

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI
GELEJI SÁNDOR

XXIV. KÖTET

1-4. SZÁM



VI. OSZT. KÖZL.

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI
GELEJI SÁNDOR

XXIV. KÖTET 1—4. SZÁM

SZERKESZTŐSÉG: BUDAPEST V. NÁDOR UTCA 15.
KIADÓHIVATAL: BUDAPEST V. ALKOTMÁNY UTCA 21.

A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg. Négy füzet alkot egy kötetet. Évenként általában egy kötet jelenik meg.

A kéziratok a következő címre küldendők:

Magyar Tudományos Akadémia
Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei
Budapest V. Nádor utca 15.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Megjelent munkájáért minden szerzőt száz különnyomat illet meg. Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó (Budapest V. Alkotmány u. 21. Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-44), külföldi megrendelések a „Kultúra” Könyv és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat (Budapest VI. Népköztársaság útja 21., Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok osztályának kiadványa az

Acta Technica

című idegen nyelvű folyóirat.

E lap hivatott a magyar műszaki tudományok eredményeinek legjavát a külföld felé tolmácsolni. A cikkek német, angol, francia vagy orosz nyelven jelennek meg, lehetőleg a szerző kívánsága szerint, összefoglaló pedig a cikk nyelvén és azonkívül a másik három nyelven. A cikkeket magyar vagy a szerző választotta idegen nyelven a következő címre kell beküldeni:

Acta Technica szerkesztősége, Budapest V. Nádor utca 15.

A MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MŰSZAKI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

SZERKESZTI
GELEJI SÁNDOR

XXIV. KÖTET



1959

VI. OSZT. KÖZL.

RÁCSOS KERETTARTÓK MEREVSÉGI JELLEMZŐI*

CSONKA PÁL

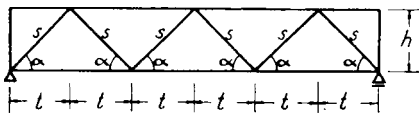
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

ÉPÍTŐIPARI ÉS KÖZLEKEDÉSI MŰSZAKI EGYETEM SZILÁRDSÁGTANI TANSZÉKE, BUDAPEST

[Beérkezett 1957. március 7-én]

1. Bevezetés

A „prizmatikus” kerettartók stabilitásproblémáinak tárgyalására szerző egyik előző dolgozata [1] a helyettesítő módszer alkalmazását javasolta. Ezen eljárás aránylag egyszerű lehetőséget nyújt a gyakorlatban felmerülő stabilitásproblémák közelítő megoldására, ha ismeretes, mekkora a tartó merevsége a különféle igénybevételi alapesetekben.



1. ábra. Rácsos kerettartó

A merevségi jellemzők értékét hevederes kerettartókra nézve szerzőnek e folyóirat hasábjain megjelent egyik tanulmánya [2] foglalta össze. Ugyanezen adatokat az 1. ábrán bemutatott tartóhoz hasonló hálózati osztású rácsos kerettartókra nézve a jelen dolgozat tartalmazza.

2. Feltevések, jelölések

A tárgyalandó tartók síkbeliek, párhuzamos övűek. Mindkét öv a tartó teljes hosszában állandó keresztmetszetű. A ferde rácsrudak felváltva ellentett dűlésűek, keresztmetszetük azonos és végig állandó.

A tartó anyagát rugalmasnak, az alakváltozásokat kicsinyeknek feltételezzük. A nyírás okozta alakváltozásokat elhanyagoljuk. Vizsgálatainkat a tartó végektől kellő távolságra eső oly tartószakaszon végezzük, melyen a két szélső rácsrúdnak a tartó erőjátékára gyakorolt hatása már nem érvényesül.

A tartót a vizsgálatok során úgy helyezzük el, hogy síkjá függőleges legyen, övei pedig vízszintes helyzetbe kerüljenek. A tartó felső övének merevsége a tartó síkjával párhuzamos, illetve arra merőleges hajlítással szemben

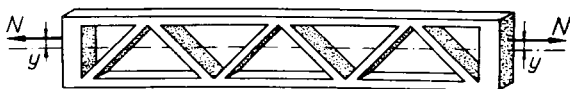
* Kivonat szerzőnek az Acta Technica 20 (1958) kötetében a 103/118. lapon angol nyelven megjelent tanulmányából.

A_1 , illetve B_1 , csavaró merevsége C_1 , húzó-nyomó merevsége pedig D_1 . Ugyan-
ezek a mennyiségek az alsó öv esetében A_2 , B_2 , C_2 , D_2 , a ferde rácsrudak eseté-
ben pedig A_3 , B_3 , C_3 , D_3 .

Vizsgálataink során a de Saint-Venant-féle *semi-inverz eljárást* alkalmaz-
zuk. *Geometriai* szempontból lehetséges oly alakváltozásból indulunk ki,
melynek egy vagy több jellemző adata egyelőre határozatlan. A tárgyalás
során megállapítjuk a feltételezett alakváltozásnak megfelelő belső erőket,
majd azt vizsgáljuk, minő értékeket kell az alakváltozás határozatlan adatai-
nak tulajdonítanunk, hogy az alakváltozás *statikai* szempontból is lehetséges
legyen.

3. Tiszta húzás (2. ábra)

Feltételezzük, hogy az alakváltozás során az övek egyenesek maradnak s
egymáshoz képest a tartó hosszirányában nem tolódnak el. Feltesszük továbbá,
hogy a tartó öveinek fajlagos nyúlása $\varepsilon_0 = \text{konst.}$, a tartó szerkezeti magassá-
gának fajlagos rövidülése pedig $\varepsilon = \text{konst.}$



2. ábra. Tiszta húzás

Egyszerű számítással igazolhatóan a feltételezett alakváltozás statikai
lehetőségének feltétele, hogy

$$\varepsilon = \frac{D_3 s^2 t^2 - 12 A_3 t^2}{D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2} \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_0 = \frac{N}{D}$$

legyen, ha ti.

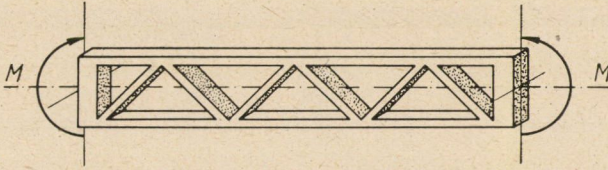
$$D = D_1 + D_2 + \frac{12 A_3 D_3 s t}{D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2}.$$

Az utóbbi mennyiség a tartó *húzó-nyomó merevsége*.

4. Tiszta hajlítás a tartó síkjával párhuzamosan (3. ábra)

Tételezzük fel, hogy a csomópontokon át a tartó síkjára merőlegesen fel-
vett metszetek a tartó alakváltozása után is síkok maradnak. Jellemezzük
a tartó alakváltozását a tartó középmagasságában futó tengelyvonal $\varkappa = \text{konst.}$

görbületével, továbbá a középvonal hosszának $\varepsilon_0 = \text{konst.}$ fajlagos növekedésével, végül a tartó magasságának $\varepsilon = \text{konst.}$ fajlagos csökkenésével.



3. ábra. Tiszta hajlítás a tartó síkjával párhuzamosan

Ez esetben a feltételezett alakváltozás statikai lehetősége csak akkor van biztosítva, ha

$$\varepsilon = \frac{D_3 s^2 t^2 - 12 A_3 t^2}{D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2} \varepsilon_0,$$

$$\varepsilon_0 = \frac{(D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2) (D_1 - D_2)}{(D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2) (D_1 + D_2) + 12 A_3 D_3 s t} \cdot \frac{h}{2} \kappa,$$

$$\kappa = \frac{M}{A}.$$

Az utóbbi képletben

$$A = A_1 + A_2 + \frac{A_3 t}{s} + \frac{(D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2) D_1 D_2 + 3 A_3 D_3 (D_1 + D_2) s t}{(D_3 h^2 s^2 + 12 A_3 t^2) (D_1 + D_2) + 12 A_3 D_3 s t} \cdot h^2$$

a tartó *hajlító merevsége*, a tartó síkjával párhuzamos hajlítással szemben.

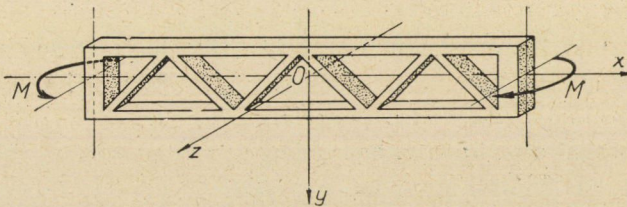
5. Tiszta hajlítás a tartó síkjára merőlegesen (4. ábra)

Ebben az esetben a tartó térbeli alakváltozást szenved. Feltesszük, hogy a tartó középsíkjának pontjai csak z irányú elmozdulást végeznek, s ezen ζ elmozdulások nagysága

$$\zeta = \frac{\kappa}{2} x^2 - \frac{\lambda}{2} y^2,$$

ha ti.

$$\kappa = \text{konst.}, \quad \lambda = \text{konst.}$$



4. ábra. Tiszta hajlítás a tartó síkjára merőlegesen

Ahhoz, hogy a feltételezett alakváltozás statikai szempontból is lehetséges legyen, az szükséges, hogy

$$\lambda = \frac{B_3 t^2 - C_3 t^2}{B_3 h^2 + C_3 t^2} \kappa,$$

$$\kappa = \frac{M}{B}$$

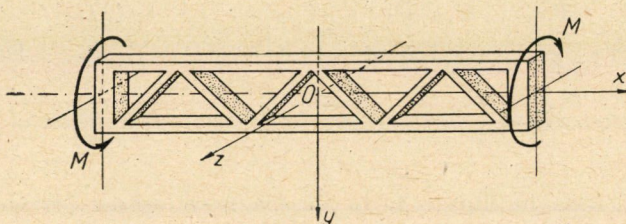
legyen. Itt

$$B = B_1 + B_2 + \frac{B_3 C_3 s t}{B_3 h^2 + C_3 t^2}$$

a tartó *hajlító merevsége*, a tartó síkjára merőleges hajlítással szemben.

6. Tiszta csavarás (5. ábra)

A tartó alakváltozását geometriai szempontból egyaránt lehetséges két alakváltozási részből tesszük össze.



5. ábra. Tiszta csavarás

Első alakváltozási részletként azt tesszük fel, hogy a tartó középsíkja hiperbolikus paraboloiddá torzul, miközben a tartó középsíkján fekvő pontok csupán e síkra merőleges ζ elmozdulást végeznek :

$$\zeta = \vartheta xy, \quad \vartheta = \text{konst.}$$

Második alakváltozási részletként feltesszük, hogy a rúdvéglapok függőleges tengely körül elfordulnak, de a rúdtengelyek végpontjai helyben maradnak. A rúdvéglapok feltételezett elfordulása a felső csomópontokban $\varphi_1 = \text{konst.}$, az alsó csomópontokban pedig $\varphi_2 = \text{konst.}$ A φ_1 , illetve φ_2 akkor pozitív, ha a forgás felülről nézve az óramutató járásával egyező, illetve azzal ellentett irányú.

A fent leírt alakváltozás statikai lehetősége csak akkor biztosítható, ha

$$\varphi_1 = \left(B_2 + \frac{2B_3 t^3}{s^3} \right) \frac{a}{b} + \vartheta,$$

$$\varphi_2 = \left(B_1 + \frac{2B_3 t^3}{s^3} \right) \frac{a}{b} + \vartheta,$$

$$\vartheta = \frac{M}{C}.$$

A fenti képletekben

$$C = C_1 + C_2 + \frac{C_3 t (t^2 - h^2)}{s^3} + \frac{2B_3 h^2 t}{s^3} + \frac{h a}{t b} c$$

a tartó csavaró merevsége, az a , b és c mennyiségek jelentése pedig :

$$a = \frac{2B_3 h t^2}{s^3} - \frac{C_3 h (t^2 - h^2)}{s^3},$$

$$b = 3B_1 B_2 + \frac{4B_3 t^4}{s^6} (B_3 t^2 + C_3 h^2) + \frac{(B_1 + B_2) t}{s^3} (4B_3 t^2 + C_3 h^2),$$

$$c = 3B_1 B_2 + (B_1 + B_2) (2B_3 + C_3) \frac{t^3}{s^3} + 4B_3 (C_3 - B_3) \frac{t^6}{s^6}.$$

Megjegyzés: A fent levezetett képletek homogén, repedésmentes, rugalmas anyagból levő tartókra vonatkoznak. Vasbeton tartók esetében a felsorolt feltételek nincsenek, vagy csak részben vannak teljesítve, s ezért a szóban forgó képletek csak kellő óvatossággal alkalmazhatók.

IRODALOM

1. CSONKA PÁL: Helyettesítő eljárás síkbeli kerettartókra vonatkozó stabilitási-feladatok közelítő tárgyalására. *Az M. T. A. Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei*, 23 (1958), pp. 23–26.
2. CSONKA PÁL: Hévederes tartók merevségi jellemzői. *Az M. T. A. Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei* 23 (1958) pp. 33–37.
3. CSONKA PÁL: Sokszoros rácsos párhuzamos övű tartók tiszta hajlítása. *Az M. T. A. Műszaki Tudományok Osztályának Közleményei* 23 (1958), pp. 27–32.

HENGERSZIMMETRIKUS BUGÁK FELHEVÍTÉSÉRŐL

I. HENGERSZIMMETRIKUS NEM-LINEÁRIS HŐÁTADÁSI FOLYAMAT KÖZELÍTŐ VIZSGÁLATA A NEWTON-FÉLE HŐÁTADÁSI FELTÉTEL ALAPJÁN

BORBÉLY SAMU

LEV. TAG

A MISKOLCI MŰSZAKI EGYETEM MATEMATIKA TANSZÉKE HŐVEZETÉSI MUNKAKÖZÖSSÉGÉNEK
(BORBÉLY SAMU, CZIBERE TIBOR, MASCHEK TIVADAR) KÖZLEMÉNYE *

[Beérkezett 1957. április 16-án]

Hőmennyiségek felszabadulása vagy kötése nélkül végbemenő hővezetési folyamatok differenciálegyenlete izotróp, szilárd testekben

$$\nabla (k \nabla \vartheta) \equiv \operatorname{div} (k \operatorname{grad} \vartheta) = \gamma c \frac{\partial \vartheta}{\partial t},$$

ahol $\vartheta(P, t)$ a test $P(x, y, z)$ pontjában t [ó] időpillanatban uralkodó hőmérsékletét, k [kal/m ó C°] a test (belső) hővezetési együtthatóját, c [Kal/Kg C°] a test anyagának fajhőjét és γ [Kg/m³] fajsúlyát jelenti.

Hővezetési problémák matematikai tárgyalásánál megszokott, hogy az anyag k és γc , ill. $a = \gamma c/k$ [ó/m²] ún. termikus paramétereit nulladrendű közelítésben állandónak tekintjük, hasonlóképpen állandónak vesszük a test F felszínén feltételezett Newton-féle lineáris

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial n} \Big|_F = -h (\vartheta - \vartheta_K) \Big|_F$$

felszíni hőátadási feltételben előforduló h [Kal/m² ó C°] ún. (külső) felszíni hőátadási tényezőt. Itt ϑ_K a test környezetének hőmérsékletét (kemence-hőmérséklet) jelöli, n pedig a test felszínének kifelé orientált normálisa.

Ha a hevített testet nagy hőváltozás éri — mint pl. hőkezelési, vagy hegesztési folyamatok közben —, akkor az anyag k és γc , valamint a hőátadás h termikus paramétereit az átkristályosodás kritikus hőmérsékleti értékeinek környezetén kívül sem tekinthetők adatszerűen állandóknak. A termikus paraméterek nagymértékben függenek a test hőmérsékletétől, az anyag összetételétől és kristályszerkezetétől. Még jellegükben sem feltétlen az egyezés, amint azt az 1. ábra mutatja, melyből látható, hogy pl. az acél termikus paramétereit nikkel jelenléte nemcsak nagyságrendben, de jellegében is megváltoztathatja [1].

* Ez a természetesen kialakult munkaközösség különböző feltételek hiánya miatt 1955 végén felbomlott.

A 2. ábra (mely egyben számításaink termikus adatrendszerét is vázolja) szemlélteti a szénben szegény acéltípus termikus paramétereinek hőmérséklet-függvényeit [2]. Növekvő hőmérséklettel a γ fajsúly a termikus paraméterek relatív változásához viszonyítottan is csak igen kismértékben változik ($\vartheta = 0$ -tól 1600 C°-ig alig 9%-kal csökken), úgyhogy a γ változása lokális hevítési folyamatok vizsgálatakor elsőrendű közelítésben is elhanyagolható.

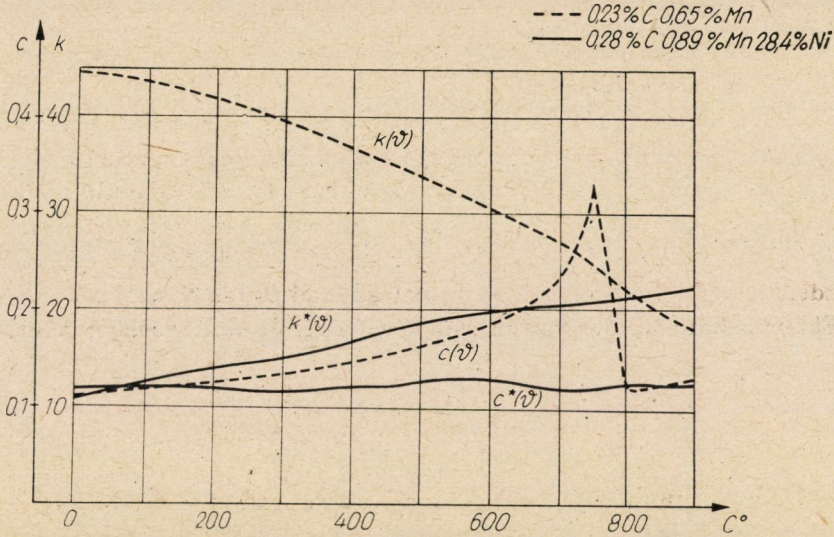
A termikus paraméterek hőmérsékleti függésének figyelembevételével mind a differenciálegyenlet, mind a felszíni energiaátadási feltétel nem-lineáris. Nem-lineáris hővezetési problémák egzakt matematikai tárgyalására alig találhatók még adatok és utalások és ezek is elsősorban az egydimenziós (hevített féltér, vagy α planparallel) tér esetére szorítkoznak [3, 4, 5, 6,], vagy a differenciaeljárásra [7, 8] utalnak. A hőkezelés kérdésével kapcsolatban a hengersizmetrikus nem-lineáris példának a numerikus eredményekig terjedő és az adatrendszer hőmérséklettel változó jellegét közelítőleg megtartó tárgyalása még becsülőleg, vagy közelítőleg sem érdektelen gyakorlat számára.** Elsősorban az adott hőfokra történő hevítés időtartama, valamint az anyagban mutatkozó maximális hőfokkülönbségek érdekelnek. A hevítési időtartam nemcsak a megfelelő energiabetáplálás értékére, hanem a célszerű hőkezelési időtartamra vonatkozóan; a maximális hőkülönbség és ennek kialakulási körülményei viszont a kedvezőtlen (belső repedéseket elősegítő) lehetőségekről adhatnak felvilágosítást.

Vizsgálataink épp arra irányulnak, hogy legalább első áttekintésre, közelítőleg tisztázzuk: az állandó termikus paraméterek feltételezésével (tehát a klasszikus példa alapján) meghatározható értékek mily nagyságrendben térnek el a tényleges (változó paraméterekkel meghatározott) folyamat megfelelő — számított és mért — értékeitől.

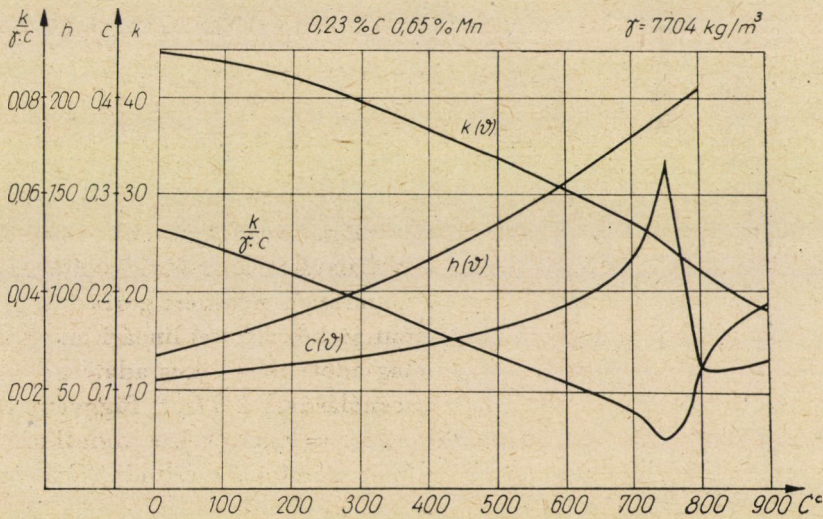
Vizsgálataink egyes fázisait összefoglalva: első lépésként a hevítési időtartam közelítő meghatározását tűztük ki célul a 3. (Newton-féle) peremfeltétel alapján. Ezzel a $\vartheta(P, t)$ hőmérsékleti eloszlás közelítő számítása is adódik. Eredményeink szerint (780 C°-ra történő hevítéskor) a hevítés időtartama a klasszikus felhevítési időtartamhoz képest szinte 100%-kal növekszik, noha számításaink eredménye a speciálisan mért felhevítési időtartamtól még mindig (kb. 15—20%-kal) elmarad. Ezzel szemben a testben $t = \text{const.}$ időpillanatban mutatkozó hődifferencia — mind klasszikusan, mind közelítésünkkel számítva — a valóságban mért hőkülönbségnél lényegesen kisebbnek adódott. Számításaink a felhevítés kezdeti szakaszában a klasszikusnál kisebb, végszakaszában ennél nagyobb hőfokkülönbségeket adtak. Ez a változó h és k paraméterek közelebbi vizsgálatának szükségességére mutat. (Ily irányú problémák a klasszikus eset feltételezésével nem tisztázhatók.) Második lépésként a test mért felületi hőmérséklete alapján (l. peremfeltétel) végeztük el

** Köszönettel tartozom PAZÁR Béla kartársnak, aki ennek a kérdésnek gyakorlatára és jelentőségére irányította figyelmemet.

a hőmérsékleti eloszlásra vonatkozó, változó paraméteres közelítő számításainkat. A testben keletkező számított hőmérsékleti különbségek — a megfelelő mért értékekhez, és a klasszikus számítás eredményeihez viszonyítottan —



1. ábra



2. ábra

ekkor is az előbbieknél megfelelők voltak. A két (független) számítási eljárás és probléma összevetésével utalások adódnak a h és a k befolyásának vizsgálatára.

A termikus paraméterek változásainak behatását a hevített próbatest felhevítésének idejére, és hőmérsékleti eloszlására vonatkozóan az alább részletezett (közelítő vagy korlátok közé szorító) feltételek mellett vizsgáljuk.

I. A kérdés felvetése

Hengerszimmetrikus hőátadási folyamat esetén, a termikus paraméterek változásainak figyelembevételével megadandó a henger R sugarához viszonyítottan igen hosszú (∞ hosszú) próbatest hevítése közben kialakuló hőmérsékletére és a felhevítés idejére numerikusan, lehetőleg egyszerű segédeszközökkel is követhető közelítés, ha a hevítő környezet állandó hőfoka ϑ_K és ha a hevítés kezdetének $t = 0$ időpontjában a test állandó ϑ_0 hőmérsékletű.

Ekkor a hőmérséklet változásait összekapcsoló differenciálegyenlet

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(rk(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) = r\gamma c(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$$

alakban írható. A problémát konkretizáló időbeli kezdeti és vég feltételek

$$\vartheta(r, 0) = \vartheta_0, \quad \vartheta(r, +\infty) = \vartheta_K, \quad 0 \leq r \leq R;$$

és emellett legyen a hevítési hőmennyiségnek a test felszínén történő (energia) átáramlás feltétele

$$k(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \Big|_{r=R} = -h(\vartheta) [\vartheta(r, t) - \vartheta_K] \Big|_{r=R}.$$

A termikus paraméterek a hőmérséklet mért függvényeiként ismeretesek. Feltételezzük, hogy ezek a mért adatok a fázisváltozások átalakulási energiáimennyiségeit is tartalmazzák. A termikus paraméterek mért görbéinek jellege lehetővé teszi, hogy azokat szakaszonként jó közelítéssel lineárisan approximáljuk. E feltevéseink alapján a fizikailag adott numerikus adatrendszernek konzekvens szakaszonkénti lineáris felhasználásával a $\vartheta(r, t)$ függvény lineárizált és a szakaszhatárokon meghatározott $r = r_0$ értékekre vonatkozó (nagyobb vagy kisebb) folytonos közelítéseinek számítása a célunk. (Gyakorlatilag természetesen az $r = 0$, és $r = R$ eset az érdekes.)

Ismeretes módon az $u(r, t) = \frac{\vartheta_K - \vartheta(r, t)}{\vartheta_K - \vartheta_0}$ függvény bevezetésével kérdésünket a $\frac{\partial}{\partial r} \left(rk^*(u) \frac{\partial u}{\partial r} \right) = r\gamma c^*(u) \frac{\partial u}{\partial t}$

$$u(r, 0) = 1, \quad u(r, +\infty) = 0, \quad 0 \leq r \leq R$$

és

$$k^*(u) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = -h^*(u) u \Big|_{r=R}$$

alakra redukáljuk.

Nyilvánvaló, hogy az $U = \int_{\lambda=0}^{u(r,t)} k^*(\lambda) d\lambda = \Phi(u)$ helyettesítéssel a

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) = r \gamma \frac{c^*(u)}{k^*(u)} \frac{\partial U}{\partial t} \equiv r A(U) \frac{\partial U}{\partial t}$$

$$U(r, 0) = \Phi(1) = U_m, \quad U(r, +\infty) = \Phi(0) = 0$$

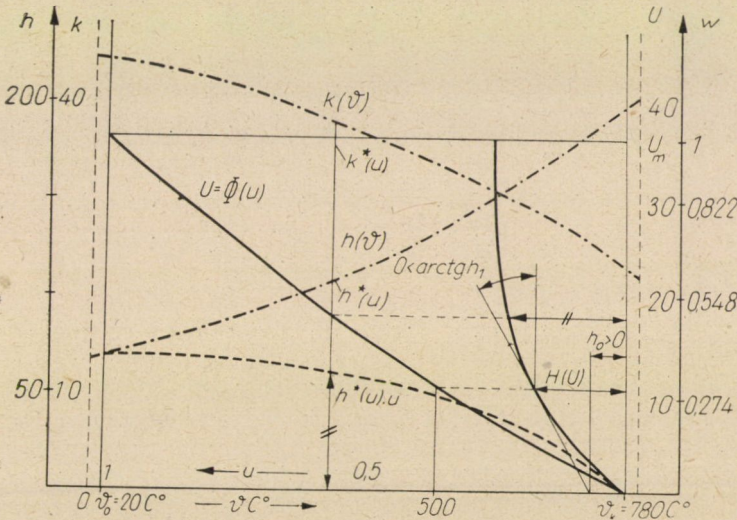
$$\frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=R} = -h^*(u) u \Big|_{r=R} \equiv -H(U) \Big|_{r=R}$$

egyenleteket kapjuk, ahol az $U, A(U), H(U)$ transzformált termikus függvények gyakorlatilag egyszerűen meghatározhatók. (A 3. és 4. ábra pl. $H(U)$, ill. $A(U)$ függvény származtatását adja meg.)

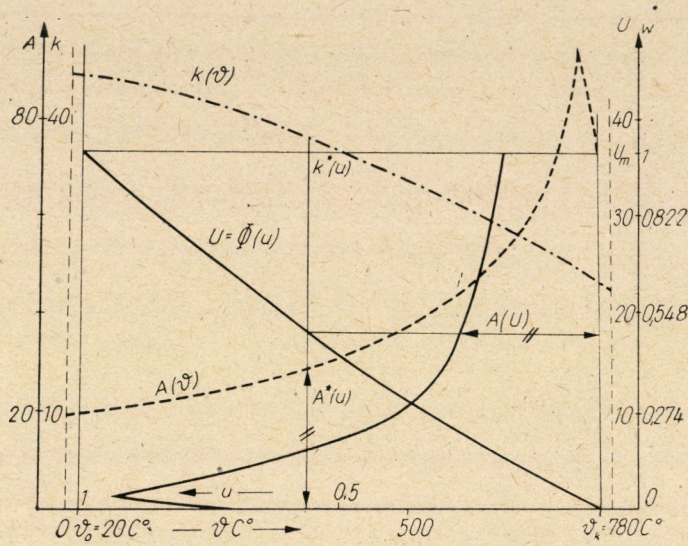
A transzformált termikus függvényeknek (közös ΔU_i intervallumokban való) lineáris approximációjával az i -edik intervallumban gyakorlatilag könnyen meghatározható lesz az ott érvényes

$$A_i(U) = a_{0i} + a_{1i} U, \quad \bar{U}_{i-1} \geq U \geq \bar{U}_i = \bar{U}_{i-1} - \Delta U_i$$

$$H_i(U) = h_{0i} + h_{1i} U$$



3. ábra



4. ábra

közelítés, ahol

$$U_m = \sum_{\lambda=1}^n \Delta U_{\lambda}, \quad \bar{U}_i = U_m - \sum_{\lambda=1}^i \Delta U_{\lambda}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Az $U = U_m \omega_i$, $Rq = r$, $R^2 a_{0i} \tau = \frac{(i)}{\tau} = t$ helyettesítéssel* és az

$$a_i = \frac{a_{1i}}{a_{0i}} U_m, \quad p_i = \frac{h_{0i}}{U_m} R, \quad q_i = \frac{h_{1i}}{h_{0i}} U_m \neq 0, \quad p_i q_i = \beta_i = h_{1i} R$$

jelölésekkel egyenleteink az alábbi dimenziómentes alakot öltik :

$$A) \quad \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \omega_i}{\partial \rho} \right) = \rho (1 + a_i \omega_i) \frac{\partial \omega_i}{\partial \tau}$$

$$A1) \quad \frac{\partial \omega_i}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = - (p_i + p_i q_i \omega_i) \Big|_{\rho=1}$$

$$\omega_1(\rho, 0) = 1, \quad \omega_n(\rho, +\infty) = 0;$$

ahol a_i, p_i, q_i a folyamatot szakaszonként jellemző fizikai adatrendszerrel jelöli. Az első szakasz határait jelölő $\bar{\omega}_0 = 1 \dots \bar{\omega}_0 - \Delta \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1$ értékek között

*A gyakorlati számításnál a dimenziómentes τ érték helyett célszerű a dimenziós t értékkel számítani, mivel a szakaszhatárokon azonos t -hez (a K_i változása miatt) egy baloldali és egy jobboldali τ érték tartozik.

tehát az α_1, p_1, q_1 adatrendszer, a második szakasz határainak $\bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_1 - \Delta \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_2$ értékei között az α_2, p_2, q_2 adatrendszer stb. érvényes és ennek megfelelően differenciálegyenleteink, illetőleg mellékleteink alapján az egyes szakaszokon a

$$\omega_1(\varrho, t), \omega_2(\varrho, t), \dots, \omega_n(\varrho, t)$$

megoldások adódnak.

A numerikusan felvett szakaszhatárokat jellemző $\bar{\omega}_0 = 1, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_n = 0$ értékek a $\bar{\omega}_1 = \omega_1(\varrho, t), \bar{\omega}_2 = \omega_2(\varrho, t), \dots$ egyenletek következtében meghatározható $t_1(\varrho), t_2(\varrho), \dots$ függvényeket értelmezzük, amelyek épp azt adják meg, hogy mely időpontokban éri el a henger palástfelületével koncentrikus ϱ sugarú kontrollfelület a $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots$ „hőmérsékleteket”.

Eszerint a különböző intervallumokhoz tartozó egyes $\omega_1(\varrho, t), \omega_2(\varrho, t), \dots$ rész megoldások csatlakozásához a

$$\omega_1(\varrho, t_1(\varrho)) = \omega_2(\varrho, t_1(\varrho)), \quad \omega_2(\varrho, t_2(\varrho)) = \omega_3(\varrho, t_2(\varrho)), \quad \dots$$

feltételeket kellene érvényesítenünk. Ezek az azonosságok azonban az adatrendszernek a szakaszhatárokon bekövetkező ugrásszerű változása miatt — esetleges matematikai egzakt kielégítés esetén is — fizikai tartalmukban csupán közelítően érvényesek. Miután megfontolásaink amúgy is közelítő jellegűek, a csatlakozás szempontjából egy időbelileg nagyobb és egy kisebb közelítés meghatározására fogunk, szorítkozni és a $\Delta \bar{\omega}_i$ szakaszok helyett a $t = \bar{t}_{i, \max}$ és $t = \bar{t}_{i, \min}$ időértékekkel határolt szakaszokkal fogunk dolgozni.

Ezeket az értékeket (felhevítéskor)

$$\text{az } \bar{\omega}_i = \omega_i(1, t), \quad t = \bar{t}_{i, \min}, \quad \text{ill. az } \bar{\omega}_i = \omega_i(0, t), \quad t = \bar{t}_{i, \max}$$

egyenletek megoldásai szolgáltatják.

A hevítés időtartamának nagyobb, ill. kisebb értékét szolgáltató megoldási rendszer csatlakozási feltételeként a

$$\omega_i(\varrho, \bar{t}_{i, \max}) = \omega_{i+1}(\varrho, \bar{t}_{i, \max}) \quad \text{és} \quad \omega_i(\varrho, \bar{t}_{i, \min}) = \omega_{i+1}(\varrho, \bar{t}_{i, \min})$$

azonosságokat vesszük. Ez tehát fizikailag azt jelenti, hogy pl. a $t = 0 \dots \bar{t}_{1, \min}$ időközben $i = 1$ adatrendszer alapján számítjuk a próbatest hevítését addig az időpontig, míg $\varrho = 1$ külső (határoló) felület hőmérséklete eléri az adatok 1 és 2 szakaszhatárát. Ekkor viszont — felhevítéskor — a $0 \leq \varrho < 1$ kontrollfelületek még nem érték el ezt a hőmérsékletet. Konzekvens lenne, ha az $i = 2$ szakasz adatrendszerét csak akkor érvényesítenénk, amikor a közbenső kontrollfelületeknek hőmérséklete is eléri a szakaszhatár $\bar{\omega}_1$ hőmérsékletét. Ehelyett a számítás egyszerűsítése céljából a test $\bar{t}_{1, \min}$ időpontban elért hőmérsékleti

eloszlásával, mint az $i = 2$ szakasz adatrendszeréhez tartozó kezdőfeltétellel számolunk tovább stb. (Ugyanez érvényes megfelelő változtatással a $\bar{t}_{1,\max}$ értékekből kiinduló számításra is.) Ily módon a termikus paraméterek változásának behatása a keresett hőmérsékleti eloszlás és hevítési idő két korlátját szolgáltatja. Várható, hogy a két számított szélsőséges hőmérsékleti eloszlás eltérése nem lesz túl nagy, ha a szakaszhatárokon mindkét eljárásnál a termikus paraméterek lokális értékei csak kevéssé térnek el egymástól.

Közelítésünk gyakorlati értéke mindenesetre a két korlát különbségétől függ, erre viszont csak a numerikus kivitelezés és nem utolsósorban a kísérleti ellenőrzés ad felvilágosítást.

2. További közelítés: a rész megoldások linearizálása

A hőmérséklettől szakaszonként lineárisan függő és szakaszonként általában nem is túl erősen változó termikus paraméterek feltételezése természetessé teszi, hogy a folyamatot meghatározó ω függvényt v alaprésze és ennek — a termikus paraméterek irányértékeinek befolyását tartalmazó — Δ korrek-túrarészre bontsuk: $\omega_i = v_i + \Delta_i$.

Eszerint a differenciálegyenlet is szétbontható az alapfüggvény

$$A_i) \quad B(v_i) \equiv \frac{\partial^2 v_i}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial v_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial v_i}{\partial \tau} = 0$$

és a korrekció

$$\frac{\partial^2 \Delta_i}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tau} = a_i \left(v_i \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + \Delta_i \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + v_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tau} + \Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tau} \right)$$

differenciálegyenleteire. A termikus paraméterek irányértékeinek behatását a korrekció

$$B_i) \quad \frac{\partial^2 \Delta_i}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \varrho} - (1 + a_i \omega_i) \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tau} - a_i \omega_i \frac{\partial v_i}{\partial \tau} = 0$$

alakban is írható differenciálegyenlete jellemzi.

Az átáramlási feltétel szétesik az

$$A_i) \quad \left. \frac{\partial v_i}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = - (p_i + \beta_i v_i) \Big|_{\varrho=1} \text{ és}$$

és

$$B_i) \quad \left. \frac{\partial \Delta_i}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = - \beta_i \Delta_i \Big|_{\varrho=1}$$

feltételekre. A szakaszos felosztás miatt az időbeli kezdeti feltételek az

$$A_1 \ 2) \quad v_1(\varrho, 0) = 1, \quad B_1 \ 2) \quad \Delta_1(\varrho, 0) = 0,$$

illetőleg a csatlakozási feltételek két $(\bar{t}_{i, \max}$ és $\bar{t}_{i, \min})$ csoportjára bomlanak

$$\begin{aligned} A_i \ 2) \quad v_i(\varrho, \bar{t}_i) &= v_{i+1}(\varrho, \bar{t}_i) \\ B_i \ 2) \quad \Delta_i(\varrho, \bar{t}_i) &= \Delta_{i+1}(\varrho, \bar{t}_i) \end{aligned}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Az $\omega(\varrho, +\infty) = 0$ időbeli végfeltétel kielégítése a megoldási függvény szakaszos illesztésének utolsó lépésével adódik.

$t = +\infty$ esetén állandó és a nulladrendű közelítést is kielégítő ϑ_K véghőmérsékletnek kell a mi esetünkben is kialakulnia, ebből pedig következik, hogy ez esetben a korrekktúrák el kell hogy tűnjenek.

$$B_i \ 3) \quad \Delta_i(\varrho, +\infty) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Megjegyzendő, hogy a H termikus függvény matematikailag bevezetett lineáris közelítése miatt az egyenleteinkkel értelmezett folyamat fizikai érvényességi tartománya $H_i \geq 0$, ahol az egyenlőség jele az egyes közelítéseknek (a szakaszhatárokon kívül eső) $t = +\infty$ -nél érvényes (fiktív) hőmérsékletét értelmezi. Az egyes közelítéseinknek összeillesztése folytán azonban ennek az

$$A_i \ 3) \quad v_i(\varrho, +\infty) = -\frac{1}{q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

feltételnek (az utolsó $i = n$ intervallumon kívül) csak matematikai jelentése van. Az utolsó (n -edik) intervallumban a H_n közelítést $h_{0n} = 0$, $h_{1n} \neq 0$ jellemzi. Eszerint tehát az alapfüggvényt meghatározó energiafeltétel (az $i = 1, 2, \dots, n-1$ esettel szemben) $i = n$ esetén

$$A_n \ 1) \quad \left. \frac{\partial v_n}{\partial \varrho} \right|_{\varrho=1} = -\beta_n v_n|_{\varrho=1}$$

alakú, ami implicite az $A_n \ 3) v_n(\varrho, +\infty) = 0$ időbeli végfeltétel kielégítésének lehetőségét is magában foglalja.

Az $A_i)$ differenciálegyenlet megoldása a szorzati alak feltételezésével könnyű:

$$v_i(\varrho, t) = C_0^{(i)} + \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(i)} J_0(\sigma_K^{(i)} \varrho) e^{-\sigma_K^{(i)2} K_i t}.$$

Nem ily egyszerű a $B_i)$ differenciálegyenlet, mely nem lineáris és igen bonyolult szerkezetű együtthatói miatt csak lényeges egyszerűsítő feltételek mellett, közelítőleg oldható meg.

A B) differenciálegyenlet a

$$D(\omega_i | \Delta_i) \equiv \frac{\partial^2 \Delta_i}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Delta_i}{\partial \varrho} - \frac{\partial}{\partial \tau} [(1 + \alpha_i \omega_i) \Delta_i]$$

jelöléssel a $D(\omega_i | \Delta_i) + \alpha_i \left(\Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial \tau} - v_i \frac{\partial v_i}{\partial \tau} \right) = 0$ alakban írható, ahol $\omega_i = v_i + \Delta_i$. A $\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2}$ felbontással kapjuk a

$$D(\omega_i | \Delta_{i1}) + D(v_i | \Delta_{i2}) - \alpha_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \alpha_i \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta_{i2}^2 - \Delta_{i1}^2)$$

alakot.

Első áttekintésre — eléggé durva közelítésben — az $\frac{1}{2} \alpha_i \frac{\partial}{\partial \tau} (\Delta_{i2}^2 - \Delta_{i1}^2)$ tag elhanyagolásával, (amelyet azonban iteratív úton és középérték-képzéssel közelítőleg figyelembe lehet venni, amit azonban itt mellőzünk*),

$$C_{1/2} D(\omega_i | \Delta_{i1}) = 0 \text{ és } D(v_i | \Delta_{i2}) - \alpha_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \tau} = 0$$

differenciálegyenleteket kapjuk.

Az első egyenletben az $1 + \alpha_i \omega_i$ változó együttthatót az egyes intervallumokban vett (s ott iteratív meghatározható) $1 + \alpha_i \tilde{\omega}_i = l_i$ állandó középértékeinek bevezetésével a

$$\frac{\partial^2 \Delta_{i1}}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Delta_{i1}}{\partial \varrho} - l_i \frac{\partial \Delta_{i1}}{\partial \tau} = 0$$

alakra hozzuk, melynek megoldása

$$\Delta_{i1} = D_0^{(i)} + \sum_{K=1}^{\infty} D_K^{(i)} J_0(\nu_K \varrho) e^{-\frac{\nu_K^{(i)2}}{4} K_i t}$$

A második egyenlet megoldása $\Delta_{i2} = -\frac{1}{2} v_i$, s így a B) egyenletnek a fenti közelítésekkel vett megoldása

$$\begin{aligned} \Delta_i(\varrho, t) \approx & \left(D_0^{(i)} - \frac{1}{2} C_0^{(i)} \right) + \sum_{K=1}^{\infty} \left[D_K^{(i)} J_0(\nu_K^{(i)} \varrho) e^{-\frac{\nu_K^{(i)2}}{4} K_i t} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} C_K^{(i)} J_0(\sigma_K^{(i)} \varrho) e^{-\frac{\sigma_K^{(i)2}}{4} K_i t} \right] \end{aligned}$$

alakban írható.

*Későbbi közleményünkben erre a kérdésre visszatérünk

3. A határfeltételek kielégítése

Fenti közelítésekkel a határfeltételek a következőképpen elégíthetők ki.
 A_i 1) alapján érvényes

$$\sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(i)} J_1(\sigma_K^{(i)}) \sigma_K^{(i)} e^{-\sigma_K^{(i)2} K_i t} = p_i (1 + q_i C_0^{(i)}) + \beta_i \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(i)} J_0(\sigma_K^{(i)}) e^{-\sigma_K^{(i)2} K_i t},$$

vagyis

$$C_0^{(i)} = -\frac{1}{q_i}, i = 1, 2, \dots, n - 1 \text{ és az } A_n 1) \text{ esetben } C_0^{(n)} = 0,$$

$$x J_1(x) = \beta_i J_0(x), x = \sigma_K^{(i)}$$

B_i 1) alapján pedig $D_0^{(i)} = \frac{1}{2} C_0^{(i)}$ és $\nu_K^{(i)} = \sigma_K^{(i)}$ adódik.

Eszerint

$$\Delta_i(\varrho, t) \approx \sum_{K=1}^{\infty} \left[D_K^{(i)} e^{-\frac{\sigma_K^{(i)2}}{4} K_i t} - \frac{1}{2} C_K^{(i)} e^{-\sigma_K^{(i)2} K_i t} \right] J_0(\sigma_K^{(i)} \varrho).$$

Az A_1 2) feltétel alapján kell tehát legyen

$$1 + \frac{1}{q_1} = \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(1)} J_0(\sigma_K^{(1)} \varrho).$$

A Bessel függvényekkel való sorbafejtés szerint ebből ismeretes módon [9] az

$$\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(\sigma_K^{(i)} \varrho) J_0(\sigma_\nu^{(j)} \varrho) d\varrho = \frac{\beta_i - \beta_j}{\sigma_K^{(i)2} - \sigma_\nu^{(j)2}} J_0(\sigma_K^{(i)}) J_0(\sigma_\nu^{(j)}), \sigma_K^{(i)} \neq \sigma_\nu^{(j)}$$

$$\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0^2(\sigma_K^{(i)} \varrho) d\varrho = \frac{1}{2} J_0^2(\sigma_K^{(i)}) \frac{\sigma_K^{(i)2} + \beta_i^2}{\sigma_K^{(i)2}}$$

$$\int_{\varrho=0}^1 \varrho J_0(\sigma_K^{(i)} \varrho) d\varrho = \frac{\beta_i}{\sigma_K^{(i)2}} J_0(\sigma_K^{(i)})$$

integrálok felhasználásával kapjuk a

$$C_K^{(1)} = \frac{2 \beta_1}{\sigma_K^{(1)2} + \beta_1^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{q_1}}{J_0(\sigma_K^{(1)})}$$

együtthatókat. B_1 2) ből viszont $D_K^{(1)} = \frac{1}{2} C_K^{(1)}$ származik.

A $C_K^{(1)}$ együtthatókból kiindulva a következő szakaszok függvényeinek együtthatórendszere sorra meghatározható.

Az

$$E_K^{(i)}(t) = e^{-\sigma_K^{(i)2} K_i t}, \text{ illetve } \bar{E}_K^{(i)}(t) = e^{-\frac{(i)2 K_i t}{4}}$$

jelöléssel lesz

$$\begin{aligned} v_1(\varrho, t) &= -\frac{1}{q_1} + \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(1)} E_K^{(1)}(t) J_0(\sigma_K^{(1)} \varrho) \\ \Delta_1(\varrho, t) &= \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(1)} [\bar{E}_K^{(1)}(t) - E_K^{(1)}(t)] J_0(\sigma_K^{(1)} \varrho) \\ \omega_1(\varrho, t) &= -\frac{1}{q_1} + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(1)} [\bar{E}_K^{(1)}(t) + E_K^{(1)}(t)] J_0(\sigma_K^{(1)} \varrho) \\ 0 \leq t \leq \bar{t}_1 = \Delta t_1. \end{aligned}$$

Az A_2 2) és B_2 2) feltételből (általánosságban az A_i 2) és B_i 2)-ből sorra) adódik

$$\begin{aligned} C_v^{(2)} E_v^{(2)}(\bar{t}_1) &= \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} \right) \frac{2\beta_2}{J_0(\sigma_v^{(2)}) (\sigma_v^{(2)2} + \beta_2^2)} + \\ &+ \frac{2(\beta_1 - \beta_2) \sigma_v^{(2)2}}{J_0(\sigma_v^{(2)}) (\sigma_v^{(2)2} + \beta_2^2)} \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(1)} E_K^{(1)}(\bar{t}_1) \frac{J_0(\sigma_K^{(1)})}{\sigma_K^{(1)2} - \sigma_v^{(2)2}} \\ D_v^{(2)} \bar{E}_v^{(2)}(\bar{t}_1) &= \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1} \right) \frac{\beta_2}{J_0(\sigma_v^{(2)}) (\sigma_v^{(2)2} + \beta_2^2)} + \\ &+ \frac{(\beta_1 - \beta_2) \sigma_v^{(2)2}}{J_0(\sigma_v^{(2)}) (\sigma_v^{(2)2} + \beta_2^2)} \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(1)} \bar{E}_K^{(1)}(\bar{t}_1) \frac{J_0(\sigma_K^{(1)})}{\sigma_K^{(1)2} - \sigma_v^{(2)2}} \\ v_2(\varrho, t) &= -\frac{1}{q_2} + \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(2)} E_K^{(2)}(t) J_0(\sigma_K^{(2)} \varrho) \\ \Delta_2(\varrho, t) &= \sum_{K=1}^{\infty} \left[D_K^{(2)} \bar{E}_K^{(2)}(t) - \frac{1}{2} C_K^{(2)} E_K^{(2)}(t) \right] J_0(\sigma_K^{(2)} \varrho), \quad \bar{t}_1 \leq t \leq \bar{t}_2 \end{aligned}$$

ahol

$$\bar{E}_K^{(2)}(\bar{t}_1) \bar{E}_K^{(2)}(\Delta t) = \bar{E}_K^{(2)}(t), \quad E_K^{(2)}(\bar{t}_1) E_K^{(2)}(\Delta t) = E_K^{(2)}(t), \quad 0 \leq \Delta t \leq \bar{t}_2 - \bar{t}_1 = \Delta t_2;$$

$$\omega_2(\varrho, t) = -\frac{1}{q_2} + \sum_{K=1}^{\infty} \left[D_K^{(2)} \bar{E}_K^{(2)}(t) + \frac{1}{2} C_K^{(2)} E_K^{(2)}(t) \right] J_0(\sigma_K^{(2)} \varrho), \quad \dots \text{stb.}$$

Az egyenletek így folytatódnak ; $i = n$ esetén viszont az $\frac{1}{q_n}$ tag törlendő.

Az együtthatók és ezen függvények kiszámítása természetesen igen jó elrendezéssel táblázott (mechanikusan használható) sorozatos számítási rendezést követel. A számítás így is eléggé bonyolult, noha pl. a sajátértékegyenlet $\sigma_K^{(i)}$ megoldási rendszeréből eléggé kicsiny $\Delta\beta_i = \beta_{i+1} - \beta_i$ esetén a $\sigma_K^{(i+1)} = \sigma_K^{(i)} + \Delta\sigma_K^{(i)}$ megoldási rendszer sorbafejtéssel már teljesen numerikusan származtatható, s ennek a számításnak egyes rendszeres értéksorozatai az együtthatók numerikus meghatározásához is használhatók.

4. A felhevítési időtartam meghatározása

Egyelőre még az egész megadott megoldási rendszer a konkrét kivitelezés szempontjából határozatlan az $1 + \alpha_i \bar{\omega}_i = l_i$ tényezők numerikus értékeinek hiányában.

A $\bar{\omega}_i$ középértéket (melynek számértékére a megoldási rendszer eléggé érzékenyen reagál), a $\omega_i(\rho, \tau)$ függvények a keresztmetszet helybeli és a $\Delta\tau_i = \bar{\tau}_i - \bar{\tau}_{i-1}$ időbeli közepelésével, a

$$\bar{\omega}_i \int_{\rho=0}^1 \int_{\tau=\bar{\tau}_{i-1}}^{\bar{\tau}_i} \rho d\rho d\tau = \bar{\omega}_i \frac{1}{2} \Delta\tau_i = \int_{\rho=0}^1 \int_{\tau=\bar{\tau}_{i-1}}^{\bar{\tau}_i} \omega_i(\rho, \tau) \rho d\rho d\tau$$

egyenlet alapján iterative határozzuk meg. A fentiek szerint

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &= -\frac{1}{q_1} + \frac{2\beta_1}{\Delta t_1} \sum_{K=1}^{\infty} C_K^{(1)} [l_1(1 - \bar{E}_K^{(1)}(\Delta t_1)) + (1 - E_K^{(1)}(\Delta t_1))] \frac{J_0(\sigma_K^{(1)})}{\sigma_K^{(1)4}}, \\ \bar{\omega}_2 &= -\frac{1}{q_2} + \frac{2\beta_2}{\Delta t_2} \sum_{K=1}^{\infty} \left[D_K^{(2)} \bar{E}_K^{(2)}(\bar{t}_1) l_2(1 - \bar{E}_K^{(2)}(\Delta t_2)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} C_K^{(2)} E_K^{(2)}(\bar{t}_1) (1 - E_K^{(2)}(\Delta t_2)) \right] \frac{J_0(\sigma_K^{(2)})}{\sigma_K^{(2)4}}, \dots \end{aligned}$$

és ez a sor eléggé gyors konvergenciája miatt nagyobb nehézség nélkül számítható.

Az iteráció menete a következő: a felvett $\bar{\omega}_i$ felosztás sorra következő intervallumban a határoló értékek algebrai közepelésével az $l_i^{(0)}$ durva közelítést kapjuk, amivel a $\omega_i^{(0)}(\rho, \tau)$ megoldási függvény képezhető.

Az

$$\bar{\omega}_i = \omega_i^{(0)} \begin{pmatrix} 0, \bar{t}_{i\max}^{(1)} \\ 1, \bar{t}_{i\min}^{(1)} \end{pmatrix}$$

egyenletek alapján a \bar{t}_i értékek $\bar{t}_i^{(1)}$ (és $\Delta t_i^{(1)}$) közelítése adódik, amivel már $\omega_i^{(1)}$ és a jobb $l_i^{(1)}$ érték számítható. Ezzel a megoldás $\omega_i^{(2)}(\rho, \tau)$ közelítése képezhető, illetve a javított $\bar{t}_i^{(2)}$ időértékek stb.

Számításaink szerint az iteráció 3. lépése általában már sem az l_i , sem a \bar{i}_i értékeket nem változtatja gyakorlatilag.

A fentiekből következik, hogy eljárásunk a meghatározott $\bar{\omega}_i$ hevítési felosztáshoz tartozó (nem túl rövid) hevítési össz időtartamot fogja (az integrálközép képzése miatt) előreláthatólag eléggé jól reprodukálni, míg a testben mutatkozó hőmérsékleteloszlásnak pontossága a differenciálegyenletben történt elhanyagolások miatt kisebb lesz. Számításaink és méréseink ezt valóban igazolták is.

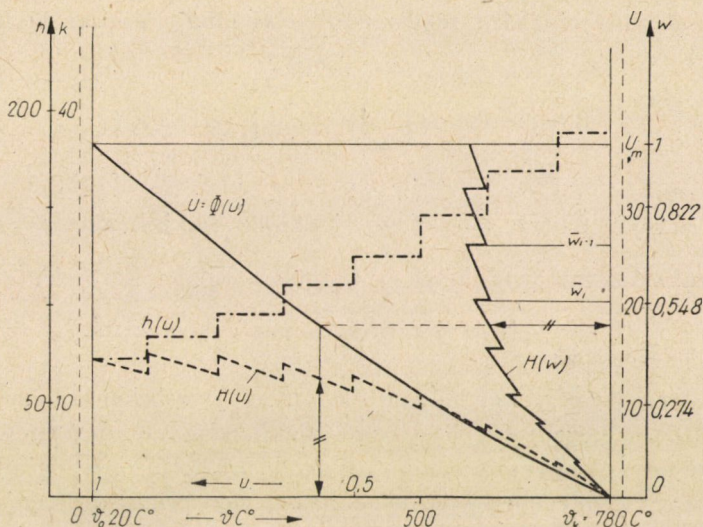
5. Záró megjegyzések

Természetesen felvetődik a kérdés, hogy a számított és mért hőmérsékleteloszlás különbségének oka a megoldás módszerében keresendő-e, vagy pedig, hogy ez a termikus paraméterek fizikai adatrendszerének — különösképpen a h és k függvényeknek — bizonytalanságában rejlik. Közelítésünk tartalmi hibája elsősorban a C) differenciálegyenletre vezető elhanyagolásban keresendő, amely a felhevítés kezdeti szakaszában nyilvánul meg a legerősebben. Emiatt közelítésünk csak nagy felhevítési hőkülönbségek felhevítési idejének meghatározásánál elfogadható. A számított lokális hőkülönbségek viszont ettől függetlenül a fizikai adatrendszer bizonytalanságára utalnak. Figyelembe veendő ugyanis, hogy konkrét felhevítési folyamatoknál az elvi körülmények között meghatározott h függvényt a képződő reveréteg erősen befolyásolja, ennek behatása pedig — tudunkkal — még eddig adatszerűen nemigen tisztázott [2]. A k adatszerű értékei viszont az anyag kristályszerkezetével (tehát pl. annak előzetes megmunkálásával) változhatnak. Így pl. esetünkben az irodalomból vett (homogén, izotróp anyagra vonatkozó) k adatrendszer helyett esetleg ettől eltérő $k_{\text{radiális}}$ adatrendszer a mérvadó. Ezenkívül jelentősége lehet annak is, hogy a fizikai adatrendszer mérésénél a klasszikus feltételeken nyugvó alapösszefüggéseket szokás kiindulópontul venni.

Ellenőrzésként a c , k , h termikus paraméterek hőmérsékleti szakaszonként történő lépcsős approximációjával is elvégeztük számításainkat.

Ez esetben $h_{0i} = 0$, $h_{1i} \neq 0$, $a_{0i} \neq 0$, $a_{1i} = 0$, tehát $\alpha_i = 0$, $p_i = 0$, $\beta_i \neq 0$, így a B_i) differenciálegyenlet A_i)-vel azonos, azaz tárgyatalanná válik, s így szakaszonként a közelítés a megfelelően meghatározott $\omega_i \equiv v_i$ függvények alapján történik. Előre várható, hogy a lépcsős kiegyenlítés, amely a fizikai adatrendszert kevésbé reprodukálja, mint a folytonos és jobban simuló poligonális approximáció (l. pl. 5. ábra, $H(U)$ szakaszos görbáját), a folyamatnak is kevésbé pontos közelítését fogja adni. Így pl. a fázisátalakulás intervallumában a hőmérséklet idő függvényének inflexiói (amelyek a poligonális közelítéssel adódnak) kisimulnak. A felhevítés időtartama ez esetben is (max. 50%-kal) nagyobb a klasszikusan számított felhevítési időnél, viszont

elmarad a poligonapproximáció megfelelő értékétől. Ezzel szemben a hőmérséklet lokális (keresztmetszetbeli) eloszlása ezen számítással is nagyságrendben megfelel a poligonapproximációval számítottnak. Ez igen valószínűvé teszi, hogy maga a termikus adatrendszer, amely nem túl nagy $\vartheta_K - \vartheta_0 > 0$ hevítési különbségek esetén a valóság jó közelítését adja, szélsőséges hevítési különbségeknél még kiegészítő matematikai és kísérleti vizsgálatokat kíván.



5. ábra

Fizikai adatrendszerünk legbizonytalanabb értéke a h felszíni hőátadási függvény. Ennek behatása teljesen kikapcsolható a hőmérsékleti mező matematikai meghatározásánál, ha a test felszínének mért $\vartheta(F, t)$ felhevülési hőmérséklete az idő függvényében ismeretes. Ez alapon, az ún. első peremértékproblémával változó $c(\vartheta)$ és $k(\vartheta)$ függvényekkel is meghatározható a test hőmérsékleti mezeje. Miután a fizikai adatrendszerünkben a fajhő tekinthető legmegbízhatóbbnak, $\vartheta(F, t)$ mérésével és a testben levő hőmérsékleteloszlásnak az első peremértékfeltételen alapuló meghatározásával utalások adódnak a vizsgált test k belső hővezetőképességének adatrendszerére vonatkozóan, — egyben pedig a konkrét esetben valóban kialakuló $h(\vartheta)$ és $h(\vartheta)$ függvénynek nem klasszikus feltételű meghatározása (tehát kiszámítása) is lehetővé válik.

Tisztán matematikai vonatkozású megjegyzésként megemlítjük, hogy az $A)$ és $A_1)$ alapegyenleteket — ugyancsak szakaszosan approximálva — könnyen kielégíthetjük α_i szerinti $\omega_i = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \alpha_i^\lambda \omega_i^{(\lambda)}(\varrho, \tau)$ perturbációval, ha leg-egyszerűbb közelítésként a sorozatosan perturbó tagok helybeli és időbeli

állandó középértékeit vezetjük be. Ez a számítási eljárás elvileg eléggé egyszerű és abban az esetben gyakorlatilag használható is, ha a lineáris korrekció már elégséges, tehát eléggé kicsiny a_i esetén. Ez a feltétel viszont alkalmazásunknál *nem* látszik mindenütt biztosítottnak. Több korrektúratag figyelembevételé, az egyes szakaszokon belüli többszörös középértékképzés erősen rontó hatása miatt, aligha célszerű. Ez indokolja az a_i korrektúra lényegileg egyetlen tagban összefogott figyelembevételét.

Első áttekintésre szánt módszerünk elvi hibája esetleg javítható a 2. alattiakból következő

$$B(v_i) = 0, \quad D\left(\frac{1}{2}[v_i + \Delta_i] \mid \Delta_i\right) = r_i$$

egyenletek alapján felírt $\omega_i = \frac{1}{2}v_i + \Delta_i$ közelítésekkel, ahol $r_i = \frac{1}{4}a_i v_i \frac{\partial v_i}{\partial \tau}$ az egyes szakaszokban vett helyi és időbeli középértéket jelenti és ahol l_i helyett az $1 + \frac{\alpha_i}{2}(v_i + \Delta_i)$ kifejezésnek csupán a keresztmetszetre vonatkozó

(helyi) $1 + \varphi_i(\tau)$ középértékét használjuk fel. Az l_i értékben a hőmérsékletnek helybeli változása közelítőleg $b_0 + b_2 \varrho^2$ alakban figyelembe vehető. Ez esetben viszont úgy a kiegyenlítés, mint a korrektúra ϱ -változás tagjait meghatározó közönséges (lényegében konfluens hypergeometriai) differenciálegyenlet gyakorlati megoldása, tehát táblázott függvényekre való visszavezetése okoz nehézséget. A mindezekre vonatkozó gyakorlati számítások még hiányoznak, noha a megfelelő approximáció kérdésének vizsgálata épp a felhevítés kezdeti szakaszának reprodukálásánál már az eddigiek alapján is igen indokoltnak látszik.

IRODALOM

1. Metals Handbook, Amer. Soc. f. Metals. (1948).
2. N. N. RYKALIN: Wärmegrundlagen des Schweissvorganges. Verlag Technik, Berlin, (1952).
3. J. I. AWBERY: Proc. Phys. Soc. London, 48 (1936), p. 118.
4. R. M. HOPKINS: Proc. Phys. Soc. London, 50 (1938), p. 703.
5. M. L. STORM: Journ. of Appl. Physics (Publ. Amer. Inst. Phys.), 22 (1951), p. 940.
6. NIPPES—SAVAGE—SUZUKI—CHANG: The Welding Journal, Publ. Amer. Weld. Soc., New York (1955).
7. E. FOA: Mem. Accad. Sci. Bologna. Cl. Sci. Fiz. X. (1947), p. 119.
8. N. N. RYKALIN könyvében idézett I. I. SEMIKIN Z. f. Stahl (1939) H 4/5 és H 12 dolgozataihoz nem tudtam hozzájutni.
9. 1. pl. G. N. WATSON. A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge (1922), p. 580, 134., vagy JAHNKE—EMDE. Funktionentafeln, Leipzig (1909), p. 165.

ÖSSZEFOGLALÁS

Szerző hőmérsékletbeli szakaszos eljárást ad meg a hővezetési differenciálegyenlet közelítő megoldására hosszú hengeres próbatetek esetén a 3. peremfeltétel mellett, a termikus paraméterek hőmérsékleti függőségének figyelembevételével.

HENGERSZIMMETRIKUS BUGÁK FELHEVÍTÉSÉRŐL

II. HENGERSZIMMETRIKUS NEM-LINEÁRIS HŐVEZETÉSI FOLYAMAT KÖZELÍTŐ VIZSGÁLATA AZ ELSŐ PEREMFELTÉTEL ALAPJÁN

CZIBERE TIBOR

MISKOLCI MŰSZAKI EGYETEM MATEMATIKA TANSZÉKE VOLT HŐVEZETÉSI MUNKAKÖZÖSSÉGE
(BORBÉLY SAMU, CZIBERE TIBOR, MASCHKEK TIVADAR)

[Beérkezett 1957. április 16-án]

Eléggé hosszú hengerszimmetrikus testek nem-lineáris hővezetési kérdéseivel kapcsolatos első dolgozatunkban [1] a hőmérséklettől függő termikus paraméterfüggvények felhasználásával [2] a Newton-féle felszíni energiaátáramlási feltétel alapján határoztuk meg közelítőleg a test hőmérsékletmezejét és a felhevítés időtartamát. Az ezen feltételek alapján történő számítási kiindulásánál problémát okoz a termikus paraméterfüggvények konkrét felvétele. Különösképpen bizonytalannak látszik a $h(\vartheta)$ felszíni hőátadási függvény adatrendszere [3]. Némileg biztosabb alapokon nyugszik a homogének és izotrópnak feltételezett testek belső hővezetőképességének — szintén empirikus — függvénye, amelynél azonban a próbatestnek kristályos szerkezete és ennek (pl. az előzetes megmunkálásból származó) változásai konkrét esetben szintén adatrendszerbeli bizonytalanságokat okozhatnak. A belső hővezetőképesség kristályos szerkezetű anyagokban tenzorjellegű mennyiség [4], melynek csak első közelítése a $k(\vartheta)$ skaláris függvénnyel reprodukált értékrendszer. Problémánk legmegbízhatóbb empirikus adatrendszereként a fajhő $c(\vartheta)$ függvénye tekinthető.

A felsorolt körülmények tisztázásának alapjául *kísérletek*, tehát próbatestek konkrét felhevítési folyamatainak mérései szükségesek. Ezen kísérletek alapján a próbatest mért felületi hőmérsékleti értékeiből kiindulva az első peremfeltétel érvényesítésével, de a termikus paraméterek hőmérsékleti függésének figyelembevételével a test hőmérsékleti mezejét a felszíni hőátadási tényező adatrendszerétől teljesen függetlenül határozhatjuk meg.

Az ily módon számított és mért hőmérsékleti mezőt véve alapul — és elfogadva a fajhő megfelelő adatrendszerét — lehetőség adódik az anyag belső hővezetőképességének meghatározására. De ezen túlmenően a felszíni energiaátáramlási feltétel felhasználásával a c és k adatrendszerének ismeretében, de ezeknek a hőmérséklettől való függésének figyelembevételével (tehát a klaszszikusnál pontosabban) meg lehet határozni a konkrét folyamatban valóban kialakuló felületi hőátadási függvényt is. Nyilvánvaló, hogy az első perem-

feltételen alapuló megoldás időbelileg tetszőlegesen változó (de jelen esetünkben a test hőmérsékleténél nagyobb) kemencehőmérsékleten is érvényes. Ezeknek a tényeknek előnyét nem kell külön hangsúlyozni, elég, ha csak azokat a nehézségeket gondoljuk meg, amelyek egy ipari (pl. gáztüzelésű) kemencében a felületi hőátadási tényező meghatározásával veledjárnak [3].

Feladatunk tehát: végtelen hosszú körhenger esetén a

$$\operatorname{div} [k(\vartheta) \operatorname{grad} \vartheta] = \gamma(\vartheta) c(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \quad (1)$$

hővezetési differenciálegyenletnek a

$$\vartheta_F = \vartheta(F, t) = f(t) \quad (2,1)$$

peremfeltétel alapján történő megoldása, ahol ϑ_F a test felszínének mért (tehát megadott) $f(t)$ felhevülési hőmérsékletét jelöli az idő függvényében.

Az időbeli kezdeti feltétel

$$\vartheta(P, 0) = g(P), \quad (2,2)$$

ahol $g(P)$ a test egyik metszetének P pontjaiban $t = 0$ időpillanatban uralkodó (ismert) hőmérséklet. Feltételezzük továbbá, hogy $g(F) = f(o)$. Problémánk megoldásának gondolatmenete a következő: meghatározzuk az (1) differenciálegyenletnek és a peremfeltételnek megfelelő integrodifferenciálegyenletet és ennek megoldását keressük. Ezen célból a vizsgált hengert a felszínétől számítva a középpontja felé haladva koncentrikus rétegekre bontjuk és az egyes rétegekben konzekvens linearizációval határozzuk meg a megoldást. A rétegvastagságok csökkentésével elvileg egyre pontosabbá tehető a megoldás.

1. Az integrodifferenciálegyenlet képzése

Egyelőre még *általános*, de egyszerűen összefüggő differenciálható peremgörbével rendelkező keresztmetszetű végtelen hosszú rúdra vonatkoztatjuk megfontolásainkat.

Az

$$U(P, t) = \int_{\lambda=0}^{\vartheta(P, t)} k(\lambda) d\lambda \quad (3)$$

transzformáció bevezetésével differenciálegyenletünk a következő alakba megy át:

$$\Delta U = A(U) \frac{\partial U}{\partial t}, \quad (4)$$

ahol

$$A(U) = \frac{\gamma \cdot c}{k}.$$

A peremfeltétel

$$U_F = U(F, t) = \int_{\lambda=0}^{f(t)} k(\lambda) d\lambda \equiv \varphi(t) \quad (5,1)$$

és a kezdeti feltétel

$$U(P, 0) = \int_{\lambda=0}^{g(P)} k(\lambda) d\lambda \equiv G(P). \quad (5,2)$$

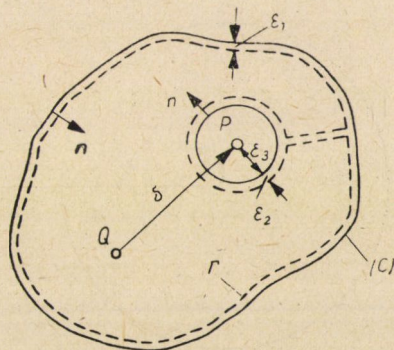
Feltesszük továbbá, hogy a test felszíne $t = 0$ időpillanatban azonos hőmérsékletű, tehát érvényes $U(F, 0) = G(F) = \varphi(0)$.

A végtelen hosszúnak feltételezett rúdnak ilyenén módon konkretizált felhevítése térbelileg kétdimenziós, tehát csupán egyik keresztmetszetének hőmérsékleteloszlását kell vizsgálnunk.

Legyen a keresztmetszet határgörbéje (C) és az ezzel határolt tartomány (T) . A pont, melynek hőmérsékletét éppen meghatározzuk, legyen P , a tartomány tetszőleges pontja Q . A határgörbe n normálisa legyen (T) belseje felé irányított.

Az U és $\frac{\partial U}{\partial n}$ függvények a határgörbén szakadásosak. A $V = \ln \frac{1}{\delta}$ ($\Delta V = 0$) feltétellel a potenciálméletből ismert módon az 1. ábrán vázolt felmetszéssel egyszeresen összefüggővé tett (T') tartományban, amelyet a (T) görbe határol, érvényes a Green-féle alapösszefüggés

$$\iint_{(T')} (V \Delta U - U \Delta V) df = \oint_{(T')} \left(V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds. \quad (6)$$



1. ábra

A megfelelő $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0)$ határátmenet után rendezve, (6)-ból a

$$2\pi U = \iint_{(T)} \ln \delta \Delta U df + \oint_{(C)} \ln \delta \frac{\partial U}{\partial n} ds - \oint_{(C)} U \frac{\partial}{\partial n} (\ln \delta) ds$$

összefüggést kapjuk. Ebben U és $\frac{\partial U}{\partial n}$ a (C) határgörbe mentén csak az idő függvénye, tehát az integrál elé kiemelhető.

A potenciálméletből ismeretes, hogy ha (C) zárt görbe és P a (T) tartomány belső pontja, akkor

$$\oint_{(C)} \frac{\partial}{\partial n} (\ln \delta) ds = - \oint_{(C)} \frac{\partial}{\partial \delta} (\ln \delta) \cos(\widehat{n, \delta}) ds = -2\pi. \quad (7)$$

Ezeknek és a (4) differenciálegyenletnek felhasználásával kapjuk az $U(P, t)$ függvényre vonatkozó, s a későbbiekben közelítőleg megoldandó integrodifferenciálegyenletet, amely — feltételeinknek megfelelő — zárt hengeres testek keresztmetszetében a hőmérsékleteloszlást meghatározza:

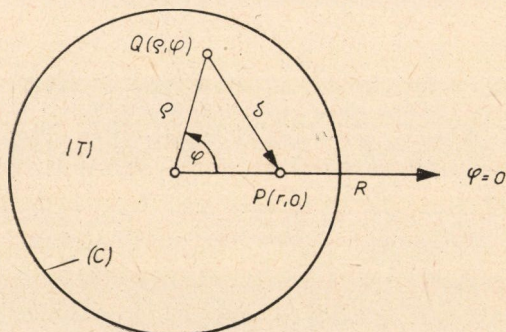
$$2\pi U(P, t) = \iint_{(T)} \ln \delta A(U) \frac{\partial U}{\partial t} df + \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{(C)} \oint_{(C)} \ln \delta ds + 2\pi U_F. \quad (8)$$

Körkeresztmetszet esetén poláris koordinátákat vezetünk be. Az izotermák ekkor feltételeink szerint körök. Ezért elég, ha a hőmérsékleteloszlást a $\varphi = 0$ tengelyen vizsgáljuk. Ezen célból a P vizsgált pontot ezen a tengelyen vesszük fel (2. ábra). Legyen a kör sugara R és P az origótól r távolságra ($0 \leq r \leq R$), tehát $U = U(r, t)$. A (8) egyenletben előforduló mennyiségek

és

$$\delta = \sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos \varphi}, \quad df = \varrho d\varrho d\varphi, \quad ds = R d\varphi$$

$$\frac{\partial U}{\partial n} = - \frac{\partial U}{\partial r}$$



2. ábra

Ezeknek a (8) egyenletbe történő behelyettesítésével, a megfelelő integrációk elvégzése után

$$U(r, t) = \ln r \int_{\varrho=0}^r A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \varrho d\varrho + \int_{\varrho=r}^R A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \varrho \ln \varrho d\varrho - \quad (9)$$

$$- R \ln R \left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_R + U(R, t) \quad \text{adódik.}$$

A (9) egyenlet differenciálásával kapjuk

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_R = \frac{1}{R} \int_{\varrho=0}^R A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \varrho d\varrho.$$

Ezt behelyettesítve (és összevonva) kapjuk körkeresztmetszetű rudak — feltételeinknek megfelelő — hőmérsékleteloszlásának az

$$U(r, t) = \ln \frac{r}{R} \int_{\varrho=0}^r A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \varrho d\varrho + \int_{\varrho=r}^R A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \varrho \ln \left(\frac{\varrho}{R} \right) d\varrho + U(R, t) \quad (10)$$

alapegyenletét, melynek peremfeltétele

$$U(R, t) = \varphi(t) \quad (11,1)$$

és kezdeti feltétele

$$U(r, 0) = G(r), \quad 0 \leq r \leq R \quad (11,2)$$

ismeretes.

2. Az integrodifferenciálegyenlet linearizált megoldása

A (10) és (11,1) egyenletekbe bevezetjük az

$$\frac{r}{R} = x, \quad \frac{\varrho}{R} = \xi$$

jelöléseket, akkor lesz

$$U(x, t) = R^2 \ln x \int_{\xi=0}^x A \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi + R^2 \int_{\xi=x}^1 A \frac{\partial U}{\partial t} \xi \ln \xi d\xi + U(1, t) \quad (12)$$

és

$$U(1, t) = \varphi(t), \quad t \geq 0. \quad (13)$$

A

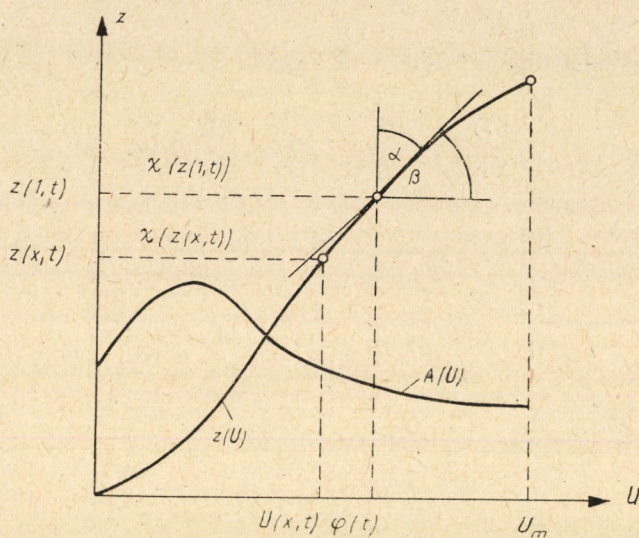
$$z(x, t) = \int_{\lambda=0}^{U(x, t)} A(\lambda) d\lambda \quad (14)$$

transzformációval fenti egyenletet átalakítjuk. A (14) U -ra megoldva legyen

$$U(x, t) = \chi[z(x, t)].$$

Eszerint tehát

$$\chi[z(x, t)] - \chi[z(1, t)] = R^2 \ln x \int_{\xi=0}^x \frac{\partial z}{\partial t} \xi d\xi + R^2 \int_{\xi=x}^1 \frac{\partial z}{\partial t} \xi \ln \xi d\xi. \quad (15)$$



3. ábra

A (15) egyenlet baloldalát linearizáljuk a z változó szerint (3. ábra) :

$$\chi[z(x, t)] - \chi[z(1, t)] \approx \left. \frac{d\chi}{dz} \right|_{z=1} [z(x, t) - z(1, t)], \quad (16,1)$$

vagyis a $z(U)$ görbét megfelelő érintőjével helyettesítjük.

