

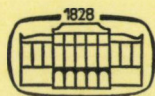
7586

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

56. KÖTET
1-2. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1978

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, HELLER LÁSZLÓ, KÉZDI ÁRPÁD, VÁMOS TIBO

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia

Műszaki Tudomány

1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 84 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

CONTENTS

<i>Terplán, Z.</i> : Memory of G. Szabó (1879–1963)	1
<i>Kézdi, Á.</i> : Measurement of Pore Air and Pore Water Pressure in Triaxial Testing	9
<i>Tarnai, T.</i> : On the Existence and Uniqueness Conditions of the Membrane-state of Shell Structures. I. Hyperbolic Shells	19
<i>Páczelt, I.—Herpai, B.</i> : Contribution to the Calculation of Frame Structures Including Conditional Kinematic Connections	49
<i>Ecsedi, I.</i> : Method of Perturbation for the Calculation of the Approximate Value of Torsional Stiffness	87
<i>Matolcsy, T.—Matolcsy, M.</i> : Some Questions of Fatigue and Endurance of Parallel Elements	93
<i>Gausz, T.</i> : Dynamic Load of Aircraft Wings	105
<i>Grósz, M.</i> : Optimal Design of Tube Networks by Integer Programming	115
<i>Lenkei, P.</i> : Japanese Results in the Field of R. C. Structures Subjected to Dynamic Effects	127
<i>Richlik, Gy.—Tóth, Gy.</i> : Application of Trefftz–Fichera’s Method for the Corrective Delimitation of the Natural Angular Frequency of a Beam Subjected to Flexural Oscillation	131
<i>Szidarovszky, J.</i> : Stress Pattern in Box Girder Bridges	143
<i>Tarnai, T.</i> : On the Existence and Uniqueness Conditions of the Membrane-state of Shell Structures. II. Parabolic Shells	169
<i>Ecsedi, I.</i> : An Inequality Relation in Connection with the Energy of Deformation	193
<i>Bosznay, Á.</i> : Report on the International Colloquium „Euromech 112” Held on the Subject „Delimitation of the Eigenfrequencies of Continuous Structures”	201

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Terplán, Z.</i> : Rück Erinnerung an G. Szabó (1879—1963)	1
<i>Kézdi, Á.</i> : Messung von Porenluft- und Porenwasserdrücke in dreiaxialen Druckversuchen	9
<i>Tarnai, T.</i> : Über die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen des Membranzustands der Schalenkonstruktionen. I. Hyperbolische Schalen	19
<i>Páczelt, I.</i> — <i>Herpai, B.</i> : Beitrag zur Berechnung von Rahrnentragwerken mit bedingten kinematischen Verbindungen	49
<i>Ecsedi, I.</i> : Störungsmethode für die Berechnung des Näherungswertes der Drehfestigkeit	87
<i>Matolcsy, T.</i> — <i>Matolcsy, M.</i> : Einige Fragen des Ermüdungsbruches und der Lebensdauer von parallel geschalteten Elementen	93
<i>Gausz, T.</i> Dynamische Belastung von Flugzeugtragflügeln	105
<i>Grósz, M.</i> : Das Entwurf von Rohrnetzen mittels ganzzahliger Programmierung	115
<i>Lenkei, P.</i> : Japanische Ergebnisse im Bereich von dynamischen Einwirkungen unterzogenen Stahlbetonkonstruktionen	127
<i>Richlik, Gy.</i> — <i>Tóth, Gy.</i> : Anwendung der Trefftz-Ficheraschen Methode zur korrigierbaren Eingrenzung der Eigenkreisfrequenzen des Biegeschwingungen durchführenden Stabes	131
<i>Szidarovszky, J.</i> : Spannungsverteilung in Kastenträgerbrücken	143
<i>Tarnai, T.</i> : Über die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen des Membranzustandes der Schalenkonstruktionen. II. Parabolische Schalen	169
<i>Ecsedi, I.</i> : Eine Ungleichheitsrelation in Zusammenhang mit der Verformungsenergie ...	193
<i>Bosznay, Á.</i> : Bericht über das EUROMECH Kolloquium	201

EMLÉKEZÉS SZABÓ GUSZTÁVRA

(1879—1963)

TERPLÁN ZÉNÓ

A MŰSZ. TUDOMÁNYOK DOKTORA



1979. február 5-én volt 100 éve annak, hogy SZABÓ Gusztáv Győrött megszületett. 1963. július 4-én hunyt el Budapesten. Az elmúlt másfél évtizedben a Magyar Szabványügyi Hivatal és a Mezőtúri Felsőfokú Technikum állított emléket a neves professzornak, de átfogó életrajza még nem jelent meg. Ezt kívánja részben pótolni ez a megemlékezés.

Dr. SZABÓ Gusztáv professzor sokoldalú, kiemelkedő gépészmérnök egyéniség volt, aki a gépészet szinte minden ágával kapcsolatba került. Gazdag tudását magas színvonalon adta elő a Budapesti Műszaki Egyetemen és annak jogelődjein, volt mai értelemben kari vezető, majd a több, ma már önálló egyetemet akkor összefogó intézmény rektora. Az általános gépészetből először a géprajz, a gépelemek, az alkalmazott mechanika és a mechanizmusok kérdéseivel foglalkozott, majd a vasúti géptan és a mezőgazdasági gépek lettek a tárgykörei. Mérnökgenerációkat nevelt a mérnöki kritikai érzékre, a mérnöketikára. Munkatársait nagyon jól választotta meg, többen lettek

közülük egyetemi professzorok és az ipar vezetői. Nagyon sok szakmai társadalmi tevékenysége közül kiemelhető a Magyar Mérnök- és Építész Egylet főtitkári tisztsége, a magyar szabványosításért végzett nagyon eredményes munkája és a mérnöktovábbképzés vezetésében betöltött tisztsége.

Egyik nagyapja építész volt, apja pedig általános mérnök és ábrázoló geometriát oktató tanár a mai győri Révai Miklós Gimnázium jogelődjében. SZABÓ Gusztáv is ide járt és itt érettségizett jeles eredménnyel 1896-ban.

Gépészmérnöki oklevelet a budapesti Műegyetemen szerzett 1900-ban. MÁV ösztöndíjas lévén természetes, hogy végzés után azonnal az államvasúthoz került állásba, ahonnan 17 évi szolgálat után távozott, amikor kinevezték professzornak. A MÁV-nál először a mozdonyszerkesztés mérnöke, majd főmérnöke, később a kísérleti és tanulmányi osztály vezetője.

Gépészmérnökhallgatóként a tanulás mellett a nyári szünidőkben az Északi Főműhelyben gyakornok, felsőbbévesként pedig a mai szóhasználattal demonstrátor volt K. JÓNÁS Ödön professzor mellett a IV. Gépszerkeztani (géprajzi és általános géptani) Tanszéken. Végzés után — vasúti mérnöki főállásával párhuzamosan — először tanársegéd, majd adjunktus lett ugyan ezen a tanszéken. Apjától is tanult rajzszeretete, rajz tehetsége miatt professzora a Géprajz c. tantárgy oktatását teljesen rábízta, ő tartotta éveken át az előadásokat is, a gyakorlatokat is.

1908-ban kitüntetéses minősítésű műszaki egyetemi doktori címet nyert el „A vasúti járművek mozgásának elemzése tekintettel a nyugodt járás feltételeire” c. értekezéssel. 1910-ben pedig egyetemi magántanári címet kapott, és CSERHÁTI Jenő professzor váratlan halála után őt bízták meg a Lokomotívok c. tantárgy előadásával. 1911-ben megpályázta a megüresedett II. Gépszerkeztani (gépelemek) Tanszékét, erre azonban HERRMANN Miksát nevezték ki.

1917-ben elhunyt LÁZÁR Pál professzor, a Mezőgazdasági géptani Tanszék vezetője. Ekkor már a Műegyetem vezetői kérték SZABÓ Gusztávot, hogy pályázzék. 1918. június 5-én ki is nevezték professzornak (akkori szóhasználattal műegyetemi nyilvános rendes tanárnak, ami együtt járt a tanszékvezetői megbízással, és, az ő esetében, még a tanszékhez tartozó Mezőgazdasági Gépkísérleti Intézet vezetésével). Mivel SZABÓ Gusztáv professzor évtizedeken át volt ennek a tanszéknek a vezetője, érdemes az 1971-ben kiadott BME Gépészmérnöki Karának centenáriumi emlékkönyvéből, a Mezőgazdasági Géptani Tanszék történetét idézni:

„Dr. SZABÓ Gusztáv vezetése alatt a tanszék oktatási programja a mezőgazdasági termelés enciklopédikus ismertetésével és a vasúti gépészet oktatásával bővült. A tanszék a méréstechnikai oktatásra is egyre nagyobb gondot fordít. A tanszék az első világháború után főleg traktorvizsgálatokkal foglalkozik, laboratóriumi felszerelését is ilyen irányban fejleszti tovább. Az 1925—30. évek között hazánkban lezajlott öt nemzetközi szántóverseny összes műszaki teendőit a tanszék bonyolítja le. Az 1930-as évek elején a tanszék

a traktorvizsgálatok mellett cséplőgépek fejlesztésére irányuló kutatásokat is végez. Európában elsőnek hívja föl a figyelmet a talajpusztulás veszélyére, és az ellene való védekezés lehetőségeire.

A tanszék gépállománya az első világháború után intenzíven fejlődött az iparral kialakult jó kapcsolat következtében. A 30-as években a tanszék géptárat és gépbemutatótermet létesített. Rendszeres gyűjtőmunka eredményeként a tanszék — a második világháború elején — Európában úgyszólván egyedülálló eke kormánylemez gyűjteménnyel rendelkezett.

A második világháború végén a tanszék helyiségei csaknem teljesen elpusztultak, gépparkjának nagy része megsemmisült, a műszerállomány és a több ezer kötetet kitevő könyvtár jelentős részét azonban sikerült megmenteni. A tanszék helyiségeinek helyreállítási munkái 1949-ben fejeződtek be.”

Mindez SZABÓ Gusztáv professzor vezetésével történt egy állandóan változó, kis létszámú tanszéki oktatói és kisegítő személyzettel. Kiemelhető továbbá, hogy a 30-as évek közepétől kb. másfél évtizeden át az A, B és C tagozatra tagozódó gépészmérnökképzési szakosodásban SZABÓ Gusztáv professzor vezette és irányította a C jelű, mezőgazdasági gépészeti tagozat oktatását, amellyel megteremtette azt az alapot, amellyel a felszabadulást követő gazdasági tervekben a hazai mezőgazdaság gépesítési programjához magas képzettségű szakemberek álltak rendelkezésre.

A kinevezésekor 39 éves professzort az első években sok mindennel bízták meg, mint „fiatal” tanárt. A Tanácsköztársaság idején pl. a Népgazdasági Tanács tudományos műszaki bizottságának volt a tagja. 1922-ben a Gépészmérnöki Osztály (akkor így nevezték a mai Kart) dékánja. Ezt a tisztséget három tanéven át látta el közmegelegedésre. A veszített háború, a megdöntött forradalom után zűrzavar volt többek között a budapesti Műegyetemen is. SZABÓ Gusztáv emberséggel, jogtisztelettel, de a származásukért vagy baloldali nézeteikért megtámadott hallgatókért való kiállással, szerzett jogaik megvédésével oldotta meg nehéz feladatát.

Közben 1921-ben részt vállalt a Magyar Szabványosítási Bizottság megszervezésében.

Érdekes epizód, hogy a 20-as évek végén egyik munkatársát, BARTÓK Pált — egy Grazban tartott előadását követően — meghívták a Szovjetunióba. SZABÓ Gusztáv határozott támogatásával végül is létrejött az utazás. Így a Mezőgazdasági géptani Tanszék elsőként jutott információkhoz, tapasztalatokhoz a Szovjetunió mezőgazdaságának gépesítéséről, és talán az egyetlen olyan hazai szaktanszék volt, amely a Szovjetunióban kiadott orosz nyelvű szakkönyvekkel, szabványokkal, oktató falitáblákkal rendelkezett a két világháború közötti időszakban.

1925—37 között a Műegyetemi Atletikai és Futball Club (MAFC) tanárnője lett. Sokat fáradozott a műegyetemi sportélet fellendítéséért, és az ő javaslatára vezették be a budapesti József Nádor Műszaki és Gazdaság-

tudományi Egyetemen, a hazai többi egyetemet megelőzve, a később általánossá vált, egyetemi kötelező testnevelést. 1935-től tagja lett az Országos Testnevelési Tanácsnak.

SZABÓ Gusztáv professzor új tudományterületén, a mezőgazdasági gépesítésnek lett már a 30-as évek elején magasszintű propagálója. Az 1931-ben tartott Magyar Országos Mérnökkongresszus az ő javaslatára fogalmazta meg határozatai között, hogy:

1. A *traktorok* hazánkban elsősorban a nehéz művelési talajokon használandók, s ezért a nehéz művelésű talajon gazdálkodók részére kedvezményes kölcsönök engedélyezésével könnyítsék meg tartorok beszerzését.

2. A *kapálógépek* nagyarányú kiterjesztése kívánatos a kapásnövényeink termésátlagának növelésére.

3. Gabonatermésünk mennyiségének és minőségének versenyképes fokozására a *kéveköti aratógép* használatának széleskörű bevezetése a leghatásosabb és legbiztosabb eszköz. Ma már az egész világ géppel arat, a minőségi versenyben biztos lemaradást jelent az aratógép mellőzése.

Az 1936/37-es tanévben az 1935-ben megszervezett József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem rektora, 1937/38-ban prorektora. Prorektor-ként viszont az őt követő TELEKI Pál rektor miniszterré történt kinevezését követően, ügyvezető rektori teendőket látott el, amit az is bizonyít, hogy e tanév leteltével, másodszor is SZABÓ Gusztáv tartotta a szokásos rektori beszámolót.

A rektori székhelyekben akkor az volt a szokás, hogy a hivatalába lépő egyetemi vezető saját tudományterületéről választotta beszédének vezérfonalát. SZABÓ Gusztáv rektor ezt a lehetőséget is felhasználta a hazai mezőgazdaság gépesítésének szorgalmazására. Érdemes idézni a *Technika* c. szakfolyóirat 1936. évi 8. számából „A Műegyetem megnyitása” c. összefoglalót:

„Dr. SZABÓ Gusztáv rektori székhelyfoglalója átfogó célkitűzés nemcsak a műegyetem belső életét illető tudományos és intézményi kérdésekben, hanem mélyreható feltárása a magyar népgazdaság legfontosabb kérdéseinek. E feladatok a mezőgazdaság erőforrásai, a föld termelőképességének megtartása és fokozása, a terménybetakarítással együttjáró gazdasági, társadalmi és közjóléti követelményei kiegyensúlyozása.

A szélerőnek hazánkban sajnos nincs *általánosabb* jelentősége, mert a szél gyakorisága és a szél sebessége alul esik azon a határon, amelynél kihasználása a géperőnél olcsóbb. A villamoserő alkalmazása, noha a mai állapothoz képest nemzetgazdasági szempontból előnyösebb lenne, a magas áram egységárak miatt nem versenyképes. A magyarországi csapadékviszonyok mellett különös fontosságú a csapadékvíz helyes tárolása. E követelmény teljesítésére, amint azt amerikai minta után végzett itthoni kísérletek igazolták, kiválóan megfelel a csapadékvíz lefolyását meggátló sáncolás. Ez oly fontos feladat, hogy ezen a téren az államnak kell jó példával előljárni. Mezőgazdaságunk

egyik legsúlyosabb feladata a gabonaratás. A kézi aratás sem népjóléti, sem pedig nemzetgazdasági szempontból ma már nem indokolt, mert az előálló nagy veszteség és minőség romlás az aratás egész költségénél nagyobb károkat okoz. A kézi aratással járó túleröltetés népünk életerejét és egészségét ássa alá. A statisztika bizonyossága szerint nincs alapja annak az állításnak, hogy a munkanélküliséget a mechanizálás okozná, sőt a statisztika azt bizonyítja, hogy a géperőre való áttérés növeli a munkás keresetét. Amíg milliók szűkölködnek, addig nem lehet túltermelés.

A műegyetem mezőgazdasági osztályának fejlődésére csak jó hatással lehetnek azok a kapcsolatok, amelyeket feladatainak előbbrevitele végett a technikai tanszékkel létesít. A műegyetemet áthatja az a meggyőződés, hogy a magyar nép jólétét csak a magyar mezőgazdaság láburaállításával és versenyképessége feltételeinek megteremtése árán lehet biztosítani. Ehhez a műegyetem is hozzá akar járulni nemcsak a tanítással, hanem a legjobb elvek, eljárások és eszközök felkutatásával is.”

Ezek az akkori gazdaságpolitikai irányelvekhez képest kemény szavak voltak, de — mint köztudott — nem is lett hatásuk. A hazai mezőgazdaság gépesítése a felszabadulás után oldódott meg az állami gazdaságokban és a termelő szövetkezetekben.

1939-től a felszabadulásig MÉP-beli országgyűlési képviselő volt. De a műegyetem tájékoztatóiból a 40-es években a már ismertetett egyetemi és társadalmi megbízásain kívül még a következők olvashatók a neve mellett: „...a Műegyetem Építési Bizottságának elnöke, a Darányi Ignác Agrártudományos Társaság rendes tagja, a M. Kir. Kúria szabadalmi ülnöke, az Országos Felsőoktatási Tanács, az Országos Természettudományi Tanács, az Országos Ösztöndíjtanács, a Mezőgazdasági Kísérletügyi Tanács, az Állandó Talajjavító Bizottság, az Országos Közlekedésrendészeti Bizottság, az Energia-Világkonferencia Magyar Nemzeti Bizottságának tagja, a Budapesten szervezett vezetógépészi vizsgáló bizottság tagja, a Széchenyi Tudományos Társaság szenátusának tagja, az Országos Magyar Gazdasági Egyesület elnöki tanácsának és igazgató-választmányának tagja, valamint műszaki szakosztályának elnöke, a Magyar Szabványügyi Egyesület elnöke, az Országos Gőzkazánvizsgáló Egyesület alelnöke, a Magyar Mérnök- és Építész Egylet tanácsának tagja, a Magyar Anyagvizsgálók Egyesülete, a Kir. Magyar Természettudományi Társulat és a Magyar Meteorológiai Társaság választmányának tagja, a Magyar Kinetotechnikai Társaság elnöke.” Félelmetesen széleskörű és fárasztó társadalmi elfoglaltságot jelentett mindez SZABÓ Gusztáv számára, mert ő ezeknek a megbízásoknak és feladatoknak mindig eleget is kívánt tenni.

Hazánk felszabadulása után — számos előző társadalmi elfoglaltsága megszűnővén — elsősorban a harcok során nagyon megsérült tanszékének újjáépítésén fáradozott. Vállalta továbbá az Iparügyi Minisztériumban meg-

alakult Mezőgazdasági Gépbizottság elnöki tisztségét. Az ő vezetésével indult meg a szakosított mezőgazdasági gépgyártás Magyarországon.

1945 őszén előadást vállalt a Mérnöki Továbbképző Intézet Kinematikai Tanfolyamán. „A kinematikai módszerek alkalmazása csuklós gépszerkezetek köréből” c., hat órás nagyszerű előadása osztatlan sikert aratott. Ezt a témakört később, az 50-es években külön is előadta MUTNYÁNSZKY Ádám professzortársa kérésére a BME Műszaki Mechanikai Tanszékének oktatói előtt. Tervezte értékes feljegyzéseinek sajtó alá rendezését, de kéziratai az 1956-os ellenforradalmi pusztításoknak estek áldozatul.

1949-ben a Mezőgazdasági Géptani Tanszék vezetését RÁZSÓ Imre akadémikusnak adta át, ő pedig megszervezte a mai Vasúti Járművek Tanszéke jogelődjét, a Vasúti Géptani Tanszékét, amelyet 73 éves koráig, nyugalombavonulásáig vezetett.

Mint nyugalmazott professzor a hazai szabványosításnak még sokat segített. Az 1951-ben megalakult Magyar Szabványügyi Hivatal több állandó bizottságának lett az elnöke, és ezeknek a feladatoknak csaknem a haláláig eleget is tett.

Kétszer kapott kitüntetést a felszabadulás előtt. 80 éves korában a Munkaérdemrenddel tüntette ki a Magyar Népköztársaság Elnöki Tanácsa „a mérnöknevelés terén kifejtett több évtizedes tevékenységéért és a szabványosítás terén elért eredményeiért”.

Tudományos pályafutása egy nagyszerűen megírt és ma is helytálló megállapításokat, végkövetkeztetéseket tartalmazó doktori disszertáció megírásával kezdődött. Folytatódott egy ugyancsak elismert szabadalommal, a *Halász—Szabó*-előmelegítővel. A többszöri tárgyváltás, majd az egyetemi és közéleti funkciók megsokszorozódása, a hazai mezőgazdaság gépesítéséért folytatott harc, később a mérnökpolitikus szerepvállalás a felszabadulásig szétforgácsolta mindennapi munkáját, és így ma is hiányolni kell a doktori értekezéséhez hasonló értékű további tanulmányokat, amelyek csak szóban hangzottak el.

Ezzel szemben állt állandó igazságkeresése nemcsak az alkalmazott természettudományok terén, hanem az élet minden más viszonylatában, háborúk, forradalmak, ellenforradalmak forgatagában, majd idősebb korban a szocialista építőmunka folyamán.

Egyetlen, nagyon rövid nekrológ jelent meg halála után. Ennek egy szép gondolata álljon itt befejezésül, SZABÓ Gusztáv professzor életművét tömören jellemezni kívánva:

„Nemzedékeket tanított meg a legfontosabbra, amit az egyetem nyújthat: a műszaki gondolkodásra, de nem volt értéktelenebb ennél az a példamutató emberi magatartás sem, amely átplántálódott róla mindazokra, akik tőle tanulhattak, vele dolgozhattak. Katedráján és minden munkásságában tántoríthatatlan híve volt a haladásnak.”

Dr. Szabó Gusztáv szakirodalmi munkái

1. A vasúti járművek mozgásának elemzése tekintettel a nyugodt járás feltételeire. (Műszaki egyetemi doktori értekezés.) Bp. Pátria Nyomda, Budapest 1908, 1/72
2. A vasúti járművek mozgása. = *MMÉE Közl.* 43 (1909), 149–168
3. Szilárdságtani képletek és adatok. Bp. Minerva Nyomda, Budapest 1912, 1/4
4. Ellenáramú és egyenáramú fűtőfelületek melegátadásának összehasonlítása térbeli diagramon. Saját kiadás. Budapest 1915
5. THAMM István: Lokomotívok SZABÓ Gusztáv előadásai nyomán, KAPUS László közreműködésével. *Műsz. Könyvk.* Budapest 1919, 1/143
6. Kémiai ipar gépei. I. r. (Anyagok mechanikai kezelése.) SZABÓ Gusztáv előadásai alapján írta GYURIS Ödön. Németh J. Budapest 1922, 1/174
7. Új rendszerű tápvízfelmelegítő. Társszerző: HALÁSZ Ernő. (90707/15b. sz. szabadalom. Budapest 1923)
8. Mezőgazdasági géptan. SZABÓ Gusztáv előadásai alapján jegyezték SCHMIDT Elek és GYÖRFI László. Átnézte és a rajzokat készítette BILLEGE János. *Műsz. Könyvk.* Budapest 1924, 1/203
9. A mérnökkongresszus határozataiból SZABÓ Gusztáv dr. javaslata. = *Technika*. 12 (1931), 114–115
10. Gépmunka a mezőgazdaságban. = „Az 1931. évi Magyar Orsz. Mérnökkongresszus iratai.” Budapest 1932, 97–103
11. Vasúti kocsik, lokomotívok, motorkocsik. Gépészmérnökhallgatók számára összeállította BÓNAY Sándor. *Technika*. Budapest 1935, 1–176
12. Dr. Szabó Gusztáv 1936/37. tanévi rector magnificus tanévnnyitó beszéde. = *A budapesti M. Kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem 1935/36. tanévi Évkönyve*. Budapest 1937, 19–42.
13. Rektori beszámoló. = *A budapesti M. Kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem 1936/37. tanévi Évkönyve*. Budapest 1938, 7–32
14. Prorektori beszámoló. = *A budapesti M. Kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem 1937/38. tanévi Évkönyve*. Budapest 1939, 7–48
15. Felszólalás az MMÉE 1942. évi mérnöknevelési vitáján. = *MMÉE Közl.* mell. 2 (1942), 8, 61–70
16. Vasúti géptan I. SZABÓ Gusztáv előadásai nyomán GYURIS Pál közreműködésével írta THAMM Frigyes. Tankönyvkiadó, Budapest 1952, 1–79

Források az életrajz összeállításához

- A M. Kir. József Nádor Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Tájékoztatói és Évkönyvei. Budapest 1935–43
- A Műegyetem megnyitása. = *Technika* 17 (1936), 147. o.
- BME Gépészmérnöki Karának centenáriumi emlékkönyve. Budapest 197, 174–175
- BME Közlekedésmérnöki Kara, 1951–71. Budapest 1971, 140. o.
- LEHOCZKI László: Szabó Gusztáv. Sajtó alatt a GTE *Műszaki nagyjaink* könyvsorozatban Magyar Életrajzi Lexikon. II. k. Akadémiai Kiadó, Budapest 1969, 677–678
- MAGYAR Béla: Szabó Gusztávra emlékezünk születésének 100. évfordulóján (Dr. Terplán Zénó kéziratának felhasználásával). = *A jövő üzemmérnöke*. 6 (1979) 4 6. old.
- Dr. Szabó Gusztáv ny. műegyetemi tanár (1879. febr. 7–1963. júl. 4.). = *Szabványügyi Közlemények* 15 (1963), 166. o.
- SZŐKE Béla: Visszaemlékezéseim Dr. SZABÓ Gusztávra. = *Gépgyártástechnológia* 18 (1978), 419–421

A PÓRUSOKBAN URALKODÓ VÍZ- ÉS LÉGNYOMÁS MÉRÉSE A TRIAXIÁLIS NYOMÓKÍSÉRLETEKBEN

KÉZDI ÁRPÁD*

AZ MTA RENDES TAGJA

és

HORVÁTH GYÖRGY**

[Beérkezett 1979. március 7-én]

A másodlagos porozitással rendelkező talajokban pórusvíz és póruslevegőnyomás egyaránt fellép. Ezek kihatnak az ilyen rendszerek nyírószilárdságára és viselkedésére. A szerzők egy készüléket szerkesztettek, mely alkalmas arra, hogy a kompresszió első fázisában mérje a nyílt rendszerben fellépő póruslevegőnyomást és a második fázisban, amikor a talaj már kvázi-telített, a pórusvíznyomást. Két kísérleti eredményt mutat be a dolgozat, az első esetben a terhelés fokozatosan növekedett, s meghatározásra került a kritikus állapot és a pórusnyomások mértéke; a másodikban a hányóképzés tényleges feltételei kerültek tanulmányozásra.

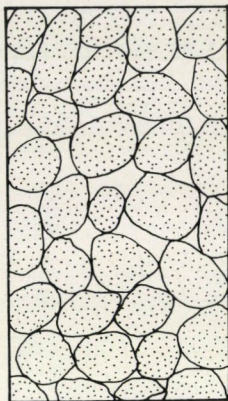
1. Bevezetés

A másodlagos porozitással rendelkező talajokban (l. KÉZDI, 1970), ha a talaj egyedi szemcséinél sokszorososan nagyobb hézagokban levegő és víz egyaránt jelentkezik, a zárt rendszerű kompresszió során pórusvíz- és póruslevegőnyomás egyaránt fellép. Ha a külső erők — vagy az önsúly — hatására a rendszerben egy adott jellegű, izotrop vagy anizotrop konszolidációs folyamat játszódik le, akkor a tömörődéssel járó fázismozgások több jellegzetes fázison mennek át. A „másodlagos szerkezetű” talajokban (l. ábra) kis terhelés hatására csak a levegő áramlik — a nagy másodlagos hézagokban erre megvan a lehetőség —, a víz valamilyen módon, kapillárisan, vagy kisebb felületi kötéseik miatt még rögzített. Az összenyomódás fokozódásával a kisebb hézagok vízzel telítődnek, a levegő pedig a nagyobb hézagokban gyűlik össze, vagy kismértékben a vízben oldódik. Még tovább növelve a terhelést, az összefüggő légjáratok megszűnnek, a talaj kvázi-telítetté válik: a levegő nem alkot összefüggő fázist, hanem a hézagokat egy összenyomható, a levegőt finoman eloszlottan — vagy oldottan — tartalmazó víz-levegő keverék tölti ki. Ha ez a kritikus állapot már bekövetkezett, akkor a további összenyomódás során a talajból — nyitott rendszerben — már ez a keverék sajtolódik ki.

Ez a folyamat játszódik le például külszíni fejtések hányóiban. A hányóra kerülő anyag folyamatosan érkezik, s így az alsóbb rétegekre időben egyenletesen növekvő terhelés fog működni. A rendszer kezdetben — a hányó felszí-

* Prof. Dr. Kézdi Árpád, 1012. Budapest, Lógodi u. 9.

** Dr. Horváth György, 2092. Budakeszi, Arany J. u. 9.



1. ábra. Elsődleges és másodlagos pórusokat tartalmazó talaj

nén — jellegzetesen másodlagos porozitású; ha a meddőanyag kötött talaj, akkor az eredeti fázisos összetétellel rendelkező agyagrögök a hányóban úgy helyezkednek el, hogy közöttük nagy, másodlagos hézagok maradnak. A hányóképzés során, ha a terhelés egyenletesen növekszik, a hányóban a fent leírt folyamat játszódik le. Minthogy a pórusvíz- és a póruslevegő nyomás semleges feszültség, növekedésük a hatékony feszültség értékére kihat. Ha ez a hatékony feszültség, a

$$\bar{\sigma} = \sigma - u_v - u_l$$

összefüggés szerint zérusra csökken, akkor a nyírószilárdság megszűnik és a hányóban csúszások, rogyások, megfolyósodások következhetnek be. Ez a jelenség gyakorlati szempontból igen jelentős, ennek vizsgálatához volt szükség olyan kísérleti módszer kidolgozására, mely alkalmas a pórusnyomások mérésére, a terhelés egyenletes növelése esetén.

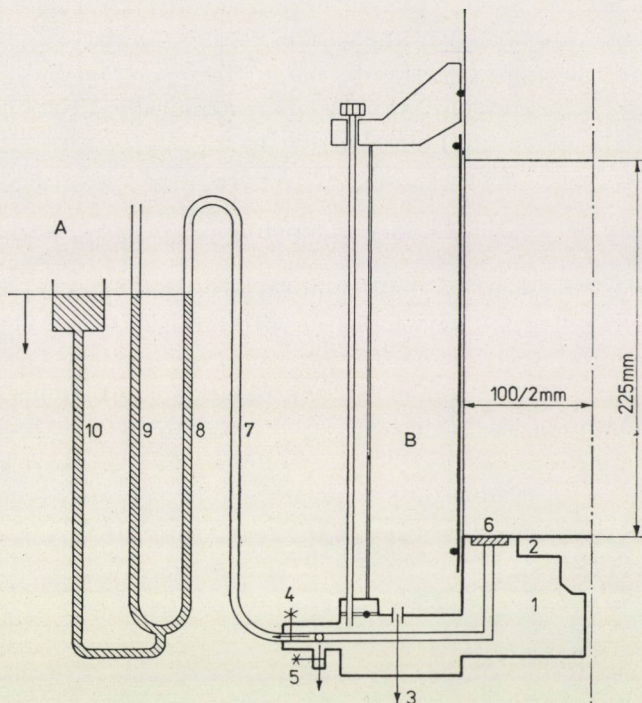
2. A mérőberendezés

Mint említettük, a másodlagos porozitással bíró anyagból a tömörödés során nyílt rendszerben először a levegő nyomódik ki, majd egy kritikus telítettség elérése után az oldott, vagy finoman eloszlott levegőt tartalmazó víz.

A vizsgálatot egy pórusvíznyomás mérésére alkalmas háromtengelyű nyomókészülékkel végeztük. A triaxiális cella egy átalakított, *Wykeham Farrance Engineering Ltd* gyártmányú készülék volt (az átalakított berendezés részletes leírását l. KÉZDI, Á.—HORVÁTH, GY., 1979), mellyel tengelyszimmetrikus feszültségállapotban, különféle feszültségpályák alkalmazásával, különböző terhelési sebességek mellett végezhető kísérletek. A főfeszültségek ($\sigma_1; \sigma_2 = \sigma_3$), a pórusvíznyomás, az alak és térfogatváltozások mellett a készülékkel a 2. ábrán bemutatott eszközzel a póruslégnymomás értékei is mérhetők. Erre azonban csak a kísérlet elején, a kritikus telítettség elérése, a kvázi-telített

állapot bekövetkezése előtt van szükség, ha ezt elértük, a készüléket pórusvíz-nyomásmérésre kapcsoljuk át s a továbbiakban zárt rendszerben u_v értékét mérjük.

A 2. ábrán a triaxiális készülék *B* talpát is feltüntettük, melyhez az új eszköz csatlakozik. A 4 jelű csapra szereljük az *A* póruslégnyomásmérőt.



2. ábra. A pórusvíz- és póruslevegőnyomásmérésére szolgáló készülék (*A*; *B* — triaxiális nyomócella) 1 — cellatalp; 2 — a függőleges főfeszültség mérésére szolgáló nyomásmérő cella; 3 — a harmadik főfeszültség mérésére szolgáló miniatűr cella; 4 — a póruslevegőnyomást mérő berendezéshez vezető csap; 5 — pórusvíznyomást mérő készülékhez vezető csap; 6 — szűrőkőgyűrű; 7–10 — a póruslevegőnyomást közvetve mérő berendezés

A 7–10 jelű csövek összeköttetésben állnak egymással, a 8, 9 és 10 jelűek vízzel töltöttek. A 9 jelű csőben és a 10 jelű víztartályban levő szabad vízfelszínre a külső légnyomás hat.

Ha a talajmintén póruslevegőjében nyomás jön létre, akkor a 7 jelű csőben a térfogat nő s ezért a 8 jelű mérőcsőben a vízszint elmozdul. Az elmozdulást a 10 jelű tartály lefelé való mozgatásával követjük, mindaddig, míg a 8, 9 és 10 jelű csövekben a vízszintek azonosak nem lesznek. A levegőtérfogat mért értékéből a póruslevegőnyomás a következőképpen számítható:

$$u_l = \frac{[(V_l - \Delta V) + V_p] p_1}{(V_l - \Delta V)}$$

A fenti összefüggésben:

- V_l a fázisos összetétel teljes levegőtér fogata (cm^3);
 ΔV — a térfogatcsökkenés (cm^3);
 V_p — a ki nem nyomódott légtér fogat (cm^3);
 p_1 — külső légnyomás (100 kN/m^2).

A mérést addig folytatjuk, míg el nem érjük a kritikus tömörségi állapotot, amikor már a vízben is mérhető pórúsvíznyomás alakul ki. Ekkor az összefüggő légsatornák elzáródnak, a mintából víz távozik el és a rendszerbe víz kerül. Ha ez bekövetkezik, a 4 jelű csapot elzárjuk és az 5 jelű csapot kinyitjuk, ahol egy miniatűr nyomásmérő cellával a továbbiakban zárt rendszerben a pórúsvíznyomást mérhetjük.

3. A kísérlet eredménye

Egy kísérleti eredményt a 3. ábra mutat be. A minta magassága $22,5 \text{ cm}$ volt. A rögös agyagot egy 10 cm belső átmérőjű formázó hengerbe lazán betöltöttük és enyhe nyomással tömörítettük. A talaj adatait — és a kísérlet eredményeit — az 1. táblázatban foglaltuk össze. A minta tehát másodlagos porozitással bír. A terhelést zárt rendszerben egyenletes terhelési sebességgel ($4 \text{ kN/m}^2/\text{perc}$) növeltük. Ez a sebesség megfelel a hányóképzés átlagos döntési sebességének. A σ_1 első főfeszültség tehát az idővel arányosan növekszik;

1. Táblázat

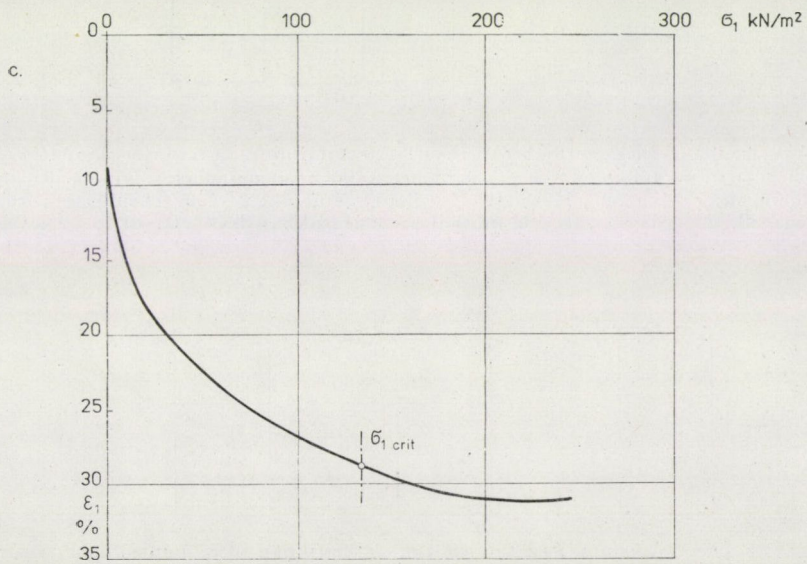
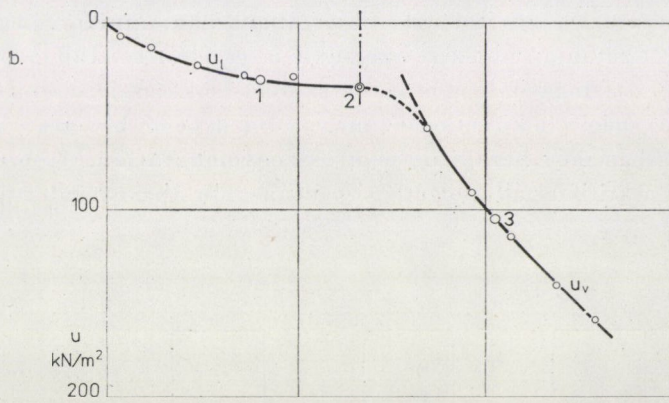
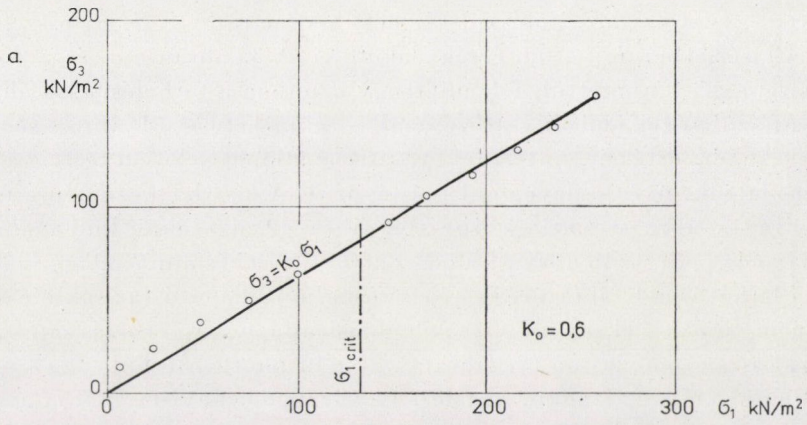
Triaxiális kísérlet eredményei

σ_1 kN/m^2	σ' kN/m^2	Δh mm	ε_1 %	γ_0 %	s %	v %	l %	S	u kN/m^2
0	0	0	0	8,4	30,0	29,8	40,2	0,43	0
7,3	10	33,8	15	9,9	35,4	35,1	29,5	0,54	7
23,7	27	41,9	18,6	10,3	36,8	36,6	26,6	0,58	14
48,7	39	50,4	22,4	10,8	38,6	38,3	23,1	0,62	23
100	63	60,1	26,7	11,4	40,7	40,5	18,8	0,68	29
134,6*	81	64,6	28,7	11,8	42,1	41,8	16,1	0,73	34
149,4	91	66,4	29,5	11,9	42,5	42,2	15,3	0,74	25
169,1	105	67,5	30,0	12,0	42,9	42,6	14,5	0,75	55,6
192,6	118	68,9	30,6	12,1	43,2	43,0	14,0	0,76	89,4
213,6	130	69,5	30,9	12,1	43,4	43,1	13,5	0,76	113,8
235,8	145	69,8	31,0	12,2	43,6	43,2	13,2	0,77	140,0
259,3	163	70,0	31,1	12,2	43,8	43,3	12,9	0,77	158

Talajnem: sárga agyag; $I_p = 42\%$

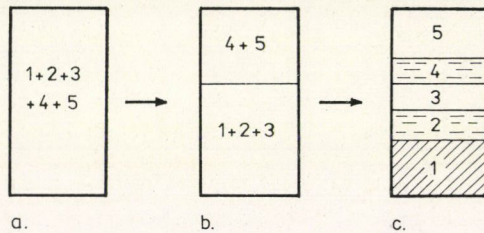
* Kritikus terhelés

3. ábra. Példa a pórúsvíznyomás mérésére. *a* — az időben egyenletesen növekvő függőleges főfeszültség és az oldalnyomás összefüggése; *b* — a pórúsvíznyomás és a pórúsvíznyomás értéke az első főfeszültség függvényében; *c* — a fajlagos összenyomódás az első főfeszültség függvényében

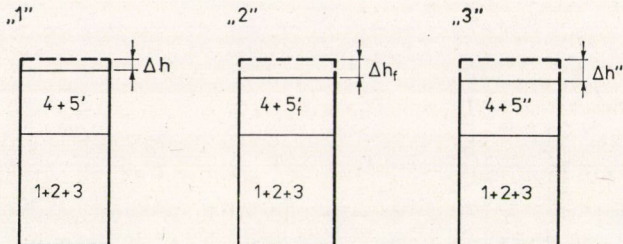


ugyancsak egyenletes a σ_3 főfeszültség növekedése, a $\sigma_3 = K_0 \sigma_1$ összefüggés szerint. A kísérletben $K_0 = 0,6$ érték alakult ki. A 3a ábrán a σ_1 és σ_3 feszültségek összefüggését tüntettük fel, minthogy azonban a terhelési ráta állandó, az ábra a feszültségek időbeli változásának is tekinthető. A 3b ábra a semleges feszültségek mért értékeit tünteti fel. A kritikus állapot bekövetkeztéig a rendszer, mint láttuk, nyílt, a levegő el tud távozni. A kísérlet kezdetén a fázisos összetétel a 4a ábra szerinti; a 4b és 4c ábra az alkotókat különválasztva ábrázolja, még pedig a 4b ábrán külön az eredeti talaj és a másodlagoshézagok térfogata látható, a 4c ábra pedig az eltérő halmazállapotú fázisok térfogatát külön-külön tünteti fel. Ez tehát a kiindulási állapot. A terhelés növelésével a fajlagos összenyomódás nő (3c ábra); az 1 jelű pontban tehát — a kritikus állapot elérése előtt —, amikor egy bizonyos levegőmennyiség már eltávozott, és a rendszer összenyomódott, a fázisos összetétel az 5. ábra szerinti lesz. Ugyancsak ilyen lesz az összetétel a kritikus állapotban, amikor megindul a víz kinyomódása. Ezután a rendszert lezárjuk s a terhelést tovább növeljük; ekkor tehát elvileg a térfogatnak nem volna szabad csökkennie, de bizonyos csökkenés (3c ábra) mégis bekövetkezik, mert a víz-levegő keverék, ami a másodlagos hézagokban még bent van, nem összenyomható. A pórusvíznyomás változását a kritikus állapot átlépése után a 3b ábrán tüntettük fel.

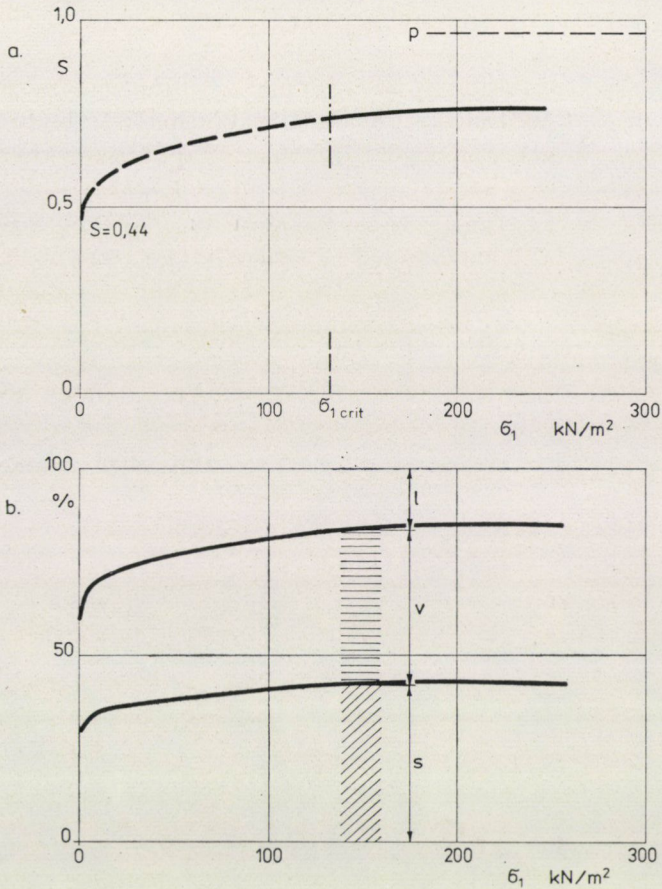
„0”



4. ábra. A másodlagos hézagtérfogattal rendelkező talajminta a kísérlet kezdetén (a „0” pontban). a — a teljes talajminta; b — az eredeti talaj és a másodlagos, vízzel, ill. levegővel kitéltített hézagok; c — a talaj részei (1 — szilárd szemcsék; 2 — az elsődleges pórusokban levő víz, ill. 3 — levegő; 4 — a másodlagos pórusokban levő víz, ill. 5 — levegő)



5. ábra. A minta összetétele az 1, 2 (kritikus), ill. 3 pontokban

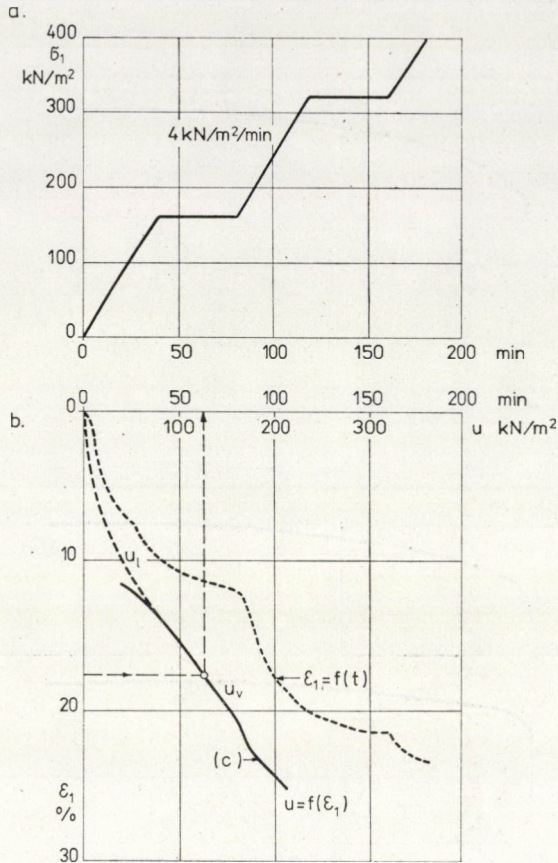


6. ábra. a — a telítettségi fok, ill. b — a fázisos összetétel változása az első főfeszültség függvényében. p — a csak elsődleges hézagokat tartalmazó talaj telítettsége

A 3 jelű pontban tehát a fázisos összetétel az 5. ábra szerint fog alakulni, mert a kritikus állapot átlépése után a térfogat változik, és ezt a változást a víz + levegő keveréknek a pórusfolyadék-nyomás hatására való összenyomódása és nem a kinyomódása hozza létre.

A minta telítettsége a 6a ábra szerint változik, mely S értékét σ_1 függvényében tünteti fel. A kritikus állapoton túl a változás már valóban csekély. A 6b ábrán a fázisos összetétel változását látjuk.

A következőkben egy magas, sávszerűen döntött laza meddőhányó anizotrop konszolidációjának (K_0 állapot), tömörödésének vizsgálatát mutatjuk be. A talaj rögzös és a döntés után jelentős másodlagos hézagtevézővel rendelkezik. A terhelést — a valóságos körülményeket utánozva — a 7a ábra szerint növeltük; a fajlagos összenyomódást a 7b ábra mutatja. A pórusvíz



7. ábra. A pórusvíz-, ill. póruslevegőnyomás változása az a ábra szerint változó terhelés hatására. b — a fajlagos összenyomódás változása; c — a pórusfeszültségek a fajlagos összenyomódás függvényében

és a levegőnyomás értékének változását ugyancsak a 7. ábrán láthatjuk (c görbe), a fajlagos összenyomódás függvényében.

A folyamatos terhelésű kísérlet során mért főfeszültségek és a kialakult semleges feszültség, és az alak- és térfogatváltozások ismerete alapján képet alkothatunk a háromfázisú hányó viselkedéséről, a hányó feszültségállapotáról, a feszültségek és alakváltozások alakulásáról.

IRODALOM

- KÉZDI, Á.: *Handbuch der Bodenmechanik*. Vol. 3. Verlag für Bauwesen, Berlin 1978
 KÉZDI, Á.—HORVÁTH, Gy.: Stresses and Strains in Sand in Axially Symmetrical Case. *Proc. 9th. Int. Conf. Soil Mech. Found. Engg.*, Vol. 1, pp. 161—164. Tokyo 1977
 KÉZDI, Á.—HORVÁTH, Gy.: Tests with an Improved Triaxial Cell. (Under preparation)

Measurement of Pore Air and Pore Water Pressure in Triaxial Testing. Soils having secondary porosity display both pore air and pore water pressures which influence the shear strength and the behavior of such systems. Authors constructed a device which can be used to measure — in the first phase of the compression — the pore air pressure in an open system, and, in the second phase, when the soil became quasi-saturated, the pore water pressure. Two test results are given: in the first, the load increased gradually, the critical state and the pore pressures have been determined; in the second, real conditions of dumping have been simulated.

Messung von Porenluft- und Porenwasserdrücke in dreiachsialen Druckversuchen. Erdstoffe mit sekundären Porosität weisen Porenluft- und Porenwasserdrücke auf, die die Scherfestigkeit und das Verhalten von solchen Systemen beeinflussen. Die Verfasser konstruierten ein Messgerät, zur Messung des Porenluftdrucks in offenem System — in der ersten Phase der Kompression; in der zweiten Phase, als der Erdstoff bereits quasi-gesättigt wurde, den Porenwasserdruck. Zwei Versuchsergebnisse sind vorgelegt: im ersten Versuch nahm die Belastung gleichmässig zu, es wurde der kritische Zustand ermittelt und die Porendrücke gemessen, im zweiten Versuch wurden reale Verhältnisse einer Kippe simuliert.



A HÉJAK MEMBRÁNÁLLAPOTÁNAK LÉTEZÉSI ÉS EGYÉRTELMŰSÉGI FELTÉTELEIRŐL

I. HIPERBOLIKUS HÉJAK

TARNAI TIBOR*

[Beérkezett 1977. június 1-én.]

A dolgozat azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy tetszőleges megoszlású függőleges irányú erőkkel terhelt héj peremein milyen megtámasztási feltételeket kell, ill. szabad előírni ahhoz, hogy a héj statikailag határozott módon membránállapotban legyen. A membránhéj-egyenlet megoldásának létezési és egyértelműségi feltételeit különböző peremfeltételek mellett a parciális differenciálegyenletek elmélete alapján állapítja meg. A dolgozat jelen része a hiperbolikus héjak körében végzett vizsgálatok eredményeit tartalmazza.

1. Bevezetés

Az irodalomból ismeretes [11], hogy a membránhéjak belső erőit és alakváltozásait általános esetben 3 statikai, 3 geometriai és 3 fizikai egyenlet írja le. A héjak minden peremszakaszán két peremfeltétel adható meg. Ezek közül lehet

- a) mind a kettő geometriai,
- b) az egyik geometriai, a másik statikai,
- c) mind a kettő statikai feltétel.

A statikailag határozott membránhéjaknál a belső erők meghatározásához elegendők a statikai egyenletek és a statikai peremfeltételek. Ekkor a geometriai és a fizikai egyenletek, valamint a geometriai peremfeltételek figyelmen kívül hagyhatók.

Statikailag határozott membránhéjaknál tehát peremszakaszonként vagy nulla, vagy egy, vagy két peremfeltételt lehet előírni. Kérdés azonban: ahhoz, hogy a héj egyértelmű membránállapotban legyen, hogyan adhatók meg ezek a peremfeltételek, milyen feltételeket kell kielégíteni a peremgörbéknek, a héj középfelületének és a héj külső terheinek?

A dolgozatban ezt a kérdést vizsgáljuk. A választ a parciális differenciálegyenletek elméletének a segítségével igyekszünk majd megadni. A különböző esetek áttekintésénél nem törekszünk teljességre, annál is kevésbé, mivel a parciális differenciálegyenletekkel kapcsolatban több probléma még matematikailag sincs kellően tisztázva.

* Dr. Tarnai Tibor, 1037 Budapest, Kolostor u. 17.

Vizsgálatainkat a szemléletesség kedvéért a membránhéjak Pucher-féle differenciálegyenletén végezzük. Bár néhány esetben a héjak felületi, görbe vonalú koordinátarendszerben felírt statikai differenciálegyenlet-rendszere ([11] 106. old. (2.1.), [21] 22. old. (1.23)) eredményesebben alkalmazható, de az ilyenkor szükséges transzformációk, ill. a komplex interpretáció a közvetlen szemléletet lerontják. Megjegyezzük, hogy az egyenletrendszer segítségével történő vizsgálat matematikai alapjainak kidolgozása elsősorban W. HAACK, G. HELLWIG és I. N. VEKUA nevéhez fűződik (lásd pl. [14] és [20] irodalomjegyzékét). A dolgozatunkban tárgyalandó problémáról a héjak differenciálegyenlet-rendszerére vonatkozóan KAYA SAYAR [14] ad rövid áttekintést.

A vizsgálataink során csak olyan héjakkal foglalkozunk, amelyeket csupán függőleges külső erők terhelnek, és amelyeknél a középfelület Gauss-görbületének (szorzatgörbületének) előjele a héj alaprajzi tartományának minden pontjában azonos.

2. A Pucher-féle differenciálegyenlet

A függőleges erőkkel terhelt membránhéjak egyensúlyát leíró Pucher-féle differenciálegyenlet az xyz derékszögű koordinátarendszerben a következő alakú:

$$\mathfrak{L}F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -g, \quad (1)$$

ahol $z = z(x, y)$ a héj középfelületének az egyenlete,

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

a Pucher-féle operátor, $g = g(x, y)$ a z tengellyel párhuzamos (függőleges) irányú külső teher intenzitás-függvénye, $F(x, y)$ pedig az ismeretlen feszültségfüggvény, amelyből a redukált metszeterők az alábbi módon származtathatók:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

Ha a középfelületnek függőleges érintősíkjai vannak, akkor a Pucher-féle differenciálegyenlet megoldása és a tényleges membránérők az érintési pontokban közvetlenül nem állíthatók elő. Ezeket csak határértékben lehet számítani.

Az (1) membránegyenlet jellegét egy (x, y) pontban az egyenlet

$$D = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$

diszkriminánsának ezen pontbeli előjele határozza meg. A D diszkrimináns előjelétől függően az (1) egyenletet három osztályba lehet sorolni:

- 1) $D < 0$ hiperbolikus,
- 2) $D = 0$ parabolikus,
- 3) $D > 0$ elliptikus egyenletek osztályába.

Mivel kikötöttük, hogy a középfelület Gauss-görbületének előjele a középfelület minden pontjában állandó, ezért az (1) egyenlet diszkriminánsának előjele, és így az (1) egyenlet jellege is a héj teljes alaprajzi tartományában állandó.

Az (1) egyenlet karakterisztikus görbéit vagy röviden karakterisztikáit a

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 = 0$$

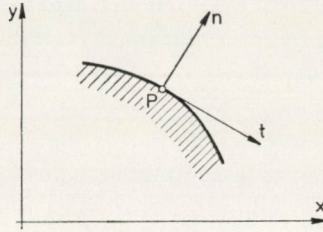
közönséges differenciálegyenlet megoldásai szolgáltatják. Hiperbolikus típusú egyenleteknél két valós karakterisztika-sereg, parabolikus egyenleteknél egy valós karakterisztika-sereg létezik, elliptikus egyenleteknél azonban nincsenek valós karakterisztikák.

A középfelületnek azokat a vonalait, amelyeknek az xy síkra vett vetülete karakterisztika, aszimptotikus vonalaknak nevezzük.

Ha $\partial^2 z / \partial y^2$, $\partial^2 z / \partial x \partial y$ és $\partial^2 z / \partial x^2$ kétszer folytonosan differenciálható, azaz ha $z(x, y)$ négyyszer folytonosan differenciálható és $z(x, y)$ másodrendű deriváltjai egyidejűleg nem nullák, akkor az \mathcal{L} operátor, ill. az (1) egyenlet új ξ, η változókkal kanonikus alakra hozható egy (x_0, y_0) pont valamely környezetében ([17] 54. old.). Megjegyezzük, hogy a $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ kétszer folytonosan differenciálható transzformációs függvények szoros összefüggésben vannak a karakterisztikákkal (a $\xi = konst.$, ill. $\eta = konst.$ görbék maguk is karakterisztikák). A továbbiakban olyan héjakat vizsgálunk, amelyeknél ez a kanonikus transzformáció a héj teljes alaprajzi tartományában invertálható módon létezik.

Jelölje n a héjperem alaprajzi vetületének külső normálisát a perem egy P pontjában, t pedig ugyanezen pontban a peremgörbe érintőjének irányát (egységvektorát) (1. ábra). Az n irányú $n_n = \partial^2 F / \partial t^2$ normálerő és t irányú $n_{nt} = -\partial^2 F / \partial n \partial t$ nyíróerő közül egyiket vagy másikat, vagy a kettő valamilyen kombinációját, vagy esetleg mind a kettőt megadva a perem egyes szakaszain, keressük az (1) egyenlet — konstanstól és lineáris tagoktól eltekintve egyértelmű — kétszer folytonosan differenciálható megoldását.

Az (1) Pucher-féle egyenletnél az alapvető probléma az, hogy a metszeterőkre adott peremfeltételek a keresett függvény másodrendű deriváltjaira vonatkoznak. Ennek a problémának két oldala van. Az egyik az, hogy a parciális differenciálegyenleteknek másodrendű derivált peremfeltételek melletti vizsgálata még meglehetősen kidolgozatlan terület. Az ilyen jellegű feladatokra elliptikus egyenletek esetében néhány irodalmi hivatkozást pl. [16]-ban



1. ábra. A peremvonal normális irányú és érintő irányú egységvektora a peremvonal egy pontjában

lehet találni (235. old.). A másodrendű deriváltakra felírt peremfeltételek csak néhány egyszerűbb esetben redukálhatók elsőrendű, ill. nulladrendű deriváltakra, amelyek mellett a másodrendű parciális differenciálegyenletek elmélete már ki van dolgozva. A probléma másik oldala az, hogy sok esetben nem ismert azoknak a nullad- vagy elsőrendű deriváltakra vonatkozó peremfeltételeknek a statikai jelentése, amelyekre be van bizonyítva a héjegylenlet megoldásának egyértelmű létezése.

Tekintsük át most a másodrendű deriváltakról alacsonyabb rendűre redukálható egyszerűbb peremfeltételeket. A továbbiakban, ha peremről beszélünk, akkor a héj tényleges peremvonalának az xy síkra vett alaprajzi vetületére gondolunk. A héj tényleges peremvonalát \bar{S} -sel, az alaprajzi vetületét pedig S -sel jelöljük.

2.1. A peremtartó csak függőleges irányban van megtámasztva

Ekkor a héj peremvonala a peremtartóra leadódó erők kötélgörbéje. A feszültségfüggvény a peremen $F = ax + by(x) + c$ alakú, ahol a , b , c állandó, $y = y(x)$ a perem egyenlete; azaz a feszültségfüggvénynek a peremen felvett értékei síkgörbét határoznak meg. Mivel a feszültségfüggvény lineáris és konstans tagokkal bővíthető anélkül, hogy a héj feszültségállapota megváltozna, ezért esetenként az $F = ax + by(x) + c$ helyébe a peremen $F = 0$ állítható [4].

Megjegyezzük, hogy a peremtartó függőleges irányú megtámasztása általában akkor biztosítja a héj, ill. a peremtartó egyensúlyát, ha a peremvonal zárt kötélgörbe, vagyis amikor a feszültségfüggvénynek a peremen felvett értékei zárt síkgörbét adnak. Ha a kötélgörbe-tulajdonság a peremvonalnak csak egy szakaszán teljesül (a peremszakasz nyílt kötélgörbe), akkor a peremtartószakasznak mint kötélnak az egyensúlyban tartásához a függőleges megtámasztáson kívül olykor szükségesek lehetnek a peremszakasz végpontjaiban működő koncentrált erők is, amelyek a peremgörbe érintőjének irányába mutatnak.

2.2. Egyenes peremszakasz mentén adott a normálerő értéke

Ekkor a peremen

$$n_n = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \varphi(s), \quad (2)$$

ahol $\varphi(s)$ adott függvény és s a peremszakasz ívhosszparamétere. Integráljuk (2)-t kétszer a perem mentén s szerint. Így a feszültségfüggvényre a peremen az alábbi összefüggést nyerjük:

$$F = \int (\int \varphi ds) ds + as + b,$$

ahol a és b állandó. Ha az egyenes peremszakasz oldalnyomásmentes, azaz $n_n = \varphi(s) = 0$, akkor a peremen $F = as + b$ adódik, azaz a feszültségfüggvény a peremen lineárisan változik. Ha a peremtartó csak függőleges irányban van megtámasztva, akkor a peremen az $F = as + b$ helyett olykor a 2.1.-beli $F = 0$ feltételt lehet megadni. Ha azonban a héjnak háromnál több egymáshoz csatlakozó oldalnyomásmentes egyenes peremszakasza van, és a peremtartók a függőleges megtámasztáson túl a saját síkjukban történő vízszintes eltolódás ellen is meg vannak támasztva (pl. a peremszakaszok csatlakozási pontjaiban koncentrált erők lépnek fel), akkor az összes peremszakaszon már nem írható elő az $F = 0$ feltétel [6]. Ebből következik, hogy háromnál több oldalú poligon alaprajz feletti héj esetében a peremvonal kötélgörbesége és a perem oldalnyomásmentessége nem ugyanazt jelenti. Az előbbi az utóbbinak speciális esete.

2.3. Egyenes peremszakasz mentén adott a nyíróerő értéke

Ekkor a peremen

$$n_{nt} = - \frac{\partial^2 F}{\partial n \partial t} = \psi(s), \quad (3)$$

ahol $\psi(s)$ adott függvény és s a peremszakasz ívhosszparamétere. Integráljuk (3)-at a perem mentén s szerint. Így a peremen a

$$\frac{\partial F}{\partial n} = - \int \psi ds + a$$

összefüggéshez jutunk, ahol a állandó. Ha az egyenes peremszakasz nyíróerőmentes, azaz $n_{nt} = \psi(s) = 0$, akkor a peremen $\partial F / \partial n = a$ adódik. Ha a héjnak több nyíróerőmentes egyenes peremszakasza van, akkor lineáris tagok hozzáadásával általában csak két szakaszon érhető el, hogy $\partial F / \partial n = 0$ teljesüljön.

2.4. Köríves peremszakasz mentén adott a nyíróerő értéke

Az r , θ , z hengerkoordinátákban a redukált nyíróerőt az alábbi kifejezés adja meg ([1] 113. old.):

$$n_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}.$$

Legyen a körív sugara $r = R$, és a z tengely menjen át a körív centrumán. Ha tehát a köríven adott a nyíróerő,

$$n_{r\theta} = \chi(s), \quad (4)$$

ahol s az ívhossz-paraméter, akkor (4)-et $s = R\theta$ szerint integrálva a peremen az

$$\frac{1}{R} F - \frac{\partial F}{\partial n} = \int \chi R d\theta + a$$

kifejezéshez jutunk, ahol a állandó. Ha a köríves peremszakasz nyíróerőmentes, akkor ezt a tényt a peremen az

$$\frac{1}{R} F - \frac{\partial F}{\partial n} = a, \quad a = \text{állandó}$$

összefüggés fejezi ki.

2.5. Egyenes peremszakasz mentén mindkét metszeterő adott

Legyenek ezek $n_n = \varphi(s)$ és $n_{nt} = \psi(s)$. Perem menti integrálással a 2.2. és 2.3. alapján az

$$F = \int (\int \varphi ds) ds + as + b,$$

$$\frac{\partial F}{\partial n} = - \int \psi ds + c$$

kifejezéseket kapjuk, ahol a , b , c állandó. Lineáris és konstans tagok hozzáadásával elérhető, hogy $a = b = c = 0$ legyen. Ha az egyenes peremszakasz szabad, akkor ott az $F = as + b$, $\partial F / \partial n = c$, illetve ezek helyett olykor az $F = 0$, $\partial F / \partial n = 0$ feltételek írhatók elő. Ekkor a feszültségfelület a perem mentén érint egy síkot, amely lehet az xy koordinátasík is.

2.6. Szabad perem.

A 2.5. szakasz utolsó állítása sima görbe perem esetére is általánosítható [5]. Ez esetben a peremfeltételek:

$$n_n = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, \quad n_{nt} = - \frac{\partial^2 F}{\partial n \partial t} = 0,$$

melyekből

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a, \frac{\partial F}{\partial y} = b$$

következik, ahol a és b állandó. E feltételek helyett — a feszültségfüggvény lineáris és konstans tagokkal történő additív bővítésével — a peremen esetenként az $F = 0$, $\partial F/\partial n = 0$ feltételek vehetők.

Kérdés lehet, hogy a 2.1.—2.6. peremfeltételekben szereplő integrációs állandókat hogyan lehet meghatározni, ill. azok mikor tehetők nullává. Az integrációs állandók meghatározásánál abból kell kiindulnunk, hogy a peremen a feltételi függvények általános, állandókat is tartalmazó alakját írjuk fel. Ekkor a különböző peremszakaszok végpontjaiban csatlakoztatjuk a peremszakaszokon megadott feltételi függvényeket. (Ha pl. két egymáshoz csatlakozó S_1 és S_2 peremszakaszon az F feszültségfüggvény értékét írjuk elő, akkor az S_1 -en és az S_2 -n megadott függvényértékeknek a csatlakozási pontban azonosnak kell lenniük, hiszen az F feszültségfüggvény folytonossága ezt megköveteli. Vagy ha előírjuk pl. S_1 -en az F értékét, az S_2 -n pedig az F értéke mellett a $\partial F/\partial i$ ($i \neq t$) iránymenti derivált értékét is, akkor az S_1 és S_2 csatlakozási pontjában az F folytonosságából a függvényértékek azonossága következik, az F folytonos differenciálhatóságából pedig az, hogy az S_1 -en megadott függvény csatlakozási pontbeli deriváltja azonos azzal az iránymenti deriválttal, amelyet a csatlakozási pontban, az S_2 -n megadott függvényekből az S_1 érintőjének irányában lehet számítani. Ha az utóbbi példában S_1 -en F helyett az F -nek valamilyen iránymenti deriváltját adjuk meg, akkor ennek az iránymenti deriválnak az értékét a csatlakozási pontban az S_2 -n megadott függvények meghatározzák.) Ezután a feszültségfüggvényhez hozzáadhatunk egy tetszőleges $ax + by + c$ lineáris alakot. Az a , b , c állandók alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a peremfeltételekben szereplő állandók közül több (esetleg mind) nulla legyen. (Megjegyezzük, hogy egy lineáris alakkal történő additív kiegészítés hatását az összes peremszakaszon egyidejűleg kell vizsgálni. Nem lehet ugyanis úgy eljárni, hogy minden peremszakaszhoz választunk külön-külön egy olyan lineáris alakot, amely az adott szakaszon az állandókat eltünteti, és így az összes peremszakaszon nullának vesszük az állandókat, hiszen egy újabb lineáris alak hozzáadása a feszültségfüggvényhez azt eredményezheti, hogy egy peremszakaszon, ahol korábban már nullává tettük az állandókat, ezeknek az állandóknak az értéke ismét nullától különböző lesz.) Az elliptikus egyenletek néhány peremérték-feladatánál az integrációs állandók közötti kapcsolatot az ún. kompatibilitási feltétel szabályozza. Előfordulhat, hogy az integrációs állandók közül néhányat a rendelkezésre álló adatokból és feltételekből nem tudunk meghatározni a lineáris alakkal történő kiegészítés ellenére sem. Ezeket az állandókat a továbbiakban mint szabad paramétereket kell kezelnünk.

A membránhéjak különböző statikai feladatainál az (1) egyenletnek olyan megoldásait keressük, amelyek kielégítenek az n_x , n_y , n_{xy} redukált met-zeterőkre nézve bizonyos peremfeltételeket, amelyeket általánosságban a következő függvénykapcsolattal fejezhetünk ki:

$$f_1 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = \varphi_1, \quad (5)$$

ahol f_1 és φ_1 adott függvények.

A peremfeltételi függvények perem menti integrálása révén (5) az alábbi általános alakot veszi fel:

$$f_2 \left(F, \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) = \varphi_2 (a_1, a_2, \dots, a_m), \quad (6)$$

ahol a_1, a_2, \dots, a_m az integrációs állandók. Ha az (1) egyenletnek a (6) feltétel mellett, az a_1, \dots, a_m állandók minden szóbjöhető, rögzített értékére van megoldása, akkor ez azt jelenti, hogy az (1) egyenlet az (5) feltétel mellett megoldható, és a héj membránállapotban van. Ha a (1) egyenletnek a (6) feltétel mellett nincs megoldása az a_1, \dots, a_m állandók egyetlen szóbjöhető rendszerére sem, akkor ez azt jelenti, hogy az (1) egyenlet az (5) feltétel mellett nem oldható meg, és a héj nincs membránállapotban.

Ha az (1) egyenletnek a (6) feltétel mellett, az a_1, \dots, a_m állandók minden szóbjöhető, rögzített értékére egy és csakis egy megoldása van, és az a_1, \dots, a_m állandók mindegyikét sikerül a fenti csatlakoztatási, ill. kompatibilitási feltételek kielégítésével és az $ax + by + c$ lineáris alakkal való additív kiegészítéssel nullává tenni, ill. meghatározni, akkor a héj membránállapotban van, és a membránállapot egyértelmű, azaz az (5) peremfeltételek egyértelműen meghatározzák a héj belső erőit. A héj ekkor statikailag határozott. Ha az a_1, \dots, a_m állandók közül csak k -t ($k < m$) tudunk meghatározni, akkor (6)-ban $k - m$ szabad paraméter marad. Ilyenkor, ha az (1)-nek a (6) feltétel mellett az a_1, \dots, a_m állandók minden szóbjöhető értékére van megoldása, akkor a héj membránállapotban van, de a membránállapot nem egyértelmű, azaz az (5) peremfeltételek mellett a héj belső erői nem egyértelműek. Ekkor a héj statikailag határozatlan.

A dolgozatban azt fogjuk megvizsgálni, hogy az (1) egyenletnek a (6) feltétel mellett, rögzített a_1, \dots, a_m értékekre mikor létezik egyetlen megoldása, és mikor határozható meg valamennyi (6) feltételbeli a_1, \dots, a_m állandó; azaz mikor létezik a héjnak egyértelmű membránállapota.

Most pedig tekintsük át a fontosabb feladatokat. Mivel a feladatok az (1) egyenlet jellegétől függően igen eltérőek lehetnek, ezért célszerű a tárgyalást aszerint csoportosítani, hogy az (1) egyenlet hiperbolikus, parabolikus vagy elliptikus-e.

Megvizsgáljuk, hogy az (1) egyenletre vonatkozó feladatok mikor korrektek. Egy feladatot akkor nevezünk korrektnek, ha ([2] 176. old.):

- 1) létezik megoldása,
- 2) a megoldás egyértelmű,
- 3) a megoldás folytonosan függ az adatoktól.

Először a hiperbolikus héjakra vonatkozó feladatokat fogjuk átnézni, mielőtt azonban a tárgyalásba kezdenénk, meg kívánjuk jegyezni az alábbiakat.

Az (1) egyenlet kanonikus alakja hiperbolikus esetben a következő:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -g(x, y). \quad (7)$$

Ennek az egyenletnek az általános megoldása x és y szerinti integrálással:

$$F(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \iint g(x, y) dx dy.$$

Ahhoz, hogy F kétszer folytonosan differenciálható legyen, azaz az n_x , n_{xy} , n_y metszeterő-függvények folytonosak legyenek, az szükséges, hogy a $g(x, y)$ teherfüggvény folytonosan differenciálható legyen, továbbá a peremfeltételekből meghatározandó φ_1 és φ_2 ismeretlen függvények kétszer folytonosan differenciálhatók legyenek. Ha a (7)-nek csak folytonosan differenciálható (szakaszonként kétszer folytonosan differenciálható) megoldását keressük, akkor csak az szükséges, hogy $g(x, y)$ folytonos, φ_1 és φ_2 egyszer folytonosan differenciálható legyen. A következőkben a matematikai irodalom alapján az (1) egyenletre vonatkozóan olyan feladatokat fogunk átnézni, amelyeknek a megoldása *egyszer folytonosan differenciálható*. (Ha a tárgyalandó feladatoknak *kétszer folytonosan differenciálható* megoldását keressük, akkor a feladatokban levő teherfüggvénytől meg kell követelni, hogy egyszer folytonosan differenciálható legyen, a peremfeltételekben levő függvényektől pedig azt, hogy kétszer folytonosan differenciálhatók legyenek. A peremgörbétől is meg kell követelni, hogy kétszer folytonosan differenciálhatók legyenek. Ezek szükséges feltételek.)

3. Kezdetiérték-feladat hiperbolikus esetben (Cauchy-feladat)

A két karakterisztika-sereg megkülönböztetésére használjuk az I. és II. jelölést. Jelölje továbbá S a héj egy A és B pontokkal határolt peremszakaszát alaprajzi vetületben (az xy síkban), és legyen adott az S peremgörbe minden pontjában egy i irány (egységvektor). Az S peremen az F feszültségfüggvény vegyen fel egy adott φ függvény által meghatározott értékeket, az F függvény

i irány menti deriváltja pedig vegyen fel egy adott ψ függvény által meghatározott értékeket. Ekkor az

$$\mathcal{L}F = -g, \quad \left. \vphantom{\mathcal{L}F} \right\} \quad (8a)$$

$$F|_S = \varphi, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial i} \Big|_S = \psi \right\} \quad (8b)$$

Cauchy-feladatnak létezik megoldása, és az egyértelműen meghatározott az A és B pontokon átmenő I-es és II-es karakterisztikák által határolt $ADBC$ „négyszögben” (2a. ábra), ha teljesülnek az alábbi feltételek:

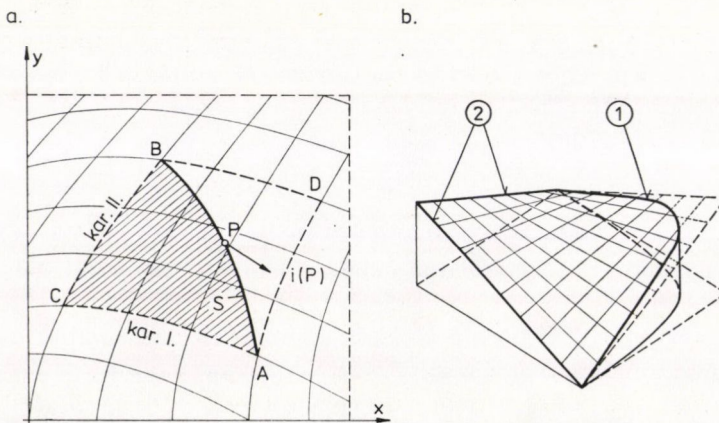
- a) az S peremgörbe a (8a) egyenlet értelmezési tartományában fekszik,
- b) mind az I-es, mind a II-es sereghez tartozó karakterisztikák legfeljebb csak egy pontban metszik az S peremgörbét, és S -et a két seregből egyetlen karakterisztika sem érinti,
- c) S kétszer folytonosan differenciálható,
- d) az i irány folytonosan differenciálható módon változik S mentén,
- e) az i irány az S peremgörbe egy pontjában sem párhuzamos az S ugyanazon pontbeli érintőjével,

f) $g(x, y)$ folytonos,

g) φ kétszer, ψ egyszer folytonosan differenciálható,

h) $z(x, y)$ négyszer folytonosan differenciálható.

A h) feltétel alapján (8a) kanonikus alakra transzformálható, miközben (8b) is transzformálódik, de az a)–g) feltételek továbbra is érvényesek maradnak. Kanonikus alakra a fenti tétel bizonyítását lásd pl. [3] 165. old. Megemlítjük, hogy a (8b) feltétellel ekvivalens, ha $\partial F/\partial x$ és $\partial F/\partial y$ értékét adjuk meg az S peremen és F értékét a perem egy pontjában. A Cauchy-feladatot ilyen feltételekkel tárgyalja pl. [12] 114. old., [10] 870. old., [2] 313. old.



2. ábra. a) A kezdetiérték-feladat megoldási tartománya. b) Hiperbolikus paraboloidhéj szabad peremszakasszal. ① szabad peremszakasz, ② teljesen megtámasztott peremszakasz

Az utóbbi az S peremgörbétől csak folytonos differenciálhatóságot, a $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$ parciális deriváltaktól pedig csak folytonosságot követel. Megjegyezzük még, hogy a megoldás egyértelműségéhez elegendő, ha az S peremgörbe csak szakaszonként folytonosan differenciálható, azaz az S peremgörbének véges sok töréspontja lehet ([3] 162. old.).

Az elmondottakból következik, hogy a fenti a)–h) feltételek teljesülése esetén a héj csak akkor lehet egyértelmű membránállapotban, ha a héj S -en kívüli peremszakaszai teljes egészükben vagy az ABC , vagy az ADB „háromszög” tartományon (2a. ábra) belül, vagy annak határán vannak. Ezek a peremszakaszok azonban most matematikailag nem tekinthetők peremeknek.

A jelen esetben tehát egy peremszakaszon két feltételt lehet megadni, a többi peremszakaszon viszont nem írható elő feltétel.

A megadható két peremfeltétellel előírható például, hogy S legyen szabad peremszakasz. Ha ugyanis $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ és $i \equiv n$, akkor az (5b) feltételek a következők lesznek: $F|_S = 0$, $\partial F/\partial n|_S = 0$. Megjegyezzük egyébként, hogy az $i \equiv n$ feltevés most mellőzhető is, mivel az S peremgörbére és az i irányra tett kikötések mellett az $F|_S = 0$, $\partial F/\partial i|_S = 0$ feltételekből $\partial F/\partial n|_S = 0$ már következik. Egy ilyen szabad peremszakaszú hiperbolikus paraboloidhéjat mutat be a 2b. ábra.

Ha S egyenesszakasz, akkor ott megadható az n_n és n_{nt} redukált metszeterők nagysága is. A 2.5. szakasz értelmében ez a feltétel a peremen F -fel és $\partial F/\partial n$ -nel fogalmazható meg. A fenti peremfeltételek mellett a héj belső erői egyértelműek.

4. Peremérték-feladatok hiperbolikus esetben (Goursat-féle feladatok)

Jelölje S_1 , ill. S_2 a héj két, egymáshoz csatlakozó peremszakaszát alaprajzi vetületben, melyeket az A és B , ill. az A és C pontok határolnak. Jelölje továbbá S az S_1 és S_2 egyesítését: $S = S_1 \cup S_2$. Az S peremen egy φ függvény szerint legyen adott az F feszültségfüggvény értéke. Ha teljesül, hogy

a) az S peremgörbe a (9a) differenciálegyenlet értelmezési tartományában fekszik,

b) S_1 és S_2 folytonosan differenciálható görbék,

c) $g(x, y)$ folytonos,

d) φ folytonos, az S_1 és az S_2 görbén külön-külön folytonosan differenciálható,

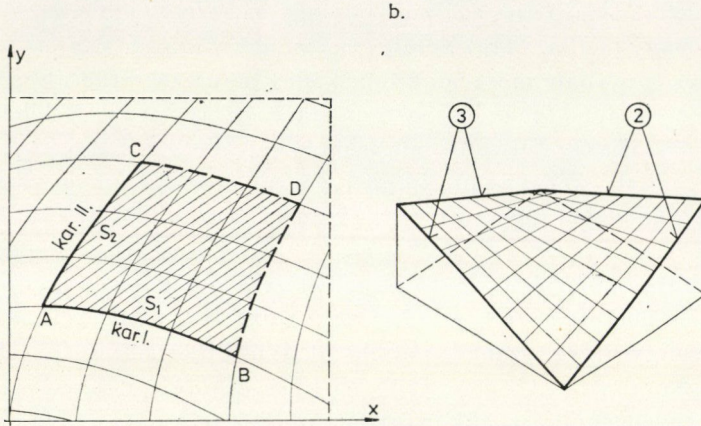
e) $z(x, y)$ négyszer folytonosan differenciálható, akkor az

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}F &= -g, \\ F|_S &= \varphi \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}F &= -g, \\ F|_S &= \varphi \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

peremérték-feladatnak a következő három esetben létezik egyértelmű megoldása ([17] 125. old.):

4.1. Az S_1 peremszakasz azonos egy, az I-es sereghez tartozó karakterisztika \widehat{AB} szakaszával, az S_2 peremszakasz pedig azonos az A ponton átmenő II-es karakterisztika \widehat{AC} szakaszával. Ekkor a (9a, b) feladatnak létezik egyértelmű megoldása az S_1 , S_2 , valamint a B ponton átmenő II-es karakterisztika és a C ponton átmenő I-es karakterisztika által közrezárt $ABDC$ „négy-szögben” (3a. ábra).

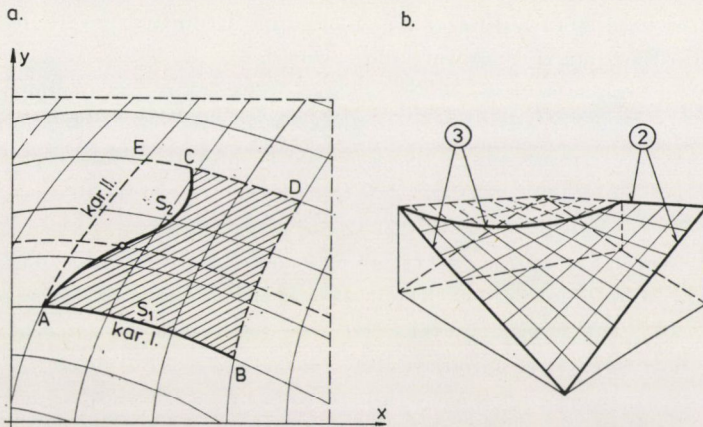


3. ábra. a) A peremérték-feladat megoldási tartománya karakterisztikák mentén megadott peremértékek esetében. b) Torznégyszög alakú hiperbolikus paraboloidhéj, ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ③ függőlegesen megtámasztott peremtartójú peremszakasz

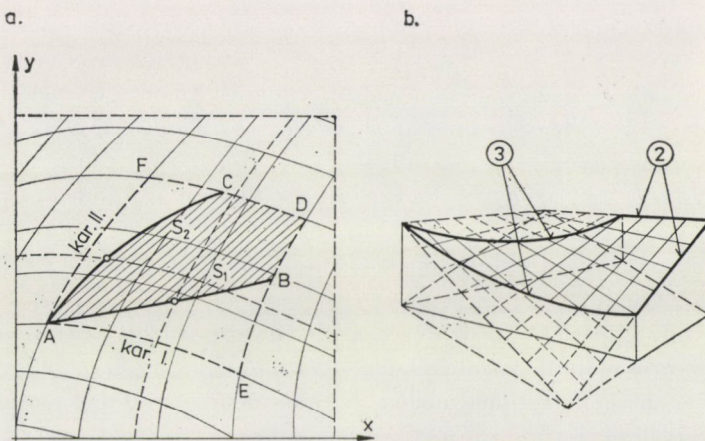
4.2. Az S_1 peremszakasz azonos egy, az I-es sereghez tartozó karakterisztika \widehat{AB} szakaszával, az A pontból kiinduló S_2 peremszakasz pedig olyan, hogy minden I-es sereghez tartozó karakterisztika legfeljebb egy pontban metszi S_2 -t, és S_1 -et és S_2 -t nem választja el egyetlen II-es sereghez tartozó karakterisztika sem, továbbá az S_2 görbe C végpontján átmenő II-es karakterisztika metszi S_1 -et (4a. ábra). Ekkor a (9a, b) feladatnak létezik egyértelmű megoldása az S_1 és S_2 végpontjain átmenő karakterisztikák által közrefogott $ABDE$ „négy-szögben” (4a. ábra).

4.3. A közös A kezdőpontú S_1 és S_2 peremszakaszokat nem választja el karakterisztika. Az S_1 görbét minden II-es sereghez tartozó karakterisztika, ill. az S_2 görbét minden I-es sereghez tartozó karakterisztika legfeljebb egy pontban metszi, és az S_1 görbe B végpontján átmenő I-es karakterisztika metszi S_2 -t, ill. az S_2 görbe C végpontján átmenő II-es karakterisztika metszi S_1 -et. Ekkor a (9a, b) feladatnak létezik egyértelmű megoldása az S_1 és S_2 végpontjain átmenő karakterisztikák által meghatározott $AEDF$ „négy-szög”-ben (5a. ábra).

Megjegyezzük, hogy e három peremérték-feladatot PETROVSZKIJ abban az esetben említi, amikor a (9a) egyenlet kanonikus alakú. Az e) feltétel azon-



4. ábra. a) A peremérték-feladat megoldási tartománya egy karakterisztikán és egy görbén megadott peremértékek esetében. b) Hiperbolikus paraboloidhéj. ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ③ függőlegesen megtámasztott peremtartójú peremszakasz



5. ábra. a) A peremérték-feladat megoldási tartománya két görbén megadott peremértékek esetében. b) Hiperbolikus paraboloidhéj. ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ③ függőlegesen megtámasztott peremtartójú peremszakasz

ban biztosítja azt, hogy a (9a) egyenletet kanonikus alakra lehessen transzformálni. Mivel a kanonikus transzformáció az $a) - d)$ feltételekben rögzített tulajdonságokat megőrzi, ezért a [17] 125. oldali állítások az általunk megfogalmazott általánosabb formában is érvényesek maradnak. A fenti peremérték-feladatok részletesebb tárgyalását [12] tartalmazza (119. és 123. old.).

A héj mindhárom esetben akkor lehet egyértelmű membránállapotban, ha az S -en kívüli peremszakaszai az $ABDC$ „négyyszög” tartományban vagy annak határán fekszenek. Ezek a peremszakaszok a Cauchy-feladathoz hasonlóan matematikailag most sem jelentenek peremeket, hiszen itt nem lehet fel-

tételeket előírni. Fizikailag ez azt jelenti, hogy az említett peremeken a támaszoknak minden metszeterőt fel kell venniük.

Az S peremen, vagyis az S_1 és S_2 peremszakaszokon előírhatjuk az F feszültségfüggvény értékét. Így például kiköthetjük, hogy legyen $F|_S$ egyetlen síkgörbe, amely mint ismeretes, azt jelenti, hogy a héjat szegélyező peremtartó függőlegesen van megtámasztva, és ilyenkor a peremvonal a peremtartóra leadódó erők kötélgörbéje lesz.

A fenti esetekre az itt említett megtámasztást négyzög-alaprajzú hiperbolikus paraboloidhéjon szemléltetjük (3b., 4b., 5b. ábra). Ha a peremszakaszok egyenesek, akkor a 2.2. szakasz szerint előírható a peremen az n_n redukált normálerő nagysága. Ezen peremfeltételek mellett a héj membránállapotban van, és a membránállapot egyértelmű, azaz a héj belső erőit a peremfeltételek egyértelműen meghatározzák.

A 4.2. feladattal kapcsolatban [15] megemlíti, hogy az a feladat is korrekt, amelynél a 4a. ábra szerinti S_1 görbén az F értékét, míg az S_2 görbén az $\alpha(\partial F/\partial n) + \beta F$, ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) lineáris kombináció értékét írjuk elő. Ha $\alpha \neq 0$, akkor még azt is meg kell követelnünk, hogy az S_2 görbét egyetlen karakterisztika se érintse.

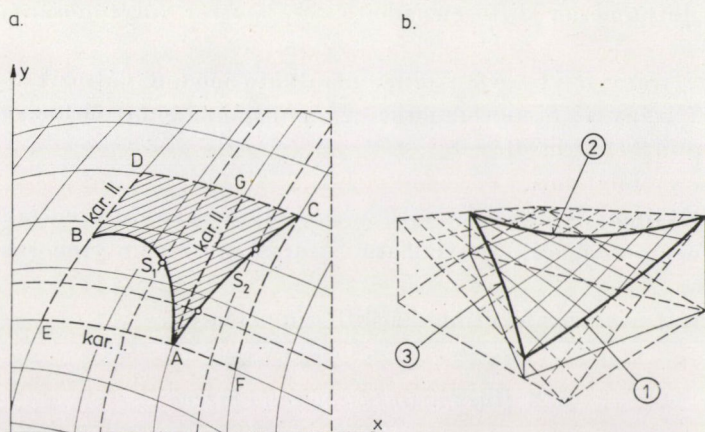
Ennek alapján az S_1 peremszakaszon előírható, hogy a peremtartó csak függőleges irányban legyen megtámasztva (2.1. szakasz), míg az S_2 peremszakaszon — ha az egyenesszakasz, ill. körív — előírható a nyíróerő értéke (2.3., ill. 2.4. szakasz). Ha az S_1 egyenesszakasz, akkor azon előírható a normálerő értéke is (2.2. szakasz). Ily módon, ha az S_1 is és az S_2 is egyenesszakasz, akkor a héj S_1 peremszakasza oldalnyomásmentessé, míg az S_2 peremszakasza nyíróerőmentessé tehető.

A peremfeltételeknek az S_1 és az S_2 perem csatlakozási pontjában történő egyeztetése alapján megállapítható, hogy a metszeterőkre vonatkozó fenti vegyes peremfeltételek mellett a héj membránállapota általában csak akkor egyértelmű, ha az S_1 és S_2 peremszakasz merőlegesen csatlakozik egymáshoz. Kivételt képez az az eset, amikor mind az S_1 , mind az S_2 egyenes. Ekkor ugyanis a héj egyértelmű membránállapotához nem szükséges a két peremszakasz merőleges kapcsolata

5. Kezdeti- és peremérték-feladatok hiperbolikus esetben

5.1. Két szakaszból álló perem

Ha a 4.3. szakaszban tárgyalt S_1 és S_2 peremszakaszt karakterisztika választja el, akkor az egyértelmű megoldáshoz a megadott feltételek kevésnek bizonyulnak. Az egyik peremszakaszon kezdeti értékeket kell megadni ([12] 121. old., [17] 125, 126. old.).



6. ábra. a) Két görbére vonatkozó kezdeti- és peremérték-feladat megoldási tartománya. b) Háromszögalaprajzú hiperbolikus paraboloidhéj. ① szabad peremszakasz, ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ③ függőlegesen alátámasztott peremtartójú peremszakasz

Legyen S_1 és S_2 közös kezdőpontú görbeszakasz és alkalmazzuk az $S = S_1 \cup S_2$ jelölést. Legyen továbbá adott az S_2 minden pontjában egy i irány (egységvektor). Legyen megadva az F feszültségfüggvény értéke az S peremen egy φ függvénnyel, az F -nek az i irány menti deriváltja az S_2 peremen pedig egy ψ függvénnyel. Az

$$\mathcal{L}F = -g, \quad \left. \vphantom{\mathcal{L}F} \right\} \quad (10a)$$

$$F|_S = \varphi, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial i} \Big|_{S_2} = \psi \right\} \quad (10b)$$

kezdeti- és peremérték-feladatnak létezik egyértelmű megoldása az S_1 és S_2 végpontjain átmenő karakterisztikák által meghatározott $CDEF$ „négyzetben” (6a. ábra), ha S -en teljesülnek a peremérték-feladatra vonatkozó, S_2 -n pedig ezen túlmenően a kezdetiérték-feladatra vonatkozó feltételek. Ezek a következők:

a) az S peremgörbe a (10a) egyenlet értelmezési tartományában fekszik,

b) az S_1 és S_2 peremszakaszt elválasztja egy, a II-es sereghez tartozó karakterisztika,

c) az S_1 és S_2 peremszakaszt a II-es sereghez tartozó karakterisztikák csak egy pontban metszik, az S_2 peremszakasznak ezen túlmenően az I-es seregbeli karakterisztikákkal is csak egy metszéspontja van, és az S_1 peremszakasz B végpontján átmenő I-es karakterisztika metszi S_2 -t, továbbá S_2 -t egyetlen karakterisztika sem érinti,

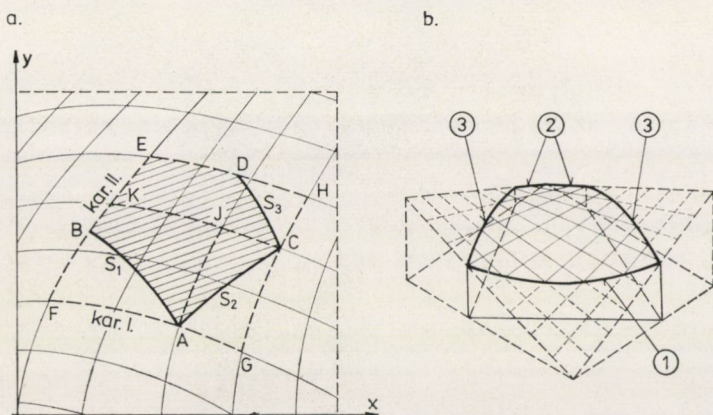
- d) S_1 folytonosan differenciálható, S_2 kétszer folytonosan differenciálható,
- e) az i irány folytonosan differenciálható módon változik S_2 mentén,
- f) az i irány az S_2 peremgörbe egy pontjában sem párhuzamos az S_2 ugyanazon pontbeli érintőjével,
- g) $g(x, y)$ folytonos,
- h) φ folytonos S -en, ezen felül egyszer folytonosan differenciálható S_1 -en és kétszer folytonosan differenciálható S_2 -n; ψ egyszer folytonosan differenciálható S_2 -n,
- i) $z(x, y)$ négyszer folytonosan differenciálható.

5.2. Három szakaszból álló perem

Ha az 5.1. szakaszban tárgyalt peremet úgy egészítjük ki egy S_3 peremszakasszal, hogy S_3 egyik végpontja legyen azonos az S_2 peremszakasz 6a. ábra szerinti C végpontjával, és S_2 -t válassza el S_3 -tól a C -n átmenő I irányú karakterisztika, akkor a (10a, b) kezdeti- és peremérték-feladat az új $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ peremre is egyértelműen megoldhatóvá tehető. Az S_3 -nak ugyanolyan tulajdonságokkal kell rendelkeznie, mint S_1 -nek, kivéve S_1 -nek az 5.1. szakasz c) pontbeli tulajdonságát. S_3 -tól ugyanis azt kell megkövetelni, hogy az I-es sereghez tartozó karakterisztikák S_3 -at csak egy pontban messék, és az S_3 perem D végpontján átmenő II-es karakterisztika messe S_2 -t vagy S_1 -et. Az S_1 görbénél is megengedjük, hogy a B végpontján átmenő I-es karakterisztika S_2 helyett S_3 -at is metszheti. Ha tehát az S_1 és S_3 peremen adunk meg F -re folytonosan differenciálható peremértékeket és az S_2 peremen kétszer, ill. egyszer folytonosan differenciálható kezdeti értékeket, akkor a (10a, b) feladatnak létezik egyértelmű megoldása a három peremszakasz végpontjain áthaladó karakterisztikák határolta $EFGH$ „négyyszögben” (7a. ábra), ([12] 125. old.).

A héj csak akkor lehet egyértelmű membránállapotban, ha az S -en kívüli peremszakaszai az 5.1. szakaszbeli esetben a 6a. ábra szerinti $ACDB$ „négyyszögben”, ill. az 5.2. szakaszbeli esetben a 7a. ábra szerinti $ACDEB$ „ötszögben” vannak. Ezek a peremszakaszokon — a korábbiakhoz hasonlóan — semmiféle feltétel nem szabható.

Az $S = S_1 \cup S_2$, ill. az $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ peremen előírható, hogy az S_2 peremszakasz legyen szabad, az S_1 , ill. az S_1 és S_3 peremszakasz pedig függetlenül alátámasztott, azaz a peremgörbe a peremtartóra leadódó erők kötélgörbéje legyen. (Az így megtámasztott héjra mutat példát a 6b. és 7b. ábra.) Ezeknek a statikai feltételeknek a három szakaszból álló perem esetében az $F|_{S_1} = 0$, $\partial F/\partial n|_{S_2} = 0$, $F|_{S_1} = a_1 + b_1x + c_1y_1(x)$, $F|_{S_3} = a_3 + b_3x + c_3y_3(x)$ matematikai feltételek felelnek meg, ahol $a_1, b_1, c_1, a_3, b_3, c_3$ állandó, $y = y_1(x)$, ill. $y = y_3(x)$ pedig az S_1 , ill. a S_3 perem egyenlete.

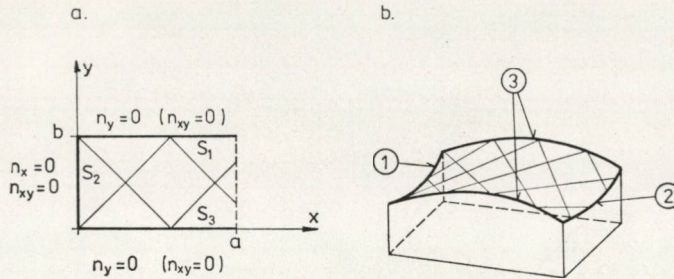


7. ábra. a) Három görbére vonatkozó kezdeti- és peremérték-feladat megoldási tartománya. b) Ötszög alaprajz feletti hiperbolikus paraboloidhéj. ① szabad peremszakasz, ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ③ függőlegesen megtámasztott peremtartójú peremszakasz

Az S_1 és az S_3 peremek A és C végpontjában az F feszültségfüggvény értéke, valamint az S_1 és az S_3 görbék érintőjének irányába mutató iránymenti deriváltja nem írható elő tetszőlegesen az $F|_{S_2} = 0$, $\partial F/\partial n|_{S_2} = 0$ feltételek miatt. Ezek a feltételek az a_1, b_1, c_1 és az a_3, b_3, c_3 állandók közül kettőt-kettőt meghatároznak. Ha az S_1 és az S_3 perem görbe, akkor az S_1 és az S_3 perem menti feltételben egy-egy állandó tetszőleges marad, ami azt eredményezi, hogy a héj ugyan membránállapotban van, de a belső erőket a peremfeltételek nem határozzák meg egyértelműen. Ha azonban az S_1 is és az S_3 is egyenes, akkor az $F|_{S_2} = 0$, $\partial F/\partial n|_{S_2} = 0$ feltételekből $a_1 = b_1 = c_1 = a_3 = b_3 = c_3 = 0$ következik, és a héj egyértelmű membránállapotban van. Hasonló a helyzet a 6a. ábrán vázolt esetben is.

Az 5.2. szakaszban tárgyalt eset (7a. ábra) az alábbi feladat általánosításának tekinthető. Legyen az (1) egyenlet kanonikus alakú. Legyen az S_1 perem az $(x = 0, y = b)$, $(x = a, y = b)$, az S_2 perem az $(x = 0, y = 0)$, $(x = 0, y = b)$, az S_3 perem az $(x = 0, y = 0)$, $(x = a, y = 0)$ pontok által meghatározott egyenesszakasz. (Ilyen lehet pl. egy nyereg alakú hiperbolikus paraboloid (8. ábra)). Ekkor az S_2 peremen előírva az $F|_{S_2} = 0$, $\partial F/\partial x|_{S_2} = 0$ feltételeket, az S_1 , ill. S_3 peremeken pedig az $F|_{S_1} = 0$, ill. $F|_{S_3} = 0$ feltételeket, elérhető, hogy a héj S_1 és S_3 pereme oldalnyomásmentes, az S_2 pereme pedig szabad legyen. Az S_2 -vel szemközti peremen nem adunk meg feltételt. Itt a peremtartónak a héjról leadódó minden erőt fel kell vennie. Az S_1 és S_3 peremeken ekkor az F feszültségfüggvény értékét írjuk elő, azaz az első peremértékeket adtuk meg.

Az S_1 és S_3 peremszakasz mentén (8a. ábra) F helyett megadható $\partial F/\partial n = \partial F/\partial y$, azaz a második peremérték, ill. $\alpha(\partial F/\partial n) + \beta F$, ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$), azaz a harmadik peremérték is ([17] 123. old., [18] 95. old.). Ha az S_1 és S_3 pereme-



8. ábra. Nyeregalakú hiperbolikus paraboloidhéj. a) A héjfelület alaprajza. b) A héjfelület. ① szabad peremszakasz, ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ③ függőlegesen megtámasztott peremtartójú peremszakasz

ken előírjuk $\partial F/\partial y$ értékét: $\partial F/\partial y|_{S_1} = c_1$, $\partial F/\partial y|_{S_3} = c_3$ (az $F|_{S_2} = 0$ feltételből: $c_1 = c_3 = 0$), akkor elérhető — azon túl, hogy S_2 szabad — az is, hogy az S_1 és S_2 perem nyíróerőmentes legyen. A peremfeltételek vegyesen is megadhatók ([19] 43. old.). Így pl. előírhatjuk F értékét az S_1 peremen, $\partial F/\partial y$ értékét pedig az S_3 peremen. Legyen $F|_{S_1} = a_1 x$, $\partial F/\partial y|_{S_3} = c_3$ (az $F|_{S_2} = 0$, $\partial F/\partial x|_{S_2} = 0$ feltételekből: $a_1 = c_3 = 0$). Ezzel biztosítható az S_2 szabad peremszakasz mellett az S_1 perem oldalnyomásmentessége és a S_3 perem nyíróerőmentessége. A fentiekén túl még bonyolultabb peremfeltételek is előírhatók ([19] 44. old., [12] 182. old.). A 8a. ábrán vázolt alaprajz feletti hiperbolikus héj a fenti esetek mindegyikében egyértelmű membránállapotban van.

Megjegyezzük, hogy az 5.1. szakaszban tárgyalt feladat tulajdonképpen egy 3. szakaszbeli kezdetiérték-feladatból (2a. ábra) (melynek megoldási tartománya a 6a. ábra szerinti $AFCG$ „négyyszög”) és egy 4.2. szakaszbeli peremérték-feladatból (4a. ábra) (melynek megoldási tartománya a 6a. ábra szerinti $AGDE$ „négyyszög”) tevődik össze.

Hasonlóképpen, az 5.2. szakaszban tárgyalt feladat (7a. ábra) egy — $AGCJ$ megoldási tartományú — 3. szakaszbeli kezdetiérték-feladatból (2a. ábra) és két — $AJKF$, ill. $CHEK$ megoldási tartományú — 4.2. szakaszbeli peremérték-feladatból áll (4a. ábra). Ha az S_1 és S_3 görbék elhelyezkedése olyan, hogy a B és D végpontjaikon átmenő karakterisztikák nem metszik S_2 -t, akkor a feladat több részfeladatra bontható, amelyek között a 4.1. szakaszbeli peremérték-feladat (3a. ábra) is szerepel.

Megemlítjük, hogy a téglalap tartományra (8a. ábra) megfogalmazott második, harmadik és vegyes peremérték-feladat a 7a. ábrán levő tartományra is kiterjeszhető [15]. Eszerint a 7a. ábrabeli S_2 peremen elő lehet írni F és $\partial F/\partial n$ értékét, valamint az S_1 peremen az $\alpha_1 (\partial F/\partial n) + \beta_1 F$, ($\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$), az S_3 peremen pedig az $\alpha_3 (\partial F/\partial n) + \beta_3 F$, ($\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$) lineáris kombináció értékét. Ezek a feltételek megfelelő $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$ együtthatók mellett magukba foglalják az első, második, harmadik és a vegyes peremértékeket is. Amennyiben $\alpha_1 \neq 0$ és $\alpha_3 \neq 0$, akkor még meg kell követelnünk, hogy az S_1 és S_3

peremgörbét ne érintse egyetlen karakterisztika sem. Így — a fentiek és a 2. szakasz alapján — az S_2 perem szabaddá tehető, ill. ha az S_2 egyenesszakasz, akkor megadható az n_n és n_{nt} redukált metszeterő nagysága. Ugyanakkor az S_1 és S_3 perem nemcsak függőlegesen megtámasztott lehet, hanem ha ezek a peremek egyenesek, akkor ott e helyett előírható az n_n vagy az n_{nt} redukált metszeterő értéke is. Az n_{nt} redukált nyíróerő értéke akkor is megadható az S_1 és S_3 peremeken, ha azok körívek. Vegyes peremérték-feladat esetében az S_1 lehet pl. függőlegesen megtámasztott peremtartójú perem, míg az S_3 — ha az pl. körív vagy egyenes — lehet nyíróerőmentes perem. Ha a fenti feladatokban a függőlegesen megtámasztott peremtartójú perem nem egyenes, akkor a héj membránállapota nem egyértelmű.

Az áttekintett kezdetiérték-, peremérték-, valamint kezdeti- és peremérték-feladatok egymás mellé építésével további feladatokat lehet konstruálni. Az ilyen összetett feladatok F megoldása folytonos. A metszeterő-függvényeknek azonban szakadásuk lehetnek.

6. A zárt peremgörbe problémája

A 8a. ábrán feltüntetett téglalaptartomány három peremszakaszán összesen négy feltételt kellett megadni ahhoz, hogy a Pucher-féle héjegyenesletnek létezzen egyértelmű megoldása. Látszólag természetesnek tűnhet egy olyan óhaj, hogy az S_2 peremen megadott két feltétel egyikét áthelyezve az S_2 -vel szemközti peremszakaszra — és így a tartományt határoló négy peremszakasz mindegyikén egy feltételt megadva — keressük a membránegyeneslet megoldását. Sajnos, *általános esetben a hiperbolikus egyenesletnek zárt peremgörbén előírt peremértékek mellett nem létezik megoldása*. Erre utal [10] a 946. oldalon, és ezt állapítja meg [13] is (466–471. old.).

Most nézzük meg néhány esetben kicsit konkrétan ezt a problémát.

6.1. Zárt peremgörbe melletti kezdetiérték-feladat

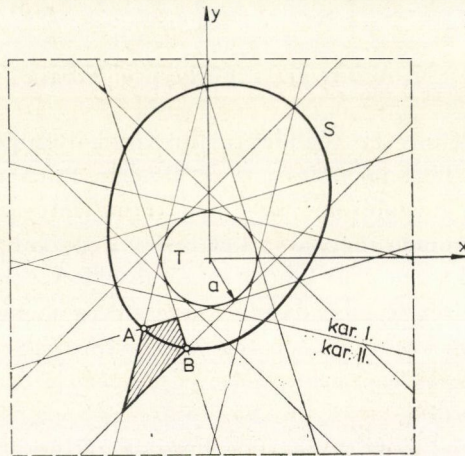
Ha a 3. szakaszban tárgyalt kezdetiérték-feladatnál az S peremgörbe teljesíti az ott előírt a , b , c feltételeket, akkor a perem lehet zárt görbe is. Ezt a tényt az alábbi példán szemléltethetjük. Tekintsünk egy álló helyzetű,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ egyenletű}$$

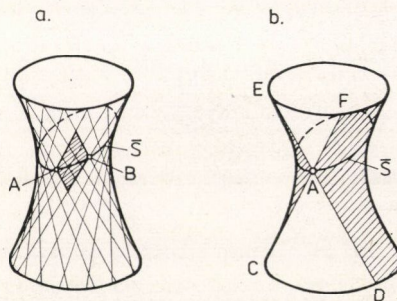
egyköpenyű hiperboloidot. Legyen ez az egyszerűség kedvéért forgáshiperboloid ($a = b$). Legyen az S perem (alaprajzi vetületben) egy kétszer folytonosan differenciálható, önmagát nem metsző, zárt görbe. Az S görbe által határolt

tartomány tartalmazza azt az a sugarú T körtartományt, amely nem tartozik a membránhéj-egyenlet (ill. a forgáshiperboloid) értelmezési tartományához (9. ábra). Az S peremgörbét minden karakterisztika csak egy pontban messe. Ha a feladatot a teljes hiperboloid-felületen tekintjük, akkor a hiperboloid-felületet megadó függvény kétértékűsége miatt az I-es és II-es karakterisztikák fedésbe kerülnek. Ez azt eredményezi, hogy a karakterisztikáknak látszólag két metszéspontjuk van az S zárt görbével (9. ábra). Valójában azonban csak egy van. Jól mutatja ezt, ha a karakterisztikák és az S peremgörbe felületi megfelelőit, az aszimptotikus vonalakat és a héj tényleges \bar{S} peremgömbjét tekintjük. Az aszimptotikus vonalak (a hiperboloid egyenes alkotói) ugyanis mindig csak egy pontban metszik \bar{S} -et (10a. ábra). Kikötjük, hogy az aszimptotikus vonalak nem érinthetik a héj tényleges \bar{S} peremgömbjét.

A teljes S peremgömbön írjuk elő a 3. szakaszbeli kezdeti feltételeket. Az így kapott kezdetiérték-feladat megoldásánál induljunk ki az S perem egy



9. ábra. Forgáshiperboloid kezdetiérték-feladatának adatai



10. ábra. A forgáshiperboloid kezdetiérték-feladatának megoldási tartománya. a) nyílt peremgörbe, b) zárt peremgörbe

tetszőleges A pontjából és haladjunk az S görbe egy B pontjáig. Ekkor létezik a feladatnak egyértelmű megoldása az A és B ponton átmenő karakterisztikák által meghatározott négyszögben (9. és 10a. ábra). Továbbhaladva az S görbén a megoldási négyszögtartomány egyre inkább elfajul, kinyílik és kezdi beteríteni az xy síkot. Az A pontba visszaérkezve a megoldási „négyszögtartomány” a teljes sík lesz — melyet most kétrétegűnek kell tekinteni —, kivéve azt a T tartományt, ahol a felület nincs értelmezve, és az A ponton áthaladó karakterisztikák által határolt kettős szögtartományt, amelynek a belsejét kell tekinteni, ha a karakterisztikákon a T körön levő érintési pontjuktól az A pont felé és azon túl haladunk, és a külsejét, ha az érintési pontjuktól az előbbivel ellentétes irányba haladunk. A szemléletesség kedvéért a megoldásból kimaradó tartományt a 10b. ábrán magán a középfelületen tüntettük fel axonometrikusan. Az ábrán ez a tartomány a palást CAD , ill. $EA F$ része, amelyeket természetesen végtelen kiterjedésükben kell tekinteni. Minthogy ekkor a megoldás az A ponton áthaladó két karakterisztikán is egyértelműen meghatározott, alkalmazva a 4.1. feladatot, az következik, hogy a megoldás a teljes hiperboloidfelületen, ill. alaprajzban a teljes értelmezési tartományban létezik és egyértelmű. (Megjegyezzük, hogy mivel a forgáshiperboloid kétértékű függvény, ezért az értelmezési tartományt kétrétegűnek kell tekinteni.) Kiegészítésképpen megemlítjük még, hogy a T tartományt határoló körvonal mentén a megoldás az $\mathcal{L}F = -g$ differenciálegyenletet csak határértékben fogja kielégíteni, mivel itt a felület függőleges síkmetszeteinek függőleges érintői vannak. Ezért e kör mentén a metszeterők tényleges nagysága is csak határértékben számítható.

A tárgyalt feladat során lényegében két esetre mutattuk meg a megoldás egyértelmű létezését. Az egyik a héjnak az \bar{S} peremgörbe feletti, másik az \bar{S} peremgörbe alatti részére vonatkozik. A gyakorlatban a héj két részéből mindig csak az egyiket vesszük figyelembe.

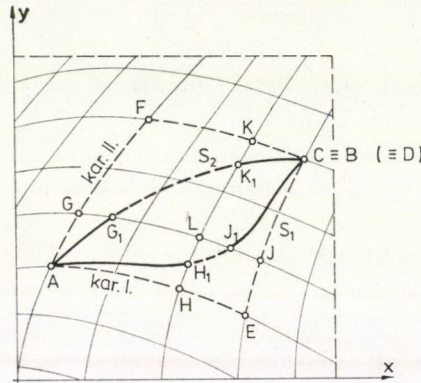
Kezdeti feltételekként az $F|_S = 0$, $\partial F/\partial n|_S = 0$ feltételeket előírva elérhető, hogy az egyköpenyű hiperboloidhéj teljes S pereme szabad legyen. A héj membránállapotához szükséges még egy zárt perem, melynek a feladat értelmezési tartományában kell feküdnie (és az általa határolt tartománynak tartalmaznia kell a T tartományt), de ezen a peremen már semmiféle feltételt nem lehet előírni, ennek a peremnek teljes megtámasztásának kell lenni, azaz a támaszoknak a héjról leadódó mindkét membránereőt fel kell venniük.

Ha az S zárt peremet úgy vesszük fel, hogy az általa határolt tartomány nem tartalmazza az értelmezési tartományhoz nem tartozó T körtartományt, akkor a karakterisztikák, ill. az aszimptotikus vonalak — az érintési pontokat leszámítva — két pontban metszik az S görbét, ill. az \bar{S} tényleges peremvonalat. Ezáltal a feladat túlhatározottá és így megoldhatatlanná válik. Ezért van az, hogy egy hiperbolikus héj a palástján levő szabad szegélyű nyílással

nem lehet membránállapotban. A következő szakasz szerint azonban a héjnak még peremgyűrűvel szegélyezett nyílása sem lehet, ha a gyűrű csak tengelyirányú erőknek ellenálló.

6.2. Zárt peremgörbe melletti peremérték-feladat

Tekintsük a 4.3. szakaszban tárgyalt peremérték-feladatot. Ennek a feladatnak mindig létezik egyértelmű megoldása, ha az S_1 és S_2 peremszakasz B és C végpontja különböző (5a. ábra). A B és C pont tetszőleges mértékben megközelítheti egymást, de egybe nem eshet ([13] 466. old.). Ha ugyanis a B és C pont azonos, akkor a feladat túlhatározottá válik. Ez könnyen belátható pl. a következőképpen. Legyen $B \equiv C$, és bontsuk fel részekre a feladatot az S_1 és S_2 által határolt tartománybeli tetszőleges L ponton átmenő karakterisztikák segítségével. Az első részben az S_1 -nek csak az \widehat{AH}_1 szakaszát, S_2 -nek pedig az \widehat{AG}_1 szakaszát vegyük figyelembe, a második részben az S_1 -nek csak a \widehat{CJ}_1 , az S_2 -nek pedig a \widehat{CK}_1 szakaszát (11. ábra). Ekkor a 4.3. feladat megoldása egyértelműen meghatározott az $AHLG$, ill. a $CKLJ$ „négy-szögben”. Ha az L pontban a kétféle megoldás azonos, akkor a megoldás

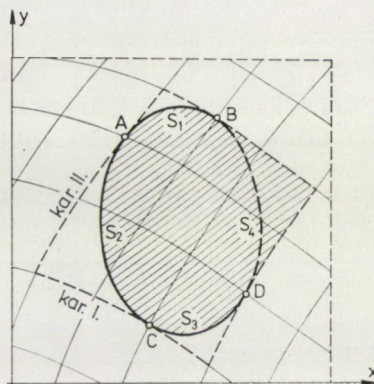


11. ábra. Zárt peremgörbe melletti peremérték-feladat részfeladatokra bontása

tovább folytatható, mivel a függvényérték most már adott lesz a \widehat{GL} és \widehat{KL} , ill. a \widehat{HL} és \widehat{JL} karakterisztika szakaszokon. Így 4.1. jellegű feladatokhoz jutunk, amelyeknek a $GLKF$, ill. az $EJLH$ „négy-szögekben” létezik egyértelmű megoldásuk. Ezért a megoldás meghatározott az S_1 görbe $\widehat{H_1J_1}$, ill. az S_2 görbe $\widehat{G_1K_1}$ szakaszán is. Következésképpen az F függvény értékeit ezeken a szakaszokon nem írhatjuk elő. Ha mégis ezt tesszük, akkor a feladat túlha-

tározottá válik. Ha az L pontban a kétféle megoldás különböző, akkor itt a feszültségfüggvénynek szakadása van, melyről tudjuk, hogy a karakterisztikák mentén továbbterjed. Ez esetben tehát nem létezik olyan megoldás, amely a vizsgált tartományban folytonosan differenciálható volna, azaz röviden: a keresett megoldás nem létezik.

Most pedig térjünk rá arra a problémára, amelyről a 8. ábra kapcsán a 6. szakasz elején szoltunk, csak a héj alaprajzi kontúráját ne négyszögnek, hanem egy sima görbének vegyük. A hiperbolikus egyenlet kezdeti- és peremérték-feladatainál megengedett, hogy az a peremszakasz, amelyen kezdeti értékeket adunk meg és az a szakasz, amelyen peremértékeket adunk meg, úgy csatlakozzon egymáshoz, hogy a csatlakozási pontban közös érintője legyen a két peremszakasznak és a csatlakozási ponton átmenő egyik karakterisztikának ([10] 880. old., [13] 467. old.). (Ekkor természetesen nem írhatók elő teljesen tetszőlegesen a kezdeti- és peremértékek.) Így elérhető pl., hogy az 5.2. szakaszban tárgyalt feladatnak (7a. ábra) akkor is legyen egyértelmű megoldása, ha a peremszakaszok valamennyi végpontban érintik a végpontokon átmenő megfelelő karakterisztikákat (12. ábra). Csatlakozzon érintőlegesen az S_1 és S_3 peremszakaszok végpontjaihoz a héjat fizikailag lezáró S_4 peremszakasz (12. ábra). Tudjuk, hogy az S_1 és S_3 peremeken peremértékeket,



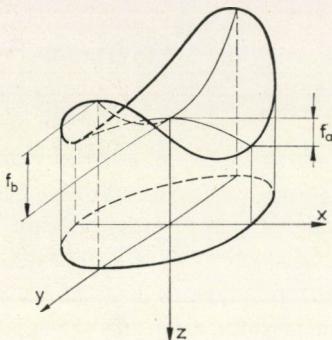
12. ábra. Kezdeti- és peremérték-feladat megoldási tartománya sima peremgörbe mellett

az S_2 peremen pedig kezdetiértékeket előírva, az S_4 peremen a feszültségfüggvény értékei egyértelműen meg vannak határozva. Ha az S_2 peremen az egyik feltételt elhagyjuk, és helyette az S_4 peremen írunk elő feltételt, akkor az így előálló feladat általában nem lesz korrekt felállítású ([13] 467. old.).

Mégis van egy héjtípus, amely zárt peremen előírt $F|_S = 0$ feltétellel, kétváltozós polinommal megadott függőleges teherre membránállapotban van. Ez a héj az ellipszis alaprajz feletti hiperbolikus paraboloid, melynek a szegélye körben függőlegesen van megtámasztva [8, 9] (13. ábra). Megoldás csak

akkor nem létezik, ha $f_a = K_i f_b$, ahol K_i meghatározott állandókat jelent, f_a és f_b pedig a két ívmagasság (13. ábra).

Azt, hogy mi okozza az említett feladat megoldhatóságát — az általános esettel ellentétben —, pontosan még nem tudjuk. Feltételezhetően döntő fontosságú ennél a feladatnál a peremgörbe speciális alakja (analitikus görbe),



13. ábra. Ellipszis alaprajz feletti hiperbolikus paraboloidfelület

a peremgörbe viszonya a karakterisztikákhoz és a teher polinom (analitikus függvény) volta, ill. a fennálló szimmetria.

A feladat érdekességét fokozza, hogy HADAMARD ([13] 469. old.) éppen egy ellipszis alakú tartomány esetében mutatott egy példát, amikor a $\partial^2 F / (\partial x \partial y) = 0$ egyenlet nem oldható meg, ha az ellipszison körben előírjuk F értékét.

Ehhez a feladathoz nagyon hasonlít a rombusz alaprajz feletti, oldalnyomásmentes peremű hiperbolikus paraboloid-(nyereg-)héj, amely egyenletesen megoszló teherre mindig membránállapotban van [7]. Ilyenkor a peremen körben meg kell adni az F feszültségfüggvény értékét, mégpedig úgy, hogy rombuszoldalanként lineárisan változzék.

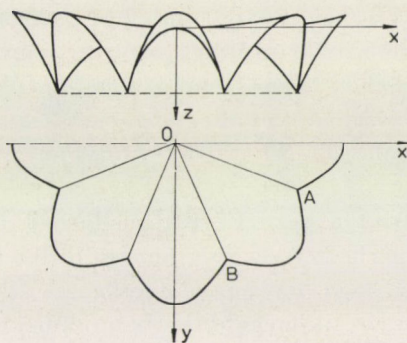
Ilyen jellegű — bár az említettekénél speciálisabb — az egyenletesen megoszló tehernek kitett torznégyszög, ill. a normál típusú nyereghéj [1, 8], mely membránállapotban tud lenni úgy, hogy a peremeken csak nyíróerők ébrednek. A torznégyszöghéjnél is és a normál típusú nyereghéjnél is a peremen körben szakaszonként az $F = as + b$ feltétel teljesül.

Megemlítjük még, hogy a hiperbolikus héjagnál nem korrekt az olyan peremérték-feladat, amikor a héjnak két, közös ponttal nem rendelkező peremén írunk elő feltételeket. Ezért a 10. ábrán feltüntetett egyköpenyű hiperboloid sem lehet egyértelmű membránállapotban, ha az alsó és felső végét peremgyűrűvel szegélyezzük, és mindkettőt függőlegesen támasztjuk meg, azaz ha az alsó és a felső peremen a feszültségfüggvényt úgy adjuk meg, hogy azok síkgörbék legyenek.

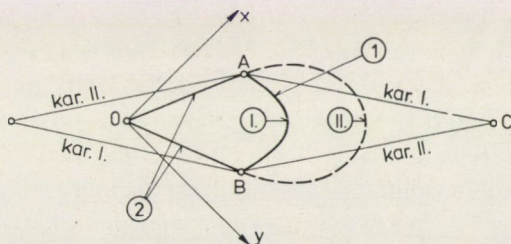
7. A szabad peremű hiperbolikus membránhéjak szerkesztésére vonatkozó néhány megjegyzés

7.1. Esztétikus megjelenése miatt kedvelt héjforma a hiperbolikus felületből alakított cikkelyes héj (14. ábra). Minden egyes cikkelynél a szomszédos cikkelyekkel közös oldalak teljes megtámasztásúak, míg a cikkely harmadik, külső oldala teljesen szabad (15. ábra). A cikkely szabad peremének alakját a 3. szakaszban foglaltaknak megfelelően kell felvenni. Ha pl. a cikkelyes héj középfelületét hiperbolikus paraboloidfelületből állítjuk elő, akkor a cikkely A , B végpontú szabad peremszakaszának kellően simának és olyannak kell lenni, hogy minden karakterisztikus egyenes csak egy pontban messe. Ezért a szabad perem görbéjének az A és B pontokon átmenő karakterisztikus egyenesek által határolt ACB szögtartományon belül kell feküdnie, miként a 15. ábrán az ① jelű görbe. Ha a szabad perem görbéjének vannak pontjai az ACB szögtartományon kívül (ilyen pl. a 15. ábrán feltüntetett ② jelű görbe), akkor vannak olyan karakterisztikák, amelyek a peremgörbét két pontban is metszik. Ez a tény a feladat túlhatározottságát eredményezi, ami azt jelenti, hogy a héj, amelynek a szabad pereme ilyen görbe, nem lehet membránállapotban.

7.2. A kezdetiérték-, ill. a kezdeti- és peremérték-feladatoknál az S_2 kezdeti görbén meg lehet adni úgy a Cauchy-féle kezdeti feltételeket, hogy a görbe mentén a héj egy vagy több szakaszon szabad peremű legyen. Ha az



14. ábra. Cikkelyes hiperbolikus héj



15. ábra. A héj egy cikkelyének alaprajza. ① szabad peremszakasz, ② teljesen megtámasztott peremszakasz

S_2 peremnek csak egy szakasza szabad, akkor ott előírható az $F = 0, \partial F/\partial n = 0$ feltétel. Ha kettő vagy több szabad peremszakasz is van S_2 -n, és két szabad peremszakaszt minden esetben egy harmadik, nem szabad peremszakasz köt össze, akkor a szabad peremszakaszok közül csak egyen írható elő az $F = 0, \partial F/\partial n = 0$ feltétel, míg a többin általában nem. Ilyen pl. az az eset, amikor az S_2 kezdeti görbének van egy közbülső egyenesszakasza. Ezen megadjuk az n_n, n_{nt} peremerőket, az egyenesszakaszhoz csatlakozó görbeszakaszokon pedig megköveteljük, hogy a perem legyen szabad. Az egyenesszakaszon az n_n és n_{nt} erőkre még ki kell kötni, hogy folytonosak legyenek és a szakasz végpontjában az értékük nulla legyen. Ekkor az egyik szabad peremszakaszon megadható az $F = 0, \partial F/\partial n = 0$ feltétel. Ha az említett közbülső szakaszon azt írjuk elő, hogy $n_n = n_{nt} = 0$ legyen, azaz ez a peremszakasz is szabad legyen, akkor az egész S_2 perem egyetlen peremszakasznak minősül, és ezen végig előírható az $F = 0, \partial F/\partial n = 0$ feltétel.

Ha a hiperbolikus héjnak kettő vagy több szabad peremszakasza van, és azok nem illeszkednek egy olyan görbéhez, amelyet minden karakterisztika legfeljebb egy pontban metsz, akkor a héj általában nem lehet membránállapotban, ill., ha létezik is a héjnak membránállapota, az nem egyértelmű. Ha létezik ugyan az említett görbe, de a szabad peremszakaszok közötti peremszakaszokon nem simán csatlakozó kezdeti értékeket, hanem peremértékeket adunk meg, akkor a héjegyeneslet megoldása nem lesz egyértelmű. Ezen állításaink helyessége a 3. és 5. szakaszban mondottakból következik.

Az egyenletesen megoszló erővel terhelt, négyszögtartomány feletti nyereghéj, amely a terheket a két szemközti peremén vállnyomással hordja, míg a másik két pereme szabad, különleges esetnek számít. Ez a héj más — pl. a szabad peremek vonalával párhuzamos irányban változó — teherre már nincs membránállapotban.

A 3. szakasz szerint a kezdetiérték-feladatnak akkor létezik biztosan megoldása, ha a peremgörbe kétszer folytonosan differenciálható. Ebből azonban nem következik az, hogy ha a peremgörbe nem differenciálható kétszer folytonosan, akkor nem létezik megoldás. Ha a héjnak van két szabad peremszakasza, amelyek törésponttal csatlakoznak egymáshoz, és a két peremszakasz olyan, hogy külön-külön kétszer folytonosan differenciálható, és a két peremgörbéből előálló görbét minden karakterisztika legfeljebb egy pontban metszi, akkor létezik folytonos megoldás, és az egyértelmű is az egyesített peremgörbe végpontjain áthaladó karakterisztikák által határolt „négyszögben”. Ekkor nem szükségszerű, hogy a csatlakozási ponton átmenő karakterisztikák mentén a megoldás — ha a $g(x, y)$ teherfüggvény folytonos — folytonosan differenciálható legyen. Ugyanígy nem szükségszerű, hogy ha a $g(x, y)$ teherfüggvény folytonosan differenciálható, akkor a megoldás kétszer folytonosan differenciálható legyen. Ez pedig azzal a következménnyel járhat, hogy a héjban a metszeterők nem folytonosak.

Az elmondottakat egy példán illusztráljuk. Tekintsünk egy $g = \text{állandó}$ megoszló erővel terhelt hiperbolikus paraboloidhéjat. Legyen a középfelület egyenlete $2z = -x \cdot y$. A héj alaprajzi idomát határolják egyenesszakaszok (16. ábra). Legyen az AO és OC peremszakasz teljes megtámasztású, az AB és BC peremszakasz szabad. Az ABC szabad peremvonalnak a B pont töréspontja. Ekkor a feladat Pucher-féle differenciálegyenlete a következő:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -g. \quad (11)$$

Peremfeltételként pedig előírjuk, hogy az F feszültségfüggvény az A pontban legyen nulla, továbbá az $\partial F/\partial x$ és $\partial F/\partial y$, parciális deriváltak az ABC töröttvonal mentén legyenek nullák, azaz

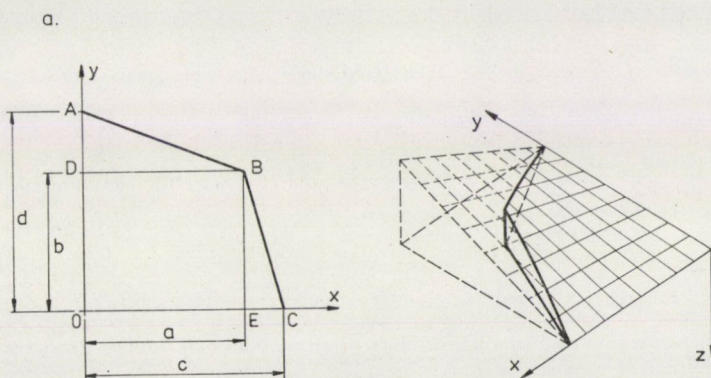
$$F(0, d) = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{ABC} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{ABC} = 0. \quad (12)$$

A feladat megoldása három részből tevődik össze. Az F_1 megoldás az ABD háromszögben, az F_2 megoldás a BCE háromszögben, az F_3 megoldás pedig az $ODBE$ téglalapban van értelmezve. A megoldásként kapott feszültségfüggvények a következők:

$$F_1 = g \left(-\frac{ad^2}{2(d-b)} + dx + \frac{da}{d-b}y - \frac{d-b}{2a}x^2 - \frac{a}{2(d-b)}y^2 - xy \right),$$

$$F_2 = g \left(-\frac{bc^2}{2(c-a)} + \frac{cb}{c-a}x + cy - \frac{b}{2(c-a)}x^2 - \frac{c-a}{2b}y^2 - xy \right),$$

$$F_3 = g \left(-\frac{ad+bc}{2} + dx + cy - \frac{d-b}{2a}x^2 - \frac{c-a}{2b}y^2 - xy \right).$$



16. ábra. a) Szabad szegélyű hiperbolikus paraboloidhéj alaprajza. Az ABC szabad peremvonalnak a B pont töréspontja. b) A héjfelület

A redukált metszeterők az ABD háromszögben:

$$n_x^{(1)} = -\frac{a}{d-b}g, \quad n_y^{(1)} = -\frac{d-b}{a}g, \quad n_{xy}^{(1)} = g,$$

a BCE háromszögben:

$$n_x^{(2)} = -\frac{c-a}{b}g, \quad n_y^{(2)} = -\frac{b}{c-a}g, \quad n_{xy}^{(2)} = g,$$

az $ODBE$ téglalapon pedig:

$$n_x^{(3)} = -\frac{c-a}{b}g, \quad n_y^{(3)} = -\frac{d-b}{a}g, \quad n_{xy}^{(3)} = g.$$

Az F_1 , F_2 , F_3 függvények az értelmezési tartományuk belsejében végtelen sokszor folytonosan differenciálhatók. A BE és EB karakterisztikák mentén, azokra merőlegesen azonban csak egyszer differenciálhatók folytonosan. Ebből az következik, hogy ha az F_1 , F_2 és F_3 függvényeket mint egyetlen függvényt tekintjük, akkor az kielégíti a (11) egyenletet és a (12) feltételeket, de nem lesz az egész $ABCO$ négyszögben kétszer folytonosan differenciálható. Ezért a BD és BC karakterisztikák mentén a karakterisztikákkal párhuzamos metszeterő-függvényeknek szakadásuk van. Így pl. a BD karakterisztika mentén $n_x^{(1)} \neq n_x^{(3)}$ és az BC karakterisztika mentén $n_y^{(2)} \neq n_y^{(3)}$.

Ha a szabad perem kétszer folytonosan differenciálható, akkor a gyakorlatban előforduló elég sima teherfüggvények mellett a metszeterő-függvényeknek nem lesz szakadásuk. Ezért a gyakorlatban szabad peremű hiperbolikus héjaknál célszerű a szabad peremvonal esetleges töréspontjait megfelelő lekerekítéssel kiküszöbölni.

IRODALOM

1. BÖLCSKEI E.—OROSZ Á.: Vasbeton szerkezetek. Héjak. Tankönyvkiadó, Budapest 1973
2. COURANT, R.—HILBERT, D.: Methoden der mathematischen Physik. 2. Band. Springer-Verlag, Berlin 1937
3. CZÁCH L.—SIMON L.: Parciális differenciálegyenletek I. (ELTE egyetemi jegyzet), Tankönyvkiadó, Budapest 1969
4. CSONKA P.: A membránhéjak peremabroncsáról. *MTA VI. Oszt. Közl.* **30** (1962), 89—91.
5. CSONKA P.: Membránhéjak teljesen szabad peremmel. *MTA VI. Oszt. Közl.* **31** (1962), 213—215.
6. CSONKA P.: Süveghéjak feszültségfelületének peremvonaláról. *MTA VI. Oszt. Közl.* **34** (1964), 367—372.
7. CSONKA P.: Két irányban görbe héj rombusz alaprajz felett. *MTA VI. Oszt. Közl.* **34** (1964), 373—380.
8. CSONKA P.: Membránhéjak. (ÉKME egyetemi jegyzet), Tankönyvkiadó, Budapest 1965
9. DULÁCSKA E.: Ellipszis alaprajzú héjszerkezetek. *Mélyépítéstudományi Szemle* **10** (1960), 284—286.

10. FRANK, PH.—MISES, R. VON: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei. I. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966
11. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР, А. Л.: Теория упругих тонких оболочек. Гос. Изд. Техникo—Теорет. Лит. Москва, 1953.
12. GOURSAT, É.: Cours d'Analyse Mathématique. Tom III. 4. éd. Gauthiers-Villars, Paris 1927
13. HADAMARD, J.: Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Ed. Hermann, Paris 1932
14. KAYA SAYAR, F.: Untersuchung des Membranzustandes der verallgemeinerten Rohrschalen mit besonderer Berücksichtigung der negativen Flächenkrümmung. Dissertation. Technische Hochschule Hannover, 1961
15. KORN, G. A.—KORN, T. M.: Matematikai kézikönyv műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1975
16. MIRANDA, C.: Partial Differential Equations of Elliptic Type. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970
17. ПЕТРОВСКИЈ, I. G.: Előadások a parciális differenciálegyenletekről. Akadémiai Kiadó, Budapest 1955
18. СМИРНОВ, М. М.: Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Изд. БТУ. Минск 1974.
19. ТУИНОНОВ, А. N.—SZAMARSKIJ, A. A.: A matematikai fizika differenciálegyenletei. Akadémiai Kiadó, Budapest 1956
20. ВЕКУА, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956
21. ВЛАСОВ, В. З.: Общая Теория оболочек и ее приложения в Технике. Гос. Изд. Техникo—Теорет. Лит., Москва—Ленинград, 1949.

On the Existence and Uniqueness Conditions of the Membrane State of Shell Structures — I. Hyperbolic Shells. The paper deals with the question whether on the edges of a shell loaded by vertical forces of optional distribution what kinds of support conditions should or might be prescribed in order to obtain a statically definite membrane-state of the shell. The existence and uniqueness conditions of the solution to the membrane-shell equation are established for different boundary conditions on the basis of the theory of the partial differential equations. The present part of the paper contains the results obtained on the investigations of hyperbolic shells.

Über die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen des Membranzustands der Schalenkonstruktionen — I. Hyperbolische Schalen. Die Abhandlung erörtert die Frage, welche Unterstützungsbedingungen an den Rändern einer mit in senkrechter Richtung wirkenden Kräften beliebiger Verteilung belasteten Schale vorgeschrieben werden sollen oder dürfen, um einen statisch bestimmten Membranzustand der Schale hervorzurufen. Die Daseins- und Eindeutigkeitsbedingungen der Lösung der Membranschalengleichung werden bei verschiedenen Randbedingungen aufgrund der Theorie der partiellen Differentialgleichungen festgestellt. Der vorliegende Teil der Abhandlung enthält die im Bereich der hyperbolischen Schalen erhaltenen Untersuchungsergebnisse.



MEGJEGYZÉS A FELTÉTELES KINEMATIKAI KAPCSOLATOKKAL RENDELKEZŐ RÚDSZERKEZETEK SZÁMÍTÁSÁHOZ

PÁCZELT ISTVÁN*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

HERPAI BÉLA**

[Beérkezett 1979. február 14-én]

Jelen munka a belső és külső feltételes kinematikai (geometriai) kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezetek szilárdsági viszonyainak számítását — elsőrendű elmélet alapján — a végső ismeretlenek tekintetében különböző kvadratikus programozási feladatra vezeti vissza. Síkbeli szerkezeteknél fellépő belső feltételes kinematikai kapcsolatok osztályozása után a rúdszerkezet geometriai mátrix rangjának figyelembevételével elemzi az elmozdulás és erőmódszerre alapozott programozási feladatokat. Kimutatja, hogy az elmozdulásmódszer alkalmazási köre szélesebb mint az erőmódszeré, mivel ez utóbbival csak statikailag határozatlan rúdszerkezetek vizsgálhatók. Végezetül az elmozdulásmódszerre alapozott programozási feladatra — belső feltételes kinematikai kapcsolat esetén számszerű példákat mutat be.

I. Bevezetés

Az építészet, gépészet egyes szerkezeteinek (berendezéseinek, gépeinek) szilárdsági viszonyait jól nyomon követhetjük a szerkezet rúdszerkezetként történő modellezésével.

A szerkezetek egy része

I. rugalmas-szilárd alapon, támaszokon nyugszik oly módon, hogy az alaptól a terhelés hatására el is válhatik, azaz köztük a kapcsolat egyoldalú; másik részüknél

II. a szerkezet néhány eleme között gyártásból, szerelésből adódóan kezdeti hézag is van, illetve

III. kapcsolatuk korlátozott teherbírású.

Ezeket az eseteket általánosabb megfogalmazásban definiált rúdszerkezetek közé sorolhatjuk. Nevezetesen az olyan rúdszerkezetet, amelyiken a rudak kapcsolódási helyeinek legalább egyikén az oda befutó rúdvégek elmozdulásai és szögelfordulásai között egyenlőtlenségi feltételek írhatók fel, *belső feltételes kinematikai (geometriai) kapcsolatokkal rendelkező — vagy belső feltételes kinematikai kapcsolatú — rúdszerkezetnek* nevezzük (pl. a II. eset).

Amennyiben a belső feltételes kinematikai kapcsolatokon kívül a megtámasztásoknál is felírhatók elmozdulásra és szögelfordulásra vonatkozó

* Dr. Páczelt István, 3531 Miskolc, Győri kapu 37, III/3.

** Dr. Herpai Béla, 3529 Miskolc, Kulich Gy. u. 13, IV/5.

egyenlőtlenségek, úgy belső és külső feltételes kinematikai kapcsolatú vagy egyszerűbben *feltételes kinematikai kapcsolatú rúdszerkezet*ről beszélünk.

Az olyan rúdszerkezetet, amelyen csak a megtámasztásoknál írhatók fel elmozdulásra és szögelfordulásra vonatkozó korlátok, *feltételes külső kinematikai kapcsolatú rúdszerkezet*nek nevezzük (pl. az I. eset).

Az olyan rúdszerkezetet, amelyen a megtámasztásnál (vagy a belső rúdkapcsolatoknál) (vagy mindkettőnél) a támasztóerőrendszerre (vagy a belső erőkire) (vagy mindkettőjükre) egyenlőtlenségi korlátok írhatók fel, *feltételes külső (vagy belső) (vagy külső és belső) dinamikai (szilárdsági) kapcsolatú rúdszerkezet*nek nevezzük (III. eset).

Amikor a rúdszerkezeten kinematikai és dinamikai korlátok is szerepelnek, *feltételes kapcsolatú rúdszerkezet*ről beszélünk.

A fenti szerkezetek szilárdsági viszonyainak tisztázása a matematikai programozás módszereinek felhasználásával történhetik.

Az egyoldalú kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezetek kvadratikus programozással történő megoldásával foglalkozó első munkák a 60-as évek végére tehetőek [1–3]. A kutatók mind a mai napig figyelmet fordítanak e területre (lásd az irodalomjegyzékben [4], [5] alatt felsoroltakat stb.) egyrészt elvi, másrészt számítástechnikai problémák tisztázása céljából. Így például: korlátozott teherhírású kapcsolatokkal rendelkező szerkezeteket vizsgál a [6] munka; a nagyelmozdulások hatását vizsgálja — másodrendű elmélet felhasználásával — a [7] tanulmány.

Jelen munkánkban feltételezzük, hogy a szerkezet anyaga lineárisan rugalmas, szilárdságtani viszonyai kis elmozdulásokkal és alakváltozásokkal számoló ún. elsőrendű elmélettel [8] leírhatók.

A II. típusú feladatokkal elsősorban gépészeti szerkezeteken pl. szerzőszámgépeken találkozhatunk. Általában ezek a berendezések ideálisan-rugalmas anyagúnak tekinthetők, továbbá a terhelés hatására fellépő elmozdulások, deformációk kicsinyek. A szerkezeti elemek közötti kezdeti hézag nagysága befolyásolja a szerkezetben kialakuló feszültségi állapotot, az egyes elemek deformációját, az elemek együtt dolgozását, a szerkezet dinamikai viselkedését.

Az alábbiakban a terhelést statikusnak tekintjük, az egyoldalú kapcsolatokkal rendelkező rendszer dinamikájának kérdéseivel csak egy későbbi tanulmányban fogunk foglalkozni.

2. A rúdszerkezetek alapegyenlete

Az ideálisan rugalmas anyagú, feltételes kapcsolatok nélküli rúdszerkezet alapegyenlete [8] alapján

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G}^* \\ \mathbf{G} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (1)$$

alakú, ahol \mathbf{q} — a csomóponti terhek, \mathbf{t} — a rúdmenti kinematikai terhek vektora, \mathbf{u} — a csomóponti elmozdulások, \mathbf{s} — a rudak belső erőinek vektora, \mathbf{G} — a szerkezet geometriai mátrixa, \mathbf{F} — a szerkezet hajlékonysági mátrixa.

Az (1) egyenlet első sora a csomópontok egyensúlyát, a második sora az elmozdulások kompatibilitását fejezi ki.

Az \mathbf{u} , \mathbf{q} vektorok koordinátái a viszonyítási (globális) koordináta-rendszerben az \mathbf{s} , \mathbf{t} — a rudakhoz kötött helyi koordináta-rendszerben értelmezettek.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az (1) alapegyenletet a

$$\min \left\{ \Pi_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^* \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{s}^* \mathbf{t} \mid \mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \right\} \quad (2)$$

kvadratikus programozási feladatként is tárgyalhatjuk, azaz keressük a $\Pi_1 = \Pi_1(\mathbf{s})$ minimumát a

$$\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3)$$

mellékfeltétel, illetve korlátozás mellett.

A programozási feladathoz tartozó Lagrange-féle függvény

$$L_1 = L_1(\mathbf{s}, \mathbf{u}) = \Pi_1(\mathbf{s}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q}), \quad (4)$$

míg a minimum feltételből adódóan a

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{u}^*} = \mathbf{0} = \mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} \quad (5a)$$

egyensúlyi egyenlethez,

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0} = \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{t} \quad (5b)$$

kompatibilitási egyenlethez jutunk.

3. A programozási feladat megfogalmazása feltételes kinematikai kapcsolatok esetében

3.1. A mellékfeltételek

Amint már az előzőekben említettük, külső és belső feltételes kinematikai kapcsolatokról beszélünk.¹

3.1.1. A KFK kapcsolatokat lényegében két osztályba lehet sorolni. Az első esetben a támaszokat, a szilárd alapot merevnek tekinthetjük a rúd-szerkezethez képest, míg a második esetben rugalmasnak. Mivel az (1) egyenlet

¹ A továbbiakban használni fogjuk az alábbi jelöléseket
Külső feltételes kinematikai kapcsolat = KFK kapcsolat;
Belső feltételes kinematikai kapcsolat = BFK kapcsolat.

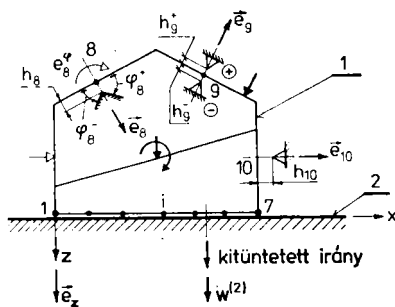
olyan rúdszerkezetre érvényes, ahol a terhelés csomópontokban hat, a rugalmas alap hatását, annak a rúdszerkezettel való együtdolgozását csak közelítőleg, diszkrét pontokban a feladat természetéből következő kitüntetett irányban (pl. az egyik test normálisa) vesszük figyelembe.

Ehhez egyrészt a tartószerkezet rugalmas alappal érintkező részén fiktív csomópontokat veszünk fel, másrészt a rugalmas alap elmozdulás-állapotát leíró differenciálegyenletet, integrálegyenletet vagy valamilyen variációs elv alkalmazásakor a szóban forgó funkcionált is diszkrétizáljuk, a tartószerkezet kérdéses tartószakaszán megtalálható valóságos és fiktív csomópontok figyelembevételével. Feltételezzük, hogy a tartószerkezet és az alap között a súrlódás elhanyagolható, így közöttük csak normális irányú nyomás jön létre. A támaszokat is minden esetben súrlódásnélkülinek tekintjük.

A rúdszerkezet és a rugalmas alap vagy a támaszok között terheletlen állapotban kezdeti hézag, rés lehetséges.

Jelölje a hézag értékeiből alkotott vektort a globális rendszerben $\mathbf{h}^* = [h_1, \dots, h_N]$, ahol N a rugalmas alap és a rúdszerkezet közötti kölcsönhatást figyelembe vevő pontok számának és a támaszoknál jelentkező korlátozások számának összege. Megemlítjük, a \mathbf{h} vektor elemei nemcsak távolságok, hanem szögek is lehetnek, így a kezdeti hézagot, mint az (1)-ben szereplő \mathbf{u} elmozdulást, \mathbf{s} belső erőt — általánosított értelemben kell használnunk.

Meilékfeltételek (korlátozások) felírása céljából vizsgáljuk meg az 1. ábrán vázolt szerkezetet. A 2 jelű rugalmas talaj és rúdszerkezet között az érintkezés-elválás feltételét 7 db pontban ellenőrizzük. A rúdszerkezet 8, 9, 10 jelű pontjai, keresztmetszetei a terhelés hatására a feltüntetett merev támaszokra is támaszkodhatnak. A 8 jelűnél a keresztmetszet \vec{e}_8 irányú eltolódása és szögelfordulása egy, illetve két irányban van korlátozva, a 9 jelűnél az \vec{e}_9 irányú elmozdulás van korlátok közé szorítva, míg a 10 jelű keresztmetszetenél annak vízszintes irányú elmozdulására írhatunk fel korlátot. Az egységvektorok által meghatározott irányt *kitüntetett irány*nak fogjuk nevezni.



1. ábra. Külső feltételes kinematikai kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezet, 2 — rugalmas talaj, 1 — merev támasz

Jelölje a rúdszerkezet 1–7 jelű pontjainak \vec{e}_z irányú elmozdulását $\mathbf{w}^{(1)}$, míg a rugalmas alap azonos koordinátájú pontjainak ugyanezen irányú elmozdulását $\mathbf{w}^{(2)}$, ($\mathbf{w}^{(1)*} = [w_1^{(1)}, \dots, w_7^{(1)}]$ (1) ↔ (2)).

A támaszoknál levő keresztmetszetek \vec{e}_j ($j = 8, 9, 10$) irányú elmozdulását, illetve a 8-as keresztmetszet \vec{e}_8^g irányú szögelfordulását $\mathbf{d}^{(1)}$ vektor foglalja magába. A $\mathbf{w}^{(1)}$, $\mathbf{d}^{(1)}$ vektorok a rúdszerkezet elmozdulásállapotát jellemző \mathbf{u} csomóponti elmozdulásvektorból megfelelően választott \mathbf{A}^w , \mathbf{A}_+^d mátrixok segítségével

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{A}^w \mathbf{u}, \quad \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{A}_+^d \mathbf{u} \quad (6a, b)$$

összefüggéseken keresztül számolhatók.

Ily módon a rúdszerkezet

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(1)} \\ \mathbf{d}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w \\ \mathbf{A}_+^d \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{A} \mathbf{u} \quad (7)$$

vektoraival jellemzett elmozdulásaira kell felírni az egyoldalú kapcsolatokból származó mellékfeltételeket, korlátokat. Mint látni fogjuk, a felírható korlátok száma a $\mathbf{k}^{(1)}$ vektor méretét meghaladhatja.

Vegyük sorra ezeket.

A rugalmas alap és a rúdszerkezet között az i jelű pontban érintkezés lép fel, ha

$$g_i^w = w_i^{(2)} - w_i^{(1)} + h_i^w = 0; \quad p_i^w \geq 0 \quad (8a)$$

és rés van, ha

$$g_i^w = w_i^{(2)} - w_i^{(1)} + h_i^w > 0; \quad p_i^w = 0, \quad (8b)$$

vagyis, bármely pontban áll a

$$p_i^w g_i^w = 0, \quad i = 1, \dots, 7, \quad (8c)$$

feltétel, ahol p_i^w – a rúdszerkezet és az alap között fellépő érintkezési erő.

Bevezetve a relatív hézagok \mathbf{g}^w , a kezdeti hézagok \mathbf{h}^w , továbbá \mathbf{p}^w érintkezési erők vektorát, a (8a–c) feltételeket tömörebb formában is felírhatjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}^w &= \mathbf{w}^{(2)} - \mathbf{w}^{(1)} + \mathbf{h}^w \geq \mathbf{0}; \\ \mathbf{p}^w &\geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{p}^{w*} \mathbf{g}^w = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (9a-c)$$

ahol

$$\mathbf{g}^{w*} = [g_1^w, \dots, g_7^w], \quad \mathbf{p}^{w*} = [p_1, \dots, p_7] \text{ stb.}$$

Merev támaszoknál (lásd 1. ábra) a 8 jelűnél az \vec{e}_8 irányú elmozdulásra, $-\vec{e}_8$ irányú reakcióerőre

$$g_8 = h_8 - d_8 \geq 0; \quad F_8 \geq 0; \quad g_8 \cdot F_8 = 0 \quad (10a-c)$$

összefüggések írhatók fel.

Az e_8^e irányban egyrészt

$$g_8^+ = \varphi_8^+ - d_8^e \geq 0; \quad M_8^+ \geq 0; \quad g_8^+ \cdot M_8^+ = 0 \quad (11a-c)$$

+ jelű korlátozások, másrészt

$$g_8^- = \varphi_8^- + d_8^e \geq 0; \quad M_8^- \geq 0; \quad g_8^- \cdot M_8^- = 0 \quad (12a-c)$$

— jelű korlátozások fogalmazhatók meg.

A 9 jelűnél \vec{e}_9 irányban egyrészt

$$g_9^+ = h_9^+ - d_9 \geq 0; \quad F_9^+ \geq 0; \quad g_9^+ \cdot F_9^+ = 0, \quad (13a-c)$$

másrészt

$$g_9^- = h_9^- + d_9 \geq 0; \quad F_9^- \geq 0; \quad g_9^- \cdot F_9^- = 0, \quad (14a-c)$$

míg végezetül a 10 jelűnél

$$g_{10} = h_{10} - d_{10} \geq 0; \quad F_{10} \geq 0; \quad g_{10} \cdot F_{10} = 0 \quad (15a-c)$$

írható.

Itt F_8, \dots, F_{10} a támaszoknál keletkező reakcióerőket, nyomatékokat jelentik. Ezeket a + indexnél vagy index nélküli esetben a kitüntetett iránnyal ellentétesek, míg — indexnél azonos irányúak. Definiálva

$$\mathbf{r}^{+*} = [F_8, M_8^+, F_9^+, F_{10}]; \quad \mathbf{r}^{-*} = [M_8^-, F_9^-] \quad (16a, b)$$

$$\mathbf{r}^* = [\mathbf{r}^{+*} \mid \mathbf{r}^{-*}] \quad (17)$$

támasztóerők vektorát, a

$$\mathbf{g}_+^{r*} = [g_8, g_8^{e+}, g_9^+, g_{10}]; \quad \mathbf{g}_-^{r*} = [g_8^e, g_9^-] \quad (18a, b)$$

$$\mathbf{g}^{r*} = [\mathbf{g}_+^{r*} \mid \mathbf{g}_-^{r*}] \quad (19)$$

relatív hézag, továbbá

$$\mathbf{h}_+^{r*} = [h_8, \varphi_8^+, h_9^+, h_{10}]; \quad \mathbf{h}_-^{r*} = [\varphi_8^-, h_9^-] \quad (20a, b)$$

$$\mathbf{h}^{r*} = [\mathbf{h}_+^{r*} \mid \mathbf{h}_-^{r*}] \quad (21)$$

kezdeti hézag vektorokat, a

$$\mathbf{d}_+^{(1)*} = [d_8, d_8^e, d_9, d_{10}] = \mathbf{u}^* \mathbf{A}_+^{d*}; \quad (22a)$$

$$\mathbf{d}_-^{(1)*} = [d_8^e, d_9] = \mathbf{u}^* \mathbf{A}_-^{d*} \quad (22b)$$

elmozdulásvektorokat, a (10a–15c) feltételek helyett tömör formában

$$\mathbf{g}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_+^r \\ \mathbf{g}_-^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_+^r \\ \mathbf{h}_-^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_+^d \\ -\mathbf{A}_-^d \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{h}^r - \mathbf{A}^r \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad (23a)$$

$$\mathbf{r} \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{r}^* \mathbf{g}^r = 0 \quad (23b, c)$$

alakban írhatók.

Ily módon a rugalmas alappal és merev támaszokkal rendelkező rúdszerkezetre vonatkozó korlátozások

$$\mathbf{g}' = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^w \\ \mathbf{g}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^w \\ \mathbf{h}^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w \\ \mathbf{A}^r \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(2)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (24a)$$

$$\mathbf{g}' = \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{w} \geq \mathbf{0}, \quad (24b, c)$$

$$\bar{\mathbf{p}}^* = [\mathbf{p}^{w*} \mid \mathbf{r}^*] \geq \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{p}}^* \mathbf{g}' = 0$$

alakban írhatók fel.

Megjegyzés 1. Amennyiben minden támasznál + és – jelű korlátozások lépnek fel, úgy $\mathbf{A}_+^d = \mathbf{A}_-^d$.

Megjegyzés 2. Ha a támaszok rugalmasak, akkor (23a) helyett

$$\mathbf{g}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_+^r \\ \mathbf{h}_-^r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}_+^r \\ -\mathbf{d}_-^r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_+^d \\ -\mathbf{A}_-^d \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{h}^r + \mathbf{d}^r - \mathbf{A}^r \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (25)$$

áll, ahol $\mathbf{d}_+^r, \mathbf{d}_-^r$ – a + és – jelű támaszok elmozdulása a kitüntetett irányban.

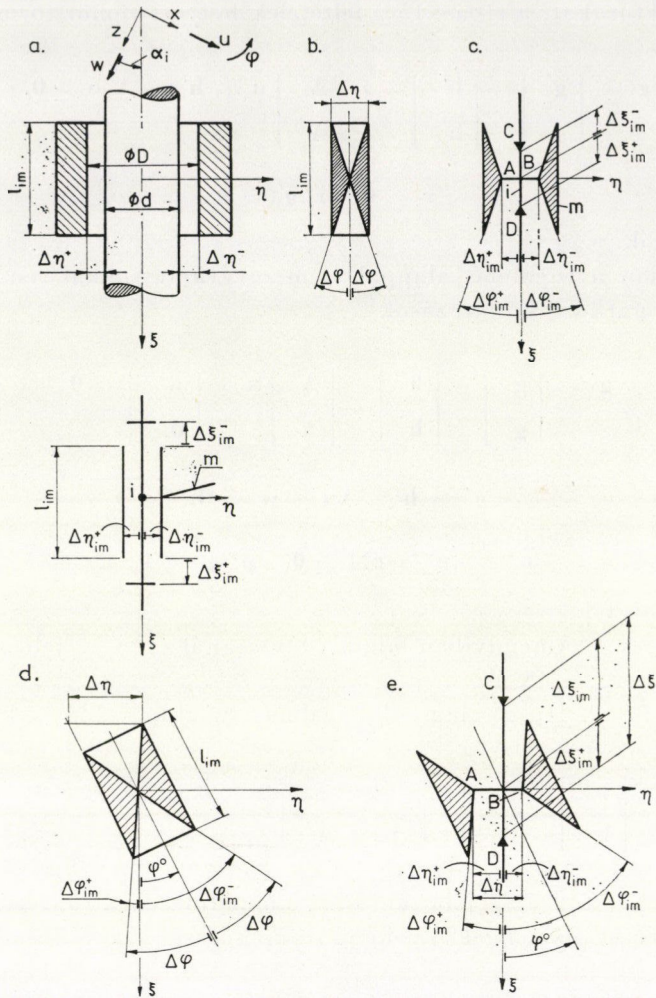
3.1.2. BFK kapcsolatok. Ezeknek a kapcsolatoknak két osztályát különböztetjük meg.

1. A kapcsolódási helyre egyetlen olyan rúd fut be, amely kezdeti hézaggal illeszkedik.

2. A kapcsolódási helyre több egymástól független olyan rúd fut be, amely kezdeti hézaggal illeszkedik.

Síkbeli szerkezetet feltételezve, a hézaggal illeszkedő rúd (továbbiakban 2-es rúd) szempontjából az alábbi kapcsolatokat fogjuk megkülönböztetni.

1.1. Vezeték I. Olyan hézaggal illeszkedő vezeték-hüvely párról van szó, amikor a d átmérőjű vezetéken a $D > d$ belső átmérőjű hüvely korlátozott mértékben elcsúszhatik, illetve a vezeték ξ hossz tengelyére merőlegesen η irányban meglévő $\Delta\eta = D - d$ játék miatt $\Delta\varphi = \pm \Delta\eta/l_{im}$ nagyságú szögelfordulási játékkal is elfordulhat, miközben nyomatékot nem visz át. Ez az i főcsomópontba befutó m „szabadvégű” rúdnál $\Delta\varphi_{im}^\pm = \Delta\eta/l_{im}$ kezdeti szögelfordulási hézagot okoz (2a ábra).



