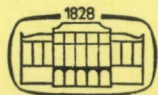


MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

57. KÖTET
1-2. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1979

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, HELLER LÁSZLÓ, KÉZDI ÁRPÁD, VÁMOS TIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 100 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

CONTENT

Iván Kotsis	1889—1980 (Csonka, P.)	1
<i>Prohászka, J.</i> : The Characteristics of Technology its Connection with Other Branches of Sciences		
		9
<i>Kézdi, A.—Mrs. E. Koós-Hutás</i> : Comparative Investigation of the Shape of Soil Grains		
		23
<i>Csonka, P.</i> : Paraboloid Shell of Revolution with Two Edge Arches in Vertical and Two Edge Arches in Horizontal Planes		
		37
<i>Popper, Gy.—Gáspár, Zs.</i> : A Numerical Method for the Solution of the Eigenwertproblem of a λ -Matrix of m -th Degree		
		49
<i>Jankó, L.</i> : Analysis of the Relationship between Membrane Forces and Flexural Forces in Saddle-Shaped Flat Hypar Shells not Submitted to Normal Forces, under Uniformly Distributed Load		
		57
<i>Kézdi, A.—Lőrincz, J.</i> : Soil Mechanics and Thermodynamics		
		91
<i>Csonka, P.</i> : Hyperbolic Shells of Revolution due to Wind Loading		
		111
<i>Singer, D.</i> : On a New Method for the State Estimation of Distribution Nets		
		129
<i>Budincsevičs, A.</i> : Counting of Electrons and Photons by Multiplication		
		141
<i>Páczelt, I.—Herpai, B.</i> : Note on the Strength Calculation of Elastic Structures Supported by Springs		
		169
<i>Roller, B.</i> : The Trends of the Theory of Viscoelasticity in Engineering Practice with Special Regard to the Lattice Girders		
		17
<i>Lámer, G.</i> : Contribution to the Calculation of Thick-Walled Schell Surfaces of Revolution to Axisymmetrical Load		
		03
<i>Jankó, L.</i> : Stability of Saddle-Shaped Flat Hypar Shells Submitted to Uniformly Distributed Load without Lateral Thurst		
		227
A Century of the Hungarian Bridge Manufacture (K. Massányi)		
		261
Report on the Specialist's Seminar on the Subject „6. Mechanisms and Drive Gears” Held in Miskolc (Z. Terplán)		
		261

Book Review

A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei. Jubileumi kötet. (Terplán, Z.)	265
A Nehézipari Műszaki Egyetem jelentősebb tudományos eredményei (1949—79) Miskolc, 1979 (Terplán, Z.)	265
<i>Gábor László</i> : Épületszerkezettan, IV. kötet (Csonka, P.)	266
<i>Gábor László—Párkányi Mihály</i> : Az információ továbbítása és vétele az iparosított építésben	266
<i>Oscar Büttner—Erhard Hampe</i> : Bauwerk, Tragwerk, Tragstruktur, Band 1. Analyse der natürlichen und gebauten Umwelt (Csonka, P.)	267
<i>Holnapy, D.</i> : Számítógépek az építőipari tervezésben (Grósz, M.)	268
<i>Palotás László</i> : Mérnöki szerkezetek anyagtana, 1. Általános anyagismeret (Újhelyi, J.)	269
<i>Palotás László</i> : Mérnöki szerkezetek anyagtana, 2. Fa-Kő-Fém-Kötőanyagok (Kausay, T.)	270
<i>Zement Taschenbuch</i> , 1979/80 (Goschy, B.)	272
<i>Kézdi, Árpád</i> : Soil Physics-Selected Topics (Rétháti, L.)	27

INHALTSVERZEICHNIS

Iván Kotsis	1889—1980 (Csonka, P.).....	1
<i>Prohászka, J.</i> : Die charakteristischen Züge der Technologie ihre Verbindung mit den übrigen Zweigen der Wissenschaft		9
<i>Kézdi, Á.—Frau Hutás</i> : Vergleichsuntersuchung der Kornformen		23
<i>Csonka, P.</i> : Rotationsparaboloidschale mit zwei vertikalen und zwei horizontalen Randbögen		37
<i>Popper, Gy.—Gáspár, Zs.</i> : Eine numerische Methode für die Lösung der Eigenwertaufgabe einer λ -Matrix von Grade m		49
<i>Jankó, L.</i> : Analyse des Verhältnisses zwischen Membran- und Biegeschnittkräfte in sattelförmigen, flachen, normalkraftfrei gelagerten HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung		57
<i>Kézdi, Á.—Lőrincz, J.</i> : Bodenphysik und Thermodynamik		91
<i>Csonka, P.</i> : Windbelastete hyperbolische Rotationsschalen		111
<i>Singer, D.</i> : Über eine neue Methode zur Schätzung der nicht gemessenen Zustandsvariablen von nichtlinearen (Gas, Wasser) Netzen		129
<i>Budincsevits, A.</i> : Elektron- und Photonzählung mit Hilfe eines Elektronenvervielfachers		141
<i>Páczeli, I.—Herpai, B.</i> : Bemerkung zur Festigkeitsberechnung der durch Federn unterstützten elastischen Konstruktionen		169
<i>Roller, B.</i> : Die Tendenzen der Viskoelastizitätslehre in der Ingenieurpraxis mit besonderer Rücksicht auf die Stabkonstruktionen		179
<i>Lámer, G.</i> : Beitrag zur Berechnung der dickwandigen Rotationstragflächen für achsensymmetrische Belastung		203
<i>Jankó, L.</i> : Untersuchung der Stabilität sattelförmiger flacher, normalkraftfrei gelagerter HP Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung		227
Hundert Jahre der ungarischen Brückenfabrikation (K. Massányi)		261
Bericht über das Fachseminar über das Thema „6. Mechanismen und Triebwerke“ abgehalten in Miskolc (Z. Terplán)		263

Buchbesprechung

A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei. Jubileumi kötet. (Terpán, Z.)	265
A Nehézipari Műszaki Egyetem jelentősebb tudomány eredményei (1949—79) Miskolc, 1979 (Terplán, Z.)	265
<i>Gábor László</i> : Épületszerkezetek, IV. kötet (Csonka, P.)	266
<i>Gábor László—Párkányi Mihály</i> : Az információ továbbítása és vétele az iparosított építésben	266
<i>Oscar Büttner—Erhard Hampe</i> : Bauwerk, Tragwerk, Tragstruktur Band 1. Analyse der natürlichen und gebauten Umwelt (Csonka, P.)	267
<i>Holnapy, D.</i> : Számítógépek az építőipari tervezésben (Grósz, M.)	268
<i>Palotás László</i> : Mérnöki szerkezetek anyagtana, I. Általános anyagismeret (Újhelyi, J.)	269
<i>Palotás László</i> : Mérnöki szerkezetek anyagtana., 2. Fa-Kő-Fém-Kötőanyagok (Kausay, T.)	270
Zement Taschenbuch, 1979/80 (Goschy, B.)	272
<i>Kézdi, Árpád</i> : Soil Physics-Selected Topics (Rétháti, L.)	272

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki szerkesztő: Marton Andor

A kézirat nyomdába érkezett: 1980. VI. 4. Terjedelem: 24,15 (A/5 ív)

81.8403 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

KOTSIS IVÁN

1889—1980

Per aspera ad astra



A magyar építészársadalom fájdalommal és megrendüléssel értesült arról, hogy Dr. KOTSIS Iván professzor, építészgenerációk lelkes tanítómestere, a magyar építészek nesztora 1980. január 11-én örökre eltávozott az élők sorából. Személyében különleges tehetségű olyan kartársat veszítettünk el, akinek lénye félévszázadon át elválaszthatatlanul összeforrott a magyar építészettel, akinek egyénisége és emberi magatartása nemzedékeknek szolgálhat példaképül.

KOTSIS Iván 1889. december 15-én Aradon született. Középiskolai tanulmányait az ottani állami főreáliskolában, egyetemi tanulmányait a budapesti műegyetemen végezte. Itt 1911-ben kitűnő minősítésű építési oklevelet szerzett.

Tanulmányai végeztével előbb HAUSZMANN Alajos, majd HÜTLÉ Dezső professzor oldalán az újkori építészeti tanszéken vállalt tanársegédi, illetve adjunktusi állást. Oktatói tevékenységét 1914-ben harctéri szolgálata miatt meg kellett szakítania, de 1917-től kezdve ismét a műegyetemen folytatta

munkáját. Itt munkaköre fokozatosan egyre szélesebb területekre terjedt ki. 1918-ban a műszaki doktori címmel tüntették ki, majd 1921-ben meghívott előadóként a renaissance építészet formaképzésének oktatásával bízták meg, 1920-ban pedig magántanárrá képesítették. 1922-ben az újonnan szervezett épülettervezési tanszék helyettes tanári teendőivel bízták meg, 1923-ban e tanszék címzetes rendkívüli tanárává, 1926-ban nyilvános rendkívüli tanárává, 1928-ban pedig nyilvános rendes tanárává nevezték ki. 1945-ben a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagjává választotta, de 1949-ben tanácskozó tagjává minősítette át. Műegyetemi tanári munkakörét 1949. dec. 31-ig látta el, amikor nyugállományba helyezték.

Műegyetemi tanári állásából távozva, 1950. jan. 1-én a Középülettervező Vállalat szolgálatába lépett, ahol a budai várpalota helyreállítási munkáinak tervezésével bízták meg. Ezt a munkakört névleg mint beosztott, valójában mint a munkálatok szellemi irányítója látta el. Később egyéb jelentős munkák tervezését, többek közt az Akadémia helyreállítási munkáinak irányítását bízták rá. 1966-ban ismét nyugállományba kellett vonulnia, de munkásságát szerződéses viszonyban tovább folytatta. Építészeti tevékenységét 1977-ben – 88 éves korában – egy sajnálatos baleset miatt kénytelen volt abbahagyni, de továbbra is élénk figyelemmel kísérte a szakmai problémákat és tapasztalataival, tanácsaival segítette azok helyes megoldását.

Mint műegyetemi tanár munkásságának főfeladatául a tervezés oktatását tekintette. Ebben jelentős szerepet juttatott az atelier-szerű rajztermi foglalkozás mellett szakszerű elméleti ismeretek oktatásának. Előadásai építészettörténeti, építészetelméleti és gyakorlati tárgyköröket öleltek fel. Éveken át ő adta elő a „A renaissance építőművészet fejlődésének története”, az „Újkori építészet I. és II. f.”, a „Gyakorlati perspektíva”, a „Térművészet”, a „Lakóépületek tervezése”, az „Újkori építészet” című tárgyakat.

Előadásai szuggesztív erejűek, formaságoktól mentesek voltak. Sikeresen valósította meg azt a követelményt, hogy „a tanárnak hozzá kell férkőznie a hallgató lelkéhez és pedig közvetlen úton, mesterkéletlenül, akár néhány felvetett gondolattal vagy gesztussal, együtt kell a tanítvánnyal töprengeni a feladatokon és együtt kell örülni a végül is megtalált megoldásnak; együtt kell élnie a tanítványával”.

Mindenkor aktívan vett részt az egyetem életében, de dékáni, rektori tisztséget sohasem vállalt. Nem fogadta el szakegyesületek, többek közt a Magyar Mérnök- és Építész Egylet építészeti szakosztályának felkínált elnöki tisztségét sem, és két ízben is lemondott a Fővárosi Közmunkák Tanácsánál viselt megtisztelő tagságáról, hogy teljes munkaerejét egyetemi tanári feladatainak ellátására fordíthassa.

Szakirodalmi tevékenysége széles területet ölelt fel. Több kiadványban foglalkozott az olasz renaissance építőművészet alaktanával, formaképzésével, homlokzati és térrendszerével. Ezt a tárgykört hosszú olaszországi tanulmány-

útján volt alkalma behatóan megismerni. Terjedelmes kötetben, szebbnél-szebb saját finom rajzai kíséretében dolgozta fel a renaissance építőművészet történetét. Ez a mű, mely — sajnos — kéziratban maradt, „tömören, lényegre koncentrálva és egyúttal vizuális élmény erejével tudatosítja az építészet történeti fejlődését és izig-vérig építész magatartást, szemléletet tükröz” (POGÁNY Frigyes).

Korán ismerte fel a modern építészeti irányzatok jelentőségét és szakirodalmi működésével ezek népszerűsítése terén elévülhetetlen érdemeket szerzett. Számos tanulmányban és különböző fórumok előtt tartott előadásban foglalkozott az újabb építészeti problémákkal, a korszerű lakásépítés feladataival, különböző városesztétikai kérdésekkel és különös szeretettel a magyar falu építészetével. Realitása és gazdaságosságra való törekvése a két háború közötti és a második világháborút követő magyar építészetre nagy hatással volt.

Terveita napi sajtóban, valamint a szaksajtóban rendszeresen ismertette, közzétette hallgatóságának tervgyűjteményét is. Jelentősebb építészeti alkotásait a hazai folyóiratokon kívül számos külföldi folyóiratban is publikálta.

Tanári tevékenysége az építészet olyan korszakára esett, amelyben újszerű irányzatok törtek utat maguknak. Feladatául tekintette „az új irányzatoknak, amelyek természetesen fokozatosan a műegyetem falai közé is behatoltak, megfelelő helyet és elterjedési lehetőséget biztosítani, és a nyugati államokban tapasztalt tanulságait azok helyes értelmezésével a magyar viszonyokra alkalmazni és ezzel az ezekkel járó tiszta, egyszerű és egyenes gondolkodásra rávezetni a hallgatóságot”. Oktatói munkájában igyekezett hallgatói számára a tervezés szabadságát biztosítani, de ugyanakkor hallgatóit a helyes építészeti gondolkodásra nevelni.

Mint tervező építész 36 tervpályázaton vett részt, azokon 20 alkalommal nyert díjat vagy megvételt, köztük 9 alkalommal első díjat. Hosszú építészeti pályafutása alatt számos köz- és magánépület tervét készítette el. Ő építette többek közt a tihanyi nyaraló kastélyt (ma diplomaták szállodája), a zalaegerszegi kolostort és templomot, az Országos Közegészségügyi Intézet budapesti épületesoportját, a tihanyi biológiai kutatóintézetet, a balatonboglári templomot és kultúrházat. Építőművészi működésének nevezetes színtere volt Székesfehérvár. Itt az ő tervei szerint készült a régi városháztömb kiegészítése és művészi kialakítása. Ugyanitt számos köz- és magánépületet tervezett és jelentős szerepet vállalt a városkép esztétikai formálásában. Egyik kiemelkedő alkotása volt a budapesti Erkel-színház átépítése és új reprezentatív közönségforgalmi helyiségekkel való kiegészítése. Ezt a feladatot körülményes adottságok közepette igen sikeresen oldotta meg. Magát a színház előtti teret is az ő javaslata szerint rendezték. Nagy szeretettel foglalkozott a soproni Petőfi-színház átalakításával és bővítésével, valamint a reá bízott kisebb, látszólag

jelentéktelenebb feladatokkal is. Az általa tervezett épületek részletterveit és költségvetését is maga készítette és a helyszíntre kiszállva, személyesen irányította a munkálatok elvégzését.

Építőművészi hitvallását, szorgalmas, alkotó munkában eltöltött életének tanulságait meggyőzően fejtette ki abban a mélyen szántó, klasszikus előadásában, amelyet a Budapesti Műszaki Egyetem építészmérnök kara előtt a gyémánt diploma átnyújtása alkalmával tartott (1970). Szerinte az épületek értékállandóságának elengedhetetlen kelléke részben a tisztaság az alaprendezésben, a lelkiismeretesség a szerkezetben és az értelmesség az anyagok kiválasztásában, részben az őszinteség, a szépség és a harmónia a kifejezésben. Szavai szerint „ezek a gyakorlatilag és esztétikailag megalapozott értékek teszik az épületeket maradandóvá, függetlenül attól, hogy a keletkezésükkor fennállott felfogás miféle formákba öltöztette őket, mert vérbeli kvalitásaik immúnissá teszik őket az idők forgandó és múlandó felfogásbeli változásaival szemben. Irányzatok jönnek, mennek, az igazi építőművészet azonban egyformán keresztüldolgozza magát azokon.”

Ő maga mindig az egyszerűsége, a célszerűsége és a harmóniára törekedett; műveiben is éppen olyan őszinte, kiegyensúlyozott és szerény volt, mint emberi magatartásában. Alkotásainak művészi hatását éppen ezekkel a kvalitásokkal érte el. Példát mutatott arra, miként lehet egyszerű eszközökkel is szépet és a gazdaságossági szempontok szigorú érvényesítése mellett is művészt alkotni. Tisztelte a múlt hagyományait, de ugyanakkor megértéssel fogadta az újabb építészeti törekvéseket is. Mint mondotta, „elismeréssel kell lennünk a múlt mestereinek jó műveiért, akiknek a formanyelvét már nem értjük meg és ugyanakkor megértéssel kell viselkednünk a fiatal generáció törekvéseivel szemben, akiknek nyelvezetét talán még nem értjük meg”.

Rendületlenül hitt az igazság erejében, elvei és meggyőződése mellett minden körülmények közt híven kitartott. Megvetette a címeket, rangokat, került minden formaságot, külsőséget, mindenkit csak érdemei szerint bírált el. Egész lényét szigorú logika, igaz realizmus és józan önmérséklet jellemezte. Szerénységénél csak abszolút puritánsága volt nagyobb. Harmonikus életfelfogását, tudását és emberi kvalitásait széles körben példaképpül tekintették. Pályáján sok csalódás és méltánytalanság érte, melyekért a személyét övező nagyfokú tisztelet, a kartársak és tanítványok szeretete, valamint a minden oldalról megnyilvánuló kitüntető nagyrabecsülés nyújtott elégtételt.

Még pályája kezdetén elnyerte a Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Ybl-érmét (1914, 1922), Fittler-érmét (1921) és Czigler-érmét (1929), majd később a Képzőművészeti Társulat Nagydíját, a Képzőművészeti Egyesület Jubileumi Ezüstérmét (1935), a Magyar Építőművészek Szövetségének Mesterdíját (1940). Kimagasló építészeti tevékenységét az Elnöki Tanács az Ybl-díjjal (1961), a Szocialista Munka Érdemrendjével (1962), a Munka Érdemrend aranyfokozatával (1969, 1974), majd 90. születésnapja alkalmából a Magyar

Népköztársaság Zászlórendjével (1979) tüntette ki. Kitüntetése alkalmából munkaadója, a Középterülettervező Vállalat bensőséges házi ünnepség keretében emlékezett meg az építészeti tervezés és ennek oktatása során kifejtett kimagasló jelentőségű munkásságáról, valamint építészgenerációkat nevelő példamutató szakmai és emberi magatartásáról. Nevének megörökítéséül végzett építész hallgatók jutalmazására évről évre kiadandó „Kotsis Iván tanulmányi díj”-at alapított.

Kotsis Iván hét évtizedes, alkotásokban gazdag élet után örökre eltávozott körünkől, de emléke fennmarad és tovább él tanítványai, tisztelői és munkatársai lelkében, kik reá emlékezve, mindenkor kegyelettel gondolnak vissza látnoki szavaira:

„Amíg ma, a technikai fejlődés forgatagában nem jutott erő és idő a humanisztikus életformákra, úgy egy idő múlva óhatatlanul előtérbe fog kerülni az egyéni elmélyülő művészi gondolkodás igénye, amely az eddig kidolgozott, műszakilag és gyakorlatilag tökéletesedett megoldásokba újból melegséget fog önteni és életörömet fog árasztani a technikai vívmányokkal telített emberiségre.”

Csonka Pál

KOTSIS IVÁN

Tudományos munkássága

1. Könyvek:

- „Az olasz renaissance építészet alaktana”. Budapest 1917, 199 lap
- „Családi házak — Familienhäuser”. Németh József, Budapest 1920, 62 lap
- „Az olasz renaissance építészet formaképzése, homlokzati és térrendszerei”. Németh József, Budapest 1921, 95 lap
- „Az olasz renaissance építészet alaktana”. Németh József, Budapest 1921, 158 lap
- „Épületek alaprajzi megoldásai”. Németh József, Budapest 1921, 17 lap, 22 t.
- „Családi házak — Familienhäuser”. Németh József, Budapest 1922, 32 lap
- „Tervezetek — Entwürfe”. Németh József, Budapest 1922, 78 lap, 7 t.
- „A közép-európai renaissance építőművészet alaktana”. Németh József, Budapest 1927, 90 lap
- „Családi házak és nyaralók”. Németh József, Budapest 1928, 45 lap
- „Az olasz renaissance építészet formaképzése, homlokzati és térrendszerei”. Németh József, Budapest 1930, 123 lap
- „Közép és kislakások alaprajzi megoldásai bérházakban”. Pátria Nyomda, Budapest 1942, 28 lap
- „Sorházak alaprajzi megoldásai”. Egyetemi Nyomda, Budapest 1942, 40 lap
- „Tervgyűjtemény hallgatóium munkáiból”. Egyetemi Nyomda, Budapest 1944, 228 lap
- „Épületek és tervek”. Pósa, Budapest 1945, 184 lap
- „Térművészet”. Egyetemi Nyomda, Budapest 1946, 16 lap
- „Az olasz renaissance építészet formaképzése, homlokzati és térrendszerei”. Műegyetem Nyomda, Budapest 1947, 120 lap
- „A renaissance építőművészet története”. (Kézirat) 1948
- „Az újkor építészetének tárgymutatója”. Műegyetem Nyomda, Budapest 1948, 34 lap

2. Közlemények:

- Eger építményei a XVIII. század második feléből. *Magyar Építőművészet* 10 (1912), 9—10. szám, 35-37
- A korai olasz renaissance építő művészet arány- és részletképzéséről. *Építő Ipar—Építő Művészet* 38 (1914), 271—272

- Javaslat a műegyetemi építészoktatás tanmenetének módosítására. *A Magyar Mérnök- és Építész Egylet Közlönye* 53 (1919), 232–233
- Magyarország építőművészettörténeti emlékeinek tervszerű feltárása. *Építő Ipar—Építő Művészet* 44 (1920), 13, 14, 15, 16, 17. szám
- Tervezet a Királyi József Műegyetem építészeti osztályának önálló épületére. *A Technikus* 1 (1920), 44–45
- Magyarország építőművészettörténeti emlékeinek tervszerű feltárása. *A Technikus* 2 (1920–21), 11–19
- Az olaszországi barokk építőművészetről. *A Technikus* 3 (1921–22), 1–10
- A korszerű lakás építésének problémái. *Technika* 13 (1932), 55–60
- A m. kir. Orsz. Közegészségügyi Intézet keretében létesült „Ápolónő- és védőnő képző iskola” és az „Orvosok Háza” épületei. *Magyar Kórház* 1 (1932), 1–6
- Az építésznevelés problémái. *Építőmunka* 1 (1933), 5. szám, 94–95
- A számbéki templommaradványok sorsa. *Ujság* 9 (1933), okt. 17, *Építőmunka* (1933), 8–9. szám
- A mai kor építőművészetének irányelvei. *Magyar Szemle* 19 (1933), 1–11
- Az építész. *Családi élei* 1 (1934), 2. szám
- A nyaralók építéséről. *A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönye* 68 (1934), ápr. 17–18.
- Építőművészetünk időszerű kérdései. *Uj Magyarország* (1934), dec. 16.
- Hogyan alkalmazható a normák gondolata a lakásépítésben. *Technika* 15 (1934), 43–44
- A házadómentesség kérdésének ankétja. *Munkaadó* (1934), II. 8. 6. szám
- A mai építőművészet és a közönség. *Magyar Szemle* 20 (1934), 39–42
- Lakáskultúra és gazdasági válság. *Magyar Szemle* 20 (1934), 353–362
- A magyar kertés családi házakról. *Magyarság* (1934), ápr. 1., 48. o.
- A nagyobb lakókényelmű családi házakról. *Magyarság* (1934), ápr. 8, 24. o.
- A balatoni nyaralókról. *Magyarság* (1934), május 6., 26. o.
- A korszerű építéset teljesítményei a lakáshigiéne terén. *Egészségpolitikai Szemle* 1 (1934), 162–173
- Építőművészetünk időszerű kérdései. *A Magyar Mérnök- és Építész Egylet Közlönye* 68 (1934), 306–311
- Művészet az áruminta vásáron. *Cobden* 2 (1935), 105–108
- Reflexiók a „Ma Építészetének Társasága” budapesti látogatásához. *Vállalkozók Lapja* 56 (1935), 77–78. sz. 3–4
- A fehérvári városháza átépítése. *Dunántúli Hétfői Ujság* (1935), dec. 23, 27–28
- A mai építészeetről. *Esztetikai füzetek* 2 (1935), 37–52
- A mai építőművészeetről. *Technika* 17 (1936), 49–52
- A magyar lakásépítés a háború után. *Búvár* 2 (1936), 817–821
- Vidéki városok külső övezetében épülő egyszerű lakóházak tervei. *Technika* 18 (1937), 3. szám
- A magyar falu középületei. Hallgatói munkák. *Technika* 18 (1937), 7, 8, 9, 10. szám, 19 (1938), 1. szám
- Példák rossz-, elrontott, vagy a városképbe nem illő homlokzatok átalakítására, illetve kijavítására. *Technika* 19 (1938), 8. szám
- A svábhgyi turista-szálló építészeti stílusa. *Vállalkozók Lapja* 59 (1938), 12. szám, 3. o.
- A székesfehérvári városháza átépítése. *A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönye* 73 (1939), 131–144
- Épületek a magyar falu részére. *A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönye* 73 (1939), 32–40
- A m. kir. József Nádor Műegyetem aerodynamikai intézete. *Technika* 20 (1939), 284–290
- A székesfehérvári régi városháza helyreállítása és kiépítése. *A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönye* 73 (1939), 17–18. szám
- A mai magyar építészeetről. *Magyar Szemle* 25 (1939), szept.
- Esztetikai szempontok a magyar vidéki városok képeinek kialakításánál. Székesfehérvár városképeinek rendezése. A Városfejlesztés, városrendezés, városépítés című munkában. Magyar Királyi Állami Nyomda, Budapest 1940
- A Berényi úti kislakásos telep. *Székesfehérvári Friss Ujság* (1940), május 11, 7. o.
- Növényzet a városképekben. *Magyar Szemle* 27 (1941), febr.
- Javaslatok a közép- és kiskeresetűek lakásának megjavítására. *Építészeti* 1 (1941)
- A növényzet helytelen alkalmazása a városképekben. *Építészeti* 1 (1941), 39–43

- A székesfehérvári Kultúrház. *Technika* 22 (1941), 4. szám
 Izléstelen, vagy elrontott homlokzatok megjavítása. *Székesfehérvári Friss Újság* (1942), dec. 24, 9—10. o.
- A közeljövő lakásépítési programja. *Magyar Építőművészet* (1942), 176—178. o.
 Az építéset. A mai világ képe IV. kötetében, Kir. Magyar Egyetemi Nyomda, Budapest 1942
- Sajnos, itt az alkalom, hogy városképeinket különköltség nélkül szebbé változtathassuk. *Hírlap* 2 (1947), feb. 27
- A százéves műegyetem. A „Budapest” Könyvtára (1947), 12—13
- Visszaemlékezések és tanulságok. *Magyar Építőművészet* (1965), 2. szám, 58—60. o.
 Az Erkel Színház átépítése. *Magyar Építőművészet* (1968), 1. szám, 26—32. o.
- Néhány szó az épületek helyes értékeléséről. *Magyar Építőművészet* (1969), 6. szám, 46—49. o.
- Visszaemlékezések a múltra és tanulságok a jelenre. *Magyar Építőipar* 19 (1970), 293—309
- Gondolatok Granasztói Pál 1970. december 6-i előadásával kapcsolatban. *Magyar Építőművészet* (1971), november
- Történelmi városmagokban épülő homlokzatokról. *Magyar Építőipar* 20 (1971), 133—140
- Néhány szó a családiházak lakótelepek összképeiről. *Magyar Építőipar* 20 (1971), 222—224
- Emlékezés Hudec Lászlóra. *Magyar Építőművészet* (1971), 3. szám, 56—58. o.
- Néhány szó az építészképzésről. *Magyar Építőipar* 20 (1971), 595—596
- Az egyszerűség az igazság kapuja. *Népszabadság* 30 (1972), márc. 10, 59. szám
- A nagyközönség és az építőművészet. *Magyar Nemzet* (1973), 9—21. o.
- Épületátalakítások I. *Magyar Építőipar* 22 (1973), 351—361
- Épületátalakítások II. *Magyar Építőipar* 23 (1974), 247—255
- A dél-németországi építőművészet a két világháború között. *Magyar Építőművészet* (1974)
- Mai építészetünk és a magyar jelleg. *Magyar Építőművészet* (1976).

Megjegyzés. A fenti felsorolás nem tartalmazza az egyes épületek rövid ismertetését közlő folyóirat és hírlap cikkeket.

A TECHNOLÓGIA JELLEGZETES VONÁSAI ÉS KAPCSOLATA A TÖBBI TUDOMÁNYÁGGAL*

PROHÁSZKA JÁNOS**

AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

Szerző rámutat a technológia ügyének a népgazdaság eredményességét növelő fontosságára és foglalkozik annak jellegzetes vonásaival valamint kapcsolatával a többi tudományággal.

Az MTA VI. Műszaki Tudományok Osztályának utóbbi ülésein többször került napirendre a technológia ügye. Hasonló módon kap egyre nagyobb szerepet a népgazdaság eredményességének növelését szolgáló állami és párt-határozatokban és ennek következtében a napi sajtóban is. A közgyűlés plenáris ülésén Havasi elvtárs is említette fontosságát, nem beszélve Tamássy és Romány Pál miniszter a mezőgazdaság fejlesztésével kapcsolatos előadásában, illetve hozzászólásában elhangzottakról.

Önkéntelenül felvetődik a kérdés, hogy mi az oka annak, hogy gazdasági haladásunk és ezen belül műszaki fejlődésünk egyik legfontosabb — ha nem a legfontosabb — feladata lett a technológia fejlesztése.

Népgazdasági terveinkben az egy főre jutó nemzeti jövedelemnek a szakadatlan növelése szerepel. Ez az alapja anyagi és kulturális életszínvonalunk emelkedésének. A nemzeti jövedelem növelésének három legfontosabb lehetősége:

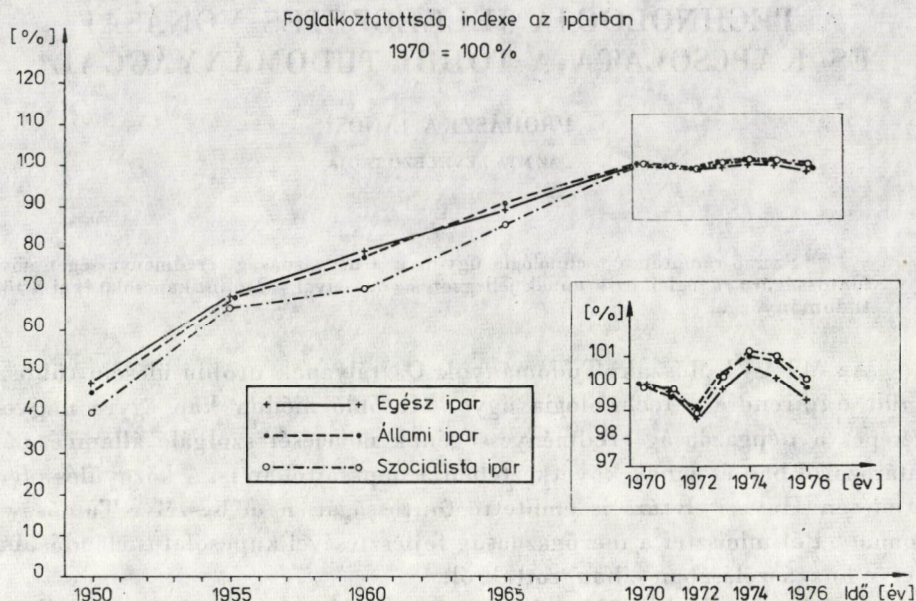
1. a termelésben részt vevő dolgozók számának a növelése;
2. a nagyobb értékű termékszerkezet kialakítása és
3. a termelési, a technológiai színvonal növelése.

A nemzeti jövedelem extenzív fejlesztésének a lehetősége — a dolgozók számának a növelése — hazánkban gyakorlatilag megszűnt, mivel, ahogy azt az 1. ábra mutatja, az 1970-es évek eleje óta a teljes foglalkoztatottság elérése ezt kizárja. (E téren az hozhat eredményt, ha a dolgozókat a kevésbé gazdaságos termelési ágazatokból a nagyobb eredményességet biztosító ágazatokba irányítjuk át.) Most már csak az intenzív növelés lehetőségével lehet és kell élni. Ez a termékszerkezet ésszerű megváltoztatásával és a technológia fejlesztésével valósítható meg a leghatásosabban.

A termékszerkezet változtatásáról az utóbbi időben sokat beszélünk. Csak annyit ezzel kapcsolatban, hogy egy a piacon könnyen eladható keresett cikk csak akkor jelenti a nemzeti jövedelem növelését, ha azt gazdaságosan, korszerű technológiával tudjuk előállítani. A legkorszerűbb termékre is millió-

* Elhangzott az MTA Műszaki Tudományok Osztálya 1978. aug. 12-én tartott nyilvános ülésén.

** Prof. Dr. Prohászka János 1118 Budapest, Rozmaring u. 9.



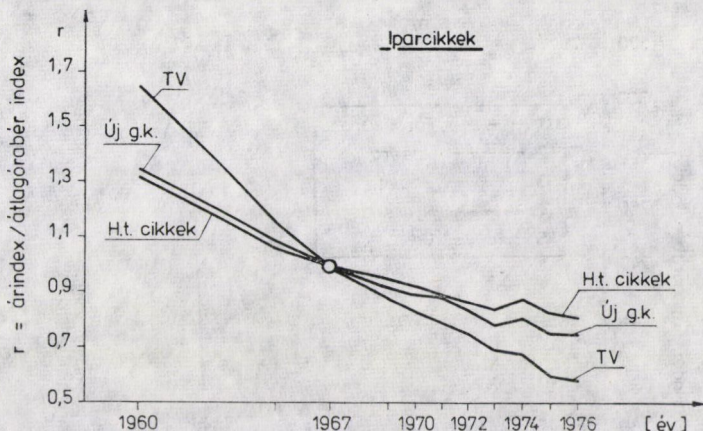
1. ábra

kat lehet ráfizetni, ha gyártási technológiája nem korszerű. Azonban a kevésbé korszerűnek tűnő termék is lehet gazdaságos, ha technológiája hasznot biztosít.

Az erre vonatkozó tényeket jól szemlélteti az, hogy egyik vállalatunk az utóbbi időben dolgozott ki egy olyan terméket, melynek minden darabját külföldi piacon értékesítették. A gyártmány bevezetésével foglalkozók nagy lelkesedéssel és bámulatos ötletgazdasággal elérték, hogy a termék minősége a legjobb külföldiekével vetekszik. Amikor azonban kiszámoltuk az egy év alatt bevett devizának az egy főre jutó részét, kiderült, hogy az messze alatta marad annak, amit gazdaságosnak mondhatunk. Itt a minőségi mutatók megfelelőek, de a technológia termelékenysége alatta marad a kívánatosnak. Feltétlenül korszerűbbé kell tenni a technológiát, hogy a termék ne csak jó, korszerű, hanem gazdaságos is legyen.

Hivatkozhatunk itt a traktorgyártás néhány év előtti megszüntetésére, mely azóta másutt újraéledt. Úgy véljük, hogy nem a traktor volt korszerűtlen (hiszen a piacon a néhány LE-s teljesítményű traktoroktól kezdve a 100-nál nagyobb LE-sek is kaphatók, és még a jövőben is kaphatók lesznek), hanem az a technológia nem felelt meg a korszerű követelményeknek, mellyel azokat gyártották.

A nyersanyagok és az energiahordozók árának az egész világon bekövetkezett — és várhatóan hosszú időn keresztül — növekedése különösen fontosá teszi a technológia fejlesztését, mert a legközvetlenebbül járul hozzá az anyag és az energiahány, valamint az önköltség csökkenéséhez, a munka termel-



2. ábra

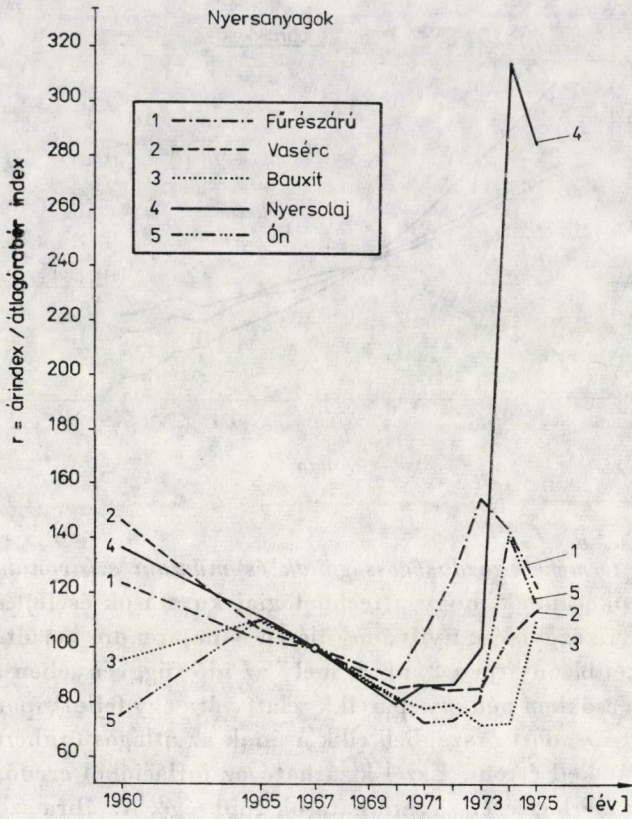
kenységének, a termékek gazdaságosságának és műszaki színvonalának növekedéséhez. Ez az oka annak, hogy a technológiai kutatások és fejlesztések ügye a MTA 1978. évi közgyűlése nyilvános ülésén is napirendre került.

A fentieket bizonyítja a 2. ábra, mely az idő függvényében azt mutatja, hogy miképpen csökken néhány iparcikk relatív ára egy fejlett ipari országban. Relatív ár alatt az adott országbeli cikk árának az átlagos órabérre vonatkoztatott mutatóját kell érteni. Ezzel kizárható az inflációból eredő, a tényleges értékviszonyok mérlegelését zavaró hatások többsége. Az ábra szerint az iparcikkek ára az idő során kisebb-nagyobb eltéréseket nem számítva, csökkenő tendenciát mutat. Ennek a ténynek az általános érvényességét sokkal kézzelfoghatóbban bizonyítja az, hogy számos olyan termék, mely korábban csak bizonyos csoportok tulajdonához tartozott (gépkocsi, háztartási gépek stb.), ma már nélkülözhetetlen használati cikké vált.

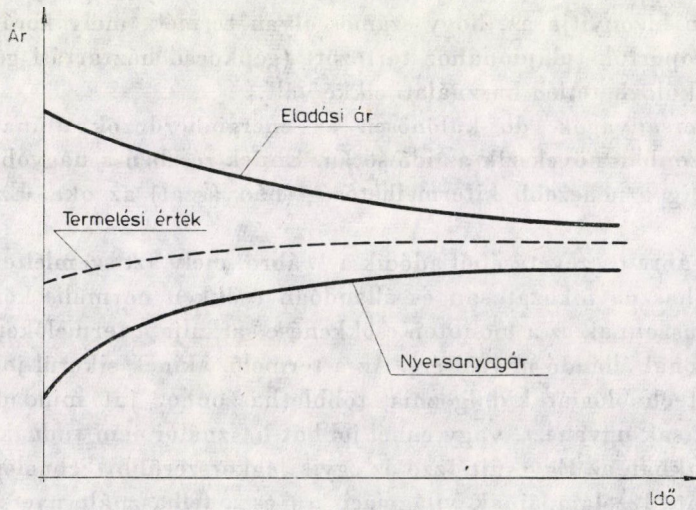
A nyersanyagok, de különösen az energiahordozók árának hasonló mutatója azonban növekszik az idő során. Ennek részben a nagyobb kereslet, részben pedig a nehezebb kitermelhetőség (bányászat) az oka. Ezt mutatja a 3. ábra.

A két ábra összevetéséből adódik a 4. ábra, mely azt szemlélteti, hogy az iparcikkek haszna fokozatosan és állandóan csökken normális körülmények között. A haszonnak ez a monoton csökkenése sarkalja a termelőket a technológiai színvonal állandó növelésére. Az a termelő, akinek sikerül jobb, termelékenyebb technológiát kidolgoznia, többlehaszonhoz jut mindaddig, amíg a versenytársak ugyanezt, vagy ennél jobbat használni nem tudnak.

Hazánkban az Egyesült Izzó az egyik legkorszerűbb technológiával dolgozó vállalat. Izzólámpáinak világpiaci ára és a felhasznált nyersanyagárak közötti különbség nagyon kicsi. E területen csak a rendkívül fejlett és korszerű



3. ábra



4. ábra

technológiájú üzemek képesek megtartani, vagy bővíteni piaci helyzetüket. A vállalat jelenleg évente közel 700 000 000 fényforrást gyárt. Ha a technológiai kiadásokat csupán 1 fillérrel sikerül darabonként csökkenteni, az évenként 7 millió Ft hasznot, ha viszont ugyanezt a konkurens vállalat éri el, 7 millió forint ráfizetést jelent a vállalatnak, illetve a népgazdaságnak.

Egy termék ebben a rendkívül kiélezett és egyre élesedő nemzetközi versenyben csak akkor állhatja meg a helyét, ha technológiája korszerű. Nyilvánvaló, hogy a több helyen előállított azonos termékek közül a legjobb technológiával előállított biztosítja a legnagyobb hasznot. A fentiekből következik, hogy a technológiára jellemző az, hogy *a legközvetlenebbül megszabja egy termék gazdaságosságát és minőségét*. Ez az oka annak, hogy technológiai színvonalunk fejlesztése nemcsak a műszaki emberek, hanem lassan egész népünk érdeklődésének homlokterébe kerül, mert ez a kulcsa annak, hogy népgazdasági céljainkat a kitűzött időre elérjük.

Fontos figyelmeztetés számunkra az is, hogy a technológia fejlesztése már a kapitalista országokban is túllépte a vállalati kereteket és érdekeket. Ezt mutatja az, hogy a kapitalista államok is — ahol egyébként a termelési folyamatok és eszközök fejlesztése a vállalatok feladata, és az e téren elért eredmények a vállalatok legbizalmasabban kezelt titkai — egyre többet áldoznak az állami költségvetésből az új technológiák fejlesztésére. Ez tűnik ki az alábbi táblázatból, mely az NSZK tudományos költségvetési tervezetének egyik részletét mutatja arra, hogy a különböző kutatási célokra mekkora összegeket irányoztak elő.

I. táblázat
(millió DM-ban)

	1970		1971		1974	
Magkutatás	914	100%	1181,3	129%	1467	160%
Úrkutatás	415	100%	504,1	121%	782	188%
Adatfeldolgozás	86	100%	234,8	272%	425	494%
Új technológiák	36	100%	103,4	287%	574	1594%

(G. LARF: Die technologische Entwicklung in Europa.) Bár a számadatok világosan tükrözik a tendenciát, nyomtatékosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy ebben a néhány adatban nincs benne az az összeg, amit a nagyvállalatok költenek a technológiára. Külön kiemelendőnek tartom azt a tényt, hogy a német kormány akkor növelte meg jelentősen a technológiára fordított költségvetési összeget, amikor az infláció a legnagyobb méreteket öltötte. A gazdasági válságot is az a termelési egység sínyli meg a legkevésbé, — sőt még előnyösebb-

ben is kerül ki belőle — melynek korszerű terméke mögött korszerű technológia áll.

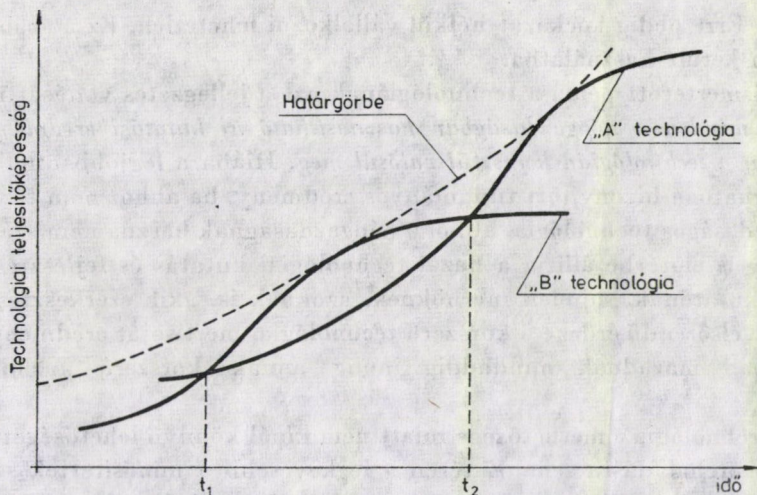
A technológiai színvonal növelésére irányuló erőfeszítés nem lehet időszakos kampány feladat. Mivel ez közvetlenül és a leghatásosabban megszabja a gazdaságosságot, érthető, hogy minden termelési egység érdeklődésének állandóan a homlokterében áll, annak ellenére, hogy erről a nyilvánosság előtt kevés szó esik. Bár a nemzetközi folyóiratokban megjelenő szakcikknek száma exponenciálisan nő, a korszerű technológiát senki nem ismerteti. Ha valahol valamilyen új, nagyobb termelékenységgű és jobb minőséget biztosító eljárást kidolgoztak, azt — kapitalista környezetben rendszerint — azonnal bevezetik és titokban tartják, mert mindaddig extraprofitot biztosít a tulajdonosnak, amíg elterjedését meg tudja akadályozni.

A technológia jellegzetes vonása az is, hogy legértékesebb ismereteit titokban tartják, és azt a legtöbb esetben még licenc, vagy know-how vásárlás révén sem lehet megszerezni, csak saját kutatással. Míg egy-egy új termék minden előnyös tulajdonságát szakcikknek és hirdetések áradata a legapróbb részletekig ismerteti, — ezek rendszerint szabadalmi védeltséget élveznek — addig azok termelési tapasztalatairól a gyártó semmiféle információt nem közöl.

Jól illusztrálja ezt a következő tény. A General Electric Co. izzólámpái kitűnő minőségűek. Ebben megszabó szerepe van az izzószálnak, mely wolfram-ból készül. Hazánkban a MTA Műszaki Fizikai Kutató Intézetében a wolfram kutatási csoport nemzetközi szakkörökben is elismert eredményeket ért el. Ezért néhány évvel ezelőtt a General Electric Co. kutatóival intenzív együttműködés és véleménycsere alakult ki. Amikor azonban a kutatási eredményeket felhasználó Egyesült Izzó wolfram technológia vásárlására kényszerült, a General Electric szóba sem állt az érdeklődőkkel. Ugyanígy nem hajlandó ilyen technológiát eladni a Philips, vagy bármely más, a világpiacon vezető helyet elfoglaló cég. Ugyanez mondható az integrált áramköri technológiáról is. E téren a Texas Instrument diktálja a tempót, de technológiát ez a cég sem ad el. Ennek egész egyszerűen nincsen ára. Ezért elsőrendű fontosságú a hazai technológiai kutatások megerősítése.

A technológián kívül minden más tudományterületen a kutató elsőrendű érdeke eredményeinek nyilvános ismertetése. Így bármely tudományos eredmény, mely nem kecsgetet közvetlenül gazdasági haszonnal, a lehető legrövidebb idő alatt közkinccsé válik. Nyilvánosságra kerülnek a korszerű konstrukciós ismeretek is, mert bármely új termék szétszerelésével minden részlet tanulmányozható, csupán az nem, hogy azt hogyan, milyen technológiával gyártották. Ezt addig titkolják, amíg csak lehet, vagy annál jobbat nem dolgoztak ki.

Az előbbiek szerint a technológia korszerűsítése nem oldható meg egyszerűen licencvásárlással. Vezetünk ugyan kidolgozott technológiát külföldi vállalatoktól, de az az esetek többségében nem a legjobb. Azt ugyanis a kidol-



5. ábra

gozója vagy a tulajdonosa megtartja magának. Eladásra általában csak olyan kerül, melynél a vezető vállalatok jobbat ismernek vagy jobbal dolgoznak. Ebből következik az, hogy a külföldről megvásárolt, vagy itthon kidolgozott technológiát állandóan javítani kell, hogy a termék gazdaságos maradjon. Az 5. ábra szemlélteti a technológiai eljárások termelékenységét az idő függvényében, mely mutatja, hogy minden eljárás előbb-utóbb elavul annak következtében, hogy újat dolgoznak ki helyette.

Sajátos vonás az is, hogy a technológiában elért kutatási-fejlesztési eredmények egyszerűen mérhetők, osztályozhatók. Minden más tudományterületen a kutató megfelelő felkészültséggel előbb-utóbb talál olyan új ismeretet, mely gazdagítja a tudományt. A technológia kutatásában ez nem elég. Nem elég az újdonság sem. Az itt elért eredménynek hasznosabbnak, gazdaságosabbnak, jobbnak kell lennie a korábbi eredményeknél. Itt a kutató már a kezdésnél kockázatot vállal, és bizony gyakran megesik, hogy a kívánt eredmény elmarad. Ezért a konkrét feladatok megoldására nehezebb vállalkozót találni. Jól szemlélteti ezt az egyik magyar találmány sorsa. A Szabadalmi Hivatal védettséget adott az ún. szálkondenzátorra. Ez azt a felismerést rögzíti, hogy a huzal tömegegységére jutó fajlagos felület mintegy 50%-kal nagyobb a lemezénél. Ma a jó minőségű elektrolit kondenzátorok egyik fegyverzete alumínium lemez. Ha ebben — egyébként azonos feltételeket teremtve — huzallal helyettesíthetnék azt, jelentősen nőne a kapacitása. A szabadalomra nyugatnémet vevő jelentkezett azzal a feltétellel, hogy a prototípust be kell mutatni. A technológia kidolgozására megindultak a tárgyalások, de arra jelentős összegért sem akadt vállalkozó, mert a fizetés feltétele az eredményes technológia kidolgo-

zása volt. Erre pedig kockázat nélkül vállalkozni lehetetlen. Ez a szabadalom azóta sem került használatba.

Az ismertetett példa a technológiának azt a jellegzetes vonását mutatja be, hogy *minden, a népgazdaságban hasznosítható új kutatási eredmény, döntő többségében a technológián keresztül valósul meg*. Hiába a legjobb ötlet vagy a kézzel foghatóan bizonyított tudományos eredmény, ha ahhoz nem társul korszerű, gazdaságos technológia, abból a népgazdaságnak haszna nem származik. Ez a tény is előtérbe állítja a hazai technológiai kutatás és fejlesztés ügyét. (Minden kutatónak, minden mérnöknek, azoknak is, akik szerkesztéssel foglalkoznak, elsődrendű érdeke a korszerű technológia, mert saját eredményei is az íróasztalban maradnak mindaddig, amíg annak korszerű technológiája nincsen.)

A technológia a mérhetősége miatt nem kínál könnyű lehetőséget a tudományos előrehaladásra sem. E téren a legkevesebb a minősítettek száma és jellemző adat az is, hogy az ország egyetlen főhivatású technológiai kutató intézetében mindössze egyetlen tudományosan minősített kutató dolgozik.

A technológia fejlesztési feladatainak a kidolgozásánál, megoldásánál tudomásul kell venni, hogy ez az esetek túlnyomó többségében nagy anyagi ráfordításokat igényel, különösen azokban az ipari ágazatokban, ahol a jelenlegi hazai termelési rendszert meg kell teremteni. Olyan új termékek bevezetése a hazai termelésbe, melyeknek a technológiáját is ki kell dolgozni vagy meg kell vásárolni, óriási erőfeszítéseket igényel, és a beruházásra fordítható összegek nagyrészt elviszi. Hasznot ezzel szemben csak néhány év, a megfelelő technológiai gyakorlat megszerzése után hoz. Korszerű eredmények csak korszerű technológiájú termelésbe vezethetők be gazdaságosan, különösebb ráfordítások nélkül. Bonyolult, nagy pontosságot igénylő munkadarab előállítására csak megfelelően pontos gyártóberendezés alkalmas. Így pl. a hazai sárgyártásban a jelenlegi gyártóberendezésekkel a mai nemzetközi normák előírásai nem teljesíthetők. Így a termékek ára sem éri el a megfelelő szintet. Ezért kell a hazai kutatások nagyrészt olyan célok elérésére biztosítani, mely a hazai technológiai színvonal fokozatos és állandó növelését biztosítja. Az esetek többségében nem szabad a vezető ipari hatalmak termékszerkezet-alakulását mintapéldának venni, hanem hazai adottságaink figyelembevételével kell a célokat kitűzni.

A fentiek körvonalazzák a technológia azon jellegzetes vonásait, melyek mindegyike egyértelműen arra a következtetésre vezet, hogy a technológia fejlesztése népgazdaságunk termelésének legfontosabb feladata, ez pedig egyedül a technológiai kutatások előtérbe állításával, annak megfelelő támogatásával valósulhat csak meg, mert ezen a téren más forrásokra támaszkodni gyakorlatilag alig lehet.

Ezek a feladatok csak jól megalapozott tudományos felkészültséggel oldhatók meg. A technológiai feladatok megoldására több tudományág együttes

erőfeszítéseire és közös tevékenységére van szükség. Ez az együttes tevékenység szabja meg a technológiának a többi tudománnyal fennálló kapcsolatát.

A technológiának a többi tudománnyal kialakított vagy kialakítandó kapcsolatait a technológia meghatározása diktálja.

A technológia során, az anyagok tulajdonságait, vagy azok alakját, esetleg mindkettőt meg kell változtatni. Ennek következtében legszorosabb kapcsolatban a fizikával és a kémiával áll, melyek az anyag szerkezetére, kémiai összetételére és tulajdonságaira vonatkozó ismereteket tárgyalják. Az utóbbi időben egyre nagyobb mértékben lép előtérbe a biológiai eredmények felhasználása is. A technológia tulajdonképpen az anyagok és az eljárások tudománya, mely a fizikával és a kémiával olyan szoros kapcsolatba került, hogy — sok más tudományághoz hasonlóan — egyre nehezebb a határvonalat meghúzni.

A technológia azonban emberi tevékenység, mégpedig hasznos, gazdaságos, az esetek többségében szervezett emberi tevékenység. Így a technológia ügye nemcsak a fizikusok, kémikusok és mérnökök ügye, hanem legalább ugyanilyen mértékben a társadalom-, közgazdaság- és szervezéstudományok művelőinek az ügye is.

A műszaki, az ipari technológia elsősorban a szilárd testek fizikájára, a fizikai kémiára és a fizikai fémtan ismereteire támaszkodik. Az e téren dolgozó szakemberek közös erőfeszítésének az összehangolására az utóbbi időben több lépést tettek, de ma még csak kialakulóban vannak azok a kapcsolatok, melyeket a haladás érdekében multhatatlanul létre kell hozni. 1978 őszén készítette el az OMFB a kutatási társulások létrehozására vonatkozó javaslatait, melyek tulajdonképpen ezt a célt tűzik ki.

Az anyagismeret terén szinte példátlan lehetőségeink vannak a technológiai színvonal növelésére. Sajnos a hazai termelésben általában régi, ma már korszerűnek nem igen nevezhető technológiával dolgozunk. Éppen ezért egyrészt multhatatlanul szükség van színvonalának növelésére, másrészt a modern természettudományokra támaszkodva — sok esetben — viszonylag könnyen, nem túl nagy beruházással is érhető el eredmény.

Magyarországon 1977-ben majdnem 3,8 millió tonna acélt állítottunk elő. Ha ennek kg-ját 10 Ft-ra becsüljük, nem csinálunk nagy hibát. Évi acéltemelésünk összértéke így közel 38 Md Ft. Az acél értékét általában a folyáshatára szabja meg. Ha ezt az előállítás és megmunkálás során csak 2—3%-kal megnövelnénk, évente $7,6 \cdot 10^4$ — $1,1 \cdot 10^5$ tonnával kevesebbet kellene felhasználni, ez pedig 0,76—1,14 Md Ft-ot jelentene a népgazdaságnak. 2—3%-os folyáshatárnövekedés pedig mai ismereteink szerint nem elérhetetlen.

Ha már az acélfelhasználást megemlítettük, tegyük hozzá azt is, hogy ebből az acélből meglehetősen sokat elforgácsolunk annak következtében, hogy képlékeny alakítási technológiánk színvonala — néhány üzem kivéve — korszerűtlen. Ha itt korszerű technológiát sikerülne megvalósítani, a vele járó haszon összemérhető lenne a fentemlítetttel.

Hőkezeléssel a legtöbb szilárd test tulajdonságai jelentősen javíthatók. Jelenleg a megtermelt acél egész mennyiségét mintegy 2,6-szer hőkezelik. Ha az acél hőkezelésének átlagos hőmérsékletét 700 °C-ra, a hőkezelés hatásfokát pedig 30%-ra becsüljük, akkor évente $3,1 \cdot 10^9$ KWh elektromos energiát, vagy az ezzel egyenértékű $2,6 \cdot 10^5$ tonna kőolajat kell felhasználni. Ha a hőkezelés hatásfokát 3–6%-kal javítanánk, — és ez egyáltalán nem elérhetetlen — 3%-onként $9,3 \cdot 10^7$ KWh-t vagy $7,8 \cdot 10^3$ tonna fűtőolajat takaríthatnánk meg évente. Az első esetben 93 millió, a második esetben 17,3 millió Ft-tal csökkennének a termelési költségek, nem beszélve a környezet-szennyezésről és a helyes hőkezelési technológiával elérhető minőségjavulásról. Az külön problémánk, hogy termékeink jelentős része súlyosabb az átlagnál. Mind a korábban említett szilárdságnövelés, mind a színvonalasabb hőkezelés csökkentené a felhasznált anyagmennyiséget. Ennek gazdasági hatását az említett számok nem is mutatják.

A hőkezelési technológiák lehetőségeiről beszélve, érdemes megemlíteni a nagy járművekben használt fékek rugóinak ügyét. Ezekben a licencia alapján hazánkban gyártott légfékekben két tekercsrugó is van arra az esetre, ha a levegőnyomás valamilyen ok miatt kimarad. Ezeket a rugókat nyugatról importáljuk évente 2,0–2,2 millió DM-ért. Nem is nagy beruházással — a megfelelő technológia kidolgozása után — ezeket a rugókat itthon a feléért is előállíthatnánk.

Nemcsak az acél, hanem sok más egyéb anyag felhasználása, illetve technológiája kínál hasonló lehetőségeket. Így pl. a számítógép- és a jármű-program végrehajtása során sok olyan keménymágnest használunk fel, melyek többségét az NSZK-ból, illetve Japánból vásároljuk, mintegy 2 millió DM-ért. E mágnesek egyrészének még az alapanyagát sem kell megvenni. Ezt ma 0,4 Ft/kg értékben az acélkemencékben használjuk el. E mágnesek túlnyomó többségét gyárthatnánk itthon. Ennek már a technológiája is kidolgozásra került.

A hasonló példák sora gyakorlatilag kimeríthetetlen. Példájuk csak azt szemlélteti, hogy a technológia fejlesztése rendkívül gazdag lehetőséget kínál a népgazdaság eredményességének a növelésére. A bemutatott példákban az értékek a népgazdasági érték összmenyiségéhez képest, ahol Md Ft-okról van szó, elenyészőek a maguk 10–20 mFt-os értékükkel, de ezekből nagyon sok van, és ami a legfontosabb, egy-egy nagy állami programhoz képest rendkívül rövid időn belül megvalósíthatók és megvalósításuk összértékben százmilliókra, milliárdokra rúg. És itt felvetődik a kérdés, hogy ha ez olyan egyszerű, akkor miért nem valósítjuk meg?

Erre a kérdésre sokkal inkább a közgazdaság művelőinek kellene válaszolniuk. Az említett példákban a technológiában érdekelték sokféle lépést tesznek a megvalósítás érdekében, de az esetek többségében eredménytelenül. Sajnos, gazdasági mutatóink a technológia javítására, a gazdaságosság növe-

lésére nem nagyon ösztönöznek. Így pl. az említett keménymágnesek ügyében a technológia megvalósításához szükséges beruházás a gyártó vállalatot terhelné. A valutamegtakarítás vagy a felhasználónál, vagy a külkereskedelmi vállalatoknál jelentkeznék. Sajnos, ezt az ördögi kört csak rendkívül nehezen lehet megszakítani és sokan belefáradnak az utánjárásba. Ez jelenti azt, hogy a gazdasági mutatók a technológia javítására és fejlesztésére nem ösztönöznek.

Külön gondot jelent egy-egy termék gazdaságosságának elbírálása. Gazdaságpolitikai célkitűzéseink előírják, hogy a gazdaságtalan termékek gyártását meg kell szüntetni. Sajnos, egyértelmű választ adni arra, hogy mi a gazdaságos és mi nem az, csak nagyon ritkán tudunk. Rendkívüli fontossága van egy olyan kritériumrendszer kidolgozásának, mely lehetővé teszi a különböző termékek gazdaságosságának összehasonlítását. Ma sokféle gazdasági mutató használatos, de, hogy ezek közül valóban melyik tükrözi legjobban a népgazdasági érdekeket, arról keveset tudunk.

A traktorgyártás megszüntetése már említésre került. Az 5. ábra egyértelműen mutatja, hogy egy termék technológiája az idő során elavul, mert a nagyobb gazdasági eredmény miatt állandó törekvés irányul arra, hogy a technológia színvonalát növeljék, és előbb-utóbb gazdaságosabbal váltsák fel a régit. Ebből következik, hogy a ma még gazdaságosnak tartott termék — ha technológiáját állandóan nem javítjuk — rövidesen a gazdaságtalan, ráfizetéses termékek közé csúszik vissza. Különösen így van ez azokkal a termékekkel, melyek rövid ideje kerültek a mindennapos használatba. Gondoljunk csak a zsebszámítógépekre. Ezek ára — teljesítőképességük növelése mellett — négy év alatt 300 dollárról 20 dollár alá csökkent.

Külön feladatot jelent a bérezés. Ezzel ma sokkal inkább a többlettermelést, mint a gazdaságosságot segítjük. Előfordul, hogy a többtermelés érdekében túlterhelünk gépeket, anyagokat stb. Az ebből eredő többletkiadásokat más költségvetési rovatból fedezzük. A többlettermelési eredmények csak akkor érik el céljukat, ha nem sértik a gazdaságosságot. Itt érdemes megemlíteni a szerszáanyagokat. Hazánkban az egységnyi termékre jutó szerszámfelhasználás négyszerese az optimumnak. A többtermelésnél csak ritkán veszik figyelembe, hogy mennyivel nő a fajlagos energia, anyag és egyéb járulékos költségnövekedés. Mindezek a gondok csak a közgazdaságtudományok művelőivel közösen oldhatók meg. Itt újra felvetődik a gazdaságossági kritériumrendszer kidolgozásának szükségszerűsége.

A technológiai folyamatokban részt vevő embereknek, a dolgozóknak a kapcsolata a technológiához, a társadalomtudományokra tartozik. A technológia nemcsak az anyag tulajdonságait, hanem az ember gondolatvilágát, gondolkodásmódját is formálja. Az új, korszerűbb ismereteken nyugvó technológia a résztvevőktől új ismereteket követel. Népünk kulturális felemelkedésében jelentős szerepe van a technológiának, mert az minél fejlettebb, annál nagyobb tudású munkást, mérnököt feltételez.

A társadalomtudományok művelői segíthetnek a műszakiaknak abban, hogy egy-egy új technológia bevezetésénél hogyan lehet megnyerni a dolgozókat az új viszonyok támogatására, hiszen ez a dolgozóktól egy sereg új ismeret és gyakran új mozgások elsajátítását követeli. Társadalompolitikai szempontból rendkívül fontos, hogy bizonyos technológiai műveleteket, melyek az átlagosnál sokkal jobban igénybe veszik a dolgozókat, olyanokkal cseréljük fel, melyek megfelelnek az ember fontosságáról kialakított képünknek.

Korábban már a félvezető technológiával kapcsolatban említésre került a Texas Instrument cég, mely a félvezető technológiában vezető helyet foglal el. Ez a vállalat óriási mennyiségű munkát végeztet Hongkong-ban, mert pl. a miniatürizált alkatrészek összeszerelését mikroszkópok alatt végzik és ehhez a szemet hihetetlenül igénybe vevő munkához hazai dolgozót alig találnak. Itthon is eljutottunk oda, hogy bizonyos feladatokra nem találunk vállalkozót, így pl. az öntvénytisztítással, mely embertelenül nehéz feladat, néhány öntöde már nem tud megbirkózni. A rendelő vállalatok tisztítatlanul veszik át az öntvényeket és maguk tisztítatják meg azokat. Az ilyen, és ezekhez hasonló tevékenységeket olyan új technológiákkal kell felváltani, melyek mentesítik a dolgozókat ezektől a társadalmunk alapeszméivel összeegyeztethetetlen terhektől.

A technológiának a fentiek miatt a közgazdaság- és társadalomtudományokkal és nyilvánvalóan a természettudományokkal is nagyon szoros a kapcsolata. Ha van olyan feladat, mely több tudományág közös erőfeszítéseit igényli akkor ez a technológia. Nagyon sokat beszélünk az interdiszciplináris feladatokról, ilyenek elsősorban a technológiában vannak. E téren közös erőfeszítéssel rendkívül sokat tehetünk népgazdasági feladataink megvalósításáért, népünk anyagi és kulturális felemelkedéséért.

Befejezésül emlékeztetni kell arra, hogy jelen tanulmány célja az volt, hogy bemutassa a technológia jellegzetesebb vonásait, a népgazdasággal és a többi tudományággal kialakult, illetve kialakítandó kapcsolatát és az ezekből adódó következtetéseket, tennivalókat. Ma technológiai színvonalunk a vezető ipari hatalmakéhoz képest meglehetősen elmaradott. A kép teljességéhez hozzátartozik azonban az is, hogy vannak említésreméltó eredmények is. Így pl. az Egyesült Izzóban működik egy olyan berendezés, mely óránként 5000 izzólámpát gyárt, a Dunai Vasműben működik már egy folyamatos acélöntőmű, és most rakják le egy konverter alapjait, Csepelen olyan számítógéppel vezérelt szerszámgépeket gyártanak, melyek az egész világon keresett cikkek stb. Egy ország technológiai színvonalát azonban nem néhány csúcseredmény, hanem az átlagos szint jellemzi. A csúcseredmények arra jók, hogy magukkal húzzák a lemaradókat és utat, példát mutassanak. Itt a technológia problémáiról általános képet kellett rajzolni, amiből egyértelmű következtetés adódik, és pedig az, hogy azt fejleszteni és javítani kell.

The Characteristics of Technology and its Connection with the other Branches of Science. The author enhances the increasing importance of technology for the economic efficiency and deals with its characteristics and its connection with the other branches of Science.

Die charakteristischen Züge der Technologie und ihre Verbindung mit den übrigen Zweigen der Wissenschaft. Der Verfasser weist auf die wachsende Wichtigkeit der Technologie für die Effektivität der Volkswirtschaft hin, und beschäftigt sich mit ihren charakteristischen Zügen und ihrem Zusammenhang mit den sonstigen Wissenschaftsgebieten.

A SZEMCSÉK ALAKJÁNAK ÖSSZEHASONLÍTÓ VIZSGÁLATA

KÉZDI ÁRPÁD

AZ MTA RENDES TAGJA

és

KOÓS-HUTÁS ERZSÉBET

[Beérkezett: 1979. július 17-én]

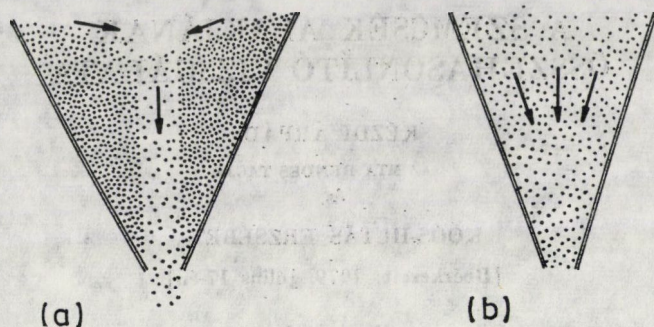
Bevezetés

A szemcsés talajok szemcséinek alakja hatással van azok viselkedésére, elsősorban tömöríthetőségére és nyírószilárdságára. A szemcsealak hatásának közvetlen vizsgálata mai eszközeinkkel igen nehézkes, vagy éppen lehetetlen (KRUMBEIN, 1941; WADELL, 1932; KÉZDI, 1979). Közvetett módszerként kínálkozik az az eljárás, hogy a száraz szemcsés talajt egy tölcser adott nyílásán kibocsátva mérjük a kifolyási sebességet s a kifolyt, lazán felhalmozott talaj tömörségét. Meghatározva a belső súrlódás szögét is, a szemcsealakra és a belső súrlódásra összehasonlításul felhasználható adatokat nyerünk. Egy ilyen vizsgálat eredményeit mutatja be ez a tanulmány, eljárást nyújtva a szemcsés anyagot alkotó szemcsék alakjának relatív jellemzésére s bemutatva a szemcsealak és a belső súrlódási szög összefüggését.

Folyadékok — szemcsés anyagok — kifolyása tölcserből

Folyadékok tölcserből való kifolyása esetén fel szokás tételezni, hogy az átfolyt anyagmennyiség a tölcser bármely vízszintes metszetében azonos s így a kifolyónyíláson az időegység alatt áthaladó anyagmennyiség a nyomási magasság függvénye. Minthogy ez a mennyiség a kifolyás során változik, azért a törvényszerűség egy differenciálegyenlet felírásával és megoldásával adható meg. Minthogy azonban itt nem ideális vagy valódi folyadékról, hanem egy nagy belső súrlódással bíró ún. „makromeritikus” folyadékról van szó, azért ahhoz, hogy ezt a differenciálegyenletet felírhassuk, a tölcserben levő mozgó anyag teljes feszültségállapotát ismernünk kellene, hisz a kifolyás sebessége a folyadék belső súrlódásától, az áramlás jellegétől, a kifolyó nyílás alakjától, a tölcserfal érdességétől és több más tényezőtől is függ. Minthogy azonban célunk a relatív összehasonlítás, e tényezők meghatározásától és a differenciálegyenlet felírásától eltekintünk, és a kísérlet elrendezése során gondoskodunk arról, hogy az eredmények összehasonlíthatóak legyenek.

Fontos viszont a tölcser alakjának a helyes felvétele. Ismeretes (I. JOHANSON, J. R., 1969), hogy szemcsés anyagoknak tölcserből való kifolyása két módon mehet végbe (1. ábra): a) vagy kialakul egy belső függőleges csa-



1. ábra. Az anyag tölcserből való kifolyásának módjai. a) — kürtő képződése; b) — egyenes lefelé való mozgás

torna, ill. kürtő, melyben a szemcsés anyag mozog s a fal mentén az anyagot az egyik oldalon a jelentős súrlódás, a másik oldalon pedig a kürtőben mozgó szemcsehalmaz támasztja meg, vagy pedig (b) a szemcsehalmaz, az előbb tett feltevésnek megfelelően, teljes tömegében mozog lefelé. A mozgási módot a tölcser hajlásszöge és a belső súrlódás szöge határozza meg, mint azt a 2. ábra határgörbéje bemutatja. A kísérletekben ténylegesen alkalmazott hajlásszög $2\theta = 30^\circ$ volt, ami — szándékainknak megfelelően — (b) típusú szemcsemozgást jelentett, s az előkísérletek szerint itt jelentkezett a legkisebb felszíni deformáció.

Ha rögzítjük a nyomásmagasságnak a mérés időtartama alatti átlagos értékét, s a méréseket mindig ilyen nyomásmagasság mellett hajtjuk végre, akkor, ha a Δt idő alatt átfolyt köbtartalmat ΔV -vel jelöljük, a tölcser hozama az időegység alatt

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\rho \Delta t},$$

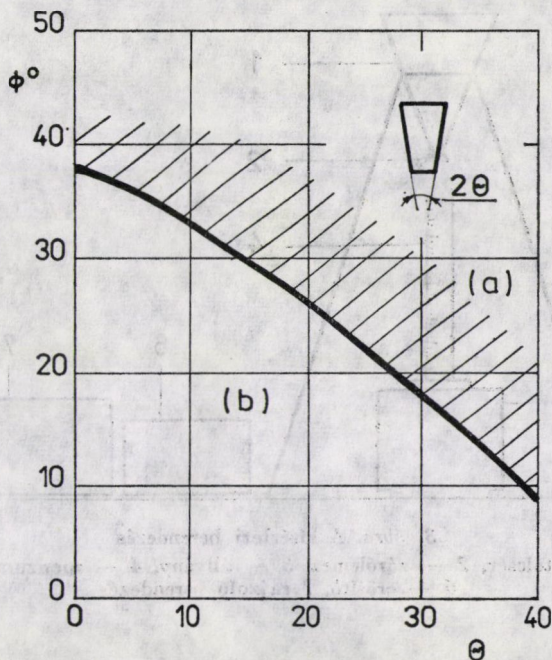
ha m az anyag tömege ρ pedig halomsűrűsége. \bar{v} -vel jelölve a kifolyó anyag sebességét és f -el a kifolyónyílás felületét, akkor

$$q = \bar{v} f = \frac{\Delta m}{\rho \Delta t}$$

és

$$\bar{v} = \frac{\Delta m}{f \rho \Delta t}. \quad (1)$$

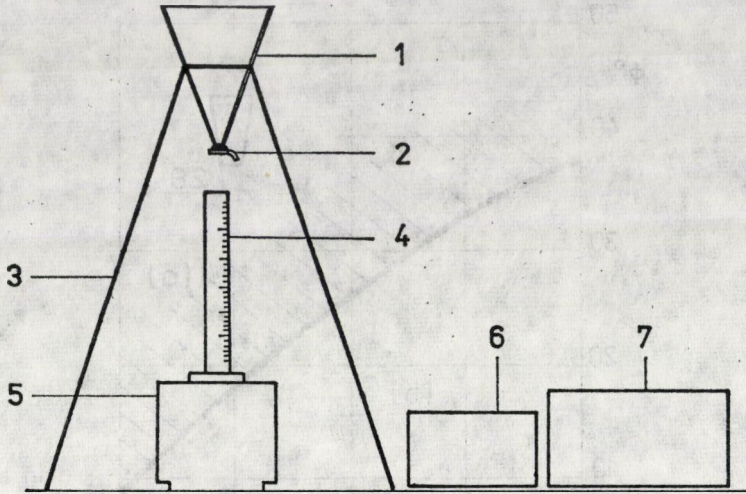
Feltételezésünk szerint a \bar{v} mozgási sebesség a szemcsealak függvénye, ezért mérése alapján arra következtethetünk. Tapasztalataink szerint azonban a különböző vizsgált talajok esetében a ρ értéke elég jelentős változásokat mutatott, ezért nem a sebességet, hanem annak a halomsűrűséggel való szorzatát (a $\bar{v}\rho$ értéket) tekintettük a jellemző mennyiségnek.



2. ábra. A kifolyási módot meghatározó tényezők

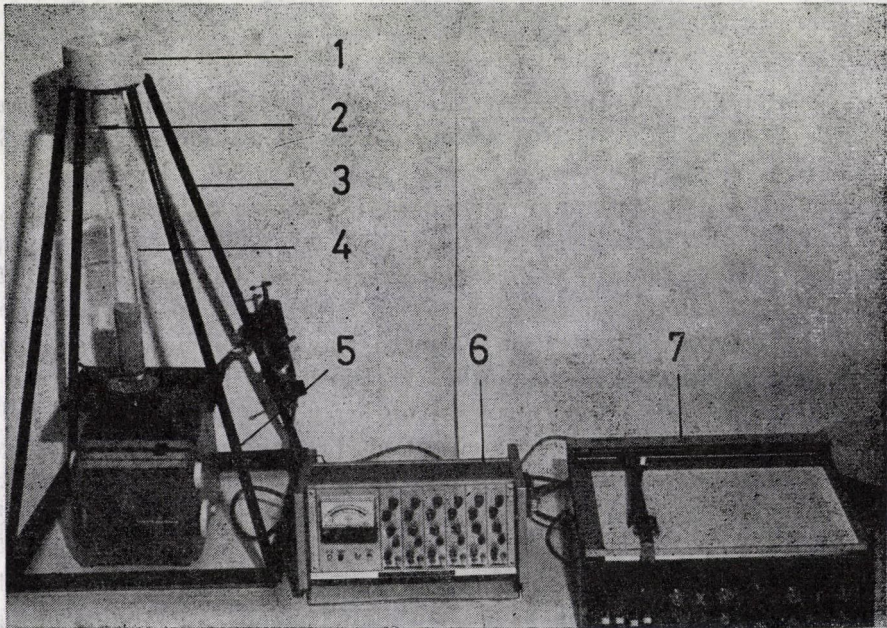
Kísérleti berendezés

A kísérletekhez a 3. ábrán bemutatott berendezést használtuk fel; ennek fényképe a 4. ábrán látható. A tölcser anyaga metamid, csúcsszőge $2\theta = 30^\circ$, térfogata pedig akkora, hogy a betöltött anyag tömege 500 g legyen. A tölcser alatt egy Sartorius gyártmányú mérleg volt. A kifolyónyílás alá egy vaslemezt erősítettünk, amellyel a tölcser, egy mágnes működtetése útján egyszerűen nyitható és zárható volt. A tölcseren átfolyt anyag egy menzúrába hull, a menzúra a növekvő tömeg hatására lefelé elmozdul. Az elmozdulás miatt egy rúgólapra ragasztott nyúlásmérő bélyeg ellenállása megváltozik, ez pedig egy erősítő berendezés közbeiktatásával regisztrálható. Az átfolyt tömeget így az idő függvényében egy rajzolóberendezés ábrázolta. Egy jellegzetes kísérleti eredményt az 5. ábra mutat be. Feltevésünk a kifolyás jellegére és a hozam alakulására tehát helyesnek bizonyult; kitűnt az is, hogy az alkalmazott méretek és anyagok mellett a nyomási magasság hatása csekély. A kísérletek során igazolódott, hogy a leírt összeállítás a szubjektív hibákat a minimálisra csökkenti. A vizsgált szemcsés anyagot a lehető leglazább állapotban, légszárazon helyeztük be vízszintes felszínnel; így a teljes térfogat kezdeti értéke azonos volt.

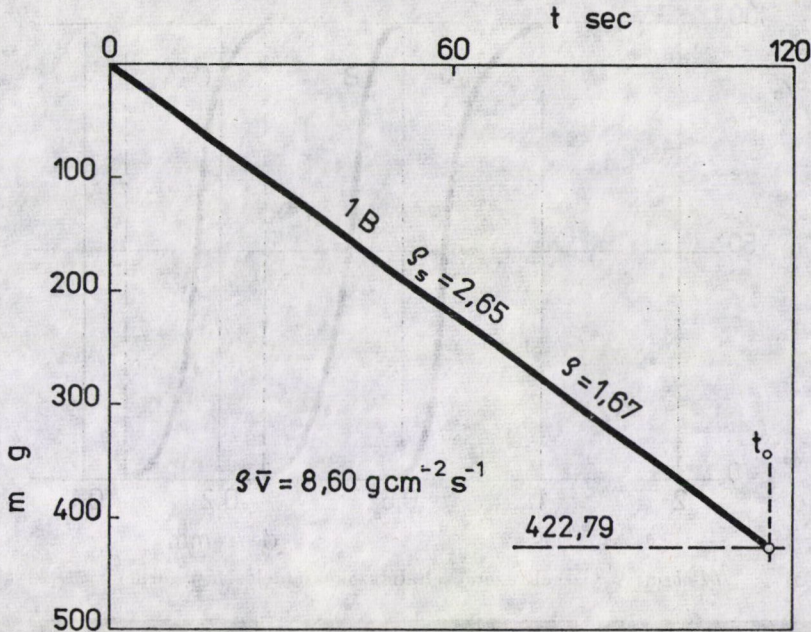


3. ábra. A kísérleti berendezés

1 — metamid tölcser, 2 — zárólemez, 3 — állvány, 4 — menzura, 5 — mérleg,
6 — erősítő, 7 rajzoló berendezés



4. ábra. A kísérleti berendezés fényképe



5. ábra. Jellemző kísérleti eredmény

A kísérletekhez felhasznált anyagok

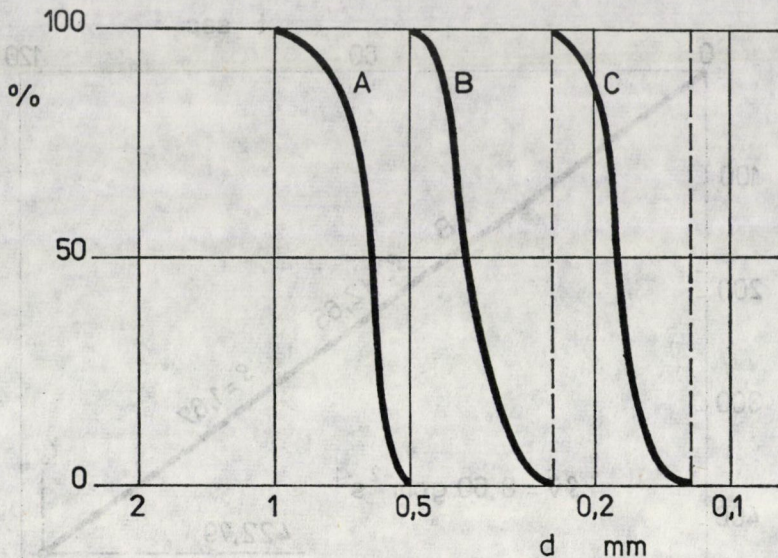
A vizsgálatokat nem a természetes talajokkal, hanem közel azonos szemcseeloszlással bíró szétszitált szemcsefrakciókkal hajtottuk végre, annak érdekében, hogy az eredményekben elsősorban a szemcsealak hatása tükröződjék s a szemcsék nagysága és eloszlása elhanyagolható szerepet játsszék. A frakciók szemcsehatárai: $0,5 \div 1,0$ mm; $0,25 \div 0,5$ mm és $0,125 \div 0,25$ mm, mint azt a 6. ábra feltünteti.

Három szemcsés anyag említett frakcióit vizsgáljuk, ezek:

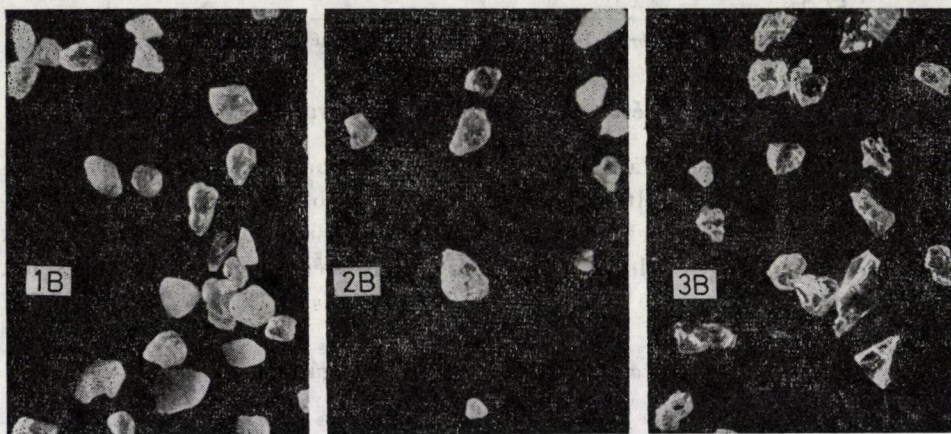
1. hatvani homok,
2. laboratóriumi homok,
3. műkorund.

A jelölésben pl. 2C tehát a laboratóriumi homok $0,125 \div 0,25$ mm frakcióját jelenti. A B jelű frakciók szemcséinek alakját 15-szörös nagyításban a 7. ábra mutatja.

Itt kell megemlíteni, hogy a vizsgálatok kezdetén úgy véltük, hogy jó összehasonlításra ad majd alkalmat, ha a kiválasztott frakcióknak megfelelő szemcseátmérőjű szabályos üveggömböket is ugyanúgy vizsgálat alá veszük. Ez azonban nem bizonyult igaznak, az üveggömbök, egy-két kivétellel, élesen eltérő kísérleti eredményeket szolgáltatottak, vagyis szemcsealak szempontjából nem tekinthetők határesetnek. Ezért a vonatkozó kísérleti eredményeket nem tüntettük fel.



6. ábra. A vizsgált szemcsehalmazok szemeloszlási görbéi



7. ábra. A B jelű frakciók szemcséinek alakja

Kísérleti eredmények

Először bemutatjuk az 1. táblázatot, mely megadja egyrészt az alapanyagok fajsúlyát, a tölsérbe bekészített anyag halmazsúlyát és az átfolytatás után a menzúrában kialakult hézagtényező és halmazsúly értékeit.

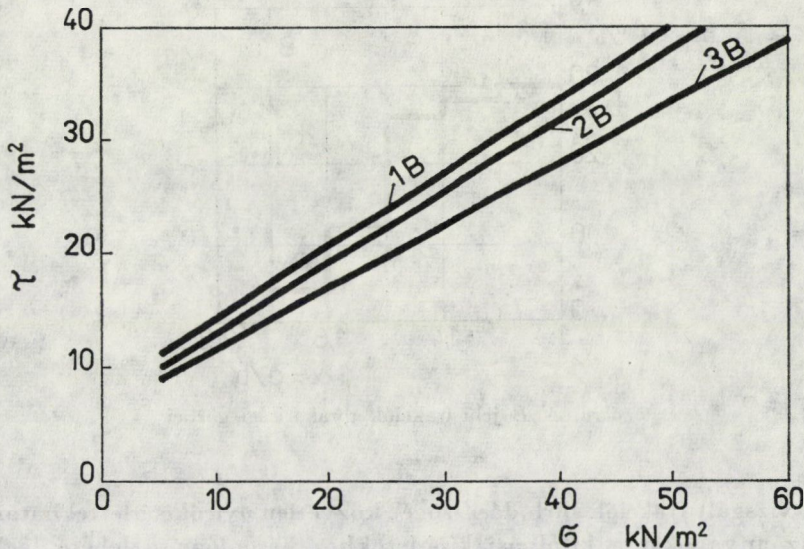
Említettük már, hogy az eredmények feldolgozása során kitűnt, a sebesség értéke helyett célszerűbb volt annak a halomsűrűséggel szorzott értékét venni figyelembe; ezt nevezik az áramlástanban „konvektív impulzusáram-sűrűségnek”. Ezt a $\rho \bar{v}$ értéket a táblázat utolsó oszlopa adja meg.

1. táblázat

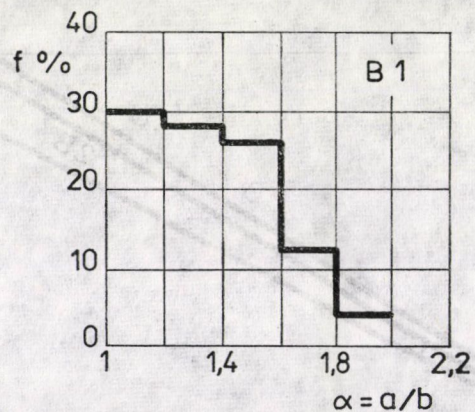
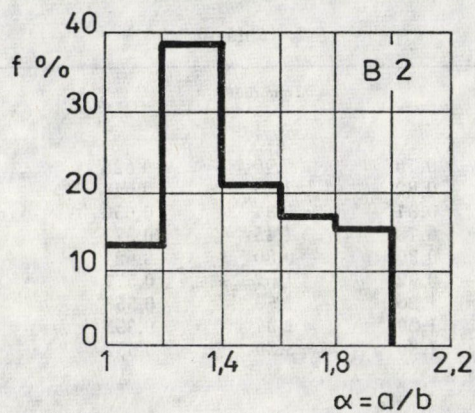
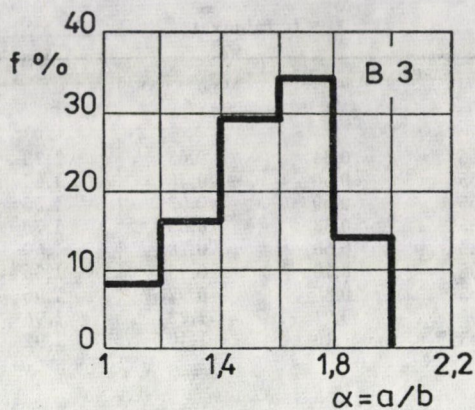
Anyag	e_s gcm ⁻³	Bekészítéskor e_0	Átfolyás után e	e gcm ⁻³	e^v gcm ^{-2s-1}
1A	2,65	0,54	0,63	1,73	7,30
1B	2,65	0,60	0,78	1,67	8,65
1C	2,65	0,69	0,93	1,55	8,60
2A	2,65	0,53	0,63	1,73	8,20
2B	2,65	0,60	0,78	1,69	8,70
2C	2,65	0,70	0,93	1,56	8,50
3A	4,05	0,85	0,92	1,96	9,05
3B	4,05	0,94	1,23	1,96	9,60
3C	4,05	1,10	1,40	1,92	9,91

2. táblázat

Anyag	e_0	Tömörödés %	$\tan \phi$	ϕ°
1A	0,76	0,90	0,625	32
1B	0,82	1,45	0,648	33
1C	0,87	0,84	0,650	33
2A	0,78	1,45	0,577	30
2B	0,80	0,80	0,624	32
2C	0,92	1,02	0,577	30
3A	1,26	1,50	0,553	29
3B	1,20	1,37	0,553	29
3C	1,30	3,30	0,552	29

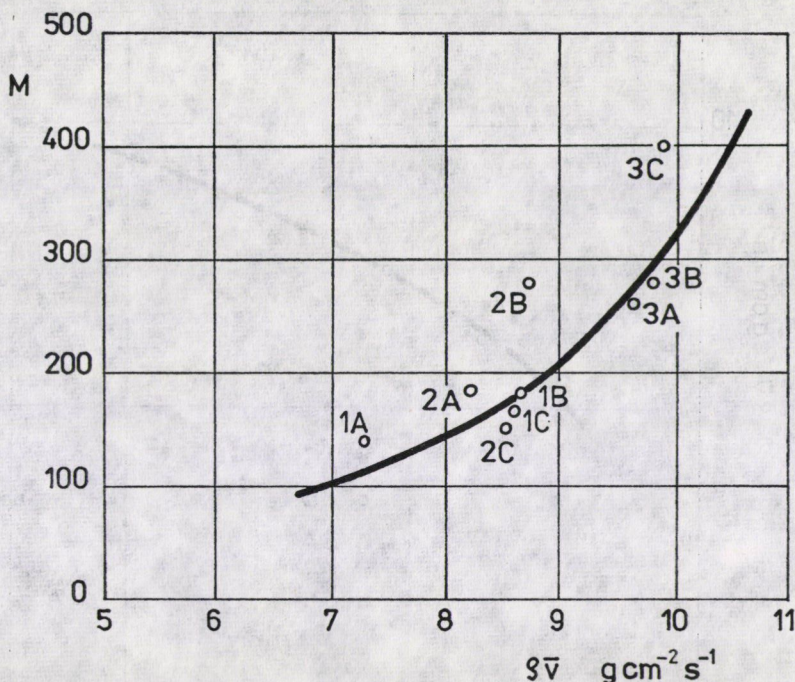


8. ábra. A B jelű frakciók nyírási egyenesei



9. ábra. A B jelű frakciók gyakorisági görbéi

A vizsgált frakciók súrlódási szögét közvetlen nyírókísérlettel határoztuk meg. Az anyagokat a kifolyási kísérletekhez hasonlóan a lehető leglazább állapotban készítettük be, s a mintát 0,9 mm/perc sebességgel elnyírtuk.

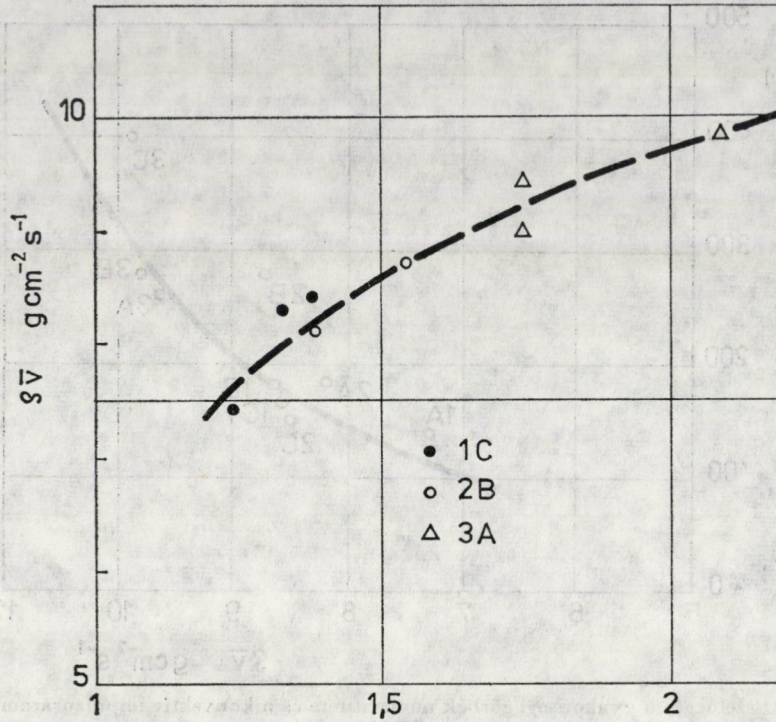


10. ábra. Összefüggés a gyakorisági görbék momentuma és a konvektív impulzusáram sűrűsége között

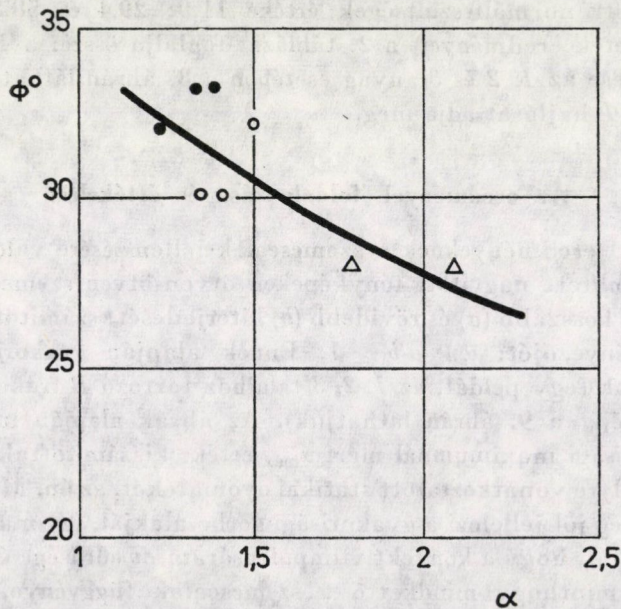
Az alkalmazott normál feszültségek értéke 11,9; 29,4 és 58,8 kN/m^2 volt. A nyírókísérletek eredményeit a 2. táblázat foglalja össze; a *B* jelű frakciók nyírási egyenese az 1, 2 és 3 anyag esetében a 8. ábrán láthatók. A táblázat az egyenesek Φ hajlását adja meg.

Az eredmények feldolgozása és értékelése

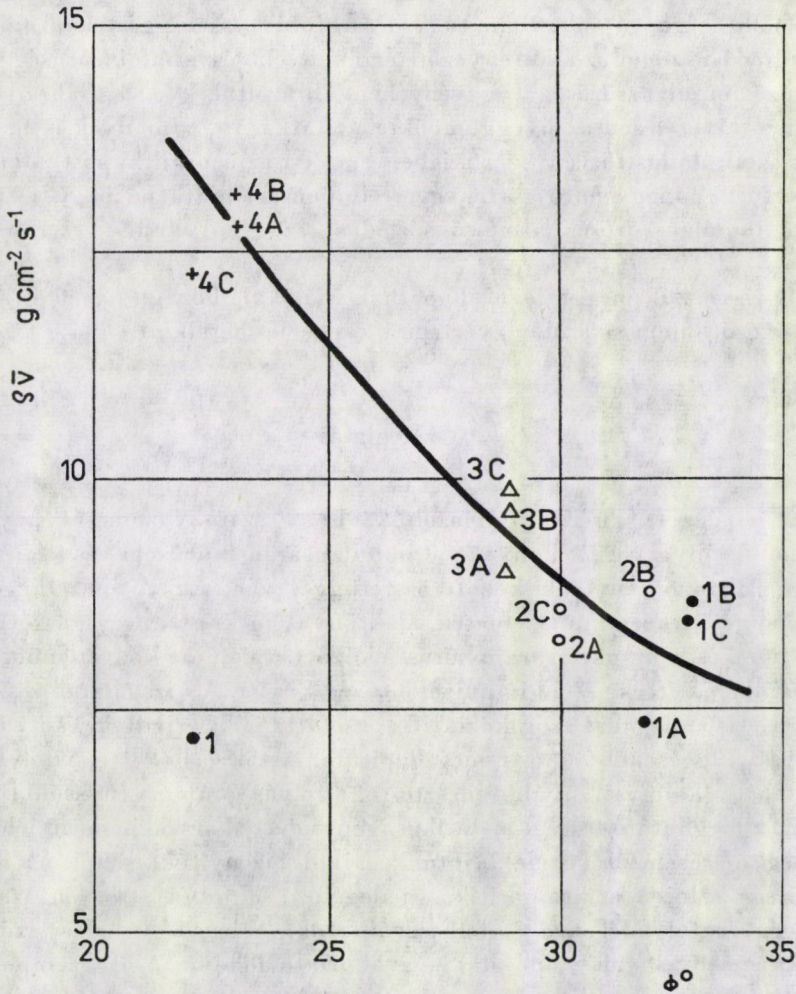
A kapott eredményeknek a szemcsealak jellemzésére való felhasználása céljából az említett nagyított fényképeken ötven-ötven szemcse vetületének mértük meg a hosszabb (*a*) és rövidebb (*b*) kiterjedését számítottuk ki a szemcsék alakú tényezőjét: $\alpha = a/b \geq 1$. Ennek alapján gyakorisági görbét szerkesztettünk (egy példát, az 1, 2, 3 talajhoz tartozó *B* frakció három gyakorisági görbét a 9. ábrán láthatjuk). Az ábrák alapján meghatározható volt a gyakorisági maximumnál mért α_{max} érték; kiszámítottuk a relatív gyakorisági tengelyre vonatkoztatott statikai nyomatékot, az ún. *M* momentumot. Ez a mennyiség jól jellemzi a gyakorisági görbe alakját, így magát a szemcsealakat is. Kitűnt, hogy a konvektív impulzusáram $\rho \bar{v}$ sűrűsége és a *M* momentum között, minthogy mindkettő a szemcsealak függvénye, kapcsolat áll fenn; ezt az összefüggést a 10. ábra tünteti fel. Ez a kapcsolat egyben arra is



11. ábra. Összefüggés az alaki tényező és impulzussűrűség között



12. ábra. A belső súrlódás szöge az alaktényező függvényében



13. ábra. A belső sűrűdés szöge az impulzussűrűség függvényében

rámutat, hogy a tölcseából való kifolyás sebessége, pontosabban a ρ_v érték valóban a szemcsealak függvénye, és így annak jellemzésére felhasználható, hisz az M mennyiséget kizárólag a szemcsék alak szerinti eloszlása határozza meg. E kapcsolat további igazolását nyújtja annak a vizsgálatnak az eredménye, melyben összefüggést kerestünk közvetlenül az alak tényező és az impulzussűrűség között: ezt a 11. ábra mutatja be.

Az alak tényező természetesen ki kell, hogy hasson a belső sűrűdési szög értékére is. Ennek az összefüggésnek a vizsgálatához először az egyes anyagok három frakciójához tartozó alaktényező számértékének függvényében ábráztuk a belső sűrűdési szög értékét; ezt tünteti fel a 12. ábra. Az össze-

függés, mint várható volt, nem túl szoros. Jobb összefüggést kaptunk, ha a belső súrlódási szöget az alaktényezőre érzékenyebb és a halomsűrűség hatását is tükröző impulzussűrűség függvényében ábrázoltuk. (L. 13. ábra.) Ebben az esetben kivételesen az üveggömbökre vonatkozó eredmények is beleilleszkednek az általános törvényszerűségbe, ezért itt az azokra kapott adatokat is feltüntettük. A kiegyenlítő görbe egyértelműen azt mutatja, hogy a kifolyást jellemző impulzussűrűség a belső súrlódási szög növekedésével rohamosan csökken.

Itt jegyezzük meg, a laza állapotban kialakuló hézagképződés és az alaktényező között nem sikerült egyértelmű kapcsolatot találni.

Összefoglalás

Az elvégzett kísérletek igazolták, hogy száraz szemcsés anyagokat tölcésérből kifolyatva, a konvektív impulzusáram sűrűsége és a szemcsék alakjára jellemző tényezők között összefüggés van. Ez az összefüggés egyértelműen jelentkezett a szemcsék alaktényezőinek gyakorisági görbéjének momentuma és az impulzusáram-sűrűség között, valamint közvetlenül az alaktényező átlagos értéke és az impulzussűrűség között. A vizsgálatok a szemcsealak és a belső súrlódási szög közötti kapcsolatra is kiterjedtek, és itt is határozott összefüggéseket lehetett megállapítani. A tölcésérből való kifolyás vizsgálata tehát alkalmas a továbbfejlesztésre: a folyás során érvényesülő törvényszerűségek meghatározásával a statikus igénybevételkor végbemenő jelenségek jobb megismeréséhez is közelebb jutunk. Újabb bizonyítékot kaptunk továbbá a szemcsés talajok makromeritikus jellegéhez: a folyás törvényszerűségei nagyszemcsés foyadékokra is felhasználhatók. A belső súrlódási szöggel és az alaktényezővel való kapcsolat a gyakorlati alkalmazások szempontjából is sokatígérő.

IRODALOM

1. JOHANSON, J. R.: Feeding. *Chemical Engineering* (1969)
2. KÉZDI, Á.: Soil Physics. Selected Topics. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1979.
3. KRUMBEIN, W. C.: Measurement and Geological Significance of the Shape and Roundness of Sedimentary Particles. *Jour. Sed. Pert.* 11 (1941), 64.
4. SUTHERLAND, H. B., NEALE, D. F.: Determination of the Shape Factor of Sands. *Proc. 3rd Budapest Conf. Soil Mech. Found. Engg.* Akadémiai Kiadó, Budapest 1968, 288—304
5. WADELL, H.: Volume, Shape and Roundness of Rock Particles. *Jour. Geol.* 40 (1932), 443.

Comparative Investigation of the Shape of Soil Grains. — The shapes of the particles of the granular soils affect their behaviour, chiefly with respect to their compactibility and shear strength. The effect of the shape of the soil particles may rather difficultly be measured, therefore, the authors applied an indirect investigation method. By making the dry

granular soil to flow out through a funnel the outflow velocity and the density of the outflow material have been measured. Determination of the angle of internal friction resulted in data which could be used to the comparative investigation. In such a way, a method could be established to the characterization of the shapes of soil grains and the relationship between the grain shapes and angle of internal friction, by recognizing that between the aspect ratios of the particles and the numerical value of the impulses definite relationship exists. The investigation furnished new evidence to the macromeritic character of the non-cohesive soils.

Vergleichsuntersuchung der Kornformen. -- Die Kornformen der rolligen Erdstoffe beeinflussen das Verhalten der körnigen Böden, in erster Linie mit Hinsicht auf die Verdichtbarkeit und Schubfestigkeit des Bodens. Der Einfluss der Form der Körner kann unmittelbar kaum gemessen werden, deshalb haben die Verfasser eine indirekte Methode angewendet. Sie liessen das trockene körnige Bodenmaterial durch einen Trichter fließen, nachdem wurden die Ausflussgeschwindigkeit und die Dichte des Auslaufmaterials gemessen. Die Ermittlung des Winkels der inneren Reibung ergab Werte die zum Vergleichverfahren benutzt werden konnten. Auf diese Weise konnte ein Zusammenhang zwischen der Kennzeichnung der Formen der Bodenkörner und dem Winkel der inneren Reibung, durch die Erkennung einer eindeutigen Abhängigkeit zwischen dem Gestaltparameter der Bodenkörner und der Impulszahlenmässigkeit hergestellt werden. Die Untersuchungen ergaben einen neuen Nachweis für die makromeritische Charakteristik der körnigen Böden.

•
•
•
•
•

FORGÁSPARABOLOIDHÉJ KÉT FÜGGŐLEGES ÉS KÉT VÍZSZINTES SÍKÚ PEREMTARTÓVAL

CSONKA PÁL*

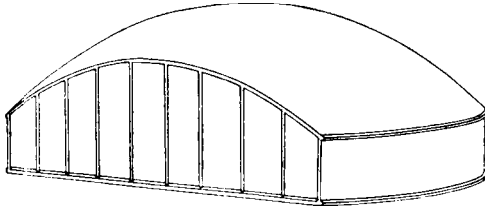
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1979. november 9-én]

A tárgyalt héj függőleges síkú peremtartói oszlopokkal sűrűn alátámasztott, vonórudas vagy vonórúd nélküli ívek, vízszintes síkú peremtartói fallal alátámasztott vonórúd nélküli ívek. A függőleges síkú peremtartók csak saját síkjukba eső erőhatásokkal szemben ellenállók, a vízszintes síkú peremtartók viszont csak tengelyirányú erőkkel (kötélerőkkel) szemben fejtenek ki ellenállást. A dolgozat a feladatot a membránelmélet keretében tárgyalja. A közölt megoldás a feladat peremfeltételeit a függőleges peremtartók mentén pontosan, a vízszintes peremtartók mentén csak közelítőleg teljesíti.

1. Bevezetés

Az alábbiak függőleges erőkkel terhelt olyan forgásparaboloidhéjak számítását ismertetik, amelyek szélét két vízszintes és két függőleges síkú peremtartó szegélyezi (1. ábra).



1. ábra. Forgásparaboloidhéj két függőleges és két vízszintes síkú peremtartóval

A függőleges síkú peremtartók parabolatengelyű, oszlopokkal sűrűn alátámasztott, vonórudas, vagy vonórúd nélküli ívek. Ezek csak a saját síkjukba eső erőhatásokkal szemben ellenállók.

A vízszintes síkú peremtartók körív alakúak, teljes hosszukban fallal alátámasztottak. Ezeknek a tartóknak nincs vonórúdjuk, bennük a terhelés hatására csak tengelyirányú erők (kötélerők) keletkeznek.

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók B. u. 31.

A szóban forgó héjak célszerű alakjuk és tetszetős megjelenésük folytán igen alkalmasak nagyobb fesztávolságú terek, főleg sport- és kiállítási létesítmények lefedésére.

2. Alapösszefüggések

Vizsgálatainkat a héjak membránelméletének szokásos feltevéseire alapozzuk. A hég és a peremtartók csatlakozásánál a membránszerű feszültségi állapotot zavaró hajlító-csavaró hatásokat figyelmen kívül hagyjuk.

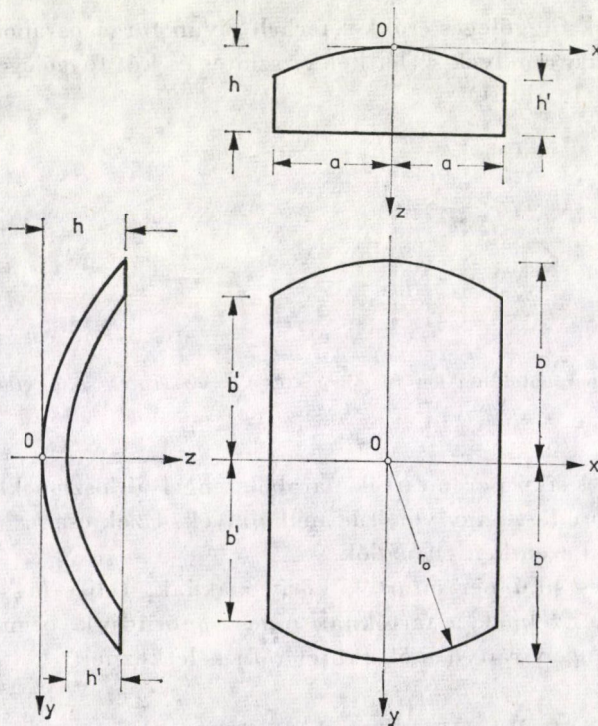
Koordináta-rendszerül a 2. ábrán feltüntetett $O(x, y, z)$ derékszögű rendszert vezetjük be. Ebben a koordináta-rendszerben a hég középfelületének egyenlete

$$z = h \frac{x^2 + y^2}{r_0^2} \quad (1)$$

A héjra ható teherként csak függőleges megoszló erőket veszünk számításba. Ezeknek az erőknek az alaprajz területére vonatkoztatott fajlagos értékét a

$$\bar{p} = \bar{p}(x, y) \quad (2)$$

teherpolinommal fejezzük ki.



2. ábra. Az $O(x, y, z)$ derékszögű koordináta-rendszer

A szóban forgó feladat megoldásához, a héj feszültségi állapotának vizsgálatakor olyan

$$F = F(x, y) \quad (3)$$

függvényt — feszültségfüggvényt — kell keresnünk, amely egyrészt megfelel a membránhéjak differenciálegyenletének, másrészt a feladat különleges peremfeltételeinek.

Az adott esetben a feladat differenciálegyenlete [6]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{r_0^2}{2h} \bar{p} = 0 \quad (4)$$

alakú, az F függvény által teljesítendő peremfeltétel pedig a héj valamennyi peremszakaszán [5, 7]

$$F = 0. \quad (5)$$

3. A feladat megoldása

Tárgyalásaink során megelégszünk a feladat közelítő megoldásával, nevezetesen az F feszültségfüggvény közelítő meghatározásával. Ezt a függvényt két részből tesszük össze:

$$F = F_i + F_h. \quad (6)$$

Az F_i és F_h függvényeket az alábbiak szerint szerkesztjük meg.

3.1. Az F_i függvény

Erre a célra a (4) jelű inhomogén differenciálegyenlet egy olyan partikuláris megoldását választjuk, amely az $x = \pm a$ héjperemek mentén eleve megfelel az (5) peremfeltételnek. Polinom alakú \bar{p} teherfüggvény esetében az ilyen partikuláris megoldásokat

$$F_i = (a^2 - x^2) f(x, y) \quad (7)$$

alakban állíthatjuk elő, ahol $f(x, y)$ a teherpolinom fokszámával megegyező fokszámú polinom. Utóbbinak együtthatóit a határozatlan együtthatók módszerével állapíthatjuk meg. Ezt a számítást a gyakorlat szempontjából szóba jövő egyszerű terhelési esetekre elvégeztük és a számítás eredményét az 1. táblázatba foglaltuk.

3.2. Az F_h függvény

Ezt a függvényt a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (8)$$

homogén differenciálegyenlet olyan partikuláris megoldásaiból szerkesztjük meg, amelyek mindegyike eleve megfelel az $x = \pm a$ héjperemeken az (5) feltételnek. Egyes ilyen megoldásokat az alábbiakban ismertetünk.

1. táblázat

Az F_i függvény

\bar{p}	F_i
\bar{p}_{00}	$\bar{p}_{00} \frac{r_0^2}{4h} (a^2 - x^2)$
$\bar{p}_{10} \frac{x}{a}$	$\bar{p}_{10} \frac{r_0^2}{12h} (a^2 - x^2) \frac{x}{a}$
$\bar{p}_{01} \frac{y}{a}$	$\bar{p}_{01} \frac{r_0^2}{4h} (a^2 - x^2) \frac{y}{a}$
$\bar{p}_{20} \frac{x^2}{a^2}$	$\bar{p}_{20} \frac{r_0^2}{24h} (a^2 - x^2) \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$
$\bar{p}_{11} \frac{xy}{a^2}$	$\bar{p}_{11} \frac{r_0^2}{12h} (a^2 - x^2) \frac{xy}{a^2}$
$\bar{p}_{02} \frac{y^2}{a^2}$	$\bar{p}_{02} \frac{r_0^2}{24h} (a^2 - x^2) \left(5 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{6y^2}{a^2}\right)$
$\bar{p}_{30} \frac{x^3}{a^3}$	$\bar{p}_{30} \frac{r_0^2}{40h} (a^2 - x^2) \left(\frac{6x}{a} + \frac{x^3}{a^3}\right)$
$\bar{p}_{21} \frac{x^2y}{a^3}$	$\bar{p}_{21} \frac{r_0^2}{24h} (a^2 - x^2) \left(\frac{y}{a} + \frac{x^2y}{a^3}\right)$
$\bar{p}_{12} \frac{xy^2}{a^3}$	$\bar{p}_{12} \frac{r_0^2}{360h} (a^2 - x^2) \left(\frac{7x}{a} - \frac{3x^3}{a^3} + \frac{30xy^2}{a^3}\right)$
$\bar{p}_{03} \frac{y^3}{a^3}$	$\bar{p}_{03} \frac{r_0^2}{8h} (a^2 - x^2) \left(\frac{5y}{a} - \frac{x^2y}{a^2} + \frac{2y^3}{a^3}\right)$
$\bar{p}_{40} \frac{x^4}{a^4}$	$\bar{p}_{40} \frac{r_0^2}{60h} (a^2 - x^2) \left(1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4}\right)$
$\bar{p}_{31} \frac{x^3y}{a^4}$	$\bar{p}_{31} \frac{r_0^2}{40h} (a^2 - x^2) \left(\frac{xy}{a^2} + \frac{x^3y}{a^4}\right)$
$\bar{p}_{22} \frac{x^2y^2}{a^4}$	$\bar{p}_{22} \frac{r_0^2}{360h} (a^2 - x^2) \left(14 - \frac{x^2}{a^2} + 15 \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^4}{a^4} + \frac{15x^2y^2}{a^4}\right)$
$\bar{p}_{13} \frac{xy^3}{a^4}$	$\bar{p}_{13} \frac{r_0^2}{120h} (a^2 - x^2) \left(\frac{7xy}{a^2} - \frac{3x^3y}{a^4} + \frac{10xy^3}{a^4}\right)$
$\bar{p}_{04} \frac{y^4}{a^4}$	$\bar{p}_{04} \frac{r_0^2}{60h} (a^2 - x^2) \left(61 - \frac{14x^2}{a^2} + \frac{75y^2}{a^2} + \frac{x^4}{a^4} - \frac{15x^2y^2}{a^4} + \frac{15y^4}{a^4}\right)$

a) Ha a terhek az yz koordinátasíkra nézve szimmetrikus elrendezésűek, akkor az $x = \pm a$ héjperemeken az (5) peremfeltételnek megfelelő homogén megoldások [4]:

$$G = \cos nx \frac{\cosh ny}{\sinh ny}; \quad (9)$$

$$G = \arctan \frac{\cos nx}{\sinh n(k-y)} \pm \arctan \frac{\cos nx}{\sinh n(k+y)}; \quad (k \geq r_0) \quad (10)$$

$$G = \text{Artanh} \frac{\cos nx}{\cosh n(k-y)} \pm \text{Artanh} \frac{\cos nx}{\cosh n(k+y)}; \quad (k > r_0) \quad (11)$$

A fenti képletekben a kettős függvényjelek és kettős előjelek közül a felsők az xz síkra nézve szimmetrikus terhelési esetekben, az alsók viszont az xz síkra antimetrikus terhelési esetekben alkalmazhatók, n értéke pedig

$$n = \frac{\pi}{2a}, \frac{3\pi}{2a}, \frac{5\pi}{2a}, \dots$$

b) Ha a terhek az yz koordinátasíkra nézve antimetrikus elrendezésűek, akkor az $x = \pm a$ héjperemeken az (5) peremfeltételt kielégítő homogén megoldások [4]:

$$G = \sin nx \frac{\cosh ny}{\sinh ny}; \quad (12)$$

$$G = \arctan \frac{\sin nx}{\cosh n(k-y)} \pm \arctan \frac{\sin nx}{\cosh n(k+y)}; \quad (k \geq r_0) \quad (13)$$

$$G = \text{Artanh} \frac{\sin nx}{\cosh n(k-y)} \pm \text{Artanh} \frac{\sin nx}{\cosh n(k+y)}; \quad (k > r_0) \quad (14)$$

Ezekben a képletekben a kettős függvényjelek és kettős előjelek közül a felsők itt is az xz síkra szimmetrikus terhelési esetekben, az alsók viszont az xz síkra nézve antimetrikus terhelési esetekben kerülhetnek alkalmazásra, n értéke pedig

$$n = \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \dots$$

Az $x = \pm a$ peremvonalak mentén az (5) peremfeltételnek megfelelő homogén megoldások, továbbá

$$G = \frac{\sin nx}{\cos nx + \cosh ny} = \frac{\sin nx}{2 \left(\cos^2 \frac{nx}{2} + \sinh^2 \frac{ny}{2} \right)},$$

$$G = \frac{\sin nx}{\cos nx - \cosh ny} = \frac{\sin nx}{2 \left(\cos^2 \frac{nx}{2} - \cosh^2 \frac{ny}{2} \right)},$$
(15)

ahol

$$n = \frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{3\pi}{a}, \dots$$

A (15) alatti megoldások az yz síkra nézve antimetrikus, de az xz koordináta-síkra nézve szimmetrikus terhelési esetekben használhatók.

3.3. A feladat feszültségfüggvénye

Ezt a függvényt a 3.1. alatti F_i függvény és a 3.2. alatti G függvények lineáris kombinációjaként úgy kell megszerkeszteni, hogy az

$$F = F_i + F_h$$

függvényegyüttes a vízszintes síkú héjperemeken is feleljen meg az (5) peremfeltételnek. Az utóbbi követelményt — sajnos — általában csak közelítőleg tudjuk teljesíteni.

4. Számpélda

Alkalmazzuk a fentiekben vázolt számító eljárást a 3. ábrán feltüntetett héjra, amely alakra nézve igen hasonló a KRSTIĆ, M. által tervezett belgrádi sportcsarnok héjszerkezetéhez [1, 2].

Példánk esetében

$$a = 20,0 \text{ [m]}, \quad b = \sqrt{825} \cong 28,72 \text{ [m]},$$

$$r_0 = 35,0 \text{ [m]}, \quad h = 14,7 \text{ [m]}, \quad h' = 9,9 \text{ [m]},$$

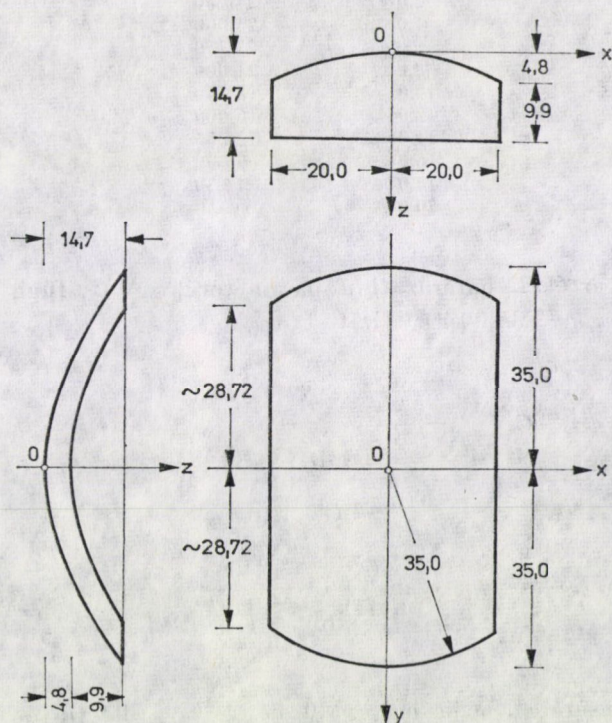
tehát a héj középfelületének egyenlete

$$z = 14,7 \frac{x^2 + y^2}{35,0^2} = 0,012(x^2 + y^2) \text{ [m]}. \quad (16)$$

A héjra ható terhelésként az alaprajz területén egyenletesen megoszló

$$\bar{p}_{00} = 3,0 \text{ [kN/m}^2\text{]} \quad (17)$$

intenzitású függőleges erőrendszert veszünk számításba.



3. ábra. Számpélda

F_i függvényként az 1. táblázat első sorában szereplő függvényt választjuk:

$$F_i = \bar{p}_{00} \frac{r_0^2}{4h} (a^2 - x^2) = 62,5(400 - x^2) \text{ [kNm]}. \quad (18)$$

Ez a függvény x különböző értékei esetében — így a vízszintes héjperemeken is — a 2. táblázatban foglalt értékeket veszi fel.

F_h függvényként a (10) alatti kifejezés két változatának — a G_1 és G_2 függvényeknek — lineáris kombinációját vezetjük be, a bennük szereplő k mennyiség célszerű értékét próbák alapján véve fel:

$$F_h = c_1 G_1 + c_2 G_2. \quad (19)$$

2. táblázat

Az F_i függvény értékei a vízszintes héjperemeken

$\pm x$ [m]	F_i [kNm]
0,0	25 000
2,0	24 750
4,0	24 000
6,0	22 750
8,0	21 000
10,0	18 750
12,0	16 000
14,0	12 750
16,0	9 000
18,0	4 750
20,0	0

Itt a c_1 és c_2 értékek határozatlan paraméterek. A G_1 függvény esetében $n = \pi/40$ [m^{-1}], $k = 35,0$ [m], tehát

$$G_1 = \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{40} x}{\sinh \frac{\pi}{40} (35 - y)} + \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{40} x}{\sinh \frac{\pi}{40} (35 + y)}, \quad (20)$$

a G_2 függvény esetében pedig $n = \pi/40$ [m^{-1}], $k = 50,0$ [m], vagyis

$$G_2 = \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{40} x}{\sinh \frac{\pi}{40} (50 - y)} + \arctan \frac{\cos \frac{\pi}{40} x}{\sinh \frac{\pi}{40} (50 + y)}. \quad (21)$$

A G_1 és G_2 függvények értékét a vízszintes héjperem egyes pontjaiban a 3. táblázat tünteti fel.

A feladat közelítő feszültségfüggvénye a (18) és (19) alatti függvények összege:

$$F = F_i + c_1 G_1 + c_2 G_2. \quad (22)$$

3. táblázat

A G_1 és G_2 függvények értéke a vízszintes héjperemeken

$\pm x$ [m]	G_1	G_2
0	1,578 988	0,599 833
2,0	1,574 376	0,591 556
4,0	1,559 792	0,566 784
6,0	1,532 746	0,525 803
8,0	1,488 136	0,469 446
10,0	1,416 291	0,399 538
12,0	1,299 049	0,319 321
14,0	1,103 902	0,233 550
16,0	0,789 257	0,148 013
18,0	0,373 460	0,068 553
20,0	0,000 000	0,000 000

Az utóbbi képletben szereplő c_1 és c_2 határozatlan állandók célszerű értéke a Ritz–Galerkin-féle következő képletek segítségével állapítható meg:

$$\int (F_i + c_1 G_1 + c_2 G_2) G_1 \cdot dx = 0,$$

$$\int (F_i + c_1 G_1 + c_2 G_2) G_2 \cdot dx = 0.$$

Az integrálásokat az $x = 0$ [m]-től az $x = a = 20,0$ [m]-ig terjedő szakaszra kell kiterjeszteni. Ezt a műveletet az integrálási szakasznak tíz egyenlő részre való osztásával numerikusan — a Simpson-szabály alkalmazásával — végrehajtottuk és az így nyert két lineáris egyenletből a c_1 és c_2 paraméterekre az alábbi számértékeket kaptuk:

$$c_1 = -6\,488 \text{ [kNm]},$$

$$c_2 = -24\,386 \text{ [kNm]}.$$
(23)

A fenti c_1 és c_2 értékekkel dolgozva, a vízszintes héjperem egyes pontjaiban az F feszültségfüggvényre a 4. táblázatba foglalt, az előírt $F = 0$ értéktől eléggé eltérő F értékekhez jutottunk. A számítás finomításával, nevezetesen további G függvényeknek a számításba való bevonásával, az F függvény peremértékeinek a zérustól való eltérése még csökkenthető.

Ismervén a feladat feszültségfüggvényét, a héj x, y irányú $\bar{N}_x, \bar{N}_{xy}, \bar{N}_y$ vetületi feszítő erőit az alábbi ismert képletekkel számíthatjuk [6]:

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$
(24)

4. táblázat

Az F függvény értéke a vízszintes héjperemeken

$\pm x$ [m]	F [kNm]
0,0	+128,00
2,0	+109,77
4,0	+ 58,48
6,0	16,69
8,0	-102,94
10,0	-182,03
12,0	-215,19
14,0	-107,47
16,0	+269,85
18,0	+655,26
20,0	0,00

A vízszintes peremtartókban keletkező kötélrő x , illetve y irányú alkotója az

$$X = \frac{\partial F}{\partial y}, \text{ illetve } Y = -\frac{\partial F}{\partial x} \quad (25)$$

képlettel határozható meg.

Az a körülmény, hogy a közölt számító eljárást alkalmazva, a héj sarokpontjaiban a $\partial F/\partial x$ deriváltra zérustól eltérő értéket kapunk, a vízszintes peremtartókban pedig az F értékekkel azonos nagyságú, tehát zérustól eltérő értékű M hajlítónyomatékok adódnak [5, 7], az alkalmazott számító eljárás közelítő voltának a következménye. Ugyanennek tudható be az is, hogy a héj sarokpontjaiban a számításszerű \bar{N}_{xy} erő az egyszerű egyensúlyi megfontolással meghatározható tényleges \bar{N}_{xy} erőtől lényegesen eltér. Az adott támasztási körülmények közt — a közelítő számítás eredményétől függetlenül — a héj sarokpontjaiban az $F = 0$ feltétel, valamint a vízszintes síkú peremtartókban az $M = 0$ feltétel mindenkor teljesítve van.

IRODALOM

1. KRSTIĆ, M.: A Doubly Curved Shell Roof of Belgrade. *Concrete and Constructional Engineering* 54 (1959), 73–80
2. HAJNAL-KÖNYI, K.: Recent Developments in Shell Concrete Construction. *Architects Yearbook* 9 (1960), 194–230
3. MENYHÁRD, I.—SZMODITS, K.: Der Membranzustand der elliptischen Paraboloidschalen. *Bauplanung—Bautechnik* 16 (1962), 29–34
3. MENYHÁRD, I.—SZMODITS, K.: Der Membranzustand der elliptischen Paraboloidschalen. *Bauplanung—Bautechnik* 16 (1962), 29–34
4. MENYHÁRD, I.—SZMODITS, K.: Héjszerkezetek számítása és szerkesztése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966
5. CSONKA, P.: Membrane Shells with Vertically Supported Edge Beam. *Simplified Calculation Methods of Shell Structures*. North-Holland Publishing Company—Amsterdam 1962, pp. 219–234

6. CSONKA, P.: Membranschalen. *Bauingenieur-Praxis*, Heft 16. Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München 1966
7. CSONKA, P.: Membránhéjak fallal alátámasztott peremtartóval. *Műszaki Tudomány* 44 (1971), 317—326

Paraboloid Shell of Revolution with Two Edge Arches in Vertical and Two Edge Arches in Horizontal Planes. — The vertical edge arches of the shell are supported by vertical columns set close to each other having or not having tie-rods. The horizontal edge arches are buttressed along their whole lengths by a wall and have not tie-rods. The vertical edge arches only withstand forces lying in their own planes, the horizontal ones only resist tangential forces (string forces). The paper determines the stresses in the shell using the assumptions of the so-called membrane theory. The solution arrived at precisely meets the edge conditions along the vertical arches, however, only approximately along the horizontal ones.

Rotationsparaboloidschale mit zwei vertikalen und zwei horizontalen Randbögen. — Die in vertikaler Ebene liegenden Randbögen der behandelten Schale sind durch eng stehende Säulen unterstützte Bögen mit oder ohne Zugband. Die in horizontaler Ebene liegenden Randträger sind durch Mauerwerk unterstützte Bögen ohne Zugband. Die vertikalen Randbögen leisten nur gegen in ihren Ebenen wirkende Kräfte Widerstand, während die horizontalen Bögen nur gegen in tangentialer Richtung wirkende Kräfte widerstandsfähig sind. Der Aufsatz behandelt des Kräftespiel der Schale im Rahmen der Membrantheorie. Die mitgeteilte Lösung befriedigt die Randbedingungen längs der vertikalen Bögen genau, entlang der horizontalen Bögen nur annähernd.

NUMERIKUS MÓDSZER m -EDFOKÚ λ -MÁTRIX SAJÁTÉRTÉKFELADATÁNAK MEGOLDÁSÁRA

POPPER GYÖRGY*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

GÁSPÁR ZSOLT**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1979. augusztus 7-én]

A cikk egy olyan numerikusan hatékony iterációs módszert ismertet, amely alkalmas m -edfokú n -edrendű λ -mátrix n legkisebb abszolút értékű általánosított sajátértékének és az ezekhez tartozó általánosított sajátvektoroknak a meghatározására. A konvergenciátételben megadja a konvergencia feltételeit. A módszer tulajdonképpen a polinomok gyökhelyeinek meghatározására szolgáló Bernoulli módszer egy általánosítása mátrixpolinomokra.

1. Bevezetés

A mechanikai feladatok numerikus megoldása gyakran λ -mátrixok általánosított sajátértékfeladatára vezet. Jól ismertek például azok a lengéstani feladatok, amelyek másodfokú λ -mátrixot eredményeznek (pl. [1]). Vannak stabilitási és lengéstani feladatok, amelyek olyan differenciálegyenletekkel írhatók le, amelyeknél a peremfeltételek a sajátértékek függvényei. Az ilyen feladatok finitizálása a Galerkin módszerrel magasabb fokú λ -mátrixok sajátértékfeladatára vezethet (pl. [2]).

Sok esetben elegendő csak néhány legkisebb (vagy legnagyobb) abszolút értékű általánosított sajátérték és a hozzájuk tartozó általánosított sajátvektorok meghatározása.

Az m -edfokú λ -mátrixok általánosított sajátértékfeladata mindig visszavezethető egy mátrix speciális sajátértékfeladatára. Mivel e mátrix rendszáma a λ -mátrix rendszámának m -szerese, az ilyen visszavezetés numerikus okokból kedvezőtlen.

A továbbiakban egy olyan numerikusan hatékony iterációs módszert ismertetünk, amely alkalmas az m -edfokú n -edrendű λ -mátrix n legkisebb abszolút értékű általánosított sajátértékének és a hozzájuk tartozó általánosított sajátvektorainak meghatározására.

2. A módszer

Tekintsük az

$$(\mathbf{I}\lambda^m + \mathbf{A}_1 \lambda^{m-1} + \dots + \mathbf{A}_{m-1} \lambda + \mathbf{A}_m) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (1)$$

m -edfokú λ -mátrix általánosított sajátértékfeladatát, ahol \mathbf{I} , $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_m$ n -edrendű valós mátrixok, \mathbf{I} egységmátrix és \mathbf{A}_m nonszinguláris.

* Dr. Popper György, 1016 Budapest, Szirtes u. 28/a.

** Dr. Gáspár Zsolt, 1025 Budapest, Kapy u. 40/b.

Lemma. Ha $\tilde{\mathbf{Y}}$ megoldása az

$$\mathbf{Y}^m + \mathbf{A}_1 \mathbf{Y}^{m-1} + \dots + \mathbf{A}_{m-1} \mathbf{Y} + \mathbf{A}_m = \mathbf{0} \quad (2)$$

mátrixegyenletnek, akkor az $\tilde{\mathbf{Y}}$ mátrix sajátértékei és sajátvektorai egyben az (1) alatti általánosított sajátértékfeladat általánosított sajátértékei és általánosított sajátvektorai.

E lemma következménye a [3] 53. oldalán szereplő 3.7(i) tételnek és a 49. oldalán levő korroláriumnak.

Így tehát, ha ismerjük a (2) egyenlet bármelyik megoldását (például az $\tilde{\mathbf{Y}}$ mátrixot), akkor az n -edrendű $\tilde{\mathbf{Y}}$ mátrix speciális sajátértékfeladatának megoldásával megkapjuk az (1) feladat mn számú általánosított sajátértékei és általánosított sajátvektorai közül n -et. Ezért a továbbiakban a (2) egyenlet megoldásával foglalkozunk. Alkalmazzuk erre az

$$\begin{aligned} (\dots((\mathbf{Y}_{k-m+2} + \mathbf{A}_1) \mathbf{Y}_{k-m+3} + \mathbf{A}_2) \dots + \mathbf{A}_{m-1}) \mathbf{Y}_{k+1} = -\mathbf{A}_m \\ (k = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3)$$

iterációt az $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_{-1}, \dots, \mathbf{Y}_{2-m}$ kezdeti mátrixokkal. Ez az iteráció

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{Z}}_{k+1} = \mathbf{Z}_k, \quad (4a)$$

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \tilde{\mathbf{Z}}_{k+1}(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{Z}}_{k+1})^{-1} \quad (4b)$$

$$\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{S}\mathbf{Z}_{k+1} \quad (4c)$$

alakban is írható, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}_1 & -\mathbf{A}_2 & \dots & -\mathbf{A}_{m-1} & -\mathbf{A}_m \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5a)$$

$$\mathbf{Z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k-m+2} \mathbf{Y}_{k-m+3} \dots \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{Y}_{k-m+3} \mathbf{Y}_{k-m+4} \dots \mathbf{Y}_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (5b)$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{k-m+3} & \mathbf{Y}_{k-m+4} & \cdots & \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{Y}_{k-m+4} & \mathbf{Y}_{k-m+5} & \cdots & \mathbf{Y}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_k \\ \mathbf{I} \\ \mathbf{Y}_{k+1}^{-1} \end{bmatrix}, \tag{5c}$$

és

$$\mathbf{R} = [\underset{(1)}{\mathbf{0}}, \underset{(2)}{\mathbf{0}}, \dots, \underset{(m-2)}{\mathbf{0}}, \underset{(m-1)}{\mathbf{0}}, \underset{(m)}{\mathbf{I}}], \tag{6a}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{I}, \mathbf{0}]. \tag{6b}$$

A (3) formula és a (4) inverz iteráció ekvivalenciája könnyen belátható a következőképpen. Ha a (3) egyenletet jobbról megszorozzuk az \mathbf{Y}_{k+1} inverzével, akkor a (4a) hiperegyszerű első egyenletét kapjuk; a (4a) többi egyenlete azonosságot fejez ki. Az

$$(\mathbf{R}\tilde{\mathbf{Z}}_{k+1})^{-1} = \mathbf{Y}_{k+1},$$

így a normálásnak megfelelő (4b) egyenlet a (4a) egyenletnek az \mathbf{Y}_{k+1} mátrixszal való visszaszorozását jelenti. A (4c) egyenlet az \mathbf{Y}_{k+1} blokk formális kijelölése.

A (3) iterációnak (4) alakra való átírása a következők miatt is célszerű:
 a) Az (1) általánosított sajátértékfeladat mindig visszavezethető

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}$$

mn -edrendű \mathbf{A} mátrix speciális sajátértékfeladatára, ahol $\mathbf{\Lambda}$ az (1) feladat mn általánosított sajátértékéből (λ_i) alkotott diagonálmátrix,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{m-1} \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^{m-2} \\ \vdots \\ \mathbf{V}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

és az $n \times mn$ típusú \mathbf{V} mátrix i -ik oszlopa a λ_i általánosított sajátértékhez tartozó \mathbf{v}_i általánosított sajátvektor.

b) Ha az (1)-ben szereplő λ -mátrix egyszerű (azaz minden r multipllicitású sajátértékhez r lineárisan független sajátvektor tartozik), akkor [3] 4.2 tétele következményeként az \mathbf{A} mátrix egyszerű struktúrájú, így

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{\Lambda}\mathbf{X}^{-1} \tag{8}$$

írható.

Az általánosított sajátértékeket rendezzük sorba úgy, hogy

$$|\lambda_i| \leq |\lambda_{i+1}|, \quad i = 1, 2, \dots, mn - 1$$

legyen.

Jelölje Λ_1, Λ_2 az alábbi diagonálmátrixokat:

$$\Lambda_1 = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle, \quad \Lambda_2 = \langle \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{mn} \rangle,$$

és ennek megfelelően particionáljuk az általánosított sajátvektorokat tartalmazó

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 \\ n \times mn & n \times n & n \times (m-1)n \end{bmatrix} \quad (9)$$

mátrixot.

A továbbiakban feltesszük, hogy (1) egyszerű λ -mátrix. Ekkor bármely $mn \times n$ típusú \mathbf{Z}_0 mátrix egyértelműen felírható

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{X}\mathbf{C} = \mathbf{X} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

alakban, ahol \mathbf{C}_1 n -edrendű, \mathbf{C}_2 pedig $(m-1)n \times n$ típusú mátrix.

Ha a (4a, b) iterációt a \mathbf{Z}_0 mátrixból indítjuk, akkor

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_0)^{-1}, \\ \mathbf{Z}_2 &= \mathbf{A}^{-2}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_0)^{-1}[\mathbf{R}\mathbf{A}^{-2}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_0)^{-1}]^{-1} = \\ &= \mathbf{A}^{-2}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-2})^{-1}, \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{Z}_k &= \mathbf{A}^{-k}\mathbf{Z}_0(\mathbf{R}\mathbf{A}^{-k}\mathbf{Z}_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Felhasználva a (4c), (8) és (10) összefüggéseket, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{S}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-k}\mathbf{C}(\mathbf{R}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-k}\mathbf{C})^{-1}.$$

Mivel $\mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{A}$ és $\mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{V}$

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{V}\mathbf{A}^{1-k}\mathbf{C}(\mathbf{V}\mathbf{A}^{-k}\mathbf{C})^{-1}. \quad (11)$$

Felhasználva a (9), (10) jelöléseket

$$\mathbf{Y}_k = (\mathbf{V}_1\mathbf{A}_1^{1-k}\mathbf{C}_1 + \mathbf{V}_2\mathbf{A}_2^{1-k}\mathbf{C}_2)(\mathbf{V}_1\mathbf{A}_1^{-k}\mathbf{C}_1 + \mathbf{V}_2\mathbf{A}_2^{-k}\mathbf{C}_2)^{-1}.$$

A_m nonszingularitásából A_1 nonszingularitása következik. Tegyük fel, hogy V_1 és C_1 sem szinguláris. Ekkor

$$Y_k = V_1 \Lambda_1^{1-k} C_1 (I + C_1^{-1} \Lambda_1^{k-1} V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{1-k} C_2) (I + C_1^{-1} \Lambda_1^k V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-k} C_2)^{-1} C_1^{-1} \Lambda_1^k V_1^{-1}$$

alakban is írható.

A $\Lambda_1^k V_1^{-1} V_2 \Lambda_2^{-k}$ mátrix i, j indexű eleme tényezőként tartalmazza a $(\lambda_i / \lambda_{n+j})^k$ hatványt. Ezért a

$$|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \tag{12}$$

feltétel teljesülése esetében, ha $k \rightarrow \infty$

$$Y_k \rightarrow V_1 \Lambda_1^{1-k} C_1 (I + 0) (I + 0)^{-1} C_1^{-1} \Lambda_1^k V_1^{-1} = V_1 \Lambda_1 V_1^{-1}.$$

Tehát, ha a (2) mátrixegyenlet megoldására a (3) iterációt alkalmazzuk, akkor a (2) egyenletnek azt a megoldását kapjuk, amelynek sajátértékei és sajátvektorai megegyeznek az (1) legkisebb abszolút értékű általánosított sajátértékeivel és a hozzájuk tartozó általánosított sajátvektorokkal.

Ezzel bebizonyítottuk a következő konvergenciatételt:

Tétel. Tegyük fel, hogy

1. az

$$I \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \dots + A_m$$

egyszerű λ -mátrix,

2. általánosított sajátértékeire

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots \leq |\lambda_n| < |\lambda_{n+1}| \leq \dots \leq |\lambda_{mn}|$$

érvényes,

3. a $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ általánosított sajátértékekhez tartozó általánosított sajátvektorokból alkotott

$$V_1 = [v_1, \dots, v_n]$$

mátrix nonszinguláris.

Ha a (3) iterációt olyan $Y_0, Y_{-1}, \dots, Y_{2-m}$ mátrixokkal indítjuk, hogy az (5b) és (10) összefüggésekkel definiált C_1 nonszinguláris mátrix, akkor az iteráció az

$$\tilde{Y} = V_1 \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle V_1^{-1}$$

mátrixhoz konvergál.

3. Megjegyzések

1. A $|\lambda_n| < |\lambda_{n+1}|$ feltételből következik, hogy ha V_1 nonszinguláris mátrix, akkor a $V_1 A_1 V_1^{-1}$ mátrix valós.

2. A (3) iterációs eljárás az $n = 1$ speciális esetben megegyezik a polinomok legkisebb abszolút értékű gyökének meghatározására vonatkozó Bernoulli módszer azon változatával, amely a sorozat túl- vagy alulcsordulását kivédi (lásd pl.: [4] 8.10–52). LANGASTER a Bernoulli módszernek egy másik változatát terjesztette ki, mely alkalmas a (2) domináns megoldásának számítására [5].

3. Hasonlóan a Bernoulli módszerhez és a Mises eljáráshoz a (3) iteráció konvergenciája annál gyorsabb, minél kisebb a $|\lambda_n|/|\lambda_{n+1}|$ hányados.

4. Ha az (1) egyenletet balról megszorozzuk az A_m mátrix inverzével, és bevezetjük a $\lambda = 1/\lambda$ jelölést, akkor az (1)-gyel megegyező alakú λ -mátrixot kapunk. Ha a λ -mátrix szimmetrikus és A_m pozitív definit, akkor a szimmetria megőrizhető (lásd pl.: [1]). Az új λ -mátrixra alkalmazva a (3) iterációt meghatározhatók az eredeti feladat legnagyobb abszolút értékű általánosított sajátértékei és sajátvektorai.

5. Ha a (3) iterációval meghatároztuk a (2) egyenlet egyik megoldását, az \tilde{Y} mátrixot, akkor a

$$B_0 = I$$

$$B_i = A_i + B_{i-1} \tilde{Y}, \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

azaz a (2) polinomra alkalmazott Ruffini–Horner-féle rekurzióval meghatározhatók egy $m-1$ -edfokú λ -mátrix B_i együtthatói. Ennek általánosított sajátértékei az (1) feladat $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{mn}$ általánosított sajátértékei, és a λ_i -hez tartozó általánosított sajátvektora (\tilde{v}_i) a

$$v_i = (I\lambda_i - \tilde{Y})^{-1} \tilde{v}_i$$

transzformációval adja az (1) feladat általánosított sajátvektorát. Ha az $m-1$ -edfokú λ -mátrixra teljesülnek a tételben szereplő feltételek, akkor egy újabb iterációval megkapható a a következő n legkisebb abszolút értékű általánosított sajátérték és a hozzájuk tartozó sajátvektor. Az eljárás értelem-szerűen tovább folytatható.

6. Egy mn -edrendű nem széteső Hessenberg mátrix hasonlósági transzformációkkal mindig hozható (5a) alakra ([6]). Ezért a (3) iteráció egy mn -edrendű mátrix n legkisebb abszolút értékű sajátértékének és a megfelelő sajátvektorainak a meghatározására is alkalmazható.

4. Példa

Tekintsük az

$$\left(\lambda^3 + \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -6 & -16 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 39 & 70 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} -24 & -24 \\ -54 & -84 \end{bmatrix} \right) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

harmadfokú λ -mátrix általánosított sajátértékfeladatát.

Ennek általánosított sajátértékei $\lambda_i = i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), általánosított sajátvektorai:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -29 \\ 21 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -14 \\ 11 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Végezzük a (3) iterációs eljárást $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$ kezdeti mátrixszal. ($\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$ miatt \mathbf{Y}_{-1} tetszőleges lehet.)

Az iteráció jellemzésére meghatároztuk az $\mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}$ mátrix euklideszi normáját, valamint az \mathbf{Y}_k mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. Az utóbbiakat úgy normáltuk, hogy az első elemük megegyezzen a (13) alatti vektor első elemével. Az iteráció jól követhető a következő táblázat alapján:

k	$\ \mathbf{Y}_k - \mathbf{Y}_{k-1}\ $	λ_1	λ_2	$v_{1,2}$	$v_{3,2}$
10	$8 \cdot 10^{-1}$	1,00013876	1,88800685	21,0001572	10,8572656
15	$1 \cdot 10^{-1}$	1,00000051	1,98550840	21,0000006	10,9807062
20	$1 \cdot 10^{-2}$	1,00000000	1,99808200	21,0000000	10,9974324
25	$2 \cdot 10^{-3}$	1	1,99974681	21	10,9996609
30	$2 \cdot 10^{-4}$	1	1,99996663	21	10,9999553
35	$3 \cdot 10^{-5}$	1	1,99999561	21	10,9999941
40	$4 \cdot 10^{-6}$	1	1,99999942	21	10,9999992
45	$5 \cdot 10^{-7}$	1	1,99999992	21	10,9999999
50	$8 \cdot 10^{-8}$	1	1,99999999	21	11,0000000

IRODALOM

1. POPPER, GY.—FERENCZI, M.: Numerical Method for Solving Eigenvalue Problems of Linear Vibration Systems of Finite Degrees of Freedom. *Acta Techn. Hung.* 84 (1977) 85—96
2. TARNAI, T.—POPPER, GY.: Analysis of Flexural-Torsional Problem of Beams with Help of Series Expansion by Eigenfunctions of Quadratic Operator Pencils. *Acta Techn. Hung.* 89 (1979), 237—254
3. LANCASTER, P.: Lambda-matrices and Vibrating Systems. Pergamon Press, Oxford 1966
4. RALSTON, A.: A First Course in Numerical Analysis. McGraw-Hill, 1965
5. LANCASTER, P.: A Fundamental Theorem on Lambda-matrices with Applications. II. Difference Equations with Constant Coefficients. *Linear Algebra and Its Applications* 18 (1977) 213—222
6. POPPER, GY. — GÁSPÁR, Zs.: The Solution of the Algebraic Eigenvalue Problem by Partitioning in Proceedings of the Euromech Colloquium No 112 (Editor A. Bosznay), Akadémiai Kiadó, (1980) 399-413

Numerical Method for Solution of the Eigenvalue Problem of a λ -Matrix of Degree m . — The paper discusses a numerically efficient iteration method suitable for determining the generalized eigenvalues and corresponding generalized eigenvectors of a λ -matrix of degree m and order n . In the convergence theorem the conditions for convergence are given. The method is a generalization of the Bernoulli's method for roots of polynomials to matrix polynomials.

Eine numerische Methode für die Lösung der Eigenwertaufgabe einer λ -Matrix vom Grade m . — Die Arbeit bespricht ein solches numerisch wirksames Iterationsverfahren welches geeignet ist zur Bestimmung der n verallgemeinerten Eigenwerte mit kleinstem Absolutwert einer λ -Matrix vom m -ten Grade und von n -ter Ordnung, sowie zur Bestimmung der zugehörigen verallgemeinerten Eigenvektoren. Im Konvergenzsatz werden die Konvergenzbedingungen angegeben. Das Verfahren ist eigentlich eine Verallgemeinerung des zur Bestimmung der Wurzeln von Polynomen dienenden Bernoullischen Verfahrens auf Matrixpolynome.

EGYENLETESEN MEGOSZLÓ ERŐKKEL TERHELT, LAPOS, OLDALNYOMÁSMENTES, NYEREG ALAKÚ HIPERBOLIKUS PARABOLOIDHÉJAK MEMBRÁN- ÉS HAJLÍTÁSI ELMÉLETÉNEK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

JANKÓ LÁSZLÓ*

[Beérkezett: 1978. december 28-án]

Ez a dolgozat a nyereg alakú, két-két főgörbületi íve mentén oldalnyomást és csavarást felvenni nem tudó peremívekkel ellátott HP-héjak stabilitási jelenségeivel foglalkozó háromrészes cikksorozat első része. A cikksorozat ezen első cikkében a következő témák kerülnek tárgyalásra: a *membránmegoldás* létezése és egyértelműsége, azok a nehézségek, amelyek felület *kinematikai határozatlanságából* erednek, továbbá az a kérdés, hogy milyen geometriai paraméterek esetében tekinthetők ezek a héjak (jó közelítéssel) *membránhéjaknak*.

Jelölések

$$C_{ij} = \cos \frac{i\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{j\pi}{2b} y;$$

$$C_{mn} = \cos \frac{m\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{2b} y;$$

$$D = \frac{Eh}{(1 - \mu^2)}$$

fajlagos nyúlási merevség;

E
 F

rugalmassági modulus;
a középfelületi erők feszültségfüggvénye
($F'' = N_x$, $F' = -N_{xy}$, $F''' = N_y$);

$$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$$

fajlagos hajlítási merevség;

M_x, M_y, M_{xy}
 N_x, N_{xy}, N_y
 N_{xb}, N_{xyb}, N_{yb}

a héj hajlítónyomatékai, csavarónyomatéka;
a középfelületi erők fajlagos értékei;
a hajlítási elmélettel nyert középfelületi erők fajlago
értékei;

N_{xm}, N_{xym}, N_{ym}

a membránérők fajlagos értékei;

$$S_{ij} = \sin \frac{i\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j\pi}{2b} y;$$

$$S_{mn} = \sin \frac{m\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y;$$

$2a, 2b$
 f_a, f_b
 h
 $i, \text{ ill. } j$

az x , ill. y irányú peremvetületek hossza;
az x , ill. y irányú ívek nyílmagasságai;
a héj vastagsága;
az x , ill. y irányú félhullámok száma (nyúlásmentes esetben
 n indexszel);
a z tengely irányába mutató, egyenletesen megoszló, szim-
metrikus, az alaprajzi vetület egységére vonatkozó felületi
teher intenzitása;

p

* Dr. Jankó László, 1036 Budapest, Lajos u. 142.

u, v	az x , ill. y irányú felületi érintők irányába eső eltolódások;
$z(x, y); \bar{z}(\bar{x}, \bar{y})$	a héj középfelületének ordinátái;
w	a felület pontjainak normális irányú eltolódása;
$\alpha = f_a/f_b$	nyílmagasságarány;
$\beta = a/h$	héjparaméter;
$\gamma = a/b$	oldalarány;
μ	a harántkontrakciós tényező (0, 2);
ξ	a \bar{z} tengelyre illeszkedő síkban levő, az első egyenes alkotó- sereg irányába mutató koordináta;
η	a \bar{z} tengelyre illeszkedő síkban levő, a második felületi al- kotósereg irányába mutató koordináta;
$\varrho = f_a/b$	héjparaméter;
$\Delta\Delta(\cdot) = (\cdot)^{IV} + 2(\cdot)^{III} + (\cdot)$	a biharmonikus differenciál-operátor;
$L_p(f_1, f_2) = f_1^{II} f_2^{II} - 2f_1^I f_2^I + f_1^{\cdot\cdot} f_2^{II}$	a Pucher-féle differenciál-operátor.

1. Bevezetés

Tetszetős alakjuk és az egyenes alkotóik nyújtotta kedvező kivitelezés lehetőségeik miatt egyre sűrűbben építenek hiperbolikus paraboloid (a továbbiakban HP) alakú héjszerkezeteket.

A HP-héjakat leggyakrabban a felületi alkotóik vagy a főgörbületi íveik mentén támasztják meg peremtartókkal. Az egyenes alkotók mentén oldalnyomásmentesen alátámasztott torznégyszöghéj statikai kérdéseit úgy az elsőrendű, mind a másodrendű elmélettel kimerítően tárgyalták.

A nyereg alakú, két-két főgörbulete mentén oldalnyomást és csavarást felvenni nem tudó (a továbbiakban: oldalnyomásmentes) peremívekkel ellátott HP-héjak esetében (1a. ábra) azonban nem ez a helyzet.

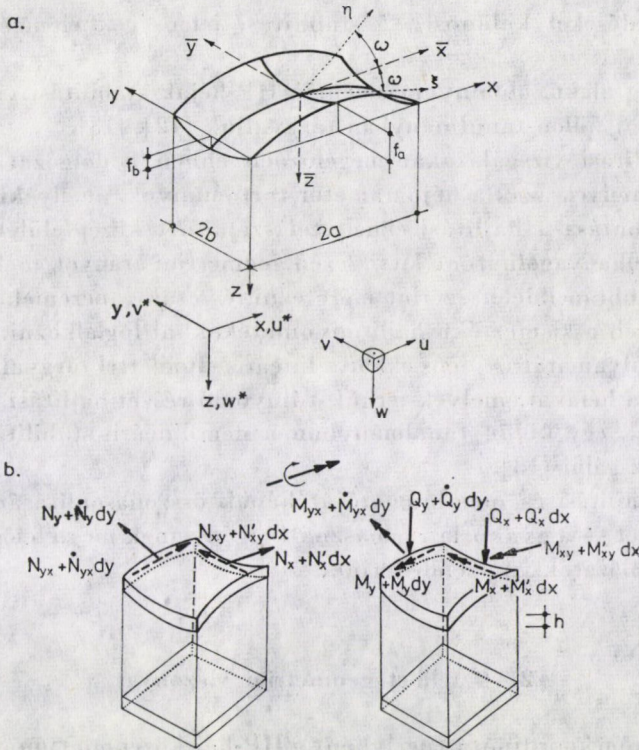
A jelen tanulmányban a későbbi dolgozatunkban elvégzendő stabilitási vizsgálatokat megelőzően foglalkozni kívánunk olyan kérdésekkel, melyeknek megválaszolása kellő alapot nyújt majd a stabilitási elemzésekhez. Szó lesz

- a membránmegoldás létezési és egyértelműségi kérdéseiről,
- a felület kinematikai határozatlanságából adódó nehézségekről, valamint
- arról, hogy milyen geometriai arányok mellett tekinthetők a tárgyalt héjak jó közelítéssel membrán héjaknak.

Ezen héjak membrán erőjátékát — mint ismeretes — az ún. geometriai elmélet megalkotásával AIMOND vizsgálta meg. A szakadós megoldást adó geometriai elmélet segítségével bizonyos geometriai arányú nyereg alakú HP héjak membránerői kielégítő pontossággal megállapíthatók.

Mint hogy egyértelmű membránmegoldás csak meghatározott nyílmagasságarányú (1a. ábra: f_a/f_b) HP-héjak esetében létezik, továbbá a peremek mentén mindig fellépnek bizonyos mértékű zavarónyomatékok, meg kellett vizsgálni a hajlítási elmélettel is a szóban forgó héjak igénybevételeit.

Lapos héjakra vonatkozóan HRUBAN [11] a hajlítási elmélet alkalmazásával felírta a belső erők és alakváltozások meghatározására vonatkozó alapösszefüggéseket és megvizsgálta a nyereg alakú oldalnyomásmentes HP-



1. ábra. A nyereg alakú HP-héj geometriai adatai; belső erők és eltolódások

héjak peremzavarait. Feltételezte, hogy a héj alakváltozási állapota a zavart perem síkjával párhuzamos metszetekben nem változik. A héjat helyettesítette egy, a zavart perem csúcspontjában a héjhoz simuló teljes körhengerrel, amelyet körszimmetrikusan terheltek tekintett. A hengerhéjban gyűrűirányban állandó gyűrűerők keletkeznek, ezért a zavart peremekre merőleges peremekre minden esetben oldalyomás adódik le. Ezt az ellentmondást küszöböli ki TARNAI [22] megoldása, melyben a zavart perem mentén változó az alakváltozási állapot. Ennek a dolgozatnak az eredményei azt mutatják, hogy a nyereg alakú HP-héjak peremzavar jelenségét a Hruban-féle elmélet a gyakorlati számítás céljára jól írja le. BELEŞ és SOARE [1] a lapos héjak hajlítási elméletével előállította az egyenletesen megoszló terhű, oldalyomásmentes, nyereg alakú HP-héjak belső erőinek függvényeit. Ezekkel a függvényekkel a héj minden pontjában meghatározható a feszültségi és alakváltozási állapot.

Az említett héjak vizsgálatakor a legnagyobb nehézséget a membránmegoldás létezésének és egyértelműségének a problémája, valamint a felület kinematikai határozatlansága (a nyúlásmentes alakváltozás lehetősége) okozza.

Ezeket a kérdéseket különösen a stabilitási jelenségek elemzéséhez fontos tisztázni.

A nyereg alakú, oldalnyomásmentes HP-héjak stabilitási viselkedésének jellegzetességeit külön tanulmányban tárgyaljuk [12], [13].

A stabilitási vizsgálatokat megelőzően ebben a dolgozatban megállapítjuk, hogy melyek azok a héjparaméter tartományok, amelyekben a hajlítónyomatékok hatása a hajlítási elmélettel számított középfelületi erők hatásához képest elhanyagolhatóan kicsi. Ezen geometriai arányok mellett elegendő a héjat a membránelmélet szerint méretezni, és csak a peremek menti tartományokban kell a kismértékű hajlítónyomatékokkal foglalkozni. A héj stabilitásvesztési folyamatát is jogos ekkor a lineáris elmélettel tárgyalni (elágazás).

Azokat a héjakat, melyek terhük túlnyomó részét hajlítási igénybevételekkel hordják, egy külön tanulmányban a nem lineáris stabilitási elmélettel fogjuk megvizsgálni [13].

A héj hajlítási és membrán-erőjátékának összehasonlítására vonatkozó eredményeinket — a gyakorlati felhasználás igényeinek megfelelően — diagramokkal és táblázatokkal szemléltetjük.

2. A felület geometriai viszonyai

Ha a három koordinátatengelyként a HP-héj középpontján ($\bar{x}=0, \bar{y}=0$) átmenő két alkotót (ξ, η) és a héj \bar{z} tengelyét (a két irány sík metszésvonalát) választjuk, akkor a felület egyenlete ebben a birektanguláris koordináta-rendszerben [3]

$$\bar{z} = k\xi\eta \quad (2.1)$$

alakban írható fel. A héj fajlagos meredekségét (öblösségét) jellemző k állandót a

$$k = \frac{4f_a}{a^2} \cos^2 \omega \quad (2.2)$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Az irány síkok közötti 2ω szög a

$$\tan^2 \omega = \frac{b^2}{a^2} \frac{f_a}{f_b} \quad (2.3)$$

képletből számítható.

A hiperbolikus paraboloidhéj két felületi alkotórendszer, ún. *aszimptotikus vonalakat* tartalmaz (ezek vetületei az $\bar{y} = \pm \operatorname{tg} \omega \bar{x} + c$ egyenletű karakterisztikák), amelyek mindegyike párhuzamos egy-egy irány síkkal. A két irány sík tetszőleges 2ω szöget zár be egymással. Az irány síkok szögfelező

síkjai (az $\bar{x} = 0$, ill. $\bar{y} = 0$ síkok) parabolákat metszenek ki a felületből. Ezek a főparabolák részben felfelé, részben lefelé görbülnek, azaz a felület fordítottan kétszer görbült (antiklasztikus).

Bármely más síkmetszet és annak vetületei a $\bar{z} = 0$ síkon hiperbolák (vagy egy egyenespárrá fajulnak), kivéve a \bar{z} tengellyel párhuzamos síkmetszeteket, melyek parabolák, ill. ha az iránysíkokkal is párhuzamosak, akkor egyenes alkotók.

A fentiek alapján a héj mint translációs felület az $\bar{x} = 0$ síkkal párhuzamos főparabolának az $\bar{y} = 0$ síkkal párhuzamos inverz főparabolán önmagával párhuzamosan történő mozgatása által származtatható:

$$\bar{z} = \frac{f_a}{a^2} x^2 - \frac{f_b}{b^2} y^2. \tag{2.4}$$

A jelen dolgozat a lapos héjakra vonatkozó elméletet használja. Mint ismeretes, a *laposság* feltételezése geometriailag azt jelenti, hogy egyrészt a felület mértéke az euklidészi (síkbeli) mértékkel azonosnak vehető, másrészt a felület geodetikus görbületei elhanyagolhatóan kicsinyek. Az utóbbi követelmény levezethető az előbbiből, ha a felület olyan lapos, hogy a

$$z'^2 \ll 1, z''^2 \ll 1, z'z'' \approx 0 \tag{2.5a-c}$$

egyenlőtlenségek kielégülnek.

3. A nyúlásmentes alakváltozás

Nyúlásmentes alakváltozásnak azt a speciális alakváltozás típust nevezzük, amelyre az jellemző, hogy a héj középfelületének mindkét irányú (x, y) nyúlása, valamint szögtorzulása zérus.

Amennyiben elhanyagoljuk a héj hajlítási merevségét, akkor — bizonyos geometriai arányok és kerületi feltételek mellett — a héj minden ellenállás nélkül képes deformálódni.

VLASZOV [25], [26] a nyomatékmentes forgáshéjak labilis mechanizmusokká válásának *statikai kritériumait* adja meg. Ezekkel azt fogalmazza meg, hogy mely esetekben lépnek fel bizonyos geometriai arányú és megtámasztású szerkezetekben tetszés szerinti mértékű véges terhelés hatására végtelen nagyságú belső erők.

GEYLING [6] a nyúlásmentes alakváltozás differenciálegyenletét úgy állította elő, hogy az általános membránhéj-alakváltozási egyenletekben [2], [6] a héj belső erőit zérussal tette egyenlővé:

$$L_p(w, z) = 0. \tag{3.1}$$

A (3.1) összefüggés kompatibilitási egyenletből származik, ezért a nyúlásmentes alakváltozás *kinematikai kritériuma* vezethető le belőle. A fenti egyenletből tehát meghatározható, hogy milyen feltételek teljesülése esetén tud a héj belső erők fellépte nélkül is deformálódni.

KOLLÁR [15] a lapos héjakra vonatkozó homogén egyenletekben a héj hajlítási merevségét és a feszültségfüggvényt zérussá téve kapta meg a jelenség differenciálegyenletét.

HAAS [10] az $L_p(w, z) = 0$ egyenletet közvetlenül a középfelületi deformációelemek kifejezéseiből állította elő.

Az oldalnyomásmentes, nyereg alakú HP-héjak nyúlásmentes alakváltozásának differenciálegyenlete — a kitűzött feladathoz tartozó peremfeltételekkel — tehát így írható fel:

$$\frac{2f_a}{a^2} w'' - \frac{2f_b}{b^2} w'' = 0, \quad (3.2)$$

$$w = 0, \quad (3.3a-b)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array} \right\}$$

$$w = 0. \quad (3.3c-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=2b \end{array} \right\}$$

Mint hogy a (3.1), ill. (3.2) egyenlet előállításakor elhanyagolták a héj hajlítási merevségét, a peremek mentén a héj tetszőleges szögelfordulást tud követni. Ebből következően a w'' -re és w'' -ra vonatkozó peremfeltételek elmaradnak.

TARNAI [21] megvizsgálta, milyen feltételeket kell kielégíteni a peremgörbéknek és a héj középfelületének ahhoz, hogy a (3.2) alakú hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenletnek egyértelmű megoldása létezzék a vizsgált tartomány belsejében. A parciális differenciálegyenletek elmélete [7], [14], [19], [24] alapján kimutatta, hogy az 1a. ábrán látható téglalaptartomány *három peremszakaszán összesen négy feltételt* kell megadni ahhoz, hogy létezzék a (3.2) egyenletnek egyértelmű megoldása. Általános esetben a hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenletnek csak nyílt peremgörbén előírt peremértékek mellett lehetséges egyértelmű megoldása. Ha pl. az $x = 0$ és $x = 2a$ peremeken a $w = 0$, az $y = 0$ peremen pedig a $w = 0$ és $w' = 0$ feltételeket írjuk elő, akkor a (3.2) egyenletnek a $w = 0$ megoldása létezik [8], [10], [15], [21]. A feladat ebben az esetben matematikailag korrekt (létezik megoldás, csak egy megoldás létezik, és ez folytonosan függ a peremfeltételektől).

A fentiek alapján tehát a (3.3a—d) peremfeltételek előírásával eleve számolnunk kell azzal, hogy ha létezik is megoldás, akkor az *nem egyértelmű*.

A (3.2) egyenlet karakterisztikái az

$$y = \pm \tan \omega x + C_0 \tag{3.4}$$

egyenletű egyenesseregek, amelyek egybeesnek a hiperbolikus paraboloid felület differenciálegyenletének karakterisztikáival.

A (3.2)–(3.3) sajátérték feladatnak Fourier-módszerrel [7], [19,] [24] történő megoldása során a

$$W(x, y) = X(x) Y(y) \tag{3.5}$$

szorzatfeltevéssel az

$$Y'' + \frac{d^2}{\tan^2 \omega} Y = 0 ,$$

$$X'' + d^2 X = 0$$

közönséges differenciálegyenletekre jutunk. Ezekben d a keresett sajátérték. Az említett egyenletek általános megoldásai az

$$Y = C_1 \sin \frac{d}{\tan \omega} y + C_2 \cos \frac{d}{\tan \omega} y, \tag{3.6a-b}$$

$$X = C_3 \sin dx + C_4 \cos dx$$

trigonometrikus függvények. A (3.3a) és a (3.3c) peremfeltételek figyelembevételével

$$C_4 = 0, \tag{3.7a-b}$$

$$C_2 = 0$$

adódik.

Fejezzük ki a d sajátértéket a (3.3b)-ből és a (3.3d)-ből is:

$$d^2 = \frac{i_n^2 \pi^2}{4a^2} = \frac{j_n^2 \pi^2}{4b^2} \tan^2 \omega . \tag{3.8}$$

Itt $i_n = 1, 2, 3, \dots$, ill. $j_n = 1, 2, 3, \dots$ a w lehajlásfüggvény x , ill. y irányú félhullámainak a száma.

A (2.3) összefüggést a (3.8) egyenletbe helyettesítve, az oldalnyomásmentes, hiperbolikus paraboloid alakú héj nyúlásmentes alakváltozási lehetőségének *kinematikai kritériuma* így írható fel:

$$i_n^2 = \frac{f_a}{f_b} j_n^2 . \tag{3.9}$$

Tehát a nyúlásmentes alakváltozás jellegét az f_a/f_b arány szabja meg. Minthogy i_n és j_n csak egész szám lehet, nyúlásmentes alakváltozás csak akkor jöhet létre, ha az $f_n f_b$ arány *racióális szám négyzetével egyenlő*. Megjegyezzük,

hogy mivel az i_n, j_n racionális számok „sűrűn” helyezkednek el a valós számok között (megszámlálhatóan végtelen elemű halmaz), gyakorlatilag bármely f_a/f_b arány közelében létezik nyúlásmentes alakváltozás. A hullámszámok azonban a legtöbb esetben igen nagyok, így emiatt a héj ezen nagyhullám-számú esetekben merevnek mutatkozik (vö. még azzal is, hogy $K \neq 0$).

A (3.9) kritérium azt is jelenti, hogy ha a héj mind a négy peremén oldalnyomásmentes, akkor az

$$\frac{R_y}{R_x} = - \frac{i_n^2}{j_n^2} \frac{b^2}{a^2} \quad (3.10)$$

görbületarányok mellett deformálódhatik nyúlásmentesen.

A w lehajlásfüggvényre végeredményben a

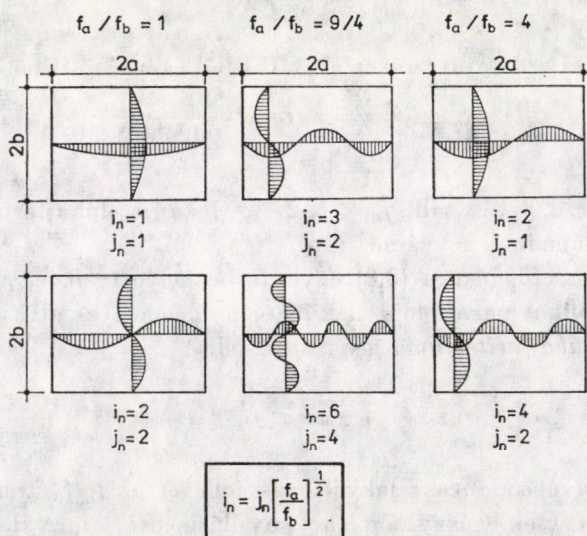
$$w = \sum_{i_n} \sum_{j_n} w_{i_n j_n} S_{i_n j_n} \quad (3.11a)$$

kifejezést kaptuk. Itt

$$S_{i_n j_n} = \sin \frac{i_n \pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j_n \pi}{2b} y. \quad (3.11b)$$

Mint ahogyan az várható volt, a megoldás nem egyértelmű, hiszen a $w_{i_n j_n}$ együtthatók határozatlan mennyiségek. Ez a matematikai eredmény összhangban van a szemléletünkkel, mert a belső erők fellépte nélkül létrejövő deformációs alak nem lehet egyértelmű.

A (2.3) és a (3.9) egyenletek elemzése alapján is belátható, hogy ha mind a négy peremén a $w = 0$ peremfeltételt írjuk elő, akkor a vizsgált héj minden olyan esetben nyúlásmentesen tud alakváltozni, melyben a valamely perem-



2. ábra. Jellegzetes nyúlásmentes alakváltozások

pontból elindított egyenes alkotók mentén — a többi peremről „reflexiók” útján visszaverődve — véges számú körbenjárás után visszaérkezünk a kiindulási pontra. Ez a megállapítás GEYLING [6] nevéhez fűződik.

Mint ismeretes, ugyanez a membránerők meghatározására vonatkozó Aimond-féle geometriai elmélet alkalmazhatóságának is a feltétele. A membránmegoldás létezése és a nyúlásmentes alakváltozási lehetőség közötti kapcsolatról részletesebben a 4. fejezetben írunk. Ott rámutatunk arra is, hogy ha valamilyen szinuszos alakú nyúlásmentes lehajlási felület kialakulását a szerkezet geometriai arányai (f_a/f_b) lehetővé teszik, akkor az ugyanilyen alakú teherkomponens nem vehető fel membránerőkkel.

Az I. táblázat és a 2. ábra szemléletes képet ad a különböző nyílmagasság-arányú, oldalnyomásmentes, nyereg alakú HP-héjak nyúlásmentes lehajlási függvényeinek jellegéről.

I. táblázat

f_a/f_b	$(f_a/f_b)^{1/2}$	j_n	i_n
1	1	1, 2, 3, ...	1, 2, 3, ...
$\frac{121}{100} = 1,21$	$\frac{11}{10}$	10, 20, 30, ...	11, 22, 33, ...
$\frac{25}{16} = 1,5625$	$\frac{5}{4}$	4, 8, 12, ...	5, 10, 15, ...
$\frac{16}{9} = 1,77 \dots$	$\frac{4}{3}$	3, 6, 9, ...	4, 8, 12, ...
$\frac{49}{25} = 1,96$	$\frac{7}{5}$	5, 10, 15, ...	7, 14, 21, ...
$\frac{9}{4} = 2,25$	$\frac{3}{2}$	2, 4, 6, ...	3, 6, 9, ...
$\frac{25}{9} = 2,77 \dots$	$\frac{5}{3}$	3, 6, 9, ...	5, 10, 15, ...
$\frac{49}{16} = 3,0625$	$\frac{7}{4}$	4, 8, 12, ...	7, 14, 21, ...
$\frac{81}{25} = 3,24$	$\frac{9}{5}$	5, 10, 15, ...	9, 18, 27, ...
4	2	1, 2, 3, ...	2, 4, 6, ...

Figyelemre méltó, hogy a karakterisztikák mentén megtámasztott HP héjakra (torznégyszög héjakra) vonatkozóan két csatlakozó peremen előírt $w = 0$ feltétel megakadályozza a nyúlásmentes alakváltozást [15], [21] (Goursat-féle feladat).

4. A membrán erőjáték létezése

Mint hogy a membránelmélet szerinti belső erők meghatározására a szakirodalomban megfelelő ismeretanyag áll rendelkezésre, ebben a fejezetben elsősorban a membránmegoldás létezési és egyértelműségi kérdéseivel kívánunk foglalkozni. Emellett rámutatunk az egyértelmű membrán erőjáték létezése és a nyúlásmentes alakváltozás lehetősége között fennálló kapcsolatra is.

Vizsgálatainkat a függlőleges egyenletesen megoszló erőkkel terhelt membránhéjak egyensúlyát leíró Pucher-féle differenciálegyenlet alapján végezzük:

$$L_p(F, z) = -p(x, y). \quad (4.1)$$

A fenti hiperbolikus típusú parciális differenciálegyenlet megoldásának létezésével és egyértelműségével kapcsolatban ugyanaz a nehézség, mint amit a (3.2) egyenlet tárgyalásánál említettünk. Az 1a. ábrán feltüntetett téglalap tartomány három peremszakaszán összesen négy feltételt (pl. az $x = 0$ perem szabad és az $y = 0$, valamint az $y = 2b$ peremek oldalnyomásmentesek) kell megadni ahhoz, hogy a (4.1) inhomogén differenciálegyenletnek — a benne szereplő paraméterek bármely értéke mellett is — létezzék egyértelmű megoldása (TARNAI [21]).

A feladat

$$F'' = 0, \quad F'' = 0 \quad (4.2a-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=2b \end{array} \right\}$$

peremfeltételei mind a négy peremszakaszon előírnak egy-egy normálerőt, ezért *nem vörható* minden geometriai arányra egyértelmű membránmegoldás.

Ha a $p(x, y) = p = \text{const.}$, az $\bar{x} = 0$ és $\bar{y} = 0$ tengelyekre nézve szimmetrikus terhet kettős Fourier-sorba fejtjük [(5.5)], akkor a (4.1) egyenletnek a (4.2a—d) peremfeltételeket figyelembe vevő analitikus megoldását az

$$F = -\frac{32}{\pi^4} p \frac{a^2 b^2}{f_b} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{1}{m^2 - \alpha n^2} S_{mn} \quad (4.3)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots, M$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, N$$

kifejezéssel adhatjuk meg. A fenti egyenletben S_{mn} a (3.11b) függvénnyel azonos szerkezetű (ld. 5.10a) függvény, az $\alpha = f_a/f_b$ paraméter a nyílmagasság-arány.

A (4.3) egyenlethől kitűnik, hogy membránmegoldás általában nem lehetséges, mert az

$$\alpha = \frac{f_a}{f_b} = \frac{m^2}{n^2} \quad (4.4)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots, M$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, N$$

esetekben bizonyos m, n számpárokhoz tartozó véges szimmetrikus teherrész csak végtelenül nagy membránerőkkel lenne kiegyensúlyozható [1], [5], [16], [17], [20]. Ez összhangban van az Aimond-féle geometriai elmélet eredményeivel, mely szerint csak bizonyos f_a/f_b arányoknál található megoldás, de ez a megoldás *diszkontinuitásos*. A geometriai elmélet kihasználja a hiperbolikus paraboloid alakú héjak azon jellegzetességét, hogy (függőleges terhek működésekor) minden egyes karakterisztika mentén a feszültségfüggvény értéke tetszőlegesen előírható. Ez statikailag azt jelenti, hogy az alkotók irányában a héjba bevezetett erők ezen alkotók mentén változatlan nagyságban tova tudnak terjedni. A membrán erőjáték létezése a geometriai elmélet szerint attól függ, hogy valamely pl. az $x = 0$ peremre működő $N_x dy$ erő az alkotók közvetítésével, reflexiók útján milyen módon jut át a többi peremre (3a. ábra). Amennyiben fennállnak a következő geometriai összefüggések (II. táblázat 2. sor):

$$f_a/f_b = 2^2, 4^2, 6^2, \dots,$$

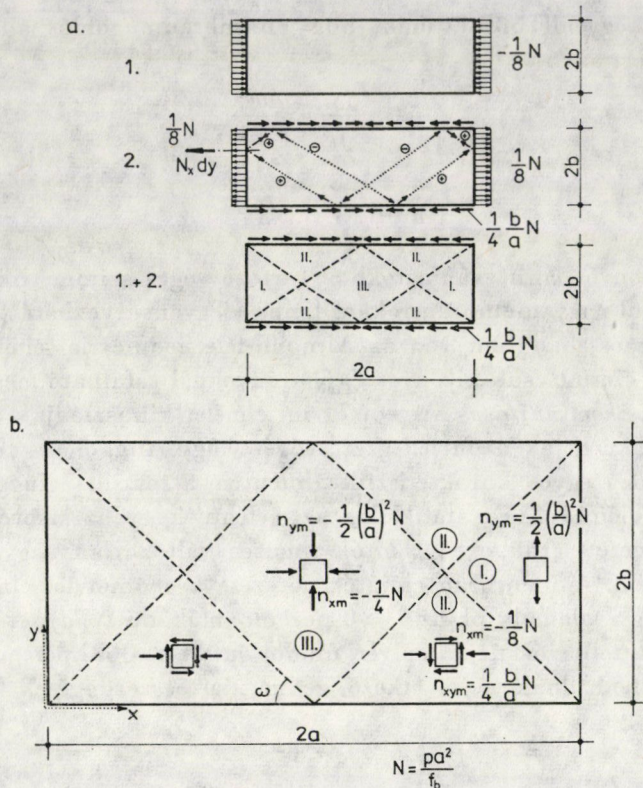
akkor az $x = 2a$ peremen *két húzott alkotósáv* találkozik [5], [16], így az ezekben működő erőket egyensúlyozó erő az $N_x dy$ erő ellentettje lesz. Ebből következően a felületi terhet x irányban tiszta ívhatással hordó alaptartó (l. a 3a. ábrán legfelül) belső erőire ráhalmazva az $x = 0$ és $x = 2a$ peremek menti reakcióerők ellentettjéből származó belső erőket, mind a négy peremen csak csúsztatóerők léphetnek fel. A normálhéj esetében ($f_a/f_b = 4$) az $x = 0$ és $x = 2a$ peremeken ezek zérus nagyságúak.

Ha a geometriai arányok olyanok, hogy

$$\frac{f_a}{f_b} = 1^2, 3^2, 5^2, \dots; \left(\frac{5}{3}\right)^2, \left(\frac{7}{5}\right)^2, \dots,$$

akkor az említett *alkotók nyomottak* lesznek, s így az oldalnyomásmentes héj csak az $x = a$ vagy az $y = b$ tengelyre nézve antimetrikus terhet ($m = 2, 4, 6, \dots$ vagy $n = 2, 4, 6, \dots$) képes membránerőkkel hordani (II. táblázat, 1. sor).

Ha az f_a/f_b paraméter nem egyenlő racionális számok négyzetével (II. táblázat, 3. sor), akkor az $x = 2a$ peremen *egy húzott és egy nyomott* alkotó találkozik, melyekben működő erők eredője az $x = 2a$ peremmel párhuzamos



3. ábra. A normálhég (voile normal) membránereői

nyíróerő. Ez esetben tehát az $x = a$, ill. $y = b$ tengelyre nézve szimmetrikus és antiszimmetrikus terhekre is lehetséges peremnormálerő-mentes membrán-állapot.

A fenti megoldások, mint ismeretes szakadásosak, de egyértelműek.

Megjegyezzük, hogy a II. táblázat 3. sorában található eset nem a geometriai elméletből következik, hanem a (4.4) egyenletből, mert véges számú reflexió csak akkor lehetséges, ha az f_a/f_b paraméter racionális számok négyzetével egyenlő [vö. (2.3)-mal]. A (4.4) összefüggés alapján lehet membránmegoldás akkor is, ha a nyílmagasságarány irracionális szám.