Ez az érintő a hevítés során időbelileg vándorol, ugyanis a felszínhez tartozó $x = 1$ pontban linearizáltunk. Természetesen ez a lineáris közelítés annál jobb, minél közelebb esik $z(x, t)$ a $z(1, t)$ -hez; azaz a hevített test felszíne alatti keskeny rétegben lesz jó a közelítés. Most egyelőre feladatunkat arra korlátozzuk, hogy ebben az eléggé keskeny $x_1 \leq x \leq 1$ rétegben érvényes közelítő megoldást határozzuk meg.

A 3. ábrából látható, hogy

$$\left. \frac{d\chi}{dz} \right|_{z=1} = \operatorname{tg} a = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{\left. \frac{dz}{dU} \right|_{z=1}}.$$

A (14) egyenlet alapján

$$\left. \frac{dz}{dU} \right|_{x=1} = A[U(1, t)] = A(\varphi(t)),$$

tehát

$$\left. \frac{d\chi}{dz} \right|_{x=1} = \frac{1}{A(\varphi(t))} = \varepsilon(t). \quad (16,2)$$

Az $\varepsilon(t)$ függvény a felszíni hőmérséklet ismeretében az adott termikus paraméterfüggvényekkel meghatározható.

Ezzel a megoldandó integrodifferenciálegyenlet közelítőleg

$$\varepsilon(t)[z(x, t) - z(1, t)] \approx R^2 \ln x \int_{\xi=0}^x \frac{\partial z}{\partial t} \xi d\xi + R^2 \int_{\xi=x}^1 \frac{\partial z}{\partial t} \xi \ln \xi d\xi \quad (17)$$

alakban írható fel.

A közelítés annál jobb, mentől közelebb van x az 1-hez.

A peremfeltétel

$$z(1, t) = \int_{\lambda=0}^{\varphi(t)} A(\lambda) d\lambda \equiv \psi(t)$$

és a kezdőfeltétel

$$z(x, 0) = \int_{\lambda=0}^{U(x, 0)} A(\lambda) d\lambda \equiv E(x).$$

A fenti integrodifferenciálegyenletet és a peremfeltételt kielégítő megoldás

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) J_0(\omega_n x) + \psi(t) \quad (18)$$

alakú, ahol $\omega = \omega_n$ a $J_0(\omega) = 0$ egyenlet gyökeit jelenti. A $B_n(t)$ függvényeket (18)-nak a (16)-ba való helyettesítésével határozzuk meg. Az így kijelölt integrációk elvégzése után kapjuk az

$$\frac{1}{R^2} \varepsilon(t) \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) J_0(\omega_n x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{dB_n}{dt} J_0(\omega_n x) - \frac{d\psi}{dt} \frac{1-x^2}{4}$$

egyenletet. Az $\frac{1-x^2}{4}$ függvényt ismert módon Bessel-függvények szerinti sorba fejtjük [5], mely szerint

$$\frac{1-x^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(\omega_n x),$$

ahol

$$a_n = \frac{2}{J_1^2(\omega_n)} \int_{x=0}^1 x \frac{1-x^2}{4} J_0(\omega_n x) dx = \frac{2}{\omega_n^3 J_1(\omega_n)}.$$

A fenti egyenletbe történő behelyettesítés után az egyenletet zérusra redukáljuk és $J_0(\omega_n x)$ -et kiemeljük :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\varepsilon(t)}{R^2} B_n(t) + \frac{1}{\omega_n^2} \frac{dB_n}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \frac{2}{\omega_n^3 J_1(\omega_n)} \right] J_0(\omega_n x) = 0. \quad (19)$$

Így adódik a $B_n(t)$ függvények meghatározására szolgáló

$$\frac{dB_n}{dt} + \frac{\omega_n^2}{R^2} \varepsilon(t) B_n(t) + \frac{2\dot{\psi}(t)}{\omega_n J_1(\omega_n)} = 0 \quad (20)$$

differenciálegyenlet, melynek megoldása

$$B_n(t) = -\frac{2}{\omega_n J_1(\omega_n)} e^{-\frac{\omega_n^2}{R^2} \int_0^t \varepsilon(t) dt} \cdot \int_0^t \dot{\psi}(t) e^{\frac{\omega_n^2}{R^2} \int_0^t \varepsilon(t) dt} \cdot dt + k_n e^{-\frac{\omega_n^2}{R^2} \int_0^t \varepsilon(t) dt}. \quad (21)$$

A k_n integrációs állandók meghatározása a kezdőfeltétel kielégítésével történik. Legyen a hengeres bugában levő hőmérsékleteloszlásra jellemző z függvény a $t = 0$ időpontban $z(x, 0) = E(x)$, azaz

$$z(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) J_0(\omega_n x) + \psi(0) = E(x). \quad (22)$$

$B_n(0)$ helyettesítésével tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n J_0(\omega_n x) = E(x) - \psi(0),$$

ahonnan k_n a már említett módon [5] adódik :

$$k_n = \frac{2}{J_1^2(\omega_n)} \int_{x=0}^1 [E(x) - \psi(0)] x J_0(\omega_n x) dx. \quad (23)$$

A (23) és (21) kifejezéseknek a (18)-ba való behelyettesítésével kapjuk problémánknak az előbbi értelemben (16) linearizált megoldását

$$\begin{aligned}
z(x, t) = & \psi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\omega_n x)}{J_1^2(\omega_n)} e^{-\frac{\omega_n^2}{R^2} \int_0^t \varepsilon dt} \cdot \int_{x=0}^1 [E(x) - \psi(0)] x J_0(\omega_n x) dx - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\omega_n x)}{\omega_n J_1(\omega_n)} e^{-\frac{\omega_n^2}{R^2} \int_0^t \varepsilon dt} \cdot \int_0^t \dot{\psi}(t) e^{-\frac{\omega_n^2}{R^2} \int_0^t \varepsilon dt} \cdot dt \quad (24)
\end{aligned}$$

Már említettük, hogy az így kapott végeredmény a felszín alatt $r_1 \leq r \leq R$ ($R_2 - r_1 =$ eléggé kicsiny) rétegre érvényes közelítés, amely annál jobb, minél kisebb $R - r_1 > 0$. Hogy a $0 \leq r < r_1$ hengeren belül mi történik, arra a (24) megoldás általában nem adhat felvilágosítást, de ez nem is érdekel, mert a fentiek alapján a *belső* rétegekre a számítás úgy végezhető el, hogy

1. a (24) egyenlet segítségével meghatározzuk az r_1 sugarú kontrollfelületen az ott kialakuló hőmérsékletet $\left(x_1 = \frac{r_1}{R}\right)$, mint az idő függvényét

$$z(x_1, t) = \psi_1(t), \quad t \geq 0.$$

Ezt az r_1 sugarú hengerpaláston uralkodó hőmérsékletet 2. úgy használjuk fel, mint egy r_1 sugarú hengeres buga hevítésekor érvényes *peremfeltételt*, melynek időbeli kezdeti feltétele

$$z(x, 0) = E(x), \quad 0 \leq x \leq x_1.$$

Tehát a fentiekben kifejtett gondolatmenetet megismételjük az r_1 sugarú hengerre vonatkozóan az $r_2 \leq r \leq r_1$ ($r_1 - r_2 =$ eléggé kicsiny) rétegben. Ennek a rétegnek hőmérsékletét adó $z(x, t)$ függvény a (24) kifejezéssel egyezik, csupán az a különbség, hogy itt $x = \frac{r}{r_1}$ teendő. Így rétegről rétegre haladva a számítást a legbelső r_{\min} sugarú hengerig folytatjuk. A rétegek finomításával a számítás elvileg mind pontosabban fogja a valóságban kialakuló hőmérsékleti mezőt megközelíteni; feltéve, hogy a felhasznált termikus paraméterfüggvények a valóságnak megfelelnek.

3. Állandó termikus paraméterek klasszikus határeset

Röviden ki fogjuk mutatni, hogy megoldásunk a klasszikus módszer eredményét tartalmazza, tehát annak általánosítása. A klasszikus tárgyálási

mód a termikus paramétereket állandóknak veszi. Ebben az esetben a két transzformáció után a következőket kapjuk

$$U = \int_{\lambda=0}^{\vartheta} k d\lambda = k\vartheta(r, t)$$

$$z = \int_{\lambda=0}^U A d\lambda = AU(r, t) = Ak\vartheta(r, t).$$

Legyen a felületen $\vartheta(F, t) = f(t)$, $t \geq 0$ adott, akkor $\psi(t) = Akf(t)$. A $t = 0$ időpillanatban érvényes kezdőfeltétel legyen $\vartheta(P, 0) = F(r)$. Írjuk a (24) egyenletben x helyébe $\frac{r}{R}$ -et, majd a fenti kifejezések behelyettesítése után egyszerűsítsünk Ak -val. Ezzel megkapjuk az ismert klasszikus megoldást [6]

$$\vartheta(r, t) = f(t) + \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\omega_n \frac{r}{R}\right)}{J_1^2(\omega_n)} e^{-\frac{\omega_n^2}{R^2 A} t} \int_{r=0}^R [F(r) - f(0)] J_0\left(\omega_n \frac{r}{R}\right) r dr -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 J_0\left(\omega_n \frac{r}{R}\right)}{\omega_n J_1(\omega_n)} e^{-\frac{\omega_n^2}{R^2 A} t} \int_0^t \frac{df}{dt} e^{+\frac{\omega_n^2}{R^2 A} t} dt. \quad (25)$$

A (25) és (24) összevetésével a klasszikus és nem klasszikus eset eltérését képlet-szerűen is követni lehet.

IRODALOM

1. MTA Műsz. Tud. Osztályának Közleményei (XXIII. köt. 261/285.). A következőkben I. jelzéssel
2. A fizikai alapjelölések és dimenziók az I. dolgozatban foglaltaknak megfelelnek. idézve.
3. L. pl. W. HEILIGENSTÄDT: Wärmetechnische Berechnung der Industrieöfen. Düsseldorf (1951).
4. R. H. WEBER und R. GANS: Repertorium der Physik. Leipzig (1916). I. p. 31.
5. L. pl. F. SCHWANK: Randwertprobleme. Leipzig (1951), p. 178.
6. E kérdés klasszikus tárgyalására l. pl. N. J. TAJC: Tyechnologia nagreva sztali. Moszkva (1951) p. 27.

ÖSSZEFOGLALÁS

A szerző hosszú hengeres testek hőcicserélődési folyamatát vizsgálja hőmérséklettől függő termikus paraméterek esetén az 1. peremfeltétel mellett a probléma integrodifferenciál-egyenletének felállításával, amelyet helybeli szakaszos felbontással linearizálva old meg.

HENGERSZIMMETRIKUS BÜGÁK FELHEVÍTÉSÉRŐL

III. NEM-LINEÁRIS HŐVEZETÉSI FOLYAMAT MEGHATÁROZÁSA ELÉGGÉ HOSSZÚ KÖR-KERESZTMETSZETŰ RÚDBAN, A HARMADIK PEREMFELTÉTEL ALAPJÁN

CZIBERE TIBOR

BORBÉLY SAMU (MŰSZAKI EGYETEM, BUDAPEST), CZIBERE TIBOR (GANZ VAGON- ÉS GÉPGYÁR, BUDAPEST)
ÉS MASCHKEK TIVADAR (GAMMA OPTIKAI MŰVEK, BUDAPEST) HŐVEZETÉSI MUNKAKÖZÖSSÉGE

[Beérkezett 1958. január 25-én]

Az alábbiakban a fenti kérdés már korábban meghatározott* integrodifferenciálegyenletét fogjuk megoldani a

$$k \frac{\partial \vartheta}{\partial n} = -h(\vartheta - \vartheta_K) \quad (1)$$

ún. Newton-i felszíni energiaátáramlási feltétel alapján.

1. A peremfeltételnek megfelelően átalakított integrodifferenciálegyenlet

A szemlélt hővezetési folyamatot meghatározó

$$U(x, t) = \int_{\vartheta_K}^{\vartheta(x, t)} k(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

függvényre vonatkozó integrodifferenciálegyenlet

$$U(x, t) = R^2 \ln x \int_{\xi=0}^x A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi + R^2 \int_{\xi=x}^1 A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \xi \ln \xi d\xi + U(1, t), \quad (3)$$

ahol $x = \frac{r}{R}$; a vizsgált pontnak az origótól való távolsága r ; a kör sugara R .

$A(U)$ -val jelöltük $\frac{\gamma \cdot c}{k}$ értékét, amely a („redukált”) hőmérsékletnek, tehát U -nak függvénye.

Ezt az egyenletet most átalakítjuk az (1) határfeltételnek megfelelően. A (3)-ban előforduló $U(1, t)$ a henger felületének hőmérsékletét jelenti, amely

* L. elsősorban a II. jelzésű dolgozatot (ugyanezen füzet 23. l.), az alapjelölések, fizikai értelmezések és feltételekre vonatkozóan pedig az előbbi I. és II. dolgozatokat. (Uo. 7., 23. l.)

az (1) határfeltétel esetén nem ismeretes. Hogy a (3) integrodifferenciálegyenletet megoldhassuk, ki kell küszöbölnünk az $U(1, t)$ függvényt és helyébe az (1) határfeltétel felhasználásával a h függvényt kell bevezetnünk. A fentiek érdekében az (1) határfeltételt transzformáljuk U -ra. Körkeresztmetszetről lévén szó, az n irányítása megegyezik az r -ével, tehát

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \equiv \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = -\frac{h}{k} (\vartheta - \vartheta_K). \quad (4)$$

A (2) differenciálásával kapjuk :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = k(\vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial r} R$$

és így (4) felhasználásával lesz :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=1} = -R h(\vartheta) (\vartheta - \vartheta_K) \Big|_{x=1}. \quad (5)$$

A (3) egyenlet differenciálásával

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= R^2 \left[\frac{1}{x} \int_{\xi=0}^x A \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi + x \ln x A(U) \frac{\partial U}{\partial t} - x \ln x A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{R^2}{x} \int_{\xi=0}^x A \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=1} &= R^2 \int_{\xi=0}^1 A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi \end{aligned} \quad (6)$$

adódik.

(5) és (6) összevonása után kapjuk

$$R^2 \int_0^1 A(U) \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi = -R h(\vartheta) (\vartheta - \vartheta_K) \Big|_{x=1} = H(U). \quad (7)$$

A $H(U)$ -ban az $U(1, t)$ a független változó. Linearizáljuk* a $H(U)$ függvényt :

* A linearizáció egyelőre az egész hevítési intervallumra vonatkozik, emiatt gyakorlatilag kevésbé pontos eredményeket adhat. A későbbiek során azonban a hevítési intervallumban szakaszonkénti (e szakaszokon belül jó közelítést biztosító) linearizációt fogunk bevezetni, s eredményeinket szakaszonként felhasználni. Ez fogja megoldásunk gyakorlati pontosságát is bizonyítani.

$$R^2 \int_0^1 A \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi \approx h_0 U(1, t) + h_1. \quad (8)$$

Ebből

$$U(1, t) = \frac{R^2}{h_0} \int_0^1 A \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi - \frac{h_1}{h_0}. \quad (9)$$

Legyen $\frac{1}{h_0} = \ln \alpha_0$, továbbá $\frac{h_1}{h_0} = \beta_0$. E jelölésekkel a (9) összefüggést helyettesítjük be a (3) integrodifferenciálegyenletbe :

$$U(x, t) = R^2 \ln x \int_0^x A \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi + R^2 \int_x^1 A \frac{\partial U}{\partial t} \xi \ln \xi d\xi + \\ + R^2 \ln \alpha_0 \int_0^1 A \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi - \beta_0. \quad (10)$$

A (10) egyenletben előforduló utolsó integrált két részre bontjuk és az első kettőhöz hozzáadjuk. Ezzel kapjuk a megoldandó integródifferenciálegyenletet az (1) peremfeltétel esetére

$$U(x, t) = R^2 \left[\ln(\alpha_0 x) \int_{\xi=0}^x A \frac{\partial U}{\partial t} \xi d\xi + \int_{\xi=x}^1 A \frac{\partial U}{\partial t} \ln(\alpha_0 \xi) \xi d\xi \right] - \beta_0. \quad (11)$$

(A (11) $x = 1$ esetén a (9) határfeltételt adja.)

2. Az integrodifferenciálegyenlet megoldása

Bevezetjük a következő transzformációt :

$$z(x, t) = R^2 \int_{\lambda=0}^{U(x,t)} A(\lambda) d\lambda. \quad (12)$$

Ennek inverzét jelölje :

$$U(x, t) = \chi[z(x, t)],$$

amivel (11) a következővé alakul :

$$\chi(z) = \ln(\alpha_0 x) \int_0^x \frac{\partial z}{\partial t} \xi d\xi + \int_x^1 \frac{\partial z}{\partial t} \xi \ln(\alpha_0 \xi) d\xi - \beta_0.$$

Linearizáljuk az $\chi(z)$ függvényt :

$$\chi(z) \approx a_0 z + a_1$$

és legyen továbbá

$$a_1 + \beta_0 = c_0,$$

akkor a megoldandó egyenletünk

$$a_0 z = \ln(\alpha_0 x) \int_0^x \frac{\partial z}{\partial t} \xi d\xi + \int_x^1 \frac{\partial z}{\partial t} \xi \ln(\alpha_0 \xi) d\xi - c_0. \quad (13)$$

Ennek megoldását a következő alakban keressük :

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) J_0(\omega_n x). \quad (14)$$

ω_n állandó, amelynek konkrét értékét a határfeltétel kielégítésekor kapjuk meg.

Ugyanis a $z(x, t)$ -nek nemcsak a (13) integrodifferenciálegyenletet kell kielégítenie, hanem a (9) határfeltételnek a (12) segítségével transzformált alakját is.

A $B_n(t)$ függvényt a (14)-nek a (13)-ba történő behelyettesítésével határozzuk meg :

$$a_0 \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) J_0(\omega_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dB_n}{dt} \left[\ln(\alpha_0 x) \int_0^x \xi J_0(\omega_n \xi) d\xi + \int_x^1 \xi J_0(\omega_n \xi) \ln(\alpha_0 \xi) d\xi \right] - c_0. \quad (15)$$

A megoldás céljából most vizsgáljuk meg a következő integrálegyenletet :

$$g(x) = -\omega^2 \left[\ln(\alpha x) \int_0^x g(\xi) \xi d\xi + \int_x^1 g(\xi) \xi \ln(\alpha \xi) d\xi \right].$$

Az egyenlet kétszeri differenciálásával adódik

$$\frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{1}{x^2} \frac{dg}{dx} = -\omega^2 g(x),$$

melynek megoldása az elsőfajú nulladrendű Bessel-függvény : $g(x) = J_0(\omega x)$. Ezért tehát írható

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_0 B_n(t) J_0(\omega_n x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dB_n}{dt} \frac{J_0(\omega_n x)}{\omega_n^2} + c_0 = 0. \quad (16)$$

A c_0 állandót Bessel-sorba fejtjük*, amivel

$$c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n J_0(\omega_n x) \quad (17)$$

és az előbbi egyenlet a következőképpen írható :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[a_0 B_n(t) + \frac{d B_n}{dt} \frac{1}{\omega_n^2} + \delta_n \right] J_0(\omega_n x) \equiv 0. \quad (18)$$

Eszerint kell legyen

$$B_n(t) = k_n e^{-a_0 \omega_n^2 t} - \frac{\delta_n}{a_0}. \quad (19)$$

Meg kell állapítanunk még ω_n értékét. Evégből alakítsuk át a (13) meghatározó egyenletet határfeltétellé (bevezetjük az $x = 1$ helyettesítést)

$$a_0 z(1, t) = \ln \alpha_0 \int_0^1 \frac{\partial z}{\partial t} \xi d\xi - c_0. \quad (20)$$

Behelyettesítjük a (14) megoldást :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_0 B_n(t) J_0(\omega_n) = \ln \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d B_n}{dt} \int_0^1 J_0(\omega_n \xi) \xi d\xi - c_0 \quad (21)$$

$$\int_0^1 J_0(\omega_n \xi) \xi d\xi = \frac{1}{\omega_n^2} (\omega_n \xi) J_1(\omega_n \xi) \Big|_0^1 = \frac{J_1(\omega_n)}{\omega_n}. \quad **$$

(19) felhasználásával (21) a következőképpen alakul :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_0 k_n e^{-a_0 \omega_n^2 t} - \delta_n) J_0(\omega_n) = \ln \alpha_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_0 \omega_n^2 k_n e^{-a_0 \omega_n^2 t} \frac{J_1(\omega_n)}{\omega_n} \right) - c_0.$$

A (17) sorbafejtés felhasználásával

$$\sum_{n=1}^{\infty} k_n e^{-a_0 \omega_n^2 t} [J_0(\omega_n) + \ln \alpha_0 \omega_n J_1(\omega_n)] = 0$$

adódik, vagyis

$$J_0(\omega_n) + \ln \alpha_0 \omega_n J_1(\omega_n) = 0$$

* A δ_n együtthatókat később meg fogjuk határozni

** 1. pl. JAHNKE—EMDE : Tafeln höherer Funktionen. Leipzig (1952) 149. o.

Tehát a megoldásban előforduló ω_n a

$$J_0(x) + \frac{x}{h_0} J_1(x) = 0 \quad (22)$$

egyenlet gyökeit jelenti.

Vizsgáljuk meg most a

$$c_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n J_0(\omega_n x)$$

sorbafejtést, ahol ω_n a (22) egyenlet gyökeit jelenti. Az egyenlet mindkét oldala $x J_0(\omega_n x)$ -el szorozva és $x = 0 \dots 1$ között integrálva a Bessel-függvények ortogonalitása folytán szolgáltatja

$$\delta_n = \frac{c_0}{\int_0^1 x J_0^2(\omega_n x) dx} \int_0^1 x J_1(\omega_n x) dx = \frac{2 J_1(\omega_n)}{\omega_n [J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)]} \cdot c_0 \quad (23)$$

értékeit.

Ezek után térjünk át a kezdőfeltételek kielégítésére. Itt két esetet különböztetünk meg.

a) a $t = 0$ időpillanatban a hevítendő test egész keresztmetszetében azonos hőmérsékletű és

b) a $t = 0$ időpillanatban a hevítendő test hőmérséklete az $E(x) \neq \text{const.}$ függvénnyel adott.

Legyen először a kezdőfeltétel :

$$z(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) J_0(\omega_n x) \equiv z_m = \text{const.} \quad (24)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n - \frac{\delta_n}{a_0} \right) J_0(\omega_n x) = z_m.$$

(23)-al analóg módon kapjuk :

$$k_n - \frac{\delta_n}{a_0} = \frac{2 J_1(\omega_n)}{\omega_n [J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)]} z_m$$

$$k_n = \left(z_m + \frac{c_0}{a_0} \right) \frac{2 J_1(\omega_n)}{\omega_n [J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)]} \quad (25)$$

Most már felírhatjuk a (13) integrodifferenciálegyenlet (linearizált) megoldá-

sát a (24) kezdőfeltétel esetére. A (14), (19), (23) és (25) összefüggések segítségével :

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(z_n + \frac{c_0}{a_0} \right) e^{-c_n \omega_n^2 t} - \frac{c_0}{a_0} \left\{ \frac{2 J_1(\omega_n) J_0(\omega_n x)}{\omega_n [J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)]} \right\}. \quad (26)$$

Ha a kezdőfeltétel :

$$z(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(0) J_0(\omega_n x) = E(x), \quad \text{akkor} \quad (27)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(k_n - \frac{\delta_n}{a_0} \right) J_0(\omega_n x) = E(x) \quad \text{és}$$

az előzőhöz teljesen hasonló módon :

$$k_n - \frac{\delta_n}{a_0} = \frac{2 \int_0^1 x E(x) J_0(\omega_n x) dx}{J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)},$$

$$k_n = \frac{2}{J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)} \left[\frac{c_0}{a_0} \frac{J_1(\omega_n)}{\omega_n} + \int_0^1 x E(x) J_0(\omega_n x) dx \right]. \quad (28)$$

A (14), (19), (23) és (28) segítségével felírjuk a (13) integrodifferenciálegyenlet (linearizált) megoldását a (27) kezdőfeltétel esetére :

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{c_0}{a_0} \frac{J_1(\omega_n)}{\omega_n} + \int_0^1 x E(x) J_0(\omega_n x) dx \right] e^{-a_n \omega_n^2 t} - \frac{c_0}{a_0} \frac{J_1(\omega_n)}{\omega_n} \right\} \frac{2 J_0(\omega_n x)}{J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)}. \quad (29)$$

3. Az integrodifferenciálegyenlet közelítő megoldásának további javítása

A (26) és (29) megoldások a bevezetett linearizálás miatt a ténylegesen kialakuló hőmérsékletnek csak durva közelítését adják. Ez javítható, amennyiben a $\chi(z)$ függvényt szakaszonként linearizáljuk. A z tengely mentén vesszük a felosztási szakaszokat, amelyeknek az indexük legyen i . Tehát a szakaszon belül :

$$\chi_i(z) = a_{0i} z + a_{1i}.$$

Ennek megfelelően szakaszonként linearizáljuk a (7) egyenletben előforduló $H(U)$ függvényt is :

$$H_i(U) = h_{0i} U(1, t) + h_{1i}.$$

Ezzel $\frac{1}{h_{0i}} = \ln \alpha_{0i}$, továbbá $\frac{h_{1i}}{h_{0i}} = \beta_{0i}$; $\alpha_{1i} - \beta_{0i} = c_{0i}$.

Az $\omega_n^{(i)}$ pedig a $J_0(x) + \frac{x}{h_{0i}} J_1(x) = 0$

egyenlet gyökeit jelenti.

Az egyes szakaszokon belüli felhevítési időtartamot jelöljük t_i -vel, ahol a $t = 0$ időpillanatot mindig az illető szakasz határától számítjuk. Ebben az esetben a $z_i(x, t)$ a (29)-ben megadott alakú lesz, amelyben $E(x) = z_{i-1}(x, t_{i-1})$. Tehát a szakaszonkénti linearizáció esetén a hőmérsékletet a következő függvény adja meg :

$$z_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c_{0i}}{a_{0i}} \frac{J_1(\omega_n^{(i)})}{\omega_n^{(i)}} + \int_0^1 x z_{i-1}(x, t_{i-1}) J_0(\omega_n^{(i)} x) dx \right] e^{-a_n \omega_n^{(i)2} t} - \frac{c_{0i}}{a_{0i}} \frac{J_0(\omega_n^{(i)})}{\omega_n^{(i)}} \left\{ \frac{2J_0(\omega_n^{(i)} x)}{J_0^2(\omega_n^{(i)}) + J_1^2(\omega_n^{(i)})} \right. \quad (30)$$

Fenti megoldás — bevezetett feltételeink miatt — közelítés, miután pl. a $\chi(z)$ függvényt is megfelelő egyenes szakaszokkal helyettesítettük — viszont megfelelő és gyakorlatilag keresztülvihető szakaszfelosztással — számítási módszerünkkel a felhevítési viszonyokat legalább annyira megközelíthetjük, mint amennyire műszereink pontosak, amelyekkel a valóságos gyakorlati viszonyokat mérni tudjuk. Természetesen a számítás szükséges feltétele, hogy a hevítendő test anyagára jellemző termikus paraméterek értékei a hőmérséklet függvényében kellő biztonsággal ismeretesek legyenek.

4. A klasszikus megoldás határesetete

Ha a termikus paraméterek állandók, a (2) transzformációs egyenlet

$$U = k(\vartheta - \vartheta_K) \quad \text{alakot ölti,} \quad (31)$$

továbbá $A = \frac{\gamma \cdot c}{k}$ és a (12) transzformációs egyenlet

$$z = R^2 \int_0^U A d\lambda = R^2 \gamma \cdot c (\vartheta - \vartheta_K) \quad \text{lesz.} \quad (32)$$

A kezdőértékre érvényes

$$z_m = R^2 \gamma \cdot c (\vartheta_0 - \vartheta_K). \quad (33)$$

Az előzőek alapján :

$$U = \chi(z) = a_0 z + a_1,$$

ámde a (32)-ből és (31)-ből

$$k(\vartheta - \vartheta_K) = a_0 R^2 \gamma \cdot c (\vartheta - \vartheta_K) + a_1.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$a_0 = \frac{k}{R^2 \gamma \cdot c}, \quad a_1 = 0. \quad (34)$$

A (7) és (8) egyenletből :

$$-R h (\vartheta - \vartheta_K) = h_0 k (\vartheta - \vartheta_K) + h_1$$

és (31) felhasználásával kapjuk

$$-R h (\vartheta - \vartheta_K) = H(U) = h_0 U + h_1,$$

tehát

$$h_0 = -R \frac{h}{k}, \quad h_1 = 0$$

$$c_0 = a_1 + \beta_0 = a_1 + \frac{h_1}{h_0} = 0. \quad (35)$$

A (32), (33), (34) és (35) egyenlőségek felhasználásával kapjuk a (26) megoldásra, miután $R^2 \gamma \cdot c$ -vel egyszerűsítettünk :

$$\vartheta - \vartheta_K = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\vartheta_0 - \vartheta_K) e^{-\frac{k}{\gamma \cdot c} \frac{\omega_n^2}{R^2} t} \frac{J_1(\omega_n) J_0(\omega_n x)}{\omega_n [J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)]}, \quad (36)$$

ahol ω_n a következő egyenlet gyökeit jelenti :

$$R \frac{h}{k} J_0(x) = x J_1(x). \quad (37)$$

Ez az eddig általánosan ismert klasszikus megoldás.

A (27) kezdőfeltételre a (32) felhasználásával lesz :

$$E(x) = R^2 \gamma \cdot c (F(x) - \vartheta_K),$$

ahol $F(x)$ a kezdeti hőmérsékleteloszlást jelenti.

Ebben az esetben is a klasszikus megoldásra jutunk, ha a (32), (33), (34) és (35) összefüggéseket a (29)-be helyettesítjük és $R^2 \gamma c$ -vel egyszerűsítünk

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_K + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 x [F(x) - \vartheta_K] J_0(\omega_n x) dx \right\} \frac{J_0(\omega_n x)}{J_0^2(\omega_n) + J_1^2(\omega_n)} e^{-\frac{k}{\gamma c} \frac{\omega_n^2}{R^2} t}. \quad (38)$$

Megjegyezzük még, hogy az 1. és 3. peremfeltételre kifejtett II. és III. eljárásunkat gömb esetére is alkalmaztuk.

ÖSSZEFOGLALÁS

A szerző a hosszú hengeres testekre vonatkozó, nem-lineáris hővezetés problémáját a 3. peremfeltétellel vizsgálja a megfelelő integrodifferenciálegyenlet felállításával, melyet hőmérsékletbeli szakaszos linearizálással old meg.

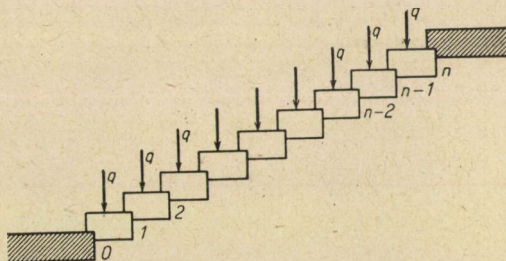
VALAMENNYI LÉPCSŐFOKON AZONOSAN TERHELT GYÁMOLÍTOTT LÉPCSŐK FOKAINAK HAJLÍTÓIGÉNYBEVÉTELE

CSONKA PÁL

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉS- ÉS KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1957. december 6-án]

Az építő gyakorlat kétféle lépcsőszerkezetet ismer : lebegő és gyámolított lépcsőt. A *lebegő* lépcsőfokok erőjátékát CHMELKA F. tanulmánya [1], a gyámolított lépcsőfokok problémáját pedig szerző nemrég megjelent egyik dolgozata [2] tárgyalta. Utóbbi általános érvényű összefüggéseket állapított meg a horonnyal kapcsolt tömblépcsőfokokból épített gyámolított lépcsők szomszédos lépcsőfokainak lehajlása és terhelése között. Jelen tanulmány ezen összefüggések alkalmazását mutatja be oly lépcsőkarra, melynek valamennyi lépcsőfoka azonosan van megterhelve (1. ábra).



1. ábra. Valamennyi lépcsőfokon azonosan terhelt lépcsőkar

A tárgyalás alapját az a feltevés alkotja, hogy a lépcsőfokok hornyai a lépcsőfokok között csuklószerű kapcsolatot létesítenek, a lépcsőkarokhoz fent és lent csatlakozó pihenők pedig tökéletesen merevek.

A dolgozat a lépcsőfokok alakváltozását leíró általános differenciaegyenletről indul ki [2]. Ezt a differenciaegyenletet a kezdeti feltételek betartásával megoldja, s ezzel megállapítja, hogy az egyes lépcsőfokok a terhelés hatására minő alakváltozást szenvednek. Az alakváltozások ismeretében a lépcsőfokok hajlítónyomatékait a technikai szilárdságtanban szokásos módon számítja.

A dolgozatot számpélda egészíti ki. Ebből az tűnik ki, hogy valamennyi lépcsőfok azonos megterhelése esetében a lépcsőfokok együttdolgozása alig csökkenti a középő lépcsőfokban keletkező hajlítónyomatékot.

IRODALOM

1. CHMELKA, F.: Über die Beanspruchung freitragender Stiegenstufen. *Österreichische Bauzeitschrift* 9 (1954), pp. 45—54.
2. CSONKA P.: Horonnyal kapcsolt tömblépcsőfokok erőjátéka. *A Magy. Tud. Akadémia Műsz. Tud. Oszt. Közleményei* 19 (1956), pp. 257—264.

PATENTOZOTT ÉS HIDEGEN HÚZOTT ACÉLHUZAL SZAKÍTÓSZILÁRDSÁGÁNAK MEGÁLLAPÍTÁSA SZÁMÍTÁSSAL*

MANKHER LAJOS

SALGÓTARJÁNI ACÉLGYÁR, SALGÓTARJÁN

[Beérkezett 1958. január 24-én]

Patentozással és ezt követő hideghúzással gyártott ötvözetlen szénacél-huzal szakítószilárdsága két részből tevődik össze. Az egyik a patentozási hőkezeléssel kapott szilárdság, a másik a hidegalakítás — húzás — folyamán mutatkozó szilárdsági növekedés.

Az acélhuzalgyártásban lényeges jelentőségű a patentozási szilárdság, mert ennek nagysága szabja meg egyúttal a hideghúzás alatti szilárdságnövekedés fajlagos mértékét is. Adott átmérőjű és szilárdságú acélhuzal gyártásához előre kell kiválasztani a feldolgozandó anyag vegyi összetételét, az alkalmazandó hidegalakítás nagyságát, a megfelelő szövetszerkezet mellett a huzal patentozási átmérőjét, patentozási szilárdságát és a húzás alatti szilárdságnövekedést.

Patentozási szilárdság megállapítása az ötvözetlen acélhuzal vegyi összetételéből

A patentozási szilárdság összefüggést mutat az anyag vegyi összetételével, a huzal átmérőjével, az izzítási és hűlési körülményekkel. Legnagyobb befolyása a patentozási szilárdságra az anyag vegyi összetételének van, de különösen az anyag széntartalmának. Kézenfekvő ezért a vegyi alkotókból történő számítási módszer kidolgozása.

Meleghengermű üzemekben már az 1900-as évek elején, H. v. JÜPTNER [1] hengerelt anyag szakítószilárdságának megállapítására az alábbi összefüggést állította fel:

$$\sigma_B = A + 20/3 C + 20/7 Si + 10/7 Mn t/cm^2. \quad (1)$$

F. EISENKOLB [2] JÜPTNER után az alábbi képletet ajánlja:

$$\sigma_B = 25 + 67 C + 14 Mn + 28 Si kg/mm^2. \quad (2)$$

* Ötvözetlen acélból húzott minden kemény drót hőkezelését, amikor ti. azt 800—1000 C° hőmérsékletéről 400—600 C° hőmérsékletű ólom- vagy sófürdőben, vagy levegőn gyorsan lehűtik, a XIX. század első felében angolul és németül „patentozottnak” nevezték, mivel ez az eljárás akkor számot tarthatott arra, amit ma szabadalmazottnak nevezünk. Az angol és a német irodalomban ma is használatos ez az elnevezés, nyelvünkben is — jobb hiányában — ez járja. Kívánatos lenne találó magyar kifejezés erre a fogalomra. (A szerk.)

JÜPTNER képletében feltételezte, hogy általános összefüggés van az elem atomsúlya és az illető elemhez tartozó f tényező között

$$f = 800/\text{atomsúly.} \quad (3)$$

A peini [3] hengerművek JÜPTNER képletét továbbfejlesztve még a foszfort is felvették :

$$\sigma_B = A + 2/30 C + 2/70 Si + 1/70 Mn + 1/40 P \quad (4)$$

H. H. CAMPBELL [4] képlete :

$$\text{Savanyú acélra } \sigma_B = 28 + (0,7 C + 0,7 P + X Mn)100 + R \text{ kg/mm}^2. \quad (5)$$

$$\text{Bázisos acélra } \sigma_B = 29 + (0,54 C + 0,7 P + Y Mn)100 + R \text{ kg/mm}^2. \quad (6)$$

H. VOLLMACHER [5] ismertet GOTTFRIED FINKE-féle képletet normalizált állapotra :

$$\sigma_B = 25 + 100 C + 10 (Si - 0,20) + 15 (Mn - 0,60) + 100 (P - 0,020) + D. \quad (7)$$

C. F. QUEST és T. S. WASHBURN képlete hengerelt áru szilárdságának megállapítására :

$$\begin{aligned} \sigma_B = 26,72 + C(49,22 + 20,65 Mn) + Mn[2,11 + Mn(1,69 + 8,25 C)] + \\ + 23,90 Si + 70,31 P + K. \end{aligned} \quad (8)$$

Az acéldrótipar is keresett JÜPTNER után megoldást az acélhuzalok paten-tozási szilárdságának megállapítására. Ilyen képlet :

$$\sigma_{pat} = 25 + 96 C + 21 Mn + 41 Si \text{ kg/mm}^2, \quad (9)$$

amely $f = 1150/\text{atomsúly}$ elven alapult.

Ha a Mn-t és a Si-t az acéldrótyártásban szokásos értékekkel (pl. Mn = 0,45%, Si = 0,30%) számítjuk,

$$\sigma_{pat} = 96 C + 47,$$

akkor nagy hasonlóságot állapíthatunk meg az acéldrótyártásban régóta használatos ökölszabály képlettel :

$$\sigma_{pat} = 100 C + 50.$$

Acélhuzal patentozási szilárdságának megállapítására dolgozott ki képletet JERRY G. WEISS [6] a C- és Mn-tartalom alapján.

$$\sigma_{pat} = C \cdot 950 + 40\,000(\text{Fe tényező}) + \text{Mn tényező lb/sq.} \quad (10)$$

Ez a számítási mód rendkívül kis patentozási szilárdsági értéket ad.

T. NISHIOKA [7] empirikus képlete patentozási szilárdság megállapítására az anyag vegyi összetételén kívül figyelembe veszi a huzal átmérőjének, a patentozás módjának, a hőviszonyoknak a befolyását is :

$$\sigma_{pat} = [(35 + 66 C_1 K_1) + (90 C_2 + 16 \text{ Si} + 26 \text{ Mn} + 60 \text{ P} + 6 \text{ Cu} + 16 \text{ Ni} + 16 \text{ Cr}) K_2] K_d. \quad (11)$$

NISHIOKA képletével számított patentozási szakítószilárdsági értékek elég jól egyeznek az általunk ismert, s a továbbiakban bemutatott számítás értékekkel.

BOCJUBSZKIJ [17] ismertet, eléggé elterjedt patentozási szilárdsági táblázatot a széntartalom és átmérő függvényében, 8—1,2 mm átmérő között kb. 25 kg/mm² a szilárdság szóródása. Hibája, hogy 0,2% C-tartalomnál is ugyanolyan szilárdsági szóródást ad, mint 0,8% C-tartalomnál.

Különböző patentozási szilárdságokat grafikusan az 1. ábra mutatja.

TULENKOV, ZLOTNYIKOV és BOBILEVA [8] az alábbi empirikus képletet használja a patentozási szilárdság megállapítására :

$$\sigma_{pat} = 42,5 + 104 C + 0,9 (8 - D). \quad (12)$$

A képlet már szintén figyelembe veszi az átmérő befolyását a patentozási szilárdságra. Hibája azonban a (11) és (12) képletnek, hogy az átmérő szerinti szilárdságváltozást nem teszi függővé a széntartalomtól. Gyakorlat szerint ugyanis nagyobb széntartalomnál nagyobb, kis széntartalomnál kisebb az átmérő szerinti szilárdságváltozás a patentozásnál.

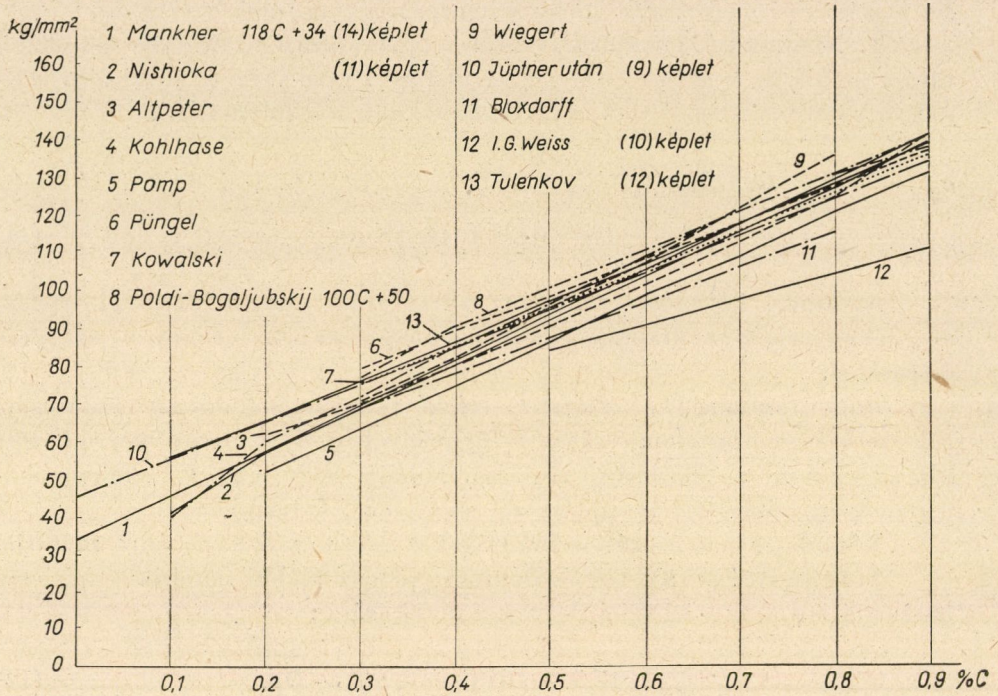
Hazai viszonylatban a JÜPTNER-től eredő összefüggés nem egyezett a gyakorlattal, mert kis széntartalomnál túl nagy patentozási szilárdságot adott. Hogy a patentozásnál a széntartalomnak nagyobb befolyást biztosítsunk, a képletet átdolgoztuk :

$$\sigma_{pat} = 25 + 118 C + 14 \text{ Mn} + 10 \text{ Si kg/mm}^2. \quad (13)$$

Az ötvözőelemeknek szűk határok közötti ingadozása a patentozási szilárdságot csak kismértékben változtatják meg. Az ebből adódó szilárdsági szóródás oly csekély, hogy a kész acélhuzal szilárdságát nem befolyásolja,

ha a gyakorlatban a szokásos középértékekkel számolunk ($Mn = 0,45\%$, $Si = 0,30\%$). Ekkor a képlet egyszerűsíthető:

$$\sigma_{pat} = 118 C + 34 \text{ kg/mm}^2. \quad (14)$$



1. ábra. Patentozási szilárdságok 5,5 mm átmérőn

Hordkötél és vastag rugóacélhuzal gyártásakor, amikor a homogénabb patentozási szövet elérése véget a Mn-tartalom nagyobb, értelemszerűen a (13) képlet használandó. Mind a (13), mind a (14) képlet 5,5 mm patentozási átmérőre vonatkozik. Vastagabb átmérőknél a patentozási szilárdság csökken, vékonyabb átmérőknél emelkedik.

Ha az irodalomból ismert különböző szerzők patentozási szilárdságait diagramban vizsgáljuk (1. ábra), azok nagyrészt közel fekszenek egymáshoz. Közöttük a különbség többnyire a szilárdsági egyenesek hajlásszögében van.

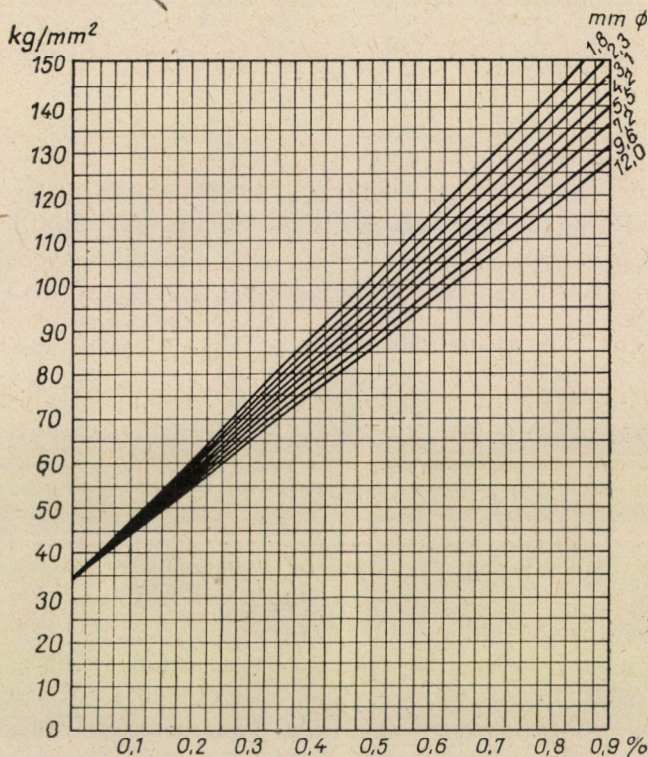
Ólomban patentozott minimális drótátmérő nagy általánosságban 1 mm körül van. A szokásos legvastagabb drótátmérő 10—11 mm. Az átmérő szerinti szilárdsági változás kis szénttartalomnál kisebb, nagyobb szénttartalomnál nagyobb. Pl. 0,9% C-nél a szilárdsági különbség 20 kg/mm² is lehet.

Az átmérő szerinti patentozási szilárdságváltozás az anyag szénttartalmának befolyása alapján alábbi összefüggéssel fejezhető ki:

100% alakváltozásra $\left(\ln \frac{F_0}{F_n}\right)$ eső szilárdsági változás = $8 C \text{ kg/mm}^2$. (15)

Ennek alapján bármely tetszőleges átmérőjű acélhuzal patentozási szilárdsága :

$$\sigma_{pat} = 25 + 118 C + 14 Mn + 10 Si + 8 C \ln \frac{F_{5,5}}{F_{pat}} \text{ kg/mm}^2. \quad (16)$$



2. ábra. Patentozási szilárdság a C-tartalom és huzalátmérő függvényében. Ólompatentozással, (17) képlet szerint

Egyszerűsített alakban :

$$\sigma_{pat} = 34 + 118 C + 8 C \ln \frac{d_{5,5}^2}{d_{pat}^2} \quad (17)$$

A (17) képlettel számított ólompatentozási szakítószilárdsági értékeket 0,15—0,90% C és 1—12 mm átmérő között a 2. ábra mutatja.

A szilárdság növekedése a húzás folyamán és annak megállapítása

A patentozott és hidegen húzott acélhuzal szilárdságának húzás alatti növekedésének tisztázására már régebben is folytak kísérletek. A szilárdsági növekedés és a hidegalakítás nagysága között törvényszerű összefüggés van,

és erre az összalakítás nagyságán kívül befolyással van a húzásonkénti keresztmetszet csökkenés, és a kiinduló patentozási szilárdság is. JUCHWEC [9] szerint a fentiekén kívül a szilárdságnövekedésre hidegalakításnál befolyással van még a metallurgiai folyamat is. Nyugtatott, kis széntartalmú acél szilárdsági növekedése nagyobb, mint a még nem nyugtatott acélé.

SEYRICH [10] a hidegalakítás alatti keményedés törvényszerűségét olyan hiperbolával fejezte ki, melynél az abszcisszán a huzalok keresztmetszetei, az ordinátán a szakítószilárdság emelkedési szögének tangensei vannak felrakva. Az összefüggést

$$f \operatorname{tg} \alpha = 54,7 \quad (18)$$

konstans értékben találta.

W. PÜNGEL [11] kísérleteiben megállapította, hogy a húzás alatti szilárdságnövekedésre az anyag széntartalma is befolyással van.

Eszerint kis széntartalomnál kisebb, nagyobb széntartalomnál nagyobb a húzás alatti szilárdsági növekedés, ugyanolyan keresztmetszet csökkenésnél.

K. WIEGERT [12] az alakváltozás $\left(\ln \frac{F_0}{F_n}\right)$ függvényében vizsgálta a húzás alatti szilárdságnövekedést. Ezt az összefüggést állapította meg:

$$h = \ln \frac{F_0}{F_n} : \operatorname{tg} \alpha. \quad (19)$$

$\operatorname{tg} \alpha$ (a hideg keményedési egyenesek hajlásszögének értékei) szerint kis széntartalomnál a szilárdsági növekedés egyenesek hajlása laposabb, nagyobb széntartalomnál meredekebb.

F. KOHLHASE [13] logarlécet szerkesztett, melyen a hideg keményedés a keresztmetszetcsökkenés függvényében megfigyelhető.

JUCHWEC [14] ismerteti patentozás után hidegen húzott acélhuzal szilárdságának megállapítására M. N. PETROV empirikus képletét:

$$\sigma_{\text{szak}} = \sigma_{\text{pat.}} + \frac{\sigma_h \left(1,7 + \frac{17}{R}\right) \cdot (1 - \log \sqrt{100 - R})}{0,135 \sqrt{100 + 1,5 q}}. \quad (20)$$

Ha az összképletcsökkenés nagyobb 50%-nál, akkor a következő képletet ajánlja:

$$\sigma_{\text{szak}} = \sigma_{\text{pat.}} \frac{1,9 \sigma_h (1 - \log \sqrt{100 - R})}{0,135 \sqrt{100 + 1,5 q}}. \quad (21)$$

A képlet húzásonként $q = 30\%$ keresztmetszetcsökkenésnél a következő:

$$\sigma_{\text{szak}} = \sigma_{\text{pat.}} + 1,9 \sigma_h (1 - \log \sqrt{100 - R}). \quad (22)$$

K. D. POTYEMKIN képlete :

$$\sigma_{\text{szak}} = \sigma_{\text{pat.}} + \frac{60 \left(C + \frac{dp}{40} + 0,01 q \text{ \textit{átlag}} \right)}{100 \cdot \log \sqrt{100 - R} + 0,05 R} \cdot R. \quad (23)$$

A képlet egyszerűsítve :

$$\sigma_{\text{szak}} = \sigma_{\text{pat.}} + R \cdot 2 \operatorname{tg} \alpha. \quad (24)$$

α a húzás alatti szilárdságnövekedési görbék hajlásszöge a görbék egyenes szakaszán. JUCHWEC szerint ezek kísérleti képleteknek tekintendők. Az egyszerűsített képletek csak közepes széntartalomnál (0,5—0,6 C%) adnak megbízható eredményeket és csak kb. 75% keresztmetszetcsökkenésig használhatók.

POTYEMKIN képlete pontosabban adja a patentozási átmérő megállapítását.

Az eddig ismertetett képletek csak az egyes szerzők részéről felvett patentozási átmérőn adtak megfelelő eredményt. Ez a patentozási átmérő nagyrészt ismeretlen közepes átmérőre vonatkozott. Ha figyelembe vesszük pl. 0,8% C-tartalmú anyagnál, hogy 10 mm \varnothing -jú huzal patentozási szilárdsága 120 kg/mm², 2 mm \varnothing -jűé pedig 141 kg/mm², akkor közepes kb. 128 kg/mm² patentozási szilárdsággal számítva a húzás alatti szilárdságnövekedést, nagy eltérések mutatkoznak. Helyesebb, ha a húzás alatti szilárdságnövekedés számításánál a széntartalom helyett a patentozási szilárdságot alkalmazzuk, mert a patentozási szilárdság a széntartalom és az átmérő függvénye is, pontosabb eredményt kapunk.

K. J. TULENKOV, M. I. ZLOTNYIKOV és Sz. F. BOBILEVA [15] az acél hideghúzás alatti szilárdsági növekedését, a húzási tényező

$$K_d = \frac{d_p^2 - d_k^2}{d_k^2}$$

függvényében vizsgálták és az alábbi összefüggést állapították meg :

$$\sigma_{\text{szak}} = \sigma_{\text{pat.}} (1 + K_d)^n. \quad (25)$$

Ha n -t 0,25-re lekerekítve vesszük, akkor a végleges képlet körkeresztmetszetű huzalra

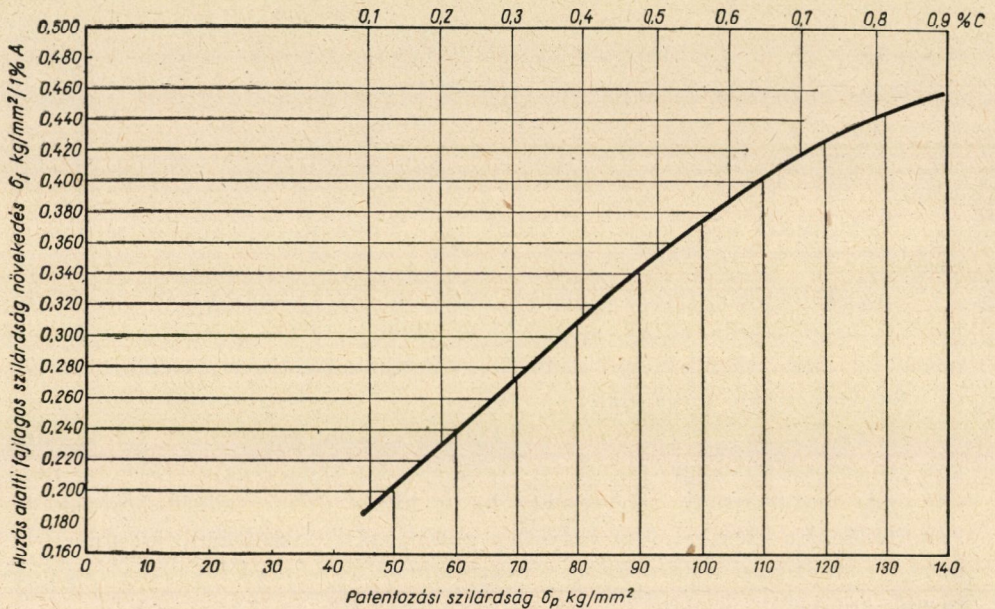
$$\sigma_{\text{szak}} = \sigma_{\text{pat.}} \sqrt{\frac{d_p}{d_k}}. \quad (26)$$

Egyéb keresztmetszetű huzalra :

$$\sigma_{\text{szak}} = \sigma_{\text{pat.}} \sqrt[4]{\frac{F_p}{F_k}} \quad (27)$$

A húzás alatti szilárdságnövekedés TULENKOV képletével számítva, hazai viszonyainkhoz képest kisebb értéket ad.

A részünkről használt számítási rendszernél a fajlagos alakváltozásra eső keményedésből indultunk ki. Évekre visszamenőleg feldolgoztuk a szén-



3. ábra. Húzás alatti fajlagos szilárdságnövekedés a széntartalom és a patentozási szilárdság függvényében. A fajlagos értékek 1% alakváltozásra (A) vonatkoznak

tartalom szerint gyűjtve a hideg keményedés értékeit, és 1% $\ln \frac{F_p}{F_k}$ alakváltozásra átszámítottuk. A húzás alatti szilárdságnövekedés fajlagos értékeit σ_f a széntartalom, illetve patentozási szilárdság függvényében a mellékelt diagram mutatja (3. ábra).

A hideghúzás alatti szilárdságnövekedést alábbi képlet adja :

$$\sigma_h = A \cdot \sigma_f = \ln \frac{d_p^2}{d_k^2} \cdot \sigma_f \quad (28)$$

A kész acélhuzal szakítószilárdsága :

$$\sigma_k = \sigma_p + \sigma_h \quad (29)$$

Az acélhuzal gyártásánál ismert a gyártandó kész acélhuzal átmérője d_k , szakítószilárdsága σ_k és a rendelkezésre álló nyersanyag széntartalma. Feladat: a patentozási átmérő és ezzel a hidegalakítás nagyságának és a patentozási szilárdságnak megállapítása. Ehhez összefüggést kerestünk a patentozási szilárdság és a húzás alatti szilárdságnövekedés között.

Számításunknál az alábbi képletekből indultunk ki:

$$(17) \text{ képlet: } \sigma_p = 34 + 118 C + 8 C \cdot \ln \frac{F_{5,5}}{F_p}$$

$$(29) \text{ képlet: } \sigma_k = \sigma_p + \ln \frac{F_p}{F_k} \cdot \sigma_f \cdot 100 ;$$

a két egyenlet d_p -re megfejtve:

$$d_p = \sqrt[200 \sigma_f - 16 C]{\frac{d_k^{200 \sigma_f}}{d_{5,5}^{16 C}} \cdot e^{\sigma_k - 34 - 118 C}} \quad (30)$$

$$\lg d_p = \frac{1}{200 \sigma_f - 16 C} \left[200 \sigma_f \cdot \lg d_k - 16 C \cdot \lg d_{5,5} + (\sigma_k - 34 - 118 C) \lg e ; \right] \quad (31)$$

a képletben σ_f = fajlagos szilárdsági felvétel 1% alakváltozáskor,

d_k = kész huzal átmérője,

$d_{5,5}$ = 5,5 mm átmérőjű acélhuzal,

d_p = patentozási drótátmérő,

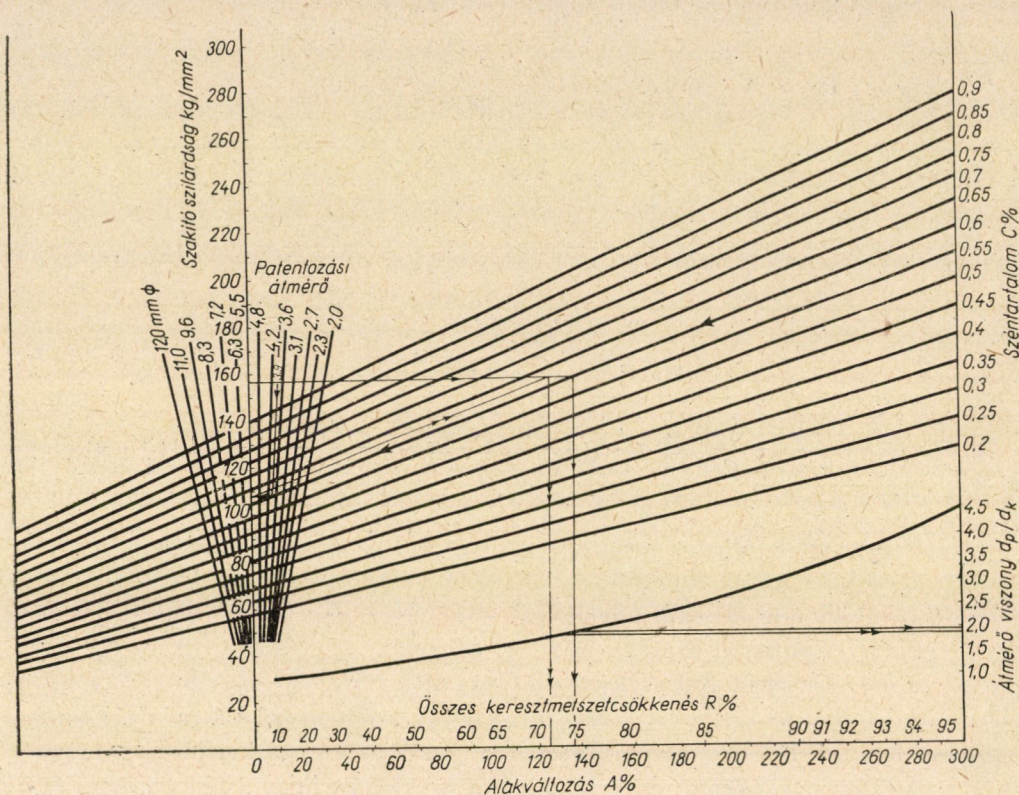
σ_k = kész acélhuzal szakítószilárdsága.

A $\log d_p$ -t visszakeresve, mm-ben kapjuk a patentozási átmérőt. Ennek birtokában a (17) képlet alapján megállapítjuk a patentozási szilárdságot.

A (30) és (31) képlettel történő számítás előnye, hogy a tényleges patentozási átmérőt adja meg a széntaralom, a kész átmérő, a kész szilárdság, és a fajlagos húzás alatti szilárdságnövekedés figyelembevételével. A képlet első pillanatra bonyolultnak látszik, de ha az egyes tényezőket az acélhuzalgyártásban előforduló értékhatárok között előre kiszámítjuk, a számítás gyorsan elvégezhető.

Gyorsabb számítási lehetőséget ad a nomogram, a 4. ábra a patentozási értékek grafikus úton történő meghatározására. A kapott értékek gyakorlati pontossággal elfogadhatók. A nomogram vízszintes tengelyén a húzás alatti alakváltozás van felrakva $A = \ln \frac{F_p}{F_k}$, és a keresztmetszetsökkenés $R = \frac{F_p - F_k}{F_p}$ %-os értékben, a függőleges tengelyen pedig a szakítószilárdság. A hideg keményedési sugár egyenesek 0,2—0,9% C között mutatják a függő-

leges tengelytől (patentozási szilárdságból) kiindulva a húzás alatti szilárdságnövekedést az alakváltozás nagyságának függvényében. A függőleges tengely értékei 5,5 mm patentozási átmérőre vonatkoznak. A patentozási szilárdság változását 12,0—2,0 mm patentozási átmérő között a patentozási átmérő sugárnyaláb egyenesek metszéspontjai adják a széntartalom sugáregyenesei-



4. ábra. Acélhuzal patentozási és húzás alatti szilárdságnövekedésének nomogramja

vel. A nomogramba berajzoltuk a d_p/d_k viszony görbéjét is, melyen bármely alakváltozáshoz tartozó $\frac{d_p}{d_k}$ érték leolvasható, d_p meghatározásához.

A patentozási átmérő meghatározása nomogram segítségével a következő:

A kívánt kész szilárdságból húzott vízszintes, és a választott széntartalom sugáregyenes metszési pontjából húzott merőleges adja a vízszintes tengelyen a hidegalakítás nagyságát A -t %-ban és a $\frac{d_p}{d_k}$ görbe metszésén a patentozási átmérő megállapítás viszonzszámát. Az így megállapított d_p -hez megállapítjuk most már a valódi σ_p -t. A választott széntartalom sugáregyenes és a patentozási átmérő sugáregyenes metszési pontjából vízszintest húzunk

a függőleges tengelyre és ott leolvassuk a valódi σ_p patentozási szilárdságot. A kapott patentozási szilárdságból húzott felkeményedési sugáregyenes és a kész drót szakítószilárdsága vízszintes vonala metszéséből a vízszintes tengelyre húzott merőleges adja a helyes tényleges hidegalakítás nagyságát, ezzel a helyes d_p/d_k viszonyt és ebből a végleges patentozási átmérőt.

Ellenőrző számításhoz megállapítjuk ezekből az értékekből a húzás alatti szilárdságnövekedést σ_h -t, ha a korrigált $A\%$ -ot megszorozzuk σ_f -el. A σ_p és σ_h összege adja a kész acélhuzal kívánt szakítószilárdságát.

Tájékozásul ismertetjük néhány példa kidolgozását :

1. Gyártandó 2 mm átmérőjű acélhuzal 157 kg/mm² szilárdsággal 0,6% C-tartalmú anyagból.

a) Nomogrammal: Függőleges tengely 157 σ_k -ból vízszintest húzunk a 0,6 C irányegyenesig, a metszési pontból függőlegest a vízszintes tengelyig, ahol

$$A = 135\% \cdot d_p/d_k = 1,95 \text{ ebből } d_p = 3,9 \text{ mm-t kapunk.}$$

Mivel ezt az értéket az 5,5 átmérőnek megfelelő σ_p -ből kaptuk, meg kell állapítanunk a 3,9 mm átmérőnek megfelelő σ_p -t.

A 0,6 C irányegyenesen a 3,9 mm átmérőjű patentozási sugár egyenes metszési pontjából vízszintest húzunk a függőleges tengelyhez a 108 kg/mm² σ_p -ig. Ebből a pontból kiinduló felkeményedési irányegyenesen a 157 kg/mm² vízszintes metszőpontjából húzott függőleges adja $\sigma_p = 108$ kg/mm²-nek megfelelő $d_p/d_k = 1,90$ és ebből számított $d_p = 3,8$ mm-t. Ehhez tartozó hidegalakítás nagysága $A = 125\%$.

$$\sigma_p = 108 \text{ kg/mm}^2\text{-nek megfelelő } \sigma_f = 0,397 \text{ kg/mm}^2.$$

$$\sigma_h = 125 \cdot 0,397 = 49,5 \text{ kg/mm}^2.$$

$$\sigma_k = \sigma_p + \sigma_h = 108 + 49,5 = 157,5 \text{ kg/mm}^2.$$

b) Képlettel :

$$\lg d_p = \frac{1}{200 \sigma_f - 16C} \left[200\sigma_f \cdot \lg d_k - 16 \lg d_{s,v} + (\sigma_k - 34 - 118C) \lg e \right]$$

$$\lg d_p = \frac{1}{200 \cdot 0,388 - 16 \cdot 0,6} \left[200 \cdot 0,388 \cdot 0,301 - 16 \cdot 0,6 \cdot 0,7404 + (157 - 34 - 118 \cdot 0,6) \cdot 0,4342 \right] = 0,5722$$

$$d_p = 3,73 \text{ mm. } A = \ln \frac{3,73^2}{2^2} = 124,8 \%$$

$$0,6 \text{ C-nek megfelelő } \sigma_f = 0,388 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_h = 124,8 \cdot 0,388 = 48,3 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_p = 108,6 \text{ kg/mm}^2 \quad \sigma_k = \sigma_p + \sigma_h = 108,6 + 48,3 = 156,9 \text{ kg/mm}^2$$

2. Gyártandó 1,0 mm \varnothing zongorahúr rugódrót 257 kg/mm² szakítószilárdsággal 0,83% C-tartalmú anyagból.

a) Nomogrammal: Függőleges tengely 257 σ_k -ból vízszintest húzunk a 0,83 C irányegyenesig. Metszési pontból függőlegest húzunk a vízszintes tengelyig. $A=282\%$ $d_p/d_k=4,1$ mm. 0,83 C irányegyenesen 4,1 mm \varnothing patentozási sugáregyenes metszési pontból vízszintest húzunk a függőleges tengelyig. 136 kg/mm² σ_p -ig. Ebből húzott keményedési irányegyenesen 257 kg/mm² vízszintes metszési pontból húzott függőleges adja 136 kg/mm²-nek megfelelő $d_p/d_k = 3,85$ és ebből számított $d_p = 3,85$ mm \varnothing -t.

Ehhez tartozó hidegalakítás nagysága $A = 268\%$.

136 kg/mm²-nek megfelelő fajlagos hideg felkeményedés

$$\sigma_f = 0,452 \text{ kg/mm}^2.$$

$$\sigma_h = 268 \cdot 0,452 = 121 \text{ kg/mm}^2.$$

$$\sigma_k = \sigma_p + \sigma_h = 136 + 121 = 257 \text{ kg/mm}^2.$$

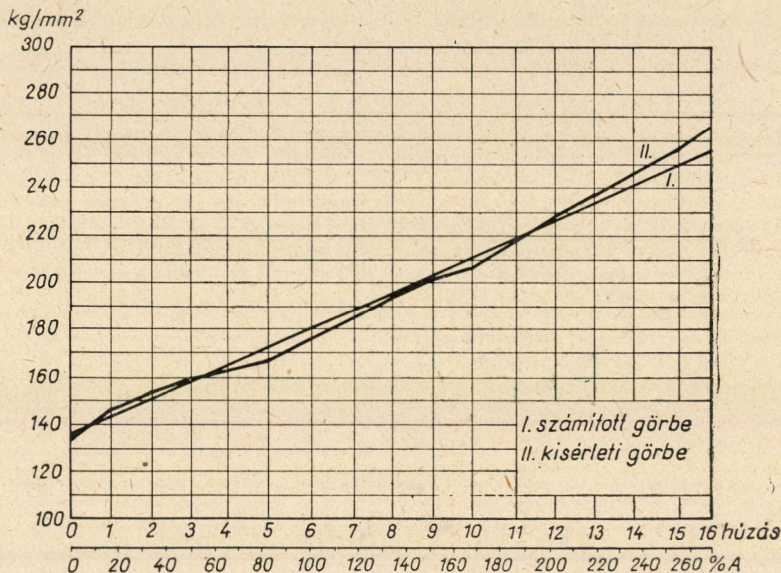
b) Képlettel:

$$\lg d_p = \frac{1}{200,0,446 - 16,0,83} \left[200,0,446 \cdot \lg 1,0 - 16,0,83 \cdot \lg 5,5 + (257 - 34 - 118 \cdot 0,8) 0,4342 \right]$$

$$\lg d_p = 0,5855 \quad d_p = 3,85 \text{ mm.} \quad 0,83 \text{ C-nek megfelelő } \sigma_f = 0,446 \text{ kg/mm}^2$$

$$A = \ln \frac{3,85^2}{1^2} = 269 \% \quad \sigma_h = 269,0,446 = 120 \text{ kg/mm}^2$$

$$\sigma_p = 136,7 \text{ kg/mm}^2 \quad \sigma_h = \sigma_p + \sigma_h = 136,7 + 120 = 256,7 \text{ kg/mm}^2$$



5. ábra. 0,83% C-tartalmú patentozott és húzott acélhuzal szakítószilárdságának emelkedése az alakváltozás függvényében

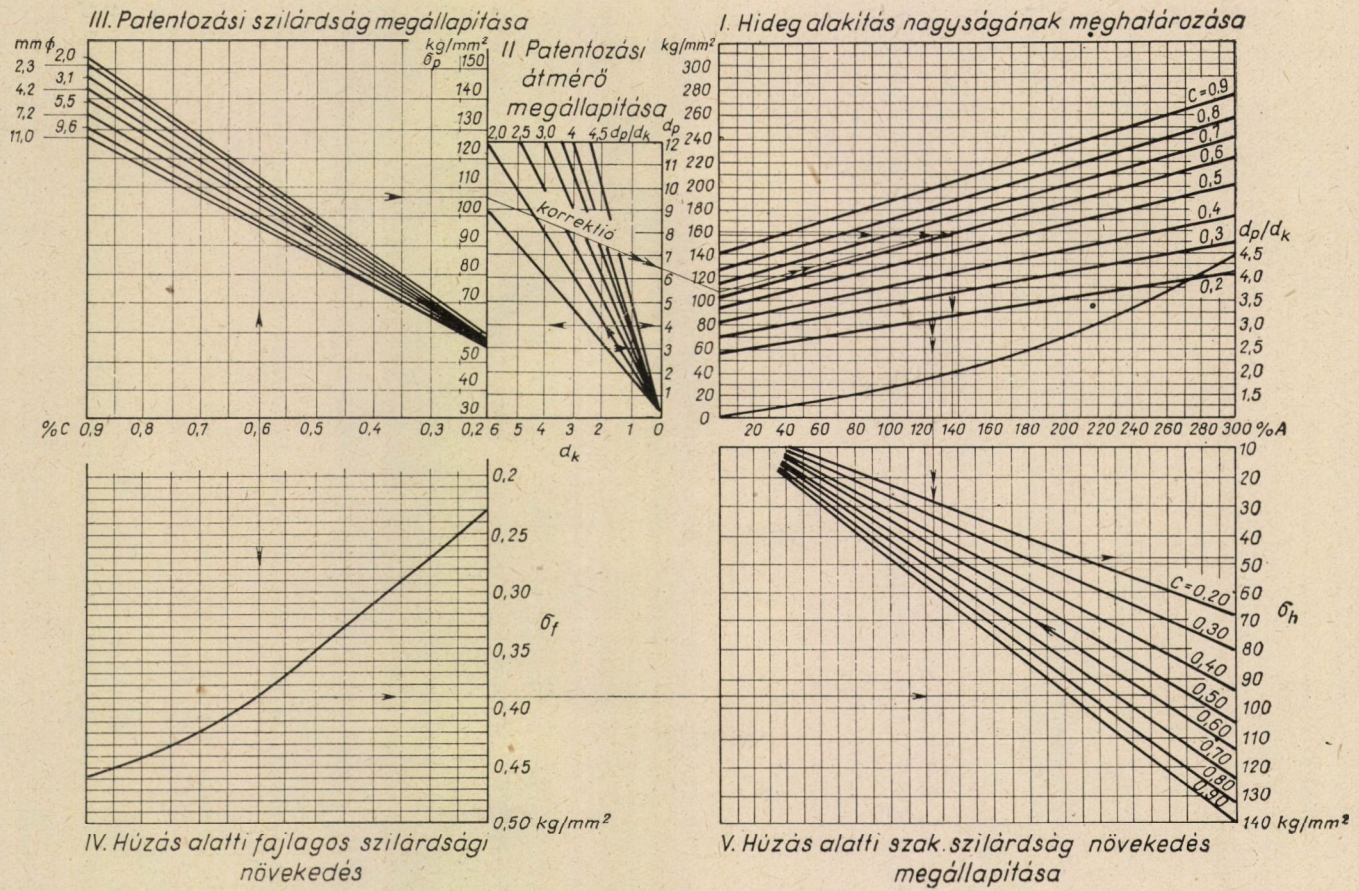
c) Kísérleti gyártás:

0,83 C-tartalmú acélhuzalt 3,8 mm \varnothing -ön patentozva $\sigma_p = 133 \text{ kg/mm}^2$. 16 húzással lehúzva 1,0 mm \varnothing -re 15% húzásonkénti keresztmetszetcsökkenéssel a kész huzal szakítószilárdsága 258—266 kg/mm²-t adott.

Az 5. ábra mutatja a kísérleti anyag húzásonkénti emelkedő szakítószilárdságát és a számított szakítószilárdság húzás alatti szilárdságnövekedését.

A 6. ábra mutatja az ismertetett számítási rendszert az egyes tényezők meghatározására felbontva:

1. Az alakváltozás ($A\%$ és a d_p/d_k viszony) meghatározása.
2. A patentozási átmérő d_p megállapítása.



6. ábra. Nomogram patentozott és húzott acélhuzalok gyártási menetének megállapítására. Példa: 2,0 mm \varnothing , 150—160 kg/mm² szakítószilárdságú acélhuzal gyártási menete 0,6% C-tartalmú anyagból. $\sigma_k = \sigma_p + \sigma_h$; $\sigma_k = 108 + 48 = 156$ kg/mm², $d_p = 3,8 \varnothing$

3. A patentozási szilárdság σ_p megállapítása. Utána a kapott σ_p patentozási szilárdságnak megfelelően módosítjuk az A és d_p/d_k viszonyt és meghatározzuk a helyes d_p patentozási átmérőt.

4. A fajlagos szilárdságnövekedés σ_f megállapítása.

5. A húzás alatti szilárdságnövekedés meghatározása és végül a $\sigma_k = \sigma_p + \sigma_h$ képlet ellenőrzése.

A 4. ábra ezen műveleteket összefoglalva ábrázolja, s ezzel a meghatározás egyszerűbb lesz.

Nomogrammal történő számítás előnye, hogy lehetőséget ad korrekcióra, amikor a valódi patentozási szilárdságnak megfelelő fajlagos keményedési szilárdsággal, σ_f -el számolhatunk.

Képlettel történő számításakor erre nincs lehetőség, mert ott a széntartalomnak megfelelő fajlagos hideg szilárdsági növekedéssel számolunk.