2. ábra. Vezeték I és a kezdeti hézag értelmezése. a) i — vezeték, m — hüvely, b) $\Delta\varphi$ értelmezése, c) Vezeték I kapcsolat mechanikai sémája, d) a hüvely tengelye φ^0 szöget zár be a ξ tengellyel: $\Delta\varphi_{im}^+$, $\Delta\varphi_{im}^-$ értelmezése, e) Vezeték I kapcsolat sémája $\varphi^0 \neq 0$ esetében

A $\Delta\eta$ alapú és l_{im} magasságú téglalap 2b ábra szerinti bevonalkázásával (melyeket merevnek tekintünk) a szögelfordulási játék jól érzékeltethető. Az η irányban ezen háromszögeket egymástól $-\Delta\eta_{im}^+ + \Delta\eta_{im}^-$ távolságra eltolva, majd a kapott AB szakaszt merevnek feltételezve, továbbá az i fűcsomópontoknál a ξ irányú egymástól $\Delta\xi_{im}^+ + \Delta\xi_{im}^-$ távolságra levő (háromszögekkel jelölt) C és D korlátokat az azok közé képzeltek merev rúdból felépítve, az i és m pontok (rúdkeresztmetszetek) közötti Vezeték I típusú feltételes kinematikai kapcsolatot jelölő (érezkeltető) sematikus ábrához jutunk (2c ábra).

Amennyiben a hüvely tengelye nem párhuzamos a ξ tengellyel, közöttük φ° szög van, akkor a 2d ábra alapján felírható kezdeti szögelfordulási hézag

$$\Delta\varphi_{im}^+ = -\varphi^\circ + \frac{\Delta\eta \cos \varphi^\circ}{l_{im}},$$

$$\Delta\varphi_{im}^- = \varphi^\circ + \frac{\Delta\eta \cos \varphi^\circ}{l_{im}},$$

ahol

$$\Delta\eta = \frac{D - d}{\cos \varphi^\circ}.$$

A ξ és η tengelyek irányába eső $\Delta\xi^\pm$, $\Delta\eta^\pm$ kezdeti hézagok a *Vezeték I típusú* kapcsolat 2e ábrán vázolt sematikus ábráját eredményezik.

A 2c és 2e ábrákon levő *Vezeték I*-nél feltüntetett kezdeti hézagok pozitívak. Negatívnak (túlfedésnek akkor tekintendők, amikor a kottázásnál a nyíl hegye a „talp vonáshoz képest” az ábrán szereplőtől ellentétes irányba mutat el. Pl. $\Delta\eta_{im}^+$ esetén, amennyiben \leftarrow helyett \rightarrow kotta áll, úgy $\Delta\eta_{im}^+ < 0$ -nak tekintendő. Ez azt jelenti, hogy a 2e ábrán szereplő *CD* rúdszakaszhoz kötött $\xi\eta$ koordinátarendszer az *A* ponttól balra helyezkedik el.

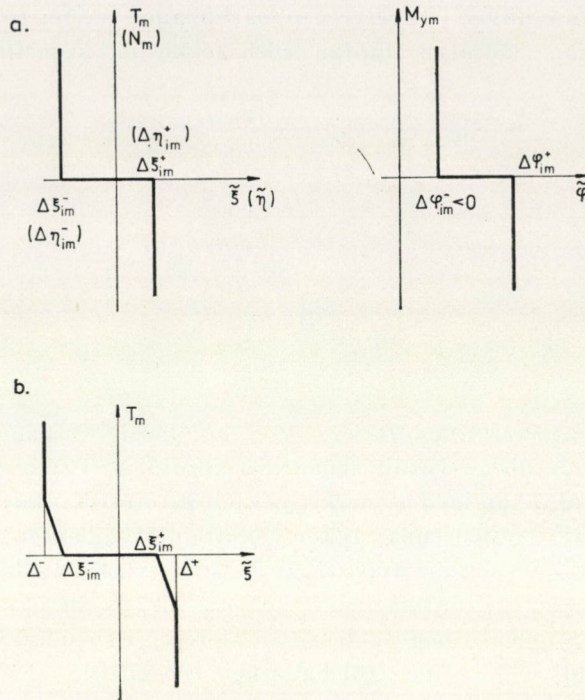
A jelen modellezésben, a vezeték és a hüvely az *i* főcsomópont (keresztmetszet), környezetében a kinematikai feltételek felírása szempontjából merevnek tekintett. Ebből adódóan $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ következképpen $\Delta\varphi$ -nek mindig pozitívnak kell lennie bármilyen $\Delta\xi_{im}^+$, ..., $\Delta\varphi_{im}^-$ kezdeti hézag kombinációjánál. A vezeték és hüvely közötti rugalmas deformáció figyelembevétele a térbeli rugalmasságtani feladat megoldását is igényelné. Mivel a rudak hossz méreteihez képest a most tárgyalt vezeték-hüvely méretei, illetve a későbbiekben tárgyalt kapcsolatok geometriai méretei lényegesen kisebbek, a rudak kapcsolódását merevnek tekintett szerkezeti elemek előzetesen nem ismert együttdolgozásával kívánjuk modellezni. A bemutatott módszerek, általánosíthatók a jóval bonyolultabb esetre is.

A kapcsolatban szereplő merev elemek következtében, a fellépő kapcsolati erők és nyomaték a kezdeti hézag eltűnése után bármekkora értéket felvehetnek. Jelen esetben az *m* jelű rúdvégre átadódó ξ , η és *y* irányú T_m , N_m , M_{ym} erők és nyomaték a

$$\tilde{\xi} = \xi_i - \xi_m, \quad \tilde{\eta} = \eta_i - \eta_m,$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi_i - \varphi_m$$

függvényében a 3a ábra szerint változnak ($M_{ym} = M_{ym}(\tilde{\varphi})$ esetén $\Delta\varphi_{im}^- < 0$ előfeszítést vettünk fel.)



3. ábra. Jelleggörbék. a) Ideálisan merevedő kapcsolatnál fellépő belső erők (nyomaték) $\tilde{\xi} = \xi_i - \xi_m$ elmozdulás (szögelfordulás) $\tilde{\varphi} = \varphi_i - \varphi_m$ diagramok (i — főcsomópont, m — befutó rúdvég jele, T_m (stb.) az m -re ható erő (stb.) a 2. ábrán vázolt $\xi\eta y$ koordináta-rendszerben). b) Ideálisan rugalmas-merevedő kapcsolat belső erő-elmozdulás diagramja

Ezeket a kapcsolati erő-elmozdulás diagramokat ideálisan merevedő (bezáruló) kapcsolatokhoz tartozó jelleggörbéűnek nevezi az irodalom [6]. Amennyiben a kapcsolódó szerkezeti elemek bizonyos mértékű rugalmassággal rendelkeznek, úgy az előbbi diagramok helyett a 3b ábrán feltüntetett ideálisan rugalmas-merevedő kapcsolatot leíró jelleggörbék tartoznak. Ez utóbbi számításával jelen munka *Melléklet* című részében foglalkozunk.

A 2. ábra alapján felírható kinematikai feltételek, korlátok egyrészt

$$g_{\xi im}^+ = \xi_i + \Delta \xi_{im}^+ - \xi_m \geq 0, \quad (26a, b)$$

$$g_{\xi im}^- = -\xi_i + \Delta \xi_{im}^- + \xi_m \geq 0,$$

$$g_{\eta im}^+ = \eta_i + \Delta \eta_{im}^+ - \eta_m \geq 0, \quad (27a, b)$$

$$g_{\eta im}^- = -\eta_i + \Delta \eta_{im}^- + \eta_m \geq 0,$$

másrészt

$$g_{\varphi im}^+ = \varphi_i + \Delta \varphi_{im}^+ - \varphi_m \geq 0, \quad (28a, b)$$

$$g_{\varphi im}^- = -\varphi_i + \Delta \varphi_{im}^- + \varphi_m \geq 0,$$

ahol

$$\xi_i = u_i \sin \alpha_i + w_i \cos \alpha_i, \quad (29a, b)$$

$$\eta_i = u_i \cos \alpha_i - w_i \sin \alpha_i,$$

$$\xi_m = u_m \sin \alpha_i + w_m \cos \alpha_i, \quad (30a, b)$$

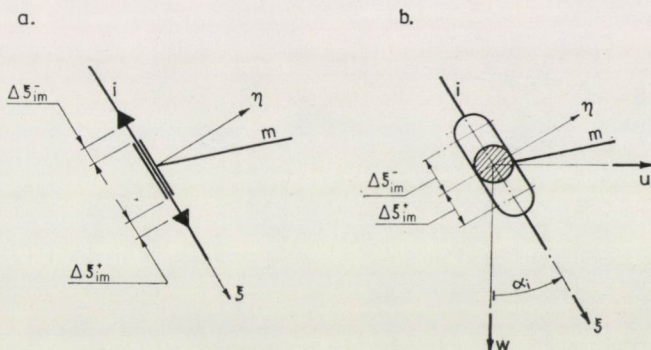
$$\eta_m = u_m \cos \alpha_i - w_m \sin \alpha_i,$$

u_i, w_i, φ_i (u_m, w_m, φ_m) az i (m) jelű csomópontok vízszintes és függőleges eltolódása, illetve szögelfordulása a 2. ábrán feltüntetett pozitív irányokban.

1.2. *Vezeték II.* Nyomatékot is átadó hézagnélküli vezeték, amelynél a hüvely mozgása korlátozott (4a ábra). Felírható feltételek (26a, b), továbbá a $\Delta\eta_{im}^+ = \Delta\eta_{im}^- = 0$ -ból követően

$$\eta_i = \eta_m, \quad \varphi_i = \varphi_m. \quad (31a, b)$$

A (31a, b) feltételeket célszerű a csatolt rendszer, vagyis a G előállításánál már figyelembe venni.



4. ábra. a) Vezeték II, b) Csúszka I

Megjegyzés 3. A Vezeték I. és II. típusoknál lehetséges olyan eset is, amikor a csúszkának tengelyirányú mozgása csak egyik irányban van korlátozva. Ebben az esetben értelemszerűen a (26a, b) közül valamelyiket nem kell szerepeltetni korlátként.

1.3. *Csúszka I.* A 2-es rúd a többi rúdhöz csúszkán keresztül illeszkedik, a csúszka mozgása korlátozott. A 4b ábra alapján kinematikai korlátokként a (26, b), (31a) szerepelnek.

1.4. *Csúszka II.* A csúszka a vezetékben játékkal illeszkedik, mozgása korlátozott (5. ábra). Kinematikai korlátokként egyrészt a (26a, b) alattiakat, másrészt a (27a, b) alattiakat írhatjuk fel.

1.5. *Csúszka III.* A csúszka a vezetékben nincs rögzítve, mozgása korlátozott (6. ábra). A (26a, b) és a (27b) egyenlőtlenségek a kinematikai korlátok.

1.6. *Csúszka IV.* A 2-es rúd végpontjában a $\Delta\xi_{im}^-$ kezdeti hézag „eltűnése” után keletkező rúderő, nyomóerő. A nyíróerő tetszőleges, a hajlító-

nyomaték zérus. Így kinematikai korlátként a (26 b), (31 a) alattiak szerepelnek (7. ábra).

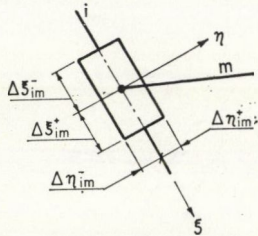
(31a) szerepelnek (7. ábra).

2.1. 1.1–1.6 alattiak kombinációi.

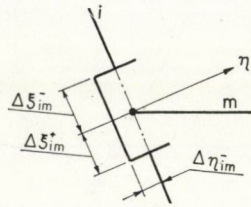
2.2. *Vezeték III.* Az átmenő tengely hézag nélkül illeszkedik, vezetékbeli elmozdulása $\left\{ \begin{matrix} \text{egyirányban} \\ \text{kétirányban} \end{matrix} \right\}$ korlátozott (8. $\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ ábra).

Az érvényben levő korlátok $\left\{ \begin{matrix} (26a), (31a, b) \\ (26a, b), (31a, b) \end{matrix} \right\}$ a vizsgált csatlakozásnak megfelelően.

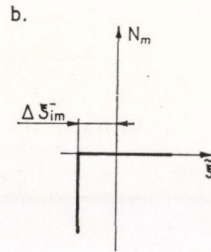
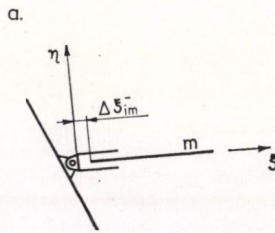
2.3. *Vezeték IV.* Hézaggal illeszkedő átmenő tengely, vezeték irányú elmozdulása $\left\{ \begin{matrix} \text{egyirányban} \\ \text{kétirányban} \end{matrix} \right\}$ korlátozott. A felírható korlátok $\left\{ \begin{matrix} (26a), (27a, b), (28a, b) \\ (26a-28b) \end{matrix} \right\}$ a 9. $\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ ábrán vázolt csatlakoznak megfelelően.



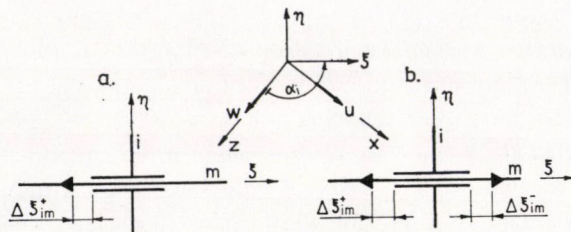
5. ábra. Csúszka II



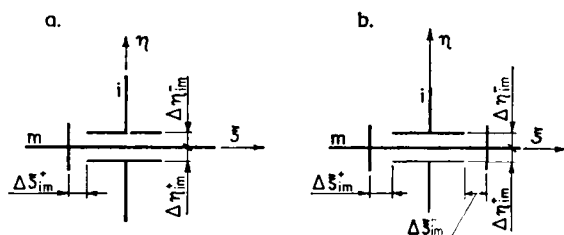
6. ábra. Csúszka III



7. ábra. Csúszka IV, a) szerkezeti kialakítás, b) $N_m = N_m(\xi)$ rúderő függvény



8. ábra. Vezeték III



9. ábra. Vezeték IV

Látható, hogy páronként a Vezeték II. és III-nál, illetve a Vezeték I. és IV-nél felírható korlátok egy és ugyanazok. Szerkezetbeli különbség a csatlakozási helyre befutó rudak számában van, továbbá a szerkezeti elemek i, m jeleinek felcserélésében.

A vizsgálat folytatása céljából vegyük a Vezeték I-et, mint a legtöbb korlátozást előíró csatlakozást.

Bevezetve a (28a, b) alapján a csatlakozás ún. fő csomópontjához (i jelű) tartozó

$$\mathbf{T}_i^j = \begin{bmatrix} \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (32)$$

transzformáló mátrixot, a

$$\hat{\mathbf{u}}_i^* = [\xi_i \eta_i \varphi_i], \quad \mathbf{u}_i^* = [u_i w_i \varphi_i] \quad (i \leftrightarrow m)$$

elmozdulás vektorokat a

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{im}^{j+*} &= [\Delta \xi_{im}^+ \Delta \eta_{im}^+ \Delta \varphi_{im}^+], \\ \mathbf{g}_{im}^{j+*} &= [g_{\xi_{im}}^+ g_{\eta_{im}}^+ g_{\varphi_{im}}^+] \end{aligned} \quad (+ \leftrightarrow -)$$

kezdeti és relatív hézag vektorokat, a (29a–30b) helyett

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{T}_i^j \mathbf{u}_i, \quad \hat{\mathbf{u}}_m = \mathbf{T}_i^j \mathbf{u}_m, \quad (33a, b)$$

a (26a–28b) helyett

$$\mathbf{g}_{im}^j = \begin{bmatrix} g_{jm}^{j+} \\ g_{im}^{j-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{im}^{j+} \\ \mathbf{h}_{im}^{j-} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_i^j & \mathbf{T}_i^j \\ \mathbf{T}_i^j & -\mathbf{T}_i^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_m \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \quad (34)$$

írható.

Más típusú csatlakozásoknál a (34) egyenlőtlenség természetesen a felírható korlátoknak megfelelően módosul. Amennyiben az i jelű csomóponthoz (csatlakozási helyhez) többfajta csatlakozáson keresztül futnak be a rudak, úgy összegyűjtve a korlátokat egy vektor egyenlet-egyenlőtlenségbe, formailag

$$\mathbf{g}_i^\Sigma = \mathbf{h}_i^\Sigma - \mathbf{A}_i^\Sigma \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (35)$$

írható fel, ahol \mathbf{u} az összeillesztett rúdszerkezet (csatolt rendszer) elmozdulásvektora.

Merev csatlakozásnál a rúdvégek elmozdulásai nyilván azonosak, a csatlakozások néhány fajtájánál az eltolódások között fennálló lineáris kapcsolatból következően az egyik rúdvégi eltolódás valamelyik koordinátája már nem szerepel az \mathbf{u} -ban, a megmaradók igen. (Pl. a (31a) szerinti feltételnél az i és m csomópontok esetén az \mathbf{u} vektorban u_i, w_i, u_m szerepelnek, w_m már nem, hiszen az (29b), (30b) alapján w_m függ az előzőektől.)

Végezetül az egész rúdszerkezetre vonatkozó belső kapcsolatokból származó kinematikai korlátok a (34) felhasználásával a következő alakot nyerik:

$$\mathbf{g}^j = \mathbf{h}^j - \mathbf{A}^j \mathbf{u} \geq \mathbf{0}. \quad (36a)$$

Hasonló megfontolásból, mint a 3.1.1. pontban láttuk, a g_i^j relatív hézag eltűnése a rudak közötti j_i erő keletkezését vonja maga után, azaz

$$g_i^j j_i = 0 \quad i = 1, \dots, B, \quad (36b, c)$$

vagyis

$$\mathbf{g}^j = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j}^* \mathbf{g}^j = 0,$$

ahol \mathbf{j} — az egyoldalú kapcsolatoknál keletkező belső erők vektora, B — a belső korlátok száma.

Ily módon a KFK és BFK kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezeteknél felírható korlátok

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^w \\ \mathbf{g}^r \\ \mathbf{g}^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^w \\ \mathbf{h}^r \\ \mathbf{h}^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w \\ \mathbf{A}^r \\ \mathbf{A}^j \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{w}^{(2)} \\ \mathbf{d}^r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad (37a)$$

azaz

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} - \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{d} \geq \mathbf{0},$$

továbbá

$$\mathbf{p}^* = [\mathbf{p}^{w*}, \mathbf{r}^*, \mathbf{j}^*] \geq \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{p}^* \mathbf{g} = 0. \quad (37b, c)$$

3.2. A programozási feladat felállítása

Láttuk, hogy a (2) programozási feladat megoldása az (1) egyenletrendszer megoldását szolgálhatja. A BFK és KFK kapcsolatokról adódóan az (1)-ben a \mathbf{q} helyett $\mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p}$ szerepel, vagyis a rúdszerkezet csomópontjainak egyensúlyát az alapról, támaszokról átadódó egyelőre ismeretlen támasztóerők, a belső kapcsolatoknál keletkező belső erők figyelembevételével kell keresnünk, miközben a (37a–c) feltételeknek is fenn kell állniuk.

Tételezzük fel, hogy ismerjük a $\Pi_c^w = \Pi_c^w(\mathbf{p}^w)$, $\Pi_c^r = \Pi_c^r(\mathbf{r})$ kvadratikus alakokat, az alap és a rugalmas támaszok kiegészítő energiáját. Ekkor a Castigliano-tétel értelmében $\partial \Pi_c^w / \partial \mathbf{p}^w = \mathbf{w}^{(2)}$, $\partial \Pi_c^r / \partial \mathbf{r} = \mathbf{d}^r$, mivel a testre ható \mathbf{p}^w , (\mathbf{r}) egybeesik $\mathbf{w}^{(2)}$, (\mathbf{d}^r) pozitív irányával.

Tétel 1. A (37a–c) feltételekkel jellemzett KFK és BFK kapcsolatú rúdszerkezet elmozdulás mezejét és feszültségi állapotát a

$$\min \{ \Pi_2 = \Pi_1 + \Pi_c^w + \Pi_c^r + \mathbf{p}^* \mathbf{h} \mid \mathbf{G}^* \mathbf{s} = \mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p} \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \} \quad (38)$$

kvadratikus programozási feladat megoldása szolgáltatja.

Bizonyítás: A (38) feladathoz rendelt

$$L_2 = L_2(\mathbf{s}, \mathbf{u}, \mathbf{p} \geq \mathbf{0}) = \Pi_1(\mathbf{s}) + \Pi_c^w(\mathbf{p}^w) + \Pi_c^r(\mathbf{r}) + \mathbf{p}^* \mathbf{h} + \mathbf{u}^*(\mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p}) \quad (39)$$

Lagrange-féle függvényből kiindulva (\mathbf{u} – Lagrange-féle multiplikátor) a matematikai programozás Khun–Tucker tétele értelmében [9] a

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{G} \mathbf{u} + \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0} \quad (40)$$

kompatibilitási egyenlethez, a

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{G}^* \mathbf{s} + \mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (41)$$

egyensúlyi egyenlethez, a

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{h} - \mathbf{A} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi_c^w}{\partial \mathbf{p}^w} \\ \frac{\partial \Pi_c^r}{\partial \mathbf{r}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{g} \geq \mathbf{0}; \quad \mathbf{p}^* \frac{\partial L_2}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad (42a–c)$$

egyoldalú kapcsolatot kifejező egyenlőtlenség-egyenlőséghez jutunk, amelyek egybeesnek a feltételes kinematikai kapcsolatú rúdszerkezet állapotát leíró egyenlet-egyenlőtlenségi rendszerrel. Q. e. d.

3.3. A (39) programozási feladat megoldása elmozdulásmódszer segítségével

Az elmozdulásmódszer alkalmazásához fel kell tételeznünk, hogy az F hajlékonysági mátrix nem elfajuló: $\det F \neq 0$, azaz a rúdszerkezet merev rudakat nem tartalmaz. Ekkor a (40)-ből kifejezhetjük a belső erők vektorát

$$s = -F^{-1}Gu - F^{-1}t, \quad (43)$$

majd a kapott értéket (41)-be betéve és átrendezve a

$$Ku = \bar{q} - A^*p \quad (44)$$

egyenlethez jutunk, ahol

$$K = G^*F^{-1}G; \quad \bar{q} = q - G^*F^{-1}t \quad (45a, b)$$

a rúdszerkezet merevségi mátrixa, redukált terhelési vektora.

A (44), (42a–c) alapján felírható megoldandó egyenlet-egyenlőtlenségi rendszer a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K & A^* \\ -A & 0 \end{bmatrix}}_{M^0} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\bar{q} \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Pi_c}{\partial p} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ g \end{bmatrix} = 0; \quad (46a, b)$$

$$g \geq 0; \quad p \geq 0; \quad g^*p = 0; \quad (46c-e)$$

ahol

$$\left[\frac{\partial \Pi_c}{\partial p} \right]^* = \left[\left(\frac{\partial \Pi_c^w}{\partial p^w} \right)^* \mid \left(\frac{\partial \Pi_c^r}{\partial r} \right)^* \mid 0^* \right], \quad M^0 -$$

pozitív szemidefinit mátrix.

A Khun–Tucker-féle feltételek felhasználásával könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (46) feladat az alábbi programozási feladatból is származtatható:

$$\min \left\{ \Pi_p \mid g = h - Au + \frac{\partial \Pi_c}{\partial p} \geq 0, \quad p \geq 0 \right\}, \quad (47)$$

ahol $\Pi_p = \frac{1}{2} u^* Ku - u^* \bar{q} -$ a rúdszerkezet potenciális energiája. A (47)-hez tartozó Lagrange-féle függvény

$$L_3 = L_3(u, p \geq 0) = \Pi_p(u) - \Pi_c^w(p^w) - \Pi_c^r(r) - p^*(h - Au),$$

aminek a programozási feladat megoldása folyamán a nyeregpontját keressük

$$\left(\frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}, \quad -\frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{p}} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}^* \frac{\partial L_3}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0} \right),$$

vagyis a minimax feladat

$$\min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{p} \geq \mathbf{0}} \{ \Pi_p(\mathbf{u}) - \Pi_c^w(\mathbf{p}^w) - \Pi_c'(\mathbf{r}) - \mathbf{p}^*(\mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{u}) \}. \quad (48)$$

Mielőtt továbblépnénk, vizsgáljuk meg, hogy a \mathbf{K} mátrixnak milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie ahhoz, hogy az elsőrendű elmélet alkalmazható legyen a (46) feladat megoldására, annak ellenére, hogy a szóban forgó feladatot ezen elmélet segítségével építettük fel. Erre a kérdésre a \mathbf{K} mátrix rangja és struktúrája (az alábbiakból kiderül mit fogunk ezen érteni) ad feleletet.

A \mathbf{K} merevségi mátrix $\varrho(\mathbf{K})$ rangját a \mathbf{G} geometriai és \mathbf{F} hajlékonysági mátrix rangja határozza meg:

$$\varrho(\mathbf{K}) = \varrho(\mathbf{G} * \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}) = \min (\varrho(\mathbf{G}), \varrho(\mathbf{F}^{-1})).$$

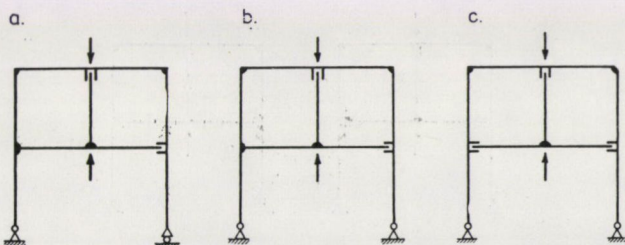
Mivel \mathbf{F} nem elfajuló, úgy

$$\varrho(\mathbf{K}) = \varrho(\mathbf{G}),$$

vagyis a \mathbf{K} invertálhatóságát \mathbf{G} rangja dönti el.

Ha $\varrho(\mathbf{G}) = \min(m, n)$ — ahol m, n a \mathbf{G} mátrix sorainak, oszlopainak száma, továbbá $m = n$, akkor statikailag határozott szerkezetéről, illetve $m > n$ esetben statikailag határozatlan szerkezetéről beszélünk. Ezekben az esetekben \mathbf{K} invertálható. (Lásd pl. a 10a, b ábrákon vázolt szerkezeteket.)

Ha $\varrho(\mathbf{G}) = \min(m, n)$ és $m < n$ a szerkezet statikailag túlhatározott. Ebben az esetben a KFK kapcsolatú rúdszerkezetről (lásd pl. 1. ábrán vázolt szerkezetet) mindig kiválasztható a \mathbf{K} -ből olyan legnagyobb méretű elnem-fajuló mátrix, amelyhez tartozó fiktív támaszokkal rendelkező alapszerkezet



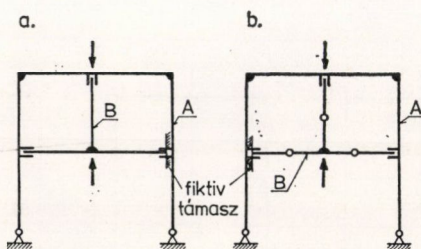
10. ábra. Rúdszerkezet a) statikailag határozott, b) statikailag egyszeresen határozatlan c) statikailag túlhatározott

merevtestszerű mozgást nem végez. Vagyis egy és ugyanazon szerkezethez általában több alapszerkezet rendelhető.

A BFK kapcsolatú rúdszerkezetnél (lásd pl. 10c ábrán vázoltat) lehetnek olyan esetek is amikor $\varrho(\mathbf{G}) < \min(m, n)$. Ha a BFK kapcsolatok nem volnának „beépítve” a rúdszerkezetbe, akkor a szerkezetet már csak másodrendű elmélettel lehetne megoldani [7]. Amennyiben a kapcsolatban szereplő kezdeti hézagok mértéke nem haladja meg a rúdszerkezetnél fellépő u elmozdulások mértékét (amelyekről eleve feltételeztük, hogy kicsinyek a rúdszerkezet hossz méreteihez képest), úgy a programozási feladat megoldásának megkeresésére abban az esetben sort lehet keríteni, ha a rúdszerkezetet a kinematikai kapcsolatokban felvett fiktív támaszokkal statikailag határozott vagy határozatlan alszerkezetekre lehet bontani. A fiktív támaszok tényleges elmozdulását — mint valamelyik rúdvég elmozdulását — a programozási feladat megoldásából nyerjük. Így pl. a 11a ábrán vázolt szerkezet a 10c ábrán vázolthoz tartozó A és B jelű alszerkezeteket tünteti fel, amelyek rendre statikailag — határozatlan (A), illetve — határozott (B) szerkezetek. A 11b ábrán vázolt szerkezetet a jelen tanulmányban tárgyalt módszerrel megoldani már nem tudjuk, mivel a B alszerkezet statikailag túlhatározott.

Természetesen a KFK + BFK kapcsolatú rúdszerkezetnél a fenti esetek bármelyike előfordulhat.

A fentiekből következően a BFK kapcsolatú szerkezetnél a programozási feladat felállításának tehát csak akkor van értelme, ha a \mathbf{K} struktúrája biztosítja azt, hogy a \mathbf{K} -ből kiválasztható olyan invertálható rész, amelyen kívüli oszlopok — jobbról történő szorzás esetén — a BFK kapcsolatokba befutó szabad-, vagy legalábbis az elmozdulás némely koordinátájában szabad — rúdvégek (fiktív támaszok) elmozdulásaival vannak szorozva. A KFK + BFK kapcsolatú rúdszerkezetnél amennyiben a \mathbf{K} mátrix szóban forgó oszlopai az előbbieken meghatározott elmozdulásokon kívül a külső támaszokkal érintkező vagy a terhelés hatására majdan érintkező alszerkezet merevtestszerű elmozdulását leíró csomóponti elmozdulás koordinátákkal vannak szorozva, a programozási feladat megoldását meg lehet kísérelni. A kvadratikus progra-



11. ábra. Alszerkezetek felhasználása a szilárdságtani feladat megoldására. a) 10c ábrán vázolt tartószerkezet felbontása A és B alszerkezetre. b) Példa a lineáris elmélettel meg nem oldható szerkezetre (a fiktív támaszsal ellátott B alszerkezet statikailag túlhatározott)

mozás elméletében bizonyított, hogy ha a feladatnak van megoldása, akkor csak egyetlen megoldás létezik [9]. A megoldás létezésére a \mathbf{K} mátrix rangja, struktúrája nem ad feleletet, az a rúdszerkezetre ható erőrendszerrel, és a feltételes kapcsolatoktól függ. Előfordulhat, hogy a KFK és BFK kapcsolatok által megengedett erők, nyomatékok a külső erőrendszerrel nem képesek egyensúlyi erőrendszert alkotni. Ekkor a feladatnak nyilván nincs megoldása.

Ezek után térjünk vissza a (47) programozási feladat, vagyis a (46) egyenlet-egyenlőtlenségi rendszer megoldásának vizsgálatához. A megoldást kétféle módszerrel keressük.

I. módszer

Az \mathbf{u} elmozdulást egyrészt két pozitív vektor különbségként állítjuk elő

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-, \quad \mathbf{u}^+ \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^- \geq \mathbf{0}, \quad (49)$$

majd (46a) az egyenletet vele egyenértékű két egyenlőtlenséggel helyettesítjük és az egyenlőséget pótlólagosan bevezetett $\mathbf{g}^+ \geq \mathbf{0}, \mathbf{g}^- \geq \mathbf{0}$ változókkal állítjuk helyre.

Másrészt, mivel

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial II_c}{\partial \mathbf{p}} \right)^* &= \left[\left(\frac{\partial II_c^w}{\partial \mathbf{p}^w} \right)^* \mid \left(\frac{\partial II_c^r}{\partial \mathbf{r}} \right)^* \mid \mathbf{0}^* \right] = \\ &= [\mathbf{p}^{w*} \mathbf{H}^{(2)w} + \mathbf{f}^{(2)w*} \mid \mathbf{r}^* \mathbf{H}^{(2)r} + \mathbf{f}^{(2)r*} \mid \mathbf{0}^*] = \mathbf{p}^* \mathbf{H}^{(2)} + \mathbf{f}^{(2)*} \end{aligned} \quad (50)$$

alakban felírható, ahol $\mathbf{H}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)*}$ — hatásmátrix, $\mathbf{f}^{(2)}$ — az alapra és a rugalmas támaszokra működő külső ismert terhelésből származó, a feltételes kapcsolatok kitüntetett irányába eső elmozdulás, a (46a, b) helyett

$$-\underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{A}^* \\ \mathbf{K} & -\mathbf{K} & \mathbf{A}^* \\ \mathbf{A} & -\mathbf{A} & -\mathbf{H}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^1} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}^1} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{q}} \\ \mathbf{h} + \mathbf{f}^{(2)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}^1} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{g}^+ \\ \mathbf{g}^- \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}^1} = \mathbf{0},$$

írható, azaz

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{b}^1 - \mathbf{M}^1 \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{1*} \mathbf{y}^1 = 0, \quad (51a-c)$$

ahol \mathbf{M}^1 negatív szemidefinit mátrix, vagyis a

$$\min \{ \psi(\mathbf{x}^1) = \mathbf{x}^{1*} \mathbf{y}^1 \mid \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{y}^1 = \mathbf{b}^1 - \mathbf{M}^1 \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0} \} \quad (52)$$

programozási feladat kvadratikus, aminek megoldása, ha létezik, különféle modifikált szimplex eljárással — végezzámú báziscsere elvégzése után — megkapható [9].

II. módszer

A eset: $\det \mathbf{K} \neq 0$

A (46a) egyenletéből kifejezett \mathbf{u} -t, behelyettesítve a (46b) egyenletbe, a

$$\mathbf{g} = (\mathbf{h} - \mathbf{f}^{(1)}) + \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{p} + \frac{\partial \Pi_c}{\partial \mathbf{p}} \geq \mathbf{0}, \quad (53)$$

összefüggést kapjuk, ahol $\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^* = \langle \mathbf{H}^{(1)w} \mid \mathbf{H}^{(1)r} \mid \mathbf{H}^{(1)j} \rangle$ — kvázi diagonál felépítésű — pozitív definit — hatásmátrix, $\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}$ — a feltételes kinematikai kapcsolatokban külső terhelésből származó elmozdulás:

$$\mathbf{f}^{(1)*} = [\mathbf{f}^{(1)w*} \mid \mathbf{f}^{(1)r*} \mid \mathbf{f}^{(1)j*}].$$

Ekkor az (50) figyelembevételével, a (46c–e) és az (53) alapján megfogalmazható programozási feladat

$$\min \left\{ \chi(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^* (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}) \mathbf{p} + \mathbf{p}^* (\mathbf{h} + \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)}) \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \right\}, \quad (54)$$

mivel

$$\mathbf{g} = (\mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}) \mathbf{p} + \mathbf{h} + \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)} \geq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}^* \mathbf{p} = 0.$$

B eset: $\det \mathbf{K} = 0$

Legyen a \mathbf{K} mátrixból kiválasztott legnagyobb méretű elnempfajuló mátrix \mathbf{K}_{11} . Ekkor (46a) egyenlet az alábbi alakra írható át:

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1 \\ \tilde{\mathbf{q}}_{11} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{w*} & \mathbf{A}_1^{r*} & \mathbf{A}_1^{j*} \\ \mathbf{A}_{11}^{w*} & \mathbf{A}_{11}^{r*} & \mathbf{A}_{11}^{j*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^w \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (55)$$

A kapott mátrixegyenlet első sorából kifejezett \mathbf{u}_1 -t, behelyettesítve a második sorába, nyerjük az \mathbf{u}_F elmozdulással kapcsolatos csomópontok (fiktív támaszok) egyensúlyát kifejező egyenletet

$$\mathbf{D} \mathbf{u}_F + \mathbf{G}_F^* \mathbf{p} - \mathbf{q}_F = \mathbf{0}, \quad (56)$$

ahol

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12}, \quad (57a)$$

$$\mathbf{G}_F^* = \mathbf{A}_{11}^* - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1^*, \quad (57b-c)$$

$$\mathbf{q}_F = \tilde{\mathbf{q}}_{11} - \mathbf{K}_{21} \mathbf{K}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1.$$

Itt $\mathbf{D} \mathbf{u}_F$ — a belső erőkből, $\mathbf{G}_F^* \mathbf{p}$ — a feltételes kinematikai kapcsolatokból, míg \mathbf{q}_F az ismert külső terhelésből származó erőt jelenti. Amennyiben

nem a KFK kapcsolatoknál (csomópontoknál) vesszük fel a fiktív támaszokat, úgy $\mathbf{A}_{II}^w = \mathbf{A}_{II}^r = \mathbf{0}$, továbbá, ha BFK kapcsolatnál \mathbf{u}_F nem tartalmazza a csatlakozás fő csomópontjába befutó szabad rúdvég elmozdulását (ahol fiktív támasz is lehetne, lásd 11a ábra), akkor \mathbf{A}_{II}^f is zérus mátrix.

A megmaradó (46b) egyenletbe az \mathbf{u}_F -n keresztül kifejezett \mathbf{u} -t helyettesítjük. Eredményül kapjuk:

$$-\mathbf{G}_F \mathbf{u}_F + \mathbf{H} \mathbf{p} + \mathbf{t}_F = \mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \quad (58)$$

ahol

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}, \quad \mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{A}_I \mathbf{K}_{II}^{-1} \mathbf{A}_I^* \quad (59a, b)$$

— hatásmátrixok

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{h} + \mathbf{f}^{(2)} - \mathbf{f}^{(1)}, \quad \mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{A}_I \mathbf{K}_{II}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_I \quad (59c, d)$$

ismert elmozdulások.

Vagyis a (46a, b) helyett a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{G}_F^* \\ -\mathbf{G}_F & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_F \\ \mathbf{t}_F \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (59e)$$

egyenlet írható, továbbá az *I. módszernél* tett átalakításokat megismételve a programozási feladat

$$\min \{ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^* \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{y} = \mathbf{b} - \mathbf{M} \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \quad (60)$$

ahol

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D} & \mathbf{D} & -\mathbf{G}_F^* \\ \mathbf{D} & -\mathbf{D} & \mathbf{G}_F^* \\ \mathbf{G}_F & -\mathbf{G}_F & -\mathbf{H} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_F \\ \mathbf{q}_F \\ \mathbf{t}_F \end{bmatrix}.$$

Lényeges a gyakorlati számítások elvégzése szempontjából észrevennünk azt, hogy az \mathbf{M} negatív szemidefinit mátrix mérete kisebb, mint az (52) feladatban szereplő \mathbf{M}^1 -é, azaz a modifikált szimplex algoritmus alkalmazása most előnyösebbnek mutatkozik a kevesebb számú ismeretlen miatt. A (60)-as feladat hátrányaként róhatjuk fel a \mathbf{K}_{II}^{-1} mátrixon keresztül kifejezhető mátrixok, vektorok előállítását. Amennyiben \mathbf{K}_{II}^{-1} a számítógép memóriájában tárolható, úgy az \mathbf{M} és \mathbf{b} előállítása nem okoz nagy problémát, ellentétes esetben a [10] munka 1.3. pontjában leírtak szerint járhatunk el, vagyis sorra, pl. Gauss-féle elimináció segítségével megoldjuk a

$$\mathbf{K}_{11} \mathbf{B} = \mathbf{K}_{12}, \quad \mathbf{K}_{11} \mathbf{C} = \mathbf{A}_I^*, \quad \mathbf{K}_{11} \mathbf{l} = \tilde{\mathbf{q}} \quad (61a-c)$$

egyenleteket — (61a, b) esetben több jobb oldallal — majd a kapott megoldásokat rendre megszorozzuk \mathbf{K}_{21} -el, a \mathbf{D} , \mathbf{G}_F^* , \mathbf{q}_F , míg \mathbf{A}_1 -el a $\mathbf{H}^{(1)}$, $\mathbf{f}^{(1)}$ előállításánál.

A (60)-as programozási feladat megoldásával az (55)-be történő visszahelyettesítés után

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{A}_1^* \mathbf{p} + \mathbf{K}_{11}^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1 - \mathbf{K}_{11}^{-1} \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}_F$$

vagyis (61a—c) figyelembevételével,

$$\mathbf{u}_1 = -\mathbf{C}\mathbf{p} + \mathbf{l} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}_F$$

míg a teljes elmozdulás

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{p} - \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} \\ -\mathbf{E} \end{bmatrix} \mathbf{u}_F + \begin{bmatrix} \mathbf{l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (61d)$$

összefüggéssel számítható. Itt \mathbf{E} egységmátrix.

Látható, hogy $\bar{\mathbf{B}}$, \mathbf{C} mátrixok és \mathbf{l} vektor elraktározásával a programozási feladat megoldása után a rugalmas rúdszerkezet általánosított csomóponti elmozdulása a \mathbf{K}_{11} mátrix újbóli invertálása nélkül igen könnyen számítható, vagyis a javasolt módszer igen hatékonynak bizonyul konkrét számításokkor. Mivel a programozási feladatból a \mathbf{p} automatikusan „kijön”, nincs szükség előjelének ismételt értelmezésére, a \mathbf{C} mátrix már eleve „tudja” azt.

3.4. A (39) programozási feladat megoldása erőmódszer segítségével

A módszer alkalmazásához fel kell tételeznünk, hogy $\varrho(\mathbf{G}) = \min(m, n)$, $m > n$; vagyis alkalmazási lehetőségei szűkebbek, mint az elmozdulásmódszeré.

Legyen a \mathbf{G} mátrixból kiválasztott elnempfajuló mátrix \mathbf{G}_1 , a megmaradó részt jelölje \mathbf{G}_2 . Ennek megfelelően felbontjuk az \mathbf{F} mátrixot és \mathbf{t} vektort is.

Ekkor a (40), (41) helyett azt írhatjuk,² hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_1 \mathbf{u} + \mathbf{F}_1 \mathbf{s}^1 + \mathbf{t}^1 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{G}_2 \mathbf{u} + \mathbf{F}_2 \mathbf{s}^2 + \mathbf{t}^2 &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (62a, b)$$

illetve

$$\mathbf{G}_1^* \mathbf{s}^1 + \mathbf{G}_2^* \mathbf{s}^2 + \mathbf{q} - \mathbf{A}^* \mathbf{p} = \mathbf{0}. \quad (63)$$

A (63)-ból kifejezett \mathbf{s}^1 -t behelyettesítve (62a)-ba az \mathbf{u} elmozdulást \mathbf{s}^2 és \mathbf{p} függvényeként kapjuk meg, majd az elmozdulásnak (62b)-be történő helyettesítésével a következő összeférhetőségi egyenlethez jutunk

$$\mathbf{S} \mathbf{s}^2 - \mathbf{Q}^* \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{0}, \quad (64)$$

² \mathbf{s}^i , \mathbf{t}^i ($i = 1, 2$) vektoroknál i indexként szerepel nem hatványozásra utal. Ez a jelölési szabály a továbbiakban is érvényes.

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{G}_2, \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{A}^* \end{aligned} \quad (65a, b)$$

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t}^2 - \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_1^{-1} (\mathbf{t}^1 - \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{q}), \quad (66)$$

továbbá (42a) egyenlőtlenség helyett az (50) kifejezést is felhasználva

$$-\mathbf{Q} \mathbf{s}^2 + \mathbf{H} \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{h}} - \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (67)$$

írható. Itt

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}^{(1)} + \mathbf{H}^{(2)}, \quad \hat{\mathbf{H}}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{A}^* \quad (68a, b)$$

$$\tilde{\mathbf{h}} = \mathbf{h} + \mathbf{A} \mathbf{G}_1^{-1} (\mathbf{t}^1 - \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1} \mathbf{q}) + \mathbf{f}^{(2)}. \quad (69)$$

Vagyis a (40)–(42a–c) helyett a megoldandó egyenlet-egyenlőtlenségi rendszer

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{Q}^* \\ -\mathbf{Q} & \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \begin{bmatrix} \mathbf{s}^2 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (70a, b)$$

$$\mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}^* \mathbf{g} = 0, \quad (70c-e)$$

azaz keressük a

$$\min \left\{ [\mathbf{s}^{2*} \mid \mathbf{p}^*] \left[\frac{1}{2} \mathbf{B} [\mathbf{s}^{2*} \mid \mathbf{p}^*]^* + [\tilde{\mathbf{t}}^* \mid \tilde{\mathbf{h}}^*]^* \right] \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (70f)$$

programozási feladat megoldását.

A megoldás kereséséhez tisztázzuk a \mathbf{B} mátrix definit voltát.

Bevezetve az

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{F}_1 \mathbf{G}_1^{*-1}$$

mátrixot, amely az $\mathbf{F}_1, \mathbf{G}_1$ el nem fajuló mátrixok miatt pozitív definit, a (65a, b) alatti mátrixok

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{F}_2 + \mathbf{G}_2 \mathbf{R} \mathbf{G}_2^*, \\ \mathbf{Q}^* &= \mathbf{G}_2 \mathbf{R} \mathbf{A}^*, \end{aligned} \quad (71a, b)$$

illetve a (68b) képletszám alatt található $\hat{\mathbf{H}}^{(1)}$ hatásmátrix

$$\hat{\mathbf{H}}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{A}^* \quad (71c)$$

alakban írhatók fel.

Így

$$B = \left[\begin{array}{c|c} F_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & H^{(2)} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} G_2 \\ \hline -A \end{array} \right] R[G_2^* | -A^*]. \quad (72)$$

Mivel a G_2 , A mátrixok elfajulóak, továbbá $\mathbf{x}^* F^{(2)} \mathbf{x} > 0$, $\mathbf{x}^* H^{(2)} \mathbf{x} > 0$ bármilyen $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ -nál, úgy a B mátrix pozitív definit. Ezek után vizsgáljuk a (70f) feladat megoldását.

I. módszer. Felbontva \mathbf{s}^2 vektort két pozitív vektor különbségére, $\mathbf{s}^2 = \mathbf{s}^{2+} - \mathbf{s}^{2-}$, $\mathbf{s}^{2+} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{s}^{2-} \geq \mathbf{0}$, illetve a (70a) egyenletet az (52) feladatnál tett átalakításokhoz hasonlóan egyenlőtlenségekkel behelyettesítve az alábbi programozási feladat fogalmazható meg.

$$\min \{ \Theta(\mathbf{y}^2) = \mathbf{x}^{2*} \mathbf{y}^2 \mid \mathbf{y}^2 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}^2 = \mathbf{b}^2 - \mathbf{M}^2 \mathbf{y}^2 \geq \mathbf{0} \}, \quad (73)$$

ahol

$$\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} -S & S & Q^* \\ S & -S & -Q^* \\ Q & -Q & -\hat{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{s}^{2+} \\ \mathbf{s}^{2-} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}^2 = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{2+} \\ \mathbf{g}^{2-} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{t}} \\ -\tilde{\mathbf{t}} \\ \tilde{\mathbf{h}} \end{bmatrix}.$$

II. módszer. Felhasználva, hogy S pozitív definit mátrix, a (70a)-ból \mathbf{s}^2 kifejezhető

$$\mathbf{s}^2 = S^{-1} Q^* \mathbf{p} - S^{-1} \tilde{\mathbf{t}}, \quad (74)$$

és (70b) helyett

$$\tilde{H} \mathbf{p} - \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{g}} \geq \mathbf{0}, \quad (75)$$

írható, amihez (70c–e) figyelembevételével a

$$\min \{ \omega(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^* \mathbf{g} \mid \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \mathbf{g} = \mathbf{H} \mathbf{p} - \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \} \quad (76)$$

programozási feladat rendelhető, ahol³

$$\tilde{H} = \hat{H} - Q S^{-1} Q^*, \quad \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{h}} + Q S^{-1} \tilde{\mathbf{t}}. \quad (77a, b)$$

³ Igazolható, hogy \tilde{H} pozitív definit (lásd (70)–(72)), írhatjuk, hogy

$$0 < \mathbf{x}^* B \mathbf{x} = [\mathbf{x}^{1*} \quad \mathbf{x}^{2*}] \begin{bmatrix} S & -Q^* \\ -Q & \hat{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{1*} S \mathbf{x}^1 - 2 \mathbf{x}^{1*} Q^* \mathbf{x}^2 + \mathbf{x}^{2*} \hat{H} \mathbf{x}^2.$$

Legyen bármilyen \mathbf{x} esetében

$$\mathbf{x}^1 = S^{-1} Q^* \mathbf{x}^2,$$

vagyis

$$0 < \mathbf{x}^2 (\hat{H} - Q S^{-1} Q^*) \mathbf{x}^2 = \mathbf{x}^{2*} \tilde{H} \mathbf{x}^2,$$

azaz állításunkat igazoltuk.

(70a) egyenlet — $\mathbf{p} \equiv \mathbf{0}$ -nál — a rúdszerkezet erőmódszerrel történő megoldásának végső klasszikus egyenlete.

Konkrét számításoknál az I. és II. módszer közötti választásban a (73) és (76) feladatban szereplő ismeretlenek száma nyújt támpontot. A (76) feladatot előnyben kell részesítenünk a (73)-mal szemben, annak ellenére, hogy az \mathbf{S} mátrix invertálására is szükség van, mivel az ismeretlenek száma a (76)-ban a szerkezet statikai határozatlansági fokától függően lényegesen kevesebb lehet, mint a (73)-ban.

*

A fentiekben megfogalmazott programozási feladatok összehasonlításából látható, hogy az elmozdulásmódszer alkalmazása lényegesen egyszerűbbnek tűnik, mint az erőmódszeré. Az utóbbinál jóval több számítás után érünk el ahhoz a programozási feladathoz, amelyre már a modifikált szimplex-féle módszerek előnyösen alkalmazhatók.

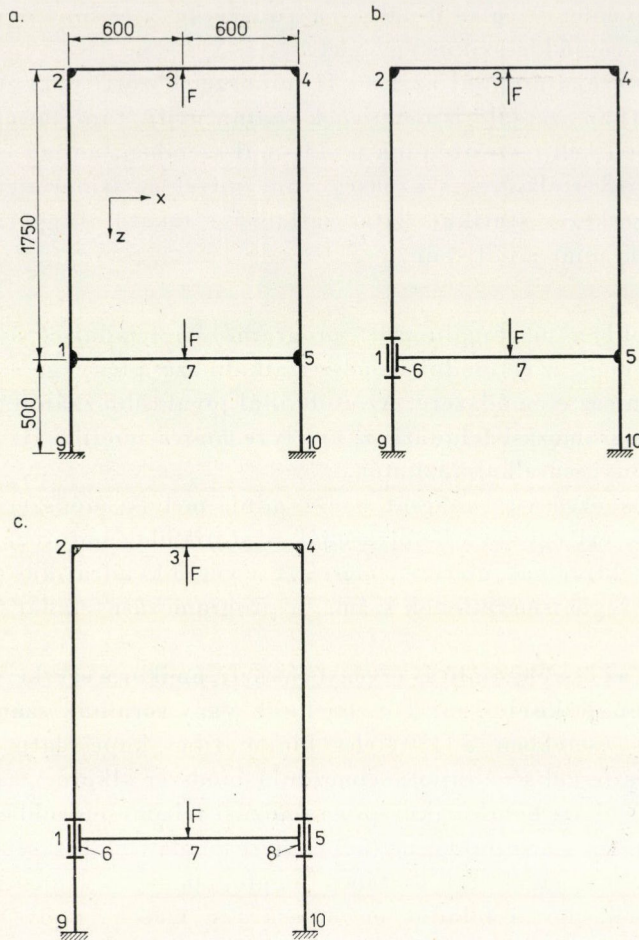
Általános érvényű tanácsot nehéz adni, melyik módszer alkalmazása az előnyösebb; ezt egyrészt befolyásolják a statikailag határozatlan rúdszerkezet \mathbf{u} és \mathbf{s}^2 vektorainak méretei, másrészt a végső kvadratikus programozási feladatban szereplő ismeretlenek száma, a programozási feladat felállításának számításigénye.

Nyilván az összehasonlítás érvényét veszti, amikor a szerkezet geometriai mátrixának rangja kisebb, mint oszlopainak vagy sorainak száma. Mint láttuk, bizonyos esetekben a feltételes kinematikai kapcsolatú rúdszerkezet elmozdulása és feszültségállapota, elmozdulásmódszer alkalmazásával az (52), (54) vagy (60) alatti kvadratikus programozási feladat megoldásán keresztül határozható meg. Amennyiben az (52) és (60) feladat felállításához a \mathbf{K} rangjának és struktúrájának tekintetében megfogalmazott szükséges feltételek nem teljesülnek, úgy a feladat megoldására a másod- vagy harmadrendű elméletet kell felhasználni.

4. „Vezeték I” kapcsolattal rendelkező BFK kapcsolatú síkbeli rúdszerkezetre vonatkozó néhány példa

Gépészeti berendezésekben egyik leggyakrabban előforduló kapcsolat a „Vezeték I”. Vizsgáljuk a 12 ábrán vázolt szerkezetet. A 12a ábrán levőnél BFK kapcsolat nincs, míg a 12b és 12c ábrákon feltüntetett szerkezetnél az 1 jelű főcsomópont és a 6 jelű „szabad” rúdvég, illetve az 5 jelű főcsomópont és a 8 jelű „szabad” rúdvég között írhatók fel a kinematikai feltételek.

A 12b ábrán feltüntetett szerkezet \mathbf{K} mátrixának rangja megegyezik sorainak (oszlopainak) számával. A 12c ábrán levő szerkezet 6–8 csomópontú rúdja merevtestszerű elmozdulással is rendelkezik és így \mathbf{K} merevségi mátrixának rangja, kisebb sorainak számánál. Nevezetesen, síkbeli alak-

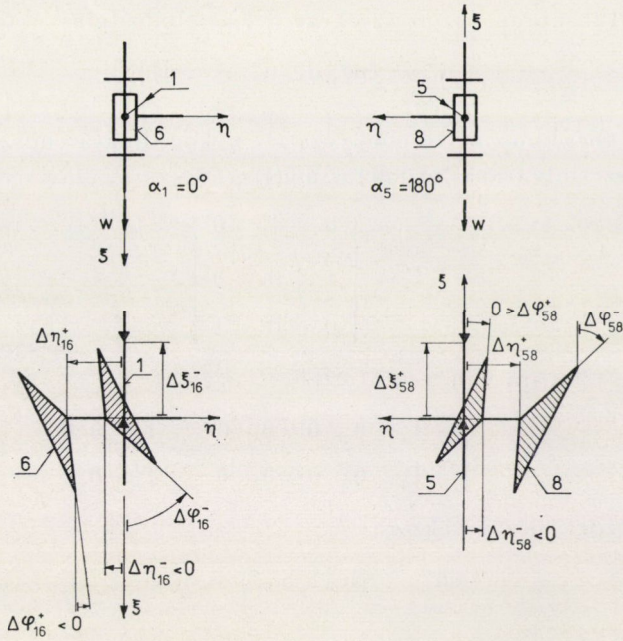


12. ábra. Állványszerkezet. A függőleges oszlopok keresztmetszeteinek geometriai adatai: felület $A = 3000 \text{ mm}^2$, y tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték $I_y = 3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$, a vízszintes rudaknál $A = 5000 \text{ mm}^2$, $I_y = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$. Rugalmassági modulus $E = 2,07 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$. Terhelő erő $F = 200 \text{ kN}$. a) Feltételes kapcsolat nélküli rúdszerkezet, b) BFK kapcsolatú, alszerkezet nélküli rúdszerkezet, c) BFK kapcsolatú, 6–7–8-as csomópontú merevtestszerű mozgást végző alszerkezettel rendelkező rúdszerkezet

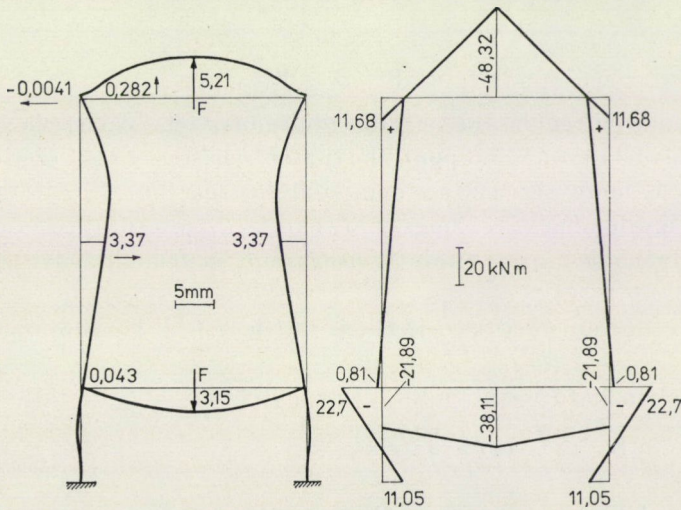
változásokat feltételezve, az elmozdulásvektor csomópontonként három koordinátával rendelkezik, vagyis \mathbf{K} (24,24) típusú mátrix, míg rangja 21.

A 13. ábra a BFK kapcsolatoknál felvett $\xi\eta$ koordinátarendszereket, a kezdeti hézagokat tünteti fel abban az esetben, amikor a vezeték hüvelyének tengelye nem párhuzamos a vezeték ξ tengelyével.

A 12a ábrán vázolt statikailag határozatlan szerkezet elmozdulásállapotát és hajlítónyomatéki ábráját a 14. ábra tartalmazza. (A hajlítónyomatéki ábra a szerkezet alakváltozás előtti középvonalához viszonyítva a tartószakasz húzott oldalán helyezkedik el.)



13. ábra. A vezeték I-es kapcsolat az I-es és 5-ös főcsomópontoknál; a h_{16} és h_{58} vektor elemeinek értelmezése



14. ábra. 12a ábrán vázolt szerkezet elmozdulási és hajlító nyomatéki ábrája

4.1. A 12b ábrán vázolt szerkezetnél az elmozdulásvektor

$$\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*, \dots, \mathbf{u}_7^*] \quad (78)$$

(3,21)

míg az 1-es főcsomópontba elhelyezett $\xi\eta$ koordinátarendszert figyelembe véve, a (32) szerinti transzformációs mátrix

$$\mathbf{T}_1^j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (79)$$

(3,3)

illetve a (34), (36a)-ra való tekintettel

$$\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (80)$$

(6,21)

továbbá a kezdeti hézag vektora

$$\mathbf{h}^{j*} = [\mathbf{h}_{16}^{+*}, \mathbf{h}_{16}^{-*}] = \mathbf{h}_{16}^*, \quad (81a)$$

(1,6)

ahol

$$\mathbf{h}_{16}^{+*} = [\Delta\xi_{16}^+, \Delta\eta_{16}^+, \Delta\varphi_{16}^+], \quad (+ \leftrightarrow -) \quad (81b)$$

$$\mathbf{h}_{16}^{+*} = [0; \quad 0,7 \text{ mm}; \quad -0,05 \text{ rad}]$$

$$\mathbf{h}_{16}^{-*} = [0,5 \text{ mm}; \quad -0,5 \text{ mm}; \quad 0,1 \text{ rad}].$$

Mivel a rúdszerkezet csak BFK-val rendelkezik, úgy (37a–c) szerint

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} - \mathbf{A}\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}^j, \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^j, \quad (6,1)$$

továbbá

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{j} \geq \mathbf{0}. \quad (82)$$

A feladat megoldására az elmozdulásmódszert választva a (47) alatti programozási feladatot a 3.3 pont alatti a *II. módszer A esete* szerint oldhatjuk meg, hisz a \mathbf{K} merevségi mátrix nem elfajuló.

Így figyelembe véve, hogy (53)-ban $\partial II_c / \partial \mathbf{p} = \mathbf{0}$ (hisz rugalmas alátámasztás hiányzik), az (54) alatti programozási feladat helyett a

$$\min \left\{ \chi(\mathbf{j}) = \frac{1}{2} \mathbf{j}^* \mathbf{H}^{(1)} \mathbf{j} + \mathbf{j}^* (\mathbf{h} - \mathbf{f}^{(1)}) \mid \mathbf{j} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (83)$$

feladat fogalmazható meg, ahol

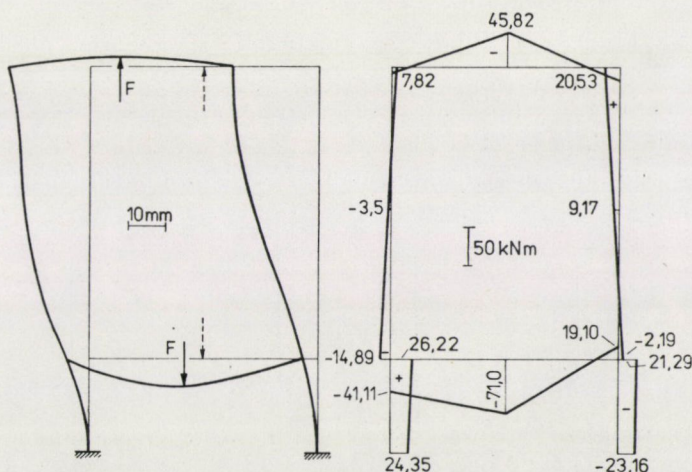
$$\mathbf{H}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}^* \quad \text{hatásmátrix,} \quad (6,6)$$

$$\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{A} \mathbf{K}^{-1} \check{\mathbf{q}} \quad \text{— terhelésből származó elmozdulás.} \quad (6,1)$$

A (83) alatti feladat megoldásából nyert, \mathbf{j} belső feltételi kapcsolatokban ébredő erők ismeretében a (46a)-ból kifejezett

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{j} + \mathbf{K}^{-1}\tilde{\mathbf{q}} \quad (84)$$

csomóponti elmozdulás vektor számítható, majd ennek alapján a tartószerkezet deformálódott alakja megrajzolható. Ez utóbbit a hajlítónyomatéki ábrával együtt a 15. ábra tünteti fel.



15. ábra. A 12b ábrán vázolt BFK kapcsolatú rúdszerkezet elmozdulási és hajlító nyomatéki ábrája

Az 1–6 csomópontnál keletkező kapcsolati erő

$$\mathbf{j}^* = [41,81 \text{ kN}; 0; 41,11 \text{ kN} \cdot \text{m}; 0; 9,24 \text{ kN}; 0],$$

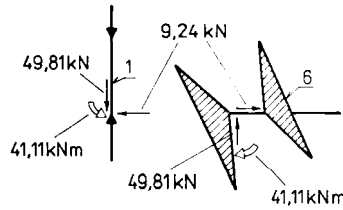
míg a relatív hézag

$$\mathbf{g}^* = [0; 0,2 \text{ mm}; 0,5 \text{ mm}; 0; 0,05 \text{ rad}]$$

értékű, vagyis ténylegesen fennáll a $\mathbf{g}^*\mathbf{j} = 0$ feltétel, továbbá a \mathbf{j} -ben szereplő $M_{16}^{g+} = 41,11 \text{ kNm}$ nyomaték a 6-os csomópontbeli hajlítónyomatékkal kell, hogy megegyezzen. Ez utóbbit a (84) alatt kiszámolt \mathbf{u} segítségével határoztuk meg. Látható a két mennyiség azonossága.

A \mathbf{j} vektorban szereplő kapcsolati erőket és nyomatékokat az egymástól eltávolított 1-es és 6-os csomópontokra felrajzolva a 16. ábrához jutunk.

A bemutatott példa jól érzékelteti, hogy a „Vezeték I” kialakításából adódó negatív kezdeti hézagok (túlfedések) erőteljes befolyást gyakorolnak a rúdszerkezet elmozdulási és feszültségi állapotára. A szimmetrikus terhelés



16. ábra. Az 1-es és 6-os csomópontokra ható kapcsolati erők, nyomatékok

ellenére a szerkezet pontjainak egyoldalú vízszintes irányú elmozdulása jelentős.

4.2. Ezek után térjünk át a 12c ábrán vázolt szerkezet számítására. Az \mathbf{u} elmozdulásvektor (1,24) típusú.

Az 1 és 5 jelű főcsomópontokban felvett $\xi\eta$ koordinátarendszer (13. ábra) és a (32) alapján

$$\mathbf{T}_1^j = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_5^j = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (85a, b)$$

illetve a (34), (36a) figyelembevételével az 1–6, 5–8 csomópontok közötti kapcsolatból adódóan

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^j &= \begin{bmatrix} -\mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_1^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_5^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_5^j \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_5^j & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_5^j \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_1^j & \mathbf{A}_{11}^j \\ \hline \mathbf{A}_{12}^j & \mathbf{A}_{13}^j \end{array} \right], \end{aligned} \quad (86)$$

mivel

$$\mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^*, \dots, \mathbf{u}_8^*] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{u}_1^* & \mathbf{u}_7^* \\ \hline \mathbf{u}_2^* & \mathbf{u}_8^* \end{array} \right]. \quad (87)$$

A kezdeti hézag vektora

$$\mathbf{h}^* = [\mathbf{h}_{16}^{+*}, \mathbf{h}_{16}^{-*}, \mathbf{h}_{58}^{+*}, \mathbf{h}_{58}^{-*}],$$

ahol \mathbf{h}_{16}^+ , \mathbf{h}_{16}^- (lásd (81b) alatt).

Hasonlóan értelmezhető a \mathbf{h}_{58}^+ , \mathbf{h}_{58}^- is. Ismételten a szilárdságtani feladat megoldására az elmozdulás módszert választva, a 3.3. pont II módszer B

esetében leírtak szerint, az (55)-ös egyenletben $\mathbf{p}^w = \mathbf{r} = \mathbf{0}$ -t felvéve

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ (21,21) & (21,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_I \\ (21,1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_I \\ (21,1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I^{j*} \\ (21,12) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ (12,1) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (88)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \\ (3,21) & (3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F \\ (3,1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_{II} \\ (3,1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{II}^{j*} \\ (3,12) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{j} \\ (12,1) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

egyenlethez jutunk, ahol $\det \mathbf{K}_{11} \neq 0$. Jelen esetben \mathbf{u}_F a 8 jelű csomópont elmozdulásának felel meg. Ezek után az (56)–(59d) figyelembevételével, a (60) alatti programozási feladat felépíthető.

A 6–7–8 csomópontú B jelű alszerkezet választott fiktív megtámasztásából adódóan $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ -ra adódik, s így az (56)-os egyenlet az alszerkezet egyensúlyát fejezi ki. Természetesen, ekkor a \mathbf{G}_F mátrix az (57b)-től eltérő módon, egyszerű vetületi és nyomatéki egyenletek felírásával — közvetlenül előállítható.

A (60) feladatban szereplő \mathbf{x} és \mathbf{y} vektorok (18,1) típusúak.

A csomóponti elmozdulások (61d)-vel a $\mathbf{p} \equiv \mathbf{j}$ helyettesítéssel állíthatók elő.

A feladatot kétféle \mathbf{h} vektor felvételével számoltuk ki.

A 17a ábrán levő elmozdulások és hajlítónyomatékok $\mathbf{h}^* = [\mathbf{h}_{16}^*, \mathbf{h}_{58}^*]$,

$$\mathbf{h}_{16}^* = [0; 0,7 \text{ mm}; -0,05 \text{ rad}; 0,5 \text{ mm}; -0,5 \text{ mm}; 0,1 \text{ rad}],$$

$$\mathbf{h}_{58}^* = [0,5 \text{ mm}; 0,7 \text{ mm}; 0,1 \text{ rad}; 0; -0,5 \text{ mm}; -0,05 \text{ rad}] \quad (89)$$

mellett nyertek meghatározást, míg a 17b ábrán szereplők

$$\mathbf{h}_{16}^* = [0; 0,1 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}; 0,5 \text{ mm}; 0,1 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}],$$

$$\mathbf{h}_{58}^* = [0,5 \text{ mm}; 0,1 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}; 0; 0,1 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}] \quad (90)$$

kezdeti hézag vektorhoz tartoznak.

A 17a ábrabeli esetben a kapcsolati erők vektorai

$$\mathbf{j}_{16}^* = [100 \text{ kN}; 49,05 \text{ kN}; 433,09 \text{ kN} \cdot \text{m}; 0; 0; 0],$$

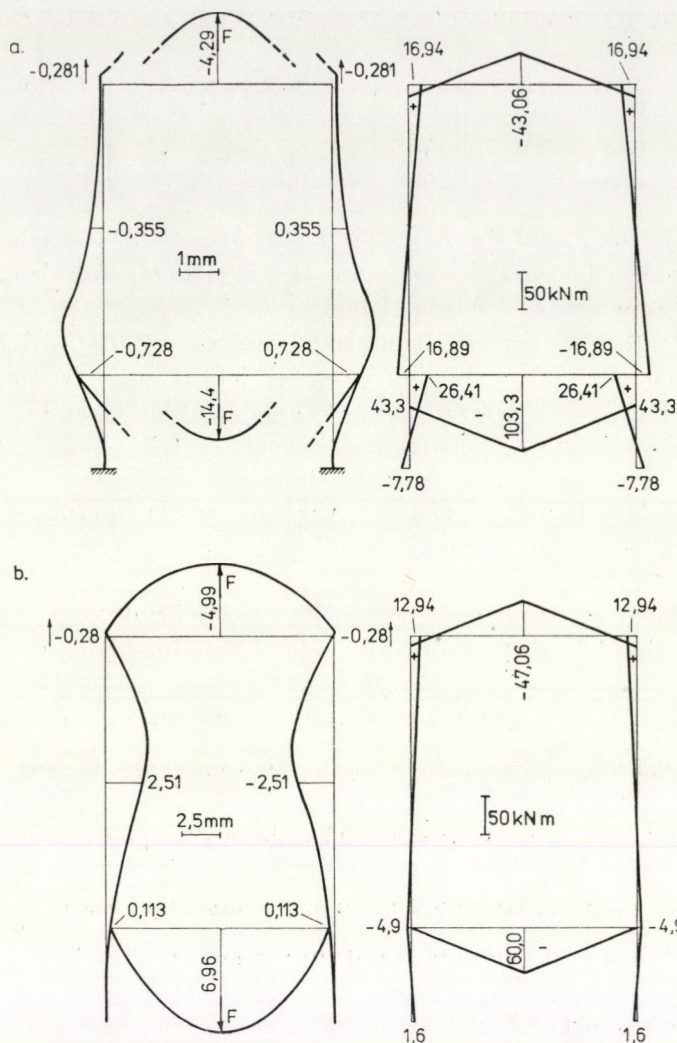
$$\mathbf{j}_{58}^* = [0; 49,05 \text{ kN}; 0; 100 \text{ kN}; 0; 433,09 \text{ kN} \cdot \text{m}],$$

a relatív hézag vektorai

$$\mathbf{g}_{16}^* = [0; 0; 0; 0,5 \text{ mm}; 0,2 \text{ mm}; 0,05 \text{ rad}],$$

$$\mathbf{g}_{58}^* = [0,5 \text{ mm}; 0; 0,05 \text{ rad}; 0; 0,2 \text{ mm}; 0]$$

értékűek.



17. ábra. A 12c ábrán vázolt szerkezet elmozdulási és hajlítónyomatéki ábrája. a) (89) alatti h -nál, b) (90) alatti h -nál

Érdeemes megjegyezni, annak ellenére, hogy a 6–8 rúd hossza terheletlen esetben 1 mm-rel hosszabb volt, mint az 1–5 csomópontok közötti távolság; az említett rúd a terhelés és a h -ban szereplő $\Delta\varphi^\pm$ szögelfordulási kezdeti „hézag” okozta alakváltozás után nem nyomott, hanem húzott lett.

A bemutatott példa jól érzékelteti, hogy a szerkezeti elemek közötti szerelésből származó hézagok, túlfedések a szerkezet állapotára olyan mértékű hatást gyakorolhatnak, amelyet előzetesen nem láthattunk.

A kapcsolati erők a 4.1. alpontban ismertettek szerint könnyen felrajzolhatók az 1–5 főcsomópontokba, illetve a B jelű alszerkezet 6-os és 8-as csomópontjaiba.

A 17b ábrán feltüntetett esetben

$$\mathbf{j}_{16}^* = [100 \text{ kN}; 0; 0; 0; 23,45 \text{ kN}; 0],$$

$$\mathbf{j}_{58}^* = [0; 0; 0; 100 \text{ kN}; 23,45 \text{ kN}; 0],$$

míg

$$\mathbf{g}_{16}^* = [0; 0,2 \text{ mm}; 0,066 \text{ rad}; 0,1 \text{ mm}; 0; 0,034 \text{ rad}],$$

$$\mathbf{g}_{58}^* = [0,1 \text{ mm}; 0,2 \text{ mm}; 0,034 \text{ rad}; 0; 0; 0,066 \text{ rad}],$$

vagyis az 1–6 és 5–8 csomópontok közötti kapcsolatnál nyomaték nem lép fel, a hüvely a vezetékre nem feszül rá.

Az állványszerkezet terhelési- és a kapcsolatokbeli kezdeti hézagok szimmetriája miatt, mint várható volt, szimmetrikusan deformálódik.

5. Következtetések

Feltételes kinematikai kapcsolatú rúdszerkezetként a gépészet, építészet számos berendezése modellezhető. Így pl. gépészetben szerszámgépek, különféle mechanizmusok szilárdsági és deformációs állapotának pontosabb nyomonkövetése könnyen elérhető a feltételes kinematikai kapcsolatok kvadratikus programozási feladatként való kezelésével.

A megfogalmazott programozási feladatok összevetéséből következik, hogy az elmozdulásmódszer alkalmazása szélesebb mint az erőmódszeré, ugyanis az elmozdulásmódszert a merevségi mátrix struktúrájának bizonyos feltétele mellett (lásd 3.2. pont) abban az esetben is alkalmazhatjuk, amikor a mátrix rangja kisebb sorainak számánál. Erőmódszerre alapozott kvadratikus programozási feladat azonban csak statikailag határozatlan szerkezetnél fogalmazható meg.

IRODALOM

1. DUPUIS, G.—PROBST, A.: Étude d'une structure élastique soumise à des conditions unilatérales, *J. mécs.* 1 (1967), 3–41
2. Гордеев, В. Н.—Перельмутер, А. В.: Расчёт упругих систем односторонними связями как задача квадратического программирования. Сб. Исследования по теории сооружений вып. XV. Стройиздат М., (1967), 208–212
3. Рабинович, И. М.: Энергетические свойства и особенности расчёта статистически неопределимых стержневых систем с односторонними лишними связями. Сб. Исследования по теории сооружений вып. XVIII. Стройиздат М., (1969), 141–153

4. Перельмутер, А. В.: К вопросу о кинематическом анализе систем, содержащих односторонние связи. Строительная механика и расчёт сооружений № 1, (1970), 33—37
5. PÁCZELT, I.: Rugalmas rendszerek érintkezési feladatainak megoldása matematikai programozással, *Nehézipari Műszaki Egyetem Közleményei*, IV. sorozat, Természettudományok, **22** (1977), 185—224
6. KALISZKY, S.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek vizsgálata, *Építés- és Építészettudomány*, **6** (1974), 325—339
7. ROLLER, B.—SZENTIVÁNYI, B.: Extremumsätze und deren Anwendungen in der Theorie zweiter Ordnung der Stab- und Flächentragwerke, *Acta Techn. Hung.* **83** (1976), 381—392
8. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása, Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1971
9. KÜNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1962
10. PÁCZELT, I.: Solution of Elastic Contact Problems by the Finite Element Displacement Method, *Acta Techn. Hung.* **82** (1976), 353—375

MELLÉKLET

Az (59e) egyenlet struktúrája kettőnél több alszerkezet esetében

M. 1. Vizsgáljuk az M.1. ábrán vázolt szerkezetet. A 3—10, 7—12, 2—13, 8—15 csomópontok közötti vezeték I típusú BFK kapcsolatból adódóan a szerkezetet A, B, C jelű alszerkezetre bontjuk.

Az elmozdulásmódszer (46a) egyensúlyi egyenlete a választott szerkezetre konkretizálva, az (M.1.) képletű egyenlethez vezet.

$$Ku + A^*j - \tilde{q} = 0 \quad (46a) \quad \Rightarrow$$

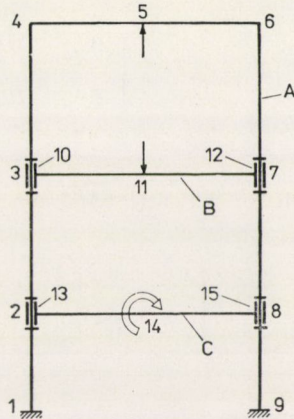
$\begin{matrix} 1_{11} & & 0 & & 0 \\ \hline 0 & (E_2 + E_1 K^A E_1) = S^A & & & 0 \\ & (27, 27) & & & \\ \hline 0 & & 0 & & 1_{11} \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \hline u^A \\ \hline 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \hline \tilde{q}_I^A \\ \hline 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \hline u^B \\ \hline u^F \\ \hline 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \tilde{q}_I^B \\ \hline \tilde{q}_{II}^B \\ \hline 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \tilde{q}_I^C \\ \hline \tilde{q}_{II}^C \\ \hline 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 0 \\ \hline u^C \\ \hline u^E \\ \hline 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \tilde{q}_I^C \\ \hline \tilde{q}_{II}^C \\ \hline 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} j \\ (24, 3) \end{matrix} = 0$
								$\Leftarrow A^* = [A_B^* \mid A_C^*]$
								$\Leftarrow A_I^{B^*}$
								$\Leftarrow A_{II}^{B^*}$
								$\Leftarrow A_I^{C^*}$
								$\Leftarrow A_{II}^{C^*}$

(M.1.)

Az I és 9 csomópontbeli kinematikai peremfeltétel következtében az A alszerkezetre vonatkozó — a kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőhöz tartozó egyensúlyi egyenlet

$$E_1(K^A u^A - q^A + A^*j) = 0$$

alakú. Itt E_1 olyan diagonális mátrix, amelynek főátlójában — az adott elmozdulási koordinátákhoz tartozó helyeken — zérus áll, míg a többi tag egységnyi. Egy $E_2 = E - E_1$ mátrix bevezetésével, az $u^A = E u^A$ azonosság felhasználásával, illetve az $E_2 u^A$ tagnak az egyenlet



M.1. ábra

mindkét oldalához való hozzáadásával az előbbi egyenlethől az (M.1)-ben feltüntetett

$$(\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_1 \mathbf{K}^A \mathbf{E}_1) \mathbf{u}^A = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{K}^A \mathbf{E}_2) \mathbf{u}^A + \mathbf{E}_1 (\tilde{\mathbf{q}}^A - \mathbf{A}^{A*} \mathbf{j})$$

egyenlethez jutunk, amelyben

$$\tilde{\mathbf{q}}^{A*} = [\mathbf{0}^*, \tilde{\mathbf{q}}_1^{A*}, \mathbf{0}^*]; (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \mathbf{K}^A \mathbf{E}_2) \mathbf{u}^A = \mathbf{0}$$

az 1 és 9 csomópontok (rúdszerkezetek) merev befalazása miatt.

Megjegyezzük, hogy az (M.1) egyenlet \mathbf{A}^* mátrixában csak a beszafozott blokkok különböznek zérustól.

Amennyiben az (M.1) mátrixegyenlet (55) alatti felbontását végeznénk el, úgy ehhez az együtthatómátrix sorainak és oszlopainak felcserélését kellene végrehajtani. Mivel a \mathbf{K}^B , \mathbf{K}^C mátrix blokkok felett zérus mátrixok állnak, úgy az átalakításra valójában nincs szükség, hisz az \mathbf{u}_1 elmozdulásvektor elemei alszerkezetként egymástól függetlenül kifejezhetők.

Vagyis az (M.1) egyenlethől, az \mathbf{A} jelű statikailag határozatlan rúdszerkezet elmozdulásvektora

$$\mathbf{u}^A = -[\mathbf{S}^A]^{-1} \mathbf{A}^{A*} \mathbf{j} + [\mathbf{S}^A]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}^A \quad (\text{M.2})$$

összefüggéssel számolható, míg

$$\mathbf{u}_1^B = -[\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{K}_{12}^B \mathbf{u}_F^B - [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{A}_1^{B*} \mathbf{j} + [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1^B \quad (B \leftrightarrow C). \quad (\text{M.3})$$

Az (M.3) alatti \mathbf{u}_1^B -t ($B \leftrightarrow C$) behelyettesítve az (M.1) egyenlet 3. (5.) blokkosorába, a B (C) alszerkezetre vonatkozó (56) típusú egyensúlyi egyenletekhez jutunk:

$$\mathbf{D}^B \mathbf{u}_F^B + \mathbf{G}_F^{B*} \mathbf{j} - \mathbf{q}_F^B = \mathbf{0}, \quad (B \leftrightarrow C) \quad (\text{M.4})$$

ahol

$$\mathbf{D}^B = \mathbf{K}_{22}^B - \mathbf{K}_{21}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{K}_{12}^B, \quad (3,3)$$

$$\mathbf{G}_F^{B*} = \mathbf{A}_{11}^{B*} - \mathbf{K}_{21}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{A}_1^{B*} \quad (B \leftrightarrow C) \quad (\text{M.5})$$

$$\mathbf{q}_F^B = \tilde{\mathbf{q}}_{11}^B - \mathbf{K}_{21}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1^B. \quad (3,1)$$

Az érintkezés-elválás (58)-as kinematikai egyenletében szereplő \mathbf{H} hatásmátrix

$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{H}^B + \mathbf{H}_{BB}^A & \mathbf{H}_{BC}^A \\ \hline \mathbf{H}_{CB}^A & \mathbf{H}^C + \mathbf{H}_{CC}^A \end{array} \right] \quad (\text{M.6})$$

felépítésű, ahol

$$\mathbf{H}^A = \mathbf{A}^A [\mathbf{S}^A]^{-1} \mathbf{A}^{A*} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{BB}^A & \mathbf{H}_{BC}^A \\ \mathbf{H}_{CB}^A & \mathbf{H}_{CC}^A \end{bmatrix} \begin{matrix} 12 \\ 12 \end{matrix} \quad (\text{M.7})$$

illetve

$$\mathbf{H}^B = \mathbf{A}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \mathbf{A}^{B*}. \quad (B \leftrightarrow C) \quad (\text{M.8})$$

A geometriai mátrix

$$\mathbf{G}_F^* = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_F^{B*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_F^{C*} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \quad (\text{M.9})$$

míg a kezdeti \mathbf{h} hézagtól és terheléstől függő vektor

$$\mathbf{t}_F = \mathbf{h} - \mathbf{A}^A [\mathbf{S}^A]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}^A - \mathbf{A}^B [\mathbf{K}_{11}^B]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1^B - \mathbf{A}^C [\mathbf{K}_{11}^C]^{-1} \tilde{\mathbf{q}}_1^C. \quad (\text{M.10})$$

Ily módon az (59e) egyenlet az alábbi struktúrájú

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}^B & \mathbf{0} & \mathbf{G}_F^{B*} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^C & \mathbf{0} & \mathbf{G}_F^{C*} \\ -\mathbf{G}_F^B & \mathbf{0} & & \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G}_F^C & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F^B \\ \mathbf{u}_F^C \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (\text{M.11a})$$

míg a (46c–e) alapján

$$\mathbf{j}^* \mathbf{g} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{M.11b–d})$$

A fentiekből a (60)-as kvadratikus programozási feladat már könnyen előállítható.

M.2. A \mathbf{K}_{11}^B invertálását, ismételten a (61a–c) egyenletek analógiája alapján közvetett úton célszerű elvégezni. Amennyiben a B alszerkezet a 12-es csomópontjában fiktív támaszt (befalazást) helyezünk el, ennek a statikailag határozott szerkezetnek kell megkeresni a megoldását. A fiktív támasznál zérus elmozdulást a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_F^B \\ \mathbf{u}_F^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}_1^B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{M.12})$$

egyenlet megoldása szolgáltatja.

Így a (61a–c) szerint a \mathbf{D}^B , \mathbf{G}_F^{B*} , \mathbf{q}_F^B előállításához a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{12}^B & \mathbf{A}_1^{B*} & \tilde{\mathbf{q}}_1^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \quad (\text{M.13})$$

egyenletet kell megoldani. Hasonlóan járunk el a C alszerkezetnél is. Az A alszerkezetnél már az (M.1)-ben feltüntetett \mathbf{S}^A mátrix felvételével biztosítottuk az 1 és 9 csomópontokban a befalazás által előírt peremfeltételeket.

M.3. A bemutatott példából következik, hogy a BFK kapcsolatok esetében az (M.11a) egyenletben szereplő mátrixokat, vektorokat, alszerkezetként, az egymástól függetlenül jelentkező egyensúlyi egyenletnek az alszerkezet valóságos vagy fiktív megtámasztásánál levő kinematikai peremfeltételt kielégítő megoldása révén célszerű meghatározni.

Látjuk, hogy a merevtestszerű elmozdulással bíró alszerkezetek esetében a D kvázi-diagonál mátrixként jelenik meg, mivel a felírható (M.4) egyenletek száma, megegyezik a merevtestszerű elmozdulással rendelkező alszerkezetek számával. Az (M.11a) egyenlet 3. és 4. blokkosora az $A-B$, $A-C$ alszerkezetek közötti BFK kapcsolatok kinematikai viszonyait írja le.

A blokkosorokban szereplő egyenletek száma, a felvételezett Vezeték I típusú kapcsolat miatt kapcsolatonként 6 db, azaz összesen 24.

M.4. A (60)-as kvadratikus programozási feladatban szereplő j és u_F mennyiségek különböző mértékegysége miatt, a számítás folyamán célszerű $j = j/F^\circ$ -el számolni, azaz H helyett $H \cdot F^\circ$ -at, D^B helyett D^B/F° -at továbbá \tilde{q}_F^B helyett \tilde{q}_F^B/F° -at ($B \leftrightarrow C$) venni, ahol F° az u_F , j -ben szereplő mennyiségek dimenziójától függő nagy szám, pl. ha hosszúság mm-ben, erő N-ben szerepel, akkor $F^\circ = 10^8 - 10^9$. Ezáltal elérhető, hogy a G_F , $H \cdot F^\circ$, D/F° mátrixok, a \tilde{q}_F/F° és t_F vektorok, sőt maga az $[F^\circ \cdot u_F^*, j^{*\circ}]$ vektor is közel azonos nagyságrendű tagokat tartalmaznak. Ez a szimplex típusú algoritmusnál jelentkező kerekítési hibák csökkenését okozza, ami végsősoron a számítás pontosságának növekedéséhez vezet.

Contribution to the Calculation of Frame Structures Including Conditional Kinematic Connections. In this paper the strength calculation of frame structures, having both internal and external conditional kinematic (geometric) connections, is reduced with the aid of the first order theory to quadratic programming problems differing from each other with respect to the final unknown values. After classifying the internal kinematic connections occurring in the case of inplane structures, the programming problems based on the method of displacement and on the method of force are analysed by taking into account the geometric matrix degree of the frame structure in question. It is pointed out that the field of application of the method of displacement is larger than that of the method of force, considering that with the aid of this latter only statically undetermined frame structures can be investigated. In conclusion, numerical examples are presented for the case of the internal conditional kinematic connection to the programming problem based on the method of displacements.

Beitrag zur Berechnung von Rahmentragwerken mit bedingten kinematischen Verbindungen. In der Abhandlung wird die Festigkeitsberechnung der innere und äußere bedingte kinematische (geometrische) Verbindungen besitzenden Rahmentragwerke aufgrund der Theorie erster Ordnung auf das Problem der im Hinblick auf die in den endgültigen Unbekannten verschiedenen quadratischen Programmierungsaufgaben reduziert. Nach der Klassifizierung der bei den ebenen Konstruktionen auftretenden inneren bedingten kinematischen Verbindungen werden die auf die Verschiebungsmethode oder auf dem Kraftgrößeverfahren beruhenden Programmierungsaufgaben unter Berücksichtigung des Ranges der geometrischen Matrix des Rahmentragwerks analysiert. Es wird nachgewiesen, daß der Anwendungsbereich der Verschiebungsmethode breiter als das Kraftgrößeverfahren ist, da mit dem letzteren nur statisch unbestimmte Rahmentragwerke untersucht werden können. Zuletzt werden numerische Beispiele für die auf dem Verschiebungsverfahren beruhende Programmierungsaufgabe für den Fall der inneren bedingten kinematischen Verbindung vorgeführt.



PERTURBÁCIÓS MÓDSZER A CSAVARÁSI MEREVSÉG KÖZELÍTŐ ÉRTÉKÉNEK SZÁMÍTÁSÁRA

ECSEDI ISTVÁN*

Ez a tanulmány a heterogén anyagú prizmatikus rudak de Saint-Venant-féle csavarási feladatával kapcsolatos. Egy perturbációs módszert javasol a csavarási merevség közelítő értékének meghatározására.

Fontosabb jelölések

x, y derékszögű koordináták,

e_x, e_y egységvektorok,

$G = G(x, y)$ csúsztató rugalmassági modulus,

$g = g(x, y) = 1/G(x, y)$,

$g_0 = g_0(x, y), \gamma = \gamma(x, y)$ a rúd anyagának heterogenitását jellemző ismert (adott) függvények,

ε kis paraméter,

$u = u(x, y)$ feszültségfüggvény,

T x, y síkbeli egyszerűen összefüggő, rektifikálható határgörbéjű korlátos tartomány,

∂T T határgörbéje,

$n = n_x e_x + n_y e_y$ a ∂T határgörbe normális egységvektora,

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y$ Hamilton-féle differenciáloperátor,

„ \cdot ” két vektor skaláris szorzatának jele,

S a prizmatikus rúd de Saint-Venant-féle elmélet alapján meghatározható csavarási merevsége,

$0(\varepsilon^k)$ „kis ordó ε^k ” az ε olyan függvénye, melyre $0(\varepsilon^k)/\varepsilon^k \rightarrow 0$ midőn $\varepsilon \rightarrow 0$.

Egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmez.

1. Bevezetés

Ismeretes, hogy az 1. ábrán vázolt *tömör* keresztmetszetű heterogén, de izotrop, lineárisan rugalmas anyagi prizmatikus rúd de Saint-Venant-féle csavarási feladata a következő peremértékproblémára vezet ([1], [2]):

$$\nabla \cdot (g \nabla u) + 2 = 0 \quad (x, y) \in T, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad (x, y) \in \partial T. \quad (2)$$

A fenti egyenletekben

$u = u(x, y)$ a csavarási feszültségfüggvény,

$g = g(x, y) = 1/G(x, y)$,

$G = G(x, y)$ a rúd anyagának csúsztató rugalmassági modulusa.

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehérrítő u. 24. IV/1.

A prizmatikus rúd de Saint-Venant-féle elmélet alapján meghatározható S csavarási merevségét az

$$S = 2 \int_T u dT \quad (3)$$

formula alapján tudjuk meghatározni ([1], [2]).

A levezetések során még alkalmazzuk az alábbi egyenlőtlenségi relációt [2]:

$$S \geq - \int_T g(\nabla \tilde{u})^2 dT + 4 \int_T \tilde{u} dT, \quad (4)$$

ahol $\tilde{u} = \tilde{u}(x, y)$ a $T + \partial T$ zárt tartományban folytonos, T -ben szakaszonként folytonosan differenciálható, a ∂T határgörbén zérus értéket felvevő egyébként tetszőleges kétváltozós függvényt jelöl.

A tanulmányban a vizsgálatot olyan esetre korlátozzuk, amelyekben a rúd anyagának heterogenitását jellemző $g = g(x, y)$ függvény

$$g = g(x, y) = g_0(x, y) + \varepsilon \gamma(x, y) \quad (5)$$

alakú. Az (5) egyenletben $g_0 = g_0(x, y)$, $\gamma = \gamma(x, y)$ adott függvények, ε pedig az ún. kis paraméter.

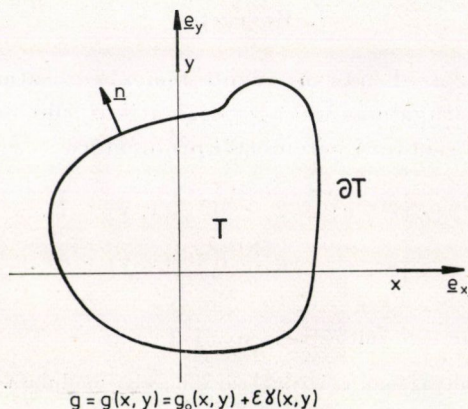
A tanulmány tárgya az (5) egyenlet alapján a következőképpen jelölhető ki:

a $g_0 = g_0(x, y)$ függvénynek kicsiny $\varepsilon \gamma(x, y)$ mértékű megváltoztatása milyen módon hat a csavarási merevség értékére.

A következőkben feltételezzük, hogy a csavarási probléma megoldása ismert, ha a rúd anyagának heterogenitását a $g_0 = g_0(x, y)$ függvény jellemzi, azaz a

$$\nabla \cdot (g_0 \nabla u_0) + 2 = 0 \quad (x, y) \in T, \quad (6)$$

$$u_0 = 0 \quad (x, y) \in \partial T \quad (7)$$



1. ábra. Tömör keresztmetszet

egyenletek által kijelölt kerületértékfeladat, az ún. *alapfeladat* $u_0 = u_0(x, y)$ megoldása adottnak tekintett. Ha a rúd anyagának a heterogenitását $\varepsilon\gamma(x, y)$ mértékben megváltoztatjuk, akkor a csavarási feladat $u = u(x, y)$ feszültségfüggvénye, tekintettel az (1), (2) egyenletekre a

$$\nabla \cdot [(g_0 + \varepsilon\gamma)\nabla u] + 2 = 0 \quad (x, y) \in T, \tag{8}$$

$$u = 0 \quad (x, y) \in \partial T \tag{9}$$

kerületi érték probléma megoldásával állítható elő.

2. Perturbációs módszer

R. D. SHILE és R. L. SIRAKOWSKI eljárását [1] követve feltesszük, hogy a (8), (9) egyenletek által kijelölt kerületi értékfeladat $u = u(x, y)$ megoldása az ε kis paraméter analitikus függvénye, s így előállítható

$$u = u(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y) + \dots \tag{10}$$

alakban. Ennek megfelelően a (3) képlet alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$S = P_0 + \varepsilon P_1 + \varepsilon^2 P_2 + \dots, \tag{11}$$

ahol

$$P_0 = S_0 = 2 \int_T u_0 dT, \tag{12}$$

$$P_i = 2 \int_T u_i dT, \tag{13}$$

$$(i = 1, 2, \dots).$$

A csavarási merevség elsőrendű közelítésének az

$$S_1 = S_0 + \varepsilon P_1, \tag{14}$$

képlet alapján meghatározható mennyiséget tekintjük. Az [1] tanulmány szerint

$$u(x, y) = u_0(x, y) + \varepsilon u_1(x, y) + 0(\varepsilon^2), \tag{15}$$

így nyilván

$$S = S_1 + 0(\varepsilon^2). \tag{16}$$

A (10) alakú megoldásnak a (8), (9) egyenletekbe való behelyettesítésével — ismert módon ([1], [3], [4]) az együtthatók összehasonlításának az elve alapján — a

$$\nabla \cdot (g_0 \nabla u_{i+1}) + \nabla \cdot (\gamma \nabla u_i) = 0 \quad (x, y) \in T, \quad (17)$$

$$u_{i+1} = 0 \quad (x, y) \in \partial T, \quad (18)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots)$$

egyenleteket kapjuk. A következőkben bebizonyítjuk, hogy a csavarási merevség S_1 elsőrendű közelítése az $u_0 = u_0(x, y)$ ismeretében közvetlenül előállítható.

A szorzatfüggvény deriválási szabályának alkalmazásával a

$$g_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_1 + u_0 \nabla \cdot (g_0 \nabla u_1) = \nabla \cdot (u_0 g_0 \nabla u_1), \quad (19)$$

$$g_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_1 + u_1 \nabla \cdot (g_0 \nabla u_0) = \nabla \cdot (u_1 g_0 \nabla u_0) \quad (20)$$

egyenletekhez jutunk. Innen, ha alkalmazzuk a Gauss-féle integrálatalakítási tételt és tekintettel vagyunk az

$$u_0 = u_1 = 0 \quad (x, y) \in \partial T$$

homogén peremfeltételekre, azt találjuk, hogy

$$\int_T g_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_1 dT + \int_T u_0 \nabla \cdot (g_0 \nabla u_1) dT = 0, \quad (21)$$

$$\int_T g_0 \nabla u_0 \cdot \nabla u_1 dT + \int_T u_1 \nabla \cdot (g_0 \nabla u_0) dT = 0. \quad (22)$$

A (21) és (22) egyenletek kivonásával, valamint a (6) és a (17) egyenletek felhasználásával az alábbi egyenletet nyerjük:

$$2 \int_T u_1 dT - \int_T u_0 \nabla \cdot (\gamma \nabla u_0) dT = 0. \quad (23)$$

A

$$\int_T \nabla \cdot (u_0 \gamma \nabla u_0) dT = \int_T \gamma (\nabla u_0)^2 dT + \int_T u_0 \nabla \cdot (\gamma u_0) dT, \quad (24)$$

$$\int_T \nabla \cdot (u_0 \gamma \nabla u_0) dT = \int_{\partial T} (u_0 \gamma \nabla u_0) \cdot \underline{n} d(\partial T) \quad (25)$$

azonosságok felhasználásával könnyen verifikálható a (23) egyenlet alapján, hogy

$$2 \int_T u_1 dT = - \int_T \gamma (\nabla u_0)^2 dT, \quad (26)$$

azaz a csavarási merevség S_1 elsőrendű közelítése közvetlenül kifejezhető az $u_0 = u_0(x, y)$ ismeretében, hiszen a (14) és a (26) kombinálásával az

$$S_1 = S_0 - \varepsilon \int_{\bar{T}} \gamma (\nabla u_0)^2 dT, \quad (S_0 = 2 \int_{\bar{T}} u_0 dT) \quad (27)$$

formulát nyerjük.

Felvetődik az a kérdés, hogy milyen viszony van az S csavarási merevség és az S_1 elsőrendű közelítés között. Bebizonyítjuk, hogy fennáll az

$$S \geq S_1 \quad (28)$$

egyenlőtlenségi reláció.

A (4) egyenlőtlenségi reláció alapján ui. azt írhatjuk, hogy

$$S \geq - \int_{\bar{T}} (g_0 + \varepsilon \gamma) (\nabla u_0)^2 dT + \int_{\bar{T}} 4u_0 dT = - \int_{\bar{T}} g_0 (\nabla u_0)^2 dT + \\ + 4 \int_{\bar{T}} u_0 dT - \varepsilon \int_{\bar{T}} \gamma (\nabla u_0)^2 dT. \quad (29)$$

Ismert eredményekből következik, hogy [2]

$$\int_{\bar{T}} g_0 (\nabla u_0)^2 dT = 2 \int_{\bar{T}} u_0 dT. \quad (30)$$

A (12) a (27) és a (30) egyenletek, valamint a (29) egyenlőtlenségi reláció kombinálásával a bizonyítandó (28) egyenlőtlenségi relációt nyerjük.

3. Egy példa

Tekintsük a 2. ábrán vázolt tömör körkeresztmetszetet. A példában a mértékegységek feltüntetésétől eltekintünk. Legyen

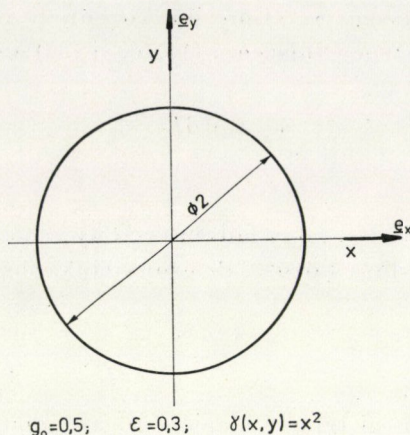
$$g = g(x, y) = 0,5 + 0,3x^2.$$

Nyilván jelen feladatban

$$g_0 = 0,5, \quad \gamma(x, y) = x^2, \quad \varepsilon = 0,3.$$

Ismert eredményekből következik, hogy

$$S_0 = \pi, \quad u_0(x, y) = 1 - x^2 - y^2.$$



2. ábra. Kör keresztmetszet

A tanulmány (27) képlete szerint

$$S_1 = \pi - 0,1\pi = 0,9\pi.$$

A (28) egyenlőtlenségi reláció alkalmazásával azt írhatjuk, hogy

$$S \geq 0,9\pi.$$

IRODALOM

1. SCHILE, R. D.—SIERAKOWSKI, R. L.: On the Saint-Venant Problem for Nonhomogeneous Elastic Material. *Quart. Appl. Math.* **23** (1955), No. 1.
2. ECSEDI, I.: Estimation of the Torsional Stiffness of Prismatical Bars of Heterogeneous Material. *Acta Techn. Hung.* **85** (1977), 207—220
3. COURANT-HILBERT: *Methods of Mathematical Physics. Volum. I.* Interscience Publ. New York 1953
4. SOKOLNIKOFF, I. S.: Approximate Methods of Solutions of Twodimensional Problems in Anisotropic Elasticity, *Proc. Symp. Appl. Math.* **3** (1950), 1—11

Method of Perturbation for the Calculation of the Approximate Value of Torsional Stiffness — The study concerns de Saint-Venant's torsional problem of prismatic bars of heterogeneous material. The author suggests a method of perturbation for the determination of the approximate value of the torsional stiffness.

Störungsmethode für die Berechnung des Näherungswertes der Drehfestigkeit. Die Abhandlung betrifft das de Saint-Venantsche Torsionsproblem der aus heterogenem Material hergestellten prismatischen Stäbe. Es wird eine Störungsmethode zur Ermittlung des Näherungswertes der Drehfestigkeit vorgeschlagen.

PÁRHUZAMOSAN KAPCSOLT ELEMEEK FÁRADT TÖRÉSÉNEK ÉS ÉLETTARTAMÁNAK NÉHÁNY KÉRDÉSE

MATOLCSY TAMÁS*

és

MATOLCSY MÁTYÁS**

A MATEMATIKAI TUD. KAND.

A MŰSZAKI TUD. KAND.

[Beérkezett 1978. augusztus 2-án]

A szerzők azt a kérdést vizsgálják, hogy párhuzamosan kapcsolt szerkezeti elemek törési folyamata hogyan írható le a sztochasztikus folyamatok elméletével. Az elemek egyenkénti törése befolyásolja a megmaradtak további viselkedését. Bizonyos feltételekből kiindulva meghatározható a rendszer egyes állapotainak valószínűsége, illetve az egyik állapotból a másikba történő átmenet valószínűsége. Általános érvényű, rekurzív formulák írhatók fel a fenti fogalmak meghatározására.

1. Bevezetés

A műszaki élet igényei napjainkban sok területen túlhaladták a klaszikus anyagvizsgálatnak azt a gyakorlatát, amely egyedi próbatesteken kimért szilárdsági jellemzők alapján ítéli meg az összetett szerkezetek szilárdsági tulajdonságait. Szerkezeteinkben együttműködő elemek, alkatrészek eredő teherbírását, élettartamát a köztük levő kapcsolat is alapvetően determinálja. Ezen a felismerésén alapultak a „fail safe” és a „safe life” tervezői gyakorlatok. Korábban FREUDENTHAL és munkatársai már tárgyalták ezt a problémát repülőgépszárny főtartókkal kapcsolatban [1], munkájuknak napjainkban is érvényes eredményének főleg a probléma felvetését tekinthetjük.

Ez az anyag elméleti úton közelíti meg a párhuzamosan kapcsolt szerkezeti elemek élettartamát. Érdeemes emlékeztetni arra, ez a megközelítés nemcsak tényleges szerkezeteknél alkalmazható, hanem az anyagvizsgálatban közvetlenül is. Sokszor vetődik fel igény a vizsgálatok gyorsítására, aminek egyik egyszerű módja a párhuzamosan terhelt próbatestek vizsgálata; ezen kívül csak utalunk itt MAJUMDAR és MORROW munkájára, akik a fáradt repedés terjedését a repedés csúcánál elképzelt, párhuzamosan kapcsolt anyagrudacsok (próbatestek) egymás utáni törésére vezették vissza [2].

Az irodalomban tisztázatlan a mechanikai szerkezetekre, alkatrészekre vonatkoztatva a párhuzamos kapcsolás fogalma. Teherviselő szerkezeteknél nagyon gyakran tesznek egyenlőségjelet a statikailag határozatlan és a párhuzamosan kapcsolt szerkezetek közé. Az nyilvánvaló, hogy minden, pár-

* Matolcsy Tamás, ELTE-Analízis II. tanszék 1088-Budapest, Múzeum krt. 8.

** Matolcsy Mátyás, Autóipari Kutató Int. 1115 Budapest, Csóka u. 15.

huzamosan dolgozó elemeket tartalmazó szerkezet statikailag határozatlan, de ennek a fordítottja nem áll. A következőkben teherviselő szerkezeteken az elemek, alkatrészek párhuzamos kapcsolásán a következő feltételek egyidejű teljesülését értjük:

— a vizsgált külső terhelés elviselésében mindegyik elem részt vesz. Mindegyik szerkezeti elem ugyanazon a terheléselosztó szerkezeten (elemen) keresztül kapja a terhelést. Minden szerkezeti elem azonos típusú és irányú igénybevételt kap a terheléselosztó szerkezettől.

— Az egyes elemek részesedése a külső terhelésből merevségük arányától és a terheléselosztó elem merevségi viszonyaitól függ.

— Egy szerkezeti elem törése általában nem okozza a szerkezet egészének tönkremenetelét, de az elem kiválása következtében a megmaradottakban átrendeződik, nő az igénybevétel.

— A párhuzamosan kapcsolt elemekből álló teherviselő szerkezet végső törését minden elem eltörése jelenti. Általában bizonyos számú szerkezeti elem fáradt törése után a megmaradt elemek már nem képesek a külső terhelést elviselni és egyidejűleg eltörnek.

2. Kiindulási feltételek

A következőkben rögzítjük azokat a feltételeket — sok esetben egyszerűsítő feltevéseket —, amelyeket munkánk során felhasználunk:

1. A vizsgált teherviselő szerkezet, mint működőképessé mechanikai egység $1, 2 \dots i, \dots n$ számú alkatrészből áll.

2. A szerkezetet stacionárius $M(t)$ külső terhelés éri, amelyet az elemek kifáradása szempontjából egyértelműen jellemez a középértéke és amplitúdója.

3. A külső terhelésből meghatározható az i -edik alkatrészsre az α állapotban jutó $M_i(\alpha)$ terhelés, illetve annak fentemlített jellemzői. (Az állapot értelmezését lásd a 9. pontban.)

4. Az egyes alkatrészek kifáradási folyamatai függetlenek egymástól egészen addig, amíg valamelyik alkatrész el nem törik.

5. Az egyes alkatrészek kifáradási folyamatában a repedésterjedés igen gyors, időaránya a repedés kialakulásához viszonyítva elhanyagolható. Más szóval az alkatrész élettartama (törése) jellemezhető a kritikus repedésméret kialakulásával. (Ez a feltétel a gyakorlatban rendszerint nem teljesül.)

6. Az 1. ábra jelöléseivel ismert minden alkatrész élettartameloszlása a terheléstől függően, azaz

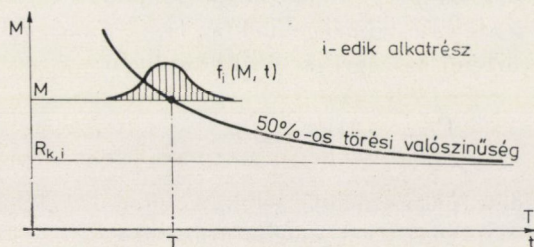
$$F_i(M, t) = \int_0^t f_i(M, s) ds \quad (1)$$

az i -edik alkatrészsnek az M terhelés hatására t időpontig bekövetkező törésvalószínűsége.

7. Adott az alkatrészek medián kifáradási görbéje a terhelés függvényében az 1. ábra szerint, a következő függvény formájában:

$$M = R_{k,i} + A_i [\cosh \lg (T - B_i)]^{-1}, \quad (2)$$

ahol $R_{k,i}$ a kifáradási határ, A_i és B_i anyagállandók [3].



1. ábra. Az i -edik alkatrész medián kifáradási görbéje és élettartameloszlása

8. Minden alkatrésznél a τ ideig ható M terhelésszintnek az $M' > M$ szinten meghatározható a τ' egyenértékű „hatásszintje”. A terhelés-egyenértékűségi függvénykapcsolat a következő összefüggéssel adható meg az i -edik alkatrésze:

$$\tau'_i(M, \tau, M') = \frac{T_i(M)}{T_i(M')} \tau. \quad (3)$$

9. A szerkezet tönkremeneteli folyamatát az alkatrészek egymást követő törése jelenti. E folyamaton belül a szerkezet egy-egy állapotát az eltört alkatrészek egy-egy halmazával jellemezzük. A lehetséges összes állapotok száma 2^n . A kezdeti állapotot, amikor még egyetlen alkatrész sem tört el, 0-val jelöljük.

10. Bizonyos alkatrészek, vagy azok kombinációinak törése a szerkezet üzemképtelenségéhez vezet. Ha tehát a szerkezet bizonyos állapotokba — jelölje ezek összességét V — kerül, végleg tönkrementnek, üzemképtelenné tekintjük. V nyilván olyan, hogy ha az α állapot benne van, és ha β olyan állapot, amely mint halmaz tartalmazza α -t, akkor β is benne van V -ben.

3. A feladat megfogalmazása

A feladat a szerkezet tönkremenetelének, illetve élettartameloszlásának meghatározása, vagyis meghatározni annak a valószínűségét, hogy a szerkezet t időpontig eljut egy V -beli állapotba. Ha $P_\alpha(t)$ jelöli annak a valószínűségét,

hogy a szerkezet t időpontban az α állapotban van, akkor a keresett élettartam-eloszlás:

$$P^V(t) = \sum_{\alpha \in V} P_\alpha(t). \quad (4)$$

Legyen $p_{i,j\dots m}(t)$ annak a valószínűsége, hogy a t időpontban a szerkezet az $\{i, j \dots m\}$ állapotban van és az alkatrészek a számozás sorrendjében törtek el. Annak a valószínűsége tehát, hogy t időpontig a szerkezet a mondott állapotba kerül, a fenti valószínűségeknek az $\{i, j \dots m\}$ halmaz összes lehetséges sorrendjére történő összegzésével állítható elő:

$$P_{\{i,j\dots m\}}(t) = \sum_{\sigma} P_{\sigma\{i,j\dots m\}}(t), \quad (5)$$

ahol σ egy sorrendet (permutációt) jelöl. A feladatot tehát visszavezettük a $p_{i,j\dots m}(t)$ állapot-valószínűségek meghatározására.

4. Az állapotvalószínűségek meghatározása

Az állapotvalószínűség általános formulájának levezetéséhez célszerű az egyszerűbb állapotokból kiindulni és lépésről lépésre haladni a bonyolultabb, több törött alkatrészt tartalmazó állapotok felé.

a) Kiindulási állapot, amikor még nincs törött alkatrész. A 4. feltevés alapján a túlélés valószínűsége:

$$P_0(t) = \prod_{i=1}^n [1 - \int_0^t f_i(M_i(0), r) dr]. \quad (6)$$

b) Az első töréssel kapcsolatban a következőket mondhatjuk. Jelölje $\pi_i(s, t)$ annak a valószínűségét, hogy:

- az s időpontig nem törik el semmi,
- az i -edik alkatrész az s időpontban törik el,
- az s és t időpontok között nincs további törés.

Ekkor

$$p_i(t) = P_{(i)}(t) = \int_0^t \pi_i(s, t) ds. \quad (7)$$

Két esetet különböztethetünk meg. Elsőként azt, ha i benne van V -ben, tehát az i -edik alkatrész törésével a szerkezet üzemképtelenné válik.

A 4. feltétel, a független valószínűségek szorzási szabálya alapján ebben az esetben:

$$\pi_i^V(s, t) = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n [1 - \int_0^s f_m[M_m(0)r] dr] f_i(M_i(0), s). \quad (8)$$

A másik eset az, ha $\{i\}$ nincs benne V -ben, tehát a szerkezet tovább üzemel. Ekkor az m -edik alkatrésyre az s időpontig $M_m(0)$ terhelés hat, ettől kezdve a 3. feltételnek megfelelően a terhelés átrendeződik, az m -edik alkatrésyre jutó része növekszik, azaz $M_m(0) < M_m\{i\}$. A 8. feltételben levő terhelésegyenértékűségi összefüggés alapján az $M_m(0)$ terhelés s ideig tartó hatása egyenértékű azzal, hogy az $M_m\{i\}$ terhelés

$$\tau_{i,m}(s) := \tau_m[M_m\{i\}; s; M_m(0)] \quad (9)$$

ideig hat. A $:=$ jelölés definiáló egyenlőségre utal. Tehát annak a valószínűsége, hogy a t időpontig az i -ediket kivéve a többi alkatrész nem törik el, feltéve, hogy az i -edik az s időpillanatban tönkrement, a 4. feltétel alapján

$$\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^n [1 - \int_0^{\tau_{i,m}(s)+t-s} f_m(M_m\{i\}, r) dr]. \quad (10)$$

Ezt megszorozva a feltétel $f_i(M_i(0); S)$ valószínűségével, megkapjuk a keresett $\pi_i(s, t)$ valószínűségét.

c) Vizsgáljuk meg két alkatrész törésének esetéte. Jelölje $\pi_{ij}(s, z, t)$ annak a valószínűségét, hogy:

- az s időpontig semmi sem törik,
- az s időpontban az i -edik alkatrész eltörik,
- az s és z időpontok között megint nincs törés,
- a z időpontban eltörik a j -edik alkatrész,
- a z és t időpontok között nincs újabb törés.

A (7) összefüggéshez hasonlóan írhatjuk, hogy

$$p_{ij}(t) = \int_0^t \int_s^t \pi_{ij}(s, z, t) ds dz. \quad (11)$$

A szerkezet egészét tekintve három eset lehetséges: először az, hogy már az i -edik elem törésével a V halmazba tartozó állapotba került a rendszer, ekkor $\pi_{ij}(s, z, t) = 0$. Másodszor, ha $\{i\}$ még nem, de az $\{i, j\}$ állapot már beletartozik V -be, akkor az előző gondolatmenethez hasonlóan láthatjuk, annak a valószínűsége, hogy a z időpontban j -edik alkatrész eltörik, feltételezve, hogy az i -edik az s időpontban tönkrement:

$$\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i, j}}^n [1 - \int_0^{\tau_{i,j}(s)+z-s} f_m(M_m\{i\}, r) dr] f_j(M_j\{i\}, \tau_{i,j}(s) + z - s). \quad (12)$$

Ezt megszorozva a feltétel

$$f_i(M_i(0); s) \quad (13)$$

valószínűségével, megkapjuk a keresett $\pi_{ij}(s, z, t)$ valószínűséget.

A harmadik lehetőség, ha az i és j alkatrészek törése után is tovább üzemel a szerkezet; a törések következtében az m -edik alkatrészre $M_m\{i, j\}$ terhelés jut, amire az előző terhelésszintek hatását az egyenértékűségi összefüggés segítségével visszavezetve úgy vehetjük, mintha ez az új terhelés

$$\tau_{ij,m}(s, z) := \tau_m[M_m\{i, j\}; \tau_{im}(s) + z - s; M_m\{i\}] \quad (14)$$

ideig hatott volna a z ideig valóban ható terhelés helyett. A keresett valószínűség az addigi gondolatmenet szerint:

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(s, z, t) = & \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i, j}}^n [1 - \int_0^{\tau_{ij,m}(s, z) + t - z} f_m(M_m\{i, j\}, r) dr] \times \\ & \times f_j(M_j\{i\}; \tau_{i,j}(s) + z - s) f_i(M_i(0), s). \end{aligned} \quad (15)$$

d) Az előzőekhez teljesen hasonlóan tárgyalhatjuk azt az esetet, amikor három alkatrész törik el egymás után. A $\pi_{ijk}(s, z, v, t)$ valószínűség meghatározásához megint három esetet kell figyelembe vennünk. Elsőként, ha $\{i, j\}$ állapot benne van a V halmazban, akkor $\pi_{ijk}(s, v, z, t) = 0$. Ha $\{i, j\}$ ugyan még nem, de a három alkatrész törését leíró $\{i, j, k\}$ állapot már beleesik V -be, akkor

$$\begin{aligned} \pi_{ijk}^V(s, z, v, t) = & \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq ij, k}}^n [1 - \int_0^{\tau_{ij,m}(s, z) + v - z} f_m(M_m\{i, j\}, r) dr] f_k(M_k\{i, j\}, \tau_{ij,k}(s, z) + v - z) \times \\ & \times f_j(M_j\{i\}, \tau_{i,j}(s) + z - s) f_i(M_i\{0\}, s). \end{aligned} \quad (16)$$

Végül, harmadik esetként, ha $\{i, j, k\}$ állapot sincs benne V -ben — tehát a három eltört alkatrész után is tovább üzemel még a szerkezet — a keresett valószínűséget a következő formában adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} \pi_{ijk}(s, z, v, t) = & \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n [1 - \int_0^{\tau_{ij,m}(s, z) + t - v} f_m(M_m\{i, j, k\}, r) dr] f_k(M_k\{i, j\}, \tau_{ij,k}(s, z) + v - z) \times \\ & \times f_j(M_j\{i\}; \tau_{i,j}(s) + z - s) f_i(M_i\{0\}, s), \end{aligned} \quad (17)$$

ahol a terhelésegyenértékűségi függvény segítségével:

$$\tau_{j,k,m}(s, v, z) := \tau_m(M_m\{i, j, k\}; \tau_{ij,m}(s, z) + v - z; M_m\{i, j\}) \quad (18)$$

e) A fentiek alapján már láthatók a törvényszerűségek, és felírhatók az általános formulák az i_1, i_2, \dots, i_j alkatrész egymásután s_1, s_2, \dots, s_j időpontban bekövetkező törésére. Azt a nyilvánvaló esetet leszámítva, amikor ez a töréssorrend nem lehetséges, mert a szerkezet már hamarabb üzem-

képtelenné vált, összetört, két eset van. Az első, amikor az i_1, i_2, \dots, i_j állapot tagja a V halmaznak, tehát az i_j -edik alkatrész törésével a szerkezet üzemképtelenné válik. Ekkor

$$\tau_{i_1 i_2 \dots i_k m}(s_1, s_2, \dots, s_k) := \\ := \tau_m(M_m\{i_1, \dots, i_k\}, \tau_{i_1 \dots i_{k-1}, m}(s_1, \dots, s_{k-1}) + s_{k-1} - s_{k-1}, M_m\{i_1, \dots, i_{k-1}\}) \quad (19)$$

rekurziós formula felhasználásával

$$\pi_{i_1 \dots i_j}^V(s_1, \dots, s_j, t) = \prod_{m=1}^n [1 - \int_0^{\tau_{i_1 i_2 \dots i_j}(s_1, \dots, s_{j-1}) + s_j - s_{j-1}} f_m(M_m\{i_1, \dots, i_{j-1}\}; r) dr] \times \\ \times \prod_{k=1}^j f_{i_k}(M_{i_k}\{i_1, \dots, i_{k-1}\}, \tau_{i_1 \dots i_k}(s_1, \dots, s_{k-1}) + s_k - s_{k-1}) \quad (20)$$

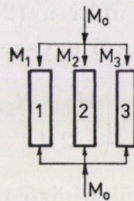
ahol $\{i_0\} := 0$.

A második eset az, amikor az i_1, i_2, \dots, i_j állapot nem tagja a V halmaznak, azaz az i -edik alkatrész törése után is tovább üzemel a szerkezet. Ekkor

$$\pi_{i_1 \dots i_j}(s_1, \dots, s_1, \dots, s_j, t) = \prod_{m=1}^n [1 - \int_0^{\tau_{i_1 i_2 \dots i_j m}(s_1, s_2, \dots, s_j) + t - s_j} f_m(M_m\{i_1, \dots, i_j\}; r) dr] \times \\ \times \prod_{k=1}^j f_{i_k}(M_{i_k}\{i_1, \dots, i_{k-1}\}, \tau_{i_1 \dots i_k}(s_1, \dots, s_{k-1}) + s_k - s_{k-1}). \quad (21)$$

5. Példa

Próbáljuk meg alkalmazni a levezetett összefüggéseket egy nagyon leegyszerűsített esetben. Álljon a szerkezet a 2. ábrán látható három párhuzamosan terhelt alkatrészből, amelyek kezdetben egyenlő arányban részesülnek az M külső terhelésből. Az ábrán megadtuk az üzemképtelenséget



$$V = \{\{1, 2\}; \{2, 3\}; \{1, 2, 3\}\} \\ M_1(0) \equiv M_2(0) \equiv M_3(0) \equiv \frac{1}{3} M_0 \\ M_1\{2\} \equiv M_1\{3\} \equiv M_2\{1\} \equiv \dots \equiv \frac{1}{2} M_0 \\ M_2\{1, 3\} = M_0$$

2. ábra. Egyszerűsített, három elemű szerkezet

jelentő V halmaz elemeit is: ha az 1. és 2, illetve 2 és 3 jelű alkatrészek együtt töröttek. Természetesen mindhárom alkatrész törése is a végső tönkremenetelt jelenti. Az ábra jelzi az egyes próbatestek törése utáni terhelésátrendeződést is.

A gyakorlatban igen elterjedten alkalmazzák a Weibull-féle eloszlást a fáradt törések élettartameloszlásának leírására:

$$F(Mx) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - x_0(M)}{x(M)} \right)^\omega \right], \quad (22)$$

ahol $x_0(M)$ a törési küszöb — ha $x \leq x_0$, a törési valószínűség nulla — és $x(M)$, valamint ω az eloszlás további két paramétere. A következőkben vezessük be a következő egyszerűsítő transzformációt:

$$\left(\frac{x - x_0(M)}{x(M)} \right)^\omega = \frac{t}{T_0(M)}, \quad (23)$$

ahol $T_0(M)$ a várható élettartamot jelöli, ami a mediánból a következő összefüggéssel származtatható:

$$T_0(M) = T(M)(\ln 2)^{-1}. \quad (24)$$

A fenti egyszerűsítésnek megfelelően — amit csak a példában bemutatott elemzés számításainak egyszerűsítése érdekében vezetünk be — az élettartameloszlások sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(M, t) = \frac{1}{T_0(M)} \exp \left(- \frac{t}{T_0(M)} \right). \quad (25)$$

További egyszerűsítéssel élhetünk a kifáradási görbe 2. összefüggéssel megadott alakját illetően. Ha a szerkezeti elemre jutó terhelés alatta marad a maradó alakváltozást okozó terhelésnek (tehát az elem általános viselkedése rugalmas anyagtörvénnyel írható le), akkor a tapasztalat szerint $T \gg B_i$, így $B_i \approx 0$ feltételezés jogos. Ha $T > 5 \cdot 10^4$, akkor a „cosh” összefüggés is, egyszerűsíthető, és némi átrendezés után a (2) és (24) összefüggésekből az élettartam várható értékére a következő egyszerűsített egyenlet adható meg:

$$T_0(M) = 1,44 \left(\frac{M - R_{ki}}{2A_i} \right)^{-2,3}. \quad (26)$$

Az egyszerűség kedvéért jelöljük a különböző terhelésszintekhez tartozó várható élettartamokat a következő módon:

$$\begin{aligned} T_0(M_i(0)) &= a^{-1} & (i = 1, 2, 3), \\ T_0(M_i\{2\}) &= b^{-1} & (i = 2, 3), \\ T_0(M_2\{1, 3\}) &= c^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

A terhelés-egyenértékűségi függvénykapcsolatból a (27) egyenlőségek felhasználásával ezt írhatjuk:

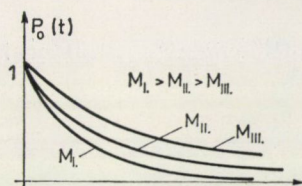
$$\tau_{i,m}(s) = \frac{a}{b} s, \quad (i, m = 1, 2, 3; i \neq m)$$

$$\tau_{ij,z}(s, z) = \frac{b}{c} \left(\frac{a}{b} s + z - s \right) \quad (i, j = 1, 3; i \neq j). \quad (28)$$

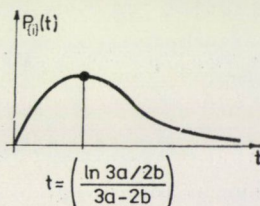
Az integrálásokat, levezetéseket mellőzve, megadjuk a számított valószínűségeket. Először a túlélés valószínűségét, azaz annak a valószínűségét, hogy egyik alkatrész sem törik el, a (7) egyenlőség alapján:

$$P_0(t) = \exp(-3at). \quad (29)$$

Ennek alakulását a 3. ábra szemlélteti. Kezdetben nő a csak egy alkatrész törésének valószínűsége, majd egyre kisebb a valószínűsége annak, hogy csak egyik alkatrész tört el. Ezt a 4. ábra mutatja.



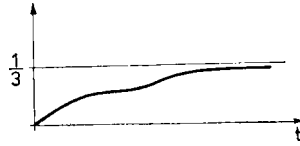
3. ábra. Túlélési valószínűség



4. ábra. Egy alkatrész törésének valószínűsége

Ezek után határozzuk meg a végállapotok bekövetkezésének valószínűségét. A (12) és (13) kifejezések alapján az 1 és 2, illetve 3 és 2 elemek törése által jelzett tönkremenetel valószínűsége:

$$P_{(i)}(t) = \frac{1}{3 - \frac{2b}{a}} (\exp(-2bt) - \exp(-3at)), \quad i = 1, 2, 3 \quad (30)$$



$$P_{\{1,2,3\}}(t) = P_{123}(t) + P_{312}(t)$$

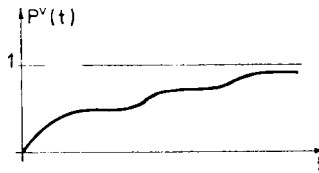
5. ábra. Három alkatrész törésének valószínűsége

ahol $i = 1$, vagy 3. Mindhárom alkatrész törésével való végállapotba kerülés valószínűsége:

$$P_{132}(t) = P_{312}(t) = - \frac{\exp(-ct) - \exp(-3at)}{\left(2 - \frac{c}{b}\right)\left(3 - \frac{c}{a}\right)} - \frac{\exp(-2bt) - \exp(-3at)}{\left(3 - \frac{c}{b}\right)\left(3 - \frac{2b}{a}\right)}. \quad (31)$$

Ennek lefutását az 5. ábra mutatja. Végül a tönkremenetel teljes valószínűsége a (4) összefüggés alapján:

$$P^V(t) = p_{12}(t) + p_{21}(t) + p_{23}(t) + p_{32}(t) + p_{132}(t) + p_{312}(t). \quad (32)$$



6. ábra. A szerkezet üzemképtelenné válásának valószínűsége

Ennek lefutása a 6. ábrán látható. A szerkezet tönkremenetelének valószínűsége 1-hez konvergál, miközben az idő a végtelenhez tart. Vagyis minél több idő múlik el, annál valószínűbb, hogy a szerkezet tönkrement, és biztosan tönkremegy valamikor.

IRODALOM

1. HELLER, A.—HELLER, R.—FREUDENTHAL, A. M.: Random Fatigue Failure of Multiple-Load-Path Redundant Structure. *Proc. of the 10th Sagamore Conf. on „Fatigue — An Interdisciplinary Approach”* (1965), 187—205
2. MAJUMDAR, S.—MORROW, J.: Correlation Between Fatigue Crack Propagation and Low Cycle Fatigue Properties. *T. A. M. Report No. 364*. University of Illinois, Urbana 1976
3. MATOLCSY, M.: New Method of Fatigue Test Evaluation and Fatigue Limit Evaluation. *Proc. of the 3rd Conf. on Material Testing GTE*, Budapest (1964), 253—267

Some Questions an Fatigue and Endurance of Parallel Elements. The authors investigate how the fracture phenomena of parallel structural elements can be described applying the theory of stochastic processes. Individual fracture of the elements influences the further behaviour of the remaining ones. Starting out from certain conditions the probability for the states of the system, respectively, for the transition from one state to another one can be determined. Generally valid recursion formulae can be established for defining the above notions.

Einige Fragen des Ermüdungsbruches und der Lebensdauer von parallel geschalteten Elementen. Die Verfasser untersuchen wie der Bruchvorgang von parallel geschalteten Konstruktionselementen mit der Theorie der stochastischen Vorgänge beschrieben werden kann. Der einzelweise Bruch der Elemente beeinflusst das weitere Verhalten der Verbliebenen. Ausgehend von gewissen Bedingungen kann die Wahrscheinlichkeit für bestimmte Zustände des Systems, bzw. die Wahrscheinlichkeit für den Übergang von einem Zustand in den anderen bestimmt werden. Für die Bestimmung der angeführten Begriffe können allgemein gültige Rekursionsformeln aufgeschrieben werden.

REPÜLŐGÉPSZÁRNYAK DINAMIKAI TERHELÉSE

GAUSZ TAMÁS*

[Beérkezett 1978. szeptember 11]

Aeroelasztikus jelenségnek nevezzük azt a folyamatot, amelynek során a vizsgált szerkezeti elem — többek között a repülőgép szárnya — a légerőterhelések hatására megváltoztatja az alakját, és ez a megváltozott alak módosítja a légerőket. A cikk célja elsősorban az aeroelasztikus jelenségek elvi alapjainak összefoglalása, valamint néhány olyan kiegészítés közlése, amelyek az e tárgyban végzett hazai munkákból adódtak. A repülőgépszárnyak dinamikai terhelése egy alelete az aeroelasztikus jelenségeknek.

1. Az aeroelasztikus jelenségek alapegyenlete

Repülőgépek vizsgálatakor, a legáltalánosabb esetben olyan deformálható síkkal helyettesítjük a vizsgált szerkezeti egységet, amelynek merevségi viszonyai, tömegeloszlása, valamint a rajta keletkező erők azonosak az eredeti szerkezeti elemével.

A vizsgálatainkhoz jelöljük ki az alábbi derékszögű koordinátarendszert:
„ x ” tengely: legyen vízszintes, mutasson a repülőgép haladási irányában előre;

„ y ” tengely: legyen függőlegesen felfelé mutató;

„ z ” tengely: legyen vízszintes és alkosson az előző két tengellyel jobbrendszert.

Helyezzük az origót a zavarás előtti, stacioner állapotban repülő gép súlypontjába.

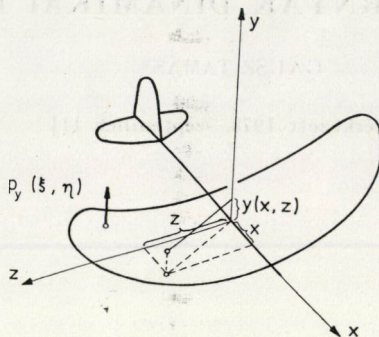
Terheletlen állapotban a szárnyat helyettesítő deformálható sík vízszintes sík felület. Feltételezhetjük, hogy azonos az „ $x - z$ ” tengelyek által meghatározott síkkal. A terheletlen törzset jellemző vonalat pedig az „ x ” tengelyen fekvőnek tekinthetjük.

Repülőgépek vizsgálatakor a legnagyobb gondot a szárnyra fordítjuk, éppen ezért, a továbbiakban mi is a szárnyal foglalkozunk. Az eredeti módszer azonban alkalmazható más szerkezeti elemekre is.

A szárny helyzetét egy meghatározott pillanatban az alábbi függvénnyel jellemezhetjük (1. ábra):

$$y = f(x, z).$$

* Gausz Tamás, 1111 Budapest, Budafoki út 9–11.



1. ábra

Létezik továbbá minden szerkezethez egy olyan függvény, amely annak merevségét jellemzi:

$$C(x, z, \xi, \eta).$$

Ez a függvény megadja a (ξ, η) helyen ható, egységnyi terhelés hatására az (x, z) helyen bekövetkező deformációt. Időben állandó terhelés esetében a szárny sík deformációja:

$$y(x, z) = \int \int_{(A)} C(x, z, \xi, \eta) p_y(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

ahol $p_y(\xi, \eta)$ — a megoszló terhelés;
 A — a szárny területe.

A dolgozatban többször síkot említünk, holott a szárnyat helyettesítő felület görbült. Ennek oka az, hogy a szakirodalomban a szárnyfelület mást jelent.

A természetben lejátszódó folyamatok általában időben változóak, ezért figyelembe kell venni a tehetetlenségi erőket is. Ekkor a szárny helyettesítő síkjának deformációja:

$$y(x, z, t) = \int \int_{(A)} C(x, z, \xi, \eta) [p_k(\xi, \eta, t) - \ddot{y}(\xi, \eta, t) \rho(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \quad (1)$$

• ahol $p_k(\xi, \eta, t)$ — az időben változó, külső terhelés;
 $\ddot{y}(\xi, \eta, t)$ — a szárnydeformáció idő szerinti második deriváltja;
 $\rho(\xi, \eta)$ — a szárny megoszló tömege.

Az aeroelasztikus jelenségek legáltalánosabban a tömegezők, a belső rugalmas erők, valamint az aerodinamikai erők közötti összefüggésekkel foglalkoznak. Ebben az értelemben az (1)-es integro-differenciál egyenlet alkalmas kétdimenziósra idealizált szerkezetek aeroelasztikus jelenségeinek

vizsgálatára. Gyakorlatilag, tekintettel arra, hogy a szárny „y” irányú méretei alig változnak, ez az egyenlet tekinthető az aeroelasztikus jelenségek alap-egyenletének.

Egydimenziós változata:

$$y(z, t) = \int_s C(z, \eta) [p_k(\eta, t) - \ddot{y}(\eta, t) \varrho(\eta)] d\eta,$$

ahol s a szárnyterjedtsége.

2. Az alapegyenlet átalakítása

A lengéstanból ismeretes, hogy egy lengőmozgást végző testnek vannak sajátlengései. Egy valóságos gépelem kontinuumszámosságú pontból áll, ezért végtelen, különböző sajátlengése van. Ezek a sajátlengések, amennyiben belső súrlódás nincs, ortogonálisak. Az általános lengésképet a sajátlengések szuperpozíciójával állíthatjuk elő:

$$y(x, z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x, z) \psi_i(t), \tag{2}$$

ahol $\varphi_i(x, z)$ — az i -edik sajátlengéskép;
 $\psi_i(t)$ — az i -edik sajátlengés időbeni változását leíró függvény.

A sajátlengésekre igaz az alábbi két egyenlőség:

$$\int_{(A)} \int \varphi_i(x, z) \varrho(x, z) dx dz = 0;$$

és:

$$\int_{(A)} \int \varphi_i(x, z) \varphi_j(x, z) \varrho(x, z) dx dz = 0, \quad \text{ha } i \neq j.$$

Az első egyenlőség a súlyponttételt, a második a sajátlengések ortogonalitását fejezi ki. Feltételezhetjük továbbá azt is, hogy:

$$\ddot{\psi}_i = \omega_i^2 \psi_i,$$

ahol ω_i — az i -edik saját-körfrekvencia.

Ezzel (1)-ből a sajátlengéseket meghatározó alábbi egyenlethez jutunk:

$$\omega_i^2 \int_{(A)} \int C(x, z, \xi, \eta) \varrho(\xi, \eta) \varphi_i(\xi, \eta) d\xi d\eta = \varphi_i(x, z) - \varphi_i(0, 0).$$

Külön ki kell emelni a nulladik sajátlengésképet — jelentőségére a későbbiekben még rámutatunk —, amelynek értéke definíció szerint:

$$\varphi_0(x, z) \equiv 1 \quad \text{és} \quad \omega_0 = 0.$$

Megjegyzendő, hogy a fenti tulajdonságú sajátlengésképek csak belső súrlódás nélküli szerkezeti elemen léteznek.

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$M_i = \int \int_{(A)} \varphi_i^2(x, z) \varrho(x, z) dx dz$$

az i -edik általános tömeg, és

$$\Theta_i = \int \int_{(A)} p_k(x, z, t) \varphi(x, z) dx dz$$

az i -edik általános erő.

Ezekkel az egyszerűsítő jelölésekkel [1] szerint az (1) egyenlet az alábbi formában írható:

$$M_i \ddot{\psi}_i + \omega_i^2 M_i \psi_i = \Theta_i, \quad 0 \leq i < \infty. \quad (3)$$

A sajátlengésképek megismerése többféle módon lehetséges: mérhetjük, számíthatjuk őket. Ha azonban már rendelkezésünkre állnak, akkor a fenti egyenletrendszer végtelen tagú, másodrendű, inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerként áll előttünk, amelyből véges számú tagot (2–4) figyelembe véve gyakorlatilag is használható egyenletrendszert kapunk.

Megjegyzendő, hogy a gyakorlatban a (3) egyenletrendszer egydimenziós alakját alkalmazzák elterjedten. Ekkor csak a szárny hajlítólengéseit számíthatjuk, az esetleg kapcsolódó csavarólengés már nem vehető figyelembe. Ez a közelítés megengedhető akkor, ha az egyes szárnymetszetek súlypontjai a metszetek aerodinamikai középpontjai, illetve a rugalmas tengely előtt helyezkednek el.

3. Tartó hajlító lengése

Ebben a pontban ismét a (3) egyenletrendszert kívánjuk levezetni, azonban teljesen speciálisan olyan tartóra, amelyet egy vonallal helyettesíthetünk, felruházva ezt a vonalat a tartó tömegével, hajlító merevségével és megoszló terhelésével.

A rugalmasságtanból ismert az alábbi összefüggés:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(IE \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = p(z, t) - \varrho(z) \ddot{y}(z, t). \quad (4)$$

Bontsuk fel ismét a teljes lengésképet az előbbieken meghatározott végtelen függvénytörzs összegére:

$$y(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(z) \psi_i(t).$$

Egy — egy sajátlengésre felírva a (4)-es egyenletet, azt kapjuk, hogy

$$\psi_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(IE \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} \right) = -\varrho(z) \ddot{\psi}_i \varphi_i.$$

A sajátlengésképek időtől függő részére igaz az alábbi összefüggés:

$$\ddot{\psi} = -\omega_i^2 \psi_i.$$

A (3) egyenletrendszer, megfelelő, i -edik tagját megkapjuk, ha a (4) egyenletbe fentieket behelyettesítjük, ψ_i -vel, az i -edik sajátlengésképpel megszorozzuk és a szárnyterjedtség mentén integráljuk:

$$M_i \ddot{\psi}_i + \omega_i^2 M_i \psi_i = \Theta_i, \quad 0 \leq i < \infty,$$

ahol

$$M_i = \int_s \varphi_i^2(z) \varrho(z) dz,$$

és

$$\Theta_i = \int_s p_k(z, t) \varphi_i(z) dz.$$

Így valóban a (3) egyenletrendszer egydimenziós tartóra érvényes (speciális) formájához jutottunk.

4. Repülőgépszárny dinamikai terhelése

A repülőgépszárnyak dinamikai terhelését a (3) egyenletrendszerből számítjuk, legtöbbször annak speciális, egydimenziós tartóra felírt formájából.

A sajátlengésképek meghatározásával nem foglalkozunk, ismertnek tekintjük őket.

Problémát jelent az, hogy a (3) egyenletrendszernek egydimenziós tartóra érvényes formája szigorúan véve csak akkor alkalmazható, ha a hajlító és csavaró lengés nem kapcsolódik. Az ehhez szükséges feltételt a 3. pont bevezetőjében vázoltuk, pontosan a [6]-ban található meg.

A következőkben a (3) egyenletrendszer 3. pontban levezetett formájáról lesz szó. Megfelelő számú (2—3) sajátlengésképp és a hozzájuk tartozó sajátfrekvencia ismeretében a (3) egyenletrendszert megoldva, megkapjuk a sajátlengésekhez tartozó időfüggvényeket. Ezzel felírhatjuk az eredő megoszló terhelést:

$$p_y(z, t) = p_k(z, t) - \varrho(z) \sum_{i=0}^n \ddot{\psi}_i \varphi_i.$$

A megoszló terhelés ismeretében számíthatjuk a vizsgált elem (szárny) génybevételeit.

5. A külső megoszló terhelés

A külső megoszló terhelés magában foglalja a súly, a légerő, és esetleg a belső súrlódás okozta megoszló terhelést:

$$p_k(z, t) = p_G(z, t) + p_F(z, t) + p_s(z, t).$$

Ezzel a belső súrlódás hatása számíthatóvá válik ennek az egyenletrendszernek a keretein belül. Ha a belső súrlódást a differenciálegyenlet bal oldalán akar-nánk figyelembe venni, akkor az (1) egyenletből nem jutnánk el a (3) egyenlet-rendszerig, mivel közben többször kihasználtuk a sajátlengések megfelelő, speciális tulajdonságait.

Akkor azonban, ha a belső súrlódást „külső” terhelésként fogjuk fel, nem ütközünk különösebb nehézségekbe.

5.1 Súlyerő terhelés

$$p_G(z, t) = \varrho(z) \cdot g,$$

ahol $\varrho(z)$ — a repülőgép szárnyterjedtség mentén elosztott tömege.

Nyilvánvalóan igaz az alábbi állítás:

$$G_R = g \int_s \varrho(z) dz.$$

5.2 Légerő terhelés

$$p_F(z, t) = \frac{\rho}{2} V^2 C_y(z, t) h(z),$$

ahol ρ — a levegő sűrűsége;
 V — a repülési sebesség;
 C_y — felhajtóerő-tényező;
 h — a szárny húrhossza.

A felhajtóerő-tényezővel kapcsolatban több megjegyzést kell tennünk:
 — a repülőgépszárny dinamikai terhelését okozhatja például szélleökés. A számítási összefüggéseinkben a repülőgép hossz tengelyének elfordulásából következő állásszögváltozást nem tudjuk figyelembe venni, azonban a meg-fúvási irány változását tekintetbe kell venni;

— a szárny deformációs sebessége is módosítja a megfúvási irányt, ezt is figyelembe kell venni;

— a dinamikai terhelést instacioner aerodinamikai jelenségek kísérik
 — a lehetőségekhez képest ezt is figyelembe kell venni.

A fenti hatásokat konkrétan az [1], [7], [8] és [9] szerint vehetjük figyelembe.

5.3 A belső súrlódás megoszló terhelése

Itt csak egy próbálkozást mutatunk be, lehetséges, hogy gyakorlati jelentősége csekély.

Alapvető koncepció az, hogy a belső súrlódást a folyadékcsillapításhoz vesszük hasonlóknak, az anyagot rúgókkal összekötött molekulák halmazának képzelve, ahol a molekulák közti teret folyadék tölti ki.

Ilyenkor a súrlódás — kis sebességek esetében — az egymás mellett elmozduló részek relatív sebességével arányos. Két, szomszédos metszet sebessége:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial z} dz \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) dz.$$

A súrlódó erő:

$$dF_s = -k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right) dz.$$

Végül a megoszló terhelés:

$$p_s(z, t) = \frac{dF_s}{dz} = -k \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right).$$

A belső súrlódási tényező [10] szerint minden sajátlengésképhez más. Ennek szem előtt tartásával térjünk át a sajátlengésképekre:

$$p_s(z, t) = - \sum_{i=0}^{\infty} k_i \psi_i \frac{d\varphi_i}{dz}.$$

A nulladik sajátlengésben, amely voltaképpen a merevtestszerű elmozdulás, természetesen nincs belső súrlódás. A nulladik sajátlengésre azt írhatjuk tehát, hogy

$$\frac{d\varphi_0}{dz} \equiv 0.$$

Ez, ha csak k_0 -át végtelenre nem választjuk, biztosítja, hogy valóban ne legyen belső súrlódás akkor, amikor nincs deformáció.

6. A differenciálegyenlet megoldása

A különböző megoszló terhelések felírásakor többféle közelítést alkalmazhatunk. Ha például az állásszögváltozást az alábbi, egyszerű formában írjuk:

$$\Delta\alpha \cong \frac{\dot{y}}{v} \left(\text{pontosan: } \Delta\alpha = \arctan \frac{\dot{y}}{v} \right),$$

akkor ebben a vonatkozásban a differenciálegyenlet lineáris marad. Általában, megfelelő közelítésekkel biztosíthatjuk (3) linearitását, és ezzel a zárt alakú megoldás létezését.

A technikai gyakorlatban azonban nem mindig szükséges a vizsgált folyamatot leíró függvény ismerete. Ilyen esetben alkalmazhatjuk a differenciálegyenletek valamely numerikus megoldó módszerét.

A lineáris rendszer kezdeti feltételeiből a megoldás egyes konstansait inhomogén lineáris algebrai egyenletrendszerből határozzuk meg. Az általunk végzett számítások tanúsága szerint — már három sajátlengés tekintetbe vétele esetében is — a lineáris egyenletrendszer együttható-mátrixa gyengén kondicionált lesz. Ebben az esetben a zárt alakú megoldás megkeresése majdnem lehetetlen, illetve egyáltalán nem célszerű.

A [9]-ben összehasonlítottunk — két sajátlengéskép figyelembevételével — zárt alakú és numerikus megoldást. Eredményül azt kaptuk, hogy a zárt alakú megoldás sokkal munkaigényesebb és pontatlanabb, mint a numerikus megoldás. A zárt alakú megoldást számító számítógépi program körülbelül kétszer olyan hosszú mint a numerikus megoldás programja.

A numerikus megoldás további előnye, hogy pontossága és ezzel a számítás hibája jól becsülhető.

7. Az aeroelasztikus jelenségek általános keretei

A jelenleg szokásos gyakorlatban az aeroelasztikus jelenségeket külön választják a dinamikai stabilitás vizsgálatától.

Az 1. pontban bevezetett (1) integro-differenciálegyenlet — az „ y ” irányú méretek változásától eltekintve — alkalmas repülőgépek komplex vizsgálatára.

A megfelelő formában felírt és behelyettesített p_k (külső megoszló terhelés) segítségével nemcsak a hajlító-csavaró lengésekről kaphatunk felvilágosítást, hanem így számíthatjuk egy rugalmas repülőgép viselkedését különböző repülési helyzetekben.

Az $y(x, z, t)$ függvény jellemzi az egész repülőgép elmozdulását és a szárny deformációját is. Ezzel egyrészt számítható a dinamikai terhelés, másrészt a repülőgép mozgása. Az egész gép mozgásának ismerete pedig egyenértékű a dinamikai stabilitási tulajdonságok ismeretével.

Ez a számítás természetesen rendkívül bonyolult, csak napjainkban, az elektronikus számítógépek megjelenésével mutatkozik remény sikeres elvégzésére.

IRODALOM

1. BISPLINGHOFF, R. L.—ASHLEY, H.—HALFMAN, R. L.: Aeroelasticity. Addison-Wesley, P. C. 1955
2. SCANLAN, R. H.—ROSENBAUM, R.: Aircraft Vibration and Flutter. MacMillan, C. 1951

3. FÖRSCHING, H. W.: Grundlagen der Aeroelastik. Springer 1974
4. KASIN, G. M.—FEDORENKO, G. I.: Avtomaticeszkoje upravlenyije prodolnüm dvizsenyijem uprugovo szamoljota. Masinosztroenyije 1974
5. KOLESZNYIKOV, K. SZ.—SZUHOV, V. N.: Uprugij ltatyeljnüj apparat, kak objekt avtomaticeszkovo upravlenyija. Masinosztroenyije 1974
6. RÁCZ, E.—VARGA, L.—VARGA, L.: Repülőgépek szerkezete és rugalmassága. Tankönyvkiadó, Budapest 1962
7. RÁCZ, E.: Präliminare Bemessung des Flügels eines Segelflugzeuges auf die dynamische Belastung in Böen. *Rev. Roman. Sci.-Techn.-Mech. Appl.* 17 (1972)
8. RÁCZ, E.: Repülőgépszárnyak dinamikai terhelése szélleőkésben. *Járművek és Mezőgazdasági Gépek* 17 (1970), 7. szám
9. GAUSZ, T.: Repülőgépszárny dinamikai terhelésének numerikus közelítő módszerrel történő meghatározása szélleőkésben. *Műszaki Tudomány* 51 (1976)
10. TORODE, H. A.: Resonance Tests on a Shampp-Hirth CIRRUS-B Sailplane. *Cranfield MEMO.* no. 62 (1971)

Dynamic Load of Aircraft Wings. In the first place the paper aims at discussing and resumming the theoretical bases of the aeroelastic phenomena and publishing some complements based on Hungarian work. This knowledge is resummed for the benefit of Hungarian aeronautiv specialists.

Dynamische Belastung von Flugzeugtragflügeln. Ziel der Arbeit ist in erster Reihe Diskussion und Zusammenfassung der theoretischen Grundlagen der aeroelastischen Erscheinungen, sowie einiger aufgrund einheimischer Arbeiten möglichen Ergänzungen. Es wird angestrebt diese Kenntnisse für die ungarischen Fachleute auf dem Gebiet der Flugtechnik zusammenzufassen.

CSŐHÁLÓZATOK OPTIMÁLIS TERVEZÉSE EGÉSZÉRTÉKŰ PROGRAMOZÁSSAL

GRÓSZ MIKLÓS*

[Beérkezett 1978. szeptember 16-án]

Jelen dolgozatban már meglevő vízhálózatok bővítésével és új hálózatok tervezésével foglalkozunk. A csőhálózatok problémakörének fentemlített optimális megoldására egy nemlineáris egészértékű programozási modellt mutatunk be. E modell annyiban különbözik az irodalomból ismertektől, hogy a) a csőátmérők csak diszkrét értékeket vehetnek fel, b) a források által betáplált vízmennyiségek nem előre megadott konstansok, hanem hálózattól függő paraméterek, továbbá c) a beruházási és üzemeltetési költségek minimalizálását tűzi ki célul.

1. Bevezetés

Jelen dolgozatunkban már meglevő vízhálózatok bővítésével és új hálózatok tervezésével foglalkozunk. Az utóbbi néhány évben igen sok ilyen irányú cikk jelent meg az irodalomban, ami a probléma gyakorlati szükségességét tükrözi.

Az elért eredményekről jó áttekintést ad CENEDESE és MELE [3]. A szerzők egy része a beruházási költségek csökkentése céljából csak az elméleti csőátmérők meghatározását tűzi ki célul [2, 8, 13]. Más szerzők már diszkrét változóknak tételezik fel a csőátmérőket, és a beruházási költségek [1, 3, 11] mellett az üzemeltetési költségek minimalizálására is törekszenek [5]. A szerzők többsége azonban nem veszi figyelembe a források (víztorony és szivattyú) által betáplált vízmennyiséget, hanem ezt konstansnak tekinti.

Ebben a dolgozatban a csőhálózatok optimális tervezésére egy olyan lehetséges nemlineáris egészértékű programozási modellt mutatunk be, amelyben a csőátmérők csak diszkrét értékeket vehetnek fel (vagyis csak a rendelkezésre álló csövekből válogathatunk), és figyelembe vesszük a források tényleges betáplálási mennyiségeit. Az egészértékű programozási modell alkalmazása azért vált szükségessé, mert a folytonos modell eredményei a gyakorlat igényeit nem elégítik ki.

Csőhálózat optimális tervezésén a következőket értjük: Keressük az adott vonalvezetésű hurkolt vagy sugaras hálózat ágához tartozó azon csőátmérőket, amelyeket adott csőátmérő-készletből választunk úgy, hogy a

* Grósz Miklós, 1025 Budapest, Csalit u. 9.

beruházási és az üzemeltetési költségeik minimálisak legyenek, és az áramlási feltételek teljesülésén kívül a csomóponti nyomásokra vonatkozó korlátozó feltételek is teljesüljenek. A dolgozatban nem foglalkozunk a csőhálózat nyomvonalainak optimalizálásával, az új hálózat kiépítésének ütemezésével, a fogyasztás prognosztizálásával, valamint a karbantartási költségek figyelembevételével. A probléma megfogalmazását azonban olyan általánosan kíséreljük meg, hogy az a vízhálózatokon kívül más hálózati probléma megoldására is alkalmas legyen.

2. A hálózati probléma megfogalmazása

Iktassunk be a hálózatba egy fiktív csomópontot [9], és kössük össze ezt a forrás-csomópontokkal (fiktívágak). A fiktív csomóponton a betáplált mennyiséget tegyük egyenlővé a hálózat össz fogyasztásával. Az így bevezetett fiktív csomópont lehetővé teszi a víztorony és a szivattyúk által létesített valószínű betáplálási mennyiség figyelembevételét. Ez annyit jelent, hogy nem kell rögzítenünk előre az egyes források által létesíthető betáplált vízmennyiséget, hanem azok változhatnak. A szivattyú jelleggörbéjétől függően, illetve több víztorony esetében az azokban kialakuló vízszintek számíthatók.

A továbbiakban a vízhálózatot egy $D(K, I)$ összefüggő gráfnak tekintjük, ahol K a gráf éleinek halmaza, I a gráf csomópontjainak halmaza.

A D gráf élein vegyünk fel tetszőleges irányokat (1. ábra). Vezessük be a 2. ábra szerinti csomóponti előjelszabályt is. Írjuk fel a két Kirchhoff-törvényt:

$$p_i - p_j = f_k(d_k) \cdot q_k \cdot |q_k|, \quad (k = 1, \dots, m; i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

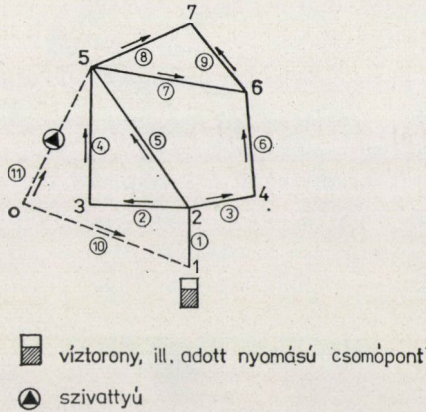
$$\sum_{k \in K_i} q_k - \sum_{k \in K_i'} q_k = a_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

ahol

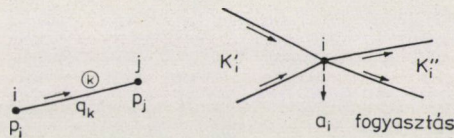
- p_i — a csomóponti nyomás az i -edik csomópontban,
- q_k — a szállított (áramló) vízmennyiség az (i, j) élen (irányítás szerint előjelezve),
- $f_k(d_k) = \frac{8,27 \cdot 10^7 r_k l_k}{d_k^5}$
- d_k — az (i, j) élhez tartozó csőátmérő,
- K_i, K_i' — az i -edik csomópontba bemenő, illetve kimenő élek halmaza,
- r_k — érdesség,
- l_k — az (i, j) él hossza,
- a_i — fogyasztás az i -edik csomópontban,
- $n = |I|$,
- $m = |K|$. (A $|\cdot|$ jel a halmaz számosságát, a halmaz elemeinek számát jelenti.)

Most fogalmazzuk meg a hálózati problémát az él-csúcs incidencia mátrix segítségével:

$$G = \{g_{ki}\} = \begin{cases} 0, & \text{ha a } k\text{-ik él nem tartozik az } i\text{-edik csomóponthoz,} \\ 1, & \text{ha a } k\text{-ik él az } i\text{-edik csomópontba megy be, és} \\ -1, & \text{ha a } k\text{-ik él az } i\text{-edik csomópontból megy ki.} \end{cases}$$



1. ábra



2. ábra

Ezzel lényegében egy csomóponti előjelszabályt definiáltunk.

A hálózati folyamatok elméletéből ismert [7], hogy a G mátrix mérete $m * (n - 1)$. Ugyancsak ismeretes, hogy a G mátrix mindig teljes oszlop-rangú, ami azt jelenti, hogy a csomóponti törvényt elegendő $n - 1$ csomópont-ra felírni.

A két Kirchhoff-törvény és a korlátozó feltételek mátrix formában:

$$G \cdot p = s, \tag{3}$$

$$G^T \cdot q = a, \tag{4}$$

$$p \geq p^{\min}, \tag{5}$$

ahol

$$s = \{s_i\} = \{f_i q_i | q_i|\},$$

a — a csomóponti fogyasztások vektora,

p^{\min} — a csomópontokon megengedett minimális nyomások vektora.

Ugyancsak a hálózati folyamatok elméletéből ismert [7], hogy a G mátrix nonszinguláris részmatrixának egy összefüggő fa felel meg és fordítva. A fák száma a D gráfon a következőképpen adható meg:

$$t = \det |G^T \cdot G|.$$

Ezekből a fákból egyértelműen felépítünk egy összefüggő minimális fát. Összefüggő minimális fán azt értjük, hogy a D gráf tetszőleges csomópontja a fa mentén legrövidebb úton érhető el a legközelebb eső forrásból.

A minimális fa felépítésére azért van szükség, mert az üzemeltetési költségeket minimalizálni törekszünk úgy, hogy a vízmennyiségek többségének szállítása lehetőleg a legrövidebb úton történjék és az átmérők választásánál ezt figyelembe vesszük. Ez a kiindulás azonban az optimalizálás eredményét nem befolyásolja. Másrészt a minimális fa ismeretében két részre particionáljuk a G mátrixot és ennek megfelelően írjuk át a (4) egyenletet:

$$[GR^T \quad GS^T] \times \begin{bmatrix} q' \\ q'' \end{bmatrix} = a,$$

amelyből a fa ágaihoz tartozó szállított mennyiségeket kifejezve azt kapjuk, hogy

$$q' = [GR^T]^{-1}(a - GS^T \cdot q'').$$

Részletesen kiírva egy komponens:

$$q'_i = \beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} \cdot q''_t \quad (i \in B) \quad (6)$$

ahol

$$[GR^T]^{-1} a = \{\beta_i\} \quad (i \in B)$$

$$[GS \cdot GR^{-1}]^T = \{\alpha_{it}\} \quad (i \in B, t \in N)$$

N — a minimális fához nem tartozó élek indexeinek halmaza (illetve a megfelelő q'' változó indexeinek halmaza),

B — a fának megfelelő q_i változó indexeinek halmaza.

A (6) egyenlet azt mutatja, hogy a fa komplementeréhez tartozó vízmennyiségek a fához tartozó vízmennyiségeket egyértelműen meghatározzák.

A következő fejezetben mutatunk be a minimális fa felépítésére egy lehetséges eljárást.

3. A minimális fa felépítése

Minimális fa felépítésére használjuk fel az irodalomból ismert legrövidebb út probléma megoldását.

A gráf minden éléhez hozzá van rendelve egy-egy z_{ij} távolság, amelyek csak pozitív értékeket vehetnek fel. Határozzuk meg a legrövidebb utakat az i -edik csomópontból az összes többi csomópontba. Ezek után a Dijkstra-féle algoritmus segítségével felépítünk egy olyan fát, amely tartalmazza az összes legrövidebb utat az i -edik csomópontból a gráf többi csomópontjába [7]. Az i -edik csomópontot a fa *gyökerének* nevezzük.

A fiktív élhez hozzárendelt z_{ij} értékét nullának vesszük, gyökerének pedig a fiktív csomópontot választjuk. A Dijkstra-féle algoritmussal felépített

fa egyúttal minimális fa is, mivel egy tetszőleges csomópont a fiktív csomópontból legrövidebb úton érhető el a fa mentén és ugyanakkor a fiktív él hossza egyenlő nullával.

A minimális fa meghatározásához szükségünk van az élekhez rendelt z_{ij} értékekre, ezért térjünk vissza a z_{ij} paraméterek megválasztására. Sík terepen tervezendő hálózat esetén a z_{ij} paraméter a csomópontok közötti távolsággal (l_k) egyenlő. Dombos terep esetén az z_{ij} paraméter meghatározásánál viszont figyelembe kell venni a két csomópont közötti magasságkülönbséget.

A minimális fa felépítéséhez használt Dijkstra-féle algoritmus minden egyes lépésben egy további élt csatol a fához. Mielőtt eldöntjük, hogy a kérdéses él hozzátartozik-e a fához vagy sem, ki kell számítanunk az összes olyan él z_{ij} paraméterét, amellyel a fa folytatható:

$$z_{ij} = \alpha_{ij}(\Delta h_{ij})l_k,$$

ahol

Δh_{ij} — geodéziai magasságkülönbség az i és j csomópont között,

$$\alpha_{ij}(\Delta h_{ij}) = \begin{cases} 1 \leq \alpha_{ij} \leq 2, & \text{ha } \Delta h_{ij} \geq 0 \\ 0 \leq \alpha_{ij} < 1, & \text{ha } \Delta h_{ij} < 0 \end{cases}$$

Az α_{ij} paraméter választása gyakorlati tapasztalat alapján történik és befolyásolja a minimális fa felépítését, de a probléma megoldását nem befolyásolja, mivel a minimális fa csak egy jó közelítést segít előállítani.