A II. táblázatban a (3.9) feltétel alapján feltüntetettük azt is, hogy mely f_a/f_b arányok mellett alakváltozhatnak a hég nyúlásmentesen. A táblázatban található eredmények összhangban vannak a szemléletünkkel: ha valamely $p_{mn}(x, y)$ teherkomponens nem egyensúlyozható véges nagyságú membránereőkkel, akkor a $p_{mn}(x, y)$ -nal azonos alakú $w_{i,n,j_n}(x, y)$ nyúlásmentes alakváltozásra képes a szerkezet.

A fenti kijelentés matematikai alapja a Sturm—Liouville-féle tétel [7] (vagy integrálegyenletté átírva a feladatot, a Fredholm-féle alternatíva tétel

II. táblázat

f / f_b	Membránmegoldás létezik: + nem létezik: —			Nyúlásmentes alakváltozás étezik: + nem létezik: —
	p : szimmetrikus $m = 1, 3, 5, \dots$ $n = 1, 3, 5, \dots$	p : antiszimmetrikus		
		$m = 2, 4, 6, \dots$ $n = 1, 3, 5, \dots$	$m = 1, 3, 5, \dots$ $n = 2, 4, 6, \dots$	
1. $1^2, 3^2, 5^2, \dots$ $\left(\frac{5}{3}\right)^2, \left(\frac{7}{5}\right)^2, \dots$	—	+	+	$i_n = 1, 3, 5, \dots$ $j_n = 1, 3, 5, \dots$
2. $2^2, 4^2, 6^2, \dots$	+	—	+	$i_n = 2, 4, 6, \dots$ $j_n = 1, 2, 3, \dots$
3. $2, 3, 5, 6, \dots$ $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots$	+	+	+	—
4. $\left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{6}{5}\right)^2$	+	—	+	$i_n = 4, 6, \dots$ $j_n = 3, 5, \dots$
5. $\left(\frac{3}{2}\right)^2, \left(\frac{5}{2}\right)^2, \dots$	+	+	—	$i_n = 3, 5, \dots$ $j_n = 2, 4, \dots$

[7]). Ez homogén peremfeltételű differenciálegyenletekre vonatkozóan (l. a (3.2)–(3.3), ill. a (4.1)–(4.2) egyenleteket) kimondja, hogy ha a homogén differenciálegyenletnek [(3.2)] bizonyos paraméter (esetünkben: sajátérték) mellett létezik egyértelmű megoldása, akkor a megfelelő inhomogén differenciálegyenletnek [(4.1)] — ugyanazon paraméter mellett — nincs megoldása.

5. A hajlítási elmélet szerinti belső erők

5.1. Az alapegyenletek

Vékony ($h/R \ll 1$), hajlított héjszerkezetek laposságáról az alábbi geometriai és statikai feltételek teljesülése esetében beszélünk [1], [5], [18], [26]:

- a (2.5a–c) geometriai feltételek,
- $t/R \ll 1$, ahol t az u és v tangenciális eltolódások valamelyike, R a felület normálgörcbülete vagy elcsavarodása,
- az x és y irányú vetületi egyenletekben elhanyagolható a Q_x és Q_y harántnyíróerők hatása.

A felsorolt feltételekkel a héjstatika általános módszereinek felhasználásával a tengelyirányú megoszló erőkkel terhelt, laposhéjak egyensúlyi és kompatibilitási egyenlete [1], [11], [26]

$$L_p(F, z) - K \Delta \Delta w + p(x, y) = 0, \quad (5.1)$$

$$\Delta \Delta F + D(1 - \mu^2) L_p(w, z) = 0 \quad (5.2)$$

alakban írható fel. Ha a $\tilde{p}(x, y)$ teher normális irányú, szintén a fenti alakú egyenletekre jutunk [5]. Ennek az az oka, hogy a (2.5a—c) lapossági feltételekből az is következik, hogy a felületi normálisok lapos héjak esetében közel párhuzamosaknak tekinthetők a z tengellyel. Ezzel magyarázható [17], [18], [20] — az (5.1) és (5.2) összefüggésekkel megegyező alakú — egyenleteinek a helyessége is, holott az általuk használt koordináta-rendszerben w^* és $p(x, y)$ z tengelyirányú.

A peremíveket (diafragmákat) oldalirányú hajlítással, valamint csavarással szemben lágynak, a saját síkjukban viszont merevnek tekintjük (ún. „félmerev” peremek):

$$\left. \begin{array}{l} N_{xb} = 0, \quad M_x = 0, \\ w = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \\ x=0 \\ x=2a \end{array} \right\} \quad (5.3a-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} N_{yb} = 0, \quad M_y = 0, \\ w = 0, \quad \varepsilon_x = 0, \\ y=0 \\ y=2b \end{array} \right\} \quad (5.4a-d)$$

Ha a szimmetrikus, egyenletesen megoszló, az alaprajzi vetület egységére vonatkozó $p = \text{const.}$ terhet a

$$p(x, y) = \frac{16}{\pi^2} p \sum \sum \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2a} x \sin \frac{n\pi}{2b} y \quad (5.5)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots, M$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, N$$

kettős Fourier-sorba fejtjük, akkor az (5.1)—(5.2) egyenleteknek az (5.3)—(5.4) peremfeltételeket kielégítő megoldását az

$$\alpha = \frac{f_a}{f_b}, \quad \beta = \frac{a}{h}, \quad (5.6a-d)$$

$$\gamma = \frac{a}{b}, \quad \varrho = \frac{f_b}{b}$$

paraméterek segítségével a következő kifejezésekkel írhatjuk fel:

$$A_{mn} = \frac{768(1 - \mu^2)}{\pi^4} (\rho\beta\gamma)^2 (m^2 - \alpha n^2), \quad (5.7)$$

$$B_{mn} = (m^2 + \gamma^2 n^2)^2, \quad (5.8)$$

$$N_{mn} = - \frac{A_{mn}}{A_{mn}(m^2 - \alpha n^2) + B_{mn}^2}, \quad (5.9)$$

$$S_{mn} = \sin \frac{m\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y, \quad (5.10a-b)$$

$$C_{mn} = \cos \frac{m\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{2b} y,$$

$$n_x^0 = - \frac{8}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{n}{m} N_{mn} S_{mn},$$

$$n_{xy}^0 = - \frac{8}{\pi^2 \gamma} \sum_m \sum_n N_{mn} C_{mn}, \quad (5.11a-c)$$

$$n_y^0 = - \frac{8}{\pi^2 \gamma^2} \sum_m \sum_n \frac{m}{n} N_{mn} S_{mn},$$

$$m = 1, 2, 5, \dots, M$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, N$$

$$m_x^0 = - \frac{64}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m}{n} \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} S_{mn},$$

$$m_{xy}^0 = - \frac{64(1 - \mu)}{\pi^4} \gamma \sum_m \sum_n \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} C_{mn}, \quad (5.12a-d)$$

$$m_y^0 = - \frac{64}{\pi^4} \gamma^2 \sum_m \sum_n \frac{n}{m} \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} S_{mn},$$

$$w^0 = - \frac{3072(1 - \mu^2)}{\pi^6} \beta^4 \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} S_{mn},$$

$$m = 1, 3, 5, \dots, M$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, N$$

$$N_{xb} = n_x^0 \frac{pa^2}{f_b},$$

$$N_{xyb} = n_{xy}^0 \frac{pa^2}{f_b}, \quad (5.13a-c)$$

$$N_{yb} = n_y^0 \frac{pa^2}{f_b},$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= (m_x^0 + \mu m_y^0) p a^2, \\
 M_{xy} &= m_{xy}^0 p a^2, \\
 M_y &= (m_y^0 + \mu m_x^0) p a^2, \\
 w &= \frac{p h}{E} w^0.
 \end{aligned}
 \tag{5.14a-d}$$

A közölt összefüggések megfelelnek [1] megoldásának.

Az (5.1) egyenlet alapján meghatároztuk a középfelületi erők által viselt

$$\begin{aligned}
 \frac{p^m}{p} &= -\frac{16}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{m^2 - \alpha n^2}{mn} N_{mn} S_{mn} \\
 m &= 1, 3, 5, \dots, M \\
 n &= 1, 3, 5, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{5.15}$$

és a hajlítási erők révén hordott

$$\begin{aligned}
 \frac{p^b}{p} &= -\frac{16}{\pi^2} \sum_m \sum_n \frac{1}{mn} \frac{B_{mn}^2}{A_{mn}} N_{mn} S_{mn} \\
 m &= 1, 3, 5, \dots, M \\
 n &= 1, 3, 5, \dots, N
 \end{aligned}
 \tag{5.16}$$

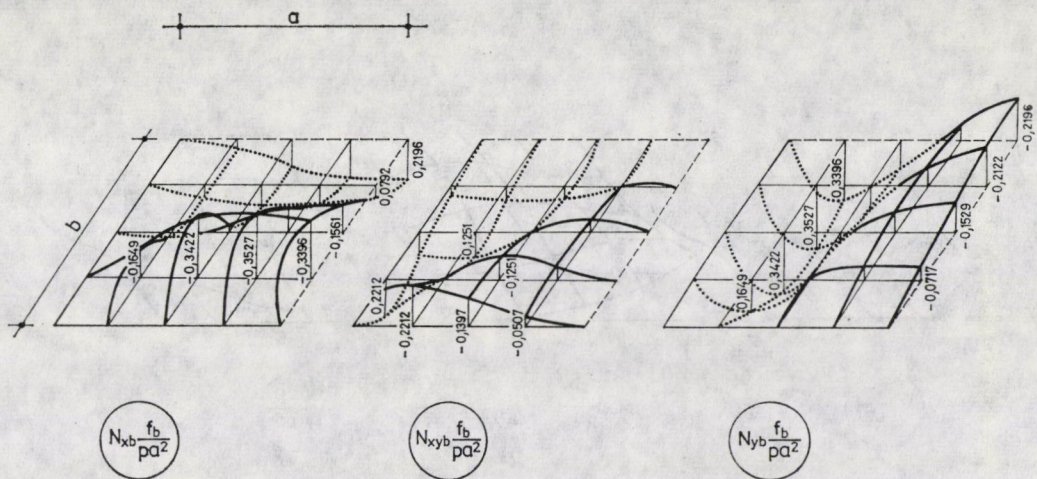
teherhányadok képleteit is ($K = 0$, ill. $z = 0$).

5.2. Numerikus vizsgálatok

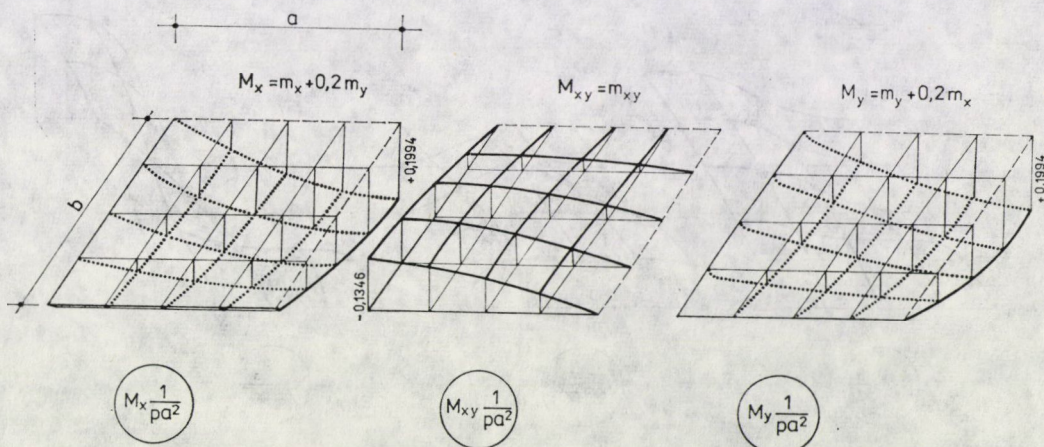
A számítások során az f_a/f_b paramétert 1 és 4 között változtattuk.

Mindenekelőtt a belső erők x, y tartománybeli eloszlásának jellegéről adunk áttekintő képet (4a.–4f. ábrák).

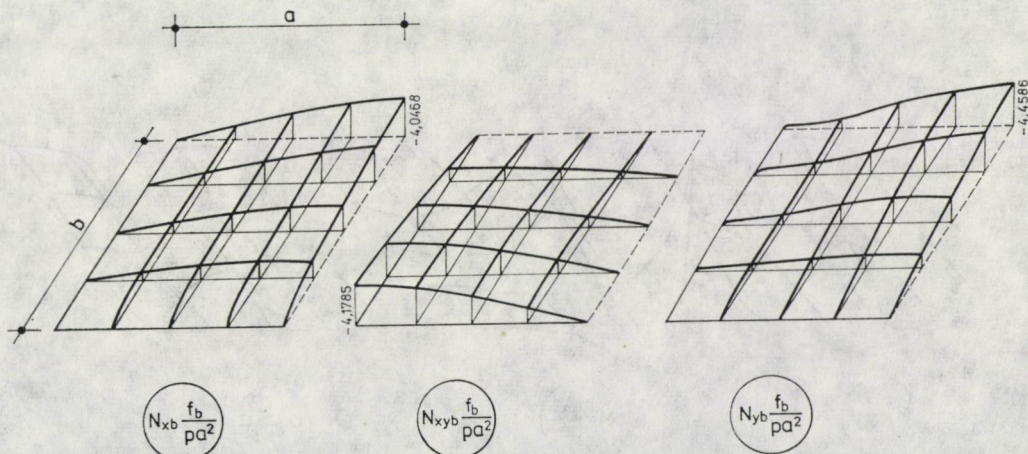
Figyelemre méltó, hogy a *szeminormál* héj ($f_a/f_b = 1$) nyomatékai a megfelelő síklemez nyomatékaihoz hasonlóan oszlanak meg. A héj teherhordó viselkedése eltér a síklemezétől, mert a kompatibilitás biztosítása miatt középfelületi erők is fellépnek benne, s a nyomatékainak nagysága valamivel meghaladja a síklemez nyomatékainak nagyságát. A II. táblázat 1. sora alapján belátható, hogy azok a (szimmetrikus) terhek okoznak középfelületi erőket, melyeknek alakja kielégíti az $m \neq n$ egyenlőtlenséget. A többi teherkomponensből a *nyúlásmentes alakváltozás* miatt nem keletkeznek középfelületi erők. A héj középpontjában ($x = a, y = b$) az N_{xb} normálerő húzóerő, ezért ebben a pontban a középfelületi erők által viselt terhányad (5. ábra) *negatív*. Ebből természetesen az következik, hogy a héj nyomatékai nagyobbak lesznek, mint a megfelelő síklemez nyomatékai. Az $a/b = 1, a/h = 200$ geometriai arányokkal bíró *síklemez* $x = a, y = b$ pontbeli hajlítónyomatékai [23] nyomán ($\mu = 0,3$ -



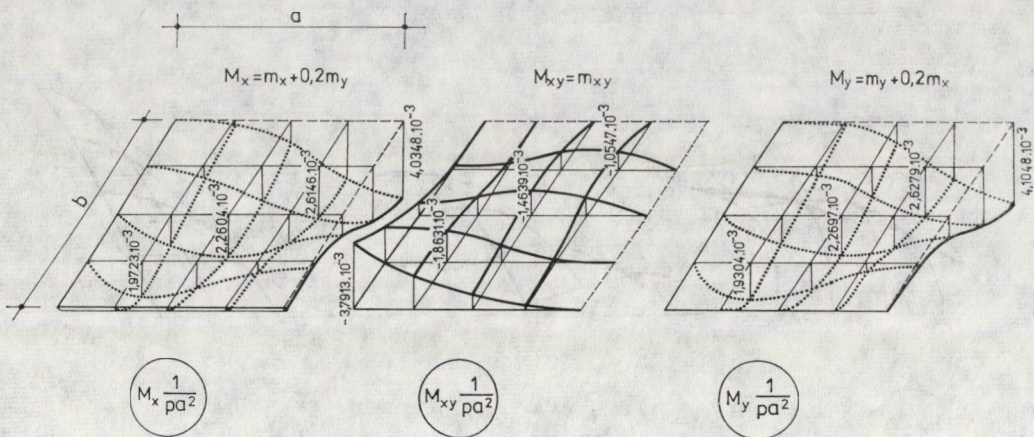
4a. ábra. A szeminormál héj középfelületi erői az $x = 0 \div a, y = 0 \div b$ tartományban ($f_a/f_b = 1, a/b = 1, a/h = 200, f/b = 0,3$)



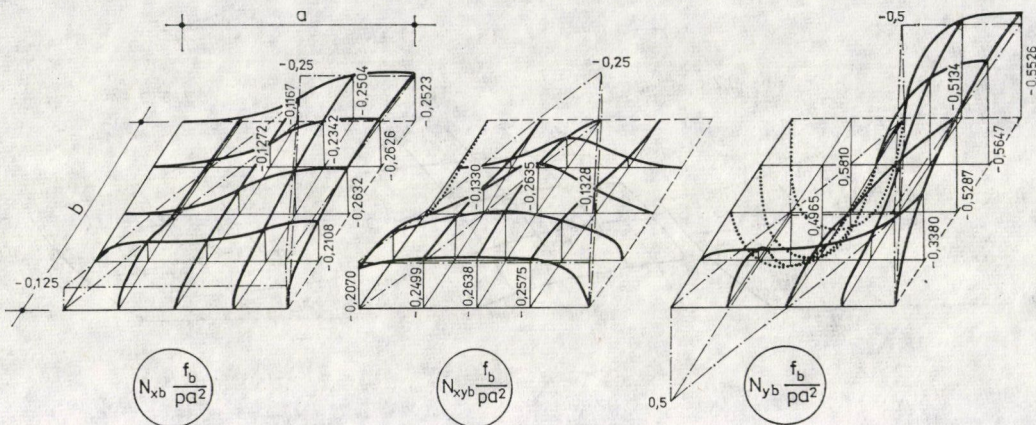
4b. ábra. A szeminormál héj nyomatékai az $x = 0 \div a, y = 0 \div b$ tartományban ($f_a/f_b = 1, a/b = 1, a/h = 200, f_b/b = 0,3$)



4c. ábra. Középfelületi erők az $x = 0 \div a, y = 0 \div b$ tartományban $f_a/f_b = 1,2$ esetén ($a/b = 1, a/h = 200, f_b/b = 0,3$)

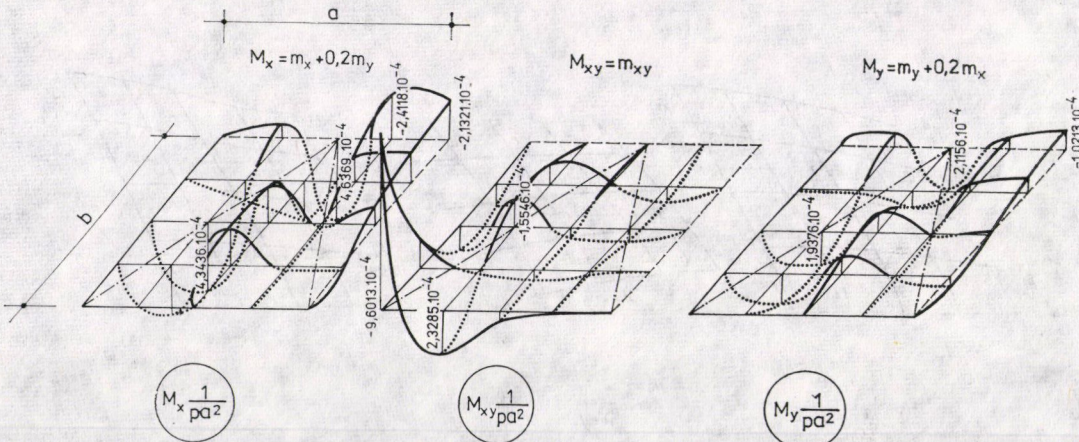


4d. ábra. Nyomatékok az $x = 0 \div a$, $y = 0 \div b$ tartományban $f_a/f_b = 1,2$ esetén ($a/b = 1$, $a/h = 200$, $f_b/b = 0,3$)

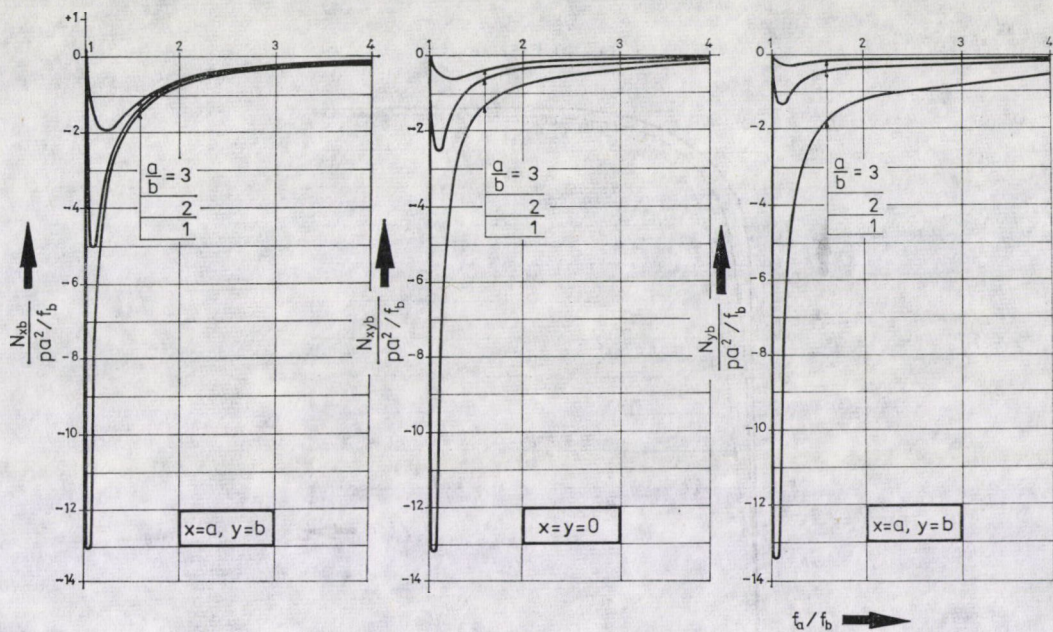


a geometriai elmélet szerint

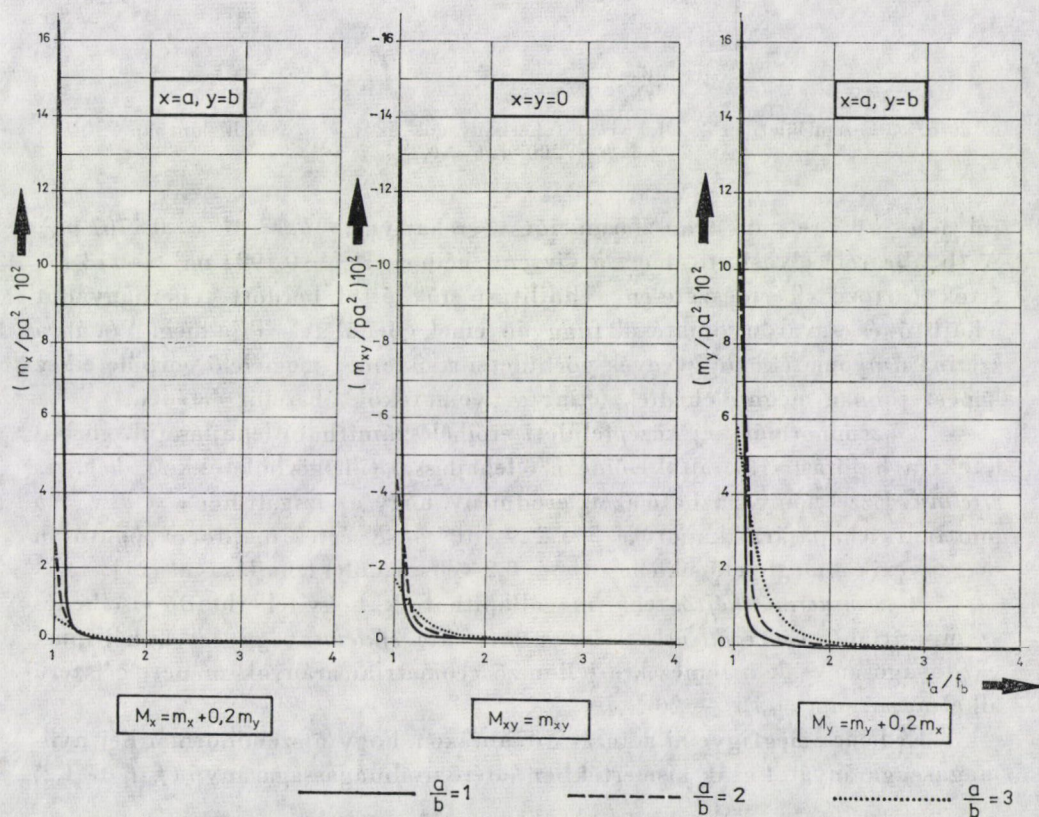
4e. ábra. A normálháj közép felületi erői az $x = 0 \div a$, $y = 0 \div b$ tartományban ($f_a/f_b = 4$, $a/b = 1$, $a/h = 200$, $f_a/b = 0,3$)



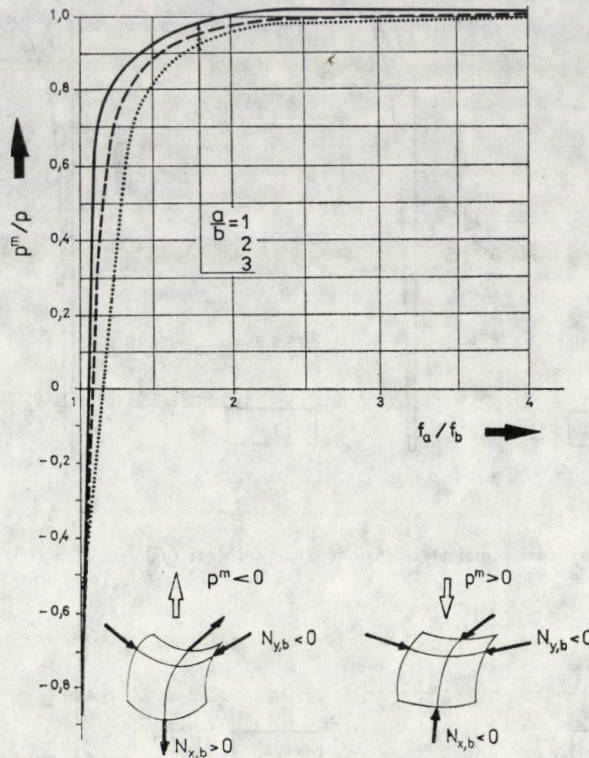
4f. ábra. A normálháj nyomatékai az $x = 0 \div a$, $y = 0 \div b$ tartományban ($f_a/f_b = 4$, $a/b = 1$, $a/h = 200$, $f_b/b = 0,3$)



5a. ábra. A hajlítási elmélettel kapott középfelületi $(f_b/b$ erőök = 0,3; $a/h = 200$)



5b. ábra. A HP-héj hajlítónyomatékai $(f_b/b = 0,3, a/h = 200)$



6. ábra. A középfelületi erők által viselt teherhányadok az $x = a, y = b$ pontban ($a/h = 200; f_b/b = 0,3$)

ról a $\mu = 0,2$ -re való transzformációt végrehajtva): $M_x^I = M_y^I = 0,1767 pa^2$. A 4b. ábráról leolvasható, hogy a vizsgált héjhoz $M_x = 0,1994 pa^2 \cong 1,13 M_x^I$ érték tartozik. Természetesen a hajlítási erők által hordott teherhányadot a hajlító- és csavarónyomatékok függvényeinek görbülete szabja meg. A 6. ábra szerint a nyomatéki függvények görbületei a síklemez megfelelő görbületeihez képest jobban megnövekedtek, mint a nyomatékok abszolút értékei.

A szeminormál héj középfelületi erőiből számítható lehajlás (ill. görbületek) a hajlítási erők által előidézett lehajlással (ill. görbületekkel) *ellentétes értelmű*. Ezzel magyarázható az az eredmény, hogy a vizsgált héj $x = a, y = b$ pontbeli lehajlására kapott $w = 1,229 \cdot 10^9 ph/E$ érték majdnem pontosan megegyezik a megfelelő síklemez ($\mu = 0,2$ -vel számolt) lehajlásával [21].

A szeminormál héjről tehát megállapíthatjuk, hogy teherhordó viselkedés szempontjából *kedvezőlenebb mint a megfelelő síklemez*, így ezt a héjtípust gazdaságosan csak a lemezekre jellemző geometriai arányok mellett célszerű alkalmazni ($a/h = 15 \div 20$).

Érdeemes megfigyelni a 4c. és 4d. ábrákon, hogy a szeminormál héj nyíl-magasságarányától csak kismértékben eltérő nyíl-magasságarányú ($f_a/f_b \cong 1,2$)

hég középfelületi erői milyen erősen megnövekedtek a szeminormál hég középfelületi erőihez képest. Ugyanakkor természetesen a hajlító- és csavarónyomatékok nagyságrenddel kisebbek lettek.

A *normálhég*ra vonatkozóan ($f_a/f_b = 4; 4e.-4f.$ ábrák) teljesen megváltozik a szeminormál héjnál tárgyalt belső erő kép. A hajlítási elmélettel kapott középfelületi erők ábrája jó közelítéssel megfelel az Aimond-féle geometriai elmélettel kapható szakadásos ábráknak. Ennek megfelelően a *hajlítási hatások csekélyek*. Megfigyelhető, hogy a normálhég nyomatékai alaprajzi vetületben nem úgy oszlanak meg, mint a rugalmas lemezek nyomatékai — melyek a lemez közepe táján a legnagyobbak —, hanem a peremek menti tartományokban maximálisak. A peremektől befelé pedig — a közép felé *csillapodó rezgésekhez hasonlóan* — csökkenő pozitív és negatív értékeket vesznek fel. Ez a megállapítás összhangban van HRUBAN [11] és TARNAI [22] eredményeivel. Ők a hajlítási hatásokat peremzavar probléma megoldása révén határozták meg. A normálhég elsőrendű elmélettel történő méretezéséhez az ő megoldásaik is jól használhatók (a jelen cikkben kitűzött feladat tárgyalása természetesen csak az egész alaprajzi tartományra kiterjedő analitikus vizsgálattal volt lehetséges).

Az 5a.—5b. ábrák alapján az előzőekben elmondottak még szemléletesebbé válnak. A vizsgált $f_a/f_b = 0,3$, $a/h = 200$ paraméterű héjak nyílmagasságarányát az $f_a/f_b = 4$ értéktől (normálhég) kb. az $f_a/f_b = 2 \div 1,5$ arányig változtatva, a hajlítási hatások csak igen kevésbé növekszenek és abszolút értékük is nagyon csekély. *Ebben a tartományban* tehát a nyereg alakú hiperbolikus paraboloid hég igen jó közelítéssel *membránhégnek tekinthető*.

Ezen f_a/f_b arányokra vonatkozóan megállapítható, hogy a legkisebb hullámszámú szimmetrikus nyúlásmentes lehajlási alakok az $(f_a/f_b)^{1/2} = 7/5, 5/3, 9/5$ paraméterű héjak esetében adódnak. A felsorolt arányokhoz tartozó belső erők függvényeiben a (4.4) és (5.5) összefüggésekkel meghatározható p_{mn} tehertagok súlya nem jelentős, ezért ekkor a *nyúlásmentes alakváltozás nem játszik fontos szerepet*.

A nyílmagasságarány további csökkentésével — egyre jobban közeledve a terheinek döntő részét lemezszerűen viselő szeminormál héjhoz ($f_a/f_b = 1$) — a nyomatékok rohamosan megnövekszenek. Héjról lévén szó, a szerkezet a terheit — viszonylag nagy nyúlási merevsége révén — középfelületi erőkkel hordaná, így a kompatibilitás miatt a nyomatékok gyors növekedésével együtt a középfelületi erők nagysága erősen megnő. Amennyiben nem lenne a héjnak hajlítási merevsége, akkor a középfelületi erők a végtelen felé tartanának. Minthogy a héjnak van hajlítási merevsége, a hajlítási erők átveszik a terhelés döntő részét és a szeminormál hég esetében a középfelületi erők ismét viszonylag kismértékűek lesznek.

Mint már említettük, a szeminormál héjnál a *nyúlásmentes alakváltozás döntő szerepet játszik*: csak az $m \neq n$ egyenlőtlenséggel jellemezhető — nem

domináns — szimmetrikus teherkomponensekből keletkeznek középfelületi erők.

A többi teherkomponensnek megfelelő normálerők és csúsztatóerők hiányát a hajlítási hatások kénytelenek pótolni.

A 6. ábrán az előzőekben megadott geometriájú héj középfelületi erőkkel hordott teherhányadait tüntettük fel.

Erről ismét az olvasható le, hogy kb. az $f_a/f_b = (1,5 \div 2) \div 4$ tartományban a héj a terheit *túlnyomórészt középfelületi erőkkel hordja*.

Az előző részletes vizsgálatokat végrehajtottuk a vasbeton héjak leg-többjének geometriai arányait jól jellemző más a/h , f_b/b és a/b paraméterekre is (III—IV. táblázat). Azt találtuk, hogy *ezekben az esetekben is membránnak tekinthető* a HP-héj, ha kb. az $f_a/f_b = (1,5 \div 2) \div 4$ tartományban maradunk. A táblázatokban megadott értékekből — a Pucher-féle egyenlet segítségével — gyorsan meghatározhatjuk a középfelületi erők által hordott teherhányadot (6. ábra), s ebből is következtethetünk a membránhatás mértékére.

A III. táblázatban összefoglaltuk az $x = 0$, $y = 0$ pontbeli nyíróerők, valamint az $x = a$, $y = b$ pontbeli normálerők értékeit az $a/b = 1, 2, 3$, $a/h = 100, 150, 200$, $f_b/b = 0.1, 0.2, 0.3$, $f_a/f_b = 1, 1.2, 1.6, 2.25, 4$ geometriai arányokra vonatkozóan.

A IV. táblázatban az $x = 0$, $y = 0$ pontbeli csavarónyomatékok, továbbá az $x = a$, $y = b$ pontbeli hajlítónyomatékok és lehajlások értékei találhatóak (az előző geometriai arányokhoz). A táblázatok használatával kapcsolatban megjegyezzük, hogy azonos $(a/h) \cdot (f_b/b)$ paraméterekhez azonos belső erők tartoznak, ha az a/b oldalarány és az f_a/f_b nyílmagasságarány rögzített (vö. az (5.7)—(5.14) egyenletekkel).

Végezetül a számítások alapjául szolgáló Fourier-sorok *konvergenciájáról* írunk. A konvergencia vizsgálatokat az $x = 0$, $y = 0$ és $x = 2a$, $y = 2b$ pontokban végeztük el.

Azt találtuk, hogy a *szeminormál héj* ($f_a/f_b = 1$) középfelületi erőit 49 tagú Fourier-sorral számítva ($M = N = 13$), kb. 4%-kal kisebb értékeket kapunk, mint a sor 256 tagú összege ($M = N = 31$). Két taggal számolva ($M = 3$, $N = 1$) az eltérés kb. — 13%. A szeminormál héj lehajlásainak és nyomatékainak számításánál a sor első tagját ($M = N = 1$) is elegendő lett volna figyelembe venni (a max. eltérés kb. — 2%). Ez megfelel [23] síklemezre vonatkozó megoldásának.

A *normálhéj* ($f_a/f_b = 4$) középfelületi erőit 36, ill. 49 tagú Fourier-sorral meghatározva ($M = N = 11$, ill. 13) kb. 3, ill. 2%-kal kapunk kisebb (N_{xb}) illetve nagyobb (N_{yb}) értékeket, mint a 256 tagú sor összege. Két tagot figyelembe véve ($M = 3$, $N = 1$) N_{xb} -nél kb. +3%, N_{yb} -nél kb. +20% az eltérés. A normálhéj igen kismértékű hajlítónyomatékainak függvénye konvergál leglassabban, ti. a gyakorlat szempontjából elegendő pontosság eléréséhez legalább 256 tagú Fourier-sorokra ($M = N = 31$) volt szükség.

III. táblázat/1

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{xyb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yb}}{pa^2/f_b}$
0,1	100	1	1	0,1682	0	-0,1682
			1,2	-2,5237	-2,6533	-2,8367
			1,6	-1,2027	-1,2794	-1,4896
			2,25	-0,6105	-0,6356	-0,8780
			4	-0,2781	-0,2284	-0,5343
		2	1	-0,00014	0,0606	-0,0455
			1,2	-0,6550	-0,2692	-0,2112
			1,6	-0,8519	-0,3716	-0,2647
			2,25	-0,5651	-0,2293	-0,1977
			4	-0,2685	-0,0701	-0,1462
		3	1	-0,0207	0,0420	-0,0182
			1,2	-0,1282	0,0057	-0,0305
			1,6	-0,2866	-0,0466	-0,0495
			2,25	-0,3548	-0,0684	-0,0584
			4	-0,2531	-0,0314	-0,0497

III. táblázat/2

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{xyb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yb}}{pa^2/f_b}$
0,1	150	1	1	0,1776	0	-0,1776
			1,2	-3,1614	-3,2921	-3,4910
			1,6	-1,2659	-1,3344	-1,5670
			2,25	-0,6302	-0,6437	-0,9186
			4	-0,2866	-0,2070	-0,5793
		2	1	0,0235	0,0664	-0,0495
			1,2	-1,2038	-0,5508	-0,3587
			1,6	-1,0492	-0,4764	-0,3238
			2,25	-0,5931	-0,2453	-0,2140
			4	-0,2762	-0,0619	-0,1461
		3	1	-0,0204	0,0485	-0,0216
			1,2	-0,2541	-0,0292	-0,0481
			1,6	-0,4997	-0,1106	-0,0766
			2,25	-0,4764	-0,1015	-0,0762
			4	-0,2741	-0,0264	-0,0593

III. táblázat/3

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{zyb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yb}}{pa^2/f_b}$
0,1	200	1	1	0,1867	0	-0,1867
			1,2	-3,4685	-3,6031	-3,8160
			1,6	-1,2976	-1,3628	-1,6162
			2,25	-0,6414	-0,6439	-0,9406
			4	-0,2879	-0,1978	-0,5922
		2	1	0,0497	0,0686	-0,0512
			1,2	-1,7197	-0,8192	-0,4958
			1,6	-1,1394	-0,5289	-0,3533
			2,25	-0,6046	-0,2534	-0,2219
			4	-0,2805	-0,0593	-0,1515
		3	1	-0,0174	0,0523	-0,0229
			1,2	-0,4147	-0,0803	-0,0678
			1,6	-0,6839	-0,1700	-0,0992
			2,25	-0,5391	-0,1209	-0,0857
			4	-0,2798	-0,0238	-0,0641

III. táblázat/4

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{zyb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yb}}{pa^2/f_b}$
0,2	100	1	1	0,1867	0	-0,1867
			1,2	-3,4685	-3,6031	-3,8160
			1,6	-1,2976	-1,3628	-1,6162
			2,25	-0,6414	-0,6439	-0,9406
			4	-0,2879	-0,1978	-0,5922
		2	1	0,0497	0,0686	-0,0512
			1,2	-1,7197	-0,8192	-0,4958
			1,6	-1,1394	-0,5289	-0,3533
			2,25	-0,6046	-0,2534	-0,2219
			4	-0,2805	-0,0593	-0,1515
		3	1	-0,0174	0,0523	-0,0229
			1,2	-0,4147	-0,0803	-0,0678
			1,6	-0,6839	-0,1700	-0,0992
			2,25	-0,5391	-0,1209	-0,0857
			4	-0,2798	-0,0238	-0,0641

III. táblázat/5

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yzb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yb}}{pa^2/f_b}$
0,2	150	1	1	0,1984	0	-0,1984
			1,2	-3,7513	-3,8869	-4,1210
			1,6	-1,3415	-1,3938	-1,6805
			2,25	-0,6551	-0,6407	-0,9698
			4	-0,2835	-0,1931	-0,5874
		2	1	0,0955	0,0691	-0,0536
			1,2	-2,4939	-1,2236	-0,7012
			1,6	-1,2189	-0,5765	-0,3815
			2,25	-0,6214	-0,2623	-0,2306
			4	-0,2826	-0,0593	-0,1540
	3	1	-0,0072	0,0564	-0,0242	
		1,2	-0,8032	-0,2100	-0,1136	
		1,6	-0,9320	-0,2544	-0,1298	
		2,25	-0,5892	-0,1400	-0,0946	
		4	-0,2814	-0,0227	-0,0687	

III. táblázat/6

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yzb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yb}}{pa^2/f_b}$
0,2	200	1	1	0,2073	0	-0,2073
			1,2	-3,8893	-4,0240	-4,2757
			1,6	-1,3692	-1,4080	-1,7247
			2,25	-0,6651	-0,6319	-0,9932
			4	-0,2769	-0,1929	-0,5721
		2	1	0,1262	0,0683	-0,0554
			1,2	-2,9697	-1,4708	-0,8275
			1,6	-1,2605	-0,5983	-0,3963
			2,25	-0,6350	-0,2669	-0,2363
			4	-0,2803	-0,0611	-0,1525
	3	1	0,0063	0,0585	-0,0248	
		1,2	-1,2215	-0,3863	-0,1623	
		1,6	-1,0657	-0,3028	-0,1469	
		2,25	-0,6050	-0,1489	-0,0983	
		4	-0,2813	-0,0232	-0,0698	

III. táblázat/7

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{zpb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{pb}}{pa^2/f_b}$
0,3	100	1	1	0,1984	0	-0,1984
			1,2	-3,7513	-3,8869	-4,1210
			1,6	-1,3415	-1,3938	-1,6806
			2,25	-0,6551	-0,6407	-0,9698
			4	-0,2835	-0,1931	-0,5874
		2	1	0,0955	0,0691	-0,0536
			1,2	-2,4939	-1,2236	-0,7012
			1,6	-1,2189	-0,5765	-0,3815
			2,25	-0,6214	-0,2623	-0,2306
			4	-0,2826	-0,0593	-0,1540
	3	1	-0,0072	0,0564	-0,0242	
		1,2	-0,8032	-0,2100	-0,1136	
		1,6	-0,9320	-0,2544	-0,1298	
		2,25	-0,5892	-0,1400	-0,0946	
		4	-0,2814	-0,0227	-0,0687	

III. táblázat/8

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{zpb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{pb}}{pa^2/f_b}$
0,3	150	1	1	0,2110	0	-0,2110
			1,2	-3,9381	-4,0721	-4,3312
			1,6	-1,3797	-1,4121	-1,7419
			2,25	-0,6695	-0,6265	-1,0042
			4	-0,2737	-0,1927	-0,5641
		2	1	0,1366	0,0677	-0,0562
			1,2	-3,1336	-1,5554	-0,8709
			1,6	-1,2763	-0,6056	-0,4019
			2,25	-0,6408	-0,2683	-0,2386
			4	-0,2786	-0,0620	-0,1511
	3	1	0,0137	0,0592	-0,0250	
		1,2	-1,4248	-0,4225	-0,1860	
		1,6	-1,1076	-0,3189	-0,1526	
		2,25	-0,6089	-0,1518	-0,0995	
		4	-0,2811	-0,0237	-0,0701	

III. táblázat/9

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{N_{zb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yb}}{pa^2/f_b}$	$\frac{N_{yb}}{pa^2/f_b}$
0,3	200	1	1	0,2196	0	-0,2196
			1,2	-4,0468	-4,1786	-4,4558
			1,6	-1,4032	-1,4191	-1,7813
			2,25	-0,6861	-0,6094	-1,0245
			4	-0,2628	-0,2070	-0,5406
		2	1	0,1554	0,0658	-0,0579
			1,2	-3,4551	-1,7205	-0,9559
			1,6	-1,3137	-0,6213	-0,4147
			2,25	-0,6548	-0,2702	-0,2447
			4	-0,2710	-0,0723	-0,1456
	3	1	0,0371	0,0603	-0,0255	
		1,2	-1,9698	-0,6109	-0,2496	
		1,6	-1,1832	-0,3496	-0,1636	
		2,25	-0,6236	-0,1577	-0,1018	
		4	-0,2825	-0,0298	-0,0700	

IV. táblázat/1

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h \cdot 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_z \cdot 10^6}{pa^2}$	$\frac{-m_{xy} \cdot 10^6}{pa^2}$	$\frac{m_y \cdot 10^6}{pa^2}$
0,1	100	1	1	764,901	16340,02	13820,10	16340,02
			1,2	263,601	5582,01	5181,02	5652,10
			1,6	41,065	764,81	1302,01	916,32
			2,25	8,435	-22,96	719,70	212,11
			4	-1,376	-486,81	519,71	-33,73
		2	1	122,560	2529,01	4584,02	10110,02
			1,2	101,650	2097,03	3903,03	8421,20
			1,6	43,569	841,31	1914,02	3488,04
			2,25	13,127	177,22	907,74	947,90
			4	1,129	-181,60	541,31	26,21
	3	1	30,044	567,91	7628,10	5637,01	
		1,2	29,207	546,31	2372,02	5477,02	
		1,6	23,929	425,12	1542,31	4462,31	
		2,25	14,058	208,51	323,53	2565,70	
		4	3,124	-88,50	609,50	477,81	

IV. táblázat/2

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h \cdot 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_x \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{-m_{xy} \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{m_y \cdot 10^5}{pa^2}$
0,1	150	1	1	3880,202	16470,02	13670,11	16470,02
			1,2	736,901	3152,03	2996,03	3188,03
			1,6	96,422	378,21	757,23	460,42
			2,25	18,809	-135,82	470,12	102,83
			4	-4,895	-286,20	354,45	-32,12
		2	1	612,570	2579,31	4502,91	10191,12
			1,2	447,843	1779,02	9020,83	7035,33
			1,6	122,881	476,32	1142,34	1914,42
			2,25	31,337	83,60	543,12	437,21
			4	1,976	-103,71	349,73	4,37
	3	1	153,421	609,52	1759,72	5690,04	
		1,2	144,392	569,21	1671,13	5348,44	
		1,6	98,011	368,20	1206,72	3587,63	
		2,25	43,419	136,05	692,92	1521,12	
		4	6,988	-60,07	373,64	168,03	

IV. táblázat/3

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h \cdot 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_x \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{-m_{xy} \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{m_y \cdot 10^5}{pa^2}$
0,1	200	1	1	12273,10	16520,04	13590,10	16520,04
			1,2	1434,82	1990,20	1951,03	2015,53
			1,6	175,21	223,93	523,81	283,31
			2,25	32,80	-42,08	353,92	51,01
			4	-10,57	-189,51	269,42	-27,66
		2	1	1954,82	2601,23	4459,04	10260,12
			1,2	1098,41	1452,42	2617,73	5716,80
			1,6	239,74	296,50	764,91	1182,11
			2,25	56,99	47,06	386,81	259,02
			4	2,98	-67,02	265,21	-2,26
	3	1	486,64	627,71	1723,12	5714,81	
		1,2	438,31	561,73	1569,62	5136,31	
		1,6	243,30	297,62	946,61	2796,02	
		2,25	88,48	90,22	482,03	948,21	
		4	12,11	-40,17	264,61	71,68	

IV. táblázat/4

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h \cdot 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_x \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{-m_{xy} \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{m_y \cdot 10^5}{pa^2}$
0,2	100	1	1	767,04	16552,04	13590,10	16552,04
			1,2	89,68	1990,20	1951,03	2015,51
			1,6	10,95	223,93	523,81	283,31
			2,25	2,05	42,08	353,92	51,01
			4	-0,66	-189,51	269,42	-27,66
		2	1	122,18	2601,23	4459,04	10260,12
			1,2	68,65	1452,42	2617,73	5716,80
			1,6	14,98	296,50	764,91	1182,11
			2,25	3,56	47,06	386,81	259,02
			4	0,186	-67,02	265,21	2,26
	3	1	30,41	627,71	1723,12	5714,81	
		1,2	27,39	561,73	1569,62	5136,31	
		1,6	15,21	297,62	946,61	2796,02	
		2,25	5,53	90,22	482,03	948,21	
		4	0,757	-40,17	264,61	71,68	

IV. táblázat/5

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h \cdot 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_x \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{-m_{xy} \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{m_y \cdot 10^5}{pa^2}$
0,2	150	1	1	3885,61	16578,02	13554,03	16578,02
			1,2	217,85	1026,30	1099,12	1042,41
			1,6	25,22	109,51	359,78	147,93
			2,25	4,31	-54,33	244,74	11,39
			4	-1,78	-99,90	184,25	-19,81
		2	1	619,71	2628,12	4436,74	10378,03
			1,2	225,24	956,78	1757,23	3745,51
			1,6	36,37	150,03	461,87	592,16
			2,25	8,18	16,60	250,84	125,28
			4	0,33	-35,93	176,01	-9,28
	3	1	154,43	646,12	1713,62	5743,41	
		1,2	123,85	516,03	1403,52	4586,52	
		1,6	47,57	191,62	629,25	1698,04	
		2,25	13,83	45,42	286,44	438,47	
		4	1,64	-21,02	168,32	20,55	

PARABOLOIDHEIAK

IV. táblázat/6

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h \cdot 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_x \cdot 10^5}{pa^3}$	$\frac{-m_{xy} \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{m_y \cdot 10^5}{pa^2}$
0,2	200	1	1	12283,12	16602,12	13506,04	16602,12
			1,2	401,22	643,84	729,36	655,57
			1,6	45,29	59,99	261,09	89,11
			2,25	6,82	-59,27	191,76	-4,17
			4	-3,44	-57,99	140,97	-13,75
		2	1	1960,81	2637,31	4404,03	10459,02
			1,2	477,26	648,57	1217,12	2548,22
			1,6	66,80	89,10	320,08	365,95
			2,25	14,56	3,09	189,38	69,10
			4	0,44	-22,64	136,19	-10,90
	3	1	488,70	650,96	1695,12	5763,93	
		1,2	339,77	451,04	1216,22	3980,91	
		1,6	97,81	125,77	437,32	1087,62	
		2,25	25,49	26,23	201,81	244,48	
		4	2,85	-13,16	125,85	8,90	

IV. táblázat/7

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h \cdot 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_x \cdot 10^5}{pa^3}$	$\frac{-m_{xy} \cdot 10^5}{pa^2}$	$\frac{m_y \cdot 10^5}{pa^2}$
0,3	100	1	1	761,51	16578,2	13554,03	16578,2
			1,2	43,03	1026,3	1099,12	1042,41
			1,6	4,98	109,51	359,78	147,93
			2,25	0,85	-54,33	244,74	11,39
			4	-0,35	-99,90	184,25	-19,81
		2	1	122,41	2628,12	4436,74	10378,03
			1,2	44,49	956,78	1757,23	3745,51
			1,6	7,18	150,03	461,87	592,16
			2,25	1,62	16,60	250,84	125,28
			4	0,064	-35,93	176,01	-9,28
	3	1	30,51	646,12	1713,62	5743,41	
		1,2	24,46	516,03	1403,52	4586,52	
		1,6	9,40	191,62	629,25	1698,04	
		2,25	2,73	45,42	286,44	438,47	
		4	0,32	-21,02	168,32	20,55	

IV. táblázat/8

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_x 10^5}{pa^2}$	$\frac{-m_{xy} 10^5}{pa^2}$	$\frac{m_y 10^5}{pa^2}$
0,3	150	1	1	3886,80	16610,03	13490,12	16610,03
			1,2	101,53	533,90	619,55	544,21
			1,6	11,35	46,02	229,23	71,93
			2,25	1,59	-60,05	173,93	- 8,39
			4	-0,88	-44,65	126,23	-11,36
		2	1	620,68	2640,51	4391,81	10488,12
			1,2	125,88	544,19	1033,30	2142,63
			1,6	16,88	71,84	276,90	301,41
			2,25	3,62	- 1,11	169,58	51,70
			4	0,095	-18,44	122,84	-10,66
	3	1	154,69	652,41	1688,52	5773,72	
		1,2	99,51	418,39	1127,42	3685,41	
		1,6	25,52	104,01	373,95	891,99	
		2,25	6,43	20,57	176,08	192,45	
		4	0,71	-10,90	112,46	6,16	

IV. táblázat/9

$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w/h 10^{-5}}{p/E}$	$\frac{m_x 10^5}{pa^2}$	$\frac{-m_{xy} 10^5}{pa^2}$	$\frac{m_y 10^5}{pa^2}$
0,3	200	1	1	12286,10	16625,04	13455,12	16625,04
			1,2	185,35	335,34	379,13	342,80
			1,6	20,26	22,38	167,31	41,72
			2,25	2,13	- 58,47	137,08	-14,58
			4	-1,57	-20,08	96,01	- 6,20
		2	1	1963,21	2647,03	4365,61	10547,11
			1,2	246,51	345,32	679,47	1367,13
			1,6	30,70	42,32	196,20	187,99
			2,25	6,27	- 8,65	130,57	20,05
			4	0,11	-10,31	95,28	- 8,51
	3	1	489,36	655,22	1673,72	5802,31	
		1,2	246,49	329,52	891,89	2893,22	
		1,6	48,90	63,41	253,53	537,98	
		2,25	11,60	10,47	128,36	108,28	
		4	1,22	- 6,89	86,48	1,44	

6. Összefoglalás

Dolgozatunkban az alaprajzi vetületben egyenletesen megoszló terhű, lapos, oldalnyomásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjak hajlítási és membrán erőjátékának viszonyát elemeztük. A tárgyalás során nagy súlyt helyeztünk a *membránmegoldás létezésének és egyértelműségének*, valamint a *nyúlásmentes alakváltozási* lehetőségnek a vizsgálatára. Kitűnt, hogy a tárgyalta héjak erőjátékának jellegét alapvetően a *nyílmagasságarány* szabja meg.

Megállapítottuk, hogy ha valamely szinusz alakú teherkomponens nem egyensúlyozható ki véges nagyságú membránérőkkel, akkor az ezzel a teherkomponenssel azonos alakú nyúlásmentes lehajlási alakváltozásra képes a szerkezet. Összefoglaltuk, hogy a különböző nyílmagasságarányú héjakhoz milyen alakú jellegzetes nyúlásmentes lehajlási függvények tartoznak.

A vasbeton héjak túlnyomó többségére jellemző geometriai arányokhoz a hajlítási elmélettel meghatároztuk a belső erők jellegzetes értékeit, valamint néhány fontos esetben előállítottuk a belső erők alaprajzi tartománybeli elosztását is.

Kiderítettük, hogy a nyílmagasságarány függvényében miként változik a középfelületi erők által hordott teherhányad.

Elemzéseink alapján megállapítható, hogy a *szeminormál héj* kedvezőtlenebbül viselkedik, mint a megfelelő síklemez, mert a lemezénél nagyobb nyomatókai mellett a hajlítási erőkkel ellentétes hatású normál- és csúsztatóerők is fellépnek benne. A szeminormál héj erőjátékát döntő mértékben befolyásolja a *nyúlásmentes alakváltozás*.

A *normálhéjra* vonatkozóan teljesen megváltozik a szeminormál héj lemezszerű belső erő képe. A normálhéj hajlítási elmélettel kapott középfelületi erőit megfelelően közelítik a geometriai elmélettel számítható membrán-erők. Meghatároztuk azt a nyílmagasságarány tartományt, melyben a normálhéjhoz hasonlóan a hajlítónyomatók hatása elenyésző. Ebben a tartományban az oldalnyomásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjak stabilitási vizsgálatát jogos lineáris elmélettel elvégezni. Ezt a vizsgálatot egy következő cikkünkben hajtjuk végre [12].

IRODALOM

1. BELEŞ, A.—SOARE, M.: Das elliptische und hyperbolische Paraboloid im Bauwesen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin—Akademie-Verlag, Bukarest 1970
2. BÖLCSKEI, E.: Déformation des voiles minces. *Acta Techn. Hung.* 5 (1952), 489—506
3. CANDELA, F.: General Formulas for Membrane Stresses in Hyperbolic Paraboloidal Shells. *ACI Journal* (1960) September, 353—371
4. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. 3. Aufl. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962
5. FLÜGGE, W.: Stresses in Shells. 2. Ed. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973
6. FLÜGGE, W.—GEYLING, F. T.: A General Theory of Deformations of Membrane Shells. *International Association for Bridge and Structural Engineering* 17 (1957), 23—46

7. FRANK, PH.—MISES, R. v.: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Bd. I. 2. Aufl. Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1930
8. FRANZ, G.: Konstruktionslehre des Stahlbetons. 1.—2. Band. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1969
9. GOL'DENVEISER, A. L.: The Theory of Thin Elastic Shells. Pergamon, New York 1961
10. HAAS, A. M.: Entwurf und Konstruktion dünner Betonschalen. Werner-Verlag, Düsseldorf 1969
11. HRUBAN, K.: Die Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau. *Acta Techn. ung.* 7 (1953), 425—464
12. JANKÓ, L.: Oldalnyomásmentes, lapos, egyenletesen megoszló erőkkkel terhelt, nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjak stabilitása. *Műszaki Tudomány* (megjelenés alatt)
13. JANKÓ, L.: Nyereg alakú, oldalnyomásmentes, lapos, hiperbolikus paraboloidhéjak egyenletesen megoszló terhelés alatti egyensúlyi útjának nemlineáris vizsgálata. *Műszaki Tudomány* (megjelenés alatt)
14. KANTOROVICS, L. V.—KRÜLOV, V. I.: A felsőbb analízis közelítő módszerei. Akadémiai Kiadó, Budapest 1953
15. KOLLÁR, L.: Héjak nyúlásmentes alakváltozásai. *Építés- és Építészettudomány.* 3 (1971) 1, 19—38
16. KOLLÁR, L.: Schalenkonstruktionen, Sonderdruck aus dem Beton-Kalender 1974. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München—Düsseldorf 1974
17. MENYHÁRD, I.: Héjszerkezetek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966
18. REISSNER, E.: On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells. Boston Society of Civil Engineers 1955, 100—133
19. SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. VI. Partielle Differentialgleichungen der Physik. Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Porting, Leipzig 1954
20. SZMODITS, K.: Statik der Schalenkonstruktionen. B. G. Teubner V., Leipzig—Akadémiai Kiadó, Budapest 1966
21. TARNAI, T.: Existence and Uniqueness Criteria of the Membrane State of Shells. I. Hyperbolic Shells. *Acta Techn. Hung.* (megjelenés alatt)
22. TARNAI, T.: Edge Disturbances of Second-order Shallow Translational Shells on a Rectangular Base. *Acta Techn. Acad. Sci. Hung.* 74 (1973)
23. TIMOSHENKO, S.—WOINOWSKY—KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. Second Edition. McGraw Hill Book Company, New York—Toronto—London 1959
24. TYIHONOV, A. N.—SZAMARSKIJ, A. A.: A matematikai fizika differenciálegyenletei. Akadémiai Kiadó, Budapest 1966
25. VLASOV, V. Z.—GARAI, T.: Nyomatékmentes forgáshéjak kinematikai határozatlanságának feltétele. MTA VI. Műsz. Oszt. Közl. XIX (1956)
26. WLASSOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin 1958

Analyse des Verhältnisses zwischen Membran- und Biegeschnittkräften in sattelförmigen, flachen, normalkraftfrei gelagerten HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung. — Diese Abhandlung bildet den ersten Teil einer dreiteiligen Artikel-Serie. Der zweite bzw. der dritte Artikel behandeln die Stabilitätserscheinungen der sattelförmigen HP-Schalen, die entlang der Hauptkrümmungslinien durch Randbögen abgestützt sind, die in der horizontalen Richtung vernachlässigbare Biege- bzw. Drillsteifigkeiten besitzen. In der vorliegenden Abhandlung — vor der Stabilitätsuntersuchungen — werden folgende Themen behandelt: das Problem der Existenz und der Eindeutigkeit der *Membranlösung*, die Schwierigkeiten, die sich aus der *kinematischen Unbestimmtheit* der Fläche ergeben, und die Frage, bei welchen geometrischen Parametern (mit guter Annäherung) diese Schalen als *Membranschalen* zu betrachten sind.

Analysis of the Relationship between Membrane Forces and Flexural Forces in Saddle-Shaped Flat Hypar Shells not Submitted to Normal Forces, under Uniformly Distributed Load. — The paper is the first part of a series consisting of three parts. The 2nd and 3rd parts deal with the phenomena of the stability of the saddle-shaped hypar shells which are supported along the lines of the principal curvature by edge arches possessing flexural and torsional rigidity being negligible in the horizontal plane. In the paper at hand, prior to the investigations of the stability, the following problems will be discussed: the problem of existence and uniqueness of the *membrane solution*; the difficulties emerging from the *kinematic uncertainty* of the shell and the problem what are the geometric parameters on the basis of which these shells, with a close approximation, as *membrane shells* could be considered.

TALAJFIZIKA ÉS TERMODINAMIKA

KÉZDI ÁRPÁD*

AZ MTA RENDES TAGJA

és

LŐRINCZ JÁNOS**

[Beérkezett: 1979. szeptember 25-én]

1. Bevezetés

A talaj fizikai kutatása, viselkedési törvényszerűségeinek meghatározása annakidején — a talajmechanika megszületésekor — a talaj és az építmények kölcsönhatásainak első mennyiségi vizsgálatai során szinte teljes mértékben empirikus úton fejlődött. Az egyszerű, empirikus, vagy közelítésként feltételezett törvényszerűségek, természetesen, az analitikus elme számára alapot adtak ugyan széleskörű elméleti vizsgálatokra, az építmény azonban „agyaglábú óriás” maradt: az egzakt fizikai törvények nemismerése, a kísérleti meghatározás nehézségei, pontatlansága, az eredmények használhatóságát erősen korlátozták. Az is hamarosan kitűnt, hogy pusztán a mechanika törvényei nem lehetnek elegendők a jelenségek mennyiségi leírására; az alakváltozások és a feszültségek önmagukban nem nyújtanak ehhez elég alapot. Ezért a fejlődés során egyre újabb és általánosabb megközelítésekre került sor. Így a feszültségfogalom kibővítésével a folytonos, egyszerű közeg egyértelmű feszültségeihez bevezetésre kerültek a háromfázisú közeg pórusfeszültségei, a pórusvíz- és póruslevegő-feszültségek; elméletek születtek a képlékenységtannak véges alakváltozásokra, valamint alakváltozási sebességekre való alkalmazására; vizsgálat alá került a talajfizikai jelenségek „rate-process”-ként való kezelésének lehetősége, a talajok nagyszemcséjű — makromeritikus — folyadékokként való felfogása. Ezek a megközelítések rendkívül hasznosak voltak a talajfizika területén, és pl. a makromeritikus folyadékok fogalma, a szemcsés közegnek, mint az anyag egyik lehetséges halmazállapotaként való szemléletével már ma is sok jelenség jobb értelmezésére és megbízható mennyiségi leírására adott lehetőséget. Az említett részterületek továbbfejlesztése, és az egész talajfizikai kutatás előrehaladása azonban előbb-utóbb bele kell, hogy torkolljon a természet legáltalánosabb, alapvető, a világ összes folyamatát irányító törvényeinek birodalmába, a *termodinamika* területére, amely egyedül képes arra, hogy a jelenségeket összefüggéseiben feltárja, a természetnek ezt a területét is magyarázza s egységes képbe illessze. Erre tesz kísérletet ez a tanulmány; szemcsés közegekre alkalmazza a termodinamika alaptörvé-

* Prof. Dr. Kézi Árpád, 1012 Budapest, Lógodi u. 9.

** Lőrincz János, 2092 Budakeszi, Arany J. u. 15.

nyeit és egyben példát mutat a gyakorlati alkalmazásra. A talajfizika törvényeinek termodinamikai értelmezése természetesen még messze van a teljességtől, még nagyon sok elvi és gyakorlati kutatásra van szükség ahhoz, hogy a kép egységes legyen. A következők mindössze első próbálkozásnak tekinthetők, de mégis az irány helyesnek tűnik.

2. Alapfogalmak

A földön minden mérhető jelenség nagysága kifejezhető a hosszúság, az idő és a tömeg egységeivel. A vizsgált jelenség bonyolultságának növekedésével előnyösnek tűnt másodlagos alapegységek bevezetése, melyeknek használata a tudományban és a műszaki alkalmazásokban egyszerűsítést eredményezett. Ilyen volt pl. a gyorsulás (cm s^{-2}), az erő (cm gs^{-2}) és a munka vagy energia ($\text{g cm}^2 \text{s}^{-2}$). Különösen hasznosnak bizonyult az energia fogalma a különböző típusú bonyolult fizikai és kémiai jelenségek leírásában és vizsgálatában. E fogalom egyik nagy előnye az, hogy az energia különféle tudományos módon könnyen mérhető.

Az emberiségnek az energiával kapcsolatos tapasztalatai a termodinamikában szerveződtek tudománnyá. E tudomány lényege a következő alapvető törvényekbe sűrítendő:

1. Energia nem hozható létre és nem semmisíthető meg, csak megjelenési alakja változik. (Az atomfizikában figyelembe kell venni a tömeg energiaegyenértékét.) E törvény alapján tudjuk a fizikai és kémiai folyamatokban az energiákat és az energia-változásokat mennyiségileg számontartani.

2. Minden természetes rendszerben létezik egy tipikus függvény, mely a rendszert érintő természetes folyamatok során vagy állandó marad (reverzibilis folyamatok), vagy növekszik (irreverzibilis folyamatok). CLAUDIUS ezt a függvényt a rendszer *entrópiájának* nevezte. Az entrópia a rendszer hőenergia-tartalmának és abszolút hőmérsékletének hányadosa. A teljes energia és a hőtartalom különbsége a szabad energia, amely munkává, vagy más energiává alakítható.

3. Az abszolút zérus hőmérséklet felé közeledve, a szabad energia és a belső energia hőmérsékleti együtthatói zérussá válnak. Ezért elméletileg lehetetlen az abszolút zérus hőmérséklet elérése. Másfelől, ez a tétel lehetővé teszi, hogy bármely rendszerhez és hőmérséklethez, melyeknek ismerjük fajlagos hőadatait, kiszámítsuk az abszolút entrópiákat.

A fenti alapvető törvények szuverenitásának engedelmeskedve, a termodinamikának a tényleges jelenségekre és folyamatokra való alkalmazására többféle methodika fejlődött ki. PLANCK, a termodinamikát tárgyaló híres könyvének első kiadásában e módszerek közül három különböző típusút említ.

Az elsőt a hő kinetikus elmélete képviseli, ami az atomok, ionok, molekulák és az anyag diszkrét tömegkomponenseinek mozgásában nyilvánul meg. Ez az elmélet kísérletet tesz arra, hogy a termodinamika törvényeit mechanisztikusan értelmezze. Ideális gázokra, tökéletes kristályokra és híg oldatokra jól felhasználható. A legtöbb, a kutató és a mérnök számára fontos tényleges rendszerek esetén azonban fokozódóan bonyolulttá válik, ami továbbfejlesztését lehetetlenné teszi. Megbízhatósága eleve nem tételezhető fel, alkalmazhatóságát minden területen a termodinamika fő törvényeivel ellenőrizni kell.

A tisztán kinetikai megközelítés nehézségeit HELMHOLTZ és követői elkerülték. Elfogadják, hogy a hő természete kinetikus, mechanikai modellt azonban nem állítanak fel. Ez nagyobb pontosságot tesz lehetővé, a módszer azon a területen, ahol alkalmazhatósága bebizonyosodott, matematikailag szigorúbban kapcsolható és rendszerezhető. Figyelmen kívül hagyva viszont a tisztán kinetikus elmélet intuitív és elképzelt elemeit, ez a módszer nem szolgáltat célszerű eszközöket új tudományos területek feltárásához.

A harmadik és eddig leginkább eredményekre vezető megközelítés magától PLANCK-tól származik. Ez a módszer hatalmas empirikus tudástömegre alapul, melyet a termodinamika alapelveinek alakjában korszerűen absztrahálunk, és felhasználja a kinetika alkotó szerszámain, ismeretlen területek feltárására, s HELMHOLTZ tisztán racionális eszközeit az újonnan meghódított területek szigorú rendszerezésére. Ez a megközelítés rendkívül értékesnek bizonyult a modern fizika és kémia fejlődésében. Az intuitív elemek következtében azonban a levezetések csak akkor fogadhatók el, ha az eredményeket kísérletek és megfigyelések igazolják.

Mielőtt a talajfizikai jelenségek — itt helyesebb ugyan a „folyamatok” szó használata — tárgyalásába kezdenénk, néhány alapfogalmat kell definiálnunk, különös tekintettel az *épitőmérnök* olvasókra, kiknek szakterülete a termodinamikától távol esik. A részletesebb tájékoztatást kívánó olvasó számára utalunk az irodalomra.

A fizika szemlélete szerint a világban „rendszerek” léteznek, a termodinamika e fizikai rendszerek nyugalmi állapotával és állapotváltozásainak törvényszerűségeivel foglalkozik. Egy rendszer belső állapotát az E belső energia jellemzi; ez az anyagi testnek, mint diszkrét rendszernek a *szerkezeti* energiája; nem tartalmazza a rendszer kinetikus és potenciális energiáját. A rendszer belső energiája a rendszeren végezhető adiabatikus munka alapján értelmezhető. Ez a tiszta mechanikai munka mindig potenciális, ami azt jelenti, hogy

$$\int_1^2 dA = E_2 - E_1 \quad (1)$$

ahol dA az elemi munka differenciális kifejezése, 1 és 2 pedig a kezdő és a végállapotot jelenti; az integrálást olyan állapotoknak megfelelő görbén végezzük, amely állapotok tisztán mechanikai munkavégzéssel elérhetők. GIBBS nyomán

E-t adiabatikus potenciálnak is nevezzük. Az adiabatikus munkavégzés csak kvázisztatikus folyamatban valósítható meg, azaz olyankor, amikor az 1-ből a 2-be való átmenet egymáshoz igen közel álló egyensúlyi állapotok sorozatából áll. Nem adiabatikus munkavégzés esetén az (1) egyenlet már nem áll fenn.

Adott test belső energiájának megváltozását, ami a különböző típusú változások szuperpozíciója, a következő alaptétel jellemzi. Ha egyidejűleg többféle kölcsönhatás is lehetséges, akkor a belső energia megváltozása az egyes kölcsönhatásokhoz tartozó transzportokból additive tevődik össze:

$$dE = \sum_{i=1}^n dE_i. \quad (2)$$

Ez a termodinamika első főtétele.

A fizikai rendszerek között létrejövő kölcsönhatások egy-egy jellemző ún. extenzív és intenzív mennyiséggel kapcsolatosak. Minden olyan fizikai mennyiséget, amely annak felosztása után az egyes részek összegeként, additíve állítható újból elő, *extenzív mennyiségnek* nevezünk. A rendszer extenzív mennyiségei tehát a rendszer részekre osztásakor szintén részekre osztódnak. Ilyen pl. a térfogat, a részecskeszám, stb. Az intenzív mennyiségek a kiterjedéstől független, lokális mennyiségek; részekre osztáskor nem osztódnak. Ilyen pl. a nyomás, a hőmérséklet, stb. A tapasztalat azt mutatja, hogy minden egyes termodinamikai kölcsönhatáshoz tartozik egy-egy jellemző tulajdonság, amelyeknek a két testre vonatkozó egyenlősége az egyensúly szükséges és elegendő feltétele. Az ilyen tulajdonságokat empirikus intenzitásparamétereknek nevezzük.

Két fizikai rendszer közötti kölcsönhatás során az extenzív mennyiségek addig áramlanak az egyik rendszerből a másikba, míg a megfelelő intenzív mennyiségek ki nem egyenlítődnek. A folyamatok tehát az intenzív mennyiségek kiegyenlítődési tendenciája következtében végbemenő transzportjelenségek. A *termodinamika második főtétele* kimondja, hogy az egyes kölcsönhatásokat jellemző intenzív mennyiségek kiegyenlítődési folyamata *irreverzibilis*. Ezt az irreverzibilitást — a kiegyenlítődéstre való törekvést — úgy fejezhetjük ki, hogy az x_i extenzív mennyiség $\rho_i(r, t)$ sűrűségeloszlását meghatározó

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} j = q_i$$

kontinuitási egyenletben a j_i konduktív áramsűrűség az y_k intenzív mennyiségek gradienseivel arányos:

$$j_i = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} \nabla y_k. \quad (3)$$

Egy test belső energiája (E) a következő egyenlettel fejezhető ki:

$$E = TS - pV + \mu N, \quad (4)$$

ahol

S — az entrópia,
 V — a térfogat,
 T — a hőmérséklet,
 p — a nyomás,
 μ — a kémiai potenciál,
 N — a részecskék száma.

A belső energia megváltozása:

$$dE = TdS - pdV + \mu dN. \quad (4a)$$

A (4a) relációban a dE kivételével a többi mennyiség nem teljes differenciál, ezért a teljes differenciál hiányzó részei energetikailag kompenzálják egymást:

$$SdT - Vdp + Nd\mu = 0. \quad (5)$$

Ez az ún. *Gibbs–Duhem*-reláció.

A belső energia (4) kifejezése alapján értelmezhetők a termodinamika alapvető függvényei. Így az egymással csak mechanikai érintkezésben levő rendszerek együttes energiája az *entalpia*:

$$H = E + pV = TS + \mu N. \quad (6)$$

A termikus kapcsolatban levő rendszerek a *szabad energiával* jellemezhetők:

$$F = E - TS = -pV + \mu N. \quad (7)$$

Az együttes mechanikai és termikus rendszer kontaktusa a *szabad entalpia*:

$$G = E - TS + pV = \mu N. \quad (8)$$

A fizikai rendszerek extenzív mennyiségeinek sűrűsége, valamint a sűrűségek hely és idő szerinti eloszlása a rendszer állapotát egyértelműen meghatározza. A rendszer konvektív áramlását a dinamikai extenzív mennyiségek jellemzik.

Az anyagi rendszer, általánosabban a fizikai tér állapotváltozásait meghatározó egyenletek kétféleképpen lehetnek: *mérlegegyenletek* és *állapotegyenletek*. A mérlegegyenletek az extenzív mennyiségek áramlását írják le, az állapotegyenletek pedig az ún. állapothatározók közötti összefüggéseket fejezik ki.

3. Konvektív és konduktív áramok kontinuumokban

A fizikai rendszerek extenzív mennyiségeinek sűrűsége és e sűrűségek hely és idő szerinti eloszlása, vagyis változása egyértelműen meghatározza a rendszer állapotát. Az állapotot számszerűen jellemző extenzív mennyiségek egyik csoportja dinamikus jellemző (impulzus, impulzusmomentum, kinetikus energia); értékük független a belső energiától. A dinamikai extenzív mennyiségek a rendszer *konvektív* — szállítási — áramlását jellemzik.

A termodinamikai kölcsönhatásokat jellemző extenzív mennyiségek a kiegyenlítődési folyamatok következtében a rendszer *konduktív* (vezetési) áramlásával kapcsolatosak.

Valamely $\varrho_i(r, t)$ sűrűségű extenzív mennyiség áramlásának mérleg-egyenlete (itt r a hely vektora, t az idő):

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{j}_i + j_i) = q_i, \quad (9)$$

ahol

$j_i = \varrho_i \bar{v}$ konvektív áramsűrűség
 (\bar{v} a makroszkopikus áramlási sebesség vektora),
 j_i a konduktív áram sűrűsége,
 q_i az i -edik extenzív mennyiség forrásának sűrűsége.

A termodinamikai folyamatok kiegyenlítődési folyamatok, ezért a konduktív áramokkal kissé részletesebben kell foglalkozni.

A konduktív áramok nagysága a

$$\frac{d\varrho_s}{d\varrho_i} = \varphi_i \quad (10)$$

(ϱ_s : entrópiasűrűség,
 ϱ_i : az i -edik ext. mennyiség sűrűsége)

entropikus intenzív mennyiségek inhomogenitásától függ. Az inhomogenitás mértékét az ún. *általános erő*k mérik (\bar{X}_i):

$$\bar{X}_i = \nabla \varphi_i. \quad (11)$$

Az i -edik extenzív mennyiség konduktív áramsűrűségét az *Onsager-féle vezetési törvény* írja le:

$$j_i = \sum_{(k)} L_{ik} \bar{X}_k, \quad (12)$$

ahol az L_{ik} mennyiségek a *vezetési együtthatók*. Ezek alapján felírható a mérleg-egyenletek részletes alakja:

$$\frac{\partial \varrho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\varrho_i \bar{v} + \sum_{(k)} L_{ik} \bar{X}_k \right) = q_i. \quad (13)$$

A (13) mérlegegyenlet elvben valamennyi extenzív mennyiség áramára felírható. A valóságban már az L_{ik} vezetési tényezők meghatározása is nehézségeket okozhat ugyanúgy a mérlegegyenlet megoldása pedig valamennyi extenzív mennyiség transzportjára — néhány szélsőségesen egyszerű eset kivételével — leküzdhetetlenül nehéz.

Ez tekinthető a *fenomenologikus* termodinamika lényegének; a gyakorlat számára használható eljárást diszkrét rendszerekre a statisztikus mechanika szolgáltat.

A statisztikus mechanika olyan deduktív módszer, amely a fenomenologikus termodinamika törvényeit az atomi világ dinamikai alapelveivel magyarázza a valószínűségelmélet logikája segítségével.

Egy makroszkopikus rendszer állapotát az E energia, a rendszerben levő különböző részecskék N_A, N_B, \dots száma, a rendszert tartalmazó „doboz” V térfogata határozza meg. Ezen extenzív mennyiségek konkrét értéke a rendszert alkotó részecskék többféle állapotával is megvalósítható. A lehetséges állapotok száma a rendszer termodinamikai súlyát adja (Ω), melynek logaritmus a *Boltzmann-reláció* szerint a rendszer entrópiájával azonos:

$$S(E, N_A, N_B, \dots, V) = k \ln \Omega(E, N, V). \quad (14)$$

A továbbiakban a rendszert meghatározó belső energiatagok közül csak a mechanikai energiával és a minden statisztikus rendszerre meghatározható entrópiával foglalkozunk, mint extenzív mennyiségekkel.

4. A rendszer mechanikai energiája

A fizikai rendszer pV mechanikai energiája a rendszer deformációja során megváltozik. dV megváltozás esetén az elemi munka:

$$dA = -pdV. \quad (15)$$

A V térfogatú rendszeren végzett összes munka:

$$A = \int_{(V)} dA = \int_{V_1} -pdV. \quad (16)$$

Térfogatcsökkenés esetén $dV < 0$, így A pozitív előjelű. Talajok esetében p -t a $[\sigma]$ feszültségi tenzor, a térfogatváltozást pedig a deformációs vektor $[S]$ derivált tenzora helyettesíti. A két tenzor skalár értékű direkt szorzata adja az elemi munkát:

$$dA = [\sigma] : (\nabla \bar{o} \bar{s}) = [\sigma] : [s], \quad (17)$$

ahol

$\nabla \bar{o} \bar{s}$ a nablaoperátor és az \bar{s} deformációs vektor diadikus szorzatát,
 $a :$ szimbólum pedig a direkt szorzatot jelenti.

A dA skaláris alakban:

$$dA = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \left[\frac{\partial s_i}{\partial x_i} + \frac{\partial s_k}{\partial x_k} \right]. \quad (18)$$

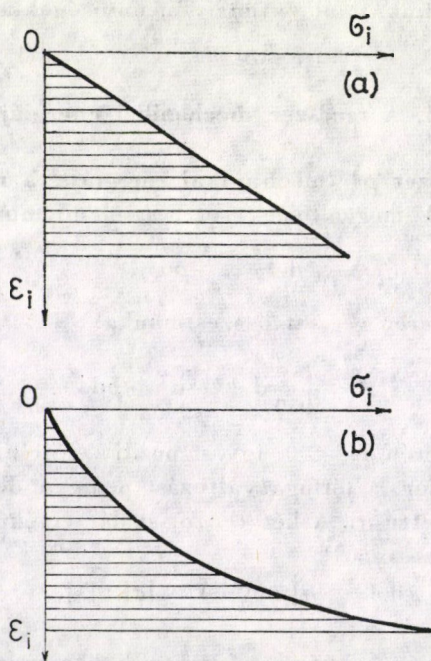
Mind a feszültségi, mind az alakváltozási tenzor helyettesíthető a saját koordinátarendszerükön értelmezhető sajátvektorokkal. A sajátvektorok sajátértékei a főfeszültségek és főnyúlások. Ha egy rendszer minden pontjában ismertek a főfeszültségek és főnyúlások irányai és nagyságai, akkor az elemi munka ezek segítségével is felírható:

$$dA = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (19)$$

A rendszeren végzett munka a (19) teljes térfogatra való integrálásával állítható elő. A $\sigma_i \varepsilon_i / 2$ mennyiségek rugalmas testek esetén a $\sigma_i - \varepsilon_i$ -diagram (1. ábra) háromszögének területével azonosak (a), azaz integrálást jelentenek:

$$dA_i = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma_i d\varepsilon_i. \quad (20)$$

Nem lineáris alakváltozás esetén a (20) integrál az 1b. ábrán bevonalkázott területet jelenti.



I. ábra. Az alakváltozási munka. a — lineáris; b — nem lineáris alakváltozás

A fenti eljárás általában csak elemi kis térfogatokra érvényes, de pl. kompresszió esetén, amikor $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ és ε_1 értéke a minta minden térfogat-elemére azonos, a teljes rendszeren végzett munka egyszerűen számítható:

$$A = V_0 dA = V_0 \int_{\theta}^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon. \quad (21)$$

Triaxiális kísérlet esetén a (19) függvényt kell a teljes térfogatra vonatkoztatva integrálni. Az integrálást — hengeres mintáról lévén szó — hengerkoordináták segítségével végezhetjük el (2. ábra).

A munka nagysága tehát rugalmas alakváltozás esetén:

$$A = \frac{1}{2} \int_{(V)} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dV.$$

Továbbá

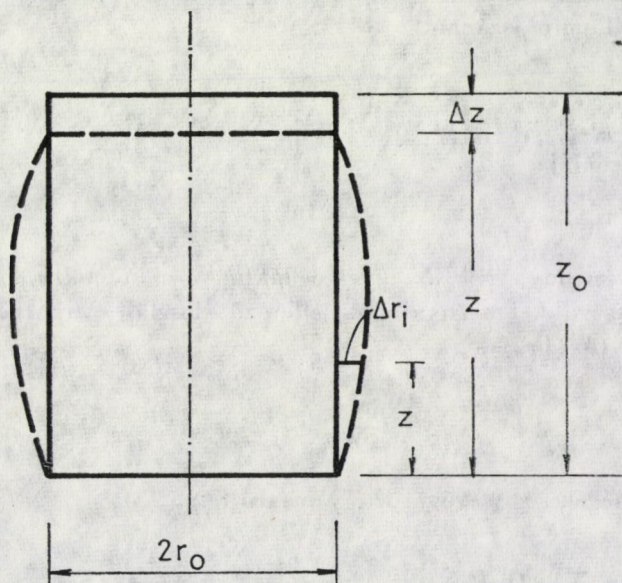
$$\sigma_1 = \sigma_2,$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r, \text{ és } r = r_0(1 + \varepsilon_r), \quad z = z_0(1 - \varepsilon_z),$$

így

$$A = \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{r_0(1+\varepsilon_r)} \int_{z=0}^{z_0(1-\varepsilon_z)} \left(\sigma_z \frac{z_0 - z}{z_0} + 2\sigma_r \frac{r_0 - r}{r_0} \right) r dz dr d\varphi. \quad (22)$$

Az r , illetve ε_r konkrét nagyságainak ismeretében a (22) integrálás numerikusan elvégezhető.



2. ábra. Alakváltozás a triaxiális kísérletben

A mechanikai munka csak akkor alakul át teljes mértékben a rendszer belső energiájává, ha az állapotváltozás adiabatikus (izentropikus). A belső energia megváltozását leíró

$$dE = TdS - pdV + \mu dN$$

összefüggésben a szemcseszám változatlansága miatt $\mu dN = 0$. A rendszer összenyomásakor $dV < 0$, így

$$dE = TdS + pdV$$

írható. $dE = pdV$ csak abban az esetben lehetséges, ha $TdS = 0$, ami $dS = 0$ -ra, azaz az entrópia változatlanságára vezet.

5. A talajok entrópiája

Az entrópia tetszőleges statisztikus sokaságra értelmezhető, mint a sokaság rendezettségi (rendezetlenségi) foka.

Ha egy sokaságot alkotó objektumok valamilyen tulajdonság alapján megkülönböztethetők egymástól, vagy az adott tulajdonság azonos nagyságú intervallumaiból álló cellákba sorolhatók, akkor a sokaság lehetséges állapotainak száma, így entrópiája is meghatározható.

Legyen az 1., 2., . . . i . cellában rendre N_1, N_2, \dots, N_i számú objektum. A lehetséges állapotok száma

$$\Omega = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_i!}$$

A sokaság entrópiája

$$S = \ln \Omega.$$

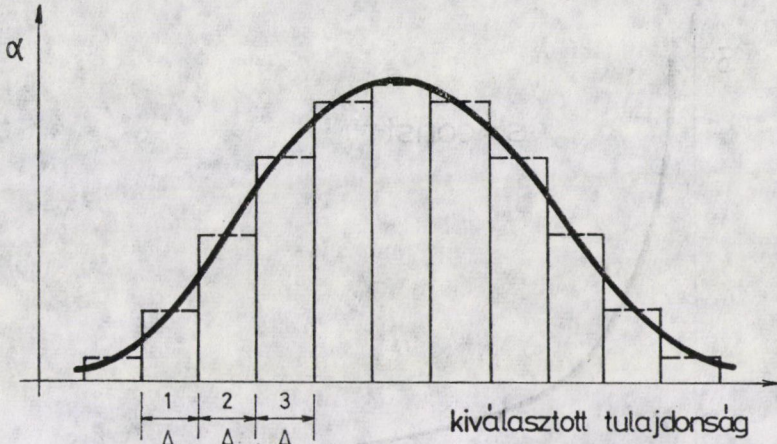
Az $\alpha_i = N_i/N$ mennyiségek az egyes cellákba sorolt objektumok gyakorisági mutatói, segítségével a sokaságot jellemző eloszlás gyakorisági görbéje is megrajzolható (3. ábra).

Természetesen

$$\sum_{(i)} \alpha_i = 1.$$

Az α_i mennyiségek segítségével Ω így írható fel:

$$\Omega = \frac{N!}{(\alpha_1 N)! (\alpha_2 N)! \dots (\alpha_i N)!}.$$



3. ábra. Adott jellemző tulajdonság gyakorisági görbéje

Az $S = \ln \Omega$ entrópia a Stirling-formula segítségével számítható ki. Így

$$S \approx N \left(\alpha_1 \ln \frac{1}{\alpha_1} + \alpha_2 \ln \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \alpha_i \ln \frac{1}{\alpha_i} \right).$$

Ha a kiválasztott tulajdonság, amely alapján a sokaságot statisztikusan jellemezzük, egyúttal az egyes objektumok saját energiaállapotát is jellemzi, akkor a fentebb kiszámított entrópia — egy alkalmas konstanssal szorozva (*Boltzmann-állandó*) — a belső energia egyik extenzív mennyisége.

6. A talajmodell termodinamikai vizsgálata

Tekintsünk egy ideális talajmodellt. Tételezzük fel, hogy a talaj azonos átmérőjű gömbszemcsékből és ezekkel azonos alakú és méretű pórusokból áll. Egy részecske térfogata:

$$V' = \frac{d^3 \pi}{6}.$$

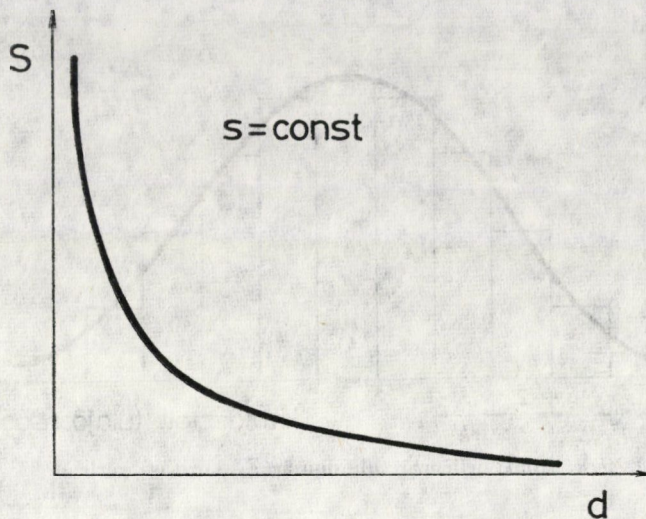
A $V = 1$ térfogatú térrészben $N_s = s/V'$ a szilárd szemcsék, $N_l = l/V'$ a pórusok száma. s és l a talajt alkotó két fázis térfogataránya:

$$N = N_s + N_l, \quad \frac{s}{V'} + \frac{l}{V'} = \frac{1}{V'} = N.$$

Az entrópiasűrűség (egységnyi térfogatú térrészről lévén szó):

$$S = -N \left(\frac{N_s}{N} \ln \frac{N_s}{N} + \frac{N_l}{N} \ln \frac{N_l}{N} \right)^*$$

* A továbbiakban S a térfogategységre jutó entrópia értékét, vagyis az entrópia sűrűségét jelöli.



4. ábra. Az entrópia változása a szemcseátmérővel

azaz

$$S = -N(s \ln s + l \ln l).$$

A zárójelben levő mennyiség a fajlagos entrópiásűrűség, azaz az entrópiásűrűségnek egy részecskére eső része.

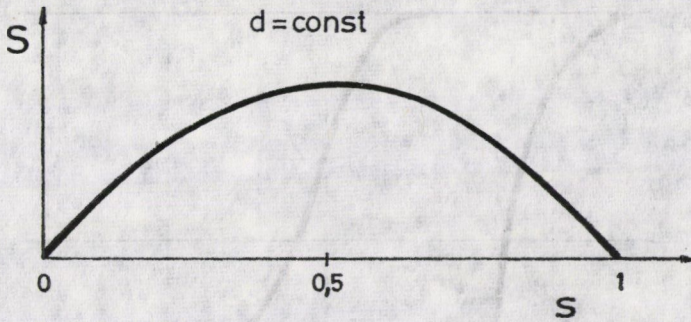
A teljes entrópia extenzív, de a fajlagos entrópiásűrűség már intenzív mennyiség. Látható tehát, hogy a talaj fázisjellemzői entropikus jellegű intenzív mennyiségek.

Ha a V térfogatú térrészt $s = \text{const.}$ mellett egyre kisebb szemcsékkel töltenék ki, akkor az entrópiásűrűség az átmérő csökkenésével a 4. ábra szerint rohamosan növekednék.

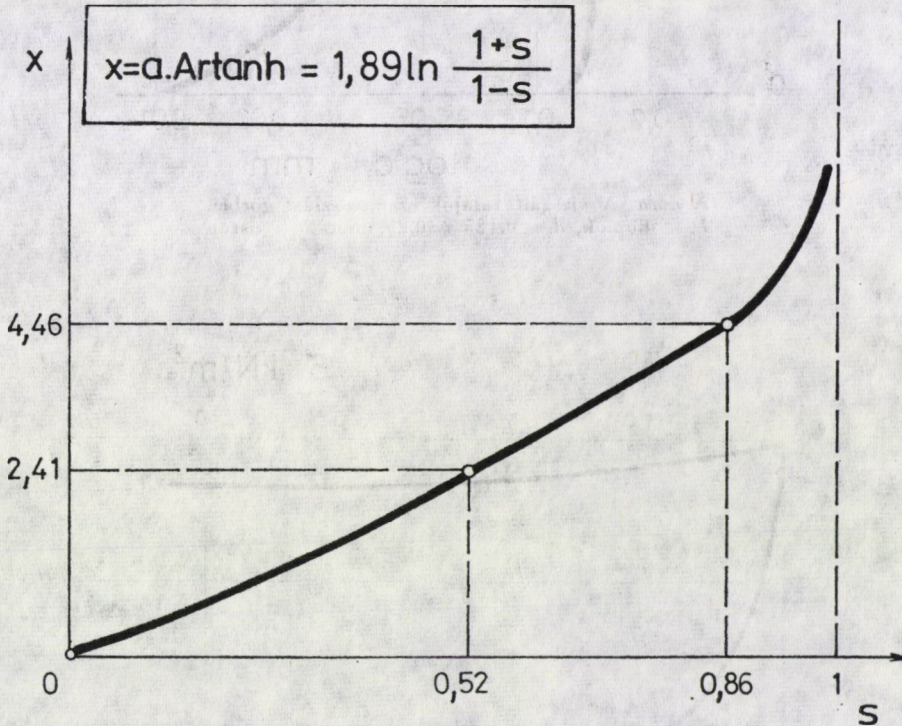
Ha a d átmérő nem változik és a V térrészbe egyre több szemcsét préselünk be, a fajlagos entrópiásűrűség változását az 5. ábra mutatja.

A fenti idealizált példában a szemcsék és hézagok aránya $sd/(ld)=1$ volt, ahol d a szilárd, ill. légnemű szemcsék „átmérője”. A valóságban ez az arány más.

Az $sd/(ld) = x$ arány meghatározására négy támpontunk van. Az $s = 0$ esetben $sd = 0$, $x = 0$. Az $s = 1$ esetén a közeg nem tartalmaz pórusokat, $ld = 0$, $x = \infty$. Támpontul szolgálhat még az azonos nagyságú gömbszemcsékből álló halmaz leglazább és legtömörebb állapota esetére meghatározható x arányszám is. Az említett halmaz legtömörebb állapotában $s = 0,86$, $x = 4,46$, leglazább állapotában $s = 0,52$, $x = 2,41$. Mivel x értéke az $s = 0$ esetben zérus, az $s = 1$ esetben végtelen, kézenfekvő közelítés az $x = a \cdot \text{Artanh } s$ (6. ábra).



5. ábra. Az entrópia és a tömörség összefüggése



6. ábra

7. A termodinamika alkalmazása a talaj kompressziós vizsgálatára

A kompressziós kísérletnek alávetett talajminta feszültségi és alakváltozási állapota, mint ismeretes,

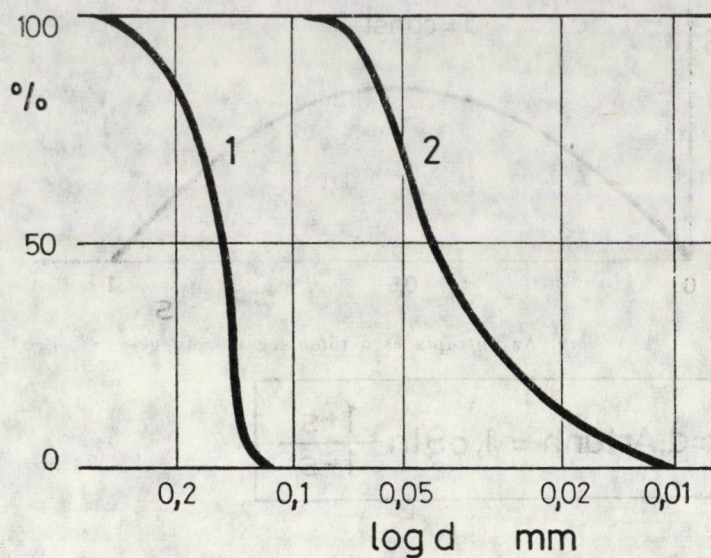
$$\sigma_x = \sigma_y = K\sigma_z,$$

$$\sigma_z = p,$$

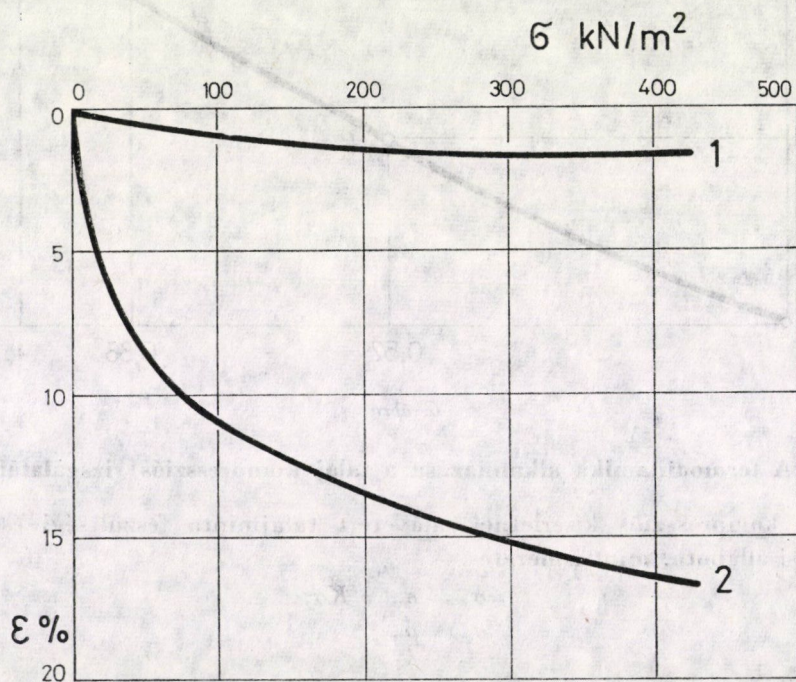
és

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0,$$

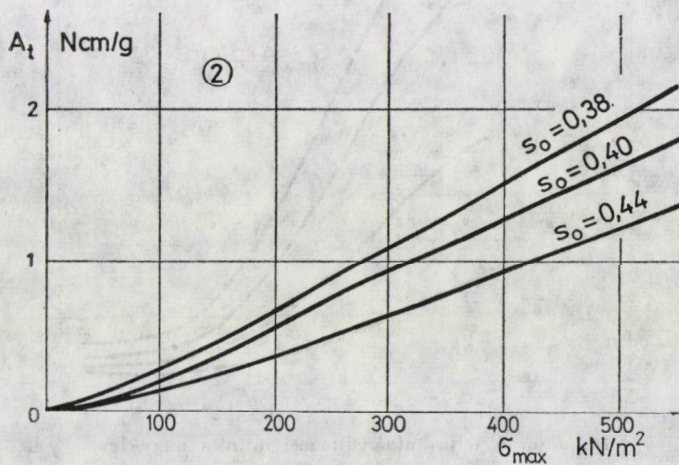
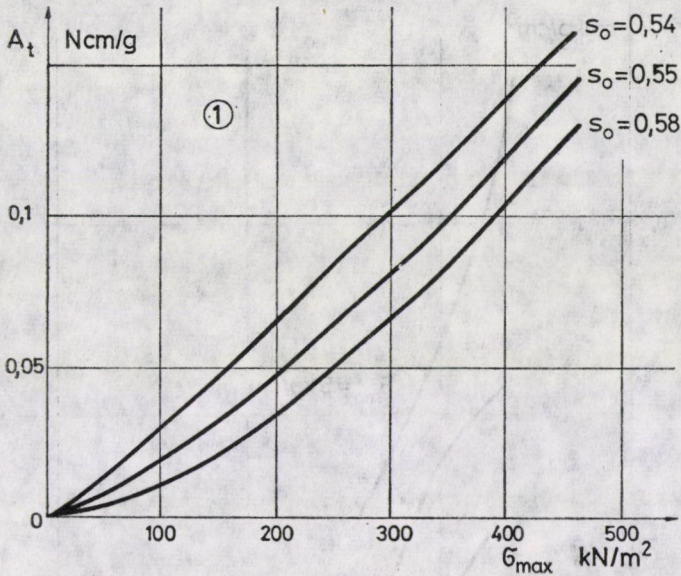
$$\varepsilon_z = f(\sigma_z) = f(p).$$



7. ábra. A vizsgált talajok szemeloszlási görbéi.
1 - homok, $d = 0,125 \div 0,25$ mm; 2 - iszap

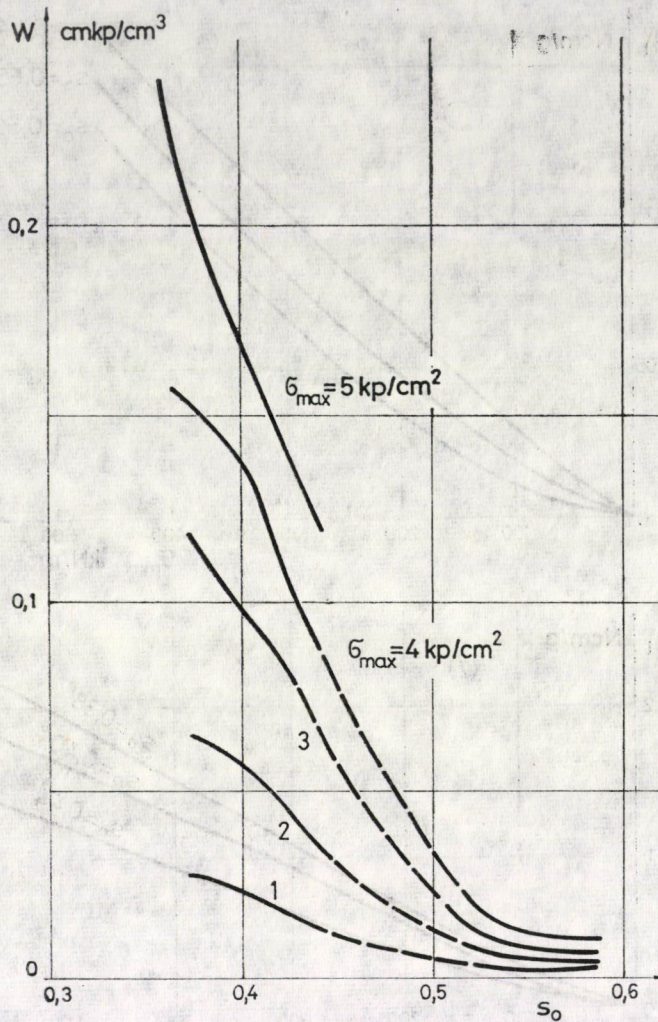


8. ábra. A vizsgált talajok légszáraz állapotban meghatározott kompressziós görbéje. 1 - homok, 2 - iszap



9. ábra. A tömegegységre jutó teljes térfogatváltozási munka a kompressziós feszültség függvényében

A kompressziós kísérletben alkalmazott erő az összenyomódás során munkát végez, a talajminta pedig tömörebb lesz. A vizsgált talajok szemeloszlási görbéi a 7. ábrán láthatók. Légszáraz állapotban meghatározott kompressziós görbéküket a 8. ábra mutatja. A tömegegységre jutó teljes térfogatváltozási munkát, σ_1 függvényében a 9. ábra, a térfogategységre jutó teljes alakváltozási munkát pedig mindkét talajra a 10. ábra szemlélteti. Az ábra az adott feszültség eléréséig ($\sigma_{max} = 100 \div 150$ kN/m²) végzett munkát adja a kezdeti tömörség (s_0) függvényében, homok és iszap esetén.



10. ábra. A teljes alakváltozási munka nagysága

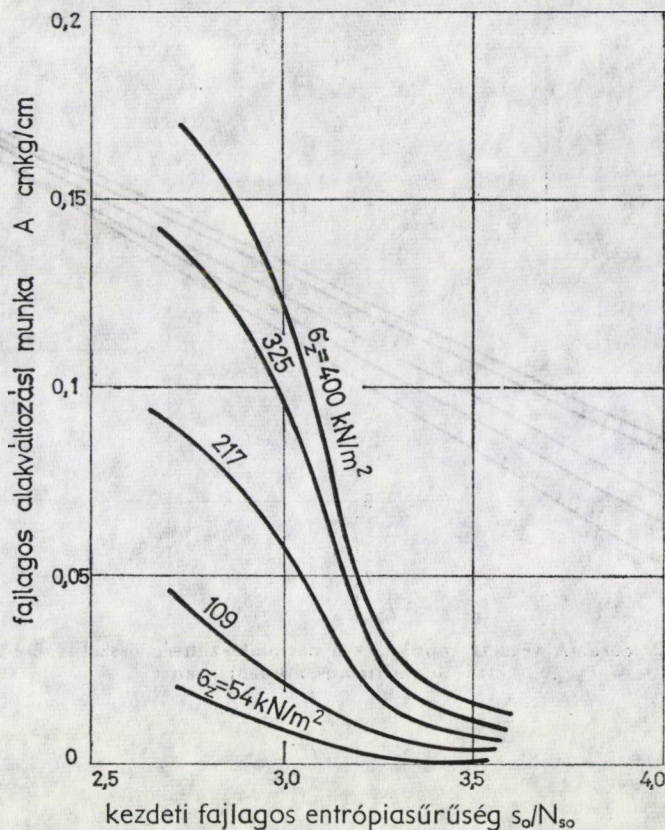
Az idealizált talajmodell esetén:

$$\frac{S}{N_s} = - \frac{N}{N_s} (s \ln s + l \ln l),$$

$$\frac{N}{N_s} = \frac{N_s + N_l}{N_s} = 1 + \frac{N_l}{N_s} = 1 + \frac{l}{s} = \frac{1}{s}, \quad (v = 0)$$

tehát az egy szemcsére jutó entrópia:

$$\frac{S}{N_s} = - \frac{1}{s} (s \ln s + l \ln l).$$



11. ábra. A kezdeti fajlagos entrópiasűrűség és a fajlagos alakváltozási munka összefüggése

Továbbá

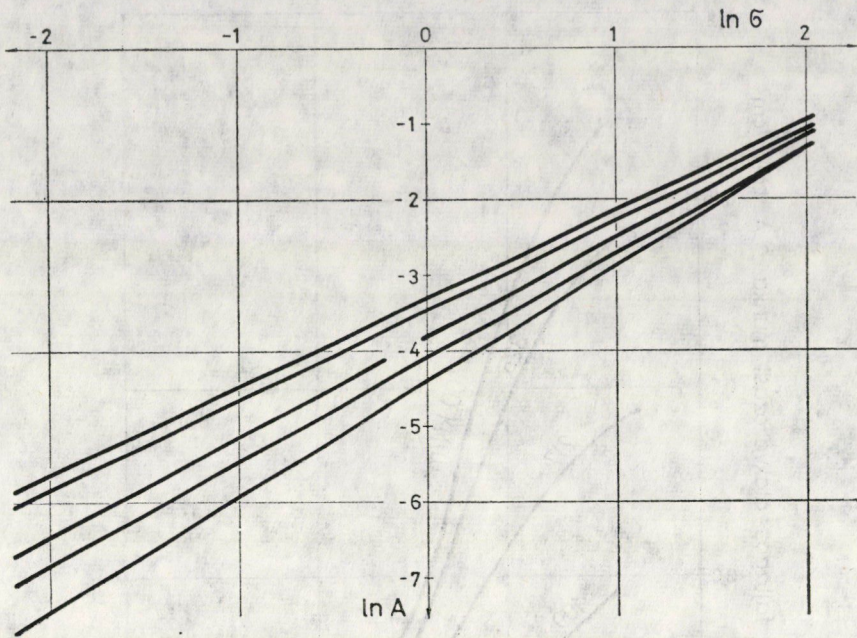
$$s \frac{S}{N_s} = -(s \ln s + l \ln l).$$

Az S/N_s hányados az egy szilárd szemcsére jutó entrópiasűrűség nagyságát jelöli. A kezdeti fajlagos entrópiasűrűség és a fajlagos alakváltozási munka összefüggését ábrázolva, a 11. ábra görbéit kapjuk, melyek az alakváltozás törvényszerűségét termodinamikai fogalmakkal adják meg.

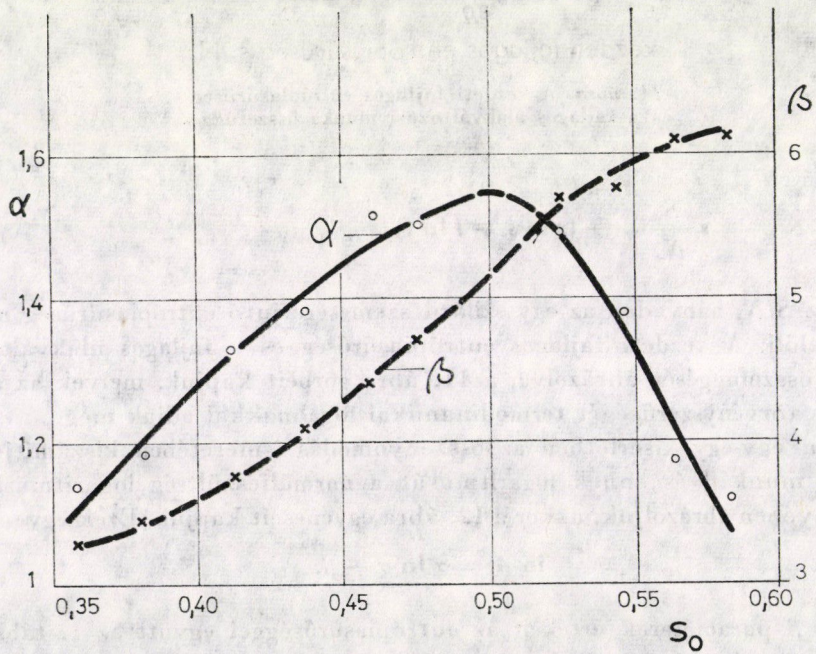
Ha egy-egy kísérletben az összenyomódás ismeretében kiszámítjuk a végzett munkát, és ennek logaritmusát a normálfeszültség logaritmusának függvényében ábrázoljuk, akkor a 12. ábra egyenesét kapjuk. Ezek egyenlete:

$$\ln A = \alpha \ln \sigma - \beta.$$

Az α és β paraméterek értékeit az entrópiasűrűséggel együtt az 1. táblázat tartalmazza. Az α és β értékek változását a kezdeti tömörség (s_0) függvényében



12. ábra. A végzett munka és a normál feszültség összefüggése kettős logaritmusos ábrázolásban



13. ábra. α és β változása a kezdeti tömörség függvényében

I. táblázat

Talaj	s_0	α	β	S_0/N_0
1	0,527	1,49	5,70	3,33
	0,574	1,38	5,86	3,39
	0,565	1,18	6,10	3,43
	0,585	1,12	6,10	3,49
2	0,359	1,14	3,30	2,72
	0,382	1,19	3,45	2,82
	0,412	1,33	3,77	2,94
	0,438	1,38	4,10	3,04
	0,451	1,51	4,40	3,09

a 13. ábra mutatja. A változás jellege teljes mértékben összhangban van az 5. ábrán feltüntetett elméleti törvényszerűséggel. Egyértelműen igazolja tehát az ábra, hogy *a rendszeren végezhető mechanikai munka a kezdeti entrópia-sűrűség függvénye*. A talajok belső energiaviszonyainak vizsgálata a termodinamika módszereivel elvégezhető, ill. értelmezhető.

IRODALOM

- FÉNYES, I., szerk.: Modern fizikai kisenciklopédia. Gondolat Könyvkiadó, Budapest 1971
- GIHMAN, I. I.—SZKOROHOD, A. V.: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1975
- KÉZDI, Á.: Új elvek és módszerek a geotechnikában. *Műszaki Tudomány* 54 (1977), 317—355
- KÉZDI, Á.: Handbook of Soil Mechanics. Vol. 1. and 2. Elsevier Scientific Publishing Co. Amsterdam, London, New York 1977, 1979
- KÉZDI, Á.: Soil Physics. Selected Topics. Elsevier Sci. Publ. Co. Amsterdam, London, New York 1979
- KUBO, R. és társai: Statisztikus mechanika, példákkal és feladatokkal. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1976
- REED, T. M.—GUBBINS, K. E.: Gázok és folyadékok statisztikus termodinamikája. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1978
- SZÜCS, E.: Hasonlóság és modell. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972

Soil Mechanics and Thermodynamics. — The phenomena of soil physics could hardly be described merely with the help of the mechanics, therefore, in the course of the evolution more general approaches had to be applied. In the paper, after outlining these approaches, the possible future development is treated of which seems to be found by making use of thermodynamics. After detailing and explaining the general fundamental principles (i.e., the first and second principal theorems of the thermodynamics, Gibbs—Dunham's relationship, etc.) to be used to the convective and conductive currents taking place within the continua, the mechanical energy of systems, the phenomenological thermodynamics and the statistical mechanics relating to the discreet systems to be used in the practice are dealt with. The thermodynamical investigation of the soil model and finally the application of thermodynamics to the compressive tests of the soil are presented. It is pointed out that the mechanical work to be carried out systematically is the function of the primary entropy.

Bodenphysik und Thermodynamik. — Die bodenphysischen Erscheinungen können mit Hilfe der Mechanik nur mit Schwierigkeit beschrieben werden, deshalb wurden in der Ent-

wicklung der bodenphysischen Kenntnisse allgemeinere Näherungsmethoden angewandt. Nach Erwähnung dieser Näherungsmethoden weist die Abhandlung auf die Möglichkeiten der Weiterentwicklung hin, die möglicherweise mit Hilfe der Thermodynamik durchgeführt werden können. Nach der Vorlegung und Auseinandersetzung der allgemeinen und zur Anwendung beabsichtigten Grundbegriffe (d. h. des ersten und des zweiten Hauptsatzes, der Gibbs—Dunhemschen Relation, usw.) befassen sich die Autoren mit in den Kontinua stattfindenden konvektiven und konduktiven Strömungen, mit der mechanischen Energie von Systemen, mit der phänomenologischen Thermodynamik und mit der in Praxis benutzbaren, auf die diskreten Systeme bezüglichen statistischen Mechanik. Die thermodynamische Untersuchung der Bodenprobe und die Anwendung der Thermodynamik zur Kompressionsprüfung sind vorgeführt. Es wird nachgewiesen, daß die systematisch durchführbare mechanische Arbeit die Funktion der initialen Entropiedichte ist.

SZÉLERŐKKEL TERHELT FORGÁSHIPERBOLOIDHÉJAK

CSONKA PÁL*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

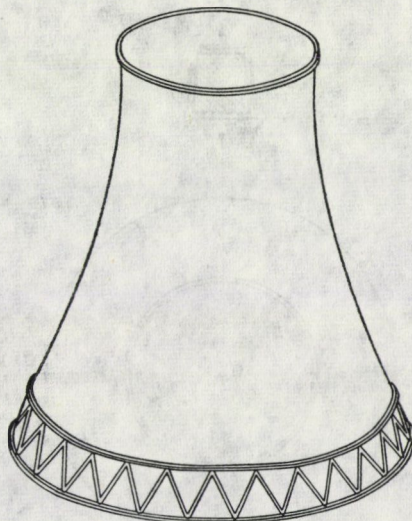
[Beérkezett: 1980 február]

Jelen tanulmány eljárást ismertet szélerőkkel terhelt forgáshiperboloidhéjak membránerőinek számítására. A szóban forgó eljárás az R. RABICH által kidolgozott módszer módosított alakja. Lényege, hogy a számítás során elvégezendő integrálási műveletek integranduszait egyszerű szerkezetű sorokkal helyettesíti. Ezeket a sorokat úgy szerkeszti meg, hogy az egyébként igen bonyolult integrálási műveletek egyszerű képletekkel tagonként legyenek végrehajthatók. Az eljárás már kevés számú tag számításbavétele esetében is kellő pontosságú.

1. Bevezetés

A műszaki gyakorlat szívesen alkalmaz hűtőtornyok céljaira egyköpenyű forgáshiperboloid alakú héjakat (1. ábra). Ezek az építmények általában nagy magassággal készülnek és mint ilyenek, jelentős szélerőknek vannak kitéve. Hatásukra a héjfalban számottevő belsőerők — főként membránerők — ébrednek.

A szélteher okozta membránerők számításával számos szakkönyv és folyóiratcikk foglalkozik [1—8]. Az ezekben közzétett számító eljárások közül a gyakorlat előszeretettel az R. RABICH által kidolgozott módszert [2] hasz-

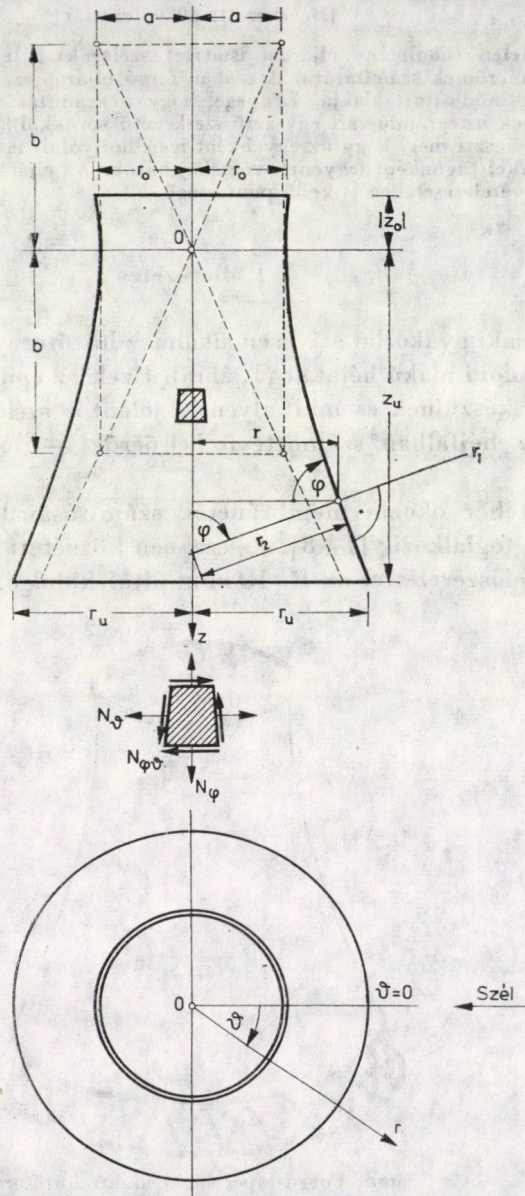


1. ábra. Forgáshiperboloid alakú hűtőtorny

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók Béla út 31.

nálja. Az alábbiakban ennek az eljárásnak módosított változatát mutatjuk be.

Az ismertetendő eljárás annyiban tér el az eredeti eljárástól, hogy a számítás során elvégzendő integrálási műveletek integranduszait egyszerű szerkezetű sorokkal helyettesíti. Ezeket a sorokat akként szerkeszti meg,



2. ábra. Jelölések

hogy az egyébként igen bonyolult integrálások egyszerű képletekkel tagonként legyenek végrehajthatók. Az eljárás már kevés számú tag számításbavétele esetében is kellőképpen pontos.

A tárgyalások alapját a héjak membránelmélete alkotja. A héjfalban keletkező hajlító-csavaró hatásokat, így a talpgyűrűhöz való csatlakozás mentén keletkező, a membránszerű feszültségi állapotot zavaró hatásokat a tárgyalás során figyelmen kívül hagyjuk.

Feltesszük, hogy a héj felső pereme teljesen szabad, és ennek megfelelően megköveteljük, hogy a héj felső pereme mentén a meridiánerő, valamint a csúsztató erő zérus értékű legyen.

2. A héj jellemző méretadatai

Vizsgálataink a 2. ábrán feltüntetett forgáshiperboloidhéjra vonatkoznak. E héj meridiángörbéjének egyenlete

$$z = \frac{b}{a} \sqrt{r^2 - a^2}, \quad (1a)$$

illetve

$$r = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + z^2}. \quad (1b)$$

A meridiánvonal görbületi sugara

$$r_1 = - \frac{\sqrt{[(a^2 + b^2)z^2 + b^4]^3}}{ab^4} = - \frac{b^2 r^3}{a^4 \sin^3 \varphi}, \quad (2)$$

a meridiánvonal normálisának a héj középfelületétől a héj forgástengelyéig terjedő hossza pedig

$$r_2 = \frac{a}{b^2} \sqrt{(a^2 + b^2)z^2 + b^4} = \frac{r}{\sin \varphi}. \quad (3)$$

A meridiánvonal φ lejtésszögének adatai:

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{b \sqrt{b^2 + z^2}}{\sqrt{(a^2 + b^2)z^2 + b^4}} = \frac{r}{r_2}, \\ \cos \varphi &= \frac{az}{\sqrt{(a^2 + b^2)z^2 + b^4}} = \frac{a^2 z}{b^2 r_2} = \frac{a^2 z \sin \varphi}{b^2 r}, \\ \tan \varphi &= \frac{b \sqrt{b^2 + z^2}}{az} = \frac{b^2 r}{a^2 z}. \end{aligned} \quad (4a, b, c)$$

Egyes, a későbbiekben felhasználásra kerülő deriváltak:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dz} &= \frac{az}{b\sqrt{b^2+z^2}} = \frac{a^2 z}{b^2 r}, \\ \frac{d \sin \varphi}{dz} &= -\frac{a^2 z \sin^3 \varphi}{b^4 r^4}, \\ \frac{d \cos \varphi}{dz} &= \frac{ab^4}{\sqrt{[(a^2+b^2)z^2+b^4]^3}} = -\frac{1}{r_1} = \frac{a^4 \sin^3 \varphi}{b^2 r^3}.\end{aligned}\quad (5a, b, c)$$

3. A héjra ható szélteher

Feltesszük, hogy a szél a héj palástfelületére csak merőleges erőket gyakorol. Ezeknek az erőknek a középfelület felszínegységére vonatkoztatott fajlagos értékét általában csak valamely

$$p = p(\varphi, \theta)$$

alakú, bonyolult szerkezetű függvénnyel lehet jellemezni. A gyakorlati esetekben egyszerűsítésként feltételezhető azonban, hogy a szóban forgó függvény egy $m = 0$, egy $m = 1$ és egy $m = 2$ periódusú tehertag összegeként

$$p = \sin \varphi \sum_0^2 p_m \cos m\theta, \quad (p_m = \text{konst}) \quad (6)$$

alakban kellő pontossággal kifejezhető. A $\theta = 0$ meridián vonal mentén

$$p = \sin \varphi \sum_0^2 p_m, \quad (6a)$$

amit nyomás esetében tekintünk pozitívnak.

4. A héjfalban keletkező feszítőerők

Periodikus szerkezetű tehertagok hatására a héjfalban periodikusan változó feszítőerők jönnek létre. Ezek periódusszáma a tehertagok periódusszámával egyezik. Ha a héjfalban keletkező feszítőerők φ, θ irányú alkotóit

$$N_\varphi, N_{\varphi\theta}, N_\theta$$

betűvel jelöljük (2. ábra), a héj φ, θ pontjában a feszítőerők értékét a következő képletekkel fejezhetjük ki:

$$N_\varphi = \sum_0^2 N_{\varphi m}^* \cos m\theta,$$

$$N_{\varphi\vartheta} = \sum_0^2 N_{\varphi\vartheta m}^* \sin m\vartheta, \quad (7)$$

$$N_{\vartheta} = \sum_0^2 N_{\vartheta m}^* \cos m\vartheta.$$

Az $N_{\varphi m}^*$, $N_{\varphi\vartheta m}^*$, $N_{\vartheta m}^*$ mennyiségek csupán a φ változó függvényei.

5. A Rabich-féle differenciálegyenletek

Tárgyalásaink alapját a periodikus megoszlású szélérőkkel terhelt forgásparaboloidhéjaknak R. RABICH által [2] felállított differenciálegyenletei alkotják. Ezek az egyensúlyi egyenletek m -periódusú tehertag esetében a jelen tanulmány jelöléseivel a következőképpen fejezhetők ki:

$$-\frac{d}{dz}(N_{\varphi m}^* r \sin \varphi) - \frac{m}{r^2}(N_{\varphi\vartheta m}^* r^2) = p_m r \cos \varphi,$$

$$-\frac{d}{dz}(N_{\varphi\vartheta m}^* r^2) + \frac{ma^4}{b^2 r^2}(N_{\varphi m}^* r \sin \varphi) = p_m \frac{mr^2}{\sin \varphi}, \quad (8a, b, c)$$

$$\frac{N_{\varphi m}^*}{r_1} - \frac{N_{\vartheta m}^*}{r_2} = p_m \sin \varphi.$$

Bevezetve az

$$U_m(z) = N_{\varphi m}^* r \sin \varphi, \quad (9a, b)$$

$$V_m(z) = N_{\varphi\vartheta m}^* r^2,$$

valamint a

$$G_m(z) = -p_m r \cos \varphi,$$

$$H_m(z) = -p_m \frac{mr^2}{\sin \varphi} \quad (10a, b)$$

jelöléseket, a (8a), (8b) differenciálegyenletek egyszerűbb alakja:

$$U'_m + \frac{m}{r^2} V_m = G_m, \quad (11a, b)$$

$$V'_m - \frac{ma^4}{b^2 r^2} U_m = H_m,$$

ahol

$$(\dots)' \equiv \frac{d}{dz}(\dots).$$

A fenti differenciálegyenletek alapján az ismeretlen U_m és V_m függvényeket akként kell meghatározni, hogy az

$$N_{\varphi m}^*|_{z=z_0} = 0, \quad N_{\varphi\vartheta m}^*|_{z=z_0} = 0 \quad (12a, b)$$

peremfeltételek teljesedjenek.

Az $N_{\varphi m}^*$ és $N_{\varphi \vartheta m}^*$ feszítőerők számítására a (9) alattiak alapján felírható

$$\begin{aligned} N_{\varphi m}^* &= \frac{U_m}{r \sin \varphi}, \\ N_{\varphi \vartheta m}^* &= \frac{V_m}{r^2} \end{aligned} \quad (13)$$

összefüggéseket, az $N_{\vartheta m}^*$ gyűrűerő meghatározására pedig a (8c) egyenletből levezethető

$$N_{\vartheta m}^* = \frac{r_2}{r_1} N_{\varphi m}^* - p_m r_2 \sin \varphi = \frac{r_2}{r_1} N_{\varphi m}^* - p_m r \quad (14)$$

képletet használhatjuk.

A következőkben csak az U_m és V_m függvények számítását közöljük, mégpedig külön-külön az $m = 0$, $m = 1$ és $m = 2$ esetekre. A levezetendő képletekben az egyszerűbb írásmód kedvéért az $m = 0$, $m = 1$, illetve az $m = 2$ esetre utaló 0, 1, 2 indexet csak a p betű mellé tesszük ki, a többi betű mellől elhagyjuk.

6. Az $m = 0$ eset

Ilyenkor forgásszimmetrikus terheléssel van dolgunk. A héjra ható, a héj középfelületére merőleges megoszló teherrendszernek a középfelület felszínegységére vonatkoztatott fajlagos értéke a ϑ koordinátától független, értéke

$$p = p_0 \sin \varphi, \quad (p_0 = \text{konst}) \quad (15)$$

A jelen esetben a (10) képletek szerint

$$\begin{aligned} G &= -p_0 r \cos \varphi, \\ H &= 0, \end{aligned} \quad (16a, b)$$

és így a (11a, b) differenciálegyenletek helyett az alábbi egyszerűbb két egyenletet írhatjuk:

$$\begin{aligned} U' &= G, \\ V' &= 0. \end{aligned} \quad (17a, b)$$

Ezek szerint esetünkben

$$V = \text{konst},$$

illetve a (9b) összefüggés folytán

$$V = 0. \quad (18)$$

A fennforgó körszimmetria miatt ui. $N_{\varphi \vartheta}^* = 0$.

Az adott esetben tehát mindössze a (17a) differenciálegyenlettel kell dolgoznunk. Ennek megoldása a (16a) és (4b) alattiak figyelembevételével

$$U = -p_0 \frac{a^3}{b^2} \int R dz + K, \quad (19)$$

ahol

$$R = \frac{z}{a} \sin \varphi, \quad (20)$$

K pedig integrálási állandó.

A számítások során az R integranduszt az

$$R = A_2 \frac{z}{a} + A_4 \frac{z^3}{a^3} + A_6 \frac{z^5}{a^5} + \dots \quad (21)$$

sorral célszerű megközelíteni, ahol az A_2, A_4, A_6, \dots értékek alkalmasan felveendő állandók. Ezzel az egyszerűsítéssel a (19) képlet helyett az

$$U = -p_0 \frac{a^4}{b^2} \left(\frac{A_2}{2} \cdot \frac{z^2}{a^2} + \frac{A_4}{4} \cdot \frac{z^4}{a^4} + \frac{A_6}{6} \cdot \frac{z^6}{a^6} + \dots \right) + K \quad (22)$$

képletet írhatjuk.

A (22) képletben szereplő K integrálási állandót a (12a) peremfeltétel alapján határozhatjuk meg.

7. Az $m = 1$ eset

Most antimetrikus megoszlású, a héj középfelületére merőleges megoszló teherrendszerről van szó és ennek fajlagos értéke a $\vartheta = 0$ meridiánvonal mentén

$$p = p_1 \sin \varphi, \quad (p_1 = \text{konst}). \quad (23)$$

Ebben az esetben a (10) képletek szerint

$$\begin{aligned} G &= -p_1 r \cos \varphi, \\ H &= -p_1 \frac{r^2}{\sin \varphi}, \end{aligned} \quad (24a, b)$$

a (11a) alattiak folytán pedig

$$V = r^2(G - U'). \quad (25)$$

Így

$$V' = r^2(G' - U'') + 2r \frac{dr}{dz} (G - U').$$

Innen az (5a) képlet felhasználásával

$$V' = r^2(G' - U'') + \frac{2a^2 z}{b^2} (G - U').$$

Ha ezt az összefüggést a (11b) képletbe behelyettesítjük, az

$$r^2 U'' + \frac{2a^2 z}{b^2} U' + \frac{a^4}{b^2 r^2} U = r^2 G' + \frac{2a^2 z}{b^2} G - H$$

egyenlethez jutunk, ezt pedig a következő alakra hozhatjuk:

$$U'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U' + \frac{a^4}{b^2 r^4} U = G' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} G - \frac{1}{r^2} H. \quad (26)$$

Ámde a (24a), valamint (5a) és (5b) egyenletek szerint

$$G' = -P_1 \left(\frac{a^2 z}{b^2 r} \cos \varphi + \frac{a^4 \sin^3 \varphi}{b^2 r^2} \right).$$

Ha ezt a kifejezést a (26) differenciálegyenletbe betesszük, az

$$U'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U' + \frac{a^4}{b^2 r^4} U = S P_1 \quad (27)$$

egyenletet kapjuk, ahol

$$S = - \left(\frac{3a^2 z}{b^2 r} \cos \varphi + \frac{a^4 \sin^3 \varphi}{b^2 r^2} - \frac{1}{\sin \varphi} \right). \quad (28)$$

Az U függvény meghatározásához először is a (27) jelű inhomogén differenciálegyenlet homogén alakzatának, vagyis az

$$U_h'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U_h' + \frac{a^4}{b^2 r^4} U_h = 0 \quad (29)$$

differenciálegyenletnek az általános megoldását kell felírunk, majd pedig a (27) alatti inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását kell előállítanunk.

7.1. A homogén differenciálegyenlet általános megoldása

A (29) jelű homogén differenciálegyenlet általános megoldása egyszerű számítással igazolhatóan

$$U_h = \frac{1}{r} \left(K_1 + K_2 \frac{z}{a} \right), \quad (30)$$

ahol a K_1 és K_2 értékek tetszőleges állandók.

Azonnal megadható az U_h függvényhez rendelhető V_h függvény is. Homogén esetről lévén ui. szó, így a (25) képlet szerint

$$V = r^2(G - U_h') = -r^2 U_h'.$$

Innen a (30) alattiak felhasználásával

$$V = -r^2 \left(-\frac{a^2 z}{b^2 r^3} K_1 - \frac{az^2}{b^2 r^3} K_2 + \frac{1}{ar} K_2 \right),$$

illetve az (1a) alattiak behelyettesítésével

$$V = \frac{a}{r} \left(\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z}{a} K_1 - K_2 \right). \quad (31)$$

7.2. Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának számításakor a (28) képlettel defineált S kifejezést az

$$S = -\frac{a}{r} \left(B_2 + B_4 \frac{z^2}{a^2} + B_6 \frac{z^4}{a^4} + \dots \right) \quad (32)$$

sorral célszerű megközelíteni, ahol a B_2, B_4, B_6, \dots értékek alkalmasan felveendő állandók. Ekként eljárva, a (27) differenciálegyenlet helyett az

$$\begin{aligned} U_i'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U_i' + \frac{a^4}{b^2 r^4} U_i &= \\ &= -p_1 \frac{a}{r} \left(B_2 + B_4 \frac{z^2}{a^2} + B_6 \frac{z^4}{a^4} + \dots \right) \end{aligned} \quad (33)$$

differenciálegyenlettel dolgozhatunk.

Mintogy a (30) alattiak szerint a (29) jelű homogén differenciálegyenletnek egymástól lineárisan független két megoldása ismeretes, nevezetesen

$$U_{h1} = \frac{1}{r} \quad \text{és} \quad U_{h2} = \frac{z}{r}, \quad (34)$$

a keresett U_i partikuláris megoldás előállítására az állandók variálásának a módszerét alkalmazhatjuk. Ehhez szükségünk van az

$$U'_{h1} = -\frac{a^2 z}{b^2 r^3} \quad \text{és} \quad U'_{h2} = -\frac{a^2 z^2}{b^2 r^3} + \frac{1}{r} = \frac{a^2}{r^3}$$

deriváltakra és a

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \int \frac{-U_{h2} S}{U_{h1} U'_{h2} - U'_{h1} U_{h2}} dz = \int -U_{h2} S r^2 dz, \\ \Phi_2(z) &= \int \frac{U_{h1} S}{U_{h1} U'_{h2} - U'_{h1} U_{h2}} dz = \int U_{h1} S r^2 dz \end{aligned}$$

integrálkifejezések értékére. Ezeket ismerve, a keresett partikuláris megoldást

$$U_i = \Phi_1 U_{h1} + \Phi_2 U_{h2}$$

alakban fejezhetjük ki. A számítás eredménye

$$U_i = -p_1 \frac{a^3}{r} \left(\frac{B_2}{2} \cdot \frac{z^2}{a^2} + \frac{B_4}{12} \cdot \frac{z^4}{a^4} + \frac{B_6}{30} \cdot \frac{z^6}{a^6} + \dots \right). \quad (35)$$

Ezek után az U_i függvénynek megfelelő V_i függvényt a (24a) összefüggés figyelembevételével a (25) alattiak utasítása szerint határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} V_i = p_1 a r z \left[\frac{B_2}{1} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} \right) + \frac{B_4}{3} \cdot \frac{z^2}{a^2} \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{B_6}{5} \cdot \frac{z^4}{a^4} \left(1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^2}{r^2} \right) + \dots \right] - p_1 r^3 \cos \varphi. \quad (36) \end{aligned}$$

7.3. Az U és V függvények

A homogén és inhomogén megoldások birtokában a keresett U és V függvényt a következőképpen állíthatjuk elő:

$$\begin{aligned} U &= U_h + U_i, \\ V &= V_h + V_i. \end{aligned} \quad (37)$$

Az U_h (30) jelű képletében szereplő K_1 és K_2 határozatlan paraméterek értékét a (12) peremfeltétel figyelembevételével kell megállapítani.

8. Az $m = 2$ eset

Ebben az esetben a héj középfelületére merőleges, periodikus megoszlású teherrendszerről van szó. Ennek fajlagos értéke a $\vartheta = 0$ meridiánvonal mentén

$$p = p_2 \sin \varphi, \quad (p_2 = \text{konst}). \quad (38)$$

Most a (10) képletek szerint

$$\begin{aligned} G &= -p_2 r \cos \varphi, \\ H &= -p_2 \frac{2r^2}{\sin \varphi}, \end{aligned} \quad (39a, b)$$

a (11a) képlet szerint pedig

$$V = \frac{r^2}{2} (G - U'). \quad (40)$$

Így

$$V' = \frac{r^2}{2} (G' - U'') + r \frac{dr}{dz} (G - U').$$

Ezt az értéket, valamint az (5a) összefüggést a (11b) képletbe bevezetve, az

$$U'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U' + \frac{4a^4}{b^2 r^4} U = G' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} G - \frac{2}{r^2} H$$

egyenlethez jutunk, innen pedig a

$$G' = -P_2 \left(\frac{a^2 z}{b^2 r} \cos \varphi + \frac{a^4 \sin^3 \varphi}{b^2 r^2} \right)$$

összefüggés felhasználásával az

$$U'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U' + \frac{4a^4}{b^2 r^4} U = TP_2 \quad (41)$$

differenciálegyenletet vezethetjük le, ahol

$$T = - \left(\frac{3a^2 z}{b^2 r} \cos \varphi + \frac{a^4 \sin^3 \varphi}{b^2 r^2} - \frac{4}{\sin \varphi} \right). \quad (42)$$

Feladatunk tárgyalása során ebben az esetben is először a (4) jelű inhomogén differenciálegyenlet homogén alakzatának, vagyis az

$$U'' + \frac{2a^2 z}{b^2 r^2} U' + \frac{4a^4}{b^2 r^4} U = 0 \quad (43)$$

homogén differenciálegyenletnek általános megoldását kell meghatároznunk, majd az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását kell előállítanunk.

8.1. A homogén differenciálegyenlet általános megoldása

A keresett homogén megoldás ebben az esetben egyszerű próbával igazolhatóan

$$U_h = \frac{1}{r^2} \left(K_1 + K_2 \frac{z}{a} - K_1 \frac{z^2}{b^2} \right), \quad (44)$$

ahol K_1 és K_2 tetszőleges állandók.

Most a homogén megoldáshoz tartozó V függvény a (40) képlet szerint

$$V_h = \frac{1}{r^2} \left(K_1 \frac{2a^2 z}{b^2} - K_2 \frac{a}{2} + K_3 \frac{az^2}{2b^2} \right). \quad (45)$$

8.2. Az inhomogén differenciálegyenlet partikuláris megoldása

A (41) jelű inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának meghatározásához a (42) képlettel defineált T kifejezést közelítésképpen a

$$T = - \left(C_2 + C_4 \frac{z^2}{a^2} + C_6 \frac{z^4}{a^4} + \dots \right) \quad (46)$$

sorral célszerű helyettesíteni, ahol a $C_2, C_4, C_6 \dots$ értékek alkalmasan felvett állandók. Ezzel az egyszerűsítéssel a (41) differenciálegyenlet helyett a következőt írhatjuk:

$$U_i' + \frac{2a^2 z}{b^2 r} U_i' + \frac{4a^4}{b^2 r^4} U_i = -p_2 \frac{a^2}{r^2} \left(C_2 + C_4 \frac{z^2}{a^2} + C_6 \frac{z^4}{a^4} + \dots \right). \quad (47)$$

Mintegy a (44) képlet alapján a homogén differenciálegyenlet két egymástól lineárisan független megoldása ismeretes, nevezetesen

$$U_{h1} = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{z^2}{b^2} \right) = \frac{1}{r^2}, \quad \text{és} \quad U_{h2} = \frac{z}{r^2}, \quad (48)$$

így az inhomogén differenciálegyenlet keresett partikuláris megoldását ebben az esetben is az állandók variálásának a módszerével határozhatjuk meg. Az idevágó számítás során szükségünk van az

$$U'_{h1} = - \frac{2a^2 z^3}{b^4 r^4} - \frac{2a^2 z}{b^2 r^4} - \frac{2z}{b^2 r^2} = - \frac{4z}{b^2 r^2},$$

$$U'_{h2} = - \frac{2a^2 z^2}{b^2 r^4} + \frac{1}{r^2}$$

deriváltakra, valamint az alábbi két integrálkifejezésre:

$$\Psi_1(z) = \int \frac{-U_{h2} T}{U_{h1} U'_{h2} - U'_{h1} U_{h2}} dz - \int U_{h2} T a^2 r^2 dz,$$

$$\Psi_2(z) = \int \frac{U_{h1} T}{U_{h1} U'_{h2} - U'_{h1} U_{h2}} dz = \int U_{h1} T a^2 r^2 dz.$$

Maga a keresett partikuláris megoldás a következőképpen adódik:

$$U_i = \Psi_1 U_{h1} + \Psi_2 U_{h2}.$$

A kijelölt számításokat elvégezve, az alábbi képletet kapjuk:

$$U_i = -p_2 \frac{a^4}{r^2} \left[C_2 \left(\frac{z^2}{2a^2} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^4}{6a^4} \right) + C_4 \left(\frac{z^4}{12a^4} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^6}{20a^6} \right) + C_6 \left(\frac{z^6}{30a^6} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{z^8}{42a^8} \right) + \dots \right]. \quad (49)$$

Ezek után az U_i függvénynek megfelelő V_i függvényt a (39a) alattiak figyelembevételével a (40) képlet szerint határozhatjuk meg:

$$V_i = p_2 a^3 \frac{a^2}{b^2} \left[C_2 \frac{z}{a} \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{z^2}{2r^2} + \frac{2z^2}{6a^2} - \frac{a^2}{6b^2} \cdot \frac{z^4}{a^2 r^2} \right) + C_4 \frac{z^3}{a^3} \left(\frac{2b^2}{12a^2} - \frac{z^2}{12r^2} + \frac{3z^2}{20a^2} - \frac{a^2}{20b^2} \cdot \frac{z^4}{a^2 r^2} \right) + C_6 \frac{z^5}{a^5} \left(\frac{3b^2}{30a^2} - \frac{z^2}{30r^2} + \frac{4z^2}{42a^2} - \frac{a^2}{42b^2} \cdot \frac{z^4}{a^2 r^2} \right) + \dots \right] - p_2 \frac{a^3}{2} \cdot \frac{r^3}{a^3} \cos \varphi. \quad (50)$$

8.3. Az U és V függvény

A homogén és inhomogén megoldásokat ismerve, a keresett U és V függvényeket a következőképpen határozhatjuk meg:

$$\begin{aligned} U &= U_h + U_i, \\ V &= V_h + V_i. \end{aligned} \quad (51)$$

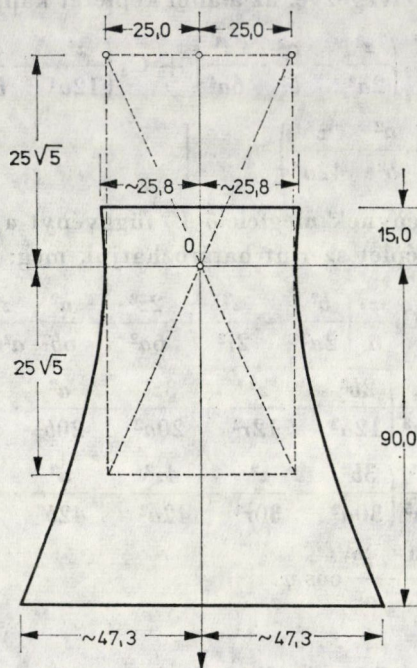
A fenti kifejezések képleteiben szereplő K_1 és K_2 integrálási állandók értékét a (12) peremfeltételek alapján kell megállapítani.

9. Az R , S , T függvények

Az előzőekben az R , S , T függvények számítására egyszerű szerkezetű olyan sorokat vezetünk be, amelyek lehetővé tették, hogy a feladat megoldásához szükséges, egyébként bonyolult integrálási műveleteket tagonként zárt alakban végezzük el.

Az alábbiakban a 3. ábrán feltüntetett méretekkal jellemzett forgáshiperboloidhéj kapcsán ellenőrizni fogjuk, hogy a közölt sorokkal számított

R, S, T függvényértékek mennyiben térnek el a pontos R, S, T értékektől, ha egyszerűsítésként ezeknek a soroknak csak az első, vagy legfeljebb csak az első két tagját vesszük számításba.



3. ábra. Gyakorlati példa

Az ellenőrző számításhoz először is különböző z/a helyeken az r/a , $\sin \varphi$ és $\cos \varphi$ értékeket határoztuk meg. Ennek a számításnak az eredményét az 1. táblázatba foglaltuk. Az R, S, T függvények közelítő értékének számításakor ezekkel a táblázati értékekkel dolgozunk.

1. táblázat

Számítási értékek

z/a	r/a	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$
-0,6	1,035 374	0,993 350	-0,115 129
0,0	1,000 000	1,000 000	0,000 000
+0,6	1,025 374	0,993 350	+0,115 129
+1,2	1,134 901	0,978 363	+0,206 897
+1,8	1,283 745	0,962 857	+0,270 014
+2,4	1,466 970	0,950 416	+0,310 981
+3,0	1,673 320	0,941 316	+0,337 526
+3,6	1,895 257	0,934 816	+0,355 133

9.1. Az R függvény

Alkalmazzuk a közelítő R értékek számítására a (32) képlet egytagos alakját:

$$R \cong A_2 \frac{z}{a}.$$

Az A_2 paramétert vegyük fel úgy, hogy a $z/a = 2,4$ helyen R pontos és közelítő értéke egyezzenek meg egymással. Ez az egyezés akkor következik be, ha

$$A_2 = 0,950.$$

A közelítő R függvény tehát

$$R \cong 0,950 \frac{z}{a}. \quad (52)$$

Az R függvény pontos értékét, valamint az (52) képlettel számított közelítő értékét a 2. táblázatba foglaltuk. Mint látható, a vizsgált esetben a kétféle R érték csak kevéssé tér el egymástól.

2. táblázat

Az R függvény pontos és közelítő értéke

z/a	Pontos érték	Közelítő érték*
-0,6	-0,596	-0,570
0,0	0,000	0,000
+0,6	+0,596	+0,570
+1,2	+1,174	+1,140
+1,8	+1,733	+1,711
+2,4	+2,281	+2,281
+3,0	+2,824	+2,851
+3,6	+3,365	+3,421

* egyparaméteres megoldás esetében

9.2. Az S függvény

Használjuk a közelítő S értékek számítására a (32) képletet kéttagos alakban:

$$S \cong -\frac{a}{r} \left(B_2 + B_4 \frac{z^2}{a^2} \right).$$

Az ebben szereplő B_2 és B_4 paramétereket vegyük úgy számításba, hogy a $z/a = 0$ és $z/a = 3,0$ helyeken a pontos és a közelítő S értékek egyezzenek meg egymással. Az egyezés az adott esetben akkor következik be, ha

$$B_2 = -0,8,$$

$$B_4 = -0,03.$$

3. táblázat

Az S függvény pontos és közelítő értéke

z/a	Pontos érték	Közelítő érték*
-0,6	0,784	0,783
0,0	0,800	0,800
+0,6	0,784	0,783
+1,2	0,745	0,743
+1,8	0,703	0,699
+2,4	0,667	0,663
+3,0	0,640	0,640
+3,6	0,620	0,627

* kétparaméteres megoldás esetében

Ekként eljárva, az S függvény közelítő értékének számítására az

$$S \approx -\frac{a}{r} \left(-0,8 - 0,03 \frac{z^2}{a^2} \right) \quad (53)$$

képletet kaptuk.

Az S függvény pontos értékét, valamint az (53) képlettel számított közelítő értékét a 3. táblázat tünteti fel. A kétféle S érték, mint megállapítható, csak lényegtelenül tér el egymástól.

9.3. A T függvény

Alkalmazzuk ennek közelítő számítására a (46) képletet egytagos alakban, vagyis legyen

$$T \approx -C_2.$$

A C_2 értéket válasszuk meg úgy, hogy a $z/a = 1, 2$ helyen a pontos és a közelítő T érték egyezzen meg egymással. Ez az eset akkor következik be, ha

$$T = 3,812. \quad (54)$$

A T függvény pontos értékét, valamint az (54) képlet szerinti közelítő értékét a 4. táblázat állítja egymással szembe. Mint megállapítható, a kétféle T érték csak kevéssé tér el egymástól. Ez a körülmény, valamint az R és S függvények esetében tett hasonló értelmű megállapítás is, a javasolt közelítés célszerű és megengedhető voltát igazolja.

4. táblázat

A T függvény pontos és közelítő értéke

s/a	Pontos érték	Közelítő érték*
-0,6	3,804	3,812
0,0	3,800	3,812
+0,6	3,804	3,812
+1,2	3,812	3,812
+1,8	3,819	3,812
+2,4	3,824	3,812
+3,0	3,827	3,812
+3,6	3,829	3,812

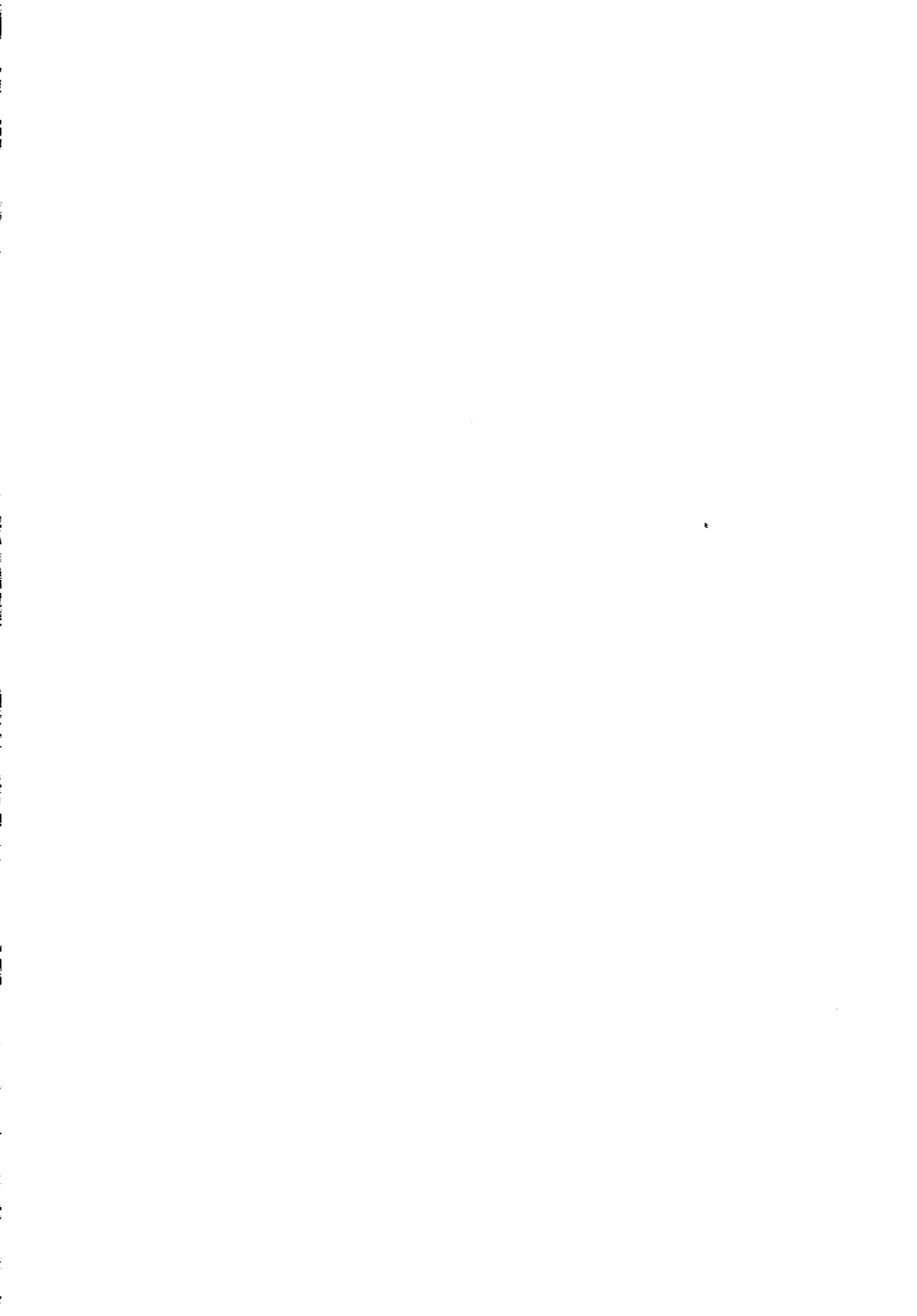
* egyparaméteres megoldás esetében

IRODALOM

1. DISCHINGER, FR.: Die Rotationsschalen mit unsymmetrischer Form und Belastung. *Der Bauingenieur* 17 (1936), H. 23—29
2. RABICH, R.: Die Membrantheorie der einschalig hyperbolischen Rotationsschalen. *Bauplanung—Bautechnik* 7 (1953), 310—318, 320
3. FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1959, 22—28
4. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke, 5. Aufl. Springer-Verlag, Wien 1959, 352—386
5. NOVOSHILOV, V. V.: The Theory of Thin Shells. Groningen. The Netherlands, Noordhoff Ltd, 1959
6. KRÄTZIG, W.: Schnittgrößen und Verformung windbeanspruchter Naturzugkühltürme. *Beton u. Stahlbetonbau* 10 (1960), 247—255
7. GRAVINA, B. B. J.: Theorie und Berechnung der Rotationsschalen. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1961
8. HAMPE, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke, Verlag für Bauwesen, Band I—V. Berlin 1963—1964
9. ALBASINY, E. L.: Equilibrium Stresses in Hyperbolic Cooling Towers. *International Symposium on Shell Structures in Engineering Practice*, Budapest Hungary, August 1965. 2, 181—198
10. BANERJEE, S. P.: Water Tower of Novel Design. *IASS Bulletin* 22 (1965), 53
11. TOTTENHAM, H.: Stresses in Hyperbolic Cooling Towers due to Wind Loading. *IASS Bulletin* 32 (1967), 3—5
12. LEE, S. L.—GOULD, P. L.: Hyperbolic Cooling Towers under Wind Loading. *J. of the Struc. Div. ASCE* 93, № ST5, Oct. 1967, 487—514
13. PADUART, A.: On Problems of Cooling Towers. *IASS Bulletin* 36 (1968), 45—50
14. KOLLÁR, L.: Schalenkonstruktionen. *Beton-Kalender* 1974. Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München—Düsseldorf 1974, 351—354
15. HAMPE, E.: Kühltürme. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1979

Hyperbolic Shells of Revolution due to Wind Loading. — Present paper describes a method for the determination of membrane forces in hyperbolic shells of revolution subject to wind forces. This method is a version of the one published by R. Rabich. Its chief idea is the substitution of the integrands figuring in the formulae by appropriate series in such a way that the integrations can be very simply performed member by member. The new method is sufficiently exact even if taking into account only some first members of the series.

Windbelastete hyperbolische Rotationsschalen. — Der Aufsatz beschreibt eine Methode zur Berechnung der Membrankräfte in windbelasteten hyperbolischen Rotationsschalen. Diese Methode ist eine modifizierte Variante des von R. Rabich aufgestellten Rechenverfahrens. Das Wesentliche des neuen Verfahrens ist die Ersetzung der Integranden durch Zahlenreihen die so konstruiert werden, daß die Integrationen gliedweise einfach durchführbar seien. Das Verfahren ist schon bei Verwendung von nur aus wenig Gliedern bestehende Reihen genügend genau.



ELOSZTÓHÁLÓZATOK ÁLLAPOTBECSLÉSÉNEK EGY ÚJ MÓDSZERÉRŐL

SINGER DÉNES*

[Beérkezett 1980. január 29-én]

A tanulmány eljárást mutat be elosztóhálózatok közvetlenül nem mért állapotváltozónak becslésére. Ellentétben az ismert módszerekkel, nem tételezi fel, hogy a kiinduló adatok redundáns mennyiségben állnak rendelkezésre, sem, hogy a rendszer lineáris legyen. Az állapotbecslés két fokozatban történik. Először a hálózati terhelésekre vonatkozó hosszútávú statisztikai adatok alapján a hálózat pillanatnyi csomóponti terhelésére előbecslést ad, majd ezt azon az alapon finomítja, hogy az előbecslés alapján számított csomóponti jellemzők — azokban a csomópontokban, amelyekben mérőműszerek vannak elhelyezve — az ezek által szolgáltatott adatokat a legkisebb négyzetek elve alapján optimálisan közelíti. A közelítés lineáris becslések sorozatának eredményeként adódik.

1. Bevezetés

Nem szorul külön magyarázatra, milyen szerepe van az ellenőrző műszereknek olyan nagy területekre kiterjedő rendszereknél, mint az elosztóhálózatok. Ezek hiányában a hálózat üzemeltetése rendkívül nehézkesé válnék, sőt lehetetlen lenne, amennyiben a rendszer nem lett volna eleve erősen túlméretezve. Másrészt a műszerek és az adatok begyűjtésére szolgáló rendszer a hálózat beruházási és üzemeltetési költségeinek tetemes hányadát teheti ki. Különösen vonatkozik ez a nem-elektromos hálózatokra, ahol a bonyolult mechanikus érzékelők és mérőátalakítók számának növelése nemcsak a beruházási költséget növeli, de ezek lényegesen nagyobb karbantartási igénye miatt az üzemeltetési költségeket is (hazai viszonylatban a gázhálózatoknál egyetlen mérőhely és hozzátartozó távközlési berendezés létesítése meghaladhatja a 3 millió Ft-ot. Ebbe az összegbe nincs beleszámítva a központi adatgyűjtő berendezés költsége).

A probléma tehát adott és lényegében azonos a becsléselemélet alapproblémáival: miként lehetséges minimális számú érzékelő által szolgáltatott idősor alapján valamely rendszer állapotáról maximális információt nyerni? A villamos hálózatok állapotbecslésére vonatkozó kutatások a hatvanas évek közepén indultak el. Ezek a munkák támaszkodhattak a lineáris becsléselemélet fejlett mátrixos módszereire és a lineáris hálózatok elméletének ugyancsak mátrixos reprezentációjára [1], [2], [3]. A magyar olvasó egyébként abban a kellemes helyzetben van, hogy mindkét témában magas színvonalú munkákra támaszkodhatik [4], [5], [6], [7].

A *nemlineáris hálózatok*, mint a gáz, víz fűtőhálózatok stb. állapotbecsléseinek módszertana ez ideig kezdeti stádiumban van. A nehézségek oka az, hogy itt nem használhatók a probléma megoldását zárt alakban lehetővé-

* Dr. Singer Dénes, 1021 Budapest, Nyéki u. 9

tevő mátrixos módszerek. Az eddigi kezdeményezések ezért a nemlineáris programozás numerikus kereső módszereihez folyamodnak. Ezek használata azonban még a jelenlegi nagy teljesítőképességű számítógépek alkalmazása mellett is illuzórikus. A másik nehézség, hogy ellentétben a viszonylag jól műszerezett villamos hálózatokkal, a nem-villamos hálózatoknál a becslés számára viszonylag kevés közvetlen adat áll rendelkezésre. A tanulmány szerzőjének véleménye szerint a hálózatbecslésnél nagy szerep jut a becslés alapjául szolgáló adatok *előrebecslésének*.

A tanulmány a továbbiakban egy nemlineáris hálózatok céljaira is alkalmas kétfokozatú becslési eljárást mutat be. Először a hálózati terhelésekre vonatkozó hosszútávú statisztikai adatok alapján előbecslést ad a hálózat pillanatnyi csomóponti terheléseiről, majd ezeket azon az alapon finomítja, hogy az előbecslés alapján számított csomóponti jellemzők (nyomások, potenciálok) — azokban a csomópontokban, amelyekben mérőműszerek vannak telepítve — az ezek által szolgáltatott adatokat a legkisebb négyzetek elve (LN-módszer) alapján közelíti. A közelítés lineáris becslések sorozatának eredményeként adódik.

2. Az elosztóhálózat csomóponti terheléseinek előrebecslése

A következő feltételezésekből indulunk ki:

- a) A hálózat üzemállapota stacionáriusnak tekinthető. Nagyfogyasztók be- és kikapcsolási folyamataitól eltekintve ez a feltétel általában teljesül.
- b) Az egyes fogyasztói csomópontokon viszonylag nagyszámú fogyasztó csüng, melyek jellegbeli megoszlása a különböző csomópontokban azonos képet mutat.
- c) A források (termelőhelyek, átadóállomások) által szolgáltatott árammennyiségeket, valamint a nagyfogyasztók fogyasztásait folyamatosan regisztrálják.
- d) A hálózat n számú csomópontja közül n_M számban ($n > n_M > 0,1$) a potenciálokat (villamos hálózatoknál a feszültségeket, gáz- és vízhálózatoknál a nyomásokat) regisztrálják.

Feltételezzük továbbá, hogy a hálózat számítógépes adatkezelő rendszere tartalmazza a hálózat topológiájára, az ágakra, valamint az egyes fogyasztók ágakra való kapcsolódásának helyére vonatkozó törzsadatokat, továbbá azok fogyasztásmérőin periodikusan leolvasott és manuálisan, számlázás céljából begyűjtött adatokat.

Mivel a fogyasztók általában az ágakhoz kapcsolódnak és további megfontolásainkban csakis csomóponti terhelésekkel operálunk, a fogyasztási

adatok a megfelelő csomópontokra vonatkoztatandók. Az egyes csomópontokra érvényes 1. Kirchhoff-törvény alapján a hálózat anyagmérlege

$$\sum_{i=1}^n W_{Ai}(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{b_i} W_{Bij}(t) - \sum_{i=1}^n W_{Si}(t) = 0, \quad (1)$$

$W_{Si}(t)$ az i -edik csomópont forrásárama, $W_{Ai}(t)$ az i -edik csomópont fogyasztás mérőműszerrel *nem* rendelkező fogyasztóinak összefogyasztása (A -típusú fogyasztás), $W_{Bij}(t)$ a fogyasztásmérő műszerrel *rendelkező* (nagyobb) felhasználók fogyasztása (B -típusú fogyasztás) az i -edik csomóponton, b_i ezek száma, n a csomópontok száma.

A b) és c) feltételezések alapján az egyes A -típusú csomóponti fogyasztások időlefutása ezen lefutások összes csomópontra vonatkozó összegéből

$W^*(t) = \sum_{i=1}^n W_{Ai}(t)$ -től csak egy c_i szorzófaktorban különbözik:

$$W_{Ai}(t) = c_i W^*(t) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Az (1) alapján

$$W^*(t) = \sum_{i=1}^n W_{Si}(t) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{b_i} W_{Bij}(t). \quad (3)$$

A c_i faktorok meghatározásához további plauzibilis feltételezéssel élünk: Feltételezzük, hogy a (2) összefüggés érvényes a $W_{Ai}(t)$ évi középértékére is, vagyis

$$c_i = \frac{\overline{W_{Ai}(t)}}{\overline{W^*(t)}}. \quad (4)$$

A $\overline{W^*(t)}$ középérték az árammérő műszerek adatai alapján a (3) figyelembevételel meghatározható. Az A -típusú felhasználóknak az egyedi fogyasztásmérőkön leolvasott adatai alapján, a számítógépes hálózati nyilvántartás felhasználásával, a $\overline{W_{Ai}(t)}$ csomóponti átlagfogyasztások ugyancsak meghatározhatók.

Vektorális alakban a hálózat pillanatnyi csomóponti terhelései a következőképpen írhatók:

$$W(t) = W_A(t) + W_B(t), \quad (5)$$

ahol $W_A(t)$, $W_B(t)$, az A , B típusú felhasználók csomóponti áramainak vektorait jelentik. A hibával terhelt $W(t)$ vektort, a hiba nélkülötől megkülönböztetendő $\widetilde{W}(t)$ -vel, vektor optimális becsléssel nyert értékét $\widehat{W}(t)$ -vel jelöljük. A $W(t)$ $\mu_A(t)$ valószínű hibájaként a két vektor különbségét deklaráljuk

$$\widehat{W}(t) = \widetilde{W}(t) + \mu(t). \quad (6)$$

A $W(t)$ hibája teljes egészében a csomópontok A típusú terheléértékek hibáiból származik, mivel a műszerhibákat a pszeudomérések hibái mellett elhanyagolhatónak tekinthetjük.

Amennyiben a $\mu(t)$ hiba zérus értékkel bírna, a hálózat állapotváltozói, a csomóponti potenciálok vektora $e(t)$

$$e(t) = F[W(t)] \quad (7)$$

hálózati egyenlet alapján meghatározható lenne. Mivel $\mu_A(t) \neq 0$ az $e(t)$ csomóponti potenciálokra csak becslések adhatók. A becslések jóságának megítéléséhez elsősorban egy jósági indexet szükséges definiálni. Esetünkben célszerű az R jósági indexet úgy definiálni, hogy a $\hat{W}(t)$ becsült értékekkel a (7) alapján számított $e(t)$ potenciálvektor azokban a csomópontokban, melyekben műszeres mérések vannak, a legkisebb négyzetösszeg elve alapján *minimális* értéket vegyen fel. Az R jósági index így

$$R = E\{(e_M - e_M^{\text{mért}})^T \Theta (e_M - e_M^{\text{mért}})\} \quad (8)$$

alakkal bír, ahol $e_M^{\text{mért}}$ a mérőműszerekkel ellátott csomópontokban mért potenciálok vektora, e_M a (7) alapján az (5) csomóponti terhelésektől számított csomóponti potenciálok vektora, Θ egy súlyozó mátrix. Az e vektort particionálva, a mérőműszerrel ellátott és az ezeket nélkülöző csomópontok szerint

$$e = [e_M \ e_U] \quad (9)$$

a (7) egyenlet a következő alakra hozható

$$e_M(t) = F_1[W(t)], \quad (10)$$

$$e_U(t) = F_2[W(t)]. \quad (11)$$

Ha a fenti értelemben optimális az e_M becslése, vagyis ha $R \rightarrow \min$ és $e_M = \hat{e}_M$, a (9) alapján optimális becslést adhatunk $W(t)$ -re vonatkozólag

$$W(t) = F_1^{-1}[\hat{e}_M(t)], \quad (12)$$

ahol F_1^{-1} az F_1 inverz vektor függvényét jelöli.

3. A hálózat egyenletek linearizálása

A mondottak alapján az elosztóhálózat állapotának becsléséhez ennek egyenleteit a (10), (11) particionált alakban kell előállítani. Ezen feladat továbbá, hogy az R jósági index minimumát algebrai módszerekkel lehessen

meghatározni — amennyiben nem lineáris hálózatról van szó —, a hálózati egyenlet linearizálását igényli. A linearizálás történhetik csonkított Taylor-sorba fejtéssel, vagy egy a hálózatelemzés módszertana szempontjából megfelelőbb módszerrel a „helyettesítő modellek” (companion model) módszerével [8]. A módszer a hálózat ágegyenleteinek nem-linearitását, miután az ágak nem-lineáris vezetőképességét a lineáris G vezetőképességgel helyettesítette, egy virtuális J ágforrásárammal veszi figyelembe. Rekurzív eljárásról van szó, melynél a G és J értékei az előző lépésben nyert értékek alapján kerülnek meghatározásra. Az $i = f(v)$ nem lineáris ágegyenlet alapján — ahol f egy tetszőleges monoton, végezzámú törésponttal rendelkező függvény — a rekurzió $(m + 1)$ -edik lépésében az i ágáram első közelítésben kifejezhető a következő módon

$$i^{m+1} = i^m + \left[\frac{\partial i}{\partial v} \Big|_{v=v^m} (v^{m+1} - v^m) \right]. \tag{13}$$

A beszorzást elvégezve és átrendezve az

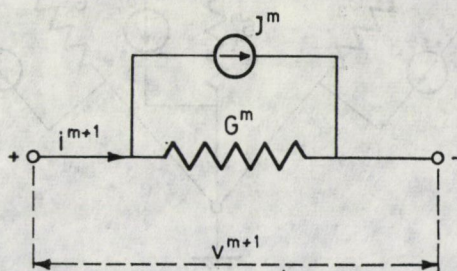
$$i^{m+1} = G^m v^{m+1} + (i^m - G^m v^m) \tag{14}$$

kifejezés adódik, ahol $G^m = \partial i / \partial v |_{v=v^m}$ a helyettesítő lineáris ág vezetőképessége. A (14) jobboldalán zárójelben álló kifejezést, mint egy J^m ágforrásáram értelmezhető (1. ábra).

A mondottak szemléltetésére alkalmazzuk a módszert egy erősen nem lineáris hálózatra, a magasnyomású gázhálózatra. A gázhálózat ágainak nyomásesése a következő összefüggésből számítható

$$p_1^2 - p_2^2 = kq^2 \tag{15}$$

ahol p_1 és p_2 a két végpont nyomása, q a gázáram (normál térfogaton és nyomáson), k egy az ág hosszából, átmérőjéből, valamint a gáz fizikai jellemzőiből számítható állandó. Tekintve, hogy a (15) úgy a p nyomásokban, mint a q áramokban nemlineáris — az ágegyenletet az $i = f(v)$ alakra hozandó — új Π_j csomóponti potenciálokat vezetünk be a következő definíció alapján: $\Pi_j =$



1. ábra

p_j^2 . Az ágegyenlet így a

$$q = \left(\frac{1}{k}\right)^{1/2} (\Pi_1 - \Pi_2)^{1/2} = Kv^{1/2} \quad (16)$$

alakot nyeri, ahol a Π_1, Π_2 csomóponti potenciálok különbséget (az ághajtó-erőt) v -vel jelöltük és $K = \left(\frac{1}{k}\right)^{1/2}$ jelölést vezettünk be.

A gázhálózat ágainak helyettesítő modelljében szereplő G^m vezetőképesség és J^m forrásáram számára a (14) és (16) alapján a következő kifejezések adódnak

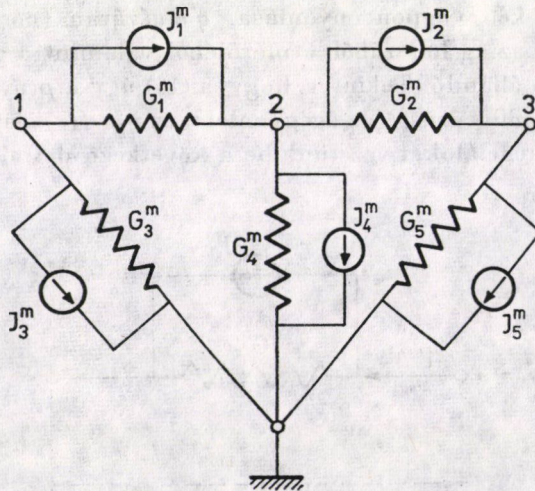
$$G_j^m = \frac{1}{2} K_j v_j^{1/2} \Big|_{v_j=v_j^m}; \quad J_j = -\frac{1}{2} K_j v_j^{1/2} \Big|_{v_j=v_j^m} \quad (17)$$

Itt j az ágindex.

Az ágakat az eredeti gázhálózati sémában a megfelelő helyettesítő modellekkel felcserélve ennek linearizált sémája adódik (2. ábra). A lineáris hálózat változói közötti összefüggések közül számunkra elsősorban a csomóponti potenciálok bázispontra vonatkoztatott értékei és a csomóponti terhelések (források és fogyasztók) között fennálló összefüggések jelentősek. A csomóponti potenciálok a hálózat bázispontjára vonatkozó értékeinek vektorát e -vel jelölve, ez a következő alakkal bír [5].

$$e = -[AGA^T]^{-1} [W_a - AGV + AJ] \quad (18)$$

ahol A a hálózat ágcsompont incidencia mátrixa, G az ágvezetés mátrixa W_a a csomóponti források és fogyasztások vektora, J és V az ágforrásáramok, illetve az ágforráspotenciálok vektora.



2. ábra

A (18) a hálózat lineáris helyettesítő modelljére közvetlenül alkalmazható

$$e^{m+1} = -[AG^m A^T]^{-1} [W_e^m + W_c^m], \quad (19)$$

ahol $W_e^m = (W_a - AG^m V)$, $W_c^m = AJ^m$; W_e^m a tényleges, W_c^m a hálózat nem-linearitásaiból származó virtuális csomóponti terhelések vektorát jelenti. A nagynyomású gázhálózatoknál

$$G^m = \frac{1}{2} K \operatorname{diag} \{A^T(e^{-1/2})\} \Big|_{e=e^m} \quad (20)$$

$\operatorname{diag} [A^T(e^{-1/2})]$ az $A^T(e^{-1/2})$ vektor diagonálásával nyert mátrix, K az ágak K_j faktorainak diagonális mátrixa

$$W_c^m = -\frac{1}{2} AK[A^T(e^{1/2})]_{e=e^m}. \quad (21)$$

Mivel a (17) a G^m -et és J^m -et a $v = \Pi_1 - \Pi_2$ függvényeként állítja elő, ezeket a (20) és (21)-ben

$$v = A^T e$$

összefüggés alapján az e csomóponti potenciálok függvényében adtuk meg (ezek értéke ugyanis az előző rekurzív lépésből ismert).

A (21)-ben szereplő csomóponti admittancia mátrixot, $[AG^m A^T]$ -t, Y^m -el, a $W_e + W_c^m$ összegvektort W^m -el jelölve, az elosztó-hálózat egyenletének lineáris rekurzív alakja

$$e^{m+1} = [Y^m]^{-1} W^m; \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (22)$$

lesz. A számítás mindaddig folytatandó, amíg $|e^{m+1} - e^m| < \varepsilon$ lesz, ahol ε egy a pontossági igényeket kifejező vektor.

4. A hálózat particionálása és a rekurzív állapotbecslés algoritmus

Az állapotbecslés (9)-ben definiált R jósági indexének meghatározásához a hálózati egyenleteket a (10), (11) alakra kell hozni. Ebből a célból az Y^m csomóponti admittancia mátrixot részmatrixokra bontjuk

$$Y^m = \begin{bmatrix} Y_{11}^m & Y_{12}^m \\ Y_{21}^m & Y_{22}^m \end{bmatrix}, \quad (23)$$

ahol $Y_{11}[n_M \times n_M]$, $Y_{12}[n_M \times n_U]$ a mérőműszerekkel ellátott, $Y_{21}[n_U \times n_M]$ és $Y_{22}[n_U \times n_U]$ a nem mért csomópontoknak felelnek meg; n_M és n_U a mért illetve nem mért csomópontok száma. Ez a dekompozíció könnyen elvégezhető, amennyiben először a műszerrel ellátott csomópontokat számozzuk be,

majd ezután a műszer nélkülieket. Az A csomópontág incidenciamátrix így nyert

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}_{11}[n_M x n_M], \mathbf{A}_{12}[(b - n_M)x n_M]; \mathbf{A}_{21}[n_U x (b - n_M)], \\ & \mathbf{A}_{22}[(b - n_M)x (b - n_M)], \quad (b \text{ az ágak száma}), \end{aligned}$$

részmatrixai és az ugyancsak részmatrixokra bontott \mathbf{G}^m vezetési mátrix segítségével az \mathbf{Y}_{k1}^m részmatrixok a következőképpen fejezhetők ki:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{11}^m &= \mathbf{A}_{11} \mathbf{G}_{11}^m \mathbf{A}_{11}^T + \mathbf{A}_{12} \mathbf{G}_{22}^m \mathbf{A}_{21}^T; \mathbf{Y}_{12}^m = \mathbf{A}_{11} \mathbf{G}_{11}^m \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{A}_{12} \mathbf{G}_{22}^m \mathbf{A}_{22}^T, \\ \mathbf{Y}_{21}^m &= \mathbf{A}_{21} \mathbf{G}_{11}^m \mathbf{A}_{11}^T + \mathbf{A}_{22} \mathbf{G}_{22}^m \mathbf{A}_{21}^T; \mathbf{Y}_{22}^m = \mathbf{A}_{21} \mathbf{G}_{11}^m \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{A}_{22} \mathbf{G}_{22}^m \mathbf{A}_{22}^T. \end{aligned} \quad (24)$$

Az \mathbf{Y}^m mátrix inverziója a részmatrixokból álló mátrixok inverziójára vonatkozó ismert szabályok alapján elvégezhető [9]:

$$[\mathbf{Y}^m]^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11}^m & \mathbf{S}_{12}^m \\ \mathbf{S}_{21}^m & \mathbf{S}_{22}^m \end{bmatrix} \quad (25)$$

ahol \mathbf{S}_{k1}^m részmatrixok a következő mátrixkifejezéseket jelentik:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{11}^m [n_M x n_M] &= \mathbf{Y}_{11}^m + (\mathbf{Y}_{11}^m)^{-1} \mathbf{Y}_{12}^m [\mathbf{Y}_{22}^m - \mathbf{Y}_{21}^m \mathbf{Y}_{11}^m \mathbf{Y}_{12}^m]^{-1} \mathbf{Y}_{21}^m \mathbf{Y}_{11}^m, \\ \mathbf{S}_{12} [n_M x n_U] &= -\mathbf{Y}_{11}^m \mathbf{Y}_{12}^m [\mathbf{Y}_{22}^m - \mathbf{Y}_{21}^m \mathbf{Y}_{11}^m \mathbf{Y}_{12}^m]^{-1}, \\ \mathbf{S}_{21} [n_U x n_M] &= -[\mathbf{Y}_{22}^m - \mathbf{Y}_{21}^m \mathbf{Y}_{11}^m \mathbf{Y}_{12}^m]^{-1} \mathbf{Y}_{21}^m \mathbf{Y}_{11}^m, \\ \mathbf{S}_{22} [n_U x n_U] &= \mathbf{Y}_{22}^m - \mathbf{Y}_{21}^m \mathbf{Y}_{11}^m \mathbf{Y}_{12}^m. \end{aligned} \quad (26)$$

A \mathbf{W}^m terhelésvektort szintén particionálva, a nyomásmérővel ellátott, illetve e nélküli csomópontok szerint

$$\mathbf{W}^m = [\mathbf{W}_M^m \mathbf{W}_U^m]$$

a (22) kifejezés a következőképpen írható

$$\begin{bmatrix} e_M^{m+1} \\ e_U^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11}^m & \mathbf{S}_{12}^m \\ \mathbf{S}_{21}^m & \mathbf{S}_{22}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_M^m \\ \mathbf{W}_U^m \end{bmatrix}, \quad (27)$$

vagy kifejtve

$$e_M^{m+1} = \mathbf{S}_{11}^m \mathbf{W}_M^m + \mathbf{S}_{12}^m \mathbf{W}_U^m, \quad (28)$$

$$e_U^{m+1} = \mathbf{S}_{21}^m \mathbf{W}_M^m + \mathbf{S}_{22}^m \mathbf{W}_U^m. \quad (29)$$

A nyert kifejezések általános érvényűek és bármely elosztóhálózatra alkalmazhatók.

Ezek után rátérhetünk a becslés R jósági indexének meghatározására. Az R (8)-ban adott definícióján túlmenően megkívánjuk, hogy a \mathbf{W} csomóponti terhelések becsléssel nyert értékei a \mathbf{W}_e előbecsléssel nyert értékeitől négyzetes középértékben csak minimálisan különbözzenek, vagyis hogy

$$(\mathbf{W}^m - \mathbf{W}_e)^T \Psi (\mathbf{W}^m - \mathbf{W}_e) \rightarrow \min \quad (30)$$

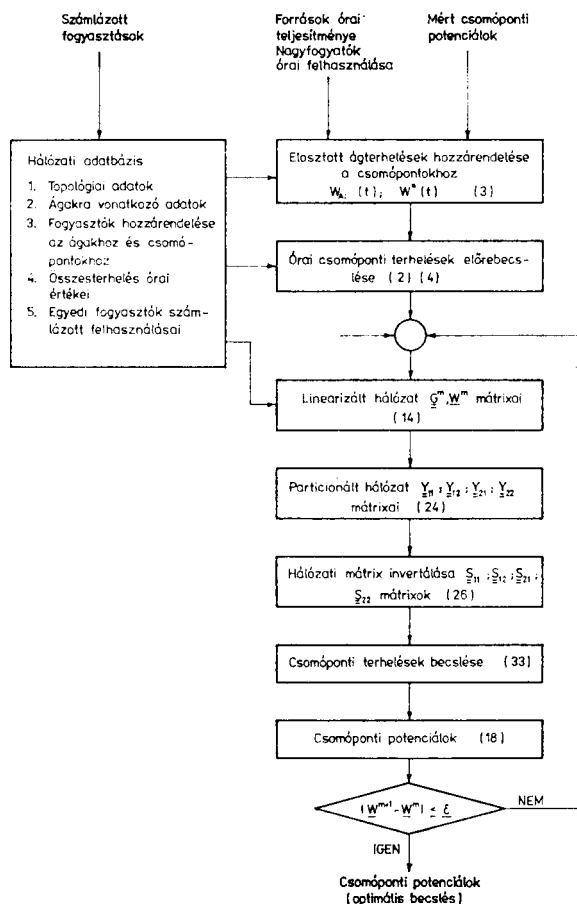
legyen. A (8), (28) és (30) alapján így

$$R^m = E\{(\mathbf{W}^m)^T \Theta (\mathbf{S}_1)^T \Theta \mathbf{S}_1^m \mathbf{W}^m - \tilde{e}_M^T \Theta \mathbf{S}_1^m \mathbf{W}^m - (\mathbf{W}^m)^T (\mathbf{S}_1^m)^T \Theta \tilde{e}_M + (\tilde{e}_M)^T \Theta \tilde{e}_M + (\mathbf{W}^m)^T \Psi \mathbf{W}^m - \mathbf{W}_e^T \Psi \mathbf{W}^m - (\mathbf{W}^m)^T \Psi \mathbf{W}_e + \mathbf{W}_e^T \Psi \mathbf{W}_e\}, \quad (31)$$

ahol $\mathbf{S}_1 = [\mathbf{S}_{11} \mathbf{S}_{12}]$, \tilde{e}_M a mért csomóponti potenciálok vektora, Θ és Ψ súlyozó mátrixok.