Vizsgáljuk milyen különbséget jelent ez a bemutatott példáknál:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Példa : } A &= 125\%. \quad \sigma_f (0,6\% \text{ C-nél}) = 0,388 \text{ kg/mm}^2. \\ \sigma_h &= 125 \cdot 0,388 = 48,5 \text{ kg/mm}^2. \\ \sigma_f (108 \text{ kg/mm}^2 \cdot \sigma_p\text{-nél}) &= 0,397 \text{ kg/mm}^2. \\ \sigma_h &= 125 \cdot 0,397 = 49,6 \text{ kg/mm}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Példa : } A &= 268\%. \quad \sigma_f (0,83\% \text{ C-nél}) = 0,446 \text{ kg/mm}^2. \\ \sigma_h &= 268 \cdot 0,446 = 119,5 \text{ kg/mm}^2. \\ \sigma_f (136 \text{ kg/mm}^2 \cdot \sigma_p\text{-nél}) &= 0,452 \text{ kg/mm}^2. \\ \sigma_h &= 268 \cdot 0,452 = 121,0 \text{ kg/mm}^2. \end{aligned}$$

Az 1. példában $1,1 \text{ kg/mm}^2$ ($0,7\%$), a másikban $1,5 \text{ kg/mm}^2$ ($0,58\%$) a szakítószilárdság különbség oly csekély a megengedett szilárdsági tűrésnél, hogy elhanyagolható. Nem jelent hibát, ha a képletnél a széntartalomnak megfelelő σ_f -el számolunk.

IRODALOM

1. H. v. JÜPTNER: Stahl und Eisen 1900. 939–941. o.
2. F. EISENKOLB: Das Tiefziehblech. Leipzig 1951. Akademischer Verlag G. Geest und Portig.
3. H. v. JÜPTNER: Stahl und Eisen 1900. 939–941. o.
4. H. H. CAMPBELL: Stahl und Eisen 1905. 82–89, 337–342, 402–406. o.
5. H. VOLLMACHER: Stahl und Eisen 1940. 49. sz. 1116–1117. o.
6. JERRY G. WEISS: Stahl und Eisen 1950. 2. sz. 66–67. o.
7. T. NISHIOKA: Draht 1956. 6. sz. 239–240. o.
8. K. I. TULENKOV, M. I. ZLOTNYIKOV, Sz. F. BOBILEVA. Sztály 1956. 9. sz. 821–825. o.
9. I. A. JUCHWEC: Volocsilnoje proizvodstvo. Moszkva 1954. kiadás, Metallaurgizdat. 84. o.
10. W. PÜNGEL: Stahl und Eisen 1927. 172–182. o.
11. W. PÜNGEL: Stahl und Eisen 1927. 172–182. o.
12. K. WIEGERT: Draht—Welt 1934. 22. sz. 340–341. o.
13. F. KOHLHASE: Hand u. Tabellenbuch für die Drahtindustrie. 1950. Emil. Griebisch Verlag Hamm (Westf.).
14. I. A. JUCHWEC: Volocsilnoje proizvodstvo. Moszkva 1954. 84. és 87. o.
15. K. I. TULENKOV, M. J. ZLOTNYIKOV, Sz. F. BOBILEVA: Sztály 1956. 9. sz. 821–825. o.

17. V. I. BOGOLJUBSZKIJ, I. M. GOLUBEV, I. I. AMITIN : Provolocsnie kanati, Moszkva, 1950. Metallurgizdat. 156. o.
- O. KOVALSZKY : Rechnerische Ermittlung der Zugfestigkeit beim Ziehen von Stahldraht. Draht 1955. 312—313. o.
- A. POMP : Stahldraht, seine Herstellung und Eigenschaften. 1941. Verlag Stahleisen, Düsseldorf. 186—188. o.
- W. R. BLOXDORF : Stahl und Eisen. 1941. 272—274. o. és Draht 1951. 2. sz. 39—40. o.
- H. ALTPETER : Die Herstellung der Flußeisen und Stahldrähte 1926.

ÖSSZEFOGLALÁS

Acélhuzalok patentozási szilárdságának és húzás alatti szilárdságnövekedésének megállapítása számítás útján és grafikusán. Ez lehetőséget ad az acélhuzalgyártás technológiájának kidolgozására egyrészt a tárgyaló képletek segélyével kidolgozható táblázatokkal, másrészt az ismertetett nomogramok útján. A dolgozat az acélhuzalgyártásban előforduló alapanyag és üzemi helyi adottságok és egyéb befolyásoló tényezők következtében nem tart számot tökéletességre, hanem csupán segítséget nyújt az acélhuzalgyártás jellemzőinek pontosabb megállapításához.

KÉT VÉGÉN MEGFOGOTT NÉGYZETES CSŐ CSAVARÁSA

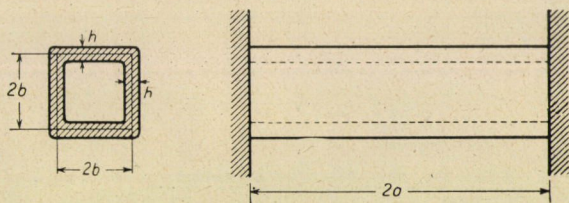
CSONKA PÁL

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

AZ MTA ÉPÍTÉS- ÉS KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1958. márc. 20-án]

A két végén megfogott rúd csavarási problémája a rúdkeresztmetszetek gátolt öblösödése miatt igen bonyolult feladat, s annak általános megoldása ez idő szerint nem is ismeretes. Ezzel szemben főként az orosz és szovjet szerzők (TIMOSHENKO, S., VLASZOV, V. Z., UMANSZKIJ, A. A., PANOVKO, Ig. G., BELJAJEV, N.) munkássága révén a vékonyfalú szerkezetek (csövek, héjak, repülőgép- és hajótestek) különféle csavarási problémái kellőképp tisztázottak [1, 2]. Említettek a feladat egyszerűsítésére a szerkezet falainak hajlító és csavaró ellenállását figyelmen kívül hagyják, s ennek megfelelőleg a szerkezet falaiban csak membrán erőket tételeznek fel. Ezzel szemben szerző a két végén elcsavaródás ellen megtámasztott állandó falvastagságú négyzetes cső problémáját a lemezmélet feltevései keretében tárgyalja (1. ábra), s ennek megfelelően



1. ábra. Két végén elcsavaródás ellen megtámasztott négyzetes cső

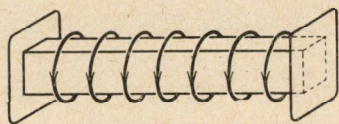
a csőfalak hajlító- és csavaró ellenállását is figyelembe veszi. Ezért képletei a vékonyfalú csövekre vonatkozó közelítő képleteknél pontosabbak.

A dolgozat felteszi, hogy a cső a két végén van megfogva. Terhelésként a csőtengely mentén működő megoszló erőpárt vesz számításba (2a ábra). A csavaró erőpárt a csőélek mentén működő megoszló erők hozzák létre (2b ábra).

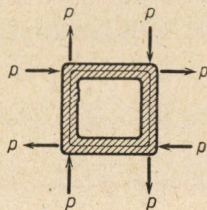
Mint hogy a csőnek mind a négy lapja azonos állapotban van, elégséges csak az egyik oldallap vizsgálatával foglalkozni. Szerző kimutatja, hogy abban az esetben, ha a terhelésfüggvény

$$p = P_n \cos a_n x, \quad a_n = \frac{n\pi}{2a}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

alakú, akkor a vizsgált lap középfelületén levő pontok x, y, z irányú u, v, w elmozdulásai így fejezhetők ki:



2a ábra. A négyzetes csövet terhelő megoszló erőpárok

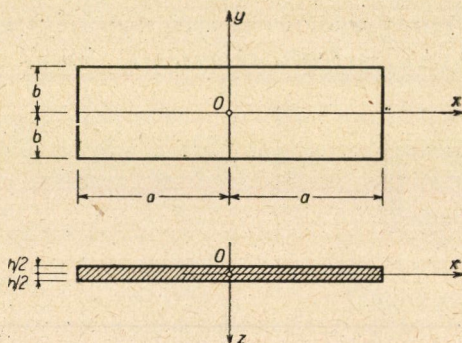


2b ábra. A csavaró erőpárokat létrehozó megoszló erők

$$u = \frac{t}{E} [(r_1 + \mu r_1 - 2) \operatorname{sh} \alpha_n y - (1 + \mu) \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y] \sin \alpha_n x,$$

$$v = \frac{t}{E} [-(r_1 + \mu r_1 + 1 + \mu) \operatorname{ch} \alpha_n y + (1 + \mu) \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n y] \cos \alpha_n x,$$

$$w = \frac{s_1 t}{E} [-(1 - \mu) r_2 \operatorname{sh} \alpha_n y + (1 - \mu) \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y] \cos \alpha_n x.$$



3. ábra. A cső egyik oldallapja

A fenti képletekben E a cső anyagának rugalmassági tényezője, μ a Poisson-féle tényező reciprokja, az r_1, r_2, s_1, s_2 és t pedig állandók, melyek értéke:

$$r_{1,2} \equiv \frac{2}{1 \pm \mu} + \alpha_n b \operatorname{ctgh} \alpha_n b,$$

$$s_{1,2} \equiv \frac{(3 \mp \mu) \operatorname{sh} \alpha_n b \cdot \operatorname{ch} \alpha_n b + (1 \pm \mu) \alpha_n b}{2 \operatorname{sh}^2 \alpha_n b},$$

$$t \equiv \frac{1 + \mu}{2 \alpha_n h \operatorname{sh} \alpha_n b (1 + \alpha_n^2 h^2 s_1 s_2 / 12)} P_n.$$

Az u, v, w elmozdulásrendszert ismerve, a cső oldallapjaiban keletkező feszültségek a síkfalak, illetve síklemezekre vonatkozó képletekkel számíthatók (3. ábra).

A tanulmány az egyszerűség kedvéért csak a középső keresztmetszet síkjára nézve szimmetrikus megoszlású p erővel foglalkozik. Teljesen hasonló módon tárgyalható az aszimmetrikus terhelés esete is.

A MACAULAY-FÉLE ELJÁRÁS ÁLTALÁNOSÍTÁSA

CSONKA PÁL

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
AZ MTA ÉPÍTÉS- ÉS KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉGE, BUDAPEST

[Beérkezett 1958. ápr. 2-án]

Az összpontosított erőkkel, vagy szakaszosan változó megoszló erőkkel terhelt tartók alakváltozásának meghatározására MACAULAY W. H. igen egyszerű számító eljárást dolgozott ki [1, 2]. Eljárása a számítás láncolatos beosztása révén az összpontosított erők helyén, valamint a megoszló terhelések szakaszhatárain az alakváltozás illeszkedési feltételeit már eleve teljesíti, úgyhogy a feladat megoldása során csupán a tartó támaszkodási feltételeire kell tekintettel lenni. E fogás révén a tartó alakváltozásának számítása felette egyszerűvé lesz.

A MACAULAY-féle eljárás lényegében véve tiszta másodrendű lineáris differenciálegyenlettel jellemzett feladat megoldására kidolgozott módszer. Szerző ezt az eljárást n -edrendű, állandó együttható lineáris differenciálegyenletek megoldására alkalmazza, ami az eredeti eljárás némi módosítását kívánja. Eljárása oly differenciálegyenletek megoldására alkalmas, melyek külső (zavaró) tagja szakaszonként változó polinom.

Az ismertetett eljárás alap gondolata a számítás láncolatos beosztása, s ezzel a szakaszhatárokon az integrálási állandók kiküszöbölése. Szakaszonként változó tagokkal bíró differenciálegyenletek esetében e láncolatos számításmód előnyei kézenfekvőek ugyan [3], de ezen előnyök rendszeres kihasználására alapozott eljárást csak legutóbb SZIDAROVSKY J. ismertetett [4]. A jelen tanulmány a MACAULAY-féle eljárás elvein kívül az imént említett eljárás gondolatait is felhasználja. Ennek ellenére érdeklődésre tarthat számot, mert oly eljárást ismertet, mely a számítás felette egyszerű, szinte gépies lebonyolítására nyújt lehetőséget.

A dolgozatban ismertetett eljárás szemléltetésére szerző két gyakorlati feladat megoldását mutatja be. Mindkét feladat egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű oly rúdra vonatkozik, mely egyidejűleg nyomásra és hajlításra van igénybe véve.

IRODALOM

1. MACAULAY, W. H.: Note on the Deflection of Beams. *The Messenger of Mathematics* 48 (1919), pp. 129—130.
2. SOUTHWELL, R. V.: An Introduction to the Theory of Elasticity for Engineers and Physicists. 2. Ed. (1941), pp. 187—189. Oxford University Press.
3. CSONKA P.: Substitution Method for the Approximate Analysis of Stability Problems of Plane Framed Trusses with Rigid Joints. *Acta Technica*, Ac. Sc. Hung. 19 (1958), pp. 405—414. Számpélda.
4. SZIDAROVSKY J.: Eine praktische Methode zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten. *Acta Technica* 24 (1959), pp. 85—94.

A BESZÁLLÓ AKNA HELYÉNEK KIJELELÉSÉHEZ SZÜKSÉGES ADATOKRÓL

FALLER GUSZTÁV

NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM, BÁNYAMŰVELÉSTANI TANSZÉK, SOPRON

[Beérkezett 1958. május 8-án]

Elméletileg is bizonyított ma már az a tény — amit a gyakorló bányász eddig is ösztönösen megérezett —, hogy a beszálló aknának az aknamezőn belüli helyzete a földalatti személyközlekedés következtében adódó munkaidővesztésre, ennek kapcsán pedig a termelési költségre határozott és jelentős mérvű hatással van. Akkor, ha a bánya feltáró- és előkészítő vágatainak iránya a település csapás-, illetve dőlésirányába esik, az általános érvényű analitikai összefüggéseket is ismerjük, azzal a közelítéssel, hogy a dolgozók a beszálló akna talpától a munkahelyig a legrövidebb dőlés-, illetve csapásmenti úton jutnak el [1].

Ezen összefüggések szerint a beszálló akna ama — optimális — helyét, amelyhez minimális idővesztés tartozik, két feltételi egyenlet határozza meg. E két feltételi egyenlet lapos dőlésű telep vagy telepcsoport esetében

$$\xi_j Q_j = \xi_b Q_b \quad (1)$$

és

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{\xi_e Q_e}{\xi_s Q_s}, \quad (2)$$

illetve meredek dőlésű telep, telepcsoport vagy telér esetében állandó szintmagasság (főkeresztvágat-szintkülönbség) mellett

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} c_i Q_{ji} + \sum_{i=1}^{i=n-1} c_i Q_{ji} + c_0 Q_{j0} = \sum_{i=1}^{i=m-1} c_i Q_{bi} + \sum_{i=1}^{i=n-1} c_i Q_{bi} + c_0 Q_{b0} \quad (3)$$

és

$$\sum_{i=1}^{i=m-1} c_i Q_i = \sum_{i=1}^{i=n-1} c_i Q_i, \quad (4)$$

ahol $Q = MT\gamma$, M az ásványtelepülés vastagsága, T az ásványtelepülés területe, γ az ásvány térfogatsúlya, ξ a gazdasági szempontok alapján megállapított kitermelendő ásványvagyon és a tényleges ásványvagyon hány-

dosa. A Q és ξ indexeként előforduló j , b , s és e jelölések arra utalnak, hogy az optimális pontba telepített beszálló akna talpán átmenő dőlésvonaltól jobbra vagy balra levő területre, illetve az aknatalpon átmenő csapásvonalat véve alapul, síkló- vagy ereszkemezőre vonatkozó Q és ξ értékekről van szó.

$$c_i = \frac{\xi_i}{q_i \cdot v_c} \quad (5)$$

és m a fedő-, n pedig a feküfőkeresztvágatok számát jelenti. Már itt meg kell jegyeznünk, hogy gyakorlatilag úgyszólván minden esetben, egyrészt

$$\xi_j = \xi_b = \xi_s = \xi_e, \quad (6)$$

tehát a laposdőlésű telep vagy telepcsoport esetén érvényes feltételi egyenletekből a ξ értékek kiesnek, másrészt

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=m-1} \xi_i}{m-1} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n-1} \xi_i}{n-1} = \xi_0. \quad (7)$$

Továbbá

$$v_s = \frac{v_c}{v_s} \text{ és } v_e = \frac{v_c}{v_e}, \quad (8a, b)$$

ahol v_c a csapásvágaton történő személyközlekedés sebességének műszak előtti és műszak utáni átlaga, míg a dőlésben fekvő síklóban v_s , ereszkében pedig v_e jelöli ezen sebesség-átlagértékeket.

Az (5) képletben előforduló q érték — mely egyébként nem csupán a meredek dőlésű telepek, telepcsoportok és telérek esetén érvényes feltételi egyenletekben fordul elő, hanem a személyközlekedési idővesztés számítását szolgáló képletekben lapos dőlésű telepek vagy telepcsoportok esetén is — olyan, az akna egész élettartamára vonatkozó átlagos földalatti teljesítmény (t/műsz), melynek számításába nem vonjuk be azon dolgozók műszakjait, akiknek munkahelye közvetlenül az akna környékén van.

Összefoglalva az eddig elmondottakat: ahhoz, hogy a beszálló akna optimális helyét meghatározhassuk, a következő adatokat kell ismernünk:

$$M, T, \gamma, \xi, v_c, v_s, v_e \text{ és } q.$$

A beszálló akna optimális helyének meghatározására szolgáló feltételi egyenletek a személyközlekedési idővesztés minimum-feltételén alapulnak.

Ebből az is következik — anélkül, hogy a vonatkozó összefüggéseket felír-
nánk —, hogyha például működő beszálló akna telepítését bírálva az

$$\eta = 100 \frac{t}{t_{\min}} \% \quad (9)$$

értékét (ahol t az aknamező ásványvagyonának kitermeléséhez ténylegesen szükséges személyközlekedési időt jelenti, t_{\min} pedig az elméleti személyközle-
kedési időszükséglet az akna teljes élettartama alatt, ha a beszálló akna az
optimális pontban lenne) kell meghatározunk, akkor lényegében ugyanezen
adatokat kell felhasználnunk. Az adatok szempontjából azonban döntő külön-
ség van a két eset között: ha a feladat új bányanyitás során a beszálló akna
helyének kijelölése (továbbiakban röviden: tervezés), akkor az adatok viszony-
lag pontatlanabbul állnak rendelkezésünkre, ha pedig működő beszálló akna
telepítését kell bírálnunk (továbbiakban röviden: ellenőrzés), akkor viszony-
lag pontosabb adatokat használhatunk fel.

Ezen a helyen főleg a tervezéshez szükséges adatok előállításának módjai-
val kívánunk foglalkozni. Tesszük ezt azért, mert míg — mint bevezetőként
mondottuk — az általános érvényű összefüggések ma már elméletileg nemcsak
a beszálló akna telepítését, hanem a bányatervezés úgyszólván minden lény-
geesebb tennivalóját (mezőnagyság, mezőalak, kapacitás, élettartam stb.)
illetően tisztázottak, addig megítélésünk szerint eme eljárások gyakorlati
alkalmazásának ügye éppen azért halad meglehetősen vontatottan, mert
az eljárások alkalmazásához szükséges adatok csak részben állnak rendelkezés-
re. Ezért látjuk célszerűnek az ilyenfajta vizsgálatokhoz szükséges adatok
megteremtését, s a beszálló akna helyének tervezéséhez szükséges adatokkal
azért foglalkozunk először, mert az itt elmondandókra célszerűen lehet ala-
pozni a bányatervezést szükségszerűen megelőző további műszaki-gazdasági
analízishez szükséges adatok előállításával kapcsolatos megjegyzéseket is.

Mint mondottuk, főleg a tervezés szempontjából vizsgáljuk az adatok
előállításának módját, de utalunk az ellenőrzés céljaira felhasználandó adatok
előállításmódjára is, hiszen a kétféle célra ugyanazon adatok szükségesek.

Tárgyalásunk során statisztikai módszereket fogunk felhasználni,
a következő sorrendben:

1. M, T, γ, ξ
2. v_c, v_s, v_e
3. q

*

Ha

$$Q' = \xi Q, \quad (10)$$

akkor

$$Q' = \xi MT \gamma. \quad (11)$$

Ez az összefüggés indokolja az adatok együttes tárgyalását. Tervezés esetén csupán fúrtlyukakból kapott adatok állnak rendelkezésünkre az M és a γ értékét illetően. Tekintsük T -t olyan statisztikai alapsokaságnak, mely T darab 1 m^2 -es területből áll. Az alapsokaságnak tehát T tagja van, melyeknek egyelőre három ismervét figyeljük meg: területét (1 m^2), a reá települt ásványvagyon vastagságát ($M_1, M_2, M_3, \dots, M_T$) és fajsúlyát ($\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_T$). Az alapsokaság tagjai tehát egy ismerv szempontjából egyformák, két ismerv szempontjából eltérő tulajdonságúak. Tekintsük egyelőre T értékét hibamentesen megállapítottnak, azzal, hogy valamennyi adat szintes, telepes előfordulásra vonatkozik. A tervezéshez nyilvánvalóan M és γ szám-tani átlagértékeit

$$M = \frac{\sum_{i=1}^{i=T} M_i}{T} \quad (12)$$

és

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1}^{i=T} \gamma_i}{T} \quad (13)$$

kellene felhasználnunk. Ez más szóval azt a műszaki-gazdasági képtelenséget jelenti, hogy a területet négyzetméterenként kellene megfúrni. E nyilvánvalóan járhatatlan út helyett tekintsük az egyes fúrásokat reprezentatív megfigyeléseknek, amikor is a mintasokaság tagjai az egyes fúrásokat magukba foglaló 1 m^2 -es területek. Legyen T területen T' számú fúrásunk, vagyis a T darabból álló alapsokaságból emeljük ki T' tagot s ezek összességét tekintsük mintasokaságnak. Természetes, hogy amennyiben egy fúrtlyuk azért improduktív, mert az ásványelőfordulás területén kívül esik, úgy ezt a lyukat a számításokból kihagyjuk. Ha egy lyuk viszont azért improduktív, mert mezőbeli vetőbe jutott, akkor a γ számításából kihagyjuk, az M számítását illetően viszont kétféle eljárást alkalmazhatunk: vagy $M_i = 0$ értékkel vonjuk számításba, vagy kihagyjuk a számításból. Az, hogy melyik eljárást választjuk, a ξ érték előállításmódját fogja befolyásolni.

A mintasokaság kiválasztásmódját a statisztikában a célszerűség határozza meg. Itt a mintasokaság kiválasztásában — az egyes fúrtlyukak elhelyezésében — többnyire kötve vagyunk, hiszen az egyes fúrásoknak egyéb feladataik is vannak: a határok, tektonikai viszonyok stb. tisztázása. Megállapíthatjuk továbbá, hogy a mi szempontunkból az a legkedvezőbb, ha az egyes fúrások egyenletesen oszlanak el az egész területen — ez felel meg leginkább a statisztikai mechanikus kiválasztásnak.

Mintasokaságunk tehát T' tagból áll s az egyes tagokhoz tartozó ismérvértékek

$$M'_1, M'_2, M'_3, \dots, M'_{T'},$$

illetve

$$\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3, \dots, \gamma'_{T'},$$

A minták átlagjai

$$M' = \frac{\sum_{i=1}^{i=T'} M'_i}{T'} \quad \text{és} \quad \gamma' = \frac{\sum_{i=1}^{i=T'} \gamma'_i}{T'}. \quad (14a,b)$$

Ha az átlagtóli eltérések

$$\begin{aligned} M'_1 - M' &= d_{M',1} & \gamma'_1 - \gamma' &= d_{\gamma',1} \\ M'_2 - M' &= d_{M',2} & \gamma'_2 - \gamma' &= d_{\gamma',2} \\ M'_3 - M' &= d_{M',3} & \gamma'_3 - \gamma' &= d_{\gamma',3} \\ & \vdots & & \vdots \\ M'_{T'} - M' &= d_{M',T'} & \gamma'_{T'} - \gamma' &= d_{\gamma',T'}, \end{aligned} \quad (15a, b)$$

akkor a minták átlagos négyzetes eltérése

$$\sigma_{M'} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=T'} d_{M',i}^2}{T'}} \quad \text{és} \quad \sigma_{\gamma'} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=T'} d_{\gamma',i}^2}{T'}} \quad (16a,b)$$

és a megfigyelés átlagos véletlen hibája :

$$\sigma'_{M'} = \pm \frac{\sigma_{M'}}{\sqrt{T'}} \quad \text{és} \quad \sigma'_{\gamma'} = \pm \frac{\sigma_{\gamma'}}{\sqrt{T'}}. \quad (16c,d)$$

A mintaátlag (M' , ill. γ') és az alapsokaság keresett átlaga (M , ill. γ) közötti maximális eltérés (Δ_M , ill. Δ_γ) nagyságát P valószínűséggel a

$$\Delta_M = \pm t' \sigma'_{M'} \quad \text{illetve} \quad \Delta_\gamma = \pm t' \sigma'_{\gamma'} \quad (17a,b)$$

képletek alapján számíthatjuk, ahol t' és P között a gyakorlatban előforduló néhány fontosabb t' értékre nézve a következő összefüggés érvényes :

t'	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
P	0,683	0,866	0,954	0,988	0,997	0,9995

A $t' = 3,0$ értékhez, tehát a megfigyelés átlagos véletlen hibájának háromszorosával egyenlő hibahatárhoz tartozó 99,7%-os valószínűség azt jelenti, hogy az alapsokaság átlaga gyakorlatilag biztosan a mintaátlagtól maximálisan $\pm 3 \sigma'$ -értékkel tér el. Ezúton határozhatjuk tehát meg azt a Δ hibát, melyet akkor követünk el, amikor a fúrási adatokból számított átlagértékeket (mintaátlag) tekintjük az egész területre érvényes átlagértéknek (alapsokaság átlaga). 99,7%-ig biztos tehát, hogy $\Delta_M = 3 \sigma'_M$, és $\Delta_\gamma = 3 \sigma'_{\gamma'}$ esetén

$$M' - \Delta_M < M < M' + \Delta_M \quad (18a)$$

$$\gamma' - \Delta_\gamma < \gamma < \gamma' + \Delta_\gamma. \quad (18b)$$

Mindeddig T értékét hibamentesen megállapítottnak tekintettük. Ha — anélkül, hogy a területmeghatározás hibája meghatározásának módszerét itt ismertetnénk — feltételezzük, hogy T értékét $\pm \Delta_T$ hibával határoztuk meg, akkor a hibaterjedés ismert szabályai és a (10), (11) képletek alapján

$$\Delta_Q = \pm \sqrt{(M' \gamma' \Delta_T)^2 + (T \gamma' \Delta_M)^2 + (T M' \Delta_\gamma)^2}. \quad (19)$$

A (11) összefüggés adatai közül ezek szerint egyedül ξ értéke nem adható meg a többi adathoz hasonló pontossággal. Tervezéskor két eset lehetséges: ha a bánya ismert és művelés alatt álló szénmedencében létesül, akkor a szomszédos bányákból ismeretes értéket, ha teljesen új, „ismeretlen” helyen telepítjük, akkor pedig hasonló viszonyok között dolgozó, más bánya ismert értékét kell az eltérő viszonyoknak megfelelően korrigálva megbecsülni. Ugyanakkor meg kell becsülni a becsült (ξ) érték (Δ_ξ) hibáját is. E becslés nyilván az első esetben lesz pontosabb. A becsült értékek felhasználásával számíthatjuk a ki-termelhető ásványvagyommennyiség hibáját:

$$\Delta_{Q'} = \pm \sqrt{(Q \cdot \Delta_\xi)^2 + (\xi \Delta_Q)^2}. \quad (20)$$

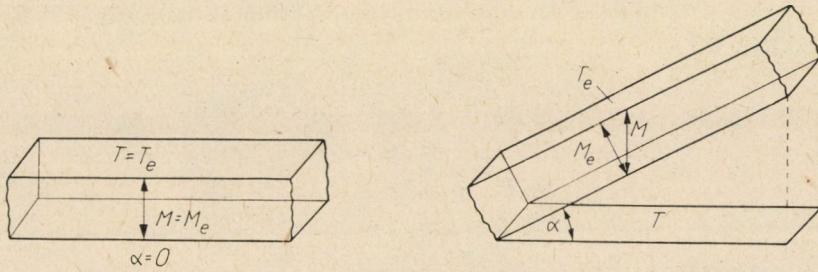
Az eddigiek során három közelítést alkalmaztunk: a települést szintesenek tekintettük, feltételeztük, hogy a fúrások egyenletesen oszlanak el a területen és a ténylegesen megfúrt felületet (a fúrtlyuk szelvényét) a fúrást magába-foglaló 1 m²-es területtel helyettesítettük.

Az effektív vastagság és terület vizsgálata (1. ábra) alapján nyilvánvaló, hogy mivel

$$Q = MT \gamma = \frac{M_e}{\cos \alpha} T_e \cdot \cos \alpha \cdot \gamma = M_e T_e \gamma \quad (21)$$

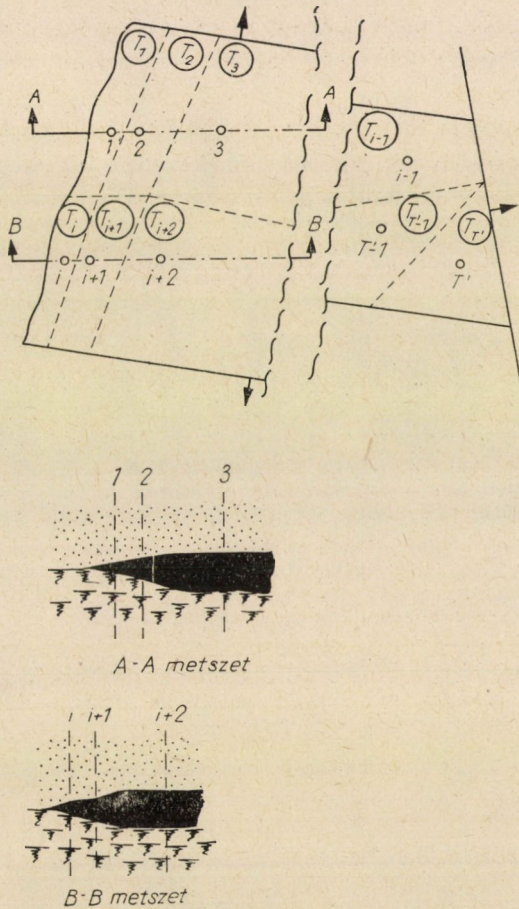
és így

$$MT = M_e T_e \quad (22)$$



1. ábra

vizsgálataink nem szintes telepre és telepcsoportra is érvényesek. A fúrások egyenlőtlen elosztása esetén különösen a peremi elvékonyodások torzíthatják a mintasokaság átlagát. Egyenlőtlen elosztás esetén (2. ábra) célszerű a minta-



2. ábra

sokaság átlagát (14a, b) a fúrásokhoz tartozó területek nagyságával besúlyozott alakban felírni:

$$M'' = \frac{\sum_{i=1}^{i=T'} M'_i T_i}{\sum_{i=1}^{i=T'} T_i} \quad \text{és} \quad \gamma'' = \frac{\sum_{i=1}^{i=T'} \gamma'_i T_i}{\sum_{i=1}^{i=T'} T_i} \quad (23a,b)$$

(bár ez utóbbinak ritkábban van gyakorlati jelentősége),

ahol

$$\sum_{i=1}^{i=T'} T_i = T. \quad (24)$$

Lényegében ezt az elvet alkalmazzuk akkor, amikor a területet olyan háromszögekre bontjuk, mely háromszögek csúcspontjai fúrásokkal esnek egybe, s e háromszögek ásványvagyonának összegeként adjuk meg a terület ásványvagyonát.

A számítás további menete nem tér el az előzőekben leírtaktól. Külön, részletes vizsgálat tárgyát képezhetné ama közelítésünk megengedhető volta, hogy a ténylegesen megfúrt felület helyett az ezt körülvevő 1 m²-es területtel számoltunk.

A vastagságváltozás telepes előfordulásnál 1 m²-es felületen általában minimális, illetve csak a medence peremeken lehet gyakorlati jelentőségű, a fajsúlyváltozás és a mintavétel helye között pedig ilyen esetben nincs összefüggés, így a (23a) képlet alkalmazása e közelítés szempontjából is átmenetnek tekinthető az általános esetre.

Az elmondottakra példát mutatunk be az alábbiakban. Legyen a $T = 1$ km²-es aknamező $T' = 20$ db egyenletesen elosztott fúrással megkutatva. A fúrások adatait és a számítást a 75. oldalon levő táblázatba foglaltuk.

Megjegyezzük, hogy általában, ha a mintaelemek száma száznál kevesebb, a Student-féle táblázatot használjuk, melynek értékei eltérnek a részünkről megadott $P - t'$ összefüggéstől. Jelen esetben azonban a szóródás oly csekély értékű, hogy a normális eloszlás — részünkről megadott — szokásos értékeinek használata megengedhető.

$$M' = \frac{38 \cdot 00}{20} = 1,90 \text{ m}$$

$$\gamma' = \frac{26 \cdot 00}{20} = 1,30 \text{ t/m}^3$$

$$\sigma'_{M'} = \pm \sqrt{\frac{0,8152}{20}} = \pm 0,203 \text{ m}$$

$$\sigma'_{\gamma'} = \pm \sqrt{\frac{0,030}{20}} = \pm 0,012 \text{ t/m}^3$$

$$\sigma'_{M'} = \pm \frac{0,203}{\sqrt{20}} = \pm 0,044 \text{ m}$$

$$\sigma'_{\gamma'} = \pm \frac{0,012}{\sqrt{20}} = \pm 0,0026 \text{ t/m}^3$$

$$\Delta_M = \pm 3 \cdot 0,044 = \pm 0,132 \text{ m}$$

$$\Delta_\gamma = \pm 3 \cdot 0,0026 = \pm 0,0078 \text{ t/m}^3$$

i	M' [m]	γ' [t/m ³]	$d_{M'}$	$(d_{M'})^2$	$d_{\gamma'}$	$(d_{\gamma'})^2$
1	1,82	1,31	-0,08	0,0064	+0,01	0,0001
2	1,96	1,28	+0,06	0,0036	-0,02	0,0004
3	1,92	1,32	+0,02	0,0004	+0,02	0,0004
4	2,10	1,30	+0,20	0,0400	0,00	0,0000
5	1,92	1,32	+0,02	0,0004	+0,02	0,0004
6	1,88	1,29	-0,02	0,0004	-0,01	0,0001
7	2,06	1,28	+0,16	0,0256	-0,02	0,0004
8	2,04	1,30	+0,14	0,0196	0,00	0,0000
9	1,96	1,30	+0,06	0,0036	0,00	0,0000
10	1,88	1,32	-0,02	0,0004	+0,02	0,0004
11	2,10	1,31	+0,20	0,0400	+0,01	0,0001
12	2,02	1,28	+0,12	0,0144	-0,02	0,0004
13	1,86	1,30	-0,04	0,0016	0,00	0,0000
14	1,82	1,29	-0,08	0,0064	-0,01	0,0001
15	2,04	1,30	+0,14	0,0196	0,00	0,0000
16	1,94	1,30	+0,04	0,0016	0,00	0,0000
17	1,92	1,29	+0,02	0,0004	-0,01	0,0001
18	1,36	1,30	-0,54	0,2916	0,00	0,0000
19	1,34	1,30	-0,56	0,3136	0,00	0,0000
20	2,06	1,31	+0,16	0,0256	+0,01	0,0001
Σ	38,00	26,00	0	0,8152	0	0,0030

Ha a produktív terület becslése során $\Delta T = \pm 1000 \text{ m}^2$ hibát követtünk el, akkor a tényleges ásványvagyon és annak számítási hibája a (19) képletből:

$$Q = 1\,000\,000 \cdot 1,9 \cdot 1,3 = 2\,470\,000 \text{ t}$$

$$\Delta Q = \pm \sqrt{(1,9 \cdot 1,3 \cdot 1000)^2 + (1\,000\,000 \cdot 1,3 \cdot 0,132)^2 + (1\,000\,000 \cdot 1,9 \cdot 0,0078)^2}$$

$$\Delta Q = \pm 172\,256 \text{ t.}$$

A százalékos hiba:

$$\frac{\Delta Q}{Q} \cdot 100 = \frac{172\,256}{2\,470\,000} = 7,06 \% = \eta.$$

Ha ξ értékét 80%-ra vesszük fel és $\Delta \xi = \pm 2,5\%$, akkor a kitermelhető ásványvagyon és annak számítási hibája a (10 és 20) képletekből:

$$Q' = 2\,470\,000 \cdot 0,8 = 1\,976\,000 \text{ t}$$

$$\Delta Q' = \pm \sqrt{(2\,470\,000 \cdot 0,025)^2 + (0,8 \cdot 172\,256)^2} = 139\,794 \text{ t}$$

és a százalékos hiba:

$$\frac{\Delta Q'}{Q'} \cdot 100 = \frac{139\,794 \cdot 100}{1\,976\,000} = 7,07 \%$$

Az elmondottakból további, messzemenő következtetéseket lehet levonni. A (16) és (17) képletek alapján ugyanis fel lehet írni, hogy

$$T' = \left(\frac{t' \sigma_{M'}}{\Delta M} \right)^2 \text{ illetve } T' = \left(\frac{t' \sigma_{\gamma'}}{\Delta \gamma} \right)^2, \quad (25a,b)$$

amiből következik, hogy σ értéke ismeretében kiszámítható, hogy a pontosság bizonyos mérvű fokozása végett hány darab fúrtlyuk telepítése szükséges.

Visszatérve előbbi példánkhoz, ha például azt akarjuk, hogy Δ_M értéke ± 10 cm-re csökkenjen, akkor a (25a) képlet alapján ez 99,7%-os valószínűséggel

$$T' = \left(\frac{3 \cdot 0,203}{0,10} \right)^2 = 37 \text{ db,}$$

tehát további 17 lyuk fúrásával lehetséges.

Könnyű belátni, hogy a Δ_Q értéke nemcsak a fúrások számának növelésével csökkenthető, hanem a pontossági követelmények csökkentésével ($t' < 3$) is.

Az eredeti példában előforduló értékek alapján a vizsgált terület az A_2 ásványvagyonebecslési kategóriába tartozik (20 db lyuk/km²). Az ásványvagyonekategorizálásának tudvalevőn az a célja, hogy az ásványvagyone mennyiségi meghatározása mellett e meghatározás megbízhatóságát, pontosságát is rögzítsük. Az elmondottakból következik, hogy e pontosság, megbízhatóság az 1 km²-re eső fúrások számával csak közelítően jellemezhető, hiszen a becslés során elkövethető hibahatár rögzítéséhez az átlagtól való eltéréseknek: a szórádás nagyságának vizsgálata is szükséges. Egyértelműbbé lehet tenni az egyes kategóriákat, ha minden kategóriában bizonyos számú alapfúrást követelünk meg, s az ezekből számítható átlagos véletlen hiba alapján, az egyes kategóriákhoz rendelt P valószínűséggel és százalékos hibával számítjuk a kategóriába való soroláshoz szükséges, további fúrások számát. E téma részletes vizsgálata azonban meghaladja jelen tanulmányunk keretét.

*

Ellenőrzés esetén a bánya egyes terület-elemei három fő csoportba oszthatók: a már lefejtett területeket (I. index) illetően az értékek ($Q'_I = \xi_I Q_I$) viszonylag a legpontosabban ismertek; a vágatokkal elhatárolt területeken (II. index) is megbízható adatokat ($Q'_{II} = \xi_{II} M_{II} T_{II} \gamma_{II}$) képezhetünk, míg a bánya egy része elvileg még csak fúrásokkal megkutatott (III. index) lehet, itt a tervezéshez szükséges adatok előállítás módja követhető.

Ellenőrzéskor tehát:

$$Q' = Q'_I + Q'_{II} + Q'_{III} \quad (26)$$

és

$$\Delta_{Q'} = \pm \sqrt{\Delta_{Q'_I}^2 + \Delta_{Q'_{II}}^2 + \Delta_{Q'_{III}}^2}. \quad (27)$$

Ha az I. csoportba sorolt területek a bánya egész területén egyenletesen oszlanak meg (például az azonos kiterjedésű É-i és D-i mezőben a centrálisan telepített aknapártól a határ felé, a Ny-i és K-i mezőben pedig a határtól az akna felé mutat a lefejtés sorrendjének iránya), vagy a később lefejtendő területek

geológiai viszonyai és fejtési rendszere nem tér el a már lefejtett területekétől, akkor a

$$\xi_1 = \frac{Q'_1}{Q} = \xi' \quad (28)$$

érték az egész akna területére (tehát a II—III. csoportokba sorolt területekre is) érvényes lesz. Az esetek többségében ez így van, ezért további tárgyalásunkat erre az esetre alapítva, csupán utalunk arra, hogy ellenkező esetben

$$\xi' = \frac{T_I \xi_1 + T_{II} \xi_{II} + T_{III} \xi_{III}}{T} = \frac{\Sigma T \xi}{T}, \quad (29)$$

ahol

$$T = T_I + T_{II} + T_{III} \quad (30)$$

$$\Delta_T = \pm \sqrt{\Delta_{T_I}^2 + \Delta_{T_{II}}^2 + \Delta_{T_{III}}^2}. \quad (31)$$

Tekintve, hogy

$$\Delta_{\xi'} = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_I}\right)^2 \Delta_{T_I}^2 + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_{II}}\right)^2 \Delta_{T_{II}}^2 + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial T_{III}}\right)^2 \Delta_{T_{III}}^2 + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial \xi_1}\right) \Delta_{\xi_1}^2 + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial \xi_{II}}\right) \Delta_{\xi_{II}}^2 + \left(\frac{\partial \xi'}{\partial \xi_{III}}\right) \Delta_{\xi_{III}}^2} \quad (32)$$

képezve a parciális differenciálhányadosokat és felhasználva a (30) képletet

$$\Delta_{\xi'} = \pm \sqrt{\left(\frac{\xi_1 T - \Sigma T \xi}{T^2} \Delta_{T_I}\right)^2 + \left(\frac{\xi_{II} T - \Sigma T \xi}{T^2} \Delta_{T_{II}}\right)^2 + \left(\frac{\xi_{III} T - \Sigma T \xi}{T^2} \Delta_{T_{III}}\right)^2 + \left(\frac{T_I}{T} \Delta_{\xi_1}\right)^2 + \left(\frac{T_{II}}{T} \Delta_{\xi_{II}}\right)^2 + \left(\frac{T_{III}}{T} \Delta_{\xi_{III}}\right)^2}, \quad (33)$$

Visszatérve arra az általános esetre, amikor a (28) egyenlet érvényes, és feltételezve, hogy a (Q'_1) mérlegelt széntermelés mennyisége és a mérlegelés hibája (Δ_{Q_1}) ismert, akkor a (28) képlet alapján

$$\Delta_{\xi_1} = \Delta_{\xi'} = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta_{Q'}}{Q_1}\right)^2 + \left(\Delta_{Q_1} \frac{Q'_1}{Q_1^2}\right)^2}. \quad (34)$$

ahol Q_1 és Δ_{Q_1} ismét két úton számítható: ha az eredeti fúrtlyukak adatai alapján számolunk, akkor a már ismert módon, a (10), (11) képletek összevetése és a (19) képlet alapján (ez az eljárás viszonylag pontatlanabb), ha pedig

a terület lefejtése során megfelelő megfigyeléseket végeztünk az M és γ értékekre vonatkozóan, akkor a Q'_{II} számításának tárgyalásakor ismertetendő módon (ez az eljárás a megfigyelések jó szervezése esetén viszonylag pontosabb lehet).

A vágatokkal határolt területen — az elmondottak szerint —

vagy

$$\xi_{II} = \xi' = \xi_I, \quad (35)$$

vagy

$$\xi_{II} = \varepsilon_{II} \xi_I, \quad (36)$$

ahol az ε_{II} korrekció arra mutat, hogy milyen mértékben változik meg a kitermelhetőség a vágatokkal elhatárolt területen a már lefejtett terület kitermelhetőségéhez képest a geológiai viszonyok vagy a fejtési rendszer esetleges megváltozása miatt. $\Delta_{\xi_{II}}$ értékére a (35) képlet esetében a (34) képlet ad felvilágosítást, a (36) képlet esetén pedig értékét éppúgy becsülnünk kell, mint az ε_{II} értéket. M_{II} és γ_{II} értéke reprezentatív mérésekkel határozható meg, itt azonban a mintasokaságba foglalt mérések száma gyakorlatilag többletköltség nélkül tetszőleges sokaságúra fokozható, így nagyobb pontossági követelményeket támaszthatunk. M értékének szóródása általában nagyobb, mint a γ értékéé, ezért az M_{II} meghatározására szolgáló mintasokaság általában több elemből álljon, mint a γ_{II} meghatározására szolgáló mintasokaság, vagyis nem minden mérési ponton kell a fajsúlyt is meghatározni. A mintasokaság elemeinek számára vonatkozóan a (25a, b) képletek adnak felvilágosítást. Mivel ezen képletek alkalmazásához a σ értékek bizonyos pontosságú ismerete szükséges, először egy kevesebb elemből álló mintasokaságból számítjuk ezen σ értékeket a (14)—(15)—(16) képletek alapján, majd a $\Delta_{M_{II}}$, $\Delta_{\gamma_{II}}$ és P kijelölése után a (25a, b) képletek alapján számíthatjuk, hogy hány további vastagság- és fajsúlymérésre van szükségünk. Ebben a kategóriában a $\pm \Delta_{T_{II}}$ nyilvánvalóan olyan pontos, mint a $\pm \Delta_{T_I}$ értéke, s mindkettő pontosabb, mint a (19) képletben előforduló Δ_T .

A vizsgált bányamezőnek csak fúrásokkal tisztázott területeire vonatkozó értékek éppúgy határozhatóak meg, mint a tervezéshez szükséges adatok, azt jegyezzük meg csupán, hogy a ξ_{III} értékére vonatkozóan ugyanaz a helyzet, amit a ξ_{II} számításával kapcsolatban már rögzítettünk, tudniillik vagy

$$\xi_{III} = \xi' = \xi_I, \quad (37)$$

vagy

$$\xi_{III} = \varepsilon_{III} \xi_I, \quad (38)$$

amikor is $\Delta_{\xi_{III}}$ értéke a (37) képlet érvénye esetén a (34) képlet alapján számítható, a (38) képlet érvénye esetén pedig éppúgy becsülnünk kell, mint az ε_{III} értéket.

A földalatti személyközlekedés sebessége a vágat dőlésszögétől és magasságától, a bányalevegő hűtőképességétől és a vizsgált személy fizikai képességeitől függ. Ez utóbbi természetesen nem független attól, hogy műszak előtt vagy műszak után vizsgáljuk-e az értékeket, és arról sem feledkezhetünk meg, hogy bizonyos megtett úthossz után a sebesség az úttól sem független. Mind-ezen tényezők és a személyközlekedési sebesség között statisztikai szempontból sztohasztikus kapcsolat van. Ilyen sztohasztikus kapcsolatot fogalmazz a felfelé és lefelé járás együttes átlagos sebessége (m/óra) és a vágat dőlése között a következő képlet (L. [1]):

$$v_s = \frac{3600}{9,3 \hat{a}^2 + 0,93}, \quad (39)$$

ahol az a vágatdőlés ívmértékben adott. Csapásmenti közlekedésnél

$$a = 0, \quad (40)$$

tehát

$$v_c = \frac{3600}{0,93}. \quad (41)$$

A következőkben az ehhez hasonló összefüggések megállapításának módszereivel kívánunk általánosságban foglalkozni.

Tervezéskor célszerűen egy nagy területen — pl. országosan — érvényes átlagértékeket használhatunk fel. Ilyen átlagértékek meghatározása során induljunk ki a legegyszerűbb esetből: kísérjük meg a csapásmenti személyközlekedés ilyen átlagértékének meghatározását egyelőre külön műszak előtt és külön műszak után, feltételezve, hogy az út kisebb a sebességet már befolyásoló úthossznál, és eltekintve a hűtőképesség és a vágatmagasság hatásától, vagyis feltételezve, hogy normális bányaklíma uralkodik a kényelmes járáshoz kellő magasságú vágatban. Tegyük fel, hogy 100 000 földalatti dolgozóra érvényes átlagértékre vagyunk kíváncsiak. Nyilvánvalóan csak reprezentatív megfigyelést végezhetünk. A vizsgálatot bármelyik olyan bányában elvégezhetjük, ahol fenti normális viszonyokat nagy hosszúságú szintes vágatban találjuk, és a bányában kellő számú földalatti dolgozó van. Az ilyen tetszőleges — véletlen jellegű — összetételű földalatti létszámot természetesen nem tekinthetjük minden kritika nélkül mintasokaságnak. A mintasokaság kiválasztását illetően itt célszerűen úgy járunk el, hogy a mintasokaságnak a dolgozók fizikai képessége szerinti összetétele az alapsokaság ezen ismérv szerinti összetételét jól tükrözze. Keresnünk kell tehát olyan közvetítő ismérvet, melyre nézve az alapsokaság összetételét ismerjük, s mely ismérv a dolgozók fizikai képességeivel sztohasztikusan összefügg. Ilyen ismérv pl. a dolgozók életkora. Sajnos, a két ismérv: életkor és munkavégzőképesség közötti korrelá-

ció nem túl szoros, és a korreláció iránya is megváltozik az életkor függvényében : bizonyos korig pozitív, azután negatív. Jobb híján azonban az életkor ismérvi csoportosítást kell választanunk, s ennek kétségtelen előnye, hogy az alapsokaság ezen ismérvi alapján viszonylag könnyen csoportosítható. Ezzel meg is oldottuk a statisztikában rétegzett kiválasztásnak nevezett eljárás egyik problémáját : nevezetesen azt, hogy hogyan hajtsuk végre az alapsokaság csoportosítását. Az eljárás másik problémája az, hogy hogyan osszuk szét az (adott nagyságú) mintát az egyes rétegek között? Ebben az esetben célszerűnek látszik arányos rétegezést alkalmazni, amikor is a mintasokaságot ugyanolyan arányban osztjuk szét a rétegek között, amilyen arányban az alapsokaság tagozódik egyes csoportokra. Legyen a 100 000 földalatti dolgozóból álló alapsokaság kor szerinti megoszlása a következő táblázat szerinti, akkor az alapsokaság 1%-ának megfelelő elemből álló mintasokaság rétegenkénti megoszlása egyszerűen számítható :

Életkor év	Az alapsokaság		A mintasokaságba választandó fő
	gyakorisága fő	megoszlása %	
15—20	12 100	12,1	121
20—25	14 300	14,3	143
25—30	13 200	13,2	132
30—35	14 500	14,5	145
35—40	12 600	12,6	126
40—45	10 400	10,4	104
45—50	8 300	8,3	83
50—55	7 800	7,8	78
55—60	5 200	5,2	52
60—65	1 100	1,1	11
65—	500	0,5	5
Σ	100 000	100,0	1000

Amikor itt a mintasokaság tagjainak számát önkényesen az alapsokaság létszámának 1%-ában vettük fel, természetesen önkényesen jártunk el. Számításunk végén mutathatunk azonban csak rá arra, hogy a mintasokaság tagjainak száma milyen pontosságú számítás elvégzésére alkalmas, illetve ott tudjuk majd meghatározni, hogy a kívánt pontosság végett növelni kell-e, vagy csökkenteni lehet a minta nagyságát. Azt is meg kell említenünk, hogy eljárásunk nem egzakt: az alapsokaság életkor szerinti megoszlása ui. egyrészt az időben változik, másrészt nincs biztosítékunk arra, hogy tervezett bányánk földalatti dolgozóinak életkor szerinti megoszlása ugyanolyan lesz, mint az alapsokaság — nagy területen, pl. országosan érvényes — megoszlása. Eljárásunk tehát elvileg nem pontos, mégis ajánlhatjuk az egyszerű, véletlen kiválasztással szemben, egyrészt azért, mert az alapsokaságban az életkor és a gyakori-

ság között is határozott sztohasztikus kapcsolat van, másrészt a vizsgálat célja szempontjából az alapsokaság időbeli arányeltolódásának éppen azért nincs jelentősége, mert úgysem látható előre, hogy tervezett bányánk földalatti létszámának életkor szerinti megoszlása olyan lesz-e, mint az alapsokaság megoszlása. Az ilyen rétegzett kiválasztás tehát nem abszolút pontos, de megítélésünk szerint viszonylag a lehető legpontosabb.

Visszatérve példánkhoz, leszögezhetjük, hogy amikor arról beszéltünk, hogy a vizsgálat színhelyéül „kellő számú” földalatti dolgozóval rendelkező bányát kell választanunk, akkor ezt úgy kell értenünk, hogy olyan nagy földalatti létszám legyen a bányában, hogy a táblázatban közölt megoszlás szerinti minta előállítását a létszám biztosítsa.

A következő felmerülő kérdés az lehet, hogy a mintasokaságba beválasztott dolgozó közlekedési sebességét hány mérés alapján határozzuk meg. Ha a mintasokaságba beválasztott minden egyes dolgozó járási sebességét csak egyszer mérjük meg, akkor egy-egy mérés eredménye a dolgozó pillanatnyi diszponáltsága következtében nem a dolgozó átlagos egyéni, hanem pillanatnyi egyéni eredményét tükrözi. Az is igaz, hogy „sok” dolgozónál ez a szubjektív, pillanatnyi eltérés a „sok” dolgozó átlagában kiesik. Ez utóbbi megfontolásra való tekintettel elegendőnek tartjuk a sebességet egy dolgozónál csupán egyszer (műszak előtt és műszak után) megmérni azzal a megjegyzéssel, hogy a mérést olyankor kell végezni, amikor a sebességet befolyásoló szubjektív és változó körülmények eredője nem mutat határozott irányt, pl. ne végezzük a mérést sem a munkaszüneti napot közvetlenül megelőző, sem az azt közvetlenül követő napon.

Annak előrebocsátása után, hogy a mintasokaság egy tagjára vonatkozóan elegendő egy mérést végezni, meg kell jegyeznünk azt is, hogy az egyes egyénekre vonatkozó mérések számának fokozásával természetesen az átlagérték pontossága fokozható. Ha azt vizsgáljuk, hogy az egyénre vonatkozó mérések számát meddig célszerű fokozni, akkor a következő megfontolásból indulhatunk ki: A mintasokaság átlagértékét eddig 1000 egyén egyszeri sebessége átlagának tekintettük. Ha most az egyén egyszer mért sebessége helyett az egyénnek bányamunkában eltöltött teljes ideje alatt érvényes átlagsebességét kívánjuk számításba venni, akkor a mintasokaság átlagát főatlagnak tekinthetjük, s az egyén átlagát olyan csoportátlagnak, mely csoportba az egyén összes földalatti oda-visszaközlekedése tartozik. E csoportátlag is természetesen csupán reprezentatív megfigyeléssel határozható meg. E reprezentatív megfigyelés szempontjából alapsokaságnak minősül az egyén által teljesített és teljesítendő összes földalatti műszak előtti és utáni közlekedési idő. Ha egy dolgozó átlagosan 20 évet tölt a bányában, s évenként 250 műszakot teljesít, akkor az alapsokaság

$$20 \times 250 = 5000$$

elemből áll. Ha itt is 1%-os mintasokaságot képezzünk, akkor a dolgozót 50 műszakon keresztül kell megfigyelnünk járási sebessége szempontjából. Arra vonatkozóan, hogy az egyén járási sebességére vonatkozó mintasokaság elegendő elemből áll-e, a főátlag körüli szóródásból kiindulva, a megengedhető maximális hiba meghatározása után kaphatunk felvilágosítást a szórásnégyzetekre vonatkozó, alábbi általános szabály alapján :

$$\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_x^2, \quad (42)$$

ahol σ az egyes egyének egyes oda-vissza útjaihoz tartozó sebességértékeinek szóródása a főátlag körül.

$\bar{\sigma}_x$ az egyének egyes oda-vissza útjaihoz tartozó sebességértékeinek a saját átlagos sebességük körüli szóródásából az egyes csoportlétszámokkal súlyozva képzett átlag, és

σ_x a részátlagoknak — vagyis az egyéni átlagoknak — a főátlagok körüli szóródása.

Mondottuk azonban, hogy ennek a vizsgálatnak nincs gyakorlati jelentősége és elegendő egy dolgozó oda-vissza útját egyszer megfigyelni.

Mindaddig sebességmérésről beszéltünk, holott a valóságban időt mérünk. Jelöljük ki kísérletképpen pl. egy 1,6 km-es útszakaszt a korábban leírt körülmények között, és mérjük meg, hogy pl. 10 dolgozó mennyi idő alatt teszi meg ezt az utat műszak előtt és műszak után. Célszerű a mérést úgy végezni, hogy azt a dolgozó ne vegye észre. A mérés eredményeit és a további számítást foglaljuk az alábbi táblázatba :

A dolgozó neve	Az út megtételéhez szükséges idő másodpercekben			v_c m/sec 1600: középido	d_{vc}	d^2_{vc}
	műsz. előtt (t_a)	műsz. után (t_b)	középtérteke (t_d)			
A F	1 550	1 690	1 620	0,994	-0,022	0,000484
B J	1 430	1 570	1 500	1,067	+0,051	0,002601
B T	1 440	1 620	1 530	1,046	+0,030	0,000900
D J	1 610	1 710	1 660	0,964	-0,052	0,002704
E K	1 560	1 620	1 590	1,008	-0,008	0,000064
F I	1 540	1 620	1 580	1,012	-0,004	0,000016
H L	1 480	1 640	1 560	1,025	+0,009	0,000081
H Z	1 480	1 640	1 560	1 025	+0,009	0,000081
M F	1 480	1 640	1 560	1,025	+0,009	0,000081
O P	1 550	1 690	1 620	0,994	-0,022	0,000484
Σ	15 120	16 440	15 780	10,160	0	0,007496

Ha csupán a sebesség műszak előtti és műszak utáni, 10 főre vonatkozó átlagértékére (\bar{v}_c) volnánk kíváncsiak, akkor nem kellene az egyes v_c -értékeket kiszámolnunk, hanem az idő-középtértekek súlyozott harmonikus átlagával:

$$h = \frac{10}{\frac{1}{1500} + \frac{1}{1530} + \frac{3}{1560} + \frac{1}{1580} + \frac{1}{1590} + \frac{2}{1680} + \frac{1}{1660}} = 1576$$

osztva a megtett utat, egyszerűbben megkapnánk a keresett sebesség átlagértéket :

$$v_c = \frac{1600}{1576} = 1,016 \text{ m/sec.}$$

Ugyanerre az eredményre jutunk természetesen, ha a táblázatban számított egyes v_c -értékek zámtani átlagát képezzük :

$$\bar{v}_c = \frac{10,16}{10} = 1,016 \text{ m/sec.}$$

Minket azonban nem csupán az átlagos sebesség érdekel, hanem a minta átlagos négyzetes eltérése, a megfigyelés véletlen hibája stb., amihez viszont az egyes v_c -értékekre is szükségünk van, hogy az eltéréseket (lásd táblázat) számíthassuk.

Ennek alapján a minta átlagos négyzetes eltérése :

$$\sigma_{v_c} = \pm \sqrt{\frac{\sum d_{v_c}^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{0,007496}{10}} = \pm 0,027 \text{ m/sec} \quad (43)$$

és a megfigyelés átlagos véletlen hibája :

$$\sigma_{v_c}' = \pm \frac{\sigma_{v_c}}{\sqrt{n}} = \pm \frac{0,027}{\sqrt{10}} = \pm 0,008 \text{ m/sec.} \quad (44)$$

Ha ebből a 10 megfigyelt sebességből kívánunk az alapsokaság átlagára következtetni, akkor a (17) képlettel kapcsolatban elmondottak alapján lerögzíthetjük, hogy

$P = 68,3\%$ a valószínűsége annak, hogy az alapsokaság átlaga : $1,016 \pm 0,008 \text{ m/sec}$

$P = 95,4\%$ a valószínűsége annak, hogy az alapsokaság átlaga : $1,016 \pm 0,016 \text{ m/sec}$,

$P = 99,7\%$ a valószínűsége annak, hogy az alapsokaság átlaga : $1,016 \pm 0,024 \text{ m/sec}$.

De a (25) képlet alapján azt is megállapíthatjuk, hogy ha ilyen viszonyok között azt akarjuk, hogy az alapsokaság átlaga $P = 95,4\%$ -os valószínűséggel $1,016 \pm 0,008 \text{ m/sec}$ legyen, akkor nem 10, hanem

$$n = \left(\frac{t' \sigma_{v_c}}{\Delta v_c} \right)^2 = \left(\frac{2 \cdot 0,027}{0,008} \right)^2 = 45 \quad (45a)$$

illetve ahhoz, hogy $P = 99,7\%$ -os valószínűséggel $1,016 \pm 0,008 \text{ m/sec}$ legyen, nem 45, hanem

$$n = \left(\frac{t' \sigma_{v_c}}{\Delta v_c} \right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 0,027}{0,008} \right)^2 = 103 \quad (45b)$$

dolgozó megfigyelésére van szükség.

Mindaz, ami a 10 dolgozóra vonatkozó példából kitűnik, értelemszerűen alkalmazandó az 1000 főből álló mintasokaságra. Ezek elvégzése után dönthető

el, hogy a pontosság megfelelő-e, vagy ha nem az, számítható, hogy az 1%-os mintasokaság helyett mekkora mintasokaságra van szükség.

A példa bemutatása során olyan közelítést alkalmaztunk, mely megítélésünk szerint megengedett lehet: az út hosszát (l) hibamentesen megállapítottak tételeztük fel. Noha megítélésünk szerint az út hibájának elhanyagolása megengedhető, a teljesség kedvéért foglalkozunk röviden az út hibájának hatásával is.

Példánkhoz visszatérve, a járási időket vizsgálva:

$$\bar{t}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_0}{10} = 1512 \quad \bar{t}_v = \frac{\sum_{i=1}^{10} t_v}{10} = 1644$$

$$\bar{t}'_a = \frac{\sum_{i=1}^{10} t'_a}{10} = \frac{\bar{t}_0 + \bar{t}_v}{2} = 1578,$$

mert

$$t'_a = \frac{t_0 + t_v}{2}.$$

Az átlagtól való eltérések táblázata:

A dolgozó neve	d_{t_0}	$d^2_{t_0}$	d_{t_v}	$d^2_{t_v}$
A F	+38	1 444	+46	2 116
B J	-82	6 724	-74	5 476
B T	-72	5 184	-24	576
D J	+98	9 604	+66	4 356
E K	+48	2 304	-24	576
F I	+28	784	-24	576
H L	-32	1 024	-4	16
H Z	-32	1 024	-4	16
M F	-32	1 024	-4	16
O P	+38	1 444	+46	2 116
	0	30 560	0	15 840

Megjegyezzük, hogy az eljárás szabatosabb és elvileg azonos lenne a harmonikus átlagokkal történő számítás esetén, s mi itt csupán az áttekinthetőség kedvéért számolunk a matematikai átlagokkal. Megengedhetjük ezt azért is, mert a két átlag közötti eltérés esetünkben mindössze

$$\bar{t}'_a - \bar{t}_h = 1578 - 1576 = 2 \text{ sec.}$$

Keressük most a megoldását a — mérnöki gyakorlathoz közelebb álló — kiegyenlítő számítás módszereivel. Tesszük ezt azért is, mert sok rokon vonás

fedezhető fel bemutatott statisztikai eljárásunk és a mérnöki gyakorlatban alkalmazott kiegyenlítő számítás megoldásai között. Ugyanakkor azonban le kell szögeznünk, hogy eljárásunk alapján véve helytelen, mert — hogy csak a legdöntőbb okra mutassunk rá — a statisztikai módszer átlagot — tehát nem valós értéket —, a kiegyenlítő számítás valós értéket kíván meghatározni. E szempontból a feladat közvetlen megfigyelések kiegyenlítése, tehát egy többször megmért mennyiség legvalószínűbb értékét és középhibáját keressük. Az eljárás megkülönböztetése végett itt — áttérve a Gauss-féle szimbólumokra — a keresett legvalószínűbb értéket x -szel jelöljük, az ettől való eltéréseket w -vel. Ekkor általában a javítások:

$$w = x - t.$$

Tudjuk, hogyha valamennyi megfigyelés egyenlő pontosságú, akkor a legvalószínűbb érték a megfigyelések számtani közepese, mert valamennyi megfigyeléshez ez van a legközelebb. Az egyes megfigyelések megbízhatóságát a középhiba (μ) fejezi ki. Az egyes megfigyelések középhibája

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[w \cdot w]}{n - 1}} \quad (46)$$

és a számtani közepes hibája

$$\mu' = \frac{\mu}{\sqrt{n}}. \quad (47)$$

Esetünkben

$$[w \cdot w]_{t_0}^{n=10} = \sum_{n=1}^{n=10} d_{t_0}^2; \quad [w \cdot w]_{t_v}^{n=10} = \sum_{n=1}^{n=10} d_{t_v}^2 \quad (48a,b)$$

és

$$[w \cdot w]_{t_a}^{u=20} = \sum_{n=1}^{u=10} d_{t_0}^2 + \sum_{n=1}^{n=10} d_{t_v}^2, \quad (49)$$

tehát az egyes megfigyelések középhibája:

$$\mu_{t_0} = \pm \sqrt{\frac{30560}{10-1}} = \pm 58,3 \text{ m}; \quad \mu_{t_v} = \pm \sqrt{\frac{15840}{10-1}} = \pm 41,9 \text{ sec},$$

minket azonban különösebben a t_a szempontjából meghatározott, egyes megfigyelésekre vonatkozó

$$\mu_{t_a} = \pm \sqrt{\frac{30560 + 15840}{20 - 1}} = \pm 47,4 \text{ sec}$$

középhiba és a számtani közepes ebből számítható

$$\mu'_{tá} = \pm \frac{47,4}{\sqrt{20}} = \pm 10,6 \text{ sec}$$

középhibája érdekel.

Most csak annyit jegyezzünk meg, hogy a (16a, b) és (46) képletek összehasonlítása, valamint a (16c, d) és (47) képletek azonos szerkezete folytán példánk a statisztika és a kiegyenlítő számítás módszereinek összehasonlítására is alkalmas. Ezen összehasonlítás alapján az tűnik szembe, hogy a statisztika n -értékkel, a kiegyenlítő számítás $n-1$ értékkel — a fölös megfigyelések számával — számol. Ennek oka az, hogy a statisztikában n rendszerint „nagy és kerek” szám, ez a közelítés itt egyrészt megengedhető, másrészt a számítást egyszerűsíti.

Példánk folytatásaként még annyit kell elmondanunk, hogy miután μ , illetve μ' a statisztikai σ , illetve σ' -nek felel meg, a pontossági követelmények fokozása és a hibahatárok szűkítése céljából szükséges további mérések számát (a mintasokaság bővítésének szükséges mérvét) a (25) képletben foglaltakhoz hasonlóan lehet meghatározni.

Legyen tehát a 99,7%-os valószínűség biztosítása érdekében

$$\Delta_{tá} = 3\mu'_{tá} \approx 32 \text{ sec}$$

és az $l = 1600$ m út meghatározásának hibája 99,7%-os pontossággal:

$$\Delta_l = 1,6 \text{ m}$$

akkor az átlagos sebesség:

$$v' = \frac{l}{t'_a} = \frac{1600}{1578} = 1,014 \text{ m/sec} \quad (50)$$

és ennek hibája:

$$\Delta v_c = \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 + \left(\Delta t'_a \cdot \frac{1}{t'_a}\right)^2} = \pm 0,0206 \text{ m/sec}, \quad (51)$$

ezek szerint

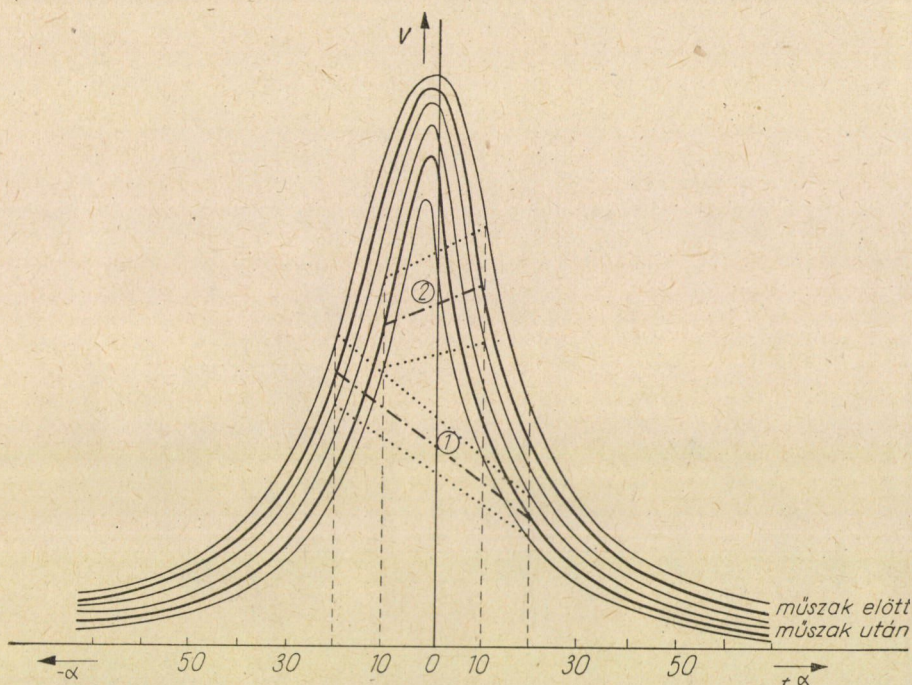
$$0,9934 < v_c < 1,0346.$$

Visszatérve arra az alapesetre, amikor az út hosszát hibamentesnek tételeztük fel, s hasonló pontossággal megállapítottuk, hogy

$$0,9920 < v_c < 1,0400.$$

Láthatjuk, hogy sem az út hosszának megállapításában elkövetett kis (pl. 1%/₀₀-es) hiba, sem a statisztikai eljárás közelítő volta nem befolyásolja lényegesen az eredményt még ilyen kis létszámú sokaságnál sem.

A csapásmenti közlekedés sebességének meghatározásához hasonlóan szervezett reprezentatív megfigyeléssel lehet meghatározni a műszak elején dőlésben felfelé, illetve dőlésben lefelé, valamint a műszak végén dőlésben felfelé, illetve dőlésben lefelé történő személyközlekedés esetén érvényes sebesség „nagy területen átlagos” értékét. A telepdőlés függvényében ábrázolhatjuk is ezeket a pontdiagramot alkotó sebességértékeket — hibájukkal együtt,

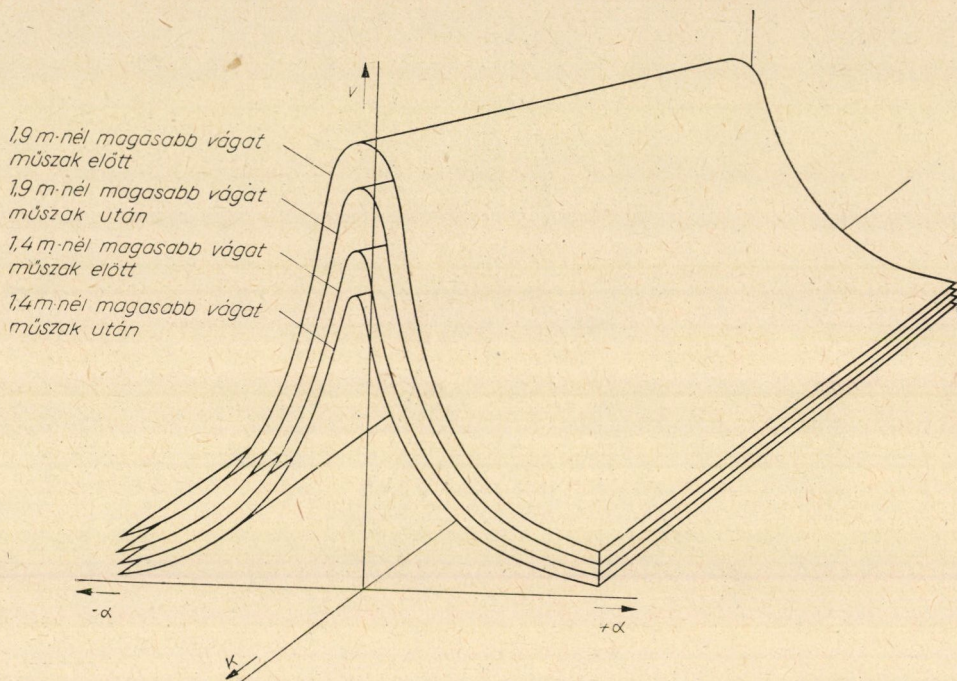


3. ábra

s a korreláció-számítás ismert összefüggései alapján a pontseregeket görbékkel helyettesíthetjük (3. ábra), meghatározva egyidejűleg a görbék egyenleteit is. A megfelelő görbék megfelelő pontjait összekötve, az ereszkés és siklós mezőre vonatkozó átlagértéket és a hozzátartozó hibahatárokat ezen összekötő vonalaknak a v tengellyel alkotott metszéspontja adja. Az ábra 1 pontja pl. egy 20° -os dőlésű telepben az ereszkés mezőre, 2 pontja pedig 10° -os dőlésű telepben a siklós mezőre vonatkozó műszak előtti és műszak utáni átlagsebességet mutatja. A görbék egyenleteinek ismeretében a kalkuláció természetesen numerikusan is elvégezhető.

Hasonlóan megszervezett és értékelt reprezentatív megfigyelésekkel vizsgálható egyrészt a bányaklíma (K), másrészt a vágatmagasság hatása a sebességre. Ha előző koordináta-rendszerünk harmadik tengelyén a bányá-

levegő hűtőképességét (4. ábra) tüntetjük fel, akkor bizonyos vágatmagasságot jelentő térbeli felületekkel ábrázolhatjuk a sebességnek a vágatmagasság, a klíma és a dőlésszög függvényében történő változását. E felületeken kijelölt pontok révén is elvégezhető a műszak előtti és utáni átlagérték megszerkesztése, itt természetesen a $v-K$ síkkal alkotott dőlésponthoz tartozó v -érték fogja az átlagot jelenteni. A hibák ábrázolása is felületekkel történhet, ezt



4. ábra

azonban az áttekinthetőség kedvéért nem jelöltük. Bár a felületekkel történő ábrázolás rendkívül kifejező, a felhasználhatóság szempontjából az adatokból célszerűbb nomogramot szerkeszteni.

Mindeddig azt tételeztük fel, hogy a közlekedés távolsága kisebb annál az — esetünk szempontjából kritikus — úthossznál, melynél nagyobb út esetében az útnak is függvénye az átlagsebesség. Mielőtt tehát eljárásunk általános érvényét kimondanánk, a kritikus úthossz vizsgálatára vonatkozóan is el kell végezni a reprezentatív megfigyelést. A kritikus úthosszra vonatkozó vizsgálat elvégezhető természetesen az — általunk részletesebben ismerttetett — alapeset vizsgálatakor is, csak az útnak kell elegendő hosszúságúnak lenni és közbülső pontokon is — egymástól lehetőleg egyenlő távolságra — időmegfigyelést végezni a közlekedőkről. Ha a mintasokaság tagjai pontosan egyidejűleg kezdik meg útjukat, akkor természetesen szükségtelen az egyéni megfigyelés,

elegendő csupán az indulás időpontjának pontos rögzítése. A közbülső megfigyelőállomásokon és a végállomáson pedig csupán a megfelelően képzett időközök alatt áthaladó, illetve beérkező egyének számát kell leszámolni.

Tegyük fel, hogy az alapsokaság tagjaiból alkotott különböző összetételű csoportok a beszálló akna rakodójára 24 személyes kasban érkeznek, s onnan egyszerre indulnak tovább a 3 km hosszú alapközlén.