Ezzel a minimális fa felépítéséhez minden szükséges ismerettel rendelkezünk és áttérünk a probléma matematikai modelljének a tárgyalására.

4. A probléma matematikai modellje

A minimális fa és megfelelően a G mátrix felbontásának ismeretében írjuk át a (3) Kirchhoff-törvényt:

$$GR \cdot p = s', \quad (8)$$

$$GS \cdot p = s''. \quad (9)$$

Akkor (8)-ből egyértelműen meghatározhatjuk a csomóponti nyomásokat,

$$p = GR^{-1} \cdot s', \quad (10)$$

és behelyettesítjük (9)-be

$$GS \cdot GR^{-1} \cdot s' = s''. \quad (11)$$

A (11) egyenletrendszer nem más, mint a huroktörvény. A (11) kifejezést írjuk át úgy, hogy behelyettesítjük q' értékeket a (6)-ból

$$\sum_{i \in B} \alpha_{it} \cdot f_i(d_i) \cdot \gamma_i(\beta_i) - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'' = f_t(d_t) \cdot q_t'' \cdot |q_t''| \quad (t \in N), \quad (12)$$

ahol

$$\gamma_i = \text{sign} \left(\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t^n \right).$$

Tehát kaptunk egy nemlineáris egyenletrendszeret, amelyben már csak a fa komplementeréhez tartozó él mentén szállított vízmennyiségek és a teljes gráf éleihez tartozó csőátmérők az ismeretlenek.

Most próbáljuk felírni az (5) korlátozó feltételeket ugyanezen ismeretlenek segítségével. A (10) egyenlet megadja a csomóponti nyomáseséseket, ezért a megengedett legnagyobb csomóponti nyomásesés ismeretében az (5) feltétel így írható fel:

$$GR^{-1}s' \leq \Delta p^{\max},$$

vagy

$$\sum_{j \in B} u_{ij} \cdot \gamma_j \cdot f_j(d_j) \cdot \left(\beta_j - \sum_{t \in N} \alpha_{jt} q_t^n \right)^2 \leq \Delta p_i^{\max} \quad (i \in I \setminus J) \quad (13)$$

ahol

$$\begin{aligned} GR^{-1} &= \{u_{ij}\} && (i, j = 1, \dots, n-1) \\ J & && \text{olyan csomópontok halmaza, ahol forrás van elhelyezve,} \\ \Delta p_i^{\max} & && \text{az } i\text{-edik csomóponton megengedett legnagyobb nyomásesés.} \end{aligned}$$

A (13) feltételt csak a forrást nem tartalmazó csomópontokon lehet értelmezni, azonkívül nem okvetlenül mindegyikre kell felírni.

A probléma megfogalmazásánál már említettük, hogy optimális csőátmérőket keresünk egy adott csőátmérő-készletből. Ahhoz, hogy ezt matematikailag egyszerűen fel tudjuk írni, vezessünk be egy x_{ij} változót:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik él mentén a } j\text{-edik csőátmérőtípus szerepel és} \\ 0, & \text{ellenkező esetben} \end{cases}$$

Mivel minden él mentén egyidejűleg csak egy csőátmérőtípus szerepelhet, ezért az x_{ij} változókra a következő feltételnek kell teljesülnie:

$$\sum_{j=1}^{j^*} x_{ij} = 1 \quad (i \in K). \quad (14)$$

Az x_{ij} változó segítségével írjuk fel a d_i és az $f_i(d_i)$ függvényt:

$$d_i = \sum_{j=1}^{j^*} \delta_{ij} \cdot x_{ij},$$

$$f_i(d_i) = h_i \sum_{j=1}^{j^*} \frac{x_{ij}}{\delta_{ij}^5},$$

ahol

$$\begin{aligned} \delta_{ij} & \text{--- az } i\text{-edik él mentén megengedett } j\text{-edik csőátmérő.} \\ h_i &= 8,27 \cdot 10^7 \cdot r_i \cdot l_i, \\ j^* & \text{--- a megengedett csőátmérők száma.} \end{aligned}$$

Ezek után térjünk át a célfüggvény felírására. A hálózat beruházási költsége CEMBROWICZ szerint [2]

$$\sum_{i \in K} \sum_{j=1}^{j^*} l_i \cdot c_i \cdot \delta_{ij}^{1/w} \cdot x_{ij}, \tag{15}$$

ahol

$$1 \leq \frac{1}{w} \leq 1,5$$

c_i – a i -edik átmérőjű vezeték telepítésének folyóméter költsége (Ft/m).

A hálózat teljes üzemeltetési költsége két tényezőből tevődik össze: a szivattyúállomások üzemeltetési költségéből és a hálózat ellenállásának leküzdésére irányuló energiaveszteség költségéből. Az első tényező a szivattyú üzemi nyomásának és a betáplált vízmennyiségnek szorzatával arányos, a második tényező pedig a nyomásesések abszolút értékének összegével.

Ezek után a $C(x, q'')$ célfüggvény a hálózat teljes üzemeltetési és beruházási költségének (15) figyelembevételével:

$$C(x, q'') = k_1 \sum_{i \in B} \sum_{j=1}^{j^*} h_i (\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'')^2 \cdot \delta_{ij}^{-5} x_{ij} + k_1 \sum_{i \in N} \sum_{j=1}^{j^*} h_i \cdot (q_i'')^2 \cdot \delta_{ij}^{-5} x_{ij} + k_2 \sum_{i \in K_{sz}} (\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'') \cdot B_i(q'') + k_3 \sum_{i \in K} \sum_{j=1}^{j^*} l_i \cdot c_i \cdot \delta_{ij}^{1/w} \cdot x_{ij} \rightarrow \min. \tag{16}$$

A korlátozó feltételek pedig az előzőek alapján:

$$\sum_{i \in B} \sum_{j=1}^{j^*} h_i \cdot \gamma_i \cdot \alpha_{it} (\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'')^2 \cdot \delta_{ij}^{-5} \cdot x_{ij} = \sum_{j=1}^{j^*} h_t \cdot q_t'' |q_t''| \cdot \delta_{ij}^{-5} \cdot x_{tj} \quad (t \in N) \tag{17}$$

$$\sum_{k \in B} \sum_{j=1}^{j^*} u_{ik} \cdot \gamma_k \cdot h_k \cdot (\beta_k - \sum_{t \in N} \alpha_{kt} q_t'')^2 \delta_{kj}^{-5} x_{kj} \leq \Delta p_i^{\max} \quad (i \in I \setminus J) \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{j^*} x_{ij} = 1 \quad (i \in K) \tag{19}$$

$$q_i' \leq q_i^{\max} \quad (i \in K_{sz}) \tag{20}$$

ahol

- k_1, k_2 és k_3 – súlyozási paraméterek (konstansok),
- q_i^{\max} – a szivattyú maximális betáplálása,
- $B_i(q_i')$ – a szivattyú jelleggörbéje alapján kapott polinom.

A súlyozási paraméterek nagyságrendjétől függ, hogy a tervezendő hálózatban a beruházási vagy az üzemeltetési költségek csökkentésére fektetünk-e nagyobb súlyt.

A célfüggvény első és második tagja a nyomásesések abszolút értékének összegét reprezentálja a fához és a fa komplementeréhez tartozó élek mentén. A harmadik tag a szivattyúállomások üzemeltetési költségét, a negyedik pedig a beruházási költségeket adja meg.

A minimális fa felépítése értelmében a fiktív élek a fához tartoznak. A fiktív élek l_k hosszát nullának vesszük, s így a megfelelő $h_k = 0$. Tehát a célfüggvény első tagjánál az összegezést elegendő a $B \setminus K_{SZ}$ halmazon elvégezni.

A (17) feltétel a huroktörvényt írja le a q_i'' ($i \in N$) és x_{ij} változók függvényében. A (18) és (20) feltétel megadja a megengedett nyomásesések és megfelelően a szivattyú betáplálásának a felső határértékét.

Tehát egy vegyes nemlineáris programozási feladatot kaptunk, melyben a diszkrét változók x_{ij} csak „0–1” értékeket vehetnek fel, a folytonos változók pedig q'' s a feltételek száma $2m$, az ismeretlenek száma pedig $m \cdot j^* + m - n + 1$.

5. A probléma megoldásának módszerei

A (16)–(20) feladat megoldására két módszert lehet javasolni.

Az első módszer egy két lépésből álló algoritmus. Ebben a lépésben valamilyen heurisztikus eljárással meg kell határozni egy megengedett megoldást, vagyis egy olyan átmérő-kombinációt, amelyre teljesülnek a (17)–(20) feltételek. A heurisztikus eljárás a következő elgondoláson alapszik: ismerve a minimális fát és elindulva mindenhol a legkisebb megengedett csőátmérővel, megoldjuk a (17) nemlineáris egyenletrendszer. A kapott q'' változókra ellenőrizzük a (18) és (20) feltétel teljesülését (a (19) feltétel automatikusan teljesül). Ha a (18) feltétel valamely csomópontban nem teljesül, akkor a fa gyökerétől (forráshely) a csomóponthoz vezető legrövidebb úton kiválasztunk egy másik csőátmérőkombinációt. A kombinációk számának csökkentése és a célfüggvény minimalizálása érdekében feltételezzük, hogy a z_{ij} élhez rendelt paraméterek alapján kialakított fához tartozó élek mentén nagyobb a vízszállítás, mint a fa komplementeréhez tartozó élek mentén. Ezzel azt próbáljuk elérni, hogy a kezdeti becslés minél jobb legyen.

Ha valamely szivattyúra nem teljesül a (20) feltétel, akkor csökkenteni próbáljuk az ehhez a csomóponthoz csatlakozó élek mentén a csőátmérőket. Tehát mérnöki megfontolások alapján heurisztikus eljárás segítségével, véges számú lépés után vagy kapunk egy megengedett megoldást, vagy kiderül, hogy a feltételek nem kompatibilisek (ilyen feltételek mellett nem létezik megoldás). Ha van megengedett megoldás, akkor második lépésként a leszámllási algoritmus segítségével [6] (implicit enumeration method) próbáljuk csökkenteni a célfüggvény értékét (kiinduló korlátként felhasználva a megengedett megoldás célfüggvényértékét).

Mivel a kombinációk száma egyenlő $(j^*)^m$ és nagyméretű feladatnál ez az algoritmus gyakorlatilag nem használható ilyen formában, ezért egy egyszerűsített leszámllási algoritmust célszerűbb itt alkalmazni, amely megintcsak a minimális fa ismeretére és a vele kapcsolatos elvekre támaszkodik. Ezzel

az algoritmussal véges számú lépésben és gyakorlatilag elfogadható időn belül kapunk egy lokális optimumot.

A második módszernél első lépésben folytonos változónak tekintjük a csőátmérőket. Ebben az esetben a (16)–(20) feladatot célszerű a következőképpen átírni:

$$\begin{aligned}
 F(d, q) &= k_1 \sum_{i \in B} h_i (\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'')^2 d_i^{-5} + k_1 \sum_{i \in N} h_i (q_i'')^2 \cdot d_i^{-5} + \\
 &+ k_2 \sum_{i \in K_{sz}} (\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'')^2 \cdot B_i(q'') + k_3 \sum_{i \in K_{sz}} l_i \cdot c_i \cdot d_i^{1/w} \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

(PF)

$$\sum_{i \in B} \alpha_{it} \cdot \gamma_i \cdot h_i (\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'')^2 \cdot d_i^{-5} = h_i \cdot q_i'' |q_i''| \cdot d_i^{-5} \quad (t \in N)$$

$$\sum_{j \in B} u_{ij} \cdot \gamma_j \cdot h_j (\beta_j - \sum_{t \in N} \alpha_{jt} q_t'') \cdot d_j^{-5} \leq \Delta p_i^{\max} \quad (i \in I \setminus J)$$

$$d_i^{\max} \geq d_i \geq d_i^{\min} \quad (i \in K)$$

$$(\beta_i - \sum_{t \in N} \alpha_{it} q_t'') \leq q_i^{\max} \quad (i \in K_{sz})$$

Az ily módon felírt (PF) feladatban jelentősen csökkent az ismeretlenek száma $(2m - n + 1)$. A (PF) feladatban mind a célfüggvény, mind a megengedett megoldások halmaza általános esetben nem-konvex, ezért nem garantált a globális optimum elérése, és így csak lokális optimumról beszélhetünk.

Az első lépésben meghatározzuk a (PF) feladat lokális optimumát, ha egyáltalán létezik ilyen. Ehhez a büntető függvények módszerét (penalty function) alkalmazzuk, s így visszavezetjük feladatunkat olyan feltétel nélküli szélsőérték feladatok sorozatára, amelynek megoldására már hatékony módszerek ismertek az irodalomból [4]. E módszerek hatékonyságának növeléséhez egy becsült átmérőrendszerből indulunk ki, és megoldjuk a nemlineáris egyenletrendszert. Az így nyert átmérőkből és a $q_t'' (t \in N)$ változókból kapjuk a második lépéshez a kiinduló megoldást.

Abban az esetben, ha a (PF) feladat lokális optimumának környékén a (16)–(20) feladatnak nincs egyetlen egy megengedett megoldása sem, ez még nem jelenti azt, hogy a (16)–(20) feladatnak egyáltalán nincs megoldása. Ilyen esetben heurisztikus eljárás segítségével próbálunk keresni egy megengedett megoldást. Ha ez az eljárás sem vezet eredményre, akkor a (16)–(20) feladatnak nincs megoldása, ellenkező esetben a leszámplálási algoritmus segítségével keresünk egy lokális optimumot.

A második lépésben az optimális megoldásból kapott átmérőket próbáljuk „diszkretizálni”, vagyis keresünk egy olyan megoldást, amelyben az átmérők már csak az adott készlet diszkrét értékeit vehetik fel. Ebben a számítási szakaszban is a minimális fára és a vele kapcsolatos elvekre támaszkodunk.

A (PF) feladat optimális megoldásából kapott átmérő-értékeket aszerint diszkretizáljuk, hogy a megfelelő él hozzátartozik-e a minimális fához vagy sem. Ha hozzátartozik, akkor azt a csőátmérőt választjuk ki a készletből, amely legközelebb esik a kapott értékhez. Ha nem tartozik a minimális fához, akkor a készletben található azon két átmérő közül, melyek közé esik a kapott érték, választjuk ki a kisebbiket. Az így kiválasztott átmérősorozatra megoldjuk a nemlineáris egyenletrendszer, majd kiszámítjuk a célfüggvény és gradienseinek értékét. Az utóbbiakat csak az ismeretlen átmérőkre számítjuk ki. A gradiens-vektor komponensei közül kiválasztjuk a legnagyobb abszolút értékű és az előjel figyelembevételével a készletben található megfelelő szomszédos átmérőre cseréljük a gradiens e komponenséhez tartozó csőátmérőt. Ezután újból megoldjuk a nemlineáris egyenletrendszer és ellenőrizzük a korlátozó feltételeket. Ha az utóbbiak teljesülnek, akkor kiszámítjuk a célfüggvény értékét. A célfüggvény értékének csökkenése esetében kiszámítjuk a gradienseket és megismételjük a fent leírt eljárást. Ha a kapott célfüggvény-érték nem csökkent, akkor kihagyva az előző lépés változtatását, a nagyság szerinti sorrendben következő abszolút értékű gradiens-komponenssel ismételtjük meg a fent említett vizsgálatot.

Ezzel a leszámplálási algoritmussal véges számú lépésben (maximálisan 2^m) kapunk egy lokális optimumot, amely bár nem mindig a globális optimum), a gyakorlat szerint megfelelő megoldást szolgáltat. Látható, hogy az utóbbi módszer segítségével az átmérő-kombinációk számát $(j^*)^m$ -ről 2^m -re sikerült csökkenteni.

A következő fejezetben a második módszer algoritmusát írjuk le.

6. Az algoritmus leírása

1. A büntető függvények módszerével megoldjuk a (PF) feladatot.
2. Ha a (PF) feladatnak létezik megoldása, akkor azt (d^0, q^0) -val jelöljük és a 3.-nál folytatjuk, ellenkező esetben a 18.-nál.
3. Előállítjuk a megfelelő diszkrét átmérőkombinációt:
 - a) ha az i -edik él a minimális fához tartozik és

$$\delta_{ij_1} \leq d_i^0 \leq \delta_{ij_2} \quad (i \in K)$$

akkor

$$d_i^0 - \delta_{ij_1} < \delta_{ij_2} - d_i^0 \text{ esetében } d_i^1 = \delta_{ij_1},$$

$$\text{ellenkező esetben } d_i^1 = \delta_{ij_2};$$

- b) ha az i -edik él nem tartozik a minimális fához, akkor

$$d_i^1 = \delta_{ij_1}.$$

4. $k = 1$ és $T = K$ (T halmaz azonos a K halmazzal).
5. Az előállított csőátmérő-kombinációra megoldjuk a nemlineáris egyenlet-rendszert, kiinduló megoldásnak a (d^k, q^0) vektort vesszük. A megoldást jelöljük $y_k = (d^k, q^k)$ -val.
6. Ha y_k -ra nem teljesülnek a korlátozó feltételek, akkor a 9.-nél, ellenkező esetben a 7.-nél folytatjuk.
7. Kiszámítjuk a $C_k = F(d^k, q^k)$ célfüggvény értékét y_k pontban.
8. Ha $k = 1$, akkor $Z = C_1$, ellenkező esetben a 9.-nél folytatjuk.
9. Ha $C_k < Z$, akkor a 10.-nél folytatjuk, ellenkező esetben a 15.-nél.
10. Kiszámítjuk a célfüggvény gradiensét d változóra y_k pontban

$$\nabla F_i(d^k, q^k) \quad (i \in T).$$

11. Megkeressük a

$$\max_{i \in T} |\nabla F_i(d^k, q^k)| = t_i^*$$

értéket.

12. $T = T \setminus \{i^*\}$.
13. Ha $d_i^k = \delta_{ij_1}$, akkor $d_i^{k+1} = \delta_{ij_1}$, ellenkező esetben $d_i^{k+1} = \delta_{ij_1}$.
14. $k = k + 1$, $T = K \setminus \{i^*\}$ és visszatérünk az 5.-re.
15. $T = T \setminus \{i^*\}$.
16. Ha $T \neq \emptyset$ (nem üres), akkor a 12.-nél, ellenkező esetben a 17.-nél folytatjuk.
17. Ha $T \neq \emptyset$ és nem sikerült egy diszkrét átmérő-kombinációt találni, akkor a 18.-nál folytatjuk, ellenkező esetben a Z korlátnak megfelelő megengedett megoldás a (16)–(20) feladatnak egy lokális optima és a 20.-nál folytatjuk.
18. Heurisztikus eljárás segítségével keresünk egy megengedett megoldást. Ha sikerültilyent találni, akkor a 19.-nél folytatjuk, ellenkező esetben a (16)–(20) feladatnak nincs megoldása és a 20.-nál folytatjuk.
19. Az egyszerűsített leszámplálási algoritmus segítségével keresünk egy lokális optimumot.
20. Vége.

IRODALOM

1. ARTINA, S.: The Use of Mathematical Programming Techniques in Designing Hydraulic Networks. *Meccanica*, (1973), Sept.
2. CEMBROWICZ, R. G.: Optimierung von Rohrnetzen. In ZIELKE, W.: Elektronische Berechnung von Rohr- und Gerinneströmungen, Erich Schmidt Verlag, 1974
3. CENEDESE, A.—MELE, P.: Optimal Design of Water Distribution Networks, *Journal of the Hydraulics Division*, 104, No. HY2, 1978, February
4. FIACCO, A. V.—MC CORMICK: Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. Wiley, New York 1968
5. GARBAI, L.—MOLNÁR, L.: Optimization of Urban Public Utility Networks by Discrete Dynamic Programming. *Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*. Progress in Operations Research, Eger 1974

6. GARFINKEL, R. S.—NEMHAUSER, G. L.: Integer Programming. John Wiley, New York 1972
7. HU, T. C.: Integer Programming and Network Flows. Addison-Wesley Publishing Company 1970
8. JACOBY, L. S.: Design of Optimal Hydraulic Networks. *Journ. Hydr. Div. Proc. ASCE*, **94**, HY3, 1968
9. KORTE, J. W.—VIELHABER, H.: Ein Beitrag zur Berechnung von Wasserversorgungsnetzen I—IV. *Gas- und Wasserfach* **108** (1967), H. 8, H. 14, H. 24, H. 28
10. KRUSKAL, J. B.: On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman problem. *Proc. Amer. Math. Soc.* **7** (1956), 48—50
11. LAM, C. F.: Discrete Gradient Optimization of Water System. *Journal of the Hydraulics Division*, **99**, No. HY6, 1973, June
12. MOLNÁR, L.: Design of Radial Pipe Networks. *Periodica Polytechnica*, **19**, No. 3.
13. WATANADA, T.: Least-Cost Design of Water Distribution Systems. *Journal of the Hydraulics Division*, **99**, No. HY9, 1973, Sept.

Optimal Design of Tube Networks by Integer Programming. In the paper the author deals with the extension of existing water networks and the design of new ones. For the optimal solution of these problems a nonlinear integer programming model is presented. It differs from models known from literature inasmuch as a) the tube diameters can assume only discrete values; b) the water quantities fed in from the source are not constants given beforehand, but parameters depending on the network; c) minimalisation of the investment costs and the operating expenses has been aimed at.

Das Entwerfen von Rohrnetzen mittels ganzzahliger Programmierung. In der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich der Verfasser mit der Erweiterung vorhandener Wasserleitungsnetze und der Projektierung von neuen Netzen. Für die optimale Lösung dieser Probleme wird ein ganzzahliges nichtlineares Programmierungsmodell vorgestellt, welches sich von den aus dem Schrifttum bekannten insofern unterscheidet, als a) die Rohrdurchmesser nur diskrete Werte annehmen können; b) die von den Quellen eingespeisten Wassermengen nicht vorgegebenen Konstanten, sondern vom Netz abhängige Parameter sind; c) die Minimalisierung der Investitions- und der Betriebskosten zum Ziel gesetzt wird.

JAPÁN EREDMÉNYEK A DINAMIKUS HATÁSOKNAK KITETT VASBETON SZERKEZETEK TERÜLETÉN

LENKEI PÉTER*

A MŰSZAKI-TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1978. december 20-án]

E tanulmány célja a japán kutatási-fejlesztési eredmények ismertetése a dinamikus hatásoknak alávetett vasbeton szerkezetek területén.

I. Helyzetismertetés

Az 1968. évi Tokachi-Oki földrengés során bebizonyosodott, hogy a vasbeton szerkezetek merevsége a károsodások kiváltó oka lehet — mint azt Yamada (Kobe-i Egyetem) vizsgálatai alapján előre látta — és ezért a japán kutatások súlypontjába a kisciklusú ismételt terheléseknek alávetett vasbetonszerkezetek alakváltozókéességének vizsgálata került. Ennek eredményeképpen majd minden számottevő japán egyetemi laboratórium és kutatóintézet részt vett a vasbetonoszlopok dinamikus nyíróteherbírását meghatározó koordinált kutatómunkában és a „duktilitás” vizsgálatok a 70-es évek második felében kiterjedtek majd mindenfajta vasbeton szerkezetre és szerkezeti elemre. Nagy összegeket fordítottak új laboratóriumok építésére és a régiók korszerűsítésére, komoly szellemi kapacitást koncentráltak erre a területre. Több nemzetközi tudományos együttműködés is kialakult ezen a területen japán részvétellel.

2. A japán vasbetonépítéssel kapcsolatos kutatások főbb irányai, különös tekintettel a földrengésálló építkezésekre

A tartószerkezetek oktatása, kutatása és fejlesztése, valamint építése területén Japánban elég élesen elhatárolódnak a magasépítéssel és a mélyépítéssel (mérnöki létesítményekkel) kapcsolatos területek. Az előbbiek építészmérnöki, az utóbbiak általános mérnöki feladatként jelentkeznek. Azonban bármilyen célú szerkezetről legyen is szó, a szerkezeti anyagnak, a vasbetonnak a viselkedése alapvetően azonos, ezért a két terület közötti kapcsolat az utóbbi

* Dr. Lenkei Péter, 1119 Budapest, Szakasits Á. u. 4.

időben egyre szorosabb. A kutatómunkában a következő közös irányok figyelhetők meg:

- a beton tartós és ismétlődő teher alatti viselkedésének kutatása, különös tekintettel az oldalirányban gátolt elmozdulású beton alakváltozás-képességére;

- nyomott vasbeton oszlopok vizsgálata ismételt dinamikus nyíró és részben nyomó igénybevételekre;

- vasbeton hajlított tartók képlékeny méretezése különös tekintettel a dinamikus hatásokra;

- alacsony és magas hőmérséklet hatásának kitett vasbetonszerkezetek (atomreaktorok egyes részei, stb.) viselkedése dinamikus terhekre;

- vasbeton keretek merevítése nyírófalakkal, andráskeresztekkel lökések ellen, a nyírófalak „duktilitása”;

- a japán általános méretezési előírások tökéletesítése a valószínűségi elvek alapján;

- a földrengéssel kapcsolatos előírások tökéletesítése;

- a szerkezetek „duktilitását” biztosító szerkesztési elvek kísérleti alátámasztása;

- a szerkezetek csomópontjainak földrengésbiztonságát növelő szerkesztési elvek tökéletesítése;

- az acélbetétek korróziójának vizsgálata különös tekintettel a feszített (híd, vasúti alj, stb.) acélbetétekre;

- az összetett (öszvér) szerkezetek vizsgálata;

- a kísérleti módszerek és berendezések fejlesztése;

3. A japán egyetemi és kutatóintézeti szerkezetvizsgáló laboratóriumok

A meglátogatott 9 egyetemen és 8 állami, magán és egyetemi kutatóintézetben szerzett tapasztalatok egyértelműen megvilágítják a laborfejlesztési irányokat Japánban.

Az összes kutatóintézet és a legtöbb egyetem laboratóriumi épületei az utóbbi 10–12 évben épültek és az építkezések ma is folynak.

A szerkezetvizsgáló laborépületeket úgy alakítják ki, hogy legalább egy nagy, minimálisan 5000 MN (500 tonna) teherbírású, korszerűen vezérelhető anyag- és szerkezetvizsgáló gép, kisebb vagy nagyobb méretű vízszintes és függőleges terhelő lemezek és egy rázóasztal elhelyezésére alkalmasak legyenek.

Az újonnan beállított anyagvizsgáló gépek elektronikus vezérlésűek. A terhelő lemezekhez csatlakoztatható hidraulikus berendezések általában szervoszelepes vezérlésűek. A rázóasztalok vagy szervo-hidraulikus vagy elektromágneses rendszerűek. A gépek és berendezések japán gyártmányúak, több cég van a piacon hasonló berendezésekkel.

Megemlíthető, hogy a szervo-hidraulikus berendezések „szíve”, a szelep Japánban is, akárcsak szerte a világon Moog típusú (amerikai gyártmány).

A szakemberek többségének véleménye szerint a vízszintes dinamikus hatásoknak kitett vasbeton szerkezetekkel végzett kísérletekben a jövő a természetes léptékű szerkezeteké, amelyeket függőleges terhelő lemez segítségével vizsgálnak. A rázóasztalon végzett modellkísérletek jelentősége csökkenni fog.

A mérőberendezések az ismert és általánosan használt automata rendszerekből állnak, japán gyártmányúak. A modern laboratóriumok mérőközpontjai sok száz, egyes esetekben ezres nagyságrendű mérőhely kiszolgálását képesek elvégezni. A mérési adatok regisztrálása automatikus, sok esetben a számítógépes csatlakozás azonnali adatfeldolgozást tesz lehetővé.

A régebbi épületekkel rendelkező egyetemi laborok vizsgáló gépei általában régebbiek, egyes helyeken még a 30-as évekből származnak, a mérőberendezések azonban modernnek. Kisebb laborokban sok a készen vásárolt és helyben gyártott elemekből házilag összeállított vizsgáló berendezés és mérőrendszer. A régebbi laborépületek zsúfoltak, mindenütt foglalkoznak építési tervekkel.

A laboratóriumok az érdekesebb kísérleti próbatesteket vizsgálat után is hosszabb ideig tárolják, ami lényegesen megkönnyíti a laborok munkájával való ismerkedést.

Az állami és magán kutatóintézetek viszonylag könnyen selejteznek ki 10–15 éves épületeket, berendezéseket és állítanak be új, modern felszerelést. Az egyetemeken már kisebb anyagi lehetőségekkel rendelkeznek, mert kutatósaikat általában a költségvetésből finanszírozzák.

Az új nagy létesítményeket az elképzelések szerint több intézet közösen fogja használni. Ennek az együttműködésnek a gyakorlati megvalósulásáról azonban megfelelő adatok egyelőre nem állnak rendelkezésre. Viszont több olyan berendezés látható, pl. a Hiroshima Egyetem 30 000 MN (3000 tonna) teherbírású sajtója, az egyik tűzállósági laboratórium oszlopvizsgáló kemencéje, amelyek még egyáltalán nem, vagy csak nagyon ritkán kerültek felhasználásra.

A laboratóriumok kiszolgálását csak kislétszámú „törzs” végzi állandó jelleggel. Az egyetemeken a hallgatók, a kutatóintézetekben a megrendelők egészítik ki szükség szerint a személyzetet.

Japanese Results in the Field of R. C. Structures Subject to Dynamic Effects. The aim of this paper is to report on the Japanese research and development results concerning the r.c. structures subject to dynamic load.

Japanische Ergebnisse im Bereich von dynamischen Einwirkungen unterzogenen Stahlbetonkonstruktionen. Es wird über japanische Forschungsergebnisse im Bereich von dynamischen Einwirkungen unterzogenen Stahlbetonkonstruktionen berichtet.

A TREFFTZ—FICHERA MÓDSZER ALKALMAZÁSA HAJLÍTÓ LENGÉST VÉGZŐ RÚD SAJÁTKÖRFREKVENCIÁINAK JAVÍTHATÓ BEHATÁROLÁSÁRA

RICHLIK GYÖRGY*—TÓTH GYÖRGY**

[Beérkezett 1979. január 31-én]

A numerikus kísérletek azt mutatják, hogy az egyfajta lengést végző rudak esetében a sajátfrekvenciák javítható közrefogásához nem feltétlenül célszerű a funkcionálanalízis általános érvényű módszereinek alkalmazása a nagy numerikus munkagigény miatt. A tanulmány célja, hogy a hajlító lengéshez tartozó sajátkörfrekvenciák javítható alsó korlátainak számítása kapcsán igazolja a Trefftz—Fichera-eljárás hatékonyságát. A közrefogáshoz szükséges felső korlátok a Poincaré—Rayleigh—Ritz módszer segítségével határozhatók meg. A Trefftz—Fichera módszer alkalmazásához az eredetileg szereplő változó együttthatós differenciál operátor invertálása szükséges. Az invertálást a dolgozat a disztribúció elmélet felhasználásával hajtja végre, s egyben összefoglalja az általános elmélet vonatkozó elemeit.

1. Bevezetés

Rugalmas, kontinuus szerkezetek rezgési sajátfrekvenciáinak javítható közrefogása többféle módon lehetséges. Sok eljárás közös jellemzője, hogy a Poincaré—Rayleigh—Ritz módszerrel sajátfrekvencia felső korlátokat számítanak, majd ezek ismeretében a funkcionálanalízis különböző módszerei alkalmazásával határoznak meg alsó korlátokat. Nevezetesen WEINSTEIN, ill. BAZLEY és FOX az ún. közbenső operátorok segítségével [1], [2], BOSZNAY a Fichera-féle ortogorális invariánsok módszerével ad alsó korlátok meghatározására eljárást [3], [4]. A közbenső operátorok módszerének BOSZNAY által történt továbbfejlesztése lehetőséget ad változó jellemzőkkel bíró rudakból felépített szerkezet sajátkörfrekvenciáinak javítható behatárolására [5]. (Ez utóbbi módszer nem használja a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle eljárást.).

Szerzők numerikus kísérleteik alapján azt találták, hogy ezeknek az általános módszereknek egyetlen, hajlító lengést végző rúd esetére történő közvetlen alkalmazása nem célszerű, mert mind az alsó, mind a felső korlátok meghatározása viszonylag sok numerikus munkát igényel.

Szerzők ezért azt a célt tűzték ki, hogy megvizsgálják az ugyanezzel a feladattal kapcsolatos alsó korlátok számítására a Trefftz—Fichera eljárás numerikus hatékonyságát. Feltételezik, hogy — például a Poincaré—Ray-

* Richlik György, 3534-Miskolc, Fazola H. u. 7.

** Tóth György, 1016-Budapest, Gellérthegy u. 20-22.

leigh—Ritz módszerrel nyert — elegendő számú és pontosságú felső korlát már rendelkezésre áll.

A feladat megoldása differenciáloperátor invertálását igényli, ennek módszeres végrehajtására szerzők a disztribúcióelméletet alkalmazzák. A követett eljárás közvetlenül az ún. magfüggvényt állítja elő, s nem feltételezi a Green-függvény (és tulajdonságainak) ismeretét. Előkészítésképpen ezért szerzők beiktatták a disztribúcióelmélet idevágó elemeit. A tárgyalásmód a $[0, 1]$ intervallumra korlátozódik, ami azonban az

$$x = a + (b - a)\xi, \quad x \in [a, b] \wedge \xi \in [0, 1]$$

transzformációval tetszőleges, véges $[a, b]$ intervallumra kiterjeszthető.

2. A Trefftz—Fichera-módszer

Legyen a \mathfrak{K}^{-1} valós, szimmetrikus, pozitív szemidefinit, teljesen folytonos integrál operátor a $[0, 1]$ intervallumon értelmezve a

$$\mathfrak{K}^{-1}v \doteq \int_0^1 K(x, t) v(t) dt \quad (1)$$

összefüggés szerint a $K(x, t) = K(t, x)$ maggal. Ha \mathfrak{K}^{-1} sajátértékeit (melyek negatívak nem lehetnek) μ_i -vel és a megfelelő sajátfüggvényeit v_i -vel jelöljük, akkor [6] alapján

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i v_i(x) v_i(t). \quad (2)$$

(E μ_i sajátértékek lengéstani értelmezhetőség esetén (28)-nak megfelelően a sajátkőrfrekvencia négyzetek reciprocai.)

Tegyük fel, hogy a sajátfüggvények ortonormált rendszert alkotnak, azaz

$$\int_0^1 v_i(x) v_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j \end{cases}, \quad (3)$$

valamint tételezzük fel, a $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ első k darab sajátértékhez rendelt

$$\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_k \quad (4)$$

alsó korlátok ismeretét. Ha most $n \leq k$, akkor (2) és (3) alkalmazásával

$$\int_0^1 K(x, x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i + \mu_n + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu_i \geq \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i + \mu_n + \sum_{i=n+1}^k \mu_i.$$

Felhasználva (4)-et

$$\int_0^1 K(x, x) dx \geq \sum_{i=1}^k \mu'_i + \mu_n - \mu'_n,$$

azaz

$$\mu_n \leq \mu'_n + \int_0^1 K(x, x) dx - \sum_{i=1}^k \mu'_i. \quad (5)$$

(Érdeemes megjegyezni, hogy (5) speciális esete az ún. Fichera-formulának [3].)

Tehát a (4) alsó korlátok és a $K(x, t)$ mag ismeretében az (5) egyenlőtlenség segítségével felső korlátokat adhatunk a \mathcal{H}^{-1} integrál operátor első k darab μ_i sajátértéke számára. (Az egyenlőtlenséget sajátkörfrekvencia négyzetekre megfogalmazva az alsó és felső jelzők szerepet cserélnek.)

Az ismertetett eljárás feltételezi, hogy a $K(x, t)$ magot explicité ismerjük. (Megjegyezzük, hogy olyan esetekben, amelyekben a magfüggvény nem állítható elő explicit alakban, az ún. közbenső Green-függvények módszere alkalmazható [6], [7].) A következőkben azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy miként lehet közönséges, lineáris differenciál-operátor inverzének magfüggvényét előállítani. Ehhez előjáróban megemlítünk néhány, a továbbiakban felhasználásra kerülő fogalmat a disztribúciók tárgyköréből.

3. Disztribúcióelméleti alapfogalmak

Jelölje \mathfrak{D} az ún. *teszt függvények* terét, legyen t független valós változó. Teszt függvényeknek nevezzük az olyan valós értékű, megfelelő sokszor differenciálható $\Phi \in \mathfrak{D}$ függvényeket, amelyek a $[0, 1]$ intervallumon kívül zérussal egyenlők. Disztribúcióknak nevezzük a \mathfrak{D} -n értelmezett folytonos, lineáris funkcionálokat [8], amelyek terét \mathfrak{D}' -vel fogjuk jelölni.

Lokálisan integrálható $f(t)$ függvény a

$$\langle f, \Phi \rangle = \langle f(t), \Phi(t) \rangle \doteq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Phi(t) dt, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D} \quad (6)$$

konvergens integrállal \mathfrak{D} -n az f reguláris disztribúciót értelmezi. (Lokálisan integrálható $f(t)$, ha minden egyes véges intervallumon LEBESGUE szerint integrálható.) A nem reguláris disztribúciót szingulárisnak nevezzük. Szinguláris disztribúció például az ún. δ disztribúció, amelynek értelmezése:

$$\langle \delta, \Phi \rangle \doteq \Phi(0), \quad \Phi \in \mathfrak{D} \wedge \delta \in \mathfrak{D}'. \quad (7)$$

A továbbiakban az $f(t)$ jelölést fogjuk használni, akár reguláris, akár szinguláris disztribúció $f \in \mathfrak{D}'$, ahol t a teszt függvények független változóját

jelenti. Az $f(t)$ jelölés csupán kényelmi okokból választott szimbólum; a szinguláris disztribúció esetében nem jelent szokásos értelemben vett függvényt. A δ funkcionál esetében például használni fogjuk a $\delta(t)$ szimbólumot. Az ezzel alkotott

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \Phi(t) dt = \Phi(0), \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D}$$

kifejezésnek az értelmét az összefüggés jobb oldala adja. Az irodalom a szinguláris disztribúciót jelölő $f(t)$ szimbólumot gyakran nevezi szimbolikus függvénynek [8].

Az $f, g \in \mathfrak{D}'$ disztribúciók között az egyenlőséget az

$$\langle f, \Phi \rangle \doteq \langle g, \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D},$$

az összeadást az

$$\langle f + g, \Phi \rangle \doteq \langle f, \Phi \rangle + \langle g, \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D}$$

összefüggés; az $f \in \mathfrak{D}'$ disztribúció λ valós számmal történő szorzását a

$$\langle \lambda f, \Phi \rangle \doteq \langle f, \lambda \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D} \quad (8)$$

egyenlőség definiálja.

Az ún. eltolás műveletét az

$$\langle f(t - \tau), \Phi(t) \rangle \doteq \langle f(t), \Phi(t + \tau) \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D}$$

összefüggés értelmezi, ahol $f(t)$ az $f \in \mathfrak{D}'$ disztribúciónak megfelelő szimbolikus függvény, τ adott valós szám. Az $f(t - \tau)$ szimbolikus függvényt maga a definíció értelmezi.

A δ disztribúció esetében, bevezetve a

$$\delta_\tau \doteq \delta(t - \tau)$$

jelölést

$$\langle \delta_\tau, \Phi \rangle = \langle \delta(t), \Phi(t + \tau) \rangle = \Phi(\tau). \quad (9)$$

Legyen $\psi(t)$ elegendően sokszor differenciálható függvény, akkor $f \in \mathfrak{D}'$ esetében

$$\langle \psi f, \Phi \rangle \doteq \langle f, \psi \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathfrak{D}. \quad (10)$$

Bizonyítható, hogy a fenti tulajdonságú $\psi(t)$ és tetszőleges $\Phi(t) \in \mathfrak{D}$ esetében $\psi(t) \Phi(t) \in \mathfrak{D}$ [8].

Az $f \in \mathcal{D}'$ disztribúció differenciálását az

$$\langle f', \Phi \rangle \doteq \langle f, -\Phi' \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathcal{D} \quad (11)$$

szabállyal értelmezzük, amely reguláris f esetében a közönséges szorzat differenciálási szabályából következik.

A

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0 \\ 1, & \text{ha } t > 0 \end{cases}$$

függvénnyel értelmezzük a h Heaviside disztribúciót, amellyel a

$$h_\tau \doteq h(t - \tau)$$

jelölés bevezetésével (7), (8) és (10) alapján tetszőleges $\Phi(t) \in \mathcal{D}$ esetében

$$\begin{aligned} \langle h'_\tau, \Phi \rangle &= -\langle h_\tau, \Phi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} h(t) \Phi'(t + \tau) dt = \\ &= -\int_0^{\infty} \Phi'(t + \tau) dt = \Phi(\tau) = \langle \delta_\tau, \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Legyen $\Phi(t) \in \mathcal{D}$ és $\psi(t)$ elegendően sokszor differenciálható függvény. Akkor az eddigiek alapján

$$\langle \delta_\tau, \psi\Phi \rangle = \psi(\tau) \Phi(\tau) = \psi(\tau) \langle \delta_\tau, \Phi \rangle = \langle \delta_\tau, \psi(\tau) \Phi \rangle,$$

azaz a (10)-et is felhasználó

$$\langle \psi \delta_\tau, \Phi \rangle = \langle \psi(\tau) \delta_\tau, \Phi \rangle$$

összefüggés, valamint a disztribúciókra vonatkozó egyenlőség definíciója alapján

$$\psi(t) \delta(t - \tau) = \psi(\tau) \delta(t - \tau). \quad (13)$$

Legyen $g \in \mathcal{D}'$ adott disztribúció és keressük a primitív függvényét (szimbolikus értelemben véve). Ez megállapodásszerűen a

$$\langle g, \Phi \rangle \doteq \langle f', \Phi \rangle, \quad \Phi(t) \in \mathcal{D}$$

egyenlet megoldását jelenti f -re; $f \in \mathcal{D}'$ a keresett primitív függvény. Bizonyítható, hogy a primitív függvények csak additív konstansban térnek el

egymástól [9]. Bebizonyítható az is, hogy tetszőleges $\Phi(t) \in \mathfrak{D}$ esetében fennálló

$$\langle f', \Phi \rangle \doteq \langle \delta_\tau, \Phi \rangle = \langle h'_\tau, \Phi \rangle$$

összefüggésből δ_τ primitív függvényére

$$f(t) = h(t - \tau) + \text{konst.} \quad (14)$$

adódik, h_τ primitív függvényét pedig az

$$\langle f', \Phi \rangle \doteq \langle h_\tau, \Phi \rangle$$

egyenlőségből az

$$f(t) = (t - \tau) h(t - \tau) + \text{konst.} \quad (15)$$

formula szolgáltatja.

Végezetül megemlítjük a későbbiekben felhasználásra kerülő, s a $h(t)$ függvény definíciójából közvetlenül belátható

$$\int_0^x h(t - \tau) \psi(t) dt = h(t - \tau) \int_\tau^x \psi(t) dt \quad (16)$$

összefüggést, ahol $\psi(t)$ tetszőleges folytonos függvény és $t, \tau, x \in [0, 1]$.

4. Inverz operátorok és a δ függvény

Legyen a \mathfrak{K} közönséges, lineáris differenciál operátor a $v(x)$, $x \in [0, 1]$ függvények terében értelmezve. A $v(x)$ függvények \mathfrak{K} -nak megfelelően sokszor differenciálható, valamilyen peremfeltételeket kielégítő függvények. \mathfrak{K}^{-1} jelölje \mathfrak{K} inverzét oly módon, hogy $\mathfrak{K}\mathfrak{K}^{-1} = \mathfrak{K}^{-1}\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$ és $\mathfrak{E}v = v$ [10].

Feltételezzük, hogy \mathfrak{K}^{-1} integrál operátor a

$$\mathfrak{K}^{-1}v = \int_0^1 K(x, t) v(t) dt \quad (17)$$

összefüggés szerinti $K(x, t)$ maggal. (17)-ből formálisan

$$v(x) = \int_0^1 \mathfrak{K}K(x, t) v(t) dt, \quad (18)$$

mert \mathfrak{K} x vonatkozásában jelent differenciálást.

Mivel a $v(x)$ függvények teljesítik a teszt függvényekre tett kikötéseket, azért (9) és (18) összevetéséből

$$\mathfrak{K}K(x, t) = \delta(x - t). \quad (19)$$

Végeredményben tehát a $K(x, t)$ magfüggvényt (19)-ből határozhatjuk meg úgy, hogy elvégezzük a

$$K(x, t) = \mathfrak{K}^{-1} \delta(x - t) \quad (20)$$

összefüggésben \mathfrak{K}^{-1} által kijelölt integrálásokat, szem előtt tartva az előző pontban összefoglaltakat. Az integrálások során fellépő konstansokat a $v(x)$ függvényekre kiszabott peremfeltételek segítségével határozhatjuk meg.

Közelebbről vizsgálva ezt a kérdést, tekintsük a

$$\mathfrak{K}v = f, \quad \mathfrak{S}v = 0 \quad (21)$$

peremérték problémát, ahol f tetszőleges függvénye $x \in [0, 1]$ -nek, \mathfrak{S} a $v = v(x)$ függvényekre kirótt peremfeltételeket kijelölő lineáris operátor. (21)-ből

$$\mathfrak{S}v = \mathfrak{S}\mathfrak{K}^{-1}f = 0,$$

azaz a

$$\int_0^1 \mathfrak{S}K(x, t) f(t) dt = 0$$

összefüggésből $f(t)$ tetszőlegessége miatt

$$\mathfrak{S}K(x, t) = 0 \quad (22)$$

következik. Tehát a $K(x, t)$ mag, mint x függvénye, ki kell, hogy elégítse a $v(x)$ -ekre tett megkötéseket.

5. A dinamikai probléma megoldása

A bevezetésben említett probléma mozgásegyenletének, a benne szereplő fizikai mennyiségek jelentésének részletes ismertetése helyett (ezek megtalálhatók [4] 37–38. oldalain) kiindulásul választjuk a feladat

$$(\mathfrak{A} - \alpha^2 \mathfrak{B})v = 0 \quad (23)$$

operátoros egyenletét, ahol

$$\mathfrak{A}v \doteq \frac{d^2}{dx^2} \left(P \frac{d^2 v}{dx^2} \right), \quad (24)$$

$$\mathfrak{B}v = qv. \quad (25)$$

A (23)–(25)-ben alkalmazott jelölések:

- α a sajátkőrfrekvencia,
- $v = v(x)$ az amplitúdó eloszlás függvény,
- $p = p(x), q = q(x)$ a rúd geometriai és anyagi jellemzőit magukban foglaló, pozitív, elegendően sokszor differenciálható függvények, a $[0, 1]$ intervallumon belül sehol sem egyenlők nullával,
- x a független változó a rúd tengelye mentén.

Figyelembe véve, hogy $x \in [0, 1]$, a (23) egyenlethez tartozó peremfeltétel-rendszer:

$$\begin{aligned} v(0) &= 0, & v'(0) &= 0, \\ v''(1) &= 0, & v'''(1) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

(Vesszõvel itt és a késõbbiekben x -szerinti differenciálást jelölünk.)

A (24), (25)-ben definiált \mathcal{A} és \mathcal{B} operátorok lineárisak, pozitívak, szimmetrikusak, s \mathcal{A} egyben önadjungált differenciáloperátor is. Következésképpen a (23) és (26) egyenletekkel meghatározott sajátértékfeladatnak megszámlálhatóan végtelen sok izolált pozitív sajátértéke van, és ezek a végesben nem torlódhatnak [5]. A sajátértékeket nagyságuk szerint rendezhetjük, a többszöröseket megfelelő sokszor véve:

$$\alpha_1^2 \leq \alpha_2^2 \leq \dots \leq \alpha_r^2 \leq \dots \quad (27)$$

Bevezetve ezek után a

$$\mathfrak{K}^{-1} \doteq \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}, \quad \mu \doteq \frac{1}{\alpha^2} \quad (28)$$

jelöléseket, a (23)-as egyenlet a

$$\mathfrak{K}^{-1} v = \mu v \quad (29)$$

alakot veszi fel, ahol \mathfrak{K}^{-1} egy $K(x, t)$ maggal (1) szerint értelmezett integrál operátor. (27)-bõl a (28) helyettesítéssel élve

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r \geq \dots \quad (30)$$

Feladatunk a (30) sajátértéksorozat számára felsõ korlátokat számítani a Trefftz—Fichera módszer segítségével, ha feltételezzük, hogy rendelkezünk k darab

$$\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \dots \geq \mu'_k$$

[4]-ben ismertetett módon meghatározott alsó korláttal.

Elõször (19) alapján elõállítjuk a $K(x, t)$ magot. Az operátorok értelmezését, valamint (13)-at figyelembe véve a

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(p(x) \frac{d^2 K(x, t)}{dx^2} \right) = q(t) \delta(x - t)$$

egyenlethez jutunk. A (14) összefüggés tekintetbevételével

$$\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d^2 K(x, t)}{dx^2} \right) = q(t) h(x - t) + \beta_1(t), \quad (31)$$

majd újabb integrálást végezve (15) alkalmazásával

$$\frac{d^2 K(x, t)}{dx^2} = q(t) h(x - t) \frac{x - t}{p(x)} + \beta_1(t) \frac{x}{p(x)} + \beta_2(t) \frac{1}{p(x)}. \quad (32)$$

A (16) összefüggés felhasználásával (32)-t még kétszer integrálva

$$K(x, t) = q(t) h(x - t) \int_t^x \int_t^u \frac{s - t}{p(s)} ds du + \\ + \beta_1(t) \int_0^x \int_0^u \frac{s}{p(s)} ds du + \beta_2(t) \int_0^x \int_0^u \frac{1}{p(s)} ds du + \beta_3(t)x + \beta_4(t), \quad (33)$$

ahol $\beta_1(t), \dots, \beta_4(t)$ tetszőleges függvények, amelyeket (21), (22)-nek megfelelően (26) segítségével határozhatjuk meg. Így $K'''(1, t) = K''(1, t) = 0$ -ból (31) és (32) alapján, mivel $h(1 - t) = 1$

$$\beta_1(t) = -q(t), \quad \beta_2(t) = tq(t). \quad (34)$$

$K'(0, t) = K(0, t) = 0$ -ból (33)-at, (34)-et és $h(-t) = 0$ -t alapul véve

$$\beta_3(t) = \beta_4(t) = 0 \quad (35)$$

következik. (34)-et és (35)-öt (33)-ba helyettesítve

$$K(x, t) = q(t) h(x - t) \int_t^x \int_t^u \frac{s - t}{p(s)} ds du + q(t) \int_0^x \int_0^u \frac{t - s}{p(s)} ds du. \quad (36)$$

A

$$\chi(x) = \int_0^x \frac{ds}{p(s)}, \quad \psi(x) = \int_0^x \frac{s ds}{p(s)}, \\ \eta(x) = \int_0^x \chi(s) ds, \quad \zeta(x) = \int_0^x \psi(s) ds$$

függvények bevezetésével (36) a

$$K(x, t) = \begin{cases} q(t) [t \eta(x) - \zeta(x)], & x < t \\ q(t) [xt \chi(t) - x \psi(t) + t \psi(t) - t^2 \chi(t) + t \eta(t) - \zeta(t)], & x > t \end{cases} \quad (37)$$

alakba írható. Az $x > t$ esetet tovább vizsgálva, a szögletes zárójelben levő

kifejezést $x \eta(t) - \zeta(t)$ egyidejű hozzáadásával és levonásával az

$$x \eta(t) - \zeta(t) + (x - t) \xi(t)$$

formába írhatjuk, ahol

$$\xi(t) = t \chi(t) - \varphi(t) - \eta(t). \quad (38)$$

A (38) egyenletet t szerint differenciálva

$$\frac{d\xi}{dt} = \chi(t) + \frac{t}{p(t)} - \frac{t}{p(t)} - \chi(t) = 0,$$

amiből $\xi(t) = \text{konst.}$ következik tetszőleges $t \in [0, 1]$ -re. A konstans értéke $\xi(0) = 0$ miatt zérussal egyenlő, és így (37) a

$$G(x, t) = \begin{cases} t \eta(x) - \zeta(x), & x < t \\ x \eta(t) - \zeta(t), & x > t \end{cases} \quad (39)$$

szimmetrikus függvény bevezetésével a

$$K(x, t) = q(t) G(x, t) \quad (40)$$

egyszerű kifejezést nyerjük. (Megjegyezzük, hogy $G(x, t)$ a (26) peremfeltételek mellett az \mathcal{A} operátorhoz tartozó Green-függvény [11], [12], [15].)

(29)-ből (40) segítségével

$$\int_0^1 q(t) G(x, t) v(t) dt = \mu v(x).$$

Az egyenletet beszorozva $\sqrt{q(x)}$ -el és a $w(x) = \sqrt{q(x)} v(x)$ helyettesítést alkalmazva [13], [14], az

$$\int_0^1 \sqrt{q(x) q(t)} G(x, t) w(t) dt = \mu w(x) \quad (41)$$

egyenletet kapjuk. Az így végzett transzformáció során a μ sajátértékek nem változnak, viszont az új

$$K^*(x, t) = \sqrt{q(x) q(t)} G(x, t)$$

mag szimmetrikus és így alkalmazható a Trefftz–Fichera-módszer, azaz a

$$K^*(x, x) = K(x, x)$$

egyenlőség miatt (5) közvetlenül felhasználható.

6. Számpélda

A bemutatott eljárás gyakorlati használhatóságát illusztrálendő, legyen egy körkeresztmetszetű, 1 m hosszú rúd átmérője

$$d(x) = ax + b,$$

ahol $a = -10^{-2}$, $b = 4 \cdot 10^{-2}$ m. Ekkor

$$p(x) = \frac{\pi E(ax + b)^4}{64},$$

$$q(x) = \frac{\pi \rho(ax + b)^2}{4}.$$

Itt $E = \text{konst.}$ a rugalmassági modulus és $\rho = \text{konst.}$ a sűrűség. Ezeket paraméternek hagyva, az 1. táblázat mutatja a számítások eredményeit az első öt sajátkörfrekvenciára vonatkozóan.

1. táblázat

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$\alpha_{ji}^2 \frac{\rho}{E}$	$1,0284 \cdot 10^{-3}$	$4,327 \cdot 10^{-2}$	$3,062 \cdot 10^{-1}$	1,143	3,217
$\alpha_{ai}^2 \frac{\rho}{E}$	$1,0283 \cdot 10^{-3}$	$4,311 \cdot 10^{-2}$	$2,986 \cdot 10^{-1}$	1,045	2,545

A táblázat első sorában a Poincaré—Rayleigh—Ritz módszerrel számolt felső korlátokat, második sorában a Trefftz—Fichera-módszerrel meghatározott alsó korlátokat találjuk. A felső korlátok számításához szükséges numerikus munkát az MTA SZTAKI C D C 3300 típusú számítógépen végeztük. Alsó korlátok számításához kézi kalkulátor használata is elégségesnek bizonyult.

IRODALOM

- WEINSTEIN, A.: Bounds for Eigenvalues and the Method of Intermediate Problems. Partial Differential Equations and Continuum Mechanics, Editor R. E. Langer, Madison, The University of Wisconsin Press 1961, 39—53
- BAZLEY, N. W.—FOX, D. W.: Truncations in the Method of Intermediate Problems for Lower Bounds to Eigenvalues. *Journal of Research of the National Bureau of Standards — B. Mathematics and Mathematical Physics* 65 B (1961), 105—111
- BOSZNAY, Á.: Lectures on the Université de Liège, 1976. Nov. Old and New Methods for Improvable Bracketing of Eigenfrequencies of Structures
- KOVÁCS, M.—RICHLIK, GY.—TAKÁCS, F.—TÓTH, GY.: Egyenes tengelyű, a hossza mentén változó jellemzőkkel bíró, hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása. *Műszaki Tudomány* 54 (1978)

5. BOSZNAY, Á.: Kontinuumnak modellezett rúdszerkezet sajátfrekvenciáinak javítható közfogása. Doktori értekezés, Budapest 1974
6. WEINBERGER, H. F.: Variational Methods for Eigenvalue Approximation. *Society for Industrial and Applied Mathematics*. J. W. Arrowsmith Ltd., Bristol 3, England, 1974, 115—121
7. WEINSTEIN, A.—STENGER, W.: Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues. *Mathematics in Science and Engineering*, Vol 89 (1972), 118—122
8. ZEMANIAN, A. H.: Distribution Theory and Transform Analysis International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw—Hill Book Company, 1965, 1—79
9. SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions, vols I. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, Hermann & Cie, Paris, 1957, 1959
10. ROACH, G. F.: Green's Functions: Introductory Theory with Applications. Van Nostrand Reinhold Company, London 1970, 142—164
11. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest u. Portig K.-G. Leipzig 1949, 60—81
12. KANWAL, R. P.: Linear Integral Equations, Theory and Technique. Academic Press New York and London 1971, 61—93
13. FRANK, PH.—MISES, R.: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei I. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966, 620—636
14. PENNY, J. E.—REED, J. R.: An Integral Equation Approach to the Fundamental Frequency of Vibrating Beams. *Journal of Sound and Vibration* 19 (1971), 393—400
15. SCHMEIDLER, W.: Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik I. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest u. Portig K.-G. Leipzig 1950, 328—348

Application of Trefftz—Fichera's Method for the Corrective Delimitation of the Natural Angular Frequency of a Beam Subject to Flexural Oscillation. The numerical experiments suggest that in case of beams subject to some kind of oscillation it is not necessarily reasonable to apply to corrigible delimitation of the angular eigenfrequency the method in general use for the functional analysis due to the laboursome numerical calculation work. The purpose of the paper is to justify the efficiency of the Trefftz—Fichera's method in connection with the calculation of the corrigible lower limits of the angular eigenfrequencies associated with flexural oscillation. The upper limits needed for the delimitation might be determined by the Poincaré—Rayleigh—Ritz's method. To the application of the Trefftz—Fichera's method the invertation of the differential operator of variable coefficient, originally entering in the calculations, is needed. The paper carries out the invertation by making use of the theory of distribution and, at the same time, summarizes the respective elements of the general theory.

Anwendung der Trefftz—Ficheraschen Methode zur korrigierbaren Eingrenzung der Eigenkreisfrequenzen des Biegeschwingungen durchführenden Stabes. Die numerischen Versuche zeigen, daß im Fall der einerlei Schwingung durchführenden Stäbe zur korrigierbaren Eingrenzung der Eigenkreisfrequenzen die Anwendung der allgemein geltenden Methoden der Funktionalanalysis nicht unbedingt zweckmäßig ist. Das Ziel der Abhandlung ist die Wirksamkeit des Trefftz—Ficheraschen Verfahrens im Zusammenhang mit der Berechnung der korrigierbaren unteren Grenzen der zur Biegeschwingungen gehörigen Eigenkreisfrequenzen zu beweisen. Die zur Eingrenzung benötigten oberen Grenzen können mit Hilfe der Poincaré—Rayleigh—Ritzschen Methode ermittelt werden. Zur Anwendung der Trefftz—Ficheraschen Methode ist die Invertierung des ursprünglich vorgekommenen Differentialoperators von veränderlichem Koeffizient nötig. Die Invertierung wird mit Hilfe der Distributionstheorie durchgeführt und die betreffenden Elemente der allgemeinen Theorie werden zusammengefaßt.

SZEKRÉNYTARTÓS HIDAK ERŐJÁTÉKA

SZIDAROVSKY JÁNOS*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

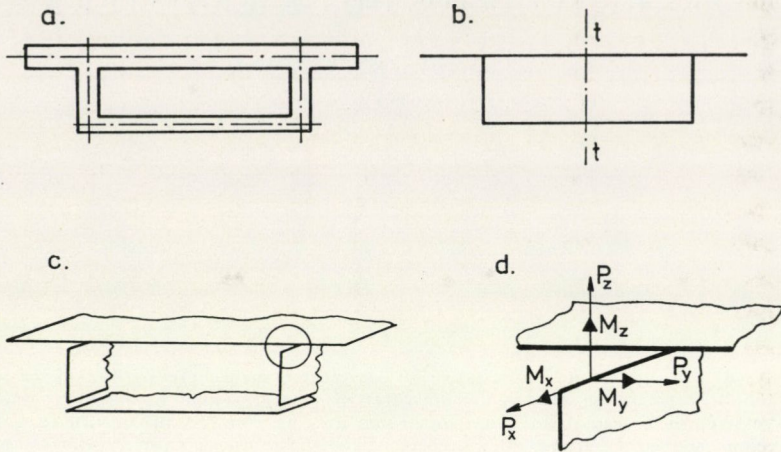
A tanulmány a szekrénytartót egy zérus sarokmerevségű csuklós szekrénytartóból és sűrűn egymás mellé helyezett zárt keretkből összeépített szerkezettel helyettesíti és az erőjátékot azon határozza meg az elemi szilárdságtan szokásos módszereinek segítségével. Az antimetrikus terhelés okozta csavaró nyomaték egy részét a szekrénytartó, mint csavart rúd, a másik részét a két függőleges fal és övek alkotta főtartók veszik fel. A nyomaték megosztása azonban nem csak a tartó merevségi viszonyaitól, hanem a terhelés mikéntjétől is függ. A nyomaték megosztása és a helyettesítő főtartók hajlító merevsége meghatározására egyszerű képlet szolgál.

I. Bevezetés

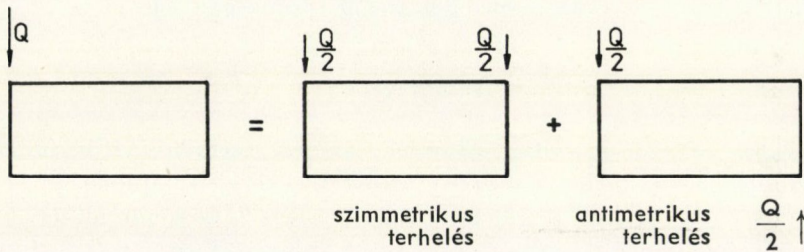
Szekrénykeresztmetszetű hídtartók, az ún. szekrénytartós hidak leg-egyszerűbbje, az egycellás szekrénytartó (1a. ábra) tulajdonképpen négy — két vízszintes és két függőleges síkú — síkbeli tartóból áll (1c. ábra), amelyekből úgy van összeépítve, hogy a csatlakozásoknál a tartók közt sem relatív eltolódás, sem relatív elfordulás nem lehetséges (1b. ábra). Az érintkező felületeken a helytől függő három (P_x, P_y, P_z) erő és három (M_x, M_y, M_z) nyomatékvektor hat. Az ismeretlenek száma tehát csatlakozási felületenként 6—6, összesen 24 vektorfüggvény (1d. ábra). Ezeknek az ismeretlen függvényeknek a számát — bizonyos összefüggések ismereteiben — le lehet csökkenteni, de az még így is túl nagy ahhoz, hogy a gyakorlat számára használható eljárás alapját képezze.

A szekrénytartó egyik fala síkjában terhelő lefelé ható Q erőt szimmetrikus és antimetrikus összetevőkre bontjuk. A szimmetrikus összetevő a mindkét függőleges fal síkjában terhelő $Q/2 - Q/2$ lefelé ható erőkből, az antimetrikus összetevő viszont az egyik fal síkjában terhelő $Q/2$ lefelé ható és a másik fal síkjában terhelő $Q/2$ felfelé ható függőleges erőkből áll (2. ábra). A szimmetrikus összetevők, azaz a szimmetrikus terhelés hatására ébredő erőjáték általában az elemi szilárdságtan módszereivel a mérnöki számítás céljainak megfelelő pontossággal meghatározható. Az antimetrikus terhelés hatásának vizsgálata nem ilyen egyszerű és ezért különböző egyszerűsítő feltevéseket vezettek be. A javasolt módszerek három típusba sorolhatók.

* Dr. Szidarovszky János, 1089—Budapest, Bíró L. u. 42.



1. ábra

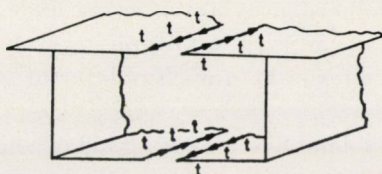


2. ábra

Az egyik leggyakrabban alkalmazott módszer elhanyagolja a keresztmetszet eltorzulásának hatását, vagyis feltételezi egyrészt azt, hogy a keresztmetszet teljes alaktartó, másrészt azt, hogy az antiszimmetrikus terhelést a tartó csavaró ellenállása veszi fel. E módszer alkalmazásánál a gyakorlat a szekrény keresztmetszet eltorzulásának hatását úgy veszi figyelembe, hogy a szimmetrikus terhelésre kapott feszültségeket — érzés alapján — 5 ÷ 20%-kal megnöveli.

Egy másik módszer a tartórács analógiájából indul ki, és a keresztelosztást vizsgálja; vagyis azt az arányt határozza meg, hogy az egyik függőleges fal, vagyis az egyik tartó síkjában ható függőleges teher milyen arányban terheli a két függőleges tartót. Ez az eljárás a szekrénytartót középen hosszirányban elvágva képzeletben, és az ott fellépő hosszirányú t megoszló erők hatását hanyagolja el (3. ábra). Ez az eljárás tehát kompatibilitási feltételeket nem elégít ki.

A harmadik típus a csavarónyomatékokat osztja meg. Egyik része az alaktartó keresztmetszetű szekrénytartónál csavarást idéz elő, a másik része a



3. ábra

falakat képező tartónyalábot terheli. Ez utóbbi vizsgálatánál tett elhanyagolások a kompatibilitás feltételeinek ki nem elégítését vonják maguk után.

Jelen tanulmány a szekrénytartót a falakból, mint önálló tartókból összeépített szerkezetet vizsgálja és — egyszerűsítő feltevések bevezetése után — ezen a tartón vizsgálja az erőjátékot.

2. Egyszerűsítések

A vizsgálatunknál bevezetett egyszerűsítő feltevések az alábbiak:

1. A vizsgálat az elemi szilárdságtan összefüggései alapján végezhető. Ennek következtében érvényes a szuperpozíció elve és a Navier—Bernoulli féle hipotézis (aminek következtében az egyes falak síkjában, vagyis függőleges és vízszintes irányban a feszültségeloszlás lineáris).

2. Az egyes falak vastagsága hosszukhoz és szélességükhöz viszonyítva kicsi és ezért az egyes falak csavarómerevsége elhanyagolható.

3. A normál erőknek alakváltozást módosító hatása elhanyagolható.

4. A szekrénytartó falainak tengelye derékszögű négyszöget képez (1b. ábra).

5. A szekrénytartó kéttámaszú.

6. A szekrénytartó tengelye merőleges az egy oldalon levő alátámasztás tengelyére (merőleges elrendezésű).

7. A szekrénytartó két végén levő alátámasztásnál szerkezeti megoldás biztosítja, hogy ott a keresztmetszet megtartja eredeti alakját a terhelés után is a saját síkjában, de nem akadályozza az arra merőleges irányú alakváltozást.

8. A szekrénytartó keresztmetszetének függőleges szimmetria tengelye van (1b. ábra).

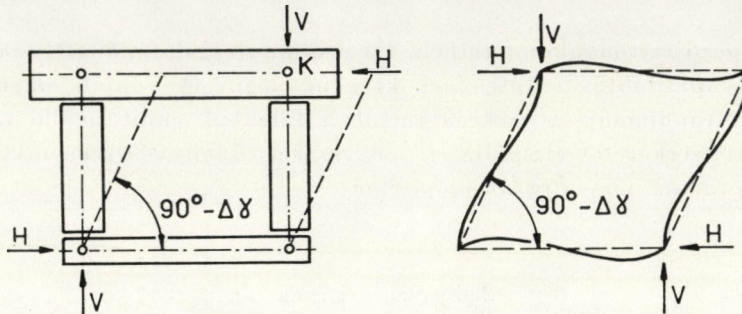
9. Az egyes falak derékszögű négyszög keresztmetszetűek (1b. ábra).

A vizsgálatnál az öblösödés gátlásának hatását nem vesszük figyelembe.

A felsorolt feltevések esetében a szekrénytartónak a tengelyére merőleges síkmetszetei alakváltozás után nem maradnak síkok, de — ha másodrendű hatásoktól eltekintünk — a síkmetszetben a függőleges és vízszintes (vagyis a falak tengelyével párhuzamos) egyenes alakváltozás után is egyenesek maradnak.

A szekrénytartót képező négy falat erősítsük egymáshoz, úgy mint a tényleges szekrénytartónál van azzal a különbséggel, hogy az egyes falak egymáshoz képest szabadon elfordulhatnak. Ezt a tartót nevezzük a következőkben *csuklóstartónak*.

A relatív elfordulást lehetővé tevő csuklókat a feszültségek súlyvonalában helyezük el (4. ábra). A feszültségek súlyvonalát később határozzuk meg.



4. ábra

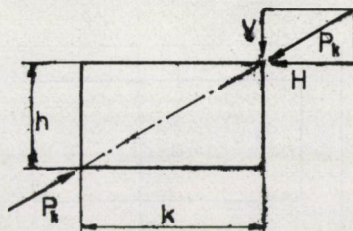
A csuklóstartóra ható függőleges és vízszintes erők hatására a csuklóstartó keresztmetszete deformálódik, azaz a tartó tengelyére merőleges sík-metszetben az ugyanazon falakon levő csuklókat összekötő egyenesek alkotta zárt keret szögei — amelyek terheletlen tartó esetében derékszögek — megváltoznak. A szekrénytartó tengelyére merőleges síkban kényszer nyomatékok lépnek fel a csuklós tartó csuklóí helyén. Ezeknek a kényszer nyomatékoknak a síkja a tartó tengelyére merőleges síkban fekvő zárt keret síkjával egyezik. Ily módon ezek a kényszernyomatékok a szekrénytartó keresztmetszetét képező síkbeli zárt keretekben ébrednek. E zárt kereteket a továbbiakban *támasztókereteknek* nevezzük. A támasztókeretben ébredő kényszernyomatékok előállíthatók a keret két szembenlevő sarokpontját terhelő $+P_k$ és $-P_k$ null értékű erőpárral (5. ábra), amelyek vízszintes és függőleges összetevői a H és V erők. A háromszögek hasonlóságából

$$\frac{V}{H} = \frac{h}{k} \quad (2.1)$$

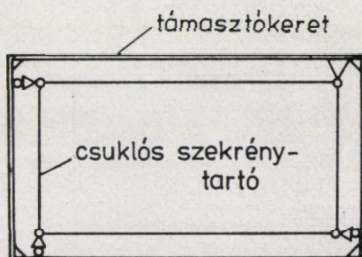
amiből

$$V = H \frac{h}{k} \quad (2.2)$$

A szekrénytartó felfogható egy olyan csuklóstartóként, amelyet csuklóinál sűrűn elhelyezett támasztókeretek támasztanak alá (6. ábra). A támasztó-



5. ábra



6. ábra

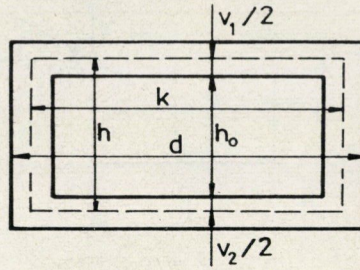
keretek összetartozó H , V erőket adnak át a csuklóstartónak. A külső anti-metrikus terhelés és a H , V erők hatására a csuklóstartó csuklóit összekötő fiktív keret eltorzulása és a támasztókeret sarokpontjait összekötő keretnek a H , V erők hatására bekövetkező eltorzulása megegyezik (4. ábra). Ennek az összefüggésnek az alapján lehet a H , V erőket meghatározni.

A csuklóstartóban a hosszirányú feszültségek a keresztirányú deformáció következtében a támasztókeret alakváltozását is maga után vonják, ha a Poisson szám nem zérus (vagyis $\nu \neq 0$). Hasonlóképp a támasztókeret elemeinek hajlító merevségét a hosszirányban gátolt alakváltozás módosítja. A továbbiakban a harántirányú alakváltozás hatásának vizsgálatára nem térünk ki.

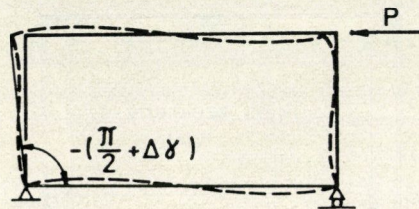
3. A keretmerevség

A szekrénytartót helyettesítő tartó a 2. §-ban részletezettek alapján egy csuklós szekrénytartó, amit a négy sarkán támasztókeretek támasztanak meg (7. ábra). A támasztókeretek egységnyi vastagságúak és szorosan egymás mellett vannak.

Ha a két oszlopa alatt megtámasztott keretet felső vízszintes elemének tengelyében P vízszintes erő támadja meg, a keret vízszintes elemeinek középpontja függőleges irányban nem tolódik el, ugyanott inflexió is van (8. ábra), tehát a hajlítónyomaték értéke zérus.



7. ábra



8. ábra

Ha a $[h_0 + (V_1/2)]^3$ mennyiség mellett a $V_1^3/8$ értéket, valamint a $[h_0 + (V_2/2)]^3$ mellett a $V_2/8$ értékét elhanyagoljuk, az $e = 1$ cm-es elmozdulást előidéző $H = A_k$ megoszló erőre az

$$A_k = \frac{2Ev_3 \left\{ \frac{h_0}{v_3^3} - \left(\frac{k-v_3}{k} \right)^2 \frac{k-v_3}{6} \left(\frac{1}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} \right) \right\}}{h \left\{ \frac{h_0^4}{h^2 v_3^3} + \left(\frac{h_0 + \frac{v_2}{2}}{v_2} \right)^3 + \frac{\left(h_0 + \frac{v_1}{2} \right)^3}{v_1^3} \right\} \left(\frac{k-v_3}{k} \right)^2 \frac{2k}{3h^2} + \left(\frac{k-v_3}{k} \right)^4 \frac{(k-v_3)^2 v_3^3}{3v_1^3 v_2^3}} \quad (3.1)$$

összefüggést vezethetjük le. Az A_k vízszintes erő hatására a keret sarokpontjait összekötő képzeletbeli keret eltorzulását a

$$\Delta \gamma_0 = \frac{1 \text{ cm}}{h(\text{cm})} \quad (3.2)$$

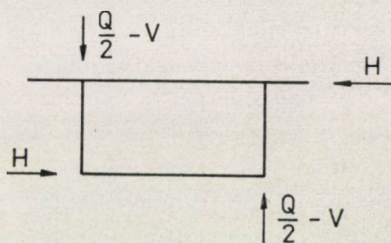
szögváltozás határozza meg. Ha a keretre ható vízszintes megoszló erő H , úgy a szögváltozás

$$\Delta \gamma = \frac{H}{A_k} \cdot \frac{1}{h} \quad (3.3)$$

Ha a tartón kiékelések vannak és a keresztmetszet lényegesen eltér a 7. ábrán feltüntetett keresztmetszettől, vagy a csuklós tartó falainak feszültségi súlyvonalja és a támasztó keret elemeinek középvonalja lényegesen eltér egymástól, úgy a zárt keret A_k keresztmerevsége — a (3.1) képlet alkalmazása helyett — valamilyen közismert módszerrel határozható meg.

4. Az antimetikus terhelés hatása

A külső antimetrikus terhelést a 2. ábra tünteti fel. A csuklós szekrénytartóra még az 5. ábrán feltüntetett H és V erőrendszer is hat. Így a csuklós-tartóra $(Q/2 - V)$ nagyságú függőleges irányú és H nagyságú vízszintes irányú antimetrikus terhelés hat (9. ábra).



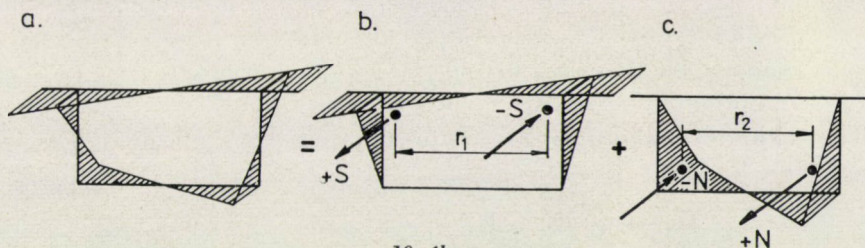
9. ábra

A keresztmetszetnek függőleges szimmetria tengelye van, továbbá a terhelés antimetrikus, így a függőleges szimmetria tengelyben a keresztmetszetre merőleges σ feszültségek nem ébredhetnek. A keresztmetszet minden vízszintes egyenesében a σ feszültségek a tengelyre tükröződnek. Az egyszerűsítő feltevésekben az 1., 4., 6. és 8. pontok alatti részletezettek alapján a

$$\sigma = \alpha \cdot y \cdot z \quad (4.1)$$

összefüggés áll fenn.

A (4.1) alatti képletnek megfelelő feszültségeket a 10a. ábra tünteti fel. A feszültségi ábra a 10b. és 10c. ábrák szerinti feszültségi ábrák összegeként is előállítható.



10. ábra

A 10b. ábrán feltüntetett húzó, ill. nyomó feszültségek eredője a $+S$, ill. $-S$ erők, a 10e. ábrán a nyomó, ill. húzó feszültségek eredője a $-N$ és $+N$ erők.

A $+S$ és $-S$ erők Sr_1 erőpárt, a $-N$ és $+N$ erők a $-Nr_2$ erőpárt képezik. Minthogy a terhelés antimetrikus, a keresztmetszetre ható σ feszültségek eredője zérus, így

$$Sr_1 - Nr_2 = 0 \quad (4.2)$$

amiből

$$\frac{S}{N} = \frac{r_2}{r_1} \quad (4.3)$$

Az r_1 és r_2 mennyiségek a terhelés nagyságától függetlenek, csak a szekrénytartó keresztmetszeti méretétől függnek, így az S/N arány is csak a keresztmetszet méretétől függ. Így ha S adott, az N értékét is meghatározza és vele együtt meghatározza a vízszintes null tengely helyét is.

Így megállapítható, hogy antimetrikus függőleges és vízszintes terhelés esetében a σ feszültségi nulltengely helyét a csuklós szekrénytartó keresztmetszeti méretei határozzák meg, az állandó szelvény esetében szelvényről szelvényre nem változik és független a terheléstől.

A csuklós szekrénytartóra ható terhelés $[(Q/2) - V]$ függőleges antimetrikus terhelés és H vízszintes antimetrikus terhelés szuperpozíciójaként is kezelhető (1. alatti feltevés).

5. Antimetrikus függőleges terhelés

Terhelje a tartót csupán antimetrikus függőleges terhelés.

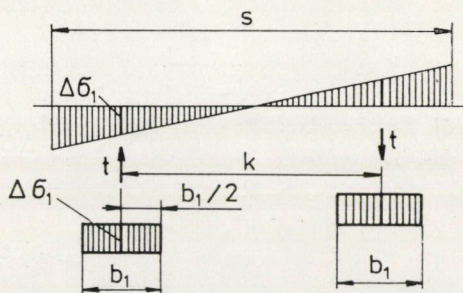
A tartó bármelyik keresztmetszetét is vizsgáljuk, a σ feszültségek ábrája ugyanolyan alakú, csupán az értékek mások. Ezért két egymástól Δx távolságban levő keresztmetszetben fellépő σ feszültségek $\Delta\sigma$ különbsége is hasonló, vagyis azt is alakhelyesen tünteti fel a 10a. ábra.

A 2. feltevés következtében egyes függőleges falak a csuklóknál P_y vízszintes erőket (ld. ábra) nem tudnak átadni a vízszintes falaknak, így a vízszintes fal nem kap vízszintes irányú terhelést, tehát a Δx vastagságú szeletének átadott $\Delta\sigma$ feszültségekkel a függőleges fal csatlakozásánál fellépő P_x irányú t nyíróerők tartanak egyensúlyt (11. ábra).

A vetületi tétel alapján a két függőleges falról átadódó nyíró erők nagysága egyenlő, irányuk ellentétes.

A nyomatéki egyensúly alapján pedig

$$tk = 2 \left(\frac{s}{2} \Delta\sigma_1 \frac{s}{k} \right) \frac{1}{3} \frac{s}{2} = \frac{s^3}{6k} \Delta\sigma_1 \quad (5.1)$$



11. ábra

amiből a

$$t = \frac{s^3}{6k^2} \Delta\sigma_1 \quad (5.2)$$

összefüggés vezethető le, ahol az egyes mennyiségeket a 11. ábra magyarázza. Itt k még ismeretlen. Ugyanakkora t erő adódik át két b_1 széles $\Delta\sigma_1$ feszültségkülönbséggel terhelt szimmetrikusan elhelyezett lemezről is, azaz

$$t = b_1 \Delta\sigma_1, \quad (5.3)$$

ahonnan (5.2) felhasználásával a helyettesítő lemez szélesség

$$b_1 = \frac{s^3}{6k^2}. \quad (5.4)$$

A fentiek alapján igénybevétel szempontjából az s széles fejlemez két b_1 széles fejlemezzel helyettesíthető.

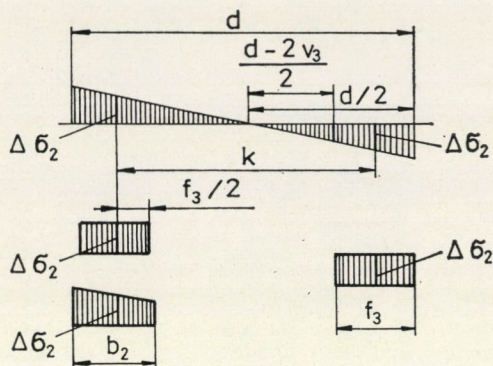
Ugyanez érvényes a talplemezre is, ahol

$$b_2 = \frac{d^3}{6k^2}. \quad (5.5)$$

A még ismeretlen k mennyiség az alábbi gondolatmenet alapján határozható meg:

A t nyíró erő a függőleges falban ébredő $\Delta\sigma$ feszültségek eredőjének függőlegesében hat. Így a 12. ábra szerint a bal oldali falra ható $\Delta\sigma$ feszültségek eredője

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \frac{d}{k} \Delta\sigma_2 \frac{d}{2} - \frac{1}{2} \frac{d - 2v_3}{k} \Delta\sigma_2 \frac{d - 2v_3}{2} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{d^2}{k} \Delta\sigma_2 - \frac{1}{4} \frac{(d - 2v_3)^2}{k} \Delta\sigma_2, \end{aligned} \quad (5.6)$$



12. ábra

azaz

$$t = \frac{v_3(d - v_3)}{k} \Delta\sigma_2. \quad (5.7)$$

A $\Delta\sigma$ feszültségek nyomatéka a keresztmetszet szimmetria tengelyére

$$M = \frac{2}{3} \frac{1}{4} \frac{d^3}{k} \Delta\sigma_2 - \frac{2}{3} \frac{1}{4} \frac{(d - 2v_3)^3}{k} \Delta\sigma_2 = \frac{(d - v_3)^2 + (v_3^2/3)}{k} \Delta\sigma_2. \quad (5.8)$$

De a t nyíró erők nyomatéka

$$M = kt = k \frac{v_3(d - v_3)}{k} \Delta\sigma_2 \quad (5.9)$$

a $\Delta\sigma$ feszültségek nyomatékával egyenlő, és így

$$k = d - v_3 + \frac{v_3^2}{3(d - v_3)}. \quad (5.10)$$

A függőleges fal helyettesíthető egy

$$f_3 = v_3 \frac{d - v_3}{k} \quad (5.11)$$

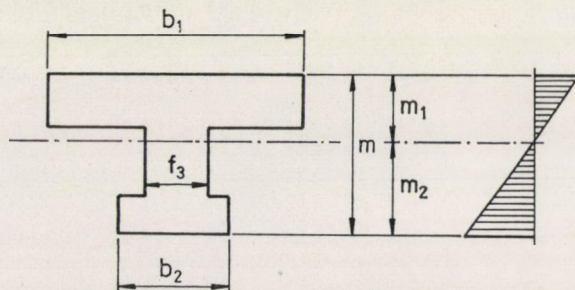
vastag egyenletes feszültségű fallal, mert az

$$f_3 \Delta\sigma_1 \quad (5.12)$$

eredő valóban a t (5.7) alatti értékét adja.

A vízszintes falra ható külső hajlítónyomatékkal a feszültségekből és a t csúsztató erőkből álló (σ, t) erőrendszer tart egyensúlyt. A helyettesítő tartónál a (σ, t) erőrendszer az előbbivel azonos. Ezért fentiek alapján függőleges antimetrikus terhelésre az igénybevételek szempontjából a csuklós tartó két olyan tartóval helyettesíthető, melynél b_1 a fej, b_2 a talp szélessége és f_3 a gerinc vastagsága (13. ábra).

A függőleges síkú hajlítónyomaték hatására fellépő feszültségi ábra null tengelye a helyettesítő tartó vízszintes súlyvonala lesz (13. ábra).



13. ábra

A σ és τ feszültségek konvencionális módon határozhatók meg.

A vízszintes (nem terhelt) falban ébredő τ feszültségek is meghatározhatók.

A függőleges falból átadódó csúsztató erő (5.2) alapján a vízszintes fal egy metszetén

$$t = \frac{s^3}{6k^2} \Delta\sigma_1. \quad (5.13)$$

A $\Delta\sigma$ feszültségek összege a fél falra a 11. ábra alapján

$$\Delta\sigma_1 \frac{s}{k} \frac{s}{4} = \frac{s^2}{4k} \Delta\sigma_1. \quad (5.14)$$

A kettő különbsége adja középen a csúsztató erőt:

$$t_1 = \frac{s^2}{4k} \Delta\sigma_1 - \frac{s^3}{6k^2} \Delta\sigma_1 = \frac{s^2(3k - 2s)}{12k^2} \Delta\sigma_1 = \frac{3k - 2s}{2s} t. \quad (5.15)$$

A teljes csúsztató erő a függőleges falról

$$t = R \frac{S}{I}, \quad (5.16)$$

ahol S a függőleges fal övének statikai nyomatéka.

Így a vízszintes fal közepén a csúsztató erő

$$t_1 = \frac{3k - 2s}{2s} R \frac{S}{I} \quad (5.17)$$

és a nyíró feszültség

$$\tau_1 = \frac{3k - 2s}{2s} R \frac{S}{I v_1} \quad (5.18)$$

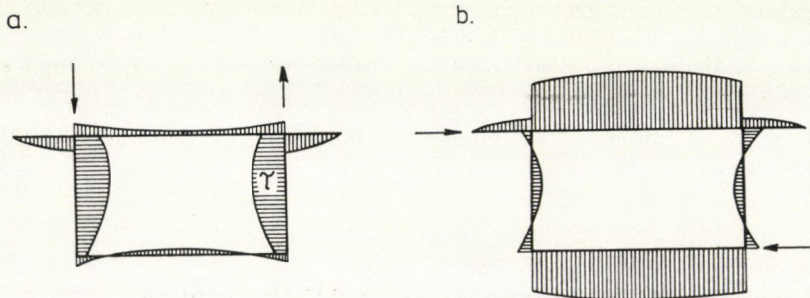
Hasonlóképpen a nyaknál a csúsztató erő a függőleges fal csatlakozásánál

$$t_2 = \Delta\sigma_1 \left(\frac{s}{k} \frac{s}{4} - \frac{k}{4} \right) = \frac{s^2 - k^2}{4k} \Delta\sigma_1 = \frac{3k}{2s} \left(1 - \frac{k^2}{s^2} \right) t,$$

vagy (5.16) alapján

$$t_2 = \frac{3k}{2s} \left(1 - \frac{k^2}{s^2} \right) R \frac{S}{I} \quad (5.19)$$

A csúsztatóerőt a 14/a. ábra tünteti fel.



14. ábra

Mint hogy a terheletlen vízszintes fal nem kap vízszintes erőt a függőleges falaktól, a vízszintes fal hossz tengelyére merőleges metszetben a keresztmetszeti eredőnek nincs nyíró komponense. Így

$$\int \tau \, dy \, dz = 0 \quad (5.20)$$

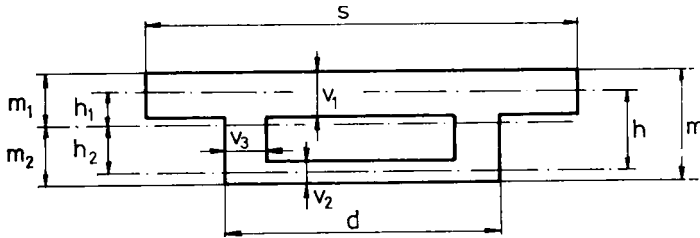
szavakkal: függőleges antimetrikus terhelés esetén a vízszintes falakban a csúsztatóerők összege zérus.

Egész hasonlóan, vízszintes antimetrikus terhelés esetében a függőleges falakban a csúsztató erők összege zérus.

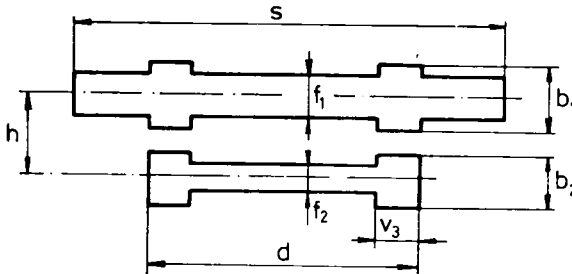
6. Antimetrikus vízszintes terhelés

Vízszintes irányú antimetrikus terhelésre a csuklós tartó a σ feszültségek szempontjából két vízszintes tengelyű tartóval helyettesíthető.

A tartó vízszintes terhelése a támasztókeretről átadódó H erő (4. ábra). A H erő hatására fellépő igénybevételnek szempontjából a fejlemez helyettesíthető egy f_1 gerincvastagságú és C_1 övszélességű, a talplemez pedig egy f_2 gerincvastagságú és C_2 övszélességű tartóval (15. és 16. ábrák).



15. ábra



16. ábra

Az (5.10) képlethez hasonlóan a vízszintes falak feszültségi nulltengelye

$$h_1 = m_1 - \frac{v_1}{2} + \frac{v_1^2}{12 \left(m_1 - \frac{v_1}{2} \right)},$$

$$h_2 = m_2 - \frac{v_2}{2} + \frac{v_2^2}{12 \left(m_2 - \frac{v_2}{2} \right)} \quad (6.2)$$

összefüggések alapján határozható meg.

A függőleges falakról a vízszintes falak feszültségi nulltengelyében átadott nyíróerők:

$$t_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{2h_1h} \left[r_1^2 \left(\frac{2}{3} r_1 + h_2 \right) + r_2^2 \left(\frac{2}{3} r_2 - h_2 \right) \right] \quad (6.3)$$

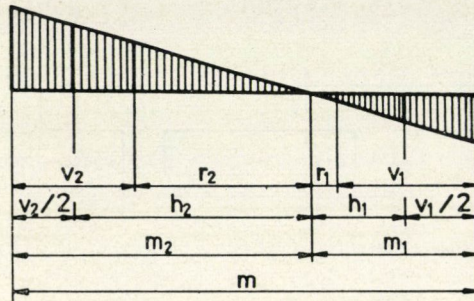
és

$$t_2 = \frac{\Delta\sigma_1}{2h_1h} \left[r_2^2 \left(\frac{2}{3} r_2 + h_1 \right) + r_1^2 \left(\frac{2}{3} r_1 - h_1 \right) \right], \quad (6.4)$$

ahol (17. ábra)

$$r_1 = m_1 - v_1, \quad (6.5)$$

$$r_2 = m_2 - v_2. \quad (6.6)$$



17. ábra

A függőleges falakat helyettesítő övlemez szélességek:

$$C_1 = \frac{1}{2hh_1} \left[r_1^2 \left(\frac{2}{3} r_1 + h_2 \right) + r_2^2 \left(\frac{2}{3} r_2 - h_2 \right) \right] \quad (6.7)$$

és

$$C_2 = \frac{1}{2hh_2} \left[r_2^2 \left(\frac{2}{3} r_2 + h_1 \right) + r_1^2 \left(\frac{2}{3} r_1 - h_1 \right) \right], \quad (6.8)$$

mert

$$C_1 \Delta\sigma_1 = t_1 \quad (6.9)$$

és

$$C_2 \Delta\sigma_2 = C_2 \frac{h_2}{h_1} \Delta\sigma_1 = t_2. \quad (6.10)$$

Végül a két helyettesítő falvastagság (5.11)-hez hasonlóan

$$f_1 = v_1 \frac{m_1 - (v_1/2)}{h_1} \quad (6.11)$$

illetve

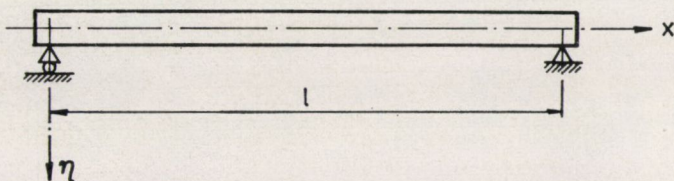
$$f_2 = v_2 \frac{m_2 - (v_2/2)}{h_2} \quad (6.12)$$

7. A falak eltolódása

A tömörszelvényű tartó eltolódására érvényes (18. ábra) az

$$\eta = -\iint_0^x \frac{M}{EI} dx dx + \int_0^x \frac{T}{GA} dx + \varphi_0 x = \eta_0 \quad (7.1)$$

összefüggés, ahol η_0 , ill. φ_0 a tartó lehajlása, illetve előfordulása az $x = 0$ helyen, M a hajlító nyomaték, T a nyíróerő, E a rugalmassági tényező, G a



18. ábra

nyírási rugalmassági tényező, I ill. A a tartó keresztmetszetének tehetetlenségi nyomatéka, ill. helyettesítő területe és x az abszcissa, továbbá

$$A = \frac{F}{\varrho} \quad (7.2)$$

ahol F a tartó keresztmetszeti területe és ϱ egy alaki tényező.

Ha a kéttámaszú tartó keresztmetszete állandó, a (7.1) képlet tovább egyszerűsíthető, és az

$$\eta = -\iint_0^x \frac{\sigma}{Ee} dx dx + \frac{\sigma I}{GAe} + \varphi_0 x \quad (7.3)$$

összefüggést kaphatjuk az eltolódás meghatározására.

Ha a tartót terhelő q terhelést sinus Fourier sorba fejtjük, az egyes Fourier-tagokra a

$$q = \sum_{i=1}^{\infty} q_i = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (7.4)$$

egyszerű összefüggést kapjuk.

Legyen a terhelés

$$q_i = q_{i0} \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (7.5)$$

Ekkor

$$T_i = -q_{i0} \frac{l}{i\pi} \cos \frac{i\pi x}{l}, \quad (7.6)$$

$$M_i = q_i \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (7.7)$$

és

$$\sigma_i = q_{i0} \frac{e}{I} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (7.8)$$

(7.5)–(7.8) felhasználása és a kijelölt integrálás elvégzése után az eltolódásra az

$$\eta_i = \sigma_i \frac{1}{Ee} \frac{l^2}{i^2\pi^2} (1 + \beta_i) \quad (7.9)$$

összefüggést kapjuk, ahol

$$\beta_i = \frac{EI}{GA} \frac{i^2\pi^2}{l^2}. \quad (7.10)$$

A (7.9) képlet zárójeles részében — hacsak i értéke nem túl nagy — ami a gyakorlati számításokban nem fordul elő — az első tag értéke mellett a második tag elhanyagolható. Így:

$$\eta_i = \sigma_i \frac{1}{Ee} \frac{l^2}{i^2\pi^2}. \quad (7.11)$$

A szekrénytartó nem terhelt falán a nyíró erő hatása mindig elhanyagolható, mert — mint az 5. pontban láttuk — az egyes falaknál a csúsztató erők összege zérus.

8. A szekrény eltorzulása

A két függőleges falra ható antimetrikus

$$q_i = q_{i0} \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (8.1)$$

(4. ábra) terhelés hatására fellépő σ feszültség a K ponton

$$\sigma_{K1} = q_{i0} \frac{h_1}{I_3} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (8.2)$$

ahol I_3 az 5. pontban tárgyalt helyettesítő függőleges falnak a tehetetlenségi nyomatéka.

A két függőleges fal relatív eltolódása (7.11) alapján

$$\eta_{1i} = \sigma_{K1} \frac{2}{Eh_1} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \quad (8.3)$$

és a két vízszintes fal relatív eltolódása

$$\eta_{2i} = \sigma_{K1} \frac{2}{Ek} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) = \sigma_{K1} \frac{2}{Ek} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \frac{h}{h_1}. \quad (8.4)$$

A vízszintes falakra ható

$$H_i = H_{i0} \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (8.5)$$

vízszintes terhelés hatására ébredő σ feszültség a K ponton

$$\sigma_{K2} = H_{i0} \frac{k}{2I_1} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (8.6)$$

ahol I_1 a felső vízszintes fal 6. pontban tárgyalt helyettesítő tartójának tehetlenségi nyomatéka.

A vízszintes terhelés hatására a két függőleges fal relatív eltolódása

$$\eta_{i3} = \sigma_{K2} \frac{2}{Eh_1} \frac{l^2}{i^2\pi^2}, \quad (8.7)$$

a két vízszintes fal relatív eltolódása pedig

$$\eta_{i4} = \sigma_{K2} \frac{2}{Ek} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \frac{h}{h_1}. \quad (8.8)$$

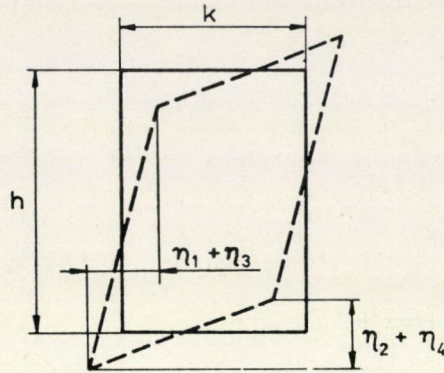
A szekrénytartó eltorzulását kifejező $\Delta\gamma_i$ relatív szögváltozás (19. ábra)

$$\Delta\gamma_i = \frac{\eta_{i1} + \eta_{i3}}{k} + \frac{\eta_{i2} + \eta_{i4}}{h}. \quad (8.9)$$

Vagyis ha a terhelésben csak i -edik Fourier tag szerepel, a szekrénytartó eltorzulásában is csak i -edik Fourier tag szerepel, így a H erőnél is csak i -edik Fourier tag lép fel.

Vagy (8.1)–(8.8) felhasználásával, ha a vízszintes megoszló teher H_i , és a függőleges megoszló teher

$$q_i - H_i \frac{h}{k} = \left(q_{i0} - H_{i0} \frac{h}{k}\right) \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (8.10)$$



19. ábra

(8.3) és (8.7), illetve (8.4) és (8.8) alapján

$$\eta_{i1} + \eta_{i3} = \frac{2}{Eh_1} \frac{l^2}{i^2\pi^2} (\sigma_{K1} - \sigma_{K2}) \quad (8.11)$$

és

$$\eta_{i2} + \eta_{i4} = \frac{2}{Ek} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \frac{h}{h_1} (\sigma_{K1} - \sigma_{K2}), \quad (8.12)$$

minthogy a q és H erők hatása ellentétes.

De (8.1), (8.2), (8.5) és (8.6) alapján

$$\sigma_{k1} - \sigma_{k2} = \left[\left(q_{i0} - H_{i0} \frac{h}{k} \right) \frac{h_1}{I_3} - H_{i0} \frac{k}{2I_1} \right] \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (8.13)$$

Vagy más alakban

$$\sigma_{k1} - \sigma_{k2} = \left[q_{i0} - H_{i0} \left(\frac{k}{2I_1} + \frac{hh_1}{kI_3} \right) \right] \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (8.14)$$

Így (8.9) és (8.11)–(8.13) alapján

$$\Delta\gamma_i = \frac{4}{Eh_1k} \left[q_{i0} \frac{h_1}{I_3} - H_{i0} \left(\frac{k}{2I_1} + \frac{hh_1}{kI_3} \right) \right] \frac{l^4}{i^4\pi^4} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (8.15)$$

A levezetett képletek alapján a tehetetlenségi nyomatékok közti összefüggések is kiolvashatók.

A feszültségi súlyvonalak találkozásánál a H_i erők hatására ébredő feszültségek — (8.6) felhasználásával — a felső sarokponton

$$\sigma_f = H_{i0} \frac{k}{2I_1} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi x}{l}, \quad (8.16)$$

az alsó sarokponton

$$\sigma_a = H_{i0} \frac{k}{2I_2} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (8.17)$$

De a 13. és 15. ábra alapján

$$\frac{\sigma_f}{\sigma_a} = \frac{h_1}{h_2}, \quad (8.18)$$

így

$$I_2 = I_1 \frac{h_1}{h_2}. \quad (8.19)$$

A 4. §-ban tárgyaltak alapján a feszültségi ábra mind a vízszintes, mind az antimetrikus terhelés hatására hasonló, minthogy a feszültségi nullpont helye nem függ a terheléstől.

Jelöljük ezt az antimetrikus vízszintes, illetve függőleges terhelést H^* , ill. V^* -al, amely ugyanazt a σ^* feszültséget okozza. A σ^* feszültséghez tartozó eltolódások: η_1^* , η_2^* , η_3^* és η_4^* .

A H^* és V^* erők munkái (8.11) és (8.12) felhasználásával

$$L_H = H^*(\eta_2^* + \eta_4^*) = H^* \frac{2}{Ek} \frac{h}{h_1} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sigma^* \quad (8.20)$$

és

$$L_V = V^*(\eta_1^* + \eta_3^*) = V^* \frac{2}{Eh_1} \frac{l^2}{i^2\pi^2} \sigma^*.$$

Minthogy a H^* és V^* terhelés hatására ugyanaz a feszültségábra alakul ki, a belső munkák egyenlők, így

$$L_H = L_V.$$

Behelyettesítve, a (2.1)-el egyező

$$\frac{H^*}{V^*} = \frac{k}{h} \quad (8.21)$$

összefüggést kapjuk.

A (8.13) alatti összefüggésben $(q_{i0} - H_{i0} h/k) (h_1/I_3)$ helyébe $V^*(h_1/I_3)$, $H_{i0}(k/2I_1)$ helyébe $H^*(k/2I_1)$ mennyiségeket helyettesítve a σ feszültség és vele együtt (8.15) alapján a $\Delta\gamma$ szögváltozás akkor lesz zérus, ha

$$I_1 = \frac{k^2}{2h h_1} I_3. \quad (8.22)$$

Ez az összefüggés adja meg a vízszintes és függőleges tengelyű falak helyettesítő tehetetlenségi nyomatéka közti összefüggést.

(8.22)-t (8.15)-be írva, a

$$\Delta\gamma_i = \frac{4}{kEI_3} \left[q_{i0} - H_{i0} \frac{2h}{k} \right] \frac{l^4}{i^4\pi^4} \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (8.23)$$

összefüggést kapjuk.

(3.3) alapján az összetartozó H_i és V_i erőrendszer hatására a támasztókeret sarokszögpontjait összekötő képzeletbeli keret sarokszögeinek változása

$$\Delta\gamma_i = \frac{H_{i0}}{A_k} \frac{1}{h} \sin \frac{i\pi x}{l}. \quad (8.24)$$

Ez a szögváltozás (8.23)-al egyező, amiből a

$$H_{i0} = \frac{q_{i0}}{\frac{i^4\pi^4}{4h} \frac{kEI_3}{A_k l^4} + \frac{2h}{K}} \quad (8.25)$$

kifejezés vezethető le.

Ha a nyíróerők hatását az alakváltozások meghatározásával nem hanyagoljuk el, hasonló levezetéssel a

$$H_{i0} = \frac{\left[1 + \frac{h_2}{h_1} + \frac{h}{h_1} (1 + \beta_3) q_{i0} \right]}{\frac{i^4\pi^4}{2h} \frac{kEI_3}{A_k l^4} + \frac{h}{k} \left[2 + \beta_1 + \frac{h_2}{h_1} (2 + \beta_2) + \frac{h}{h_1} (2 + \beta_3) \right]} \quad (8.26)$$

összefüggést kapjuk. Tömörszelvény esetében a mennyiségek kicsik, így a (8.25) alatti képlettel számolhatunk.

H_{i0} ismeretében a σ és τ feszültségek már a szokásos szilárdságtani eljárással határozhatók meg.

A (8.14) és (8.26) alatti összefüggések elemzése bizonyos vonatkozásban igazolja a levezetés helyességét.

Ha $A_k = 0$, vagyis a támasztókereteknek nincs merevsége, úgy (8.23) alapján

$$H_{i0} = 0, \quad (8.27)$$

vagyis a két függőleges fal veszi fel a terhelést, ahogyan a csuklós szekrénytartóra vonatkozóan az 5. § tárgyalja.

Ha $A_k = \infty$, vagyis a támasztókeretek végtelen merevek, a szekrénytartó keresztmetszete alaktartó és (8.24) alapján

$$\Delta\gamma = 0. \quad (8.28)$$

Ennek (8.15)-be történő helyettesítése után kifejezett H_{i0} értékét (8.14)-be helyettesítve

$$\sigma_{k1} - \sigma_{k2} = 0, \quad (8.29)$$

vagyis alaktartó keresztmetszet esetében helyesen kapjuk azt, hogy a híd tengelyére merőleges irányú σ feszültségek nem keletkeznek — ha az öblösödés gátlásaira és a nyíró erők okozta alakváltozásra nem vagyunk tekintettel.

A (8.25) alatti összefüggésben az i -edik Fourier-tagnál a keretmerevség i^4 -nél osztott értékkel szerepel. Így a magasabb Fourier tagoknál — hacsak nem végtelen merev a keret — a H és V erők aránylag kisebbek.

Ha a végső keresztmetszetek nem teljesen alaktartók, akkor a felső vízszintes lemezek az alsóhoz való relatív eltolódása a végső keretek $\Delta\gamma_k$ eltorzulása következtében megnövekszik, és így a (8.23) alatti $\Delta\gamma$ értéke a $\Delta\gamma_k$ mennyiséggel megnövelendő. Ennek következtében (8.25) számlálója is megváltozik.

Ha a keresztmetszet teljesen alaktartó, akkor (8.21) alapján a

$$\frac{H}{(Q/2) - V} = \frac{k}{h} \quad (8.30)$$

összefüggés áll fenn. (8.30)-ból

$$\left(\frac{Q}{2} - V\right)k = H \cdot h, \quad (8.31)$$

ami arra mutat, hogy a külső terhelés okozta csavaró nyomaték egyenlőképp oszlik meg a vízszintes és a függőleges falúak közt. (8.30) alapján a $[(Q/2) - V]$ függőleges és H vízszintes erők eredője párhuzamos a másik két csomópontot összekötő átlóval.

Alaktartó keresztmetszet esetében az egyes falakban nem ébrednek σ feszültségek, és így egy-egy fal magasságában a τ feszültségek sem változhatnak meg, tehát az egyes falakban a nyíró folyam állandó. A 14a. és 14b. ábrák összerakása is ezt igazolja.

A H és a $[(Q/2) - V]$ nyíró erők k illetve h hosszra oszlanak meg. Így az egységnyi hosszra eső csúsztató erők

$$t_H = \frac{H}{k}, \quad (8.32)$$

illetve

$$t_v = \frac{(Q/2) - V}{h} \quad (8.33)$$

lesznek. (8.30) felhasználásával a

$$t_H = t_v \quad (8.34)$$

egyenlőség igazolható, ami tiszta csavarás esetében a *nyíró folyam állandóságára* érvényes ismert tételt mondja ki. (Természetesen a falak csatlakozásánál zavaró hatások lépnek fel.)

Alaktartó keresztmetszet esetében (8.25) alapján

$$H = \frac{Q}{4} \frac{k}{h}, \quad (8.35)$$

ami (2.2) felhasználásával a

$$V = \frac{Q}{4} \quad (8.36)$$

összefüggésre vezet. Vagyis teljesen alaktartó keresztmetszet esetében a függőleges fal síkjában ható antimetrikus terhelés hatása a felére csökken.

A H erő ismeretében meghatározható az az

$$M_1 = V \cdot k + Hh = 2Hh \quad (8.37)$$

csavaró nyomaték, amit a keresztmetszet mint alaktartó keresztmetszet vesz fel és az az

$$M_2 = \frac{Q}{2} k - M_1 = \frac{Q}{2} k - 2Hh = \frac{Q}{2} k - 2Vk = \left(\frac{Q}{2} - 2V \right) \cdot k \quad (8.38)$$

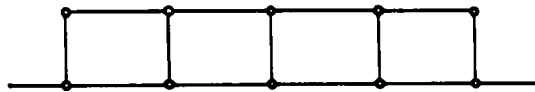
csavaró nyomaték, amit a csuklós-tartó két függőleges fala mint hajlított tartó vesz fel.

A külső csavaró nyomaték egy részét tehát a tartó mint csavart rúd, másik részét mint csuklós-tartó veszi fel. A csavaró nyomaték ilyenértelmű szétoztásánál a tartó méretein kívül a csavarónyomatékot okozó antimetrikus terhelés milyensége is lényeges szerepet játszik.

Mint hogy a bemutatott eljárás tulajdonképpen a csavarás hatását vizsgálva azt állapítja meg, hogy a csavaró nyomatékból milyen arányt visel a keresztmetszet, mint csőszzerű csavart tartó és milyen arányt a csuklós tartó, az eredmények — közelítőleg — ferde hidak méretezésénél is felhasználhatók.

9. Alkalmazás több cellás szekrénytartós hidakra

Több cellás szekrénytartós hidak esetében a „csuklós szekrénytartó”-nál függőleges falakat csuklósan kapcsoljuk a vízszintes falakhoz (20. ábra). Ez esetben az 1. alatti feltevés értelmében a vízszintes és függőleges falakban



20. ábra

a σ feszültségi ábra egyaránt lineáris jellegű, bármilyen vízszintes vagy függőleges antimetrikus terhelés esetében a σ feszültségek nullpontja ugyanaz, és a feszültségi ábrának csak a nagysága változik, az alakja nem (21. ábra).

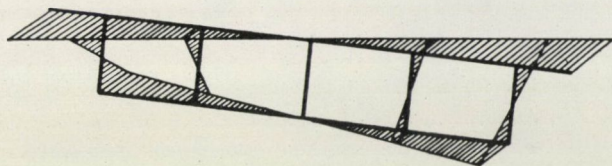
Antimetrikus függőleges terhelés esetében a terhelt tartó övlemezeinek helyettesítő szélessége az (5.4), (5.5), ill. (5.10) képletekkel határozható meg, a függőleges fal helyettesítő-vastagságát a függőleges szimmetria tengely egyik oldalára eső függőleges falak egyenkénti helyettesítő szélességének súlyozott összege adja meg (22. ábra):

$$f_{i3} = \sum_{j=1}^n \left(V_{j3} \frac{d_j - v_{j3}}{k_j} \right) \frac{k_j}{k_i} \quad (9.1)$$

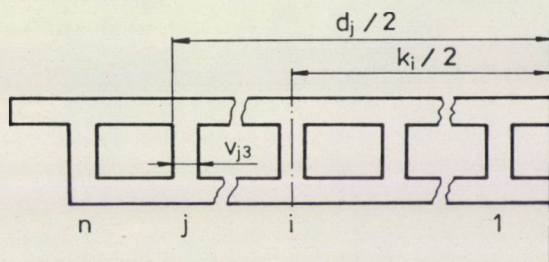
Antimetrikus vízszintes terhelés esetében a függőleges falaknak (mint a vízszintes tartó öveinek) helyettesítő szélessége a (6.8) és (6.9) képletek alapján határozható meg. A vízszintes tartó több övű tartóval helyettesíthető.

A szimmetriatengelyben levő függőleges fal hatása a számításban nem szerepel.

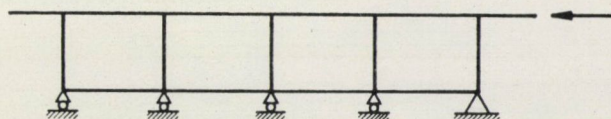
A támasztókeret keretmerevsége, vagyis az 1 cm-es relatív eltolódást előidéző erő a 23. ábrán levő Vierendeel-tartó alapján határozható meg. Itt a szimmetria tengelyben levő függőleges fal hatása nem esik ki a számításban.



21. ábra



22. ábra



23. ábra

Szám példa

Határozzuk meg a 4. ábrán feltüntetett keresztmetszetű $l = 15$ m nyílású szekrénytartó jellemző helyen ébredő feszültségeket, ha a

$$p = 1 \text{ m}^{-1} M_p \sin \frac{i\pi x}{l} = 2q_0 \sin \frac{i\pi x}{l}$$

teher az egyik függőleges fal feszültségi súlyvonalában hat.

A főbb adatok:

$s = 860$ cm, $d = 460$ cm, $m = 90$ cm, $v_1 = 21$ cm, $v_2 = 15$ cm, $v_3 = 46$ cm.

a) Szimmetrikus terhelés esete

$$I = 47,9 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

$$K = 0,64 \cdot 10^8 \text{ cm}^3$$

Középen a hajlító nyomaték

$$M_{\max} = 2q_0 \frac{l^2}{\pi^2} = 1 \frac{15^2}{\pi^2} = 22,8 \text{ mMp} = 2,28 \cdot 10^6 \text{ cm kp},$$

az alsó szélső szál feszültség

$$\sigma = \frac{2,28 \cdot 10^6}{0,64 \cdot 10^6} = 3,56 \text{ kp/cm}^2.$$

b) Antimetrikus terhelés esete

3.1) alapján számítva a tartó l cm-es hosszára a keretmerevség

$$A_k = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ cm} \cdot E_k,$$

ahol E_k a támasztókeret rugalmassági tényezője

Függőleges terhelés

(5.10) alapján

$$k = 460 - 46 + \frac{46^2}{3(460 - 46)} = 414 + 1,7 = 415,7 \text{ cm},$$

(5.4) alapján

$$b_1 = \frac{860^3}{6 \cdot 415,7^2} = 613,4 \text{ cm},$$

(5.5) alapján

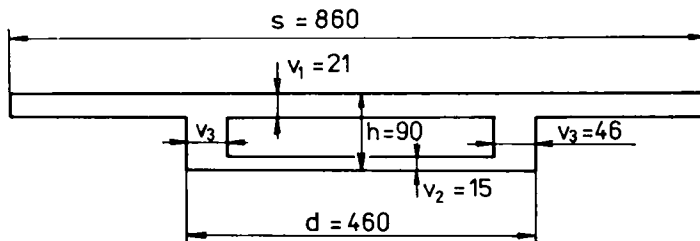
$$b_2 = \frac{460^3}{6 \cdot 415,7^2} = 93,9 \text{ cm},$$

(5.12) alapján

$$f_3 = 46 \frac{414}{415,7} = 45,9 \text{ cm}.$$

A helyettesítőtartó tehetetlenségi nyomatéka

$$I_3 = 9,64 \cdot 10^6 \text{ cm}^4.$$



24. ábra

A súlyvonal

$$m_2 = 67,9 \text{ cm}, m_1 = 90 - 67,9 = 22,1 \text{ cm}.$$

Felső szélső szálfeszültség meghatározásához a keresztmetszeti tényező

$$K_3 = \frac{9,64 \cdot 10^6}{22,1} = 0,435 \cdot 10^6 \text{ cm}^3,$$

(6.1), ill. (6.2) alapján

$$h_1 = 14,8 \text{ cm}, h_2 = 60,7 \text{ cm}, h = 75,5 \text{ cm}.$$

Feszültségi súlyvonalra vonatkozó keresztmetszeti tényező

$$K_3 = \frac{9,64 \cdot 10^6}{14,8} = 0,65 \cdot 10^6 \text{ cm}^3.$$

Vízszintes terhelés

(6.8), ill. (6.9) alapján

$$C_1 = 32,0 \text{ cm}, C_2 = 15,3 \text{ cm}$$

(6.12), ill. (6.13) alapján

$$f_1 = 16,5 \text{ cm}, f_2 = 14,9 \text{ cm}$$

A vízszintes tartók tehetetlenségi nyomatéka (8.19) és (8.22) alapján

$$I_1 = 747 \cdot 10^6 \text{ cm}^4, I_2 = 181 \cdot 10^6 \text{ cm}^4$$

A kijelölt (feszültségi súlyvonalak metszéspontján levő) pontra a keresztmetszeti tényező

$$K_1 = \frac{I_1}{k/2} = \frac{747}{415,7/2} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ cm}^3,$$

(8.25) alapján ($i = 1, Q_0 = 0,5 M_p \text{ m}^{-1} = 0,5 \cdot 10^{-2} \cdot M_p \text{ cm}^{-1}$)

$$H = \frac{0,5 \cdot 10^{-2} M \text{ cm}^{-1}}{\frac{E}{E_k} \frac{\pi^2 \cdot 9,64 \cdot 415,7 \cdot 10^6 \cdot 1 \text{ cm}}{4,9 \cdot 5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{12} \text{ cm}} + \frac{2 \cdot 75,5}{415,7}} = \frac{1}{8,16 \frac{E}{E_k} + 72,5} M_p \text{ cm}^{-1}$$

$E/E_k = 0$ feltételezésével a keret végtelen merevnek lenne felfogható. Ez esetben

$$H = \frac{1}{72,9} 1,37 \cdot 10^{-2} M_p \text{ cm}^{-2} = 1,37 M_p/\text{m},$$

(2.2) alapján

$$V = 1,37 \frac{75,5}{415,7} = 0,25 M_p/\text{m}.$$

$2q_0 = 1 M_p/\text{m}$ esetén a hajlítónyomaték $2,28 \cdot 10^6 k_p \cdot \text{cm}$,

így $H = 1,37 M_p/\text{m}$ -ből

$$M_H = 2,28 \frac{1,37}{1,0} 10^6 = 3,13 \cdot 10^6 \text{ cm } k_p,$$

$q_0 - V = 0,5 - 0,25 = 0,25 M_p/\text{m}$ -ből a nyomaték

$$M_V = 2,28 \frac{0,25}{1,0} = 0,57 \cdot 10^6 \text{ cm } k_p.$$

A σ feszültségek

$$\sigma_H = \frac{3,13 \cdot 10^6}{3,6 \cdot 10^6} = 0,87 k_p/\text{m}^2,$$

$$\sigma_V = \frac{0,57}{0,65} = 0,87 k_p/\text{m}^2.$$

Ez utóbbi ellenkező értelmű, így a tartón feszültség nem lép fel.

Ha $E = E_k$, úgy

$$H = \frac{1}{80,66} = 1,24 \cdot M_p/\text{m},$$

$$V = 1,24 \frac{75,5}{415,7} = 0,225 M_p/\text{m}.$$

$q_0 - V = 0,5 - 0,225 = 0,275 M_p/\text{m}.$

A nyomatékok

$$M_H = 2,28 \frac{1,24}{1,0} 10^6 = 2,83 \cdot 10^6 \text{ cm } k_p,$$

$$M_V = 2,28 \frac{0,275}{1,0} 10^6 = 0,626 \cdot 10^6 \text{ cm } k_p,$$

és a σ feszültségek

$$\sigma_H = \frac{2,83 \cdot 10^6}{3,6 \cdot 10^6} = 0,785 \text{ } k_p/\text{cm}^2,$$

$$\sigma_V = \frac{0,626 \cdot 10^6}{0,65 \cdot 10^6} = 0,965 \text{ } k_p/\text{cm}^2.$$

A tényleges σ_1 feszültség

$$\sigma_1 = 0,965 - 0,785 = 0,18 \text{ } k_p/\text{cm}^2.$$

Az alsó szélső szálfeszültség a függőleges fal feszültségi súlyvonalában

$$\sigma_2 = \sigma_1 \frac{m_2}{h_1} = 0,18 \frac{67,9}{14,8} = 0,83 \text{ } k_p/\text{cm}^2.$$

Így azáltal, hogy a keresztmetszet nem alaktartó, a függőleges fal feszültségi súlyvonalában ébredő feszültségek

$$\sigma_{\max} = 3,56 + 0,83 = 4,39 \text{ } k_p/\text{cm}^2,$$

és

$$\sigma_{\min} = 3,56 - 0,83 = 2,73 \text{ } k_p/\text{cm}^2.$$

Az eltérési %-ban

$$\varepsilon \% = 100 \frac{0,83}{3,56} = 23,3 \%.$$

Stress Pattern in Box Girder Bridges. The box girder is replaced by a construction built up of a hinged box girder as a bar, subjected to torsion without angle rigidity and of closed frameworks closely put near each other. The stress pattern is determined on this construction with the aid of the usual methods of elementary theory of elasticity. The one part of the torsional moment caused by the antimetric load withstands the box girder as a bar torsioned, and the other, the main girders composed of the two vertical walls and of the flanges. However, the division of the moment does not depend only on the stiffness conditions of the girder but also on the load pattern. A simple formula serves for the calculation of the division of the moment and of the bending stiffness of the replacing girder.

Spannungsverteilung in Kastenträgerbrücken. Der Hohlwandträger wurde durch eine aus einem gelenkigen Kastenträger ohne Ecksteifheit und aus dicht nebeneinander gesetzten geschlossenen Rahmen zusammengesetzte Konstruktion ersetzt, und die Spannungsverteilung wurde auf derselben unter Benützung der üblichen Methoden der elementaren Festigkeitslehre ermittelt. Einem Teil des durch die antimetrische Belastung hervorgerufene Verdrehungsmoments widersteht der Kastenträger als ein verdrehter Stab, und dem anderen Teil der aus den zwei senkrechten Wänden und aus den Gurten bestehende Hauptträger. Jedoch hängt die Aufteilung des Moments nicht nur von den Steifheitsverhältnissen des Trägers, sondern auch vom Lastschema ab. Zur Ermittlung der Momentenverteilung und der Biegefestigkeit der Ersatzträger dient eine einfache Formel.

A HÉJAK MEMBRÁNÁLLAPOTÁNAK LÉTEZÉSI ÉS EGYÉRTELMŰSÉGI FELTÉTELEIRŐL

II. PARABOLIKUS HÉJAK

TARNAI TIBOR*

[Beérkezett 1977. június 1-én]

A dolgozat azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy tetszőleges megoszlású, függőleges irányú erővel terhelt héj peremén milyen megtámasztási feltételeket kell, ill. szabad előírunk ahhoz, hogy a héj statikailag határozott módon membránállapotban legyen. A szerző a dolgozat korábban megjelent első részében a membránhéj-egyenlet megoldásának létezési és egyértelműségi feltételeit a hiperbolikus héjakkal kapcsolatban vizsgálta. A dolgozat jelen, második része az említett vizsgálatokat a parabolikus héjak körében folytatja.

1. Bevezetés

A membránhéjak egyensúlyát az xyz derékszögű koordináta-rendszerben az

$$\mathcal{L}F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -g \quad (1)$$

egyenlet írja le, ahol $z = z(x, y)$ a héj középfelületének az egyenlete,

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

a Pucher-féle operátor, $g = g(x, y)$ a z tengellyel párhuzamos (függőleges) irányú külső teher intenzitás-függvénye, $F(x, y)$ pedig az ismeretlen feszültség-függvény, amelyből a redukált metszeterők a következőképpen származtathatók:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

A dolgozat korábban megjelent első részében [9] azt vizsgáltuk, hogy a függőleges erővel terhelt, az értelmezési tartomány minden pontjában hiperbolikus membránhéj (1) egyenletének milyen feltételek mellett létezik egyetlen megoldása. A dolgozat jelen részében meg fogjuk nézni, hogy az (1)

* Dr. Tarnai Tibor, 1037 Budapest, Kolostor u. 17.

egyenletnek mikor van egyértelmű megoldása, ha a héj az alaprajzi idomának minden pontjában parabolikus, azaz a

$$D = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$

diszkrimináns mindenütt nulla.

A parabolikus differenciálegyenlet megoldhatóságának vizsgálatával abban az esetben, amikor a keresett függvény első deriváltjai nem szerepelnek az egyenletben, a matematikai irodalomban jóformán egyáltalán nem foglalkoznak. Így például a parabolikus egyenleteket igen részletesen tárgyaló [5] monográfia sem tesz említést erről az egyenletről. Ennek oka feltehetően az egyenlet igen egyszerű felépítésében rejlik. A

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, y)$$

kanonikus alakú parabolikus egyenlet általános megoldását x -szerinti kétszeres integrálással lehet előállítani, és így az a következő formát ölti:

$$u(x, y) = \int \left[\int f(x, y) dx \right] dx + C_1(y) \cdot x + C_2(y),$$

ahol $C_1(y)$ és $C_2(y)$ az integrációs függvények.

Olyan megoldásokat keresünk, amelyek kétszer folytonosan differenciálhatók. Ehhez az szükséges, hogy az $f(x, y)$ függvény a vizsgált tartomány minden (x, y) pontjában folytonos, továbbá az y változó szerint kétszer folytonosan differenciálható legyen. A $C_1(y)$ és $C_2(y)$ függvényeknek szintén kétszer folytonosan differenciálhatóknak kell lenniük.

Ha az $f(x, y)$ függvényről az x változó szerint folytonosságot, az y változó szerint pedig szakaszonkénti kétszer folytonos differenciálhatóságot, továbbá a $C_1(y)$ és $C_2(y)$ függvényekről szakaszonkénti kétszer folytonos differenciálhatóságot tételezünk fel, akkor a $\partial^2 u / \partial x^2$ és $\partial^2 u / \partial x \partial y$ folytonos lesz, a $\partial^2 u / \partial y^2$ parciális deriváltak viszont szakadásai lehetnek. Ha $u \equiv F$ és $f \equiv -g$, akkor a (2) egyenlet a $z = y^2/2$ egyenlettel megadott dongahéj egyensúlyát írja le. Ez a héj az említett feltételezések mellett membránállapotban van, mivel az n_y és n_{xy} folytonos, az n_x -nek viszont véges sok $y = konstans$ alakú egyenes mentén szakadása lehet. Az ilyen típusú szakadások a belső erők egyensúlyát nem befolyásolják.

A tárgyalás során, ha peremről beszélünk, akkor a héj tényleges peremvonalának az xy síkra vett alaprajzi vetületére gondolunk. A héj tényleges peremvonalát \bar{S} -sel, az alaprajzi vetületét pedig S -sel jelöljük.

2. Kezdetiérték-feladat parabolikus esetben (Cauchy-féle feladat)

Előljáróban megemlítjük, hogy az irodalomban parabolikus egyenlet Cauchy-féle feladatán általában nem azt a feladatot értik ([7] 278. o.), amit kvázilineáris egyenletek ([3] 134. o.), vagy hiperbolikus egyenlet esetében. Mi a Cauchy-feladat elnevezést parabolikus egyenleteknél is ugyanabban az értelemben használjuk, mint pl. a hiperbolikus egyenleteknél.

Vizsgáljuk először a kezdetiérték-feladatok közül a legegyszerűbbet. Legyen J egy a_1, a_2 végpontú intervallum az y tengelyen. Keressük a (2) egyenlet olyan kétszer folytonosan differenciálható $u(x, y)$ megoldását, amelyre

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \varphi_1(y), & a_1 \leq y \leq a_2, \\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} &= \varphi_2(y), & a_1 \leq y \leq a_2, \end{aligned} \quad (3)$$

ahol φ_1 és φ_2 adott, kétszer folytonosan differenciálható függvények. Kikötjük még, hogy a (2) egyenletben az $f(x, y)$ folytonos, y szerint kétszer folytonosan differenciálható legyen.

A (2) egyenletnek ekkor létezik megoldása a (3) feltételek mellett. Integráljuk ugyanis (2)-t kétszer az x változó szerint:

$$\int_0^x \int_0^\tau \frac{\partial^2 u(\xi, y)}{\partial x^2} d\xi d\tau = \int_0^x \int_0^\tau f(\xi, y) d\xi d\tau.$$

Az integrálások után azt kapjuk, hogy

$$u(x, y) = u(0, y) + x \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} + \int_0^x \int_0^\tau f(\xi, y) d\xi d\tau.$$

Helyettesítsük be ide a (3) feltételeket. Ekkor a keresett megoldás:

$$u(x, y) = \varphi_1(y) + x \cdot \varphi_2(y) + \int_0^x \int_0^\tau f(\xi, y) d\xi d\tau. \quad (4)$$

A megoldás az $y = a_1$ és $y = a_2$ egyenesek közötti végtelen sávban van értelmezve.

A megoldás egyértelmű. Ha ugyanis lenne egy u_1 és egy u_2 függvény, amelyek kielégítenék a (2) egyenletet és eleget tennének a (3) feltételeknek, akkor ezeknek (4) alakúaknak kell lenniük. Kivonva egymásból az u_1 -re és u_2 -re felírt (4) alakot, $u_1 - u_2 = 0$, majd ebből $u_1 = u_2$ adódik.

A megoldás folytonosan függ a kezdeti feltételektől. Rögzített y -ra ugyanis a (2) egyenlet közönséges lineáris differenciálegyenlet, mely vissza-

vezethető egy lineáris differenciálegyenlet-rendszerre ([8] 136. o.). Ez a differenciálegyenlet-rendszer folytonosan függ a kezdeti értékektől ([8] 178. o.). A feladat tehát korrekt.

Általánosítsuk most ezt a feladatot. A kezdeti értékeket ne az y tengelyen levő a_1 és a_2 végpontú J intervallumon, hanem egy olyan görbén adjuk meg, amelynek végpontjai az $y = a_1$ és $y = a_2$ egyeneseken vannak, és amely y függvényében egyértelmű. A görbét úgy kívánjuk megadni, hogy az új kezdetiérték-feladat visszavezethető legyen az eredetire, azaz ha a görbén egy, az ívhossz szerint kétszer folytonosan differenciálható függvényt adunk meg, akkor ez a függvény kétszer folytonosan differenciálható legyen az y változó szerint is. Jelölje s az ívhossz-paramétert. Legyen a peremgörbe egyenlete $h = h(y)$, és legyen adott ezen a görbén egy $\varphi(s)$, s szerint kétszer folytonosan differenciálható függvény. Azt akarjuk, hogy $\varphi(s(y))$ y szerint kétszer folytonosan differenciálható legyen. Az ívhosszat az ismert

$$s = \int_{a_1}^y \sqrt{1 + h(\eta)^2} d\eta$$

képlet adja, ahol a vessző az y szerinti deriválást jelöli. Deriváljuk most $\varphi(s(y))$ -t kétszer y szerint. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\varphi'' = (1 + h'^2) \frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{h' \cdot h''}{\sqrt{1 + h'^2}} \cdot \frac{df}{ds}.$$

Ebben az összefüggésben h' és h'' is szerepel. Ahhoz tehát, hogy φ az y változó szerint is kétszer folytonosan differenciálható legyen, szükséges, hogy $h(y)$ is kétszer folytonosan differenciálható legyen. Ekkor tehát a h' -nek is végesnek kell lennie, azaz a $h = h(y)$ görbének nem lehetnek olyan pontjai, amelyben az érintő az x tengellyel párhuzamos. A $h = h(y)$ görbének egyébként azért sem lehet az x tengellyel párhuzamos érintője, mert ha a görbén megadjuk u értékét, akkor ezzel a $\partial u / \partial x$ értékét is egyértelműen megadtuk az érintési pontban. Így itt a $\partial u / \partial x$ derivált értékét nem lehet tetszőlegesen előírni.

Ha a középfelület $z = z(x, y)$ függvénye négyszer folytonosan differenciálható, akkor tudjuk, hogy van olyan kétszer folytonosan differenciálható transzformáció, amely az (1) egyenletet kanonikus alakra hozza ([7] 54. o.). Ha egy függvény kétszer folytonosan differenciálható, akkor ezt a tulajdonságát a kanonikus transzformáció után is megtartja.

A fentek alapján megfogalmazhatjuk az (1) egyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-féle feladatot arra az esetre, amikor (1) parabolikus.

Jelölje S a héj egy A és B pontokkal határolt peremszakaszát alaprajzi vetületben (az xy síkban), és legyen adott az S peremgörbe minden pontjában egy i irány (egységvektor). Az S peremen az F feszültségfüggvény vegyen fel egy adott φ függvény által meghatározott értékeket, az F függvény i irány

menti deriváltja pedig vegyen fel egy adott ψ függvény által meghatározott értékeket. Ekkor az

$$\mathcal{L}F = -g, \quad \left. \vphantom{\mathcal{L}F} \right\} \quad (5a)$$

$$F|_S = \varphi, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial i} \Big|_S = \psi \right\} \quad (5b)$$

Cauchy-feladatnak létezik kétszer folytonosan differenciálható megoldása, és az egyértelműen meghatározott az A és B pontokon átmenő karakterisztikák által határolt végtelen sávban (1a ábra), ha teljesülnek az alábbi feltételek:

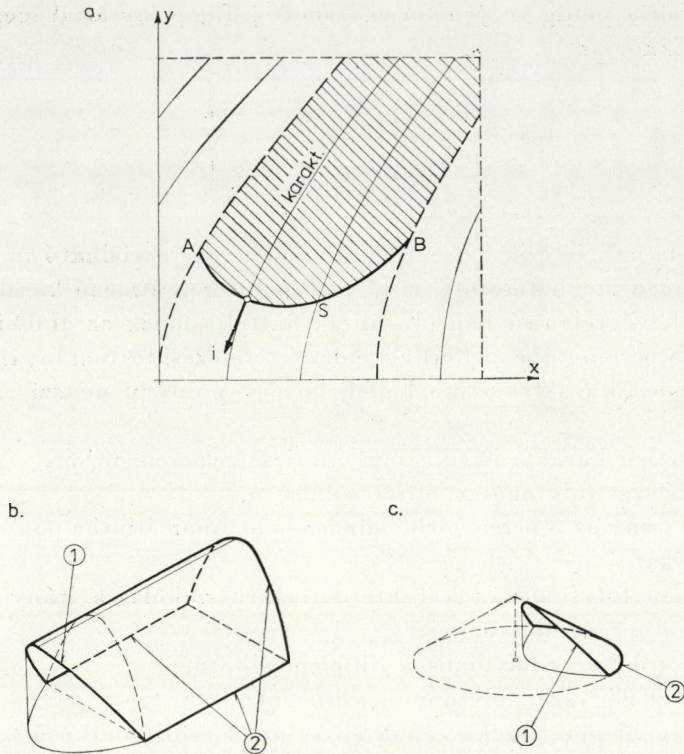
- a) az S peremgörbe az (5a) egyenlet értelmezési tartományában fekszik,
- b) minden karakterisztika legfeljebb egy pontban metszi az S peremgörbét,
- c) egyetlen karakterisztika sem érinti az S peremgörbét,
- d) S kétszer folytonosan differenciálható,
- e) az i irány az S peremgörbe minden pontjában érinti a ponton áthaladó karakterisztikát,
- f) $g(x, y)$ folytonos és karakterisztikákra merőleges irányban kétszer folytonosan differenciálható,
- g) φ és ψ kétszer folytonosan differenciálható,
- h) $z(x, y)$ négyszer folytonosan differenciálható.

A héj többi peremszakaszának ekkor az A és B ponton átmenő karakterisztikák közötti, S -től jobbra vagy balra levő félsávba kell esnie. Ezekben a peremszakaszokon azonban már semmiféle feltétel nem írható elő. Itt a támaszoknak a héjról leadódó mindkét metszeterőt fel kell venniük.

Ennél a feladatnál az i irány menti derivált helyett a peremen megadhatjuk az n normális menti deriváltat is. A két adat azonban nem teljesen ekvivalens. Ennek az az oka, hogy mivel F a peremen kétszer folytonosan differenciálható, ezért az érintő menti $\partial F/\partial t$ derivált csak egyszer folytonosan differenciálható. A c), d) és e) feltételek következtében a $\partial F/\partial n$ normál-derivált kifejezhető a $\partial F/\partial t$ és $\partial F/\partial i$ deriváltakkal, de mivel $\partial F/\partial t$ csak egyszer folytonosan differenciálható, $\partial F/\partial n$ is csak egyszer folytonosan differenciálható lesz. Ekvivalencia akkor áll fenn az $F|_S, \partial F/\partial i|_S$ feltételek és az $F|_S, \partial F/\partial n|_S$ feltételek között, ha F a peremen háromszor folytonosan differenciálható.

Az (5a, b) feladatban előírhatjuk, hogy legyen a perem szabad, hiszen ekkor $F|_S = 0, \partial F/\partial x|_S = 0, \partial F/\partial y|_S = 0$, ebből pedig $\partial F/\partial i|_S = 0$ következik. Így az (5b) feltételben $\varphi \equiv 0, \psi \equiv 0$ helyettesítéssel előírható, hogy a perem legyen szabad. Egy ilyen szabad peremszakaszú parabola dongahéjat és egy kúpfelületből kialakított fülkehéjat mutat be az 1b és 1c ábra.

Ha az S perem egyenes, akkor ott megadhatók a normális és tangenciális metszeterők is [9]. Ezeknek most folytonosan differenciálhatóknak kell len-



1. ábra. a) A kezdetiérték-feladat megoldási tartománya. b) Parabola vezérgörbéjű dongahéj szabad peremszakasszal. c) Kúpfelületből kialakított fülkehéj, ① szabad peremszakasz, ② teljesen megtámasztott peremszakasz

niük. A héj mindkét esetben egyértelmű membránállapotban van. A metszeterőkre vonatkozó peremfeltételek a héj belső metszeterőit egyértelműen meghatározzák.

A héj akkor is membránállapotban marad, ha a d), f) és g) feltételekben levő függvényektől a kétszer folytonos differenciálhatóság helyett csak szakaszonként kétszer folytonos differenciálhatóságot követelünk meg. (Az utóbbi esetben is szükséges, hogy a függvények folytonosan differenciálhatók legyenek.) Ekkor a karakterisztikák irányába mutató normálerőknek szakadásai lesznek az azon pontokon áthaladó karakterisztikák mentén, amelyekben az említett függvények második deriváltjainak szakadásai vannak. Ha az említett függvények bármelyikétől ennél kevesebbet (pl. szakaszonként egyszer folytonos differenciálhatóságot) követelünk meg, akkor a héj általában már nem lehet membránállapotban.

Szemléltessük az elmondottakat egy egyszerű példán. Legyen a héj középfelülete a $z = y^2/2$ függvénnyel megadott paraboladonga. Terhelje a

héjat $g = \text{állandó}$ egyenletesen megoszló erő. Legyen a hég S pereme szabad. Álljon az S perem két, egymáshoz csatlakozó S_1 és S_2 görbeszakaszból. Keresendő ekkor a

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -g \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

$$\left. \begin{aligned} F|_S = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_S = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6b)$$

Cauchy-feladat megoldása. (A hég S -en kívüli AD és DC peremszakaszai (2. és 3. ábra) teljes megtámasztásúak.)

2.1. Legyen először az $S = S_1 \cup S_2$ perem szakaszonként egyszer folytonosan differenciálható. Az S_1 és S_2 görbe B csatlakozási pontja legyen töréspont. Az egyszerűség kedvéért az S_1 és S_2 peremszakasz legyen egyenesszakasz (2. ábra). Az S_1 egyenlete:

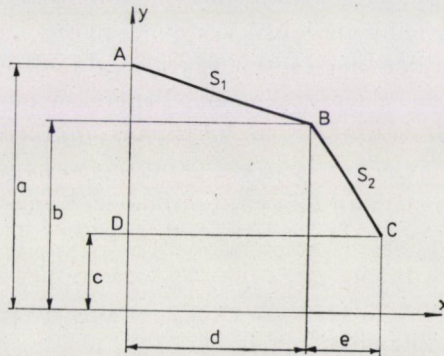
$$x = -\frac{d}{a-b}(y-a),$$

míg az S_2 egyenlete:

$$x = -\frac{e}{b-c}(y-b) + d.$$

A (6a, b) feladat megoldását [2] alapján állítjuk elő. E szerint a feszültségfüggvény egyenlete az S_1 peremszakasz A és B végpontjain áthaladó, $y = a$ és $y = b$ egyenletű karakterisztikák közötti sávban:

$$F_1 = -\frac{g}{2} \left[\frac{d}{a-b}(y-a) + x \right]^2,$$



2. ábra. A szabad peremszakasú dongahég alaprajza. A szabad peremszakasz alaprajzi vetületét az S_1 és S_2 egyenesszakaszok alkotják

az S_2 peremszakasz B és C végpontjain áthaladó, $y = b$ és $y = c$ egyenletű karakterisztikák közötti sávban pedig:

$$F_2 = -\frac{g}{2} \left[\frac{e}{b-c} (y-b) - d + x \right]^2.$$

A redukált metszeterők az S_1 szakaszt tartalmazó sávban az alábbiak:

$$n_x^{(1)} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = -g \left(\frac{d}{a-b} \right)^2,$$

$$n_{xy}^{(1)} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = g \frac{d}{a-b},$$

$$n_y^{(1)} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = -g,$$

az S_2 -t tartalmazó sávban pedig:

$$n_x^{(2)} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} = -g \left(\frac{e}{b-c} \right)^2,$$

$$n_{xy}^{(2)} = -\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial y} = g \frac{e}{b-c},$$

$$n_y^{(2)} = \frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = -g.$$

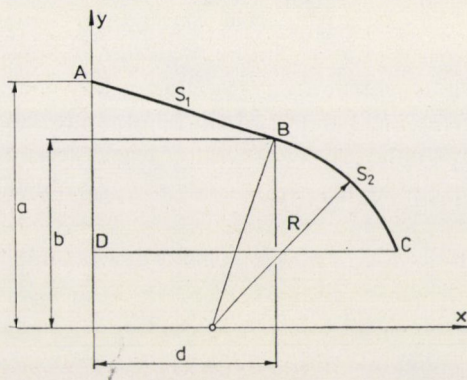
Könnyen megállapítható, hogy az n_x és n_{xy} erőknek az $y = b$ egyenes mentén szakadásuk van. Az n_{xy} szakadása miatt a belső erők nem lehetnek egyensúlyban, és így maga a héj sem lehet membránállapotban.

Érdemes megemlíteni, hogy a szabad peremű, a peremén töréspontot tartalmazó hiperbolikus héj esetében a hasonló vizsgálat azt eredményezte, hogy a héj a peremen levő töréspont ellenére membránállapotban van [9].

2.2. Legyen az $S = S_1 \cup S_2$ perem szakaszonként kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor — mint tudjuk — szükséges, hogy a peremgörbe egyszer folytonosan differenciálható legyen. Csatlakozzék most az

$$x = -\frac{d}{a-b} (y - a)$$

egyenletű S_1 peremszakaszhoz érintőlegesen, töréspont nélkül az S_2 peremszakasz. Legyen pl. az S_2 peremszakasz az S_1 -et a B pontban érintő körív



3. ábra. A szabad peremszakaszú dongahéj alaprajza. A szabad peremszakasz alaprajzi vetületét az S_1 egyenesszakasz és az S_2 körív alkotja

(3. ábra), melynek centruma az x tengelyen van. Ennek a körívnek az egyenlete a következő:

$$x = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{d^2}(a-b)^2 - y^2} + d - \frac{b}{d}(a-b).$$

Az S_1 peremszakaszt tartalmazó sávban a feszültségfüggvény azonos a 2.1. esetbeli F_1 függvénnyel. Az S_2 körív B és C végpontjain áthaladó karakterisztikák közötti sávban a feszültségfüggvény a következő lesz:

$$F_2 = -\frac{g}{2} \left[\sqrt{b^2 + \frac{b^2}{d^2}(a-b)^2 - y^2} + d - \frac{b}{d}(a-b) - x \right]^2.$$

Az F_2 kifejezés bonyolult volta miatt a redukált metszeterőket nem írjuk fel az S_2 szakaszt tartalmazó sávban, hanem csak az $y = b$ csatlakozási egyenes mentén. Ezek az alábbiak:

$$n_x^{(2)}|_{y=b} = -g \left[\frac{d^2}{(a-b)^2} + (x-d)d \frac{(a-b)^2 + d^2}{b(a-b)^3} \right],$$

$$n_{xy}^{(2)}|_{y=b} = g \frac{d}{a-b},$$

$$n_y^{(2)}|_{y=b} = -g.$$

Látható, hogy a redukált metszeterők közül csupán az n_x -nek van szakadása az $y = b$ karakterisztika mentén, de az $x = d$ helyen, vagyis az S_1 és S_2 peremgörbék csatlakozási pontjában n_x is folytonos. Az n_x szakadása ellenére a belső erők egyensúlyt tartanak, a héj tehát membránállapotban van.

2.3. *Legyen az $S = S_1 \cup S_2$ perem kétszer folytonosan differenciálható.* Ez az eset pl. akkor következik be, ha az S_1 peremet, melyet most is egyeneszakasznak veszünk, a B pontban egy harmad- vagy magasabbfokú parabola — mint S_2 görbe — érinti. Ekkor a Cauchy-feladat általános megfogalmazásakor tett kikötések teljesülnek, és valamennyi metszeterő folytonos lesz. Erről az előzőkhöz hasonló, egyszerű számítással meggyőződhetünk, de ezzel most nem foglalkozunk.

Megjegyezzük, hogy a hiperbolikus héjakhoz hasonlóan ([9] 7.2. szakasz) a parabolikus héjaknál is megadhatók az S peremen a kezdeti feltételek úgy, hogy a héjnak az S peremen több, közös résszel nem rendelkező szabad peremszakasza legyen. Ha a héjnak több szabad peremszakasza van, de ezek nem illeszkednek egy olyan, szakaszonként kétszer folytonosan differenciálható görbéhez, amelyre teljesülnek a b) és c) feltételek, akkor a héj nem lehet membránállapotban. Ha van ugyan ilyen görbe, de a szabad peremszakaszok közötti görbeszakaszokon nem simán csatlakozó kezdeti értékeket, hanem csak peremértékeket írunk elő, vagy nem írunk elő semmit, akkor a héj membránállapotban van, de a membránállapot nem egyértelmű.

3. Peremérték-feladatok parabolikus esetben

Tekintsük ismét a (2) kanonikus alakú egyenletet. Ez a parciális differenciálegyenlet minden rögzített y -ra egy közönséges differenciálegyenletté válik, melynek a megoldása

$$u(x) = k(x) + C_1x + C_2$$

alakú. Ismeretes, hogy ebből az egyenletből a C_1 és C_2 állandókat akkor lehet egyértelműen meghatározni a kerületi feltételekből, ha a feltételek alapján a C_1 és C_2 ismeretlenekre felírt lineáris egyenletrendszernek van egyértelmű megoldása. Ez pedig akkor létezik, ha a rendszer determinánsa nem nulla. Ha létezik egyértelmű megoldás, akkor az folytonosan függ a peremértékektől, mivel a peremértékfeladatok megoldása két lineárisan független kezdetiérték-feladat-megoldás lineáris kombinációjából tehető össze. A kezdetiérték-feladatok megoldása pedig a 2. szakaszbeli hivatkozás alapján folytonosan függ a kezdeti értékektől. Ekkor a feladatok korrekt felállításúak.

Tekintsük át a fontosabb lehetőségeket.

I. Adott $u(x)$ értéke két különböző $x = a$ és $x = b$ pontban. Ekkor az egyenletrendszer determinánsa

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} = a - b$$

nem nulla. Ennek a peremérték-feladatnak tehát van egyértelmű megoldása.

II. Adott $u(x)$ értéke az $x = a$ pontban és du/dx értéke az $x = b$ pontban. Ekkor az egyenletrendszer determinánusa

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Ennek a peremérték-feladatnak is van megoldása, és az egyértelmű.

III. Adott du/dx értéke két különböző $x = a$ és $x = b$ pontban. Ekkor az egyenletrendszer determinánusa

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ennek a feladatnak tehát nem létezik egyértelmű megoldása.

IV. Adott az $\alpha_1 du/dx + \beta_1 u$ lineáris kombináció értéke az $x = a$ pontban és az $\alpha_2 du/dx + \beta_2 u$ lineáris kombináció értéke az $x = b$ pontban. Ekkor az egyenletrendszer determinánusa:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 + a\beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 + b\beta_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = (a - b)\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.$$

Ennek a feladatnak tehát csak akkor létezik egyértelmű megoldása, ha $(a - b)\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$.

Az I., II. és bizonyos mértékig a IV. esetben a C_1 és C_2 állandókat minden rögzített y -ra meg lehet határozni és ezzel a feladat megoldását — mely x szerint kétszer folytonosan differenciálható, ha $f(x, y)$ folytonos — elő lehet állítani.

Tekintsük az $x = a$ és $x = b$ egyenesek $y = a_1$ és $y = a_2$ pontok közötti szakaszát. Legyen a (2) egyenletbeli $f(x, y)$ függvény folytonos és az y változó szerint kétszer folytonosan differenciálható. Könnyen belátható, hogy ha a (2) egyenlet keresett $u(x, y)$ függvényének értékét rögzített $x = a$, ill. $x = b$ mellett úgy adjuk meg, hogy az az y változó szerint kétszer folytonosan differenciálható legyen, akkor a megoldásban szereplő $C_1(y)$ és $C_2(y)$ függvények is kétszer folytonosan differenciálhatók lesznek.

Ha tehát előírjuk az $u(x, y)$ függvény értékét az $x = a$ és $x = b$ egyeneseken az $[y = a_1, y = a_2]$ intervallumon úgy, hogy az y változó szerint kétszer folytonosan differenciálható legyen, akkor a (2) egyenletnek egyetlen olyan megoldása létezik, amely az $x = a$ és $x = b$ egyenesek $[y = a_1, y = a_2]$ intervallumán a megadott értékeket veszi fel.

Hasonló állítás igaz arra az esetre is, amikor az egyik intervallumon a függvényértéket, a másikon a függvény x változó szerinti parciális deriváltját

(vagy az $\alpha(\partial u/\partial x) + \beta u$ lineáris kombinációt) adjuk meg, mindkettőt úgy, hogy az y változó szerint kétszer folytonosan differenciálható legyen.

E két (ill. három) feladat a kezdetiérték-feladathoz hasonlóan általánosítható abban az értelemben, hogy a peremértékeket nem egyenesszakaszokon, hanem görbéken írjuk elő. Ennek alapján pedig megfogalmazhatók az (1) egyenletre vonatkozó általánosított peremérték-feladatok.

3.1. A parabolikus Pucher-féle differenciálegyenletre vonatkozó első peremérték-feladat

Álljon az S perem (alaprajzi vetületben) két, közös ponttal nem rendelkező S_1 és S_2 görbeszakaszból. Az F feszültségfüggvény az S_1 peremen vegyen fel egy φ függvény, az S_2 peremen egy ψ függvény szerinti értékeket. Keresendő ekkor az

$$\Delta F = -g \quad \left. \vphantom{\Delta F} \right\} \quad (7a)$$

$$F|_{S_1} = \varphi, \quad F|_{S_2} = \psi \quad \left. \vphantom{F|_{S_1}} \right\} \quad (7b)$$

peremérték-feladat megoldása.

A (7a, b) feladatnak létezik egyértelmű, kétszer folytonosan differenciálható megoldása a peremgörbék végpontjai által meghatározott ABCD „négyzetben” (4a ábra), ha teljesülnek a következő feltételek:

a) az S_1 és S_2 peremgörbe a (7a) egyenlet értelmezési tartományában fekszik,

b) a karakterisztikák mind az S_1 , mind az S_2 peremgörbét legfeljebb egy pontban metszik,

c) sem az S_1 , sem az S_2 görbét nem érinti egyetlen karakterisztika sem,

d) S_1 és S_2 kétszer folytonosan differenciálhatók,

e) az S_1 és az S_2 görbék megfelelő végpontjai (A és D , ill. B és C) ugyanazon a karakterisztikán vannak (4a ábra),

f) $g(x, y)$ folytonos és a karakterisztikákra merőleges irányban kétszer folytonosan differenciálható,

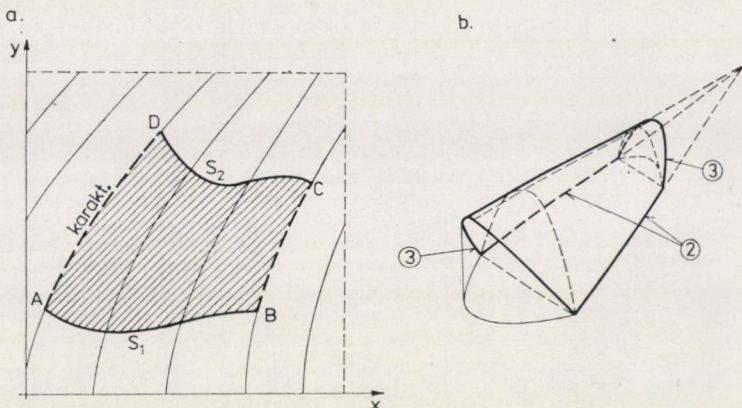
g) φ és ψ kétszer folytonosan differenciálható,

h) $z(x, y)$ négyszer folytonosan differenciálható.

A h) feltétel biztosítja, hogy a (7a) egyenletet kanonikus alakra lehessen transzformálni. A kanonikus transzformáció során a tárgyalásban szereplő függvényeknek a feltételekben rögzített tulajdonságai megmaradnak. Ezután a peremgörbéknek a [4] 947. oldalán alkalmazott transzformációjával a feladatot kanonikus alakban egy téglalap tartományon lehet értelmezni. Ennek a feladatnak pedig — ahogy azt a 3. szakasz bevezetőjében, az I. pont alatt elemeztük — létezik egyértelmű megoldása, mely a feltételek alapján kétszer folytonosan differenciálható.

A héj A és D , ill. B és C pontokat összekötő, karakterisztikán fekvő peremszakaszain természetesen már semmiféle feltételt nem lehet előírni.

Az S_1 és S_2 peremen megadhatjuk úgy az F feszültségfüggvény értékét, hogy az legyen síkgörbe. Tudjuk: fizikailag ez azt jelenti, hogy az S_1 és S_2 peremeken a peremtartók függőlegesen vannak megtámasztva. A héj \widehat{AD} és \widehat{BC} peremszakaszain a peremtartóknak a héjról leadódó minden erőt fel kell venniük. Az így megtámasztott héjra példa lehet a 4b ábrán feltüntetett,



4 ábra. a) A peremérték-feladatok megoldási tartománya. b) Parabola vezérgörbéjű kúp-héj alaprajzban íves peremszakaszokkal. ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ③ függőlegesen megtámasztott peremtartójú peremszakasz

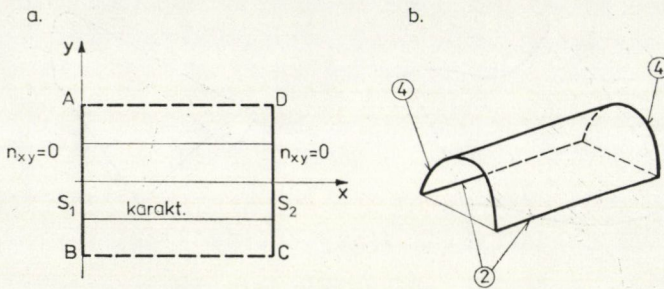
parabola vezérgörbéjű kúp-héj. Ha az S_1 és S_2 peremek egyenesszakaszok, akkor előírható a peremeken a normálerő értéke is. Ez speciálisan lehet nulla is, és így az S_1 és S_2 peremek oldalnyomásmentessé tehetők. A héj membránállapota azonban a fenti esetek egyikében sem egyértelmű. A peremfeltételek nem határozzák meg egyértelműen a héj belső erőit. Ennek az az oka, hogy — bár a (7a, b) peremérték-feladatnak minden rögzített peremérték mellett egyértelmű a megoldása — a peremfeltételekben szabad állandók maradnak, amelyeknek az értéke tetszőleges lehet. Így végtelen sok megoldáshoz jutunk. Kivételt csak olyan esetek képezhetnek, amelyeknél az S_1 és S_2 görbéknek van közös pontjuk és ott F folytonos.

Fontosnak tartjuk megemlíteni — mint ahogy azt a Cauchy-feladat tárgyalásánál is tettük —, hogy a parabolikus héj membránállapotban lehet akkor is, ha a karakterisztikák irányába mutató normálerő függvényének véges sok karakterisztika mentén szakadása van. Ezért megengedhető, hogy a d), f) és g) feltételekben szereplő függvények csak szakaszonként legyenek kétszer folytonosan differenciálhatók. (Ehhez természetesen szükséges, hogy egyszer folytonosan differenciálhatók legyenek.)

3.2. A parabolikus Pucher-féle differenciálegyenletre vonatkozó második peremérték-feladat

Ennek a feladatnak, amikor is az S_1 és S_2 peremeken (4a ábra) az F feszültségfüggvény karakterisztikák irányába mutató iránymenti deriváltjait adjuk meg, általában nem létezik megoldása, és ha létezik is, nem egyértelmű. Állításunk helyessége a kanonikus transzformáció után a 3. szakasz bevezetőjének III. pontjából következik.

Egyébként statikai megfontolásokból is könnyen belátható, hogy ez a feladat nem korrekt. Tekintsünk egy olyan hengerhéjat, amelyet az alkotókra merőleges S_1 és S_2 egyenes perem zár le (5. ábra).



5. ábra. Derékszögű négyszögalaprajz feletti hengerháj. a) Alaprajz. b) Axonometrikus kép. ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ④ nyírőerőmentes peremszakasz

Az S_1 és S_2 peremen írjuk elő a feszültségfüggvény x irányú (karakterisztikus irányú) deriváltjait. Legyen

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{S_1} = \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{S_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{S_2} = \left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{S_2} = 0,$$

Amint tudjuk, ezek a feltételek az S_1 és S_2 perem nyírőerőmentességét biztosítják. Az S_1 és S_2 peremeken tehát a külső terhekből csak normálerők ébredhetnek. Az ilyen megtámasztás lehetővé teszi, hogy a héjperemek pontjai y irányban elmozduljanak, és ezzel a héj nyúlásmentes alakváltozást végezzen [6]. A nyúlásmentes alakváltozásra képes héj azonban általában nem lehet membránállapotban.

3.3 A parabolikus Pucher-féle differenciálegyenletre vonatkozó harmadik peremérték-feladat

Ezt a feladatot nem fogjuk általánosságban vizsgálni, már csak azért sem, mivel csupán egyetlen olyan görbét ismerünk, amelyen értelmezni tudjuk az $\alpha(\partial F/\partial n) + \beta F$ alakú, harmadik peremfeltételt. Ez a görbe az R sugarú

körív, melyen egy χ függvénnyel megadhatjuk a nyíróerő értékét. Ezt a feltételt az alábbi alakban lehet megfogalmazni [9]:

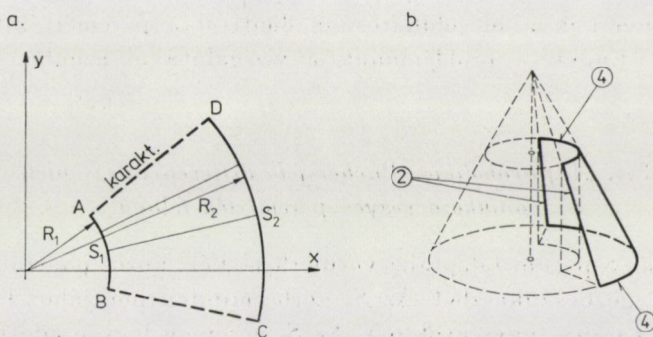
$$-\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{R} F = \int \chi ds + c,$$

ahol s a körív ívhossz-paramétere, c pedig állandó. Ha a köríves perem nyíróerőmentes, akkor ezt a tényt a

$$-\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{R} F = c$$

képlet juttatja kifejezésre.

Olyan esetet vizsgálunk, amikor a körív normálisai a karakterisztikák irányába mutatnak. Tekintsünk egy kúpot (nem szükséges, hogy egyenes körkúp legyen), amelynek csúcsa a z tengelyen van. Vegyük ennek a kúpfelületnek egy olyan részét, amelynek vetülete az xy síkon egy R_1 és R_2 sugarú körívvel és az ezek végpontjain átmenő sugarakkal (karakterisztikákkal) határolt körgyűrű szektor (6a ábra). Legyenek a köríves peremek pl. nyíróerőmentesek. Ezt az esetet a 6b ábrán — az egyszerűség kedvéért — egyenes körkúpfelületű héjon szemléltetjük.