A hálózati terhelések értékének legjobb becslése a (31) szélső értékének meghatározásával történik. Mint skaláris esetben ehhez meghatározzuk a $dR^m/dW^m = 0$ egyenlet gyökeit. Az R^m skalárnak a \mathbf{W} vektor szerinti deriválásánál a következő szabályokat használjuk fel:

$$\frac{d c^T \mathbf{F} c}{d c} = 2 c^T \mathbf{F}; \quad \frac{d a^T c}{d c} = a^T.$$



3. ábra

Itt \mathbf{a} és \mathbf{c} tetszőleges oszlopvektorok, \mathbf{F} tetszőleges mátrix. Ennek alapján:

$$(\mathbf{W}^m)^T (\mathbf{S}_1^m)^T \Theta \mathbf{S}_1^m - (\tilde{\mathbf{e}}_M)^T \Theta \mathbf{S}_1^m + (\mathbf{W}^m)^T \Psi - \mathbf{W}_e^T \Psi = 0. \quad (32)$$

Átrendezve és a \mathbf{W}^m -re megoldva,

$$\mathbf{W}^m = [\mathbf{S}_1^m{}^T \Theta \mathbf{S}_1^m + \Psi]^{-1} [(\mathbf{S}_1^m)^T \Theta \tilde{\mathbf{e}}_M - \mathbf{W}_e]. \quad (33)$$

A \mathbf{W}^m a csomóponti terhelések vektorának optimális becslése az m -edik lépésben.

A $\mathbf{W}^m = [\mathbf{W}_M^m \mathbf{W}_U^m]$ vektor numerikus értékének a (27) egyenletbe történő visszahelyettesítésével a csomóponti potenciálok javított értékei adódnak. Ezek felhasználásával a \mathbf{G} és \mathbf{J} virtuális ágadmittancia, illetve forrásárammértékek nyerhetők. (A példaként tárgyalt gázhálózat esetében ehhez a (20) és (21) kifejezések szolgálnak.) Az új \mathbf{G} és \mathbf{J} (illetve \mathbf{W}_e) értékek alapján javított \mathbf{Y} és \mathbf{S} mátrixok számíthatók, melyek végül is a (33)-ba helyettesítve, a jósági index $(m + 1)$ -edik lépésben érvényes optimális becslését adja stb. Az eljárás mindaddig folytatandó, amíg $|\hat{\mathbf{W}}^{m+1} - \hat{\mathbf{W}}^m| < \varepsilon$. A $\hat{\mathbf{W}}^m$ így nyert végleges értékét a (27) egyenletbe visszahelyettesítve, az állapotjellemzők, a csomóponti potenciálok, optimális becslései adódnak.

Az optimális becslés leírt algoritmusinak folyamatábrája a 3. ábrán látható.

5. Befejező megjegyzések

Befejezésül néhány kvalitatív jellegű megállapítással szolgálunk a becslés jóságáról, a módszer stabilitásáról és a gépidőigényről.

A becslés jósága két tényezőtől függ:

a) a mérőműszerrel ellátott csomópontok és az ezekkel nem rendelkező csomópontok viszonzszámától,

b) a mérőműszerek térbeli eloszlásának egyenletességétől.

Abban — a gyakorlatban egyébként alig előforduló esetben —, amikor a műszerek a hálózat egyik részére volnának koncentrálnak, a becslés pontossága ezen a területen megnőne, de az egész hálózatra vonatkozó átlagos pontosság csökkenne.

A módszer konvergenciájáról a következő állapítható meg: Mint az iteratív eljárások általában, ezen eljárás sem abszolút konvergens. A módszerrel konvergencia javító tényezőként kell értékelni azt a körülményt, hogy az egyes számítási ciklusokban a ciklusoóptimum véges lineáris becslési módszerrel kerül meghatározásra. Az instabilitás veszélye csökkenthető a virtuális ágadmittancia és ágforrásáramok \mathbf{G}° , illetve \mathbf{J}° induló értékeinek helyes megválasztásával. Erre a célra célszerű egy standard nagy teljesítményű, nem-

lineáris hálózatok elemzésére alkalmas programot használni, amely az előre-becsült W terhelésértékekhez meghatározza a megfelelő csomóponti potenciálokat [10].

A gépidőszükségletet a hardware adottságokon és a rendelkezésre álló mátrixkezelő software teljesítményén kívül a hálózat mérete és az n/n_M viszonyszám szabja meg. A másik tényező a szükséges lépésszám, amely a nem linearitások „erősségének” függvénye. A lineáris hálózat állapotbecslése csupán egyetlen lépést igényel.

IRODALOM

1. SCHWEPPE, F. C.—WILDES, J.: Power System Statistic State Estimation. Exact Model. *Trans. IEEE PAS-89*, 1 (1970), 120—125
2. SCHWEPPE, F. C.—ROM, D. B.: Power System Static State Estimation. *Trans. IEEE PAS-89*, 1 (1970), 125—130
3. SCHWEPPE, F. C.: Power System Static Estimation. Implementation. *Tns. IEEE PAS-89*, 1 (1970) 130—135
4. GÉHER, K.: Lineáris hálózatok. 4. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1979
5. VÁGÓ, J.: A gráfelmélet alkalmazása villamos hálózatok számítására. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1976
6. BÁNYÁSZ, Cs.—KEVICZKY, L.: Discrete-Time Identification on Linear Dynamic Processes. *MTA SzTAKI Tanulmányok*, Budapest, 94 (1978)
7. GERTLER, J.: Egy sztatistikus szűrési eljárás folyamattirányításhoz. Doktori értekezés. *MTA SzTAKI Tanulmányok*, 94 (1979)
8. NAGEL, L.—ROHRER, R.: Computer Analysis of Nonlinear Circuits. *IEEE J. SC.* 6 (1971), 166—182
9. RÓZSA, P.: Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974
10. SINGER, D.—ELEK, J.: Softwarefragen der Analyse. Projektierung und Steuerung von Gasnetzen. *Acta Techn. Hung.* 87 (1978), 391—406

On a New Method for the State Estimation of Distribution Nets — The paper gives an estimation method for the non-measured state variables of non-linear nets (gas and water nets, etc.). In contrast to other estimation methods, it is not assumed that input data are available in redundant quantity. The state estimation occurs in two steps. In the first a rough estimation of the node loads are calculated founded on long-time statistical data of the total network load and on some hypothesis concerning the structure of load distribution. In the second step the node load data are refined by an LS-estimation. The quality index of the estimation has a minimum if the calculated node potentials and the measured ones differs minimally. According to the non-linear character of the system, the estimation is executed as a *recursive* process of linear estimation steps.

Über eine neue Methode zur Schätzung von Zustandsvariablen bei Verteilungsnetzen. — Die Arbeit gibt eine neue Methode für die Abschätzung der nicht gemessenen Zustandsvariablen von nichtlinearen (Gas, Wasser) Netzen. Im Gegensatz zu bekannten Schätzungsverfahren, wird es nicht angenommen, daß die Messdaten in Überschuß vorliegen. Die Schätzung erfolgt in zwei Stufen. In der ersten werden rohe Schätzungswerte der Knotenpunktbelastungen aufgrund langfristiger statistischer Daten und gewisser Annahmen über die Struktur der Belastung abgeleitet. Im zweiten Schritt werden die Knotenpunktbelastungsdaten dadurch verfeinert, daß der Wert eines Qualitätsindexes minimiert wird, wodurch die berechneten Werte der Knotenpunktpotentiale — in jenen Punkten, wo Messungen vorliegen — diese optimal annähern. Gemäß des nichtlinearen Charakters der Netze stellt der Schätzungsprozess eine *rekursive* Folge von linearen Schätzungen dar.

ELEKTRON- ÉS FOTONSZÁMLÁLÁS SOKSZOROZÁSSAL

BUDINCSEVITS ANDOR*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1979. július 5-én]

A szerző tudománytörténeti áttekintést nyújt az 1930–1950 között végzett termikus és szekunder elektronemissziós elektroncsövekkel és elektronsokszorozókkal végzett kutatásokról, és azok nem publikált eredményeiről. Továbbá leírást ad a kis sebességű termikus és fotoelektronoknak sokszorozás útján történő számlálására irányuló kísérletekről. Ismerteti az ötvözet szekunder katódák, mint az Ag—Mg ötvözet dinodák, továbbá a 12 — 14 fokozatú statikus fókuszálású és szétszedhető elektron sokszorozók kifejlesztését. Beszámol a sokszorozókkal történő atomi részecskék, ionok és fotonok számlálási kísérleteiről, valamint szcintillációs mérésekről. Végül elemzi a fény kettős természetének problémáit, beszámol egy gondolat-kísérlet megvalósításáról a fotokoincidencia kísérletekről, melynek során, egy véletlen felismeréssel eljutnak 1943-ban az $1 \cdot 10^{-9}$ sec idő felbontásig. Ez a módszer ma is az időspektroszkópia alapját képezi.

I. Bevezetés

A Tungstram Kutató Intézetben 1937-től kezdve egyedi elektronok és fotonok kutatásának igazolásával foglalkoztunk. Mielőtt ennek történetét felidéznők, némi felvilágosítással tartozunk a kornak a természetkutatással szemben tanúsított állásfoglalásáról.

A harmincas évek elején a világgazdaság mélypontja ellenére a vezető izzólámpa és rádiócső gyárak, köztük a Tungstram is, gyors fejlődésnek indultak. Az okok elemzése során a tapasztalatok azt mutatták, hogy rohamos fejlődésük az újabb és újabb felfedezéseknek és találmányoknak köszönhető. Ezek a találmányok olyan kutatások és vizsgálatok nyomán születtek, amelyek célja a természet alapjelenségeinek jobb megismerése volt.

A felismerést követően a Tungstram Izzólámpa és Rádiócső Gyár hazánkban is kutatóintézetet létesített, mely 1930-ban PFEIFER Ignác volt műegyetemi tanár vezetésével kezdte meg működését. Néhány év után azonban kiderült, hogy az üzemi problémák felemésztik a kutatók idejét és energiáját. Ezért 1936-ban az új intézeti igazgató BAY Zoltánnak, a későbbi műegyetemi tanárnak a vezetésével az intézet egy részlegének kutatói munkáját az alapkutatások felé irányította. A kutatóintézet akkori tudományos atmoszférájában az új találmányok ösztönzően hatottak az egyedi elektronok és fotonok sokszorozás útján történő számlálására kezdeményezett alapvető kísérleteinkre.

A természetnek kevés olyan jelensége van, mely a fizikusok érdeklődését jobban keltené föl, mint az egyes elektronok és fotonok természetének a miben-

* Dr. Budincsevits Andor, 1138 Budapest, Toborzo u. 1.

léte. Az elektronokkal és fotonokkal kapcsolatos akkori ismereteink EINSTEIN [1] fénykvantum elméletére és LANGMUIR-nak [2] az elektronemisszió és izzólámpák vákuumfizikai alapkutatásaira vezethetők vissza.

A természetkutatás elméleti ismereteiből fakadó és a gyakorlatban megvalósult találmányok ekkor már szép példáját mutatták a két törekvés kölcsönhatásának. A mai modern elektroncsövek és fényforrások tökéletes megoldásai ezekből az ismeretekből származnak.

Az 1930-ban meginduló kutatóintézet elektroncsőlaboratóriumát CZUKOR Károly, Eötvös Loránd volt tanársegédje vezette, aki az első világháborút követően megindítója volt a magyar rádiócsőgyártásnak, ugyanő később jó érzékkel a fémgőz eljárásen alapuló, bárium katódájú Tungstram rádiócsöveknek szerzett nemzetközi nevet.

Az akkori időkben a vezető rádiócsőgyárak között a gazdaságosabb és nagyobb emissziót adó izzókatódókért elkeseredett szabadalmi harc dúlt. E sorok írója 1930 februárjában kapcsolódott be az elektroncsőlaboratórium munkáiba, amikor a kutatás elsőrendű feladata az volt, hogy a Philips gyárral szemben megvédje a fémgőzkatód eljárást és igazolja, hogy a Tungstrambáriumcsövek technológiája nem azonos az 1923. évi Philips-féle [3] szabadalmi bejelentéssel. Szerző egy kezdő fiatal ember lelkesedésével oldotta meg a rábízott feladatokat, végül is közös erőfeszítéssel elhárultak a vállalatra nehezedő nagyszögű licencterhek. Ekkor egy új világgal, az elektronok világával ismerkedett meg, és végleg lekötötte az érdeklődését az elektronemisszió mélyebb megismerése.

2. Termikus elektronemisszió

Ekkorra már kétségtelenné vált, hogy a termikus elektronemisszió a fémek általános tulajdonsága: RICHARDSON [4] mutatott rá először arra az összefüggésre, amely egyrészt a termikus elektronemisszió, másrészt a fémek között fellépő kontaktuspotenciál, és a fémek fotoelektron kibocsátása között fennáll. Míg a termikus elektronok a kilépésükhöz szükséges energiát a hőenergiájukból nyerik, addig a fotoelektronok azt a fémre eső fényenergiából merítik. A fotoelektronok mozgási energiájára is érvényes a fémből való kilépésre vonatkozó EINSTEIN-féle [1] elmélet, mely szerint

$$1/2mv^2 = hv - P,$$

ahol ν a fény rezgésszáma és P az egy elektronra jutó kilépési munkát jelenti. A fény energiakvantuma alakul át elektronenergiává, amelynek egy része arra fordítódik, hogy legyőzze a felületi potenciálgátat és kilépjen a vákuumba; a felesleg az elektron kinetikus energiájában mutatkozik meg.

Az első elektroncső technikában LANGMUIR [5] vizsgálatai nyomán a tiszta volframkatódok jutottak szerephez, amelyek a nagy teljesítményű és nagyfeszültségű adócsöveknél a mai napig is megmaradtak. De 1930-ban még készültek MR3-as tiszta volframkatódos rádiócsövek is. A tiszta volframkatódokból kilépő elektronok sűrűségét RICHARDSON [6] egyenlete írja le:

$$I = AT^2 e^{-\varphi/KT}.$$

Ezek szerint a katódemisszió a telítési áram határáig a hőmérséklettel exponenciálisan nő, a telítési áramtól kezdve már csak az anódfeszültség $3/2$ hatványával növekszik.

LANGMUIR és KINGDON [7] figyelték meg először a tiszta volframfelületen adszorbeált cézium atomoknak azt a hatását, hogy nagymértékben leszállítják az elektronok kilépési munkáját. Azt tapasztalták, hogy az elektronemisszió 690°C -nál maximumot mutat és a kilépési munkája $\varphi = 0,66$ eV-ra csökken, ugyanakkor a tiszta volfram kilépési munkája $\varphi = 4,5$ eV. A céziummal befedett fémfelület áramnövekedése 10^{21} nagyságrenddel volt nagyobb, mint azonos hőmérsékleten a tiszta volfram telítési árama. Azonban az idegen fématomokkal befedett fémek emissziója nem bizonyult tartósnak, a cézium rövid idő után lepusztult a fémfelületről.

Már LANGMUIR és KINGDON [7] azt vették észre, hogy ha a volframot oxidálták és erre az oxidrétegre adszorbeáltatták a céziumot, akkor az emissziós áram még 1000°C -nál is $4,10^3$ -szor volt nagyobb, mint a tiszta volframnál és tartós, stabil elektronemissziót adott. A céziumot később a kisebb tenziójú bárium váltotta fel. Ezeket a katódokat nevezték el fémgőzkatódoknak. Alapvető problémájuk a volfram oxidálásának a technológiája volt. Az oxidálást többféle módon lehet elérni és a szabadalmi ellentétek e körül dúltak.

Tapasztalataink azt mutatták, hogy a legjobb eredmények a W_4O_{11} kék volframoxiddal érhetők el. Az ily módon oxidált volframfonal vákuumban felizzítva elbomlott W-ra és oxigénre. Ha gondoskodtunk arról, hogy ez a művelet báriumgőz atmoszférában történjék, akkor a katódra párolgó báriumgőz atmoszférában báriumoxiddá alakult és kellő vastagságú olyan réteget képezett a volframfelületen, amely már alkalmas volt további aktiválásra. Ugyanis a normál oxidbevonatú katódokat meg kell különböztetni az aktivált oxidkatódoktól. Az eljárás célja a kilépési munka további leszállítása volt. Ez a cél atomos fémbárium rétegnek az oxid felületre való adszorbeálásával, hőkezelésekkel, rápárolgatással — közben áramalatti ionvándorlással — érhető el. Egy jól aktivált fémgőzeljárással készült katódnál egy watt fűtőenergia árán $80 \div 100$ ma emissziósáram nyerhető.

A fenti szabadalmi okok a szerzőt arra készítették, hogy más oxidképző eljárást is kidolgozzon. THEISZ Emil kémikusnak javaslatára — volframfelületre elektrolízissel báriummetavolframát bronzot választottunk le. Azon-

ban ezek a magas oxigéntartalmú vegyületek vákuumban már alacsony hőmérsékleten elhomlanak és a szivattyú elszívja a felszabaduló oxigént, még mielőtt a redukciós pasztillából keletkező fémbáriumgőz érné a katódot. Szükségesnek mutatkozott egy $500 \div 600$ °C-nál meginduló és lassan lezajló báriumredukció létrehozása. A problémát már korábban, 1926-ban WINTER Ernő az úgynevezett olajos pasztillával oldotta meg: Ő báriumoxid és fém-alumíniumport kevert össze és azt 800 °C-on H_2 -ben összesütötte, a kész redukciós terméket paraffinolajban finom porrá őrölte és pasztillákat préselt belőle. A báriumpasztillákat az anód mélyedésébe helyeztük. A felizzításkor meginduló báriumredukció a katódfelületen elbomló metavolframáttal báriumoxidot képezett, majd további párologtatással aktivált fémgőzkatódot nyertünk.

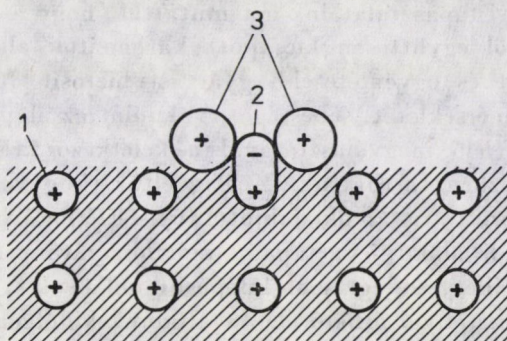
A fémgőzeljárás nehezen kezelhető műveletek sorából állt, a valóságban bonyolult módon végül földalkáloxid bevonatú ismert WEHNELT [8] katódot nyertünk, amely további hőkezeléssel aktiválható volt. Számos kísérleti megfigyelés eredményeként magas emissziós értéket csak akkor kaptunk, ha kristályos báriumoxid képződött a volframfonal felületen. Mivel a tiszta báriumoxid olvadáspontja közel áll a katód aktiválási hőmérsékletéhez, sokszor előfordult, hogy olvadt üveges báriumoxid képződött, amely elektronemisszióra alkalmatlanná vált. Mire mindezeket megtanultuk, a fémgőzeljárás, különösen az olajos báriumpasztilla okozta szennyezések és a párologó fémbárium kellemetlen átvezetése miatt, elvesztette korábbi jelentőségét.

A rohamosan fejlődő híradástechnika egyre növekvő teljesítményű és erősítésű elektroncsöveket követelt az ipartól. Végül megszülettek az első indirekt fűtésű, viszonylag nagy felületű oxidkatódok. NATHINGHEM [9] alkalmazta először a bárium-stroncium kettős karbonátokkal bevont és nitrocellulózéval kötött katódokat, amelyek vákuumban termikusan elbontva CO_2 gáz leadása mellett kristályos Ba—SrO-ra bomlottak. A báriumoxid megolvadását a magasabb op-tu stronciumoxid gátolta meg, és így könnyen aktiválható oxidkatódot nyerhettünk. A Ba—SrO katódák hamarosan elterjedtek. Ezekre már nem kellett fémbáriumot párologtatni, az aktiválás folyamán a bárium magából az oxidból izzítás útján redukálódott. A vákuum megjavítására e sorok szerzője 1932-ben már bárium-alumínium ötvözetet készített, mint getter anyagot. Az találta, hogy az 54% Ba és 46% Al összetétel eutektikumot képez és száraz levegőn jól eltartható. Vákuumban pedig felizzítva $600 \div 700$ °C-on fémbáriumot adott le, és mint getter anyag mind a mai napig megmaradt.

KINGDON [10] mutatott rá először arra, hogy a kilépési munkát a kialakuló dipólus réteg módosítja, ha a fémfelületen közvetlen helyezkedik el. Az elektropozitív atomok növelik, az elektronegatív atomok — mint pl. az oxigén — csökkentik a kilépési munkát.

Időközben J. H. DE BOER [12] kísérletileg igazolta, hogy az oxidkatód rendszereknél szükséges az alapfémeken elektronegatív réteg jelenléte. Az akti-

válás után az oxid felületen földalkáli fémek atomos rétegének adszorpciója mutatható ki. Az ilyen sorrendben elrendezett katódból az elektronok már át tudnak jutni az alapfémről az oxidrétegen keresztül a kis kilépési munkájú atomokba, amelyekből a fenti hőmérsékleten a vákuumtérbe emittálódnak. E réteg rendszereknek minden esetben a következő sorrendet kell követniök: W—O—Cs, W—O—Ba vagy Ni—O—Ba. Az oxigén minden esetben a magfém felületen dipólusként helyezkedik el, mint az az 1. ábrán látható.



1. ábra. Fémfelületen dipólusként elhelyezkedő oxigén atom

Az elektronemisszió elméleti hátterét azok a kvantummechanikai számítások igazolták, melyeket TAMM és BLOHINCEV majd WIGNER és BARDEN végeztek el. Számításaikban jó egyezést kaptak azzal az összefüggéssel, miszerint a fémek szabad elektronjai viszonylag alacsony hőmérsékleten át tudnak jutni a potenciálgáton azoknál a fémeknél, amelyek kristályrács konstansa nagy, kilépési munkájuk pedig kicsiny. Példa erre a cézium, ahol $d = 6,05 \text{ \AA}$ és a kilépési munka $\varphi = 1,9 \text{ eV}$, a volframnál pedig $d = 3,16 \text{ \AA}$ és a kilépési munka $\varphi = 4,5 \text{ eV}$. Ezt utólag a mérések is igazolták. Tehát a földalkáli fémekben levő szabad elektronok nem túl magas hőmérsékleten, $650 \text{ }^\circ\text{C}$ -on saját hőenergiájuk ellenében átjutnak a potenciálgáton, miközben energiát vesztenek lehűlnek.

H. BRÜCHE [13] kimutatta elektronmikroszkóppal, hogy az izzó oxidkatódok leképezett képén az egyes kristálysíkok különböző módon emittálnak, azaz különböző kilépési munkával bírnak. Ez a megállapítása sugallta később a szerzőnek a földalkáloxidokkal bevont izzókatódok további tökéletesítését, feltételezve nagyobb emisszióképes kristály struktúrok létezését.

Egyidejűleg jutottak ehhez a gondolathoz ARNOLD [14] a Western Elec. Comp.-nál és SPANNER [15] is, akik egymástól függetlenül megfigyelték, hogy a bárium-stroncium-calciumoxidok megfelelő arányú keverésével az elektronemisszió további fokozása lehetséges annak ellenére, hogy az egyes komponensek kilépési munkája magasabb a végső aktivált értéknél.

SPANNER a következő összetételben: 600 mol CaO + 10 mol BaO + 5 mol SrO katódokon a következő kilépési munkát kapta:

BaO kilépési munkája $\varphi = 0,99$ eV

SrO kilépési munkája $\varphi = 1,27$ eV

CaO kilépési munkája $\varphi = 1,71$ eV

Együttesen aktiválva $\varphi = 1,12$ eV, ami már igen jó eredménynek számított.

Saját gyártási tapasztalataink azt mutatták, hogy a kevert karbonátok helyett az oldathól együttesen kicsapott karbonátok alkalmazása további emissziönövekedést és egyenletesebb gyártást biztosít [16], mert elő lehet írni a kicsapás hőmérsékletét, sebességét, valamint az alapanyagok tisztasági fokát. Ezek megfelelő megválasztásával a keletkező kristályok alakját és nagyságát már kézben tarthattuk. Megfigyeltük, hogy az elektronemisszió nagysága a keletkezett kristályok alakjától függ. Elérhető volt, hogy kevesebb tűkristály és gömb alakú összetapadt konglomerátum képződjék. A legnagyobb emisszió, illetve a legkisebb kilépési munka sok szabályos kis, különálló hexagonális kristállyal érhető el. Az általunk kidolgozott finomszemcsés kicsapási módszerrel elmaradt a katódmassza őrlése, a szemcsék mérete pedig $0,2 \div 1,5 \mu\text{m}$ között változott. A javulás a 2—1—2 mol aránynál volt optimálisan észlelhető, amikor az összetétel 2 mol BaCO₃ + 1 mol SrCO₃ + 2 mol CaCO₃ elegykristályból állt. Az ebből készült oxidkatód könnyen aktiválódott és sok egyedi kristályból álló struktúrát mutatott.

A PATAI és TOMASCHEK [17] által kezdeményezett kolloidkatód eljárás nem hozta meg a várt emissziós eredményeket. A nagy simaságú és tömörségű kolloid-báriumhidrokarbonát bevonatokkal nem lehetett megfelelő kristálystruktúrát elérni. Mi a finom szemcsés karbonát kicsapási eljárást megtartva, a kataforézist vettük át, és nagy tömörségű katódokat készítettünk megfelelő kristálystruktúrával. További eredményt a kataforézis jelentett, amelyet először alkalmaztunk katódkarbonátok és Al₂O₃ felvitelénél fűtőtesteknél. A kataforetikus szuszpenzióhoz hordozó közegnek az izobutylalkohol bizonyult a kedvezőbbnek, mert molekuláinak viszonylag nagy elektromos szabad töltéséhez hozzátapadtak a finom karbonátszemcsék, amelyek elektromos töltésük folytán lebegésben tartották, illetve nem ülepedtek. A kataforézisnél az alkalmazott potenciál hatására a karbonátkristályok a negatív pólusú katódmagfém felületre vándoroltak. A különböző katódbevonási eljárások közül a kataforézis bizonyult emissziós szempontból a kedvezőbbnek, mert a finom kristályszemcséket tartalmazó szuszpenzióból csak a kis kristályok váltak le, míg a szennyezések és durva szemcsék az izobutylalkoholban visszamaradtak. A kataforetikus technológiával készült katódok kilépési munkája elérte a $\varphi = 0,99$ eV értéket és a félfűtőáramú teleses rádiócsövek katódjait alkották. Ezek a teleses csövek 200 milliwatt fűtőteljesítmény

mellett kb. 30 ma telítési áramot adtak és őket csak a tranzisztorok tudták kiszorítani. A telepes csöveket speciális berendezésekben neutron érzéketlenségük miatt ma is alkalmazzák.

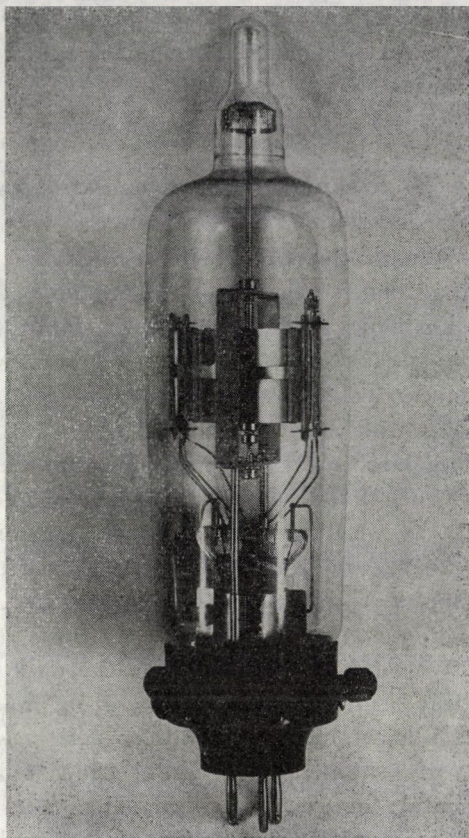
3. Szekunder elektronemisszió

A rádiócsövek és a híradástechnika gyors fejlődése, a nagyobb erősítés igénye már nemcsak az elektronemisszió problémáit vetették fel, hanem az elektronok működés közbeni viselkedésének vizsgálatát is szükségessé tették. A harmincas évek elején csak triódákat és tetródákat gyártottunk. 1932-ben jelentek meg a világpiacon az első Telefunken [18] pentodák, melyek 20 ÷ 30-szor nagyobb erősítést adtak, mint a tetródák.

A pentodák vizsgálata során rájöttünk, hogy az anód előtt levő katód-potenciálú fékezőrács megakadályozza az anód szekunder emisszióját. Megállapítható volt, hogy az oxidkatódból állandóan bárium szabadul fel, ami mind a rácsoakra, mind az anódra rakódik le, eközben az anód és a rácso felületén a kilépési munka nagymértékben lecsökken. Az ilyen báriummal bevont felületbe becsapódó primer elektronok több kis sebességű másodlagos szekunder elektront váltanak ki, amelyeket a második pozitív rács gyorsít fel és egy ellenkező irányú áramot hoz létre, ami levonódik a vezérelt anód-áramból és nagymértékben csökkenti a rádiócsövek erősítését. Ismét szabaddalmi akadályokba ütköztünk: hogy a pentodaszabadalmat elkerüljük, WINTER Ernő javaslatára a fékezőrácsot magában a csőben egymegohmos ellenálláson keresztül a katódhoz kötöttük. A Telefunken-ék a fékezőrács szükségét a szabadalmi leírásban a cső belső ellenállásának növelésével indokolták. Saját bejelentésünkben viszont leírtuk, hogy mi ezt a szekunder elektronok kilépésének megakadályozására alkalmazzuk, és ezzel hozzájárultunk a pentoda feltalálásához.

Az erősítés növelésének további módja ezután az volt, hogy a rádiócsöveket meredekebbé tegyük; hogy ezáltal a rácsofeszültség változásra minél nagyobb anódáram változás következzen be. Ennek elérésére a rácso meneteinek minél jobban meg kell közelíteniök a katódot. Ha a kis negatív előfeszültségű vezérlőrácso az erősítendő feszültséggel megfelelően közel visszük a katódhoz, akkor nagyobb emissziósáram vezérlésére lesz képes. A gyakorlatban ez azt jelentette, hogy minél jobban közelíti meg a vezérlőrácso a nagyfelületű indirekt fűtésű katódot, annál jobban fog a rácso felmelegedni, végül maga a rácso a ráarakódott báriumtól katódként kezd emittálni. Ezt a káros rácsoemissziót kellett megakadályozni anélkül, hogy eltávolodnánk a rácsoval a katódtól és csökkentenénk a cső meredekségét.

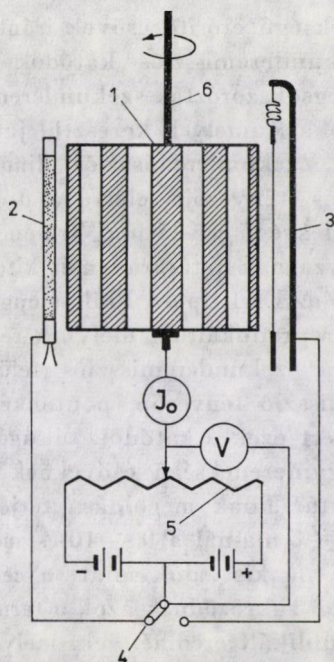
A probléma megoldásához annak felismerése vezetett, hogy a katód és a rácso anyaga két különböző fém, melyek között kontaktuspotenciál áll



2. ábra. Forgatható anódú dióda rácsemisszió mérésére

fenn, ami egyenlő a két fémhez tartozó voltokban mért kilépési munka különbségével. Ez módot adott a rácsemisszió mindenkori nagyságának a meghatározására. A kísérletek első fázisában a katódpárolgásnak a mértékét a hőmérséklet függvényében kellett meghatározni és a legkisebbre beállítani anélkül, hogy a telítési áram változnék. Ezután olyan fémeket vagy fémbevonatot kellett találni, amelyen a rácstra párolgó bárium a kilépési munkát csak jelentéktelen mértékben csökkenti. Feltételeztük, hogy van ilyen bevonat. A kísérleteket sokszor inkább az intuitív megsejtés, mintsem az egzakt logikus következtetés irányítja. Most is ez történt: olyan mérési módszert kerestünk, amellyel a rácsemisszió kialakulása követhető.

A 2. ábrán látható az erre a célra tervezett mérőcső. Ez a cső egy forgóhengeres anódból állt, amelynek palástján különféle tiszta fémek és bevont fémek 5 ÷ 6 mm széles vizsgálati lemezeit rögzítettük. A forgó anódhengert 800 °C-on vákuumban gáztalanítottuk, az oxidkatódot pedig elbontottuk és aktiváltuk. Az aktivált oxidkatóddal szemben 180°-ra egy tiszta és ismert



3. ábra. Kilépési munka mérési vázlatja

kilépési munkájú volframkatódot helyeztünk el. Az 1-es hengert kívülről mágnessel elforgatva, felváltva hol a 2-es oxidkatód, hol a 3-as volframkatód került szembe a vizsgálendő fémmel. Ezután az oxidkatódból áramkivétel mellett bárium párologott a mintára, közben ismételve meghatároztuk a volframkatódhoz képest a kilépési munkakülönbség változását. A méréshez egy retardáló potenciált használtunk, ugyanis a katód indulóáramát nullává téve, megkapható elektronvoltokban a két kilépési munka különbsége (3. ábra).

A mérések során azt találtuk, hogy az összes számításba jöhető fémek és fémbevonatok közül az arannyal többször bevont és H₂-ben beizzított molibdén az, amely még izzó állapotban is alkalmas a rácsemisszió megszüntetésére [19]. A felismerést követően már megközelíthető volt az aranyozott rácossal a katód. A távolságot csak a zárlat veszélye korlátozta, így is elérhető volt a 25 μm katódrács távolság. Maga az eljárás is alkalmas volt nagytömegű rácsgyártásra.

Ezzel a pentoda körüli vita is megoldódott. A Telefunkenék a rácсарanyozási szabadalmat kicserélték a pentoda-szabadalomra.

Az erősítés növelésének problémája az elektroncső-kutatásnak továbbra is aktuális témája maradt. A rövidhullámú adóállomások elterjedésével a frekvencia növekedését az elektroncsövek nem tudták követni, erősítésük az elektronok véges repülési ideje miatt lecsökkent. Ezért fokozódott az igény

szélessávú és nagymeredekségű erősítő csövek iránt. A Philips kutatói [20] próbálkoztak először szekunderemissziós katódok alkalmazásával. Normál tetrodák meredekségét megsokszorozták szekunderemissziós úton oly módon, hogy a vezérelt elektronokat, amelyek keresztül jutottak a gyorsító rácson, elektronoptikai úton egy szekunderemissziós dinodára irányították, ha a dinoda szekunderemissziós tényezője elérte a $\delta = 5,0$ faktort 200 V-nál, akkor a 3 ma/V alapmeredekségű cső 15 ma/V-ra emelkedett a 8 ma összáram mellett. Ennek az új irányzatnak hatására ismét kiterjedt szekunderemissziós kutatásokat végeztünk, és az EEl típusú Philips nagymeredekségű szekunderelektron erősítésű csövet reprodukáltuk, melynek részleteiről a továbbiakban számolunk be. Azonban a szekunderemissziós felületek általános tulajdonsága, hogy a szekunderemisszió tényezője pontonként változik és csak átlagérték állapítható meg, ezért ezek a katódok túlságosan zajosak. Tehát ez az útja a szélessávú és nagymeredekségű csöveknek nem vált be. Később a Bell-laboratórium munkatársainak megoldása terjedt el. A feszített keretrácsokkal elérhető volt $5 \div 8$ ma-nál a $9 \div 10$ -es meredekség, bár gyártásuk nagy precizitást igényelt, de kis zajuk miatt a célnak jobban megfeleltek.

E rövid áttekintésben tükröződnek azok a termikus és szekunderemissziós kísérletek és nem publikált eredmények, melyeket 1930 és 1937 között végeztünk. A szerzett ismeretek sokban hozzájárultak az új kutatási irányzat követéséhez, mely 1937-ben megindult az egyedi elektronok és fotonok megismerésére, valamint elektronsokszorozók kifejlesztésére. Az eredmények később igazolták, hogy miért kell egy ipari kutatóintézetnek alapkutatással, azaz magasabb szinten műszaki kultúrával rendelkezni.

4. Elektronok sokszorozása

Szekunderemissziós fotoerősítők terén az első gyakorlati eredményeket 1936-ban V. K. ZWORYKIN [21] érte el azzal, hogy szekunder elektronokat elektronoptikai úton egy következő szekunder katódra fókuszálta. Ezzel a módszerrel több fokozaton keresztül az elektronok sokszorozását érte el. A kísérletileg mért sokszorozási tényező a fotoáram erősítésének a δ^n -szeresét érte el. E módszer a képfeltevő csőnek a fotoérzékenységet az egyszerű fotocellákéhoz képest a 200-szorosára növelte, és nagy lépéssel vitte előre a televíziózás kérdését.

Rövid idővel ezután ZWORYKIN [22] megszerkesztette az első fotoérzékeny elektronsokszorozót, amely 9 fokozatból állt és mágneses fókuszálással terelte az elektronokat egy növekvő elektromos térben egyik szekunderkatód-ról a másikra. Az Ag—Cs₂O—Cs rétegű dinodák szekunderemissziós tényezője $\delta = 3 - 4$ elektron, 100 V ütközési sebesség mellett. A 9 fokozatú elektron sokszorozással egymilliószeres áramerősítést ért el.

1937-ben érkezett az első ZWORYKIN által szerkesztett amerikai céziumos elektron sokszorozócső a kutatólaboratóriumunkba. A mérések egyértelműen igazolták a sokszorozó 10^8 -szoros áramerősítését.

BAY Zoltánnak, a Kutató Intézet akkori fiatal igazgatójának támadt az a gondolata, hogy ha az elektron sokszorozócsőnek ilyen nagy erősítése van, akkor ez vákuumban az egyes kis sebességű elektronokat a sokszorozás után kimutatja és ezáltal ezek egyenként megszámlálhatókká válnak. Sőt a tervezés során, tovább fűzve a gondolatot, a fotoeffektus által kiváltott fotoelektronokat megsokszorozva, mód nyílik egyedi fotonok megfigyelésére, ill. számlálására is, mivel az atomok és fénykvantumok közötti kölcsönhatáskor az elnyelt foton egy elektron kiszabadulásával jár. Ezzel EINSTEIN fotonelmélete kísérleti bizonyítást nyerne.

A gondolat atomfizikai alkalmazhatósága szintén biztatónak ígérkezett, mert az akkoriban ismeretes részecskeszámlálók hibái az elektronsokszorozóval elkerülhetők lettek. Ugyanis itt a töltéssokszorozás vákuumban és nem gáztérben megy végbe. A gázionizáció lefolyásának időtartama úgy a proporcionális, mint a Geiger—Müller-számlálócsövek felbontóképességét korlátozza. Különösen döntő jelentőségű ez a koincidencia számlálásnál, mert a felbontásnak alacsony határt szab. Továbbá ismert jelenség volt, hogy a nagyenergiájú atomi részecskék becsapódáskor több kis és nagy sebességű elektront váltanak ki. Ha az ütközés vákuumban történik, akkor a kis sebességű elektronok befókuszálhatók az elektronsokszorozó elektronoptikai rendszerébe és sokszorozás után felerősítve, áramimpulzusok formájában észlelhetőkké válnak.

Első megítélésre a felbontóképesség három-négy nagyságrenddel növelhetőnek tűnt azzal, hogy a sokszorozás vákuumban és nem gáztérben történik. Felülmúlva minden eddigi számlálási módszert, lehetőség adódik egy nagy felbontóképességű új részecskeszámláló eszköz kifejlesztésére.

A korai magfizikai kutatásoknál használatos volt a részecskeszámlálásnak még egy fáradságos módja. RUTHERFORD e módszerrel jutott el az atommag felfedezéséhez. Ha nagy energiájú atomi részecskék ütköznek fluoreszkáló anyagba, akkor szcintillációkat, ill. fényfelvillanásokat váltanak ki. A jelenség azonban igen fényszegény, ezért szabad szemmel csak sötétben erős nagyításnál voltak megfigyelhetők. Később a Geiger—Müller-számlálócsövek felfedezésével a magfizika területéről hamarosan kiszorultak a szcintillációs mérések. Nyilvánvaló volt, hogy a rendkívül fényérzékeny fotonszámláló sokszorozócsővel a fényfelvillanások a nagy erősítés folytán áramimpulzusok formájában könnyen kimutathatók. A nagy felbontóképességű sokszorozók kombinálva a szcintillációval, az atommagkutatásnak ismét jelentős mérőeszköze lehet.

A felvetett korai gondolatok igen termékenynek bizonyultak, és elindító lettek egy sor kísérletnek, amelyek több meglepő eredményre vezettek.

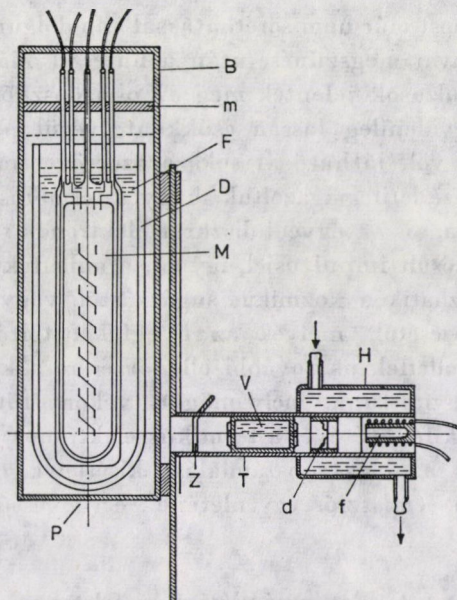
5. Elektronszámlálási kísérletek

Egyedi elektronok kimutatása és számlálása során az első nehézség, mellyel szembetaláltuk magunkat, a céziumos sokszorozók szobahőmérsékleten mutatkozó termikus emissziója volt. Az irodalomból már ismert $\text{Ag}-\text{Cs}_2\text{O}-\text{Cs}$ -rétegű fotokatód kilépési munkája $\varphi = 0,75$ eV, valamint a Richardson-állandója $A = 9,8 \cdot 10^{-2}$ amp/cm²grad². E két adatból kiszámítható, hogy szobahőmérsékleten a céziumos fotokatód kb. cm²-ként $N = 10^{10}$ sec⁻¹ elektront bocsát ki. Ezek az elektronok a sokszorozás után 17 μA nagyságú áramlökést adnak. Ez a felerősített és statisztikusan ingadozó zajáram sokszorosán felülmúlja és elfedi az egy elektron sokszorozásából származó amplitúdót.

Nem maradt más hátra, mint az egész sokszorozócsövet lehűteni a folyékony nitrogén hőmérsékletére. Az ismert összefüggés szerint 120 °K-nél a termikusan emittált elektronok száma már $6,7 \cdot 10^{-10}$ sec⁻¹ elektronra csökken, ez kb. évszázadonként egy elektront jelent. Tehát a termikusan emittált elektronok száma ezen az alacsony hőmérsékleten már elhanyagolható és egyes elektronok kimutathatók.

A kísérletek első szakaszában a lehűtéssel együtt járó párosodás a sokszorozócső működéséhez szükséges 1000 V feszültség következtében kisülés-szerű átvezetésekhez vezetett. A katód és a kollektor között az üvegburán folyó kúszóáramok szikrázósszerű áramlökéseket okoznak, amelyek nagyobbak a mérendő áramimpulzusoknál. Ez a körülmény a méréseket lehetetlenné tette. Hogy a szigetelő ellenállás kellő nagysága biztosítható legyen, 10^{15} ohm/cm — az egész sokszorozócsövet egy üvegburában helyeztük el, hosszú áramkivezető száakkal és száraz nitrogénnel töltöttük meg, ezután merítettük a folyékony nitrogénbe, a meghosszabbított áramkivezető száak kivételével.

A kísérleteket oly sokszor követő balszerencse most sem maradt el. A szerelés közben az amerikai eredetű sokszorozócső megrepedt, a vákuuma leromlott, használni többé nem lehetett. E sorok írója akkor kapcsolódott be az elektron- és foton-számlálási kísérletekbe, amikor BAY Zoltán feltette azt a kérdést, hogy tudna-e az elektroncsőlaboratórium ilyen nagy fotoérzékeny mágneses fókuszálású elektronsokszorozót készíteni. — Az az érdeklődés, amellyel e sorok szerzője a fény természetének kísérleti kutatásával foglalkozó munkákat követte, most gyors cselekvésre ösztönözte. A korábbi szekunder-emissziós tapasztalatok sokban hozzájárultak ahhoz, hogy irányításával rövid idő múltán elkészültek az első Magyarországon előállított mágneses fókuszálású elektronsokszorozó. — Az első fényérzékeny céziumos sokszorozócsövek statikus vizsgálatait után az ábrabeli berendezésben most már a kísérleti próbák következtek. Az új sokszorozócsöveknél nemcsak a külső, hanem a belső átvezetések is zavarólag hatottak. Ezeket a céziumkezelés módosításával sikerült megszüntetni.



4. ábra. Kísérleti berendezés elektron- és fotonszámáláshoz

Ezekután a tervezett kísérleti berendezés hamarosan összeállt; az elrendezést a 4. ábra szemlélteti. A fókuszáló elektromágnes az ábrán nincs feltüntetve, a sokszorozósó a Dewar-edényben a védőburában a pólusok közé 200 gauss erősségű mágneses térben van és merőleges a rajz síkjára.

A nehézségek ezzel még nem hárultak el. Zavaró volt a téremisszió jelensége, mely alapvetően különbözik a termikus emissziótól. Alacsony hőmérsékleten gyakorlatilag nem lépnek ki a fémekből termikus elektronok, de kiléphetnek kellő magas térerősségnél 10^6 V/cm-nél a potenciálfalon való áthatolás útján. A kilépő elektronok száma annál nagyobb, minél nagyobb a térerősség. A jelenséget hidegemissziónak, a potenciálfal átlátszóságát a hullámmechanikában alagúteffektusnak nevezzük. Ezt csak úgy lehet elkerülni, ha fotokatódon és a következő dinodán a feszültséget oly mértékben csökkentjük, hogy a szekunderemissziós tényező egynél nagyobb legyen, de a téremisszió még ne okozzon zavart.

Ha ezután a sokszorozót szobahőmérsékleten bekapcsoljuk, a cézium termikus emissziója következtében a sokszorozót követő erősítő anód ellenállásán viszonylag nagy egyenáram folyik keresztül. Mivel az erősítő az egyenáramú komponens nem viszi át, az oszcilloszkópernyőjén csupán az ismert söréthatás látható. A söréthatásnál az áramingadozások mindkét irányúak, tehát a katódsugárcső időtengelyétől fel- és lefelé egyaránt impulzusok észlelhetők. A folyékony nitrogénnel való hűtés folyamán elérkezhetünk egy olyan hőmérsékleti határhoz, ahol az impulzusok mind egyirányúakká válnak,

jelül annak, hogy most már nem söréthatással van dolgunk. Szerző egy napon késő este minden zavar megszűnése után a hűtéssel odáig jutott, hogy már csak egyirányú impulzusok jelentek meg az oszcilloszkóp ernyőjén. Számuk a hőmérséklettel egyidejűleg lassan csökkent, végül percenként már csak két-három impulzus volt látható. A sokszorozócsövet minden fénytől elzártuk. Ezzel először kísérletileg igazoltuk, hogy a termikus emisszió — de bármiféle elektromos áram is — egyedi diszkrét elektronok sokaságából áll.

Néhány állandósult impulzusjel, így pl. a nulleffektus több okra vezethető vissza: származhatik a kozmikus sugárzástól, vagy a maradékgázok és céziumatomok ütközésétől, melyek az üvegfal feltöltődése következtében gyorsulnak fel. A nulleffektus további ellenőrzésére a katód közepén 1 mm átmérőjű furatot készítettünk, mely mögött vékony fűthető volframfonalat helyeztünk el. Ennek felfűtésével a termikus elektronok kilépése tág határok között változott és az elektronszámlálási kísérletek elvégezhetőek voltak, igazolva RICHARDSON emissziós egyenletének érvényességét.

6. Foton számlálási kísérletek

Ezután következhetek a tényleges foton számlálási kísérletek. A felmerülő probléma a fényforrás kérdése volt. Könnyen belátható, hogy egyedi fotonok kimutatásánál hasonlóan kell eljárunk, mint az egyedi elektronszámlálásnál: csak olyan fényforrás jöhet számításba, amelyből időnként csak egy-egy foton lép ki, hétköznapi szóval: csepegnek belőle a fénykvantumok.

A problémát a 4. ábrán látható (*F*) feketetest sugárzóval oldottuk meg. Az Ag—Cs₂O—Cs-rétegű fotokatód spektrális érzékenysége $\lambda = 9500 \text{ \AA}$ -ig terjed és a relatív fényérzékenység maximuma $\lambda = 8000 \text{ \AA}$ -nél van. Tehát a feketetest ultravörös fotonjai a céziumos sokszorozóval jól kimutathatók.

A fénytől elzárt sokszorozó üvegballonján és a Dewar-edény ezüstözésén kis ablak biztosította a fotonok bejutását a fotokatódra. A fotonokat a feketetest bocsátotta ki, amelybe egy volfram izzótestet helyeztünk el. A feketetest nyílásán (*f*) keresztül fotonok lépnek ki az ábrabeli (*D*) diafragmán és a (*V*) vízszűrőn keresztül és a (*Z*) fényzáron át jutnak a fotokatódra. A volfram fűtőtest felfűtésével elérhető, hogy időközönként a kb. $200 \div 300 \text{ }^\circ\text{C}$ hőmérsékletű feketetest nyílásán diszkrét egyedi fotonok lépjenek ki. A (*H*) vízszűrő a káros hosszuhullámú ultravörös sugárzás kiszűrésére szolgál és megakadályozza a (*T*) tubus felmelegedését.

Ha kinyitottuk a lehűtött sokszorozóberendezés (*Z*) fényzárát és a feketetest hőmérsékletének változásával elértük, hogy egyes fotonok kilépjenek, akkor a kiváltott elektronok a sokszorozás után, mint különálló impulzusok jelentek meg az oszcilloszkóp ernyőjén. Az impulzusok száma a beejtett fotonok számával volt arányos. A kísérletek során a foton számlálás független

volt a feszültség-ingadozásoktól, egy 300 V-os platón belül. A feszültség-változásokra csak az amplitúdó változott mindaddig, míg a téremisszió fel nem lépett.

A fotonok számát és eloszlását a feketetest sugározta spektrumból a hullámhossz és a hőmérséklet függvényeként a Planck-formulából számítottuk ki. A mérésekből és számításokból a fotonszámláló hatásfokát, az „ A ”-t határoztuk meg:

$$A = 75 \text{ foton/elektron.}$$

Az emberi szem fényérzékenységenek alsó határát VAVILOV [23], valamint BARNES és CZERNY [24] állapították meg, egyénekenként változó szubjektív módszerrel. Az emberi szem legnagyobb fotonérzékenysége a megfigyelések szerint; $\lambda = 5300 \text{ \AA}$ -nél van, mely maximum a zöld fénynek felel meg, amikor a szem még éppen fényérzetet érez, ekkor a hatásfoka $80 \div 150 \text{ fot/sec}$. Ez az érték RUSSEL-nél [25] 215 fot/sec , BUISSON-nál [26] 350 fot/sec és REEVES-nél [27] 480 fot/sec . Saját fotonszámlálási méréseinket átszámítva $\lambda = 5300 \text{ \AA}$ -re, 90 fot/sec értéket kaptuk (BAY [28] közleménye).

Nyilvánvaló volt, hogy az $\text{Ag}-\text{Cs}_2\text{O}-\text{Cs}$ -rétegű fotonszámláló spektrális fényérzékenysége az emberi szem fotonérzékenységéhez mérve a hosszabb hullámok felé tolódott el. Ha figyelembe vesszük a nulleffektust, annak $1/60 \text{ elektron/min.}$ gyakoriságát, akkor látható, hogy a fotonszámlálóval mérhető fényintenzitás alsó határa kisebb az emberi szem által észlelhető legkisebb fényintenzitásnál. Emellett megemlítendő, hogy az emberi szem szubjektív jellegű és fáradékony, ami korlátokat szab az egzakt méréseknek. Ezzel szemben a fotonszámláló tökéletes és nagy pontosságú kvantitatív eredményeket szolgáltat. Általa egy eddig minden ismert eszköznél, az emberi szemnél is fényérzékenyebb műszerhez jutottunk, amelynek segítségével olyan rendkívül gyenge fényjelenségek és fényváltozások is mérhetővé váltak, amelyekre eddig nem volt lehetőség. Az elmúlt időkben a fotonszámlálókkal az atomfizikában és a csillagászatban jelentős eredményeket értek el.

7. Részecskeszámlálás

Miután meggyőződünk a fotonszámláló nagy fényérzékenységről, még 1939-ben sor került az első részecskeszámlálási kísérletekre. A sokszorozócső üvegburáját a katód szemközti falán vékony zinkszulfid réteggel vontuk be és Polonium alfa részecskével bombáztuk; a keletkezett felvillanásokat felerősítve az oszcilloszkópon impulzusokat észleltünk. A szcintillációs számlálásnak ezt az útját nem fejlesztettük tovább, mert a polykristályos zinkszulfid kristályszemcséi a fényt minden irányba szétszórták, ezáltal a számlálás rossz hatásfokot mutatott. Ezért az a nem egységes vélemény alakult ki

köztünk, hogy a szcintillációs módszert nem érdemes egyelőre fejleszteni, annak ellenére, hogy a sokszorozó katódjának kishatásos felületét növelni lehetett. Nagy előnye a Geiger—Müller-csővekhez viszonyítva a jobb felbontóképesség volt. Átlátszó és a fényt vezető egykristály vagy folyadék szcintillátorok akkor még nem voltak ismertek.

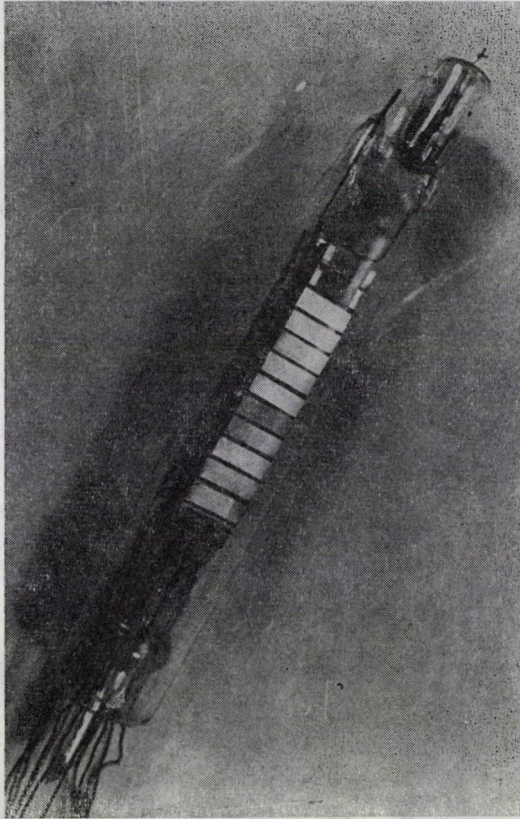
Fontosabb volt számunkra az elektron- és fotonszámoló további tökéletesítése, ezt elsősorban a folyékony nitrogén elhagyásával értük el, elkerülve az egész sokszorozócsőnek $-160\text{ }^{\circ}\text{C}$ -ra való lehűtését.

Az első megállapítás az volt, hogy ha lemondunk az ultravörös fényérzékenységről és olyan fotokatódot választunk, amelynek a kilépési munkája nem kisebb $\varphi = 1,3 \div 1,5\text{ eV}$ -nál, akkor szobahőmérsékleten a termikus emisszióval nem kell számolni és a folyékony nitrogénnel való hűtés elmaradhat.

Korábbi termikus és szekunderemissziós kísérleteknél tapasztalható volt, hogy a legjobb emissziós eredmények akkor érhetők el, ha valamely alapfémén egy vékony, azt egyenletesen beborító kristályos oxidréteg van és ezen földalkáli vagy alkáli fémek atomjai adszorbeálódnak. Az oxidréteg vastagsága foto- és szekunderemissziós katódoknál azonban a szigetelés és feltöltődés veszélye miatt kritikus volt. Az ilyenkor fellépő Malter-effektus miatt a rétegvastagság nem lehetett több néhány száz Å-nél.

Az első kísérletek Ni—BaO—Ba rétegű foto- és szekunderemissziós katóddal indultak meg. — A legtöbb tapasztalatot a BaO katódok révén szereztük. — A termikus emissziónál magas hőmérsékleten a BaO katód felületéről emittált elektronok utánpótlása az alapfémből vezetés útján biztosított. Nem így a foto- és szekunderemissziós katódok esetében, amikor ezek az emitterek szobahőmérsékleten működnek. Az elektronutánpótlás csak akkor biztosítható, ha a szigetelő oxidréteg annyira vékony, hogy az elektronvezetés az alapfémből létrejöhet.

Eljárásunk során az ülepítéssel szétválasztott, kb. $0,05 \div 0,2\text{ }\mu\text{m}$ szemcseméretű, 2—1—2 mol arányú Ba—Sr—CaCO₃ elegykristály szuszpenzióból vékony réteget választottunk le mind a foto-, mind a szekunderemissziós katódokat képező Ni-alapfémmre. A hármaskarbonát a termikus bontás után alakult át báriumoxiddá. Ha ezután magasabb hőmérsékleten tovább izzítottuk, akkor fémbárium redukálódott és egyidejűleg adszorbeálódott az oxidréteg felületén. Ezalatt a magas calciumoxid tartalom meggátolta a báriumoxid megolvadását és a réteg párolgásával a kellő vékonyságú kristálystruktúra elérhető volt. E termikus kezeléssel kialakított Ni—BaO—Ba + SrO—Sr + CaO—Ca rétegrendszer, szekunderemissziós tényezője a $\delta = 2,5 \div 3,5$ elektron 200 V ütközési sebességnél. A fotokatód hasonló módon független hőkezeléssel aktiválva, beállítható volt a kívánt $\varphi = 1,3 \div 1,5\text{ eV}$ kilépési munkaértékre. A spektrális fotoérzékenység maximuma a Ni—BaO—Ba rétegrek Ni alapfémén $\lambda = 4500\text{ Å}$ -nél volt. Az 5. ábrán egy mágneses fókuszá-

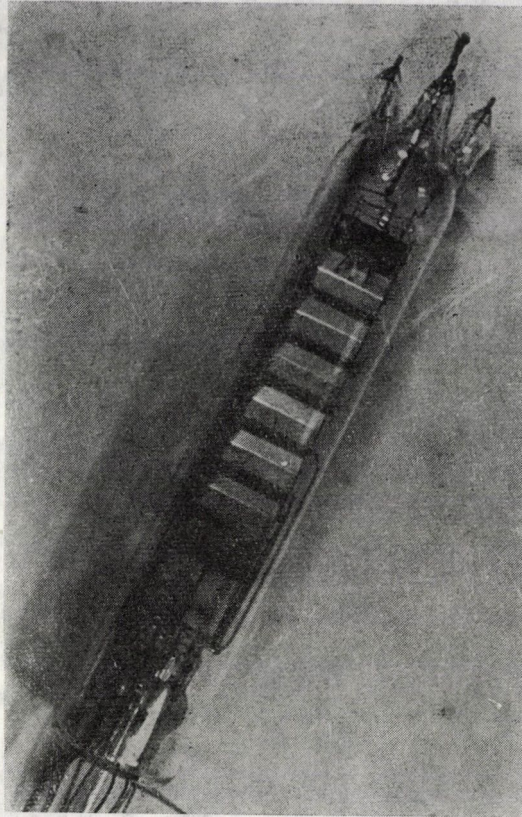


5. ábra. Mágneses fókuszálású elektronsokszorozó Ba—BaO—Ba katódával

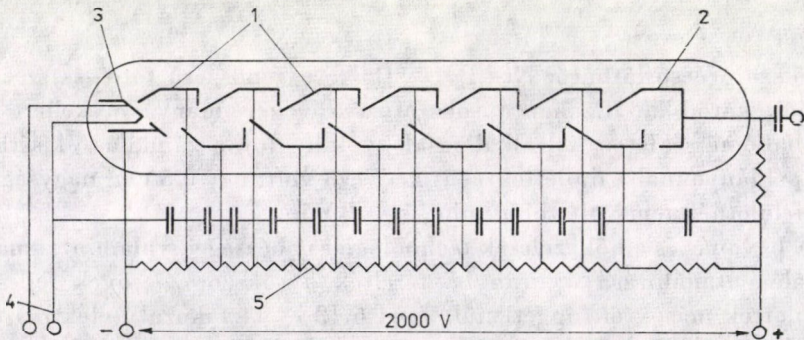
lású sokszorozócső látható, Ni—BaO—Ba rétegrendszerű foto- és szekunderemissziós katóddal. Ezeket a sokszorozócsöveket már nem kellett hűteni és szobahőmérsékleten is alkalmasak voltak fotonyszámlálási kísérletekre. Egyes példányoknál a nulleffektus is kedvező volt; egy $0,5 \text{ cm}^2$ nagyságú fotokatód felületnél nem volt több, mint $5 \div 8/\text{min}$.

A bevonás és a hőkezelések technológiai nehézségei, valamint a mágneses fókuszálás utánállítása új irányba terelték a sokszorozócsövek fejlesztését. Megszülettek másoktól függetlenül, az első $12 \div 14$ fokozatú elektrosztatikus fókuszálású sokszorozócsövek (BAY [29]). Ezeknél a szekunderelektronok a potenciáltregek kialakításával növekvő feszültségű térben gyorsulva haladtak az egyik dinodáról a másikra. A 6. ábrán egy elektrosztatikus fókuszálású 14 fokozatú sokszorozócső és annak vázlatos rajza látható.

Időközben a szekunderemissziós ismeretek is bővültek. BRUINING [30] egy új szekunderemissziós katódot fejlesztett ki, a Philips cég pedig egy széles-



6a. ábra. Elektrosztatikus fókuszálású 14 fokozatú sokszorozó



6b. ábra. Elektrosztatikus fókuszálású sokszorozócső vázlata

sávú 15 ma/V meredekségű szekunder katódos erősítőcsővel, az EE1-el jelent meg a világpiacon. Ez Ni—MgO—Ba rétegrendszerrel működött és szekunder-emissziós tényezője $\delta = 4,5 \div 5,5$ elektron volt 150 V ütközési feszültségnél.

Eddig ez volt az a legnagyobb szekunderemissziós képességű katód, amit a céziumon kívül ismertünk.

Az eljárás, amint azt egy EEl csőből szerző rekonstruálta, a következő volt; a cső elektronoptikáját képező Ni elektródán kis fémmagnézium darabkák voltak elhelyezve és a Ni felület nagyobb része tiszta BaCO_3 -al volt bevonva. Ha ezt vákuumban nagyfrekvenciásan felizzítottuk, akkor a karbonát termikus elbomlott CO_2 gázt adva le, és ebben az alacsony nyomású gázban elpárolgó fémmagnézium *in situ* oxid formában csapódott vékony rétegben a szekunder katód alapfémre. A MgO réteg mindenkori vastagsága az elpárolgó magnéziumfém mennyiségével volt arányos. A BaO réteg további izzítása azzal az eredménnyel járt, hogy az alapfém redukáló hatása folytán fémbarium párolgott a MgO rétegre, ahol egyatomos réteget adszorbeált. Az ily módon előállított Ni—MgO—Ba rétegrendszer nagy szekunderemissziós képességének optimális beállítása olyan technológiai nehézségekkel járt, amelyek csak a reprodukálás közben mutatkoztak meg.

Az eljárás egyszerűbbé tételére született meg az ezüst-magnézium ötvözött szekunderemissziós katódoknak a gondolata. Ha valamely fémbe olyan ötvöző fémet viszünk be, amelynek stabil magas olvadáspontú oxidja van, pl. ezüstbe 3 ÷ 4% fémmagnéziumot, akkor olyan ötvözetet nyerünk, amelyből szekunderemissziós dinodákat készíthetünk. A felületen képződő vékony MgO réteg aktiválási folyamata leegyszerűsödik és nem áll másból, mint 350 ÷ 400 °C hőmérsékletű és 0,02 torr nyomású száraz oxigénben történő hevítésből. A hő hatására az ötvözet belsejéből fémmagnézium diffundál a felületre és ott *in situ* oxidálódik, miközben alkálifémet vagy alkálihalogént adszorbeál. Ezek az alkáli atomok származhatnak vagy bevitel útján, vagy a mindenkori mikroszennyezésekből. A szekunderemissziós réteg aktiválási ideje 30 ÷ 50 perc, amely alatt eléri vákuumban az optimális értéket. Pl. az ötvözet katód Ag—MgO—Ba vagy Ag—MgO—KCl réteggű szekunderemissziós tényezője $\delta = 3,5 \div 4,5$ elektron, 150 V ütközési feszültségnél. Stabilitásuk igen jónak mondható, sőt többszöri levegőre hozás után is megtartják szekunderemissziós tulajdonságukat, amit az aktivátorként szolgáló alkálihalogéneknek tulajdonítottunk.

ZWORYKINNAK még 1938-as laboratóriumi látogatásakor elmondtuk, hogy BRUINING eljárást, a Ni—MgO—Ba réteggű szekunder katódot sikeresen reprodukáltuk, továbbá közöltük a kísérleteink közben támadt ötvözet szekunder katód elgondolást. Rögtön elvetette, mivel szerinte a céziumos eljárás egyszerű és a fotocellagyártás folyamán jól kidolgozott. Az ötvözet katód nem lehet jobb a céziumnál, fotoérzékenysége nincs, a cézium kilépési munkája pedig minden ismert anyagnál kisebb. — Később mégis egy szabadalmi leírásban ZWORYKIN az ezüst-magnézium ötvözet szekunder katódról azt írta, „A vákuumban történő hőkezelés folyamán az Ag—Mg ötvözetben fázisátalakulás megy végbe és olyan kristályfázis keletkezik, amelynek szekunder-

emissziós tulajdonságai igen kedvezőek". Csak az 1949-ben megjelent [31] ZWORYKIN—RAMBERG könyvben ismeri el, hogy az ötvözött szekunder katódok emissziós rétege alacsony oxigénnyomáson, hőkezelés folyamata alatt keletkezik, és ennek a MgO rétegnek van szekunderemissziós tulajdonsága, miután BAY [32] 1941-ben leírta a *The Review of Scientific Instruments*-ben az általam alkalmazott Ag—Mg ötvözet szekunder katód kezelési és aktiválási eljárását.

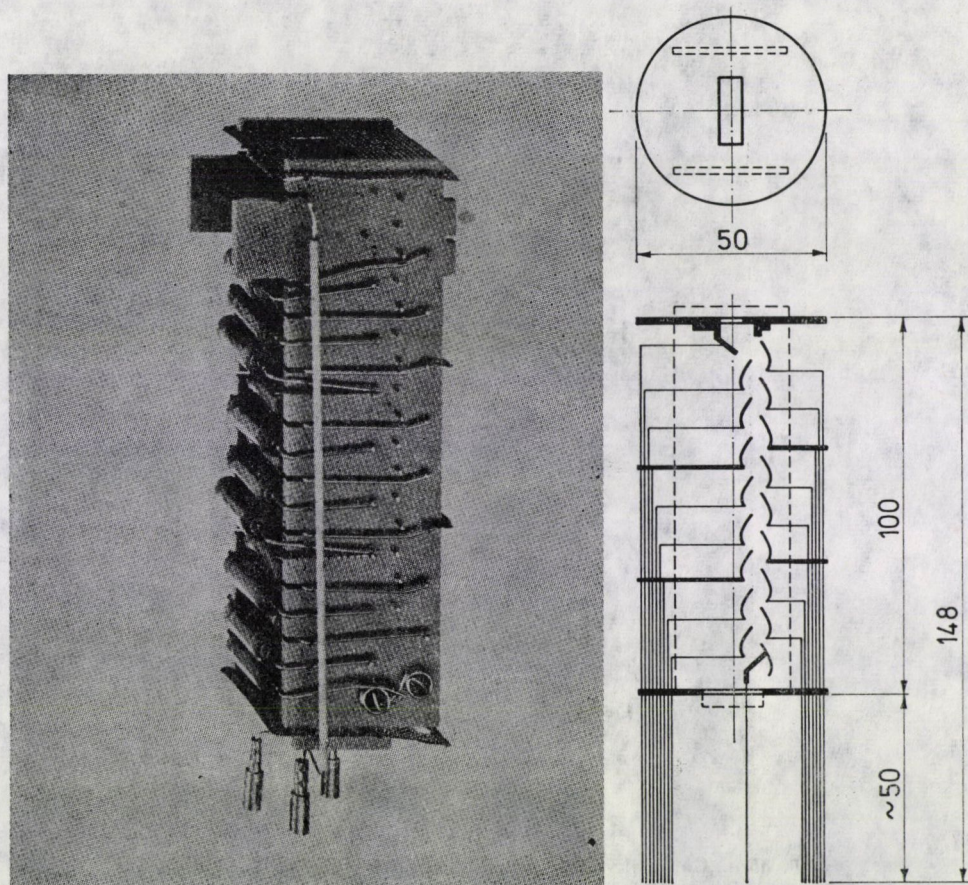
Szekunderemissziós kísérletek során a leírt elgondolás alapján több ötvözet szekunder katódot fejlesztettünk ki. Előállításra kerültek: az Ag—MgO—KCl rétegű, a Cu—ZnO—KCl és az ALLEN [33] javasolta Cu—BeO—KCl, valamint a Fe—CrO—KCl összetételek. A gyakorlatban az évek folyamán az Ag—MgO—KCl és a Cu—BeO—KCl szekunder katódok terjedtek el. Az ötvözött szekunder katódok előnyei akkor mutatkoztak meg, amikor a részecske elektron- és ionszámlálás céljaira beépíthető és ismételten levegőre hozható, majd ismét könnyen újra aktiválható sokszorozók kifejlesztése került előtérbe.

8. Szétszedhető és újra aktiválható sokszorozók

Kis áthatoló képességű részecskék számlálására, mint az alfa és béta radioaktív sugárzás, aktivitásának kvantitatív meghatározására és a tömegspektrométerek ionnyalábjának mérésére, szétszedhető, illetve beépíthető és ismételten mérési mintacserélésre alkalmas 14 fokozatú elektrosztatikus fókuszálású sokszorozókat terveztünk. Az ionsugár és részecskeszámlálással az volt a célunk, hogy olyan sokszorozók készüljenek, amelyek mindenfajta abszorpciós ablaktól mentesek és nagy érzékenységgű proporcionális eszközzé fejlesztve, bennük a sugárzó preparátumok könnyen cserélhetők legyenek. Az eljárás szerint minden további aktiválás nélkül a vákuumleszívás mellett biztosítania kellett a nagy felbontóképességet.

A probléma megoldását az ötvözött szekunder katódok tették lehetővé, mert a preparátum behelyezése után, a dinodok felületén adszorbeált levegő eltávolításával — mely egyidejű leszívás és kimelegítéssel történik — a sokszorozó mérésre kész állapotba kerül. A felnyitott sokszorozóba a preparátumot ismert nyílásszögű fémeső kapszulába helyezük és oly módon rögzítjük, hogy a kijövő részecske nyaláb csak az első dinoda felületét érje.

Ezeknek a szekundersokszorozóknak — számos levegőre hozás után — a szekunderemissziós tényezőjük stabilizálódik $\delta = 2,2 \div 2,5$ elektronra, 200 V ütközési feszültségnél. Alkalmazhatók kis és nagy energiájú, béta-, alfa-részecskék, valamint pozitív és negatív ionok számlálására. Az elmúlt évek folyamán a bontható sokszorozók széleskörűen elterjedtek; a magfizikában,

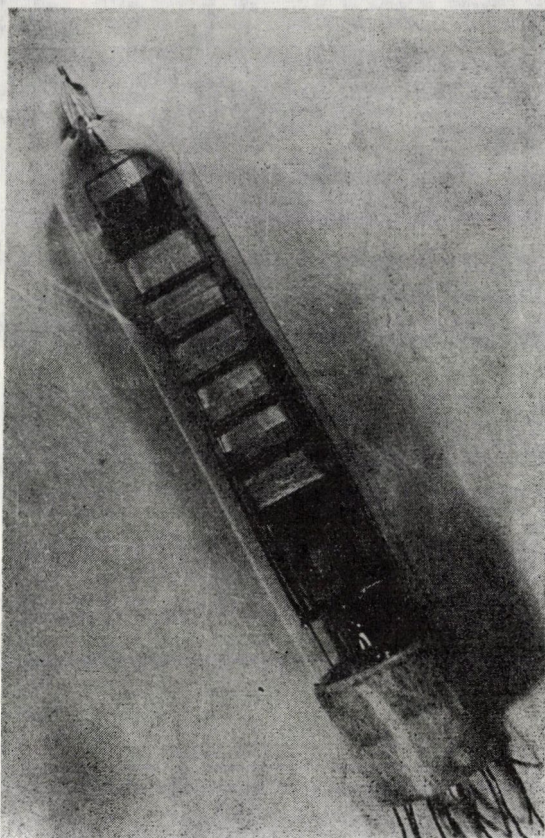


7. ábra. Beépíthető ötvözött szekunder katódú sokszorozó

maradék gázok analizálásánál, felületi vizsgálóberendezésekben, mint a SzIM, az Auger és számos más berendezésnél. A 7. ábra egy modern, beépíthető, a kereskedelemben kapható, Cu—Be ötvözött szekunder katódú sokszorozót mutat be.

9. Gamma- és röntgensugárzás számlálás

A kísérletek kiterjesztése folyamán elektron sokszorozókkal gamma- és röntgensugárzás méréseket is végeztünk. A mérések a sugárzás által kiváltott nagyenergiájú fotoelektronok fékezésén alapultak. A fotoelektronok fékezésére olyan nehézfém fotokatódokat alkalmaztunk, amelyek anyaga és vastagsága a mérendő sugárzás energiájától függően a fém belsejében fotoelektronokat vált ki. Amire ezek a fém felszínére kerülnek, lefékeződnek és egy részük



8. ábra. Gammakvantumszámláló, vastag volfram katóddal

— mint kis sebességű elektronok — a sokszorozó elektronoptikai rendszerébe már befókuszálhatók és ezáltal számlálhatókká válnak. A gamma- és röntgen-számlálók előnye az ionizációs kamrákhoz képest a jobb felbontóképesség és hatásfokuk sem rosszabb. Kiterjedten használják ezeket röntgen difrakciós méréseknél és röntgen spektroszkópiában. A 8. ábrán egy gammakvantumszámláló látható, vastag volfram katóddal.

10. Kísérletek láthatófényre érzékeny fotokatóddal

A fény mibenlétének kutatásáról továbbra sem mondtunk le. Célunk az volt, hogy egy a láthatófény hullámtartományán belül szobahőmérsékleten működő, a cézium érzékenységének megfelelő fotonszámlálót fejlesszünk ki. A célnak jól megfeleltek a Ni—BaO—Ba rétegű fotokatódok, azonban csak egyes kiugró példányokkal sikerült jó eredményeket elérni. Később K. O.

KIEPENHEUER [34] nyomán desztillált fémkáliumrétegű fotokatóddal véltük kitűzött célunkat elérni. A vastag rétegű kálium fotokatód kilépési munkája az irodalom szerint $\varphi = 1,7$ eV, a spektrális fényérzékenység maximuma $\lambda = 4200$ Å. Azt terveztük, hogy az Ag—KO—K rétegű, aktivált fotokatód érzékenysége eléri vagy megközelíti az Ag—Cs₂O—Cs fotokatód érzékenységét anélkül, hogy a nulleffektus, ill. a termikus emisszió is növekednék. Az aktivált kálium fotoérzékenysége kielégítő volt, azonban ez csak a mérések időtartamára volt fenntartható, mivel a kálium magas tenziója és kémiai tulajdonságai folytán elkerülhetetlen volt, hogy szabad kálium atomok kerüljenek a vákuumtérbe és ott fényt kibocsátó kisüléseket okozzanak. A nulleffektus is kielégítő volt; cm²-ként 1—3 elektron/min.

Végül a fény természetének tanulmányozására egy uviol érzékenységgű, jól reprodukálható stabil fotokatódú fotonszámláló mellett döntöttünk, mert a további kísérletekhez nagyobb energiátartalmú fotonok felhasználását vettük tervbe. A fotonok energiája az $E = h\nu$ összefüggés szerint alakul.

Ismert volt a tiszta oxidmentes fémmagnézium felületek nagy uviol érzékenysége. Uviolkatódú sokszorozócső céljára tiszta fémmagnézium tömbből fotokatódot vágtunk ki és szereltünk be a sokszorozócsőbe. A fémmagnézium már szabad levegőn oxidálódik, nekünk viszont vákuumban friss tiszta fémfelületre volt szükségünk. Ez a legegyszerűbben mechanikus módszerrel volt elérhető. Egy kívülről mágnessel mozgatott éles eszközzel friss felületet kapartunk, ami magasvákuumban jól megtartható. A magnéziumkatód érzékenységének mérésekor, a maximális fényérzékenység elérése után a kaparó élt visszahúztuk és végleg leforrasztottuk a sokszorozócsövet. A Mg fotokatód kilépési munkája, megegyezve az irodalmi adatokkal $\varphi = 2,14$ eV, a spektrális érzékenysége $\lambda = 2200$ Å maximumnál volt (R. SCHULZE [35]).

A háború folyamán az uviol sokszorozókat W. HANLE 1942-ben tanulmányozta laboratóriumunkban és átvette készítésüknek az eljárását, az Ag—Mg ötvözött szekunder katóddal együtt. Később a háború után ismét találkoztunk az általunk kifejlesztett fémmagnézium katódú sokszorozóval, a V2-ben alkalmazták, annak navigációs rendszerének uviol érzékelőjeként. Ez a módszer továbbra is fennmaradt az űrkutatásban, a rakéták és mesterséges holdak, űrszondák pályastabilizáló berendezéseinek uviol érzékelőjeként.

11. Fotonkoincidencia kísérletek

A fotonok kettős természetének mélyebb megismerésére gondolva, kísérleteket terveztünk. Ezt a szándékot az egyedi fotonok számlálására építettük.

A fény kettős természetének problémájánál vissza kell menni NEWTONig. Ő a fény mibenlétének értelmezését a kor mechanikus szemléletének meg-

felelően fogalmazta meg. Szerinte a fényforrások világító részecskéket bocsátanak ki, ezek a szemünkbe hatolva a fény érzetét keltik. NEWTON korpuszku-láris elméletével megmagyarázni vélte a fény minden tulajdonságát. Kísér-letei során egy üveghasábbal felbontotta a fehérfényt a szivárvány összes színeire. Azt látta, hogy a fehérfény magában foglalja az összes színeket. A korpuszku-láris fényelmélet most már bonyolultabb lett, nemcsak fényanya-gunk van, hanem végtelen sok különböző színű részecskének kell lennie. Ez megzavarta NEWTON elképzelését.

NEWTON kortársa, HUYGHENS hullámelméletével oldotta fel az ellent-mondásokat. — Kimondta, hogy a fény hullámmozgás és a világmindenséget kitöltő éter közegben tova terjedő hullámjelenség. Tehát mozgásenergiának és nem anyagnak a szállításáról van szó.

Sikeresen megmagyarázta a fény valamennyi tulajdonságát, mint a kettőtörést, a polarizációt, a difrakciót és az ²nterferenciát. A szín a hullám-elmélet szerint nem egyéb, mint különböző hullámhosszú fényhullámok által keltett színérzet.

Ezt követően a fizikusok sikeresen összekapcsolták a hullámfelfogást MAXWELL elektromágneses térelméletével. — Az elektromágneses fényhullám-elmélet szerint a fény a térben egyenletesen transzverzális hullámalakban terjedő elektromágneses rezgés, az elektromos és mágneses térerősségnek periodikus változása. A 19. század végén úgy látták a fizikusok, hogy az elektro-mágneses hullámok megértésével a fényelméletet végleg lezárták.

Ez a nézet mindaddig fennállt, amíg fel nem fedezték a fényelektromos jelenséget, vagyis azt, hogy fény beesésére a fémfelületekből elektronok lép-nek ki. Az elnyelt fény energiája az elektronokat a fématomok vonzó köréből el tudja szakítani és az elektronok a maradék energiával tovarepülnek. Ez a maradékegyergia, mint az várható, nem a fény erősségétől, hanem színétől, ill. a fény rezgésszámától függ, az intenzitás csak az elektronok számát növelte.

A felmerült problémát EINSTEIN oldotta meg; kimondta, hogy a fény a térben folyamatosan terjedő hullámjelenség, azonban a fény energiája össze-tömörülve — EINSTEIN szemléletes leírása szerint — fotonok formájában terjed, a fény tehet energiakvantumok, azaz oszthatatlan részecskék folyama-ként fogható fel, ami jól illeszkedik PLANCK kvantumsugárzási elméletéhez.

A fénykvantumokat először PLANCK ismerte fel 1900-ban, amikor az abszolút feketetestek magas hőmérsékleten való sugárzását és fényelnyelését csak úgy tudta értelmezni, hogy a fénykibocsátás és -elnyelés nem folytonos, hanem véges energiaadagokban történik. A fénykvantumok energiatartalma meghatározható a mindenkori sugárzásfajta rezgésszámából és egy furcsa univerzális állandóból, amelyet PLANCK a „*h*” jelöléssel vezetett be a fizikába.

Azonban EINSTEIN relativitás elméletével az energiát a tömeggel tette egyenértékűvé, $E = mc^2$, ezáltal a fotonnak is súlyos tömeget tulajdonított és végleg visszahozta a korpuszku-láris fényelméletet a fizikába. A foton

továbbra is hol hullámként, hol részecske természete szerint mutatkozik meg. BOHR javasolta a fény, illetve a fotonok mindkét megnyilvánulási formájának egyidejű elfogadását azzal az indokolással, hogy ezek a megnyilvánulási formák egymást kiegészítik, „komplementerek”, annak ellenére, hogy a két kép kölcsönösen kizárja egymást.

A fény kettős természetének a kutatása itt megtorpant, bár EINSTEIN kidolgozta a túsugárzás modern elméletét. Ezen elmélet szerint a fotonokat a fényforrásból kiinduló, igen finom túszerű, de mérhető hosszúságú interferáló hullámok alkotják. Ugyanakkor a foton, mivel csak egyetlen atommal ütközik, a teljes energiáját át tudja adni és fotoelektronok kiváltására is képes.

Ez az elmélet ellentmondásba került SELÉNYI Pálnak, intézetünk kísérleti fizikusának 1911-ben végzett, nagyszögű interferencia kísérletével. Eszerint a fényt kibocsátó atom a fényhullámokat 120° -nál nagyobb kúpszögben sugározza szét. Tehát a foton energiája nem koncentrálható egy tübe. A mérhető koherencia hosszra pedig E. RUPP kísérlete 1926-ban adott nemleges választ, amikor gyors modulált fényzárat helyezett a fotonok útjába, amely csak rövid időre nyílt meg. Ámbár ez az idő nem volt elegendő a hullámvonulat teljes áthaladásához, mégsem volt tapasztalható, hogy a fotonnak csak törtrésze haladt volna keresztül a résen, a foton vagy egészen átment rajta, vagy egyáltalán nem.

A fizikusok egy nehezen megközelíthető probléma megfogalmazásánál — mint aminő a foton kettős természete —, gyakran alkalmaznak úgynevezett gondolatkísérleteket, függetlenül attól, hogy a végrehajtásához a feltételek rendelkezésre állanak-e vagy sem. Fontos mindössze az, hogy a kísérletek elvi akadályba ne ütközzenek. — Most ott tartottunk, hogy rendelkezünk egy rendkívül fényérzékeny eszközzel, mellyel egyes diszkrét foton kilépését, vagy hullámtermészetéből részecske természetbe való átmenetének észlelését remélhettük.

Tehát kerestünk olyan elvi gondolatkísérletet, amely a foton kettős természetére vonatkozóan valamelyes felvilágosítást adhat. Ilyen volt az M. BORN [36] által felvetett foton koincidencia kísérlet. Eldöntendő volt, hogy olyankor, amidőn egy félig áteresztő tükrön fény halad keresztül, vajon a fotonok egyidejűleg átmennek és visszaverődnek-e, tehát két részre osztódnak-e, mely esetben, két sokszorozóra ejtve és felerősítve azokat egy koincidencia erősítőben egyidejű impulzusokat kell kapni. Ha viszont a fotonok hol az egyik irányba, hol a másik irányba haladnak, akkor koincidencia nem léphet fel és egyidejű impulzusokat nem kaphatunk. A kísérletet 1943-ban hajtottuk végre, de mint várható volt, kevés számú foton esetében koincidienciát nem észleltünk. Azonban nagyszámú foton esetén a berendezés néhány véletlen koincidienciát jelzett, és a nagyszámok törvénye szerint való statisztikus eloszlást mutatott. TAKÁCS Lajos vizsgálta a stohasztikus folyamatok elemzésével a kapott impulzusokat és valamelyes eredményt próbált kiolvasni.

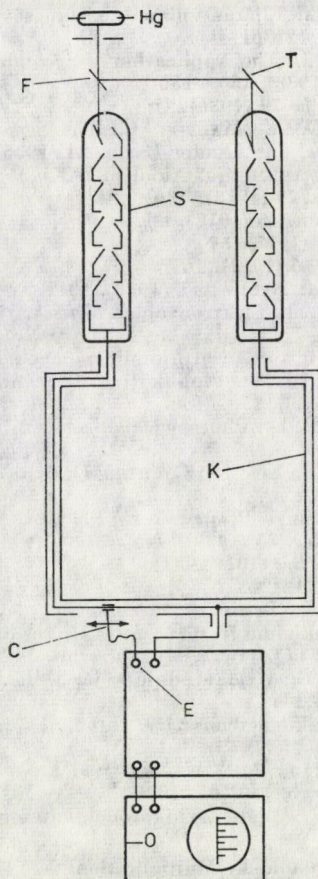
Egy alkalommal, még 1943-ban, vendég érkezett az Intézetbe, DEBYE professzor, akinek meg akartuk mutatni a koincidencia kísérletet. Szerző maga végezte a kísérleti berendezés összeállítását, mivel csak alkalmilag működött a kísérleti összeállítást. Most azonban kellő nagyszámú foton esetében sem jelentek meg a véletlen koincideneciák impulzusai, annak ellenére, hogy a készülék körül minden rendben volt. Végül nem volt már mire gondolnia, ezért rejtett szakadást gyanítva PAPP Györgytől visszakerítte azt a két eredeti zsinórpárt, amelyekkel a sokszorozók kollektorát összekötötte a koincidencia erősítő bemenetével. Amint ez megtörtént, azonnal megjelentek a véletlen koincideneciák impulzusai, ha ellenben a másik zsinórpárt tette vissza, akkor azok megszűntek. Azonnal látható volt, hogy a különbség a két zsinórpár aszimmetriájában keresendő. Szerző megmutatta az effektust PAPP Györgynek, akivel meghatározták az erősítő bemenetének időállandóját és az aszimmetrikus vezetékben az áram futási idejét, ez az időkülönbség okozta ti. az impulzusok kimaradását, mely idő $1 \cdot 10^{-9}$ sec felbontásnak felelt meg. Ezután már egyszerű volt az impulzusok kioltására egy szimmetrikus koaxiális kört készíteni, melyen eltolható csatlakozás volt és a szimmetriától való $10 \div 15$ cm-nyi eltolás elegendő volt az impulzusok kioltására. Az összeállítás vázolata a 9. ábrán látható; ahol (S) jelöli a sokszorozókat, a Hg-lámpa fényét az (F) féligáteresztő tükör osztja két részre. Az átmenő sugár közvetlen jut a sokszorozó katódra, a visszavert sugár egy tükör közbeiktatásával jut a második sokszorozó katódjára. A kollektorok a (K) koaxiális kör bemenetéhez csatlakoztak, a koaxiális körvezeték szemben levő oldalán pedig két szimmetrikus leágazás csatlakozott az (E) koincidencia erősítő bemenetéhez, mely közül az egyik eltolható volt. Ha a mozgatható leágazást 15 cm-rel eltoltuk, akkor az (O) oszcilloszkóp ernyőjén az impulzusok kioltódnak.

A fény kettős természetének a mibenlétének problémájához mi sem jutottunk közelebb, de egy véletlen felismerés során, először sikerült megmérni $1 \cdot 10^{-9}$ sec-os idő felbontást és erre alkalmas berendezést készíteni.

A későbbi idők folyamán BAY Zoltán tovább fejlesztette a nanoszekundumos technikát és $1 \cdot 10^{-10}$ és $5 \cdot 10^{-11}$ sec-os felbontást ért el és hasznos eszköze lett az időspektroszkópiának, azonban az első kísérletek irányt mutatók voltak a fejlődés további menetére.

Ezzel az elektronok és fotonok sokszorozókkal történő számlálásnak kísérletei lezárultak, és a II. világháború alatt a kutatások a mikrohullámok, ill. a radarsövek kutatására összpontosultak.

Köszönetemet fejezem ki Dr. Bay Zoltánnak, aki kezdeményezője és irányítója az elektronszámlálási kísérleteknek, tanácsaiért és bátorításáért, Dr. Czukor Károlynak, aki kutatói munkámat az elektronemissziós problémák felé irányította, valamint Dr. Winter Ernőnek értékes tanácsaiért, végül Dr. Papp Györgynek, akivel számos alkalommal diszkutáltuk a fotonok problémáit és értékeltük célkitűzéseinket.



9. ábra. Nanoszekundumos koincidenca kioltókör

IRODALOM

1. EINSTEIN, A.: *Ann. der Phys.* **17** (1905), 132; *Ann. der Phys.* **20** (1906), 199
2. LANGMUIR, I.: *Phys. Rev.* **2** (1913), 450; *Phys. Zeitschr.* **15** (1914), 516
3. Philips-féle fémgőz szab. D. R. P. 443, 323 1923
4. RICHARDSON, O. W.: *Phil. Mag.* **23** (1912), 192
5. LANGMUIR, I.: *Trans. Am. Electrochem. Soc.* **29** (1916), 125
6. RICHARDSON, O. W.: *Emission of Electricity from Hot Bodies*, London 1921
7. LANGMUIR, I.—KINGDON, K. H.: *Science* **57** (1923), 58
8. WEHNELT, A.: *Ann. der Phys.* **14** (1905), 425
9. NATTHINGHEM, W. B.: *Phys. Rev.* **49** (1936), 78; *Phys. Rev.* **47** (1935), 806
10. KINGDON, K. H.: *Phys. Rev.* **24** (1924), 510
11. WIGNER, E.—BARDEEN, D.: *Phys. Rev.* **49** (1936), 653
12. DE BOER, I. H.: *Physica* **1** (1934), 753; *Physica* **2** (1935), 521
13. BRÜCHE, H.: *Jarhb. Forsch. Inst. AEG.* **4** (1933—1935), 25
14. ARNOLD: *Phys. Rev.* **16** (1920), 70
15. SPANNER: *Ann. der Phys.* **75** (1924), 609
16. BUDINCSEVITS, A.: Eljárás oxidkatódák előállítására. Magy. szab. 130,991
17. PATAL, E.—TOMASCHEK, Z.: Weitere Versuche zur Herstellung von Oxidkathoden von Kolloider Struktur. *Kolloid Zeitschr.* **75** (1936), 81
18. LUSSANET DE LA SABLONNIÈRE, C. J.: Der innere Widerstand von Schirmgitterröhren. *Hochfrequenztech. u. Elektroak.* **41** (1933), 204—205

19. BUDINCSEVITS, A.—WINTER, E.: Eljárás villamos kisütőcsövekhez való rácsok aranyozására. Magyar szab. száma 121761
20. JONKER, J. L.—OVERBEEK, A. J.: The Application of Secondary Emission in Amplifying valves. *WIRELESS ENG.* 15 (1938), 150—156
21. ZWORYKIN, V. K.: *Journ. I. E. E.* 79 (1936), 1
22. ZWORYKIN, V. K.—MORTON, G. A.—MALTER, L.: The Secondary Emission Multiplier, a New Electron Device. *Proc. Inst. Radio Engrs.* 24 (1936), 351
23. VAVILOV, SZ. I.: A fény mikrostruktúrája. Akadémiai Kiadó, 1955
24. BARNES—CZERNY: *Zs. f. Phys.* 79 (1932), 436
25. RUSSEL, H. N.: *Astrophys. Journ.* 45 (1917), 60
26. BUISSON, H.: *Journ. d. Phys.* 7 (1917), 67
27. REEVES, P.: *Astrophys. Journ.* 46 (1917), 167
28. BAY, Z.: *Nature* 141 (1938), 284; *Nature* 141 (1938), 1011
29. BAY, Z.: Elektronvervielfacher als Elektronzähler. *Zeitsch. für Phys.* 117 Band, 4 Heft (1941), 227—245
30. DE BOER, I. H.: Elektron Emission and Adsorption Phenomena. Univ. Press Cambridge, 1935
JONKER, J. L.—OVERBEEK, A. J.: The Applikation of Secondary Emission in Amplifying Valves. *Wireless Engr.* 15 (1938), 150—156
31. ZWORYKIN, V. K.—RAMBERG, E. G.: Photoelectricity and its Application, Wiley & Sons, New-York 1949
32. BAY, Z.: Electron Multiplier as an Electron Counting Device. *The Rev. of Scientific Instruments.* 12 (1941), 127—133
33. ALLEN, J. S.: The Detection of Single Positive Ions, Electrons and Protons by a Secondary Electron Multiplier. *Phys. Rev.* 55 (1939), 966
34. KIEPENHAUER, K. O.: *Zs. für Phys.* 107 (1937), 145
35. SCHULZE, R.: *Z. Physik* 92 (1934), 212
36. BORN, M.: Optik Springer Verlag, Berlin 1933, 456
37. BUDINCSEVITS, A.: Bárium-alumínium fémötvözet és eljárás annak előállítására, valamint felhasználására kisütőcsövek készítésére. Magyar szab. 107,989
38. BUDINCSEVITS, A. és WINTER, E.: Oxidkatóda és eljárás előállítására (2—1—2, 2—1—1) arányban. Magyar szab. 128,306
39. BUDINCSEVITS, A.: Eljárás szekunderemissziós katóda és annak előállítására. Magyar szab. 126,962, 1939
40. BAY, Z.—BUDINCSEVITS, A.—HORVÁTH, A.—WINTER, E.: Szekunderemissziós katóda és annak előállítása. Magyar szab. 130,765, 1940
41. BUDINCSEVITS, A. és WINTER, E.: Eljárás oxidkatódok kataforetikus bevonására.

Counting of Electrons and Photons by Multiplication. — The author offers a scholarly-historical review on the research investigations carried out during the period 1930 to 1950 on thermic and secondary electron emitting valves and electron multipliers as well as on the results of these investigations not published as yet. Further, the experiments performed on the counting by multiplication of low-speed thermic and photoelectrons are discussed. The development of the alloyed secondary cathodes, the Ag—Mg alloyed dynodes, the 12—14 stage electrostatic focussed and dismantlable electron multipliers is presented. Author also reports on the experiments of counting atomic particles, ions and photons as well as the scintillation measurements. Eventually the problems of the dual nature of light is analysed, and report is made on a realization of a concept experiment, on the photocoincidence tests, as a result of which, by a random recognition, in 1943, the division of time into $1 \cdot 10^{-9}$ sec was successful. This method so far constitutes the fundament of the time spectroscopy.

Elektron- und Photonzählung mit Hilfe eines Elektronenvervielfachers. — Der Autor gibt eine Übersicht über die thermischen und Sekundäremissions-Elektronröhre, und über den mit Elektronenvervielfachern durchgeführten Forschungen und über die noch nicht veröffentlichten Resultate der Versuche. Er beschreibt die Versuche, die zur Vermehrung durchgeführte Zählung der thermischen und Lichtelektronen von kleiner Geschwindigkeit vorgenommen wurden. Die Entwicklung der legierten Sekundärkathoden, Ag—Mg legierten Dynoden, weiters der 12 bis 14 stufigen fokussierten und zerlegbaren Elektronenvervielfacher wird erläutert. Alsdann berichtet die Abhandlung über die Versuche der Zählung mit dem Elektronenvervielfacher der Atomteilchen, Ionen und Photonen, sowie über die Szintillationsmessungen. Schließlich werden die Probleme der zweierlei Natur des Lichtes behandelt und berichtet wird über einen Konzeptionsversuch und Koinzidenzversuch die im Jahre 1943 durch eine zufällige Erkenntnis zur Zerlegung der Zeit auf $1 \cdot 10^{-9}$ sec führten. Diese Methode bildet auch heute noch die Grundlage der Zeitspektroskopie.

MEGJEGYZÉS A RUGÓKKAL MEGTÁMASZTOTT RUGALMAS SZERKEZETEK SZILÁRDSÁGI SZÁMÍTÁSÁHOZ

PÁCZELT ISTVÁN* – HERPAI BÉLA**
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1980. január 9-én]

A tanulmány a lágy rugókkal megtámasztott rugalmas rendszer szilárdsági számítását a rugalmas rendszer két szerkezeti egységre (alszerkezetre) történő felbontása révén tárgyalja. Feltételezve, hogy a lágy rugók a koordinátarendszer függőleges tengelyével párhuzamosak, az első alszerkezetet vízszintes síkkal párhuzamos rugókkal összekapcsolt megtámasztandó szerkezet, míg a második alszerkezetet a függőleges irányú lágy rugók alkotják. Az első alszerkezetet egy pontban úgy fogjuk meg, hogy mint merev testnek függőleges irányú elmozdulását és a vízszintes tengelyek körül történő szögelfordulását megakadályozzuk. Az alszerkezetek kinematikai illesztési- és az első alszerkezet egyensúlyi egyenleteinek megoldásából nyert függőleges irányú rugóerők és a merevtestszerű elmozdulás vektorának ismeretében a vizsgált szerkezet szilárdságtani viszonyai a szuperpozíciós elv alapján tisztázhatók. A feladat fenti felépítése lehetővé teszi a függőleges irányú rugók talajtól történő elválásának figyelembevételét is. Ebben az esetben a rugóerők és a merevtestszerű elmozdulás vektora, kvadratikusan programozási feladat megoldásával nyerhető.

I. Bevezetés

A gyakorlatban gyakran találkozunk olyan szerkezetekkel, amelyek a húzó-nyomó igénybevétel felvevő rugalmas rugókkal vannak megtámasztva.

A rugók bekötési pontjainak térbeli elhelyezkedése természetesen olyan kell, hogy legyen, hogy a szerkezetre ható bármilyen erőrendszerrel az adott hatásvonulú rugókban keletkező támasztóerők egyensúlyi erőrendszert alkot-
sanak. Ebből adódóan minimálisan 6 db lineárisan független irányú rugóra van szükség.

A rugók merevségéről feltételezzük, hogy a függőleges irányú, a koordináta-rendszer Z tengelyével párhuzamos (RZ darab) rugók merevsége lényegesen kisebb, mint az XY síkkal párhuzamos síkokban elhelyezkedő (RXY darab) rugók merevsége.

A rugók említett kettéválasztása miatt az XY síkkal párhuzamos merevtestszerű mozgást 3 db nem egy pontba bekötött rugóval, a függőleges mozgást pedig minimálisan 3 db nem egy közös síkban fekvő, Z irányú rugóval tudjuk korlátozni.

Mivel a Z irányú rugók lágyak, ezért a megtámasztott szerkezet pontjainak függőleges eltolódásai nagyságrendekkel meghaladhatják a szerkezet pontjainak egymáshoz képest való elmozdulását.

* Dr. Páczelt István, 3531 Miskolc, Győri kapu 37.

** Dr. Herpai Béla, 3515 Miskolc, Kulich Gy. u. 13.

Amennyiben a szerkezet szilárdsági számítását végeeselemes elmozdulási módszerrel oldjuk meg [1], vagyis a megtámasztandó rugalmas szerkezet potenciális energiájához hozzáadjuk a rugókban keletkező potenciális energiát — amelyet a csomóponti elmozdulásvektoron keresztül fejezünk ki —, majd azt minimalizáljuk, rosszul kondicionált együtthatójú algebrai egyenlet-rendszerhez jutunk. Az így kapott mátrix pontos invertálása kérdésessé válik.

Ennek a számítástechnikai bizonytalanságnak az elkerülésére javasoljuk az alábbiakban ismertetendő módszert.

2. Alszerkezetek felvétele

A vizsgált rugalmas rendszert két szerkezeti egységre (alszerkezetre) bontjuk fel, majd ezeket egyrészt illesztjük, másrészt a merevtestszerű mozgással rendelkező alszerkezet egyensúlyát is kielégítjük. Esetünkben az első alszerkezetet a vízszintes rugókkal összekapcsolt megtámasztandó szerkezet, míg a második alszerkezetet RZ darab egymástól függetlenül álló Z irányú rugó alkotja. Az 1. alszerkezetet a koordináta-rendszer kezdőpontjában ideiglenesen úgy fogjuk meg, hogy mint merev testnek Z irányú elmozdulását, X és Y tengelykörüli elfordulását megakadályozzuk. Nevezzük ezt a megfogást röviden befalazásnak.

Ily módon a megtámasztandó szerkezet elmozdulásállapotát az alábbi „terhelések” révén kialakuló állapotok szuperponálásával állítjuk elő:

az 1. esetben: a befalazott 1. alszerkezetre az ismert erőrendszer hat;
 a 2. esetben: a befalazott 1. alszerkezetre Z irányú rugókban keletkező támasztóerők hatnak;

a 3. esetben: a befalazási kényszer feloldásából származó merevtestszerű mozgásból adódó állapotot vizsgáljuk.

A Z irányú rugóerők és a befalazás merevtestszerű elmozdulását az alábbiakban ismertetendő (7), (21) egyenletrendszerekből határozzuk meg.

2.1. *A kinematikai illesztési egyenlet*

A befalazott 1-es alszerkezetre működő terhelésből és a Z irányú rugók bekötési pontjaiban ható egységnyi erőkből származó elmozdulásmezőből (amit pl. végeeselemes elmozdulásmódszerrel határozunk meg) kiválaszthatók a Z irányú rugók bekötési pontjaiban fellépő függőleges elmozdulások. Jelölje ezeket f_I^1 , illetve $H_{IJ}^1 I = 1, \dots, RZ$, $J = 1, \dots, RZ$. Itt H_{IJ}^1 hatásfüggvény — az I -ik pontban fellépő Z irányú elmozdulás a J -ik pontban ható függőleges egységnyi erő hatására.

A merevtestszerű elmozdulásból származó Z irányú rugóbekötési pontok függőleges elmozdulása

$$d_I = W_0 + \psi_0^X Y_I - \psi_0^Y X_I, \quad (I = 1, \dots, RZ) \quad (1)$$

ahol W_0, ψ_0^X, ψ_0^Y — a koordináta-rendszer kezdőpontjának függőleges elmozdulása és környezetének X és Y tengely körüli merevtestszerű szögelfordulása.

A függőleges rugókban keletkező r_I ($I = 1, \dots, RZ$) rugóerők ismeretében a befalazás elhagyásával nyert 1. alszerkezetnek a Z irányú rugók bekötési pontjaiban ébredő függőleges elmozdulása:

$$\sum_{J=1}^{RZ} H_{IJ}^1 r_J + f_I^1 + d_I = W_I^1. \quad (I = 1, \dots, RZ) \quad (2)$$

Bevezetve a $\mathbf{H}^1 = [H_{IJ}^1]$ hatásmátrixot, az

$$\mathbf{f}^{1*} = [f_1^1, \dots, f_{RZ}^1]$$

terhelésből származó ismert elmozdulások vektorát¹ és a

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_{RZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Y_1 & -X_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Y_{RZ} & -X_{RZ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_0 \\ \psi_0^X \\ \psi_0^Y \end{bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{u}_R \quad (3)$$

merevtestszerű elmozdulás vektort, (2) helyett tömör formában a

$$\mathbf{w}^1 = \mathbf{G} \mathbf{u}_R + \mathbf{H}^1 \mathbf{r} + \mathbf{f}^1 \quad (4)$$

vektor egyenletet írhatjuk.

Mivel a 2. alszerkezetet a Z irányú rugók alkotják, így elmozdulásuk

$$W_I^2 = -\frac{r_I}{c_I^Z} + f_I^2 \quad (I = 1, \dots, RZ)$$

alakban írható fel, ahol f_I^2 — a rugó földhöz kapcsolódó pontjának elmozdulása (kinematikai teher), a c_I^Z [N/mm] — rugóállandó.

Tömörebb formában áll a

$$\mathbf{w}^2 = -\mathbf{H}^2 \mathbf{r} + \mathbf{f}^2 \quad (5)$$

kifejezés, ahol

$$\mathbf{H}^2 = \left\langle \frac{1}{c_1^Z}, \dots, \frac{1}{c_{RZ}^Z} \right\rangle$$

diagonál mátrix,

$$\mathbf{w}^{2*} = [W_1^2, \dots, W_{RZ}^2], \quad \mathbf{f}^{2*} = [f_1^2, \dots, f_{RZ}^2].$$

¹ * A transzponálás jele.

Ezek után az alszerkezetek

$$W_I^1 - W_I^2 = 0 \quad (I = 1, \dots, RZ) \quad (6)$$

illesztési egyenletrendszerre (4) és (5) figyelembevételével

$$\mathbf{G}u_R + (\mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2) \mathbf{r} + \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^2 = \mathbf{0}. \quad (7)$$

2.2. Az egyensúlyi egyenlet

Az 1. alszerkezet befalazási pontjában ébredő támasztóerőrendszernek — az egész szerkezet szempontjából vizsgálva — zérusnak kell lennie, vagyis az 1. alszerkezetre ható ismert terhelő erőrendszer és a rugóerők egyensúlyi erőrendszer kell, hogy alkossanak (a Z irányú erők vetülete; az X és Y tengelyekre számított nyomatéka zérus kell, hogy legyen).

Legyen az (X_J, Y_J, Z_J) koordinátájú pontba bekötött vízszintes rugó rugóállandója c_J , a rugó hatásvonalának X tengellyel bezárt szöge α_J . Ekkor a befalazott 1. alszerkezetenél a terhelésből származó J -ik rugóirányú elmozdulás

$$\Delta_J^0 = U_J^0 \cos \alpha_J + V_J^0 \sin \alpha_J, \quad (8)$$

míg a Z irányú egységnyi erőkből származó elmozdulás

$$\Delta_{IJ}^Z = U_{IJ}^Z \cos \alpha_I + V_{IJ}^Z \sin \alpha_I, \quad (9)$$

ahol U_J^0, V_J^0 az ismert terhelésből származó J pontbeli X és Y irányú elmozdulásokat, míg U_{IJ}^Z, V_{IJ}^Z a J -ik helyen ható függőleges egységnyi teherből az I -ik helyen fellépő X és Y irányú elmozdulásokat jelöli.

A rugókban keletkező $c_J \Delta_J^0$ nagyságú erők X és Y tengelyekre

$$M'_X = \sum_{J=1}^{RXY} c_J \Delta_J^0 Z_J \sin \alpha_J, \quad (10)$$

$$M'_Y = - \sum_{J=1}^{RXY} c_J \Delta_J^0 Z_J \cos \alpha_J \quad (11)$$

nyomatékot adnak. A Z irányú rugókban keletkező r_J nagyságú erők, továbbá hatásukra az XY síkkal párhuzamos rugókban keletkező rugóerőkkel együtt

$$M''_X = \sum_{J=1}^{RZ} Y_J r_J + \sum_{I=1}^{RXY} \sum_{J=1}^{RZ} c_I \Delta_{IJ}^Z Z_I \sin \alpha_I r_J, \quad (12)$$

$$M''_Y = - \sum_{J=1}^{RZ} X_J r_J - \sum_{I=1}^{RXY} \sum_{J=1}^{RZ} c_I \Delta_{IJ}^Z Z_I \cos \alpha_I r_J \quad (13)$$

nyomatékot fejtenek ki az X és Y tengelyekre.

Az ismert erőrendszer eredőjének Z irányú komponensét jelölje F_Z^0 , míg X és Y tengelyekre kifejtett nyomatékát M_X^0, M_Y^0 .

Ezek után vizsgáljuk meg, hogy a befalazásnál tett $W_0 = 0, \psi_0^X = 0, \psi_0^Y = 0$ korlátokat feloldva a megtámasztandó szerkezet merevtestszerű mozgásának hatására a rugókban mekkora erő keletkezik, s azoknak milyen feltételeket kell kielégíteniük.

Az említett korlátok feloldásából következik, hogy az X tengely körüli egységnyi ψ_0^X szögelfordulás okozta merevtestszerű mozgásból adódóan a J -ik XY síkkal párhuzamos rugóban

$$\Delta J^{RX} = (-Z_J + V_0^X + \varphi_Z^X X_J) \sin \alpha_J + (U_0^X - \varphi_Z^X Y_J) \cos \alpha_J, \quad (14)$$

míg az Y tengely körüli egységnyi ψ_0^Y szögelfordulás hatására

$$\Delta J^{RY} = (Z_J + U_0^Y - \varphi_Z^Y Y_J) \cos \alpha_J + (V_0^Y + \varphi_Z^Y X_J) \sin \alpha_J \quad (15)$$

elmozdulás lép fel, ahol az egységnyi ψ_0^X ($X \leftrightarrow Y$) szögelfordulásakor fellépő U_0^X, V_0^X és φ_Z^X ($X \leftrightarrow Y$) a befalazási pont X és Y tengelyirányú elmozdulása, ill. környezetének Z tengely körüli elfordulása.

A Z irányú eltolódásból a szóban forgó rugókban — lineáris elméletet feltételezve — erő nem keletkezik.

A merevtestszerű mozgásnak olyannak kell lennie, hogy az X és Y irányú vetületi egyenletek és a Z tengelyre felírt nyomatéki egyenlet teljesüljenek. Ezekből a feltételekből egységnyi ψ_0^X és ψ_0^Y szögelfordulásokhoz tartozóan $U_0^X, V_0^X, \varphi_Z^X$ ($X \leftrightarrow Y$) a (16) alatti egyenletrendszerekből határozhatók meg.

$$\begin{bmatrix} \Sigma c_J (CJ)^2 & \Sigma c_J SJCJ & \Sigma c_J QJ CJ \\ \Sigma c_J SJ CJ & \Sigma c_J (SJ)^2 & \Sigma c_J QJ SJ \\ \Sigma c_J QJ CJ & \Sigma c_J QJSJ & -\Sigma c_J (QJ)^2 CJ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0^X & U_0^Y \\ V_0^X & V_0^Y \\ \varphi_Z^X & \varphi_Z^Y \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma c_J Z_J CJ SJ & -\Sigma c_J Z_J (CJ)^2 \\ \Sigma c_J Z_J (SJ)^2 & -\Sigma c_J Z_J SJ CJ \\ -\Sigma c_J Z_J QJ SJ & \Sigma c_J Z_J QJ CJ \end{bmatrix} \quad (16a, b)$$

ahol:

$$CJ = \cos \alpha_J; SJ = \sin \alpha_J; QJ = X_J \sin \alpha_J - Y_J \cos \alpha_J.$$

Amennyiben $\alpha_J = 0, \pi/2$, vagyis a rugók vagy az X , vagy az Y tengellyel párhuzamosak, úgy a (16a, b) egyenletrendszerek kétismeretlenesek lesznek ((16a)-nál V_0^X, φ_Z^X , (16b)-nél U_0^Y, φ_Z^Y). Továbbá, ha a rugók az XY síkban fekszenek, a (16a, b) egyenletrendszerek homogének, megoldásuk triviális.

A (16a, b) megoldásának ismeretében az XY síkkal párhuzamos rugókban, a megtámasztandó szerkezetre hatóan $\psi_0^X = 1$ -nél.

$$\begin{aligned} F_{XJ}^{RX} &= -c_J \Delta_J^{RX} \cos \alpha_J, \\ F_{YJ}^{RX} &= -c_J \Delta_J^{RX} \sin \alpha_J, \end{aligned} \quad (17a, b)$$

$\psi_0^Y = 1$ szögelfordulásnál pedig

$$\begin{aligned} F_{XJ}^{RY} &= -c_J \Delta_J^{RY} \cos \alpha_J, \\ F_{YJ}^{RY} &= -c_J \Delta_J^{RY} \sin \alpha_J \end{aligned} \quad (18a, b)$$

nagyságú erők keletkeznek, míg nyomatékuk az X és Y tengelyekre tetszőleges ψ_0^X és ψ_0^Y értéknél

$$M_X'' = - \sum_{J=1}^{RXY} (F_{YJ}^{RX} \psi_0^X + F_{YJ}^{RY} \psi_0^Y) Z_J, \quad (19)$$

$$M_Y'' = \sum_{J=1}^{RXY} (F_{XJ}^{RX} \psi_0^X + F_{XJ}^{RY} \psi_0^Y) Z_J. \quad (20)$$

Ezek után a fentiek alapján könnyen felírhatók az egyes alszerkezetre vonatkozó — a befalazás elhagyásából származó — egyensúlyi egyenletek:

$$\left. \begin{array}{l} Z \text{ irányú vetületi} \\ X \\ Y \end{array} \right\} \text{ tengelyre számított nyomatéki } \left. \vphantom{\begin{array}{l} Z \\ X \\ Y \end{array}} \right\} \text{ egyenlet}$$

$$\mathbf{G}_R \mathbf{u}_R + (\tilde{\mathbf{G}}^* + \mathbf{G}^*) \mathbf{r} = -\mathbf{v}, \quad (21)$$

ahol $\tilde{\mathbf{G}}$ (12), (13), (3); \mathbf{G}_R (19), (20); míg \mathbf{v} (10), (11) alapján állítható elő.

$$\tilde{\mathbf{G}} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline \sum_{I=1}^{RXY} c_I \Delta_{I,1}^Z Z_I \sin \alpha_I & \dots & \sum_{I=1}^{RXY} c_I \Delta_{I,RZ}^Z Z_I \sin \alpha_I \\ \hline -\sum_{I=1}^{RXY} c_I \Delta_{I,1}^Z Z_I \cos \alpha_I & & -\sum_{I=1}^{RXY} c_I \Delta_{I,RZ}^Z Z_I \cos \alpha_I \end{array} \right] \quad (22)$$

$$\mathbf{G}_R = \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\sum_{J=1}^{RXY} F_{YJ}^{RX} Z_J & -\sum_{J=1}^{RXY} F_{XJ}^{RY} Z_J \\ \hline 0 & \sum_{J=1}^{RXY} F_{XJ}^{RX} Z_J & \sum_{J=1}^{RXY} F_{YJ}^{RY} Z_J \end{array} \right], \quad \mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} F_2^0 \\ M_X^0 + \sum_{J=1}^{RXY} c_J Z_J \Delta_J^0 \sin \alpha_J \\ M_Y^0 - \sum_{J=1}^{RXY} c_J Z_J \Delta_J^0 \cos \alpha_J \end{array} \right] \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_R^* = [W_0, \psi_0^X, \psi_0^Y] \quad (25)$$

A (7) és (21) egyenletek alkotják az alszerkezetek együttdolgozásának egyenletrendszerét.

3. A megtámasztandó szerkezet elmozdulásállapota

A (7), (21) egyenletrendszer megoldásából nyert r rugóerők és u_R elmozdulás ismeretében a vizsgált szerkezetben fellépő elmozdulások, a szuperpozíció elv alapján számíthatók:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \mathbf{u}^0 + \sum_{J=1}^{RZ} \mathbf{u}_J^Z r_J + \mathbf{G}_{\text{merev}} \mathbf{u}_R, \quad (26)$$

ahol \mathbf{u}^0 — a befalazott 1-es alszerkezetre ható, ismert terhelésből származó elmozdulásmező;

\mathbf{u}_J^Z — a befalazott 1-es alszerkezetre, a J -ik függőleges rugó bekötési pontjában ható Z irányú egységnyi erőből származó elmozdulásmező,

$$\mathbf{G}_{\text{merev}} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & U_0^X - \varphi_Z^X Y & Z + U_0^Y - \varphi_Z^Y Y \\ \hline 0 & -Z + V_0^X + \varphi_Z^X X & V_0^Y + \varphi_Z^Y X \\ \hline 1 & Y & -X \end{array} \right] \quad (27)$$

4. Megjegyzések

A fentiekben vázolt módszer a szilárdsági feladat megoldását szuperponálható feladatok megoldására építi fel, aminek számítógépes realizálása a szerkezettől függően nagyméretű háttér használatát követelheti meg. Véges-elemes elmozdulásmódszerre alapozott eljárás esetén [1] az 1-es befalazott alszerkezetre ható ismert erőrendszerből, illetve a függőleges rugók bekötési pontjaiban ható Z irányú egységnyi erőkből származó elmozdulásokat az algebrai egyenletrendszer együttható mátrixának egyszeri invertálásával, több jobboldal felvételével célszerű meghatározni.

A (7), (21) egyenletrendszer mátrixainak előállításához a (16a, b) egyenletrendszert is meg kell oldani, melynek megoldása a terheléstől független. Így, amennyiben a megtámasztandó szerkezet különböző terhelések alatti viselkedésére vagyunk kíváncsiak, és ezt egy futás alatt akarjuk tisztázni, a (7), (21) egyenletrendszert is több jobboldallal oldjuk meg.

A vázolt módszer jól alkalmazható járművázszerkezetek megtámasztásának pontosabb figyelembevételére: az egyenlőtlen úttesten álló járművek szilárdsági viszonyai a korábbiaktól eltérően ugyanazon modellen tisztázhatók, mint a sík úton álló járművé.

A bemutatott módszer, bizonyos módosítással lehetőséget ad a Z irányú rugók (kerék) talajtól történő elválásának figyelembevételére is. Nevezetesen a (7) alatti egyenlőség helyett a talaj és az egyes alszerkezethez kapcsolt függőleges rugók közötti távolságot kifejező

$$\mathbf{g} = \mathbf{G}\mathbf{u}_R + \mathbf{H}\mathbf{r} + \mathbf{f}^1 - \mathbf{f}^2 \geq \mathbf{0} \quad (28)$$

egyenlőtlenséget véve, a következő kvadratikus programozási feladat fogalmazható meg:

$$\min \{ \mathbf{g}^* \mathbf{r} \mid \mathbf{r} \geq \mathbf{0}; \mathbf{g} \geq \mathbf{0}; \mathbf{G}_R \mathbf{u}_R + (\tilde{\mathbf{G}}^* + \mathbf{G}^*) \mathbf{r} + \mathbf{v} = \mathbf{0} \}. \quad (29)$$

A függőleges irányú rugókban u_i csak nyomóerők léphetnek fel, továbbá a megoldásnál $\mathbf{g}^* \mathbf{r} = 0$, hiszen ahol $g_i = 0$, ott a támasztóerő (rugóerő) $r_i \geq 0$, és ahol $g_i > 0$, ott $r_i = 0$ az egyoldalú kapcsolatból következően. A (29) feladat megoldása ismert eljárásokkal könnyen elérhető [2].

5. Példa

Vegyük az 1. ábrán vékony vonallal vázolt rúdszerkezetet a feltüntetett $F_X = 2000$ N erő terheléssel, továbbá írjuk elő a 2. és 10. csomópontba bekötött függőleges rugók talajjal érintkező pontjainak 40 mm-es megemelését.

A rudak anyagát jellemző anyagállandók: $E = 2,07 \cdot 10^5$ N/mm² rugalmassági tényező, $\nu = 0,3$ Poisson-tényező. A rúdszerkezet I 140-es szelvényű rudakból áll. Az X és Z tengelyekkel párhuzamos rudak keresztmetszeteinek egyes főtengelye Y -nal, míg az Y -nal párhuzamos rudaknál X -szel párhuzamos.

A támasztó rugók rugóállandói X irányban $c_X = 1000$ N/mm; Y irányban $c_Y = 2000$ N/mm míg Z irányban $c_Z = 200$ N/mm. Az 1. ábrán a rúdszerkezet 1. jelű csomópontjának elmozdulásához viszonyított deformálódott alakot a vastag vonallal megrajzolt ábra mutatja.

A (7), (21) egyenletrendszer megoldásából nyert Z irányú rugóerők az alábbiak:

$$\begin{aligned} r_1 &= -2404,45 \text{ N} \\ r_2 &= 2457,70 \text{ N} \\ r_9 &= -1820,18 \text{ N} \\ r_{10} &= 1766,93 \text{ N} \end{aligned}$$

míg a szerkezetet X és Y irányokban megtámasztó rugókban

$$\begin{aligned} X \text{ irányú rugóknál} \quad r_4 &= -1225,22 \text{ N} \\ r_9 &= -5836,65 \text{ N} \\ r_{11} &= 5061,87 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y \text{ irányú rugóknál} \quad r_4 &= 474,853 \text{ N} \\ r_{10} &= -24,413 \text{ N} \\ r_{11} &= -450,439 \text{ N}. \end{aligned}$$

Itt az r mellett álló alsó index a rugó bekötési csomópontjának jele. A rugóerő előjele akkor pozitív, ha a megtámasztandó szerkezetre ható erő a koordináta-rendszer tengelyeinek pozitív irányába mutat. Mivel a terhelés csak X tengelyirányú, ezért a Z és Y irányú rugókban keletkező erők eredőjének zérusnak kell lennie. Könnyen ellenőrizhető ennek teljesülése.

A lágysz Z irányú rugók miatt a szerkezet pontjainak Z irányú eltolódása 30 mm nagyságrendű, míg az Y irányú elmozdulások ennek mintegy csak 100-ad részét teszik ki. A csomópontok elmozdulását az 1. táblázat tartalmazza.

1. táblázat

Csp. jele	U [MM]	V [MM]	W [MM]
1	5.24126E+00	-3.99928E-01	1.20222E+01
2	5.23967E+00	1.26706E-02	2.77115E+01
3	-2.32116E+00	1.35881E-01	1.20222E+01
4	1.22522E+00	-2.37426E-01	2.77115E+01
5	6.34468E+00	-4.01368E-01	1.08040E+01
6	6.34468E+00	1.21783E-02	2.91246E+01
7	6.34598E+00	-1.94445E-01	1.99641E+01
8	-1.12819E+01	-3.23890E-01	1.99641E+01
9	5.83665E+00	-4.03329E-01	9.10091E+00
10	5.83766E+00	1.22066E-02	3.11654E+01
11	-5.06187E+00	2.25220E-01	9.10091E+00
12	2.99791E 01	-5.35001E-01	3.11654E+01

Csp. jele	FIX [RAD]	FIY [RAD]	FIZ [RAD]
1	-1.07162E-03	-1.51249E-02	-2.10857E-04
2	1.20972E-03	-1.60366E-02	-2.12050E-04
3	-1.07162E-03	-1.51249E-02	-2.10857E-04
4	8.95720E-04	-1.60684E-02	-2.12050E-04
5	-1.48086E-03	-1.83895E-02	1.88573E-04
6	1.73975E-03	-1.83909E-02	1.87372E-04
7	1.29445E-04	-1.81819E-02	5.26333E-04
8	1.29445E-04	-1.73509E-02	5.26333E-04
9	-1.76490E-03	-2.18857E-02	7.57056E-04
10	2.18883E-03	-2.21515E-02	7.57056E-04
11	-1.00320E-03	-2.17527E-02	7.57664E-04
12	2.18883E-03	-2.21515E-02	7.57056E-04

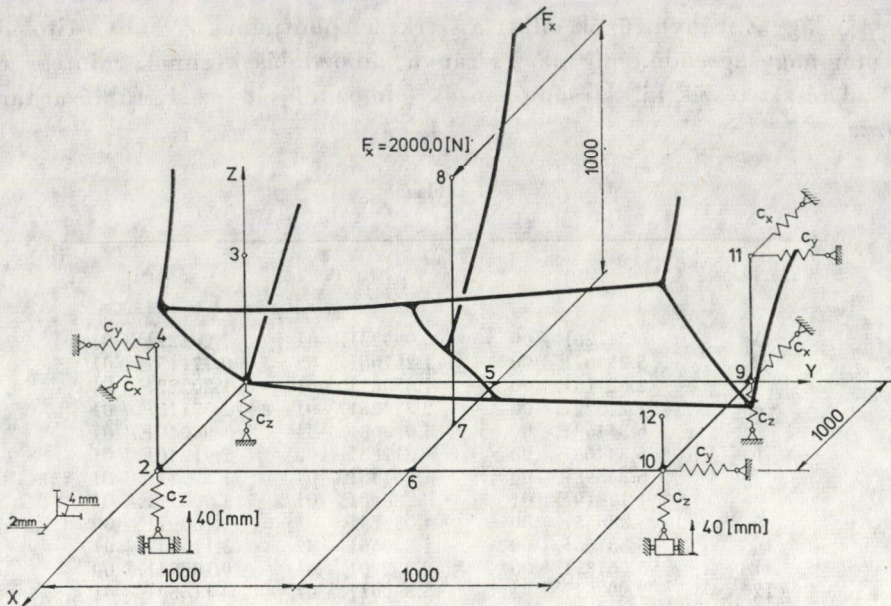
Megjegyzés

A vázolt módszer sikeres alkalmazást nyert a Nehézipari Műszaki Egyetem Mechanikai Tanszékének AUTOKUT részére végzett Szm. 266-XXVIII-6/78. sz. kutatási-fejlesztési munkája során.

A programrendszer kidolgozásában PÖDÖR András és NÁNDORI Frigyes is részt vettek. A szerzők ez úton fejezik ki köszönetüket közreműködésükért.

IRODALOM

- ZIENKIEWICZ, O. C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill, London 1971
- KÜNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, Springer-Verlag, Berlin 1962



1. ábra

Note on the Strength Calculation of Elastic Structures Supported by Springs.—The paper deals with the strength calculation of an elastic system supported by soft springs, by dividing the elastic structure into two structural units (or substructures). Provided the soft springs are parallel with the vertical axis of the system of coordinates, the first subsystem is the construction to be supported, joined to the springs which are parallel to the horizontal plane, while the second substructure is composed of the vertically arranged soft supporting springs. The first substructure is fixed at a point in such a way that the displacement in the vertical direction of the subsystem (as a rigid body), and its rotation about the horizontal axis is prevented. With a knowledge of the vertical spring forces and the vector of the rigid-body displacement obtained by the solution of the kinematic joint equations of the substructures and by the solution of the equilibrium equations of the first substructure, the strength conditions of the construction investigated may be clarified by making use of the principle of superposition. Building up the problem in the above way also permits the separation of the vertical springs from the ground. In this case, the spring forces and the vector of the rigid-body displacement might be obtained by the solution of the quadratic programming problem.

Bemerkung zur Festigkeitsberechnung der durch Federn unterstützten elastischen Konstruktionen. — Die Festigkeitsberechnungen eines durch weiche Federn unterstützten elastischen Systems werden durch Zerteilung der elastischen Konstruktion auf zwei Konstruktionsteile (oder Untersysteme) behandelt. Angenommen, daß die weichen Federn mit der senkrechten Achse des Koordinatensystems parallel angeordnet sind, das erste Untersystem besteht aus der zu unterstützenden, mit den Federn verbundenen Konstruktion, während das zweite Untersystem aus den senkrechten Federn zusammengesetzt ist. Das erste Untersystem sollte an einem Punkt derart eingespannt werden, daß die senkrechte Verschiebung desselben als steifen Körpers und die Rotation um die horizontale Achse verhindert werden. Bei Kenntnis der aus der Lösung der kinematischen Verbindungsgleichungen der Untersysteme und der Gleichgewichtsgleichungen des ersten Untersystems erhaltenen senkrechten Federkräfte und des Vektors der steifkörperartige Verschiebung, die Festigkeitsverhältnisse der untersuchten Konstruktion können durch Anwendung des Superpositionsprinzips klar gestellt werden. Eine derartige Aufbau der Aufgabe ermöglicht auch die Berücksichtigung der Abtrennung der senkrechten Federn vom Boden. In diesem Fall können die Federkräfte und der Vektor der steifkörperartige Verschiebung durch Lösung der quadratischen Programmierungsaufgabe erhalten werden.

A VISZKOELASZTICITÁSTAN IRÁNYZATAI A MÉRNÖKI GYAKORLATBAN, KÜLÖNÖS TEKINTETTEL A RÚDSZERKEZETEKRE HELYZETKÉP

ROLLER BÉLA*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1978. június 24-én]

A dolgozat áttekinti a viszkoelaszticitástannak a mérnöki gyakorlatban — első-sorban az építőmérnöki munka területén — megjelenő problémáit és kutatási irányzatait, avégett, hogy a rúdszerkezeteknek a mátrixszámításon alapuló elmélete a viszkoelasztikus anyagú tartókra is kiterjeszhető legyen. Az irodalmat külföldi monográfiákra, külföldi folyóiratcikkekre és magyar munkákra csoportosítja. Megállapítja, hogy a fellelhető külföldi publikációk többsége egyszerű elrendezésű vasbetonszerkezetekre vonatkozik és nem általános jellegű. Az összetett szerkezetekről szóló vizsgálatok vagy még a számítógépnek is tetemes munkát jelentenek, vagy takarékosak ugyan, de a matematikai alapjuk nem teljesen kiforrott. A hazai kutatás eredményei nem maradnak el a nemzetközi színvonaltól. Szakmai múltunk, a rendelkezésre álló szellemi és anyagi (számítógépi) kapacitások egyaránt alapot adnak arra, hogy a rúdszerkezetek általános elméletét viszkoelasztikus anyagokra is alkalmazni lehessen.

I. Bevezetés; lineáris és nemlineáris viszkoelaszticitás

A rugalmas állapotú tartószerkezetek lassú alakváltozásának kérdései már hosszabb idő óta az érdeklődés homlokterében vannak, mert a reológiai jelenségek lényegesen befolyásolják a szerkezetek erőjátékát.

A kúszás, az ernyedés, a bonyolultabb folyamat szerint változó erőteher, vagy kinematikai teher hatásának vizsgálata mind a vasbetonszerkezeteken, mind az együttműködő szerkezeteken, mind pedig a szendvics-szerkezeteken meglehetősen fontos kérdés.

A lassú alakváltozás pillanatról pillanatra módosítja a különböző anyagból készült szerkezeti alkotóelemek igénybevételeinek egymás közötti viszonyát, továbbá lényegesen fokozza az alakváltozást és semlegesíti a tervszerűen végrehajtott feszítés igénybevételei előnyeit is.

A rúdszerkezetek reológiai állapotának vizsgálatára gyakorlatilag a *lineáris viszkoelaszticitástan* a leginkább előnyös, mert ennek elmélete és számítási módszerei közel állnak a mérnöki gyakorlat rutinjeljárásaihoz és a problémák széles területének gyors felderítésére alkalmasak.

A lineáris viszkoelaszticitástannak természetesen ugyanúgy megvannak az alkalmazási korlátai, mint a lineáris rugalmasságtannak. E korlátokat fizikai tapasztalatok jelzik, amelyek azt mutatják, hogy az anyagok viselkedése egy-egy, a rájuk jellemző, meghatározott mértékűnél nagyobb megterhelés esetében már nem lineáris, különösen akkor, ha hőhatás is lágyítja őket. A *nemlineáris viszkoelaszticitástan*, amely e tényezőket figyelembe veszi,

* Dr. Roller Béla, 1027 Budapest, Mártírok útja 54.

igen szerteágazó, tetemes számítási nehézségekre vezet, és kísérleti oldala is meglehetősen lezáratlan terület.

E dolgozat célja a mérnöki gyakorlatban — elsősorban az építőmérnöki munka területén — megjelenő problémák és kutatási irányzatok áttekintése avégett, hogy a rúdszerkezeteknek a mátrixszámításon alapuló elmélete a viszkoelasztikus anyagú tartókra is kiterjeszhető legyen.

A viszkoelaszticitásnak igen kiterjedt irodalma van. Ezt legcélszerűbb néhány monográfiára támaszkodva áttekinteni, ezeket úgy igyekeztünk összeválogatni, hogy részint jellemezzék a fenomenológiai alapon álló mérnöki viszkoelaszticitástan problémakörét, részint pedig támpontul szolgáljanak további fejtegetéseinkhez.

A külföldi és a magyar műveket elkülönítve tárgyaljuk.

2. Tájékozódás az összefoglaló jellegű külföldi monográfiákban

A mérnöki viszkoelaszticitástan alapfogalmairól FLÜGGE adja a legvilágosabb képet [19]. Könyve a lineárisan viszkoelasztikus, időinvariáns anyagú, izotrop testek viselkedését tárgyalja, az elemi szilárdságtanban előforduló egyszerű igénybevételek reológiai megfelelőin. Ismerteti a kúszás, az ernyedés és a rehabilitáció fogalmát. Az állandó anyagjellemzőjű rugókból és dugattyúkból összekapcsolt modellek egyszerűbb és általánosabb eseteinek, például a Kelvin-láncolatnak és a Maxwell-rendszernek a tulajdonságait a Laplace-transzformáció segítségével elemzi. Az anyagtörvények differenciálegyenletein kívül bemutatja a reológiai viselkedés integrálegyenlettel történő reprezentációját is, amelynek *Boltzmann-Volterra*-féle alakját szemléletesen építi fel. A komplex aritmetika segítségével megvizsgálja a periodikusan változó igénybevétel hatását, bevezetve ezáltal a komplex engedékenységet is, mint az anyag elméleti viselkedéstörvényének egy további reprezentációs módját. Igazolja, hogy a különböző reprezentációs lehetőségek egyenértékűek.

Térbeli feszültségállapot esetén már kizárólag a differenciálegyenletekkel jellemzett anyagtörvénnyel foglalkozik, amelyet a rugalmas anyagra vonatkozó összefüggéssel teljesen analóg formában ad meg, a feszültségi és az alakváltozási gömbtenzor, illetve a megfelelő deviátorok kapcsolatából kiindulva.

A szerkezeti mechanika alapfeladatai közül a hajlításon, az egyszerű határozatlan tartó erőmódszerrel történő megoldásán és a mindkét végén csuklós oszlop kihajlásán kívül megvizsgálja a viszkoelasztikus ágyazású és esetleg ugyanilyen anyagú gerendán végigvonuló koncentrált teher hatását is, az általános szilárdságtan problémái közül pedig — egyebek között — a belső nyomás alatt álló vastagfalú henger állapotváltozására tér ki. A gyakorlatban előforduló feladatok megoldását a viszkoelaszticitástan korrespondenciaelvének kifejtése és alkalmazása révén keresi meg, mindig analitikus úton.

A munka fogyatékosága, hogy az anyagtörvény kísérleti alapjaitól teljesen elhatárolja magát, továbbá hogy a nem időinvariáns anyagtörvényű szerkezetekkel — és ezek kapcsán az állapotváltozási vizsgálat numerikus módszereivel — egyáltalán nem foglalkozik.

E hiányosságok egy része elhárul RZSANYICIN tárgyalásmódjában [49], aki fejtegetését a kúszásnak, mint egyszerű fizikai jelenségnek az ismertetésével kezdi, az elsődleges, másodlagos és harmadlagos kúszás szigorú megkülönböztetésével. Az anyagtörvény reprezentációjánál a hangsúlyt az integrálegyenletre helyezi, ugyanis az abban szereplő magfüggvény alkalmas megválasztásával az elsődleges kúszást a valósághoz hívebben lehet jellemezni, mint az állandó anyagjellemzőjű rugó-dugattyúrendszerek segítségével konstruált modellek esetében.

Az elsődleges kúszás leírására olyan magokat kell alkalmazni, amelyek a kezdő pillanatban szingulárisak, vagyis mértéktelen instantán alakváltozási sebességnek felelnek meg. Ha a szingularitás erős, nem pedig gyenge, akkor a sebességek improprius integrálja, vagyis a tartós alakváltozás nem korlátos.

A mag elfajult vagy nem elfajult lehet; az elfajult magnak speciális esete az exponenciális mag. A különféle magok alkalmazásával felírható integrálegyenletek közül az elfajult maggal rendelkezőknek véges rendű lineáris differenciálegyenletek felelnek meg, az exponenciális magnak pedig állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletek. Az egyszerű rugó-dugattyúmodellek integrálegyenlettel való reprezentálására tehát csak az utóbbiak alkalmasak. RZSANYICIN szerint a beton öregedésének leírására sokszor megfelel a Maszlov—Arutyunjan-féle mag is. Ami az időinvariáns folyamatokat illeti, tárgyalásmódja éppen a FLÜGGE által követettnek fordítottja, ő ugyanis az integrálegyenlettel történő reprezentációt tekintvén elsődlegesnek — nem differenciálegyenletekből, hanem konvolúciós integrálegyenletekből jut el a Laplace-transzformáltakhoz.

RZSANYICIN ezekután lényegében ugyanazokat az egyszerű szilárdságtani feladatokat tárgyalja, mint FLÜGGE, de mindig az integrálegyenleteket helyezve előtérbe. A folytonosan ágyazott gerenda helyett a statikailag többszörösen határozatlan tartóknak az erőmódszer alapján felírt integrálegyenleteit vázolja, részletes megoldás nélkül.

RZSANYICIN a nemlineáris kúszás anyagtörvényének néhány lehetőségével is foglalkozik, ezek közül elsőnek egy szakaszonként lineáris jellemzést említve meg, amikor is a második szakaszban a feszültségváltozási folyamat a folyási feszültségből indul ki. Ismerteti még a kúszási integrálegyenlet néhány kézenfekvő egyszerű általánosítását is, amelyekben vagy a feszültség helyén szerepel annak egy hatványsorral adott, illetve ezzel megközelített függvénye, vagy a mag függ az időn kívül még a feszültségtől is, vagy mindkét eset lehetséges. Végül mindezek helyett, korszerűbb elméletként a multilineáris szuperpozíciónak megfelelő többszörös integrálegyenletekről szól.

Bonyolult rúdszerkezetek számításának hatékony módszereivel ez a mű nem foglalkozik.

Főleg a gépészmérnöki munka területét érinti KACSANOV műve [26], aki a lassú alakváltozás jelenségeit nemcsak fenomenológiai, de diszlokációs alapon is magyarázza. Az anyagtörvényt általában nemlineárisnak tételezi fel. Egyszerű igénybevétel esetében az alakváltozási sebességet a feszültségnek valamely hatványával választja arányosnak, összetett igénybevétel, illetve térbeli feszültségállapot esetében pedig a nemlineáris rugalmasságtanban követett gyakorlat mintájára a csúsztatófeszültségek intenzitásfüggvényébe rejti el a nemlinearitást. Abból a megfontolásból kiindulva, hogy a gyakorlatban felhasználható szerkezeti anyagok tartós alakváltozása korlátos, és hogy igen sokszor éppen a tartós állapot a legfontosabb, a feladatok megoldása során nem annyira a reológiai folyamatra, mint inkább a végállapotra fordítja a figyelmet. Mivel azonban az anyagtörvény egy-egy rögzített pillanatban nemlineáris, megoldásai még így is igen bonyolultak. Az egyszerű igénybevételek vizsgálatok például a kis paraméterek módszerét használja, a három rúdból álló rácsos tartó megoldásakor pedig grafikus eljárást alkalmaz.

KACSANOV közli az általános szilárdságtan azon variációs elveit, illetve a variációs elveknek azokat az alakjait, amelyek a rúdszerkezeti és a kontinuumfeladatok megoldásakor a fentebb jelzett anyagtörvények esetében is érvényesek lehetnek, de ez sem ad módot széleskörű numerikus eljárások kiépítésére.

A lineáris és a nemlineáris viszkoelaszticitástanról széleskörű beszámolót dolgozott ki FINDLEY, LAI és ONARAN [16], akik figyelmüket a lineáris viszkoelaszticitástan rövid összefoglalása után a nemlineáris anyagtörvények különböző alakjaira összpontosították. A gyakorlati szempontokat szemmel tartva olyan ún. „egyszerű” anyagokkal foglalkoztak, amelyeknél állandó hőmérséklet esetében a feszültség pontról pontra csakis az alakváltozási gradienseknek, és pedig a pillanatnyi alakváltozási gradienseknek, továbbá mindazon egyéb, előzetes alakváltozási gradienseknek a függvénye, amelyek az alakváltozási folyamat során már kialakultak. A RZSANYICIN által is felvetett lehetőségek közül a többszörös integrálegyenletekkel történő anyagtörvény-reprezentációt tartják elsődlegesnek, és ezt térbeli feszültségállapot esetére is kidolgozzák, amikor is a nyúlás és a feszültségek összefüggésében az utóbbiaknak különböző fokú invariánsai fordulnak elő. Mérlegelve a hőmérséklet befolyásának jelentőségét, az anyag fizikai viselkedésének leírásakor olyan magfüggvényeket is alkalmaznak, amelyek az időn kívül a hőmérséklettől is függenek. A hőmérséklet növekedését fiktív időre redukálják, abból a megfontolásból kiindulva, hogy a hőmérsékletnövekedés meg az idő múlása egyaránt növeli a lassú alakváltozást. A redukált idő fogalmát még az anyagtörvény egy további formájába is bevezetik, mégpedig úgy, hogy szintleg

lineáris integrálegyenletet írnak fel, de az ott előforduló, változó időparamétert a feszültség valamelyik mértékének függvényeként írják elő.

Képleteiket a modern kontinuummechanikának a funkcionálanalízisre támaszkodó elméletéből vezetik le, és speciális esetekként még olyan anyag-törvényeket is közölnek, amelyek rövididejű terhelésre, illetve véges alakváltozásra, vagy rugalmas folyadéknak tekintett anyagra vonatkoznak.

Különleges érdekük, hogy óriási kísérleti apparátusra támaszkodnak. Húzási-, csavarási és többtengelyű feszültségállapotban végzett kísérletek segítségével igen sok anyagra dolgoztak ki lineáris vagy nemlineáris kúszási függvényeket különböző hőmérsékletek alapulvételével is, azután pedig a szerkezeti mechanika különböző alapeladatainak (pl. rúdhajlítás, csövek csavarása, belső nyomásnak kitett vastag falú henger állapotvizsgálata) megoldására is alkalmazták ezeket.

Módszerük elkerülhetetlennek látszó nehézsége, hogy az anyagállandók meghatározására irányuló kísérletesorozataik meglehetősen bonyolultak, és hogy a feladatok konkrét megoldására csak iterációs úton van lehetőség.

A négy monográfiát együttesen tekintve megállapítható, hogy az első az időinvariáns anyagú, lineárisan viszkoelasztikus szerkezetek és közegek vizsgálatával foglalkozik, az anyagtörvény differenciálegyenletéből kiindulva és a Laplace-transzformációra támaszkodva. A második a lineáris viszkoelaszticitást a Boltzmann—Volterra-féle integrálegyenlet, illetve a magfüggvény különböző alakjai felől közelíti meg. A harmadik a nemlineáris rugalmasságtan és a nemlineáris viszkoelaszticitás között von párhuzamot, a negyedik pedig a nemlineáris viszkoelaszticitást a kontinuummechanika részeként szemléli, a Boltzmann—Volterra-egyenleteket általánosítva és komoly kísérleti háttérrel.

Azok közül a munkák közül, amelyek a viszkoelaszticitást a szerkezeti anyag előállításának módja, illetve a szerkezet mérnöki felhasználása felől, — vagyis inkább az alkalmazott tudomány, mint a műszaki alapkutatások oldaláról közelítik meg, három könyvet választottunk ki. Az elsőt röviddel a második világháború után, LEVI és PIZETTI írta, de a bennünket érdeklő része teljes egészében LEVITől származik [38]. Célja a vasbeton szerkezet igénybevételeinek, illetve az igénybevételek átrendeződési folyamatainak vizsgálata a zsugorodás és a kúszás során. LEVI beszámol azokról a kísérleteiről, amelyeket terrakottarétegekre rádolgozott beton próbatesteken végzett, s amelyek megalapozták a lineáris kúszás feltevésének jogosultságát. Utal arra, hogy a zsugorodási és a kúszási alakváltozás konformnak tekinthető, majd a kúszás-törvényt úgy írja fel, hogy az instantán rugalmas alakváltozásra egy exponenciális jellegű kúszási alakváltozást halmoz rá, ezzel a beton anyagát valójában standard viszkoelasztikusnak választja. Az anyagtörvény a Hooke-törvény egy olyan általánosításának is tekinthető, amelynél a rugalmassági modulus az időben megfelelően csökken. Az acélt ideálisan rugalmasnak tételezi fel.

• Alapproblémája ez után az 1. feszültségállapotban levő vasbeton-keresztmetszet, pontosabban rúd-elem fajlagos alakváltozásai és igénybevételei közti összefüggés feltárása. Előbbit a középvonali nyúlás és a görbület, utóbbit a hajlítónyomaték jellemzi, a keresett összefüggés pedig, az egyensúlyi, a geometriai és a fizikai egyenletek alkalmazása után egy közönséges, állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletrendszer alakjában jelenik meg. Állandó jellegű igénybevétel esetén az alakváltozási folyamat az időben exponenciálisan változó.

A statikailag határozatlan vasbetontartók számítása a Castigliano-tételen alapul, amelyet a vizsgált anyagra érvényes formában COLONETTI fogalmazott meg. Mivel azonban a keresztmetszetek igénybevételei a szüntelen átrendeződés folytán az időben változnak, a vizsgálat olyan, változó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerre vezet, amelynek megoldásával a mű nem foglalkozik.

Az említett munkának fő érdeme a szintézisre való törekvés, fogyaté-kossága pedig az, hogy nem veszi figyelembe a beton berepedt állapotát. Eredményeit a későbbiekben magyar kutatók is kiegészítették.

A második könyv, amely a viszkoelaszticitástan széleskörű gyakorlati alkalmazási területét mutatja, ALFREYnek ugyancsak a jelzett időszakból eredő műve a polimerek mechanikájának alapjairól [2]. Azt a körülményt, hogy az óriásmolekulákból felépített, különbözőképpen hőkezelt műanyagok a hőkezelés módjától és mértékétől függően amorf struktúrájúak és gumi-szerűek, vagy kristálystruktúrájúak és üvegszerűek lehetnek, továbbá, hogy gyors terhelésre az amorf struktúrájú anyag is rugalmas-rideg viselkedést, lassú terhelésre pedig a kristályos anyag is szívós tulajdonságokat, sőt folyást is mutathat, a hadigazdálkodás sokoldalúan kamatoztatta a természetes anyagoknak műanyagokkal való pótlásakor.

Kiderült az is, hogy tartószerkezeti célra a térhálós struktúrájú polimerek a legalkalmasabbak.

ALFREY úgy találta, hogy a polimeranyagok viselkedését lényegesen befolyásolja a kúszás és a relaxáció, de elegendően pontosnak és reálisnak ítélte meg a lineáris viszkoelaszticitást is, különösen azért, mert a nemlinearitás számítási bonyodalmakkal jár. Elméleti szempontból a korrespondenciaelvet, az időben változó feszültség alapján elvégzett kúszásvizsgálatokat meg a relaxációs és retardációs spektrum alkalmazását, gyakorlati szempontból pedig a kúszási jellemzőknek magas frekvencián elvégzett belsőúrlódás-vizsgálati kísérletekkel való megállapítását kell még monográfiájából kiemelni.

Irányzatának egyik folytatója FERRY [15], aki a viszkoelasztikus viselkedést elsősorban a fizikai kémia oldaláról magyarázza. Tömör összefoglalást ad a lineáris viszkoelaszticitás különböző kúszási és ernyedési jellemző-módjairól, rámutatva arra, hogy a polimerek kúszása fokozatosabb a KELVIN—VOIGT-anyagénál, ernyedésük pedig fokozatosabb a Maxwell-anyagénál. Szá-

mos eljárást dolgoz fel az anyagállandóknak kísérleti megállapítására, de ezek főleg lágy anyagokra (gélekre) vonatkoznak. Az építőmérnök szempontjából is szóbajöhető szilárd anyagok reológiai jellemzőinek meghatározására hajlítókísérleteket javasol.

LEVI, ALFREY és FERRY munkásságának ismertetésével a viszkoelaszticitás mérnöki felhasználásának két határterületét próbáltuk felvázolni. A kettő közötti részt a fémekre vonatkozó kutatások töltik ki, különösen tekintettel az üzemi okokból hőhatásra igénybevett gépszerkezeti, vagy védelmi okokból hűtésnek ellenállóra megtervezett épületszerkezeti elemekre.

Az iménti részletesebben vázolt anyagon túl még jónéhány jelentékeny munkát kellene megemlíteni, ezeknek azonban szinte csak a felsorolására szorítkozhatunk. Egy-egy megjegyzéssel talán sikerül őket a részletezettek segítségével kijelölt irányzatokhoz illeszteni.

A lineáris viszkoelaszticitástan anyagtörvényeinek a termodinamikával való kapcsolatát, az anyagtörvények szimmetriatulajdonságainak elvi levezetését és a rugalmasságtan néhány felcserélhetőségi tételének általánosítását FUNGNÁL találhatjuk meg [20]; ez a könyv a lineáris viszkoelaszticitást a kontinuummechanika keretében tárgyalja. A lineáris viszkoelaszticitást és a térbeli feszültségállapotra vonatkozó egyes feladatok megoldását ismerteti BLAND [6], CHRISTENSEN [9], GROSS [23], LEE [34], [35], akik közül a Laplace-transzformáció lehetőségeivel legrészletesebben talán GROSS, az általános korrespondenciaelvvel pedig LEE foglalkozik. Az utóbbi szerző második idézett munkájában gyakorlati eljárások is találhatóak a feltételezett lineáris viselkedés ellenőrzésére. A térbeli feszültségállapotra vonatkozó anyagtörvényt egyéni módon építi fel FINNIE és HELLER, abból a feltevésből kiindulva, hogy az anyag összenyomhatatlan, továbbá, hogy a főcsúszási sebességek és a főnyírófeszültségek közös irányúak és arányosak [18]. NOWACKI a fő figyelmet nem annyira az anyagtörvényekre, mint inkább a klasszikus rugalmasságtani feladatok kiterjesztésére fordítja és analitikus módszerekkel elemzi a hőmérséklet hatását lineáris kontinuumfeladatokon [41]. ARUTYUNJÁN a lineáris feladatokat időfüggő tulajdonságú rugókból és dugattyúkból álló modellekkel, ennek megfelelően változó együtthatójú differenciálegyenletekkel, illetve integrálegyenletekkel írja le, a nemlineárisakat ezekből kiindulva, a perturbáció-számítás segítségével oldja meg [3]. Egyebek között a vékonyfalú csavart rudakkal és a belső nyomás alatt álló kompozit csövekkel is foglalkozik. RABOTNOV párhuzamosan tárgyalja a lassú alakváltozást és a képlékenységet [47].

A rúdszerkezetekkel foglalkozó szerzők közül itt hivatkozunk ROZINRA is, aki ugyan nem viszkoelaszticitástannal foglalkozik, de tárgyalási módszereiből mégis sokat lehet meríteni. Ő ugyanis mátrixos tárgyalásban dolgozza fel a rugalmasságtan variációs elveit és az elasztodinamika variációs tételeinek felírására konvolúciós integrálokat is alkalmaz [48].

Végül az együttműködő szerkezetek kutatásai kapcsán SATTLER munkásságáról kell szólni [50], továbbá arról a jelentéséről, amely a határozott és az egyszerűen határozatlan tartókon lezajlott folyamatokat igyekszik a kísérleti alapon elfogadhatónak minősített anyagjellemző-képletek segítségével áttekinteni.

3. Részletkérdések áttekintése külföldi folyóiratcikkek alapján

Az általános tájékozódás nyomán körvonalazódtak azok a problémák, amelyeket jelenleg a viszkoelasztikus anyagú rúdszerkezetek állapotváltozásának numerikus úton történő vizsgálata felvet. Néhány alapvető kérdés részben mégis tisztázatlan maradt. Ezeket nyolc csoportba osztottuk és folyóiratokban kerestünk rájuk választ.

a) Az első kérdés arra vonatkozott, hogy vannak-e egyáltalán olyan anyagok, amelyekről a mérés technika mai fokán igazolni lehet, hogy a viselkedésük lineárisan viszkoelasztikus, és mi az anyag törvény azonosításának korszerű alapelve. Számítási eljárásokat ugyanis nyilván csak olyan feltevésekre lehet alapozni, amelyek a valódi anyagoknak legalább egy része esetében, vagy legalább meghatározott körülmények között teljesülnek.

b) A következő kérdés az, hogy ha a lineáris anyagmodell reális, akkor mi az érvényességi feltétele és melyek az érvényességi korlátai a viszkoelaszticitástan általános korrespondencia-elvének, amely a lineárisan viszkoelasztikus anyagú szerkezetek és közegek vizsgálatának leginkább hatékony módszerét alapozza meg?

c) Hogyan szólnak ezen felül azok a — viszkoelasztikus kontinuumokra vonatkozó — variációs elvek, amelyek megfelelőit rúdszerkezetek vizsgálatára is eredményesen alkalmazhatjuk?

d) A viszkoelasztikus tartószerkezetek számítási problémakörének egyik legjellemzőbb és a gyakorlat számára is fontos kérdése az, hogyan rendeződnek át pillanatról pillanatra a heterogén, több különböző tulajdonságú szerkezeti elemről, vagy több rétegből álló tartók igénybevételei. Ahhoz, hogy vizsgálatunk céljára realizáljuk, tehát a lényeges sajátosságokat mutató, de mégsem túl bonyolult szerkezeti modellt tudjunk összeállítani, szükséges volt feltárni az ideálisan rugalmas, de nem viszkózus anyagú összetett tartó modellválasztási lehetőségeit.

e) Számítási módszert keresve a viszkoelasztikus rúdszerkezetek vizsgálatára, ki kell derítenünk, hogyan bonyolítja az anyag törvény megválasztása az egyetlen rúdból álló szerkezet — mint rúdszerkezeti elem — szilárdságtani számítását, feltéve, hogy ezzel az építőmérnöki gyakorlat szokásos keretei között akarunk maradni.

f) Mit mond az újabb építőmérnöki szakirodalom a sokszorosan határozatlan viszkoelasztikus rúdszerkezetek számításáról és milyen kísérleteket tesz a nagy elmozdulások figyelembevételére?

g) Lehet-e viszkoelasztikus rúdszerkezetek állapotváltozási vizsgálatokor a közegek esetében már bevált numerikus módszerekre, különösen a véges elemek módszerére támaszkodni? Hogyan elemzi a módszer az időben lejátszódó folyamatot?

h) Végül milyen elvi és gyakorlati bonyodalmakat jelent, ha a rúdszerkezeten a hőmérsékletváltozási hatást nem egyszerűen kinematikai teherként veszik figyelembe, hanem termodinamikailag megalapozott anyagtörvényeket is alkalmaznak?

A válasszal kapcsolatban összesen 30 dolgozatra utalunk.

a) Már a régebbi kutatók is találtak a betonon kívül más, lineárisan viszkoelasztikus viselkedésű műanyagokat (pl. Ross fenol-műanyagokat, idézi LEVI [36]), újabban pedig DI STEFANO igazolta fizikai laboratóriumában végzett gondos kísérletek sorozatával, hogy a fenolformaldehid az állandó értékben tartott szobahőmérsékleten valóban lineárisan viszkoelasztikus [10]. Összetett terhelési és tehermentesítési kísérletei nemcsak azt támasztották alá, hogy az állandó feszültség mellett lezajló kúszás a feszültséggel arányos alakváltozással jár, de azt is, hogy a szuperpozíció tetszés szerinti terhelési történet esetében érvényes. DI STEFANO úgy találta, hogy a vizsgált műanyag instantán rugalmas alakváltozása a lassú alakváltozáshoz képest igen jelentős. Idézett cikkében az időinvariáns jellegű, viszkoelasztikus ágyazású gerenda számításával is foglalkozik, de csak elvi síkon. Egyik későbbi dolgozatában nagyvonalú módszert dolgozott ki a kísérleti adatok alapján végrehajtott azonosítási eljárás végrehajtására, s azt lineárisan viszkoelasztikus műanyagokra alkalmazta, ilyen módon teljessé téve előző kutatásait [11]. Módszerének alapgondolata az, hogy kísérleti úton bizonyos számú, egymással összetartozó feszültségi és alakváltozási történetet állapít meg (az egyiket vezérli, a másikat eredményül kapja) ezen kívül egy állandó nyúlás esetére vonatkozó relaxációs függvényt is megállapít. Célja ezek alapján az anyagtörvény differenciálegyenletében szereplő együtthatóknak és a kezdeti értékeknek meghatározása. Ennek érdekében először átmenetileg helyesnek fogadja el az összetartó függvénpárok közül a nyúlási folyamatfüggvényeket, majd ezekből a megállapított relaxációs függvény segítségével feszültségfolyamat-függvényeket rekonstruál a Boltzmann—Volterra integrálegyenletekből. Ebben a relaxációs függvény paraméterei is szerepelnek. Az eredményt az anyagtörvény lineáris differenciálegyenletébe helyettesítve, az ott szereplő állandók és a kezdeti értékek meg az iménti paraméterek közti kapcsolat előállítható. Azután mindegyik kísérlet-párja nyomán összehasonlítja a kiindulási feszültségtörténetet a számítás nyomán kapottal és az állandókat abból a követelményből számítja ki, hogy egy előírt T időtartamon belül a súlyozott hibaintegrálok négyzet-

összege minimális legyen. Az így adódó nemlineáris optimumfeladatot a Newton—Raphson-módszer függvénytérbeli általánosításával oldja meg. Az eljárást arra az esetre is kiterjeszti, amikor a mérések ún. zajjal járnak és ennek hatását a pontosság érdekében ki kell küszöbölni.

Ez a korszerű azonosítási technika biztosítja, hogy az anyagállandók szabatosága azonos szintű legyen, és hogy megállapításuk pontossága összhangban legyen az állapotváltozási vizsgálatokban alkalmazott számításokéval, egyben újólag igazolja azt is, hogy a vizsgált műanyagok lineárisan viszkoelasztikusnak tekinthetők.

b) A lineárisan viszkoelasztikus anyagú szerkezetek számítását, az általános korrespondencia-elv segítségével, megfelelő feltételek között ideálisan rugalmas szerkezetekére lehet visszavezetni. Ezt a lehetőséget már RAYLEIGH is felismerte (idézi FINNIE [17]) és azóta számos más szerző is foglalkozott vele (pl. BIOT [4], GROSS [22], GURTIN és STERNBERG [24], WEBBER [60]).

Az elv azokban az esetekben alkalmazható, amikor az anyagtvörvény Laplace-transzformációval a Hooke-törvénynek egy olyan fiktív alakjára lehet visszavezetni, amelyben az anyagállandók helyett az idő transzformáltjának megfelelő függvényei szerepelnek. Ezen kívül még az is szükséges, hogy a vizsgált rendszer peremén a peremfeltétel időbeli változása minden pillanatban ismert legyen és magának a peremnek az elrendezése sem változhatik a folyamat során. Így a vizsgálatból az elváási feladatokat is ki kell zárunk.

Újabbán GRAHAM és SABIN adta meg a korrespondencia-elvnek egy változatát, amely az inverz Laplace-transzformációnak egy alternatív formáján alapul. Ez olyan testekre érvényes, amelyek pereme a folyamat során nem mindig azonos kényszerhez illeszkedik, vagy előfordulhat velük, hogy egy részük a folyamat alkalmával megsemmisül, esetleg elég. A korrespondencia-elv továbbfejlesztett változata például akkor érdekes, ha a vizsgált test széle a hőhatástól megolvad [21]. Kérdéses, hogy ilyen körülmények között maga a lineáris viszkoelaszticitás érvényes-e?

c) A mechanika variációs elveinek legkorszerűbb értelmezése a funkcionál-analízisen alapul. Ennek felhasználásával ki lehet mutatni, hogy a potenciális energia állandóértékűségének tételét, amely például a véges elemek módszerében, a numerikus alkalmazások szempontjából döntő jelentőségű, úgy lehet a lineáris viszkoelaszticitásban alkalmazni, hogy az anyagnak az általános Hooke-törvényben szereplő merevségi operátora helyére a Boltzmann—Volterra-integrálegyenletben szereplő operátort kell tenni és a függvény-rendszerek skalár szorzatát azok konvolúciós integráljaival kell felváltani. Az igazolást MENDITTO egyik dolgozatában találjuk meg [40], aki áttekintve a funkcionál-analízisnek a lineáris operátorral és a derivált operátorral kapcsolatos alapfogalmait, valamint a bilineáris alakokat és az operátorok szimmetriakövetelményeit, TONTI nyomán megmutatja, hogy a lineáris kezdeti — kerületérték — feladat operátor egyenletéhez tartozó variációs tételt okvetlenül

a potenciális energia-állandóértékűségi tétele egy formális általánosításaként lehet felírni, ha a skalárszorzatot megfelelő általánossággal értelmezzük, maga az operátor pedig a kiszemelt skalárszorzat-definíció alkalmazása nyomán a funkcionál-analízis értelmében szimmetrikus. Ez után a rugalmasságtan Cauchy-féle differenciálegyenletének operátorából, a kis alakváltozásokat definiáló, ezzel adjungált de Saint—Venant-operátorból és a viszkoelaszticitás-tan említett integrál-anyagtörvényéből összeállítja a rugalmasságtan elmozdulásmódszere általánosításának megfelelő operátort. Általánosított skalárszorzatként a konvolúciós integrált választja ki, ellenőrzi a szimmetriakövetelményeket, végül a konvolúciós kifejezéseket részletezve felírja a tétel indexes alakját kontinuumok esetében. OLSZAK és PERZYNA [43] a funkcionál-analízis helyett a klasszikus analitikai mechanikában használatos elemzési módot alkalmazta, mégis az iméntieknél messzebbre jutottak. Tételeiket BIOT [5] gondolatai alapján úgy vezetik le, illetve úgy szövegezik meg, hogy azok az anyagtörvény mindkét fő reprezentációja, tehát nemcsak az integrálegyenletek, de a differenciálegyenletek alkalmazása esetében is érvényesek, és — elvi megfogalmazásban — közös alakúak legyenek. Első tételük a potenciális energia minimum-tételének, a második pedig a kiegészítő munka minimum-tételének analógja, tetszés szerinti, anizotróp viszkoelasztikus anyagú kontinuumok esetében. Mindkét tétel érvényességét kiterjesztik arra az esetre is, ha a közegben hőmérsékletváltozási nyúlás is van. A testet a hőtágulási együtthatók szempontjából szintén anizotrópnek tekintik, de különben ezek az együtthatók állandók és a hőmérsékletváltozás egyéb formában nem befolyásolja az anyagtörvényt sem. Megmutatják, hogy ilyen körülmények között a hőmérsékletváltozás hatása mindkét szélsőértéktételben felér egy-egy olyan feszültség jelenlétével, amely a rugalmas testen a hőtágulási nyúlásnak megfelelő alakváltozást okozhatna.

A MENDITTO által közölt tételt BRILLA a Laplace-transzformáció alkalmazásával írta fel, anizotróp lemezek vizsgálata során [7]. Igazolta a variációs elv szerint kapható megoldás létezését és egyértelműségét és megmutatta, hogy a véges elemek módszerének alkalmazása a lemez csomóponti elmozdulásainak folyamatfüggvényeire nézve egy közönséges differenciálegyenlet-rendszert szolgáltat.

d) A rugalmas viselkedésű anyagrétegekből összetett, illetve az együttdolgozó tartók számításának általánosan elterjedt alapfeltevése, hogy hajlításkor a sík keresztmetszetek síkok maradnak, és hogy az egymás feletti rétegek nem csúsznak el egymáson. Ez a feltevés lehetővé teszi ideális helyettesítő keresztmetszetek, illetve ideális merevségi jellemzők alkalmazását. Ha a rétegek elcsúszhatnak egymáson, a tartó annyira gyenge, hogy az ilyenfajta kialakítás gazdaságtalan, ezt tehát nem alkalmazzák. Előfordulhat azonban az, hogy az egymás feletti rétegeket vagy az együttdolgozó tartókat nem a teljes csatlakozási vonalon, vagy nem sűrűn, hanem csak aránylag ritkábban kap-

csolják össze. Ebben az esetben a tartót alkotó rúd modellje egymás feletti homogén elemekből és ezeket összekötő, kiterjedés nélküli, de rugalmas tulajdonságokkal rendelkező kapcsolószerekből áll. Az ilyen szerkezetek számítását STRÜSSI dolgozta ki, a vizsgálatot erőmódszerrel végezve [53]. Tekintve, hogy a redundánsok a kéttámaszú, de belsőleg sokszorosán határozatlan tartón egyenletes távolságokban helyezkedtek el, célszerűnek találta ezek transzformációját, majd a differenciamódszer egyénileg értelmezett változatának alkalmazását. Megállapította, hogy amennyiben a kapcsolószerek nincsenek egymáshoz közel és ezen kívül a rétegek irányítára merőleges erőket is közvetítenek, az erőjáték jelentősen is eltérhet a szokásos számítás szerintitől. Ez a modell lényegesen bonyolultabb a hagyományosnál, azonkívül az eredményt a kapcsolószerek merevségének ingadozása is befolyásolja. Alkalmazása helyett célszerűbbnek tartjuk, ha a hagyományos modell kialakítási feltételeit elegendő sűrűséggel elhelyezett kapcsolatok révén biztosítják.

e) A statikailag határozott, homogén, nemlineárisan viszkoelasztikus anyagú hajlított tartó kúszási és relaxációs vizsgálatát, amely az iménti problémával együtt az áttekintésnek mintegy két határpontját jelölte ki, STRÜSSIVEL körülbelül egyidőben POPOV hajtotta végre [46]. Az elemi szilárdságtan szokásos feltevései mellett olyan kúszástörvényt alkalmazott, amelyben a nyúlás a feszültségnek hatványfüggvénye vagy hiperbolikus függvénye. Az állapotváltozási folyamatfüggvényeket numerikusan határozta meg úgy, hogy az időt rövid közökre osztotta és lépésről lépésre újabb adatokat vett figyelembe. Így a görbület és a nyomaték összefüggését az időnek, mint paraméternek segítségével kereste meg.

Eljárását nem nehéz sem az ODQVIST által összegyűjtött egyéb hasonló anyag törvényekre [42] általánosítani, sem számítógéppel végrehajtani, de olyan rúdszerkezetekre való kiterjesztése, amelynek rúdjai az igénybevétel a tengely mentén változó, illetve a rudak rétegezettek vagy több együttdolgozó elemből állnak és a keresztmetszetük nem kétszeresen szimmetrikus, már géppel is nagyon munkaigényes.

f) Az iménti két pontban felsoroltak alapján nyilvánvaló, hogy összetett rúdszerkezetek esetében akkor van reális kilátás az állapotváltozási vizsgálatnak szerényebb keretek között történő végrehajtására, ha az anyagot lineárisan viszkoelasztikus és időinvariáns tulajdonságúnak tekintjük. LEVI korai kísérlete [37] után e kérdés rendszeres elemzését EIMERNÉL találjuk meg. Vizsgálatainak tárgya általánosságban a belsőleg és külsőleg egyaránt statikailag határozatlan előfeszített vasbeton rúdszerkezetek számítása [12], különösképpen pedig az időinvariáns anyagú kétszuklós, előfeszített keret [13]. EIMER elfogadja az elemi szilárdságtan szokásos feltevéseit, a zsugorodási alakváltozást a kúszással affinnak tételezi fel, az anyag törvényt pedig integrálegyenlettel jellemzi. Feladatának első részéül a rúd-elem hajlékonysági összefüggéseinek tisztázását választja. LEVITŐL eltérően a hajlítónyomatékon kívül

figyelembe veszi a normálerő hatását is és egy olyan, kétismeretlenes integrálegyenletrendszer kap a relatív elmozdulások és az igénybevételi komponensek összefüggésére nézve, amely általában nem bomlik szét két független integrálegyenletre. Második feladatrészként a külső határozatlanság megoldásával foglalkozik, ennek során az erőmódszert alkalmazza. A két feladatrész valójában összefonódik, hiszen az elsőben szereplő igénybevételi komponensek nem eleve adottak, hanem a redundánsoktól függenek, a másodikban pedig az egység-, és a terhelési tényezők a rúd-elemek viselkedésétől függenek. Ez utóbbi feladatrész magában is egy integrálegyenletrendszer.

Az eljárást redukált fölös ismeretlenek alkalmazásával elvileg mégis a két részfeladat végrehajtásának célszerű egymásutánjára lehet bontani úgy, hogy először a külső, azután a belső határozatlansággal foglalkoznak. A [12] dolgozat egyáltalán nem tartalmaz ténylegesen megoldott példát, ellenben néhány egyszerűsítési javaslatot, illetve speciális esetet tárgyal. Ilyen például az acélkeresztmetszeteknek pontba koncentrációja, a keresztmetszetek hajlítása normálerő nélkül stb. A [13] munka egy olyan kerettel foglalkozik, amelynek oszlopaiban a feszítőacélok egyenes vezetésűek, a gerendán ellenben görbültek. Az utóbbiakat a számítás során szakaszonként egyenes vezetésűekkel közelítik meg, ami felér azzal, mint hogyha a tartó különböző anyagú szakaszokból volna összeállítva. A betont standard anyagúnak tételezi fel és a csatlakozási egyenletet Laplace-transzformációval oldja meg. Ennek során a megoldás transzformáltjának nevezőjébe először nem közvetlenül az idő transzformáltjának, de a magfüggvény transzformáltjának másodfokú polinomja kerül bele, ezt bontja fel gyöktényező alakra.

Ha a gerendát nem szakaszokra osztják fel, a transzformáció megfordítása nehézségbe ütközik. Ezek elhárítása érdekében az egységtényezőt egy állandó és egy változó tag összegére lehet bontani, majd a megoldás azonosan átalakítható és sorbafejthető. A sort egy szeletével megközelítve olyan kifejezést kaphatunk, amit az eredetnél jóval egyszerűbb visszatranszformálni és a numerikus munka némileg függetleníthető a szakaszok számától.

Nagy elmozdulások esetén a számítást a geometriai eredetű nemlinearitás is bonyolítja. HUSIAR és SWITKA [25] egy háromparaméteres anyag rúdlánc alakjának meghatározása során úgy alkalmazza a Laplace-transzformációt, hogy a folyamat idejét rövid szakaszokra osztja és a nyúlások differenciálegyenletét egy-egy intervallumon belül ennek a transzformációnak a segítségével oldja meg. Az alak meghatározásának határértékfeladatát szellemes módon kezdeti értékfeladattal helyettesítik, amelyben azután az ismeretlen első rúderőt kicserélik az ismert végponti koordinátákra. Így az állapotváltozási egyenletek levezetése meglehetősen egyszerű, viszont egy-egy számítási menetben nemlineáris egyenletrendszerek megoldására kerül sor.

g) A lengyel kutatók eredményei arra mutatnak, hogy a véges, de sok szabadságfokú szerkezetek vizsgálatakor a teljesen numerikus módszerek

alkalmazása célszerűbb lehet az analitikus megfontolásokon alapulóknál. A Laplace-transzformációt tehát nem okvetlenül maguknak az állapotváltozóknak a transzformálására kell felhasználni, hanem esetleg a folyamat lépésenkénti vizsgálatát kell vele megkönnyíteni, vagy más, a transzformáción alapuló sorfejtéses megoldások is szóba jöhetnek. Szabálytalan elrendezésű, változó merevségű, vagy szabálytalan terhelésű tartókon, illetve kontinuumokon az ilyen terjedelmesebb numerikus munka együtt jár a véges elemek módszerének alkalmazásával, kézenfekvő tehát, hogy ennek irodalmába is bepillantottunk.

Az első jelentősebb tájékoztatást ZIENKIEWICZTől és szerzőtársaitól kapjuk [61], akik szerint az integrálegyenlettel reprezentált anyagtvörvény a gépi számításban nehézségeket okoz, mert a folyamatok előzményadatainak tárolása sok helyet foglal el és a kezelésük is lassú. E helyett célszerűbbnek látják, hogy az anyagtvörvény differenciálegyenletéből induljanak ki és a folyamatokat kellően csekély időközök segítségével, lépésenként vizsgálva, mégis minden pillanatban a teljes feszültséget, illetve alakváltozást kapják meg.

Dolgozatunkban alagútfalazatok és reaktortartályok viselkedésével foglalkoznak. A beton anyagának lassú alakváltozását a Kelvin-láncolattal írják le, az alakváltozás növekményét pedig ők sem egyszerű differenciahányadossal, hanem a kúszás differenciálegyenletének megoldásával állítják elő. Egyben feltételezik, hogy a feszültséget egy-egy Δt intervallumban állandónak lehet tekinteni. Így végeredményben a változó feszültség hatását ők is úgy veszik figyelembe, hogy a kúszási engedékenységgfüggvényt lépcsőkben alkalmazzák.

Numerikus eljárásuk, amelynek megfontolásai általában is jellemzőek a Zienkiewicz-féle iskolára, három lépésből áll, ezek közül az első egy előkészület, a másik kettőt — időléptetéssel ciklikusan kell ismételni az előírt befejező pillanatig. Az első lépés egy instantán rugalmas megoldás a kezdeti teherlépcső alapján. Ebből a teherből elmozdulások, igénybevételek és alakváltozások keletkeznek. A második lépésben a feszültségekből a fentebb említett módon kiszámítják az első időközben bekövetkező kúszási alakváltozást, majd a harmadik lépésben ezt kinematikai tehernek tekintik, a külső erőket a következő időszaknak megfelelő teherlépcsővel fokozzák, a rugalmas megoldást pedig megismélik.

Ebbe az iterációba az anyag öregedésének és a hőmérsékletváltozásoknak a hatása is beépíthető, sőt a rugalmas merevségi mátrix módosításával a tartály belső rétegének kiégését is szimulálni lehet, a GRAHAM és SABIN által kidolgozottnál jóval egyszerűbb módon.

Kelvin-féle modell helyett Maxwell-rendszerűt találunk MALONE és CONNOR egy későbbi cikkében [39], akik az anyagtvörvény differenciálegyenletét a Maxwell-féle sorbakapcsolt rugó-dugattyúelem differenciálegyenletének megoldásából kiindulva írják fel és a léptetésnél egy bonyolultabb differenciasémát alkalmaznak. Módszerüket elasztodinamikai feladatokra is kiterjesztik, de egy völgyzárógát számításának példáján is illusztrálják.

Hasonlóképpen Maxwell-rendszerrel modellezi az anyagot TAYLOR, PISTER és GOODREAU [58]. Számítástechnikai szempontból az a már ZIENKIEWICZ által is hangoztatott kívánalom vezérli őket, hogy a gépben ne kelljen a folyamat egész adattömegét tárolni. Ezért az anyagmodell relaxációs függvényéből kiindulva és az elmozdulást a Δt időszakaszban lineárisan változónak tekintve, az anyagtörvény integrálegyenletéből egy olyan formulát vezetnek le, amely megadja egyfelől az eltolódáskülönbséget, ha a pillanatnyi teher és a már éppen kialakult eltolódás ismeretes, másrészt az ehhez szükséges számítási munkát nem attól teszi függővé, hogy előzetesen hány időpontot vizsgáltunk már meg, de attól, hogy a relaxációs spektrumot hány adattal közelítettük meg.

Említésre méltók még KAWAHARA, illetve HORII kutatásai is [28], [29], [30]. Ez az irányzat ugyancsak differenciasémákkal dolgozik, e tekintetben tehát kevés újat mond az előzőekhez képest, viszont a viszkoelasztikus tárcsának a mozaikmódszerrel végrehajtott vizsgálatát nagy alakváltozások figyelembevételével eszközli. Az egyensúlyi feltételeket pillanatról pillanatra az elmozdult, megváltozott konfigurációjú testen elégti ki, ezek folytán az elmozdulásmódszer egyenletrendszere még egy-egy időszakasz — lépésben is harmadfokú. A [29] munka abban a tekintetben is különbözik a többitől, hogy a térbeli feszültségállapotra vonatkozó anyagtörvénye realiztikusabb, ugyanis az alakváltozás „gömbi” részét rugalmasnak, a „deviátoros” részét pedig standard elasztoviszkozusnak tekinti. Az elsőrendű elmélettel való eltérés vonatkozásában és ennek kapcsán a Newton—Raphson-módszer alkalmazásában a dolgozat a [25] tanulmánnyal is rokonvonásokat mutat, de haladottabb annál.

Meg kell említeni, hogy az alkalmazott anyagtörvények *nagy* alakváltozás esetén elméletileg nem kifogástalanok, harmadlagos kúszásra meg különösen kétséges a helyességük, mindazonáltal az eljárás mégis ad némi információt a harmadlagos kúszásra.

Erre a forrásmunkára mégegyszer visszatérünk.

Az állapot-történet nyomonkövetésének egészen másik útján jár BRILLA, aki a viszkoelasztikus lemezekre vonatkozó vizsgálataiban nem lépésenkénti számítást végez, hanem az általános korrespondencia-tétel alkalmazásával előállítja a lehajlási folyamatfüggvény transzformáltját. Ezután a folyamatfüggvények megközelítésére a teljes vizsgálati tartományban Dirichlet-féle exponenciális sor alkalmazását javasolja [8]. A tartós állapot jellemzőit egy mozaikmódszerrel végrehajtott számítással keresi meg, majd magukat a közelítő függvényeket a végértékből kiindulva írja fel. Az exponenciális sor ismeretlen együtthatóit a legkisebb négyzetek elve alapján határozza meg. A hibák négyzetösszegét a teljes fizikai időtartományban minimalizálva, az $e^{-\alpha t}$ alakú bázisfüggvények használatával a lemez közelítő lehajlási folyamatfüggvényének Laplace-transzformáltjára jutunk. Ez olyan összeg alakjában áll elő, amelyet könnyű exponenciális sorra visszatranszformálni.