Ha a kásos személyszállítás manipulációs és menetideje akkora, hogy a következő csoport egyetlen tagja sem tudja előzni az alapközlén az előző csoport egyetlen tagját sem, akkor az egyes csoportokkal kapcsolatban a pl. 1000 m-enként elhelyezett megfigyelőállomások a következőket jegyzik fel :

Induló állomás : I. csoport indulásának ideje : 5 óra 55'

II. csoport indulásának ideje :

⋮

I. megfigyelőállomás		II. megfigyelőállomás		Végállomás	
Időköz :	Áthaladók száma	Időköz :	Áthaladók száma	Időköz :	Áthaladók száma
6 ^h 07'30"—08'00"	2				
08'00"—08'30"	6				
08'30"—09'00"	14				
09'00"—09'30"	2				
09'30"—10'00"	—				
		6 ^h 21'00"—21'30"	2		
		21'30"—22'00"	4		
		22'00"—22'30"	12		
		22'30"—23'00"	4		
		23'00"—23'30"	2		
		23'30"—24'00"	—		
				6 ^h 34'30"—35'00"	2
				35'00"—35'30"	4
				35'30"—36'00"	6
				36'00"—36'30"	6
				36'30"—37'00"	4
				37'00"—37'30"	2
				37'30"—38'00"	—

Az adatfeldolgozás során gyakorisági sort képezünk és a statisztikában ismert módon, a csoportközepesekkel képezzük az átlagot. Ezek szerint pl. az I. megfigyelőállomásra vonatkozóan :

$$6^h 07' 30'' - 5^h 55' 00'' = 12' 30''$$

$$6^h 08' 00'' - 5^h 55' 00'' = 13' 00''$$

$$6^h 08' 30'' - 5^h 55' 00'' = 13' 30''$$

$$6^h 09' 00'' - 5^h 55' 00'' = 14' 00''$$

$$6^h 09' 30'' - 5^h 55' 00'' = 14' 30''$$

$$6^h 10' 00'' - 5^h 55' 00'' = 15' 00''$$

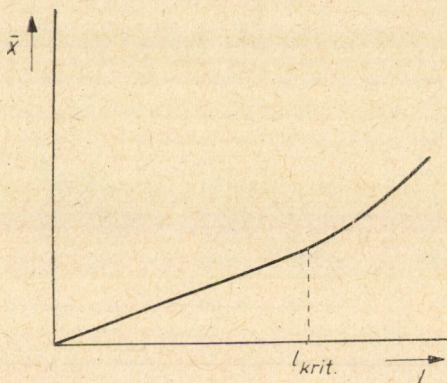
és az átlag számítása (a táblázatban természetesen a valóságban most már nemcsak az I. csoport adatai szerepelnek):

I. megfigyelőállomás

Időtartam	Csoportközépső		x'	f	fx'
	percben	mp-ben			
12'30"—13'00"	12'45"	765	-2	2	-4
13'00"—13'30"	13'15"	795	-1	6	-6
13'30"—14'00"	13'45"	825	0	14	0
14'00"—14'30"	14'15"	855	+1	2	+2
14'30"—15'00"	14'45"	885	+2	0	0
Σ				24	-8

$$\bar{x}_1 = 825'' - \frac{8}{24} \cdot 30'' = 815'' = 13'35''.$$

Az eljárás természetesen csak közelítő pontosságú, de kivitelezése egyszerűbb. A II. megfigyelő- és végállomásra hasonlóan elvégezve a számítást; s az \bar{x}_1 , \bar{x}_{II} és \bar{x}_{III} értékeket az állomások



5. ábra

indulóállomástól való távolsága függvényében ábrázolva, kiténik az l kritikus értéke: az $\bar{x} = f(l)$ görbe első szakasza (5. ábra) egyenletesen s a kritikus távolságon túl meredekebben emelkedik. Megítélésünk szerint a földalatti személyközlekedés úthosszai általában e kritikus hosszánál rövidebbek.

*

Míg az M , T , γ és ξ adatok képzésekor másként kellett eljárjunk tervezés, és másként ellenőrzés esetén, addig a v értékkel kapcsolatban ez nem mondható: ellenőrzéshez is közvetlenül felhasználhatók a tervezéshez felhasználható, 4. ábrán összefoglalt adatok. Ha azonban ilyen „nagy területen érvényes átlag”-adatok (pl. országos átlagértékek) nem állnak rendelkezésünkre, akkor az elmondottak értelemszerű alkalmazásával a v értékek helyileg is meghatározhatók, az eltérés mindössze annyi, hogy ekkor az alapsokaság a vizsgált

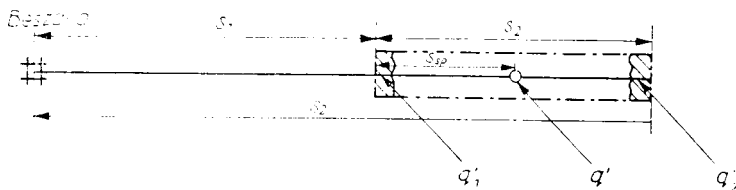
bánya földalatti átlagos napi műszakszámával egyenlő — átlagos alatt itt a bánya teljes élettartama alatti átlagot értjük.

*

A q -val jelölt, módosított földalatti teljesítmény értékének csak meredek dőlésű telep, telepesoport vagy telér esetén van jelentősége — lásd (3), (4) és (5) képletet — a beszálló akna leggazdaságosabb helyének kijelölésében. Statisztikai szempontból sem lehet hozzáfűzni semmit az elmélet leírásakor ezzel kapcsolatban elmondottakhoz: tervezés esetén az akna egész élettartamára vonatkoztatott átlagos módosított földalatti teljesítmény (mely a szokványosan értelmezett, egy földalatti fő egy műszakjára átlagosan eső ásványmennységnél nagyobb, mert a földalatti dolgozók nem közlekednek valamennyien az aknától a produktív munkahelyig, vagy pedig pl. a szállítáznál dolgozók ezen útnak csak kisebb-nagyobb részét járják meg) tervezésénél csak annyit tudunk, hogy az a produktív és a szokványosan értelmezett földalatti teljesítmény közé esik. Nem is lenne célszerű ezt a módosított földalatti teljesítményt a produktív és a földalatti teljesítményből egzakt módon levezetni, hiszen az ilyen levezetés két kiinduló adatának felvételében is becslésre vagyunk kényszerítve, amennyiben azokat illetően már ténylegesen üzemben levő és hasonló települési viszonyok között működő bányák tényleges adatait vagyunk kénytelenek kritikusan felhasználni.

*

Ellenőrzéskor is kénytelenek vagyunk q értékét becsülni. Itt azonban a kiinduló adatok már reálisabbak, mert azok az ellenőrzött üzemből nyerhetők. Az elméleti vizsgálat megállapítja: „Ha az aknamező lefejtése a határ felé halad, a bányauzem életének kezdetén kisebb a közlekedési idővesztés, nagyobb a produktív idő. A későbbiekben változik az arány a produktív idő hátrányára. Hazafelé haladó lefejtésnél fordított a helyzet. A pontosabb eljárás az, hogy minden területre vonatkozóan más módosított földalatti teljesítménnyel számolunk, amikor az nem más, mint a terület ásványvagonának súlypontjához tartozó módosított földalatti teljesítmény. Gyakorlatilag azonban egyszerűbben is eljárhatunk: az egyes területek súlypontjához tartozó módosított földalatti teljesítményeknek a területek ásványvagona szerint súlyozott átlagát vesszük.” Az egyes területrészek súlypontjához tartozó módosított földalatti teljesítményt illetően a következőket jegyezhetjük meg:



6. ábra

A produktív teljesítmény változása a járás távolságának függvényében (6. ábra) matematikailag egyértelműen megfogalmazható :

$$\frac{q'_2}{q'_1} = \frac{480 \cdot 60 - \frac{s_2}{v_2}}{480 \cdot 60 - \frac{s_1}{v_1}} \quad (52)$$

illetve, ha figyelembe vesszük, hogy

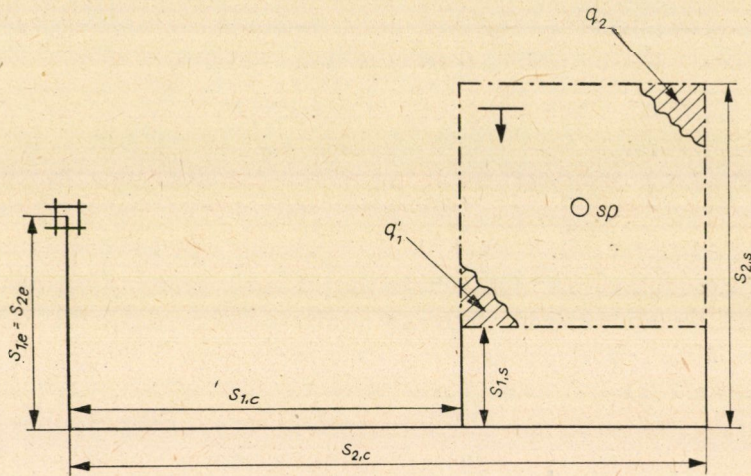
$$s_2 - s_1 = \Delta_s \quad (53)$$

és
akkor, ha
úgy

$$\begin{aligned} 480 \cdot 60 &= 28\,800, \\ v_1 &= v_2 = v, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\frac{q'_2}{q'_1} = 1 - \frac{\Delta_s}{28 \cdot 800 v - s_1} \quad (55)$$

Az (52) összefüggés akkor lesz általános érvényű, tehát akár lapos (7. ábra),



7. ábra

akár meredek telepre érvényes, illetve konkrét esetben úgy alkalmazható, ha az

$$s_1 = s_{1,c} + s_{1,s} + s_{1,e} \quad (56a)$$

$$s_2 = s_{2,c} + s_{2,s} + s_{2,e} \quad (56b)$$

$$v_1 = \frac{s_{1,c} + s_{1,s} + s_{1,e}}{\frac{s_{1,c}}{v_c} + \frac{s_{1,s}}{v_s} + \frac{s_{1,e}}{v_e}} \quad (57)$$

$$v_2 = \frac{s_{2,c} + v_{2,s} + s_{2,e}}{\frac{s_{2,c}}{v_c} + \frac{s_{2,s}}{v_s} + \frac{s_{2,c}}{v_e}} \quad (58)$$

helyettesítéseket elvégezzük. Ekkor — figyelemmel a (8a, b) képletekre :

$$\frac{q'_2}{q'_1} = \frac{28\,800 - \frac{1}{v_c} (s_{2,c} + v_s s_{2,s} + v_e \cdot s_{2,e})}{28\,800 - \frac{1}{v_c} (s_{1,c} + v_s s_{1,s} + v_e \cdot s_{1,e})} \quad (59)$$

Ellenőrzéskor a csapásmenti (s_c), ereszkés (s_e) és (s_s) siklós járási távolságok, valamint a sebesség-adatok (v_c, v_s, v_e) és q'_1, q'_2 értékek valamelyike ismert, a másikat keressük. Könnyű belátni, hogy a súlyponthoz tartozó q' érték szimmetrikus esetben

$$q' = \frac{q'_1 + q'_2}{2} \quad (60)$$

aszimmetrikus esetben pedig további, most már szimmetrikus részterületekre bontva a területet, s ezekre végezve el a számítást, az ásványvagyonnal súlyozott átlagot kell képeznünk.

Meg kell jegyeznünk, hogy a produktív teljesítménynek önmagában történő vizsgálata nem bír túlzott jelentőséggel. Ezt demonstrálja az alábbi példa, ahol egyszerűség kedvéért azt kötjük ki, hogy érvényes az (54) képlet (6. ábra). Legyenek ismertek a következő adatok :

$$q'_1 = 5 \text{ t/műsz}$$

$$v = 1 \text{ m/sec}$$

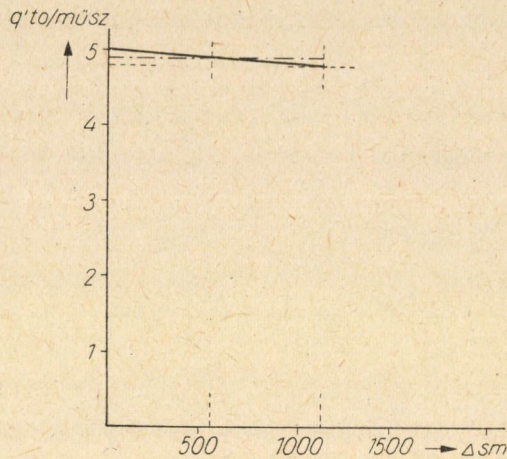
$$s_1 = 800 \text{ m.}$$

Ekkor az (55) képlet alapján

$$q'_2 = \left(1 - \frac{\Delta_s}{28\,000}\right) 5.$$

Ha ezt az összefüggést diagramba foglaljuk (8. ábra), akkor kitűnik, hogy a Δ_s hatása a q'_2 -re úgyszólván jelentéktelen. Tételezzük fel, hogy $\Delta_s = 1120 \text{ m}$. Ekkor

$$q'_2 = \left(1 - \frac{1\,120}{28\,000}\right) 5 = 4,8 \text{ t/műsz,}$$



8. ábra

és a (60) képlet alapján

$$q' = \frac{5,0 + 4,8}{2} = 4,9 \text{ t/műsz.}$$

Ugyanerre az eredményre juthatunk természetesen az (55) képlet alapján közvetlenül is, ha a súlypontnál érvényes teljesítményt keresve a súlypont-hoz tartozó

$$s_{sp} = \frac{\Delta_s}{2} = \frac{1120}{2} = 560 \text{ m} \quad (61)$$

útkülönbséget helyettesítjük be :

$$q' = \left(1 - \frac{560}{28000}\right) 5 = 4,9 \text{ t/műsz.}$$

Az eredményhez végül nyilvánvalóan grafikus úton is eljuthatunk, ha a $q' = f(\Delta_s)$ egyenes alatti területet téglalappá alakítjuk át. A módosított földalatti teljesítménnyel nem ilyen egyszerű a helyzet. Az úthossz bizonyos növekedésével ugyanis a szállítószemélyzet létszáma nem lineárisan, hanem szakaszosan, ugrásszerűen növekszik.

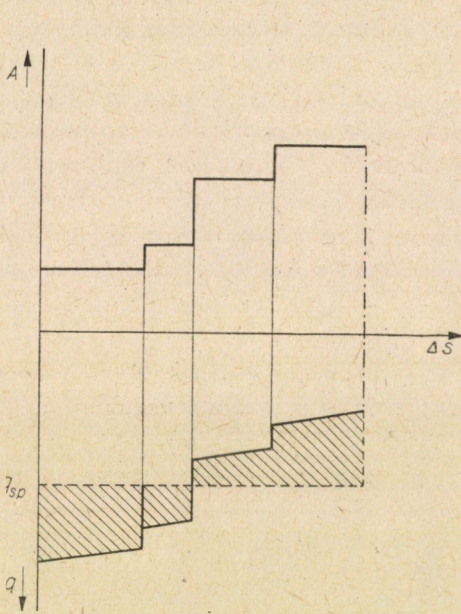
A módosított földalatti teljesítmény és a produktív teljesítmény között

$$q = q' (1 - A) \quad (62)$$

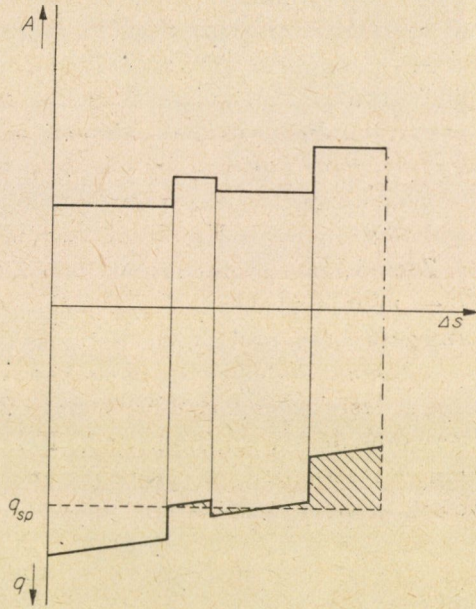
összefüggés van, ahol

$$A = \frac{L_{imp}}{L_{\ddot{o}}} \quad (63)$$

L_{imp} a munkahelyig vezető út kisebb-nagyobb részét megtevő — időbéres földalatti dolgozók száma, L_0 pedig L_{imp} -nál a produktív dolgozók számával nagyobb, ilyenformán A módosított földalatti improduktív műszakaránynak nevezhető. Ha a távolság növekedésével A értékét konstansként tudjuk tartani — vagyis a szállítóút megnövekedése folytán szükséges improduktív műszakszám növelést a produktív műszakszám arányos növelésével ellensúlyoz-



9. ábra



10. ábra

zuk, akkor a $q = f(\Delta_s)$ egyenes a $q' = f(\Delta_s)$ egyenessel lesz párhuzamos, s a számítás az (59) és (62) képletek összevetése alapján elvégezhető az előbb leírt módon. Az esetek többségében azonban A nem konstans a Δ_s függvényében, hanem szakaszosan, ugrásszerűen változik, és pedig, ha a produktív létszám állandó, akkor az $A = f(\Delta_s)$ szakaszos egyenes a Δ_s -tengellyel párhuzamos és az A értékek ugrásszerű változása mindig pozitív, ekkor a $q = f(\Delta_s)$ egyenes szakaszosan csökken (9. ábra) és szimmetrikus esetben a tört egyenes alatti terület téglalappá alakításával határozható meg grafikusán a részterület ásványvagyonának súlypontjához tartozó módosított földalatti teljesítmény. Ha a produktív létszám a Δ_s növekedése során nem állandó, de nem is az improduktív létszámmal arányosan növekszik, akkor az $A = f(\Delta_s)$ szakaszos egyenesnél A ugrásszerű változása negatív értelmű is lehet s ekkor a $q = f(\Delta_s)$ nem mutat következetesen csökkenő tendenciát (10. ábra). A q_{sp} érték itt is grafikusán nyerhető.

Konkrét esetben az egyes Δ_s értékekhez tartozó L_{imp} , L_0 , így tehát az A értékek számíthatók és tervezhetők, a számításához szükséges többi értékről pedig már szóltunk. Ily módon q értékének pontossága nemcsak az adatfelvétel pontosságának, hanem a grafikus eljárás pontosságának is függvénye.

*

A bányaművelés teljesen újszerű műszaki-gazdasági elemző módszerei közül egyet: a beszálló akna telepítésének módszerét ragadtuk ki abból a célból, hogy az eljáráshoz szükséges statisztikai adatok előállításának módszereivel — a teljesség igénye nélkül — foglalkozva, előbbre jusson az elméleti eljárás gyakorlati alkalmazásának — megítélésünk szerint — nagy fontosságú ügye. A tanulmányunkban ajánlott módszerek vitathatók, de a kérdés időszzerűsége nem, és pedig nem csupán a beszálló akna telepítésének problémáját illetően, hanem a bányaműveléstani műszaki-gazdasági analízis valamennyi területével kapcsolatban. Ezért tartom kötelességemnek melegen megköszönni dr. ZAMBÓ János professzornak, tanszéki főnökömnek, hogy a kérdést felvetette és — mint a probléma legkiválóbb ismerője — munkám során nagyértékű támogatásában részesített.

Rendkívül hálás vagyok dr. PÁRNICZKY Gábor adjunktusnak (Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem), ZÓLÓMY Miklós adjunktusnak és ifj. PATVAROS József tanársegédnek (Nehézipari Műszaki Egyetem), kik a tanulmányt statisztikai, kiegyenlítőszámítási és számítástechnikai szempontból voltak szívesek átnézni.

IRODALOM

1. ZAMBÓ JÁNOS: A beszálló akna helye és a személyközlekedés idővesztése. Bányászat Lapok XII. [XC] (1957) 145/161.

ÖSSZEFOGLALÁS

A beszálló akna optimális helyének meghatározására szolgáló egyenletek — melyek a személyközlekedési idővesztés minimum-feltételén alapulnak — akkor oldhatók meg, ha a következő adatokat ismerjük:

- az ásványtelepülés vastagsága;
- az ásványtelepülés területe;
- az ásvány térfogatsúlya;
- a gazdasági szempontok alapján megállapított kitermelendő ásványvagyon és a tényleges ásványvagyon hányadosa;

a csapásvágaton, siklón és ereszkén történő személyközlekedés sebességének műszak előtti és műszak utáni átlagértékei;

az akna egész élettartamára vonatkozó átlagos, olyan egy főre eső földalatti teljesítmény, melynek számításába nem vonjuk be az akna közvetlen környékén dolgozók műszakjait.

Ezeket az adatokat a mai bányászati statisztika egyáltalán nem, vagy nem e célnak megfelelő alakban tartja nyilván.

A tanulmány — főleg a reprezentatív megfigyelés módszereit alkalmazva — meghatározza és példákkal illusztrálja azokat a módszereket, melyek alkalmazásával az adatok előállíthatók és megvizsgálja az adatok előállításával összefüggő hibák terjedésének módját. Az alkalmazandó eljárásokat egyszerűen új bányák telepítésének, másrészt működő bányák ellenőrzésének eseteire dolgozza ki.

ZSALURÁZÓ VIBRÁTOR HASZNÁLATA A VASBETON ÉPÍTŐELEMELŐREGYÁRTÁSÁBAN

SÁFRÁN GUSZTÁV és TÓTH FERENC

É. M. ÉPÍTÉSTECHNIKAI ÉS ÉPÍTÉSGAZDASÁGI IRODA, BUDAPEST
ÉS É. M. 1. sz. ÉPÜLETELEMGYÁR, BUDAPEST

[Beérkezett 1958. június 4-én]

A második világháború óta a vasbetonszerkezetek újabb irányú rohamos fejlődésnek indultak az előregyártás, az elő- és utánfeszített vasbetonszerkezetek alkalmazása terén. Az addig ismert építési technika gyökeres változáson ment keresztül és sok vonatkozásban helyet adott egy teljesen újszerű gyártási műveletnek, a vasbeton építőelemek üzemi előregyártásának, melynek egyik fő jellemvonása a sokszorosan fölhasználható visszatérő sablon* alkalmazása. Ilyen új módszer bevezetése során azonban felül kell vizsgálni a régi eszközöket és módszereket, mert a változott körülmények között esetleg már nem alkalmasak a magasabb igény kielégítésére. A tömeggyártás méreteiben folytatott előregyártás eljárásainak egyik igen fontos kérdése a bedolgozott betonkeverék teljesen azonos minősége, ami csakis azonos bedolgozási és tömörítési mód mellett lehetséges. Ezt a fontos munkaszakaszt még ma is a régi építési módszereknek megfelelően végzik. Ezért tartjuk fontosnak az eddig alkalmazott betontömörítési eszközök és módszerek felülvizsgálatát és a megváltozott gyártástechnikai körülmények között a leghatékonyabb és leggazdaságosabb betontömörítési eszköz és eljárás felkutatását. Mivel a hatékony vibrálás paramétereinek állandósága — és ezzel a beton minősége — legjobban a zsalurázó vibrátorok alkalmazásával biztosítható, ezért látjuk a zsalurázó vibrátor használatában a nagyipari tömeges vasbetonelem előregyártásban az *azonos betonminőség és gyors kiszaluzhatóság* biztosításának egyik *legjobb módját*. A zsalurázó vibrálási mód alkalmazása ma újra előtérbe lépett, nemcsak az előregyártásban, hanem — bár kisebb mértékben — a helyszíni, monolitikus betonozásnál is. A következőkben a zsalurázó vibrálási mód előnyeire kívánunk rámutatni.

1. A betonvibrátorok fejlődése

Az első világháború alatt betonhajók építésénél alkalmaztak először vibrátort a beton bedolgozására. Az új eljárás rohamosan elterjedt a különböző vasbetonszerkezetek előállításánál is.

*) *Palotás*: Műszaki értelmező szótár I. Építőanyagok, Budapest, 1958. c. munkájában erre a fogalomra *zsaluzat*, *zsalu* szavak vannak. Mivel a szerző szerint ezeket a gyakorlatban *sablon*nak nevezik, kívánságára meghagytuk, de kívánatos lenne kifejező magyar szó használata. (A szerk.)

A vibrátort kezdetben a zsaluzatra, később kellően merevített lemezre erősítették, melyet lapvibrátorként a beton felületére szorítottak. A húszas évek közepén feltalálták a betonba merülő tűvibrátort, amely különösen a nagyméretű betontestek bedolgozásánál vált előnyössé. Az épületelem előregyártás létrehozta az asztalvibrátort. Így alakultak ki egymás után a zsalurázó, a lap (palló), a tű és az asztalvibrátorok különböző fajtái.

Az építőiparban eddig alkalmazott vibrátorok — szerkezetüket tekintve — két csoportba oszthatók: vannak olyanok, melyek a rezgést forgó és kiegyensúlyozatlan tömeg centrifugális erejével vagy pedig egyenes vonalban lengő tömeg tehetetlenségi erejével hozzák létre. A meghajtás módja lehet elektromágneses, elektromechanikus vagy pneumatikus. A vibrátor teljesítménye 1—2 m³/óra bedolgozott betonmennyiségtől egészen 600 m³/óráig növekedett a fejlődés folyamán (egybekapcsolt vibrátorrendszerek). A vibrátorrendszerek alkalmazása szükségessé tette a vibrátor egységek kívülről történő vagy belső (automatikus) szabályozását (szinkronizálás). Teljesen új irányzat a betonkeverék tömörítése ultrahanggal történő besugárzás útján. Ez a módszer még kísérletezés állapotában van és általános építőipari alkalmazására nem került sor.

Az elmúlt évek során számosan tanulmányozták a különféle alakú, szerkezetű, működési elvű és alkalmazási területű vibrátorokat és meghatározták célszerű felhasználásuk gazdaságos feltételeit. Ezeket a tapasztalati adatokat a legtöbb országban szabályzatokba foglalták.

Tanulmányunkban azokat az eseteket kívánjuk meghatározni, amelyekben *zsalurázó vibrátor előnyösebben alkalmazható más vibrálási eljárásnál*. Egyedül az a tény, hogy ez a vibrátortípus már kezdetben sikeres volt, még nem jelentene elégséges indokot tágabb körű alkalmazására. Ennek oka az, hogy a vasbetonelemek előregyártásában szinte kizárólagos jelentőségre tettek szert az acélsablonok és az acélzsaluzatok (monolit vasbetonszerkezetek esetében). A költséges berendezések alkalmazásakor különösen fontos, hogy a gyártási ciklus megrövidítésével csökkentsük a sablon szükséges darabszámát. A szilárd-ságtan tudománya is nagyot fejlődött. Lehetővé vált bonyolult alakú beton-szerkezetekben is a feszültségek pontos számítása. Ezek az eredmények csak akkor használhatók ki kellően, ha a beton minősége állandó. *A sablonok gyors forgását és az egyenletes betonminőséget* sok esetben csak a *zsalurázó vibrátorral lehet biztosítani*.

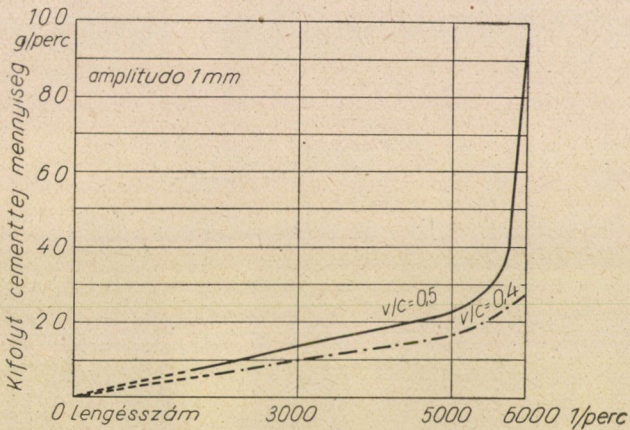
2. A vibrálás hatása a betonkeverékre

Ismertetésünk elején szükségesnek véljük néhány alapelv összefoglalását és szempontjaink szerinti csoportosításuk közlését.

A nyugalomban levő betonkeverék szemcséi között erők működnek. Ezek: a súlyerő, a rezgésből származó erő (tömegeterő) és a kapillaris erő (aktív erők), valamint a súrlódás.

a cementpép viszkozitása és a tehetetlenség (passzív erők). A rázott betonkeverékben növekszik a tömegeterő és csökken a szemcsék közti súrlódás. Ennek következtében a betonkeverék gyorsabban és jobban kitölti a rendelkezésre álló sablont (zsálatatot), azaz hígabban folyik, mintha nem ráznák. A külső rezgő erő hatására a súrlódás csökkenésével együtt csökken a viszkozitás, a légbuborékok is könnyebben tudnak eltávozni és így tömör anyag-szerkezet jön létre. A viszkozitás csökkenésének oka, hogy a nagy hézagterefogatú labilis szem-szerkezetet kis hézagterefogatú stabil szerkezet váltja fel, amivel viszont megnő a hézagterefo-gatra vonatkoztatott relatív vízmennyiség. Ezzel a keverék képlékenyebbé válik. A betonke-verék részecskéi a vibrálási folyamat elején egymástól jórészt függetlenül végzik rezgő mozgásukat. A részecskék később egymáshoz tapadnak és egyre nagyobb, összefüggő, együtt-rezgő tömegeket alkotnak.

Ez a jelenség lehetővé teszi, hogy bonyolult alakú idomokat is kialakíthassunk, mert a vízcementtényező növekedése nélkül is képlékenyebbé vált betonkeverék a sablon távoli, kiugró vagy zárt részeibe is belefolyik. Egyszerű idom esetében a vízmennyiség csök-kenése mellett is lehetséges nagyobb vagy változatlan tömörödést elérni. Mindez a beton-szilárdság emelkedését, illetve a cementadagolás csökkenését eredményezheti.

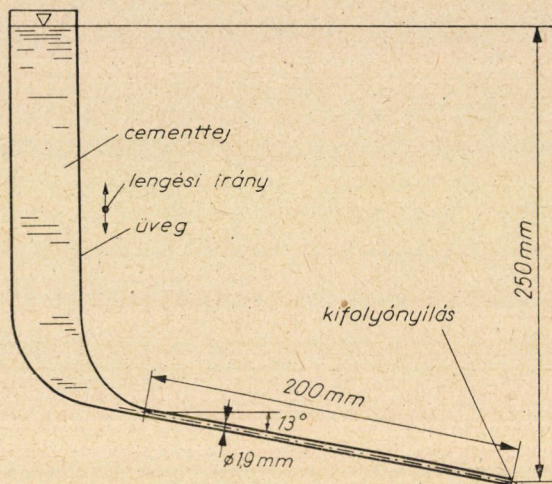


1. ábra. Cementtej folyósságának növekedése a vibrátor lengésszámának függvényében, külön-böző vízcementtényező mellett

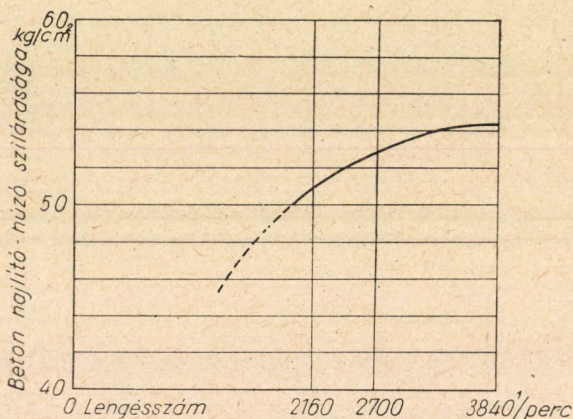
A ható okok tisztázására számos kutató végzett kísérletet. A viszkozitás kérdésének tisztázására megvizsgálták pl. azt, hogy szűk csövön mennyi cementtej áramlik át a rázás változóinak függvényében (1. és 2. ábra). A vonatkozó vizsgálatok azonban nem tisztázták, hogy a rázó mozgás melyik kinetikai jellemzője (sebesség, gyorsulás, rázás frekvencia spektruma vagy rezgés tágas-sága) határozza meg a beton viszkozitását. A kísérletek alapján nem sikerült olyan általános érvényű egyenletet felállítani, amelynek segítségével laborató-riumi kísérletek adataiból a gyártó technológus igényei maradéktalanul ki-elégíthetők lennének. Általában csak azt tudták megállapítani, hogy a vibrált beton szilárdsága növekszik a lengésszám, a vibrálási idő és a lengés tágasságá-nak bizonyos értékű emelkedéséig (3., 4. és 5. ábra). A ható tényezők további emelése a betonszilárdság csökkenésével jár. A csökkenést a beton alkotó részei-nek szétosztályozódása okozza.

A vibrálás előnyös hatásai — az ismertetett okokból — a következők :

1. növeli a beton folyósságát és ezzel gyorsítja a bedolgozás folyamatát, és biztosítja azt, hogy a betonkeverék jól kitöltse a zsaluzatot,



2. ábra. Berendezés cementtej viszkozitásának mérésére



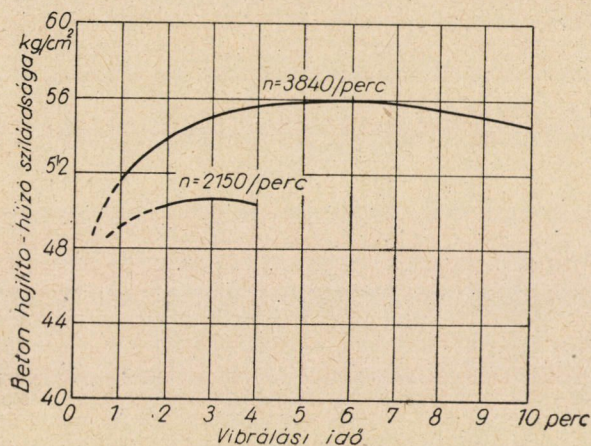
3. ábra. Vibrált és megszilárdult beton hajlító-húzó szilárdságának változása a vibrátor lengésszámának függvényében, állandó amplitudó és vibrálási idő mellett (szaggatott vonal döngöléses tömörítést jelent)

2. növeli a beton tömörségét és lehetővé teszi a vízmennyiség csökkentését. Mindkettő a betonszilárdság növekedését okozza,

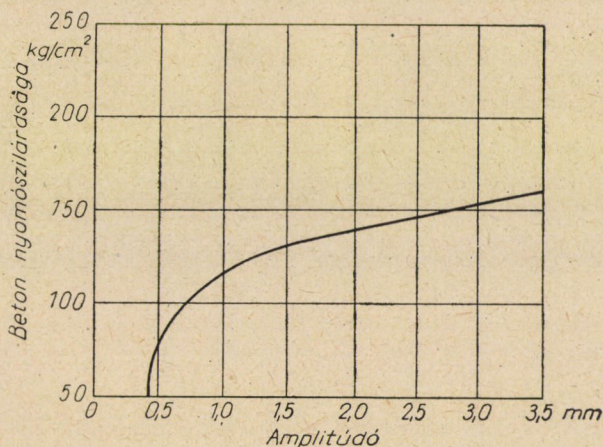
3. a megnövekedett szilárdság lehetővé teszi a betonelem korai kizsaluzását vagy pedig a cementadagolás csökkentését.

A helytelenül alkalmazott vibrálás ezzel ellentétben a következő káros hatásokat válthatja ki :

1. a hosszú ideig tartó vagy túlzottan nagy energiát közlő vibrálás szétosztályozza a betonkeveréket, minek folytán a vasbetonszerkezetben zsugorodási feszültségeket, tehát a szilárdság csökkenését okozza,



4. ábra. Vibrált és megszilárdult beton hajlító-húzó szilárdságának változása a vibrálási időtartam függvényében, állandó amplitudó mellett, különféle rezgésszámok esetén (szaggatott vonal döngöléses tömörítést jelent)



5. ábra. Vibrált és megszilárdult beton nyomószilárdságának változása a vibrálás amplitudójának függvényében, állandó rezgésszám és vibrálási idő mellett

2. a vibrálás erőhatása megrövidíti a sablon élettartamát,

3. a nem eléggé merev és károsan rezgő sablon nagy erővel vizet szív ki a betonkeverékből (membrán szivattyú), ami a betont fellazítja és külső rétegeiben porózussá (vízáteresztővé) teszi,

4. a merülő (tű) vibrátorok megmozgathatják a betonacélt, ami a vasalás megcsúszását idézheti elő. Helytelen alkalmazása lyukakat (fészket) hagyhat a betonban,

5. elégtelen vagy helytelen vibrálás nem eredményez kellő tömörséget és szilárdságot.

A káros hatások *legkevésbé a zsalurázó vibrátornál* mutatkoznak, mert ennél pontosabban lehet szabályozni a rázási energia mennyiségét, időtartamát és eloszlását. Ezért szükséges és fontos ezen eljárás alaposabb elemzése.

3. A zsalurázó vibrálási mód előnyei

A zsalurázó vibrátor alkalmazásának lényege, hogy a rezgéskeltő gépet hozzáerősítjük a betonnak alakot adó sablon (zsaluzat) külső részéhez oly módon, hogy rezgéseit annak maradéktalanul átadja. A vibrátort nem kell tehát a betonba helyezni. Maga ez a tény a *zsalurázásnak számso előnyét* jelenti más vibrálási móddal szemben. Nevezetesen:

1. ez az egyetlen mód a rázásra — a rázóasztal mellett — minden olyan esetben, amikor az acélbetétek sűrűsége lehetetlenné teszi a belső vibrálás alkalmazását,

2. hasonló a helyzet akkor, ha a gyártandó vasbetonelem I- vagy fekvő gerincű U-keresztmetszetű gerendatartó, kötegelt, állóhelyzetű vékony lemez (panel). Ilyenkor belső vibrátorral lehetetlen tömöríteni a betonkeveréket, a sablon helyzete vagy a betonréteg vékonysága miatt,

3. a betonkeverék betöltésével egyidejűen és folyamatosan történhet a vibrálás, ami bedolgozási időben és gyártási költségben megtakarítást jelent és a kész betonelemeknél azonos anyagminőséget biztosít,

4. a rázott sablonfelület mentén gyorsabban tömörödik a beton. A betonelem kérgében a tömörség és szilárdság olyan fokot érhet el, hogy lehetséges az elem azonnali kiszaluzása, ami tetemesen csökkenti a sablon szükséges darabszámát és költségét. Ily módon a tömeges előregyártás céljára a kevésbé képlékeny betonkeveréket is be lehet dolgozni,

5. a rázott felület mentén igen tömör betonréteg (kéreg) keletkezik, ami a külső felületet vízzáróbbá, a betonelemet fagyállóbbá és hosszabb élettartamúvá teszi, mint bármely más bedolgozási mód,

6. nem keletkeznek a betonban a vibrátor helyén, annak eltávolításakor üregek, ami belső vibrátor alkalmazásakor előfordul,

7. a vibrálási energiát ott és olyan mennyiségben lehet a betonkeveréknek átadni, ahol és amilyen mértékben erre szükség van. Ez energia megtakarítást jelent és kíméli a sablont, ami pl. asztalvibrátor alkalmazása esetén egyáltalán nincs biztosítva.

8. nagyterjedelmű és ezért sztend-módszerrel gyártható elemnél ez az egyedül célravezető rázási mód,

9. zsalurázó vibrátorral lehet legkedvezőbben ún. utóvibrálást végezni, azaz a betonkeverék teljes tömegét ismételten vibrálni a sablon kitöltése és a beton kötésének megindulása után, a betonkeverék tömegének megbolygatása nélkül. Ez a szilárdság jelentős növekedését vagy cementmegtakarítást eredményezhet,

10. felhasználható a kizsaluzáshoz is. A rázott sablon aránylag kis erőhatásra elválik a betontól. Ez az eljárás kíméli a sablont és a betonterméket, de csökkenti a kizsaluzási időt is. Ez, valamint a 4. pontban leírt azonnali kizsaluzás olyan nagy gazdasági eredményt jelent, amely egymagában felér a vibrálás összes többi előnyével,

11. a zsalurázó vibrátor olcsó gép. Nincsenek gyorsan elhasználódó alkatrészei, mint pl. flexibilis tengely stb. Ezért élettartama a többinél hosszabb, karbantartási költsége kicsi. Üzemzavar esetén gyorsan kicserélhető tartalék géppel. Olcsósága miatt több tartalék gép tartható raktáron.

4. A zsalurázó vibrálási mód hátrányai és azok kiküszöbölése

A zsalurázó vibrálás — a ma használatos vibrálásos tömörítési eljárások közül — jelenleg a *legfejlettebb módszer*. Mint ilyen, a gyártást beállító szakembertől nagyobb szaktudást és több körültekintést kíván, mint más eljárás. Ezzel szemben a betonozó munkástól sokkal kevesebbet, csupán az előírt *vibrálási időtartam* pontos betartását követeli meg.

A zsalurázó vibrálási mód hátrányaként az alábbiakat szokták megjelölni:

1. könnyebben fordulhat elő túlvibrálás, mert a beton külső felületi rétege hosszabb ideig kap rázást, mint a belső. A belső mag ugyanis csak a külső, már tömörödött réteg közvetítésével kaphat rázást,

2. a betonkeresztmetszet mentén változó a tömörség: kívül nagyobb, belül kisebb,

3. a rezgés amplitudóját nem lehet bizonyos határon túl növelni, mert ekkor a nem elég merev, túlságosan rezgő sablon vizet szív ki a betonelem külső rétegéből, ami kimossa a szemcséket és csökkenti a beton tömörségét, s szilárdságát,

4. a rezgés frekvenciáját sem lehet bizonyos határon túl növelni, mert a sablon mentén a nagy frekvenciájú rezgések amplitudója rohamosan csillapodik (a ma használatos zsalurázó vibrátorok rezgésszámának felső határa 12 000 rezgés/perc),

5. a betonkeverék a szabad — sablonnal nem érintkező — felülete mentén lényegesen kevésbé tömörödik, mint egyebütt.

Ezek a hátrányok azonban könnyen kiküszöbölhetők megfelelő intézkedésekkel, melyek a következők:

1. a túlvibrálás elkerülhető a vibrátor helyének, felerősítési módjának, a rázási időtartamnak és a vibrálás behatolása mélységének megállapítására vonatkozó előzetes kísérletekkel, ezek eredményeinek felhasználásával,

2. a beton tömörsége vibrálási módonként változik a hely függvényében. A zsalurázó eljárásnál a külső rétegben tömörebb a beton, ami nem hátrány, hanem éppen előny. Így ugyanis lényegesen nagyobb az ellenállása az atmoszféra behatásaival és a szilárdsági igénybevételekkel szemben, mint ha belül lenne tömörebb (vö.: kéregöntés a vasöntészetben),

3. a rezgő sablonfal betont fellazító hatása megszüntethető a vibrátorok sűrítésével, vagy a sablon merevebb kialakításával,

4. a kísérletek nem igazolták egyértelműen azt, hogy a ma megvalósíthatónál nagyobb frekvenciával vibrálni különösebb műszaki vagy gazdasági előny lenne. A merülővibrátornak a nagyobb rezgésszámból eredő állítólagos előnye kétséges, mivel a nagyobb rezgésszámú vibrálás gyorsabban csillapodik a betonban, mint a kisebb rezgésszámú,

5. felül nyitott sablon esetében, ha szükséges a sablonnal nem érintkező betonfelületen is tömörödést elérni, kombinálható a zsalurázás lap- vagy belső vibrálással. A felületi lap- vagy belső vibrálás elkerülésére lehetséges a sablont — legalább a hosszanti oldalak mentén — teljesen zárttá tenni, vagyis a szabad betonfelületet megszüntetni. A betonbetöltés és a hatásos vibrálás céljából ilyenkor a sablont függőleges helyzetű hossztengely állásban célszerű tartani (pl. közvilágítási tartóoszlop álló helyzetben történő gyártása).

5. A zsalurázó vibrálási mód hatásainak vizsgálata

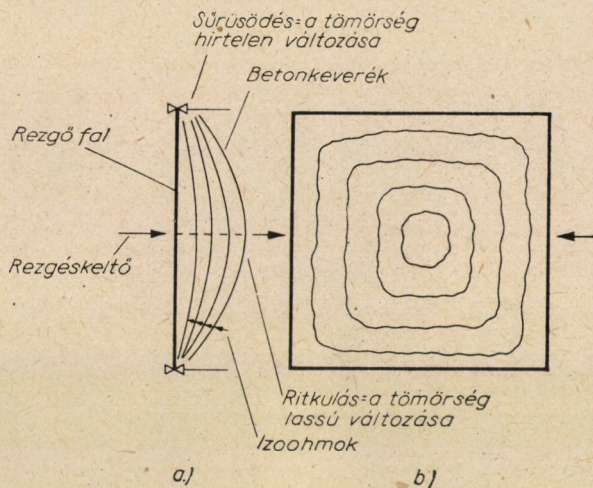
Már HUMMEL kimutatta, hogy a beton szilárdsága a vízcementtényezőkön kívül elsősorban a *tömörséggel* függ össze. Ezért a vibrálás hatását úgy állapíthatjuk meg, hogy meghatározzuk a tömörítetlen beton térfogatsúlyát és viszonyítjuk a tömör (levegő nélküli) beton fajsúlyához. A tömörödés (vibrálás) hatása annál jobb, minél közelebb van ez a viszonyszám az 1-hez.

A tömörödés mérése igen nehéz volt mindaddig, míg szovjet kutatók ki nem dolgoztak olyan egyszerű eljárást, amelynek segítségével meghatározható a beton tömörsége annak bármely helyén. A mérési eljárás lényege, hogy elektromos szondák segítségével mérik a beton *elektromos ellenállását*. A beton vízfellevő képessége és ezzel együtt ohmikus ellenállása ui. függ a tömörségétől. Meghatározott összetételű betonkeverékben az ellenállás csökken, ha a tömörség nő. Az összefüggés kölcsönösen egyértelmű és mérésre alkalmas.

Ezzel az eljárással egyszerűen kimutatható, hogy a betonelem keresztmetszetében hogyan változik a beton tömörsége. Az egyenlő tömörségű pon-

tokat összekötve ún. *izoohmokat* (egyenlő ellenállású helyeket) kapunk, melyeket *tömörégi rétegvonalaknak* is nevezhetünk (6. ábra).

Hogy hány izoohm metszi a sablonnal nem határolt szabad betonfelületet, vagy milyen mértékben marad tömörítetlen ezen az oldalon a beton, az attól függ, hogy milyen helyzetű a betonkeresztmetszet legkisebb tömörségű pontja (az izoohmok középpontja) a betonkeresztmetszet súlypontjához viszonyítva. A 7. ábrán feltüntetett „e” értéknek növekedése a szabad felület mentén a tömörödés csökkenésével jár. Zárt szelvényű sablon függőleges hely-

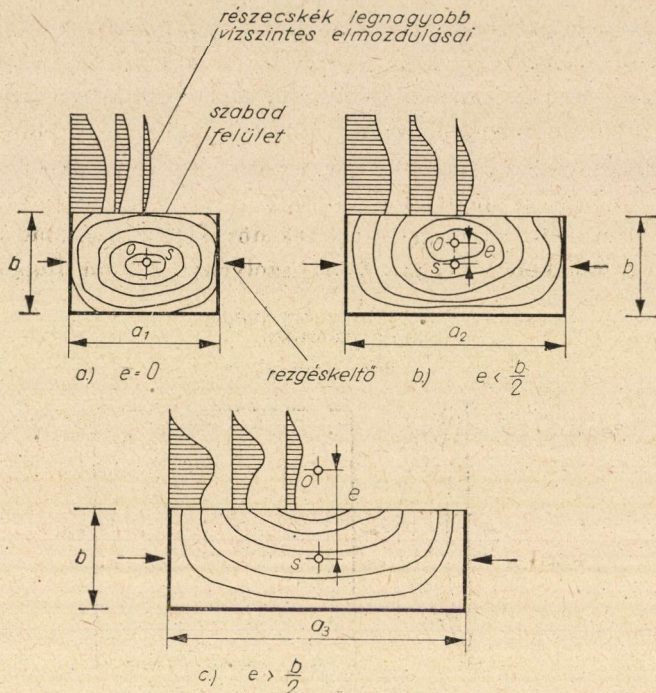


6. ábra. a) Egyetlen rezgőfal hatására kialakuló izoohmok (azonos tömörségű vonalak)
b) Zárt négyszögű rezgőfal-rendszer hatására kialakuló azonos tömörségű vonalak

zetű hossz tengely állásában végzett betonozáskor és vibráláskor a rezgő hatás kialakításában a sablon összes oldalfalai részt vesznek, ezért ebben a helyzetben érhető el a legjobb tömörítő hatás (6b ábra).

A tömörödés mérésének másik — ugyancsak szovjet kutatók részéről kidolgozott — de kevésbé pontos eljárása a pneumatikus haranggal végzett mérés, amely a betonkeverék *hidrosztatikai-belső feszültségmérésén* alapszik.

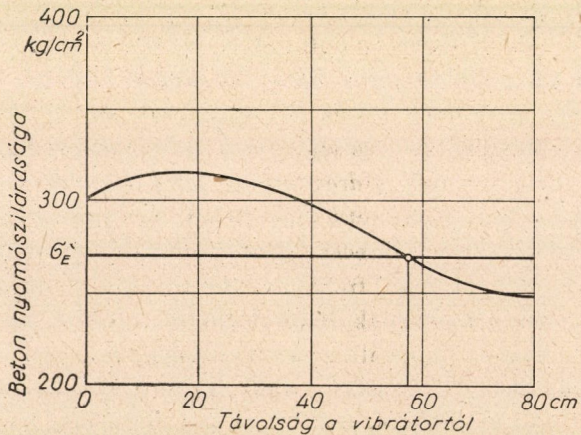
A betonba merített kisméretű piezoelektromos mikrofonok segítségével megmérhető az adalékanyag részecske *gyorsulása* a betonelem valamely meghatározott helyén. Mivel a rázási frekvencia mindenütt azonos (vagy szinuszos gerjesztés esetén közel azonosnak feltételezhető), ezért a gyorsulás arányos az amplitúdóval. A módszer alkalmas a rezgéstágasság eloszlásának mérésére. Az eredmény különböző szélességű, fölül nyitott, négyszögkeresztmetszetű elemek esetén a 7. ábrán látható. A mérések azt mutatják, hogy egyenesen rázott, igen hosszú sablonfalra merőleges irányban mérve csökken az amplitúdó nagysága és ezzel a beton tömörödése és szilárdsága is. A betonszilárdság a 8. ábrán látható módon változik. Van olyan — sablonfaltól mért — távolság,



7. ábra. Egyetlen szabad felületű, téglalap keresztmetszetű betontest izoohmjai és a szemcsék legnagyobb vízszintes elmozdulásának görbéi, a keresztmetszet különböző oldalarányai esetén

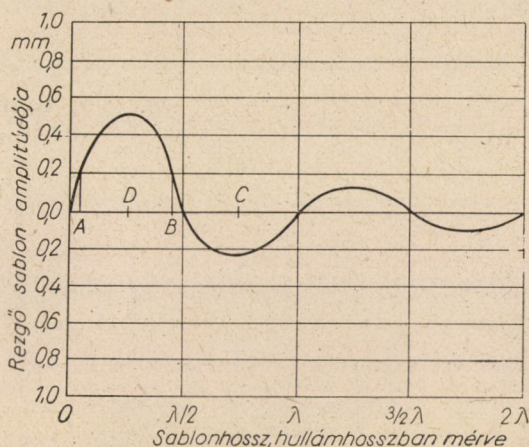
O = izoohmok pólusa

S = keresztmetszet súlypontja

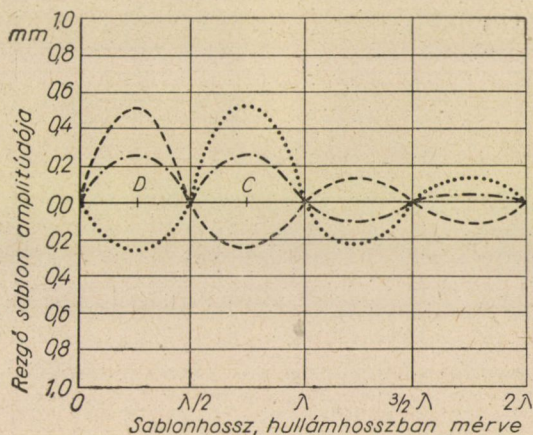


8. ábra. A vibrált és megszilárdult beton nyomószilárdságának változása a keresztmetszet síkjában, a vibrátortól mért távolság függvényében

amelyen túl az adott rázási idő, betonösszetétel stb. mellett már nincs meg a beton előírt σ_{28} szilárdsága. Ezt a távolságot a vibrátor ható távolságának nevezzük. A szokásos zsalurázó vibrátoroknál ez kb. 25—30 cm. (A hatótávolság kísérleti eredmények alapján állapítható meg.) A sablonfal rázása



9. ábra. Rezgő sablon rezgésalakja egyetlen, D pontban elhelyezett vibrátor hatására (AB a vibrátor hatótávolsága)



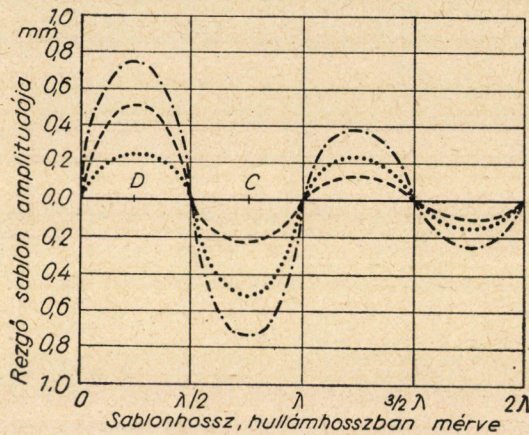
10. ábra. Rezgő sablon rezgésalakja C és D pontokban elhelyezett, azonos fázisban lengő két vibrátor hatására

- sablonkitérés csak a D pontban elhelyezett vibrátor hatására
- sablonkitérés csak a C pontban elhelyezett, vibrátor hatására
- · - · - · sablonkitérés eredője a C és D pontban elhelyezett vibrátorok hatására

akkor tekinthető egyenletesnek, ha a vibrátorok távolsága a fal mentén mérve nem nagyobb, mint a hatótávolság kétszerese. Ha ennél távolabb lennének elhelyezve, akkor a vibrátorok távolságának felezősíkjában elégtelen lesz a tömörödés, a sablonfalhoz a hatótávolságnál közelebb eső helyen is. Ezért

a hatótávolság kétszeresénél hosszabb méretű vasbetonelemek tömörítéséhez több vibrátor szükséges.

Ha hosszú sablonra egyetlen vibrátort erősítünk, akkor az a sablont hossza mentén a 9. ábra szerint változó amplitudóval rázza. Az ábra a maximális kitérés pillanatában mutatja a lengések nagyságát a sablon hossza mentén (a maximális ordináták arányait a melléje írt számok jelzik). A kitérés nagysága, ezzel együtt a gyorsulás és a rázó erő a szükséges tömörítés eléréséhez csak az $A-B$ közötti szakaszon elegendő. Kérdés, mi történik, ha C helyre is erősítünk vibrátort? Ha a második vibrátort *azonos fázisban* gerjesztjük, akkor a rezgések képe a 10. ábra szerint alakul, míg *ellenfázisban* a 11. ábra szerint rezeg (az eredményvonal a sablonkitérés burkológörbéi-



11. ábra. Rezgősablon rezgésalakja C és D pontokban elhelyezett, ellenkező fázisban lengő két vibrátor hatására

- sablonkitérés csak a D pontban elhelyezett vibrátor hatására
- sablonkitérés csak a C pontban elhelyezett vibrátor hatására
- - - - - sablonkitérés eredője a C és D pontban elhelyezett vibrátorok hatására

nek eredőjét jelenti a két vibrátor együttes hatására). Ebből látható, hogy terjedelmes elemeknél a vibrátorok elhelyezése és fázishelyezete nem közömbös a jó tömörítés szempontjából. Az azonos fázisban lengő sablonrész hosszát (fél hullámhossz) a sablon alakja, rugalmas tulajdonságai és az adalékanyag (beton) részecskék rezgéstovábbadási képessége határozza meg. Adott esetben ezek mértéke legbiztosabban kísérletekkel állapítható meg.

6. Csoportosan használt zsalurázó vibrátorok hatásának növelése

Az elmondottakból láthatóan a betonkeverék vibrálásával hármas célunk van. Egyrészt *tömöríteni* kívánjuk a betont (vele a sablont kitölteni és a betonból a levegőt kiűzni), másrészt mindezt *kevés energiával*, harmadszorban pedig *gyorsan* akarjuk elérni. A hármas cél elérése zsalurázó vibrátorok alkalmazásakor a következő tényezők *változtatásával* lehetséges:

- a) a vibrátor rezgő tömegével és kitérésének nagyságával,
- b) a vibrátor rezgésszámával,
- c) a vibrátor helyének és
- d) a vibrátor felerősítési módjának

megválasztásával.

a) *A vibrátor tömegét és kitérését* elegendő nagyra kell méretezni. A méretezést az alábbi gondolatmenet alapján végezhetjük.

A vibrált betonkeverék gerjesztett lengést végez. Első közelítésben elhanyagoljuk a betonkeverék és sablon lengő rendszerére ható rugóerőket. A súlypont tétel értelmében a vibrátor-sablon betontömegek közös súlypontja rezgés közben is helyben marad, mert egyéb külső ható erő nincs jelen. Ezért a vibrátor tömegének rezgésével egyidejűen a beton tömege is lengést végez. Az utóbbi kitérése arányosan növekszik a vibrátor rezgő tömege és a gerjesztett tömeg hányadosával, valamint a vibrátor rezgő tömegének kitérésével. Ha a betonkeverék részecskéinek kitérései növekednek, csökken a beton pórustartalma és a berázáshoz szükséges idő. Bizonyos kitérésen túl a betonkeverékben levő kapilláris erőt legyőzve a keverék szétosztályozódik, esetleg a sablonból az adalékanyag szemcsék ki is ugrálnak. Ha viszont kicsiny a kitérés, nem elegendő a tömörítő hatás. A vibrátor tömegét és kitérését úgy kell megválasztanunk, hogy a meghatározott rezgésszám mellett a betonban előidézett gyorsulás a *nehézségi gyorsulásnak 4—6-szorosa legyen*.

b) *A vibrátor rezgésszámát, frekvenciáját* elsősorban a berázandó betonkeverék adalékanyagának maximális szemnagysága határozza meg. A szükséges rezgésszám jó közelítéssel

$$n_{szüks} = \frac{6000}{d} (1/\text{perc}),$$

ahol d az adalék maximális szemnagysága cm-ben.

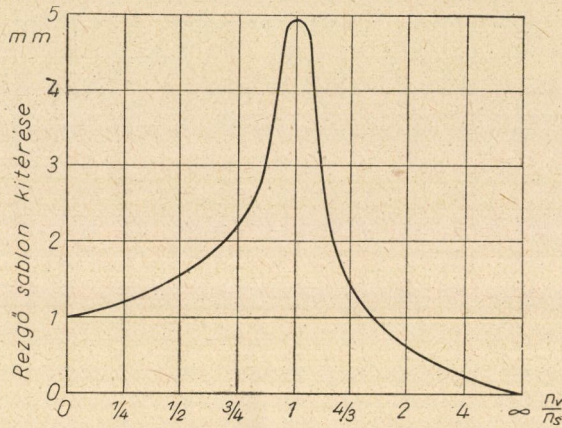
A lengéskép második közelítésekor figyelembe kell még venni a sablonvibrátor-betonkeverék lengő rendszer önlengésszámát is. Gyakorlati szabály, hogy a vibrátor fordulatszáma (n) 3—4-szer legyen nagyobb, mint a kapcsolt rendszer önlengésszáma (n_0), különben a motor nem tudja „áthúzni” a vibrátort a rezonancia ponton (12. ábra).

A *rezonancia pont* közelében igen nagy a sablon kitérése, ami a betonkeverék *szétosztályozását* eredményezi. Ezért — különösen vibrálás utáni gépmegálláskor — *gyorsan* kell áthaladnunk rajta.

A rezgésszámot zsalurázó vibrátor esetén nem lehet tetszőlegesen nagyra választani. Ugyanis nagy rezgésszám mellett igen nagy feszültségek ébrednek magában a sablon lemezében. Erre az igénybevételre méretezve egyrészt igen nagysúlyú sablont kapnánk, másrészt a vibrátor önrezgésszámával biztosan a sablonlemez *magas felharmonikusai egyikének* közelébe kerülnénk, ami igen sok rezgési csomópontot hozna létre.

Meg kell említenünk, hogy a friss betonkeverékben a *longitudinális nyomáshullámok* viszonylag lassan terjednek (80—150 m/mp). Ebből következik, hogy már a szokásos rezgésszámú vibrátoroknál is előfordulhat állóhullám keletkezése a betonkeverékben. Pl. $n = 6000/\text{perc} = 100 \text{ c/mp}$ rezgés esetén a hullámhossz

$$\frac{80 \text{ m/mp}}{100 \text{ c/mp}} = 0,8 \text{ m/ciklus,}$$



12. ábra. A rezgő sablon kitérése különböző vibrátorrezgésszám esetén

n_v = vibrátor rezgésszáma

n_s = sablon saját rezgésszáma

vagyis 40 cm-es keresztmetszeti méret esetén már *álló hullám* jöhet létre. Ez egyes helyeken túlvibrálást, más helyeken csomópontok létrejöttét eredményezheti. Ezért igen alapos lengéstanai analízis elvégzése szükséges mindig olyankor, amikor magas rezgésszámú vibrátort alkalmazunk.

c) *A vibrátorok helyét* gondosan kell kiválasztani.

RALEYGH vizsgálatai szerint a gerjesztés akkor a leghatásosabb, ha a gerjesztő gépet a lengő test *önlengési csomópontjában* erősítjük fel. Ezért a szemcsenagyság és a rezonancia feltételek alapján kiválasztott fordulatszám melletti önlengési alakot meg kell határozni és annak a csomópontjában kell a vibrátort felerősíteni. A vizsgálatot a sablon *üzemszerinti helyzetében*, keverékkel megtöltött állapotban kell elvégezni, mert az alátámasztások elhangolják a sablont és befolyásolják a rezgés alakját. Az alátámasztásoknál rugalmas felfekvésről kell gondoskodnunk (nemez, gumi stb. alátét). Nagymértékben változtatja a sablon rezgési állapotát a beletöltött betonkeverék. Kísérletek alkalmával a betont jól *helyettesíthetjük* pl. olyan keverékanyaggal, amely

a betonnal azonos szemszerkezetű és anyagú adalékból azonos vízmennyiséggel készül, de cement helyett ugyanolyan mennyiségű *iszapot* tartalmaz. Előnye, hogy ezt a keveréket többször fel lehet használni. A betonkeverék viszkozitása, rezgéstani viselkedése valamelyest eltér ugyan ettől az anyagétól, de ez a különbség a sablon rezgésalakját nem túlságosan befolyásolja.

A vibrátorok *csoportos* elhelyezése esetén figyelembe kell venni a sablonlengés *fázishelyzetéről* az 5. fejezetben mondottakat. Fázishelyzetről csak *szinkronizált vibrátorok* esetén lehet beszélni, bár a hazai vélemények megoszlanak a tekintetben, hogy szükséges-e a szinkronizálás. Kétségtelen, hogy nyugati államokban gyártanak és alkalmaznak vibrátorcsoportot szinkronizáló különböző *automata vezérlőberendezéseket*. Ez nagyban valószínűsíti gyakorlati előnyüket. Ezzel szemben pl. az 1. sz. Épületelemgyárban még az asztalvibrátoroknál is megszüntették a szinkronizálást, azon elv alapján, hogy az sablon az egyes vibrátorok (oszillátorok) között — lengéstani szempontból — *csatolást* létesít. Ha a csatolás megfelelő, akkor a vibrátorok — közel azonos saját rezgésszámok esetén — a tapasztalat szerint együtt fognak rezegni (hasonlóan a közel egyenlő hosszúságú, különböző fázisban lengő fonálingákhoz, melyek rövid idő elteltével közös fázisban lengenek, ha állványaikat összekötjük). Mindezeket feltételezve is ügyelnünk kell a betonkeverékkel telt sablon lengésalakjára és ennek figyelembevételével kell a vibrátorokat rajta elhelyezni.

A felerősítés helyét még egy tényező befolyásolhatja. A *felerősítő szerkezeti elemek* megváltoztathatják a sablon rugalmas viselkedését: elhangolva a sablon saját rezgésszámát, megváltoztathatják az önlengés alakját. Ez a jelenség azonban fontos módszert ad kezünkbe a vibrátor beállítására. A készen beszerezhető vibrátort átállítani általában nem lehet. A lengéviszonyok kedvező kialakítása céljából ezért a sablon rezgésállapotának változtatását kell felhasználnunk. Ez elvégezhető pl. laposacéldarab felhegesztésével, vagy merevítőborda stb. alkalmazásával, vagyis a sablon keresztmetszeti és hosszanti tömegeloszlásának megváltoztatásával.

d) *A vibrátort jól kell felerősíteni.*

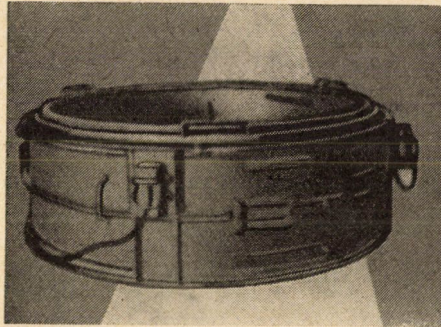
A zsalurázó vibrátorok alkalmazásakor néha észlelt nem kielégítő eredmény oka legtöbbször éppen a rossz felerősítésben keresendő. A felerősítő szerkezeti alkatrészek feladata elsősorban a vibrátor rezgésének maradéktalan továbbítása. Cserélhető vibrátor esetén a kötésnek oldhatónak kell lennie, olyannak, amely rázás közben nem lazul meg. A meglazult kötés ugyanis — a dinamikus lengéscsillapítókhoz hasonlóan — csökkenti, esetleg teljesen el is „nyeli” a rezgést. Gazdasági szempontból pedig az a lényeges, hogy a kötőelemek élettartama hosszú legyen.

Ezen feltételeknek a nagy és sík felületen felfekvő kötések felelnek meg a legjobban (pl. a GERLEY—HANTOS-féle szabadalmazott kötés). Ezeknél az ütéseket nagy felületek veszik fel, az elmozdulást csavar vagy ékkötés gátolja.

A rezgést a sablon lemezeibe bevezetni és ott megfelelően elosztani alapjában véve bonyolult probléma, melynek megoldását igen körültekintően kell elvégeznünk.

7. Zsalurázó vibrátorok hazai és külföldi alkalmazása

Az eddig elmondottak jól körülhatárolják a zsalurázó vibrátorok alkalmazási területét. Eszerint csak ott használhatók, ahol a sablon vagy zsaluzat velük *elégendő nagyságú* rezgésbe hozható. További feltétel, hogy a betonelem lehetőleg *vékonyfalú* legyen. Ezért zsalurázó vibrátort alkalmaznak csövek, rácsos oszlopok, gerendatartók, vékony prizma alakú testek, bordákkal merevített lemezszerkezetek telepített üzemű előregyártásánál (a magas- és mély-



13. ábra. Fekvő csőgyűrűsablon, alkotó irányú vibrátor forgástengelyekkel

építés monolit vasbetonszerkezeteiben történő alkalmazása nem tartozik tanulmányunk keretébe).

A zsalurázó vibrátor alkalmazását néhány ábrán is bemutatjuk.

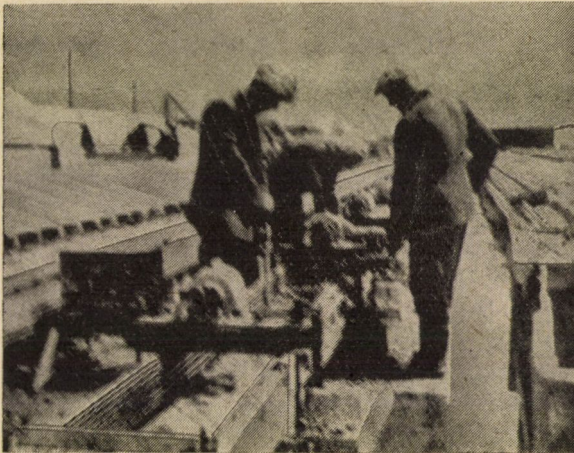
A 13. ábrán vibrált, gyűrű alakú betoncső sablon látható. A zsalurázó vibrátorok a külső hengerpaláston vannak elhelyezve, a hengeralkotóval párhuzamos forgástengellyel, mert a sablon így végez a hossztengelyére merőleges irányú hajlító lengéseket. Ha a forgórész forgástengelye az alkotóra merőleges lenne, akkor a sablon merev testként viselkednék, ami az adott esetben káros. A vibrátor rezgési csomópontban van elhelyezve (a gyűrű alaplengésének csomópontjában).

A 14. ábra másik csőablont mutat be, ahol a vibrátor forgó részének forgástengelye a hengeralkotóra merőleges és egyben érintőleges helyzetű. Ennél az elrendezésnél magas, keskeny elem előállításáról van szó, amikor az ábrán látható elhelyezéssel biztosítható legjobban az egész sablon vibrálása. A vibrátor a földön álló sablon saját rezgésének második felharmonikus hulláma szerinti csomópontjában van elhelyezve.



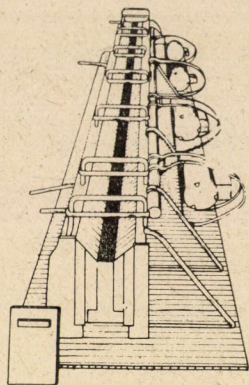
14. ábra. Álló csősablont, alkotóra merőleges irányú vibrátor forgástengellyel

A 15. ábra üreges vasbetontartók formázását végző vibrátorokat mutat be. Ezeknél a vízszintes helyzetű forgástengely adja a jobb rezgésviszonyokat, mert a zsalufal vízszintes vonal mentén rögzített. A vibrátorok itt egyenlő hosszúságú mezőkre osztják a sablont.



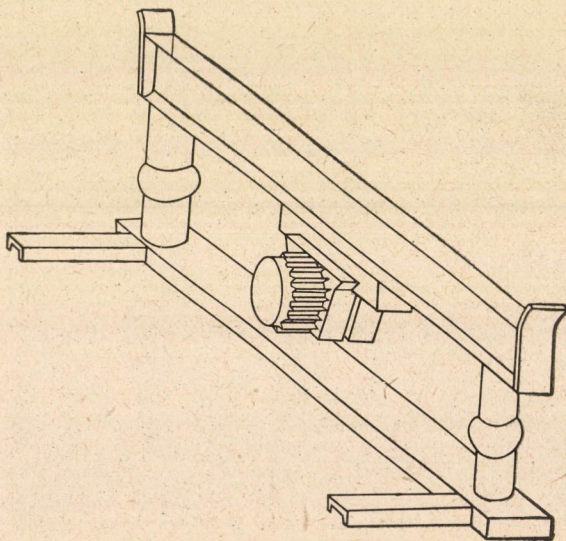
15. ábra. Üreges födémgerenda gyártása zsalurázó vibrátorok segítségével

A 16. ábrán T-keresztmetszetű födémgerenda sablonja látható, reászerezelt zsalurázó vibrátorokkal.



16. ábra. T keresztmetszetű födémgerenda sablonja rászertelt zsalurázó vibrátorokkal

A 17. ábra a zsalurázó vibrátorok egyik különleges alkalmazását mutatja. A vibrátorokat nem a sablonra, hanem gerendára erősítették és erre fektették fel a sablont. A módszer hasonlít a rázóasztalos eljáráshoz, de nem azonos vele. Ugyanis az annál szokásos szerkesztési elvek (merev asztal, gerjesztő elemek mechanikai összekapcsolása) ennél a kialakításnál módosultak. Az alkalmazás lényegében a zsalurázó vibrátor különleges felerősítési módja.



17. ábra. Zsalurázó vibrátor csatolása nagyméretű sablonhoz, conveyor gyártás esetén

Az üzemben dolgozó betontechnológust érdeklő kérdés, hogy mikor alkalmazzon zsalurázó és mikor asztal vagy merülő vibrátort?

Ha a technológiai folyamat *szend rendszerű gyártást* tesz szükségessé, akkor nem alkalmazhatunk asztalvibrátort. Ha a betonkeverék földnedves konzisztenciájú, akkor a merülő vibrátor alkalmazása veszélyes az esetleg visszamaradó üregek miatt.

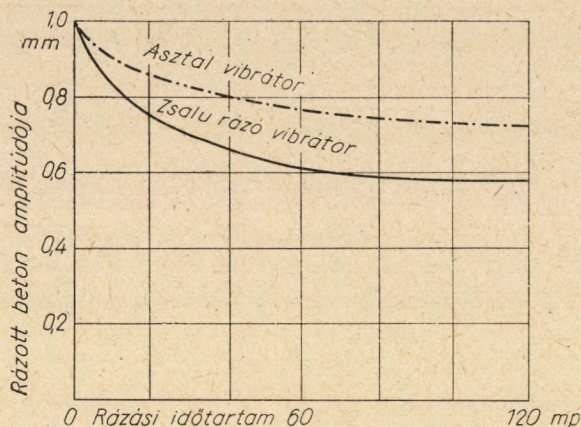
Conveyor-rendszerű gyártásnál a kérdés esetenként külön-külön és csak beható gazdaságossági számítással dönthető el. A zsalurázó vibrátor olcsóbb a többi vibrátornál, de a conveyor-rendszerű elemgyártásnál a szüntelen le- és felszerelés növeli a munkaigényességet. Ugyanis állandóan sablonra rögzítetten hagyni a vibrátort csak igen nagy darabszámú sorozatok gyártásakor gazdaságos. Mégis azt tapasztaljuk, hogy conveyor-rendszerben *zsalurázó vibrátort alkalmaznak* még azokban az államokban is, ahol a munkabér és az anyagár aránya nagyobb, mint nálunk.

A zsalurázó vibrátorok alkalmazásának mellőzését kívánhatják egyes betontechnológiai szempontok. Ilyen lehet a betonkeverék összetétele és a betonelem alakja. Nagyon száraz betonkeveréket nagy intenzitású rázással, vagy esetleg ezzel egyidejű sajtolással lehet csak bedolgozni. Erre a célra a rázóasztal megfelelőbb. Míg a sajtolás nagyértékű gépi berendezést kíván, addig a zsalurázó vibrálási eljárás alkalmazása az elérhető eredményhez viszonyítva *rendkívül kis költség* mellett lehetséges. *Vékonyfalú elemeket zsalurázó, vastagokat asztalvibrátorral célszerű berázni.*

Rázás közben tömörödik a beton, a folyékony állapotból rezgéstani szempontból szilárd állapot felé halad. Ezért az asztallal együtt rezgő betonrétegek vastagsága és tömege alulról fölfelé haladó irányban egyre növekszik. A tömeg növekedése az elmondott okok miatt (l. 6. fejezet a) pontját) csökkenti a lengés tágasságát. A rázóasztal és a reá kerülő sablon súlya túlságosan nagy a bedolgozandó keverék súlyához képest, ezért az *amplitudó csökkenése kisebb mértékű*, mint nagy tömegnek zsalurázó vibrátorral való rázása esetén (18. ábra).

Zsalurázó vibrátornál a helyzet egészen más. A rázás elején csak a vibrátor és a hozzákapcsolt zsalulemez rezeg. Ezek tömege aránylag kicsiny. A vibrálás előrehaladtával a zsaluzathoz hozzátömörödő betonkeverék rohamosan növeli a rezgő tömeget, de csak akkor, ha a berázandó betonréteg túlságosan vastag. Többek között ezért alkalmazható a zsaluvibrátor csak *vékony falú elemek* berázására, ahol ez a tömegnövekedés nem csökkenti nagymértékben az amplitudót és ezzel a rázás gyorsulását, miáltal megtartható a 6g—4g határ.

A zsalurázó vibrátornak különleges alkalmazási területe a *kizsaluzás*. A megszilárdult beton a zsaluzathoz köt és ezért a technológiai folyamat végén nehéz a szétválasztás. Ennek oka az, hogy az olajozás ellenére 2—8 (olykor 20 kg/cm²) tapadófeszültség köti a betont az acélsablon felületéhez. Ezért nagy terjedelmű betonelemnél számottevő erő kell a kizsaluzáshoz. Az alkalmazott nagy erő a sablont hamar tönkreteszi és esetleg a betonelemet is



18. ábra. Rázott beton amplitúdójának csökkenése (együttlengő tömegek növekedésének hatására) nagyméretű betontesteknél, asztal és zsaluvibrátor alkalmazása esetén

megrongálja. Ha a zsaluzatra vibrátort erősítünk és kizsaluzás előtt működésbe hozzuk, akkor a vibrátor környezetében a lengések következtében a zsaluzat — melynek rezgését már nem követi a kész betonelem — elválk a betontól, azaz köztük „repedés” keletkezik. Ez a sablon és betontest felülete mentén gyorsan tovaterjed és végül a betonelem teljesen elválk a sablontól. Ez az eljárás olcsóbbá teszi a betonelem gyártását, mivel a *sablon élettartamát növeli*.

8. Javaslatok a zsalurázó vibrálás hazai gyakorlatának elterjedésére

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy a zsalurázó vibrátor alkalmazása sok helyütt jelentős gazdasági előnnyel jár. Hazánkban mégis kevésbé terjedt el, aminek egyik oka az, hogy hosszú ideig nálunk csak merülő és asztalvibrátorokat gyártottak.

Elsőrendű feladat több zsalurázó vibrátortípus mielőbbi kidolgozása és a prototípusok gyártása. A vibrátorok kiválasztása egyes, nagy számban előregyártott vasbetonelemnek megfelelően kell hogy történjék. Kívánatos lenne az eddig alkalmazott acélsablont is felülvizsgálni és az esetleg szükséges változtatásokat a zsalurázó vibrálásához alkalmazandó új sablonok gyártásánál figyelembe venni. Az átalakított acélsablonnal és az új zsalurázó vibrátorral végzendő kísérletek eredményei egybevetendők lennének a részletes munkatudományi és gazdaságossági elemzések számadataival.

A zsalurázó vibrátortípusok kidolgozásánál figyelmet kellene szentelni a magas- és mélyépítés monolit vasbeton szerkezeteinél alkalmazható típusok kialakításának is. Ennek részletes kifejtése azonban nem feladata tanulmányunknak.

Véleményünk szerint a javasolt elgondolások keresztülvitelével az előregyártás egyik fontos területén számottevő minőség-növekedés és önköltség-csökkenés lenne elérhető.

