé's Equations with the Aid of Series Development According to a General Polynomial of n -degree		91
<i>Nédli, P.</i> : Matrix Methods for the Plastic Analysis of Frames		103
<i>Mrs. M. Kurutz</i> : State Change Analysis of Structures with Generalized Conditional Joints		109
<i>Mrs. A. Vásárhelyi</i> : Plastic Limit State Analysis of Panel Constructions by Stochastic Programming		131
<i>Prüz, T.</i> : Apparent Complex Young's Modulus of a Longitudinally Vibrating Visco-Elastic Rod		137
<i>Czeglédi, Gy.</i> : Bracketing of the Eigenfrequencies of Spatial Skeletons, Part II.		149
<i>Kolonius, F.</i> : Versatility in Designing Pipeline Systems, Part II.		163
<i>Vajna, Z. — Szentmártony, T.</i> : Some Research Problems of the Flow Technics in Hungary		187

BOOK REVIEW

<i>Bosznay, Á.</i> : Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Structures (<i>Gy. Czeglédi</i>) ...	201
--	-----

INHALTSVERZEICHNIS

W. Olszak 1902—1980 (<i>P. Csonka</i>)	1
W. Lichtenheldt 1901—1980 (<i>I. Sályi</i>)	5
<i>Szép, I.</i> : Stoffwechselwirkungen in den Bauelementen der Mikroelektronik von Metall-Siliziumoxyd-Silizium (MOS) Struktur	9
<i>Gáspár, L. jr.</i> : Verderben und Lebensdauer mit Asphaltbelag bedeckter Straßen	29
<i>Czeglédi, Gy.</i> : Einschließung der Eigenfrequenzen von räumlichen Stabwerken, I. Teil ..	53
<i>Kolonits, F.</i> : Planung von Rohrleitungen auf Elastizität, I. Teil	75
<i>Lámer, G.</i> : Lösung der Laméschen Gleichungen mit Hilfe eines absoluten Polynoms n -ten Grades	91
<i>Nédli, P.</i> : Behandlung von Plastizitätsproblemen der Stabwerken mit Hilfe von matrix-algebraischen Mitteln	103
<i>Frau M. Kurutz</i> : Untersuchung der Zustandsänderung von Konstruktionen mit verallgemeinerten, bedingten Verbindungen	109
<i>Frau A. Vásárhelyi</i> : Grenzzustandsuntersuchung von Paneelkonstruktionen mit Hilfe stochastischer Programmfertigung	131
<i>Prütz, T.</i> : Der virtuelle, komplexe Young-Modul eines Längsschwingung vollführenden visko-elastischen Stabs	137
<i>Czeglédi, Gy.</i> : Einschließung der Eigenfrequenzen von räumlichen Stabwerken, II. Teil	149
<i>Kolonits, F.</i> : Planung von Rohrleitungen in Rahmender Elastizitätslehre, II. Teil	163
<i>Vajna, Z. — Szentmártony, T.</i> : Einige Forschungsprobleme der Strömungstechnik in Ungarn	187

BÜCHERSCHAU

Bosznay, Á.: Bracketing of Eigenfrequencies of Continuous Structures (*Gy. Czeglédi*) 201

100,— Ft

INDEX: 26.499 ISSN 0027—5085

Megjelent 1982. VI. 5.