Az együtthatók tényleges kiszámítása azt követeli meg, hogy a folyamatfüggvény transzformáltjának helyettesítési értékét az s -tartománynak annyi pontjában ismerjük, ahány tagja van az exponenciális sornak. Ugyanis a feltételi egyenletrendszer lényegében azt fejezi ki, hogy a közelítő függvény transzformáltjának értékei pontonként egyeznek a valódi folyamatfüggvény transzformáltjának értékeivel.

Hasonló eljárást követ SHAPERY is, azonban a kiinduló megoldásokat analitikus úton keresi meg [52].

ADEY és BREBBIA ugyancsak egyszerre foglalkoznak a teljes vizsgálati tartománnyal, a belső nyomás és hőmérsékletváltozás hatásának kitett vasbeton reaktortartályok számításánál [1]. Ők már magának az anyagnak a relaxációs függvényét is úgy határozzák meg, hogy kísérleti úton ernyedési görbéket állítanak elő, majd ezeket exponenciális sorokkal közelítik meg, az állandókat a legkisebb négyzetek módszerével keresve. Közben az instantán alakváltozást is figyelembe veszik. Az így kapott ernyedésfüggvény széles, de nem végtelen ernyedési spektrumnak felel meg.

A problémát ők is úgy vezetnek vissza rugalmas alapon elvégzett számítások sorozatára, hogy feladatukon — aktuálisan a mozaik-elmozdulásmódszer egyenletein — Laplace-transzformációkat végeznek. Ez után a transzformáció s -paraméterét, amelytől az így kapott fiktív rugalmas megoldás függ, megfelelő értékek sorozatos felvételével rögzítik. Megoldják az egyenletrendszert, így s -nek mindegyik kiválasztott értékéhez megkapják az elmozdulásvektor (és az igénybevételi vektor) transzformáltjának rögzített számértékét. Egy-egy ponton, illetve véges elemen előáll tehát a megfelelő állapotváltozó folyamatfüggvénye transzformáltjának véges számú helyettesítési értéke. Most feltételezik, hogy az egyes folyamatfüggvények exponenciális sorba fejthetők, így transzformáltjaikat — kellő számú ismeretlen állandó erejéig — fel lehet írni. Végül az ismeretlen állandókat abból a feltételből határozzák meg, hogy a közelítő transzformált folyamatfüggvények illeszkedjenek a kiszámított értékekhez.

A most említett szerzők tehát mind egyaránt a Dirichlet-féle sort alkalmazzák. E sor elemei, mint bázisfüggvények, teljes, de nem ortogonális függvényrendszert képeznek. Együtthatóikat a legkisebb négyzetek elve, illetve a pontonkénti kollokáció elve alapján egyaránt meg lehet határozni és a kétféleképpen kapott feltételi egyenletrendszer törvényszerűen azonos, de mivel a bázis nem ortogonális, a számítás nem vezet diagonális együttható-mátrixú feltételi egyenletrendszerre.

Az eljárás az elmozdulásmódszer mátrixegyenletének sorozatos megoldását kívánja meg, méghozzá úgy, hogy közben az együttható mátrix is változik. Az angol szerzők a megoldásra nézve [61]-tel egybehangzóan azt javasolják, hogy az első ciklus direkt eliminációval, a többi pedig a Gauss—Seidel-féle iterációval történjék, ilyenkor ugyanis egy-egy lépésben kiindulás-

ként az előző lépésben kapott megoldást lehet elfogadni. A módszer előnye, hogy nem kívánja meg a folyamat teljes történetének tárolását és esetenként kevés „rugalmas” megoldással is célra vezethet. Hátránya, hogy az együtt-ható-mátrixot újra meg újra össze kell állítani és hogy ez a mátrix helyenként rosszul kondicionált. Mivel pedig a Laplace-transzformáció a t időpillanat kis értékeihez s -nek nagy értékeit rendeli hozzá, az eljárás a folyamat kezdetén különösen munkai igényes.

h) Az előző pontban említett dolgozatok (nem beszélve OLSZAK és PERZYNA még hamarabb idézett cikkéről) többé-kevésbé a hőmérsékletváltozással is kapcsolatosak. Közülük újra hivatkozunk KAWAHARÁRA [29], aki a lineáris viszkoelaszticitástan általános anyagtörvényét FUNCHOZ és másokhoz hasonlóan termodinamikai alapon, a teljes energiamérlegből vezette le. A többi idevágó kutatás közül kettővel foglalkozunk, ezek különböző módszerekkel ugyan, de azonos célkitűzést képviselnek. TAYLOR és munkatársai a már hivatkozott dolgozatukban a hőhatásnak kitett szerkezeti anyagot lineárisan elasztovizskózusnak, nem öregedőnek és „termoreológiailag egyszerűnek” tételezték fel. Az utóbbi azt jelenti, hogy az egyes pontokban fellépő feszültség nemcsak az ottani alakváltozási gradienstől, meg ennek történetétől függ (mint az egyszerű anyagnál általában), hanem a hőmérséklettől és ennek változási folyamatától is. Ez az összefüggés olyan, hogy a hőmérsékletváltozási folyamat hatását az integrálegyenletek magfüggvényében egy-egy redukált, fiktív idővel lehet figyelembe venni. A fiktív idő a hőmérséklet változásának és a valóságban eltelt időnek kísérletileg meghatározott szeparálható függvénye. Bonyolultabb esetekben még azt is figyelembe veszik, hogy magát a hőmérsékletváltozást is egy időben lezajló, tranziens folyamat hozza létre.

A hőmérsékletváltozás másik vonatkozása az anyagtörvényben az, hogy a névleges nyúlásból a hőhatás által okozottat le kell vonnunk. Ha a hőmérsékletváltozás jelentős, akkor a folyamat során a hőtágulási együtthatót nem állandó, hanem a hőmérsékletváltozási gradienstől függő mennyiségnek kell tekinteni.

A svédek, akik a kanadai kutatókkal szemben nem reaktortartályokkal, hanem a tűzvész hatásának kitett acélszerkezetű keretekkel foglalkoztak, fenti megfontolásokat kísérleti úton kapott gyakorlati képletekkel egészítették ki és kéttámaszú tartókon alkalmazták [59]. THOR a hőmérsékletváltozás okozta kúszást nemlineáris összefüggésekkel jellemezte oly módon, hogy a fiktív idő függött ugyan a hőmérsékletváltozástól, de a másodlagos kúszás sebessége nem függött a fiktív időtől. A kúszási képletben előforduló termodinamikai állandót THOR két különböző, izoterm körülmények között elvégzett kúszási kísérlet alapján határozta meg.

A tartó elmozdulásának megállapításakor figyelembe vette a gerenda képlékeny alakváltozását is és az állapotvizsgálatra a húrmódszer egy változatát javasolta, amelyet többtámaszú tartóra is ki lehet dolgozni.

A magas hőmérséklet hatása végeredményben alaposan bonyolítja a számításokat, különösen akkor, ha meggondoljuk, hogy a hőterjedés során a hőmérsékleti mező az időben is változó ismeretlen, sőt előfordulhat, hogy a hővezetési együttható is függvénye mind a helynek, mind a hőmérsékletnek. Szerencsére az ilyen fajta feladat az építőmérnöki gyakorlatban aránylag ritka.

A külföldi irodalmat átvizsgálva megállapíthatjuk, hogy a viszkoelasztikus rúdszerkezeteknek a mátrix-módszereken alapuló számítása aránylag nyitott terület, a fellelhető munkák ugyanis többnyire egyszerű elrendezésű vasbetonszerkezetekre vonatkoznak és nem általános jellegűek [13]. Az összetett szerkezetekről szóló vizsgálatok vagy homogén anyagra érvényesek [25], vagy még a számítógépnek is tetemes munkát jelentenek [61], vagy takarékosak ugyan, de a matematikai alapjuk nem teljesen kiforrott [1].

4. A magyar szakirodalom

A viszkoelasztikus rúdszerkezetekkel kapcsolatos magyar építőmérnöki szakirodalmat három témakörre oszthatjuk fel. Az első a rudaknak, mint szerkezeti elemeknek, illetve a belőlük kialakított egyszerű szerkezeteknek viszkoelasztikus viselkedésével foglalkozik, az anyag törvény megválasztása, továbbá az igénybevételek és az elmozdulások meghatározása szempontjából. A második a viszkozitás és a képlékenység kapcsolatáról szól, a harmadik pedig az ideálisan rugalmas, viszont sokszorosan határozatlan rúdszerkezetek állapotváltozási vizsgálatának numerikus úton történő lebonyolítására vonatkozik.

A szerkezeti mechanika magyar kutatói közül a viszkoelaszticitásból eredő lassú alakváltozás vizsgálatával legrégebben PALOTÁS két dolgozata foglalkozott. A második, összefoglaló jellegű tanulmányban, amely a kérdés addigi irodalmának jelentős képviselőire is támaszkodott, feldolgozta a vasbetonoszlopok és vasbeton ívtartók erőjátékára vonatkozó korszerű ismereteket.

Egyszerűen elvégezhető számítási eljárások kidolgozása és a hídépítési gyakorlat által igazolt mérési adatok alkalmazása nyomán általános következtetéseket tett a szerkezet belső erőinek megoszlására és megváltozására. A biztonság alakulására nézve megállapította, hogy a tartós alakváltozások következtében a nyomott acélbetétekben fokozódik, a betonban pedig csökken a nyomás, továbbá, hogy a támaszerők megváltozása a statikailag határozatlan szerkezetekben kedvező [45].

KOLLÁR és KÉKEDY első dolgozata ugyancsak ismertette az időben változó rugalmassági modulust, amely a kúszási többletalakváltozást jellemző kúszásfüggvény alkalmazásán alapul. A kúszásfüggvényt exponenciálisnak

választva lényegében ők is azt tételezik fel, hogy a beton viselkedését a Poynting—Thomson-féle anyagmodell jellemzi. Általánosságban tárgyalják COLONETTINEK a kinematikai teherre vonatkozó tételeit, makd kitérnek arra a speciális esetre is, amikor a teher kúszással, vagy ernyedéssel kapcsolatos (a viszkoelaszticitástan korrespondencia-tételei). Levezetik a kényszerített elmozdulásból keletkező feszültségek, illetve lassú alakváltozás miatt csökkent zsugorodási feszültségek folyamatfüggvényét és foglalkoznak a hőmérsékletingadozás hatásával is [32]. Az említett szerzők második dolgozata gyakorlati eljárásokat ismertet az együttdolgozó szerkezetek számítására, ugyancsak a lassú alakváltozás és a zsugorodás figyelembevételével. Csakis külsőleg határozott tartókkal foglalkoznak. A pályalemez és az acéltartó igénybevételeinek meghatározására szolgáló Fröhlich-féle differenciálegyenletek helyett a Walter-, a Fritz- és a Sontag-féle egyszerűsített számításokat hozzák javaslatba, a lemez hajlítási merevségének elhanyagolásával, célszerűen megválasztott értékű fiktív rugalmassági modulus alkalmazásával, illetve a beton helyett az acélra redukált keresztmetszet bevezetésével [33]. KOLLÁR végül a II. feszültségállapotban levő, hajlított vasbeton gerendában kialakuló feszültségek átrendeződésével és a gerenda alakváltozásaival foglalkozik. A feladat megoldására pontos és közelítő módszert is kidolgoz. Megállapítja, hogy a lassú alakváltozás és a zsugorodás a feszültségeket ellentétes értelemben befolyásolja, így az együttes hatásuk végül is lényegtelen, az alakváltozást ellenben e hatások jelentősen növelik [31]. Az együttdolgozó szerkezetek számítását OROSZ is továbbfejlesztette [44].

A tartószerkezetek lassú alakváltozásának számításához a hazai szerzők közül ÉLIÁS alkalmazta a Laplace-transzformációt. A vasbeton szerkezet anyagai közül az acélt tökéletesen rugalmasnak, a betont pedig standard viszkoelasztikusnak tekintette. Az anyagtvörvényt ő is a kúszási alakváltozástöbblet segítségével fejezi ki, tehát nem közvetlenül az időt választja független változóknak. A transzformáció alkalmazásaiként a központosan nyomott vasbeton oszlop, a hajlított, előfeszített vasbeton tartó, az együttdolgozó keresztmetszet és az egyszerűen határozatlan tartó állapotvizsgálatát mutatja be, de foglalkozik a hőmérsékletváltozás hatásával és az egyszerű stabilitásvesztéssel is [14].

Végül e vonatkozásban SZALAI kutatásairól kell megemlékeznünk, aki ARUTYUNJÁN és mások álláspontjához, továbbá a CEB-FIB ajánlásokhoz közelálló módon a beton viselkedését lineárisnak, de nem időinvariánsnak tekinti, sőt rámutat arra, hogy azöregedésifüggvényt a próbatest mérete is lényegesen befolyásolja, mert a vékonyabb próbatestek gyorsabban, a vastagabbak pedig lassabban öregednek. A lineáris öregedési elmélet fogyatékoságait a kúszási és ernyedési rehabilitációs folyamattal vizsgálja, és módosított öregedési függvény alkalmazásával hárítja el [57]. Anyagtörvénye beton esetében nyilvánvalóan sokkal realiztikusabb, mint az időinvariáns viselkedést feltételező

képletek. Ennek megfelelően azonban az igénybevételek átrendeződésének vizsgálata a határozatlan szerkezeteken bonyolultabbá válik.

A viszkozitás és a képlékenység kapcsolatára, rokon vonásaikra és eltéréseikre a magyar építőmérnöki szakirodalomban KALISZKY mutatott rá [27]. Megállapította, hogy az elasztoplasztikus anyag teljes alakváltozását rugalmas és képlékeny részből, az elasztovizskózusét rugalmas és viszkózus részből, az elasztovizkoplasztikus anyagét pedig rugalmas-, viszkózus és képlékeny részből tehetjük össze képzeletben. Ennek megfelelően az egyszerű igénybevétel anyagtvörvényének mechanikai modelljét rugók, dugattyúk, illetve érdes csúszkák egymáshoz kapcsolásával lehet előállítani. A modellek között bizonyos párhuzam van, így például a viszkoelasztikus anyag Kelvin-féle modelljének a vizkoplaszticitástanban a Bingham-féle modell a mása.

A térbeli feszültségi állapottal kapcsolatban ismerteti a viszkoelasztikus és az ideálpasztikus anyag (tenzoriális) anyagtvörvénye közötti analógiát is, az összenyomhatatlanságra vonatkozó közös egyszerűsítő feltevéssel együtt.

Az eltérésekkel kapcsolatban hangsúlyozza, hogy a képlékeny anyag csak a folyási határ létrejöttékor végez tetszőleges mértékű alakváltozásokat, a viszkózus anyag viszont bármekkora feszültség működésekor kúszik. A képlékeny alakváltozás lefolyása az időtől független (elvileg azonnal létrehozható), a viszkózus alakváltozás viszont fokozatosan alakul ki.

KALISZKY szerint végül a lassú alakváltozás és a képlékenység abban a tekintetben is összefügg, hogy ha a próbapálca megterhelésekor akár az alakváltozás, akár a feszültség sebességét fokozzák, az anyag merevebbnek mutatkozik és a folyási határa is megnő.

A viszkoelasztikus rúdszerkezetek hatékony numerikus vizsgálatának bázisa a tökéletesen rugalmas rúdszerkezetek állapotváltozási vizsgálata. E feladat megoldása a mátrix-számításnak a tartók statikájában való alkalmazásával kapcsolatos, amelynek magyar iskoláját SZABÓ teremtette meg [54]. Szintézist jelentő munkáiban a rúdszerkezet geometriai és egyensúlyi mátrixát az egyes rudak megfelelő mátrixából, permutáló mátrixok segítségével állította össze. Megmutatta, hogy a peremfeltételeket elvileg az állapotegyenlet összeállítását után a legcélszerűbb figyelembe venni és, hogy az egyenlet felépítését ez a művelet nem bontja és nem változtatja meg.

Az állapotvizsgálat hagyományos módszerei a blokkokra bontott állapotváltozási hipermatrix-egyenlet különböző megoldási változataiként értelmezhetők.

A koncepció általánosított formájában olyan szerkezeti elemeken is alkalmazható, amelyek már nem csupán két ponton kapcsolódnak a rendszer szomszédos részeihez, ezért jellemzésükhöz egynél több szabad igénybevételi vektor, valamint esetleg egynél több helyi koordináta-rendszer is szükséges. Így a vizsgálat áthidalja a rúdszerkezetek és a rugalmas kontinuumok közötti értelmezésbeli különbséget [55].

A kis és a nagy elmozdulások vizsgálata, továbbá az elmozdulásoknak az erőjátékra való visszahatása egységes elmélet keretében jelentkezik, amelynek az a gyökere, hogy a rúdszerkezetet jellemző mechanikai mennyiségek összefüggését a régebbi szerzőktől eltérően nem egyszerűen állapotvizsgálatként, hanem állapotváltóási vizsgálatként kell szemlélni [56].

A rugalmas és a viszkoelasztikus rúdszerkezetek, illetve ilyen anyagtulajdonságú közegek vizsgálatához a szerző is hozzájárult. Kidolgozta a véges elemekkel modellezett, standard viszkoelasztikus anyagtörvényű közegek állapotváltóási egyenleteit, az elsőrendű elmélet alapján. Itt az anyagtörvény reprezentációjára elsőrendű mátrix-differenciálegyenleteket alkalmazott, majd a numerikus megoldáshoz a differenciámódszer alapján olyan fiktív anyagegyenleteket javasolt, amelyek a Hooke-törvénynek felelnek meg, de időfüggő anyagmerevségi mátrixot és pillanatról pillanatra változó előfeszültségeket tartalmaznak. A helytől való függést a dolgozat az elmozdulásmódszerrel kezeli [62]. Végül az aránylag egyszerűbb, szendvics-keresztmetszetű rúdszerkezetek számítására az eddiginél jóval szélesebb körben javasolta kiterjeszteni a Laplace-transzformációt és az eljárás hatékonyságát algoritmusok kidolgozásával biztosította [63].

A hazai eredményeket áttekintve megállapítható, hogy azok nem maradnak el a nemzetközi színvonalától. Kutatásaink szakmai múltja, szellemi és anyagi kapacitása, számítógépi lehetőségei egyaránt alapot adnak arra, hogy a rúdszerkezetek mátrixos vizsgálati módszerét viszkoelasztikus anyagok esetére is általánosítani lehessen.

IRODALOM

1. ADEY, R. A.—BREBBIA, C. A.: Efficient Method for Solution of Viscoelastic Problems. *Proceedings ASCE, Journal of Engineering Mechanics Division*, **99** (1973) 1119 o.
2. ALFREY, T.: *Mechanical Behavior of High Polymers*. Interscience Publ. Inc., New York 1948
3. ARUTUNIAN, N. CH.: *Some Problems in the Theory of Creep in Concrete Structures*. Pergamon Press, London 1966
4. BIOT, M. A.: Theory of Stress-Strain Relations in Anisotropic Viscoelasticity and Relaxation Phenomena. *Journal of Applied Physics*, **25** (1954), 1385
5. BIOT, M.: *Variational and Lagrangian Methods in Viscoelasticity. Deformation and Flow of Solids* (R. Grammel edition). IUTAM Coll. Madrid 1955. Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956, 251—263
6. BLAND, D. R.: *The Theory of Linear Viscoelasticity*. Pergamon Press, Oxford—New York 1960
7. BRILLA, J.: Convolutional Variational Principles and Methods in Linear Viscoelasticity. *ZAMM* **54** (1974), 46—47
8. BRILLA, J.: Finite Element Method in Linear Viscoelasticity. *ZAMM* **54** (1974) 47—48
9. CHRISTENSEN, R. M.: *Theory of Viscoelasticity—an Introduction*. Academic Press — New York 1971
10. DI STEFANO, N.: Base sperimentale per una teoria sul comportamento di strutture viscoelastiche lineari-Applicazioni. *La Ricerca Scientifica* **30** (1960) 114—127
11. DI STEFANO, N.: On the Identification Problem in Linear Viscoelasticity. *ZAMM* **50** (1970), 683—690
12. EIMER, C.: *Podstawy teorii pelzania ustrojów hiperstatycznych wstępnie sprężonych. Rozprawy inżynierskie* **45**, Warszawa (1957), 423—457

13. EIMER, C.: Zastowania transformacji Laplace' a w obliczeniach reologicznych konstrukcji sprężonych. *Rozprawy Inżynierskie* 95, Warszawa (1958), 183—200
14. ÉLIÁS E.: A lassú alakváltozás hatásainak számítása Laplace-transzformációval. Kandidátusi értekezés, Budapest 1963
15. FERRY, J. D.: *Viscoelastic Properties of Polymers*. John Wiley and Sons, New York—London 1961
16. FINDLEY, W. N.—LAI, J. S.—ONARAN, K.: *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials*. North Holland Publ. Comp. Amsterdam—New York—Oxford 1976
17. FINNIE, I.: Stress Analysis in the Presence of Creep. *AMR.* 13 (1960), 705—712
18. FINNIE, I.—HELLER, W. R.: *Creep of Engineering Materials*. Mc Graw Hill, New York 1959
19. FLÜGGE, W.: *Viscoelasticity*, 2. rev. Ed. Springer, Berlin—Heidelberg—New York 1975
20. FUNG, Y. C.: *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall, Englewood Cliffs 1965
21. GRAHAM, G. A. C.—SABIN, G. C. W.: The Correspondence Principle of Linear Viscoelasticity for Problems that Involve Time-Dependent Regions. *International Journal of Engineering Science* 11 (1973), 123—140
22. GROSS, B.: On Creep and Relaxation. *Journal of Applied Physics* 18 (1947), 212—221; 19 (1948), 257—264
23. GROSS, B.: *Mathematical Structure of the Theories of Viscoelasticity*. Paris, Hermann 1953
24. GURTIN, M. E.—STERNBERG, E.: On the Linear Theory of Viscoelasticity. *Arch. Rat. Mech. Analysis* 11 (1962), 291—356
25. HUSIAR, B.—SWITKA, R.: Quasistatische pelzanie ciegna lepkosprężystego w. ujecin dyskretnym. *Archiwum Inzynierii Ładowej-* 25, Z. 1. (1979), 11—20
26. KACSANOV, L. M.: *Teorija polzuceszti. Gosz. Izd. Fiz. Mat. lit., Moszkva* 1960
27. KALISZKY S.: *Képlékenységtan. Akadémiai Kiadó, Budapest* 1975
28. KAWAHARA, M.: A Numerical Analysis on Viscoelastic Structures by the Finite Element Method. B 11. Faculty Sci. and Eng. Chuo University N. 15 1972, 75—91
29. KAWAHARA, M.: Large Strain, Viscoelastic Numerical Analysis by Means of Finite Element Method. *Proceedings of the Japan S. C. E. N.* 204 (1972), 141—149
30. KAWAHARA, M.—AORII, K.: A Numerical Analysis of Visco-Elastic Structures by the Finite Element Method. *Proceedings of the Japan S. C. E. N.* 179 (1970)
31. KOLLÁR L.: A beton zsugorodásának és lassú alakváltozásának hatása berepedt vasbetontartókra. *Mélyéptéstudományi Szemle* 5 (1955), 499—505
32. KOLLÁR L.—KÉKEDY P.: A beton zsugorodásának és lassú alakváltozásának hatása a vasbeton szerkezetek erőjátékára. *Mélyéptéstudományi Szemle* 4 (1954), 104—111
33. KOLLÁR L.—KÉKEDY P.: Közelítő eljárások együttdolgozó szerkezetek méretezésére. *Mélyéptéstudományi Szemle* 4 (1954), 637—647
34. LEE, E. H.: Viscoelastic Stress Analysis. *Structural Mechanics* (Goodyear and Hoff editors). Proc. of the 1st. Symp of Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, New York 1960
35. LEE, E. H.: *Viscoelasticity. Handbook of Engineering Mechanics* (W. Flügge editor). McGraw-Hill, New York 1962
36. LEVI, F.: Sugli stati di coazione elastica di origine viscosa. *Giornali del Genio Civile* 86 (1948), 65—70
37. LEVI, F.: Travi inflesse eterogenee in regime viscoso. *Giornale del Genio Civile* 86 (1948), 556—567
38. LEVI, F.—PIZZETTI, G.: *Fluage, plasticité, précontrainte*. Dunod, Paris 1951
39. MALONE, D. W.—CONNOR, J. J.: Finite Elements and Dynamic Viscoelasticity. *Proceedings ASCE, Journal of Engineering Mech. Division* 97 (1971), 1145—1158
40. MENDITTO, G.: Variational Formulation for Equation of Linear Quasistatic Viscoelasticity. *Ist. di Scienza e Tecn. delle Costr. del Politecn. di Milano, Publ. N 641, 1973—74*
41. NOWACKI, W.: *Theorie des Kriechens-Lineare Visko-Elastizität* F. Deuticke, Wien 1965
42. ODQVIST, F. K. G.: *Recent Advances in Theories of Creep of Engineering Materials. AMR.* 7 (1954), 517—519
43. OLSZAK, W.—PRZYNA, D.: Variational Theorems in General Viscoelasticity. *Ingenieur Archiv* 28 (1959) Festschrift R. Grammel), 246—250
44. OROSZ Á.: Együttdolgozó szerkezetek közelítő számítása. Kandidátusi értekezés, Budapest 1959
45. PALOTÁS L.: Vasbeton szerkezetek erőjátéka a tartós alakváltozások figyelembevételével. *Anyagvizsgálók Közlönye* 13 (1940), 80—116
46. POPOV, E. P.: Bending of Beams with Creep. *Journal of Applied Physics* 20 (1949), 251—256

47. RABOTNOV, YU. N.: Creep Problems in Structural Members. North-Holland Publ. Comp. Amsterdam—London 1969
48. ROZIN, L. A.: Variacionnūje posztanovki zadacs dlja uprugich szisztem. Izd. Leningrad-szkovo Univerzitate. Leningrad 1976
49. RZSANJICIN, A. R.: Teorija polzucsesztyi. *Sztróizdat*, Moszkva 1968
50. SATTLER, K.: Theorie der Verbundkonstruktionen. Springer, Berlin 1959
51. SATTLER, K.: Die Berechnung von Verbundkonstruktionen auf Grund der neuen CEB-FIP Vorschläge. *Bulletin d'Information* N. 80. (1972)
52. SHAPERY, R. A.: Approximate Methods of Transform Inversion in Viscoelastic Stress Analysis. *Proceedings of the 4th US National Congress of Appl. Mech.* 2 (1962), 1075—1089
53. STÜSSI, F.: Zusammengesetzte Vollwandträger. *Publ. IABSE* 8 (1947), 249—269
54. SZABÓ J.: A térbeli tartórács egyenlete. *ÉTI Tudományos Közlemények* 34 (1964)
55. SZABÓ J.: The Equation of State-Change of Structures. *Periodica Polytechnica* 17, N. 1 Budapest (1973), 55—71
56. SZABÓ J.—ROLLER B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
57. SZALAI J.: Inconsistencies in the Linear Theory of Creep of Concrete. *Acta Techn.* 79 (1974), 309—334
58. TAYLOR, R. L.—PISTER, K. S.—GOODREAU, G. I.: Thermomechanical Analysis of Viscoelastic Solids. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* N. 2. (1970), 45—60
59. THOR, I.: Deformations and Critical Loads of Steel Beams under Fire Exposure Conditions. National Swedish Building Research, Document D16, 1973
60. WEBBER, J. P. H.: Stress Analysis in Viscoelastic Bodies using Finite Elements and a Correspondence Rule with Elasticity. *Journal of Strain Analysis* N. 4. (1969), 236—243
61. ZIENKIEWICZ, O. C.—WATSON, M.—KING, I. P.: A Numerical Method of Viscoelastic Stress-Analysis. *International Journal of Mechanical Sciences* 10 (1968), 807—827
62. ROLLER B.: Kőzetösszeletkek numerikus állapotvizsgálata. *MTA X. Oszt. Közl.* 9, Budapest (1976), 217—244
63. ROLLER B.: Viszkoelasztikus tartók állapotvizsgálata. *Építés, Építészettudomány* 11, 3—4, (1979) Budapest

The Trends of the Theory of Viscoelasticity in Engineering Practice with Special Regard to the Bar Structures — The problems and research trends of the theory of viscoelasticity presenting themselves in the field of engineering practice, and in the first line in the field of civil engineering are dealt with in this paper, with the intention to extend the matrix analysis of bar structures to the structures of viscoelastic materials. The paper classifies the literature on the subject into three groups: monographs, foreign review paper and works published in Hungary. It is pointed out that most of the foreign publications available are related to reinforced concrete structures of simple design and are not of general character. The investigation dealing with more intricate structures either require enormous work even for a computer or, although being economic their mathematical basis is, however, not elaborated sufficiently yet. The results of the research investigations in Hungary have not lagged behind the foreign ones. The past of the professional work on this subject, the intellectual and material (computer-) capacity available in Hungary, equally constitute a basis for being able to extend the theory of the Bar Structures to the field of viscoelastic materials.

Die Tendenzen der Viskoelastizitätslehre in der Ingenieurpraxis mit besonderer Rücksicht auf die Stabwerke. — Die Abhandlung gibt eine Übersicht über die in der Ingenieurpraxis, jedoch in erster Linie in Zusammenhang mit den im Bereich der Bauingenieurarbeiten auftretenden Problemen und Forschungstendenzen, mit der Absicht die auf der Matrizenrechnung basierende Theorie der Stabkonstruktionen auch auf die aus viskoelastischem Material hergestellten Träger zu erstrecken. In der Abhandlung sind die Werke der Fachliteratur in die folgenden Gruppen eingeteilt: Monographien, ausländische Zeitschriftenartikeln und in Ungarn erschienene Werke. Es wird festgesetzt, daß die Mehrzahl der auffindbaren ausländischen Mitteilungen sich auf Stahlbetonkonstruktionen einfacher Anordnung beziehen und nicht von allgemeiner Charakter sind. Die über die komplexen Tragwerken durchgeführten Berechnungen bedeuten entweder auch für die Rechenautomaten eine erhebliche Arbeit oder sind zwar wirtschaftlich, haben jedoch keine entsprechend ausgearbeitete mathematische Gründe. Die Resultate der in Ungarn durchgeführten Forschungen bleiben nicht hinter denselben die im Auslande erreicht worden sind. Die fachwissenschaftliche Vergangenheit der ungarischen Forscher, die zur Verfügung stehenden geistigen und materiellen (Rechenautomaten-) Vermögen sichern einen festen Grund um die allgemeine Theorie der Stabkonstruktionen auch auf viskoelastische Stoffe erstrecken zu können.

VASTAGFALÚ FORGÁSHÉJAK SZÁMÍTÁSA HENGERSZIMMETRIKUS TEHER ESETÉBEN

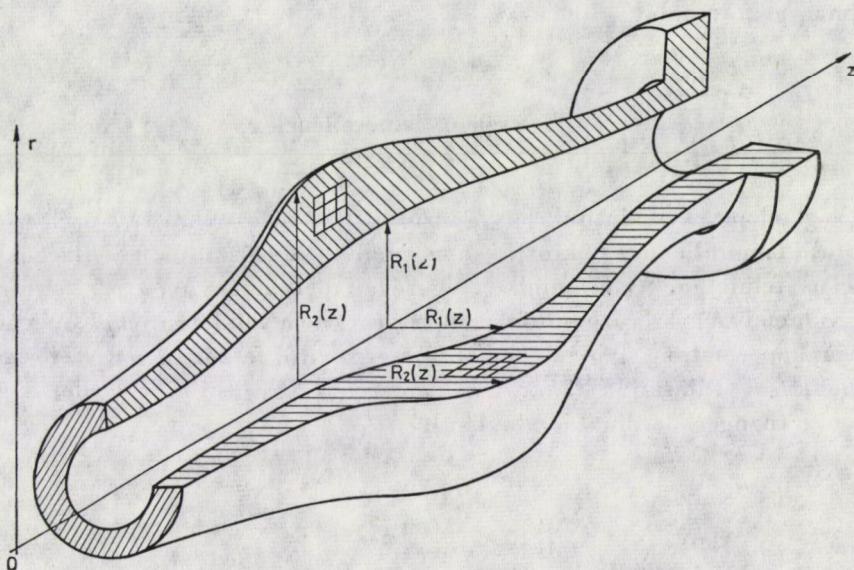
LÁMER GÉZA*

[Beérkezett: 1979. december 4-én]

Az adott tanulmányban tovább fejlesztjük a rugalmas és képlékeny állapotú vastagfalú forgáshéjak számítási módszerét hengersizmetrikus terhelésre véges-elemes erőmódszer alkalmazásával. Megadjuk az egységállapotokhoz tartozó elmozdulás- és feszültségfüggvények együtthatóit és az ismeretlenek meghatározására szolgáló egyenletrendszer összeállításának algoritmusát.

1. A feladat megfogalmazása

Vizsgáljunk egy vastagfalú forgáshéjat hengersizmetrikus terhelés esetében. Tegyük fel, hogy a héj vastagsága változhatik, mind a belső, mind a külső átmérő vonatkozásában. A falvastagság változása tetszőleges lehet: folyamatos vagy ugrásszerű (1. ábra). A héj anyaga lineárisan rugalmas — képlékeny. A végterhelése — hengersizmetrikus belső és külső nyomás, a héj alkotója mentén ható, a tengelyirányban változó csúsztató erő, a homlokfelületekre ható normál és csúsztató erő.



1. ábra. Forgáshéj

* Lámer Géza, 1088 Budapest, Vas u. 15/B.

2. Bevezetés

A kitűzött feladat általános megoldását rugalmas állapotban megkaphatjuk vagy elmozdulásfüggvényekben [1], vagy feszültségfüggvényekben [1, 2, 3, 4], de bonyolult geometria alak és tetszőleges terhelés esetén a feladat megoldása nehézkes és terjedelmes. Vastagfalú cső vizsgálata rugalmas és rugalmas-képlékeny állapotban, állandó falvastagság mellett, az adott feltevések figyelembevételével gyakorlatilag teljesen megoldott [5, 6, 7].

Bonyolult geometriai alak és tetszőleges terhelés esetén széles körben alkalmazott megoldási eljárás a végeelem módszer. Részletes irodalom található mind az elméletről, mind az alkalmazási területekről a [8, 9, 10, 11, 12] munkákban. A [13, 14, 15] munkákban vékonyfalú forgáshéjakat vizsgálnak tengelyszimmetrikus terhelés esetén, és erre a célra mozgás [13, 14], illetve kombinált módszert [15] alkalmaznak. Háromdimenziós végeelem tetraéder formában (topológiai értelemben) a [16, 17, 18/19] munkákban található. Ezekben a tanulmányokban mozgásmódszert alkalmaznak, az elmozdulást pedig harmadfokú (teljes és hiányos) polinommal közelítik.

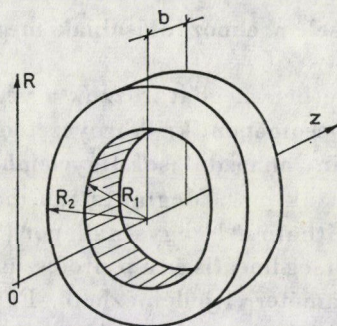
A jelen tanulmányban vizsgált feladat megoldásához végeelemként célszerű gyűrű alakú elemet választani, az elmozdulásra magasabb polinom fokszámmal. Képlékeny anyagtvény alkalmazása esetén az erőmódszer látszik a megfelelőbbnek mert ebben az esetben a képlékeny állapot fizikai tartalma megtartható.

3. Végeelem, ismeretlenek

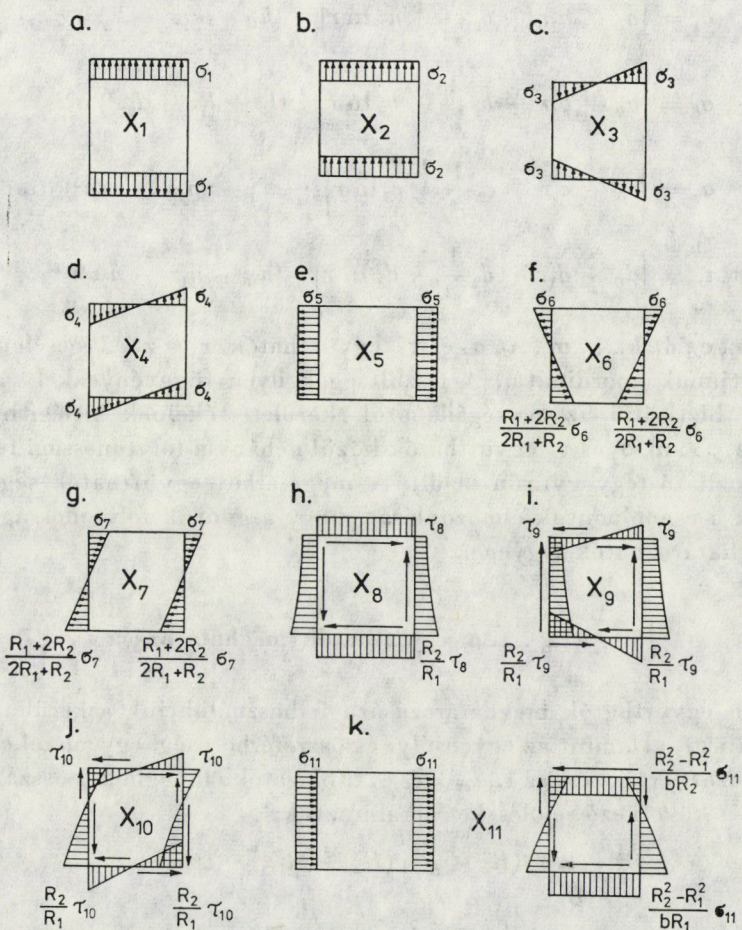
Végeelemnek tekintünk egy gyűrűt R_1, R_2 sugarakkal és b szélességgel (2. ábra). Ismeretlennek tekintjük a normál és a csúsztató feszültségeket a végeelem felületén. Az erőmódszer egységállapotainak választjuk a feszültségek valamely egyszerű kombinációit a végeelem felületén, előre megadott függvénykapcsolatok alapján (3. ábra). A nyíró feszültség τ_{rz} eloszlását hiperbolikusra választjuk ($3h, i, j, k$), amely az egyensúlyi egyenlet következménye (hengerkoordinátás alakban).

$$r \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) = 0. \quad (1)$$

A többi feszültség eloszlását lineáris törvénnyel írjuk le. Az ordináták nagyságát elsősorban a gyűrű tengelyirányú egyensúlya határozza meg.



2. ábra. Végeselem



3. ábra. Egységállapotok

4. A végelem elmozdulásainak meghatározása

Minden terhelési esetben meghatározzuk a véges elem csomópontjainak lineáris elmozdulását és a csomópont kis környezetének elfordulását. Az elmozdulásokat a végtelen kicsiny elmozdulások figyelembevételével, a rugalmasságtan egyenleteivel határozzuk meg. Megmutatjuk, hogy egy-egy gyűrűre ható tetszőleges terhelés előállítható a 11 egységállapot (3. ábra) lineáris kombinációjaként. A normálfeszültség lineáris és a nyírófeszültség hiperbolikus eloszlása esetén a terhelés 12 paraméterrel jellemezhető. Figyelembe véve a z irányú egyensúlyi egyenletet, elégséges a terhelés 11 paraméteres előállítása.

A terhelési eseteket Saint-Venant fél-fordított módszerével oldjuk meg [1].

A megoldáshoz a feszültségfüggvényeket polinomként adjuk meg.

$$\sigma_r = \left(a_0 + a_1 r + a_2 \frac{1}{r^2} + a_3 \ln r \right) \cdot (k_0 + k_1 z + k_2 z^3) \sigma_j, \quad (2)$$

$$\sigma_\theta = \left(b_0 + b_1 r + b_2 \frac{1}{r^2} + b_3 \ln r \right) \cdot (l_0 + l_1 z + l_2 z^3) \sigma_j, \quad (3)$$

$$\sigma_z = \left(c_0 + c_1 r + c_2 \frac{1}{r^2} + c_3 \ln r \right) \cdot (m_0 + m_1 z + m_2 z^3) \sigma_j, \quad (4)$$

$$\tau_{rz} = \left(d_0 + d_1 r + d_2 \frac{1}{r^2} + d_3 \ln r \right) \cdot (n_0 + n_1 z + n_2 z^3) \tau_j, \quad (5)$$

ahol: $a_i, b_i, c_i, d_i, k_i, l_i, m_i, n_i, \sigma_j$ és τ_j együtthatók, r és z a végelem tetszőleges pontjának koordinátái. A feszültségek ilyen függvényekkel való megközelítése biztosítja az egységállapotok kerületértékeinek kielégíthetőségét.

Az $a_i \dots n_i, \sigma_j$ és τ_j együtthatók közül néhány a folytonossági feltételből meghatározható (egy gyűrűn belül). A megmaradt együtthatók segítségével kifejezzük a csomópontok elmozdulását, hogy a gyűrűk folytonossági feltételből meghatározhatók legyenek.

5. Az $a_i \dots n_i$ együtthatók meghatározása

Ezen együtthatók meghatározására felhasználhatjuk a kerületi feltételeket (3. ábra), valamint az egyensúlyi és összeférhetőségi egyenleteket. Az így meghatározott értékeket az 1., 2., 3. és 4. táblázatokban foglaltuk össze. A táblázatokban a következő jelöléseket alkalmaztuk:

$$A = (R_2^2 + R_1^2)/(R_2^2 - R_1^2),$$

$$B = R_1^2 R_2^2/(R_2 - R_1),$$

$$C = (R_2^3 - R_1^3)/(2R_1 + R_2) (R_2 - R_1)^2,$$

$$D = (R_2 + R_1)/(2R_1 + R_2) (R_2 - R_1),$$

$$F = R_1^2 R_2^2 / (2R_1 + R_2) (R_2 - R_1),$$

$$H = (R_2^2 \ln R_2 - R_1^2 \ln R_1) / (R_2^2 - R_1^2),$$

$$I = R_1^2 R_2^2 (\ln R_2 - \ln R_1),$$

$$J = (R_2 + R_1) / (R_2 - R_1),$$

$$K = 2R_2 / (R_2 - R_1),$$

$$L = (R_2^3 - R_1^3) / (R_2^2 - R_1^2),$$

$$M = R_1^2 R_2^2 / (R_2 + R_1),$$

$$N = (R_2 + R_1).$$

6. Az elmozdulások meghatározása

A lineáris elmozdulásokat, u -t és w -t integrálással, míg az elfordulásokat a $\varphi = \partial u / \partial z$ és a $\psi = \partial w / \partial r$ (4. ábra) képletek segítségével határozzuk meg. Az elmozdulásfüggvények a következőképp alakulnak:

$$u = \left(a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 \frac{1}{r} + a_4 r \ln r \right) (k_0 + k_1 z + k_2 z^3), \quad (6)$$

$$w = (b_0 + b_1 r + b_2 r^2 + b_3 \ln r) (l_0 + l_1 z) + (b_4 + b_5 r) (l_2 z^2 + l_3 z^4) + C_w, \quad (7)$$

$$\varphi = \left(c_1 r + c_2 r^2 + c_3 \frac{1}{r} \right) (m_0 + m_2 z^2), \quad (8)$$

$$\psi = \left(d_0 + d_1 r + d_3 \frac{1}{r} \right) (n_0 + n_1 z + n_2 z^2 + n_3 z^4). \quad (9)$$

Az $a_i, b_i, c_i, k_i, l_i, m_i, n_i$ együtthatók értékeit az 5., 6., 7., 8. táblázatban foglaltuk össze. A jelölések, mint az előbb. C_w — integrálási konstans, amely a σ_j és τ_j együtthatókkal együtt meghatározandó a vizsgált test globális folytonossági feltételéből; C_w függ a globális koordináta rendszertől és a test (tengelyirányú) megfogásától.

7. A megoldások analízise

A 11 egységállapotra javasolt megoldások nem mind pontosak. A gyűrű egyensúlya globálisan minden esetben biztosított. Ezen kívül a megoldásoknak ki kell elégíteniük az egyensúlyi egyenleteket differenciális formában radiális és tengely irányban. Ezeket az egyenleteket „ r ” és „ z ”-vel jelöljük. Az összeférhetőséget két feltételre tudjuk bontani: az u elmozdulás integrálhatósága a feszültségekből (Saint-Venant összeférhetőségi egyenlete) és a felvett nyírófeszültség egyezése az elmozdulásokból számítottal. Ezeket a feltételeket „ u ” és „ τ ”-val jelöljük.

Az 1, 2, 3, 4, 5 és 8 egységállapot megoldásai pontosak, kielégítik a rugalmasságtan összes egyenletét. A 6, 9 és 10 állapotra javasolt megoldások nem elégítik ki az „r” feltételt, ezen kívül a 7. állapotra javasolt megoldás a „ τ ” feltételt csak részletesen elégíti ki. A 11. állapotra javasolt megoldás közelítő, figyelembe véve azt, hogy az $1/r$ változó érték megadható mint $2/(R_1 + R_2)$.

8. A megoldandó egyenletek

Konkrét feladat megoldása esetén a testet felosztjuk egy vagy több sor gyűrűre. Deformált állapotban megköveteljük, hogy a deformáció előtt érintkező csomópontok elmozdulásai a deformáció után egymással egyenlők legyenek (4a, b ábra).

Bevezetjük a következő jelöléseket: T_{ik} az i -edik gyűrű k -adik csomópontja, $i = 1, 2, 3, \dots, k = 1, 2, 3, 4$. A csomópontok sorszámát lásd a 4a. ábrán. T_{ijps} csomópont, amely egyszerre tartozik az i, k és p, s jelű gyűrűkhöz (4b ábra).

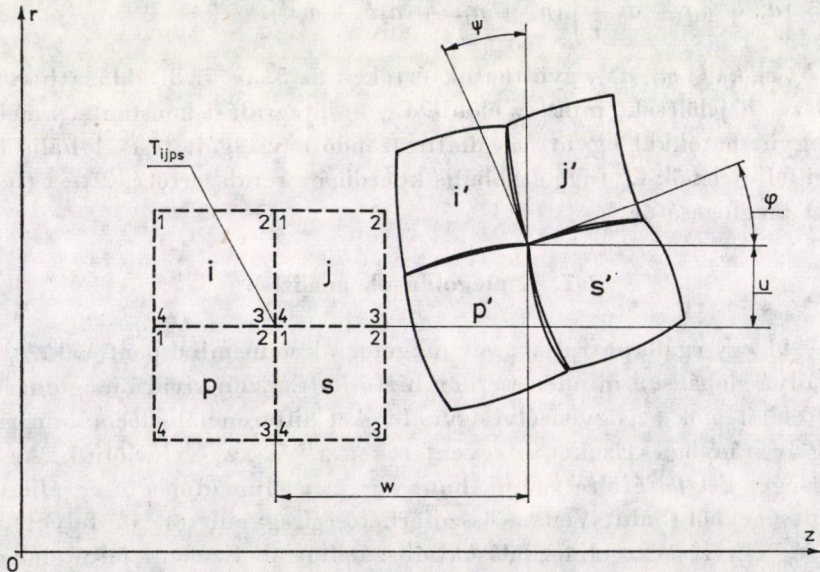
\bar{X}_i — az i -edik gyűrű feszültségállapot vektora

$\bar{X}_i = \|\mathbf{X}_{il}\|$; ahol $\mathbf{X}_{il} = \sigma_i$; $l = 1, 2, \dots, 7$ és τ_i ; $l = 8, 9, \dots, 11$ és

$$\mathbf{X}_{i12} = \mathbf{C}_{iw},$$

\bar{u}_{ik} — i -edik elem k -adik csomópontjának elmozdulásvektora.

$$\bar{u}_{ik} = \|\mathbf{u}_{ik}, \mathbf{w}_{ik}, \varphi_{ik}, \psi_{ik}\|^T \quad (10)$$



4. ábra. A T_{ijps} pont környezete deformáció előtt (a) és után (b)

Az \vec{u}_{ik} elmozdulásvektort a következőképpen határozzuk meg:

$$\vec{u}_{ik} = c_{ik} \vec{X}_i, \tag{11}$$

— ahol c_{ik} az i -edik elem k pontra vonatkozó hajlékonysági mátrixa, rendje 4×12 , struktúrája a következő:

⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	0	
⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	1
0	0	0	⊗	0	0	0	0	0	0	0	⊗	0	0	0	0	⊗	0	0	0
0	0	0	⊗	0	0	0	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	⊗	0

ahol a $\otimes \boxtimes$ -vel jelölt elem 0-tól és 1-től különbözik. Meghatározása az u ; w , φ és ψ -re vonatkozó képletek segítségével történik. A c_{ik} mátrix összeállításánál az u , w , φ és ψ képleteiben szereplő r és z koordináták helyett a T_{ik} csomópont r_{ik} és z_{ik} csomóponti koordinátái írandók.

A T_{ijps} pontban a folytonossági feltétel nem más, mint a T_{ijps} pontot alkotó csomópontok a deformáció okozta lineáris elmozdulásának és a deformáció előtt érintkező felületek deformációt követő elfordulásának azonossága. Mátrix alakban:

$$E^* \vec{Z}_{ijps} = 0,$$

ahol

$$\vec{Z}_{ijps} = \begin{pmatrix} \vec{u}_{i3} \\ \vec{u}_{j4} \\ \vec{u}_{s1} \\ \vec{u}_{p2} \end{pmatrix}$$

a T_{ijps} pont általánosított elmozdulás vektora,

és $E^* =$

E	0	$-E$	0	0	0	0	0	0
0	0	E	0	$-E$	0	0	0	0
0	0	0	0	E	0	$-E$	0	0
0	E	0	$-E^0$	0	0	0	$-E_0$	0
0	0	0	$-E_0$	0	E	0	$-E^0$	0

E^* — összeférhetőségi mátrix, amelyben

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abban az esetben, amikor egy pontban csak két vagy három elem találkozik, akkor az általánosított Z_{ijps} elmozdulásvektor csak két vagy három elmozdulásvektorból áll, az E^* összeférhetőségi mátrix nagysága is megváltozik, de a szerkezete nem.

Az ismeretlenek meghatározására az összeférhetőségi egyenleteken kívül a határfeltételeket kell figyelembe venni. A külső terhelést egy-egy elemhatáron belül linearizálni (normál erő) kell, illetve hiperbolikusan (nyíró erő) kell elosztani.

A határfeltételeket minden elem minden határpontjában figyelembe vesszük. Jelöljük (r) és (z) felső indexszel a pont környezetében a külső normális irányát.

A $T_{ik}^{(r)}$ pontban a határfeltétel

$$\vec{P}_{ik}^{(r)} = c_{ik}^{(r)} \vec{X}_i.$$

A $T_{ik}^{(z)}$ pontban

$$\vec{P}_{ik}^{(z)} = c_{ik}^{(z)} \vec{X}_i,$$

ahol

$$\vec{P}_{ik}^{(r)} = ||p_i|| \text{ és } \vec{P}_{ik}^{(z)} = ||t_i||$$

terhelési vektorok, amelyek a külső teher normális p és esúszató t összetevőit veszik figyelembe a $T_{ik}^{(r)}$ és $T_{ik}^{(z)}$ pontokban.

A $c_{ik}^{(r)}$ és $c_{ik}^{(z)}$ mátrixokat az 1. Függelékben adtuk meg.

Konkrét feladat megoldása esetén az összeférhetőségi egyenletek és a határfeltételek nem elégségesek a megoldáshoz. Szükségessé válik két szomszédos gyűrű egyensúlyát biztosító egyenlet felírása. Tengelyszimmetria miatt a sugárirányú eredő erő nulla, míg a tengelyirányú erők egyensúlyát külön feltétellel kell biztosítani két szomszédos elem érintkezési felületén. A (z) irányú külső normálissal jellemzett felület esetén ez a feltétel

$$c_i^{(z)} \vec{X}_i = c_j^{(z)} \vec{X}_j$$

alakban írható fel, míg az (r) irányú külső normális esetén azt

$$c_i^{(r)} \vec{X}_i = c_p^{(r)} \vec{X}_p$$

alakban kell felírni.

Itt:

$$c_i^{(z)} = || 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 ||$$

$$c_j^{(z)} = || 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 ||$$

$$c_i^{(r)} = \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \frac{R_{2i}}{R_{1i}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} -\frac{R_{2i} - R_{1i}}{b_i} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\|$$

$$c_p^{(r)} = \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \begin{array}{l} \frac{R_{2p} - R_{1p}}{b_p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\|$$

i, j és p — a gyűrűk indexe (4a. ábra), R_1, R_2 és b a gyűrűk mérete (2. ábra).

9. Egy speciális eset

Amikor egy rövid, vastagfalú csövet felosztunk n sorra és m oszlopra (az ismeretlenek száma $12nm$) a következő feltételeket kell kielégítenünk.

9.1. Határfeltétel minden egyes pontban r és z irányban, kivéve a 4 sarokelem sarokpontjait, ahol három feltétel lesz (a negyedik a nyírófeszültség dualitása miatt elesik). Így négy sarokelemre $4(2 + 3 + 2) = 28$ egyenlet írható fel, míg a fennmaradó $2(m - 2) + 2(n - 2)$ határelemekre egyenként 4, összesen $8m - 8n - 32$ egyenlet állítható fel. Ily módon $8m - 8n - 4$ olyan egyenletet kapunk, amely a határfeltételeket veszi figyelembe.

9.2. Folytonossági feltétel minden T_{ijps} típusú pontban (ilyen $(n - 1) \times (m - 1)$ van) 10 írható fel, míg T_{ij00} (illetve T_{i00p}) típusú pontban (ilyen $2(n - 1) + 2(m - 1)$ van) 3 feltétel írható fel. Ez összesen $10nm - 4n - 4m - 2$ feltétel.

9.3. A szomszédos elemek közös egyensúlyára a legkülső sorokban és oszlopokban $2(n - 2) + 2(m - 2)$, eggyel beljebb csak $2\frac{1}{2}(n - 4) + 2\frac{1}{2}(m - 4)$ pár állítható össze. A maradék elemekre összesen $2(n - 4)(m - 4) + (n - 4) + (m - 4)$ feltétel írható fel. Ez összesen $2nm - 4n - 4m + 8$ feltétel.

9.4. A felírt egyenletek száma (ide véve a folytonossági egyenleteket, a határfeltételeket és a két elem közös egyensúlyi egyenleteit) két felesleges egyenlet kihúzása után, a sarokelemek egyensúlyi egyenletei közül, összesen $12nm$.

Az ismeretlenek meghatározására szolgáló egyenletek mátrix egyenletté alakíthatók:

$$A\vec{Z} = \vec{P}$$

ahol \vec{Z} — vektor-ismeretlen, $\vec{Z} = ||\vec{X}_i||$,

\vec{P} — vektor-terhelés, $\vec{P} = ||\vec{P}_i||$.

Az A mátrix-szalagmátrix $24n$, illetve $24m$ szélességű (az $n \geq m$ arány függvényében).

Az $A = [a_{ij}]$ mátrix elemei a következő alakúak:

$$a_{ij} = ||c_{ik}, c_{ik}^{(r)}, c_{ik}^{(s)}, c_i^{(r)}, c_i^{(s)}||$$

10. A képlékeny állapot figyelembevétele

A javasolt metodika alapján meghatározható a héj feszültség- és elmozdulásállapota az anyag rugalmas viselkedése esetén. Továbbá kiterjeszhető az eljárás arra az esetre is, amikor a héj egyes pontjaiban az anyag képlékeny

állapotba kerül. Képlékeny anyagtörvény feltételezése mellett a feladat megoldásakor figyelembe vesszük:

1. A képlékeny állapot bekövetkezését a Huber—Mises—Hencky-féle folyásfeltétel adja meg [20]:

$$f = \frac{1}{6} [(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2] + \tau_{rz}^2 - \tau_f^2 = 0 \quad (*)$$

2. Ennek a feltételnek a kielégítése érdekében feltesszük, hogy a képlékeny állapot egyszerre következik be egy végelem egész tartományában. Ily módon az elemet feltételelesen általánosított pontnak nevezhetjük. Más szavakkal: feltételezzük, hogy lehetséges olyan feszültségfüggvényeket találni, amelyek a végelem tartomány minden egyes pontjában kielégítik a fent említett folyási feltételt. Az állapot meghatározása (rugalmas vagy képlékeny) a „rugalmas” számítás után történik az elem négy csomópontjaiban ébredő feszültségek segítségével.

Megmutatható, hogy azok az elementáris feszültségfüggvények, amelyek kielégítik a folyásfeltételt, nem elégítik ki az egyensúlyi egyenletet differenciális alakban. És viszont, azon függvények (az elementárisok közül), amelyek az egyensúlyi egyenleteket kielégítik, azok a folyásfeltételt nem elégítik ki.

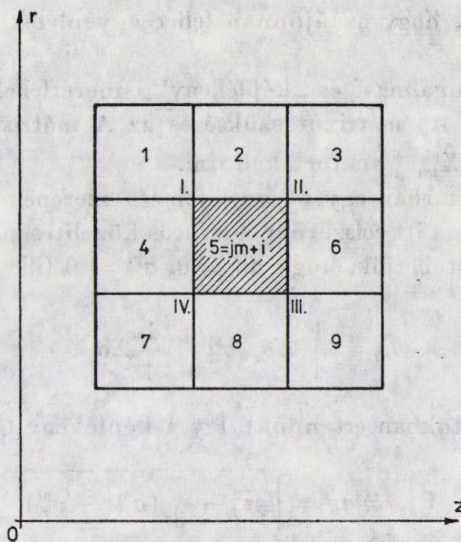
Ezért feltesszük, hogy képlékeny állapotban $\sigma_r = \sigma_\theta = \text{const}$, $\sigma_z = \text{const}$, $\tau_{rz} = \text{const}$, e mellett τ_{rz} kifejezhető a σ_r és σ_z segítségével. Ily módon az általánosított pont homogén képlékeny állapotát két független változóval jellemezhetjük.

3. Tekintsük az előbb vizsgált példát azzal a feltételezéssel, hogy a $j_m + i$ elem képlékeny állapotban van. A vektor-ismeretlenben az \bar{X}_{j_m+i} helyére egy $\bar{X}_{j_m+i}^\circ$ nulla vektort teszünk, amely ugyanolyan méretű (12×1). Ez azt jelenti, hogy azon egyenletek, amelyekben az $X_{j_m+i}^\circ$ vektor elemei szerepelnek, azokat azonossággá alakítja át. Ezen egyenletek száma: 10 folytonossági egyenlet mind a 4 pontjában és egy-egy egyensúlyi egyenlet a négy felületen, így összesen 44 egyenletet alakítunk át azonossággá.

Továbbiakban bevezetünk 3 paramétert, amely a képlékeny állapotot jellemzi: σ_r^p , σ_z^p és τ_{rz}^p .

A 3 paraméter nem független egymástól, mivel ki kell hogy elégítsék a folyási feltételt (*), emellett a környező rugalmas állapotban levő tartomány elemeinek folytonossági feltételeit is. Az általánosság megsértése nélkül a képlékeny elem csomópontjait jelöljük k -val ($k = 1, 2, 3, 4$), felületét l -l ($l = 1, 2, 3, 4$) és a környező elemet j -vel ($j = 1, 2, \dots, 9$) (5. ábra). Az elem felületén ($l = 1, 2, 3, 4$) páronként egyensúlyi feltételt kell biztosítani sugárirányban és a tengely irányában; mátrix alakban:

$$c_j \bar{X}_j = c_{pl} \bar{X}_{pl}$$



5. ábra. A képlékeny zóna és környezete

Képlékeny állapotban a térfogatváltozás nulla. A mi esetünkben megköveteljük, hogy az alakváltozást meghatározzák a csomópontok deformációi:

$$u_3 - u_4 = u_2 - u_1,$$

$$w_1 - w_4 = w_2 - w_3,$$

vagy mátrix alakban:

$$c_1 \vec{X}_1 - c_3 \vec{X}_3 + c_9 X_9 - c_7 \vec{X}_7 = 0.$$

A képlékeny állapot egyenlete:

$$c_r \vec{X}_{p1} = \sqrt{\tau_j^2 - 1/3 (\sigma_r - \sigma_2)^2}.$$

Ezeket az egyenleteket egy mátrix egyenletbe foglaljuk össze:

$$A_{p1} \vec{Z}(\vec{X}_{p1}) = \vec{P}(\vec{P}_{p1}),$$

ahol

$$X_{p1} = || \sigma_r^{p1} \ 0 \ 0 \ 0 \ \sigma_2^{p1} \ 0 \ 0 \ \tau_{rz}^{p1} \ 0 \ 0 \ 0 \ ||^T.$$

Az A_{p1} mátrix struktúráját és elemeit, valamint a \vec{P}_{p1} vektort a 2. Függelékben adjuk meg.

Ily módon a képlékeny tartomány környezetében felírunk $4 \times 6 = 24$ folytonossági egyenletet, és $4 \times 2 = 8$ páronkénti egyensúlyi egyenletet és az alakváltozás két egyenletét, az összesen $n = 34$. Innét a kiegészítő egyenletek száma $N = n + 1 = 35$.

Megmutatható, hogy az újonnan felírt egyenletek száma szükséges és elégséges.

Az egyenlet „rugalmas” és „képlékeny” ismeretlenek egyidejű meghatározása érdekében az A_{p1} mátrixot szükséges az A mátrixban elhelyezni, míg az \vec{X}_{jm+i}^0 helyére az \vec{X}_{jm+i}^{p1} vektort kell írni.

A terhelés vektorban egy olyan kifejezés szerepel, amely függ a σ_r^{p1} és σ_z^{p1} ismeretlenektől. Ezért itt célszerű a sorozatos közelítés módszerét alkalmazni. Első közelítésben feltehetjük, hogy $\sigma_{r0}^{p1} = 0$, $\sigma_{z0}^{p1} = 0$ (illetve a rugalmas megoldásból

$$\sigma_{r0}^{p1} = \frac{1}{4} \Sigma \sigma_r, \quad \sigma_{z0}^{p1} = \frac{1}{4} \Sigma \sigma_z,$$

σ_r és σ_z a csomópontokban értendők). Így a képlékeny terhelés első lépésben

$$P_{p1} = a_0 = \sqrt{\tau_j^2 - \frac{1}{3} (\sigma_{r0}^{p1} - \sigma_{z0}^{p1})^2}.$$

Másodszor megoldva a feladatot meghatározzuk a σ_{r1}^{p1} és σ_{z1}^{p1} értékeket, és ezen értékek felhasználásával $P_{p1} = a_1 = \dots$ és így tovább.

Összefoglalás

Az adott tanulmányban továbbfejlesztettük a vastagfalú forgáshéjak számítási módszerét tengelyszimmetrikus teher esetében végelemek felhasználásával erőmódszert alkalmazva.

Ismeretleneknek a feszültségek valamely egyszerű kombinációit tekintjük a végelem felületén. Meghatározásuk a folytonossági feltételből történik (a csomópontokban). A csomóponti elmozdulások meghatározása az egységállapotokban a rugalmasságtan egyenleteinek felhasználásával történik, figyelembe véve a kis elmozdulások elméletét. Ezen megoldások eredményeit analizáljuk. A tárgyalt módszer lehetővé teszi nemcsak a csomópontok lineáris elmozdulásának figyelembevételét, hanem a csomópontok kis környezetének elfordulását is.

A végelem módszer alkalmazása a fent tárgyalt variációban lehetővé teszi különböző belső és külső konfigurációjú felülettel jellemzett forgáshéjak vizsgálatát, és ami lehetőséget ad hasonló problémák különböző számítási modellekkel nyert megoldásainak összehasonlítására.

A továbbiakban kidolgoztuk és analizáltuk az ismeretlen meghatározására szolgáló egyenletrendszer összeállításának algoritmusát.

A dolgozat utolsó fejezetében megvizsgáltuk az ajánlott számítási módszer kiterjeszhetőségét képlékeny zóna kialakulásának esetére is. Megmutattuk ennek lehetőségét az adott számítási eljárás mellett.

A dolgozatban felvetett problémák kidolgozása olyan szintű, hogy a kapott eredmény felhasználható számítógépes program elkészítéséhez, a fent említett típusú szerkezetek méretezésére.

IRODALOM

1. BEZUBOV, N. I.—LUZSIN, O. B.: Prilozenyie metodov teorii uprugosztyi i plaszticsnoszti k resenyiju inzsenerüh zadacs. Moszkva, Viszsaja skola, 1974. 38—41
2. LOVE, A.: Matematicekaja teoria uprugosztyi (A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Cambridge, 1927.) Moszkva—Leningrád ONTI, 1935. p. 48—99, p. 268—288
3. TIMOSHENKO, S.: Teorija uprugosztyi. (Theory of Elasticity, London, New-York, 1934.) Moszkva—Leningrád, ONTI, 1934. p. 339—342
4. KOLTUNOV, M. A.—VASZILJEV, JU. N.—CSORNÜH, V. A.: Uprugoszty i procsnoszty cilindricseszkih tel. Moszkva, Viszsaja skola, 1975, p. 42—54
5. BELJAJEV, N. M.—SZINYICKIJ, A. K.: Naprazsényija i deformácija v tolsztosztennüh cilindrah pri uprugo-plaszticseszkom szosztójanyii materiála. V knige: Beljajev N. M. „Trudi po teorii uprugosztyi i plaszticsnosztyi”. Moszkva, GITTL, 1937, p. 240—356
6. ILJUSIN, A. A.—OGIBÁLOV, P. M.: Uprugo-plaszticseszkie deformácii polüh cilindrov. Moszkva, Izdatyelsztyvo MGU 1960. p. 37—91
7. KOLTUNOV, M. A.—VASZILJEV JU., N.—CSORNÜH, V. A.: Uprugoszty i procsnoszty cilinricseszkih tel. Moszkva, Viszsaja skola, 1975. 273—352
8. STRANG, G.—FIX, G.: Teorija metoda konyecsnuh elementov. (An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, 1973.) Moszkva, MIR, 1977
9. ZIENKIEWICZ, O. C.—CHEUNG, Y. K.: The Finite Element Method in Struktural and Continium Mechanics. Mc Graw-Hill, New-York 1967
10. MARTIN, M. C.—CAREY, G. F.: Bevezetés a végeelem analízisbe (Introduction to Finite Element Analysis, New-York, McGraw-Hill). Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1977
11. ODEN, G.: Konyecsnuh elementü v melinejnoj mehanike szplosnuh szred (Finit elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, New-York, 1972). Moszkva, MIR, 1976
12. ROBINSON, I.: Integrated Theory of Finite Element Methods. Bristols, J. W. Arrowsmith Ltd., 1973
13. JONES, R. E.—STROME, D. R.: Direct Stiffness Methods. Analysis of Shells of Revolution Utilizing Curved Elements. *A. I. A. A. Journal* 4 (1966), 1519—1525
14. Accuracy of Model Stress Calculations by the Finite Element Method. *A. I. A. A. Journal* 8, 261—277
15. ELIAS, Z. M.: Mixed Finite Element Method for Axisymmetric shells. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4. No 2. p. 261—277
16. GALLACHER, R. H.—PADLOG, I.—BIJLARD, P. P.: Stress Analysis in Heated, Complex Shapes. *J. Aerospace Sci.*, (1962), 700—707
17. ARGYRIS, J. H.: Matrix Analysis of Three Dimensional Elastic Media. Small and Large Displacements. *A. I. A. A. Journal* 3 (1965) 45—51
- 18/19. RASHID, V. R.: Three Dimensional Analysis of Elastic Solids. *Int. J. Solids and Struct.* 5, 1311—1332; 6, 195—207
20. SZKOLOVSKIJ, V. V.: Teorija plaszticsnosztyi. Moszkva, Viszsaja skola, 1969

•

Calculation of Thick-Walled Shells of Revolution Submitted to Axisymmetrical Loading.

— The calculation method of the thick-walled shells of revolution, in elastic and plastic states, subjected to axisymmetrical loading is refined by the author, by making use of the finite-element energy theorem. The coefficients of the displacement and stress functions associated with the unit states and the algorithm of the establishment of the set of equation serving for the determination of the unknown values are given.

Berechnung der durch rotationssymmetrische Belastung beanspruchten dickwandigen Rotationsschalen. — Die Berechnungsmethode der durch rotationssymmetrische Belastung beanspruchten, dickwandigen, in elastischen und plastischen Zuständen befindlichen elastischen Rotationsschalen wird durch Anwendung des Kraftgrößen Verfahrens mit finiten Elementen weiterentwickelt. Die Koeffizienten der zu den Einheitszuständen gehörigen Verschiebungs- und Spannungsfunktionen und der Algorithmus der Aufstellung des zur Ermittlung der unbekanntenen Größen dienenden Gleichungssystems werden angeführt.

1. táblázat
A σ_r feszültségfüggvény együtthatói

Az egység- állapot száma	Együtthatók						
	a_0	a_1	a_2	a_3	k_0	k_1	k_2
1	1	0	0	0	1	0	0
2	<i>A</i>	0	$-2B$	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0
4	<i>A</i>	0	$-2B$	0	0	$\frac{2}{b}$	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	$-\frac{2-\mu}{\mu}C$	$\frac{2-\mu}{\mu}D$	$-\frac{2-\mu}{\mu}F$	0	1	0	0
7	$-\frac{4-\mu}{\mu}C$	$\frac{4-\mu}{\mu}D$	$\frac{4-\mu}{1-\mu}F$	0	0	$\frac{3}{2} \frac{2}{b}$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^2$
8	0	0	0	0	0	0	0
9	$-\frac{1+\mu}{\mu}H$	0	$\frac{1+\mu}{\mu}I$	$-\frac{1+\mu}{\mu}$	$\frac{2}{b}R_2$	0	0
10	$-\frac{1+\mu}{\mu}HJ$	0	$\frac{1+\mu}{\mu}IJ$	$-\frac{1+\mu}{\mu}J$	$\frac{2}{b}R_2$	0	0
	$\frac{2}{3} \frac{2+\mu}{\mu}KL$	$\frac{2}{3} \frac{2+\mu}{\mu}K$	$\frac{2}{3} \frac{2+\mu}{\mu}KM$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0

2. táblázat

$A \sigma_\theta$ feszültségfüggvény együtthatói

Az egység- állapot száma	Együtthatók						
	b_0	b_1	b_2	b_3	l_0	l_1	l_2
1	1	0	0	0	1	0	0
2	A	0	$2B$	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0
4	A	0	$2B$	0	0	$\frac{2}{b}$	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	$-\frac{2-\mu}{\mu} C$	$\frac{1+\mu}{\mu} D$	$\frac{2-\mu}{\mu} F$	0	1	0	0
7	$-\frac{4-\mu}{1-\mu} C$	$\frac{4+10\mu-5\mu^2}{(2+\mu)(1-\mu)} D$	$\frac{4-\mu}{1-\mu} F$	0	0	$\frac{32}{2b}$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	0	0	0	0
9	$\frac{1-\mu}{\mu} H - \frac{1+\mu}{\mu} H$	0	$-\frac{1+\mu}{\mu} I$	$-\frac{1+\mu}{\mu}$	$\frac{2}{b} R_2$	0	0
10	$\frac{1-\mu}{\mu} I - \frac{1+\mu}{\mu} HJ$	0	$-\frac{1+\mu}{\mu} IJ$	$-\frac{1+\mu}{\mu} J$	$\frac{2}{b} R_2$	0	0
	$\frac{2}{3} \frac{2+\mu}{\mu} KL$	$-\frac{21+2\mu}{3} K$	$-\frac{22+\mu}{3} KM$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0

3. táblázat

A σ_z feszültségfüggvény együtthatói

Az egység- állapot száma	Együtthatók						
	c_0	c_1	c_2	c_3	m_0	m_1	m_2
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	0	1	0	0
6	$-2C$	$3D$	0	0	1	0	0
7	$-2C$	$3D$	0	0	0	$\frac{3}{2} \frac{2}{b}$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0

4. táblázat

A τ_{rz} feszültségfüggvény együtthatói

Az egység- állapot száma	Együtthatók						
	d_0	d_1	d_2	d_3	n_0	n_1	n_2
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	C	$-D$	$-F$	$\frac{3}{2} \frac{2}{b}$	0	$-\frac{3}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	R_2	1	0	0
9	0	0	0	R_2	0	$\frac{2}{b}$	0
10	1	0	0	$R_2 J$	0	$\frac{2}{b}$	0
	1	0	0	K	0	$\frac{2}{b}$	0
11	$-N$	0	0	$\frac{N^2}{2}$	$\frac{2}{b}$	0	0

5. táblázat
Az u elmozdulásfüggvény együtthatói

Az egység- állapot száma	Együtthatók						
	a_1	a_2	a_3	a_4	k_0	k_1	k_2
1	$\frac{1-\mu}{E}$	0	0	0	1	0	0
2	$\frac{1-\mu}{E} A$	0	$\frac{2(1+\mu)}{E} \frac{B}{N}$	0	1	0	0
3	$\frac{1-\mu}{E}$	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0
4	$\frac{1-\mu}{E} A$	0	$\frac{2(1+\mu)}{E} \frac{B}{N}$	0	0	$\frac{2}{b}$	0
5	$-\frac{\mu}{E}$	0	0	0	1	0	0
6	$-\frac{2-3\mu-\mu^2}{\mu E} C$	$-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{\mu E} D$	$\frac{(1+\mu)(2-\mu)}{\mu E} F$	0	1	0	0
7	$-\frac{4-5\mu}{E} C$	$\frac{4-8\mu+6\mu^2+4\mu^2}{(1-\mu)(2+\mu)E} D$	$-\frac{(1+\mu)(4-\mu)}{(1-\mu)E} F$	0	0	$\frac{3}{3} \cdot \frac{2}{b}$	$-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	0	0	0	0
9	$-\frac{1-\mu}{\mu E} + \frac{1-\mu^2}{\mu E} H$	0	$-\frac{1+\mu}{\mu E} A$	$-\frac{1-\mu^2}{\mu E}$	$\frac{2}{b} K_2$	0	0
10	$-\frac{1-\mu}{\mu E} J + \frac{1-\mu^2}{\mu E} HJ$	0	$-\frac{1+\mu}{\mu E} AJ$	$-\frac{1-\mu^2}{\mu E} J$	$\frac{2}{b} R_2$	0	0
	$\frac{2}{3} \frac{2+\mu}{\mu E} (1+\mu) KL$	$\frac{2}{3} \frac{1-\mu^2}{\mu} K$	$\frac{2}{3} \frac{(1+\mu)(2+\mu)}{\mu E} MK$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
11	$-\frac{\mu}{E}$	0	0	0	0	$\frac{2}{b}$	0

6. táblázat
A w elmozdulásfüggvény együtthatói

Az egy- ség- állapot száma	Az első tag együtthatói						A második tag együtthatói			
	b_0	b_1	b_2	b_3	l_0	l_1	b_4	b_5	l_2	l_3
1	1	0	0	0	0	$-\frac{2\mu}{E}$	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	$-\frac{2\mu B}{E N}$	0	0	0	0
3	0	0	$-\frac{1-\mu}{E}$	0	$\frac{2}{b}$	0	$\frac{2\mu}{E}$	0	$\frac{2}{b}$	0
4	0	0	$-\frac{1-\mu}{2E} A$	$-\frac{2(1+\mu) B}{E N}$	$\frac{2}{b}$	0	$\frac{2\mu}{E} A$	0	$\frac{1}{2} \frac{2}{b}$	0
5	1	0	0	0	0	$\frac{1}{E}$	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	$-\frac{2(1+\mu)}{E} C$	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	$\frac{2-10\mu-2\mu^2}{(1-\mu)E} C$	$\frac{6-15\mu-15\mu^2+6\mu^3}{(2+\mu)(1-\mu)E} D$	$\frac{3}{4} \frac{2}{b}$	$\frac{1}{8} \left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	$\frac{R_2}{G}$	1	0	0	0	0	0
9	$\frac{1-\mu}{E} + \frac{2(1+\mu)}{E} HJ$	0	0	$\frac{2(1+\mu)}{E}$	0	$\frac{2}{b} R_2$	0	0	0	0
10	$\frac{1-\mu}{E} J + \frac{2(1+\mu)}{E} H^2$	0	0	$\frac{2(1+\mu)}{E} J$	0	$\frac{2}{b} R_2$	0	0	0	0
	$-\frac{2}{3} \frac{2+\mu}{E} 2LK$	$\frac{2(1+\mu)}{E}$	0	0	$\frac{2}{b}$	0	0	0	0	0
11	0	$-\frac{2(1+\mu)}{E} N$	$\frac{\mu}{E}$	$\frac{1+\mu}{E} N^2$	$\frac{2}{b}$	0	$\frac{1}{E}$	0	$\frac{1}{2} \frac{2}{b}$	0

7. táblázat

A φ elmozdulásfüggvény együtthatói

Az egység- állapot száma	Együtthatók				
	c_1	c_2	c_3	m_0	m_2
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	$\frac{1-5\mu}{E} A$	0	$\frac{2(1+\mu)}{E} A$	$\frac{2}{b}$	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	$-\frac{4-5\mu}{E} C$	$\frac{4-8\mu+6\mu^2+4\mu^3}{(2+\mu)(1-\mu)} D$	$-\frac{(1+\mu)(4-\mu)}{E\mu} F$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{b}$	$-\frac{3}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
11	$-\frac{\mu}{E}$	0	0	$\frac{2}{b}$	0

8. táblázat

 A ψ elmozdulásfüggvény együtthatói

Az egység- állapot száma	Együtthatók						
	d_0	d_1	d_2	n_0	n_1	n_2	n_3
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	$-\frac{1-\mu}{E} A$	$-\frac{2(1+\mu)}{E} A$	$\frac{2}{b}$	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	$-\frac{6-15\mu-15\mu^2+6\mu^3}{(2+\mu)(1-\mu)E} D$	0	0	0	0	$\frac{3}{4} \frac{2}{b}$	$-\frac{1}{8} \left(\frac{2}{b}\right)^3$
8	0	0	$-\frac{R_2}{G}$	1	0	0	0
9	0	0	$-\frac{R_2}{G}$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
10	0	0	$-\frac{R_2 J}{G}$	0	$\frac{2}{b}$	0	0
	$-\frac{K}{G}$	0	0	$\frac{2}{b}$	0	0	0
11	$\frac{2(1+\mu)}{E} N$	$-\frac{2\mu}{E}$	$\frac{1+\mu}{E} N^2$	$\frac{2}{b}$	0	0	0

1. Függelék

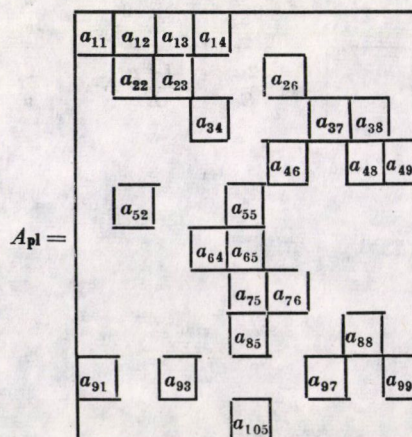
A $C_{ik}^{(r)}$ és $C_{ik}^{(z)}$ mátrixok

$c_{ik}^{(r)}$	0	1	$c_{ik}^{(z)}$	0	0
	0	$A - \frac{2M}{Nr_{ik}}$		0	0
	0	$\frac{2}{b} z_{ik}$		0	0
	0	$\frac{2}{b} z_{ik} \left(A - \frac{2M}{Nr_{ik}} \right)$		0	0
	0	0		0	1
	0	0		0	$-2C + 3Dr_{ik}$
	0	0		0	$\frac{2}{b} z_{ik} (-2C + 3Dr_{ik})$
	0	0		$\frac{R_2}{r_{ik}}$	0
	$\frac{R_2}{r_{ik}}$	0		$\frac{2}{b} z_{ik} \frac{R_2}{r_{ik}}$	0
	$\frac{2}{b} z_{ik} \frac{R_2}{r_{ik}}$	0		$\frac{2}{b} z_{ik} \left(K - J \frac{R_2}{r_{ik}} \right)$	0
	$\frac{2}{b} z_{ik} \left(K - J \frac{R_2}{r_{ik}} \right)$	0		$\frac{N}{b} \left(-2 + \frac{N}{r_{ik}} \right)$	$\frac{2}{b} z_{ik}$
	0	0		0	0

2. Függelék

A 2. Függelékben a mátrixokat álló nagybetűkkel jelöltük, míg az A_{p1} hipermátrix blokkjait kis a-val

Az A_{p1} mátrix elemei



Az A_{p1} mátrix struktúrája

$$a_{ij} = E_{ij}^* \left\| \frac{c_{ij}}{0} \right\| + E_{ij}^{**} \left\| \frac{0}{c_{ij}} \right\| \quad (i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 9)$$

$$E_{11}^* = E_{22}^* = E_{34}^* = E_{46}^* = E^1$$

$$E_{12}^* = E_{23}^* = E_{38}^* = E_{49}^* = E^2$$

$$E_{14}^* = E_{25}^* = E_{37}^* = E_{48}^* = E^3$$

$$E_{11}^{**} = E_{23}^{**} = E_{37}^{**} = E_{48}^{**} = E^4$$

$$E_{12}^{**} = E_{22}^{**} = E_{38}^{**} = E_{48}^{**} = E^5$$

$$E_{14}^{**} = E_{26}^{**} = E_{34}^{**} = E_{49}^{**} = E^6$$

$$E^1 = \left\| \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$E^2 = \left\| \begin{array}{c|c} -E & 0 \\ \hline E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$E^3 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline -E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$E^4 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & E \end{array} \right\|$$

$$E^5 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & -E^0 \end{array} \right\|$$

$$E^6 = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & -E_0 \end{array} \right\|$$

ahol E , E^0 , E_0 és 0 mátrixokat lásd a 209. oldalon

$$a_{52} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_2}{R_1} & 0 & 0 & -\frac{R_2 - R_1}{B} & 0 \end{array} \right\|$$

$$a_{55} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$a_{64} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

$$a_{65} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$a_{75} = a_{65}$$

$$a_{76} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\|$$

$$a_{85} = a_{55}$$

$$a_{88} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{R_2}{R_1} & 0 & 0 & \frac{R_2 - R_1}{b} & 0 \end{array} \right\|$$

$$a_{9j} = E_{9j} \cdot C_{ij}$$

$$E_{91} = E_{99} = -E_{92} = -E_{97} = \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$a_{105} = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

Az A_{pl} mátrix elemei

$$\tilde{p}_{pl} = \left\| \underbrace{0 \dots 0}_{n} p_{pl} \right\|^T,$$

$$p_{pl} = \sqrt{\tau_l^2 - \frac{1}{3}(\sigma_r^{pl} - \sigma_z^{pl})^2}$$

A „képlékeny” terhelés.



OLDALNYOMÁSMENTES, LAPOS, EGYENLETESEN MEGOSZLÓ ERŐKKEL TERHELT, NYEREG ALAKÚ HIPERBOLIKUS PARABOLOIDHÉJAK STABILITÁSA

JANKÓ LÁSZLÓ*

[Beérkezett: 1978. december 28-án]

Ez a dolgozat egy három részből álló sorozat második része. Az első részben olyan elméleti kérdésekkel foglalkoztunk (a membránmegoldás létezése és egyértelműsége, kinematikai határozatlanság), amelyeknek megválaszolása kellő alapot nyújt a mostani stabilitási elemzések elvégzéséhez. Cikkünkben a nyereg alakú, oldalnyomásmentes, lapos HP-héjak *deformálatlan* alaphelyzetből történő *elágazási* jelenségét tárgyaljuk. Ennek során foglalkozunk azzal is, hogy a *nyúlásmentes alakváltozás* kialakulási lehetősége milyen hatással van a stabilitásvesztési folyamatra.

Jelölések

$C_{ij} = \cos \frac{i\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{j\pi}{2b} y;$	$C_{mn} = \cos \frac{m\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{2b} y;$
$D = \frac{Eh}{(1 - \mu^2)}$	fajlagos nyúlási merevség;
E	rugalmassági modulus;
F	a középfelületi erők feszültségfüggvénye ($F'' = N_x, F' = -N_{xy}, F'' = N_y$);
F_0	az alaphelyzet feszültségfüggvénye;
\bar{F}_0	az F_0 függvény első variációja ($F = F_0 + \bar{F}$);
$K = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$	fajlagos hajlítási merevség;
M_x, M_y, M_{xy}	a héj hajlítónyomatékai, csavarónyomatéka;
N_x, N_y, N_{xy}	a középfelületi erők fajlagos értékei;
N_{xb}, N_{xyb}, N_{yb}	a hajlítási elmélettel nyert középfelületi erők fajlagos értékei;
N_{xm}, N_{xym}, N_{ym}	a membránerők fajlagos értékei;
$S_{ij} = \sin \frac{i\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j\pi}{2b} y;$	$S_{mn} = \sin \frac{m\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y;$
U_b	a hajlítási erők potenciálja;
U_m	a középfelületi erők potenciálja;
V^m	a külső erők potenciálja;
$2a, 2b$	az x , ill. y irányú peremvetületek hossza;
f_a, f_b	az x , ill. y irányú ívek nyílmagasságai;
h	a héj vastagsága;
i , ill. j	x , ill. y irányú félhullámok száma (n indexszel nyúlásmentes alakváltozás);
p	a z tengely irányába mutató, egyenletesen megoszló, szimmetrikus, az alaprajzi vetület egységére vonatkozó felületi teher intenzitása;
\bar{p}_{cr}	a lineáris kritikus teher;
\bar{p}_{cr}	az átpattanási kritikus teher;
$\bar{p}_{cr,d}$	a deformált alaphelyzetből elágazó kihajlás lineáris kritikus terhe;
u, v	az x , ill. y irányú felületi érintők irányába eső eltolódások;
$\bar{x}(x, y); \bar{y}(x, y)$	a héj középfelületének ordinátái;
w	a felület pontjainak normális irányú eltolódása ($w = w_0 + \bar{w}$);

* Dr. Jankó László, 1036 Budapest, Lajos u. 142.

w_0	a középfelületi pontoknak az alaphelyzetben bekövetkező normális irányú eltolódása;
\bar{w}	az elágazási jelenségeknél kialakuló normális irányú eltolódásvariáció (δw_0);
w_k	a kezdeti hullámosság amplitúdója;
$\alpha = f_a/f_b$	nyilmagasságarány;
$\beta = a/h$	héjparaméter;
$\gamma = a'/b'$	oldalarány;
δ	a variációképzés szimbóluma (rövidítve: $\delta w_0 \equiv \bar{w}$);
η	a \bar{z} tengelyre illeszkedő síkban levő, a második felületi alkotóserreg irányába mutató koordináta;
$\lambda = \frac{P_{cr}^{lin}}{E}$	sajátérték;
μ	a harántkontrakciós tényező (0, 2);
ξ	a \bar{z} tengelyre illeszkedő síkban levő, az első egyenes felületi alkotóserreg irányába mutató koordináta;
Π	a külső és belső potenciális energiák összege;
$\varrho = f_b/b$	héjparaméter;
ω	az iránysíkok közötti szög fele;
$\Delta \Delta (\) = (\)^{IV} + 2(\)^{..''} + (\)^{::}$	a biharmonikus differenciál-operátor;
$L_\rho(f_1, f_2) = f_1' \cdot f_2'' - 2f_1'' f_2' + f_1'' \cdot f_2'$	a Pucher-féle differenciál-operátor.

1. Bevezetés

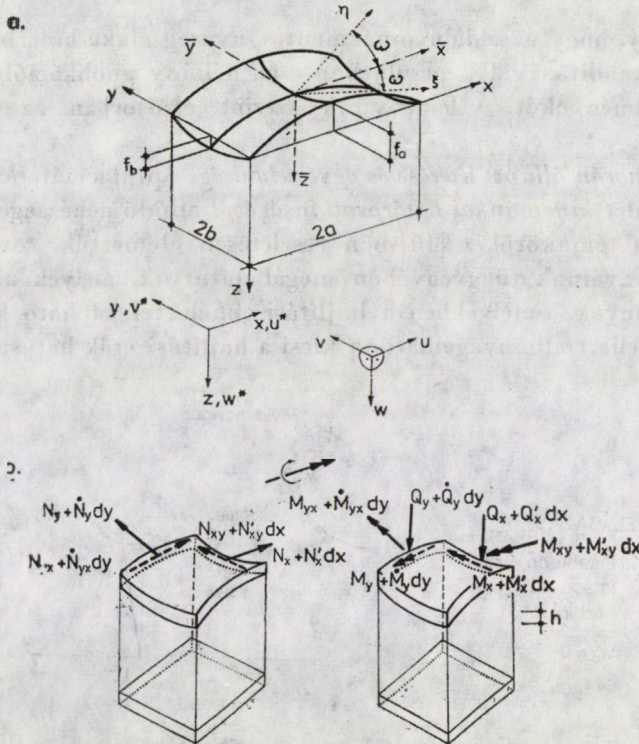
Tetszetős alakjuk és az egyenes alkotóik nyújtotta kedvező kivitelezési lehetőségeik miatt egyre sűrűbben építenek hiperbolikus paraboloid (a továbbiakban HP) alakú héjszerkezeteket. Ezeket leggyakrabban a felületi alkotóik vagy a főgörbületi íveik mentén támasztják meg peremtartókkal.

Az egyenes alkotók mentén oldalnyomásmentesen alátámasztott torznégyszöghéj statikai kérdéseit mind az elsőrendű, mind a másodrendű elmélettel részletesen tárgyalták [5], [7], [15], [19], [21].

A nyereg alakú, két-két főgörbületi íve mentén oldalnyomást és csavarást felvenni nem tudó (ún. oldalnyomásmentes) peremívekkel ellátott HP héjak esetében (1a. ábra) azonban nem ez a helyzet.

MIHAILESCU [16] a nyereg alakú HP-héjak elágazási jelenségét ($w_0 = 0$) — egytagú, szimmetrikus horpadási alakokat feltételezve — a síklemezek horpadási egyenlete alapján vizsgálta. A héj középső tartományában fellépő állandó nagyságú alkotóirányú membrán nyomóerőket egy helyettesítő síklemez peremlein működtetve határozta meg a kritikus alkotóirányú nyomóerő értékét. A figyelembe vett egytagú horpadási alakok nem a HP-héj mértékadó horpadási alakjai. Ezen megoldás alkalmazása jelentős túlméretezéshez vezet.

APELAND [1] — egytagú horpadási alakokkal — *oldalnyomásos* paraboloid héjak elágazási jelenségét tárgyalta. A levezetett összefüggései (gyakorlatban nem megvalósítható) nyíróerőmentes, az egyik irányban (x : felülről domború ívek) állandó nyomó-, a másik irányban (y : felülről homorú ívek) állandó húzóerőkkel dolgozó héjakra érvényesek. Peremfeltételei és a felvett (önkéntes) membrán erőjáték teljesen eltér az általunk vizsgálni kívánt esettől.



1. ábra. A nyereg alakú HP-héj geometriai adatai, belső erők és eltolódások

GIONCU [9] az Apeland-féle membrán erőjátékot vette alapul. Feltételezte, hogy a HP-héj az x irányban sok hullámban horpad. Ilyen feltételezésekkel arra az eredményre jutott, hogy a nyereg alakú HP-héj lineáris kritikus terhe azonos a vele megegyező görbületi viszonyú torznégyszög-héj kritikus terhével. Mind a membrán megoldásra, mind a horpadási alakra (egytagú) vonatkozó feltevései önkényesek, így megoldását kritikával kell fogadnunk.

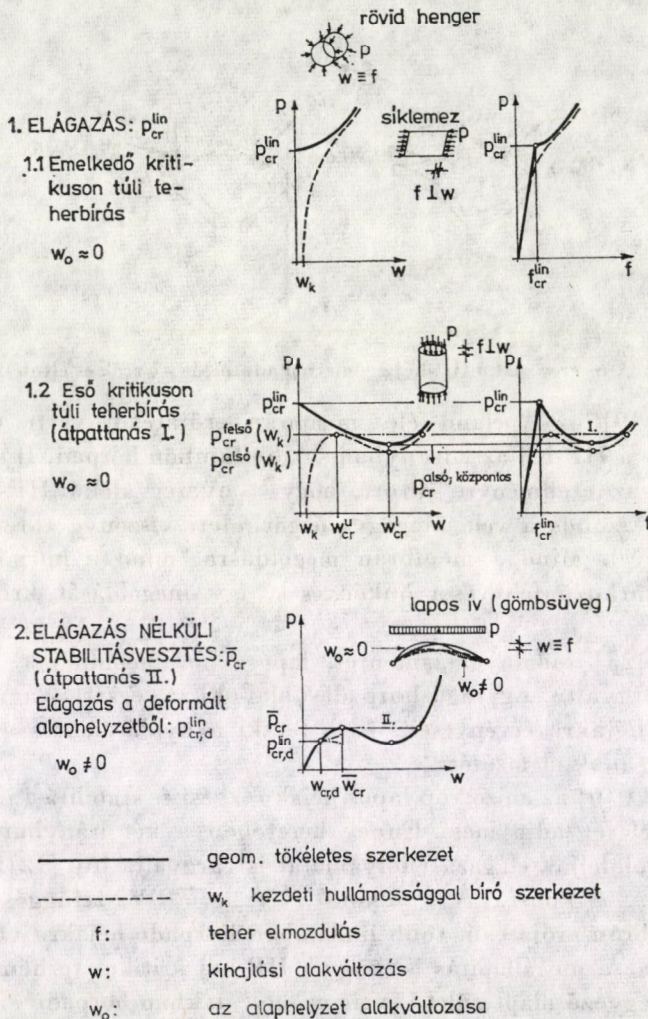
TSUBOI [23] oldalnyomásmentes, lapos paraboloidhéjak horpadását (elágazását) tárgyalta. Egytagú horpadási alakokkal végzett számításai négyzet alaprajzú héjakra érvényesek. Nem tér ki a nyúlásmentes alakváltozási lehetőség hatásának elemzésére.

DULÁCSKA [6] az anizotróp lapos héjak rezgési és stabilitási jelenségeinek általános elméletét adja meg. Ennek keretében a két irányban különböző görbületű kupolahéjak elágazási folyamatát is tárgyalta [6], [12]. Ezen eredményei az $N_{xm} = \text{konst.}$, $N_{ym} = \text{konst.}$, $N_{xym} = 0$ összefüggésekkel jellemezhető membrán erőjátékú, több hullámban horpadó héjakra vonatkoznak. Igen jelentős az a megállapítás is, hogy a HP-héj kritikus terhének alsó korlátja a héjjal egyező alapterületű, vele azonos alakban horpadó síklemez horpasztó feszültségének megfelelő teher.

Az a tény, hogy az oldalnyomásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhéjak stabilitásával kapcsolatban csak néhány publikációban találunk bizonyos eredményeket, véleményünk szerint elsősorban az alábbiakkal magyarázható:

- a membrán állapot létezése és egyértelműsége problémájából, valamint
- a felület kinematikai határozatlanságából adódó nehézségekből.

Ezeket a témaköröket [10]-ben részletesen elemeztük, továbbá a héj geometriai arányainak függvényében megállapítottuk, melyek azok a paraméter tartományok, amelyekben a hajlítási elmélettel kapható középfelületi erők hatása mellett elhanyagolhatóan kicsi a hajlítási erők hatása.



2. ábra. Stabilitási jelenségek teherbírási jelleggörbéinek néhány alapesete

Ezen geometriai arányok mellett jogos a lineáris kritikus teherre való vizsgálat. Cikkünkben a nyereg alakú, oldalnyomásmentes hiperbolikus paraboloidhéjak deformálatlan alaphelyzetből ($w_0 = 0$) történő *elágazási* jelenségét tárgyaljuk (2. ábra). A tárgyalás során foglalkozunk azzal is, hogy a *nyúlásmentes alakváltozás* kialakulási lehetősége [8], [10], [12], [13] milyen hatással van a stabilitásvesztési folyamatra.

Elméleti eredményeinket a gyakorlati tervezés igényeinek megfelelően diagramokkal szemléltetjük.

2. Az alaphelyzet jellemzése, alapfeltevések

A lapos héjak elsőrendű hajlítási elmélete alapján [10]-ben előállítottuk a $p = \text{const.}$ terhű héjszerkezet belső erőinek meghatározására szolgáló kifejezéseket:

$$p(x, y) = \frac{16}{\pi^2} p \sum_m^M \sum_n^N \frac{1}{mn} \sin \frac{m\pi}{2a} x \sin \frac{n\pi}{2b} y, \tag{2.1}$$

$$m = 1, 3, 5, \dots, M,$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, N$$

$$\alpha = f_a/f_b, \quad \beta = a/h, \tag{2.2a-d}$$

$$\gamma = a/b, \quad \varrho = f_b/b,$$

$$A_{mn} = \frac{768(1 - \mu^2)}{\pi^4} (\varrho\beta\gamma)^2 (m^2 - \alpha n^2), \tag{2.3}$$

$$B_{mn} = (m^2 + \gamma^2 n^2)^2, \tag{2.4}$$

$$N_{mn} = - \frac{A_{mn}}{A_{mn}(m^2 - \alpha n^2) + B_{mn}^2} \tag{2.5}$$

$$S_{mn} = \sin \frac{m\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{2b} y,$$

$$C_{mn} = \cos \frac{m\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{2b} y, \tag{2.6a-b}$$

$$n_x^0 = - \frac{8}{\pi^2} \sum_m^M \sum_n^N \frac{n}{m} N_{mn} S_{mn},$$

$$n_{xy}^0 = - \frac{8}{\pi^2 \gamma} \sum_m^M \sum_n^N N_{mn} C_{mn}, \tag{2.7a-c}$$

$$n_y^0 = - \frac{8}{\pi^2 \gamma^2} \sum_m^M \sum_n^N \frac{m}{n} N_{mn} S_{mn},$$

$$m = 1, 3, 5, \dots, M$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, N$$

$$\begin{aligned}
 m_x^{\circ} &= -\frac{64}{\pi^4} \sum_m^M \sum_n^N \frac{m}{n} \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} S_{mn}, \\
 m_{xy}^{\circ} &= -\frac{64(1-\mu)}{\pi^4} \gamma \sum_m^M \sum_n^N \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} C_{mn}, \\
 m_y^{\circ} &= -\frac{64}{\pi^4} \gamma^2 \sum_m^M \sum_n^N \frac{n}{m} \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn}' S_{mn}, \\
 w^{\circ} &= -\frac{3072(1-\mu^2)}{\pi^6} \beta^4 \sum_m^M \sum_n^N \frac{1}{mn} \frac{B_{mn}}{A_{mn}} N_{mn} S_{mn}, \\
 m &= 1, 2, 5, \dots, M \\
 n &= 1, 3, 5, \dots, N
 \end{aligned} \tag{2.8a-d}$$

$$\begin{aligned}
 N_{xb} &= n_x^{\circ} \frac{pa^2}{f_b}, \\
 N_{xyb} &= n_{xy}^{\circ} \frac{pa^2}{f_b}, \\
 N_{yb} &= n_y^{\circ} \frac{pa^2}{f_b},
 \end{aligned} \tag{2.9a-c}$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= (m_x^{\circ} + \mu m_y^{\circ}) pa^2, \\
 M_{xy} &= m_{xy}^{\circ} pa^2, \\
 M_y &= (m_y^{\circ} + \mu m_x^{\circ}) pa^2, \\
 w &= \frac{ph}{E} w^{\circ}.
 \end{aligned} \tag{2.10a-d}$$

A felsorolt összefüggések megfelelnek [2] megoldásának.

A stabilitási elemzéseket a lineáris elmélettel fogjuk elvégezni. Az elágazás bekövetkezte előtti *alaphelyzetet membrán állapotnak tekintjük*.

Ez azzal indokolható, hogy [10] szerint kb. az $f_a/f_b = (1,5 \div 2) \div 4$ geometriai arányok esetén a nyereg alakú, oldalnyomásmentes, egyenletesen megoszló erővel terhelt hiperbolikus paraboloidhéjak *hajlítási elmélettel számítható középfelületi erőinek hatása mellett a hajlítási hatások elenyészőek*. Ebben a paraméter tartományban tehát a vizsgált nyereg alakú HP-héjak membrán héjaknak tekinthetők. Ebből következően membrán erőknél a (2.9a-c) *folytonos* függvényekkel leírható normál- és csúsztatóerőket vehetjük.

A diszkontinuitásos membrán megoldás használata egyrészt kényelmetlen lenne, másrészt ilyen megoldás is csak meghatározott f_a/f_b arányok mellett lehetséges.

Az elágazás bekövetkezte előtti membrán jellegű alaphelyzet lehajlási alakváltozásai — amint a szakirodalomban [3], [12], [17], [22], [25] általánosan elfogadott — elhanyagolhatók, tehát

$$w_0 = 0. \tag{2.11}$$

Az ún. *deformálatlan alaphelyzetet* a (2.11) egyenlettel definiáljuk.

Tekintettel arra, hogy nem adható meg pontosan az az f_a/f_b érték, amelynél kisebb f_a/f_b arányok esetén már nem tekinthető a héj membránnak, a lineáris kritikus terheket a [10]-ben vizsgált teljes paraméter tartományban ($f_a/f_b = 1 \div 4$) meghatározzuk. Természetesen már előre tudjuk, hogy kb. az $f_a/f_b = 1 \div (1,5 \div 2)$ nyílmagasságarányokhoz számítható lineáris kritikus teher értékeknek csak elméleti jelentősége van. Ebben a tartományban a héjakat *csak nemlineáris elmélettel* — a hajlítónyomatékok figyelembevételével — lehet kezelni. Egy későbbi tanulmányunkban a nemlineáris elemzést is elfogjuk végezni [11]. A jelen tanulmányban meghatározott lineáris kritikus terhek és a nem lineáris elmélettel kapható teher-lehajlás diagramok segítségével megállapítható a szóban forgó HP-héjak teljes stabilitási viselkedése.

Az elemzések során a héjakat *geometriailag tökéletesnek, laposnak és lineárisan rugalmas* anyagúnak tételezzük fel.

Az egész felületre kiterjedő horpadási alakokat vizsgáljuk.

A külső terhektől független nyírási sajátfeszültségeket zérusnak tekintjük.

3. Az alapegyenletek

Ha a héjszerkezet horpadása deformálatlan alaphelyzetből ($w_0 = 0$) megy végbe, akkor az alaphelyzetbeli (0 indexszel ellátott) középfelületi erők U_{m0} és a hajlítási erők U_{b0} potenciális energiájának második variációja

$$\delta^2 U_{m0} = \frac{1}{Eh} \int_0^{2a} \int_0^{2b} (\bar{F}'^2 - 2\mu \bar{F}'^1 \bar{F}'^2 + \bar{F}'^2 + 2(1 + \mu) \bar{F}'^2 + (F_0'' \bar{w}^2 - 2F_0' \bar{w}' \bar{w}^1 + F_0'' w'^2) Eh) dx dy, \tag{3.1}$$

$$\delta^2 U_{b0} = K \int_0^{2a} \int_0^{2b} [\bar{w}^2 + 2\mu \bar{w}' \bar{w}^1 + \bar{w}'^2 + 2(1 - \mu) \bar{w}'^2] dx dy \tag{3.2}$$

alakban írható fel.

Felülvonással az alaphelyzetből a szomszédhelyzetbe való átmenet során kialakuló $\bar{w} \equiv \delta w_0$ lehajlás variációkat és az $\bar{F}(\bar{w}) \equiv \delta F_0$ feszültségfüggvény variációkat jelöltük.

A p külső terhelés V_0 potenciális energiájának második variációja jelen esetben zérus:

$$\delta^2 V_0 = 0. \tag{3.3}$$

Jelölje u_0 , ill. π_0 a belső, ill. a teljes potenciális energia második variációjának fajlagos értékét.

A teljes Π_0 alaphelyzetbeli potenciális energia második variációját végredményben a

$$\delta^2 U_0 = \int_0^{2a} \int_0^{2b} u_0 \, dx dy = \delta^2 U_{m0} + \delta^2 U_{b0}, \quad (3.4)$$

$$\delta^2 \Pi_0 = \int_0^{2a} \int_0^{2b} \pi_0 \, dx dy = \delta^2 U_0 + \delta^2 V_0 \quad (3.5)$$

összefüggések adják meg. A (3.5) energia kifejezés a horpadást követő és az azt megelőző állapot potenciális energiája $\Delta \Pi$ különbségének a kétszerese.

Az indifferens egyensúlyi helyzet kritériuma az, hogy — a rendszer erőinek változatlanul hagyása mellett — létezzék a teljes Π_0 potenciális energiának legalább egy olyan különleges második variációja, amelynek minden első variációja zérus. Így a p_{cr}^{lin} teher meghatározásához a

$$\delta(\delta^2 \Pi_0) = 0 \quad (3.6)$$

variációs feladatot kell megoldani.

A szóban forgó $\delta^2 \Pi_0$ funkcionált stacionárius értékévé tevő \bar{w} extrémális függvényt az alábbi Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}} - \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}'} \right)' - \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}''} \right)'' + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}^{(1)}} \right)''' + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}^{(2)}} \right)'''' = 0. \quad (3.7)$$

Ha a középfelületi erők U_{m0} potenciális energiája második variációjában az \bar{F} feszültségfüggvény differenciálhányadosait az \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} eltolódás variációk függvényében írjuk fel, majd a (3.7) egyenlet által kijelölt műveleteket elvégezzük, akkor a

$$K \Delta \Delta \bar{w} - L_p(\bar{F}, z) - L_p(F_0, \bar{w}) = 0 \quad (3.8)$$

egyenlethez jutunk. Mint ismeretes, a (3.8) összefüggés a lapos héjak deformálatlan alaphelyzetheől végbemenő elágazási jelenségének egyensúlyi egyenlete [6], [7].

Írjuk át a (3.1) kifejezést a következő alakra:

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{m0} = & \int_0^{2a} \int_0^{2b} [2(\bar{F}^{(1)}(\bar{v}' - \bar{w}z'') - \bar{F}^{(1)}(\bar{u}' + \bar{v}')) + \bar{F}^{(2)}(\bar{u}'' - \bar{w}z''')] - \\ & - \frac{1}{Eh} (\bar{F}^{(1)2} - 2\mu \bar{F}^{(1)} \bar{F}^{(2)} + \bar{F}^{(2)2} + 2(1 + \mu) \bar{F}^{(2)2}) + \\ & + F_0'' \bar{w}^2 - 2F_0' \bar{w}' \bar{w} + F_0 \bar{w}''^2] \, dx dy. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Ha most a kiegészítő potenciális energia stacionárius értékűségének tétele alapján a $\delta^2 U_0$ funkcionál variációképzését \bar{F} szerint hajtjuk végre, akkor a

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{F}^{11}}\right)^{11} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{F}^{.1}}\right)^{.1} + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{F}^{..}}\right)^{..} = 0 \tag{3.10}$$

Euler–Lagrange-féle variációs egyenlet segítségével kaphatjuk meg a lapos héjak elágazási feladatának kompatibilitási egyenletét [6], [7]:

$$\Delta \Delta \bar{F} + D(1 - \mu^2) L_p(\bar{w}, z) = 0. \tag{3.11}$$

A későbbiekben a (3.8) és (3.11) egyenleteket Galerkin-módszerrel meg fogjuk oldani. A pontos megoldás megadása előtt célszerűnek tartjuk olyan közelítő megoldás előállítását, mely a tárgyalt elágazási jelenség leglényegesebb vonásait egyszerű eszközökkel le tudja írni.

4. Közelítő megoldás

DULÁCSKA egytagú horpadási alakokat alapul vevő általános egyenletei [6] alapján ki lehet mutatni, hogy az egyenletesen megoszló p terhét az

$$N_{x0} = -\frac{pa^2}{2fa},$$

$N_{y0} = N_{xy0} = 0$ erőrendszerrel *ívszerűen* hordó nyereg alakú HP-héj (l. a 3a. ábrán legfelül) lineáris kritikus terhe a

$$p_{cr,h}^{lin} = \frac{E\pi^2}{24(1 - \mu^2)} \frac{\alpha \rho}{\gamma \beta^3} \frac{1}{i^2} (i^2 + \gamma^2 j^2)^2 + \frac{E32}{\pi^2} \frac{\alpha \gamma \rho^3}{\beta} \frac{1}{i^2} \left(\frac{\alpha j^2 - i^2}{i^2 + \gamma^2 j^2}\right)^2 \tag{4.1}$$

képletből számítható. Az első tag a hajlítási, a második tag a középfelület-nyúlási hatást fejezi ki. Nyúlásmentes alakváltozás esetében a (4.1) kifejezés a peremein a HP-héj peremerőivel terhelt, a héjjal azonos alakban horpadó *síklemes* kritikus terhét adja meg [6], [12].

A következőkben bebizonyítjuk, hogy a (4.1) összefüggésből kapható lineáris kritikus teher az oldalnyomásmentes HP-héj lineáris kritikus terhének *felső korlátja*:

$$p_{cr}^{lin} < p_{cr,h}^{lin} \tag{4.2}$$

A továbbiakban az említett ívszerűen dolgozó héjat *homogén feszültségi állapotú héjnak* nevezzük (h index).

4.1. Nyúlásmentes horpadás

A jelen fejezetben tárgyalt esetekben kell, hogy teljesedjék a nyúlásmentes alakváltozás [10]-ben levezetett kinematikai kritériuma:

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{i_n^2}{j_n^2}. \quad (4.3)$$

Amennyiben a HP-héj $N_{x_0} = \text{const}$, $N_{xy_0} = 0$, $N_{y_0} = \text{const}$. belső erőkkkel viselné a terheit, akkor — ha nyúlik a középfelület horpadása során, ha nem — a (3.8) és (3.11) ekkor állandó együtthatós differenciálegyenletek sajátfüggvénye

$$w_{ij} S_{ij} = w_{ij} \sin \frac{i\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j\pi}{2b} y$$

alakú lenne. Nyúlásmentes elágazási jelenségnél az i_n, j_n horpadási félhullám-számok között a (4.3) összefüggés által megszabott kapcsolat van:

$$\bar{w} = w_{i_n j_n} S_{i_n j_n}, \quad (4.4a-b)$$

$$S_{i_n j_n} = \sin \frac{i_n \pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j_n \pi}{2b} y.$$

Az Aimond-féle geometriai elmélet szerinti membránérők állandók ugyan, de a csúsztatóerők nem zérus nagyságúak az egész tartományban. Ilyen erőjáték esetében tehát a

$$w_{i_n j_n} \cdot S_{i_n j_n}$$

alakú egytagú függvény nem lehet pontos sajátfüggvény.

Ha a középfelületi erőket a (2.9a-c) folytonos függvényekkel határozzuk meg, akkor a változó együtthatójú (3.8) és (3.11) differenciálegyenleteknek a (4.4a-b) kifejezés nem lehet egzakt megoldása.

A most következő vizsgálatokkal igazoljuk a (4.2) egyenlőtlenség teljesülését. Ehhez először egytagú horpadási alakokat veszünk alapul, mert ha ezekre teljesül az egyenlőtlenség, akkor annak a szinusz alakú függvények kombinációjából álló pontos horpadási alakra még inkább teljesülnie kell. Ennek az az oka, hogy a feladat egyensúlyát leíró parciális differenciáloperátor pozitív definit. Ekkor a Galerkin-módszer felülről közelít, tehát több tag esetén kisebb sajátérték adódik.

Ha a homogén feszültségi állapotú héj a (4.4a-b) alakban nyúlásmentesen kihorpad, akkor az

$$X = K \Delta \Delta \bar{w} - L_p(F_0, \bar{w}), \quad (4.5)$$

$$\int_0^{2a} \int_0^{2b} X \cdot S_{i_n j_n} dx dy = 0 \quad (4.6)$$

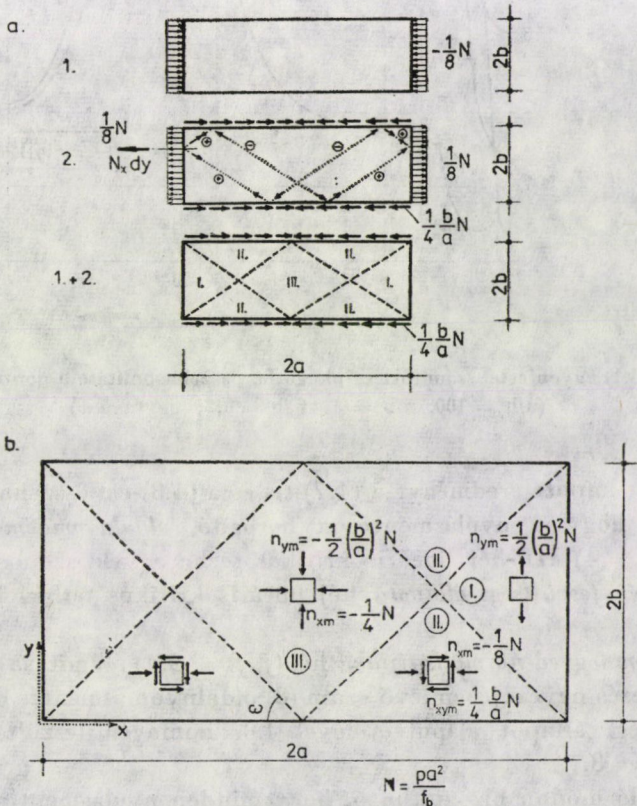
egyenletekkel jellemezhető Galerkin-módszerrel a következőket kapjuk:

$$\frac{\pi^4}{16} K \frac{b}{a^3} (i_n^2 + \gamma^2 j_n^2)^2 - \frac{\pi^2}{8} p_{cr,h}^{lin} \frac{ab}{f_a} i_n^2 = 0, \quad (4.7)$$

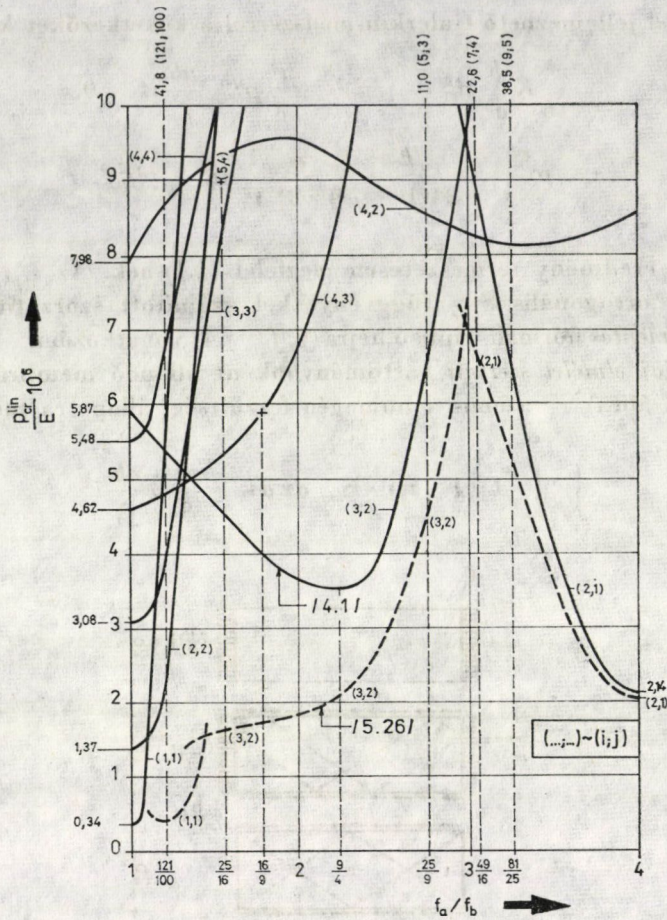
$$p_{cr,h}^{lin} = \frac{E\pi^2}{24(1 - \mu^2)} \frac{\alpha \rho}{\gamma \beta^3} \frac{1}{i_n^2} (i_n^2 + \gamma^2 j_n^2)^2. \quad (4.8)$$

Ez az eredmény természetesen megfelel (4.1)-nek. Az $L_p(F_0, \bar{w})$ függvénynek az ortogonális $S_{i_n j_n}$ függvényekkel számított szorzatintegrálja az oldalnyomásmentes normális típusú héjra ($f_a/f_b = 4$) vonatkozóan – az *Aimond-féle geometriai elmélet szerinti* tartományonként állandó membránérőket feltevélezve (3. ábra) – azonos a homogén feszültségi állapotra meghatározott értékkel:

$$\int_0^{2a} \int_0^{2b} L_p(F_0, \bar{w}) \cdot S_{i_n j_n} dx dy = \frac{\pi^2}{8} p \frac{ab}{f_a} i_n^2. \quad (4.9)$$



3. ábra. A normálhéj (voile normal) membránérői



4. ábra. A (4.1) egyenlettel számított csipkegörbe összehasonlítása a pontos megoldással ($a/h = 100$, $a/b = 1$, $f_b/b = 0,2$; egytagú \bar{w})

A most kapott eredményt a (4.7)-tel és a (4.8)-cal összehasonlítva, megállapítható, hogy a nyúlásmentesen horpadó, *oldalnyomásmentes normális típusú* ($f_a/f_b = 4$) HP-héj lineáris kritikus terhe a vele azonos alakban horpadó *homogén feszültségi állapotú* héj lineáris kritikus terhével *egyenlő* (egytagú \bar{w}).

A *háromnegyed normális típusú* héj ($f_a/f_b = 9/4$) számítása azt adta, hogy a (4.9) kifejezés nevezőjében levő szám (8) oldalnyomásmentes diszkontinuitásos feszültségi állapot alapulvételével 4.8, homogén feszültségi állapottal meghatározva 8.

Hasonló módon bizonyítható, hogy minden nyúlásmentes alakban horpadó HP-héjra vonatkozóan — melyeknek létezik a diszkontinuitásos membrán

állapota — a (4.9) kifejezést a homogén feszültségi állapot teszi minimálissá. Ebből következik a tárgyalt — egytagú \bar{w} -t alapul vevő — esetekre a (4.2) egyenlőtlenség teljesülése.

A fenti eredményekből [(4.7)—(4.9)] az is következik, hogy ha képes a *normális* típusú HP-héj nyúlásmentesen horpadni, akkor a lineáris kritikus terhének nagysága független a héjban a horpadás előtt kialakult belső erők x és y irányú eloszlásától.

Kimutattuk [10], hogy azon f_a/f_b tartományban, ahol a hajlítási hatások elhanyagolhatóan kicsik, a kettős Fourier-sorokkal meghatározott [(2.9a—c)] belső erőfüggvényeket jól közelítik a geometriai elmélet szolgáltatotta belső erők.

Ennek megfelelően, ha a membránerők nem állandóak, a (4.8) kifejezés akkor is *felső korlátja* a nyúlásmentesen horpadó héj *lineáris kritikus terhének*. Ezt a megállapítást támasztja alá a 4. ábra, melyen a (4.1) kifejezés szolgáltatott csipkegörbét tüntettük fel az 5. fejezetben előállított, egytagú \bar{w} horpadási alakokkal számolt, pontos megoldás csipkegörbével együtt. A (4.2) egyenlőtlenség feltétlenül kielégül, hiszen a sajátérték feladat *többtagú* (pontos *horpadási alakkal* végrehajtott számítása olyan csipkegörbét ad (6. ábra), mely a 4. ábrán látható, szaggatott vonallal rajzolt (egytagú horpadási alakokkal meghatározott) csipkegörbe alatt fut.

Az ábráról a (4.3) összefüggés segítségével állapíthatjuk meg a függőleges szaggatott vonalakkal jelzett — nyúlásmentes alakváltozási lehetőséggel bíró — HP-héjakhoz tartozó nyúlásmentes horpadási függvények alakját.

4.2. Nem nyúlásmentes horpadás

Kézenfekvőnek látszik az a feltételezés, hogy az oldalnyomásmentes HP-héj nyúlásmentes horpadási alakkal számított lineáris kritikus terhe kisebb, mint a nyúlásos alakváltozással meghatározható lineáris kritikus teher. Ez azonban csak bizonyos f_a/f_b arányok mellett igaz. A (4.3) összefüggés alapján könnyen belátható, hogy pl. a $f_a/f_b = 49/25$ nyílmagasságarány esetén x irányban 7, y irányban 5 félhullámot alkotna az egytagú nyúlásmentes horpadási alak.

Valószínű, hogy egy más — a *középfelület nyúlásával* járó — kisebb félhullámszámú horpadási alakhoz kisebb kritikus teher tartozik. A nyúlásmentes alakváltozást GEYLING [8] „reflexió-elmélete” alapján tárgyalva, a fentieket még szemléletesebben fogalmazhatjuk meg. Minél több (egyenes alkotók menti) körüljárás után térünk vissza valamely perempontba, annál rövidebb hullámhosszúságú nyúlásmentes alakváltozásra képes a héj. Ezt a rövid hullámhosszú nyúlásmentes alakváltozást pedig a héj K hajlítómerevsége nagymértékben meg tudja gátolni, s ekkor egy nagyobb hullámhosszúságú nyúlásos horpadási alak veszélyesebb lehet [12].

Ha horpadás közben nyúlik a középfelület. akkor a

$$\begin{aligned}\bar{w} &= w_{ij} S_{ij}, \\ S_{ij} &= \sin \frac{i\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j\pi}{2b} y\end{aligned}\quad (4.10a - b)$$

horpadási függvény S_{ij} tényezőjének az $L_p(F_0, \bar{w})$ függvénnyel vett szorzat-integráljához [(4.6)] hozzáadódik még az $L_p(\bar{F}, z)$ függvény megfelelő szorzat-integrálja is. A 4.1. fejezetben leírt módon bebizonyítható, hogy *egytagú nyúlásos horpadási alak esetén is teljesül a (4.2) egyenlőtlenség*. Az egytagú nyúlásos horpadási alakokkal végzett számításaink eredményei is a 4. ábrán láthatók. Az ábrán a függőleges szaggatott vonalak a nyúlásmentes alakváltozási lehetőséggel bíró HP-héjakat jelzik. Jól látható, hogy csak bizonyos f_a/f_b arányok mellett ($f_a/f_b = 1, 9/4, 4$) mértékadó a nyúlásmentes alakváltozás. Egyéb — nyúlásmentes alakváltozási lehetőséget adó — f_a/f_b arányokhoz (121/100, 25/16, 16/9, 25/9, 49/16, 81/25) a középfelület nyúlásával járó, de nagyobb félhullámhosszúságú horpadási alakok a veszélyesebbek.

Érdeemes megfigyelni, hogy ezek a nagyobb hullámhosszakot adó horpadási alakok éppen az $f_a/f_b = 1, 9/4$ és 4 arányokhoz tartozó nyúlásmentes horpadási alakok ($i_n = j_n = 1$; $i_n = 3, j_n = 2$; $i_n = 2, j_n = 1$). A pontos horpadási alak a (4.4a—b) és a (4.10a—b) típusú függvények lineáris kombinációja lesz [(5,1)]. A (4.2) egyenlőtlenség a *kombináció esetén méginkább kielégül*.

A *szeminormál héj* ($f_a/f_b = 1$) esetében azért nem teljesül a (4.2) egyenlőtlenség, mert ez a héj — és a hozzá hasonló viselkedésű, kb. $f_a/f_b = 1 \div 1,5$ paraméterű héjak — semmiképpen sem tekinthetők membránhéjaknak [10]. Ezek a héjak a terheket túlnyomórészt hajlítási erőkkkel viselik, így a hozzájuk tartozó (fiktív) lineáris kritikus terheket csak a teljesség kedvéért határoztuk meg.

Nagy *gyakorlati haszna* van annak az eredménynek, hogy a [(4.1) (ill. 4.8)] képlet a *normális típusú héjra* ($f_a/f_b = 4$) vonatkozóan mindössze kb. 4%-kal adott nagyobb értéket, mint az egy tagra vonatkozó (5.26) pontos megoldás (a 4. ábrán feltüntetett paraméterek esetén). 16 tagú horpadási függvénnyel számolva a hiba kb. 8%-ra adódott. Előtervezéshez a *háromnegyed normális* típusú héjak ($f_a/f_b = 9/4$) lineáris kritikus terhét is jó közelítéssel megkaphatjuk a (4.8) egyenlettel majdnem teljesen megegyező képletből. Az eltérés mindössze az, hogy a nevezőben levő szám 24 helyett 40. Ezt az eredményt a diszkontinuitásos membrán erőjáték alapulvételével kaptuk meg. A 6. ábrán látható pontos megoldással összehasonlítva a hiba kisebb, mint a normálhéjra ($f_a/f_b = 4$) vonatkozóan a (4.8) képlettel előállított értékek említett hibája.

5. A sajátértékfeladat pontos megoldása

5.1 *A horpadási alak felvétele*

Ismeretes, hogy a kis alakváltozásokat végző rudak és síklemezek elágazási jelenségének egyik fontos feltételezése a rúdtengely és a középfelület nyúlásmentessége [3], [17], [22].

Héjak lineáris kritikus terhének meghatározásakor azonban általában nem tételezhetjük fel a középfelület nyúlásmentességét [3], [12], [17], [22], [25]. Csak akkor maradhat a héjak középfelülete nyúlásmentes, ha a szerkezet geometriai arányai és megtámasztási módja lehetővé teszik a nyúlásmentes alakváltozási folyamatot [8], [10], [13].

A héj nyúlásmentes horpadási alakja bizonyos esetekben veszélyesebb, mint a nagyobb hullámhosszúságú, de a középfelület nyúlásával járó horpadási alak. A 4. fejezetben leírtak szerint a nyúlásmentes alakváltozási lehetőséggel bíró HP héjak bizonyos megszámlálhatóan végtelen elemű f_a/f_b halmazához ($f_a/f_b = 1, 9/4, 4, \dots$) az egytagú nyúlásmentes horpadási alak, egy másik megszámlálhatóan végtelen elemű f_a/f_b halmazhoz (121/100, 25/16, 16/9, 25/9, 49/16, 81/25, ...) pedig az egytagú nyúlásos horpadási alak ad kisebb lineáris terhet.

Természetesen a valóságban nem nyúlásmentes vagy nyúlási horpadási alakok léteznek, hanem különböző horpadási hullámhosszak, melyek közül a szerkezet a (3.6) feltételnek megfelelően maga választ.

A fentiek alapján a horpadási sajátfüggvényt a

$$\bar{w} = \sum_i^{I_i} \sum_j^{J_j} w_{ij} S_{ij} = \sum_i^{I_i} \sum_j^{J_j} \bar{w}_{ij} \tag{5.1}$$

függvényt sor alakjában vesszük fel. Az i és j horpadási félhullámszámokról nem kötjük ki, hogy a (4.3) összefüggéssel jellemzett kapcsolatban álljanak egymással, de ennek lehetőségét nem is zárjuk ki. A későbbiekben részletezett algoritmus automatikusan, saját maga választja ki a horpadási függvény nyúlásos és nyúlásmentes komponenseit.

A pontos sajátfüggvényt helyettesítő \bar{w} függvény minden egyes tagja kielégíti a feladat alábbi geometriai és statikai peremfeltételeit:

$$\bar{w}_{ij} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=2a}} = 0, \quad \bar{w}_{ij} \Big|_{\substack{y=0 \\ y=2b}} = 0, \tag{5.2a-d}$$

$$\bar{w}_{ij} \Big|_{\substack{x=0 \\ x=2a}} = 0, \quad \bar{w}_{ij} \Big|_{\substack{y=0 \\ y=2b}} = 0 \tag{5.3e-h}$$

Az \bar{F} sajátfüggvényt az

$$\bar{F} = \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} F_{ij} \cdot S_{ij} = \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} \bar{F}_{ij} \quad (5.4)$$

függvénysorral írjuk le. Ezen sor minden tagja teljesíti a feladat perem-normálerőkre vonatkozó peremfeltételeit:

$$\bar{F}_{ij}^{|} = 0, \quad \bar{F}_{ij}^{\cdot\cdot} = 0. \quad (5.5a-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=2b \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array} \right\}$$

5.2. Megoldás Galerkin-módszerrel

Mindenekelőtt a (3.11) egyenlet alapján meghatározzuk az (5.1) horpadási függvény egy-egy tagja és az (5.4) feszültségfüggvény egy-egy tagja közötti kapcsolatot:

$$F_{ij} = w_{ij} \frac{8}{\pi^2} Eha \gamma \varrho \frac{(\alpha j^2 - i^2)}{(i^2 + \gamma^2 j^2)^2}. \quad (5.6)$$

Ha most a (3.8) egyensúlyi egyenletbe behelyettesítjük az alaphelyzetbeli középfelületi erők (2.9a—c) függvényeit, valamint az (5.1), (5.4), (5.6) kifejezéseket, akkor az egyensúlyi egyenlet bal oldala (X) így írható fel:

$$\begin{aligned} \frac{4a}{\pi^2} \frac{X}{E} = & \frac{\pi^2}{48(1 - \mu^2)} \frac{1}{\beta^3} \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij} (i^2 + \gamma^2 j^2)^2 \cdot S_{ij} + \\ & + \frac{16}{\pi^2} \frac{\varrho^2 \gamma^2}{\beta} \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij} \frac{(\alpha j^2 - i^2)^2}{(i^2 + \gamma^2 j^2)^2} S_{ij} + \frac{p}{E} \frac{\gamma}{\varrho} \times \\ & \times \left[n_x^0 \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij} i^2 \cdot S_{ij} - 2n_{xy}^0 \gamma \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij} ij C_{ij} + n_y^0 \gamma^2 \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} w_{ij} j^2 S_{ij} \right]. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Az- X hibafüggvény akkor lenne pontosan zérussal egyenlő, ha az (5.1) horpadási függvény a valóságos horpadási függvényt teljes pontossággal határolná meg.

Az (5.1) kifejezés lineárisan független komponensekből áll, továbbá kielégülnek a feladat összes geometriai és statikai peremfeltételei, ezért teljesülnek a Galerkin-módszer alkalmazhatóságának feltételei [4], [17], [18], [25].

Ha az X hibafüggvényt a \bar{w} függvény komponenseinek ortogonális S_{ij} tényezői szerint sorbafejtve képzeljük el, akkor kitűnik, hogy a Galerkin-módszer alábbi — a virtuális elmozdulások tételéből (az anyagtörvény fel-

használásával) variációs úton származtatható — definiáló egyenlete [25]

$$\int_0^{2a} \int_0^{2b} X S_{i'j'} dx dy = 0 \tag{5.8}$$

$$i' = 1, 2, \dots, I_0$$

$$j' = 1, 2, \dots, J_0$$

az X hibafüggvény zérushoz való tartását fejezi ki, ha $I_0 \rightarrow \infty, J_0 \rightarrow \infty$. Az X hibafüggvény tehát ortogonális a \bar{w} függvény minden egyes komponensének S_{ij} tényezőjére.

A Galerkin-módszer pozitív definit operátorok esetében a p_{cr}^{lin} sajátértékeket felülről közelíti [4]. Ez következik abból is, hogy ez az eljárás nemcsak az alkalmazott rugalmasságtan közelítő differenciálegyenlet megoldási módszereinek egyike, hanem az energia-módszer egyik változatának is tekinthető.

Az (5.8) egyenlet megoldásakor a benne szereplő trigonometrikus függvényeknek a (2.9a–c) súlyfüggvényekre való ortogonalitását kell felírni.

Az (5.8) egyenlet az alábbi sajátértékfeladatra vezet:

$$A w = \lambda w. \tag{5.9}$$

A fenti egyenlet részletezése:

$$\lambda = \frac{E}{p_{cr}^{lin}}, \tag{5.10}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{D}^{-1} \mathbf{B}, \\ &\left. \begin{array}{l} (N_0 \times N_0) \quad (N_0 \times N_0) \quad (N_0 \times N_0) \\ \mathbf{D} = \langle d_{11}, d_{22}, \dots, d_{kk}, \dots, d_{N_0 N_0} \rangle, \\ N_0 = I_0 \cdot J_0, \\ d_{kk} = \frac{\pi^2}{48(1-\mu^2)} \frac{(i'^2 + \gamma^2 j'^2)^2}{\beta^3} + \frac{16}{\pi^2} \frac{\varrho^2 \gamma^2}{\beta} \frac{(\alpha j'^2 - i'^2)^2}{(i'^2 + \gamma^2 j'^2)^2}, \end{array} \right\} \tag{5.11a–d} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \{ b_{kl} \}, \\ b_{kl} &= - \frac{\gamma}{\varrho ab} \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left[n_x^{\circ} \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} i^2 S_{ij} - 2n_{xy}^{\circ} \gamma \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} ij C_{ij} \right. \\ &\quad \left. + n_y^{\circ} \gamma^2 \sum_i^{I_0} \sum_j^{J_0} j^2 S_{ij} \right] S_{i'j'} dx dy, \\ i' &= 1, 2, \dots, I_0, \quad j' = 1, 2, \dots, J_0 \\ k &= j' + J_0(i' - 1), \quad l = j + J_0(i - 1). \end{aligned} \right\} \tag{5.12a–e}$$

A \mathbf{B} mátrix nem diagonálmátrix, mert képzése során a belső erők függvényeiből származó S_{mn} , C_{mn} függvények — mint súlyfüggvények — is bekerülnek az integráljelek mögé (általános ortogonalitás).

Vizsgálatainkat konzervatív erőterben, az alap egyensúlyi helyzet kis környezetében végezzük, ezért a rendszer potenciális energiájának második variációja (a $2\Delta\Pi$ energianövekmény) az általános koordináták ($\bar{w}, \bar{w}', \bar{w}, \bar{w}'', \bar{w}', \bar{w}''$) homogén kvadratikus alakja. Ebből következően a \mathbf{B} mátrix (mely az alaphelyzetbeli erőknek az $\frac{1}{2}\bar{w}'^2, \bar{w}\bar{w}', \frac{1}{2}\bar{w}^2$ nyúlás és szögtorzulás növekményeken végzett munkájából származik) *valós szimmetrikus*. Belátható, hogy a \mathbf{D} mátrix *valós, pozitív definit* diagonális mátrix.

Ismeretes, hogy a valós szimmetrikus mátrixok — a normális típusú mátrixok unitér transzformációjának speciális eseteként — hasonlósági transzformációval diagonálizálhatók és sajátértékeik, valamint sajátvektoraik valósak [20], [24]. A $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{A}$ mátrix nem szimmetrikus, ezért az (5.9) *általánosított sajátérték feladatot* a $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$ felbontás segítségével *célszerű visszavezetni* olyan *speciális sajátérték feladatra*, melynek \mathbf{C} mátrixa valós szimmetrikus. A \mathbf{B} és \mathbf{D} mátrixokból származtatott \mathbf{C} mátrix minden sajátértéke és sajátvektora továbbra is valós marad. A \mathbf{D} mátrix említett felbontása a Cholesky-féle felbontás speciális esete.

A \mathbf{C} mátrix képzésének lépései a következők:

$$\mathbf{B}\underline{w} = \lambda\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\underline{w}. \quad (5.13)$$

Az (5.13) egyenletet balról szorozzuk meg $\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}$ -del:

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\underline{w} = \lambda\mathbf{D}^{\frac{1}{2}}\underline{w}. \quad (5.14)$$

Bevezetve a

$$\underline{w} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\underline{x} \quad (5.15)$$

transzformációt, az (5.13) egyenlet így alakul:

$$\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\underline{x} = \lambda\underline{x}. \quad (5.16)$$

A fenti egyenletben szereplő

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

valós szimmetrikus mátrix

$$(\mathbf{C} - \lambda\mathbf{E})\underline{x} = 0 \quad (5.18)$$

sajátérték feladata már a közismert *speciális sajátértékfeladat*. A \mathbf{C} mátrix általános eleme a \mathbf{B} és a \mathbf{D} mátrixok megfelelő elemeiből képezhető:

$$c_{kl} = \frac{b_{kl}}{+\sqrt{d_{kk}d_{ll}}}. \quad (5.19)$$

Elvégezve az (5.8) egyenlet által kijelölt integrálási műveleteket, az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$d_{kk} = \frac{\pi^6}{12 \cdot 288(1 - \mu^2)} \frac{\rho}{\gamma\beta^3} (i'^2 + \gamma^2 j'^2)^2 + \frac{\pi^2}{16} \frac{\rho^3 \gamma}{\beta} \frac{(\alpha j'^2 - i'^2)^2}{(i'^2 + \gamma^2 j'^2)^2}, \quad (5.20)$$

$$SZ = ij i' j' [2(m^2 j^2 + n^2 i'^2) - (m^2 + i^2 - i'^2)(n^2 + j^2 - j'^2)], \quad (5.21)$$

$$NE = [m^2 - (i + i')^2] [m^2 - (i - i')^2] [n^2 - (j + j')^2] [n^2 - (j - j')^2], \quad (5.22)$$

$$b_{kl} = \sum_m^M \sum_n^N N_{mn} \frac{SZ}{NE}, \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} i &= 1, 2, \dots, I_0, & j &= 1, 2, \dots, J_0, & m &= 1, 3, \dots, M, & n &= 1, 3, \dots, N, \\ i' &= 1, 2, \dots, I_0, & j' &= 1, 2, \dots, J_0, \\ k &= j' + J_0(i' - 1), \\ l &= j + J_0(i - 1). \end{aligned}$$

Innen könnyen felismerhető a **D** valós mátrix pozitív definit volta és a **B** valós mátrix szimmetriája.

Az S_{mn} súlyfüggvényekkel vett általános ortogonalitásból adódóan csak az

$$i \pm i' = 0, \pm 2, \pm 4, \dots, \quad (5.24a-b)$$

$$j \pm j' = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$$

feltételeknek eleget tevő helyeken lesz a **B** mátrixban zérustól különböző elem. A **D** és a **B** mátrixok szerkezete így ábrázolható (legyen pl. I_0 és J_0 páros szám):

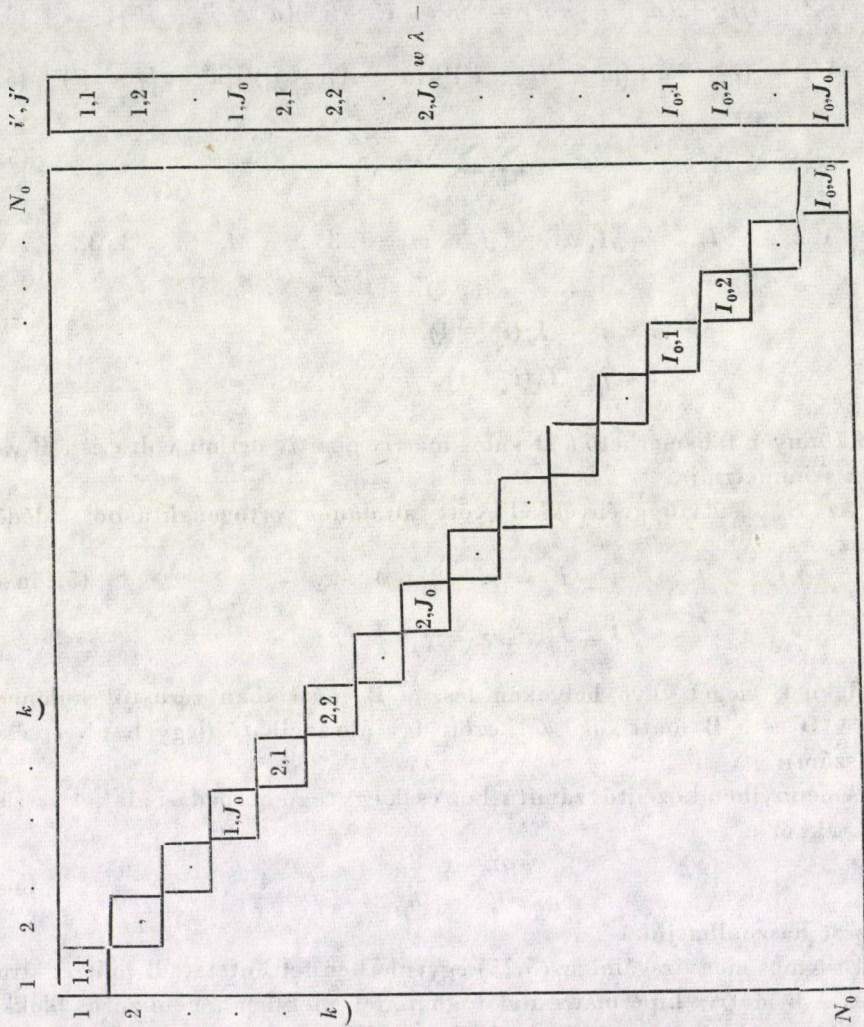
Amennyiben közelítő számításhoz csak egytagú horpadási alakot veszünk alapul, akkor a

$$\frac{p_{cr}^{lin}}{E} = \frac{d_{11}}{b_{11}} \quad (5.26)$$

kifejezést használhatjuk.

Érdeemes megvizsgálni az (5.25) egyenletben feltüntetett **B** mátrix struktúráját. A **B** mátrix hiper mátrixnak fogható fel, melyben a nem zérus blokkok „sakktáblaszerűen” helyezkednek el. Ez az általános ortogonalitásból (5.24a-b) adódik.

Amennyiben $I_0 = J_0$ - azaz x és y irányban azonos számú horpadási hullám alakul ki -, akkor a **B** mátrix független sorainak száma 4. Ez abból látható, hogy a „sakktáblaszerű” szerkezet miatt egy blokk sorhoz két független sor tartozik és a hiper mátrixban két független blokk sor ismétlődik. A fen-



(5.25)

D

$\alpha = 0.$

				k		l		N_0		ij'
1	1,1	2	1,3			3,1	3,3			1,1
2	1,2		1, J_0			3,2	3, J_0			1,2
	1,1		1,3			3,1	3,3			1, J_0
	1,2		1, J_0			3,2	3, J_0			
				2,1	2,3			$I_{0,1}$	$I_{0,3}$	2,1
				2,2	2, J_0			$I_{0,2}$	I_{0, J_0}	2,2
				2,1	2,3			$I_{0,1}$	$I_{0,3}$.
				2,2	2, J_0			$I_{0,2}$	I_{0, J_0}	2, J_0
	1,1		1,3			3,1	3,3			3,1
	1,2		1, J_0			3,2	3, J_0			3,2
	1,1		1,3			3,1	3,3			.
	1,2		1, J_0			3,2	3, J_0			3, J_0
				2,1	2,3			$I_{0,1}$	$I_{0,3}$	$I_{0,1}$
				2,2	2, J_0			$I_{0,2}$	I_{0, J_0}	$I_{0,2}$
				2,1	2,3			$I_{0,1}$	$I_{0,3}$.
				2,2	2, J_0			$I_{0,2}$	I_{0, J_0}	I_{0, J_0}

B

tiéből nem következik az, hogy a \mathbf{B} mátrix nem egyszerű struktúrájú, hiszen minden valós szimmetrikus mátrixnak van N_0 számú független (bal és jobb oldali) sajátvektora. Arról van csupán szó, hogy az N_0 számú (független) \bar{w}_k sajátvektor bármelyike az (5.1) trigonometrikus összeg meghatározott 4 különböző csoportja *egyikének* (változó számú) tagjaiból áll. Például $N_0 = 25$ esetén a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ sajátértékekhez tartozó sajátvektorok csak az $S_{11}, S_{13}, S_{15}, S_{31}, S_{33}, S_{35}, S_{51}, S_{53}, S_{55}$ komponensek változó arányú lineáris kombinációból tevődnek össze. Ennek a ténynek *komoly számítástechnikai előnye van*, ti. a \mathbf{C} mátrix $\text{Det}(\lambda) = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{C}|$ teljes karakterisztikus polinomjának felírása helyett elég az említett 4 csoportnak megfelelő lényegesen alacsonyabb fokszámú 4 polinomot előállítani. Ez az előny természetesen numerikus módszer alkalmazása esetén is lényeges.

Az említett négy S_{ij} csoport függetlenségének szemléletes fizikai magyarázata van. *A horpadási függvényeknek négyféle jellegzetes alakja van:*

- a horpadási alakok \bar{x} , ill. \bar{y} irányú metszetei szimmetrikusak az \bar{xz} , ill. az \bar{yz} síkra,
- a metszetek antimetrikusak az \bar{xz} , ill. az \bar{yz} síkra,
- az \bar{x} irányú metszet szimmetrikus az \bar{xz} síkra, az \bar{y} irányú metszet antimetrikus az \bar{yz} síkra,
- az \bar{x} irányú metszet antimetrikus az \bar{xz} síkra, az \bar{y} irányú metszet szimmetrikus az \bar{yz} síkra.

A N_0 számú sajátvektor bármelyike csak a fenti négy eset egyikének tagjaiból állhat.

Ha $I_0 \neq J_0$ — azaz x és y irányban különböző a horpadási függvény tagjainak száma —, akkor a \mathbf{B} mátrix független sorainak száma 2 vagy 4. Ekkor ui. a szimmetria és az antimetria négyféle kombinációjából kettő ($J_0 = 1$) vagy négy marad. A kétféle kombináció csak elvi lehetőség, hiszen J_0 a megfelelő pontosság eléréséhez nagyobb kell legyen mint 1.

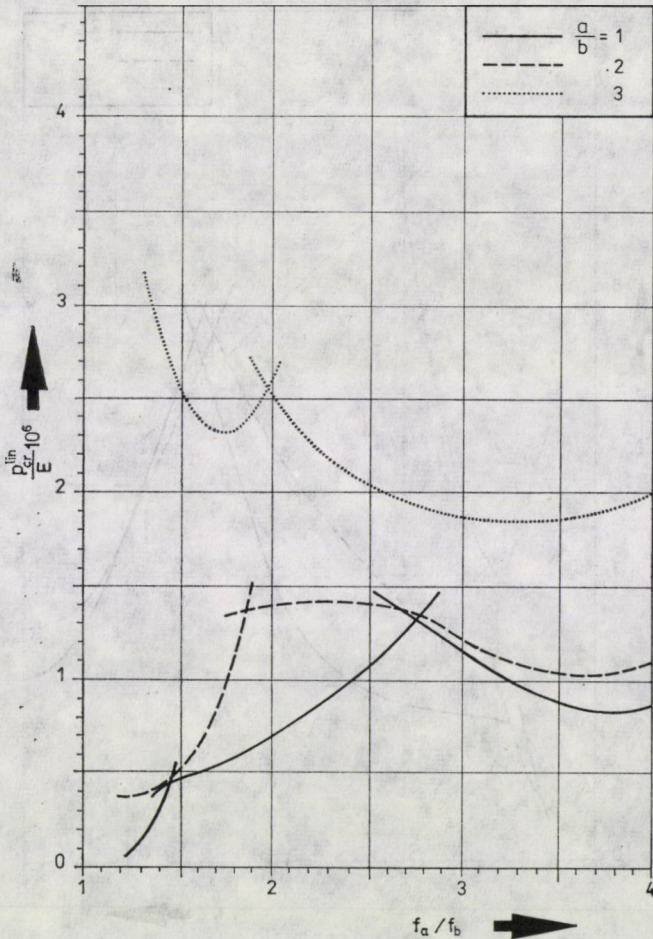
Végül rámutatunk arra, hogy a levezetett összefüggések némi átalakítással felhasználhatók *parabola vezérgörbéjű dongahéjak* ($f_b = 0$) és *elliptikus paraboloidhéjak* ($f_b \rightarrow -f_b$) vizsgálatára is.

5.3. Numerikus vizsgálatok

A \mathbf{C} mátrix (ill. 4 független sor megfelelő permutálásával kapott 4 független blokk) sajátértékeinek és sajátvektorainak meghatározásához a J. G. FRANCIS által javasolt, numerikusan rendkívül stabil ún. *QR* algoritmusnak a Wielandt-iterációval összekapcsolt változatát alkalmaztuk [20], [24].

Az 5.—13. ábrákon látható csipkegörbéket a vasbeton héjak legtöbbjét jól jellemző geometriai arányokra határoztuk meg.

A horpadási függvény tagjainak száma általában $I_0 \cdot J_0 = N_0 = 4 \times 4 = 16$ volt.

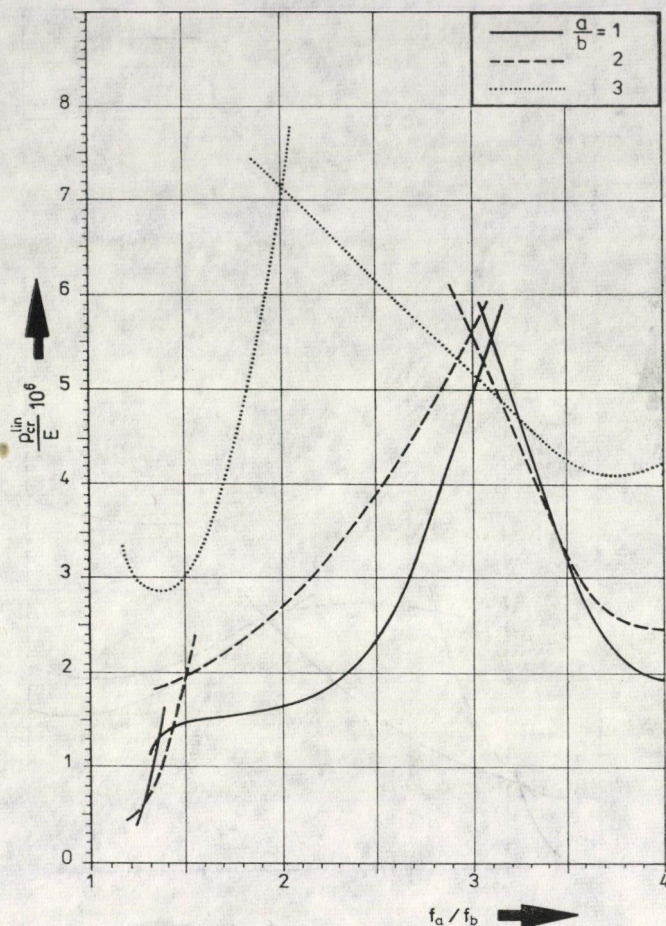


5. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 100$, $f_b/b = 0,1$)

A számítások azt az érdekes és a gyakorlat szempontjából hasznos eredményt adták, hogy a horpadási függvényeknek minden esetben volt *domináns tagja*.

Különösen az $f_a/f_b = 9/4$ (háromnegyed normális típusú héj) és az $f_a/f_b = 4$ (normális típusú héj) geometriai arányok esetén dominált egy-egy tag, mégpedig éppen a *nyúlásmentes alakváltozást* okozó tag.

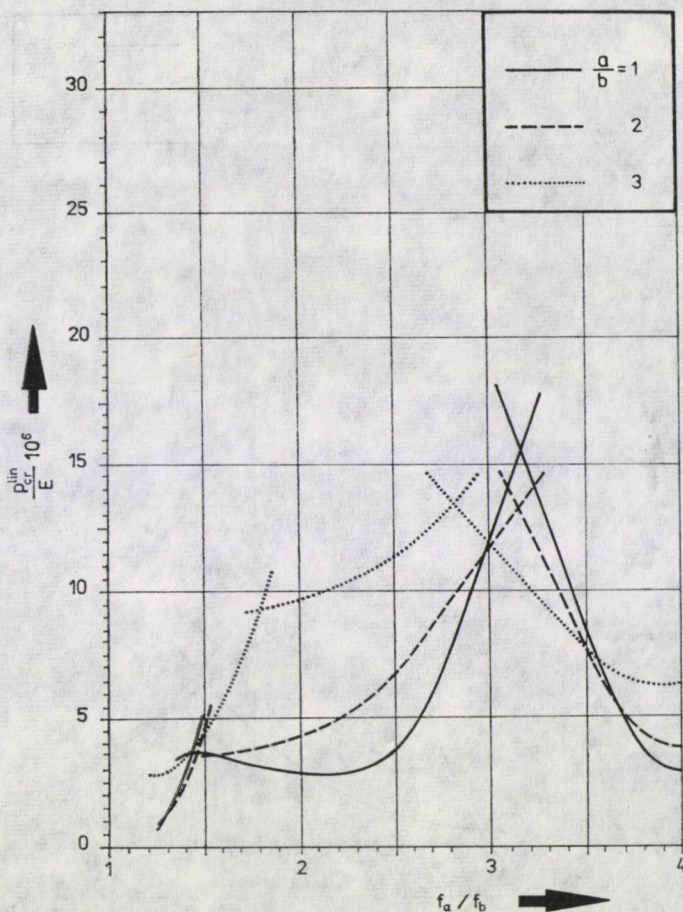
Azt találtuk, hogy a *háromnegyed normális típusú* héjat a teljes többtagú horpadási alakkal számolva, a lineáris kritikus teher általában kevesebb, mint 25%-kal adódik kisebbre, mint a *nyúlásmentes* horpadást okozó — $i_n = 3$, $j_n = 2$ számokkal meghatározott alakú — *domináns tagnak* megfelelő teher.



6. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 100$, $f_b/b = 0,2$)

A normális típusú héj horpadásánál az $i_n = 2$, $j_n = 1$ számokkal jellemezhető nyúlásmentes tag a domináns. Az egytagú és a teljes horpadási alakhoz tartozó lineáris kritikus terhek eltérése általában kisebb mint 15%. Ezek az eredmények összhangban vannak a 4.1 és 4.2 pontokban tett azon megállapítással, hogy e két héjtípus egytagú horpadási alakhoz tartozó lineáris kritikus terhei előtervezéshez kielégítő közelítéssel a diszkontinuitásos membrán megoldásnak megfelelő (4.8) képletből számíthatók [$f_a/f_b = 9/4$ esetén a képlet nevezőjébe 24 helyett 40 írandó (vö. a 4.2. fejezet végén található megjegyzéssel)].

Az $f_a/f_b = 9/4 \div 4$ nyílmagasságarányok esetén a horpadási alak domináns tagja vagy az $i_n = 3$, $j_n = 2$, vagy az $i_n = 2$, $j_n = 1$ félhullámhosszú szinusz függvény.

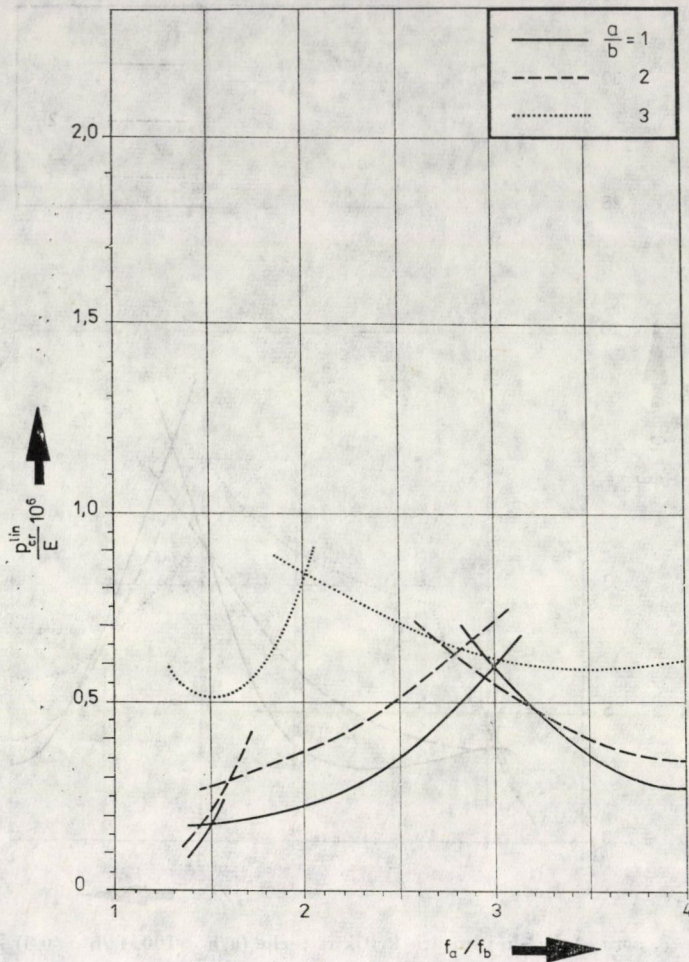


7. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 100$, $f_b/b = 0,3$)

Az egytagú — ezen esetekben már a középfelület nyúlását is kiváltó — horpadási alakokhoz tartozó lineáris kritikus teher általában kevesebb, mint 30%-kal nagyobb, mint a pontos érték.

A vizsgált $f_a/f_b = 1 \div 4$ tartományban a legnagyobb lineáris kritikus teher értékek kb. az $f_a/f_b = 3$ arány környezetében találhatóak. Ezek a terhek lényegesen meghaladják a normális és háromnegyed normális típusú héjakhoz tartozó értékeket. Megfigyelhető, hogy kb. az $f_a/f_b = 3$ aránynál a görbék igen meredeken futnak, ezért valószínű, hogy ezek a héjak eléggé érzékenyek a geometriai tökéletlenségekre (az f_a/f_b arány kismértékű megváltozására). A görbék menetéből arra is következtethetünk, hogy az f_a/f_b arány megváltozásával a kritikus teher csökkenhet is, nőhet is.

Kb. az $f_a/f_b = 1,5 \div 2,25$ tartományban az esetek többségében (általában

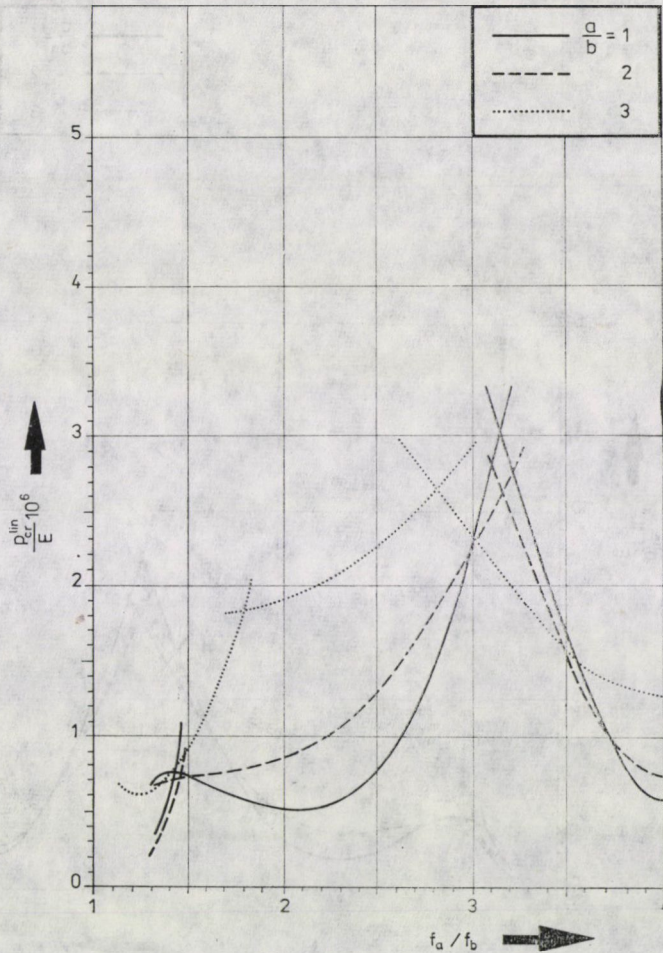


8. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 150$, $f_b/b = 0,1$)

ha $a/b \neq 3$) az $f_a/f_b = 9/4$ paraméterhez tartozó horpadási alak a mértékadó.

A szeminormál héj környezetében (kb. $f_a/f_b = 1 \div 1,5$) a számított lineáris kritikus terheket csak a teljesség kedvéért ábráztuk, hiszen ezen geometriai arányok esetén a héjat csak nem lineáris elmélettel szabad vizsgálni. Ennek az az oka, hogy pl. a szeminormál héj túlnyomórészt hajlítónyomatékokkal viseli a terheit. Középfelületi erőket csak a teherfüggvénynek a nyúlásmentes lehajlási alakoktól eltérő alakú ($m \neq n$) teherkomponensei váltanak ki benne [10].

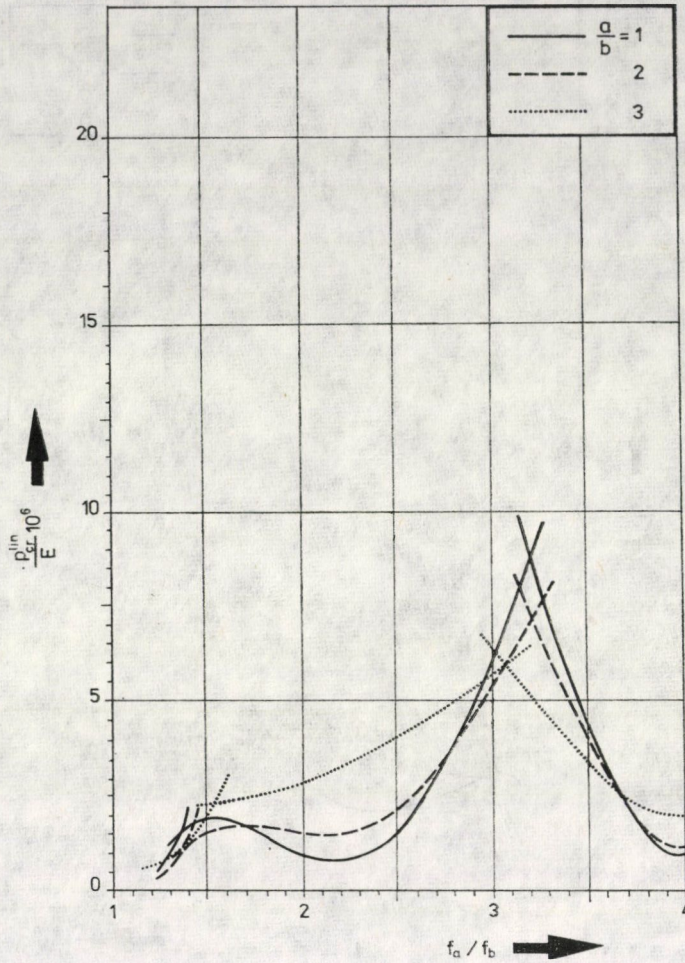
A számított lineáris kritikus terheket az $f_a/f_b = 1$ paraméterhez nem



9. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 150$, $f_b/b = 0,2$)

tüntettük fel; ezeknek az igen *nagy fiktív értékeknek nincs gyakorlati jelentőségük*. Megjegyezzük, hogy kb. az $f_a/f_b = 1 \div 1,5$ nyílmagasságarányoknál a horpadási alak domináns komponense az $i_n = j_n = 1$ félhullámszámú *nyúlásmentes* tag. Az egytagú horpadási alakokhoz tartozó lineáris kritikus terhek hibája a pontoshoz képest ekkor általában jóval nagyobb, mint az egyéb héjakra vonatkozó említett eltérés.

Természetesen nem létezik olyan meghatározott f_a/f_b határ, melytől kezdve jogos a héjat lineáris elmélettel kezelni. Ez a határ az $f_a/f_b = 1,5$ és az $f_a/f_b = 2$ értékek között helyezkedik el [10]. A nyereg alakú oldalnyomásmentes HP-héjak stabilitási viselkedése elméleti tisztázásához a nem lineáris



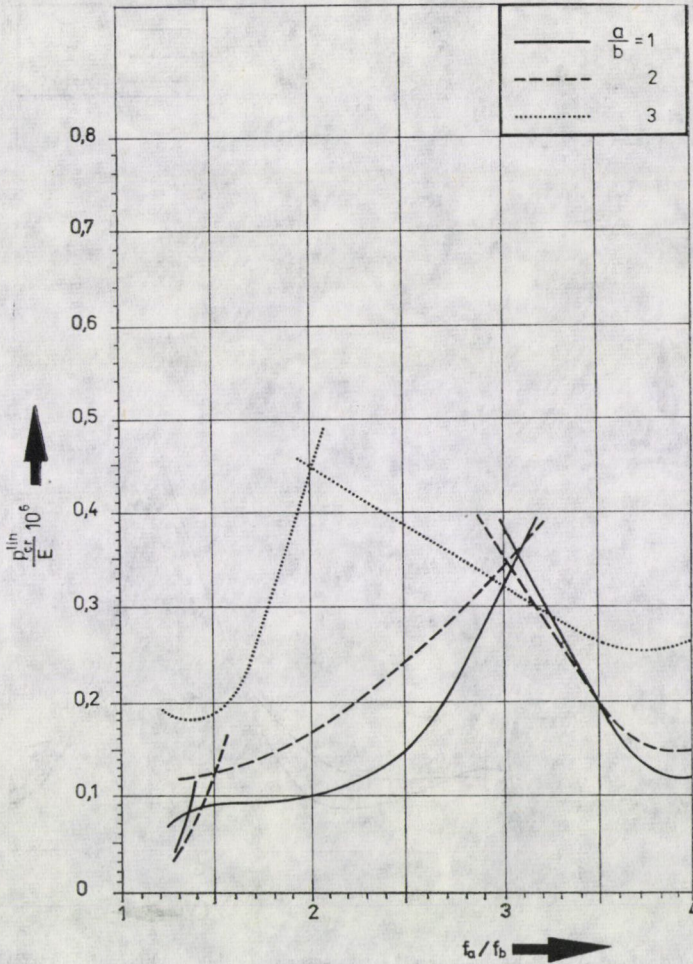
10. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 150$, $f_b/b = 0,3$)

elmélettel meghatározható egyensúlyi út főbb jellegzetességeinek ismerete is kívánatos. Ezzel külön tanulmányban foglalkozunk [11].

6. Összefoglalás

Jelen dolgozatban az egyenletesen megoszló erőkkkel terhelt, lapos, nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhéjak deformálatlan alaphelyzetből történő elágazási jelenségével foglalkoztunk.

Alapvetően támaszkodtunk egy korábbi munkánkra [10], melyben



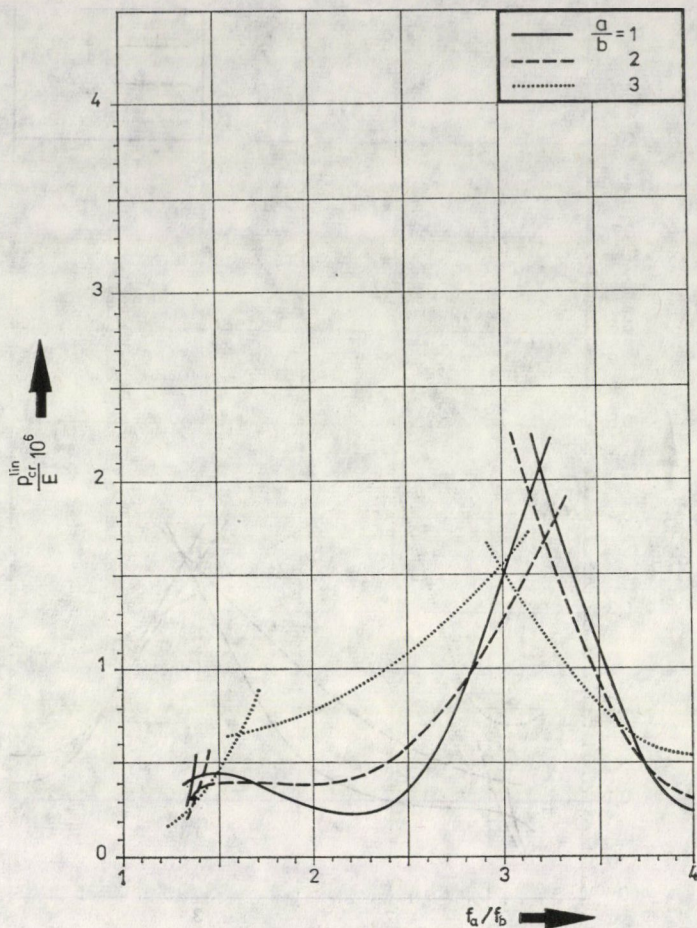
11. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 200$, $f_b/b = 0,1$)

kimutattuk, hogy mely geometriai arányok esetén jogos a héjak stabilitási vizsgálatát lineáris elmélettel elvégezni. Ez a tartomány közelítőleg az $f_a/f_b = (1,5 - 2) \div 4$ nyílmagasságarányokkal jellemezhető. Ezen esetekben a membránhatás mellett a hajlítási hajás elhanyagolhatóan kicsi.

Az elemzések során nagy súlyt helyeztünk a nyúlásmentes horpadási lehetőség vizsgálatára is.

A probléma sajátérték-egyenletét a Galerkin-módszer alkalmazásával állítottuk elő.

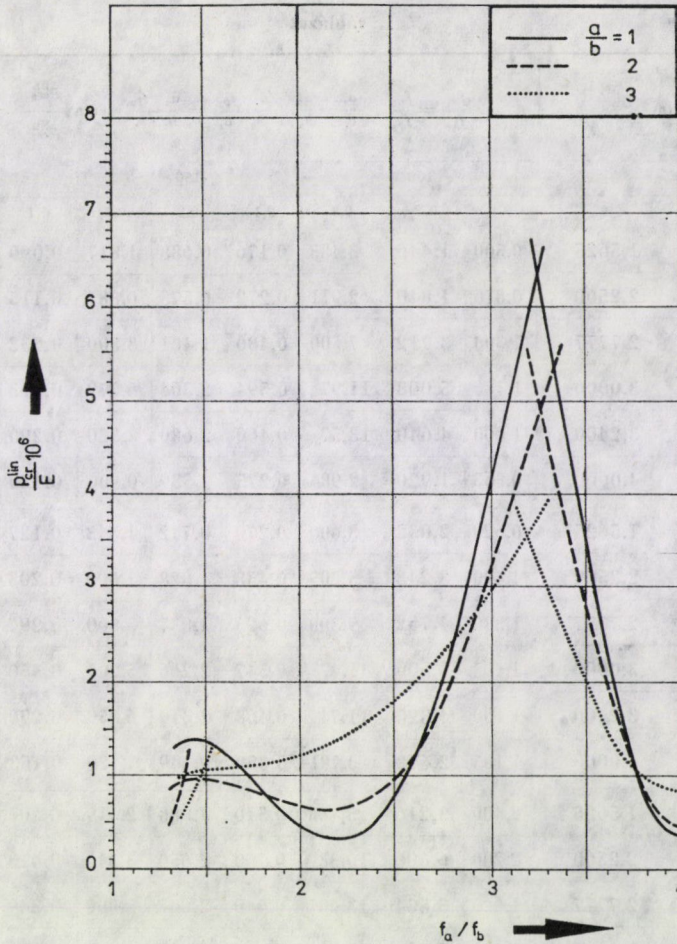
A numerikus vizsgálatok előtt a kapott mátrixok speciális szerkezete alapján megállapítottuk, hogy bármelyik horpadási alak csak a szimmetria



12. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 200$, $f_b/b = 0,2$)

és az antimetria négyféle kombinációja egyikének megfelelő tagokból állhat. E tagok között vannak nyúlásmentes és nyúlásos komponensek is. A szám-szerű eredmények azt adták, hogy minden horpadási alakban található domináns tag.

Ez a tag a szeminormális ($f_a/f_b = 1$), a háromnegyed normális ($f_a/f_b = 9/4$), valamint a normális ($f_a/f_b = 4$) típusú héjak esetében éppen e héjak *nyúlásmentes* lehajlási alakjával azonos. Egyéb héjak horpadási alakjának domináns tagja vagy a szeminormális, vagy a háromnegyed normális, vagy a normális típusú héjak horpadási alakjának — ezen esetekre már a középfelület *nyúlását* is kiváltó — domináns tagjával egyezik meg.



13. ábra. A HP-héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 200$, $f_b/b = 0,3$)

A kapott csipkegörbék minimum pontja a lényegében nyúlásmentesen horpadó héjak f_a/f_b aránya közelében van. A lineáris kritikus terhek legnagyobb értékei az $f_a/f_b = 3$ paraméterhez közel eső arányokhoz tartoznak.

Vizsgálataink során a teljesség kedvéért meghatároztuk a szeminormál héj nyílmagasságarányához közel eső héjak fiktív lineáris kritikus terheit is. Ezen héjak a terheket túlnyomórészt hajlítási erőkkel viselik, ezért stabilitási vizsgálatukat nemlineáris elmélettel kell elvégezni. Ezzel a kérdéssel külön tanulmányban foglalkozunk [11].

I. táblázat

		$\frac{P_{cr}^{lin}}{E} \cdot 10^4$	$\frac{f_{a_1}}{f_{b_1}} = \frac{f_{a_2}}{f_{b_2}}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_1 \cdot f_{b_1}}{h_1 \cdot b_1} = \frac{a_2 \cdot f_{b_2}}{h_2 \cdot b_2}$ esetén $\frac{P_{cr}^{lin}}{P_{cr_1}^{lin}} = \left(\frac{a_1/h_1}{a_2/h_2}\right)^4$									
			100			150			200			
		$a/h =$										
		$f_b/b =$	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3	0,1	0,2	0,3	
$\frac{a}{b}$	1	f_a	1,5625	0,500	1,440	3,483	0,176	0,688	1,817	0,090	0,425	1,258
		f_b	2,2500	0,876	1,840	2,911	0,272	0,575	0,881	0,115	0,242	0,372
		f_a	2,7777	1,300	3,712	7,500	0,480	1,481	3,800	0,232	0,880	2,450
		f_b	3,0000	1,130	5,008	11,97	0,594	2,364	6,279	0,313	1,480	4,136
		f_a	3,2400	1,000	4,640	13,57	0,460	2,680	8,320	0,290	1,900	6,303
		f_b	4,0000	0,865	1,920	2,984	0,275	0,589	0,900	0,120	0,250	0,386
	2	f_a	1,5625	0,620	2,032	3,606	0,270	0,712	1,543	0,127	0,386	0,920
		f_b	2,2500	1,400	3,248	5,205	0,438	1,028	1,600	0,203	0,449	0,685
		f_a	2,7777	1,330	4,752	9,300	0,625	1,837	3,800	0,297	0,930	2,050
		f_b	3,0000	1,195	5,600	11,47	0,547	2,266	5,281	0,350	1,299	3,265
		f_a	3,2400	1,100	4,320	11,74	0,468	2,319	6,850	0,270	1,600	4,800
		f_b	4,0000	1,105	2,448	3,791	0,350	0,749	1,120	0,153	0,321	0,490
	3	f_a	1,5625	2,400	3,216	5,483	0,510	1,083	2,319	0,201	0,590	1,025
		f_b	2,2500	2,200	6,608	10,38	0,760	2,050	3,340	0,413	0,924	1,446
		f_a	2,7777	1,920	5,584	13,20	0,640	2,607	5,000	0,349	1,340	2,500
		f_b	3,0000	1,880	5,168	11,70	0,610	2,311	5,690	0,323	1,473	3,061
		f_a	3,2400	1,860	4,624	9,690	0,590	1,914	4,870	0,289	1,180	3,320
		f_b	4,0000	2,000	4,224	6,440	0,610	1,272	1,998	0,264	0,550	0,850

IRODALOM

1. APELAND, K.: A Note on the Stability Problem of Shallow Translational Shells. *Journal of Applied Mechanics*. Sept. (1960), 586—588
2. BELEŞ, A.—SOARE, M.: Das elliptische und hyperbolische Paraboloid im Bauwesen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin-Akademie-Verlag, Bukarest 1970
3. BÜRGERMEISTER, G.—STEUP, H.—KRETZSCHMAR, H.: Stabilitätstheorie II. Akademie-Verlag, Berlin 1957
4. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. Leipzig 1949
5. DAYARATNAM, P.—GERSTLE, K. H.: Buckling of Hyperbolic Paraboloids. *Proc. World Conference on Shell Structures, San Francisco* (1962), 289—296

6. DULÁCSKA, E.: Vibration and Stability of Anisotropic Shallow Shells. *Acta Techn. Hung.* 65 (1969), 225—260
7. DULÁCSKA, E.: Stability of Anisotropic Hyperbolic Paraboloid Shells. *Acta Techn. Hung.* 59 (1967), 123—130
8. FLÜGGE, W.—GEYLING, F. T.: A General Theory of Deformations of Membrane Shells. *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 17 (1957), 23—46
9. GIONCU, V.—IVAN, M.: Instabilitatea Structurilor diu Placi Curbe Subțiri. Editura Ac. Rep. Socialiste România 1978
10. JANKÓ, L.: Egyenletesen megoszó erőkkel terhelt, lapos, oldalyomásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhéjak membrán- és hajlítási elméletének összehasonlítása. *Műszaki Tudomány* (megjelenés alatt)
11. JANKÓ, L.: Nyereg alakú, oldalyomásmentes, lapos, hiperbolikus paraboloidhéjak egyenletesen megoszó terhelés alatti egyensúlyi útjának nemlineáris vizsgálat. *Műszaki Tudomány* (megjelenés alatt)
12. KOLLÁR, L.—DULÁCSKA, E.: Schalenbeulung. Werner, Düsseldorf—Akadémiai Kiadó, Budapest 1974
13. KOLLÁR, L.: Héjak nyúlásmentes alakváltozásai. *Építés- és Építészettudomány* 3 (1971), 19—38
14. KOLLÁR, L.: Schalenkonstruktionen. Sonderdruck aus dem Beton-Kalender 1974. Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin—München—Düsseldorf 1974
15. LEET, K. M.: Study of Stability in the Hyperbolic Paraboloid. *Journ. Eng. Mech. Divis. Proc. ASCE*, 92 (1966), No. 1, 121—142
16. MIHAILESCU, M.: Despre stabilitatea invelitorilor subtiri in formă de paraboloidi hiperbolici. *Industria constructiilor și a materialelor de Construcții*. V. 2. (1954), 66—70
17. PFLÜGER, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heilderberg—New York 1964
18. PONOMARJOV, Sz. D.: Szilárdsági számítások a gépészetben. 1. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1963, 357—381
19. RALSTON, A.: On the Problem of Buckling of a Hyperbolic Paraboloid Shell Loaded by its Own Weight. *Journ. Math. Phys.* 35 (1956), 53—59
20. RALSTON, A.: A First Course in Numerical Analysis. McGraw-Hill Book Company. New York—Toronto—London 1963
21. REISSNER, E.: On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells. Boston Society of Civil Engineers (1955), 100—133
22. TIMOSHENKO, S. P.—GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Book Company, New York—Toronto—London 1961
23. TSUBOI, Y.: Parametric Study of Buckling of Shells with Reference to Gaussian Curvature. *IASS World Congress on Space Enclosures*. Building Research Centre. Concordia University Montreal (1976) July, 353—363
24. WILKINSON, J. H.—REINSCH, C.: Linear Algebra. Springer Verlag, Berlin 1971
25. WOLMIR, A. S.: Biegsame Platten und Schalen. VEB Berlin für Bauwesen, Berlin 1962

Untersuchung der Stabilität sattelförmiger, falcher, normalkraftfrei gelagerter HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung. — Diese Abhandlung bildet den zweiten Teil einer dreiteiligen Artikel-Serie. In dem ersten Teil waren die theoretischen Fragen der Existenz und der Eindeutigkeit der Membranlösung, sowie der kinematischen Unbestimmtheit von genannten HP-Schalen beantwortet worden. Auf Grund dieser Ergebnisse setzte sich der vorliegende Artikel zum grundlegenden Ziel, die Verzweigung aus dem unverformten Grundzustand der an ihren Rändern normalkraftfreien, sattelförmigen HP-Schalen zu untersuchen. Im Laufe der Erörterungen wird auch darauf eingegangen, wie die Entwicklungsmöglichkeit der dehnungslosen Verformungen den Verlauf des Stabilitätsverlustes beeinflusst.

Stability of Saddle-Shaped Flat Hypar Shells Submitted to Uniformly Distributed Load without Lateral Thrust. — This paper is the second part of a series consisting of three parts, the first of which treated theoretical problems (that is, existence and uniqueness of the membrane solution, kinematic uncertainty) the response to which assures a suitable fundament for performing the present stability analyses. In this paper, the phenomenon of branching from the undeformed state of the saddle-shaped flat hypar shells without lateral thrust is dealt with. In this connection also the question of possibility of the development of an inextensional deformation is analysed in order to determine what influence it has on the process of losing stability.