IRODALOM

- BRANBERGER, K.: Betontömörítés vibrálással, Budapest 1954.
 GYESZOV—MIKLASEVSKIJ—GERSBERGER—SESZTOPEROV: A beton bedolgozása vibrátor alkalmazásával, Moszkva 1952.
 L'HERMITE: A friss beton vibrálása, Párizs, Dunod, 1950.
 MAUS, C.: Verdichtung von Betonoberflächen durch Ultraschall, Bautechnik, 1957.
 SÁFRÁN GUSZTÁV: Betonminőség javítása merev falú fémzsaluzat alkalmazásával, Magyar Építőipar, Budapest, 1957/9—10.
 SZIKSZAY GERŐ: A beton tömörítése vibrálással, Budapest—Miskolc, 1953.
 TÓTH FERENC: Új szerkezetű vibrátor-asztal, Építésügyi Szemle, Budapest, 1957/3—4.

ÖSSZEFOGLALÁS

A zsalurázó vibrálási módszerrel — az állandó betonminőségen és a gyors kiszaluzhatóságon kívül — többek között biztosítani lehet a sablonok gyártáscikluson belüli gyors forgását, a bonyolult alakú betonidomok formázhatóságát, a betonszilárdság növelését, ill. a cementadagolás csökkentését és a vibrálással egyébként együttjáró káros hatások kialakulásának minimumra való leszállítását is. Az ajánlott vibrálási mód sok előnye mellett viszonylag csekély számú az egyébként minden vibrálási módnál mutakozó hátrány. De még a csekély számú hátrány is aránylag könnyen kiküszöbölhető megfelelő intézkedés betartásával.

Zsalurázó vibrátorok sikerrel ott alkalmazhatók, ahol a sablon vagy a zsaluzat eleendő nagyságú rugalmas rezgésbe hozható és a betonelem aránylag vékony falú.

Zsalurázó vibrátorok néhány alkalmazása a tanulmány ábráin látható. Az ábrák feltüntetik a zsalurázó vibrátor egyes különleges felerősítési módját is.

Míg a sztend-rendszerű elemgyártásnál e módszer gazdaságos alkalmazása egészen kézenfekvő, addig a conveyor-rendszerű gyártásnál ezt a kérdést csak esetenkénti gazdaságossági elemzéssel lehet egyértelműen eldönteni. A módszer alkalmazása egyébként a conveyor-rendszerű gyártásnál is elterjedt, bár mellette alkalmazzák a többi vibrálási módszert is.

A tanulmány javasolja többféle zsalurázó vibrátortípus terveinek kidolgozását és prototípusok gyártását.

A telepített üzemű előregyártásnál alkalmazható zsalurázó vibrátortípusok kialakítása után kellő figyelmet kell szentelni a magas- és mélyépítés monolit vasbeton szerkezeteihez alkalmazható zsalurázó vibrátortípusok kifejlesztésének, miután ezeknél a szerkezeteknél is fennáll a zsalurázó vibrálási mód minőség-növelő és önköltségsökkentő hatása.



RADIOAKTÍV IZOTÓPOK FELHASZNÁLÁSA A FOLYAMATOS ÖNTÉS ELLENŐRZÉSÉRE

FODOR JÓZSEF és VARGA KÁROLY

CSEPEL VAS- ÉS FÉMMŰVEK RADIOIZOTÓP LABORATÓRIUMA

[Beérkezett 1958. június 13-án]

A folyamatos öntéssel történő bugaöntés egyre nagyobb tért hódít. A szakirodalomban egyre több közlemény foglalkozik ezzel a problémával (pl. 1, 2, 3, 4). Hazánkban Diósgyőrött létesítettek ilyen célra kísérleti üzemet.

Különböző acélok folyamatos öntésekor meg kell határozni a húzási sebességeket és a különböző sebességekhez tartozó hűtési feltételeket. Ezen kérdésekre, melyek egymással szorosan összefüggnek, helyes választ csak úgy tudunk adni, ha az öntés közben képződött folyékony zóna mélységét és lehűlési görbáját ismerjük. Ezek ismerete gyakorlati felvilágosítást ad arról, hogy hol lehet a folyékony acél kifolyásának veszélye nélkül a bugát biztonságosan elvágni.

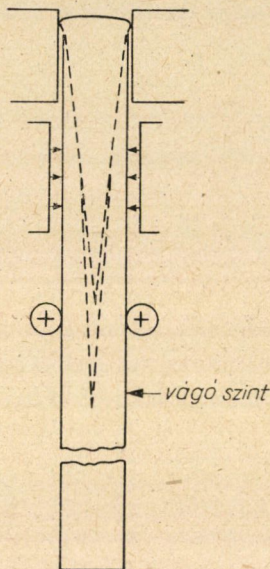
10—20 m magas toronyban legfelül helyezkedik el az öntőszinten a kokilla beöntőnyílása. Alatta van a rézből készült hűtőkokilla, ezután következik a másodlagos hűtőzóna, amely vízpermetezéssel hűti a tuskót, majd a húzóhengerek és végül a vágószint következik (1. ábra). A felül beöntött acéltuskónak először a külső kérge szilárdul meg a hűtőzónában.

A belseje ekkor még folyékony állapotban van. Ez a fentebb említett folyékony zóna, tölcérszerűen lefelé szűkülve változó mélységig lenyúlik az öntési szinttől. A folyékony zónán belül, vagy annak folytatásaként találunk még kristálykásás zónát, ahol még a felső folyékony zóna hidrosztatikai nyomása érvényesül. Ha itt vágják el a bugát, az acél még kifolyhatik, tehát a zóna mélységét úgy kell mérnünk, hogy ezen kristálykásás zóna is benne legyen.

A folyékony zóna mélységének meghatározásakor abból a tényből lehet kiindulni, hogy ott hidrosztatikai nyomás s a kristálykásás szerkezet következtében még mozgás lehetséges. Az izotópokkal történő méréshez olyan anyag kell, amelyik nagy fajsúlya révén könnyen mozog ebben a nagy viszkozitású közegben, nem olvad meg az acél hőmérsékletén és könnyen jelezhető.

Erre a célra a wolfram igen alkalmas, melynek f_s -a 19,1, olvadáspontja 3400 C°. Wolframból 20 mm-es átmérőjű gömböket készítettünk, melybe 1,5 mm átmérőjű lyukat fúrtunk, s a lyukba Co^{60} dróttal azonos átmérőjű inaktív drótot helyeztünk, s a drótdarabkát vízüveges samottliszttel betapasz-

tottuk. Óvatos szárítás, majd izzítás után arról győződünk meg, hogy a drótdarabka beragasztása a wolframtestbe a kísérleti körülmények között megfelelő s így a Co^{60} -as drót nem hagyja el öntés közben a wolframtestet. A Co^{60} felezési ideje 5,3 év, béta sugárzásának energiája 0,32 MeV, gamma sugárzásának energiája 1,17 és 1,33 MeV; kemény gamma sugárzása 100 mm acélon jól keresztülhalad. A folyékony zóna mélységét úgy határoztuk meg, hogy a 20 mm átmérőjű wolfram gömb közepébe kb. 10 mikrocurie Co^{60} -at helyez-



1. ábra

tünk el. Feltételezve, hogy a 200×200 mm-es buga közepén helyezkedik el a $10 \mu\text{C}$ Co^{60} , a várható dózis-teljesítmény 10–15 mr/óra. Ezen dózis detektálása könnyen elvégezhető a buga felületén. Detektáláshoz hordozható dózismérő műszert használtunk („Aspor”), ugyanis a buga felületén elegendő a $10 \mu\text{C}$ Co^{60} -ból származó dózis-maximum helyének bejelölése. Erre a célra pedig ilyen egyszerű műszer is megfelel.

Öntés közben a Co^{60} -at tartalmazó wolframtestet az öntőnyíláson át hosszú fogó segítségével bedobtuk a folyékony acélba. A wolframtest a bedobás után a még folyékony belső zónában addig süllyedt, míg el nem érte a folyékony zóna legmélyebb pontját. A tuskó kihülése után „Aspor” mérőkészülékkel kívülről megkerestük, hogy hol van a radioaktív test a tuskón belül és ezt a pontot megjelöltük. A mélység meghatározásához jelölnünk kellett a bedobás pillanatában a buga valamely részét — hogy a jelölési hely és a berendezés méreteinek ismeretében — a Co^{60} -al jelzett test távolságát pontosan rögzíthessük. A jelzést hidegvágóval végeztük az 1. ábra szerinti

vágószinten, mely az acél beöntőnyílásától 5755 mm-re van. Ezen hely és a wolframtest közötti távolsággal adva van a folyékony zóna alsó pontja. Három párhuzamos kísérletet végeztünk. A három mérési eredmény szerint ez a mélység 3600 és 3700 mm között volt. A mérések közötti eltérés nem nagyobb, mint a hűtőkokillában a folyékony acél szintjének ingadozási lehetősége. Természetesen a mért eredmények önmagukban nem voltak bizonyító erejűek, mert feltételezés szerint előfordulhat, hogy a jelzett wolframtest kristályosodás vagy a beadagolás asszimmetriája révén fennakad a folyadék-tölcser valamely pontján. A jelzett wolframtesten kívül Pb-ba szerelt Co ⁶⁰-as golyókkal is próbálkoztunk, azonban az ólom gyors elolvadása miatt ezzel a módszerrel a 3600—3700 mm-es mélység helyett 2550—2750 mm mélységet kaptunk azonos körülmények között.

A wolframtesttel történt mérések szerinti 3600—3700 mm-hez is még hozzá kell számítani azt, hogy a wolframtest körül a folyékony acél megdermed és ennek következtében a wolframtest a folyadéktölcserben fennakadhat.

A wolframtesttel történt mélységmeghatározás helyességéről a folyékony zóna lehülési görbéjének felvétele adott megnyugtató választ.

A folyamatos öntés kristályosodási viszonyait SIGEL és MOROSINSKI tanulmányozták radioizotóppal (P^{32} , S^{35}) olyan módon, hogy az öntést félbeszakítva ólomba helyezett izotóppal jelezték a folyékony zónát [5, 6].

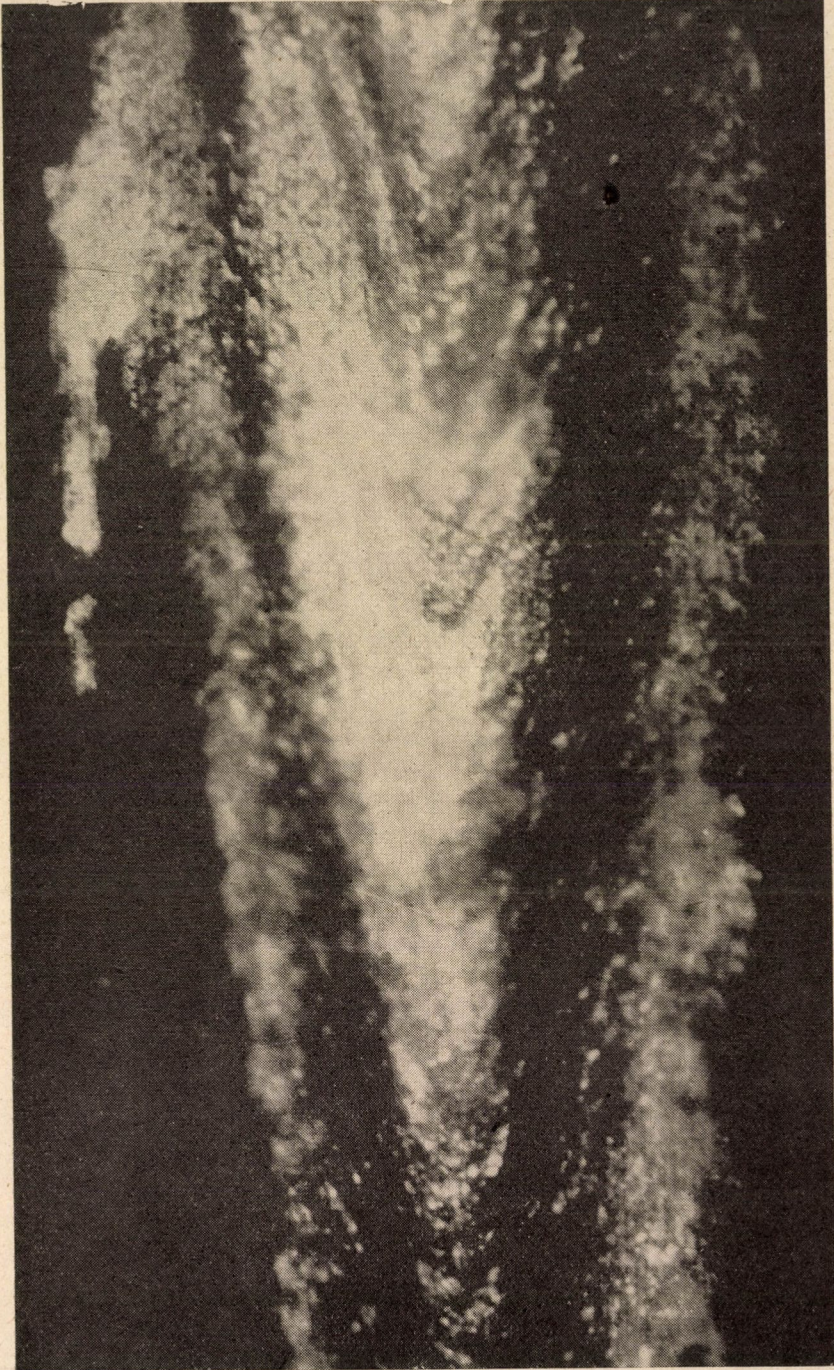
A folyékony rész lehülési görbéjének felvételét P^{32} izotóppal mint nyomjelzővel végeztük úgy, hogy készítettünk elemi vörös foszforból több preparátumot összesen 100 mC mennyiségben. (Ez a mennyiség olyan kevés, hogy kémiai elemzéssel ki sem mutatható.) A radioaktív anyagot 25 mC-ként külön-külön ólomgolyóba helyeztük. Az ólomgolyókat ráfűztük 2 m hosszú 5 mm átmérőjű acélpálcára egyenlő távolságban. A P^{32} -t tartalmazó rúd benyomására olyan pillanatot kellett választani, melyben a kristályosodási viszonyok az üzem menetközbeni állapotát fejezik ki. Öntés félbeszakítása közben is lehet az izotópot adagolni, így azonban az újabb folyékony acél a kristályosodó tuskó felső szintjén elmossa az éles autoradiografiás képet adó izotóp határt. Ezért — hogy éles határt s így a folyékony zóna pontos mélységét megkapjuk — az öntés befejezésének pillanatában adagoltuk az izotópot. Ekkor még a kristályosodási viszonyok is azonosak az üzemközbeni állapottal.

Az öntés befejezésének pillanatában az említett acélpálcát benyomtuk a folyékony fürdőbe, ott az ólom elolvadt és a P^{32} izotóp beszenyezte a teljes folyékony részt. A bedobás pillanatáig a képződő szilárd zónát nem tudta beszenyezni, mert a szilárd részben már sokkal kisebb a diffúziós sebesség.

A tuskó mérete 200 × 200 mm volt. Kísérletünket az alábbi termikus adatok jellemezték :

A szénacél öntési hőmérséklete 1530 C° (merülő pirométerrel).

A tuskó hőmérséklete a húzóhengereknél 900 C° (optikai pirométerrel).



2. ábrn

A hűtőkokillába a bemenő és kijövő víz hőfokkülönbsége 20 C°.

Fajlagos hűtővízfogyasztás a hűtőkokillában 1 l/kg acél.

Másodlagos hűtővíz fogyasztás összesen 2200 l/2340 kg acél.

A tuskót lehűlés után hosszában elvagtuk. A vágási felületet megmunkáltuk, majd autoradiografiás felvételt készítettünk, melynek segítségével megtudtuk állapítani a folyékony rész lehűlési görbáját. A 2. ábrán a folyékony rész egy szakaszának autoradiografiás felvétele látható. Az autoradiografiás felvételtől leolvasható, hogy az elsődleges folyékony rész mélysége 2550 mm (a Pb-al jelzett testtel mért mélység).

További jól elkülönülő, már kristálykásás zóna mélysége 3250 mm, s a már erősen kristályos, de még nem szilárd zóna teljes mélysége 3700 mm.

Az így adódott mélység megegyezik a jelzett wolframtesttel történt meghatározáskor kapott értékkel.

Módszerünket a diósgyőri Lenin Kohászati Művek folyamatos öntőművében próbáltuk ki és alkalmaztuk először.

IRODALOM

1. V. SZ. RUTESZI, A. P. PRONOV: Sztali 1956. No. 3.
2. K. G. SPEITH und A. BUNGEROTH: Stahl und Eisen 1952, No. 15. S. 869—885.
3. W. B. PIERCE: Blast Furnace and Steel Plant, 1953. No. 11. p. 1301—06.
4. G. G. CARR: Iron Age, 1953. 24. IX. p. 55.
5. O. D. SIGEL: Besonderheiten der Herstellung von Stranggußhalbzeugen, Kontin. Stranggießen von Sthl. Hrsg. Akad. Wiss. UdSSR, 1956.
6. A. T. MOROSINSKI: Ergebnisse der Untersuchungen über die Möglichkeit der Einführung des Stranggießens von Halbzeugen. Kontin, Stranggießen von Stahl. Hrsg. Akad. Wiss. UdSSR. 1956.

ÖSSZEFOGLALÁS

1. Egyszerű módszert dolgoztunk ki a folyamatos öntés folyékony része mélységének mérésére olyan módon, hogy Co⁶⁰-al jelzett wolfram golyót dobtunk az acéltuskóba s helyét egyszerű sugármérő műszerrel határoztuk meg. Módszerünket a lehűlési görbe autoradiografiás felvételével ellenőriztük.

2. Autoradiografiás módszert alkalmaztunk a folyamatos öntés ellenőrzésére; módszerünket a diósgyőri Lenin Kohászati Művek folyamatos öntőműve öntési körülményeinek ellenőrzésére használtuk fel.

A SZTATIKAI KOORDINÁTAKIEGYENLÍTÉS VÉGREHAJTÁSA

I. RÉSZ. EGYPÖNTÖS KIEGYENLÍTÉS

HAZAY ISTVÁN

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

ALKALMAZOTT GEODÉZIAI TANSZÉK, NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM, SOPRON

[Beérkezett 1958. augusztus 21-én]

Mintegy 20 évvel ezelőtt vizsgálatokat végeztünk azoknak az ellentmondásoknak helyes elosztása céljából, amelyek az alsórendű háromszögelési hálózatok meghatározásához alapul szolgáló, már végleges koordinátákkal meghatározott, adott háromszögelési pontok (felsőrendű, illetve régebben meghatározott alsórendű pontok) között kisebb-nagyobb mértékben rendszerint mutatkoznak. Miután az adott pontok az új hálózatnak mintegy keretűl szolgálnak, az említett ellentmondást *kerethibának* neveztük el. A vizsgálatok, amelyeknek eredményét annak idején az [1] jelű munkánkban közöltük, azt mutatták, hogy az új pontok meghatározásánál a meghatározó irányokat hosszukkal lineárisan arányos *iránysúllyal* célszerű felhasználni. Kimutattuk továbbá azt is, hogy mintegy 7 km irányhosszig az említett irány súly alkalmazása akkor is helyes, ha kerethibák egyáltalában nincsenek és csupán a régi pontok közé beiktatandó új hálózati rész meghatározására végzett méréseket terhelik véletlen hibák. Az irány súly alkalmazásának elméleti helyességét ilyen esetre az újabb szögmérőműszerek körosztási hibáinak kisebb és leolvasási pontosságának nagyobb volta mintegy 10 kilométeres irányhosszig terjesztette ki.

Miután a gyakorlat is igazolta, hogy az irányhosszakkal arányos irány súlyok alkalmazása helyesen oldja meg a kerethibák arányos elosztását és mintegy 10 kilométeres irányhosszig akkor is helyes, ha csupán mérési hibák fordulnak elő, a magyarországi alsórendű háromszögelésnél a meghatározó irányokat az irányhosszakkal lineárisan arányos súllyal használjuk fel és a mért irány sorozatok tájékozásánál a tájékozó irányokat ugyancsak ilyen súllyal vesszük figyelembe.

A $[pv]$ = minimum feltétel kielégítése a szokásos koordinátakiegyenlítéssel még akkor is elég nehézkes, ha a súlyok a $p_i = t_i$ egyenlőségből adódnak, ahol t_i valamely meghatározó irány hossza kilométeres egységekben. Ezért dolgoztunk ki olyan eljárást, amely a megfelelő irány súlyokat már szerkezetében magában foglalja és így kevesebb munkával, tehát gyorsabban vezet eredményre. Az eljárás tisztán mechanikai (főképp sztatikai) elveken alapul; ezért neveztük el *sztatikai koordinátakiegyenlítésnek*. [1] alatt ismer-

tettük már a sztatikai koordinátakiegyenlítés alapelveit is, továbbá igazoltuk, hogy a sztatikai koordinátakiegyenlítés ugyanazokat az eredményeket adja, mint a $[tv] = \text{minimum}$ feltételű koordinátakiegyenlítés, majd bemutattuk a koordinátakiegyenlítés tartományába tartozó feladatok megoldását.

Megemlítettük annak idején, hogy a kiegyenlítés eredményei alapján a GAUSS-féle középhiba is képezhető. Azóta ezzel a kérdéssel is bővebben foglalkoztunk és megvizsgáltuk, hogy a különféle mérési eredmények és különleges súlyok alapján hogyan kell, illetve hogyan a legcélszerűbb a középhibák számítása.

A sztatikai koordinátakiegyenlítés a magyar háromszögelésben immár két évtizede van jó eredménnyel gyakorlati alkalmazásban. Ez idő alatt kialakult, hogy az egyes tényezőket — különösen arra figyelemmel, hogy az ellenőrző számítások tényleg ellenőrzésül szolgálhassanak — milyen pontossággal (hány tizedesre) célszerű számítani és kialakultak a legmegfelelőbbnek látszó számítási sémák is. Volt olyan gondolat, amelyet annak idején csak felvetettünk, de gyakorlatilag akkor még nem vezettünk végig. Ilyen például az a körülmény, amikor egyes mérési eredményeknek a távolságon (irányméréskor az irányhosszon, hossz méréskor a mért hosszon) kívül még más szempontból is valamilyen *különleges súlyt* tulajdonítunk. Előfordulhat ez csupán iránymérések vagy csupán hossz mérések esetében is, ha például egy irányt vagy hosszat többször mértünk, mint a többit, de különösen akkor, ha iránymérések mellett hossz méréseket is végeztünk és e kétféle mérési csoport között a súlyoknak bizonyos arányát állapítjuk meg.

A következőkben a sztatikai koordinátakiegyenlítés végrehajtását kívánjuk a mai kifejtettebb és az eredetihez képest jelentékenyen egyszerűsített alakjában bemutatni. Minthogy az [1] jelű munka e sorok olvasói számára már feltehetően nehezen hozzáférhető, szükségesnek látszik, hogy az abban foglaltak egy részét, nevezetesen a sztatikai koordinátakiegyenlítés alapelveinek és módszerének ismertetését röviden megismételjük.

Megemlítjük még, hogy a sztatikai koordinátakiegyenlítés elveit azóta már az egy pontos kiegyenlítés *grafikus* megoldására is felhasználták [2], sőt alapelveit átvették olyan közelítő eljáráshoz is, amelyet azoknak a pontoknak a meghatározásához használunk, amelyeknél nem szükséges okvetlenül a szabatos kiegyenlítés alkalmazása [3].

1. A sztatikai koordinátakiegyenlítés alapelve

Képzeli el, hogy valamely pont meghatározására végzett irány- és hossz mérések mérési javításai a pont kiegyenlítéssel meghatározott (végleges) helyén *síkbeli közös metszéspontú erőrendszer* hoznak létre. Az irányméréseknél az R erő a v mérési javításnak az egység-távolságban megfelelő és az irányra merőlegesen jelentkező lineáris eltérés:

$$R = \frac{v''}{\rho''} \mathbf{1} = \frac{v''}{\rho''}, \quad (1)$$

míg a hosszmeréseknél a v_L hosszmerési javításnak a távolságegységre eső része, vagyis a mért hosszúságot t -vel jelölve :

$$R = \frac{v_L}{t}, \quad (2)$$

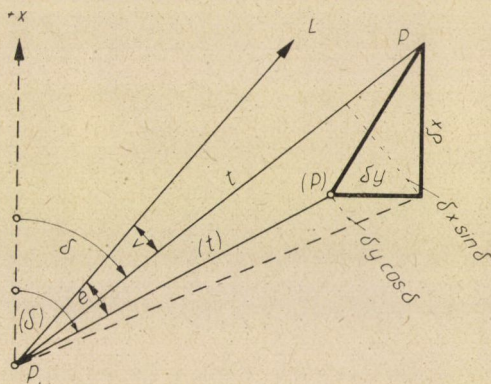
amely a hosszmerés irányába esik. Minden mért irányhoz vagy hosszhoz egy-egy erő tartozik. A kiegyenlítés alapelve, hogy az erőrendszer az új pont kiegyenlítéssel számított koordinátáival meghatározott P ponthelyén, tehát a végleges ponthelyen egyensúlyban legyen. Az egyensúlyt kifejezi, hogy az erők koordinátatengelyek szerinti vetületeinek összege külön-külön zérus :

$$[R_y] = 0 \quad \text{és} \quad [R_x] = 0. \quad (3)$$

Ezen a két egyensúlyi egyenleten, mint alapegyenleteken alapszik a sztatikai kiegyenlítés úgy, hogy az alkalmas mindazoknak a feladatoknak a megoldására, amelyek a koordináta-kiegyenlítés körébe tartoznak.

2. Az előmetszés kiegyenlítése a kiegyenlítés előtt véglegesen tájékozott irányértékekkel

Az alsórendű háromszögelésnél az előmetszés mérési eredményeinek általában a kiegyenlítés előtt véglegesen tájékozott irányértékeket tekintjük. A mérési javítások kifejezését az 1. ábráról olvashatjuk le. A P_i pont az egyik



1. ábra

adott pont, amelyről a meghatározandó új P pontot irányoztuk. Ha (P) az új pont előzetes helye, amelyet az (y) és (x) előzetes koordináták határoznak meg, L a mért és tájékozott irányérték és (δ) a P_i ismert pontról a P új pont felé menő iránynak az (y) és (x) előzetes koordináták alapján számított előzetes irányszöge, akkor az úgynevezett irányeltérés :

$$e = (\delta) - L. \quad (4)$$

A kiegyenlítés során az új pont elmozdul a P kiegyenlített helyre. Ha a δy és δx koordinátaváltozásokat a kiegyenlítés szokásai szerint deciméterben kívánjuk megkapni, a v mérési javítás másodpercben :

$$v'' = + \frac{0,1 \varrho'' \cos(\delta)}{(t)} \delta y - \frac{0,1 \varrho'' \sin(\delta)}{(t)} \delta x + e'', \quad (5)$$

ahol (t) az (y) és (x) előzetes koordináták alapján számított *előzetes távolság*. Miután az (1) képlet szerint az erő v''/ϱ'' , a (3) alatt felírt egyensúlyi egyenleteknek a

$$[-v \cos \delta] = 0 \quad \text{és} \quad [v \sin \delta] = 0 \quad (6)$$

egyenletek felelnek meg, ha valamennyi erő értékét ϱ'' -cel szorozzuk. Ez megtehető, mert az összegegyenletek zérus értékűek.

Feltételezve, hogy a végleges és az előzetes irányszög közti különbség, vagyis a $\delta - (\delta)$ szög oly kicsi, hogy a számítási élesség határán belül a $\sin \delta = \sin(\delta)$ és $\cos \delta = \cos(\delta)$ közelítést megengedhetjük, számítsuk iránnyonként a $v \cos(\delta)$ és $v \sin(\delta)$ vetületeket és a megfelelő vetületeket összegezve, állítsuk fel a (6)-nak megfelelő egyensúlyi egyenleteket. Ha bevezetjük az

$$\begin{aligned} a_i &= - \frac{0,1 \varrho'' \cos^2 \delta_i}{t_i} & b_i &= - \frac{0,1 \varrho'' \sin^2 \delta_i}{t_i} \\ c_i &= \frac{0,1 \varrho'' \sin \delta_i \cos \delta_i}{t_i} \end{aligned} \quad (7)$$

iránykoefficienseket, akkor az *egyensúlyi egyenletek* :

$$\begin{aligned} [a] \delta y + [c] \delta x - [e \cos \delta] &= 0 \\ [c] \delta y + [b] \delta x + [e \sin \delta] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

A két egyenletből a koordinátaváltozások kiszámíthatók. Az egyensúlyi egyenletek mindig szimmetrikusak.

Az a és b iránykoefficiensek mindig negatív előjelűek. A c iránykoefficiens pozitív, ha $\text{sg}(y - y_i) = \text{sg}(x - x_i)$, ahol y és x az új pont, y_i és x_i pedig az ismert pont koordinátáit jelenti, vagyis ha $\text{sg} \sin \delta = \text{sg} \cos \delta$; ellenkező esetben negatív. Pozitív tehát az I. és III. szögnegyedben és negatív a II. és IV. szögnegyedben. Az iránykoefficiensek számítása az irányszög számításával együtt végezhető el. Mint a (7) képletekből megállapítható, a c iránykoefficiens abszolút értéke egyenlő a másik két iránykoefficiens abszolút értékének geometriai középarányosával.

A koordinátaváltozások meghatározása után a

$$\delta\delta_i = \frac{a_i \delta y + c_i \delta x}{-\cos \delta_i} \quad \text{vagy} \quad \delta\delta_i = \frac{c_i \delta y + b_i \delta x}{\sin \delta_i} \quad (9)$$

képlettel kiszámítjuk az *irányszögek változását*. Általában a baloldali képletet használjuk. A jobboldalira csak akkor van szükség, ha a $\cos \delta$ érték annyira kicsi, hogy a vele való osztás bizonytalanná válnék. A mérési javításokat a

$$v_i = \delta\delta_i + e_i \quad (10)$$

összefüggésből számítjuk.

A kiegyenlítés alapelvéből következik, hogy a számítási élességen belül a

$$[v \cos \delta] = 0 \quad \text{és} \quad [v \sin \delta] = 0 \quad (11)$$

feltételeknek ki kell elégülniök. Nyilvánvaló, ha a kiegyenlítés számításait hibátlanul végeztük el, az új pont $y = (y) + \delta y$ és $x = (x) + \delta x$ végleges koordinátái alapján számított irányiszögek a megfelelő előzetes irányiszögektől a számítási élességen belül a (9) képlettel meghatározott értékkel térnek el és a végleges irányiszögek alapján meghatározott mérési javítások is egyeznek a (10) képlettel számítottakkal.

3. A hátrametszés kiegyenlítése

Hátrametszéskor az iránysorozatot a *tájékozási szög (Z) előzetes értékével* tájékozunk és így a *tájékozási szög δz változása* mint harmadik ismeretlen jelentkezik. A mérési javítás :

$$v_i = -\delta z + \frac{0,1 \varrho'' \cos \delta_i}{t_i} \delta y - \frac{0,1 \varrho'' \sin \delta_i}{t_i} \delta x + e \quad (12)$$

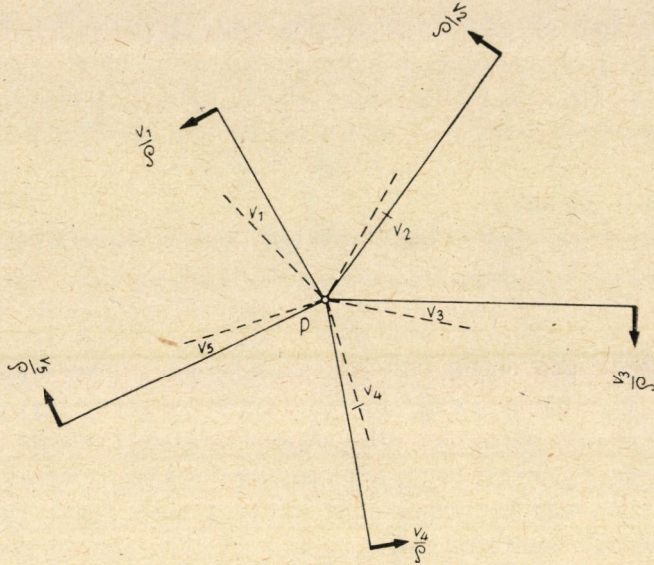
(A δ a (12) képletben, valamint a következő (14) és (17)—(18) képletekben az új pont felé menő, tehát az új ponton mért iránytól 180° -kal eltérő irány irányiszögét jelenti.)

A 2. ábrán a P pontból kiinduló és teljes vonallal rajzolt egyenesek jelképezik a kiegyenlítés utáni végleges irányiszögeket. Képzeliük el, hogy ezek merev rendszert alkotnak, amely a P pont körül foroghat. Az irányok végpontján az irányra merőlegesen működnek az $R_i = v_i/\varrho''$ nagyságú erők. Egyensúlyban az egyes erők P kiegyenlített ponthelyre vonatkozó *forgatónyomatékának* összege zérus :

$$\left[t \frac{v}{\varrho''} \right] = 0. \quad (13)$$

Kifejtve és 0,1-del végigosztva :

$$[\cos \delta] \delta y - [\sin \delta] \delta x + \frac{10}{\rho''} [et] - \frac{10}{\rho''} \delta z [t] = 0. \quad (14)$$



2. ábra

Vegyük fel a tájékozási szög (Z) előzetes értékét az egyes irányok adta (z_i) = (δ_i) — L_i tájékozó értékekből a

$$(Z) = \frac{[t(z)]}{[t]} \quad (15)$$

képlet szerint, mikor is

$$e_i = (z_i) - (Z) \quad \text{és} \quad [te] = 0. \quad (16)$$

Ennek figyelembevételével a (14)-ből a δz ismeretlen :

$$\delta z = \frac{[\cos \delta] \delta y - [\sin \delta] \delta x}{D} \quad \text{ahol} \quad D = \frac{10}{\rho''} [t]_{dm} = 0,04848 [t]_{km}. \quad (17)$$

Ha behelyettesítjük δz értékét a mérési javítások (12) alatti kifejezésébe, majd számítjuk az erők vetületeit, akkor összegezés útján a következő egyenlőségi egyenletekhez jutunk :

$$\begin{aligned} A \delta y + C \delta x - [e \cos \delta] &= 0 \\ C \delta y + B \delta x + [e \sin \delta] &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

ahol

$$\begin{aligned}
 A &= [a] + \frac{[\cos \delta]^2}{D} & B &= [b] + \frac{[\sin \delta]^2}{D} \\
 C &= [c] - \frac{[\sin \delta][\cos \delta]}{D}.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Amint a (19) alatti kifejezésekből látható, a δz ismeretlen kiküszöbölése végett közvetlenül a δz figyelembevétele nélkül felállított egyensúlyi egyenletek tagjait kell redukálni, mégpedig mindössze három, a sinus-, illetve a cosinus-értékek összegéből könnyen előállítható *redukcióval*. A redukciók logaritmikus számítóléccel egyszerűen számíthatók.

A koordinátaváltozások meghatározása után a δz ismeretlen számítására a (17) alatti képlet szolgál. A koordinátaváltozások meghatározása után az irányszögek változását hátrametszés esetében is ugyancsak a (9) képletek valamelyikével számítjuk. *A mérési javítások* :

$$v_i = \delta\delta_i + e_i - \delta z. \tag{20}$$

Mindaz, amit a 2. pont utolsó bekezdésében mondtunk, a hátrametszés kiegyenlítésére is vonatkozik. A végleges irányszögeknek a P pont végleges koordinátái alapján történt kiszámítása után a v mérési javítások kiszámítása végett a mért iránysorozatot véglegesen is kell tájékozni. A *végleges tájékozási szöget* és a *mérési javításokat* a

$$Z = \frac{[tz]}{[t]} \quad \text{illetve} \quad v_i = z_i - Z \tag{21}$$

képlettel számítjuk. z_i a végleges irányszögek és a mérési eredmények különbségeként adódó *tájékozási értékeket* jelenti.

4. Kiegyenlítés belső és külső irányokkal

Az új ponton mért (*belső*) irányokra vonatkozóan a hátrametszésnél, az új pontra mért (*külső*) irányokra vonatkozóan pedig az előmetszésnél ismerttetett eljárást alkalmazzuk. Az egyensúlyi egyenleteket az összes irányok alapján állítjuk fel, de a redukciókat csak a belső irányok adataiból számítjuk. A (11) alatti feltételeknek az összes mérési javítások figyelembevételével kell kielégülniök.

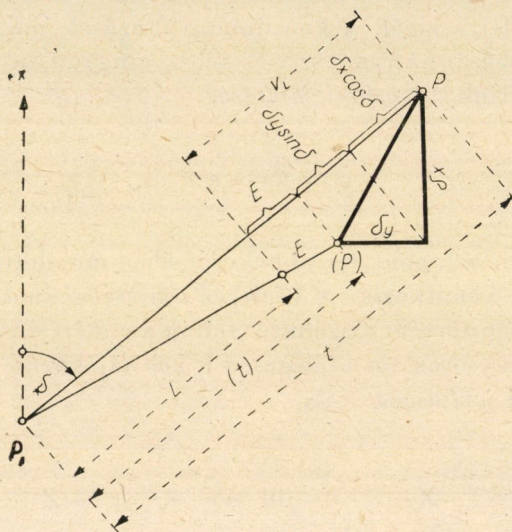
5. Kiegyenlítés hosszmerések alapján

Ha a P_i adott pont és a P új pont *kiegyenlített* (végleges) távolsága t , a *hosszmérési eredmény* pedig L , akkor a *hosszmérési javítás* :

$$v_L = t - L. \quad (22)$$

Az erőt a (2) képlet alapján értelmezve, az *erő koordinátatengelyek szerinti vetületei* :

$$R_y = -\frac{v_L}{t} \sin \delta \quad R_x = -\frac{v_L}{t} \cos \delta. \quad (23)$$



3. ábra

A negatív előjelek abból származnak, hogy a hosszmerési javítás akkor pozitív, ha a mérési eredmény kisebb a végleges távolságnál, tehát a pozitív erő a végleges pont felé mutat. Ha a P_i-P irány az első szögnegyedben van, akkor az erővetületek értelme a $-y$ és $-x$ tengelyágak irányába mutat.

A (t) előzetes távolság és az L mérési eredmény E különbségét *hosszeltérésnek* nevezzük :

$$E = (t) - L. \quad (24)$$

A 3. ábráról a hosszmerési javítás :

$$v_L = \delta y \sin \delta + \delta x \cos \delta + E. \quad (25)$$

Miután a vetületösszegeknek zérussal kell egyenlőknek lenniök, az erők vetületeit megszorozhatjuk ϱ'' -cel. Ezt megtéve és a koordinátaváltozásokat deciméteres egységekben számítva, az *egyensúlyi egyenletek* :

$$\begin{aligned} [b] \delta y - [c] \delta x - [e \sin \delta] &= 0 \\ - [c] \delta y + [a] \delta x - [e \cos \delta] &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

ahol a , b és c a 2. pontból ismert *iránykoefficiensek*, e pedig az

$$e = \frac{E \varrho''}{t} \quad (27)$$

érték. Az iránykoefficiensek számításához a mért vagy az előzetes távolságot és a hossz mérés irányának előzetes irányszögét is ismernünk kell, mert a (7) képlet szerinti számításukhoz ennek az irányszögnek a sinusát és cosinusát kell felhasználni.

Az erők vetületeinek ϱ -val való szorzása folytán tulajdonképpen olyan erővetületeket hoztunk létre, amelyek az új pont felé történő hossz mérések irányára merőleges (90° -kal kisebb irányszögű) és a mért hosszakkal egyenlő hosszú irányok *képzeltbeli (fiktív) iránymérési eredményéhez* tartozó erővetületekkel egyenlők. Ilyen értelemben a (27) képlettel számított e értékek a fiktív irányok irányeltérésének tekinthetők.

A hossz méréseket helyettesítő fiktív iránymérésekhez a

$$\delta \delta_i = \frac{b_i \delta y - c_i \delta x}{-\sin \delta_i} \quad \text{vagy} \quad \delta \delta_i = \frac{-c_i \delta y + a_i \delta x}{-\cos \delta_i} \quad (28a)$$

képlettel számítjuk ki az irányszögváltozást, majd a javításukat a (10) képlettel határozzuk meg. Ha ezeket a *fiktív iránymérési javításokat* v -vel jelöljük, a megfelelő *hosszmérési javítások* a

$$v_{Li} = \frac{v_i}{\varrho''} t_i \quad (28b)$$

összefüggésből számíthatók.

A (11) alatti feltételeknek a fiktív iránymérések javításával kell kielégülniök. Ha az új pont végleges koordinátaival kiszámítjuk a t végleges távolságot, a

$$v_{Li} = t_i - L_i \quad (29)$$

képlettel számított hossz mérési javításoknak a számítási élességen belül sorjában egyezniök kell a (28b) képletből kiadódottakkal és ki kell elégíteniök a

$$\left| \frac{v_L}{t} \sin \delta \right| = 0 \quad \left| \frac{v_L}{t} \cos \delta \right| = 0 \quad (30)$$

feltételeket.

6. Kiegyenlítés irány- és hosszmerésekkel

Ha az új pont meghatározására iránymérések mellett hosszmeréseket is végzünk és ezeknek az eredményét is mérési hibával terhelt változó mennyiségnek tekintjük, akkor az új ponton az iránymérési és a hosszmerési eredményekből származó erőknek együttesen kell egyensúlyban lenniök.

Mivel az iránymérési és a hosszmerési eredmények általában nem egyformán megbízhatók, elsősorban súlyviszonyukat kell megállapítani. Ha tet-szőleges t_0 távolságra vonatkozó iránymérési eredmény középhibája μ_i'' és ugyanerre a távolságra vonatkozó hosszmerési eredmény középhibája μ_L méter, akkor az iránymerésekből származó erők változatlan felhasználása mellett a hosszmerésből származó és q számértékkel megszorzott erőket még

$$q = \frac{t_0^2 \mu_i''}{\varrho^2 \mu_L^2} \quad (31)$$

értékkel (*súlyszámmal*) kell megszorozni. Ha pl. a 100 m hosszú irány mérési eredményének középhibája $\pm 10''$ és a 100 méteres távolság hosszmerési eredményének középhibája $\pm 0,0054$ m, akkor $q \approx 0,8$.

q érték figyelembevétele úgy történik, hogy a hosszmerések eredményét t_i/q hosszúságú olyan irányok fiktív iránymérési eredményével helyettesítjük, melyeknek irányszöge 90° -kal kisebb az új pont felé történő hosszmerések irányának irányszögénél. Ha most is a hosszmerés irányához és a mért hosszhoz tartozó iránykoefficienseket jelöljük a -, b - és c -vel, a kétféle mérési eredmények alapján a kiegyenlítést úgy végezzük el, hogy amíg az iránymérések kiegyenlítésére szolgáló számítási sémába az iránymérésekre vonatkozó adatokat a szokásos módon írjuk be, addig a hosszmerésekre vonatkozóknál az a jelű oszlopba a qb , a b jelű oszlopba a qa , a c jelű oszlopba a $-qc$, a $\sin \delta$ jelű oszlopba a $-\cos \delta$ és a $\cos \delta$ jelű oszlopba a $\sin \delta$ értéket írjuk, a hosszmerési eredményekhez az e fiktív irányeltérést pedig az

$$e_i = \frac{q E_i \varrho''}{t_i} \quad (32)$$

képlettel számítjuk (E a *hosszeltérést* jelenti). A kiegyenlítést a továbbiakban úgy végezzük, mintha az összes erők iránymérési eredményekből származtak volna.

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az ugyanazon pontok között mért irány- és hosszmeréshez ugyanazok az a , b és c iránykoefficiensek tartoznak, és a hosszmeréshez tartozó adatokat mindig a külső irányokhoz csoportosítjuk.

A kiegyenlítés végrehajtásánál — függetlenül attól, hogy a külső irányok csoportjánál hosszmerésből származó értékek is vannak — a belső

irányok adataiból az irányméréseknél szokásos módon számítjuk a tájékozási szög δz változásának kiküszöböléséhez szükséges redukciókat, majd ugyancsak a szokásos módon számítjuk ki a kiküszöbölt tájékozási változást is.

A (9) és (10), illetve (20) képletek a valódi és a hosszmerési eredményeket helyettesítő fiktív iránymérési eredményekhez adják meg az irányszögek változását, illetve a mérési javításokat, a (11) alatti feltételek pedig ez utóbbiakkal eléggülnek ki. A (9) képletben az iránykoefficienseket, valamint a szögfüggvényeket a sémába történt beírás szerint kell értelmezni, a hosszmerési eredményeket helyettesítő fiktív iránymérési eredményeknél is tehát azt kell a -nak tekinteni, amit az a oszlopába, azt b -nek, amit a b oszlopába írtunk stb.; ugyanígy kell tekinteni a $\sin \delta$ és $\cos \delta$ értékeket is.

A hosszmerési javítások és a fiktív iránymérések javítása között a

$$v_{Li} = \frac{v_i''}{\varrho''} \cdot \frac{t_i}{q} \quad \text{illetve} \quad v_i'' = \frac{q v_{Li} \varrho''}{t_i} \quad (33)$$

összefüggés áll fenn.

7. Különleges súlyok figyelembevétele

Mint a bevezetőből ismeretes, a sztatikai koordinátakiegyenlítés a mért irányértékeket az irányhosszakkal lineárisan arányos iránysúllyal használja fel. Ugyanilyen iránysúly érvényesül a hosszmeréseket helyettesítő fiktív irányértékeknél is. Az iránysúlyt azonban — mint láttuk — a kiegyenlítés végrehajtásakor nem kell külön számításba venni, mert azt a kiegyenlítés szerkezete már magában foglalja.

A 6. pontban láttuk azt is, ha a kiegyenlítés iránymérések és hosszmerések alapján történik, a kétféle mérési csoport között súlyarányt állapíthatunk meg. A q súlysám (súlyarány) megállapítását és felhasználását ugyancsak a 6. pontban ismertettük.

Előfordulhat azonban egyfajta mérési csoportban is, hogy valamelyik mérési eredménynek az irányhosszakkal arányos iránysúlyon kívül még más súlyt is tulajdonítunk a többi mérési eredménnyel szemben, pl. azért, mert a mérési eredményt nagyobb vagy kisebb számú mérésből állapítottuk meg, mint a többit, vagy pl. azért, mert a felsőrendű háromszögelési pontokhoz kapcsolódó irányokat nagyobb súllyal kívánjuk hasznosítani, mint az adott alsórendű pontokhoz kapcsolódókat. Ha a mérési eredmények ilyen *különleges súlyát* (az iránysúlyt figyelmen kívül hagyva) g_i -vel jelöljük, akkor a kiegyenlítésnél a (6) és (11) alatt felírt feltételek helyett a

$$[gv \cos \delta] = 0 \quad \text{és} \quad [gv \sin \delta] = 0 \quad (34)$$

feltételeknek kell kielégülniök. A különleges súllyal ki nem emelt mérési eredmények súlyát célszerűen 1-nek vesszük fel és ehhez arányítjuk a megkülönböztetett mérési eredmények súlyát.

Ha kizárólag iránymérések alapján történő kiegyenlítésnél különleges súly csupán egy vagy több külső irányhoz, vagy kizárólag hosszmerések alapján történő kiegyenlítésnél egy vagy több hosszmeréshez tartozik, a különleges súlyt a kiegyenlítésnél egyszerűen úgy érvényesítjük, hogy a súly figyelembevétele nélkül számított a_i , b_i és c_i iránykoefficiensek, valamint e_i irányeltérések helyett a kiegyenlítés számítási sémájába a különleges súlyú mérési eredményekre vonatkozóan ezeknek g_i -szeresét, vagyis a $g_i a_i$, $g_i b_i$, $g_i c_i$ és $g_i e_i$ értékeket írjuk be. Ez lényegében azt jelenti, hogy a t_i hosszúságú mért irányt, illetve a mért t_i hosszát t_i/g_i hosszúságú (redukált hosszúságú) fiktív irányméréssel helyettesítettük. A kiegyenlítést a sémába írt adatok alapján hajtjuk végre, követve minden változtatás nélkül az általános eljárás menetét. Ilyen módon a különleges súlyú mérési eredményeknél a (9) és (10) képletek a helyettesítő fiktív iránymérési eredményhez adják meg az irányszögváltozást, illetve a mérési javítást. Ez utóbbit kell a (11) alatti kifejezésekbe helyettesíteni, hogy a vetületösszegek zérus-feltétele kielégüljön. Iránymérésnél a *valódi mérési eredményhez* tartozó irányszögváltozás és mérési javítás, ha ezeket vesszönélküli, a *fiktív iránymérési eredményhez* tartozó adatokat pedig vesszővel ellátott betűvel jelöljük :

$$\delta\delta_i = \frac{\delta\delta'_i}{g_i} \quad v_i = \frac{v'_i}{g_i}. \quad (35)$$

Hosszmérés esetében pedig a *hosszmérési javítás* :

$$v_{Li} = \frac{v'_i}{q} \frac{t_i}{g_i}. \quad (36)$$

Ha a kiegyenlítés iránymérések és hosszmerések alapján történik és valamely hosszmerés eredményének a többi hosszmerés eredményéhez képest (az iránysúlyt nem tekintve) g_i különleges súlyt tulajdonítunk, emellett pedig még az iránymérések és a hosszmerések között a q súlyszámot is figyelembe kell vennünk, ennél a hosszmerési eredménynél — minden egyébben követve a 6. pontban foglaltakat — a q érték helyett a qg_i értéket kell felhasználni.

Ha egyes belső irányoknak tulajdonítunk különleges súlyt, akkor a tájékozási szög előzetes értékét a

$$(Z) = \frac{[gt(z)]}{[gt]} \quad (37)$$

képlettel számítjuk, változásának kiküszöbölése és meghatározása pedig a

$$\left[gt \frac{v}{\rho}\right] = 0 \quad \delta z = \frac{[g \cos \delta] \delta y - [g \sin \delta] \delta x}{D} \quad (38)$$

$$D = [gt]$$

képletek alapján történik.

Az δz ismeretlen kiküszöbölése végett alkalmazandó redukciókat — egyebekben teljesen a (19) képletek mintájára — eszerint a belső irányokra vonatkozó $[\cos \delta]$ és $[\sin \delta]$ értékek helyett a $[g \cos \delta]$ és $[g \sin \delta]$ összegtagokból kell számítani. A kiegyenlítést egyébként a számítási sémába a külső irányoknál mondottak szerint beírt adatok (ga , gb , gc és ge) alapján hajtjuk végre; eltérés az általános eljárással szemben a redukciók számításával kapcsolatban az előbb mondottakon kívül még az, hogy a koordinátaváltozások meghatározása után a tájékozási szög δz változását a (38) alatti képlettel, a különleges súlyú belső irányokat helyettesítő fiktív iránymérési eredmények mérési javítását pedig a (20) képlet helyett a

$$v'_i = \delta \delta'_i + e'_i - g_i \delta z \quad (39)$$

képlettel számítjuk. A $\delta \delta'_i$ irányszögváltozást a számítási sémába beírt iránykoefficiensekkel kell számítani és e'_i is a sémába beírt irányeltérést jelenti ($e'_i = g_i e_i$). A valódi irányméréshez tartozó irányszögváltozás és mérési javítás a megfelelő helyettesítő fiktív irányméréshez tartozókból a (35) összefüggések szerint határozható meg.

Magától értetődik, hogy olyankor, amikor a belső irányokat egymással egyenlő súlyúaknak tekintjük (természetesen az iránysúlyt nem tekintve) és ezekhez képest a külső irányoknak (ugyancsak nem tekintve az iránysúlyt) más súlyt tulajdonítunk, a számítás egyszerűbbé tétele végett a belső irányok súlyát vesszük fel 1-nek és ehhez arányítjuk a külső irányok különleges súlyát.

A teljesség kedvéért még megemlítjük, ha több mérési eredmény válik ki különleges súlyával a többi közül és esetleg ezek a különleges súlyok különbözőek is, semmi akadálya sincs annak, hogy mindegyik ilyen mérési eredménynél, ha pedig valamennyi mérési eredményt egymástól eltérő vagy csoportonként eltérő különleges súllyal kell minősíteni, valamennyi mérési eredménynél felhasználjuk az előbbieken mondottak szerint a megfelelő g_i súlyt.

8. Kiegyenlítés kényszerfeltétellel

A sztatikai koordinátakiegyenlítésben a kényszerfeltételek is erőket hoznak létre. Valamely kényszerfeltételnek végtelen sokféle módon tehetünk eleget. Például, ha az a követelmény, hogy az új pont egy ismert ponttól adott

távolságra legyen, akkor annak eleget teszünk, ha az új pont az ismert pont körül az adott távolsággal mint sugárral húzott körön bárhová is kerül. Ennek megfelelően a kényszerfeltételt nagyságra, irányra és értelemre különböző végtelen sokféle erő képviselheti. A kiegyenlítési feladat megoldásához ezek közül azt az egyelőre ismeretlen erőt választjuk ki, amely a mérési eredmények adta erőrendszer egyensúlyának megbontása után a pontot a tisztán a mérési eredmények alapján meghatározható kiegyenlített ponthelyről elmozdítva, a mérési eredményekből származó erőrendszerrel együtt a *legkisebb munka végzésével* viszi olyan ponthelyre, amelyen a teljes, de már megváltozott erőrendszer egyensúlyba jut.

A levezetést — hivatkozással az [1]-gyel jelzett munkára — itt mellőz-
zük és csupán a kiegyenlítés menetét ismertetjük.

1. Felállítjuk — a kényszerfeltételeket egyelőre teljesen figyelmen kívül hagyva — a *kizárólag a mérési eredményekből származó* egyensúlyi egyenleteket, a belső irányoknál a tájékozási ismeretlen kiküszöbölése miatti redukciókat is figyelembe véve :

$$f_1 \quad f_2 \quad (40)$$

2. A *kényszerfeltételi egyenletből*, amely mindenkor (szükség szerint sorbafejtés után) a

$$k = A \delta y + B \delta x + T = 0 \quad (41)$$

lineáris alakban írható fel, kifejezzük az egyik ismeretlent (az egyik koordinátaváltozást) a másik segítségével, míg az utóbbi számára *azonosságí egyenletet* írunk fel. Ha pl. a δx ismeretlent fejezzük ki, akkor :

$$\begin{aligned} \delta y &= A_1 \delta y \\ \delta x &= A_2 \delta y + T_2, \end{aligned} \quad (42)$$

ahol $A_1 = 1$.

3. A *kényszerfeltételt is magában foglaló egyensúlyi egyenlet* :

$$g = [Af] = 0, \quad (43)$$

vagyis

$$g = f_1 + A_2 f_2 = 0. \quad (44)$$

4. A g egyenletbe behelyettesítjük a k kényszerfeltételi egyenletből kifejezett ismeretlennek a (42) szerinti értékét, vagyis a δx helyére behelyettesítjük az $(A_2 \delta y + T_2)$ kifejezést, majd rendezzük a g egyenletet.

5. A g egyenletből a másik ismeretlen, vagyis a δy értéke kiszámítható.

6. A δx ismeretlent ezek után a (42) alatti kifejezéséből számítjuk ki.

Ha történetesen a kényszerfeltételi egyenletből a δy koordinátaváltozást fejeznénk ki, akkor a lépések a 2. lépéstől kezdve a következők szerint alakulnának :

$$\begin{aligned} 2. \quad \delta y &= A'_1 \delta x + T'_1 \\ \delta x &= A'_2 \delta x, \end{aligned} \quad (45)$$

amikor is $A'_2 = 1$;

3. a kényszerfeltételt is magában foglaló egyensúlyi egyenlet :

$$g' = [A' f] = A'_1 f_1 + f_2 = 0. \quad (46)$$

4. A g' egyenletbe behelyettesítjük δy -nak a (45) szerint kifejezett értékét ($\delta y = A'_1 \delta x + T'_1$), majd rendezzük a g' egyenletet ;

5. A g' egyenletből kiszámítjuk a δx koordinátaváltozást, majd

6. a (45) alapján kiszámítjuk a δy koordinátaváltozást is.

Ha a kényszerfeltétel hatására kialakult koordinátaváltozásokat behelyettesítjük a (40) alatti f egyensúlyi egyenletekbe, amelyeket a kényszerfeltételt figyelmen kívül hagyva, tisztán a mérési eredmények alapján állítottunk fel, akkor ezek az egyenletek természetesen nem elégítik ki a zérus-feltételt, hanem a kényszerfeltételt kifejező erő megfelelő vetületének az értékét adják meg ellenkező előjellel ; vagyis, ha a kényszerfeltételt kifejező erő vetületeit V_y - és V_x -szel jelöljük :

$$f_1 = -V_y \quad f_2 = -V_x. \quad (47)$$

Hibátlan számítást feltételezve, a számítási élességen belül ugyanezekhez az értékekhez jutunk úgy is, hogy a már az előbbi feladatoknál megismert módon kiszámítjuk valamennyi mérési eredményhez (ha a valódi mérési eredményt fiktív mérési eredmény helyettesíti, akkor ahhoz) a mérési javítást és ezek y , illetve x irányú vetületét összeadjuk.

9. Kiegyenlítés a tájékoztató irányok mérési hibáinak figyelembevételével

Az eddigiekben az általános gyakorlatnak megfelelően az adott pontokról a meghatározandó új pontra menő (külső) irányok mérési eredményének a kiegyenlítés előtt véglegesen tájékozott irányértékeket tekintettük. Kivételesen előfordul azonban, hogy a kiegyenlítésben a tájékoztató irányok mérési hibáját is figyelembe kívánjuk venni. Ilyenkor az egyes adott pontokon mért iránySOROZATOKAT a kiegyenlítés előtt egy-egy (Z) előzetes tájékoztató szöggel tájékozunk és az iránySOROZATOK $Z = (Z) + \delta z$ végleges tájékoztató szögét a kiegyenlítéssel határozzuk meg.

Jelöljük például az egyik adott pontot, amelyről a meghatározandó P pontot irányoztuk, A -val. Az A ponton mért iránysorozatban a P pontra menő irányon kívül az I, II, \dots adott pontokra menő tájékozó irányokat is mértük. A mért irányértékek mérési javítása :

$$\begin{aligned} v_{AP} &= -\delta z_A + \frac{0,1 \varrho'' \cos \delta_{AP}}{t_{AP}} \delta y_P - \frac{0,1 \varrho'' \sin \delta_{AP}}{t_{AP}} \delta x_P + e_{AP} \\ v_I &= -\delta z_A + e_{AI} \\ v_{II} &= -\delta z_A + e_{AII} \\ &\dots \end{aligned} \quad (48)$$

Az irányeltéréseket az

$$e_i = \delta_i - L_i - (Z_A) = z_i - (Z_A) \quad (49)$$

képlettel számítjuk, amelyben L a mért irányérték, (Z_A) az előzetes tájékozási szög. Az adott pontokra menő (tájékozó) irányoknál δ végleges, az új pontra menő (meghatározó) iránynál pedig előzetes irányszöget jelent.

Az A pontra vonatkozó forgatónyomaték egyensúlyi feltétele alapján a (13) és (14) egyenleteknek megfelelően a

$$\frac{[tv]_A}{0,1 \varrho''} = \cos \delta_{AP} \delta y_P - \sin \delta_{AP} \delta x_P + \frac{10}{\varrho''} [et] - \frac{10}{\varrho''} \delta z [t] = 0 \quad (50)$$

egyenlet írható fel. Vegyük fel a tájékozási szög előzetes értékét a

$$(Z_A) = \frac{[tz]}{[t]} \quad (51)$$

képlet szerint, ahol

$$z_i = \delta_i - L_i \quad (52)$$

de úgy, hogy a számításba az új P pontra menő irányhoz tartozó z értéket is bevonjuk (természetesen az előzetes irányszöggel számítva). Ekkor

$$[et] = 0 \quad (53)$$

és ennek megfelelően az (50) egyenletből, ismét élve a

$$D = \frac{10}{\varrho''} [t]_{dm} = 0,048 \ 48 [t]_{km} \quad (54)$$

jelöléssel, a tájékozási szög változása :

$$\delta z_A = \frac{\cos \delta_{AP} \delta y_P - \sin \delta_{AP} \delta x_P}{D_A} \quad (55)$$

Helyettesítsük be δz kifejezését v_{AP} -nek (48) alatti egyenletébe, majd szorozzuk meg az egyenletet $-\cos \delta_{AP}$, illetve $\sin \delta_{AP}$ értékkel, vagyis állítsuk elő az erővetületeket :

$$\begin{aligned} -v_{AP} \cos \delta_{AP} &= a'_{AP} \delta y_P + c'_{AP} \delta x_P - e_{AP} \cos \delta_{AP} \\ v_{AP} \sin \delta_{AP} &= c'_{AP} \delta y_P + b'_{AP} \delta x_P + e_{AP} \sin \delta_{AP}, \end{aligned} \quad (56)$$

ahol

$$\begin{aligned} a'_{AP} &= a_{AP} + \frac{\cos^2 \delta_{AP}}{D_A} & b'_{AP} &= b_{AP} + \frac{\sin^2 \delta_{AP}}{D_A} \\ c'_{AP} &= c_{AP} - \frac{\sin \delta_{AP} \cos \delta_{AP}}{D_A}. \end{aligned} \quad (57)$$

Az $A-P$ irányhoz számított iránykoefficienseket tehát az (57) képletcsoporthoz megfelelően redukálni kell. A kiegyenlítési sémába az $A-P$ irányhoz tartozó sorba az eredeti iránykoefficiensek helyett a redukáltakat (az a' , b' és c' értékeket) írjuk. A tájékozó irányokra a kiegyenlítés további végrehajtásakor már nem kell tekintettel lenni, csupán a középhibaszámításnál vonjuk be ismét őket.

Hasonlóan járunk el a többi adott ponton mért irányokra vonatkozóan is. A P pont δy és δx koordinátaváltozásának meghatározása után valamennyi állásponthoz ki kell számítani a tájékozási szög változását, mégpedig a P pontra vonatkozóan a (17) alatti, az adott pontokra vonatkozóan az (55) képlet szerint, de természetesen mindig a kérdéses álláspont adatainak a felhasználásával. Ki kell azután számítani a mérési javításokat, mégpedig a középhibaszámítás céljára a tájékozó irányokét is. Például az $A-P$ irányra a mérési javítás :

$$v_{AP} = \delta \delta_{AP} + e_{AP} - \delta z_A, \quad (58)$$

amelyhez a $\delta \delta_{AP}$ irányszögváltozást a szokásos módon a (9) képlettel számítjuk, és például az $A-I$ tájékozó irány mérési javítása :

$$v_{AI} = e_{AI} - \delta z_A. \quad (59)$$

10. A középhibaszámítás

A súlyegység kiegyenlítés utáni középhibáját mindenkor a

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{pvv}{f}} \quad (60)$$

általánosan ismert képletből számítjuk, ahol f a fölösmerések számát, p a tényleges súlyokat és v a tényleges mérések javítását jelenti.

1. A tisztán iránymérések alapján végzett kiegyenlítésnél, ha az irányhosszal lineárisan arányos irány súlyon kívül más súlyt (különleges súlyt) nem veszünk figyelembe :

$$p_i = t_i \quad (61)$$

kilométeregységben. Ilyen értelemben a (60) képlet másodpercekben az 1 km hosszú irány mérésének középhibáját adja. t_i hosszúságú irány mérésének kiegyenlítés utáni középhibája :

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{t_i}}. \quad (62)$$

Ha a mért irányok között különleges súlyú irány is van, az ilyenre vonatkozóan a (60) képlet számlálója számára a $p_i v_i^2$ szorzat akár a valódi mérés v_i javításával és a $g_i t_i$ súllyal, akár a helyettesítő fiktív mérési eredmény v'_i javításával és az ahhoz tartozó t_i/g_i redukált hosszal számítható, mert a (35) alatti jobboldali összefüggés alapján

$$g_i t_i v_i^2 = \frac{t_i}{g_i} v_i'^2. \quad (63)$$

A különleges súlyú t_i hosszúságú irány mérésének kiegyenlítés utáni középhibája :

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{g_i t_i}}. \quad (64)$$

2. A tisztán hosszmerések alapján, különleges súlyok nélkül végzett kiegyenlítésnél

$$p_i = \frac{1}{t_i}. \quad (65)$$

A t_i értéket kilométeregységben véve figyelembe és a (60) képlet számlálóját a v_{Li} hosszmerési javításokból számítva, a (60) képlet az 1 km hosszú távolság mérésének középhibáját adja. Egy t_i távolság mérésének kiegyenlítés utáni középhibája pedig :

$$\mu_{Li} = \sqrt{t_i} \mu_0. \quad (66)$$

Ha a hosszmerési eredmények között különleges súlyú mérési eredmény is van, az ilyenre vonatkozóan a (60) képlet számlálója számára a

$$p_i v_i^2 = \frac{g_i}{t_i} v_{Li}^2 \quad (67)$$

szorzatot számítjuk és az ilyen hosszmerési eredmény kiegyenlítés utáni középhibája :

$$\mu_{Li} = \sqrt{\frac{t_i}{g_i}} \mu_0. \quad (68)$$

Lehet azonban a (60) képlet számlálóját a hosszmerési eredményeket helyettesítő fiktív iránymérések javításából is számítani, amikor is azt a $t_i v_i^2$ szorzatok összegezésével képezzük. A súlyegység így számított középhibájából t_i távolság hosszmerési eredményének középhibája méterben :

$$\mu_{Li} = \mu_0 \frac{1000}{\rho^n} \sqrt{t_i} \quad (69)$$

vagy g_i különleges súly esetében :

$$\mu_{Li} = \mu_0 \frac{1000}{\rho^n} \sqrt{\frac{t_i}{g_i}}. \quad (70)$$

Ezt a számítási módot követjük akkor, ha koordinátaközéphibákat is kell számítanunk, mert a (76) és (77) képletekben előforduló μ_0 érték ennek a számítási módnak felel meg.

3. Ha *irány- és hosszmerések együttesen fordulnak elő*, akkor a (60) képletbe célszerűen a másodpercben kifejezett javításokat és a kilométerben kifejezett távolságokat helyettesítjük be. Különleges súlyok nélküli kiegyenlítés esetében a valódi irányméréseknél a súly a kilométerben kifejezett távolsággal egyenlő :

$$p_i = t_i, \quad (71)$$

a hosszmerési eredményeket helyettesítő fiktív irányméréseknél pedig :

$$p_i = \frac{t_i}{q}, \quad (72)$$

ahol q a (31) képlettel meghatározott súlyszám.

Egy t_i km hosszúságú irány kiegyenlítés utáni középhibája másodpercben :

$$\mu_i = \frac{\mu_0}{\sqrt{t_i}}, \quad (73)$$

míg t_i km hosszúságú vonal hosszmerésének kiegyenlítés utáni középhibája méterben :

$$\mu_{Li} = \mu_0 \frac{1000}{\rho^n} \sqrt{\frac{t_i}{q}}. \quad (74)$$

Különleges súlyok alkalmazásakor a (60) képlet számlálója számára a súlyozott iránymérési eredményeknél a (63) összefüggés alapján a helyettesítő fiktív iránymérések v'_i javításával és a megfelelő t_i/g_i redukált hosszúsággal számítjuk a $p_i v_i^2$ értéket. Az ilyen iránymérési eredmény kiegyenlítés utáni középhibája a (64) képlet szerint számítható.

A különleges súlyú hosszmérési eredményeknél a (60) képlet számlálója számára a megfelelő fiktív iránymérés v'_i javításával és a hozzá tartozó t_i/qg_i redukált hosszúsággal számítjuk a $p_i v_i^2$ értéket. Magának a hosszmérési eredménynek a kiegyenlítés utáni középhibája méterben :

$$\mu_{Li} = \mu_0 \frac{1000}{\rho''} \sqrt{\frac{t_i}{qg_i}}. \quad (75)$$

4. Miután az egyensúlyi egyenletek együtthatói és tisztatagja a $[tvv]$ négyzetösszeg-minimum feltételű kiegyenlítés normálegyenletei megfelelő tagjainak ($-0,0001 \rho''$)-szeresei (lásd az [1] jelű munkában), vagyis azoknál — az előjelet nem tekintve és elegendő pontossággal — 20,63-szorta kisebbek, az ismeretlenek súlyának, illetve súlykoefficiensének számítása ugyanúgy végezhető, mint a normálegyenleteknél, ha az egyensúlyi egyenletekből származó megfelelő értékeket súly esetén 20,63-mal szorozzuk, súlykoefficiens esetén pedig 20,63-mal osztjuk. Bár az egyensúlyi egyenletek együtthatói és tisztatagja ellentétes előjelűek, mint a normálegyenletek megfelelő tagjai, az előjeletérés a mindig pozitív súly, illetve súlykoefficiens meghatározásánál nem okozhat zavart. Ha tehát az új pont koordinátái számára az egyensúlyi egyenletek megoldása során a *súlyokkal arányos* p'_y és p'_x értékek adódnak, akkor a kiegyenlítéssel meghatározott *koordináták középhibája* méterben (a p'_y - és p'_x -nek csupán az abszolút értéket véve figyelembe) :

$$\mu_y = \frac{0,1 \mu_0}{\sqrt{20,63 p'_y}} = 0,022 \frac{\mu_0}{\sqrt{p'_y}} \text{ és } \mu_x = 0,022 \frac{\mu_0}{\sqrt{p'_x}}. \quad (76)$$

Ha pedig az egyensúlyi egyenletekből a *súlykoefficiensekkel arányos* Q'_y és Q'_x értékeket kapjuk meg, az előjelüket ugyancsak figyelmen kívül hagyva, a *koordináták középhibája* méterben :

$$\mu_y = 0,1 \sqrt{\frac{Q'_y}{20,63}} \mu_0 = 0,022 \sqrt{Q'_y} \mu_0 \text{ és } \mu_x = 0,022 \sqrt{Q'_x} \mu_0. \quad (77)$$

5. Ha a kiegyenlítésnél a *tájékozó irányok mérési hibáját is figyelembe vettük*, akkor a (60) képletbe ceket is be kell vonni. A fölősmérések száma :

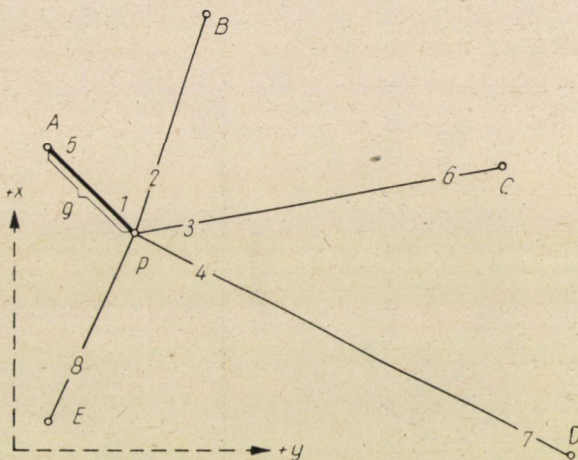
$$f = n - (N + k), \quad (78)$$

ahol n a mért tájékozó és meghatározó irányok együttes száma (vagyis az összes mérések száma), N az adott álláspontok száma, k pedig aszerint 3 vagy 2, hogy az új ponton is végeztünk-e iránymérést vagy sem.

Példák

1. példa. A P pont meghatározására a 4. ábrán 1—4 sorszámmal jelölt belső és 5—8 sorszámmal jelölt külső irányokat mértük. Megmértük továbbá az AP távolságot is (9 jelű mérési eredmény).

A q súlyszám megállapítása végett többször irányoztuk az A ponttól a P pontot és az AP távolságot is ugyanannyiszor megmértük. Az iránymérés középhibájára $\mu_i = \pm 5,97''$, a hossz mérés középhibájára pedig $\mu_L = \pm 0,0108$ m értéket kaptunk. A (31) képlet ezekkel az adatokkal és a $t = AP = 311,21$ m távolságértékkel a $q = 0,67$ súlyszámot adja.



4. ábra

Iránymérési eredményeknek a belső irányoknál a P ponton mért irány sorozat irányértékeit, a külső irányoknál pedig a tájékozott irányértékeket tekintjük. Az 1. táblázatban az L megjelölésű oszlopban találjuk őket. Ugyanoda vezettük be a hossz mérés eredményét is. Az ismert pontok koordinátái:

$y_A = + 24\ 326,70$ m	$x_A = - 40\ 251,28$ m
$y_B = + 24\ 850,12$ m	$x_B = - 39\ 574,57$ m
$y_C = + 26\ 018,57$ m	$x_C = - 40\ 211,84$ m
$y_D = + 26\ 471,28$ m	$x_D = - 41\ 512,76$ m
$y_E = + 24\ 170,83$ m	$x_E = - 41\ 250,31$ m

A kiegyenlítés végrehajtását lépésenként követjük.

1. A P pont számára jó metszést adó háromszögből (vagy háromszögekből) előzetes koordinátákat számítunk:

$$(y) = + 24\ 540,66 \text{ m} \qquad (x) = - 40\ 477,50 \text{ m.}$$

1. táblázat

Mérés jele	Állás- pont	Írányzoti pont	km	L		(δ)		(z)		e	δ	z	v	tvv
				°	'	°	'	°	'	"	°	'	°	
1	P	A	0,31	316 35 45	316 35 43	0 2 58	+52,5	316 35 30,8	0 2 45,8	+29,6	262,8			
2		B	0,95	18 53 25	18 55 5	0 1 40	-25,5	18 55 27,8	0 2 2,8	-13,4	179,6			
3		C	1,50	79 46 44	79 48 35	0 1 51	-14,5	79 48 51,2	0 2 7,2	-9,0	121,5			
4		D	2,19	118 9 47	118 12 6	0 2 19	+13,5	118 12 11,4	0 2 24,4	+ 8,2	147,9			
			4,95			(Z)=0°2' 5,5"			Z=0°2'16,2"					
5	A	P	0,3	136 35 43	136 35 43	0	0	136 35 30,8		-12,2	44,6			
6	C		1,5	259 48 47	259 48 35	-12	-12	259 48 51,2		+ 4,2	26,5			
7	D		2,2	298 11 56	298 12 6	+10	+10	298 12 11,4		+15,4	521,8			
8	E		0,9	25 34 25	25 34 25	0	0	25 33 57,4		-27,6	685,6			
9	AP		0,5	311,210 m	311,376 m	+0,166 m	+110	311,246 m	+0,036 m	+15,9	126,4			
											2116,7			

3. táblázat

Mérés jele	aδy vagy cδy	cδx vagy bδx	[]	- cos δ vagy sin δ	δδ	e	-δz	v	t	tvv	v sin δ	v cos δ
1	+26,11	-35,28	- 9,17	+0,726	-12,63	+52,5	-10,94	+28,93	0,3	251,1	+19,88	-21,00
2	+14,40	+ 7,04	+21,44	+0,946	+22,66	-25,5	-10,94	-13,78	1,0	189,9	+ 4,47	+13,04
3	- 1,79	-14,18	-15,97	-0,984	+16,23	-14,5	-10,94	- 9,21	1,5	127,2	+ 9,07	+ 1,64
4	+ 2,91	- 7,78	- 4,87	-0,881	+ 5,53	+13,5	-10,94	+ 8,09	2,2	144,0	- 7,12	+ 3,84
5	+26,11	-35,28	- 9,17	+0,726	-12,63	0		-12,63	0,3	47,8	- 8,67	+ 9,17
6	- 1,79	-14,18	-15,97	-0,984	+16,23	-12		+ 4,23	1,5	26,9	- 4,16	- 0,75
7	+ 2,91	- 7,78	- 4,87	-0,881	+ 5,53	+10		+15,53	2,2	530,6	-13,67	+ 7,35
8	+14,62	+10,02	+24,67	-0,902	-27,32	0		-27,32	0,9	671,8	-11,80	-24,64
9	+15,67	+23,66	+39,33	-0,687	-57,25	+73,7		+16,45	0,5	135,3	+11,95	+11,31
										2124,6	- 0,05	- 0,04

2. A P pont előzetes koordinátái alapján az összes mért irányokra kiszámítjuk a (δ) előzetes irányszöveget és az a, b, c iránykoefficienseket, valamint kikereszük a $\sin(\delta)$ és $\cos(\delta)$ értéket. Az előzetes irányszöveget (és ezzel kapcsolatban a többi említett értékeket is) úgy számítjuk, hogy az eredményt az új pont felé menő irányra kapjuk meg. A megmért hosszhoz a P pont előzetes koordinátái alapján kiszámítjuk a (t) előzetes távolságot is. Az előzetes irányszöveget, illetve a hossz mérés sorában az előzetes távolságot az 1. táblázat (δ) oszlopába, a többi kiszámított (kikeresett) értékeket pedig a 2. táblázat megfelelő oszlopába írjuk, külön csoportosítva a belső és külső irányokat. A hossz mérést (vagy hossz méréseket) mindig a külső irányok közé sorozzuk. A hossz mérés sorában az a oszlopába a qb , a b oszlopába a qa , a c oszlopába pedig a $-qc$ mennyiséget írjuk. (Az 1 és 5 jelű iránymérési és a 9 jelű hossz mérési eredményhez ugyanazok az a, b és c értékek tartoznak. A hossz mérés sorába beírt értékek: $qa = 0,67 (-31,3)$; $qb = 0,67 (-35,0)$ és $-qc = -0,67 (33,1)$).