6. ábra. a) A kúp héj alaprajza. b) Egyenes körkúpból kialakított héjfelület. ② teljesen megtámasztott peremszakasz, ④ nyíróerőmentes peremszakasz

Keressük ekkor az

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}F &= -g, \\ \left(-\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{R_1} F \right) \Big|_{S_1} &= c_1, \\ \left(-\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{R_2} F \right) \Big|_{S_2} &= c_2. \end{aligned} \right\}$$

feladat megoldását. A megoldást — anélkül, hogy az egyenletet kanonikus

alakra transzformálnánk — karakterisztikáról karakterisztikára haladva határozhatjuk meg. Most nézzük meg, hogy a fenti feladatnak létezik-e megoldása. Tekintsük azt a karakterisztikát, amely az x tengellyel fedésben van. Ezen karakterisztika mentén — mivel ekkor $y = 0$, és ebből következően az (1) egyenletben $\partial^2 F/\partial y^2$ és $\partial^2 F/\partial x \partial y$ együtthatója nulla —, a 3. szakasz bevezetőjének IV. pontja szerint, akkor létezik a feladatnak egyértelmű megoldása, ha $(a - b)\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$. Esetünkben $\alpha_1 = \alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 1/R_1$, $\beta_2 = 1/R_2$, $a = R_1$, $b = R_2$. Ezen értékek behelyettesítése után azt kapjuk, hogy a hivatkozott feltétel nem teljesül, mivel a megadott kifejezés értéke nulla lesz. Ezért a vizsgált karakterisztika mentén a megoldás nem létezik. Hasonló eredményt kapunk a többi karakterisztikára is, mivel a koordináta-rendszer z tengely körüli forgatásával elérhető, hogy a vizsgált karakterisztika az x tengellyel összesség. Végeredményben tehát azt mondhatjuk, hogy a fentiekben megfogalmazott harmadik peremérték-feladatnak nem létezik egyértelmű megoldása, a héj nem lehet egyértelmű membránállapotban. Vagy nem létezik membránállapot, vagy ha létezik is, általában nem egyértelmű.

Ha a körívek normálisainak iránya nem esik egybe a karakterisztikák irányával, akkor az ismeretlen integrációs függvényeknek a harmadik peremfeltételekből való meghatározása általános esetben egy lineáris inhomogén differenciálegyenlet-rendszer megoldása útján történik. Ennek a differenciálegyenlet-rendszernek a megoldhatósága dönti el a peremérték-feladat megoldhatóságát. Ennek a problémának a vizsgálatával azonban nem foglalkozunk.

3.4. *A parabolikus Pucher-féle differenciálegyenletre vonatkozó vegyes peremérték-feladat*

Álljon az S perem (alaprajzi vetületben) két, közös ponttal nem rendelkező S_1 és S_2 görbeszakaszból. Az S_2 görbe minden pontjához legyen hozzárendelve egy i irány (egységvektor). Az S_1 peremen legyen adott egy φ függvénnyel az F feszültségfüggvény értéke. Az S_2 peremen pedig legyen adott egy ψ függvénnyel az F feszültségfüggvény i irány menti deriváltjának az értéke. Keresendő ekkor az

$$\mathcal{L}F = -g, \quad (8a)$$

$$F|_{S_1} = \varphi, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial i} \right|_{S_2} = \psi \quad (8b)$$

peremérték-feladat megoldása.

A (8a, b) feladatnak létezik egyértelmű, kétszer folytonosan differenciálható megoldása a peremgörbék végpontjai által meghatározott ABCD „négyzetben” (4a ábra), ha teljesülnek a 3.1. szakasz a)–h) feltételei, továbbá

az i irány az S_2 peremgörbe minden pontjában érinti a ponton áthaladó karakterisztikát.

A h) feltétel alapján ugyanis a (8a) egyenlet kanonikus alakra transzformálható. Ezen transzformáció után az i irány az x tengellyel párhuzamos lesz. Az így kapott feladatnak a 3. szakasz bevezetőjének II. pontja értelmében létezik egyértelmű megoldása. A megoldás kétszer folytonosan differenciálható, mert a kanonikus transzformáció a feltételekben szereplő függvények differenciálhatósági tulajdonságait nem változtatja meg.

A héj A és D , ill. B és C pontokat összekötő, karakterisztikán fekvő peremszakaszain nem írhatunk elő feltételeket. Ezeknek a peremszakaszoknak teljes megtámasztásúaknak kell lenni.

Visszatérve a 3.2. szakaszban említett hengerhéj példára (5. ábra), az $F|_{S_1} = 0$, $\partial F/\partial x|_{S_1} = \partial F/\partial n|_{S_1} = 0$ peremfeltételek mellett a hengerhéj S_1 pereme normálerőmentes, az S_2 pereme pedig nyíróerőmentes lesz. Mivel a peremek egyenesek, az S_1 peremen elő lehet írni a normálerő, az S_2 peremen pedig a nyíróerő értékét is, mely különbözhet nullától. Ezek a peremfeltételek a héj belső erőit egyértelműen meghatározzák. A héj membránállapota tehát egyértelmű.

A 3.3. szakaszban tárgyalt kúp-héj-feladat (6. ábra) korrekt felállításúvá válik, ha pl. az S_1 peremen a harmadik peremérték helyett az első peremértéket adjuk meg. Így egy vegyes peremérték-feladathoz jutunk. Az említett kúp-héj differenciálegyenletének az

$$F|_{S_1} = a_1 \sqrt{R_1^2 - y^2} + b_1 y + c_1, \\ \left(-\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{R_2} F \right) \Big|_{S_1} = c_2,$$

feltételek mellett, minden rögzített a_1, b_1, c_1, c_2 állandóra létezik egyértelmű megoldása. Ekkor az S_1 perem peremtartója függőlegesen megtámasztott, az S_2 perem pedig nyíróerőmentes lesz. Megjegyezzük, hogy az S_2 köríven nullától különböző nyíróerőértékek is előírhatók. Ennek a feladatnak azért létezik megoldása, mert a peremfeltételek minden karakterisztikán kielégítik a 3. szakasz bevezetőjének IV. pontjában szereplő feltételt. Most ugyanis $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1/R_2$, $a = R_1$, $b = R_2$. Így $(a - b)\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = (R_1 - R_2)/R_2 + 1 = R_1/R_2$. A feladatnak — a forgásszimmetrikus esettől eltekintve — csak akkor nincs biztosítva minden teherre a megoldhatósága, ha $R_1 = 0$, azaz a kúp csúcsa is az értelmezési tartományhoz tartozik. Megjegyezzük, hogy ennél a feladatnál az S_1 görbe a körívtől különböző alakú is lehet.

Ennél a feladatnál $R_1 \neq 0$ esetén a kúp mindig membránállapotban lehet, a belső erőket azonban a peremfeltételek nem határozzák meg egyértelműen. A héj membránállapota nem egyértelmű.

Ha megengedjük, hogy a karakterisztikák irányába mutató normál-erők véges sok karakterisztika mentén szakadása legyen, akkor az S_1, S_2 görbétől, a φ és ψ függvényektől, valamint a g teherfüggvénytől a kétszer folytonos differenciálhatóság helyett elegendő csak azt megkövetelni, hogy szakaszonként kétszer folytonosan differenciálhatók legyenek.

4. A zárt peremgörbe problémája

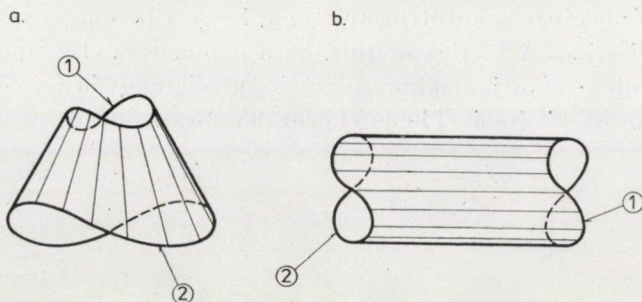
A hiperbolikus héjakhoz hasonlóan a parabolikus héjaknál is gyakran a feladatok túlhatározottsághoz vezet, ha zárt peremgörbén írunk elő feltételeket. Vannak azonban esetek, amikor zárt peremgörbék mellett is létezik megoldás.

Tekintsük a héj középfelületén fekvő, önmagát nem metsző, kétszer folytonosan differenciálható zárt görbék közül azokat, amelyeket a felület aszimptotikus vonalai (ezeknek az xy síkra vett vetületei a karakterisztikák) minimális számú pontban metszenek. Az ilyen görbék alapvetően kétfélék lehetnek. Az egyik típusba azok a görbék tartoznak, amelyeket a felületnek nem minden aszimptotikus vonala metsz, de ha a görbét metszi aszimptotikus vonal, akkor — az érintési pontoktól eltekintve — pontosan két pontban metszi. A másik típusba azok a görbék tartoznak, amelyeket minden aszimptotikus vonal pontosan egy pontban metsz. Ez utóbbi típus csak zárt vezérgörbájű hengereknél és kúpoknál létezik.

4.1. Zárt peremgörbe melletti kezdetiérték-feladat

Ha az S peremet az első típusú zárt görbe alaprajzi vetülete képezi, akkor — mivel nem teljesül a 2. szakasz b) és c) feltétele — az (5a, b) kezdetiérték-feladatnak nem létezik megoldása. Ezért van az, hogy az olyan hengerhéj vagy kúphéj, amelynek a palástján szabad szegélyű nyílás (áttörés) van, nem lehet membránállapotban.

Ha az S peremet a második típusú görbe alaprajzi vetülete képezi, és teljesülnek a 2. szakasz e)–h) feltételei is, akkor az (5a, b) kezdetiérték-feladatnak létezik egyértelmű megoldása. Így pl. egy zárt kúphéj (7a ábra) az egyik végén — a 2. szakasz feltételeinek megfelelő — szabad térgörbe peremmel egyértelmű membránállapotban lehet. A héj másik peremén természetesen már nem lehet előírni feltételeket. A peremtartónak itt minden metszeterőt fel kell vennie. A 7a ábrán a felső perem szabad és az alsó teljesen megtámasztott, de lehet fordítva is: a felső perem teljesen megtámasztott és az alsó szabad. Ha a középfelület-függvény kétértékű (mint pl. fekvő henger vagy kúp esetében), akkor a 2. szakasz b) és c) feltétele látszólag nem teljesül. A karakterisztikák két pontban metszik, a kontúron levő karakterisztikák



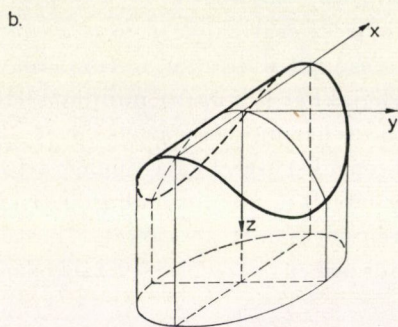
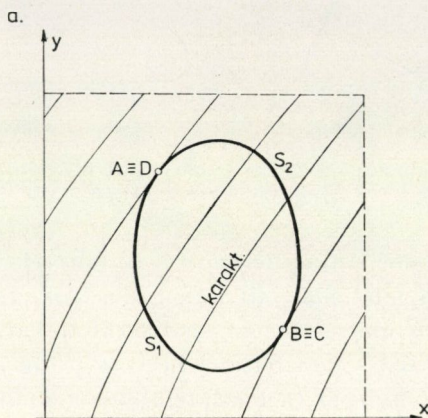
7. ábra. a) Zárt vezérvonalú kúp-héj. b) Zárt vezérvonalú hengerhéj. ① szabad perem, ② teljes megtámasztású perem

pedig érintik a peremgörbét (vetületben). A b) feltétel oly módon elégíthető ki, hogy a felület alsó és felső pontjait külön kezeljük. Ekkor a peremgörbének az alsó, ill. a felső felületrészre eső szakaszát a karakterisztikák csak egy pontban fogják metszeni. A c) feltétel helyett pedig a következőt kell megkövetelnünk: a héj tényleges (a középfelületen fekvő) \bar{S} peremgörbét nem érintheti egyetlen aszimptotikus vonal sem. E feltételek azonban még nem elegendők a héj membránállapotához. A héj csak olyan terhekre (a jelen esetben ezek függvénye is kétértékű) viselkedik membránként, amelyekre teljesül, hogy az alsó és a felső héjrész csatlakozási vonala (karakterisztikája) mentén a két héjrész nyíróerői és gyűrű irányú normálerői egyensúlyban vannak. Ez a feltétel pl. hengerhéjagnál (7b ábra) mindig kielégül, ha a csatlakozási karakterisztika mentén a g teherfüggvény az első deriváltjaival együtt korlátos. Nem korlátos terhek (pl. önsúly) esetében a Pucher-féle egyenlet nem alkalmas annak eldöntésére, hogy létezik-e membránállapot. Ekkor célszerű a redukált metszeterők helyett a tényleges metszeterőket tekinteni és a problémát természetes koordináta-rendszerben vizsgálni. Ezzel azonban most nem foglalkozunk.

4.2. Zárt peremgörbe melletti peremérték-feladatok

4.2.1. Az első peremérték-feladatnál kikötöttük, hogy az S_1 és S_2 peremgörbék, amelyeken a feltételeket előírtuk, nem rendelkezhetnek közös ponttal. Ez a kikötés azért volt szükséges, hogy az S_1 és S_2 peremgörbéken egymástól függetlenül lehessen a peremértékeket megadni. Ha ugyanis a két peremgörbének van közös pontja, akkor ez a pont a kanonikus transzformáció után is közös marad. Így az ezen ponton átmenő karakterisztika mentén a 3. szakasz bevezetőjének I. pontjában levő determináns értéke nulla, ami azt jelenti, hogy ebben a pontban, ill. a rajta átmenő karakterisztikán vagy nem létezik megoldás, vagy ha létezik is, nem egyértelmű. Ebből a megfontolásból az következne, hogy a 4a ábrán levő megoldási tartomány A és D , ill. B és C pontja végtelenül közel kerülhet egymáshoz, de nem eshet egybe. A feladat meg-

oldhatósága érdekében kikötöttük továbbá, hogy a peremgörbéket nem érinteti karakterisztika. A fentiek szerint, ha a peremet az első típusú zárt görbe alaprajzi vetülete alkotja, akkor az F feszültségfüggvény értékét a görbén az érintési pontok kivételével lehet előírni (8a ábra).



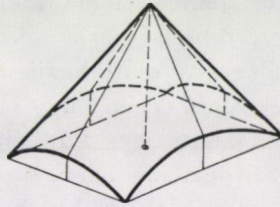
8. ábra. a) Első típusú zárt peremgörbe. b) Ellipszis alaprajz feletti parabolahenger

A gyakorlatban előforduló feladatoknál azonban kissé más a helyzet. A feszültségfüggvényről folytonosságot követelünk meg a peremen is, ezért az S_1 és S_2 közös pontjában a peremértékeknek azonosaknak kell lenniük. Így a közös peremponton átmenő karakterisztika mentén létezik megoldás, de a közös perempont kivételével a megoldás nem egyértelmű. Ennek azonban az általunk vizsgált feladatra nézve semmi következménye nincs, hiszen mi a peremgörbék által határolt korlátos tartományban keressük a megoldást, és számunkra teljesen közömbös, hogy a megoldás e tartományon kívül hogyan viselkedik. Ily módon nem érdekes, hogy van olyan karakterisztika, amely mentén a megoldás egy pont kivételével nem egyértelmű. Az is meg-

engedett, hogy az S_1 és S_2 peremgörbékét a közös pontjukban karakterisztika érintse. Ekkor az F feszültségfüggvény folytonos differenciálhatósága alapján csupán azt kell megkövetelni, hogy az S_1 és S_2 görbén megadott peremérték-függvények deriváltjai a közös érintési pontban azonosak legyenek. Ha kétszer folytonosan differenciálható megoldást keresünk, akkor azt kell megkövetelni, hogy az említett függvények első és második deriváltjai is azonosak legyenek a közös érintési pontban.

Így az ellipszis alaprajz feletti, fekvő parabolahengerháj függőleges terherre egyértelmű membránállapotban van, ha a peremen körben az $F|_S = 0$ feltételt írjuk elő [1] (8b ábra).

A háj pereme állhat két, közös résszel nem rendelkező, második típusú zárt görbéből is. Ha teljesülnek a 3.1. szakasz feltételei — a peremgörbékre vonatkozó 4.1. szakaszbeli kiegészítésekkel —, akkor a háj zárt peremgörbék mellett is membránállapotban lehet. Így például a 7. ábrán levő henger és kúp membránállapotban van, ha az ① és ②-vel jelölt peremeit gyűrűszerű zárt peremtartó szegélyezi, és ezek függőlegesen vannak megtámasztva. Tudjuk, hogy ilyenkor a feszültség-függvény értékét a peremeken úgy kell előírni, hogy külön-külön síkgörbét alkossanak. A kúpnál tulajdonképpen az alsó perem van megtámasztva, de a felső peremen is kell működtetni bizonyos függőleges erőket, hogy a felső peremgyűrű a reá ható erők kötélgörbéje legyen. A felső peremgyűrű szélső esetben egyetlen ponttá, a kúp csúcsává zsugorodhat össze. Ezt a már többször idézett 3. szakasz I. pontbeli determináns nem nulla volta biztosítja. Így például membránállapotban lehet egy függőleges tengelyű kúp poligon alaprajz felett is (9. ábra), ha a poligon sarkai



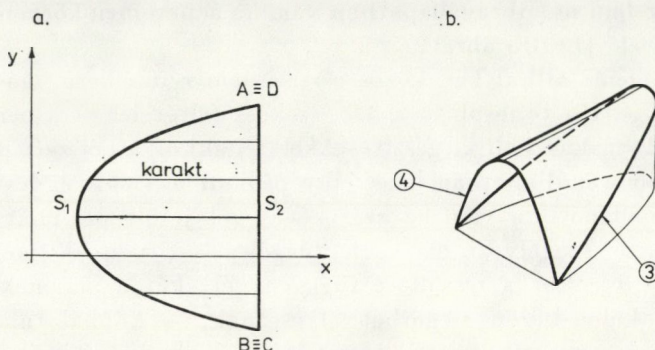
9. ábra. Négyszögalaprajz feletti kúpháj

le vannak kerekítve és a zárt peremtartó függőlegesen van megtámasztva. Ezeknél a hájaknál a membránállapot általában nem egyértelmű, mert a peremfeltételekben szabad állandók vannak.

4.2.2. *A második peremérték-feladatnak és a harmadik peremérték-feladat* általunk vizsgált esetének zárt peremgörbék mellett nem létezik egyértelmű megoldása.

4.2.3. *A vegyes peremérték-feladatoknak* zárt görbe peremek esetén is általában létezik megoldásuk. Tekintsük az 5a ábrán feltüntetett henger-

alaprjazot. Rögzítsük az S_2 peremet. Az S_1 peremet pedig vegyük fel úgy, hogy a végpontjai legyenek közösek az S_2 végpontjaival (10a ábra), továbbá minden karakterisztika legfeljebb csak egy pontban messe és legyen kétszer folytonosan differenciálható. Az S_1 görbén írjuk elő az F feszültségfüggvény értékét, az S_2 egyenesen pedig a $\partial F/\partial x$ normálderivált értékét. Ennek a feladatnak létezik egyértelmű megoldása, mert a 3. szakasz II. pontjában levő determináns egyetlen karakterisztikára sem lesz nulla. Így előírható, hogy



10. ábra. A hengerháj. a) Alaprajz. b) Axonometrikus nézet. ③ függőlegesen megtámasztott peremtartójú peremszakasz, ④ nyíróerőmentes peremszakasz

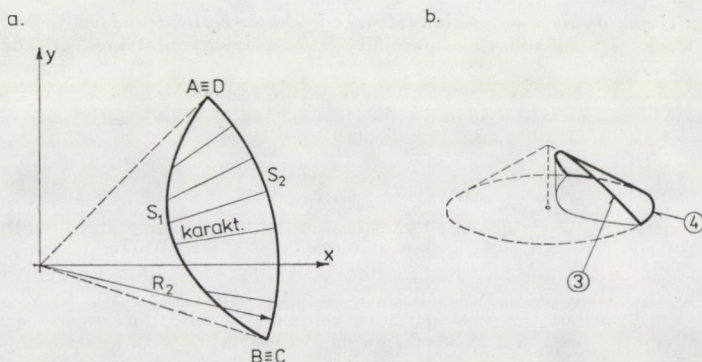
az S_1 perem legyen függőlegesen megtámasztott peremtartójú, az S_2 perem pedig nyíróerőmentes, és a hég membránállapotban lesz (10b ábra). A membránállapot azonban a peremfeltételekben megmaradó szabad állandó miatt általában nem egyértelmű. Egyértelműség csak akkor állhat fenn, ha S_1 és S_2 az egyik végpontban merőlegesen csatlakozik egymáshoz. Az S_2 peremen egyébként megadhatjuk a nyíróerő értékét úgy is, hogy különbözzön nullától.

Hasonló feladat fogalmazható meg kúphéjra is. Tekintsük a 6a ábrán feltüntetett kúp-alaprajzot. Rögzítsük az S_2 peremet, majd az S_1 peremet vegyük fel az előzőekben leírt módon. Ekkor a 11a ábrán vázolt alaprajzot nyerjük. Az S_1 görbén írjuk elő az F értékét, az S_2 köríven pedig a

$$-\frac{\partial F}{\partial n} + \frac{1}{R_2} F$$

lineáris kombináció értékét. Ennek a feladatnak is létezik egyértelmű megoldása, mert a 3. szakasz IV. pontjában megadott determináns egy karakterisztikára sem nulla, hiszen most $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1/R_2$, $a = a$, $b = R_2$, és $(a - b)\beta_1\beta_2 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = a/R_2$. Az a/R_2 hányados azonban a szóba jöhető értékeire, így $a = R_2$ -re sem lesz nulla. Ennél a feladatnál

is előírható, hogy az S_1 perem peremtartója legyen függőlegesen megtámasztva, az S_2 perem pedig legyen nyíróerőmentes (11b ábra). Az S_2 peremen nullától különböző nyíróerőértékek is megadhatók. A peremfeltételben levő szabad állandó miatt a membránállapot általában most sem egyértelmű. Egyértelműség csak akkor állhat fenn, ha S_1 és S_2 az egyik végpontban merőlegesen csatlakozik egymáshoz.



11. ábra. A kúp-héj. a) Alaprajz. b) Axonometrikus nézet. ③ függőlegesen megtámasztott peremtartójú peremszakasz, ④ nyíróerőmentes peremszakasz

A 3.4. szakaszban megfogalmazott vegyes peremértékfeladat zárt vezérvonalú hengerekre, ill. kúpokra is kiterjeszhető. Ekkor a héjfelület tényleges \bar{S}_1 és \bar{S}_2 peremeinek (ezek vetülete az xy síkon az S_1 és S_2 görbe) olyan kétszer folytonosan differenciálható zárt görbéknek kell lenni, amelyeket minden aszimptotikus vonal csak egy pontban metsz, és amelyeket nem érint egyetlen aszimptotikus vonal sem.

A 6a ábrán feltüntetett kúp-alaprajzot teljes körgyűrűvé kiegészítve — az itt mondottak és a 3.4. szakaszban rögzítettek értelmében — előírható, hogy a kúp S_1 pereme függőlegesen legyen alátámasztva, az S_2 pereme pedig legyen nyíróerőmentes. A 3. szakasz IV. pontjában szereplő determináns értéke ugyanis minden karakterisztikára R_1/R_2 lesz, amely nem nulla. Nulla csak akkor, ha $R_1 = 0$, azaz ha nem csak kúpokról, hanem teljes kúpról van szó. Ezért egy kör alaprajz feletti teljes kúp, amelynek csúcsa alaprajzi vetületben azonos a kör középpontjával, és amelyet függőleges erők terhelnek, nem tartható egyensúlyban a peremen működtetett normális irányú (alkotó irányú) erőkkel. Tudjuk, hogy egyensúly csak abban a kivételes esetben létezik, ha a külső erők eredője átmege a kúp csúcsán. Ekkor azonban a feladat általában statikailag határozatlan, az egyensúlyi állapot, ill. a héj membránállapota nem egyértelmű. Egyértelmű megoldás csak akkor létezik, ha a kúp is, a külső teher is és ennek megfelelően a feszültségfüggvény is forgásszimmetrikus.

IRODALOM

1. CSONKA, P.: Membránhéjak (ÉKME egyetemi jegyzet). Tankönyvkiadó, Budapest 1965
2. CSONKA, P.: Cross Vault Shaped Sectorial Shells with Cantilever-like Overhanging Free Boundary. *Acta Techn. Hung.* 50 (1965), 43–52
3. CZÁCH, L.—SIMON, L.: Parciális differenciálegyenletek I (ELTE egyetemi jegyzet). Tankönyvkiadó, Budapest 1969
4. FRANK, PH.—MISES, R. VON: A mechanika és fizika differenciál- és integrálegyenletei. I. kötet. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966
5. FRIEDMAN, A.: Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, INC. Englewood Cliffs. N. J., 1964
6. KOLLÁR, L.: Héjak nyúlásmentes alakváltozásai. *Építés-Építészettudomány* 3 (1971), 19–38
7. PETROVSKIJ, I. G.: Előadások a parciális differenciálegyenletekről. Akadémiai Kiadó, Budapest 1955
8. PONTRJAGIN, L. SZ.: Közönséges differenciálegyenletek. Akadémiai Kadó, Budapest 1972
9. TARNAI, T.: A héjak membránállapotának létezési és egyértelműségi feltételeiről. I. Hiperbolikus héjak. *Műszaki Tudomány* 56 (1979), 19–47

On the Existence and Uniqueness Conditions of the Membrane State of Shell Structures — II. Parabolic Shells. It is investigated whether at the edges of a shell structure submitted to vertical forces arbitrarily distributed, what conditions of support should, i.e., might be prescribed in order to bring the shell into a statically determinate membrane state. In the first part of the paper published earlier, the existence and uniqueness conditions of the solution to the membrane-shell equations have been investigated in connection with hyperbolic shells. In the second part at hand, the investigations mentioned are proceeded in connection with the parabolic shells.

Über die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen des Membranzustandes der Schalenskonstruktionen — II. Parabolische Schalen. Der Autor befaßt sich mit dem Problem, ob und welche Unterstützungsbedingungen man für eine an den Rändern eines durch beliebig verteilte, senkrechte Kräfte belasteten Flächentragwerks vorschreiben sollte bzw. dürfte, um die Schale in einen statisch bestimmten Membranzustand zu bringen. Im früher erschienenen ersten Teil der Abhandlung wurden die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen der Lösung der Membranschalengleichung in Zusammenhang mit den hyperbolischen Schalen untersucht. Im vorliegenden zweiten Teil der Abhandlung werden die erwähnten Untersuchungen in Zusammenhang mit den parabolischen Schalen fortgesetzt.

EGY EGYENLŐTLENSÉGI RELÁCIÓ AZ ALAKVÁLTOZÁSI ENERGIÁVAL KAPCSOLATBAN

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett 1978. május 18-án]

E tanulmány a homogén, izotrop, lineárisan rugalmas anyagú test alakváltozási energiájával kapcsolatban egy egyenlőtlenségi relációt ismertet. A bizonyított egyenlőtlenségi reláció alkalmazását példa szemlélteti.

Fontosabb jelölések

- x, y, z derékszögű koordináták,
 e_x, e_y, e_z egységvektorok,
 $r = xe_x + ye_y + ze_z$ helyvektor,
 $u = u(r) = u(r)e_x + v(r)e_y + w(r)e_z$ elmozdulásvektor,
 $\varepsilon = \varepsilon(r)$ alakváltozási tenzor,
 $T = T[r]$ feszültségi tenzor,
 V térbeli tartomány,
 A a V tartomány határoló felülete,
 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}e_x + \frac{\partial}{\partial y}e_y + \frac{\partial}{\partial z}e_z$ Hamilton-féle differenciáloperátor,
„ · ” skaláris szorzás jele,
„ : ” kétszeres skaláris szorzás jele;
 $p = p(r) = p_x e_x + p_y e_y + p_z e_z$ felületi terhelés,
 $q = q(r)$ térfogati terhelés,
 $\bar{u} = \bar{u}(r)$ adott elmozdulásvektor;
 $(u \nabla), (\nabla u)$ az u és ∇ vektorok diadikus szorzatai,
 G csúsztató rugalmassági modulus,
 $m = \frac{1}{\nu}$ Poisson-féle szám,
 K negyedrendű szimmetrikus pozitív definit tenzor,
 I másodrendű egységtenzor,
 A_p, A_u komplementer felületszakaszok ($A_u + A_p = A$),
 T feszültségi tenzor első skalárinvariánsa,
 ε az alakváltozási tenzor első skalárinvariánsa,
 U alakváltozási energia,
 $U_{11}, \tilde{U}_{12}, \tilde{U}_{21}, \tilde{W}_{12}, \tilde{W}_{21}$ energia, illetve munka jellegű mennyiségek,
 n felületi normális egységvektor.
Egyéb mennyiségeket, változókat a szöveg értelmez.

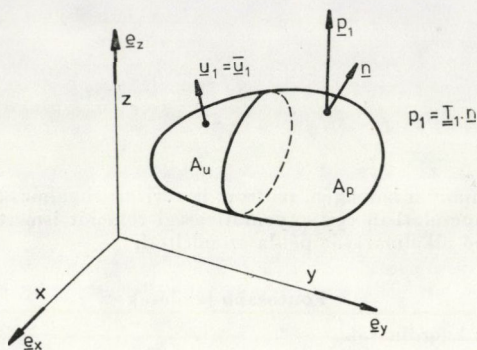
2. Bevezetés, rugalmasságtani alapok, egyenlőtlenségi reláció

E tanulmány tárgya az 1. ábrán vázolt homogén, izotrop, lineárisan rugalmas anyagú kontinuum elasztosztatikai peremértékfeladatára vonatkozik. Az adott test kijelölt elasztosztatikai peremértékfeladatának megoldásához

* Dr. Ecsedi István, H-3531 Miskolc, Vászonfehéritő u. 24. IV/1.

rendelt alakváltozási energiával kapcsolatban egy egyenlőtlenségi relációt bizonyít a dolgozat.

A tanulmány az elasztosztatika szokásos feltevéseit használja (az alakváltozások és az elmozdulások kicsik, érvényes a Hooke-törvény, a szuperpozíció elv, a hőhatások elhanyagolhatók, stb.).



1. ábra. Rugalmas anyagú test

Jelölje a vizsgált kontinuum $q_1 = q_1(r)$ térfogati terheléshez, $p_1 = p_1(r)$ felületi terheieshez és $\bar{u}_1 = \bar{u}_1(r)$ kinematikai előíráshoz tartozó elasztosztatikai peremértékfeladatának megoldását az $u_1 = u_1(r)$ elmozdulásmező, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r)$ alakváltozási tenzormező, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1(r)$ feszültségi tenzormező. Tudvalevő, hogy az $u_1 = u_1(r)$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r)$, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_1(r)$ az alábbi mezőegyenletek és peremfeltételek által kijelölt kerületérték feladat megoldásából állíthatók elő ([1], [2]):

$$\mathbf{T}_1 \cdot \nabla + q_1 = 0 \quad r \in V, \quad (1)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2G} \left(\mathbf{T}_1 - \frac{T_1}{m+1} \mathbf{I} \right) = \mathbf{K} : \mathbf{T}_1 \quad r \in V, \quad (2)$$

$$(T_1 = \mathbf{T}_1 : \mathbf{I}), \quad (3)$$

$$2\varepsilon_1 = (\nabla u_1) + (u_1 \nabla) \quad r \in V, \quad (4)$$

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n} = p_1 \quad r \in A_p, \quad (5)$$

$$u_1 = \bar{u}_1 \quad r \in A_u.$$

A test alakváltozási energiáját az

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}_1 : \varepsilon_1 dV = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}_1 : \mathbf{K} : \mathbf{T}_1 dV \quad (6)$$

formulával értelmezzük ([2], [3]).

Megjegyzendő, hogy a (3) mezőegyenletben és a (6) formulában szereplő negyedrendű \mathbf{K} tenzor *szimmetrikus* és *pozitív definit* az alábbi értelemben [5]:

1. bármely szimmetrikus másodrendű \mathbf{X} és \mathbf{Y} tenzorokkal fennáll az

$$\mathbf{X} : \mathbf{K} : \mathbf{Y} = \mathbf{Y} : \mathbf{K} : \mathbf{X} \quad (7)$$

azonosság,

2. bármely szimmetrikus másodrendű \mathbf{X} tenzorral teljesül az

$$\mathbf{X} : \mathbf{K} : \mathbf{X} \geq 0 \quad (8)$$

egyenlőtlenségi reláció és továbbá

$$\mathbf{X} : \mathbf{K} : \mathbf{X} = 0 \quad (9)$$

csak akkor, ha $\mathbf{X} = \mathbf{0}$.

Külső erőrendszer munkájának kétszeresét a

$$\begin{aligned} W_1 = \int_V q_1 \cdot u_1 dV + \int_A (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n}) \cdot u_1 dA = \int_V q_1 \cdot u_1 dV + \\ + \int_{A_p} p_1 \cdot u_1 dA + \int_{A_u} (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n}) \cdot \bar{u}_1 dA \end{aligned} \quad (10)$$

formula alapján számoljuk.

Célszerűnek látszik bevezetni az alábbi mennyiséget:

$$U_{11} = 2U_1. \quad (11)$$

Legyen $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2(r)$ egy tetszőleges V -ben folytonosan differenciálható *szimmetrikus* másodrendű tenzor, legyen továbbá

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_2 = \frac{1}{2G} \left(\tilde{\mathbf{T}}_2 - \frac{\tilde{\mathbf{T}}_2}{m-1} \mathbf{I} \right) = \mathbf{K} : \tilde{\mathbf{T}}_2, \\ (\tilde{\mathbf{T}}_2 = \mathbf{T}_2 : \mathbf{I}). \end{aligned}$$

A $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2(r)$ tenzormező alapulvételével a következő mennyiségeket definiáljuk:

$$\tilde{U}_{22} = \int_V \tilde{\mathbf{T}}_2 : \tilde{\varepsilon}_2 dV = \int_V \tilde{\mathbf{T}}_2 : \mathbf{K} : \tilde{\mathbf{T}}_2 dV, \quad (13)$$

$$\tilde{U}_{12} = \int_V \mathbf{T}_1 : \varepsilon_2 dV, \quad \tilde{U}_{21} = \int_V \varepsilon_1 : \tilde{\mathbf{T}}_2 dV, \quad (14), (15)$$

$$q_2 = \tilde{q}_2(r) = -(\tilde{\mathbf{T}}_2 \cdot \nabla) \quad r \in V, \quad (16)$$

$$\tilde{p}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2 \cdot \mathbf{n} \quad r \in A, \quad (17)$$

$$\tilde{W}_{21} = \int_V \tilde{q}_2 \cdot u_1 dV + \int_A (\tilde{\mathbf{T}}_2 \cdot \mathbf{n}) \cdot u_1 dA. \quad (18)$$

A negyedrendű \mathbf{K} tenzor szimmetriájának következménye az alábbi egyenlőség:

$$\tilde{U}_{12} = \tilde{U}_{21}. \quad (19)$$

A szorzatfüggvény deriválási szabályának és a Gauss-féle integrálatalakítási tételnek az együttes alkalmazásával a

$$\int_V \tilde{\mathbf{T}}_2 : (\mathbf{u}_1 \nabla) dV = \int_V \mathbf{T}_2 : \boldsymbol{\epsilon}_1 dV \quad (20)$$

azonosságból kapjuk az

$$U_{21} = W_{21} \quad (21)$$

egyenlőséget.

Abban a speciális esetben, mikor $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \tilde{\mathbf{T}}_2(r)$ a vizsgált kontinuum egy elasztostatikai peremértékfeladatának megoldása, vagyis mikor is a

$$(\nabla \tilde{\mathbf{u}}_2) + (\tilde{\mathbf{u}}_2 \nabla) = 2\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_2 \quad r \in V \quad (22)$$

parciális differenciálegyenletnek létezik az $\tilde{\mathbf{u}}_2 = \tilde{\mathbf{u}}_2(r)$ vektormezőre egyértékű folytonos megoldása, értelmezhetők az alábbi mennyiségek is:

$$\tilde{W}_{12} = \int_V \tilde{q}_1 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 dV + \int_A (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 dA, \quad (23)$$

$$\tilde{W}_{22} = \int_V \tilde{q}_2 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 dV + \int_A (\tilde{\mathbf{T}}_2 \cdot \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}_2 dA. \quad (24)$$

Könnyen kimutatható, hogy ekkor

$$\tilde{W}_{12} = \tilde{U}_{12}, \quad (25)$$

$$\tilde{W}_{22} = \tilde{U}_{22}. \quad (26)$$

A tanulmány célja bebizonyítani azt, hogy fennáll az

$$U_{11} \tilde{U}_{22} \geq (\tilde{W}_{21})^2 \quad (27)$$

egyenlőtlenségi reláció.

A (27) egyenlőtlenségi reláció az irodalomból jól ismert

$$U_{11} U_{22} \geq (W_{12})^2 \quad (W_{12} = W_{21}) \quad (28)$$

egyenlőtlenségi reláció általánosításának tekintendő, ahol U_{11} , U_{22} , $W_{12} = W_{21}$ a vizsgált rugalmas test *statikailag* és *kinematikailag* egyaránt lehetséges (tehát ténylegesen megvalósítható) állapotaival kapcsolatos energetikai és munkajellegű mennyiségeket jelölnek [6].

2. A (27) egyenlőtlenségi reláció bizonyítása

Az alakváltozási energiával kapcsolatos (27) egyenlőtlenségi reláció származtatásához tekintsük az alábbi $\Phi = \Phi(\lambda)$ függvényt:

$$\Phi = \Phi(\lambda) = \int_V (\mathbf{T}_1 - \lambda \tilde{\mathbf{T}}_2) : (\mathbf{T}_1 - \lambda \tilde{\mathbf{T}}_2) dV. \tag{29}$$

A (29) egyenletben elvégezve a kijelölt kétszeres skaláris szorzást, tagonként integrálva — tekintettel a (6), (13), (14), (15), (19) egyenletekre, a következő eredményre jutunk:

$$\Phi = \Phi(\lambda) = U_{11} - 2\tilde{U}_{12}\lambda + \tilde{U}_{22}\lambda^2. \tag{30}$$

A $\Phi = \Phi(\lambda)$ függvénnyel kapcsolatban a következő megjegyzéseket tehetjük:

- a) $\Phi = \Phi(\lambda)$ a λ változó másodfokú racionális egész függvénye, minden valós λ -ra értelmezett,
- b) $\Phi = \Phi(\lambda)$ nem negatív, azaz $\Phi(\lambda) \geq 0$ bármely λ -ra,
- c) $\Phi(\lambda) = 0$ csak akkor lehetséges, ha $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \mu \mathbf{T}_1$, ahol μ egy zérustól különböző egyébként tetszőleges valós állandót jelöl.

A $\Phi = \Phi(\lambda)$ függvény b) és c) tulajdonsága abból következik, hogy a \mathbf{K} tenzor negyedrendű pozitív definit szimmetrikus tenzor a (7), (8), (9) egyenletek által adott értelmezéseknek megfelelően. Az a) és b) tulajdonság következménye, hogy a $\Phi(\lambda) = 0$ egyenlet D diszkriminánsa nem pozitív, azaz

$$D = 4 [(\tilde{U}_{12})^2 - U_{11}\tilde{U}_{22}] \leq 0. \tag{32}$$

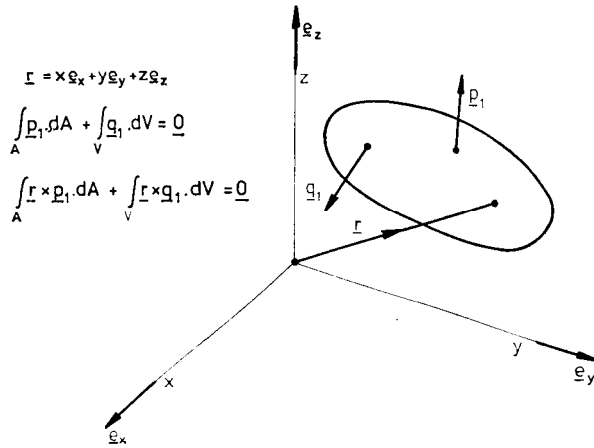
A (32) egyenlőtlenségből következik, hogy

$$U_{11}\tilde{U}_{22} \geq (\tilde{U}_{12})^2. \tag{33}$$

A (33) egyenlőtlenség és a (19), (21) egyenletek kombinálásával kapjuk a bizonyítandó (27) egyenlőtlenségi relációt. A (33), illetve a (27) egyenlőtlenségi relációban az egyenlőség jele csak akkor érvényes a $\Phi = \Phi(\lambda)$ függvény c) tulajdonsága miatt, ha $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \mu \mathbf{T}_1$.

3. Példa

Az alábbi példában a (27) egyenlőtlenségi reláció alkalmazásával alsó korlátot adunk az egyensúlyi erőrendszerrel terhelt rugalmas test alakváltozási energiájára (2. ábra).



2. ábra. Egyensúlyi erőrendszerrel terhelt rugalmas test

A felületi és térfogati terhelést ismertnek tételezzük fel. Természetesen

$$\int_A p_1 dA + \int_V q_1 dV = 0, \quad (34)$$

$$\int_A r \times p_1 dA + \int_V r \times q_1 dV = 0. \quad (35)$$

Legyen

$$\tilde{T}_2 = f \mathbf{I}, \quad (36)$$

ahol f zérustól különböző tetszőleges skalár állandót jelöl. A tanulmány (13), (18) formulái szerint

$$\tilde{U}_{22} = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)G} f^2 V, \quad (37)$$

$$\tilde{W}_{21} = f \int_A n \cdot u_1 dA = f \int_V \nabla \cdot u_1 dV = f \int_V \varepsilon_1 dV. \quad (38)$$

Az irodalom rovatban [4] alatt említett mű 447. oldalán található (42) formula szerint

$$\int_V \varepsilon_1 dV = \frac{1-2\nu}{6(1+\nu)G} \left(\int_V q_1 \cdot r dV + \int_A p_1 \cdot r dA \right). \quad (39)$$

A (7) egyenlőtlenségi reláció és (37), (38), (39) egyenletek kombinálásával kapjuk az alábbi alsó korlátot az U_{11} számára:

$$U_{11} \geq \frac{1-2\nu}{18(1+\nu)G} \left(\int_V q \cdot r dV + \int_A p \cdot r dA \right)^2. \quad (40)$$

IRODALOM

1. S. TIMOSHENKO—I. N. GOODIER: *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill. New York—London—Toronto 1951, Sec. Ed., pp. 146—178
2. A. I. LURJE: *Theory of Elasticity* (In Russian). Izd. Nauka Moscow 1970, pp. 148—173
3. *Mechanik der Elastischen Körper*. Handbuch der Physik. Band VI. Verlag von Julius Springer, Berlin 1928, pp. 66—77
4. W. NOWACKI: *Theory of Elasticity* (In Russian). Izd. Nir. Moscow
5. *HANDBUCH der Physik*. Ed. S. Flügge. *Festkörpermechanik II.*, Band VI. a/2. Springer-Verlag Berlin—Heidelberg—New York 1972
6. BARTA JÓZSEF: Szóbeli közlés

An Inequality Relation in Connection with the Energy of Deformation. The author reports on an inequality relation in connection with the energy of deformation of a homogeneous, isotropic, linearly elastic body. The verified applicability of the inequality relation is demonstrated by an example.

Eine Ungleichheitsrelation in Zusammenhang mit der Verformungsenergie. Es wird eine Ungleichheitsrelation in Zusammenhang mit der Verformungsenergie der homogenen, isotropen Körper aus linearelastischem Material beschrieben. Die Anwendung der nachgewiesenen Ungleichheitsrelation wird anhand eines Beispiels demonstriert.

BESZÁMOLÓ
AZ EUROMECH 112

„KONTINUUS SZERKEZETEK SAJÁTFREKVENCIÁINAK BEHATÁROLÁSA”
C. NEMZETKÖZI KOLLOKVIUMRÓL

A szóban forgó kollokviumot az MTA Műszaki Mechanikai Kutatócsoport rendezte. Az MTA Műszaki Tudományok Osztálya az előkészítő, megszervező és lebonyolító munkával az IUTAM Magyar Nemzeti Bizottságot bízta meg. Az EUROMECH Bizottság az MTA egyetértésével a kollokvium elnökéül BOSZNAV Ádám egyetemi tanárt, a műszaki tudományok doktorát jelölte ki. A kollokvium titkára POPPER György, a műszaki tudományok kandidátusa volt, gazdasági felelőse KOVÁCS Miklós tudományos munkatárs. A szervezésben közreműködtek még BACI István egyetemi adjunktus és SZERVÁNSZKY György tudományos munkatárs.

A Kollokvium az MTA mátrafüredi üdülőjében 1979. február 21–23. között került lebonyolításra. A hazai résztvevők száma 25, a külföldieké 34 volt. A külföldiek megoszlása: 1 amerikai egyesült államokbeli, 4 angol, 2 belga, 1 bolgár, 1 csehszlovák, 5 francia, 9 német szövetségi köztársaságbeli, 1 nyugat-berlini, 5 olasz, 5 lengyel.

Sajnos, az MTA által meghívottak közül 20 személy (3 amerikai egyesült államokbeli, 3 angol, 1 ausztráliai, 1 francia, 1 hong-kongi, 2 német szövetségi köztársaságbeli, 1 nyugat-berlini, 4 olasz, 2 szaúd-arábiai, 2 szovjet) az utolsó hetekben személyes akadályok miatt lemondta a részvételt.

Az MTA-n kívül a Kollokviumnak az IKARUS Karosszéria és Járműgyár is — amely a Kollokvium témáit magához közelinek érezte — anyagi támogatást nyújtott. Ez lehetővé tette a program gazdagítását, illetve a részvételi díj mérséklését. 1 olasz résztvevőt (Fichera professzort) a Kollokvium vendégül látott.

A tudományos program 33 előadást tartalmazott, valamennyit angol nyelven adták elő. Az öt tudományos ülés közül négy áttekintő jellegű volt, ezekre kb. 50 percnyi idő jutott, a többi előadás egyenként kb. 20 percnyi időt igényelt. A szervezett vita előadásonként került megrendezésre. Igen élénk és mélyreható viták alakultak ki; a tudományos kritikái megnyilvánulásokkal kellemes, vidám, segítőkész és baráti hangulat párosult. A viták, kapcsolatok kialakítása, különnyomatcserék a szabadidőben is tovább folytak.

A téma főbb eredményeinek ismeretében szervezőbizottság egyik alapelvnek tekintette, hogy matematikusokat is bevonjon a munkába. Nagy örömet okozott, hogy sikerült megnyerni G. Ficherát, M. A. Sneider, N. Bazley, W. Foxot, G. Riedert, W. H. Wittricket és további olyan személyeket, akiknek eredményei világszerte ismertek a Kollokvium témakörében. Matematikusok, elméleti beállítottságú mérnökök és fizikusok, és mérésekben is járatos mérnökök kölcsönös szellemi megtermékenyítő hatást gyakoroltak itt egymásra.

A múlt év december 15-ig beérkezett előadásösszefoglalókat a résztvevők megérkezésükkor füzet alakjában kézhez kapták.

A Kollokvium fő témái az alábbiak voltak:

1. A Poincaré—Rayleigh—Ritz-módszer, a közbenső operátorok módszere, az ortogonális invariánsok Fichera-féle módszere újabb változatai, továbbfejlesztései, újabb alkalmazásai, vagy hasonló célra szolgáló más módszerek,
2. sajtótertekkel kapcsolatos optimalizálások,
3. adott tartománybeli valamennyi sajátérték meghatározását célzó eljárások.

Az előadók nagy része azt az intuitív utat is bemutatta, amelyen járva a később bizonyított tételeket megsejtették.

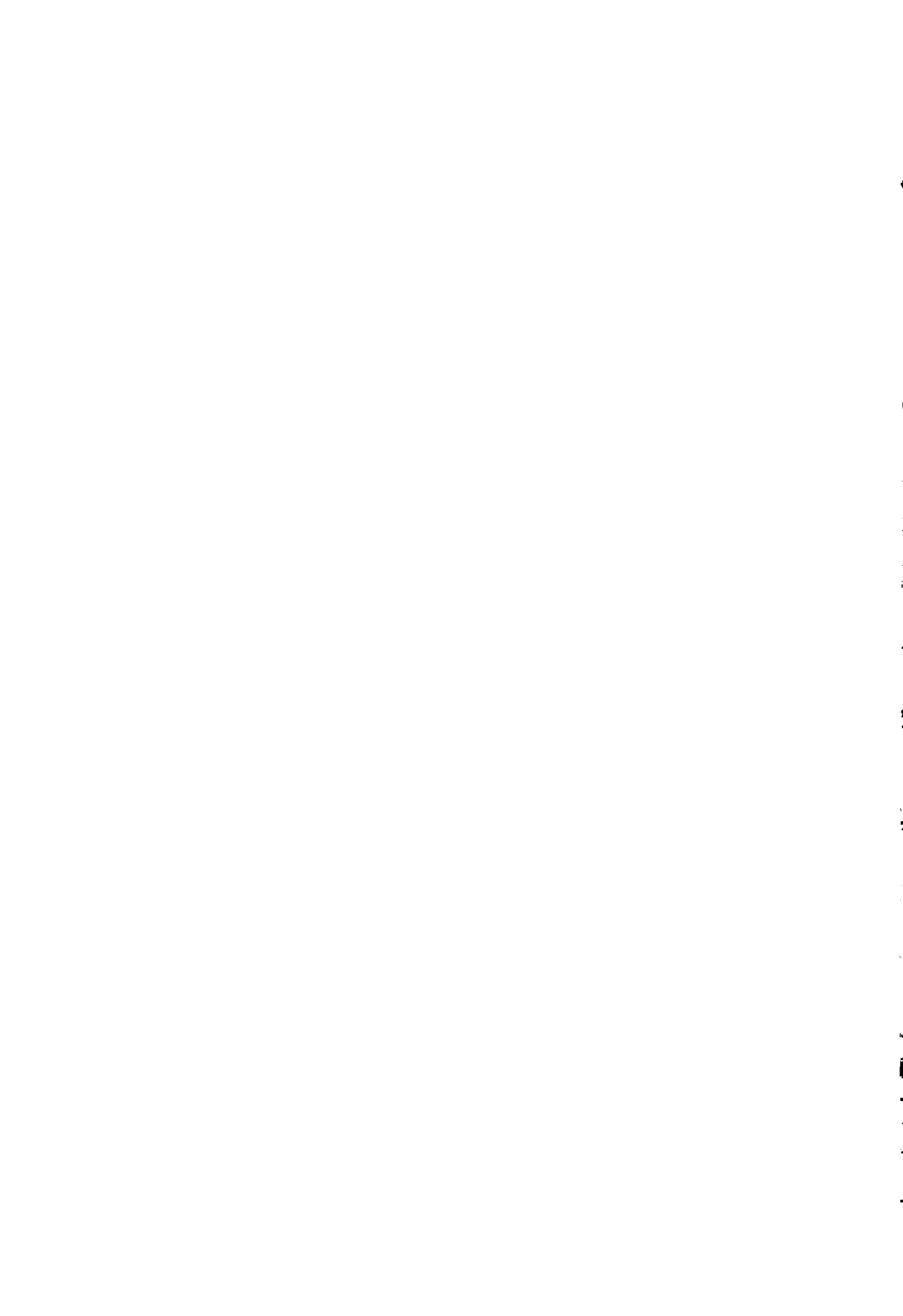
Mód volt gazdag társadalmi program szervezésére is.

A résztvevők nyilatkozatai, majd az azóta érkezett levelek mind szakmai, mind általános szempontból igen kedvező benyomásokról tanúskodnak.

Egyértelműen megállapítható, hogy a kollokvium mind hazai, mind nemzetközi szempontból előmozdította a témakör és a kutatók szellemi gazdagodását.

A Kollokvium sikere több személy gondos munkájának köszönhető; valamennyiüket e helyen is köszönet illeti. Meg kell köszönni továbbá az MTA Műszaki Tudományok Osztályának, az IUTAM Magyar Nemzeti Bizottságának és az MTA Műszaki Mechanikai Kutatócsoport vezetőségének megértő támogatását.

Dr. Bosznay Ádám



TARTALOMJEGYZÉK

<i>Terplán Zénó</i> : Emlékezés Szabó Gusztávra (1879—1963)	1
<i>Kézdi Árpád—Horváth György</i> : A pórusokban uralkodó víz- és légnyomás mérése a triaxiális nyomókísérletekben	9
<i>Tarnai Tibor</i> : A héjak membránállapotának létezési és egyértelműségi feltételeiről	19
<i>Páczelt István—Herpai Béla</i> : Megjegyzés a feltételes kinematikai kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezetek számításához	49
<i>Ecsedi István</i> : Perturbációs módszer a csavarási merevség közelítő értékének számítására	87
<i>Matolcsy Tamás—Matolcsy Mátyás</i> : Párhuzamosan kapcsolt elemek fáradt törésének és élettartamának néhány kérdése	93
<i>Gausz Tamás</i> : Repülőgépszárnyak dinamikai terhelése	105
<i>Grósz Miklós</i> : Csőhálózatok optimális tervezése egészértékű programozással	115
<i>Lenkei Péter</i> : Japán eredmények a dinamikus hatásoknak kitett vasbeton szerkezetek területén	127
<i>Richlik György—Tóth György</i> : A Trefftz—Fichera módszer alkalmazása hajlító lengést végző rúd sajátkőrfrekvenciáinak javítható behatárolására	131
<i>Szidarovszky János</i> : Szekrénytartós hidak erőjátéka	143
<i>Tarnai Tibor</i> : A héjak membránállapotának létezési és egyértelműségi feltételeiről. II. Parabolikus héjak	169
<i>Ecsedi István</i> : Egy egyenlőtlenégi reláció az alakváltozási energiával kapcsolatban	193
<i>Bosznay Ádám</i> : Beszámoló az EUROMECH 112 „Kontinuum szerkezetek sajátfrekvenciáinak behatárolása” c. nemzetközi kollokviumról	201

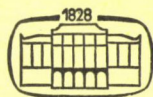
MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI: MAJOR MÁTÉ

56. KÖTET

3-4. SZÁM



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST 1978

MŰSZ. TUD.

MŰSZAKI TUDOMÁNY

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTŐ BIZOTTSÁG:

GESZTI P. OTTÓ, HELLER LÁSZLÓ, KÉZDI ÁRPÁD, VAMOS TIBOR

SZERKESZTŐSÉG: 1383 BUDAPEST, MÜNNICH FERENC UTCA 7.

KIADÓHIVATAL: 1363 BUDAPEST, ALKOTMÁNY UTCA 21.

A *Műszaki Tudomány* változó terjedelmű füzetekben jelenik meg. Négy füzet alkot egy kötetet.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudomány
1383 Budapest, Münnich Ferenc utca 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

A közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttatja a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A *Műszaki Tudomány* előfizetési ára kötetenként 84 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó 1363 (Budapest, Alkotmány utca 21. Pénzforgalmi jelzőszám 215—11488), külföldi megrendelések a „Kultúra” Külkereskedelmi Vállalat 1389 (Budapest, Fő utca 32. Pénzforgalmi jelzőszám: 218—10990) útján eszközölhetők.

MEGEMLÉKEZÉS KERPELY ANTAL TUDOMÁNYOS ÉS NEMZETGAZDASÁGI MUNKÁSSÁGÁRÓL

VERŐ JÓZSEF*

AZ MTA RENDES TAGJA

[Beérkezett 1978. április 14-én]

Kerpely Antalt az MTA 1877-ben választotta a tagjai sorába. Hat évi üzemi szolgálat után 1868-ban a selmechányai bányászati-kohászati akadémia újonnan alapított kohászattani tanszék első vezetője lett. Kísérleti-kutató munkájának tárgya főleg az acél késztermékek, elsősorban a vasúti sínek minőségének, élettartamának javítása volt. Ezek eredményéről az MTA Természettudományi Osztálya előtt számolt be. Ismerte azonban a hazai és a külföldi vasgyárakat; összehasonlításuk révén meggyőződött arról, hogy a magyar vaskohászat üzemének felszerelése nagyon elmaradott, működésük pedig gazdaságtalan. A helyzet megjavítása céljából ismételtén kifejtette véleményét, javaslatokat is téve a helyzet megjavítása érdekében. Javaslatait 1881 után, mint az állami vaskohászat központi igazgatóságának vezetője, a század végéig mind megvalósította, beleértve a vajdahunyadi nagy állami vasgyár tervezését és felépítését.

Az Akadémia tagjává választása és annak előzményei

KERPELY Antalt a Magyar Tudományos Akadémia az 1877. évi közgyűlésén levelező tagjává választotta, alig 40 éves korában. A kohász szakmának nemcsak első, hanem több évtizeden keresztül egyedüli képviselője volt az Akadémia tagjai sorában. 1877 őszén meg is tartotta székfoglaló előadását [1]. Megválasztásakor aránylag fiatal kora ellenére már olyan tevékenységre és eredményekre hivatkozhatott, amelyek valóban méltóvá tették az akadémiai tagságra. Tekintélye nemcsak itthon, hanem egész Európában is nagy volt. Szakmai, irodalmi és oktatói tevékenységéről részletesen beszámol a kéziratban fennmaradt önéletrajzában [2].

Korán árvaságra jutván, már 16 éves korában kénytelen volt a kenyerét megkeresni. 19 éves korában Bécsbe került az Osztrák-Magyar Államvasút Társaság igazgatóságára, titkárként. Itt talált olyan pártfogókra, akik évi 300 Ft ösztöndíjjal Selmechányára küldték több éves szabadságra, hogy ott a bányász—kohász tanfolyamot elvégezze. 1862 nyarán kitűnő vég bizonyítványával jelentkezett Bécsben a munkaadójánál. Ezután hat évet töltött különböző kohótelepeken, először Aninán, végül pedig a zólyombrézói vasgyári kerület főnökének helyetteseként. Aninán a termelés siralmas körülmények között folyt, ott töltött két esztendő mégis nagyon hasznos volt számára. „Minden szabad időmet a rengeteg sok nehézséggel küzdő vasolvasztók körül

* Prof. Dr. Verő József, 1021 Budapest, Széphalom u. 3b.

töltvén, megismerhettem a vasolvasztás műfolyamatát minden fázisában, azután kerestem a káros jelenségek okait tudományos elvek alapján és azoknak felismerése után utat és módot a megszüntetésükre.”

Üzemi szolgálatának már első éveiben szakirodalmi tevékenységét is megkezdte. Hazai lehetőség híján megfigyeléseit, tapasztalatait a német *Berg- und Hüttenmännische Zeitung*ban közölte. Itt jelent meg az a két közleménye, amelyben a nyersvas kéntelenítésére tett javaslatot; ezt a javasolt módszert később szabadalommal fejlesztette. Azután, hogy 1868-ban PÉCH Antal a *Bányászati és Kohászati Lapok*at megindította, ennek szerzői között is gyakran találkozunk a nevével; néhány év múlva a lap szerkesztését is elvállalta.

Közleményeit, az azokban tett javaslatait itthon is, főleg azonban külföldön nagy elismeréssel fogadták. Felbátorodva, 1866-ban megjelentette a vaskohászat 1864. évi fejlődését ismertető művét [3]; ezután egészen 1896-ig minden évben írt egy-egy hasonló tárgyról szóló ismertetést, összesen 30 kötetben.

Üzemi munkája során rangban egyre előbbre jutott és nagyobb felelősséggel járó feladatokat látott el, de nem elégitette ki. „Régen az volt vágyaimnak netovábbja, tanárrá lenni az akadémián. Irodalmi téren való tevékenységre is ez ösztönzött.” 1868 őszén ez a vágy teljesült: kinevezték a kezdeményezésére alapított kohászati tanszék első vezetőjévé. 14 éves selmechányai tanárságát több nevezetes újítása tette emlékezetessé. Az előadásoknak addigi német nyelvét elsőként váltotta fel magyarral. Ehhez meg kellett teremtenie a magyar kohász szaknyelvet is. „Őnálló, szabad előadásaimnak megszerkesztése és begyakorlása eleinte nagy fáradságomba került, de megvolt az az elégtételelem, hogy tanítványaim megkedvelték előadásaimat és ennek következtében tanártársaim is jóindulatot tanúsítottak irányomban.” A magyar szaknyelv birtokában átvehette a *Bányászati és Kohászati Lapok* szerkesztését és megkezdhette egy több kötetre tervezett magyar kohászati tankönyv írását is; két kötete 1874-ben jelent meg [4].

Másik újításként a korábban Selmechánya környékén levő üzemekbe irányuló tavaszi tanulmányutat messzebbre, először Krassó-Szörény megyébe, majd külföldre, főleg Sziléziába vezette és megkívánta, hogy azokon minden hallgatója részt vegyen.

Tanszékén a kísérletezés, vizsgálódás lehetőségeit is bővítette. Hazánkban ő végezte az első mikroszkópos vizsgálatokat, és erősen maradt a sínek keresztmetszetéről is számos felvételt készített.

Azokat az üzemeket, melyekben korábban dolgozott és azokat, amelyeket a tanulmányutak során megismert, nagyon elmaradottnak, korszerűtlennek és gazdaságtalanul működőnek ismerte fel. Az 1870. évi nyári szünetet arra használta fel, hogy megismerje valamennyinek, főleg azonban a tüzinkstári üzemnek műszaki és gazdasági helyzetét. Tapasztalatait és a helyzetük javítását célzó javaslatait magyar és német nyelven is közzétette [5].

„A magyar vasgyárak sajátos viszonyait, nemkülönben hiányait leplezetlenül tártam fel, javaslatokat téve a hiányok megszüntetésére, valamint vasiparunk korszerű fejlesztésére, átalakítására. Javaslataimnak egy része alig egy évtized alatt, másik, költségesebb része tőkehiány miatt a század vége felé gyakorlatilag mind megvalósult.”

Avval, hogy az előadások nyelve magyarrá lett, veszélybe került az akadémia addigi jó hírneve: elakadt az addig folytatott kutató tevékenység. „Évekig — igaz, csak magam munkálkodtam ez irányban — de az elismert eredmény buzdítólag hatott egyes tanártársaimra s a 80-as évek felé már többen voltunk, kik ugyanazon célzattal munkálkodtunk.”

1877-ben újabb nagy munkája jelent meg [6]. A megvizsgálandó anyagminták összegyűjtésével, azok vizsgálatával és az eredmények összefoglalásával a Természettudományi Társulat bízta meg. „A vegelemzéseket és kísérleteket nagyobb részét magam végeztem. Két éven át minden szabad órámban majdnem kizárólag ezzel foglalkoztam.” A művet a Magyar Tudományos Akadémia 1882-ben Marczibányi-díjjal tüntette ki.

Azt, hogy ezt a [6] alatt említett művét, a többi nagyobb írásművéhez hasonlóan nemcsak magyar, hanem német nyelven is közzétette, a következőképpen magyarázza: „akkoriban magyar szakmunkára sem kiadót, sem vevőt, de még olvasót is alig lehetett találni”. A német kiadás sokszor a saját költségén jelenhetett meg, és nem egyszer jelentős veszteséggel járt; egy ilyen súlyosabb ráfizetés feletti elkeseredésében fogadta el a Freibergi bányászati és kohászati akadémia meghívását az ottani vaskohászati tanszékre. Végül azonban mégsem ment ki Freibergbe.

Akadémiai kiadványban megjelent értekezései

Székfoglaló előadásának szövege 1878-ban jelent meg nyomtatásban [1]. Ebben olyan kérdés tisztázására törekedett, amelynek akkor nagy volt a gazdasági jelentősége, de amely csak sok munkával és nehezen volt elvégezhető. A világ vasútvonalainak hossza akkoriban 294 000 km volt, és azokban a használhatatlanná vált sínek helyébe évenként 1,6 millió tonna új sínt kellett beépíteni. A világ acéltermelése ugyanakkor évenként csupán 14,5 millió tonna volt, ennek több mint tíz százalékát kellett a síncserékre fordítani. A téma kidolgozásának nehézsége egyrészt abból adódott, hogy a sínek anyagának elemzését csak hosszadalmas nedves módszerekkel végezhetette, másrészt meg abból, hogy a keménység mérésére általánosan elfogadott módszer még nem volt ismeretes.

A téma kiválasztásának előzménye is volt. 1876-ban az érdekelt minisztériumok egy bizottságot hoztak létre, hogy az vizsgálja meg és lehetőleg derítse fel, mi lehet az oka annak, hogy a sínek élettartama rendkívül tág

határok közt változik. A bizottságnak KERPELY nem volt ugyan tagja, a bizottság vizsgálatainak eredményét azonban alkalma volt megismerni. Ez volt indítéka az előadás címében megnevezett feladat vállalásának, mert mint írja „fölte hasznosnak látszott, ezen eredményeket tudományos szempontból bővíteni és alapos tanulmányozás tárgyává tenni”.

Vizsgálataihoz 21-féle, hazai és osztrák üzemekben készült sínpróbát gyűjtött össze; Volt közöttük kavart vasból hengerelt nagyon lágy sín, volt acélfejű sín és néhány konverteracélból készült sín is. Összetételükből ítélve, valamennyi sínpróbája a mai fogalmak szerint lágy volt; C-tartalmuk 0,12—0,45%, S-tartalmuk pedig 0,03—0,13% között változott.

A minisztériumi bizottság többek között a megvizsgált sínek keménységének mérésével is foglalkozott: „egyszerű empiricus módszert rögtönzött e célra, de a mint később meggyőződtem, kevés sikerrel. Ugyanis vasvezetékek között járó 5 kgr. súlyú vaskoloncot huzattak fel zsinórral 1 méterre, s aztán leesni hagyták egy, a sín fölibe állított aczélszegecsre. A sín fején támadt mélyedés átmérője, mely mikrométer segélyével méretett, képezte a keménység fokának mértékét.”

E helyett a rögtönzöttnek minősített mérőmódszer helyett, amely a később kifejlődött és általánosan elterjedt keménységmérő eszközök előfutárának tekinthető, KERPELY egy „electromagneticus” eljárás mellett döntött. Azt az erőt mérte, amellyel egy Bunsen-elem, később pedig egy termooszlop áramával táplált indukciós tekercs a sín fejéből esztergált hengeres próbát magába húzni törekedett; a próbát analitikai mérleg egyik karjára akasztotta. A mért húzóerő elég kicsiny volt, alig néhány gramm, és természetesen csak szűk határok közt ingadozott. A legkeményebb, 0,45% C-tartalmú próbán mért húzóerőt 1000-nek vette, a többi, kisebb húzóerőt pedig a nagyságukkal arányosan kisebb számúnak értékelte. A sínek adatait összegező táblázatában az „electromagneticus” módszerrel kapott keménység értékei 1000 és 930 között változnak, amiből az következik, hogy a próbát behúzó erő legfeljebb 7%-ot ingadozhatott.

Evvel a döntésével Kerpely tévedésbe esett. Nem tudhatta, hogy a ferromágneses tulajdonságok az atomi szerkezettől függenek, a keménységet viszont a fémkristályok szerkezete határozza meg. Ezért a mágneses tulajdonságok és a keménység összefüggése csak közvetett és laza lehet, ha ugyan van egyáltalán ilyen összefüggés. Emiatt KERPELY méréseinek eredménye nem is lehet elég rendszeres, ami világosan kitűnik az eredményeket feltüntetető diagramokból. Előadásában ezt ki is mondja: „Gyengeség volna azt állítani, hogy a diagrammokból a keménység és az egyes alkatrészek közötti vonatkozásokat első pillantásra és feltétlen szabatsósággal ki lehet magyarázni.”

Eredményei lényegét négy pontban foglalja össze: 1. a réz, a mangán és a foszfor az ingotvas és ingotacél (folytacél) keménységét fokozza; 2. a szilícium és a kén azok keménységét csökkenti; 3. a réz és a foszfor, ha mangán

nincsen jelen vagy ha a réztartalom csekély, a karbonban viszonylag szegény kovácsvasat (kavart vasat) keményebbé teszi; 4. a kén a kavart vasat is lágyítja. Előadása szövegében említi ugyan, az összefoglalásból azonban ismeretlen okból hiányzik annak megemlítése, hogy a keménységet legjobban a karbon növeli.

Legfontosabb következtetését a kavart vashól és folytvashól hengerelt sínek összehasonlítása alapján a következőképpen fogalmazza meg: „Hogy az úgy nevezett ingotsínek (Bessemer- és Martin-aczélsínek) sokkal tartósabbak, mint a forrasztott, szemcsés fejű vagy aczélféjű sínek, az minden kételyt kizáró, megbizonyított tény. E körülményt természetesen oly szembetűnően elő nem tüntetheti sem diagrammunk, sem fentebbi fejtegetéseim, és pedig azon egyszerű oknál fogva, mert a sínek tartóssága nem egyedül a keménységtől függ.”

Ez a legutóbbi megállapítása KERPELY előadásának egyik jelentős tanulása. Helyesen előre látta a vasúti sínek anyagának várható gyártásmódját az olvadt állapotban csapolt acélban, bár azokban az években a folytacél gyártásának módszerei külföldön is, itthon is még a kezdeti nehézségekkel küzdöttek, és még évtizedekig tartott, amíg a sínné hengerlendő acélt a kívánt minőségben és kellő biztonsággal gyártani tudták. KERPELY a véleményét a kavart vashól, acélból készült sínek belső hibáira alapozza: „A vassínek vagy aczélféjű sínek mind külön-külön rudacsokból rakott és összeforrasztott csomagból készülnek, a forrasztás pedig könnyen megnyílik.”

A megválasztását követő néhány esztendőben Kerpely sokat ígérő gyakorlati szerepet a Természettudományi Osztály ülésein. Beszámolóit nem személyesen adta elő, hanem az osztály egyik rendes tagja, Nendtvich Károly mutatta be.

Pár hónappal a székfoglaló elhangzása után röviden arról számolt be [7], hogy az egyik alsósajói, faszénnel járó olvasztójából a csapolás céljából már megvékonyított dugón keresztül sönemű anyag fúvódott ki olvadt állapotban. A kohón kívül megdermedt ugyan, de a ráfolyó salak újra gőzzé változtatta. A kohótól ebből a sönemű anyagból vizsgálat céljából néhány kg-ot kapott. Elsősorban annak összetételét, mibenlétét kívánta megállapítani; de nehézségekre bukkant. Amikor lúgzással el akarta választani a sót a hozzákeveredett, vízben nem oldható idegen részekről, salaktól, tűzálló anyagtól, erős ammónia fejlődést tapasztalt. A só tehát bomlékonynak látszott. A rendelkezésére álló laboratóriumi felszereléssel a sót nem is sikerült bomlatlan, eredeti összetételében elkülönítenie. Az elemzés főként kálium, vas és cian, kisebb mennyiségben még további néhány elem jelenlétére utalt. A só képződésének körülményeit nem kísérlete felderítenie, de megvizsgálta, mennyire gyakori a cianvegyületek képződése nagyolvasztóban. Több, különböző vasolvasztóból származó salakot vízzel lúgzott, az oldatot cianra megvizsgálva, csak kettőben talált nagyon gyenge, kétséges ciannyomokat.

A következő jelentős tanulmányában [8] az akkoriban már használatos, kivétel nélkül szobahőmérsékleten végzett vizsgálatokra, a szakító kísérletre és technológiai próbákra hivatkozva, kifejezést ad annak a véleményének, hogy „roppant horderejű hibákat követhetünk el”, ha acélt a szokásos módon végzett vizsgálatok eredménye alapján minősítjük. Akkor már ismeretes volt, hogy a kovácsvasnak nevezett kavart vas törete és mechanikai tulajdonságai megváltoznak, főleg a teherbírása csökken, ha tartós rázkódtatás vagy hosszabb melegítés előzte meg a minősítés céljából végzett vizsgálatot. Ezeket a következményeket annak tulajdonították, hogy a rázkódás vagy ismétlődő mechanikai igénybevétel, valamint a hosszas melegítés megváltoztatja „a tömecskek rakodási és cohásiobeli viszonyait”. A változás oka pedig az akkori felfogás szerint az, hogy „a vasnak legkisebb részecsei mozgásban, indított állapotban voltak. A vas- és aczélrészecsek e tömecsbeli változások alatti állapotukat indított állapotnak nevezem, holott nyugalmas állapotban levőknek mondom, ha fokozottabb meleg sem közvetlenül, sem mechanikai igénybevétel alakjában be nem foly rájuk.” Akkoriban tehát nem tettek még különbséget a ma fásztó igénybevételnek nevezett folyamat és a nagyobb hőmérséklet következményei között, hanem minden ilyen változást az acéllal közölt mechanikai vagy termikus energia következményének tartottak. Az acéllal közölt energia mindkét esetben megváltoztatja az acél töretét is. „E változások kétségtelenné teszik, hogy a vasnak legkisebb részecsei mozgásban voltak”, míg a vizsgálat szokásos szobahőmérsékletén „teljes nyugalomban vannak”.

Ebből a helyzetképből kiindulva, azt javasolja, hogy az acél minősítése céljából már szokásos vizsgálatok sorozatát egészítsék ki meleg állapotban végzett törőpróbával. „A meleg törőpróba felvilágosít bennünket a molekuláris változások felől, amelyeknek a megvizsgált acél ki van téve, ha részecsei izzáson alul a legmagasabb futtató szín hőmérséklete által indíttatnak.” Ez a futtató szín a kék, amely rövid idő alatt mintegy 300 °C-on jelenik meg.

Javasolata helytállóságának igazolása céljából 30-féle, magyar, osztrák, német, francia, angol és svéd üzemekben készült acélből gyűjtött össze próbaanyagot. Köztük minden akkoriban járatos acélgyártó módszer terméke képviselve volt; volt közöttük frisstűzi acél, kavart vas és acél, cementacél, tégelyacél, konverterben, valamint SM-kemencében készült acél is. Valamennyinek közli az összetételét és képtáblákon azoknak hideg és meleg töretét.

Nem volna értelme, hogy a próbák töretének leírását megismételjem, ma is érdekes azonban, hogyan hozta összefüggésbe a meleg töret tiszta és repedés vagy rés nélküli voltát az acél összetételével és gyártásának módjával, csak hozzávetőlegesen ismert hőmérsékletével. Anélkül, hogy tudomása lehetett az acél oxigéntartalmáról, annak zárványképző hatásáról, különleges jelentőséget tulajdonít az acél mangán- és szilíciumtartalmának. Azt természetesen tudta, hogy a folytacél mindig magasabb hőmérsékleten készül, mint a frisstűzi vagy kavart acél; erre alapozta azt a következtetését, hogy „a

mangán és silícium visszatartásának elsősorban a magas hőmérsék kedvez. Frissítési acélban legkevesebb van a két elemből, valamivel több van belőlük a kavartacélban, azután következik a Bessemer-frissítés, továbbá a gázzal fűtött acéolvasztópektek és végül következik a tégelyekben való másodolvasztás.”

Ezzel a különböző módon gyártott acélfajták dezoxidáltságának sorrendjét állapította meg helyesen, anélkül, hogy az oxid- és szulfidzárványok létrejöttének körülményeiről tudomása lehetett volna. Száz évvel ezelőtt a mangán és a szilícium szerepét és hatását legfeljebb sejtették. Ezt KERPELY a következőképpen fejezte ki: „A silícium és mangán befolyása kevésbé közvetlen, mint inkább közvetett.” A két elem jótékony hatására mintegy fél évszázaddal később derült fény, amikor az acél oxigéntartalmának meghatározására alkalmas készülékek és a kéntartalomnak (Mn, Fe) S alakjában való megkötöttsége ismeretessé vált.

A szilícium- és mangántartalomnak az acél minőségét javító hatására hivatkozva, a továbbiakban talán elsőként fogalmazza meg a jó acél gyártásának ma is érvényes, lényeges feltételét. „A meleg törőpróbából következők vonhatók a frissítés alatti hőmérsék befolyására, a műfolyamat miképi lefolyására.” Kiemeli, hogy — mai kifejezéseket használva — jó minőségű acélt heves dekarbonizáló folyamat, erős fővés eredményeképpen kaphatunk. „E körülményből tűnik ki leginkább, hogy miért alkalmasabb a heves frissítésből, tehát túlzított kokszyersvasból készülő Bessemer-termék alakos öntésre, nem különben, hogy miért alkalmas e célra a heves kezelés mellett készülő lángpestacél, mely a tégelyacélt pótolni leginkább van hivatva.”

KERPELYnek ezek a következtetései messzire előremutatók. Egyszerű eszközökkel, időt rabló sok elemzés eredményéből jutott el idáig. Kísérleti módszereit ma pontosabb műszerekkel végezhető mérések, vizsgálatok pótolják. Kéktörőpróbája ma is használatos, néhány éve pedig szabványos vizsgálo módszer.

Selmechányai tanári működésének éveiben többször is foglalkozott a vasúti sínek minőségének kérdésével; kísérleteinek eredményét nem mindig akadémiai kiadványban jelentette meg [9], arra számítva, hogy nagyobb olvasótáborra talál. De egyik akadémiai közleményében is visszatért erre az akkoriban jelentős kérdésre, most a sínacél gyártásának oldaláról közelítve azt meg [10]. Gyakran tapasztalták ugyanis, hogy az egy SM-adag anyagából hengerelt sínek, amelyeket egyforma minőségűnek vélték, az átvételi vizsgálatkor nagyon különböző módon viselkedtek: egy részük károsodás nélkül elviselte a dinamikus hajlító kísérletet, más részük pedig az első ütésre ridegen kettétört.

A rejtélyesnek látszó ügy felderítése céljából hazai SM-üzemekben készült négy adagból hengerelt sínekből szerzett a hajlító vizsgálatához elegendő hosszú darabokat. Az egyik adag anyagából négy, három további adagból pedig

két-két próbát vetett alá a hajlító vizsgálatnak; az alátámasztás köze 1 m volt, az igénybevételt pedig 7,5 m magasból lezuhanó 500 kg súlyú kolonc keltette. A hazai Martin-acél gyártóknak ekkor még nagyon kevés tapasztalattuk volt, különösen a végső kikészítés módja egészen kezdetleges volt.

A sínek vizsgálata avval az eredménnyel járt, hogy az első adag négy próbája közül kettő, a többi három adag próbái közül pedig egy-egy az első ütésre ridegen eltört, a többiek azonban legalább az első ütest elviselték, némelyik még a második ütésre sem tört ketté.

A négy adagból származó próbák fele tehát kellően szívósnak, azok másik fele pedig ridegnek bizonyult. A baj okát az összes próbák anyagának elemzésével törekedett felderíteni. Valóban jelentős különbséget talált még az egy adagból készített sínek összetétele, elsősorban azok foszfortartalmában. Az egy adagból származó négy sínpróba foszfortartalma például 0,13 és 0,20% között változott, de még a kéntartalmuk is 0,04 és 0,13% között.

A továbbiakban helyes magyarázatát adja, hogy a 3–4 t súlyú, kis adagok összetétele miért lehet ennyire különböző. „Az acélkemencék olvasztó tere ugyanis szokott módon lejtős lévén a csaplyuk felé, ennek táján a megömlött acél sokkal vastagabb rétegben gyűl össze, mint a szemben fekvő, a munkajátóhoz közel eső oldalon; amaz tehát az ajtón vagy annak oldalrésein beömlő légáram oxidáló hatása elől biztonságban van, holott az utolsó, épen vékony rétegű ömledék folyton ama hatás alatt áll. Carbon, silícium, mangán, kén, phosphor mind kisebb-nagyobb és változó mértékben változásokon mennek keresztül, a mint az egyes fémrétegek közelebb vagy távolabb esnek a munkajátótól. A kész terményt közvetlenül a mintákba folytatják, melyek a csaplyuk alatt hosszirányosan elhaladó szekeren állanak. E csapolásmód hiányos voltát már régen felismerték és az által szüntették meg, hogy az előbb jól megkevert kész terményt üstbe eresztik és csak az üstből öntik a körben vagy hosszirányosan felállított mintákba.” A leírásból kiolvasható javaslatot hamarosan minden hazai acélműben meg is valósították, ezért a leírt nehézség az irodalomban ezután nem is merült fel.

Évtizedekkel később derült ki, hogy a nagyfokú ridegség okozóját helyesen ismerte fel a foszforban. Ezt jó megfigyelő készségének köszönhette. A sínpróbák anyagából vett forgács oldásakor ugyanis észrevette, hogy a szívós sínek anyaga a hígított salétromsavban simán teljesen feloldódott, a rideg sínek anyagának oldásakor viszont üledék maradt, amely csak nehezen oldódott. Ezt az üledéket külön megvizsgálva, azt foszforvasnak találta.

Nehezebb, KERPELY idejében megoldhatatlan feladat lett volna megmagyarázni, hogyan és miért kerül a rideg sínek anyagába foszforvas. KERPELY úgy gondolta, hogy kétféle foszfor is lehet a sínek anyagában. Egyik változata az adag betétanyagaival kerül a kemencébe és a kész acélba, másik része pedig a munkajátókon beáramló levegővel érintkezve, oxidálódik, aztán ismét redukálódik. A ridegséget a foszfor utóbbi változata okozhatta. Ma azonban,

minthogy ismerjük a Fe—C—P ötvözetrendszer egyensúlyi diagramját [11], a jelenség magyarázata sokkal egyszerűbb. 0,1%-nál több foszfort tartalmazó acél austenitjének átalakulása Fe_3P foszfidnak a kristályok határán való kiválásával kezdődik meg, és a kristályok határán rideg hálózatként jelenik meg. Ez a foszfidháló az acélt is rideggé teszi. KERPELY sínjeinek jelentős része 0,15%-nál több, a foszfidháló létrejöttéhez bőven elegendő mennyiségű foszfort tartalmazott. Ezek mindenképpen ridegek voltak. A 0,1—0,15% foszfortartalmú acélok austenitje vagy nem volt elég durva szemnagyságú, vagy a lehülés sebessége volt aránylag gyors és ezért foszfidháló vagy egyáltalán nem vagy csak szakadozott alakban jöhetett létre. Az ilyen sínek szívósaknak bizonyultak.

A kincstári vasgyárak központi igazgatóságának vezetője

1881 elején KERPELY életének útja újabb fordulatot vett. Február 3-án az uralkodó aláírta kinevező okiratát a kincstári vaskohászat központi igazgatóságának vezetőjévé. Pár nap múlva az illetékes miniszter e szavakkal adta át neki a kinevezést: „Most már tehetsz mindent, amit jónak találsz, de pénz ne kérj.”

A kinevezés előzménye egy előző évi kormányhatározat volt. Éppen KERPELY kritikus szemmel írt műveiből ismeretes volt az állami vasgyárak elhanyagolt, siralmas állapota és tevékenységük gazdaságtalan volta. A helyzet megjavítása, az üzemek korszerűsítése érdekében egy központi irányító szerv létesítése látszott célszerűnek, minden szükséges intézkedés megtételére alkalmas, nagy hatáskörrel. Ennek a központi igazgatóságnak megszervezését és további irányítását KERPELY Antalra kívánták bízni. Hónapokat vettek igénybe az előzetes tárgyalások, KERPELY részéről pedig a tanakodás, vállalja-e a megbízást. „Bizalmasaimmal Selmecebányán tanakodtunk és végre arra a meggyőződésre jutottam, hogy a kitüntető megbízást okvetlenül el kell fogadnom, mert ha visszautasítom, én, aki annyira kikeltem a kincstári vasgyárak gazdálkodása és elmaradottsága ellen, jogosan azt a gyanút kell, hogy felkeltszem, mintha nem éreznék bátorságot a gyakorlat terén megvalósítani a papíron több ízben hangoztatott reformokat.”

A döntés főleg azért eshetett nehezebbre, mert az új megbízás elvállalásakor természetesen le kellett mondania a selmecebányai tanszékről, az ott kialakított kísérleti-kutatási lehetőségről, munkásságának egészen új irányba kellett fordulnia. „Az igazgatóság megszervezése, a hatáskör megszerkesztése, a személyzet összeválogatása és kinevezése április 1-re megvolt és az igazgatóság működése megkezdődött.”

Terveit még a kinevezés megtörténte előtt kidolgozta, azokat a miniszter teljes egészében jóváhagyta. A nyilvánosság előtt ezeket a terveket a Magyar Mérnök- és Építész Egylet kassai vándorgyűlésén 1881 őszén ismertette.

A tervek végrehajtásához haladéktalanul hozzálátott, mihelyet az új igazgatóság működni kezdett. Első teendőjének azt tartotta, hogy a tíz állami üzemben rendet teremtsen. Zólyombrézón megszűnt a vasúti sínek gyártása, helyette létrehozta a Monarchia első hengerelt és vont csöveket gyártó üzemét. Diósgyőrt nyersvassal ellátó tiszolci nagyolvasztókat jobb fúvógépekkel és léghevítőkkel látta el és ezzel a termelésüket jelentősen fokozta. Kisgaramon (Róniczon) megszüntette a nyersvasgyártást, az üzemet öntődévé alakította át; itt készültek Magyarországon először lágyított, valamint zománczott öntvények. Kudsiron tégelyacélt gyártó üzem létesült; innen látta el később a diósgyőri tégelyacél üzemet szakmailag képzett munkásokkal. Két üzemet, amelynek sem érce és tüzelőanyaga, valamint vasúti összeköttetése nem volt, nevezetesen a fehérpatak-trebusai és a sebhelyi üzemeket, megszüntette.

A legtöbb figyelmet a gyalári vasérctümeg mielőbbi hasznosítására fordította. A Vajdahunyadra telepítendő kohóüzem tervezésével már 15 évvel korábban is foglalkozott. A végleges terv azonban csak most készült el és annak minden jelentős gondolata KERPELY agyából született. Gyalárról a vasércet drótkötélpályán szállították a kohótelepre; Az erdőben termelt faszénét ugyancsak drótkötélpályán Gyalárra juttatták, onnan pedig az ércpályáján Vajdahunyadra. „1882-ben már teljes folyamatban volt az építés úgy a kötélpályán és az iparvasutakon, mind pedig a vajdahunyadi vasgyár telepítése és a többi kincstári vasgyárak korszerű átalakítása körül. Az új kohótelepen az első, faszénrel járó vasolvasztó 1884-ben, a második 1885-ben kezdett termelni. Az ország azonban még ezután is jelentős mennyiségű nyersvas behozatalára szorult, ezért 1891-ben egy harmadik, 1895-ben pedig egy jóval nagyobb, koksszal járó nagyolvasztó építésére került sor.

A vajdahunyadi gyár építéséhez KERPELY nagyon kevés állami pénzt kapott; annak jelentős részét két hazai banktól 25, illetve 35 évi törlesztésre kapta kölcsön. A negyedik nagyolvasztó építésére például százezer forintot kapott az államtól. „Bele is ért ennyit, mert nem csak csökkentette a külföldi nyersvas beözönlését és ellátta a diósgyőri államvasúti aczélgyárat annyi nyersvassal, amennyit csak akart, hanem a kincstári vaskohászat veszteségeit is egy csapással tetemes és tartós nyereséggé változtatta át.”

A termelés növelését célzó intézkedésekre nem a legszerencsésebb időben került sor: egy bécsi bank bukása nyomán két-három évig tartó gazdasági válság söpört végig Európán, a szokásos kísérelésekkkel, többek között a vas- és acéltermelés átmeneti csökkenésével és az árak lemorzsolódásával. Ellenfelei ezt is felhasználták ellene, hogy gáncsot vessenek elsősorban a vajdahunyadi vasgyár építésének útjába. „Sok keserűség, sok bosszúság ért azon körülménynél fogva, hogy ANDRÁSSY Manó gróf gömörmegyei vasolvasztóműveit féltette az új kincstári olvasztóktól. A pénzügyi bizottságban többször felszólalt a kohók építése ellen, s kemény támadásokat intézett ellenem, én

sem enyhén mondtam el czáfolataimat és a napi lapokban megindult, mindjobban elmérgesedett polémia után színleg kibékültünk azon feltétel alatt, hogy több új olvasztót nem építtek." Hat-hét évvel később a vita a jelek szerint nem újult fel.

A két súlyos hiányokkal küszködő üzemnek, a fehérpatakinak és sebeshelyinek megszüntetése ellen a bányahatóságok vették fel a harcot. „Az egyes bányagazgatóságok becsület- vagy tekintélybeli dolognak tekintették, lehetőleg sok gyár felett rendelkezni s ezért alig volt rá eset, hogy az igazgatóság kerületében vasgyárat vagy hámort önszántából megszüntetett volna. Ez az 1881-ben életbe léptetett központi vasműigazgatóságnak volt fenntartva. Erélyesen el is járt megbízatásában.”

KERPELY a véleményét, álláspontját mindig meg tudta védeni és azok védelmében semmiféle fáradságot nem ismert, terveit pedig hatáskörénél fogva meg tudta valósítani. Ez szerencsés dolog volt, mert elgondolásai, tervei utólag mindig helyesnek bizonyultak. Azokra a támadásokra és ellenvetésekre, amelyeket az 1882—83. évi gazdasági válság ürügyén sokan hangoztattak, a [12] közleményben adott kielégítő választ. Felhasználva az 1882. évi, már pontosan ismert adatokat, tételről tételre sorra veszi az ország vas- és acélszükségletét, figyelembe véve a termelésnek 1883-ban várható növekedését, a kivittelt és behozatalt; arra az eredményre jut, hogy a következő években „172,300 tonna vas- és acélszükségletünk fedezéséhez 125,000 tonnával fogunk a legközelebbi években hozzájárulni és hogy nyersvaszszükségletünk addig, amíg ócska sínek állnak rendelkezésünkre és a gépipar nagyobb fejlődésnek nem indul, saját olvasztóink által fedezhető lesz. E szerint körülbelül 47,000 tonna vas és aczél ezentúl is külföldről fog behozatni és ennek nem is vehetjük elejét egyhamar, sem új vasművek építése, sem a meglévőknek kibővítése által; de meggyugtatónkra szolgál, hogy vasgyáraink jól el lesznek foglalva a következő években is.”

Külön kiemeli, hogy a kincstári gyáarak „nemcsak, hogy versenyre nem kelnek magániparunkkal, hanem összes vas- és gépiparunknak tagadhatatlanul kitűnő szolgálatokat tettek a múltban és jelenben, és a jövőben sem fogják megérdemelni azon szemrehányásokat, melyekkel egyesek tájékozatlanságból vagy önérdekből utóbb annyi előszeretettel illették.”

Olyan vád ellen is védekeznie kellett, hogy az új vasolvasztókat faszénnel járattja. „Nagy befolyású egyének, kik, mint mindenben úgy a vasiparban is szakértőknek tartják magukat és fájdalom sokaktól el is ismertetnek, azt hangoztatják, hogy túl vagyunk azon időn, melyben növényi tüzelővel vasat készíteni szabad. Ezen urak véleménye szerint tehát faszénnel tüzelő vasfinomítóinkat le kellene romboltatni és vasiparunkat szomszéd uraiméknak prédául átengedni.”

A védekezésében felvetett gondolatok annak idején helytállóak voltak, ma nyilván ő maga sem folyamodhatnék azokhoz. Négy millió kataszteri hold

erdőterületünk van, ennek több, mint fele csak tüzelőanyagként felhasználható bükkös. Sok erdőnk a vasútvonalak közelében van, a vasút pedig a fát olyan olcsón szállítja, hogy a Szepes és Gömör megyei olvasztók akár Ung vagy Zemplén megyéből szerezhetik be a tüzelőjüket. Így „az évtizedeken át teljességgel parlagon hevert és éppenséggel semmit sem jövedelmezett rengeteg erdőterületek jövedelmeznek a birtokosaiknak és az államnak, adóképessé téve a szegény, eddig kenyérkereset nélküli lakosságot. A faszénnel tüzelő vasolvasztók ezek utána nem gáncsolást, hanem minden szakértő és jó hazafi támogatását érdemli meg.” Röviden még említi a faszénnel olvasztott nyersvas jó minőségét és keresett voltát.

Akkortájt kokszot külföldről, legközelebről Sziléziából kellett volna behozni. A szállítás költségei miatt ez a tüzelőanyag legfeljebb az ország északnyugati határa közelében levő üzemek számára jöhetett szóba, az erdélyi kohók távol esvén, rá voltak utalva a faszénre.

1867 után Magyarország gazdasági fejlődésnek indult; 1885-ben elérkezettnek látszott az idő, hogy az elért eredményeket a nyilvánosság előtt Országos Kiállításon mutassák be. Mint fontos iparág, a vaskohászat a kiállításon előkelő helyet foglalt el, és arra is lehetőséget adott, hogy a KERPELY vezetése alatt működő központi igazgatóság is bemutassa a négy év alatt végrehajtott intézkedései hasznos következményeit. A kiállításon a hagyományos termékeken kívül a négy év folyamán meghonosított termelő ágazatok termékei is bemutatásra kerülhettek. A kiállítás vasipari részéről KERPELY szakszerű ismertetést közölt [13], hangsúlyozván, a megvalósult reformok hasznosságát. Közleménye azért is jelentős, mert 11 évvel később, a millennium évében rendezett nemzetközi Bányászati, Kohászati és Geológiai Kongresszuson tartott előadásában a vaskohászat további fejlődését az 1885. évi helyzettel összehasonlítva értékelte [14].

[13] közleménye az akadémiai kiadványokban megjelent írásművei között az utolsó; az akadémia kiadványainak szerzői sorában ezután már nem találkozunk a nevével. A tollat azonban még nem tette le. 1896 szeptemberében nagyrészt külföldi szakemberek előtt tartott előadásában vaskohászatunk akkori helyzetét ismertette. Értékelését a következő szavakkal foglalta össze: „Igaz ugyan, hogy azon szaktársainkra, kik az iparországok tízszerte vagy húszszorta nagyobb termelésekhez vannak szokva, mint tisztelt vendégeink nagyobb része, az itt közölt magyarországi termelések nem fognak mély benyomást gyakorolni, de ha felhívom becses figyelmüket azon haladásokra, amelyeket csak az utóbbi 10 év alatt tettünk, lehetetlen, hogy még közönyösek maradjanak fejtegetéseinkkel szemben.”

Még a 80-as évek gazdasági válságához kapcsolódik egy további jelentős és hosszú életű alkotása: az 1885-ben megkötött ún. vasegyezmény. A válság következtében ugyanis „a vasipar Európaszerte válságos helyzetbe jutott és a hazai vasgyárak, úgy mint az osztrák gyárak élet-halálharcot vívtak egy-

mással. A kölcsönös verseny folytán a vasgyári termékek árai olyan alacsonyra süllyedtek, hogy kisebb, tőkeszegény gyárak jobbnak látták az üzemet vagy szűk korlátok közé szorítani vagy teljesen megszüntetni.” 1885 elején a hazai vállalatok közül a Rimamurány – Salgótarjáni Vasmű RT a legnagyobb osztrák vállalatokkal tárgyalásokat kezdett az áldatlan állapot megszüntetése céljából. Sok fondorkodás és kemény viták végén egy kartellszerződés tervezete jött létre. Ekkor azonban a magyar állami vaskohászatnak is jelentős szerepe volt a vaspiacon. A szerződéshez az állami vaskohászat képviselőjének, vagyis KERPELY Antalnak is hozzá kellett járulnia. A hatásköre erre is kiterjedt. Felismerve a szerződés várható kedvező következményeit, csatlakozott ahhoz és az állami vaskohászat nevében aláírta. A szerződés három évre szólt, három évenként megújították.

A szerződés legfontosabb következményeként megszünt a túltermelés, és ezzel nemcsak a hazai, hanem az osztrák vasgyáraknak öldöklő versenye is. Az egyes vasfajták minimális árai nagy büntetések terhe alatt kötelezők voltak a szövetség minden tagjára. Némi bonyodalmat csak a vidéki piacokra szánt áruk fuvar költsége okozott, de a szerződés védelme alatt még a kisebb üzemek is zavartalanul termelhettek. „A hatalmas tőkés nagy vasgyárak versenye többé nem zavarhatta őket.”

Ezzel a most idézett mondattal zárul KERPELY Antal önéletrajza, miután megemlíti, hogy az 1885-ben kötött vasegyezmény az utolsó sorok leírásakor, 1905 júliusában is érvényben van. Majdnem két évvel a halála előtt fejezte be kézzel írott életrajzát. Annak közlését [2] BARLAI Béla a következő szavakkal vezeti be: „KERPELY Antal élete korszakot jelent a magyar vasipar történetében. Pusztuló vaskohászatunkat ő mentette meg, ő teremtette újjá, ő tette magyarrá.”

IRODALOM

1. KERPELY A.: A vas kémiai alkata és keménysége közötti vonatkozások. *Ért. a term. tud. köréből* 8 (1878), 9
2. Krassai lovag Kerpely Antal önéletrajza. Közli Dr. BARLAI Béla. *BKL* I (1916), 197 és II (1916), 228
3. KERPELY A.: Berichte über die Fortschritte der Eisenhüttentechnik im Jahre 1864. Folytatól még 29 kötet 1896-ig. Leipzig, 1866–1896
4. KERPELY A.: A vaskohászat gyakorlati és elméleti kézikönyve. Selmecbánya 1864
5. KERPELY A.: Magyarország vaskohászata, annak jelene és jövője. *BKL* 5 (1872). Ugyanaz német nyelven, Leipzig 1872
6. KERPELY A.: Magyarország vaskövei és vasterményei, különös tekintettel a vas legfőbb kémiai és fizikai tulajdonságaira. A Term. tud. Társ. megbízásából, az OMBKE kiadásában, Budapest 1877
7. KERPELY A.: Folyékony cýánsó vas-nagyolvasztóból. *Ért. a term. tud. köréből* 8 (1878), 9
8. KERPELY A.: Az aczél megkülönböztető jelei (indított tömeccsü állapot, meleg törőpróba). *Ért. a term. tud. köréből* 9 (1879), 11
9. KERPELY A.: A vaspályasinek főbb tulajdonságaira vonatkozó kísérletek és tanulmányok. *BKL* 11 (1878). Német nyelven Leipzig 1878
10. KERPELY A.: Adatok a Martin-aczél tulajdonságainak ismertetéséhez. *Ért. a term. tud. köréből* 10 (1880), 4
11. VERŐ J.: Az ipari vasötvezetek metallográfiája. Budapest 1960. I. kötet, 125. o.

12. KERPELY A.: A magyar vasipar jövője a legközelebbi tíz évben. *Ért. a nemzetgazd. köréből* 2 (1884), 5
13. KERPELY A.: Magyarország vasipara az országos kiállítás idejében. *Ért. a nemzetgazd. köréből* 3 (1885)
14. KERPELY A.: Vaskohászatunk a millennium idejében. Előadás az Ezredévi Bányászati, Kohászati és Geológiai Kongresszuson 1896 szeptemberében. L. *BKL Kohászat* 111 (1978), szeptember.

Über die Tätigkeit des Hüttenmannes A. v. Kerpely. Beginnend seine Laufbahn als Betriebsingenieur, wurde er zum ersten Professor des neu errichteten Lehrstuhles für Hüttenkunde im Alter von kaum 30 Jahren ernannt. Seine Forschungsarbeiten bezogen sich meist auf die Verbesserung der Stahlerzeugnisse, insbesondere die Verlängerung der Lebensdauer von Eisenbahnschienen. Da er auch alle namhaften Eisenwerke Europas gut kannte, konnte er den veralteten Zustand der ungarischen, vor allem der staatseigenen Werke und ihre unwirtschaftliche Tätigkeit klar erkennen. Um die Verhältnisse in wünschenswerter Richtung zu ändern, hat er öfters Pläne und Vorschläge veröffentlicht. Diese konnte er später, nach dem Jahre 1881 als Leiter der Zentralverwaltung der staatlichen Eisen- und Stahlwerke restlos verwirklichen. Eine derzeit grosse Leistung war das Planen und Errichten eines vier Hochöfen und ein Siemens—Martin-Stahlwerk umfassenden Werkes in südöstlichen Teil des damaligen Ungarns. Durch seine zielbewussten Massnahmen wurde die ungarische Hüttenindustrie vom zugrundegehen bewahrt.

On the Activities of A. v. Kerpely as a Metallurgist. At the age of 40 he was elected a member of the Hungarian Academy of Sciences. Having finished his studies at Selmecbánya in 1862, he spent six years in various Hungarian ironworks. Only six years later, in 1868 he became the first professor of metallurgy at Selmecbánya. His experimental researches primarily were directed to improve the quality of steel products, chiefly the lifetime of rails. He was also acquainted with most European metallurgical works and based on comparison with them he stated more than once his views on the miserable conditions to be found in Hungarian, especially in the state-owned works. Repeatedly he wrote on plans and propositions to improve these conditions. He was able to realise his plans after 1881 as the chief of the central direction of the state-owned ironworks within the coming two decades. The greatest achievement was planning and the erection of a great steel work at Vajdahunyad in the south-eastern part of Hungary, consisting of four blast furnaces and an open-hearth plant. By the reforms he introduced, the Hungarian metallurgical industry has been saved from perishing.

CSONKA JÁNOS ÉS A PRECÍZIÓS GÉPIPAR

VAJDA PÁL*

[Beérkezett: 1978. március 14-én]

Csonka János gépészmérnök, feltaláló, a magyar precíziós gép és motorgyártás megalapítója, a karburátor társfeltalálója, az első magyar gázmotor tervezője és készítője (1879). Nevéhez fűződik az első, kettős tüzelésű gáz- és petróleummotor elkészítése. Csonka-motormal indult meg a világon elsőként a magyar Posta rendszeres gépesített postai szolgálata. E célt szolgálta a század elején a Posta részére készített több postai csomagszállító gépkocsi. Nevéhez fűződik a szabványosítás és tipizálás magyarországi bevezetése. Számos anyagvizsgáló gépet tervezett. Idős korában — saját műhelyében — kéthengeres kétütemű „boxer”-motorokat gyártott.

CSONKA János neve a szélesebb köztudatban elsősorban a benzinmotorok *porlasztója* révén ismert. Az életrajzok, ismeretterjesztő írások mellett megemlítik a hazai autógyártás és a *gépgyártás* terén szerzett érdemeit.

Emellett azonban hangsúlyozni kell azt a szerepet, amelyet CSONKA János a *későn kibontakozó hazai precíziós gépgyártás megteremtésében játszott*. Nem hagyhatjuk említés nélkül, hogy CSONKÁNAK, mint tervezőnek mint vállalkozónak fontos szerepe volt az önálló magyarországi ipar megteremtésében is. Tevékenysége — ha nem is tudatosan — hatással volt a hazai társadalom fejlődésére. Jelentős érdeme, amely ugyancsak fontos volt a magyarországi gépipar szempontjából, hogy magas szintű oktatást tett lehetővé a Műegyetem műhelyében. Egyes részletekben a budapesti Műegyetem e téren felülmúlta a hasonló külföldi intézeteket is.

Életútja

CSONKA János 1852. január 22-én született Szegeden, iparos családban. Apja TSONKA Vince akkoriban ismert nevű „gépész” volt, akinek műhelyében még a régi korok patriarkális szelleme uralkodott. Ez a szellem alighanem befolyásolta CSONKA János későbbi nézeteit, mint ahogyan itt sajátította el technikai és gépipari ismereteinek alapjait is. Törekvő apja az elemi iskola elvégzése után gimnáziumba iratta, majd műhelyébe vette. A társadalmilag és gazdaságilag elmaradott környezetet azonban rövidesen szűknek érezte, bár az Alföld—Fiúmei Vasút szegedi műhelyében (1871), majd a MÁV budapesti fűtőházában (1873) már korának korszerű gépészetét is megismerhette. Ezért hosszabb külföldi tanulmányútra indult (1874): hosszabb-rövidebb ideig Bécs-

* Dr. Vajda Pál, 1123 Budapest, Alkotás u. 1/a



Csonka János (1852—1939)

ben, Korneuburgban, St. Pöltenben, Zürichben, 1875-ben Párizsban dolgozott. Párizsi tartózkodása döntő fontosságú volt számára, mert itt ismerkedett meg az akkoriban elterjedt Lenoir-féle *gázmotorral*. Ezután angliai utazás következett, majd újból Franciaországba tért vissza, végül 1876-ban Zürichben, Milánón és Bécsen át tért haza.

Bár ez a tanulmányút sok nélkülözéssel, áldozattal járt, főként ennek köszönhető, hogy a budapesti Műegyetem 32 jelentkező közül őt, a legfiatalabbat — késve beadott kérvénye ellenére — 1877. február 11-én kinevezte a

gépiparműtani tanszék tanműhelyének művezetőjévé. CSONKA azonnal nekilátott a tanműhely fejlesztésének. Az anyagi nehézségek áthidalására javasolta, hogy a műhelyben saját költségén 5—6 szakképzett munkást alkalmaz, és ennek fejében kérte, hogy a gépeket szabad idejében saját céljaira használhassa.

Két év híján fél évszázadig vezette a Műegyetem tanműhelyét.

CSONKA János volt az, aki a gépgyártás forradalmi átalakulásának küszöbén nemcsak szóval hirdette, hanem a gyakorlatban valósággal is beigazolta, hogy a korszerű műhelyvezetésre az empiria nem elegendő, hanem ahhoz a technikai tudományokkal szilárdan megalapozott, speciális felkészültség elengedhetetlenül szükséges. Annak, hogy a gépipar mind a technikai használhatóság, mind pedig az ár tekintetében is versenyképes árut tudjon produkálni, és hogy gyártmányaival helyét a világversenyben is megállhassa, a műhelyi munka precizitása szigorú követelmény. Rámutatott a szabatos műhelyi kalkuláció mellőzhetetlen voltára, annak sokszor a vállalatra nézve sorsdöntő fontosságára. Hangoztatta, hogy a gépészmérnök tudása érvényesítésének nem csupán a rajzasztal, nem is az íróasztal az egyedülálló munkaterülete, hanem a gyártás, az üzem szervezése — alapja a vállalkozás prosperitásának — is.

Mindezek a tanok ma közismertek, maguktól értetődők, sőt minden részletükben tudományosan is fel vannak dolgozva. Ma már a gépműhelyi tanult szakmunkásság is tudja, átérzi, hogy kvalifikált munkájának irányítására és ellenőrzésére a gépészmérnöki szaktudás elengedhetetlen, és hogy csupán az együttműködéssel lehet jó eredményeket elérni. CSONKA János 60 esztendő munkásságának értéke éppen abban van, hogy ezt az átalakulást ő kezdeményezte, évtizedeken át szorgalmazta és végül meg is valósította.

Nyugalomba vonulása előtt öt kisebb szerszámgépet készített magának (esztergapadot, maró-, fűrő-, fűrés- és gyalugépet). Ezekből 1924 végén a XI. Bartók Béla út 31. sz. ház alagsorában egy kis műhelyt rendezett be, mint fia Csonka Pál írja: „... minden anyagi tőke nélkül, de annál nagyobb erkölcsi tőkével”. Itt a javító munka mellett rövidesen áttért kedves munkaterületére, a motorgyártásra. A 30-as évek közepén az üzem bővítése a Budafoki úton történt. Életének utolsó évében, 1938-ban jutott odáig, hogy gyár alapítására gondoljon. A mérnök- és munkásgárda létszáma ekkor már elérte a háromszázat. Ám az új gyár felavatását nem érte meg, 1939. október 27-én, kéthetes betegeskedés után elhunyt. Az 1941-ben üzembe helyezett „Csonka János Gépgyára R. T.” és az ennek utódként működő „Kismotor és Gépgyár” azonban ma is az alapító hagyományának jegyében folytatja tevékenységét.

Gáz- és petróleummotorok

Csonka János már fiatalon felismerte, hogy a gépiparban a belsőégésű motorokra — mint hajtó szerkezetekre — nagy jövő vár. Az 1878-as párizsi világiállításon 32 cég 75 különböző típusú gázmotort állított ki. Ezek közül

azonban csak elenyészően kevés volt fejlődésképes. A műszakilag életképes belsőégésű motorok őse a Lenoir-féle kompresszió nélküli motor volt 1860-ban. Ezt követték a különféle (HUGON, BISSCHOP, OTTO—LANGEN, AIMÜLLER, GILLES) hasonló elvű, vagy atmoszférikus gépek. Mindezek a kompresszió nélküli gépek elavultaknak voltak tekinthetők, amidőn megjelent az első kompresszióval működő motor. Ezt BRAYTON (USA 1873) szerkesztette. Az első korszakalkotó négyütemű motor OTTO (1877) motorja volt. A petrolummotor — ahogyan abban a korban a benzinmotort nevezték — csak a 90-es évek elején kezdett elterjedni. CSONKA a Műegyetem tanműhelyének energia ellátását biztosító vízoszlop-gépet előbb egy Langen—Otto-féle atmoszférikus gázmotorra, majd egy Swidorski rendszerű petrolummotorra cserélte fel. CSONKA sokat tanult ezek szerkezetéből, de főként hibáikból. Ezek alapján 1879-ben saját tervei alapján elkészítette az *első magyar gyártmányú gázmotort*. Ez a motor nemcsak tervezői sikert jelentett, hanem kivitelezői teljesítményt is, hiszen az elkészítéshez csak igen kezdetleges eszközök álltak rendelkezésre. CSONKA tehát a benzinmotorok terén a legelső úttörők egyike volt.

CSONKA következő alkotása, a *kettős tüzelőanyagú* — világítógázzal és petrolummal egyaránt működtethető — motor már nemcsak kivitelében, hanem elgondolásában is CSONKA János eredeti megoldása volt. Az 1882-ben tervezett (és a következő esztendőben elkészült) 3 lóerős motorra *1884. november 26-án* jelentette be — első — szabadalmi igényét „gáz- és petrolummotor” címen. A Csonka-motor lényeges előnye és újítása, hogy *kizárólag* szelepeket alkalmazott. Ez belső égésű motoroknál olcsóbb, jobb, sokkal könnyebben javítható, mint a tolattyú. Nem kell (és nem szabad) olajozni, főleg pedig *nagyobb* kompressziót tesz lehetővé. A szívó- és kipufogó szelepes vezérlés kitűnő. Csak még DAIMLER értette ezt meg; a többi korabeli motoron pl. OTTO és BENZ is részben még a gőzgép maradványát: tolattyúkat alkalmaztak, melyek csak az évtized végén maradoznak el.

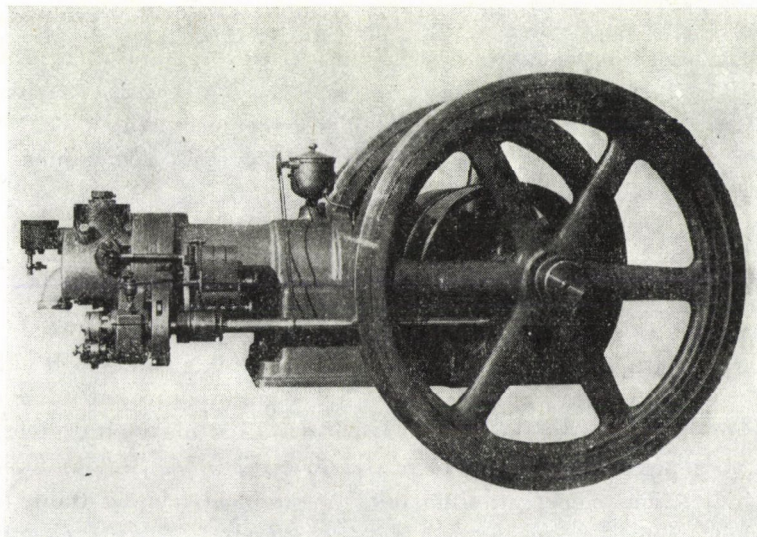
A villamos megszakító gyújtás vezérelt megszakítóval volt megoldva. A későbbi Bosch-gyújtó persze célszerűbb volt. Ebben az időben azonban a villamosság gépészek részére még oly idegen terület volt, hogy mégis meg kell dicsérenünk ezt a kissé túlkomplikált szerkezetet. Rendszeres tisztogatás és karbantartás mellett kifogástalanul működött. A Csonka-motor szabályozása centrifugál-szabályozóval, a töltésmennyiség változtatásával történt, ami egyenletes járást biztosított.

A Csonka-motor két csap elforgatásával *gáz- és benzinüzemre volt állítható*. Ezt a kipufogó gázokkal fűtött benzintartály tette lehetővé. A gáz abban az időben főleg világítási célokra szolgált és nappal a szolgáltatás sokszor leállt. Kiváló előnyt jelentett tehát, hogy a gázüzemről *könnyűszerrel* át lehetett állni benzinüzemre. Ez a lehetőség *csak* a Csonka-motornál volt meg. A többi korabeli motor vagy *csak* gáz, vagy *csak* benzinüzemre volt alkalmas. E tulajdonságával tehát valamennyi többit megelőzte. A hangsúly azon van, hogy

könnyűszerrel lehetett egyik üzembről a másikra áttérni. Elvileg minden gázmotor folyékony üzemanyaggal is használható volt, megfelelő párologtató beiktatásával. Már LENOIR gépét 1862-ben lehetett olajjal járítani — de körülményesen és megbízhatatlanul! Rengeteg ilyen „elgázosító” szabadalom volt bejelentve. A gyakorlatban azonban ezek nem váltak be.

Ha a Csonka-motort összehasonlítjuk a korabeli motorokkal, megállapíthatjuk, hogy a kétütemű gépek között a legjobban sikerült volt. A kétütemű Csonka-motor azonban megállta helyét a *korabeli* négyütemű gépek mellett is. *A kétüteműség problémáját CSONKA teljesen önálló módon oldotta meg, úgyszintén a gáz- és benzinüzem egyszerű átváltásának lehetőségét.* Külalakjában ez a szelepes gép a legjobban közeledett a később kialakult belsőégű gépek formájához.

CSONKA munkásságának képe csak akkor teljes, ha még néhány szóval a korabeli műszaki viszonyokat jellemezzük. A múlt század utolsó harmada rendkívüli prosperitás időszaka volt Magyarországon, miként egész Európában. De a magyar gépesített ipar még csak gyermekkorát élte. Az 1884. évi iparstatisztika nyújt néhány jellemző adatot. A Kárpátok által övezte országban csak 3414 iparvállalatnak van erőgépe, ebből 92% gőzgép 64 ezer lóerővel (Franciaországban 683 ezerrel, Németországban több mint egy millióval). A többi 8% hidraulikus és hőlégmotor, benzinmotort egyáltalában nem említene. Csak 12 ezer munkás dolgozott gépesített üzemben, a lakosságnak csak 5,4%-a iparos. Ezek közül 63% segéd nélkül, 33,7% 1—5 segéddel és csak 2,5% dolgozik több mint 5 segéddel. Az időnként 20 munkással dolgozó műegyetemi gépműhely tehát már tekintélyes üzemnek számított, és CSONKÁNAK



A 10 LE-s Csonka-féle fekvő motor

tantevékenysége elvégeztével teljesen szabad keze volt. Mégis, ha meggondoljuk, hogy még manapság is mennyi kollektív körütekintést, fáradságot igényel egy új belsőégésű motortípus megtervezése és kivitelezése, értjük meg, hogy milyen szívós szorgalomra volt szükség, amikor CSONKA egymaga végezte mind-
ezt — járatlan utakon. A munkásokat CSONKÁNAK személyesen kellett betanítania, az öntvények nagyrésze házilag készült.

A Bánki—Csonka-motor és a -porlasztó

CSONKA János neve, ekkoriban már kezdett a hazai szakkörökben ismertté válni. Így történt, hogy a Ganz-gyár vezérigazgatója, MECHWART András 1887-ben felkérte, hogy működjék közre a „Leobersdorfi Gépgyár” megvásárlásakor birtokába jutott motorok átszerkesztésében. Ezt a munkát BÁNKI Donát, a Ganz-gyár fiatal mérnöke kezdte meg, de sokáig nem ért el számottevő eredményt. A helyi nehézségek miatt MECHWART hozzájárult, hogy a kísérleti motorokat a Műegyetem műhelyébe szállítsák. Az együttműködés sikeresnek bizonyult és az átszerkesztés mellett több közös szabadalmat is eredményezett. Ezek a gáz- és petróleumgépeken alkalmazott újításokra és a vezérmű szerkezetére vonatkoztak. 1888. jan. 19. szabadalmaztatták: Újítások gázugépeken címen (Levéltár Vd. XXII. 1889. szám) CSONKA János és BÁNKI Donát szabadalma; 1888. ápr. 11. elsőbbséggel BÁNKI és CSONKA szabadalma: Újítások gáz- és petróleummotorokon (Levéltár Vd. XXII. 2214); majd egy év múlva 1889. márc. 14. (Levéltár Ve-1 XXIII. 1581) Vezérmű négyütemű motorok számára, és ugyanez német szabadalmi védelemmel (DRP N° 51854. 1889. ápr. 11.).

Ezek a motorok Ganz-motor néven kerültek forgalomba (nem azonosak a későbbi Bánki—Csonka elnevezésű motorral), de a motortáblán feltüntették, hogy azokat a Bánki—Csonka-szabadalom szerint gyártották.

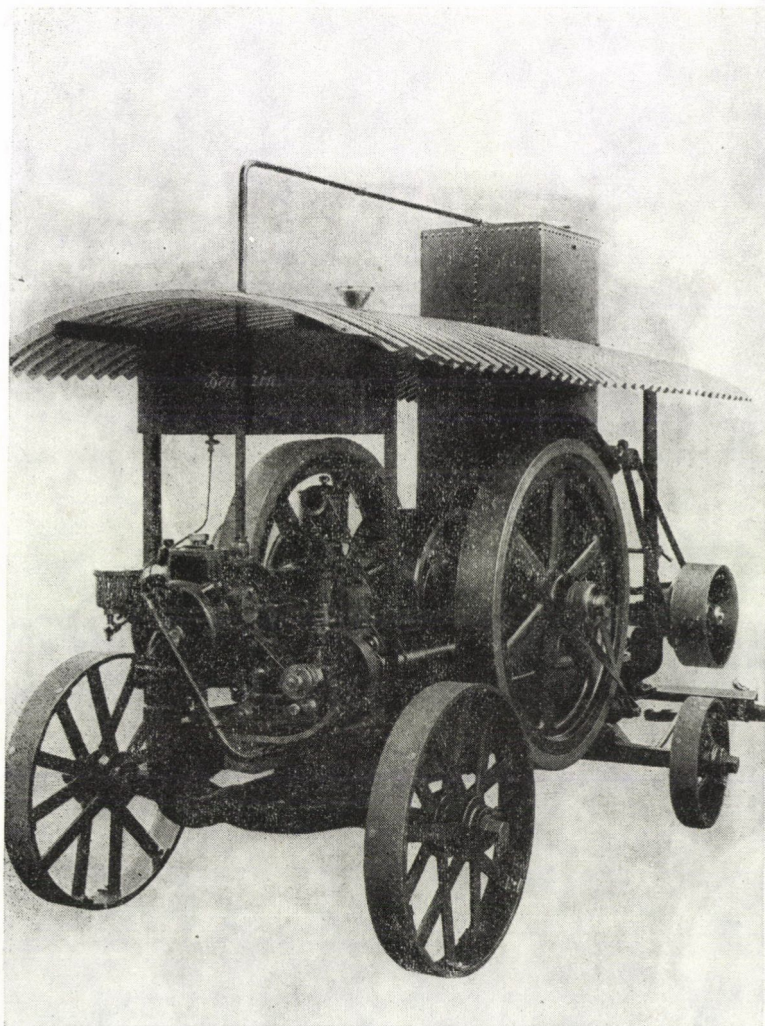
A Ganz-gyárnak ezek a motorjai voltak az első iparszerűen gyártott magyar motorok.

A motorok négyütemű, vízhűtéses, Otto-rendszerű motorok voltak és 1–8 lóerő teljesítménnyel fekvő, 6–30 lóerővel pedig álló elrendezésben készültek. A munkahenger középvonala nem metszette a forgattyútengely közepét, amivel az expanzió alatti nagyobb dugattyú-palástnyomást csökkentették. A motorok szelepesek voltak. Ez bizonyos fokig újítás volt akkoriban, mert a gőzgép rokonsága kapcsán az első belsőégésű motorokat inkább tolattyúval vezérelték és csak fokozatosan szorította ki a tolattyút a szelep.

Fekvő gépeknél 6, kéthengeresre állógépeknél 16 lóerőig önműködő, ezen felül vezérelt szívószelepet alkalmaztak. A kipufogószelepet Bánki—Csonka szabadalmát képező, egyszerű megoldással vezérelték. A keverék gyújtására elsőnek alkalmaztak gyújtócsövet, amely 1 lóerőig önműködő, azon felül vezé-

rejt volt. Az üzembiztos, zárt gyújtócső fontos újítás volt, és az elektromos gyújtás tökéletesítéséig mondhatni kizárólagos gyújtóeszköze lett a belsőégésű motoroknak. A motorok üzembiztos gépek voltak és fogyasztásuk kb. a Langen—Otto-motoréval volt egyenlő és mintegy 20%-kal jobb volt az akkori külföldi Otto-motorok fogyasztásánál.

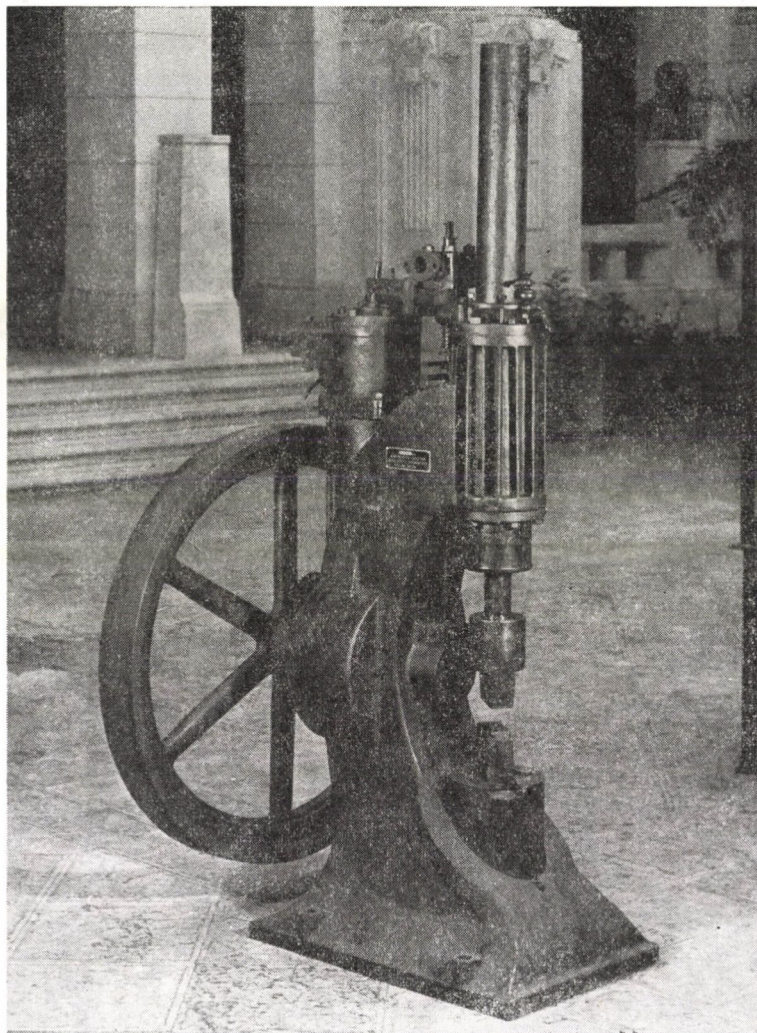
BÁNKI és CSONKA a gáz- és petróleummotor nagy égési nyomását kalapács működtetésére is felhasználták. A gondolatot a Robson-féle gázkalapácstól vették, de annál tökéletesebb gépet alkottak. Ez a gép kettős feladatot látott el: nemcsak a műegyetemi műhely transzmisszióját hajtotta meg, hanem



Lokomobil, 10 LE-s, fekvő elrendezésű Bánki—Csonka benzinmotorral

kovácsolásra is használható volt. Amíg a bonyolult szerkezetű külföldi gyártmányok hamar eltűntek a piacról, a Ganz-gyár (majd a Berlin Anhaltische Maschinenbau A. G.) Bánki—Csonka gázkalapácsi évtizedeken át keresett gépek maradtak. 1888-ban készült el az első 2 lóerős petróleumkalapácsuk, amely a Műegyetem gépműhelyében 22 évig volt használatban. A kalapácsot 2—10 lóerős kivitelben ugyancsak a Ganz-gyár készítette, de Németországban is gyártották.

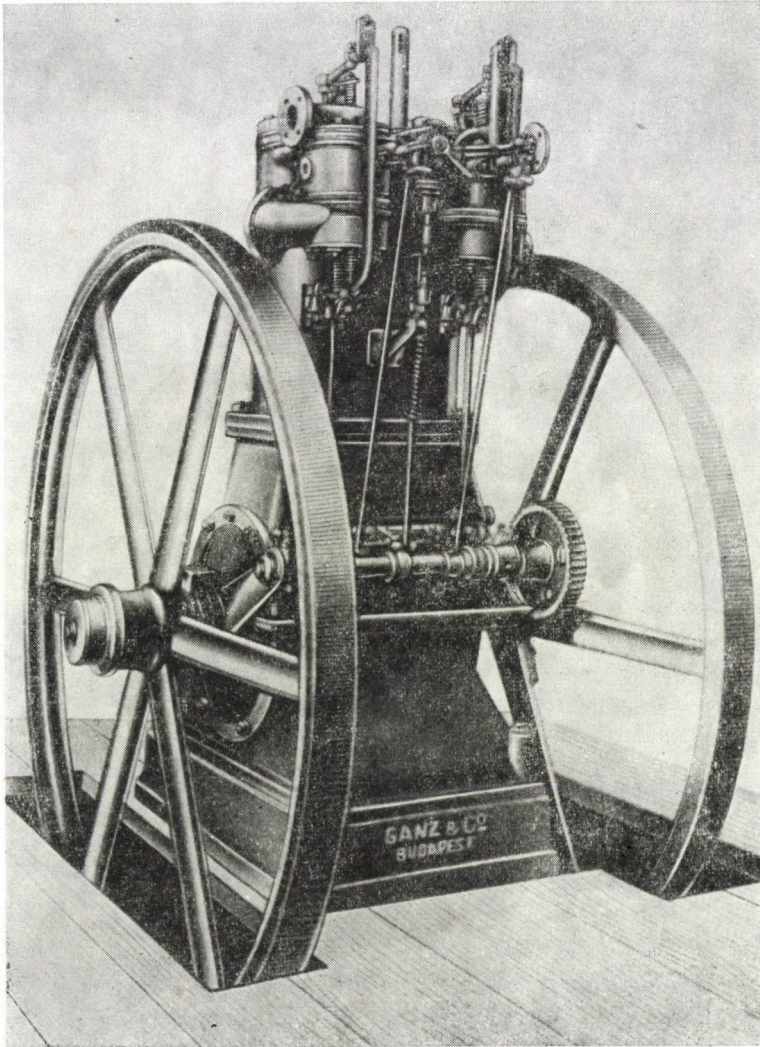
Az eredményes munka után BÁNKI és CSONKA nekilátott, hogy saját elképzelésük szerint egy, a *kisipar és mezőgazdaság céljait szolgáló*, kismotort



A Bánki—Csonka-féle gáz- és petróleum kalapács (1888)

konstruáljanak. CSONKA a közös tervek alapján készített egy 3/4 LE-s kísérleti gépet, a Bánki—Csonka-motor őst.

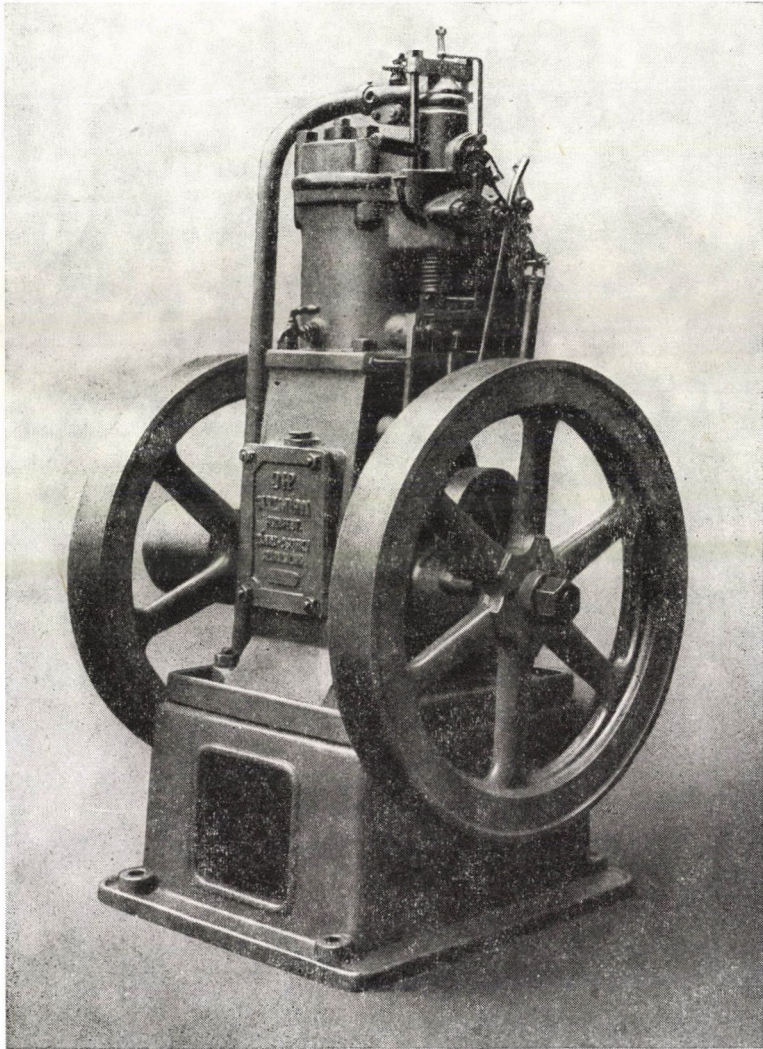
1942-ben hosszadalmas keresés után Cséven, tizenkettedik gazdájánál, egy asztalosmesternél még működésben előkerült CSONKA 3/4 LE kísérleti motorja az eredeti lánggal fűtött gyújtócsővel és a világ első karburátorával. E gépnek öntvényei részben azonosak az első petróleumkalapács öntvényeivel. 1890 elején már üzemképes volt. Ennek az 1890-ben bemutatott első modellnek továbbfejlesztett példányai terjedtek el „Bánki—Csonka-motor” elnevezéssel. A zárt motorházú, állóhengeres gépek nyíltlángú izzócsöves gyújtással működ-



Kéthengeres, 20 LE-s álló gázmotor

tek. Később ezt a gyújtórendszert „automatikus csőgyújtás” váltotta fel. Az 1893-ban bemutatott gép nagy sikert aratott, a „Bánki—Csonka”-motorok országszerte elterjedtek és fél évszázadon át voltak használatban. Korabeli méltatójuk ezt írja: „... a motor magyar találmány, mégpedig oly kitűnő találmány, amely a legnevesebb külföldi hasonló gépek bármelyikével felveheti a versenyt.”

A Bánki—Csonka-motorokon került először alkalmazásra a két alkotó legismertebb találmánya, a *porlasztó*, amely az 1893. február 11-én benyújtott szabadalmi leírásban szerepel, egy petróleummotorra vonatkozó leírásban.



Álló elrendezésű, 3 LE-s Bánki—Csonka-motor

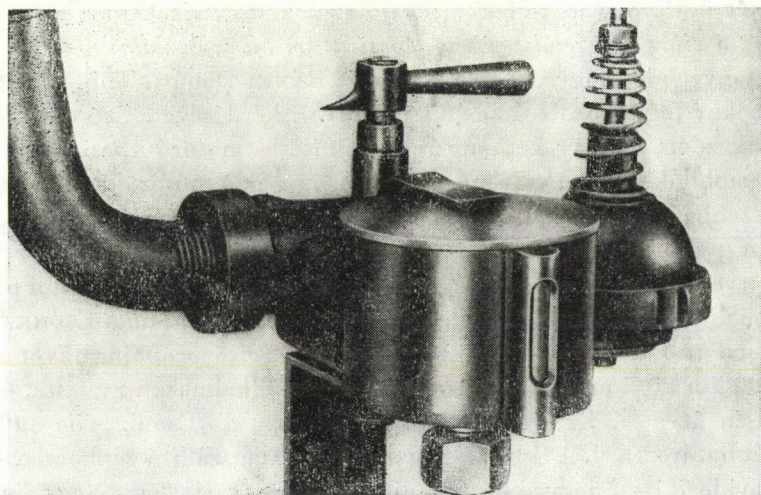
Önálló szabadalomként is bejelentették, 1893. október 18-án. Ez utóbbira hivatkozva több nyugat-európai technikatörténész W. MAYBACHOT tartja a porlasztó feltalálójának, annak 1893. augusztus 18-i szabadalmi kérvénye alapján. Valójában, mint látjuk, a magyar szabadalom fél évvel korábbi és tény az is, hogy a porlasztót BÁNKI és CSONKA már 1891-ben használta.

CSONKA János egyik még 1941-ben élő, volt munkatársának, GLATZ Mártonnak tanúsága szerint a karburátor több, mint másfél éves kísérletezés után végleges formájában a benzinnívót szabályozó uszóval együtt 1891 őszen teljesen készen volt. Ezt az időadatot azért tudta emlékezetből ilyen pontosan megadni, mert 1891 őszen vonult be katonának és akkor már a karburátor-kísérleteket befejezték, s a gyújtáskísérletek folytatása felé fordult a figyelem.

Az 1893. február 11-i, elsőbbséggel bíró szabadalom, mint látjuk, tartalmazza a mai nap is sok millió példányban használatban levő karburátor elvi leírását, az ábrák pedig a még ma is használatos elrendezést mutatják.

A Ganz-gyár sajnos elmulasztotta fizetni a szabadalmi díjat, így a szabadalmi védelem megszűnt és mások már az évszázad utolsó éveiben (a francia autóipar részére) tízezzrel, az évszázad első két évtizedében százezer számra gyártották a karburátort, ma az évi szükséglet több millió darab. BÁNKI-nak és CSONKA-nak ebből már semmi haszna nem volt.

Fél évvel BÁNKI és CSONKA után: 1893. augusztus 17-i elsőbbséggel MAYBACH francia szabadalmat jelentett be (Brevet n° 232,230), melyben a karburátor ugyanazzal a jellemzővel van leírva, mint BÁNKI—CSONKA február 17-i szabadalmában. A nemzetközi irodalomban sajnos MAYBACHOT tartják a karburátor feltalálójának — mert BÁNKI—CSONKA fél évvel régibb szabadalma ismeretlen maradt.



A Bánki—Csonka-karburátor

CSONKA első (1884) motorja óta óriásit fejlődött a motorok elmélete (főleg BÁNKI eredményeivel) és gyakorlata is. Az érdeklődés főleg a benzinmotorok felé fordult. Németországban egyedül 25 gyár készített a 90-es évek elején „petróleummotort”. A motorok árjegyzékeiben a kanóc nélkül nem gyulladó, tehát veszélytelen világítópetróleumot hirdették, de tényleg mind benzinnel járt. Most már nem volt elegendő, mint tíz év előtt, hogy a motor ismétlődő megállás nélkül üzembiztos és szabályozható volt, és ne túl sokat fogyasszon — mert benzinnel, tanulatlan (mezőgazdasági) munkás által is könnyen kezelhető, gazdaságos fogyasztású és elpusztíthatatlan, javításra nem igen szoruló gépeket lehetett csak eladni. A Bánki—Csonka-motor az óriási külföldi konkurrenca és a kitűnő német gépek ellenére első vonalban haladt, sőt GANZ egyik árjegyzéke azzal dicsekszik, hogy a legjobb. De több kedvező körülmény is volt, ami ezt lehetővé tette. BÁNKI elméleti eredményei első kézből állottak rendelkezésre és ezeket CSONKA bámulatos gyorsasággal valósította meg, a rohamos haladás ellenére így elsőnek érkezett be. További óriási előnye a karburátor volt, a konkurens gépek még évekig többé-kevésbé primitív megoldásokkal kísérleteztek.

Motoros járművek, autók

A századforduló idején CSONKA János érdeklődése új irányba fordult. A *Magyar Posta* 1900-ban versenytárgyalást hirdetett 22 darab, háromkerekű postai szállítójármű elkészítésére. Végeredményként 20 darabra a „Velodrom Automobilgarage”, kettőre a Ganz-gyár kapott megbízást. Utóbbi cég CSONKA magyar konstrukcióját és gyártmányát mutatta be. A Csonka-féle motoros triciklik két évtizeden át teljesítettek jó szolgálatot. Ezekkel a járművekkel indult meg a *világ első rendszeresen gépesített postai szolgálata*.

Megjegyzendő, hogy CSONKA János és BÁNKI Donát előbb együtt, majd külön is sokat foglalkozott a postai járművek kérdésével. CSONKA 1902-ben már hozzákezdett néhány kéthengeres, vízhűtéses motorú kocsik készítéséhez, de az automobillal nem volt megelégedve, és csak a motorokat értékesítette. Amikor azonban a *Posta 1904-ben* versenytárgyalást hirdetett postai gépkocsikra, a győri *Magyar Vagon és Gépgyár Rt.* és *Röck István gyára* egyaránt CSONKA terveit mutatta be. A *Posta* ezeket minősítette, a hat külföldi pályázóval szemben, a legalkalmasabbnak, így az *első nyolc posta-autó* CSONKA tervei — és részben az ő kivitele — szerint készült el. Az első próbajárművet a nyolc napos, 2000 km távú próbafuttatás után a *Posta* alkalmasnak találta, és 1906. január 15-én átvette. Ezek után a *posta újabb 90 db Csonka-féle automobil* beszerzését határozta el. A Csonka-féle postai csomagszállító gépkocsik, kisebb-nagyobb módosítással negyed évszázadig voltak használatban. Nagy figyelmet keltett akkoriban a Csonka-motorokon a Bosch-féle nagyfeszültségű gyújtás

Les frais de service et de maintien relatifs à 1 km sont les suivants :

I. Benzine, huile de moteur, tovote, pétrole	2-90 fillérs
II. Allumage (pile sèche et bougies)	1-87 "
III. Frais des pneumatiques	2-67 "
IV. Maintien	0-37 "
V. Substitution des parties, vernissage pendant les réparations etc.	6-20 "
VI. Frais du conducteur	13-60 "
VII. Frais du personnel d'atelier chargé des travaux de réparation	5-90 "
total: 32-51 fillérs	

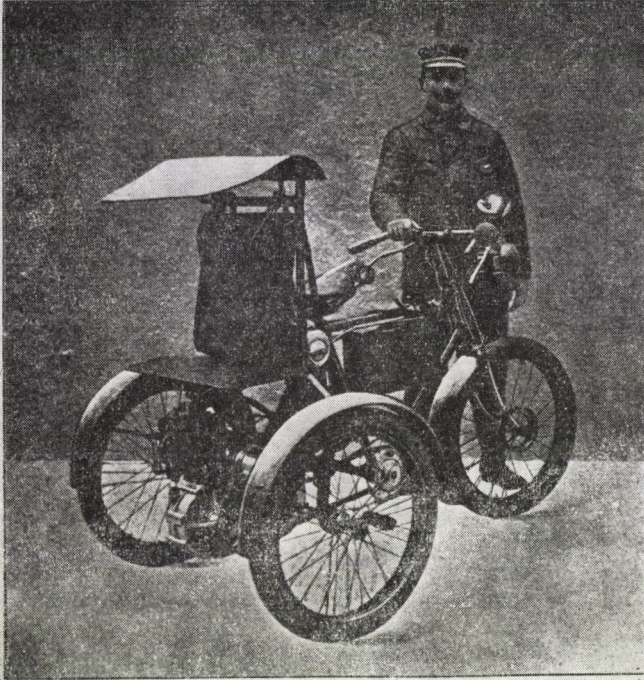


Fig. 162. Tricyclette pour la levée des lettres.

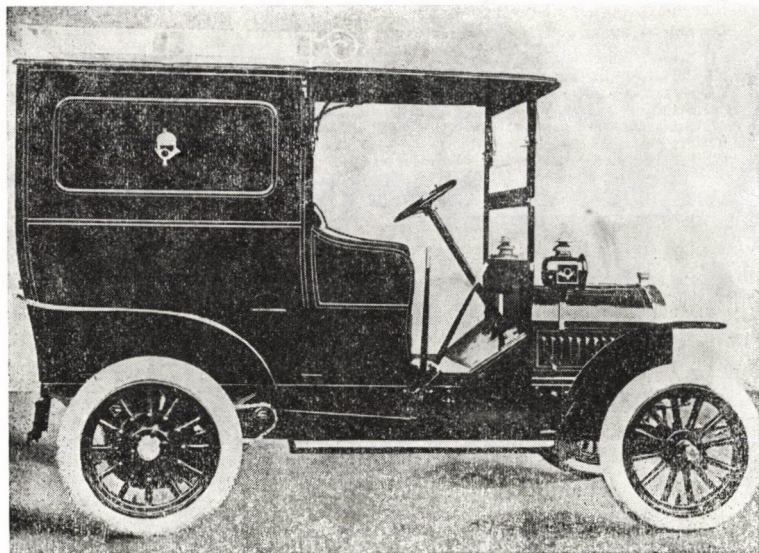
Le succès obtenu dans le service de la levée des lettres a animé la poste hongroise à des progrès ultérieurs, et dans le mois de mai 1902 elle s'est procuré, dans le but de faire des expériences, 5 automobiles à quatre roues, construits à l'étranger.

A Csonka-féle levélgyűjtő motoros tricikli (1900)

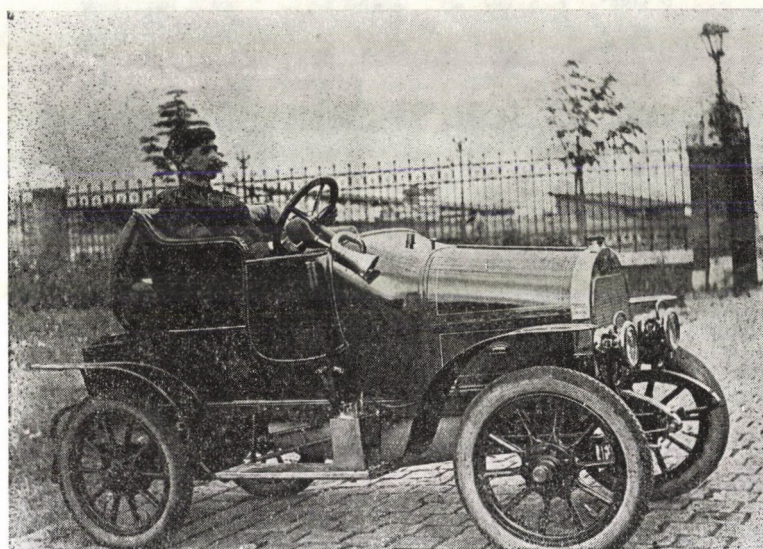
alkalmazása. Ezeket sok szakember alkalmatlannak találta, a fejlődés azonban BOSCHT és CSONKÁT igazolta.

A későbbiekben CSONKA tervei szerint más postai gépjárműveket is készítettek, sőt a pécsi Zsolnay-cég számára is készült egy 24–28 LE-s autó 1906-ban. CSONKA ezután *kisautók* tervezéséhez fogott (1909), első, egyhengeres gépkocsijából — amelyeket két ember felemelhetett — három példány készült. A későbbi, négyhengeres, vízhűtéses motorral ellátott típus már Kanadába is eljutott.

A Posta megrendelésére két darab, 16 LE-s gépkocsi is készült Röck István gyárában. Ezek részt vettek az 1909-es „Prinz Heinrich Túrán” ahol

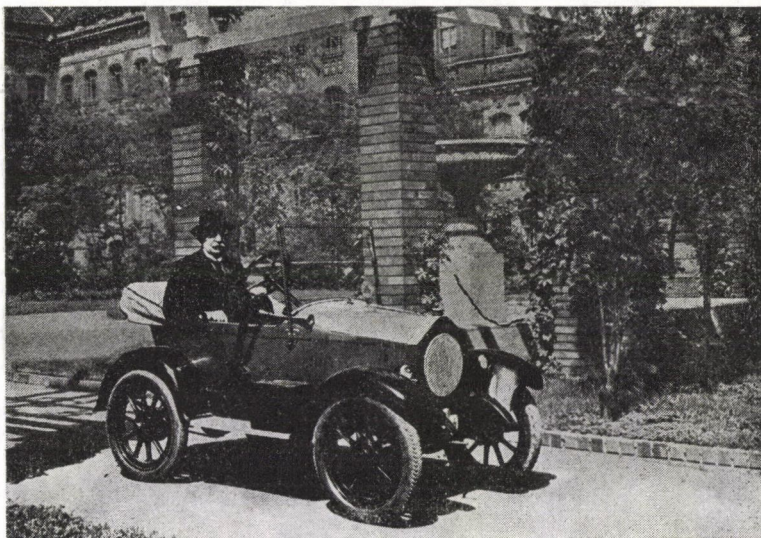


Csonka-féle postaautó



Csonka kisautó, 8 LE-s motorral

az egyik hibapont nélkül futott, *helyezést és plakettet kapott*, a másik pár méterrel a cél előtt kiesett, de hibapont nélkül futott. Mindez megnövelte a hazai ipar önbizalmát, éppen úgy, mint 1912-ben BENÁRD Ágoston sikeres szereplése a Nemzetközi Kiskocsiversenyen, CSONKA egyik négyhengeres kiskocsijával.



Csonka János 1905-ben készült egyhengeres kisautójában (A felvétel 1935-ben a Műegyetem kertjében készült)

Szabványosítás és anyagvizsgálat

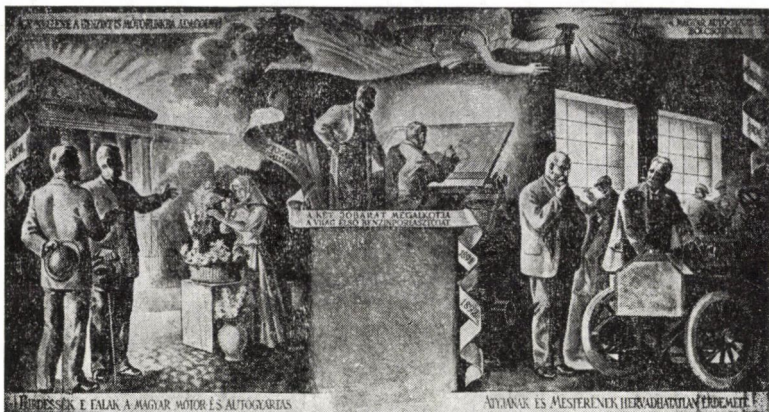
Érdemes kiemelni azt a tényt, hogy CSONKA János messzemenően bevezette és felhasználta az alkatrészek *szabványosítását és tipizálását*. A Posta számára tervezett ötféle gépkocsi típusnál egyöntetűen egy 16 LE-s motort tervezett és szabványosított. Úgy tervezte meg az alváz szerkezetét, hogy ez mind az 5 típusnál közös és szabványos legyen. Azonos volt a mellső kerék gumija és kerékszerkezete, a mellső tengelye, a kormányműve, továbbá a tengelykapcsoló és a differenciál horgóműve, továbbá a differenciál és lánckerék tengelyei, a kardánkötések, a hajtólánc, valamint a hajtott lánckerék.

A szabványosított motoroknak, fődaraboknak és alkatrészeknek csere-
szabatos kivitelben kellett készülniük, hogy a gyors javítás lehetővé váljék.

Különösen fontos volt ez az 1914–18-as világháborúban, amikor a tábori postaszolgálat egy részét is a CSONKA tervezte postai gépkocsikkal végezték.

Nemcsak ismerte a mérés és mérték fontosságát a gépiparban, hanem kiváló érzéke is volt e problémák iránt. Nagyon jellemző, hogy amikor nyugdíjazása előtt, idős fejjel maga állt neki, hogy szerszámgépeket építsen saját műhelye számára, eredeti és hitelesített ősmértékek (etalonok) hiányában ezeket is maga állította elő. Amikor azután sor került gépeinek ellenőrzésére, kiderült, hogy ezek *teljesen kielégítik a német szabványok túrési határait*.

Számos *anyagvizsgáló gépet* tervezett és készített a műegyetemi tanszék számára. Különösen az a *papír- és szövetszakító gép* vált nevezetessé, amelyet REJTŐ Sándor egyetemi tanárral együtt konstruált. Anyagvizsgáló beren-



Bánki Donát és Csonka János közös munkásságát bemutató tabló (GEBAUER Ernő műve, ma az Országos Műszaki Múzeumban)

dezései eljutottak a Mértékhitelítő Intézetbe és a MÁV laboratóriumokba. A Műegyetem, a Közlekedési Múzeum és más kiállítások részére sok gépmoddell is készített tanműhelyében.

Az első világháború derékbe törte a szépen induló hazai gépkocsiipar fejlődését. Motortervezői tehetségét azonban CSONKA később is értékesítette. Idős korában, már saját műhelyében kezdte gyártani a kéthengeres, kétütemű „boxer” motorokat. Ezek igen jól beváltak, hordozható vízszivattyú és áramfejlesztő gépcsoportok működtetésére, továbbá mint motorcsónak külmotorok. Utolsó megbízása, 88 éves korában, a török kormánytól egy igen könnyű, hátizsákban hordozható motorra vonatkozott. Ennek tervezése közben érte a halál, munkáját már tanítványa, TOPERCZER Pál fejezte be.

Szellemi hagyatéka ma már hazánk és az emberiség közkinccse.

IRODALOM

- CHEVILLARD, P.: Moteur à pétrole et à gaz. Construit par la maison Ganz et Cie. *Revue Industrielle* (1897) 313—315
- A gépkocsi a magyar kir. posta szolgálatában. Hivatalos közlemény. Budapest 1905
- ORDÓDY J.: Csonka János 1852—1939. *A Magyar Mérnök- és Építész-Egylet Közlönye* (1939) 327—328
- VAJDA P.: Csonka János és Bánki Donát 50 év előtt találták fel a porlasztót. *Automobilizmus* 1943. dec. 15, pp. 6—7
- VAJDA P.: Csonka János az első magyar automobil készítője. *Auto-Motor* (1952) feb. 1, p. 7
- KÁROLYI Zs.: 60 éves a karburátor. Megemlékezés a magyar motorteknika úttörőinek, Bánki Donátnak és Csonka Jánosnak közös munkásságáról. *Magyar Technika* (1953), 547—551.
- VAJDA P.: Nagy magyar feltalálók, Budapest 1958, 128—135, 215—216, 231—233.
- CSONKA P.: Csonka János élete és munkássága. *MTA VI. Oszt. Közl. XXV* (1960) 1: 345—385.
- GOMBÁS T.: Emlékezés a Bánki—Csonka-motorokról (pp. 4—12.) Commemoration of the Bánki—Csonka engines (pp. 4—13.) *Ganz-Mávag Közlemények* Nr. 30 (1961) máj.
- TERPLÁN S.: Csonka János. *Műszaki nagyjaink*, Budapest 1967, I. köt. 97—139.
- TERPLÁN S.: Csonka János 1852—1939. *Gép* (1972) 6. sz. pp. 6—7.

- HARSÁNYI L.: Csonka János (1852—1939) munkássága és a szabványosítás. *Szabványosítás* (1972) 152—153.
- CSONKA P.: Egy magyar gyár bölcsőjénél — Ifj. Csonka János és Csonka Béla: „Útban a szocializmus felé! A Csonka Gépgyár önéletrajza” című kézirata nyomán készült vissza-pillantás *Auto-Motor* (1975) 2. sz. 10—11.
- VAJDA P.: Alkotó magyarok — Creative Hungarians, Budapest 1975, 40—41.
- VAJDA P.: Selected Bio-Bibliography Creative Hungarians in Mathematics, Astronomy, Physics, Chemistry, Technical Sciences and Industry. *Technikatörténeti Szemle XI* (1979) 45, 46.
- LIPHAY J.: Csonka János a motorteknika úttörője (kézirat)

János Csonka and the Precision Engineering. János Csonka, inventor, mechanical engineer, is the founder of Hungarian Precision Engineering and Machine Building, co-inventor of the carburettor, designer and builder of the first Hungarian gas engine (1879). To his name is connected the manufacture of the first gas- and paraffine engine for alternative working. The Hungarian Post was the first in the world to start a regular mechanized postal service. This aim was served by several postal parcel ones made for the Post at the beginning of the century. The name of Csonka is connected with the introduction of the Normalization and Typization in Hungary. He designed numerous material testing machines. In his later years he produced, in his own workshop, two-cylinder two-stroke boxer engines.

János Csonka und die Präzisionsmaschinenindustrie. János Csonka, Maschineningenieur, Erfinder ist der Begründer der ungarischen Präzisionsmaschinen- und der Motorenerzeugung. Miterfinder des Vergasers, ist er der Projektant und Hersteller des ersten ungarischen Gasmotors (1879). An seinen Namen knüpft sich die Anfertigung des ersten Gas- und Petroleummotors für wahlweise Kraftstoffversorgung. Als Welterster startete die ungarische Post einen regelmäßigen mechanisierten Postdienst und zwar mit Csonka-Motoren. Diesem Zweck dienten mehrere zu Anfang dieses Jahrhunderts für die Post hergestellte Pakettransport-Automobile. An Csonkas Namen knüpft sich die Einführung der Normung und Typisierung in Ungarn. Er projektierte zahlreiche Materialprüfmaschinen. In vorgeschrittenem Alter fertigte er — in seiner eigenen Werkstätte — Zweitakt-Zweizylinder-Boxer-Motoren.



ÉRINTKEZÉSI FELADATOK TÁRGYALÁSA VARIÁCIÓS ELVEKKEL*

PÁCZELT ISTVÁN**

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1979. március 22-én]

Jelen beszámoló a rugalmas súrlódás nélküli érintkezési feladatok megoldására alkalmas variációs elvekről ad áttekintést, majd további kutatásokra alkalmas aktuális témákat javasol.

Bevezetés

A műszaki gyakorlatban gyakran fordulnak elő olyan szerkezetek, amelyek — vagy alkotó elemeik — érintkeznek egymással. Velük kapcsolatban a mechanikának feleletet kell adnia olyan kérdésekre, milyen a tényleges érintkezési tartomány alakja, mekkora annak nagysága, hogyan oszlik meg felette az érintkezési feszültség, mint az érintkezésben álló testek között, a szóba jöhető érintkezési tartományon kialakuló, felületen megoszló belső erőrendszer sűrűségvektora, az érintkezésben álló testek elmozdulási és feszültségi állapota megfelelnek-e a szerkezet működéséből adódó követelményeknek, dinamikailag megfelelően viselkednek-e.

A testek közötti kapcsolatok lehetnek egy-, ill. kétoldalúak. Egyoldalú kapcsolatoknál az érintkezési feszültség csak a testbe mutathat, míg ideálisnak tekintett kétoldalú kapcsolat esetében az érintkezési feszültség irányára, nagyságára nincs korlátozás. A nem ideális kétoldalú kapcsolatokkal ragasztásoknál találkozhatunk. Amíg az érintkezési feszültség értéke nem haladja meg a ragasztás által biztosított maximális „adhéziós feszültséget”, a kapcsolat kétoldalú marad, nagyobb feszültségeknél a testek korábban együttmozgó pontjai már elválnak egymástól.

Egyoldalú kapcsolatoknál súrlódásos és súrlódás nélküli eseteket különböztetünk meg.

Áttekintve a téma kutatásának történetét és gazdag irodalmát, azt látjuk, hogy a testek közötti érintkezési kölcsönhatás tisztázása már régóta a kutatás központjában áll a mechanikában. Az első HERTZ által elvégzett vizsgálat óta [1] közel egy évszázad telt el. A HERTZ által kidolgozott elmélet az érintkezési tartomány kis méretét tételezi fel a test többi méretéhez képest.

* A Műszaki Mechanikai Bizottság 1979. február 21-i ülésén elhangzott beszámoló.

** Dr. Páczelt István, Nehézipari Műszaki Egyetem, Mechanikai Tanszék, Egyetemváros, 3515 Miskolc

Ennek ellenére, számos, gépészeti problémánál jelentkező érintkezési feladat tisztázására nyílt lehetőség [2], [3].

Az érintkezési feladatokkal kapcsolatos újabb keletű kutatások a 30-as években kezdődtek el. Így STAERMANN [4], GALIN [5], LURJE [6], MUSZHELIS-VILI [7] jelentősen előrevitték a térbeli és síkbeli rugalmasságtan problémáinak megoldását.

A rugalmasságtanban találjuk a legkidolgozottabb érintkezési feladatokat. Jóval kevesebb munka született az érintkezéssel kapcsolatos peremérték-feladatok megoldására a képlékenységtanban, a visco-rugalmasságtanban, éppen az anyag bonyolult törvények szerinti viselkedése miatt.

A különféle típusú érintkezési feladatok megoldására szolgáló módszerekről ad igen részletes átfogó képet az 1976-ban megjelent, az irodalmi jegyzékben [8] alatti monográfia.

Széles körű alkalmazásra találtak a komplex változós függvényekre alapozott módszerek [5], [7], a szinguláris integrál egyenletek, Wiener–Hopf-féle módszer [9], a duál integrálegyenletekre vezető eljárások [10], a különféle aszimptotikus módszerek [11], és végezetül a vegyes peremérték feladatnak végtelen számú algebrai egyenletrendszeren keresztül történő megoldási módszerei.

Amíg a HERTZ által publikált munka 1882-ben jelent meg, addig az érintkezési feladattal kapcsolatos variációs elvet SIGNORINI csak 1959-ben fogalmazta meg [12]. Feltételezte, hogy a rugalmas test, felületének egy szakaszán merev testtel, súrlódás nélkül úgy érintkezhetik, hogy az említett felületek a terhelés hatására el is válhatnak egymástól. Ezt az elméletet FICHERA fejlesztette tovább [13], aki a rugalmas súrlódás nélküli érintkezési feladatmegoldás létezésének és egyértékűségének bizonyítását is elvégezte. A Coulomb-féle súrlódás feltételezésével megfogalmazható érintkezési feladattal elsőként, a DUVAT–LIONS szerzőpáros által írt könyv foglalkozik [14]. Megadják a megoldás unicitásait és existenciáját abban az esetben, amikor az érintkezési feszültség érintőleges összetevő abszolút értékének felső határa (a normál-feszültség súrlódási tényezővel történő szorzata) előzetesen ismert. Úgy tűnik, nincs kidolgozva olyan variációs elv, amely eme korlátozással nem számolna.

A visco-rugalmasságtani érintkezési feladatok megoldásának létezését, egyértékűségét DUVAT [15] és BOUCHER [16] bizonyították.

A fentiekben említett munkák a problémát a funkcionálanalízis eszközeivel tárgyalják, nem térnek ki arra az esetre, amikor az érintkezésben álló mindkét test rugalmas, továbbá nem foglalkoznak a variációs elvekre alapozott számítástechnikai módszerek realizálásának kérdéseivel. A rugalmas testek közötti normális (súrlódás nélküli) érintkezési feladatok megoldására szolgáló variációs elvekkel a [17–21] munkák foglalkoznak.

Az érintkezési feladatok osztályozásáról, megoldatlan problémáiról adnak áttekintést KALKER munkái [22], [23], míg normális érintkezési feladatok közelítő megoldásával kapcsolatos munkákról a [19] munka ad áttekintést.