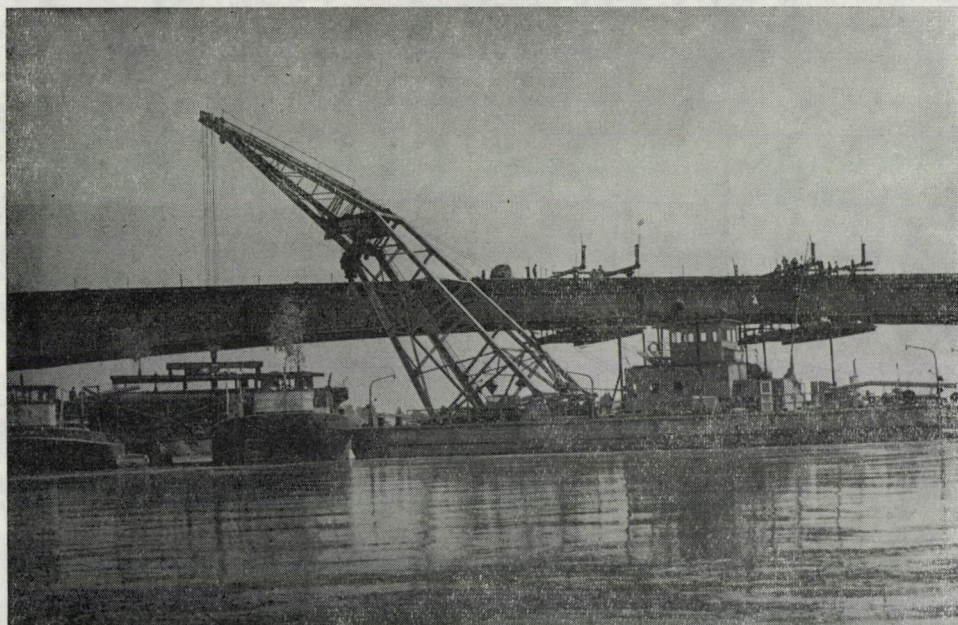
SZÁZ ÉV A MAGYAR HÍDGYÁRTÁS SZOLGÁLATÁBAN

A Ganz-Mávag 1979. október 24-én, Művelődési Központjának nagytermében nagyszabású jubileumi ünnepségen emlékezett meg a hídépítésben és egyéb jelentős acélszerkezetek építésében kifejtett 100 éves tevékenységéről.

Az ünnepségen DUNAJSZKI András vezérigazgató megnyitó beszédét követően DOMANOVSKI Sándor, TRÄGER Herbert, GYENGE Károly és KNÉBEL Jenő tartottak előadást. Az elhangzott előadásokat a vetített képeken kívül gondosan összeválogatott, rendkívül gazdag képanyagot bemutató kiállítás tette színessé.

A gyárban kezdetben egészen 1890-ig — részben idegen mérnökök és szakmunkások igénybevételével — csak hegeszvasat dolgoztak fel. Vasműveink (Ózd, Resica, Diósgyőr, Zólyombreznó, Vajdahunyad) ui. csak 1890-ben tértek át folytvas gyártására.

Az 1890-től az első világháború kezdetéig terjedő időben a vállalat megépítette az akkori, gépesítettnek alig nevezhető technológiával az ország közúti és vasúti közlekedéséhez szükséges hidakat: 12 Duna-hidat és 10 egyéb nagy folyami hidat, köztük Tisza-hidakat. Világviszonylatban is kiemelkedő alkotások voltak a ma Szabadság-híd néven ismert Ferenc József-híd és a maga nemében páratlan Erzsébet-híd.



Szegedi új közúti Tisza-híd építés közben

Az 1915–24 közötti időszakot a háború miatti pangás, majd a háborús és azt követő időszakban keletkezett hídkárok helyreállítása jellemezte, kevés új létesítménnyel.

A második világháború kezdetéig terjedő további 20 évben az ország közlekedés-fejlesztési intenzitása a hidépítés terén lelassult, és ezért a gyár termelő kapacitásának egy részét egyéb acélszerkezetek előállítására fordította. Ennek a korszaknak kiemelkedő létesítményei a Boráros-téri és a dunaföldvári Duna-híd, a békésszentandrás duzzasztómű, a laki-hegyi rádióantenna és sok acélszerkezetű csarnok.

Az 1945–60 közti időszakban a háborúban elpusztult hidak helyreállítására fordított óriási teljesítmények mellett kevés kapacitás maradt új művek létesítésére. Ezek közül említésre méltó a komáromi vasúti Duna-híd és a Bartók Béla úti vasúti híd. Ebben az időszakban készültek a tiszalöki vízlépcső mozgatható acélszerkezetei és ekkor gyártották sok csarnok-épület acélszerkezetét.

1960-nal kezdődik az acélszerkezetek hegesztése. Hazai körülmények közt ez a folyamat a közúti hidakban, épületszerkezetekben, vízepítési műtárgyakban befejezettnek mondható. A vasúti hidakban azonban még csak kialakulóban van.

A magyar hidépítés büszkeségén az 1964-ben forgalomba helyezett pompás, új Erzsébet-hídon még csak a pályaszerkezet acélszerkezete készült hegesztett kivitelben.

Teljesen hegesztett kivitelű hídjaink a szolnoki közúti híd, a tiszafüredi, a budapesti Baross-téri, a tahitótfalui, az algyői és az éppen most befejezett szegedi közúti híd (1. ábra).

Az utóbbi időszakban a hazai munkákhoz szükséges gyártó kapacitáson felül rendelkezésre álló jelentős többletet a gyár export hidak gyártására fordította. Ekkor készült el Csehszlovákia részére több hegesztett vasúti híd, az NDK-nak a jénai, közel 100 m hosszú felüljáró híd, Jugoszláviának négy Duna-híd, közöttük a méreteivel világviszonylatban is élvonalban álló Novi-Sad-i Duna-híd. Ebben az időszakban gyártották a Jugoszláviának szállított, a Dráván, Száván, Drinán beépített hídszerkezeteket is.

Jelenleg az Acélszerkezeti gyárban nagyarányú fejlesztéssel kapcsolatos rekonstrukció van folyamatban.

A vállalat a 100 éves jubileum alkalmából a „Ganz-Mávag Közlemények” 49. kötetében 200 oldal terjedelmű tanulmányban, válogatott képekkel illusztrálva mutatja be a gyár hidépítő tevékenységének centenáris időszakban végbement, a világszínvonalal mindenkor lépést tartó fejlődését és a vállalatnak a háborús pusztításokkal küzdelmessé vált történetét.

Kívánjuk, hogy a vállalat hídalkotó tevékenysége a jövőben is töretlenül tovább fejlődjek és alkotásai világszerte tovább öregbítsék a magyar szellem és munka jó hírét.

Massányi Károly

BESZÁMOLÓ

A MISKOLCI „6. MECHANIZMUSOK ÉS HAJTÓMŰVEK” TÁRGYU SZAKMAI SZEMINÁRIUMRÓL
(1978. SZEPT. 5—7)

A miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem (NME) 1960-tól rendez tudományos ülésszakokat azoknak a tanszékeknek közös rendezésében, amelyek a „Mechanizmusok és gépek elmélete” tudományterületének tárgyait oktatták és oktatják: a Gépelemek, a Mechanikai a Szállítóberendezések, ill. a Szerszámgépek Tanszékeinek közreműködésével.

Az 1978. szept. 5—7. között rendezett „6. mechanizmusok és hajtóművek” szakmai szemináriumot tehát megelőzte az 1960, 1961, 1963, 1966 és 1972 években tartott hasonló tárgyú tudományos ülésszak.

Ez a 6. ülésszak a részvételre, előadásszámra messze meghaladta az előzőket. E tényben azoknak a hazai szakembereknek az itthoni és nemzetközi elismerése tükröződik, akik a magyar műszaki egyetemeken, a Magyar Tudományos Akadémia Gépszerkezettani Bizottságában, az International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms (IFTOMM) Magyar Nemzeti Bizottságában, a Gépipari Tudományos Egyesületben ill. külföldi tudományos ülésszakokon évek óta munkálkodtak e tudományág elméleti és gyakorlati tudományos kutatásáért, az elért tudományos eredmények gyakorlati alkalmazásáért.

Az NME és az MTA nevében CZIBERE Tibor, az MTA levelező tagja, az NME rektora üdvözölte a szakmai szemináriumot. Kiemelte, hogy az MTA mint a Magyar Népköztársaság legfelsőbb tudományos testülete, a hazai tudományos kutatások egész területére elvi és módszertani befolyást gyakorol; elősegíti a kutatások összehangolását, figyelemmel kíséri és értékeli a tudományok fejlődését, koncepciókat dolgoz ki és javaslatokat tesz a tudományok hazai fejlesztésére, a kutatások főbb irányaira. E feladatkörök ellátásában nélkülözhetetlenek az egyes tudományos kérdések megvitatására és a kutatási eredmények ismertetésére szervezett konferenciák, szemináriumok és más rendezvények. De az egyetem is szívesen ad ilyen rendezvényeknek otthont, mert a jövő mérnökeinek képzése mellett feladata a tudományos kutatás eredményeinek közzététele is, aminek igen hatásos eszköze a kollokviumok, szemináriumok rendezése. Kiemelte, mennyire örvendetes, hogy erre a szemináriumra a hazaiakon kívül 15 országból (Ausztráliából, Bulgáriából, Csehszlovákiából, Egyiptomból, Hollandiából, Japánból, Kanadából, Lengyelországból, az NDK-ból, az NSZK-ból, Romániából, Olaszországból, Svájc-ból, a Szovjetunióból és az USA-ból) jelentkeztek részvételre szakemberek.

A megnyitó további kiemelkedő eseménye volt Vörös Imre nyugalmazott egyetemi tanárnak, a műszaki tudományok doktorának felköszöntése abból az alkalomból, hogy 1978. szept. 25-én töltötte be 75-dik életévét. Az a Szervező Bizottság tagjai által írt levél, amely kiemeli Vörös professzor érdemeit, különösen azt húzta alá, milyen maradandó érdemeket szerzett a szakmai szeminárium címét adó két tárgykörnek: a *Mechanizmusok és Hajtóművek* hazai szakirodalmának megalapozásában.

A plenáris ülés további részében Vörös professzor a műanyag fogaskerekék méretezéséről, MARTON József a műszaki tudományok kandidátusa, az MTA SZTAKI tudományos főmunkatársa az ipari robotok mechanizmus-problémáiról, PETROV G. N. a moszkvai Bauman Intézet professzora, a műszaki tudományok doktora a kéziszerszámok rezgéscsökkentő megoldásairól tartott nagyon érdekes előadást.

A továbbiakban három napon át a csaknem 200 résztvevő hat szekcióban folytatott szemináriumszerű tapasztalatcserét, előadások és viták formájában. A 80-nál több meghirdetett előadás témaköréről a szekciók elnevezései tájékoztatnak:

1. Mechanizmusok analízise-szintézise
2. Gépek dinamikája és rezgése
3. Gépek automatikus berendezései és alkalmazott mechanizmusok
4. Hajtóművek és elemei
5. Módszeres géptervezés
6. Tribológia és gépelemek

Rendkívül színes és tartalmas beszámolót tudtak összefoglalni az egyes szekciók vezetői nevében a záró plenáris ülésen a szekció-elnökök: SÁLYI István a műszaki tudományok kandidátusa, BOSZNYAY Ádám a műszaki tudományok doktora, TAJNARÓI József a műszaki tudományok kandidátusa, DROBNÍ József a műszaki tudományok kandidátusa, MAGYAR József a műszaki tudományok kandidátusa és TERPLÁN Zénó a műszaki tudományok doktora, mindannyian a BME vagy az NME professzorai. Ezekből a beszámolókból az tűnt ki, hogy a szakmai szeminárium elérte célját. Hasznos volt minden résztvevő számára, de erősítette az IFTOMM alapszabályzatában megfogalmazott feladatok folyamatos végrehajtását is.

Ezeket a gondolatokat fogalmazta meg PHILLIPS J. a sydney-i Egyetem professzora, mint az IFTOMM Végrehajtó Bizottságának rendes tagja, aki Miskolcra Udine-be utazott a VB évi rendes ülésére. Biztosította a jelenlevőket, hogy a legjobb benyomásokkal távozik erről a szakmai szemináriumról, és erről be is fog számolni az udine-i ülésen.

A részletes elemzést mellőzve annyi emelhető ki, hogy végül is 21 külföldi és 40 hazai szakember előadása hangzott el, a meghirdetett előadások kb. 3/4-e, amely a külföldi hasonló rendezvények adataival összehasonlítva, jó aránynak ítéltető.

A külföldi előadók közül kiemelhető a tbilisi-i DAVITASVILI N. Sz. térbeli mechanizmusokról, a harkovi ZAGREBELNIJ V. N. az ívelt kúpkerékekről, a szófiai MOSKOV M. D. mechanizmus-szintézisről, a kaunaszi BUDA A., MEDZSJAUSENE A. és JURKAUSZKASZ A. rezgés-kutatásról szóló több előadása, de ugyanilyen érdekesek voltak a prágai STEJSKAL V. és LEDERER P. mechanizmus-szintézis, ill. optimalizálási módszereiről, a bratislavai LABUZA Sz. optimalizálási méretezésről elhangzott előadásai. A külföldiek közül figyelemre méltó volt a magdeburgi RÖSSNER W. halygómmű-rendszerezési, a genfi RICHTER W. nagyméretű, nagy pontosságú hidrosztatikus csapágyazási, a wetzlari VATTEROTT K.-H. halygómmű-terhelésmegosztási, a krakkói WARSZYNSKI M., POREBSKA M., TOMASZEWSKI K. különféle konkrét mechanizmusokkal kapcsolatos, a kielce-i POLANSKI A., a gliwice-i JAKUBOWICZ A. és KOPROWSKI T. egy-egy érdekes gépelem-problémával egybekötött, a szecsini MACKOWIAK H. végelemekkel végrehajtott vizsgálatokról szóló beszámolóit. Új szint jelentett a négy olasz: a torinói MALVANO R. és a cagliari-i GINESU F., PICASSO B., PRIOLO P. alkalmazott mechanikai tárgyú két előadása.

A hazai előadók legtöbbször a Budapesti Műszaki Egyetem, a gödöllői Agrártudományi Egyetem és a miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem oktatói, kutatói közül került ki. A már említett tudományos intézmény, a SZTAKI mellett, a hazai ipart a SZIM, a Ganz-Mávg, a KOGÉPTEK, az ERÓTERV, az Autóipari Kutatóintézet, az EVIG néhány előadása képviselte.

A sok férfi előadó mellett ezúttal már e tudományterület három női kiválóságát is üdvözölhattük előadóként, és pedíg a szovjet MEDZSJAUSENE Aukszet, a magyar FILEMON Józsefnét, a műszaki tudományok kandidátusát és a lengyel POREBSKA Mariát.

A szervezés és rendezés elősorban az NME néhány tanszékére és a Gépszerkezettani Akadémiai Bizottság egyes tagjaira hárult. Ez abban is megmutatkozott, hogy az NME részéről 12-en, a GAB 25 tagja közül pedig 20-an (!) tartottak előadást tudományos kutatási eredményeikről.

Az is a jó együttműködés egyik megnyilvánulása, hogy az NME-vel barátsági együttműködési szerződésben levő társintézetekből: Harkovból, Krakkóból, Magdeburgból és Szófiából képviseltették magukat e tudományterület szakemberei. Végül öröndetes volt, hogy nemzetközileg számontartott személyiségek mellett milyen sok fiatalabb, tehetséges szakember is jelentkezett tudományos eredményeinek nyilvánosságra hozásával.

A miskolci „6. Mechanizmusok és Hajtóművek” szakmai szeminárium előadásainak összefoglalóit magyar-, ill. világnyelven a résztvevők érkezésekor kézhez kapták. Az elhangzott előadások egy része az NME Közleményeiben, ill. a Publications of the Technical University for Heavy Industry kötetében jelenik meg.

Terplán Zénó

KÖNYVISMERTETÉS

A NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM KÖZLEMÉNYEI

JUBILEUMI KÖTET: A NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM JELENTŐSEBB TUDOMÁNYOS EREDMÉNYEI
1949—79

Miskolc, 1979. 252 o., 30 fénykép

A miskolci Nehézipari Műszaki Egyetem 1979 őszén ünnepelte fennállásának 30. évfordulóját. Erre a jubileumra jelent meg ez a kiadvány, az egyetem magyar nyelvű közleményeinek mind az öt sorozatában közös kötetként.

A kiadvány összefoglalja az egyetem három kara: a Bánya-, Kohó- és Gépészmérnöki Kar tanszékeinek néhány jelentősebb, a gyakorlatban is megvalósult és hasznosított, tudományos kutatáson alapuló munkáit.

Nem törekedett tehát a teljességre, mert az áttekinthetetlen mennyiséget jelentett volna. Így az egyes tanszékek jellegétől függött, hogy hány témakört emeltek ki. Az a törekvés vezette a szerkesztést, hogy az olvasó valóban jó áttekintést nyerjen arról, milyen kiemelkedőbb szakmai kutatások folytak az egyetemen az elmúlt három évtizedben, és váltak döntő többségükben termelő erővé közvetlenül vagy közvetve, országosan és helyileg.

A tanszéki összeállítások alapos tanulmányozásából kiderülnek az egyetem kapcsolatai is a hazai bánya-, kohó- és gépiparral, tudományos és ipari kutató intézetekkel, tervező intézetekkel, hazai és külföldi társegyetemekkel. Az is kiderül, hogy az egyetemen belül, az egyetemi karokon milyen sok témát dolgoztak ki több tanszék együttműködésével, és hogy számos tanszék vette célszerűen igénybe a Matematikai Intézet számítógépét.

A kötet összesen 134 fajta, megvalósított tudományos témát mutat be. A részletes ismertetés helyett a következőkben néhány címszót emelünk ki a karok, ill. a tanszékek sorrendjében:

1. Ásványelőkészítés, bányavízmentesítés, hidraulikus szállítás, ásvány- és kőzettan, kőzetforgácsolás, külfejtés, szállítókötél, bányaművelés, bányaszellőztetés, bányabiztonság, ásványvagyongazdálkodás, kőzetmozgás, bányakár, földtan, teleptan, vízkészlet, ásványelőhely-paraméterek, földi fotogrammetria, geofizikai mérések és adatfeldolgozások, szénhidrogének kutató fúrásai, olaj- és gáztárolók, kőolajkutak, csőtávvezetékek.

2. Korrozó és felületvédelem, fizikai-kémiai vizsgálatok, ívkemencék önműködő irányítása, technológiai folyamat-modellezések, alumíniumkohósítás, rézkohósítás, bauxit-feltárás, újrakristályosodás, szerszámacélok edzése, alumíniumötvözetek nemesítése, varrat nélküli acélsövek gyártástechnológiája, alakítástechnológia, acélszalag-meleghengerrés, zárt-üreges kovácsolás, öntvénytömörtség, öntöttvas szövetszerkezete és szilárdsága, formázókeverékek, emissziós színképelemzés, fémzárványok és -gáztartalmak, analitikai módszerek, tüzelőanyagok, kemenceszerkezetek, tűzállóanyagok, ipari hőtan, ipari környezetvédelem, nyersvas-, ill. acélkohászati kutatások.

3. Gyártásgeometria, áramlástechnikai gépek lapátózása, térfogatárammérők, hőcserélők, gázelszívók, nagy teljesítményű villamos motorok, ipari elektronika, olazmafizika, mágneses sűrűségmérés, kábelipari gépek, acélkopások, tribológia, mechanikus hajtóművek, szuperkemény szerszámok, felületzilárdítás, erőátvivő felületrendszerek technológiája, multimoment filmes helyzetvizsgálat, ásványvagyontértékelés, ergonómia, vállalati modellezés, matematikai kutatások, szilárd testek mechanikája, dinamikai modellek, szilárdságtan, hegesztés, hőkezelés, bányabiztosító elemek, sínek termithegesztése, plazmatechnológia, függőkonvektorok, szállítószalagok, anyagmozgató gépek, hegesztett szerkezetek kialakítása, módosított géptervezés, mozgásinformációk, váltakozó áramú hidraulikus hajtóművek, mechanikai szétválasztás, vegyipari technológiák, biztonsági szerelvények.

Az egyetemi karok tanszékei mai, egyetemen belüli működési helyüket különböző években foglalták el. Így legeredményesebbnek ítélt tudományos kutatásaik természetesen a három évtized második feléből valók, építve ugyanakkor a mindenkor előző hely vagy jogelőd szellemi bázisára, kutatási hagyományaira.

A kötet egyetemi karonként, azon belül tanszékenként tagolt. Minden oktatási egység bevezetőjében szerepel az alapítási év, az elnevezés esetleges változata, a mai működési hely kezdő éve, továbbá a mai vezető neve, rangja, tudományos fokozata és a megbízás kezdő éve, majd a kiemelt kutatások tartalomjegyzéke. Összesen 32 oktatási egység szerepel (a valóságban ennél kettővel több van, de a két matematikai tanszék helyett a Matematikai Intézet szerepel, a Testnevelési Tanszék pedig hiányzik sajátos kutatási profilja miatt).

Az egyes összeállítások szerzői az oktatási egységek vezetői voltak, akik az előszó befejező mondata szerint, a Nehézipari Műszaki Egyetem fennállásának 30. évfordulójára kollektív testületként nyújtják át e kötetet az érdeklődő olvasónak.

A lektori munkát a karok sorrendjében ZAMBO János az MTA rendes tagja, tszv. egy. tanár. SIMON Sándor az MTA levelező tagja, tszv. egy. tanár. CZIBERE Tibor az MTA levelező tagja, tszv. egy. tanár látta el. A kötet főszerkesztője, ennek a recenzióknak összeállítója volt.

Dr. Terplán Zénó

Gábor László

ÉPÜLETSZERKEZETTAN IV. KÖTET

Tankönyvkiadó, Budapest 1979, 302 oldal, 234 ábra, szakirodalmi jegyzék

Ez a könyv GÁBOR László professzor életművének — az Épületszerkeztan című tetralógiának — negyedik, immár befejező kötete, mely az ajtók, kapuk, ablakok, üvegfalak, portálok, a fényszűrő és árnyékoló szerkezetek, a beépített szekrények, a padlók és falburkolatok szerkezeti megoldásait ismerteti. Célja e szerkezetek építészeti és szerkezettervezési elveinek kritikai tárgyalása és jellegzetes kiviteli példáiknak bemutatása.

A könyv tartalmát illetően merőben újszerű; az épületek kiegészítő szerkezeit hasonló részletességgel és tudományos igényvel tárgyaló szakkönyv nem ismeretes sem hazai, sem nemzetközi viszonylatban. Ennek a szerte ágazó sokrétű anyagnak az összegyűjtéséért, rendszerezéséért, kritikai értékeléséért szerzőt a hazai építéstudomány és építőipar részéről elismerő köszönet illeti meg. Műve a hazai építézet számára biztos útmutatást, az egyetemi és főiskolai oktatás részére alapvető segítséget jelent.

A könyv szövegrésze minden részletre kiterjedő gondossággal, de amellet kellő mérték-tartással ismerteti a különféle kiegészítő szerkezetek célját, elrendezését, a célt szolgáló feltételek legalkalmasabb teljesítmódját. Nem mulasztja el minduntalan felhívni a figyelmet a feladattal kapcsolatban kielégítendő építésrendészeti, szilárdságtani, anyagtani, szellőzés-technikai, tűz- és zajvédelmi, valamint egyéb fizikai és kémiai feltételekre, a gyártástechnológiai, egészségügyi és szépészeti követelményekre. Állandóan figyelmeztet az ok- és okozati összefüggésekre, a tartóssági és gazdaságossági szempontokra, a néha nem is egyirányba mutató, sőt éppen ellentétes igények értelmes egyeztetésének szükségességére.

Különleges értéke a könyvnek a példaszzerű gondossággal, szakszerű pontossággal meg-rajzolt igen gazdag ábraanyag és annak ízléses, igen demonstratív előadásmódja, amely kitűnően hasznosítja a két színnel való ábrázolástechnika nyújtotta lehetőségeket. E tekintetben külön is rá kell mutatni az ablakszerkezeteket bemutató ábrák világos áttekinthető voltára, amit csakis a két színnel való ábrázolásmód tett lehetővé.

Mindent egybevetve, megállapítható, hogy GÁBOR László professzor könyvének jelen negyedik kötete az előző három kötethez hasonlóan a magyar műszaki irodalom jeles terméke, amely méltón koronázza be szerzőjének az épületszerkeztan területén egy életen át végzett értékes tudományos munkásságát.

Dr. Csonka Pál

Gábor László—Párkányi Mihály

AZ INFORMÁCIÓ TOVÁBBÍTÁSA ÉS VÉTELE AZ IPAROSÍTOTT ÉPÍTÉSBEN

Az Akadémiai Kiadó gondozásában 1979-ben megjelent könyvben a szerzők helyesen állapítják meg, hogy „Az építés iparosításának előrehaladásával különösen belső ellentmondás-ként egyre nő a rajzok bonyolultsága, munkaigényessége, mennyisége és vele együtt nő hovatovább már csak mérnökök által végezhető rutinmunka aránya is az inventív munka rovására. A rajzi munkák mennyiségének radikális csökkentésére, esetleg helyettesítésére irányuló törekvések tehát mindenképpen létjogosultak, hiszen ezek lényegében a fejlődésnek is szükségszerű velejárói”. A szerzők ezért azt a fontos kérdést vizsgálják, hogy az épületek terveit hogyan lehetne a jelenleginél korszerűbben, egyszerűbben ábrázolni olyan módon, hogy ez az ábrázolás számítógépes kezelésre is alkalmassá váljék. Ennek a feladatnak nagy a népgazdasági jelentősége és teljesen jogosan válik a kutatás tárgyává.

A probléma megoldásán számosan dolgoznak mind a házigyári, mind a könnyűszerkezetes építésben, általában az iparosított rendszerelvű építésben. Bár a kutatásnak már vannak gyakorlati eredményei, ez a munka még távolról sincs befejezve. Éppen ezért a megjelent könyv népgazdasági szempontból fontos témájú. A témát a szerzők a tőlük megszokott magas színvonalon, igényesen, újat adóan dolgozták fel.

A szerzők három kiindulási tételre alapozzák munkájukat.

Az első tétel *Engels* (általánosabban: a dialektika) klasszikus törvénye a minőség és a mennyiség egymásba való átcsapásáról.

A második tétel *Whitehead*-tól származik és azt tartalmazza, hogy a felfedezés technikája nem az ismeretlenből halad a kívánt végeredmény felé, hanem fordítva a felfedezendő dologból indul. Ez a tétel sem ad elegendő támpontot a konkrét felfedezés megtételéhez. Ha már tudósok tételére alapozunk, ellenpéldaként idézhető *Albert Einstein*, aki szerint: „Még ha egy új gondolat megszületéséhez a külső és a tudományos feltételek már rég adottak, általában szükség van valamilyen külső ösztönzésre ahhoz, hogy valóban megszülessék; az embernek, úgy szólván. bele kell botlania, mielőtt a gondolatot valóban felismeri.” Hivatkozni lehet itt még egy tételre, amely *John Gall*: *Systemantics* (Pocket Books, New York, 1978. 158 oldal) című könyvéből származik. Gall (— kicsit természetesen tréfásan —) azt mondja ki, hogy „nagy haladást sohasem olyan rendszerekkel érnek el, amelyeket nagy haladás eléréséhez terveztek”.

Végül a harmadik tétel *Russel* követelménye, miszerint a felfedezés után annak elfogadását és alkalmazását a nem kívánt, vagy éppen káros utóhatások előzetes felismeréséhez és kiküszöböléséhez kell kötni. Ez igaz, de szintén csak módszertani és nem tematikai segítséget ad mindenféle felfedezéssel kapcsolatban.

A szerzők a kutatásukat elvileg érvényesnek tekintik a gyakorlatban alkalmazott építési módokra és rendszerekre ténylegesen azonban a módszert egyfajta, a gyakorlatban alig alkalmazott, általuk nemtektonikusnak nevezett, építésre dolgozták ki és ellenőrizték.

A nemtektonikusnak (korábban szövetszerkezetesnek) nevezett építési technológia különböző változatokban immár fél évszázada ismeretes és egy-egy kísérleti épületben megvalósult.

A könyv terjedelmének több mint a fele (140 oldalból 75 oldal) három példára vonatkozólag konkretizálja a javasolt módszereket. A három példa közül kettő megvalósult kísérleti épület (egy lakóház és egy nem egészen 300 m² alapterületű tér), a harmadik egy meg nem épült épület.

Ily módon a kutatás a szélesen meghatározott feladatot egyelőre az alapul választott technológiára oldotta meg. Hasznos lenne, ha a kutatómunka a továbbiakban a gyakorlatban széleskörűen alkalmazott építési technológiákkal is foglalkoznék.

Oskar Büttner—Erhard Hampe

BAUWERK, TRAGWERK, TRAGSTRUKTUR

BAND 1.: ANALYSE DER NATÜRLICHEN UND GEBAUTEN UMWELT

VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1977, 345 Bilder,
587 Tafeln, Sachverzeichnis, Geb. 55,00 DDR M

Dr.-Ing. habil. O. BÜTTNER az építész és Dr.-Ing. R. HAMPE mérnök — mindkettő a Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar professzora — érdekes és hízagpótló feladatra vállalkozott, amidőn könyvük megírásával megkísérelték a különféle teherhordó szerkezeteknek, valamint azok erőtni sajátosságainak az építészti és mérnöki szemlélet szempontjait egyesítő átfogó ismertetését.

A két kötetre tervezett mű jelen első kötetének bevezetése, formai szempontból elemzi a természeti környezet és az emberi alkotások közt mutatkozó hasonlóságokat, illetve eltéréteket. Ezt követi az ember alkotta különféle szerkezeteknek és erőjátékuknak részletes ismertetése.

Nagy súlyt fektet a könyv az építési szerkezetek történeti fejlődésének és a fejlődést elősegítő tényezőknél a bemutatására, az őskortól kezdve egészen napjainkig. Külön-külön fejezetek tárgyalják a különféle rúdszerkezetek, a síkbeli felületszerkezetek és az ívszerkezetek problémáit. E szerkezetek sokirányú alkalmazását és erőjátékuk különlegességét érdekes példák magyarázzák. A továbbiakban tág teret biztosít a könyv a boltozatszerkezetek építéstörténetének bemutatására, valamint általában a boltozatépítéssel kapcsolatos különféle problémák tárgyalására. Ezekhez a fejtegetésekhez szervesen kapcsolódik a héjszerkezetek kialakulásának vázolója és azoknak a lehetőségeknek az ismertetése, amelyeket a vasbeton héjépítészet kifejlesztése az anyagtakarékosság terén és általában a nagy terek lefedése tekintetében biztosított. A tárgyalást a házra igénybevett tartószerkezetek, a függesztett tetőszerkezetek, valamint a légnyomásos szerkezetek erőtni viselkedésének vázolója és a gyakorlati alkalmazásukkal kapcsolatos különféle — köztük gazdaságossági — kérdéseknek a fejtegetése zárja le.

A könyv szövegrészében a különféle építési szerkezetek fejlődésének, valamint működési elveinek ismertetése mindenkor a lényeg kidomborítására szorítkozik és mellőzi a kevésbé fontos részletek bemutatását. A tárgyalás folyamatos és előremutató, az okfejtés világos, szabatos és meggyőző.

Különösen szemléletes és érdekfeszítővé teszi a könyvet a rendkívül gondos és szakudással összeválogatott képanyag, amely mindenkor szervesen kapcsolódik a szövegrészhez. Ez a képanyag minduntalan felhívja a figyelmet a természet és az ember alkotásai közt mutatkozó hasonlóságokra, valamint az ősi és újabb létesítmények közt mutatkozó analógiákra.

Végiglapozva a nagy szakmai szeretettel és tudással megírt könyvet és megcsodálva az évezredek építészetének nagyszabású alkotásait bemutató szebbnél-szebb ábrákat, világosan kirajzolódik annak a harmóniának a jelentősége, amit csak a művészi és szerkezeti szempontok egyidejű érvényesítése teremthet meg.

A mű érdekes tartalma a két tudós szerzőt, izléses kiállítása a kiadó megértő együttműködését dicséri.

Dr. Csonka Pál

Holnapy Dezső

SZÁMÍTÓGÉPEK AZ ÉPÍTŐIPARI TERVEZÉSBEN

Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1979, 289 oldal, 114 ábra

Magyarországon a számítástechnika felhasználása terén az első alkalmazói területek egyike az építőipari mérnöki tervezés volt. A szerző a számítástechnika magyarországi mérnöki alkalmazásának egyik úttörője és elismert képviselője. A könyv nemcsak a mérnöki tervezés számítógépes módszereivel foglalkozó szakemberekhez szól, de azokhoz is, akik a tervezői munka hatékonyságának növelése érdekében csak az első lépéseket kívánják megtenni a számítástechnika gyakorlati alkalmazása felé.

A szerző a műszaki tervezés technológiáját elemezve határozza meg a számítógépek helyét és célját a tervezési folyamatban, majd a szükséges számítástechnikai alapismeretek összefoglalását adva, a modellalkotás kérdéseinek elemzése után — a programfejlesztés módszertani és szervezeti kérdéseinek megválaszolásával fejezi be gondolatmenetét.

A könyv első fejezete a tervezés technológiai folyamatát mutatja be. Először a hagyományos tervezés lépéseit tárgyalja, később áttér a géppel segített és automatizált tervezésre, valamint a közöttük fennálló különbség ismertetésére. Ebben a fejezetben arra a kérdésre is feleletet ad, hogy különböző feladatok megoldásához milyen gépet célszerű választani, illetve mitől függjön a választás.

Különös figyelmet szentel a szerző a rendszerépítésnek, és világosan rámutat arra, hogy az építési rendszerek elterjedésével megváltozik a tervezéstechnológia és ezen belül a tervező feladata is.

A számítógépes tervezési folyamat tárgyalása során a számítástechnikus és a tervező-mérnök feladatát taglalja a tervezésgépesítésben.

Az építési rendszerek tág lehetőséget biztosítanak a géppel segített és automatizált tervezés bevezetéséhez; a szerző ezt konkrét gyakorlati példákkal is alátámasztja.

A második fejezet a gépesített tervezés eszközeivel (hardware, software, operációs rendszer) foglalkozik. A szerző itt ismerteti a különböző kis és nagy számítógépeket és helyüket a műszaki tervezésben, valamint olyan fontos kérdésekkel is foglalkozik, mint a szervezet-kialakítás és gépkiválasztás.

A harmadik fejezet olyan korszerű matematikai és számítástechnikai modelleket mutat be, amelyeket a matematikai irodalom már tartalmaz, műszaki gyakorlati alkalmazásuk azonban ma még csupán a kutatás stádiumában van. A fejezet foglalkozik továbbá a program-rendszerek készítésével és ezzel azoknak a szakembereknek nyújt segítséget, akik műszaki-tervezési programrendszereket dolgoznak ki. Itt bemutatásra kerül a programfejlesztés teljes folyamata, a programtervezéstől kezdve a programbejáratásig, dokumentálásig és karbantartásig. Ennek a folyamatnak a megtervezéséhez jól felhasználhatók a szerző által ismertetett nagyon érdekes tapasztalati idő- és költségábrák.

Az építőipari tervezés gépesítésének (automatizálásának) szerves részét képezi a rajzi és szöveges outputok szerkesztése. A harmadik fejezet az ezzel kapcsolatos speciális követelményeket is tárgyalja.

A negyedik fejezet az építőipari műszaki tervezés hardware és software központját tárgyalja. Ismerteti az építőipari műszaki tervezés céljára létrehozott hazai bázisgép konfigurációját és a hozzá kapcsolódó terminálhálózatot. A terminálhálózaton keresztül a tervezőintézetek hozzáférhetnek a bázisgépen kifejlesztett központi programokhoz és program-elemekhez, amelyekre a szerző gyors-indexet is közöl.

Az olvasó figyelmébe ajánlott könyv hasznos segítséget nyújthat a tervező mérnöknek a számítástechnikai alkalmazások előkészítéséhez (vagy a meglévő alkalmazások továbbfejlesztéséhez), mivel olyan ismeretanyagot rendszerez, amelyet a hazai és a külföldi szakirodalom széttagoltan vagy egyáltalán nem is tárgyal.

Grósz Miklós

Dr. Palotás László

MÉRNÖKI SZERKEZETEK ANYAGTANA, 1.

ÁLTALÁNOS ANYAGISMERET

Akadémiai Kiadó, Budapest 1979

Régi és sürgető igényt elégített ki Palotás professzor, a Magyar Tudományos Akadémia és az Akadémiai Kiadó, amikor ezt a könyvet megjelentette. Szerző Építőanyagok című, az Akadémiai Kiadó gondozásában 1959–61. évben publikált kétkötetes munkája ut. néhány éven belül kifogyott.

Az új, háromkötetes mű első kötete három főfejezetre tagozódik.

Az *első főfejezet* az anyagtani alapismeretek és a mérnöki szerkezetek tömör összefoglalása után a szerkezeti anyagok fejlődését tárgyalja, az ősi és az ókori kultúráktól napjainkig. Meggyőző adatokkal, számos ábrával és példával mutatja be, hogy az építés általában, különösen pedig az építőművészet és a mérnöki szerkezetek fejlődése, elválaszthatatlan az anyagoktól: az anyagok választékának bővülése, az anyagokról szerzett ismeretek elmélyülése meghatározta az építési módokat és fejlődésüket. Ez a főfejezet ismerteti az anyagelmélet kialakulását, fejlődését, az anyag felépítését és az anyagi test szerkezetét, érintve és magyarázva azokat a határterületeket, amelyek ismerete nélkül az anyagok kutatásával vagy felhasználásával foglalkozó mérnökök mindennapi feladatainak megoldása, ma már szinte elképzelhetetlen.

A *második főfejezet* a szerkezeti anyagok kémiai, fizikai- és szilárdsági tulajdonságait foglalja össze, továbbá a mérési módszereket, a mértékrendszereket és a mértékegységeket, világos képet adva az anyag, a mérőeszköz, a vizsgáló személy és az anyagtulajdonságok dialektikus egységéről. Külön érteke e fejezetnek, ahogyan szerző a lineárisan rugalmas, a lineárisan rugalmas-lineárisan felkeményedő, a lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny, a merevtökéletesen képlékeny és a merev-lineárisan felkeményedő anyag-modelleket szétválasztja, magyarázza és alkalmazásuk lehetőségeit feltárja, nagy segítséget adva ezzel a különböző célú mérnöki szerkezetek méretezőinek, a megfelelő igénybevételek és feszültség-alakváltozási modellek kiválasztására.

A *harmadik főfejezet* a szerkezeti anyagok szilárdsági vizsgálatának és értékelésének módszereit foglalja össze. Részletesen ismerteti a statikus, a tartós, a fázasztó és a dinamikus vizsgálatok módjait és elveit, a szükséges berendezéseket, ezek mérési tartományát, pontosságát, alkalmazhatóságát. A mérnöki szerkezetek teherbíró képességét alapvetően határozzák meg a feszültség-alakváltozási állapotok, az alakváltozások mechanikai értékelésének módja, az ezzel összefüggő törésméleletek. Szerző e téren végzett alkotómunkáját a fejezet híven tükrözi és a mérnököt kitűnően tájékoztatja arról, hogyan lehet biztos következtetéseket levonni az alakváltozás mérési eredményeiből a szerkezet feszültségállapotaira. Ehhez nagy segítséget ad a matematikai értékelés, melyet szerző e főfejezet zárásaként részletesen tárgyal, különös tekintettel a matematikai-statisztikai módszerekre.

A könyv egésze bizonyítja, hogy az építmények tartósságának és gazdaságosságának alapvető feltétele a megfelelő minőség, mind a felhasznált anyagban, mind a tervezési, kivitelezési és fenntartási munkában. A jó minőség elengedhetetlen feltétele az anyagismeret és a folyamatos ellenőrzés, vizsgálat. Szerző ötvenestendős oktatói, tudományos és ipari tevékenységének bőséges tapasztalatait, gazdag tudományos és ipari eredményeit közreadva az Akadémiai Kiadó a magyar mérnöktársadalmat ismét nagyon hasznos, korszerű, magas színvonalú könyvvel ajándékozta meg.

Újhelyi János

Palotás László

MÉRNÖKI SZERKEZETEK ANYAGTANA, 2.

FA-KŐ-FÉM-KÖTŐANYAGOK

Akadémiai Kiadó, Budapest 1979. 586 oldal, 337 ábra, 98 táblázat,
230 irodalmi hivatkozás

Méternői szerkezetek anyagtana című háromkötetes mű jelen második kötetét az 1979. évi *Műszaki könyvnapok* alkalmával vehette kézbe az olvasó, és nam csalódott: a második kötet az első méltó folytatása.

Ez a kötet a fa-, kő-, fém- és kötőanyagok tulajdonságait és vizsgálati módszereit, termékeik előállítását és felhasználását tárgyalja. Témaköre szerzteágazó, a tárgyalásmód mégis minden területen elmélyült és sokoldalú, amihez nagyban hozzájárult, hogy szerző a szakma olyan kiváló művelőit választotta szerzőtársakul, mint KERTÉSZ Pált és VERESS Sándort. KERTÉSZ Pál a kövekről, VERESS Sándor a fémekről szóló főfejezetet írta meg, a könyvbe illő nagy szakmai felkészültséggel, ami egyben a könyv tartalmi és formai egységének is zálogává vált.

A *fa* című főfejezet tíz alfejezetben tárgyalja a méternői szerkezetek faanyagainak jelentőségét, minőségi követelményeit, vizsgálati módszereit, hazai felhasználási lehetőségeit.

Az első alfejezet a fának az emberiség történetében építőanyagként betöltött szerepét, életjelenségeit, valamint tulajdonságainak hordozóját: a fa anatómiáját és belső alakzatánál taglalja. A második alfejezet a fa termelését és a fatermékeket, a harmadik az építőfa fajtákat és jellemzőiket, a negyedik a világ és a hazai fagazdálkodás statisztikai adatait ismerteti. A hazai statisztikai adatok kedvezőtlen képe köteleességünkkel teszi a faállománnyal való helyes gazdálkodást, annak gyarapítását, a fa tulajdonságainak teljes kiaknázását, az ehhez szükséges ismeretek elsajátítását, amelyhez a könyv igen jó szolgálatot tesz.

Az ötödik alfejezet a faanyag vegyi, a hatodik a fizikai, a hetedik a mechanikai tulajdonságait elemzi. Ennek során hangsúlyt kapnak a fát alkotó vegyi elemek és vegyületek, a nedvességtartalmi tulajdonságok, a duzzadás és zsugorodás, a sűrűség és testsűrűség, a hő-, elektro- és hangtechnikai tulajdonságok, a keménység, a kopási ellenállás, a súrlódási jellemzők, a hasíthatóság, a nyomó-, szakító-, hajlító-, nyíró-, csavaró- és ütőszilárdság, a terhelés okozta alakváltozás, a szeg- és csavarállóság. Szerző tudatosítja, hogy a szöveti felépítés folytán a fa sajátos tulajdonságokkal rendelkezik, és ezért ez a szerkezeti anyagként is használatos értékes és ősi szerves építőanyag nemcsak megkülönböztetett bánásmódot igényel, hanem modernizálódó korunkban is sokrétűen használható.

A nyolcadik alfejezet a fa hibáival és betegségeivel, a kilencedik tartósságával és védelmével foglalkozik. A tizedik alfejezetből a faanyag nemesítését, a helyettesítő faanyagokat, a nemesített és helyettesítő faanyagok vizsgálatát és tulajdonságait ismerhetjük meg.

A *természetes építési kőanyagok* című főfejezet a kőanyagokra vonatkozó ismereteket öt alfejezetben tárgyalja.

A kőanyagok felépítése, osztályozása, fajtái az első alfejezetben találhatók. Ez az alfejezet jellemzi a kőanyagokat, megismerteti a kristályos és alaktalan kőzetalkotókkal, a kőzetszövettel, a kőzetek településével, osztályozásával, a természetes kőanyagok fajtáival. A második alfejezet a kőanyagok termelésével, feldolgozásával, megmunkálásával foglalkozik. A feltárt ásványvagyron a kő-, kavics-, illetve homokbányászat és feldolgozás útján válik építőanyaggá.

A harmadik alfejezet a kőanyagok fizikai-szilárdsági sajátosságait írja le. Érdekesen és igen korszerű módon értelmezi a kőanyagok minőségének és a kőzetekkel szemben támasztott minőségi igényeknek a fogalmát. A minőséget kifejező tulajdonságokat vizsgálatokkal kell meghatározni, az elvégzendő vizsgálatok minősítési rendet alkotnak, ami lehet termékinősítés, kőzetminősítés, és ásványvagyron kutatás értékelés. A minősítés megbízhatósága nagy részben a mintavétel eredményességén múlik. A leglényegesebb kőanyag tulajdonságokra a kőzettani jellemzés, a tömegeloszlási, a roncsolásos és roncsolásmentes szilárdsági, a keménységi, a kopási, a hasíthatósági, a megmunkálhatósági, a halmazszilárdsági és halmaz szemcse szerkezeti vizsgálatok adnak választ. A harmadik alfejezethez szorosan illeszkedik a negyedik, amely a mállás és tartósság, az időállóság fogalma, vizsgálata és értékelése, a kővédelem és tartósság kérdéseit elemzi. Az időállósággal kapcsolatban bevezeti a modellhatás és a kőzet-tulajdonság változási tényező fogalmát.

Rendkívül öröndetes, hogy a természetes építési kőanyagok főfejezete már a napjainkban hatályba lépő MSZ 18280—18296 számú új szabványsorozat és minősítési rendszer szellemében íródott, és ezért nemcsak szemléletében, hanem tartalmában is gazdagabb a tárgy-

körben eddig megjelent munkáknál. A szabványok betartása mindennapi kényszerítő körülmény. Aki a szabványokat úgy ismerteti, hogy az egyszerű napi feladatok tudományos gyökereit is megmutatja, az a tudományos gondolkodásnak is híveket szerez. A könyv mindezt célratorően és mértéktartó terjedelemmel oldja meg.

A *fémek című főfejezet* elsősorban az építőipari szerkezeti felhasználás szempontjából fontos fémekkel foglalkozik. Az általános kérdések ismertetését a vas és az acél, az alumínium és egyéb fémek tárgyalása követi összesen 27 alfejezetben.

Hat alfejezet szól a fémek általános tulajdonságairól. Arról, hogy mi különbözteti meg a fémes elemeket a nem fémesektől, hogyan osztjuk fel őket különböző felhasználási és kohászati szempontok alapján, milyen a fémek szerkezete és kristályosodása, mi jellemzi az ötvözetek szerkezetét, halmazállapot változásait, egyensúlyi diagramjait, melyek a fémek fizikai tulajdonságai, mi a korrózió. A legnagyobb érdeklődésre az ötvözetekről szóló alfejezet tarthat igényt, hiszen a kereken 90 fémtermészetű és metalloid elemből 4000 kétkötös, 118 000 háromkötös és több millió négykötös ötvözetrendszer származtatható.

A vassal és acéllal kapcsolatos tudnivalókat tíz alfejezet dolgozza fel. A vas nemzetgazdasági jelentősége után a vas- és acélgépjártás folyamatával ismerkedhetünk meg. Ezt a vaszén ötvözetek állapotábrájának tárgyalása követi, ami igen jelentős témakör, mert a gyakorlatban használt vasfajták tulajdonképpen szénötvözetek. Fontos tudni, hogy az acélok tulajdonságait hideg és meleg alakítással, hőkezeléssel, kérgesítéssel javítjuk. Részletesen szól a könyv az acél hegesztéséről. Az ömlesztő, ömlesztve sajtoló és sajtoló hegesztési eljárásokat, jó felépítésű ábra rendszerezi. Külön alfejezet foglalkozik a hegesztés hatásával, a hegeszthetőséggel, a hegeszthetőségi vizsgálatokkal, a hegesztési kötések vizsgálatával. A vas és acél mechanikai tulajdonságai kísérleti eredmények és szabványelőírások tükrében kerültek megfogalmazásra. Ezek a tulajdonságok a szakítószilárdság, a munkabírás, a nyomószilárdság, a nyírás, a keménység, a csavarás, az ütő-hajlítási ellenállás, az acél fáradása, ernyedése, kúszása, valamint a technológiai hajlítás és hajtogatás elszenvedése. Az acélfajtákat a könyvben a szénacélok — szerkezeti acélok, hegeszthető acélok, melegen hengerelt acélok, egyéb szénacélok, — a hidegen alakított acélok — idomacélok, betonacél-hálók, csavart betonacélok, feszítőhuzalok, — az ötvözött acélok — időjárásálló acélok, korrózióálló acélok, — és az öntvények szerinti csoportosításban találjuk meg. A vas és acél alfejezeteket a korrózió tárgyalása zárja.

Az alumínium a mérnöki szerkezetek második legfontosabb fémanyaga, ismertetésére öt alfejezetben kerül sor. A könyv bemutatja az alumínium bauxitból való előállítását, az alumínium fajtáit, ötvözeit, öntését, megmunkálását, fizikai tulajdonságait, hőkezelését, az alumíniumötvözetek mechanikai tulajdonságait, az alumíniumszerkezetek hegesztését, forrasztását, szegecselését, az alumínium korrózióját és védelmét.

A fémek közül a magnézium, a réz és ötvözeit, az ólom, az ón, a horgany legfontosabb tulajdonságainak összefoglalását külön alfejezetekben találjuk meg.

A fémekről szóló főfejezetről összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy színvonalas, korszerű ismeretanyagot tár olvasói elé.

A *kötőanyagok című főfejezet* egy általános alfejezet után az építőipari alkalmazás szerint tagozódó négy alfejezetben tárgyalja, az építőiparban használatos kötőanyagokat.

Levegőn szilárduló, nem hidraulikus kötőanyag a mész, a gipsz és a magnézia. A könyv ismerteti ezeknek a kötőanyagoknak mészkőből való előállítását, a szilárdságot biztosító kötés mechanizmusát, a kötőanyagok alkalmazását, azok tulajdonságait és vizsgálati módszereit.

A gyengén hidraulikus kötőanyagok a cementek ősei, azokat már a római időkben is alkalmazták. Ilyenek a hidraulikus mész, amelyet márgás mészkőből, vagy mészmárgából, a románcement, amelyet márgából égetnek, és a mészpuccolán, amelyet porráoltott fehérmész, vagy őrölt égetett mész és természetes savanyú hidraulikus kiegészítőanyag keverékéből állítanak elő.

A bázikus, mészben dús nagyolvasztó-salakok, a szantorin-föld, a puccolán, a traszok, a diatómaföld és a mesterséges kötőanyagpótlékok, a hidraulikus kiegészítő anyagok csoportjába tartoznak. Közös tulajdonságuk, hogy lisztfinomságúra őrölve víz hatására önmagukban nem, de gerjesztőkkel keverve mind levegőn, mind víz alatt szilárdulni képesek. A könyv a hidraulikus kiegészítőanyagokat jelentőségüknek megfelelő részletességgel tárgyalja. Hazánkban ezeket az anyagokat cement és mész termékekben kombinálva forgalmazzák.

Hidraulikus kötőanyag a viszonylag fiatal, 135 éve feltalált portlandcement, amely a korszerű építőipar egyik legjelentősebb építőanyaga. Jelentősége az évi mintegy 6,5 millió tonnás hazai felhasználás is lemérhető. A portlandcement a szilikátcementek csoportjába tartozik, amelyek az alumínátcementekkel együtt képezik a hidraulikus kötőanyagokat. A könyv ismerteti a cementgyártást, majd foglalkozik a klinkerképződés vegyi folyamataival, a vegyi összetétellel és a klinkerásványokkal, valamint a hidratációval és a cementkő-struktúrával. Ezt követi a fizikai és szilárdsági tulajdonságok, így a kötési idő, az őrlési finomság, a térfogat-

állandóság, a kötőerő, a sűrűség, a víztartókéesség, a hőtágulás, a hőérlelhetőség és a raktározhatóság tárgyalása, ami nemcsak a tulajdonságokra, hanem a vizsgálati módszerekre is kiterjed, és a legújabb szabvány-előírásokon túl kísérleti eredményekről is számot ad. Széles olvasótábor érdekelhet a cementfajták és alkalmazási területeik leírása, amely a portlandcementekről, a heterogén portlandcementekről, az alumínátcementekről, a duzzadócementről, a szigma-cementről ad áttekintést.

Összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy jelen kötet az első kötethez hasonlóan maradéktalanul teljesíti azt a feladatot, amelyet a szerző Galileo Galilei idézve az előszóban célul tűz ki: a tudás megszerzéséhez kíván bennünket hozzásegíteni. E cél elérését az Akadémiai Kiadó és Akadémiai Nyomda szép és értékes munkával segítette elő.

Dr. Kausay Tibor

ZEMENT TASCHENBUCH 1979/80

Verein Deutscher Zementwerke, Bauverlag GMBH, Wiesbaden—Berlin, 594 oldal
(75 ábra, 105 táblázat)

Ez a kiadvány egy-két éves időközökben jelenik meg, a jelen kötet a 47. kiadvány.

A könyv első része a cement alkotó elemeinek mennyiségi és minőségi jellemzőit ismerteti két fejezetben. A harmadik fejezet jó áttekintést nyújt a korszerű cementgyártásnak nyersanyag és technológiai igényéről. Figyelemre méltó a cementgyártás környezetvédelmi előírásokhoz idomuló követelményrendszerének ismertetése. A cementfajták fizikai és mechanikai jellemzőit a negyedik fejezet tárgyalja.

A második és harmadik rész kiterjed a napjainkban alkalmazott adalékanyagok teljes spektrumának bemutatására, amelyekkel a beton tulajdonságait (szilárdság, térfogatsúly, vízzárás, kötés-gyorsítás, színezés stb.) tág határok között szabályozni lehet.

A negyedik és ötödik rész a normál- és könnyűbeton előállításának feltételeit és minősítésének módszereit foglalja össze. Utal a friss és megszilárdult beton szilárdsági, alakváltozási és reológiai tulajdonságainak becslésére. A különleges tulajdonságú betonok (pl. vízzáró, hő- és fagyálló, sugár- és kopásálló stb.) tervezési kérdéseivel foglalkozó fejezetek betontechnológiáink figyelmébe ajánlható.

Kiemelt fontosságúnak minősíthető a cement legújabb alkalmazásának lehetőségeit feltáró hatodik rész. Itt a vízalatti és trorkrét beton, az üveg- és műanyag szálakkal javított beton, a felületi nyers beton (Sichtbeton) előállításának feltételei találhatóak meg a változó igények egyidejű figyelembevételével.

A kézikönyvet a korábbi kiadványokban ismertetett különleges betonoknak és azok különleges alkalmazási területeinek összefoglalása zárja, a fontosabb építési szabványok és előírások felsorolásával.

A kézikönyv hasznos támpontot nyújt kutatóink munkájához, valamint a szabályzataink folyamatban levő korszerűsítéséhez.

Dr. Goschy Béla

Kézdi Árpád

SOIL PHYSICS

SELECTED TOPICS.

Akadémiai Kiadó. Budapest, 1979. 160 oldal, 215 fénykép és ábra, 6 táblázat

A könyv a nemzetközi híró szerző széleskörű munkásságának egyik kiemelkedő kutatási területét, a talajfizikát érintő alapvető kérdéseket tárgyalja.

A Bevezetőt követő *első fejezet* a szemcsehalmazok néhány fizikai tulajdonságával foglalkozik, nevezetesen a poruseloszlással, a keveréktalajok tulajdonságaival és a tömöríthetőséggel. Az elsőként említett témában a szerző kísérleti eljárást mutat be a porusok méreteinek és alakjának meghatározására; ennek alapján eloszlásfüggvényeket szerkeszt, vizsgálva a tömörítés során bekövetkező változásokat. A keveréktalajokra osztályozási rendszert állít fel, módszert dolgozva ki a kritikus adalékmennyiség meghatározására. A fejezet harmadik témáját az átmeneti talajok néhány alapvető sajátossága, elsősorban a tömöríthetőség képezi.

A *második fejezet* a homokok és átmeneti talajok szilárdságával, a kötött talajok húzószilárdságával, valamint a merev törés esetével foglalkozik, érintve az agyagok nyírószilárd-

ságának kérdését is. Ebből a fejezetből újszerűségükkel a következő témák tűnnek ki: a homokok nyírószilárdsága és szemeloszlása közötti összefüggés, az átmeneti talajok egyirányú nyomószilárdságának változása a fázisos összetétellel, a húzó- és nyomószilárdság közötti kapcsolat.

A *harmadik fejezet* a fázismozgás különböző eseteit tárgyalja. Az áteresztőképesség kérdéseit elemezve a szerző részletesen foglalkozik a finom szemcsék mennyiségének hatásával, valamint egy eddig eléggé elhanyagolt jellemzővel, a légáteresztőképességgel. Laboratóriumi kísérletek alapján számos új megállapításra jut a hidraulikus talajtörés kérdésében, melyek közül különösen a tömörségnek a folyamat közbeni változására és a vízmozgás turbulens voltára, illetve ezek szerepére vonatkozó megfigyelései figyelemre méltóak. A szuffúzióval és erózióval foglalkozó alfejezet nemcsak a jelenségek egyértelmű osztályozásával, hanem a szerző által definiált „önszűrés” részletes elemzésével és kvantitatív leírásával is kitűnik.

Túlzás nélkül állíthatjuk, hogy a könyv legérdekesebb és legértékesebb része — rendhagyó módon —, a 15 oldal terjedelmű *Bevezető*. Ebben foglalja össze a szerző a korszerű talajfizikáról alkotott koncepcióit, részletesen elemezve a fejlődés menetét és várható irányzatait. Itt bizonyítja be, hogy a régi feltételezések, az elméletek alapját képező modellek elavultak. A soron következő feladat olyan új modellek megalkotása, amelyek egységes rendszert alkotnak, és alapját képezik egy új, általános érvényű talajfizikának. (Ez a szemléleti átalakulás már néhány éve megindult, és ebben nem kis része van KÉZDI professzornak is.) A *Bevezető*-ben definiálja a szerző — többek között — az átmeneti talaj fogalmát és főbb jellemzőit, a fázismozgást és különböző megjelenési formáit, és osztályozza a talajfizika kérdéscsoportjait.

A könyv mind elméleti, mind gyakorlati szempontból jelentős. Megállapításainak egy része kiforrott és részletesen alátámasztott eredményként jelenik meg, más része pedig olyan alapkutatásnak tekinthető, amely a szerző iránymutató koncepcióit elfogadva továbbfejleszhető lesz. Az anyag megértését, a módszerek elsajátítását nagyon megkönnyíti az elméleti megállapításokat alátámasztó kísérletek részletes leírása, valamint a nagyszámú ábra.

A könyv ízléses, szakszerű kiállítása az Akadémiai Kiadó érdeme.

Dr. Rétháti László

TARTALOMJEGYZÉK

Kotsis Iván	1889—1980 (Csonka P.)	1
<i>Prohászka János</i> : A technológia jellegzetes vonásai és kapcsolata a többi tudományággal		9
<i>Kézdi Árpád—Koós-Hutás Erzsébet</i> : A szemcsék alakjának összehasonlító vizsgálata ...		23
<i>Csonka Pál</i> : Forgásparaboloidhég két függőleges és két vízszintes síkú peremtartóval ...		37
<i>Popper György—Gáspár Zsolt</i> : Numerikus módszer m -edfokú λ -mátrix sajátértékfeladatának megoldására		49
<i>Jankó László</i> : Egyenletesen megoszló erőkkel terhelt, lapos, oldalnymásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhégak membrán- és hajlítási elméletének összehasonlítása		57
<i>Kézdi Árpád—Lőrincz János</i> : Talajfizika és termodinamika		91
<i>Csonka Pál</i> : Szélerőkkel terhelt forgáshiperboloidhégak		111
<i>Singer Dénes</i> : Elosztóhálózatok állapotbecslésének egy új módszeréről		129
<i>Budincsevits Andor</i> : Elektron- és fotonszámlálás sokszorozással		141
<i>Páczelt István—Herpai Béla</i> : Megjegyzés a rugókkal megtámasztott rugalmas szerkezetek szilárdsági számításához		169
<i>Roller Béla</i> : A viszkoelaszticitástan irányzatai a mérnöki gyakorlatban, különös tekintettel a rúdszerkezetekre		179
<i>Lámer Géza</i> : Vastagfalú forgáshégak számítása hengersizmetrikus terhelés esetén		203
<i>Jankó László</i> : Oldalnymásmentes, lapos, egyenletesen megoszló erőkkel terhelt, nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhégak stabilitása		227
Száz év a magyar hídgyártás szolgálatában (Massányi K.)		261
Beszámoló a miskolci „6. Mechanizmusok és Hajtóművek” tárgyú szakmai szemináriumról (Terplán Z.)		3

Könyvismertetés

A Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei. Jubileumi kötet. (Terplán Z.)	265
A Nehézipari Műszaki Egyetem jelentősebb tudományos-eredményei, (1949—79) Miskolc 1979. (Terplán Z.)	265
<i>Gábor László</i> : Épületszerkezettan IV. kötet (Csonka P.)	266
<i>Gábor László—Párkányi Mihály</i> : Az információ továbbítása és vétele az iparosított építésben	266
<i>Oscar Büttner-Erhard Hampe</i> : Bauwerk, Tragwerk, Tragstruktur, Band 1. Analyse der natürlichen und gebauten Umwelt (Csonka P.)	267
<i>Holnapy, D.</i> : Számítógépek az építőipari tervezésben (Grósz M.)	268
<i>Palotás László</i> : Mérnöki szerkezetek anyagtana I. Általános anyagismeret (Újhelyi J.)	269
<i>Palotás László</i> : Mérnöki szerkezetek anyagtana, 2. Fa-Kő-Fém-Kötőanyagok (Kausay T.)	270
Zement Taschenbuch, 1979/80 (Goschy B.)	272
<i>Kézdi, Árpád</i> : Soil Physics-Selected Topics (Rétháti L.)	272

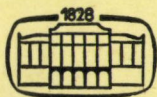


MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

57. KÖTET
3-4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1979

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, KÉZDI ÁRPÁD, PROHÁSZKA JÁNOS, VÁMOS TIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 100 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488). külföldi megrendelések a „Kultúra” Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

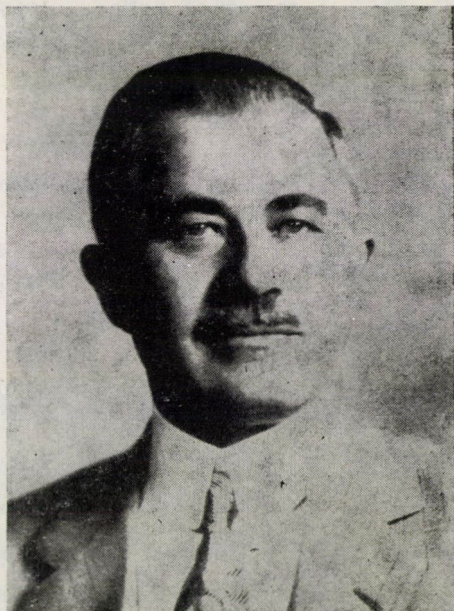
SZÁZ ÉVE SZÜLETETT GALAMB JÓZSEF

(1881—1955)

TERPLÁN ZÉNÓ

A MŰSZ. TUDOMÁNYOK DOKTORA*

Beérkezett: 1980. március 6.-án



Magyarországon már évtizedek óta nem gyártanak ugyan személygépkocsikat, ennek ellenére a világ gépkocsiiparának kialakulásában a századforduló idején számos magyar szakember szerzett elévülhetetlen érdemeket. Elég ha az itthon úttörő CSONKA Jánosra és BÁNKI Donátra, vagy DIESEL munkatársára ERNEY Móricra gondolunk. De értek el sikereket magyar származású szakemberek külföldön is, közülük talán a legismertebb GALAMB József neve lett.

Makón született 1881. febr. 3-án és Detroitban halt meg 1955. dec. 4-én. Szülővárosában járt elemi iskolába, majd polgáriba. Utána Szegeden a Fa- és Fémipari Szakiskola tanulója volt, ennek elvégzése után pedig a mai Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskola jogelődjén szerzett gépészeti ismereteket. 1901-ben kapta meg a végbizonyítványt és Diósgyőrött helyezkedett el. Innen vonult be a haditengerészethez Pólába. Amikor önkéntes katonai szol-

* Prof. Terplán Zénó, Miskolc 3529, Szabadságharc u. 12.

gálatát befejezte, a hódmezővásárhelyi Mérlegkészítő-nél dolgozott, érdeklődése azonban az akkor kialakuló gépkocsigyártás felé fordult, és elnyerte az aradi MARTA 300 koronás ösztöndíját, hogy tapasztalatokat szerezhessen.

Az ösztöndíjjal 1903 elején Németországba utazott. Drezda, Berlin, Hamburg és Bréma volt egy-egy állomása. Ösztöndíja azonban hamar elfogyott, állást kellett vállalnia. Brémában egy hajógyárban, Düsseldorfban egy kisebb üzemben, végül a majnafrankfurti Adler automobilgyárban helyezkedett el. Szakmunkás volt mindenütt, már csak a nyelvi nehézségek miatt is. Meglátogatta még Belgiumot és Hollandiát, majd — eredeti elképzelésének megfelelően — megtakarított pénzével és bátyjának támogatásával — hiszen 15 éves volt, amikor földműves apja meghalt — két barátja társaságában át-hajózott New Yorkba.

Visszaemlékezései szerint 1903. okt. 6-án érkezett ide, alig néhány dollárral a zsebében. A nagy metropolisban először egy papírdobozgyárban kapott munkát. Kisebbséte miatt állást kellett változtatnia. New York állam fővárosába, Albany-ba került, ahol a kormányzósági épület falburkolatát díszítette három hónapon át. Azután Pittsburgh-ban helyezkedett el a már akkor is neves Westinghouse cégnél mint szerszámkészítő.

Takarékos ember lévén régi tervét meg tudta valósítani, és elutazott Saint Louisba, az 1904-es autóvilágkiállításra. Valószínűleg az ott látottak után változtatta meg eredeti elképzelését, és nem tért haza, hanem Clevelandban egy automobilgyárban vállalt karburátor-szerelői munkát, majd — a nyelvet már eléggé megtanulva — szerszám-tervezői állást egy Niles nevű kisvárosban.

1905-ben meglátogatta egyik magyar barátját Detroitban. Annyira megtetszett neki a város, hogy ott akart letelepedni. Állást keresett. Nem oklevelet kértek tőle, hanem próbarajzot kellett készítenie. A több lehetőség közül végül is azért kötött ki a Ford Motor Company-nál, mert ott vita nélkül megkapta a kért heti 20 dolláros fizetést. Ez a gyár akkor 300 főből állt, és máshol gyártott részeségekből szerelt össze autómódelleket. GALAMB József, mint tervező mérnök, egy-egy autómódel részének áttervezési feladatait kapta kezdő munkaként. Egyik rajzára felfigyelt a vállalat alapító Henry FORD és maga mellé vette vezető konstruktőrnek.

1905—43 között, csaknem négy évtizeden át dolgozott a később mammutvállalattá növekedett Ford-művekben. Rangot, nevet azzal szerzett, hogy FORD rábízta a később híressé vált amerikai népaútó, a Ford T-modell tervezését. A megvalósítandó feladat nem volt könnyű, felére kellett leszorítani az önköltséget, hogy ne csak a gazdagok, hanem a közepes keresetű városiak-falusiak is megvásárolhassák; s ugyanakkor szinte terepjárónak kellett lennie a személygépkocsinak, hiszen nem volt még kiépített úthálózat; végül könnyen vezethető, kezelhető és szerelhető gépkocsi kellett, mert nem volt semmiféle autóiskola vagy javító szolgálat.

GALAMB visszaemlékezéseiben kemény tervezői munkára utal. Több változatot kellett kidolgoznia, hogy a legmegfelelőbbet kiválaszthassák. A sebességváltóból pl. 1 : 2-es kicsinyítésű rézmodellt csináltatott, a karosszériából pedig 1 : 1-es famodell készült.

1908 októberében készült el az első példány, amelyből aztán 1927-ig — az egyik irodalmi forrás szerint — pontosan 15 456 868 (vagyis: több mint 15 millió) db készült úgy, hogy csak a karosszériát korszerűsítették időnként.

Oly nagy volt a siker, az érdeklődés, hogy meg kellett szervezni a szalagszerű gyártást is, szerelést is. A szakirodalom pl. ilyen termelési fejlődésről számol be: 1911-ben 350, 1913-ban 1400 és 1922-ben 10 ezer db volt a napi gépkocsi-termelés!

A T-modell világsikere meggazdagodást jelentett Henry FORDnak és családjának, elismerést GALAMB Józsefnek, aki aztán különböző vezető beosztásokban a Ford-művek sok más gépipari termékének tervezésében játszott irányító szerepet.

A Ford-művek másik kiemelkedő gyártmánya, az első világháború végére piacra dobott Fordson-traktor volt. Valószínű, hogy ennek megtervezése már sokkal inkább kollektív munka eredménye volt, mint a T-modellé. A végleges Fordson-traktor előzményeiben azonban ismét GALAMBÉ volt a főszerep. Visszaemlékezéseiben megemlítette, hogy még a 10-es évek első felében FORD kívánságára, rendkívül rövid időn belül kellett új traktort terveznie és gyártania. Három napot kapott rá és felhasználhatott hozzá minden autórészegységet. A B-modell motorjával, a T-modell sebességváltójával, tengelyeivel, és más részekből — nem három, de hat nap alatt — elkészült a prototípus, amely azután hosszú ideig Ford farmján végezhetette a próbamanipulációkat. Két év múlva GALAMB új változatot tervezett, az is elkészült, azt is alaposan kikísérletezték. És csak ezután született meg a Fordson-traktor, amelyből ismét több millió darab készült és terjedt el az egész világon.

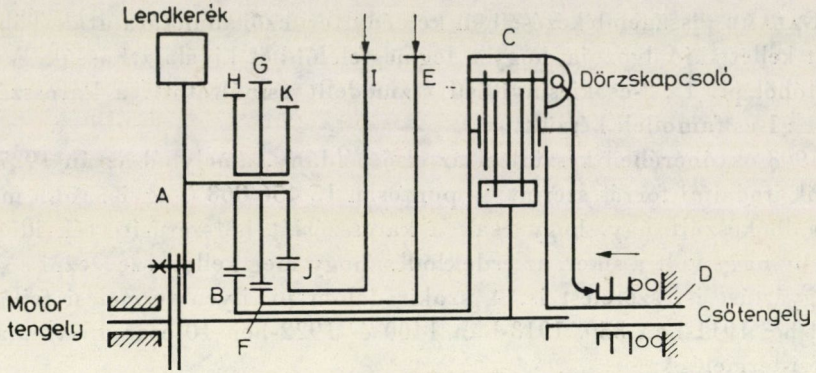
*

A T-modell roppant mértékben hozzájárult a közlekedési és kommunikációs problémák megoldásához, a Fordson-traktor pedig a mezőgazdaság gépesítését alapozta meg az első világháború befejezését követő korszakban.

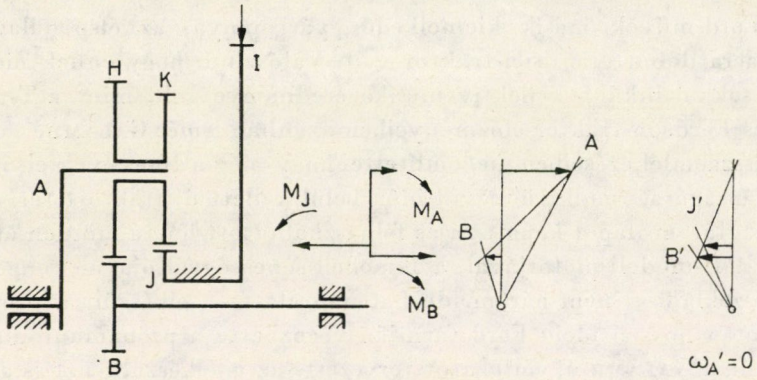
Technikatörténeti szempontból a bolygómű-rendszerű sebességváltó emelhető ki, amely belekerült a 15 milliónyi T-modellbe, a háborús repülőgépekbe, az első traktorokba.

Az 1. ábra mutatja a Galamb-féle sebességváltó vázlatát. Az I jelű fék zárásával hátramenetet, az E jelű fék működtetésével (és az I elengedésével) előremenetet, a dörzskapcsoló zárásával közvetlen (direkt) kapcsolást kapunk.

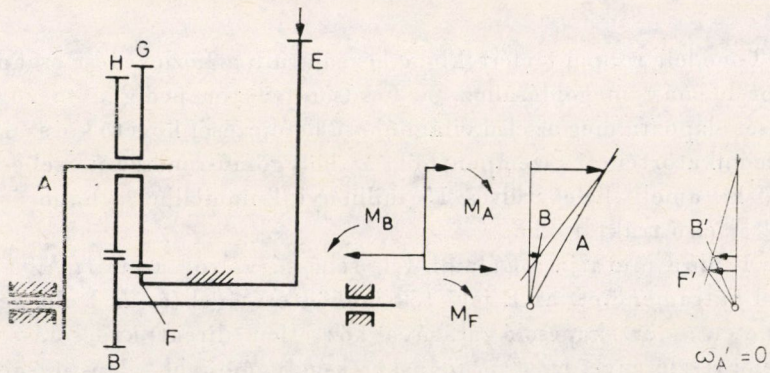
Nem részletezve most a fogaskerék-bolygóművek alaptípusait, az 1. ábra sebességváltója tulajdonképpen két db k + k alaptípust foglal magába.



1. ábra



2. ábra



3. ábra

A k betű a külső fogaskerék-kapcsolódásra, a $k + k$ pedig arra utal, hogy a bolygókerék két fogaskereke áll kapcsolatban egy-egy ugyancsak külső fogazatú napkerékkel (hátramenetre lásd a 2., előremenetre lásd a 3. ábrát). Az 1—3. ábrán a nagy betűk a sebességváltó elemeire utalnak, M a nyomaték, ω a szögsebesség jele. Az erő- és sebességábra egyszerű átvetésekkel és szerkesztésekkel építhető fel.

A T-modell tervezése idején már ismertek voltak bizonyos bolygómechanizmusok. Tudunk olyan gépkocsiról is, amelybe beépítettek más alap-típusú bolygóműves sebességváltót, de az nem terjedt el. Ezért kell kiemelni a Galamb-féle megoldás újszerűségét, egyszerűségét és nagyszerűségét!

A $k + k$ bolygóműnek ugyanis hallatlan előnye, hogy *kizárólag* külső fogazatú fogaskerekekből áll, vagyis *nincs* benne belső fogazatú gyűrűkerék. Ez egyszerűbb gyártást, előnyösebb szerelést és kevesebb gyártási, ill. működési zavart, interferenciát jelentett. Előnye volt még, hogy a sebességváltó rendkívül kis helyet igényelt. E bolygómű-típus egyetlen hátránya, hogy bizonyos teljesítményfolyamok esetén kedvezőtlen lehet a hatásfok.

A részletes elemzésből kitűnik, hogy GALAMB Józsefnek sikerült az előremenetnél olyan fogszámviszonyt választania, amely az állókarú működés jó hatásfokát közelítette meg bolygószerű üzemben is. A hátramenet rosszabb hatásfoka — annak rövid időtartama miatt — nem jelentett számottevő hátrányt.

*

GALAMB József századforduló utáni gépkonstrukciós munkáját mai szemmel nézve a következőképpen lehet értékelni. A T-modell tervezése során már a napjainkban tudományos eljárásnak elismert *módszeres géptervezés* elemeit alkalmazta, amennyiben több variációs megoldássorozatból lehetett kiválasztani a legkedvezőbbet, az optimálisat. A bolygóműves sebességváltó helyett a 20-as években (talán éppen a szabadalmi védettség miatt) a tolókerékes sebességváltó honosodott meg ugyan, de amikor a második világháborút követően az automatizált sebességváltókat fejlesztették ki, ismét visszakerült a bolygómű a gépkocsikba a hidrodinamikus nyomatékváltókkal kombinálva. Az *úttörő* érdem mindenképpen GALAMBÉ.

A másik érdekesség, hogy GALAMB József azonnal kismintát készített. Így gyorsan méréseket lehetett végezni és a számításai igazolhatók voltak. Ezzel tulajdonképpen megalapozta már a századforduló első évtizedében a *fejlesztési kutatások* alapjait.

A harmadik kiemelhető munkamódszere a Ford-tractorkok tervezése során érvényesült, amikor is az előírt rendkívül szűk határidőt azzal hidalta át, hogy a gépkocsi-modellek *ismétlődő* elemeit használta föl az új konstrukcióhoz.

És még egy dolog emelhető ki: hazai jó iskolázottsága, kifejező rajzkészsége, amely a vándorló korszakában a szakmunkás gyakorlattal párosult. Így megvolt benne az a készség, hogy *gyártáshelyesen* tudott konstruálni. E képessége később *tömeggyártáshelyes* tervezési módszerre finomodott.

*

Amíg a fásasztó hajóutakat bírta — kb. a 30-as évek közepéig — többször is hazalátogatott Magyarországra. Ilyenkor előadásokat is tartott Budapesten a Magyar Mérnök- és Építész-Egyletben. Filmet is hozott magával, amellyel bemutatta a Ford-gyár termékeit. 1979-ben előkerült közülük az egyik, amely a Fordson-traktor előnyeiről számol be. Ez a film kb. 1919-ben készülhetett.

A GALAMB Józsefről szóló írásokból, a rokonság visszaemlékezéseiből megállapítható, hogy nyugodt természetű, magyar származását nem felejtő, tehetséges és szorgalmas, szinte szenvedélyesen csak a munkájának élő egyéniség volt.

Amikor EDMUNDS a Ford Múzeum igazgatója megküldte GALAMB József előzőleg már idézett visszaemlékezéseinek gépelt szövegét, kísérő levelét azzal zárta, legyünk büszkék arra, hogy ez a kiváló műszaki szakember magyar származású volt.

Valóban büszkék lehetünk arra, hogy az alig több mint 70 éve megvalósított T-modell és a 60 éve először gyártott Fordson-traktor létrehozásában hazánkfia vezető szerepet játszott, akinek általános gépkonstruktóri, feltalálói munkája ma, születésének századik évfordulójakor is példamutató!

IRODALOM

- CALLAHAN, J. M.: Galamb, Ford's Friend, Dies . . . He Helped Design Model T. = *Automotive News*. 1955, dec. 26. sz. 5. o.
- GALAMB József. = Magyar Életrajzi Lexikon. I. Akadémiai Kiadó. Budapest 1967, 563/565
- GALAMB Józseffel folytatott angol nyelvű, hangszalagra felvett beszélgetés kézirata. (A Ford Múzeumból.) (Kézirat.) Portshartrain 1952, jan. 30; febr. 6, 18 és 26. 1/157
- HELDT, P. M.: Torque Converters or Transmission. 5. kiad. Chilton Company. Philadelphia. 1955. „Ford Model T Transmission”. 229/230
- SWEINHART, J.: Who's News Today. = *The Detroit News*. Apr. 14, 1944, 3. o.
- SZLUKA Emil: Makótól Detroitig — Galamb József, a Ford kocsik első konstruktöre. = *Népszabadság* 37 (1979), 134. 15. o.
- TERPLÁN Zénó: Galamb József (1881—1955) a világhírű gépkonstruktőr, a felsőipariskola volt diákjának életútja. = *Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskola (1879—1979) jubileumi ülésszakának anyaga*. 2. Budapest 1979, 223/233
- TERPLÁN Zénó—LENDVAY Pál—JÁLICS Károly—MARTON Gábor: Megemlékezés egy magyar származású neves gépkonstruktőről: Galamb Józsefről (1881—1955). = *Borsodi Műszaki Hetek '79 előadásai*. GTE, Miskolc, 1979, 242/247

HÉTKÖZNAPOK ÉS CSODÁK*

— AZ ÉPÍTÉS VILÁGA ÉS TUDOMÁNYÁNAK SAJÁTSZERŰSÉGE —

GÁBOR LÁSZLÓ**

AZ MTA RENDES TAGJA

Az építés világa felderítésének és tudománya vizsgálatának az ad különös időszerűséget, hogy az építészet — művészetből, tudományból és technikából ötvöződő — egészének ma nincs egyetlen olyan összetevője, és nincs egyetlen olyan határterülete sem, ahol a legélesebb viták, a leghevesebb bírálatok és a legfájdalmasabb félreértések ne éppen az alapkérdések, a legfontosabb érintkezési és átfedési területek körül bontakoznának ki.

Ennek — csupán példázó — igazolására elég elmondani azt, hogy

az építészet művészeti vonatkozása tekintetében vannak akik még azt is vitatják, hogy az építészet e tekintetben valóban az egész társadalom ügye-e, vagy csupán az „elité”, megkérdőjelezzik azt, hogy az ún. modern építészet elvei egyáltalán érvényesek-e még és alkalmasak-e napjaink feladatainak megoldására, elvitatják a művészi szempontok létjogosultságát bizonyos — még hozzá nagyfontosságú — területeken, különösen a tömeges iparosított építésben;

az építés-építészet tudománnyal kapcsolatban vannak akik kétségbe vonják szerepének meghatározó és jelentőségének növekvő voltát az építészet fejlődésében, kétségbevonják eredményeit, tagadják szemléletének általános érvényességét és azok következetes felhasználásának lehetőségét, sőt még az alkotó készség elsorvasztásával is megvádolják;

az építés technikája tekintetében vannak akik — és nem is teljesen alaptalanul — kifogásolják, hogy feltételrendszerét sokszor a művészet és a tudomány szempontjainak háttérbe szorításával, nemegyszer lekicsinylésével érvényesíti, túlzásnak tartják uralkodó szerepének állandó felemlegetését és szóvá teszik, hogy mindezek ellenére és egyoldalúan merev megközelítési módszere mellett sem képes a társadalom által rábízott feladatot teljes mértékben és értékkel teljesíteni.

*Székkfoglaló előadás. Elhangzott 1980. március 6.-án.

**Prof. Dr. Gábor László.

A kérdéscsoport vizsgálatának fontosságát az húzza alá, hogy az építészetnek különösen nagy a társadalmi hatása és jelentősége, hogy tudományterülete roppant dinamikusan fejlődik, hogy interdiszciplinaritása talán valamennyi műszaki tudományé között a legsokrétűbb, a legösszetettebb.

Ennek igazolása meglehetősen egyszerű:

Nem szorul ugyanis bizonyításra, hogy az építészet (ha úgy tetszik a város-építészet) egyetemes jelenségei mögött társadalmi erők, ideológiai szemléletek, sőt politikai feszültségek is meghúzódnak, hogy az építészettel szemben ma támasztott követelmények — bármilyenek is azok — jellegzetesen társadalmi szinten fogalmazódnak meg, következésképpen azok kielégítése is csak társadalmi téren oldható meg (az építésztudománynak ez a korai — a 20-as, 30-as évekből származó — tétele még a mai napig sem cáfolódott meg, érvényét nem vesztette el).

Nem szorul továbbá bizonyításra az sem, hogy a problémák alapvetően társadalmi (vagy ha úgy tetszik politikai) jellegéből több dolog is következik:

- először is az, hogy az építészet kérdéseire adott válaszok — legyen azok jellege bár technikai (ipari) vagy művészeti (ideológiai) — tudományos szempontból csak akkor hitelt érdemlőek, ha közvetlenül vagy közvetve a társadalmi kérdéseket is megválaszolják,
- másodsor az, hogy e válaszoknak — éppen mert társadalmi kérdésekre vonatkoznak — feltétlenül meg kell maradniuk a racionalitás világában és mindenképpen útját kell állniuk mindenféle irracionálisnak, meg kell akadályozniuk az ész újabb trónfosztását, a művi homályt a valóság világosságával kell elűzniük, az áltudománnyal az igazit kell szembe helyezniük,
- harmadszor pedig az, hogy — az ipari szintre emelt — építészeti, városépítészeti megoldások — műszaki szempontból is — csak akkor tekinthetők érvényeseknek, elfogadhatóknak,
- ha azok közvetlenül vagy áttételesen a politikai és gazdasági, a társadalmi és szociológiai, a funkcionális és pszichológiai, az esztétikai és szemiotikai követelményeket egyidejűleg és egyaránt kielégítik,
- ha e megoldások a társadalmi fejlődés, átalakulás megértését, a változás okainak és folyamatainak felismerését tükrözik, és a történelem, a társadalom feltette ésszerű kérdések ésszerű megválaszolását is lehetővé teszik.

Végül az egész problémakör vizsgálatának szükségességét az indokolja,

- hogy az építészettel kapcsolatban új elméletek bukkannak fel és terjednek (még hozzá nagyrészt megválaszolatlanul), — újfajta célokat

tűznek ki, új alkotási szemléleteket és módszereket hirdetnek meg, új tudományos eredmények keletkeznek, új feltételek, követelmények jelennek meg,

- hogy mindezek eredményeként sok az eszmei zavar, sok az elvi félreértés, a gyakorlati tévedés, az értékelési bizonytalanság.

Ennek megmutatására — azt hisszük — elégséges annak felsorolása, hogy

vannak, akik a „modern építészet” haláláról beszélnek, tagadják eredményeit, kétségbevonják értékeit, elvetik a funkció primátusságára, a feltétlen hasznoságra, a szigorú ésszerűsége, a szerkezeti őszinteségre, a világos rendre építő szemléletét, tisztaságát sterilitásként, egyszerűségét unalomként, díztelenségét képzelethiányként, az építészet jelkép és jelentés rendszerének elutasítását tévedésként, józan rendjét gondolati kalodaként értékelik, élesen bírálják hirdetőit és nagy alkotóit (köztük Frank Lloyd WRIGHT-ot, Mies van der ROHE-t, Walter GROPIUS-t de még Le CORBUSIER-t is), nemegyszer ki is gúnyolják őket;

mások viszont éppen a hagyományos építészet régi anyagaitól, ismert szerkesztési elveitől, módjaitól való még következetesebb elkülönülést, elszakadást vallják, megítélésük szerint napjaink feladatait a kor sajátos új nyelvén beszélve, a ma eszközeivel, tudományának és technikájának felhasználásával, az adott társadalmi és ipari háttér teljes fegyvertárának bevetésével kell megoldani, ezért a dolgok bátor újrafogalmazására, ezen belül egyoldalról kristálytiszta rendre, rendszerelvű építésre, másoldalról merész szerkesztésre, a lehetőség határáig vékonyított, karcsúsított, súlytalanított, szinte anyagtalanított szerkezetek alkalmazására kell törekedni, úgy vélik, hogy pókháló finomságú acélszálak szőtteséből, karcsú fémrudak rengetegjének térbeszerkezettől, súlytalanul lebegő hárták feszüléséből, csillogó üvegfalak fénylő felületéből is lehet építészeti teret alkotni, tömeget formálni; e tekintetben — minden túlzása ellenére is — nagyon jellemző Bernard LAFAILLE véleménye: „Egy feladatot a legkevesebb anyag felhasználásával megoldani tulajdonképpen ez az egyetlen érdekes probléma”;

olyanok is akadnak, akik úgy találják, hogy a dolgokon feltétlenül változtatni kell, mert úgy látják (Aldo van EYCK kifejezéseit is kölcsönözve), hogy még ott is, ahol sikerült a slumök felszámolása, a helyükbe lépő „higiéniai unalom és mértföldekre elnyúló jól organizált semmi” nem hozhat igazi megoldást, mert ebben a fárasztóan monoton környezetben az ember bizonytalanná, bátorralanná, otthona személytelenné, jellegtelenné, életmódja elkülönülővé és sematikussá válik;

változatlanul dolgoznak még azok is, akik a kor egyenértékű építészeti megjelenítéséhez és kifejezéséhez elegendőnek tartják a tartalomból (azaz a rendeltetésből, a tér formálásából, a tér kitágításából, a térrendszerek kialakításából)

adódó lehetőségek felhasználását, míg mások a formában és formával kifejezhető új jelképrendszer megteremtését és alkalmazását sürgetik;

vannak akik azt hirdetik — tudomásul véve a dolgok és körülmények folytonos és gyors változását, és felismerve azt is, hogy a folytonos változásban csak az ahhoz igazodni tudás igénye és feltétele állandó —, hogy épületeinknek, legalább azok jelentős részének e tekintetben (eleve, építés közben, használatban, sőt utólag is) hajlékonynak kell lennie, szélső esetben pedig a korlátlan alkalmazkodás képességét is magában kell hordania, egy csoportjuknál pedig még vállalni kell azok gyors elhasználódásának feltételét is;

nem kevés a száma azoknak sem, akik a szerkezetet tartják elsődlegesnek (GIEDION szerint századunknak nem az architektúra, hanem a konstrukció szolgáltatja a legjobb útmutatót), nagyon sokan élnek a technológia bővületében, vannak akik a „rendszer”-től várják a megváltást, mások az elektronikus technika adta lehetőségekben bíznak;

sokan úgy vélik — s ezt joggal ki is mondják —, hogy a számtalan elmélet, sokféle elképzelés, seregnyi tudományos eredmény, nagyszabású és nagyszerű műszaki teljesítmény mellett vagy akár ellenére is még mindig nagyrészt megoldatlan az ún. humán szféra kérdése, hiszen a szinte emberfelettivé duzzadt roppant városok tülekedő telítettségén, léptéktelen és átláthatatlan szövevényén, a közlekedés szörnyű zsúfoltságán, az otthon teremtés rendkívüli nehézségein, az egymás mellett élés néha elviselhetetlen testközelségén nem sokat segít a megálmodott új csodavárosok terve, a hangsebességet meghaladó repülés valósága, a csillagközi közlekedés lehetőségének közelsége, a tudomány egyes területeinek káprázatos eredményei; és — az egész emberiségre gondolva — megismétlik VÖRÖSMARTY kérdését: „Hol a nagyobb rész boldogsága? Ment-e a könyvek által a világ elébb?”;

végül engedjék meg, hogy a sorban utoljára azok véleményét is idézzem — jómagamat is közéjük számítva —

akik konokul vallják, hogy az említett új elméletek halmaza felvázolta új építészeti világkép feltűnően nem teljes, sőt bizonyos értelemben — és nem is véletlenül — hamis, hiszen a teljes problémakör „a mindenséggel mérd magad” gondolatának jegyében semmiképpen sem szűkíthető le — a torzítás veszélye nélkül — a legfejlettebb és leggazdagabb országok világára és nézőpontjára,

akik szilárdan hiszik, hogy a „modern építészet” egyáltalán nem halt meg, sőt még nagyon is messze van lehetőségeinek kimerítésétől, meg sem közelítette teljesítőképesége határait,

akik meg vannak győződve arról, hogy az igazi építés-építészettudomány ezzel az építészettel lépett be a jóformán csak a tapasztalat próbájában bízó és fő-

ként arra támaszkodó építési-tudás helyébe, s ennek keretében zárkózik fel a kor tudományos és technikai színvonalához,

akik változatlanul úgy tartják, hogy ez az az építészet, amelyet probléma megközelítési módjának elfogulatlansága, emberközpontúsága, tudomány iránti elkötelezettsége, társadalmi érzékenysége egyaránt alkalmassá teszi a városléptékű és tömeges feladatok — ha nem is maradéktalan — ellátására, és a kort jellemző, jelképező csúcsteljesítmények elérésére is, tehát a ragyogó művészeti, a nagyszerű mérnöki, a roppant technikai és az óriási méretű és felelősségű alkotások, teljesítmények létrehozására.

Egy pillanatra úgy látszik, itt meg kell állni:

Az eddig elmondottakból ugyanis az már világosan kiderül, hogy az építészet szemléleti és törekvés-spektruma nagyon kiszélesedett, és az is jól látszik, hogy az építés-építészettudomány problémakörében a tényezők száma nagyon megnőtt, s így az is érthető, hogy ezáltal az egész problémakör rendkívül összetetté és különösen komplex-szé vált,

de az nem derül ki, hogy napjaink építés-építészettudományának miben rejlik sajátosságai, mik azok a megkülönböztető jegyek, amelyek e területet saját múltjától és az egyéb műszaki tudományokétól olyan jellegzetesen elválasztják.

Közismert dolog, hogy egy adott tudományterület struktúraváltását látható kísérő jelenségként a figyelembeveendő tényezők számának rohamos növekedése, rejtett kísérő jelenségként pedig határterületének erőteljes bővülése és módosulása követi, és együttes hatásuk teszi a szóbanforgó problémakört valóban összetetté; de

az is közismert, hogy egy adott problémakör összetett voltának mértéke, összetettségének foka elsősorban nem a tényezők számától, hanem főként az e tényezők közötti vonatkozások mibenlététől és gazdagságától függ, jellegét pedig a határterületek változásának módja határozza meg.

Ebből következik, hogy a szóbanforgó problémakör sajátosságának vizsgálatakor célszerű a valóban meglévő rengeteg tényező közül azon kevészámú kiválasztása, amelyek semmiesetre sem hanyagolhatók el, hiszen a tényezők közötti alapvető vonatkozások a legeredményesebben ily módon deríthetők fel.

Az építés-építészettudomány területén a nagyon nagyszámú tényező közül három semmiesetre sem küszöbölhető ki, nevezetesen

először a *társadalom*, hiszen ez az egész építési tevékenység feladatkörének meghatározója, egyszersmind színhelye és kerete;

másodsor a *technika*, hiszen ez az építési tevékenység, a megvalósítás eszköze; harmadsor a *tudomány*, hiszen az az általános fejlődés eredményeként — mint mondani szokás — ma már közvetlen termelőerővé vált.

Ezek után a sajtószertűség vizsgálatának nyilvánvalóan e három tényezőtől kell kiindulnia és a vizsgálat tekintetében az látszik a legcélszerűbbnek, ha azt azokon a területeken végezzük el, ahol ezek a tényezők a legjellegzetesebben érvényesülnek.

Napjaink építészetében két ilyen élesen elkülönülő, akár polárisan is ellentettnek tekinthető terület van:

Az egyik a hétköznapok világa, a tömeges építés területe. Ez azért kerül az építészet egyik pólusára, mert az a mindenki által nagyon is jól ismert követelmény, hogy minél többet, jobban, szebben, változatosabban, változtathatóbban stb. kell építeni, és az a társadalmi szintű kikötés, hogy mindezt adott helyen és időben, mindig szigorú műszaki és szűkös gazdasági feltételek mellett, a növekvő igényt sokszor — s a legjobb eset az, ha nem — csökkenő anyagi lehetőséggel társítva kell végrehajtani, egyidejűleg érvényes. Ez nehezen feloldható ellentmondást teremt az igények és kielégítésük lehetősége között és végső soron oda vezet, hogy ezt a roppant méretű, társadalmi fontosságú és politikai jelentőségű feladatot az ipar teljes felkészültsége mellett sem tudja minden vonatkozásban megoldani.

A másik a csodák világa, az építészeti csúcsteljesítmények területe. Ez azért kerül a másik pólusra, mert itt mindig valamilyen kiemelkedő jelentőségű egyedi feladat megoldásáról van szó, mert a cél az adott helyen, időben és körülmények között a már megvalósítható legtökéletesebb keresése pl. a legmagasabb, a legkülönlegesebb, a leglátványosabb, a legjobban felszerelt, a legnagyobb „komfortot” nyújtó stb. épület létrehozása, mert ehhez mind a társadalmi fedezetet, mind a műszaki feltételeket — mondhatni — ideális szinten biztosítják, mert végrehajtásához az ipar a megvalósítás minden eszközével rendelkezik.

E két polárisan ellentett világnak jellegzetesen közös ismérve az, hogy bennük az építés-építészettudomány három fő összetevője (ami egyben sajtószertűségnek is forrása): a művészet, a tudomány és a technika társadalmi szinten elvileg maximális igénnyel lép fel, jellegzetesen megkülönböztető vonása pedig az, hogy e feltétel a hétköznapok világában eddig nem bizonyult teljesíthetőnek.

E feltűnő hiányosság — amelyben, ha jól meggondoljuk, korunk építőiparának és építéstudományának egyik alapvető ellentmondása fogalmazódik meg — néhány nagyon is jól belátható külső és nehezebben elemezhető belső okra vezethető vissza.

Először a külső okokról:

A hétköznapok világában a termék mindig tömeges, megvalósítása helyileg szétszórta, amiből adódik, hogy a művészi érvényesítésének lehetősége potenciálisan a legkisebb (hiszen a formát a gyártás szempontjai alá rendelik), — hogy a tudományban a határterület a humán vonal felé tolódik el (hiszen társadalmi szempontból az értékelés alapja nyilván a használatra alkalmasság, a hasznosság), — hogy a technikában a gyári technológia az uralkodó tényező, a mérés alapja pedig a hatékonyság, a gazdaságosság;

a csodák világában a termék mindig egyedi, megvalósítása helyileg koncentrált, amiből adódik, hogy a művészi érvényesítésének lehetősége a legnagyobb, hiszen a gyártást és a készítést egyaránt alárendelheti a formának, — hogy a tudomány vonatkozásában a határterület az egyéb műszaki tudományok felé tolódik el, hiszen társadalmi szempontból az értékelés alapja a műszaki tökéletesség, — hogy a technikában a helyszíni technológia az uralkodó tényező, a mérés alapja pedig a művészi-műszaki teljesítmény.

Nézzük ezt követően a belső okokat:

Amíg a hétköznapok világában a tömegtermeléshez az építés iparosítására, következésképpen az építőipar struktúrájának megváltoztatására, tehát új technológiára, technológiákra van szükség,

hiszen a tömeges építés a termelést a gyárban összpontosítja, az ott előállított és utólag nem alakítható tektonikus elemek additivitására alapított szerkezeti rendszere a tervezést és így a formát is a gyártás alá rendeli;

addig a csodák világában az egyedi reprezentatív termék előállításához nincs szükség az ipar struktúraváltására, sem új technológiákra, a feladatok megoldásához a meglévő technológiák fejlesztése, a termék tökéletesítése teljesen elégséges,

hiszen az egyedi építés a termelést a helyszínre összpontosítja, a feladat jellegéhez, sajátosságához megválasztott anyagokkal, ahhoz igazodó méretekkel, szerkezetekkel és formálással dolgozik, a gyártást, készítést pedig a tervezés és így a forma alá rendeli;

amíg a tömeges termelés nem képzelhető el a rendszer elméleti alapokra fektetett tervezés + gyártás + összeállítás (pongyolán fogalmazva: a rendszer elvű építés) megteremtése nélkül,

hiszen csak valamilyen rendszer keretein belül lehetséges a gyártott elemek, alkatrészek méretének, alakjának értelmes megállapítása, továbbá számának, választékának, összefüggéseik törvényszerűségeinek, össze-

rakhatóságuk módjainak és lehetőségeinek helyes meghatározása, válik lehetővé a belőlük előállítható ésszerűen lehetséges építészeti változatok kimunkálása, azaz a lényegében azonos célra gyártott elemekből különböző végtermékek (= épületek) létrehozása;

addig az egyedi csúcsteljesítmények eléréséhez éppen a teljesen szabad, a minden értelemben kötöttség nélküli, a különleges megoldásokat kedvelő, sőt kereső alkotási módszerre, tervezési szemléletre és építésre van szükség,

- hiszen minden eleve megadott kiindulási alap, megfogalmazott feltétel-sor vagy kikötött rendszer csökkentené a megoldás keresés lehetőségeit, korlátozná annak szabadságfokát;

amíg a tömeges termelés épületeinek rendeltetése általában azonos vagy legalábbis közel azonos, a térben nagy számban egymás mellé vagy egymás közélébe kerülnek, építészeti megjelenésük azonos vagy hasonló, térrendszerük egymás mellé és fölé sorolt térsejtek halmazából alakul ki, a velük kapcsolatos legnehezebb feladat pedig a sokszoros ismétlődésből származó városképi monotonitásnak, a szűkre szabott otthonok kényszerítő egyformaságának feloldása;

addig az egyedi építés termékének építészeti megjelenése — még azonos rendeltetés feltételezése mellett is — különböző, az épületek nem kerülnek egymás mellé, térrendszerük teljesen kötetlen, a velük kapcsolatos művészetre, időtlenségre, jelképpé válásra való törekvés minden lehetősége adott.

Az előző gondolatsor tanúsága szerint a kor építészetének két — diametrálisan szemben lévő — sajátos területe van, és e két terület egymástól mind az építészeti feladat, mind az építés-építészeti tudománya, mind az építés technikája tekintetében jellegzetesen különbözik:

a hétköznapi világában ugyanis a feladat társadalmi szempontból kiemelkedő fontosságát éppen a mennyiség adja meg, a tömegesség hordozza, ezért a humán tényező elkerülhetetlenül háttérbe szorul, az irányítottságában humán szándékú tervezés keze pedig kötötté válik, hiszen a tömegesség ténye szükség-szerűen a gyártást teszi elsődlegessé s így a „formát” legalábbis eddig kivédhetetlenül a „gyártás” alá rendeli;

a csodák világában ezzel szemben a feladat társadalmi (vagy más, pl. gazdasági, üzleti stb.) szempontból kiemelkedő jelentőségét éppen egyedi volta adja meg, reprezentatív jellege hordozza, ezért a humán tényező érvényesítésének elvben semmiféle akadálya nincs, a tervezés minden területen és értelemben szabaddá válik, hiszen az építészeti jelentőség mindenképpen a „formát” teszi elsődlegessé, s így a „készítést”, a „gyártást” természetsszerűen rendeli „a forma” alá.

Továbbmenve,

ha a tömegességet a művészi igényével kell társítani — ami feltehetően előbb vagy utóbb mégis csak bekövetkezik — akkor olyan ipar létrehozására van szükség, amely — a régi technológiákhoz hasonlóan, de a fejlődés minőségileg jóval magasabb szintjén — az esztétikai igények kielégítésére is alkalmas, és

ha a hagyományos építészet végtelen változatosságát és csúcsteljesítményeinek elérését egyrészt az anyag alakíthatósága, másrészt a szerszám, a technika alkalmazkodó képessége tette és teszi ma is lehetővé, akkor a ma (iparosított) építészetében az anyag alakíthatósága helyébe az elemeket gyártó gépek átállíthatóságának, az egyszerű szerszám alkalmazkodó képessége helyébe pedig az egész géprendszer átállíthatóságának kell kerülnie.

Amennyiben napjaink építészetének világát valóban a bemutatott két terület jellemzi, akkor nem szorul az sem bizonyításra, hogy az építés-építészettudomány problémakörét, pontosabban sajátságosságát is e két terület határozza meg.

Most azt kell tehát megvizsgálni, hogy hogyan határozza azt meg, pontosabban, hogy melyek e sajátságosság jellemzői.

Ezeket sorra véve:

A sajátságosság első jellemvonás csoportja

először az, hogy az építés-építészettudomány — a többi műszaki tudományoknál sokkal inkább — elválaszthatatlanul kapcsolódik a művészihez, az egész humán szférához,

másodszor az, hogy e kapcsolódásban az interdiszciplinaritás egy sajátos kettős esete jön létre, mert a humán szféra — az egész részeként — benne is foglaltatik, de az egészt — azt körülvéve — magában is foglalja, ami mind az építés tudománya, mind a humán oldal vonatkozásában különös új gondokat okoz („új fájdalom vett mindkettőn hatalmat, a hal Jónásnak fáj, Jónás a halnak” mondhatnánk BABITSCSAL);

harmadszor az, hogy a belső interdiszciplinaritás abból adódik, hogy az építés (tervezésből + gyártásból + összeállításhoz kialakuló) hármas tagozódású folyamatában elvileg csak a gyártásból kapcsolható ki az emberi rész szerepe, míg a tervezés — különösen annak intuitív szakasza — és az összeállítás — annak az adottságokat, körülményeket figyelembevevő, mérlegelő része — nem nélkülözheti azt, a változatosságra törekvés, a variabilitás igénye pedig ugyancsak az emberi részt erősíti;

végül az, hogy a külső interdiszciplinaritás abból adódik, hogy az egész építési folyamat végterméke az épület, az ezekből kialakuló együttesek és az épület-együttesek összegeződéséből, szövevényéből szerveződő város temérdek szállal

és közvetlenül kapcsolódik a társadalomhoz, annak állandóan változó, újra rétegződő arculatához, ezen belül pedig még az egyes emberekhez is, míg az épületek utólagos átalakíthatóságára (a termék flexibilitására) való törekvés a társadalmi fejlődéshez (az abból következő igény, szemlélet, életmódváltáshoz) való — társadalmilag szükséges és emberileg is indokolt — későbbi igazodás lehetőségét célozza.

A sajátyszerűség második jellemvonás csoportja

először az, hogy az építőtechnika (az építeni tudás) minden egyéb műszaki tudománytól eltérően nagyon is sok és jellegzetesen különmű technikák (tudások) összessége, következésképpen elemzésekor sem a benne rejlő egyes (a belső) tudományok (mesterségek), sem az egyéb (a külső) természet- és műszaki tudományok szemlélete, szempontjai, módszerei nem küszöbölhetők ki,

másodszor az, hogy a tudomány szempontjainak az építőtechnika területén való érvényesítésében ismét az interdiszciplinaritás sajátos kettős esetéről van szó, mert az belülről is hat, hiszen az egyes résztechnikák kapcsolatában, kölcsönhatásában is megjelenik, ugyanakkor kívülről is jelentkezik az egyéb természet- és műszaki tudományok hatása, befolyása formájában,

harmadszor az, hogy a belső interdiszciplinaritás ez esetben nem kevesebbet jelent, mint azt, hogy az egyes résztechnikák (a különböző mesterségek területei) — akár van közöttük rokonság és közvetlen kapcsolat, akár nincs — mindenképpen hatnak egymásra, hogy az egyes részek — legyen bár fejlődésük módja és mértéke azonos vagy eltérő — együttesen elvben kizárólag csak értelmesen arányos egészként fejlődhetnek;

végül az, hogy a külső interdiszciplinaritás ez esetben azt jelenti, hogy az egyéb természet- és műszaki tudományok fejlődése (pl. az elektronika, az energetika, a vegyipar forradalma stb.) visszahat az építőtechnikára, különösen annak egyes részeire előre véve azokat, és rajtuk keresztül annak egészére is, amely e hatásokra ismét csak integrált egészként válaszolhat.

E sajátyszerűség elemzését befejezve, most nagyon is indokoltnak tűnik annak megvizsgálása, hogy mi módon lehet e tudományterület sajátyszerűségét érvényrejuttatni az építésben, és ha ennek akadály van, mik annak okai.

A mindennapi tapasztalat azt mutatja, hogy a sajátyszerűség érvényrejuttatása valóban komoly nehézségekbe ütközik, ennek okai pedig szinte kivétel nélkül az interdiszciplinaritás különös kettős jellegére vezethetők vissza.

Ennek bemutatására az eddigi tárgyalás sorrendjében haladva:

A humán szféra s azon belül (különös súllyal) a művészi rész tekintetében a feladatot lényegében az jelenti, hogy milyen módon lehet a társadalmi igényt, a tudomány eredményeit a tervezésben követni és érvényesíteni, és

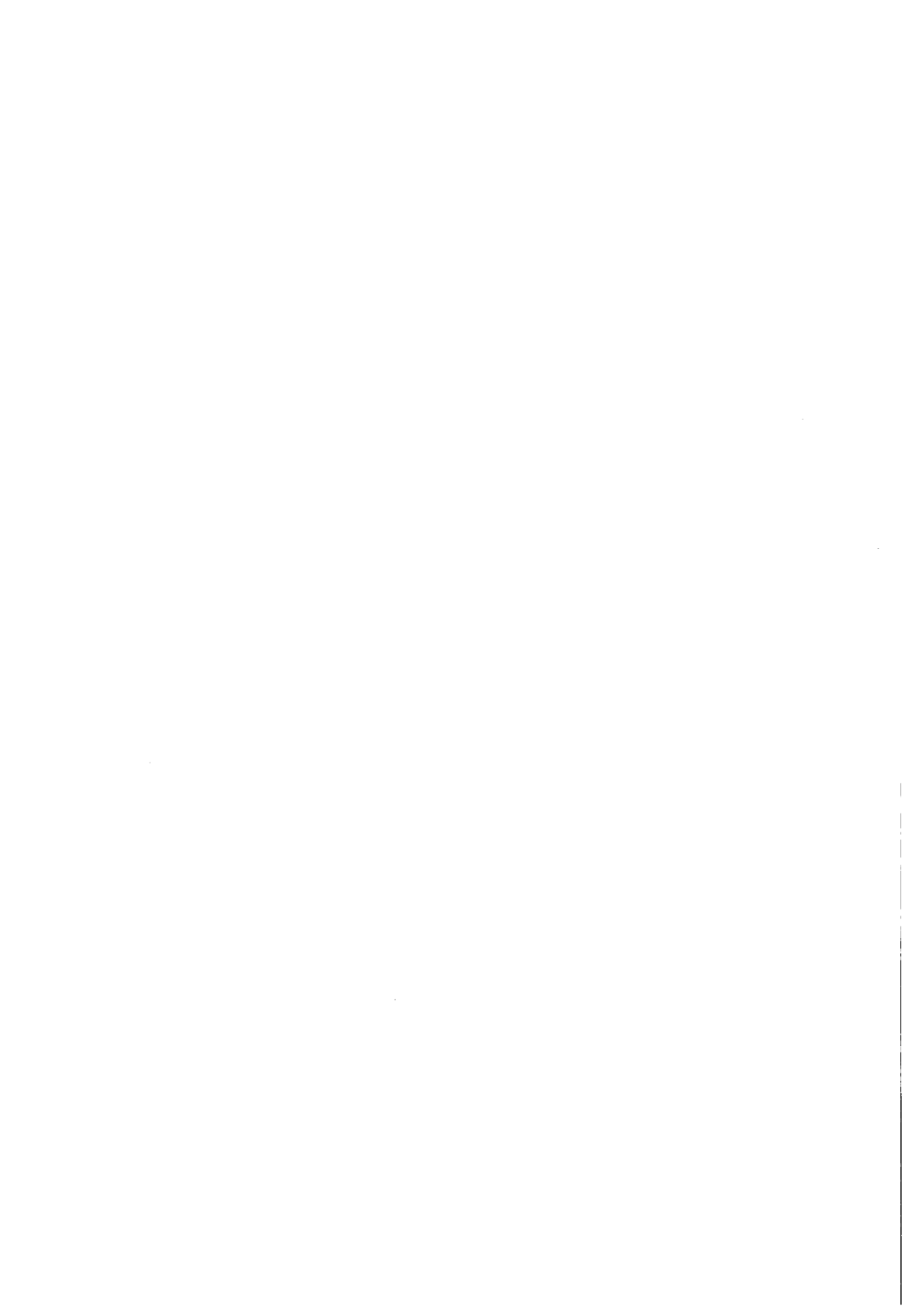
mint kiderült ennek a csodák világában semmi nehézsége nincs, mert itt a feladat egyedi, egyszeri, egy célhoz, egy időponthoz rendelt,

korántsem ilyen egyszerű azonban a helyzet a tömeges építésben, mert ott nem egyedi, hanem tömeges, nem egyszeri, hanem ismétlődő, nem egy célhoz és időponthoz rendelt, hanem egy időben változó célt hosszú élettartamú technológiával követni tudó feladat megoldásáról van szó, amit viszont nagyon megnehezít az a körülmény, hogy ez esetben két egymással csak lazán összefüggő (társadalmi és ipari) fejlődési folyamat összhangjának megteremtésére van szükség, amit viszont az tesz különösen bonyolulttá, hogy sem a társadalmi fejlődésnek, sem az ipar változásának időrendje, módja és mértéke — a tudomány megkövetelte szabotossággal és biztonsággal — sem könnyen becsülhető meg előre,

a technikai oldalt tekintve: ott sem sokkal jobb a helyzet, mert a külső tudományok — tőlünk független és villámgyors — fejlődése eredményeinek az építőiparba való behatolását nagyon megnehezíti egyrészt az, hogy e tudományok szintje magasabb, technikája fejlettebb, ismeretanyaga egységesebb és ipari háttere is egészen más, másrészt az, hogy az építőipar résziparai nagyon is sokfélék és fejlettségi fokuk is erősen eltérő.

Zárszóként elmondható, hogy a bemutatott kép tarkasága, bonyolultsága és ellentmondásossága, a gondok sokasága és a nehézségek temérdekje ellenére, a több győtrelem, mint győzelem ellenére — sincs ok borulátásra, hiszen ha az építészet világának egyik felében — már „csodák”-ra képes, bízni lehet, sőt kell abban is, hogy a csodák — a tudomány előrehaladásának segítségével — előbb vagy utóbb a hétköznapok világába is elérkeznek, amihez viszont sokunknak kell — méghozzá nem is keveset — tennie.

1980. II. 1.



A TALAJNEDVESSÉG-SZABÁLYOZÁS ELMÉLETI ALAPJAI ÉS AZOK GYAKORLATI ALKALMAZÁSA*

KOVÁCS GYÖRGY**

AZ MTA LEVELEZŐ TAGJA

A talajnedvesség áramlását és tározódását befolyásoló folyamatok szabályozása fontos gazdasági érdek. A mezőgazdaság terméseredményei csak akkor növelhetők, ha a gyökérszóna pórusaiban megfelelő határok között tudjuk tartani a víz és a levegő arányát, és megakadályozzuk a káros sók felhalmozódását. A szabályozást biztosító rendszerek tervezéséhez és üzeméhez a folyamatok elméleti feltárása szükséges. A tanulmány ismerteti azt a geometriai, dinamikai és statisztikai modellekből felépített számítási rendszert, amelynek segítségével mind a telített, mind a telítetlen szemcsés rétegek vízz szállító és tározó képessége elméletileg jellemezhető és ami a gyakorlat számára is megfelelő, könnyen kezelhető eljárást ad feladataink megoldásához. Külön nehézséget okoz a felszín közelében a finom szemcsék aggregálódása és ennek következtében egymástól nagyságrendekkel különböző elsődleges és másodlagos pórusok kialakulása. A javasolt módszer lehetőséget ad arra is, hogy az eredményeket ilyen kettős porozitású rétegek jellemzésére is általánosíthassuk.

1. Bevezetés

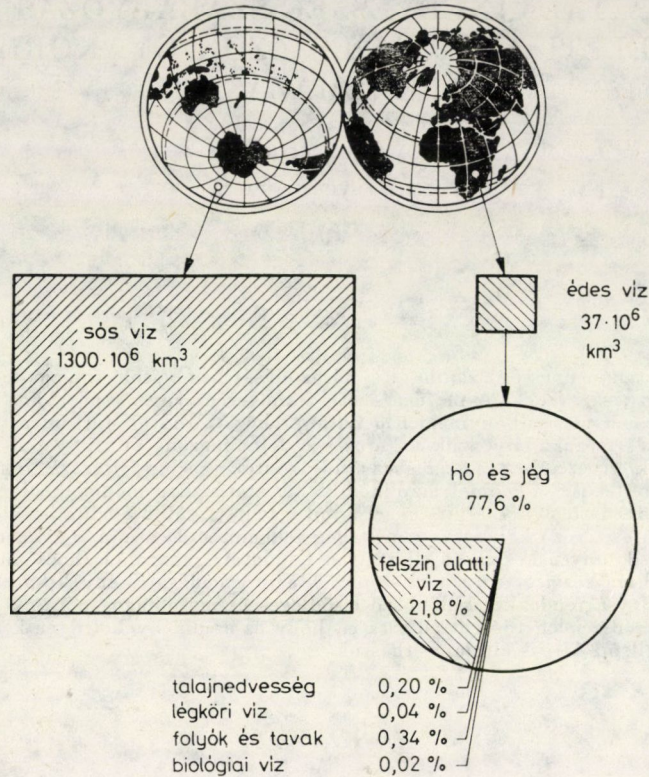
A talajnedvességnek a terepszinttől a talajvíztükörig terjedő zónája viszonylag elhanyagolhatónak tűnik, ha vastagságát a vizet tároló föld-köpeny méretéhez hasonlítjuk. Az itt visszatartott víz mennyisége sem jelentős, bolygónk édesvíz-készletének mindössze két ezreléke, és ez az arány tovább csökken, ha — számításba véve a tengerek és óceánok medencéiben felhalmozott sósvíz mennyiségét is — a teljes statikus vízkészlethez viszonyítjuk a talajnedvességként tárolt vizet (1. ábra).

A vizsgálatra kerülő zóna jelentősége azonban nem ítéhető meg térfogata, vagy az ott raktározott víz mennyiség alapján. A felszín közelében lévő talajnedvesség könnyen elérhető a párolgás és a növényzet számára, ezért a mozgását és tározódását befolyásoló folyamatok meghatározzák a tényleges evapotranspiráció mértékét. A felszíni lefolyás és a beszívargás mennyisége is függ a talajvíz fölötti réteg tulajdonságától és állapotától. A hidrológiai körforgalom szárazföldi ágának szíve tehát ez a zóna, ami szabályozza a keringést, megszabja a felszíni és a felszín alatti vizek járását.

A talajnedvesség vízháztartásának természetes, vagy emberi tevékenységgel befolyásolt mesterséges szabályozása nem csak hidrológiai szempontból

* Székfoglaló előadás. Elhangzott 1980. március 19-én.

** Dr. Kovács György, 1022 Budapest, Mihályfi Ernő u. 3/a.

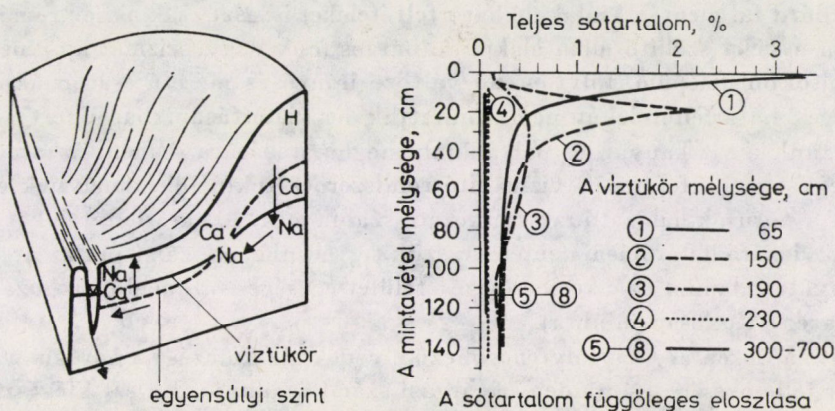


1. ábra

fontos, hanem jelentős gazdasági érdek is kapcsolódik hozzá. A növények által felhasználható víz mennyisége függ a víztükör fölötti talajszelvény tároló-képességétől és a talajnedvesség áramlásától. Így a mezőgazdasági termelés eredményességét is döntően befolyásolják a közvetlenül a talajfelszín alatt lezajló hidrológiai folyamatok, amelyek elemzésekor nem csak a tárolt víz mennyiségének ismerete szükséges, hanem a pórusok levegővel kitöltött hányadát is meg kell határoznunk, hiszen a legtöbb kultúrnövény megkívánja, hogy gyökérszónájában mind vízhez, mind levegőhöz hozzájusson. Megállapíthatjuk tehát, hogy a talajnedvesség-szabályozás célja az optimális víz-levegő arány biztosítása ebben a rétegben.

A talajban lévő sók migrációja szorosan kapcsolódik a víz szivárgó mozgásához, hiszen a talajnedvesség az oldott sók hordozója. A talaj kilúgozódása a várható folyamat azokban a szelvényekben, amelyekben a beszivárgás meghaladja az evapotranspirációt és ezért a függőleges vízmozgás eredője hosszabb idő átlagában lefelé irányul. A talajból kilúgozott sók a talajvízbe jutnak, és a talajvíz-áramlás a mélyfekvésű területek felé szállítja azokat. Ott az evapo-

transpiráció az uralkodó folyamat (mert a víztükör a felszínhez közel van), ezért a talajvíz és a talajnedvesség közötti vízcsera eredője felfelé mutat. Ez az emelkedő áramlás a sókat is a felszín közelébe hozza, ahol azok a párolgás következtében kicsapódnak és a só-felhalmozódási folyamat sós, szikes talajok kialakulását okozza (2. ábra). Minthogy a termőréteg fizikai és kémiai tulaj-



2. ábra

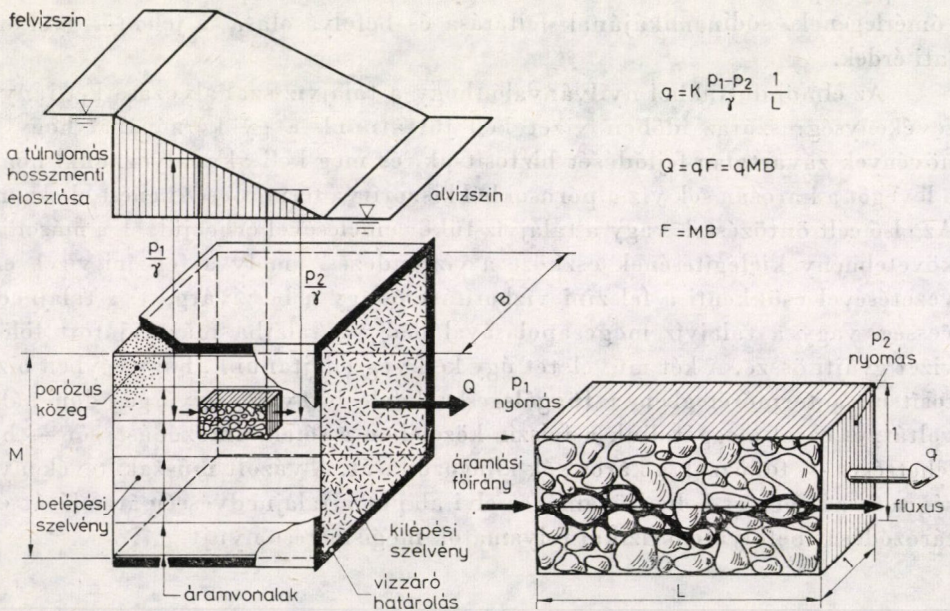
donsága jelentősen befolyásolja egy-egy terület termőképességét, a talajnedvesség állapotának vizsgálata és szabályozása, ehhez kapcsolódva a szelvény sómérlegének, sódinamikájának feltárása és befolyásolása is jelentős gyakorlati érdek.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a talajvíz szabályozása kétirányú tevékenység: száraz időben vizet kell juttatnunk a gyökérszónába, hogy a növények zavartalan fejlődését biztosítsuk, és meg kell akadályoznunk, hogy a levegőt a károsan sok víz a pórusokból kiszorítva termés-csökkenést okozzon. Az első célt öntözéssel, vagy a talajvíz-tükör emelésével érhetjük el, a második követelmény kielégítésének eszköze a vízrendezés, amely a felszíni vizek elvezetésével csökkenti a felszíni vízborítást és így a beszivárgást, a talajnedvesség, vagy a talajvíz megcsapolásával pedig a talajba már bejutott fölös vizet gyűjti össze. A két műveletet úgy kell végrehajtanunk, hogy egyben biztosítsuk a termőrétegben a függőlegesen lefelé irányuló szivárgás domináló voltát, és ezzel meggátoljuk a felszín közelében a sófelhalmozódást, sőt — ha lehetséges — fokozzuk a káros sók kilugozódását. A vázolt műszaki tevékenység tervezéséhez és helyes üzeméhez elvi alapot a talajnedvesség áramlását és tározódását befolyásoló fizikai folyamatok megismerése nyújt.

2. A talajnedvesség mozgása folytonos porózus közegben

A hidrodinamika két alapegyenletre épül: az energia megmaradását a mozgás-egyenlet (pl. a NAVIER-STOKES egyenlet) fejezi ki, az anyag megmaradását pedig a kontinuitási egyenlet. A kinematikai jellemzés érdekében ezt a két egyenletet kell megoldanunk, figyelembe véve egyidejűleg a folyadék és a szilárd fal mentén kialakuló határfeltételeket is. Ezt csak akkor remélhetjük, ha a vizet szállító elem alakja szabályos (cső, vagy prizmatikus meder). A pórusokból felépülő, folytonosan változó irányú és méretű csatornáknban a tényleges határfeltételeket nem vonhatjuk be számításainkba. Ezért sosem törekszünk a víz kanyargós pályájának meghatározására, hanem az áramlási teret egységes és folytonos vízszállító rendszernek tekintjük, amelynek ellenállását a pórusok hálózatának szerkezete szabja meg. A határfeltételeket csak a mező vízzáró határolása mentén vesszük figyelembe, és számítjuk az áramlás fő irányát, valamint az erre merőleges felület-egységen áthaladó vízhozamot, a rendszer q fluxusát (3. ábra).

Ez a közelítés — a folytonos mező elvének alkalmazása a porózus áramlási tér jellemzésére — minden szivárgási számítás alapja. Ha ezt kiegészítjük azzal a hipotézissel, hogy az áramlás lamináris (két erő dominál, a mozgást létrehozó és fenntartó gravitáció, valamint az ellene ható surlódás) a Navier—Stokes egyenlet a Darcy-féle összefüggésre egyszerűsíthető, amely szerint a fluxus egyenesen arányos a potenciál-magasság gradiensevel. KOZENY igazolta,

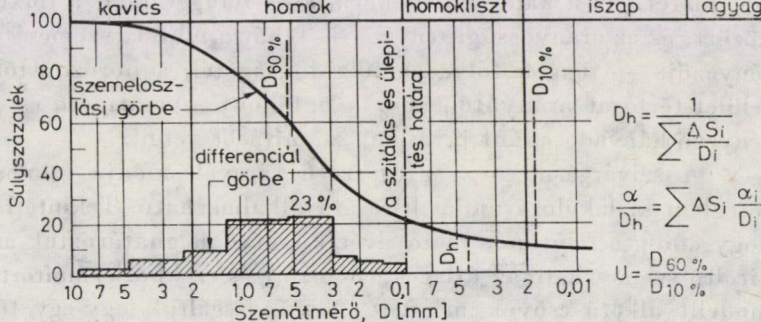


3. ábra

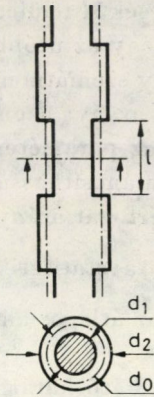
hogy az arányossági tényező az n porozitástól, valamint a szemcsék A felületének és V térfogatának hányadosától függ. Annak érdekében, hogy az utóbbit könnyen mérhető adatokból számíthassuk, bevezette a hatékony szemátmérőt (D_h ; az azonosan ilyen átmérőjű gömbökből alkotott minta A/V aránya azonos a jellemezni kívánt, különböző átmérőjű gömbökből álló halmaz paraméterével.) Hogy elgondolását nem gömb-alakú szemcsékre is általánosíthassuk, javasoltuk olyan alaki tényező alkalmazását, amely a felület-térfogat arányának és az átmérőnek a szorzata $\left(\alpha = \frac{A}{V} D\right)$. Nagyszámú minta statisztikai elemzése alapján eljárást is adtunk a hatékony szemátmérő és az átlagos alaki tényező gyakorlati számítására (4. ábra).

Említettük már, hogy a szabálytalan csatornák mentén ható határfel-tételeket nem vehetjük számításba. Olyan geometriai modellt kell keresnünk, amely viszonylag egyszerű elemekből épül fel és hidraulikailag egyenértékű az eredeti rendszerrel. Kielégítő eredményt kapunk, ha a járatokat az áramlással párhuzamos egyenes tengelyű csövekkel helyettesítjük, feltételezve, hogy egységnyi felületen N darab cső halad keresztül és a csövek kétféle átmérőjű,

átlagos folyóvízi üledék		8 - 11	9 - 12	10 - 15	12 - 17	15 - 50
agyag ásványok	montm.					70- 100
	Na montm.					700-1000
	illit					20- 60
	kaolinit					30- 70
	halloisit					40-100
csillám		20 - 50	20 - 50	20 - 50	20 - 50	
metamorf kőzet törmelék	folyóvízi	11 - 15				
	lejtó	12 - 20				
vulkáni kőzet törmelék	folyóvízi	9,5 - 11,5				
	lejtó	11 - 13				
homokkő	folyóvízi	9,5 - 11,5				
	lejtó	11 - 13				
mészkő	folyóvízi	10 - 12	10 - 12	10 - 12	10 - 12	10 - 12
	lejtó	11,5 - 13,5	12 - 14			
kvarc	folyóvízi	8 - 10	9 - 11	9 - 11	9 - 11	9 - 11
	szélhordta		7 - 9	7 - 9	7 - 9	
	lejtó	9,5 - 11,5	10 - 12			
		kavics	homok	homokliszt	iszap	agyag



4. ábra

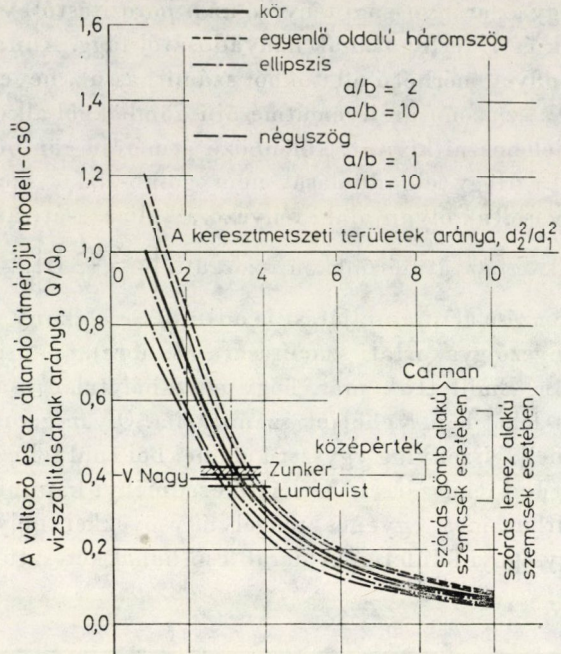


$$d_0 = 4 \frac{n}{1-n} \frac{D_h}{\alpha}; \quad N = \frac{4n}{d_0^2 \pi}$$

$$l = (1-1,5) d_0$$

$$d_1 = 0,667 d_0; \quad d_2 = 1,25 d_0$$

$$K = \frac{1}{5} \frac{g}{\nu} \frac{n^3}{(1-n)^2} \left(\frac{D_h}{\alpha} \right)^2$$



5. ábra

rövid szakaszokból tevődnek össze (5. ábra). A d_0 átlagos csőátmérőt, a két tényleges méretet a d_1 és a d_2 átmérőt, valamint a csőszámot két feltétel figyelembe vételével számíthatjuk:

- a felület-térfogat arány a modellben és a tényleges rendszerben egyenlő legyen;
- a felület áttörtsége (a csövek számának és átlagos felületének szorzata) azonos legyen a közeg porozitásával.

A mozgás lamináris, tehát a csövek vízszállítását meghatározhatjuk a gradiens függvényében, alkalmazva dinamikai modellként a Poiseuille-egyenletet. Ez a kapcsolat is lineáris összefüggést ad a fluxus és a gradiens között, és az arányossági tényező — tehát a telített szemcsés réteg szivárgási tényezője — függ a folyadék tulajdonságától, a porozitástól és a szemcsék felület-térfogat arányától, amit a hatékony szemátmérő és az átlagos alakú tényező hányadosaként javasolunk számításba venni.

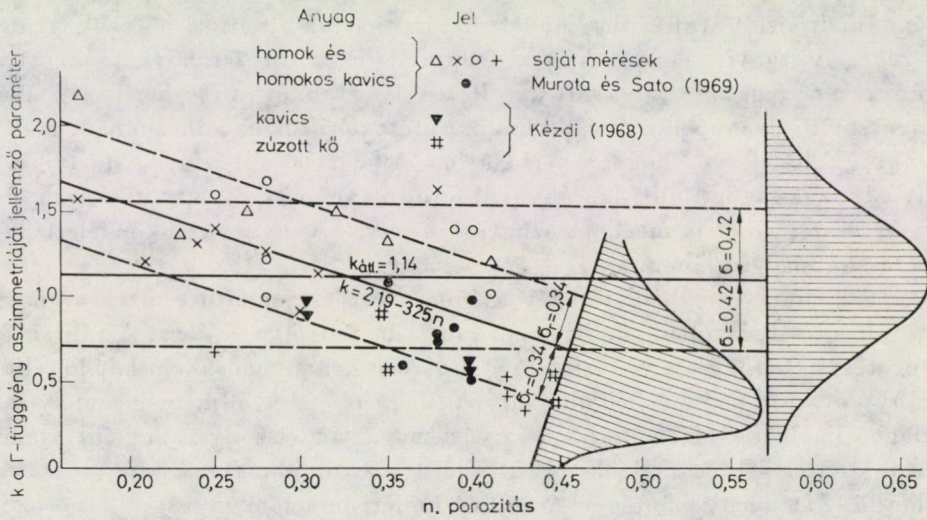
A szivárgásnak ez az egyszerű tárgyalásmódja azonban csak telített rétegben kialakuló áramlás leírására alkalmazható. Tekintetbe kell vennünk, hogy eddig a folytonos mező elvét követve meghatároztuk az áramlási teret kitöltő szemcsehalmaz átlagos jellemzőit és ezekből számítottuk a geometriai modellt alkotó csövek méreteit. Nem vizsgáltuk egy-egy térfogat-egységen belül a járatok átmérőjének változékonyságát, hiszen csak egy átlagos para-

méternek — a szivárgási tényezőnek — meghatározására törekedtünk, és ezért a modellt azonos csövekből építhettük fel. Ez az egyszerűsítés azonban két esetben nem fogadható el:

— ha a járatok mérete olyan nagymértékben változik, hogy ez már befolyásolja az egyes csatornában kialakuló áramlás jellegét (a mezőn belül egymás mellett találunk lamináris, átmeneti és turbulens mozgást);

— ha a tényleges áramlási keresztmetszetet, és ezzel a vizet vezető csatorna vízszállító képességét a járat mérete alapvetően befolyásolja.

Az egyedi szemcsékből felépülő szilárd váz tömegében a pórusok általában egyenletesen eloszlottak és véletlen jelleggel kapcsolódnak egymáshoz. Mérettartományuk sem túl nagy, a valószínűen nagy és kis pórusok átmérőjének aránya ritkán haladja meg az egy nagyságrendet. Telítetlen rétegben azonban a részleges telítés mértéke és így a vízszállítás jellege függ a pórus-mérettől: a kis pórusokat a kapillaritás teljesen kitölti vízzel, a nagyoknak csak a falát fedi adhéziós vízfilm. Módszert dolgoztunk ki, amely lehetőséget ad arra, hogy a járatok számának méret-szerinti valószínűségi eloszlását leíró statisztikai modellel egészítsük ki az előzőekben vázolt geometriai és dinamikai modellt. Ennek segítségével a szivárgás tárgyalását azokra az esetekre is kiterjeszthetjük, amelyekben a korábbi egyszerűsítés alkalmazását az említett két kizáró ok valamelyike gátolja. Úgy találtuk, hogy laza szemcsés üledék esetében a d átmérőjű pórusok számának az összes pórus-számhoz viszonyított arányát jellemző eloszlás Γ függvénnyel írható le, sőt — minthogy annak k paramétere közel egységnyi — az exponenciális függvény is kielégítő közelítést ad (6. ábra).

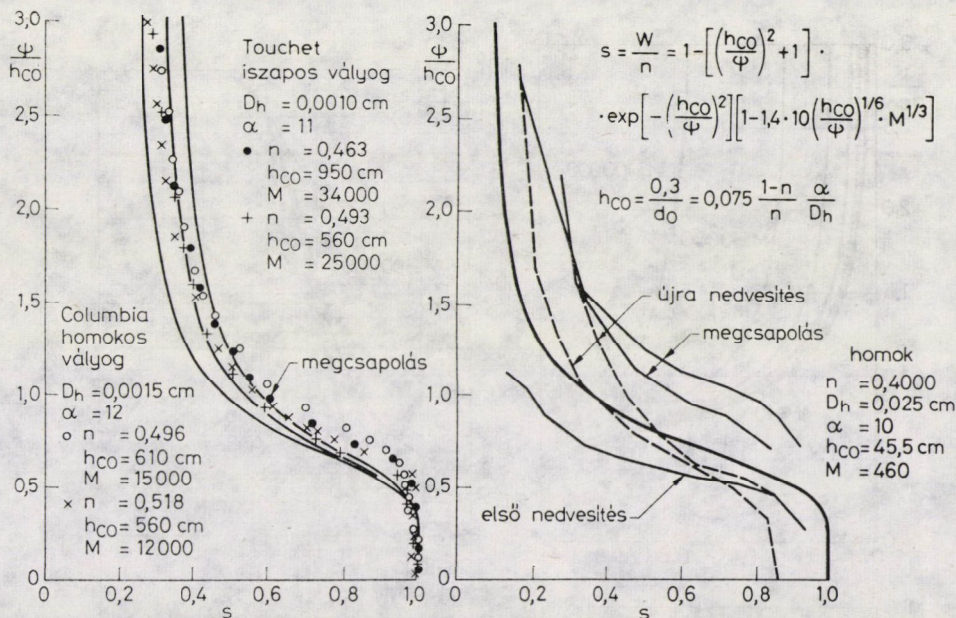


6. ábra

Figyelembe kell vennünk, hogy a két alapegyenlet szerkezete is változik, ha telítetlen rétegben kialakuló szivárgást vizsgálunk. Bár a folyadék-fázisban kialakuló konvektív áramláshoz viszonyítva a többi mozgás-forma (a diffúzív vízszállítás és a vízgőz áramlása) elhanyagolható, tehát a Darcy-törvény ekkor is alkalmazható, a potenciál-magasság azonban — amelynek gradiense a mozgást létrehozó hatás mérőszáma — ebben az esetben a geodéziai magasságnak és a szívási magasságnak a különbsége, az utóbbi pedig a vizsgált pont környezetének víztartalmától függ. A szivárgási tényező is kisebb, ha a közeg csak részlegesen telített, és értéke vagy a víztartalommal, vagy a szívással hozható kapcsolatba. Végül a kontinuitási egyenletben is figyelembe kell vennünk a telítettség mértékét, hiszen ebben a rendszerben az anyag megmaradását a fluxus térbeli változásának a víztartalom időbeli változásával való egyenlősége fejezi ki. Összefoglalásként tehát megállapíthatjuk, hogy a telítetlen talajrétegben, akár a víztartalom statikus egyensúlyát, akár áramlását kívánjuk jellemezni, ismernünk kell a három alapvető jellemző — a víztartalom, a szívás és a szivárgási tényező — közötti kapcsolatot. A javasolt geometriai, dinamikai és statisztikai modell együttes alkalmazásával ezeket az összefüggéseket meghatározhatjuk.

A szívás és a nedvességtartalom közötti kapcsolatot általában a retenciós görbével (pF görbével) jellemezzük. Minthogy a gravitáció hatását két molekuláris erő — a kapillaritás és az adhézió — ellensúlyozza, a görbét két komponens összegzéseként kell megszerkesztenünk. A kapillárisan telített pórusok arányát annak figyelembe vételével számíthatjuk, hogy a kapilláris magasság fordítottan arányos a pórus-átmérővel. A pórusok teljes száma adott magasságban (vagy adott szívás esetében) egy határ-átmérővel két csoportra osztható, a kisebbeket a kapillaritás teljesen kitölti, a nagyobbakban nincs kapillárisan emelt víz. A statisztikai modellel számíthatjuk a telített pórusok területösszegét, viszonyítva azt a keresztmetszet teljes pórus-felületéhez, és ezt az arányt, a térfogatban kifejezett kapilláris víztartalmat kifejezhetjük a szívási magasság függvényében. Az így ki nem töltött pórusok az adhézió hatása alatt állnak. Feltételezve, hogy a térfogatban kifejezett adhéziós víztartalom a szívási magasság hatodik hatványával fordítottan arányos, a telítési aránynak ezt az összetevőjét is meghatározhatjuk a szívás, vagy a víztükör felett mért magasság függvényében.

Az eljárás megbízhatóságát számos mért és számított értéksor összehasonlításával igazoltuk. Ezek közül mutat be kettőt a 7. ábra. Az ábrán feltüntetett összefüggés a víztartalom és a porozitás hányadosaként adódó telítési arányt olyan dimenzió nélküli változó függvényeként adja meg, amelyet az átlagos kapilláris vízemelés és a szívási magasság viszonzyszámaként számíthatunk. Szerepel ezen kívül egy, a szilárd váz tulajdonságait kifejező anyagi állandó (M), amely szintén az átlagos kapilláris emelőmagasság és a porozitás függvénye. Meghatároztuk a kapilláris emelőmagasság és a szemcsés réteg

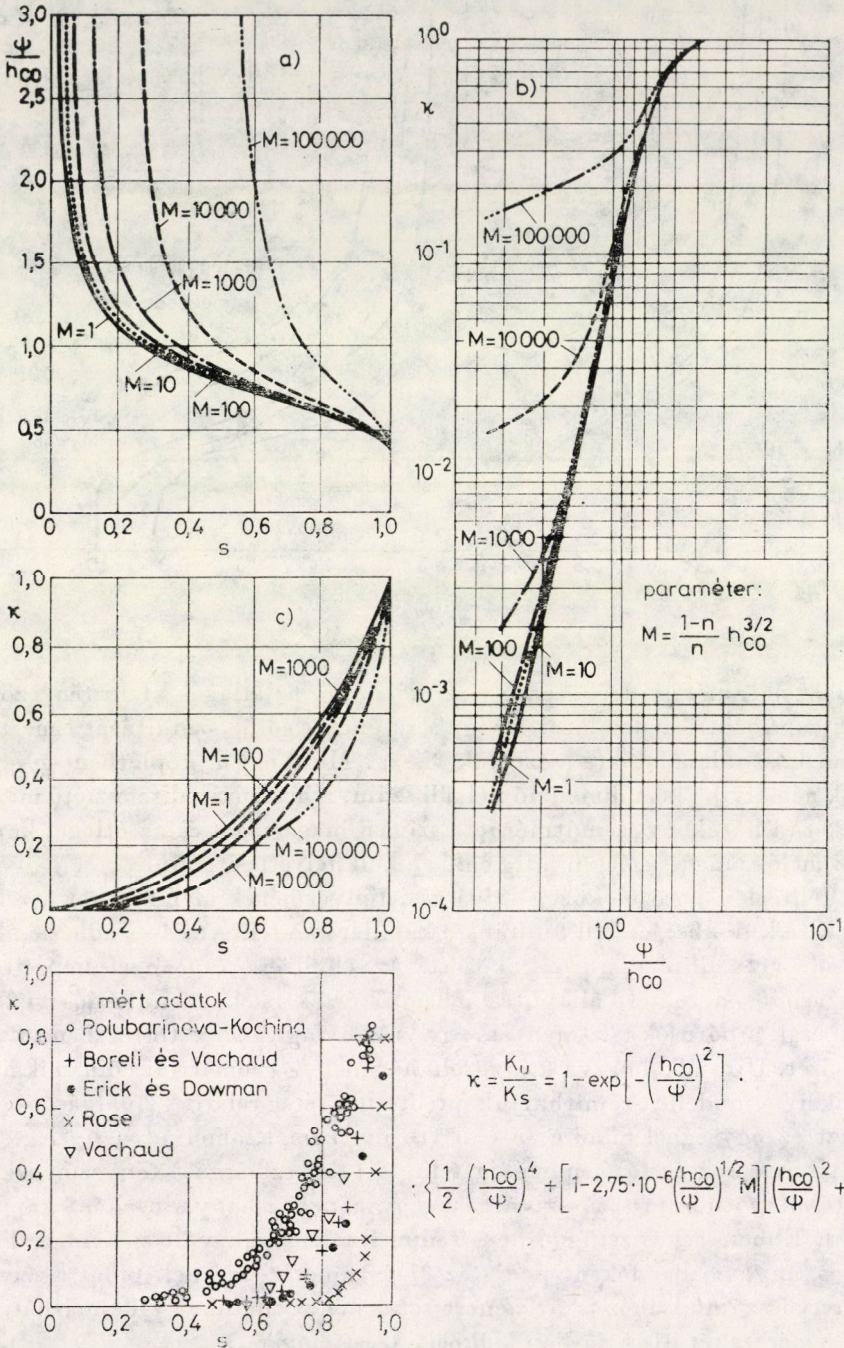


7. ábra

talajfizikai paramétereit (a hatékony szemátmérőt, az átlagos alakú tényező és a porozitás) közötti kapcsolatot is, így a retenciós görbe számítását ismert és általában használt adatokra vezettük vissza. Minthogy a képletben szereplő állandók némelyike nem dimenzió nélküli szám, a hosszúság dimenziójú mennyiségeket (a hatékony szemátmérőt, a szívási magasságot és az átlagos kapilláris vízemelés magasságát) mindig cm-ben kell helyettesítenünk.

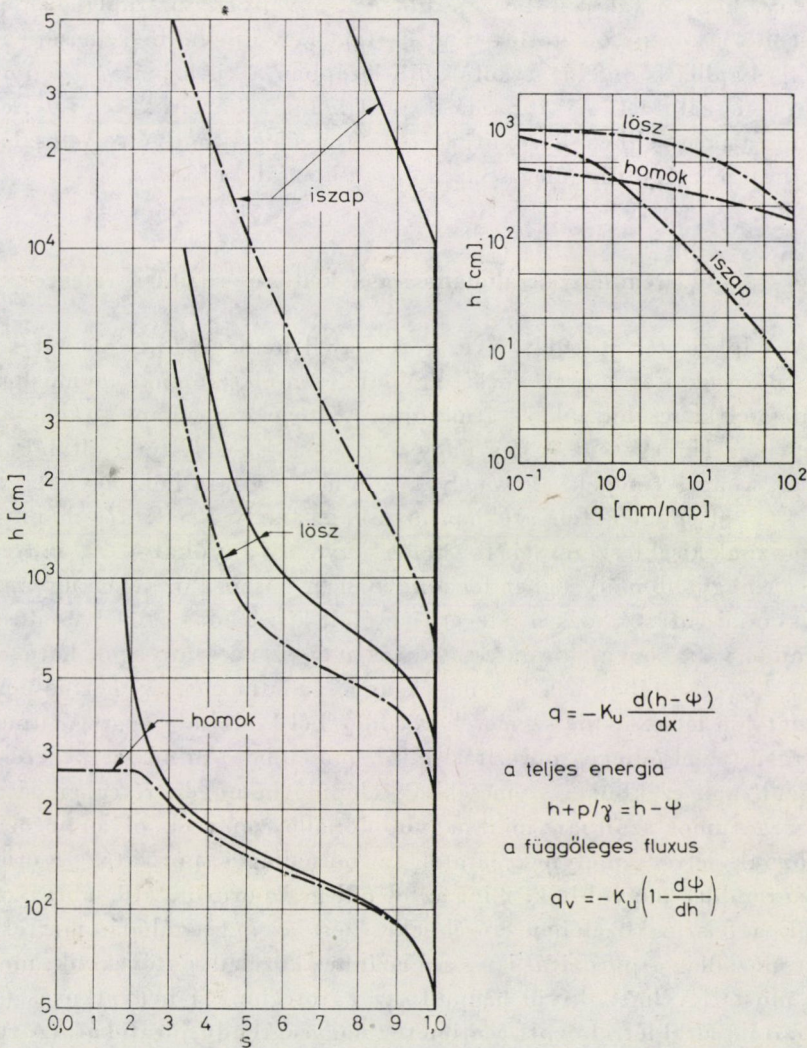
A telítetlen porózus közeg szivárgási tényezőjének elemzésekor a rendszerben újra különbséget kell tennünk a kapillárisan telített és az adhézió által befolyásolt vízszállító csatornák között. Az előbbieket transzport kapacitása ugyanis azonos a telített állapotra jellemző értékekkel, az adhéziós vízfilm azonban csak a pórusok fala mentén, egy viszonylag vékony rétegben továbbítja a vizet. Újra alkalmazva a javasolt hármas — geometriai, dinamikai és statisztikai — modellt, számíthatjuk a telítetlen réteg relatív szivárgási tényezőjét, azt az egységénél mindig kisebb viszonyszámot, amelyet a részlegesen, az adott szíváshoz tartozó mértékig telített talaj szivárgási tényezőjének és a telített állapothoz tartozó szivárgási tényezőnek a hányadosaként kapunk (8. ábra). Ebben az összefüggésben is dimenzió nélküli változóként a h_{CO}/ψ hányados, anyagi állandóként pedig az M paraméter szerepel, tehát a szivárgási tényező számításához is az ismert talajfizikai adatokat alkalmazhatjuk, és a hosszúságokat itt is cm-ben kell helyettesítenünk.

Az így meghatározott összefüggések birtokában az alapegyenletekbe mind a szivárgási tényezőt, mind a víztartalmat a szívás függvényeként helyet-



8. ábra

tesíthetjük. Így olyan differenciál-egyenlet rendszerhez jutunk, amely a helykoordinátáktól — és nem permanens mozgás esetében az időtől — függően a feladat jellegét megszabó határ- és kezdeti-feltételek figyelembe vételével, minden pontban számíthatóvá teszi a szívás értékét, ennek ismeretében pedig meghatározhatjuk a keresett hidraulikai paramétereket: az áramlás sebességét és fluxusát, valamint a vizsgált térben a potenciál eloszlását. Ezzel jellemezhetővé válik a gravitáció és a feszültség-különbség hatására létrejövő bármilyen irányú és jellegű vízmozgás. A megoldás csak az egyszerű esetekben adható meg zárt analitikai alakban, a numerikus eljárások azonban lehető-



9. ábra

$$q = -K_u \frac{d(h - \Psi)}{dx}$$

a teljes energia

$$h + p/\gamma = h - \Psi$$

a függőleges fluxus

$$q_v = -K_u \left(1 - \frac{d\Psi}{dh} \right)$$

séget adnak arra, hogy minden, a gyakorlatban felmerülő kérdésre választ adjunk.

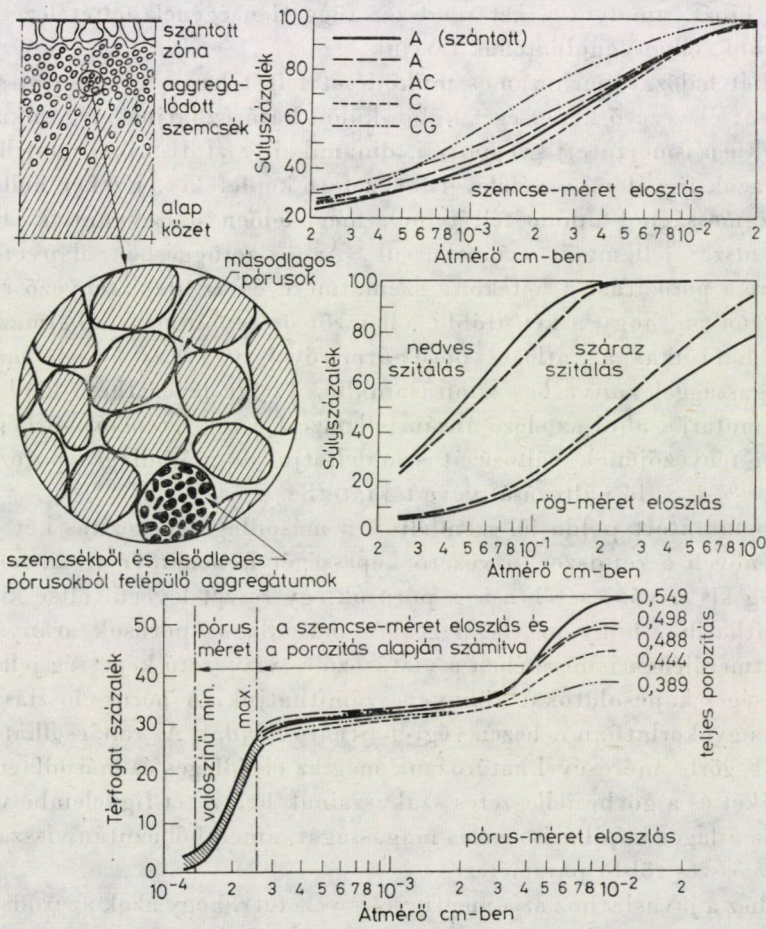
A 9. ábrán egy egyszerű áramlási forma számszerű jellemzését mutatjuk be. A talajvíz tükréről függőlegesen felfelé irányú permanens áramlást vizsgálunk annak szemléltetésére, hogy ez a folyamat milyen mértékben vehet részt a növények vízigényének fedezésében a réteg minőségétől és a víztükör mélységétől függően. Három különböző talajt — homokot, lösz réteget és finom iszapot — hasonlítunk össze. A vizsgálat első része azt szemlélteti, hogy átlagosan $pF = 3, 0$ értékű szívást tételezve fel a felszínen (illetőleg a gyökérszónában) hogyan változik a fluxus a víztükör mélységétől függően. Érdekes eredmény, hogy a talajvíz hozzájárulása a növények víz-táplálásához a legjelentősebb a közepesen kötött talaj esetében. A durvább szemcséjű rétegekben a kis kapillaris emelés, a kötöttebb iszapban a kis szivárgási tényező korlátozza a vízszállítást. Az ábra másik grafikonja a három közeg retenciós görbáját mutatja és ehhez hasonlítja azt a függőleges nedvesség-eloszlást, ami 10 mm/nap mértékű függőleges vízemelés esetén alakul ki.

3. Az eredmények általánosítása kettős-porozitású rétegre

Az eddig ismertetett elvi levezetések egyik lényeges kiinduló feltétele volt, hogy a pórusok a szemcsék között egyenletesen eloszlottak, egymáshoz véletlen jelleggel kapcsolódnak és átmérőjük változékonyságának tágassága nem haladja meg lényegesen az egy nagyságrendet. Ez a feltétel általában kielégített azokban a rétegekben, amelyek zömmel 0,1 mm-nél nagyobb átmérőjű részecskékből épülnek fel, azokban azonban, amelyek jelentős mennyiségben tartalmaznak kisebb szemcséket — főleg agyagásványokat — az említett közeletés csak nagyobb mélységben fogadható el. A felszín közelében ugyanis olyan fiziko-kémiai hatások érik a réteget (ismételt kiszáradás és nedvesedés, fagyás és olvadás váltakozva, humusz-savak és más szerves anyagok hatása), amelyeknek következtében a kis szemcsék aggregálódnak és így kettős porozitású szerkezet jön létre. A kis szemcsék kötődéséből kialakuló aggregátumok belső porozitása (az elsődleges porozitás) mind méretében, mind szerkezetében azonos azzal, ami ezekből a szemcsékből felépülő homogén rétegben létrejönne. Az aggregátumok azonban, mint nagyobb önálló szemcsék, olyan porózus közeget hoznak létre, amelynek járatai (a másodlagos porozitás) esetleg több nagyságrenddel nagyobbak, mint az elsődleges pórusok (10. ábra). A külső hatások a felszín közelében erősebbek, ezért az aggregálódás mértéke — és ezzel a másodlagos porozitás is — a felszínhez közeledve növekszik, még akkor is, ha most figyelmen kívül hagyjuk az agrotechnikai beavatkozás (szántás, mélylazítás) által létrehozott centiméter nagyságrendű járatokat. (A rendszernek ezt a harmadlagos porozitását, amely a legfelső néhány dm mély rétegre

jellemző, azért nem vizsgáljuk most részleteiben, mert általános az a vélemény, hogy a talajnedvesség zónájának fizikai vizsgálatába nem vonhatjuk be azoknak a jelenségeknek az elemzését, amelyek a megművelt legfelső rétegben alakulnak ki. A szerkezet módosulásán kívül kizárja ezt a hatótényezők változása is, a fiziológiai — biológiai és kémiai — folyamatok dominánsá válnak itt és az izotermális állapot feltételezése sem elfogadható).

A másodlagos porozitás alakulását a talajszelvényben jól szemlélteti a különböző szintekre jellemző pórus-méret eloszlási görbék összehasonlítása (10. ábra). A vizsgált esetben az egyedi szemcsék által közrezárt elsődleges pórusok — amelyek jellemzőek mind az anyakőzetre, mind az aggregátumok belső porozitására — a teljes térfogatnak mintegy 30%-át adják ($n_1 = 0,30$ elsődleges porozitás). Ezeknek a pórusoknak mérete $1 \cdot 10^{-4}$ és $3 \cdot 10^{-4}$ cm között változik. Az aggregátumok közötti csatornákból alkotott másodlagos porozitás



10. ábra

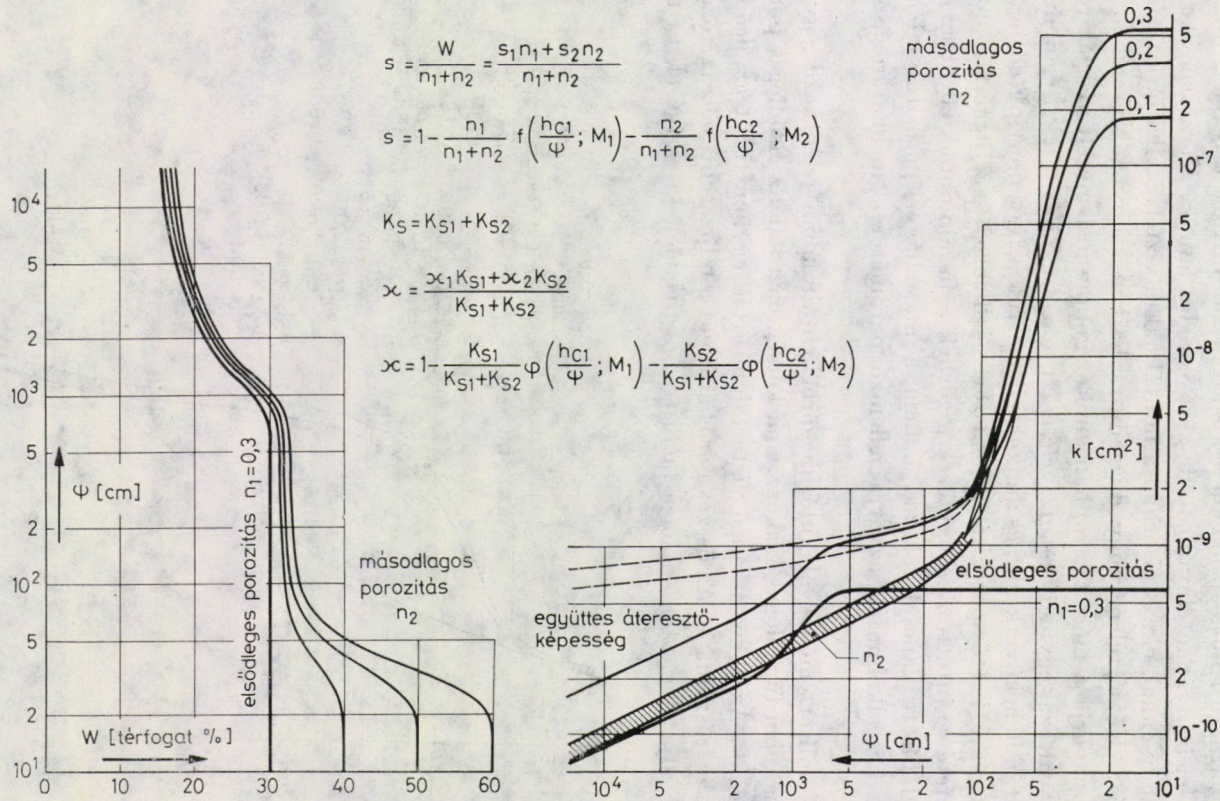
zérustól $n_2 = 0,25$ -ig növekszik, amint az alaprétegtől a felszín felé haladunk. Ezeknek a másodlagos pórusoknak a mérete is jelentősen nagyobb, mint az elsődlegeseké ($4 \cdot 10^{-3} \div 1 \cdot 10^{-2}$ cm), méretük azonban jelzi azt is, hogy az agrotechnikai eszközökkel létrehozott nagy járatok nincsenek figyelembe véve ebben a vizsgálatban.

Annak érdekében, hogy az eddig bemutatott kapcsolatokat kettős porozitású közegre is általánosíthassuk, tételezzük fel, hogy a két pórus-rendszer egymástól független, egymás mellett párhuzamosan működő járat-hálózatot alkot. A retenciós görbe szerkesztésekor ez a közelítés ellentetés nélkül elfogadható, hiszen a pórusok telítődésében a szomszédos járatoknak viszonylag kevés szerepük van, legfeljebb a folyamat időbeli lefolyását befolyásolják. Az áramlás alakulásában viszont már jelentős lehet az a tény, hogy a nagyobb járatok a kis pórusok hálózatát megszakíthatják. Minthogy azonban az utóbbiak vízszállító képessége nagyságrendekkel kisebb, mint a másodlagos porozitásé, a hibát, amelyet a két rendszer függetlenségének feltételezésével elkövetünk, elhanyagolhatónak tartjuk.

A két hálózat párhuzamos működését feltételezve, azok vízvisszatartó kapacitását és vezető-képességét külön-külön határozhatjuk meg, alkalmazva az előzőekben ismertetett geometriai, dinamikai és statisztikai modellt, valamint az azok figyelembe vételével levezetett képleteket. Ezeket kell azután a párhuzamosságból adódó feltételnek megfelelően összevonnunk, hogy az eredő rendszer jellemzőit számíthassuk. Az összefüggésben alapvető paraméterként a porozitás, a hatékony szemátmérő és az alaki tényező szerepel. Láttuk azonban, hogy a két utóbbi jellemzőt összevontan is alkalmazhatjuk, együttes hatásukat az átlagos pórus-átmérővel, vagy az átlagos kapilláris emelőmagassággal vonva be számításainkba. Az így levezethető képleteket a 11. ábra mutatja, ahol az előző ábrán jellemzett réteg retenciós görbéjének és szivárgási tényezőjének változását szemléltetjük a másodlagos porozitásnak zérustól 30%-ig való változását véve tekintetbe.

A bemutatott példa jól szemlélteti a másodlagos porozitás két jelentős hatását: növeli a rendszer vízvezető képességét és lehetővé teszi, hogy már viszonylag kis szívás esetében is a pórusok egy részét levegő töltse ki. Azt is megállapíthatjuk, hogy az elsődleges és másodlagos pórusok arányának és átlagos átmérőjének ismeretében a víztározó és vízvezető képesség jellemzéséhez szükséges kapcsolatokat könnyen számíthatjuk. A pórus-eloszlás mérése azonban a gyakorlatban nehezen végrehajtható feladat. Az tanácsolható tehát, hogy a pF görbe mérésével határozzuk meg az elsődleges és másodlagos porozitás értékét és a görbe jellegzetes szakaszainak helyzetét figyelembe véve becsüljük az átlagos kapilláris emelés magasságát, amelyből azután visszaszámíthatjuk az összes többi paramétert.

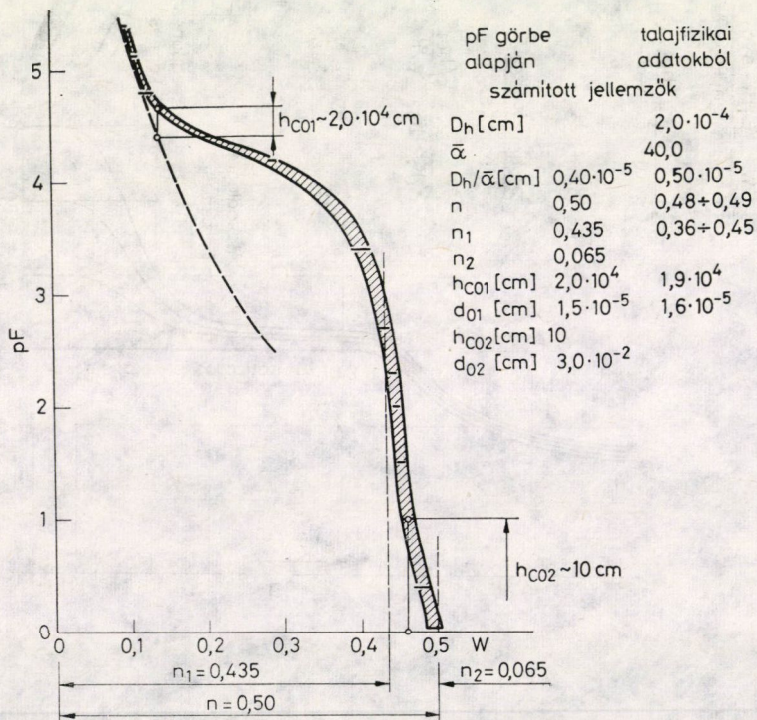
Ehhez a javaslatához az a megfigyelés vezetett, hogy azok az irodalomban közölt pF görbék, amelyeket a homok-frakciónál finomabb szemcséjű anyago-



11. ábra

kon mérték, a legtöbbször nem záródnak határozott függőleges szakasszal valamely meghatározott porozitás-értékeknél — amint ez homogén szemcsehalmaz esetében várható lenne —, hanem a kis szíváshoz tartozó értékek a nagyobb víztartalom irányában elnyúló ferde záró-vonalat adnak. Korábban azt gondoltuk, hogy ennek oka elsősorban a mintáknak a vízfelvétellel járó térfogatnövekedése. Kétségtelen, hogy duzzadásra hajlamos anyagok esetében ez a folyamat zavarja a mérést, azonban amikor gondosan ismételt vizsgálatok és a térfogatváltozás egyidejű megfigyelése azt igazolta, hogy a jelenség nem duzzadó mintán is bekövetkezik, és amikor felismertük az így mért pF görbe nagyhasonlóságát a kettős-porozitású rendszerre jellemző összefüggéshez, arra a következtetésre jutottunk, hogy ezek a görbék nem mondanak ellent az elméletileg felállított kapcsolatoknak, hanem a másodlagos porozitás jelenlétét jelzik, és így alkalmasak az arra jellemző paraméterek meghatározására is (12. ábra).

Az említett módon alakuló pF görbéken általában jelentkezik egy közbenső, csaknem függőleges szakasz, ami kétségtelen jele az elsődleges pórusok telítődésének. Az ehhez tartozó víztartalom érték egyben tehát az elsődleges porozitás mérőszáma is. Az összes pórus arányát a teljes telítéshez tartozó víztartalom adja meg, ahol — ha a mérést a megfelelően kis szívások tartomá-



12. ábra

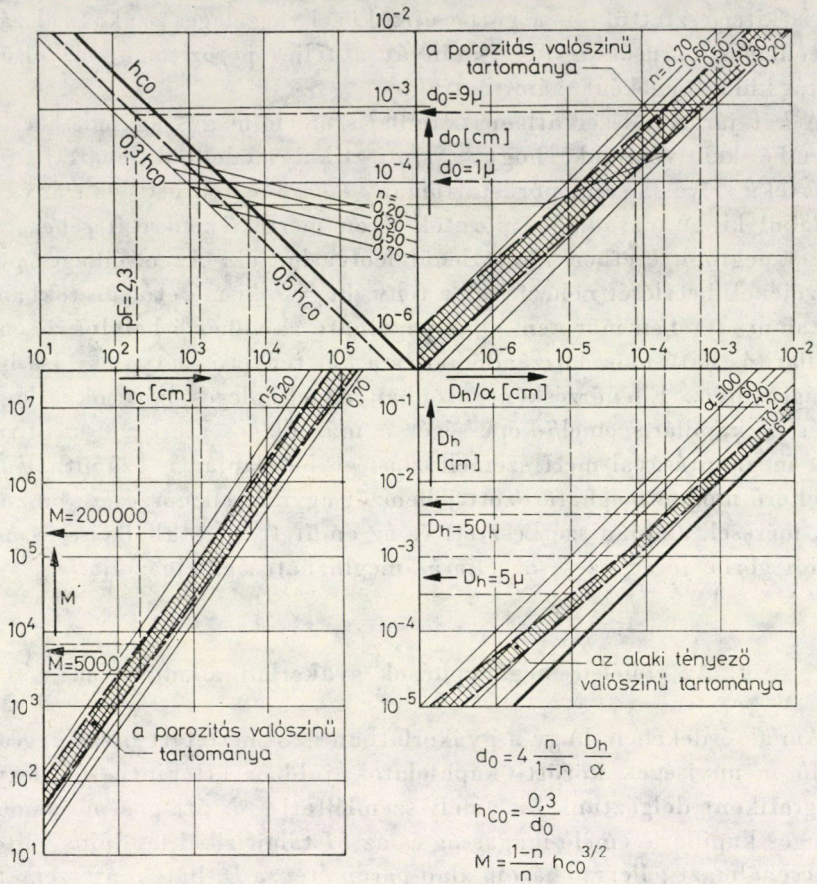
nyára is kiterjesztettük — a görbe újra közel függőleges szakasszal záródik. A másodlagos pórusok térfogat-arányát a teljes porozitás és az elsődleges porozitás különbségeként számíthatjuk.

A két járatrendszer átlagos kapilláris emelő-magasságának becslésekor figyelembe kell vennünk, hogy a statisztikai modellből levezethetően az egyenértékű szívás a saját pórustartomány $\sim 1/3$ -os telítettségi aránya esetében alakul ki. A másodlagos pórusok ilyen mértékű nedvesítéséhez tartozó szívást a legtöbb esetben közvetlenül leolvashatjuk. Az elsődleges pórusok jellemzőjének becslését nehezíti az a tény, hogy a kisméretű járatokban ilyen víztartalom esetében már nem elhanyagolható az adhézió befolyása sem, ami a kapillaritás hatásához hozzáadódik, és a két tényező szétválasztása bizonytalanságot okoz. Ellenőrzésként azonban az elsődleges pórusok átlagos átmérőjét és kapilláris emelő-képességét a másodlagos szerkezet peptizálással történt megbontásával mért szemeloszlási görbe alapján is számíthatjuk, így a két eltérő módon meghatározott jellemzőt egymás ellenőrzésére használhatjuk. A mérések alapján szerkesztett és az említett adatokból visszaszámított retenciós görbe jó egyezése az eljárás megbízhatóságát igazolja.

4. Az elméleti megállapítások gyakorlati alkalmazása

Annak érdekében, hogy a gyakorlatban az ismertetett összefüggésekben szereplő mennyiségek közötti kapcsolatok jobban áttekinthetők legyenek, olyan grafikont dolgoztunk ki, amely szemlélteti a d_0 átlagos pórus-méret, a h_{co} átlagos kapilláris emelő-magasság és az M talajfizikai modulus változását a szemcsehalmazt jellemző három alap-paraméter: a D_h hatékony szemátmérő, az α átlagos alaki tényező és az n porozitás függvényében (13. ábra).

Az ábrát kiegészítettük még egy kapcsolati vonal-sereggel, amely a levegő-felvétel kezdetéhez tartozó szívási magasságot adja meg az átlagos pórusátmérő függvényében. Ez az a határérték, amelynél kisebb szívás esetében a pórusok teljesen, vagy csaknem teljesen vízzel telítettek (a zárt kapilláris zóna magassága). Meghatározása a kevéssé kötött talajokban nagyon egyszerű: több vizsgálat igazolta, hogy nagyságát az átlagos kapilláris szívás 0,3-szorosára becsülhetjük, bár a gyakorlat számára inkább a 0,5 h_{co} határ figyelembe vétele javasolható, amely fölött a pórusok levegő-tartalma az 5%-ot már meghaladja. Finomabb szemcséjű rétegekben, amelyeknek M modulusa 200 000 $\text{cm}^{3/2}$ értéknél nagyobb ($d_0 < 0,6 \div 2 \mu$ és $D_h < 3 \div 10 \mu$), az adhézió a kapillaritás hatását már elfedi, a vízfilm telíti azokat a pórusokat is, amelyek kapillárisan telítetlenek maradnának. Ebben a tartományban a levegőtlen állapot határát jellemző szívás a pórusméret csökkenésével rohamosan növekszik és függvénye porozitásnak is. A levegő-ellátottság jellegében bekövetkező változást figyelembe véve javasolható, hogy a talajok osztályo-



13. ábra

zásakor az erősen kötött talajok tartományának határát ennek a jelenségnek az alapján jelöljük ki. Bár a hatékony szemátmérő nem rendelhető egyértelműen meghatározott súlyszázalékhoz — az eloszlás egyenletességétől függően értéke általában a 10%-os és a 20%-os átmérő között helyezkedik el — átlagos adottságokat véve számításba, a gyakorlat számára rögzíthetjük, hogy a csak elsődleges porozitással rendelkező rétegben a levegőfelvételhez tartozó szívást az adhéziós erő határozza meg, ha a halmazban az 5 μ -nál kisebb szemcsék aránya a 15 súlyszázalékot meghaladja, ezeket a talajokat nevezzük tehát erősen kötötteknek.

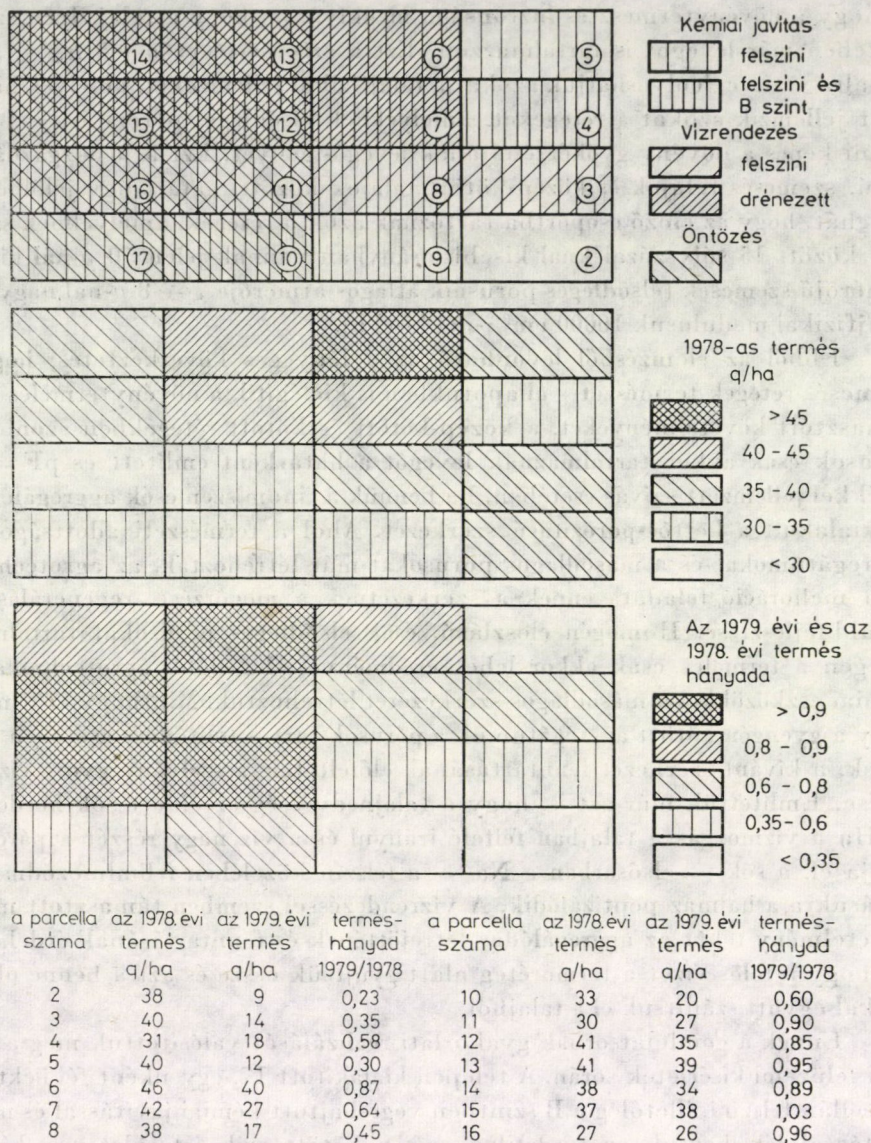
A gyakorlat számára másik fontos megállapításhoz jutunk, ha a levegőfelvételhez tartozó határszívás abszolút értékét vizsgáljuk. Ismeretes, hogy a vízkapacitást általában a $pF = 2,3$ értékhez tartozó (tehát 200 cm-es vízoszloppal egyenértékű) szívás hatására kialakuló víztartalommal azonosítják,

és hogy a növénytermesztés biztonsága megkívánja, hogy a talaj ilyen szívás esetében már levegőt is tartalmazzon. Ezt a szívásértéket a $0,5 h_{co}$ v. s. d_0 vonalra vetítve, leolvashatjuk azokat a talajfizikai jellemzőket, amelyek határként jellemzik azokat a rétegeket, amelyeknek elsődleges porozitása is biztosítani képes a növény gyökérzónájának levegő-igényét. Ezt a jó vízgazdálkodású, szemcsés talajok és közép-kötött talajok közötti határt úgy jelölhetjük ki tehát, hogy az előző csoportba tartoznak azok a rétegek, amelyeknek szemcséi között 15 súlyszázaléknál kisebb arányban vannak jelen 50μ -nál kisebb átmérőjű szemcsék (elsődleges pórusaik átlagos átmérője $7 \div 8 \mu$ -nál nagyobb, talajfizikai modulusuk $10000 \text{ cm}^{3/2}$ -nél kisebb).

Ebből az elemzésből levonható az a lényeges következtetés, hogy a szemcsés rétegek természetes állapotukban is kielégítik a növénytermelés által támasztott követelményeket, a közép-kötött és kötött rétegekben azonban a pórusok csak akkor tartalmazznak levegőt a határként említett és $pF = 2,3$ értékkel jellemzett szívás esetében, ha bennük a finom szemcsék aggregálódtak és kialakult a kettős-porozitású szerkezet. Ahol a természeti adottságok az aggregátumokat és a másodlagos pórusokat már létrehozták, az agrotechnika és a melioráció feladata ennek a szerkezetnek a megőrzése, regenerálása és továbbfejlesztése. Homogén eloszlású, csak elsődleges pórusokat tartalmazó rétegen a termelés csak akkor lehet eredményes, ha előbb agrotechnikai és kémiai eszközökkel a másodlagos szerkezetet létrehoztuk. Minthogy közismert, hogy a gyengén kötött aggregátumok a pórusok tartós telítődése esetében szét-esnek, a kívánt szerkezet fenntartásának előfeltétele a szelvény gyors víztelepítése. Említettük már azt is, hogy a talajnedvesség az oldott sók hordozója is. Ha a vízmozgás a talajban felfelé irányul és a víz nagy részét a párolgás vonja el, a sók — elsősorban a Na — a felszín közelében felhalmozódnak és hatásukra a halmaz peptizálódik. A vízrendezéssel szemben támasztott másik követelmény tehát az aggregálódás létrejöttének és fenntartásának érdekében az, hogy a fölös vizet a termőréteg alatt gyűjtsük össze és azt a benne oldott sókkal együtt szállítsuk el a talajból.

Ennek a gondolatsornak gyakorlati realizálását valósítottuk meg a karcagi félüzemi kísérletek során. A telepen kialakított 17, egyenként fél hektáros parcellán felszíni, illetőleg a B szintben végrehajtott kémiai javítással és mélylazítással létrehoztuk az eredetileg erősen kötött szikes területen a kívánt szerkezetet. Néhány parcellán különböző sűrűségű drénhálózattal, illetőleg a felszín rendezésével a fölös víz elvezetésének többféle változatát valósítottuk meg. Mindegyik beavatkozást két parcellán azonosan hajtottuk végre, az egyiket öntözést, a másikon szárazgazdálkodást alkalmazva. A kontroll-parcellán csak digózást és mélylazítást végeztünk.