3. Az e iránylejtéseket az 1. táblázatban számítjuk. Külső irányoknál $e = (\delta) - L$, belső irányoknál pedig $e = (\delta) - L - (Z)$, ahol (Z) a tájékozási szög előzetes értéke. Az utóbbit a (15) képlettel számítjuk. A hossz mérésre vonatkozóan az e értéket az $E = (t) - L$ hosszeltérésekből a (32) képlettel számítjuk. Az 1. táblázat t jelzésű oszlopába a belső irányoknál század-, a külső irányoknál tizedkilométer élességgel beírjuk az irányhosszakat is. A hossz mérést helyettesítő fiktív iránymérésnél a t/q értéket kell beírni.

4. A 2. táblázatban a beírt értékekből számítjuk az $e \sin \delta$ és az $e \cos \delta$ értékeket, majd az összes irányokra vonatkozóan (beleértve a hossz mérést kifejező fiktív irányt is) külön-külön összeadjuk az $a, b, c, e \sin \delta$ és $e \cos \delta$ oszlopok tagjait. Csak a belső irányokra számítjuk még a $[\sin \delta]$ és a $[\cos \delta]$ összegértékeket, valamint a (17) alatti képlet szerint a D értékeket is.

2. táblázat

Mérés jele	a	b	c	e	$\sin \delta$	$\cos \delta$	$e \sin \delta$	$e \cos \delta$
1	-35,0	-31,3	-33,1	+52,5	+0,687	-0,726	+36,07	-38,12
2	-19,3	-2,3	+ 6,6	-25,5	-0,324	-0,946	+ 8,26	+24,12
3	-0,4	-13,3	+ 2,4	-14,5	-0,984	-0,177	+14,26	+ 2,56
4	-2,1	-7,3	-3,9	+13,5	-0,881	+0,473	-11,89	+ 6,38
					-1,502	-1,376		
5	-35,0	-31,3	-33,1	0	+0,687	-0,726	0,00	0,00
6	-0,4	-13,3	+ 2,4	-12	-0,984	-0,177	+11,81	+ 2,12
7	-2,1	-7,3	-3,9	+10	-0,881	+0,473	- 8,81	+ 4,73
8	-19,6	-4,5	+ 9,4	0	+0,432	+0,902	0,00	0,00
9	-21,0	-23,4	+22,2	+73,7	+0,726	+0,687	+53,51	+50,63
[]	-134,9	-134,0	-31,0					
Δ	+ 7,9	+ 9,4	- 8,6					
[]	-127,0	-124,6	-39,6				+103,21	+52,42

Csak a belső irányokhoz :

$[t] = 4,95 \text{ km}$

$D = 0,04848 [t] = 0,240$

Redukciók	Δ'	$\Delta = \frac{\Delta'}{D}$	
$[\cos \delta]$ $[\cos \delta]$	+1,8934	+7,89	a +
$[\sin \delta]$ $[\sin \delta]$	+2,2560	+9,40	b +
$[\sin \delta]$ $[\cos \delta]$	+2,0667	+8,61	c -

5. Kiszámítjuk a 2. táblázatban előírt redukciókat *kizárólag a belső irányokra vonatkozó adatokból*. Az előírt értékek a Δ' segédmennyiségeket adják. Ha ezeket elosztjuk D -vel, akkor kapjuk meg a Δ redukciókat. A sémában az is elő van írva, hogy melyik redukció hová tartozik és az is, hogy a számított érték eredeti előjelével (ezt + jellel jelöltük) vagy pedig ellenkező előjellel (ezt - jellel jelöltük) kell-e felhasználni. A redukciókat bevezetjük az összes

irányokra vonatkozóan a 4. lépés szerint számított megfelelő összegtagok alá. Elvégezve az összegtagok és a redukciók összevonását, megkapjuk a két egyensúlyi egyenletet:

$$\begin{aligned} - 127,0 \delta y - 39,6 \delta x - 52,4 &= 0 \\ - 39,6 \delta y - 124,6 \delta x + 103,2 &= 0. \end{aligned}$$

6. Megoldjuk az egyensúlyi egyenleteket. (Előzőleg esetleg —1-gyel végigszorozzuk őket.) Eredményül a következő koordinátaváltozásokat kapjuk:

$$\delta y = -0,746 \text{ dm} \qquad \delta x = +1,066 \text{ dm}.$$

7. A (17) alatti képlettel számítjuk a tájékozási szög változását:

$$\delta z = \frac{(-1,376)(-0,746) - (-1,502)(+1,066)}{0,240} = +10,94''.$$

8. Kiszámítjuk az irányszögek változását a

$$\delta \delta_i = \frac{a_i \delta y + c_i \delta x}{-\cos \delta_i} \qquad \text{vagy} \qquad \delta \delta_i = \frac{c_i \delta y + b_i \delta x}{\sin \delta_i}$$

képletből (3. táblázat).

A mérési javításokat a külső irányoknál a $v = \delta \delta + e$, a belső irányoknál pedig a $v = \delta \delta + e - \delta z$ képlettel számítjuk. A hosszmerést helyettesítő fiktív iránynál a 2. táblázatba beírt iránykoefficiens-értékeket használjuk fel (tehát a qa , qb és $-qc$ értékeket). A hosszmerési javítást ezután a (33) baloldali képlettel számítjuk:

$$v_L = -\frac{16,45''}{\varrho''} \cdot \frac{311}{0,67} = 0,035 \text{ m}.$$

9. Ellenőrzés (a 3. táblázatban):

$$[v \cos \delta] = -0,04 \approx 0 \qquad [v \sin \delta] = -0,05 \approx 0.$$

(A baloldali összegérték helyett tulajdonképpen az ellenkező előjelű szorzatok összegét kellene számítani. Tekintve azonban, hogy értékének elvileg zérusnak kell lennie, az ellenőrzés szempontjából az előjel közömbös.)

10. A 3. táblázatban számítjuk még a tuv és a $[tuv]$ mennyiségeket. A t hosszakat tizedkilométerre vesszük figyelembe. A hosszmerést helyettesítő fiktív iránymérésnél az 1. és a 3. táblázat t jelű oszlopába beírt t/q értéket használjuk fel.

11. A P pont kiegyenlített (végleges) koordinátái:

$$y = (y) + \delta y = +24\,540,585 \text{ m} \qquad x = (x) + \delta x = -40\,477,393 \text{ m}.$$

12. A P pont végleges koordinátái alapján kiszámítjuk a végleges irányszögeket és a megmért hosszhoz a végleges távolságot. Az előzetes irányszögekhez képest kapott irányszögváltozásoknak a számítási élességen (általában $1''$ -en belül) egyezniük kell a 8. lépés szerint számított $\delta \delta$ értékekkel.

13. Az előbbi lépésnél említett értékeket bevezetjük az 1. táblázatba és ott is számítjuk a v mérési javításokat. A végleges koordinátákból számított távolság alapján is számítjuk a hosszmerési javítást ($+0,036$ mm), majd az ebből a (33) jobboldali képlettel a fiktív irányméréshez tartozó javítást is:

$$v_0 = +0,67 \frac{0,036}{311,246} \varrho'' = +15,9''.$$

Az egyes belső irányok adta z tájékozási szögekből ugyancsak az 1. táblázatban a Z végleges tájékozási szöveget a (21) képlettel számítjuk. A számítás egyébként a 3. lépésnél leírt számítási mód értelemeszerű alkalmazásával történik. A v értékeknek a számítási élességen belül egyezniük kell a 8. lépés szerint kapott megfelelő értékekkel.

14. Az iránymérési javításokból számítjuk a tvv és a $[tvv]$ mennyiségeket. A számítási élességen belül egyezniük kell a 10. lépés szerint számítottakkal. (A hosszmerést helyettesítő fiktív irányméréseknél természetesen itt is a táblázat t jelű oszlopába beírt t/q értékeket használjuk fel.)

15. A középhibaszámítást a 10. pontban foglaltak szerint végezzük. Példánkál a fölöss-mérések száma: $f = 9 - 3 = 6$.

A súlyegység középhibája, mivel a kétféleképpen számított $[tvv]$ érték középértéke 2120 :

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2120}{6}} = \pm 18,8.$$

Például a 3 és 5 jelű iránymérési eredmények kiegyenlítés utáni középhibája :

$$\mu_3 = \frac{18,8}{\sqrt{1,5}} = \pm 15,3'' \quad \mu_5 = \frac{18,8}{\sqrt{0,3}} = \pm 34,3''.$$

A 9 jelű hosszmerési eredmény kiegyenlítés utáni középhibája (lásd a (74) képletet) :

$$\mu_9 = 18,8 \frac{1000}{q''} \sqrt{0,5} = \pm 0,065 \text{ m.}$$

Az egyensúlyi egyenletek megoldása során az új pont koordinátái számára a súlykoefficiensekkel arányos $Q_y = 0,008\,749$ és $Q_x = 0,008\,919$ értékeket kaptuk. Ezek alapján a koordinátaközéphibák a (77) képlettel számítva :

$$\mu_y = 0,022 \cdot 18,8 \sqrt{0,008\,749} = \pm 0,039 \text{ m}$$

$$\mu_x = 0,022 \cdot 18,8 \sqrt{0,008\,919} = \pm 0,039 \text{ m.}$$

2. példa. Határozzuk meg a P pont koordinátáit a 4. ábrán 1—8 sorszámmal megjelölt irányoknak az 1. példában megadott mérési eredménye alapján azzal a kényszerfeltétellel, hogy a P pont végleges koordinátáival számítva, az AP távolság 311,210 m legyen.

Először elvégezzük az 1. példa 1—5 lépéseit az 1. példa 9 jelű mérési eredményét figyelmen kívül hagyva. Mostani példánkban ugyanis az AP megadott távolságot nem mérési eredménynek, hanem kielégítendő kényszerfeltételnek tekintjük. A P pont előzetes koordinátái megegyeznek az 1. példában felvett értékekkel. A kizárólag a mérési eredmények alapján alakuló egyensúlyi egyenletek :

$$f_1 = -106,0 \delta y - 61,8 \delta x - 1,8 = 0$$

$$f_2 = -61,8 \delta y - 101,2 \delta x + 49,7 = 0.$$

(Ezek az egyenletek az 1. példa egyensúlyi egyenleteitől abban különböznek, hogy az együtthatók és a tisztatagok az 1. példa 9 jelű mérési eredményéhez tartozó megfelelő értékekkel kisebbek.)

A távolsági kényszerfeltételt, mint ismeretes, a

$$k = \sin(\delta_{AP}) \delta y + \cos(\delta_{AP}) \delta x - dt = 0$$

kényszerfeltételi egyenlet fejezi ki. Miután az AP előzetes távolságára a P pont előzetes koordinátáival számítva, $(t) = 311,376$ métert kaptunk,

$$dt = t - (t) = 311,210 - 311,376 = -0,166 \text{ m.}$$

Behelyettesítve az $A-P$ irány előzetes irányszögének sinus- és cosinusértékét és a dt értéket a kiegyenlítés hosszegységének megfelelően deciméterben véve, a kényszerfeltételi egyenlet számszerűleg:

$$k = +0,687 \delta y - 0,726 \delta x + 1,66 = 0.$$

Fejezzük ki a k egyenletből például a δx ismeretlent és állítsunk fel δy számára azonosossági egyenletet:

$$\begin{array}{ll} \delta y = +1,000 \delta y & A_1 = +1 \\ \delta x = +0,946 \delta y + 2,286 & \text{vagyis} \\ & A_2 = +0,946. \end{array}$$

A kényszerfeltételt is magában foglaló egyensúlyi egyenlet:

$$g = [Af] = -164,48 \delta y - 157,54 \delta x + 45,20 = 0,$$

illetve behelyettesítve ebbe a δx -nek az előbb a δy segítségével kifejezett értékét:

$$g = -313,51 \delta y - 314,94 = 0$$

és ebből δy , majd ezt behelyettesítve δx kifejezésébe, a δx koordinátaváltozás:

$$\delta y = -1,00 \text{ dm} \qquad \delta x = +1,34 \text{ dm}.$$

Ezután az 1. példa 7. lépése szerint kiszámítjuk a tájékozási szög változását: $\delta z = +14,1''$, majd elvégezzük az 1. példa 8. lépését is (hosszmérés a mostani példánkban azonban nincsen). Ha az 1. példa 9. lépésének megfelelően számítjuk az erővetületek összegét, nem jutunk zérushoz, hanem a kényszerfeltételt képviselő erő vetületeit kapjuk meg ellenkező előjellel:

$$[-v \cos \delta] = -V_y = +21,26 \qquad [v \sin \delta] = -V_x = -23,93.$$

A továbbiakban elvégezzük az 1. példa 10—15. lépéseit (a hosszmérésre vonatkozóakat figyelmen kívül hagyva). A P pont végleges koordinátái:

$$y = (y) + \delta y = +24\,540,560 \text{ m} \qquad x = (x) + \delta x = -40\,477,366 \text{ m}.$$

A középkihasználást annak figyelembevételével végezzük, hogy a fölös-mérések száma: $f = 8 - (3 - 1) = 6$.

Ellenőrzésképpen behelyettesítjük a koordinátaváltozásokat az f jelű egyenletekbe is. Ilyen módon is megkapjuk ugyanis a kényszerfeltételt képviselő erő vetületeit (ellenkező előjellel):

$$f_1 = -V_y = +21,28 \qquad f_2 = -V_x = -24,00.$$

Ha a P pont végleges koordinátáival kiszámítjuk az \overline{AP} távolságot: $t_{AP} = 311,209 \text{ m}$ értéket kapunk. Ez a számítási élességen belül egyezik a kényszerfeltételtként megadott távolságértékkel.

3. példa. Határozzuk meg a P pont koordinátáit az 1. példában megadott mérési eredmények alapján, de azzal az eltéréssel, hogy a 2, 4 és 7 jelű iránymérési eredményeknek $g = 2$ különleges súlyt tulajdonítunk.

A kiegyenlítés menete, ha figyelemmel kísérjük a 7. pontban foglaltakat, valamint az 1. példa lépéseit, a 4—6. táblázatok alapján könnyen követhető. A P pont előzetes koordinátái megegyeznek az 1. példában felvett értékekkel. A tájékozási szög előzetes és végleges értékét is a 4. táblázatban ugyanolyan módon végezzük, mint az 1. táblázatban végeztük.

4. táblázat

Mérés jele	Állás-pont	Irány-zott pont	t km	g	L ° ' "	(δ) ° ' "	(z) ° ' "	e "	δ ° ' "	z ° ' "	v "	$pv^2 = gtv^2$
1	P	A	0,31	1	316 32 45	316 35 43	0 2 58	+51,9	316 35 41	0 2 56	+39	456,3
2		B	0,95	2	18 53 25	18 55 5	0 1 40	-26,1	18 55 30	0 2 5	-12	288,0
3		C	1,50	1	79 46 44	79 48 35	0 1 51	-15,1	79 48 51	0 2 7	-10	150,0
4		D	2,19	2	118 9 47	118 12 6	0 2 19	+12,9	118 12 10	0 2 23	+6	158,6
			8,09 = gt				(Z)=0° 2' 6,1"			Z=0° 2' 17"		
5	A C D E <u>AP</u>	P	0,3	1	136 35 43	136 35 43		0	136 35 41		-2	1,2
6			1,5	1	259 48 47	259 48 35		-12	259 48 51		+4	24,0
7			2,2	2	298 11 56	298 12 6		+10	298 12 10		+14	862,4
8			0,9	1	25 34 25	25 34 25		0	25 33 55		-30	810,0
9			0,5	1	311,210 m	311,376 m	+0,166 m	+110	311,241 m	+0,031 m	+14	98,0
												2848,5

6. táblázat

Mérés jele	g	g _{ady} vagy g _{cdy}	g _{cdx} vagy g _{bdx}	[]	-cos δ vagy sin δ	$\delta\delta'$	ge	-g δz	v'	$\frac{t}{g}$	$\frac{t}{g} v'^2$	v' sin δ	v' cos δ	v
1	1	+31,36	-33,27	-1,91	+0,726	-2,63	+51,9	-11,17	+38,10	0,3	435,5	+26,17	-27,66	+38,1
2	2	+34,59	+13,27	+47,86	+0,946	+50,59	-52,2	-22,34	-23,95	0,5	288,0	+7,76	+22,66	-12,0
3	1	-2,15	-13,37	-15,52	-0,984	+15,77	-15,1	-11,17	-10,50	1,5	165,4	+10,33	+1,86	-10,5
4	2	+6,99	-14,67	-7,68	-0,881	+8,72	+25,8	-22,34	+12,18	1,1	163,7	-10,73	+5,76	+6,1
5	1	+31,36	-33,27	-1,91	+0,726	-2,63	0		-2,63	0,3	2,0	-1,81	+1,91	-2,6
6	1	-2,15	-13,37	-15,52	-0,984	+15,77	-12		+3,77	1,5	21,7	-3,71	+0,67	+3,8
7	2	+6,99	-14,67	-7,68	-0,881	+8,72	+20		+28,72	1,1	906,1	-25,30	+13,58	+14,4
8	1	+17,56	+9,45	+27,01	-0,902	-29,94	0		-29,94	0,9	804,6	-12,93	-27,01	-29,9
9	1	+18,82	+22,31	+41,13	-0,687	-59,87	+73,7		+13,83	0,5	95,2	+10,04	+9,50	+13,8
											2882,2	-0,18	-0,07	

5. táblázat

Mérés jele	g	ga	gb	gc	ge	sin δ	cos δ	ge sin δ	ge cos δ
1	1	-35,0	-31,3	-33,1	+51,9	+0,687	-0,726	+35,65	-37,68
2	2	-38,6	-4,6	+13,2	-52,2	-0,324	-0,946	+16,91	+49,38
3	1	-0,4	-13,3	+2,4	-15,1	-0,984	-0,177	+14,85	+2,67
4	2	-4,2	-14,6	-7,8	+25,8	-0,881	+0,473	-22,73	+12,20
						-2,707	-1,849		
5	1	-35,0	-31,3	-33,1	0	+0,687	-0,726	0,00	0,00
6	1	-0,4	-13,3	+2,4	-12	-0,984	-0,177	+11,81	+2,12
7	2	-4,2	-14,6	-7,8	+20	-0,881	+0,473	-17,62	+9,46
8	1	-19,6	-4,5	+9,4	0	+0,432	+0,902	0,00	0,00
9	1	-21,0	-23,4	+22,2	+73,7	+0,726	+0,687	+53,51	+50,63
[]		-158,4	-150,9	-32,2					
Δ		+8,73	+18,69	-12,77					
		-149,67	-132,21	-44,97				+92,38	+88,78

Csak a belső irányokhoz :

[gt] = 8,09

D = 0,04848 [gt] = 0,392

Redukciók

Δ'

Δ = $\frac{\Delta'}{D}$

[g cos δ]	[g cos δ]	+3,4188	+8,73	a	+
[g sin δ]	[g sin δ]	+7,3279	+18,69	b	+
[g sin δ]	[g cos δ]	+5,0052	+12,77	c	-

+3,4188	+8,73	a	+
+7,3279	+18,69	b	+
+5,0052	+12,77	c	-

A megoldandó egyensúlyi egyenletek :

-149,7 δy - 45,0 δx - 88,8 = 0

-45,0 δy - 132,2 δx + 92,4 = 0

és ezekből a koordinátaváltozások :

δy = -0,896 dm

δx = +1,005 dm.

A tájékozási szög változását a (38) képlettel számítjuk :

$$\delta z = \frac{(-1,849)(-0,896) - (-2,707)(+1,005)}{0,392} = +11,17''.$$

A P pont végleges koordinátái :

y = (y) + δy = +24 540,570 m

x = (x) + δx = -40 477,395 m.

Középhibaszámítás :

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2865}{9-3}} \pm = 21,9.$$

Példaként egyes mérési eredmények kiegyenlítés utáni középhibája :

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{21,9}{\sqrt{0,3}} = \pm 40,0'' & \mu_3 &= \frac{21,9}{\sqrt{1,5}} = \pm 17,9'' & \mu_4 &= \frac{21,9}{\sqrt{2 \cdot 2,2}} = \pm 10,4'' \\ \mu_0 &= 21,9 \frac{1000}{\rho''} \sqrt{\frac{0,311}{0,67}} = \pm 0,072 \text{ m.}\end{aligned}$$

Miután az egyensúlyi egyenletekből a koordináták számára a súlyokkal arányos $p'_y = 134$ és $p'_x = 119$ értékek adódtak, a koordináták középhibája a (76) képletek alapján :

$$\mu_y = 0,022 \frac{21,9}{\sqrt{134}} = \pm 0,041 \text{ m} \quad \mu_x = 0,022 \frac{21,9}{\sqrt{119}} = \pm 0,044 \text{ m.}$$

4. példa. Határozzuk meg P pont koordinátáit négy adott pontról a P pontig mért távolságok alapján.

A kiegyenlítés menetét a 7—9. táblázatok alapján követhetjük. A megoldandó egyensúlyi egyenletek és a belőlük kiszámított koordinátaváltozások :

$$\begin{aligned}-181,4 \delta y - 11,9 \delta x - 19,6 &= 0 & \delta y &= -0,170 \text{ dm} \\ -11,9 \delta y - 210,9 \delta x + 200,2 &= 0 & \delta x &= +0,957 \text{ dm.}\end{aligned}$$

Középhibasámítás :

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{8492}{2}} = \pm 65,11.$$

Példaként az 1 jelű hosszmerési eredmény kiegyenlítés utáni középhibája a (69) képlet szerint :

$$\mu_1 = 65,11 \frac{1000}{\rho''} \sqrt{0,18} = \pm 0,13 \text{ m.}$$

Az egyensúlyi egyenletek megoldása során a koordináták számára a súlykoefficiensekkel arányos $Q'_y = 0,00553$ és $Q'_x = 0,00476$ értékeket kaptunk, a koordinátaközéphibák tehát a (77) képletek szerint :

$$\begin{aligned}\mu_y &= 0,022 \cdot 65,11 \sqrt{0,00553} = \pm 0,106 \text{ m} \\ \mu_x &= 0,022 \cdot 65,11 \sqrt{0,00476} = \pm 0,099 \text{ m.}\end{aligned}$$

7. táblázat

Mérés jelle	(θ)	L m	(t) m	E m	e''	t m	v_L m
1	133°51'	179,365	179,365	0	0	179,286	-0,079
2	206°58'	213,590	213,591	+0,001	+ 1,0	213,513	-0,077
3	283°35'	272,750	272,577	-0,173	-130,9	272,616	-0,134
4	32°28'	196,420	196,230	-0,190	-199,6	196,301	-0,119

8. táblázat

Mérés jele	a	b	c	e	sin δ	cos δ	e sin δ	e cos δ
1	-55,2	-59,8	-57,5	0	+0,721	-0,693	0,0	0,0
2	-76,7	-19,9	+39,0	+ 1,0	-0,453	-0,891	- 0,4	- 0,9
3	- 4,2	-71,5	-17,2	-130,9	-0,972	+0,235	+127,2	- 30,8
4	-74,8	-30,2	+47,6	-199,6	+0,537	+0,844	-107,2	-168,5
[]	-210,9	-181,4	+11,9				+ 19,6	-200,2

9. táblázat

Mérés jele	b δ y vagy -c δ y	-c δ x vagy a δ x	[]	-sin δ vagy -cos δ	$\delta\delta$	e	v''	v sin δ	v cos δ	t km	tvv	vL m
1	+10,23	+55,08	+65,31	-0,721	-90,58	0	- 90,58	-65,31	+ 62,77	0,18	1476,8	-0,079
2	+ 6,67	-73,48	-66,81	+0,891	-74,98	+ 1,0	- 73,98	+33,51	+ 65,92	0,21	1149,3	-0,077
3	+12,23	+16,48	+28,71	+0,972	+29,54	-130,9	-101,36	+98,52	- 23,82	0,27	2773,9	-0,134
4	+8 ,14	-71,66	-63,52	-0,844	+75,26	-199,6	-124,34	-66,67	-104,94	0,20	3092,1	-0,118
								+ 0,05	- 0,07		8492,1	

IRODALOM

1. HAZAY ISTVÁN: Kiegyenlítő számítás a geodéziai gyakorlatban, XII. fejezet (Budapest, 1938).
2. MÁJAY PÉTER: Háromszögelési pontok koordinátáinak grafikus kiegyenlítése (Földmérési Közlemények 1952. évi 2. szám, Budapest).
3. ZELCSÉNYI GÉZA: Alsórendű háromszögelési pontok koordinátáinak számítása (Geodézia és Kartográfia 1955. évi 3. szám, Budapest).

ÖSSZEFOGLALÁS

Az [1] alatt idézett könyvben ismertetett régebbi vizsgálatok azt mutatták, hogy az alsórendű háromszögelésnél az irányokat hosszukkal lineárisan arányos irányúsúllyal célszerű felhasználni. Ezt különösen az úgynevezett kerethibák helyes elosztása követeli meg. A $[p_{vv}] =$ = minimum feltétel kielégítése még egyszerű súlyok esetében is hosszadalmas a szokásos koordinátakiegyenlítéssel. Ezért dolgoztunk ki egy olyan eljárást, amely az irányúsúlyokat már felépítésében magában foglalja és így azokat nem kell külön figyelembe venni. Ez az eljárás tisztán mechanikai (főként sztatikai) elveken alapszik. Az [1] alatt idézett könyvben már adtunk ismertetést róla, sőt német nyelvű tanulmányok is jelentek meg mind az eljárásról, mind az említett vizsgálatokról. Azóta azonban az eljárást egyrészt lényegesen egyszerűbbé tettük, másrészt tovább is fejlesztettük. Most a sztatikai koordinátakiegyenlítést újabb, fejlettebb alakjában ismertetjük, végigtekintve a koordinátakiegyenlítés valamennyi feladatát.

A SZTATIKAI KOORDINÁTAKIEGYENLÍTÉS VÉGREHAJTÁSA

• II. RÉSZ. TÖBBPONTOS KIEGYENLÍTÉS

HAZAY ISTVÁN

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA
ALKALMAZOTT GEODÉZIAI TANSZÉK, NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM, SOPRON

[Beérkezett 1958. szept. 23-án]

II. Két pont együttes kiegyenlítése iránymérésekkel

Két pont együttes kiegyenlítésekor *mindkét ponton külön-külön* egyensúlyban kell lennie a ponton működő erőrendszernek. Az új pontonként két-két egyensúlyi egyenlet lehetővé teszi a koordinátaváltozások egyértelmű kiszámítását, ha a tájékozási szögek változását álláspontonként a *forogatónyomatékok zérus-összege* alapján kiküszöböljük.

Figyelemmel kell lenni azonban a P_1 és P_2 új pontokat összekötő újponti irány — a közös irány — különleges jelentőségére. A közös irány ugyanis, amelyet P_1 -ről mértünk P_2 felé, a P_1 -nél belső, a P_2 -nél pedig külső irány. Viszont, ha a közös irányt P_2 -ről is mértük, a P_2 -ről mért irány P_2 -nél belső és P_1 -nél külső. A közös irány mindkét mérési eredményének elő kell fordulnia *mindkét új pontnál*, mégpedig mindkettőnek az egyik pontnál belső, a másik pontnál külső irányként. Ha csak az egyik végpontjáról mértük a közös irányt, akkor ez annál a pontnál, amelyen mértük, belső, a másik pontnál pedig külső irányt jelent.

Az új pontokon mért irányértékeket nem tájékozhatjuk végleges, hanem csak előzetes tájékozási szöggel és mindkét pontra vonatkozóan a kiegyenlítés során kell meghatározni a tájékozási szög δz változását. Így az egyik pontról a másikra a tájékozási szög előzetes értékével tájékozott irányértékkel együtt át kell vinni kölcsönösen az egyelőre ismeretlen δz értéket is. A δz értékek hozzák létre a két pont szorosabb kapcsolatát.

A δz értékek időleges kiküszöbölését ismét *redukciók* alkalmazásával végezzük. Redukciók származnak az elmondottak szerint a :

δz_1 miatt a P_1 -nél, annak összes belső irányaira vonatkozólag,

δz_2 miatt a P_2 -nél, annak összes belső irányaira vonatkozólag,

δz_1 miatt a P_2 -nél a közös irányra vonatkozólag és végül

δz_2 miatt a P_1 -nél a közös irányra vonatkozólag.

A P_1 pontról az ismert pontokra menő irányok mérési javításának kifejezése megegyezik a hátrametszés irányaihoz tartozó javítások (12)[•]alatti

kifejezésével. A P_1 pontról P_2 pontra menő (újponti) irány mérési javítása pedig :

$$v_{12} = + \frac{0,1\rho'' \cos \delta_{21}}{t_{12}} \delta y_1 - \frac{0,1\rho'' \sin \delta_{21}}{t_{12}} \delta x_1 - \\ - \frac{0,1\rho'' \cos \delta_{21}}{t_{12}} \delta y_2 + \frac{0,1\rho'' \sin \delta_{21}}{t_{12}} \delta x_2 + e_{12} - \delta z_1. \quad (79)$$

Ha a P_1 ponton a *tájékozási szög előzetes értékét* a

$$(Z_1) = \frac{[t(z)]^I}{[t]^I} \quad (80a)$$

képlet szerint vesszük fel, a képletbe belevonva a P_2 pontra menő újponti irány adatait is, tehát ha a P_1 ponton mért (*belső*) irányokra

$$[te]^I = 0 \quad (80b)$$

(a betűk jelentése a korábbiakból már ismert, az I felső index a P_1 pontra vonatkozó adatokra utal), akkor a P_1 ponton mért összes irányokhoz tartozó erők P_1 pontra vonatkozó *forgatónyomaték-összegének zérus-feltételéből* a P_1 pont *tájékozási ismeretlene* :

$$\delta z_1 = \frac{[\cos \delta]^I \delta y_1 - [\sin \delta]^I \delta x_1 - \cos \delta_{21} \delta y_2 + \sin \delta_{21} \delta x_2}{D^I}, \quad (81)$$

ahol

$$D^I = \frac{10}{\rho''} [t]_{dm}^I = 0,04848 [t]_{km}^I. \quad (82)$$

A v_{12} javítást a δz_1 értékének behelyettesítése után a P_1 pontnál a $\sin \delta_{21}$, illetve a $-\cos \delta_{21}$ értékkel kell szorozni, hogy az erő koordinátatengelyek szerinti vetületeit megkapjuk. P_2 pontnál ezzel szemben a v_{12} javítás a $\sin \delta_{12} = -\sin \delta_{21}$, illetve a $-\cos \delta_{12} = \cos \delta_{21}$ értékkel szorzandó. (Az 12 index azt jelzi, hogy a P_1 pontról a P_2 pont felé megy az irány, a 21 pedig, hogy a P_2 pontról a P_1 felé!)

A P_2 pont *tájékozási ismeretlene* (amely a δz_1 kifejezéséből az indexek ciklikus permutációjával is előállítható), feltételezve, hogy a *tájékozási szög* (Z_2) előzetes értékét a (80a) képletnek megfelelően számítottuk, de a P_2 pont adataiból :

$$\delta z_2 = \frac{[\cos \delta]^{II} \delta y_2 - [\sin \delta]^{II} \delta x_2 - \cos \delta_{12} \delta y_1 + \sin \delta_{12} \delta x_1}{D^{II}}, \quad (83)$$

ahol

$$D^{II} = \frac{10}{e^n} [t]_{dm}^{II} = 0,048\,48 [t]_{km}^{II} \quad (84)$$

(A II index a P_2 pont adataira utal.)

A v_{21} javítást a δz_2 értékének behelyettesítése után a P_1 , illetve a P_2 pontnál ugyanazokkal a sinus- és cosinus-értékekkel kell szorozni, mint a v_{12} javítást.

Az újponti irányhoz tartozó v_{12} mérési javításból származó erő vetületei a tájékozási ismeretlent figyelmen kívül hagyva, a P_1 pontnál (*a belső irányok között*):

$$\begin{aligned} &+ a\delta y_1 + c\delta x_1 - a\delta y_2 - c\delta x_2 - e_{12} \cos \delta_{21} \\ \text{és} &+ c\delta y_1 + b\delta x_1 - c\delta y_2 - b\delta x_2 + e_{12} \sin \delta_{21}. \end{aligned} \quad (85)$$

A P_2 pontnál (*a külső irányok között*) pedig ugyanezek ellentétes előjellel.

A v_{21} mérési javításból származó erő vetületei a tájékozási ismeretlent figyelmen kívül hagyva, a P_2 pontnál (*a belső irányok között*):

$$\begin{aligned} &- a\delta y_1 - c\delta x_1 + a\delta y_2 + c\delta x_2 + e_{21} \cos \delta_{21} \\ \text{és} &- c\delta y_1 - b\delta x_1 + c\delta y_2 + b\delta x_2 - e_{21} \sin \delta_{21}. \end{aligned} \quad (86)$$

A P_1 pontnál (*a külső irányok között*) pedig ugyanezek ellentétes előjellel.

A felírt erővetületekben az a , b és c értékek természetesen az újponti irányhoz tartozó *iránykoefficiensek*, az e_{12} a P_1 pontról, az e_{21} a P_2 pontról induló irány *irányeltérése*, a δ_{21} pedig a P_2 pontról a P_1 pont felé menő irány *irányszöge*.

A tájékozási ismeretlenek figyelembevétel nélkül felállított egyensúlyi egyenleteket a tájékozási ismeretlenek miatt a 10. táblázatban előírt *20 redukcióval* kell ellátni. (A táblázat a Δ' segédmenyiségeket írja elő. A Δ redukciók ezeknek a megfelelő D értékkel osztott hányadosai. A táblázat a redukciók hovatarozását is jelzi, továbbá azt is, hogy a kiszámított értéket eredeti előjelével, vagy ellenkező előjellel kell-e felhasználni.)

Az egyensúlyi egyenletek felállítását úgy végezzük, hogy a számítási sémába írt iránykoefficienseket és az $e \cos \delta$ és $e \sin \delta$ tagokat az előmetszésnek megfelelően pontonként külön-külön összegezzük és az iránykoefficiensekből származó összegtagokat összevonjuk a redukciókkal. Az egyensúlyi egyenletek felállítására szolgáló sémát az 5. példánál található 14. táblázatban mutatjuk be. A sémában mindegyik új ponthoz egy-egy vízszintes sáv és egy-egy függőleges hasáb tartozik. A sávokat I- és II-vel, a hasábokat pedig 1- és 2-vel jelöltük. A redukciók hovatarozását a sáv- és hasábjelzéssel is megjelöltük.

10. táblázat

δz_1 miatt			δz_2 miatt		
$[\cos \delta]^I [\cos \delta]^I$	a_1^I	+	$[\cos \delta]^{II} [\cos \delta]^{II}$	a_2^{II}	+
$[\sin \delta]^I [\sin \delta]^I$	b_1^I	+	$[\sin \delta]^{II} [\sin \delta]^{II}$	b_2^{II}	+
$[\sin \delta]^I [\cos \delta]^I$	c_1^I	—	$[\sin \delta]^{II} [\cos \delta]^{II}$	c_2^{II}	—
$[\cos \delta]^I \cos \delta_{21}$	a_2^I	—	$[\cos \delta]^{II} \cos \delta_{12}$	a_1^{II}	—
$[\sin \delta]^I \sin \delta_{21}$	b_2^I	—	$[\sin \delta]^{II} \sin \delta_{12}$	b_1^{II}	—
$[\sin \delta]^I \cos \delta_{21}$	$c_2^I \sin$	+	$[\sin \delta]^{II} \cos \delta_{12}$	$c_1^{II} \cos$	+
$[\cos \delta]^I \sin \delta_{21}$	$c_2^I \cos$	+	$[\cos \delta]^{II} \sin \delta_{12}$	$c_1^{II} \sin$	+
$\cos^2 \delta_{21}$	a_2^{II}	+	$\cos^2 \delta_{12}$	a_1^I	+
$\sin^2 \delta_{21}$	b_2^{II}	+	$\sin^2 \delta_{12}$	b_1^I	+
$\sin \delta_{21} \cos \delta_{21}$	c_2^{II}	—	$\sin \delta_{12} \cos \delta_{12}$	c_1^I	—

Az I. sáv 2. hasábjában a c iránykoefficiensek összege más redukciót kap az y irányú (cosinus-) vetületi és mást az x irányú (sinus-) vetületi egyensúlyi egyenlet számára. Ezért válik a megfelelő rovat kétfelé. Az egyensúlyi egyenletek szimmetriája folytán a II. sáv 1. hasábját figyelmen kívül lehet hagyni. Oda tehát a redukciókat már nem vezetjük be. Az *egyensúlyi egyenletek* a szimmetrikus tagok elhagyásával:

$$\begin{array}{rcccl}
 \underline{+ [a]_1^I} & + [c]_1^I & + [a]_2^I & + [c]_2^{I \cos} & - [e \cos \delta]^I \\
 & \underline{+ [b]_1^I} & + [c]_2^{I \sin} & + [b]_2^I & + [e \sin \delta]^I \\
 & & \underline{+ [a]_2^{II}} & + [c]_2^{II} & - [e \cos \delta]^{II} \\
 & & & \underline{+ [b]_2^{II}} & + [e \sin \delta]^{II}.
 \end{array} \quad (87)$$

Az egyenletek együtthatóinak jelzése már a redukált értékeket jelöli.

A koordinátaváltozások meghatározása után a (81) és a (83) képlettel kiszámítjuk a *tájékozási szögek* δz_1 és δz_2 *változását*, majd számítjuk az *irányszögek változását* is. Az ismert pontokról a P_1 pontra menő irányokhoz a

$$\delta \delta_i = \frac{a_i \delta y_1 + c_i \delta x_1}{-\cos \delta_i} \quad \text{vagy} \quad \delta \delta_i = \frac{c_i \delta y_1 + b_i \delta x_1}{\sin \delta_i} \quad (88)$$

képlet, az ismert pontokról a P_2 pontra menő irányokhoz a

$$\delta \delta_i = \frac{a_i \delta y_2 + c_i \delta x_2}{-\cos \delta_i} \quad \text{vagy} \quad \delta \delta_i = \frac{c_i \delta y_2 + b_i \delta x_2}{\sin \delta_i} \quad (89)$$

képlet szolgál, míg az újponti irány irányszögének a változását a

$$\delta\delta_{21} = \frac{+a\delta y_1 + c\delta x_1 - a\delta y_2 - c\delta x_2}{-\cos\delta_{21}} = \frac{+c\delta y_1 + b\delta x_1 - c\delta y_2 - b\delta x_2}{\sin\delta_{21}}$$

és a

$$\delta\delta_{12} = \frac{-a\delta y_1 - c\delta x_1 + a\delta y_2 + c\delta x_2}{-\cos\delta_{12}} = \frac{-c\delta y_1 - b\delta x_1 + c\delta y_2 + b\delta x_2}{\sin\delta_{12}}$$

képletekkel számíthatjuk. Az index nélküli a , b és c betű az újponti irányhoz tartozó iránykoefficienseket jelenti. Természetes, hogy

$$\delta\delta_{21} = \delta\delta_{12} . \quad (91)$$

A mérési javítások az adott pontokról a P_1 pontra menő külső irányokhoz és a P_1 pontról az adott pontokra menő belső irányokhoz :

$$v_i = \delta\delta_i + e_i \quad \text{és} \quad v_i = \delta\delta_i + e_i - \delta z_1 . \quad (92)$$

Hasonlóan a P_2 ponthoz tartozó irányokhoz :

$$v_i = \delta\delta_i + e_i \quad \text{és} \quad v_i = \delta\delta_i + e_i - \delta z_2 . \quad (93)$$

Az újponti irányhoz pedig :

$$v_{12} = \delta\delta_{12} + e_{12} - \delta z_1 \quad \text{és} \quad v_{21} = \delta_{21} + e_{21} - \delta z_2 . \quad (94)$$

Ellenőrzésül szolgál, hogy a számítási élességen belül ki kell elégülniök a

$$\begin{aligned} [v \cos \delta]^I &= 0 & [v \sin \delta]^I &= 0 \\ [v \cos \delta]^{II} &= 0 & [v \sin \delta]^{II} &= 0 \end{aligned} \quad (95)$$

feltételeknek.

Az új pontok végleges koordinátaival számított irányszögeknek a számítási élességen belül természetesen most is a megfelelő előzetes irányszögektől a (88)—(90) képlettel meghatározott értékekkel kell eltérniök és a végleges irányszögek alapján meghatározott mérési javításoknak is egyezniök kell a (92)—(94) képletekkel számítottakkal.

Magától értetődő, ha valamelyik új ponton nem végeztünk iránymérést, vagyis a pontot csak külső irányok határozzák meg, akkor erre a pontra vonatkozóan nincs δz tájékozási ismeretlen és a vele kapcsolatos redukciók is elmaradnak.

12. Kettőnél több pont együttes kiegyenlítése iránymérésekkel

Kettőnél több pont együttes kiegyenlítésekor is az az elv, hogy *minden egyes új ponton külön-külön* egyensúlyban kell lennie a ponton működő erőrendszernek. Ekkor is figyelemmel kell lenni a két-két új pontot összekötő újponti irányokra. Ha az ilyen irányt mind a két végpontján mértük, mindkét mérési eredményének elő kell fordulnia az irány mindkét végpontjánál, mégpedig mindkettőnek az egyik végpontnál belső, a másik végpontnál külső irányként. Ha az irányt csak egyik végpontján mértük, akkor az annál a pontnál, amelyiken mértük, belső, a másik pontnál pedig külső irányt jelent.

Mindaz, amit a 11. pontban a közös irányra mondtunk, értelemszerűen vonatkozik valamennyi újponti irányra is.

Miután az új pontokon mért iránySOROZATOT egyelőre csak előzetes tájékozási szöggel tudjuk tájékozni, amelyet a (80a) képletnek megfelelő, de a kérdéses pontra vonatkozó indexekkel ellátott képlettel számítunk, minden egyes új pontnál, amelyen iránymérést végeztünk, jelentkezik egy-egy δz tájékozási ismeretlen. A tájékozási ismeretlenek a megfelelő új pontra vonatkozó *forgatónyomaték egyensúlya* feltételéből sorra (csupán a ponton mért — belső — irányok adatait véve figyelembe):

$$\begin{aligned}
 \delta z_1 &= \frac{[\cos \delta]^I \delta y_1 - [\sin \delta]^I \delta x_1 - \cos \delta_{21} \delta y_2 + \sin \delta_{21} \delta x_2}{D^I} + \\
 &\quad + \frac{-\cos \delta_{31} \delta y_3 + \sin \delta_{31} \delta x_3 - \dots}{D^I} \\
 \delta z_2 &= \frac{-\cos \delta_{12} \delta y_1 + \sin \delta_{12} \delta x_1 + [\cos \delta]^{II} \delta y_2 - [\sin \delta]^{II} \delta x_2}{D^{II}} + \\
 &\quad + \frac{-\cos \delta_{32} \delta y_3 + \sin \delta_{32} \delta x_3 - \dots}{D^{II}} \\
 \delta z_3 &= \frac{-\cos \delta_{13} \delta y_1 + \sin \delta_{13} \delta x_1 - \cos \delta_{23} \delta y_2 + \sin \delta_{23} \delta x_2}{D^{III}} + \\
 &\quad + \frac{+ [\cos \delta]^{III} \delta y_3 - [\sin \delta]^{III} \delta x_3 - \dots}{D^{III}}
 \end{aligned} \tag{96}$$

stb., ahol

$$\begin{aligned}
 D^I &= 0,048\,48 [t]_{km}^I & D^{II} &= 0,048\,48 [t]_{km}^{II} \\
 D^{III} &= 0,048\,48 [t]_{km}^{III} \text{ stb.}
 \end{aligned} \tag{97}$$

Nyilvánvaló, ha valamelyik új ponton nem irányoztuk az összes többi pontokat, akkor a (96) képleteknek a nem mért irányokra (nem irányzott pontokra) vonatkozó tagjai elmaradnak.

A tájékozási ismeretlenek figyelembevétele nélkül felállított egyensúlyi egyenleteket a tájékozási ismeretlenek miatt most is *redukciókkal* látjuk el: most is az iránykoefficiensök összegtagjait redukáljuk. Az egyensúlyi egyenletek felállítására szolgáló sémában minden egyes új ponthoz egy-egy római számmal jelölt vízszintes sáv és egy-egy arabs számmal jelölt függőleges hasáb tartozik. Minden olyan c iránykoefficiens-összeg, amelynek indexeiben a hasábszám (arabs szám) nagyobb, mint a sávszám (római szám), más redukciókat kap az y irányú (cosinus-) vetületi és más az x irányú (sinus-) vetületi egyenlet számára. Az egyensúlyi egyenletek szimmetriája folytán minden olyan sémarészt, amelynél a hasábszám (arabs szám) kisebb a sávszámánál (római számnál), figyelmen kívül lehet hagyni. Ezekbe a részekbe tehát a redukciókat már nem vezetjük be. A redukciók számításáról a későbbiekben szólnunk. Az egyensúlyi egyenletek például *hárompontos kiegyenlítés* számára a szimmetrikus tagok elhagyásával:

$$\begin{array}{r}
 \underline{+ [a]_1^I} + [c]_1^I + [a]_2^I \quad + [c]_2^{I\cos} + [a]_3^I \quad + [c]_3^{I\cos} - [e \cos \delta]^I \\
 \quad + \underline{[b]_1^I} + [c]_2^{I\sin} \quad + [b]_2^I + [c]_3^{I\sin} \quad + [b]_3^I + [e \sin \delta]^I \\
 \quad \quad \quad \underline{[a]_2^{II}} \quad + [c]_2^{II} + [a]_3^{II} \quad + [c]_3^{II\cos} - [e \cos \delta]^{II} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \underline{[b]_2^{II}} + [c]_3^{II\sin} \quad + [b]_3^{II} + [e \sin \delta]^{II} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{+ [a]_3^{III}} \quad + [c]_3^{III} - [e \cos \delta]^{III} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \underline{+ [b]_3^{III}} + [e \sin \delta]^{III}.
 \end{array} \tag{98}$$

A koordinátaváltozások meghatározása után a (96) képletekkel kiszámítjuk a tájékozási szögek δz változását, majd elvégezzük a 11. pont (88)—(94) képleteinek megfelelő (de a vonatkozó pontokhoz, illetve irányokhoz alkalmazott) képletekkel mindazokat a számításokat, amelyeket a 11. pontban ismertettünk. A (95) képletekkel két új pontra adott feltételeknek természetesen most valamennyi új pontra nézve *külön-külön* ki kell elégülniök.

Vegyük most szemügyre a redukciók alakulását. Ebből a célból a 11. táblázatban felsoroltuk a hárompontos kiegyenlítés redukcióit a hovatartozás és a felhasználás előjelének megjelölésével együtt. (A + azt jelenti, hogy a redukciót azzal az előjellel kell felhasználni, amellyel kiadódott, míg a — azt, hogy ellenkező jellel kell alkalmazni.) A táblázatban a Δ' segédmenyiségeket tüntettük fel, ezeket még a megfelelő D értékkel kell osztani, hogy a Δ reduk-

ciókhoz jussunk. Felsoroltuk továbbá a 12. táblázatban a *négyponos kiegyenlítésnek* a δz_1 tájékozási ismeretlen folytán keletkező redukcióit is.

A redukciók — kiindulva a kétpontos kiegyenlítés redukcióiból — *törvényszerűen* szerkeszthetők. Elsősorban a δz_1 miatti redukciókat állapítjuk meg. A szerkesztés törvényszerűségét a 10., 11. és 12. táblázatok összehasonlításából minden külön magyarázat nélkül világosan láthatjuk. Ha a δz_1 miatti redukciók már megvannak, az indexek ciklikus permutálásával állíthatjuk elő sorban a δz_2 , majd ebből a δz_3 miatti redukciókat és így tovább. Említettük már, hogy az olyan értékekre, amelyeknek arabs számú indexe (hasábszáma) kisebb, mint a római számú indexe (sáv száma), nincsen szükségünk. Ha ilyenhez jutunk, az *indexeket felcseréljük*. Például az a_3^I érték indexeinek permutálása háromponos kiegyenlítéskor az a_1^{III} jelű értéket adja. Miután erre nincsen szükségünk, az indexeket felcseréljük. Ugyanis

$$a_3^I = a_1^{III}. \quad (99)$$

11. táblázat

δz_1 miatt			δz_2 miatt			δz_3 miatt		
$[\cos \delta]^I [\cos \delta]^I$	a_1^I	+	$[\cos \delta]^{II} [\cos \delta]^{II}$	a_2^{II}	+	$[\cos \delta]^{III} [\cos \delta]^{III}$	a_3^{III}	+
$[\sin \delta]^I [\sin \delta]^I$	b_1^I	+	$[\sin \delta]^{II} [\sin \delta]^{II}$	b_2^{II}	+	$[\sin \delta]^{III} [\sin \delta]^{III}$	b_3^{III}	+
$[\sin \delta]^I [\cos \delta]^I$	c_1^I	—	$[\sin \delta]^{II} [\cos \delta]^{II}$	c_2^{II}	—	$[\sin \delta]^{III} [\cos \delta]^{III}$	c_3^{III}	—
$[\cos \delta]^I \cos \delta_{21}$	a_2^I	—	$[\cos \delta]^{II} \cos \delta_{32}$	a_3^{II}	—	$[\cos \delta]^{III} \cos \delta_{13}$	a_3^I	—
$[\sin \delta]^I \sin \delta_{21}$	b_2^I	—	$[\sin \delta]^{II} \sin \delta_{32}$	b_3^{II}	—	$[\sin \delta]^{III} \sin \delta_{13}$	b_3^I	—
$[\sin \delta]^I \cos \delta_{21}$	$c_2^I \sin$	+	$[\sin \delta]^{II} \cos \delta_{32}$	$c_3^{II} \sin$	+	$[\sin \delta]^{III} \cos \delta_{13}$	$c_3^I \cos$	+
$[\cos \delta]^I \sin \delta_{21}$	$c_2^I \cos$	+	$[\cos \delta]^{II} \sin \delta_{32}$	$c_3^{II} \cos$	+	$[\cos \delta]^{III} \sin \delta_{13}$	$c_3^I \sin$	+
$[\cos \delta]^I \cos \delta_{31}$	a_3^I	—	$[\cos \delta]^{II} \cos \delta_{12}$	a_2^I	—	$[\cos \delta]^{III} \cos \delta_{23}$	a_3^{II}	—
$[\sin \delta]^I \sin \delta_{31}$	b_3^I	—	$[\sin \delta]^{II} \sin \delta_{12}$	b_2^I	—	$[\sin \delta]^{III} \sin \delta_{23}$	b_3^{II}	—
$[\sin \delta]^I \cos \delta_{31}$	$c_3^I \sin$	+	$[\sin \delta]^{II} \cos \delta_{12}$	$c_2^I \cos$	+	$[\sin \delta]^{III} \cos \delta_{23}$	$c_3^{II} \cos$	+
$[\cos \delta]^I \sin \delta_{31}$	$c_3^I \cos$	+	$[\cos \delta]^{II} \sin \delta_{12}$	$c_2^I \sin$	+	$[\cos \delta]^{III} \sin \delta_{23}$	$c_3^{II} \sin$	+
$\cos^2 \delta_{21}$	a_2^{II}	+	$\cos^2 \delta_{32}$	a_3^{III}	+	$\cos^2 \delta_{13}$	a_1^I	+
$\sin^2 \delta_{21}$	b_2^{II}	+	$\sin^2 \delta_{32}$	b_3^{III}	+	$\sin^2 \delta_{13}$	b_1^I	+
$\sin \delta_{21} \cos \delta_{31}$	c_2^{II}	—	$\sin \delta_{32} \cos \delta_{32}$	c_3^{III}	—	$\sin \delta_{13} \cos \delta_{31}$	c_1^I	—
$\cos \delta_{21} \cos \delta_{31}$	a_3^I	+	$\cos \delta_{32} \cos \delta_{12}$	a_3^I	+	$\cos \delta_{13} \cos \delta_{23}$	a_2^I	+
$\sin \delta_{21} \sin \delta_{31}$	b_3^I	+	$\sin \delta_{32} \sin \delta_{12}$	b_3^I	+	$\sin \delta_{13} \sin \delta_{23}$	b_2^I	+
$\sin \delta_{21} \cos \delta_{31}$	$c_3^{II} \sin$	—	$\sin \delta_{32} \cos \delta_{12}$	$c_3^I \cos$	—	$\sin \delta_{13} \cos \delta_{23}$	$c_2^I \sin$	—
$\cos \delta_{21} \sin \delta_{31}$	$c_3^{II} \cos$	—	$\cos \delta_{32} \sin \delta_{12}$	$c_3^I \sin$	—	$\cos \delta_{13} \sin \delta_{23}$	$c_2^I \cos$	—
$\cos^2 \delta_{31}$	a_3^{III}	+	$\cos^2 \delta_{12}$	a_1^I	+	$\cos^2 \delta_{23}$	a_2^{II}	+
$\sin^2 \delta_{31}$	b_3^{III}	+	$\sin^2 \delta_{12}$	b_1^I	+	$\sin^2 \delta_{23}$	b_2^{II}	+
$\sin \delta_{31} \cos \delta_{41}$	c_3^{III}	—	$\sin \delta_{12} \cos \delta_{12}$	c_1^I	—	$\sin \delta_{23} \cos \delta_{23}$	c_2^{II}	—

Ha sin vagy cos jelzésű indexet cserélünk fel, akkor a sin jelzés cos jelzésre változik és viszont. Például :

$$c_1^{II\sin} = c_2^{I\cos} \quad \text{és} \quad c_1^{II\cos} = c_2^{I\sin}. \quad (100)$$

A permutálást a 10. és a 11. táblázatban jól megfigyelhetjük.

Meg kell még állapotodnunk a redukciónak felhasználásának az előjelszabályában. (A + és a — előjelek értelmezését már a korábbiakban megadtuk.) Vegyük fel *előjel-normának* a hátrametszés redukciónak előjelét. Hátrametszés-kor a mindig azonos előjelű *a* és *b* tagok redukciónak pozitív, a váltakozó előjelű *c* tag redukciónak pedig negatív értelemben kell felhasználni. Mindig, amikor összegtagot szorzunk újponti (közös) irány szögfüggvény-értékével, az előjel-norma ellenkezője érvényes, minden más esetben a normát kell alkalmazni.

Egy δz érték folytán előálló redukciónak számát az

$$n = p(1 + 2p) \quad (101)$$

képlet határozza meg, ahol *p* az együttesen kiegyenlítendő új pontok száma. Valamennyi δz miatti redukciónak száma pedig :

$$N = p^2(1 + 2p). \quad (102)$$

12. táblázat

δz_1 miatt

$[\cos \delta]^I [\cos \delta]^I$	a_1^I	+	$\cos \delta_{21} \cos \delta_{31}$	a_3^{II}	+
$[\sin \delta]^I [\sin \delta]^I$	b_1^I	+	$\sin \delta_{21} \sin \delta_{31}$	b_3^{II}	+
$[\sin \delta]^I [\cos \delta]^I$	c_1^I	—	$\sin \delta_{21} \cos \delta_{31}$	$c_3^{II \sin}$	—
$[\cos \delta]^I \cos \delta_{21}$	a_2^I	—	$\cos \delta_{21} \sin \delta_{31}$	$c_3^{II \cos}$	—
$[\sin \delta]^I \sin \delta_{21}$	b_2^I	—	$\cos \delta_{21} \cos \delta_{41}$	a_4^{II}	+
$[\sin \delta]^I \cos \delta_{21}$	$c_2^{I \sin}$	+	$\sin \delta_{21} \sin \delta_{41}$	b_4^{II}	+
$[\cos \delta]^I \sin \delta_{21}$	$c_2^{I \cos}$	+	$\sin \delta_{21} \cos \delta_{41}$	$c_4^{II \sin}$	—
$[\cos \delta]^I \cos \delta_{31}$	a_3^I	—	$\cos \delta_{21} \sin \delta_{41}$	$c_4^{II \cos}$	—
$[\sin \delta]^I \sin \delta_{31}$	b_3^I	—	$\cos^2 \delta_{31}$	a_3^{III}	+
$[\sin \delta]^I \cos \delta_{31}$	$c_3^{I \sin}$	+	$\sin^2 \delta_{31}$	b_3^{III}	+
$[\cos \delta]^I \sin \delta_{31}$	$c_3^{I \cos}$	+	$\sin \delta_{31} \cos \delta_{31}$	c_3^{III}	—
$[\cos \delta]^I \cos \delta_{41}$	a_4^I	—	$\cos \delta_{31} \cos \delta_{41}$	a_4^{III}	+
$[\sin \delta]^I \sin \delta_{41}$	b_4^I	—	$\sin \delta_{31} \sin \delta_{41}$	b_4^{III}	+
$[\sin \delta]^I \cos \delta_{41}$	$c_4^{I \sin}$	+	$\sin \delta_{31} \cos \delta_{41}$	$c_4^{III \sin}$	—
$[\cos \delta]^I \sin \delta_{41}$	$c_4^{I \cos}$	+	$\cos \delta_{31} \sin \delta_{41}$	$c_4^{III \cos}$	—
$\cos^2 \delta_{21}$	a_2^{II}	+	$\cos^2 \delta_{41}$	a_4^{IV}	+
$\sin^2 \delta_{21}$	b_2^{II}	+	$\sin^2 \delta_{41}$	b_4^{IV}	+
$\sin \delta_{21} \cos \delta_{21}$	c_2^{II}	—	$\sin \delta_{41} \cos \delta_{41}$	c_4^{IV}	—

A két képlet akkor érvényes, ha minden új pontról valamennyi többi új pontot irányoztuk, tehát a képletek a redukciók *maximális számát* adják. Ha nem mértük az új pontokat összekötő valamennyi irányt (márpedig több pont együttes kiegyenlítésekor ez gyakran előfordul), a redukciók száma megfelelően csökken.

13. Több pont együttes kiegyenlítése hosszmerésekkel

Valamely adott ponttól egy új pontig végzett hosszmerés javításának egyenlete több pont együttes kiegyenlítésekor is ugyanolyan, mint az egy-pontos kiegyenlítésnél. A (25) egyenletbe természetesen a megfelelő új pontra és irányra vonatkozó adatokat kell behelyettesíteni. *Két új pont között* (például *A* és *B* jelű pontok között) *végzett hosszmerés javítása* pedig :

$$v_L = \delta y_A \sin \delta_{BA} + \delta x_A \cos \delta_{BA} - \delta y_B \sin \delta_{BA} - \delta x_B \cos \delta_{BA} + E_{BA}, \quad (103)$$

ahol az előzetes koordinátákból számított előzetes távolságot (t_{BA})-val, a hosszmerés eredményét pedig L_{BA} -val jelölve, a *hosszeltérés* :

$$E_{BA} = (t_{BA}) - L_{BA}. \quad (104)$$

A (23) egyenlettel meghatározott erővetületeket ϱ'' -cel szorozva, a két új pont között mért távolsághoz tartozó két erővetület *A* pontnál :

$$\begin{aligned} &+ b\delta y_A - c\delta x_A - b\delta y_B + c\delta x_B - e_{BA} \sin \delta_{BA} \\ &- c\delta y_A + a\delta x_A + c\delta y_B - a\delta x_B - e_{BA} \cos \delta_{BA} \end{aligned} \quad (105)$$

lesz, a P_2 pontnál pedig *ugyanazek ellentétes előjellel*. A (27) összefüggésnek megfelelően :

$$e_{BA} = \frac{E_{BA} \varrho''}{t_{BA}}. \quad (106)$$

A (105) kifejezésekben előforduló iránykoefficiensek természetesen az *A—B* irányra és a t_{BA} távolságra vonatkoznak, megegyezvén azzal az értelmezéssel, amelyet a (26) egyenletekkel kapcsolatban megadtunk.

Minden olyan hosszmerési eredményhez, amelyet két új pont között végeztünk, hasonló erővetületek tartoznak, mint amelyeknek kifejezését (105) alatt felírtuk, mindig természetesen a megfelelő két új pont adatait, illetve az egymáshoz viszonyított helyzetüknek megfelelő adatokat kell a kifejezésekbe helyettesíteni.

Az egyensúlyi egyenletek felállítására szolgáló sémában minden új ponthoz most is egy-egy római számmal jelölt vízszintes sáv és egy-egy arabs

számmal jelölt függőleges hasáb tartozik. Ügyelni kell arra, hogy az erővetületek együtthatóit a megfelelő sávba és hasádba írjuk. Például a *hárompontos kiegyenlítés egyensúlyi egyenletei* a szimmetrikus tagok elhagyásával:

$$\begin{aligned}
 & + [b]_1^I - [c]_1^I + [b]_2^I - [c]_2^I + [b]_3^I - [c]_3^I - [e \sin \delta]^I \\
 & + [a]_1^I - [c]_2^I + [a]_2^I - [c]_3^I + [a]_3^I - [e \cos \delta]^I \\
 & \quad [b]_2^{II} - [c]_2^{II} + [b]_3^{II} - [c]_3^{II} - [e \sin \delta]^{II} \\
 & \quad + [a]_2^{II} - [c]_3^{II} + [a]_3^{II} - [e \cos \delta]^{II} \\
 & \quad \quad + [b]_3^{III} - [c]_3^{III} - [e \sin \delta]^{III} \\
 & \quad \quad \quad + [a]_3^{III} - [e \cos \delta]^{III}.
 \end{aligned} \tag{107}$$

Az A és a B új pontok közötti hosszmeréseket helyettesítő *fiktív irányok* irányszögének a változását a

$$\delta\delta = \frac{b\delta y_A - c\delta x_A - b\delta y_B + c\delta x_B}{-\sin \delta_{BA}} \tag{108}$$

vagy a

$$\delta\delta = \frac{-c\delta y_A + a\delta x_A + c\delta y_B - a\delta x_B}{-\cos \delta_{BA}} \tag{109}$$

képlettel határozzuk meg, amelyekben a , b és c az $A-B$ irányhoz és \overline{AB} távolsághoz tartozó iránykoefficiensek és δ_{BA} a $B-A$ irány irányszöge. Ugyanezt a $\delta\delta$ irányszögváltozást kapjuk meg azokból a képletekből is, amelyek úgy keletkeznek, hogy a (108), illetve a (109) képletben az A és a B indexeket felcseréljük egymással. Minden olyan hosszmeréshez, amelyet két-két új pont között végeztünk, hasonló képletek tartoznak, természetesen mindig a megfelelő két új pont adatait kell a képletekbe helyettesíteni.

A *fiktív iránymérések javítását* a

$$v = \delta\delta + e \tag{110}$$

képlettel számítjuk.

A kiegyenlítés végrehajtására eddigi ismereteinkhez újabb magyarázat már nem szükséges.

14. Több pont együttes kiegyenlítése irány- és hosszmerésekkel

Az irány- és hosszmerések kiegyenlítésének elve többpontos kiegyenlítésnél is megegyezik a 6. pontban megadottal. A q súlyszámot most is a (31) képlettel határozzuk meg. A kiegyenlítés a 6., 12. és 13. pontban megismertek egybevetése alapján már minden további magyarázat nélkül elvégezhető.

15. Különleges súlyok figyelembevétele

A különleges súlyok figyelembevétele többpontos kiegyenlítésnél is teljesen a 7. pontban megismert elveknek és módoknak megfelelően történik. A súlyok helyes felhasználásához eddigi ismereteink elegendők.

16. Több pont együttes kiegyenlítése egy vagy több kényszerfeltétellel

Többpontos kiegyenlítéskor a kényszerfeltételt kifejező egyelőre ismeretlen erőt vagy a több kényszerfeltételből származó erők eredőjét a kényszerfeltétellel érintett új pontoknak kizárólag a mérési eredmények alapján meghatározott (kiegyenlített) ponthelyén átmenő komponensekre bontjuk. Ezek a mérési eredmények adta erőrendszerek egyensúlyát megbontják. Az új pontok ezután úgy helyezkednek el, hogy a kényszerekből származó erővel bővült új erőrendszerek egyensúlyban legyenek.

A kényszereket végtelen sokféle erővel helyettesíthetjük és eredőjüket ismét végtelen sokféle módon bonthatjuk fel az új pontokon átmenő komponensekre. Azt a megoldást választjuk most is, amely a *legkisebb munka* elvének megfelel (lásd a 8. pont első bekezdését).

A levezetést itt is mellőzve, csupán a kiegyenlítés menetét ismertetjük.

1. A kényszerfeltételeket egyelőre teljesen figyelmen kívül hagyva, felállítjuk a *kizárólag a mérési eredményekből származó egyensúlyi egyenleteket*, a belső irányoknál a tájékozási ismeretlen miatti redukciókat is figyelembe véve :

$$f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad f_4 \quad \dots \quad (111)$$

2. A kényszerfeltételi egyenletekből kifejezünk a számukkal azonos számú ismeretlent a többi ismeretlen segítségével ; a ki nem fejezett ismeretlenek részére pedig *azonosságai egyenletet* írunk fel. Kifejezzük például a δy_1 és δx_1 ismeretleneket a δy_2 , $\delta x_2 \dots$ ismeretlenek segítségével :

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= A_1 \delta y_2 + B_1 \delta x_2 + C_1 \delta y_3 + D_1 \delta x_3 + \dots + T_1 \\ \delta x_1 &= A_2 \delta y_2 + B_2 \delta x_2 + C_2 \delta y_3 + D_2 \delta x_3 + \dots + T_2 \\ \delta y_2 &= A_3 \delta y_2 + B_3 \delta x_2 + C_3 \delta y_3 + D_3 \delta x_3 + \dots + T_3 \\ \delta x_2 &= A_4 \delta y_2 + B_4 \delta x_2 + C_4 \delta y_3 + D_4 \delta x_3 + \dots + T_4 \\ \delta y_3 &= A_5 \delta y_2 + B_5 \delta x_2 + C_5 \delta y_3 + D_5 \delta x_3 + \dots + T_5 \\ \delta x_3 &= A_6 \delta y_2 + B_6 \delta x_2 + C_6 \delta y_3 + D_6 \delta x_3 + \dots + T_6 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (112)$$

A kényszerfeltételi egyenletekben elő nem forduló ismeretlenek együtthatói a kényszerfeltételi egyenletekből kifejezett ismeretlenek egyenletében (jelenleg a két első egyenletben) zérusok. Az azonossági egyenletekben (jelenleg a két első egyenleten kívül az összes többiben) magának a kérdéses ismeretlennek az együtthatója +1, a többi együttható és a tisztatag pedig 0. (Például a δy_2 azonossági egyenletében $A_3 = +1$, $B_3 = C_3 = \dots = T_3 = 0$.)

3. A kényszerfeltételeket is magukban foglaló egyensúlyi egyenletek :

$$g_1 = [Af] = 0, \quad g_2 = [Bf] = 0, \quad g_3 = [Cf] = 0, \quad g_4 = [Df] = 0 \quad \dots \quad (113)$$

(Az 1-es indexű szorzókkal a (111) alatti azt az egyensúlyi egyenletet szorozzuk, amelyben a vezetőtag a δy_1 ismeretlen ; a 2-es indexű szorzókkal azt, amelyben a δx_1 a vezetőtag, a 3-as indexű szorzókkal azt, amelyben a vezetőtag δy_2 stb. A T tisztatagokkal szorozni nem kell.)

4. A g jelű egyenletekbe behelyettesítjük a kényszerfeltételi egyenletekből kifejezett ismeretleneknek a többi ismeretlen függvényeként adott értékét, majd rendezzük a g egyenleteket.

5. A g egyenletekből meghatározzuk a bennük maradt ismeretleneket.

6. A többi ismeretlent ezután kiszámítjuk a kényszerfeltételi egyenletek alapján.

Ha a kényszerfeltételek hatására kialakult koordinátaváltozásokat behelyettesítjük a (111) alatti f jelű egyenletekbe, akkor ezek nem elégítik ki a zérus-feltételt, hanem a kényszerfeltételeket kifejező erők eredője komponenseinek vetületeit adják ellenkező előjellel :

$$\begin{aligned} f_1 &= [-v \cos \delta]^I = -V_y^I & f_2 &= [v \sin \delta]^I = -V_x^I \\ f_3 &= [-v \cos \delta]^{II} = -V_y^{II} & f_4 &= [v \sin \delta]^{II} = -V_x^{II} \end{aligned} \quad (114)$$

.....

Ellenőrzésül szolgál, hogy a mérési javításokból közvetlenül előállítható $[-v \cos \delta]$ és $[v \sin \delta]$ összegértékeknek a számítási élességen belül valamennyi új pontra nézve meg kell egyezniök a (114) szerint kapott értékekkel.

17. Többpontos kiegyenlítés a tájékozó irányok mérési hibáinak figyelembevételével

A 9. pontban foglaltakkal szemben csak annyi az eltérés, hogy előfordulhat : valamely adott pontról (például az A pontról) nemcsak egy új pontra, hanem az együttesen kiegyenlítendő új pontok közül többre; esetleg vala-

ahol :

$$\begin{aligned}
 a'_1 &= a_{A1} + \frac{\cos^2 \delta_{A1}}{D_A} & a''_1 &= + \frac{\cos \delta_{A1} \cos \delta_{A2}}{D_A} & a'''_1 &= + \frac{\cos \delta_{A1} \cos \delta_{A3}}{D_A} \\
 b'_1 &= b_{A1} + \frac{\sin^2 \delta_{A1}}{D_A} & b''_1 &= + \frac{\sin \delta_{A1} \sin \delta_{A2}}{D_A} & b'''_1 &= + \frac{\sin \delta_{A1} \sin \delta_{A3}}{D_A} \\
 c'_1 &= c_{A1} - \frac{\sin \delta_{A1} \cos \delta_{A1}}{D_A} & & & & (120) \\
 c''_{1\cos} &= - \frac{\sin \delta_{A2} \cos \delta_{A1}}{D_A} & c''_{1\sin} &= - \frac{\cos \delta_{A2} \sin \delta_{A1}}{D_A} \\
 c'''_{1\cos} &= - \frac{\sin \delta_{A3} \cos \delta_{A1}}{D_A} & c'''_{1\sin} &= - \frac{\cos \delta_{A3} \sin \delta_{A1}}{D_A} .
 \end{aligned}$$

A 2. jelű pontra menő irányhoz tartozó erő vetületei :

$$\begin{aligned}
 -v_{A2} \cos \delta_{A2} &= a'_2 \delta y_1 + c'_{2\cos} \delta x_1 + a''_2 \delta y_2 + c'_{2\cos} \delta x_2 + \\
 &\quad + a'''_2 \delta y_3 + c'_{3\cos} \delta x_3 + \dots - e_{A2} \cos \delta_{A2} \\
 +v_{A2} \sin \delta_{A2} &= c'_{2\sin} \delta y_1 + b'_2 \delta x_1 + c''_2 \delta y_2 + b'_2 \delta x_2 + \\
 &\quad + c'_{2\sin} \delta y_3 + b'_2 \delta x_3 + \dots + e_{A2} \sin \delta_{A2} ,
 \end{aligned} \tag{121}$$

ahol

$$\begin{aligned}
 a'_2 &= + \frac{\cos \delta_{A2} \cos \delta_{A1}}{D_A} & a''_2 &= a_{A2} + \frac{\cos^2 \delta_{A2}}{D_A} & a'''_2 &= + \frac{\cos \delta_{A2} \cos \delta_{A3}}{D_A} \\
 b'_2 &= + \frac{\sin \delta_{A2} \sin \delta_{A1}}{D_A} & b''_2 &= b_{A2} + \frac{\sin^2 \delta_{A2}}{D_A} & b'''_2 &= + \frac{\sin \delta_{A2} \sin \delta_{A3}}{D_A} \\
 c'_{2\cos} &= - \frac{\sin \delta_{A1} \cos \delta_{A2}}{D_A} & c'_{2\sin} &= - \frac{\cos \delta_{A1} \sin \delta_{A2}}{D_A} & & (122) \\
 c''_2 &= c_{A2} - \frac{\sin \delta_{A2} \cos \delta_{A2}}{D_A} \\
 c'''_{2\cos} &= - \frac{\sin \delta_{A3} \cos \delta_{A2}}{D_A} & c'''_{2\sin} &= - \frac{\cos \delta_{A3} \sin \delta_{A2}}{D_A} .
 \end{aligned}$$

A többi új pontra menő irányokhoz tartozó erők vetületeit hasonlóan kell előállítani. Amint látjuk, a δz miatt a külső irányok vetületeibe az adott pontról irányzott valamennyi új pont koordinátaváltozásai beleszólnak. Az

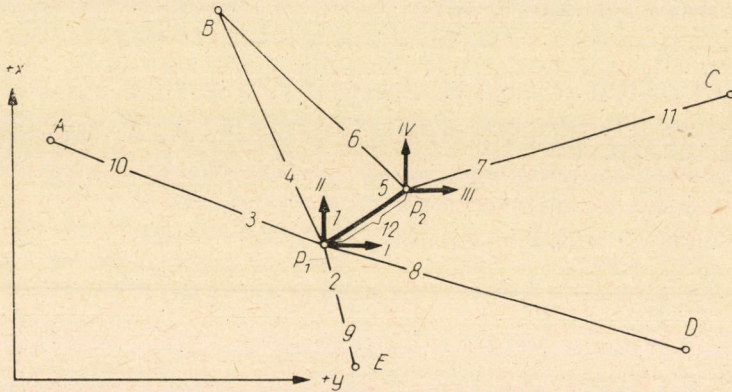
egyensúlyi egyenletek előállítására szolgáló számítási sémába az egyes koordinátaváltozások együtthatóit a megfelelő pont hasábjába kell beírni, természetesen a *külső irányok* csoportjába.

18. Középphibaszámítás

A súlyegység középphibáját a (60) képlet szerint az összes mérési eredmények mérési javításának bevonásával kell kiszámítani. Egyébként a középphibaszámítás minden tekintetben a 10. pontban foglaltak szerint történik. Ha az egyensúlyi egyenleteket olyan módon oldjuk meg, hogy valamennyi koordinátaváltozáshoz megkapjuk a súlykoefficienssel vagy a súllyal arányos Q' , illetve p' mennyiséget, akkor a (77), illetve a (76) képlet segítségével valamennyi koordinátaváltozás középphibáját is kiszámíthatjuk.

Példák

5. példa. Határozzuk meg a P_1 és a P_2 pont koordinátáit együttes kiegyenlítéssel. Mértük az 5. ábrán 1—11 sorszámmal megjelölt irányokat és a $P_1 P_2$ távolságot (ennek sorszáma : 12). A P_1 pont koordinátaváltozásait a többpontos kiegyenlítésnél a magyar *Országos*



5. ábra

Felmérés szokása szerint *I*-gyel (megfelel δy_1 -nek) és *II*-vel (megfelel δx_1 -nek), a P_2 pont koordinátaváltozásait pedig *III*-mal (megfelel δy_2 -nek) és *IV*-gyel (megfelel δx_2 -nek) jelöljük. Ezt a jelölést az ábrán is feltüntettük.

Az ismert (adott) pontok koordinátái :

$$\begin{aligned} y_A &= + 20\,677,423 \text{ m} \\ y_B &= + 22\,304,174 \text{ m} \\ y_C &= + 26\,681,366 \text{ m} \\ y_D &= + 26\,284,635 \text{ m} \\ y_E &= + 23\,394,710 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_A &= + 53\,266,784 \text{ m} \\ x_B &= + 54\,513,224 \text{ m} \\ x_C &= + 53\,792,062 \text{ m} \\ x_D &= + 50\,637,502 \text{ m} \\ x_E &= + 51\,689,828 \text{ m} \end{aligned}$$

A kiegyenlítés menetét lépésenként követjük.

1. A P_1 és a P_2 pont számára előzetes koordinátákat számítunk :

$$\begin{aligned} (y_1) &= + 23\,301,400 \text{ m} & (x_1) &= + 52\,107,800 \text{ m} \\ (y_2) &= + 23\,600,100 \text{ m} & (x_2) &= + 52\,305,300 \text{ m} \end{aligned}$$

2. Az előzetes koordináták alapján az összes mért irányokra kiszámítjuk a (δ) előzetes irányszöveget és az a, b, c iránykoefficienseket, valamint kikeressük a $\sin(\delta)$ és $\cos(\delta)$ értékeket is. Az előzetes irányszöveget (és ezzel kapcsolatban a többi említett értéket is) úgy számítjuk, hogy az eredményt az új pont felé menő irányra kapjuk meg. Az újponti (közös) irány irányszövegét célszerűen a P_2 -ről a P_1 felé haladó irányhoz számítjuk.

A megmért hosszhoz az előzetes koordináták alapján kiszámítjuk a (δ) előzetes irányszöveget és a (t) előzetes távolságot is.