1. A peremértékfeladat megfogalmazása

Vizsgáljunk egy két rugalmas testből (elemből) felépített szerkezetet. A V^e térfogatú e jelű testet S^e felület határolja. Mindenütt a V^e térfogaton \mathbf{q}^e térfogaton megoszló terhelés, az S_p^e felületen adott \mathbf{p}^0 sűrűségű felületi terhelés működik, míg S_u^e felületen ismert az \mathbf{u}^0 elmozdulás. Az S^e felület megmaradó részén az e jelű test a szomszédos testtel érintkezhetik. A felület ezen részét jelölje S_c^e , amelyet a továbbiakban az e -ik test *szóba jöhető érintkezési tartományának* fogunk nevezni.

Kis elmozdulást és alakváltozást feltételezve az érintkezés — rés (elválás) feltételét annak figyelembevételével, hogy az S_c^e ($e = 1, 2$) felületek terheletlen állapotban a viszonyítási koordinátarendszerben közel azonos függvény-nyel jellemezhetőek, az alábbiak szerint fogalmazhatjuk meg.

Az érintkező testek S_c^e felületén levő pontjait párba állítjuk (a párt a testek egy-egy pontja alkotja), majd ezen pontok elmozdulását vagy annak bizonyos (pl. normális irányú) komponensét szemléljük az alakváltozás folyamán. A továbbiakban feltételezzük, hogy e pontok az alábbi szabály szerint vannak párba állítva:

Az 1-es test S_c^1 felületén levő Q_1 pontnak a 2-es testen levő Q_2 pontbeli párját, a Q_1 -ben vett \mathbf{n}^1 felületi normális által a 2-es test S_c^2 felületéből kidőftt pont alkotja. Mivel az S_c^1 és S_c^2 felületek pontjai egymásnak megfelelői, a jelölések egyszerűsítése érdekében az S_c^e felületeket egyszerűen Ω -val fogjuk jelölni.

Az alakváltozás után az S_c^e ($e = 1, 2$)¹ felületek közötti \mathbf{n}^1 irányban mért távolság

$$y(x) \stackrel{\text{def}}{=} u_N^2(x) - u_N^1(x) + h(x) \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

összefüggéssel jellemzett, ahol

$$u_N^e = \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{u}^e, \quad (1.2)$$

$h(x)$ — a Q_1, Q_2 pontok közötti távolságot, a kezdeti hézagot jelöli, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ pedig térbeli koordinátát jelöl.

Érintkezés lép fel, ha áll az

$$y = 0 \quad x \in \Omega_p \quad (1.3)$$

geometriai feltétel, és rés van jelen, ha

$$y(x) > 0. \quad x \in \Omega_0 \quad (1.4)$$

Az előzetesen nem ismert Ω_p érintkezési és Ω_0 rés tartományok kielégítik az $\Omega = \Omega_0 + \Omega_p$ feltételt. Itt meg kell jegyezni, hogy az Ω tartományon kívüli

¹ Az e index a továbbiakban 1 és 2 értéket vesz fel. A vektorokat, tenzorokat kövér betűvel, a skaláris és vektoriális szorzást „ \cdot ”, „ \times ”-al jelöljük.

pontokban $y(x) > 0$ $x \in \Omega$ feltételnek kell teljesülnie. Ez a feltétel az érintkezési feladat megoldásakor az Ω „szóba jöhető érintkezési tartomány” helyes kijelölésének ellenőrzésére ad lehetőséget.

Egyoldalú kapcsolatnál az 1-es testre ható érintkezési feszültség rés esetében zérus, vagyis

$$\mathbf{p}(x) = \mathbf{0}, \quad x \in \Omega_0 \quad (1.5)$$

míg érintkezéskor

$$\mathbf{p}(x) = -p_N \mathbf{n}^1 + \mathbf{p}_T \quad x \in \Omega_p \quad (1.6)$$

összefüggéssel jellemzett, ahol $p_N \geq 0$ érintkezési nyomás, \mathbf{p}_T a \mathbf{p} vektor érintőleges összetevője.

Abban az esetben, ha

$$\mathbf{p}_T \equiv \mathbf{0}, \quad (1.7)$$

akkor *súrlódás nélküli ún. normális érintkezési feladatról* beszélünk.

Súrlódás esetében, amennyiben az 1-es test pontjainak a 2-es-hez képesti sebessége

$$\mathbf{v}(x) \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{p}_T(x) \neq \mathbf{0}, \quad x \in \Omega \quad (1.8)$$

teljes adhézióról beszélünk.

Coulomb-féle súrlódásnál, $y(x) = 0$, $\mathbf{v}(x) = \mathbf{0}$ esetében az adhéziós tartományt találjuk, ahol

$$|\mathbf{p}_T(x)| \leq \mu p_N(x), \quad x \in \Omega_a \quad (1.9)$$

míg $y(x) = 0$, $\mathbf{v}(x) \neq \mathbf{0}$ -nál csúszás lép fel, amikor is

$$\mathbf{p}_T(x) = -\mu p_N(x) \frac{\mathbf{v}(x)}{|\mathbf{v}(x)|} \quad x \in \Omega_s. \quad (1.10)$$

Itt $\Omega_p = \Omega_a + \Omega_s$, illetve az $y(x) > 0$ esetében az Ω_0 rés tartományt kapjuk meg. Vagyis súrlódás esetében az Ω tartomány csúszási, adhéziós és rés tartományokra bomlik fel, míg súrlódás nélküli esetben érintkezési és réstartományokat különböztetünk meg. Mivel mindkét fajtájú érintkezésnél az említett tartományok előzetesen ismeretlenek és általában bonyolult alakúak, a klasszikus megoldási módszerek meghatározásukra alkalmatlanok.

Az érintkezési feladat megoldásakor testenként három, egymással kapcsolatban álló mezőt keresünk: az \mathbf{u}^e elmozdulási, a \mathbf{T}^e , \mathbf{A}^e feszültségi és alakváltozási tenzormezőket.

A feszültségi tenzormező köteles kielégíteni a

$$\nabla \cdot \mathbf{T}^e + \mathbf{q}^e = \mathbf{0}, \quad x \in V^e \quad (1.11)$$

egyensúlyi egyenletet —, az

$$\mathbf{n}^e \cdot \mathbf{T}^e = \mathbf{p}^0, \quad \mathbf{x} \in S_p^e \quad (1.12)$$

dinamikai peremfeltételt, az elmozdulásmező az

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^0 \quad \mathbf{x} \in S_u^e \quad (1.13)$$

kinematikai peremfeltételt; továbbá fennáll az¹

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^e \nabla) = \mathbf{A}^{eT}, \quad \mathbf{x} \in V^e \quad (1.14)$$

geometriai egyenlet, a

$$\mathbf{T}^e = \mathbf{C}^e \dots \mathbf{A}^e; \quad \mathbf{A}^e = \mathbf{C}^{e-1} \dots \mathbf{T}^e \quad (1.15)$$

anyagegyenlet, ahol \mathbf{C}^e — az anyagállandók 4-rendű tenzora. Az Ω tartományban a testek közötti kapcsolat fajtájától függően fennállnak:

Kétoldalú kapcsolatnál az

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{T}^1 + \mathbf{n}^2 \cdot \mathbf{T}^2 &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1 + \mathbf{h} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.16a, b)$$

dinamikai és kinematikai illesztési egyenletek (\mathbf{h} — az elmozdulásmezőben fennálló szakadás pl. túlfedésből adódó), *egyoldalú kapcsolatnál, súrlódás nélküli* esetben a normál feszültségek vonatkozásában

$$\begin{aligned} \sigma_N^1 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{T}^1 \cdot \mathbf{n}^1 = -p_N \leq 0 & \mathbf{x} \in S_c^1, \\ \sigma_N^2 &\stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{n}^1 \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = -p_N \leq 0 & \mathbf{x} \in S_c^2, \end{aligned}$$

azaz

$$\sigma_N^1 = \sigma_N^2, \quad \sigma_N^1 \leq 0, \quad \sigma_N^2 \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.17)$$

a dinamikai illesztési feltétel, míg a súrlódás hiánya miatt az érintőleges irányú feszültségek

$$\mathbf{p}_T^e = \mathbf{T}^e \cdot \mathbf{n}^e \pm \sigma_N^e \mathbf{n}^1 = \mathbf{0}, \quad \tau^e \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{p}_T^e|, \quad \begin{cases} e = 1 \\ e = 2 \end{cases} \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (1.18)$$

A kinematikai illesztési feltétel

$$\gamma(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_i \quad (1.19)$$

¹ T felső index a transzponálás jele, ∇ -Hamilton-féle differenciáloperátort, „ $\cdot \cdot$ ” kétszeres skalárszorozást jelöl.

ami azt a tényt fejezi ki, hogy a testek egymásba akadálytalanul nem hatolhatnak be. Ugyanakkor, ha az Ω tartomány tetszőleges pontjában érintkezés lép fel, akkor

$$y(x) = 0, \quad p_N(x) > 0, \quad x \in \Omega_p, \quad (1.20a, b)$$

és ha rés van, akkor

$$y(x) \geq 0, \quad p_N(x) = 0, \quad x \in \Omega_0, \quad (1.21a, b)$$

vagyis

$$y(x) p_N(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.22)$$

ahol $\Omega = \Omega_0 + \Omega_p$, Ω_0 , illetve Ω_p tartományok előzetesen nem ismeretesek. Az érintkezés és rés tartományát az

$$y(x) = 0, \quad p_N(x) \geq 0, \quad x \in \Omega'_p \quad (1.23a, b)$$

$$y(x) > 0, \quad p_N(x) = 0, \quad x \in \Omega'_0 \quad (1.24a, b)$$

feltétellel is megadhatjuk. Az utóbbi abban különbözik az előzőtől, hogy az érintkezési és rés tartományok határát ($y = 0, p_N = 0$) az elválási tartományról az érintkezési tartományhoz csatolja. Természetesen itt is igaz, hogy $\Omega = \Omega'_0 + \Omega'_p$.

Coulomb-féle súrlódás esetében az (1.9)–(1.10) alatti feltételek állnak fenn.

2. Variációs elvek alkalmazása normális érintkezési feladatok megoldására

A variációs elveket oly módon építjük fel, hogy feltételezzük: 1. a keresett mezők testekként, illetve azon belül egymástól függetlenek; 2. a választott elvtől függően követeljük meg előre – „a priori” – a perem-, illesztési – feltételek és mezőegyenletek kielégítését; 3. a \mathbf{T}^e és \mathbf{A}^e tenzorok szimmetricitását eleve adottnak vesszük.

Ha a mező kielégíti a neki megfelelő mezőegyenletet (ME) vagy a perem-, illesztési feltételt (PF), (IF) akkor *kötöttnek* nevezzük, ellenkező esetben szabadnak a ME, PF és IF vonatkozásában. Röviden *szabad egyenletnek* fogjuk nevezni mindazokat a ME–IF-eket, amelyek „a priori” nem voltak kielégítve.

Ismeretes, hogy egyetlen elemből álló szerkezet esetében ($N = 1$) a *szabad, egymástól független* \mathbf{T} és \mathbf{u} mezőkre alapozott számításnál a

$$\begin{aligned} \Pi_R = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = & \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V^e} [\mathbf{T} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) - U(\mathbf{T}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}] dV \right. \\ & \left. - \int_{S_3^e} \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{u} dS - \int_{S_4^e} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) dS \right\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Reissner-féle funkcionál stacionaritása szükséges és elégséges feltétel a megfelelő szabad egyenletek „előállítására”, és az azokat kielégítő mezők valódiságára. Itt $U(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = U(\mathbf{u})$ az alakváltozási energiasűrűség.

A ME és dinamikai PF szempontjából kötött \mathbf{T} mező esetében a

$$\Pi_c = \Pi_c(\mathbf{T}) = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V^e} U(\mathbf{T}) dV - \int_{S_e^i} \mathbf{u}^0 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dS \right\} \quad (2.2)$$

kiegészítő energiára alapozott minimum elv, míg kinematikai PF szempontjából kötött elmozdulásmező esetében a

$$\Pi_p = \Pi_p(\mathbf{u}) = \sum_{e=1}^N \left\{ \int_{V^e} [U(\mathbf{u}) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{u}] dV - \int_{S_p^e} \mathbf{p}^0 \cdot \mathbf{u} dS \right\} \quad (2.3)$$

potenciális energiára alapozott minimum elv segítségével állítható elő a megoldás.

Kérdésként merül fel, hogyan kell módosítani a fenti klasszikus variációs elveket a normális érintkezési feladatok megoldása számára? A kérdésre adott választ az alábbi gondolattal vezethetjük be.

Először is tisztázzuk, miként módosul a Reissner-féle elv akkor, ha súrlódás nélküli kétoldalú kapcsolatot tételezünk fel az Ω tartomány mentén, majd megkeressük azokat a variációs feltételeket, amelyekkel ugyanez a funkcionál biztosítja az (1.17), (1.20)–(1.22) érintkezési—elválási feltételeket. Ha az egyoldalú kapcsolatból származó korlátozást elvetjük, akkor a kapott funkcionálnak biztosítania kell a már említett kétoldalú kapcsolathoz tartozó érintkezési feladat megoldását is. Látni fogjuk, hogy a bemutatásra kerülő modifikált Reissner-féle elvből a mezőkre kirótt kötöttségek mértékétől függően számos más elv könnyen levezethető.

2.1 Érintkezési feladat tárgyalása súrlódás nélküli kétoldalú kapcsolat esetében

Kétoldalú kapcsolatnál $y \equiv 0$, $x \in \Omega$. Ezt a feltételt, az elmozdulásmezőre kirótt megkötés nélkül, Lagrange-féle multiplikatőr (LM) segítségével kívánjuk figyelembe venni. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (3.1) funkcionálhoz a $-\int_{\Omega} \lambda \cdot \mathbf{y}(\mathbf{u}) dS$ integrált hozzáadva a kapott

$$L = L(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda) = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} \lambda y dS \quad (2.4)$$

funkcionál stacionér helyzete szolgáltatja az összes szabad egyenletet.

Valóban, a

$$\delta L = \delta_T L + \delta_n L + \delta_\lambda L = 0 \quad (2.5)$$

egyenlet értelmében, ahol δ_x — az x mező szerinti első variációt jelenti, azt kapjuk, hogy

$$\delta_T L = \sum_{e=1}^2 \left\{ \int_{V^e} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{A}(\mathbf{u})) \cdot \delta \mathbf{T} dV \right. \\ \left. \text{(Hooke-törvény),} \right.$$

$$\left. + \int_{S_i^e} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{T} \cdot (\mathbf{u}^0 - \mathbf{u}) dS \right\} = 0 \quad (2.6a, b) \\ \text{(kinematikai PF),}$$

$$\delta_n L = \sum_{e=1}^2 \left\{ - \int_{V^e} (\nabla \cdot \mathbf{T} - \mathbf{q}) \cdot \delta \mathbf{u} dV \right. \\ \left. \text{(egyensúlyi egyenlet),} \right.$$

$$\left. + \int_{S_p^e} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{p}^0) \cdot \delta \mathbf{u} dS \right. \\ \left. \text{(dinamikai PF),} \right.$$

$$\left. + \int_{S_i^e} \tau \delta u_T dS \right\} \\ \text{(súrlódásmentesség feltétele),}$$

$$\left. + \int_{S^e} (\sigma_N^1 + \lambda) \delta u_N^1 dS \right. \\ \left. - \int_{S_i^e} (\sigma_N^2 + \lambda) \delta u_N^2 dS = 0 \right. \quad (2.6c-g) \\ \left. \text{(dinamikai illesztési feltétel),} \right.$$

$$\delta_\lambda L = - \int_{\Omega} \delta \lambda (u_N^2 - u_N^1 + h) dS = 0 \quad (2.6e)$$

(kétoldali kapcsolat geometriai feltétele surlódásmentes esetben),

ahonnan az egyes integráloknál szereplő mezők egymástól független variálásokból adódóan nyerjük a zárójelbe írt egyenleteket, feltételeket. Látható az is, hogy az (1.16a) vektoregyenlet normális irányú skalár egyenlete helyett a

$$\sigma_N^1 + \lambda = 0, \quad \sigma_N^2 + \lambda = 0 \quad (2.7a, b)$$

egyenleteket kaptuk, vagyis a λ multiplikátor, mint normálfeszültség, átviteli szerepet tölt be a σ_N^e feszültségek között.

2.2 Módosított Reissner-féle variációs elvek alkalmazása

2.2.1 Első elv

Az egyoldalú kapcsolatból következik, hogy

$$\lambda = -\sigma_N^1 = -\sigma_N^2 \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Mivel a σ_N^e -t a \mathbf{T}^e tenzorból állítjuk elő, és ennek előjelét nem egyszerű közvetlenül biztosítani, ismét az Ω tartomány felett értelmezett Lagrange-féle szorzót alkalmazzuk. Ezt, a nem negativitási követelményeket kielégítő mezőt, ami az érintkezési nyomásnak felel meg, a továbbiakban p_N helyett p -vel fogjuk jelölni. Ily módon a (2.4) helyett az

$$L_R^p = L_R^p(\mathbf{T}, \mathbf{u}, p) = \Pi_R - \int_{\Omega} p \cdot \gamma(\mathbf{u}) dS, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (2.8)$$

funkcionálra alapozva új variációs elv fogalmazható meg. A tényleges \mathbf{T}^e , \mathbf{u}^e mezők és az átviteli szerepet betöltő p kielégítik az alábbi variációs egyenleteket—egyenlőtlenséget

$$\delta_{\mathbf{T}} L_R^p = 0, \quad \delta_{\mathbf{u}} L_R^p = 0, \quad \delta_p L_R^p \leq 0 \quad (2.9a-c)$$

azzal a feltétellel, hogy $p \geq 0$, vagyis rövidebben

$$\delta_p L_R^p \leq 0, \quad p \geq 0\text{-nál.} \quad (2.10)$$

A (2.9a)-ból következik (1.13), (1.15), [(2.6a, b)]; (2.9b)-ből $\lambda = p$ helyettesítéssel (2.7), (1.11), (1.12), (1.18) [2.6c-g]; míg (2.9c)-ből

$$\delta_p L_R^p = - \int_{\Omega} \delta p \cdot \gamma dS \leq 0$$

alapján, $p > 0$ esetén $\rightarrow \delta p$ tetszőleges ($p + \delta p > 0$) és $\gamma = 0$, míg $p = 0$ esetében $\rightarrow \delta p \geq 0$ és $\gamma \geq 0$, vagyis

$$p \geq 0, \quad \gamma \geq 0, \quad p\gamma = 0 \quad x \in \Omega.$$

azaz megkaptuk az (1.20)–(1.22) érintkezési—elválasztási feltételeket.

Bizonyítható, hogy a szabadegyenleteknek a (2.6) alatt feltüntetett variált mezőkkel való szorzása és azoknak térfogaton, illetve megfelelő felületen vett integrálja a $\delta_{\mathbf{T}} L_R^p = 0$, $\delta_{\mathbf{u}} L_R^p = 0$ egyenletet adja.

Az (1.20a), (1.21a) alatti tagokat δp -vel megszorozva és azokat az Ω_p és Ω_0 felületeken integrálva, arra a következtetésre jutunk, hogy ezek az integ-

rálok nem lehetnek negatívak, mivel Ω_p felett δp tetszőleges értéket ($p + \delta p > 0$) vehet fel, míg Ω_0 felett $\delta p \geq 0$, a p -re vonatkozó feltételből adódóan. Összegezve ezeket az integrálokat a $-\delta p L_R^p \leq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk.

Vagyis a $\delta L_R^p \leq 0$ feltétel szerint vett variáció $p \geq 0$, $x \in \Omega$ mellett, szükséges és elégséges feltételt ad a megfelelő egyenletek valódiságára.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ha a tényleges mezőkhöz tartozó funkcionál értékét $L_R^{pT} = L_R^{pT}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, p \geq 0)$ -vel jelöljük, akkor a $\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{T} + \delta \mathbf{T}$, $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$, $\bar{p} = p + \delta p$ lehetséges mezők esetében az L_R^p funkcionál értéke az alábbi egyenlőtlenséget elégíti ki

$$L_R^p(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{u}, \bar{p} \geq 0) \leq L_R^{pT} = L_R^p(\mathbf{T}, \mathbf{u}^*, p \geq 0),$$

vagyis az L_R^p funkcionál a $\bar{\mathbf{T}}$ és \bar{p} vonatkozásában, maximummal rendelkezik a \mathbf{T} , \mathbf{u} , p pontban, míg tényleges \mathbf{T} és $p \geq 0$, $x \in \Omega$ mezők esetén az \mathbf{u}^* lehetséges mezőnél az L_R^p értéke azonos a tényleges mezőkhöz tartozó értékkel.

2.2.2 Második elv

Az Ω tartomány felett értelmezett testek közötti y rés mezőnek, mint multiplikátor mezőnek a felhasználásával egy új variációs elv fogalmazható meg. Nevezetesen (2.8)-ban p -t helyettesítve $-\sigma_N^e$ -el, majd hozzáadva $-\int_{\Omega} \hat{y} \sigma_N^e dS$ integrált, ahol $\hat{y} \geq 0$ — multiplikátor, az

$$\begin{aligned} L_R^y &= L_R^y(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \hat{y}) \\ &= \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) + \begin{cases} \int_{\Omega} \sigma_N^1 \cdot (u_N^2 - u_N^1 + h - \hat{y}) dS \\ \int_{\Omega} \sigma_N^2 \cdot (u_N^2 - u_N^1 + h - \hat{y}) dS \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11a, b)$$

funkcionál

$$\delta_{\mathbf{T}} L_R^y = 0, \quad \delta_{\mathbf{u}} L_R^y = 0, \quad \delta_{\hat{y}} L_R^y \geq 0, \quad (2.12a-c)$$

$\hat{y} \geq 0$, $x \in \Omega$ mellett variációja szolgáltatja a szabad egyenleteket: (1.13), (1.15), $y = u_N^2 - u_N^1 + h$; (1.7), (1.11), (1.12), $\sigma_N^1 = \sigma_N^2$; továbbá (2.12c) feltételből adódóan

$$\text{ha } \hat{y} = 0, \text{ akkor } \delta \hat{y} \geq 0 \rightarrow \sigma_N^e \leq 0 \quad x \in \Omega'_p$$

$$\text{ha } \hat{y} > 0, \text{ akkor } \delta \hat{y} \text{ tetszőleges } (y + \delta y > 0) \rightarrow \sigma_N^e = 0 \quad x \in \Omega'_0$$

vagyis

$$\hat{y} \geq 0, \quad \sigma_N^e \leq 0, \quad \hat{y} \sigma_N^e = 0 \quad x \in \Omega$$

azaz megkaptuk az (1.22)–(1.24) alatti érintkezési-elválási feltételeket.

Igazak a következő egyenlőtlenségek is:

$$L_R^y(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{u}, \hat{y} \geq 0) \leq L_R^{yT} \begin{cases} \leq L_R^y(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \hat{y}^* \geq 0) \\ = L_R^y(\mathbf{T}, \mathbf{u}^*, \hat{y} \geq 0) \end{cases}$$

A fenti két elvnl, az érintkezési-elválási feltételekben szereplő egyenlőtlenségeket, pótlólagos — az eredeti peremérték-feladatban nem szereplő — mezők felvételével, közvetett úton elégítettük ki.

Alkalmazásukat, approximálásuk egyszerűsége teszi indokolttá. Ezeket az elveket módosított Reissner-féle *hibrid variációs elveknek* nevezhetjük. Amennyiben pótlólagos mezőket nem vesszük fel, úgy két lehetőség kínálkozik az érintkezési feladat tárgyalására. Első esetben a \mathbf{T}^e mezőktől követeljük meg az Ω tartományon a $\sigma_N^1 \leq 0$ vagy $\sigma_N^2 \leq 0$ feltétel kielégítését, a második esetben az \mathbf{u}^e elmozdulás mezőknek az $y = u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0$ feltételt kell kielégíteniük.

2.2.3 Harmadik elv

A kérdéses funkcionál az első elvnl alkalmazottból oly módon vezethető le, hogy a p helyett — σ_N^e -et írunk, vagyis

$$\begin{aligned} L_R^\sigma &= L_R^\sigma(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = \\ &= \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) + \begin{cases} \int_{\Omega} \sigma_N^1 y \, dS \\ \int_{\Omega} \sigma_N^2 y \, dS \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13a, b)$$

A (2.13)-ra alapozott variációs elvnl, a variálás szabálya

$$\delta_{\mathbf{u}} L_R^\sigma = 0, \quad \delta_{\mathbf{T}} L_R^\sigma \leq 0 \quad a \left\{ \begin{array}{l} \sigma_N^1 \leq 0 \\ \sigma_N^2 \leq 0 \end{array} \right\}, \quad x \in \Omega \text{ feltétel mellett.}$$

Érdekes tényként jelenik meg, hogy egyidejűleg a σ_N^1 és σ_N^2 negativitását és azok egyenlőségét nem kell előírni.

A tényleges mezőkhöz tartozó megoldás környezetében áll

$$L_R^\sigma(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{u}) \leq L_R^{\sigma T} = L_R^\sigma(\mathbf{T}, \mathbf{u}^*), \quad (2.14)$$

vagyis a \mathbf{T}, \mathbf{u} pontban az L_R^σ elfajult típusú nyeregponttal rendelkezik.

2.2.4 Negyedik elv

Könnyen belátható, hogy amennyiben a $\sigma_N^1 = \sigma_N^2 = \sigma_N \leq 0$, $x \in \Omega$ feltételt biztosítani tudjuk, úgy a (2.13) alatti funkcionálból kiindulva, a benne szereplő $\int_V \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{u}) dV$ térfogati integrál Gauss–Osztrogradszkij-féle tétellel történő átalakítása révén nyert

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_R &= \tilde{\Pi}_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) = \\ &= -\Pi_c(\mathbf{T}) - \sum_{e=1}^2 \left(\int_{V^e} (\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Omega} \tau^e \cdot \mathbf{u}_T^e dS - \right. \\ &\quad \left. - \int_{S^e} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{p}^0) \cdot \mathbf{u} dS \right) + \int_{\Omega} \sigma_N h dS \end{aligned} \quad (2.15)$$

funkcionál $\delta_{\mathbf{u}} \tilde{\Pi}_R = 0$, $\delta_{\mathbf{T}} \tilde{\Pi}_R \leq 0$ egyenlet-egyenlőtlenségek szerinti variációja csakis és csakis akkor áll fenn, ha a \mathbf{T}^e , \mathbf{u}^e mezők a tényleges mezők. Ebben az esetben is érvényben van a (2.14) alatti egyenlőtlenség.

2.2.5 Ötödik elv

A (2.11)-ben megkövetelve az $y = u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0$ feltétel teljesedését, az érintkezési feladat megoldását a $\Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u})$ funkcionál

$$\delta_{\mathbf{T}} \Pi_R = 0, \quad \delta_{\mathbf{u}} \Pi_R \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.16)$$

szabály szerinti variálása szolgáltatja. A tényleges mezők kielégítik a (2.16) egyenletet és egyenlőtlenséget.

Ebben az esetben

$$\Pi_R(\bar{\mathbf{T}}, \mathbf{u}) \leq \Pi_R^T \leq \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}^*) \quad (2.17)$$

vagyis a \mathbf{T} , \mathbf{u} pont, nyeregpont.

A fenti elvekről ad összefoglaló áttekintést az 1. táblázat.¹

2.3 Módosított kiegészítő energiára alapozott variációs elvek

A fentiekben bemutatott elvekből kiindulva a \mathbf{T}^e mezőkre kirótt kötöttségektől függően az alábbi variációs elvek fogalmazhatók meg.

¹ Ennél és a többi táblázatnál is, a táblázatban feltüntetett mezők a lehetséges mezők. A jelölések egyszerűsítése céljából elhagytuk a $\bar{\mathbf{T}}$, \mathbf{u}^* stb. jelöléseket. Mindazok a lehetséges mezők, amelyek kielégítik az ehhez tartozó variációs egyenlet-egyenlőtlenségeket, egyúttal tényleges mezők.

1. táblázat

Normális érintkezési feladatok megoldására szolgáló módosított Reissner-féle variációs elvek

ELV	Funkcionál	Mezők és azok kötöttségei	Variációs egyenletek—egyenlőtlenségek		
1	$L_R^p = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} p(u_N^* - u_N + h) dS$	$\mathbf{T}^e, \mathbf{u}^e$ $\mathbf{A}^e = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^e \nabla)$ $e = 1, 2$	$p \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{T}} L_R^p = 0$	$\delta_p L_R^p \leq 0$
2	$L_R^y = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \sigma_N^e (u_N^* - u_N + h - \hat{y}) dS$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$		$\hat{y} \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} L_R^y = 0$	$\delta_{\hat{y}} L_R^y \geq 0$
3	$L_R^e = \Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u}) + \int_{\Omega} \sigma_N^e (u_N^* - u_N + h) dS$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$		$\sigma_N^e \leq 0$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} L_R^e = 0$	$\delta_{\mathbf{T}} L_R^e \leq 0$
4	$\tilde{\Pi}_R = -\Pi_c(\mathbf{T}) - \sum_{e=1}^2 \left\{ \int_{V_e} (\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u} dV \right.$ $\left. - \int_{\Omega} \tau^e u_T^e dS - \int_{S_p^e} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{p}^0) \cdot \mathbf{u} dS \right\} + \int_{\Omega} \sigma_N h dS$		$\sigma_N = \sigma_N^*$ $= \sigma_N^*$ ≤ 0 $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} \tilde{\Pi}_R = 0$	$\delta \tilde{\Pi}_R \leq 0$
5	$\Pi_R(\mathbf{T}, \mathbf{u})$		$u_N^* - u_N$ $+ h \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{T}} \Pi_R = 0$	$\delta_{\mathbf{u}} \Pi_R \geq 0$

2.3.1 Hatodik elv

A (2.8) alatti funkcionált Gauss—Osztrogradszkij-féle integrál átalakítási tétel segítségével átalakítva, majd megkövetelve \mathbf{T}^e -től az egyensúlyi egyenlet, a dinamikai PF és az (1.18) alatti feltétel kielégítését, a 2. táblázat L_C^p funkcionáljához jutunk, amelyben w^e — a normális irányú elmozdulásokat helyettesítő Lagrange-féle multiplikátor mező.

A tényleges mezők kielégítik a táblázatban feltüntetett variációs feltételeket az ott felsorolt mezőkre vonatkozó kötöttségek mellett.

2.3.2 Hetedik elv

Előző elvben a σ_N^e feszültségek negativitását a p mezőn keresztül biztosítottuk. Az L_R^y analógiája alapján, a σ_N^e mezők negativitását \hat{y} mező segítségével biztosítva, a 2. táblázat L_C^y funkcionáljára alapozott variációs elvhez jutunk.

2.3.3 Nyolcadik elv

Az érintkezési nyomás pozitivitását a \mathbf{T}^e tenzoroktól megkövetelve, a p , illetve \hat{y} multiplikátorok feleslegessé válnak. Ekkor, ha σ_N^1 és σ_N^2 azonosságát „a priori” nem teljesítjük, úgy az L_C^y funkcionálban az utolsó tag elhagyásával kapott L_C^e (lásd 2. táblázat) funkcionálra alapozva tisztázhatók az érintkezési-elválási tartományok, továbbá levezethetők a szabad egyenletek.

2.3.4 Kilencedik elv

Amennyiben $\sigma_N^1 = \sigma_N^2 = \sigma_N \leq 0$ feltételt biztosítani tudjuk a nyolcadik elvnél megfogalmazottakon kívül, úgy az érintkezési feladat megoldása során, keressük a

$$\tilde{\Pi}_c = -\Pi_c(\bar{\mathbf{T}}) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_N h dS \quad (2.18)$$

maximumát a $\delta_{\mathbf{T}} \tilde{\Pi}_c \leq 0$ egyenlőtlenség által meghatározott pontban a $\nabla \cdot \bar{\mathbf{T}}^e + \mathbf{q}^e = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in V^e$, $\mathbf{n}^e \cdot \bar{\mathbf{T}}^e = \mathbf{p}^0$, $\mathbf{x} \in S_p^e$, $\bar{\sigma}_N = \bar{\sigma}_N^1 = \bar{\sigma}_N^2 \leq 0$, $\bar{\tau}^e = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega$ feltételek „a priori” kielégítése mellett, mivel áll a

$$\tilde{\Pi}_c(\bar{\mathbf{T}}) \leq \tilde{\Pi}_c(\mathbf{T}) \quad (2.19)$$

egyenlőtlenség.

2.3.5 Tizedik elv

Gyakran lehetőség kínálkozik a Green-függvény pontos előállítására: a 2-es jelű testnél, adott támaszok mellett, míg az 1-es testnél, — amely merevtest-szerű mozgást is végezhet — az Ω tartománytól távoli kis felületen ható fiktív támasz mellett.

2. táblázat

Normális érintkezési feladattal kapcsolatos módosított kiegészítő energiára alapozott variációs elvek

ELV	Funkcionál	Mezők és azok kötöttségei		Variációs egyenletek—egyenlőtlenségek	
6	$L_C^p = -\Pi_c(\mathbf{T}) - \int_{\Omega} [ph - w^i(p + \sigma_N^i) + w^j(p + \sigma_N^j)] dS$	\mathbf{T}^e, w^e	$p \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{T}} L_C = 0$	$\delta_p L_C^p \leq 0$
7	$L_C^y = -\Pi_c(\mathbf{T}) + \int_{\Omega} [\sigma_N^e h + (\sigma_N^j - \sigma_N^i) w^j - \hat{y} \sigma_N^e] dS$ $(e = 1, j = 2)$ $(e = 2, j = 1)$	Hooke törvény $\nabla \cdot \mathbf{T}^e + \mathbf{q}^e = \mathbf{0},$ $x \in V^e$	$\hat{y} \geq 0$ $x \in \Omega$		
8	$L_C^{\sigma} = -\Pi_c(\mathbf{T}) + \int_{\Omega} [\sigma_N^e h + (\sigma_N^j - \sigma_N^i) w^j] dS$ $(e = 1, j = 2)$ $(e = 2, j = 1)$	$\mathbf{n}^e \cdot \mathbf{T}^e = \mathbf{p}^0, x \in S_p^e$	$\sigma_N^e \leq 0$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ $x \in \Omega$	$\delta_w L_C^{\sigma} = 0$	$\delta_{\mathbf{T}} L_C^{\sigma} \leq 0$
9	$\tilde{\Pi}_c = -\Pi_c(\mathbf{T}) + \int_{\Omega} \sigma_N h dS$	$\boldsymbol{\tau}^e = \mathbf{0}, x \in \Omega$ $e = 1, 2$	$\sigma_N = \sigma_N^i$ $= \sigma_N^j$ ≤ 0 $x \in \Omega$		
10	$L_K^p = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} p H(x, x') p' dS' dS + \int_{\Omega} p(f^1 - f^2 - h) dS$ $-\lambda_F \cdot \mathbf{F}(p) - \lambda_M \cdot \mathbf{M}(p)$	Hatásfüggvény felépíthető. λ_F, λ_M	$p \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\lambda_F, M} L_K^p = 0$	$\delta_p L_K^p \leq 0$

Az \mathbf{n}^1 irányba eső \mathbf{x}' pontbeli egységnyi erőből származó \mathbf{x} pontbeli \mathbf{n}^1 normális irányú elmozdulást $H^e(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ -el, a megtámasztott testekre ható ismert erőrendszerből származó normális irányú elmozdulást f^e -el jelölve, az érintkezési feladat vizsgálatára alkalmas funkcionál

$$\begin{aligned} L_K^p &= L_K^p(p, \lambda_F, \lambda_M) = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) (H^1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + H^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) p(\mathbf{x}') dS' dS + \\ &+ \int_{\Omega} t p dS - \lambda_F \cdot \mathbf{F} - \lambda_M \cdot \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

ahol $t = f^1 - f^2 - h$; λ_F, λ_M az 1-es test merevtestszerű elmozdulását meghatározó az origóval egybeeső pontjának elmozdulás- és szögelfordulás-vektora,

$$\mathbf{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}^0 - \int_{\Omega} \mathbf{n}^1 \cdot p dS, \quad (2.21a)$$

$$\mathbf{M} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{M}^0 - \int_{\Omega} \mathbf{R} \times \mathbf{n}^1 p dS, \quad (2.21b)$$

$[\mathbf{F}^0, \mathbf{M}^0]$ — az 1-es testre ható ismert erőrendszer origóbeli redukált vektorkettőse.

Az L_K^p funkcionálra alapozott variációs elv állítja, hogy a tényleges érintkezési nyomásmező és a λ_F, λ_M merevtestszerű elmozdulás vektorok kielégítik a

$$\delta_p L_K^p \leq 0, \quad \delta_{\lambda_F, \lambda_M} L_K^p = 0 \quad (2.22)$$

variációs egyenleteket a $p \geq 0, \mathbf{x} \in \Omega$ feltétel mellett. (2.22) értelmében fennállnak az (1.20)—(1.22) alatti feltételek, továbbá a (2.21) alatt definiált $\mathbf{F} = \mathbf{0}, \mathbf{M} = \mathbf{0}$, vagyis a merevtestszerű mozgással bíró 1-es test egyensúlyban van. A megfogalmazott elv [26] a [24], [17] féle variációs elvek általánosításának tekinthető, mivel [24]-ben $\lambda_F = \lambda_M \equiv \mathbf{0}$ -nak, [17]-ben $f^e = 0$ -nak, továbbá λ_F, λ_M adottnak volt feltételezve.

2.4 Módosított potenciális energiára alapozott variációs elvek

Az anyagtörvényt, geometriai egyenletet adottnak véve, az \mathbf{u} mezőktől a kinematikai PF kielégítését megkövetelve az L_R^p -ből kiindulva, az érintkezési feladat vizsgálatára alkalmas funkcionálok a 2.2–2.3 pontban tett gondolatoknak megfelelően levezethetők. Ezeket, és a hozzájuk tartozó 11.–13. jelű variációs elveket a 3. táblázat tartalmazza.

3. táblázat

Normális érintkezési feladatok vizsgálatára alkalmas módosított potenciális energiára alapozott variációs elvek

ELV	Funkcionál	Mezők és azok kötöttségei	Variációs egyenletek – egyenlőtlenségek	
11	$L_p^p = \Pi_p(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} p(u_N^2 - u_N + h) dS$	\mathbf{u}^e	$p \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_p L_p^p \leq 0$
12	$L_p^y = \Pi_p(\mathbf{u}) - \int_{\Omega} \sigma_N^e(u_N^2 - u_N + h - \hat{y}) dS$ $e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$	$\mathbf{u}^e = \mathbf{u}^0 \quad x \in S_u^e$ $\mathbf{A}^e = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^e + \mathbf{u}^e \nabla)$ $\mathbf{T}^e = \mathbf{C}^e \cdot \mathbf{A}^e$	$\hat{y} \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_y L_p^y \geq 0$
13	$\Pi_p(\mathbf{u})$	$e = 1, 2$	$u_N^2 - u_N + h \geq 0$ $x \in \Omega$	$\delta_{\mathbf{u}} \Pi_p \geq 0$ —

2.5 Érintkezési feladatok megoldása „variációs elvek kombinálásával”

Gyakran a peremfeltételek lehetővé teszik az egyik test elmozdulási és feszültségi állapotának pontos meghatározását. Tételezzük fel, hogy a 2-es test $H^2(x, x')$, Green-függvénye, a terhelésből származó \mathbf{n}^1 irányú f^2 elmozdulása ismert.

Ekkor a test kiegészítő energiáját (2.20) alapján a

$$\Pi_c^2(p) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\Omega} p H^2(x, x') p' dS' dS + \int_{\Omega} f^2 p dS + \text{const} \quad (2.23)$$

összefüggéssel számolhatjuk. Figyelembe véve, hogy pontos megoldásnál $\Pi_p^2(p) = -\Pi_c^2(p)$, könnyen konstruálhatók újabb variációs elvek, amelyek az érintkezési nyomás pozitivitását a felvett $p \geq 0$, $x \in \Omega$ mezőn keresztül biztosítják. A szóba jöhető elvek az 1, 6, 11-ből, a 10-nél is alkalmazott variációs szabály figyelembe vételével származtathatók le. Így például a szabad \mathbf{u}^1 és \mathbf{T}^1 mezők esetében az

$$\begin{aligned} L_R^{pH} &= L_R^{pH}(\mathbf{T}^1, \mathbf{u}^1, p) = \\ &= \Pi_R^1(\mathbf{T}^1, \mathbf{u}^1) - \Pi_c^2(p) + \int_{\Omega} p(u_N^1 - h) dS \end{aligned} \quad (2.24)$$

funkcionál

$$\delta_{\mathbf{T}, \mathbf{u}} L_R^{pH} = 0, \quad \delta_p L_R^{pH} \leq 0, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega$$

szabály szerint vett variálásával jutunk a megoldáshoz, míg \mathbf{u}^1 kinematikailag lehetséges elmozdulásmező esetében az

$$\begin{aligned} L_p^{pH} &= L_p^{pH}(\mathbf{u}^1, p) = \\ &= \Pi_p^1(\mathbf{u}^1) + \Pi_p^2(p) - \int_{\Omega} p(h - u_N^1) dS \end{aligned} \quad (2.25)$$

funkcionálból az alábbi szabály szerint nyerhetők a szabad egyenletek:

$$\delta_{\mathbf{u}} L_p^{pH} = 0, \quad \delta_p L_p^{pH} \leq 0, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.26)$$

$$\mathbf{u}^1 = \mathbf{u}^0, \quad x \in S_u^1.$$

A javasolt elvek előnyösen alkalmazhatók annak tisztázására is, hogy építmények, különféle típusú ágyazatai miként dolgoznak együtt, mivel az ágyazatok kiegészítő energiája, gyakran Green-függvény segítségével előállítható [34].

2.6 Merev elemeket tartalmazó rendszer vizsgálatára alkalmas variációs elvek

Tételezzük, hogy az 1-es test a merev. A variációs elvek szempontjából három eset különböztethető meg:

1. Ismeretes az 1-re működő külső erőrendszer (merevtestszerű mozgása ismeretlen);
2. 2-es test az 1 jelű mozdulatlan merev testre támaszkodik;
3. Az 1-es test merevtestszerű mozgása ismert.

Az 1. esetben az 1-es test egyensúlyának értelmében a (2.21) alatti $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, feltételnek kell teljesülniök. Ezeket a feltételeket az L_K^p funkcionálnál tettekhez hasonlóan λ_F , λ_M multiplikátorokkal vesszük figyelembe. Ily módon, egyik lehetséges variációs elv, az első elv módosításával az

$$\begin{aligned} L_R^p &= L_R^p(\mathbf{T}^2, \mathbf{u}^2, \lambda_F, \lambda_M, p) = \\ &= \Pi_R^2(\mathbf{T}, \mathbf{u}) - \int_{\Omega} p(u_N^2 + h) dS - \lambda_F \cdot \mathbf{F} - \lambda_M \cdot \mathbf{M} \end{aligned} \quad (2.27)$$

funkcionálra támaszkodik. Bizonyítható, hogy a tényleges mezők kielégítik a

$$\delta_{\mathbf{u}, \mathbf{T}, \lambda_F, \lambda_M} L_R^p = 0, \quad \delta_p L_R^p \leq 0, \quad p \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (2.28)$$

egyenleteket—egyenlőtlenségeket.

A fentiekben bemutatott átalakítás analógiája alapján a többi elvből is könnyen levezethetők a megfelelő funkcionálok [25].

A 2. esetben megfogalmazható variációs elvekhez tartozó funkcionálok az 1. esetben kapott funkcionálokban szereplő $\lambda_F \cdot \mathbf{F} + \lambda_M \cdot \mathbf{M}$ tag elhagyásával kapjuk meg.

A 3. esetben, mivel λ_F , λ_M ismeretesek az Ω tartományon, az 1-es test u_N^1 elmozdulása az ismert

$$u_N^1 = (\lambda_F + \lambda_M \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{n}^1$$

összefüggéssel számítható. Behelyettesítve ezen értéket az L_R^p stb. funkcionálba, illetve $\mathbf{T}^1 = \mathbf{A}^1 \equiv \mathbf{0}$ -t véve, megkapjuk az érintkezési feladat variációs elvek felhasználásával történő megoldásához szükséges funkcionálokot.

3. Variációs elvek számítástechnikai realizálásának néhány kérdése

3.1 A A variációs elvekben szereplő mezők approximálására, a gyakorlatban szereplő, a bonyolult felépítésű és terhelésű szerkezeti elemek miatt célszerű lokális approximációt, vagyis a végeleemes módszert alkalmazni.

3.2 A tárgyalt variációs elvekre alapozva, a variációs egyenletek—egyenlőtlenségek révén, kvadratikusan programozási feladat fogalmazható meg.

Az egyenlőtlenségi rendszer méreteinek csökkentése céljából célszerű a „szuper-elem technikát” alkalmazni.

Az 1., 6. elvnel a $\delta_T L_D^p = 0$ ($\Delta = R, C$) egyenlet megoldása után, illetve 11. és 13. elvnel közvetlenül, a diszretizálásból származó programozási feladat formailag

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{q} \mid \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (3.1)$$

alakban írható fel, míg a 2. és 7. elvnel a

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{z}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{j} \mid \hat{\mathbf{y}} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z}^T = [\mathbf{u}^T, \hat{\mathbf{y}}^T] \right\} \quad (3.2)$$

feladathoz jutunk [25]. Itt \mathbf{K} és $\hat{\mathbf{C}}$ pozitív szemidefinit mátrixok, \mathbf{u} — csomóponti elmozdulásokat, $\hat{\mathbf{y}}$ — rés diszkrét pontbeli értékeit tartalmazó vektorok. A 10. és 11. elvekre alapozott kvadratikus programozási feladat felállításával a [26], [27] munka részletesen foglalkozik.

A (3.1), (3.2) alatti „primál feladat”-ot a nemlineáris programozásban használatos Kuhn—Tucker-féle tétel felhasználásával [28] vissza tudjuk vezetni, olyan „duális” programozási feladatra, amelyben az ismeretlenek száma lényegesen lecsökken. Ismeretlenek az érintkezési nyomás vagy rés diszkrét pontbeli értékei, illetve a merevtestszerű mozgást végző testnél a merevtestszerű elmozdulást lekötő elmozdulás-koordináták.

Az 5. és 13. elvnel alakilag a (3.1) feladathoz jutunk, azonban az 1. és 11. elvnel kapott \mathbf{A} és \mathbf{b} mátrixok nem lesznek azonosak az 5. és 13-nál kapottakkal. Az 1. és 11. elvnel, érintkezés—elválás feltételét kis altartományok felett, integrál értelemben ellenőrizzük le, míg az 5. és 13-nál diszkrét pontokban. A 2., 7. elv realizálása több számítást igényel mint az 1. és 11-é. A 9. és 13. elvnel fennáll a

$$\tilde{\Pi}_c(\bar{\mathbf{T}}) \leq \tilde{\Pi}_c(\mathbf{T}) = \Pi_p(\mathbf{u}) \leq \Pi_p(\mathbf{u}^*)$$

egyenlőtlenség, vagyis a két elv segítségével felépített megoldás révén lehetőség nyílik a megoldások korlátok közé szorítására.

3.3 A „duális” programozási feladat előállítását csak akkor végezzük el racionálisan, ha az átalakításnál jelentkező egyenletrendszereket több jobboldallal sikerül megoldani. Ily módon az érintkezési feladatok megoldására alkalmas effektív számítógépi programok nagyméretű gépeket igényelnek.

4. Megjegyzések

4.1 A fentiekben a háromméretű testekre megfogalmazott variációs elvek természetesen érvényesek egy-, kétméretű testekre, illetve azok kombinációjára (rugalmas közegegre támaszkodó tartó, lemez stb.), sőt átvihetők a feltéte-

les geometriai (kinematikai) kapcsolatokat tartalmazó rúdszerkezetek vizsgálatára is.

4.2 Amennyiben a rúdszerkezet prizmatikus rudakból van felépítve és az a csomópontokban van terhelve, úgy a feszültségállapot meghatározására szolgáló variációs elvek, illetve az azokhoz kapcsolódó kvadratikus programozási feladatok levezetésére célszerű a SZABÓ J.-féle tárgyalásmódot felhasználni [29]. Nagy elmozdulások hatását — másodrendű elmélet felhasználásával — [30] munka vizsgálja, míg elsőrendű elmélettel kapcsolatos eredményekről a [31] ad áttekintést. Korlátozott teherbírású kapcsolatok vizsgálatára [32] a fenti variációs elvek alkalmatlanok.

4.3 A dinamikai érintkezési feladatok vizsgálatára alkalmas funkcionálok a kvázistatikus esetbeli 1. — 4., 11., 13. elveknél kapottakból a Hamilton—Osztrogradszkij-féle variáció. elv modifikálásával vezethetők le.

Bevezetve a

$$T = T(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^2 \int_{V^e} \rho \dot{\mathbf{u}}^2 dV \quad (4.1)$$

kinetikus energiát,¹ ahol ρ — a sűrűség, továbbá a $\lambda_1 = p$, $\lambda_2 = \dot{y}$, $\lambda_3 = \sigma_N^e$, $\lambda_4 = \sigma_N$, $\lambda_5 \equiv 0$, $L_{R1} = L_R^p$, $L_{R2} = L_R^y$, $L_{R3} = L_R^\sigma$, $L_{R4} = \tilde{\Pi}_R$, $L_{R5} = \Pi_R$ jelöléseket, a dinamikai feladatok a

$$H_{Ri} = H_{Ri}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_i) = \int_{t_1}^{t_2} [T(\dot{\mathbf{u}}) - L_{Ri}] dt \quad (4.2)$$

funkcionál segítségével tárgyalhatók. Itt t_1, t_2 tetszőleges választott időintervallum határok. Feltételezve, hogy az \mathbf{u} mező a t_1 és t_2 időpillanatokban előírt feltételeket kielégíti, igazolható, hogy mindazon $\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_i$ mezők, amelyek kielégítik a

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{u}} H_{Rj} &= 0, \quad (j = 1, \dots, 4); & \delta_{\mathbf{T}} H_{Rk} &= 0, \quad (k = 1, 2, 5); \\ \delta_{\mathbf{u}} H_{R5} &\geq 0, \quad u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0, & x &\in \Omega, \\ \delta_{\mathbf{T}} H_{Rs} &\leq 0, \quad \sigma_N^e \leq 0, & x &\in \Omega, \quad e = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases} \quad s = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}; \\ \sigma_N &= \sigma_N^1 = \sigma_N^2 \leq 0 & x &\in \Omega \\ \delta_p H_{R1} &\leq 0, \quad p \geq 0, & x &\in \Omega; \quad \delta_{\dot{y}} H_{R2} \geq 0, \quad \dot{y} \geq 0, & x &\in \Omega, \end{aligned} \quad (4.3)$$

variációs egyenlet—egyenlőtlenségeket tényleges mezők. Ennek fordítottja is igaz. Tényleges mezők esetében fennállnak a (4.3) alattiak.

¹ A t idő szerinti deriválást $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{\mathbf{u}}$ jelöli.

Hasonlóan nyerhetők a kinematikailag kötött elmozdulásmezőt felhasználó variációs elvek is. Így pl. a

$$H_{P1} = H_{P1}(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} [T(\dot{\mathbf{u}}) - \Pi_p(\mathbf{u})] dt \quad (4.4)$$

funkcionálból

$$\delta_n H_{P1} \geq 0, \quad u_N^2 - u_N^1 + h \geq 0, \quad x \in \Omega \quad (4.5)$$

egyenlőtlenségek fennállása esetében levezethető az összes szabadegyenlet, vagyis az az \mathbf{u}^* mező, amely kielégíti a (4.5) feltételt, tényleges mező.

A fenti modifikált Hamilton—Osztrogradszkij-féle elvekből levezethető egyenletek: mezőegyenletek, perem- és illesztési feltételek. A dinamikai feladat megoldásához természetesen a $t = 0$ időpillanathoz tartozó kezdeti feltételekre is szükség van:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0); \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(0). \quad (4.6)$$

A diszkrétizálásból származó feladat H_{R1} , H_{R5} , H_{P1} esetében formailag

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T (\mathbf{q} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}) \mid \mathbf{A} \mathbf{u} - \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \right\} \quad (4.7)$$

alakban írható fel. Minthogy az $\ddot{\mathbf{u}}$ nem ismeretes, így a (4.7) feladat megoldhatósága érdekében azt megfelelő időlépés felvételével differenciámódszer alapján kell közelíteni, hiszen a testek közötti kezdeti hézag miatt — periodikus gerjesztő erő esetében sem lesz a rendszer mozgása periodikus. Ily módon ezen típusú rugalmas rendszerek dinamikai viselkedésének nyomon követése az $\ddot{\mathbf{u}}$ approximációjától függően vett időpontokbeli kvadratikus programozási feladatok egymást követő megoldását követeli meg, aminek effektív végrehajtása nagy kapacitású számítógépek nélkül már nem képzelhető el.

A tárgyalt dinamikai kezdeti-peremértékfeladat megoldható oly módon is, hogy az elmozdulásmező időszerinti deriváltját, a \mathbf{v} sebességet, az \mathbf{u} mezőtől függetlenül approximáljuk, sőt az \mathbf{I} impulzust is függetlenül vesszük fel. Ekkor pl. a H_{R1} helyett az

$$\begin{aligned} I_{R1} &= I_{R1}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_t, \mathbf{v}, \mathbf{I}) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[-T(\mathbf{v}) + L_{R1} - \sum_{e=1}^2 \int_{V^e} \mathbf{I} \cdot (\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}) dV \right] dt \end{aligned} \quad (4.8)$$

vagy a

$$\begin{aligned} J_{R1} &= J_{R1}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_t, \mathbf{I}) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[T(\mathbf{I}) + L_{R1} - \sum_{e=1}^2 \int_{V^e} \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \right] dt, \end{aligned} \quad (4.9)$$

vagy a

$$K_{Ri} = K_{Ri}(\mathbf{T}, \mathbf{u}, \lambda_i, \mathbf{v}) = \int_{t_i}^{t_f} \left[T(\mathbf{v}) + L_{Ri} - \sum_{\varepsilon=1}^2 \int_{V^*} \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV \right] dt \quad (4.10)$$

funkcionálokban a \mathbf{v} és \mathbf{I} szerint vett variációkhoz tartozó kifejezéseket zérussal egyenlővé téve, illetve a (4.3) alatti variálási feltételeket betartva, az összes szabad egyenlet levezethető. A H_{Ri} -nél tárgyalt szabad egyenleteken kívül újabb típusú egyenletek is megjelennek. A korábbi mozgásegyenlet érvényét veszíti és helyette I_{Ri} -nél az $\dot{\mathbf{I}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q}$ mozgásegyenlet jelenik meg, továbbá $\mathbf{I} = \rho \mathbf{v}$, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ összeférhetőségi egyenletek vannak érvényben, J_{Ri} -nél az előbbi mozgásegyenlet és $\dot{\mathbf{I}} = \rho \dot{\mathbf{u}}$ összeférhetőségi egyenlet, végezetül K_{Ri} -nél $\rho \dot{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{q}$ mozgásegyenlet, $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v}$ összeférhetőségi egyenlet vezethető le.

Mivel a (4.8)–(4.10) funkcionálokra alapozott számításnál nyert egyenlet–egyenlőtlenségekben az \mathbf{u} , illetve \mathbf{v} mezők időszerinti első deriváltja szerepel csak és ezeknek közelítése pontosabban elvégezhető mint a másodrendű deriváltaké, így annak ellenére, hogy az összismeretlenek száma megnő, alkalmazásuk előnyös.

4.4 Rugalmas-képlékeny testek esetében a potenciális energia minimuma elvét (13. elv), illetve a módosított kiegészítő energia maximuma elvét (9. elv) állapotváltozásokra felírva, keressük azokat a sebességmezőket, amelyek az érintkezés-elválás feltételén túlmenően kielégítik a képlékeny tartományokban érvényes

$$f = 0, \quad \dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \leq 0$$

mellékfeltételeket is. Itt f – folyási függvény, $\dot{\mathbf{T}}$ – feszültségi sebességi tenzormező [33]. Ezek a feladatok is kvadratikus programozási feladatra vezetnek.

5. Kutatási témák

Az érintkezési feladatokkal kapcsolatos, numerikus módszereket felhasználó kutatások hazánkban a szerző ismerete szerint a BME és NME-re korlátozódnak. Célszerű volna a kutatásokat olyan irányba szélesíteni, amelyek hozzájárulnának

1. a többretegű testek érintkezési feladatainak,
2. a rugalmas-képlékeny alakítási technológiával kapcsolatos érintkezési feladatok megoldásához,
3. a vékonyfalú elemek merevtestekkel történő érintkezési viszonyainak pontosabb tisztázásához,

4. a terhelés-átadással kapcsolatos számos optimalizációs feladat,
5. az ütközéssel, rezgéssel párosuló dinamikai érintkezési feladatok,
6. illetve a nagy elmozdulásokkal kapcsolatos érintkezési feladatok megoldásához.
7. Tovább kellene fejleszteni az analitikus és számítógépi módszereket, különös tekintettel a dinamikai súrlódásnélküli, illetve súrlódásos érintkezési feladatok megoldására.

IRODALOM

1. HERTZ, H.: Über die Berührung fester elastischer Körper, *Journ. für reine und angew. Math* (Crelle), **92** (1882) 156
2. DINNIK, A. N.: Udar i szsat'ie uprugih tel. Izbrannie trudi, T. 1, Izd—vo AH USzSzR, 1952
3. BELJAEV, N. M.: Mes'tnije naprjazsenija pri szsatii uprugih tel, szb. sztat'ej „Inzsenernije szooruzsenija i sztroitelnaja mechanika, Izd-vo Put'j, Leningrad 1924
4. STAERMAN, I. Ja.: Kontaktnaja zadacsja t'eorii uprugoszt'i, *Gosztehizdat*, M. 1949
5. GALIN, L. A.: Kontaknija zadacsi t'eorii uprugoszt'i, *Gosztehizdat*, M. 1953
6. LURJE, A. I.: Prosztranzitvennije zadacsi t'eorii uprugoszt'i, *Gosztehizdat*, M. 1955
7. MUSZHELISVILI, N. I.: Nekotorije osznovnije zadacsi matematiszeszkoi t'eorii uprugoszt'i, izd. 5., „*Nauka*”, M. 1966
8. Razvit'ie t'eorii Kontaktnih zadacs v SzSzSzR, „*Nauka*”, M. 1976
9. WIENER, M.—HOPF, E.: Über eine Klasse singularer Integralgleichungen, *Sitzungsber., Akad. Wiss.*, Berlin 1931
10. UFLJAND, J. S.: Integralnije preobrazovanija v zadacsah t'eorii uprugoszt'i. „*Nauka*”, Leningrad 1968
11. VOROVICS, I. I.—ALAKSZANDROV, B. M.—BABESKO, V. A.: Neklasszicszeszkije szmesannije zadacsi t'eorii uprugoszt'i, „*Nauka*”, M. 1974
12. SIGNORINI, A.: Questioni di elasticiti non linearizzata o semilinearizzata, *Rend. di Matem. e. delle suo Appl.*, **18**, (1959), 17—31
13. FICHERA, G.: Problemi elastostatici con vincali unilaterali: il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei*, Ser 8, **7**, (1964), 91—140
14. DUVAT, G.—LIONS, J. L.: Les inéquations en mécanique et en physique, „*Dunot*”, Paris, 1972
15. DUVAT, G.: Le problème de Signorini en — viscoélasticité linéaire, *C. R. Acad. Sci, Paris*, **268**, (1969), 1044—1046
16. BOUCHER, M.: Signorini's problem in viscoelasticity. *Proc. Symp of IUTAM: The mechanics of Contact between Deformable Bodies*, Eds.: De PATER, KALKER, „*Delft UP*”, (1975), 41—53
17. KALKER, J. J.—van RANDEN, Y.: A minimum Principle for Frictionless Elastic Contact with Application to Non — Hertzian Half — Space Contact Problem, *J. Engng. Math.*, **6** (1972), 193—206
18. PANAGIOTOPULUS, P. D.: On the Unilateral Contact Problem of Structures with a Non-quadratic Strain Energy Density, *Int. J. Solids Structures*, **13**, (1977), 253—261
19. PÁCZELT, I.: Rugalmas rendszerek érintkezési feladatainak megoldása matematikai programozással, *NME Közlemények*, IV. sorozat, *Természettudományok*, **22**, (1977), 184—224
20. KRAVCSUK, A. Sz.: Posztanovka zadacsi o kontakte neszkolkih deformirujemih t'el kak zadacsi nelinejnovo programirovanija, *PMM*, tom **42**, (1978), 466—474
21. ROZIN, L. A.: Variacionnije posztanovki zadacs dlja uprugih szisztem, Izd. Leningradszkovo universite'ta, Leningrad 1978
22. KALKER, J. J.: Aspects of Contact Mechanics, *Proc. Symp. of IUTAM: The Mechanics of Contact between Deformable Bodies*, Eds: De PATER, KALKER, „*Delft UP*”, (1975), 1—25
23. KALKER, J. J.: A Survey of the Mechanics of Contact between Solid Bodies, *ZAMM* **57**, (1977), T3—T17
24. FRIDMAN, V. M.—CSERNINA, V. Sz.: Iteracionnij processz dlja resen'ija konecsnomernoj kontaktnoj zadacsi, *Zs. VMiMF*, t. **7**, No 1 (1967), 160—163

25. PÁCZELT, I.: Primenenije kvadraticsnovo programirovanija v kontaktnih zadacsah t'eorii uprugoszt'i, *NME Idegennyelvi Közlemények*, D. Natural Sci. Vol 33 (1979), 171—221
26. PÁCZELT, I.: Some Remarks on the Approximate Solution of Frictionless Elastic Contact Problems., *Acta Techn. Hung.*, **83**, (1976), 337—355
27. PÁCZELT, I.—HERPAI, B.: Note to the Solution of Contact Problems of the Elastic Shells. *Achivum Budowy Maszyn*, Tom XXIV, Zeszyt 2 (1977), 187—202
28. KUNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung, Springer-Verlag, Berlin 1962
29. SZABÓ, J.—ROLLER, B.: Rúdszerkezetek elmélete és számítása, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1972
30. ROLLER, B.—SZENTIVÁNYI, B.: Extremumsätze und deren Anwendungen in der Theorie zweiter Ordnung der Stab- und Flächentragwerke, *Acta Techn. Hung.* **83**, (1976), 381—392
31. PÁCZELT, I.—HERPAI, B.: Megjegyzés a feltételes kinematikai kapcsolatokkal rendelkező rúdszerkezetek számításához, *Műszaki Tudomány* **56** (1978), 49—85
32. KALISZKY, S.: Feltételes kapcsolatokat tartalmazó szerkezetek vizsgálata, *Építés- és Építészettudomány.* **6**, (1974), 325—339.
33. KALISZKY, S.: Képlékenységtan, Akadémiai Kiadó, Budapest 1975.
34. PÁCZELT, I.: A kombinált talajmodelleken fekvő rugalmas szerkezetek variációs elvek alapján való vizsgálata, *Építés- és Építészettudomány.* **11**, (1979), 209—220

Treatment of Contact Problems with the Aid of Variation Principles. The paper is a report on the variation principles which may be applied to the solution to the problems of elastic frictionless contact and suggests current subject-matters suitable for further research investigations.

Behandlung von Berührungsaufgaben mit Hilfe von Variationsprinzipien. Die Abhandlung gibt eine Übersicht über die Variationsprinzipien, die zur Lösung der elastischen, reibungsfreien Berührungsaufgaben geeignet sind, und schlägt zu weitere Forschungen geeignete aktuelle Gegenstände vor.



EGYENES TENGELYŰ,
A HOSSZA MENTÉN VÁLTOZÓ JELLEMZŐKKEL BÍRÓ,
HAJLÍTÓ LENGÉST VÉGZŐ RÚD
SAJÁTKÖRFREKVENCIÁINAK
JAVÍTHATÓ KÖZREFOGÁSA

II. RÉSZ

BOSZNAY ÁDÁM*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

és

RICHLIK GYÖRGY**—TÓTH GYÖRGY***

[Beérkezett: 1979. május 8-án]

A dolgozat a címbeli feladatot a Poincaré—Rayleigh—Ritz-módszer és a Fichera-féle eljárás segítségével oldja meg, s felhívja a figyelmet a numerikus megoldás kapcsán előadódó néhány problémára.

1. Bevezetés, célkitűzés

A fenti címmel megjelent előző tanulmány [1] tömören összefoglalja a címbeli feladat egy lehetséges megoldását, nevezetesen a javítható felső korlátokat a Poincaré—Rayleigh—Ritz-féle finitizálással számítja, majd bemutatja a Fichera-formula használatát javítható alsó korlátok meghatározására. A gyakorlat számára való hozzáférhetőség előmozdítása végett szerzők szükségesnek tartják, hogy számpélda kapcsán felhívják a figyelmet néhány, az alkalmazás során előforduló problémára. A továbbiakban [1]-et jelen tanulmány I. részének tekintjük, és az erre történő hivatkozások esetén az illetékes egyenletszám előtt az I. jelölést alkalmazzuk.

2. A példa

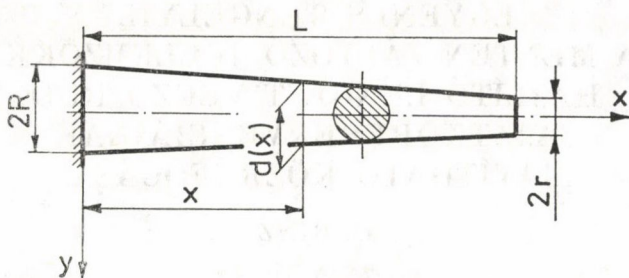
Vizsgálatunk tárgya: egyik végén befogott, másik végén szabad, a hossz-tengelye mentén lineárisan változó átmérőjű, körszelvényű rúd, melyről feltételezzük, hogy homogén tömegeloszlású és rugalmassági modulusa állandó. A rúd „saját koordinátarendszerét” és meghatározó geometriai paramétereit az 1. ábrán tüntettük fel. Ezek segítségével a d átmérő, az A keresztmetszeti terület és a keresztmetszeti síkidom itt szükséges I_z másodrendű nyomatéka:

$$d(x) = \frac{2}{L} [LR - (R - r)x], \quad (1)$$

* Prof. Dr. Bosznay Ádám, 1123 Budapest, Győri út 12.

** Richlik György, 1073 Budapest, Akácfa u. 59.

*** Tóth György, 1016 Budapest, Gellérthegy u. 20–22.



1. ábra. A rúd saját koordináta-rendszere és meghatározó geometriai paramétere

$$A(x) = \frac{\pi}{L^2} [LR - (R - r)x]^2, \quad (2)$$

$$I_z(x) = \frac{\pi}{4L^4} [LR - (R - r)x]^4. \quad (3)$$

Ezen függvények, valamint $\rho = \text{áll.}$ és $E = \text{áll.}$ ismeretében az I. (4)-ben definiált operátor szimbólumokat meghatároztuk. Az I. (6) peremfeltételrendszer jelen esetben a

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0 \quad (4)$$

geometriai és

$$v''(L) = 0, \quad v'''(L) = 0 \quad (5)$$

dinamikai peremfeltételekkel egyenértékű. (Vesszővel x -szerinti differenciálást jelölünk.)

3. A $\varphi_n(x)$ bázisfüggvények megválasztásáról

Az alábbiakban *csak* azt a részproblémát vizsgáljuk e kérdés kapcsán, hogy elegendő-e példánkban ezeket a függvényeket a megengedett (a peremfeltételek közül csak a geometriaiakat kielégítő) függvényosztályból választani.

E bővebb függvényosztály alkalmazhatóságához elégséges, ha a feladat egy speciális definitiségi feltételnek [2] tesz eleget, melyet COLLATZ az elv fel-fedezője, KAMKE nevének kezdőbetűjéről \mathbf{K} -definitiségnak nevezett [4].

A \mathbf{K} -definitiség fennállásának vizsgálatához esetünkben elegendő a Rayleigh-hányados számlálójában szereplő $(\mathcal{L}\varphi, \varphi)$ skalárszorzat vizsgálata.

Kétszeres parciális integrálással

$$(\mathcal{L}\varphi, \varphi) = \int_0^L EI_z(x) \varphi''^2(x) dx + [R(\varphi)]_0^L \quad (6)$$

adódik, ahol

$$R(\varphi) = [\varphi(x)(EI_z(x)\varphi'(x)) - EI_z(x)\varphi'(x)\varphi''(x)]_0^L \quad (7)$$

a Dirichlet-féle peremtag.

KAMKE [2] szerint e definitiség vizsgálatára példánkban azután kerülhet sor, ha (7)-ből az (5) alatti dinamikai peremfeltételekkel ki lehet küszöbölni a második és harmadik deriváltakat. Esetünkben a $\varphi''(0)$ -t és $\varphi'''(0)$ -t tartalmazó tagok (5)-tel nem küszöbölhetők ki, így a **K** definitiség vizsgálatára sor sem kerülhet.

Példánkban tehát a Kamke-féle elv alapján nem lehetséges a megengedett függvények alkalmazása. A φ_n függvényeket (lásd I.-et) ezért a komparatív függvények halmazából fogjuk választani.

4. Az alkalmazott φ_n függvények

Numerikus kísérleteink szerint pontosabb korlátokat kapunk, ha Hermite-polinomok helyett a (4) és (5) peremfeltételekkel ellátott $d^4/(dx)^4$ operátor sajátfüggvényeivel dolgozunk. Hasonló feladatban MICHLIN is ezeket alkalmazta [3]. Ezek:

$$\varphi_n = a_{1n} \sin \beta_n x + a_{2n} \cos \beta_n x + a_{3n} \sinh \beta_n x + a_{4n} \cosh \beta_n x, \tag{8}$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

ahol a β_n -ek a

$$\cosh \beta L \cdot \cos \beta L + 1 = 0 \tag{9}$$

transzcendens egyenlet pozitív β gyökei, a_{jn} -nek ($j = 1, 2, 3, 4$) pedig ki kell, hogy elégítsék a (4), (5) peremfeltételekből következő

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \beta_n & 0 & \beta_n & 0 \\ -\beta_n^2 \sin \beta_n L & -\beta_n^2 \cos \beta_n L & \beta_n^2 \sinh \beta_n L & \beta_n^2 \cosh \beta_n L \\ -\beta_n^3 \cos \beta_n L & \beta_n^3 \sin \beta_n L & \beta_n^3 \cosh \beta_n L & \beta_n^3 \sinh \beta_n L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{3n} \\ a_{4n} \end{bmatrix} = 0$$

egyenletrendszer. Itt az együttható mátrix rangja 3, mert pl. a bal alsó sarokelemhez tartozó harmadrendű aldetemináns

$$\beta_n^3 \cosh \beta_n L + \beta_n^3 \cos \beta_n,$$

illetve a (9) karakterisztikus egyenletet is figyelembe véve

$$\beta_n^3 \left(\cosh \beta_n L - \frac{1}{\cosh \beta_n L} \right)$$

értékű, ami csak $\beta_n = 0$ esetében zérus, ezt az esetet viszont az előzőekben kirekesztettük.

Ennek következtében az a_{jn} -ek közül egy szabad ismeretlenünk van; egy lehetőség például az $a_{1n} = 1$ választás; egy másik lehetőség az, ha például az $(\mathcal{A}\varphi_n, \varphi_n) = 1$ előírással normáljuk φ_n -et. Így számol pl. MICHLIN [3].

Az a nyilvánvaló tény, hogy a sajátkörfekvenciákra így nyerhető felső korlátokat a szabad ismeretlen választása nem befolyásolja, numerikus vizsgálatainkban is tükröződött. Számításainkban mi az $a_{4n} = 1$ választással éltünk, s így

$$a_{2n} = -a_{4n} = -1,$$

valamint

$$a_{1n} = -a_{3n} = \frac{\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L}{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L}.$$

7. Alsó korlátok számítása

Alsó korlátokat az I. (12) formula segítségével számíthatunk, ha előzetesen az I. (13) ortogonális invariánsban szereplő integrálok értékeit meghatároztuk. Ehhez először ismernünk kell az I. (14)-ben definiált operátorokat. Konkrét esetünket tekintve, az

$$\begin{aligned} E_a &\doteq E, & \varrho_a &\doteq \varrho \\ A_a &\doteq A(L) = r^2\pi, & I_{za} &\doteq I_2(L) = \frac{r^4\pi}{4} \end{aligned} \quad (10)$$

állandók megadásával definiált „alsó alapfeladat” (eredeti feladatunk geometriai peremfeltételeit kielégítő, prizmatikus olyan körszelvényű rúd, amelynek átmérője az eredeti feladatunkban szereplő rúd legkisebb átmérőjével egyenlő, vagy annál kisebb, és eredeti rúdunkkal azonos anyagjellemzőkkel rendelkezik) birtokában az \mathcal{A}_a , \mathcal{B}_a , \mathcal{C}_a és \mathcal{M}_a operátorokat az I. részben közölt összefüggések szerint felírhatjuk. A \mathcal{C}_a operátor az „alsó alapfeladat” Green függvényével, mint magfüggvénnyel képzett integráloperátor. A magfüggvény előállításához [4] induljunk ki az

$$\eta_a(x) = a_1 \pm b_1 + (a_2 \pm b_2)x + (a_3 \pm b_3)x^2 + (a_4 \pm b_4)x^3 \quad (11)$$

függvényből, ahol a „+” jel van érvényben, ha $x \leq \xi$, a „-” jel van érvényben, ha $x \geq \xi$ és $x, \xi \in [0, L]$. Az x -től független a_i, b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mennyiségeket a (4), (5) peremfeltételek segítségével határozhatjuk meg, ha tekintettel vagyunk arra, hogy az $x = \xi$ helyen $\eta_a(x)$, $\eta'_a(x)$, $\eta''_a(x)$ folytonos, $\eta'''_a(x)$ -nek pedig $1/E$ I_{za} ugrása van. (Mechanikailag az így konstruált Green-függvény az „alsó alapfeladat” rúd tengelyének $x = \xi$, $\xi \in [0, L]$ támadáspontú, y tengellyel párhuzamos vektorú egységnyi erő hatására tetszőleges $x \in [0, L]$

helyen létrejött eltolódását adja meg.) Figyelembe véve, hogy az a_i, b_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mennyiségek között lesznek ξ -től függők is, $\eta_a(x)$ helyett $G_a(x, \xi)$ jelölést használva esetünkben

$$G_a(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{6EI_{za}} (3\xi x^2 - x^3), & \text{ha } x \leq \xi \\ \frac{1}{6EI_{za}} (3\xi^2 x - \xi^3), & \text{ha } x \geq \xi. \end{cases} \quad (12)$$

(12)-ből látható, hogy tetszőleges L hosszúságú rúd esetében ugyanez a Green-függvény érvényes. Az I. (14)-ben szereplő határozott integrálok értékének kiszámítása, valamint a kijelölt mátrix invertálások számítógéppel elvégezhetők, amennyiben az ott szereplő $\eta_s(x)$ ($s = 1, \dots, k_1$) és $\zeta_t(x)$ ($t = 1, \dots, k_2$) lineárisan független rendszereket előzetesen megválasztjuk. (Meggjegyezzük, hogy nem szükséges két lineárisan független függvényrendszert konstruálni, sőt felhasználható a (8) függvényrendszer is.) Ezután már I. (13) konkrét számérték formájában rendelkezésünkre áll, és így I. (12)-ből n számú alsó korlát nyerhető.

Összegezve az eddigieket, megállapíthatjuk, hogy számítógépre jól adaptálható algoritmus áll rendelkezésünkre választott feladatunk sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása számára. I. (12) alapján könnyen belátható, hogy csak a tényleges megoldást jól közelítő felső korlátok felhasználásával remélhetünk elegendően jól közelítő alsó korlátokat. (A fokozott pontossági előírás elsősorban az első néhány felső korlátra vonatkozik.)

6. Számpélda

A vázolt módszer hatékonyságának érzékeltetésére az 1. táblázatban közöljük konkrét geometriai paraméterek ($R = 20$ mm, $r = 15$ mm, $L = 10^3$ mm) esetében kapott eredményeinket. Összehasonlítóképpen a táblázat $\alpha_{adi}^2 \frac{\rho}{E}$ -vel, illetve $\alpha_{fdi}^2 \frac{\rho}{E}$ -vel jelölt soraiban közöljük a $2r$, illetve $2R$ átmérőjű prizmatikus rudak megfelelő adatait.

Számításaink során azt tapasztaltuk, hogy a Poincaré—Rayleigh—Ritz-módszert alkalmazva, a bázisfüggvények számának 5-ig történő növelésével javult a felső korlátok értéke. A bázisfüggvények számának ötnél nagyobb történő választása esetében az I. 9 sajátértékfeladatban az együtthatók mátrixához rendelt determináns értéke gyorsan közeledett a zérushoz, s ezzel együtt az eredményül kapott sajátkörfrekvenciák négyzeteire negatív számok is adódtak.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$\alpha_{di}^2 \frac{\rho}{E}$	$1,235 \cdot 10^{-3}$	$4,851 \cdot 10^{-2}$	$3,807 \cdot 10^{-1}$	1,462	3,997
$\alpha_{jt}^2 \frac{\rho}{E}$	$1,029 \cdot 10^{-3}$	$4,327 \cdot 10^{-2}$	$3,062 \cdot 10^{-1}$	1,143	3,217
$\alpha_{ai}^2 \frac{\rho}{E}$	$1,017 \cdot 10^{-3}$	$2,983 \cdot 10^{-3}$	$7,305 \cdot 10^{-2}$	$8,857 \cdot 10^{-2}$	$9,317 \cdot 10^{-2}$
$\alpha_{adi}^2 \frac{\rho}{E}$	$6,948 \cdot 10^{-4}$	$2,730 \cdot 10^{-2}$	$2,140 \cdot 10^{-1}$	$8,232 \cdot 10^{-1}$	2,248

I. táblázat

Az alsó korlátok számításánál a $k_1 = k_2 = 1$, valamint az $\eta(x) = \zeta(x) = 6x^2 - 4x^3 + x^4$ választásokkal éltünk a korlátozott gépóra lehetőségeink miatt. Vizsgálataink azt mutatták, hogy az „alsó alapfeladat” megfelelő választásával az alsó korlátok számításakor jelentkező numerikus hibák csökkenthetők. A kijelölt integrálásokat módosított Romberg-eljárás segítségével végeztük. Az I. 14-ben kijelölt invertálásokra a $k_1 = k_2 = 1$ választás miatt nem volt szükség.

A gépi munkát a MTA SZTAKI CDC 3300 típusú számítógépén végeztük. Az elkészült programrendszer váza SIMULA 67 programnyelven íródott. A (9) transzcendens egyenlet, valamint az I/9 sajátérték feladat megoldását dupla gépi pontosságú FORTRAN nyelvű program segítségével kaptuk meg.

IRODALOM

1. KOVÁCS, M.—RICHLIK, Gy.—TAKÁCS, F.—TÓTH, Gy.: Egyenes tengelyű, a hossza mentén változó jellemzőkkel bíró, hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása, *Műszaki Tudomány* 54, (1977), —
2. KAMKE, E.: Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, Akademische Verlagsgesellschaft, Geest und Portig K.—G. Leipzig 1956. 217.
3. MICHLIN, S. G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik, Akademie-Verlag, Berlin 1962, 338.
4. COLLATZ, L.: Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Akademische Verlagsgesellschaft Geest und Portig K.-G. Leipzig 1949. 58, 202.

Improveable Bracketing of the Angular Eigenfrequency of a Straight Rod with Characteristics Changing along its Length, Carrying out Flexural Oscillations. — II. — The paper solves the problem using the Poincaré—Ryleigh—Ritz and Fichera's methods and points out some difficulties arising in the numerical solution.

Verbesserungsfähige Einschließung der Eigenkreisfrequenz von geradachsigen Stäben mit entlang der Länge veränderlichen Charakteristiken. — II. — Die Arbeit löst die im Titel genannte Aufgabe mit Hilfe der Poincaré—Rayleigh—Ritzschen Methode und des Fichera'schen Verfahrens und weist auf einige im Zusammenhang mit der numerischen Lösung sich ergebende Probleme hin.

ANYAGTUDOMÁNY, ANYAGTECHNOLÓGIA, ANYAGTULAJDONSÁGOK*

PROHÁSZKA JÁNOS**

AZ MTA LEV. TAGJA

[Béérkezett: 1979. május 15-én]

Az anyagtudomány eredményeit széles körben hasznosítja a technológiai gyakorlat. A dolgozat elsősorban azt mutatja meg, hogy a reális rácsszerkezetekre vonatkozó elméleti ismeretanyag milyen sokféle lehetőséget kínál az előírt anyagtulajdonságok elérésére. Ebből egyenesen arra a következtetésre jut a szerző, hogy a sokféle lehetőség közül az adott feladatnál a rendelkezésre álló eszközök figyelembevételével a technológiai megoldásnak olyan gazdasági optimuma létezik, mely csak az adott feltételekre érvényes. A feltételek megváltozásával a gazdasági optimum is más lesz. Ezért az anyagtudomány és elsősorban az anyagtulajdonságokat változtató technológiai műveletek szoros kapcsolata és az ismereteknek szakadatlan fejlesztése és gyakorlati hasznosítása tudja a termelés gazdaságosságát biztosítani. A dolgozat több példát hoz állításai igazolására.

A címben szereplő három megnevezés közül az anyagtudomány meglehetősen újkeletű a magyar nyelvben, olyannyira, hogy a magyar nyelvű lexikonokban és szótárakban — beleértve az 1978-ban kiadott Magyar Nyelv Értelmező Szótárát is — ilyen címszó nem található. Az utóbbi néhány évben az angol Material Science egyenes fordításaként kezdték használni és úgy tűnik, lassan polgárjogot nyer a mindennapi magyar szóhasználatban. Hogy a következőkben egyértelmű használata gondot ne okozzon, álljon itt egy olyan meghatározás, mely lehet, hogy sok vitára ad alkalmat, mégis hasznosnak tűnik, a félreértések elkerülése érdekében.

Az anyagtudomány célja és feladata, hogy az anyag kémiai összetétele, szerkezete, hőmérséklete, nyomása és tulajdonságai közötti összefüggéseket megállapítsa és a közöttük fennálló törvényeket — azok érvényességi határaitval együtt — leírja és értelmezze. A korszerű anyagismeret, anyagtudomány, a korábbi, elsősorban tapasztalati összefüggéseket, egyre inkább természettudományos — matematikai, fizikai, kémiai — alapokon nyugvó értelmezésekkel váltja fel, mely a kutatók és a felhasználók számára világos, könnyen áttekinthető mérlegelést tesz lehetővé a megfelelő tulajdonságú anyagok kiválasztásához. Sőt egyre inkább azt is biztosítja, hogy új anyagokat állítsanak elő eddig nem létező, de a gyakorlati felhasználás számára fontos tulajdonságokkal (material tailoring).

* Elhangzott az MTA III., VI. és VII. Osztályainak közös rendezésében 1979. május 7-én „Anyagtudomány és Gyakorlat” címmel tartott ülésén.

** Prof. Dr. Prohászka János, 1118 Budapest, Rozmaring u. 9.

Az anyagtechnológia vagy egyszerűen technológia, közkeletű kifejezés. Értelmezése ugyan sok magyar nyelvű szótárban és lexikonban megtalálható, de az egyes értelmezések sok mindenben eltérnek egymástól. Ezért új meghatározást adunk a technológia fogalmára, mert az említettek nem fedik a mai elnevezés mögött rejlő tartalmat. Ezek szerint — a technológia a természet nyersanyagainak, valamint a féltermékeknek emberi fogyasztásra vagy felhasználásra alkalmassá vagy alkalmasabbá tételére szolgáló eljárások tudománya és gyakorlata [1]. Ide természetesen beleértendő minden olyan ismeretanyag és tapasztalat is, mely a művelet során felhasznált gépekre, eszközökre, készülékekre és szerszámokra vonatkozik.

A fentiek szerint a magyar szóhasználat a technológiát kettős értelemben használja, részben a termelési folyamatok és eszközök összességére, részben pedig a technológiai tudományok rövid megjelölésére.

A műszaki nyelvben a technológiát nagyon sokféle jelzővel összekapcsolva is használják. Ilyenek a gépipari technológia, a gyártástechnológia, a kémiai technológia, a mechanikai technológia, az anyagtechnológia, a textiltechnológia, a forgácsolás-technológia stb. Ez a sor még nagyon sok egyéb, a technológiára vonatkozó elnevezéssel bővíthető.

A technológiához tartozó jelzők hol iparágra (gépipari technológia), hol folyamatra vagy eljárásra (forgácsolástechnológia), hol anyagra (textiltechnológia) utalnak. A különböző eljárásokra, műveletekre vonatkozó rendszerezés a technológiában is — mint bármely más területen — nagyon sokféle megfontolás szerint, sokféleképpen végezhető el. Úgy tűnik, az alapdefinícióból kiinduló rendszerezés a legjobb, és ez adja a legmegfelelőbb képet a technológiához tartozó fogalmakhoz. Mivel a technológia feladata az anyagok és félkésztermékek fogyasztásra alkalmasabbá tétele, és ennek megfelelően a technológia az anyagok tulajdonságait vagy azok alakját, vagy mindkettőt megváltoztatja, önkéntelenül adódik, hogy alakváltoztató és tulajdonságváltoztató csoportokba soroljuk a technológiai műveleteket. E műveletek megvalósításához, lehetővé válásához sokszor kiegészítő tevékenységre, szállításra, mérésre, ellenőrzésre, szerelésre stb. is szükség van. Mindazokat a műveleteket (és a hozzájuk tartozó eszközök összességét), melyek sem az alakot, sem a tulajdonságot nem változtatják meg, de az anyagok könnyebb felhasználásához vagy célszerű megmunkálásához szükségesek, kiegészítő technológiáknak nevezzük. Így az alapdefiníció szerint a fentemlített három technológiai eljárás csoport különböztethető meg:

tulajdonságváltoztató	}	technológiai műveletek.
alakváltoztató		
kiegészítő		

A tulajdonságváltoztató technológiai műveletek sora a mai ismeretek szerint teljesen zárt, azaz úgy tűnik, hogy a ma ismert tulajdonságváltoztató

műveleteken kívül más eljárás felismerése valószínűtlen. Ez következik az anyagismeretből. Ugyanis minden olyan művelet, mely az anyag tulajdonságait megváltoztatja, ezt annak révén éri el, hogy a technológiai művelet hatásának eredményeképpen megváltozik az anyagnak a szerkezete és a termodinamikai állapota. Ez a szerkezetváltozás és állapotváltozás tükröződik az anyag tulajdonságainak a megváltozásában. Mivel az anyag szerkezetének a megváltoztatását csak kémiai összetétel változtatással, hőkezeléssel, besugárzással, képlékeny alakítással és mechanikai rezgetéssel érhetjük el, ezeken kívül más módszer a tulajdonságok megváltoztatására sincsen. Ugyanez igaz a termodinamikai állapotváltozásra is, ha a hőmérséklet és a nyomás megváltozása kizárt. Ez az oka a tulajdonságváltoztató technológiai sor teljességének.

Az alakváltoztató és kiegészítő technológiák száma azonban állandóan bővül. Az ember kifogyhatatlan leleményességgel törekszik állandóan arra, hogy munkáját megkönnyítse és adott feladatai elvégzéséhez szükséges munkaidejét lerövidítse. Ezért az alakváltoztató és a kiegészítő technológiák száma állandóan nő.

Az 1. táblázat, a három technológiai műveletcsoportra ad meg néhány, a gyakorlatban sokszor előforduló műveletet, melyek közül a korábban említettek miatt az egyik teljes, a másik kettő pedig nem.

1. táblázat

Alakváltoztató	Tulajdonságváltoztató	Kiegészítő
technológiai műveletek		
Képlékeny alakítás Forgácsolás Darabolás Köszörülés Hegesztés Forrasztás Öntés stb.	Kémiai összetétel változtatás Hőkezelés Besugárzás Képlékeny alakítás Rezgetés	Tárolás Szállítás Szerelés Mérés Csomagolás stb.

A megadott felsorolásban minden folyamat tudományosan megalapozott ismeretekre támaszkodik, annál nagyobb mértékben, minél hosszabb idő óta, minél többen foglalkoznak vele. Az újabban fontossá váló vagy bevezetésre kerülő technológiáknál, mint amilyen a rezgetés, besugárzás vagy tárolás, sokkal kevesebb az információ és a tudományosan megalapozott összefüggés, mint pl. a hőkezelésnél vagy a hegesztésnél, hiszen az utóbbi eljárásokat hosszú évszázadok óta használják.

Egy-egy technológiai művelet többé-kevésbé hasonló részletből tevődik össze, függetlenül a megmunkálandó anyagtól, bár látszólag nagyon eltérőek a külső feltételek vagy a szerszámok. A forgácsolásnál pl. a szerszámok alakja

és a munkadarabhoz viszonyított sebessége nagyon sok eltérő, de ugyanakkor sok hasonló vonást is mutat, függetlenül attól, hogy acélt, alumíniumot, fát vagy műanyagot stb. forgácsolnak.

A forgácsolásnál felhasznált szerszámokat és mozgásukat, valamint a forgácsolandó anyag mozgásait azonos alapelvek szerint tervezik meg és működtetik valamennyi anyagnál. Ez jelenti az egyes technológiai műveletek jól körülhatárolt tudományos ismereteit, melyeket még távolról sem tekinthetünk teljesen ismertnek.

Az előzők szerint az alapdefiníció révén a technológiai műveletek egyértelműen besorolhatók a megfelelő csoportba. Ezekből azonban hiányzik és ebben a csoportosításban nincs is helye pl. a korábban említett gépgyártástechnológiának vagy a textiltechnológiának. A technológiai folyamatoknak a besorolása azonban a megmunkálendő anyagok szerint is lehetséges. Így teljesen zárt tudományterületnek tekinthetjük az alábbi anyagfélésekre vonatkozó technológiákat, mint amilyenek pl. a

textiltechnológia
bőrtechnológia
alumíniumtechnológia
acéltechnológia
szilíciumtechnológia
germániumtechnológia
papírtechnológia
stb.

A felsorolt technológiák mindegyike egy-egy zárt tudományterület ismeretét kívánja adott technológiai feladat megoldásánál. Ezeket a tudományterületeket zártnak tekinthetjük még akkor is, ha egyik-másik sok hasonlóságot is mutat egymással. Így pl. az acél képlékeny alakítása nagyon hasonlít az alumíniuméhoz, attól azonban mégis különbözik többek között azért, mert az acélok túlnyomó többsége pl. kétfázisú és ennek következtében gyorsabban keményedik az alumíniumnál. Ha azonban az előállításuk folyamatait vetjük össze, lényeges eltérések jellemzik azokat.

Az természetes, hogy e második felsorolást az első teljesen átfedi. Így e második csoportból bármelyik technológia, pl. a Si-technológia minden részlete az első felsorolásban megtalálható. Valamilyen vegyületéből állítják elő úgy, hogy a nyersanyag (a kiinduló érc vagy vegyület) kémiai összetétele megváltozik. Majd ezután öntés, illetve kristályosítás révén a kívánt alakját nyeri el. Ha még a további feldolgozást is figyelembe vesszük, pl. diódát kell belőle készíteni, akkor lapokká szeletelik, majd ennek hatását elkerülve maratják és hőkezelik. A félvezető tulajdonságok biztosítására felületének környezetében újra megváltoztatják a kémiai összetételt, és ezután szerelésre kerül. Így egy-egy anyagra vonatkozó technológiai műveletsor az első felsorolásból

nagyon sokat tartalmaz. De ugyanígy az első felsorolás mindegyik művelete ez utóbbiból tartalmaz többet is. Pl. a kémiai összetétel változását valamennyi anyagtechnológiában kihasználják a tulajdonságok javítására.

A fenti két felsorolást tudományos megalapozottnak és zártnak tartjuk, mert minden egyes műveletnek (első besorolás), vagy minden anyagra vonatkozó technológiai ismeretnek (második felosztás) megvannak a maga tudományos alapjai, tudományos ismeretei. Ezzel szemben azok a technológiák, melyeket iparághoz vagy termékhez rendelnek, tulajdonképpen hasznossági igényeket tükröznek, önálló tudománynak vagy tudományterületnek nem tekinthetők, hiszen a mindenkori iparági vagy termékellátási érdekek szerint alakulnak. Ez nem jelenti azt, hogy a gépgyártásban vagy a félvezetők termelésében a technológiai műveletek tudományos alapjai nélkülözhetők, de ezek vagy az alatechnológiai vagy az anyagtechnológiai ismeretekhez tartoznak. Ez képezi alapját is annak a rendezési elvnek, mely szerint az alábbi csoportba sorolandók azok a technológiák, melyeket a mindenkori iparpolitikának megfelelő célkitűzés hív életre. Ilyenek pl.:

gépipari technológia
konzervipari technológia
élelmiszeripari technológia
gyártástechnológia
elektronikai technológia
ruhaiipari technológia
könnyűipari technológia
stb.

De ugyanígy szerepel a mindennapi műszaki nyelvhasználatban a gyártmá-nyokra vonatkozó megjelölés is, mint pl.:

félvezető technológia
izzómlápa technológia
konzervtechnológia
stb.

A technológiának, ill. az anyagtechnológiának a fentiekben megadott definíciójából közvetlenül származtatható az a szoros kapcsolat, mely az anyag-tudomány és anyagtechnológia között fennáll. Ennek oka az, hogy mind az anyagtudománynak, mind az anyagtechnológiának a legfontosabb tárgya az anyagok tulajdonsága, ill. tulajdonságváltozása. A két tudományterület közötti lényeges különbség az, hogy amíg az anyagtudomány a miértre keres, addig az anyagtechnológia a hogyanra ad választ. Pl. az anyagtudomány válaszol arra a kérdésre, hogy miért nő az elektromos vezetőképesség, ha a fémbe vagy ötvözetbe a szennyező komponenseknek a koncentrációja csökken, ugyan-

akkor a technológia mondja meg, hogy hogyan kell a szennyezők koncentrációját csökkenteni, és ezzel a villamos vezetőképességet növelni.

A fentiekből következik, hogy az anyagtudomány és az anyagtechnológia egymással nemcsak szorosan összetartozó és a tulajdonságokon keresztül lép-ten-nyomon kapcsolódó, hanem teljesen egymásra utalt tudományterületek is. Az anyagtudomány minden eredménye csak az anyagtechnológián keresztül hasznosulhat a népgazdaságban. Ugyanakkor az anyagtechnológia csak az anyagtudomány eredményeire alapozva tudja teljesíteni azt a feladatát, hogy az előírt minőségű anyag, ill. alkatrész előállítására olcsó és gazdaságos technológiai eljárást írjon elő a termelő üzemek számára. Ez a kölcsönhatás és egymásra utaltság indokolta ennek az anyagnak az összeállítását is.

Az anyagtudomány az utóbbi évtizedekben olyan rohamosan fejlődött, hogy ma az anyagtechnológiában felvetődő kérdések csaknem mindegyikére az anyagtechnológust kielégítő választ tud adni. Így arra is, hogy mi az oka annak, hogy a tulajdonságváltoztató technológiai műveletek során miért változik — makroszkópos szemmel — folytonosan, bizonyos korlátok között a szilárd testek tulajdonsága. A technológiai műveletek megváltoztatják az anyagok szerkezetét, és ezzel azok termodinamikai állapotát is. Teszik ezt annak a lehetőségnek a kihasználásával, hogy a szilárd testek nagyon sokféle termodinamikai állapotban hosszú időn át is képesek megmaradni.

A gázok tulajdonságait pl. a kémiai összetétel, a hőmérséklet és a nyomás egyértelműen megszabja, eltekintve azoktól a rövid ideig tartó átmeneti állapotoktól melyek pl. egy hirtelen nyomásváltozást követnek. Ezzel szemben a szilárd testekben az ilyen átmeneti állapot az ún. metastabil állapot, hosszú évezredekig is fennmaradhat, anélkül, hogy észrevehető változás menne végbe bennük.

Az ideális termodinamikai egyensúlynak megfelelő termodinamikai állapotban a test G_1 szabadenthalpiája minimális. Ez az állapot a szilárd testeknél nem valósulhat meg a bennük mindig jelenlevő — az egyensúlytól eltérő koncentrációjú — rácshibák szabadenthalpiát növelő hatása miatt. Ilyen megfogalmazásban rácshibának tekintendő a szilárd testek felülete is.

A technológiai műveletek során tehát a munkadarab kiinduló

$$G_0 = U_0 - TS_0 + pV_0 = H_0 - TS_0 \quad (1)$$

szabadenthalpiája valamilyen

$$G_1 = U_1 - TS_1 + pV_1 = H_1 - TS_1 \quad (2)$$

értékűre változik. (Itt U a belső energiát, S az entrópiát, V a fajtérfogatot, H pedig az enthalpiát jelöli. A 0, ill. 1 indexek az állapotokra utalnak.)

A

$$\Delta G_{0-1} = G_1 - G_0 \quad (3)$$

pozitív és negatív értékű is lehet, de a

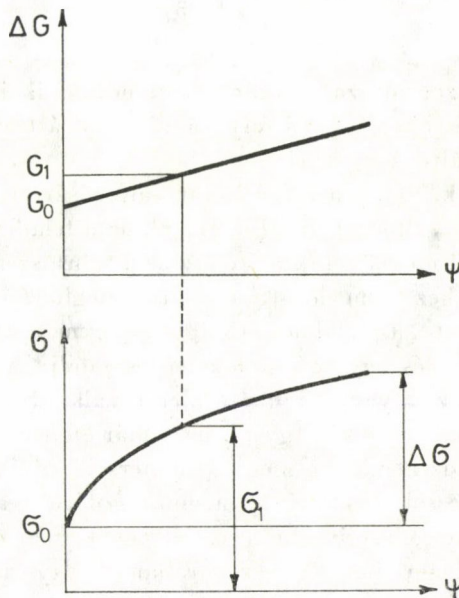
$$\Delta G_{i-r} = G_r - G_i, \quad (4)$$

a reális test és az ideális egyensúlyi állapotú test szabadenthalpia különbsége csak pozitív, a 0-tól eltérő érték lehet.

Ahogy már említettük az anyagnak a szabadenthalpiája a technológiai művelet előtt és után nem azonos, azaz a termodinamikai állapotai is eltérők, kell, hogy a tulajdonságai is eltérőek legyenek, mert a tulajdonságokat a termodinamikai állapot szabja meg. Ez az anyagtechnológia tulajdonképpen jelentősége, hogy az anyagtudomány adta ismeretek birtokában a termodinamikai állapotok és ezzel a tulajdonságok megváltoztatására képes.

A tulajdonságok megváltoztatására a technológia nagyon sokféle módszert ismer. Az alábbiakban egy igen egyszerű példán bemutatjuk, hogy milyen sokféle lehetőség kínálkozik egy tulajdonságjelző paraméter előírt megváltoztatására.

Az 1. ábra egy tiszta, ötvözetlen alumínium egykristály próbatest alakításához szükséges feszültséget, az ún. folyáshatárt mutatja az alakváltozás függvényében, valamint azt is, hogy a nyújtás során hogyan változik a próbatest szabadenthalpiája. Az alsó görbe jobb oldalán adott az az intervallum is,



1. ábra. A tiszta, ötvözetlen $\langle 110 \rangle$ orientációjú alumínium egykristály alakításához szükséges feszültség a fajlagos alakváltozás függvényében (alsó ábra) és az alakítás hatására bekövetkező szabadenthalpia növekedés

melyen belül a kiválasztott tulajdonság változtatható. (A próbatest tengelyével, a húzófeszültséggel az [110] kristályirány volt párhuzamos.)

A próbatest folyáshatára azért nőtt meg a *képlékeny alakítás* során, mert az anyagban a ρ diszlokációsűrűség is megnőtt. A folyáshatár és a diszlokációsűrűség közötti kapcsolatra az alábbi összefüggés jó közelítéssel érvényes [2, 3]:

$$\sigma_K = K\mu b \sqrt{\rho}. \quad (5)$$

Itt a K tényező $0,4 \div 1,0$ közötti állandó, μ a csúsztató rugalmassági modulus, b a diszlokációk Burgers-féle vektorának abszolút értéke.

A diszlokáció-sűrűségből eredő ΔH_d enthalpianövekedés

$$\Delta H_d = 3\mu b^2 \rho. \quad (6)$$

Ez gyakorlatilag a teljes szabadenthalpia-növekedéssel, a ΔG_d -vel egyenlő, mert a diszlokációk entrópiát növelő hatása ennél az értéknél sokkal kisebb [4].

A két utolsó egyenletből következik az, hogy

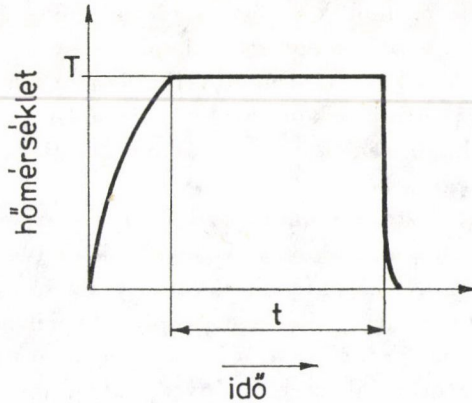
$$\sigma_K = K\mu \sqrt{\frac{\Delta G_d}{3\mu}}, \quad (7)$$

és így akár a szerkezetváltozást, akár a termodinamikai állapotot tekintve, egyértelmű a változás oka. A fenti folyáshatárváltozást az anyag valamennyi tulajdonságának a változása kíséri.

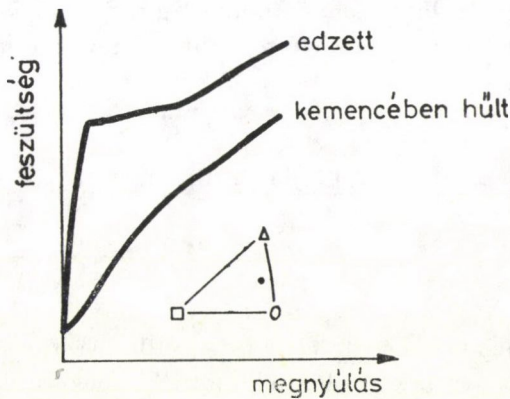
A tulajdonságok, és így a folyáshatár változására is a technológia nemcsak a képlékeny alakváltozást kínálja. Ha pl. az a feladat, hogy a σ_0 kezdeti folyáshatárt σ_1 -re kell megnövelni, akkor ez az 1. ábra szerint ε_1 fajlagos nyújtással elérhető, melyhez a megadottak szerint meghatározott ρ_1 diszlokációsűrűség, ill. valamilyen ΔG_1 szabadenthalpia-növekmény tartozik.

A szilárdságnövelés egy másik lehetséges módja a hőkezelés, melynek az a lényege, hogy az anyag T hőmérsékletét valamilyen $T(t)$ hőmérséklet-időprogram szerint változtatják. Így pl. ha a már említett alumínium hőfokát a 2. ábra szerint változtatjuk, azaz egy T hőmérsékletű és t idejű izzítás után gyorsan — vízbe edzéssel — lehűtjük, megnő a szilárdsága. A 3. ábra mutatja egy, az előzőekben leírtak szerint hőkezelt és egy kemencével együtt hűlt Al-kristály keményedési görbáját [5]. Az ábrában az egykristály orientációja is adott. Az ábra szerint ez a művelet mintegy 10-szeresére növeli a folyáshatárt.

A leírt hőkezeléssel a pontszerű hibák, az üres rácshelyek (vacancies) és a saját fajtájú interstíciós atomok koncentrációja növekszik meg. Adott T



2. ábra. Egy hőkezelés $T(t)$ hőmérséklet időprogramja



3. ábra. Az alumínium egykristály alakítási feszültsége edzett és lassan hűlt, közel egyensúlyi állapotban

hevítési hőmérsékleten az egyensúlyi koncentrációjuk a következő összefüggésből adódik [6]:

$$\frac{n}{N} = \exp \frac{-Q}{kT} \quad (8)$$

Ezzel mindkét ponthiba fajta koncentrációja számítható, csak üres rácshelyek esetén az egy üres rácshely keletkezéséhez szükséges energiát, az interstíciós atomoknál pedig a nekik megfelelő energiaértéket kell a Q helyére beírni.

Az üres rácshelyek többletkoncentrációjából eredő szabadenthalpia-növekedés jó közelítéssel a

$$\Delta G_{\bar{u}} \cong n_{\bar{u}} Q_{\bar{u}} + kT n_{\bar{u}} \ln u_{\bar{u}} \quad (9)$$

kifejezésből számítható, ahol N az összes rácspontok száma, n_u az üres rácshelyek mennyisége, k a Boltzmann-féle állandó.

A fenti hőkezeléssel a szilárdság növelhető, ha a T hőmérséklet nő, hiszen azzal a (7) szerint a ponthibák koncentrációja is nő. A gyors hűtés következtében u_i a T izzítási hőmérsékletéhez tartozó nagy ponthiba koncentráció szoba-hőmérsékleten is megmarad.

Hőkezeléssel a tiszta alumínium szilárdsága másképpen nem növelhető, de képlékeny alakváltozás és hőkezelés kombinációjával nagyon sokféleképpen változtatható. Ennek a sokféle hőkezelési variációnak a mérlegelésére itt nincs lehetőség, csupán megemlítjük, hogy pl. a képlékeny alakváltozás mértéke, a hevítési hőmérséklet, a hevítési idő és a hevítési sebesség, melyek valamennyien megváltoztathatják az eredményt, szinte korlátlan lehetőséget kínálnak még az ilyen egyszerű anyag tulajdonságainak a megváltoztatására is.

A folyáshatár megnövelhető az anyag kémiai összetételének a megváltoztatásával is [7]. Így pl. ha az alumíniumba Mg-t, Si-t vagy Cu-t ötvözzük, az is szilárdságnövekedést okoz. Az ötvözés szilárdságnövelő hatását a

$$G_\delta = \mu \epsilon^2 C \quad (10)$$

összefüggés adja meg. Itt az ϵ a fajlagos atomméret,

$$\epsilon = \frac{d_{Al} - d_\delta}{d_{Al}}, \quad (11)$$

C pedig az ötvöző anyag koncentrációja [8]. A (10) összefüggés csak akkor használható, ha az ötvöző atomok szilárd oldatot képeznek az alapfémekkel. Tegyük fel, hogy az előírt folyáshatár-növekményhez az oldhatósági határnál kisebb koncentráció elégséges. Ilyenkor a szabadenthalpia-növekedés híg oldatokra a

$$\Delta G_\delta \simeq CH_\delta + RT C \ln C \quad (12)$$

kifejezéssel számítható. Itt R a gázállandó, T az abszolút hőmérséklet és H_δ egy atom oldódásával járó enthalpianövekmény. Természetesen ebben az esetben is a szabadenthalpia és a szerkezetváltozás az az eredeti ok, mely a szilárdságnövekedést létrehozta.

Itt érdemes azt megjegyezni, hogy ugyanolyan szilárdságnövekedéshez nem tartozik ugyanolyan szabadenthalpia-növekmény, hiszen az $\epsilon^2 C$ szorzatnak az állandósága biztosítja a folyáshatár azonos növekedését. Ugyanakkor kis koncentráció értékeknél az $\ln C$ nagyon érzékenyen változik, míg a H_δ sokkal kisebb mértékű változást mutat annak következtében, hogy az ötvöző fajtája más. Az is nagyon lényeges, hogy különböző ΔG értékekhez tartozhat ugyanolyan $\Delta \sigma$ szilárdságnövekedés.

Ötvözéssel még úgy is megnövelhető, a szilárdság, hogy az ötvöző atomok második fázist képeznek az alapfémmel vagy egymással. Ez háromféleképpen valósítható meg, eutektikus ötvözet kialakításával, kiválásos keményítéssel és diszperz részecskékkel. Itt újra mindhárom lehetőség többféle ötvözőkombinációt kínál. Tehát az ötvözés is sokféle lehetőséget ad a technológusnak a szilárdságnövelésre. Azt azonban az eddigieken kívül meg kell jegyezni, hogy azonos szilárdságnövelés mellett a többi tulajdonság általában más-más mértékű változást mutat. Így pl. ha a szilárd oldat kialakulása okozza a folyáshatárnövekedést, akkor meglehetősen nagy az elektromos vezetőképesség csökkenése. Ha pedig ugyanazt a szilárdságnövekedést diszperz részecskék hozzák létre, a vezetőképesség csökkenése sokkal kisebb. Az előzőkhöz hasonló módon az anyagtudomány értelmezést ad a többi tulajdonságváltozásra is.

Szilárdságnövelést okoz az is, ha a próbatestet *nagyenergiájú részecskékkel bombázzák* [9]. A besugárzást neutronokkal, ionokkal végzik, de kismértékű növekedés röntgensugárzás hatására is létrejön. A szilárdságnövekedés a felületegységre becsapódó részecskék számától és az egyes részecskék energiájától függ. Bár ez a szilárdságnövelési mechanizmus ipari gyakorlatban mechanikai tulajdonságok változtatására gazdasági okok miatt ma még használhatatlan, mint technológia lehetőség létezik, és pl. a félvezetők előállításánál ipari bevezetésre is került.

Végül utolsónak maradt a *mechanikai rezgetés* [10] szilárdságnövelő hatása. Ha egy jól kilagyított fémet mechanikus rezgetésnek tesznek ki, annak szilárdsága megnő, annak ellenére, hogy a rezgések által keltett rugalmas feszültség nem haladja meg a makroszkóposan mért folyáshatárt.

A fenti felsorolás teljes képet ad a tulajdonságváltozást előidéző technológia műveletek csoportjairól. Mai ismereteink szerint

- a képlékeny alakváltozás
- a hőkezelés
- a kémiai összetétel megváltoztatása, az ötvözés
- a nagyenergiájú részecskékkel való bombázás és
- a mechanikus rezgetés,

azaz öt technológiai művelet, mellyel az előírt tulajdonságváltozások biztosíthatók. Annak ellenére, hogy a műveletfajták száma csupán öt, ezeken a csoportokon belül is számtalan lehetőség kínálkozik, ahogy azt korábban pl. az ötvözés taglalásakor már említettem. Óriásira növekszik a lehetőségek száma akkor, ha az egyes műveletcsoportok kombinációit is figyelembe vesszük.

A technológia feladata azonban nem csupán a tulajdonságok és a megfelelő alakú termékek előállítása, hanem, hogy az előírt tulajdonságokat és alakot a lehető legkisebb emberi munka, nyersanyag és energia ráfordítással biztosítsa. Ez utóbbi követelmény éppen olyan fontos, mint a minőség

biztosítása. A technológusnak tehát a rendelkezésre álló lehetőségek közül — melyek ma már szinte áttekinthetetlenül megsokasodtak — az anyagtudomány adta ismeretek felhasználásával a legolcsóbb eljárást kell kiválasztania vagy újakat keresnie. Ez szabja meg ugyanis elsősorban az egész termelés gazdaságosságát. Népgazdaságunk jelenlegi feladatainak megvalósítása, véleményünk szerint, a termelékenység gazdaságos növekedésén nyugszik, ez pedig elsősorban a technológiai színvonalától függ. Ez ad ma különös fontosságot a technológiának és az anyagtudományoknak. Ezt a fontosságot növeli az a tény, hogy hazánkban a foglalkoztatottság teljes, a hagyományos nyersanyagokban és energiában nem bővelkedünk.

A technológiai színvonal népgazdasági fontosságának az illusztrálására vessünk egy pillantást a 2. táblázatra.

Ez a kapitalista országok öt legnagyobb gördülőcsapágy-gyárának 1977-re vonatkozó termelési adatait mutatja [11]. Ezeket az adatokat azért választottam ki, mert nyilvánvaló, hogy valamennyi vállalat azonos, vagy közel azonos áron vásárolja a nyersanyagokat, és termékeik fajtáiban és minőségében sem lehet lényeges eltérés a piaci verseny miatt. Így — véleményem szerint — gazdasági mutatóikat elsősorban és döntő mértékben a technológiai színvonal szabja meg. Gazdaságossági mutatóként az ötödik oszlopban adott számokat, az 1 dolgozóra évenként jutó eladási értéket tekintjük. Ezekből az adatokból kitűnik, hogy amíg Angliában egy főre évenként csupán 17 939 dollár jut, addig egy nyugatnémet dolgozó ennek 1,5-szörösét, egy svéd közel 1,8-szörösét, az amerikai 2,35-szörösét és egy japán 3,56-szörösét, évenként 63 863 dollár eladási értéket állít elő. A fenti adatok egyértelműen mutatják a technológia szerepét az értéktermelésben és a termelékenységben.

2. táblázat

Vállalat	Ország	Eladási érték millió dollár	Létszám	Fajlagos érték dollár/fő	Hányados
SKF	Svéd	1803	57 209	31 516	1,76
Timken	USA	974	23 089	42 184	2,35
FAG	NSZK	645	23 867	27 024	1,5
NSK	Japán	562	8 800	63 863	3,56
RHP	Anglia	172	9 588	17 939	1

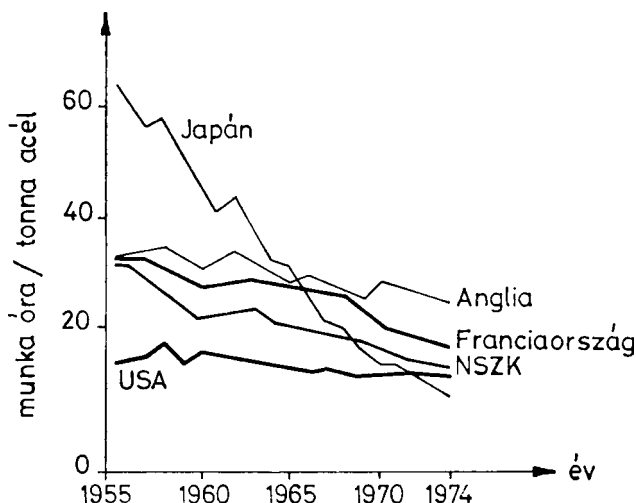
A termelékenység és a technológiai színvonalnak az állandó javulását szemlélteti a 4. ábra is. Ez azt mutatja, hogy a vezető kapitalista ipari hatalmak acéliparában miként alakult az 1 tonna acél előállításához szükséges munkaidő. Legnagyobb a fejlődés a japán acéliparban. Ott 10 esztendő alatt az emberi munkaerő ráfordítás közel a tizedrészére csökkent. Az is érdekes,

hogy amíg a három nagy európai kapitalista acélipar 10 évvel ezelőtt közel azonos munkaráfördítással termelt, 10 év alatt nagy különbségek alakultak ki közöttük.

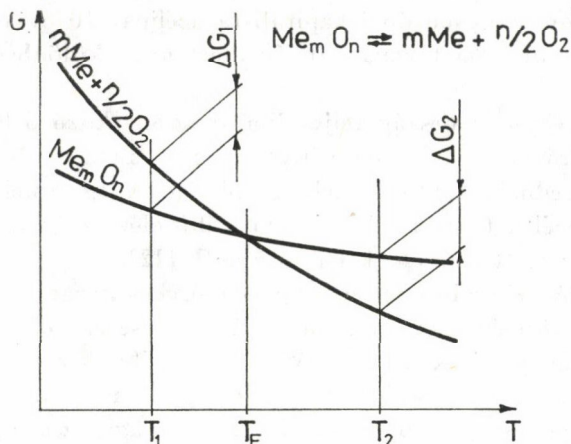
A diagram egy-egy ország teljes iparára vonatkozó átlagos értékeket mutat. Az élenjáró vállalatok eredményei még ezekhez a kiváló átlagokhoz képest is kiugró eredményeket érnek el. Így pl. amíg a legtermelékenyebb USA vállalat 1 tonna acélt 3,6 óra munkaidő alatt állít elő, addig az élenjáró japán vállalatnál 2,1 óra alatt termelnek 1 tonna acélt [12].

Bár a fejlődés szinte hihetetlen gyorsaságú, még korántsem ért el lehetőségeinek korlátai közelébe. Az anyagtudomány az esetek többségében világosan megmondja, hogy mit kell tenni. A technológiában azonban csak ritkán, és rendszerint sorozatos közelítéssel lehet az egyértelműen kijelölt célt elérni. Ezt világosan szemlélteti a fémek — és így a vas- vagy az acélgártás előállításának problémája.

Minden szobahőmérsékleten stabil vegyület — fémoxid, fémklorid vagy fémszulfid is — hevítés hatására valamilyen T_E egyensúlyi hőmérsékleten spontán elbomlik. Az ilyen anyagoknak a szabadenthalpiáját a hőmérséklet függvényében — egy elvi vázlaton — az 5. ábra mutatja. Ennek megfelelően pl. valamilyen M_nO_m fémoxid folyamatos hevítés során $T \geq T_E$ hőmérsékleten önként elbomlik. Jelenleg a vasat az oxidjaitól a T_E -nél jóval alacsonyabb hőmérsékleten redukáló közegben bontják meg és így állítják elő a nagy széntartalmú nyersvasat. Az acélgártás feladata, hogy ebből a nagy széntartalmú anyagból a felesleges szénmennyiséget eltávolítsa és összetételét e kívánságnak megfelelően biztosítsa.



4. ábra. A tömegegységnyi acél előállításához szükséges munkaidő változása néhány ipari országban, az idő függvényében



5. ábra. A szabadentalpia elvi változása a hőmérséklet függvényében egy oxidációs \rightleftharpoons redukciós folyamatra

Az anyagtudomány szerint sokkal egyszerűbben és kevesebb energiával lehetne acélt egy lépésben gyártani, a nyersvas előállítás megkerülésével úgy, hogy a vas oxidjait a T_E -nél nagyobb hőmérsékletre hevítik. Sajnos az egyensúlyi hőmérséklet sokszor többezer fokok nagyságrendű. Ilyen nagy hőmérsékletet a ma ismert tüzelőanyagokkal nem lehet elérni.

A fenti megoldás azonban nem utópisztikus álom, melynek nem túl távoli megvalósulását biztosítja az a tény, hogy a ma már széles körben elterjedt plazmaégőkben a többtízezer fokok hőmérséklet elérése nem okoz gondot, hiszen azt a fémszórásnál, hegesztésnél, fémek vágásánál, felrakásánál és olvasztásánál naponta hasznosítják. De nemcsak a feltételek adottak, a megvalósulást bizonyítja, hogy a Betlehem Steel Co. működtet egy olyan plazmaberendezést, mely ércekből közvetlenül állít elő acélt, melynek jellemző szennyezői $C = 0,01\%$, $S = 0,01\%$, $P = 0,005\%$, $Si = 0,01\%$ és $Cu = 0,01\%$. A kémiai összetétel önmagáért beszél [13].

Még ennél is többet mond az a kísérlet, melynek során az egyik legerősebb kötésű vegyületből, az Al_2O_3 -ból az említett módon Al-t sikerült előállítani. Bár ez csak laborkísérlet [14] szintű, egyértelműen bizonyítja a model helyességét és úgy véljük, néhány évtizeden belül ilyen bontóberendezéseket üzembe helyeznek.

A plazmatechnológiát felhasználva az NDK-ban szovjet—német együttműködés keretében kidolgozták az acélolvasztás és gyártás új módszerét. Először egy 10 tonnás kemencét alakítottak át — amit a mi Kohászati Gyárápító Vállalatunk szállított — úgy, hogy az olvasztáshoz szükséges hőmennyiséget szolgáltató plazmaégőt a Szovjetunióban fejlesztették ki [15]. Ezt követte egy 30 tonnás kemence üzembe helyezése. Az eddigi eredmények a módszer

számos előnyét bizonyították. Különösen alkalmasnak bizonyul a plazma-technológiai eljárás kiváló minőségű, ötvözött acélok előállításánál.

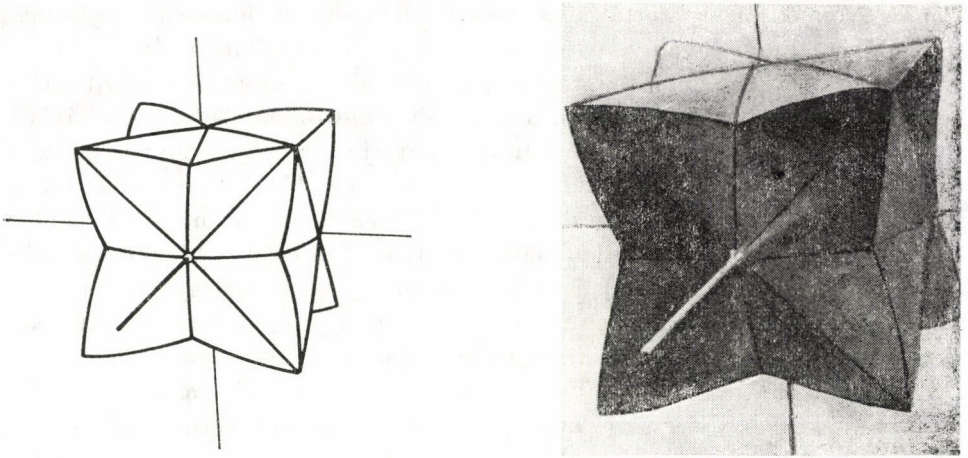
Visszatérve a mai feladatainkra, a technológia kutatása és fejlesztése hazánkban az egyik legfontosabb, ha nem a legfontosabb feladat. A korábban bemutatott táblázat adatai egyértelműen mutatják, hogy a technológiai színvonal növelésével milyen mértékben növelhető az egy főre jutó termelési érték, még azonos termékszerkezet mellett is. Különösen fontos ez, mert ugyanabból a nyersanyagból korszerű technológia mellett sokkal értékesebb termék állítható elő. A következőkben néhány példát mutatunk be arra, hogy azonos összetételű anyagnak hogyan lehetne a tulajdonságait megjavítani és értéküket megnövelni jól kiválasztott és kidolgozott technológiai folyamatokkal.

Hazánkban jelenleg évenként mintegy 70 000 tonna alumíniumot gyártunk. Ennek jelentős része elektromos vezető huzalként kerül felhasználásra. A vezetékvezetők minőségét az elektromos vezetőképesség és a szilárdság együttesen szabják meg. E két tulajdonságnak a javítása egymásnak ellentmondó követelmény, mert minden olyan művelet, mely az elektromos vezetőképességet javítja, a szilárdság csökkenését okozza. A szilárdság növelésének módjai — általában — az elektromos ellenállást is növelik. Van azonban a vezetékanyagok alakjában rejlő olyan lehetőség, mely biztosítja a szilárdságnövelést a vezetőképesség csökkenése nélkül. Ez az ún. textúraképzés. Textúrásnak nevezünk egy anyagot akkor, ha benne valamely $[uvw]$ kristályirány a huzal tengelyével párhuzamos.

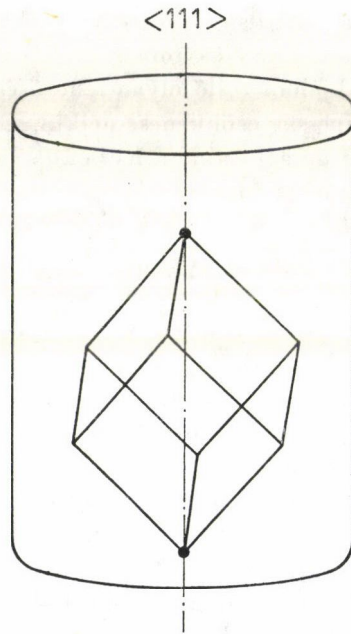
Az elektromos vezetőképesség a kristályirányoktól független. A szilárdság azonban nagymértékben függ az orientációtól [16]. Ezt mutatja a 6. ábra az alumínium szakítószilárdságára. Eszerint, ha sikerül olyan huzalt készíteni, melynek a tengelye az $\langle 111 \rangle$ irányok valamelyikével párhuzamos, akkor annak a szilárdsága nagyobb, anélkül, hogy az elektromos tulajdonságok romlottak volna. A 7. ábra mutatja vázlatosan, hogy milyen állásúnak kell lennie az elemi celláknak az ilyen textúrás huzalokban. Már a szilárdságnövelés is jelentős eredmény, de az ilyen nagyobb szilárdságú anyagnak lejjebb lehet szorítani az idegenatom tartalmát, mely a vezetőképesség javításához vezet. Ez nemcsak a minőségjavításban fontos, hanem az energiafelhasználást is csökkenti. A vezetékeken ugyanis az P_{Rt} energia a környezetet melegítve elvész. Csupán mérlegelés kérdése, hogy mekkora energiamegtakarítás érhető el jobb vezetőképességű anyagok felhasználásával, amit az $\langle 111 \rangle$ huzaltextúra biztosítana.

Ez a textúra pedig nem elérhetetlen. A ma gyártott huzalok köbtartalmának mintegy 40 ÷ 50%-át ilyen orientációjú krisztallitok töltik ki. Megfontolandó, hogy mennyi kutatási ráfordítást érdemel ennek a feladatnak technológiai megoldása.

A ferro- és ferrimágneses anyagok sok, a műszaki gyakorlat számára fontos tulajdonsága is nagy különbségeket mutat a kristályiránytól függően



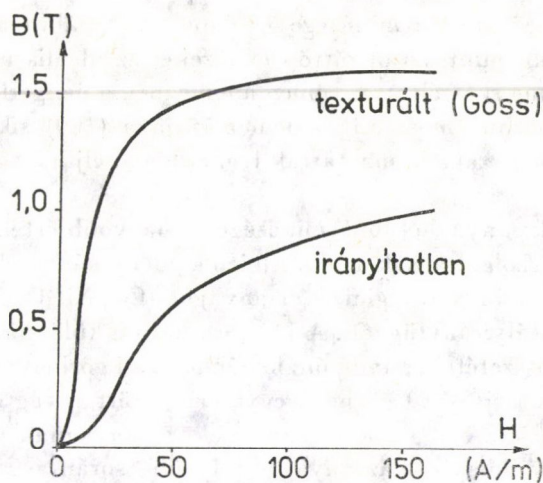
6. ábra. Az alumínium alakítási feszültségének orientáció függése



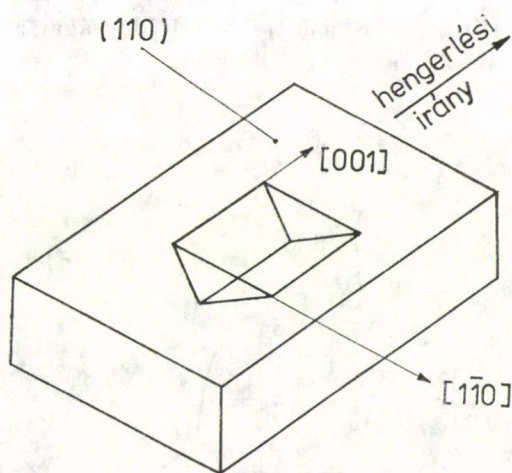
7. ábra. Az alumíniumhuzalok maximális szilárdságához tartozó ideális textúra

[17, 18]. A 8. ábra mutatja pl. azt, hogy a transzformátorlemezként használt Fe—Si ötvözetben az ún. Goss-textúrás, valamint az izotróplemezeknek a \mathbf{B} indukciója hogyan változik a \mathbf{H} térerősség függvényében.

A Goss-textúrás lemezben a hengerlési iránnyal a $[001]$ kristályirány párhuzamos, a lemez síkja pedig a (110) síkkal esik egybe, úgy ahogy azt a 9.



8. ábra. A Fe—Si transzformátorlemezek indukciójának változása a térerősség függvényében, textúrás (Goss) és izotróp anyagokon mérve



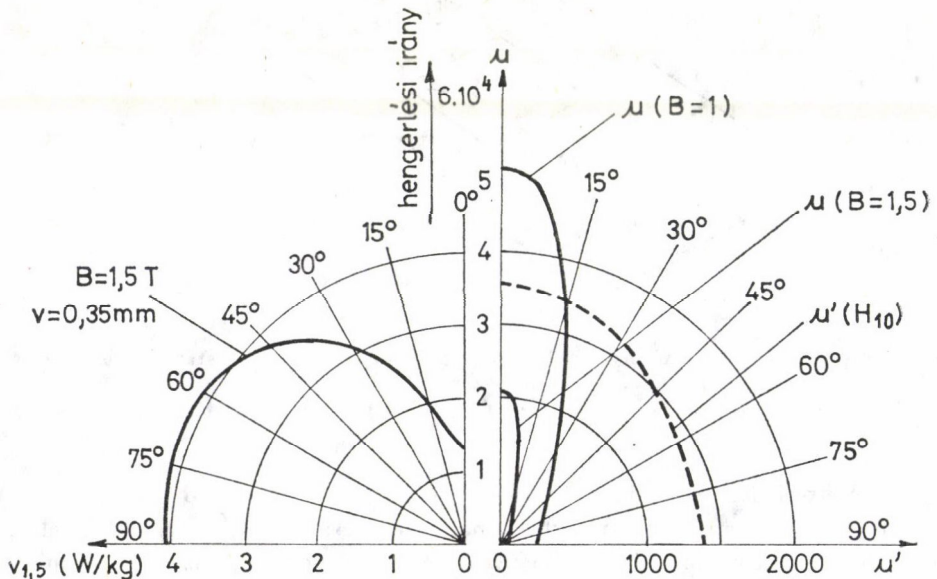
9. ábra. A Goss-textúrás lemezben a felület a hengerlési irány és a kristályirányok közötti kapcsolat

ábra szemlélteti. Ennek a lágymágneses anyagfajtának az az előnyös tulajdonsága, hogy ha a hengerlési irányban mágnesezik, a vesztesége jóval kisebb, mint a textúrátlan izotróp lemezeké. Ezzel együttjár az is, hogy a permeabilitás értékei nagyok. A 10. ábra a lemez síkjában fekvő különböző irányokban mért veszteséget, illetve a permeabilitásokat mutatja. Bár a Goss-textúrás

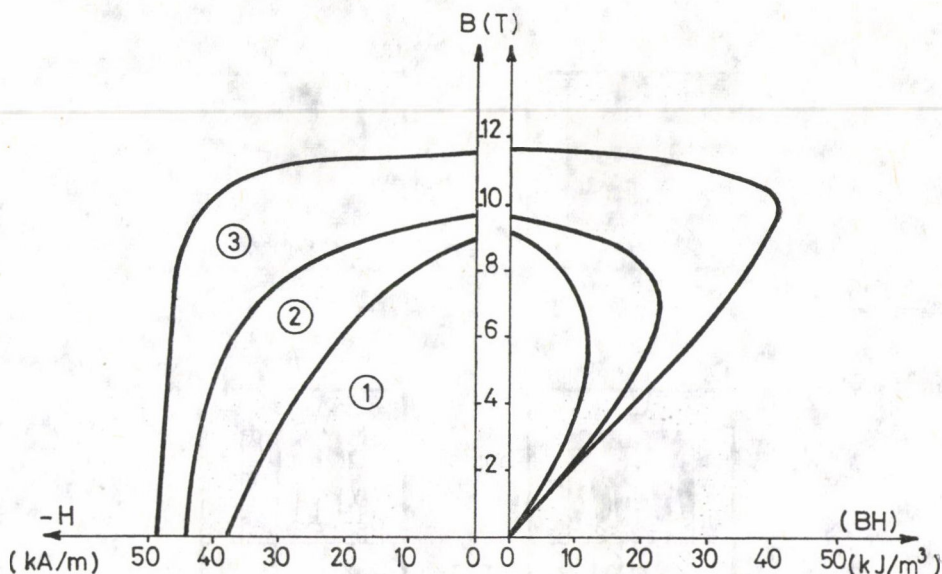
transzformátorlemezeknek a minősége — éppen a 10. ábra mutatta mértékben — sokkal jobb, mint az anizotróp lemezeké, az ideális megoldást az ún. kockatextúrás anyag szolgáltatja. Ebben a lemezben a hengerlési irány a [001] kristályiránnyal párhuzamos, míg a lemez síkja a (100) síkkal esik egybe. A Csepel Fémműben szabadalmaztattak technológiai eljárást az ilyen lemezek előállítására.

Az azonos alapanyagból jobb minőségű és nagyobb értékű termékre igen szemléletes példát szolgáltatnak az ún. Alnico keménymágnesek. Ez az ötvözet-típus mintegy 40% ún. stratégiai nyersanyagot (Co, Ni, Cu) tartalmaz [17]. Tulajdonságai kristályirányfüggők. A 11. ábra három különböző tulajdonságú, de azonos kémiai összetételű anyag ún. lemágnesezési görbéit és a (BH) energia szorzat értékeit mutatja. Az 1 görbe az egyszerű öntött anyag $B(-H)$ és $B \cdot H(B)$ függvényeit mutatja. A 2 görbe ugyanennek az anyagnak a tulajdonságait szemlélteti, de úgy, hogy ezt az anyagot a lehűlés során a Curie-hőmérséklet közelében az anyag koercitív erejét mintegy 4-szeresen meghaladó erősségű mágneses térben hűtötték le. Ezzel a viszonylag egyszerű technológiai fogással a (BH) energia szorzat maximuma — mely adott mágnes típuson belül az egyik legfontosabb minőségi jellemző — közel a duplájára növelhető.

A két megemlített anyagban a krisztallitok orientációja statisztikus eloszlású. Ennek az anyag típusnak is a legjobb tulajdonságai a [001] irányban mérhetők. Egy nagyon szellemes megoldással a kristályosodás úgy irányít-



10. ábra. A Goss-textúrás lemezen mért veszteség és permeabilitási értékek változása az irány függvényében

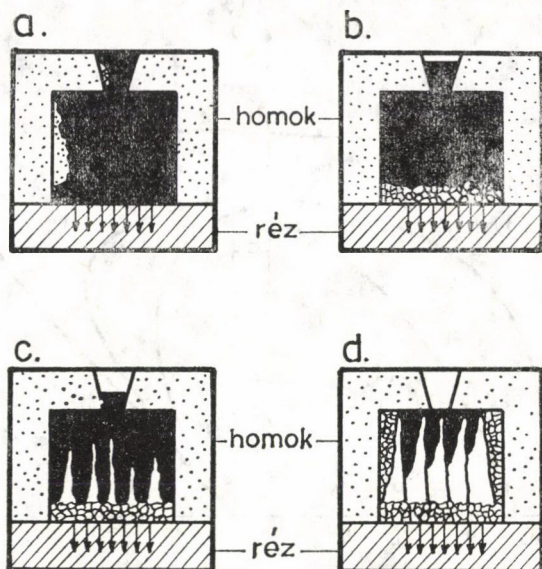


11. ábra. Három különböző technológiával előállított alnikó keménymágnes lemagnesszési és energiaszorzat görbéje. 1. öntve, 2. öntve és mágneses térben hűtve és 3. kristályirányítottan megszilárdulva és mágnes térben hűtve

ható, hogy a kristallitok többsége a kívánt irányba álljon be. Ez a technológia abból áll, hogy az ötvözet ömledékét olyan formába öntik (lásd a 12. ábrát), melynek alsó része vízzel, vagy levegővel hűtött rézlap, oldala pedig egyszerű homok, vagy valamilyen, a homokhoz hasonló keverék, melynek hővezető képessége elenyésző a rézéhez képest. Ezért hőmenyiség gyakorlatilag csak a rézlemez irányába áramlik, ahogy a nyilak mutatják. A 12. ábra a részlete mutatja az öntőforma metszetét. A beöntéskor a hideg rézrel érintkező anyag egy vékony rétege azonnal megszilárdul, mely a gyors hűtés következtében rendkívül apró, rendszertelenül eloszló irányítottaságú kristallitokból tevődik össze, ahogy ezt a b részlet vázlatosan szemlélteti.

A köbös fémekben a kristályok növekedésének a maximális sebessége a [001] irányba mutat és ezért ebből a rendezetlen orientációjú kristallithalmazból azok nőnek a leggyorsabban, melyeknek [001] iránya párhuzamos a hőelvonás irányával. Ezt szemlélteti az ábra c részlete. Minél jobban megvalósul az a feltétel, hogy hőmenyiség csak a rézlap irányába távozzék, annál nagyobb hányadát teszik ki a [001] orientációjú kristallitok a teljes térfogatnak (d részlet). Az ilyen keménymágnes tulajdonságait mutatja a 11. ábra 3. görbéje.

A fentiek három olyan példát mutattak be, amelyek mindegyike azt az anyagtudomány felderítette tényt hasznosítja, hogy a műszaki gyakorlatban fontos minőség-, ill. tulajdonságjelző paraméterek a kristályorientációtól is függenek. A bemutatott példákhoz tartozó technológiai eljárásokat megvalósítani és kézben tartani nem könnyű, de a költséget és fáradságot bőven kár-



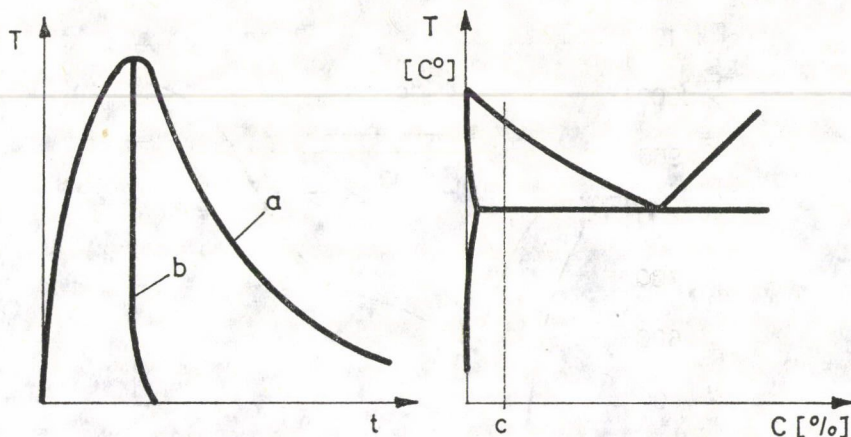
12. ábra. A 11. ábra 3 görbéjéhez tartozó kristályirányítás elvi szakaszai

pótolja az az értéktöbblet, ami ezekben az anyagokban a jobb minőség következményeként megtestesül. Az ilyen és hasonló példák — melyek felsorolása korántsem teljes — azért különösen fontosak, mert újabb anyagok felhasználása nélkül csupán a technológiai színvonal növekedésével hoznak létre új értékeket. Nem kell hangsúlyozni, hogy ez különösen hazánkban milyen fontos.

A fentiekén kívül természetesen végeláthatatlan azoknak a lehetőségeknek a sora is, melyekben a technológia a kristályirányok szándékos megváltoztatása nélkül is jobb minőségű terméket állít elő ugyanabból az anyagból.

A kisszéntartalmú (C $0,1 \div 0,2\%$) ötvöztelen szénacélból évenként óriási mennyiséget használunk fel. Ennek az acéltípusnak a szilárdsági tulajdonságait az utóbbi időben az érdeklődés előterébe állította az a tény, hogy a gépkocsi ipar — mely ebből az acéltípusból rendkívül sokat felhasznál — a kocsisúly és az üzemanyagfelhasználás csökkentése miatt, nagyobb szilárdságú anyagot igényel.

A kutatók két irányban keresik a jobb megoldást. Az egyik kis mennyiségű ötvözők felhasználásával, a másik hőkezeléssel növeli a szilárdságot. A 13. ábra bal oldali része egy olyan ún. gyors hőkezelő eljárás $T(t)$ hőmérséklet—idő programját mutatja, melynél a hevítésre az anyagon átvezetett elektromos áram hőhatása szolgál. Ez egyrészt lehetővé teszi, hogy (I) a felhevítési idő rendkívüli módon lerövidüljön ($4 \div 2$ sec) és (II) az energiafelhasználás határfoka 90%-nál nagyobb legyen. (Az összehasonlítás érdekében megjegyezzük, hogy a hagyományos eljárásnál 50%-os energiahasznosítás már kitűnő ered-



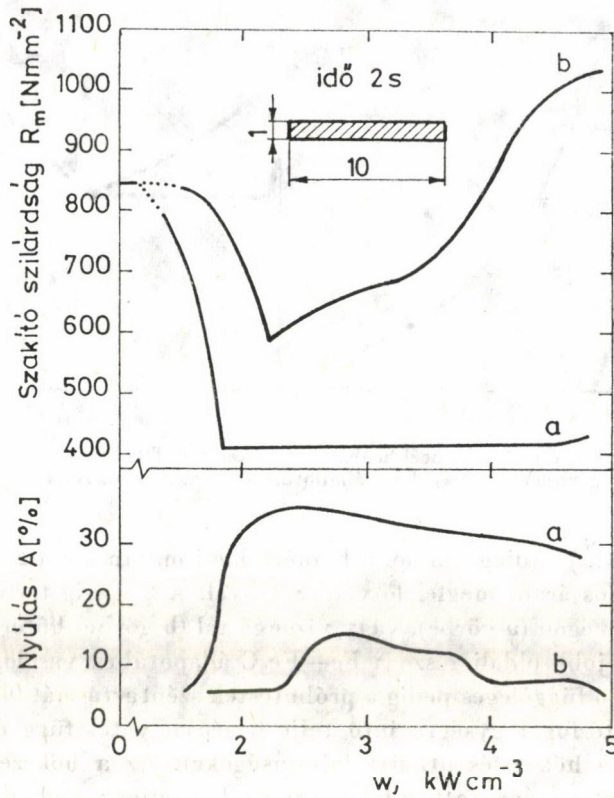
13. ábra. A 0,1% C-et tartalmazó acél hőkezeléséhez tartozó $T(t)$ hőfok—idő görbék (bal oldali görbék) és a Fe— Fe_3C állapotábra hozzá tartozó részlete

ménynek számít.) A diagramban a hőmérsékleti maximumot 2 sec alatt érték el az elektromos áram megfelelő választásával. A 2 sec-ig tartó hevítés után a darabokat levegőn (a görbe), vagy vízszugárral (b görbe) hűtöttük le.

Az ábra jobb oldali része a Fe— Fe_3C állapotábra vasoldali részét, a C ponthoz tartozó függőleges pedig a próbatetek szénttartalmát (0,1%) mutatja. A különböző térfogategységre jutó teljesítményfelvétel függvényében a 14. ábra mutatja a hőkezelés utáni tulajdonságokat. Az a hőkezeléshez tartozó tulajdonságokat a szaggatott, a b-hez tartozókat teljes vonal jelzi. A vastagon kihúzott vonal szerinti anyag a ma ismert legjobb minőségű ún. kötöző anyagnál is jobb. A néhány szóval leírt eljárás részleteiről más helyen bővebben beszámolunk.

A minőségjavítás utolsó példajaként olyan technológiát ismertettek, mely azt mutatja, hogy egy-egy nehéz feladat megoldásánál milyen kifinomult fogások vezetnek az egyszerű és gazdaságos eredményre. A II. rípusú szupravezető anyagok egyik jellegzetes képviselője az Nb_3Sn vegyület. 18,1 K-os kritikus hőmérséklete a viszonylag egyszerű felhasználást is lehetővé teszi. A β -volfram típusú kristályszerkezete miatt viszont vékony huzalkénti előállítását nehezíti az, hogy az ilyen anyagok képlékenyen egyáltalán nem, vagy csak nagyon kis mértékben alakíthatók. Ezért az ilyen anyagokból általában párologtatással hoznak létre kis keresztmetszetű, hosszú, elektromos áram vezetésére alkalmas termékeket.

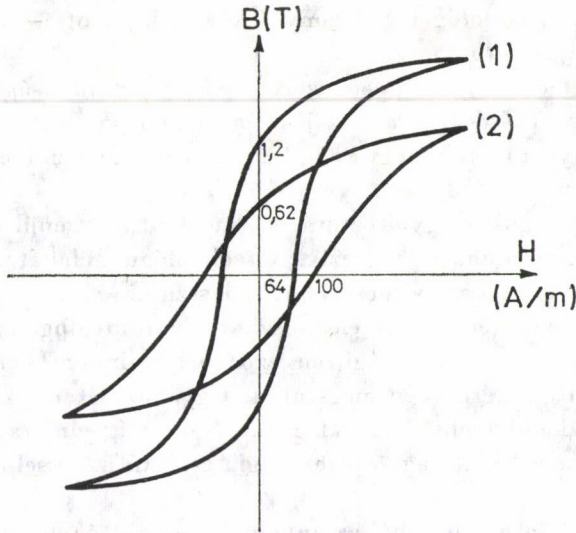
Az említett rendkívül szellemes és gazdaságos technológia szerint egy niob csőbe mintegy 75% niobot és 25% ónt tesznek, gondosan összekevert poralakban. Az adott porkeverékkel megtöltött niob csőből a gázokat gondosan leszívattyúzzák, majd a csövet mindkét végén lehegesztik. Az így elkészített anyagból a hagyományos módon, vékony huzalt készítenek. Ez ilyen



14. ábra. A 13. ábrán bemutatott hőkezelési program szerint készült próbatestek mechanikai tulajdonságai

állapotban semmi nehézséget nem okoz, hiszen mind a niob, mind az ón jól alakítható. A megfelelő átmérő elérése után a huzalt $970 \div 1400$ °C hőmérséklet-tartományban izzítják, ahol kialakul az Nb_3Sn szupravezető.

A felsorolt, távolról sem teljes minőségjavítási lehetőségek után azt is meg kell említeni, hogy a technológiával az anyagok minősége el is rontható. Erre kitűnő példát szolgáltatnak a mágneses tulajdonságok. A 15. ábra mutatja két lágymágneses anyagnak a hiszterézis görbéjét. Az egyik, a kisebb területet bezáró, a jól előkészített, megfelelő minőségű anyagra vonatkozik. Ugyanez az anyag képlékenyen alakítva sokkal nagyobb veszteséget okoz pl. vasmagként. Mivel a lágymágneses anyagokat lemezként szállítja az előállító, a vasmagnak megfelelő alakú darabokat abból ki kell vágni. Ez a kivágás a széleken mintegy $2 \div 4$ mm szélességben megnöveli a rácshiba-koncentrációt [20]. Ennek következtében nő a veszteség és a koercitív erő, csökken a permeabilitás és az indukció. Nagyméretű vasmagoknál ez az elrontott minőségű sáv az egész berendezés működését, hatásosságát nem zavarja. Azonban kisméretű



15. ábra. Egy jó (1) és egy rossz (2) technológiával készült lágymágneses anyag hiszterézis görbéje

vasmagoknál, melyeknél a lemez szélessége a deformált sávnál kevesebb, vagy csak alig valamivel több mint a kétszerese, az egész egység működését tönkretelheti. Így pl. a nagy hanghűséget (Hi-Fi) biztosító elektronikus berendezésekben a hangfrekvenciás egységekben a vasmagokat permalloy lemezekből készítik. Az ezekben a készülékekben használt vasmag-lemezek szélessége olyan kicsi, hogy az egész lemez teljes tömegére kiterjed a kivágásnak a minőséget rontó hatása. Mivel a kivágás elkerülhetetlen, utána a kisméretű vasmagok tulajdonságait megújító hőkezeléssel helyre kell állítani.

Összefoglalás és következtetések

A fentiek azt szerették volna igazolni, hogy az anyagtudomány és az anyagtechnológia a tulajdonságok ismereteinek megszerzése, ill. hasznosítása révén egymással nemcsak szorosan kapcsolódó, hanem egymásra utalt tudományterület is, mert az anyagtudományi eredmények csak az anyagtechnológián keresztül hasznosulhatnak a népgazdaságban. Az anyagtechnológus szakemberek pedig csak a korszerű anyagtudományi eredményekre támaszkodva tudnak kiváló minőséget biztosító, korszerű, gazdaságos technológiai eljárásokat kidolgozni és megvalósítani.

Az anyagtechnológia a termelési eljárások közben az anyag termodinamikai állapotát szinte folytonosan képes megváltoztatni, és mivel adott termodinamikai állapothoz a tulajdonságjelző paraméterek is adottak, az anyag

tulajdonságait a technológia — bizonyos korlátok között — a kívánságoknak megfelelően tudja változtatni.

Az anyagtechnológia éppen azért, mert a tulajdonságokat megváltoztatja, a termék minőségét nemcsak javítja, hanem gyakran rontja is. Ezeket a hatásokat a gyártási folyamat kellő helyén beiktatott műveletekkel lehet is kell megszüntetni.

A tulajdonságok megváltoztatására áttekinthetetlenül sok technológiai eljárás, ill. azok kombinációja létezik. A technológus feladata, hogy ezekből a lehető legjobbat és leggazdaságosabbat válassza ki.

A technológia, éppen az előző szakaszban megfogalmazott feltételek miatt, rendkívül fontos gazdasági tényező, mely minden terméknek a gazdaságosságát jelentős mértékben megszabja. Ugyanaz a termék korszerű, a feltételekhez illeszkedő technológiával gazdaságos, míg elmaradott vagy a feltételeket figyelmen kívül hagyó technológia csak ráfizetéssel, gazdaságtalanul termeli azt [21].

A technológia ugyanabból az anyagból nagy értékeket képes létrehozni, ezért hazánkban különös figyelmet érdemel.

A hazai anyagtudományi kutatásoknak jobban figyelembe kell venniök a hazai technológiai feltételeket. Egy új kutatási eredményt — ha azt népgazdasági hasznosításra szánták — csak akkor szabad befejezettnek tekinteni, ha a hozzátartozó gazdaságos technológia ismert és kézben tartható.

IRODALOM

1. PROHÁSZKA J.: Gépgyártástechnológia (1979. június)
2. TAYLOR, G. J.: *Proc. Roy. Soc* (1934), A 145 362
3. KOCKS, U. F.—CHEN, H. S.—RIGNEY, D. A.—SCHAFER, R. J.: *Work Hardening*, Gordon and Breach Sci. Publ., New York 1968, 151.
4. COTTRELL, A. H.: *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*, Clarendon Press Oxford, 1953
5. MADDIN, R.—COTTRELL, A. H.: *Phil. Mag.* 46, (1956) 735
6. KIMURA, H.—MADDIN, R.: *Quench Hardening in Metals*. North-Holland Publ. 1971
7. PECKNER, D.: *The Strengthening of Metals*, Reinhold 1964
8. MOTT, N. F.—NABARRO, F. R.: *Strength of Solids*. *Phys. Soc. London* (1948), 1.
9. KELLY, B. T.: *Irradiation Damage to Solid*. Pergamon Press, 1966
10. SANDOR, B. I.: *Fundamentals of Cyclic Stress and Strain*. The University of Wisconsin Press 1972
11. *Financial Times* 1979, II. 28
12. SZEKELY, J.: *Techn. Rev.* 81 (1979) 23
13. GOLD, R. G.—SANDALL, W. R.—CHEPLICK, P. G.—MACRAE, D. R.: *Ironmaking and Steel-making I*, (1977) 10
14. RAINS, R. K.—KADLEC, R. H.: *Met. Trans.* 1, (1970), 1501
15. BORODACEV, A. S. és tsai. *Neue Hütte* (1977) 22, 11, 604
16. SCHMID, E.—BOAS, W.: *Kristallplastizität*, Springer 1935
17. BOZORTH, R. M.: *Ferromagnetism*, Van Nostrand 1964
18. CHIKAZUMI, S.: *Physics of Magnetism*, John Wiley 1964
- 19a. PROHÁSZKA J.: *Neue Hütte* 6, (1977), 336
- b. PROHÁSZKA J.—KRISTYÁKNÉ MARÓTI G.: Kutatási eredmény (közlés alatt)
20. BERZY J.—HIDASAI B.—SZIVÓS S.—VARGA L.: *Kohászati Lapok* 106, (1973), 5, 211
21. PROHÁSZKA J.: A technológia jellegzetes vonásai és kapcsolata a többi tudományággal, előadás az MTA 1978. évi közgyűlésén (a III. és a VI. osztály közös tudományos ülése).

Material Science, Material Technology, Material Qualities. The results of Material Sciences are widely used in the practice of Technology. The paper shows that the theoretical knowledge of real grid structures enables us to attain a wide range of prescribed material qualities. Therefore the author directly concludes that from amongst the many possibilities for the given problem, taking into consideration the available means, there exists an economic optimum valid only for the given conditions. Changing the conditions the economic optimum will change too. Therefore close connection between material science and first of all the technological operations changing material characteristics and the incessant development of knowledges and their practical application can secure the economics of production. The paper proves this statement by several examples.

Werkstoffwissenschaft, Werkstofftechnologie, Werkstoffeigenschaften. Die technologische Praxis verwendet weitgehend die Ergebnisse der Werkstoffwissenschaft. Die Arbeit zeigt in erster Linie, wieviele Möglichkeiten zur Erreichung der vorgeschriebenen Materialeigenschaften die auf die realen Gittereigenschaften bezüglichen theoretischen Kenntnisse bieten. Hieraus kommt der Verfasser direkt zu dem Schluß, daß für eine gegebene Aufgabe unter den verschiedenen Möglichkeiten unter Berücksichtigung der verfügbaren Mittel ein solches ökonomisches Optimum existiert, welches nur für die gegebenen Bedingungen gültig ist. Mit Änderung der Bedingungen wird auch das ökonomische Optimum ein anderes. Deswegen kann ein enger Kontakt zwischen der Werkstoffwissenschaft und in erster Reihe den die Werkstoffeigenschaften ändernden technologischen Operationen, und die unaufhörliche Entwicklung der Kenntnisse und ihre praktische Nutzung die Wirtschaftlichkeit der Produktion sichern. Die Arbeit bringt mehrere Beispiele um die Richtigkeit der Behauptung zu beweisen.



KOMBINÁLT TALAJMODELL ALKALMAZÁSA SÍKALAPOK VIZSGÁLATÁRA, A TÉRBELI FESZÜLTSGÁLLAPOT FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

PETRASOVITS GÉZA*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

és

SOLTÉSZ PÉTER**

[Beérkezett 1980. február 26-án]

A tanulmány újszerű talajmodellt és egy ezen alapuló számítási eljárást mutat be nagypanelos épületek alapjainak méretezésére. A szerzők ismertetik a modell lényeges tulajdonságait, és ezek alapján arra a következtetésre jutnak, hogy a modell az eddig alkalmazott — rugalmas féltér, illetve a Winkler-féle ágyazási együtthatós — modellekhez képest a valóság jobb közelítésének tekinthető. Gyakorlati esetekre alkalmazott számításokkal igazolják, hogy a kombinált talajmodellen alapuló méretezési eljárással lényegesen kisebb alaptest igénybevételek, illetve süllyedéskülönbségek adódnak. Végül a kombinált talajmodell fizikai hátterének jobb megvilágítása és paramétereinek laboratóriumi meghatározása céljából érdekes analógiákra mutatnak rá a modell és a függőlegesen változó rugalmassági modulusú félterek között.

Bevezetés

A tanulmány bemutatja a Repnyikov-féle talajmodell alkalmazását a talajra helyezett hosszirányban rugalmas gerendák süllyedésének és igénybevételeinek számítására, térbeli feszültségállapot feltételezése esetén.

A modell elvi alapjai REPNYIKOV [1] rakta le, míg a Repnyikov-féle modell és a függőlegesen változó rugalmassági modulusú terek közti párhuzamok feltárásánál elsősorban BARVASOV [5], [6] munkáit emelhetjük ki.

Dolgozatunk főbb céljai:

- Az általunk hazai bevezetésre javasolt modell alkalmazhatósági körének kiterjesztése térbeli feszültségállapot esetére azzal a megszorítással, hogy az alaptest keresztirányban teljesen merevnek tekinthető. Ezzel az esettel nyújtott alapok — sávházak — esetében találkozunk.
- A Repnyikov-féle modell és a függőlegesen változó rugalmassági modulusú (inhomogén) félterek közötti analógiák bemutatása a modell-paraméterek laboratóriumi meghatározási lehetőségeinek feltárására.

* Prof. Dr. Petrasovits Géza, 1092 Budapest, Ifjúmunkás u. 20.

** Dr. Soltész Péter, 1083 Budapest, Tömő u. P/1.

1. A Repnyikov-modell vizsgálatakor kapott összefüggések elemzése

A Repnyikov-modell a két legerjedtebben alkalmazott talajmodell, a Winkler-féle rugós ágyazat és a rugalmas (homogén, izotrop) féltér ún. párhuzamos kombinációjának tekinthető (1. ábra); azaz nem más, mint rugókkal átszőtt rugalmas féltér. Paraméterei: E_0 rugalmassági modulus, ν_0 Poisson-tényező, K ágyazási tényező.

Az eddigi vizsgálatok alapján elmondható, hogy ez a modell sajátos módon egyesíti a két említett klasszikus eljárás pozitív tulajdonságait, miközben megszüntet több azoknál meglévő anomáliát és tompít több szélsőséges tulajdonságot. Ezért úgy tekintjük, hogy a javasolt modell az eddigieknél jobb közelítése a valóságnak. Ezt a meggyőződésünket fokozza, hogy igen érdekes kapcsolat mutatható ki a Repnyikov-féle modell és a mélységgel — később tárgyalandó módon — növekvő rugalmassági modulusú félterek között. E párhuzam vizsgálata hozzájárul a modell fizikai tartalmának jobb, többoldalú megvilágításához. Ezt a problémát külön fejezetben tárgyaljuk.

Fontosnak tartjuk hangsúlyozni eddigi vizsgálataink egyik lényeges következtetését, mely szerint a kombinált modellre helyezett alaptestekben adódó igénybevétel a hagyományos eljárásokhoz képest jelentős mértékben csökken, ami gazdaságosabb alapozási eljárás kidolgozását teszi lehetővé.

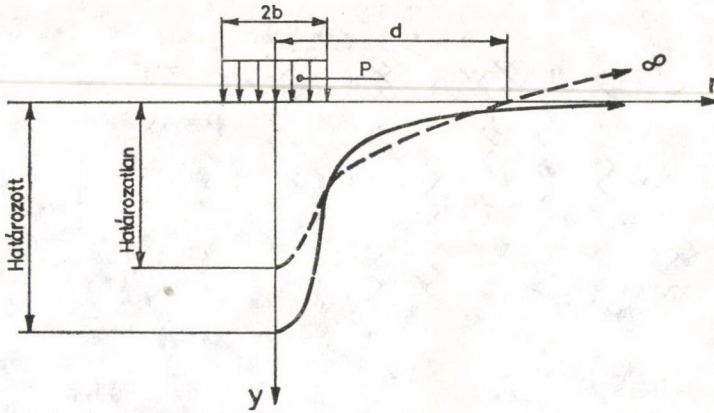
Bemutatunk néhány eddig nem tárgyalt olyan modelltulajdonságot, amely a Repnyikov-modell alkalmazását nagymértékben indokolja.

Tekintsünk *síkbeli* rugalmassági feladatot. Rugalmas féltér esetében a süllyedések és a terhelések közti összefüggést pontszerű terheléskor a jól ismert Flamant-formula adja:

$$y = \frac{2P(2 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \ln \frac{d}{r}. \quad (1.1)$$

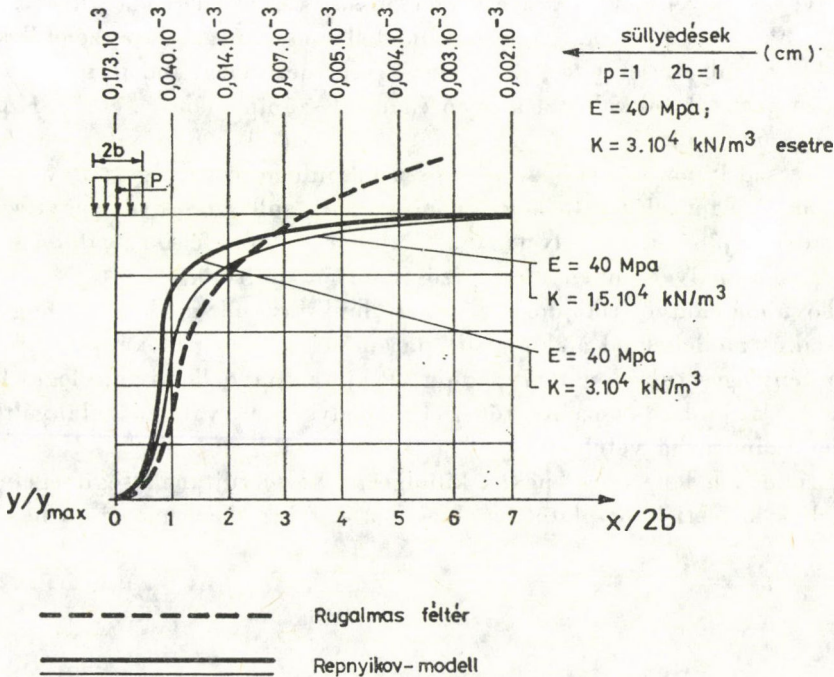
itt E_0 ν_0 a talaj rugalmassági modulusa és Poisson-tényezője. (Síkbeli deformációk esete.)
 r a P erő támadáspontja és a vizsgált pont közti távolság,
 d határozatlan állandó.