A kísérleti telep kiépítése mintegy három évet igényelt. Az első termést (őszi búzát) 1978-ban takarítottuk be. 1979-ben az előre tervezett vetésforgónak megfelelően ugyancsak őszi búza volt a területen. Korai lenne két éves



14. ábra

terméseredményből mélyreható következtetések levonása, az adatok azonban máris utalnak néhány valószínűsíthető összefüggésre (14. ábra):

— a korábban terméketlen, legelőnek sem alkalmas kérés szikesen az agrotechnikai, a kémiai és a vízügyi melioráció hatására átlagosan 37 (szélső értékben 27—46) mázsa őszi búza volt betakarítható az első évben (a tenyészidőszak nagy csapadéka az öntözés alkalmazását szükségtelessé tette);

— nem mutatkozott szignifikáns eltérés a különböző módon kezelt területek között, bár általában a drénezett területek az átlagnál jobb eredményt adtak, azokról a parcellákról pedig, amelyeken a vízrendezés csak a felszíni elvezetést segítette, vagy amelyeken vízrendezés egyáltalán nem volt, átlagos vagy annál kisebb terményt takarítottunk be, a kis, mintegy 20%-os szórás azonban lehet a helyi adottságok következménye is;

— a második év terméseredményei azonban már határozottan csoportosultak a beavatkozási módok szerint: a csak agrotechnikai és kémiai úton kezelt táblák átlagos hozama az 1978. évinek mindössze 30%-a volt; ott, ahol egyfajta vízügyi beavatkozást is alkalmaztak, ez az arány lényegesen jobb volt, felszíni vízrendezés esetében 40%, öntözés esetében 50%, drénezés esetében pedig 75%; végül ott, ahol gondoskodtunk mind a fölös víz elvezetéséről, mind a vízhiány öntözéses pótlásáról, az 1978. és az 1979. évi termés-eredmény gyakorlatilag azonos volt;

— a teljes hidromelioráció egyes módszereit összehasonlítva, szembe-
tűnő, hogy az öntözést akár felszíni vízrendezéssel, akár drénezéssel — az utóbbit 5 m-es, 10 m-es vagy 15 m-es dréntávolsággal alkalmazva — kiegészítjük, hasonló termés-eredményt kapunk, tehát indokolt annak vizsgálata, hogy melyik az a legolcsóbb vízrendezési beavatkozás, amellyel az optimális termés-eredmény még elérhető.

A felsorolt megfigyelések, továbbá a vízrendezéssel elvezetett víz nagy Na tartalma arra utalnak, hogy az agrotechnikai és kémiai beavatkozás a kívánt másodlagos szerkezetet létrehozta, ez azonban tartósan csak ott maradt meg, ahol a fölös vizet és ezzel együtt a káros sók nagy részét is elvezettük. A víz elvonása azonban aszályos évben — mint amilyen az 1979. év volt — vízhiányt okoz és az ezzel járó termés-csökkenés csak öntözéssel védhető ki. Csupán az öntözést alkalmazva a hidrotechnikai módszerek közül, a második év termése felére csökkent, feltehetően a talajszerkezet romlása miatt.

Újra utalunk arra a megfigyelésre, hogy a teljes termés-eredmény biztosítható volt függetlenül a vízrendezés módjától, ha a fölös vizet elvezettük, a hiányzót pedig öntözéssel pótoltuk. Ebből arra következtethetünk, hogy a mélylazítás a tábla megfelelő esése esetében biztosítja a felső réteg függőleges átmosását és a nagy só-tartalmú víz oldalirányú elvezetését. Kétirányú esést hozva létre kisméretű tereprendezéssel a táblát homogénné tehetjük és csak az így létrejövő közbenső vápák alá kell drént helyezni, hogy ezek elvezetése a gépek mozgását ne akadályozza. Úgy véljük, hogy ilyen módon kialakíthatjuk végül a kifejtett elméleti alapok figyelembe vételével az agrotechnikai, a kémiai és a vízügyi meliorációs módoknak azt a legelőnyösebb kombinációját, amely kielégíti a nagyüzemi mezőgazdaság gyakorlati követelményeit, és gazdaságosan biztosítja nemcsak a termés-átlagok növelését, hanem a termés-eredményeknek a klíma-adottságtól függően évről-évre tapasztalható szórásának csökkentését is.

ÉPÍTÉSIPAROSÍTÁS-RENDSZERSZEMLELET*

SZABÓ JÁNOS**

AZ MTA RENDES TAGJA

A hazai építés iparosításának utóbbi húsz évét elemezve szerző bemutatja a tudatos technológiai váltás főbb társadalmi — gazdasági előfeltételeit és következményeit. Kimutatja, hogy az építés folyamatában szerepet játszó erőforrások fajlagos értékének megbízható ismerete nélkül az összárfordítások minimuma nem határozható meg. Megmutatja, hogy az adott használati érték teljes ráfordítása egy állapotfüggvény, melyben független változók a lehetséges erőforrás-kombinációk és az erőforrás-reprodukció hatékonyságok. Az utóbbiak a társadalmi termelés színvonalát jellemző hatékonysággal állnak szoros összefüggésben és mindenkor behatárolják a ráfordítás minimumot adó erőforrás kombinációt.

A szerző életútja sok szállal kapcsolódik egy olyan korszak kibontakozásához, amely már 20 év alatt is példa nélküli változásokat hozott szocialista építőiparunk fejlődésében. E korszak, mint jelenség, nagyon bonyolult folyamatrendszer, hiszen egész társadalmi létünk is különféle mozgásformákban, folyamatokban nyilvánul meg. Az építésiparosítás fejlődési mozgástörvényeinek megismerése, a fejlesztést szolgáló intézkedéseink ezekkel való összehangolása a szerzőt eddigi pályafutása során mindvégig foglalkoztatta. Az ezzel kapcsolatos munkájában segítettek azok a határterületi ismeretek, felismerések, amelyekhez egyrészt a természettudományok és a társadalomtudományok révén, másrészt a hivatali munkájához kapcsolódó gazdasági problémák megoldása során jutott.

I. Az építésiparosítás elvei és feltételei

Az építésiparosításban mindig akkor sikerült előbbre jutni, amikor széles körben nyilvánvalóvá vált az a felismerés, hogy az építmény is, a létrehozására irányuló folyamatok összessége is, a kivitelezést végző szervezet is lényegében egyetlen bonyolult rendszert képez: bármely alkotó elemének módosítása az egész rendszer működését megváltoztatja. Következésképpen az építésiparosítás fejlesztése valójában olyan rendszerfejlesztési feladat, amelynek megoldása

* Székfoglaló előadás. Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának 1980. április 23-i nyilvános ülésén.

** Prof. Dr. Szabó János, 1118 Budapest, Ménesi út 21.

dása módszertani ismeretek, rendszerszemléletű megközelítés nélkül nem képzelhető el.

Az építésiparosítás mintegy 20 éves tapasztalatai egyértelműen bizonyítják, hogy annak kizárólag elméleti megközelítése éppen úgy nem vezethet eredményre, miként a kizárólag gyakorlati intézkedések sem hozhatnak jelentős sikert. Ezért szükségszerűen a gyakorlati tapasztalatok és az ezekből levonható elméleti következtetések alapján kellett egy-egy konkrét intézkedést tenni az iparosítás fokozása érdekében.

Az építésiparosítás nem valamiféle önkényes elhatározás alapján kezdődött el. Ezt az egész népgazdaság fejlődése törvényszerűen kényszerítette ki. Fel kellett ugyanis ismerni, hogy a gazdasági növekedés bármiféle üteme mellett a termelés is, a fogyasztás is meghatározott építési feladatok megvalósítását igényli. Sőt népgazdasági fejlődésünk közel három évtizedét átfogó szakaszára az volt a jellemző, hogy a beruházási és az építőipari feladatok növekedési üteme meghaladta a nemzeti jövedelem növekedési ütemét. A nemzeti jövedelem, a beruházások és az építőipari termelés 1950-hez képest a következőképpen emelkedett:

	Nemzeti jövedelem	Beruházások	Építőipari termelés
1950	100	100	100
1960	177	197	218
1970	300	448	454
1978	469	745	681
1979	478	750	689

Ezek az adatok jól érzékeltetik, hogy szocialista gazdaságban a növekedésnek nem nélkülözhető tényezője az építés. A szocialista társadalom felépítésének úgyszólván egyetlen célkitűzése sem valósítható meg az építőipar hatékony közreműködése nélkül.

Van azonban ennek a három évtizedes időszaknak egy másik, nagyon fontos jellemzője is. Nevezetesen az, hogy ebben az időszokban következett be foglalkozási struktúránkban az a történelmi jelentőségű fordulat, melyet követően az ipari és az építőipari termelés további törvényszerű növekedését e két népgazdasági ágban foglalkoztatottak arányának csökkenése mellett kell elérnünk.

A fejlett tőkés államok gazdaságtörténetének elemzése alapján közzismert, hogy a gazdasági fejlettség alacsony fokán a foglalkoztatottak bizonyos hányada a mezőgazdaságban dolgozik, kisebb hányada az iparban és az építőiparban, még kisebb hányada pedig az egyéb, az ún. terciér ágazatokban. A gazdasági fejlődés magasabb fokán az iparban és az építőiparban foglalkoztatottak aránya gyors ütemben nő, míg a mezőgazdaságban foglalkoztatottaké a gépesítés, a kemizálás, a racionalizálás nyomán csökken. Ez a folya-

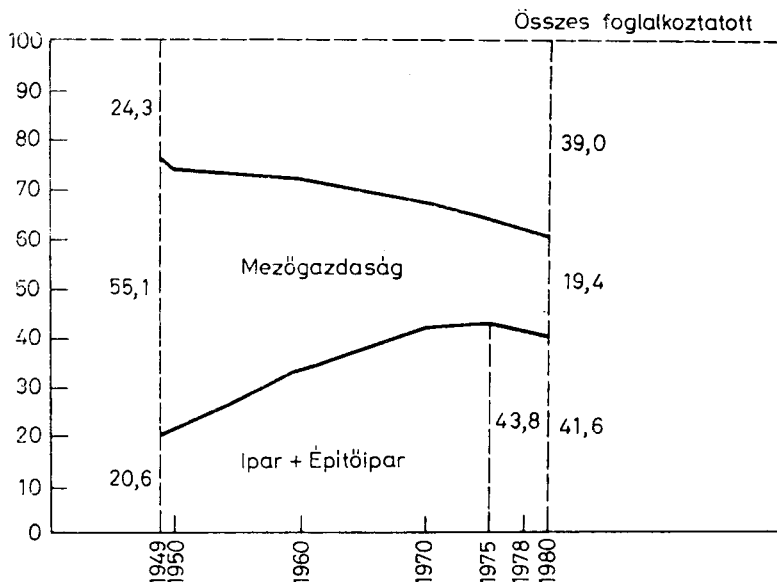
mat azonban nem tart minden határon túl. Az iparban foglalkoztatottak arányának 45—55%-ra való növekedésével ez az arány általában el is éri a maximumát, mert a tercier ágazatok létszámigénye mind erőteljesebb fel szívó hatást gyakorolván a munkaerőre, megváltoztatja a foglalkoztatási struktúrát.

Hazánkban 1970—75 között következett be az a gazdaságtörténeti szempontból nagyjelentőségű fordulat, amittől kezdődően az ipari és az építőipari termelés további bővítésének egyedüli forrása az élőmunka hatékonyságának növelése. Ezt mutatják a következő adatok:

	Iparban és építőiparban	Mező- gazdaságban	Egyéb ágazatokban
	foglalkoztatottak számának megoszlása (százalékban)		
1949	20,6	55,1	24,3
1950	22,4	51,9	25,7
1960	34,0	38,6	27,4
1970	43,1	25,1	31,8
1975	43,8	21,2	35,0
1978	42,7	20,2	37,1
1980	41,6	19,4	39,0

Szemléletesen mutatja ezt a folyamatot az 1. ábra is.

Feltételezve azt, hogy a nemzeti jövedelem növekedése nem csökken olyan mértékben, hogy a felhalmozási arány tartós csökkenése aktuálissá váljék, továbbá azt, hogy a felhalmozásban az építés részaránya lényegesen



1. ábra

a jövőben sem változik, elkerülhetetlenné válik annak tudomásulvétele, hogy a foglalkozási struktúra törvényszerű fejlődési tendenciái mellett az építésben az élők munkáigényes, hagyományos eljárásoktól gyökeresen eltérő, iparosított rendszereket kell bevezetnünk és széles körben alkalmaznunk.

A munkásosztály helyzetének — ezen belül lakáshelyzetének — megjavítását célzó 1958. évi párthatározat nagy tömegű építési feladat kiinduló pontjává vált. Mintegy szükségszerűvé tette, kikényszerítette a *tudatos építés-iparosítást*. Csak így vált lehetségessé az, hogy a kormány kidolgoztassa és 1960-ban jóváhagyja az első 15 éves lakásfejlesztési tervet. Kézenfekvő volt, hogy a tervezett ütemű lakásépítést kevés beruházást igénylő, gyorsan bevezethető technológiával kell megkezdeni. Ennek a célnak a második ötéves terv időszakában teljesen megfelelt a közép- és nagyblokkos lakásépítési technológia. Egyrészt jelentősen csökkentette az egy lakásra eső élők munkája igényt, másrészt módot adott az építés magasabb színvonalú — úgynevezett szalagszerű — szervezésére. (Kimagasló eredményt jelentett 1964 augusztusa és 1965 augusztusa között az Üllői úti lakótelepen 1404 lakás megépítése két daruval, kiváló gépközhatalommal).

Egyidejűleg szorgos kutató munka indult az építés további iparosítási terveinek előkészítésére. Már a második ötéves terv elején világossá vált, hogy az iparosításnak elsősorban az építés olyan területeire kell behatolnia, amelyeken a nagysorozatú gyártás feltételei először jönnek létre és a megfelelő ipari háttér az építés indokolt szervezettségét kényszerpályára helyezheti.

A lakáspolitikai célok és a gazdaságpolitikai realitások együttesen alapozták meg az építésiparosítás döntő fordulatát megfogalmazó 1964 februári párthatározatot. Az azóta is tartalmában időszerű határozat a lakásépítés házigyári technológiáját, az egységes méretrendszerben gyártott ipari épületeknek széles körű alkalmazását, a munka- és üzemszervezés korszerűsítését ajánlotta az építésügyi ágazat fejlesztési tennivalói közé.

Külföldi tapasztalatok alapján kézenfekvőnek tűnt, hogy az építés iparosításának továbbfejlesztésében a házigyári építésmód bevezetése jelentheti azt az utat, amely a 15 éves lakásfejlesztési tervben elhatározott nagyszabású, városrész méretű lakóterületek létrehozását jelentő tömeges lakásépítési feladatok megoldásához vezethet. Ez az építési mód nem csupán abban jelentett előrelépést a blokkos technológiához képest, hogy a szerelendő elemek méretének növelésével azok egy lakáshoz szükséges száma is csökkent, hanem elsődlegesen abban, hogy egy sereg — korábban építési helyen végzett — részfolyamatnak a gépesített nagyüzemi tömeggyártási folyamatba való integrálását is lehetővé tette. Egy házigyári külső falpanel nemcsak abban különbözik a nagybloktól, hogy felületi mérete annak három-négyszerese, hanem elsődlegesen abban, hogy előállításának folyamata integrálja a külső-belső vakolást, a külső felületképzést, az ablakszerkezet beépítésével kapcsolatos minden munkát stb.

A házgyári technológia alkalmazásának tapasztalatai több vitás kérdés elméleti megközelítésére készítették bennünket. Elméleti választ kellett adnunk arra, hogy mikor érnek meg a technológiai váltás feltételei.

Az építés iparosításának szükségszerűsége senki előtt sem volt kétséges. Üteme és tartalma azonban számtalan variációban látszott megközelíthetőnek. Az egyes alternatívák jelentősen eltérő állóeszköz-igényessége, az élőmunka termelékenységének az egyes változatoknál várható eltérő növekedése eleve arra figyelmeztetett bennünket, hogy a fejlesztésben a túlzott óvatosság vagy az indokolatlan vakmerőség egyaránt veszélyes lehet. Arra is gondoltunk kellett, hogy az iparosítás korai szakaszában a legmegfelelőbb alternatíva kiválasztása kevesebb kockázattal jár, mint egy későbbi szakaszban.

Az építés iparosítása szükségszerűen a résztermékek sorozatgyártásával kapcsolódik össze. Ezért különös gonddal kell ügyelnünk arra, hogy a kész épületek az elemekben meglévő korlátozásoktól minél függetlenebbül elégsék ki az építészeti célt funkcióban, téralkotásban, esztétikában. Vagyis arra, hogy az új technológiát a társadalom egésze (használók és létrehozók egyaránt) befogadja. Korai gondjaink, aggályaink nem voltak megalapozatlanok. Még ma sem lehet a helyzetet megnyugtatónak tekinteni.

A blokkos építési mód tapasztalatait is szem előtt tartva egyértelműen bebizonyosodott, hogy a *technológiai váltás* sikeres megvalósításának döntő feltétele az érintett különféle ágazatok megfelelő mértékű felkészültsége és készsége a váltásból rájuk háruló követelmények teljesítésére.

A technológiai váltást a társadalmi igények teszik szükségessé. Bekövetkezése akkor válik elkerülhetetlenné, amikor a meglévő technológiák magas színvonalú szervezettséggel történő alkalmazása útján sem érhető el az indokolt társadalmi igények kielégítése.

Az is világossá vált, hogy egy népgazdasági ágazat — esetleg annak egy konkrét területe — akkor érett meg a technológiai váltásra, amikor a bevezethető új technológia az erőforrások fajlagosan kisebb, illetve a népgazdaság számára kedvezőbb arányú igénybevételével képes a feladatokat megoldani.

A technológiai váltáshoz kapcsolódó vizsgálataink során beigazolódott, hogy az építés iparosításának feltételrendszerét nem lehet kizárólag az építőiparon belül megteremthető körülményekre leszűkíteni. A fejlesztés lehetőségeinek és a technológiai váltás célszerű időpontjának meghatározásánál úgyszólván a teljes társadalmi termelés hatékonyságát és az építésre gyakorolt hatását figyelembe kell venni.

Az építés iparosítása lényegében az építmények létrehozására irányuló folyamatok egyre nagyobb hányadának gépesített, nagyüzemi termelő folyamattá alakítását, s ezzel egyidejűleg döntő többségüknek magasszínvonalúan gépesített, telepített ipari üzemekbe helyezését jelenti. Ezeknek a telepített üzemeknek egy része az építőiparon belül jön létre. Ilyenek például a ház-

gyárok, valamint az építőipari vállalatok komplex központi telepeinek különféle üzemei.

Az építésben — lényegében munkahelyi megmunkálás, átalakítás nélkül — felhasználásra kerülő szerkezeti elemek, berendezési és felszerelési tárgyak évről évre növekvő hányadát azonban nem az építőipar telepített üzemeiben, hanem az ipar különféle ágaiban állítják elő. Ilyen módon az ipar — mint az építés héttér ágazata — évről évre erőteljesebb meghatározójává válik annak, hogy meddig juthat előre az építőipar az építés iparosításában és milyen műszaki-gazdasági hatásokkal tudja megvalósítani azt. A magyar ipar műszaki színvonala, hatékonysága olyan mértékben determinálja az építés hatékonyságát, műszaki színvonalát, amilyen módon és mértékben termékei megjelennek az építőipar által létrehozott építményekben.

A könnyűszerkezetes építési mód bevezetésének időpontjában az acélszerkezetek hazai ipari gyártásában a 150÷160 órás tonnánkénti élőmunkaráfordítás volt a jellemző. A fejlesztés első tennivalói között magas szinten automatizált, kiváló méretpontosságot adó acélszerkezet gyártást kellett meghonosítanunk, mert csak így remélhettük, hogy az e háttérparban bekövetkező hatékonyság javulás összhangban lesz a könnyűszerkezetes építési módtól elvárt műszaki-gazdasági eredményekkel.

Az építőipari technológiai váltás sajátos összetársadalmi problémája tükröződik abban is, hogy az új technológia alkalmazásához szükséges állóeszközök milyen értékekkel kerülnek be a termelésbe. Akár hazai gyártású, akár importból származó állóeszközökről van szó, nem közömbös, hogy azok a szükségesnél nagyobb vagy kisebb ráfordítással jönnek-e létre, mert ezzel fékezik vagy gyorsítják az építés iparosítását.

Az építőipari technológiai váltásnak olyan állóeszközértékkel kell számolnia, amelynek ellenértékét népgazdaságunk — a népgazdasági átlaghatékonysággal — export révén kitermelni képes.

Az építőipar vezetésének már az iparosítási program kidolgozásakor fel kellett ismernie, hogy ennek sürgető céljait alá kell rendelni a népgazdasági szintű átlagos hatékonyság lehetőségeinek. Amíg a fő exportáló ágazatok átlagosan magas forintráfordítással voltak csak képesek — export révén — konvertibilis fizetőeszközt kitermelni, addig az építéshez szükséges gépek és technológiai eszközök vásárlásakor ilyen módon kitermelt fizetőeszközökkel kellett számolni. Éppen ezért az építés iparosításának programját úgy kellett megterveznünk, hogy feltételeztük: az ipar megfelelő struktúraváltásának eredményeként, a hatékonyság javulásával, ennek tárgyi előfeltételét ágazatunkban is megteremti. Feltételezéseink azonban utólag túlzottan optimistának bizonyultak. Az ipari struktúraváltás és hatékonyságjavulás késett. Emiatt építés-iparosítási programunkat lassítani kellett és így a tervezett építési kapacitás-többlet nem jött létre, amit azután többletráfordítással, importtal kellett pótolni.

Más oldalról nézve a kérdést: az építés iparosításának az elméletileg jól meghatározható ütemben történő megvalósítása esetében olyan kapacitások is létrejöttek volna, amelyek kihasználása mai gazdasági körülményeink között gondot okozott volna a népgazdasági tervezésben. Viszont az is igaz, hogy ha lenne ilyen — viszonylag magas színvonalúan iparosított — építési kapacitásunk, sok más ágazatnál kedvezőbben vehetnénk részt a nemzetközi munkamegosztásban. Jó példa erre a jugoszláv építőipar, amely 6 ÷ 8 évi intenzív iparosítás eredményeképpen rendkívül dinamikusán és igen hatékonyan tudta növelni építési exportját. Ma ez külkereskedelmének egyik legjelentősebb tényezője.

A technológiai váltás megvalósításával kapcsolatos különféle gondjaink élesen vetették fel számunkra a kérdést: vajon azok az akadályozó tényezők, amelyek az építés iparosítása egyes fokozatainak, a technológiai váltásoknak a megvalósítása során felszínre kerülnek, milyen objektív, vagy szubjektív okokra vezethetők vissza. E kérdés vizsgálata során jutottunk el egyrészt a *társadalmi befogadókészségnek* a technológiai váltásban betöltött fontos szerepe felismeréséig, másrészt arra az elhatározásra, hogy e befogadókészség össz-társadalmi problémáit és építőipari összefüggéseit részletes vizsgálat tárgyává tegyük.

Vizsgálataink szerint a társadalom befogadókészségének tényezői három csoportra oszthatók: tudati, technikai és gazdasági tényezőkre.

A *tudati* tényezők közé sorolható a kulturális fejlettség színvonala; az iskolázottság mértéke; a munkások, technikusok, mérnökök szakmai felkészültségének színvonala; az új iránti igény, érdeklődés; és összességében az a szándék, hogy a társadalom élni akar a tudományos kutatás eredményeinek hasznosításával elérhető előnyökkel. E tényezők fontos elemét képezi az a képesség, hogy az egyén, illetőleg a társadalom reálisan ítéli meg mennyiségi és minőségi igényeinek adott körülmények között kielégíthető színvonalát. Ugyancsak fontos eleme a tudati tényezőknek a műszaki szabályozás rendszere, amely számottevően fékezheti, vagy gyorsíthatja az új megoldások általános elterjedését.

A *társadalmi befogadókészség* technikai tényezői közé tartozik országunk mérete; földrajzi, éghajlati, geológiai adottsága; továbbá a meglévő technikai bázis volumene, fejlettségének színvonala.

A *gazdasági* tényezők között meg kell említeni az ország mindenkori gazdasági helyzetét, külgazdasági kapcsolatainak komplex rendszerét, valamint a gazdasági tervezés és szabályozás teljes rendszerét — tehát az árpolitikát, az ár- és bérrendszert, a beruházási rendszert stb.

A társadalmi befogadókészség elemzésekor vált világossá számunkra, hogy az építőipar problémáit nem lehet elszigetelten elemezni, hanem csakis a népgazdaság összes erre ható tényezőjével együtt. A felismeréshez döntő segítséget adott számunkra az MSZMP Központi Bizottságának az építő- és

építőanyag-ipar helyzetéről, továbbfejlesztésének feladatairól szóló 1978. október 12-i határozata, amely e kérdéskomplexum *rendszer szemléletű megközelítésének* ragyogó példája.

Az idézett KB határozat nem azért jó példája a rendszer szemléletű közelítésnek, mert benne megfogalmazták a rendszer szemléletű építés körvonalait, fejlesztési irányait; hanem azért, mert az építés fejlesztésének problémakörét az egész társadalmi-gazdasági folyamatrendszerbe — mint az építés környezeti feltételrendszerébe — helyezve vizsgálja.

A határozat az építőipar fejlesztésének feladatairól szólva szükségesnek ítéli a beruházási folyamat egészének rendezését, az igények és a kapacitások globális összehangolását, a hatékonyságot szolgáló következetes iparosítási politika megvalósítását, az építés ipari, szállítási, kül- és belkereskedelmi hátteréhez kapcsolódó feladatok rendezését, az építésben résztvevő szakembereknek az építőipari fejlesztési politikához igazodó képzését. Tartalmazza azokat a legfontosabb célokat, amelyekre az építőipar fejlesztését és tevékenységét összpontosítani kell. Megjelöli azokat az eszközöket is — köztük a gépesítést, a szervezést- és szervezetfejlesztést, az irányítás és vezetés korszerűsítését — amelyek racionális felhasználásával az építőiparra háruló feladatok az eddiginél nagyobb hatékonysággal oldhatók meg.

A Központi Bizottság határozata és a nyomában kibontakozott széles körű társadalmi-szakmai tevékenység valóban a befogadókészség fejlesztésének, sokoldalú formálásának feltételeit teremtette meg.

Jelen körülményeinkben adott az a politikai környezet, amely az építés iparosításának rendszer szemléletű stratégiáját, illetőleg taktikai intézkedéseit megalapozhatja. Kérdés azonban, hogy elegendő-e az ágazati és vállalati vezetők, szakemberek felkészültsége ahhoz, hogy a jól megfogalmazott, politikailag megerősített irányvonalban jelentős előrehaladást érjenek el.

Nyilvánvaló, hogy a teendő intézkedések megfogalmazása és azok végrehajtásának megszervezése ma már nem alapozható kizárólag kvalitatív ismérvekre. Amíg az építésiparosítás útján viszonylag kis ráfordítással is nagy előrelépést lehetett elérni, addig az új technológiához szükséges állóeszköz-érték és az ezzel megtakarítható élőmunka értéke közötti egyensúlyt — mint a technológiai váltás egyik fontos kritériumaként minősített feltételt — különösebb nehézség nélkül, kockázatmentesen meg lehetett teremteni. Ahogy azonban az iparosítás előrehalad, úgy egyre eszközigenyesebbé válik a további élőmunka-kiváltás. Ennek megfelelően: ha a technológiai váltásra vonatkozó vizsgálatok keretében csak kissé is torz az élő- és holt munka értékelése, akkor súlyosan torzulhatnak a fejlesztési döntések és következményeik is.

Úgy is mondható, hogy nem elegendő csupán nagy vonalakban ismerünk fejlesztési intézkedéseink komponenseit, az építésiparosítás minőségi elemzését bemutató teret. Megbízható döntéseket csak mérést lehetővé tevő, metrikus térben végzett elemzéssel hozhatunk. Az építés folyamán *emberi mun-*

kával, anyagok (és kész szerkezetek) felhasználásával, *gépekkel* (és szerszámokkal), valamint *energia* felhasználásával új használati értéket: épületet, építményt hozunk létre. A tevékenység e négy komponense adja az építésiparosítás elemzésének négy koordináta tengelyét. A négy komponens konkrét értékaránya egy-egy építési technológiai változatnak felel meg. Nem döntő, de nem is közömbös, hogy a vizsgálat céljára szolgáló koordinátarendszer egy-egy tengelyén milyen a beosztás. Az azonban döntő, hogy *tudjuk* milyenségét.

Ha egy gömböt egy henger felületű homorú tükör elé helyezünk, a gömböt a tükörben lapult forgástestnek látjuk. Ha *tudjuk*, hogy ezt a képet milyen transzformáció révén kaptuk, úgy bennünket a gömb tulajdonságainak vizsgálatában a torzított kép zavarni nem fog: megállapításaink egyszerű transzformáció révén valóságghűek lesznek.

Ahogy a homorú tükör elé helyezett gömb tükörképéből nem szabad azt vélnünk, hogy lapult forgástestet tartunk a kezünkben, ugyanúgy a hazai élő- és holt munka konvertálási arányainak vizsgálata során sem szabad az egy teljesített órára jutó munkabér numerikus értékét az élőmunka egy órányi értékével azonosítanunk.

Gazdasági szabályozó rendszerünket, elemeinek összességében koherens sajátosságait semmiképpen sem szabad kétségbe vonnunk. Azt azonban tudomásul kell vennünk, hogy azok a fejlesztési döntésekben csak megfelelő transzformáció útján adnak valóságghű képet.

Hogy vizsgálatainkhoz viszonylag megbízható metrikus teret teremtsünk, olyan elemzéseket tettünk folyamatba, amelyek képet adhatnak arra, hogy valóban „*drága*”-e a magyar építési teljesítmény:

1. Milyen ütemű az áremelkedés?

2. Naturális mutatók alapján építési áraink nemzetközileg hol helyezkednek el?

Az első kérdésre az 1978. évi építési árindexből kaphatunk képet:

1978. évi árindexek (1970 = 100)	
Magyarország	131,1
Svájc	143,0
NSZK	159,7
Norvégia	191,0
Dánia	211,0
Franciaország	211,0
Hollandia	218,0
Svédország	251,6
Belgium	259,6
Ausztria	270,0
Egyesült Királyság	327,0
Olaszország	331,7

Tizenegy nyugat-európai országgal összehasonlítva a kép egyértelműnek tűnik. (Ennek dacára *ebből* semmiféle következtetést nem akarunk levonni).

A második kérdésre nehezebb választ adni. Ezért a ma érvényes gazdasági szabályozó rendszerünk fő elveit szem előtt tartva összehasonlító számítást végeztünk arra vonatkozóan, hogy a nagyjából azonos használati értékű lakás négyzetméterenkénti ára

- hány tonna portlandcement,
- hány köbméter transzportbeton,
- hány tonna betonacél árával, illetőleg
- hány kőműves munkaóra bérével

egyenértékű. Ezt a viszonyszámot négy nyugat-európai államra — az Egyesült Királyságra, a Német Szövetségi Köztársaságra, Olaszországra és Hollandiára, — továbbá hazánkra vonatkozóan kiszámítottuk és az 1. táblázatba foglaltuk.

1. táblázat

	Egy négyzetméter lakás ára 1978. évi árakon kifejezve			
	x tonna portland- cement arával	x köbméter transzport- beton arával	x tonna betonacél arával	x munkaóra kőműves órábérrel
1. Egyesült Királyság	6,1	6,2	0,69	90
2. NSZK	7,14	7,14	1,03	79
3. Olaszország	5,02	9,85	0,69	52
4. Hollandia	5,86	8,50	0,84	75
5. 1.—4. átlaga	6,03	7,92	0,812	74
6. Magyarország	8,9	7,9	0,81	308
7. 6. : 5.	1,48	0,997	0,997	4,16
	8.	9.	10.	11.

A vázolt számítás ma még nem eléggé részletes adatgyűjtés révén jött létre. Elsietett következtetések helyett most még csak arról lehet beszélni: mire érdemes a számok tükrében felfigyelni; mi az ami ennek alapján kézenfekvő; és mi az, amit nagy gonddal tovább kell elemezni. Először is érdekes, hogy a transzportbeton és a betonacél árával képzett nyugat-európai mutatók átlaga teljesen megegyezik a hazáival (9 és 10). Másodsor kézenfekvő, hogy a portlandcement árával képzett hazai és nemzetközi mutatók 8 jelű hányadosa 1,48. Ez ugyanis gyakorlatilag megfelel annak az 50%-os áremelési igénynek, amely a magyar cementipart önfinanszírozóvá tehetné. Végül nem okoz meglepetést a kőműves órábérrel képzett mutatók 11 jelű hányadosának 4,16-os értéke sem.

Az adatok szerint egy átlaglakás négyzetméter-ára hazánkban 4,16-szor több kőműves munkaóra bérével egyenértékű, mint az említett nyugati államokban. Alapvető tévedés lenne azonban ebből olyanféle következtetést le-

vonni, hogy a nyugat-európában dolgozó kőműves négyszer olyan jól él, mint a magyar. Sőt még olyan következtetést sem lehet levonni, miszerint egy kőműves munkaóráinak megfelelő élőmunka újratermelésének osztársadalmi ráfordítása négyszer annyi nyugaton, mint nálunk.

Ez az igen jelentős eltérés lényegében véve három tényezőre vezethető vissza. Az egyik az, hogy a nyugat-európai kőműves keresetét olyan tételek terhelik (például jelentős adó), amelyekkel nettó keresete számottevően csökken, amelyek azonban a kifizetett munkabéren keresztül átmennek a létrehozott új termékre. A másik az, hogy a mi kőművesünk bérében nem jelentkezik számtalan olyan juttatás, amely kiadásait csökkenti (tehát növeli az elméletileg számítható részesedését a megtermelt javakból), de amely nem megy át az általa létrehozott új termékre. A harmadik tényező az, hogy a magasabb nyugat-európai munkabérek eleve nagyobb szervezettségre, élőmunka-takarékosságra készítetik az építési vállalkozót. (Az sem vigasztaló, hogy a mi építőmunkásaink reáljövedelmük kiegészítését a másodlagos gazdaság keretei között többé-kevésbé megtalálhatják.)

Nyilvánvaló elszármított javaslat volna felvetni, hogy a munkabérek az előbb említett arányoknak megfelelő szintre hozzuk. Csupán azzal kell tisztában lennünk, hogy vizsgálataink koordinátarendszerének a munkaerő értékét ábrázoló tengelyén a reális értékarányokhoz képest zsugorítottan jelentkezik a mennyiségi beosztás. Ennek következtében valóság-hű képhez csakis a koordinátarendszer megfelelő transzformációja útján juthatunk.

Amíg a mértékrendszer nem tükrözi helyesen a munkaerő koordináták valóságos szerepét, addig a munkaerő-takarékosságra irányuló intézkedések mérsékelt hatásával lehet csak számolni, és az építés-iparosítás sem léphet előre a valóságos hatékonyságot fokozó irányba.

2. A technológiai váltás modellezése

Az előző fejtegetésre azért volt szükség, hogy megvilágítsam: építés-iparosításról rendszerszemlélet nélkül komolytalan dolog beszélni. Az építés-iparosítás alapvető tényezőit, ezek egymásra gyakorolt hatását, a folyamatban megtehető, illetve elhalaszthatatlan lépéseket csak az összefüggések metrikus terében lehet és kell vizsgálni. A vizsgálat csak rendszerszemléletű lehet, a következtetések kiindulópontot, illetve célfüggvényt adnak a technológiai váltásokhoz, az építési rendszerek (és alrendszerek) szervezéséhez.

Ahhoz, hogy a mérhetőség feltétele teljesüljön, igen kiterjedt, gyakran bonyolult elemző munkát kell végezni. Ehhez azonban a műszaki és a gazdaságtudományi kutató-elemző munka szoros együttműködésére van szükség. A fáradtságos munka azonban értékes gyümölcsöt hozhat: számszerűen leírhatóvá teszi az építésiparosítás alapvető összefüggéseit.

Bármiféle technológiát alkalmazunk, maximális hatékonyságra kell törekednünk. Ez egyrészt az alkalmazáshoz felhasznált erőforrások helyes arányainak kialakítását, másrészt a kihasználás lehető legnagyobb hatásfokát igényli.

Az építés szakaszos jellegű folyamat, vagyis egymástól jól elhatárolható szakaszokra bontható; annak veszélye nélkül, hogy ezzel a már elvégzett munkaszakaszok eredményei tönkremennének. Az *építéssel* — mint transzformációs folyamattal — *szemben két alapvető követelményt írunk* elő. Ezek:

- I. A folyamat egészében is és annak minden elkülöníthető szakaszában is *a lehető legkisebb veszteséggel* alakítsa át az igénybe vett erőforrásokat építménnyé, vagy annak részévé.
- II. E transzformációs *folyamat sebessége optimális* legyen, vagyis a gyorsítására fordított erőforrások ne haladják meg a gyorsítással elérhető eszközigeny-csökkenést.

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_{ji} q_{ji}}{\eta_{ji}} = k_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (I)$$

$$k_1 Q^{(v_1+v_2+\dots+v_m)} + k_2 Q^{(v_1+v_2+\dots+v_m)} + \dots + k_m Q^{v_m} = K = \min ! \quad (II)$$

(I) a folyamat *egyensúlyi* egyenletrendszeré

(II) a folyamat *kinetikai* egyenlete.

Az egyes betűjelek értelme:

$j = 1, 2, \dots, n$	az elkülönítetten figyelembe vett erőforrások indexe (például $j = 1$ munkaerő, $j = 2$ anyag és kész szerkezet, $j = 3$ gép, $j = 4$ energia)
$i = 1, 2, \dots, m$	a vizsgált szakasz indexe
a_{ji}	az i -edik szakaszban igénybevett j -edik erőforrás elméletileg szükséges mennyisége
q_{ji}	az a_{ji} erőforrás fajlagos értéke
η_{ji}	az a_{ji} erőforrás kihasználási hatásfoka
k_i	az i -edik szakaszban létrehozott résztermék összes erőforrás igénye
v_i	az i -edik szakasz időtartama napokban
$v = \sum v_i$	a hasznosítható termék (építmény) létrehozásának teljes időtartama
K	a hasznosítható termékben megtestesülő teljes ráfordítás
$Q = 1 + 1/365N$	a népgazdaságban átlagosan elfogadott — években kifejezett — megtérülési idő.

Az (I) és (II) egyenletekből álló rendszer azt juttatja kifejezésre, hogy az egyes szakaszokban a megkívánt termékész

- az erőforrások sokféle lehetséges változtatásával,
- a részfolyamatok különféle szervezetségi szintjén,
- ennek megfelelően eltérő nagyságú ráfordítással

hozhatók létre. A lehetséges változatok közül azt az m számú k_i -t kell kiválasztani, amely mellett a K -val jelölt összes ráfordítás a minimális lesz. Hozzá kell azonban tenni, hogy valamennyi k_i érték minden lehetséges változatához eltérő v_i időtartam tartozhatik.

Hangsúlyozni kell azt is, hogy egy-egy szakaszon belül az a_i , q_i és η_i értékek több részből tevődhetnek össze. (Például az építés egy tetszőleges szakaszában nem csupán egyféle anyagot használunk fel, nem csak egyféle géppel dolgozunk; és ezek fajlagos kihasználtsága, tényleges vesztesége anyagok, gépek szerint eltérő lehet). Ezért a modellben az adott i -edik szakaszra átlagosított értékükkel számolunk.

A rendszerszemléletnek abban kell megnyilvánulnia, hogy — az erőforrás-transzformáció szóbjöhethő szakaszait szem előtt tartva — kikeressük azokat a változatokat, amelyek esetében a résztermék a legkisebb összráfördítással jön létre, és az erőforrás-veszteségek értéke minimális.

Az egyensúlyi egyenletben szereplő η tényezők értéke egynél nem nagyobb pozitív érték. Az $\eta = 1$ érték csak elméletileg érhető el, hiszen erőforrás átalakítása veszteség nélkül nem oldható meg. (Ha például a folyamatban olyan munkagépet alkalmazunk, amelyet a technikailag lehetséges órászámmal kihasználunk, de az építési folyamat csak szakaszosan igényli a gép használatát, akkor a technológiának megfelelő legmagasabb szintű szervezés esetén sem érheti el a tényleges gépkihhasználás a technikailag lehetséges mértéket. Ezzel szemben alacsony szervezettségű folyamatoknál a technológiától függő csökkentett gépkihhasználási szintet sem éri el.) Ugyanez vonatkozik a munkaerő felhasználásra is. Ezért a hatásfok η_{ji} értéket célszerűen két (vagy több) tényező szorzataként adjuk meg. Közülük az első az, amelyik a technikai adottságoknak megfelelően a legjobb szervezés mellett is elkerülhetetlen. (Jellegében olyan, mint az elektromos hálózatban létrejövő — semmiképpen sem visszanyerhető — hálózati veszteség.)

A rendszerszemléletű közelítés elsődleges szerepe az, hogy a technológiától függő erőforrás-veszteségeket a minimálisra korlátozza. Ez úgy érhető el, hogy az anyag, a munkaerő, a gép alakjában megjelenő erőforrásokat a minimális veszteségek követelményei szerint csoportosítjuk. Ez a felismerés vezet el olyan döntésekhez, miszerint az erőforrások egy részét — mondhatni növekvő hányadát — a magas színvonalúan gépesített sorozatgyártás feltételeinek egyidejű megteremtése mellett az építés színhelyéről az ipari háttérbe teszik át.

Ha egy megfelelő technológiai váltás eredményeként a k_i kifejezésben — az új technológia következtében — anyagban, illetőleg szerkezetben megjelenő értéknövekmény és az új technológiával elérhető élőmunka-megtakarítás egyenlege zérus, akkor ez már lényegében elégséges feltétele annak, hogy a megtervezett technológiai váltás helyes lépésnek minősüljön. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a k_i elérhető minimuma többnyire a részfolyamat időtartamának csökkenésével is jár, akkor ez már elegendő ahhoz is, hogy a kinetikai egyenletünkben a K érték a minimum irányába változzék.

Ezt azért is hangsúlyozni kell, mert a transzformációs folyamatra felírt egyensúlyi egyenleteink a technológiai váltás vonatkozásában *szükséges* felté-

teleket tartalmaznak, de ezek kielégítése az egész folyamat optimalása szempontjából még *nem elegendő*.

Lehet, hogy valamely technológiai váltás a részfolyamatokra vonatkozó — az I. egyenletrendszerben matematikailag megfogalmazott — egyensúlyi követelményt ugyan kielégíti, de a k_i -ket nem csökkenti, azonban a transzformáció sebességére vonatkozó II. egyenletben felírt követelménynek megfelel.

Az (I) egyenletrendszer az erőforrásigény elméleti *minimumát* adja, ha minden

$$\eta_{ji} = \eta = 1$$

azaz

$$\sum_{j=1}^n a_{ji} q_{ji} = k_i \min \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (I')$$

(Azt is mondhatnánk, hogy

$$\sum (k_i - k_{i \min})$$

megadja a felhasználatlanul elvesztett erőforrásokat.)

Ennek az (I') egyenletrendszernek külön is fontos szerepe van. Adott használati érték mellett az a_{ji} erőforrás-mennyiségek kombinációja kizárólag a választott *technológiától* függ. A q_{ji} fajlagos erőforrásérték viszont az átlagos *össztársadalmi hatékonyság* (T) függvénye, azaz $q_{ji} = q_{ji}(T)$: kifejezi azt, hogy a kérdéses erőforrás előállításában milyen társadalmi ráfordítás testesül meg. Adott társadalmi hatékonysági színvonal esetében (mikor a q_{ji} -k rendszere nem változik) $K_{i \min}$ kizárólag az a_{ji} -k kombinációjától függ. Két lehetséges változat esetén az alacsonyabb szervezettségi színvonal (1) felé történő elmozdulás növeli a ráfordítások elméleti értékét

$$\sum (k_{i \min}^{(1)} - k_{i \min}^{(2)}) > 0,$$

más szóval a rendszer T -től függő „entrópiáját”. Ez a magára hagyott rendszer spontán alakulásának sajátossága. A magasabb szervezettségű állapot (2) csak többlet erőfeszítéssel érhető el

$$\sum (k_{i \min}^{(2)} - k_{i \min}^{(1)}) < 0,$$

mikor is a T -től függő entrópiacsökkenés következhet be.

Mint ahogy a q_{ji} -k értéke T -től függ, ezért azonos a_{ji} kombináció, tehát azonos technológiai változat felé történő elmozdulás T -től függően a fejlettebbnek tűnő változásnál is erőforrás-ráfordítás többletet okozhat. Ilyen eset fordulhat elő akkor, amikor a gazdasági fejlődés túl korai szakaszán teszünk meg olyan lépést, amely akkor még csak alacsony hatékonysággal valósítható meg.

(Például szerkezeti elemek előregyártása egy fejlett rendszer részére optimális alatti sorozatgyártással, gyenge minőséggel, primitív ipari háttérben.)

Nézzünk mindezekre egy konkrét, szemléltető példát. Tételezzük fel, hogy egy épület egyetlen szakaszban ($m = 1$) készülhet el, mégpedig két — egy hagyományos és egy iparosított — változatban. Legyen példánkban az átlagos megtérülési idő $N = 10$ év. Ez esetben a korábban említett képletünkben szereplő Q értéke:

$$Q = 1,0002739.$$

A számpéldában kétféle osztársadalmi hatékonysági szintet ($T_{(1)} < T_{(2)}$) tételeztünk fel, amit az egyszerűség kedvéért csak a q_1 és q_2 értékben juttattunk kifejezésre.

A példában egy 4000 m²-es, közösségi célú épület létrehozásával számunk (2. táblázat).

2. táblázat

Szint:	Hagyományos (A)		Iparosított (B)	
	$T_{(1)}$	$T_{(2)}$	$T_{(1)}$	$T_{(2)}$
Élőmunka				
a_1 (óra)	200 000	200 000	60 000	60 000
q_1 (Ft/óra)	50	100	40	80
η_1	0,90	0,90	0,98	0,98
Anyag és kész szerkezet				
a_2 (t)	8 000	8 000	1 200	1 200
q_2 (Ft/t)	1 700	3 000	30 000	35 000
η_2	0,95	0,95	0,98	0,98
Gép				
a_3 (gépóra)	2 000	2 000	500	500
q_3 (Ft/gépóra)	800	800	2 000	2 000
η_3	0,50	0,50	0,90	0,90
Energia				
a_4 (kWó)	30 000	30 000	30 000	30 000
q_4 (Ft/kWó)	1,50	1,50	1,50	1,50
η_4	0,95	0,95	0,95	0,95
v (nap)	700	700	300	300
k	28 674 269	50 732 748	40 342 153	48 913 581

$T_{(1)}$ szinten:
 $k^{(A)} - k^{(B)} = -11\,667\,884$
 tehát (A)-t kell választani.

$T_{(2)}$ szinten:

$$k^{(A)} - k^{(B)} = 1\,819\,167$$

tehát (B)-t kell választani.

A teljes ráfordítás (az egyszerűbb számolás végett K kifejezésben $\frac{v}{2}$ -vel számolva)

$$T_{(1)} \text{ szinten: } K^{(A)} = 31\,559\,593, \quad K^{(B)} = 42\,034\,353$$

$$T_{(2)} \text{ szinten: } K^{(A)} = 55\,837\,688 \quad K^{(B)} = 50\,865\,321$$

Gyorsítsuk meg a folyamatot „katalizátorral”: növeljük a műszakszámot és ennek megfelelően 20%-kal a munkabért, egyidejűleg az iparosított változatnál 20%-kal csökkentjük (a jobb állóeszközkihasználás következtében) a szerkezetek költségét. Tétélezzük fel, hogy a gyorsítás következtében 40%-kal rövidül a megvalósítási időtartam, tehát a hagyományos változatnál $\nu = 420$, az iparosítottnál $\nu = 180$ lesz.

Ekkor

$$T_{(1)} \text{ szinten: } \quad * \quad K^{(A)} = 32\,725\,974, \quad K^{(B)} = 34\,320\,817,$$

$$T_{(2)} \text{ szinten: } \quad K^{(A)} = 58\,444\,415 \quad K^{(B)} = 42\,353\,161$$

Mint látható a gyorsítás mindkét szinten (A)-nál növelte, (B)-nél csökkentette az összráfordítás értékét. Az is figyelemre méltó, hogy a gyorsítás eredményeként már $T_{(1)}$ szinten jelentősen csökken az (A) és (B) változat ráfordításainak különbsége; $T_{(2)}$ szinten pedig a (B) változat kiugróan előnyössé válik.

A példából az is kitűnik, hogy az összetársadalmi hatékonyság növekedésével együtt — tehát a fejlettebb technológia befogadására alkalmas állapotban — a legjobb technológiai változat kiválasztásakor is nőtt az azonos használati érték ráfordítása kb. 30%-kal. Az ok lényegében véve az élőmunka értékének indokolt növekedésében keresendő.

Ez a példa kizárólag demonstrációs célt szolgál — azonban igen fontos következtetések levonására nyújt kiindulási alapot.

Az egyik levonható fontos következtetés, hogy a korszerű, iparosított építési módok alkalmazása során felhasználásra kerülő anyagok és szerkezetek egységnyi tömegének értéke jelentősen megnövekszik a hagyományos építési módokban alkalmazott anyagokéhoz képest. Ez törvényszerű kísérő jelensége az iparosításnak, hiszen a szóban forgó anyagok az anyagi termelés különféle ágaiban több-kevesebb előzetes megmunkálási fázison mennek át, ezt követően kerülnek az építőiparba. E megmunkálások nyomán azonban a felhasználási célnak megfelelő fajlagos használati értékük is nő és értelemszerűen az épület rendeltetési egységére jutó fajlagos épületsúly is számottevően — esetenként a negyedére — csökken. (Egy kétszobás lakás téglapépületben 90—120 tonna, panelos épületekben 70—72 tonna; ugyanakkora alapterületű könnyűszerkezetes épületrész pedig csak 10—13 tonna).

A másik, nem lényegtelen levonható következtetés az, hogy a magas színvonalúan iparosított építési módok alkalmazása esetében nagyobb arányban

számolhatunk kevésbé kvalifikált, betanított munkásokkal, mint a hagyományos építési módok esetében. A műveletek ugyanis egyszerűbbek, megtanulásuk, begyakorlásuk rövidebb idő alatt elérhető, mint a hagyományos építésnél.

A példa alapján levonható az a következtetés is, miszerint a hagyományos és az iparosított építési módok fajlagos élőmunkaszükségletének erős eltérése miatt a reálisnak ítélt gyorsítás anyagi kihatása a kétféle építési módnál eltérő módon jelentkezik. A számottevően iparosított építési módok alkalmazása esetében a jelentős (példánk esetében 20%-os) bértöbblettel elért átfutási idő csökkentés (ami az adott példa esetében igen nagy arányú, hiszen 40%-os csökkenést számoltunk) sem növeli a használati érték létrehozásához szükséges összráfordítást. Ugyanilyen arányú átfutási idő csökkentés eléréséhez hagyományos technológia alkalmazása esetében az összráfordítási költségek kb. 4%-kal növekednek.

Világos tehát, hogy alacsony technológiai színvonalú építési módok alkalmazása esetében csak jelentős népgazdasági többletráfordítással lehet eredményesen csökkenteni az építkezések kivitelezésének időtartamát. Ez nyilvánvalóan csak olyan esetekben lehet indokolt, amelyekben a ráfordítás-többlet a korábbi átadással elérhető más termelési cél előnyeit teremti meg.

Vizsgáljuk meg az (I) jelű egyenleteket más fogalmazásban, és pedig úgy, hogy a termékész előállításához szükséges erőforrásigényt az annak előállításához szükséges összetársadalmi munkaráfordítással fejezzük ki. Elméleti megközelítésről lévén szó, mindenhol $\eta = 1$ értékkel számolunk. Az erőforrásigény értékét pedig a

$$T = \frac{\text{előállított erőforrás}}{\text{társadalmi munkaóra ráfordítás}}$$

hatékonysági tényezővel számoljuk. Ennek megfelelően az (I') egyenlet így alakul át:

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_{ji}}{T_{ji}} = b \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{I}'')$$

A (I'') egyenlet különféle technológiai megoldások esetén más-más erőforráskombinációval adja meg azt a használati értéket, amelyben b_i társadalmi munka testesül meg. Két lehetséges kombináció ráfordításainak változása a T -ktől függően b -t növeli, vagy csökkenti (vagy értékét változatlanul hagyja):

$$\sum_{j=1}^n \frac{\Delta a_{ji}}{T_{ji}} = \Delta b_i \leq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{III})$$

A Δb_i értékét a technológiai váltás T_{ji} -ktől (azaz a társadalmi termelés egyes erőforrásokra adott hatékonyságától) függő *entrópiánövekménynek* nevezhetjük. A társadalmi termelés hatékonysága (termodinamikai hasonlattal élve: *a társadalmi termelés „hőfoka”*) időben változik és egy-egy erőforrásra eltérő,

de adott időpontban értéke meghatározott, illetve meghatározható: adottnak tekintendő. Normális fejlődési körülmények között az élőmunkára vonatkozóan folyamatosan csökken (hiszen az újraelőállítás ráfordításai állandóan nőnek), a holt munkára vonatkozóan folyamatosan növekszik. Mindenesetre igaz azonban az, hogy a T_{ji} -k rendszere, momentán értéke szabja meg azt, hogy valamilyen technológiai váltás társadalmi befogadókészsége létrejött-e, avagy sem. *Ha az entrópiánövekmény nullánál nem nagyobb és a technológiai váltás az építési folyamat időtartamát rövidíti, akkor a váltás a társadalom részére feltétlenül előnyös.*

Lehetséges, hogy a technológiai váltás a folyamat egyes részeiben pozitív entrópiánövekménnyel jár, de mert az egész folyamatot gyorsítja, mégis a társadalom részére előnyös. Kézenfekvő tehát, hogy a technológiai váltás megbízható megítélése csak a (II) és (III) egyenletek rendszerének együttes felhasználásával lehetséges.

A (III) egyenletből kitűnik az is, hogy a technológia váltás elemzésében sorsdöntő jelentőségű a társadalmi termelés mindenkori hatékonyságának (T_{ji}) ismerete. Ismerethiánya az építőipar évi kb. 130 milliárd forintos bruttó termelését figyelembe véve sok milliárdos kár forrásává válhat! Könnyen belátható, hogy az építőipari technológiai váltás indokolatlan fékezése vagy túl korai gyorsítása egyaránt károsítja az össztársadalmi érdekeket. Nem lehet kétségbe vonni, hogy (III) egyenlettel nagyon leegyszerűsítve vázolt probléma alapos és számszerű *társadalmi-gazdasági elemzése halaszthatatlan feladattá vált.*

Befejezésül még két — egymáshoz közelálló — gondolatsort kívánok vázolni. Ezek közül az egyik a rendszerelvű építés hazai bevezetéséhez és széles körű elterjesztéséhez, mint építésügyi ágazati iparpolitikánk hosszú távra szóló, politikailag is megerősített, legkiemelkedőbb célkitűzéséhez, legfontosabb feladatunkhoz kapcsolódik. A másik gondolatsor pedig ahhoz, hogy az építőipar fejlesztésének problémái és feladatai ma már nem közelíthetők meg, — és főként nem oldhatók meg — ha mi ebben csak a műszaki tudományos ismeretekre támaszkodunk.

Iparpolitikát kialakítani, következetes érvényesítését szolgáló intézkedéseket kidolgozni, végrehajtásukat szervezni, ellenőrizni, minősíteni, a végrehajtás társadalmi-gazdasági hatását helyesen értékelni ma már csakis *a műszaki és társadalomtudományok* együttes, összehangolt fejlesztésével és alkalmazásával lehet.

A rendszerelvű építés fokozatos megvalósításának elkerülhetetlenségéről az építéssiparosítás alkalmazásában eddig szerzett tapasztalataink győztek meg bennünket. Ha mi egyszer helyt adtunk a gépeknek az építőipari termelésben és ennek nyomán nagysorozatú tömeggyártással dolgozó, magas színvonalúan gépesített, telepített ipari üzemekbe helyeztük át az épületek, építmények alkotórészeinek, berendezési és felszerelési tárgyainak előállítását, akkor tudomásul kell vennünk azt is, hogy az ilyen módon térben, szervezetileg

megosztott folyamatok továbbra is egy komplex rendszert képeznek, és ehhez kell igazodnunk a beruházások előkészítésében, műszaki tervezésében, a gyártás, szállítás, szerelés, befejezés részfolyamatainak összehangolásában. A rendszerelvű építés megvalósítása megköveteli, hogy szemléletünket, gondolkodásmódunkat már a műszaki tervezési folyamatban ehhez igazodóan alakítsuk át. A katalógusba foglalt rendszerkomponensek nagysorozatú tömeggyártásán alapuló rendszerelvű építés csak akkor lesz széles körben megvalósítható, ha a társadalom építési igényeinek megformálását szolgáló építéstervezési folyamatban tudomásul vesszük, milyen komponensekkel számolhatunk az épületek, építmények létrehozásában.

A rendszerelvű építésben a rendszerkomponensek választéka véges, de nem a kielégítendő építési igények jellegétől függően került kialakításra. A komponensek választék szerinti véges, de ismételt felhasználás tekintetében nem korlátos halmazából építészeinknek úgy kell funkcióképes, magas használati értékszínvonalú épületeket megtervezniük, hogy munkájuk eredménye pozitív hatást gyakoroljon a rendszerkomponensek nagyüzemi gyártásában a sorozatnagyság állandó növekedésére.

Az épületek létrehozásában viszont komplex folyamatrendszerként kell kezelni a szervezeten és térben megosztott gyártást, szállítást, szerelést és épületbefejezést, mert a folyamatösszehangolás időbeli zavarai a magas színvonalúan iparosított építésben összehasonlíthatatlanul hátrányosabb anyagi következményekkel járnak, mint a hagyományos építésben.

Az építőipar fejlődésében 20 éve elkezdődött és még ma is tartó gyökeres technológiai, technikai átalakulás folyamata kikerülhetetlen hatást gyakorol a műszaki szabályozás, a szakemberképzés, a szervezés- és szervezetfejlesztés folyamatára, de ezen túlmenően az egész társadalomra — mint az épületek, építmények használóira — is. Az építésben lejátszódó átalakulás új problémák sorát veti fel a települések alakításában, a településhálózat fejlesztésében. Elég e tekintetben arra gondolnunk, hogy az építőipari műszaki fejlesztés egy sajátos másodlagos hatása a lakossági vízfogyasztás — s ezzel együtt a szennyvíztermelés — rohamos növekedése. A víztisztításra irányuló követelmények új módon vetik fel a települések megengedhető legkisebb méretével, illetve az egész településhálózat fejlesztésével kapcsolatos elgondolásokat is.

Az építőipar és háttérágazatai közötti gazdasági kapcsolatrendszer bővülése, mint az építésiparosítás törvényszerű következménye; az élő- és holtmunka ráfordítási arányainak lényeges megváltozása; az átfutási idő érték-meghatározó szerepének fokozott érvényesülése; a lakások, lakóépületek, lakóterületek életmódot formáló hatása; stb. mind olyan problémákat vetnek fel, amelyek csakis a műszaki és társadalomtudományok művelőinek közös erőfeszítéseivel oldhatók meg.

Ezért tartom nagy jelentőségűnek, hogy e két tudományág együttes művelésére az eddigieknél lényegesen nagyobb súlyt helyezzünk. Társadal-

munk, gazdaságunk, s benne építőiparunk fejlesztésében jelentős eredményeket csak ezáltal tudunk elérni.

Ezt szem előtt tartva, jelen előadásban szerző maga is megkísérelte az építőipar fejlesztésének feladatait, problémáit olyan megvilágításban vizsgálni, hogy érzékelhetővé váljék iparpolitikánkban a műszaki és társadalmi-gazdasági problémák szerves kapcsolódása, és a megoldásukra irányuló erőfeszítésünkben az interdiszciplináris tudományok alkalmazásának igénye.

Building Industrialization — System Theory — In analysing the last twenty years of the industrialization of the Hungarian building construction, the main socio-economic conditions and consequences of the conscious change in technology are presented. It is pointed out that without a thorough knowledge of the specific value of the resources having significance in the process of building construction the minimum of the total cost cannot be determined. The total cost of the actual value of utilization is a state function wherein the independent variables are the potential combinations of the resources and the efficiencies of resources-reproductions. The latter are in close connection with the efficiency characterizing the standard of the social production and always delimit the resources combination which results in minimum cost.

Bauindustrialisierung — Systemtheorie — Durch die Analysierung der Industrialisierung des Bauwesens in Ungarn in den letzten zwanzig Jahren, werden die sozial-ökonomischen Bedingungen und Konsequenzen des bewußten Wechsels in der Technologie vorgeführt. Es wird bewiesen, daß ohne eine gründliche Kenntnis des spezifischen Wertes der im Bauprozeß interessanten Kraftquellen das Minimum des Gesamtaufwands nicht ermittelt werden kann. Der Gesamtaufwand des effektiven Gebrauchswertes ist eine Zustandsfunktion, worin die unabhängigen Veränderlichen die möglichen Kraftquellenkombinationen und die Effektivität der Kraftquellenreproduktionen sind. Die letztere ist in engem Zusammenhang mit der gesellschaftlicher Produktionsniveau kennzeichnenden Effektivität und umgrenzt in jedem Fall die Aufwandsminimum ergebende Kraftquellenkombination.

A MÉRETEZÉSI TERHELÉS MEGHATÁROZÁSA A HAJTÓMŰELEMENEK KONSTRUKCIÓJÁNAK ÉS GYÁRTÁSTECHNOLÓGIÁJÁNAK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL*

K. I. ZABLONSKIJ**

A géptervezés mai célja: nagy teljesítmény tömörítése kis gépegységben, kis fajlagos anyagfelhasználással. Minél pontosabb a hajtómű méretezése és a konstrukciós paraméterek kiválasztása, annál jobban közelíti meg a méretezési terhelés a tényleges terhelést. Olyan eljárást kell találni, amelyik már a mechanikus hajtóművek méretezése során figyelembe veszi a konstrukciós sajátosságokat és útmutatást ad a konstrukció tökéletesítésére. A méretezési terhelést befolyásolják a gyártási pontatlanságok, a hajtóműelemek alakváltozása, a hajtómű üzemeltetési körülményei. Az érintkezési vonalmenti terheléseloszlás egyenlőtlenységének különleges hatása van a méretezési terhelésre.

A mechanikus hajtóművek teherbíróképességét a valóságos működőképesség határozza meg, vagyis a meghatározott időtartam alatt meghatározott változó üzemmódban átadott terhelés. Minél pontosabb a hajtómű méretezése és a konstrukciós paraméterek kiválasztása, annál pontosabban közelíti meg a méretezési teherbírás a ténylegeset. A pontatlan gyártástechnológia és a méretezési gyakorlat hiányosságai miatt az adott teherbíróképesség elérésére nagyobb biztonsági tényezőket alkalmaznak, ennek következtében a méretezési teher lényegesen nagyobb lett a véglegesnél. Feleslegesen nőtt az anyagfelhasználás, nőtt a tömeg, és előfordult, hogy a hajtómű élettartama nagyobb lett a szükségesnél.

A mai géptervezők kiemelt törekvése az, hogy nagy teljesítményt tömörítsenek nagy sebességek mellett egyetlen gépegységbe, kis fajlagos anyagfelhasználással. A fordulatszám-csökkentő hajtóművek is ide tartoznak: céljuk kis fajlagos anyagfelhasználással biztosítani a hajtómű adott teherbíróképességét. Ez a feladat konstrukciós és technológiai eljárások egész sorával oldható meg, nevezetesen új szerkezeti anyagok alkalmazásával, korszerűbb gyártástechnológia bevezetésével és ezeknek az irányzatoknak együttes megnyilvánulásaként: a legújabb technológia és a korszerű alkatrész kialakítás leleményes kombinációjával. Ezen kívül, a konstrukciók tökéletesítésének egyik korszerű irányzata az új méretezési eljárások kialakítása, amelyekkel elérhető az, hogy a méretezési teher a lehető legnagyobb pontossággal közelítse meg a valóságos állapotokat.

* Az MTA ülésén 1978. április 6.-án elhangzott előadás.

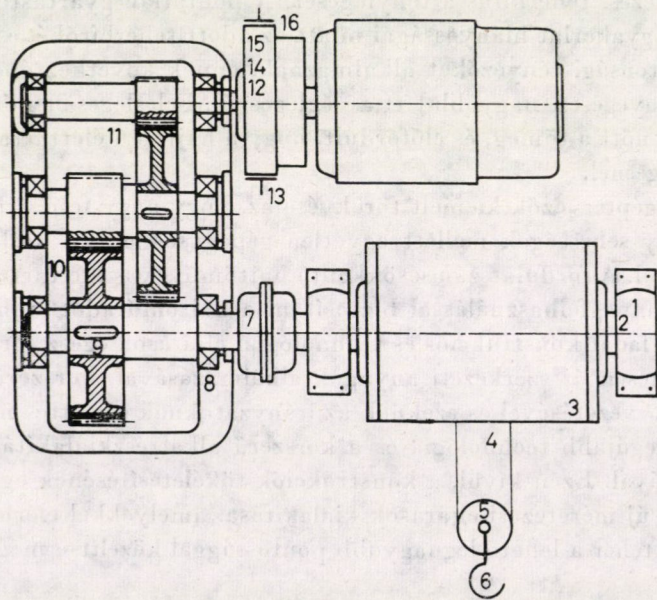
** Zablonszkij Konstantin Ivanovics

A mechanikus hajtóművek tervezésének területén a feladat így fogalmazható meg: olyan méretezési eljárást kellene találni, amelyik a méretezés során figyelembe venné a konstrukció sajátosságait, és útmutatást adna a konstrukciós munka irányítására abból a célból, hogy a maximális teljesítményátadás minimális anyagfelhasználással valósuljon meg. Az ilyen méretezési eljárás alkalmazása már a hajtómű tervezésekor lehetővé teszi, hogy a méretezési terhelés a későbbiekben közeledjék a valósághoz.

A méretezési teher a legfontosabb tényező, ami minden gép és hajtómű térfogatát és súlyerejét befolyásolja. A méretezési teherre ható tényezők mennyisége tág határok között változhatik, de a nagyszámú tényezők közül elkülöníthetők a fontosak, meghatározott sorrendben csoportosíthatók, és előállítható olyan általános méretezési képlet, amelyekben a tényezők mindegyikének meghatározott helye van.

Mielőtt rátérnénk a méretezési teher képletének meghatározására, áttekintjük az alkatrészeire ható terhek alapvető fajtáit. Az a teher, amelyik az üzem közben az alkatrészeire hat, a *működő teher*.

A *méretezési teher* olyan mennyiség, amelyik nemcsak a működő szervezetre ható külső tehertől függ, hanem attól is, hogy a méretezett alkatrész hol helyezkedik el a működő szervtől a motorig terjedő erő-láncban. Egy emelődaru kötéldob-hajtásának példáján (1. ábra) látható, hogy a horogra ugyan-



1. ábra. 1 csapágy, 2 tengely, 3 dob, 4 drótkötél, 5 csiga, 6 horog, 7 fogazott tengelykapcsoló, 8 csapágy, 9 reteszkötés, 10 egyenes fogazat, 11 ferde fogazat, 12 reteszkötés, 13 fék, 14 persely, 15 csap, 16 menet

akkora külső terhelésnél a horognál kezdődő, a csigasoron, drótkötélen, dobon, csapágyakon, tengelyen, fordulatszámcsökkentő reduktoron, tengelykapcsolókon át a villanymotorig húzódó összetett láncban, e szerkezeti egységek mindegyikében különböző teher hat, és minden egységben minden alkatrészre ugyancsak más-más a ható teher is. Így pl. a dob tengelyén lévő csapágyak típusától függően (gördülő vagy sikló) a méretezési terhet az határozza meg, hogy mekkora szöghibája van a tengelynek a csapágyakban. Attól függően, hogy hogyan rögzítjük a dobot a tengelyen, változik a méretezési teher e tengely méreteinek meghatározása során. Attól függően, hogy milyen a tengelykapcsoló kialakítása, változik a méretezési teher e kapcsoló elemein, így ha csapos tengelykapcsolóról van szó, akkor amint ismeretes, a csapok között akad egy, amelyik 20 . . . 50%-os túlterhelést visel.

Ha reduktorban lévő fogaskerekeket tekintjük a fogazat típusától függően — ugyanolyan bemenő érték mellett — a méretezési teher változik. Egyes fogazatú hajtóműben függ a gyártási pontosságtól, és egyidejűleg kapcsolódó fogpárok számától. Ferde fogazatú hajtóműben függ a fogferdeségi szögtől. Bármely hajtóműben függ a fogaskerekek kialakításától, a csapágyaktól, attól, hogy hol helyezkedik el a kerék a támaszok között, a tengelyek merevségétől és a hajtóműház gyártási pontosságától. A szerkezeti anyag mechanikai tulajdonságainak maximális kihasználása érdekében olyan apparátusra lenne szükség, ami lehetővé tenné a teher lehető legnagyobb pontossággal történő meghatározását.

A működő terheket a kapcsolódó alkatrészek megfelelő működő felületei fogják föl. Az érintkezés jellegétől függően a teher vagy érintkezési felület vagy érintkezési vonal mentén adódik át, egyenletesen vagy egyenlőtlenül. Minthogy a működő felület helyi teherbíróképességét mindenekelőtt az adott érintkezési zónában ható helyi terhelés értéke határozza meg, megkülönböztethető a fajlagos nyomás — az egységnyi érintkezési felületre eső teher és a fajlagos teher — az érintkezési vonal egységnyi hosszára jutó teher. A külső terhek változó jellege magával hozza a működő teher megfelelő jellegű változását. Elég egyszerű feladat egy tetszőleges névleges teher görbéjét a méretezett gép valamelyik alkatrészének működő tehergörbéjévé átalakítani.

Az alkatrészek méretei a méretezési terhek alapján határozhatók meg, amelyek nemcsak a működő terhek nagyságától, és változásának jellegétől függenek, hanem a méretezés módjától, a gép esetleges leállási körülményeitől, az erő-láncban a terhelésátadás jellegétől, a terhelésátadás „dinamikusságától”, a feltételezhető egyenlőtlen mozgásoktól, az illeszkedésekben lévő játékoktól, a működő geometriai felületek pontatlanságától és a mozgásba hozott tömegek nagyságától. Függenek attól, hogy milyen fokú az érintkezési felületeken átadódó működő teher eloszlásának egyenlőtlensége, hiszen egyenlőtlen eloszláskor helyi meghibásodások, néha törések is jelentkezhetnek. A méretezési teher ugyancsak függ az érintkező felületek kölcsönhatásának sajátos-

ságaitól (pl. illeszkedés vagy fogazat-kapcsolódás), néha az alkatrész rendelkezésétől és üzembentartásától.

Következésképpen, méretezési terhen azt a terhelést értjük, amit a működő teherből számítunk ki, változási jellegének és az összehangolt alkatrészek olyan kölcsönhatásainak figyelembe vételével, amik meghatározzák az alkatrészek formáját és méreteit, a vizsgált működőképességi kritériumoknak megfelelően. A működő teherről a méretezési teherre a méretezési teher együtt-hatójával térünk át. Előzetes számítások során méretezési teherként a névleges teher alapján előállított működő terhet használjuk.

Az esetek többségében, minthogy a teher értéke nem állandó, ill. az általa okozott feszültség változó, a méretezési terhet az egyenértékű teher alapján határozzák meg. Egyenértékű az a teher, amelyik a tervezés alatt álló alkatrész keresztmetszeteiben olyan állandó ciklusszámú és amplitúdójú feszültséget ébreszt, amivel helyettesíthető a valóságban ható változó működő teher, feltéve, hogy a teherbírás adott kritériumának vonatkozásában egyenértékűek. E teher értéke a működő teher alapján határozható meg, ami a névleges teher alapján állítható elő a K_L üzemi tényező segítségével, figyelembe véve ezzel a terhelések összefüggését a hatások ciklusszámait. A terhelés üzemi tényezője nagyságát tekintve függ a tönkremenetel formájától, e folyamat előrehaladásának sajátosságaitól.

Tekintettel arra, hogy az esetek többségében párhuzamos erő-láncokban a teher az érintkezési felületeken vagy az érintkezési vonalon egyenlőtlenül oszlik el, a veszélyes érték (az a legnagyobb teher, amelyik az adott formájú tönkremenetelt okozhatja) a tehereloszlás egyenlőtlenégi tényezőjének segítségével határozható meg:

$$K_H = \frac{Q_{\max}}{Q_m} = \frac{Q_m + Q_H}{Q_m}; \quad \text{vagy} \quad K_H = \frac{q_{\max}}{q_m} = \frac{q_m + q_H}{q_m},$$

ahol Q_{\max} , q_{\max} a megfelelő veszélyes értékek; Q_m , q_m az egyenletes tehereloszlás feltételezésével kapott értékek; Q_H , q_H az egyenlőtlen tehereloszlás következtében a koncentráció zónájában megnövelt teherértékek.

A méretezési teher meghatározásakor figyelembe kell venni a ható teher dinamikus jellegét, amit a külső teher bevezetésének jellege és az erő-lánc konstrukciós-technológiai sajátosságai határoznak meg. Ez utóbbiak előfordulása mindenekelőtt a kinematikai párokban lévő játékokkal kapcsolatos, ami oda vezet, hogy az erő-lánc tömegei nem egyszerre kezdenek mozogni, következésképp az érintkező alkatrészek egymással ütköznek.

Ez a jelenség különösen fontos olyan alkatrészek méretezésekor, amelyek felületei periodikusan érintkeznek. E dinamikus összetevő nagysága függ a gyártási pontosságtól, a merevségi jellemzőktől, a sebességektől és a mozgásba hozott tömegek nagyságától. Ennek figyelembe vétele a dinamikus teher K_d tényezőjével történik.

A méretezési teher értékének a működő tehertől való eltérését — a fentiek kivül — a gép rendeltetése, üzemi feltételei, a kölcsönható érintkező felületek között a terhelésátadás módja és sajátosságai idézik elő, amit a K_e üzemi tényezővel veszünk figyelembe. A konkrét esetekben ennek az együtthatónak az értékét a mechanikus működési elve, a hajtás módja, és a végrehajtó szervekkel való kapcsolat határozza meg. Hajtóműre az üzemi feltételek tényezőjét alapvetően a hajtómű típusa határozza meg, és attól függ, milyen módon adódik át a teher a hajtó és hajtott elemek között. Nevezetesen, surlódó hajtóműben, ahol a hajtott elem forgása surlódó erő hatására jön létre, a méretezési teher nem a kerületi erő, hanem a görgőket egymáshoz szorító erő. Ennek az erőnek az értéke a görgők közötti tapadás tényezőjétől függ. Ily módon az üzemi feltételek tényezőjének figyelembe kell vennie a tapadás értékét. Hasonló teherátadási feltételek vannak a szíjhajtásban is.

Ennek megfelelően, a méretezési teher meghatározására szolgáló képlet elvi felépítése a következő alakú:

$$Q_B = QK_L K_\beta K_v K_e .$$

Az alkatrész — az adott érintkezési zónában ható helyi terhelés által meghatározott — helyi teherbírásának értékelésénél a méretezési összefüggésben a fajlagos méretezési teher szerepel:

$$q_B = qK_L K_\beta K_v K_e .$$

Ezek az összefüggések egy-egy méretezési esetre alkalmazva megváltoznak attól függően, hogy a teherbíróképesség melyik kritériumát vizsgáljuk. A méretezendő alkatrészre ható azonos működő terhelésnél az alkatrész különböző teherbírási kritériumainak vizsgálata során a méretezési teher értéke más és más lehet. A felsoroltak közül néhány különleges esetben az együtthatók egységnyinek vehetők, más esetekben az — elnevezésüket tekintve ugyanolyan — tényezők különbözőnek veendőek különböző teherbíróképességek vizsgálatakor az adott tényező hatásának megfelelően, néhány esetben szükség lehet a képlet kibővítésére és új együttható bevezetésére. A méretezés pontossága attól függ, hogy mennyire megbízhatóak a gép üzemeltetési adatainak alapján elméletileg és kísérletileg meghatározott együtthatók.

Azokban az esetekben, amelyekben a külső teher többkomponensű, és minden komponens a saját, rész jellemző törvényei szerint változik, meghatározandó a terhelés méretezési üzemmódja, amelyik a legnagyobb valószínűséggel lép föl, néha pedig az összetevők legkedvezőtlenebb kombinációjaként jelenik meg. Pl. egy gépben méretezési terhelési üzemmódjainak osztályozása azokon az alapvető méretezési eseteken nyugszik, amelyekre ilyen vagy olyan terhelési esetek számbavételét kötöttük ki. A statikus szilárdságra való mére-

tezéskor olyan esetleges túlterheléseket tekintünk, amelyeket különösen nehéz üzemeltetési feltételek okoznak, abból a célból, hogy tájékozódjunk a rövid ideig tartó maximális feszültségekről. A kifáradásra való méretezéskor az adott gépkocsira jellemző különböző üzemeltetési körülményeknél fellépő terheléseket tekintjük, az indítás, gyorsítás és fékezés periódusaiban fellépő dinamikus jelenségek figyelembe vételével. Az érintkezési feszültségre és kopásra való méretezéskor közepes (pl. számtani közép) terheket tekintünk a jellegzetes üzemi feltételek mellett.

A méretezési képlet ajánlott szerkezete lehetővé teszi, hogy a befolyásoló tényezők meghatározott csoportját jellemző együtthatók mindegyikét — az adathalmazódás mértékétől függően — kisebb vagy nagyobb pontossággal határozzuk meg. Ebben van a méretezési terhelés ilyen meghatározásának egyik előnye, hogy a méretezés során figyelembe vett tényezők számának meghatározott lehetőségek szerinti előállításával a módszer állandóan fejleszthető és pontosabbá tehető.

A méretezési teher meghatározásának fenti megközelítése a hajtóművekben igen fontos, minthogy a fogaskerekes, csiga, globoid és más fogaskerékkapcsolódás hajtóművek meghibásodása több különböző okból következhetik be. Az ismeretek közül a legjellemzőbbek: a fogak törése, kipattogzása, kopása, a működő felületek berágódása; ezek a tönkremeneteli formák a fogfelület különböző zónáiban következhetnek be, következésképpen különböző terhelésértékeknél. Ezért az említett tönkremeneteli lehetőségekkel terhelt fogaskerék-hajtómű teherbíróképességének megbízható számításához ismerni kell a fog minden egységnyi felületére jutó fajlagos terhet.

A méretezési teher nagyságát meghatározó nagyszámú tényezőt három alapvető csoportba lehet besorolni. Az első a gyártási pontatlanságok csoportja, ami minden mechanikus hajtóműre jellemző, és ami a gyártástechnológia függvényében változik. A másik csoport a hajtóműelemek terhelés alatti deformációja. Az okok harmadik csoportja pedig: az üzemmód, a hajtómű terhelési körülményei. E három csoport minden tényezője meghatározott mértékben jelenik meg a méretezési teher együtthatóiban. Mégis az együtthatókra gyakorolt hatásának mértéke különböző, legjobban az érintkezési vonal tehereloszlás egyenlőtlenségének tényezőjében tükröződik.

Ez a tényező a maga nemében a legfontosabb, meghatározója az összes többi tényezőnek. Ismeretesek a K_v és K_e tényezők meghatározásának módjai. Ezek mindegyike olyan összefüggések alapján határozható meg, amelyeket egymástól elkülönítve kaptunk. Ugyanakkor ezeket a tényezőket egymással való kölcsönhatásukban kell vizsgálni. Így pl. a dinamikus terhelés együtthatója annál kisebb, minél nagyobb az érintkezési vonal mentén a tehereloszlás egyenlőtlensége. A jelenség lényege: minél nagyobb a teherkoncentráció, annál nagyobb lesz a fogak deformációja a teherkoncentráció tartományában, és ilyen körülmények között a fogak kapcsolódása még az egyenes fogazatú

hajtóműben is a ferde fogazatú hajtóműéhez hasonlít, minthogy az egyenes fogak simábban lépnek kapcsolódásba. A bolygókerekek közötti egyenlőtlen tehereloszlás nagy mértékben függ a kapcsolódásban lévő teherkoncentrációtól. Minél nagyobb az érintkezési vonal mentén a teherkoncentráció, annál kisebb lesz a bolygóművek közötti tehereloszlás egyenlőtlenégi tényezőjének értéke. Ha figyelmen kívül hagyjuk ezeket a kölcsönös összefüggéseket, akkor a méretezési teher értéke túl nagy lesz annak következtében, hogy mindkét tényező értékét eltúlozzuk.

Az említettekkel kapcsolatban fontos, hogy ismert legyen az érintkezésben lévő tehereloszlás meghatározásának olyan módszere, amelyik lehetővé tenné a tényezők maximális mennyiségének meghatározását és hatásuk pontosítását a megfelelő lehetőségek mértékében. Ezen kívül az érintkezési vonal vagy érintkezési felület menti tehereloszlás kérdése nemcsak a fogaskerék-hajtóművekre vonatkozóan érdekes, hanem a bordás és reteszes kötésekre, a surlódó hajtásokra, a lánchajtásokra, a különböző csapágyakra és más gépelemekre is. Ha van univerzális módszer az érintkezési vonal menti tehereloszlás számítására, akkor általános módszerek is kidolgozhatók a hajtóművekben lévő kapcsolódások minden fajtájának szilárdsági méretezésére.

Az ajánlott módszer a következőkben foglalható össze. Ha pl. az egyenes fogazatú hajtóműben a kapcsolódó fogpárok közötti érintkezést bizonyos n számú pontban állítjuk elő, amelyek az érintkezési vonalon helyezkednek el, és egymással szomszédosak, akkor a teherátadás feltételét abból kiindulva lehet megfogalmazni, hogy az érintkezési vonal teljes hosszában a pontok között lévő tartók mentén az elmozdulások összegének azonosnak kell lennie, amely tartókat T külső és X_j belső erők terhelik. Egyenes fogazatú hajtóműre ezt a feltételt meghatározó egyenletet a következő alakban írhatjuk:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} X_j v_{ij} + \Delta i + f_i + t_i - v_0 - v_{iT} = 0,$$

ahol v_{ij} az érintkezés i pontjának elmozdulása a j pontra ható egységnyi erő hatására; v_0 az elmozdulás az érintkezési vonal ama szakaszán, ahol a nyomaték zérus; v_{iT} elmozdulás az i -edik szakaszon a T külső forgató nyomaték hatására.

Ebben az egyenletben nemcsak a deformációk, de más tényezők is szerepelnek, amelyeket a fentiekben már említettünk. Ezek a tényezők jelentik meg azokat a Δi feltételezett elmozdulásokat, amelyeket pl. a fogak bejáratása okoz, amit a hajtómű üzemeltetési jellemzői határoznak meg, vagy az f_i gyártási pontatlanságok, amelyeket a fogak közötti hézagok formájában vehetünk figyelembe, vagy a t_i hőmérséklet-változás okozta jelenségek, amelyeket szintén feltételezett elmozdulások formájában fogalmaztunk meg. Hasonló módon lehet egyenletbe foglalni sok más tényezőt is.

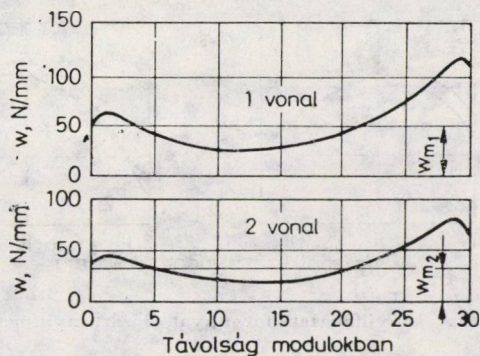
Ebben az egyenletben minden érték a maga nemében úgy állítható elő, mint több összetevő összege. Pl. a fog deformációja a hajlító, érintkezési és nyíró elmozdulásokból adódik össze. A tengelyek deformációjával kapcsolatos elmozdulások a hajlítási, nyírási, nyomási deformációk eredőjeként, a tengely elcsavarodásával és lehajlásával, a koszorú nyírásával és elcsavarodásával, a kerékagy hajlításával és elcsavarodásával, a tárcsák hajlításával és elcsavarodásával, a tengely és kerék illeszkedési helyének deformációjával állítható elő. A csapágy-deformációk által okozott elmozdulások a csapágyak saját deformációiból, azoknak az elemeknek a deformációiból, amelyekben a csapágyak fekszenek, a ház és az alap deformációiból tevődnek össze.

Ha a vizsgált hajtómű tengelyére más elemekből vagy hajtóműtől származó terhelések hatnak, akkor ezek is figyelembe vehetők az egyenlet-rendszer minden sorában, megfelelő komponensek formájában. Ez az elmozdulás származhatik pótlólagos tömegektől, a tengelykapcsolóban ható kiegyenlítőerőktől, kiegyensúlyozatlan erőktől stb. A gyártási pontatlanság miatt adódó hibát meghatározza a profilhiba, a ferde fogazatú kerekek alaposztásának és axiális osztásának hibája, egyenes fogazatú kerekek fogirány-hibája vagy ferde fogazatú kerekek érintkezési vonalának hibája, az érintkezési vonal nem egyenes volta, a tengelyek szöghibája, ill. párhuzamossági hibája, a szerelés pontatlansága. A fogaskerekek, a ház, a tengelyek deformációját, a kenési feltételeket, a kenőanyag viszkozitását meghatározó hőjelenségeket szintén a feltételezett elmozdulásokkal lehet figyelembe venni.

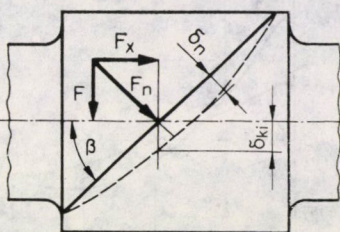
Az említett módszert felhasználva és az egyenletekben szereplő összetevőket elméleti és kísérleti úton meghatározva, a fogaskerék-hajtóművek vizsgálatával sok hasznos információt nyerhetünk, amelyek fényt vetnek e konstrukciónak — a fogaskerékkapcsolódásokban fellépő — terheléseloszlásra gyakorolt hatására.

E módszerrel először sikerült bemutatni, hogy egyenes fogazat esetén a terheléskoncentráció nem a fogszélen, a homlokfelületen lép föl, hanem attól 1—2 modulnyi távolságra, hogy a fogazat pontosságától függően a teher különbözőképpen oszlik meg az egyidejűleg kapcsolódó két fogpár között, és hogy minden érintkezési vonalnak megvan a saját koncentrációja, különböző teher-koncentrációs tényezőkkel (2. ábra).

A fogak típusának lényeges befolyása van a tehereloszlásra. A ferde és nyílfogazatú kerekek fogainak β ferdeségi szögéből adódóan a hajtás merevsége a tengelyekre merőleges irányban kisebb, a fogaknak ebben az irányban meglévő nagyobb hajlékonysága miatt. Ugyanakkora normálmodulnál — az egyenes fogazattal összehasonlítva — a ferde fogazat merevsége $\cos^2\beta$ mértékben kisebb (3. ábra). Ennek következtében a ferde fogazatú hajtóműben az érintkezési vonal mentén a tehereloszlás koncentrációja nem olyan nagy, mint az egyenes fogazatban, amint ez korábban, e tényező figyelembe vétele nélkül látszott.



2. ábra

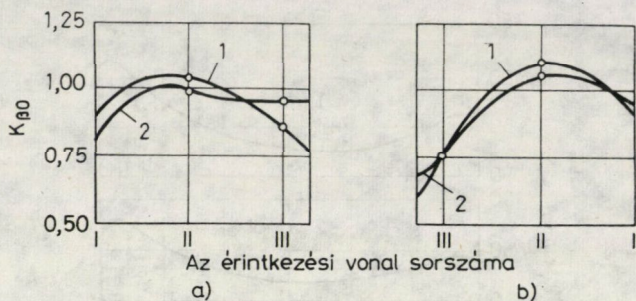


3. ábra

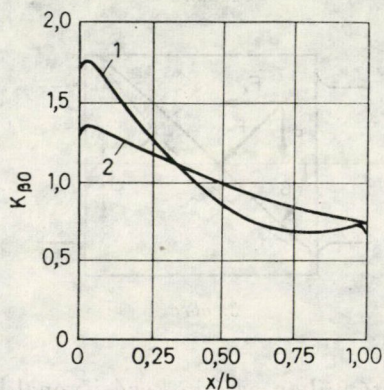
Ferde fogazatú hajtóműben az érintkezési vonal hossza nem nő egyenes arányban a kerék szélességének növekedésével, amint ez az egyenes fogazatú hajtóműben van. Az érintkezési vonal hossza itt a fogferdeségi szögtől függ: minél nagyobb a fogferdeségi szög, annál kisebb az érintkezési vonal hossza. Ennek eredményeként még nagyon széles fogaskereknél sem nő az elcsavarodás a szélesség növekedésének arányában.

Igen világosan látszanak a felsorolt sajátosságok a nyílfogazatú hajtóműben. Annak eredményeként, hogy a fogferdeségi szög $\beta = 30^\circ$, az érintkezési vonalak nem hosszúak, a kerekek szimmetrikusan helyezkednek el a támaszok között, a csavaró nyomaték megoszlik a két fél-kerék között, a teherkoncentráció még nagyon széles kerekeknél is lényegesen kisebb, mint a ferde fogazatú hajtóműben. Ezen kívül a teherkoncentráció függ a nyílfogazatú kerekek kialakításától, zárt fogazat esetén a teherkoncentráció a szabad homlokfelületen kisebb, mint azokban a hajtóművekben, ahol a fél-kerekek között horony van (4. ábra).

Az említett módszer lehetővé teszi, hogy teljes mértékben figyelembe vegyük a tengely konstrukciójának, valamint a kerék és tengely kötésének minden sajátosságát. Először bemutatjuk azt, hogy a teherkoncentráció a tengelyre szerelt keréknél kisebb, mint a tengelykeres hajtóművekben (5. ábra). Erről meggyőződhetünk, hiszen az első esetben a csavaró nyomaték a



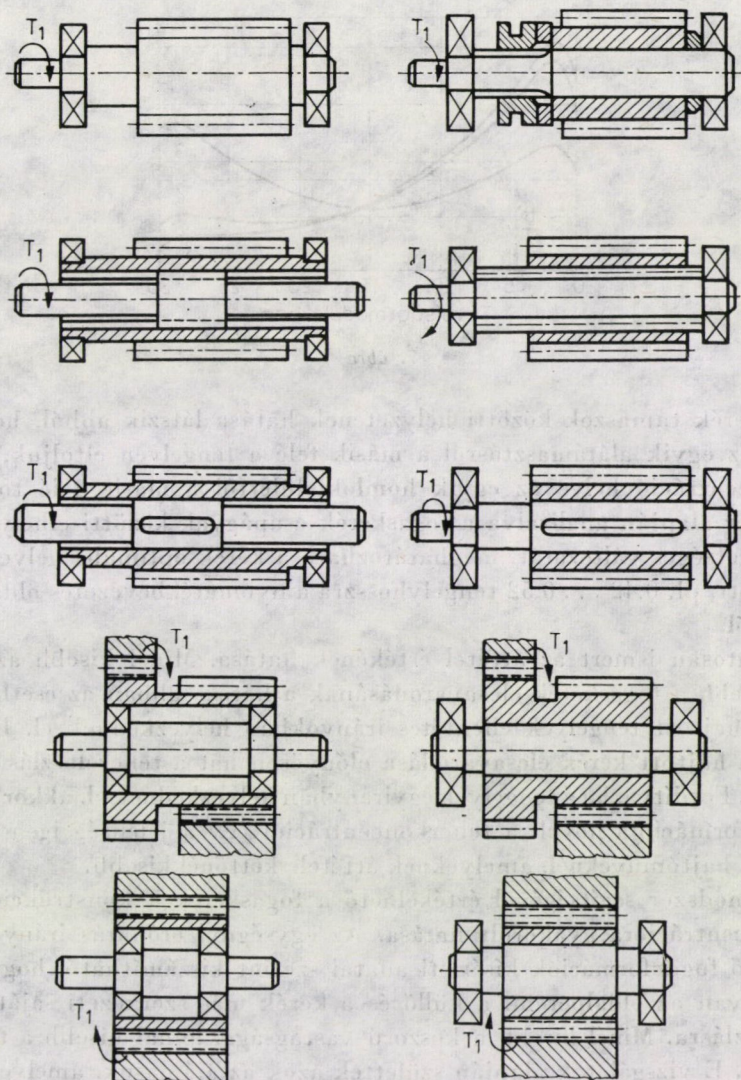
4. ábra. 1 nyílfogazat horonnyal, 2 zárt nyílfogazat



5. ábra. 1 tengelyes kerék, 2 szerelt fogaskerék

tengelytől a kerékre egész érintkezési felületük mentén adódik át, a kerék szélességével arányosan, ugyanakkor a második esetben a nyomaték a kerék homlokfelületén adódik át. Figyelembe véve, hogy a fogaskerek hajtásának igen sok módja van (6. ábra), ez a módszer nagyon hasznos lehet az optimális kerék hajtás kiválasztásában.

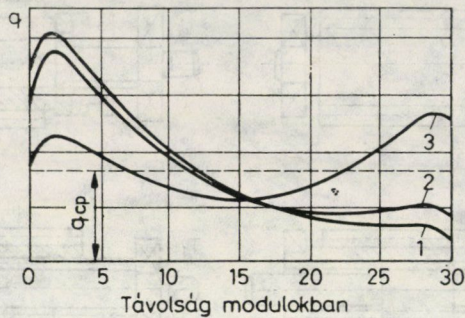
E módszer segítségével könnyen értékelhető, hogy milyen súllyal hatnak az egyenlőtlen tehereloszlásra a gépelemek deformációi, a fogazatok, a gyártási pontatlanságok és a csapágydeformációk. Sikeresült minőségi és mennyiségi képet alkotni arról, hogy milyen hatással van a csapágyak konstrukciója és a csapágyazások rendszere a teherkoncentrációra. Bizonyos esetekben görgőcsapágyokról golyóscsapágyakra való áttérés a teherkoncentráció értékének megváltozásához, és a teherkoncentráció zónájának az egyik homlokfelülettől a másik felé történő elmozdulásához vezet (7. ábra). Ily módon a módszer lehetővé teszi, hogy a hajtómű tervezése során olyan csapágyazási rendszereket válasszunk, amelyek olyan fogaskerékterhelést adnak, ami kisebb hajtómű-térfogatot eredményez.



6. ábra

Fontos tény — ami megoldhatóvá teszi a dinamikus terhelések értékelését — az a lehetőség, hogy ezzel a módszerrel alkalom nyílt a dinamikus teher és a teherkoncentráció közötti kapcsolat tisztázására. A számításokból látszik, hogy minél nagyobb a teherkoncentráció a fogazat hossza mentén, annál nagyobb a fogak hajlékonysága a teherkoncentráció zónájában, és annál inkább hasonlóvá válik az egyenes fogazat a ferde fogazathoz.

A számítások igazolták, hogy a teherkoncentráció csökkenthető, ha a lehető legcélszerűbben választjuk meg a kerék helyzetét a támaszok között.



7. ábra

A fogaskerék támaszok közötti helyzetének hatása látszik abból, hogy ha a kereket az egyik alátámasztásról a másik felé a tengelyen eltoljuk, akkor a teherkoncentráció helye az egyik homloklülettől a másik felé tolódik el. E módszer alapján analizálva a fogaskerék csapágyak közötti elhelyezésének összes lehetséges változatát, meghatározható a kerék optimális helye a támaszok között, pl. 0,42 . . . 0,52 tengelyhosszra a nyomatékbevezetés oldalán lévő csapágytól.

Pontosan ismert az áttétel értékének hatása. Minél kisebb az áttétel, annál kisebb a fogaskerék elcsavarodásának a hatása abban az esetben, ha a hajtó és hajtott tengelyek ellentétes irányokban helyezkednek el. Ebben az esetben a hajtott kerék elcsavarodása előnyösen hat a tehereloszlás egyenletlenségére. Fordítva, ha a tengelyek egyirányban helyezkednek el, akkor a hajtott kerék deformációja növeli a teherkoncentrációt. Ez a jelenség igen lényeges azoknál a hajtóműveknél, amelyeknek áttétele kettőnél kisebb.

E módszer segítségével értékelhető a fogaskerekek konstrukciójának a teherkoncentrációra gyakorolt hatása. Az egységnyi erőhatás irányában bekövetkező fogdeformációk kísérleti adatai szerint kiszámítható, hogy milyen hatással van az oldalperem, a küllő és a kerék más szerkezeti sajátossága a tehereloszlásra. Minél kisebb a koszorú vastagsága, annál kisebb a teherkoncentráció. E vizsgálatok alapján születtek azok az ajánlások, amelyek szerint ésszerűbben választhatók meg a kerekek és tárcsák koszorúinak keresztmetszetei.

E módszer alkalmazásával új eredményeket kaptunk a kúpkerék-hajtások vizsgálata során. Elsőként képet kaptunk az érintkezési vonal menti tehereloszlásról. A tehereloszlás görbéinek elemzése megmutatta, hogy a hajtóműveket olyan fajlagos terhelés alapján kell méretezni, amelyet a kúp középpontjából kiinduló, a teher görbéjéhez húzott érintő egyenes érintési pontja jelöl ki. Megjegyzendő, hogy a kúpkerék-hajtásokban a teher koncentrálódhatik mind a nagy modul, mind a kis modul oldalán. A tehereloszlás görbéjét nagyon erősen befolyásolja az áttétel, minthogy ennek változtatásával változik a hajtó

és hajtott kerekék kúpszöge. Az elemzés megmutatta, hogy megalapozatlan az a módszer, amely szerint a kúpkerékajtást a közepes átmérővel méretezik, és a hengeres kerekéknél alkalmazott teherkoncentráció tényezőit használják.

Számszerű összefüggéseket kaptunk a felületi szilárdságra és a hajlításra való méretezés teherkoncentrációs tényezők között. Ugyanakkor, amikor a fogak felületi szilárdságra való méretezésekor közvetlenül kell alkalmazni az érintkezési vonal mentén lévő tehereloszlás törvényét, a fogak hajlításra történő méretezésekor figyelembe kell venni, hogy a fogtőben ébredő feszültség változik a foghossz mentén. A fogtő menti feszültségeloszlás egyenlőtlensége kisebb a tehereloszlás egyenlőtlenségénél. Ezért a fogtő-hajlításra történő méretezés teherkoncentrációjának kezdeti tényezője kisebb, mint a felületi szilárdságra való méretezés teherkoncentrációs tényezője.

Itt csak néhány példát vettünk a fogaskerék-hajtóművek területéről, amelyek bizonyítják, hogy figyelembe lehet venni a konstrukciónak a méretezési teherre gyakorolt hatását. Másrészt a méretezési teher befolyásoló tényezők analízisével úgy konstruálhatók az alkatrészek és szerelési egységek, hogy a méretezési teher a működőhöz képest alig-alig növekedjék. Ezzel elérhető a szerkezeti anyag legjobb kihasználása.

Determination of the Loading Calculated by Taking into Account the Construction and Manufacturing Technique of Gear Parts. An objective in machine building is in our days to concentrate a high performance in a small mechanical unit, by low specific use of material. The more exact the dimensioning of the gear mechanism and the selection of the parameters of construction, the nearer comes the load calculated to the actual one. A procedure should be found which takes the constructional characteristics into account as early as in the course of rating the mechanical gears, and gives directives for improving the construction. The loading to be taken for basis in the calculation is affected by the infidelities in manufacturing, the deformation of the gear elements and their operating conditions. The non-uniformity of the load distribution along the contact line exerts a particular effect on the calculated load.

Ermittlung der gerechneten Belastung unter Berücksichtigung der Konstruktion und Fertigungstechnologie der Antriebs-elemente. Das Ziel in der heutigen Maschinenkonstruktion ist die Konzentration einer hohen Leistung in einer kleinen mechanischen Einheit durch einen niedrigen Materialverbrauch. Je genauer die Dimensionierung des Getriebes und die Auswahl der Konstruktionsparameter sind, desto enger die Rechnungsbelastung an die effektive Belastung herankommt. Man sollte ein derartiges Verfahren finden, welches schon bei der Dimensionierung der mechanischen Getriebe die konstruktionsellen Eigenartigkeiten in Rücksicht nimmt und Richtlinien für die Vervollkommnung der Konstruktion gibt. Die der Dimensionierung zugrunde liegende Last wird durch die Fertigungsfehler, die Verformung der Antriebs-elemente und durch die Betriebsumstände des Getriebes beeinflusst. Die Ungleichheit der Kräfteverteilung längs der Berührungslinie übt eine besondere Wirkung auf die Rechnungsbelastung aus.



VONÓRÚD NÉLKÜLI CIKKELYES HÉJ HAJLÍTÁSMENTES PEREMÍVEKKEL ÉS BORDÁKKAL

CSONKA PÁL*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

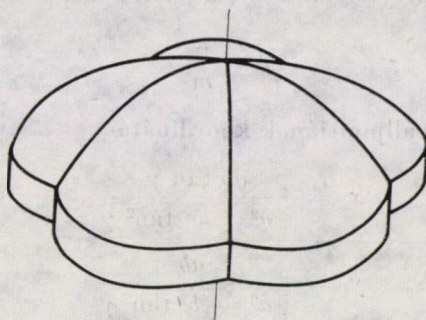
[Beérkezett: 1980. április 8-án]

Jelen tanulmány egy különleges alakú és tulajdonságú cikkelyes héj erőjátékát ismerteti a membránelmélet keretében. Kimutatja, hogy egyenletesen megoszló függőleges teher esetében a szóban forgó héj cikkelyeit határoló tartókban (a vízszintes síkú peremívekben és a függőleges síkú osztóbordákban) csak tengelyirányú erők — kötél-erők — keletkeznek, az osztóbordák vállpontjai pedig az alátámasztásokra csupán függőleges erőket gyakorolnak. Ezért az adott esetben az osztóbordák vállpontjai között vonórudak, illetve dúcok készítése mellőzhető.

I. Bevezetés

Ebben a tanulmányban ünnepi csarnokok, kiállítási és egyéb pavilonok létesítésére alkalmas szabályos alaprajzú, különleges alakú és tulajdonságú cikkelyes héjszerkezetet ismertetünk (1. ábra).

A szóban forgó héj cikkelyei elliptikus paraboloid alakúak, a cikkelyek alsó szélét vízszintes síkú, ellipszisív alakú olyan peremtartók — *peremívek* — szegélyezik, amelyek teljes hosszukban falazaton nyugszanak. Az egyes héj-cikkelyeket két oldalról függőleges síkú, parabola tengelyű ívtartók — *osztóbordák* — határolják.



1. ábra

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók B. út 31.

A héjra ható teherként az alaprajz területén egyenletesen megoszló \bar{p}_0 intenzitású függőleges erőrendszert veszünk számításba. Az osztóbordák saját súlyát figyelmen kívül hagyjuk.

Célunk a héj erőjátékának meghatározása. Ezt a feladatot a héjak membránelméletének keretében tárgyaljuk. A héj és peremtartók csatlakozásánál keletkező, a membránszerű feszültségi állapotot zavaró hajlító-csavaró nyomatékoktól eltekintünk.

Tárgyalásaink során igazoljuk, hogy a peremívekben, valamint a héj-cikkelyeket elválasztó osztóbordákban semminemű hajlító-csavaró erők sem keletkeznek, ezekben csak tengelyirányú erők — kötélérők — jönnek létre. Igazoljuk továbbá, hogy az osztóbordák vállai az alátámasztásokra csak függőleges erőket gyakorolnak. Ezért az osztóbordák vállait nem kell sem vonórudakkal, sem egyéb támasztószervekkel gyámolítani.

2. Geometriai adatok

Vizsgálataink a tárgyalandó héjnak a 2. ábrán pontozottan feltüntetett cikkelyére vonatkoznak. A szóban forgó héj cikkely alaprajzi idomát határoló ellipszisív egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

a héj cikkely középfelületének egyenlete pedig

$$z = h \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (1)$$

Ha a héj m -számú cikkelyből áll, a γ -val jelölt középponti szög ívmértéke

$$\gamma = \frac{\pi}{m}. \quad (2)$$

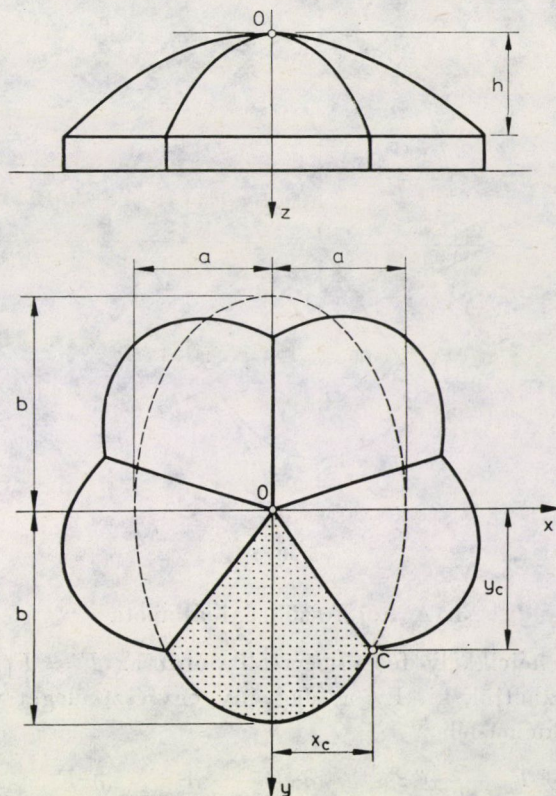
Az OC osztó borda C vállpontjának koordinátái

$$x_C = \frac{ab \tan \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}, \quad (3)$$

$$y_C = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}, \quad (4)$$

az OC osztóborda alaprajzi vetületének hossza pedig

$$v_C = \frac{ab \sqrt{1 + \tan^2 \gamma}}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}} = \frac{ab}{\cos \gamma \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}. \quad (5)$$



2. ábra

A vizsgált héjcsikkelyt határoló ellipszisív C pontbeli érintőjének iránytangense

$$\tan \varepsilon = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x_C}{\sqrt{a^2 - x_C^2}},$$

illetve a (3) alatti x_C érték behelyettesítésével

$$\tan \varepsilon = -\frac{b^2}{a^2} \tan \gamma.$$

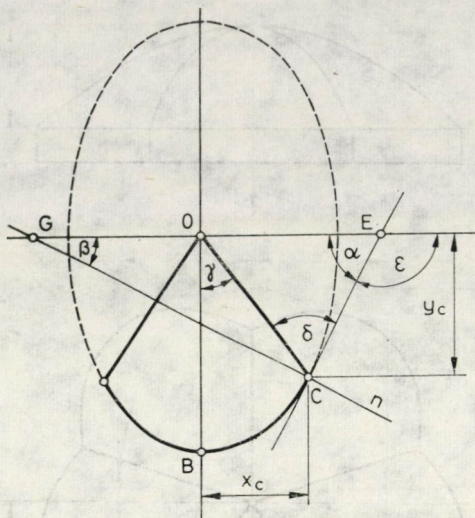
Így a 3. ábra jelöléseivel

$$\tan \alpha = -\tan \varepsilon = \frac{b^2}{a^2} \tan \gamma, \tag{6}$$

és

$$\tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{a^2}{b^2 \tan \gamma}. \tag{7}$$

A 3. ábrán a CE egyenes az ellipszisív C pontbeli érintője, a GC egyenes pedig az ellipszisív C pontbeli normálisa.



3. ábra

3. A hég feszültségi állapota

A vizsgált héjcikkely feszültségi állapotát az $F = F(x, y)$ feszültségfüggvénnyel fejezhetjük ki. Ez a függvény egyrészt eleget tartozik tenni a membránhéjak Pucher-féle

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \bar{p}_0 = 0 \quad (8)$$

differenciálegyenletének [1, 2], másrészt teljesíteni tartozik a fallal alátámasztott peremívvel bíró héjakra előírható

$$F = 0 \quad (9)$$

peremfeltételt [4, 5].

A fenti két feltételnek megfelelő feszültségfüggvény azonnal megadható:

$$F = -\bar{p}_0 \frac{a^2 b^2}{8h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right). \quad (10)$$

Ismervén az F feszültségfüggvényt, a vizsgált héjcikkely x, y irányú vetületi feszítőerőire az alábbi képleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\bar{p}_0 \frac{a^2}{4h}, \\ \bar{N}_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y} = 0, \\ \bar{N}_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\bar{p}_0 \frac{b^2}{4h}. \end{aligned} \quad (11)$$

4. A peremív feszültségi állapota

A membránhéjak fallal alátámasztott peremívében keletkező kötélérő vízszintes alkotója — esetünkben maga a kötélérő — a

$$H = - \frac{\partial F}{\partial n} = - \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} - \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} \tag{12}$$

képlettel határozható meg. Ebben a képletben n a peremív vizsgálati pontjában a külső normális alaprajzi vetületének irányát jelenti.

A peremív C pontjában a (7) alattiak figyelembevételével

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dn} = \cos \beta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{b^2 \tan \gamma}{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}}, \\ \frac{dy}{dn} = \sin \beta &= \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}}, \end{aligned}$$

úgyhogy a C pontbeli kötélérő a (12) képlet szerint számítva

$$H = - \frac{1}{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}} \left(\frac{\partial F}{\partial x} b^2 \tan \gamma + \frac{\partial F}{\partial y} a^2 \right). \tag{13}$$

Ámde a C pontban a (3) és (4) alattiak felhasználásával

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\bar{p}_0 \frac{b^2}{4h} x_C = -\bar{p}_0 \frac{ab}{4h} \cdot \frac{b^2 \tan \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\bar{p}_0 \frac{a^2}{4h} y_C = -\bar{p}_0 \frac{ab}{4h} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}. \end{aligned}$$

Ezeket az értékeket a (13) képletbe behelyettesítve, a peremív C pontbeli keresztmetszetében működő kötélérőre a

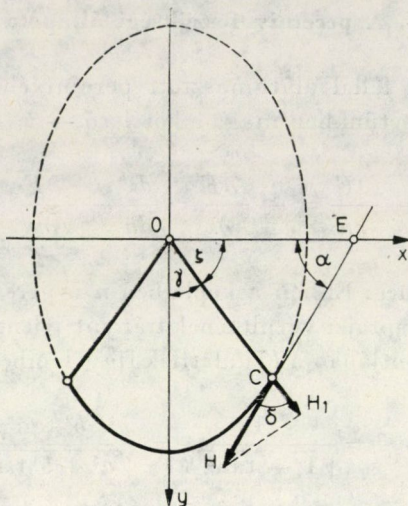
$$H = \bar{p}_0 \frac{ab}{4h} \cdot \frac{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma} \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}$$

képletet kapjuk, amit egyszerűsítés után így írhatunk:

$$H = \bar{p}_0 \frac{ab}{4h} \frac{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}. \tag{14}$$

Ennek a H húzóerőnek az O pont felé irányuló komponense (4. ábra):

$$H_1 = H \cos \delta. \tag{15}$$



4. ábra

A (15) képletben szereplő δ szög az OCE háromszögből határozható meg:

$$\delta = 180^\circ - \alpha - \zeta = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \gamma) = 90^\circ - (\alpha - \gamma).$$

A szóban forgó szög esetében

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \sin(\alpha - \gamma) = \sin \alpha \cdot \cos \gamma - \cos \alpha \cdot \sin \gamma = \\ &= \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \cos \gamma - \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \sin \gamma, \end{aligned}$$

illetve a (6) alattiak felhasználásával

$$\cos \delta = \frac{b^2 \tan \gamma}{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}} \cos \gamma - \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}} \sin \gamma.$$

Az utóbbi összefüggésből egyszerűsítés után a

$$\cos \delta = \frac{(b^2 - a^2) \sin \gamma}{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}} \quad (16)$$

képletet vezethetjük le.

Ezek után a (14) és (16) alattiaknak a (15) képletbe való behelyettesítésével a C pontbeli (egyoldali) kötélerőnek az O pont felé irányuló komponensére a

$$H_1 = \bar{p}_0 \frac{ab}{4h} \cdot \frac{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}} \cdot \frac{(b^2 - a^2) \sin \gamma}{\sqrt{a^4 + b^4 \tan^2 \gamma}}$$

képletet kapjuk, ezt pedig egyszerűsítés után így írhatjuk:

$$H_1 = \bar{P}_0 \frac{ab}{4h} \cdot \frac{(b^2 - a^2) \sin \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}} \quad (17)$$

5. Az osztóborda feszültségi állapota

A vizsgált héjikkely által az *OC* osztóbordára gyakorolt erők meghatározásához az osztóbordához csatlakozó héjrészből egy háromszög alakú elemi héjrészt hasítunk ki.

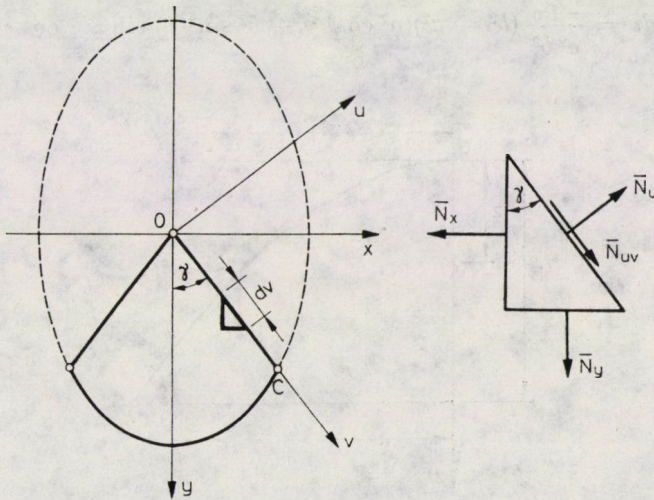
A kihalított héjelem alaprajzi vetületét, valamint a reá ható erők vízszintes alkotóinak fajlagos értékét az 5. ábra tünteti fel. A szóban forgó erőalkotók közül \bar{N}_x és \bar{N}_y értéke a (11) alattiakból már ismeretes, \bar{N}_u és \bar{N}_{uv} pedig egyszerű egyensúlyi vizsgálattal meghatározható:

$$\begin{aligned} \bar{N}_u &= \bar{N}_x \cos^2 \gamma + \bar{N}_y \sin^2 \gamma, \\ \bar{N}_{uv} &= (\bar{N}_x - \bar{N}_y) \sin \gamma \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

A fenti képletek szerint a (11) alattiak felhasználásával

$$\bar{N}_u = -\frac{\bar{P}_0}{4h} (a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma), \quad (18)$$

$$\bar{N}_{uv} = -\frac{\bar{P}_0}{4h} (a^2 - b^2) \sin \gamma \cdot \cos \gamma. \quad (19)$$



5. ábra

A kijelölt héjelemnek az OC osztóbordához csatlakozó oldalára *függőleges* erők is hatnak. Ezek fajlagos értéke

$$N_z = \bar{N}_u \frac{\partial z}{\partial u} + \bar{N}_{uv} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad (20)$$

ahol

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{2hv}{a^2 b^2} (b^2 - a^2) \sin \gamma \cdot \cos \gamma,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = +\frac{2hv}{a^2 b^2} (a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma).$$

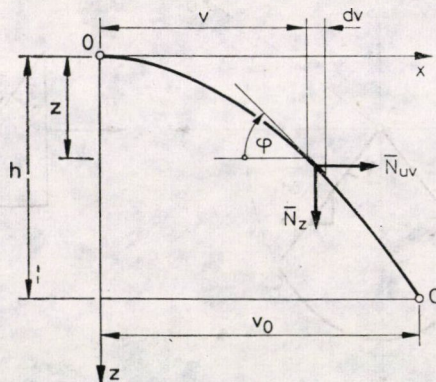
Ha a (18), (19) alattiakat a (20) képletbe behelyettesítjük, azt találjuk, hogy

$$N_z = \frac{\bar{P}_0 v}{a^2 b^2} (b^2 - a^2)(a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma) \sin \gamma \cdot \cos \gamma. \quad (21)$$

Az OC osztóbordára két oldalról ható \bar{N}_u erők egymást kölcsönösen egyensúlyozzák, úgyhogy az OC osztóborda igénybevétele szempontjából a terhelő erők közül csak a kétoldali \bar{N}_{uv} és a kétoldali N_z erők érdemelnek figyelmet.

Egyszerűen igazolhatjuk, hogy az OC osztóborda igénybevétele szempontjából számításba veendő kétoldali \bar{N}_{uv} és N_z erőkomponensek az OC osztóbordában csak axiális erőt — kötélérőt — ébresztenek. Az osztóborda $v = 0$ -tól v -ig terjedő szakaszán (6. ábra) $ui.$ a kétoldali N_z erők összege a (21) alattiak felhasználásával

$$2 \int_0^v N_z dv = \frac{2 \bar{P}_0}{a^2 b^2} (b^2 - a^2)(a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma) \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot \frac{v^2}{2}, \quad (22)$$



6. ábra

a kétoldali \bar{N}_{uv} erők összege pedig a (19) alattiak figyelembevételével

$$2 \int_0^v \bar{N}_{uv} dv = \frac{\bar{P}_0}{2h} (b^2 - z^2) \sin \gamma \cdot \cos \gamma \cdot v. \quad (23)$$

E két utóbbi érték hányadosa megegyezik az OC osztóborda tengelyvonalának a v helyen vett deriváltjával, vagyis a φ szög tangensével:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2hv}{a^2 b^2} (a^2 \cos^2 \gamma + b^2 \sin^2 \gamma), \quad (24)$$

ami azt jelenti, hogy az OC borda tengelyvonala az OC bordára ható erőknek valóban kötélgörbéje. Ezért az OC bordában a terhelés hatására semmiféle hajlító-csavaró erő sem keletkezik.

6. A vállpontok egyensúlya

Egyszerű megfontolással az is igazolható, hogy az OC borda C vállpontjára ható v irányú vízszintes erők önmagukban véve is egyensúlyban lévő rendszert alkotnak, tehát a C vállpontot nem kell v irányú elmozdulás ellen sem vonórúddal, sem egyéb szerkezettel megtámasztani.

A peremívek által két oldalról a C vállpontra gyakorolt *kifelé* mutató v irányú erő ugyanis a (17) alattiak szerint

$$2 H_1 = \bar{P}_0 \frac{ab}{2h} \frac{(b^2 - a^2) \sin \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}, \quad (25)$$

az OC osztóborda által kétoldaltól a C pontra kifejtett *befelé* mutató v irányú erő pedig az (5) és (19) alattiak számításba vételével

$$2 \bar{N}_{uv} v_C = 2 \frac{\bar{P}_0}{4h} (b^2 - a^2) \sin \gamma \cdot \cos \gamma \frac{ab}{\cos \gamma \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}.$$

Utóbbi egyszerűbben így is írható:

$$2 \bar{N}_{uv} v_C = \bar{P}_0 \frac{ab}{2h} \frac{(b^2 + a^2) \sin \gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \gamma}}. \quad (26)$$

Mint hogy a (25) alatti *kifelé* irányuló és a (26) alatti *befelé* irányuló erő egymásnak éppen az ellentettje, a C pont vízszintes irányban minden különleges támasztószervezet nélkül is eleve egyensúlyban van. A C pont u irányú egyensúlyát a fennforgó szimmetria, a z irányú egyensúlyát pedig a C pont alátámasztott volta biztosítja.

IRODALOM

1. PUCHER, A.: Über den Spannungszustand in gekrümmten Flächen. *Beton und Eisen* **33** (1934), 298
2. CSONKA, P.: Membranschalen. *Bauingenieur-Praxis*, Heft 16. Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München 1966, 61—69
3. DULÁCSKA E.: Muschelförmige Schalenkonstruktion. *Acta Techn. Hung.* **29** (1960), 397—405
4. CSONKA P.: Composite Shells Polygonal in Plan with Free Front Edge and Unbent Dividing Ribs. *Theorie und Praxis des Stahlbaues*. Festschrift zum 65. Geburtstag von Herrn Dr.-Ing. Gotthard Franz, Karlsruhe. Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München 1969, 160—165
5. CSONKA P.: Kuppelschalen über Polygonalgrundrissen. *Schalen in Beton und Kunststoff*. Entwurf-Bemessung-Ausführung. Herausgegeben von S. Polónyi mit Beiträgen von A. M. Haas, H. Rühle, P. Csonka, H. Isler, F. Candela. Bauverlag GmbH., Wiesbaden u. Berlin 1970, 88—95

Sectorial Shells with Unbent Edge Arches and Deviding Ribs, Hawing no Tie Rods.
 — — Present paper analyzes sectorial shells of special shape subject to uniformly distributed vertical loads in the framework of the membrane theory. It proves that the edge members (edge arches and deviding ribs) of these shells are free of bending and torsional effects and that the lateral traction of the deviding ribs is canceled by the lateral traction of the edge arches. Therefore, this type of shells does not require any tie rods or struts.

Segmentschale ohne Zugstangen mit biegeungsfreien Randbogen und Rippen. Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich im Rahmen der Membrantheorie mit Segmentschalen von außergewöhnlicher Form und speziellen Eigenschaften. Als Belastung wird ein gleichmäßig verteilte, vertikales Kraftsystem in Betracht gezogen. Es wird bewiesen, daß in den Begrenzungs-trägern der einzelnen Schalensegmente keine Biege- bzw. Torsionskräfte auftreten und der Seitenzug der Verteilungsrippen durch den Seitenzug der Randbogen ausgeglichen, resp. behoben wird. Aus diesem Grunde werden bei den behandelten Schalen keine Zugstangen bzw. Strebebalken benötigt.

ÉSZREVÉTELEK ÉS KIEGÉSZÍTÉSEK A LINEÁRIS ELASZTOSTATIKA FESZÜLTSGFÜGGVÉNYEKKEL FELÍRT VARIÁCIÓS ELVEIHEZ

KOZÁK IMRE*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1980. április 10-én]

A dolgozat olyan duál funkcionálok értelmezésében, amelyekben a feszültségfüggvény-tenzornak csak három (alkalmasan megválasztott) koordinátája nem zérus, és amelyek a peremfeltételek részletes vizsgálatát is lehetővé teszik. Az értelmezett duál funkcionálokból a feszültségfüggvény-tenzor variációjával három kompatibilitási mező-egyenlet és a kompatibilitási peremfeltétel adódik, az alakváltozásmező kompatibilitásának szükséges és elégséges feltételeként.

1. Bevezetés. Észrevételek

1.1 A feszültségfüggvényekből képzett feszültségmezők kielégítik a kontinuummechanika

$$t^{kl};_k + q^l = 0 \quad (1.1)$$

egyensúlyi egyenletét. t^{kl} a feszültség tenzor, q^l a térfogati erőrendszer, pontosvessző a kovariáns deriválás jele.

Feltételezzük, hogy az x^1, x^2, x^3 koordináta-rendszer tetszőleges, görbevonalú. A három koordináta összességét x jelöli.

Legyen a test egyetlen zárt felülettel határolt, és legyen i^{kl} partikuláris megoldása (1.1)-nek. Ekkor az (1.1) egyenletet kielégítő tetszőleges feszültségmező előállítható FINZI, B. [1] és BLOH, V. I. [2] szerint a szimmetrikus f_{rs} feszültségfüggvény-tenzorral:

$$i^{kl} - \dot{i}^{kl} = \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs; mp} \quad (1.2)$$

(ε^{krm} a permutációs tenzor.) BLOH azt is kimutatta, hogy elegendő, az általánosság megsértése nélkül, ha f_{rs} hat független koordinátája közül mindössze három, alkalmasan kiválasztott koordináta nem zérus. Jelölje ezeket, mint feszültségfüggvényeket $f_{RS} = f_{SR}$ és legyenek $f_{AB} = f_{BA}$ a feszültségfüggvény-tenzor zérus koordinátái. (A nagybetűvel jelölt indexpároknál az indexek a szokásos 1, 2, 3 értékek közül csak meghatározott értékeket vesznek fel.) Az f_{AB} koordináták indexpárjai az rs indexpárok összes lehetséges változatai közül kiválasztva olyanok lehetnek, amelyekre nézve a

$$\beta_{(A;B)} = \frac{1}{2} (\beta_{A;B} + \beta_{B;A}) = \alpha_{AB}(x) \quad (1.3)$$

* Prof. Dr. Kozák Imre, 3525 Miskolc, Dózsa György u. 14.

egyenletnek tetszőleges $\alpha_{AB}(x)$ függvények esetében is van megoldása a $\beta_k(x)$ vektormezőre. (Gömbölyű zárójelbe tett indexek az illető tenzor szimmetrikus részét, illetve a szimmetrikus rész koordinátáit jelzik.) Ezek után az RS indexpárok úgy választandók meg, hogy az AB, BA, valamint az RS, SR indexpárok f_{rs} összes lehetséges indexpárját kiadják. A Maxwell-féle feszültségfüggvényeknél pl.

$$f_{RS} = f_{11}, f_{22}, f_{33} \quad \text{és} \quad f_{AB} = f_{12} = f_{23} = f_{31} = 0,$$

míg a Morera-félénél

$$f_{RS} = f_{12}, f_{23}, f_{31} \quad \text{és} \quad f_{AB} = f_{11} = f_{22} = f_{33} = 0$$

az f_{rs} tenzor szerkezetec.

Kimutatható, hogy legfeljebb 21-féleképpen választható ki úgy három nem zérus, független koordináta a feszültségfüggvény-tenzorban, hogy azok az (1.2) képlet értelmében feszültségfüggvények lehessenek.

1.2 Mint ismeretes, az elasztostatika linearizált elméletében értelmezett olyan variációs elvekből, amelyek funkcionáljában feszültségfüggvények szerepelnek, a feszültségfüggvények variációjával az alakváltozásmező kompatibilitási feltételeire tudunk következtetni.

Az $a_{kl}(x)$ alakváltozásmezőt kompatibilisnek mondjuk, ha az illető test merevtestszerű mozgásához és egyértékű, legalább kétszer differenciálható $a_{kl}(x)$ mezőjéhez a Cesaro-formula a test egyértékű $u_k(x)$ elmozdulásmezőjét állítja elő.

Vezessük be a továbbiak kedvéért az $a_{kl}(x)$ alakváltozásmezőből képzett szimmetrikus $e^{ab}(x)$ inkompatibilitási (diszlokációs) tenzormezőt:

$$e^{ab} = \varepsilon^{akm} \varepsilon^{blp} a_{kl;mp}. \quad (1.4)$$

Az $e^{ab} = 0$ egyenletek az alakváltozásmező előzőek szerint értelmezett kompatibilitásának feltételét, a Saint-Venant-féle hat kompatibilitási egyenletet adják.

A kompatibilitási egyenleteknek variációs elvből, éspedig a kiegészítő energia minimuma elvből történő előállítására először SOUTHWELL, R. V. [3] alkalmazott feszültségfüggvényeket. Azt találta, hogy a Maxwell-féle feszültségfüggvényekkel ilyen módon csak az $e^{11} = e^{22} = e^{33} = 0$, összesen tehát csak három kompatibilitási egyenlet nyerhető, és a másik három, az $e^{12} = e^{23} = e^{31} = 0$ kompatibilitási egyenlet a Morera-féle feszültségfüggvényekkel adódik. Előállt ezzel az úgynevezett „Southwell-paradoxon”, amely szerint --- annak ellenére, hogy tetszőleges feszültségmező képezhető külön a Maxwell-féle feszültségfüggvényekkel és külön a Morera-féle feszültségfüggvényekkel

is — a hat Saint-Venant-féle kompatibilitási mezőegyenletet csak úgy kapjuk meg a kiegészítő energia minimuma elvből, ha mind a Maxwell-, mind a Morera-féle feszültségfüggvényeket figyelembe vesszük.

A fentebb megfogalmazott „Southwell-paradoxon” olyan értelemben általánosítható, hogy bármilyen három feszültségfüggvényt is választunk, a kiegészítő energia minimuma elvből csak három Saint-Venant-féle kompatibilitási mezőegyenletet kapunk meg.

Időközben további variációs elveket fogalmaztak meg a lineáris rugalmasságtan keretei között feszültségfüggvények segítségével, pl. TONTI, E. [4], ODEN, J. T.—REDDY, J. N. [5] és ABOVSKIJ, N. P.—ANDREEV, N. P.—DERUGA, A. P. [6]. Közös vonása ezeknek a variációs elveknek, hogy a „Southwell-paradoxon” megkerülése érdekében a feszültségfüggvény-tenzornak mind a hat független koordinátáját zérustól különbözőnek veszik és variálják. A valóságban, az 1.1 pontban kifejtettekben következően, jól megfogalmazott variációs elveknél a feszültségfüggvények minden lehetséges variációjának figyelembevételével három feszültségfüggvénynek is elegendő kell lennie az alakváltozásmező kompatibilitásának kimutatására.

1.3 Ténylegesen, WASHIZU, K. [7] részmegoldását kiegészítve, a Bianchi-féle azonosság segítségével, szerző kimutatta [8], hogy ha az

$$e^{RS} = e^{RS} = 0; \quad x \in V, \quad (1.5)_1$$

összesen tehát három, alkalmasan megválasztott Saint-Venant-féle *kompatibilitási mezőegyenlet*, továbbá az

$$n_b e^{ab} = 0; \quad x \in S, \quad (1.5)_2$$

az úgynevezett *kompatibilitási peremfeltétel* teljesül, akkor a maradó három de Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenlet is teljesül:

$$e^{AB} = e^{BA} = 0; \quad x \in V.$$

V a test által elfoglalt térfogati tartomány, S ennek egyetlen, egyszeresen összefüggő pereme és n_b a külső normális.

(1.5)₁-ben a három RS indexpár annyiféle és ugyanolyan módon választható meg, mint az f_{rs} feszültségfüggvény-tenzor három, feszültségfüggvényként vehető, nem zérus koordinátája.

(1.5)₁ és (1.5)₂ együtt az alakváltozásmező kompatibilitásának szükséges és elégséges feltételét adja meg. Annak kimutatásával, hogy az alakváltozásmező kompatibilitásának feltételei között csak három Saint-Venant-féle kompatibilitási egyenletnek kell szerepelnie, megoldást nyert a „Southwell-paradoxon”, de csak azon az áron, hogy biztosítani kell az (1.5)₂ kompatibilitási

peremfeltételek teljesülését is. [9] Dolgozatában szerző kimutatta, hogy a kiegészítő energia minimuma elv, mint variációs elv teljesülésekor nemcsak az $(1.5)_1$ kompatibilitási mezőegyenletek, hanem az $(1.5)_2$ kompatibilitási peremfeltételek is teljesülnek. Következik tehát, hogy a kiegészítő energia elv egy jól megfogalmazott variációs elv.

1.4 Összegezve az előzőeket, az alakváltozásmező kompatibilitásának variációs elvvel történő vizsgálatához két követelmény állítható fel.

I. Olyan feszültségfüggvény-tenzort kell alkalmazni, amelynek csak három (alkalmasan megválasztott) koordinátája nem zérus.

II. Részletesen meg kell vizsgálni a test peremének állapotát.

A [4], [5], [6] dolgozatok feszültségfüggvényeket tartalmazó variációs elvei nem tesznek eleget sem az I., sem a II. követelménynek. A [7] könyv ugyanilyen variációs elvei csak az I. követelményt nem teljesítik.

1.5 Jelen dolgozat a címben jelzett kiegészítéseket a fenti két követelmény tekintetében ODEN és REDDY [5] munkájának feszültségfüggvényeket tartalmazó duál egyenletrendszeréhez és az ezekhez hozzárendelt variációs elvekhez fűzi, ezért a továbbiakban először röviden összefoglaljuk [5] vonatkozó főbb megállapításait.

ODEN és REDDY általános megállapításokat tesznek TONTI, E. [10] munkája alapján a fizikai feladatok változóira, primál és duál egyenletrendszerre, valamint az ezekhez hozzárendelhető variációs elvek funkcionáljaira. A lineáris (klasszikus) rugalmasságtan, mint példa szerepel.

Utóbbi szerint az u_k elmozdulásvektorral, mint alapváltozóval, az a_{kl} alakváltozási tenzonnal és a t^{kl} feszültségi tenzonnal, mint közbenső változóval, valamint a q^l térfogati terheléssel, mint forrás változóval a lineáris rugalmasságtan *primál egyenletrendszere* az alábbi kanonikus alakban fogalmazható meg:

$$\frac{1}{2} (u_{k;l} + u_{l;k}) = a_{kl}, \quad (1.6)_1$$

$$u_k = \tilde{u}_k, \quad x \in Su, \quad (1.6)_2$$

$$b^{klpq} a_{pq} = t^{kl}, \quad (1.7)$$

$$t^{kl};k + q^l = 0, \quad (1.8)_1$$

$$n_k t^{kl} = \tilde{t}^l \quad x \in St, \quad (1.8)_2$$

ahol $(1.6)_1$ a kinematikai egyenlet, $(1.6)_2$ az elmozdulási peremfeltétel, (1.7) az anyagtörvény, $(1.8)_1$ az egyensúlyi egyenlet (mérleg egyenlet), $(1.8)_2$ a feszültségi peremfeltétel, b^{klpq} az anyagállandókat magába foglaló tenzor, \tilde{u}_k az Su peremrészén megadott elmozdulás és \tilde{t}^l az St peremrészén megadott terhelés.

Az (1.6) — (1.8) primál rendszerhez, mint primál variációs elvek és funkcionálok a Hu—Washizu-elv és funkcionálja, a Hellinger—Reissner-elv és funk-

cionálja, a Lagrange-elv és funkcionálja (a teljes potenciális energia), valamint a Castigliano-elv és funkcionálja (a teljes kiegészítő energia) tartozik.

A duál egyenletrendszer alapváltozója az f_{rs} feszültségfüggvény-tenzor, közbenső változó párja az a_{kl} és t^{kl} tenzorok, forrásváltozója pedig az e^{ab} inkompatibilitási (diszlokációs) tenzor.

Ahhoz hasonlóan, ahogy a primál rendszerénél q^l a $t^{kl}(x)$ mező kiegyensúlyozatlanságát mutatja, duál rendszerénél e^{ab} az $e_{kl}(x)$ mező inkompatibilitását megadó változónak tekinthető. További analógia szerint $n_k t^{kl} = t^l$; $x \in S$ a peremen megoszló erőrendszer, míg $n_a e^{ab} = e^b$; $x \in S$ a peremen megoszló inkompatibilitási mező. Kompatibilis alakváltozásmező esetén $e^{ab} = 0$. Maga a duál egyenletrendszer ODEN és REDDY szerint:

$$\varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp} = t^{kl}, \quad (1.9)$$

$$c_{klpq} t^{pq} = a_{kl}, \quad (1.10)$$

$$\varepsilon^{akm} \varepsilon^{blp} a_{kl;mp} = e^{ab}, \quad (1.11)$$

ahol c_{klpq} a b^{klpq} tenzor inverze.

Feltűnő, hogy az (1.6)—(1.8) egyenletekkel ellentétben, az (1.9)—(1.11) duál egyenletek nem tartalmaznak peremfeltételeket. Nem szerepelnek ennek megfelelően felületi integrálok az (1.9)—(1.11) egyenletekhez megfogalmazott duál funkcionálokban sem. Mindez azt tükrözi, hogy ODEN és REDDY duál egyenletrendszere és variációs elvei nem teszik lehetővé az alakváltozásmező kompatibilitásának az 1.4 pont értelmében történő vizsgálatát.

1.6 A dolgozat 2. pontja az (1.9)—(1.11) duál egyenletrendszert úgy módosítja, hogy az a feszültségfüggvény-tenzor $f_{RS} \neq 0$, $f_{AB} = 0$ szerkezete mellett is biztosítsa az alakváltozásmező kompatibilitását. Ehhez a hat (1.11)-es skaláris egyenlet számát háromra kell redukálni és az (1.9)—(1.10) egyenletrendszer megfelelő peremfeltételekkel történő kiegészítésével biztosítani kell mind az St , mind az Su peremrészeken a kompatibilitási peremfeltételek teljesülését.

A 3. pont olyan duál funkcionálokat értelmez, amelyek variációi a 2. pont szerinti módosított és kiegészített duál egyenletrendszert szolgáltatják. A feszültségfüggvények szerinti variációnál lényeges szerep jut annak a felismerésnek, hogy a feszültség-tenzor az St peremrészeken azon túl, hogy eleget tesz a feszültségi peremfeltételnek, ugyanacsak variálható.

2. A lineáris rugalmasságtan módosított és kiegészített duál egyenletrendszere

2.1 Legyen a tetszőleges x^1, x^2, x^3 görbevonallú koordinátarendszerben $x^k = x^k(\xi^1, \xi^2)$ az S peremfelület egyenlete (ξ^1, ξ^2 a felületi paraméterek), és értelmezzük az S peremen és annak közvetlen V_S környezetében azt a ξ^1, ξ^2 ,

ξ^3 koordináta-rendszert, amelyben ξ^3 az S perem külső normálisa mentén mért előjeles távolság és S -en $\xi^3 = 0$. Jelölje a továbbiakban az x^1, x^2, x^3 koordináta-rendszert (x) , a ξ^1, ξ^2, ξ^3 koordináta-rendszert pedig (ξ) . Utóbbit peremhez kötött koordináta-rendszernek nevezzük.

A továbbiakban a V_S tartományon és az S peremen értelmezett mennyiségeket és azok deriváltjait a (ξ) koordináta-rendszerben adjuk meg és írjuk fel, anélkül, hogy erre külön felhívnánk a figyelmet. Például S külső normálisának koordinátái $n_\alpha = 0$ és $n_3 = 1$; vagy $n_k t^{kl} = n_3 t^{3l} = t^{3l}$.

Bevezetjük, hogy a (ξ) koordináta-rendszerben a görög betűs indexek csak az 1, 2 értékeket veszik fel.

Legyen a két koordináta-rendszerben felírt tenzorok közötti transzformáció formula

$$c_e^{\cdot d}(\xi) = \tau_e^{\cdot k} \tau_1^{\cdot d} c_k^{\cdot l}(x), \quad (2.1)_1$$

ahol

$$\det \tau_e^{\cdot k} \neq 0; \quad \tau_e^{\cdot k} \tau_k^{\cdot d} = \delta_e^d, \quad (2.1)_2$$

$c_k^{\cdot l}(x)$ tetszőleges tenzor az (x) koordináta-rendszerben felírva és δ_e^d a Kronecker-szimbólum.

2.2 Az f_{rs} feszültségfüggvény-tenzorra (2.1) szerint az alábbi a transzformációs képlet:

$$f_{ed}(\xi) = \tau_e^{\cdot r} \tau_d^{\cdot s} f_{rs}(x). \quad (2.2)$$

Mint hogy a transzformáció során a feszültségfüggvény-tenzor szerkezete (zérus és nem-zérus koordinátái) megváltozik, és mivel a V_S tartományon értelmezett feszültségfüggvény-tenzor szerkezetének nem kell szükségszerűen ugyanolyannak lennie, mint $f_{rs}(x)$ szerkezete, a következőkben a V_S tartományon értelmezett feszültségfüggvény-tenzort más betűvel, $h_{ed}(\xi)$ -vel jelöljük.

Célszerű $h_{ed}(\xi)$ -t úgy megválasztani, hogy h_{e3} koordinátái zérusak legyenek, de $h_{\eta\phi}(\xi) \neq 0$. Az így megválasztott $h_{ed}(\xi)$ és az $f_{rs}(x)$ tenzorok között, $f_{rs}(x)$ bármilyen lehetséges szerkezete esetében is, (2.1)₁ segítségével az alábbi egyenletek írhatók fel:

$$h_{\eta\phi}(\xi) = \tau_\eta^{\cdot r} \tau_\phi^{\cdot s} f_{rs}(x) + \beta_{(\eta\phi)}(\xi), \quad (2.3)_1$$

$$h_{e3}(\xi) = \tau_e^{\cdot r} \tau_3^{\cdot s} f_{rs}(x) + \beta_{(e;3)}(\xi) = 0, \quad (2.3)_2$$

ahol a $\beta_e(\xi)$ vektormezőzt úgy kell megválasztani, hogy a (2.3)₂ egyenlet teljesüljön. Utóbbi feladat mindig megoldható. $h_{ed}(\xi)$ szerkezete természetesen a fentitől eltérő módon is megválasztható.

A (2.3)₁ egyenletet úgy is tekinthetjük, mint a (ξ) koordináta-rendszerben vett három, nem-zérus $h_{\eta\phi}(\xi)$ feszültségfüggvény és az (x) koordináta-rendszerben vett ugyancsak három, nem-zérus $f_{RS}(x)$ feszültségfüggvény közötti kölcsönös és $\beta_e(\xi)$ meghatározása után egyértelmű kapcsolatot.

A $\beta_{(e;d)}(\xi)$ tag hozzáadása a (2.2) szerinti transzformáció útján nyerhető $f_{ed}(\xi)$ tenzorhoz nem változtatja meg a $t^{kl}(\xi)$ tenzormező, mivel

$$\varepsilon^{k\text{em}} \varepsilon^{\text{ldp}} \beta_{(e;d);m\text{p}} = \frac{1}{2} \varepsilon^{k\text{em}} \varepsilon^{\text{ldp}} (\beta_{e;d\text{mp}} + \beta_{d;emp}) \equiv 0.$$

2.3 Az (1.6)—(1.8) peremértékfeladat (primál egyenletrendszer) duál egyenletrendszerét az alábbi *alappfeltevések és -követelmények* mellett fogalmazzuk meg.

Alappfeltevések:

- az $f_{rs}(x)$ feszültségfüggvény-tenzor 1.1 pont szerint $f_{RS} = f_{SR}$ koordinátái zérustól különbözőek, $f_{AB} = f_{BA}$ koordinátái pedig zérusok;
- a 2.2 pontban bevezetett $h_{ed}(\xi)$ feszültségfüggvény-tenzor $h_{\eta\delta}$ koordinátái zérustól különbözőek, h_{e3} koordinátái azonban zérusok.

Alapkövetelmény:

- az $a_{kl}(x)$ alakváltozásmező legyen kompatibilis.

Fenti feltevésekkel és követelménnyel a duál egyenletrendszer a következőképp írható fel:

$$\varepsilon^{k\text{rm}} \varepsilon^{\text{lsp}} f_{rs;mp} = t^{kl} - \dot{i}^{kl}, \quad (2.4)_1$$

$$h_{\eta\delta} = \tilde{h}_{\eta\delta} \quad \text{és} \quad h_{\eta\delta;3} = \tilde{h}_{\eta\delta;3}, \quad \xi \in St, \quad (2.4)_2$$

$$c_{kl\text{p}q} t^{\text{p}q} = a_{kl}, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon^{\text{Rkm}} \varepsilon^{\text{Slp}} a_{kl;mp} = e^{\text{RS}} = e^{\text{SR}} = 0, \quad (2.6)_1$$

$$\varepsilon^{3\eta\mu} \varepsilon^{\text{bdp}} a_{\eta\delta;p\mu} = e^{3b} = e^{b3} = 0, \quad \xi \in St, \quad (2.6)_2$$

$$a_{\eta\delta} = \tilde{u}_{(\eta;\delta)}, \quad \xi \in Su, \quad (2.6)_3$$

$$a_{\eta\delta;3} - a_{\eta 3;\delta} - a_{3\delta;\eta} = \tilde{u}_{3;\eta\delta}, \quad \xi \in Su. \quad (2.6)_4$$

A már bevezetett jelöléseken felül a $\tilde{h}_{\eta\delta}(\xi^1, \xi^2)$, $\tilde{h}_{\eta\delta;3}(\xi^1, \xi^2)$, $\tilde{h}_{e3}(\xi^1, \xi^2) = \tilde{h}_{e3;3}(\xi^1, \xi^2) = 0$ függvények az St peremszakaszon kielégítik az (1.8)₂ alapján felírható alábbi egyenletet:

$$t^{3l} - \dot{i}^{3l} = \varepsilon^{3\eta\mu} \varepsilon^{\text{ldp}} h_{\eta\delta;p\mu} = \dot{i}^l - \dot{i}^{3l}; \quad \xi \in St. \quad (2.7)$$

Kompatibilis alakváltozásmező esetében, mint amilyenre az alapkövetelmény szerint a (2.4)—(2.6) egyenletrendszer vonatkozik, $e^{\text{RS}} = 0$; $x \in V$ és $e^{3b} = 0$; $\xi \in S$.

A duál egyenletrendszerben (2.4)₂ és (2.7) szerint teljesülnek a feszültségi peremfeltételek, (2.5) az anyagtörvény.

A (2.6) egyenletek az 1.3 pont szerint, az a_{kl} alakváltozásmező kompatibilitását biztosítják. Ugyanis (2.6)₁ azonos (1.5)₂-vel, (2.6)₂ az St peremrészén azonos (1.5)₂-vel, míg (2.6)_{3,4} az Su peremrészén, ahol $u_e = \tilde{u}_e$ az előírt elmozdulás, egyenértékű (1.5)₂-vel. Utóbbi külön igazolásra szorul.

Az inkompatibilitási tenzor (1.4) értelmezése szerint a teljes S peremen

$$e^{33} = \varepsilon^{3\eta\mu} \varepsilon^{3\delta\tau} a_{\eta\delta; \mu\tau}, \quad (2.8)_1$$

és

$$e^{3\beta} = \varepsilon^{3\eta\mu} \varepsilon^{3\beta\delta} (a_{\eta\delta; 3\mu} - a_{\eta 3; \delta\mu}). \quad (2.8)_2$$

Helyettesítve pedig (2.8)₁-be (2.6)₃-at és (2.8)₂-be (2.6)₄-et, valóban azt kapjuk, hogy az Su peremrészén is teljesül (1.5)₂:

$$e^{33} = \frac{1}{2} \varepsilon^{3\eta\mu} \varepsilon^{3\delta\tau} (\tilde{u}_{\eta; \delta} + \tilde{u}_{\delta; \eta})_{; \mu\tau} \equiv 0, \quad (2.9)_1$$

$$e^{3\beta} = \varepsilon^{3\eta\mu} \varepsilon^{\beta\delta 3} (\tilde{u}_{3; \eta\delta} + a_{3\delta; \eta})_{; \mu} \equiv 0. \quad (2.9)_2$$

A (2.4)—(2.6) duál rendszer $a_{kl}(x)$ alakváltozásmezőjéhez és a test megadott merevtestszerű mozgásához a Cesaro-képlet egyértékű elmozdulásmezőt állít elő.

2.4 A $t^{11}(x)$ feszültségmezővel felírt alapgyenlet-rendszert kapjuk meg a (2.4)—(2.6) egyenletrendszerből, ha (2.4)₁ helyébe az egyensúlyi egyenletet, (2.4)₂ helyébe pedig a feszültségi peremfeltételt írjuk:

$$(t^{kl} - \dot{i}^{kl})_{; k} = 0, \quad (2.10)_1$$

$$t^{3l} = \dot{i}^l \quad \xi \in St, \quad (2.10)_2$$

a (2.5)—(2.6) egyenleteket pedig változatlanul hagyjuk [9]. Ilyen módon a feszültségi tenzor hat független koordinátájának meghatározásához a (2.10)₁ és a (2.6)₁, összesen tehát hat skaláris mezőegyenlet áll rendelkezésünkre.

3. A lineáris elasztostatika kiegészített duál variációs elvei

3.1 A duál egyenletrendszerhez tartozó duál funkcionálok Euler-egyenleteinek és a peremfeltételeknek a képzésénél alapvető szerepet játszik az összefüggés, amelyet az

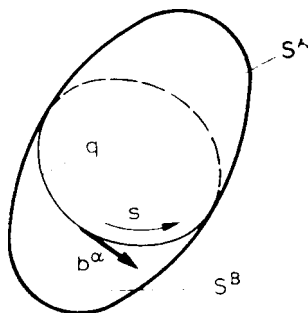
$$\varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} a_{kl} \delta f_{rs; mp} = \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} [a_{kl; mp} \delta f_{rs} - (a_{kl; p} \delta f_{rs})_{; m} + (a_{kl} \delta f_{rs; p})_{; m}]$$

azonosság, a Gauss—Osztrogradszkij-tétel, és a (2.1) transzformációs képlet alapján írhatunk fel:

$$\begin{aligned} & \int_{(V)} \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} a_{kl} \delta f_{rs; mp} dV = \\ & \int_{(V)} \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} a_{kl; mp} \delta f_{rs} dV + \\ & + \int_{(S)} \varepsilon^{\alpha\eta 3} \varepsilon^{l\delta p} (a_{\alpha l} \delta h_{\eta d; p} - a_{\alpha l; p} \delta h_{\eta d}) dS. \end{aligned} \quad (3.1)$$

(δ a variáció jele).

3.2 Szükségünk lesz a felületi integrálok átalakításaihoz a Stokes-tételre is. Osszuk fel ebből a célból a test felületét az S^A és S^B jelű részekre, és legyen q közös görbéje S^A és S^B -nek (1. ábra). Legyen s a q görbén a bejelölt irányban



1. ábra

mért ívhossz és b^α a vonatkozó egységvektor. A Stokes-tétel szerint az S^A -n, vagy az S^B -n, vagy S^A -n is és S^B -n is értelmezett tetszőleges $c_\alpha(\xi^1, \xi^2)$ vektormezőre fennállnak a következő egyenletek:

$$\int_{(S^A)} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha;\beta} dS = - \oint_{(q)} (b^\alpha c_\alpha)^A ds, \tag{3.2}_1$$

$$\int_{(S^B)} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha;\beta} dS = \oint_{(q)} (b^\alpha c_\alpha)^B ds. \tag{3.2}_2$$

Az A és B jelek a vonalintegrálokban azt hangsúlyozzák, hogy az intergrandusz az S^A , ill. az S^B peremrészen értendő.

3.3 A duál funkcionálokat a teljes $f_{rs}(x)$ és $h_{ed}(\xi)$ feszültségfüggvény-tenzorokkal építjük fel, és hasonló módon képezzük a funkcionálok variációit is. A feszültségfüggvény-tenzorok szerkezetére a 2.3 pont elején tett alapfeltevéseket és az alakváltozási tenzorra rótt alapkötvetelményt csak a variációk képzése után vesszük figyelembe.

Értelmezzük ezek után a lineáris rugalmasságtan (1.6)—(1.8) peremérték-feladatának duál egyenletrendszeréhez az alábbi duál funkcionálokat.

I. Ha egyetlen egyenlet teljesülését sem írjuk elő előzetesen :

$$L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = L^V + L^T + L^U + L^Q, \tag{3.3}_1$$

ahol

$$\begin{aligned} L^V = & \int_{(V)} \frac{1}{2} t^{kl} c_{klpq} t^{pq} dV - \int_{(V)} e^{rs} f_{rs} dV - \\ & - \int_{(V)} a_{kl} (t^{kl} - \hat{t}^{kl} - \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp}) dV; \end{aligned} \tag{3.3}_2$$

$$L^T = \int_{(St)} \varepsilon^{\kappa\eta 3} \varepsilon^{ldp} [-(h_{\eta d;p} - \tilde{h}_{\eta d;p}) a_{\kappa l} + (h_{\eta d} - \tilde{h}_{\eta d}) a_{\kappa l;p}] dS; \quad (3.3)_3$$

$$L^U = \int_{(Su)} \tilde{u}_1 (\varepsilon^{\kappa\eta 3} \varepsilon^{ldp} h_{\eta d;p} - i^{3l}) dS = - \int_{(Su)} t^{3l} \tilde{u}_1 dS; \quad (3.3)_4$$

$$L^Q = \oint_{(q)} \{ b^{\nu} (\tilde{u}_1)^U \varepsilon^{ldp} (h_{\eta d;p} - \tilde{h}_{\eta d;p}) + b^{\nu} \varepsilon^{\kappa\eta 3} [(\tilde{u}_{3;\kappa} - a_{3\kappa})^U (h_{\eta\nu} - \tilde{h}_{\eta\nu}) - (\tilde{u}_{\nu;\kappa})^U (h_{\eta 3} - \tilde{h}_{\eta 3})] \} ds. \quad (3.3)_5$$

A (3.3)_{3,5}-ben szereplő $h_{ed}(\xi^1, \xi^2)$, $h_{ed,3}(\xi^1, \xi^2)$ függvények kielégítik a (2.7) feszültségi peremfeltételt, de nem rögzítettek, ezért variálhatók (lásd a (3.15) képletet). Az $\tilde{u}_1(\xi^1, \xi^2)$ függvény a (3.3)₄ integrálban az előírt elmozdulás az Su peremrészén. A körintegrált az St és Su peremrészek közös q görbéjén kell venni. Az 1. ábrának megfelelő jelölések mellett S^A -nak megfelel St és S^B -nek Su . (A körintegrál intergraduszában U , vagy T jelöli — a későbbiekben is, — azt, hogy az illető mennyiséget az Su vagy az St peremszakaszon és természetesen a q görbén kell-e érteni.) A szögletes zárójelbe tett indexek a (3.3)₅ képletben az

$$\tilde{u}_{\nu;\kappa} = \tilde{u}_{(\nu;\kappa)} + \tilde{u}_{\{\nu;\kappa\}}$$

képletnek megfelelően az illető tenzor ferdeszimmetrikus részét jelzik.

II. Ha teljesül az (1.7) anyagtörvény:

$$M(f_{rs}; a_{pq}) = M^V + M^T + M^U + M^Q, \quad (3.4)_1$$

ahol

$$M^V = - \int_{(V)} \frac{1}{2} a_{kl} b^{klpq} a_{pq} dV - \int_{(V)} e^{rs} f_{rs} dV + \int_{(V)} a_{kl} (i^{kl} + \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp}) dV, \quad (3.4)_2$$

$$M^T = L^T; \quad M^U = L^U \quad \text{és} \quad M^Q = L^Q; \quad (3.4)_{3,4,5}$$

vagy az $a_{kl} = c_{klpq} t^{pq}$ helyettesítéssel:

$$M^*(f_{rs}; t^{pq}) = \dots \quad (3.5)$$

III. Ha az anyagtörvény, a (2.4)₁ egyenlet és a (2.4)₂ feszültségi peremfeltétel teljesül, vagyis fennáll az

$$\varepsilon^{3\eta\mu} \varepsilon^{ldp} (h_{\eta d;p\mu} - \tilde{h}_{\eta d;p\mu}) = 0; \quad \xi \in St \quad (3.6)_1$$

egyenlet (itt a hullámos felülvonással jelölt függvények rögzítettek):

$$K(f_{rs}) = K^v + K^u, \quad (3.6)_2$$

ahol

$$K^v = \int_{(V)} \frac{1}{2} t^{pq} c_{pqkl} \dot{t}_{kl} dV - \int_{(V)} e^{rs} f_{rs} dV, \quad (3.6)_3$$

$$K^u = L^u, \quad (3.6)_4$$

és

$$\dot{t}_{kl} = \dot{i}_{kl} + \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp}. \quad (3.6)_5$$

A bevezetett (3.3), (3.4) és (3.6) funkcionálok térfogati részei sorban megfelelnek az ODEN és REDDY [5] dolgozatában szereplő (4.20), (4.21) és (4.19) funkcionáloknak.

3.4 A (3.3), (3.4) és (3.6) funkcionálok eleget tesznek az 1.6 pont azon célkitűzésének, hogy a funkcionálok variációi — a mellékfeltételekként előzetesen előírt egyenletekkel együtt — a (2.4)—(2.6) szerinti, módosított és kiegészített duál egyenletrendszert szolgáltatják. Ennek igazolására képezzük először a (3.3) funkcionál különböző variációit. A variáció jele mellett kisbetű jelöli azt a változót, amelyik szerint az illető variációt képezzük:

$$\delta_t L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = \delta_t L^v = \int_{(V)} \delta t^{kl} (c_{klpq} t^{pq} - a_{kl}) dV, \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \delta_a L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) &= \delta_a L^v + \delta_a L^T + \delta_a L^Q = \\ &= - \int_{(V)} \delta a_{kl} (t^{kl} - \dot{i}_{kl} - \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp}) dV + \\ &+ \int_{(S_t)} \varepsilon^{\alpha\eta\beta} \varepsilon^{ldp} [- (h_{\eta d;p} - \tilde{h}_{\eta d;p}) \delta a_{\alpha l} + \\ &+ (h_{\eta d} - \tilde{h}_{\eta d}) \delta a_{\alpha l;p}] dS + \\ &+ \oint_{(g)} b^\delta \varepsilon^{\alpha\eta\beta} [- (\delta a_{3\alpha})^U (h_{\eta\delta} - \tilde{h}_{\eta\delta})] ds; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\delta_t L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = \delta_t L_0^v + \delta_t L_0^T + \delta_t L_0^u + \delta_t L_0^Q, \quad (3.9)_1$$

ahol

$$\delta_t L_0^v = \int_{(V)} (a_{kl} \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} \delta f_{rs;mp} - e^{rs} \delta f_{rs}) dV, \quad (3.9)_2$$

$$\begin{aligned} \delta_t L_0^T &= \delta_h L_0^T + \delta_{\tilde{h}} L_0^T = \\ &= \int_{(S_t)} \varepsilon^{\alpha\eta\beta} \varepsilon^{ldp} [- a_{\alpha l} (\delta h_{\eta d;p} - \delta \tilde{h}_{\eta d;p}) + \\ &+ a_{\alpha l;p} (\delta h_{\eta d} - \delta \tilde{h}_{\eta d})] dS, \end{aligned} \quad (3.9)_3$$

$$\begin{aligned} \delta_t L_0^U &= \delta_h L_0^U = \int_{(Su)} \varepsilon^{\kappa\eta\beta} \varepsilon^{\text{ldp}} \tilde{u}_1 \delta h_{\eta d; p \kappa} dS_1^1, & (3.9)_4 \\ \delta_t L_0^Q &= \delta_h L_0^Q + \delta_{\tilde{h}} L_0^Q = \\ &= \oint_{(Q)} \{ b^n(\tilde{u}_1)^U \varepsilon^{\text{ldp}} (\delta h_{\eta d; p} - \delta \tilde{h}_{\eta d; p}) + \\ &+ b^\theta \varepsilon^{\kappa\eta\beta} [(\tilde{u}_{3; \kappa} - a_{3\kappa})^U (\delta h_{\eta\theta} - \delta \tilde{h}_{\eta\theta}) - \\ &- (\tilde{u}_{[\kappa; \theta]})^U (\delta h_{\eta 3} - \delta \tilde{h}_{\eta 3})] \} ds. & (3.9)_5 \end{aligned}$$

A variáció jele melletti h , illetve \tilde{h} index azt jelzi, hogy a vonatkozó integrálban a $h_{ed}(\xi)$, vagy a $\tilde{h}_{ed}(\xi)$ változót variáljuk-e.

3.5 A (3.7)-el képzett

$$\delta_t L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = 0 \quad (3.10)$$

duál variációs elvből — tekintettel arra, hogy δt^{kl} a V tartományon tetszőleges lehet — adódik a duál rendszer (2.5) anyagtörvénye.

3.6 A (3.8)-al képzett

$$\delta_a L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = 0 \quad (3.11)$$

duál variációs elvből — tekintettel arra, hogy δa_{kl} V -n, továbbá $\delta a_{\kappa l}$ és $\delta a_{\kappa l; 3}$ St -n tetszőleges lehet — következik a duál egyenletrendszer (2.4)₁ egyenlete és a

$$h_{\eta\theta} = \tilde{h}_{\eta\theta}; \quad h_{\eta\theta; 3} = \tilde{h}_{\eta\theta; 3}; \quad h_{e3} = \tilde{h}_{e3}; \quad \xi \in St \quad (3.12)_1$$

alakú, (2.4)₂-vel megegyező feszültségi peremfeltétele, továbbá a q görbére vonatkozó

$$h_{\eta\theta} = \tilde{h}_{\eta\theta}; \quad \xi \in q \quad (3.12)_2$$

feltétel.

3.7 A (3.9)-el képzett

$$\delta_t L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq}) = 0 \quad (3.13)$$

duál variációs elv integráljai további átalakításokat igényelnek.

A $\delta_t L_0^V$ térfogati rész a (3.1) összefüggés segítségével az alábbi alakra hozható:

$$\delta_t L_0^V = \delta_t L_1^V + \delta_t L_{V0}^{TU}, \quad (3.14)_1$$

ahol

$$\delta_t L_1^V = \int_{(V)} (\varepsilon^{\kappa r m} \varepsilon^{\text{ls p}} a_{kl; mp} - e^{rs}) \delta f_{rs} dV, \quad (3.14)_2$$

$$\begin{aligned} \delta_t L_{V0}^{TU} &= \delta_h L_{V0}^T + \delta_h L_{V0}^U = \\ &= \int_{(S)} \varepsilon^{\kappa\eta\beta} \varepsilon^{\text{ldp}} (a_{\kappa l} \delta h_{\eta d; p} - a_{\kappa l; p} \delta h_{\eta d}) dS. & (3.14)_3 \end{aligned}$$

A TU index azt jelzi, hogy az integrált a teljes, $S = St + Su$ peremen kell venni.

Az $L(f_{rs}, t^{kl}, a_{pq})$ funkcionál feszültségfüggvény-tenzor szerinti variációjánál arra is tekintettel kell lennünk, hogy a feszültségi peremfeltétel (2.7) szerint nem határozza meg egyértelműen az St peremrészén a \tilde{h}_{ed} tenzort és deriváltjait, és így ott \tilde{h}_{ed} is variálható. Az St peremrészén képzett $\delta\tilde{h}_{ed}(\xi)$ variációk (2.7) szerint természetesen eleget kell tegernek az alábbi egyenletnek:

$$\varepsilon^{\eta\beta} \varepsilon^{ldp} \delta\tilde{h}_{\eta d; p\kappa} = 0; \quad \xi \in St. \tag{3.15}$$

(3.15) általános megoldását egy tetszőleges $\delta v_e(\xi)$ vektormező gradienseinek szimmetrikus része adja:

$$\delta\tilde{h}_{ed} = \delta v_{(e;d)} = \frac{1}{2}(\delta v_{e;d} + \delta v_{d;e}). \tag{3.16}$$

Bevezetve a

$$\delta w^l = \delta w^l(\xi) = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ldp} \delta v_{d;p} \tag{3.17}$$

jelölést, belátható az alábbi képletek helyessége is:

$$\delta\tilde{h}_{\eta d} = \delta v_{d;\eta} + \varepsilon_{d\eta n} \delta w^n, \tag{3.18}_1$$

$$\varepsilon^{ldp} \delta\tilde{h}_{\eta d;p} = -\delta w^{l;\eta}. \tag{3.18}_2$$

A (3.18) összefüggések akkor is érvényben maradnak, ha a $\tilde{h}_{e3} = 0$ feltételezéssel élünk. Ekkor fenn kell állnia (3.16) szerint a

$$v_{\eta;3} = -v_{3;\eta} \quad \text{és} \quad v_{3;3} = 0 \quad \xi \in St$$

egyenletnek, de a $\delta v_e(\xi^1, \xi^2)$, vagy a $\delta w^l(\xi^1, \xi^2)$ függvény az St peremrészén ekkor is tetszőleges marad.

A (3.9)₃ képlet második tagja az előzőek alapján a (3.18) összefüggések és a (3.2)₁ Stokes-tétel segítségével hozható új alakra:

$$\delta_{\bar{h}} L_0^T = \delta_{\bar{h}} L_1^T + \delta_{\bar{h}} L_T^Q, \tag{3.19}_1$$

ahol

$$\delta_{\bar{h}} L_1^T = \int_{(St)} \varepsilon^{\eta\beta} \varepsilon^{ldp} a_{\eta l;p} \delta v_d dS, \tag{3.19}_2$$

$$\delta_{\bar{h}} L_T^Q = \oint_{(Q)} [(b^\nu a_{\nu l} \delta w^l)^T + (b^\nu \varepsilon^{ldp} a_{\nu l;p} \delta v_d)^T] ds. \tag{3.19}_3$$

A (3.9)₄ képlet átalakításához ismételten felhasználjuk a (3.2)₂ Stokes-tételt:

$$\delta_{\bar{h}} L_0^U = \delta_{\bar{h}} L_1^U + \delta_{\bar{h}} L_U^Q, \tag{3.20}_1$$

ahol

$$\begin{aligned} \delta_h L_1^U &= \int_{(Su)} \varepsilon^{\kappa\eta 3} \varepsilon^{\lambda\delta 3} [-\tilde{u}_{3;\kappa\lambda} \delta h_{\eta\varphi} - \tilde{u}_{(\lambda;\kappa)} \delta h_{\eta\varphi; 3} + \\ &+ \tilde{u}_{(\lambda;\kappa)} \delta h_{\eta 3;\varphi} - [\tilde{u}_{[\lambda;\kappa];\varphi} \delta h_{\eta 3}]] dS, \end{aligned} \quad (3.20)_2$$

$$\begin{aligned} \delta_h L_U^Q &= \oint_{(q)} \{ -b^\eta \tilde{u}_1 \varepsilon^{ldp} \delta h_{\eta d;p} - \\ &- b^\varphi \varepsilon^{\kappa\eta 3} [\tilde{u}_{3;\kappa} \delta h_{\eta\varphi} - \tilde{u}_{[\varphi;\kappa]} \delta h_{\eta 3}] \}^U ds. \end{aligned} \quad (3.20)_3$$

A (3.14)₃-ban szereplő $\delta_t L_{V_0}^U$ kifejezés a (3.2)₂ Stokes-tétellel tovább alakítható:

$$\delta_h L_{V_0}^U = \delta_h L_{V_1}^U + \delta_h L_{V_0}^Q, \quad (3.21)_1$$

ahol

$$\begin{aligned} \delta_h L_{V_1}^U &= \int_{(Su)} \varepsilon^{\kappa\eta 3} \varepsilon^{\lambda\delta 3} [(a_{3\kappa;\lambda} + a_{\kappa 3;\lambda} - a_{\kappa\lambda; 3}) \delta h_{\eta\varphi} + \\ &+ a_{\lambda\kappa} \delta h_{\eta\varphi; 3} - a_{\kappa\lambda} \delta h_{\eta 3;\varphi} + a_{\kappa\lambda;\varphi} \delta h_{\eta 3}] dS; \end{aligned} \quad (3.21)_2$$

$$\delta_h L_{V_0}^Q = \oint_{(q)} [b^\varphi \varepsilon^{\kappa\eta 3} a_{3\kappa} \delta h_{\eta\varphi}]^U ds. \quad (3.21)_3$$

Térjünk vissza az átalakítások után a (3.9)-el képzett (3.13)-as variációs elvhez:

$$\delta_t L(f_{rs}, t^{kl}, a_{qp}) = \delta_t L^V + \delta_h L^T + \delta_{\bar{h}} L^T + \delta_h L^U + \delta_h L^Q + \delta_{\bar{h}} L^Q, \quad (3.22)_1$$

ahol

$$\delta_t L^V = \delta_t L_1^V, \quad (3.22)_2$$

$$\delta_h L^T = \delta_h L_0^T + \delta_h L_{V_0}^T; \quad \delta_{\bar{h}} L^T = \delta_{\bar{h}} L_1^T, \quad (3.22)_{3,4}$$

$$\delta_h L^U = \delta_h L_1^U + \delta_h L_{V_1}^U, \quad (3.22)_5$$

$$\delta_h L^Q = \delta_h L_0^Q + \delta_h L_{V_0}^Q + \delta_h L_U^Q, \quad (3.22)_6$$

$$\delta_{\bar{h}} L^Q = \delta_{\bar{h}} L_0^Q + \delta_{\bar{h}} L_T^Q. \quad (3.22)_7$$

A (3.22) egyenlet integráljaiban az integranduszok olyan szorzatok összegeiből állanak, amelyekben az egyik tényező szabadon variálható. Következésképpen tehát, hogy a (3.22) egyenlet csak akkor teljesülhet, ha a benne szereplő integrálok külön-külön zérus értékűek. Sorra véve az egyes integrálokat, és érvényesítve a 2.3 pont elején megfogalmazott alapfeltevést a feszültségfüggvény-tenzorok szerkezetére, továbbá figyelembe véve, hogy az $f_{rs}(x)$ és $h_{ed}(\xi)$ tenzorok a (2.3) képlet szerint transzformálódnak, az alábbi megállapításokat tehetjük:

a) A (3.22)₂, (3.14)₂ képlet alapján felírható $\delta_t L^V = 0$ egyenlet szerint, mivel $\delta f_{RS}(x)$ tetszőleges lehet:

$$\varepsilon^{Rkm} \varepsilon^{Slp} a_{kl;mp} = e^{RS} \quad x \in V. \quad (3.23)$$

b) A (3.22)₃, (3.9)₃ és (3.14)₃ képletek alapján felírható $\delta_h L^T = 0$ egyenlet identikusan teljesül.

c) A (3.22)₄ és (3.19)₂ alapján felírható $\delta_h L^T = 0$ egyenlet szerint, mivel $\delta v_d(\xi)$ az *St* felületrészen tetszőleges lehet:

$$\varepsilon^{3\kappa\eta} \varepsilon^{dip} a_{\kappa i; p\eta} = e^{3d} = 0; \quad \xi \in St. \tag{3.24}$$

d) A (3.22)₅, (3.20)₂ és (3.21)₂ képletek alapján felírható $\delta_h L^U = 0$ egyenlet szerint, mivel az *Su* premrészén δt^{31} , következőleg ugyanott

$$\varepsilon^{\kappa\eta 3} \varepsilon^{\lambda\vartheta 3} \delta h_{\eta\vartheta} \quad \text{és} \quad \varepsilon^{\kappa\eta 3} \varepsilon^{\lambda\theta 3} \delta h_{\eta\vartheta; 3}$$

tetszőleges lehet:

$$a_{\lambda\kappa} = \tilde{u}_{(\lambda; \kappa)} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{\lambda; \kappa} + \tilde{u}_{\kappa; \lambda}); \quad \xi \in Su, \tag{3.25}_1$$

$$a_{3\kappa; \lambda} - a_{\kappa\lambda; 3} = \tilde{u}_{3; \kappa\lambda} - a_{3\lambda; \kappa}; \quad \xi \in Su, \tag{3.25}_2$$

$$\varepsilon^{\lambda\theta 3} a_{\kappa\lambda; \vartheta} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\lambda\vartheta 3} (\tilde{u}_{\lambda; \kappa} - \tilde{u}_{\kappa; \lambda})_{; \vartheta}. \tag{3.25}_3$$

A (3.25)₃ egyenlet, amely a $\delta h_{\eta 3}$ koordináta együtthatójából következik, (3.25)₁ fennállása esetén identikusan teljesül. Nem veszítünk el tehát valóban értékes egyenletet, ha az alapfeltevésnek megfelelően a $\delta h_{\eta 3} = 0$ esetet választjuk.

e) A (3.22)₆, (3.9)₅, (3.21)₃ és (3.20)₃ képletek alapján felírható $\delta_h L^Q = 0$ egyenlet identikusan teljesül.

f) A (3.22)₇, (3.9)₅ és (3.19)₃ képletek alapján (3.18) figyelembevételével felírható az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned} \delta_h L^Q = & \oint_{(q)} [(b^\vartheta a_{\vartheta i} \delta w^i)^T + (b^\vartheta \varepsilon^{ldp} a_{\vartheta l; p} \delta v_d)^T + \\ & + b^\eta (\tilde{u}_i)^U (\delta w^i_{; \eta})^T - b^\theta (\tilde{u}_{3; \kappa} - a_{3\kappa})^U \varepsilon^{\kappa\eta 3} (\delta v_{\eta\vartheta} + \varepsilon_{\eta\vartheta 3} \delta w^3)^T + \\ & + b^\theta (\tilde{u}_{[b; \kappa]})^U \varepsilon^{\kappa\eta 3} (\delta v_{3; \eta} + \varepsilon_{3\eta\vartheta} \delta w^\vartheta)^T] ds = 0, \end{aligned} \tag{3.26}$$

A (3.26) egyenlet további átalakításánál figyelembe vesszük az alábbi azonosságot:

$$\tilde{u}_{[b; \kappa]} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{\vartheta; \kappa} - \tilde{u}_{\kappa; \vartheta}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{\vartheta\kappa 3} \varepsilon^{\alpha\beta 3} \tilde{u}_{\alpha; \beta}. \tag{3.27}$$

A *q* görbén vett integrálások és átrendezés után végül is adódik:

$$\begin{aligned} \delta_h L^Q = & \oint_{(q)} \left[\{ (b^\vartheta a_{\vartheta\lambda})^T - [\tilde{u}_{(\lambda; \vartheta)} b^\vartheta]^U \} \delta w^\lambda + \right. \\ & + \{ (b^\vartheta a_{\vartheta 3})^T - (b^\vartheta a_{3\vartheta})^U \} \delta w^3 + \\ & + \{ [\varepsilon^{\kappa\eta 3} b^\vartheta (a_{\vartheta\kappa; 3} - a_{\vartheta 3; \kappa})]^T - [\varepsilon^{\kappa\eta 3} b^\vartheta (a_{3\kappa; \vartheta} - \tilde{u}_{3; \kappa\vartheta})^U \} \delta v_\eta + \\ & \left. + \left\{ -[\varepsilon^{\kappa\eta 3} b^\vartheta a_{\vartheta\kappa; \eta}]^T + \left[\frac{1}{2} \varepsilon^{\kappa\eta 3} \tilde{u}_{\kappa; \vartheta} b^\vartheta \right]^U \right\} \delta v_3 \right] ds = 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

A (3.28) egyenlet szerint, mivel δw^1 és δv_e a q görbén tetszőleges lehet fennállnak az alábbi egyenletek:

$$(b^\nu a_{\nu\lambda})^T = [b^\nu \tilde{u}_{(\nu;\lambda)}]^U; \quad \xi \in q, \quad (3.29)_1$$

$$(b^\nu a_{\nu 3})^T = (b^\nu a_{3\nu})^U; \quad \xi \in q, \quad (3.29)_2$$

$$[b^\nu \varepsilon^{\nu\eta 3} (a_{\nu\kappa; 3} - a_{\nu 3;\kappa})]^T = [b^\nu \varepsilon^{\nu\eta 3} (a_{3;\nu} - \tilde{u}_{3;\nu})]^U; \quad \xi \in q, \quad (3.29)_3$$

$$[b^\nu \varepsilon^{\nu\eta 3} a_{\nu\kappa;\eta}]^T = \frac{1}{2} [\varepsilon^{\nu\eta 3} \tilde{u}_{\kappa;\nu\eta} b^\nu]^U; \quad \xi \in q. \quad (3.29)_4$$

Amennyiben a (3.3) funkcionálban és a (3.13) variációs elvben az $e^{RS} = 0$ helyettesítéssel élünk, a (3.13) variációs elvből előállított egyenletek az alábbi értelmet nyerik:

- a (3.23) egyenlet megfelel a duál rendszer (2.6)₁ kompatibilitási mező-egyenletének;
- a (3.24) egyenlet megfelel a duál rendszer (2.6)₂ kompatibilitási peremfeltételének az *St* peremrészen;
- a (3.25) egyenletek megfelelnek a duál rendszer (2.6)_{3,4} elmozdulási peremfeltételének az *Su* peremrészen. Utóbbiakból (2.8) és (2.9) szerint következik, hogy a kompatibilitási peremfeltétel az *Su* peremrészen is teljesül.

Összefoglalóan megállapíthatjuk a 3.7 pont eredményei alapján, hogy a (3.3) duál funkcionál variációiból a teljes (2.4)—(2.6) duál egyenletrendszer következik.

A (3.29) egyenletek (3.25) figyelembevételével azt fejezik ki, hogy az elmozdulásmező és a forgásmező görbe menti deriváltja, következésképpen maga az elmozdulásmező és a forgásmező is a q görbén az *Su* peremrésztől nézve ugyanaz, mint az *St* peremrésztől nézve.

3.8 A (3.4) duál funkcionállal képzett

$$\delta_a M(f_{rs}, a_{pq}) = 0, \quad (3.30)$$

$$\delta_t M(f_{rs}, a_{pq}) = 0 \quad (3.31)$$

duál variációs elvekből, a 3.6—3.7 pontok gondolatmenetének megismétlésével az anyagtörvény kivételével a teljes duál egyenletrendszer nyerhető. Ennek részletezésétől eltekintünk.

3.9 Az anyagtörvény és a (2.4)_{1, 2} egyenletek teljesülését feltételező (3.6)₂ duál funkcionálhoz a

$$\delta_t K(f_{rs}) = 0 \quad (3.32)$$

duál variációs elv tartozik.

Az $e^{rs} = 0$ helyettesítéssel $K(f_{rs})$ a teljes kiegészítő energiát adja, és (3.32) nem más, mint a Castigliano-féle variációs elv (a kiegészítő energia minimuma elv). A továbbiakban $e^{rs} = 0$.