Az előzetes irányszövegeket és a hosszmerés sorában az előzetes távolságot a 13. táblázat (δ) jelű oszlopába írjuk. Beírjuk a 13. táblázatba kilométer egységben az irányhosszakat is, mégpedig a belső irányoknál század, a külső irányoknál tized élességre. A hosszmerést helyettesítő fiktív iránynál a t/q értéket írjuk be. Az iránykoefficienseket és a szögfüggvény-értékeket a 14. táblázatba vezetjük be új pontonként külön csoportosítva, mégpedig a belső irányokat is elkülönítve a külsőktől. A táblázatban (számítási sémában) — mint tudjuk — mindegyik kiegyenlítendő ponthoz egy-egy vízszintes sáv és egy-egy függőleges hasáb tartozik. A sávokat I- és II-vel, a hasábokat pedig 1- és 2-vel jelöltük.

Példánkban a közös irányt mind a két végpontjáról mértük. Az egyik mérésének megfelelő 1 jelű irány P_1 -nél belső, P_2 -nél külső, a másik mérésének megfelelő 5 jelű irány pedig a P_1 -nél külső és a P_2 -nél belső irány. A közös irány koefficiensei és szögfüggvényértékei egy-egy pontnál azonosak, pontonként azonban a 180° -os irányszögekülönbségnek megfelelően ellenkező előjelűek. Ugyancsak mindkét új pont külső irányai között vannak a hosszmerésből származó 12 jelű fiktív iránymérés adatai is. A q súlyszámot az 1. példában közölt mérési adatok alapján most is 0,67-ben vettük fel. A hosszmerés sorában az a oszlopába a $qb = 0,67(-40,07)$, a b oszlopába a $qa = 0,67(-17,52)$, a c oszlopába pedig a $-qc = -0,67(+26,50)$ mennyiséget írjuk.

3. Az irányeltéréseket a 13. táblázatban számítjuk. A tájékozási szög előzetes értékét a $(80a)$ -nak megfelelő képlettel természetesen mindegyik új pontnál külön-külön számítjuk. t értékeit ehhez századkilométeres élességgel használjuk fel. Az e irányeltéréseket sorra beírjuk a 14. táblázatba. A közös irány két mérési eredményéhez tartozó irányeltérés általában nem egyenlő egymással, mert más-más mérési sorozatból adódnak. Magától értetődik, hogy a P_1 ponton végzett 1 jelű méréshez mind a P_1 pont belső, mind a P_2 pont külső irányai között ugyanaz az $e = +86,6''$ irányeltérés tartozik. Hasonlóan a P_2 ponton végzett 5 jelű méréshez, mind a P_2 pont belső, mind a P_1 pont külső irányai között egyformán az $e = -20,6''$ irányeltérést írjuk.

4. A 14. táblázatban számítjuk az $e \cos \delta$ és az $e \sin \delta$ értékeket, majd új pontonként külön-külön összeadjuk sorra az $a, b, c, e \sin \delta$ és $e \cos \delta$ oszlopok tagjait.

5. Kiszámítjuk a 15. táblázatban előírt redukciókat. A redukciók számításához szükséges sinus- és cosinus-értékeket a 14. táblázatban aláhúztuk. A redukciókat bevezetjük az iránykoefficiensek pontonként előállított összegtagjai alá a 15. táblázat hovatartozásjele és felhasználási előjele szerint. Elvégezve az összegtagok és a redukciók összevonását, megkapjuk a négy egyensúlyi egyenletet. Ezek a szimmetrikus tagok elhagyásával :

<u>- 159,40</u>	+ 6,37	+ 60,51	- 33,25	+ 137,62
	<u>- 107,95</u>	- 36,08	+ 93,30	- 18,10
		<u>- 70,88</u>	+ 31,81	- 86,69
			<u>- 105,78</u>	+ 13,09

Az első oszlophoz az I, a másodikhoz a II, a harmadikhoz a III, a negyedikhez pedig a IV koordinátaváltozás tartozik. Az egyenletek ki nem írt jobboldala zérus.

6. Az egyensúlyi egyenleteket megoldjuk. (Előzőleg esetleg -1-gyel végig szorozzuk őket.) Eredményül a következő koordinátaváltozásokat kapjuk :

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= I = + 0,838 \text{ dm} & \delta x_1 &= II = - 0,834 \text{ dm} \\ \delta y_2 &= III = - 0,550 \text{ dm} & \delta x_2 &= IV = - 1,041 \text{ dm} \end{aligned}$$

14. táblázat

Mérés jele	1				2				e	sin δ	cos δ	e sin δ	e cos δ		
	a_1	b_1	c_1		a_2	b_2	c_2								
			+	-			+	-							
I	1	-17,52	-40,07	26,50		+17,52	+40,07		26,50	+86,6	-0,834	-0,552	-72,22	-47,80	
	2	-45,88	- 2,29		10,24					-64,8	-0,218	+0,976	+14,13	-63,24	
	3	- 1,17	- 6,02		2,66					- 2,9	+0,915	-0,404	- 2,65	+ 1,17	
	4	- 6,76	- 1,16		2,80					+ 1,9	+0,383	-0,924	+ 0,73	- 1,76	
	5	-17,52	-40,07	26,50		+17,52	+40,07		26,50	-20,6	-0,834	-0,552	+17,18	+11,37	
	9	-45,88	- 2,29		10,24					0,0	-0,218	+0,976	0,00	0,00	
	10	- 1,17	- 6,02		2,66					0,0	+0,915	-0,404	0,00	0,00	
	12	-26,85	-11,74		17,76	+26,85	+11,74	17,76		+44,8	+0,552	-0,834	+24,73	-37,36	
	[]	-162,75	-109,66		+6,64	+61,89	+91,88	cos egyenlet							
	Δ_1	+ 2,69	+ 0,20		+0,73	- 1,64	+ 0,68	-35,24	-35,24						
	Δ_2	+ 0,66	+ 1,51		-1,00	+ 0,26	+ 0,74	+ 2,48	- 0,45						
	[]	-159,40	-107,95		+6,37	+60,51	+93,30	-33,25	-36,08					-18,10	-137,62
II	5	+17,52	+40,07		26,50	-17,52	-40,07	26,50		-20,6	+0,834	+0,552	-17,18	-11,37	
	6					- 5,99	- 2,06		3,52	-12,9	+0,506	-0,862	- 6,53	-11,12	
	7					- 1,14	- 4,89	2,36		+ 4,9	-0,901	-0,435	- 4,41	- 2,13	
	8					- 1,82	- 4,71		2,92	+ 7,4	-0,849	+0,528	- 6,28	+ 3,91	
	1	+17,52	+40,07		26,50	-17,52	-40,07	26,50		+86,6	+0,834	+0,552	+72,22	+47,80	
	11					- 1,14	- 4,89	2,36		0,0	-0,901	-0,435	0,00	0,00	
	12	+26,85	+11,74	17,76		-26,85	-11,74	17,76		+44,8	-0,552	+0,834	-24,73	+37,36	
	[]					-71,98	-108,43	+33,52							
	Δ_1					+ 1,00	+ 2,29	- 1,52							
	Δ_2					+ 0,10	+ 0,36	- 0,19							
	[]					-70,88	-105,78	+31,81						+13,09	+86,69

15. táblázat

$[t]^I = 6,26 \text{ km} \quad D^I = 0,04848 \quad [t]^I = 0,3035$				$[t]^{II} = 9,50 \text{ km} \quad D^{II} = 0,04848 \quad [t]^{II} = 0,4605$					
Redukciók δz_1 miatt	Δ'	$\Delta = \frac{\Delta'}{D}$		Redukciók δz_2 miatt	Δ'	$\Delta = \frac{\Delta'}{D}$			
$[\cos \delta]^I [\cos \delta]^I$	+0,8172	+2,69	a_1^I	+	$[\cos \delta]^{II} [\cos \delta]^{II}$	+0,0471	+0,10	a_2^{II}	+
$[\sin \delta]^I [\sin \delta]^I$	+0,0605	+0,20	b_1^I	+	$[\sin \delta]^{II} [\sin \delta]^{II}$	+0,1681	+0,36	b_2^{II}	+
$[\sin \delta]^I [\cos \delta]^I$	-0,2224	-0,73	c_1^I	-	$[\sin \delta]^{II} [\cos \delta]^{II}$	+0,0890	+0,19	c_2^{II}	-
$[\cos \delta]^I \cos \delta_{21}$	+0,4990	+1,64	a_2^I	-	$[\cos \delta]^{II} \cos \delta_{12}$	-0,1198	-0,26	a_2^I	-
$[\sin \delta]^I \sin \delta_{21}$	-0,2052	-0,68	b_2^I	-	$[\sin \delta]^{II} \sin \delta_{12}$	-0,3419	-0,74	b_2^I	-
$[\sin \delta]^I \cos \delta_{21}$	-0,1358	-0,45	$c_2^{I \sin}$	+	$[\sin \delta]^{II} \cos \delta_{12}$	-0,2263	-0,49	$c_2^{I \cos}$	+
$[\cos \delta]^I \sin \delta_{21}$	+0,7539	+2,48	$c_2^{I \cos}$	+	$[\cos \delta]^{II} \sin \delta_{12}$	-0,1810	-0,39	$c_2^{I \sin}$	+
$\cos^2 \delta_{21}$	+0,3047	+1,00	a_2^{II}	+	$\cos^2 \delta_{12}$	+0,3047	+0,66	a_1^I	+
$\sin^2 \delta_{21}$	+0,6956	+2,29	b_2^{II}	+	$\sin^2 \delta_{12}$	+0,6956	+1,51	b_1^I	+
$\sin \delta_{21} \cos \delta_{21}$	+0,4604	+1,52	c_2^{II}	-	$\sin \delta_{12} \cos \delta_{12}$	+0,4604	+1,00	c_1^I	-

7. A (81) és a (83) képlettel számítjuk a *tájékozási szögek változását* :

$$\delta z_1 = \frac{+(-0,904)(+0,838) - (+0,246)(-0,834) - (-0,552)(-0,550)}{0,3035} + \frac{+(-0,834)(-1,041)}{0,3035} = +0,04''$$

$$\delta z_2 = \frac{-(+0,552)(+0,838) + (+0,834)(-0,834) + (-0,217)(-0,550)}{0,4605} + \frac{-(-0,410)(-1,041)}{0,4605} = -3,18''$$

8. A 16. táblázatban kiszámítjuk a (88), (89) és a (90) képletekkel az irányszögek $\delta\delta$ változását, majd a (92), (93) és (94) képletekkel a v mérési javításokat (a hossz méréshez a helyettesítő fiktív iránymérés javítását). A hossz mérést helyettesítő fiktív iránynál a 14. táblázatba beírt iránykoefficiens-értékeket használjuk fel (tehát a qa , qb és $-qc$ értékeket). Ügyelni kell arra, hogy az új ponti iránynál és a két új pont között végzett hossz méréshez tartozó fiktív iránynál a számításához mind a négy koordinátaváltozást fel kell használni, továbbá arra is, hogy a mérési javítások számításába minden olyan iránynál, amelynél valamelyik tájékozási szögnek a változását is be kell vonni, a megfelelő δz értéket használjuk fel: az 1—4 iránynál a δz_1 -et, az 5—8 iránynál pedig a δz_2 -t. Az 1 és 5 irány kétszer fordul elő. Akár a belső, akár a külső irányok között számítjuk ezekhez az irány szög változást és a mérési javítást, az ugyanahhoz a mérési eredményhez tartozó értékeknek természetszerűleg teljesen meg kell egymással egyezniök.

A hossz mérési javítást a fiktív iránymérés javításából a (33) baloldali képlettel számítjuk :

$$v_L = -\frac{4,30}{\rho''} \frac{358}{0,67} = 0,0111 \text{ m.}$$

9. Ellenőrzés :

$$[v \cos \delta]I = -0,05 \approx 0$$

$$[v \sin \delta]I = -0,13 \approx 0$$

$$[v \cos \delta]II = +0,04 \approx 0$$

$$[v \sin \delta]II = +0,12 \approx 0$$

10. A 16. táblázatban számítjuk még a tvv és a $[tvv]$ mennyiségeket is. Az irányhosszakat tizedkilométerre vesszük figyelembe. A hossz mérést helyettesítő fiktív iránymérésnél a 13. és a 16. táblázat t jelű oszlopába beírt t/q értéket használjuk fel.

11. Számítjuk az új pontok *kiegyenlített (végleges) koordinátáit* :

$$\begin{aligned} y_1 &= (y_1) + I = +23\,301,400 + 0,084 = +23\,301,484 \text{ m} \\ x_1 &= (x_1) + II = +52\,107,800 - 0,083 = +52\,107,717 \text{ m} \\ y_2 &= (y_2) + III = +23\,600,100 - 0,055 = +23\,600,045 \text{ m} \\ x_2 &= (x_2) + IV = +52\,305,300 - 0,104 = +52\,305,196 \text{ m} \end{aligned}$$

12. Az új pontok végleges koordinátái alapján kiszámítjuk a végleges irányszögeket és a megmért hosszhoz a végleges távolságot is. Az előzetes irányszögekhez képest kapott irányszögváltozásoknak a számítási élességen belül egyezniök kell a 8. lépés szerint számított $\delta\delta$ értékekkel.

13. Az előbbi lépésnél említett értékeket bevezetjük a 13. táblázatba, majd új pontonként a

$$Z = \frac{[tz]}{[t]}$$

16. táblázat

Mérés jele	a_I vagy c_I	c_{II} vagy b_{II}	a_{III} vagy c_{III}	c_{IV} vagy b_{IV}	[]	$-\cos \delta$ vagy $\sin \delta$	$\delta\delta$	e	$-\delta z$	v	t	tev	$v \sin \delta$	$v \cos \delta$
1	-14,68	-22,10	- 9,64	+27,59	-18,83	+0,552	-34,11	+86,6	-0,04	+52,45	0,4	1100,4	-43,74	-28,95
2	-38,45	+ 8,54			-29,91	-0,976	+30,65	-64,8	-0,04	-34,19	0,4	467,6	+ 7,45	-33,37
3	- 2,23	+ 5,02			+ 2,70	+0,915	+ 3,05	- 2,9	-0,04	+ 0,11	2,9	0,0	+ 0,10	- 0,04
4	- 5,66	+ 2,34			- 3,32	+0,924	- 3,59	+ 1,9	-0,04	- 1,73	2,6	7,8	- 0,66	+ 1,60
5	-14,68	-22,10	- 9,64	+27,59	-18,83	+0,552	-34,11	-20,6	+3,18	-51,53	0,4	—	+42,98	+28,44
9	-38,45	+ 8,54			-29,91	-0,976	+30,65	0,0		+30,65	0,4	375,8	- 6,68	+29,91
10	- 2,23	+ 5,02			+ 2,79	+0,915	+ 3,05	0,0		+ 3,05	2,9	27,0	+ 2,79	- 1,23
12	-22,50	+14,81	-14,77	-18,49	-40,95	+0,834	-49,10	+44,8		- 4,30	0,5	9,2	- 2,37	+ 3,59
													- 0,13	- 0,05
5	+14,68	+22,10	+ 9,64	-27,59	+18,83	-0,552	-34,11	-20,6	+3,18	-51,53	0,4	1062,1	-42,98	-28,44
6			+ 3,29	+ 3,66	+ 6,95	+0,862	+ 8,06	-12,9	+3,18	- 1,66	2,6	7,2	- 0,84	+ 1,43
7			- 1,30	+ 5,09	+ 3,79	-0,901	- 4,21	+ 4,9	+3,18	+ 3,87	3,4	50,9	- 3,49	- 1,68
8			+ 1,00	+ 3,04	+ 4,04	-0,527	- 7,67	+ 7,4	+3,18	+ 2,91	3,2	27,1	- 2,47	+ 1,54
1	+14,68	+22,10	+ 9,64	-27,59	+18,83	-0,552	-34,11	+86,6	-0,04	+52,45	0,4	—	+43,74	+28,95
11			- 1,30	+ 5,09	+ 3,79	-0,901	- 4,21	0,0		- 4,21	3,4	60,3	+ 3,79	+ 1,83
12	+22,50	-14,81	+14,77	+18,49	+40,95	-0,834	-49,10	+44,8		- 4,30	0,5	—	+ 2,37	- 3,59
												3195,4	+ 0,12	+ 0,04

képlettel megállapítjuk a tájékozási szögek végleges értékét. Ezeknek a számítási élességen belül egyezniök kell a

$$Z = (Z) + \delta z$$

képlet szerint számítható megfelelő szögértékkel.

A 13. táblázatban is számítjuk a v mérési javításokat. A végleges koordinátákból számított távolság alapján a hosszmérési javítás: —11 mm. Ebből a (33) jobboldali képlettel a fiktív irányméréshez tartozó javítás:

$$v_{12} = 0,67 \frac{0,011}{358} \varrho'' = 4,25''.$$

A 13. táblázatban számított javításoknak is egyezniök kell (a számítási élességen belül) a 8. lépés szerint kapott megfelelő értékekkel.

14. Az iránymérési javításokból a 13. táblázatban is számítjuk a tvv és a $[tvv]$ mennyiségeket, a t hosszakat tizedkilométerre véve figyelembe. A számítási élességen belül egyezniök kell a 10. lépés szerint számítottakkal. (A hosszmerést helyettesítő fiktív irányméréseknél természetesen itt is a táblázat t jelű oszlopába beírt t/q értéket használjuk fel.)

15. Példánkban a fölösmerések száma:

$$f = 12 - 6 = 6.$$

A kétféleképpen számított $[tvv]$ érték középértéke egész számra kikerekítve 3196, a *súlyegység középhibája* tehát:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{3196}{6}} = \pm 23,1.$$

Pl. az újponti irány, továbbá a 4 és a 11 jelű irány kiegyenlítés utáni középhibája:

$$\mu_1 = \mu_5 = \frac{23,1}{\sqrt{0,4}} = \pm 36,5'' \quad \mu_4 = \frac{23,1}{\sqrt{2,6}} = \pm 14,31'' \quad \mu_{11} = \frac{23,1}{\sqrt{3,4}} = \pm 12,5''.$$

A hosszérés kiegyenlítés utáni középhibája:

$$\mu_{12} = 23,1 \frac{1000}{\varrho''} \sqrt{\frac{0,358}{0,67}} = \pm 0,082 \text{ m.}$$

Az egyensúlyi egyenletek megoldásakor a koordinátaváltozások számára a súlykoefficiensekkel arányos

$$Q'_I = 0,013 \ 94 \quad Q'_{II} = 0,060 \ 78 \quad Q'_{III} = 0,030 \ 38 \quad Q'_{IV} = 0,056 \ 02$$

értékeket kaptuk, a koordinátaközéphibák tehát a (77) képletek szerint:

$$\mu_I = 0,022 \cdot 23,1 \sqrt{0,013 \ 94} = \pm 0,060 \text{ m}$$

$$\mu_{II} = 0,022 \cdot 23,1 \sqrt{0,060 \ 78} = \pm 0,125 \text{ m}$$

$$\mu_{III} = 0,022 \cdot 23,1 \sqrt{0,030 \ 38} = \pm 0,088 \text{ m}$$

$$\mu_{IV} = 0,022 \cdot 23,1 \sqrt{0,056 \ 02} = \pm 0,120 \text{ m.}$$

6. példa. Számítsuk ki a P_1 és P_2 pont koordinátáit együttes kiegyenlítéssel az 5. példa iránymérései alapján, de azzal a *kényszerfeltétellel*, hogy a két új pontnak a kiegyenlített koordináták alapján számított távolsága: $\overline{P_1P_2} = t = 358,000$ m legyen.

Először elvégezzük az 5. példában részletesen ismertetett 1—5. lépéseket. Az 5. példa 12 jelű mérését azonban most figyelmen kívül hagyjuk, mert a távolságot nem mértük, hanem az arra megadott értéket kényszernek tekintjük. Az új pontok előzetes koordinátáit az 5. példának megfelelően vesszük fel. *A kizárólag a mérési eredmények alapján alakuló egyensúlyi egyenletek:*

$$f_1 = -132,55 I + 24,13 II + 33,66 III - 51,01 IV + 100,26 = 0$$

$$f_2 = + 24,13 I - 96,21 II - 53,84 III + 81,56 IV - 42,83 = 0$$

$$f_3 = + 33,66 I - 53,84 II - 44,03 III + 49,57 IV - 49,33 = 0$$

$$f_4 = - 51,01 I + 81,56 II + 49,57 III - 94,04 IV + 37,82 = 0$$

(Ezek az egyenletek az 5. példa egyensúlyi egyenleteitől abban különböznek, hogy az együtt-hatók és a tisztatagok az 5. példának 12 jelű mérési eredményéhez tartozó megfelelő értékekkel kisebbek.)

A *távolsági kényszerfeltételt*, mint ismeretes, a

$$k = \sin(\delta_{21}) I + \cos(\delta_{21}) II - \sin(\delta_{21}) III - \cos(\delta_{21}) IV - dt = 0$$

kényszerfeltételi egyenlet fejezi ki. Miután a P_1 és P_2 pont előzetes távolsága az előzetes koordinátákból számítva: $(t) = 358,089$ m, a kiegyenlítés *deciméteres* hosszegységének megfelelően:

$$dt = t - (t) = -0,89 \text{ dm}$$

Behelyettesítve a $P_2 - P_1$ irány előzetes irányszögének sinus- és cosinus-értékét, a kényszerfeltételi egyenlet számszerűleg:

$$k = -0,834 I - 0,552 II + 0,834 III + 0,552 IV + 0,89 = 0.$$

Fejezzük ki a k egyenletből például a IV ismeretlent és állítsunk fel a többi ismeretlen számára azonossági egyenletet:

$$I = +1,000 I$$

$$II = \quad \quad + 1,000 II$$

$$III = \quad \quad \quad + 1,000 III$$

$$IV = + 1,511 I + 1,000 II - 1,511 III - 1,612.$$

A (112) képletcsoport együtthatói tehát:

$A_1 = + 1$	$B_1 = 0$	$C_1 = 0$
$A_2 = 0$	$B_2 = + 1$	$C_2 = 0$
$A_3 = 0$	$B_3 = 0$	$C_3 = + 1$
$A_4 = + 1,511$	$B_4 = + 1$	$C_4 = - 1,511.$

Az f egyenleteket végigszorozva a megfelelő indexű A , majd B és végül C értékkel (az f egyensúlyi egyenletekben természetesen a szimmetrikus tagokat is figyelembe véve), a

$$g_1 = -209,63 I + 147,37 II + 108,56 III - 193,10 IV + 157,41 = 0$$

$$g_2 = - 26,88 I - 14,65 II - 4,27 III - 12,48 IV - 5,01 = 0$$

$$g_3 = +110,74 I - 177,08 II - 118,93 III + 191,66 IV - 106,48 = 0$$

egyenletekhez jutunk. Helyettesítsük be ezekben a IV ismeretlenek a k egyenlethől kifejezett értékét és rendezzük az egyenleteket :

$$g_1 = -501,40 I - 45,73 II + 400,33 III + 468,69 = 0$$

$$g_2 = -45,73 I - 27,13 II + 14,59 III + 15,11 = 0$$

$$g_3 = +400,33 I + 14,59 II - 408,53 III - 415,44 = 0.$$

Megoldva ezeket a kényszerfeltételt is magukban foglaló egyensúlyi egyenleteket :

$$\delta y_1 = I = +0,852 \text{ dm} \quad \delta x_1 = II = -0,995 \text{ dm} \quad \delta y_2 = III = -0,218 \text{ dm}.$$

Ezek segítségével a k egyenlet alapján számítható a IV ismeretlen is :

$$\delta x_2 = IV = -0,990 \text{ dm}.$$

Ezután az 5. példa 7. lépése szerint számítjuk a tájékozási szögek változását :

$$\delta z_1 = +0,59'' \quad \delta z_2 = -3,60'',$$

majd elvégezzük az 5. példa 8. lépését is.

Ha az 5. példa 9. lépésének megfelelő összegértékeket számítjuk, nem jutunk zérushoz, hanem a kényszerfeltételt képviselő erőnek az új pontokon átmenő komponenseihez tartozó vetületeket kapjuk ellenkező előjellel :

$$\begin{aligned} [-v \cos \delta]I &= -V_y^I = +6,47 & [v \sin \delta]I &= -V_x^I = +4,36 \\ [-v \cos \delta]II &= -V_y^{II} = -6,56 & [v \sin \delta]II &= -V_x^{II} = -4,42. \end{aligned}$$

(Miótán itt nem zérushoz jutunk, az előjelre figyelemmel kell lenni és a $-v \cos \delta$ értékeket kell számítani.)

A továbbiakban elvégezzük az 5. példa 10–14. lépéseit. A P_1 és P_2 pont kiegyenlített koordinátái :

$$y_1 = (y_1) + I = +23\,301,400 + 0,085 = +23\,301,485 \text{ m}$$

$$x_1 = (x_1) + II = +52\,107,800 - 0,100 = +52\,107,700 \text{ m}$$

$$y_2 = (y_2) + III = +23\,600,100 - 0,022 = +23\,600,078 \text{ m}$$

$$x_2 = (x_2) + IV = +52\,305,300 - 0,099 = +52\,305,201 \text{ m}.$$

Ha a koordinátaváltozásokat behelyettesítjük az f jelű eredeti egyensúlyi egyenletekbe; eredményül a kényszerfeltételi erő komponenseinek vetületeit kapjuk ugyancsak ellenkező előjellel :

$$\begin{aligned} -V_y^I &= +6,48 & -V_x^I &= +4,44 \\ -V_y^{II} &= -6,56 & -V_x^{II} &= -4,50. \end{aligned}$$

Az egyezés az előbbieken számított megfelelő értékekkel kielégítően jó.

További ellenőrzésül kiszámítjuk a végleges koordinátákból a $t = P_1 P_2$ távolságot is :

$$t = 358,000 \text{ m}.$$

Amint látjuk, a kényszerfeltételt kielégítettük.

Az ellenőrzések elvégzése után a középphibaszámítás következik. Példánkban a fölősmérések száma: $f = 11 - (6 - 1) = 6$.

7. példa. Számítsuk ki a P_1 és P_2 pont koordinátáit együttes kiegyenlítéssel az 5. példa összes mérései alapján, de azzal a két kényszerfeltétellel, hogy az \overline{EP}_1 távolság: $t_E = 428,200$ méter, a $D-P_2$ irány irányszöge pedig: $\delta_D = 301^\circ 51' 0''$ legyen.

Először felállítjuk az 5. példa 1—5. lépései szerint a mérési eredményekből származó egyensúlyi egyenleteket. Az egyensúlyi egyenleteket az 5. példa 5. lépésénél találjuk. Ezután felállítjuk a kényszerfeltételi egyenleteket.

Mint ismeretes, az első (távolsági) kényszerfeltételt, ha az $E-P_1$ irány előzetes irányszögét (δ_E)-vel jelöljük, a

$$k_1 = \sin(\delta_E) I + \cos(\delta_E) II - dt = 0$$

kényszerfeltételi egyenlet fejezi ki. A P_1 pont előzetes koordinátaival a (t_E) = 428,261 m előzetes távolságot kapjuk. Az 5. példa 9 jelű irányánál a 14. táblázatból kiírhatjuk a szükséges sinus- és cosinus-értéket. Miután a kiegyenlítés deciméteres hosszegységében $dt = t_E - (t_E) = -0,61$ dm, a k_1 kényszerfeltételi egyenlet számszerűen:

$$k_1 = -0,218 I + 0,976 II + 0,61 = 0.$$

A második (az irányszögre vonatkozó) kényszerfeltételt a

$$k_2 = \frac{0,1 \rho'' \cos \delta_D}{(t_D)} III - \frac{0,1 \rho'' \sin \delta_D}{(t_D)} IV - d\delta'' = 0$$

kényszerfeltételi egyenlet fejezi ki, amelyben (t_D)-vel jelöljük a \overline{DP}_2 távolság előzetes értékét. Miután az 5. példa 8 jelű irányánál a 13. táblázatban a $121^\circ 51' 3,9''$ előzetes irányszögértéket találjuk,

$$-d\delta = \delta_E - (\delta_E) = -3,9''.$$

Kiszámítva a k_2 egyenlet együtthatóit, a második kényszerfeltételi egyenlet számszerűen

$$k_2 = +3,44 III + 5,54 IV + 3,9 = 0.$$

A k_1 egyenlethől fejezzük ki például a II , a k_2 egyenlethől pedig a IV ismeretlent, majd az I és a III ismeretlen részére állítsunk fel azonossági egyenletet:

$$\begin{aligned} I &= +1,000 I \\ II &= +0,223 I && -0,625 \\ III &= && +1,000 III \\ IV &= && -0,621 III && -0,704. \end{aligned}$$

A (112) képletcsoport együtthatói tehát:

$$\begin{aligned} A_1 &= +1 && B_1 = 0 \\ A_2 &= +0,223 && B_2 = 0 \\ A_3 &= 0 && B_3 = +1 \\ A_4 &= 0 && B_4 = -0,621. \end{aligned}$$

Az 5. példa egyensúlyi egyenleteit végigsorozva a megfelelő indexű A , majd B értékkel (az f egyensúlyi egyenletekben természetesen a szimmetrikus tagokat is figyelembe véve), a

$$g_1 = [Af] = -157,98 I - 17,70 II + 52,47 III - 12,44 IV + 133,58 = 0$$

$$g_2 = [Bf] = + 81,16 I - 94,02 II - 90,63 III + 97,50 IV - 94,82 = 0$$

egyenletekhez jutunk. Behelyettesítve ezekben II -nek és IV -nek a kényszerfeltételi egyenletekből kifejezett értékét, a kényszerfeltételeket is magukban foglaló egyensúlyi egyenleteket kapjuk:

$$- 161,93 I + 60,20 III + 153,40 = 0$$

$$+ 60,20 I - 151,18 III - 104,70 = 0.$$

Megoldásuk eredményei:

$$\delta y_1 = I = +0,810 \text{ dm} \qquad \delta y_2 = III = -0,370 \text{ dm.}$$

Ezek segítségével számíthatók már a többi ismeretlenek is:

$$\delta x_1 = II = -0,445 \text{ dm} \qquad \delta x_2 = IV = -0,474 \text{ dm.}$$

Ezután az 5. példa 7. lépése szerint számítjuk a tájékozási szögek változását:

$$\delta z_1 = -1,42'' \qquad \delta z_2 = -2,02'',$$

majd elvégezzük az 5. példa 8. lépését is.

Ha az 5. példa 9. pontjának megfelelő összegértékeket számítjuk, nem jutunk zérushoz, hanem a kényszerfeltételt képviselő erők eredőjének az új pontokon átmenő komponenseihez tartozó vetületeket kapjuk ellenkező előjellel:

$$[-v \cos \delta]^I = -V_y^I = -0,94 \qquad [v \sin \delta]^I = -V_x^I = +4,13$$

$$[-v \cos \delta]^{II} = -V_y^{II} = -10,51 \qquad [v \sin \delta]^{II} = -V_x^{II} = -16,89.$$

A továbbiakban elvégezzük az 5. példa 10–14. lépéseinél felsorolt műveleteket. A P_1 és P_2 pont *kiegyenlített koordinátái*:

$$y_1 = (y_1) + I = +23\,301,400 + 0,081 = +23\,301,481 \text{ m}$$

$$x_1 = (x_1) + II = +52\,107,800 - 0,045 = +52\,107,755 \text{ m}$$

$$y_2 = (y_2) + III = +23\,600,100 - 0,037 = +23\,600,063 \text{ m}$$

$$x_2 = (x_2) + IV = +52\,305,300 - 0,047 = +52\,305,253 \text{ m}$$

Ha a koordinátaváltozásokat behelyettesítjük a tisztán a mérési eredmények alapján felállított f jelű eredeti egyensúlyi egyenletekbe, ezek most nem elégítik ki a zérus feltételt, hanem a kényszerfeltételi erők eredője komponenseinek vetületeit adják ugyancsak ellenkező előjellel:

$$-V_y^I = -0,96 \qquad -V_x^I = +4,22$$

$$-V_y^{II} = -10,47 \qquad -V_x^{II} = -16,99.$$

Az egyezés az előbbieken számított megfelelő értékekkel kielégítően jó.

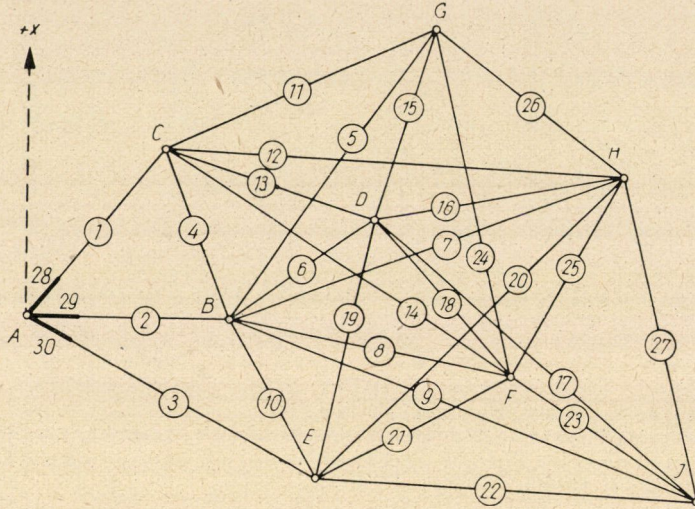
További ellenőrzésül kiszámítjuk a végleges koordinátákból a t_E távolságot és a δ_D irányszöveget:

$$t_E = 428,1993 \text{ m} \qquad \delta_D = 301^\circ 51' 0,0''.$$

Amint látjuk, a kényszerfeltételeket megfelelően kielégítettük.

Az ellenőrzések elvégzése után a középhibaszámítás következik. Példánkban a fölsmérések száma: $f = 12 - (6 - 2) = 8$.

8. példa. A hosszmeréses háromszögelési hálózatokat, ha a mért oldalak nem keresztezik egymást, általában a korrelátakiegyenlítéssel célszerű számítani. Ha azonban keresztező oldalmérések is vannak vagy irányméréseket is végeztünk, akkor már rendszerint kedvezőbb a koordinátakiegyenlítés módszerét alkalmazni. Most olyan hálózat kiegyenlítésére adunk példát, amelyben 9 pont között 27 oldal hosszát mértük meg invárdróttokkal.



6. ábra

Ha csupán hosszmerési eredményeket adunk meg, előfordul, hogy a végleges koordináták az előzetes koordinátákkal jellemzett eredeti helyzethez képest erősen elfordult hálózatot rögzítenek. Ez a körülmény a hosszálózat szempontjából általában közömbös, mert hiszen csupán a végleges, kiegyenlített oldalhosszakra van szükség. Ha azonban a hálózatot tájékozottan kívánjuk rögzíteni, akkor legalább egy tájékozott irányértéket is meg kell adni. Példánkban a 6. ábrán vázolt hálózatnak A pontját tekintettük adott pontnak és a róla kiinduló oldalakat mért és tájékozott irányértékét is bevontuk a mérési eredmények közé.

A kiegyenlítés menetét már nem írjuk le részletesen, mert az eddigiek alapján könnyen követhető.

A 17. táblázat az A pont végleges és a többi pontok előzetes koordinátáit, majd a kiegyenlítéssel megállapított koordinátaváltozásokat és a végleges koordinátákat, továbbá az utóbbiak középhibáját sorolja fel.

A 18. táblázat a (δ) előzetes irányszögeket, az L mérési eredményeket, a (t) előzetes hosszértékeket, az E hosszértékeket, az e irányértékeket — amelyeket a hosszmeréseket helyettesítő fiktív iránymérésekhez a (106) képletnek megfelelően számítottunk —, továbbá a kiegyenlítés utáni t végleges távolságokat és a v_L hosszmerési javításokat, illetve az irányméréseknek a δ végleges irányszöget és a v iránymérési javítást tartalmazza.

A 19. táblázat (nyomdatechnikai okokból a, b, c, d és e jelű részekre tagolva) az egyenlítő egyenletek felállítását mutatja be. Miután példánkban a hosszmerések vannak túlnyomó többségben és tájékozási ismeretlen nem lévén, redukciókat sem kell alkalmazni, az iránymérések soránál írtuk az a oszlopába a b , a b oszlopába az a és a c oszlopába a $-c$ iránykoefficiens értékét, továbbá a $\sin \delta$ oszlopába a $\cos \delta$ és a $\cos \delta$ oszlopába a $-\sin \delta$ értéket. A q súlyszámot 1-nek vettük fel. A táblázatrészek helyes egymáshoz illesztése:

a	c
d	e

17. táblázat

Pont	Előzetes koordináták		Koordináta-változások		Végleges koordináták		Koordináta-középhibák	
	(y)	(x)	δy	δx	y	x	μ_y	μ_x
méter							milliméter	
A	0,00	0,00			0,000	0,000	—	—
B	+1600,20	+ 0,12	—0,199	—0,119	+1600,001	+ 0,001	±2,27	±2,21
C	+1156,88	+1378,75	+0,141	+0,130	+1157,021	+1378,880	±2,92	±2,48
D	+2799,75	+ 800,17	+0,249	—0,169	+2799,999	+ 800,001	±2,97	±3,63
E	+2382,34	—1221,60	—0,198	+0,122	+2382,142	—1221,478	±3,37	±2,81
F	+3902,40	— 408,05	+0,141	—0,174	+3902,541	— 408,224	±2,93	±5,41
G	+3240,00	+2375,39	+0,176	+0,005	+3240,176	+2375,395	±5,53	±4,59
H	+4800,75	+1205,00	—0,032	+0,137	+4800,718	+1205,137	±3,61	±7,19
I	+5417,30	—1421,10	—0,146	+0,106	+5417,154	—1420,994	±4,83	±9,00

18. táblázat

Mérés jele	(δ)	L m	(t) m	E m	e"	t δ	v_L v
1	39°59'57"	1800,0036	1799,8116	—0,1920	—22,0049	1800,0021	—0,0015
2	89 59 45	1600,0000	1600,2000	+0,2000	+25,7799	1600,0010	+0,0010
3	117 8 50	2677,0523	2677,2843	+0,2320	+17,8739	2677,0523	0,0000
4	342 10 26	1448,2894	1448,1554	—0,1340	—19,0860	1448,2882	—0,0012
5	34 37 11	2886,6407	2886,3212	—0,3195	—22,8300	2886,6366	—0,0041
6	56 17 54	1442,2180	1441,8740	—0,3440	—49,2103	1442,2188	+0,0008
7	69 22 14	3420,0776	3419,8336	—0,2440	—14,7167	3420,0793	+0,0017
8	100 3 14	2338,4490	2338,1039	—0,3451	—30,4364	2338,4478	—0,0012
9	110 25 18	4073,0665	4073,0945	+0,0280	+ 1,4179	4073,0661	—0,0004
10	147 22 22	1450,4320	1450,6360	+0,2040	+29,0077	1450,4329	+0,0009
11	64 25 55	2309,2393	2309,2592	+0,0199	+ 1,7856	2309,2373	—0,0020
12	92 43 48	3647,8393	3648,0104	+0,1711	+ 9,6693	3647,8370	—0,0023
13	109 24 4	1741,9760	1741,7740	—0,2020	—23,9213	1741,9752	—0,0008
14	123 3 23	3275,9160	3275,7508	—0,1652	—10,3904	3275,9163	+0,0003
15	15 36 54	1635,7301	1635,5871	—0,1430	—18,0338	1635,7329	+0,0028
16	78 33 46	2041,3264	2041,5405	+0,2141	+21,6206	2041,3260	—0,0004
17	130 19 5	3432,5440	3433,0130	+0,4690	+28,1788	3432,5383	—0,0057
18	137 36 56	1635,6659	1635,7369	+0,0710	+ 8,9530	1635,6670	+0,0011
19	191 39 55	2064,2115	2064,4090	+0,1975	+19,7327	2064,2146	+0,0031
20	44 54 11	3426,0740	3425,9411	—0,1329	— 8,0000	3426,0722	—0,0018
21	61 50 38	1724,2360	1724,0780	—0,1580	—18,9028	1724,2376	+0,0016
22	93 45 39	3041,5604	3041,5104	—0,0500	— 3,3908	3041,5628	+0,0024
23	123 46 18	1822,0177	1822,4147	+0,3970	+44,9333	1822,0196	+0,0019
24	346 36 50	2861,3394	2861,1734	—0,1660	—11,9671	2861,3392	—0,0002
25	29 6 53	1846,5249	1846,3389	—0,1860	—20,7791	1846,5253	+0,0004
26	126 51 57	1950,5860	1950,8339	+0,2479	+26,2207	1950,5884	+0,0024
27	166 47 15	2697,5060	2697,5060	0,0000	0,0000	2697,5095	+0,0035
28	39 59 57,5	40° 0' 0,5"			— 3,0000	40° 0' 0,2991"	—0,2009
29	89 59 44,5	89 59 59,5			—15,0000	89 59 59,8711	+0,3711
30	117 8 51,1	117 8 50,1			+ 1,0000	117 8 49,7168	—0,3832

19/a táblázat

	1 = B			2 = C			3 = D			4 = E			
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	
I B	29	-12,89	0,00	-0,00									
	2	0,00	-12,89	+0,00									
	4	-12,91	-1,33	-4,15	+12,91	+1,33	+4,15						
	5	-4,84	-2,31	+3,34									
	6	-4,40	-9,90	+6,60				+4,40	+9,90	-6,60			
	7	-0,75	-5,28	+1,99									
	8	-0,27	-8,55	-1,52									
	9	-0,62	-4,44	-1,66									
	10	-10,09	-4,13	-6,46							+10,09	+4,13	+6,46
			-46,77	-48,83	-1,86	+12,91	+1,33	+4,15	+4,40	+9,90	-6,60	+10,09	+4,13
II C	28				-4,74	-6,73	-5,64						
	1				-6,73	-4,74	+5,64						
	11				-1,66	-7,27	+3,48						
	12				-0,01	-5,64	-0,27						
	13				-1,31	-10,54	-3,71	+1,31	+10,54	+3,71			
	14				-1,87	-4,42	-2,88						
	4				-12,91	-1,33	-4,15						
				-29,23	-40,67	-7,53	+1,31	+10,54	+3,71	0,00	0,00	0,00	
III D	6						-4,40	-9,90	+6,60				
	13						-1,31	-10,54	-3,71				
	15						-11,70	-0,91	+3,58				
	16						-0,40	-9,71	+1,96				
	17						-2,52	-3,49	-2,96				
	18						-6,88	-5,73	-6,28				
	19						-9,58	-0,41	+1,98	+9,58	+0,41	-1,98	
							-36,79	-40,69	+1,17	+9,58	+0,41	-1,98	
IV E	30									-6,10	-1,60	+3,13	
	3									-1,60	-6,10	-3,13	
	10									-10,09	-4,13	-6,46	
	19									-9,58	-0,41	+1,98	
	20									-3,02	-3,00	+3,01	
	21									-2,66	-9,30	+4,98	
	22									-0,03	-6,75	-0,44	
										-33,08	-31,29	+3,07	

19/b táblázat

		5 = F			6 = G			7 = H			8 = I		
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
I B	29												
	2												
	4				+4,84	+2,31	-3,34						
	5												
	6												
	7							+0,75	+5,28	-1,99			
	8	+0,27	+8,55	+1,52							+0,62	+4,44	+1,66
	9												
	10												
		+0,27	+8,55	+1,52	+4,84	+2,31	-3,34	+0,75	+5,28	-1,99	+0,62	+4,44	+1,66
II C	28												
	1												
	11				+1,66	+7,27	-3,48						
	12							+0,01	+5,64	+0,27			
	13												
	14	+1,87	+4,42	+2,88									
	4												
		+1,87	+4,42	+2,88	+1,66	+7,27	-3,48	+0,01	+5,64	+0,27	0,00	0,00	0,00
III D	6												
	13												
	15				+11,70	+0,91	-3,58						
	16							+0,40	+9,71	-1,96			
	17										+2,52	+3,49	+2,96
	18	+6,88	+5,73	+6,28									
	19												
		+6,88	+5,73	+6,28	+11,70	+0,91	-3,58	+0,40	+9,71	-1,96	+2,52	+3,49	+2,96
IV E	30												
	3												
	10												
	19												
	20							+3,02	+3,00	-3,01			
	21	+2,66	+9,30	-4,98							+0,03	+6,75	+0,44
	22												
		+2,66	+9,30	-4,98	0,00	0,00	0,00	+3,02	+3,00	-3,01	+0,03	+6,75	+0,44

19/c táblázat

		e	$\sin \delta$	$\cos \delta$	$e \sin \delta$	$e \cos \delta$
I B	29	-15,000	+0,0003	-1,0000	- 0,004	+15,000
	2	+25,780	+1,0000	+0,0003	+25,780	+ 0,008
	4	-19,086	+0,3061	-0,9520	- 5,842	+18,170
	5	-22,830	-0,5681	-0,8229	+12,970	+18,787
	6	-49,210	-0,8319	-0,5549	+40,938	+27,307
	7	-14,717	-0,9359	-0,3523	+13,773	+ 5,185
	8	-30,436	-0,9846	+0,1746	+29,967	- 5,314
	9	+ 1,418	-0,9371	+0,3489	- 1,329	+ 0,495
	10	+29,008	-0,5392	+0,8422	-15,641	+24,430
					+100,61	+104,07
II C	28	- 3,000	+0,7661	-0,6428	- 2,298	+ 1,928
	1	-22,005	+0,6428	+0,7661	-14,145	-16,858
	11	+ 1,786	-0,9021	-0,4316	- 1,611	- 0,771
	12	+ 9,669	-0,9989	+0,0476	- 9,658	+ 0,460
	13	-23,921	-0,9432	+0,3322	+22,563	- 7,947
	14	-10,390	-0,8381	+0,5455	+ 8,707	- 5,668
4	-19,086	-0,3061	+0,9520	+ 5,842	-18,170	
				+ 9,40	-47,03	
III D	6	-49,210	+0,8319	+0,5549	-40,938	-27,307
	13	-23,921	+0,9432	-0,3322	-22,563	+ 7,947
	15	-18,034	-0,2692	-0,9631	+ 4,855	+17,368
	16	+21,621	-0,9801	-0,1983	-21,191	- 4,288
	17	+28,179	-0,7625	+0,6470	-21,486	+18,232
	18	+ 8,953	-0,6741	+0,7386	- 6,035	+ 6,613
19	+19,733	+0,2022	+0,9793	+ 3,990	+19,324	
				-103,37	+37,89	
IV E	30	+ 1,000	-0,4563	-0,8898	- 0,456	- 0,890
	3	+17,874	+0,8898	-0,4563	+15,904	- 8,156
	10	+29,008	+0,5392	-0,8422	+15,641	-24,430
	19	+19,733	-0,2022	-0,9793	- 3,990	-19,324
	20	- 8,000	-0,7059	-0,7083	+ 5,647	+ 5,666
	21	-18,903	-0,8817	-0,4718	+16,667	+ 8,918
22	- 3,391	-0,9978	+0,0656	+ 3,383	- 0,222	
				+52,80	-38,44	

Az egyensúlyi egyenletek száma 16. Felállításuk a (107) egyenletrendszernek megfelelően, de a 16 ismeretlen figyelembevételével történik: mindegyik egyenletbe 16 koefficiens és 1 tisztatag kerül. A szimmetrikus tagokat itt sem írjuk fel. Az egyensúlyi egyenleteket a 20. táblázatban találjuk. Megoldásuk a 17. táblázatba bevezetett koordinátaváltozásokat adja.

A 19. és a 20. táblázattal kapcsolatban megemlítjük, hogy a példa végigszámításakor mind az iránykoefficienseket, mind az irányeltéréseket négy tizedes élességgel vittük figyelembe, mert csak így kapunk az egyensúlyi egyenletek kielégítésére megfelelő ellenőrzéseket. Az említett két táblázatban azonban az értékeket a táblázat terjedelmének csökkentése végett kevesebb tizedessel írtuk be. Ezért mutatkozik a két táblázat megfelelő adatai között itt-ott egy-egy század eltérés.

A 21. táblázatban a hosszmeréseket helyettesítő fiktív iránymérések, illetve a ténylegesen mért irányok v javítását, továbbá a v_L hosszmerési javításokat állítottuk össze. Az irányszögváltozásokat a (28a), illetve a (108) vagy a (109), az iránymérési javításokat pedig a (110) képlet szerint számítottuk, természetesen mindig a megfelelő végpontok koordinátaváltozásait, a mért vonaldarabhoz tartozó iránykoefficienseket, sinus- vagy cosinus-értéket és irányeltérést véve figyelembe. A hosszmerési javításokat a (28b) képlettel határoztuk meg. Ugyancsak a 21. táblázatban számítottuk a tv és a $[tv]$ értékeket is. Ha összevetjük a 18. és a 21. táblázat összetartozó értékeit, megfelelő egyezést állapíthatunk meg.

19/d táblázat

	5 = F			6 = G			7 = H			8 = I			
		a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
V F	8	-0,27	-8,55	-1,52									
	14	-1,87	-4,42	-2,88									
	18	-6,88	-5,73	-6,28									
	24	-6,82	-0,39	-1,62	+6,82	+0,39	+1,62						
	25	-8,53	-2,64	+4,75				+8,53	+2,64	-4,75			
	23	-3,50	-7,82	-5,23							+3,50	+7,82	+5,23
	21	-2,66	-9,30	+4,98									
		-30,53	-38,85	-7,80	+6,82	+0,39	+1,62	+8,53	+2,64	-4,75	+3,50	+7,82	+5,23
VI G	5				-4,84	-2,31	+3,34						
	11				-1,66	-7,27	+3,48						
	26				-3,81	-6,77	-5,07	+3,81	+6,77	+5,07			
	24				-6,82	-0,39	-1,62						
	15				-11,70	-0,91	+3,58						
				-28,83	-17,65	+3,71	+3,81	+6,77	+5,07	0,00	0,00	0,00	
VII H	7							-0,75	-5,28	+1,99			
	16							-0,40	-9,71	+1,96			
	12							-0,01	-5,64	-0,27			
	26							-3,81	-6,77	-5,07			
	27							-7,25	-0,40	-1,70	+7,25	+0,40	+1,70
	25							-8,53	-2,64	+4,75			
	20							-3,02	-3,00	+3,01			
							-23,77	-33,44	+4,67	+7,25	+0,40	+1,70	
VIII I	22										-0,03	-6,75	-0,44
	9										-0,62	-4,44	-1,66
	23										-3,50	-7,82	-5,23
	17										-2,51	-3,49	-2,96
	27										-7,24	-0,40	-1,70
										-13,90	-22,90	-11,99	

19/c táblázat

		a	$\sin \delta$	$\cos \delta$	$e \sin \delta$	$e \cos \delta$
V F	8	-30,436	+0,9846	-0,1746	-29,967	+ 5,314
	14	-10,390	+0,8381	-0,5455	- 8,708	+ 5,668
	18	+ 8,953	+0,6741	-0,7386	+ 6,035	- 6,613
	24	-11,967	+0,2315	-0,9728	+ 2,770	+11,642
	25	-20,779	-0,4866	-0,8736	+10,111	+18,153
	23	+44,933	-0,8313	+0,5559	-37,353	+24,978
	21	-18,903	+0,8817	+0,4718	-16,667	- 8,918
				-79,32	+50,22	
VI G	5	-22,830	+0,5681	+0,8229	-12,970	-18,787
	11	+ 1,786	+0,9021	+0,4316	+ 1,612	+ 0,771
	26	+26,221	-0,8000	+0,5999	-20,977	+15,730
	24	-11,967	-0,2315	+0,9728	+ 2,770	-11,642
	15	-18,034	+0,2692	+0,9631	- 4,855	-17,368
				-34,42	-31,30	
VII H	7	-14,717	+0,9359	+0,3523	-13,773	- 5,185
	16	+21,621	+0,9801	+0,1983	+21,191	+ 4,288
	12	+ 9,669	+0,9989	-0,0476	+ 9,658	- 0,460
	26	+26,221	+0,8000	-0,5999	+20,977	-15,730
	27	0,000	-0,2286	+0,9735	0,000	0,000
	25	-20,779	+0,4866	+0,8736	-10,111	-18,153
	20	- 8,000	+0,7059	+0,7083	- 5,647	- 5,666
				+22,29	-40,91	
VIII I	22	- 3,391	+0,9978	-0,0656	- 3,383	+ 0,222
	9	+ 1,418	+0,9391	-0,3489	+ 1,329	- 0,495
	23	+44,933	-0,8313	-0,5559	+37,353	-24,978
	17	+28,179	+0,7625	-0,6470	+21,486	-18,232
	27	0,000	+0,2286	-0,9735	0,000	0,000
				+56,78	-43,48	

A $\delta\delta$ és a v értékek számítását egyébként éppen úgy táblázatosan végezzük, mint az 5. példában. Az a , b és c iránykoefficiensen a mért irányoknál is azt az értéket értjük, amelyet a 19. táblázatba az ugyanolyan jelzésű oszlopba vezettünk be. Hasonlóan értelmezzük a $\sin \delta$ és $\cos \delta$ értékeket is. Az eléggé terjedelmes táblázat közlését feleslegesnek véljük, inkább példaként bemutatjuk külön-külön néhány irányszög változásának és mérési javításnak a számítását. (A képletekbe az eredeti számításból származó több tizedesre éles értékeket helyettesítettük be.)

Az \overline{AC} távolsághoz (1 jelű mérés), a $\cos \delta$ értékkel számítva:

$$\delta\delta_1 = \frac{(-5,6431)(+1,4075) + (-6,7254)(+1,3009)}{-0,7661} = +2,7737''$$

$$v_1 = +2,7737 - 22,0049 = -0,2169''.$$

A \overline{DG} távolsághoz (15 jelű mérés), a $\cos \delta$ értékkel számítva:

$$\delta\delta_{15} = \frac{(-3,5780)(+2,4950) + (-11,6973)(-1,6854) + (+3,5780)(+1,7555)}{+0,9631} +$$

$$+ \frac{(+11,6973)(+0,0463)}{+0,9631} = +18,2850''$$

$$v_{15} = +18,2850 - 18,0338 = +0,2512''.$$

20. táblázat

δy_1	δx_1	δy_2	δx_2	δy_3	δx_3	δy_4	δx_4	δy_5	δx_5	δy_6	δx_6	δy_7	δx_7	δy_8	δx_8	
<u>-48,83</u>	+ 1,86	+ 1,33	- 4,15	+ 9,90	+ 6,60	+ 4,13	- 6,46	+ 8,55	- 1,52	+ 2,31	+ 3,34	+ 5,28	+ 1,99	+ 4,44	- 1,66	-100,61
	<u>-46,77</u>	- 4,15	+12,91	+ 6,60	+ 4,40	- 6,46	+10,09	- 1,52	+ 0,27	+ 3,34	+ 4,84	+ 1,99	+ 0,75	- 1,66	+ 0,62	-104,07
		<u>-40,67</u>	+ 7,53	+10,54	- 3,71	0,00	0,00	+ 4,42	- 2,88	+ 7,27	+ 3,48	+ 5,64	- 0,27	0,00	0,00	- 9,40
			<u>-29,23</u>	- 3,71	+ 1,31	0,00	0,00	- 2,88	+ 1,87	+ 3,48	+ 1,66	- 0,27	+ 0,01	0,00	0,00	+ 47,02
				<u>-40,69</u>	- 1,17	+ 0,41	+ 1,98	+ 5,73	- 6,28	+ 0,91	+ 3,58	+ 9,71	+ 1,96	+ 3,49	- 2,96	+103,37
					<u>-36,78</u>	+ 1,98	+ 9,58	- 6,28	+ 6,88	+ 3,58	+11,70	+ 1,96	+ 0,40	- 2,96	+ 2,52	- 37,89
						<u>-31,30</u>	- 3,07	+ 9,30	+ 4,98	0,00	0,00	+ 3,00	+ 3,01	+ 6,75	- 0,44	- 52,80
							<u>-33,09</u>	+ 4,98	+ 2,66	0,00	0,00	+ 3,01	+ 3,02	- 0,44	+ 0,03	+ 38,44
								<u>-38,86</u>	+ 7,80	+ 0,39	-1,62	+ 2,64	+ 4,75	+ 7,82	- 5,23	+ 79,32
									<u>-30,53</u>	- 1,62	+ 6,82	+ 4,75	+ 8,53	- 5,23	+ 3,50	- 50,22
										<u>-17,64</u>	- 3,70	+ 6,77	- 5,07	0,00	0,00	+ 34,42
											<u>-28,83</u>	- 5,07	+ 3,81	0,00	0,00	+ 31,30
												<u>-33,44</u>	- 4,67	+ 0,40	- 1,70	- 22,29
													<u>-23,76</u>	-1,70	+ 7,25	+ 40,91
														<u>-22,91</u>	+12,00	- 56,78
															<u>-13,91</u>	+ 43,48

21. táblázat

Mérés jele	v	t km	tvv	v_L m
1	-0,2169	1,80	0,0847	-0,0019
2	+0,1459	1,60	0,0341	+0,0011
3	-0,0129	2,68	0,0004	-0,0002
4	-0,1118	1,45	0,0181	-0,0008
5	-0,3544	2,89	0,3630	-0,0050
6	+0,2235	1,44	0,0719	+0,0016
7	+0,1552	3,42	0,0824	+0,0026
8	-0,0629	2,34	0,1472	-0,0007
9	-0,0570	4,07	0,0132	-0,0011
10	+0,1768	1,45	0,0453	+0,0012
11	-0,2459	2,31	0,1397	-0,0028
12	-0,0866	3,65	0,0274	-0,0015
13	-0,0263	1,74	0,0012	-0,0002
14	+0,0636	3,28	0,0133	+0,0010
15	+0,2512	1,64	0,1035	+0,0020
16	-0,1081	2,04	0,0238	-0,0011
17	-0,3128	3,43	0,3356	-0,0052
18	+0,2198	1,64	0,0792	+0,0017
19	+0,3431	2,06	0,2425	+0,0034
20	-0,1505	3,43	0,0777	-0,0025
21	+0,2019	1,72	0,0701	+0,0017
22	+0,2233	3,04	0,1516	+0,0033
23	+0,3016	1,82	0,1656	+0,0027
24	-0,0337	2,86	0,0032	-0,0005
25	+0,1285	1,85	0,0305	+0,0012
26	+0,3139	1,95	0,1921	+0,0030
27	+0,2519	2,70	0,1713	+0,0033
28	-0,2263	1,80	0,0922	
29	+0,3436	1,60	0,1888	
30	-0,3966	2,68	0,4215	
			3,3911	

22. táblázat

Mérés jele	v	$\sin \delta$	$\cos \delta$	$v \sin \delta$	$v \cos \delta$
2	+0,1459	+1,0000	+0,0003	+0,1459	+0,0000
4	-0,1118	+0,3061	-0,9520	-0,0342	+0,1064
5	-0,3544	-0,5681	-0,8229	+0,2013	+0,2916
6	+0,2235	-0,8319	-0,5549	-0,1859	-0,1240
7	+0,1552	-0,9359	-0,3523	-0,1453	-0,0547
8	-0,0629	-0,9846	+0,1746	+0,0619	-0,0110
9	-0,0570	-0,9371	+0,3489	+0,0534	-0,0199
10	+0,1768	-0,5392	+0,8422	-0,0953	+0,1489
29	+0,3436	+0,0003	-1,0000	+0,0001	-0,3436
				+0,0019	-0,0063

Az EF távolsághoz (21 jelű mérés), a $\sin \delta$ értékkel számítva :

$$\delta\delta_{21} = \frac{(-9,3006)(-1,9831) + (-4,9772)(+1,2206) + (+9,3006)(+1,4109)}{+0,8817} + \frac{(+4,9772)(-1,7372)}{+0,8817} = +19,1047''$$

$$v_{21} = +19,1047 - 18,9028 = +0,2019''.$$

Az $A-B$ irányhoz (29 jelű mérés), a $\cos \delta$ értékkel számítva :

$$\delta\delta_{29} = \frac{(+0,0009)(-1,9886) + (-12,8899)(-1,1905)}{+1,0000} = +15,3436''$$

$$v_{29} = +15,3436 - 15,0000 = +0,3436''.$$

Az $A-C$ irányhoz (28 jelű mérés), a $\sin \delta$ értékkel számítva :

$$\delta\delta_{28} = \frac{(-6,7254)(+1,4075) + (+5,6431)(+1,3009)}{-0,7661} = +2,7737''$$

$$v_{28} = +2,7737 - 3,0000 = -0,2263''.$$

A 22. táblázatban kiszámítottuk a B ponthoz a $[v \sin \delta]$ és a $[v \cos \delta]$ összegértékeket. A többi pontokhoz tartozó összegértékek is megfelelően megközelítik a zérust. Miután

$$[tvv] = 3,3911$$

és a fölösmérések száma : $f = 30 - 16 = 14$, a *súlyegység* középhibája :

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{3,3911}{14}} = \pm 0,492.$$

Például a 29 jelű iránymérés kiegyenlítés utáni középhibája :

$$\mu_{29} = \frac{0,492}{\sqrt{1,60}} = \pm 0,39''.$$

Az 1, 8 és 9 jelű hosszmerési eredmények kiegyenlítés utáni középhibája :

$$\mu_1 = 0,492 \frac{1000}{\rho''} \sqrt{1,80} = \pm 0,0032 \text{ m}$$

$$\mu_8 = 0,492 \frac{1000}{\rho''} \sqrt{2,34} = \pm 0,0036 \text{ m}$$

$$\mu_9 = 0,492 \frac{1000}{\rho''} \sqrt{4,07} = \pm 0,0048 \text{ m}.$$

Az egyensúlyi egyenletek megoldásával megkaptuk a koordinátaváltozások súlykoefficiensével arányos Q' mennyiségeket is. Ez például a δy_B -hez : 0,043 94. Az y_B koordináta középhibája tehát :

$$\mu_{y_B} = 0,022 \cdot 0,492 \sqrt{0,04394} = \pm 0,002 27 \text{ m}.$$

Hasonló módon kiszámítottuk a többi koordináták középphibáját is. A 17. táblázatban mutattuk ki azokat. Világosan megmutatják, hogy az adott ponttól távolodva, amelyen a tájékozó irányokat is mértük, a pontok helyzete a koordinátarendszerben fokozatosan bizonytalanabbá válik.

ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány I. részében a szerző már kifejtette a sztatikai koordinátakiegyenlítés alapelveit és az eljárás lényegét. Az I. rész a továbbiakban az egy pont kiegyenlítésének különböző eseteivel foglalkozott.

A mostani II. (befejező) rész az eljárásnak több pont együttes kiegyenlítésére való alkalmazását mutatja be. Az alapelvek változatlanok maradnak, csupán a végrehajtás módosul némileg a több új pont egymással való összefüggésének megfelelően.

A NAGYPONTOSSÁGÚ SPEKTROSKÓPIAI SZIKRAGERJESZTŐ BERENDEZÉSEK FELÉPÍTÉSI ALAPELVEI ÉS NÉHÁNY ALKALMAZÁSA

BARDÓCZ ÁRPÁD

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA KÖZPONTI FIZIKAI KUTATÓ INTÉZETE, SPEKTROSKÓPIAI OSZTÁLY,
BUDAPEST

[Beérkezett 1958. október 3-án]

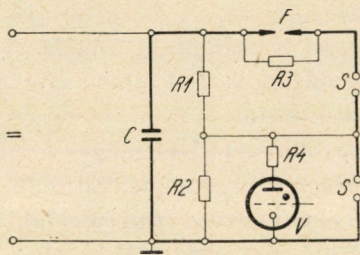
Ha a spektroszkópiai vizsgálatnál vonalas színekép előállítása a cél, aránylag kisenergiájú kisüléseket kell alkalmazni a színeképvonalak gerjesztéséhez. Ilyen körülmények között a színeképlemezen színeképet csak úgy kaphatunk, ha több száz vagy több ezer kisülés fényenergiáját összegezzük. Hasonló a helyzet, ha ilyen nagyságrendű energiákkal időben felbontott színeképet állítunk elő. Az időben fel nem bontott színekép előállításánál azonban a gerjesztőberendezés kisüléseinek időszórása tetszőleges lehet, de nem ez a helyzet időben felbontott színeképek esetében. Különösen kényes a helyzet akkor, ha mikromásodperc nagyságrendű időfelbontásról van szó. Ilyenkor ahhoz, hogy az időfelbontás megmaradjon, az időben felbontott színeképet igen nagy pontossággal kell egymásra helyezni a színeképlemezen, aminek az az előfeltétele, hogy az egyes szikrakisülések időben igen nagy pontossággal kövessék egymást. A szikrakisüléseket a szóban forgó nagy pontossággal elektronikus vezérlésű nagypontosságú szikragerjesztőkkel lehet előállítani. Nagypontosságú szikragerjesztő alatt olyan spektroszkópiai gerjesztőberendezést értünk, amelynél a szikrák átütése adott villamos jelhez viszonyítva nagyságrendben 10^{-7} másodperc nagyságrendű időszórással történik.

Az elektronikus vezérlésű nagypontosságú spektroszkópiai szikragerjesztő berendezéseknek bevezetése számos olyan új szerkesztési feladatot vetett fel, amely az eddig szokásos gerjesztőberendezéseknél nem állott fenn. Ez a dolgozat ennek a kérdésnek tárgyalásával foglalkozik.

A szerző részéről alkalmazott elektronikus vezérlésű nagypontosságú spektroszkópiai szikragerjesztő elvi villamos kapcsolási vázlatát az 1. ábra szemlélteti. Mivel ezt a kapcsolást és annak működését már több helyen ismertettük (1—6), ennek ismertetését most mellőzzük. Előbbi dolgozatokban ismertettük azokat a lehetőségeket is, amelyek keretén belül az 1. ábra szerinti gerjesztőberendezést időfelbontásos spektroszkópiához lehet használni (7—9).

Az 1. ábrában C a gerjesztő energiát szolgáltató kondenzátor, F az elemző szikraköz, S szimmetrikus kettős vezérlő szikraköz, V elektroncső, R_1 , R_2 R_3 és R_4 ohmos ellenállások.

Az 1. ábra kapcsolása szerinti szikragerjesztő C kondenzátortól jobbra eső része, a kisülési áramkör, két igen fontos feladatot képes megoldani. Az egyik feladat megoldása az, hogy a rendszer kisenergiájú és kisfeszültségű villamos jelekkel vezérelhető. Ez lehetővé teszi a rendszernek indítójel-generátorokkal való vezérlését, utóbbi pedig módot ad fényjelekkel való vezérlésre. A fényjelekkel való vezérlésnek az időben felbontott spektroszkópia szempontjából van döntő jelentősége. A másik feladat, amit ez a kapcsolási rész megold, a nagy időbeli működési pontosság, mert V elektroncső rácsára adott villamos vezérlőjelhez viszonyítva az F elemző szikraköz átütése a már említett kis időszórással történik.



1. ábra Elektronikus vezérlésű nagy pontosságú spektroszkópi szikragerjesztő elvi villamos kapcsolási vázlat

Az elméleti megfontolás és a tapasztalat azt mutatja, hogy az 1. ábra szerinti gerjesztőberendezés akkor fog a kívánt pontossággal működni, hogyha az S kettős vezérlő szikraközök a V elektroncső rácsára adott villamos jel ideje alatt villamosan erősen elő vannak feszítve. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy azokat úgy kell beállítani, hogy a C kondenzátor feltöltött állapota mellett még éppen ne üssenek át. Ha ilyen körülmények között a negatív előfeszültséggel lezárt V cső rácsára pozitív feszültségjelet adunk, minek folytán a cső begyúl, az S kettős szikraköz felső felén hirtelen feszültségugrás jelentkezik, mert a V cső begyúlása előtti állapothoz viszonyítva azon kétszeres feszültség mutatkozik. Ennek következtében S felső fele át fog ütni. Ezen túlmenően azonban az említett átütés igen rövid idő alatt, igen kis időszórással fog bekövetkezni. A gázkisülési fizikából ismert ugyanis, hogy erősen előfeszített szikraközök, ha azokra hirtelen feszültséglökést adunk, azok 10^{-7} — 10^{-8} mp alatt ütnek át, vagyis itt a statisztikus időkézés is ilyen nagyságrendű. Így az S kettős szikraköz felső felének kis időszórással való átütése meg lenne magyarázva. A tapasztalat azt mutatja azonban, hogy az 1. ábra egész rendszere 10^{-7} mp nagyságrendű időszórással működik. Ez más szóval azt jelenti, hogy ugyanilyen időszórással történik F és S alsó felének átütése is. Ezzel szemben az F szikraköz és S kettős szikraköz felső felének átütése nem magyarázható az előbbi alapon. Az F és S alsó fele szikraközök kis időszórással történő átütése az alábbiak szerint magyarázható.

Mivel R_3 sokkal nagyobb, mint R_4 , S felső felének átütése után a C kondenzátor csaknem teljes töltőfeszültsége R_3 sarkain, illetőleg az F elemző szikraközön fog jelentkezni. Ennek következtében S felső felének átütését F átütése fogja követni. A tapasztalat azt mutatja, hogy például a C kondenzátor 20 000 voltos töltőfeszültsége mellett még 8—10 mm elemző szikraköz-távolság (F) mellett is fennáll az említett nagy pontosság. Ebből viszont arra lehet következtetni, hogy az F szikraköz kis időszórással való átütéséhez a C kondenzátor sarkain uralkodó statikus feszültségértékhez még valamilyen járulékos feszültség adódik, amely biztosítja a kis időszórással történő átütést. Ez a járulékos feszültség nem lehet más, mint az S kettős szikraköz felső felének átütése után keletkező lökéshullám.

S felső felének és F -nek átütését S alsó felének átütése követi. Miután a két szikraköz átütése gyakorlatilag azok rövidzárlatát jelenti, a két szikraköz átütése után S alsó felén megjelenik C teljes töltőfeszültsége. Ez a feszültség csaknem kétszerese annak a feszültségnek, amely mellett S alsó fele még nem ütött át, így S alsó fele is át fog ütni. Az S -en levő feszültségnek kétszeres értékre történő növekedése azonban még nem ok arra, hogy ez a szikraköz az ismert kis időkéssel üssön át. Ennek a szikraköznek nagyságrendben 10^{-7} mp időkéssel alatt történő átütéséhez szintén fel kell tételezni, hogy ezt F átütése alkalmával keletkező lökéshullám okozza.

Az elmondottak értelmében az 1. ábra szerinti kapcsolás nagy időbeli működési pontosságát két körülmény eredményezi. Az egyik az, hogy az S kettős szikraköz felső fele villamosan elő van feszítve és a ráadott feszültség-lökés igen kis időkéssel átütést eredményez. A másik pedig az, hogy S felső felének átütésekor keletkező lökéshullám elősegíti F kis időkéssel történő átütését, majd pedig F átütésekor keletkező lökéshullám kedvezően hat S alsó felének átütésére.

A tapasztalat azonban azt mutatja, hogy S villamos előfeszítése, majd S felső felének, illetőleg F átütésekor keletkező lökéshullámok csak szükséges, de nem elegendő feltételei annak, hogy az időben felbontott spektroszkópiához szükséges nagy időbeli pontosság meg legyen. A nagy időbeli pontosság eléréséhez szükséges még az is, hogy a szikraközök a korábban említett villamos előfeszítéstől függetlenül már elő legyenek ionozva.

Az előionozás döntő fontosságát az 1. ábra szerint kapcsolt gerjesztő-berendezés nagy pontossággal történő működéséhez igen egyszerű kísérlettel lehet kimutatni. Ha ugyanis változtatjuk a szikrázás gyakoriságát, azt fogjuk tapasztalni, hogy minél nagyobb a szikrázás gyakorisága, annál kisebb az időszórás. Példaképpen megemlítjük, hogy 0,02 mikrofaraad kapacitás (C) és 20 000 volt töltési feszültség mellett másodpercenként 50 az a legkisebb szikragyakoriság, amely mellett nagyságrendben a 10^{-7} másodpercnyi időszórás tartható. Itt meg kell még említeni, hogy minél nagyobb a szikrázás gyakorisága, annál nagyobb a rendszer működési stabilitása is. Ez alatt az értendő,

hogy a nagyobb szikrázási gyakoriság mellett kevésbé lesz érzékeny a rendszer működés szempontjából az S szikraköz nagyságára és egyéb körülményekre.

A nagy szikrázási gyakoriság nemcsak az előionozás szempontjából előnyös, hanem azért is, mert nagyobb szikrázási gyakoriság mellett növekszik a fényforrás fényhozama, ezenfelül pedig egyenletesebb az elemző elektródok felületének a szikrával történő megdolgozása. Utóbbi körülmény például spektrokémiai elemzésnél növeli az elemzés megbízhatóságát.

Jóllehet mind a működési pontosság, mind pedig az elemző minták jobb megdolgozása szempontjából előnyös a nagyobb szikrázási gyakoriság, a szikrázási gyakoriságnak bizonyos határ fölé való növelése az 1. ábra szerint kapcsolt gerjesztőberendezésnél nem lehetséges. Ennek oka a következő.

Az 1. ábra szerinti szikragerjesztő bizonyos szempontból ugyanazokkal a tulajdonságokkal rendelkezik, mint minden rögzített vezérlőszikraközrel bíró szikragerjesztő. A C kondenzátor kisülése alkalmával az F és S szikraközök gyakorlatilag rövidzárlatban vannak. Ha tehát a C kondenzátor kisülése alkalmával a tápláló feszültség rajta van a C kondenzátor sarkain, a hálózat a szikraközökön keresztül záródni fog és C kondenzátor nem fog feltelni. Ezért ahhoz, hogy az 1. ábra szerinti rendszer működőképes legyen, a C kondenzátor töltési és kisütési folyamatát villamosan teljesen külön kell választani és a kisülés után annyi szünetet kell biztosítani, hogy a szikraközök annyira deionozódnak, hogy rajtuk keresztül ne jöhessen létre áramfolyás. Ennek a szünetnek viszont csak olyan hosszúnak szabad lennie, hogy a pontos működés előfeltételeként szükséges ionozás még fennálljon. Utóbbi ionozási fok azonban elenyésző ahhoz az ionozási fokhoz képest, amely közvetlenül kisülés után van.

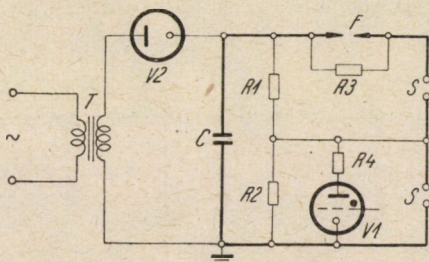
Az elmondottak alapján meg lehet állapítani, hogy az itt tárgyalt nagypontosságú szikragerjesztő kielégítő működéséhez egymással teljesen ellentétes követelményeket kell kielégíteni. A kérdést csak megegyezéses alapon lehet megoldani.

Megemlítésre kívánkozik még az a körülmény is, hogy az S szikraközök deionozására nem lehet levegőfúvatást alkalmazni. A levegőfúvatás ugyanis nagyon előnyös közvetlenül a kisülés utáni erős ionozási fok csökkentése szempontjából, de hátrányos viszont azért, mert eltávolítja a szikraközökből az átütés kis időkézéséhez szükséges maradék ionozást is. Levegővel fúvatott szikraközök a gerjesztő teljesen pontatlan működését eredményezik.

Az 1. ábra C kondenzátora töltési és kisütési folyamatának villamos szétválasztása könnyen sikerül akkor, ha megelégszünk a hálózat rezgésszámának megfelelő szikragyakorisággal. Ekkor a 2. ábra szerinti kapcsolást lehet használni. Itt a C kondenzátor a hálózati feszültség egyik félperiódusa alatt feltelik, a másik félperiódusa alatt pedig kisül. Utóbbi félperiódus alatt a V_2 egyenirányító diódától jobbra eső kapcsolási rész le van választva a hálózatról. Ez a megoldás azonban azonkívül, hogy másodpercenként csak aránylag kis szikrázási gyakoriságot tesz lehetővé, még azzal a hátránnyal is jár, hogy

a gerjesztőrendszer működési bizonytalansága az aránylag kis szikrázási gyakoriság miatt nagyobb.

Ha másodpercenként a hálózat rezgésszámánál nagyobb számú szikra elérése a cél és ugyanakkor a kondenzátor töltési és kisütési folyamatát egymástól el akarjuk különíteni a szokásos kapcsolási lehetőségek mellett, komoly nehézségekkel kell számolni. Így elvileg nincs akadálya annak, hogy az 1. és 2. ábrák C kondenzátorait vezérelt csövön vagy csöveken keresztül töltsük fel.