(1.1) szerint d a zérus süllyedésű pont távolságát adja az erő támadáspontjától. Ha most integrálással áttérünk valamely egyenletesen terhelt szakasz esetére, akkor a határozatlan állandó változatlanul jelen van, ami lehetetlenné teszi az abszolút süllyedések számítását. Továbbá a rögzített d mellett r -rel végtelenhez tartva a „süllyedés” végtelen kiemelkedéshez tart. Ez az abszurdum lehetlenné teszi egymástól távoleső pontok relatív elmozdulásának valós vizsgálatát. (2a. ábra). Ezekkel szemben, ha a Repnyikov-modell síkbeli változatát pontszerű erővel terheljük, megmutatható, hogy $r \rightarrow \infty$ esetében a felszín elmozdulásai zérushoz közelednek. Továbbá, egyenletesen terhelt szakasz esetében a határozatlan állandó eltűnik, mivel d -vel, azaz a zérus-süllyedésű ponttal ∞ -hez tartva a terhelt szakasz alatti süllyedések véges értékhez



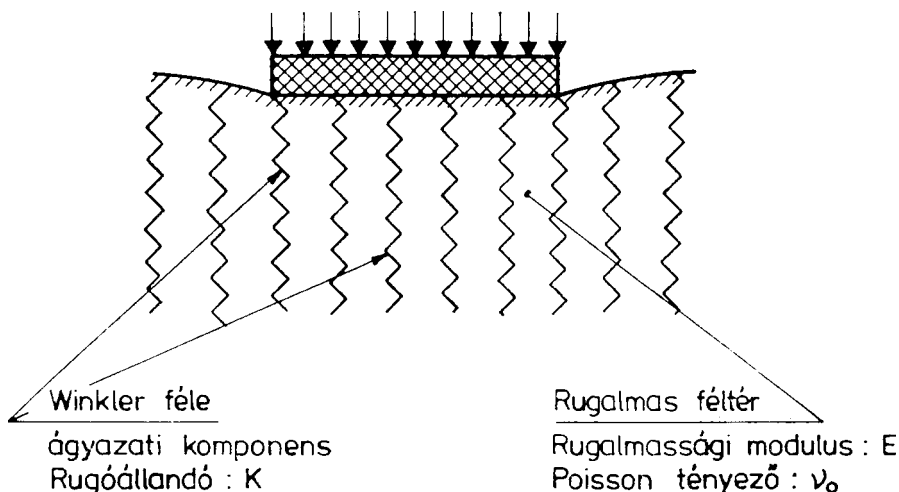
- Elvi süllyedéskép a rugalmas félsík esetében
- ===== Elvi süllyedéskép a Repnyikov-modell esetében

2a. ábra. Elvi süllyedéskép a rugalmas félsík esetében: -----; Elvi süllyedéskép a Repnyikov-modell esetében: =====



- Rugalmas féltér
- ===== Repnyikov-modell

2b. ábra. Konkrét számpélda sávteher alatti süllyedésképre. Repnyikov-modell: =====; Rugalmas féltér: -----



1. ábra. Rugókkal átszótt féltér (Repnyikov-modell)

közelednek. Gyakorlati szempontból is fontos, hogy ez a konvergencia igen gyors. Másrészt ez a jelenség fizikai szempontból is igen jelentős. Tudjuk, hogy a rugalmas végtelen féltéren alapuló számításoknál az alaptest szélétől kifelé távolodva a süllyedések lecsengése igen lassú, ami ellentétben áll a tapasztalattal. Ezzel szemben a Repnyikov-modell esetében az alap szélétől kifelé távolodva a süllyedések gyors csökkenése figyelhető meg, ami jó megegyezést mutat a tapasztalatokkal. Ezt a jelenséget két számpéldán — két E_0, K párra a 2b. ábra mutatja. Mivel a terhelés alatti süllyedések a Repnyikov-modellnél természetesen különböznek, azért az összehasonlíthatóság végett úgy választottuk meg a terheléseket, hogy a maximális süllyedések megegyezzenek. Összevetés céljából itt is felvettük a tisztán rugalmas félsíkra adódó süllyedési görbét, amelyet önkényesen közös pontból indítunk.

Továbbá előnyös tulajdonsága az általunk javasolt modellnek, hogy míg a klasszikus modelleknél alkalmazott paraméterek nem kellőképpen tükrözik a talaj tényleges tulajdonságait, addig az új talajmodellel a tényleges talajparaméterek jobban közelíthetők. (Pl. mélységgel változó alakváltozási modulus számításba vétele.)

Ezeknek a lehetőségeknek a kidolgozásához nyújtanak segítséget azok a modellek közötti kapcsolatok, melyeket a 3. fejezetben mutatunk be.

2. Kombinált talajmodellre helyezett, keresztirányban merevnek tekintett lemez (gerenda) vizsgálata

2.1. Az alkalmazhatóság feltételei, az eljárás érvényességi körének behatárolása

A modell elvi alapjait és az erre épülő síkbeli rugalmassági problémát feltételező eljárást a [2] cikk mutatja be. Az ottani feltételezés azt jelenti, hogy az alaptest hossz tengelyén átmenő függőleges síkban síkbeli alakváltozást tételezünk fel. Ennek a nagyfokú egyszerűsítésnek több ismert oka van. Mindenesetre nagy alapszélesség esetében a feltételezés gyakorlati szempontból nem áll messze a valóságtól és ezzel a nemzetközi szakirodalomban közöltek szerint a biztonság javára teszünk elhanyagolást.

A modell továbbfejlesztésének irányát a gyakorlatban felvetődő problémák szabták meg. Rendszeresen találkozunk a hazai gyakorlatban $2a/2b = 3/1$ -nél nagyobb oldalarányú ún. sávházzal. Ezen épületek sicalapozásánál a talajban síkbeli rugalmas állapot feltételezése már indokolatlan, és a nemzetközi szakirodalom alapján megállapítható, hogy lényeges túlméretezéshez vezet. Függetlenül attól, hogy az eltérés a biztonság javára szolgál, a síkbeli modell használata elvileg indokolatlan. Ezt a jelenséget a Repnyikov-féle modell esetében később konkrét példán mutatjuk be. Mivel célunk az, hogy javasoljunk a hazai gyakorlat számára egy, a valóságot jobban közelítő és az eddigiéknél gazdaságosabb tervezés lehetőségét biztosító talajmodellt, azért szükségesnek mutatkozott az eljárás kidolgozása — az alapok hosszában — térbeli feszültségállapotot előidéző sávházakra.

Hangsúlyozzuk, hogy a térbeli rugalmassági feladat megoldásánál keresztirányban merev alaptestet vizsgálunk. E feltétel teljesülését elősegíti, hogy a nagypaneles lakóépületek harántfalas rendszerűek.

Mindemellett szükséges, hogy a fenti követelmények teljesítése érdekében az előregyártott sicalapok méreteinek megválasztása oly módon történjék, hogy a nagypanelek csatlakozási helye minél távolabb essék az előregyártott sávalapelemek csatlakozási helyétől.

További feltétel, hogy az alapgerenda tehetetlenségi nyomatéka állandó legyen. Így lehetőség van a Gorbunov-Poszadov-féle félanalitikus eljárás alkalmazására.

Tapasztalatunk szerint gyakran előfordul, hogy olyan nagy „merevségű” alapokat terveznek, amelyek számítására a rugalmas tartó, illetve gerenda elmélete nem alkalmazható. Ezért mérőszámot adunk a gerendaalap ún. relatív merevségére, amit t -vel jelölünk:

$$t = \frac{\pi E_0 a^3 b}{2(1 - \nu_0^2) E_b I} \quad (2.1)$$

Itt E_0 , ν_0 a talaj klasszikus rugalmasságtani paraméterei, $E_b I$ a gerenda merevségi jellemzője, $2a$ a hosszabb, $2b$ a rövidebb oldal mérete. Ha a $t < 1$ egyenlőtlenség teljesül, akkor a gerenda hosszirányban abszolút merevnek tekintendő. Az általunk kidolgozott eljárás ilyen hosszirányban abszolút merevnek tekintett gerendára nem alkalmazható. Erre az esetre a következő eljárást javasoljuk. Legyen a merev alaptest hosszabbik mérete $2a$, a rövidebb $2b$, az egyenletesen megoszló terhelés p . A modell jellegéből következik, hogy a merev alap esetében a p terhelés — egyelőre ismeretlen — λ -szorosa, $0 \leq \lambda \leq 1$ jut a Winkler-féle ágyazati elemre, $(1 - \lambda)$ szorosa pedig a rugalmas féltérre.

A rugalmas féltér süllyedését az

$$y_E = \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \Omega 2b (1 - \lambda) p$$

képletből kapjuk, ahol Ω egy, az a/b aránytól függő szorzó. A Winkler-féle komponens süllyedése definíció szerint:

$$y_K = \frac{\lambda p}{K}.$$

A két süllyedésnek meg kell egyeznie egymással; ebből λ meghatározható:

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{E_0}{K\Omega(1 - \nu_0^2)2b}}.$$

Ezután számítható az alaptest igénybevétele. A Winkler-féle komponensre jutó λp terhelés egyenletes talpfeszültséget hoz létre, tehát ebből a részből igénybevétel nem származik.

Nyomatékok csak a rugalmas féltér esetében keletkeznek. Erre az esetre vonatkozólag a talpfeszültség és nyomaték számítása jól ismert, csak jelen modellünk sajátossága miatt most $(1 - \lambda)p$ csökkentett külső terheléssel kell számolni.

2.2. A számítási eljárás leírása

Legyen a gerenda hossza: $2a$ és szélessége: $2b$. Szokás szerint használjuk az $x = X/a$; $y = Y/b$ dimenzió nélküli koordinátákat. A fentiekben előírt feltételeknek megfelelően a gerenda y irányban merev, tehát ebben az irányban a süllyedéskülönbségek elhanyagolhatók.

Emlékeztetünk rá, hogy az alaptest alatt kialakuló talpfeszültség minden pontban két részre bontható: a rugalmas féltérkomponensre, ill. a Winkler-féle

komponensre jutó részre. A megoszlás aránya a hely és a talajparaméterek függvénye, és a megoldás során ismeretlen.

Legyen $p(x, y)$ kétváltozós függvény az ismeretlen talpfeszültség. Mivel y irányban az alapperenda teljesen merev, azért a

$$p(x) = b \int_{-1}^1 p(x, y) dy$$

képlettel áttérhetünk egyváltozós talpfeszültségfüggvényre. Megfordítva, $p(x, y)$ származtatható $p(x)$ -ből a következő módon:

$$p(x, y) = \frac{p(x)}{\pi b \sqrt{1 - y^2}},$$

ami összhangban van a keresztirányban merev sávalap alatti feszültségekre vonatkozó ismert képlettel. Ezután keressük az ismeretlen talpfeszültséget a következő egyváltozós polinom formájában:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{10} b_i x^i. \quad (2.2)$$

Ez összhangban áll GORBUNOV-POSZADOV eredményével, amely azt állítja, hogy a talpfeszültség hatványsorát — a gyakorlati pontosságot szem előtt tartva — elegendő 10-ed, esetleg 12-edfokú polinomig bezárólag figyelembe venni. Szerepelnek a sorfejtésben a páratlan fokszámú tagok is, lehetővé téve az aszimmetrikus terhelés és az ebből keletkező ferdülések figyelembevételét, ill. számítását.

A talpfeszültségnek a rugalmas féltér-komponensre jutó részét jelöljük a_i ismeretlen együtthatós polinommal:

$$q^E(x) = \sum_{i=0}^{10} a_i x^i. \quad (2.3)$$

Így $q^K = p - q^E$ jut a Winkler-féle komponensre. Legyen a terhelés megadva szintén egyváltozós — tehát y irányban összegzett — 10-edfokú polinom alakjában:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{10} F_i x^i. \quad (2.4a)$$

Legyenek ismertek a következő paraméterek:

$$\begin{aligned} E_b I &= \text{a gerenda merevsége,} \\ E_0, \nu_0, K &= \text{a talajmodell paraméterei,} \\ F_i &= \text{a terheléspolinom együtthatói,} \\ 2a &= \text{a gerenda hossza.} \end{aligned} \quad (2.4b)$$

Az F_i terheléseggyütthatók és az ismeretlen b_i talpfeszültség-együtthatók segítségével felírható a gerenda relatív behajlása, amelyet a páros és a páratlan fokszámú tagokból származó részt szétválasztva célszerű rendezni:

$$\begin{aligned}
 y - y_0 = & -\frac{a^4}{E_b I} \left[\frac{M_0^2}{2a^2} x^2 + \frac{b_0 - F_0}{24} x^4 + \frac{b_2 - F_2}{360} x^6 + \frac{b_4 - F_4}{1680} x^8 + \right. \\
 & + \frac{b_6 - F_6}{5040} x^{10} + \frac{b_8 - F_8}{11\,880} x^{12} + \frac{b_{10} - F_{10}}{24\,024} x^{14} - \frac{E_b I}{a^3} \operatorname{tg} \varphi_0 x + \\
 & + \frac{Q_0}{6a} x^3 + \frac{b_1 - F_1}{120} x^5 + \frac{b_3 - F_3}{840} x^7 + \frac{b_5 - F_5}{3024} x^9 + \\
 & \left. + \frac{b_7 - F_7}{7920} x^{11} + \frac{b_9 - F_9}{17\,160} x^{13} \right], \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

ahol y_0 = a gerenda középpontjának elmozdulása,
 φ_0 = a gerenda elfordulása szöge a gerenda középpontjában
 M_0 = a gerenda középpontjában ébredő nyomaték, melyre

$$M_0 = -a^2 \left[\frac{b_0 - F_0}{2} + \frac{b_2 - F_2}{4} + \frac{b_4 - F_4}{6} + \frac{b_6 - F_6}{8} + \frac{b_8 - F_8}{10} + \frac{b_{10} - F_{10}}{12} \right]. \quad (2.6)$$

Q_0 = a gerenda középpontjában ható nyíróerő, melyre

$$Q_0 = -a \left[\frac{b_1 - F_1}{2} + \frac{b_3 - F_3}{4} + \frac{b_5 - F_5}{6} + \frac{b_7 - F_7}{8} + \frac{b_9 - F_9}{12} \right]. \quad (2.7)$$

Az y_0, φ_0 mennyiségek ismeretlenek.

A talaj süllyedését, mivel a két ágyazati komponens süllyedésének meg kell egyeznie egymással, megkaphatjuk a (2.3) formula szerinti alakban felvett, a rugalmas feltér-komponensre jutó talpfeszültségrész figyelembevételével a Boussinesque-formulának a gerenda felületére való integrálásával. Az y irányú merevség itt is egyszerűsítést eredményez, és a süllyedésfüggvény sorfejtéséből ismét 10-edfokú polinomot meghagyva, az $\omega(x) = \omega_0(x) + \omega_1(x)$ páros-páratlan felbontásra az

$$\omega_0(x) = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \sum_{u=0}^5 \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq u}}^5 \frac{a_{2i}}{2i - 2u} + (\ln 4\alpha - d_{2u}) a_{2u} \right) x^{2u}, \quad (2.8)$$

illetve

$$\omega_1(x) = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0} \sum_{u=0}^4 \left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq u}}^4 \frac{a_{2i+1}}{2i - 2u} + (\ln 4\alpha - d_{2u+1}) a_{2u+1} \right) x^{2u+1}$$

képletet kapjuk, ahol

$$d_u = \sum_{s=1}^u \frac{1}{s}; \quad \alpha = \frac{a}{b}.$$

A síkbeli rugalmassági feladattól eltérően itt abszolút elmozdulásokat kapunk, ezért további feltételek előírása nélkül számítható a lemez deformációjánál ismeretlenként szerepelt y_0 és φ_0 elmozdulás, illetve elfordulás értéke:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi a E_0} \left(\sum_{i=1}^5 \frac{a_{2i}}{2i} + a_0 \ln 4\alpha \right), \\ \tan \varphi_0 &= \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi a E_0} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{a_{2i+1}}{2i} + a_1 (\ln 4\alpha - 1) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

A (2.8) formulából adódó $\omega = \omega_0 + \omega_1$ süllyedésfüggvénynek meg kell egyeznie a Winkler-féle ágyazat süllyedéseivel, amit az erre a komponensre jutó $q^K = p - q^E$ feszültség idéz elő. Itt megemlítendő, hogy a polinomos kezelés relatív egyszerűsége és jó áttekinthetősége azzal a hátránnyal jár, hogy az ágyazati komponensek süllyedésének megegyezését csak az alaptest alatt tudjuk biztosítani. Ebben az irányban egy általánosabb modell segítségével lehet tovább lépni, amiről jelen cikkben nem szólnunk. Tehát a Winkler-féle ágyazatra vonatkozólag:

$$q^K = -K\omega.$$

Ide (2.8)-ból behelyettesítve az ω süllyedést, megkapjuk q^K értékét az ismeretlen a_i együtthatókkal kifejezve. Mivel

$$p = q^E + q^K, \quad (2.10)$$

és a q^E, q^K feszültségfüggvények együtthatói az a_i ismeretlenek függvényei, azért a b_i, p -együtthatók is kifejezhetők az a_i ismeretlenekkel. Így minden ismeretlent az a_i együtthatókkal fejezhetünk ki. Elegendő tehát az a_i értékek meghatározása. Ehhez 11 egyenletre van szükségünk.

Tegyük egyenlővé a gerenda (2.5) alatti relatív elmozdulásait a talajfelszín (2.8) szerinti süllyedésével. A (2.5)-ben határozatlan zérus- és elsőfokú tagoktól eltekintve az

$$y - y_0 = \omega - \omega^0 \quad (\omega^0, \text{ az } \omega \text{ zérusfokú tagja}) \quad (2.11)$$

egyenlőség az egyenlő fokszámú hatványok együtthatóinak összevetéséből 9 egyenletet ad. A (2.5)-ben szereplő M_0 és Q_0 értékek (2.6) és (2.7) szerint, a b_i értékek pedig (2.10) szerint fejezhetők ki az a_i értékekkel. A további két

egyenletet a gerenda statikai egyensúlyának feltételeiből kapjuk. A függőleges erők egyensúlyából

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 F(x) dx \quad (2.12)$$

adódik, ahol $p(x)$ (2.10) szerint az a_i értékek függvénye. A nyomatéki egyensúlyból pedig

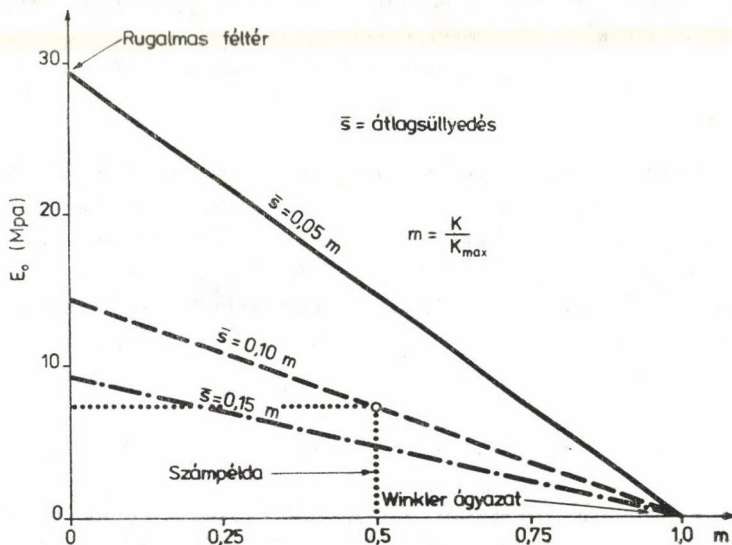
$$\int_{-1}^1 x p(x) dx = \int_{-1}^1 x F(x) dx. \quad (2.13)$$

Végeredményben tehát (2.11), (2.12) és (2.13) szolgáltatja a szükséges 11 egyenletet. Megjegyezzük, hogy, mivel a párox x -hatványok együtthatóiban csak páros indexű a_i együtthatók, a páratlan x -hatványoknál pedig csak páratlan indexűek szerepelnek, a rendszer egy 6 és egy 5 ismeretlenes rendszerre esik szét. Ez megkönnyíti az asztali számítógépes megoldást.

Az a_i együtthatók meghatározása után a képleteken visszafelé haladva kapható meg minden kívánt ismeretlen.

2.3. A bemutatott eljárás alkalmazása

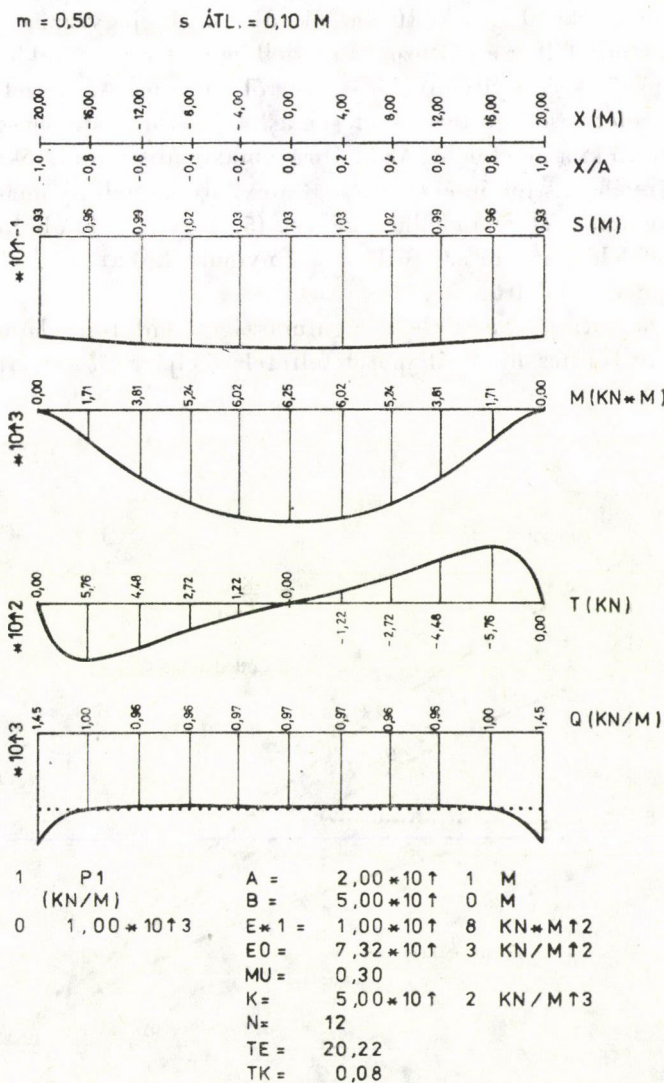
A számítógépre készült program bemenő paraméterei a (2.4b) alatt találhatóak. A terhelési polinom előállítás a programfuttatást megelőző feladat, amelyet a terhelés ismeretében például a legkisebb négyzetek módszerével végezhetünk el.



3. ábra

A program minden futásnál rajzot készít, ami tartalmazza a süllyedés, a nyomaték, a nyírőerő és végül a talpfeszültség eloszlásának görbéjét. A talpfeszültséggel egy ábrán pontozott vonal jelöli a terheléspolinom görbéjét.

A térbeli feszültségállapotot figyelembe vevő programmal kapott eredményeket 40 m hosszú és 10 m széles alaptestre mutatjuk be, melynek a tehetlenségi nyomatéka $10^8 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$ és az egyenletesnek feltételezett terhelés $F_0 = 10^3 \text{ kN/m}$.

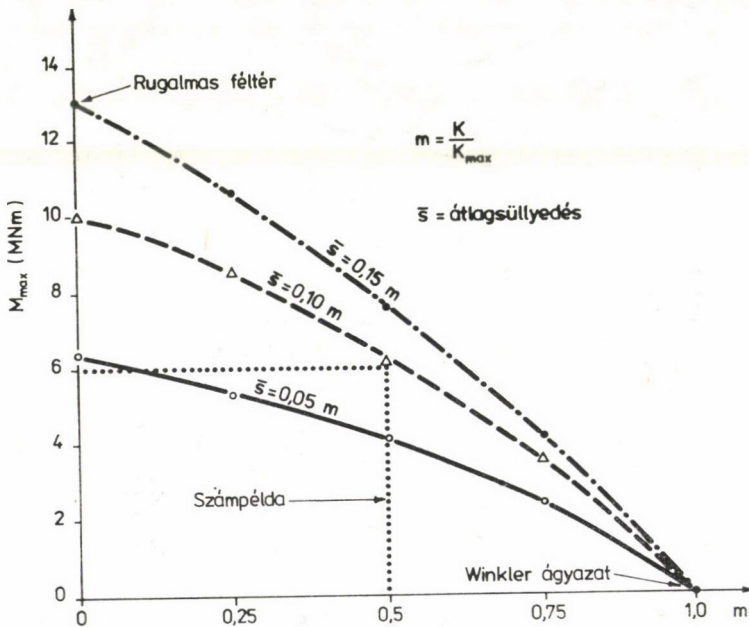


4. ábra

A modellparaméterek — E_0 és K — adott átlagsüllyedés esetében, gyakorlati példáról lévén szó, ismertek. Ezért az átlag süllyedési értékek egyenesen helyezkednek el. (Lásd később a (3.1) formulát.) Ez a megállapítás korlátozott érvényű, ami a teljesen merev alap esetére mutatott eljárásnál adódó süllyedésformulából következik. (A Poisson-tényezőt 0,3-ban rögzítettük.) Jelöljük a K/K_{\max} értéket m -mel, ekkor három különböző átlagsüllyedés esetében az említett egyeneseket a 3. ábra mutatja.

Megjegyezzük, hogy $K = K_{\max}$ érték esetében tiszta Winkler-féle ágyazattal van dolgunk. A 4. ábra mutatja a számítási eredményeket arra az esetre, amikor az m értéke 0,5, $\bar{s} = 10$ cm (4. ábra). Megjegyezzük, hogy $m = 0$ esetében rugalmas féltérre változott a modell, $m = 1$ -re, a Winkler-ágyazatnak megfelelő szélső — és nyilvánvaló — esetről van szó. Az összetartozó E_0 , K párok közül adott esetben természetesen a 3. fejezetben leírt vizsgálatok alapján választható ki a megfelelő. Az 5. ábra a maximális nyomatékokat mutatja az m függvényében, s jól érzékelhető a Repnyikov modell nyomatékcsökkenő hatása a rugalmas féltérmodellhez képest (5. ábra). A 4. ábrán bemutatott esetnek megfelelő paraméterértékeket és nyomatékokat a 3., ill. az 5. ábrán pontozott vonallal jelöltük be.

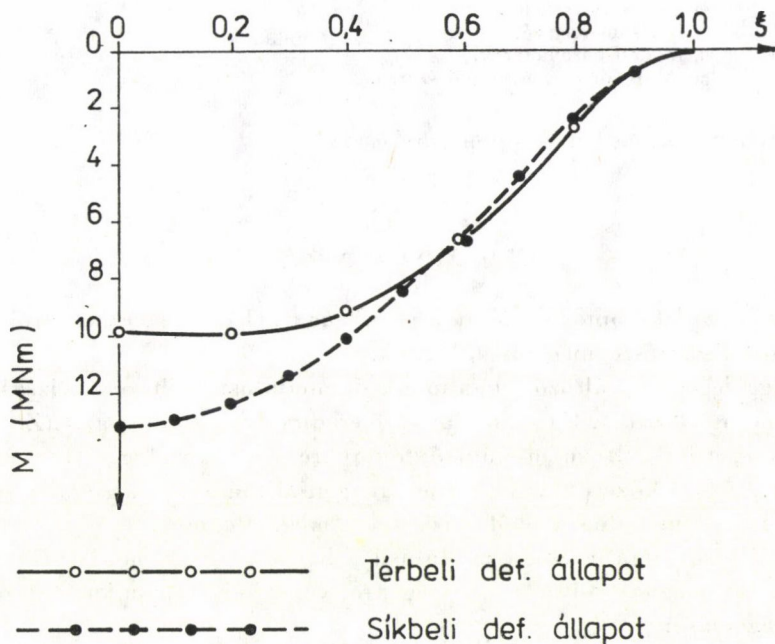
Most bemutatjuk a síkbeli rugalmassági feladaton alapuló számítási eljárást és a térbeli feszültségállapotot feltételező eljárás összevetését egy 1 : 3



5. ábra

oldalárányú alaptestre vonatkozólag. Mint említettük, ennél az aránynál rugalmas féltér esetében elvileg indokolatlan a síkbeli probléma feltételezése, és az irodalom szerint az igénybevételek túlbecsléséhez vezet. Ez, ha kisebb mértékben is — a Winkler-féle komponens hatása miatt —, de a Repnyikov-féle modellnél szintén érvényes. A 6. ábra $m = 0,25$ érték mellett mutatja a síkbeli, ill. a térbeli problémánál adódó igénybevételeket, jól szemléltetve a térbeli feszültségállapatra történt áttérés szükségességét.

Az 1. és 2. fejezetben az Irodalom rovatban [1], [2], [3], [4] alatt említett tanulmányokra támaszkodtunk.



6. ábra

3. A modell fizikai háttérének további vizsgálata a modell-paraméterek meghatározása céljából

3.1. Analógiák a Repnyikov-modell és a mélységgel változó rugalmassági modulusú féltérek között

A megelőző fejezetben a számítási módszer alapjául választott Repnyikov-modell fizikai háttérének jobb megvilágításához és a modell-paraméterek meghatározásához is nagy segítséget nyújtanak azok a kapcsolatok, amelyek

a Reptyikov-modell és a változó rugalmassági modulusú félterek között állnak fenn.

Amint ismeretes, a Reptyikov-modell egy konstans rugalmassági modulusú rugalmas féltér és egy ún. Winkler-féle rugós ágyazat párhuzamosan kapcsolt együttese. A párhuzamos kapcsolás szóhasználatot indokolja például a merev lemezre felírható süllyedésfüggvény [2]:

$$y = \frac{1}{K + \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \Omega} p \quad (3.1)$$

ahol y = a süllyedés,
 p = a megoszló terhelés,
 ν_0 = a Poisson-tényező,
 E_0, K = a modell-paraméterek,
 Ω = az alap formájától függő szorzó.

A (3.1) képlet a következőképpen írható át:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y(K)} + \frac{1}{y(E_0)}. \quad (3.2)$$

Ez mutatja az elektromos analógia jogosultságát. (Erre a BARVASOVTól [5], [6] származó felismerésre még visszatérünk.)

Függőlegesen változó rugalmassági modulusú félterek vizsgálatával KLEIN [7] foglalkozott. Egészen alapvető eredményeket adott az $E(Z) = E_n Z^n$ függvény szerint változó modulusú félterekre vonatkozólag. Itt n értéke a talajoknál 0 és 2 közé esik. A problémát igen általánosan, a rugalmasságtani alapegyenletek megoldása felől közelítette meg. Megmutatta, hogy az $E_n Z^n$ szerint változó rugalmassági modulusú féltérben — P pontszerű terhelés esetében — megadható a feszültségekre vonatkozó egyenletrendszer zárt alakú megoldása:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{APz^A}{2\pi R^{A+2}}, & \sigma_r &= \frac{APz^{A-2}r^2}{2\pi R^{A+2}}, \\ \sigma_\theta &= 0, & \tau_{rz} &= \frac{APz^{A-2}r}{2\pi R^{A+1}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ahol r és z hengerkoordináták, míg $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. A (3.3) formulák az alakváltozások folytonosságát kifejező egyenleteket csak a következő A -ra, ν_0 -ra és n -re vonatkozó feltételek mellett elégítik ki:

$$A = n + 3 \quad \text{és} \quad \nu_0 = \frac{1}{2 + n}, \quad (3.4)$$

vagy

$$A = n + 2 \quad \text{és} \quad \nu_0 = \frac{1}{1 + n}.$$

Tehát adott n és Poisson-tényező mellett A értéke (3.4) szerint rögzített, továbbá n és ν_0 sem függetlenek egymástól. Ez azt jelenti, hogy a (3.3) egzakt képletek csak a (3.4) által megszabott esetekben érvényesek.

A (3.3) formulából az ismert módon számítható a süllyedés minden tetszőleges z_0 mélységben:

$$y = \int_{-\infty}^{z_0} e(z) dz = \int_{-\infty}^{z_0} \frac{1}{E(z)} [\sigma_z + \nu_0 \sigma_r] dz + F(r). \quad (3.5)$$

A felszín süllyedése $F(r) = 0$ -val és $z_0 = 0$ -nál adódik. A (3.3) és a (3.5)-ből kapható képletek az $n = 0$ esethez tartozó homogén rugalmas féltérre vonatkozó jól ismert Boussinesque-féle képletek általánosításai az $n \neq 0$ esetre.

A (3.5) pontszerű terhelésre vonatkozó süllyedésfüggvényből a süllyedésfüggvény a síkbeli feszültségállapot esetére megoszló terhelés esetében egy végtelen sávra vonatkozó integrállal számítható (7. ábra), míg a $2a$, $2b$ oldal-élű téglalpra való integrálással a térbeli feszültségállapothoz és megoszló terheléshez tartozó süllyedésfüggvény kapható (8. ábra).

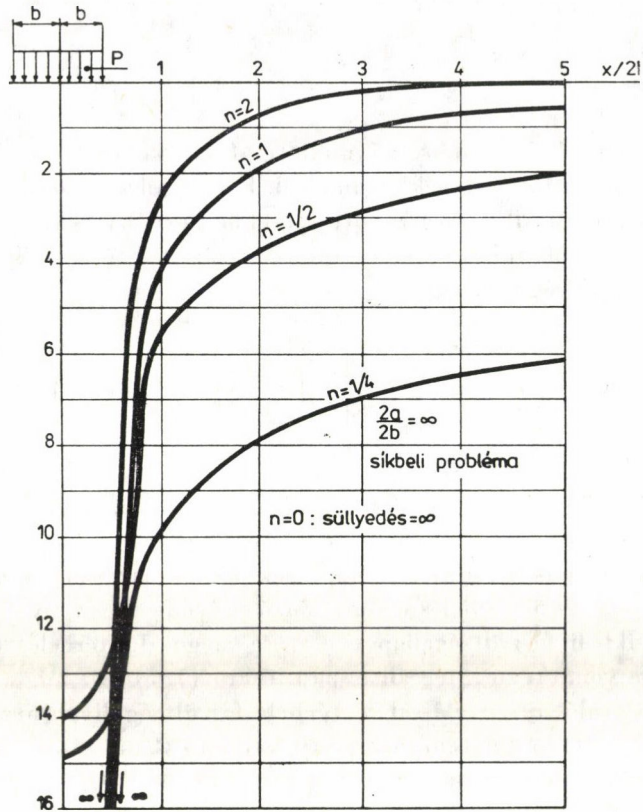
Kiemeljük a következőket:

- térbeli feszültségállapot esetében az $n \geq 1$ esetben a terhelt felület alatt ∞ -süllyedések adódnak;
- síkbeli feszültségállapot esetében csak az $n = 0$ (homogén féltér) esetben van a süllyedéseknek szingularitása;
- mindkét esetben az n növekedésével erősödik a felszíni süllyedések lecsengése a terhelt felülettől való távolodás folyamán.

A térbeli esethnél adódó szingularitások természetesen megszűnnek, ha a rugalmassági modulus a felszínen nem zérus. Azonban ezekre az esetekre hasonlóan általános analitikus eljárás nem ismert. Ezért KLEIN a következő kézenfekvő közelítést javasolja. Legyen a féltér rugalmassági modulusát leíró függvény

$$E(Z) = E_0 + E_1 Z, \quad (3.6)$$

ahol az E_1 dimenziója $[\text{kN}/\text{m}^3]$; Z dimenziója pedig $[\text{m}]$. Tétélezzük fel, hogy valamely E_0 modulusú rugalmas féltér és valamely $E_1 Z$ lineárisan változó modulusú féltér párhuzamos kapcsolásáról van szó. Ekkor adott terhelés



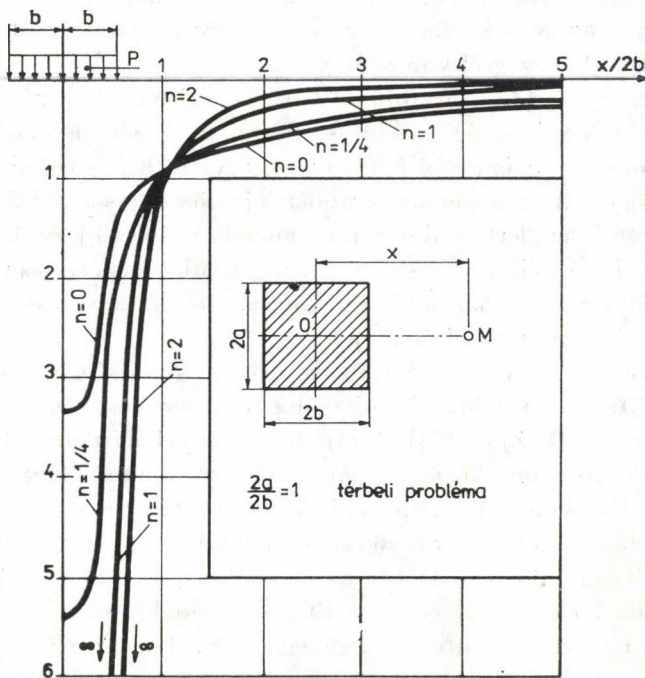
7. ábra

esetében az y süllyedés a komponensek süllyedéseiből a következőképpen számítható:

$$y(X) = \frac{1}{\frac{1}{y_0(X)} + \frac{1}{y_1(X)}}. \quad (3.7)$$

Ez a közelítés a fentiek alapján előállítható. A közelítő jelleg abban áll, hogy itt nem párhuzamos kapcsolásról, hanem olyan együttműködésről van szó, ahol az elemek süllyedése minden pontban megegyezik. A (3.7) képlet alkalmazásával tehát elhanyagoljuk a két féltér közötti belső kapcsolatokat, azaz valójában csökkentett merevséggel dolgozunk. Ez azonban a tervezendő alaptest igénybevételei szempontjából mindenesetre a biztonság javára okoz eltérést.

Többek között KLEIN munkáira támaszkodva BARVASOV végzett kutatásokat a talajmodellek közti kapcsolatok feltárására [5], [6]. A következőkből



8. ábra

indul ki. Legyen a talajmodell egy Π -tartományon valamely $p(x, y)$ megoszló terhelésnek alávetve. Ha van olyan $J(r)$ függvény ($r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$), hogy tetszőleges (x, y) pontban a felszínsüllyedés

$$y(x, y) = \iint_{\Pi} p(\xi, \eta) J(r) d\xi \cdot d\eta \quad (3.8)$$

alakban állítható elő, akkor a J függvényt az adott talajmodell *magfüggvényé*-nek nevezzük. BARVASOV a kombinált talajmodellek magfüggvényeit vizsgálva kimutatta, hogy azok a párhuzamosan, illetve szorosan kapcsolt elemek magfüggvényeiből egyszerűen származtathatók — a már érzékeltetett elektromos analógián keresztül. Ilyen módon sikerült előállítani a Repnyikov-modell magfüggvényét is.

A modellek magfüggvényeinek vizsgálatával a kombinált modellek és a függőlegesen változó rugalmassági modulusú félterek között érdekes párhuzamok találhatók.

- Egyszerűen kimutatható, hogy a K ágyazási tényezőjű Winkler-ágyazat és egy $E(Z) = E_1 Z$ függvénnyel leírt rugalmas féltér a $K = 2E_1/3$ összefüggés és $\nu_0 = 0,5$ mellett ekvivalens; magfüggvényük egybeesik. $E_1 Z$ -vel lineárisan növekvő modulusú féltér KLEIN

nyomán állítható elő. Ezt az alapvető eredményt eltérő úton kapta meg GIBSON [8]. Hangsúlyozzuk, hogy itt térfogatállandó $\nu_0 = 0,5$ — anyagról van szó.

Ezek után a (3.6) formulával leírt lineárisan növekvő, nem zérustól induló rugalmassági modulusú féltér, az ott elmondottak szerint egy homogén rugalmas féltér (E_0) és egy $K = 2E_1/3$ rugóállandójú Winkler-ágyazat párhuzamos kombinációja közelítésének tekinthető. Tehát $\nu_0 = 0,5$ mellett a Repnyikov-modell közel áll egy $E = E_0 + E_1Z$ modulusú féltérhez, s mint azt láttuk, a párhuzamos kapcsolás feltételezése, tehát a Repnyikov-modell alkalmazása a biztonság irányába mutató eltérést jelent.

- PLEVAKO [9] nemlineárisan változó rugalmassági modulusú félterek analitikus megoldásait vizsgálta harmonikus függvények segítségével. Az $E(Z) = E_0(1 + cz)^\beta$ függvénnyel leírt modulusú rugalmas félterekre vonatkozó vizsgálatainál azt kapta, hogy a β kitevő és a ν_0 Poisson-tényező speciális összetartozó értékeinel a rugalmassági feladat megoldása zárt alakban megadható. A legegyszerűbb — és a gyakorlat számára is fontos — eset a $\beta = 2, \nu_0 = 0,25$ értékeknél adódik. Erre az értékpárra PLEVAKO előállította a féltérnek az előzőekben már említett magfüggvényét. Ezt az elméleti eredményt felhasználva BARVASOV megmutatta, hogy $\nu_0 = 0,25$ esetében a Repnyikov-modell általa előállított magfüggvénye gyakorlati szempontból tökéletes egybeesést mutat egy $E(Z) = E_0(1 + CZ)^2$ modulusú féltér magfüggvényével, ha csak a $c = 0,84 K/E_0$ egyenlőség fennáll. Ezzel analógiát kaptunk a Repnyikov-féle modell és változó modulusú rugalmas féltér között $\nu_0 \neq 0,5$ esetére is. Ez mind elméleti, mind gyakorlati szempontból igen fontos eredmény, amely további lehetőséget ad a Repnyikov-modell paramétereinek laboratóriumi meghatározásához.

Hangsúlyozzuk, hogy a Repnyikov-modell paramétereinek pontosabb meghatározásához szükség lenne különböző mélységben elhelyezett nagyméretű lemezek próbaterhelésére. A paraméterek meghatározásához jól használható értékeket adnak:

- a már elkészült lakóépületek terhelés- és süllyedésvizsgálatának eredményeiből való visszszámítás, valamint
- a tárgyalt modellanalógiák alapján végrehajtott laboratóriumi kísérletek.

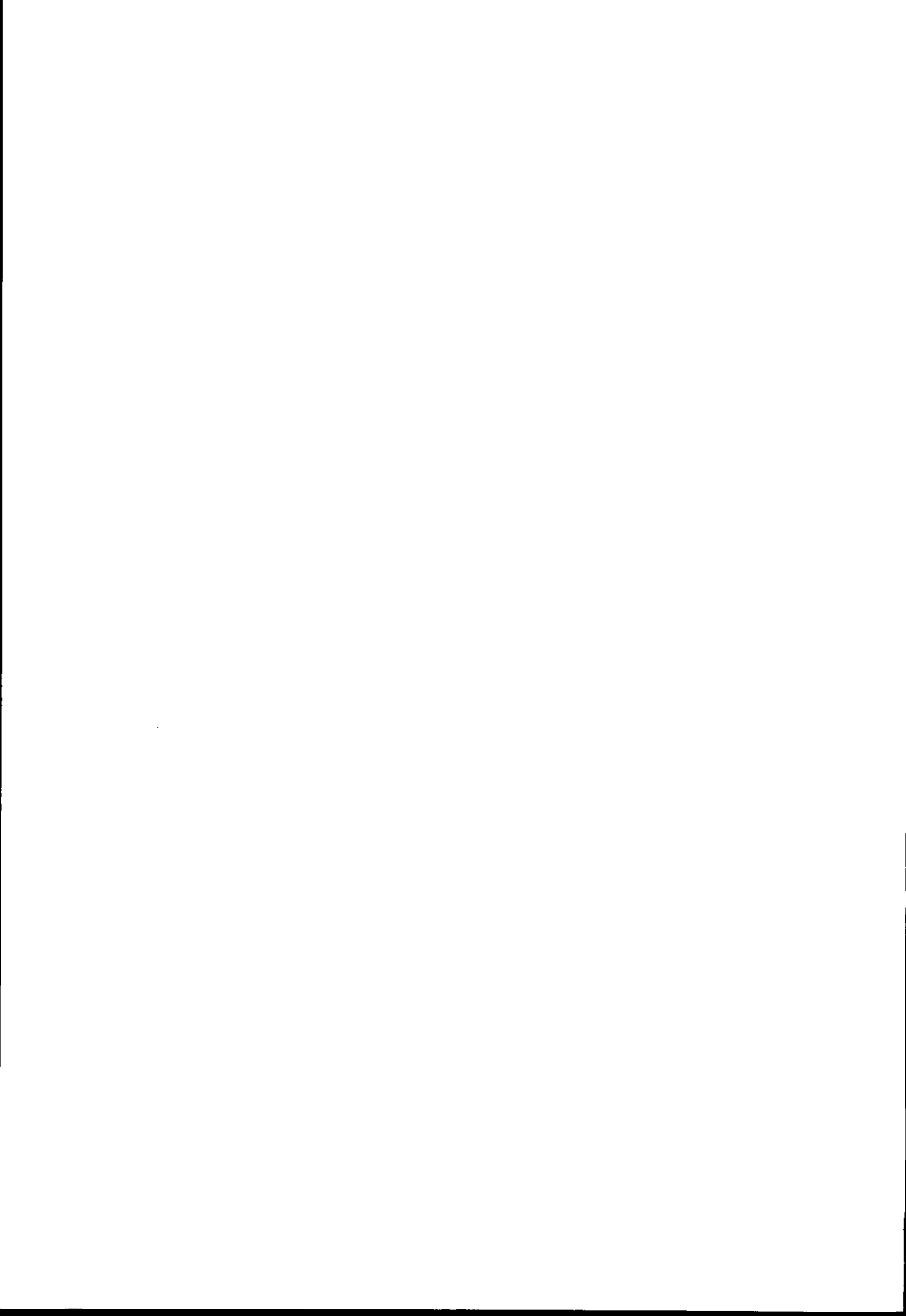
A bemutatott Repnyikov-modell és a változó rugalmassági modulusú félterek közötti párhuzam lehetőséget nyújt arra, hogy valamely adott *talaj rugalmassági modulusának mélység szerinti változását ismerve, jó közelítéssel meghatározzuk a Repnyikov-modell paramétereit.*

IRODALOM

1. REPNYIKOV, L. N.: Raszcszet balok na uprugom osznovanyii, objegyinjajuscsem deformativnue szvojsztva osznovanyija Winklera i linejno deformirujemoj szredü. *Osznovanyia, Fundamentü i Mechanika Gruntov* 1967/6
2. MARCZAL L.—JANCSEZ S.—SOLTÉSZ P.: A rugalmas féltér és a Winkler-ágyazat kombinációján alapuló számítási eljárás alapperendák méretezésére. *Mélyéptéstudományi Szemle* 29 (1972), 2
3. GORBUNOV-POZADOV, M. T.—MALIKOVA, T. A.: Raszcszet konsztrukcij na uprugom osznovanyii. Moszkva, Sztrojizdat, 1973
4. ZSEMOCSKIN, B. N.—SZINYICIN, A. P.: Praktyicseszkie metodi raszcszeta fundamentnüh balok i plit na uprugom osznovanyii. Moszkva, Goszstrojizdat, 1962
5. BARVASOV, V. A.: Kombinorovannüe modeli gruntovova osznovanyia. *Osznovanyia, fundamentü i mehanika gruntov* (1976), 1
6. BARVASOV, V. A.: K raszcszetu oszadok gruntovüh osznoványij, predsztavlennüh razlicsnüh modelami. *Osznovanyia, fundamentü i mehanika gruntov* (1977), 4
7. KLEIN, G. K.: Ucset nyeodnorodnoszty, razrúvnosztyi deformacii i drugih mehanicseszkih szvojsztv grunta pri raszcszete szooruzsenij na szlozsnom osznovanyii. *Szbornyik trudov MISZI* (1956), No 14
8. GIBSON, R. E.: Some Results Concerning Displacement and Stresses in a Non-Homogeneous Elastic Half-Space. *Geotechnique*, 17 (1967)
9. PLEVAKO, V. P.: O vozmoznsztyi iszpolzovanyia garmonicseszkih funkcij pri resenyii zadacs teorii uprugosztyi nyeodnorodnüh szred, Prikladnaja matematika i mehanika. 36 (1972)

Application of a New Combined Ground Model for Analysing Spread Foundations by Taking the Stress Distribution into Account. A new ground model and a calculation method based thereon are presented for the dimensioning of the spread foundations of large-size panel buildings. The significant properties of the model are described and the authors arrive to the conclusion that the new model, compared to those applied as yet, as the elastic half-space or Winkler's subgrade coefficient method, may be considered as a better approximation of the reality. By calculations applied to actual instances is proved that the use of the dimensioning method based on the combined ground model yields much lower values for the stresses in the basement and for the differences in the settlements. Eventually, with the view of a better understanding of the physical background and of the determination by a laboratory procedure of the parameters of the combined ground model, interesting analogies are pointed out between the new model and the half-spaces having vertically varying moduli of elasticity.

Anwendung eines kombinierten Bodenmodells zur Untersuchung Flachfundamente unter Berücksichtigung des räumlichen Spannungszustandes. Behandelt wird ein neues Bodenmodell und auf demselben basierendes Rechenverfahren zur Bemessung der Fundamente von Großtafelgebäuden. Die wesentlichen Eigenschaften des Modells sind vorgeführt woraus die Autoren die Folgerung ziehen, daß das behandelte Modell im Vergleich mit denselben, die bisher benutzt wurden, wie das Modell des elastischen Halbraums, bzw. der Winklerschen Bettungsziffer, für eine bessere Näherung der Wirklichkeit betrachtet werden kann. Sie beweisen mit auf in der Praxis vorkommende Fälle angewandten Rechnungen, daß man mit Hilfe des auf dem kombinierten Bodenmodells basierenden Bemessungsverfahrens wesentlich kleinere Beanspruchungswerte und Setzungsdifferenzen für das Fundament erhält. Schließlich, um den physischen Hintergrund des kombinierten Bodenmodells klarzustellen und die Parameter desselben mit Laborversuchen zu ermitteln, werden interessante Analogien zwischen dem Modell und den Halbräumen mit senkrecht änderlichen Elastizitätsmodulen vorgeführt.



PÉLDÁK A TÉVESEN HASZNÁLT ELMÉLETRE, MINT MŰSZAKI HIBAFORRÁSRA

SZÓKE BÉLA

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1979. február 4-én]

A madarak ösztönszerű cselekvéseiken kívül saját tapasztalataikat is igyekeznek érvényesíteni. Az ember az elődök által kifejlesztett tudomány elméletének használatánál néha megfedkeznek ennek határaitól és téves következtetésre jut. Jelen tanulmány az utóbbira mutat be példákat.

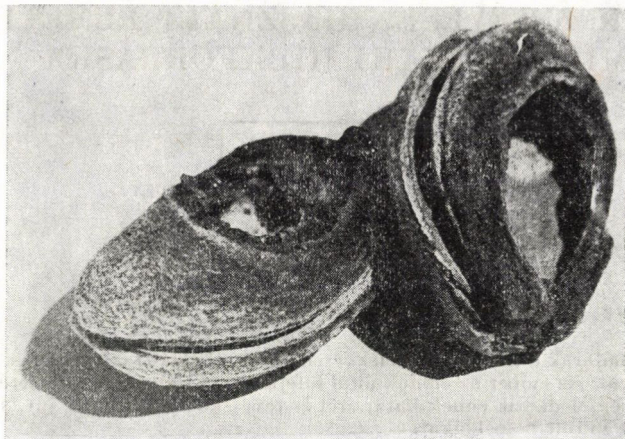
Minden élőlény az elődei és a saját tapasztalataiból szerzett törvényszerűségek szerint cselekszik. Az állatoknál ösztönnek, az embernél pedig elméletnek mondjuk a gyakorlatból leszűrt és az őstől szerzett megszokott mozdulatokat.

A madarak pl. fészkeiket elágazó galyakra rakják. Az élelem megszerzésében pedig olyan gondolkodásmód figyelhető meg, amely a *célszerűség* és *következetesség* ismérveit rejtjelmezi. Erre vonatkozólag e sorok írója csupán egyik megfigyelését említi fel: Az éretlen mandulaszem zárt héjában erősen függ a fa ágán, ebből a szemből úgy szedi ki a magot a madár, hogy a mandulaszem oldalfelületén — tehát a leggyengébb helyén — vágdicsál egy lyukat és az üres héj marad a fán (1. ábra).

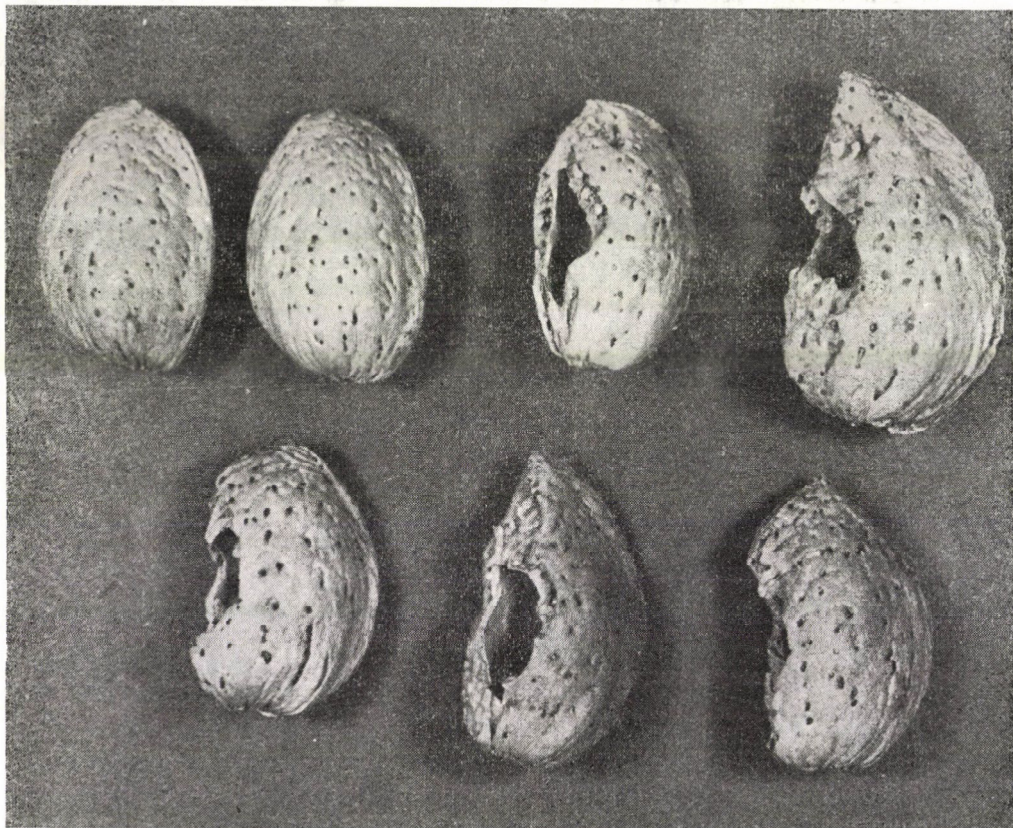
Tapasztalatból tudja ugyanis, hogyha az érett szemet kezdené csőrével kopácsolni, az lehullanék a földre. Ezért egyetlen határozott mozdulattal csőrébe ragadja azt és elrepül vele egy olyan fához pl. diófához, amelyen megfelelő hasítékot vagy gallyelágazást lát. Ezen a „satunak kiválasztott” fán mindig úgy helyezi el a mandulaszemet, hogy a héj legerősebb — tehát legnehezebben feltörhető — része kerüljön a satuba és a legvékonyabb részén kelljen a lyukat kikopácsolnia. A 2. ábrán bemutatunk két épen maradt és öt „satuban fűrt” mandula héjat.

Az ember is megszokott elmélet alapján végzi tevékenységét. Foglalkozása közben annyiszor ismétlődik az elmélet törvényszerűsége, hogy olykor ennek korlátairól meg szoktunk feledkezni.

Ezért vált közmondássá, „Csak az téved, aki dolgozik”. Mint ahogy a madár is a földre hullajt olykor egy-egy mandulát, úgy mi is elkövetünk néha egy-egy „melléfogást”. A műszaki kivitelben azonban feltétlenül és könyörtelenül jelentkezik a tervezés minden elméleti tévedése, és megfordítva: a helyes tervezést tévesnek ítélő bírálatban kimutatható a bírálat téves elmélete.



1. ábra. A madarak a zöld héjből az érőfélben levő mandulabelet azzal a törvényszerűséggel szedik ki, hogy azon a helyen kopácsolják a termést, ahol a kemény héj a leggyengébb és a szárhoz közel esik, mert ekkor van erős tartása



2. ábra. Az érett szemet hasonló kopácsolással leejtenék. Ezt elviszik olyan fához, melyen alkalmas hasítékot találnak, ebbe szorítják bele a magvat olyképpen, hogy megintcsak a kemény héj leggyengébb részét lyukasztassák ki

Erre a műszaki igazságra kívánunk néhány példát említeni.

Az első példát HORVÁTH Árpád: „Korok, Gépek, Feltalálók” c. kitűnő könyvéből vesszük, amely elejétől végéig igen élvezetes és tanulságos olvasmány, nem hiába gyűjtötte össze benne szerzője négy évtizedes munkája eredményeit [1].

E könyv 125. oldalán a „Technikai furcsaságok” fejezetében látható egy kép, *Malomhajtás emberi erővel, Jacob Besson 1595-ben megjelent művéből* (3. ábra). E kép kapcsán a könyv szerzője a következőkben ismerteti BESSON malmát:

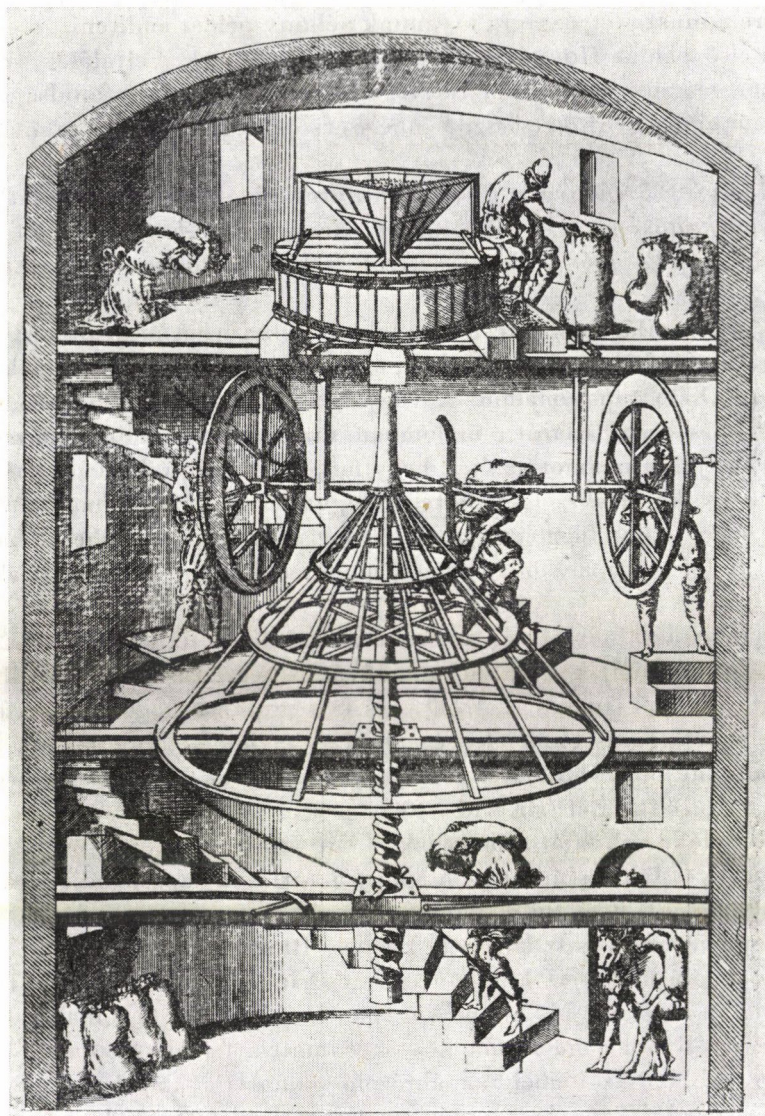
„A gépek világának furcsaságaival köteteket lehet megtölteni. A sokféle ötlet közül egyet bemutatunk. Malom, amit nem szél, vagy víz hajt, hanem az emberi erő. Nem taposómalomról, vagy kézi meghajtásról van szó, dehogy.

Az elmés szerző szerint a malomban, malomlépcsőn felballagó zsákhordó emberek hajtják a malmot azáltal, hogy miközben teherrel a vállukon a garat felé mennek, a korlátul szolgáló kötélnél fogva felfelé húzzák magukat. A kötélen enged s közben nagy, függőleges motollát forgat. Ahogy az emberek haladnak, karokba, küllőkbe kapaszkodva segítik magukat felfelé és ezzel hajtják a malmot.

Tehát nemcsak azzal végeznek munkát, hogy a terhet felcipelik, hanem a felcipelést használják további munkává. A terv JACOB BESSON 1595-ben megjelent művéből ismeretes. A leírás és kép mutatja, hogy a régi szerkesztő mennyire nem látta tisztán a jelenségeket. Egy malomkő forgatásához és ahhoz, hogy örölni tudjon, több lóerőnyi teljesítményre van szükség. Ember, a legnagyobb megerőltetéssel sem tud — egy percig — fél lóerőnél többet teljesíteni. Ha felfelé megy, saját tömegének — súlyának — felemelésével is munkát végez, nem nyer tehát semmit azzal, hogy a korlátba kapaszkodik. Ha viszont a korlát elmozdul, nem tudja felhúzni magát.”

A francia reneszánsz korabeli Jacques BESSON mérnök és matematikus az 1972-es kiadású Mayers Lexikon szerint Briançon-ban született 1535 körül és Londonban halt meg 1573-ban. A szóban forgó kézi hajtású malom rajzának értelmezése céljából gondolnunk kell a geometria fejlődéstörténetére, főként arra, hogy abban az időben az ábrázoló geometria alapelveit megállapító MONGE Gaspard (1746—1818) még meg sem született, és legfeljebb többé kevésbé csak a magyar származású, Németországba kivándorolt DÜRER Albrecht (1471—1528) által elméletileg is kidolgozott centrális perspektívát ismerhették.

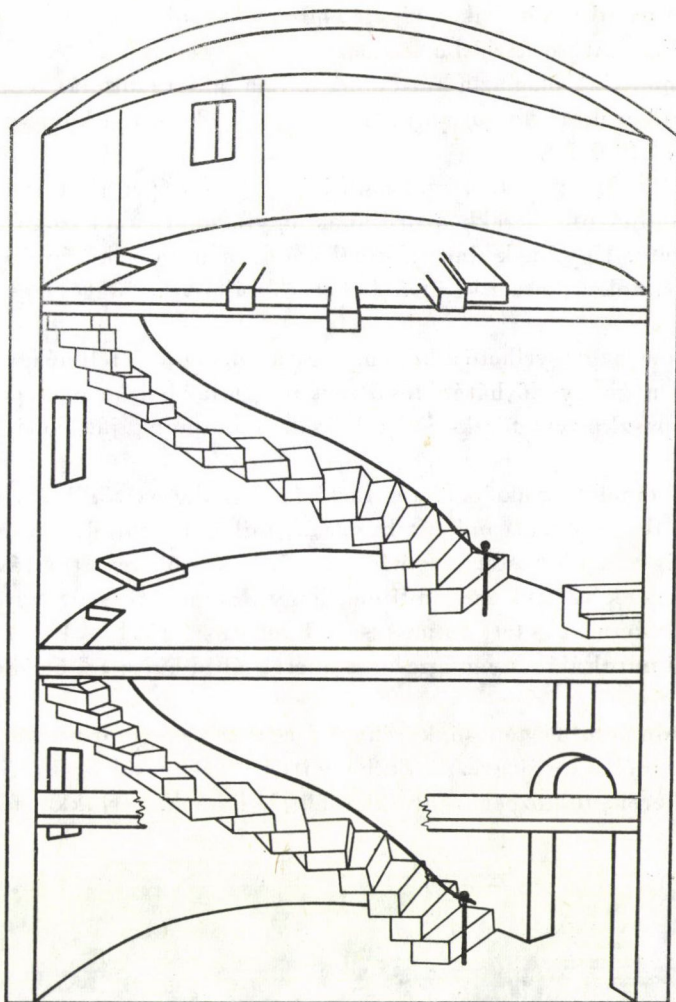
Ennek alapján, minthogy a nézőpont a rajzra merőleges középsíkban volt, melybe a függőleges főtengely is beleesett, az emberek testhosszából meghatározhatjuk a kép főbb méreteinek valódi hosszát. Az alsó lábszár hossza a könyv ábrája szerint 8 mm a térd és sarok között mérve. A testmagasságot 172 cm-nek felvéve az alsó lábszár hossza a térdkaláccsal együtt 55 cm. A kép léptéke tehát $8 : 550 = 1690$.



3. ábra. Malomhajtás emberi erővel. Jakob Besson 1595-ben megjelent művéből

A könyvbeli kép egy hengeres belvilágú malomnak az átmérőjét 7,3 cm-nek tünteti fel, aminek a valóságban $7,3 \cdot 690 = 5037 \text{ cm} = 5040 \text{ cm}$ -nek felel meg.

Az 5 m átmérőjű malom falától indul ki 14 lépcsőfok, melynél a taposó felületek élei nem párhuzamosak, hanem a hengeres terem középpontja felé irányulnak. A legelső lépcsőfok előtt az alapzattól kinyúló függőleges rúdhoz



4. ábra. Az üres malom vázlata a feljáró lépcsőkkel és korláttal. Ebből világosan kitűnik, hogy a korlátok két vége rögzített és úgy követik a lépcsőfokokat, hogy a taposó felület bal sarkától a korlátig mért függélyes mindvégig egyforma

van rögzítve a korlát, amibe a teherrel felfelé haladó belekapaszkodik, hogy lábának emelő munkáját a kar izommunkájával is segítse. Ez a korlát tehát mozdulatlan és mindegyik lépcsőfok bal sarkától azonos méretű függélyesen a kibúvó nyílásig követi a feljárót (4. ábra).

Ugyanilyen védőkorlát húzódik az emeleti feljáró lépcsőzetének bal oldalán is, és itt is a kibúvó nyílásig tart₁

Mindkét korlát annak az emeleti mennyezetnek az alsó szintjében van rögzítve, amelyre felvezet. A nagy lendkerék pedig az első emelet szintje felett

mozog. Tehát mind a két zsákot cipelő ember — a földszinti is, az első emeleti is — a mozdíthatatlan korlátba kapaszkodva igyekszik felfelé.

A malmot kizárólag az a két ember hajtja, aki a motollás tengely jobb és bal oldali lendkeréknek forgattyúját mozgatja és ők ketten könnyedén kifejtnek 0,3 kW-ot (0,4 LE-t).

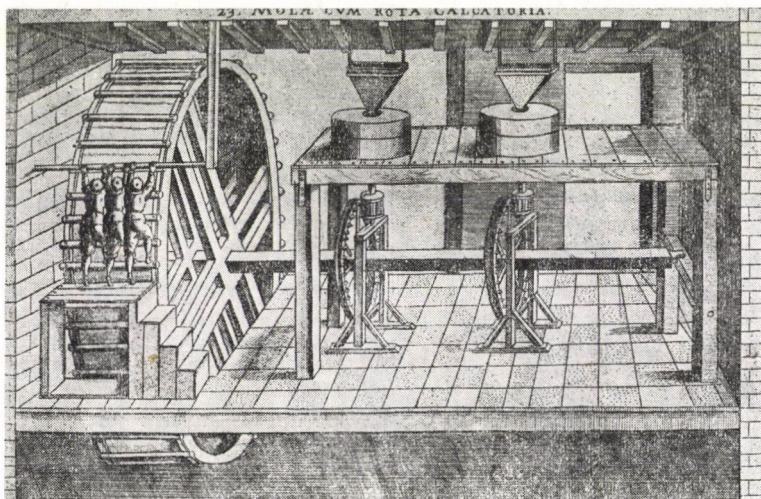
A szerző még egy félreértését említjük meg. A képen látható lendítő kúpszerkezet mindhárom kerékkoszorújának egyformán derékszögű négyszög a keresztmetszete. Egyiknek sincs a kötél számára horony kiképzése, sőt a legnagyobb keréknek a koszorú külső és belső felületén is függőleges vonalkázás látszik.

Pontosan megfigyelhető a képen, hogy a földszintről felfelé igyekvő ember jobb kezével a görnyedő hátán levő zsákot tartja, bal kezével pedig az álló korlátba kapaszkodva törekszik lábainak izommunkáját kézi erejével is segíteni.

Az első emeleti zsákcipelő testtartásából pedig az tűnik ki, hogy a vízszintes hajtó tengely alatt miként búvik át, miközben mindkét kezével a korlátot fogva igyekszik testét a görbített végű hajtókereszttől távol tartani.

Érdeemesnek tartjuk megemlíteni, hogy Jacques BESSON egyik kortársa [2], a Sebenicoban született VERANCICS Fausztusz (1551?—1617) „Machinae Novae” című munkájában ugyancsak emberek által hajtott 2 őrlőkövet látunk (5. ábra).

Itt három ember taposó kerékkel forgatja az egyforma két őrlőkövet, de figyelemre méltó megjegyeznünk, hogy itt is érvényesül az a törekvés, hogy a taposó emberek, miközben a lábukkal felfelé lépnek, karjukkal felfelé nyom-



5. ábra. Fogaskerekes malom taposókerék hajtással Verancics Fausztusz: Machinae Novae művéből

ják a rögzített vízszintes rudat. Az erő kifejtés helyéről ezt írja: „Alázatosan kérem, mennyivel nyomnak többet emezek, mint amazok?”, amelyeknek nincs rögzített vízszintes rúdjuk. Joggal érezte, hogy NEWTON (1643—1727) megelőzve gyakorlatilag alkalmazta a visszahatás törvényét. Emberei a vízszintes rúdba nemcsak fogódkodhatnak, hanem azt karjukkal súlyemelő módjában felfelé nyomják, és így *testsúlyukon kívül* még karjuk izomerejével is növelik a visszaható erőt.

Egy kétörlőköves malom BESSON munkájában is szerepel [3], mely a két örlőkő ellentétes fordulatával szellemesebb megoldás, mint VERANCICS Fausztuszé.

BESSON motollás malmának képét megfigyelve, még egy kiváló mechanikai érzékét említhetjük meg. A vízszintes tengelyt hajtó két ember kerékoszorújának az ellensúly a 90° -kal el van tolva egymáshoz képest. A tengely egy körülfordulatakor tehát négyszer érvényesül az ellensúly hatása a tengelyre, és ez megfelel a görbített végű hajtókereszt négyszeri forgatónyomaték átadásának a kúpus lendkerékre.

Azt hisszük, fenti sorokkal sikerült helyreigazítanunk HORVÁTH Árpád könyvének tévedését.

Hasonló tévedést követett el az elmélet túlzott érvényesítésével SZABÓ Gusztáv egykori főnöke, amikor a tartó teherbírását számítás nélkül egyszerűen magasítással kívánta nagyobbítani [4].

Ugyancsak tévedett a hírneves Carl KUTZBACH professzor, mikor e sorok szerzőjének egy fogszám különbséggel készített kúpfogaskerékes bolygó hajtására az volt a véleménye, hogy ez megoldja a kérdést, de kúpkerék fogazó gépen nem állítható elő.

És tévedett e sorok szerzője is, mert csak egy fél évszázad múlva tudta bizonyítani az ellenkezőjét [5].

Végül megemlítünk még egy őrléssel kapcsolatos problémát, melyet GOMBÁS Tibor (1898. IV. 4. Nagykend, — 1968. VIII. 30. Budapest) elbeszéléséből ismerünk [6], aki mielőtt átvette a Ganz Vagonyár Motorszerkesztési Osztályának vezetését, korábban, a 20-as évek közepe táján a híres „T” jelű malomhengerszék, valamint a hozzávaló csere-fogaskerékrendszer számításában és szerkesztésében is dolgozott. Felkérésére ebben a munkában részt vettek HERRMANN Miksa professzor, továbbá VIDÉKY Emil és PATTANTYUS-Á. Géza akkori magántanárok is.

Ennek a malomhengerszéknek a gyorsabban forgó hengertengelyére ékelt kisebbik és a lassabban forgó hengert hajtó nagyobbik fogaskerék is kéregöntésű nyíl fogazású nyers öntés volt. A fogaskerékpár „összejáratására” külön bejárató gépet csináltattak.

A malmok henger-csiszolás vagy rovátkolás céljából, időnként visszaküldték a hengereket a gyárba, ahol nagyon csodálkoztak, amikor a visszakérült kerekeken azt látták, hogy a bejáratott fogoldalak épek maradtak, és

a kopási nyomok azokon a fogoldalakon jelentkeztek, melyeknek az összecsiszolásával nem törődtek.

Mivel abban az időben már KOLOSTORI Józseffel a Gabona Tröszt Kutató Intézet igazgatójával együtt sokat foglalkoztunk a „*visszatáplálás*” jelenségével, meg tudtuk magyarázni GOMBÁS Tibornak, hogy normális üzemi terheléskor az őrlési zóna a hengerek között energiaközvetítő súrlódó kapcsolat szerepét tölti be. Mivel a gyorsan forgó henger kerületi sebessége nagyobb, mint a kis fogaskereké, nem a kis fogaskerék hajt, hanem a henger felület.

Amikor bizonyos mennyiségnél kevesebb őrlendő anyag jut a hengerek közé, megszűnik az energia visszatáplálás, ilyenkor a kis fogaskerék valóban hajtóvá válik. A működő fogoldalak átváltása erős fogütéssel jár, mivel állíthatóság céljából nagy a foghézag.

IRODALOM

1. HORVÁTH Árpád: „Korok, Gépek, Feltalálók”. Gondolat Könyvkiadó, Budapest 1966
2. PÉNZES István és SZŐKE Béla: „Néhány megjegyzés PÉNZES István „Verancsics Fausztusz” című munkája műszaki lektorálásáról”. *Gépgyártástechnológia*, 18, (1978), 85–95
3. PÉNZES István: A malmászat klasszikusa: Jacques Besson. *Gabonaipar* 25 (1968), 147–152
4. SZŐKE Béla: Visszaemlékezéseim Dr. Szabó Gusztávra. *Gépgyártástechnológia*, 18, (1978), 419–421
5. SZŐKE Béla: Bolygóművek szerkesztése legkisebb fogszámkülönbséggel. *Gépgyártástechnológia* 18, (1978), 529–534
6. SZŐKE Béla: Emlékezés Gombás Tiborra. *Járművek, Mezőgazdasági Gépek* 16, (1969), 118 és *Gép* 21, (1969), 328. o.

Examples for an Erroneously Used Theory as a Source of Technical Mistakes. Besides their instinctive actions the birds strive to apply also their own experiences. Men sometimes forget the limits of scientific theories developed by their ancestors arrive at faulty conclusions. The paper shows examples for this.

Beispiele für falsch angewendete Theorien als Fehlerquelle. Die Vögel bemühen sich bei ihren instinktiven Handlungen auch ihre eigenen Erfahrungen zur Geltung zu bringen. Der Mensch vergißt bei der Benützung der von den Vorgängern entwickelten wissenschaftlichen Theorien manchmal deren Grenzen und kommt zu falschen Folgerungen. Die Studie bringt Beispiele für letzteres.

PEREME MENTÉN OSZLOPOKKAL ALÁTÁMASZTOTT KÖRSZIMMETRIKUSAN TERHELT KÖRLEMEZ

MÁRKUS GYULA*

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett: 1978. január 4-én]

A dolgozat pereme mentén oszlopokkal alátámasztott körszimmetrikusan terhelt körlemezekkel foglalkozik. A levezetett eredmények segítségével lehetőség van pereme mentén szakaszosan befogott körlemezek számítására. Az oszlopok és lemezek sarokmerek kapcsolata részleges befogást is eredményezhet.

1. Bevezetés

Dolgozatunkban olyan állandó vastagságú körszimmetrikusan terhelt körlemezeket tárgyalunk, amelyek kerületük mentén egymástól egyenlő távolságra levő oszlopokkal vannak alátámasztva (1. ábra). Az oszlopok és lemez kapcsolatát sarokmereknek tekintjük, ami azt jelenti, hogy a feltámaszkodási hosszakon nemcsak reakcióerőkkel, hanem befogási nyomatékokkal is kell számolnunk. Feltételezzük, hogy az oszloptalpak között süllyedéskülönbségek nem lépnek fel és a reaktív erők és nyomatékok egyenletesen megoszloák. Tudomásul vesszük, hogy a kompatibilitási feltételek (oszlop végének és a lemez peremének azonos lehajlást és elfordulást kell végezniük) csak az oszlopok tengelyvonalának és a lemez középfelületének metszéspontjában elégülnek ki. Eredményeink annál jobban megközelítik a valóságos helyzetet, mennél rövidebb lesz a feltevési hossz. A lemez terhelésével kapcsolatban csak annyit kötünk ki, hogy az körszimmetrikus megoszlású legyen. Összintenzitását, azaz eredőjét R -rel fogjuk jelölni.

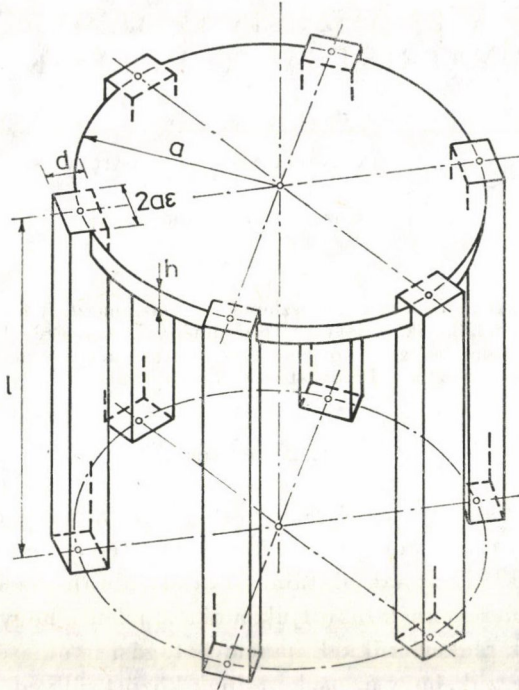
2. Lemezelmélet

Az állandó vastagságú vékony körlemez differenciálegyenlete r, φ polárkoordináta rendszerben az alábbi alakban írható fel:

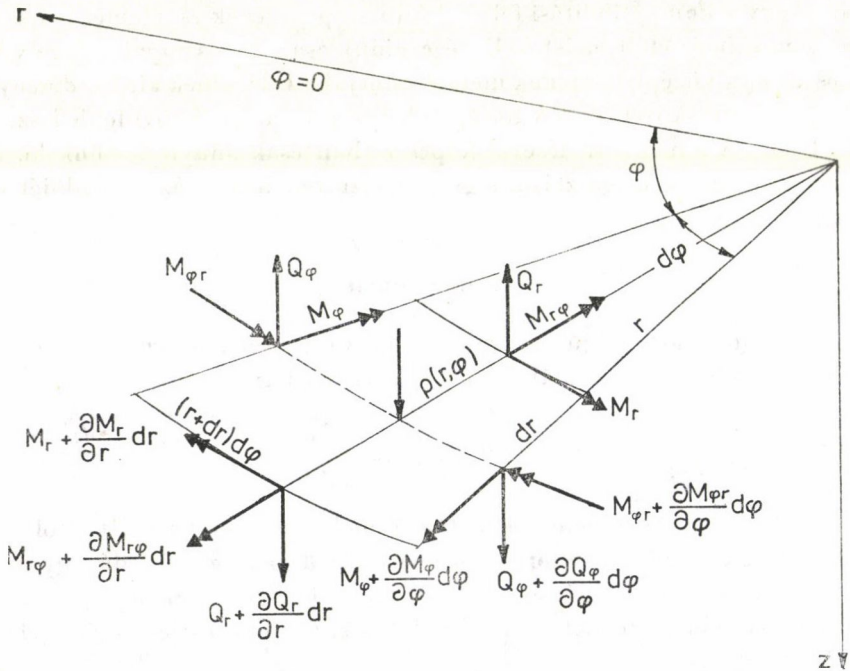
$$\Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{p(r, \varphi)}{K}. \quad (1)$$

A fenti egyenletben w a lemez középfelületének merőlegesen mért eltolódását, r valamely pontjának a kezdőponttól mért távolságát, φ a kérdéses pontot a középponttal összekötő sugár és a kezdő irány közötti szöveget, $p(r, \varphi)$ a koordináták függvényében a felületi terhelést, K pedig az ún. *lemezmervséget* jelentik.

* Dr. Márkus Gyula, 1112 Budapest, Süveg u. 4/a.



1. ábra. Pereme mentén oszlopokkal alátámasztott körlemez



2. ábra. A körlemezről kivágott elemre ható metszeterők

Utóbbinak értéke

$$K = \frac{E h^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad (2)$$

ahol E a rugalmassági modulus, h a lemez vastagsága, μ pedig a keresztirányú nyúlási együttható, azaz a Poisson-féle szám reciprok értéke.

A 2. ábra a körlemezből kivágott elemi testre ható pozitív előjelű metszeterőket tünteti fel. A w eltolódásfüggvény ismeretében felírhatók az elfordulások (ϑ_r , ϑ_φ), a nyomatékok (M_r , M_φ , $M_{r\varphi} = M_{\varphi r}$), a nyíróerők (Q_r , Q_φ) és a támasznál levő reakcióerő (V_r) kifejezései:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_r &= -\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \rho}; \quad \vartheta_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} = -\frac{1}{a \rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi}, \\ M_r &= -K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] = \\ &= -\frac{K}{a^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \mu \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ M_\varphi &= -K \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = \\ &= -\frac{K}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \right), \\ M_{r\varphi} = M_{\varphi r} &= -(1 - \mu) K \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = \\ &= -(1 - \mu) \frac{K}{a^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\ Q_r &= -K \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \\ &= -\frac{K}{a^3} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \varphi^2} - \frac{2}{\rho^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \\ Q_\varphi &= -K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \\ &= -\frac{K}{a^3} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho^2 \partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \varphi} + \frac{1}{\rho^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right), \\ V_r &= -\left(Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{K}{a^3} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{2 - \mu}{\rho^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{3 - \mu}{\rho^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right). \end{aligned} \right\} (3)$$

A (3) alatti kifejezésekben a statikai mennyiségeket

$$\varrho = \frac{r}{a} \quad (4)$$

dimenzió nélküli koordinátákkal is felírtuk. Itt a a körlemez peremének sugarát jelenti. A V_r reakcióerő akkor pozitív előjelű, ha alulról felfelé támadja a lemez szélét.

3. A lemez terhelése

A körlemez terhelése lehet

felületen megoszló

(jelölése dűlt kisbetű pl.: p),

vonalon mentén megoszló

(jelölése dűlt nagybetű pl.: P, M),

koncentráltan ható

(jelölése dűlt félkövér nagybetű pl.: \mathbf{P}, \mathbf{M}).

A lemezre ható körszimmetrikus terheléssel nem foglalkozunk, mivel azt a szakirodalom [3, 4, 9, 10, 11, 15] bőven tárgyalja. Fő jellegzetessége az, hogy a teherfüggvény φ -től független: $p(r)$, $p(\varrho)$.

A lemez kerülete mentén ható reaktív erők szakaszos jellegűek. Célszerű ezeket végtelen trigonometrikus sorral (Fourier-sor) előállítani. A perem mentén ható, 2ε középponti szöggel definiált hosszon egyenletesen megoszló, k számú P vonalmenti erő sorbafejtett alakja az alábbi (3. ábra):

$$p(\varphi) = \frac{2kP\varepsilon}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=k, 2k, \dots}^{\infty} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi \right). \quad (5)$$

A sor felírásánál feltételeztük, hogy a kezdő irány átmegy az egyik oszlop tengelyvonalán. Egy vonalszakaszra eső eredő erő

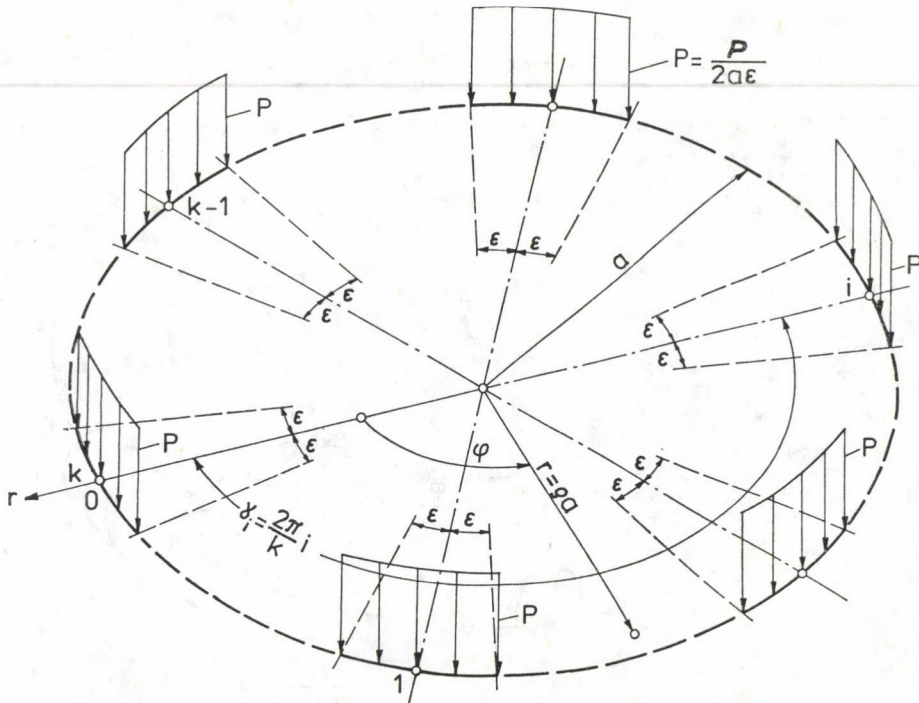
$$2Pa\varepsilon = P. \quad (6)$$

Helyettesítsük ezt be (5)-be:

$$p(\varphi) = \frac{kP}{a\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=k, 2k, \dots}^{\infty} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi \right). \quad (7)$$

Koncentrált erők esetén $\varepsilon \rightarrow 0$ és

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} = 1. \quad (8)$$



3. ábra. Körlemez szabad peremét szakaszos vonalerők támadják

Ennek következtében (7) egyszerűbb alakú lesz:

$$p(\varphi) = \frac{kP}{a\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=k, 2k, \dots}^{\infty} \cos m\varphi \right). \quad (9)$$

Az (5) mintájára előállíthatjuk a peremen ható szakaszos sugárirányú vonalnyomaték (4. ábra) Fourier-sorát:

$$m(\varphi) = \frac{2kM\epsilon}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=k, 2k, \dots}^{\infty} \frac{\sin m\epsilon}{m\epsilon} \cos m\varphi \right). \quad (10)$$

Határozzuk meg az egy támaszra eső M eredőnyomatékokat:

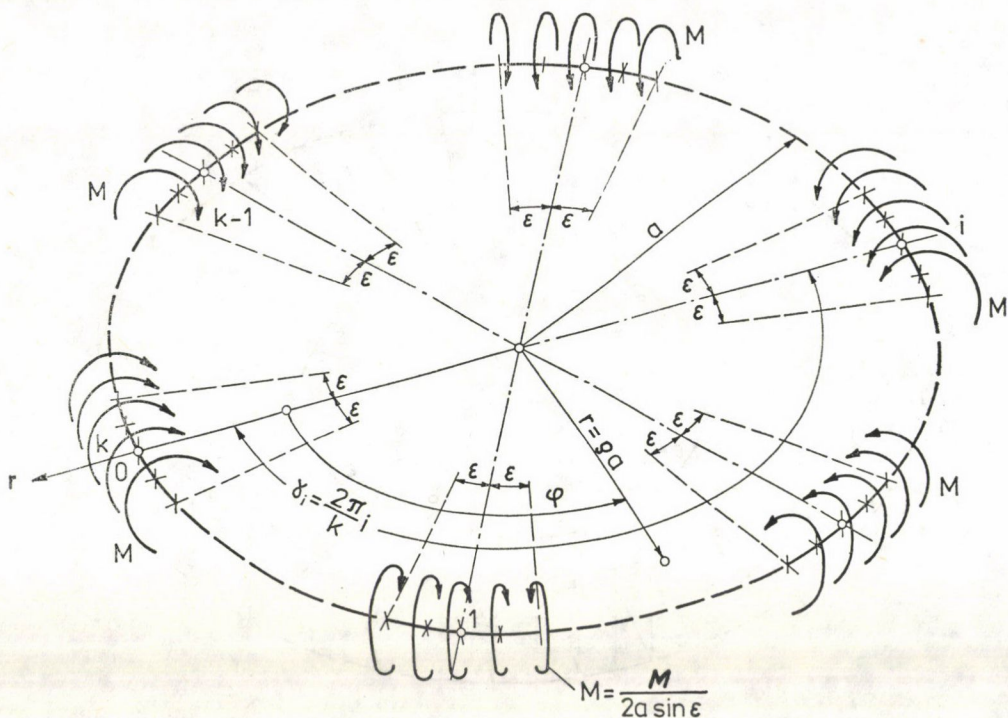
$$M = Ma \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \cos \varphi \, d\varphi = 2Ma \sin \epsilon. \quad (11)$$

Innen

$$M = \frac{M}{2a \sin \epsilon}. \quad (12)$$

Helyettesítsük ezt be (10)-be

$$m(\varphi) = \frac{kM\epsilon}{a\pi \sin \epsilon} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=k, 2k, \dots}^{\infty} \frac{\sin m\epsilon}{m\epsilon} \cos m\varphi \right). \quad (13)$$



4. ábra. Körlemez szabad peremét szakaszos sugárirányú vonalnyomatékok támadják

Koncentrált sugárirányú nyomatékok esetében ez a kifejezés (8) következtében egyszerűbb alakot ölt:

$$m(\varphi) = \frac{kM}{a\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=k, 2k, \dots}^{\infty} \cos m\varphi \right). \quad (14)$$

A bemutatott sorok φ minden értékénél konvergensek. Kivételt képeznek a koncentrált hatásoknak (erő, nyomaték) kitett pontok, mivel ezeken a helyeken a sorok divergensek.

4. A körlemez differenciálegyenletének általános megoldása

A körlemez (1) alatti differenciálegyenletének w általános megoldása az inhomogén egyenlet egy partikuláris, valamint a homogén egyenlet A és B integrálási állandókkal bővített megoldásából áll. Miután az előző fejezetben bemutatott teherfüggvények csak koszinusz függvényeket tartalmaznak:

$$w = w_{00} + A_0 + B_0 \varrho^2 + \sum_{m=k}^{\infty} (A_m \varrho^m + B_m \varrho^{m+2}) \cos m\varphi. \quad (15)$$

Az első sor a terhelés körszimmetrikus, a második a periodikus részből adja meg a megoldást. Ugyanitt w_{00} a körszimmetrikus felületi teherből származó partikuláris megoldást jelenti.


Az eltolódásfüggvény ismeretében a (3) alatti képletek segítségével határozzuk meg a statikai mennyiségek kifejezéseit:


$$\begin{aligned}
 \vartheta_r &= \vartheta_{r00} - \frac{2}{a} B_0 \varrho - \\
 &\quad - \frac{1}{a} \sum_{m=k}^{\infty} [m A_m \varrho^{m-1} + (m+2) B_m \varrho^{m+1}] \cos m\varphi, \\
 \vartheta_\varphi &= \frac{1}{a} \sum_{m=k}^{\infty} m (A_m \varrho^{m-1} + B_m \varrho^{m+1}) \sin m\varphi, \\
 M_r &= M_{r00} - 2(1+\mu) \frac{K}{a^2} B_0 - \\
 &\quad - \frac{K}{a^2} \sum_{m=k}^{\infty} \{ (1-\mu)m(m-1) A_m \varrho^{m-2} + \\
 &\quad + (m+1)[m+2-\mu(m-2)] B_m \varrho^m \} \cos m\varphi, \\
 M_\varphi &= M_{\varphi00} - 2(1+\mu) \frac{K}{a^2} B_0 - \\
 &\quad - \frac{K}{a^2} \sum_{m=k}^{\infty} \{ - (1-\mu)m(m-1) A_m \varrho^{m-2} + \\
 &\quad + (m+1)[\mu(m+2) - m+2] B_m \varrho^m \} \cos m\varphi, \\
 M_{r\varphi} &= (1-\mu) \frac{K}{a^2} \sum_{m=k}^{\infty} m[(m-1) A_m \varrho^{m-2} + \\
 &\quad + (m+1) B_m \varrho^m] \sin m\varphi, \\
 Q_r &= Q_{r00} - \frac{4K}{a^3} \sum_{m=k}^{\infty} m(m+1) B_m \varrho^{m-1} \cos m\varphi, \\
 Q_\varphi &= \frac{4K}{a^3} \sum_{m=k}^{\infty} m(m+1) B_m \varrho^{m-1} \sin m\varphi, \\
 V_r &= V_{r00} + \frac{K}{a^3} \sum_{m=k}^{\infty} m \{ - (1-\mu)m(m-1) A_m \varrho^{m-3} + \\
 &\quad + (m+1)[4 - (1-\mu)m] B_m \varrho^{m-1} \} \cos m\varphi.
 \end{aligned} \tag{16}$$


A fenti kifejezésekben a 00 lábindex a partikuláris megoldásra utal.

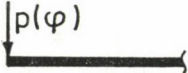
5. Kerületi feltételek

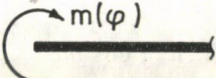
A körlemez differenciálegyenletének (15) alatti megoldása két-két szabadon megválasztható integrálási állandót ($A_0, B_0; A_m, B_m$) tartalmaz. Ezeket a perem mentén felírható feltételi egyenletekből határozzuk meg. Az 5. ábrán megadjuk a dolgozatunkban előforduló perem megtámasztási módokat és a hozzájuk tartozó kerületi feltételeket ($\rho = 1$). Az integrálási állandók meghatározása a feltételi egyenletek megoldásával történik.

a.  $w = 0; \quad M_r = 0; \quad (17)$

b.  $w = 0; \quad \vartheta_r = 0; \quad (18)$

c.  $M_r = 0; \quad V_r = 0; \quad (19)$

d.  $M_r = 0; \quad V_r = -p(\varphi); \quad (20)$

e.  $M_r = m(\varphi); \quad V_r = 0. \quad (21)$

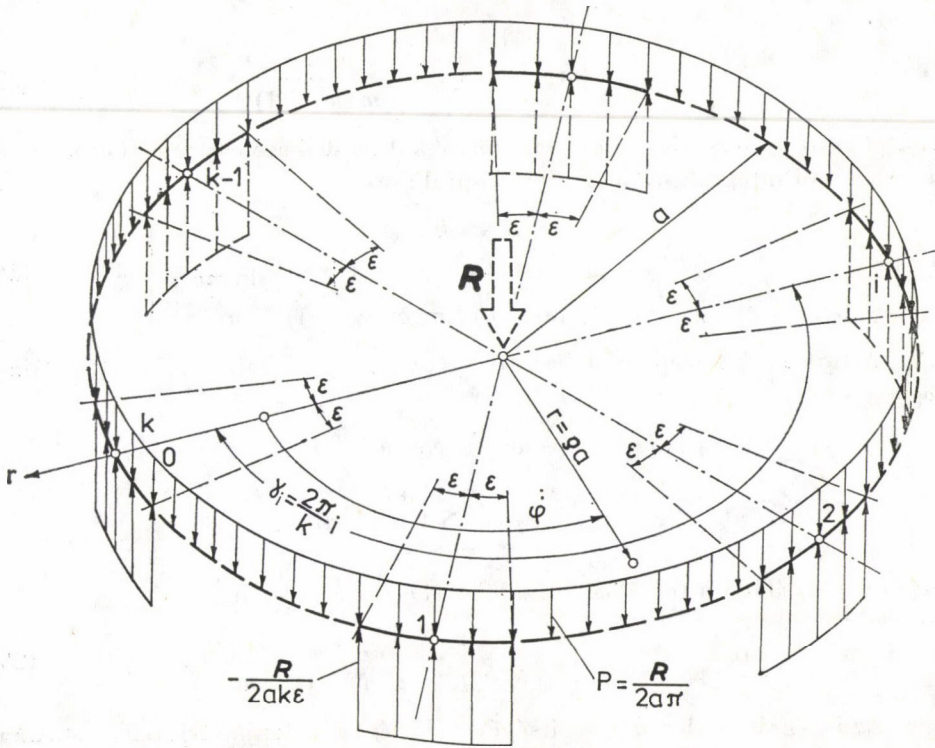
5. ábra. Körlemez peremének megtámasztási módjai, a kerület mentén támadó erők, valamint nyomatékok és a kerületi feltételek

A következő fejezetekben olyan lemezfeladatokat tárgyalunk, amelyeknél a lemez pereme szakaszosan van alátámasztva. A példákon keresztül tervszerűen közelítjük meg a *Bevezetésben* kitűzött célt; a sarokmereven kapcsolt oszlopok esetét.

6. Lemez kerülete mentén egyenletesen megoszló vonalteher

A 6. ábra szerinti körlemez szabad szélét (perem jelölése: — — — —) R összintenzitású egyenletesen megoszló vonalerő terheli. A külső erővel k számú, $2a\varepsilon$ hosszon (perem jelölése: ———) egyenletesen megoszló reaktív erő tart egyensúlyt. Ennek megfelelően a peremre ható erőrendszer végtelen trigonometrikus sora (7) alapján:

$$\begin{aligned} p(\varphi) &= \frac{R}{2a\pi} - \frac{R}{a\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi \right) = \\ &= -\frac{R}{a\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi. \end{aligned} \quad (22)$$



6. ábra. Pereme mentén szakaszosan alátámasztott körlemezen egyenletesen megoszló vonalerő

Ennek a teherfüggvénynek nincs körszimmetrikus tagja. Minthogy a lemez felülete terheletlen, jelenlegi feladatunknál a (15) és (16) kifejezésekben szereplő partikuláris megoldások el fognak tűnni. Az aktív és reaktív erők egyensúlyából következik, hogy $k \geq 2$.

A feltételi egyenleteket a (20) alatti kerületi feltételek, valamint a (16) alatti kifejezések segítségével írjuk fel ($\rho = 1$):

$$\begin{aligned}
 & \boxed{M_r = 0} \\
 & - 2(1 + \mu) B_0 - \sum_{m=k}^{\infty} \{ (1 - \mu)m(m - 1)A_m + \\
 & + (m + 1)[m + 2 - \mu(m - 2)] B_m \} \cos m\varphi = 0,
 \end{aligned}$$

$$\boxed{V_r = -p(\varphi)}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{K}{a^3} \sum_{m=k}^{\infty} m \{ -(1 - \mu)m(m - 1)A_m + (m + 1)[4 - (1 - \mu)m] B_m \} \cos m\varphi = \\
 = \frac{R}{a\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi.
 \end{aligned}$$

Bevezetve a

$$\lambda_m = -(m+1) \frac{m+2-\mu(m-2)}{(1-\mu)m(m-1)} \quad (23)$$

jelölést és az azonos trigonometriai szorzókkal rendelkező egyenleteket megoldva az alábbi integrálási állandókat kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= 0; \\ A_m &= \lambda_m B_m = \frac{Ra^2}{2(3+\mu)K\pi} \frac{\lambda_m}{m(m+1)} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

A támaszok középvonalában ($\varrho = 1$; $\varphi = \gamma_i$) a lehajlás zérus (15). Mint-hogy

$$\cos m\varphi = \cos m\gamma_i = \cos m \frac{2\pi}{k} i = 1,$$

$$w = 0 = A_0 + \sum_{m=k}^{\infty} (A_m + B_m).$$

Innen a (24) alatti integrálási állandók behelyettesítése után

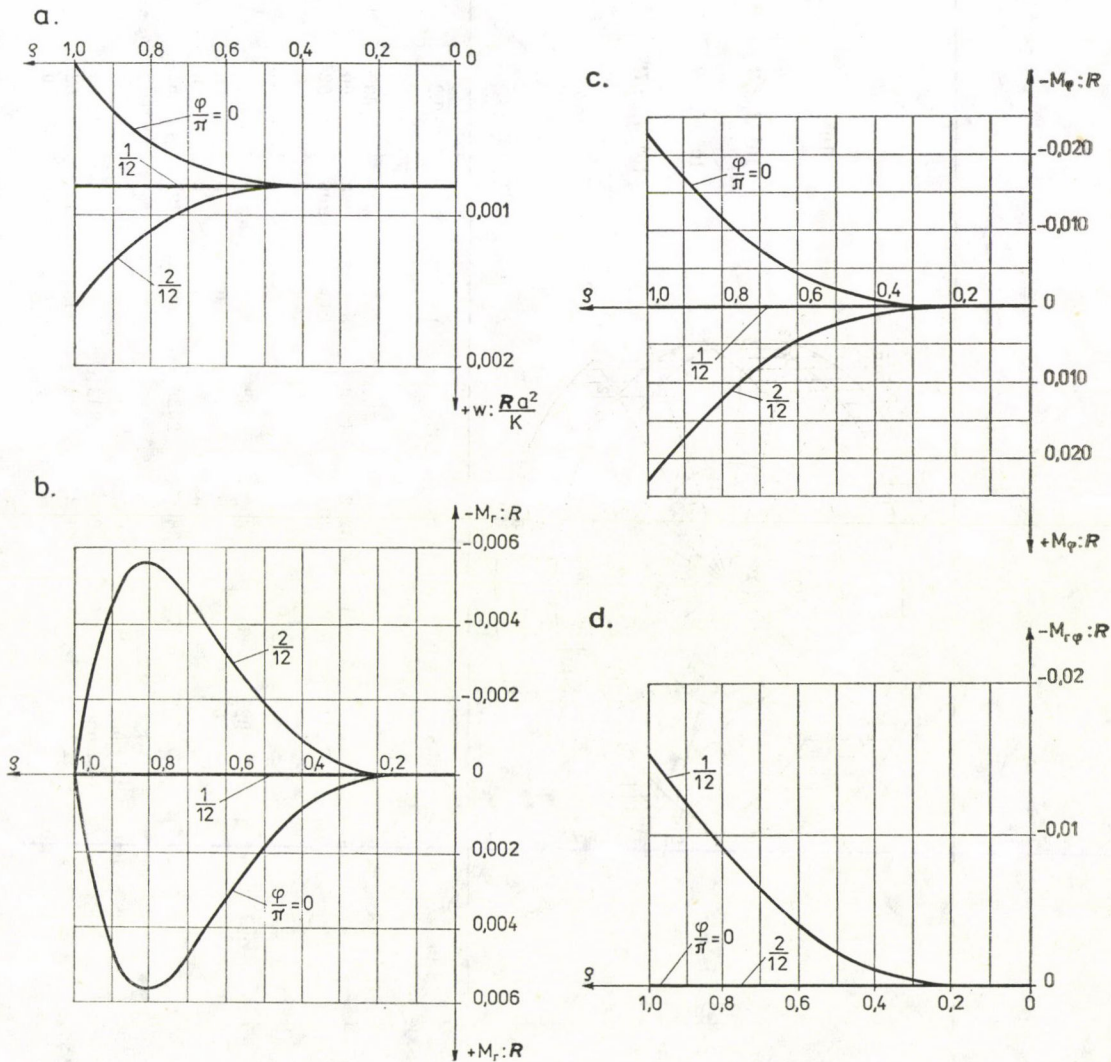
$$A_0 = - \frac{Ra^2}{2(3+\mu)K\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{1+\lambda_m}{m(m+1)} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon}. \quad (25)$$

Az integrálási állandók segítségével (15) és (16) alapján írjuk fel a statikai mennyiségeket:

$$\left. \begin{aligned} w &= A_0 + \frac{Ra^2}{2(3+\mu)K\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda_m + \varrho^2}{m(m+1)} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \varrho^m \cos m\varphi, \\ \vartheta_r &= - \frac{Ra}{2(3+\mu)K\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{m\lambda_m + (m+2)\varrho^2}{m(m+1)} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \varrho^{m-1} \cos m\varphi, \\ \vartheta_\varphi &= \frac{Ra}{2(3+\mu)K\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\lambda_m + \varrho^2}{m+1} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \varrho^{m-1} \sin m\varphi, \\ M_r &= \frac{R}{2(3+\mu)\pi} (\varrho^{-2} - 1) \sum_{m=k}^{\infty} \left(1 - \mu + 2 \frac{1+\mu}{m} \right) \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \varrho^m \cos m\varphi, \\ M_\varphi &= \frac{R}{2(3+\mu)\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \left[(1-\mu)(1-\varrho^{-2}) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{1+\mu}{m} (1+\varrho^{-2}) \right] \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \varrho^m \cos m\varphi, \\ M_{r\varphi} &= \frac{R}{2(3+\mu)\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \left[(1-\mu)(1-\varrho^{-2}) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1+\mu}{m} \varrho^{-2} \right] \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \varrho^m \sin m\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$Q_r = - \frac{2R}{(3 + \mu) a \pi} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\sin m \varepsilon}{m \varepsilon} \varrho^{m-1} \cos m \varphi ,$$

$$Q_\varphi = \frac{2R}{(3 + \mu) a \pi} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\sin m \varepsilon}{m \varepsilon} \varrho^{m-1} \sin m \varphi .$$



7. ábra. Kerülete mentén hat vonalszakaszon alátámasztott körlemez peremét egyenletesen megoszló vonalerő támadja. a) Lehajlások, b) Sugárirányú-, c) Érintőirányú-, d) Csavarónyomatékok ábrái

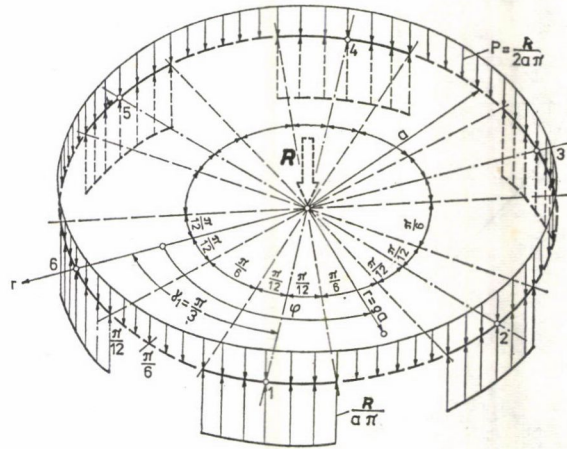
I. táblázat

$$\mu = \frac{1}{6}$$

$$k = 6$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{12}$$



$$10^6 w : \frac{Ra^2}{K}$$

$$10^6 M_r : R$$

$$10^6 M_\varphi : R$$

$$10^6 M_{r\varphi} : R$$

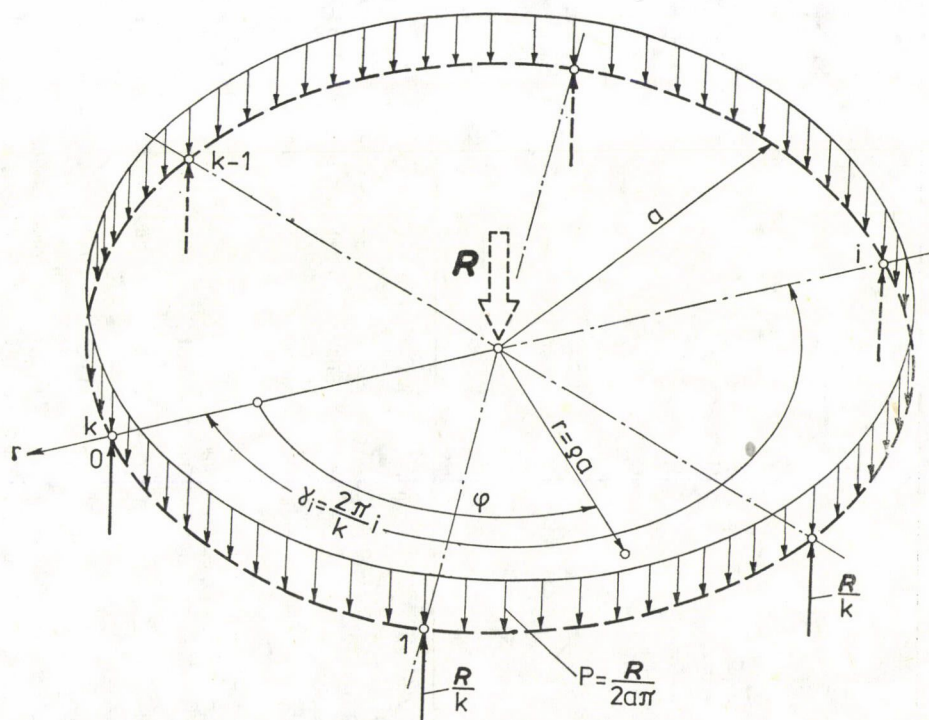
$$\frac{Ra}{K} : 10^6 \theta_r$$

$\varphi : \pi \backslash \varrho$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	1,0
0	0 0 -22 820 0	+ 299 + 4 571 -17 409 0	+ 520 + 5 666 -12 141 0	+ 662 + 4771 -7695 0	+ 742 + 3242 -4403 0	+ 781 + 1833 -2222 0	+ 797 + 841 -943 0	+ 801 + 288 -306 0	+ 802 + 60 - 62 0	+ 802 + 4 - 4 0	+ 802 0 0 0	+ 3206
$\frac{1}{12}$	+ 802 0 0 -15 112	+ 802 0 0 -12 154	+ 802 0 0 - 9 162	+ 802 0 0 -6272	+ 802 0 0 -3826	+ 802 0 0 -2028	+ 802 0 0 -892	+ 802 0 0 -297	+ 802 0 0 - 61	+ 802 0 0 - 4	+ 802 0 0 0	0
$\frac{2}{12}$	+ 1 605 0 + 22 820 0	+ 1 306 - 4 571 + 17 409 0	+ 1 085 - 5 666 + 12 141 0	+ 943 - 4771 + 7695 0	+ 863 - 3242 + 4403 0	+ 824 - 1833 + 2222 0	+ 808 - 841 + 943 0	+ 804 - 288 + 306 0	+ 803 - 60 + 62 0	+ 802 - 4 + 4 0	+ 802 0 0 0	- 3206

Határozzuk meg $k = 6$ támasszal rendelkező körlemez fontosabb statikai mennyiségeit $\mu = 1/6$ és $\varepsilon = \pi/12$ esetében. A számítás eredményeit az I. táblázatban adjuk közre. A lehajlások és a nyomatékok változását a 7. ábra szemlélteti.

Pontszerű támaszok (8. ábra) esetében a (8) alatti határátmenet, valamint az alábbi összefüggések felhasználásával a nyomatékok és nyírőerők egyszerűbb alakot öltenek:

$$\left. \begin{aligned} \sum_m \varrho^m \cos m\varphi &= \frac{\cos k\varphi - \varrho^k}{1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}} \varrho^k, \\ \sum_m \frac{1}{m} \varrho^m \cos m\varphi &= -\frac{1}{2k} \ln(1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}), \\ \sum_m \varrho^m \sin m\varphi &= \frac{\varrho^k \sin k\varphi}{1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}}, \\ \sum_m \frac{1}{m} \varrho^m \sin m\varphi &= \frac{1}{k} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\varrho^k \sin k\varphi}{1 - \varrho^k \cos k\varphi}. \end{aligned} \right\} (27)$$



8. ábra. Pereme mentén pontokon alátámasztott körlemezen egyenletesen megoszló vonalerő

II. táblázat

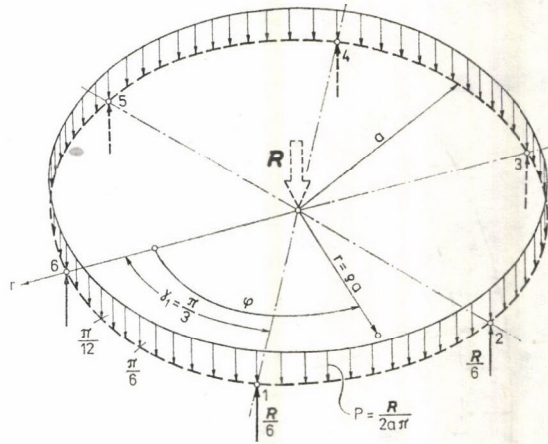
Maszaki Tudomány 56, 1978

$$\mu = \frac{1}{6}$$

$$k = 6$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\varepsilon = 0$$



$$10^6 w : \frac{Ra^2}{K}$$

$$10^6 M_r : R$$

$$10^6 M_\varphi : R$$

$$10^6 M_{r\varphi} : R$$

$$10^6 \theta_r : \frac{Ra}{K}$$

$\varphi : \pi$ \backslash q	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	1,0
0	0 0 - 0	+ 632 + 14 618 - 44 253 0	+ 1 033 + 11 712 - 23 596 0	+ 1 271 + 8 359 - 13 251 0	+ 1401 + 5304 - 7172 0	+ 1462 + 2918 - 3533 0	+ 1487 + 1326 - 1486 0	+ 1494 + 453 - 482 0	+ 1496 + 94 - 97 0	+ 1496 + 6 - 7 0	+ 1496 0 0 0	+ 7913
$\frac{1}{12}$	+ 1 598 0 + 13 548 - 15 351	+ 1 553 - 2 786 + 7 596 - 15 858	+ 1 514 - 1 881 + 3 179 - 13 608	+ 1 500 - 735 + 1 004 - 9 730	+ 1497 - 200 + 242 - 5998	+ 1496 - 38 + 43 - 3184	+ 1496 - 5 + 5 - 1401	+ 1496 0 0 - 467	+ 1496 0 0 96	+ 1496 0 0 - 6	+ 1496 0 0 0	- 937
$\frac{2}{12}$	+ 2 521 0 + 27 096 0	+ 2 236 - 5 363 + 22 024 0	+ 1 923 - 7 453 + 16 554 0	+ 1 712 - 6 851 + 11 199 0	+ 1590 - 4904 + 6686 0	+ 1530 - 2842 + 3448 0	+ 1505 - 1316 + 1476 0	+ 1498 - 453 + 481 0	+ 1496 - 94 + 97 0	+ 1496 - 6 + 6 0	+ 1496 0 0 0	- 4359

$$\begin{aligned}
 M_r &= \frac{R(\varrho^{-2} - 1)}{2(3 + \mu)\pi} \left[(1 - \mu) \frac{\cos k\varphi - \varrho^k}{1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}} \varrho^k - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1 + \mu}{k} \ln(1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}) \right], \\
 M_\varphi &= \frac{R}{2(3 + \mu)\pi} \left[(1 - \mu)(1 - \varrho^{-2}) \frac{\cos k\varphi - \varrho^k}{1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}} \varrho^k + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 + \mu}{k} (1 + \varrho^{-2}) \ln(1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}) \right], \\
 M_{r\varphi} &= \frac{R}{2(3 + \mu)\pi} \left[(1 - \mu)(1 - \varrho^{-2}) \frac{\varrho^k \sin k\varphi}{1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1 + \mu}{k\varrho^2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\varrho^k \sin k\varphi}{1 - \varrho^k \cos k\varphi} \right], \\
 Q_r &= \frac{2R}{(3 + \mu)\alpha\pi} \frac{\varrho^k - \cos k\varphi}{1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}} \varrho^{k-1}, \\
 Q_\varphi &= \frac{2R}{(3 + \mu)\alpha\pi} \frac{\varrho^{k-1} \sin k\varphi}{1 - 2\varrho^k \cos k\varphi + \varrho^{2k}}.
 \end{aligned} \tag{28}$$

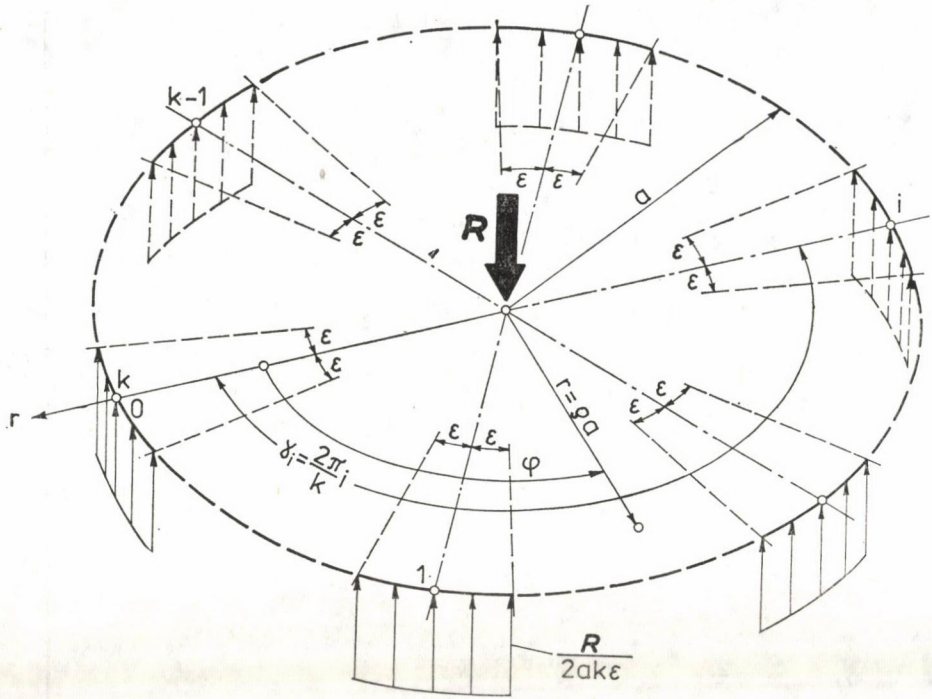
Végezzük el az előbbi példa számításait koncentrált erőkből álló támaszok esetén. Az eredményeket a II. táblázat tartalmazza.

7. Lemezen körszimmetrikus terhelés

A 9. ábrán olyan körlemezt tüntettünk fel, amelyet R összintenzitású, körszimmetrikusan megoszló teher támad, kerülete mentén pedig egymástól egyenlő távolságra elhelyezkedő oszlopokra támaszkodik. A számítást két lépésben végezzük el. Először a felületi teher hatására kerülete mentén szabadon felfekvő lemez esetére meghatározzuk a metszeterőket és alakváltozásokat. Ekkor a támasz reakció

$$V_r = \frac{R}{2\alpha\pi}, \tag{29}$$

tehát megegyezik az előbbi számpéldában szereplő vonalteher intenzitásával. A második lépésben az előző fejezetben közölt képletekkel kiszámítjuk a szakaszos támasz hatásából eredő statikai mennyiségeket és azokat hozzáadjuk az első lépésben kapott eredményekhez. A körszimmetrikusan terhelet, pereménél



9. ábra. Pereme mentén szakaszosan alátámasztott körlemezen körszimmetrikus terhelés

szabadon felfekvő körlemezzel nem foglalkozunk, mivel az a szakirodalomban megtalálható [3, 4, 9, 10, 11, 15].

A lemez teljes felülete mentén egyenletesen megoszló p teher esetében az eredő

$$R = pa^2\pi. \quad (30)$$

Ennek megfelelően $\mu = 1/6$ és $\varepsilon = \pi/12$, valamint $\varepsilon = 0$ esetre az előbbi fejezet adatainak felhasználásával kiszámítottuk a lemez alakváltozásait és nyomtatékait. Az eredményeket a III. és IV. táblázatban adjuk közre.

8. Körlemez kerülete mentén szakaszos sugárirányú vonalnyomaték

Eddigi feladatainkban a lemez pereme teljesen szabad, a támaszoknál pedig szabadon felfekvő volt. A továbbiakban figyelembe fogjuk venni a támaszoknál becsatlakozó oszlopok befogást biztosító hatását. A 4. ábra szerinti körlemez kerülete mentén szakaszos sugárirányú vonalnyomatékok hatnak. A terhelés Fourier-sorát (13) alatt adtuk meg. A kerületi feltételek (21) alatt

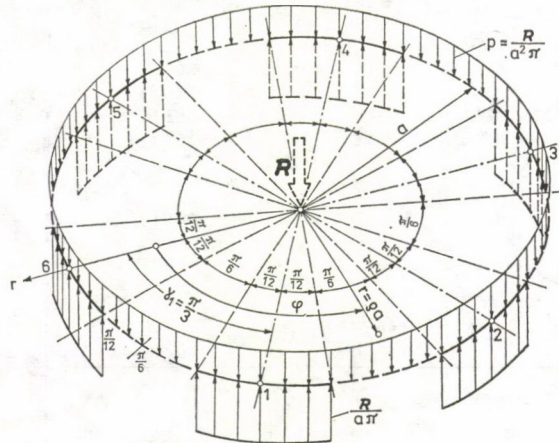
III. táblázat

$$\mu = \frac{1}{6}$$

$$k = 6$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{12}$$



$$10^6 w : \frac{pa^4\pi}{K}$$

$$10^6 M_r : pa^2\pi$$

$$10^6 M_\varphi : pa^2\pi$$

$$10^6 M_{r\varphi} : pa^2\pi$$

$$10^6 \theta_r : \frac{pa^3\pi}{K}$$

$\varphi : \pi$ \backslash q	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	1,0
0	0 0 +10 337 0	+ 3 718 +16 541 +21 418 0	+ 7 303 +28 346 +31 759 0	+10 652 +36 900 +40 681 0	+13 693 +43 561 +47 853 0	+16 368 +49 082 +53 316 0	+18 630 +53 760 +57 281 0	+20 437 +57 617 +60 007 0	+21 756 +60 539 +61 743 0	+22 558 +62 373 +62 696 0	+22 828 +62 999 +62 999 0	+37 311
$\frac{1}{12}$	+ 802 0 +33 157 -15 112	+ 4 221 +11 970 +38 827 -12 154	+ 7 585 +22 680 +43 900 - 9 162	+10 792 +32 129 +48 376 - 6 272	+13 753 +40 319 +52 256 - 3 826	+16 389 +47 249 +55 538 - 2 028	+18 635 +52 919 +58 224 - 892	+20 438 +57 329 +60 313 - 297	+21 756 +60 479 +61 805 - 61	+22 558 +62 369 +62 700 - 4	+22 828 +62 999 +62 999 0	+34 105
$\frac{2}{12}$	+ 1 605 0 +55 977 0	+ 4 725 + 7 399 +56 236 0	+ 7 868 +17 014 +56 041 0	+10 933 +27 358 +56 071 0	+13 814 +37 077 +56 659 0	+16 411 +45 416 +57 760 0	+18 641 +52 078 +59 167 0	+20 440 +57 041 +60 619 0	+21 757 +60 419 +61 867 0	+22 558 +62 365 +62 704 0	+22 828 +62 999 +62 999 0	+30 899

találhatók. Ennek megfelelően a feltételi egyenletek a (16) szerinti kifejezések alapján:

$$M_r = m(\varphi)$$

$$\begin{aligned} & -2(1 + \mu) \frac{K}{a^2} B_0 - \frac{K}{a^2} \sum_{m=k}^{\infty} \{ (1 - \mu)m(m - 1)A_m + \\ & + (m + 1)[m + 2 - \mu(m - 2)]B_m \} \cos m\varphi = \\ & = \frac{kM\varepsilon}{a\pi \sin \varepsilon} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi \right), \end{aligned}$$

$$V_r = 0$$

$$\frac{K}{a^3} \sum_{m=k}^{\infty} m \{ -(1 - \mu)m(m - 1)A_m + (m + 1)[4 - (1 - \mu)m]B_m \} \cos m\varphi = 0.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= -\frac{kMa\varepsilon}{4(1 + \mu)K\pi \sin \varepsilon}, \\ A_m &= -\frac{kMa}{2(1 - \mu)(3 + \mu)K\pi} \frac{4 - (1 - \mu)m}{m(m - 1)} \frac{\sin m\varepsilon}{m \sin \varepsilon}, \\ B_m &= -\frac{kMa}{2(3 + \mu)(m + 1)K\pi} \frac{\sin m\varepsilon}{m \sin \varepsilon}. \end{aligned} \right\} (31)$$

A támasz közepénél ($\varrho = 1$; $\varphi = \gamma_i$) a lehajlás zérus (15):

$$A_0 + B_0 + \sum_{m=k}^{\infty} (A_m + B_m) = 0.$$

Innen a már ismert integrálási állandókkal:

$$A_0 = \frac{kMa}{2K\pi \sin \varepsilon} \left[\frac{1}{2(1 + \mu)} + \frac{2}{(1 - \mu)(3 + \mu)} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(1 + \mu)m + 2}{m(m^2 - 1)} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \right]. \quad (32)$$

Helyettesítsük be az integrálási állandókat a (15) és (16) alatti kifejezésekbe:

$$\begin{aligned}
 w &= A_0 - \frac{kM\alpha\varepsilon}{2K\pi \sin \varepsilon} \left\{ \frac{\varrho^2}{2(1+\mu)} + \frac{1}{(1-\mu)(3+\mu)} \sum_{m=k}^{\infty} \left[\frac{4-(1-\mu)m}{m(m-1)} \varrho^m + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1-\mu}{m+1} \varrho^{m+2} \right] \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi \right\}, \\
 \vartheta_r &= \frac{kM\varepsilon}{2K\pi \sin \varepsilon} \left\{ \frac{\varrho}{1+\mu} + \frac{1}{(1-\mu)(3+\mu)} \sum_{m=k}^{\infty} \left[\frac{4-(1-\mu)m}{m-1} \varrho^{m-1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1-\mu) \frac{m+2}{m+1} \varrho^{m+1} \right] \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi \right\}, \\
 \vartheta_\varphi &= - \frac{kM\varepsilon}{2(1-\mu)(3+\mu)K\pi \sin \varepsilon} \sum_{m=k}^{\infty} \left[\frac{4-(1-\mu)m}{m-1} \varrho^m + \right. \\
 &\quad \left. + m \frac{1-\mu}{m+1} \varrho^{m+2} \right] \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \sin m\varphi, \\
 M_r &= \frac{kM\varepsilon}{2\alpha\pi \sin \varepsilon} \left\langle 1 + \frac{1}{3+\mu} \sum_{m=k}^{\infty} \{ [4-(1-\mu)m] \varrho^{m-2} + \right. \\
 &\quad \left. + [m+2-\mu(m-2)] \varrho^m \} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi \right\rangle, \\
 M_\varphi &= \frac{kM\varepsilon}{2\alpha\pi \sin \varepsilon} \left\langle 1 - \frac{1}{3+\mu} \sum_{m=k}^{\infty} \{ [4-(1-\mu)m] \varrho^{m-2} - \right. \\
 &\quad \left. - [\mu(m+2)-m+2] \varrho^m \} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \cos m\varphi \right\rangle, \\
 M_{r\varphi} &= - \frac{kM\varepsilon}{2(3+\mu)\pi \sin \varepsilon} \sum_{m=k}^{\infty} \{ [4-(1-\mu)m] \varrho^{m-2} + \\
 &\quad + (1-\mu)m \varrho^m \} \frac{\sin m\varepsilon}{m\varepsilon} \sin m\varphi, \\
 Q_r &= \frac{2kM}{(3+\mu)a^2\pi \sin \varepsilon} \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^{m-1} \sin m\varepsilon \cos m\varphi, \\
 Q_\varphi &= - \frac{2kM}{(3+\mu)a^2\pi \sin \varepsilon} \sum_{m=k}^{\infty} \varrho^{m-1} \sin m\varepsilon \sin m\varphi.
 \end{aligned} \tag{33}$$

Számítsuk ki $k = 6$, $\mu = 1/6$ és $\varepsilon = \pi/12$ esetében a lemez lehajlásait, peremelfordulásait és nyomatékait a $\varphi/\pi = 0, 1/12, 2/12$ keresztmetszetekben. Számításaink végeredményeit az V. táblázatban állítottuk össze.

Koncentrált nyomatékok esetében $\varepsilon \rightarrow 0$ és ezért a (33) alatti kifejezések (8) következtében valamivel egyszerűbbek lesznek:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{kMa}{2K\pi} \left[\frac{1}{2(1+\mu)} + \frac{2}{(1-\mu)(3+\mu)} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(1+\mu)m+2}{m(m^2-1)} \right], \\
 w &= A_0 - \frac{kMa}{2K\pi} \left\{ \frac{\varrho^2}{2(1+\mu)} + \frac{1}{(1-\mu)(3+\mu)} \sum_{m=k}^{\infty} \left[\frac{4-(1-\mu)m}{m(m-1)} \varrho^m + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1-\mu}{m+1} \varrho^{m+2} \right] \cos m\varphi \right\}, \\
 \vartheta_r &= \frac{kM}{2K\pi} \left\{ \frac{\varrho}{1+\mu} + \frac{1}{(1-\mu)(3+\mu)} \sum_{m=k}^{\infty} \left[\frac{4-(1-\mu)m}{m-1} \varrho^{m-1} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (1-\mu) \frac{m+2}{m+1} \varrho^{m+1} \right] \cos m\varphi \right\}, \\
 \vartheta_\varphi &= - \frac{kM}{2(1-\mu)(3+\mu)K\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \left[\frac{4-(1-\mu)m}{m-1} \varrho^m + \right. \\
 &\quad \left. + m \frac{1-\mu}{m+1} \varrho^{m+2} \right] \sin m\varphi, \\
 M_r &= \frac{kM}{2a\pi} \left\langle 1 + \frac{1}{3+\mu} \sum_{m=k}^{\infty} \{ [4-(1-\mu)m] \varrho^{m-2} + \right. \\
 &\quad \left. + [m+2-\mu(m-2)] \varrho^m \} \cos m\varphi \right\rangle, \\
 M_\varphi &= \frac{kM}{2a\pi} \left\langle 1 - \frac{1}{3+\mu} \sum_{m=k}^{\infty} \{ [4-(1-\mu)m] \varrho^{m-2} - \right. \\
 &\quad \left. - [\mu(m+2)-m+2] \varrho^m \} \cos m\varphi \right\rangle, \\
 M_{r\varphi} &= - \frac{kM}{2(3+\mu)\pi} \sum_{m=k}^{\infty} \{ [4-(1-\mu)m] \varrho^{m-2} + \\
 &\quad + (1-\mu)m \varrho^m \} \sin m\varphi, \\
 Q_r &= \frac{2kM}{(3+\mu)a^2\pi} \sum_{m=k}^{\infty} m \varrho^{m-1} \cos m\varphi, \\
 Q_\varphi &= - \frac{2kM}{(3+\mu)a^2\pi} \sum_{m=k}^{\infty} m \varrho^{m-1} \sin m\varphi.
 \end{aligned} \tag{34}$$

A fenti képletekkel ismét meghatároztuk a körlemez lehajlásait, peremének sugárirányú elfordulásait és nyomatékait $k = 6$ és $\mu = 1/6$ feltételezésével. A kapott eredmények a VI. táblázatban találhatók.

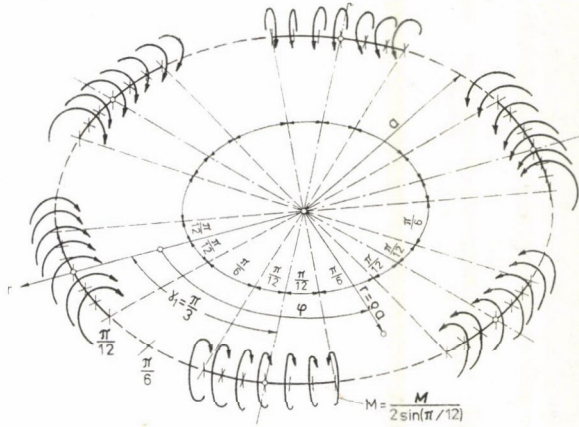
V. táblázat

$$\mu = \frac{1}{6}$$

$$k = 6$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\varepsilon = \frac{\pi}{12}$$



$$10^6 w : \frac{Ma}{K}$$

$$10^6 M_r : \frac{M}{a}$$

$$10^6 M_\varphi : \frac{M}{a}$$

$$10^6 M_{r\varphi} : \frac{M}{a}$$

$$10^6 \theta_r : \frac{M}{K}$$

$\varphi : \pi$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	1,0
0	0 +1 931 852 + 711 735 0	+ 90 293 +1 561 311 + 813 209 0	+ 165 854 +1 259 282 + 904 900 0	+ 229 891 +1 087 364 + 950 614 0	+ 274 290 +1 007 286 + 966 815 0	+329 943 +976 046 +969 964 0	+367 201 +966 788 +968 776 0	+396 169 +965 391 +967 121 0	+416 864 +965 706 +966 203 0	+429 283 +965 908 +965 945 0	+433 422 +965 926 +965 926 0	+989 688
$\frac{1}{12}$	+ 19 454 + 965 926 + 965 926 -	+ 98 108 + 965 926 + 965 926 -	+ 168 483 + 965 926 + 965 926 -	+ 230 578 + 965 926 + 965 926 -	+ 284 394 + 965 926 + 965 926 -	+329 930 +965 926 +965 926 -	+367 187 +965 926 +965 926 +	+396 165 +965 926 +965 926 +	+416 864 +965 926 +965 926 +	+429 283 +965 926 +965 926 +	+433 422 +965 926 +965 926 0	+827 936
$\frac{2}{12}$	+ 38 909 0 +1 219 838 0	+ 105 923 + 370 541 + 118 643 0	+ 171 111 + 672 570 +1 026 952 0	+ 231 265 + 844 487 + 981 238 0	+ 284 497 + 924 566 + 965 036 0	+329 917 +955 805 +961 888 0	+367 174 +965 064 +963 076 0	+396 161 +966 461 +964 730 0	+416 863 +966 145 +965 648 0	+429 283 +965 944 +965 907 0	+433 422 +965 926 +965 926 0	+666 185

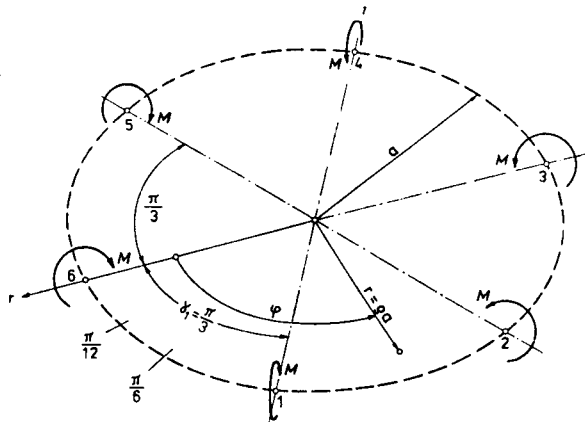
VI. táblázat

$$\mu = \frac{1}{6}$$

$$k = 6$$

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\varepsilon = 0$$



$$10^6 v_0 : \frac{Ma}{K}$$

$$10^6 M_r : \frac{M}{a}$$

$$10^6 M_\varphi : \frac{M}{a}$$

$$10^6 M_{r\varphi} :$$

$$10^6 \delta_r : \frac{M}{K}$$

KÖRSZIMMETRIKUSAN TERHELT KÖRLEMEZ

$\varphi : \pi$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	1,0
0	+ 0 - ∞ 0	+ 112 549 + 2 585 893 + 920 090 0	+ 190 874 + 1 466 144 + 943 686 0	+ 255 165 + 1 139 833 + 957 665 0	+ 309 211 + 1 015 741 + 962 989 0	+ 354 394 + 969 745 + 962 451 0	+ 391 225 + 956 139 + 959 508 0	+ 419 858 + 954 090 + 956 796 0	+ 440 315 + 954 589 + 955 361 0	+ 425 292 + 954 902 + 954 959 0	+ 456 685 + 954 930 + 954 930 0	+ ∞
$\frac{1}{12}$	+ 53 052 0 + 1 206 227 0	+ 125 891 + 593 482 + 1 006 455 - 535 105	+ 194 664 + 890 553 + 928 818 - 281 019	+ 256 080 + 953 981 + 936 666 - 108 525	+ 309 335 + 957 743 + 949 060 - 31 740	+ 354 368 + 955 788 + 953 728 - 4 745	+ 391 204 + 955 057 + 954 779 + 1 543	+ 419 852 + 954 938 + 954 920 + 1 343	+ 440 315 + 954 930 + 954 929 + 386	+ 452 592 + 954 930 + 954 930 + 29	+ 456 685 + 954 930 + 954 930 0	+ 729 426
$\frac{2}{12}$	+ 73 583 0 + 1 206 227 0	+ 136 672 + 274 126 + 1 147 384 0	+ 198 896 + 556 901 + 1 060 673 0	+ 257 277 + 769 539 + 992 185 0	+ 309 531 + 888 366 + 958 762 0	+ 354 353 + 938 395 + 949 814 0	+ 391 183 + 953 465 + 950 653 0	+ 419 846 + 955 751 + 953 083 0	+ 440 314 + 955 270 + 954 499 0	+ 452 592 + 954 958 + 954 900 0	+ 456 685 + 954 930 + 954 930 0	+ 625 348

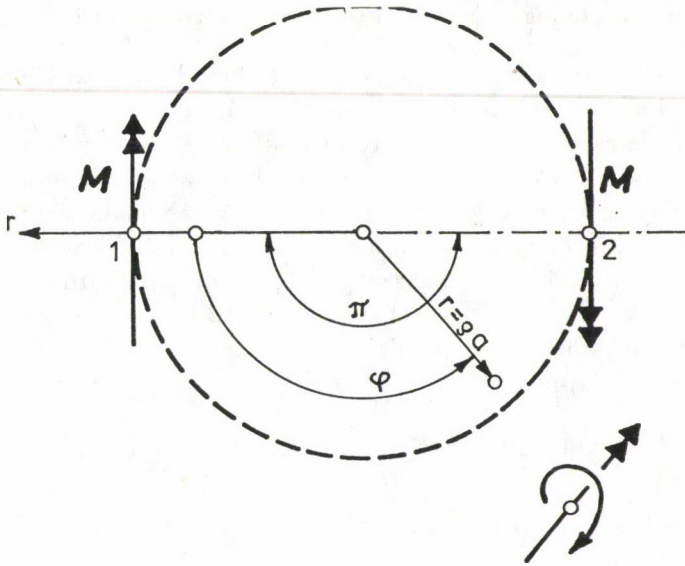
Amennyiben $k = 2$ (10. ábra), a (34) alatti kifejezésekben szereplő sorok összegei a (27) alatti összefüggések segítségével meghatározhatók:

$$\left. \begin{aligned}
 A_0 &= \frac{Ma}{(3 + \mu) K\pi} \left[\frac{1 - \mu}{2(1 + \mu)} + \frac{4 \ln 2}{1 - \mu} \right], \\
 w &= A_0 - \frac{Ma}{(1 - \mu)(3 + \mu) K\pi} \left[\frac{1 - \mu}{2} \varrho^2 - \right. \\
 &\quad \left. - (1 + \mu)\varrho \sin \varphi \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\varrho \sin \varphi}{1 - \varrho^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \varrho \cos \varphi \ln \frac{1 + 2\varrho \cos \varphi + \varrho^2}{1 - 2\varrho \cos \varphi + \varrho^2} + \ln (1 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi + \varrho^4) \right], \\
 M_r &= \frac{M}{a\pi} \left\{ 1 - \frac{2(1 - \mu)(1 - \varrho^2)(1 + \varrho^4) \cos 2\varphi - 2\varrho^2}{(3 + \mu)(1 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi + \varrho^4)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2(\cos 2\varphi - \varrho^2)[2 + (1 + \mu)\varrho^2]}{(3 + \mu)(1 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi + \varrho^4)} \right\}, \\
 M_\varphi &= \frac{M}{a\pi} \left\{ 1 + \frac{2(1 - \mu)(1 - \varrho^2)(1 + \varrho^4) \cos 2\varphi - 2\varrho^2}{(3 + \mu)(1 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi + \varrho^4)^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2(\cos 2\varphi - \varrho^2)[2 - (1 + \mu)\varrho^2]}{(3 + \mu)(1 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi + \varrho^4)} \right\}, \\
 M_{r\varphi} &= \frac{2M \sin 2\varphi}{(3 + \mu)(1 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi + \varrho^4) a\pi} \left[\frac{(1 - \mu)(1 - \varrho^2)^2(1 + \varrho^2)}{1 - 2\varrho^2 \cos 2\varphi + \varrho^4} - 2 \right].
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Amennyiben $\varphi = 0$, további egyszerűsítések hajthatók végre:

$$\left. \begin{aligned}
 w &= \frac{Ma}{2(3 + \mu) k\pi} \left\{ \frac{1 - \mu}{1 + \mu} (1 - \varrho^2) - \frac{4}{1 - \mu} [(1 - \varrho) \ln (1 - \varrho) + \right. \\
 &\quad \left. + (1 + \mu) \ln (1 + \varrho) - 2 \ln 2] \right\}, \\
 M_r &= \frac{M}{(3 + \mu) a\pi} \left(4 \frac{1 + \mu}{1 - \varrho^2} - 1 \right), \\
 M_\varphi &= \frac{(1 - \mu) M}{(3 + \mu) a\pi}; \quad M_{r\varphi} = 0, \\
 Q_r &= \frac{8M}{(3 + \mu) a^2\pi} \frac{\varrho}{(1 - \varrho^2)^2}; \quad Q_\varphi = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\text{Ha } \varphi = \frac{\pi}{2} :$$



10. ábra. Körlemez peremét egymással szemben egy-egy koncentrált sugárirányú nyomaték támadja

$$\left. \begin{aligned}
 w &= \frac{Ma}{2(3 + \mu) K\pi} \left\{ 4 \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \varrho \operatorname{arc} \operatorname{tg} \varrho + \frac{1 - \mu}{1 + \mu} (1 - \varrho^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{1 - \mu} [2 \ln 2 - \ln (1 + \varrho^2)] \right\}, \\
 M_r &= \frac{(1 - \mu) M}{(3 + \mu) a\pi} \left(\frac{1 - \varrho^2}{1 + \varrho^2} \right)^2, \\
 M_\varphi &= \frac{M}{(3 + \mu) a\pi} \frac{5 + 3\mu + 2(5 - \mu) \varrho^2 + (1 - \mu) \varrho^4}{(1 + \varrho^2)^2}, \\
 M_{r\varphi} &= 0; \quad Q_r = - \frac{8M}{(3 + \mu) a^2\pi} \frac{\varrho}{(1 - \varrho^2)^2}.
 \end{aligned} \right\} (37)$$

$\varrho = 1$ esetén:

$$\left. \begin{aligned}
 w &= \frac{Ma}{(1 - \mu)(3 + \mu) K\pi} \left[\frac{1 + \mu}{2} \pi \sin \varphi - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\cos^2 \frac{\varphi}{2} \ln \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \ln \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \right], \\
 M_r &= 0; \quad M_\varphi = \frac{4M}{(3 + \mu) a\pi}; \quad M_{r\varphi} = - \frac{2M}{(3 + \mu) a\pi} \operatorname{ctg} \varphi, \\
 Q_r &= - \frac{2M}{(3 + \mu) a^2\pi} \frac{1}{\sin^2 \varphi}; \quad Q_\varphi = 0.
 \end{aligned} \right\} (38)$$

9. Szakaszosan befogott peremű körlemezen körszimmetrikus terhelés

A 11. ábrán olyan körszimmetrikusan terhelt körlemezt tüntettünk fel, amely peremei mentén egymástól egyenlő távolságra levő szakaszokon be van fogva (perem jelölése: =====). Az ily módon terhelt és megtámasztott lemez statikai mennyiségeit a 7. és 8. fejezetben foglaltak szuperponálásával határozhatjuk meg. Olyan intenzitású szakaszos sugárirányú vonalnyomatékokat kell működtetnünk a körlemez peremén, hogy hatásukra a 7. fejezet képletei alapján számított elfordulások a támaszok tengelyvonalaiban eltűnjenek.

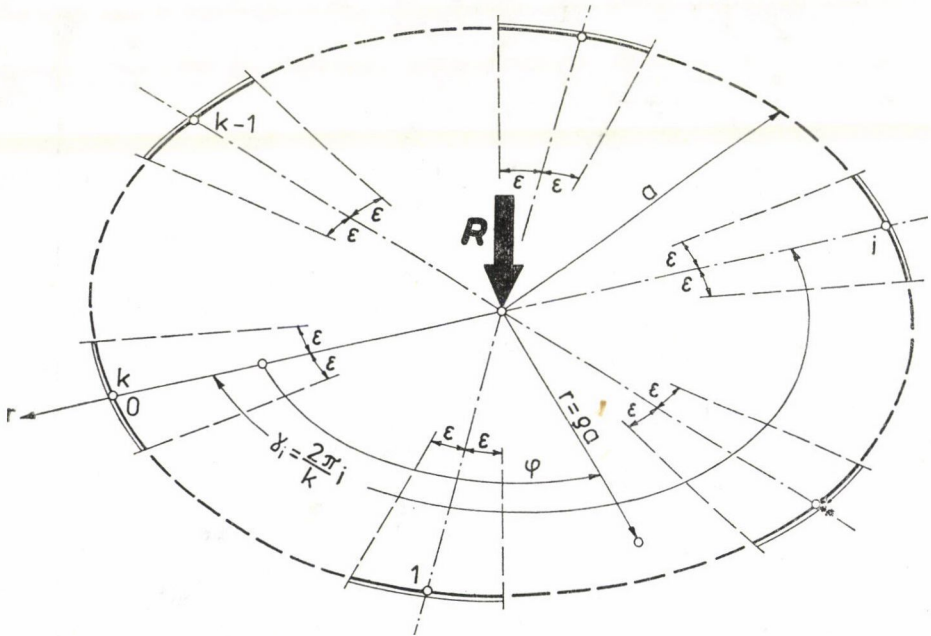
Határozzuk meg $k = 6$, $\mu = 1/6$ és $\varepsilon = \pi/12$ esetében egy egyenletesen megoszlóan terhelt körlemez alakváltozásait és nyomatékait. A III. és V. táblázat eredményei alapján:

$$37\,311 \cdot 10^{-6} \frac{pa^3\pi}{K} + 989\,688 \cdot 10^{-6} \frac{M}{K} = 0.$$

Innen a befogási nyomaték:

$$M = -\frac{37\,311}{989\,688} pa^3\pi = -0,037\,700 pa^3\pi.$$

A befogási nyomaték ismeretében az előbb idézett táblázatok adatainak segítségével a statikai mennyiségek számíthatók (VII. táblázat).

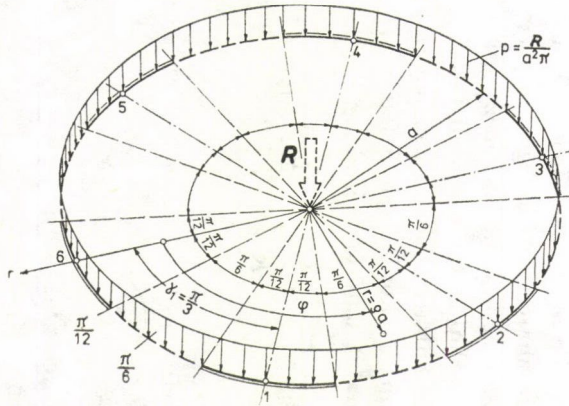


11. ábra. Körszimmetrikusan terhelt körlemez pereme szakaszosan befogott

VII. táblázat

10

$\mu = \frac{1}{6}$
 $k = 6$
 $\gamma_1 = \frac{\pi}{3}$
 $\varepsilon = \frac{\pi}{12}$



$10^6 w : \frac{pa^4\pi}{K}$
 $10^6 M_r : pa^2\pi$
 $10^6 M_\phi : pa^2\pi$
 $10^6 M_{r\phi} : pa^2\pi$

$\frac{pa^2\pi}{K} : 10^6 \theta_r$

$\varphi : \pi$ \ / \ ϱ	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	1,0
0	0 -72 831 -16 495 0	+ 314 -42 320 - 9 240 0	+ 1 050 -19 129 - 2 356 0	+ 1 985 - 4 094 + 4 843 0	+ 2 975 + 5 587 +11 404 0	+ 3 929 +12 285 +16 748 0	+ 4 787 +17 312 +20 758 0	+ 5 501 +21 222 +23 547 0	+ 6 040 +24 132 +25 317 0	+ 6 374 +25 959 +26 280 0	+ 6 488 +26 584 +26 584 0	0
$\frac{1}{12}$	+ 69 -36 415 - 3 261	+ 522 -24 445 + 2 412 + 2 894	+ 1 233 -13 735 + 7 485 - 2 677	+ 2 099 - 4 286 +11 961 - 3 753	+ 3 031 + 3 904 +15 841 - 3 071	+ 3 951 +10 834 +19 123 - 1 914	+ 4 792 +16 504 +21 809 - 929	+ 5 503 +20 914 +23 898 - 330	+ 6 040 +24 064 +25 390 - 70	+ 6 374 +25 954 +26 285 - 5	+ 6 488 +26 584 +26 584 0	+2 892
$\frac{2}{12}$	+ 138 0 + 9 989 0	+ 732 - 6 570 +14 063 0	+ 1 417 - 8 342 +17 325 0	+ 2 214 - 4 479 +19 078 0	+ 3 088 + 2 221 +20 277 0	+ 3 973 + 9 382 +21 497 0	+ 4 799 +15 695 +22 859 0	+ 5 505 +20 604 +24 249 0	+ 6 041 +23 995 +25 462 0	+ 6 374 +25 949 +26 289 0	+ 6 488 +26 584 +26 584 0	+5 784

Műszaki Tudomány 56, 1978

10. Peremei mentén sarokmerv oszlopokkal alátámasztott körlemezek körszimmetrikus terheléssel

A körlemezt alátámasztó d magasságú és $2a\varepsilon$ szélességű oszlopok (1. ábra) alul lehetnek csuklóval megtámasztottak, vagy befogottak. Felső végükön ható M nyomaték hatására (12. ábra) az oszlopokvégei az alábbi elfordulásokat végzik:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \vartheta_r &= -\frac{Ml}{3EI}, \\ \text{b)} \quad \vartheta_r &= -\frac{Ml}{4EI}. \end{aligned} \quad (39)$$

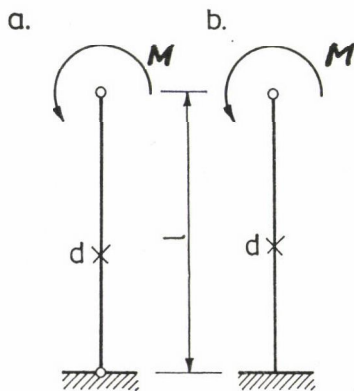
Ezekben a kifejezésekben az oszlop inercianyomatéka:

$$I = \frac{Ead^3\varepsilon}{6}. \quad (40)$$

Sarokmerv oszlop és lemez kapcsolat esetén az egymáshoz csatlakozó szerkezeti elemeknek azonos nagyságú, de ellentétes előjelű elfordulást kell végezniük. Ebből a feltételből meghatározható az M befogási nyomaték.

Számítsuk ki a korábbi példáinkban már szereplő körlemez statikai megnyitási hat ($k = 6$) db alul befogott oszlop esetében egyenletesen megoszló p terhelés hatására $\mu = 1/6$ és $\varepsilon = \pi/12$ feltételezésével. A szabadon felfekvő lemez és csuklósnan megtámasztott oszlopvég elfordulásainak különbsége a terhelés és az egyelőre ismeretlen M nyomaték hatására zérus.

$$37\,311 \cdot 10^{-6} \frac{pa^3\pi}{K} + 989\,688 \cdot 10^{-6} \frac{M}{K} + \frac{Ml}{3EI} = 0.$$



12. ábra. Alul csuklóval megtámasztott, illetve befogott oszlop csuklóban végződő felső végét koncentrált nyomaték támadja

Innen a befogási nyomaték:

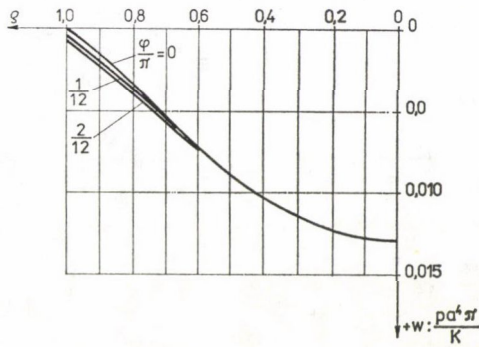
$$M = \frac{37\,311}{\frac{10^6 l K}{3EI} - 989\,688} pa^3 \pi .$$

A (2), (40) valamint $\mu = 1/6$ és $\varepsilon = \pi/12$ behelyettesítése után

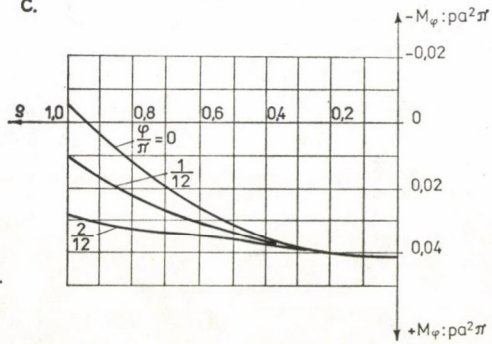
$$M = \frac{37\,311}{-654\,809 \frac{h^3}{d^3} \frac{l}{a} - 989\,688} pa^3 \pi .$$

A képletből látható, hogy nagyon merev oszlop ($d \rightarrow \infty$) esetén a szakaszosan befogott lemez esetét kapjuk.

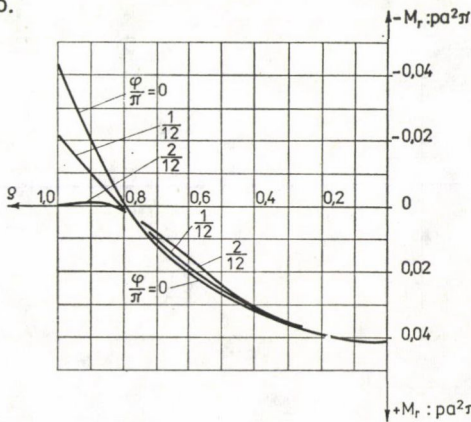
a.



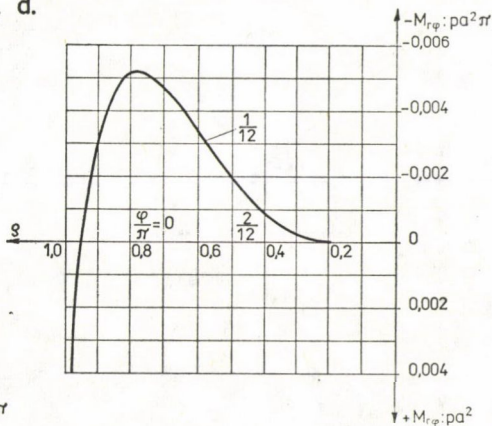
c.



b.

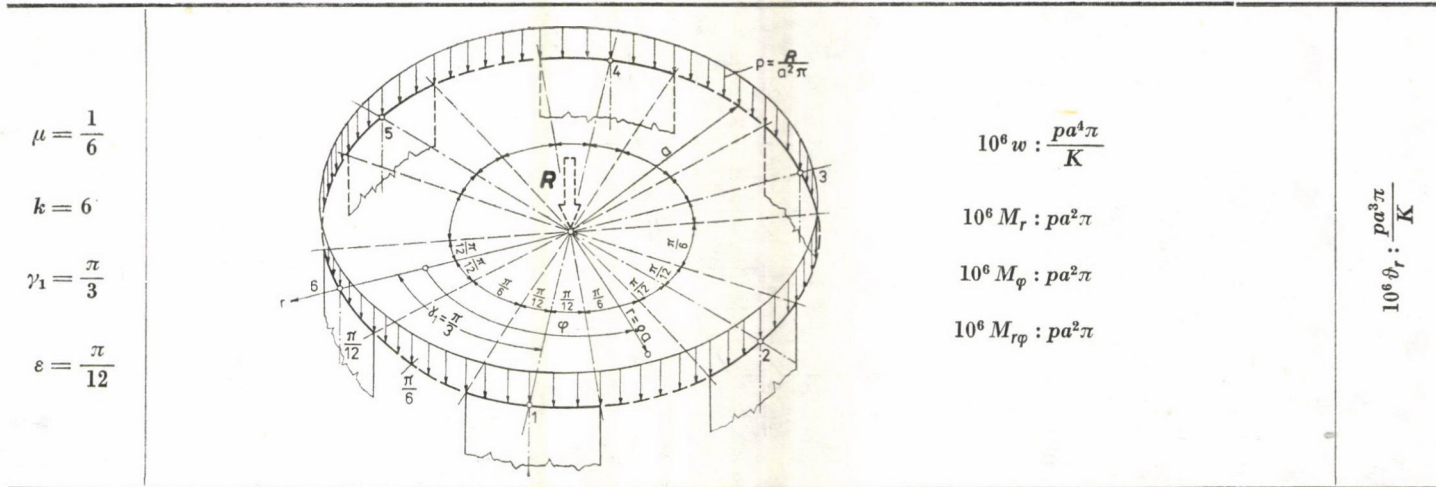


d.



13. ábra. Kerülete mentén hat oszloppal alátámasztott egyenletesen megoszlóan terhelte körlemez. a) Lehajlások, b) Sugárirányú-, c) Érintőirányú-, d) Csavarónyomatékok ábrái

VIII. táblázat



$$10^6 w : \frac{pa^4\pi}{K}$$

$$10^6 M_r : pa^2\pi$$

$$10^6 M_\varphi : pa^2\pi$$

$$10^6 M_{grp} : pa^2\pi$$

$$\frac{pa^2\pi}{K} \cdot 10^6$$

$\varphi : \pi$	q											
	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	1,0
0	0 -43 830 - 5 811 0	+ 1 670 -18 882 + 2 968 0	+ 3 540 - 225 +11 229 0	+ 5 436 +12 230 +19 113 0	+ 7 243 +20 708 +25 918 0	+ 8 882 +26 937 +31 309 0	+10 299 +31 826 +35 301 0	+11 449 +35 714 +38 065 0	+12 298 +38 629 +39 822 0	+12 818 +40 458 +40 781 0	+12 995 +41 084 +41 084 0	+14 857
$\frac{1}{12}$	+ 361 -21 915 +11 242 +	+ 1 995 - 9 945 +16 912 - 3 098	+ 3 762 + 765 +21 985 - 5 259	+ 5 561 +10 214 +26 461 - 4 756	+ 7 301 +18 404 +30 341 - 3 372	+ 8 904 +25 334 +33 623 - 1 959	+10 304 +31 004 +36 309 - 915	+11 450 +35 414 +38 398 - 317	+12 298 +38 564 +39 890 - 67	+12 818 +40 454 +40 785 - 4	+12 995 +41 084 +41 084 0	+15 321
$\frac{2}{12}$	+ 722 0 +28 301 0	+ 2 322 - 1 008 +30 856 0	+ 3 986 + 1 755 +32 742 0	+ 5 686 + 8 198 +33 809 0	+ 7 359 +16 100 +34 764 0	+ 8 926 +23 731 +35 937 0	+10 311 +30 183 +37 317 0	+11 452 +35 114 +38 731 0	+12 229 +38 499 +39 958 0	+12 818 +40 450 +40 790 0	+12 995 +41 084 +41 084 0	+15 785

Példánkban legyen

$$\frac{h^3}{d^3} \frac{l}{a} = 1.$$

Ekkor

$$M = - 0,022\ 688\ pa^3\pi.$$

Ennek ismeretében a III. és V. táblázatok adatainak segítségével számíthatók a lemez alakváltozásai és nyomatékai (VIII. táblázat). A statikai mennyiségek lefutását a 13. ábra is érzékelteti. Az eredmények azt bizonyítják, hogy a fél kerülete mentén oszlopokhoz kapcsolódó lemez részlegesen befogottá vált.