Elhagyva a megkülönböztető f jelölést, (3.6)₂ alapján a

$$\delta K(f_{rs}) = \delta K_0^V + \delta K_0^U = 0 \quad (3.33)_1$$

egyenlet írható fel, ahol (3.6)_{3,5} és (3.1) szerint

$$\delta K_0^V = \delta K^V + \delta K_{V_0}^T + \delta K_{V_0}^U, \quad (3.33)_2$$

$$\delta K^V = \int_{(V)} \varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} a_{kl;mp} \delta f_{rs} dV, \quad (3.33)_3$$

$$\delta K_{V_0}^T = \int_{(St)} \varepsilon^{\alpha\eta\beta} (\varepsilon^{ldp} a_{\alpha l} \delta h_{\eta d;p} - a_{\alpha l;p} \delta h_{\eta d}) dS, \quad (3.33)_4$$

$$\delta K_{V_0}^U = \int_{(Su)} \varepsilon^{\alpha\eta\beta} \varepsilon^{ldp} (a_{\alpha l} \delta h_{\eta d;p} - a_{\alpha l;p} \delta h_{\eta d}) dS, \quad (3.33)_5$$

továbbá (3.6)₄, (3.3)₄, (3.9)₄ és (3.20) szerint

$$\delta K_0^U = \delta_h L_0^U = \delta_h L_1^U + \delta_h L_0^Q. \quad (3.33)_6$$

Jelen esetben az St peremrészen rögzítettek a $\tilde{h}_{ed}(\xi^1, \xi^2)$ és $\tilde{h}_{\eta\phi;3}(\xi^1, \xi^2)$ függvények, a $h_{ed}(\xi)$ variációknak tehát a (3.6)₁-ből következő alábbi egyenletnek kell eleget tenniük:

$$\varepsilon^{\alpha\eta\beta} \varepsilon^{ldp} \delta h_{\eta d;p} = 0.$$

Összevetve a legutóbbi egyenletet (3.15)-el, megállapíthatjuk, hogy a (3.33)₄ kifejezés átalakítása ugyanúgy történhetik, mint a (3.9)₃ képlet második tagjává. Írhatók tehát — (3.19)-et is figyelembe véve — az alábbi egyenletek:

$$\delta K_{V_0}^T = \delta_h K_1^T + \delta_h K_T^Q, \quad (3.34)_1$$

ahol

$$\delta_h K_1^U = \delta_{\tilde{h}} L_1^T \quad \text{és} \quad \delta_h K_T^Q = \delta_{\tilde{h}} L_T^Q. \quad (3.34)_2,3$$

Hasonlóan adódik (3.33)₅ és (3.14)₃ összetevéséből, (3.21) figyelembevételével, hogy

$$\delta K_{V_0}^U = \delta_h L_{V_0}^U = \delta_k L_{V_1}^U + \delta_h L_{V_0}^Q. \quad (3.34)_4$$

Az átalakítások eredményeként a (3.32) variációs elv a következőképp írható fel:

$$\begin{aligned} \delta K(f_{rs}) = & \delta K^V + \delta_h K^T + \delta_h L_{V_1}^U + \delta_h L_1^U + \\ & + \delta_h K_T^Q + \delta_h L_0^Q + \delta_h L_{V_0}^Q = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Mivel a (3.35) egyenlet V , St , Su és q tartományon vett integráljai külön-külön zérusnak vehetők, érvényesnek tekintve ismét a 2.3 pont elején megfogalmazott alapfeltevést a feszültségfüggvény-tenzor szerkezetére, valamint a (2.3) transzformációs képletet is, az alábbi megállapításokat tehetjük:

a) A (3.33)₃ képlet alapján felírható $\delta K^V = 0$ egyenlet szerint, mivel $\delta f_{RS}(x)$ tetszőleges lehet:

$$\varepsilon^{Rkm} \varepsilon^{Sp} a_{kl;mp} = 0; \quad x \in V. \quad (3.36)$$

b) A (3.34) és a (3.19)₂ képletek alapján felírható $\delta K^T = \delta K_1^T = \bar{h}L_1^T = 0$ egyenlet szerint, mivel $\delta v_d(\xi)$ az St felületrészén tetszőleges lehet:

$$\varepsilon^{3\alpha\eta} \varepsilon^{ldp} a_{\alpha l;p\eta} = 0; \quad \xi \in St. \quad (3.37)$$

c) A (3.21)₂, (3.20)₂ és (3.22)₅ képletek alapján felírható $\delta K^U = \delta_h L^U = \delta_h L_{V_1}^U + \delta_h L_1^U = 0$ egyenlet szerint, az Su peremrészén fennállnak a (3.25) képletek.

d) A (3.34)₃, (3.19)₃, (3.20)₃ és (3.21)₃ képletek alapján felírható az alábbi egyenlet:

$$\begin{aligned} \delta K^Q &= \delta_h K_T^Q + \delta_h L_U^Q + \delta_h L_{VU}^Q = \\ &= \oint_{(q)} \{ (b^\nu a_{\nu l} \delta w^l)^T + (b^\nu \varepsilon^{ldp} a_{\nu l;p} \delta v_d)^T - \\ &- (b^n \bar{u}_1 \varepsilon^{ldp} \delta h_{\eta d;p})^U - \\ &- [b^\nu \varepsilon^{\alpha\eta\beta} (\bar{u}_{3;\alpha} - a_{3\alpha}) \delta h_{\eta\beta}]^U + \\ &+ [b^\nu \varepsilon^{\alpha\eta\beta} \bar{u}_{[\beta;\alpha]} \delta h_{\eta\beta}]^U \} ds = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Feltételezve ezek után, hogy a q görbén

$$(\varepsilon^{ldp} \delta h_{\eta d;p})^U = (\varepsilon^{ldp} \delta h_{\eta d;p})^T \quad \xi \in q, \quad (3.39)_1$$

$$(\delta h_{\eta d})^U = (\delta h_{\eta d})^T \quad \xi \in q, \quad (3.39)_2$$

és figyelembe véve a (3.18) kifejezéseket, rögtön látszik a (3.38) és (3.26) egyenletek azonossága. Fennállnak tehát a (3.38) egyenlethől következően a q görbén a (3.29) egyenletek is.

A 3.9 pont eredményei alapján összefoglalóan megállapíthatjuk, hogy a (3.6) szerinti funkcionállal képzett a $\delta K = 0$ duál variációs elvből a duál rendszer kompatibilitási feltételei, vagyis az

$$a_{pq} = c_{pqkl} (\varepsilon^{krm} \varepsilon^{lsp} f_{rs;mp} + i^{kl})$$

alakváltozásmező kompatibilitásának feltételei adódnak. Ezek: a (3.36) kompatibilitási mezőegyenletek, a (3.37) kompatibilitási peremfeltétel az St peremrészén, valamint a kompatibilitási peremfeltételt teljesítő (3.25) elmozdulási peremfeltétel az Su peremrészén.

IRODALOM

1. FINZI, B.: Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. *Rend. Lincei*, Ser. 6., **19** (1934), 578—584; 620—623
2. БЛОХ, В. И.: Функций напряжений в теории упругости. *Прикл. Мех.*, **14** (1950), 415—422
3. SOUTHWELL, R. V.: Castigliano's Principle of Minimum Strain-Energy and the Conditions of Compatibility for Strain. S. Timoshenko 60th Anniversary Volume, The MacMillan Co., 1938
4. TONTI, E.: Variational Principles in Elastostatics. *Meccanica*, **2** (1967), pp. 201—208
5. ODEN, J. T.—REDDY, J. N.: On Dual-Complementary Variational Principles in Mathematical Physics. *Int. J. Engng. Sci.*, **12** (1974), 1—29
6. АБОВСКИЙ, Н. Р.—АНДРЕЕВ, Н. Р.—ДЕРУГА, А. П.: Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. Изд. „Наука“, Москва, 1978
7. WASHIZU, K.: A Note on the Conditions of Compatibility. *Journal of Mathematics and Physics*, **36** (1957), No 4., 306—312
8. KOZÁK, I.: Notes on the Field Equations with Stresses and on the Boundary Conditions in the Linearized Theory of Elastostatics. *Acta Techn. Hung.*, Tomus **90** (3—4), 221—245
9. KOZÁK, I.: Determination of Compatibility Boundary Conditions in Linear Elastostatics with the Aid of the Principle of Minimum Complementary Energy. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industrie*, Ser. D. Natural Sciences, **33** (1978), 89—112.
10. TONTI, E.: A Mathematical Model for Physical Theories. *Rend. Accad. Lincei*, **52** (1972), 175—181, 350—356

Remarks and Contributions to the Variational Principles of the Linear Elastostatics in Terms of Stress Functions. Dual functionals wherein only three coordinates (suitably selected) of the stress-function tensor differ from zero are interpreted which also permit the analysis in detail of the boundary conditions. The dual functionals defined by the variation of the stress-function tensor yield three compatibility field-equations and the compatibility boundary condition as a necessary and sufficient condition of the compatibility of the deformation field.

Bemerkungen und Beiträge zu den Variationsprinzipien der linearen Elastostatik, aufgeschrieben mit Hilfe von Spannungsfunktionen. Dualfunktionale werden definiert, worin nur drei (in geeigneter Weise ausgewählte) Koordinaten des Tensors der Spannungsfunktionen nicht gleich Null sind und die auch eine ausführliche Untersuchung der Randbedingungen gestatten. Aus den definierten Dualfunktionen durch eine Variation des Tensors der Spannungsfunktionen ergeben sich drei Kompatibilitätsfeldgleichungen und die Kompatibilitätsrandbedingung, als die notwendigen und ausreichenden Bedingungen der Kompatibilität des Verzerrungsfeldes.

AZ ÍVSZERŰEN MŰKÖDŐ HIPERBOLIKUS PARABOLOID NYEREGHÉJ STABILITÁSA

DULÁCSKA ENDRE*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

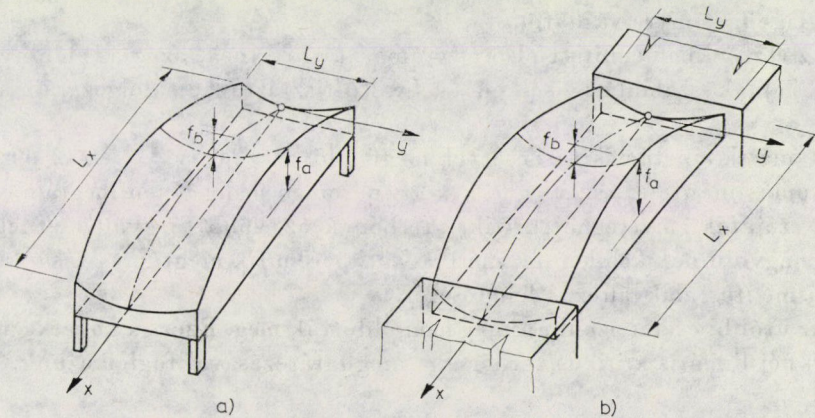
[Beérkezett: 1980. márc. 14.-én]

A dolgozat a két szembenlevő oldalán félmerev peremívvel merevített, másik két szembenlevő oldalán fixen megtámasztott, egyenletes teherrel terhelt nyereghéj lineáris kritikus terhét határozza meg. A horpadási alak mindig két szinuszos alak olyan kombinációjából adódik, amely mellett a fix peremeken nem lép fel elmozdulás. A kritikus teher számításához szükséges együtthatót, a leggyakoribb arányokra kiszámítva, táblázatos formában közli, és így lehetőséget nyújt egyszerű stabilitásvizsgálatra.

1. Bevezetés

A nyeregfelületű héjakat tetszetős alakjuk, és az egyenes deszkázattal végrehajtható zsaluzási lehetőségük miatt szívesen alkalmazzák nagyobb terek lefedésére (1. ábra). E héjakat kétféle megtámasztási móddal szokták kialakítani.

Az egyik megtámasztási mód esetében a héjnak mind a négy ($x = 0$, $x = L_x$, $y = \pm L_y/2$) peremét csak a saját síkjában merev, oldalnyomást felvenni nem tudó, úgynevezett félmerev peremtartóval támasztják meg (lásd az 1a ábrát). Az így megtámasztott nyereghéj membránfeszültségi állapotát



1. ábra. A nyereghéj szokásos megtámasztásmódjai

* Dr. Dulácska Endre 1122 Budapest, Ráth György u. 64

AIMOND [1] határozta meg. A membránelmélet érvényességi tartományát erre a megtámasztási módra JANKÓ [6] vizsgálta, és megállapította, hogy $2 \leq f_a/f_b \leq 4$ arányú héjak esetében a héj a tehernek legalább 95%-át membrán-erőkkel hordja.

A másik megtámasztási mód esetében a héjat az $x = 0$ és $x = L_x$ peremeken mereven megtámasztják, a másik két peremét pedig félmerev peremtartókkal merevítik. Fel szokták tételezni, hogy a héj membránállapotban dolgozik, és erőjátéka egyenletesen megoszló teher esetében egy egyszerű ívtartónak megfelelő x irányú átholtozódás. Erre HRUBAN mutat példát [5]. Ez a megtámasztási mód azonban statikailag határozatlan. Az $x = 0$ és $x = L_x$ peremeken az összes peremfeltételt csak a hajlításmélet segítségével lehet kielégíteni. Számpéldában az $f_a/f_b = 1$ és 4 szélső esetekre megvizsgáltuk, hogy az így megtámasztott héjnak a hajlításmélettel meghatározott erőjátéka mennyire tér el a feltételezett ívszerű erőjátéktól. Azt találtuk, hogy a héj az egyenletesen megoszló tehernek legalább a 98%-át ívszerű membrán-erőkkel hordja, és a peremfeltételek kielégítése érdekében fellépő hajlítások következtében a membrán-erők megváltozása 1%-nál kisebb. Így azt mondhatjuk, a második megtámasztási mód esetében a feltételezett ívszerű erőjáték jól megközelíti a tényleges erőjátékot.

A nyereghéjak alkalmazásának első időszakában úgy vélték, hogy a hiperbolikus paraboloidnak, mint ki nem fejthető felületnek a kritikus terhe jelentős, és ezért nem igen foglalkoztak vele. Behizonyosodott azonban a gyakorlatban, hogy nagyobb méretű héjak tönkremenetelét stabilitásvesztés is okozhatja [2]. A vizsgálatok során az is kiderült, hogy az oldalnyomás mentesen megtámasztott héj nyúlásmentes alakváltozásra is képes [4]. Ilyenkor nincs szerepe a membrán merevségnek, és a héj nem merevebb, mint egy hasonló méretű síklemez. Ezért a nyúlásmentes alakhoz tartozó kritikus teher viszonylag alacsonyra várható.

Az előzőekben említett első megtámasztási esetnek, azaz az oldalnyomás mentes héjnak stabilitási viselkedését JANKÓ tisztázta két dolgozatában [7], [8].

A második megtámasztási esetnek megfelelő, azaz az $y = \pm L_y/2$ peremen oldalnyomás mentesen, az $x = 0$, $x = L_x$ peremen pedig fixen megtámasztott ívszerű erőjátékú nyereghéj kritikus terhének az előbb tárgyalt esetnél várhatóan nagyobbak kell lennie, mert a két perem fix megtámasztása kizárja a nyúlásmentes alakváltozás lehetőségét.

Az utóbbi esetet azonban még nem oldották meg. Ezért a következőkben az ilyen héj lineáris kritikus terhének a meghatározásával foglalkozunk.

2. Feltevések

Vizsgálatainkban feltesszük, hogy a héj lapos és anyaga lineárisan rugalmas.

A héj stabilitását a lineáris horpadásmélet alapján vizsgáljuk. Az alkalmazott jelöléseket a 2. ábrán mutatjuk be.

A számításokban a membránerők okozta, horpadás előtti alakváltozást elhanyagoljuk.

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a héjat egyenletesen megoszló z irányú függőleges p teher terheli. Feltesszük, hogy a héj membránállapotban van, és a p teher hatására a héjban

$$n_x = \frac{pL_x^2}{8f_a}; \quad n_y = 0, \quad n_{xy} = 0, \quad (1)$$

metszeterők keletkeznek, azaz a héj az x irányban ívtartóként dolgozik.

A héj középfelületét a

$$z = + \frac{x^2}{2R_x} - \frac{y^2}{2R_y} - \frac{L_x x}{2R_x} \quad (2)$$

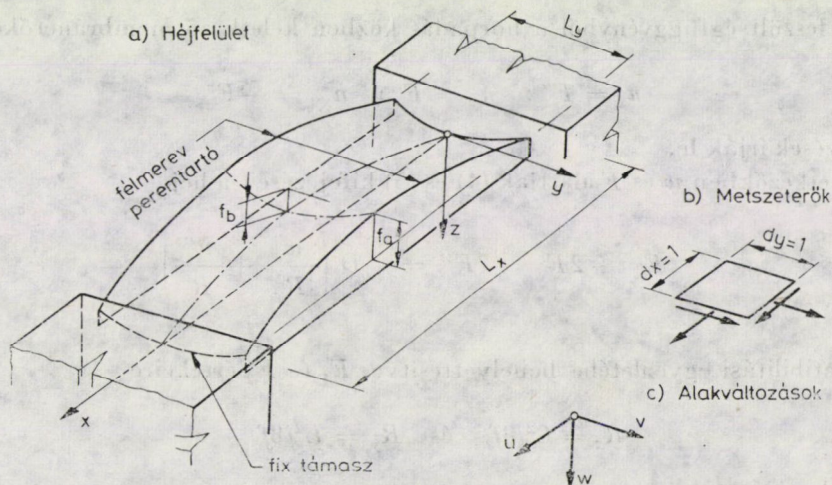
kifejezéssel írjuk le.

A figyelembe vett kerületi feltételek a következők:

az $y = \pm L_y/2$ peremen: $w = w'' = n_y = u' = 0$,

és $x = 0, x = L_x$ peremen: $w = w'' = u = v' = 0$.

Itt ' -vel, ill. '' -tal jelöltük az x , ill. y szerinti deriválást, és u, v, w , a 2. ábrán jelölt elmozduláskomponensek.



2. ábra. A mozdulatlan megtámasztású nyereghéj és jelölései

3. A horpadás feltételi egyenletei

A héj horpadásának differenciálegyenlete [3] szerint:

$$B\Delta\Delta\Delta\Delta w + p\Delta\Delta w + D \left(\frac{w''}{R_x^2} - \frac{2w'''}{R_x R_y} + \frac{w^{IV}}{R_y^2} \right) = 0, \quad (3)$$

ahol B , ill. D a hajlítási, ill. a nyúlási merevség, Δ pedig a Laplace-operátor.

Ézt az egyenletet egy x , ill. y irányú \sin , illetve \cos függvényt szorzat elégíti ki. A peremfeltételek kielégítéséhez két ilyen szorzatot úgy kell választanunk, hogy a fix peremeken az egyikből bekövetkező pozitív, és a másikkól bekövetkező negatív elmozdulás együttesen zérus lehessen. Így a (3) differenciál-egyenletnek az $x = 0, L_x$ peremeken előírt $u = 0$ kerületi feltételt kielégítő sajátfüggvénye a következő:

$$w = \cos \frac{n\pi}{L_y} y \left(A_1 \sin \frac{m_1 \pi}{L_x} x + A_2 \sin \frac{m_2 \pi}{L_x} x \right). \quad (4)$$

Az ehhez tartozó feszültségfüggvény:

$$F = D \cos \frac{n\pi}{L_y} y \left(A_1 F_1 \sin \frac{m_1 \pi}{L_x} x + A_2 F_2 \sin \frac{m_2 \pi}{L_x} x \right). \quad (5)$$

Az előzőekben $m = 1, 2, 3, \dots, n = 1, 2, 3, \dots, A_1, A_2, F_1, F_2$ pedig állandók.

Az F feszültségfüggvényből a horpadás közben keletkező membránereket az

$$n_x = F''; \quad n_y = F''; \quad n_{xy} = -F'' \quad (6)$$

kifejezések írják le.

A következőkben w és F alattiak (4) és (5) kifejezéseit a héj

$$F^{IV} + 2F'''' + F'' = -D \left(\frac{w''}{R_y} + \frac{w''}{R_x} \right) \quad (7)$$

kompatibilitási egyenletébe behelyettesítve, F_1 és F_2 értékeire

$$R_x = L_x^2/8f_a \quad \text{és} \quad R_y = L_y^2/8f_b$$

figyelembevételével a következőket kapjuk:

$$F_1 = \frac{\frac{m_1^2 \pi^2 8f_b}{L_x^2 L_y^2} - \frac{n^2 \pi^2 8f_a}{L_y^2 L_x^2}}{\left(\frac{m_1^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_y^2} \right)^2}, \quad (8)$$

$$F_2 = \frac{\frac{m_2^2 \pi^2 8f_b}{L_x^2 L_y^2} - \frac{n^2 \pi^2 8f_a}{L_y^2 L_x^2}}{\left(\frac{m_2^2 \pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L_y^2} \right)^2} \quad (9)$$

Az A_1 és A_2 amplitúdók összetartozó értékeit az $u|x=L_x^0|=0$ kerületi feltétel

$$u = \int \left(\frac{F''}{D} - \frac{xw'}{R_x} \right) dx = 0 \quad (10)$$

egyenletéből kell meghatározni [3].

Behelyettesítve F és w megfelelő differenciálhányadosait, azt kapjuk, hogy

$$\frac{A_2}{A_1} = - \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_1^2 \pi^2 F_1 - 1}{m_2^2 \pi^2 F_2 - 1}. \quad (11)$$

A többi kerületi feltételt a w és F függvények automatikusan kielégítik.

4. A kritikus teher meghatározása

A kritikus teher meghatározása ezekután a következőképpen történhetik. Felvesszük az $n = 1, 2, 3 \dots$ értékeket, és két m értéket (m_1 és m_2) az $m = 1, 3, 5 \dots$ (szimmetrikus alak) vagy az $m = 2, 4, 6 \dots$ (antimetrikus alak) értéksorból. A felvett n , m_1 és m_2 értékkel kiszámítjuk F_1 és F_2 értékeit a (8) és (9) összefüggésekből, majd (11)-ből meghatározzuk az A_2/A_1 -et. A_1 -re tetszés szerinti értéket, praktikusán 1,0-et főlvéve, a (4) egyenlet w -t meghatározza. Majd w -nek a szükséges deriváltjait behelyettesítve a (3) horpadási differenciálegyenletbe, és a felvett n , m_1 és m_2 -höz tartozó kritikus terhet meghatározzuk.

A leírt számítást sok n , m_1 és m_2 értékkel meg kell ismételnünk, és a kiadódó kritikus terhekből a legkisebb lesz a hég mértékadó kritikus terhe.

A kritikus teher felírható

$$p_{cr}^{lin} = c \sqrt{12} \frac{\sqrt{BD}}{R_x R_y} \simeq c \sqrt{BD} \frac{222 f_a f_b}{L_x^2 L_y^2} \quad (12)$$

formában. Ha a harántkontrakciós tényezőt elhanyagoljuk, és vizsgálatainkat homogén héjlemezre korlátozzuk, akkor a $B = Et^3/12$ és $D = Et$ helyettesítéssel a (12) formulát a következő alakra hozhatjuk:

$$p_{cr}^{lin} = c \frac{Et^2}{R_x R_y} \quad (13)$$

A stabilitásvizsgálat megkönnyítése céljából a gyakorlatban szokásos geometriai arányok esetére elvégeztük a fent leírt számítást és kiszámítottuk a legkisebb kritikus terhet meghatározó c tényezőket. Ezeket az 1. táblázatban közöljük. Az értékek egy alulról domború csipkegörbe pontjai, ezért a lineáris

1. táblázat

C értékei

$8f_b/t$	100						
	$L_x/L_y =$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$f_a/f_b =$ 0,5		0,564	0,344	0,282	0,195	0,166	0,182
1,0		0,580	0,412	0,266	0,246	0,191	0,141
1,5		0,585	0,421	0,276	0,233	0,233	0,163
2,0		0,586	0,444	0,318	0,224	0,215	0,192
2,5		0,585	0,464	0,331	0,228	0,202	0,211
3,0		0,585	0,479	0,345	0,237	0,199	0,198
3,5		0,585	0,492	0,369	0,261	0,201	0,196
4,0		0,584	0,501	0,379	0,260	0,205	0,186

$8f_b/t$	200						
	$L_x/L_y =$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$f_a/f_b =$ 0,5		0,481	0,294	0,200	0,188	0,129	0,113
1,0		0,516	0,339	0,227	0,157	0,159	0,133
1,5		0,535	0,355	0,231	0,175	0,141	0,150
2,0		0,546	0,390	0,234	0,194	0,139	0,135
2,5		0,552	0,395	0,262	0,202	0,144	0,129
3,0		0,557	0,409	0,266	0,198	0,163	0,130
3,5		0,560	0,423	0,276	0,210	0,167	0,130
4,0		0,563	0,437	0,295	0,207	0,186	0,129

$8f_b/t$	300						
	$L_x/L_y =$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
$f_a/f_b =$ 0,5		0,459	0,259	0,182	0,141	0,137	0,094
1,0		0,497	0,282	0,180	0,143	0,126	0,158
1,5		0,519	0,310	0,202	0,158	0,120	0,112
2,0		0,533	0,344	0,220	0,161	0,127	0,105
2,5		0,543	0,353	0,230	0,163	0,144	0,113
3,0		0,549	0,374	0,251	0,165	0,141	0,121
3,5		0,554	0,395	0,248	0,184	0,139	0,121
4,0		0,558	0,416	0,259	0,184	0,147	0,126

$$p_{cr}^{lin} = c \frac{Et^2}{R_x R_y} = c Et^2 \frac{64 f_a f_b}{L_x^2 L_y^2}$$

interpoláció a biztonság rovására közelít. Javasolható a kiszámított pontokon átmenő görbe grafikus felrajzolása, és a közbenső értékeknek e görbéről történő leolvasása.

Ha összehasonlítjuk az $X = 0$ és $x = L_x$ peremen fix megtámasztású, boltozatszerűen dolgozó nyereghéj kritikus terheit az oldalnyomásmentes héj [7] szerinti kritikus teherértékeivel, megállapíthatjuk, hogy a peremek fix megtámasztása a kritikus erőt jelentősen megnöveli.

IRODALOM

1. AIMOND, F.: Etude statique des voiles minces paraboloides hyperboliques travaillant sans flexion. *AIPC Mémoires*, 4 (1936) Zürich
2. BELES, A. A.—SOARE, M.: Paraboloidul eliptic și hiperbolic în construcții. Editura Acad. R. S. R. (1964) București
3. DULÁCSKA, E.: Vibration and Stability of Anisotropic Shallow Shells. *Acta Techn. Hung.* 65 (1969) 225—260.
4. GEYLING, F. T.: A General Theory of Deformations of Membrane Shells. Diss. Stanford University, Stanford, Calif. (1953)
5. HRUBAN, K.: Der Biegetheorie der Translations Flächen und ihre Anwendung in Hallenbau. *Acta Techn. Hung.* 7 (1953) 425—464
6. JANKÓ, L.: Analyse des Verhältnisses zwischen Membran- und Biegeschnittkräften in sattelförmigen, flachen, normalkraftfrei gelagerten HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung. *Acta Techn. Hung.* 91 (1980).
7. JANKÓ, L.: Untersuchung der Stabilität sattelförmiger, flacher, normalkraftfrei gelagerter HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung. *Acta Techn. Hung.* 91 (1980).
8. JANKÓ, L.: Untersuchung der Gleichgewichtszustände sattelförmiger, flacher, normalkraftfrei gelagerter HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung, mit besonderer Berücksichtigung des Durchschlagens und der Abzweigung. *Acta Techn. Hung.* 91 (1980).

Buckling of the Saddle-Shaped Hypar Shell Acting Like an Arch. The paper presents the determination of the linear critical load of the uniformly loaded saddle-shaped hyperbolic paraboloid shell stiffened along two opposite edges by diaphragms rigid only in their own planes, while rigidly supported in all directions along the other two edges. The buckled shape always consists of a combination of two sine functions which make the displacement vanish along the rigidly supported edges. The numerical values of the coefficients necessary to compute the critical loads are given in a table, facilitating practical computations.

Stabilität einer als Bogen funktionierenden sattelförmigen hyperbolischen Paraboloidschale. Behandelt wird die Ermittlung der linearen kritischen Last eines mit gleichmäßig verteilten Belastung beanspruchten sattelförmigen Flächentragwerks, welches an den zwei einander gegenüber liegenden Seiten mit halbsteifen Randbögen versteift, und an den anderen zwei einander gegenüber liegenden Seiten fest aufgelagert ist. Die Beulungsform gestaltet sich in jedem Fall aus einer derartigen Kombination zweier Sinusformen, wo auf den fest aufgelagerten Rändern keine Verschiebung auftritt. Die zur Berechnung der kritischen Last erforderlichen Koeffizienten, gerechnet für die am häufigsten vorkommenden Proportionen, werden in einem tabellarischen Form angegeben, wodurch die Stabilitätsrechnungen einfach durchgeführt werden können.

A DISZKONTINUITÁST HORDOZÓ MOZGÓ FELÜLET SZEREPE A MECHANIKAI VIZSGÁLATOKBAN

HELYZETKÉP

BÉDA GYULA*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

A mechanikai kutatások előterébe egyre több olyan vizsgálat kerül, amelyhez véges számú felületen diszkontinuitásokat mutató függvények szükségesek. Erre vonatkozó általános matematikai összefüggések ismertetése után a mechanikai vizsgálatok néhány irányát sorolja fel a dolgozat.

1. Bevezetés

Az elmúlt húsz évben sűrűsödnek azok a kontinuum-mechanikai szakcikkek, amelyek vizsgálataikat mozgó diszkontinuitást hordozó felületek felhasználásával végezték. R. HILL 1961-ben megjelent [1] cikkében felhívta a figyelmet arra, hogy a mechanikai kutatások során a jövőben mind inkább várható azoknak a jelenségeknek a vizsgálata, amelyeknél diszkontinuitás jelentkezik egy meghatározott $\varphi(x_i, t) = 0$ felületen valamely mezőfüggvényben vagy deriváltjaiban. A mezőfüggvények, illetve deriváltjaik diszkontinuitását és az azt hordozó $\varphi = 0$ felület kapcsolatának szabatos matematikai leírását először J. HADAMARD adta meg 1903-ban megjelent könyvében [2]. A HADAMARD által felépített matematikai eljárás középpontjában egy tőle származó lemma áll. A lemma megfogalmazása előtt vezessünk be néhány jelölést. Az x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) független változóból az első három x_i Descartes-féle koordináták és az $x_4 = t$ az idő. Így a diszkontinuitást hordozó felület egyenlete $\varphi(x_i) = 0$. Legyen a mezőfüggvény f . A mezőfüggvény diszkontinuitása (ugrása) a φ mentén legyen $[f] = f^+ - f^-$, ahol f^+ a φ felület egyik f^- pedig a másik oldaláról a φ -hez közeledve a függvény értéke. Hasonlóképpen

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^+ - \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^-$$

az f deriváltjában az ugrás a φ mentén.

A bevezetett jelölésnek megfelelően az $[f] = 0$ a mezőfüggvény folytonosságát jelenti a $\varphi(x_i) = 0$ felületen.

* Prof. Dr. Béda Gyula BME Műszaki Mechanikai Tanszék.

A Hadamard-lemma a következő. Legyen $f(x_i)$ egy tenzor-értékű függvény adott és legyen folytonosan differenciálható a φ két oldalán. Ha a $\varphi(x_i) = 0$ sima felületen $x_i = x_i(s)$ egy sima görbe, akkor az $[f] = 0$ esetben

$$\frac{df}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^+ \frac{dx_i}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^- \frac{dx_i}{ds},$$

azaz

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] \frac{dx_i}{ds} = 0.$$

Most, és később is, ha két index egybeesik, akkor az index szerint összegezni kell.

A következőkben a felírás rövidítése végett vezessük még be az

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$$

jelölést.

Az $x_i(s)$ görbe a φ felületi görbe, ezért

$$\varphi_{,i} \frac{dx_i}{ds} = 0.$$

Ezt összevetve, a lemma $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} \right] = [f_{,i}]$ -re vonatkozó megkötésére, az

$$[f_{,i}] = \lambda \varphi_{,i} \quad (1)$$

képletet kapjuk.

Az (1) képlet olyan diszkontinuitások esetében érvényes, amelynél f folytonos a φ -t átlépve, de első deriváltjában ugrás lép fel. Ha a mezőfüggvények a ρ tömegsűrűség, a v_i részecske-sebesség, a δ_{ij} feszültségtenzor és az ε_{ij} alakváltozási tenzor, akkor abban az esetben, amikor csak a mezőfüggvények első deriváltjaiban van diszkontinuitás, gyorsulás-hullámról beszélünk.

Nézzük meg, hogy ha egy kontinuumban gyorsulás-hullámot keltünk, milyen általános következtetésre juthatunk.

2. Az összenyomhatatlan közegben kelthető gyorsuláshullám

Már HADAMARD megállapította [2], hogy az összenyomhatatlan közegben longitudinális hullám nem kelthető. Ezt a következő módon láthatjuk be. A $\varphi(x_i) = 0$ hullámfront mentén a ρ sűrűség és a v_i sebesség deriváltjait, a közegre felírt kontinuitási egyenlet és az (1) alapján, összekapcsolhatjuk. Ha a kontinuitási egyenlet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \rho_{,i} + \rho v_{i,i} = 0,$$

az (1)-nek megfelelően $[\varrho, t] = \beta\varphi, t$, $[v, i, j] = v_i\varphi, j$, akkor a keresett kapcsolat

$$\beta\varphi, 4 + (v_i\beta + \varrho v_i)\varphi, i = 0. \tag{2}$$

Ha a közeg összenyomhatatlan, akkor $\beta \equiv 0$, vagyis

$$\varrho v_i \varphi, i = 0.$$

ami azt jelenti, hogy vagy nem keletkezik hullám, vagy a hullámfront normálisa és a sebesség hullám v_i amplitúdója merőlegesen egymásra, vagyis tranzverzális hullám jön létre.

Tegyük fel, hogy a közeg olyan, hogy abban csak $\sigma_{ij} = p \cdot \delta_{ij}$ feszültségi állapot keletkezhetik.

(Itt $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$). A (2) mellett vegyük még figyelembe a mozgásegyenletet is, amely a φ mentén a v_i és p deriváltjait kapcsolja össze. Ezzel és az (1)-gyel, ha

$$[\sigma_{ij}, j] \equiv [p, i] = \pi p, i : \\ \varrho v_i \varphi, 4 = \pi \varphi, i v_i. \tag{3}$$

A (2) és (3) összevetéséből

$$\beta a^2 - \beta v_i n_i a + \pi = 0,$$

ahol, a hullám terjedési sebessége és n_i pedig a hullám-front normális egységvektora.

A kapott egyenlethől leolvasható, hogy ha az ilyen közeg összenyomhatatlan, akkor abban gyorsuláshullám nem keletkezhetik.

3. A gyorsuláshullám frontja mögött keletkező anizotrópia

Tegyük fel, hogy egy adott kontinuum izotrop és az első gyorsulási front elhaladásáig természetes állapotban van [3]. Végezzem a kontinuum kis alakváltozást, azaz a v_i sebességmezőt és a $\varepsilon_{ij, 4}$ alakváltozási sebességmezőt a $2\varepsilon_{ij, 4} = v_{i, j} + v_{j, i}$ képlet kapcsolja össze.

A $\varphi(x_t)$ hullámfront mentén a diszkontinuitásokra vonatkozó egyenletek [4], ha az eddigiek mellett még az (1)-nek megfelelően

$$[\sigma_{ij}, j] = \mu_{ij} \varphi, j \quad \text{és} \quad [\varepsilon_{ij}, 4] = \kappa_{ij} \varphi, 4 : \\ \varrho v_i \varphi, 4 = \mu_{ij} \varphi, j, \\ 2\kappa_{ij} \varphi, 4 = v_i \varphi, j + v_j \varphi, i.$$

A két egyenlet-csoportból a ν_i -t kiküszöbölve

$$2\rho\kappa_{ij}\varphi_{,4^i} = (\mu_{ip}\varphi_{,j} + \mu_{jp}\varphi_{,i})\varphi_{,p}$$

Legyen az 1, 2, 3 koordinátatengely irány feszültségi főirány a hullámfront előtt és mögött, akkor a μ_{ij} mátrixa diagonál alakú, azaz

$$(\mu_{ij}) = \begin{matrix} (1, 2, 3) \end{matrix} \begin{bmatrix} \mu_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{33} \end{bmatrix}$$

Ha a test izotrop, akkor a κ_{ij} mátrixa is diagonál alakú. Ennek megítélése érdekében nézzük meg például a mátrix κ_{12} elemét

$$\kappa_{12} = \frac{\varphi_{,1}\varphi_{,2}}{2\rho\varphi_{,4^i}}(\mu_{11} + \mu_{22}),$$

amelyből látszik, hogy, noha a μ_{ij} diagonál alakú, a κ_{12} általában nem nulla, vagyis a κ_{ij} nem lesz diagonál mátrix. A gyorsulás hullámfront mögött, annak közvetlen környezetében a kontinuum nem marad tehát izotrop.

4. Az akusztikus tenzor egy fontos tulajdonsága

Tegyük fel, hogy a kontinuum rugalmas és anyagtörvénye

$$\sigma_{ij} = f_{ij}(\varepsilon_{pq}),$$

Ezzel a mozgásegyenletből a σ_{ij} -t kiküszöbölhetjük, mert a

$$\sigma_{ij,j} = \frac{\partial f_{ij}}{\partial \varepsilon_{pq}} \varepsilon_{pq,j} \equiv h_{ijpq}^* \varepsilon_{pq,j}$$

egyenlőséget felhasználva a mozgás-egyenlet

$$2\rho u_{i,44} = h_{ijpq}^* (u_{p,qj} + u_{q,pj}) \equiv h_{ijpq} u_{p,qj}$$

Most az (1) helyett a Hadamard-lemmára épített megfontolások alapján

$$\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{\hat{p}} \partial x_{\hat{q}}} \right] = \lambda_i \varphi_{\hat{p}} \varphi_{\hat{q}};$$

itt figyelembe vettük, hogy

$$[u_i] = 0 \quad \text{és} \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_{\hat{q}}} \right] = 0,$$

mert gyorsuláshullámról van szó. Ezzel a mozgásegyenlet

$$2\rho\lambda_i\varphi_i^2 = h_{ijpq}\lambda_p\varphi_{,q}\varphi_{,j}$$

ahol a

$$h_{ijqp} = \frac{1}{2}(h_{ijpq}^* + h_{ijqp}^*).$$

Alkalmazva az

$$a \equiv -\frac{\varphi_{,i}}{\sqrt{\varphi_{,i}\varphi_{,i}}}$$

hullámterjedési sebességet és az

$$n_i = \frac{\varphi_{,i}}{\varphi_{,p}\varphi_{,q}}$$

a hullámfront normális egységvektorát, a mozgásegyenlet

$$\rho\lambda_p\delta_{ip}a^2 = \lambda_p h_{ijpq}\varphi_q\varphi_j.$$

Ennek az egyenletnek λ_p -re nézve akkor van nullától különböző megoldása, ha a

$$\det\left(\frac{n_j n_q}{\rho} h_{ijpq} - \delta_{ij} a^2\right) = 0.$$

A képletben szereplő $n_j n_q h_{ijpq}$ kifejezést akusztikus tenzornak nevezzük és Q_{ip} -vel jelöljük.

A Q_{ip} akusztikus tenzornak rugalmas test esetében minden n_q -ra nézve szigorúan elliptikusnak kell lennie [5], ami annyit jelent, hogy Q_{ip} pozitív definit. Ez a megkötés a rugalmas test anyagtörvényét szorítja meg.

Képlékeny test esetében az anyagtörvényre nézve, ha egytengelyű feszültségi állapotot tekintünk, a gyorsuláshullámra tett kikötések alapján bizonyos szerkezeti tulajdonságokat állapíthatunk meg [6].

Az elmondottak azt kívánják megvilágítani, hogy a diszkontinuitások terjedésének a vizsgálatával milyen általános következtetések vonhatók le. Úgy tűnik, hogy más esetek vizsgálatakor újabb fontos, vagy érdekes mechanikai megállapítások tehetők még.

IRODALOM

1. HILL R.: *Progress in Solid Mechanics*, Vol. II. Chap. 3. North-Holland, Amsterdam 1961
2. HADAMARD: *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*. Hermann, Paris 1903
3. PRAGER W.: *Einführung in die Kontinuummechanik*, Birkhauser Verlag, 1961.
4. BÉDA Gy.: Eine Eigenschaft des möglichen Materialgesetzes von Körpern. *Publ. Techn. Univ. Heavy Industry*, Ser. D. Natural Sciences, 33 (1978), 67–70.
5. TRUESDELL C.: *Arch. Rational Mech. Anal.* 8 (1961), 263–296
6. BÉDA Gy.: Methode zur Bestimmung der Materialgleichung. *NME Közleményei* 12 (1962)

The Role of the Moving Surface Bearing the Discontinuity, in the Mechanical Investigations. The research work in the field of mechanics is focussed ever more to investigations wherein on surfaces of finite number, functions showing discontinuities are required. After the discussion of the respective mathematical relationships of general character, some trends of the mechanical investigations are described.

Die Funktion einer beweglichen, Diskontinuität tragenden Tragfläche in den mechanischen Untersuchungen. Die mechanischen Forschungen werden immer mehr auf derartige Untersuchungen hingelenkt, wozu auf Flächen von endlicher Zahl Diskontinuitäten aufweisende Funktionen unentbehrlich sind. Nach Behandlung der damit zusammenhängenden allgemeinen mathematischen Relationen werden einige mechanische Untersuchungsrichtungen angeführt.

FÉNYMIKROSKÓPOS MÓDSZER A SZÉNBEN LEVŐ PIRIT SZEMCSENAGYSÁG- ELOSZLÁSÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRA

TOMPOS ENDRE*

[Beérkezett: 1979. márc. 4.-én]

A pirit eltávolítása a szénből mind a környezetvédelem, mind a szénminőség szempontjából fontos. A szénpetrográfiai vizsgálatokkal egyidőben (vagy ettől függetlenül is) pirit tartalom- és eloszlás vizsgálatok végezhetők. A szerző a különböző szita- és sűrűségosztályú szénből készített felületi csiszolatokat fénymikroszkóppal vizsgálta. Az értékelés jellemző lépései: a sok látómezőben levő pirit szemcse nagyságok mérése és számolása, az ekvivalens átmérő meghatározása, szemcseközökbe sorolás, tárfogati átlag szemnagyság és a térfogattal arányos hányadok meghatározása, továbbá a darabszám szerinti eloszlás képzése. A mikroszkópi megfigyeléstől kezdődően minden lépés számítógépre programozható. Így jó információ nyerhető a pirittelenítéshez szükséges feltárás mértékére.

1. A szén kéntartalma

A szén összes kéntartalma a szerves (pirit, markazit, szulfát) és a szerves kénből tevődik össze. Szénfajtáktól, széntelepektől és a nyerszén szita- és/vagy sűrűségosztályaitól függően az összes kéntartalom 20—75%-át általában a pirit adja. Az erőművi szénből az eltüzelés előtti pirit eltávolítását az iparilag fejlett országoknak az SO_2 gáz kibocsátásával kapcsolatos, egyre szigorúbbá váló környezetvédelmi előírásai indokolják. A koks alapanyagát képviselő fekete kőszén pirittelenítése pedig azért fontos, hogy minél kevesebb kén jusson a nyersvasba, ill. az acélba. Azonban a szén pirittelenítésének határt szab, ill. annak mértékét meghatározza néhány fontos tényező, úgymint

- a pirit-kén és szerves-kén tartalom nagysága és aránya,
- a pirit összenövése a szénpetrográfiai összetevőkkel, ill. a meddő kőzetekkel [1],
- a pirit megjelenési formája, behintése és a pirit érces behintésének szemcse nagyságeloszlása [2], valamint
- a szóbjöhető korszerű pirittelenítési, ill. szénelőkészítési eljárások hatásossága, gazdaságossága [3, 4].

* Dr. Tompos Endre 3529-Miskolc, Csabai kapu 36

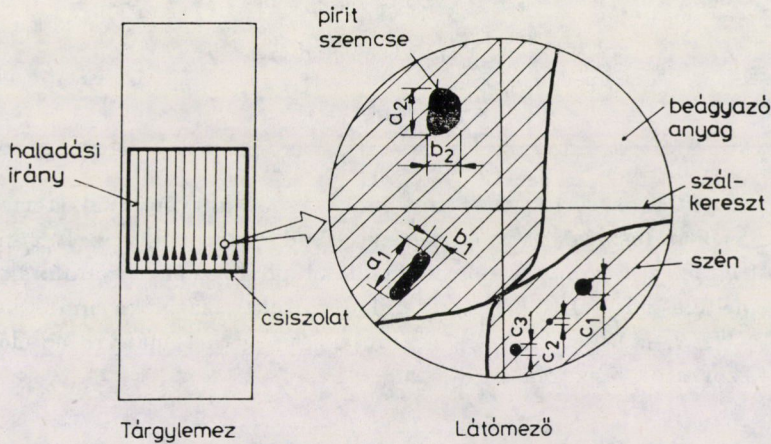
A szenek kéntelenítésének jelentőségét az is bizonyítja, hogy az a nemzetközi szénélőkészítési kongresszusoknak (1973 Párizs, 1976 Sydney, 1979 Donyeck) állandó témája.

2. Fénymikroszkópos vizsgálatok

Jóllehet a szerves-kén és pirit-kén tartalmak kémiai elemzéssel tisztázhatók, a szénpetrográfiai összetevők (vitrit, klarit, durit, fuzit, égőpala, meddő) és a pirit tartalmak s eloszlások meghatározására célszerűen kutató vagy polarizációs éremikroszkópot (pl. MP3 típusú monokuláris, opak illuminátoros) használunk. Hazai liasz fekete kőszén nyers aprószenét 6—12, 0,5—6, 0,037—0,5 és $< 0,037$ mm-es szitaosztályokra bontottuk és minden szitaosztályból $< 1,5$; 1,5—2,0; és $> 2,0$ g/cm³-es sűrűségosztályt állítottunk elő. Ezek mindegyikéből felületi csiszolat készült, amelyekből az Eltinor típusú elektromechanikus integráló asztal segítségével szénpetrográfiai és pirit elemzéseket végeztünk. Ezek a szokásos értékelés szerint (a petrográfiai összetevők sűrűségét és pontszámát figyelembe véve) azt mutatták, hogy a kokszzén ($< 1,5$ g/cm³) minőségű szénben az alkotórész kihozatalok vitritre 88,5%, klaritra 54,8% és piritre 30,5%, a meddő termékben ($> 2,0$ g/cm³) ugyanezen alkotórész kihozatalok sorban 4,0%, 3,0% és 30,0%. A középtermben (1,5—2,0 g/cm³) van tehát a vitrit 7,5; a klarit 42,4 és a pirit 39,5%-a. A pirit a kokszzénben a hasznos petrográfiai összetevőkhöz, a meddő termékben pedig az égőpalához és a meddő ásványokhoz kötődik. A középtermben a klarit és a durit tartalmazza a legtöbb piritet. A pirit alakját tekintve gömbökben ($1 \div 200 \mu\text{m}$), gömbös konkréciókban (framoidokban), lencés társulásokban szingenetikus képződésre utalóan és szabálytalan repedéseket kitöltő sávokban, epigenetikus fordulhat elő.

2.1. A pirit szemcsék mérése és számolása

A szénpetrográfiai vizsgálatokkal egyidőben, az integráló asztal beállított lépéshosszának megfelelő számú mikroszkópi látómezőkben — nemcsak a szálereszt alatt — hitelesített (kalibrált) okulármikrométer skálával vagy hálóval mérjük meg a pirit szemcséket. Feljegyezzük a szabályos alakú, kör keresztmetszetű: $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ okulár osztású (1. ábra) pirit szemcsék $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ darabszámát és a szabálytalan alakú, két fő befoglaló mérettel: $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots, a_nb_n$ jellemzett pirit szemcsék $n_1, n_2, n_3, \dots, n_n$ darabszámát. A mikroszkóp nagyítása (P) a csiszolatok vizsgálatakor $P_1 = 120$, $P_2 = 240$ és $P_3 = 360$ -szoros volt, a megszámlolt és kimért pirit szemcsék száma csiszolatonként 149 és 1428 db között változott. A szabálytalan alakú pirit szemek



1. ábra

száma a különböző szitaosztályok $< 1,5 \text{ g/cm}^3$ -es termékében 0,7 és 4,9%, az $1,5\text{--}2,0 \text{ g/cm}^3$ -es termékében θ és 10,8%, továbbá a $> 2,0 \text{ g/cm}^3$ -es termékben 3,9 és 26,2% között ingadozott.

2.2 A pirit szemcsék valódi mértékének meghatározása

Ha a P_1 , P_2 és P_3 nagyítású mikroszkóp hitelesített okulármikrométerének léptéke y_1 , y_2 és $y_3 \text{ }\mu\text{m/okulárosztás}$, akkor a kör alakú pirit szemcsék átmérője általában $y \cdot c = d \text{ }\mu\text{m}$ (részletesen $y_1 c_1 = d_1$; $y_1 c_2 = d_2 \dots$ vagy $y_2 c_1 = d_3$; $y_3 c_1 = d_4$ stb.). A szabálytalan alakú szemcséknél először a szemcsék síkmetszetének területét $T_1 = y_1^2(a_1 \cdot b_1)$, $T_2 = y_2^2(a_2 \cdot b_2)$, $T_3 = y_3^2(a_3 \cdot b_3)$... általában $T = y^2(a \cdot b)$ majd a területazonos kör

$$d'_1 = \sqrt{\frac{4T_1}{\pi}}, d'_2 = \sqrt{\frac{4T_2}{\pi}}, d'_3 = \sqrt{\frac{4T_3}{\pi}} \dots \text{általában } d' = \sqrt{\frac{4T}{\pi}}$$

átmérőjét (μm) határozzuk meg. Ezek ekvivalens átmérőnek is nevezhetők.

2.3 A piritbehintés szemcsenagyság-eloszlása

A következőkben a különböző átmérőjű (d és d') és darabszámú (m és n) pirit szemcsék besorolására $< x_1, x_1 \div x_2, x_2 \div x_3 \dots x_{n-1} \div x_n$ szemcsenagyság tartományokat jelöltünk ki. A közölt példánkban ezek $x_1 = 5$, $x_2 = 10$, $x_3 = 20$, $x_4 = 30$, $x_5 = 40$, $x_6 = 60$, $x_7 = 100$, $x_8 = 150$ és $x_9 = 200 \text{ }\mu\text{m}$. Ezek után már képezhető a szemcsék térfogatával arányos átmérők köbe (d^3 és d'^3) és minden egyes szemcszetartomány \bar{x} átlagos térfogati szemcsenagysága, amely az i -edik szemcszetartományra:

$$\bar{x}_i = \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^n (m_i d_i^3 + n_i d_i'^3)}{\sum_{i=1}^n (m_i + n_i)}}, \quad \mu m$$

Ennek az \bar{x} átlagos térfogati szemcsenagyság 3. hatványával (térfogatával) arányos a piriteloszlás, így az i -edik szemcszetartományra $N_i \bar{x}_i^3$ -nel, ahol $N_i = m_i + n_i$, azaz a gömb és négyyszög alakú pirit szemek számának összege.

A piriteloszlás $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ direkt százaléka már képezhető minden $< x_1, x_1 \div x_2, \dots, x_{n-1} \div x_n$ szemcsenagyság tartományra az előzőekben szerepelt szorzatok összegének

$$\sum_{i=1}^n N_i \bar{x}_i^3$$

ismeretében. Így pl. az i -edik szemcszetartomány direkt százaléka vagy azonos sűrűség esetén tömeg %-a:

$$\Delta V_i \% = \frac{N_i \bar{x}_i^3}{\sum_{i=1}^n N_i \bar{x}_i^3},$$

A piriteloszlás kumulatív V %-a, a határszemcsenagyságnál finomabb szemcsékre vonatkozik. A relatív gyakoriság ($\Delta V/\Delta x$) legnagyobb értéke a piritbehintés leggyakoribb szemcsenagyságát adja meg.

A piriteloszlás számítását HP 97-es típusú számítógépre programoztuk. A mikroszkópi pirit szemcsenagyság-mérés és -számolás adatai közvetlenül, egyenként is betáplálhatók. A pirit szemcsék megfelelő szemcsenagyság-tartományba történő besorolása, köbének számítása folyamatosan történik. Az összes adat bevitele után a számítógép szemcsenagyság-osztályonként a következő adatokat írja ki:

- szemcsenagyságosztály jele (0 . . . 9)
- térfogat szerinti átlag szemcsenagyság (\bar{x})
- pirit szemcsék darabszáma (N)
- pirit darabszám szerinti direkt %-a (ΔN)
- pirit darabszám szerinti kumulatív %-a (N)
- pirit szemcsék térfogat, ill. tömeg szerinti direkt %-a (ΔV)
- pirit szemcsék térfogat, ill. tömeg szerinti kumulatív %-a (V).

A szemcsenagyság-osztályok adatainak kiírása után a számítógép kiírja még a vizsgált csiszolatban értékelt összes pirit szemcsék számát, az összes pirit szemcsé térfogat szerinti átlagos szemcsenagyságot ($\bar{x}_a, \mu m$), az ezzel számolt kör területét ($F_a, \mu m^2$) és végül az összes piritnek megfelelő területet ($\Sigma F_a, \mu m^2$).

Az 1. táblázat tünteti fel hazai liasz korú nyers aprószénünk különböző szemcse nagyság- ($0 \div 0,5$ és $0,5 \div 12$ mm) és sűrűségosztályaiban ($< 1,5$; $1,5 \div 2,0$ és $> 2,0$ g/cm³) előforduló pirit eloszlásfüggvényeinek (V%) adatait. A szénélőkészítési technológia szerinti összevont szemcse nagyság-osztályok ($0 \div 0,5$ mm-es feladás flotálásra és $0,5-12$ mm-es feladás nehézsuszpenziós hidrociklonra) átlag adatait a megfelelő tömegarányok alapján a táblázat 5. és 9. oszlopa tartalmazza. Ezek az adatok $a < 1,5$ g/cm³-es (2. és 6. oszlopa), az $1,5 \div 2,0$ g/cm³-es (3. és 7. oszlop) és a $> 2,0$ g/cm³-es (4. és 8. oszlop) sűrű-

1. táblázat

Liasz korú nyers aprószén különböző szemcse nagyság- és sűrűségosztályaiban előforduló pirit eloszlásának kumulatív V%-ai

Pirit szemcse nagyság \times μm	A nyers aprószén			
	0-5 mm			átl.
	< 1,5	1,5-2,0	> 2,0	
	g/cm ³			
A piriteloszlás kumulatív V%				
1	2	3	4	5
<5	0,73	0,15	0	0,41
5-10	16,80	3,56	0,07	9,58
10-20	53,97	15,18	0,34	31,92
20-30	80,37	32,10	0,80	50,48
30-40	80,37	45,22	1,92	54,68
40-60	100	71,66	4,86	73,19
60-100		79,75	13,88	77,37
100-150		100	25,21	85,70
150-200			40,80	88,68
>200			100	100

Pirit szemcse nagyság \times μm	szemcse nagyság- és			
	0,5-12 mm			átl.
	< 1,5	1,5-2,0	> 2,0	
	g/cm ³			
A piriteloszlás kumulatív V%				
1	6	7	8	9
<5	0,04	0,05	0,01	0,03
5-10	0,59	0,71	0,11	0,46
10-20	2,43	5,03	0,83	2,61
20-30	6,28	17,83	2,91	8,37
30-40	7,72	26,79	3,86	11,75
40-60	10,10	42,19	8,99	18,72
60-100	10,10	72,94	14,74	29,32
100-150	32,30	100	29,11	50,20
150-200	95,12		100	98,16
>200	100			100

ségosztály piriteloszlás adataiból származnak. A táblázat (10-től 13-ig oszlopig) a $0 \div 12$ mm-es nyers aprószénben levő pirit eloszlásfüggvény számított adatait foglalja össze.

Pirit szemcse nagyság \times μm	sűrűségosztályai			
	$0 \div 12$ mm			
	< 1,5	1,5 \div 2,0	> 2,0	átl.
	g/cm ³			
	A piriteloszlás kumulatív V%			
1	10	11	12	13
< 5	0,30	0,08	0,01	0,15
5—10	6,82	1,67	0,10	3,36
10—20	22,25	8,44	0,73	11,94
20—30	34,77	22,63	2,47	21,77
30—40	35,66	32,99	3,46	25,42
40—60	44,67	52,09	8,13	36,06
60—100	44,67	75,23	14,56	44,62
100—150	58,34	100	28,31	61,51
150—200	96,99		87,74	95,14
> 200	100		100	100

3. A piritvizsgálatok értékelése

A táblázatokból megállapítható, hogy a nyers aprószénben levő pirit kb. 55%-a a durvább $100 \mu\text{m}$ -nél. A $0,5 \div 12$ mm-es szemcse nagyságú szénben kb. 71%, a $< 0,5$ mm-esben pedig kb. 23% a $> 100 \mu\text{m}$ -es pirit szemcsék aránya. Az eredményes piritfeltárás érdekében a $100 \mu\text{m}$ -es őrlési finomság lenne kívánatos, amely különösen érvényes a $0,5 \div 12$ mm-es szén $< 1,5$ g/cm³-es osztályára: itt a pirit kb. 90%-a $> 100 \mu\text{m}$, a szén pedig kokszzszen minőségű.

Ilyen mértékű feltárás, őrlés esetében már csak kombinált előkészítési technológiák jöhetnek szóba a pirit eltávolítására. Ilyenek pl. az iszaptalanító hidrociklonozással (esetleg nedves széreléssel) egybekötött és/vagy nagy-tér-intenzitású és -gradiensű mágneses szeparálás, valamint szelektív szén-pirit flotálás.

IRODALOM

1. TOMPOS, E.: Mikroskopische Untersuchungen zur Planung und Auswertung von aufbereitungs-technischen Prozessen. *Acta Geodet. Geophys. et Mont. Hung.* **11** (1976) 287—298
2. TOMPOS, E.: Eingehende Pyrit-Verteilungsuntersuchungen unter Berücksichtigung der kohlenpetrographischen Komponenten zwecks Verringerung des Pyritgehaltes in Koks-kohlen. 7. *Internationaler Kongress für Kohleaufbereitung*, Sydney, Australien, 1976. Deutschsprachige Ausgabe, Vortrag Nr. K. 1. S. 1—19
3. TARIÁN, G.: Ásványelőkészítés I. és II. kötet. Kézirat, Tankönyvkiadó, Budapest 1969
4. LEININGER, D.—MONOSTORY, F. P.: Kohlenentschwefelung durch aufbereitungstechnische Maßnahmen. *Glückauf*, **111** (1975) 1079—1082.

Light-microscopic Method for the Determination of the Size Distribution of Pyrites Grains in Coal. The removal of pyrites from coal has significance concerning both the environmental management and coal quality. Simultaneously with the investigation of coal petrography (or independently of that) also the pyrites content and size distribution in the coal might be determined. The microsections prepared from the different sieve scale and density classes of coals have been investigated by light-microscope. The most significant steps of the evaluation were as follows: in the numerous microscopic fields measurement of the sizes and counting the number of the grains of pyrites, determination of the equivalent diameter, classifying according to fractions, establishment of the mean volumic grain size and the volumic quota fractions as well as the size distribution per pieces. Beginning with the microscopic observation all steps might be programmed into the computer. Thus a convenient information could be obtained in revealing the characteristics needed to the removal of the pyrites.

Lichtmikroskopische Methode zur Ermittlung der Korngrößenverteilung des in der Kohle befindlichen Pyrits. Der Entzug des Pyrits aus der Kohle ist von grosser Bedeutung sowohl aus dem Gesichtspunkt des Umweltschutzes, als auch der Kohlegüte. Gleichzeitig mit den kohlenpetrographischen Untersuchungen (oder von denselben unabhängig) kann auch die Bestimmung des Pyritgehalts und der Kornverteilung durchgeführt werden. Die aus den Kohlen von verschiedenen Siebfeinheits- und Dichteklassen hergestellten Flächenschliffe wurden mit Lichtmikroskop untersucht. Die wichtigsten Schritte der Auswertung waren wie folgt: Messung der Größe und Abzählung der Menge der Pyritkörner in den zahlreichen Gesichtsfeldern, Ermittlung des äquivalenten Durchmessers, Einteilung in Fraktionen, Bildung des Mittels der Korngrösse je Rauminhalt und die mit dem Rauminhalt proportionalen Anteile, schließlich die Kornverteilung nach der Stückzahl. Alle Schritte der mikroskopischen Beobachtungen können auf Rechenanlagen programmiert werden. Derart können zur Entfernung des Pyrits nützliche Informationen gewonnen werden.



EGY CSAVARÁSI FELADATRÓL

ECSEDI ISTVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1980. február 18-án]

A tanulmány homogén anyagú rúdba ágyazott rugalmas héjből álló, összetett anyagú prizmatikus rúd de Saint-Venant-féle csavarási problémájához kapcsolódó kerületérték feladat felállítását ismerteti. A levezetett összefüggések alkalmazását példák szemléltetik.

Fontosabb jelölések

x, y, z	derékszögű koordináták,
e_x, e_y, e_z	egységvektorok,
$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y$	Hamilton-féle differenciáloperátor,
„ „	skaláris szorzás jele,
$\nabla \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$	Laplace-operátor,
$U = U(x, y), U_1 = U_1(y, y), \dots$	feszültségfüggvény,
G, I	csúsztató rugalmassági modulus,
T_1, T_2, T_3	x, y síkbeli tartományok,
$\xi_{10}, \xi_{20}, \xi_{30}, \xi_{12}, \xi_{23}, \xi_{13}$	síkgörbék,
t	érintő egységvektor,
n	normális egységvektor,
ζ	n irányban mért koordináta,
s	ívkoordináta,
$\frac{\partial}{\partial n}$	n irányban számolt derivált,
$\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{sz}$	csúsztató feszültségek,
$h = h(s)$	„héj” vastagság,
R	csavarási merevség,
M	csavaró nyomaték.

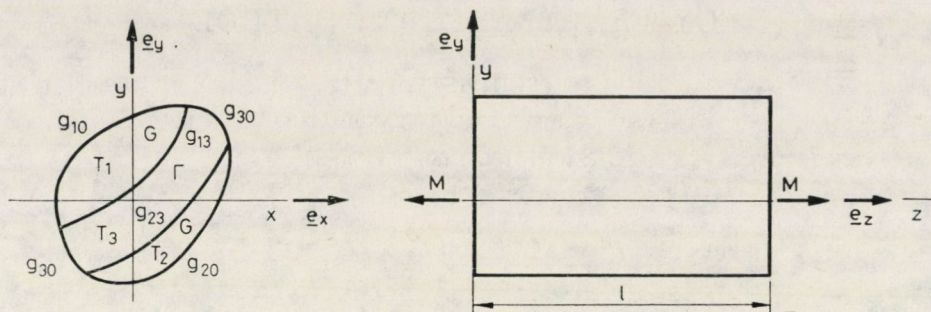
Egyes mennyiségeket, változókat a szöveg értelmez.

1. Bevezetés

Tekintsük az 1. ábrán vázolt nem folytonos keresztmetszeti inhomogenitással rendelkező prizmatikus rudat.

A $T_1 + T_2$ tartományban lévő anyag csúsztató rugalmassági modulusa G , a T_3 tartományban pedig I csúsztató rugalmassági modulussal rendelkező anyag van.

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehérintő u. 24. IV/1.



1. ábra. Összetett anyagú prizmatikus rúd

A fenti keresztmetszettel rendelkező összetett anyagú prizmatikus rúd de Saint—Venant-féle csavarási problémája az alábbi kerületérték feladatra vezethető vissza ([1], [2]):

$$\Delta U_1 = -2G \quad (x, y) \in T_1, \quad (1)$$

$$U_1 = 0 \quad (x, y) \in g_{10}, \quad (2)$$

$$\Delta U_2 = -2G \quad (x, y) \in T_2, \quad (3)$$

$$U_2 = 0 \quad (x, y) \in g_{20}, \quad (4)$$

$$\Delta U_3 = -2\Gamma \quad (x, y) \in T_3, \quad (5)$$

$$U_3 = 0 \quad (x, y) \in g_{30}, \quad (6)$$

$$U_1 = U_3 \quad (x, y) \in g_{13}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{G} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{\partial U_3}{\partial n} \quad (x, y) \in g_{13} \quad (8)$$

$$U_2 = U_3 \quad (x, y) \in g_{23} \quad (9)$$

$$\frac{1}{G} \frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial U_3}{\partial n} \quad (x, y) \in g_{23} \quad (10)$$

Az

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & (x, y) \in T_1 \\ U_2(x, y) & (x, y) \in T_2 \\ U_3(x, y) & (x, y) \in T_3 \end{cases} \quad (11)$$

előírással értelmezett $U = U(x, y)$ függvény a $T = T_1 + T_2 + T_3$ „összetett” keresztmetszet feszültségfüggvényét határozza meg. A keresztmetszet R csavarási merevsége akár az

$$R = 2 \int_{T_1} U_1 dT + 2 \int_{T_2} U_2 dT + 2 \int_{T_3} U_3 dT, \quad (12)$$

akár az

$$R = \frac{1}{G} \int_{T_1} (\nabla U_1)^2 dT + \frac{1}{G} \int_{T_2} (\nabla U_2)^2 dT + \frac{1}{G} \int_{T_3} (\nabla U_3)^2 dT \quad (13)$$

formula alapján számítható ([1], [2]).

A keresztmetszet síkjának $P(x, y)$ pontjában ébredő τ_{xz} , τ_{yz} csúsztató feszültségek pedig az alábbi módon nyerhetők:

$$\tau_{xz} = \frac{M}{R} \frac{\partial U_i}{\partial y} \quad (x, y) \in T_i, \quad (14)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{M}{R} \frac{\partial U_i}{\partial x} \quad (x, y) \in T_i, \quad (15)$$

($i = 1, 2, 3$).

A fenti képletekben M a keresztmetszetet terhelő csavaró nyomaték.

2. Rugalmas héjjal erősített keresztmetszet

Igen „vékony” T_3 tartomány esetében, vagyis olyankor, amikor a T_3 keresztmetszetű L hosszúságú rúd héjnak tekinthető, az $U_3 = U_3(x, y)$ függvénnyel kapcsolatos (7) és (9) feltételek akkor teljesülnek, ha

$$U_3 = U_3(s, \xi) = \frac{U_2(P_2) - U_1(P_1)}{h(s)} \xi + \frac{U_2(P_2) + U_1(P_1)}{2}. \quad (16)$$

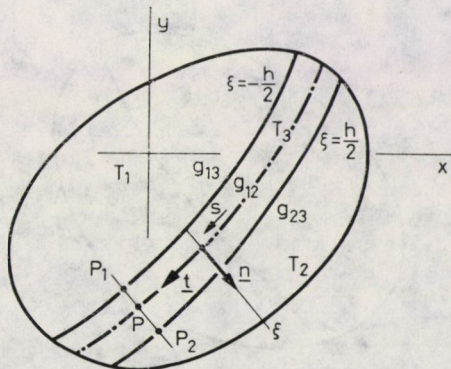
A fenti képletben (2. ábra)

s
 $h = h(s)$

$U_1(P_1)$

$U_2(P_2)$
 ξ

a g_{12} görbén értelmezett ívkoordináta,
a T_3 tartomány „szélességi” mérete (a héj alakú test vastagsága)
az $U_1(x, y)$ függvény értéke a P_1 pontban,
az $U_2(x, y)$ függvény értéke a P_2 pontban,
 n irányban mért koordináta.



2. ábra. A T_3 keresztmetszettel kapcsolatos adatok

A (8), (10) illesztési feltételek és a (16) képlet kombinálásával az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$\frac{1}{G} \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{U_2 - U_1}{\Gamma h}, \quad (17)$$

$$\frac{1}{G} \frac{\partial U_2}{\partial n} = \frac{U_2 - U_1}{\Gamma h}. \quad (18)$$

Nagyon fontos az a különleges eset, amelyben

$$\Gamma \rightarrow \infty, \quad h \rightarrow 0 \quad \text{de} \quad \Gamma h = \text{véges.}$$

Igen vékony vastagságú héj esetében, mikor is $g_{12} \cong g_{13} \cong g_{23}$, elfogadván a (16) képlet helyességét a 3. ábrán vázolt keresztmetszettel kapcsolatos de Saint-Venant-féle csavarási problémánál az alábbi kerületérték feladatra jutunk:

$$\Delta U_1 = -2G, \quad (x, y) \in T_1, \quad (19)$$

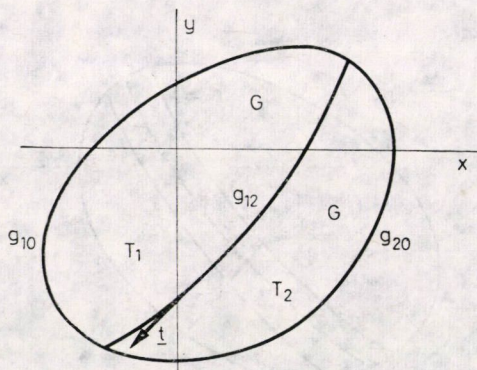
$$U_2 = 0 \quad (x, y) \in g_{10}, \quad (20)$$

$$\Delta U_2 = -2G \quad (x, y) \in T_2, \quad (21)$$

$$U_2 = 0 \quad (x, y) \in g_{20}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial U_2}{\partial n} \quad (x, y) \in g_{12}, \quad (23)$$

$$\frac{1}{G} \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{1}{\Gamma} \frac{U_2 - U_1}{h} \quad (x, y) \in g_{12}. \quad (24)$$



3. ábra. Héjjal erősített keresztmetszet

A (12), (13) képletekből következik, hogy a keresztmetszet R csavarási merevsége az alábbi módon számítható:

$$R = 2 \int_{T_1} U_1 dT + 2 \int_{T_2} U_2 dT, \quad (25)$$

$$R = \frac{1}{G} \int_{T_1} (\nabla U_1)^2 dT + \frac{1}{G} \int_{T_2} (\nabla U_2)^2 dT + \frac{1}{\Gamma} \int_{g_{12}} \frac{(U_2 - U_1)^2}{h} ds. \quad (26)$$

A (26) képlet felírásakor felhasználtuk, hogy

$$(\nabla U_3)^2 \approx \left[\frac{U_2 - U_1}{h} \right]^2, \quad dT \approx h ds \quad (27)$$

A keresztmetszet síkjának $P \in T_1 + T_2$ pontjában ébredő csúsztató feszültségek összetevői a (14), (15) egyenletek alapján állíthatók elő.

A vékony héjban pedig (3. ábra) a t érintő irányú csúsztató feszültség a

$$\tau_{sz} = \frac{M}{R} \frac{U_2 - U_1}{h}, \quad (28)$$

illetve a

$$\tau_{sz} = \frac{M}{R} \frac{\Gamma}{G} \frac{\partial U}{\partial n} \quad (29)$$

képletekből számítható.

A rúd teljes keresztmetszetére vonatkozó

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1(x, y) & (x, y) \in T_1 \\ U_2(x, y) & (x, y) \in T_2 \end{cases} \quad (30)$$

képlettel értelmetten feszültségfüggvénnyel kapcsolatban az alábbi megjegyzéseket tehetjük:

1. $U(x, y)$ a g_{12} görbén szakadást szenved

$$(U_1 \neq U_2(x, y) \in g_{12}),$$

de a g_{12} görbe pontjaitól eltekintve folytonos a rúd keresztmetszetén.

2. $U(x, y)$ normális irányú deriváltja a g_{12} görbén való áthaladáskor folytonosan változik.

A rúd *palástjához* kapcsolt vékony héjjal erősített prizmatikus rudak de Saint—Venant-féle csavarási feladatát hasonló közelítés alkalmazásával N. H. ARUTJUAN és B. L. ABRAMJAN oldotta meg [1].

3. Variációs módszer

Könnyen kimutatható, hogy a

$$q = q[\tilde{U}_1, \tilde{U}_2] = -\frac{1}{G} \int_{T_1} (\nabla \tilde{U}_1)^2 dT - \frac{1}{G} \int_{T_1} (\nabla \tilde{U}_2)^2 dT + \\ + 4 \int_{T_1} \tilde{U}_1 dT + 4 \int_{T_1} \tilde{U}_2 dT - \frac{1}{\Gamma} \int_{g_{11}} \frac{(\tilde{U}_2 - \tilde{U}_1)^2}{h} ds \quad (31)$$

előírással értelmezett funkcionál stacionaritási feltétele egyenértékű a (19), (20), ... (23) egyenletek által kijelölt kerületérték feladattal, ha a

$$q = q[\tilde{U}_1, \tilde{U}_2]$$

funkcionál értelmezési tartományát a következő tulajdonságú

$$\tilde{U}_1 = \tilde{U}_1(x, y) \quad (x, y) \in T_1,$$

$$\tilde{U}_2 = \tilde{U}_2(x, y) \quad (x, y) \in T_2$$

kétváltozós függvények alkotják (3. ábra):

$$1. \tilde{U}_i(y, y) = 0 \quad (x, y) \in g_{i0} \\ \cdot \quad (i = 1, 2).$$

2. $\tilde{U}_2 = \tilde{U}_i(x, y)$ folytonos T_i -ben és határán, továbbá folytonosan differenciálható

$$T_i\text{-ben, } (i = 1, 2).$$

A (25), (26) kombinálásával kapjuk az

$$R = q[U_1, U_2] \quad (32)$$

képletet, melyben U_1, U_2 a csavarási feladat megoldását jelöli.

Nyilván

$$\tilde{U}_1 = U_1 + \delta U_1, \quad (33)$$

$$U_2 = U_2 + \delta U_2. \quad (34)$$

Elementáris számolással adódik, hogy

$$q[\tilde{U}_1, \tilde{U}_2] = q[U_1, U_2] - \frac{1}{G} \int_{T_1} (\nabla \delta U_1)^2 - \\ - \frac{1}{G} \int_{T_1} [\nabla \delta U_2]^2 dT - \frac{1}{\Gamma} \int_{g_{11}} \frac{(\delta U_2 - \delta U_1)^2}{h} ds. \quad (35)$$

A (32) és (35) képletek összevetésével az R csavarási merevséggel kapcsolatban az alábbi egyenlőtlenségi relációt nyerjük:

$$R \geq q[\tilde{U}_1, \tilde{U}_2]. \quad (36)$$

A (36) egyenlőtlenségi reláció alapján alsó korlátok képezhetők a csavarási merevség számára.

4. Általánosítások

Nyilván a 4. és 5. ábrákon vázolt keresztmetszetekkel kapcsolatban is érvényesek az eddigi fejtegetések eredményei.

Így például az 5. ábrán szemléltetett keresztmetszet esetében a keresztmetszet $U = U(x, y)$ feszültségfüggvényét az alábbi előírások határozzák meg:

1. $U = U(x, y)$ folytonos a g_0 görbén és a T tartományban, a g_{12} görbe pontjaitól eltekintve.

$$2. \quad \Delta U = -2G \quad (x, y) \in T - g_{12}, \quad (37)$$

$$U = 0 \quad (x, y) \in g_0, \quad (38)$$

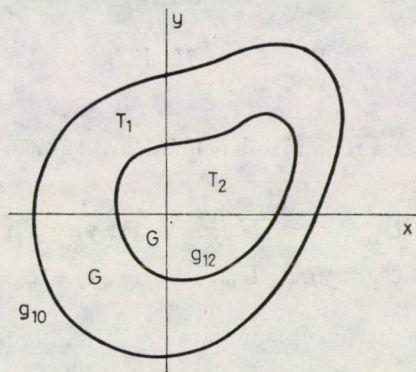
$$\lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{\partial U}{\partial n} = \lim_{P_1 \rightarrow P} \frac{\partial U}{\partial n} \quad (x, y) \in g_{12}, \quad (39)$$

$$\frac{1}{G} \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{U_2 - U_1}{\Gamma h} \quad (x, y) \in g_{12}, \quad (40)$$

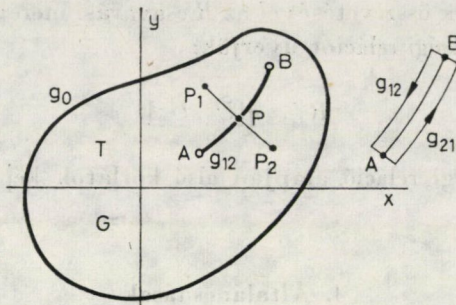
ahol (5. ábra)

$$U_1 = \lim_{P_1 \rightarrow P} U(P),$$

$$U_2 = \lim_{P_1 \rightarrow P} U(P).$$



4. ábra. Zárt héjjal erősített keresztmetszet



5. ábra. Nyitott héjjal erősített keresztmetszet

5. Megjegyzések a csavarási merevséggel kapcsolatban

5.1 Jelölje az 5. ábrán vázolt keresztmetszet feszültségfüggvényét $U_0 = U_0(x, y)$, ha $\Gamma h = 0$. Ebben az esetben a teljes keresztmetszetet homogén, G csúsztató rugalmassági modulusú anyag tölti ki.

A Green-féle

$$\int_T (U \Delta U_0 - U_0 \Delta U) dT = \int_{g_0} \left(U_0 \frac{\partial U_0}{\partial n} - U_0 \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds + \int_{g_{12} + g_{21}} \left(U \frac{\partial U_0}{\partial n} - U_0 \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \quad (41)$$

azonosságból az integrálás elvégzésével és a (39), (40) egyenletek figyelembevételével az

$$R = R_0 + \frac{\Gamma h}{G^2} \int_{g_{12}} \frac{\partial U_0}{\partial n} \frac{\partial U}{\partial n} ds \quad (42)$$

eredményt kapjuk, ahol

$$R_0 = 2 \int_T U_0 dT. \quad (43)$$

5.2 A (36) egyenlőtlenségi relációból például a 3. ábrán szemléltetett keresztmetszet esetében az

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1(x, y) &= U_0(x, y) & (x, y) \in T_1 \\ \tilde{U}_2(x, y) &= U_0(x, y) & (x, y) \in T_2 \end{aligned} \quad (44)$$

választással a csavarási merevség számára az

$$R \geq R_0 \quad (45)$$

alsó korlátot nyerjük. A fenti egyenlőtlenség azt a nyilvánvaló tényt fejezi ki, hogy a rugalmas héj bekapcsolása nem csökkenti a csavarási merevséget.

5.3 Tekintsük a 4. ábrán szemléltetett keresztmetszetet. Ebben az esetben a g_{12} görbe zárt görbe.

Jelölje a héjjal nem merevített homogén anyagú T keresztmetszetű prizmatikus rúd feszültségfüggvényét $U_0 = U_0(x, y)$.

Legyen továbbá

$$R_0 = 2 \int_T U_0 dT. \tag{46}$$

Legyen

$$\tilde{U}_1 = U_0(x, y) \quad (x, y) \in T_1, \tag{47}$$

$$\tilde{U}_2 = U_0(x, y) + c \quad (x, y) \in T_2, \tag{48}$$

$c =$ állandó.

A (31) funkcionál $\delta q = 0$ stacionaritási feltételéből a c állandóra a következő egyenletet nyerjük:

$$c = \frac{2 T_2 \Gamma}{\int_{g_{12}} \frac{1}{h} ds}. \tag{49}$$

A fenti értékkel a (25) képletből a csavarási merevségre az alábbi közelítő értékeket kapjuk:

$$R^* = R_0 + \frac{4 T_2^2 \Gamma}{\int_{g_{12}} \frac{1}{h} ds}. \tag{50}$$

A (36) egyenlőtlenségi reláció alkalmazásával kimutatható, hogy

$$R \geq R^* = R_0 + \frac{4 T_2^2 \Gamma}{\int_{g_{12}} \frac{1}{h} ds}. \tag{51}$$

6. Példák

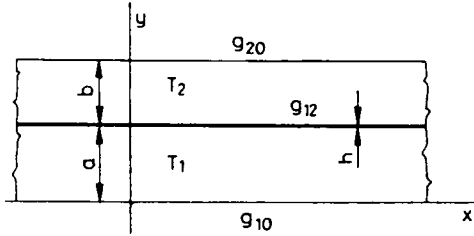
6.1 A 6. ábra az x tengely irányában végtelen kiterjedésű keresztmetszetet szemléltet, ($h =$ állandó).

Elemi számolással azt kapjuk, hogy a

$$\Delta U_1 = -2G \quad (x, y) \in T_1, \tag{52}$$

$$U_1 = 0 \quad y = 0, \tag{53}$$

$$\Delta U_2 = -2G \quad (x, y) \in T_2, \tag{54}$$



6. ábra. Az x tengely irányában végtelen kiterjedésű keresztmetszet

$$U_2 = 0 \quad y = a + b, \quad (55)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \quad y = a, \quad (56)$$

$$\frac{1}{G} \frac{\partial U_1}{\partial y} = \frac{U_2 - U_1}{\Gamma h} \quad y = a \quad (57)$$

egyenletek által kijelölt kerületértékfeladat megoldása:

$$U_1 = G(-y^2 + \alpha y) \quad (x, y) \in T_1, \quad (58)$$

$$U_2 = G[-y^2 + (a + b)^2 + \alpha(y - (a + b))] \quad (x, y) \in T_2, \quad (59)$$

ahol

$$\alpha = \frac{2ah\Gamma + G(a + b)^2}{G(a + b) + \Gamma h}. \quad (60)$$

A keresztmetszet síkján ébredő csúsztató feszültségek *egységnyi elcsavarodási szög* esetében az alábbiak:

$$\tau_{xz} = G(-2y + \alpha), \quad (x, y) \in T_1 + T_2, \quad (61)$$

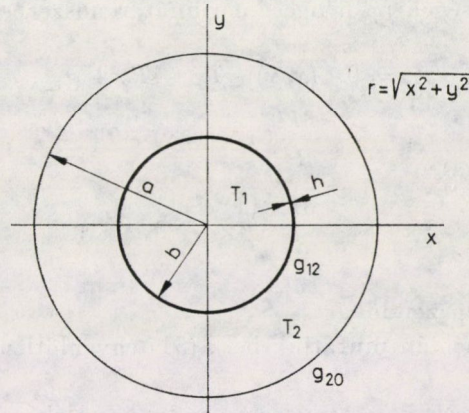
$$\tau_{xz} = -\frac{G\alpha(a + b)}{h}, \quad y = a. \quad (62)$$

A „keresztmetszet” egységnyi szélességének *r* csavarási merevsége az

$$\begin{aligned} r &= 2 \int_0^a U_1 dy + 2 \int_a^{a+b} U_2 dy = \\ &= \frac{2G}{3} (a + b)^2 (2b - a) + G(b^2 - \alpha^2) \alpha \end{aligned} \quad (63)$$

formula alapján számítható.

6.2 A 7. ábra tömör kör keresztmetszetet ábrázol. A keresztmetszetet *b* sugarú ($b < a$), *h* vastagságú rugalmas körhenger héjjal merevítettük ($h = \text{állandó}$).



7. ábra. Kör alakú keresztmetszet

A

$$\Delta U_1 = -2G \quad 0 < r < b, \tag{64}$$

$$\Delta U_2 = -2G \quad b < r < a, \tag{65}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{\partial U_2}{\partial r} \quad r = b, \tag{66}$$

$$\frac{U_2 - U_1}{\Gamma h} = \frac{1}{G} \frac{\partial U_1}{\partial r} \quad r = b, \tag{67}$$

$$U_2 = 0 \quad r = b, \tag{68}$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2})$$

egyenletek által kijelölt kerületi érték-feladat megoldása az alábbi:

$$U_1 = U_1(r) = \frac{G}{2} (-r^2 + a^2) + \Gamma b h \quad 0 \leq r \leq b, \tag{69.a}$$

$$U_2 = U_2(r) = \frac{G}{2} (-r^2 + a^2) \quad b \leq r \leq a. \tag{69.b}$$

A (25) képlettel számolva a csavarási merevségre az

$$R = \frac{G}{2} a^4 \pi + 2 \Gamma b^3 h \pi \tag{70}$$

eredményt kapjuk.

A csúszató feszültségek $r\varphi$ henger-koordinátarendszerbeli összetevői pedig a

$$\tau_{rz} = 0 \quad (x, y) \in T_1 + T_2 + g_{12}, \quad (71)$$

$$\tau_{\varphi z} = -\frac{M}{R} Gr \quad (x, y) \in T_1 + T_2, \quad (72)$$

$$\tau_{\varphi z} = -\frac{M}{R} \Gamma b \quad (x, y) \in g_{12} \quad (73)$$

képletek alapján képezendők.

6.3 Végezetül egy példán mutatjuk be a (51) egyenlőtlenségi reláció alkalmazását.

A 8. ábra ellipszis keresztmetszetű rudat szemléltet.

A keresztmetszet d sugarú h vastagságú ($h = \text{állandó}$) körhengerhéjjal erősített.

Ismert eredményekből következik, hogy

$$R_0 = G \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \pi. \quad (74)$$

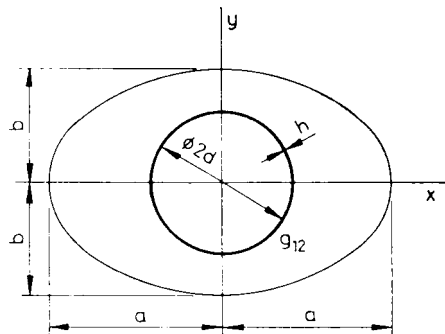
Jelen példában

$$\frac{4 T_2^2 \Gamma}{\int_{g_{12}} \frac{1}{h} ds} = 2d^3 \Gamma h \pi. \quad (75)$$

Az összetett keresztmetszet R csavarási merevségére az

$$R \geq G \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \pi + 2d^3 \Gamma h \pi \quad (76)$$

egyenlőtlenségi reláció írható fel, amely a csavarási merevség számára alsó korlátot jelent.



8. ábra. Ellipszis alakú keresztmetszet

IRODALOM

1. ARUTJUNAN N. H.—ABRAMJAN B. L.: Krucsenie uprugih tel. *Fizmatgiz*, Moszkva. 1963, 393—447
2. ECSEDI, I.: Variation Method Giving the Solution to the Torsion Problem of Prismatical Bars of Composite Material. *Acta Techn. Hung.*, 85 (1977), 147—177

On a Torsional Problem. The establishment of a boundary value problem associated with the de Saint-Venant's theorem of torsion of a prismatic bar composed of different materials and of elastic shell embedded in a homogeneous bar is described. The application of the deduced relationships is demonstrated by examples.

Über eine Torsionsaufgabe. Behandelt wird die Aufstellung einer mit dem de Saint-Venantschen Torsionsproblem zusammenhängenden Randwertaufgabe eines aus in einem homogenen Stab eingebetteter, elastischer Schale hergestellten prismatischen Stabes. Die Anwendung der abgeleiteten Zusammenhänge wird durch einige Beispiele demonstriert.

LAPOS HÉJAK NYÚLÁSMENTES ALAKVÁLTOZÁSÁNAK NÉHÁNY KÜLÖNLEGES ESETE

CSONKA PÁL*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

[Beérkezett: 1980. április 8.-án]

A jelen tanulmány a lapos héjak nyúlásmentes alakváltozásának egyes olyan eseteivel foglalkozik, amelyekben a héj alakváltozási állapotát leíró differenciálegyenletek, illetve függvények különleges egyszerű szerkezetűek annak ellenére, hogy a tanulmány a héj hajlító merevségét is figyelembe veszi.

I. Bevezetés

Az alábbiakban a lapos héjak elméletére támaszkodva olyan eseteket mutatunk be, amelyekben a héj nyúlásmentes alakváltozási állapotát leíró differenciálegyenletek, illetve függvények rendkívül egyszerű szerkezetűek.

Tárgyalásaink feltételezik, hogy a héj anyagának nincs haránttágulása, a héj hajlítási merevsége pedig a héj egész terjedelmében állandó.

2. Alapösszefüggések

Vizsgálatainkat olyan $0(x, y, z)$ derékszögű tengelyrendszerben végezzük, amelynek z tengelye függőleges, pozitív z tengelyága pedig lefelé irányul. Ebben a koordinátarendszerben a héj alakját a

$$z = z(x, y) \quad (1)$$

alakfüggvénnyel, a héjra ható függőleges megoszló teher fajlagos vetületi értékét a

$$\bar{p} = \bar{p}(x, y) \quad (2)$$

teherfüggvénnyel, a héj feszültségi állapotát az

$$F = F(x, y) \quad (3)$$

feszültségfüggvénnyel, a héj középfelületi pontjának függőleges elmozdulását pedig a

$$w = w(x, y) \quad (4)$$

elmozdulásfüggvénnyel jellemezzük.

* Prof. Dr. Csonka Pál, 1114 Budapest, Bartók B. út 31.

A héj falvastagságát t -vel, a héj anyagának rugalmassági tényezőjét E -vel, a héj húzási merevségét D -vel, hajlító merevségét K -val jelöljük, ahol

$$D = Et, \quad K = \frac{Et^3}{12}. \quad (5)$$

A héj x, y irányú $\bar{N}_x, \bar{N}_{xy}, \bar{N}_y$ redukált feszítőerői a [feszültségfüggvény második deriváltjaival vannak kapcsolatban:

$$\bar{N}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{N}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y}, \quad \bar{N}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad (6)$$

a héj keresztmetszeteire ható $\bar{M}_x, \bar{M}_{xy}, \bar{M}_y$ redukált erőpárok pedig a w elmozdulásfüggvény második deriváltjaival állnak összefüggésben:

$$\bar{M}_x = K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \bar{M}_{xy} = K \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}, \quad \bar{M}_y = K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (7)$$

A lapos héjak Wlassow-féle elmélete szerint a csupán függőleges erőkkel terhelt héjak erőtanai viselkedése két negyedrendű differenciálegyenlettel írható le. Ez a két egyenlet:

$$\begin{aligned} \square F - K\Delta\Delta F + \bar{p} &= 0, \\ \square w + \Delta\Delta F &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

ahol a Δ , illetve \square műveletjelek értelme:

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ \square &\equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

A (7) differenciálegyenletek megoldásakor a héjperem minden pontján két feltétel teljesíthető, illetve teljesítendő F -re is, w -re is.

3. A nyúlásmentes alakváltozás alapképletei

A héj alakváltozását akkor mondjuk nyúlásmentesnek, ha a terhelés hatására a héj középfelületének vonalelemei semmiféle hosszváltozást sem szenvednek. Ilyenkor nyilván

$$\bar{N}_x = 0, \quad \bar{N}_{xy} = 0, \quad \bar{N}_y = 0. \quad (10)$$

Mint ahogy a (6) képletek szerint az \bar{N}_x , \bar{N}_{xy} , \bar{N}_y membránerők az F feszültségfüggvény második deriváltjai, a (10) egyenletekből az következik, hogy nyúlásmentes alakváltozás esetében az F függvény a helykoordinátáknak legfeljebb lineáris függvénye lehet. Ezek szerint a nyúlásmentes alakváltozás előfeltétele, hogy a feszültségfüggvény

$$F = Ax + By + C \quad (11)$$

alakú legyen, ami a membránerők szempontjából lényegtelen lineáris tagokat elhagyva így írható:

$$F = 0 . \quad (12)$$

Nyúlásmentes alakváltozás esetében a lapos héjak elméletének (8) jelű differenciálegyenletei a következő egyszerűbb alakúvá lesznek:

$$\begin{aligned} -K\Delta\Delta w + \bar{p} &= 0 , \\ \square w &= 0 . \end{aligned} \quad (13)$$

Olyankor, amidőn a héj felülete terheletlen, vagyis amikor

$$\bar{p} = 0 ,$$

a nyúlásmentes alakváltozás (13) alatti feltételei még tovább egyszerűsödnek:

$$\begin{aligned} \Delta\Delta w &= 0 , \\ \square w &= 0 . \end{aligned} \quad (14)$$

Ilyenkor csak a héj peremére hatnak erők, mégpedig erőpárok.

A (13) és (14) képletek véges K érték esetében is érvényesek.

4. Példák

Az alábbiakban a nyúlásmentes alakváltozásra néhány egyszerű példát mutatunk be. Valamennyi példában feltételezzük, hogy

$$\bar{p} = 0 , \quad (15)$$

tehát az alakváltozási viszonyokat a (14) képletek szabályozzák.

1. példa

Ha a héj alakfüggvénye

$$c = Ax^2 + Bxy + Cy^2$$

alakú, ahol az A , B , C állandók, akkor a (14) feltételt kielégítő elmozdulásfüggvények

$$w = Bx^2 + 2(A + C)xy + By^2,$$

és

$$w = (B^2 - AC)x^3 + 3(A^2 + BC)x^2y + 3(C^2 + AB)xy^2 + (B^2 - AC)y^3.$$

Természetesen, a (14) feltételeknek a fenti elmozdulásfüggvények lineáris kombinációi is megfelelnek.

2. példa

Ha a héj alakfüggvénye

$$z = A(x^2 + y^2), \quad A = \text{konst}$$

alakú, akkor a nyúlásmentes alakváltozás (14) alatti feltételei minden olyan esetben teljesülnek, amikor a w elmozdulásfüggvény biharmonikus.

3. példa

Ha a héj alakfüggvénye

$$z = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3,$$

ahol A , B , C , D állandók, akkor a nyúlásmentes alakváltozás (14) alatti feltételeit kielégítik a

$$w = (B^2 - AC)x^2 + (BC - AD)xy + (C^2 - BD)y^2$$

és a

$$w = (3ABC - 2B^3 - A^2D) + 3(2AC^2 - B^2C - 2ABD)x^2y - 3(2B^2D - BC^2 - ACD)xy^2 + (3BCD - 2C^3 - AD^2)y^3$$

elmozdulásfüggvények, valamint azok lineáris kombinációi.

4. példa

Olyankor, amikor a héj alakfüggvénye

$$c = A(x^4 + y^4), \quad A = \text{konst}$$

alakú, akkor a (14) feltételnek megfelelő elmozdulásfüggvény

$$w = (Bx^4 - y^4), \quad B = \text{konst.}$$

Megjegyzés

A fenti példák esetében a nyúlásmentes alakváltozás (14) feltételei akkor is teljesülnek, ha a z és w függvények szerepet cserélnek.

IRODALOM

- FLÜGGE, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1934
- WLASSOW, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie Verlag, Berlin 1958
- BÖLCSKEI, E.: Lapos héjak elmélete és gyakorlati alkalmazása. *Az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Tudományos Közleményei* 6 (1966), 5—6. sz.
- KOLLÁR, L.: Héjak nyúlásmentes alakváltozásai. *Építés- és Építészettudomány* 3 (1971), 19—38.

Some Special Cases of Inextensional Deformation of Shallow Shells.— Present paper treats some cases of inextensional deformations of shallow shells having the peculiarity that the functions and differential equations describing the state of deformation are of extremely simple form. The flexural rigidity of the shell is not neglected.

Einige Spezialfälle der dehnungslosen Formänderung von flachen Schalen.— Es werden einige Fälle der dehnungslosen Formänderung flacher Schalen behandelt, wo sich die den Formänderungszustand beschreibenden Funktionen und Differentialgleichungen außergewöhnlich einfach gestalten. Die Biegesteifigkeit der Schale ist nicht vernachlässigt.

A LINEÁRIS ELASZTOSTATIKA FESZÜLTSGEKKEL FELÍRT MEZŐEGYENLETEIRŐL ÉS PEREMFELTÉTELEIRŐL

KOZÁK IMRE*
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
[Beérkezett: 1979. március 1-én]

The necessary and sufficient conditions of the single-valued displacements can be determined from the strain field, that is the six Saint—Venant's compatibility equations are not independent of each other. To eliminate the interdependence, K. WASHIZU in 1957 has given a solution by allowing for Bianchi's identity. In this paper, on the basis of the condition of the single-valued displacements on the boundary, (i. e. on the compatibility boundary condition), similiary with the aid of Bianchi's identity, the solution given by K. WASHIZU is extended to all feasible cases and, at the same time, the results are generalized to any curvilinear coordinate systems. In this way, the set of the governing equations of the linearized theory of the elastostatics, in connection with the six stress coordinates, is composed of the three equilibrium equations and of three suitably selected compatibility equations, however, the customary boundary conditions should be complemented by three compatibility boundary conditions.

1. Bevezetés

1.1 A lineáris elasztostatika alap-egyenletrendszere tetszőleges, görbevonalú x^1, x^2, x^3 koordinátarendszerben, ha nyomatéki feszültségek nincsenek és $\mathbf{T} = t^{kl} \mathbf{g}_k \mathbf{g}_l$ a feszültségmező, $\mathbf{A} = a_{kl} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^l$ az alakváltozásmező, $\mathbf{u} = u_k \mathbf{g}^k$ az elmozdulásmező, továbbá $\mathbf{q} = q^k \mathbf{g}_k$ a térfogati erőrendszer:

$$t^{kl}_{;l} + q^k = 0, \quad (1.1)_1$$

$$\varepsilon_{klm} t^{kl} = 0, \quad (1.1)_2$$

$$a_{kl} = c_{klpq} t^{pq}, \quad (1.2)$$

$$2a_{kl} = u_{k;l} + u_{l;k}. \quad (1.3)$$

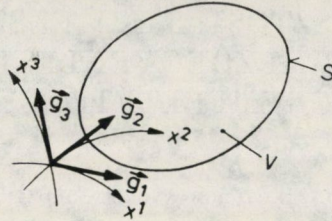
Pontosvessző utáni index a kovariáns derivált jele, azonos alsó- és felső index szerint összegezni kell, ε_{klm} a kovariáns permutációs tenzor, c_{klpq} az anyag-törvény együttható tenzora (legfeljebb 21 független anyagjellemző állandót tartalmaz).

Jelölje a térnek a test által elfoglalt tartományát V , peremét S (1. ábra) és legyenek a peremfeltételek (\mathbf{n}_k a testből kifelé mutató normál vektor):

$$t^{kl} n_l = p^k \quad x \in S_t \quad (1.4)_1$$

$$u_k = \tilde{u}_k \quad x \in S_u \quad (1.4)_2$$

* Prof. Kozák Imre, 3525 Miskolc, Dózsa Gy. u. 14.



1. ábra

p^k előírt terhelés az S_l peremszakaszon, \tilde{u}_k előírt elmozdulás az S_u peremszakaszon, x jelöli a pont három koordinátájának összességét és $S_l \cup S_u = S$.

A továbbiakra feltételezzük, hogy az elmozdulásmező eleget tesz az alábbi normálási feltételeknek (\mathbf{r} a helyvektor):

$$\int_V \mathbf{u} dV = \mathbf{0}, \quad (1.5)_1$$

$$\int_V \mathbf{r} \times \mathbf{u} dV = \mathbf{0}. \quad (1.5)_2$$

Az (1.5) feltételek kiküszöbölik az olyan elmozdulásmezőket, amelyek csak a test merevtestszerű mozgásformáiban különböznek egymástól.

Igazolt, hogy a lineáris elasztostatika (1.5) feltételekkel kiegészített (1.1)–(1.4) alatti peremértékfeladatai egyértékű megoldást adnak az $u_k(x)$, $t^{kl}(x)$ és $a_{ki}(x)$ mezőkre.

A konkrét feladatok megoldása két úton kereshető.

Az egyik szerint olyan mezőegyenleteket állítottunk elő az (1.1)–(1.3) alapegyenlet-rendszerből, hogy azokban csak az elmozduláskoordináták szerepeljenek. Így adódik az $u_k(x)$ elmozdulásmezőre a Navier-egyenlet, amelynek adott peremfeltételek melletti egyértékű megoldásából az (1.3) és (1.2) egyenletek szerint ugyancsak egyértékű alakváltozásmező és feszültségmező állítható elő.

A feladatok megoldásának másik útja szerint olyan mezőegyenleteket állítunk elő, hogy azokban csak feszültségkoordináták szerepelnek, és amelyek megfelelő peremfeltételek melletti megoldása a feszültségmezőre és a feszültségmezőből előállítható elmozdulásmezőre is egyértékű.

Az (1.2) anyagtörvény kölcsönös és egyértelmű kapcsolatot jelent az $a_{ki}(x)$ és $t^{kl}(x)$ mezők között. A tanulmány a továbbiakban a két mező közül mindig a feszültségmezőt tekinti, mint vizsgált mezőt és az alakváltozási tenzormezőt valamint az inkompatibilitási tenzormezőt mindig úgy veszi, hogy azok az (1.2) képlet felhasználásával a feszültségmezővel vannak felírva.

Az alakváltozásmező, így a feszültségmező ismeretében az elmozdulásmező a Cesaro-formulával állítható elő [1], [2: pp 63–64]. Az egyetlen, egyszerűen összefüggő felülettel határolt testben az (1.5) feltételeknek eleget

tevő, így előállított elmozdulásmező egyértékűségének szükséges és elégséges feltétele a hat de Saint—Venant-féle kompatibilitási egyenlet teljesülése [1], [3: pp 25—29], [2: pp 64], [4: pp 188—190].

A kompatibilitási egyenletek feszültségkoordinátákkal felírt alakjai homogén izotróp testre az egyensúlyi egyenletek figyelembevételével, az úgynevezett Beltrami—Michell-féle kompatibilitási egyenletek [5], [6].

A megoldások keresésének második útja kapcsán három, egymáshoz kapcsolódó probléma merül fel:

I. A szimmetrikus feszültségi tenzor hat koordinátájához rendelkezésre áll három egyensúlyi és hat kompatibilitási egyenlet. Kérdés tehát, hogy a három egyensúlyi egyenlethez melyik három, feszültségekkel felírt de Saint—Venant-féle kompatibilitási egyenletet kell hozzávenni, ha csak hat mezőegyenlettel akarunk dolgozni.

II. Melyek a megfelelő peremfeltételek?

III. A kiegészítő energia minimuma elv kimondja, hogy valamely peremértékfeladat statikailag lehetséges feszültségmezői közül a tényleges (vagyis kinematikailag is lehetséges) megoldásnál a kiegészítő energiának minimuma van. Várható tehát, hogy a kiegészítő energia minimuma elvből levezethető a feszültségmezőből előállított elmozdulásmező egyértékűségének szükséges és elégséges feltételeként a hat de Saint—Venant-féle kompatibilitási egyenlet. Ezzel szemben R. V. SOUTHWELL [7: pp 211—217] az egyetlen zárt felülettel határolt testet vizsgálva azt találta, hogy akár a Maxwell-féle [8], akár a Morera-féle [9] feszültségfüggvényeket vesszük alapul, a kiegészítő energia minimuma elvből csak három kompatibilitási egyenlet következik. Kérdés tehát, hogy mi a fentebb leírt, „Southwell-paradoxon”-ként ismert probléma megoldása.

1.2 K. WASHIZU a Riemann-geometria identikusan teljesülő Bianchi-formulája alapján Cartesiusi koordinátarendszerben kimutatja [10], hogy ha a Maxwell-féle feszültségfüggvényekhez (vagy a Morera-féle feszültségfüggvényekhez) — a kiegészítő energia minimuma elvből következően SOUTHWELL szerint — hozzárendelhető három kompatibilitási egyenlet teljesül az egyetlen, egyszeresen összefüggő felülettel határolt test belsejében, a másik három pedig a test peremén, akkor már a másik három is teljesül a test belsejében. Ezzel WASHIZU mind a három felvetett problémára ad megoldást.

1.3 Jelen dolgozat a lineáris elasztostatika kizárólag feszültségekkel felírt mezőegyenleteit és a megfelelő peremfeltételeket analizálja egyetlen, egyszeresen összefüggő felülettel határolt test esetére. Meghatározza azokat a feszültségmezőre vonatkozó szükséges és elégséges mezőegyenleteket és peremfeltételeket, amelyek a feszültségmező egyértékűségét, valamint a feszültségmezőből a Cesaro-formulával előállítható elmozdulásmező (1.5) feltételek szerinti egyértékűségét is biztosítják. Ezzel a dolgozat kiegészíti és általánosítja WASHIZUNAK az 1.2 pontban ismertetett megoldását.

A 2. pont összefoglalóan ismerteti a kontinuumok elmozdulásmezőjére, forgásmezőjére és alakváltozásmezőjére vonatkozó linearizált egyenleteket, és a feszültségfüggvények lehetséges alakjait.

A 3. pont meghatározza a feszültségmezőből felületen előállítható elmozdulásmező egyértékűségének feltételeit, majd a 4. pont kiegészíti WASHIZU [10]-ben közölt megoldását, kimutatja az összes lehetséges esetet, meghatározza a kompatibilitási peremfeltételeket, és az eredményeket tetszőleges, görbevonalú koordinátarendszerre általánosítja.

Az 5. pont — az előzőek alapján — a lineáris elasztostatika feszültségmezőre megfogalmazott peremértékfeladatának — az 1.3 pont első bekezdése szerinti értelemben — szükséges és elégséges mezőegyenleteit és peremfeltételeit mutatja be.

A 6. pont a 3–5. pontok eredményeit összegezi.

A 7. pont példán mutatja be az eredmények Cartesiusi koordinátarendszerben történő alkalmazását.

1.4 Feltételezzük, hogy a vizsgált test homogén, és — a már említett módon — a tér V tartományát foglalja el, S pereme pedig egyszerűen össze-függő zárt felület. A térfogati erőrendszer tetszőleges lehet.

Kimutatjuk, hogy a szükséges három kompatibilitási mezőegyenlet a felvett koordinátarendszertől függően választható ki, ezért az általánosság kedvéért a továbbiakban a koordinátarendszert tetszőleges görbevonalúnak vesszük (a kovariáns deriválások sorrendje felcserélhető). A már bevezetett jelöléseket megtartjuk, a további jelöléseket első előfordulásuk helyén vezetjük be.

2. A lineáris elasztostatika felhasznált további ismeretei

2.1 Jelölje az 1.1 pontban bevezetett jelöléseken túl $\mathbf{U} = u_{kl} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^l$ az elmozdulásmező gradiensét, $\Psi = \psi_{kl} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^l$ a forgástenzort, ∇ a Hamilton-féle differenciáloperátort, index előtti vessző a parciális deriválást, továbbá megnyisítések közötti pont a skaláris szorzást, dúlt kereszt a vektorális szorzást.

Kis elmozdulások és alakváltozások esetén az elmozdulásmezőre, alakváltozásmezőre és forgásmezőre fennállnak az alábbi linearizált mezőegyenletek:

$$\mathbf{U} = \mathbf{u}\nabla = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^l} \mathbf{g}^l = u_{,l} \mathbf{g}^l, \quad u_{kl} = u_{k;l}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{A} + \Psi, \quad u_{kl} = a_{kl} + \psi_{kl}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}\nabla + \nabla\mathbf{u}), \quad a_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k;l} + u_{l;k}), \quad (2.3)$$

$$\Psi = \frac{1}{2} (\mathbf{u}\nabla - \nabla\mathbf{u}), \quad \psi_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k;l} - u_{l;k}), \quad (2.4)$$

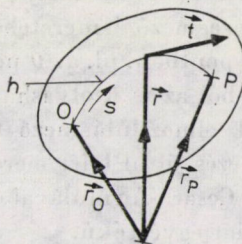
továbbá a (2.3) és (2.4) egyenletekből a kovariáns deriválások sorrendjének felcserélhetőségével előállíthatóan a

$$\psi_{kl;m} = a_{km;l} - a_{lm;k} \quad (2.5)_1$$

összefüggés, ahol

$$\Psi \nabla = \Psi_{,m} g^m = \psi_{kl;m} g^k g^l g^m = d_{klm} g^k g^l g^m \quad (2.5)_2$$

a forgásmező gradiense.



2. ábra

A (2.5)₁ egyenlet tulajdonképpen annak a feltétele, hogy a forgásmező gradiense teljes differenciál.

2.2 Kösse össze az $x^k = x^k(s)$ egyenletű tetszőleges h görbe (s a görbe mentén mért paraméter) a test tetszőlegesen megválasztható O és P pontjait (2. ábra). A görbe mentén, ahol

$$\mathbf{t} = t^k g_k = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad t^k = \frac{dx^k}{ds}, \quad (2.6)$$

az érintővektor és $d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds$ az elmozdulásmező differenciálja:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{U} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} ds. \quad (2.7)$$

A (2.2) és (2.6) egyenletek figyelembevételével és azonos átalakításokkal felírható, hogy

$$\begin{aligned} d\mathbf{u} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds + \Psi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{t} ds + \left\{ -\frac{d}{ds} [\Psi \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r})] + \frac{d\Psi}{ds} \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}) \right\} ds. \end{aligned} \quad (2.8)_1$$

(\mathbf{r}_P a rögzített P pont helyvektora), ahol a forgásmező görbe menti deriváltja a (2.5) képlet szerint képezhető:

$$\frac{d\Psi}{ds} = (\Psi \nabla) \cdot \mathbf{t} = (a_{km;l} - a_{lm;k}) g^k g^l g^m \cdot \mathbf{t}. \quad (2.8)_2$$

A (2.7) egyenletnek h mentén 0 -tól P -ig vett integrálja — a (2.8) egyenlet alatti átalakításokra is tekintettel — a P pont \mathbf{u}_p elmozdulásának számítására az ismert Cesaro-formulát adja [1], [2: pp 63–64]:

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_0 + \int_h \mathbf{U} \cdot \mathbf{t} \, ds = \mathbf{u}_0 + \Psi_0 \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0) + \int_h \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} \, ds, \quad (2.9)_1$$

$$\mathbf{B} = b_{km} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^m = [a_{km} + (a_{km;l} - a_{lm;k}) \mathbf{g}^l \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r})] \mathbf{g}^k \mathbf{g}^m. \quad (2.9)_2$$

Mivel a (2.9) formulában P a test bármely pontja lehet, a Cesaro-formula segítségével az $\mathbf{A}(x)$ alakváltozásmező ismeretében előállítható a test elmozdulásmezője, feltéve hogy egy pontban, pl. az 0 pontban az \mathbf{u}_0 elmozdulás és a Ψ_0 forgástenzor ismert. (2.9)-ből az is kiolvasható, hogy egyetlen $\mathbf{A}(x)$ alakváltozásmezőhöz végtelen sok elmozdulásmező tartozik, ezek azonban csak a test $\mathbf{u}_0 + \Psi_0 \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_0)$ kifejezés által leírt merevtestszerű mozgásformáival különbözhetnek egymástól. A Cesaro-formulával előállított elmozdulásmező az (1.5) normálási feltételek szerint egyértékű.

2.3 Az alakváltozásmező, továbbá \mathbf{u}_0 és Ψ_0 ismeretében az O és P pontok közötti h görbe megválasztásától függetlenül adja a Cesaro-formula a P pont elmozdulását, ha a (2.9)₁ alatti görbe menti integrál integranduszára nézve a h görbék szóhajóhető tartományában a

$$\mathbf{B} \times \nabla = \mathbf{B}_{,n} \times \mathbf{g}^n = b_{km;n} \varepsilon^{mns} \mathbf{g}^k \mathbf{g}_s = 0 \quad (2.10)$$

egyenlet teljesül. Figyelembe véve az

$$(\mathbf{r}_p - \mathbf{r})_{,n} = -\mathbf{r}_{,n} = -\mathbf{g}_n$$

deriváltat, valamint a szorzat deriválási szabályát, a (2.10) feltételből a (2.9)₂ egyenlet jobboldalának behelyettesítése után az alábbi egyenlet következik:

$$b_{km;n} \varepsilon^{mns} = [a_{km;n} + (a_{km;l} - a_{lm;k})(-\delta_n^l)] \varepsilon^{mns} + \\ + (a_{km;ln} - a_{lm;kn}) \varepsilon^{mns} \mathbf{g}^l \cdot (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}) = 0.$$

Mint hogy a kapott kifejezés első tagja identikusan zérust ad, következik, hogy a második tagnak is zérusnak kell lennie. E feltétel az $(\mathbf{r}_p - \mathbf{r})$ vektortól függetlenül teljesül, ha fennáll az

$$(a_{km;ln} - a_{lm;kn}) \varepsilon^{mns} = 0$$

egyenlet.

Legtöbbi, illetve a belőle képezhető

$$\varepsilon^{akl} \varepsilon^{bmn} a_{km;ln} = 0, \quad x \in V \quad (2.11)$$

egyenlet teljesülése tehát annak a feltétele, hogy adott u_0, Ψ_0 és $A(x)$ esetén az $u(x)$ elmozdulásmező a V tartományban egyértékű legyen. A (2.11)-es egyenletek az úgynevezett de Saint—Venant-féle kompatibilitási egyenletek (integrálhatósági feltételek).

A (2.5)₁ egyenlet alapján

$$\varepsilon^{akl} a_{km;l} = \frac{1}{2} \varepsilon^{akl} \psi_{kl;m}$$

írható, tehát könnyen meggyőződhetünk arról, hogy (2.5)₁ fennállása esetén a (2.11)-es kompatibilitási egyenletek már identikusan teljesülnek:

$$\varepsilon^{akl} \varepsilon^{bmn} a_{km;ln} = \frac{1}{2} \varepsilon^{akl} \varepsilon^{bmn} \psi_{kl;mn} \equiv 0. \tag{2.12}$$

Más szóval a (2.5)₁ alattiakat, mint kompatibilitási egyenleteket (integrálhatósági feltételeket) is tekinthetjük.

Az elmozdulásmező ismeretében a (2.3) egyenlet szerint képzett alakváltozásmezőre nézve a kompatibilitási egyenletek identikusan teljesülnek. Az ellenkező esetben (az elmozdulásmező ismerete nélkül) a kompatibilitási egyenletek az alakváltozásmezőre rótt feltételeket jelentenek.

2.4 Jelölje

$$E = e^{ab} g_a g_b; e^{ab} = \varepsilon^{akm} \varepsilon^{blp} a_{kl;mp} \tag{2.13}_1$$

az úgynevezett inkompatibilitási tenzort. Az inkompatibilitási tenzor szimmetrikus, hat skaláris koordinátája (g a mértéktenzor determinánsa):

$$\begin{aligned} ge^{11} &= a_{22;33} + a_{33;22} - 2 a_{23;23}, \\ ge^{22} &= a_{33;11} + a_{11;33} - 2 a_{31;31}, \\ ge^{33} &= a_{11;22} + a_{22;11} - 2 a_{12;12}, \\ ge^{12} &= a_{23;31} + a_{31;23} - a_{33;12} - a_{12;33}, \\ ge^{23} &= a_{31;12} + a_{12;31} - a_{11;23} - a_{23;11}, \\ ge^{31} &= a_{12;23} + a_{23;12} - a_{22;31} - a_{31;22}. \end{aligned} \tag{2.13}_{2-7}$$

Ha a (2.11) de jelű Saint—Venant-féle kompatibilitási egyenletek teljesülnek, az inkompatibilitási tenzor eltűnik, $e^{ab} = 0$. Az $e^{ab} = 0$ egyenletek nem függetlenek egymástól, mivel a (2.13)₁ értelmezésből beláthatóan a Bianchi-formula identikusan teljesül:

$$E \cdot \nabla \equiv 0; e^{ab}{}_{;ib} = \varepsilon^{akm} \varepsilon^{blp} a_{kl;mpb} \equiv 0. \tag{2.14}$$

A (2.14) azonosság következményeivel a 4. pont foglalkozik.

2.5 Térjünk most ki a feszültségfüggvények szerepére és szerkezetére.

A háromméretű elasztostatikai feladatokhoz Cartesiusi koordinátarendszerben J. C. MAXWELL [8] és G. MORERA [9] vezetett be egymástól különböző módon feszültségfüggvényeket. BELTRAMI [5] kimutatta, hogy MAXWELL és MORERA feszültségfüggvényei egy általános megoldás speciális esetei. GWYTHER [11] megadta a Beltrami-féle általános megoldást derékszögű görbevonallú koordinátarendszerben. A feszültségfüggvények tenzoriális (invariáns) alakját — egymástól függetlenül — B. FINZI [12] és V. I. BLOKH [13] állította elő. M. E. GÜRTIN [14] kimutatta, hogy a feszültségmező BELTRAMI szerinti előállítására csak akkor teljes (complete), ha a kontínuum minden egyes zárt peremfelületén a külső erőrendszer külön-külön egyensúlyi. Az ellenkező esetben a Beltrami féle megoldást ki kell egészíteni egy biharmonikus megoldással.

Nyomatéki feszültségek esetére W. GÜNTHER [15] állított elő feszültségfüggvényeket, majd a Günther-féle megoldást D. E. CARLSON [16] általánosította és nyomatéki feszültségek esetére is teljes (complete) megoldást adott.

A dolgozat csak az egyetlen zárt felülettel határolt kontínuum nyomatéki feszültségek nélküli esetét vizsgálja. Ekkor a térfogati erőrendszer potenciáljának létezése esetén (2.15) teljes (complete) megoldás.

Feltéve, hogy a feszültségfüggvények a szimmetrikus, elegendően sokszor differenciálható

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f_{xy} \mathbf{g}^x \mathbf{g}^y$$

tenzormező skaláris koordinátái, és a $\Phi(\mathbf{x})$ skaláris mező a

$$q^k = - \Phi_{,s} g^{sk}$$

összefüggésnek megfelelően a térfogati erőrendszer potenciálja, az (1.1) egyensúlyi egyenletek identikusan teljesülnek, ha a feszültségtenzort a

$$t^{kl} = \varepsilon^{kxp} \varepsilon^{lyq} f_{xy;pq} + \Phi g^{kl} \quad (2.15)$$

képlet szerint képezzük. Nem potenciális térfogati erőrendszer esetén (2.15) jobboldalán a második tag helyett egy ún. biharmonikus egyensúlyi feszültségmezőt kell venni [14].

Már FINZI felhívta a figyelmet arra, hogy nem változik a (2.15) képletben t^{kl} értéke, ha f_{xy} helyett a $w(\mathbf{x}) = w_k g^k$ tetszőleges vektormező segítségével felírható másik

$$f'_{xy} = f_{xy} + \frac{1}{2} (w_{x;y} + w_{y;x}) \quad (2.16)$$

feszültségfüggvényt vesszük. A (2.16) egyenlet alapján mód van arra, hogy a w_k koordináták alkalmas megválasztásával f_{xy} három koordinátáját is zérussá tegyük. Jelölje f'_{XY} a három nem zérus és f'_{AB} a három zérussá tett koordi-

nátát (a nagybetűs indexek is 1, 2, 3 értékeket vehetnek fel, de nem minden lehetséges variációban). Utóbbiakra nézve a

$$f'_{AB} = f_{AB} + \frac{1}{2}(w_{A;B} + w_{B;A}) = 0 \quad (2.17)$$

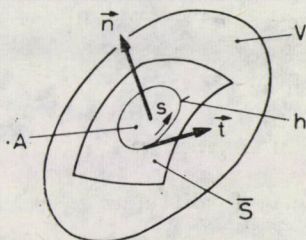
egyenlet áll fenn. Az A , B indexeket úgy kell megválasztani, hogy a (2.17) egyenletnek f_{AB} tetszőlegesnek gondolt értékeinél legyen a \mathbf{w} vektor mindhárom koordinátájára megoldása.

A (2.16) és (2.17) egyenletek szerint teljesen általános esetben is elegendő tehát olyan $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ szimmetrikus tenzormezőt venni a feszültségfüggvények tenzoraként, amelynek csak három független skaláris koordinátája nem zérus. A Maxwell-féle megoldásnál például f_{11} , f_{22} és f_{33} , míg a Morera-féle megoldásnál $f_{12} = f_{21}$, $f_{23} = f_{32}$ és $f_{31} = f_{13}$ a nem zérus koordináták. A feszültségfüggvények lehetséges felépítését БЛОКН[13] tekinti át.

A továbbiakban a feszültségfüggvények valamely lehetséges megválasztásánál XY jelenti az \mathbf{F} tenzor nem zérus és AB az \mathbf{F} tenzor zéruskoordinátáinak indexpárjait.

3. A Cesaro-formulával felületen előállítható elmozdulásmező egyértékűségének feltétele

3.1 Legyen az $x^k = x^k(\xi^1, \xi^2)$ egyenletű \bar{S} felület (ξ^1, ξ^2 a felület paraméterei) teljes egészében a V tartományon belül, vagy annak S peremén (3. ábra).



3. ábra

A (2.9) alattiak szerint a Cesaro-formula egyértékű elmozdulásmezőt állít elő az \bar{S} felületen, ha az \bar{S} -en felvehető bármely zárt h görbére nézve

$$\oint_h \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} ds = \mathbf{0}.$$

Innét a Stokes-tétel szerinti integrálatalakítással (ha A jelöli a h görbe által határolt felületszakaszt, és T a transzponált tenzor jele) az

$$\mathbf{0} = \oint_h \mathbf{t} \cdot \mathbf{B}^T ds = \int_A (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{B}^T dA = - \int_A (\mathbf{B} \times \nabla) \cdot \mathbf{n} dA$$

összefüggés adódik, ami azt jelenti, hogy tetszőleges h és A esetén fenn kell álljon a

$$(\mathbf{B} \times \nabla) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad x \in \bar{S} \quad (3.1)$$

feltétel. Elvégezve a 2.3 pont szerinti részletszámításokat, (3.1)-ből az \bar{S} felületen előállítható elmozdulásmező egyértékűségére az

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad x \in \bar{S} \quad (3.2)_1$$

$$e^{ab} n_b = \varepsilon^{akm} \varepsilon^{blp} n_b a_{kl;mp} = 0 \quad x \in \bar{S} \quad (3.2)_2$$

feltételt nyerjük.

A (3.2) feltételek a test teljes S peremére vonatkoztatva is érvényben maradnak.

4. Az alakváltozásmező egymástól független kompatibilitási feltételei

4.1 A (2.14) alatti Bianchi-féle azonosság szerint az $e^{ab} = 0$ kompatibilitási egyenletek nem függetlenek egymástól.

WASHIZU kimutatta [10] a Bianchi-formula segítségével, hogy Carteziusi koordinátarendszerben az

$$e^{12} = e^{23} = e^{31} = 0 \quad x \in V \quad (4.1)_1$$

és

$$e^{11} = e^{22} = e^{33} = 0 \quad x \in S \quad (4.1)_2$$

feltételek teljesülése esetében az

$$e^{11} = e^{22} = e^{33} = 0 \quad x \in V \quad (4.1)_3$$

egyenletek is teljesülnek, illetve fordítva, az

$$e^{11} = e^{22} = e^{33} = 0 \quad x \in V \quad (4.2)_1$$

és

$$e^{22} = e^{23} = e^{31} = 0 \quad x \in S \quad (4.2)_2$$

feltételek teljesülésével az

$$e^{12} = e^{23} - e^{31} = 0 \quad x \in V \quad (4.2)_3$$

egyenletek is teljesedésbe mennek. Következik tehát, hogy elegendő akár a

(4.1)₁, akár a (4.2)₁ egyenleteket mezőegyenletekként venni, de az is, hogy a peremfeltételeket ki kell egészíteni vagy a (4.1)₂, vagy a (4.2)₂ peremfeltételekkel.

A továbbiak általánosan foglalkoznak a Bianchi-féle formulából levonható következtetésekkel, tetszőleges görbevonalú koordinátarendszert feltételezve.

4.2 Képezzük ebből a célból a (2.14) Bianchi-azonosság és a tetszőleges, differenciálható $v(x) = v_k g^k$ vektormező skaláris szorzatának integrálját a V tartományon. Parciális integrálással az alábbi összefüggést nyerjük (n_b az S perem külső normálisa):

$$0 = \int_V v_a e^{ab}{}_{;b} dV = \int_S v_a e^{ab} n_b dS - \int_V v_{a;b} e^{ab} dV. \tag{4.3}$$

Előírva az S peremen az elmozdulásmező egyértékűségének (3.2) feltételét, és figyelembe véve e^{ab} szimmetriáját is, az alábbi egyenlet adódik:

$$\int_V v_{(a;b)} e^{ab} dV = 0. \tag{4.4}$$

A zárójelbe tett indexek a $v_{a;b}$ gradiens szimmetrikus részét jelzik.

Mint hogy nem választható meg tetszőlegesen a $v_{(a;b)}$ szimmetrikus tenzormezőnek mind a hat koordinátája, (4.5)-ből nem következik, hogy e^{ab} eltűnik V minden pontjában. Többféle módon is megválasztható azonban — a koordinátarendszertől is függően — három olyan indexpár, hogy a

$$v_{(A;B)} = \frac{1}{2} (v_{A;B} + v_{B;A}) = \alpha_{AB}(x) \tag{4.5}$$

egyenletnek a három, teljesen tetszőleges $\alpha_{AB}(x)$ függvény esetén is van megoldása $v_a(x)$ -re.

A (4.5) szerint megválasztott $v_a(x)$ vektormezővel (4.4) helyett írható az alábbi egyenlet:

$$\int_V \left[\sum_{(AB)} \alpha_{AB} e^{AB} + \sum_{(XY)} v_{X;Y} e^{XY} \right] dV = 0. \tag{4.6}$$

A (4.6) egyenletben az AB és XY indexpárú koordináták e^{ab} szimmetriájára is tekintettel, e^{ab} összes koordinátáját kiadják. Az összegezés jele alatt álló (AB) és (XY) arra utal, hogy az összegezést az indexpárok szerint kell elvégezni.

Feltéve ezek után, hogy fennáll

$$e^{XY} = 0 \quad x \in V, \tag{4.7}$$

— $\alpha_{AB}(x)$ tetszőleges volta miatt — (4.6)-ból az következik, hogy

$$e^{AB} = 0 \quad x \in V. \tag{4.8}$$

A (2.17) és (4.5) egyenletek összevetésével, a (4.7) feltételezéssel kapott (4.8) eredmény alapján a következő megállapításokat tehetjük:

- zérusnak felvéve az inkompatibilitási tenzor ugyanolyan indexpárú $e^{XY} = e^{YX}$ koordinátáit, mint amilyen indexpárú három $f_{XY} = f_{YX}$ koordinátát a feszültségfüggvények tenzorában — a felvett koordinátarendszerben a megoldás általánosságának megsértése nélkül — zérustól különbözőnek választhatunk, és
 - felvéve a test peremén az elmozdulásmező egyértékűségének $e^{ab}n_b = 0$ feltételét,
 - a Bianchi-féle azonosságból az inkompatibilitási tenzor másik három indexpárú $e^{AB} = e^{BA}$ koordinátájának zérus volta már következik.
- Röviden összefoglalva. Az

$$e^{XY} = e^{YX} = 0 \quad x \in V \quad (4.9)$$

és az

$$e^{ab}n_b = 0 \quad x \in S \quad (4.10)$$

feltételek teljesülése esetén az

$$e^{AB} = e^{BA} \quad x \in V \quad (4.11)$$

egyenletek is fennállnak, következésképp a (4.9) és (4.10) egyenletek a (2.11) kompatibilitási feltételekkel egyenértékűek, s mint ilyenek az elmozdulásmező egyértékűségének egymástól független, egyúttal szükséges és elégséges kompatibilitási feltételeit jelentik.

Az XY indexpárok annyiféleképpen és ugyanúgy választhatók ki, ahányféleképpen és ahogyan a feszültségfüggvények tenzorának nem zérus koordinátái megválaszthatók (lásd a 2.5 pontot).

A (4.10) peremfeltételt célszerű „kompatibilitási peremfeltétel”-nek nevezni.

A kapott eredmények az összes lehetséges eset kimutatásával, a kompatibilitási peremfeltételek meghatározásával, és az eredmények tetszőleges görbevonalú koordinátarendszerre történő általánosításával WASHIZU 4.1 pontban idézett eredményeinek kiegészítését jelentik.

5. A lineáris elasztostatika mezőegyenletei és peremfeltételei feszültségekkel

5.1 Az előzőek alapján a lineáris elasztostatikának feszültségmezőre megfogalmazott peremértékfeladataihoz az alábbi mezőegyenletek és peremfeltételek tartoznak.

Mezőegyenletek:

$$t^{kl}_{\dots;l} + q^k = 0, \quad x \in V, \quad (5.1)_1$$

$$\varepsilon_{klm} t^{kl} = 0, \quad x \in V, \quad (5.1)_2$$

$$a_{pq} = c_{pqkl} t^{kl}, \quad x \in V, \quad (5.2)$$

$$e^{XY} = \varepsilon^{Xkm} \varepsilon^{Ylp} a_{kl;mp} = 0, \quad x \in V. \quad (5.3)$$

(Az XY indexpárok annyiféleképpen és ugyanúgy választhatók ki, ahányféleképpen és ahogyan a feszültségfüggvények tenzora felépíthető.)

Peremfeltételek:

$$t^{kl} n_l = p^k, \quad x \in S_f, \quad (5.4)_1$$

$$u_k = \tilde{u}_k, \quad x \in S_u, \quad (5.4)_2$$

$$e^{ab} n_b = 0, \quad x \in S. \quad (5.5)$$

(Az XY és AB indexpárú koordináták e^{ab} minden koordinátáját kiadják.)

Az $(5.4)_2$ -t helyettesítő és a feszültségmezőre vonatkozó peremfeltételt, továbbá az S_u peremszakaszon az (5.5) -tel egyenértékű, de egyszerűbb peremfeltételt a 5.3 pontban állíthatjuk elő.

Meg kell jegyezni, hogy az (5.3) kompatibilitási mezőegyenletek és ennek megfelelően a (5.5) kompatibilitási peremfeltételek ugyanannál a feladatnál többféleképpen is megválaszthatók. Célszerű mindig a feladat természetéhez igazodni.

5.2 A lineáris elasztostatika 5.1 pontban megfogalmazott és az (1.5) feltételekkel kiegészített peremértékfeladata egyértékű $T(x)$ feszültségmezőt és $u(x)$ elmozdulásmezőt állít elő.

Az állítás igazolásához elegendő azt figyelembe vennünk, hogy az (5.3) és (5.5) kompatibilitási feltételek és az (1.5) normálási feltételek teljesülése esetén a Cesaro-formula a $T(x)$ mezőhöz egyértékű $u(x)$ mezőt rendel hozzá. Ezzel a peremértékfeladat megoldása egyértékűségének igazolását visszavezettük az (1.1) – (1.4) alatti peremértékfeladat megoldása egyértékűségének ismert igazolására.

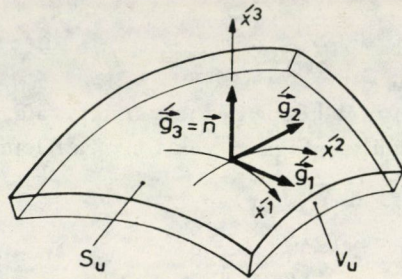
5.3 Az 5.1 pontbeli peremértékfeladat akkor lesz valóban teljes egészében a feszültségekkel megfogalmazott, ha az S_u peremszakasz elmozdulásmezőre vonatkozó $(5.4)_2$ -es peremfeltételét átalakítjuk feszültségekre vonatkozó peremfeltétellé.

Vezessük be a könnyebb áttekinthetőség érdekében az $x^k = \hat{x}^k(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ egyenletű S_u peremszakaszon $(\hat{x}^1, \hat{x}^2$ a felület paraméterei), illetve annak a közvetlen környezetére kiterjedő V_u tartományban a vesszővel jelölt $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3$ felületi koordinátarendszert. \hat{x}^3 -at a testből kifelé mutató n normális egység-

vektor mentén mérjük (4. ábra). Az új koordinátarendszer kovariáns bázisvektorai:

$$\dot{\mathbf{g}}_{\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \dot{x}^{\alpha}} = d^k_{\cdot \alpha} \mathbf{g}_k; \quad d^k_{\cdot \alpha} = \frac{\partial x^k}{\partial \dot{x}^{\alpha}}, \quad (5.6)_1$$

$$\dot{\mathbf{g}}_3 = \mathbf{n}. \quad (5.6)_2$$



4. ábra

(A görög betűs indexek csak 1, 2 értékeket vehetik fel.)

Az (5.4)₂-es peremfeltétel a bevezetett felületi koordinátarendszerben az

$$\dot{u}_k(\dot{x}^1, \dot{x}^2, 0) \dot{\mathbf{g}}^k = \dot{u}_k(\dot{x}^1, \dot{x}^2) \dot{\mathbf{g}}^k \quad x \in S_u \quad (5.7)$$

alakot veszi fel. Az (5.7) azonosságból következően az u és \dot{u} mezők S_u menti gradiense megegyezik,

$$\dot{u}_{k;\beta} = \dot{\dot{u}}_{k;\beta} \quad x \in S_u, \quad (5.7)_a$$

ennállnak tehát S_u -n a (2.2) egyenlet alapján az

$$\dot{a}_{k\beta} + \dot{\psi}_{k\beta} = \dot{\dot{u}}_{k;\beta}, \quad x \in S_u, \quad (5.7)_b$$

illetve a (2.3) és (2.4) egyenletekre is tekintettel, az

$$\dot{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{\dot{u}}_{\alpha;\beta} + \dot{\dot{u}}_{\beta;\alpha}), \quad x \in S_u, \quad (5.8)_1$$

$$\dot{\psi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{\dot{u}}_{\alpha;\beta} - \dot{\dot{u}}_{\beta;\alpha}), \quad x \in S_u, \quad (5.8)_2$$

$$\dot{a}_{3\beta} + \dot{\psi}_{3\beta} = \dot{\dot{u}}_{3;\beta} \quad x \in S_u \quad (5.8)_3$$

egyenletek.

Az (1.2) egyenlet figyelembevételével (5.8)₁-ből közvetlenül a feszültségmezőre vonatkozó és (5.4)₂-t helyettesítő három skaláris peremfeltételt nyerjük:

$$\dot{c}_{\alpha\beta pq} \dot{t}^{pq} = \frac{1}{2} (\dot{\dot{u}}_{\alpha;\beta} + \dot{\dot{u}}_{\beta;\alpha}), \quad x \in S_u, \quad (5.9)_1$$

vagy az eredeti koordinátarendszerben felírt feszültségtenzorra visszatérve:

$$d^r_{. \alpha} d^s_{. \beta} c_{rsmn} t^{mn} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{\alpha; \beta} + \dot{u}_{\beta; \alpha}), \quad x \in S_u. \quad (5.9)_2$$

(5.8)_{2, 3} lehetővé teszi a felületi koordinátarendszerben

$$\epsilon^{a3} = 0, \quad x \in S_u \quad (5.10)$$

alakú (5.5) peremfeltétel egyszerűsítését. Ha teljesül ugyanis az S_u felületszakaszon a (2.5)₁ szerinti

$$\dot{\psi}_{kl; \gamma} = \dot{a}_{k\gamma; l} - \dot{a}_{l\gamma; k}, \quad x \in S_u \quad (5.11)$$

egyenlet, akkor teljesedésbe megy ugyanott (2.12) szerint az

$$\epsilon^{a3} = \epsilon^{akm} \epsilon^{3\lambda\pi} \dot{a}_{k\lambda; m\pi} = \frac{1}{2} \epsilon^{akm} \epsilon^{3\lambda\pi} \dot{\psi}_{km; \lambda\pi} = 0 \quad (5.12)$$

kompatibilitási egyenlet is. Elegendő tehát az (5.10) helyett az (5.11) peremfeltételt biztosítani.

Formális számítással kimutatható, hogy (5.8)_{1,2} fennállása esetén a

$$\dot{\psi}_{\alpha\beta; \gamma} = \dot{a}_{\alpha\gamma; \beta} - \dot{a}_{\beta\gamma; \alpha}, \quad x \in S_u$$

egyenlet identikusan teljesül, marad tehát, mint peremfeltétel, a

$$\dot{\psi}_{3\beta; \gamma} = \dot{a}_{3\gamma; \beta} - \dot{a}_{\beta\gamma; 3} \quad x \in S_u$$

egyenlet. Az (5.8)₃ egyenlet helyettesítésével

$$\dot{a}_{3\beta; \gamma} + \dot{a}_{3\gamma; \beta} - \dot{a}_{\beta\gamma; 3} = \dot{u}_{3; \beta\gamma} \quad (5.13)_1$$

és (1.2) figyelembevételével végül is a

$$\begin{aligned} & (\epsilon'_{3\beta\rho q} t^{pq})_{; \gamma} + (\epsilon'_{3\gamma\rho q} t^{pq})_{; \beta} - (\epsilon'_{\beta\gamma\rho q} t^{pq})_{; 3} + \Gamma^3_{\beta\gamma} \epsilon'_{33\rho q} t^{pq} = \\ & = (\dot{u}_{3; \beta})_{; \gamma} - \Gamma^3_{3\gamma} \dot{u}_{\sigma; \beta} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} \dot{u}_{3; \sigma}, \quad x \in S_u \end{aligned} \quad (5.13)_2$$

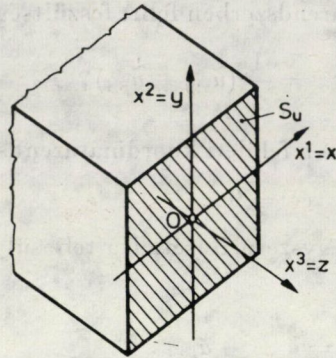
peremfeltétel adódik. (5.13) a β, γ indexekre nézve szimmetrikus, tehát valóban csak három skaláris peremfeltételt jelent.

Az (5.9) és (5.13) peremfeltételek teljesítése biztosítja az

$$\dot{u}_k = \dot{u}_k \quad x \in S_u$$

peremfeltétel teljesülését is.

5.4 Lássuk az S_u peremszakaszon a feszültségekre felírandó peremfeltételekhez az alábbi példát. Legyen az egyébként tetszőleges terhelésű test S_u peremszakasza síkfelület. Az 5. ábrán feltüntetett Carteziusi koordinátarend-



5. ábra

szerben $\mathbf{n} = \mathbf{g}_3$ a normális vektor S_u -n. Legyen az előírt elmozdulásmező tetszőleges:

$$\mathbf{u}(x^1, x^2) = \tilde{u}_k(x^1, x^2) \mathbf{g}^k \quad x \in S_u.$$

Az (5.8)₁ képlet szerint meghatározott S_u -n

$$a_{\alpha\beta}(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{\alpha,\beta} + \tilde{u}_{\beta,\alpha}),$$

és így a feszültségmezőre fennáll (5.9)₁ szerint az alábbi egyenlet:

$$c_{\alpha\beta pq} t^{pq} = a_{\alpha\beta}(x^1, x^2) \quad x \in S_u. \quad (5.14)$$

Vegyük észre, hogy (5.14)-ben az \tilde{u}_3 koordináta nem szerepel, következésképp (5.14) nem lehet elegendő peremfeltétel. A hiányzó peremfeltételeket a feszültségekből előállított elmozdulásmező egyértékűségét biztosító (5.13)₁ egyenletek jelentik. Részletesen kiírva ezeket:

$$2a_{31,1} - a_{11,3} = \tilde{u}_{3,11},$$

$$2a_{32,2} - a_{22,3} = \tilde{u}_{3,22}, \quad x \in S_u \quad (5.15)$$

$$a_{31,2} + a_{32,1} - a_{12,3} = \tilde{u}_{3,12}.$$

5.5 Felvethető az a kérdés, hogy az elasztostatika feszültségmezőre vonatkozó ismert megoldásainál miért nem merült fel a kompatibilitási egyenletek mezőegyenletként történő megválasztásának (5.3) alatti kérdése, és a peremfeltételek (5.5) szerinti kiegészítésének szükségessége (utóbbit az 5.5 pont példája is illusztrálja).

A felvetett kérdésre a következőképp válaszolhatunk. A lineáris elasztostatikai feszültségmezőre történő megoldásainak egy részénél azért nincs szükség a peremfeltételek kiegészítésére és a kompatibilitási egyenletek mező-

egyenletként történő kiválasztásának mérlegelésére, mert a feladat természetéből következően utóbbi önként adódik, a kompatibilitási peremfeltételek pedig identikusan teljesülnek (pl. sík alakváltozás).

Más, bonyolultabb eseteknél úgy kerülnek meg a szerzők a problémát, hogy a megoldás keresése közben az egyensúlyi egyenleteken kívül mind a hat kompatibilitási egyenletet teljesítik (nem feledkezve meg természetesen arról, hogy közülük csak három független). Ekként eljárva, az (5.5) kompatibilitási peremfeltételek identikusan teljesülnek.

Az elmozdulásmezőre megfogalmazott peremértékfeladatoknál — a 2.3 pont utolsó bekezdésének értelmében — ugyancsak identikusan teljesülnek a kompatibilitási peremfeltételek.

6. Összegezés

Jelölje — tetszőleges görbevonalú koordinátarendszert feltételezve — $u_k(x)$ az elmozdulásmezőt, $a_{kl}(x)$ az alakváltozásmezőt és

$$e^{ab}(x) = \varepsilon^{akm} \varepsilon^{blp} a_{kl;mp}$$

az inkompatibilitási mezőt.

6.1 Az identikusan teljesülő Bianchi-formula alapján kimutatjuk, hogy egyetlen, egyszerűen összefüggő felülettel határolt test esetén az alkalmasan megválasztott

$$e^{XY} = 0, \quad x \in V \quad (6.1)_1$$

kompatibilitási mezőegyenletek és az

$$e^{ab} n_b = 0, \quad x \in S \quad (6.1)_2$$

kompatibilitási peremfeltételek teljesülése szükséges és elégséges feltétel ahhoz, hogy az $a_{kl}(x)$ mezőből a Cesaro-formulával az (1.5) normálási feltételeket is kielégítő egyértékű elmozdulásmező legyen előállítható. Az XY indexpárok a felvett koordinátarendszerben annyiféleképpen és ugyanúgy választhatók ki, mint a feszültségfüggvények tenzorának nem zérus koordinátái.

6.2 A $(6.1)_2$ kompatibilitási peremfeltétel az S felületen előállítható elmozdulásmező egyértékűségének szükséges és elégséges feltétele.

6.3 A lineáris elasztostatika feszültségekkel megfogalmazott peremértékfeladatának szükséges és elégséges mezőegyenleteit és peremfeltételeit úgy kapjuk meg, hogy az anyagtörvényhez és az egyensúlyi egyenletekhez hozzávésszünk három, $(6.1)_1$ szerint lehetséges kompatibilitási mezőegyenletet, az (1.4) peremfeltételeket pedig kiegészítjük a $(6.1)_2$ kompatibilitási peremfeltétellel.

6.4 Az S_u peremszakaszon, ahol az \tilde{u}_k elmozdulásmező előírása a peremfeltétel, a feszültségmezőre — (5.9) és (5.13) szerint — az alábbi peremfeltételek vonatkoznak. A felületen változó \hat{x}^1 és \hat{x}^2 , és a felületre merőlegesen változó \hat{x}^3 koordinátákkal felírva, ha $a_{kl} = c_{klpq} t^{pq}$ az anyagtörvény:

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\dot{\tilde{u}}_{\alpha;\beta} + \dot{\tilde{u}}_{\beta;\alpha}), \quad x \in S_u, \quad (6.3)_1$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{3\alpha;\beta} + \hat{a}_{3\beta;\alpha} - \hat{a}_{\alpha\beta;3} + \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^3 \hat{a}_{33} &= \\ = (\dot{\tilde{u}}_{3;\alpha})_{,\beta} - \hat{\Gamma}_{3\beta}^{\mu} \dot{\tilde{u}}_{\mu;\alpha} - \hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} \dot{\tilde{u}}_{3;\mu} & \quad x \in S_u. \end{aligned} \quad (6.3)_2$$

A fenti képletekben $\hat{\Gamma}_{ab}^m$ a másodfajú Christoffel-szimbólumok jele.

6.5 A felesleges kompatibilitási feltételek kiszűrése jelentős lehet a feszültségmező előállítását célzó közelítő számításoknál.

7. Példa

7.1 Példaként írjuk fel részletesen a lineáris elasztostatika feszültségmezőre vonatkozó egyenleteit és peremfeltételeit Cartesiusi koordinátarendszerben homogén, izotróp anyagú, egyetlen, egyszerűen összefüggő felülettel határolt testet feltételezve, majd vizsgáljunk meg egy konkrét peremérték-feladatot.

Ebben a pontban $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ a három helykoordináta és az x , y , z indexek megjelölő indexek (nem veszik fel az 1, 2, 3 értékeket).

Jelölje a szimmetrikus feszültségi tenzor és alakváltozási tenzor koordinátáit, továbbá a térfogati terhelés sűrűségvektorának koordinátáit sorra:

$$[a_{kl}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}; [t^{kl}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

$$\cdot [q^k] = [q_x q_y q_z].$$

Az (1.1)₁ egyensúlyi egyenletek alakja:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x = 0, \quad \dots \quad xyz, \quad (7.1)_{1-3}$$

az (1.2) szerinti Hooke-törvény alakja, ha E a rugalmassági modulus és ν a Poisson-tényező:

$$E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z), \dots xyz, \\ \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} = \tau_{xy}, \dots xyz, \quad (7.2)_{1-6}$$

és végül az inkompatibilitási tenzor (2.13)₂₋₇ szerinti koordinátái:

$$e^{xx} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \dots xyz, \quad (7.3)_{1-3} \\ e^{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \dots xyz. \quad (7.3)_{4-6}$$

A (7.3) inkompatibilitási koordináták a Hooke-törvény felhasználásával kifejezhetők a feszültségkoordinátákkal, majd az egyensúlyi egyenleteket is figyelembe véve — egymástól függetlenül — tovább alakíthatók. Így — a felülvonással jelölt — átalakított inkompatibilitási koordinátákat nyerjük:

$$\bar{e}^{xx} = -\frac{E}{1+\nu} e^{xx} = \Delta\sigma_x - \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \right) + \\ + \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} - \frac{\partial q_z}{\partial z} \right), \dots xyz, \quad (7.4)_{1-3}$$

$$\bar{e}^{xy} = -\frac{E}{1+\nu} e^{xy} = \Delta\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial y} + \\ + \frac{\partial q_y}{\partial x}, \dots xyz, \quad (7.4)_{4-6}$$

ahol

$$T_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (7.5)$$

a feszülstégtenzor első skalár invariánsa.*

7.2 A hat Saint—Venant-féle kompatibilitási egyenletet úgy kapjuk, hogy a (7.3) inkompatibilitási koordinátákat (vagy azoknak a feszültségekkel kifejezett alakjait) egyenlővé tesszük zérussal:

$$[e^{xx} = e^{yy} = e^{zz} = e^{xy} = e^{yz} = e^{zx} = 0, \quad (7.6)$$

míg a Beltrami—Michell-féle kompatibilitási egyenleteket úgy, hogy a (7.4) átalakított inkompatibilitási koordinátákat tesszük egyenlővé zérussal,

$$\bar{e}^{xx} = \bar{e}^{yy} = \bar{e}^{zz} = \bar{e}^{xy} = \bar{e}^{yx} = \bar{e}^{zx} = 0, \quad (7.7)$$

* A három pont utáni xyz azt jelzi, hogy az előtte levő képlet az xyz indexek ciklikus cseréjével is fennáll.

majd az így nyert első három egyenlet felhasználásával még további átalakításokat is végzünk.

Figyelemre méltó, hogy a Beltrami—Michell-féle kompatibilitási egyenletek szokásos alakja csak akkor áll elő, ha az $\bar{e}^{xx} = \bar{e}^{yy} = \bar{e}^{zz} = 0$ (illetve az $e^{xx} = e^{yy} = e^{zz} = 0$) egyenletek érvényességét már feltételeztük.

7.3 A 4.2 pont szerint a feszültségmező kompatibilitásának szükséges és elégséges feltételeit úgy kapjuk meg, hogy a feszültségekkel kifejezett (7.3) inkompatibilitási koordináták, vagy a (7.4) átalakított inkompatibilitási koordináták közül alkalmasan kiválasztva hármat egyenlővé teszünk zérussal, ezeket kompatibilitási mezőegyenleteknek tekintjük, a test peremén pedig előírjuk a (4.10)-nek megfelelő kompatibilitási peremfeltételeket (n_x, n_y, n_z a perem külső normálisa):

$$\begin{aligned} n_x e^{xx} + n_y e^{yx} + n_z e^{zx} &= 0, \quad \dots \quad xyz, \\ \text{illetve} \\ n_x \bar{e}^{xx} + n_y \bar{e}^{yx} + n_z \bar{e}^{zx} &= 0, \quad \dots \quad xyz. \end{aligned} \quad (7.8)_{1-3}$$

A három kompatibilitási mezőegyenlet indexpárjai a lehetséges

$$xx, yy, zz, xy, yz, zx. \quad (7.9)$$

összesen hat indexpárból a 4.2 pont alapján, az alábbi előírás szerint választhatók ki. A (4.5) egyenlet szerint a

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \alpha_{xx}, \quad \dots \quad xyz, \quad (7.10)_{1-3}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \alpha_{xy}, \quad \dots \quad xyz, \quad (7.10)_{4-6}$$

összesen hat egyenletet hármas csoportokba soroljuk (ez összesen 20-féle módon lehetséges), majd megnézzük, van-e az egyes hármas csoportoknak tettszőleges α függvények esetén a v_x, v_y és v_z vektorkoordinátákra megoldása. Amennyiben igen, az illető három egyenletben szereplő α függvények indexpárjait a (7.9) indexpárok közül töröljük, és a maradó három indexpár adja a kompatibilitási mezőegyenletek indexpárjainak egyik lehetséges változatát. Például a

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \alpha_{yy}, \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \alpha_{xy},$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \alpha_{zx}$$

egyenletrendszernek tetszőleges α_{yy} , α_{xy} és α_{zx} esetén is létezik megoldása v_x -, v_y -, v_z -re, tehát az

$$e^{zz} = e^{xx} = e^{yz} = 0$$

egyenletek lehetséges kompatibilitási mezőegyenletek.

A részletes áttekintés azt mutatja, hogy Cartesiusi koordinátarendszerben az alábbi 17-féle módon választhatók meg a kompatibilitási mezőegyenletek (a további alkalmazások kedvéért az átalakított inkompatibilitási koordinátákkal felírva):

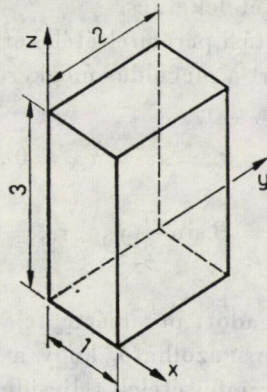
$$\begin{aligned} \bar{e}^{xx} &= \bar{e}^{yy} = \bar{e}^{zz} = 0, \\ \bar{e}^{xy} &= \bar{e}^{yz} = \bar{e}^{zx} = 0, \\ \bar{e}^{xx} &= \bar{e}^{yy} = \bar{e}^{xy} = 0, \quad \dots \quad xyz, \\ \bar{e}^{xx} &= \bar{e}^{yy} = \bar{e}^{yz} = 0, \quad \dots \quad xyz, \\ \bar{e}^{xx} &= \bar{e}^{yy} = \bar{e}^{zx} = 0, \quad \dots \quad xyz, \\ \bar{e}^{xx} &= \bar{e}^{yz} = \bar{e}^{zx} = 0, \quad \dots \quad xyz, \\ \bar{e}^{xx} &= \bar{e}^{xy} = \bar{e}^{yz} = 0, \quad \dots \quad xyz. \end{aligned} \quad (7.12)$$

K. WASHIZU [10] az első két sorban álló lehetőséget adta meg, míg a többi lehetőséget a jelen dolgozatban mutattuk ki.

7.4 Vonatkozzék a megvizsgálandó konkrét peremfeladat a 6. ábrán feltüntetett homogén, izotróp anyagú derékszögű hasábra.

Legyen a hasáb anyagának rugalmassági modulusa és Poisson-tényezője:

$$E, \nu \quad (7.13)$$



6. ábra

a hasábot terhelő térfogati erőrendszer ($A = \text{const.}$):

$$q_x = q_y = 0 \quad \text{és} \quad q_z = Ay, \quad (7.14)$$

a dinamikai peremfeltételek pedig ($B = \text{const.}$):

az $x = 0$ és $x = 1$ lapokon:

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0;$$

az $y = 0$ lapon:

$$\tau_{xy} = \sigma_y = \tau_{yz} = 0;$$

az $y = 2$ lapon:

$$\tau_{xy} = \sigma_y = 0, \quad \tau_{yz} = -2A;$$

a $z = 0$ és $z = 3$ lapokon:

$$\tau_{yz} = -\frac{A}{2}y^2, \quad \sigma_z = B \sin \frac{\pi}{2}y. \quad (7.15)$$

A felvett térfogati és felületi erőrendszer együtt egyensúlyban van.

A rugalmasságtan ismert tételei szerint a (7.13)–(7.15) adatokból egyértelműen következnek a test

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

feszültségei, mint a helykoordináták függvényei. A 6.3 pont állítása szerint ehhez

- mint mezőegyenleteket
 - a (7.1)_{1–3} egyensúlyi egyenleteket, és
 - a (7.12) alatti egyenletek közül valamelyik sor három kompatibilitási egyenletét,
- továbbá, mint peremfeltételeket
 - a (7.15) dinamikai feltételeket, és
 - a (7.8)_{1–3} kompatibilitási peremfeltételeket kell teljesítenünk.

Az egyszerűség kedvéért a megoldás megkeresése helyett azt ellenőrizzük a fenti módon, hogy a

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zx} = 0, \\ \sigma_z = B \sin \frac{\pi}{2}y, \quad \tau_{yz} = -\frac{A}{2}y^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

függvények lehetnek-e a megadott peremértékfeladat megoldásai.

Behelyettesítések útján igazolható, hogy a (7.1)_{1–3} egyensúlyi egyenletek és a (7.15) dinamikai peremfeltételek teljesülnek, a válasz tehát a kompatibilitási feltételek vizsgálata útján adható meg.

Az inkompatibilitási tenzor átalakított koordinátái a (7.16) függvényekkel a következők:

$$\begin{aligned}\bar{e}^{xx} &= \frac{1}{1+\nu} B \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} y, \\ \bar{e}^{yy} &= 0, \\ \bar{e}^{zz} &= -\frac{\nu}{1+\nu} B \frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2} y, \\ \bar{e}^{xy} &= 0, \\ \bar{e}^{yz} &= -A + A = 0, \\ \bar{e}^{zx} &= 0.\end{aligned}\tag{7.17}_{1-6}$$

A kompatibilitási feltételek teljesülésének egyik lehetséges módja a (7.12) egyenletek első sorában álló

$$\bar{e}^{xx} = \bar{e}^{yy} = \bar{e}^{zz} = 0\tag{7.18}$$

mezőegyenletek és a (7.8) peremfeltételek vizsgálata. A (7.17) kifejezések szerint a (7.18) mezőegyenletek azonban csak akkor teljesülnek, ha $B = 0$. Ekkor persze a (7.8) peremfeltételek is teljesednek.

Másik lehetséges mód a (7.12) második sorában álló

$$\bar{e}^{xy} = \bar{e}^{yz} = \bar{e}^{zx} = 0\tag{7.19}$$

mezőegyenletek és ugyancsak a (7.8) peremfeltételek vizsgálata. (7.17)₄₋₆ szerint a (7.19) mezőegyenletek teljesülnek, a kompatibilitás kérdését tehát a kompatibilitási peremfeltételek döntik el. A (7.8) szerinti peremfeltételek a (7.17) kifejezésekre tekintettel

- az $y = 0$ és $y = 2$ lapokon teljesülnek,
- az $x = 0$ és $x = 1$, illetve $z = 0$ és $z = 3$ lapokon azonban csak akkor, ha $B = 0$.

Azonos, $B = 0$ eredményre jutunk, ha a (7.12) alatt felsorolt lehetséges kompatibilitási mezőegyenletek közül (összesen 17 lehetőség közül) bármelyik hármat és a (7.8) kompatibilitási peremfeltételeket vesszük alapul.

A $B = 0$ eredmény azt jelenti, hogy a (7.16) függvények nem megoldásai a megadott peremértékfeladatnak.

IRODALOM

1. CESARO, E.: Sulle formole del Volterra, fondamentali nella teoria della distorsioni elastiche. *Rend. Accad. Napoli*, **12** (1906), 311—321
2. LUR'E, A. I.: Teoria uprugosti. Izd-vo Nauka, Moskva, 1970
3. SOKOLNIKOFF, I.: *Mathematical Theory of Elasticity*. 2nd ed., McGraw—Hill Book Company, New York 1956
4. MALVERN, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice—Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1969
5. BELTRAMI, E.: Osservazioni sulla nota precedente (del socio Morera). *Rend. Lincei*, Ser. 5, **1** (1892), 141—142
6. MICHELL, J. H.: On the Direct Determination of Stresses in an Elastic Solid, with Applications to the Theory of Plates. *Proc. Lond. Math. Soc.*, **31** (1899), 100—124
7. SOUTHWELL, R. V.: Castigliano's Principle of Minimum Strain-Energy and the Conditions of Compatibility for Strain. S. Timoshenko 60th Anniversary Volume, The MacMillan Co., 1938.
8. MAXWELL, J. C.: On Reciprocal Diagrams in Space and their Relation to Airy's Function of Stresses. *Proc. Lond. Math. Soc.*, (1), **2**, (1865—1869), 58—60
9. MORERA, G.: Soluzione generale delle equazioni indefinite dell' equilibrio di un corpo continuo. *Rend. Lincei*, Ser. 5, **1** (1892), 137—141
10. WASHIZU, K.: A Note on the Conditions of Compatibility. *Journal of Mathematics and Physics*, **36** (1958), No. 4., 306—312
11. GWYTHER, R. R.: The Formal Specification of the Elements of Stress in Cartesian, and in Cylindrical and Spherical Polar Coordinates. *Mem. Manchester Phil. Soc.*, **56** (1912), No. 10
12. FINZI, B.: Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui. *Rend. Lincei*, Ser. 6., **19** (1934), 578—584; 620—623
13. BLOKH, V. I.: Funkcij napriazhenij v teorii uprugosti. *Prikl. Mat. Mekh.*, **14** (1950), 415—422
14. GURTIN, M. E.: A Generalization of the Beltrami Stress Functions in Continuum Mechanics. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **13** (1963), N. 5., 321—329
15. GÜNTHER, W.: Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums. *Abh. Braunschweig. Wiss. Ges.*, **10** (1958), 195—213
16. CARLSON, D. E.: On Günther's Stress Functions for Couple Stresses. *Quart. Appl. Math.*, **25** (1967), No. 2, 139—146

Über die mit Spannungen aufgeschriebenen Feldgleichungen und Randbedingungen der linearen Elastostatik. Die notwendige und hinreichende Bedingung der Einwertigkeit des von dem Verformungsfeld herstellbaren Verschiebungsfeldes, d. h. die sechs Saint—Venantschen Kompatibilitätsgleichungen sind voneinander nicht unabhängig. Zur Beseitigung der Abhängigkeit gab im Jahre 1957 K. WASHIZU eine Lösung unter Berücksichtigung der Bianchischen Identität. Auch mit Hilfe der Bianchischen Identität vervollständigt die vorliegende Abhandlung die Lösung von K. WASHIZU aufgrund der Einwertigkeit des am Rand herstellbaren Verschiebungsfeldes (d. h., der Kompatibilitätsrandbedingung), zu allen möglichen Fällen und gleichzeitig verallgemeinert die Ergebnisse auf beliebige krummlinige Koordinatensysteme. Auf diese Weise besteht das Grundgleichungssystem der linearen Elastostatik in Zusammenhang mit den sechs Spannungskoordinaten von drei Gleichgewichtsgleichungen und von drei zweckmässig ausgewählten Kompatibilitätsgleichungen, jedoch müssen üblichen Randbedingungen mit den drei Kompatibilitätsrandbedingungen ergänzt werden.

MEGOSZLÓ NORMÁLERŐVEL TERHELT ÁLTALÁNOS KERESZTMETSZETŰ KONZOLTARTÓ ELCSAVARODÁSI KIHAJLÁSA

ZALKA KÁROLY*

[Beérkezett: 1980. április 1-én]

A dolgozat egyenletesen megoszló normálerővel terhelt, alul befogott, felül szabad végű, egyszerűen szimmetrikus és általános keresztmetszetű rudak elcsavarodó kihajlásának kritikus terhét határozza meg. A feladat változó együtthatójú differenciál-egyenlet-rendszerének sajátértékfeladatát a hatványsoros megoldás általánosításával egyszerű algebrai feladatra vezeti vissza, amelyet fokozatos közelítéssel old meg. A kritikus teher kiszámítására szolgáló értékeket táblázatokban adja meg. A levezeteli összefüggések használatára számpéldát mutat be.

1. Bevezetés

A központosan nyomott, egyenestengelyű, vékonyfalú nyitott szelvényű rudak jellegzetes tönkremeneteli formája az elcsavarodó kihajlás. A fent koncentrált erőkkkel terhelt függőleges tengelyű, általános keresztmetszetű rudak elcsavarodó kihajlása kritikus terhének meghatározására TIMOSHENKO [6] adott egyszerű megoldást: A kritikus erő egy harmadfokú algebrai egyenlet legkisebb gyökeként nyerhető. A megoszló normálerőkkel terhelt általános keresztmetszetű rudak térbeli stabilitás-problémáját azonban tudomásunk szerint még nem oldották meg. AKESSON [1] állványzatok térbeli stabilitását vizsgálta, eredményei azonban csak olyan speciális rudakra érvényesek, amelyeknek nincs csavarási merevségük.

Az egyenletesen megoszló normálerőkkel terhelt, alul befogott, felül szabad végű rúd elcsavarodó kihajlását a következő differenciálegyenlet-rendszer jellemzi [7, 8]:

$$u'''' + \frac{qz}{EI_y} (u' + y_0 \varphi') = 0, \quad (1.1)$$

$$v'''' + \frac{qz}{EI_x} (v' - x_0 \varphi') = 0, \quad (1.2)$$

$$\varphi'''' - \left(\frac{GI_t}{EI_*} - \frac{qzI_0}{EI_* A} \right) \varphi' - \frac{qz}{EI_*} (x_0 v' - y_0 u') = 0. \quad (1.3)$$

* Zalka Károly, 1043 Budapest, Nyár u. 19, I/4.

A differenciálegyenlet-rendszerhez a következő peremfeltételek tartoznak:

$$u(0) = v(0) = \varphi(0) = 0, \quad (1.4)$$

$$u'(H) = v'(H) = \varphi'(H) = 0, \quad (1.5)$$

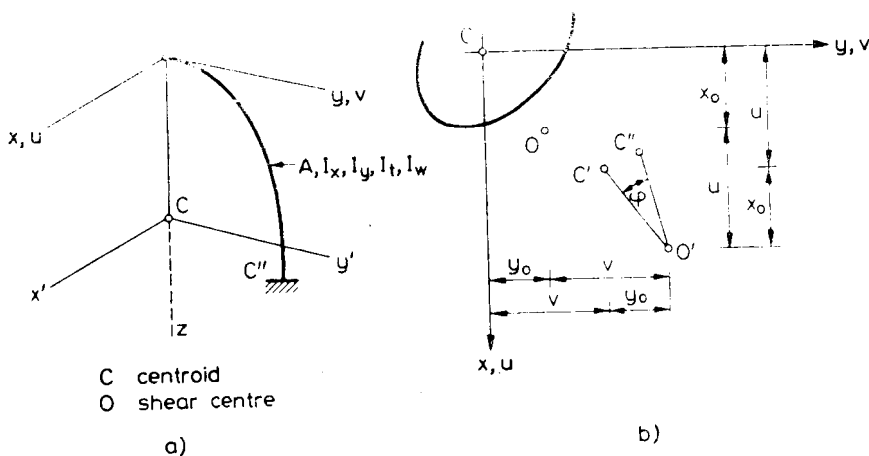
$$u''(0) = v''(0) = \varphi''(0) = 0. \quad (1.6)$$

Az alkalmazott jelölések (1. ábra):

u és v	az O nyírási középpont x és y irányú eltolódásai,
φ	az elcsavarodás,
x_0 és y_0	a nyírási középpont koordinátái,
A	keresztmetszeti terület,
EI_x és EI_y	az x és y irányú hajlítási merevségek,
GI_t	a St.-Venant-féle csavarási merevség,
EI_ω	öblösödési merevség.
$I_0 = I_x + I_y + A(x_0^2 + y_0^2)$	a keresztmetszet nyírási középpontra vonatkozó poláris inercia-nyomatéka,
H	a rúd magassága,
q	a kritikus teher intenzitása, a feladat sajátértéke.

Egy korábbi dolgozatunkban [8] részletesen foglalkoztunk azzal a speciális esettel, amikor a rúd keresztmetszete kétszeresen szimmetrikus. A tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus erejének pontos meghatározásához táblázatot és görbéket adtunk meg. Az egyszerűen szimmetrikus és a teljesen általános keresztmetszetű rudak esetében pedig a kritikus teher közelítő meghatározására a Föppl-tétel [3] felhasználásával zárt képleteket vezettünk le.

Jelen dolgozatunk célja az, hogy megadjuk a megoszló normálerővel terhelt egyszerűen szimmetrikus és a teljesen általános keresztmetszetű konzoltartók differenciálegyenlet-rendszerének pontos megoldását. A feladat megoldása során a hatványsoros módszernek a sajátérték-feladatra módosított



1. ábra

változatát általánosítjuk. A feladat többváltozós jellegének megfelelően a kritikus teher pontos értékének kiszámítása görbeseregek, illetve táblázatok felhasználásával történhetik.

2. Egyszeresen szimmetrikus keresztmetszetű rudak

Ha a keresztmetszetnek egy szimmetriatengelye van, akkor a nyírási középpont a szimmetriatengelyen helyezkedik el. Tételezzük fel, hogy a keresztmetszet szimmetriatengelye egybeesik az x tengellyel, azaz

$$y_0 = 0.$$

Ekkor a feladat differenciálegyenlet-rendszere a következőképpen alakul:

$$u''' + \frac{qz}{EI_y} u' = 0, \quad (2.1)$$

$$v''' + \frac{qz}{EI_x} (v' - x_0 \varphi') = 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi''' - \left(\frac{GI_t}{EI_0} - \frac{I_0 qz}{AEI_0} \right) \varphi' - \frac{qz}{EI_0} x_0^2 v' = 0. \quad (2.3)$$

Az egyenletekhez az (1.4, 1.5, 1.6) peremfeltételek tartoznak. Az első egyenlet nem tartalmazza a φ elcsavarodást és így a szimmetriasíkban történő kihajlás nem kombinálódik a tiszta elcsavarodással. Ez esetben a szimmetriasíkban bekövetkező kihajlás kritikus terhet az

$$N_{cr,x} = \frac{7,83 EI_y}{H^2} \quad (2.4)$$

kifejezés szolgáltatja.

A szimmetriasíkra merőleges kihajlás esetében a rúdtengely meggörbülése az yz síkban és a keresztmetszetek elfordulása a csavarási tengely körül együttesen következik be, vagyis elcsavarodó kihajlás jön létre. Az elcsavarodó kihajláshoz tartozó kritikus teher értékét a (2.2, 2.3) differenciálegyenlet-rendszer megoldása szolgáltatja. A következőkben ezt mutatjuk be.

Vezessük be először a következő jelöléseket:

$$\alpha = \frac{qH^3 i_p^2}{7,83 EI_0} = \frac{N_{cr}}{N_{cr,\varphi}^\omega}, \quad (2.5)$$

$$\beta = \frac{GI_t H^2}{7,83 EI_0} = \frac{N_{cr,\varphi}^t}{N_{cr,\varphi}^\omega}, \quad (2.6)$$

$$\gamma = \frac{EI_0}{EI_x i_p^2} = \frac{N_{cr,\varphi}^\omega}{N_{cr,y}}, \quad (2.7)$$

$$\tau = \frac{x_0}{i_p} = \sqrt{\frac{I_0 - I_x - I_y}{I_0}}, \quad (2.8)$$

ahol

$$N_{cr} = q_{cr}H \quad \text{az elcsavarodó kihajlás kritikus terhe,}$$

$$N_{cr,y} = \frac{7,83 EI_x}{H^2} \quad \text{az } y \text{ irányú kihajlás kritikus terhe,}$$

$$N_{cr,\varphi}^{\omega} = \frac{7,83 EI_{\bullet}}{i_p^2 H^2} \quad \text{az öblösödési merevséghez tartozó kritikus teher,}$$

$$N_{cr,\varphi}^t = \frac{GI_t}{i_p^2} \quad \text{a csavarási merevséghez tartozó kritikus teher,}$$

$$I_0 = I_x + I_y + A x_0^2 \quad \text{poláris inercianyomaték,}$$

$$i_p = \sqrt{\frac{I_0}{A}} \quad \text{a poláris inerciasugár.}$$

Így a későbbiekben — többnyire — dimenziótlan mennyiségekkel dolgozhatunk.

A fenti jelölésekkel a sajátértékfeladat differenciálegyenlet-rendszere a következő.

$$v''' + \alpha \gamma \frac{7,83}{H^3} z (v' - i_p \tau \varphi') = 0, \quad (2.9)$$

$$\varphi''' - \left(\beta \frac{7,83}{H^2} - \alpha \frac{7,83}{H^3} z \right) \varphi' - \alpha \frac{7,83 \tau}{H^3 i_p} z v' = 0. \quad (2.10)$$

Itt α a sajátérték paramétere.

A differenciálegyenlet-rendszerhez a

$$v(0) = \varphi(0) = 0, \quad (2.11)$$

$$v'(H) = \varphi'(H) = 0, \quad (2.12)$$

$$v''(0) = \varphi''(0) = 0 \quad (2.13)$$

peremfeltételek tartoznak.

Ami a (2.9), (2.10) egyenletekben a dimenziótlan együtthatókon kívül szerepel, az az i_p inerciasugár. Jelenlétét az a tény indokolja, hogy az egy egyenletben szereplő v eltolódás és φ elfordulás — illetve a megfelelő deriváltak — nem azonos dimenziójú mennyiségek. Így indokolt egy olyan tényező — jelen esetben az inerciasugár — jelenléte, amely ezt a dimenzióeltérést „kiegyenlíti”. Másrészt ez a tényező a megoldás során kiesik majd, és a kritikus teher meghatározására szolgáló egyenletek csak dimenziótlan mennyiségeket tartalmaznak.

A (2.9), (2.10) differenciálegyenlet-rendszernek nincs zárt alakú megoldása. Keressük a megoldást a következő végtelen hatványsorok alakjában:

$$v = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \quad (2.14)$$

$$\varphi = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \quad (2.15)$$

A megoldásfüggvények b_k és c_k együtthatórendszerre egyelőre ismeretlen.

A szükséges deriváltakat, azaz a

$$v' = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k z^{k-1}, \quad (2.16)$$

$$v'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) b_k z^{k-2}, \quad (2.17)$$

$$v''' = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) b_k z^{k-3}, \quad (2.18)$$

$$\varphi' = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}, \quad (2.19)$$

$$\varphi'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2}, \quad (2.20)$$

$$\varphi''' = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2) c_k z^{k-3} \quad (2.21)$$

mennyiségeket a (2.9), (2.10) differenciálegyenlet-rendszerbe behelyettesítve, azonosan zérust kell kapnunk. Ez csak úgy lehetséges, ha valamennyi z hatvány együtthatója zérus, vagyis — e feltétel másképpen megfogalmazva —, ha

$$\left. \frac{dV}{dz} \right|_{z=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{d^2 V}{dz^2} \right|_{z=0} \equiv 0, \quad \dots \quad \left. \frac{d^i V}{dz^i} \right|_{z=0} \equiv 0, \quad (2.22)$$

és

$$\left. \frac{d\psi}{dz} \right|_{z=0} \equiv 0, \quad \left. \frac{d^2 \psi}{dz^2} \right|_{z=0} \equiv 0, \quad \dots \quad \left. \frac{d^i \psi}{dz^i} \right|_{z=0} \equiv 0, \quad (2.23)$$

ahol V és ψ jelöli a (2.9) és (2.10) egyenletekből származó polinomokat, és ahol $i = 1, 2, \dots$

Ezen feltételek alapján a b_k és c_k ismeretlen együtthatókra a következő általános rekurzív képletek írhatók fel:

$$b_k = -\frac{7,83\alpha\gamma(k-3)}{(k-2)(k-1)kH^3} b_{k-3} + \frac{7,83\alpha\gamma\tau i_p(k-3)}{(k-2)(k-1)kH^3} c_{k-3}, \quad (2.24)$$

$$c_k = \frac{7,83\beta}{(k-1)kH^2} c_{k-2} - \frac{7,83\alpha(k-3)}{(k-2)(k-1)kH^3} c_{k-3} + \frac{7,83\alpha\tau(k-3)}{(k-2)(k-1)k i_p H^3} b_{k-3}, \quad (2.25)$$

ahol $k \geq 3$.

A rekurzióhoz szükséges kezdőértékeket a (2.11), (2.13) peremfeltételek és a (2.14), (2.15) megoldásfüggvények, illetve (2.17), (2.20) deriváltjaik felhasználásával kapjuk:

$$b_0 = c_0 = 0, \quad (2.26)$$

$$b_2 = c_2 = 0. \quad (2.27)$$

Így az együtthatók — a rekurzív formulák tanúsága szerint — rendre megadhatók a b_1 és c_1 együtthatók függvényében:

$$b_k = A_{k,11} b_1 + i_p A_{k,12} c_1, \quad k \geq 3 \quad (2.28)$$

$$c_k = \frac{1}{i_p} A_{k,21} b_1 + A_{k,22} c_1, \quad k \geq 3 \quad (2.29)$$

ahol

$$A_{k,ij} = f(\alpha, \beta, \gamma, \tau, k). \quad i, j = 1, 2. \quad (2.30)$$

A (2.12) peremfeltételek felhasználásával a következő feltételi egyenletrendszer írható fel:

$$b_1 + \sum_{k=3}^{\infty} k b_k H^{k-1} = 0, \quad (2.31)$$

$$c_1 + \sum_{k=3}^{\infty} k c_k H^{k-1} = 0. \quad (2.32)$$

A (2.28), (2.29) összefüggések szerint a feltételi egyenletrendszer a b_1 és c_1 lineáris kombinációjának tekinthető:

$$A_{11} b_1 + i_p A_{12} c_1 = 0, \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{i_p} A_{21} b_1 + A_{22} c_1 = 0. \quad (2.34)$$

Mivel b_1 és c_1 csak a triviális megoldás esetén zérus, egyébként zérustól különböző, a nemtriviális megoldást az

$$\mathbf{Ax} = 0 \quad (2.35)$$

alakú homogén, lineáris egyenletből a

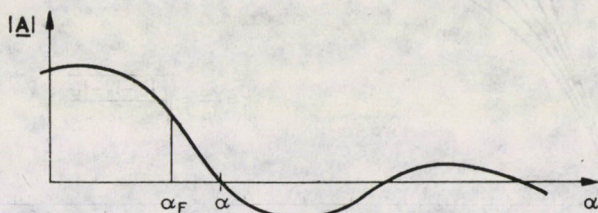
$$|\mathbf{A}| = 0 \quad (2.36)$$

szolgáltatja, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & i_p A_{12} \\ \frac{1}{i_p} A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

Az \mathbf{A} mátrix elemei egy-egy végtelen szumma eredményeként adódnak. A továbbiakban azonban csak az első n tagot vesszük figyelembe. Az n -et úgy állapítjuk meg, hogy a tagok kiszámításánál a hibahatárt 10^{-8} értékűre vesszük fel.

Az A mátrix determinánsának kifejtése így egy — az α -ra nézve n -ed fokú — algebrai egyenletet eredményez. Az egyenlet zérushelyei egyúttal a feladat sajátértékei (2. ábra). A kritikus teher meghatározását megkönnyíti az a tény, hogy ismerjük az n -ed fokú függvény alakját, illetve lefutását, és az, hogy elegendő az első zérushelyet megkeresni, hiszen csak a legkisebb sajátértékre van szükségünk.



2. ábra

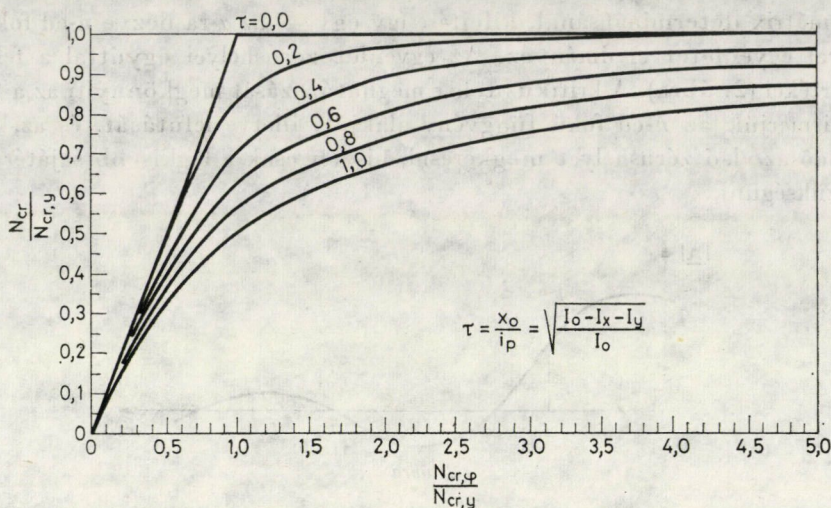
Az elcsavarodó kihajlás változó együtthatójú differenciálegyenlet-rendszerének sajátértékfeladatát tehát egyszerűsítettük: A kritikus teher fokozatos közelítéssel egy n -ed fokú algebrai egyenletből határozható meg.

A fokozatos közelítés során kezdőértékeként a Föppl-tétel [3] alkalmazásával kiszámított közelítő értékeket (α_F , 2. ábra) használtuk fel, és figyelembe vettük azt is, hogy ezek az értékek a kritikus teher alsó korlátait jelentik:

$$\alpha_F \leq \alpha. \quad (2.38)$$

A (2.36) egyenletet megoldottuk különböző merevségi arányok esetén; a hibahatár 10^{-8} volt. A kritikus teher kiszámítására alkalmas értékeket az 1. táblázatban és a 3. ábrán adjuk meg.

A τ két szélső értékét érdemes részletesebben megvizsgálni. A $\tau = 0,0$ az $x_0 = 0$ -nak felel meg, vagyis a keresztmetszet kétszeresen szimmetrikus. A két stabilitásvesztési forma szétválik, amit a görbe, illetve elfajult formájában a két egyenes is mutat: amíg a tiszta elcsavarodás kritikus ereje kisebb a hajlítási kihajlás kritikus erejénél, addig a kombinált kritikus erő megegyezik a tiszta elcsavarodás értékével, ha pedig a hajlítási kihajlás kritikus ereje a kisebb, akkor azzal egyezik meg a kombinált kritikus erő. A $\tau = 1,0$ annak az esetnek felel meg, amikor a csavarási középpont a végtelenben van. Ekkor az öblösödési merevség dominál a csavarási merevséggel szemben. Így viszont az öblösödési kihajlási alak jellemző az elcsavarodás során, ez pedig jellegében azonos a hajlítási kihajlás alakjával. Az eddigi kutatások szerint két azonos kihajlási alak esetén a Föppl-tétel a pontos megoldást adja [2]; és valóban, a legelső görbe pontosan a Föppl-tétellel kiszámított értékeknek felel meg. Ezeket az értékeket használtuk kezdőértékeként a fokozatosan közelítő eljárás során.



3. ábra

1. táblázat

τ	$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,y}}$					
	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0
0,0	0,500	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,496	0,910	0,986	0,992	0,998	1,000
0,2	0,483	0,834	0,962	0,980	0,992	0,993
0,3	0,464	0,770	0,926	0,956	0,977	0,981
0,4	0,443	0,715	0,882	0,925	0,962	0,966
0,5	0,424	0,667	0,841	0,895	0,936	0,947
0,6	0,403	0,626	0,800	0,862	0,913	0,927
0,7	0,384	0,589	0,765	0,832	0,885	0,905
0,8	0,365	0,556	0,728	0,802	0,853	0,881
0,9	0,349	0,527	0,699	0,775	0,826	0,858
1,0	0,333	0,500	0,667	0,750	0,800	0,833

Az elcsavarodó kihajláshoz tartozó kritikus terhet a következők szerint határozzuk meg. Először kiszámítjuk a szimmetriatengelyre merőleges Euler-kihajlás kritikus erejét:

$$N_{cr,y} = \frac{7,83 EI_x}{H^2} \quad (2.39)$$

Ez az Euler-féle kihajlás kombinálódik a tiszta elcsavarodó kihajlással. A tiszta elcsavarodó kihajlás $N_{cr,\varphi}$ kritikus ereje a [8] alapján határozható meg. Az $N_{cr,y}$ és $N_{cr,\varphi}$ ismeretében az N_{cr} „kombinált” kritikus erőt — a megfelelő τ merevségi arány figyelembe vételével — az

$$N_{cr} = \varepsilon N_{cr,y} \quad (2.40)$$

képlet szolgáltatja, ahol ε értékeit az 1. táblázat, illetve a 3. ábra tartalmazza.

A szimmetriatengely síkjában az Euler-kihajlás nem kombinálódik a tisztá elcsavarodó kihajlással. Az $N_{cr,x}$ a (2.4) képlettel számítható. A feladat mértékadó kritikus terhe természetesen az N_{cr} és az $N_{cr,x}$ közül a kisebbik.

3. Általános keresztmetszetű rudak

Az általános keresztmetszetű, egyenletesen megoszló normálerővel terhelt konzoltartó elcsavarodó kihajlását az (1.1), (1.2), (1.3) differenciálegyenlet-rendszer és az (1.4), (1.5), (1.6) peremfeltétel-rendszer jellemzi.