12. IRODALOM

1. BAUR, F.: Ein Beitrag zur Erfassung des Spannungszustandes im unmittelbaren Bereich der Stützung punktgelagerten Platten. *Der Bauingenieur* 46, (1971), 1—5.
2. BASSALI, A.: Thin Circular Plates Supported at Several Points along the Boundary. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 53, (1957), 525—535
3. BEYER, K.: Die Statik im Stahlbetonbau. Springer-Verlag, Berlin 1948
4. GIRKMANN, K.: Flächentragwerke. Dritte Auflage. Springer-Verlag, Wien 1954
5. HAJNAL-KÖNYI, K.: Die Berechnung von kreisförmig begrenzten Pilzdecken. Springer-Verlag, Berlin 1929
6. (KALMANOK, A. S.) Калманок, А. С.: Расчет пластинок — справочное пособие. Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, Москва 1959
7. (KITOVER, K. A.) Китовер, К. А.: Круглые тонкие плиты. Ленинград 1953
8. KNOPP, K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Fünfte Auflage. Springer Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg—New York 1964
9. LEDERER, F.: Statika Kruhovej Dosky S. Rotačne Symetrickým Zatážěním. Slovenskej Akadémie Vied A Umeni, Bratislava 1951
10. MÁRKUS Gy.: Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1964
11. MÁRKUS, Gy.: Theorie und Berechnung rotationssymmetrischer Bauwerke. Akadémiai Kiadó, Budapest, Werner Verlag, Düsseldorf 1967, 1976, 1978
12. NÁDAI, A.: Die Verbiegungen in einzelnen Punkten unterstützter kreisförmiger Platten. *Physikalische Zeitschrift.* 23, (1922), 366—376
13. NÁDAI, A.: Die elastischen Platten. Verlag von Julius Springer, Berlin 1925, 1968
14. SZILÁRD, R.: Theory and Analysis of Plates. Prentice-Hall, INC Englewood Cliffs. New-Jersey 1974
15. TIMOSHENKO, S.—WOJNOWSKY-KRIEGER, S.: Theory of Plates and Shells. Second Edition. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1959
16. TOLSTOW, G. P.: Fourierreihen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1955
17. TÖLKE, F.: Praktische Funktionenlehre. Erster Band. Elementare und elementare transcendente Funktionen. Zweite Auflage. Springer-Verlag. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1950
18. (VAJNBERG, D. V.—VAJNBERG, E. D.) Вайнберг Д. В.—Вайнберг Е. Д.: Пластины, диски, балки-стенки. Государственное издательство литературы по строительству и архитектуре УССР, Киев 1959
19. WOLMIR, A. S.: Biegsame Platten und Schalen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1962

Circular Plate Supported by Columns at its Boundary Subjected to Circular Symmetrical Loads. Circular plates supported by columns at their edges subject to circular-symmetrical load are dealt with. The results found permit the calculation of circular plates clamped at certain sections of their peripheries. The rigid connection between the columns and plate may also result in partial fixing.

Am Rand durch Säulen abgestützte und durch kreissymmetrische Belastung beanspruchte Kreisplatten. Es werden am Rande durch Säulen abgestützte und durch kreissymmetrische Belastung beanspruchte Kreisplatten untersucht. Durch die Ableitung der Ergebnisse bietet sich eine Möglichkeit zur Berechnung der am Rand unterbrochen eingespannten Kreisplatten. Die ecksteife Verbindung der Säulen und der Kreisplatte kann auch eine partielle Einspannung ergeben.

ADALÉKOK EGY BETONANYAGÚ TÖMEGCIKK GÉPSORÁBAN REJLŐ MŰSZAKI FEJLESZTÉSI LEHETŐSÉGEKHEZ

CSUTOR JÁNOS

[Beérkezett: 1978. január 23-án]

A szerző előzőkben egy jelentős hazai exportcikk komplexen értelmezett műszaki fejlesztésének néhány részeredményét mutatja be. Komplex fejlesztésen most azt érti, hogy a fejlesztés a gépsor egészére kiterjed, másrészt, hogy igyekszik felhasználni más területen (pl.: az automatizálásban, a beton- és a mérés technikában stb.) elért hazai kutatási eredményeket. Harmadrészt, hogy így szükségszerűen kollektív jellegű. Emiatt a fejlesztés olyan szintézisre való törekvést testesít meg, amely kapcsolatot teremt az exportpiac és a belföldi ipari háttér között és stabilizálja ezt a kölcsönkapcsolat. Egyidejűleg mindkét területen sokrétűen ösztönző, mert az exportpiac mércéje — tőlünk függetlenül — mindig magasan áll.

I. Bevezetés

Közismert, hogy Magyarországon — az egyik ötéves tervperiódusról a másikra — a felszabadulás után minden iparág úgy fejlődött, hogy a fejlődés iránya emelkedő, s ezt érdemben átmeneti stagnálások vagy visszafordulások sem befolyásolták. Bizonyítani lehet, hogy azok az időszakok, amelyek során egy-egy iparágban (kívülről szemlélve) a stagnálás jelei látszhattak, az esetek túlnyomó többségében a fejlődés teremtette új feltételekhez való alkalmazkodás folyamata zajlott le. Rendszerint ilyen időszakokban ment és megy végbe a termékszerkezet korszerűsítése és a gyártástechnológiáknak fejlődést jelentő változása is.

Napjainkban az ipari fejlődés gyakorlatilag mindig a *műszaki fejlesztés* vállalati, iparági, vagy ágazati méretű, ám mindenképpen *tervszerű* eredménye. A műszaki fejlesztés szoros kapcsolatban van a mostanában sokszor — széles körben — taglalt kutatással, mint a társadalmi-ipari haladás fontos elemével. A kutatás nem azonos a műszaki fejlesztéssel. Ha önkényes egyszerűsítéssel a kutatást eddig nem ismert törvények feltárására irányuló tevékenységnek tekintjük, akkor ettől a műszaki fejlesztés elsősorban abban különbözik, hogy már feltárt törvényeket (ismereteket) is hasznosít, vagyis a társadalmi fejlődés szolgálatába állítja őket. Ezt pontosabban is meg lehet fogalmazni, de mert mondanivalónk nem elvont, nem lehet feladatunk a kutatás és a műszaki fejlesztés különbségét az abszolút pontosság igényével definiálni.

A pontos definíció ismeretében is sok példa állna azonban rendelkezésünkre a különbség fennállásának igazolásához. A találmányok, licencek,

know-how-k megvásárlása vagy eladása ma egyre gyakoribb módja a műszaki fejlesztésnek, miközben ezek tartalmazhattak — és tartalmaznak is — közvetlen kutatási eredményeket. Vagyis: eredményes műszaki fejlesztésnek nem szükségszerű előfeltétele a kutatás a szónak köznapi értelmében.

Mindezt azért kellett előrebocsátanunk, mert az ipari fejlődés emelkedő irányzata során hazánkban is úgy keletkeztek új iparágak, hogy gyakorlatilag semmilyen belföldi előzményre nem támaszkodhattak, vagy ezek az előzmények — fejlett ipari országokhoz viszonyítva — szerények voltak. Ez utóbbi fejlődési utat járta végig az állami építőipar, amíg mai magas színvonalú szervezettségét és műszaki fejlettségét, szerepkörének sokrétűségét elérte.

Témánk kötődése az állami építőiparhoz és ennek fejlődéséhez annyiban sajátos hazai vonás, hogy az irányító tárca egy sor olyan — tágabb értelemben — segéd- vagy kiegészítő tevékenységnek is főhatósága, amelyek más országokban nem szükségszerűen állnak az építőipart irányító főhatóság felügyelete alatt. A „segéd”- vagy a „kiegészítő” jelzők csak az építőipari kivitelezés szemszögéből nézve illethetik ezeket, hiszen önmagukban önálló műszaki területet jelentenek. Elég erre egyetlen példaként az üvegyártást említeni.

Hasonló a betonanyagú tömegcikkék gyári termelése vagy a szilikát bázisú üzemi előregyártás. Hogy ennek az ipari tevékenységnek a megjelölésére több elnevezést használunk és használhatunk, annak több oka van. Egyrészt utal a fejlődés olyan gyors ütemére, amely mellett a korábban viszonylag pontos megnevezéseket jelzőkkel kellett bővíteni, hogy a *beton*, *vasbeton*, *feszített beton*, *könnyűbeton* stb. kategóriákat a műszaki gyakorlatban egymástól megkülönböztethessük, másrészt a fém-, vagy egyéb anyagú *előregyártott* szerkezetek vagy elemek felhasználása is mindennapos lett az építőipari kivitelezésben. Ezért kell kiemelni a „szilikát bázisú” jelzőt. Azt hisszük azonban, hogy a „betonanyagú tömegcikk” megjelölés a legátfogóbb, kikötve csupán, hogy ezen az elnevezésen a kavicsbetonból gyárakban nagy mennyiségben termelt cikkeket értjük.

Ha a fenti értelemben definiált tömegcikkék példaként a csövek teljes választékát, a távvezetéki és világítási oszlopokat, a tübbinget, a falpanelt és végül, de nem utolsósorban az előrefeszített vasúti betonaltat említjük, akkor, a nagyon sok közül, néhány olyan cikket emeltünk ki, amelyek érdemben esetleg több évtizeden keresztül sem változnak. Ezek tehát szoros értelemben vett betonanyagú tömegcikkék. Termelésük magas műszaki színvonalat képviselő, sajátos műszaki problémakört jelentő gyárakban folyik.

2. A vasúti betonalj kiemelt helye hazánkban a tömegcikkék között

Nálunk a vasúti betonalj az említett ipari fejlődés során több szempontból játszott és játszik megkülönböztetett szerepet. Már a közönséges (nem feszített) aljak termelése is gyárban folyt az 1940-es évek végén, amikor —

nálunk — ez a termék volt az egyetlen vasbeton tömegcikk. Ha ehhez hozzávesszük, hogy mind az aljat, mind a gyártó-gépsort hazai szakemberek és a hazai ipar hozták létre, akkor ezt tekinthetjük az *első* tényezőnek, amely az alj kiemelt helyzetét motiválja. Azt most nem részletezhetjük, hogy ebben a MÁV-nak milyen úttörő szerepe volt, csak utalunk rá [2, 4, 9, 20]. A vasbetonaljakat termelő gépsor más hazai tömegcikké gépsorainak kialakításához is mintául szolgált.

Az alj kiemelt helyének *második* tényezőjeként tekinthetjük azt a folyamatot, amelyet az átállás jelentett a közönséges vasbetonaljak termeléséről az előrefeszített aljak termelésére [4, 5, 6, 11]. Ez az adott esetben szinte ideálisan követte az ipari műszaki fejlesztésnek ma is érvényes szabályait. Ennek megfelelően egyedi kísérletek során kialakították az alj legfontosabb méreteit, a kísérleti aljakat roncsolásos vizsgálatokkal ellenőrizték és a kapott eredmények szerint módosították a méretezési számításokat [1, 2, 5, 16]. Ezt követően kis gyár épült, ebben 1950—54 között *félüzemi kísérleteknek* számító termelés folyt; az itt termelt mennyiség segítette kialakítani a MÁV végleges állásfoglalását [8, 9, 11, 15, 16]. Közben mód volt valamennyi részművelet folyamatos fejlesztésére, amíg a technológiai folyamat gyakorlatilag teljessé nem vált [1]. A tömeggyártás és a termék felhasználásának feltételei között talán egyetlen más betonelemnél sem kellett ilyen szigorú összhangot teremteni [17, 18].

Sajátos az a körülmény is, hogy a MÁV mindig csak vevője, de nem termelője az aljaknak; ez nem magától értetődő állapot és nem minden országban van így. A tapasztalat azt mutatja, hogy ha a vasút a vevő, az rendszerint az aljakkal szemben támasztott követelmények szintjének emelésével jár.

Az eredményes félüzemi kísérletek után először egy általunk Bulgáriának szállított gépsoron, majd 1959-ben itthon is megkezdődött az előrefeszített aljak *nagyüzemi tömeggyártása*; ez a műszaki fejlesztésnek — átmenetileg — a befejező szakaszát jelentette.

Az eredményes aljgyártási rendszer iránt (amely időben számos országot megelőzött) széles körű nemzetközi érdeklődés nyilvánult meg, s ez az 1959—77 közötti időszakban nagyarányú gépsor-exporthoz vezetett. Ez idő szerint kb. 60 gépsorunk termel külföldön és továbbiak szállítása is folyamatban van. Az előrefeszített vasúti betonalj kiemelt helyének így *harmadik* tényezője, hogy a gyártó-gépsor exportcikké vált, egyetlenné e tekintetben a betonanyagú tömegcikkeket gyártó gépsorok között.

Egy 1972-ből származó statisztikai adat szerint a világ feszített-alj termelésének kb 65%-át a magyar rendszerű technológiával és az általunk szállított gépsorokon állították elő. Azóta ez az arány csak javulhatott és ez jelentős hazai eredmény. Másképpen: több ország vasúthálózatának építésénél magyar eredetű technológiai gépsorokon termelt több száz millió darab aljat használtak fel.

A legutóbbi években a hazai gyártástechnológián céltudatos műszaki fejlesztéssel olyan módosításokat hajtottunk végre, hogy felismert hiányosságait nagyrészt elhárítottuk, másrészt többcélúvá tettük, miáltal — nagy valószínűséggel — ismét a legkorszerűbb eljárások közé tarthatók. A következőkben ennek a fejlesztésnek néhány jellemző sajátosságát és eredményét szeretnénk megmutatni.

3. Az aljgyártási rendszerek

Hogy a korszerűség és a többcélúság tényét bizonyítsuk, az 1. ábrán áttekinthető módon összefoglaltuk a kialakult és műszakilag reálisan lehetséges aljgyártási rendszereket. Az összefoglalást egy absztrakció teszi egyszerűvé. A világon használt valamennyi fővasúti alj ugyanis *nagyságrendileg* azonos geometriai méretű és így egy prizmatikus rúddal modellezhető. Legyenek ennek a modellnek a méretei $0,3 \times 0,18 \times 2,5$ m, ahol $S = 0,3$ m, a hasáb szélessége, $H = 2,5$ m, a hasáb hossza, $m = 0,18$ m pedig a magassága. Megjegyezzük, hogy az m magassági méret a továbbiakban nem játszik számottevő szerepet. Tekintsük S -t *szélességi*, H -t pedig *hosszmodulusnak*, akkor ezekből az $M = S \times H$ *modulusszorzat* alkotható. Ez az aljgyártási eljárások rendszerezésében, jellemzésében és összevetésében hasznos.

Az aljgyártási eljárások nagy többségében az aljakat formázó acélszerkezeteket (általánossá vált és a továbbiakban használt terminológiával: a sablonokat) *kapcsoltan* (csoportosan) használják [4, 14, 16]. E kapcsolások nem önkényesek, hanem az utó- és előrefeszítés jellegzetességeivel, az egységgé kapcsolt sablonok súlyával, emiatt pedig a gyártási eljárással, illetve a gépsor egészével, ennek és a termelés gazdaságosságának problémakörével függnek össze.

Itt nem lehet elkerülni, hogy — közismert voltuk ellenére — az utó- és előrefeszítésnek néhány, témánk szempontjából lényeges tulajdonságát meg ne említsük. Mivel ezek tömegcikkeket érintenek, gyakran merőben más vonatkozásban fontosak, mint nem tömegcikkeknél számító feszített betonszerkezetek esetében.

Az *utófeszítéskor* csatornákat kell kialakítani a frissen tömörített betonban, ennek megszilárdulása után e csatornába kell befűzni a feszítőacélokat, végeiket megfogni, feszíteni és a feszített állapotot rögzíteni. A csatornák és a feszítő acélok átmérője sosem azonos; utólag minden esetben cementhabarcsot kell a csatornába injektálni. Mindez nagyon munkaigényes és a technológia egésze a műveleti fegyelemre az átlagnál érzékenyebb. Ismerünk olyan eljárást is, amelynél az injektálás végrehajtása érdekében minden darabba furatot kell fúrni a megszilárdult betonban.

Az *előrefeszítéskor* a feszítőacélokat két végükön meg kell fogni, az egyiket rögzíteni, a másikonál fogva feszíteni és a feszített állapotot rögzíteni. Ezt

SORSZÁM	1.	U		$S \times H$	Soros $S=1; H \geq 1$
	2.	E		$S \times 2H$	
	3.	E		$S \times 4H$	
	4.	E		$S \times 5H$	
	5.	U		$2S \times H$	Soros és párhuzamos $S > 1; H \geq 1$
	6.	U		$3S \times H$	
	7.	E		$2S \times 2H$	
	8.	E		$3S \times 2H$	
	9.	E		$2S \times 5H$	
	10.	E		$kS \times nH$	Soros és párhuzamos $S > 1; H > 1$
$5 \leq k \leq 20; \quad 10 \leq n \leq 20$					AGGREGÁT
A FESZÍTÉS RENDSZERE: E = ELŐRE - ; U = UTÓFESZÍTÉS					SZTEND
A GYÁRTÁS RENDSZERE					

Sablonkapcsolási módok vasúti betonalj tömeggyártásához.

Szélességi modulus: $S = 0,30 \text{ m}$

Hosszmodulus : $H = 2,5 \text{ m}$

Modulusszorzat : $M = KS \times nH$

I. ábra. Sablonkapcsolási módok vasúti betonalj tömeggyártáshoz

követi a betonozás, majd a beton megszilárdulása után az acélok feszített állapotának oldása. Mind az utó-, mind az előrefeszítésnél a bebetonozott acélok-nak az eredeti állapotba való visszatérési törekvése adja a betonra ható nyomóerőt.

A gyakorlatban *agregát* a gyártási rendszer, ha a sablon vándorol egyik munkahelyről a másikra, míg *sztend*, ha a sablon helybenmarad és a munkafázisoknak megfelelő eszközök (gépek) haladnak munkahelyről munkahelyre.

Ezt előrebocsátva célszerű az 1. ábrán szimbolizált sablonkapcsolásoknak nevet adni, amelyek minden, gyakorlatilag lehetséges sablonkapcsolási módot felölelnek. Így *soros-agregát* a rendszer, ha a sablontagok *csak* egymás után következnek, míg *soros és párhuzamos agregát*, ha a sablonok egymás utáni helyzetei mellett párhuzamosak is előfordulnak. A *soros és párhuzamos* aggregátokat csak „párhuzamosak”-nak nevezni elégtelen lenne, erről az 1. ábra közvetlenül meggyőző. A sztendrendszer lehet soros, vagy *soros és párhuzamos*.

Az 1. ábra az eddigiek tükrében közvetlenül mutatja, hogy az utófeszítéshez szükséges csatornákat jól csak *egy hosszmodulusnyi* szakaszon lehet a tömeggyártás viszonyai között megcsinálni. Az utófeszítéshez az $S \times H$, $2S \times H$ és a $3S \times H$ kapcsolási variációk jöhetnek számításba. Már az $S \times 2H$ modulusszorzatnak megfelelő kb 5 m hosszú szakaszon sem lehet a frissen tömörített betonban, kis átmérőjű, egymástól hosszant elválasztott, alaktartó csatornákat üzembiztosan (selejtmentesen) kialakítani.

Hogy miért célszerű és gazdaságos a sablontagokat kapcsolni, annak legfontosabb oka az, hogy sem a többrészes sablonokhoz szükséges anyag, sem az egy-egy többszörös sablonon végrehajtandó szerelvény-szerelési munka nem lineárisan növekszik a kapcsolt sablontagok számával.

Az 1. ábra vizsgálata érzékelteti, hogy minél nagyobb a H hosszmodulus szorzószáma, annál vékonyabb a feszítőacél, illetve annál inkább csak tekercsből lecsévélhető huzalátmérők jöhetnek számításba. Ez különösen igaz a sztendrendszer esetében, ahol pl. 30–40 db alj van egymás után egy sorban, s ez nagyságrendileg kb 100 m hosszúságnak felel meg. Ilyen hosszúságban nagyobb átmérők alkalmazásának még a gondolata is irreális.

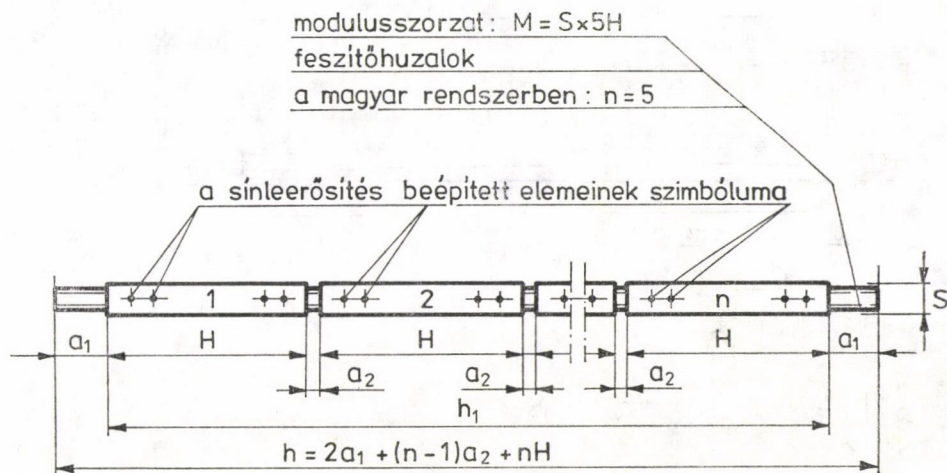
Az $S \times 5H$, $3S \times 2H$ és $2S \times 5H$ variációk a kapcsolásoknak azt a felső határát jelentik, amelyek mellett még aggregátként kialakítható a gépsor.

4. A hazai gyártási eljárás és legfontosabb jellemzői

Aljgyártási eljárásunkat az $S \times 5H$ modulszorzat jellemzi, és amint az 1., ill. 4. ábra mutatja, aggregát rendszerű. Előképe az angol Dow-Mac [3, 16] sztendrendszer volt, amelyből azonban csak a viszonylag nagyszámú vékony feszítőhuzal maradt meg benne. A Dow-Mac-eljárás közvetlenül 1945 után, amikor a feszített alj felhasználásának előfeltételei nálunk is egyrészt megértek, másrészt egy alkalmas technológia kialakíthatóvá vált, már elég fejlett volt ahhoz, hogy mintául szolgáljon. Ez idő tájt azonban nem lehetett arra gondolni, hogy a komplett eljárást megvéve, azt itthon realizáljuk, ezért „rövidült” és „keskenyedett” a 2. pontban leírt műszaki fejlesztés eredményeként az 1. ábra 4. esetének feltüntetett modulusszorzatúvá, miközben sztendből aggregáltá alakult. Hogy a változás miért éppen ezt az utat követte és nem mást, arra a magyarázatot akkori kohászati adottságainkban, ezért a feszítőhuzalok

megfogásának és rögzítésének viszonylag egyszerűen végrehajtható voltában találhatjuk meg.

Az eredetileg számításba vett és mindmáig használt 2,5 mm átmérőjű nagyszilárdságú acélhuzal ($\sigma_{sz} = 1,76 \text{ kN/mm}^2 = 1,76 \text{ GPa}$; $\sigma_{0,2} = 1,57 \text{ kN/mm}^2 = 1,57 \text{ GPa}$) állandó jelleggel beszerezhető, ezért érthető a kohászathoz való kötöttség.



2. ábra. A magyar rendszerű aljköteg modellje, a feszítőhuzalok szét-, illetve levágása előtt

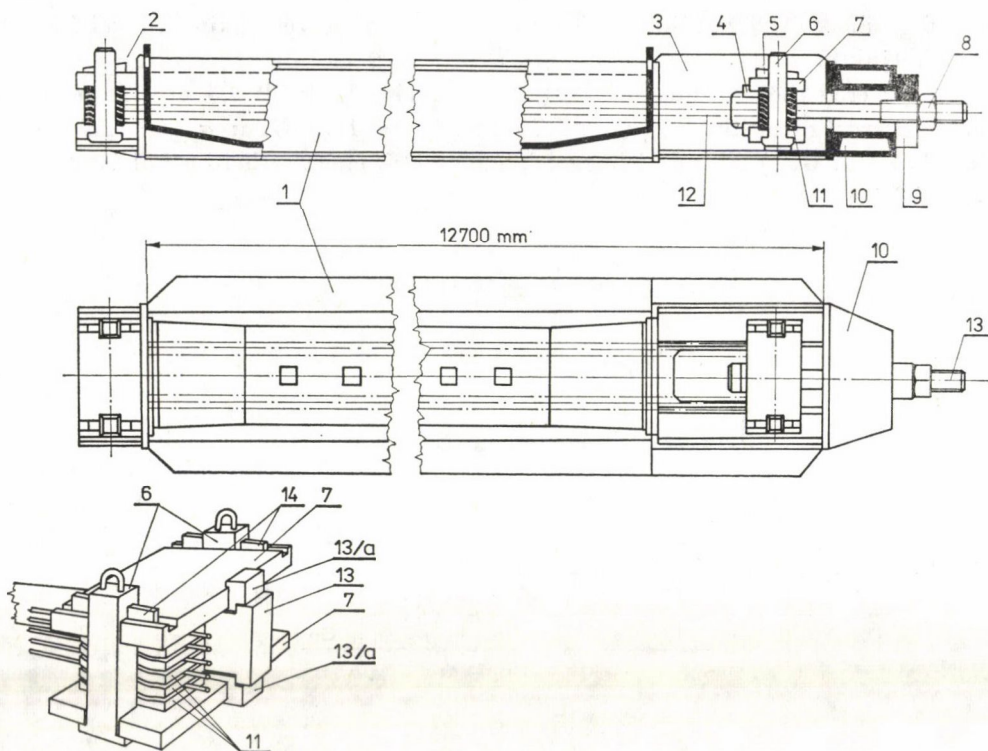
Az $S \times 5H$ modulusszorzatú rendszer további fontos jellemzői a 2. ábra alapján tárgyalhatók. Ezek:

4.1. Az acélszálak száma viszonylag nagy, 60, mert a szálátmérő a lehetséges legkisebb. Ha a szálátmérő 3 mm-re nő, a szálszám 40-re csökken.

4.2. A vékony huzal miatt lehetséges csoportos megfogást mutatja a 3. ábra.

4.3. Itt pusztán az acélszálak felülete és a beton között kialakuló adhézió révén származtatható át a feszítőerő a betonra, ez az ún. Hoyer-rendszer. Emiatt a szálak felülete nem lehet teljesen sima. Az eredeti és sima felületű 2,5 ÷ 3 mm átmérőjű művi szálakat a gépsor ún. hullámosítógépén kell át-húzni, hogy maradó hullámok (bár a feszítéskor ellapulóak) keletkezzenek a huzalokon. Ha a huzal már eleve rovátkolt felületű, a hullámosítás elmarad. A huzal csoportos megfogásának szempontjából a 4 mm-es átmérő a felső határt jelenti.

4.4. A 2. ábra mutatja a teljes h hosszúságú acélszál két végén azt az a_1 jelű szakaszt, amelyeknél fogva a pásmát meg lehet fogni, húzással feszíteni, illetve a feszített állapotot rögzíteni. Az a_2 jelű aljközi szakaszokat a diafrag-



3. ábra. A magyar aljgyártási eljárás alapját alkotó acélsablon, modulusszorzata $5H \times S$, az eredeti megoldásban. 1: sablontest; 2: fejkamra a fix befogófej számára; 3: fejkamra az elmozduló befogófej számára; 4—13/a: kiegyenlítő alátétek; 5—14: rögzítőékek; 6: oszlopok; 7: alsó és felső járomlemez; 8: rögzítőanya; 9: alátét; 10: homlokkiképzés; 11: lamellák; 12: befogott huzalszálak; 13: feszítőcsavar; 14: rögzítőékek

Az összeállított befogófej az eredeti ékes rögzítéssel. A fejlesztett megoldásban a 6 oszlopok felső vége menetes és a rögzítés csavaranyával történik

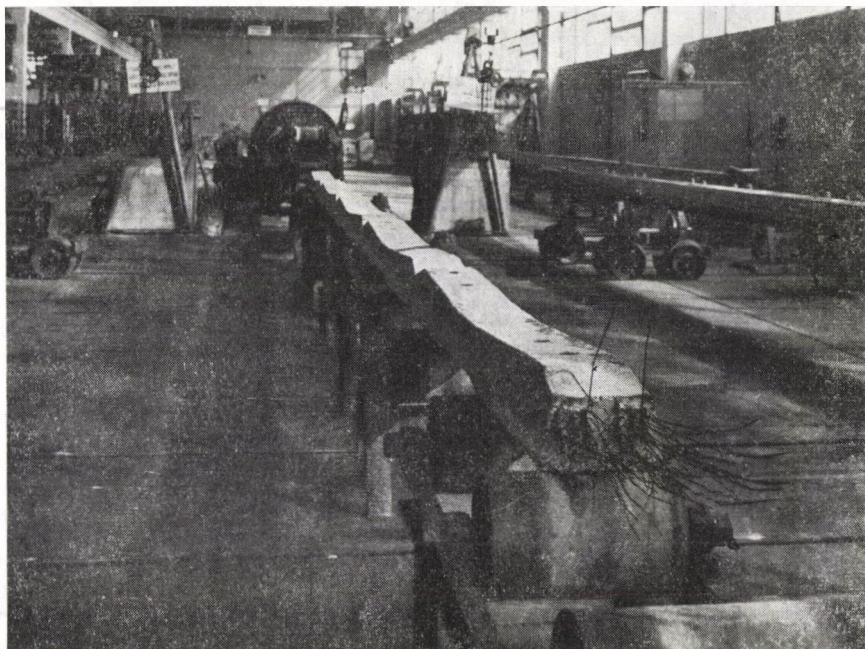
mák (13. ábra) teszik szükségessé. Két diafragma limitálja egy-egy alj H hosszát. Ha n db alj követi egymást, akkor

$$h = 2a_1 + (n - 1)a_2 + nH. \quad (1)$$

A $2a_1$ hosszúságú szálköteget le, az $(n - 1)a_2$ szakaszokat pedig át kell vágni. Ez az acélveszteség a h hossz %-ában

$$v = \frac{2a_1 + (n - 1)a_2}{2a_1 + (n - 1)a_2 + nH} \cdot 100\% / \text{sablon}. \quad (2)$$

Ha az n darabszámot egy sablonban növeljük, v csökken ugyan, de a sablon méreteit oly mértékben kell szintén növelni, hogy ennek az egész gépsorra kiható hatása már nem arányos a v csökkenésével.



4. ábra. A jelenlegi LX típusú előrefeszített vasúti betonalj a kiszaluzás után, mint hajlékony egészet alkotó köteg. Az első alj homloklfelületén az a , hosszúságú, még le nem vágott huzalok, tagolatlan oldalfelületek

A v veszteség nem hátránya a Hoyer-rendszernek másokhoz képest, mert az ún. véghorgonyzásos rendszerek esetében sok, a feszítésben inaktív acélt is be kell építeni, és ez szintén veszteségnek tekinthető. A gyártási rendszerek összehasonlításakor a fajlagos acélfelhasználás fontos mutató [16, 24].

4.5. A sablon jelenleg két U -gerendából és a fenéklemezekből egyetlen egésszé összehegesztett acélszerkezet.

4.6. A beton megszilárdulása és a feszültségoldás után az $(n - 1)a_2$ hosszú, be nem betonozott szakaszok visszatérése a feszítetlen állapotba, másrészt az nH összhosszúságú aljak rugalmas lineáris összenyomódása $8 \div 10$ mm-es elmozdulással jár a sablonhoz viszonyítva. Az ezt kiváltó erő azonos a feszítőerővel, ami $314 \div 343$ kN között változik aljtípusonként. Az elmozdulás miatt az adhézió a beton és a sablon között azonnal megszűnik és az aljköteg könnyen kiszaluzható. Hátrány, hogy a nagy elmozdító erő kizárja az alj külső síkjainak hirtelen (nem fokozatos) iránytörését, a sablonfalakkal érintkező felületeken. Azaz: az alj az oldalfelületeken egyáltalán nem, vagy csak kis mértékben a fenéklemez mentén lehet tagolt. Ezzel szemben valamennyi aljfelületnek nagy szöggel jellemzett irányváltozását, törését sok lényeges vasúttechnikai szempont igényli. A jelenleg [18] szerint gyártott LX típusú alj felületeinek viszonylagos tagolatlanságát mutatja a 4. ábra.

5. A hazai gépsor és fejlesztésének néhány sajátossága

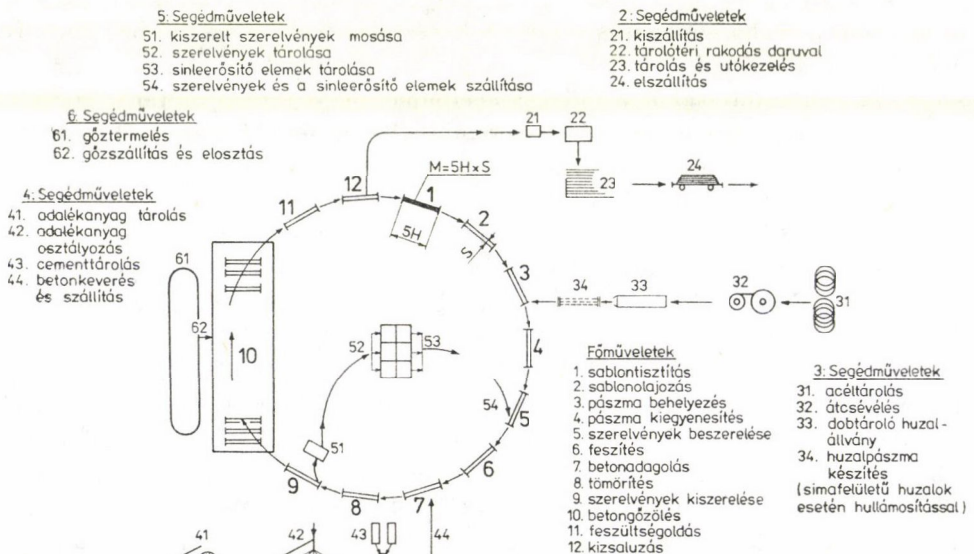
5.1. A gyártástechnológia modelljét az 5. ábra mutatja. Fő- és segédműveletekből áll; a főműveletek zárt körfolyamatot alkotnak. Az ábra fölöslegessé teszi a folyamat részletes leírását. A fejlesztés legfontosabb szempontjait vasúttechnikai igények szabták meg. Az ezek kielégítésére irányuló törekvés alapot jelentett a technológia egészében napfényre került hibák fokozatos kijavításához is. A fejlesztés eredménye tehát komplex és egyúttal szintézis is.

A vasúttechnikai követelmények között első, hogy az egyre terjedő sínhegesztés miatt — a sínkivetődés meggátlása érdekében — az alj külsejét lényegesen tagoltabbá kell tenni, mert a célszerűen tagoltabb alak az alj oldalirányú ellenállását az ágyzatban jelentékenyen növeli [25]. Ez összefügg a vontatási sebesség növelésével is, de más vágányépítési követelmények is indokolják a tagoltabb alakot, amit — a kísérletek és más országok tapasztalatainak tanúsága szerint — két fontos eltérés jellemez a jelenlegihez képest. Ezek:

5.2. Az alj keresztmetszetének a hosszanti felezősíktól számítva az aljvégek felé növekvőnek kell lennie (ún. kettős legyezőalak), ez mind a homlokfelületet, mind a felfekvőfelületet növeli.

5.3. Az oldalsíkokon ún. mintázatot kell kialakítani.

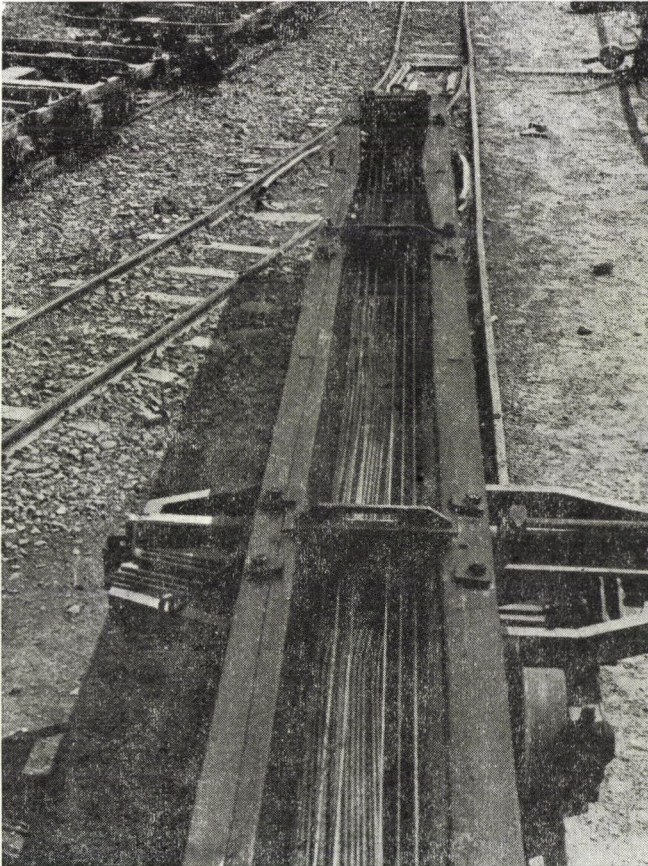
Ezeket a tagolásokat horizontálisaknak nevezhetjük. A vertikális tagoltság az acéltakarékos sínleerősítést, illetve a fellovágás megakadályozását cé-



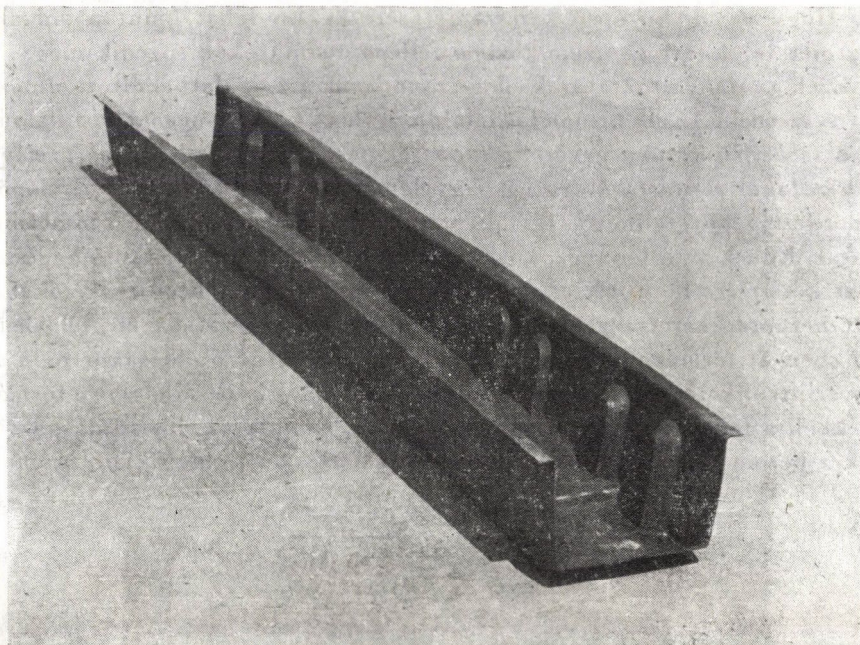
5. ábra. A magyar rendszerű aljgyártás technológiai modellje

lozza. Hogy az alj középső keresztmetszete kisebb lehet, mint a sín alatti keresztmetszetek, azt az üzem közben fellépő nyomatékok engedik meg.

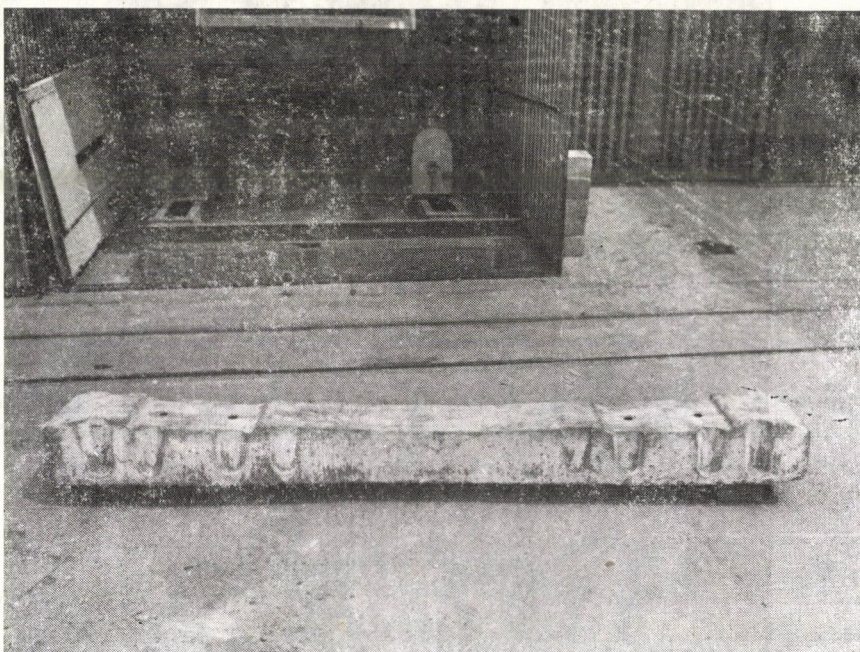
Ezek az alakváltoztatások ellene mondanak a 4.6. alatt említett elmozdulási kényszernek. Az ellentmondás feloldására úgy kellett megoldást találnunk, hogy *a többtizedes tömeggyártási tapasztalatokat és a rendszer egyéb előnyeit maradéktalanul megtartsuk*. Ez — figyelemmel az exportra is — különösen nagyhorderejű követelmény. Így jutottunk el a *mozgóbetétes gyártószablonhoz*, (6. ábra). Ennek az a lényege, hogy az eddigi — egy darabból álló hegesztett sablont két részre bontottuk: a feszítőerő rögzítésekor fellépő reakciókat felvevő teherhordó keretszerkezetre, és — a modulusszorzatnak megfelelően — esetünkben öt formázóbetétre (7. ábra). Így a feszítőerő oldásakor nem a 2. ábra szerinti aljkötegnak kell elmozdulnia a sablonhoz képest, hanem a formázóbetéteknek a teherhordó kerethez viszonyítva. Emiatt az elmozdulásnak nincsenek a betont roncsoló következményei, holott az alj oldalsíkjain számotte-



6. ábra. A mozgóbetétes gyártószablon teherhordó keretszerkezethől és a formázóbetétekből áll



7. ábra. A kísérleti, és a legújabb vasúttechnikai igényeket kielégítő aljtípus gyártásához készült mozgó formázóbetét



8. ábra. A kísérleti alj. Mind a függőleges, mind a vízszintes síkban nagymértékben és célszerűen tagolt, a végei felé növekvő keresztmetszetű

vően mély mintázat van; az aljkeresztmetszet pedig a végek felé növekedő. A kísérleti alj a 8. ábrán látható, célszerűen a MÁV-igényeknek megfelelően. Száz db legyártása az LX jelű aljak termelésének legkisebb zavarása nélkül történt.

A kísérlet egészével bizonyítottuk, hogy a hazai aljgyártási rendszer valamennyi előnyét megtartva

- tetszőleges lehet az alj alakja,
- a nyomtáv,
- a tengelynyomás

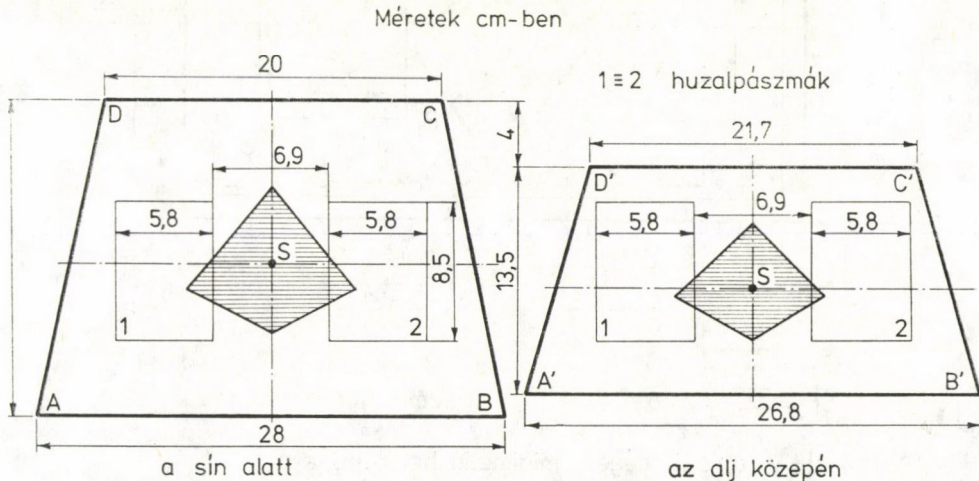
és

- a sínleerősítés módja.

Mindez — külföldön — tovább növeli a gépsor versenyképességét, miközben *elsődleges értelemben* válik *többcélúvá*.

6. A magyar gyártási eljárásban felhasznált feszítőhuzalok és a szálszám

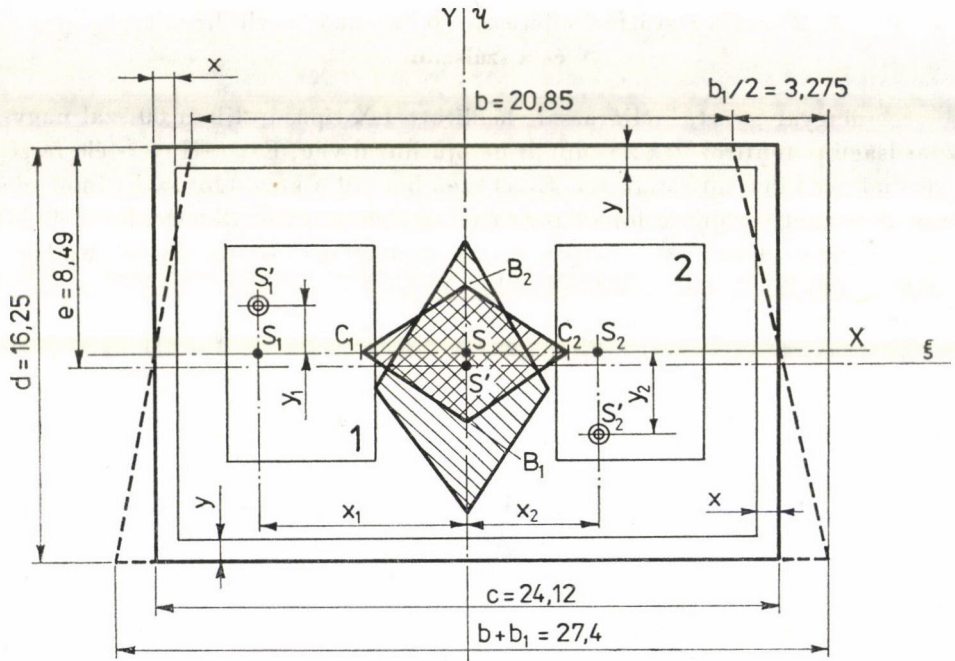
A magyar gyártási eljárással előállított LX típusú aljban 60 szál nagyszilárdságú patentírozott, 2,5 mm átmérőjű huzal van. Ezt a Hoyer-féle feszítési rendszer hibájául róják fel. Ezzel szemben áll a kevesebb szálszámot, de nagyobb szálátmérőjű acélokat alkalmazó eljárások elve. Bizonyítható, hogy nagyszámú huzal esetében az egyes szálakban fennálló feszítőerők szórása kedvezőbb, mint ha a szálszám kevesebb.



9. ábra. A magyar rendszerű gyártástechnológiával gyártott LX típusú előrefeszített vasúti betonalj legnagyobb és legkisebb keresztmetszete, a huzalpásmákat burkoló téglalapok és a magidomok relatív helyzete. A méretek cm-ben

Hogy a „sok” és a „kevés” acélszál alkalmazásával kapcsolatos összehasonlítás objektív legyen, vizsgáljuk ezt meg részletesebben! A 9. ábra az LX típusú alj legnagyobb és legkisebb keresztmetszetét mutatja, mérethelyes relatív helyzetben. Szükségünk van az aljkeresztmetszet magidomjának ismeretére. Trapézok esetében ez túlzottan hosszadalmas, habár egyszerű képletekkel írható csak le. Helyettesítsük ezért a 9. ábra trapézait a 10. ábra $c \cdot d$ méretű téglalappal. Kössük ki, hogy a betonminőség azonos, akár sok, akár kevés a szálszám. Vizsgáljuk 2,5 ÷ 5 mm átmérőjű, nagyszilárdságú, patentírozott acélhuzalokat, valamint $D \geq 9$ mm átmérőjű, középszilárdságú acélokat ($\sigma_{sz} = 8,15 \text{ kN/cm}^2 = 8,15 \text{ GPa}$).

Valóságos aljkeresztmetszetben a szálszám csak páros szám lehet. A betonfedések miatt az acélszálak számára $A = (c - 2x) \cdot (d - 2y)$, illetve $A_1 = A - c_1 \cdot d$ felületet lehet számításba venni. A c_1 , illetve $c_1/2$ szélességű felülrészek szintén számításra kívül esnek a sínleerősítő elemek vagy üregek



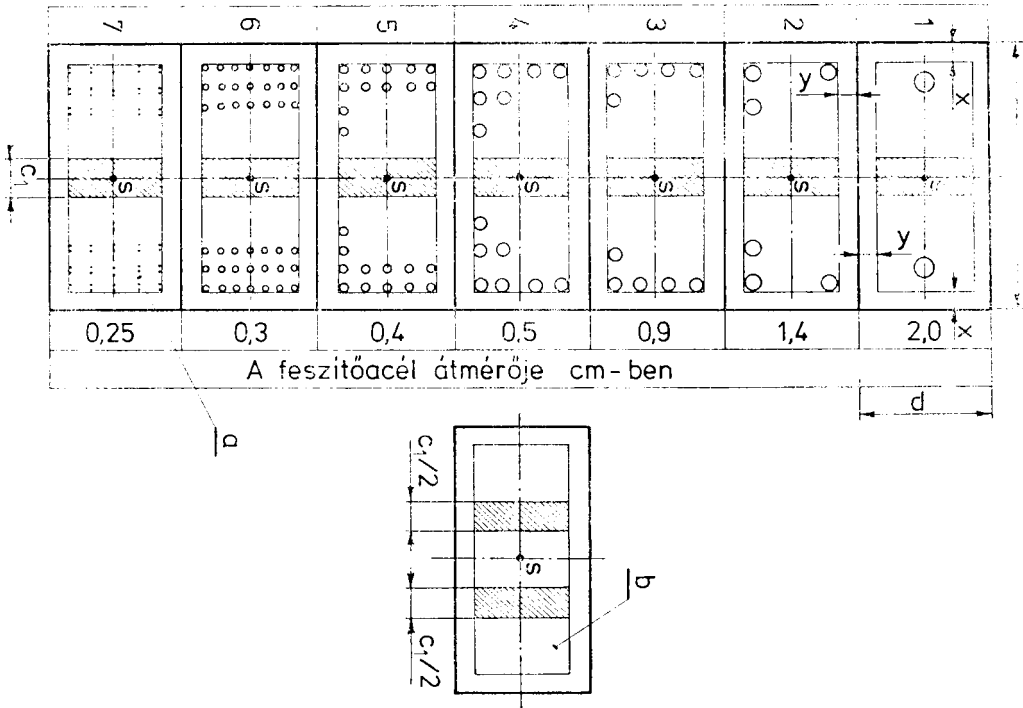
$$\overline{SB}_1 = \overline{SB}_2 = d/6$$

$$\overline{SC}_1 = \overline{SC}_2 = c/6$$

1 ≡ 2 a bal, illetve a jobb oldali pázsma burkoló idoma

$x = y$ a szükséges minimális betonfedés a vasalás fölött.

10. ábra. Az LX típusú alj átlagos keresztmetszete és helyettesítése $c \cdot d$ méretű téglalappal
A méretek cm-ben. $x = y$ a szükséges minimális betonfedés a vasalás fölött



11. ábra. A feszítőacélok relatív helyzetének elvi vázlata, az acélszálak átmérőjének függvényében. a: a sínleerősítés miatt a keresztmetszetből kieső holt tér, c_1 . b: a sínleerősítés a keresztmetszetben osztott; $c_1/2$

miatt. A 11. ábra a szálak elrendezésének *elvét* is mutatja. Az ábra valamennyi esete reálisan lehetséges, ezért annak is bizonyítéka, hogy az alj konstrukciójának megválasztása — bizonyos objektív kötöttségek határain belül, ilyenek pl. a kohászati adottságok — nem elhanyagolhatóan függ szubjektív tényezőktől is. A 10. ábrán feltüntetett viszonyokra épülő okfejtés azonban mindenképpen objektív.

A $c \cdot d$ téglalap magidomjával számolunk, nem az átlagos trapézéval. Ideális esetben a feszítőacélokban keletkező feszültségek mind azonosak és eredőjük támadáspontja S. Ez az eset a tömeggyártás viszonyai között megvalósíthatatlan, akár „kevés” a szálszám, akár „sok”. Ezért a feszültségek a szálakban egyetlen gyártási rendszerben sem azonosak, hanem egy, az eljárás sajátosságaitól, a technológiai fejelem mértékétől, valamint az alj-egyedet éppen determináló anyagtulajdonságoktól függő, eredő szórással különböznek egymástól. Ebből következik, hogy minél kisebb a szálszám, a szálakban (rudakban) a valóságos feszültségek kedvezőtlenebb eloszlást mutatnak, eredőjük dőfépntja pedig nem esik S-be. Mi a feltétele annak, hogy az x tengely mentén az eredő feszítőerő a $\pm c/6$ hosszon belül maradjon? Válaszunkhoz legyen a

jobb oldali és a bal oldali acélszál-csoport feszültségeinek eredője F_j , ill. F_b , ha a két oldalt elválasztó sík az aljkeresztmetszet függőleges szimmetriasíkja. Ha továbbá $F_b > F_j$ és $F_e = F_b + F_j$, akkor ahhoz, hogy a részeredők — határhelyzetként — a C_1 , ill. a C_2 pontokba essenek, teljesülnie kell a következő nyomaték-egyenlőségnek:

$$F_b \left(x_1 + \frac{c}{6} \right) = F_j \left(x_2 - \frac{c}{6} \right), \quad (3)$$

ezek után

$$\frac{c}{6} \geq \frac{F_j \cdot x_2 - F_b \cdot x_1}{F_e}. \quad (4)$$

Ha továbbá $x_1 = x_2$ és $F_b - F_j = \Delta F$, akkor

$$\frac{c}{6} \geq \frac{x_1 \cdot \Delta F}{F_e}. * \quad (5)$$

Az y tengely mentén analóg módon

$$\frac{d}{6} \geq \frac{y_1 \cdot \Delta F}{F_e}. \quad (6)$$

Ha az aljkeresztmetszetben n acélszál van, akkor az átlagos szálerő

$$\bar{F} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i}{n}. \quad (7)$$

Ha s a szálakban ébredő erők szórása, akkor

$$F_e = \bar{F} \cdot n = \sum_{i=1}^{i=n} F_i + n \cdot s. \quad (8)$$

Ha F_{ib} és F_{ij} az aljkeresztmetszet bal, ill. jobb oldalán levő acélcsoportban egy szál egyedi feszítőereje, akkor a bal, ill. jobb oldali részeredő

$$F_b = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{ib}}{n} \quad \text{és} \quad F_j = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_{ij}}{n}, \quad (9)$$

* Ez csak akkor lehetséges, ha a részeredőknek van y_1 , illetve y_2 ordinátája is, de ez a gondolatmenet helyességét nem befolyásolja. Ugyanez vonatkozik (6)-ra is a másik koordinátát illetően.

és így

$$\Delta F = \frac{2}{n} \left[\sum_{i=1}^{i=n/2} F_{ib} - \sum_{i=1}^{i=n/2} F_{ij} \right]. \quad (10)$$

A megfelelő helyettesítések után

$$\frac{c}{6} \geq \frac{2x_2 \left[\sum_{i=1}^{i=n/2} F_{ib} - \sum_{i=1}^{i=n/2} F_{ij} \right]}{n \left[\sum_{i=1}^{i=n/2} F_i \pm n \cdot s \right]}. \quad (11)$$

Ez bizonyítja, hogy konstans c mellett növekvő n -nel a (11) kritériumot *nagyobb valószínűséggel* lehet teljesíteni, mint kisebbel. Ez az eredmény független az egyszerűség érdekében vizsgált téglalap alaktól és a trapézra is érvényes.

Bizonyítható, hogy a pászmában levő szálak gyakorlatilag azonos hosszúságúak és csak elvétve fordul elő, hogy egy, vagy két szál szemmel láthatóan belóg a többihez képest. Ez, valamint a szabványnak az az engedménye, hogy a szálak 5%-a szakadhat el a pótlás kötelezettsége nélkül, ismét (11) érvényessége mellett szól.

Érdemes még megvizsgálni a feszültségoldás után közvetlenül kialakuló egyensúlyi állapotot, mert ezt még a technológiával szorosan összefüggőnek tekinthetjük, szemben a beton zsugorodásából jóval az alj gyártásának időpontja után bekövetkező és stabilizálódó állapottal; ezt az alj méretezésénél kell figyelembe venni.

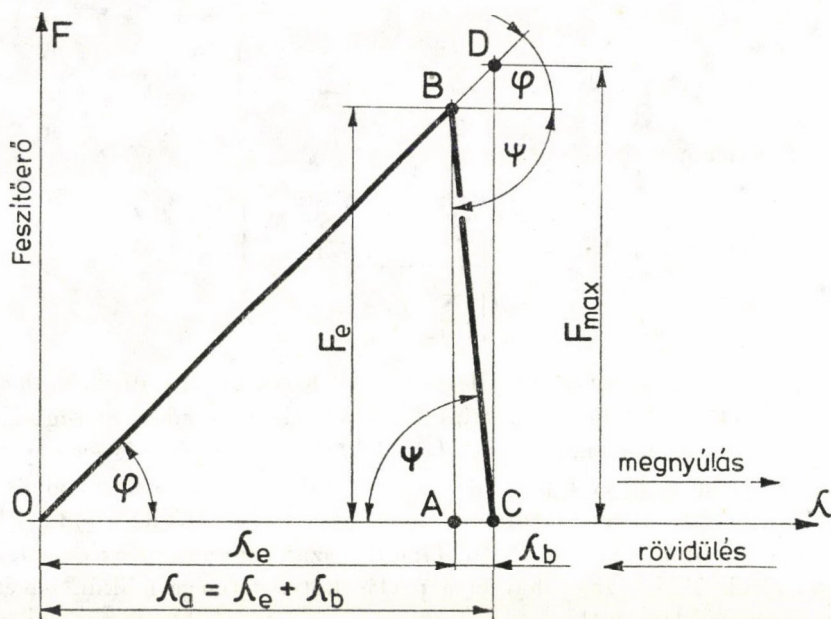
A feszültségoldás művelete után a nyomóerővel terhelt alj λ_b értékkel megrövidül. Ha λ_a az acél megnyúlása az F_{\max} feszítőerő hatására, akkor a feszültségoldás után bekövetkező egyensúlyi állapotban a tényleges feszítőerő (12. ábra):

$$F_e = \frac{\lambda_a - \lambda_b}{\lambda_a} \cdot F_{\max}. \quad (12)$$

A rugalmas alakváltozás eredményeként bekövetkező elmozdulás még tényezője a már tárgyalt adhézió-megszűnésnek.

7. Néhány technológiai hiba kijavítása

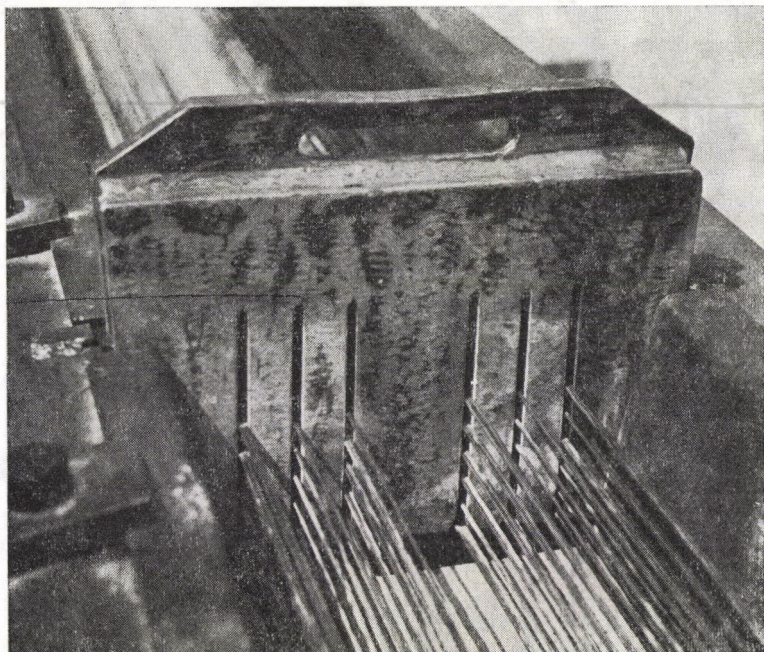
Az 1. és 2. ábrák érzékeltetik, hogy az aljakat elválasztó diafragmáknak jelentős szerepük van a hazai aljgyártási rendszerben, de minden $k \cdot Sx_n \cdot H$ modulusszorozattal jellemzett rendszerben is, ha $n > 1$. A jelenlegi nagyüzemi gyakorlatban a diafragma kettős lemez, 13. ábra, amelyet a teljes feszítőerő töredékével kiegyenesített huzalpázmára és a sablonra szerelnek. A diafragma függőleges rései vízszintesen, míg a két lemez között a sablonoldalakon levő



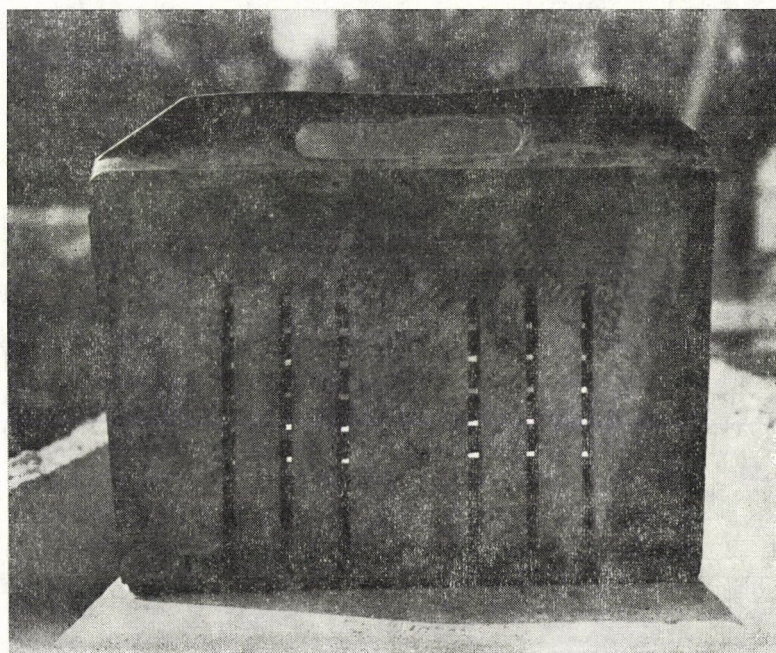
12. ábra. A feszítőerő hatására megnyúló acél és megrövidülő betontest egyensúlyi állapota

furatokon keresztül dugott rendezőpálcák függőlegesen tartják a huzalokat előírt helyzetükben. E megoldásnak néhány hátránya van: a diafragma résein viszonylag sok cementhabarcs elfolyhatik és az aljvégek betona cementben szegény marad. Mivel továbbá mind a diafragmákat, mind a rendezőpálcákat közvetlenül a beton tömörítése után ki kell szerelni a sablonból, némely acélszál (esetleg valamennyi) elmozdul az aljvégeknél. Ez után az elmozdulás után az acélszálak körül tölcérszerű, néhány cm hosszú mikrorés marad. Ez azért van, mert a megfeszített acélszál mindig húrja az ívvé deformálódott sablonnak, függetlenül attól, hogy a deformáció rugalmas, vagy maradó-e. A szálak ilyen elmozdulása káros, mert csökken a szál lehorgonyzódási hossza, a résekbe pedig befolyik a víz.

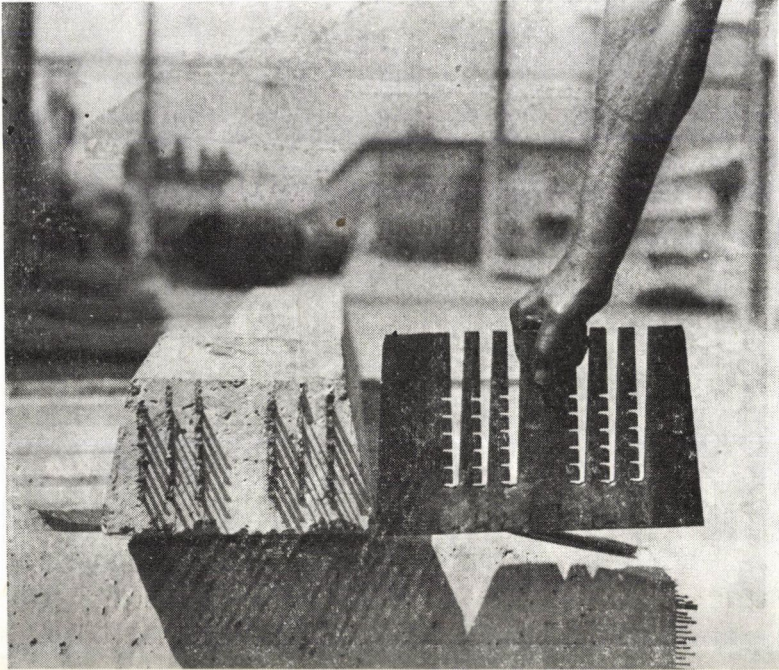
Ezt a technológiai hibát hárítja ez az új kétrészes diafragma, 14. ábra. Első részét — a magot — körülfogja a korábbi kettős lemezű köpeny. A mag és a köpeny meggátolja a cementhabarcs bármi mértékű káros kifolyását az aljvégeken. Mivel továbbá a magot csak a beton megszilárdulása után kell kiszerezni a sablonból, a szálak függőleges elmozdulása eleve lehetetlen. Ha a magokat egymás után rendre 180°-kal elfordítva szereljük be, lehetetlenné válik a vízszintes elmozdulás is. Az így készített alj vége kifogástalanul tömör, a huzalok pedig igen nagy pontossággal tarthatók előírt helyükön (15. ábra). Itt a huzalok még a mérés miatt nincsenek közvetlenül az alj homloklapfelülete mentén átvágva.



13. ábra. A régi rendszerű diafragma



14. ábra. Az új — magból és köpenyből álló — diafragma, amely csak a huzalok helyét hagyja szabadon



15. ábra. Az új diafragmával készített alj homlokléfelülete kifogástalanul tömör és a huzalok $\pm 0,5$ mm eltéréssel elméleti helyükön vannak. A homlokléfelület mellett a diafragma magja

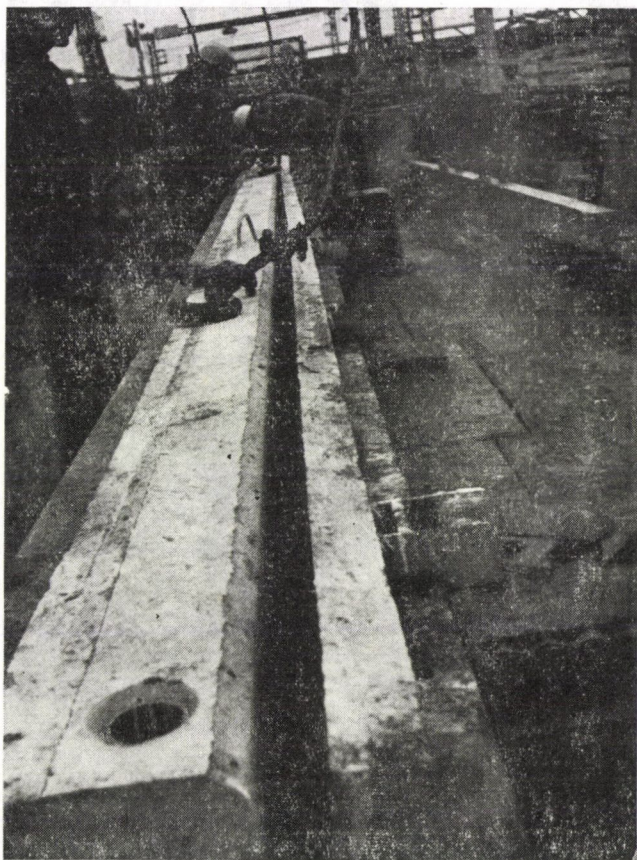
8. A gépsor egyéb felhasználhatóságának lehetősége

Az aljak felvevőpiaca — legyen szó bármely országról is — fokozatosan telítődik. Ezt elsősorban a fejlett ipari országokban lehet közvetlenül érezni, a SZU-t egyelőre kivéve. A telítődés után az aljmenyiség a fenntartási munkákhoz szükséges mértékűre csökken. Ez nagyságrendekkel kisebb, mint az új pályák aljigénye. A felvevőpiac telítődése, vagy akár a még nem telítődött piac felvevőképességének ingadozása is (ami összefügghet az új vágányok építésének ütemét befolyásoló számtalan tényező akármelyikével), úgy hat vissza az aljgyártó gépsorra, hogy annak folyamatos termelését akadályozza.

Legyen egy országban a vasútépítés tervezett felső határa N km vágány; ez az új és a felújított vágányhosszt együttesen jelentse. Legyen továbbá a távlati fejlesztés tervezett időtartama x_1 év. Tételezzük fel, hogy a vágányhosszfejlesztés évenként egyenletesen megoszló aljmenyiségeket igényel. Legyen az ország aljgyártó potenciálja L km/év. Ha a fajlagos aljigény ξ db/km, akkor az ország éves aljtermelése $P = \xi \cdot L$ db/év. A termelés és a felvevőpiac között egyensúly akkor van, ha $N/x_1 = L$. Legyen az alj átlagos élettartama x_2 év, akkor mindig igaz, hogy $x_1 < x_2$. Az egyensúlyt elvileg x_1 évig lehet fenntartani, bár közben elkerülhetetlenül előfordul, hogy átmenetileg $N/x_1 < L$, s ez

az aljgyártás egyenletességére nézve mindig hátrányos. A piac felvevőképessége azonban x_1 év után rohamosan csökken, s ez az aljgyár létét fenyegetheti. Ezt hártja el, ha az aljgyártó gépsor *másodlagosan* is többcélú, a korábban említett elsődleges többcélúsághoz képest. A másodlagos többcélúságot illetően támasztott követelmények kielégítésére a hazai gépsor éppen modulusszorzatánál fogva alkalmasabb más eljárásoknál. Az 1. ábráról látható ugyanis, hogy a rúdalakú, betonanyagú tömegcikkék köréből — a mozgóbetétes gyártósablon és kiegészítő gépegyedek révén — az $5(S \times H)$, $1(S \times 5H)$, $1(S \times 4H)$, $2(S \times 2,5H)$, vagy $1(S \times 2H) + 1(S \times 3H)$ modulusszorzat-összegekkel jellemzett variációk mind gyárthatók, még úgy is, hogy $H_1 = p \cdot H$, ahol $1 \leq p \leq 4$.

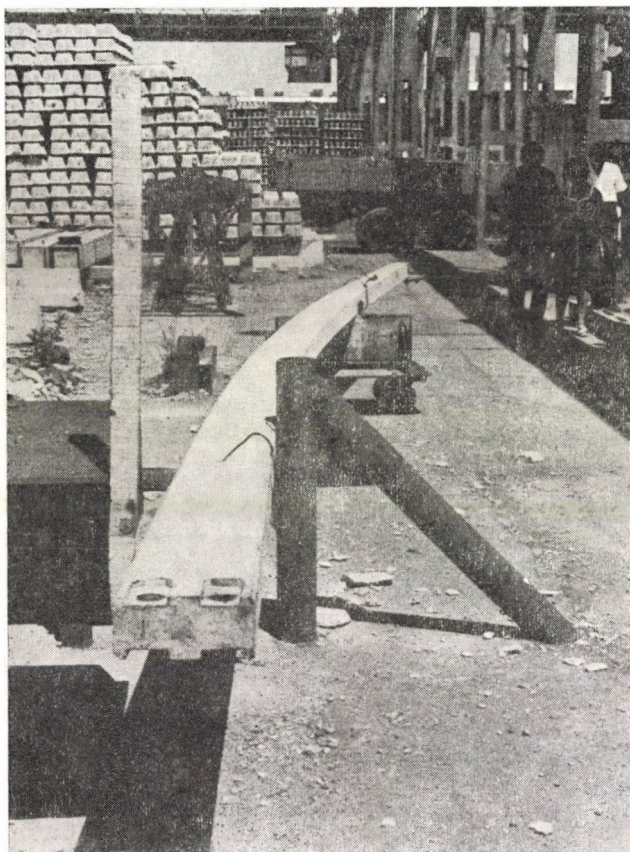
A kiegészítő gépegyedek az 5. ábrán látható 2, 3 és 5 jelű segédműveleteknél lépnek be az aljgyártás egyes gépegyedeinek a helyébe. A kiváltott gépek mindaddig nem dolgoznak, amíg a termékváltásra ismét sor nem kerül, ez a termelés szempontjából mindig hosszabb időtartam.



16. ábra. Ugyanabban a teherhordó keretben kicserélt formázóbetéttel készített kísérleti előre-feszített távvezetési oszlop, véghorgonyzások feszítéssel

A másodlagos többcélúság elérésére folytatott sok és mindig eredményes kísérleteink közül a távvezetéki, vagy világítási előrefeszített oszlopok termékcsaládját mutatjuk be. Ha az oszlop hossza l , akkor $3H \leq l \leq 5H$ hossztartományon belül lehet a gépsort a sablonbetétek cseréjével és a betonacél-feldolgozás módosításával oszloptermelésre átállítani. A 16. ábra egy 10 m hosszú kísérleti oszlopot mutat a kizsaluzás előtt ugyanabban a teherhordó keretben, de saját formázóbetétjében. A 17. ábra a kitűnő eredményeket adott hajlító, illetve roncsolás-vizsgálatok egy fázisát mutatja.

A másodlagos többcélúság a piaci ingadozásoktól úgy mentesíti a gépsort, hogy a beruházásban jelentkező többletköltségek biztosan és gyorsan megtérülnek.



17. ábra. Az elsőosztályú kísérleti távvezetéki oszlop hajlítóvizsgálata. A 10 m hosszú oszlop csúcsának kitérése a képen 0,7 m. Ekkor jelentkeztek rajta az első hajszálrepedések. A képen látható terhelés megszüntetése után még kiegyenesedett

IRODALOM

1. RATHING: Hazai előfeszített vasbetonalj és gyártása. Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest 1952
2. KUTASY—LENGYEL: Az előrefeszített betonalj kialakítása stb. VTKI Évkönyv, KÖZDOK, Budapest, 1957—1960.
3. ZOLOTARSKIJ, A. F.—SZEREBRENNYIKOV, V. V.—BERG, O. JA.—SESZTOPEROV, Sz. V.—VERIGO, M. F.: Zselezobetonnűe spalü. Gosz. Transzportnoe Izdatyelsztvo, Moszkva 1959
4. SZIKSZAY: A feszített betonaljgyártás fejlesztése. *Építőanyag*, (1959), 136—143
5. CSUTOR: A vasbetonalj, különös tekintettel a hazai gyártásra. *Magyar Építőipar*, (1958) 253—258
6. CSUTOR: Feszítőhuzalokkal szerzett tapasztalatok az ÉM. 4. sz. Épületelemgyárban. *Magyar Építőipar*, (1960) 497—499
7. PŘEVOROVSKÝ: Strunobetonové pražce, jejich přednosti a novodobá výrobní technologie. *Železniční doprava i technika*, Praha 1960/4 (Húrbetonaljak, előnyei és új gyártástechnológiájuk).
8. Vasúti Tudományos Kutatóintézet: Első Tudományos Ülésszak. Előadásgyűjtemény, KÖZDOK, Budapest 1961
9. BIHARY: A vasúti betonaljakról. *Közlekedéstudományi Szemle*, (1962) 72—74
10. CSUTOR: A betongőzölés módszerei és berendezései az üzemekben. *Magyar Építőipar* (1962), 403—410
11. BIHARY: Vasúti betonaljak minősítése. *Építőanyag* (1963), 144—152
12. CSUTOR: Újrendszerű késztermékmozgatás vasbetongyárakban. *Magyar Építőipar* (1963), 54—58
13. KHAUT: Vasbetonelemgyárak folyamatos gyártásközi és statisztikus minőségellenőrzéséről. *Magyar Építőipar*, (1963), 59—65
14. CSUTOR: A vasúti betonaljak gyártása Nyugatnémetországban. *Magyar Építőipar*, (1964), 216—224
15. Vasúti Betonalj. A Közlekedéstudományi Egyesület Konferenciáján elhangzott előadások gyűjteménye. Közdok, Budapest 1965
16. Szerzőkollektíva: Vasúti betonaljak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1965
17. Az Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Építőanyagok Tanszékének szakértői véleménye „Az alsószolcai feszített-betonlajgyártás technológiájának és a késztermék átadási módszerének felülvizsgálatáról”, I—IV. kötet. Kézirat, Budapest 1965
18. MSZ 4710(1—4)70: Fővasúti előrefeszített vasúti betonalj
19. KUTASY: A feszített betonaljak kialakítása a MÁV-nál és a távlati fejlesztés útja. *Közlekedéstudományi Szemle*, (1965), 185—191
20. KUTASY: Új, progresszív feszített betonalj, acélatétlemmez nélküli sínleerősítéssel. A Vasúti Tudományos Kutatóintézet 1968. évi évkönyve, KÖZDOK, Budapest 1969
21. BÖLCSKEI-DULÁCSKA: Statikusok kézikönyve. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1974
22. IVANOV, G. Sz.: Explotacionnaja nagezsnosztj i szoversensztvovanyije technologii izgotovlenyija zselezobetonnűch spal. „TRANSPORT”, Moszkva 1974
23. KUTASY: Vorschläge zur Modernisierung der Spannbetonschwelle. Kézirat. Feszített-betonlaj szimpózium, Brno 1977
24. Erfahrungen mit SL-Zweiblockschwellen im Bahnhof der Köln—Bonner Eisenbahn. *Betonwerk + Fertigteil-Technik*, (1977), 615
25. A BME Vasútépítési Tanszék tanulmánya a 8. ábrán látható kísérleti alj tárgyában. Kézirat, Budapest 1977

•

Contributions to the Possibilities for Technical Development of a Production Line for Mass Articles from Concrete. The author presents some partial results of the technical development of an important exportation article. Complex development means here that the development extends to the whole of the line, that it tries to use the Hungarian results attained in other fields (e.g. automatization, concrete technique, measuring technique), and finally that necessarily it has collective character. Therefore the development is such a synthesis which creates a relationship between the export market and the inland industrial background and stabilizes this mutual relation. At the same time it stimulates both fields, because the requirements of the export market are — independent from us — always high.

Beiträge zu den Entwicklungsmöglichkeiten einer Maschinenstraße für Massenware aus Beton. Der Verfasser stellt einige Teilergebnisse der komplex aufgefaßten technischen Ent-

wicklung eines bedeutungsvollen heimischen Exportartikels vor. Unter komplexer Entwicklung wird hier verstanden, daß sich die Entwicklung auf die Maschinenstraße als Ganzes bezieht, andererseits, daß sie sich bemüht die auf anderen Gebieten (z. B. Automatisierung, Beton- und Meßtechnik, usw.) erzielten heimischen Forschungsergebnisse zu benützen. Drittens, hat die Entwicklung notwendigerweise kollektiven Charakter. Deswegen verkörpert sie ein derartiges Bestreben nach Synthese, welches einen Zusammenhang zwischen dem Exportmarkt und dem einheimischen industriellen Hintergrund schafft und diesen wechselseitigen Zusammenhang stabilisiert. Zugleich wirkt dies auf beide Gebiete vielfach stimulierend, denn der Maßstab des Exportmarktes ist — von uns unabhängig — immer hoch.

A HÉJAK MEMBRÁNÁLLAPOTÁNAK LÉTEZÉSI ÉS EGYÉRTELMŰSÉGI FELTÉTELEIRŐL

III. ELLIPTIKUS HÉJAK

TARNAI TIBOR*

[Beérkezett : 1977. június 1-én]

A dolgozat azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy tetszőleges megoszlású függőleges irányú erővel terhelt héj peremén milyen megtámasztási feltételeket kell, ill. szabad előírunk ahhoz, hogy a héj statikailag határozott módon membránállapotban legyen. A szerző a dolgozat korábban megjelent két részében a membránhéj-egyenlet megoldásának létezési és egyértelműségi feltételeit a hiperbolikus és a parabolikus héjakal kapcsolatban vizsgálta. A dolgozat jelen, harmadik része az elliptikus héjak körében végzett vizsgálatok eredményeit tartalmazza.

1. Bevezetés

A membránhéjak egyensúlyát az xyz derékszögű koordinátarendszerben az

$$\mathfrak{L}F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -g \quad (1)$$

egyenlet írja le, ahol $z = z(x, y)$ a héj középfelületének az egyenlete,

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

a Pucher-féle operátor, $g = g(x, y)$ a z tengellyel párhuzamos (függőleges) irányú külső teher intenzitás-függvénye, $F(x, y)$ pedig az ismeretlen feszültség-függvény, amelyből a redukált metszeterők a következőképpen származtathatók:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad n_{xy} = n_{yx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

A dolgozat korábban megjelent első [22], ill. második [23] részében a parciális differenciálegyenletek elmélete alapján azt vizsgáltuk, hogy a függőleges erővel terhelt, az értelmezési tartomány minden pontjában hiperbolikus, ill. az értelmezési tartomány minden pontjában parabolikus membránhéj (1)

* Dr. Tarnai Tibor, 1037 Budapest, Kolostor u. 17.

egyenletének milyen feltételek mellett létezik egyetlen megoldása. A dolgozat jelen részében azt fogjuk tárgyalni, hogy az (1) egyenletnek milyen esetekben van egyértelmű megoldása, ha a héj az alaprajzi idomának minden pontjában elliptikus, azaz a

$$D = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2$$

diszkrimináns mindenütt pozitív.

Az elliptikus egyenletek tulajdonságai lényegesen eltérnek a hiperbolikus és a parabolikus egyenletekétől. Ez különösen két dologban szembetűnő:

1. A hiperbolikus és parabolikus egyenletek kezdetiérték-feladata korrektül felállított feladat. Létezik egyértelmű megoldása, a megoldás folytonosan függ a kezdeti értékektől, és a karakterisztikák segítségével pontosan körülhatárolható az a tartomány, ahol a megoldás meg van határozva. Ezzel szemben az elliptikus egyenleteknél a kezdetiérték-feladat nem mindig korrekt. A feladatnak nem mindig létezik megoldása, és ha létezik is, nem mindig függ folytonosan a kezdeti értékektől. Továbbá, ha létezik a feladatnak megoldása, akkor általában nem jelölhető meg előre az a tartomány, ahol a megoldás meg van határozva.

2. A hiperbolikus egyenletekre vonatkozó peremérték-feladatoknak nyílt peremgörbe mellett létezik egyértelmű megoldásuk. Zárt peremgörbe esetén a feladatok általában túlhatározottak, és így nem oldhatók meg. A parabolikus egyenletek peremérték-feladatainak is elsősorban nyílt peremgörbékre van egyértelmű megoldásuk, de ezek a peremérték-feladatok számos esetben zárt peremgörbék mellett is megoldhatók, és a megoldás egyértelmű [23]. Az elliptikus egyenletek peremérték-feladatainak azonban csak zárt perem mellett létezhetik egyértelmű megoldásuk. Nyílt peremgörbe esetén a feladatok határozatlanok, a megoldás nem egyértelmű.

A tárgyalás során ha peremről beszélünk, akkor a héj tényleges peremvonalának az xy síkra vett alaprajzi vetületére gondolunk. A héj tényleges peremvonalát \tilde{S} -sal, az alaprajzi vetületét pedig S -sel jelöljük.

2. Kezdetiérték-feladat elliptikus esetben (Cauchy-féle feladat)

Az elliptikus egyenletekre vonatkozó Cauchy-féle feladattal a matematikai irodalom jóval kevesebbet foglalkozik, mint a különböző peremérték-feladatokkal. Ennek egyrészt az az oka, hogy az elliptikus egyenletek Cauchy-féle feladata — mint ahogy már említettük — nem mindig korrektül felállított feladat, másrészt az, hogy szűk azoknak a fizikai problémáknak a köre, amelyek elliptikus egyenletekre vonatkozó Cauchy-féle feladatra vezetnek. A membránhéjak körében azonban jelentős csoportot képviselnek a szabad szegélyű fülke-

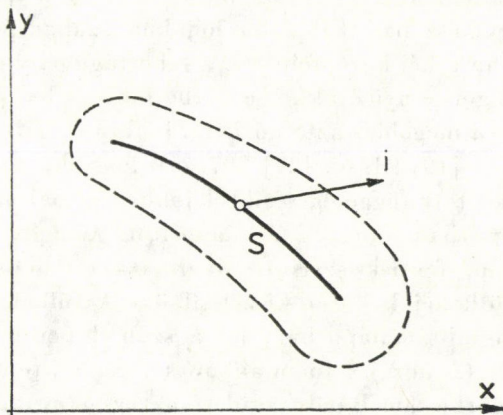
héjak, amelyeknek a belső erőjátékát, mint ismeretes, egy Cauchy-féle feladat megoldása útján lehet meghatározni. Ez indokolja, hogy a Cauchy-féle feladat megoldhatóságával, a megoldás egyértelműségével és a megoldásnak a kezdeti feltételektől való folytonos függésével kissé tüzetesebben foglalkozunk.

Mielőtt a tárgyalásba kezdenénk, definiáljuk az analitikus függvény fogalmát. Az $u(x, y)$ kétváltozós függvény analitikus x, y -ra valamely tartomány (x_0, y_0) pontjában, ha ennek környezetében $(x - x_0), (y - y_0)$ szerint haladó hatványsorba fejthető. Az $u(x, y)$ függvény analitikus egy tartományban, ha annak minden pontjában analitikus. Ebből a definícióból következik, hogy az $u(x, y)$ abban a pontban, ahol analitikus, végtelen sokszor differenciálható. Az analitikus függvény fogalma hasonlóképpen értelmezhető egyváltozós esetben is.

Ezek után tekintsük az (1) elliptikus parciális differenciálegyenletre vonatkozó általánosított Cauchy-féle feladatot.

Legyen az xy síkban fekvő S peremgörbe minden pontjában adott egy i irány (egységvektor) (1. ábra). Legyen továbbá adott az S peremen az F feszültségfüggvény értéke, φ , és az F függvény i irány menti deriváltjának értéke, ψ . Teljesüljenek az alábbi feltételek:

- az S peremgörbe a (2a) egyenlet értelmezési tartományában fekszik,
- az S peremgörbe „elég sima”, úgy hogy a rajta végzett transzformáció, mely az S görbét a $\xi_0 = 0$ egyenesbe, az i irányt pedig a $\xi_0 = 0$ egyenes normálisába viszi, az eredeti változókat az új változók analitikus függvényeiként adja meg; azaz az S görbe analitikus ([18] 37. o.),
- az i irány „elég simán” változik az S görbe mentén, úgy, hogy a b) feltételben szereplő transzformáció létezik, azaz az i irányfüggvény analitikus ([18] 37. o.),
- az S görbe egy adott pontjához rendelt i irány nem érinti ugyanebben a pontban az S görbét,



1. ábra. A kezdetiérték-feladat megoldási tartománya

- e) $g(x, y)$ analitikus,
- f) φ és ψ analitikus,
- g) $z(x, y)$ analitikus.

Ekkor a *Cauchy—Kovalevszkaja*-tétel értelmében az

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}F &= -g, \\ F|_S &= \varphi, \quad \frac{\partial F}{\partial i} \Big|_S = \psi \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

(2b)

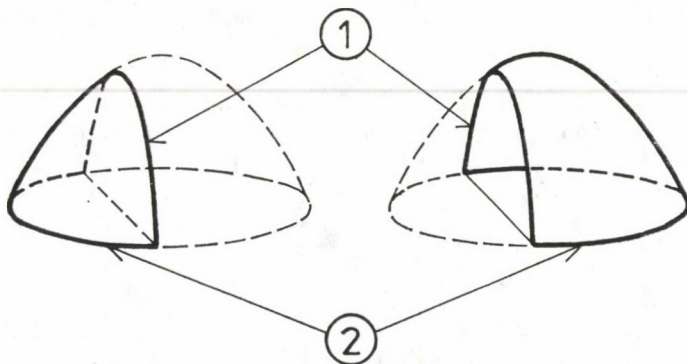
kezdetiérték-feladatnak az S görbe valamely környezetében (1. ábra) létezik egyértelmű analitikus megoldása ([18] 37. o.). Hogy ez a környezet mekkora, a tétel nem mondja ki.

Megjegyezzük, hogy ha a (2a, b) feladatban szereplő függvényektől nem követelünk meg analiticitást, akkor a (2a, b) feladat megoldásának egzisztenciája általában nem teljesül, az unicitása azonban egy elég tág függvényosztályra fennáll. Ha a feladatnak létezik megoldása úgy, hogy a $z(x, y)$ középfelület-függvény kétszer differenciálható és a második parciális deriváltak *Lipschitz*-folytonosak, továbbá az S peremgörbe differenciálható és a derivált *Lipschitz*-folytonos, akkor a megoldás egyértelmű ([16] 19, II. tétel). Egy $u(x, y)$ kétváltozós függvény akkor *Lipschitz*-folytonos egy tartományban, ha létezik úgy egy c konstans, hogy a tartomány bármely két (x_1, y_1) , (x_2, y_2) pontjára teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

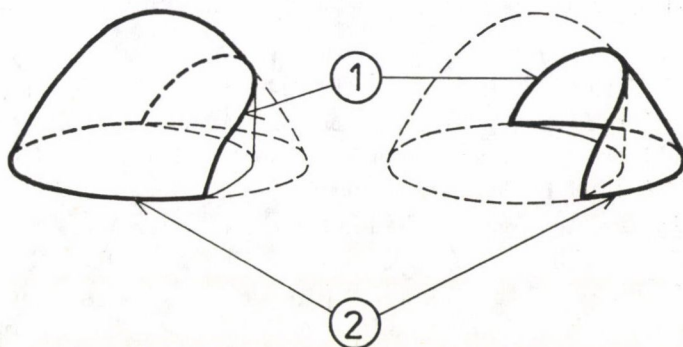
$$|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| \leq c [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{1/2}.$$

A *Lipschitz*-folytonosság hasonlóképpen értelmezhető egyváltozós esetben is.

Jelölje n az S görbe normálisát (egységvektorát) az xy síkban. Legyen $i \equiv n$, és a (2b) feltételben $F|_S = 0$, $\partial F/\partial n|_S = 0$ szerepeljen. Ezzel előírtuk, hogy az S perem legyen szabad. Elliptikus héjaknál szabad peremszakasz tehát akkor biztosítható, ha a héj középfelülete, a teherfüggvény és a peremgörbe is analitikus. Ha az S görbe nyílt, akkor a görbe jobb és bal partja közül egyik sincs kitüntetve, így a megoldás az S görbétől jobbra és balra is meg van határozva. Ismeretes ([5], [19] 98. o., [21] 207. o.), hogy ha az S görbe egyenes, akkor az S -en átfektetett függőleges síktól jobbra és balra eső fülkehéj egyaránt membránállapotban van. Az általánosított *Cauchy*-féle feladatnak a (2a,b) feladatra való, fentiek szerinti alkalmazása lehetővé teszi, hogy a membránállapotú fülkehéjak körét kiszélesítsük. A fülkehéj nemcsak akkor lehet egyértelmű membránállapotban, ha a szabad perem a középfelületen függőleges síkú görbe (2. ábra), hanem akkor is, ha a héj tényleges pereme tetzőleges felületi térgörbe, amelynek vetülete az xy síkon analitikus. Az ilyen általánosított fülkehéjra mutat példát a 3. ábra.



2. ábra. Fülkehéjak függőleges síkú peremmel. ① szabad perem; ② teljesen megtámasztott perem

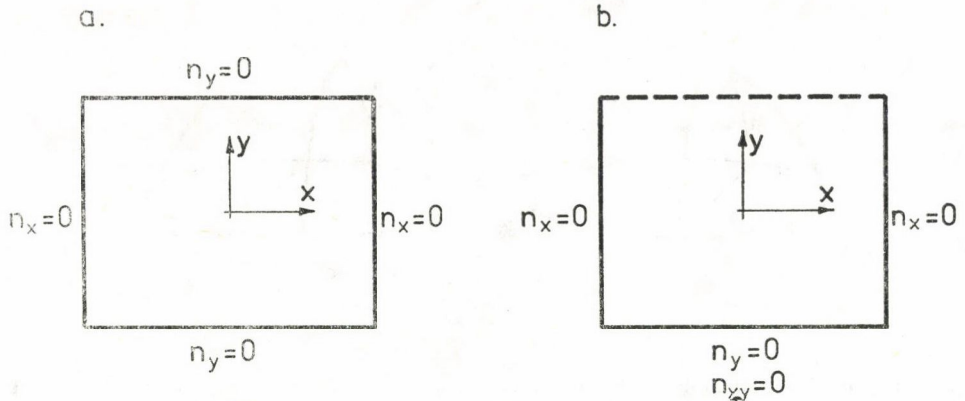


3. ábra. Fülkehéjak térgörbe peremmel. ① szabad perem; ② teljesen megtámasztott perem

Megemlítjük, hogyha az S görbe egyenes, akkor S mentén előírható a normálerő és a nyíróerő nagysága is [22]. Természetesen ezeknek is analitikus függvényeknek kell lenniük.

A héj alaprajzát fizikailag lezáró, S -hez csatlakozó peremszakasz a feladat megoldási tartományában kell, hogy feküdjék. Itt már semmiféle feltételt nem lehet előírni, hanem a peremtartóknak minden metszeterőt fel kell venniük.

Ha tehát az elliptikus héjnak már van egy szabad peremszakasza, akkor a héj többi peremszakaszán már nem írható elő feltétel. Jól szemlélteti ezt egy, a matematikai elmélettől függetlenül végzett vizsgálat. A későbbiekben látni fogjuk majd, hogy egy elliptikus héj membránállapotban van, ha a peremén körben előírjuk a feszültségfüggvény értékét pl. úgy, hogy folytonos és peremszakaszonként lineárisan változó legyen. Egyenes peremszakaszok mellett, mint tudjuk, ez oldalnyomásmentességet jelent. Így a négyszögalaprajz feletti elliptikus paraboloidhéj a 4a. ábrán vázolt esetben mindig membránállapotban van. A négyszög minden oldalán egy feltételt adtunk meg. BELEŞ és SOARE [2]



4. ábra. Az elliptikus héj alaprajza és peremfeltételei a) mind a négy oldal oldalnyomásmentes; b) egy oldal szabad, két oldal oldalnyomásmentes, egy oldal teljesen megtámasztott

megvizsgálta, mi történik akkor, ha a feltételt az egyik oldalról átvisszük a szemközti oldalra, és így az összes feltételek számát nem változtatjuk meg. Mivel a szemközti oldalon az oldalnyomásmentesség elő volt írva, ezért az itteni hasonló feltétel fejében a szemközti peremen még előírjuk a nyíróerőmentességet is, azaz a peremet szabaddá tesszük (4b. ábra). Így végeredményben a négyszög egy oldalán az $F = 0$, $\partial F/\partial n = \partial F/\partial y = 0$ feltételeket, a hozzá csatlakozó két oldalon az $F = 0$ feltételt írtuk elő, a szabad peremmel átellenes oldalon viszont nem írtunk elő feltételt. Tudjuk [22], hogy pl. egy nyereg alakú hiperbolikus paraboloidhéj ezekkel a feltételekkel egyértelmű membránállapotban van. Ennél a feladatnál azonban a szerzők azt találták, hogy a héj nincs membránállapotban. A felhasznált végtelen sorok divergálnak.

A (2a, b) feladatban szereplő függvények analiticitási feltétele miatt, ha az S peremnek egy szakasza egyenes, akkor az S peremnek végig egyenesnek kell lennie, továbbá ha a φ és ψ függvények az S perem egy szakaszán eltűnnek, azaz az S peremnek ez a szakasza szabad, akkor a φ és ψ függvények értékének az S peremen végig nullával kell egyenlőnek lennie. A hiperbolikus és a parabolikus héjakkal ellentétben, az elliptikus héjagnál az S peremen nem változathatják egymást olyan peremszakaszok, amelyeken a peremerők nagysága azonosan nulla, és olyan peremszakaszok, amelyeken a peremerők nagysága nullától különböző.

Ha a héj teljes peremét egyetlen, önmagát nem metsző zárt görbe alkotja, akkor úgy tűnik, nincs korlátozva, hogy a szabad perem a teljes peremnek hányadrésze legyen. A szabad perem terjedelmét azon túl, hogy a szabad peremnek nyílt görbének kell lennie, csupán szilárdsági szempontok korlátozzák. Elvileg lehetséges ugyanis, hogy a héj teljes megtámasztású peremszakasza végtelen kicsi legyen, és a héj egyensúlyát e végtelen kis szakaszon működő végtelen nagy erők biztosítsák. Megemlítjük, hogy hasonló esetben a hiperboli-

kus és a parabolikus héjaknál a szabad perem és a teljes perem hosszának aránya nem lehet tetszőlegesen nagy. A szabad perem terjedelmét a karakterisztikák korlátozzák [22, 23].

Az a)–g) feltételek teljesülése esetén a (2a, b) Cauchy-féle feladatnak akkor is létezik egyértelmű megoldása az S perem környezetében, ha az S perem önmagát nem metsző zárt görbe [17]. Jelölje Ω az S görbe által határolt korlátos tartományt. Az S peremnek az a környezete, ahol a megoldás létezik, két részből áll. Az egyik rész az Ω tartományon kívül, a másik az Ω tartományon belül helyezkedik el. Az említett környezetnek az a része, amely az Ω tartományon belülré esik, nem ölelheti fel a teljes Ω tartományt.

A teljes Ω tartományban a feladatnak általában nem létezik megoldása, mert a teljes tartományban a feladat túlhatározott. A teljes Ω tartományban a (2a) egyenlet megoldásának létezéséhez és a megoldás egyértelműségéhez ugyanis elegendő, ha az S peremen csupán egy feltételt írunk elő, pl. az F feszültségfüggvény értékét, vagy a $\partial F/\partial i$ iránymenti derivált értékét. Ezért korlátos, egyszerűen összefüggő tartomány felett egy elliptikus héj körben szabad szegéllyel általában akkor sem lehet membránállapotban, ha egyébként egyensúlyban lenne. Az S görbén kívüli, nem korlátos tartomány felett azonban már igen. Az utóbbi esetben, a feladat fizikai természetéből következően, a nem korlátos tartománynak mindig csak egy véges részét vesszük figyelembe.

Az r, ϑ hengerkoordinátákat alkalmazva, a

$$\Delta F(r, \vartheta) = 0, \quad (3a)$$

$$F|_{r=R} = f_1(\vartheta), \quad \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=R} = f_2(\vartheta) \quad (3b)$$

Cauchy-féle feladat megoldásának létezését TOLOTTI [25] bizonyította be arra az esetre, amikor f_1 és f_2 2π szerint periodikus analitikus függvények és Δ a Laplace-operátor,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}.$$

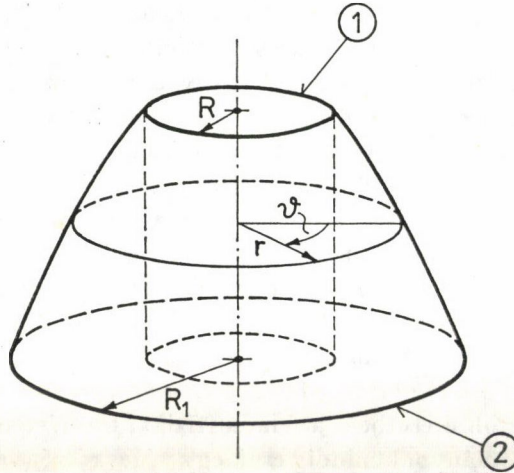
A bizonyítás általánosabb alakban, poliharmonikus függvényekre történt. A (3a,b) kezdetiérték-feladat homogén egyenletre szól, inhomogén kezdeti feltételekkel. Ehhez kapcsolódik az a feladat, amely inhomogén egyenletre vonatkozik homogén kezdeti feltételek mellett:

$$\Delta F(r, \vartheta) = -g(r, \vartheta), \quad (4a)$$

$$F|_{r=R} = 0, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (4b)$$

ahol $g(r, \vartheta)$ 2π szerint periodikus analitikus függvény. A matematikai irodalomban nem talákoztunk olyan munkával, amely ezt a feladatot külön tárgyalta

volna. A függvények analiticitása alapján azonban a Cauchy—Kovalevszkaja-tétel biztosítja a (4a, b) feladat megoldhatóságát és a megoldás egyértelműségét. A (4a, b) kezdetiérték-feladat megoldása olyan forgásparaboloidhéj membránállapotát írja le, amelyen centrikus elhelyezkedésű, szabad szegélyű környílás van. Az 5. ábrán azt az esetet tüntettük fel, amikor a felső, kisebb R sugarú



5. ábra. Szabad peremű forgásparaboloidhéj. ① szabad perem; ② teljesen megtámasztott perem

perem szabad, és az alsó nagyobb R_1 sugarú perem teljesen megtámasztott. Lehet azonban fordítva is, a kisebb R sugarú perem teljesen megtámasztott, és a nagyobb R_1 sugarú perem szabad. Az utóbbi esetben a (4b) feltételekben R helyébe R_1 -et kell írni.

A g teherfüggvénynek nem kell körszimmetrikusnak lennie. Ennyiben a (4a, b) feladat általánosabb annál a már ismert feladatnál, amikor a g teherfüggvény is körszimmetrikus [6]. A szabad szegélyű nyílás lehet teljesen általános elhelyezkedésű is a héj felületén. EIBL [11] pl. kidolgozott egy példát arra az esetre, amikor egy gömbhéjon excentrikus elhelyezkedésű, szabad peremű, köralaprajzú nyílás van.

Ha a héjon két vagy több szabad peremű nyílás van, akkor a héj általában nem lehet membránállapotban. Ez abból következik, hogy nem létezik olyan analitikus transzformáció, amely két vagy több, közös ponttal nem rendelkező zárt görbét kölcsönösen egyértelműen egyetlen egyenessé képezne le.

Megemlítjük, hogy ha a héj szabad pereme zárt görbe, akkor a héjat fizikailag lezáró másik peremnek olyan önmagát nem metsző zárt görbének kell lennie, amely a megoldási tartományban fekszik és nem metszi a szabad perem vonalát. A két peremvonalnak együtt egy korlátos, kétszeresen összefüggő tartományt kell határolniuk.

Most pedig térjünk rá a megoldás kezdeti értékektől való folytonos függésének a problémájára. Csak olyan esettel foglalkozunk, amikor a Cauchy-féle feladatban szereplő függvények analitikusak, és így tudjuk, hogy létezik megoldás és az egyértelmű. Ha ezeken túl a megoldás még folytonosan is függ a kezdeti értékektől, akkor a Cauchy-féle feladat korrekt módon van kitűzve. A bevezetőben azonban már említettük, előfordulhat, hogy az elliptikus parciális differenciálegyenletekre vonatkozó Cauchy-féle feladat nem korrekt felállítású. Esetünkben, amikor tehát létezik egyértelmű megoldás, a feladat nem korrekt módon való felállítása abban jelentkezik, hogy a megoldás nem folytonosan függ a kezdeti értékektől. Azt, hogy ez miként lehetséges, egy, HADAMARD-tól származó ([13] 40. o.) és sokak által idézett példa (lásd pl. [1], [18] 73. o.) segítségével fogjuk megmutatni.

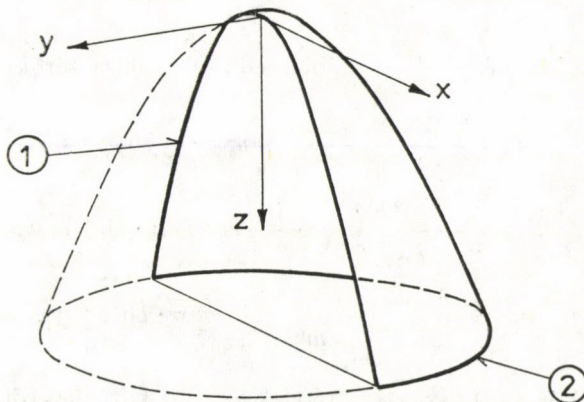
Tekintsünk egy, a felületén terheletlen, fülke alakú forgásparaboloidhéjat (6. ábra), melynél a héj középfelülete a

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

egyenletű felületnek az $y = 0$ egyenletű síkkal való kettémetszése révén áll elő. A metszetsvonal legyen a héj szabad pereme. A héjban uralkodó feszültségállapotot a (2a, b) Cauchy-féle feladat megoldása útján lehet meghatározni. Ez a feladat most a következő alakot ölti:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial F(x, 0)}{\partial y} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$



6. ábra. Fülke alakú forgásparaboloidhéj. ① szabad perem; ② teljesen megtámasztott perem

Az (5a, b) feladatnak a Cauchy–Kovalevszkaja-tétel értelmében létezik egyértelmű megoldása, mégpedig: $F(x, y) = 0$. Ebből a redukált metszeterők:

$$n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad n_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

Ez az eredmény egyébként nyilvánvaló, hiszen terheletlen héjban nem ébrednek belső erők.

Most közelítsük meg az (5b) feltételek közül az elsőt az alábbi alakú kifejezéssel:

$$F(x, 0) = \frac{1}{m^a} \sin m x, \quad (6)$$

ahol $a \geq 2$ állandó és $m > 0$ egészszám. Ha $m \rightarrow \infty$, akkor (6) egyenletesen tart az $F(x, 0) = 0$ -hoz. Ezért tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ -hoz van úgy egy M szám, hogy ha $m > M$, akkor

$$\frac{1}{m^a} |\sin m x| < \varepsilon. \quad (7)$$

Rögzítsük az ε értékét, és válasszunk hozzá egy m számot úgy, hogy (7) teljesüljön. Ezek után keressük az (5a) Laplace-egyenlet megoldását az

$$F(x, 0) = \frac{1}{m^a} \sin m x, \quad \frac{\partial F(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

feltételek mellett. A Cauchy–Kovalevszkaja-tétel értelmében létezik egyértelmű megoldás, mégpedig a következő:

$$F(x, y) = \frac{1}{m^a} \sin m x \cdot \cosh m y. \quad (9)$$

A (9) feszültségfüggvényből az alábbi redukált metszeterőket kapjuk:

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{m^{a-2}} \sin m x \cdot \cosh m y, \\ n_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{1}{m^{a-2}} \cos m x \cdot \sinh m y, \\ n_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{m^{a-2}} \sin m x \cdot \cosh m y. \end{aligned}$$

Látható, hogy bár a (8) kezdeti feltételek az (5b) feltételektől csak kismértékben (ε -nál kevesebbet) térnek el, a (9) megoldás és a belőle származtatott redu-

kált metszeterők mégis jelentős mértékben különbözhetnek nullától az x tengely akármilyen kicsi környezetében. Az (5a, b) feladatnál tehát a kezdeti értékeket kicsit megváltoztatva, a megoldás megváltozása igen nagy lesz. Ez a feladat tehát nem korrekt felállítású.

Az említett példa önmagában még nem sokat mond, mivel a gyakorlatban terheletlen szabad peremű fülkehéj feszültségvizsgálata sohasem fordul elő. A példa jelentőségét az adja, hogy ugyanilyen okoskodással mutatható ki a Cauchy-féle feladat nem korrekt volta, ha a fülkehéjra felületi terhek is hatnak, vagy ha a felületén terheletlen fülkehéjnak az előző példában szabad peremén adott nagyságú normálerő és nyíróerő működik. Először nézzük az utóbbi esetet. Hogy létezzen a feladatnak egyértelmű megoldása, kikötjük, hogy a perem-erők megoszlását leíró függvények analitikusak legyenek. A héj belső erőit megadó feszültségfüggvényt a

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial F(x, 0)}{\partial y} = \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad (10b)$$

Cauchy-féle feladat megoldása szolgáltatja, ahol $\varphi(x)$ a perem menti redukált normálerőfüggvény kétszeres, $\psi(x)$ pedig a perem menti redukált nyíróerő-függvény egyszeres x szerinti integrálja. Legyen ez a megoldás az $F_0(x, y)$ függvény. Ekkor a (10a) egyenletnek az

$$F(x, 0) = \varphi(x) + \frac{1}{m^a} \sin mx, \quad \frac{\partial F(x, 0)}{\partial y} = \psi(x) \quad (11)$$

kezdeti feltételek melletti megoldása az

$$F_1(x, y) = F_0(x, y) + \frac{1}{m^a} \sin mx \cdot \cosh my \quad (12)$$

függvény lesz. A (10b)-beli $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ kezdeti függvényeknek kis megváltozása, amely a (8)-beli függvényeknek a $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ függvényekhez való hozzáadásából származik, az $y = 0$ peremvonal tetszőlegesen kicsiny környezetében is a (12) megoldás igen nagy megváltozását eredményezheti.

Az elmondottak akkor is fennállnak, ha a héj felületi terhe, $g(x, y)$, nem nulla és analitikus. Legyen ugyanis a

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -g, \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

$$\left. \begin{aligned} F(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial F(x, 0)}{\partial y} = \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

kezdetiérték-feladat megoldása $F_2(x, y)$. (A $\varphi(x)$ és $\psi(x)$ függvények értéke nulla is lehet, és ekkor a hég $y = 0$ egyenletű pereme szabad.)

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ekkor a

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -g, \right\} \quad (14a)$$

$$\left. F(x, 0) = \varphi(x) + \frac{1}{m^a} \sin mx, \quad \frac{\partial F(x, 0)}{\partial y} = \psi(x) \right\} \quad (14b)$$

kezdetiérték-feladat megoldása az

$$F_2(x, y) + \frac{1}{m^{a-2}} \sin mx \cdot \cosh my$$

függvény lesz, mely a korábbiakhoz hasonlóan az $y = 0$ perem tetszőlegesen kicsiny környezetében is igen nagy értékeket vehet fel.

Az itt tárgyaltaknak elsősorban számítástechnikai szempontból van jelentőségük. Előfordulhat ugyanis, hogy a számítás során a kezdeti feltételeket nem sikerül egzaktul kielégíteni, és ezért közelítéshez vagyunk kénytelenek folyamodni. A kezdeti feltételeknek tetszőleges pontosságú megközelítéséből azonban — ahogy láttuk — nem következik szükségszerűen, hogy a megoldást is ugyanilyen mértékben megközelítettük.

3. Peremérték-feladatok elliptikus esetben

Mindenekelőtt definiáljunk néhány fogalmat.

1. Legyen az xy síkban Ω egy korlátos tartomány, S peremmel. Ekkor az Ω tartomány felett értelmezett $u(x, y)$ függvényről azt mondjuk, hogy λ -Hölder-folytonos Ω -ban, ha van úgy egy c konstans, hogy minden Ω -beli (x_1, y_1) , (x_2, y_2) egymástól különböző pontra teljesül az

$$|u(x_1, y_1) - u(x_2, y_2)| \leq c \{ \varrho[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] \}^\lambda, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

egyenlőtlenség, ahol $\varrho[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ az (x_1, y_1) és (x_2, y_2) pontok távolságát jelöli ([16] 1. o.). A λ -Hölder-folytonosság hasonlóképpen értelmezhető egyváltozós függvényekre is. Ha $\lambda = 1$, akkor a Hölder-folytonos függvény Lipschitz-folytonos. A Hölder-folytonosság többet jelent a közönséges folytonosságnál, de kevesebbet jelent a differenciálhatóságnál.

2. Az xy síkban fekvő S görgét Ljapunov-féle görbének nevezzük ([24] 375. o.), ha

a) az S görbének minden pontjában van meghatározott normálisa (érintője);

b) van olyan d pozitív szám, hogy az S görbe bármely P pontjához tartozó normálissal párhuzamos egyenesek legfeljebb egy pontban metszik az S görbének azt a S'_P részét, amely a P középpontú, d sugarú körön belül esik;

c) a P, P' pontokhoz tartozó $n_P, n_{P'}$ normálisok által bezárt $\gamma(P, P') = = (\widehat{n_P, n_{P'}})$ szögre teljesül, hogy

$$\gamma(P, P') < A\varrho^\lambda,$$

ahol ϱ a P és P' pontok egymástól való távolsága, A egy állandó és $0 < \lambda \leq 1$.

Az ilyen típusú zárt görbék más alakban történő értelmezését lásd pl. [16] 3. o., vagy [4] 13. o. Az S görbe Ljapunov-tulajdonsága többet jelent annál, hogy S egyszer folytonosan differenciálható, de kevesebbet annál, hogy S kétszer folytonosan differenciálható.

3. Legyen az Ω korlátos tartományt határoló S peremgörbe minden pontjához hozzárendelve egy i irány (egységvektor) úgy, hogy az az Ω -ból kifelé mutasson. Ekkor az i irányt az S görbe konormálisának nevezzük és ν -vel jelöljük, ha az az (1) egyenlet kanonikus transzformációja után a peremgörbe n normálisába megy át. A konormális általánosabb értelmezését, amely abban az esetben is jó, amikor pl. az említett kanonikus transzformáció nem létezik, lásd pl. [4]-ben a 17. oldalon.

A peremérték-feladatokat általános esetben a következőképpen fogjuk értelmezni. Legyen adott az xy síkban egy korlátos, összefüggő Ω tartomány S peremmel. Legyen adott az S perem minden pontjában egy, az S peremgörbét abban a pontban nem érintő, az Ω tartományból kifelé mutató i irány. Legyen továbbá adott az S peremen egy α és egy β ($\alpha^2 + \beta^2 > 0$), valamint egy φ függvény. Ekkor keressük az Ω tartományban az (1) egyenlet olyan megoldását, amely az S peremen kielégíti az

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial i} + \beta F = \varphi \quad (15)$$

feltételt, ahol $\partial F / \partial i$ az F függvény i irány menti deriváltját jelöli.

A továbbiakban a (15) általános peremfeltétel melletti peremérték-feladat négy speciális esetével fogunk foglalkozni.

Első peremérték-feladatról vagy *Dirichlet-feladatról* akkor beszélünk, ha (15)-ben $\alpha \equiv 0, \beta \equiv 1$, azaz adott a peremen az F feszültségfüggvény értéke.

Második peremérték-feladaton azt a feladatot értjük, amikor (15)-ben $\alpha \equiv 1, \beta \equiv 0$, azaz adott a peremen az F feszültségfüggvény i irány menti deriváltjának az értéke. Ha $i \equiv \nu$, vagyis az i irány megegyezik a ν konormálissal, akkor *Neumann-feladatról* van szó.

Harmadik peremérték-feladat maga a (15) feltétel melletti feladat.

A *vegyes peremérték-feladatról* akkor beszélünk, ha (15)-ben α vagy β eltűnik az S perem egy-egy szakaszán anélkül, hogy α vagy β a teljes peremen azonosan nulla lenne.

Megjegyezzük, hogy az egyes feladatok elnevezésében az irodalom nem egységes. Így pl. az általunk harmadik peremérték-feladatnak nevezett feladatot — $i \equiv \nu$ esetén — MIRANDA [16] Neumann-feladatnak, SCHIFFER [3] Robin-feladatnak, BITSADZE [4] pedig — az $i \equiv \nu$ feltétel nélkül — Poincaré-feladatnak nevezi.

3.1. Az első peremérték-feladat (Dirichlet-feladat)

Legyen az xy síkban Ω egy korlátos tartomány, S peremmel. Vegyen fel az F feszültségfüggvény az S perem mentén egy φ függvénnyel megadott értékeket. Ekkor az

$$\mathcal{L} F = -g, \quad (16a)$$

$$F|_S = \varphi \quad (16b)$$

Dirichlet-feladatnak egy és csakis egy megoldása van az Ω tartományban, ha teljesülnek az alábbi feltételek ([16] 21, I. tétel):

a) Az Ω tartomány az S peremmel együtt a (16a) egyenlet értelmezési tartományában fekszik,

b) Ω egyszeresen összefüggő tartomány,

c) az S perem Ljapunov-féle zárt görbe,

d) $g(x, y)$ folytonos Ω -n és S -en, továbbá λ -Hölder-folytonos Ω -n,

e) φ folytonos S -en,

f) $z(x, y)$ háromszor differenciálható Ω -n és S -en, és a harmadik parciális deriváltjai λ -Hölder-folytonosak.

Megjegyezzük, hogy a c) feltétel mindig teljesül, ha S kétszer folytonosan differenciálható, a d) feltétel mindig teljesül, ha $g(x, y)$ folytonosan differenciálható Ω -n és az f) feltétel mindig teljesül, ha $z(x, y)$ négyszer folytonosan differenciálható Ω -n és S -en.

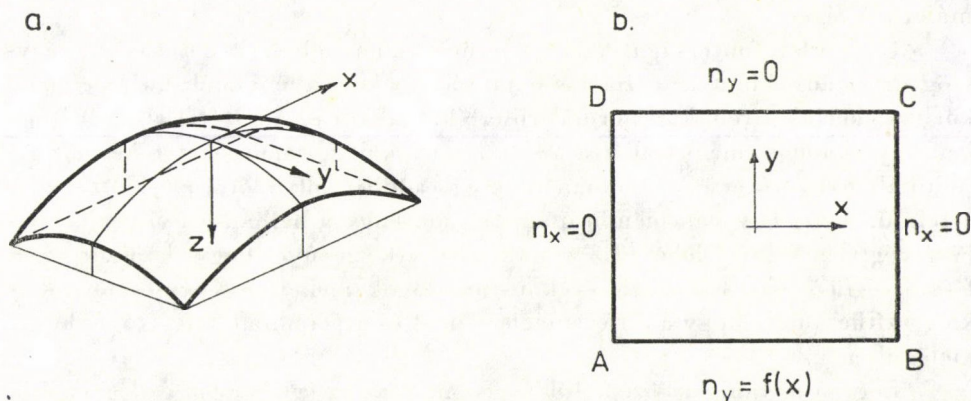
A fenti feltételek teljesülése esetén a megoldás integrál-operátorok segítségével (potenciál-alakban) állítható elő. Megemlítjük még, hogy ha a (16a,b) Dirichlet-feladatnak létezik megoldása anélkül, hogy a fenti feltételek teljesülénének, akkor ez a megoldás egyértelmű ([16] 5, I. tétel).

A körben függőlegesen megtámasztott zárt (gyűrűszerű) peremtartóra támaszkodó héj egyértelmű membránállapotát az $F|_S = 0$ peremfeltétel biztosítja. Ez a feltétel mindig előírható, és a peremvonal a rá ható erők kötél-görbéje lesz.

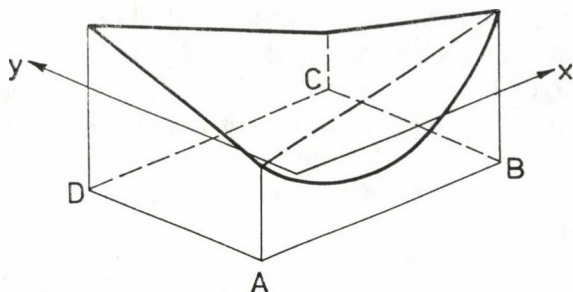
Ismeretes, hogy a megoldást előállító potenciálok létezéséhez nem szükséges, hogy az S peremgörbe görbülete az S minden pontjában véges legyen ([24] 375. o.). Ennek alapján a Dirichlet-feladatnak akkor is létezik megoldása, ha a c) feltétel nem teljesül, azaz az S perem nem egyetlen Ljapunov-féle zárt görbe, hanem véges sok, egymáshoz törésponttal csatlakozó Ljapunov-féle

görbeszakasz egyesítése. Ekkor azonban előfordulhat, hogy a megoldás a töréspontokban szinguláris, azaz a töréspontokban végtelen nagy metszeterők jelennek meg. Közismert az a szingularitás, amely a négyszögalaprajz feletti, függőlegesen megtámasztott peremű elliptikus paraboloidhéj sarokpontjaiban jelentkezik (lásd pl. [14] 142. o.). Ennél a feladatnál a sarkok akármilyen kis (de nem nulla) sugarú lekerekítésével a c) feltétel kielégíthető, és így a szingularitás megszüntethető.

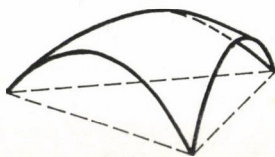
Ha az S perem egyenesszakaszokból áll, akkor az egyes peremszakaszokon előírhatjuk a normálerő értékét ([22] 2.2. pont). Így pl. egy, a felületén terheletlen, derékszögű négyszögalaprajz feletti elliptikus héj (7a. ábra) mindig membránállapotban lesz, ha az egyik peremét valamilyen $f(x)$ megoszlásban normálerő terheli, és a héjat úgy akarjuk egyensúlyban tartani, hogy a peremén körben csak nyíróerők ébredjenek (7b. ábra). (A peremek függőlegesen és a peremtartók síkjában bekövetkező elmozdulások ellen is meg vannak támasztva.) Ennek a feladatnak mindig van megoldása, de a megoldás — általános esetben — nem egyértelmű, azaz a feladat statikailag határozatlan. Ez abból adódik, hogy általános esetben az F feszültségfüggvénynek a peremen felvett értékei az AB oldal (7b. és 8. ábra) kivételével egy térbeli négyszöghöz illeszkednek. Lineáris és konstans tagok hozzáadásával azonban e térbeli négyszögnek csak két oldala tehető nullává, pl. a CD és a DA szakasz feletti oldala. Ekkor a B csúcst felett a feszültségfüggvény értéke még tetszőlegesen előírható. Mivel a Dirichlet-feladatnak bármely B pontbeli F érték mellett létezik egyértelmű megoldása, ezért az eredeti feladatnak végtelen sok megoldása van. A megoldás egyértelműségéhez további feltételre van szükség. A feladat megoldása egyértelmű pl. akkor, ha a megfelelő koordinátásíkokra a héj középfelülete is, a peremek is és az $f(x)$ függvény is szimmetrikus, és ennek alapján a megoldástól is szimmetriát követelünk meg. Ha az előbbi feladatot tetszőleges háromszög alaprajz feletti elliptikus héjra fogalmazzuk meg (9. ábra),



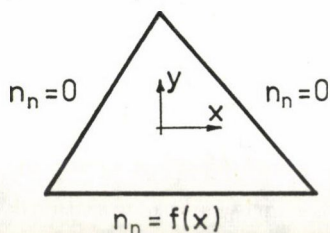
7. ábra. a) Elliptikus héj. b) A héj alaprajza és a peremfeltételek

8. ábra. Az F feszültségfelület peremgörbéje

a.



b.



9. ábra. a) Háromszögalaprajz feletti elliptikus hég; b) A háromszögtartomány és a peremfeltételek

akkor a megoldás egyértelmű. Négyél több oldalú sokszögalaprajz esetén azonban — a négyszögalaprajz esetéhez hasonlóan — a megoldás létezik ugyan, de nem egyértelmű.

Az elmondottakhoz hasonló megállapításokra jutunk abban az esetben is, amikor a felületén terhelt, sokszögalaprajz feletti elliptikus hég valamennyi peremszakasza oldalnyomásmentes [7], vagy a peremen körben előírjuk a normálerő értékét.

Gyakorlati fontosságuk miatt tegyünk külön említést a derékszögű négyszögtartomány feletti translációs héjakról. Ezeknél a héjaknál, ha a peremen körben előírjuk a redukált normálerő értékét, akkor ez a feltétel a hég belsejében egyértelműen meghatározza az n_x , n_y redukált normálerők értékét. Az n_{xy} redukált nyíróerő értéke azonban csak egy additív állandótól eltekintve egyértelmű. A hég úgy van membránállapotban, hogy a hégban a nyíróerő eloszlása végtelen sokféle lehet. Ez annak a következménye, hogy ilyenkor az F feszültségfüggvény a lineáris és konstans tagok mellett egy xy -os taggal is kiegészíthető úgy, hogy a differenciálegyenlet és a peremfeltételek továbbra is kielégüljenek.

Legyen ugyanis a középfelület egyenlete $z = z_1(x) + z_2(y)$ és legyenek a négyszög oldalai az x és az y tengellyel párhuzamosak. Ekkor az (1) egyenlet

a következő alakot veszi fel:

$$\frac{d^2 z_2}{dy^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{d^2 z_1}{dx^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -g. \quad (16c)$$

Határolják a négyszögtartományt az $x = \pm a$ és az $y = \pm b$ egyenletű egyenesek. Az egyszerűség kedvéért legyen a héj oldalnyomásmentes. Ezt a kívánalmat az

$$x = \pm a \text{ egyeneseken az } n_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad (16d)$$

$$\text{az } x = \pm b \text{ egyeneseken az } n_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$$

peremfeltételek juttatják kifejezésre. Ezek a peremfeltételek kiintegrált alakban is megfogalmazhatók, miszerint F értékei a peremen egy térbeli négyszöget adnak. Könnyen igazolható, hogy ha F kielégíti a (16c) egyenletet és a (16d) feltételeket, akkor az $F_1 = F + C_1 + C_2x + C_3y + C_4xy$ függvény is kielégíti, ahol C_1, C_2, C_3, C_4 tetszőleges állandók. Az is látszik, hogy az F -ből és az F_1 -ből számított n_{xy} redukált nyíróerő a C_4 állandóban különbözik egymástól. A C_1, C_2, C_3, C_4 állandók szabad megválasztása lehetővé teszi, hogy a peremen F értékét körben nullává tegyék. Ez azonban semmit nem változtat azon a tényen, hogy az n_{xy} redukált nyíróerő csak egy additív állandótól eltekintve van egyértelműen meghatározva. Ugyanez a helyzet, ha a peremen körben úgy írjuk elő a redukált normálerő értékét, hogy különbözzön nullától.

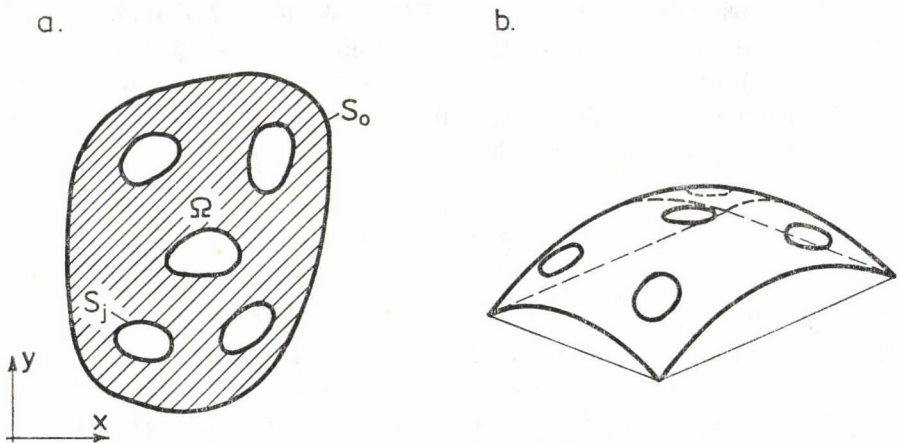
A redukált nyíróerő fentiekben ismertetett sokértékűsége hasonló a derékszögű négyszögtartomány feletti dongahéjak esetéhez, ha a tartomány egyik oldala párhuzamos a karakterisztikákkal és adott a redukált normálerő értéke a karakterisztikákra merőleges oldalak mentén [23].

A (16a,b) Dirichlet-feladatnak akkor is létezik egyértelmű megoldása, ha az Ω tartomány többszörösen összefüggő. Álljon az S perem $m + 1$, közös résszel nem rendelkező zárt görbéből, azaz legyen

$$S = \bigcup_{j=0}^m S_j,$$

ahol S_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) kétszer folytonosan differenciálható, és az S_0 görbe által határolt korlátos tartomány tartalmazza a többi m db. S_j görbét (10a. ábra). Adjuk meg az S_j görbéken az F feszültségfüggvény értékét, legyen ez φ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$). Ha φ_j folytonos, akkor a (16a, b) feladatnak létezik egyértelmű megoldása. MIHLIN ([15] 138. o.) a megoldás előállítását arra az esetre mutatja meg, amikor a (16a) egyenlet kanonikus alakú és homogén.

Szegélyezze a többszörösen összefüggő tartomány feletti elliptikus héj minden peremét csak húzásnak és nyomásnak ellenálló szegélygerenda (10b. ábra). Ha a feszültségfüggvény értékét minden egyes S_j zárt peremen úgy írjuk elő, hogy ott a feszültségfüggvény zárt síkgörbe legyen (minden egyes peremenél más-más állású síkban), akkor ilyen feltétel mellett a héj membránállapotban van és elérhető, hogy a szegélygerendákban mindenütt csak húzás-nyomás ébred, azaz a peremgörbék a rájuk ható erők kötélgörbéi lesznek. Ekkor azonban a peremtartókon megfelelő eloszlású függőleges irányú külső erőket kell működtetni, hogy a héj, ill. a peremtartók egyensúlya és a peremtartók tengelyvonalának „kötélgörbesége” a térben is biztosítva legyen. Ha a feszültségfelület peremsíkjai adottak, akkor a héj feszültségállapota, és ebből a peremeken működtetendő függőleges erők eloszlása és nagysága is meghatározható. Ha peremfeltételként csak azt írjuk elő, hogy a peremek peremtartóira csupán függőleges irányú külső erők működjenek (a peremgörbék a rájuk ható erők kötélgörbéi legyenek), akkor a héj membránállapotban van, de a membránállapot nem egyértelmű, mivel a feszültségfelület peremgörbéinek a síkjai tetszőlegesek lehetnek. (A héj rögzített felületi terhelés esetén többféle peremteher mellett is membránállapotban lehet. A héj feszültségállapota ennek megfelelően többféle lesz.) Minthogy a héj ilyen peremfeltétel mellett statikailag határozatlan, előírható még pl. a héj belső peremén az ott működő függőleges élteher átlagos nagysága. Az élteher megoszlásfüggvénye azonban nem lehet tetszőleges, és így azt nem lehet előírni, mivel összefüggésben van a peremtartóra ható membránerőkkel. (Ezt az összefüggést pl. forgásparaboloidhéjon levő köralaprajzú felülvilágító nyílásra lásd a [9] tanulmányban.) Kétszeresen összefüggő tartomány esetében ilyen típusú héjat vizsgál pl. CSONKA [8].



10. ábra. a) Többszörösen összefüggő tartomány. b) Elliptikus héj többszörösen összefüggő tartomány felett

Hasonló feladatot tárgyal a fentiekől némileg eltérő feltételek mellett pl. [10, 11].

A többszörösen összefüggő tartomány feletti membránhéjak vizsgálatával VEKUA is foglalkozott [26, 27]. Vizsgálatai azonban nem a Pucher-féle egyenletre épülnek, és tárgyalásmódjának alapját a komplex analízis képezi. Vizsgálatai szerint a feladat egyértelmű megoldhatósága és a peremértékek jellege a feladat úgynevezett indexszámával is kapcsolatban van, de ezzel most nem kívánunk foglalkozni. Eredményeire a 4. szakaszban fogunk röviden kitérni.

3.2. A második peremérték-feladat

Legyen az xy síkban Ω egy korlátos tartomány, S peremmel. Az S peremgörbe minden pontjához legyen hozzárendelve egy, az Ω -ból kifelé mutató i irány (egységvektor) (11. ábra), és legyen adott az S peremén az F feszültségfüggvény i iránymenti deriváltja egy φ függvénnyel. Tekintsük ekkor az

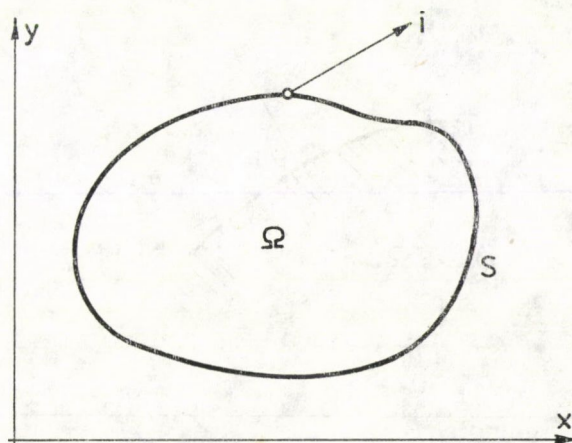
$$\mathfrak{L}F = -g, \quad (17a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial i} \Big|_S = \varphi \end{array} \right\} \quad (17b)$$

második peremérték-feladatot.

A (17a, b) második peremérték-feladatnak létezik megoldása, és az egy additív állandótól eltekintve egyértelmű, ha teljesülnek az alábbi feltételek ([16] 5, IV.; 22, I.; 23, I.; 23, VII. tételek):

a) az Ω tartomány az S peremmel a (17a) egyenlet értelmezési tartományában fekszik,



11. ábra. Egyszeresen összefüggő korlátos tartomány

- b) Ω egyszeresen összefüggő tartomány,
- c) az S perem Ljapunov-féle zárt görbe,
- d) az i irány nem érinti az S görbét abban a pontban, amelyben az i irány meg van adva,
- e) az i irány λ -Hölder-folytonosan változik az S görbe mentén,
- f) $g(x, y)$ folytonos Ω -n és S -en, továbbá λ -Hölder-folytonos Ω -n,
- g) φ folytonos S -en,
- h) $z(x, y)$ kétszer differenciálható Ω -án és S -en, és a második parciális deriváltjai λ -Hölder-folytonosak,
- i) teljesül a

$$-\iint_{\Omega} g(x, y) dx dy - \int_S \varphi(s) ds = 0 \quad (18)$$

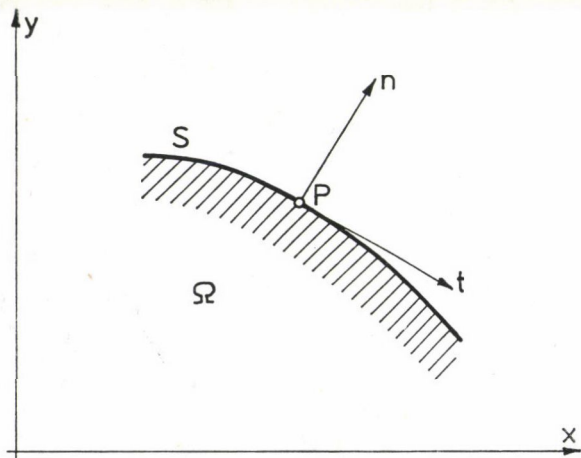
kompatibilitási feltétel, ahol s az S görbe ívhosszparaméterét jelöli.

A fenti feltételek teljesülése esetén a megoldás integrál-operátorok segítségével (potenciál-alakban) állítható elő.

Megjegyezzük, hogy az e), f) és h) feltételek mindig teljesülnek, ha bennük λ -Hölder-folytonosság helyett folytonos differenciálhatóságot tételezünk fel.

Jelölje n az S perem tetszőleges P pontjában az Ω -ból kifelé mutató normálist (egységvektort), t pedig az S perem P pontbeli érintőjének az irányát (egységvektorát) (12. ábra). Legyen $i \equiv n$.

Tekintsünk egy tetszőlegesen megoszló függőleges felületi tehernek kitett, sokszögalaprajz feletti elliptikus héjat (13a. ábra). Legyen a sokszög m -oldalú,



12. ábra. A peremvonal normális irányú és érintő irányú egységvektora a peremvonal egy pontjában

a_1, a_2, \dots, a_m oldalhosszakkal (13b. ábra). Támasszuk meg a héjat úgy, hogy az

$$S_j \quad (j = 1, 2, \dots, m); \quad S = \bigcup_{j=1}^m S_j$$

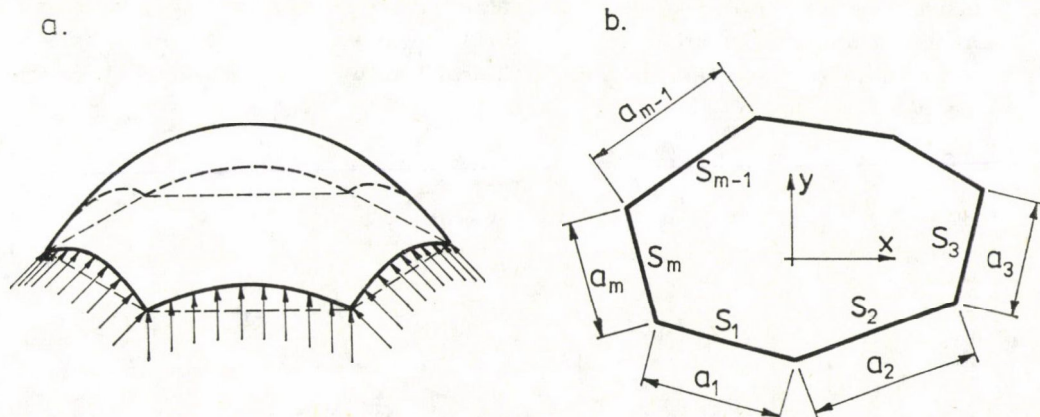
peremszakaszai körben nyíróerőmentesek legyenek. Tudjuk, hogy egyenes peremszakasz nyíróerőmentességét a $\partial F / \partial n = \text{állandó}$ feltétel biztosítja [22]. Esetünkben tehát a peremfeltétel a következő lesz:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{S_j} = b_j, \quad b_j = \text{állandó} \quad (j = 1, 2, \dots, m). \quad (19)$$

Az F feszültségfüggvény egy $Ax + By$ alakú kifejezéssel, ahol A és B állandó, kiegészíthető anélkül, hogy a héj feszültségállapotát ez befolyásolná. A és B alkalmas megválasztásával a b_j állandók közül kettő nullává tehető. Legyen pl. $b_1 = b_2 = 0$. Ekkor a (19) feltétel helyébe az alábbi kerül:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial n} \right|_{S_j} = b_j, \quad \begin{cases} b_j = 0, & \text{ha } j = 1, 2, \\ b_j = \text{állandó}, & \text{ha } j = 3, 4, \dots, m. \end{cases} \quad (20)$$

A (17b) feltételben szereplő φ függvény most egy lépcsős függvény lesz, amelynél az ugrások helye az S perem töréspontjaiba esik. Így az S perem töréspontjaiban sem a c) sem a g) feltétel nem teljesül. Ezért elég kicsi ε sugarú körökkel lekerekítjük a sarkokat, és megszüntetjük a φ függvény szakadásait úgy, hogy a körív végpontjaiban levő b_j és b_{j+1} függvényértékeket egy, a körív mentén lineárisan változó szakasszal összekötjük. Ily módon kielégíthetők az



13. ábra. a) A peremein normális irányban megtámasztott, sokszögalaprajzú elliptikus héj. b) A sokszögalakú tartomány

a)–h) feltételek. (Az eredeti feladat megoldását majd $\varepsilon \rightarrow 0$ határátmenettel értelmezzük.) Ki kell azonban még elégíteni a (18) kompatibilitási feltételt. Ez most az alábbi formát ölti:

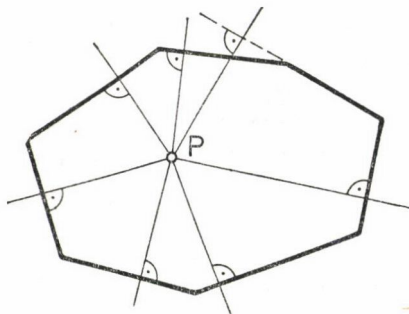
$$-\iint_{\Omega} g(x,y) dx dy - \sum_{j=3}^m a_j b_j = 0. \quad (21)$$

Látható, hogy $m > 3$ esetén a (21) feltétel végtelen sokféleképpen kielégíthető, hiszen a b_j értékeket egy kivétellel szabadon megválaszthatjuk. A b_j állandóknak minden, a (21)-et kielégítő rendszere egy meghatározott (17b) feltételt determinál, amely mellett a (17a, b) peremértékfeladatnak létezik megoldása, és ez a megoldás egy additív állandótól eltekintve egyértelmű. Mivel a b_j állandóknak végtelen sok, a (21)-et kielégítő rendszere van, ebből az következik, hogy feladatunknak végtelen sok megoldása van. $m = 3$ esetében a b_j állandó a (21) feltétel egyértelműen meghatározza, így a (17b) feltétel is egyértelmű, ami azt eredményezi, hogy a feladatnak, egy additív állandótól eltekintve, csak egyetlen megoldása van. Az additív állandónak azonban — mint tudjuk — nincs befolyása a hég feszültségállapotára.

A fentiek alapján végeredményben azt mondhatjuk, hogy egy sokszög-alaprajz feletti elliptikus hég mindig membránállapotban lehet, ha a pereme körben nyíróerőmentes. Ha az alaprajz háromszög, akkor a feladat statikailag határozott, és a hég csak egyféleképpen lehet membránállapotban. Ha azonban az alaprajz négy- vagy többoldalú sokszög, akkor a feladat statikailag határozatlan, és a hég sokféleképpen lehet membránállapotban.

Az elmondottakkal teljesen analóg az az eset, amikor a hég peremén körben előírjuk az n_{nt} redukált nyíróerő értékét.

A matematikai elmélet alapján kapott eredményeink statikai megfontolások alapján is kikövetkeztethetők. Tekintsük az előzőekben tárgyalt nyíróerőmentes peremű hég alaprajzát (13b. ábra). Legyen a hégat terhelő $g(x, y)$ felületi erők eredőjének támadáspontja alaprajzi vetületben a P pont (14. ábra).



14. ábra. A perem menti redukált normálerők oldalankénti részeredőinek hatásvonalai

Nem szükséges, hogy P a sokszögön belül legyen. Mivel az egyes peremszakaszokon csak normálerők működnek, ezért e normálerők eredője szakaszonként merőleges az adott sokszögoldalra. Ugyanakkor a héj külsőleg, mint merev test, pl. úgy lehet egyensúlyban, ha a peremszakaszokon működő normálerők eredőinek hatásvonalai a külső teher eredőjének hatásvonalán, egy pontban metszik egymást. Alaprajzban ez úgy jelentkezik, hogy az említett részeredők hatásvonalai mind átmennek a P ponton (14. ábra). Annak a lehetősége, hogy a részeredők a térben is egy pontban metszék egymást, azáltal van biztosítva, hogy egy elliptikus felület függőleges síkmetszete soha nem egyenes és így a metszetgörbén mindig megadható olyan normális irányú erőrendszer, amelynek eredője egy megkívánt z magasságban döfi a görbét kialakító metszősíkot. Mivel térbeli közös metszéspontú erőknél egy erő csak akkor egyensúlyozható, egyértelmű módon adott hatásvonalú erővel, ha a hatásvonalak száma három, ezért csak a háromszögalaprajz feletti, nyíróerőmentes peremű elliptikus héj lehet egyértelmű membránállapotban.

3.3. A harmadik peremérték-feladat

Legyen az xy síkban Ω egy korlátos tartomány S peremmel. Az S peremgörbe minden pontjához legyen hozzárendelve egy, az Ω -ból kifelé mutató i irány (egységvektor) (11. ábra), és legyen adott az S peremen egy α , β és φ függvény úgy, hogy az S perem minden pontjában $\alpha > 0$ legyen. Tekintsük ekkor az

$$\mathcal{L}F = -g, \quad (22a)$$

$$\left. \left(\alpha \frac{\partial F}{\partial i} + \beta F \right) \right|_S = \varphi \quad (22b)$$

harmadik peremérték-feladatot. Teljesüljenek a következő feltételek:

- a) az Ω tartomány az S peremmel a (22a) egyenlet értelmezési tartományában fekszik,
- b) Ω egyszeresen összefüggő tartomány,
- c) az S perem Ljapunov-féle zárt görbe,
- d) az i irány nem érinti az S görbét abban a pontban, amelyben az i irány meg van adva,
- e) az i irány iránykoszinuszai differenciálható módon változnak az S mentén, úgy hogy a deriváltak λ -Hölder-folytonosak,
- f) $g(x, y)$ folytonos Ω -n és S -en, továbbá λ -Hölder-folytonos Ω -n,
- g) β folytonos S -en,
- h) φ folytonos S -en,
- i) $z(x, y)$ háromszor differenciálható Ω -n és S -en, és a harmadik parciális deriváltjai λ -Hölder-folytonosak.

Ekkor — mivel az \mathcal{L} Pucher-féle operátor önadjungált ([16] 12. o.) — a (22a, b) harmadik peremérték-feladatra a következő alternatíva áll fenn ([16] 22, I.; 22, III., 23, I., 23, II.; 23, VII. tételek):

A (22a, b) feladathoz tartozó

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}F &= 0, \\ \left(\alpha \frac{\partial F}{\partial i} + \beta F \right) \Big|_S &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23a)$$

homogén feladatnak vagy csak egyetlen megoldása van, és ez az $F = 0$, és ekkor a (22a, b) feladatnak tetszőleges g és φ függvényre egy és csakis egy megoldása van (ez integráloperátorok segítségével állítható elő); vagy van a (23a, b) homogén feladatnak p lineárisan független F_1, F_2, \dots, F_p megoldása, és ez esetben a (22a, b) feladat akkor és csak akkor oldható meg, ha minden F_j -re ($j = 1, 2, \dots, p$) teljesül az alábbi kompatibilitási feltétel:

$$-\iint_{\Omega} g(x, y) F_j(x, y) dx dy - \int_S \varphi(s) \cdot F_j(s) ds = 0, \quad (24)$$

ahol s az S görbe ívhosszparaméterét jelöli. Ha a (24) feltétel minden F_j -re ($j = 1, 2, \dots, p$) teljesül, akkor a (22a, b) feladatnak végtelen sok megoldása van, és ha F_0 egy ezek közül, akkor az összes többi $F_0 + \sum c_j F_j$ alakú, ahol c_j tetszőleges állandó. Ha $\beta > 0$, akkor a (22a, b) feladatnak egy és csakis egy megoldása van.

A harmadik peremérték fizikai jelentését körtartományra ismerjük. Legyen $i \equiv n$, ahol n az S körvonal külső normálisát jelöli. Jelölje R a kör sugarát. Ha a peremen körben előírjuk az n_{ni} redukált nyíróerő értékét egy χ függvénnyel, akkor ez a következő alakú feltételhez vezet [22]:

$$\frac{1}{R} F - \frac{\partial F}{\partial n} = \int \chi ds + a, \quad (25)$$

ahol s a körív ívhossz-paramétere, a pedig állandó. Ha a perem nyíróerőmentes, akkor ezt a ténnyt az

$$\frac{1}{R} F - \frac{\partial F}{\partial n} = a \quad (26)$$

összefüggés juttatja kifejezésre. Azt, hogy egy köralaprajz feletti elliptikus héj a (25) vagy (26) peremfeltétel mellett membránállapotban lehet-e, és ha igen, akkor a héj belső erői ezen peremfeltételek által egyértelműen vannak-e meghatározva, a fenti alternatíva-tétel alapján dönthető el.

Nézzünk erre egy egyszerű példát. Tekintsünk egy, a felületén függőleges erőkkkel terhelt forgásparaboloidhéjat. A középfelületének egyenlete legyen $z = (x^2 + y^2)/2$. Legyen a hég $x^2 + y^2 = R^2$ egyenletű pereme nyírőerőmentes. Ekkor a hég a külső terheket a peremén csak normálerőkkel egyensúlyozza (15. ábra). A peremfeltételt most a (26) összefüggés jelenti. Ezt az egyenletet szorozzuk meg -1 -gyel, hogy az $\alpha > 0$ feltételt is kielégítsük. Így a következő peremérték-feladathoz jutunk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -g, \end{aligned} \right\} \quad (27a)$$

$$\left. \left(\frac{\partial F}{\partial n} - \frac{1}{R} F \right) \Big|_S = -a, \right\} \quad (27b)$$

ahol $a = \text{állandó}$. A (27b) feltételben $\alpha \equiv 1$, $\beta \equiv -1/R$. A g teherfüggvénytől megköveteljük, hogy elégítse ki az f) feltételt. Így az alternatíva-tétel valamennyi előfeltétele teljesül. Vizsgáljuk meg, hogy a fenti hég mikor van membránállapotban. Ha $\beta > 0$ lenne, akkor a (27a,b) feladatnak létezne egyértelmű megoldása. Esetünkben azonban $\beta < 0$, ezért az alternatíva-tétel szerint kell eljárunk.

Térjünk át az

$$x = r \cdot \cos \vartheta, \quad y = r \cdot \sin \vartheta \quad (28)$$

transzformációval polár koordinátákra (16. ábra). Ezzel a (27a,b) feladat az alábbi alakot ölti:

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} = -g, \right\} \quad (29a)$$

$$\left. \left(\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} F \right) \Big|_{r=R} = -a. \right\} \quad (29b)$$

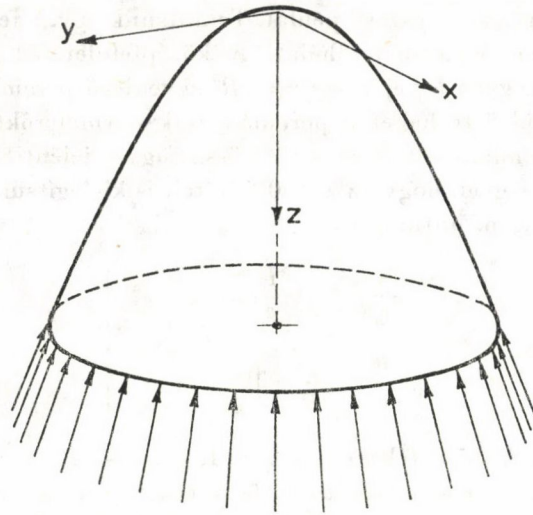
Tekintsük most a (29a,b) feladathoz tartozó

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} = 0, \right\} \quad (30a)$$

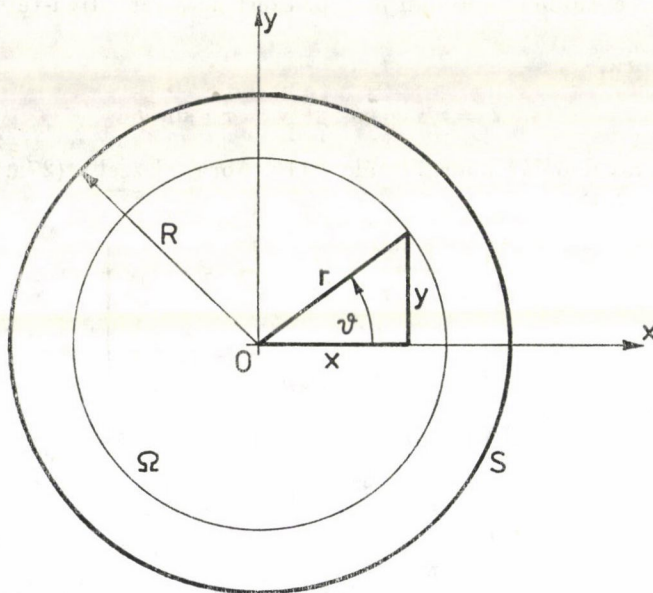
$$\left. \left(\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} F \right) \Big|_{r=R} = 0 \right\} \quad (30b)$$

homogén feladatot. Behelyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a (30b) peremfeltételnek minden $\bar{F} = r \cdot f(\vartheta)$ alakú függvény eleget tesz. Helyettesítsük be \bar{F} -et a (30a) egyenletbe. Ekkor a

$$\frac{d^2 f}{d\vartheta^2} + f = 0 \quad (31)$$



15. ábra. A peremén normális irányban megtámasztott forgásparaboloidhéj



16. ábra. A héj alaprajza és a koordinátarendszerek

közönséges differenciálegyenlethez jutunk, amelynek lineárisan független megoldásai: $f_1 = \sin \vartheta$ és $f_2 = \cos \vartheta$. Így a (30a,b) feladat két lineárisan független megoldása a következő:

$$F_1 = r \cdot \sin \vartheta, \quad F_2 = r \cdot \cos \vartheta. \quad (32)$$

Most nézzük meg, hogy teljesül-e a (32) függvényekre a (24) kompatibilitási feltétel. Mivel esetünkben $\varphi = -a$ ($a = \text{állandó}$), ezért az F_1 -nek, ill. az F_2 -nek a (24) egyenletbe való behelyettesítése után, a (28) összefüggések figyelembevételével az alábbi egyenleteket nyerjük:

$$\iint_{\Omega} g \cdot y \, dx \, dy = 0, \quad \iint_{\Omega} g \cdot x \, dx \, dy = 0. \quad (33)$$

A (33) egyenletek azt fejezik ki, hogy a g felületi tehernek mind az x , mind az y tengelyre vett nyomatéka nulla tartozik lenni. A felületi terhek G eredőjének tehát át kell mennie a koordinátarendszer kezdőpontján, azaz az alapkör centrumán, azon a ponton, amely a perem menti redukált normálerők hatásvonalainak közös metszéspontja. Ekkor a héj membránállapotban van, de a belső erők nincsenek egyértelműen meghatározva. A feladat ekkor statikailag határozatlan.

Ha a g teherfüggvényre a (33) egyenletek nem teljesülnek, azaz a g teher eredője nem megy át az alapkör centrumán, akkor a héj nem lehet membránállapotban.

A (33) kompatibilitási feltételek tulajdonképpen a héjnak mint merev testnek az egyensúlyi feltételei. A vizsgált héj csak akkor lehet egyensúlyban, ha a g felületi teher G eredőjének hatásvonala átmegy a perem menti normálerők hatásvonalainak a közös metszéspontján (17. ábra). Ha a felületi teher eredője nem megy át ezen a közös metszésponton (a 17. ábrán az eredőnek ezt a helyzetét a G' vektor mutatja), akkor a héj nem lehet egyensúlyban, és ebből következően membránállapotban sem.

Megemlítjük, hogy az alkotóirányban megtámasztott kúpoknál hasonló a helyzet [23].

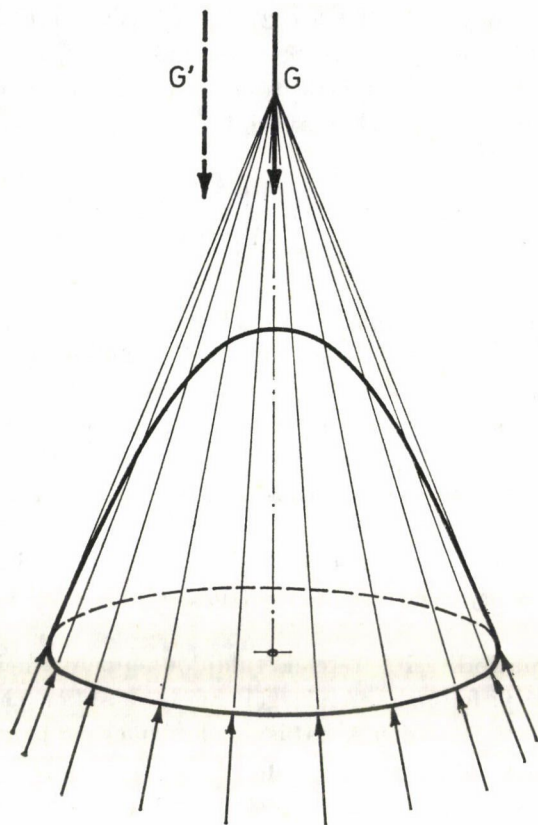
Az ebben a szakaszban vizsgált megtámasztási mód különböző eseteivel GOL'DENVEJZER is foglalkozott ([12] 186. és 202. o.).

3.4. A vegyes peremérték-feladat

Mint ahogy a 3. szakasz bevezetőjében említettük, az (1) egyenletre vonatkozó vegyes peremérték-feladaton az olyan feladatot értjük, amelynél az

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial i} + \beta F = \varphi \quad (34)$$

peremfeltételben, az S perem egy-egy szakaszán eltűnik az α vagy a β anélkül, hogy α vagy β a teljes peremen azonosan nulla lenne.



17. ábra. A héra ható erők

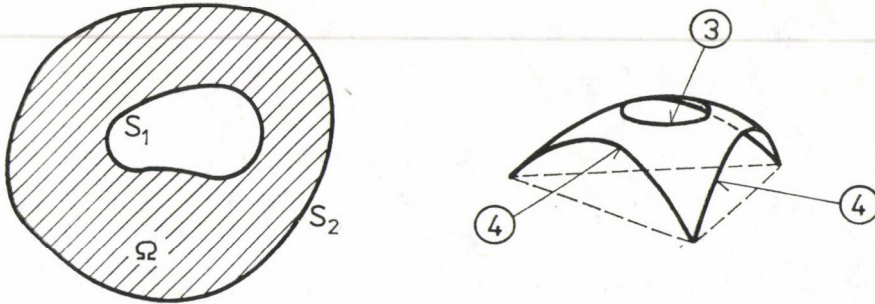
Ha az Ω korlátos tartomány egyszeresen összefüggő, és az S perem néhány szakaszán $\beta = 0$, akkor ennek a vegyes feladatnak a megoldhatósága a 3.3. szakaszbeli alternatíva-tétel alapján dönthető el.

Jóval bonyolultabb ennél az a feladat, amikor az Ω korlátos tartomány egyszeresen összefüggő, és az S perem néhány szakaszán $\alpha = 0$. Az ilyen típusú vegyes peremérték-feladat megoldhatóságára vonatkozóan [16] tartalmaz néhány irodalmi utalást (lásd az idézett mű 233–235. oldalait).

Ha az Ω kétszeresen összefüggő korlátos tartomány, melyet az S_1 és S_2 , közös résszel nem rendelkező peremek határolnak ($S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$), és a keresett F függvény adott az S_1 peremen, a (34) összefüggés pedig az S_2 peremen (feltéve, hogy $i \equiv \nu$), akkor F -et potenciál-alakban lehet felírni, és ennek alapján lehet megvizsgálni, hogy a feladat megoldható-e ([16] 233. o.).

Így pl. a kanonikus alakú (1) egyenlet mindig megoldható a 18. ábrán feltüntetett tartományon, ha az S_1 peremén F , az S_2 peremén pedig $\partial F / \partial n$ értékei vannak előírva [20]. Ennek alapján egy sokszögalaprajz feletti forgáspara-

a.