Vezessük be először az

$$\alpha = \frac{qH^3 i_p^2}{7,83 EI_*} = \frac{N_{cr}}{N_{cr,\varphi}^\omega}, \quad (3.1)$$

$$\beta = \frac{GI_t H^2}{7,83 EI_*} = \frac{N_{cr,\varphi}^t}{N_{cr,\varphi}^\omega}, \quad (3.2)$$

$$\gamma = \frac{EI_*}{EI_x i_p^2} = \frac{N_{cr,\varphi}^\omega}{N_{cr,y}}, \quad (3.3)$$

$$\delta = \frac{EI_*}{EI_y i_p^2} = \frac{N_{cr,\varphi}^\omega}{N_{cr,x}}, \quad (3.4)$$

$$\tau_x = \frac{x_0}{i_p} = \sqrt{\frac{I_0 - I_x - I_y - y_0^2 A}{I_0}}, \quad (3.5)$$

$$\tau_y = \frac{y_0}{i_p} = \sqrt{\frac{I_0 - I_x - I_y - x_0^2 A}{I_0}}, \quad (3.6)$$

dimenziótlan mennyiségeket, ahol

$$i_p^2 = \frac{I_0}{A} = \frac{I_x + I_y + x_0^2 A + y_0^2 A}{A}. \quad (3.7)$$

Ezekkel a jelölésekkel a differenciálegyenlet-rendszer a következő alakot ölti:

$$u''' + \alpha \delta \frac{7,83}{H^3} z (u' + i_p \tau_y \varphi') = 0, \quad (3.8)$$

$$v''' + \alpha \gamma \frac{7,83}{H^3} z (v' - i_p \tau_x \varphi') = 0, \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \varphi''' - \left(\beta \frac{7,83}{H^2} - \alpha \frac{7,83}{H^3} z \right) \varphi' - \alpha \frac{7,83 \tau_x}{H^3 i_p} z v' + \\ + \alpha \frac{7,83 \tau_y}{H^3 i_p} z u' = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

a csatlakozó peremfeltételeket pedig az (1.4), (1.5), (1.6) kifejezések tartalmazzák.

A φ elcsavarodás mindhárom egyenletben szerepel, tehát általános esetben mind az x , mind az y tengelyre merőleges Euler-kihajlás kombinálódik a tiszta elcsavarodó kihajlással.

A megoldás menete azonos az előző pontban részletesen bemutatott, az egyszerűen szimmetrikus keresztmetszetű rudak esetén alkalmazott megoldás menetével. A megoldás-függvények most is végtelen hatványsorok:

$$u = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad (3.11)$$

$$b = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \quad (3.12)$$

$$\varphi = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k. \quad (3.13)$$

Az azonossági feltételek és a peremfeltételek felhasználásával most egy három egyenletből álló feltételi egyenletrendszert kapunk, és ez az algebrai egyenletrendszer az a_1 , b_1 , c_1 együtthatók lineáris kombinációjaként írható fel. Így a differenciálegyenlet-rendszer sajátértékfeladata most is visszavezethető egy egyszerű algebrai feladatra, és az

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \quad (3.14)$$

egyenletből az

$$|\mathbf{A}| = 0 \quad (3.15)$$

kifejezés szolgáltatja a feladat sajátértékeit, amelyek közül a legkisebb a (3.1) képlet felhasználásával megadja a kritikus terhet. Az \mathbf{A} együtthatómátrix elemei most

$$A_{i,j} = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \tau_x, \tau_y) \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

alakúak.

$\Delta = 10^{-8}$ hibahatár mellett elvégeztük a szükséges számításokat különböző merevségi arányokra, és a kritikus teher kiszámításához szükséges értékeket a 2 . . . 11. táblázatokban adjuk meg.

A táblázatok segítségével a kritikus teher a következőképpen határozható meg:

A τ_x értéke megmutatja, hogy melyik táblázatot kell használni. Az

$$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,x}}, \frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,y}}$$

arányok, és a τ_y mennyiség függvényében a táblázatból kikeressük a

$$\lambda = \frac{N_{cr}}{N_{cr,\varphi}}$$

2. Táblázat

$\tau_x = 0,1$

$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,y}}$	$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,z}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_y
0,2	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,991	0,976	0,950	0,905	0,833	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,964	0,916	0,857	0,787	0,715	0,443	0,311	0,238	0,192	0,4
	0,926	0,846	0,767	0,692	0,626	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,881	0,777	0,690	0,617	0,556	0,365	0,269	0,212	0,176	0,8
	0,835	0,716	0,626	0,557	0,501	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,4	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,987	0,972	0,947	0,904	0,833	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,960	0,914	0,854	0,786	0,714	0,443	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,922	0,844	0,765	0,691	0,625	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,878	0,776	0,689	0,616	0,556	0,365	0,269	0,212	0,176	0,8
	0,833	0,715	0,626	0,557	0,501	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,6	0,988	0,988	0,988	0,988	0,988	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,980	0,965	0,942	0,900	0,831	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,954	0,909	0,852	0,785	0,713	0,443	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,918	0,841	0,764	0,691	0,625	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,874	0,774	0,688	0,616	0,555	0,365	0,269	0,212	0,176	0,8
	0,830	0,714	0,626	0,556	0,501	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,8	0,970	0,970	0,970	0,970	0,970	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,962	0,950	0,929	0,891	0,827	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,939	0,899	0,846	0,781	0,712	0,443	0,311	0,238	0,192	0,4
	0,907	0,835	0,760	0,689	0,624	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,867	0,770	0,687	0,615	0,555	0,365	0,269	0,212	0,176	0,8
	0,825	0,712	0,624	0,556	0,501	0,334	0,250	0,201	0,167	1,0
1,0	0,910	0,910	0,910	0,910	0,910	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,906	0,901	0,890	0,867	0,818	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,895	0,870	0,830	0,774	0,708	0,443	0,311	0,238	0,192	0,4
	0,874	0,821	0,755	0,687	0,622	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,846	0,764	0,684	0,614	0,554	0,365	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,812	0,708	0,622	0,555	0,500	0,334	0,250	0,201	0,167	1,0
2,0	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,495	0,495	0,495	0,495	0,495	0,478	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,495	0,495	0,495	0,494	0,494	0,440	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,495	0,495	0,494	0,493	0,492	0,401	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,495	0,494	0,493	0,491	0,488	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,494	0,493	0,491	0,488	0,477	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
3,0	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,250	0,200	0,0
	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,325	0,247	0,198	0,2
	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,330	0,309	0,238	0,192	0,4
	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,329	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,325	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,331	0,331	0,331	0,331	0,331	0,316	0,250	0,200	0,167	1,0
4,0	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,200	0,0
	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,246	0,198	0,2
	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,237	0,192	0,4
	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,248	0,226	0,184	0,6
	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,247	0,212	0,175	0,8
	0,249	0,249	0,249	0,249	0,249	0,248	0,244	0,200	0,167	1,0
5,0	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,0
	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,197	0,2
	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,191	0,4
	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,198	0,184	0,6
	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,198	0,175	0,8
	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,198	0,196	0,167	1,0

3. Táblázat

$\tau_x = 0,2$

$\frac{N_{\sigma,\varphi}}{N_{\sigma,y}}$	$\frac{N_{\sigma,\varphi}}{N_{\sigma,x}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_y
0,2	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,984	0,969	0,945	0,902	0,832	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,957	0,912	0,853	0,785	0,713	0,443	0,311	0,238	0,192	0,4
	0,920	0,842	0,764	0,691	0,625	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,876	0,774	0,688	0,616	0,555	0,365	0,269	0,212	0,176	0,8
	0,832	0,714	0,626	0,556	0,501	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,4	0,978	0,978	0,978	0,978	0,978	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,969	0,956	0,933	0,894	0,827	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,945	0,902	0,846	0,781	0,711	0,443	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,909	0,836	0,760	0,688	0,623	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,868	0,770	0,685	0,614	0,554	0,365	0,269	0,212	0,176	0,8
	0,825	0,711	0,623	0,555	0,500	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,6	0,952	0,952	0,952	0,952	0,952	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,945	0,933	0,914	0,880	0,820	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,923	0,885	0,835	0,774	0,708	0,443	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,892	0,825	0,753	0,685	0,621	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,854	0,763	0,681	0,612	0,553	0,365	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,815	0,706	0,621	0,553	0,499	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,8	0,907	0,907	0,907	0,907	0,907	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,902	0,894	0,890	0,855	0,808	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,886	0,856	0,816	0,763	0,702	0,443	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,862	0,806	0,743	0,679	0,618	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,831	0,751	0,676	0,609	0,551	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,797	0,698	0,617	0,552	0,498	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
1,0	0,834	0,834	0,834	0,834	0,834	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,832	0,827	0,820	0,808	0,781	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,823	0,806	0,781	0,743	0,691	0,442	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,809	0,773	0,725	0,670	0,613	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,789	0,730	0,666	0,604	0,549	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,766	0,685	0,611	0,549	0,496	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
2,0	0,481	0,481	0,481	0,481	0,481	0,481	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,481	0,481	0,481	0,481	0,481	0,467	0,326	0,297	0,198	0,2
	0,481	0,481	0,481	0,480	0,477	0,433	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,481	0,480	0,479	0,478	0,475	0,396	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,481	0,479	0,477	0,474	0,467	0,361	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,480	0,478	0,473	0,466	0,453	0,331	0,250	0,200	0,167	1,0
3,0	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,250	0,200	0,0
	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,321	0,247	0,198	0,2
	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,306	0,237	0,192	0,4
	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,324	0,287	0,226	0,184	0,6
	0,326	0,326	0,326	0,326	0,326	0,320	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,326	0,326	0,326	0,326	0,325	0,311	0,249	0,200	0,167	1,0
4,0	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,200	0,0
	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,243	0,198	0,2
	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,246	0,235	0,192	0,4
	0,247	0,247	0,247	0,247	0,247	0,246	0,245	0,224	0,184	0,6
	0,247	0,247	0,247	0,247	0,246	0,246	0,243	0,211	0,175	0,8
	0,247	0,247	0,247	0,246	0,246	0,245	0,238	0,199	0,167	1,0
5,0	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,0
	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,195	0,2
	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,197	0,191	0,4
	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,197	0,183	0,6
	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,197	0,195	0,174	0,8
	0,198	0,198	0,198	0,198	0,198	0,197	0,197	0,192	0,166	1,0

4. Táblázat

$\tau_x = 0,3$

$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,y}}$	$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,x}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_y
0,2	0,981	0,981	0,981	0,981	0,981	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,973	0,959	0,936	0,895	0,828	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,947	0,903	0,847	0,781	0,712	0,443	0,311	0,238	0,192	0,4
	0,911	0,836	0,760	0,688	0,623	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,870	0,771	0,686	0,615	0,554	0,365	0,269	0,212	0,176	0,8
	0,826	0,711	0,623	0,555	0,500	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,4	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,943	0,931	0,912	0,878	0,819	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,922	0,883	0,833	0,772	0,706	0,443	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,889	0,822	0,751	0,683	0,620	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,851	0,760	0,680	0,611	0,552	0,365	0,269	0,212	0,176	0,8
	0,812	0,704	0,619	0,553	0,498	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,6	0,906	0,906	0,906	0,906	0,906	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,900	0,891	0,877	0,850	0,804	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,883	0,852	0,811	0,758	0,698	0,442	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,857	0,801	0,739	0,675	0,616	0,401	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,826	0,746	0,671	0,606	0,550	0,365	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,791	0,694	0,614	0,550	0,496	0,333	0,250	0,200	0,167	1,0
0,8	0,844	0,844	0,844	0,844	0,844	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,840	0,835	0,826	0,809	0,778	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,829	0,808	0,778	0,737	0,687	0,442	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,811	0,769	0,719	0,663	0,609	0,401	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,788	0,724	0,660	0,599	0,546	0,363	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,761	0,679	0,606	0,545	0,494	0,333	0,250	0,200	0,167	1,0
1,0	0,770	0,770	0,770	0,770	0,770	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,768	0,765	0,760	0,752	0,736	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,761	0,750	0,732	0,705	0,667	0,441	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,751	0,725	0,689	0,646	0,599	0,400	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,736	0,692	0,642	0,589	0,540	0,363	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,718	0,657	0,595	0,539	0,491	0,332	0,250	0,200	0,167	1,0
2,0	0,464	0,464	0,464	0,464	0,464	0,464	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,464	0,464	0,463	0,463	0,463	0,451	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,463	0,463	0,462	0,461	0,460	0,422	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,463	0,462	0,460	0,457	0,454	0,388	0,288	0,226	0,184	0,6
	0,462	0,460	0,457	0,452	0,445	0,356	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,460	0,457	0,451	0,443	0,432	0,328	0,249	0,200	0,167	1,0
3,0	0,319	0,319	0,319	0,319	0,319	0,319	0,319	0,250	0,200	0,0
	0,319	0,319	0,319	0,319	0,319	0,319	0,319	0,246	0,198	0,2
	0,319	0,319	0,319	0,319	0,319	0,318	0,301	0,237	0,192	0,4
	0,319	0,319	0,319	0,319	0,319	0,306	0,283	0,225	0,184	0,6
	0,319	0,319	0,319	0,318	0,318	0,309	0,264	0,212	0,175	0,8
	0,319	0,319	0,318	0,318	0,316	0,300	0,247	0,199	0,167	1,0
4,0	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,200	0,0
	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,240	0,198	0,2
	0,243	0,243	0,243	0,243	0,243	0,242	0,242	0,232	0,191	0,4
	0,243	0,243	0,243	0,243	0,242	0,242	0,240	0,221	0,184	0,6
	0,243	0,243	0,243	0,242	0,242	0,241	0,236	0,209	0,174	0,8
	0,243	0,243	0,242	0,242	0,242	0,240	0,231	0,198	0,167	1,0
5,0	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,0
	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,194	0,2
	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,188	0,4
	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,194	0,181	0,6
	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,194	0,191	0,173	0,8
	0,195	0,195	0,195	0,195	0,195	0,194	0,193	0,188	0,165	1,0

5. Táblázat

$$\tau_x = 0,4$$

$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,w}}$	$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,x}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_y
0,2	0,966	0,966	0,966	0,966	0,966	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,957	0,945	0,923	0,886	0,823	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,934	0,893	0,840	0,776	0,708	0,443	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,900	0,829	0,756	0,685	0,621	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,860	0,765	0,682	0,612	0,553	0,365	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,819	0,707	0,621	0,553	0,499	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,4	0,918	0,918	0,918	0,918	0,918	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,912	0,902	0,885	0,857	0,806	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,893	0,859	0,815	0,760	0,699	0,442	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,864	0,805	0,740	0,676	0,616	0,401	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,831	0,747	0,672	0,606	0,549	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,795	0,695	0,614	0,550	0,496	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,6	0,857	0,857	0,857	0,857	0,857	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,853	0,846	0,835	0,816	0,781	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,840	0,815	0,781	0,738	0,686	0,441	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,819	0,772	0,719	0,663	0,608	0,400	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,792	0,725	0,658	0,598	0,544	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,764	0,678	0,605	0,544	0,493	0,332	0,250	0,200	0,167	1,0
0,8	0,788	0,788	0,788	0,788	0,788	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,784	0,781	0,774	0,763	0,743	0,480	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,776	0,760	0,738	0,708	0,667	0,440	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,763	0,730	0,691	0,645	0,597	0,399	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,744	0,694	0,639	0,587	0,537	0,363	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,723	0,656	0,592	0,536	0,488	0,332	0,250	0,200	0,167	1,0
1,0	0,715	0,715	0,715	0,715	0,715	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,713	0,711	0,708	0,701	0,691	0,478	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,708	0,699	0,686	0,667	0,640	0,439	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,700	0,680	0,653	0,620	0,581	0,398	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,688	0,655	0,615	0,571	0,529	0,362	0,268	0,212	0,175	0,8
	0,674	0,626	0,576	0,527	0,483	0,331	0,250	0,200	0,167	1,0
2,0	0,443	0,443	0,443	0,443	0,443	0,443	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,443	0,443	0,443	0,443	0,442	0,433	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,443	0,442	0,441	0,440	0,439	0,409	0,308	0,237	0,192	0,4
	0,442	0,441	0,439	0,436	0,433	0,379	0,288	0,225	0,184	0,6
	0,441	0,439	0,435	0,430	0,424	0,350	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,440	0,435	0,429	0,422	0,412	0,323	0,248	0,200	0,167	1,0
3,0	0,311	0,311	0,311	0,311	0,311	0,311	0,311	0,250	0,200	0,0
	0,311	0,310	0,310	0,310	0,310	0,310	0,306	0,246	0,198	0,2
	0,310	0,310	0,310	0,310	0,310	0,308	0,294	0,236	0,192	0,4
	0,310	0,310	0,310	0,309	0,309	0,305	0,278	0,224	0,184	0,6
	0,310	0,310	0,309	0,309	0,308	0,298	0,260	0,211	0,175	0,8
	0,310	0,309	0,309	0,308	0,306	0,290	0,243	0,198	0,167	1,0
4,0	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,200	0,0
	0,238	0,238	0,238	0,238	0,238	0,237	0,237	0,235	0,197	0,2
	0,238	0,238	0,237	0,237	0,237	0,237	0,236	0,228	0,191	0,4
	0,238	0,237	0,237	0,237	0,237	0,236	0,234	0,218	0,183	0,6
	0,237	0,237	0,237	0,237	0,237	0,236	0,230	0,206	0,174	0,8
	0,237	0,237	0,237	0,237	0,236	0,234	0,225	0,195	0,166	1,0
5,0	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,0
	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,191	0,2
	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,191	0,186	0,4
	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,191	0,191	0,190	0,179	0,6
	0,192	0,192	0,192	0,192	0,192	0,191	0,191	0,187	0,171	0,8
	0,192	0,192	0,192	0,192	0,191	0,191	0,189	0,184	0,164	1,0

6. Táblázat

$\tau_x = 0,5$

$\frac{N_{er,\varphi}}{N_{er,y}}$	$\frac{N_{er,\varphi}}{N_{er,z}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_y
0,2	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,940	0,928	0,909	0,875	0,817	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,919	0,880	0,830	0,770	0,705	0,443	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,887	0,819	0,750	0,681	0,619	0,402	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,849	0,758	0,678	0,609	0,551	0,365	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,809	0,702	0,618	0,552	0,498	0,333	0,250	0,201	0,167	1,0
0,4	0,883	0,883	0,883	0,883	0,883	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,877	0,869	0,856	0,833	0,791	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,861	0,833	0,795	0,747	0,690	0,442	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,837	0,785	0,726	0,667	0,610	0,401	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,807	0,733	0,663	0,600	0,545	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,775	0,683	0,608	0,545	0,494	0,332	0,250	0,201	0,167	1,0
0,6	0,811	0,811	0,811	0,811	0,811	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,807	0,802	0,794	0,780	0,754	0,480	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,796	0,777	0,750	0,716	0,671	0,440	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,780	0,742	0,697	0,648	0,598	0,399	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,758	0,701	0,643	0,588	0,538	0,363	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,734	0,660	0,594	0,537	0,488	0,331	0,250	0,200	0,167	1,0
0,8	0,737	0,737	0,737	0,737	0,737	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,735	0,732	0,727	0,719	0,706	0,479	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,729	0,716	0,699	0,676	0,644	0,439	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,718	0,692	0,661	0,623	0,582	0,398	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,703	0,663	0,618	0,572	0,528	0,361	0,268	0,212	0,175	0,8
	0,686	0,631	0,577	0,526	0,481	0,331	0,250	0,200	0,167	1,0
1,0	0,667	0,667	0,667	0,667	0,667	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,666	0,664	0,661	0,657	0,650	0,477	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,662	0,655	0,645	0,630	0,610	0,436	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,655	0,639	0,619	0,593	0,562	0,395	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,646	0,619	0,588	0,552	0,515	0,360	0,268	0,212	0,175	0,8
	0,635	0,597	0,555	0,513	0,474	0,329	0,250	0,200	0,167	1,0
2,0	0,422	0,422	0,422	0,422	0,422	0,422	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,422	0,422	0,422	0,422	0,422	0,415	0,325	0,246	0,198	0,2
	0,422	0,421	0,420	0,419	0,418	0,395	0,307	0,237	0,192	0,4
	0,421	0,420	0,418	0,416	0,412	0,369	0,285	0,225	0,184	0,6
	0,420	0,418	0,414	0,409	0,403	0,342	0,265	0,212	0,175	0,8
	0,429	0,415	0,409	0,402	0,393	0,317	0,247	0,199	0,167	1,0
3,0	0,301	0,301	0,301	0,301	0,301	0,301	0,301	0,250	0,200	0,0
	0,301	0,301	0,301	0,301	0,301	0,300	0,297	0,246	0,198	0,2
	0,301	0,300	0,300	0,300	0,300	0,298	0,286	0,236	0,191	0,4
	0,300	0,300	0,300	0,300	0,299	0,293	0,271	0,222	0,184	0,6
	0,300	0,300	0,299	0,299	0,298	0,287	0,255	0,209	0,174	0,8
	0,300	0,299	0,298	0,297	0,295	0,280	0,240	0,198	0,166	1,0
4,0	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,200	0,0
	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,229	0,197	0,2
	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,231	0,230	0,223	0,191	0,4
	0,232	0,232	0,232	0,232	0,232	0,230	0,228	0,214	0,182	0,6
	0,232	0,232	0,232	0,231	0,231	0,229	0,224	0,203	0,173	0,8
	0,232	0,232	0,231	0,231	0,230	0,227	0,219	0,193	0,165	1,0
5,0	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,0
	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,187	0,2
	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,183	0,4
	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,185	0,177	0,6
	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,187	0,186	0,183	0,169	0,8
	0,188	0,188	0,188	0,188	0,188	0,187	0,185	0,179	0,162	1,0

7. Táblázat

$\tau_x = 0,6$

$\frac{N_{cr,p}}{N_{cr,y}}$	$\frac{N_{cr,p}}{N_{cr,z}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_y
0,2	0,927	0,927	0,927	0,927	0,927	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,920	0,909	0,892	0,862	0,809	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,900	0,864	0,819	0,763	0,700	0,442	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,871	0,808	0,742	0,677	0,616	0,401	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,836	0,750	0,673	0,606	0,550	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,798	0,695	0,614	0,550	0,496	0,333	0,250	0,200	0,167	1,0
0,4	0,847	0,847	0,847	0,847	0,847	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,842	0,836	0,825	0,806	0,773	0,480	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,829	0,805	0,772	0,730	0,680	0,441	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,808	0,762	0,711	0,657	0,603	0,400	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,782	0,716	0,652	0,593	0,541	0,363	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,753	0,671	0,599	0,540	0,490	0,331	0,249	0,200	0,167	1,0
0,6	0,767	0,767	0,767	0,767	0,767	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,764	0,760	0,753	0,743	0,725	0,479	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,756	0,740	0,719	0,691	0,653	0,439	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,742	0,711	0,674	0,632	0,587	0,398	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,724	0,676	0,626	0,577	0,530	0,361	0,268	0,212	0,175	0,8
	0,704	0,640	0,581	0,529	0,483	0,330	0,249	0,200	0,167	1,0
0,8	0,692	0,692	0,692	0,692	0,692	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,691	0,688	0,684	0,679	0,670	0,477	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,685	0,676	0,663	0,645	0,620	0,436	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,677	0,656	0,632	0,601	0,567	0,395	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,665	0,632	0,595	0,556	0,517	0,360	0,268	0,212	0,175	0,8
	0,651	0,605	0,559	0,515	0,474	0,329	0,249	0,200	0,167	1,0
1,0	0,626	0,626	0,626	0,626	0,626	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,625	0,623	0,621	0,618	0,613	0,475	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,621	0,615	0,608	0,597	0,581	0,432	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,616	0,603	0,587	0,567	0,542	0,392	0,288	0,226	0,184	0,6
	0,609	0,587	0,561	0,532	0,501	0,357	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,601	0,568	0,533	0,498	0,463	0,327	0,249	0,200	0,167	1,0
2,0	0,402	0,402	0,402	0,402	0,402	0,402	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,402	0,402	0,402	0,402	0,402	0,396	0,324	0,246	0,198	0,2
	0,402	0,401	0,400	0,399	0,398	0,379	0,305	0,236	0,191	0,4
	0,401	0,400	0,398	0,395	0,392	0,357	0,284	0,224	0,184	0,6
	0,400	0,398	0,394	0,390	0,384	0,333	0,263	0,211	0,175	0,8
	0,398	0,395	0,389	0,383	0,375	0,311	0,245	0,198	0,166	1,0
3,0	0,290	0,290	0,290	0,290	0,290	0,290	0,290	0,250	0,200	0,0
	0,290	0,290	0,290	0,290	0,290	0,289	0,287	0,245	0,197	0,2
	0,290	0,290	0,290	0,290	0,289	0,288	0,278	0,234	0,191	0,4
	0,290	0,290	0,289	0,289	0,288	0,284	0,264	0,221	0,183	0,6
	0,290	0,289	0,288	0,288	0,287	0,278	0,250	0,208	0,174	0,8
	0,289	0,288	0,288	0,286	0,284	0,270	0,236	0,196	0,165	1,0
4,0	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,200	0,0
	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,224	0,197	0,2
	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,225	0,224	0,218	0,190	0,4
	0,226	0,226	0,226	0,226	0,226	0,224	0,221	0,209	0,181	0,6
	0,226	0,226	0,226	0,225	0,225	0,222	0,217	0,200	0,172	0,8
	0,226	0,226	0,225	0,225	0,225	0,221	0,212	0,190	0,164	1,0
5,0	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,0
	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,183	0,2
	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,183	0,179	0,4
	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,183	0,181	0,174	0,6
	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,182	0,178	0,167	0,8
	0,184	0,184	0,184	0,184	0,184	0,183	0,181	0,174	0,160	1,0

8. Tablázat

$$\tau_x = 0,7$$

$\frac{N_{cr,p}}{N_{cr,y}}$	$\frac{N_{cr,p}}{N_{cr,x}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_p
0,2	0,905	0,905	0,905	0,905	0,905	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,898	0,889	0,874	0,847	0,800	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,881	0,848	0,806	0,753	0,694	0,441	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,853	0,795	0,733	0,671	0,612	0,400	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,821	0,740	0,667	0,602	0,547	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,786	0,688	0,610	0,547	0,495	0,333	0,250	0,200	0,167	1,0
0,4	0,812	0,812	0,812	0,812	0,812	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,808	0,802	0,793	0,779	0,753	0,480	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,796	0,776	0,748	0,712	0,668	0,440	0,310	0,238	0,192	0,4
	0,778	0,739	0,694	0,645	0,595	0,399	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,756	0,698	0,640	0,585	0,536	0,362	0,260	0,212	0,175	0,8
	0,731	0,657	0,591	0,534	0,487	0,330	0,249	0,200	0,167	1,0
0,6	0,727	0,727	0,727	0,727	0,727	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,725	0,721	0,716	0,709	0,695	0,478	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,718	0,705	0,688	0,665	0,635	0,438	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,706	0,681	0,650	0,614	0,574	0,396	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,691	0,651	0,608	0,564	0,522	0,360	0,268	0,212	0,175	0,8
	0,674	0,620	0,567	0,519	0,477	0,329	0,249	0,200	0,167	1,0
0,8	0,653	0,653	0,653	0,653	0,653	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,651	0,650	0,646	0,643	0,636	0,476	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,647	0,639	0,629	0,615	0,596	0,433	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,639	0,623	0,603	0,578	0,550	0,393	0,288	0,226	0,184	0,6
	0,630	0,603	0,573	0,539	0,505	0,357	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,619	0,581	0,541	0,502	0,465	0,328	0,249	0,200	0,167	1,0
1,0	0,589	0,589	0,589	0,589	0,589	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,588	0,587	0,585	0,583	0,579	0,472	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,585	0,581	0,574	0,566	0,554	0,429	0,308	0,237	0,192	0,4
	0,581	0,570	0,557	0,541	0,521	0,389	0,288	0,225	0,184	0,6
	0,574	0,557	0,536	0,512	0,485	0,354	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,567	0,542	0,512	0,482	0,451	0,325	0,248	0,199	0,167	1,0
2,0	0,383	0,383	0,383	0,383	0,383	0,383	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,383	0,383	0,383	0,382	0,382	0,378	0,322	0,246	0,198	0,2
	0,383	0,382	0,381	0,381	0,379	0,364	0,302	0,236	0,191	0,4
	0,382	0,381	0,379	0,377	0,374	0,345	0,281	0,223	0,184	0,6
	0,381	0,379	0,375	0,371	0,367	0,324	0,260	0,210	0,174	0,8
	0,380	0,376	0,371	0,365	0,359	0,304	0,243	0,198	0,166	1,0
3,0	0,280	0,280	0,280	0,280	0,280	0,280	0,280	0,250	0,200	0,0
	0,280	0,280	0,280	0,280	0,280	0,279	0,277	0,244	0,197	0,2
	0,280	0,279	0,279	0,279	0,279	0,277	0,269	0,233	0,191	0,4
	0,279	0,279	0,278	0,278	0,278	0,274	0,257	0,219	0,183	0,6
	0,279	0,278	0,278	0,277	0,276	0,268	0,244	0,206	0,174	0,8
	0,279	0,278	0,277	0,276	0,274	0,260	0,231	0,195	0,165	1,0
4,0	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,200	0,0
	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,218	0,196	0,2
	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,217	0,212	0,188	0,4
	0,219	0,219	0,219	0,219	0,219	0,218	0,215	0,205	0,180	0,6
	0,219	0,219	0,219	0,219	0,218	0,216	0,211	0,195	0,171	0,8
	0,219	0,219	0,219	0,218	0,218	0,214	0,206	0,187	0,163	1,0
5,0	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,0
	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,179	0,2
	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,178	0,175	0,4
	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,178	0,177	0,170	0,6
	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,180	0,178	0,174	0,164	0,8
	0,180	0,180	0,180	0,180	0,179	0,179	0,176	0,171	0,157	1,0

9. Táblázat

$\tau_x = 0,8$

$\frac{N_{cr,\Psi}}{N_{cr,\Psi}}$	$\frac{N_{cr,\Psi}}{N_{cr,x}}$									τ_y
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	
0,2	0,882	0,882	0,882	0,882	0,882	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,876	0,868	0,854	0,831	0,789	0,481	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,860	0,831	0,792	0,744	0,688	0,441	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,836	0,782	0,724	0,665	0,609	0,400	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,805	0,730	0,660	0,598	0,544	0,364	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,773	0,681	0,605	0,543	0,492	0,332	0,250	0,200	0,167	1,0
0,4	0,778	0,778	0,778	0,778	0,778	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,774	0,770	0,763	0,751	0,730	0,479	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,765	0,747	0,725	0,694	0,655	0,439	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,750	0,716	0,676	0,633	0,587	0,398	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,730	0,679	0,626	0,576	0,529	0,361	0,268	0,212	0,175	0,8
	0,709	0,641	0,581	0,528	0,482	0,329	0,249	0,200	0,167	1,0
0,6	0,690	0,690	0,690	0,690	0,690	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,688	0,685	0,681	0,646	0,666	0,477	0,326	0,246	0,198	0,2
	0,682	0,672	0,658	0,640	0,615	0,435	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,673	0,652	0,626	0,595	0,561	0,394	0,288	0,226	0,184	0,6
	0,660	0,626	0,589	0,550	0,512	0,358	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,647	0,600	0,553	0,510	0,470	0,327	0,248	0,199	0,167	1,0
0,8	0,617	0,617	0,617	0,617	0,617	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,616	0,614	0,612	0,609	0,604	0,474	0,326	0,246	0,198	0,2
	0,612	0,606	0,598	0,587	0,571	0,430	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,606	0,593	0,577	0,556	0,532	0,390	0,288	0,225	0,184	0,6
	0,598	0,576	0,550	0,522	0,492	0,355	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,588	0,557	0,523	0,489	0,456	0,325	0,248	0,199	0,167	1,0
1,0	0,556	0,556	0,556	0,556	0,556	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,555	0,554	0,553	0,551	0,549	0,467	0,326	0,246	0,198	0,2
	0,553	0,549	0,544	0,537	0,529	0,424	0,308	0,237	0,192	0,4
	0,550	0,541	0,530	0,517	0,501	0,384	0,287	0,225	0,184	0,6
	0,544	0,529	0,512	0,492	0,470	0,351	0,266	0,212	0,175	0,8
	0,537	0,517	0,492	0,467	0,440	0,322	0,247	0,199	0,167	1,0
2,0	0,365	0,365	0,365	0,365	0,365	0,365	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,365	0,365	0,365	0,364	0,364	0,361	0,320	0,246	0,198	0,2
	0,365	0,364	0,364	0,363	0,362	0,350	0,298	0,236	0,191	0,4
	0,364	0,363	0,361	0,360	0,357	0,333	0,278	0,222	0,184	0,6
	0,364	0,361	0,358	0,355	0,351	0,315	0,258	0,209	0,174	0,8
	0,362	0,358	0,354	0,349	0,343	0,297	0,240	0,197	0,166	1,0
3,0	0,270	0,270	0,270	0,270	0,270	0,270	0,270	0,250	0,200	0,0
	0,269	0,269	0,269	0,269	0,269	0,269	0,267	0,243	0,197	0,2
	0,269	0,269	0,269	0,269	0,268	0,267	0,260	0,230	0,191	0,4
	0,269	0,269	0,268	0,268	0,267	0,263	0,250	0,217	0,182	0,6
	0,269	0,268	0,267	0,267	0,266	0,258	0,238	0,204	0,173	0,8
	0,268	0,267	0,267	0,265	0,264	0,251	0,226	0,193	0,164	1,0
4,0	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,200	0,0
	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,211	0,195	0,2
	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,211	0,206	0,187	0,4
	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,211	0,208	0,200	0,178	0,6
	0,212	0,212	0,212	0,212	0,212	0,209	0,204	0,191	0,169	0,8
	0,212	0,212	0,212	0,212	0,211	0,207	0,200	0,184	0,161	1,0
5,0	0,176	0,176	0,176	0,176	0,176	0,176	0,176	0,176	0,176	0,0
	0,176	0,176	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,174	0,2
	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,174	0,171	0,4
	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,174	0,172	0,167	0,6
	0,175	0,175	0,175	0,175	0,175	0,174	0,173	0,169	0,160	0,8
	0,175	0,175	0,175	0,175	0,174	0,174	0,171	0,166	0,154	1,0

10. Táblázat

$$\tau_x = 0,9$$

$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{scr,z}}$	$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{scr,z}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_y
0,2	0,859	0,859	0,859	0,859	0,859	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,853	0,846	0,834	0,814	0,778	0,480	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,839	0,812	0,778	0,733	0,681	0,440	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,816	0,767	0,714	0,658	0,604	0,399	0,290	0,226	0,184	0,6
	0,788	0,719	0,653	0,594	0,541	0,363	0,269	0,212	0,175	0,8
	0,759	0,672	0,600	0,540	0,490	0,332	0,250	0,200	0,167	1,0
0,4	0,746	0,746	0,746	0,746	0,746	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,743	0,739	0,733	0,724	0,708	0,478	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,735	0,720	0,701	0,674	0,641	0,437	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,722	0,692	0,658	0,619	0,578	0,396	0,288	0,226	0,184	0,6
	0,705	0,660	0,613	0,567	0,523	0,359	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,685	0,626	0,571	0,521	0,478	0,328	0,249	0,199	0,167	1,0
0,6	0,657	0,657	0,657	0,657	0,657	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,655	0,653	0,650	0,645	0,638	0,475	0,326	0,246	0,198	0,2
	0,650	0,642	0,630	0,616	0,595	0,431	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,643	0,625	0,603	0,577	0,547	0,391	0,288	0,226	0,184	0,6
	0,632	0,603	0,571	0,537	0,502	0,355	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,619	0,580	0,539	0,499	0,463	0,325	0,247	0,199	0,167	1,0
0,8	0,585	0,585	0,585	0,585	0,585	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,584	0,583	0,581	0,578	0,574	0,470	0,326	0,246	0,198	0,2
	0,581	0,576	0,569	0,560	0,548	0,426	0,308	0,237	0,192	0,4
	0,576	0,565	0,551	0,535	0,515	0,386	0,287	0,225	0,184	0,6
	0,570	0,551	0,529	0,505	0,479	0,352	0,266	0,212	0,175	0,8
	0,561	0,535	0,506	0,476	0,446	0,323	0,247	0,199	0,167	1,0
1,0	0,527	0,527	0,527	0,527	0,527	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,526	0,525	0,524	0,522	0,521	0,461	0,325	0,246	0,198	0,2
	0,524	0,521	0,517	0,512	0,504	0,418	0,307	0,236	0,192	0,4
	0,521	0,514	0,505	0,495	0,481	0,380	0,286	0,225	0,184	0,6
	0,516	0,505	0,490	0,473	0,454	0,347	0,265	0,211	0,175	0,8
	0,511	0,494	0,473	0,451	0,427	0,319	0,246	0,199	0,167	1,0
2,0	0,349	0,349	0,349	0,349	0,349	0,349	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,349	0,349	0,348	0,348	0,348	0,345	0,316	0,245	0,198	0,2
	0,348	0,348	0,347	0,347	0,346	0,336	0,295	0,235	0,191	0,4
	0,347	0,346	0,345	0,343	0,341	0,322	0,274	0,222	0,183	0,6
	0,347	0,344	0,342	0,340	0,336	0,305	0,255	0,209	0,174	0,8
	0,346	0,343	0,339	0,334	0,329	0,289	0,238	0,196	0,165	1,0
3,0	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260	0,260	0,250	0,200	0,0
	0,260	0,260	0,259	0,259	0,259	0,259	0,257	0,240	0,197	0,2
	0,259	0,259	0,259	0,259	0,258	0,258	0,251	0,227	0,190	0,4
	0,259	0,259	0,258	0,258	0,257	0,255	0,243	0,215	0,181	0,6
	0,259	0,258	0,257	0,257	0,256	0,251	0,232	0,202	0,172	0,8
	0,259	0,257	0,257	0,256	0,253	0,244	0,221	0,191	0,164	1,0
4,0	0,206	0,206	0,206	0,206	0,206	0,206	0,206	0,206	0,200	0,0
	0,206	0,206	0,206	0,206	0,206	0,206	0,205	0,205	0,194	0,2
	0,206	0,206	0,206	0,206	0,206	0,205	0,204	0,201	0,185	0,4
	0,206	0,206	0,205	0,205	0,205	0,205	0,202	0,195	0,176	0,6
	0,206	0,205	0,205	0,205	0,205	0,205	0,202	0,198	0,187	0,8
	0,206	0,205	0,205	0,205	0,205	0,205	0,201	0,194	0,180	1,0
5,0	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,0
	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,170	0,2
	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,170	0,4
	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,170	0,169	0,167	0,163	0,6
	0,171	0,171	0,171	0,171	0,171	0,170	0,168	0,164	0,157	0,8
	0,171	0,171	0,171	0,171	0,170	0,169	0,167	0,162	0,152	1,0

II. Táblázat

$$\tau_x = 1,0$$

$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,y}}$	$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,x}}$									
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	τ_y
0,2	0,836	0,836	0,836	0,836	0,836	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,831	0,824	0,814	0,796	0,765	0,480	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,818	0,794	0,763	0,722	0,674	0,440	0,310	0,237	0,192	0,4
	0,797	0,753	0,703	0,650	0,599	0,398	0,289	0,226	0,184	0,6
	0,772	0,708	0,646	0,588	0,537	0,362	0,268	0,212	0,175	0,8
	0,743	0,663	0,594	0,536	0,487	0,331	0,249	0,199	0,166	1,0
0,4	0,716	0,716	0,716	0,716	0,716	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,713	0,710	0,705	0,698	0,685	0,478	0,326	0,247	0,198	0,2
	0,706	0,694	0,677	0,655	0,626	0,435	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,695	0,670	0,640	0,605	0,567	0,395	0,288	0,226	0,184	0,6
	0,680	0,640	0,599	0,557	0,516	0,358	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,663	0,609	0,559	0,513	0,471	0,327	0,248	0,199	0,166	1,0
0,6	0,626	0,626	0,626	0,626	0,626	0,500	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,626	0,622	0,620	0,616	0,611	0,473	0,326	0,246	0,198	0,2
	0,620	0,613	0,604	0,591	0,575	0,429	0,309	0,237	0,192	0,4
	0,614	0,598	0,581	0,558	0,533	0,389	0,288	0,226	0,184	0,6
	0,605	0,581	0,553	0,522	0,491	0,354	0,267	0,212	0,175	0,8
	0,594	0,559	0,524	0,488	0,454	0,324	0,247	0,198	0,166	1,0
0,8	0,557	0,557	0,557	0,557	0,557	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,555	0,554	0,553	0,551	0,548	0,466	0,326	0,246	0,198	0,2
	0,553	0,549	0,543	0,536	0,526	0,422	0,308	0,237	0,192	0,4
	0,549	0,539	0,528	0,514	0,497	0,382	0,286	0,225	0,184	0,6
	0,543	0,527	0,509	0,488	0,466	0,349	0,265	0,212	0,175	0,8
	0,536	0,513	0,488	0,461	0,435	0,320	0,246	0,198	0,166	1,0
1,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,499	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,500	0,499	0,498	0,497	0,495	0,453	0,325	0,246	0,198	0,2
	0,498	0,495	0,492	0,488	0,482	0,411	0,306	0,236	0,191	0,4
	0,495	0,489	0,482	0,473	0,462	0,374	0,284	0,224	0,184	0,6
	0,491	0,481	0,469	0,455	0,439	0,343	0,263	0,211	0,174	0,8
	0,487	0,471	0,454	0,435	0,415	0,315	0,244	0,198	0,165	1,0
2,0	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,250	0,200	0,0
	0,333	0,333	0,333	0,333	0,333	0,330	0,311	0,245	0,197	0,2
	0,333	0,333	0,332	0,331	0,330	0,322	0,309	0,234	0,191	0,4
	0,333	0,331	0,330	0,329	0,326	0,310	0,270	0,221	0,183	0,6
	0,332	0,329	0,327	0,325	0,322	0,296	0,251	0,207	0,174	0,8
	0,331	0,327	0,324	0,320	0,316	0,281	0,234	0,195	0,164	1,0
3,0	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,200	0,0
	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,250	0,248	0,237	0,197	0,2
	0,250	0,250	0,250	0,250	0,249	0,248	0,243	0,224	0,189	0,4
	0,250	0,249	0,249	0,249	0,248	0,245	0,235	0,212	0,181	0,6
	0,250	0,249	0,248	0,248	0,247	0,240	0,226	0,199	0,171	0,8
	0,249	0,248	0,247	0,246	0,244	0,234	0,215	0,188	0,161	1,0
4,0	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200	0,0
	0,200	0,200	0,200	0,200	0,199	0,199	0,199	0,198	0,191	0,2
	0,200	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,198	0,195	0,183	0,4
	0,199	0,199	0,199	0,199	0,199	0,198	0,195	0,189	0,174	0,6
	0,199	0,199	0,199	0,198	0,198	0,196	0,192	0,183	0,165	0,8
	0,199	0,199	0,198	0,198	0,198	0,195	0,188	0,175	0,157	1,0
5,0	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,0
	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,167	0,166	0,166	0,165	0,2
	0,167	0,167	0,167	0,167	0,166	0,166	0,166	0,165	0,163	0,4
	0,167	0,167	0,167	0,167	0,166	0,166	0,166	0,163	0,159	0,6
	0,166	0,166	0,166	0,166	0,166	0,166	0,164	0,160	0,153	0,8
	0,166	0,166	0,166	0,166	0,165	0,165	0,161	0,157	0,148	1,0

értéket. Az $N_{cr,\varphi}$ a [8] alapján határozható meg, a másik két segédmenyiség pedig az

$$N_{cr,x} = \frac{7,83 EI_y}{H^2}, \quad (3.17)$$

$$N_{cr,y} = \frac{7,83 EI_x}{H^2} \quad (3.18)$$

képletekből.

A λ ismeretében

$$N_{cr} = \lambda N_{cr,\varphi}. \quad (3.19)$$

Célszerűségi és kényelmi szempontokból a táblázatok elkészítésénél a τ_x értékét 0,1-től 1,0-ig egy tizedenként, a τ_y értékét pedig 0,0-től 1,0-ig két tizedenként változtattuk. Így tíz táblázatot kaptunk, úgy, hogy a nagyobb osztásközöz (0,2) tartozó értékek egy-egy táblázat egymás alatti soraiban helyezkednek el; így kényelmesebb az interpoláció. A táblázatok olyan „sűrűn” tartalmazzák a kritikus teher kiszámításához szükséges értékeket, hogy a lineáris interpoláció a gyakorlat számára pontosnak tekinthető.

A határeseteket vizsgálva a táblázatokból a következőket olvashatjuk le. A $\tau_y = 0$ azt jelenti, hogy a rúd keresztmetszete egyszerűen szimmetrikus. Ekkor a szimmetriatengely síkjában létrejövő hajlítási kihajlás nem kombinálódik a szimmetriatengelyre merőleges elcsavarodó kihajlással. A táblázati értékek mindig a mértékadó kritikus terhet szolgáltatják, vagyis például, ha $-\tau_x = 1,0$ mellett —

$$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,y}} = 0,8,$$

akkor az

$$\frac{N_{cr}}{N_{cr,\varphi}}$$

értéke 0,557, függetlenül az

$$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,x}}$$

értéktől (hiszen az x irányú hajlítási kihajlás nem kombinálódik), egészen addig, amíg

$$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,x}} = 1$$

lesz. Ettől kezdve azonban a szimmetriatengely síkjában létrejövő (nem kombinálódó) hajlítási kihajláshoz tartozó kritikus erő a kisebb, és a táblázat ezeket az értékeket adja meg.

A $\tau_x = \tau_y = l$ merevségi arányok annak az esetnek felelnek meg, amikor a nyírasközéppont mindkét koordinátája végtelen. Ez az az eset, amikor a Föppl-tétel alapján felírt

$$\frac{l}{N_{cr}} < \frac{l}{N_{cr,x}} + \frac{l}{N_{cr,y}} + \frac{l}{N_{cr,\varphi}} \quad (3.20)$$

képlet a pontos kritikus erőhöz legközelebb álló értékeket szolgáltatja. Ebben a térbeli esetben azonban a tétel semmilyen merevségi és geometriai jellemzők mellett nem ad pontos értékeket, ellentétben az egyszerűen szimmetrikus esettel. Ez a tény egyébként a koncentrált erővel terhelt rúd esetében szemléletesen is bizonyítható [6].

A táblázat értékei bizonyos szimmetriára utalnak. Például $\tau_x = \tau_y$ esetében a táblázat megfelelő elemei a főátlóra szimmetrikusak. Ezeknek a tulajdonságoknak az a magyarázata, hogy az x és y irányú hajlítási kihajlás teljesen azonos jellegű fizikai jelenség; ezt az őket jellemző (1.1), (1.2) differenciálegyenletek is mutatják.

4. Gyakorlati alkalmazás

A levezetett képletek és a megadott táblázatok és görbék a szerkezeti elemekként alkalmazott önálló, vékonyfalú keresztmetszetű rudak stabilitásvizsgálatán túlmenően alkalmasak épületek merevítőrendszerének stabilitásvizsgálatára is.

Egy függőleges erővel terhelt épület — mint minden „rúdszerű” szerkezet — háromféle alakváltozást végezhet: meggörbülhet a két tehetetlenségi főirány síkjában és elcsavarodhatik. Általános esetben a merevítő mag vagy a merevítő rendszer nem szimmetrikus (vagy csak egy szimmetriatengelye van), és a tiszta elcsavarodó kihajlás kombinálódik a hajlítási kihajlással az egyik (vagy mindkét) tehetetlenségi főirány síkjában. A tiszta elcsavarodó kihajláshoz tartozó kritikus erő lényegesen kisebb lehet mint a síkbeli kihajláshoz tartozó érték, és e miatt az épület kritikus terhe is kicsi [4].

Ha a fődémeken függőlegesen terhelt épületet egyetlen mag merevíti, akkor a terhelés „elkenésével” pontosan egy megoszló normálerővel terhelt konzoltartó elcsavarodó kihajlását kell vizsgálni. A számításhoz szükséges hajlítási, csavarási és öblösödési merevségeket a merevítő mag geometriai és merevségi jellemzőinek felhasználásával kell meghatározni. Az inerciasugarat viszont az épület teljes alaprajzi területének figyelembe vételével kell kiszámítani. Ennek okára a tiszta elcsavarodás egyenletének (1.3) levezetése során [8] derül fény. Az egyenlet levezetése a keresztmetszetek elemi szálainak vizsgálatára épül: itt hatnak ugyanis az elcsavarodást okozó külső terhek, amelyekkel a mag csavarodási és öblösödési merevsége révén áll ellent. Ese-

tünkben a külső teher az épület teljes területén hat, és az oszlopokon (elemi szálaikon) keresztül adódik át. Ez azt is jelenti, hogy az épület alapterületének növekedése a kritikus teher csökkenésével jár együtt, hiszen nő az elcsavarodást okozó erők karja, s ezzel együtt a külső csavarónyomaték.

Abban az általános esetben, amikor az épület merevítését több merevítő mag, illetve kétirányú falak rendszere biztosítja, a csavarási és öblösödési merevségek megállapításakor olyan helyettesítő tartóval dolgozhatunk, amelynek csavarási merevsége az alkotó elemek csavarási merevségeinek egyszerű összege, az öblösödési merevségeket pedig bizonyos szabályok szerint kell összegezni [5].

5. Számpélda

A levezetett összefüggések, illetve görbék és táblázatok segítségével határozzuk meg a 4. ábrán látható, a függőleges mentén megoszló normálerővel terhelt, vékonyfalú nyitott szelvényű rúd kritikus terhét. Az alapadatokat a 4. ábra tartalmazza.

A számításhoz szükséges segédmenyiségek:

A poláris inercianyomaték:

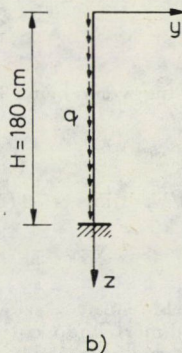
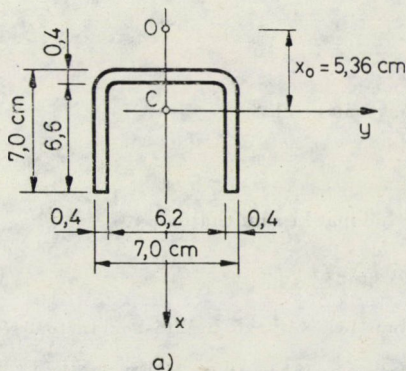
$$I_0 = I_x + I_y + Ax_0^2 = 329,6 \text{ cm}^4.$$

A poláris inerciasugár:

$$i_p = \sqrt{\frac{I_0}{A}} = 6,5 \text{ cm}.$$

A tiszta elcsavarodás jellegét (öblösödési, csavarási) jellemző merevségi hányados (2.8):

$$\tau = \frac{x_0}{i_p} = \sqrt{\frac{I_0 - I_x - I_y}{I_0}} = 0,82.$$



$$\begin{aligned} A &= 7,79 \text{ cm}^2 \\ I_x &= 65,8 \text{ cm}^4 \\ I_y &= 40,0 \text{ cm}^4 \\ I_t &= 0,41 \text{ cm}^4 \\ I_w &= 301,6 \text{ cm}^6 \\ E &= 21000 \text{ kN} \\ G &= 8077 \text{ kN} \end{aligned}$$

4. ábra

A szimmetriatengely síkjában bekövetkező hajlítási kihajlás kritikus terhe (2.4):

$$N_{cr,x} = \frac{7,83 EI_y}{H^2} = 203,3 \text{ kN}. \quad (5.1)$$

A szimmetriasiskra merőleges hajlítási kihajlás kritikus terhe (2.39):

$$N_{cr,y} = \frac{7,83 EI_x}{H^2} = 334,4 \text{ kN}. \quad (5.2)$$

Ez az Euler-féle kihajlás kombinálódik a tiszta elcsavarodó kihajlással. A tiszta elcsavarodó kihajlás kritikus terhének meghatározásához a következő segédmennyiségeket kell kiszámolni:

A csavarási merevséghez tartozó kritikus teher:

$$N_{cr,\varphi}^t = \frac{GI_t}{i_p^2} = 78,3 \text{ kN},$$

Az öblösödési merevséghez tartozó kritikus teher:

$$N_{cr,\varphi}^\omega = \frac{7,83 EI_\bullet}{H^2 i_p^2} = 36,2 \text{ kN}.$$

A fenti „rész” kritikus terhek hányadosa (2.6):

$$\beta = \frac{N_{cr,\varphi}^t}{N_{cr,\varphi}^\omega} = 2,16.$$

A β mennyiség függvényében a [8]-ban közölt 7. ábra felhasználásával

$$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,\varphi}^\omega} = 5,82,$$

így a tiszta elcsavarodás kritikus terhének értékére

$$N_{cr,\varphi} = 5,82 N_{cr,\varphi}^\omega = 210,7 \text{ kN} \quad (5.3)$$

adódik. Az

$$\frac{N_{cr,\varphi}}{N_{cr,y}} = 0,63$$

mennyiség és a

$$\tau = 0,82$$

merevségi arány függvényében a 3. ábra felhasználásával

$$\varepsilon = 0,465,$$

így a „kombinált” kritikus erő a (2.40) képletből már kiszámítható:

$$N_{cr} = \varepsilon N_{cr,y} = 155,5 \text{ kN}. \quad (5.4)$$

Ez az érték kisebb, mint a szimmetriasiskban bekövetkező hajlításhoz tartozó érték (5.2), így ez a rúd mértékadó kritikus terhe.

Kiszámítottuk a rúd mértékadó kritikus terhét a [8]-ban közölt Föppl-féle közelítő képlettel is, és 16,9%-kal kisebb értéket kaptunk.

6. Összefoglalás

Meghatároztuk különböző merevségi arányokkal rendelkező rudak kritikus terhét a [8]-ban bemutatott közelítő, és az ebben a dolgozatban levezetett pontos összefüggések felhasználásával. Az eredmények azt mutatják, hogy a közelítő képletek használatából származó hiba az egyszerűen szimmetrikus keresztmetszetű rudaknál 0-tól 50%-ig, a teljesen általános keresztmetszetű rudaknál pedig 0-tól 66,7%-ig terjed. A hiba annál nagyobb, minél közelebb van a kombinálódó kihajlási esetek kritikus erőinek aránya az egységhez, és a τ , illetve a τ_x és a τ_y értéke a zérushoz.

A közelítő képletek ugyan mindig a biztonság javára közelítenek, a hiba azonban olyan nagy lehet (max. 66,7%), hogy a gazdaságos szerkezetek tervezése érdekében célszerű a jelen dolgozatban levezetett pontos megoldást használni.

IRODALOM

1. AKESSON, B.: Overall Buckling in Bending and Torsion of Rack Structures. Thin walled Structures. Ed. J. Rhodes and A. C. Walker, pp. 127–144, 1980
2. ÉLIÁS, E.: Föppl Így tételéről. Budapest, 1977. Kézirat
3. FÖPPL, L.: Über das Ausknicken von Gittermasten, insbesondere von hohen Funktürmen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. **13** (1933), 1–10
4. Kollár, L.: Épületek merevítése elcsavarodó kihajlás ellen. *Magyar Építőipar* (1977), 150–154
5. SZMODITS, K.: Útmutató panelépületek statikai tervezéséhez. Építéstudományi Intézet, Budapest, 1975
6. TIMOSHENKO, S.—GERE, J.: Theory of Elastic Stability. McGraw—Hill, New York 1961
7. VLASOV, V. Z.: Thin Walled Elastic Beams. Jerusalem 1961. Israel Program for Scientific Translations
8. ZALKA, K.: Torsional Buckling of a Cantilever Subjected to Distributed Normal Loads. *Acta Techn. Hung.* Megjelenés alatt

Combined Torsional and Flexural Buckling of a Cantilever with Unsymmetrical Cross Section Subjected to Distributed Normal Loads. — This paper deals with the combined torsional and flexural buckling of a vertical bar with a built-in lower and a free upper end subjected to uniformly distributed normal loads. The critical load is given for bars with mono-symmetric and with unsymmetric cross section. The eigenvalue problem of the system of the third-order differential equations of variable coefficients is traced back to a simple algebraic problem by generalizing the power series method. The algebraic problem is solved by trial and error. The eigenvalues needed for the calculation of the critical load are given in tables. A numerical example is presented to show how to use the formulae derived.

Drehknickung eines durch verteilte Normalkräfte belasteten Freitragers von allgemeinem Querschnitt. Behandelt wird die Ermittlung der kritischen Drehknicklast der durch gleichmäßig verteilte Normalkräfte belasteten, unten eingespannten, oben freien, einfach symmetrischen Stäbe, von allgemeinen Querschnitten. Die Eigenwertaufgabe eines Differentialgleichungssystems von veränderlichen Koeffizienten wird durch Verallgemeinerung der Potenzreihenlösung zu einer einfachen algebraischen Aufgabe zurückgeführt, die durch stufenweise Näherung gelöst wird. Die zur Berechnung der kritischen Last erforderlichen Werte sind in Tabellen vorgeführt. Ein numerisches Beispiel demonstriert die Benutzung der abgeleiteten Relationen.

NYEREG ALAKÚ, OLDALNYOMÁSMENTES, LAPOS HIPERBOLIKUS PARABOLOIDHÉJAK EGYENLETESEN MEGOSZLÓ TERHELÉS ALATTI EGYENSÚLYI ÚTJÁNAK NEMLINEÁRIS VIZSGÁLATA

JANKÓ LÁSZLÓ*

[Beérkezett: 1978. december 28-án]

Ez a dolgozat egy három részből álló sorozat befejező része. A sorozat *első* részében a HP-héjak membrán megoldásának létezési és egyértelműségi kérdéseit, valamint a felület kinematikai határozatlanságát vizsgáltuk. Ezután a *második* részben a *deformálatlan* alaphelyzetből történő elágazási jelenséget tárgyaltuk. A jelen *harmadik* részben egyrészt arra kívánunk választ adni, hogy bekövetkezhetik-e a tönkremenetel elágazás nélkül, *átputanás* révén (ill. egyáltalán milyen a nagy alakváltozások teher — lehajlás diagramok jellege). Ezen kívül megvizsgáljuk azt is, hogy a *deformált* alaphelyzetből történő elágazáson túli teherbírás emelkedő-e vagy eső.

Jelölések

$$C_{ij} = \cos \frac{i\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{j\pi}{2b} y;$$

$$D = \frac{Eh}{(1-\mu^2)}$$

E

F

F_0

$$K = \frac{EH^3}{12(1-\mu^2)}$$

M_x, M_y, M_{xy}

N_x, N_{xy}, N_y

$$S_{ij} = \sin \frac{i\pi}{2a} x \cdot \sin \frac{j\pi}{2b} y;$$

U_b

U_m

V

$2a, 2b$

fajlagos nyúlási merevség;

rugalmassági modulus;

a középfelületi erők feszültségfüggvénye

$[F'' = N_x, F' = -N_{xy}, F'' = N_y];$

az alaphelyzet feszültségfüggvénye;

az F_0 függvény első variációja $[F = F_0 + \bar{F});$

fajlagos hajlítási merevség;

a héj hajlítónyomatékai, csavarónyomatéka;

a középfelületi erők fajlagos értékei;

a hajlítási erők potenciálja;

a középfelületi erők potenciálja;

a külső erők potenciálja;

az x , ill. y irányú peremvetületek hossza;

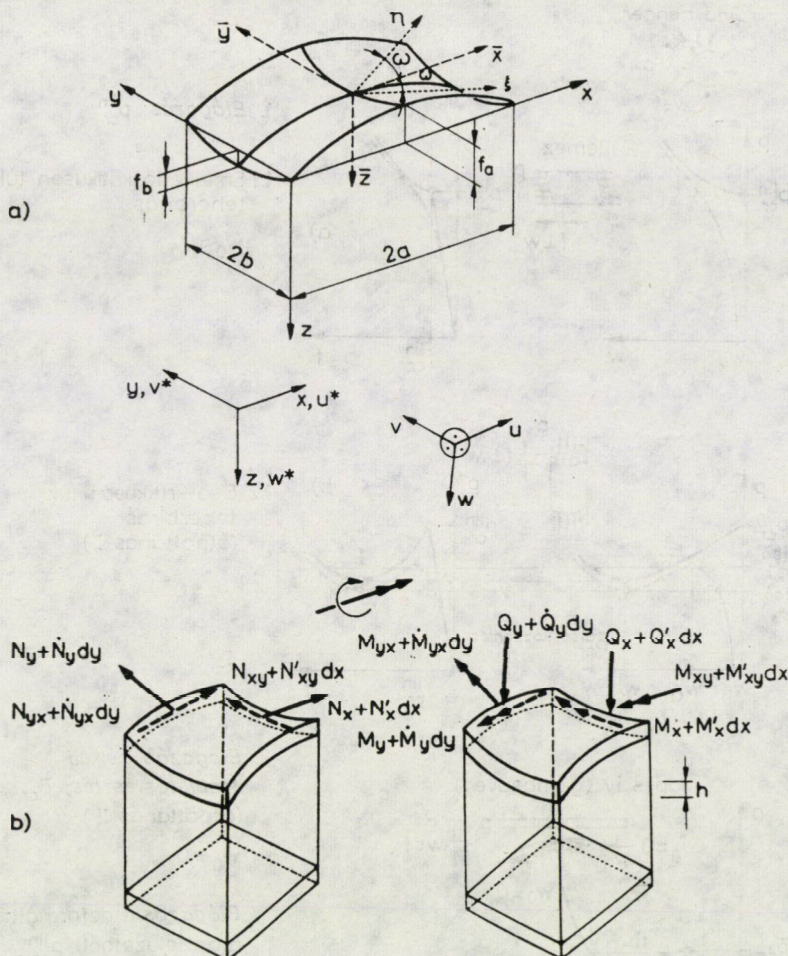
* Dr. Jankó László, 1036 Budapest, Lajos u. 142.

f_a, f_b	az x , ill. y irányú ívek nyílmagasságai;
h	a héj vastagsága;
i , ill. j	x , ill. y irányú félhullámok száma;
p	a z tengely irányába mutató, egyenletesen megoszló, szimmetrikus, az alaprajzi vetület egységére vonatkozó felületi teher intenzitása;
P_{cr}^{lin}	a lineáris kritikus teher;
\bar{P}_{cr}	az átpattanási kritikus teher;
$P_{cr, d}^{lin}$	a deformált alaphelyzetből elágazó kihajlás lineáris kritikus terhe;
u, v	az x , ill. y irányú felületi érintők irányába eső eltolódások;
$z(x, y)$; $\bar{z}(\bar{x}, \bar{y})$	a héj középfelületének ordinátái;
w	a felület pontjainak normális irányú eltolódása [$w = w_0 + \bar{w}$];
w_0	a középfelületi pontoknak az alaphelyzetben bekövetkező normális irányú eltolódása;
\bar{w}	az elágazási jelenségeknél kialakuló normális irányú eltolódás-variáció (δw_0);
w_k	a kezdeti hullámosság amplitúdója;
$\alpha = f_a/f_b$	nyílmagasságarány;
$\beta = a/h$	héjparaméter;
$\gamma = a/b$	oldalarány;
δ	a variációképzés szimbóluma (rövidítve: $\delta w_0 \equiv \bar{w}$);
μ	a harántkontrakciós tényező $[0, 2]$;
ξ	a \bar{z} tengelyre illeszkedő síkban lévő, az első egyenes felületi alkotóserg irányába mutató koordináta;
Π	a külső és belső potenciális energiák összege;
$\varrho = f_b/b$	héjparaméter;
ω	az iránysíkok közötti szög fele;
$\Delta\Delta(\) = (\)^{IV} + 2(\)^{II} + (\)$	a biharmonikus differenciál-operátor;
$L_p(f_1, f_2) = f_1^{II} f_2^{II} - 2f_1^{II} f_2^{II} + f_1^{II} f_2^{II}$	a Pucher-féle differenciál-operátor.

I. Bevezetés

Tetszetős alakjuk és az egyenes alkotóik nyújtotta kedvező kivitelezési lehetőségeik miatt egyre gyakrabban építenek hiperbolikus paraboloid alakú héjszerkezeteket.

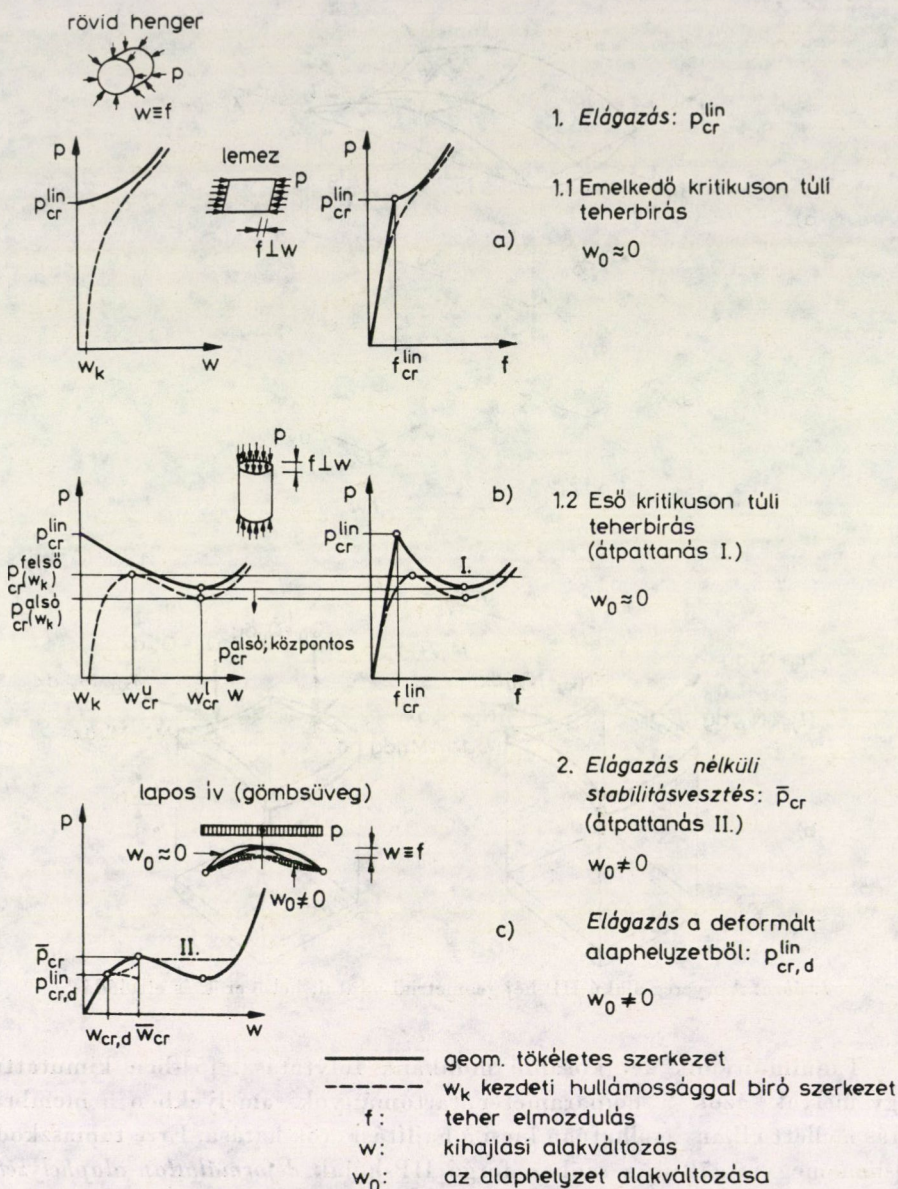
Ebben a dolgozatban a nyereg alakú, oldalnyomásmentes, lapos hiperbolikus paraboloid (továbbiakban HP) héjak (1. ábra) egyenletesen megoszló erők hatása alatti nagy alakváltozásos egyensúlyi útjának főbb jellegzetességeit elemezzük.



1. ábra. A nyereg alakú HP héj geometriai adatai; belső erők és eltolódás

Tanulmányunk két korábbi munkánk folytatása. [5]-ben kimutattuk, hogy melyek azok a héjparaméter tartományok, amelyekben a membránhatás mellett elhanyagolhatóan kicsi a hajlítási erők hatása. Erre támaszkodva [6]-ban megvizsgáltuk a szóban forgó HP-héjak *deformálatlan alaphelyzetből* ($w_0 = 0$) *bekövetkező elágazási jelenségének* jellegzetességeit. A vasbeton héjak legtöbbjét jól jellemző geometriai arányokhoz meghatároztuk a lineáris kritikus terhek csipkegörbéit.

A szeminormál héj ($f_a/f_b = 1$) és a hozzá közel eső nyilmagasságarányú héjak terheiket döntően hajlítási erőkkel hordják. Ezen héjakban középfelületi erőket csak a terhelés azon komponensei okoznak, amelyeknek alakja eltér a szeminormál héj nyúlásmentes lehajlási alakjától [5]. A fentiek bizonyítják, hogy e héjak stabilitási viselkedését *csak nemlineáris* elmélettel lehet tisztázni.



A nemlineáris elmélettel számítható egyensúlyi út jellegének ismeretére természetesen azon HP héjak esetében is szükség van, amelyek membránhéjaknak tekinthetők.

Jelen dolgozatunkban tehát arra a kérdésre akarunk választ adni, hogy az oldalnyomásmentes, nyereg alakú HP héjak teherlehajlás jelleggörbéje a 2. ábrán feltüntetett jellegzetes teherbírási jelleggörbék melyikével azonos

típusú. Itt az az alapvető kérdés, hogy a deformálatlan alaphelyzetből történő elágazáson túli teherbírás *emelkedő-e* vagy *eső*, ill. a tönkremenetel bekövetkezhets-e elágazási jelenség nélkül, *átpattanás* révén.

Előfordulhat az is, hogy a terhelés alatt már összenyomódott héj egy bizonyos helyzetében — az átattanási kritikus teher elérése előtt — elágazási jelenség lép fel. Ennek a stabilitásvesztési lehetőségnek a vizsgálatára is kitérünk.

Elméleti eredményeinket a gyakorlati tervezés igényeinek megfelelően diagramokkal és táblázatokkal szemléltetjük.

2. Alapfeltevések

A teherbírasi jelleggörbéket a lapos héjak másodrendű elmélettel kapott nemlineáris egyensúlyi és kompatibilitási egyenletei felhasználásával a *Galerkin-módszerrel* állítjuk elő.

Mint ismeretes, a geometriai nemlinearitást figyelembe vevő ezen egyenletek a w eltolódás deriváltjai hatványsorainak másodfokú tagjait is bevonják a számításba (Donnell-féle tagok). A Donnell-féle egyenleteknek két fő jellegzetességük van: egyrészt feltételezik a héj *laposságát* (legalábbis egy horpadási hullámon belül), másrészt pontosságuk a w függvény deriváltjait leíró hatványsorok *másodfokú* tagjaiig terjed („korlátozottan” nagy alakváltozások).

A héj anyagát *lineárisan rugalmasnak* tekinthetjük.

Az egész felületre kiterjedő lehajlási alakokat vizsgáljuk.

A héj középfelületét geometriailag tökéletesnek tekintjük.

3. A teherbírasi jelleggörbék előállítása

3.1 Az általános egyenletek

A $p = p(x, y)$ megoszló terhelésnek alávetett héjak U belső potenciális energiája a középfelületi erők U_m , valamint a hajlítási erők U_b potenciális energiájának összegeként így írható fel [13], [18]:

$$U_m = \frac{1}{2Eh} \int_0^{2a} \int_0^{2b} [F'^{12} - 2\mu F'' F'^1 + F''^2 + 2(1 + \mu) F'^{12}] dx dy, \quad (3.1)$$

$$U_b = \frac{K}{2} \int_0^{2a} \int_0^{2b} [w'^{12} + 2\mu w'' w'^1 + w''^2 + 2(1 - \mu) w'^{12}] dx dy, \quad (3.2)$$

$$U = \int_0^{2a} \int_0^{2b} u_0 dx dy = U_m + U_b. \quad (3.3)$$

Itt u_0 a fajlagos belső potenciális energia. A külső erők potenciális energiája:

$$V = - \int_0^{2a} \int_0^{2b} p w \, dx \, dy. \quad (3.4)$$

A rendszer teljes potenciális energiája (π a fajlagos teljes potenciális energia):

$$\Pi = \int_0^{2a} \int_0^{2b} \pi \, dx \, dy = U + V. \quad (3.5)$$

Stabilis egyensúlyi állapot esetén a potenciális energiának minimuma van, és ez a minimum olyan w extrémális függvényhez tartozik, amely a Π funkcionált minimummá (stacionárius értéké) teszi:

$$\delta \Pi = 0. \quad (3.6)$$

A fenti variációs feladathoz a

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} - \left(\frac{\partial \pi}{\partial w^I} \right)' - \left(\frac{\partial \pi}{\partial w^{\cdot}} \right)'' + \left(\frac{\partial \pi}{\partial w^{II}} \right)''' + \left(\frac{\partial \pi}{\partial w^{I \cdot}} \right)'' + \left(\frac{\partial \pi}{\partial w^{\cdot \cdot}} \right)'''' = 0 \quad (3.7)$$

Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet tartozik. A kijelölt műveleteket elvégezve ($F = F[w]$), a feladat közismert egyensúlyi differenciálegyenletéhez [12], [18] jutunk:

$$K \Delta \Delta w - L_p(w, z) - L_p(F, w) - p = 0. \quad (3.8)$$

Hozzuk a középfelületi erők potenciális energiáját az

$$U_m = \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left\{ F^{II} \left(v^{\cdot} - w z^{\cdot} + \frac{1}{2} w^2 \right) - F^{I \cdot} (u^{\cdot} + v^I + w^I w) + \right. \\ \left. + F^{\cdot \cdot} \left(u^I - w z^{II} + \frac{1}{2} w^{I2} \right) - \frac{1}{2 E h} [F^{II2} - 2 \mu F^{I \cdot} F^{II} + F^{\cdot \cdot 2} + 2(1 + \mu) F^{I \cdot 2}] \right\} dx dy \quad (3.9)$$

alakra. Ennek felhasználásával — a kiegészítő potenciális energia stacionárius értékűségének tétele alapján — a

$$\delta U = 0 \quad (3.10)$$

F szerinti variációs feladtból, a

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{II}} \right)''' + \left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{I \cdot}} \right)'' + \left(\frac{\partial u_0}{\partial F^{\cdot \cdot}} \right)'''' = 0 \quad (3.11)$$

alakú Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet által kijelölt műveleteket elvégezve, adódik a középfelületi deformációelemek kompatibilitását kifejező egyenlet [12], [18]:

$$\Delta \Delta F + D(1 - \mu^2) \left[L_p(w, z) + \frac{1}{2} L_p(w, w) \right] = 0. \quad (3.12)$$

3.2 A lehajlási- és a feszültségfüggvény

Ismeretes, hogy a Galerkin-módszer úgy is alkalmazható, hogy mind a w lehajlási alakot, mind az F feszültségfüggvényt egyidejűleg lineárisan független tagokból álló összegként ábrázoljuk [18].

A w függvény minden egyes tagjainak ki kell elégítenie a feladat következő peremfeltételeit:

$$w_{ij0} = 0, \quad w_{ij0} = 0, \quad (3.13a-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=2b \end{array} \right\}$$

$$w_{ij0}^{\parallel} = 0, \quad w_{ij0}^{\ddot{}} = 0. \quad (3.14a-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=2b \end{array} \right\}$$

Az F feszültségfüggvény minden egyes tagjának eleget kell tennie az

$$F_{ij0}^{\parallel} = 0, \quad F_{ij0}^{\ddot{}} = 0 \quad (3.15a-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=2b \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array} \right\}$$

statikai peremfeltételeknek. Ez az *oldalnyomásmentesség* feltétele.

Ezek alapján a két függvényt a

$$w = \sum_i^{I_1} \sum_j^{J_1} w_{ij} \cdot S_{ij} = \sum_i^{I_1} \sum_j^{J_1} w_{ij0}, \quad (3.16)$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, I_1$$

$$j = 1, 3, 5, \dots, J_1$$

$$F = \sum_i^{I_2} \sum_j^{J_2} F_{ij} \cdot S_{ij} = \sum_i^{I_2} \sum_j^{J_2} F_{ij0} \quad (3.17)$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, I_2$$

$$j = 1, 3, 5, \dots, J_2$$

függvénysorokkal ábrázolhatjuk. A fenti egyenletekben

$$S_{ij} = \sin \frac{i\pi}{2a} x \times \sin \frac{j\pi}{2b} y. \quad (3.18)$$

3.3 Megoldás Galerkin-módszerrel

A Galerkin-módszer ezen változatának alábbi két definiáló egyenlete a virtuális elmozdulások, ill. a virtuális erők tételéből (a Hooke-törvény felhasználásával) variációs módszerekkel származtatható [18]:

$$\int_0^{2a} \int_0^{2b} X S_{i'j'} dx dy = 0, \quad (3.19)$$

$$i^l = 1, 2, 3, \dots, I_1$$

$$j^l = 1, 2, 3, \dots, J_1$$

$$\int_0^{2a} \int_0^{2b} Y S_{i'j'} dx dy = 0. \quad (3.20)$$

$$i^l = 1, 2, 3, \dots, I_2$$

$$j^l = 1, 2, 3, \dots, J_2$$

Az első egyenletben szereplő X hibafüggvény a (3.8) egyensúlyi egyenletnek a (3.16), (3.17) összefüggések behelyettesítésével kapható baloldala. A második egyenletben szereplő Y hibafüggvény a (3.12) kompatibilitási egyenletnek a (3.16), (3.17) függvények behelyettesítésével előálló baloldala. Ha az X és Y hibafüggvényeket a w és az F függvények S_{ij} tényezőinek trigonometrikus soraként képzeljük el, akkor belátható, hogy a (3.19) és (3.20) egyenletek az X és Y hibafüggvények zérusához való tartásának követelményét fejezik ki (X és Y ortogonális S_{ij} -re).

Jelen esetben mind a w , mind az F függvény tagjainak száma kettő lesz: egy $i_1 j_1$ és egy $i_2 j_2$ indexszel ellátott tag.

A (3.19) és (3.20) egyenletek által kijelölt műveleteket elvégezve az alábbi nemlineáris egyenletrendszer adódik:

$$\begin{aligned} & a_{11} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} + a_{12} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{13} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} \frac{F_{i_2 j_2}}{E} + a_{14} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \frac{F_{i_2 j_2}}{E} + \\ & + a_{15} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} \frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{16} \frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{17} \frac{\mathbf{p}}{E} = 0, \\ & a_{21} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} + a_{22} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{23} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} \frac{F_{i_2 j_2}}{E} + a_{24} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \frac{F_{i_2 j_2}}{E} + \\ & + a_{25} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} \frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{26} \frac{F_{i_2 j_2}}{E} + a_{25} \frac{\mathbf{p}}{E} = 0, \quad (3.21a-d) \\ & a_{31} \frac{F_{i_1 j_1}}{E} + a_{32} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} + a_{33} \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^2 + a_{34} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + a_{35} \left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h} \right)^2 = 0, \\ & a_{41} \frac{F_{i_2 j_2}}{E} + a_{42} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + a_{43} \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^2 + a_{44} \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + a_{45} \left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer együtthatói:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{\pi^4}{192(1-\mu^2)} \frac{Ebh}{\beta^3} \frac{1}{a_{i_1 j_1}}, & a_{12} &= -\frac{2}{3} \pi^2 \frac{Eh}{ab} i_1 j_1, \\
 & & a_{13} &= a_{24}, \\
 a_{14} &= 2\pi^2 \frac{Eh}{ab} c_{i_1 j_2 i_1 j_1} = a_{15}, & a_{16} &= \frac{\pi^2}{2} \frac{E f_b}{ab} b_{i_1 j_1}, \\
 & & a_{17} &= -\frac{16}{\pi^2} Eab \frac{1}{i_1 j_1}, \\
 a_{21} &= \frac{\pi^4}{192(1-\mu^2)} \frac{Ebh}{\beta^3} \frac{1}{a_{i_1 j_2}}, & a_{22} &= a_{14}, \\
 & & a_{23} &= -\frac{2}{3} \pi^2 \frac{Eh}{ab} i_2 j_2, \\
 a_{24} &= 2\pi^2 \frac{Eh}{ab} c_{i_1 j_1 i_2 j_2} = a_{25}, & a_{26} &= \frac{\pi^2}{2} \frac{E f_b}{ab} b_{i_2 j_2}, \\
 & & a_{27} &= -\frac{16}{\pi^2} Eab \frac{1}{i_2 j_2}, \\
 a_{31} &= \frac{\pi^4}{16} \frac{Eb}{a^3} \frac{1}{a_{i_1 j_1}}, & a_{32} &= -\frac{\pi^2}{2} \frac{Eh^2 f_b}{ab} b_{i_1 j_1}, \\
 & & a_{33} &= \frac{\pi^2}{3} \frac{Eh^3}{ab} i_1 j_1, \\
 a_{34} &= -2\pi^2 \frac{Eh^3}{ab} c_{i_2 j_2 i_1 j_1}, & a_{35} &= \frac{a_{44}}{2}, \\
 a_{41} &= \frac{\pi^4}{16} \frac{Eb}{a^3} \frac{1}{a_{i_2 j_2}}, & a_{42} &= -\frac{\pi^2}{2} \frac{Eh^2 f_b}{ab} b_{i_2 j_2}, \\
 & & a_{43} &= \frac{a_{34}}{2}, \\
 a_{44} &= -2\pi^2 \frac{Eh^3}{ab} c_{i_1 j_1 i_2 j_2}, & a_{45} &= \frac{\pi^2}{3} \frac{Eh^3}{ab} i_2 j_2.
 \end{aligned} \tag{3.22a-z}$$

A fenti együtthatókban a következő segédmenyiségek szerepelnek:

$$\begin{aligned}
 a_{i_1 j_1} &= \frac{1}{(i_1^2 + \gamma^2 j_1^2)^2}, & b_{i_1 j_1} &= \alpha j_1^2 - i_1^2, \\
 c_{i_1 j_1 i_2 j_2} &= \frac{i_2^2 j_2^2 (i_1^2 j_1^2 - 2(i_1^2 j_2^2 + i_2^2 j_1^2))}{i_1 j_1 (4i_2^2 - i_1^2)(4j_2^2 - j_1^2)}.
 \end{aligned} \tag{3.23a-c}$$

Az $a_{i_2 j_1}$, $b_{i_2 j_2}$, $c_{i_2 j_2 i_1 j_1}$ mennyiségek úgy számíthatók, hogy az i_1 szám helyébe i_2 -t és a j_1 szám helyébe j_2 -t írunk és megfordítva.

A (3.21 a—d) egyenletrendszer összevonható egy vegyes harmadfokú egyenletté. Ha a (3.21 c—d) egyenletekből kifejezzük az

$$\frac{F_{i_1 j_1}}{E} \text{ és } \frac{F_{i_2 j_2}}{E}$$

értékeket, majd ezeket behelyettesítjük a (3.21 a—b) egyenletekbe, akkor a (3.21 a) egyenlet az alábbi vegyes harmadfokú algebrai egyenletté válik:

$$\begin{aligned} A_0 \frac{w_{i_1 j_1}}{h} + B_0 \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + C_0 \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^2 + D_0 \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^2 \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + \\ + E_0 \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^3 + F_0 \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + G_0 \left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h} \right)^2 + \\ + H_0 \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h} \right)^2 + I_0 \left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h} \right)^3 = - \frac{P}{E}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Az ugyanilyen felépítésű — a (3.21 b) egyenletből származó — másik egyenlet együtthatóit — A_{00} , — B_{00} , . . . , — I_{00} -al jelöljük.

Ha a (3.24) egyenletből kivonjuk a — A_{00} , — B_{00} , . . . , — I_{00} együtthatójú egyenletet, akkor megkapjuk a feladat „karakterisztikus” egyenletét:

$$\begin{aligned} A \frac{w_{i_1 j_1}}{h} + B \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + C \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^2 + D \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^2 \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + E \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^3 + \\ + F \frac{w_{i_2 j_2}}{h} + G \left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h} \right)^2 + H \frac{w_{i_1 j_1}}{h} \left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h} \right)^2 + I \left(\frac{w_{i_2 j_2}}{h} \right)^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

A (3.25) egyenletben szereplő együtthatók a következő alakúak:

$$A = A_0 + A_{00}, \quad B = B_0 + B_{00}, \quad \dots, \quad I = I_0 + I_{00}, \quad (3.26)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= -i_1 j_1 \left[\frac{\pi^6}{3072 (1 - \mu^2)} \frac{1}{a_{i_1 j_1}} \frac{1}{\beta^4} + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{\gamma \varrho}{\beta} \right)^2 b_{i_1 j_1}^2 a_{i_1 j_1} \right], \\
 A_{00} &= 0, \\
 B_0 &= -\pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^3 \varrho i_1 j_1 [2 a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} + a_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2}] c_{i_1 j_1 i_2 j_2}, \\
 B_{00} &= \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^3 \varrho i_2 j_2 [2 a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} + a_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2}] c_{i_1 j_1 i_2 j_2}, \\
 C_0 &= \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^3 \varrho i_1^2 j_1^2 a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1}, \\
 C_{00} &= \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^3 \varrho i_2 j_2 \left[a_{i_1 j_1} b_{i_1 j_1} + \frac{1}{2} a_{i_2 j_2} b_{i_2 j_2} \right] c_{i_1 j_1 i_2 j_2}, \\
 D_0 &= \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^4 i_1 j_1 [2 i_1 j_1 a_{i_1 j_1} - 6 c_{i_1 j_1 i_2 j_2} a_{i_2 j_2}] c_{i_1 j_1 i_2 j_2}, \\
 D_{00} &= \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^4 i_2 j_2 \left[-2 \left(-2 c_{i_1 j_1 i_2 j_2}^2 + \frac{1}{3} i_1 j_1 c_{i_1 j_1 i_2 j_2} \right) a_{i_1 j_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \left(-\frac{2}{3} i_2 j_2 c_{i_1 j_1 i_2 j_2} + 4 c_{i_1 j_1 i_2 j_2}^2 \right) a_{i_2 j_2} \right], \\
 E_0 &= -2 \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^4 i_1 j_1 \left[a_{i_2 j_2} c_{i_1 j_1 i_2 j_2}^2 + \frac{1}{9} i_1^2 j_1^2 a_{i_1 j_1} \right], \\
 E_{00} &= -2 \pi^2 \left(\frac{\gamma}{\beta} \right)^4 i_2 j_2 \left[\frac{1}{3} i_1 j_1 a_{i_1 j_1} - a_{i_2 j_2} c_{i_1 j_1 i_2 j_2} \right] c_{i_1 j_1 i_2 j_2},
 \end{aligned} \right\} (3.27 \text{ a-j})$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_0 &= 0, \\
 F_{00}(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -A_0(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
 G_0(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -C_{00}(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
 G_{00}(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -C_0(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
 H_0(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -D_{00}(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
 H_{00}(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -D_0(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
 I_0(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -E_{00}(i_1, j_1, i_2, j_2), \\
 I_{00}(i_2, j_2, i_1, j_1) &= -E_0(i_1, j_1, i_2, j_2).
 \end{aligned} \right\} (3.28 \text{ a-h})$$

A (3.28 a—h) egyenletekben a zárójeles szimbólumok arra utalnak, hogy az F_{00} , G_0, \dots, I_{00} mennyiségeket a $-A_0, -C_{00}, \dots, -E_0$ függvényekből az $i_1 \rightarrow i_2, j_1 \rightarrow j_2, i_2 \rightarrow i_1, j_2 \rightarrow j_1$ változócserevel lehet megkapni. Ha bevezetjük a

$$\frac{w(a, b)}{h} = \frac{w}{h} = \frac{w_{i_1 j_1}}{h} S_{i_1 j_1}^0 + \frac{w_{i_2 j_2}}{h} S_{i_2 j_2}^0 \quad (3.29)$$

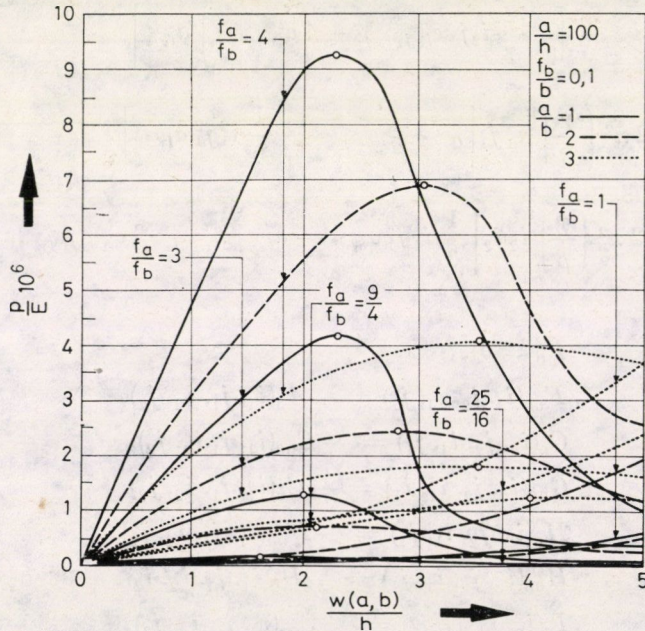
változót, a (3.25) „karakterisztikus” egyenlet

$$a_0 + a_1 \frac{w_{i_1 j_1}}{h} + a_2 \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^2 + a_3 \left(\frac{w_{i_1 j_1}}{h} \right)^3 = 0 \quad (3.30)$$

alakban írható fel, ahol

$$S_{i_1 j_1}^0 = \sin \frac{i_1 \pi}{2} \sin \frac{j_1 \pi}{2}, \quad S_{i_2 j_2}^0 = \sin \frac{i_2 \pi}{2} \sin \frac{j_2 \pi}{2}, \quad (3.31a-b)$$

$$a_0 = \frac{F}{S_{i_1 j_1}^0} \frac{w}{h} + G \left(\frac{w}{h} \right)^2 + \frac{I}{S_{i_2 j_2}^0} \left(\frac{w}{h} \right)^3,$$

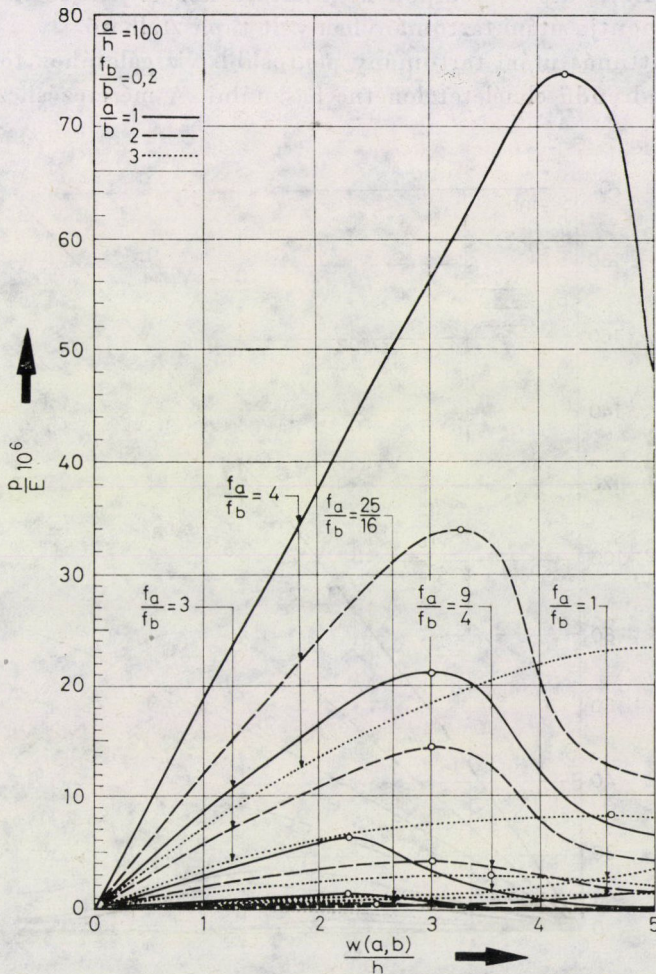


3. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

$$a_1 = A - \frac{F}{S_{i,j}^0} S_{i,j}^0 + \left(\frac{B}{S_{i,j}^0} - 2G S_{i,j}^0 \right) \frac{w}{h} + \left(H - \frac{3I}{S_{i,j}^0} S_{i,j}^0 \right) \left(\frac{w}{h} \right)^2, (3.32a-d)$$

$$a_2 = -\frac{B}{S_{i,j}^0} S_{i,j}^0 + C + G + \left(\frac{D}{S_{i,j}^0} - 2H S_{i,j}^0 + 3 \frac{I}{S_{i,j}^0} \right) \frac{w}{h},$$

$$a_3 = -\frac{D}{S_{i,j}^0} S_{i,j}^0 + E + H - \frac{I}{S_{i,j}^0} S_{i,j}^0.$$



4. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

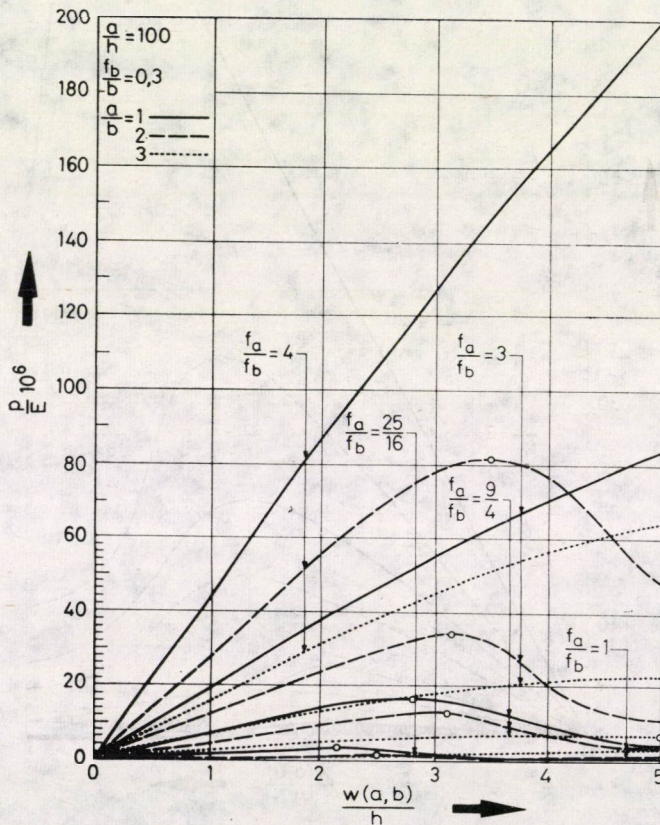
3.4 Numerikus eredmények

A meghatározott teherbírási diagramok a 3. — 13. ábrákon láthatók. Az I. táblázatban a teherlehajlás görbék jellegzetes ordinátáit foglaltuk össze.

A lehajlási függvény egyik komponensét az $i_1 = j_1 = 1$, a másik komponensét az $i_2 = 3, j_2 = 1$ vagy az $i_2 = 3, j_2 = 3$ számokkal adtuk meg. A terhelés mindkét irányban szimmetrikus, ezért antiszimmetrikus lehajlási alakokat ehhez a vizsgálathoz nem kell figyelembe venni (csak az esetleges elágazáshoz: 4. pont).

Az i_2 és j_2 értékek két lehetősége közül azzal számoltunk, amelyik kisebb teherbírást adott. Ezen utóbbi komponensek hatása között jelentősebb különbség a görbék tetőpontja utáni tartományban volt tapasztalható.

Az átptattanás utáni tartomány pontosabb vizsgálatához több tagot és esetleg harmadrendű elméletet lehetne használni. A méretezéshez elsősorban



5. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

I. táblázat/1

		$\frac{P}{E} \cdot 10^6$			$(\quad) \cdot 10^{-6} = \bar{p}_{cr}$				
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} =$	1	2	3	4	5
0,1	100	1	1	0,018		0,067	0,170	0,348	0,622
			1,21	0,020	(0,022)	0,021	0,036	0,091	0,204
			25/16	0,145	(0,175)	0,172	0,102	0,022	0,024
			9/4	0,813		(1,258)	0,504	0,165	0,029
			3	2,116		3,922 (4,172)	1,618	0,566	0,400
		4	4,797		9,019 (9,240)	6,680	2,822	1,051	
		2	1	0,095		0,271	0,598	1,138	1,944
			1,21	0,081		0,180	0,381	0,774	1,447
			25/16	0,133		0,174	0,201	0,306	0,550
3	1,355			2,175 (2,430)	2,404	1,959	1,197		
9/4	0,516		0,714 (0,725)	0,665	0,477	0,258			
4	3,123		5,516	(6,872)	4,523	2,598			
3	1	0,343		0,790	1,441	2,388	3,714		
	1,21	0,333		0,719	1,270	2,094	3,307		
	25/16	0,346		0,650	1,021	1,565	2,394		
	9/4	0,539		0,844	1,033	(1,239)	1,228		
	3	0,965		1,506	1,720 (1,750)	1,720	1,622		
4	1,940		3,197	3,847 (4,080)	3,983	3,722			

I. táblázat/2

$\frac{P}{E} \cdot 10^6$					$(\quad)E \cdot 10^{-4} = \bar{p}_w$					
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5		
0,2	100	1	1	0,018	(0,080)	0,067	0,170	0,348	0,622	
			1,21	0,076		0,076	0,038	0,019	0,011	
			25/16	0,653		1,012	(1,120)	0,431	0,140	0,026
			9/4	3,320		6,192	(6,280)	3,411	1,456	0,443
			3	8,576		16,350	(21,184)	12,048	6,528	
		4	19,47	37,70	55,62	73,98	(75,20)	47,55		
		2	1	0,095	0,271	0,598	1,138	1,944		
			1,21	0,099	0,149	0,235	0,442	0,852		
			25/16	0,418	0,560	(0,580)	0,348	0,205		
9/4	2,150		3,653	(4,317)	3,283	1,914				
3	5,584	10,288	(14,176)	7,504	4,298					
4	12,56	23,79	33,38	(34,56)	19,91	11,73				
3	1	0,343	0,790	1,441	2,388	3,714				
	1,21	0,330	0,656	1,084	1,720	2,673				
	25/16	0,480	0,767	0,971	1,192	1,536				
	9/4	1,433	2,280	2,681	(2,880)	2,750	2,583			
	3	3,334	5,776	7,328	8,032	(8,202)	7,984			
4	7,434	13,54	18,32	21,67	23,29					

I. táblázat/3

		$\frac{P}{E} \cdot 10^6$			$(\quad) E \cdot 10^{-6} = \bar{P}_w$				
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5	
0,3	100	1	1	0,018	(0,250)	0,067	0,170	0,348	0,622
			1,21	0,186		0,234	0,141	0,039	0,023
			25/16	1,501		2,443 (2,510)	0,992	0,317	0,120
			9/4	7,530		14,31 (16,27)	16,11	9,054	4,553
			3	19,47		37,70	54,63	70,09	83,52
		4	44,14	86,40	126,7	165,1	201,2		
		2	1	0,095	0,271	0,598	1,138	1,944	
			1,21	0,153	0,191	0,200	0,265	0,455	
			25/16	0,953	1,455 (1,560)	1,519	1,206	0,725	
9/4	4,909		8,975	12,05 (12,320)	6,642	3,797			
3	12,57	23,78	33,99 (35,20)	19,91	11,73				
4	28,23	54,25	78,12 (81,30)	75,87	48,92				
3	1	0,343	0,790	1,441	2,388	3,714			
	1,21	0,348	0,635	0,967	1,445	2,163			
	25/16	0,751	1,160	1,330	1,373	(1,401)			
	9/4	3,046	5,138	6,440	7,079	(7,168)			
	3	7,43	13,54	18,33	21,67	23,29			
4	16,58	31,34	44,36	55,63	64,54				

I. táblázat/4

$\frac{P}{E} \cdot 10^4$				$(\quad)E \cdot 10^{-4} = \bar{P}_{cr}$					
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5	
0,1	150	1	1	0,004	(0,105)	0,013	0,034	0,069	0,123
			1,21	0,007		(0,008)	0,004	0,005	0,017
			25/16	0,070		0,100	0,051	0,017	0,010
			9/4	0,367		0,664 (0,685)	0,263	0,088	0,045
			3	0,948		1,782 (1,930)	1,320	0,656	0,208
		4	2,150	4,119	5,851 (5,905)	3,984	2,388		
		2	1	0,019	0,053	0,118	0,225	0,384	
			1,21	0,017	0,031	0,057	0,111	0,204	
			25/16	0,048	(0,063)	0,052	0,043	0,030	
9/4	0,244		0,377	0,427 (0,435)	0,415	0,356			
3	0,617	1,089	1,089	0,893	0,513				
4	1,398	2,603	3,692 (3,700)	1,986	1,082				
3	1	0,068	0,156	0,285	0,472	0,734			
	1,21	0,064	0,132	0,225	0,362	0,560			
	25/16	0,077	0,131	0,182	0,252	0,360			
	9/4	0,177	0,274	0,315 (0,325)	0,320	0,314			
	3	0,383	0,631	0,760 (0,802)	0,787	0,735			
4	0,832	1,461	1,891	2,123	(2,162)				

I. táblázat/5

		$\frac{p}{E} \cdot 10^4$			$(\quad) E \cdot 10^{-4} = p_{cr}$				
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5	
0,2	150	1	1	0,004	0,037 (0,049)	0,013	0,034	0,069	0,123
			1,21	0,037		0,046	0,028	0,008	0,005
			25/16	0,297		0,480	0,196	0,063	0,024
			9/4	1,487		2,826	3,182	1,797	0,899
			3	3,846		7,447	10,79	13,84	16,50
			4	8,719		17,06	25,03	32,60	39,74
	2	1	0,019	0,054	0,288 (0,308)	0,118	0,225	0,384	
		1,21	0,030	0,038		0,040	0,052	0,090	
		25/16	0,188	0,288		0,300	0,238	0,143	
9/4	0,970	1,773	2,375	(2,383)	1,322	0,750			
3	2,482	4,698	6,713	(6,953)	3,933	2,317			
4	5,576	10,72	15,23	(16,06)	14,99	9,66			
3	1	0,068	0,156	0,229	0,285	0,472	0,734		
	1,21	0,069	1,125		0,191	0,285	0,427		
	25/16	0,148	0,229		0,263	0,271	(0,277)		
	9/4	0,602	1,015		1,272	1,398	(1,416)		
	3	1,468	2,675		3,619	4,281	4,601		
4	3,275	6,191	8,762	10,99	12,75				

I. táblázat/6

		$\frac{P}{E} 10^4$			$(\quad) E \cdot 10^{-4} = \bar{p}_{cr}$			
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5
0,3	150	1	1	0,004	0,013	0,034	0,069	0,123
			1,21	0,089 (0,140)	0,132	0,061	0,021	0,007
			25/16	0,672	(1,255)	0,704	0,304	0,035
			9/4	3,380	6,538	9,467	12,14	14,46
		3	8,712	17,01	24,84	32,13	38,80	
		4	19,73	38,90	57,51	75,54	92,98	
		2	1	0,019	0,053	0,118	0,225	0,384
			1,21	0,059	(0,075)	0,065	0,048	0,041
			25/16	0,440	0,738	0,911	(0,977)	0,951
9/4	2,182		4,119	5,884 (6,050)	3,283	1,912		
3	5,576	10,72	15,43 (16,34)	14,99	9,66			
4	12,57	24,45	35,63	46,08	49,93			
3	1	0,068	0,156	0,285	0,472	0,734		
	1,21	0,082	0,136	0,182	0,242	0,335		
	25/16	0,282	0,452	0,532	(0,540)	0,500		
	9/4	1,292	2,337	3,132	3,664	3,893		
3	3,275	6,191	8,762	10,99	12,75			
4	7,707	14,72	21,07	26,78	31,85			

I. táblázat/7

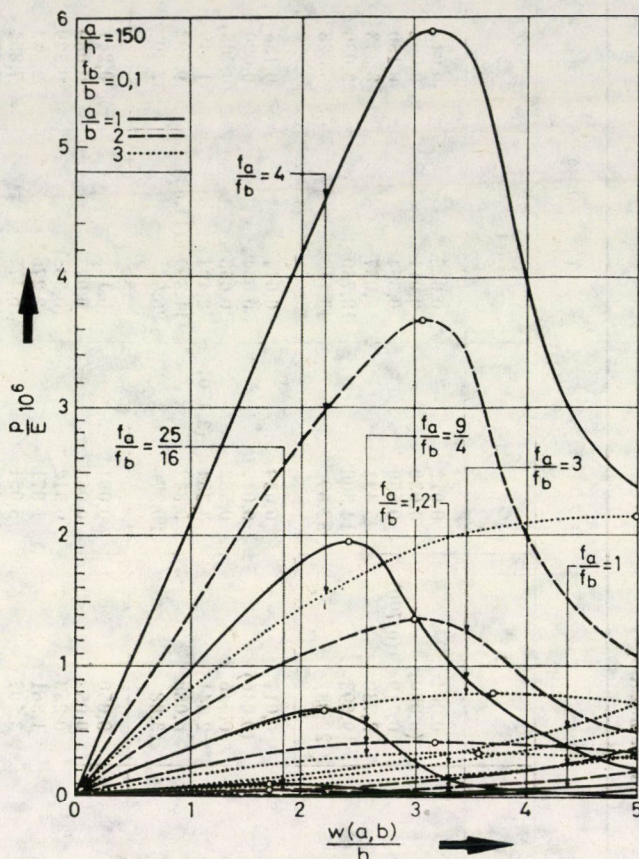
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{P}{E} \cdot 10^4$		$(\quad) E \cdot 10^{-4} = P_{cr}$			
			$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5
0,1	200	1	1	0,001	0,004	0,011	0,022	0,039
			1,21	0,0048 (0,0050)	0,0048	0,0024	0,0012	0,0007
			25/16	0,0408	0,0633 (0,070)	0,0269	0,0088	0,0016
			9/4	0,208	0,387 (0,393)	0,213	0,091	0,028
		3	0,536	1,022	(1,324)	0,753	0,408	
		4	1,217	2,356	3,476	4,624 (4,700)	2,972	
		2	1	0,006	0,017	0,037	0,071	0,122
			1,21	0,006	0,009	0,015	0,028	0,053
			25/16	0,026	0,035 (0,036)	0,031	0,022	0,013
9/4	0,134		0,228	(0,270)	0,205	0,120		
3	0,349	0,643	(0,886)	0,469	0,268			
4	0,785	1,487	2,124 (2,100)	1,246	0,733			
3	1	0,021	0,049	0,090	0,149	0,232		
	1,21	0,020	0,041	0,067	0,108	0,167		
	25/16	0,030	0,048	0,061	0,075	0,096		
	9/4	0,090	0,143	0,168 (0,180)	0,172	0,161		
3	0,209	0,361	0,458	0,502 (0,513)	0,499			
4	0,465	0,846	1,145	1,354	1,456			

I. táblázat/8

		$\frac{P}{E} \cdot 10^6$			$(\quad) \cdot 10^{-4} = \bar{p}_{cr}$			
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5
0,2	200	1	1	0,001	0,004	0,012	0,025	0,047
			1,21	0,022	0,033	(0,035)	0,030	0,021
			25/16	0,168	0,312 (0,330)	0,148	0,057	0,034
		9/4	0,842	1,620	2,329 (2,400)	1,997	1,269	
		3	2,175	4,247	6,210	8,061	9,783	
		4	5,460	10,74	15,84	20,75	25,49	
		2	1	0,006	0,017	0,039	0,077	0,135
			1,21	0,015	(0,019)	0,017	0,014	0,015
			25/16	0,109	0,178	0,214	(0,221)	0,205
9/4	0,546	1,024	(1,461)	0,766	0,440			
3	1,394	2,669	3,830 (4,002)	3,107	1,960			
4	3,140	6,088	8,842	11,39 (11,90)	9,59			
3	1	0,021	0,050	0,091	0,153	0,241		
	1,21	0,024	0,041	0,058	0,080	0,115		
	25/16	0,073	0,115	0,133 (0,140)	0,134	0,124		
9/4	0,327	0,577	0,757	0,874	0,935			
3	1,709	2,876	3,259 (3,480)	2,289	1,799			
4	1,826	3,507	5,051	6,477	7,834			

I. táblázat/9

		$\frac{P}{E} \cdot 10^4$			$(\quad) \cdot 10^{-4} = P_{cr}$			
$\frac{f_b}{b}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{f_a}{f_b}$	$\frac{w}{h} = 1$	2	3	4	5
0,3	200	1	1	0,001	0,004	0,012	0,025	0,047
			1,21	0,052	(0,080)	0,032	0,011	0,002
			25/16	0,380	0,719	0,659	0,354	0,150
			9/4	1,910	3,730	5,433	7,037	8,343
			3	4,925	9,693	14,300	18,750	23,030
			4	11,13	22,03	32,69	43,11	53,28
	2	1	0,006	0,017	0,039	0,077	0,135	
		1,21	0,033	(0,046)	0,045	0,034	0,020	
		25/16	0,254	0,446	0,582	0,668	(0,708)	
9/4	1,226	2,341	3,354	2,494	1,549			
3	3,140	6,088	8,842	11,39	9,592			
4	7,087	13,88	20,37	26,55	32,40			
3	1	0,021	0,050	0,091	0,153	0,241		
	1,21	0,033	0,052	0,063	0,073	0,089		
	25/16	0,152	0,253	0,312	(0,335)	0,329		
	9/4	0,740	1,361	1,871	2,276	2,583		
	3	1,826	3,507	5,051	6,477	7,834		
4	4,368	8,444	12,23	15,74	18,98			



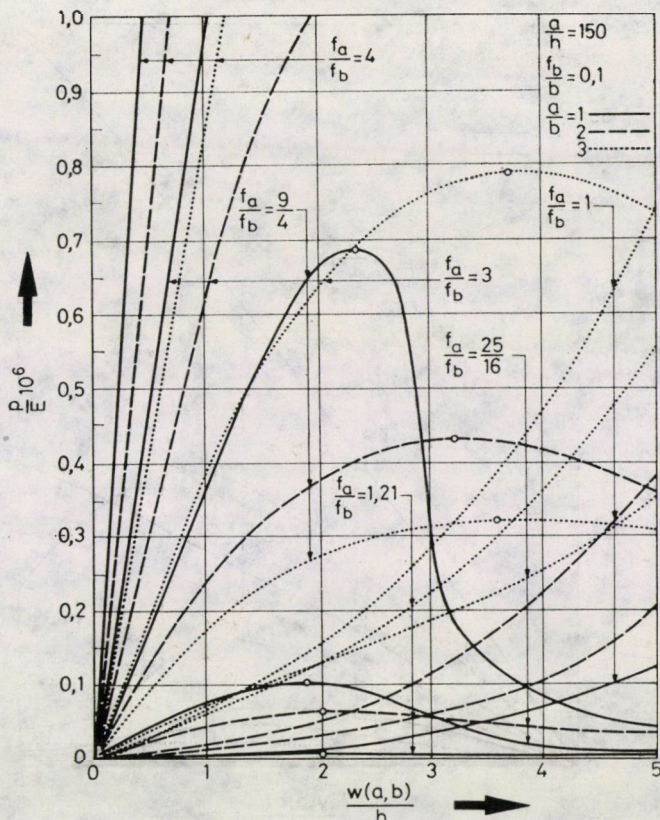
6. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

a görbék tetőponti értékére van szükség, ezért ezt a pontosabb vizsgálatot jelen dolgozat keretében nem tartottuk feladatunknak elvégezni.

A számításokat úgy végeztük el, hogy felvett $w(a, b)/h$ mennyiségekhez a (3.29)—(3.32) egyenletekből meghatároztuk a w függvény komponenseinek $w_{i_1 j_1}/h$, $w_{i_2 j_2}/h$ relatív amplitúdóit, majd a (3.24) összefüggésből kiszámítottuk a p/E teherbírási paramétert.

A diagramok azt mutatják, hogy a terhüket az elsőrendű elmélet szerint majdnem teljesen középfelületi erőkkel hordó HP héjak ([5] $f_a/f_b = [1,5—2]$ —4) nemlineáris teherhordó viselkedése a 2c. ábrán látható jelleggörbével jellemezhető.

Például a *normális* ($f_a/f_b = 4$) vagy a *háromnegyed normális* típusú ($f_a/f_b = 9/4$) héj lehajlása növekedésével a teherbírás egy ideig monoton növekszik (stabil egyensúlyi állapot), majd a \bar{p}_{cr} teherintenzitás elérése után (a labilis egyensúlyi állapot kezdete) bekövetkezik a kisebb potenciálú hely-



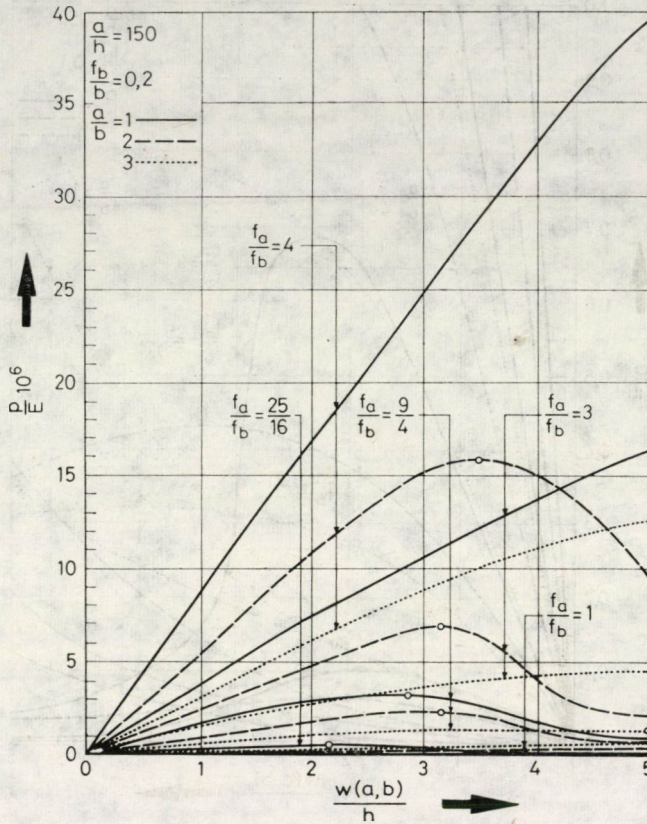
7. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

zetbe történő *át pattanás*. Az *át pattanás* utáni teherbírás-csökkenést emelkedő teherbírás (stabilis egyensúlyi helyzet) követi.

A szerkezet mérnöki szempontból természetesen az *át pattanási* teher elérésekor tönkrementnek tekinthető, így az ismét emelkedő tartományt nem is tüntettük fel.

A translációs HP héjak egyik alkotórésze felülről homorú parabolaseregéből áll, ezért azt gondolhatnánk, hogy ezek a héjak monoton emelkedő nemlineáris teherbírási jelleget mutatnak. Ez azonban — a „lemezszerűen” viselkedő szemnormál héj esetét kivéve — csak akkor van így, ha a héjat az aszimptotikus vonalak (a karakterisztikák felületi megfelelői) mentén támasztjuk meg [9]. Ennek az az oka, hogy a felületi alkotók mentén megtámasztott *torznégyszöghéj* felülről homorú húzott szálak közül legalább a sarokpontokat összekötő húzott szál mintegy felfüggeszti a kihorpadó nyomott szálakat [8].

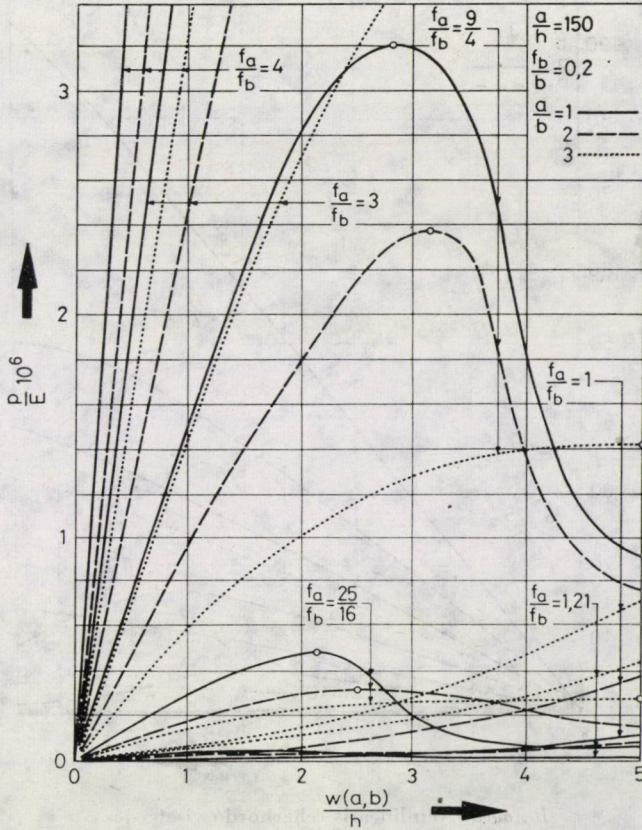
A nyereg alakú oldalnyomásmentes HP héj minden felülről homorú szála oldalirányban szabadon elmozduló peremívekhez csatlakozik (a táma-



8. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

szoknál levő szálak hatása jelentéktelen), így az említett felfüggesztő hatás nem jelentkezik. Az átpattanás után emelkedő teherbírás csak igen nagymértékű — a 3.—13. ábrákon fel nem tüntetett — alakváltozás után, az x irányú ívek felülről homorú helyzetében lehetséges.

Az eddig tárgyalt „héjszerű” viselkedéstől teljesen eltérő jelleget mutat a szeminormál héj ($f_a/f_b = 1$). Ez a héj az elsőrendű elmélet szerint [5] döntően hajlítónyomatékokkal viseli a terheit. Ez a „lemezszerű” monoton növekedő teherhordó jelleg mutatkozik meg a 3.—13. ábrákon is. Igaz ugyan, hogy a szeminormál héj teherbírása a lehajlás növekedésével egyre nagyobb lesz, de az a teher amelyet ily módon viselni képes, igen kicsi. Az elsőrendű elmélettel történt vizsgálatok [5] eredményeivel összhangban, most is megállapíthatjuk, hogy a szeminormál héjat — és a tőle kevéssé eltérő nyílmagasságarányú héjakat — csak a lemezeknél szokásos a/h arányok mellett lehet alkalmazni. Az átpattanó és a felülről homorú, monoton növekedő teherbírású esetek



9. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

között átmenet van: ekkor a teherlehajlás diagramoknak nincs vízszintes érintőjük, csak *inflexiós pontjuk* van.

A „lemezszerű” és a „héjszerű” viselkedés különbözőségét jól szemlélteti az a/b oldalirányú eltérő hatása is. A „lemezszerűen” viselkedő HP héjak teherbírása a b méret csökkenésével egyre nagyobb, míg a „héjszerűen” viselkedő héjaké egyre kisebb lesz.

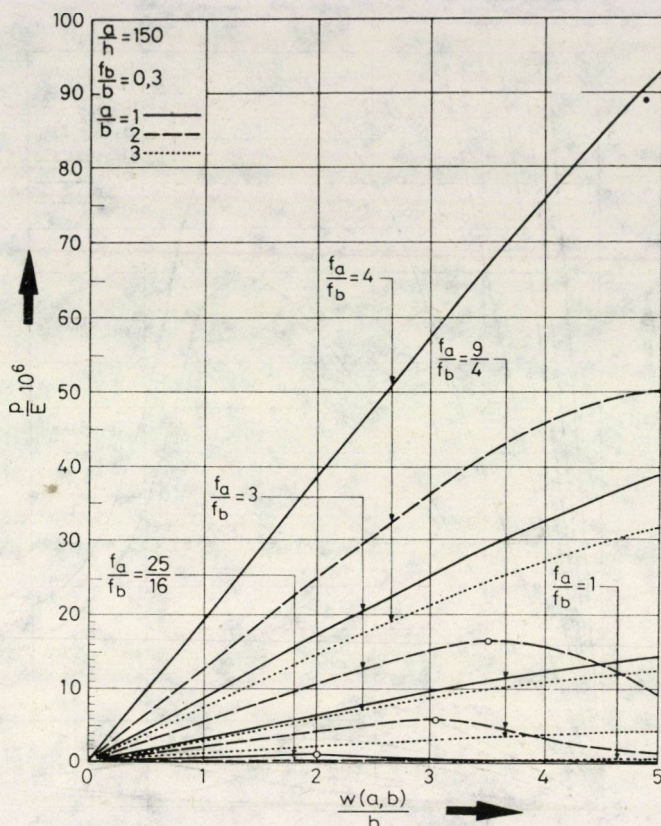
A görbék jellege és a teherbírás mértéke jól mutatja a peremívek oldalirányú hajlítási és a csavarási merevségének hiányát.

A megadott táblázatok és diagramok gyakorlati használatával kapcsolatban rámutatunk arra, hogy — rögzített α és γ esetében — ha

$$\beta_1 \varrho_1 = \beta_2 \varrho_2, \quad (3.33)$$

akkor

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^4. \quad (3.34)$$



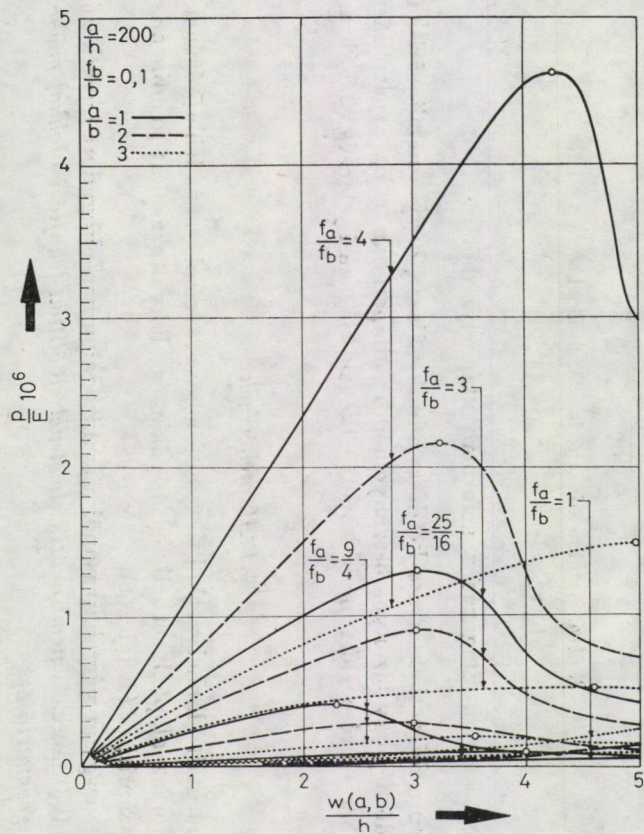
10. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

A deformálatlan alaphelyzetből ($w_0 = 0$) történő elágazási jelenségre vonatkozó számítási eredményeinket ([6]: p_{cr}^{lin}) összehasonlítva a most kapott \bar{p}_{cr} átpattanási kritikus teher értékekkel az alábbi megállapításokat tehetjük:

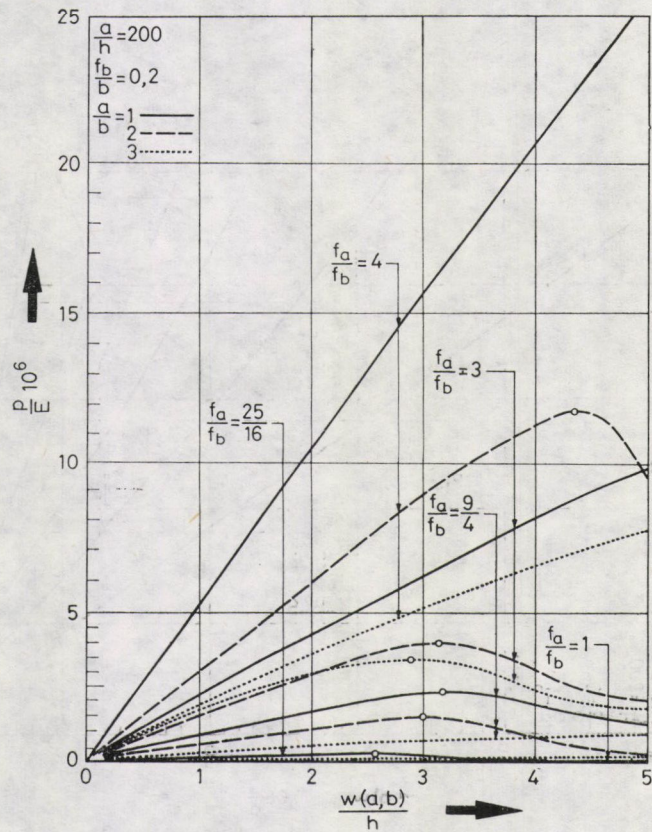
1. Azokat a héjakat, melyek terheiket az elsődrendű elmélet szerint is [5] döntő mértékben hajlítónyomatékokkal hordják ($f_a/f_b = 1 \div (1,5-2)$), nem vizsgálhatjuk lineáris elmélettel. A szemnormál héj ($f_a/f_b = 1$) nyílmagasságarányától kevésbé eltérő nyílmagasságarányú héjak nem mutatnak elágazási jelenséget. Az ezekhez a paraméterekhez tartozó héjak teherbírási diagramjai monoton emelkedőek; $f_a/f_b = 1$ -nél a görbéknek inflexiós pontjuk sincsen.

2. Kis f_b/f_b , f_a/f_b , valamint nagy a/b arányok esetében az átpattanási kritikus teher (\bar{p}_{cr}) kisebb, mint a lineáris kritikus teher (p_{cr}^{lin} ; $w_0 = 0$).

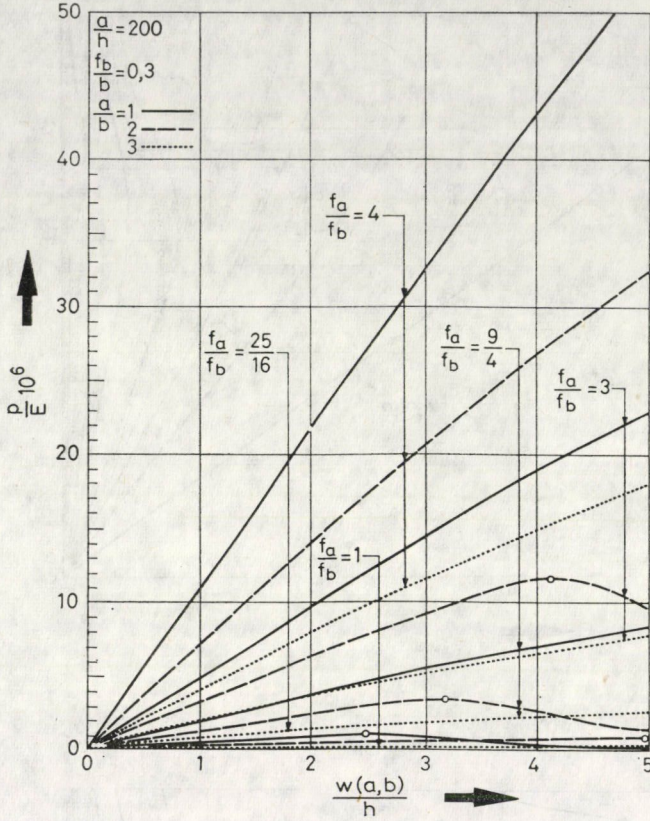
3. A vizsgált paraméter tartományok legnagyobb részében — elsősorban az $f_a/f_b = (1,5 \div 2) \div 4$, $f_b/f_b = 0,2 \div 0,3$, $f_a/f_b = 1 \div 2$ paraméterekkel jellemezhető tartományokban — a \bar{p}_{cr} terhek nagyobbak, illetve lényegesen nagyobbak, mint a p_{cr}^{lin} terhek (17. ábra). Ezekre a HP héjakra az elágazási kritikus terhek a mértékadóak.



11. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés



12. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés



13. ábra. Nemlineáris teherhordó viselkedés

4. Elágazás a deformált alaphelyzetből

Ebben a fejezetben arra a kérdésre adunk választ, hogy a nemlineárisan deformálódó héj egy bizonyos összenyomódott állapotában a \bar{p}_{cr} átpattanási kritikus teher elérése előtt nem következik-e be elágazási jelenség (2.c ábra: p_{cr}^{lin}, d).

4.1 Alapfeltevések

A deformált alaphelyzetből ($w_0 \neq 0$) bekövetkező elágazás lehetőségének vizsgálatakor az alaphelyzetbeli belső erőket és alakváltozásokat nemlineáris elmélettel számítjuk (3. fejezet).

Ezen vizsgálat végrehajtásánál a szakirodalomban elfogadott következő közelítést alkalmazva a *nemlineáris elmélettel előállított lehajlási alakkal módosítjuk a héj geometriáját*.

Ezen megváltozott alakú héj [6] alapján meghatározható lineáris kritikus terhét ($w_0 = 0$) tekintjük a héj közelítő — a deformált alaphelyzetből bekövetkező elágazási jelenségére vonatkozó — lineáris kritikus terhének. Ez a megoldási menet összhangban van [1], [2], [14] eljárásával.

BUSHNELL [1], DULÁCSKA [2] és WEDELLESBORG [14] a $p_{cr}(w_k)$ terhek (2. ábra: 1.2) meghatározásának igen nagy számítási munkáját oly módon csökkentették le, hogy a w_k kezdeti hullámossággal módosították a vizsgált héjak geometriáját, és ezeken a megváltoztatott alakú héjakon sajátérték feladat megoldásával állapították meg a felső kritikus terheket. A számítások azt mutatták, hogy a kritikus teher csökkenést a p_{cr}^{lin} teherhez ($w_0 = 0$) képest alapvetően a kezdeti hullámosság okozza. A pontos értékekkel való összehasonlítás alapján kiderült, hogy a geometriai nemlinearitás a tehercsökkenésnek csak kisebb mértékét okozza.

Az általunk tárgyalt jelenségnél geometriai nemlinearitás csak az alaphelyzetet jellemzi, ezért ha ezt közelítően figyelembe vesszük, akkor a fenti gondolatmenet szerint megfelelő közelítő értékeket kapunk.

4.2 Alapegyenletek

A w_0 mértékben deformálódott héj potenciális energiájának második variációja a középfelületi erők U_{m0} , a hajlítási erők U_{b0} , valamint a külső terhelés V_0 potenciális energiája második variációjának összegeként írható fel:

$$\delta^2 U_{m0} = \frac{1}{Eh} \int_0^{2a} \int_0^{2b} [\bar{F}'''' - 2\mu \bar{F}'' \bar{F}'' + \bar{F}'''' + 2(1 + \mu) \bar{F}'''] + \quad (4.1)$$

$$+ Eh (F_0'' \bar{w}^2 - 2 F_0' \bar{w}' \bar{w}' + F_0 \bar{w}''^2) dx dy,$$

$$\delta^2 U_{b0} = K \int_0^{2a} \int_0^{2b} [\bar{w}'''' + 2\mu \bar{w}'' \bar{w}'' + \bar{w}'''' + 2(1 - \mu) \bar{w}'''] dx dy, \quad (4.2)$$

$$\delta^2 V_0 = 0, \quad (4.3)$$

$$\delta^2 U_0 = \int_0^{2a} \int_0^{2b} u_0 dx dy = \delta^2 U_{m0} + \delta^2 U_{b0}, \quad (4.4)$$

$$\delta^2 \Pi_0 = \int_0^{2a} \int_0^{2b} \pi_0 dx dy + \delta^2 U_0 = \delta^2 V_0. \quad (4.5)$$

Itt u_0 , ill. π_0 a belső, ill. a teljes potenciális energia második variációjának fajlagos értéke.

A fenti egyenletekben $\bar{F} = \bar{F}(\bar{w})$. A fajlagos nyúlások, ill. szögtorzulások kifejezéseiben szerepelnek a $w_0 \bar{w}''$, $w_0 \bar{w}'$, $w_0 \bar{w}' + w_0 \bar{w}''$ tagok is.

Az indifferens egyensúlyi helyzetben a Π_0 potenciális energiának kell legyen legalább egy olyan különleges második variációja, melynek minden első variációja zérus. Így a $p_{cr,d}^{\text{lin}}$ teher meghatározásához a

$$\delta(\delta^2 \Pi_0) = 0 \quad (4.6)$$

variációs feladatot kell megoldani. A $\delta^2 \Pi_0$ funkcionált stacionárius értékké tevő w extrémális függvényt az alábbi Euler—Lagrange-típusú differenciálegyenlet megoldása szolgáltatja:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}} - \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}'} \right)' - \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}''} \right)'' + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}'''} \right)''' + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}^{(4)}} \right)^{(4)} + \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial \bar{w}^{(5)}} \right)^{(5)} = 0. \quad (4.7)$$

Elvégezve a (4.7) egyenlet által kijelölt műveleteket a lapos héjak deformált alaphelyzetből ($w_0 \neq 0$) történő elágazási jelenségének egyensúlyi egyenlete adódik [3], [15]:

$$K \Delta \Delta \bar{w} - L_p(\bar{F}, w_0 + z) - L_p(F_0, \bar{w}) = 0. \quad (4.8)$$

Írjuk fel a középfelületi erők potenciális energiájának második variációját

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{m0} = & \int_0^{2a} \int_0^{2b} \left\{ 2 [\bar{F}^{(1)}(\bar{v}' - wz'' + \bar{w}_0' \bar{w}') - \bar{F}^{(1)}(\bar{u}' + \bar{v}' + \right. \\ & + w_0' \bar{w}' + w_0' \bar{w}') + \bar{F}^{(2)}(\bar{u}'' - \bar{w}z''' + w_0' \bar{w}'')] - \\ & - \frac{1}{Eh} [\bar{F}^{(1)2} - 2\mu \bar{F}^{(1)} \bar{F}^{(2)} + \bar{F}^{(2)2} + 2(1 + \mu) \bar{F}^{(1)2}] + \\ & \left. + [F_0^{(1)} \bar{w}^2 - 2F_0^{(1)} \bar{w} \bar{w}' + F_0^{(2)} \bar{w}^2] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (4.9)$$

alakban. Ennek segítségével a kiegészítő potenciális energia stacionárius értékűségének tétele alapján — a $\delta^2 U_0$ funkcionál variációképzését \bar{F} szerint végrehajtva és a

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{F}^{(1)}} \right)'' + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{F}^{(2)}} \right)' + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \bar{F}^{(3)}} \right) = 0 \quad (4.10)$$

alakú Euler—Lagrange-féle differenciálegyenlet által kijelölt műveleteket elvégezve, az alábbi egyenlet adódik:

$$\Delta \Delta \bar{F} + D(1 - \mu^2) [L_p(\bar{w}, z) + L_p(\bar{w}, w_0)] = 0. \quad (4.11)$$

A (4.11) egyenlet a lapos héjak deformált alaphelyzetből történő elágazási jelenségének ($w_0 \neq 0$) kompatibilitási egyenlete [3], [15].

4.3. A lehajlási- és a feszültségfüggvények

A héj alaphelyzetbeli w_0 lehajlása és az elágazásnál kialakuló $\bar{w} \equiv \delta w_0$ horpadási függvénynek eleget kell tennie a feladat alábbi geometriai és statikai peremfeltételeinek:

$$w = w_0 + \bar{w}, \quad (4.12)$$

$$w = 0, \quad w' = 0, \quad w'' = 0, \quad w''' = 0. \quad (4.13a-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array} \right\} \begin{array}{l} y=0 \\ y=2b \end{array}$$

Az oldalnyomásmentesség feltétele így írható fel:

$$F = F_0 + \bar{F}, \quad (4.14)$$

$$F'' = 0, \quad F''' = 0. \quad (4.15a-d)$$

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \\ y=2b \end{array} \right\} \begin{array}{l} x=0 \\ x=2a \end{array}$$

A következő lineárisan független tagokból álló függvénytörök kielégítik a feladat összes geometriai és statikai peremfeltételeit:

$$w_0 = \sum \sum w_{rs} \sin \frac{r\pi}{2a} x \sin \frac{s\pi}{2b} y, \quad (4.16a-b)$$

$$F_0 = \sum \sum F_{rs} \sin \frac{r\pi}{2a} x \sin \frac{s\pi}{2b} y,$$

$$r = 1, 3, 5, \dots, R$$

$$s = 1, 3, 5, \dots, S$$

$$\bar{w} = \sum \sum \bar{w}_{ij} \sin \frac{i\pi}{2a} x \sin \frac{j\pi}{2b} y, \quad (4.17a-b)$$

$$\bar{F} = \sum \sum \bar{F}_{ij} \sin \frac{i\pi}{2a} x \sin \frac{j\pi}{2b} y.$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, I$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, J$$

A fenti függvényeket tehát a feladat Galerkin-módszerrel történő megoldásakor az alaphelyzet és a szomszédhelyzet alakváltozási- és feszültségfüggvényeinek tekinthetjük.

Az ismertett pontoss megoldás helyett — a 4.1. fejezetben leírt gondolatmenet alapján — a 3.—13. ábrák nemlineáris teherbírási diagramjai és a [6]-ban előállított lineáris kritikus terhek ($w_0 = 0$) segítségével határozzuk meg a közelítő $p_{cr,d}^{\text{lin}}$ terheket.

4.4 Közelítő eljárás

Ha a [6]-ban előállított lineáris kritikus terhek értékének elérésekor a 3.—13. ábrák szerint a HP héj középpontja ($x = a, y = b$) $w(a, b)$ mértékben lehajlott, akkor a 17 a.—b. ábrákon definiált $\tilde{w}_{oá}$ átlagelhajlással módosított geometriájú héj paraméterei az alábbiak lesznek:

$$\alpha^* = \frac{f_a^*}{f_b^*} = \frac{f_a - \tilde{w}_{oá}}{f_b + \tilde{w}_{oá}} = \frac{\alpha - \frac{\tilde{w}_{oá}}{h} \cdot \frac{\gamma}{\beta \varrho}}{1 + \frac{\tilde{w}_{oá}}{h} \cdot \frac{\gamma}{\beta \varrho}}, \quad (4.18 \text{ a—d})$$

$$\beta^* = \beta = \frac{a}{h},$$

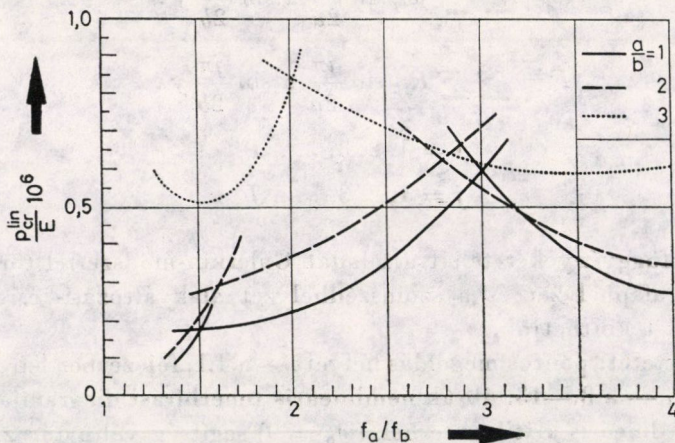
$$\gamma^* = \gamma = \frac{a}{b},$$

$$\varrho^* = \frac{f_b^*}{b} = \frac{f_b + \tilde{w}_{oá}}{b} = \varrho + \frac{\tilde{w}_{oá}}{h} \cdot \frac{\gamma}{\beta}.$$

A 17. ábrán mutatjuk be a közelítő eljárásunk segítségével kapott $p_{cr,d}^{\text{lin}}$ teher diagramokat. A (4.18 a—d) paramétereknek megfelelő lineáris kritikus terheket a 18.—20. ábrák csipkegörbéi segítségével határoztuk meg.

Ezen csipkegörbék alakja mutatja, hogy a $p_{cr,d}^{\text{lin}}$ terhek lehetnek kisebbek is, nagyobbak is mint a p_{cr}^{lin} terhek.

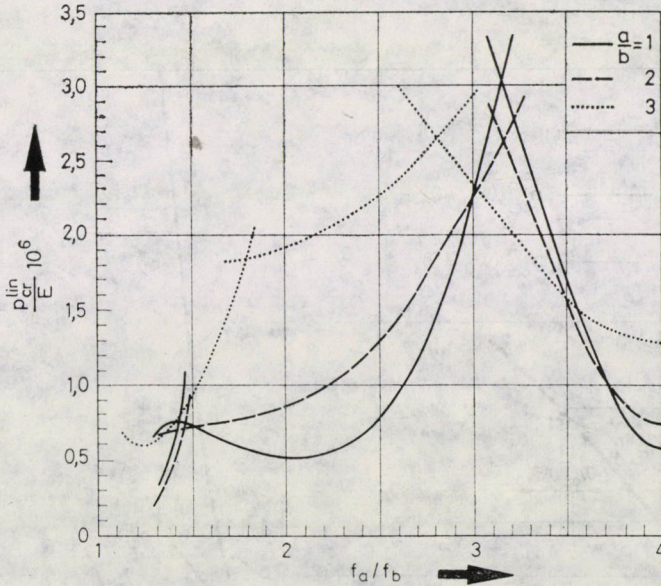
Az $\alpha \approx 2 \div 3$ nyílmagasságarány — tartományban az α mennyiségek α^* -ra való csökkenése a lineáris kritikus terhek csökkenéséhez vezet. Ezzel



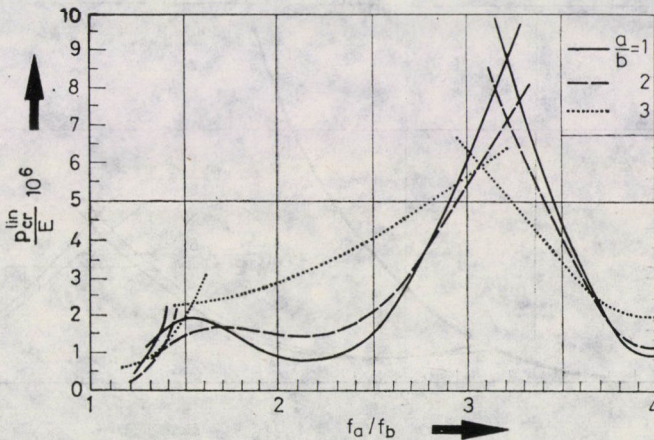
14. ábra. A HP héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 159, f_b/b = 0,1$)

szemben kb. az $\alpha \approx 3 \div 4$ tartományban az α paraméterek lecsökkenése (α^*) teherbírás — növekedést okoz.

Ennek következtében a tényleges $p_{cr,d}^{lin}$ mennyiségek a mindig növelő hatású $\Delta \rho = \rho - \rho^*$ és az esetenként csökkentő, esetenként növelő hatású $\Delta \alpha = \alpha - \alpha^*$ paraméter-változások együttes hatásának eredményeként állapítandók meg.



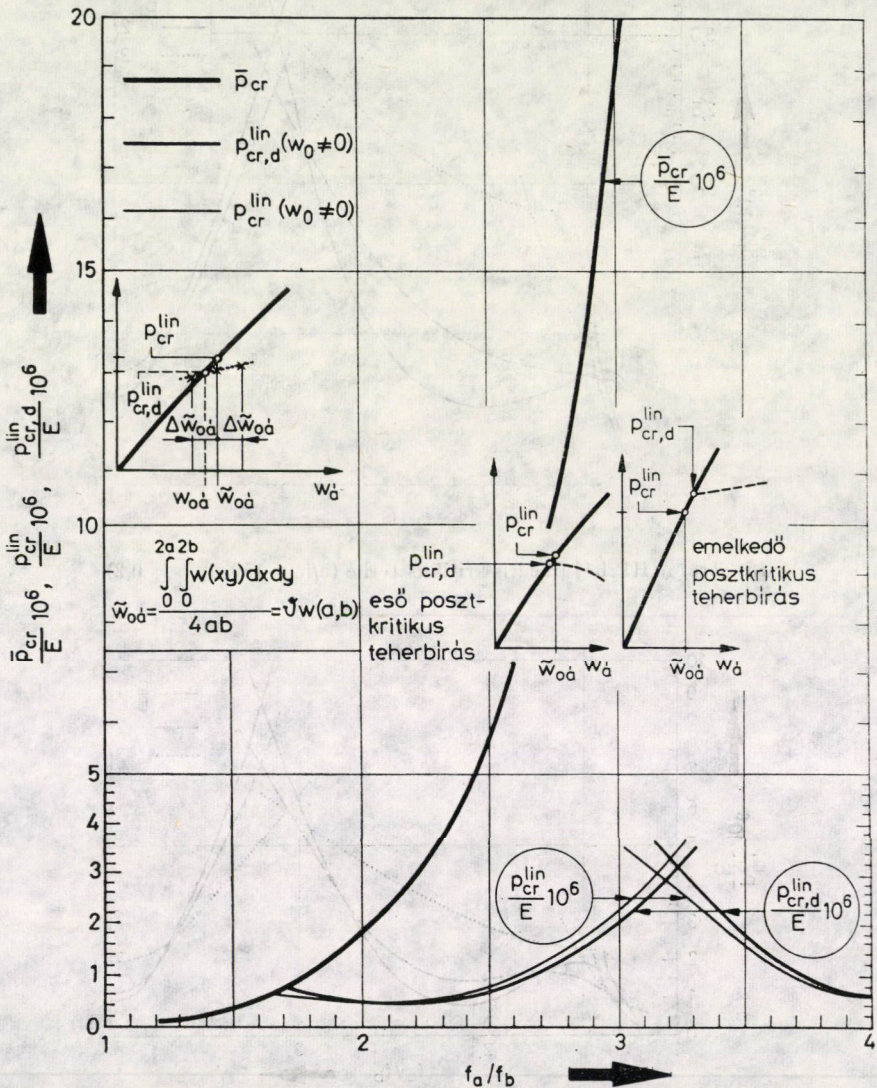
15. ábra. A HP héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 150$, $f_b/b = 0,2$)



16. ábra. A HP héj lineáris kritikus terhe ($a/h = 150$, $f_d/b = 0,3$)

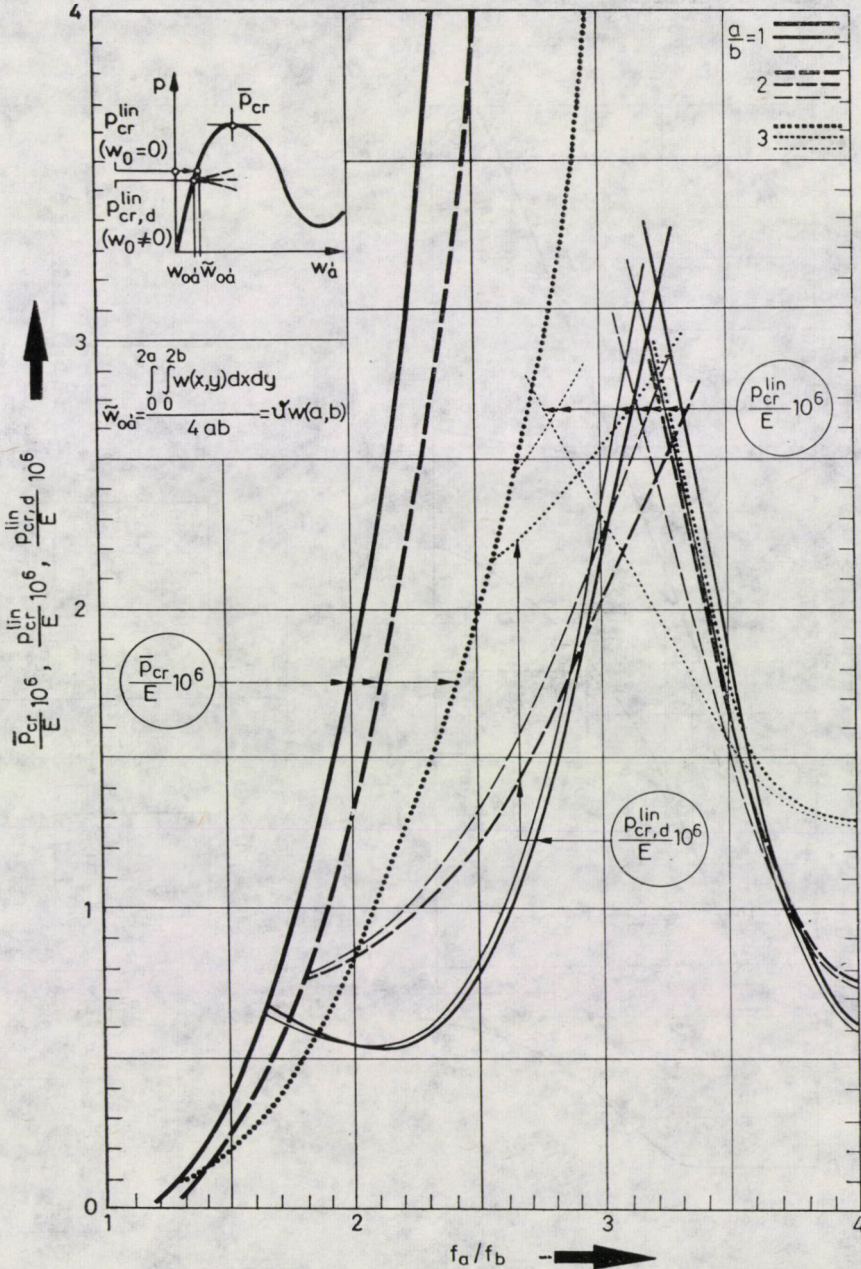
A $p_{cr,d}^{lin}$ értékeket grafikususan határoztuk meg: a \tilde{w}_{0a} helyek kis környezetében levő $\tilde{w}_{0a} \pm \Delta\tilde{w}_{0a}$ helyekhez (17a. ábra) meghatározott lineáris kritikus terhek görbéjét metszésbe hoztuk a megfelelő nemlineáris teherbírási görbével.

A 17b. ábra azt mutatja, hogy a terhelés előidézte deformációk (w_0) hatása — a vizsgált arányok esetén — az $f_a/f_b \sim 2.5 \div 3.5$ tartományban a legnagyobb (a csipkegörbéket az átpattanási kritikus terhek (\bar{p}_{cr}) vonaláig rajzoltuk meg). A $p_{cr,d}^{lin}$ terhek százalékos eltérése a p_{cr}^{lin} terhektől: $a/b =$



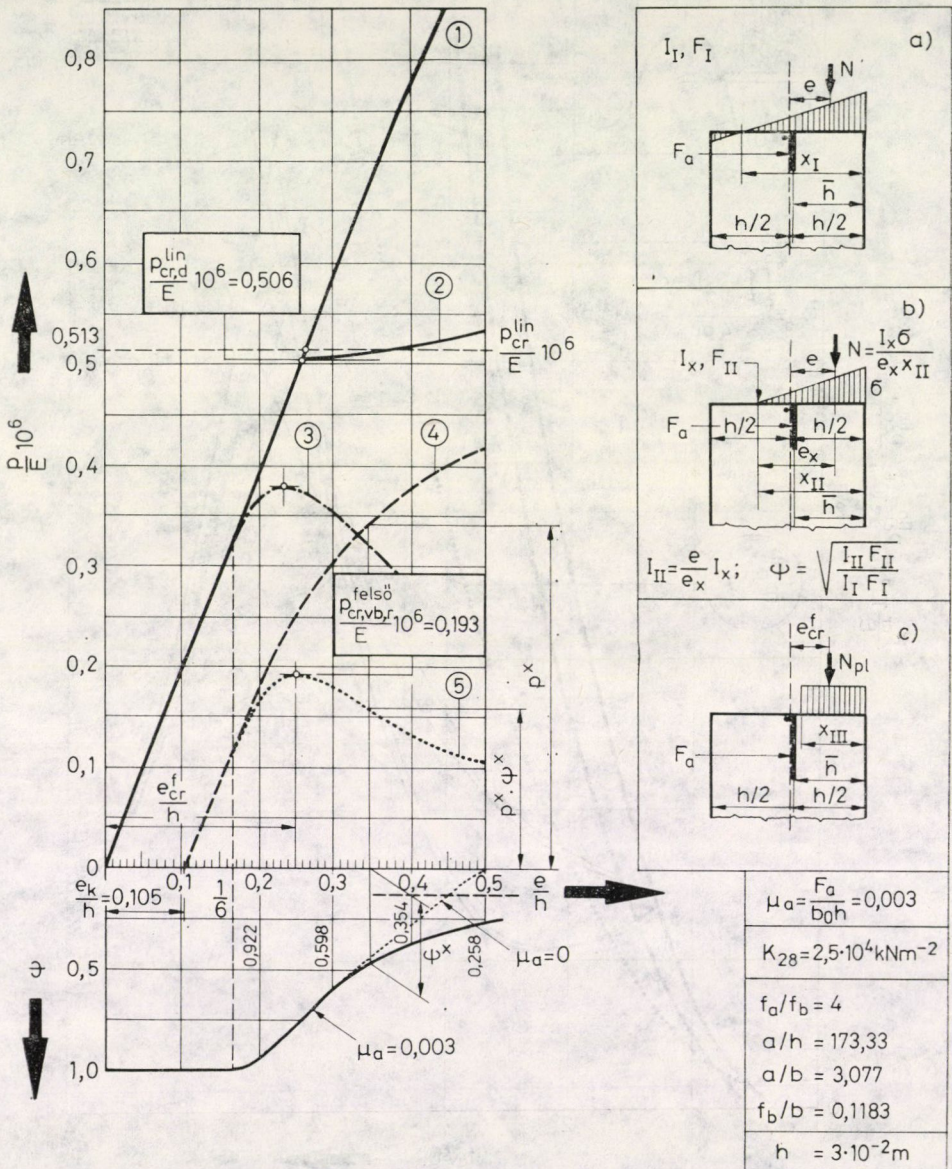
17a. ábra. \bar{p}_{cr} , p_{cr}^{lin} , $p_{cr,d}^{lin}$ kritikus terhek összehasonlítása ($a/h = 150$, $f_b/b = 0,2$, $a/b = 1$)

= 1 esetén $\Delta \sim +10\% \div -8\%$, $a/b = 2$ -nél $\Delta \sim +13\% \div -9\%$, $a/b = 3$ -nál $\Delta \sim +39 \div -11\%$. A változások ellenére a *maximális* lineáris kritikus terhek továbbra is az $f_a/f_b = 3$ arány közelében helyezkednek el.



17b. ábra. $\bar{p}_{cr}, p_{cr}^{lin}, p_{cr,d}^{lin}$ kritikus terhek összehasonlítása ($a/h = 150, f_b/b = 0,2$)

A gyakorlatban sokszor alkalmazott normálhég ($f_a/f_b = 4$) és háromnegyed normálhég ($f_a/f_b = 9/4$) teherbírását csak kevésbé befolyásolják az alap helyzetbeli deformációk (w_0). Ez a hatás az $f_a/f_b \sim 3$ paraméter közelében lévő héjakra a *legveszélyesebb*.



18. ábra. Megépült hég stabilitási vizsgálata

Számításaink alapján azt is megállapíthatjuk, hogy a kezdeti hullámosság is az említett $f_a/f_b \sim 2,5 \div 3,5$ tartományban csökkenteni legnagyobb mértékben a teherbírást.

Ez a módszer egyúttal megadja az *elágazás utáni* kis alakváltozásokhoz tartozó teherbírási diagramok jellegét is. *A kritikuson túli teherbírás* esetenként *emelkedő* (kb. $f_a/f_b = 3 \div 4$), esetenként *csökkenő* (kb. $f_a/f_b = 2 \div 3$) jellegű. A 17b. ábra azt is megmutatja, hogy az átpattanási kritikus terhek (\bar{p}_{cr}) kb. az $f_a/f_b = 2,5 \div 4$ tartományban nagyobbak, ill. sokkal nagyobbak mint az elágazási kritikus terhek.

Ebben a fejezetben az átpattanási kritikus teher elérése *előtti* elágazás ($w_0 \neq 0$) lehetőségét vizsgáltuk meg.

Azon héjakat, melyek átpattanás következtében mennek tönkre, az *átpattanás utáni* viselkedésüket tekintve két csoportba oszthatjuk:

1. A lehajlási alak végig szimmetrikus;
2. Az átpattanás utáni labilis ágon (antimetrikus) elágazás következik be. Ezt az esetet nem vizsgáltuk, mert a szerkezetet a \bar{p}_{cr} teher elérésekor mérnöki szempontból tönkrementnek tekintjük.

5. Gyakorlati alkalmazás

Alkalmazzuk az előzőekben ismertetett módszereket

K. HRUBAN a Die Biegetheorie der Translationsflächen und ihre Anwendung im Hallenbau (*Acta Techn. Hung.* 7/1953), 425—464. o.) c. cikkében említett megépült nyereg alakú, oldalnyomásmentes HP héjra. A héj geometriai, vasalási és szilárdsági adatait a 18. ábrán tüntettük fel (K₂₈ a kockaszilárdság). A héj mértékadó terhe (3 cm vastag héjlemez, rétegek, hőteher):

$$P_M = 2,25 \text{ kNm}^{-2}$$

Mindenekelőtt a 3.3-ban leírt módon előállítottuk a héj *nemlineiárs* $p-w$ [a, b] diagramját. Ezt a görbét ezután transzformáltuk úgy, hogy $w[a, b]$ helyett a $\tilde{w}_d = \partial w[a, b]$ átlagos lehajlás függvényében raktuk fel a p ordinátákat. A középfelülettől mért „ e/h ” relatív külpontoság függvényében kapott görbe a 18. ábrán látható [⊙] jelű görbe]. Minthogy a vizsgált külpontosági tartományban a p ordináták sokkal kisebbek mint a \bar{p}_{cr} átpattanási kritikus terhek, a diagram e kezdeti szakasza közel áll az egyeneshez.

Ezután a [6]-ban leírtak szerint meghatároztuk a $p_{cr}^{\text{lin}} = 0,513 \times E \times 10^{-6}$ teher paraméter értéket [$w_0 = 0$, elágazási kritikus teher]. Ezt követően a 4.4 szerint vettük figyelembe a középfelület lehajlását ($w_0 \neq 0$): $p_{cr,d}^{\text{lin}} = 0,509 \times E \times 10^{-6}$. A csökkenés mértéke csekély. Az elágazás utáni teherbírás enyhén emelkedő. A héj túlnyomórészt nyúlásmentesen horpad, ezért hasonlít a ⊙ jelű ág a síklemezek megfelelő posztkritikus jelleggörbéjéhez.

A *homogén, izotróp, ideálisan rugalmas anyagú* héj lineáris kritikus terhére vonatkozó biztonsági:

$$k_b = \frac{p_{cr,d}^{\text{lin}}}{P_M} = \frac{0,506 \times E \times 10^{-6}}{2,25} = 0,225 E \times 10^{-6}.$$

A $K_{28} = 2,5 \times 10^4$ kNm⁻² kockaszilárdságnak

$$E_{b0} = 5,5 \times 10^7 \cdot \frac{K_{28}}{K_{28} + 20000} = 3,05 \times 10^7 \text{ kNm}^{-2}$$

kezdeti rugalmassági modulus felel meg.

A teljes *lassú alakváltozás* lejátszódása után az alakváltozási modulus:

$$E_{bt} = 1,33 \times 10^7 \text{ kNm}^{-2}.$$

Az $E = E_{bt}$ helyettesítéssel a biztonság

$$k_b = 3.$$

A valóságos helyzet ennél lényegesen kedvezőtlenebb, hiszen figyelembe kell vennünk a

a) vasbeton keresztmetszet berepedését (ψ),

b) a véletlen jellegű kezdeti külpontosságot (e_k),

c) a beton anyagának plasztikus tulajdonságait (ζ_p).

A fenti szempontoknak megfelelő teherbírás-csökkenés mértékét DULÁCSKA [8] eljárásával állapítjuk meg.

ad a.) *Repedezettség*

Meg kell határoznunk a külpontosan nyomott, lineárisan rugalmas anyagú vas beton keresztmetszet I. és II. feszültségi állapotban érvényes hajlítási (EI_I , EI_{II} . és nyúlási (EF_I , EF_{II}) merevségeit az „ e/h ” relatív külpontosság függvényében. Az ide vonatkozó részletek a 18.a-b ábrákon láthatók. A *repedezettség* miatt-csökkenő tényező [8]:

$$\psi = \sqrt{\frac{I_{II} F_{II}}{I_I F_I}}.$$

A ψ -ábrán pontozott vonallal ($\mu_a = 0$) a vasatlan keresztmetszet horpadási merevségének a csökkenését tüntettük fel.

A ψ -diagram ismeretében a megfelelő p/E 10⁶ teherparaméter értékek szorzásával kaptuk meg az ①–② jelű diagramból a ③ jelűt.

ad b) *Kezdeti külpontosság*

A véletlen jellegű kezdeti külpontosság mértékét [8] nyomán az átlagos görbületi sugárból ($R_{\text{átl}}$)

$$e_k = \frac{R_{\text{átl}}}{3500},$$

$$R_{\text{átl}} = \sqrt{R_x |R_y|},$$

$$R_x = 16,90 \text{ m}, |R_y| = 7,14 \text{ m}, R_{\text{átl}} = 10,98 \text{ m},$$

$$e_k = 3,14 \times 10^{-3} \text{ m}$$

módon kaphatjuk meg. Minthogy az e_k kezdeti külpontosságú héj p-e (ill. p-w) diagramját nem ismerjük, ezt úgy közelítjük meg, hogy a külpontosan nyomott rudak

$$p = p_{\text{cr}}^{\text{lin}} \cdot \left(1 - \frac{e_k}{e}\right)$$

görbét az ① – ② diagramokhoz illesztjük. Esetünkben ez jó közelítés, hiszen a ② jelű görbeág — a vizsgált kis tartományban — közel vízszintes.

Az így kapott ④ jelű görbe a tényleges pontos görbe alatt fut, hiszen a héj az elágazás után emelkedő teherbírású.

Természetesen a ④ jelű görbét is torzítanunk kell a ψ redukciós tényezővel (1.

$p^* \rightarrow \psi^* \cdot p^*$). Az ílymódon kapott ⑤ jelű diagram az *ideálisan rugalmas* anyagú *berepedt* vasbeton héj $p-e/h$ teherbírási diagramja. Ennek tetőpontja a

$$P_{cr, vb, r}^{felső} = 0,193 \times E \times 10^{-6}$$

felső kritikus teher.

ad c) *Plasztikus anyag*

A plasztikus redukiót [8] a

$$\xi_p = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{P_{cr, vb, r}^{felső}}{P_{pl}}\right)^2}}$$

szorzótényezővel veszi figyelembe. Itt p_{pl} az a teher, mely *horpadás nélkül* plasztikus szilárdsági törést idéz elő a keresztmetszetben (az N_{pl} plasztikus határerő a 36c. ábrán) ha a külpontosság e_{cr}^f (ld. az ⑤ jelű görbét). Esetünkben $N_{pl} = 176 \text{ kNm}^{-2}$, $p_{pl} = 35 \text{ kNm}^{-2}$.

Állandó teher esetén $E = E_M = 1,33 \times 10^7 \text{ kNm}^{-2}$, tehát

$$P_{cr, vb, r}^{felső} = 0,193 \times 1,33 \times 10^7 \times 10^{-6} = 2,57 \text{ kNm}^{-2}.$$

A hőteher esetleges jellegű, lassú alakváltozást csak kis mértékben okoz, így a totális teher ($p_M = 2,25 \text{ kNm}^{-2}$) esetében az

$$E_b = 1,64 \times 10^7 \text{ kNm}^{-2}$$

alakváltozási modulussal számolunk. Ekkor

$$P_{cr, vb, r}^{felső} = 0,193 \times 1,60 \times 10^7 \times 10^{-6} = 3,17 \text{ kNm}^{-2}.$$

A felső kritikus értékeket a plasztikus törőteherrel (p_{pl}) összehasonlítva látható, hogy a héj a plasztikus törőteher 7,3–8,8%-ánál horpad.

A redukiós tényező a tárgyalt két esetben csak jelentéktelen mértékben tér el egymástól:

$$\xi_p = 0,997, \text{ ill. } \xi_p^I = 0,996.$$

Végeredményben állandó teher esetén a *berepedt*, külpontosan nyomott vasbeton héj *plasztikus* kritikus terhe:

$$P_{cr, pl}^I = P_{cr, vb, r}^{felső} \cdot \xi_p^I = 2,56 \text{ Nm}^{-2}.$$

Totális teher esetén:

$$P_{cr, pl}^{II} = P_{cr, vb, r}^{felső} \cdot \xi_p^{II} = 3,15 \text{ Nm}^{-2}.$$

A $p_M = 2,25 \text{ kNm}^{-2}$ teherből $p_d = 1,25 \text{ kNm}^{-2}$ állandó jellegű, $p_e = 1,0 \text{ kNm}^{-2}$ esetleges jellegű, nem tartós teher:

$$k_b^I = \frac{P_{cr, pl}^I}{p_d} = 2,05,$$

$$k_b^{II} = \frac{P_{cr, pl}^{II}}{p_M} = 1,40.$$

Tehát a héj $p_{cr, d}^{lin}$ kritikus terhét a repedések (ψ) a véletlen jellegű kezdeti külpontosságok (e_k) és (kis mértékben) az anyag plasztikus tulajdonságai (ξ_p) igen jelentősen lecsökkentették. A szerkezet a terhek viselésére alkalmas.

Megjegyezzük, hogy az „e” külpontosság növekedésével az ⑤ jelű görbe emelkedővé válik, mert a ④ jelű görbe monoton növekvő, a ψ pedig határértékhez (tiszta hajlítás; szaggatott vonal) tart.

6. Összefoglalás

Jelen tanulmányban a nyereg alakú, oldalnyomásmentes HP héjak egyenletesen megoszló terhelés alatti nagy alakváltozásos egyensúlyi útjának jellegzetességeivel foglalkoztunk.

A geometriai nemlinearitást figyelembe vevő egyensúlyi és kompatibilitási egyenletek alapján a Galerkin-módszerrel előállítottuk a héjak teherlehajlás diagramjait.

Megállapítottuk, hogy — a vizsgált héjak bizonyos arányainál — a teherintenzitás egy meghatározott értékénél *átpattanás* következik be.

Csak a szeminormál héj és az ettől kevéssé eltérő nyílmagasságarányú héjak teherbírasi diagramjai monoton emelkedő jellegűek. Ezen héjak teherbírása igen kismértékű, ezért csak a lemezekre jellemző geometriai arányok esetén lehetséges az alkalmazásuk.

Az átptattanási kritikus terhek a vizsgált nyílmagasságarány-tartomány legnagyobb részében nagyobbak, ill. sokkal nagyobbak mint a deformálatlan alaphelyzetből ($w_0 = 0$) bekövetkező elágazási jelenség lineáris kritikus terhei.

Megvizsgáltuk a nemlineárisan *deformálódott alaphelyzetből* ($w_0 \neq 0$) bekövetkező elágazási jelenséget is. Az ily módon kapott eredmények azt mutatják, hogy az alaphelyzetbeli deformációk hatása az $f_a/f_b \sim 3$ paraméter közelemben lévő héjakra a legveszélyesebb. A gyakorlatban sokszor alkalmazott normálhéj és háromnegyed normális típusú héj teherbírását csak kevéssé befolyásolja ez a hatás.

Eredményeinkből arra is következtetni lehetett, hogy a kezdeti hullámságra az $f_a/f_b \sim 2,5 \div 3,5$ paraméterű héjak valószínűleg a legérzékenyebbek. A vizsgált héjak HP egyensúlyi útjainak a következő típusai vannak:

1. A terhük döntő részét hajlítómerevségük révén hordó héjak esetében *instabilitási probléma nem jelentkezik*. A p — w diagramoknak nincs stacionárius pontjuk. A szeminormál héj teherbírasi diagramjainak még inflexiós pontjuk sincs.

2. Bizonyos geometriai arányoknál a héjak *átptattanás* miatt veszítik el stabilitásukat. Ezen a típuson belül két eset lehetséges. A különbség a két eset között az átptattanás utáni viselkedésükben jelentkezik:

2.1 Az egyik esetben a lehajlási alak végig szimmetrikus;

2.2 A másik esetben az átptattanás utáni labilis ágon elágazás következik be. Ezt a lehetőséget nem vizsgáltuk, mert a szerkezetet a P_{cr} teher elérésekor tönkrementnek tekintjük.

3. A vizsgált szerkezetek legnagyobb részére (elsősorban az $f_a/f_b = (1,5 \div 2) \div 4$, $f_a/f_b = 0,2 \div 0,3$ $\varepsilon/b = 1 \div 2$ geometriai arányú héjak)

az jellemző, hogy egy bizonyos $P_{cr,d}^{lin} < P_{cr}$ teher nagyságnál a 2.c ábrán folytonos vonallal behúzott egyensúlyi úton kívül létezik egy második egyensúlyi út is, mely *elágazási* jelenséggel kezdődik (2.c ábra: szaggatott vonal). Ezen deformált helyzetből bekövetkező *elágazás után* a teherbírás esetenként csökkenő, esetenként emelkedő.

IRODALOM

1. BUSHNELL, D.: Symmetric and Nonsymmetric Buckling of Finitely Deformed Eccentrically Strifened Shells of Revolution. *AIAA Journ.* 5 (1967) 1455—1462
2. DULÁCSKA, E.: A héjak hullámossága kritikus terhet csökkentő vizsgálata lineáris elmélettel. *Építés- és Építészettudomány* 8 (1976), 279—283
3. DULÁCSKA, E.: Vibration and Stability of Anisotropic Shallow Shells. *Acta Techn. Hung.* 65 (1969), 225—260
4. FLÜGGE, W.—GEYLING, F. T.: A General Theory of Deformations of Membrane Shells. *International Association for Bridge and Structural Engineering* 17 (1957) 23—46
5. JANKÓ, L.: Egyenletesen megoszló erőkkel terhelt, lapos, oldalnyomásmentes, nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjak membrán- és hajlítási elméletének összehasonlítása. *Műszaki Tudomány* 57 (1979), 1.—2., 57—89.
6. JANKÓ, L.: Oldalnyomásmentes, lapos, egyenletesen megoszló erőkkel terhelt, nyereg alakú hiperbolikus paraboloid héjak stabilitása. *Műszaki Tudomány* 57 (1979), 1.—2., 227—259.
7. KOLLÁR, L.: Héjak nyúlásmentes alakváltozásai. *Építés- és Építészettudomány* 3 (1971), 19—38
8. KOLLÁR, L.—DULÁCSKA, E.: Schalenbeulung. Werner, Düsseldorf — Akadémiai Kiadó, Budapest 1974
9. LEET, K. M.: Study of Stability in the Hyperbolic Paraboloid. *Journ. Eng. Mech. Divis. Proc. ASCE* 92 (1966) No. 1., 121—142
10. MARGUERRE, K.: Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme Jahrbuch 1938 der deutschen Luftfahrtforschung, 433—443
11. PFLÜGER, A.: Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg—New York 1964
12. REISSNER, E.: On Some Aspects of the Theory of Thin Elastic Shells. Boston Society of Civil Engineers 1955, 100—133
13. TIMOSHENKO, S. P.—GERE, J. M.: Theory of Elastic Stability. McGraw—Hill Book Company, New York—Toronto—London 1961
14. WEDELLSBORG, B. W.: Critical Buckling Load on Large Spherical Shells. *Journ. Struct. Divis. Proc. ASCE*, 88 (1962), Stl, 111—121
15. WEINITSCHKE, H. J.: On Asymmetric Buckling of Shallow Spherical Shells. *Journal of Mathematics and Physics* 44 (1965) 141—163
16. WEINITSCHKE, H. J.: On the Stability Problem for Shallow Spherical Shells. *Journal of Mathematics and Physics* 38 (1960) No. 4. January, 209—301
17. WEINITSCHKE, H. J.: On the Nonlinear Theory of Shallow Spherical Shells. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* 6 (1958), No. 3. September, 209—232
18. WOLMIR, A. S.: Biegsame Platten und Schalen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1962

A Nonlinear Analysis of the Equilibrium Path of Shallow Shaddle-shaped Hypar Shells, Supported by Shear Diaphragms, under Uniform Load, with Special Respect to Bifurcation and Snapping. This paper is the third and the final part of a series. In the *first* part the problems of the existence and uniqueness of the membrane solution of the hypar shells and the kinematic uncertainty of the surface is treated. In the *second* part, the phenomenon of branching out from the basic undeformed state is dealt with. In the present *third* part of the paper the author tries to give a response to the question whether the failure can take place without branching, caused by snap-through (i.e., of what character are the load-deflection diagrams of large deformation). It is also investigated, whether the load bearing capacity beyond the branching, starting from the deformed basic state, is increasing or decreasing.

Untersuchung der Gleichgewichtszustände sattelförmiger, flacher, normalkraftfrei geladener HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung, mit besonderer Berücksichtigung des Durchschlagens und der Abzweigung.— Diese Abhandlung bildet den letzten Teil einer dreiteiligen Artikel-Serie. Im ersten Teil der Serie waren die theoretischen Fragen der Existenz und der Eindeutigkeit der Membranlösung, sowie der kinematischen Unbestimmtheit von HP-Schalen behandelt worden. Auf Grund dessen wurde die Erscheinung der *Verzweigung* aus dem *unverformten* Grundzustand im zweiten Teil erörtert. In der vorliegenden Arbeit werden die *charakteristische Tragverhaltenskurven* der HP-Schalen bestimmt und es wird untersucht, ob das Stabilitätsversagen infolge *Durchschlagen* auftreten kann. Wir werden auch auf die näherungsweise Untersuchung der Verzweigung aus dem *verformten* Grundzustand eingehen. Dies bietet die Möglichkeit den wachsenden oder abnehmenden Charakter des *überkritischen* Tragverhaltens zu bestimmen.

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Terplán Zénó</i> : Száz éve született Galamb József	277
<i>Gábor László</i> : Hétköznapok és csodák	283
<i>Kovács György</i> : A talajnedvesség-szabályozás elméleti alapjai és azok gyakorlati alkalmazása	295
<i>Szabó János</i> : Építésiparosítás — Rendszerszemlélet	317
<i>Zablonszkij K. I.</i> : A méretezési teher meghatározása a hajtóműelemek konstrukciójának és gyártástechnológiájának figyelembe vételével	337
<i>Csonka Pál</i> : Vonórúd nélküli cikkelyes héj hajlításmentes peremívekkel és bordákkal ...	351
<i>Kozák Imre</i> : Észrevételek és kiegészítések a lineáris elasztostatika feszültségfüggvényekkel felírt variációs elveihez	361
<i>Dulácska Endre</i> : Az ívszerűen működő hiperbolikus paraboloid nyereghéj stabilitása ...	381
<i>Béda Gyula</i> : A diszkontinuitást hordozó mozgó felület szerepe a mechanikai vizsgálatokban	389
<i>Tompos Endre</i> : Fénymikroszkópos módszer a szénben levő pirit szemcse nagyság-eloszlásának meghatározására	395
<i>Ecsedi István</i> : Egy csavarási feladatról	403
<i>Csonka Pál</i> : Lapos héjak nyúlásmentes alakváltozásának néhány különleges esete	417
<i>Kozák Imre</i> : A lineáris elasztostatika feszültségekkel felírt mezőegyenleteiről és peremfeltételeiről	423
<i>Zalka Károly</i> : Megoszló normálerővel terhelt általános keresztmetszetű konzoltartó elcsavarodó kihajlása	447
<i>Jankó László</i> : Nyeregalakú, oldalnyomásmentes, lapos hiperbolikus paraboloidhéjak egyenletesen megoszló terhelés alatti egyensúlyi útjának nemlineáris vizsgálata ..	473

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Terplán, Z.</i> : Hundertjähriger Geburtstag von József Galamb	277
<i>Gábor, L.</i> : Alltag und Wunder	283
<i>Kovács, Gy.</i> : Theoretische Grundlagen der Grundwasserregulierung und deren praktische Anwendung	295
<i>Szabó, J.</i> : Bauindustrialisierung — Systemtheorie	317
<i>Zablonszkij, K. J.</i> : Ermittlung der gerechneten Belastung unter Berücksichtigung der Konstruktion und Fertigungstechnologie der Antriebsselemente	337
<i>Csonka, P.</i> : Segmentschale ohne Zugstangen mit biegungsfreien Randbogen und Rippen	351
<i>Kozák, I.</i> : Über die mit Spannungen aufgeschriebenen Feldgleichungen und Randbedingungen der linearen Elastostatik	361
<i>Dulácska, E.</i> : Stabilität einer als Bogen funktionierenden sattelförmigen hyperbolischen Paraboloidschale	381
<i>Béda, Gy.</i> : Die Funktion einer beweglichen, Diskontinuität tragenden Tragfläche in den mechanischen Untersuchungen	389
<i>Tompos, E.</i> : Lichtmikroskopische Methode zur Ermittlung der Korngrößenverteilung des in der Kohle befindlichen Pyrits	395
<i>Ecsedi, I.</i> : Über eine Torsionsaufgabe	403
<i>Csonka, P.</i> : Einige Spezialfälle der dehnungslosen Formänderung von flachen Schalen ..	417
<i>Kozák, I.</i> : Bemerkungen und Beiträge zu den Variationsprinzipien der linearen Elastostatik, aufgeschrieben mit Hilfe von Spannungsfunktionen	423
<i>Zalka, K.</i> : Drehknickung eines durch verteilte Normalkräfte belasteten Freitragers von allgemeinem Querschnitt	447
<i>Jankó, L.</i> : Untersuchung der Gleichgewichtszustände sattelförmiger, flacher, normalkraftfrei gelagerter HP-Schalen unter gleichmäßig verteilter Belastung, mit besonderer Berücksichtigung des Durchschlagens und der Abzweigung	473

CONTENT

<i>Terplán, Z.</i> : J. Galamb was born hunderd years ago	277
<i>Gábor, L.</i> : Weekdays and Wonders	283
<i>Kovács, Gy.</i> : Theoretical Bases for the Control of the Ground-Water and their Use in Practice	295
<i>Szabó, J.</i> : Building Industrialization-System Theory	317
<i>Zablonszkij, K. I.</i> : Determination of the Loading Calculated by Taking into Account the Construction and Manufacturing Technique of Gear Parts	337
<i>Csonka, P.</i> : Sectorial Shells with Unbent Edge Arches and Deviding Ribs Having no Tie Rods	351
<i>Kozák, I.</i> : Notes of the Field Equation with Stresses and on the Boundary Conditions in the Linearized Theory of Elastostatics	361
<i>Dulácska, E.</i> : Buckling of the Saddle-Shaped Hypar Shell Acting Like an Arch	381
<i>Béda, Gy.</i> : The Role of the Moving Surface Bearing the Discontinuity, in the Mechanical Investigations	389
<i>Tompos, E.</i> : Light-Microscopic Method for the Determination of the Size Distribution of Pyrites Grains in Coal	395
<i>Ecsedi, I.</i> : On a Torsional Problem	403
<i>Csonka, P.</i> : Some Special Cases of Inextensional Deformation of Shallow Shells	417
<i>Kozák, I.</i> : Remarks and Contributions to the Variational Principles of the Linear Elastostatics in Terms of Stres Functions	423
<i>Zalka, K.</i> : Combined Torsional and Flexural Buckling of a Cantilever with Unsymmetrical Cross Section Subjected to Distributed Normal Loads	447
<i>Jankó, K.</i> : A Nonlinear Analysis of the Equilibrium Path of Shallow Shaddle-shaped Hypar Shells, Supported by Shear Diaphragms, under Uniform Load, with Special Respect to Bifurcation and Snapping	473

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki szerkesztő: Sándor István
A kézirat nyomdába érkezett: 1980. okt. 24. Terjedelem: 21,35 (A/5 fv)

81.8879 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

50,— Ft

INDEX: 26.499
ISSN 0027—5085

Megjelent 1981 X. 9.