18. ábra. a) Kétszeresen összefüggő tartomány. b) Háromszögalaprajz feletti elliptikus héj felülvilágító nyílással. ③ csak húzás-nyomásnak ellenálló peremgerenda, ④ nyírórómentes perem

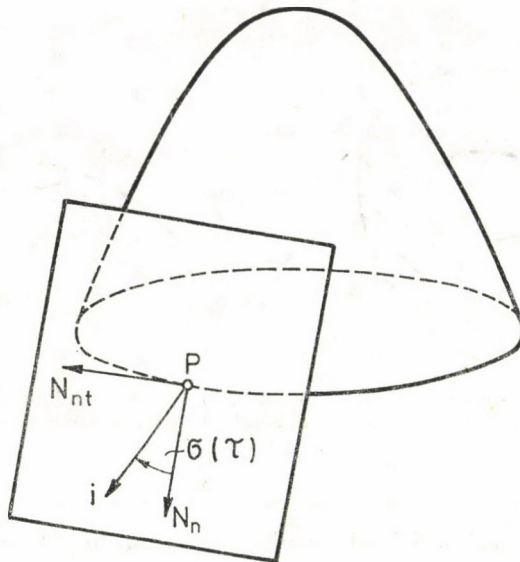
boloidhéj felülvilágító nyílással mindig membránállapotban lehet, ha a felülvilágító nyílást csak húzás-nyomásnak ellenálló peremgerenda szegélyezi, és a héj külső pereme nyírórómentes. A felülvilágító nyílás peremén természetesen most is megfelelő függőleges élterhet kell működtetni. Egy ilyen héjat szemléltet a 18b. ábra háromszögalaprajz esetén.

4. Peremfeltételek az elliptikus membránhéjak egyensúlyi egyenletrendszerére esetén

Vizsgálatainkat a membránhéjak Pucher-féle differenciálegyenletének segítségével végeztük. Végezetül — ha csak utalásszerűen is — ejtsünk szót a tárgyalás másfajta lehetőségéről.

A membránhéjak tárgyalásának másik módja, ha a metszeterőkre felírt differenciálegyenlet-rendszert alkalmazzuk ([12] 106. o.). Ezekben az egyenletekben a metszeterők az ismeretlenek, így a peremfeltételeket közvetlenül a metszeterők kifejezéseivel lehet megadni. Tekintsük egy elliptikus héj érintősíkját a héj \bar{S} peremének egy P pontjában. Jelöljük ki az érintési pontban az érintősíkba eső, a peremgörbére merőleges és a peremgörbét érintő irányt. A merőleges irányba mutató normálerőt jelöljük N_n -nel, az érintőirányba mutató nyíróróert N_{nt} -vel. Adjunk meg továbbá az érintési pontban egy, az érintősíkba eső i irányt, amely a normális irányhoz $\sigma(\tau)$ szög alatt hajlik (19. ábra). Ekkor a peremgörbén általános esetben az alábbi peremfeltételt lehet előírni ([12] 201. o., [26] 81. o.):

$$N_n \cos \sigma(\tau) + N_{nt} \sin \sigma(\tau) = \gamma(\tau), \quad \tau \in \bar{S}. \quad (35)$$



19. ábra. A peremgörbéhez tartozó kitüntetett irányok a héj érintősíkjában

Ez a feltétel magában foglal két fontos esetet:

- 1) ha $\sigma(\tau) = 0$, akkor $N_n = \gamma(\tau)$,
- 2) ha $\sigma(\tau) = \frac{\pi}{2}$, akkor $N_{nt} = \gamma(\tau)$.

Így tehát előírható $\gamma(\tau) = 0$ esetén, hogy a héj pereme legyen oldalnyomásmentes, ill. nyíróerőmentes.

A membránhéj peremérték-feladata egyszerűen és többszörösen összefüggő tartományokra is értelmezve van. Ezen belül természetesen a vegyes feladat is. Legyen például a héj kétszeresen összefüggő. Álljon a \bar{S} perem két, közös résszel nem rendelkező görbéből: $\bar{S} = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$. Ekkor előírható, hogy legyen $N_n = \gamma_1(\tau)$ \bar{S}_1 -en és $N_{nt} = \gamma_2(\tau)$ \bar{S}_2 -n.

ВЕКУА [26, 27] a fenti feladatok megoldhatóságának feltételeit komplex interpretációban adja. Külön foglalkozott azzal az esettel, amikor a héj peremén előírjuk az N_n normálerő eloszlását. Vizsgálatai szerint ilyen peremfeltétel mellett egy elliptikus héj egyszerűen összefüggő tartomány felett csak akkor lehet membránállapotban, ha teljesülnek bizonyos ([18] alakú) integrálfeltételek. Hasonló a helyzet kétszeresen összefüggő tartomány esetében is. Ha a tartomány háromszorosan vagy ennél többszörösen összefüggő, akkor a héj mindig membránállapotban van. A héj membránállapota azonban nem egyértelmű, mert ha a tartomány $m + 1$ -szeresen összefüggő, akkor a metszeterők kifejezésében $3m - 3$ valós állandó szerepel, melyeknek az értéke tetszőleges.

IRODALOM

1. BECKENBACH, E. F.: Modern matematika mérnököknek. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1960 (6. fejezet)
2. BELEŞ, A. A.—SOARE, M. V.: Das elliptische und hyperbolische Paraboloid im Bauwesen. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin; Academic-Verlag, Bukarest 1971 (S. 238.).
3. BERGMAN, S.—SCHIFFER, M.: Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. Academic Press, Inc., New York 1953
4. BITSADZE, A. V.: Boundary Value Problems for Second Order Elliptic Equations. North-Holland Publishing Co. Amsterdam 1968
5. CSONKA P.: Forgásparaboloid szerint alakított fülkehéjak. *MTA VI. Oszt. Közl.* 28 (1961), 55—59
6. CSONKA P.: Membránhéjak teljesen szabad peremmel. *MTA VI. Oszt. Közl.* 31 (1962), 213—215
7. CSONKA P.: Süveghéjak feszültségfelületének peremvonaláról. *MTA VI. Oszt. Közl.* 34 (1964), 367—372
8. CSONKA P.: Forgásparaboloid alakú héj külpontos elhelyezkedésű köralaprajzú nyílással. *MTA VI. Oszt. Közl.* 33 (1964), 243—259
9. CSONKA P.: Kör alaprajzú felülvilágítóval bíró forgásparaboloidhéjak peremgerendájáról. *MTA VI. Oszt. Közl.* 34 (1964), 1—5
10. CSONKA P.: Szabályos sokszögalaprajzú forgásparaboloidhéjak köralakú felülvilágító nyílással. *Műszaki Tudomány* 48 (1974), 167—185
11. EIBL, J.: Zur Anwendung konformer Abbildungen in der Membrantheorie bei Schalen nach Flächen 2. Ordnung mit positiver Gauss— Krümmung. Werner-Verlag, Düsseldorf 1969
12. Гольденвейзер, А. Я.: Теория упругих тонких оболочек. Гос. Изд. Техничко-Теор. Лит., Москва 1953
13. HADAMARD, J.: Le probleme de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques. Ed. Hermann, Paris 1932
14. MENYHÁRD I.: Héjszerkezetek számítása és szerkesztése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1966
15. MIHLIN, Sz. G.: Integrálegyenletek és alkalmazásuk a mechanika, a matematikai fizika és a technika egyes problémáira. Akadémiai Kiadó, Budapest 1953
16. MIRANDA, C.: Partial Differential Equations of Elliptic Type. 2nd Ed. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970
17. MIRANDA, C.: Levélbeli közlés.
18. PETROVSKIJ, I. G.: Előadások a parciális differenciálegyenletekről. Akadémiai Kiadó, Budapest 1955
19. PFLÜGER, A.: Elementare Schalenstatik. Springer-Verlag, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957
20. SNEDDON, I. N.: Elements of Partial Differential Equations. McGraw-Hill Book Company, New York—Toronto—London 1957
21. SZMODITS K.: Statik der Schalenkonstruktionen. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1966
22. TARNAI T.: A héjak membránállapotának létezési és egyértelműségi feltételeiről. I. Hiperbolikus héjak. *Műszaki Tudomány* 56 (1978), 19—47
23. TARNAI T.: A héjak membránállapotának létezési és egyértelműségi feltételeiről. II. Parabolikus héjak. *Műszaki Tudomány* 56 (1978), 169—192
24. ТУИОНОВ, А. Н.—СЗАМАРСКИИ, А. А.: А математикай физика дифференциáлеыенleteй. Akadémiai Kiadó, Budapest 1956
25. TOLOTTI, C.: Sul problema di Cauchy. Atti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei. Rendiconti Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. Serie 6ª, Vol. XXIX (1939), 119—125
26. VEKUA, I. N.: Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben mit einer Anwendung in der Theorie der Schalen. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956
27. VEKUA, I. N.: Über die Bedingungen der Verwirklichung des momentenfreien Spannungsgleichgewichtes von Schalen positiver Krümmung. IUTAM. Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells. North-Holland Publishing Comp., Amsterdam 1960, 270—280

On the Existence and Uniqueness Conditions of the Membrane State of Shell Structures — III. Elliptic Shells. It is investigated whether at the edges of a shell structure subjected to vertical forces arbitrarily distributed, what conditions of support should, i.e., might be prescribed in

order to bring the shell into a statically determinated membrane state. In the two first parts of the paper published earlier the existence and uniqueness conditions of the solution to the membrane-shell equations have been investigated in connection with hyperbolic and parabolic shells. In the third part at hand, the results of the investigations carried out in connection with elliptic shells are dealt with.

Über die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen des Membranzustandes von Schalenkonstruktionen — III. Elliptische Schalen. Die Abhandlung befaßt sich mit dem Problem ob und welche Unterstützungsbedingungen man für eine an den Rändern einer durch beliebig verteilte, senkrechte Kräfte belasteten Schale vorschreiben sollte bzw. dürfte, um die Schale in einen statisch bestimmten Membranzustand zu bringen. Im früher erschienenen ersten und zweiten Teil der Abhandlung wurden die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen der Lösung der Membranschalen-gleichung in Zusammenhang mit den hyperbolischen und parabolischen Schalen untersucht. Im vorliegenden dritten Teil der Abhandlung werden die Ergebnisse der in Zusammenhang mit den elliptischen Schalen durchgeführten Untersuchungen dargelegt.

AZ ÖNTVÉNYMINŐSÉG JAVÍTÁSÁNAK TERMÉSZETTUDOMÁNYOS ALAPJAI*

PROHÁSZKA JÁNOS**

AZ MTA LEV. TAGJA

[Beérkezett 1979. május 15-én]

A dolgozatban az öntvénygyártás fő feladatainak 1. nagyszilárdságú 2. méretpontos és 3. gazdaságos termékeknek az előállításával kapcsolatos anyagtudományi ismeretanyagot állította össze a szerző. A szilárdságnövelés valamennyi, a diszlokációs elméletből ismert mechanizmusa említésre kerül, mérlegelve azt, hogy a különböző öntvényanyagoknál melyek a könnyen és jól felhasználhatók. A méretpontosságot a lehülés során bekövetkező fajtérfigatváltozás szabja meg. Fajtérfigatváltozásra vezet a fázisátalakulásokon kívül a hőmérséklet és koncentrációváltozás mindenkor, ha az nem egyenletes és azonos mértékű a termék minden pontjában és minden időben. A jó önthetőséget az ömledék viszkozitása szabja meg. A dolgozatban bemutatásra kerülnek azok a kétalkotós ötvözetrendszerek, melyeknek a viszkozitása a dermedés során viszonylag keveset változik.

Az öntvénygyártás feladata, hogy

- a) nagyszilárdságú
- b) méretpontos és
- c) olcsó

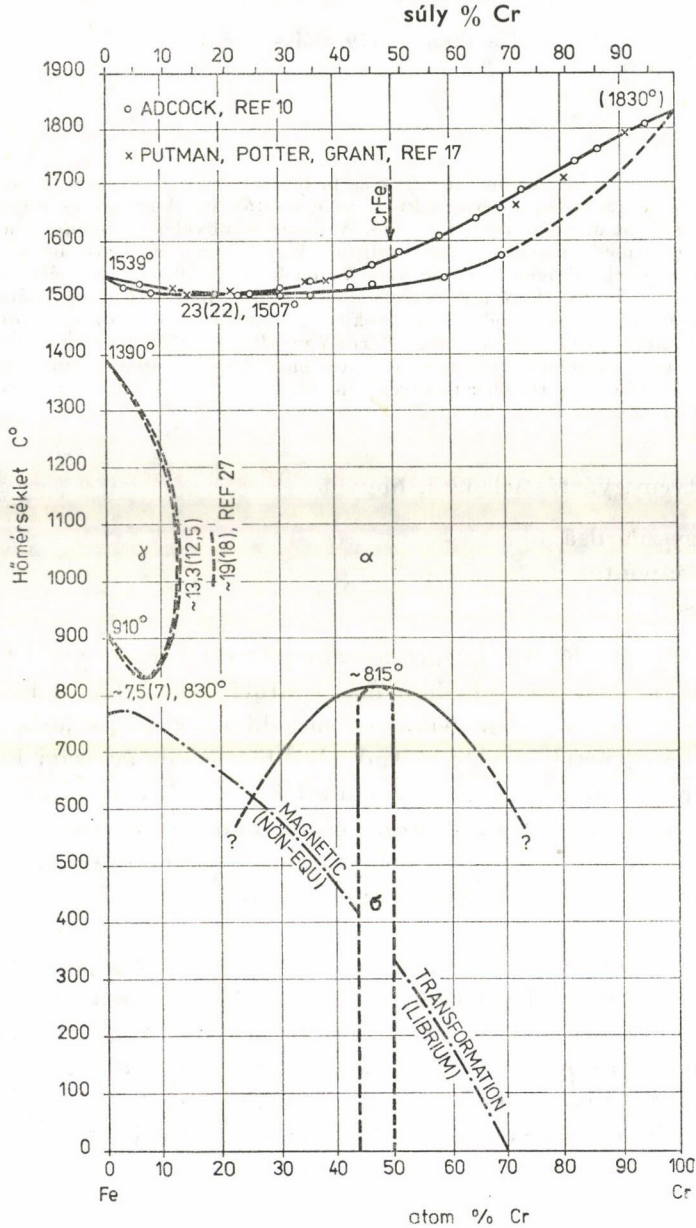
termékeket állítson elő. Az anyagtudomány (material science) és a fizikai fém-tan (physical metallurgy) fejlődése már eljutott arra a fokra, hogy minden olyan kérdésre, amely a fenti feladatok megoldásával kapcsolatban felmerül, többé-kevésbé egyértelmű választ tud adni, bár gazdaságossági kérdésekben sokkal inkább a tapasztalati, a gyakorlati ismeretek dominálnak. Ezért az öntvénygyártás gazdaságossági problémáival nem foglalkozunk, bár annak jelentősége szinte felbecsülhetetlen éppen annak következtében, hogy a gépiparra, egyik legnagyobb termelési ágazatunkra megszabó módon rányomja bélyegét.

A következőkben az anyagismereti eredmények alapján megkíséreljük összefoglalni azokat az alapelveket, amelyek utalást adnak a szilárdságnövelés és a méretpontosság fejlődési irányaira. Mindenekelőtt meg kell említeni, hogy minden elméleti eredmény ezen a területen bizonyos mértékig csak kiegészíti azokat a korábbi tapasztalati eredményeket, amelyek a fémekkel és ötvöze-teikkel kapcsolatban már évezredek óta felhalmozódtak és mennyiségük növekedése mind a mai napig tart.

* A IX. öntőnapokon, Kecskeméten 1979. április 26-án megtartott előadás.

** Prof. Dr. Prohászka János, 1118 Budapest, Rozmaring u. 9.

A szilárdságnövelés — úgy véljük — valamennyi lehetséges módját a diszlokációs elmélet meghatározta [1]. Nagyon valószínűtlennek tűnik, hogy a közeljövőben új lehetőségeket tárnának fel a kutatók. A lehetséges szilárdságnövelő módszereket a későbbiek során röviden áttekintjük.



I. ábra

A méretpontos öntvények előállításának a feltételeit tudomásunk szerint még nem foglalták össze. Nagyon egyszerű lenne azt kijelenteni, hogy az öntvényeket olyan ötvözetekből kell készíteni, amelyek a megdermedés után egyfázisúak és bennük második fázis sem allotróp módosulatváltozással, sem kiválással, sem egyéb módon nem keletkezik. Az ilyen öntvények méretei az ismert hőtágulási együtthatók alapján minden különösebb nehézség nélkül számíthatók és megtervezhetők.

A Fe—Cr ötvözetrendszerben (1. ábra) a $13 \div 25$ Cr súlyszázalék-tartományba eső ötvözetekben teljesül az a feltétel, hogy bennük, a megdermedés után nem megy végbe fázisátalakulás. Ezért bennük a későbbiek során pl. hőmérsékletváltozás hatására maradó térfogat-, ill. méretváltozás nem következik be. Természetesen a hőtágulásból eredő méretváltozást elkerülni nem lehet. Azonban, ha hőmérsékletkülönbségek az öntvényben nem alakulnak ki, akkor az öntvény hőmérsékletének növelése vagy csökkenése csak a már említett számítható méretváltozást okozza.

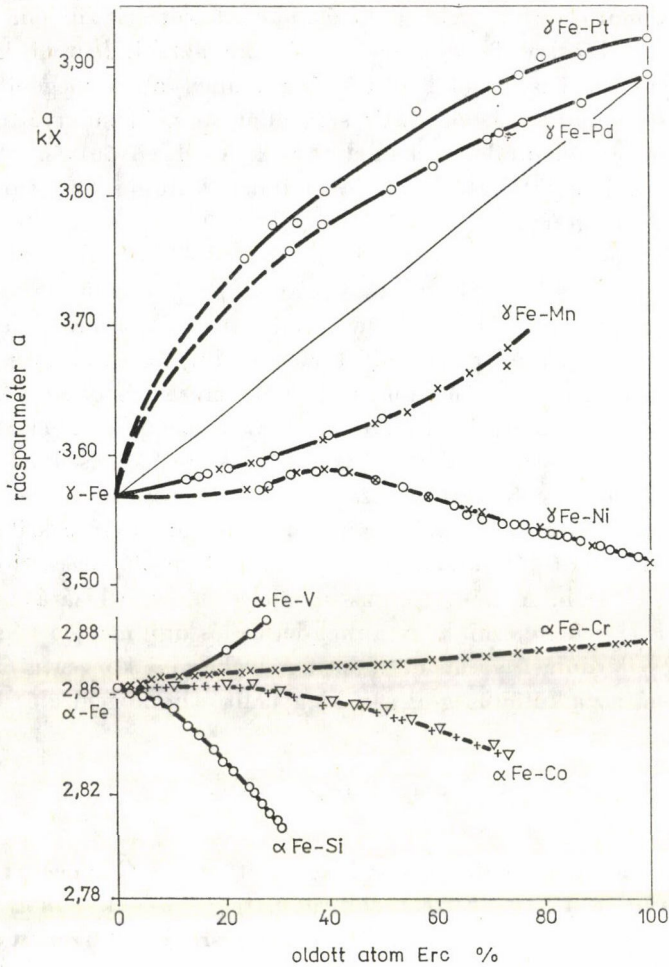
A méretpontosság biztosításának érdekében azonban a szilárd halmazállapotban végbemenő fázisátalakulás elkerülése nem elégséges, további szigorításra is szükség van. A második fázis megjelenésének a kizárása nem elégséges, még azt is el kellene érni, hogy a megdermedés úgy menjen végbe, hogy az ömledék megszilárdulása során ne keletkezzék kémiai koncentrációkülönbség az öntvényben. Ez a különbség ugyan kiegyenlítő (homogenizáló) hőkezeléssel eltüntethető, de az

$$a_{\delta} = a_A + (a_B - a_A)C \quad (1)$$

Vegard [2] szabálynak megfelelően a kiegyenlítődé, a C koncentrációkülönbségnek az eltűnése a kristályszerkezet rácsparaméterének a megváltozásával jár, ami elkerülhetetlenül helyi fajtérfogatváltozásra és rendszerint az öntvénynek az elhúzóására, a méretek megváltozására vezet.

Ebben az egyenletben a_{δ} az öntvény, a_A az egyik, a_B pedig a másik alkotó rácsparaméterét, C pedig az ötvözet koncentrációját jelenti. A 2. ábra néhány vasötvözet rácsparaméterét mutatja [3] a koncentráció függvényében. Állításunkat nagyon szemléletesen mutatja a Fe—Ni ötvözetek példája. Tegyük fel, hogy a Ni tartalom 40% és a megdermedésnél 30 ÷ 60% közötti koncentrációegyenlőtlenség alakult ki. Mind a 30%, mind a 60%-hoz közeli koncentrációknál a rácsparaméter a koncentráció kiegyenlítődéknél megnő [4] és ez az öntvény duzzadását okozza.

A legnagyobb gondosságot követeli a szilárd állapotban végbemenő, fázisátalakulásokkal járó térfogatváltozás. Először tekintsük az olyan fázisváltozásokat, melyek az öntvény teljes térfogatában egyenletesen mennek végbe. Tegyük fel, hogy az öntvény olyan kétalkotós ötvözetrendszerhez tartozik, mint amilyent a 3. ábra mutat.



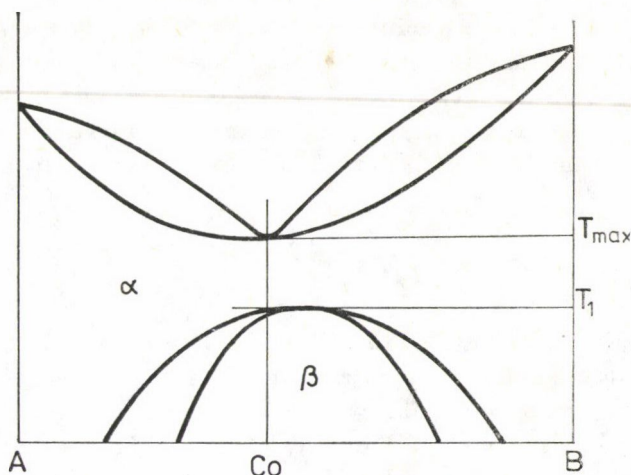
2. ábra

Ha ebből az ötvözetből C_0 koncentrációjú öntvény készül és annak alakja olyan, mint amelyet a 4. ábra mutat, valamint, ha sikerül betartani azokat a feltételeket is, amelyeket a korábbiakban említettünk, akkor az ilyen öntvényben nincsenek koncentráció inhomogenitások.

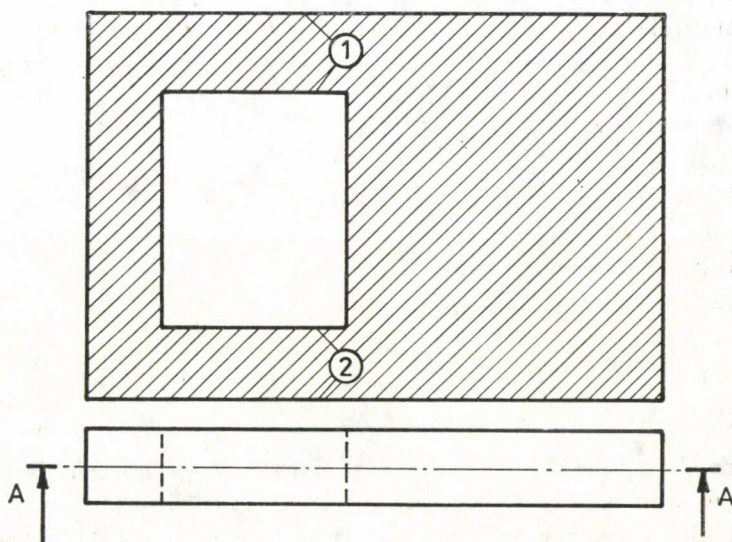
Addig, amíg a lehűlésnél a T_1 hőmérsékletet az öntvény el nem éri, méretváltozásra is csak annyira kell számítani, amennyit a

$$\Delta l = l_0 \alpha \cdot \Delta T \quad (2)$$

összefüggés megad. Itt a Δl az öntvény valamilyen l_0 méretének a változását jelenti ugyanolyan mértékegységben, mint az l_0 , α az ötvözet hőtágulási együtt-



3. ábra



4. ábra

hatója, amely azt mutatja meg, hogy $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ hőmérsékletkülönbségre az egységnyi hosszúságú anyag mennyire húzódik össze, ΔT pedig a T_m dermedési hőmérséklet és a T_1 második fázis megjelenésének hőmérsékletéhez tartozó hőmérsékletkülönbség. Ez a méretváltozás az öntvény minden részére érvényes, és ha az öntvényben a lehűlés során nem alakulnak ki hőmérsékletkülönbségek, akkor az öntvény alakját megtartja, csupán az említett mértékben egyenletesen zsugorodik.

Ha azonban az öntvény mint, legtöbbször — és ebben a példában is — különböző falvastagságú, akkor a különböző részek hőmérséklete is különböző lesz. Ez már maradó méretváltozásokra vezethet. A maradó méretváltozás megindulásának a kritériuma az, hogy a termikus különbségekből adódó feszültségek elérik-e a darabnak az adott hőmérséklethez tartozó folyáshatárát. Ugyanis a

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta T = \sigma E \quad (3)$$

összefüggés szerint az l_0 hosszúságú vékonyabb falban σ húzófeszültség ébred, amely képlékeny alakváltozásra vezet, ha ez a szóban forgó hőmérséklethez tartozó folyáshatárt meghaladja. Így tehát a falvastagságok függvényében megadható, hogy mekkora $\Delta T/T$ hőmérséklet-különbséget engedhetünk meg a lehűlés során annak veszélye nélkül, hogy az öntvény maradó alakváltozást szenvedne. Ha a hőmérséklet-különbség a falakban a kritikusnál nagyobb, akkor a vékonyabb rész maradónan megnyúlik, majd a teljes lehűlésnél ez a rész, ennek következtében hosszabb a vastagabb rész hosszánál, ami részben a külső részt nyomásra, a vastagabb részt pedig húzásra terheli. Ez már elhúzódnásra vezethet, a külső rész pl. kihajolhat, az l és 2 felület pedig meggörbül.

Ha a T_i hőmérsékletig nem következett be méretváltozás, és sikerül az öntvény minden részében ugyanazt a hőmérsékletet egyenletes lehűléssel fenntartani, akkor a fázisátalakulás megindulása a T_1 hőmérsékletnél nem vezet méretváltozásra, annak ellenére, hogy az öntvény anyaga kétfázisúvá válik, és a két fázis fajtérfogata nem azonos.

Ha az α fázis fajtérfogata U_α , a β fázisé V_β , akkor az ötvözet fajtérfogata

$$V_0 = U_\alpha x + V_\beta(1 - x) = V_\alpha \frac{b}{a + b} + V_\beta \frac{a}{a + b}. \quad (4)$$

Itt a és b az α , ill. a β fázishoz tartozó állapotábra metszéseket jelenti a mérleg-szabályhoz. Ez abban az esetben nem okoz fajtérfogatváltozást, ha az α és a β fázis szilárd oldat, és érvényes az ötvözetre a Vegard-szabály. Sajnos, ez az arányossági törvény szigorúan nem érvényes, az átmeneti fémeket, a periódusos rendszerben a IIIB—VII B és VIII oszlopaiba tartozó elemeket (Fe, Co, Ni, Ti, Cr, Mo, W stb.) is tartalmazó szilárd oldatokban nem teljesül, sőt attól lényegesen eltér (1. a 2. ábrát). Így a szilárd oldatként kiváló második fázis is okozhat méretváltozást (bár ez sok esetben elhanyagolható).

A második fázis megjelenése, ha az vegyület (mint pl. a cementit az Fe—C ötvözetekben), mindig térfogatváltozással jár. Ugyancsak térfogatváltozást okoz az is, ha az új fázisnak a kötéstípusa eltérő. Ez következik be akkor, amikor pl. grafit kristályosodik ki az öntöttvasban. Ha ez a fázisváltozás egy homogén koncentrációjú, egyenletes hőmérsékleteloszlású öntvényben megy

végbe, akkor torzulást nem, csak homogén méretváltozást okozhat. Ezzel szemben az egyenlőtlen hőmérséklet, vagy koncentrációeloszlás elkerülhetetlen fajtérfogatváltozást okoz az öntvényben és, hogy ez a külső méretek megváltozásával és torzulással jár-e, vagy csupán maradó feszültségeket ébreszt, az attól függ, hogy mekkora volt az inhomogenitás. Erre az inhomogenitásra ugyanolyan kritériumot szabhatunk, mint amilyent az egyfázisú rendszer hőmérséklet-különbségének kritikus értékére tettünk. Azt itt érdemes megjegyezni, hogy a fázisváltozással együtt járó erőteljes atommozgás a folyáshatár nagymértékű csökkenésére vezet, és így a fázisátalakulásnál sokkal kisebb térfogatváltozást, maradó alakváltozást eredményez, mint az egyfázisú rendszerekben az a fajtérfogatváltozás, amit a hőmérséklet-különbség okoz.

Sajnos az esetek túlnyomó többségében nem tudjuk a fázisátalakulásokkal járó mérettorzulást elkerülni. Annak oka, hogy ez mégsem okoz selejtet, sokkal inkább az, hogy a mérettűrést eleve úgy adjuk meg, hogy beleférjenek az ebből adódó méretváltozások, semmint az, hogy ilyen méretváltozások nincsenek.

A fentiek alapján úgy tűnik, hogy az öntvények méretpontosságát rontja, ha

1. a kritikuskál nagyobb hőmérséklet-különbségek és
2. koncentrációkülönbségek keletkeznek a lehülés során, valamint ha
3. fázisátalakulások mennek végbe az anyagban.

Külön említést érdemel az a tény, hogy az öntvények méretének a megváltozására vezethet még szobahőmérsékleteken is részben a metastabil állapotból következő bármilyen átalakulás. Így pl. az alacsony hőmérsékletű anyagokban a kiválás, vagy a belső feszültségeknek az eltűnése. Ez különösen fontos az állandó rezgéseknek kitett gépállványoknál, melyeknek belső feszültsége éppen a mechanikus rezgetés következményeként csökken. Ha ez a belső, vagy maradó feszültségállapot aszimmetrikus, vagy maga az öntvény aszimmetrikus, akkor csaknem biztosak lehetünk abban, hogy a méretváltozás előbb-utóbb bekövetkezik.

Szilárdságnövelés

A szilárdságnövelésre szolgáló technológiai lehetőségek száma meglehetősen csekély. Mindössze öt olyan műveletet ismerünk, mellyel a fémek és ötvözetek tulajdonságait és így a szilárdságot is változtatni lehet, ezek:

- I. a kémiai összetétel megváltoztatása
- II. a hőkezelés
- III. a képlékeny alakítás
- IV. a nagyenergiájú részecskékkel való besugárzás, bombázás és
- V. a mechanikus rezgetés.

Úgy véljük, hogy a felsorolás a közeljövőben nem bővül új lehetőségekkel, mert a diszlokációs elmélet egyértelműen felderítette a fémekben azokat a mikromechanizmusokat, amelyek a szilárdságot növelik és kizártnak tűnik az újabb mechanizmusok létezése.

Mit mond az elmélet a folyáshatárnövelésről? A folyáshatár az a terhelő feszültség, amelynél a diszlokációk irreverzibilis mozgásnak indulnak. Ezt észlelik makroszkóposan a képlékeny alakváltozás megindulásának.

Ebből a definícióból egyenesen következik az a feltétel, hogy a folyáshatárt vagy úgy lehet növelni, hogy olyan anyagot állítunk elő, mely 1. nem tartalmaz diszlokációkat, vagy 2. az anyagban a megdermedéskor keletkező diszlokációk mozgását megakadályozzuk.

Az 1. követelmény, sajnos, jelenlegi technológiai ismereteink szerint csupán az ún. tűkristályok (whiskers) nál biztosítható. Ezeknek a mindössze 3–5 μ vastagsággal kristályosodó, mintegy 5 ÷ 10 cm hosszú egykristályoknak a folyáshatára megfelel az ún. elméleti folyáshatárnak, melynek értéke

$$\sigma_{elm} = \frac{G}{\pi}. \quad (5)$$

Itt G az anyag csúsztató rugalmassági modulusa. Ez az elméleti szilárdság a vasnál 2500 kp/mm², az Al-nál 850 kp/mm² és a Cu-nál 1200 kp/mm². Bár ezeket az anyagokat az említett szilárdsággal nagy mennyiségben olcsón elő lehet állítani, technológiai ismereteink szerint a műszaki gyakorlatban szokásos méretekkel előállítani mindaddig senkinek sem sikerült. A technológus számára csupán a második lehetőség marad: a diszlokációk mozgásának az akadályozása.

Vegyük a kémiai összetétel-változásból eredő lehetőségeket sorba. Az alapanyagtól különböző idegen atomok kétféleképpen vesznek részt az ötvözetben:

1. szilárd oldatban vannak jelen, vagy
2. második fázist képeznek az alapanyaggal.

A szilárd oldatban a GC -koncentrációjú idegen atomfajta

$$\Delta\sigma = G\varepsilon^2C \quad (6)$$

folyáshatárnövekedést okoz. Itt G a csúsztató rugalmassági modulus, ε pedig az ún. fajlagos atomátmérő-különbség,

$$\varepsilon = \frac{d_a - d_i}{d_a}, \quad (7)$$

ahol d_a az alapfém atomjainak, d_i pedig az idegen atomoknak a helyigénye. Itt azt érdemes megjegyezni, hogy $C_{max} = 0,5$ lehet. Ebben az esetben azonban

a Hume—Rothery-szabály értelmében az $\varepsilon \leq 12\%$ és így a maximális növekmény a G -nek $6 \cdot 10^{-2}$ -szorososa lehet. Ha az $\varepsilon > 15\%$ -nál, akkor a C -érték kicsi. Nyilván az intersztíciós oldatok adják a nagy fajlagos szilárdságnövekményt, de ezek oldhatósági határa meglehetősen kicsi. Az α -vasban pl. a szén csupán $0,02\%$ -ban oldódik az eutektoidos hőmérsékleten. Így hiába nagy az ε értéke (közel egységnyi), a C elhanyagolhatóan kis értéke miatt a ferrit szilárdságnövelésében nem játszik szerepet.

Ha az ötvözők második fázisként vannak az anyagban, akkor a szilárdságnövekedés négyféleképpen valósulhat meg. Ezek

1. kiválásos keményedés,
2. diszperziós keményedés,
3. eutektikus szövet második fázisaként és
4. rendezettrácsú szilárd oldat komponenseként növelhetik a folyáshatárt.

A kiválásokként jelenlevő második fázis szilárdságnövelő hatása az elmélet szerint

$$\Delta\sigma = 2G\varepsilon C. \quad (8)$$

Ez első pillanatra is nagyobb lehetőséget biztosít, mert az ε , mely 1-nél kisebb szám, az első hatványon szerepel. Ezen kívül a 2-es szorzó is a növekvő hatást mutatja. Azt érdemes megjegyezni, hogy az ε itt a fázisok fajlagos helyigényét jelenti. A maximális szilárdságnövekedés kb. $2 \div 10$ -szerese lehet az oldott atomok által okozottnak. Ha az ötvöző atomok diszperz második fázisként vannak az ötvözetben, amelyeknek egymástól mért átlagos távolsága l , akkor az ötvözet szilárdságát a

$$\sigma_P = \frac{bG}{l} \quad (9)$$

egyenlet adja. Itt b a legközelebbi szomszédok távolsága, amit gyakran atomátmérőnek neveznek, egyébként a diszlokációknak ún. Burgers-féle vektora, l pedig a kiválások átlagos távolsága. Ennek lehetséges szélső értéke azonos lehet a szilárd oldatban levő idegen atomok hatásával.

Két megjegyzést még ezzel kapcsolatban tenni kell. Először, a nemzetközi irodalomban *diszperz fázisnak* azt nevezik, amelynek mennyisége a hőmérséklettől független. Pl. az Al-ötvözetekben az $MgSi_2$ második fázis mennyisége a hőmérséklet növekedésével csökken. Ezt *kiválásnak* nevezi az irodalom. Ezzel szemben az Al-ban az Al_2O_3 részecskéket, melyek kötése olyan erős, hogy azt a hőmérsékletnövelés ebben a rendszerben megbontani nem tudja és ezért mennyisége független a hőmérséklettől, *diszperz részecskének* nevezzük. Második megjegyzésünk arra vonatkozik, hogy bár az ilyen ötvözetek előállítása bonyolultabb, mint az ugyanilyen szilárdságnövelést biztosító szilárd oldat-

té, mégis széleskörűen felhasználják azért, mert az ilyen diszperzis keményedés a hőmérséklettől csaknem független. Ennek megfelelően nagyobb hőmérsékleten, főleg statikus terhelésnél a szilárdsága, terhelhetősége messze meghaladja a szilárd oldatok és a kiválásosan keményíthető ötvözetek szilárdságát.

Az eutektikus fázisban jelenlevő ötvözők szilárdságnövelő hatásáról csak akkor tudunk valamit mondani, ha az eutektikum mindkét fázisa képlékenyen alakítható. Ebben az esetben az ötvözet, az eutektikum szilárdsága a

$$\sigma_e = f_\alpha \sigma_\alpha + f_\beta \sigma_\beta \quad (10)$$

összefüggés szerint számítható. Itt az eutektikum két fázisból, az α és β fázisokból áll, f_α az egyik, f_β a másik fázis mennyisége, míg az α fázis folyáshatára σ_α , a β -é pedig σ_β . Ezenkívül természetes, hogy $f_\alpha + f_\beta = 1$. Egyébként a peritektikus ötvözetekben a folyáshatár ugyancsak a fenti összefüggésből számítható.

Az ötvözőatomoknak negyedik szilárdságnövelő mechanizmusa a rendezettrácsú szilárd oldat kialakulásánál játszik szerepet. Így pl. a sárgarézben a térben középpontos köbös β fázisnak alacsony hőmérsékletű kristályaiban a Cu-atomok az elemi cella sarkain, a Zn-atomok pedig a testátló középpontjában foglalnak helyet.

A rendezettrácsú szilárd oldatok folyáshatárának a meghatározására a

$$\sigma = \frac{2\gamma}{l} \quad (11)$$

egyenlet használható. Itt γ az ún. antifázishatár felületi energiája, l pedig a rendezett tartomány átlagos mérete. A szilárdságnövelésnek ez a mechanizmusa — értékére nézve — nagyjából hasonló a szilárd oldatok hatásával.

Az eddigiekben az idegenatomokkal az ötvözés révén elérhető folyáshatárnövekedési mechanizmusok mindegyike sorra került, van azonban még egy olyan lehetőség, amelyben az ötvözésnek igen fontos szerep jut. Ez a martenzites átalakulás. Itt azonban más fontos eredmények is megszületnek a folyáshatárnövekedést, és ezért előbb ezeket kell megemlíteni.

A krisztallithatárok a diszlokációk mozgását akadályozzák, és ezt a hatástukat a jól ismert Petch-egyenlet fejezi ki:

$$\sigma = \sigma_0 + K d^{-\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Itt σ_0 egy, az anyagra jellemző érték, amely tulajdonképpen az egykristályokban a diszlokációk mozgását megindító és fenntartó külső feszültség, K egy állandó, d pedig a krisztallitok átlagos átmérője. A krisztallithatárokhoz hasonló folyáshatásnövekedést okoznak az ikerhatárok és a rétegződési hibák is.

Végül utolsó lehetőségként az egyik leghatásosabb mechanizmus, a képlékeny alakítás maradt és ez a kovácsolható öntvények szilárdságnövelésére nagyon jól felhasználható. A képlékeny alakváltozásnál a diszlokációk ρ sűrűsége nagymértékben megnő, és mivel a diszlokációk egymás mozgását is nehezítik, a diszlokációsűrűség növekedésével a folyáshatár a

$$\sigma = Gbp \sqrt{\rho} \quad (13)$$

egyenlet szerint változik. Itt p egy az egységhez közel eső számérték. Ennek a mechanizmusnak a hatása a kiválasos keményedés hatásával mérhető össze.

Most már valóban az összes lehetőség szerepelt és az 1. táblázat tartalmazza, hogy az egyes mechanizmusokkal milyen maximális folyáshatárnövekmény érhető el. Ebből kitűnik, hogy ha csak a folyáshatárnövekmény szabja meg a választást, akkor a legnagyobb hatás a kiválasos keményedéssel és a képlékeny alakítással érhető el, feltéve, hogy a szilárdságnövelést csak egy mechanizmus okozza.

A már említett martenzites átalakulás során azonban több mechanizmus együttesen hat és néhány ötvözetben, elsősorban az acélokban, ez a hatás igen nagyfokú. Mai ismereteink szerint ez a leghatásosabb szilárdságnövelő lehetőség. Vegyük sorra, hogy egy ilyen átalakulásnál milyen mechanizmusok mekkora szilárdságnövekedést okoznak.

A szilárdságnövelő eljárás	Folyási határ
Elméleti	$3 \cdot 10^{-2}G$ $3 \cdot 10^{-1}G$
Az oldott atomok hatása	$10^{-3}G$
A kivált szemcsék hatása	$10^{-2}G$
A diszperz szemcsék hatása	$10^{-3}G$
A rendezettrácsú szilárd oldat hatása	$10^{-3}G$
A szemcseméret hatása	$10^{-3}G$
A képlékeny alakítás okozta keményedés	$10^{-2}G$
A martenzites átalakulás hatása	$10^{-2}G$ $10^{-1}G$

A martenzites átalakulást gyakran diffúzió nélküli átalakulásnak is nevezik, mert az így keletkező szilárd oldatnak a kémiai összetétele ugyanolyan, mint azé a fázisé, amelyből keletkezett. Ez azért okoz nagy szilárdságnövekedést, mert a 6.

$$\Delta\sigma = G \varepsilon^2 C$$

összefüggésben az ε közel 1 az acélban a szénre és a nitrogénre, a C pedig 0,89, ill. 1% is lehet. Ez egy nagyságrenddel nagyobb, mint ami a szubsztitúciós

szilárd oldattal elérhető. Ehhez járul még az a hatás, ami az ausztenit és a martenzit megszabott kristályorientációs kapcsolatából ered. Mivel a kristályorientáció adott, egy martenzitkristallit nem nőhet túl az ausztenit határán, sőt az újonnan keletkező martenzitkristallitok egymás növekedését is akadályozzák, ezért átlagos kristallitméretük a d legalább 1 nagyságrenddel kisebb, mint azé az ausztenité, amiből keletkeztek és így szilárdságnövekedésük a (12).

$$\sigma_0 + K d^{-\frac{1}{2}}$$

összefüggés miatt is nagyon megnő, nem beszélve arról, hogy a martenzit kristallitokban rendkívül sok az ikerhatár is.

Végül az ausztenit és a martenzit fajtérfogat-különbsége miatt maradó alakváltozás is végbemegy az átalakulás során és ez a diszlokációsűrűséget a becslések szerint 10^{12} cm^{-2} -re növeli. Így a martenzites átalakulás során az egymás mellett végbemenő hatások az ilyen anyagok folyáshatárát 6000 MP (600 kp/mm^2) értékre is felemelik (maraging acélok).

Joggal vetődik fel ezek után az a kérdés, hogy mit lehet ezekből az öntvénygyártásban hasznosítani. Már a ma járatos öntvényeknél is sokat, de még inkább majd azokban az anyagokban, melyek a jövőben ismertté válnak a kutatások során. Ezek rendjéről is mondhatunk valamit. Ebből azonban még az önthetőséget is meg kell említeni.

Az öntvények anyagától jó önthetőséget követelünk, ami tulajdonképpen egyrészt a viszkozitás lehető legalacsonyabb értékét jelenti, másrészt pedig azt, hogy a viszkozitás ne változzék addig, amíg az ömledék a formát ki nem töltötte. A viszkozitási együtthatót, az η -t, a

$$\tau = \eta \frac{v}{d} \quad (14)$$

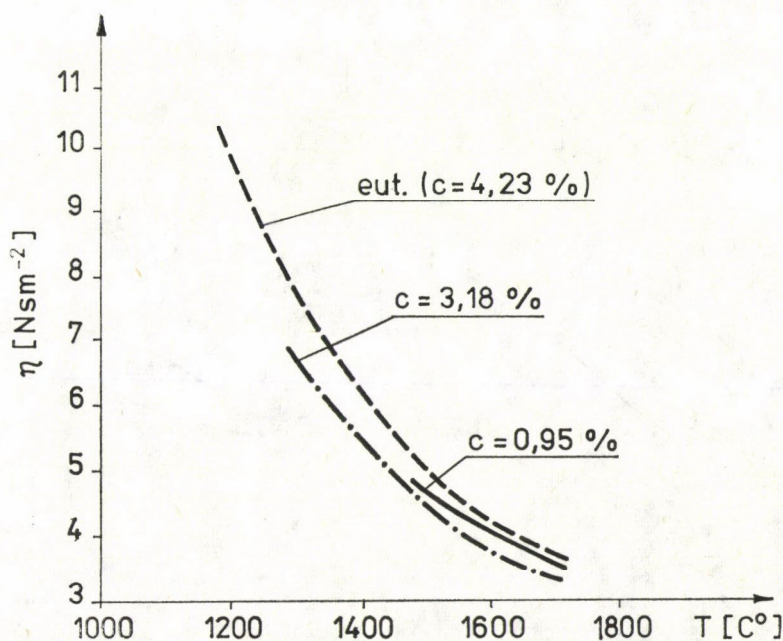
összefüggés határozza meg, ahol egy newtoni folyadékban az egymástól d távolságra levő két párhuzamos, és egymáshoz képest v sebességgel elmozduló felület között τ feszültség ébred. Minél kisebb az η , annál könnyebben mozdulnak el egymáson a folyadékrétegek, illetve a folyadék részecskéi és annál jobban önthető a folyadék, annál gyorsabban kitölti a rendelkezésre álló formát.

Mit mond ez az anyagtechnológus számára? Azt, hogy pl. a lehető legapróbb egységekből kellene állnia a folyadéknak. Ebből rögtön következik, hogy a hőmérsékleti intervallumban megdermedő anyagok nem önthetők jól. Persze nagymértékű túlhevítés hatására ez javulhat, de az egyrészt energia-többlet felhasználását igényli, másrészt a lassúbb megdermedés miatt durvaszemcsés öntvényt eredményez.

A folyadékok röntgenvizsgálata azt mutatja, hogy az olvadásponton azok nem teljesen rendezetlenek, mert a felvételeken interferencia vonalak jelennek

meg. Ezekből arra következtetnek, hogy a folyadékokban — legalábbis az olvadáspont közelében — a koordinációs szám alig különbözik a kristályokra jellemző számtól. Így pl. a f.k.k. kristályban, pl. az ausztenitben, a rézben és az alumíniumban a legközelebbi szomszédok száma 12, míg az ilyen anyagnak a megolvadása után a folyadékban 11. Ez a szám a hőmérséklet növekedésével folyamatosan csökken és a forrásponton tűnik el. Minél nagyobb a koordinációs szám, annál nagyobb a folyadékokban a többé-kevésbé összetartozó részecskéknek a mérete, ami úgy fogható fel, hogy ezek mozdulnak el egymáson az ömledékben. Ezt jól szemlélteti a víz, melyben $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ -on megindul a fajtérfogat-növekedés, amely bizonyos mértékig a jégre emlékeztető részecskék megjelenésére utal. Ez a viszkozitás hőmérséklet-függésének egy igen egyszerű értelmezése.

Az eutektikus ötvözeteket tartjuk ma jól önthetőnek, elsősorban azért, mert az ötvözetrendszer legalacsonyabb hőmérsékleten megdermedő ötvözetei. Ezzel kapcsolatban nézzük meg az 5. ábrát, amely két öntöttvasra és egy acélra tünteti fel a viszkozitást a hőmérséklet függvényében. Az ábra egyértelműen mutatja, hogy az eutektikus ötvözet viszkozitása jóval nagyobb ugyan, mint a kisebb C tartalmú ötvözeteké, ezzel szemben mégis az eutektikus anyag tölti ki könnyebben, jobban a formát. Ennek az az oka, hogy nem egyedül a viszkozitás a jó önthetőség megszabója. A jó viszkozitás mellett még az is követel-

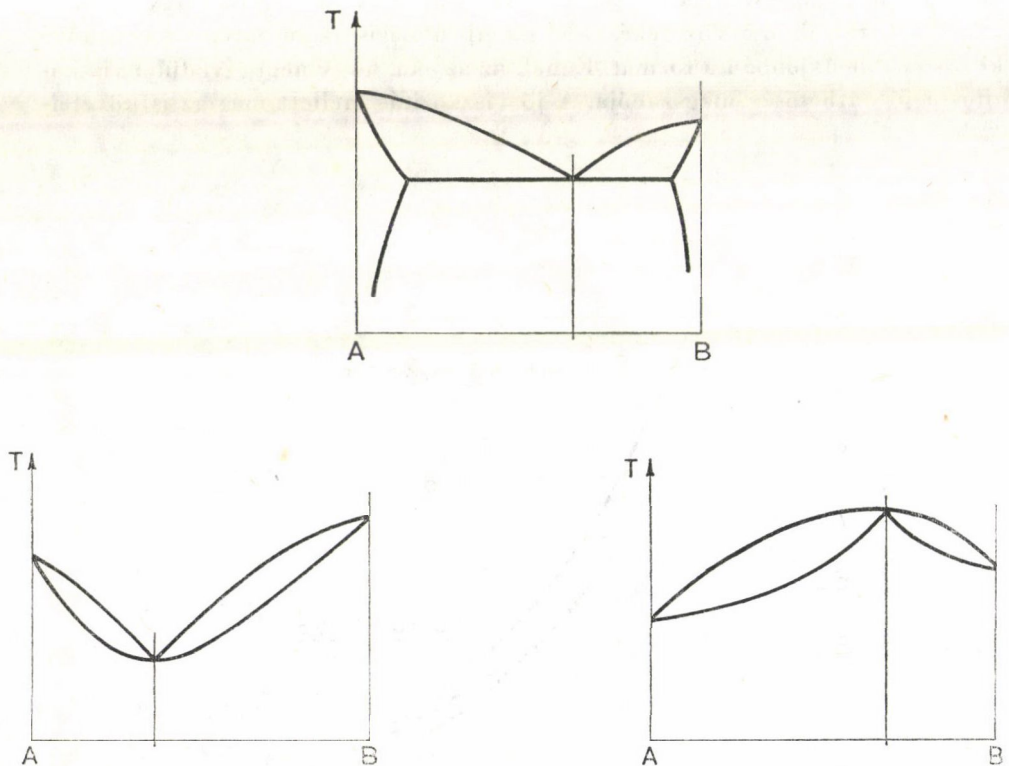


5. ábra

mény, hogy az anyag egyetlen hőmérsékleten dermedjen meg. Ugyanis az eutektikus ötvözet, ha ΔQ melegmennyiséget vonunk el az időegység alatt,

$$t = \frac{L}{\Delta Q} \quad (15)$$

ideig azonos viszkozitású.* Ugyanakkor a hőmérséklet-közben megdermedő ötvözet viszkozitása a liquidus hőmérsékleten ugrásszerűen megnő, és el kell érni, hogy a formát az ilyen ötvözet a liquidus hőmérséklet elérése előtt kitöltse. Ez pedig lehetetlen, hacsak nem hevítjük fel magát a formát nagy hőmérsékletre. Ebből egy általánosabb megfogalmazás adható a jól önthető ötvözetről. Azok az anyagok önthetők ui. jól, amelyeknek szabadságfoka a megdermedésnél nulla. Ebből azonnal következik, hogy — az egyszerűség kedvéért kétalkotos rendszereket tekintve — három olyan ötvözet típus van, amelynél ez a feltétel teljesül (6. ábra).

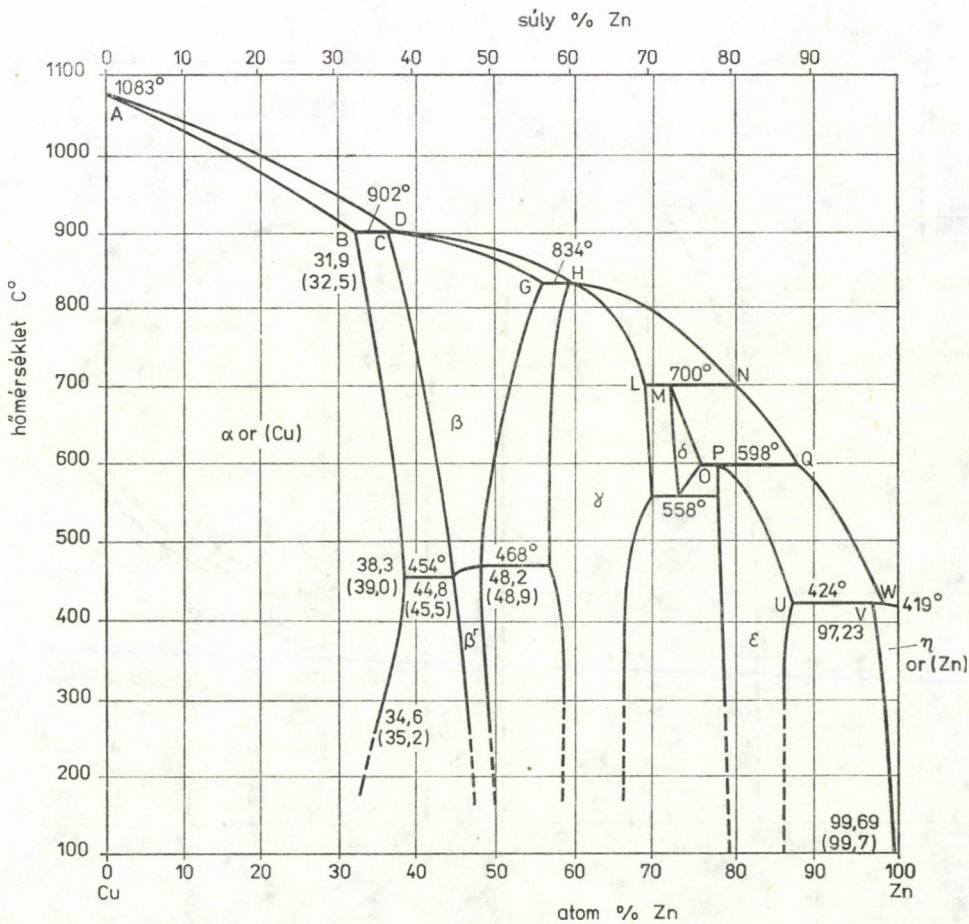


6. ábra

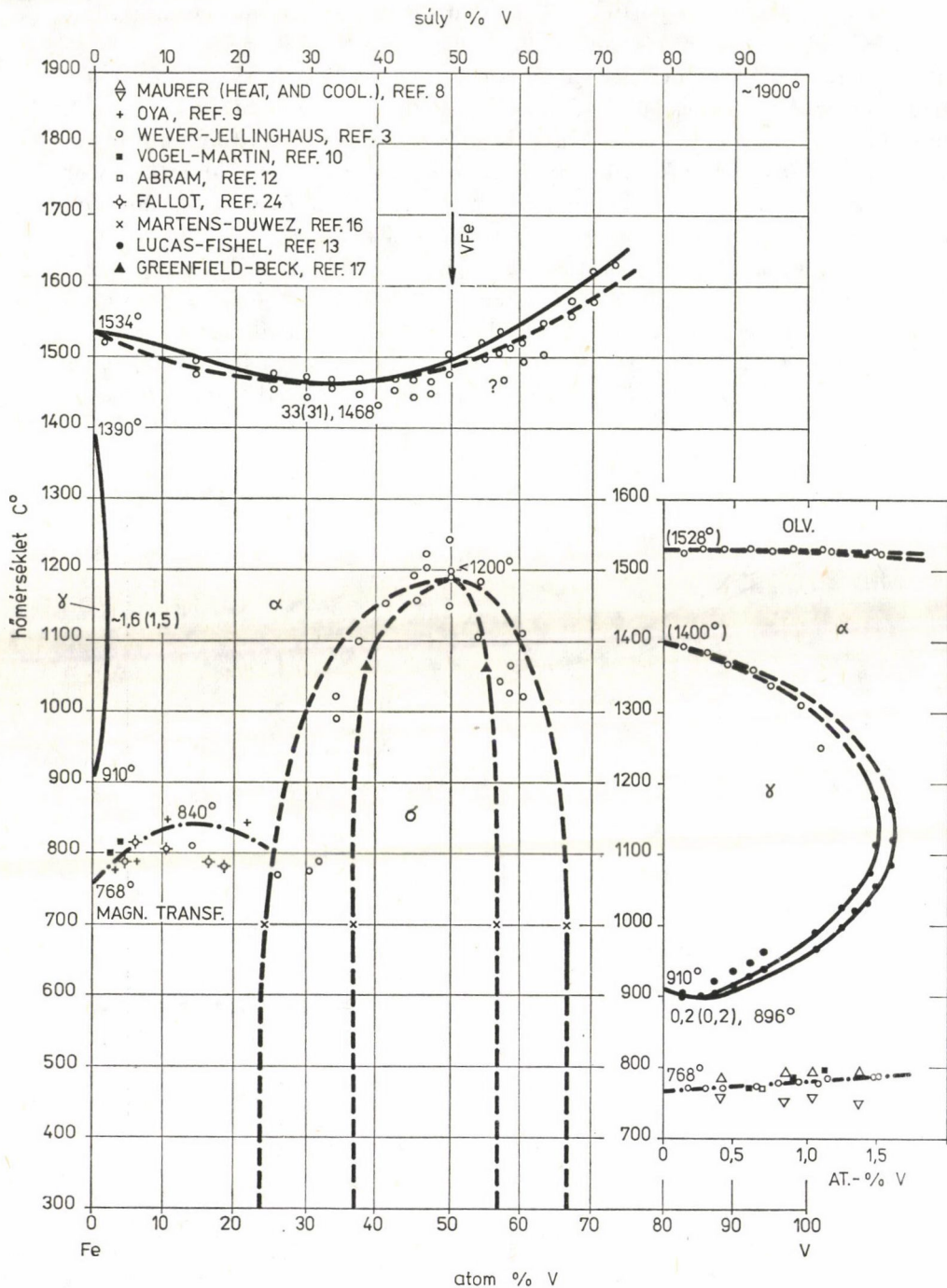
* Itt L az ömledék rejtett hője.

Az ilyen feltételt teljesítő ötvözetek közül ma elsősorban az eutektikus rendszereket ismerjük. Azt is tudjuk, hogy pl. az öntöttvasakban Si és P adagolással érhető el, hogy az ötvözet eutektikus legyen anélkül, hogy túl sok szenet tartalmazzon. Ehhez hasonló módon — úgy véljük — a jövőben megjelennek majd azok a jól önthető ötvözet típusok, melyeknél a 0 szabadságfokot olyan ötvözők adagolásával érik el, amelyek biztosítják az alacsony olvadáspontot és a nagyszilárdságot a könnyű önthetőség mellett. Ilyen ötvözeteket már ma is ismerünk a kétalkotós ötvözetrendszerek között is.

Sajnos, ezeknek az ötvözeteknek az ára legtöbbször túlságosan nagy. Ennek ellenére néhányat bemutatunk, nem azért mintha azt hinnők, hogy ezek mindegyikéből kereskedelmi öntvények lehetnének a közeljövőben, hanem azért, mert meggyőződésünk az, hogy a fejlődésnek az útja az, hogy a jelenlegi, járatos ötvözet típusok minőségének állandó javítása mellett olyan új típusok kidolgo-



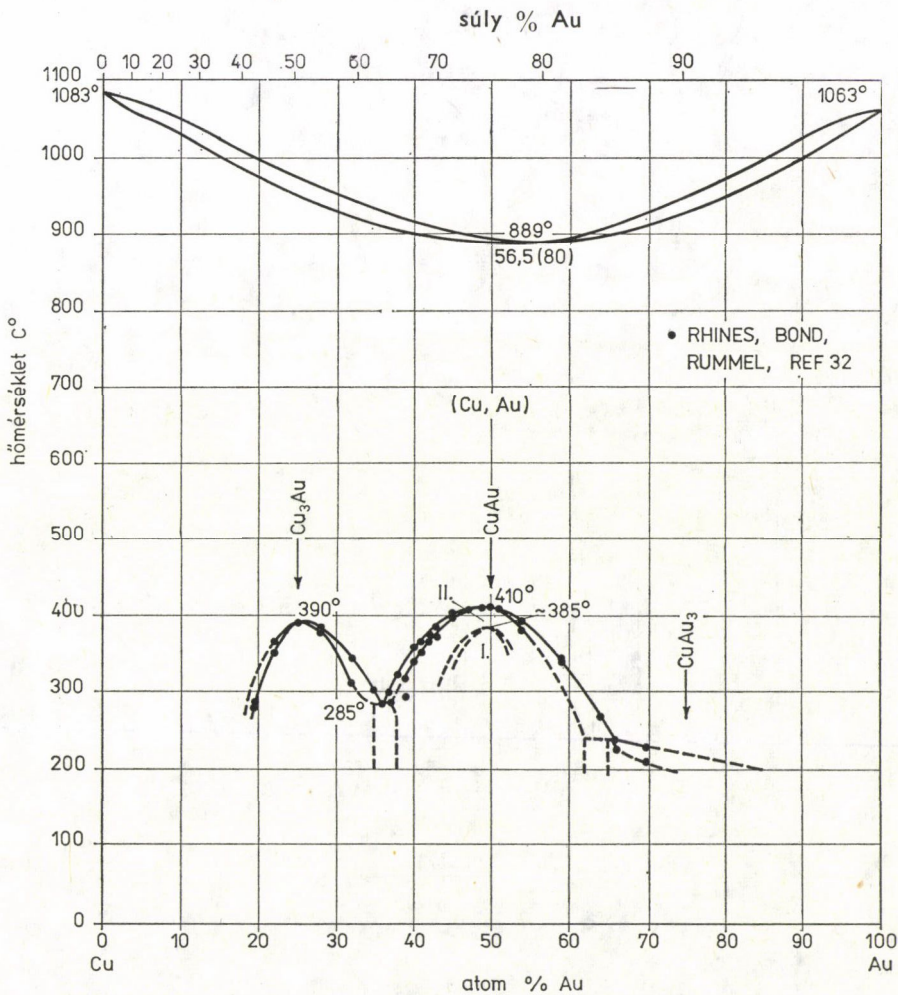
7. ábra



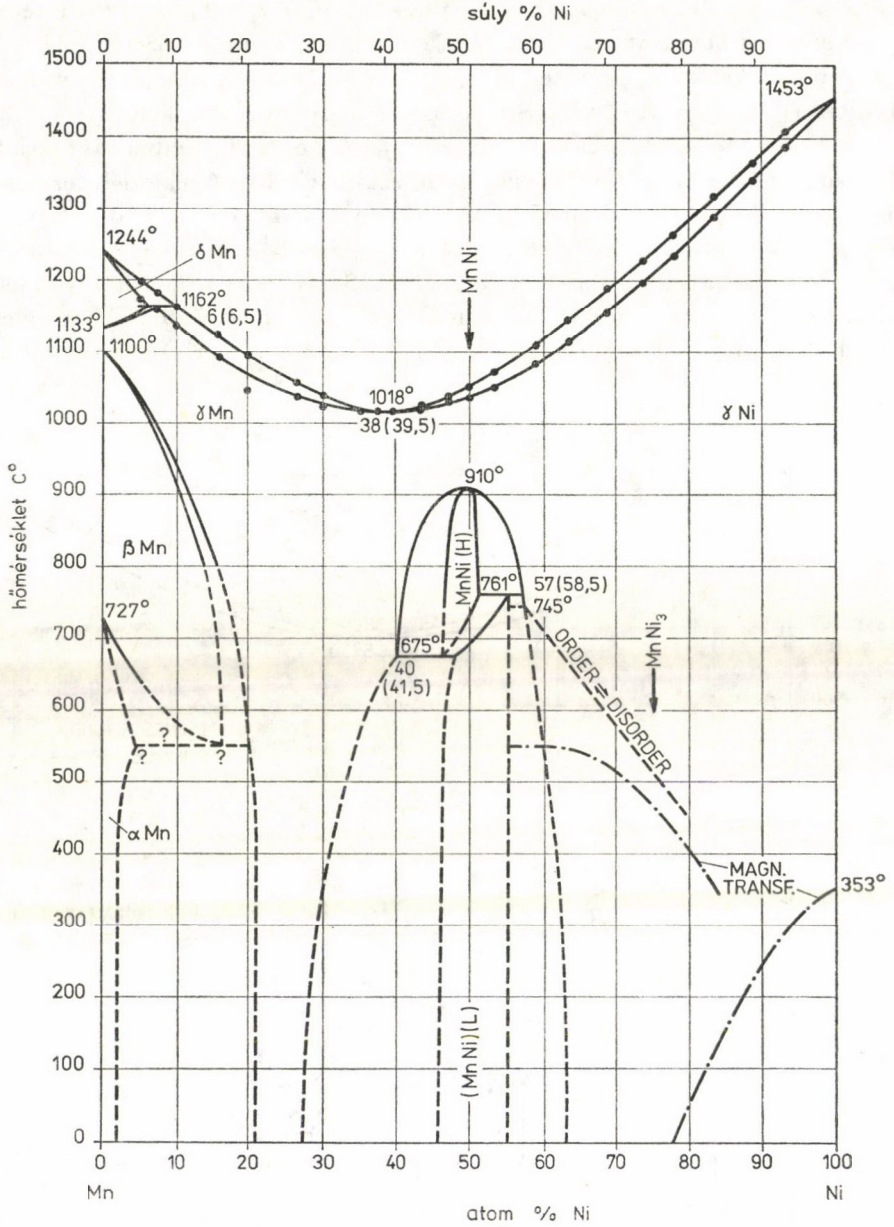
8a. ábra

zására is kell gondolni, amelyek sokban hasonlítanak azokhoz az ötvözetekhez, melyeket most bemutatunk, de az áruk vetekszik a mai ötvözetekével.

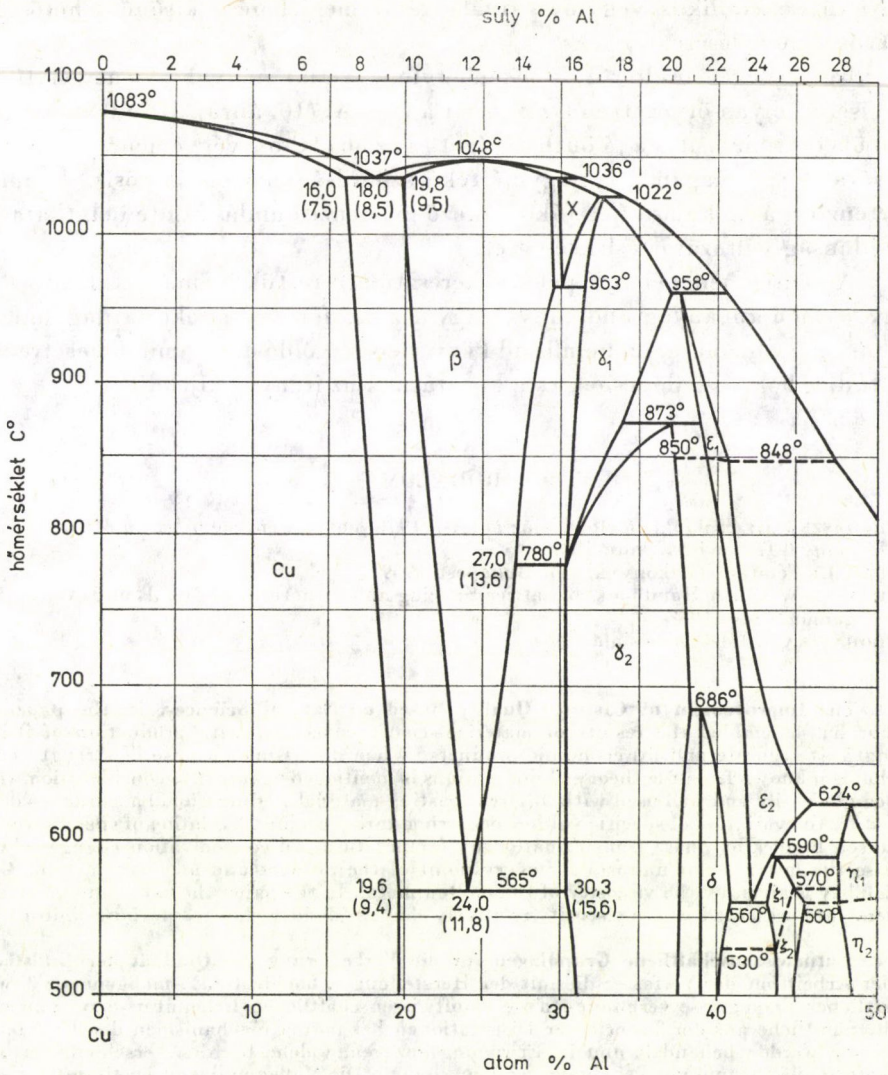
Mindenekelőtt megemlítendő a sárgarézötvözetek családjá. Ezek között tulajdonképpen a szabványos SrÖ60 majd hogy nem ideálisnak tekinthető ötvözet, bár az ötvözetrendszerben (7. ábra) a *D* pontnál a szabadságfokra tett kikötésünk nem teljesül, mégis rendkívül szűk az a hőmérsékleti intervallum, amelyben az ötvözet megdermed. A 454 °C-on végbemenő rendeződési folyamat pedig megfelelő hőkezeléssel biztosítja a nagy szilárdságot, ahogy azt a szilárdságnövelési mechanizmusoknál megbeszéltük. Sajnos az antifázishatások jelenlétével járó nagyon nehéz diszlokációmozgás ezeket az ötvözeteket rideggé teszi, ha bennük a β rendezettrácsú szilárd oldatnak a részaránya túl sok.



8b. ábra



9. ábra



10. ábra

Talán a legideálisabb öntvénytípusnak az olyanok felelnek meg, mint amilyenek a 8. ábrákon, valamint a korábban bemutatott 1. ábrán láthatók. Ezekben a 0 szabadságfokú ötvözetek alacsony olvadáspontúak, kitűnően önt-hetők, és az alacsony hőmérsékleten végbemenő fázisátalakulási folyamatok kézben tartásával a szilárdság hőkezelés révén széles határok között változtat-ható.

Nagyon jónak tűnik a Mn-Ni ötvözetrendszer is (9. ábra). Ebben a 0 szabadságfokú, jól önthető anyag szintén alacsony hőmérsékleten olvad és a

MnNi intermetallikus vegyület kiváláskénti megjelenése kitűnő lehetőség a szilárdság növelésére.

Egy jellegében eltérő, de véleményünk szerint nagyon jó ötvénytípust képvisel az olyan ötvözetrendszer, mint a Cu—Al (10. ábra). Itt a 0 szabadságfokú ötvözet biztosítja a jó önthetőséget és az 565 °C-on végbemenő $\beta \rightleftharpoons \alpha + \gamma_2$ fázisátalakulás magában is nagymértékű szilárdságnövelést biztosít, de annak martenzites átalakulása és a rákövetkező martenzitbomlás szinte beláthatatlan tulajdonság-változatokkal kecsegtet.

A fentiekben néhány példán keresztül szerettük volna azt bemutatni, hogy a modern anyagtudomány, vagy fizikai fémtan gyakorlatilag minden technikai problémára, ha nem is ad közvetlen megoldást, azt mindenesetre már ma tudja, hogy a fejlődésnek és a kutatásnak az irányát kijelölje.

IRODALOM

1. PROHÁSZKA J.: Székfoglaló előadás az MTA-n 1970. nov. 11-én, megjelent a *Műszaki Tudomány* 1971. évi 44. kötetében
2. VERÓ J.: Fémtan. Tankönyvkiadó, Budapest 1969
3. PEARSON W. B.: A Handbook of Lattice Spacing and Structures of Metals and Alloys, Pergamon Press 1958
4. PROHÁSZKA J.: Megjelenés alatt

The Improvement of Castings Quality Based on Natural Sciences. In the paper the author has assembled the results of material science concerned with production of i) high strength ii) accurate and iii) economic products. When discussing increase of strength every mechanism known from the theory of dislocations is mentioned taking into consideration which one can be easily and well used with different casting materials. Dimensional accuracy is determined by the variation of specific volume occurring during cooling. Variation of specific volume is caused besides by phase transformation by temperature and concentration changes always in case the latter is not uniform for every point of the product and at every instant. Good castability is given by the viscosity of the molten metal. In the paper the two-component alloy systems are presented whose viscosity relatively changes slightly during solidification.

Naturwissenschaftliche Grundlagen für die Verbesserung der Qualität der Gußstücke. In der Arbeit hat der Verfasser die mit der Herstellung 1. hochfester, 2. maßgenauer 3. wirtschaftlicher Erzeugnisse verbundenen werkstoffwissenschaftlichen Erkenntnisse zusammengestellt. Sämtliche aus der Theorie der Dislokationen bekannten Mechanismen der Festigkeitserhöhung werden behandelt und in Erwägung gezogen, welche bei den verschiedenen Gußwerkstoffen leicht und gut verwendet werden können. Die Maßgenauigkeit bestimmt die während der Abkühlung eintretende Änderung des spezifischen Volumens. Außer den Phasenumwandlungen führen zur Änderung des spezifischen Volumens die Änderung der Temperatur und der Konzentration immer dann, wenn dieselben für jeden Punkt des Erzeugnisses und jeden Zeitpunkt nicht gleichmäßig und von gleichem Ausmaß sind. Die gute Gießbarkeit bestimmt die Viskosität der Schmelze. In der Arbeit werden jene Legierungssysteme aus zwei Bestandteilen gezeigt, deren Viskosität während des Erstarrens sich verhältnismäßig wenig ändert.

MÁTRIX-ANALITIKUS MÓDSZER SZIMMETRIKUS HÁLÓZATI RENDSZERŰ RÁCSHENGER ERŐJÁTÉKÁNAK VIZSGÁLATÁRA

HEGEDÜS ISTVÁN*

[Beérkezett: 1979. VIII. 23-án]

A dolgozat mátrix-analitikus módszert mutat be szabályos gyűrűpoligonokból, szimmetrikus összekötőrudakkal kialakított egyrétegű rácsos rúderőrendszer számítására és az erőjáték sajátosságainak vizsgálatára. A vizsgálat eredményeiből kitűnik, hogy számos egyezés mellett — alapvető eltérések vannak a rácsos rúderőrendszer és egy analóg terhelésű ill. geometriai kialakítású membránhenger erőjátéka között, ezért a membránhenger nem tekinthető a vizsgált rács helyettesítő kontinuumának. A dolgozat bemutatja azt a szerkezetet is, mely erőjátékának sajátosságai alapján valóban a vizsgált rács helyettesítő kontinuumának tekinthető. A dolgozat célja a vizsgálatához használt mátrix-analitikus módszer hatékonyságának illusztrálása, valamint az, hogy felhívja a figyelmet arra a veszélyre, amelyet az egyrétegű térbeli rácsok és a membránhéjak erőjátéka közti hasonlóság nem kellő körültekintéssel való alkalmazása magában rejt.

1. Bevezetés

A statikailag határozott térbeli rácsok vizsgálatára igen sok példa található a műszaki irodalomban. Ezek nagyobb része a térbeli rács hálózatának specialitásai alapján adható egyszerűsítéseket mutatja be. Viszonylag kevés olyan eljárás ismert, amely az erőjáték kvalitatív vizsgálatára is alkalmazható. Ezek egyik csoportja a rács csomóponti egyensúlyi egyenletrendszerének sajátos struktúrája alapján ad az erőjáték jellemzőiről általánosításra is alkalmas képet [1—4], a másik csoport pedig a membránhéjak és az egyrétegű térbeli rácsok erőjátéka közti hasonlóság intuitív vagy részletes vizsgálatokon alapuló feltételezésével a rács erőjátékát egy hasonló alakú és terhelésű membránhéj metszeterőiről vizsgálja [5, 6].

Az itt bemutatásra kerülő vizsgálat a rúderőrendszer kvalitatív vizsgálatára alkalmas módszerek említett első csoportjába sorolható.

A kialakult gyakorlatnak megfelelően feltételezzük, hogy a szerkezet rúdjai ideális csuklókkal kapcsolódnak egymáshoz, az alakváltozások elhanyagolhatóan kicsinyek, a rácsrudak nem hajolnak ki, a terhek a szerkezet csomópontjain működnek. A vizsgálati módszer bemutatásához ismertnek feltételezzük a szorzásban felismerhető blokkokból álló hipermátrixok analízisének alapelveit és módszereit [7]. A vizsgálatához végzett mátrix-analitikai levezeté-

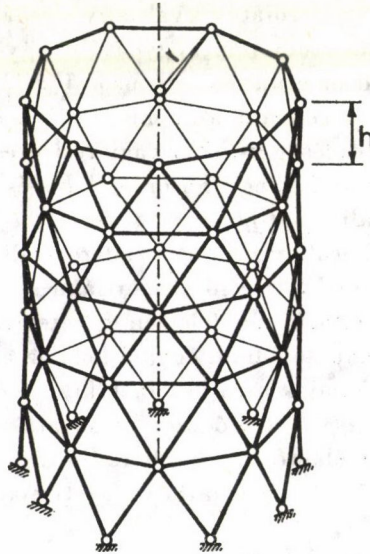
* Dr. Hegedüs István 2083 Solymár, Váci Mihály u. 10.

seknek csak a menetét és eredményeit közöljük, az egyes lépések részletezésére részint azok viszonylagos műszaki érdektelensége, részint terjedelmessége miatt nincsen lehetőség.

2. A rácsos henger rúderőinek egyenletrendszere

A vizsgált rácsszerkezet hálózati rendszerét az 1. ábra mutatja. A csomópontok egy r sugarú henger palástjain fekszenek úgy, hogy az azonos szinten fekvő csomópontokat összekötő rudak egy-egy n oldalú szabályos sokszöget alkotnak. Az egymás alatti sokszögek h nagyságú tengelyirányú eltolással és $\varphi = \pi/n$ elforgatással hozhatók egymással fedésbe. Hasonló elmozdítással hozhatók fedésbe a legelső rúdpolygon csúcsai azokkal a pontokkal, melyekben a szerkezet az aljzathoz kapcsolódik.

Ha az egymás feletti rúdpolygonok számát m -mel jelöljük, a szerkezet úgy is felfogható, mintha m darab egymás fölé épített olyan rácskoszorúból állna, amelyek mindegyike egy n oldalú rúdpolygonból és ezt az aljzathoz kapcsoló kétszer n darab, szimmetrikus helyzetű összekötő rúdból tevődik össze. Annak, hogy a szerkezetet a továbbiakban ilyen rácskoszorúból összeállított-nak tekintjük — ritmikus ismétlődések egyszerű figyelembevételén túl — az a magyarázata, hogy az összekötő rudak alsó végein rögzített rácskoszorú éppen kielégíti a statikai határozottság szükséges feltételeit, és amennyiben a



1. ábra

statikai határozottság valóban fennáll, a rúderők meghatározása tetemesen egyszerűsíthető.

Az egyszerűsített számítás elve a következő:

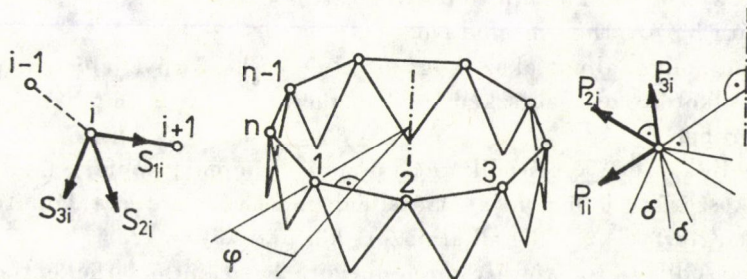
A legfelső rácskoszorú rúderőit a rácskoszorú statikai határozottsága esetében a csatlakozó szerkezettrésztől függetlenül meghatározhatjuk. Ezt elvégezve, a rácskoszorút gondolatban eltávolítjuk, természetesen az ismert rúderőkkel helyettesítve az elhagyott rudak hatását. Az így módosított szerkezet legfelső rácskoszorújának (vagyis az eredeti rács második rácskoszorújának) az erőjátéka most az előzőhöz hasonlóan meghatározható. Az eljárást m lépésben végrehajtva a teljes erőjáték birtokába juthatunk.

Vizsgáljuk először egy rácskoszorú erőjátékát. A rácspoligon csomópontjait 1-től n -ig futó számokkal azonosítjuk. Minden csomóponthoz három teherkomponens és három rúderő rendelhető hozzá (2. ábra). A P_{1i} , P_{2i} és P_{3i} teherkomponensek közül P_{1i} a henger tengelyére merőleges, P_{2i} és P_{3i} pedig az i jelű csomópontba befutó két összekötő rúd síkjában fekszik. Az alkalmazott komponensekre bontás előnye, hogy egyszerűvé teszi a rácskoszorú csomóponti egyensúlyi egyenletrendszerének felírását. A hipermátrix-együtthatós vektor-egyenletként felírt egyenletrendszer független és függő változóiként a teherkomponenseket és a rúderőket egy-egy \mathbf{p} , ill. \mathbf{s} hipervektorba foglaljuk, melynek n skálaelemű $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$, ill. $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ hiperelemei a P_{1i}, P_{2i}, P_{3i} , ill. az s_{1i}, s_{2i}, s_{3i} teherkomponenseket, ill. rúderőket tartalmazzák a csomópontok sorrendjében.

A csomóponti egyensúlyi egyenletrendszer az alábbi:

$$\mathbf{K}\mathbf{s} = \begin{bmatrix} (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*) \sin \varphi \\ (-\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*) \cos \varphi & -\mathbf{E} \sin \delta & \mathbf{E} \cos \delta \\ 0 & \mathbf{E} \sin \delta & \mathbf{E} \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 \\ \mathbf{s}_2 \\ \mathbf{s}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{p}, \quad (1)$$

ahol δ a kapcsolórudak egymással bezárt szögének fele, \mathbf{E} az n -ed rendű egységmátrix, $\mathbf{\Omega}$ pedig az n -ed rendű primitív ciklus permutáló mátrix [7], amelynek minden eleme zérus, kivéve az első jobb oldali mellékátló elemeit és a bal alsó sarokelemet, ahol 1 található.



2. ábra

K felcserélhető blokkokból álló hipermátrix, ezért determinánása

$$\det \mathbf{K} = \det \text{Det } \mathbf{K} = -\sin \varphi \cdot \sin 2\delta \cdot \det (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*).$$

Mivel

$$\det (\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*) = 1 + (-1)^{n+1}$$

értéke $n = 2k$ esetében zérus, a páros csomópontszámú rácskoszorú csomóponti egyensúlyi egyenletrendszere szinguláris. A rácskoszorú tehát csak páratlan csomópontszám esetében határozott statikailag. A továbbiakban ezért fel kell tételeznünk, hogy a hálózat ilyen kialakítású.

A rácskoszorú rúderőinek meghatározását az (1) egyenletrendszer invertálásával végezzük. Az inverz mátrix egyszerűen meghatározható, ha kihasználjuk a blokkok felcserélhetőségét:

$$\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} a(\mathbf{H} + \mathbf{E}) & 0 & 0 \\ b\mathbf{H} & -c\mathbf{E} & d\mathbf{E} \\ -b\mathbf{H} & c\mathbf{E} & d\mathbf{E} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

ahol

$$a = 1/(2 \sin \varphi), \quad b = 1/(2 \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \delta),$$

$$c = 1/(2 \sin \delta), \quad d = 1/(2 \cos \delta),$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{E} - \mathbf{\Omega}^*)(\mathbf{E} + \mathbf{\Omega}^*)^{-1}.$$

H olyan ferdén szimmetrikus ciklikus mátrix, melynek első sora $(0, 1, -1, 1, \dots, 1, -1)$.

Jelöljük $\mathbf{p}^{(1)}$, ill. $\mathbf{s}^{(1)}$ hipervektorral a legfelső rácskoszorúra ható terhek, ill. a rúderők vektorát.

(1) és (2) alapján a legfelső rácskoszorú rúderői:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{L}\mathbf{p}^{(1)}.$$

Az előjáróban ismertetett számítási elképzelés szerint a következő feladatunk az első rácskoszorú elhagyásával módosuló szerkezet legfelső rácskoszorújára ható terhek meghatározása.

Némi bonyodalmat okoz, hogy az első rácskoszorú 1 jelű csomópontján áthaladó alkotóra nem illeszkedik csomópont, csak a harmadik, ötödik stb. rácskoszorúban.

Kezdjük ezért a második rácskoszorú csomópontjainak számozását az első rácskoszorú 1 jelű pontjával átellenben fekvő alkotón található csomóponttal, megtartva az eddig alkalmazott körüljárási irányt.

A második rácskoszorú csomópontjaira ható külső terheket jelölje $\mathbf{p}^{(2)}$. Az $\mathbf{s}^{(2)}$ vektorba foglalt második szinti rúderők meghatározásakor figyelembe

kell vennünk $\mathbf{p}^{(2)}$ -n kívül az elhagyott első rácskoszorúról leadódó erőket is, ezért $\mathbf{s}^{(2)}$ -t a következőképpen módosított tehervektor alapján kell számolnunk:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{L}(\mathbf{p}^{(2)} + \mathbf{M}\mathbf{s}^{(1)}) . \quad (3)$$

Az \mathbf{M} hipermátrix az alábbi lesz:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -e\Phi & -e\Phi^* \\ 0 & -f\Phi & f\Phi^* \\ 0 & g\Phi & g\Phi^* \end{bmatrix}, \quad (4)$$

ahol

$$e = 2 \sin \delta \cdot \tan \frac{\varphi}{2}, \quad f = \sin \delta, \quad g = \cos \delta$$

és

$$\Phi = \Omega^{\frac{n+1}{2}} .$$

Az (1)–(4) egyenletek ismételt felhasználásával az egész rács megoldható: $\mathbf{p}^{(k)}$ -val jelölve a k -adik rácskoszorú csomópontjaira ható terhek vektorát, $\mathbf{s}^{(k)}$ -val pedig ugyanennek a rácskoszorúnak a rúderővektorát,

$$\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{L}\mathbf{p}^{(k)} + \mathbf{L}\mathbf{M}\mathbf{s}^{(k-1)} \quad k = 2, \dots, m . \quad (5)$$

Ha a k -adik rácskoszorú terheletlen, rúderőit az $\mathbf{L}\mathbf{M}\mathbf{s}^{(k-1)}$ tag szolgáltatja. Az $\mathbf{L}\mathbf{M}$ szorzatmátrixot szerepe alapján rácsrúderő-átviteli mátrixként értelmezhetjük. Bevezetve az $\mathbf{L}\mathbf{M} = \mathbf{N}$ jelölést, az (5) rekurzív képlet alapján az alábbi képletet kapjuk:

$$\mathbf{s}^{(k)} = \sum_{j=1}^k \mathbf{N}^{k-j} (\mathbf{L}\mathbf{p}^{(j)}), \quad (6)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{H})\Phi & -\alpha(\mathbf{E} + \mathbf{H})\Phi^* \\ 0 & -\beta\mathbf{H}\Phi + \Phi & -\beta\mathbf{H}\Phi^* \\ 0 & \beta\mathbf{H}\Phi & \beta\mathbf{H}\Phi^* + \Phi^* \end{bmatrix},$$

továbbá

$$\alpha = \sin \delta / (1 + \cos \varphi), \quad \beta = \tan \frac{\varphi}{2} \cdot \cot \varphi .$$

A (6) képlet mutatja \mathbf{N} átviteli mátrixnak és hatványainak központi szerepét a rúderőrendszer alakulásában. A rúderőrendszer sajátosságainak vizsgálatát is \mathbf{N} és hatványai mátrix-analízisével célszerű elvégezni.

3. A rúderrendszer sajátosságainak vizsgálata

A rács rúderrendszerével kapcsolatos első igen lényeges megállapítás, mely a (6) képlet szerkezete alapján nyilvánvaló, hogy egy tetszőlegesen kiválasztott rácskoszorú rúderőinek a nagyságát nem befolyásolják a rácskoszorú alatti csomópontokon működő terhek, viszont minden magasabban fekvő csomópont terhei hatással lehetnek az erőjátéokra. Az erőjáték részletes vizsgálata úgy tehető áttekinthetővé, ha követjük a rácskoszorú-erőjáték „terjedését” egyetlen, külső terhekkel terhelt rácskoszorú erőjátékából indulva. Az egyszerűség kedvéért vegyük azt az esetet, amikor $\mathbf{p}^{(1)} \neq 0$, $\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(3)} = \dots = \mathbf{p}^{(m)} = 0$. Ez esetben az egymást követő rácskoszorúk rúderővektorai

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{p}^{(1)},$$

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{s}^{(1)},$$

$$\mathbf{s}^{(3)} = \mathbf{N}^2 \mathbf{s}^{(1)},$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{s}^{(j)} = \mathbf{N}^{j-1} \mathbf{s}^{(1)},$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{s}^{(m)} = \mathbf{N}^{m-1} \mathbf{s}^{(1)}.$$

Ha az \mathbf{N} átviteli mátrixnak van egynél nagyobb abszolútértékű sajátértéke, és $\mathbf{s}^{(1)}$ kezdőszinti rúderővektor nem ortogonális a legnagyobb abszolútértékű sajátérték invariáns alterére, akkor elegendően nagy m érték esetében az erőjáték terjedésében feltétlenül dominánssá válik a legnagyobb abszolútértékű sajátértékhez tartozó, átvitelenként legerősebben növekvő sajátvektor-komponens rúderőrendszere.

Meg kell tehát vizsgálnunk az \mathbf{N} mátrix sajátértékeit. A karakterisztikus polinom unitér transzformációra invariáns, ezért először Ω komplex elemű modáljaiból [1, 7] egy $3n \times 3n$ nagyságú hiper-diagonál alakú unitér mátrixpárt alkotunk, ezek felhasználásával \mathbf{N} unitér transzformációval diagonál elemű blokkokból álló hipermátrixba vihető át. Ennek karakterisztikus determinánsát kifejtve, a karakterisztikus egyenletet közvetlenül első- és másodfokú gyöktenyezők szorzataként írhatjuk fel. A végeredményben valós együtthatójú, $3n$ -edfokú karakterisztikus egyenlet az alábbi alakot ölti:

$$D(\lambda) \equiv \prod_{k=1}^n \lambda \left\{ \lambda^2 - 2(-1)^k \frac{\cos^2 k\varphi + \cos \varphi}{\cos k\varphi(1 + \cos \varphi)} \lambda + 1 \right\} = 0 \quad (7)$$

Az egyenlet minden gyöke valós. A sajátértékeket célszerű $\lambda_{i,k}$, $i = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots, n$ kettős indexezéssel azonosítani. Ezt alkalmazva:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,k} &= 0, \\ \lambda_{2,k} &= \frac{(-1)^k (\cos^2 k\varphi + \cos \varphi) + \sin k\varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 k\varphi}}{\cos k\varphi(1 + \cos \varphi)} \\ \lambda_{3,k} &= \frac{(-1)^k (\cos^2 k\varphi + \cos \varphi) - \sin k\varphi \sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 k\varphi}}{\cos k\varphi(1 + \cos \varphi)}.\end{aligned}\quad (8)$$

A poligon-oldalszám páratlan, ezért $(-1)^k = -(-1)^{n-k}$, továbbá

$$\cos k\varphi = -\cos(n-k)\varphi \text{ és } \sin k\varphi = \sin(n-k)\varphi.$$

Ezek alapján belátható, hogy

$$\lambda_{2,k} = \lambda_{3,(n-k)}, \quad k < n.$$

Mivel ugyanakkor

$$\lambda_{2,n} = \lambda_{3,n} = 1,$$

minden sajátérték legalább kétszeres multiplicitású.

A (7) egyenlet struktúrájából következik, hogy

$$\lambda_{2,k} \cdot \lambda_{3,k} = 1,$$

vagyis minden sajátértéknek a reciproka is sajátérték.

Az említett két 1 abszolútértékű sajátértéken — $\lambda_{2,n}$ -en és $\lambda_{3,n}$ -en kívül — csupán négy további 1 abszolútértékű sajátérték van:

$$\lambda_{2,1} = \lambda_{3,1} = \lambda_{2,(n-1)} = \lambda_{3,(n-1)} = -1,$$

ezért az átviteli mátrixnak $n > 3$ esetben feltétlenül van egynél nagyobb abszolútértékű sajátértéke. A részletes vizsgálat megmutatja, hogy a legnagyobb abszolútértékű sajátérték $k = (n+1)/2$, illetve $k = (n-1)/2$ felvételével adódik. A legnagyobb abszolútértékű sajátérték abszolútértéke n növekedtével a $2n/\pi$ értékhez tart. Ez az érték az esetek többségében igen nagy, ezért a leggyorsabban növekvő sajátvektorkomponens — amennyiben szerepel a kiinduló rúderő-vektorban — többnyire néhány átviteli lépésen belül dominánssá válik. Az egymást követő rácskoszorúk rúderő vektorainak normája ezután nagy kvociensű mértani sorozat szerint növekszik.

Az átviteli mátrix struktúrája azt is lehetővé teszi, hogy viszonylag egyszerű eszközökkel meghatározzuk N minimálpolinomját. A (-1) kivételével a minimálpolinom minden gyöke egyszeres gyök. A kétszeres multiplicitású (-1) gyök miatt azonban N nem egyszerű struktúrájú mátrix, ezért a rácsrúderő terjedésében nem kizárólag mértani sor szerint változó normájú saját-

vektor komponensek szerepelnek. Az elemi osztók elméletével végzett struktúravizsgálat azt mutatja, hogy a (-1) sajátértékek a mátrix kanonikus alakjában található két másodrendű Jordan-blokkban fekszenek. Ebből következik, hogy a (-1) sajátértékhez tartozó, a sajátvektorokhoz hasonló szerepű két-két fővektor közül az egyik az átvitel során egy előjelváltáson kívül változatlan marad, tehát a sajátvektorokkal megegyező módon terjed, a másik pedig úgy változik meg, hogy az előjelváltáson kívül minden átvitelnél megnövekszik az előbbi, csupán alternáló előjelű fővektor értékével, vagyis az előjelváltástól eltekintve, az átvitelek számának lineáris függvénye szerint növekedve terjed. A sajátvektorok és a fővektorok együtt alkotják azt a $3n$ dimenziós lineáris teret, melynek minden pontjához egy rácskoszorú erőjáték és $-L$ regularitása miatt — egy külső teherrendszer rendelhető hozzá.

Nagyon szemléletadó a különböző sajátértékekhez tartozó — különböző terjedési tulajdonságot mutató — sajátvektorok, illetve az ezekhez tartozó külső terhek mechanikai értelmezése.

A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó, nem terjedő sajátvektorok olyan rácslúdszerű rendszert jelölnek, amelyeket a rácspoligon síkjában működő olyan erőrendszer kelt, amelynek a rácspoligon kötélpoligonja. Olyan erőrendszer tehát, amelyet a rácspoligon csuklós rúdláncként elviselhet.

A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó, változatlan értékkel terjedő két rúderővektor a rácshenger központos nyomása, ill. tiszta csavarása által keltett rúderőrendszert írja le. Figyelemre méltó, hogy a központosan nyomott — azaz a legfelső rácspoligon minden csomópontján azonos nagyságú alkotóirányú teherrel terhelt — rácshenger vízszintes síkban fekvő rúdjai nem feszültségmentesek.

A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó két fővektor-pár a rácshenger rúdszerű nyomatóki-nyírási erőjátékát írja le. A terjedésben mutatkozó előjelváltások magyarázata az, hogy az egymás alatti rácskoszorúk azonos sorszámú rácspontjai egymással átellenben találhatók. Az előjelváltástól eltekintve, változatlan terjedést mutató fővektorok a keresztmetszeti nyíróerő két egymásra merőleges komponensének megfelelői, míg az átvitel szám lineáris függvényeként változó vektorok konstans része a két egymásra merőleges hajlítási síkban értelmezhető „tiszta nyomatóki erőjáték”, változó része pedig a nemzérus nyíróerőhöz tartozó „nyomatóki növekmény erőjáték”. A fizikai értelmezés így egyértelmű magyarázatot ad N átviteli mátrix nem egyszerű struktúráltóságára.

Az n -től függő sajátértékekhez tartozó sajátvektor-erőjátékok rácskoszorúként egyensúlyi erőrendszert alkotó, az elsoroltaktól lineárisan független tehervektorok által keltett erőjátékokat írnak le, mégpedig oly módon, hogy a henger tengelyével párhuzamos irányú erőcsoportok által keltett rácskoszorú-erőjátékok az $|\lambda| \leq 1$ sajátértékek alterében maradnak, a tengelyre merőleges komponenssel is rendelkező erőből álló erőcsoportok által keltett rácsc-

koszorú-erőjátékok viszont az $|\lambda| > 1$ sajátértékek alterében található komponenssel is rendelkeznek, amennyiben a terhek vízszintes komponenseiből alkotott vektorok nem a rúdlánccal felvehető terhek vektorterébe esnek.

Mind a sajátvektorok, mind pedig a sajátvektorok által leírt rácskoszorú-erőjátékot keltő csomóponti terhek vektorai olyan vektorok, amelyek elemeit a vektorokhoz tartozó sajátérték a (8) képletekben értelmezett k indexének, ill. az elemnek az s , ill. p vektorok n méretű s_1, s_2, s_3 , ill. p_1, p_2, p_3 minorvektorai-ban elfoglalt helye sorszámának a szorzatától függő trigonometrikus függvényként lehet megadni. Az egyre nagyobb abszolútértékű sajátértékéhez tartozó sajátvektorok elemei egyre erősebben változnak az elem-sorszám függvényében, ezért pl. a legnagyobb abszolútértékű sajátértékhez tartozó sajátvektor egymást követő elemei rendre ellentétes előjelű, közel azonos nagyságú számok. Viszonylag egyenletes eloszlású külső teher olyan rácskoszorú-erőjátékot kelt, amely elsősorban az 1-hez közeli abszolútértékű sajátértékekhez tartozó sajátvektorkomponensekből tevődik össze, de amennyiben a rúderővektor nem tökéletesen ortogonális a gyorsan növekvő sajátvektorokra, ezek hatása előbb-utóbb dominánssá válik az erőjáték terjedésében. Lényeges megállapítás, hogy az egyetlen csomóponti erőből álló külső teher keltette rácskoszorú-erőjáték vektora csak abban az esetben nem tartalmazza az erősen növekvő terjedésű sajátvektorokat komponensként, ha az erő a henger alkotóival párhuzamos irányú.

A rúdszerű igénybevételekkel analóg sajátvektor-erőjátékok mintájára az n -től függő sajátértékek sajátvektorait is értelmezhetjük általánosított rúdszerű igénybevételek analogonjaiként. Az exponenciális terjedés is csak első pillanatban ad értelmezési nehézséget: a gátolt csavarás vizsgálatánál bevezetett általánosított rúdszerű igénybevételek — a delirációs nyomatók — pl. szintén a csavart rúd hossz tengelye mentén exponenciális függvény szerint változnak.

4. A rácsos henger pontosított helyettesítő kontinuum

Az ismertetett vizsgálat eredményei alapján megállapítható, hogy a vizsgált rácshenger erőjátéka számos olyan sajátsággal rendelkezik, amelyek nem hozhatók összhangba az egyrétegű rácsfelületek és a membránhéjak erőjátéka közti rokonság alapján kialakítható elvárásokkal [5]. Az eltéréseket a következőkben foglalhatjuk össze:

- A csupán alkotóirányú erőkkel terhelt rácshengernek a gyűrűirányt képviselő poligonrúdjai nem feszültségmentesek még az egyenletes teherrel statikailag egyenértékű külső teher működtekor sem.

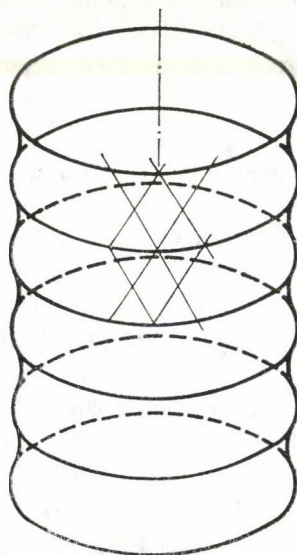
- A rácshenger terheletlen szakaszán a rácsrúderő-rendszer egyes komponensei a tengelyirányú koordináta (diszkrét) exponenciális függvényeként változnak.

Leszögezhetjük tehát, hogy a vizsgált rácshenger helyettesítő kontinuum nem membrán körhenger. Az erőjáték sajátosságainak ismeretében azonban nem nehéz meghatározni azt a szerkezetet, amely a diszkrét, illetve a folytonos matematikai modellű szerkezetek erőjátéka közti elkerülhetetlen különbségektől eltekintve éppen a vizsgált rács típus erőjátékának sajátosságaival rendelkezik. Ez a szerkezet egymáshoz hajlékony peremtartók közvetítésével csatlakozó olyan membrán forgáshiperboloidok sorozata, melyek egyes alkotóinak seregébe a rácskoszorúk ferde összekötőrúdjai éppen besorolhatók (3. ábra). A szerkezet külső terhei a peremtartókon hatnak.

A hiperboloid-sor erőjátékát a rácséhoz hasonlóan, a legfelső hiperboloidnál kezdve lépésenként határozhatjuk meg. A gyűrűírásban változó terhek hatásának figyelembevételét megkönnyíti, ha a teherfüggvényeket Fourier-sorba fejtjük, a peremtartók igénybevételét és a hiperboloid membrán-metszet-erőinek peremértékeit hasonló Fourier-sor formájában keressük.

Az erőjáték vizsgálata azt mutatja, hogy a Fourier-sorok egyes tagjai által leírt erőjáték-komponensek héj-elemenkénti változása éppen a (8) képletben felírt sajátértékeknek megfelelő kvociensekkel jellemezhető növekvés, stagnálás vagy lecsengés. Kézenfekvő és részletes vizsgálattal igazolható is a következtetés, hogy az egyes teherharmonikusok által keltett és szintenként újra és újra megjelenő „saját-erőjátékok” éppen a rácskoszorúk sajátvektor-erőjátékainak folytonos megfelelői.

Megtalálható és teljes az analógia fővektorok és a hiperboloidsor nyomateki-nyírási erőjátéka között is.



3. ábra

Mivel tehát a peremtartókból és a hiperboloidokból álló szerkezet „saját-erőjátékai” — a $0, 1, \dots, (n - 1)$ Fourier-tagokig — közvetlenül megfeleltethetők a rácskoszorúk sajátvektor-erőjátékainak, a membrán henger helyett ez a hiperboloid sor használható arra, hogy a rácsrúderők meghatározásánál helyettesítő kontinuumként alkalmazzuk.

Ennek a „felfedezésnek” közvetlen számítástechnikai előnnyel járó haszna nyilvánvalóan nincs, jelentősége mégis nagy az egyrétegű térbeli rácsok és az analóg geometriájú és terhelésű membránhéjak erőjátékának összevetése szempontjából.

5. Az általánosítás lehetőségei, következtetések

A dolgozatban ismertetett módszer lényegtelen módosításokkal alkalmazható olyan rácskúpra, ahol az egymásra épülő rácskoszorúk arányos nagyítással, ill. kicsinyítéssel egybeváogókká tehetők. Az ilyen szerkezet erőjátéka ugyanolyan értelemben tér el a membránkúp erőjátékától, mint a bemutatott rácshengeré a membrán hengerétől. Lényegesebb módosítás szükséges, ha szimmetrikus hálózati rendszerű, de tetszőleges vezérgörbájű rácsos héjra alkalmazzuk a módszert. A számítás alapelve ugyan nem változik, de L , M és N skalár együtthatóit minden rácskoszorú, ill. átvitel számításakor módosítanunk kell. Az erőjáték terjedését ezért ilyen szerkezeteken nem egy konstans átviteli mátrix hatványai, hanem a rácskoszorúként módosuló átviteli mátrixok szorzatai szabják meg. Szemben az ismertetett vizsgálattal — az ilyen hálózatu rácsok számítása már nem feltétlenül végezhető kézi számítással gazdaságosan. Kivételnek tekinthetjük az olyan szimmetrikus hálózatu forgás-hiperboloid rácsot, amelynek villarúdjai a hiperboloid egyenes alkotóira illeszkednek. Az ilyen rács-hiperboloid számítására igen hatékony kézi számítási módszert biztosít a bemutatott mátrix-analitikus eljárás módosítása.

A vizsgálatok gyakorlati szempontból való értékelése egyébként arra a konklúzióra vezet, hogy — egy-egy kivételes esettől eltekintve — a szélsőségesen kedvezőtlen erőterjedési mechanizmusban rejlő veszélyek miatt, a rácsfelületek szimmetrikus rendszerű hálózata nem javasolható sem konkrét mérnöki szerkezetként, sem pedig membránhéjak helyettesítő számítási modelljeként. Térbeli keretszerkezetek megoldására alkalmas módszerrel végzett vizsgálatok azt mutatják, hogy ha a csomópontok nyomaték felvételére alkalmas kapcsolattal vannak kialakítva, a bemutatott erőterjedési mechanizmus lényegesen kedvezőbbé válik, ilyenkor a hálózat kedvezőtlen hatása a szélsőséges rúderőeloszlás helyett többnyire csak abban jelentkezik, hogy a szerkezet bizonyos elrendezésű terhek működtetésekor a vártnál lényegesen nagyobb alakváltozásokat szenved.

A bemutatott vizsgálatok keretében nem vállalkoztunk annak a tisztázására, hogy milyen feltételeket kell állítanunk ahhoz, hogy ne léphessen fel

az egyrétegű térbeli rácsok és a hasonló alakú, analóg terhelésű membránhéjak erőjátéka közt a bemutatotthoz hasonló jellegű anomális eltérés. Számos jelenség arra enged következtetni, hogy a kérdés gyökere a rácsoszás háromszöglapjainak egymással bezárt szögeivel kapcsolatos vizsgálatokkal közelíthető meg. Ha a rácshenger rácsoszását olyan formán módosítjuk, hogy az egyik villarúd a henger alkotóinak irányába essék, a rácsháromszögek csak a forgástengely felől konvex szögtöréssel csatlakoznak egymáshoz, ezzel egyidőben az összes megfigyelt anomáliák megszűnnek. Ugyancsak minden szempontból a várakozásnak megfelelő az egyezés az egyköpenyű forgáshiperboloid membrán-erői és egy olyan rács szimmetrikus hálózati rendszerű rúderői közt, amelynek csomópontjai a hiperboloid felületen fekszenek, villarúdjai pedig a hiperboloid egyenes alkotóira illeszkednek. Ebben a hálózatban a rácsháromszögek ugyan konvex és konkáv szögtöréssel is csatlakoznak egymáshoz, de ez a sajátosság egybe esik azzal, hogy a forgáshiperboloidon is kijelölhetünk a forgástengely felől szemlélve homorú és domború metszéspörbékét, melyek rendre az egymást metsző egyenes alkotók által kijelölt szögszektorok egyikében vagy másikában futnak.

Amennyiben megfogalmazhatók a hálózat és az analóg héj ismert sajátosságai alapján az anomáliák elkerülhetőségének feltételei, ezek megtalálása rendkívül fontos feladat, ugyanis a feltételek ismerete nélkül nemcsak az egyrétegű rácsfelületek és a membránhéjak közti analógia elve, hanem a membránfeladatok egyes finitizáláson alapuló megoldásmódszerei sem használhatók kellő biztonsággal és általánossággal a szerkezetek tervezésében.

IRODALOM

1. BÉRES E.—LOVASS NAGY V.—SZABÓ J.: Ciklikus szimmetriával bíró térbeli rácsos tartók rúderőinek meghatározása hipermátrixok alkalmazásával. MTA Mat. Kutató Int. Közl. (1956) Bp.
2. DEAN, D. L.: On the Statics of Latticed Shells. A.I.P.C. (I.A.B.S.E.) Memoires, Vol. 25. (1965) Zürich.
3. NAKA, T.—KATO, B.—TADA, H.: The design and analysis of a one-sheet hyperboloidal tower, Space Structures, ed. by Davies (1966) Oxford
4. HUSSEY, M. I. L.—HUMPIDGE: The elastostatic and elastic critical loads of extensive cyclic domes, loc. cit. 3
5. WRIGHT, D. T.: Membrane Forces and Bunching in Reticulated Shells, ASCE J. Struct. Div. Vol. 91. No ST 1 (1965)
6. HEGEDŰS I.: Komponens egytengelyű feszültségállapotok alkalmazása membránhéjak és rácsfelületek vizsgálatára. A MTA Műsz. Mech. Munkaközösség 1. ülészakának közleményei (1975). Bp.
7. RÓZSA P.: Lineáris algebra és alkalmazásai. M. K. 1974. Bp.

A Matrix-analytic Method for the Investigation of the Stress Pattern in a Lattice Cylinder of Symmetrical Network. A matrix-analytical method is presented to the calculation of the internal bar-forces and to the investigation of the stress pattern in a single-layer lattice cylinder composed of regular ring polygons and symmetrically arranged connecting bars. From the results of the research investigation became evident that, beside several agreements, basic differences occur between the stress distribution in a lattice structure and that of a membrane cylin-

der of geometrical shape attacked by analogous load; therefore, the membrane cylinder cannot be considered as the substituting continuum of the lattice construction investigated. Also the construction is presented which, due to the particularities of its stress distribution, might readily be considered as the substituting continuum of the lattice structure in question. The purpose of the paper is the demonstration of the efficiency of the matrix-analytical method used to the investigation, as well as to draw the attention to the danger which is involved in the application without due caution of the resemblance between the single-layer space lattice structures and membrane shells.

Eine matrix-analytische Methode zur Untersuchung der Kräftepiel eines Gitterzylinders von symmetrischem Netzwerk. Ein matrix-analytisches Verfahren zur Berechnung der Stabkräfte eines aus regelmässigen Ringpolygonen mit symmetrischen Bindestäben hergestellten einschichtigen Gitterzylinders wird behandelt. Aus den Untersuchungsergebnissen erweist sich, daß es — neben zahlreichen Übereinstimmungen — zwischen den Kräftepielen eines Gitterwerks und eines geometrisch ausgestalteten, analog belasteten Membranzylinders grundlegende Unterschiede gibt, weshalb kann der Membranzylinder nicht als ein Ersatzkontinuum für das untersuchte Gitterwerk betrachtet werden. Auch eine derartige Konstruktion wird vorgelegt, die aufgrund der Eigenartigkeiten des Kräftepiels tatsächlich als das Ersatzkontinuum des behandelten Gitterwerks betrachtet werden kann. Der Zweck der Abhandlung ist die Effektivität des matrix-analytischen Verfahrens nachzuweisen sowie auf die Gefahr hinzuweisen, welche die unvorsichtige Anwendung der Ähnlichkeit der Kräfteverteilungen von einschichtigen räumlichen Gitterwerken und Membranschalen in sich schließt.



ALSÓ ÉS FELSŐ KORLÁT A VÁLTOZÓ VASTAGSÁGÚ KÖRTÁRCSA HÚZÁSI MEREVSÉGÉRE

ECSEDI ISTVÁN*

[Beérkezett: 1979. április 3-án]

A változó vastagságú üreges, kör alakú tárcsa húzási merevségére vonatkozó korlátok levezetése az elasztosztatika két minimum tételének az alkalmazásával történik. A tanulmány a profilos síkfeladatok feltevéseit alkalmazza.

1. A megoldandó feladat

A változó vastagságú, homogén, izotróp, lineárisan rugalmas anyagú körtárcsát sugárirányban az $r = a$ és az $r = b$ sugarú körhenger felületek határolják (1. ábra). A tárcsa vastagsága a $h = h(r)$ függvény szerint változik, a $z = 0$ koordinátával kijelölt sík a tárcsa középsíkja és egyben szimmetria síkja. A tárcsa belső palást felületén levő pontok nem mozdulnak el, az $r = b$ koordinátával kijelölt külső palást felületen pedig a körvonal mentén egyenletesen megoszló $F = N_r(b)$ terhelés (feszültségi eredő) működik, melynek hatására a külső palást felületen levő pontok $u(b)$ értékkel radiális irányban elmozdulnak.

Az elasztosztatika szokásos feltevéseit elfogadva, írhatjuk, hogy

$$N_r(b) = Su(b), \quad u(b) = HN_r(b), \quad (1a, b)$$

$$H \cdot S = 1. \quad (1c)$$

A fenti képletekben

S — a körtárcsa húzási merevsége,

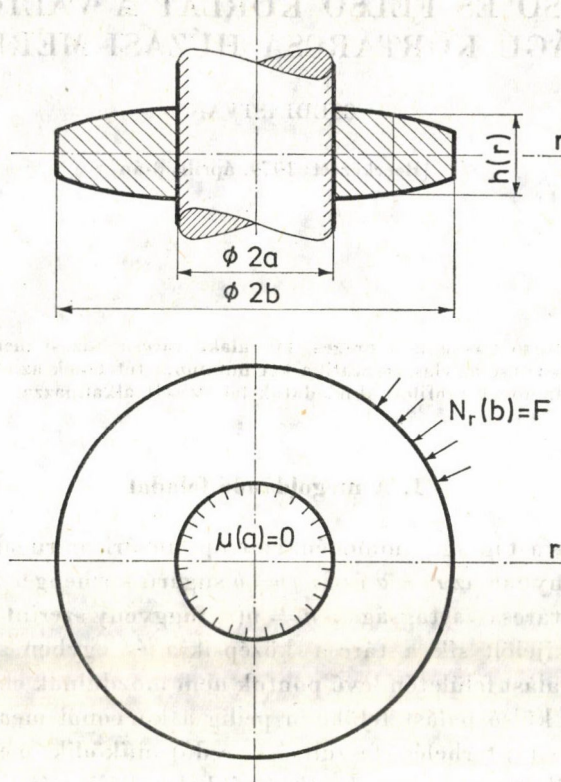
H — a körtárcsa húzási „hajlékonysága”.

H és S mennyiségek közötti kapcsolatot az (1c) egyenlet adja meg.

A saját síkjában terhelt változó vastagságú vékony tárcsák elméleti tárgyalását általános esetre VOCKE végezte el, kidolgozván az ún. profilos síkfeladatok elméletét. A jelen tanulmány a profilos síkfeladatok általa bevezetett feltevéseit alkalmazza [1].

Az (1a) egyenlet által értelmezett húzási merevség pontos (szigorú) értékének meghatározásához általában változó együtthatójú másodrendű közönséges differenciálegyenletet kell megoldanunk, melynek explicit alakú megoldását igen sok esetben nem tudjuk előállítani.

* Dr. Ecsedi István, 3531 Miskolc, Vászonfehérető u. 24. IV/1.



1. ábra. Változó vastagságú, kör alakú üreges tárcsa

A $h = \text{állandó}$ esetben a H együtthatóra a saját síkjában terhelt állandó vastagságú, vékony rugalmas tárcsák elméletének [3] a felhasználásával a

$$H = \frac{1}{2G} \frac{(1 - \nu)(b^2 - a^2)}{(1 + \nu)b^2 + (1 - \nu)a^2} \frac{b}{h} \quad (2)$$

eredményt tudjuk levezetni, ahol G a lemez anyagának csúsztató rugalmassági modulusa, ν pedig a lemez anyagának Poisson-száma. A tanulmány célja alsó és felső korlátok levezetése az (1a) és az (1b) képletek által értelmezett S húzási merevség és H „hajlékonysági” együttható számára. A korlátokat kifejező képleteket csak a $H = 1/S$ hajlékonysági együttható számára írjuk fel.

2. Alsó korlát

Bármely, az $a \leq r \leq b$ intervallumban folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható

$$f(a) = 0 \quad (3)$$

homogén peremfeltételt kielégítő $f = f(r)$ függvénnyel fennáll a

$$H \geq 2f(b) - \frac{2G}{(1-\nu)b} \int_a^b \left[\frac{r^2(f')^2 + f^2}{r} + 2\nu ff' \right] h dr \quad (4)$$

egyenlőtlenségi reláció. A (4) képletben f mértékegysége m^2/N vagy m^2/kp .

3. Felső korlát

Bármely, az $a \leq r \leq b$ intervallumban folytonos és szakaszonként folytonosan differenciálható

$$g(b) = 1 \quad (5)$$

feltételt kielégítő $g = g(r)$ függvénnyel fennáll a

$$H \leq \frac{1}{2G(1+\nu)b} \int_a^b \frac{g^2 + [(rg)']^2 - 2\nu g(gr)'}{h} r dr \quad (6)$$

egyenlőtlenségi reláció.

4. A korlátok bizonyítása

A potenciális energia és a kiegészítő energia funkcionálok kapcsolatos minimum tételeiből kapjuk a (4), (6) egyenlőtlenségi relációk igazolását.

A potenciális energia funkcionállal kapcsolatos minimum tételből az $\bar{u} = Ff(r)$ alakú kinematikailag lehetséges elmozdulás mezővel számolva, kapjuk a (4) egyenlőtlenségi relációt, ha felhasználjuk, hogy a tényleges megoldásnál a potenciális energia funkcionál értéke

$$\Pi_p = -F^2 \pi b H. \quad (7)$$

A kiegészítő energia funkcionállal kapcsolatos minimum tételből az

$$N_r = Fg(r), \quad (8)$$

$$N_\varphi = F(rg(r))' \quad (9)$$

alakú statikailag lehetséges „feszültségmező” alkalmazásával a (6) egyenlőtlenségi relációt nyerjük, ha felhasználjuk, hogy a tényleges megoldásnál a kiegészítő energia funkcionál értéke

$$\Pi_k = F^2 \pi b H. \quad (10)$$

Megjegyzendő, hogy g dimenziótlan mennyiség.

5. Példa a korlátok képzésére

Legyen $f = f(r) = C(r - a)$. A (4) egyenlőtlenségi relációból rövid számolással a

$$H \geq 2C(b - a) - \frac{4G}{(1 - \nu)b} C^2 \int_a^b \left[(1 + \nu)r + \frac{a^2}{2r} - (1 + \nu)a \right] h dr \quad (11)$$

eredményt kapjuk. A (11) képlet jobb oldala a „ C állandó” függvénye, a jobb oldal maximális értékénél lesz a (11) alakú korlát a legélesebb. Ennek megfelelően a (11) alakú korlátot az optimális C értékkel képezve, jutunk a

$$H \geq \frac{(b - a)^2}{\frac{4G}{(1 - \nu)b} \int_a^b \left[(1 + \nu)r + \frac{a^2}{2r} - (1 + \nu)a \right] h dr} \quad (12)$$

alsó korlátra.

A felső korlátot a $g(r) = r/b$ alakú függvénnyel képezzük a (6) egyenlőtlenségi relációból. Elementáris számolással a

$$H \leq \frac{5 - 4\nu}{2G(1 + \nu)b^3} \int_a^b \frac{r^3}{h} dr \quad (13)$$

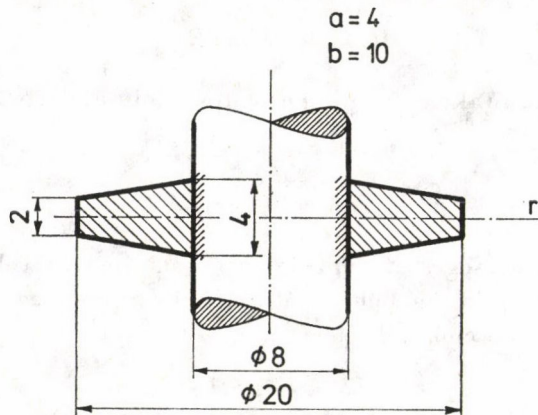
eredményt nyerjük.

A 2. ábrán vázolt lineárisan változó vastagságú köralakú tárcsára a

$$1,432 \cdot 10^{-3} \leq H \leq 1,622 \cdot 10^{-3}$$

eredményt tudjuk levezetni a (12), (13) formulák alapján az alábbi értékek felhasználásával:

$$a = 4, \quad b = 10, \quad h(r) = \frac{16 - r}{3}, \quad G = 600, \quad \nu = 1/3.$$



2. ábra. Lineárisan változó vastagságú tárcsa

A számpéldában a mértékegységek feltüntetésétől eltekintettünk.

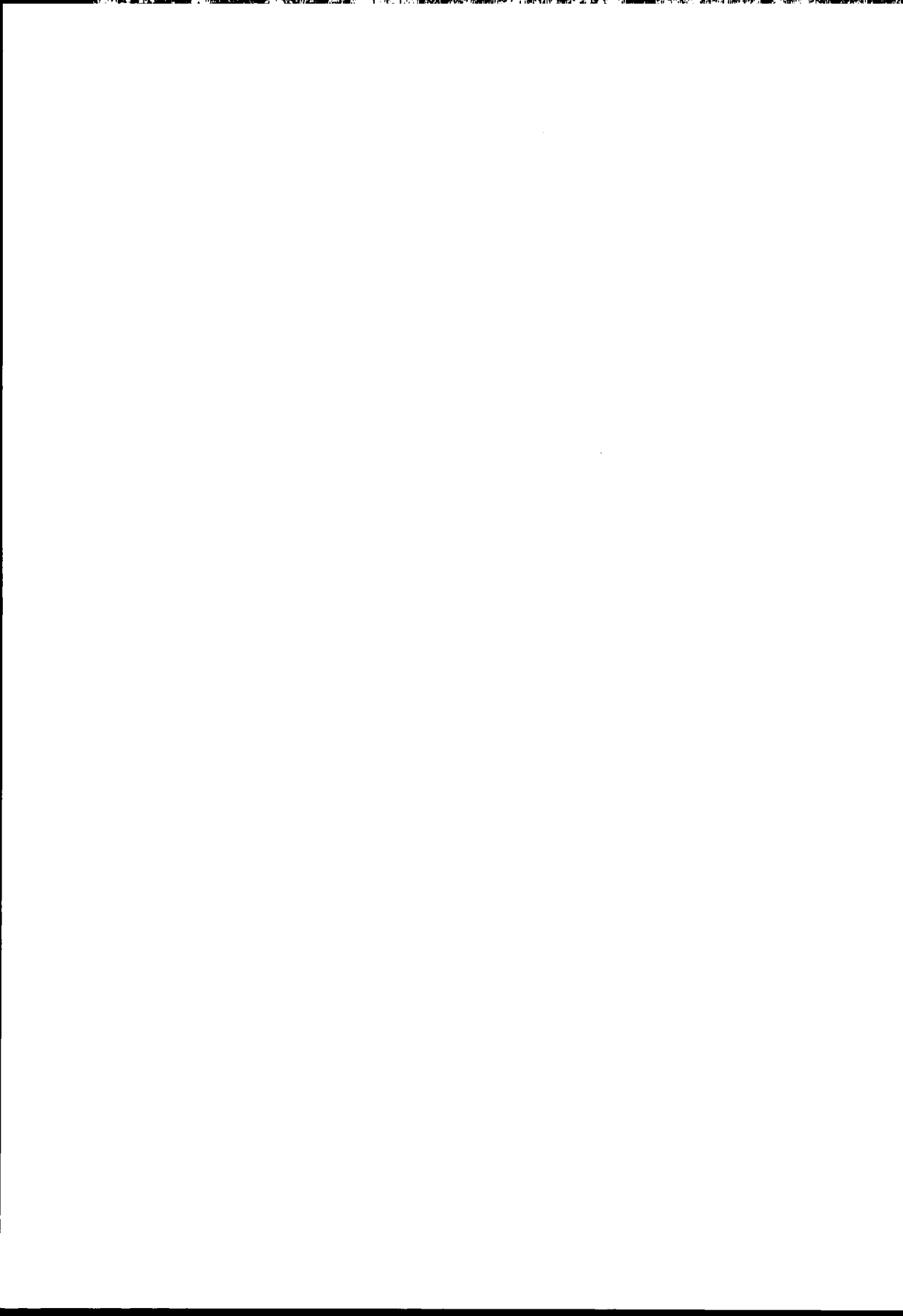
Hajlított változó vastagságú körlemezzel kapcsolatban hasonló problémát REISSNER oldott meg [2].

IRODALOM

1. VOCKE, W.: Der profil-ebene Spannungszustand. *ZAMM* 41 (1961), 257—261
2. REISSNER, E.: Upper and Lower Bounds for the Stiffness of Transversely Bent Circular Plates *Journ. Appl. Mech.* (1959), 142—143
3. TIMOSHENKO, S.—GOODIER, I. N.: *Theory of Elasticity*. 2nd Ed. (1951), p. 59

Lower and Upper Limits to the Tension Stiffness of a Circular Disc of Variable Thickness. The limits of the tension-stiffness limits of a hollow circular disc of variable thickness are deduced by the application of the two minimum theorems of the elastostatics. The assumptions of the inplane profile problems are used in the paper.

Untere und obere Grenzen für die Zugsteifigkeit einer Kreisscheibe von veränderlicher Dicke. Die Grenzen der Zugsteifigkeit von Hohlkreisscheiben mit veränderlichen Dicken werden durch Anwendung der zwei Minimumtheorien der Elastostatik abgeleitet. Die Abhandlung wendet die Voraussetzungen der profilebenen Aufgaben an.



KÖNYVISMERTETÉS

G. Franz (szerkesztő):

BETON-KALENDER 1978

TASCHENBUCH FÜR BETON-, STAHLBETON- UND SPANNBETONBAU, SOWIE DIE VERWANDTEN FÄCHER

Verlag von Wilhelm Ernst u. Sohn, Berlin—München—Düsseldorf 1978

A *Beton-Kalender*, a betonszakma kétkötetes standard zsebkönyve, immár 67. kiadásban áll a vasbetonszakma művelőinek rendelkezésére.

A zsebkönyv első kötete 1165 oldal terjedelemben 12 fejezetet foglal magában. Ezek részletesen foglalkoznak többek közt a vasbeton alapanyagainak tulajdonságaival (Prof. J. BONZEL, W. SCHUMACHER), a három és négyoldalt felfekvő, valamint a többszámú lemezek erőjátékával (Prof. F. CZERNY), a szilárdságtannak a mérnök-építészetben fontos feladataival (Prof. N. DIMITROV), a rúdszerkezetek számításával (H. AHRENS, Prof. H. DUDDECK) a vasbetonszerkezetek kurrens méretezési szabályaival (E. GRASSER), a karcsú szerkezeti elemek méretezési problémáival (Prof. K. KORDINA, Prof. U. QUAST), valamint a feszített betonszerkezetek kérdéseivel (Prof. H. RÜSCH, Prof. H. KUPFER).

A könyv második kötete 1006 oldal terjedelmű. Ennek mintegy a felét az NSZK-ban érvényes építési szabványok és szabályzatok kimerítő ismertetése foglalja el (H. GOFFIN). Igen részleteztek a kétirányú feszültségi állapotban levő lemezszerkezetek (táblák) számítását, (W. SCHLEEK) valamint a betonútépítés kérdéseit tárgyaló fejezetek (J. SCHLUMS, Prof. D. SCHWÄR).

Az új kiadás a régebbi kiadásokból átvett fejezetek gyökeres átdolgozását tette szükségessé. Erre főként az adott okot, hogy az NSZK-ban 1978. január 1-től kezdve a régebbi mértékegységek helyett az új SI-mértékegységrendszert vezették be, ami egyúttal egyes anyagelnevezések megváltozását is maga után vonta.

A könyv előszava melegen emlékezik meg a 88 éves korban elhunyt magyar származású Prof. E. RAUSCHRÓL, a zsebkönyv „Gépalapok” című fejezetének kiváló szerzőjéről. Az új kiadásban ezt a tárgykört a széllökések és földrengések okozta igénybevételekre való méretezés problémáival kibővítve F. P. MÜLLER tárgyalja.

Új a zsebkönyvben a holland vasbetonszabályzatot részletesen ismertető fejezet is.

Végigtekintve a zsebkönyv gazdag és igen változatos anyagán, egyértelműen megállapítható, hogy a könyv neves szerkesztője, Prof. G. FRANZ híven őrködött a jól bevált hagyományokon: az új kiadás — a régiekhez hasonlóan — kitűnően szolgálja a betonépítéssel érdekeit, és mint ilyen, hasznos segítséget nyújt a betonépítéssel foglalkozó szakköröknek messze az ország határain túl is.

Dr. Csonka Pál

Gábor László:

ÉPÜLETSZERKEZETTAN IV. KÖTET

Tankönyvkiadó, Budapest 1979, 302 oldal, 234 ábra, szakirodalmi jegyzék

Ez a könyv GÁBOR László professzor életművének — az Épületszerkezettan című quadrilógiának — negyedik, immár befejező kötete, amely az ajtók, a kapuk, az ablakok, az üvegfalak, a portálok, a fényzárók és árnyékolók, a beépített szekrények, a padlók és falburkolatok célszerű szerkezeti megoldását ismerteti. Célja e szerkezetek építészeti és szerkezettervezési eleinek kritikai tárgyalása és jellegzetes kiviteli példáinak bemutatása.

A könyv tartalmát illetően merőben újszerű; az épületek kiegészítő szerkezeteit hasonló részletességgel és tudományos igényvel tárgyaló szakkönyv nem ismeretes sem hazai, sem nemzetközi viszonylatban. Ennek a szerte ágazó, sokrétű anyagnak az összegyűjtéséért, rendszere-

zéséért, kritikai értékeléséért a hazai építéstudomány és építőipar részéről elismerő köszönet illeti meg. Műve a hazai építészet számára biztos útmutatást, az egyetemi és főiskolai oktatás részére alapvető segítséget jelent.

A könyv szövegrésze minden részletre kiterjedő gondossággal, de amellet kellő mérték-tartással ismerteti a különféle kiegészítő szerkezetek célját, elrendezését, a célt szolgáló feltételek legalkalmasabb teljesítmésmódját. Nem mulasztja el minduntalan felhívni a figyelmet a feladattal kapcsolatban kielégítendő építésrendészeti, szilárdságtani, anyagtani, szellőzéstechnikai, tűz- és zajvédelmi, valamint egyéb fizikai és kémiai feltételekre, a gyártástechnológiai, egészségügyi és szépészeti követelményekre. Állandóan figyelmeztet az ok és okozati összefüggésekre, a tartóssági és gazdaságossági szempontokra, a néha nem is egyirányba mutató, sőt éppen ellentétes igények értelmes egyeztetésének szükségességére.

Különleges értéke a könyvnek a példaszzerű gondossággal, szakszerű pontossággal meg-rajzolt igen gazdag ábraanyag és annak izléses, igen demonstratív előadásmódja, mely kitűnően hasznosítja a két színnel való ábrázolástechnika nyújtotta lehetőségeket. E tekintetben külön is rá kell mutatni az ablakszerkezeteket bemutató ábrák világos áttekinthető voltára, amit csakis a kétszínnel való ábrázolásmód tett lehetővé.

Mindent egybevetve, megállapítható, hogy G á b o r László professzor könyvének jelen negyedik kötete az előző három kötethez hasonlóan a magyar műszaki irodalom jeles terméke, amely méltón koronázza be szerzőjének az épületszerkezettan területén egy életen át végzett értékes tudományos munkásságát.

Dr. Csonka Pál

T. Kallard:

EXPLORING LASER LIGHT. Optosonic Press, 1977.

Ez a könyv célkitűzéseit tekintve a lézerek alkalmazásával foglalkozó, nem feltétlenül lézeres alapismeretekkel rendelkező, de a klasszikus optikában járatos szakembereknek, kutatóknak és oktatóknak szól.

A szerkesztő sikeresen oldotta meg azt a feladatot, hogy ne csak egy szűk olvasótábornak készítsen erről az igen érdekes, s egyre nagyobb érdeklődést kiváltó területről kézikönyvet, hanem egy jóval szélesebb körnek ír az egyszerű ismeretterjesztésnél többet nyújtva, a részletesebb információkra több mint 200 hivatkozásban utaló művében. Külön említést igényel a javasolt segédanyagok jó csoportosítása (a fejezetek végén megadott hivatkozások összegzése, azok szerzők és tárgy szerinti csoportosítása), valamint egy rövid ajánlás a fontosabb lézeres berendezéseket és optikai eszközöket gyártó cégek megadásával. További segítséget nyújt a szerkesztő azzal is, hogy megadja a szakterülettel foglalkozó lényegesebb folyóiratok jegyzékét.

A könyv tartalmát tekintve laboratóriumi gyakorlatok és előadás demonstrációk formájában közli azokat a klasszikus ismereteket és a legfrissebb kutatási eredményeket, amelyek alapul szolgálhatnak a hélium-neon lézerek alkalmazási példáiból kiindulva egy jóval szélesebb mérés-technikai és eszközfejlesztési igényrel jelentkező olvasóréteg számára is.

A könyv jellegét tekintve hézagpótló szerepet tölt be a tudományos mélységű publikációk és a már főleg kifejlesztett eszközöket ismertető lézeres alkalmazástechnikai könyvek között.

A kiadvány 298 oldalon, 276 illusztrációval 112 témakört emel ki az optika területéről, s minden témát olvasmányosan, ugyanakkor olyan mélységig tár fel, hogy az olvasottak alapján a szükséges eszközökkel és alapismeretekkel rendelkező olvasó rekonstruálni tudja az egyes vizsgálati eljárásokat, s az irodalmi utalások alapján bármely témában tovább tudjon lépni az egyszerű demonstráción. Példaként említhetők ilyen címszavak, mint „optikai pad és tartozékai”, „tükrök görbületének mérése”, „optikai mikrométer”, „Michelson, Mach-Zender és Jamin interferométerek”, „lézeres Doppler-féle sebességmérés”, „törésmutató meghatározás”, „360°-os holográfia” stb.

Összegezve megállapítható, hogy a könyv éppen hézagpótló jellege miatt keresett mű lesz a lézerek és az optika iránt érdeklődő olvasók számára.

Dr. Bitó János

Palotás László:

MÉRNÖKI SZERKEZETEK ANYAGTANA, I.

ÁLTALÁNOS ANYAGISMERET

Akadémiai Kiadó, Budapest 1979.

Régi és sürgető igényt elégített ki Palotás professzor, a Magyar Tudományos Akadémia és az Akadémiai Kiadó, amikor ezt a könyvet megjelentette. Szerző Építőanyagok című, az Akadémiai Kiadó gondozásában 1959—61 évben publikált két kötetes munkája ui. néhány éven belül kifogyott.

Az új, három kötetes mű első kötete három főfejezetre tagozódik.

Az első főfejezet az anyagtani alapismeretek és a mérnöki szerkezetek tömör összefoglalása után a szerkezeti anyagok fejlődését tárgyalja az ősi és az ókori kultúráktól napjainkig. Meggyőző adatokkal, számos ábrával és példával mutatja be, hogy az építés általában, különösen pedig az építőművészet és a mérnöki szerkezetek fejlődése elválaszthatatlan az anyagoktól: az anyagok választékának bővülése, az anyagokról szerzett ismeretek elmélyülése meghatározta az építési módokat és fejlődésüket. Ez a főfejezet ismerteti az anyagelmélet kialakulását, fejlődését, az anyag felépítését és az anyagi test szerkezetét, érintve és magyarázva azokat a határterületeket, amelyek ismerete nélkül az anyagok kutatásával vagy felhasználásával foglalkozó mérnökök mindennapi feladatainak megoldása ma már szinte elképzelhetetlen.

A második főfejezet a szerkezeti anyagok kémiai, fizikai és szilárdsági tulajdonságait foglalja össze, továbbá a mérési módszereket, a mértékrendszereket és a mértékegységeket, világos képet adva az anyag, a mérőeszköz, a vizsgáló személy és az anyagtulajdonságok dialektikus egységéről. Külön értéke a fejezetnek, ahogyan szerző a lineárisan rugalmas, a lineárisan rugalmas-lineárisan felkeményedő, a lineárisan rugalmas-tökéletesen képlékeny, a merev-tökéletesen képlékeny és a merev-lineárisan felkeményedő anyagmodelleket szétválasztja, magyarázza és alkalmazásuk lehetőségeit feltárja, nagy segítséget adva ezzel a különböző célú mérnöki szerkezetek méretezőinek a megfelelő igénybevételek és feszültség-alakváltozási modellek kiválasztására.

A harmadik főfejezet a szerkezeti anyagok szilárdsági vizsgálatának és értékelésének módszereit foglalja össze. Részletesen ismerteti a statikus, a tartós, a fásasztó és a dinamikus vizsgálatok módjait és elveit, a szükséges berendezéseket, ezek mérési tartományát, pontosságát, alkalmazhatóságát. A mérnöki szerkezetek teherbíró képességét alapvetően határozzák meg a feszültség-alakváltozási állapotok, az alakváltozások mechanikai értékelésének módja, az ezzel összefüggő töréselméletek. Szerző e téren végzett alkotómunkáját a fejezet híven tükrözi és a mérnököt kitűnően tájékoztatja arról, hogyan lehet biztos következtetéseket levonni az alakváltozás mérési eredményeiből a szerkezet feszültségállapotaira. Ehhez nagy segítséget ad a matematikai értékelés, amelyet szerző a főfejezet zárásaként részletesen tárgyal, különös tekintettel a matematikai-statisztikai módszerekre.

A könyv egésze bizonyítja, hogy az építmények tartósságának és gazdaságosságának alapvető feltétele a megfelelő minőség, mind a felhasznált anyagban, mind a tervezési, kivitelezési és fenntartási munkában. A jó minőség elengedhetetlen feltétele az anyagismeret és a folyamatos ellenőrzés, vizsgálat. Szerző ötvenesztendő oktatói, tudományos és ipari tevékenységének bőséges tapasztalatait, gazdag tudományos és ipari eredményeit közreadva az Akadémiai Kiadó a magyar mérnöktársadalmat ismét nagyon hasznos, korszerű, magas színvonalú könyvvel ajándékozta meg.

Dr. Ujhelyi János

Perényi Imre:

TOWN AND ENVIRONS.

RECREATION IN TOWN PLANNING

Akadémiai Kiadó Budapest, 1978.

Már megszoktuk, hogy a városrendezés teoretikus kérdéseire élénken reagáló PERÉNYI Imre professzornak mindig van számunkra mondanivalója még akkor is, ha ugyanabban a témában már szolt, elmondta véleményét, javaslatait, vagy leírta szakmaformáló nézeteit,

A Town and Environs c. könyve is ilyen „többlet”, újabb kiegészítés ahhoz, amit korábban már megismertet. Ez a könyv lényegében véve azonos a szerzőnek a *Város, ember, környezet* (Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.) c. munkájával, de mégsem csupán annak angol nyelvű kiadása, mert a tőle megszokott módon ebben is továbbfejleszti gondolkodásmódot alakító javaslatait, kristályosabb halmazállapotba sűríti általános érvényű következtetéseit. Többet nyújt ebben annál, hogy egyszerűen nemzetközi körben lehetőséget teremt érzékelni a magyar urbanisztikai elméletének — a településtudományak — reagálását a világ egyik legaktuálisabb urbanisztikai problémájára: az ember és a környezet viszonyára.

A környezetünkkel szemben támasztott igények élénkülésére érzékeny reagálóképességével nemcsak a városrendezésben felgyorsult tempó következményeit és elméleti követelményeit tapogatja le, hanem közvetlenül a gyakorlat számára alkalmazható következtetéseket állít fel. Többször hallottuk, olvastuk tőle a város morfológiai tagolásának elveit, a település-szerkezet szervezésének meghatározó jellemzőit. Ezek között azokat a követelményeket is, amelyeket az ember állandó környezetével szemben támasztani kell, s amelynek kielégítése jórészt a városrendezés eszközeivel biztosíthatók. Ebben a művében új tartalommal telíti az általános elveket, közelebb hozza, közvetlenül érzékelhetővé teszi a városrendezés környezet-alakító szerepét.

PERÉNYI Imre a várost a társadalomnak megfelelő, de a benne élő emberre formált művi környezetnek tekinti, amiben az ember egészséges környezetben élhet, dolgozhatik, pihenhet, kényelmesen közlekedhetik, a szükséges és lehetséges mértékben szolgáltatásban — ellátásban részesül. Ebben a rendszerben vizsgálja az ember és a város — az ember és környezete — viszonyát. A vizsgálódás során eljut azoknak a kritériumoknak az összegezéséhez, amelyek a mai ismeretek szerint a városrendezés követelményeiként határozhatók meg.

PERÉNYI Imre művében olyan kérdésben foglal állást, amely még különböző szakmai helyeken elég gyakran homályosan kerül megfogalmazásra. Kimondva — ki nem mondva — véleményt alkot abban, hogy a környezetet ott kell védeni, ahol arra káros, romboló hatás érvényesül, de mindenhol alakítani kell, ahol az ember — a város lakó közösség — életkörülményeit szükséges formálni. Ha majd nemzetközi — egyetemleges keretek között a környezetvédelem eléri célját és az ember közvetlen és tágabb környezetét sem tudatos, sem gondatlan-ságból veszély nem fenyegeti, a környezetalakítás szükségessége és jelentősége akkor sem csökken, hanem az urbanizációval fokozatosan növekszik. Azt vallja, hogy az ember környezetét — a várost — a benne lakó ember céljainak leginkább alkalmas módon kell alakítani, formálni, hogy az urbanizált közösséget a változó igények között szolgálja tudja.

A könyv alcíme — rekreáció a városépítésben — társadalmi-gazdasági fontosságú, annál is inkább, mert túl jut azon a körön, amihez leginkább kapcsoljuk. PERÉNYI Imre művében a rekreáció nemcsak a város lakó ember felfrissülését, felüdülését, erejének újra alakítását jelenti, hanem átvitt értelemben a városra mint állandóan változó, átalakuló társadalmilag létrehozott organizmusra is igaznak lehet elfogadni. Ezt a törekvését igazolja a könyv IV. fejezete, amiben a város megújulásával, a városrekonstrukció környezetalakító reagálásával foglalkozik. Ebben az általánosításban nem marad meg „intra muros” a városon belül, hanem a városnak a környezetét — a környezet „környezetét” is boncolás alá veszi. Külön foglalkozik a budapesti agglomeráció kialakulásával és fejlődésének tendenciáival. Ez a rávezetés többet is mond, mint amennyit a mű terjedelmében és a szűkre korlátozott fejezetben feltárni lehetett. Erre pedig mindinkább élednek az igények, mivel a város és az agglomerációja közötti környezeti viszonyhatás meghatározza a benne élők környezeti jellemzőit. A budapesti agglomerációnak — a főváros környékének — pedig kiemelkedően fontos szerepe van a város és az e térségben szimbiózisában együttélő települések lakóinak — az ember, település és környezet — egymásrahatásában. Az ebben keltett hiányérzetet pótolja a könyv egyéb irányú komplexitása, a város lakó ember számára jelentős környezetnek ökonómiai, ökológiai, esztétikai követelmények alapján feltárt értékelése.

Ez a mű újabb hiteles közvetítője itthon és határon kívül a magyar urbanisztikai gondolkodásmódnak, publikációja elért eredményeinknek és tolmácsolója a hazai városrendezés környezetalakító célkitűzéseinek.

Dr. Pongrácz Pál

Perényi Imre:

VÁROSÉPÍTÉSTAN

A VÁROSÉPÍTÉS TÖRTÉNETE ÉS ELMÉLETE

Tankönyvkiadó, Budapest, 1978. 626 o.

Hazai városépítésünk művelésének kiemelkedően jelentős állomása e nagyméretű, vastkos és tartalmas, sok képpel és ábrával gazdagított könyv. Tartalma, időszerűsége, új, helyesebben megújított volta miatt számot tarthat külföldi érdeklődésre, felhasználásra is.

Megújított voltát azért említjük, mert jelentős, immár két évtizedes előzményei vannak. Ugyanis a két fő részből — a városépítés története és a városépítés elmélete — álló kötet második része „Településtervezés” címmel és „Városépítéstan II. kötet” alcímmel első ízben 1958-ban jelent meg. Jelentőségét, szűkebb körű bizonyítja az, hogy ezt követően még két ízben — 1963-ban és 1972-ben — újra kiadásra került, mindkétszer továbbfejlesztve is, de ugyanezzel a címmel. Első része „A városépítés története” címmel és „Városépítéstan I. kötet” alcímmel pedig egy ízben jelent meg, 1961-ben. A fordított kiadási sorrendet indokolhatta az, hogy a településtervezést tárgyaló kötet közreadása sürgős és fontos volt az akkor újra meginduló, máig tartó és rohamosan növekvő várostervezési, városépítési feladatok korszerű megoldása számára.

A most, egybekapcsoltnak és immár logikus sorrendben szerkesztve újra megjelent két rész, korábban két kötet, lényegesen több, illetve jelentősebb, mint amilyen külön-külön is volt. Egységbe foglalja ugyanis teljes tartalmát, amiben a városépítés története és az abból levonható tapasztalatok, tanulságok nagy mértékben megalapozzák jelenünk, sőt jövőnk városépítési feladatait, azok átfogását és részletezését. Diszciplináját adja — részben a szerző kutatásai alapján is — enciklopédikus teljességgel a városépítésnek, ami hazánkban mind növekvően és a köztudatban is növekvő jelentőséggel, fokozódó igényekkel folyik.

Több azonban a korábbi kiadásokhoz képest azáltal is, hogy számos fejezet jelentősen bővült. Főként olyanok számára, akik az előző köteteket ismerték, érdemes jelezni, hogy többek közt bővült az első rész I. fejezete Amerika ókori kultúrájának áttekintésével, II. fejezete a francia középkori városépítéssel, valamint az iszlám országok városépítésével, III. fejezete ugyancsak többek közt az angol ipari forradalom időszakának városépítésével és a szociálutópisták városépítészeti eszméivel, a második világháború utáni városépítés jellegzetes európai vonásaival, IV. fejezete a magyarországi városépítés jelentős bővítésével, illetve most önálló fejezetként. A második rész I. fejezete bővült a népgazdasági tervezés, a területfejlesztés és a településtervezés összefüggéseivel, menetével, II. fejezete a városhálózati rendszerekkel és a városépítés ökonomiai vetületeivel, VII. fejezete a szabadidő és a pihenés-üdülés környezete, az üdülőterületek kialakítása témáival.

Az első rész egészét illetően érdemes kiemelni, hogy a városépítés jelenségeit, indítékait nagymértékben a társadalmi, gazdasági alakulás, fejlődés alapján, azokkal való összefüggéseiben ismerteti. A második rész esetében pedig különös hangsúlyt ad a legidőszerűbbé vált problémáknak, mint többek között a települések rekonstrukciója, a lakóterületekkel és az iparral kapcsolatos rekonstrukciós feladatok, a városközpontok alakítása, illetve rekonstrukciója. E kiragadott témák is mutatják, hogy a könyv, de főként második része nagy mértékben a jelenlegi és jövőbeli társadalmi feladatokhoz és a gyakorlati tevékenységekhez kötött, helyesebben azokra irányul.

Ezzel kapcsolatosan két kérdés vethető fel a könyv címét, tartalmát, törekvéseit illetően, s mindkettő megválaszolásra érdemes. Az egyik: miért „városépítéstan” a címe, s ennek megfelelően túlnyomóan a tartalma is, amikor immár közel húsz éve a korábbi szűkebb értelmű városépítéstan hazánkban is urbanisztikává tágult, számos más tudományágat, ismeretanyagot fogott át vagy került velük interdiszciplináris kapcsolatokba, vezető tudományágaként pedig már több mint negyed évszázada településtudomány a neve. Úgy véljük, jogos a szerző választása, címadása. Az urbanisztika egészét tekintve még tágulóban van, hovatartozása, határai imbolyognak, vitatottak. Kisebbségi mértékben ez a helyzet a településtudományt illetően is. Helyes tehát mindkettőnek az eredeti és szolid alapjain, vagyis az építésén, tágabb értelemben a műszaki alapokon maradni, mégha a korábnál jóval tágabb kitekintésekkel is a távolabbi összefüggésekre. Az pedig közmegegyezéssé vált, hogy a témának csak címében maradt meghatározóvá a „város” szó, mert mindinkább beleértendő azáltalában a települések, s különösképpen az országosan fokozódó urbanizáció. Az is közmegegyezéssé vált — külföldön helyenként nem így van —, hogy a tágabb regionális, területi tervezés az ún. városépítéstan szerves része, az egyes települések kapcsolatainak, mikénti fejlesztésének, alakításának egyik

fő alapja. Ezt a véleményt nem csupán arra alapozzuk, hogy e könyv tankönyv, helyesebben az is, s mint tantárgy határozott kereteket igényel, hanem arra is, hogy tartalmával, ismeretanyagával ennél jóval szélesebb körben lehet hasznos, információkat adhat, sőt hatást kelthet.

A másik kérdés, ami felvethető s választ igényel: miért „a városépítés elmélete” a második rész címe, holott e rész korábban önálló könyvként s mindhárom előző kiadásában a „Településtervezés” címet viselte. A válasz erre elméletileg is nehezebb, de ugyanezért méginkább szükséges. Indokolható lehet azzal, hogy a tervezés kapcsán a könyv bőséges és szerteágazó ismereteket, megalapozó ismereteket közöl a városépítés folyamatairól, indítékairól, feltételeiről és lehetőségeiről. Emígy voltaképpen a történelmi múlttal már megalapozott társadalmi, gazdasági összefüggéseket rajzolja meg. De ez talán még nem volna elég, s marad a veszélye annak, amit a közeli múltig tapasztalhattunk, hogy a városépítés ügye túlzottan tervezéscentrikus volt. Ma már ez oldódott, és e címváltoztatás ezért is helyes. De leginkább azért helyesíthető, mert bár a tervezés önmagában szakasz, fontos szakasz a városépítés folyamatában, mégis legtöbb elemében, különösen számszerűségeiben és normatíváiban részint tapasztalaton, részint kutatásokon alapuló, — helyesebben: mindkettőn alapuló teóriákban gyökerezik. A tervezés tehát már átmenet az elméletekből a gyakorlatba, fontos útszakasz a végső, a megvalósuló gyakorlati eredményekhez irányulóan, mögötte széles és nagymúltú elméleti háttér áll. Alighanem ezt kívánta szerző e címadással jelezni, s e rész tartalmát is ilyen irányban bővíteni.

A városépítéstan — másként szólva a településtudomány — nem minden már létező, inkább csak lebegő, éppenséggel még megalkotandó teóriáját tartalmazza, tartalmazhatja e könyv. Viszont alapokat adhat ahhoz; hogy további és szükséges teóriák jöhessenek létre, tisztázódjanak, esetleg változtatva is a jelenlegiekben, de azokat mindenképpen tágítva. S főként alapokat adhat ahhoz — ami nem egyszer tapasztalható ez idő szerint —, hogy parttalan teoretizálások túlságosan el ne terjedjenek, mégha gondolatkeltek, emígy gyakran hasznosak is. Másként szólva, alapokat adhat ahhoz, hogy az ilyenek szorosabban a gyakorlathoz, a valósághoz kötődjenek. Mert a városépítés végső soron a társadalmi valóság számára nagy, egyre nagyobb jelentőségű gyakorlati tevékenység, amit tapasztalatokkal és elméletekkel egyaránt megalapozni kell. A könyv egészében ezt a célt szolgálja, megközelítését elősegíti. Fő jelentőségét ebben látjuk.

Végül két bíráltni valót említnünk. Az egyik, hogy az egyébként csaknem minden lényeges mai témára kiterjedő könyv nem, illetve alig foglalkozik az építési technikával és az építésügyi igazgatással, holott mindkettőnek ez idő szerint döntő jelentősége van a városépítés teljes folyamatában. Mentsége lehet az, hogy a településtudomány e téren mindmáig alig lépett előre, illetve előrehaladása lassúbb, mint az építési technika fejlődése, s emígy erről szólni megalapozottan kevésbé lehet, az igazgatástudomány és a településtudomány kapcsolatai pedig kevésbé tisztázottak. A másik bíráltni való nem a szerző, hanem a kiadás ügye, nevezetesen a fotók halovány-sága, holott szép, fontos, helyénvaló fotók. Ennek viszont mentsége az lehet, hogy egyrészt a fotók emígy is érthetőek, másrészt igényesebb nyomtatással a könyv jóval többre került volna. Jelenlegi ára méreteihez, gazdag anyagához képest igen mérsékelt. S ez talán arra jó, ami már elvi s ide tartozó téma, hogy szélesebb körben terjedhet el, erre pedig nagy szükség van s alighanem igény is van. Mint már utaltunk rá, e könyv a városépítés szűkebb szakkörénél jóval szélesebb körhöz szólhat, tudományos megalapozottsággal tolmácsolójává válhatik a városépítés ügyének. Hiszen tudományos életünk egészének fontos, időszerű törekvése az, hogy eredményei szélesebb körben is ismertekké váljanak, információkat adjanak. Sőt, itt másról, többről is van szó, mint információról. Mert a minél szélesebb társadalmi háttérrel a városépítés ügye nagymértékben igényli, munkája, eredményei csak azzal együtt válhatnak valóban értékessé, maradandóvá.

Dr. Granasztói Pál

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Verő József: Megemlékezés Kerpely Antal tudományos és nemzetgazdasági munkásságáról</i>	205
<i>Vajda Pál: Csonka János és a precíziós gépipar</i>	219
<i>Páczelt István: Érintkezési feladatok tárgyalása variációs elvekkel</i>	237
<i>Bosznay Ádám—Richlik György—Tóth György: Egyenes tengelyű, a hossza mentén változó jellemzőkkel bíró, hajlító lengést végző rúd sajátkörfrekvenciáinak javítható közrefogása II.</i>	263
<i>Prohászka János: Anyagtudomány, anyagtechnológia, anyagtulajdonságok</i>	269
<i>Petrasovits, G.—Soltész, P.: Kombinált talajmodell alkalmazása síkalapok vizsgálatára a térbeli feszültségállapot figyelembevételével</i>	295
Szöke Béla : Példák tévesen használt elméletre mint műszaki hibaforrásra	315
<i>Márkus Gyula: Pereme mentén oszlopokkal alátámasztott körszimmetrikusan terhelt körlemez</i>	323
Csutor János : Adalékok egy betonanyagú tömegcikk gépsorában rejlő műszaki fejlesztési lehetőségekhez	355
<i>Tarnai Tibor: A héjak membránállapotának létezési és egyértelműségi feltételeiről III. Elliptikus héjak</i>	379
<i>Prohászka János: Az öntvényminőség javításának természettudományos alapjai</i>	411
<i>Hegedüs István: Mátrix-analitikus módszer szimmetrikus hálózati rendszerű rácshenger erőjátékának vizsgálatára</i>	431
<i>Ecsedi István: Alsó és felső korlát a változó vastagságú körtárcsa húzási merevségére</i> ...	445

Könyvismertetések

<i>G. Franz: Beton-Kalender 1978 (Csonka, P.)</i>	451
<i>Gábor László: Épületszerkezetan IV. kötet (Csonka, P.)</i>	451
<i>Kallard, T.: Exploring Laser Light (Bitó, J.)</i>	452
<i>Palotás László: Mérnöki szerkezetek anyagana I. Általános anyagismeret</i>	453
<i>Perényi Imre: Town and Environs. Recreation in Town Planning (Pongrácz, P.)</i>	454
<i>Perényi Imre: Városépítéstan. A városépítés története és elmélete (Granasztói P.)</i>	455

CONTENT

<i>Verő, J.</i> : To the Memory of the Scientific and Economic Work of Antal KERPELY	205
<i>Vajda, P.</i> : János CSONKA and Precision Engineering	219
<i>Páczelt, I.</i> : Treatment of Contact Problems with the Aid of Variation Principles	237
<i>Bosznay, Á.—Richlik, Gy.—Tóth, Gy.</i> : Improveable Bracketing of the Angular Eigenfrequency of a Straight Rod with Characteristics Changing along its Length, Carrying out Flexural Oscillations, II.	263
<i>Prohászka, J.</i> : Material Science, Material Technology, Material Qualities	269
<i>Petrasovits, G.—Soltész, P.</i> : Application of a New Method Combined Ground Model for Analysing Spread Foundations by Taking the Stress Distribution into Account ...	295
Szőke, B. : Examples for an Erroneously Used Theory as a Source of Technical Mistakes	315
<i>Márkus, Gy.</i> : Circular Plate Supported by Columns at its Boundary Subjected to Circular Symmetrical Loads	323
Csutor, J. : Contribution to the Possibilities for Technical Development of a Production Line for Mass Articles from Concrete	355
<i>Tarnai, T.</i> : On the Existence and Uniqueness Conditions of the Membrane State of Shells, III. Elliptic Shells	379
<i>Prohászka, J.</i> : The Improvement of Castings Quality Based on Natural Sciences	411
<i>Hegedűs, I.</i> : A Matrix-Analytic Method for the Investigation of the Stress Pattern in a Lattice Cylinder of Symmetrical Network	431
<i>Ecsedi, I.</i> : Lower and Upper Limits to the Tension Stiffness of a Circular Disc of Variable Thickness	445

BOOK REVIEW

<i>G. Franz</i> : Beton-Kalender 1978 (Csonka, P.)	451
<i>Gábor László</i> : Épületszerkezetan IV. kötet (Csonka, P.)	451
<i>Kallard, T.</i> : Exploring Laser Light (Bitó, J.)	452
<i>Palotás László</i> : Mérnöki szerkezetek anyagtana I. Általános anyagismeret	453
<i>Perényi Imre</i> : Town and Environs Recreation in Town Planning (Pongrácz, P.)	453
<i>Perényi Imre</i> : Városépítéstan. A városépítés története és elmélete (Granasztói P.)	455

INHALTSVERZEICHNIS

<i>Verő J.</i> : In Memoriam der wissenschaftlichen Arbeit von Antal KERPELY	205
<i>Vajda, P.</i> : János CSONKA und die Präzisionsmaschinenindustrie	219
<i>Páczelt, I.</i> : Behandlung von Berührungsaufgaben mit Hilfe von Variationsprinzipien ...	237
<i>Bosznay, Á.—Richlik, Gy.—Tóth, Gy.</i> : Verbesserungsfähige Einschließung der Eigenkreisfrequenz von geradachsigen Stäben mit entlang der Länge veränderlichen Charakteristiken, II.	263
<i>Prohászka J.</i> : Werkstoffwissenschaft, Werkstofftechnologie, Werkstoffeigenschaften ...	269
<i>Petrasovičs, G.—Soltész, P.</i> : Anwendung eines kombinierten Bodenmodells zur Untersuchung Flachfundamente unter Berücksichtigung des räumlichen Spannungszustandes	295
Szöke, B. : Beispiele für falsch angewendete Theorien als Fehlerquelle	315
<i>Márkus, Gy.</i> : Am Rand durch eine Säule abgestützte und durch kreissymmetrische Belastung beanspruchte Kreisscheiben	323
Csutor, J. : Beiträge zu den Entwicklungsmöglichkeiten einer Maschinenreihe für Maschinenware aus Beton	355
<i>Tarnai, T.</i> : Über die Existenz- und Eindeutigkeitsbedingungen des Membranzustandes von Flächentragwerken, III. Elliptische Schalen	379
<i>Prohászka, J.</i> : Naturwissenschaftliche Grundlagen für die Verbesserung der Qualität der Gußstücke	411
<i>Hegedüs, I.</i> : Eine matrix-analytische Methode zur Untersuchung des Kräftespiels eines Gitterzylinders von symmetrischen Netzwerk	431
<i>Ecsedi, I.</i> : Untere und obere Grenzen für die Zugsteifigkeit einer Kreisscheibe von veränderlicher Dicke	445
<i>Buchbesprechung</i>	
<i>G. Franz</i> : Beton-Kalender 1978 (Csonka, P.)	451
<i>Gábor László</i> : Épületszerkezettan IV. kötet (Csonka, P.)	451
<i>Kallard, T.</i> : Exploring Laser Light (Bitó, J.)	452
<i>Palotás László</i> : Mérnöki szerkezetek anyagtana I. Általános anyagismeret	453
<i>Perényi Imre</i> : Town and Environs. Recreation in Town Planning (Pongrácz, P.)	453
<i>Perényi Imre</i> : Városépítéstan. A városépítés története és elmélete (Granasztói P.)	455

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója. Műszaki szerkesztő: Marton Andor
A kézirat nyomdába érkezett: 1980. II. 28. — Terjedelem: 22,4 (A/5) ív

80.8056 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