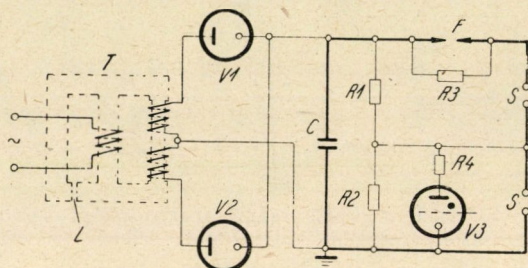
2. ábra. Elektronikus vezérlésű nagypontosságú spektroszkópi szikragerjesztő villamos kapcsolási vázlata. A másodpercenként szolgáltatott szikrák száma azonos a hálózat rezgésszámával

Ebben az esetben egyfázisú kétutas vagy többfázisú egyenirányítást alkalmazva a C kondenzátort másodpercenként a hálózat rezgésszáma kétszeres gyakoriságával vagy ennél nagyobb gyakorisággal is feltölthetjük a töltési és kisülési folyamatok szétválasztása mellett. Elvileg a célnak megfelel a thyatron cső. Ezeknek a csöveknek az az előnye, hogy a spektroszkópi gerjesztőberendezésekben előforduló töltőenergiákat könnyűszerrel tudják vezérelni. Vezérlésük egyszerű, kis előfeszültséget kívánnak és a vezérlőjel feszültsége is aránylag kicsi. A thyatron csöveknek a szóban forgó helyen való alkalmazása viszont azzal a kellemetlenséggel jár, hogy a C kondenzátor kisütése alkalmával keletkező feszültséglökések hatására a kisütés alkalmával újból begyúlnak. A begyúlás következtében a szikraközöket éppen akkor kapcsolják a hálózatra, amikor az a legkevésbé volna szabad. A másik elvi lehetőség töltőcsőként vákuumcső alkalmazásában van. Vákuumcső alkalmazásakor azonban nagyméretű és költséges csövet kell használni, ezenfelül komoly tétel az előfeszültség előállítása. Vákuumcsövek aránylag nagy vezérlőfeszültséget kívánnak. Vákuumcső esetén a csövet vezérlő jelnek négyszög alakúnak kell lennie, amelynek időtartama változtatható. Mindkét fajta töltőcső alkalmazásakor fennáll két vagy több cső vezérlésének a bonyolultsága, ami az egész rendszer működését meglehetősen bonyolítja és bizonytalanná teszi. A tapasztalat azt mutatja, hogy a töltőcsövet el kell hagyni és a C kondenzátor feltöltési és kisütési folyamatának szétválasztását más módon kell megoldani.

Az 1. és 2. ábrák C kondenzátora töltési és kisütési folyamatainak szétválasztása a hálózati rezgésszámnál nagyobb másodpercenkénti szikrázási gyakoriságok mellett is sikerül különleges transzformátorok alkalmazásával.

Ezek a transzformátorok a hálózati feszültség szinuszhullámához képest rövid ideig tartó feszültséglökéseket szolgáltatnak. Az 1. és 2. ábrák kondenzátorait ezekkel a feszültséglökésekkel töltjük fel. A lényeg abban van, hogy az aránylag rövid ideig tartó feszültséglökések között gyakorlatilag feszültségmentes szünetek vannak, amely idő alatt a szikraközök deionozódhatnak.

Az előbbieken elmondottak értelmében másodpercenként a hálózati rezgésszám kétszeresének megfelelő gyakorisággal a 3. ábra szerint kapcsolt berendezéssel tudunk szikrakisüléseket előállítani úgy, hogy a töltési és kisütési



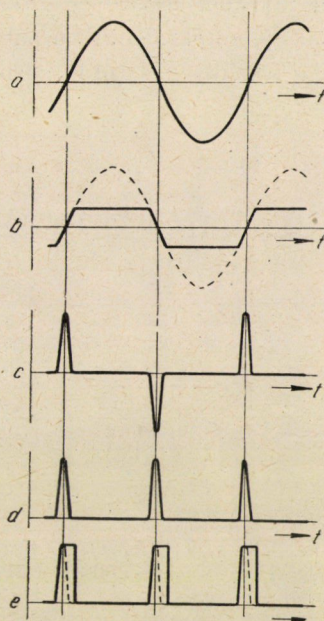
3. ábra. Elektronikus vezérlésű nagypontosságú spektroszkópi szikragerjesztő villamos kapcsolási vázlata. A másodpercenként szolgáltatott szikrák száma a hálózat rezgésszámának a kétszerese

folyamatok egymástól gyakorlatilag teljesen el legyenek választva. A 3. ábrában a kapcsolásnak a C kondenzátortól jobbra eső része azonos az 1. és 2. ábrák azonos részével. Különbség a C kondenzátortól balra eső részben van. Itt T különleges kivitelű transzformátor, amelynek a szekunder tekercset hordó oszlopa úgy van méretezve, hogy az már kis térerősségnél telítődik.

A T transzformátornak a primer és szekunder tekercsüket hordó mágneses körén kívül még rendszerint légréssel bíró mellékmágneses köre is van. Hasonló transzformátor elvi szerkezete a 3. ábrában szintén látható.

A 3. ábra T transzformátora primer tekercsében folyó áram és annak magnetomotoros ereje hullámalakban követni fogja a primer feszültséget. A 4. ábra a görbéje a primer tekercs magnetomotoros erejét képviseli (t az idő). A 4. ábra b görbéje a fluxust jelképezi a szekunder tekercs vasmagjában, amely azonban lapos, mert a szekunder tekercs vasmagjának telítése a fluxust, bizonyos idő után megközelítően állandó értékre korlátozza. Ha ugyanis a magnetomotoros erő a szekunder tekercs vasmagjának telítése után tovább növekszik, az ennek következtében a primer tekercs vasmagjában növekvő fluxus az L légrésen keresztül (3. ábra) a T transzformátor szabad oszlopán keresztül záródik. A b görbének jelentős változása csak azokon a helyeken van, ahol a magnetomotoros erő átmegey a zérus értéken. Miután a szekunder feszültséget a fluxus változásai okozzák, a szekunder feszültség lökészerű

(4. ábra *c*), és a görbe csúcsai ott keletkeznek, ahol a magnetomotoros erő átmegy a zérus értéken. Az így keletkezett feszültséglökéseket a 3. ábra szerinti kapcsolásban egyenirányítjuk (4. ábra *d* görbe). Az így egyenirányított feszültséglökések szolgálnak a *C* kondenzátor feltöltésére. A *C* kondenzátor sarkain a feszültség változását a 4. ábra *e* képe mutatja be akkor, ha a feltöltött kondenzátor kisütése a feszültséggörbe lemenő zérus értéke közelében történik.



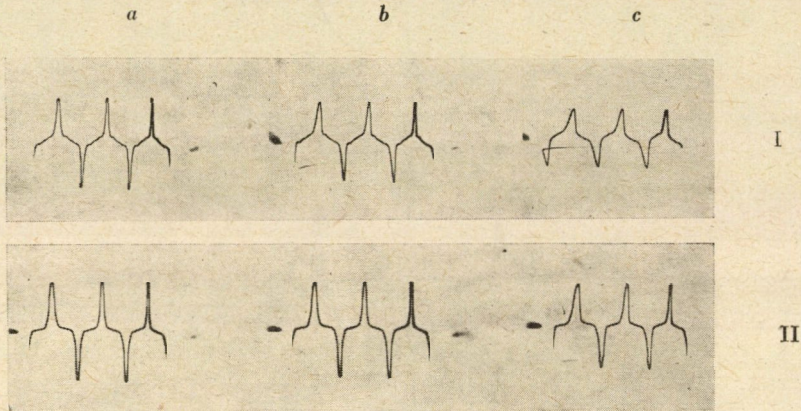
4. ábra. Feszültséglökések előállítása különlegesen méretezett transzformátor segítségével és a feszültség változása a 3. ábra *C* kondenzátorának sarkain

A 4. ábra a viszonyokat természetesen egyszerűsítve és eszményesítve mutatja be. A valóságban a viszonyok annyiban fognak az ábrázolttól eltérni, hogy két feszültséglökés között a 3. ábra *T* transzformátora szekunder tekercsének sarkain a feszültséglökések közötti időben a feszültség értéke nem lesz teljesen zérus értékű. A transzformátor szerkezetétől és az alkalmazott vas-mag minőségétől függően ezt a feszültségértéket a legnagyobb feszültségérték 2%-a alá lehet szorítani. Valóságos, katódsugar oszcilloszkóppal felvett görbéket az 5. ábrán mutatunk be.

Az 5. ábra két, I. és II. görbecsoportot mutat be, ahol mindegyik görbecsoportban három-három kép van. Az egy-egy görbecsoporthoz tartozó minden egyes görbét (*a*, *b*, *c*) a transzformátor különböző terhelési állapotában határoztuk meg. Az *a* görbék felvételekor a transzformátor üresjáratban volt, a második esetben (*b* görbe) terhelése 150 watt, harmadik esetben (*c* görbe) 650 watt. Az 5. ábra felső görbecsoportja a korábban leírt kivitelű feszültség-

lökéseket szolgáltató transzformátor segítségével készült. Ennél a görbecsoportnál a maradék feszültség aránylag jelentős, ezzel szemben üresjáratban és aránylag kis terhelésnél a feszültségugrások alakja jó. Kedvezőtlenül torzul el a feszültséggörbe nagyobb terheléskor. Ezenfelül a terhelés növekedésével nő a feszültségesés is.

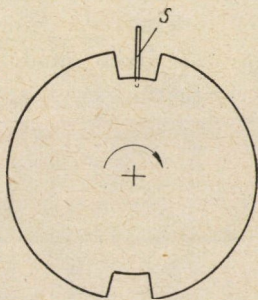
Az 5. ábra II. görbecsoportjánál a feszültségugrás kedvező alakulása mellett aránylag igen kicsi a maradék feszültség, továbbá a terhelés növekedésével a feszültséggörbe csak jelentéktelenül torzul el. Ezenfelül a terhelés növekedésével alig változik a feszültség. Utóbbi görbecsoport olyan transzfor-



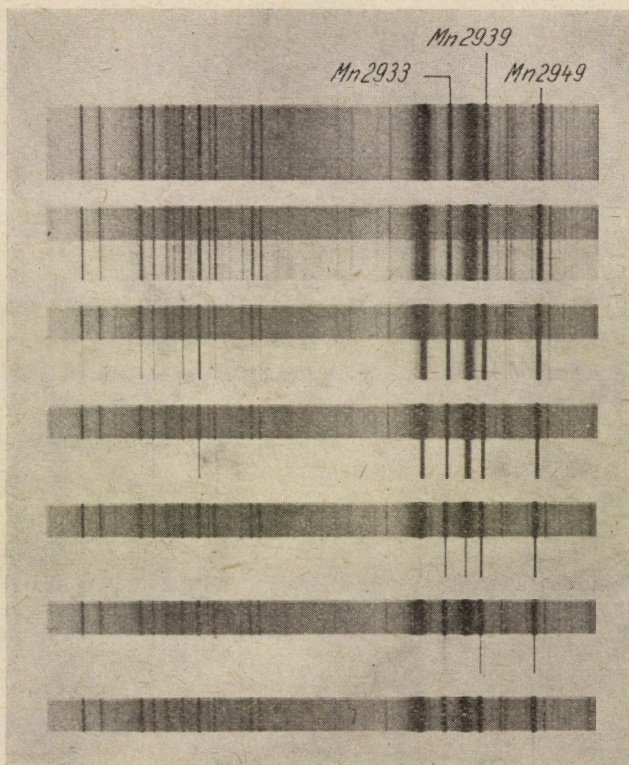
5. ábra. Telített vasmaggal és mellékmágneses körrel bíró transzformátorral szolgáltatott feszültséggörbék. Az I görbecsoport segédtekercs nélkül, a II görbecsoport segédtekercsrel. Az a görbék üresjárat, a b görbék 150 watt terhelés, a c görbék 650 watt terhelés mellett határozottak meg

mátorral készült, amelynek mellékmágneses körében segédtekercs van, amely tekercset a mérések ideje alatt rövidrezártuk. A feszültséggörbe alakjában mutató kedvező alakulást azonban nagyobb áramfelvétel árán kell megvásárolni. Amíg ugyanis az első esetben a legnagyobb terhelés melletti áramfelvétel 220 volt tápláló feszültség mellett mindössze 17,5 amper volt, addig utóbbi esetben egyébként azonos viszonyok mellett az áramfelvétel 38 amper. A nagy áramfelvételt mindkét esetben fázisjavító kondenzátorok segítségével lényegesen csökkenteni lehet.

Az itt ismertetett szikragerjesztőt időben felbontott színeképek előállítására vagy forgó tükör, vagy forgó tárcsa (10) segítségével lehet felhasználni. Jelen esetben az időfelbontásos spektroszkópiához való alkalmazhatóságot forgó tárcsa segítségével mutatjuk be. A tárcsa kivitele a 6. ábrán látható és közvetlenül a spektrográf rése elé van helyezve. A tárcsa forgási fázishelyzete úgy van beállítva, hogy a szikrakisülés kezdeti részéből származó sugárzást levágja, így az nem tud a spektrográfba jutni. Azt, hogy a tárcsa mennyit árnyékoljon a kisülésből származó fényből, elektronikusan lehet szabályozni.



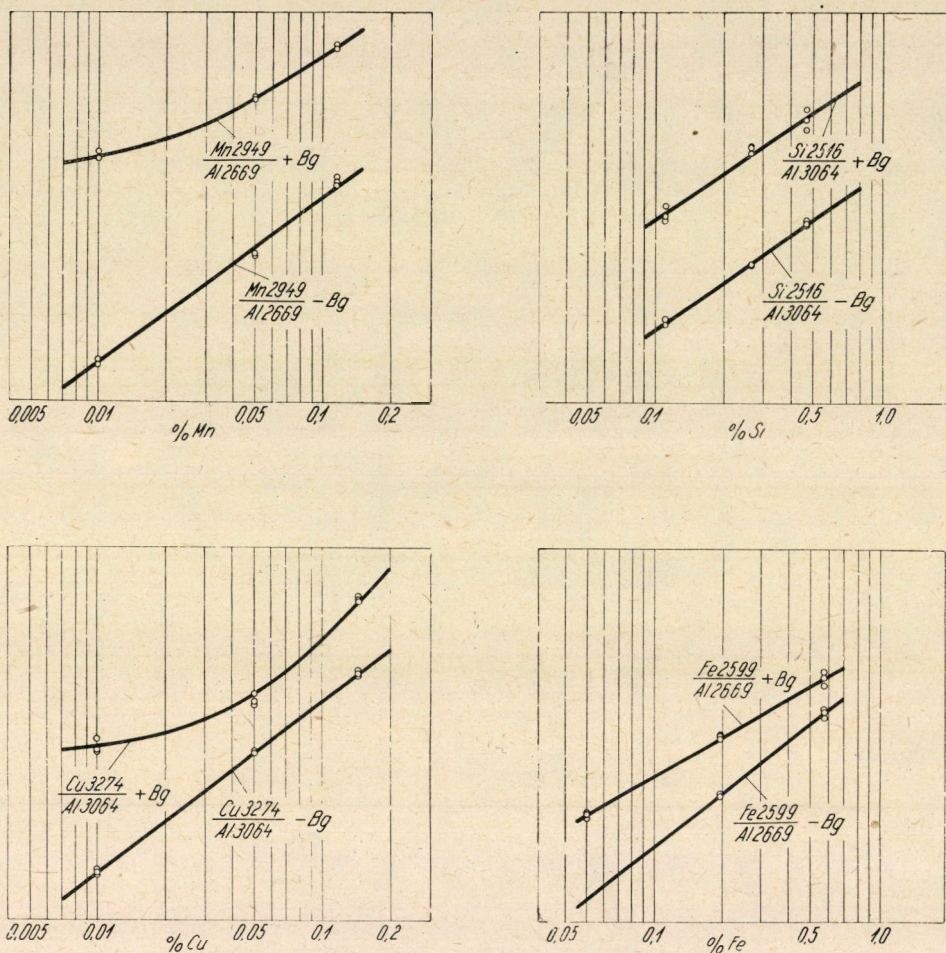
6. ábra. A spektrográf S rése előtt forgó tárcsa a szikrakisülés kezdeti időtartományából származó fény árnyékolására



7. ábra. A spektrográf rése előtt forgó tárcsa segítségével időben felbontott színekpek. A legfelső színeképben és a kettős színekép felső részénél a szikrakisülés teljes fénye a spektrográfba jut. A következő alsó színeképeknél színeképről-színeképre haladva mindig 4 mikromásodperccel hosszabb időt árnyékolunk a színeképről

Ezt a kérdést más helyen részletesebben később fogjuk tárgyalni. A spektrográf részének egy részét szabadon hagytuk, itt a szikrakisülésből származó fény teljes egészében a spektrográfba jut. Ilyen módon tulajdonképpen két színeképet kapunk. Az egyik ezekből a teljes sugárzást tartalmazza a háttérrel

együtt, a másik színkép pedig csak a szikrakisülés későbbi időtartamából, rendszerint háttérmentes sugárzást. Ilyen módon egyidejűleg összehasonlításra alkalmas felvételeket készíthetünk. Az egyik, az árnyékolás nélküli



8. ábra. Görbék tisztátalanságok meghatározására alumíniumban időben felbontott színképek segítségével. +Bg a háttérrel tartalmazó színképből, -Bg a háttér nélküli színképből készített görbéknek jelenti

színképből a szokásos értékelést hajthatjuk végre, a másik, az időben felbontott színképből pedig olyan színképet kapunk, amely lényegében csak ívonalakat tartalmaz háttér nélkül. Ilyen módon felvett színképcsoportot a 7. ábrán mutatunk be. A 7. ábra tisztátalanságokat tartalmazó alumínium színképeinek egy részletét szemlélteti a Mn 2933, 2939 és 2949 vonalakkal. A legfelső színképfelvételnél a 6. ábra szerinti forgó tárcsa forgási fázishelyzete olyan volt, hogy a szikrakisülések egész tartama alatt kisugárzott fény be-

jutott a spektrográfba. Az azután következő színeképeknél színeképről színeképre haladva mindig körülbelül 4 mikromásodpercet vágunk le a szikrakisülés kezdeti időtartományából. A felvételeknél a forgó tárcsa csak a rés felét takarja. A kettős színeképekben a felső színeképek azonosak az első színeképpel. A 7. ábrából megállapítható, hogy minél hosszabb ideig árnyékoljuk a szikrakisülés kezdeti időtartományát, annál nagyobb mértékben tűnik el a háttér.

I. táblázat

A spektroszkópiai munkaviszonyok

A C kondenzátor (1, 2, 3 ábrák) kapacitása	0,01 mikrofarad
A C kondenzátor töltőfeszültsége	20 000 volt
A kisülési áramkör önindukciója : a vezetékek maradék önindukciója	
A kisülés gyakorisága	100/mp
A kisülési áramkör rezgésszáma : kb. 0,5 Megaherz	
Egy kisülés összidőtartama : mintegy 45 mikromásodperc	
Szikraköz : 3 mm	
Elektródok alakja : 3 mm \varnothing átmérő mellett hengeres	
Spektrográf : Hilger E 478, autokollimációs	
Spektrográf részének szélessége : 30 mikron	
Fényképező emulzió : Agfa blau rapid	
Megvilágítási idő : 60 mp	
Előszikrázási idő : 60 mp	
Az árnyékoló tárcsa fordulatszáma : 3000/perc	
A szikrakisülésből kiárnyékolva kb. 14 mikromásodperc	
Előhívó : gyorshívó D 19	
Előhívási idő : 3 perc	
Előhívási hőmérséklet : 18 C°	

Az I. táblázatban megadott munkaviszonyok mellett készített spektrokémiai elemző görbéket a 8. ábrán mutatjuk be Mn, Cu, Si és Fe-nak alumíniumban történő meghatározására. A 8. ábra minden képén két görbe van. Az egyik, az alsó, a háttértől mentes időben felbontott színeképben képzett vonalfényerősség viszonyok alapján van meghatározva. Ezeknek a színeképeknek a felvételénél a szikrakisülés kezdetéből körülbelül 14 mikromásodpernyi időtartományt vágunk le. A másik, a szokásos módon, időben fel nem bontott színeképből kapható görbéket adja meg. A 8. ábrán +Bg a háttérrel együttes színeképet, a —Bg a háttér nélküli színeképet jelképezi.

A 8. ábra egyértelműen azt mutatja, hogy az időben felbontott színeképek segítségével készített spektrokémiai elemző görbék mindig jobbak, mint a szokásos módon készítették.

Amíg például a 8. ábrában Mn és Cu meghatározásánál 0,01% alatt a szokásosan készített görbék már gyakorlatilag nem használhatók, addig időben felbontott színekép segítségével még kisebb mennyiségek meghatározása

is lehetővé válik. A görbék kisebb százalékos mennyiségek irányába történő kiterjesztése összehasonlító próbák hiányában pillanatnyilag nem volt lehetséges.

A végzett megismételhetőségi eredményeket a II. táblázatban foglaltuk össze. Ennek a táblázatnak eredményei azt mutatják, hogy az itt ismertetett gerjesztőberendezés és forgó tárcsa segítségével előállított időben felbontott szinképekkel kapott elemzési eredmények az elemzés érzékenységének növelése mellett kedvezően hasonlíthatók össze a legjobb más eredményekkel

II. táblázat

Megismételhetőségi eredmények alumínium tisztátalanságainak meghatározásánál időben felbontott szinképek segítségével. A megadott számértékek 10 mérés átlagos hibáját jelentik

Elem	Átlagos hiba, %	Felhasznált vonalak	A tisztátalanság % a próbában
Cu	2,58	Cu 3274/Al 3064	0,01
Mn	1,58	Mn 2949/Al 3064	0,115
Si	1,64	Si 2519/Al 3064	0,57
Mg	2,65	Mg 2791/Al 3064	0,11
Fe	1,76	Fe 2599/Al 3064	0,11
Átlag	2,04		

IRODALOM

1. BARDÓCZ Á. : Nature 171, (1953) 1156.
2. BARDÓCZ Á. : Acta Physica Hungarica 4 (1954), 91.
3. BARDÓCZ Á. : Spectrochim. Acta 7 (1955), 307.
4. BARDÓCZ Á. : Acta Technica Hungarica 8 (1954) 99.
5. BARDÓCZ Á. : Applied Spectroscopy 10 (1956), 183.
6. BARDÓCZ Á. : Z. ang. Physik 9 (1957), 82.
7. BARDÓCZ Á. és VARSÁNYI F. : Z. Naturforschung 10a (1955), 1031.
8. BARDÓCZ Á. és VARSÁNYI F. : Nature 177 (1956), 222.
9. BARDÓCZ Á. : Applied Spectroscopy 11 (1957), 167.
10. BARDÓCZ Á. és TABELING R. W. : Magyar Kémiai Folyóirat 65 (1959), 126.

ÖSSZEFOGLALÁS

Időben felbontott vonalas szinképek előállításához időben nagy pontossággal működő elektronikus vezérlésű gerjesztőberendezésre van szükség. Az alkalmazott kettős vezérlő szinközös szinkagerjesztő nagy működési pontossága egyrészt a szinközök villamosan előfeszített voltának, másrészt a szinközök átütése alkalmával keletkező lökeshullámoknak a következménye. A nagy időbeli működési pontosság további előfeltétele még az elegendő nagy szinkrázási gyakoriság. A hálózat rezgésszámánál nagyobb szinkragyakoriság a töltési és kisütési folyamatok teljes szétválasztása mellett telített vasmagú transzformátor alkalmazásával valósítható meg. Példaképpen az időfelbontásos spektrokémiai elemzésre a szinképek háttérének leválasztása a spektrográf rése elé helyezett forgó tárcsa segítségével történt. A háttér leválasztása folytán a kapott munkagörbe kis százalékos tartalmak mellett is egyenes és a szinkrával való spektrokémiai elemzés érzékenysége megnövelhető.

GÖMBGRAFITOS VASÖNTVÉNY MINŐSÉGÉNEK ELLENŐRZÉSE ULTRAHANGGAL*

RÉTI PÁL

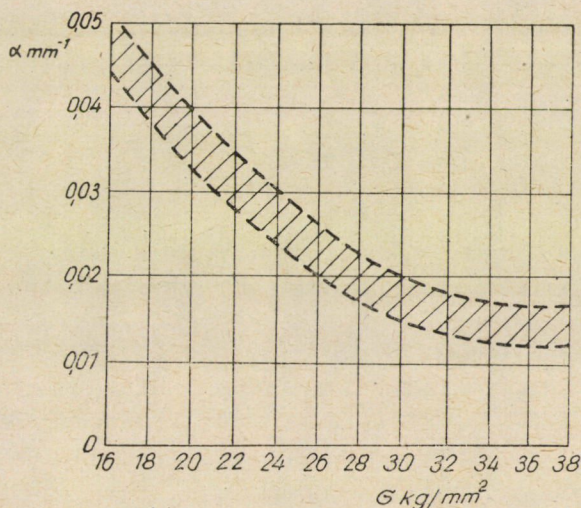
A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
VAS- ÉS FÉMMŰVEK ANYAGVIZSG. O., CSEPEL

[Béérkezett 1958. október 27-én]

Bevezetés

A belső anyaghiba kimutatására szolgáló ultrahang vizsgálati berendezések használata szerkezeti anyagok szövetszerkezetének vizsgálatára mind szélesebb körben terjed.

Ezeknek a világszerte használatos módszereknek egyikét alkalmazta pl. G. BIERWIRTH, amikor perlites szürkeöntvény egyik csoportját, mégpedig gépkocsi fékdobokat ily módon vizsgált. BIERWIRTH vizsgálatai alapján közöljük az 1. ábrát, amely a csillapítási szám és a szakítószilárdság közötti össze-



1. ábra

függést ábrázolja. Ehhez azonban meg kell jegyeznünk, hogy e két egymástól teljesen különböző fizikai fogalom között összefüggés voltaképpen nincs. Helyesen azt kell mondanunk, hogy az öntvény szakítószilárdságát tudvalevőleg

* A magdeburgi Hochschule für Schwermaschinenbau-on rendezett nemzetközi anyag vizsgáló kollokviumon 1958. okt. 20—22-én elhangzott előadás.

a grafit alakja és mérete nagymértékben befolyásolja, másrészt ez az ultrahang-impulzusok csillapodását is befolyásolja. Amikor tehát csak a grafit alakja befolyásolja a szakítószilárdságot, ilyen összefüggés megengedhető, de ötvözött öntvényben az már nem használható. Gömbgrafitos öntvényben pedig — mint látni fogjuk — ilyen összefüggés egyáltalán nincs. Eszerint a 16—38 kg/mm² szakítószilárdságú perlites öntvény ultrahang csillapító képessége $a = 0,045—0,015 \text{ mm}^{-1}$ nagyságrendű. A továbbiakban a 11. ábra alapján ki fogjuk mutatni, hogy BIERWIRTH diagramja fenntartás nélkül nem is fogadható el.

Nálunk a perlites szövetű öntvélynél nagyobb szilárdságú gömbgrafitos öntésű Diesel-rendszerű autómotor forgattyús tengelyek gyártása indult meg. Ezek vizsgálatára vált szükségessé olyan roncsolásmentes eljárás, mely alkalmas a tengelygyártás folyamatos ellenőrzésére, elsősorban a szövetszerkezet szempontjából. E célra módszert dolgoztunk ki, a gömbgrafitos öntöttvas tengely szövetszerkezetének gyors és egyértelmű meghatározására az ultrahang csillapító képesség alapján.

Az eljárás fizikai alapja

Ha ultrahangot szilárd testen bocsátunk át, azt különböző mértékű csillapításnak tesszük ki. Az intenzitás csökkenésének mértékét a következő egyenlet adja meg:

$$I_1 = I_0 \cdot e^{-2ad}, \text{ és } \frac{I_1}{I_0} = e^{-2ad}, \quad (1)$$

ahol I_0 a tárgyba jutott ultrahang sugárzás intenzitása,

I_1 a visszavert ultrahang sugárzás intenzitása áthaladás után.

d a tárgy vastagsága.

a a csillapítási együttható.

Az eljárás alapelve szerint a kristályos szerkezetű szilárd testek ultrahang csillapító képessége és szilárdsága függ a szövetszerkezettől. Kézenfekvő tehát, hogy összefüggést keressünk a gömbgrafitos szövetszerkezet és ultrahang csillapító képessége között is.

Vizsgálataink céljára a KRAUTKRÄMER-féle USIP 6 típusú készülék állott rendelkezésünkre, a kidolgozásra kerülő eljárást a többszörös ultrahang impulzusok magasságmérési módszere szerint végeztük a következő elvek szerint.

Ha síkpárhuzamos falú fémtárgyba ultrahang impulzust juttatunk, akkor az e határfelületek között többszörösen verődik vissza. Minden egyes oda- és visszaverődés után az impulzus intenzitását a katódsugárcső ernyőjén megjelenő visszhang magasság mérése alapján meg lehet határozni.

Az impulzus magasságok mérése révén és az anyag csillapító képességére nézve az (1) egyenletből származó következő összefüggés írható :

$$\frac{I_n}{I_{n+1}} = e^{-2ad} = \frac{h_n}{h_{n+1}} \quad (2)$$

és

$$a = \frac{1}{2d} (\ln h_n - \ln h_{n+1}), \quad (3)$$

vagyis azt az elhanyagolást tettük, hogy az intenzitások négyzetgyöke helyett az intenzitásokkal számoltunk.

A vevőkristályhoz érkező I intenzitású ultrahang nyaláb kifejtett nyomása P , s így írható, hogy

$$I = P^2 \cdot \frac{1}{2 \rho c}, \quad (4)$$

ahol ρ az anyag sűrűsége és c a hang sebessége az anyagban. Az összefüggés longitudinális és transzverzális hullámokra egyaránt érvényes.

A piesokvare vevővel közvetített elektromos feszültség arányos a (4) egyenlet értelmében a hangnyomással, tehát az intenzitás négyzetgyökével. Lineáris erősítést tételezve fel, a katódsugárcső ernyőjén jelentkező visszhang magasságok arányosak a hangnyomásokkal.

$$\frac{h_n}{h_{n+1}} = \frac{P_n}{P_{n+1}} = \sqrt{\frac{I_n}{I_{n+1}}}. \quad (5)$$

A visszhang impulzusok magassága tehát az intenzitások négyzetgyökeivel arányosak.

Ez az összefüggés nem veszi figyelembe azt a körülményt, hogy az ultrahang nyalábok a határfelületek között reflektálódva is gyengülnek. Ennek alapján a következő lenne írható :

$$a = \frac{1}{2d} \left(\ln \frac{h_n}{h_{n+1}} + \ln R \right), \quad (6)$$

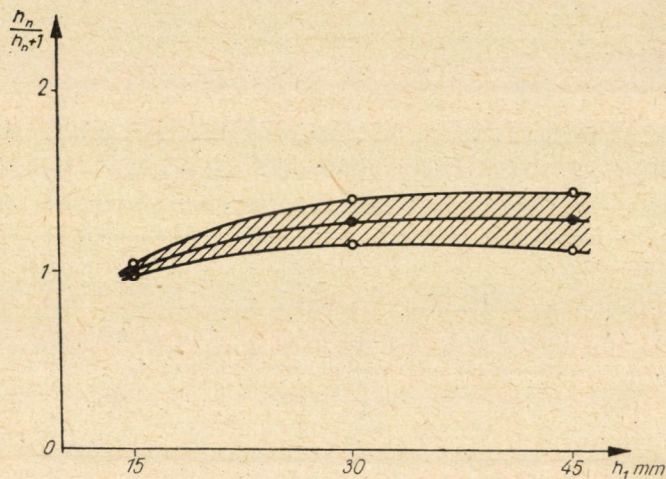
ahol R a reflexiós tényezőt jelenti. R értéke a vizsgálófej szerkezetétől, a csatoló réteg vastagságától és a felület érdességétől függ. Tekintve, hogy eljárásunk közben mindig azonos vizsgálati körülményekről gondoskodtunk, beleértve a vizsgálandó tárgy alakját és vastagságát, továbbá, hogy kísérleteinkben mindig a második és a harmadik, tehát a reflexió révén kevésbé csillapí-

tott impulzusok magasságának mérésével dolgoztunk, az összehasonlító jellegű mérések céljára részünkről alkalmazott képlet elfogadható. Az a -ra adódó számok pedig a minősítés alapját képező összehasonlító értékek és nem tényleges csillapítási tényezők.

A mérési eljárás

A csillapítási szám mérése a (3) képlet alapján a tárgy vastagságának, továbbá az n -edik és $n + 1$ -ik impulzusok magasságának mérésére vezethető vissza.

Az impulzus magasságok mérési eljárásának kidolgozása céljából mindenekelőtt a készülék erősítési diagramját kellett meghatározni. A kereskede-



2. ábra

emben kapható ultrahang vizsgáló készülékek katódsugárcsővei ugyanis — ellentétben pl. a televíziós berendezésekével — nem a teljes ernyőkép magasságában erősítenek lineárisan. Így tehát előfordulhat, hogy bizonyos visszhang amplitudót meghatározott magasság fölé erősítve, ez nem lesz arányos az utána következővel. Ezért a készülék erősítésének arányossági jelleggörbéjét meg kellett szerkeszteni. Ennek alapján lehetett kijelölni az amplitudónak azt a magasságát, ameddig arányos erősítés történhetik. A diagram szerkesztése a következőképpen történt. Meghatározott frekvenciájú, pl. 3 MHz vizsgálófejet pl. 20 mm vastag acéllemezre szorítva — mindig azonos nyomással — az erősítést úgy szabályoztuk, hogy az első visszhang impulzus magassága először 15 mm, majd sorban 30, 45 mm legyen. Eközben minden egyes beállítás alkalmával mértük a 2, 3 és 4 visszhangimpulzusok magasságát.

A diagram vízszintes tengelyére az első visszhang amplitudó magasságait, a függőleges tengelyen pedig a $h_1 : h_2$; $h_2 : h_3$ és $h_3 : h_4$ viszonyszámokat tüntettük fel. Az így kapott diagramot a 2. ábra szemlélteti, mely szerint az USIP 6 jelű készülékkel kb. $h_1 = 45$ mm magasságig arányos erősítést kapunk.

A továbbiakban a mérési eljárást úgy rendeztük be, hogy az erősítés megfelelő állítása révén az első impulzus magassága minden esetben $h_1 = 45$ mm legyen, tekintve a készülék ernyőjére szerelt mérőskála beosztását, illetve azt a körülményt, hogy nagyobb mértékű csillapítás esetén is lehessen még második impulzus magasságot meghatározni. A második impulzus magasságát a katódsugárcső ernyőjére részünkről felszerelt mérőléccel közvetlenül mm-ben lehet leolvasni úgy, hogy a mérendő impulzus amplitudó a készülék „0” pont beállítója segítségével az közvetlenül a mérőléc mellé állítható.

A gömbgrafitos öntvény csillapító képessége

A gömbgrafitos öntöttvas ultrahang csillapító képességének nagyságrendi meghatározására a következő alapkísérletet végeztük. A 3. ábrán látható 150 mm Φ -jú és $d = 19,5$ mm vastag tárcsát a 4. ábrán látható forgattyús tengely megjelölt helyéről vettük ki.

Az ultrahang vizsgálatokat 3 MHz frekvenciával a 3. ábrán látható 6 helyzetben végeztük el. Minden pozícióban 3 mérést végeztünk. A $h = 45 =$ állandó érték mellett az egyes mérőhelyeken kapott h_2 amplitudók átlagértékeit, valamint az ezekből alkotott középértéket a 3. ábrában feltüntettük. A tárcsa anyagának szövetszerkezetét az 1., 4. és 6-os mérőhelyen át készített, maratott és maratlan mikroszkópi csiszolatokkal ellenőriztük. A csiszolatok helyének kiválasztása annak alapján történt, hogy azok a legmagasabb, a közép és legkisebb amplitudójú helyekről származzanak. A mikroszkópi vizsgálat szerint azonban ezek között gyakorlati különbség nincs. Mindhárom szövetszerkezet: lemezes perlites alapon különböző nagyságú gömbgrafit, kevés ferrit és steadittel, amint azt az 5. ábra mutatja. A 6. ábrán a gömbgrafit eloszlását látjuk mindhárom helyen $150 \times$ -es nagyításban.

A szilárdsági tulajdonságokat a 2. és 5. pozíció helyén kivágott szakítópróbákkal vizsgáltuk. Az eredmények az alábbiak:

$$\begin{aligned} 2. \text{ sz. próba: } \sigma_F &= 51,8 \text{ kg/mm}^2 & \delta_5 &= 3,7\% \\ \sigma_B &= 69,7 \text{ kg/mm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ sz. próba: } \sigma_F &= 45,7 \text{ kg/mm}^2 & \delta_5 &= 4,0\% \\ \sigma_B &= 64,5 \text{ kg/mm}^2. \end{aligned}$$

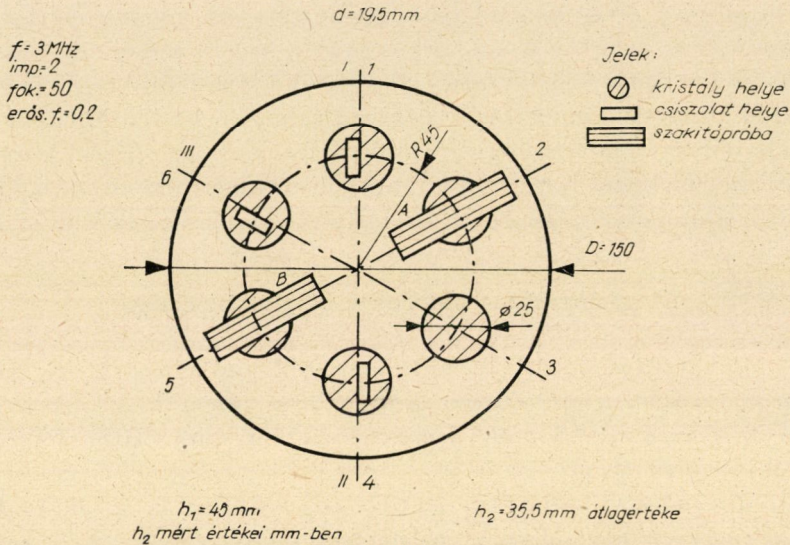
A csillapító képesség mérése tehát valóban nagyszilárdságú tiszta gömbgrafitos öntöttvason történt. A kapott csillapítási számok értékei az 1. és a 6-os mérő-

helyeken mért h_2 értékek, valamint a 6 mérőhelyen kapott átlag alapján a következők:

$$\alpha_1 = 0,00503 \text{ mm}^{-1}$$

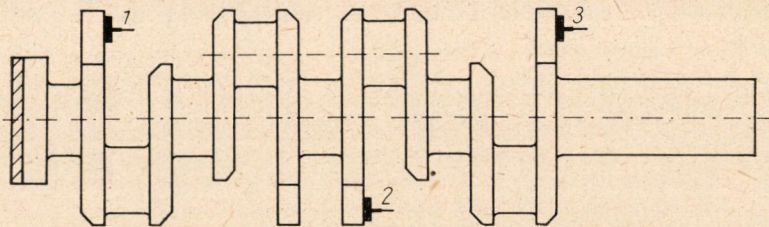
$$\alpha_6 = 0,00725 \text{ mm}^{-1}$$

$$\alpha_k = 0,00608 \text{ mm}^{-1}$$



mérés	1	2	3	4	5	6
a	38	37,5	37	35	35,5	34
b	36	36	35	35	35	33,5
c	37	36	35	35	35	34
átlag	37	36,5	35,6	35	35,16	33,8

3. ábra



4. ábra

Utóbbi értékeket összehasonlítva G. BIERWIRTHTÓL származó és az 1. ábrán bemutatott diagrambeli értékekkel láthatjuk, hogy míg a perlites öntöttvas $\sigma_B = 16-38 \text{ kg/mm}^2$ szakítószilárdsági értékek között $\alpha = 0,045-0,015 \text{ mm}^{-1}$

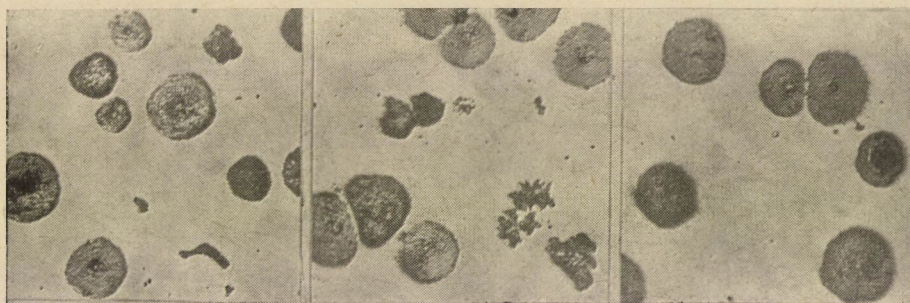
ultrahang csillapítási számmal bír, addig a gömbgrafitos öntöttvas csillapítási száma egy nagyságrenddel kisebb, mint a perlites öntésé.

Ebből a tételből kiindulva kiszámíthatjuk azt a h_2 minimális értéket, amelyhez tartozó öntés már gömbgrafitos kell hogy legyen és amely érték alatt az öntés perlites.

$$\alpha = \frac{1}{2d} (\ln h_1 - \ln h_2) \quad (8)$$



5. ábra



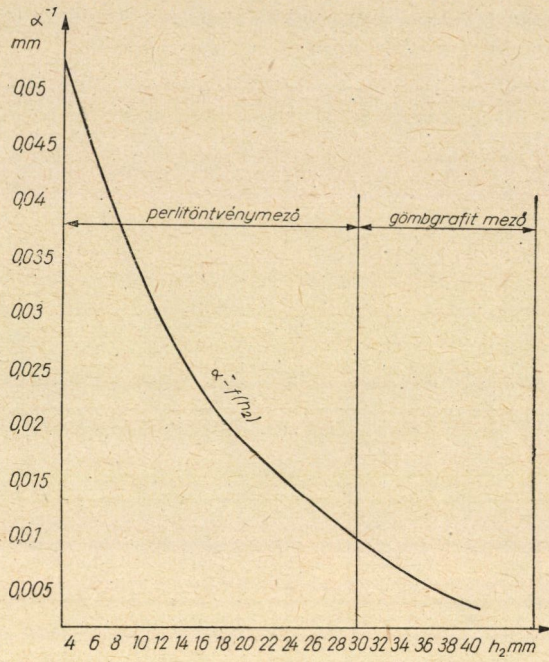
6. ábra

lévén, ha $h_1 = 45$ mm és $d = 20$ mm úgy írható :

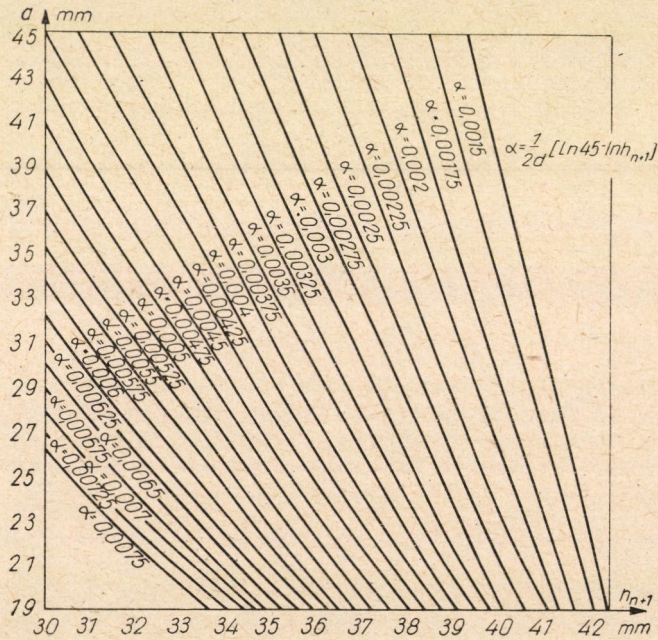
$$0,0099 = \frac{1}{40} (3,80666 - \ln h_2) \quad (9)$$

$$h_2 \cong 30 \text{ mm.}$$

Ha d és h_1 értékeket azonosnak vesszük a fenti példában felvett értékekkel, úgy a csillapítási szám és h_2 amplitudó összefüggését a 7. ábrán látjuk. A diagramban a perlit és gömbgrafit öntés mezőit a $h_2 = 30$ mm számított értéknek megfelelően jelöltük be.



7. ábra

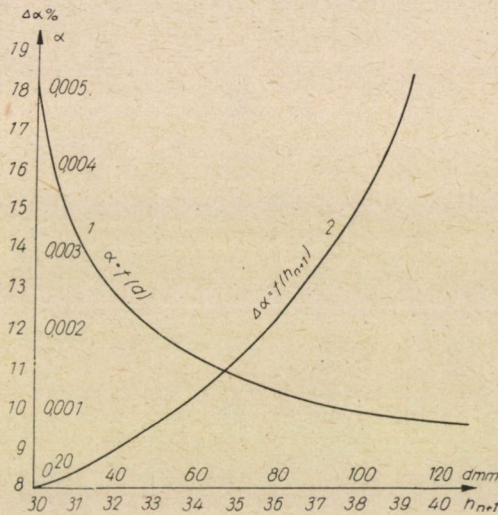


8. ábra

Az ultrahang csillapítási szám gyors meghatározása céljából a 8. ábrán látható diagramot szerkesztettük ugyancsak $d = 20$ mm és $h_1 = 45$ mm kiindulási értékekkel.

A mérési eljárás pontosságának befolyása a csillapítási szám értékére

Annak eldöntésére, hogy a tárgy d vastagságméretének változása hogyan befolyásolja a értékeit, az $a = f(d)$ görbét szerkesztettük meg. d értékét 20—120 mm között változtattuk, míg a $(\ln h_n - \ln h_{n+1})$ kifejezés értékét $h_n = 45$ mm és $h_{n+1} = 37$ mm értékek között választottuk. Így a 9. ábra 1. jelű diagramját kaptuk. Ha pl. $d = 20$ mm helyett $d = 21$ mm-t mérünk, az így elkövetett hiba $d\alpha = 0,00023 \text{ min}^{-1}$, azaz 4,7%. A csillapítási szám



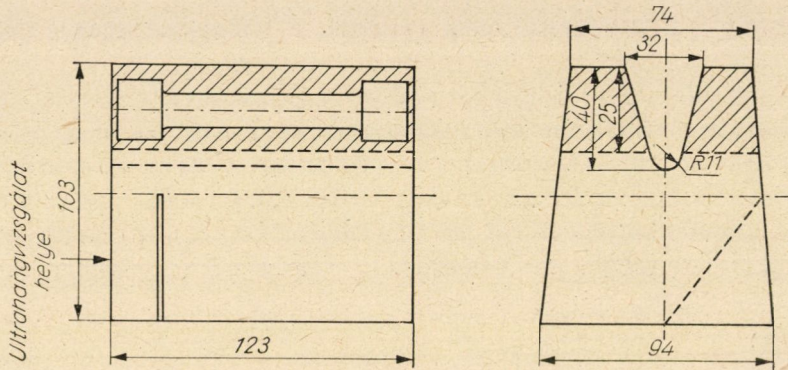
9. ábra

változása az amplitudó függvényében, ha $h_n = 45$ mm és $d = 20$ mm a 9. ábra 2. jelű diagramját adja. Eszerint ha pl. $h = 31$ mm helyett $h_{n+1} = 32$ mm-t mérünk, a $d\alpha = 0,00079 \text{ mm}^{-1}$ -nek megfelelő eltérés 8,5%. Fenti diagramok segítségével a különféle d tárgyvastagságok és h_{n+1} amplitudó értékeknek megfelelő a érték eltéréseket egyszerűen meghatározhatjuk.

Gömbgrafitos vasöntvény vizsgálata

Sorozatban gyártott gömbgrafitos vasöntvény szakítószilárdságának, ultrahang csillapító képességének és szövetszerkezetének összefüggését a 10. ábrán feltüntetett próbatesteken vizsgáltuk. A próbatest vonalkázott része

a szakítópróbák elkészítésére szolgált. A csillapító képesség megállapítása a próbaanyagon 20 mm mélységben történt befűrészelés után e részen, a szövetszerkezet és a grafit eloszlásának vizsgálata a szakítópróbákon történt. A kapott eredményeket a 11. ábrán foglaltuk össze. Az ábrán a szilárdsági adatok



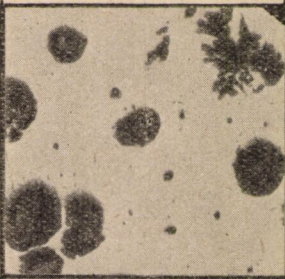



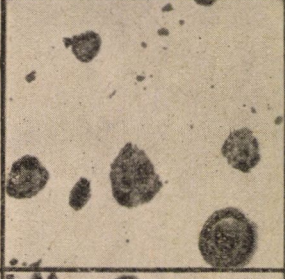
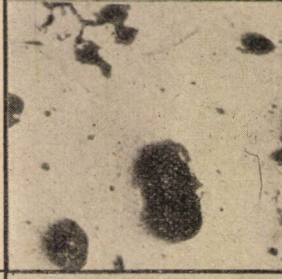
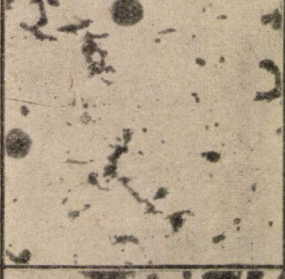

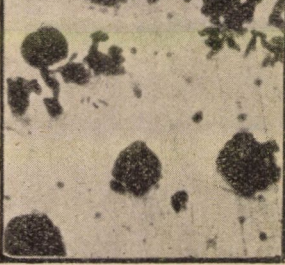

10. ábra

és a csillapítási szám mellé a grafiteloszlás képét is feltüntettük. Világosan látható, hogy a megfelelő nagy szilárdsági értékekhez mindenkor gömbgrafitos szövetszerkezet és ennek megfelelően 1 nagyságrenddel kisebb α érték tartozik, melynek alapján az ultrahanggal történő szövetszerkezet megállapítás megtörténhetik.

Gömbgrafitos automobiltengely vizsgálata

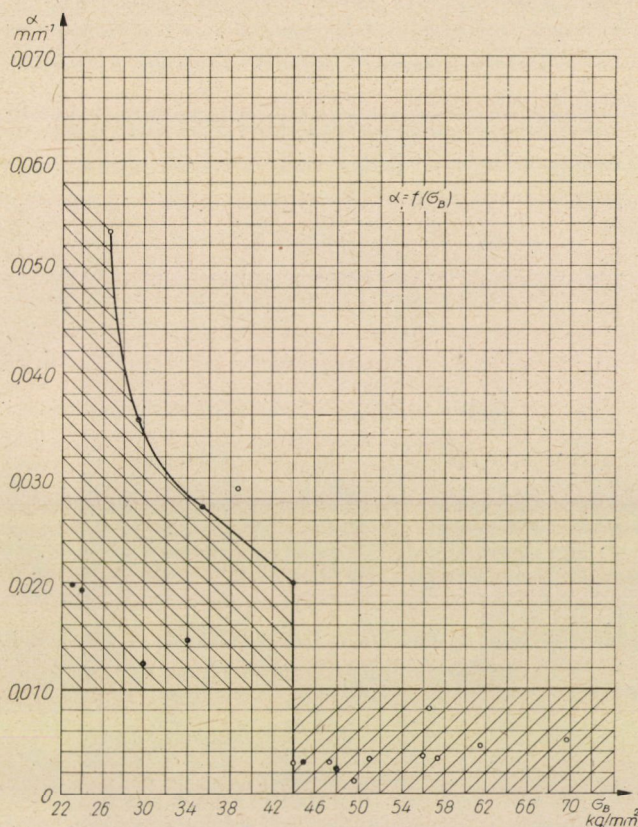
Vas- és acélöntődénkben sorozatban gyártott gömbgrafitos öntöttvas 4 hengeres Diesel-autómotor forgattyús tengelyek minőségének ellenőrzését a belső anyaghibáknak radioizotóppal történt ellenőrzése után a 4. ábrán megjelölt 3 helyen végeztünk rendszeres ultrahang csillapító képesség vizsgálatot. A gyártás eredményes ellenőrzése végett költségkímélés céljából csakis az ultrahang vizsgálat alapján megfelelő szövetszerkezetűnek bizonyult tengelyeket érdemes további izotóp vizsgálatnak is alávetni. A szövetszerkezetet a már méretre munkált tengelyeken mikrofényesítő készülékkel történt előkészítéssel esetenként ellenőriztük. Így pl. a 23639/5 a, 28392/7 a sz. tengelyek tiszta gömbgrafitos szövetszerkezettel $\alpha = 0,00385 \text{ mm}^{-1}$ és $\alpha = 0,00710 \text{ mm}^{-1}$ csillapítási számokat adtak. A 20 210 és 80 247 sz. tengelyek szövetszerkezete kb. 60%-ban gömbgrafit és kb. 40% csomós grafit eloszlású volt. A megfelelő α értékek: $0,0302 \text{ mm}^{-1}$ és $0,0162 \text{ mm}^{-1}$ voltak.

A szakítószilárdság és a csillapítási szám közötti összefüggések keresése közben alakult ki a 12. ábrán látható diagram, melyben $\alpha = f(\sigma_B)$ összefüggést

Próba jele	σ_B kg/mm ²	α mm ⁻¹	Szövetkép N=150x	Próba jele	σ_B kg/mm ²	α mm ⁻¹	Szövetkép N=150x
315/1	61,5	0,00425		8	44,5	0,0271	
315/2	59,9						
351/1	56,1	0,0040		10	14,0	0,0177	
351/2	53,5						
531/1	56,3	0,0081		13	48,4	0,00211	
531/2	56,9						
46/1	44,1	0,00283		14	14,0	0,0177	
46/2	47,2						
7	44,9	0,00314		16	33,8	0,0274	

11. ábra

tüntettük fel a végzett laboratóriumi vizsgálatok eredményei alapján. A diagram — habár még korántsem elegendő számú kísérlet eredménye — szemlélteti, hogy amíg általában a perlites öntvények szakítószilárdsága és csillapítási száma között parabola jellegű összefüggés esetleg felrajzolható,



12. ábra

bár a szórás nem jelentéktelen (lásd 12. ábra bal oldalát), addig a gömbgrafitos öntvények mezejében ilyen összefüggés nincs. A gömbgrafitos öntvények a diagramon feltüntetett vízszintes sávba estek, függetlenül azok szakítószilárdságának értékétől.

Kísérleteink tulajdonképpeni célja — mint azt az előzőekben már láttuk — nem a szilárdság és a csillapítási szám közötti összefüggés kutatása volt, hanem a gömbgrafitos szövet roncsolásmentes, gyors felismerését szolgáló eljárás kidolgozása az ultrahang vizsgálati eljárások-adta gyorsasággal üzemi körülmények között.

Ezt a célt — mint az előzőekben bemutattuk — sikerült elérni és eközben a 12. ábrán szemléltetett összefüggésekhez is hozzájutottunk. Ennek

tanúságaként teljes biztonsággal állíthatjuk, hogy a diagram jobboldali mezeje a gömbgrafitos öntvényekre vonatkozóan helytálló, de a BIERWIRTH-féle összefüggés igazolása, vagyis e diagram jobboldali részének, tehát a perlites struktúrájú mezőnek parabolikus összefüggése távolról sem mondható igazoltnak. Különösen pedig azzal a szűk szórási mezővel, amelyet az 1. ábra mutat. Ez utóbbinak részünkről történt felhasználása tehát mindössze azt a célt szolgálta, hogy a csillapítási számra vonatkozó nagyságrendi következtetéseinket belőle megállapíthassuk.

Természetesen az adatgyűjtést tovább folytatjuk annak céljából, hogy eddigi kísérleti eredményeinket teljes mértékben és minden kétséget kizáró módon igazoljuk és ezzel a gyakorlat számára gyors és könnyen bevezethető módszert adjunk a gömbgrafitos struktúra azonnali felismerésére, anélkül, hogy az illető tárgyat roncsolásos vizsgálatnak kellene alávetni.

IRODALOM

1. G. BIERWIRTH: Zerstörungsfreie Prüfung von Gußstücken durch Ultraschall. Gießerei 44. sz. 1957.
2. W. PATTERSON und E. BODMER: Ultraschall Untersuchungen Gußeisen mit lamellarer und kugeligem Graphitbildung. Gießerei, techn.-wiss. Beihefte 1957. 17. sz.
3. H. STÄGER: Untersuchungen mit Ultraschall. Die Elastizitätskonstanten an festen Werkstoffen. Tech. Mitteilungen 50. sz. 1957.
4. R. ZIEGLER und R. GERSTNER: Die Schallgeschwindigkeit als kennzeichnende Größe für die Beurteilung von Grauguß. Gießerei 45 (1958) 185/92.
5. L. BERGMANN: Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik, Stuttgart 1954. S. 565.
6. J. KRAUTKRÄMER: Die Messung der Ultraschall Schwächung nach dem Echolot-Verfahren. Gießerei, Techn. -Wissensch. Beihefte No 20. Apr. 1958.

ÖSSZEFOGLALÁS

A fentiekben ismertetett eljárás az ultrahang alkalmazásának lehetőségét kívánta bemutatni gömbgrafitos öntöttvas forgattyús tengelyek minőségének ellenőrzésére. Az eljárás elvileg alkalmazható más alakú és méretű darabok esetében is. Ekkor azonban az eljárás módszerét a fentiekben ismertetett elvek szerint a darab méreteihez és alakjához igazodóan kell alkalmazni.

A leírt módszert és az azzal kapott kísérleti eredményeket a továbbiakban oly irányban fogjuk kiterjeszteni, hogy az megfelelő mennyiségű statisztikai adattal is alátámasztva álljon a minőségellenőrzés rendelkezésére.

BELSŐÉGÉSŰ MOTOROK HATÁSFOKÁNAK VIZSGÁLATA TETSZŐLEGES, IDŐBEN ADOTT HŐKÖZLÉS ESETÉN

CSÓKA JÁNOS

AGRÁRTUDOMÁNYI EGYETEM TRAKTOROK-AUTOMOBILOK TANSZÉKE, BUDAPEST

[Beérkezett 1958. október 29-én].

Motorok körfolyamatának klasszikus tárgyalásmódja ismert. Tudott dolog azonban, hogy a valóságban a hőközlés sohasem a feltételezett alakban, hanem egy, az időben — kísérleti alapon megadható — változó függvénnyel jellemezhető.

A meghatározott függvény az égéstérre vonatkozóan jellemző. A függvénynek az optimális hatásfok elérésére történő vizsgálata a szokásos módszerekkel nehézkes és nem ad utasítást az égéstér továbbfejlesztésére vonatkozóan. Célszerű ezért — ha idealizált alakban is — az alábbiakban megkísérelthez hasonlóan olyan törvényszerűség felállítása, mely égéstér-javítási kísérlet, illetve meghatározáshoz a kutatási irányra vonatkozóan útmutatóul szolgálhat. E célból tegyük fel, hogy az égés, és a hőközlés során mutatkozó hőfok-emelkedés elemi értéke — ami elméletileg könnyen igazolható — az állandó térfogaton történő elemi hőközlés és az azt követő adiabatikus állapotváltozás hőfok-emelkedésének összegeként fogható fel.

A folyamatot a forgattyús tengely x szögelfordulásának függvényében vizsgáljuk.

Legyen a hőközlést meghatározó $Q = Q(x)$ az $x_1 < x < x_2$ intervallumban értelmezett folyamatos görbe. A közeggel közölt összhőmennyiség pedig:

$$\int_{x_1}^{x_2} Q \cdot dx.$$

A Δx elemi szakaszon a közeggel közölt hő $Q \cdot \Delta x$ és ennek megfelelően a hőfokváltozás:

$$\Delta T_1 = \frac{Q \cdot \Delta x}{G \cdot c_v},$$

ahol G = a közeg súlya (kg),

c_v = állandó térfogat melletti fajhő (Kcal/kg°).

Az adiabatikus állapotváltozásból adódó hőfokváltozás pedig :

$$\Delta T_2 = -(\chi - 1) \cdot T \frac{\Delta V}{V},$$

ahol $\chi =$ állandó és

$V =$ a közeg térfogata (m^3).

Ha $V = V(x)$, akkor $\Delta V = V' \cdot \Delta x$.

Mindjárt differenciális mennyiségekre áttérve :

$$dT = dT_1 + dT_2 = \frac{Q \cdot dx}{G \cdot c_v} - (\chi - 1) \cdot T \frac{V'}{V} dx$$

vagy rendezve :

$$\frac{dT}{dx} = \frac{Q}{G \cdot c_v} - (\chi - 1) \cdot T \frac{V'}{V}.$$

Az egyenlet megoldása:

$$T = \frac{C}{V^{\chi-1}} + \frac{1}{V^{\chi-1}} \int \frac{Q \cdot V^{\chi-1}}{G \cdot c_v} \cdot dx.$$

Az állandó értéke $V = V_0$ (lökettérfogat + kompressziótérfogat) esetén $T = T_0$ és $Q = 0$ -val.

$$C = T_0 \cdot V_0^{\chi-1}$$

T_0 a hengerben a szívás végén levő gáz hőfoka (a levezetés megkönnyítése céljából a környezet hőfokával azonosnak feltételezett).

A hőfokváltozást leíró függvény tehát :

$$T = T_0 \left(\frac{V_0}{V} \right)^{\chi-1} + \frac{1}{V^{\chi-1}} \int \frac{Q \cdot V^{\chi-1}}{G \cdot c_v} \cdot dx.$$

A hatásfok vizsgálatával kapcsolatosan tegyük fel, hogy a hőközlés után a közeg állapotváltozása adiabatikus. Jelölje T_b a kipuffogó gáz hőmérsékletét, és legyen T_{x_2} a hőközlés végén a gáz hőfoka, V_{x_2} pedig térfogata.

A motor hatásfoka $Q_1 = \int_{x_1}^{x_2} Q \cdot dx$ jelöléssel

$$\eta = \frac{Q_1 - G \cdot c_v (T_b - T_0)}{Q_1}$$

T_b -t T_{x_2} segítségével kifejezve

$$T_b = T_{x_2} \left(\frac{V_{x_2}}{V_0} \right)^{\chi-1}$$

T_{x_2} -t pedig

$$T_{x_2} = T_0 \cdot \left(\frac{V_0}{V_{x_2}} \right)^{\gamma-1} + \frac{1}{V_{x_2}^{\gamma-1}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{Q \cdot V^{\gamma-1}}{G \cdot c_v} dx,$$

így :

$$T_b = T_0 + \frac{1}{V_0^{\gamma-1}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{Q \cdot V^{\gamma-1}}{G \cdot c_v} dx$$

T_b értékét η kifejezésébe helyettesítve :

$$\eta = \frac{Q_1 - \frac{1}{V_0^{\gamma-1}} \int_{x_1}^{x_2} Q \cdot V^{\gamma-1} dx}{Q_1}$$

kifejezés adódik.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért legyen $Y = V^{\gamma-1}$, így

$$\eta = \frac{Q_1 - \frac{1}{V_0^{\gamma-1}} \int_{x_1}^{x_2} Q \cdot Y dx}{Q_1}$$

A kifejezésből megállapítható, hogy adott Q_1 mellett a hatásfok akkor lesz maximum, ha

$$J = \int_{x_1}^{x_2} Y \cdot Q \cdot dx = \text{Min!}$$

feltétel teljesül. A kifejezés geometriailag azt jelenti, hogy az adott Y függvényhez az égésternek olyan Q függvény szerinti hőközlést kell biztosítani az $x_1 < x < x_2$ intervallumban, hogy a kettő szorzata alatt levő terület minimális értékű legyen.

Legyen az 1. ábrán levő Y görbe a motor adataiból ismert, Q pedig kísérletileg felvett.

A görbékkel kapcsolatosan két kérdés merülhet fel. Az első következőképpen fogalmazható :

Kérdéses, hogy ha a motor égésterének jellemzője ilyen, akkor az Y görbéhez képest Q megfelelően helyezkedik-e el?

Matematikailag megfogalmazva a kérdést meg kell keresni az x_1 helyet, ahol a folyamatba Q függvényt beléptetve a J operációnak szélső értéke van.

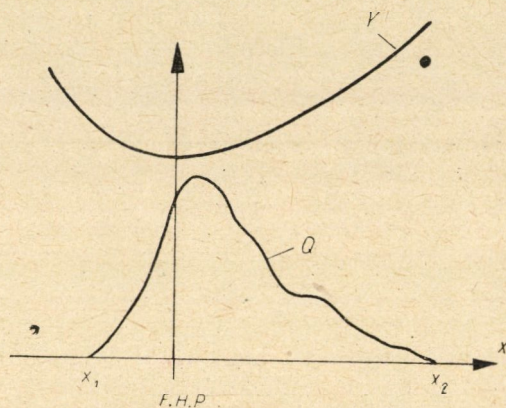
A feladat leggyorsabb megoldási módja és a legegyszerűbb is, nyilván az, hogy pár helyen meghatározva J értékét a kapott J_i értékek segítségével a minimális értéket adó x_1 -et a szükséges pontossággal meghatározzuk.

Az égési törvény jóságának elbírálása szempontjából felmerülő másik kérdés a következő lehet :

Legyen az égés kezdete és vége x_1 , illetve x_2 ponttal jellemezve. Kérdés, milyen $Q = Q(x)$ függvény szerint kell a hőközlésnek végbemenni, hogy a motor hatásfoka optimális legyen.

A feladat megoldását VIBE [1] vizsgálatai nyomán végezzük.* VIBE az elégett tüzelőanyag hányadának változását adja meg, az égési idő függvényében és erre félempirikus alapon a következő összefüggést vezeti le:

$$q = 1 - e^{-6,908 \left(\frac{t}{t_z}\right)^{m+1}}$$



I. ábra

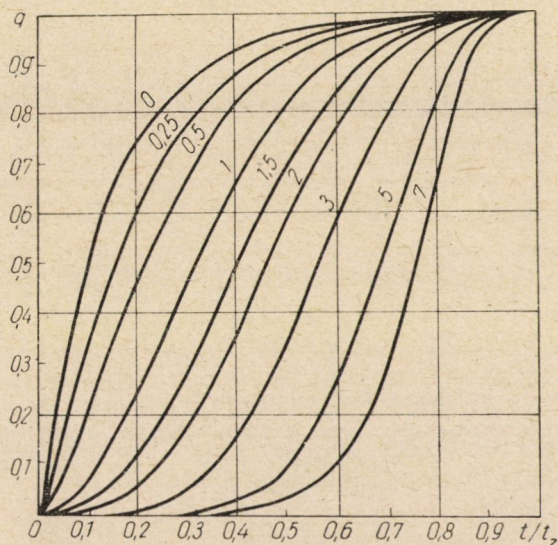
a kifejezésben q a tüzelőanyagnak az a része, amely a t időpontig elégett, t_z az égés végét jellemző idő — amíg a keverék tüzelőanyag tartalma 99,9%-ra csökken —, m pedig az égéstérre jellemző kitevő, amely kísérleti úton q ki-mérésével és a megadott egyenletből határozható meg. q értékei különféle m kitevőknél a 2. ábrán láthatók.

A t/t_z viszony azonban a főtenhely szögelfordulásának viszonyával is megadható, mégpedig $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ alakban, természetesen az $x_1 < x < x_2$ intervallumban. Így :

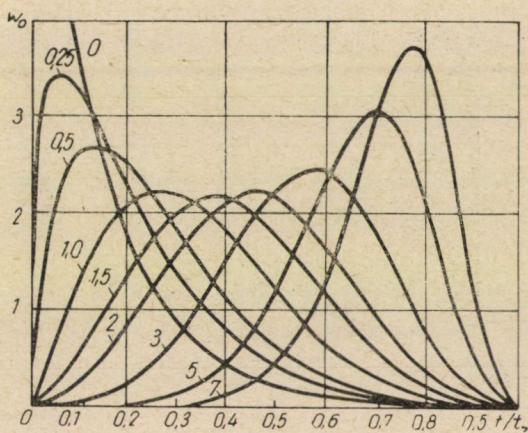
$$q = 1 - e^{-6,908 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^{m+1}}$$

Mivel q az $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ értékig elégett tüzelőanyag hányadát adja meg, tehát e

* A feladat ilyen értelmű kidolgozására a figyelmemet SITKEI György tud. kutató hívta fel.



2. ábra



3. ábra

pontig felszabadult hőenergiával arányos. Az $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ -el jellemzett pontban felszabaduló hőenergia, ezért q deriváltjával W_0 -val arányos, tehát

$$W_0 = \frac{dq}{d\left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)} = 6,908 (m + 1) \cdot \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^m \cdot e^{-6,908 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)^{m+1}}$$

W_0 értékei t/t_2 függvényében a 3. ábrán láthatók.

A görbék alatti terület 0,999.

Ha mármost $Y = V^{z-1}$ függvény $x_1 < x < x_2$ intervallumban értelmezett értékét $Y = Y_0 \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right)$ alakban adjuk meg, akkor az

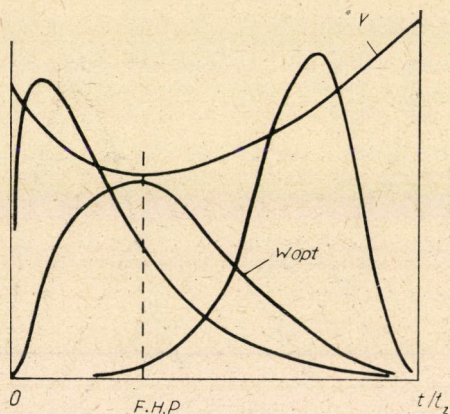
$$\int_{x_1}^{x_2} Q \cdot Y \cdot dx = \text{Min ! felszólítás az}$$

$$\int_0^1 W_0 \cdot Y \cdot d \left(\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \right) = \text{Min ! felszólításba}$$

megy át.

Ez (4. ábra) a következőket jelenti :

Mivel x_1 és x_2 kötött, ezen a szakaszon belül Y adott, így a motor annál a W_0 görbénél érné el az optimális hatásfokot, amelyre vonatkozóan a felszólítás a legjobban teljesül.



4. ábra

Az adottak birtokában az optimumot teljesítő W_0 „ m ” kitevője akár matematikailag, akár próbálgatással meghatározható és ezt a kísérletileg meghatározott „ m ” értékkel egybevetve, a motor égési törvényszerűségének jóságáról megfelelő képet alkothatunk.

IRODALOM

1. I. I. VIBE: Poluempiriceszkoe uravnenije szkorosztji szgoranija v dvigatelach. (Izd. Akadémia Nauk Sz. Sz. R. 1956).

ÖSSZEFOGLALÁS

Adott motorégéstér vizsgálatakor az optimális hatások elérése szempontjából

$$\int_{x_1}^{x_2} Y \cdot Q \cdot dx = \text{Min} !$$

felszólítás megvalósítására kell törekedni. A motorégéstér meghatározásakor a felszólítás segítségével megállapítható egyrészt, hogy a Q függvény a felső holtponthoz képest megfelelően helyezkedik-e el, vagy másként fogalmazva, adott értékű Q függvényt előbb vagy később kellene-e a folyamatba léptetni.

Másrészt ha x_1 és x_2 helyét a felső holtponthoz képest rögzítjük (x_1 -et az égéshez szükséges időtartam szabja meg), akkor az adott $x_1 < x < x_2$ szakaszon Q -nak hogyan kell alakulnia, más szóval milyen hőközlési törvényszerűséget kellene az égéstérnek biztosítania, hogy a kötött feltételekhez képest a hatások a legjobb legyen.

A gyakorlatilag meg nem valósítható a felső holtpontban állandó térfogat melletti hőközlést, mint a hatásokok optimumát a felszólítás tartalmazza.

GÁZTALAN OLAJAT TERMELŐ KUTAK ÜZEMJELLEMZŐINEK MEGHATÁROZÁSA FELSzíNI ADATOKBól

SZILAS A. PÁL

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

NEHÉZIPARI MŰSZAKI EGYETEM OLAJTERMELÉSI TANSZÉKE, SOPRON

[Beérkezett 1958. november 3-án]

Betűjelölések értelmezése

<i>a</i>	hőmérsékletvezetési tényező, $\text{cal} \cdot \text{cm}^{-2}$
<i>A</i>	$= 0,1 [\gamma_{15} - a_1(t_{ki} + \sigma_0) - 15] + a_2 \cdot p]$ + <i>b</i> . Képletállandó
<i>b</i>	súrlódási nyomásgradiens, $\text{at} \cdot \text{m}^{-1}$
<i>B</i>	$= 0,1 \cdot a_1 \cdot \sigma_0$. Képletállandó
<i>c</i>	áramló olaj átlagos fajhője, $\text{cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{C}^{\circ-1}$
<i>C</i>	hőszigetelési tényező, dim. nélkül
<i>d</i>	a termelőcső belső átmérője, m
<i>d_e</i>	a csőköz egyenértékű csőátmérője, m
<i>d_k</i>	a termelőcső külső átmérője, m
<i>D</i>	a bélésűcső belső átmérője, m
<i>E_f</i>	áramló olaj rugalmassági tényezője, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
<i>E_r</i>	redukált rugalmassági tényező, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
<i>E_T</i>	termelőcső rugalmassági tényezője, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
<i>F</i>	$= 0,1 \cdot a_2$. Képletállandó
<i>g</i>	nehézségi gyorsulás, $9,81 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$
<i>G</i>	olajhozam, $\text{t} \cdot \text{nap}^{-1}$
<i>G₁</i>	adott kútszerkezettel kitermelhető legnagyobb olajhozam, $\text{t} \cdot \text{nap}^{-1}$
<i>G₂</i>	adott kútszerkezettel és felszíni csatlakozóberendezéssel kitermelhető legnagyobb olajhozam, $\text{t} \cdot \text{nap}^{-1}$
<i>G_T</i>	termelőcsőben áramló olajhozam, ha olaj a csőközön át áramlik is a felszínre, $\text{t} \cdot \text{nap}^{-1}$
<i>H</i>	kút mélysége, m
<i>i</i>	termelési idő a kútvizsgálat előtt, sec
<i>k</i>	kőzetfelmelegedési tényező, dim. nélkül
<i>l</i>	kútolaj távolsága a felszíntől, m
<i>L</i>	termelőcső hossza, m
<i>p</i>	nyomás, at
<i>p̄</i>	átlagos nyomás, at
<i>p', p''</i>	közelítő átlagos nyomás, at
<i>p_B</i>	bélésűcsőfej nyomása termelés közben, at
<i>p_{BZ}</i>	bélésűcsőfej nyomása kútlezárás után, at
<i>p_f</i>	a fúvóka által okozott nyomásvesztesség, at
<i>p_h</i>	a termelőcsőfejre ható külső, hidrosztatikus nyomás, at
<i>p_{H-L}</i>	a termelőcsősaru és kúttalp közötti folyadékoszlop hidrosztatikus nyomása, at
<i>p_i</i>	az impulzuserő által okozott legnagyobb termelőcsőfej-nyomásnövekedés, at
<i>p_L</i>	a termelőcsőben levő olajoszlop hidrosztatikus nyomása, at
<i>p_L, p_L'</i>	közelítő értékei <i>p_L</i> -nek, at
<i>p_{LB}</i>	a csőközben levő olajoszlop hidrosztatikus nyomása, at
<i>p_s</i>	súrlódási nyomásvesztesség a termelőcsőben, at
<i>p_s</i>	súrlódási nyomásvesztesség a termelőcsősaru és a kúttalp között, at
<i>p_t</i>	termelési talpnyomás, at
<i>p_t, p_t'</i>	termelési talpnyomás közelítő értékei, at
<i>p_{vs}</i>	súrlódási nyomásvesztesség a folyóvezetékben, at
<i>p_T</i>	termelőcsőfej nyomása termelés közben, at
<i>p_{TZ}</i>	termelőcsőfej nyomása kútlezárás után, at

Δp	depresszió a tárolórétégben, at
Δp_B	bélésőfej nyomásnövekedése kütlezáráskor, at
Δp_{\max}	termelőőfej legnagyobb nyomásnövekedése kütlezáráskor, at
Δp_T	termelőőfej nyomásnövekedése kütlezáráskor, at
P	nyomás, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
PI	termelékenységi index, $\text{t} \cdot \text{nap}^{-1} \cdot \text{at}^{-1}$
ΔP	nyomáskülönbség a kútfej és kúttalp között, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$
q	folyadékhozam, $\text{g} \cdot \text{sec}^{-1}$
Q	folyadékhozam, $\text{m}^3 \cdot \text{nap}^{-1}$
r	termelőő belső sugara, cm
t	hőmérséklet, C°
\bar{t}	áramló olaj átlaghőmérséklete, C°
t_a	tartályolajhőmérséklet, C°
t_f	felszíni talajhőmérséklet, C°
t_{ki}	olaj kifolyási hőmérséklete a kútszájnál, C°
T	a termelőőfejen mért nyomáshullám hossza, sec
z	kútolaj távolsága a kúttalptól, m
V	olaj fajtérfogata, $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
V_T	olaj fajtérfogata a termelőőfejen, $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
V_i	olaj fajtérfogata a kúttalpon, $\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$
v_0	olaj áramlási sebessége a termelőőben, $\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$
w, w'	nyomáshullám terjedési sebessége a termelőőben, $\text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$
x	$= a \cdot i \cdot r^{-2}$ Képletállandó
a_1	átlagos hőmérsékletváltozási tényező, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{at}^{-1}$
a_1	hőmérsékletváltozási tényező t hőmérsékletnél és p nyomásnál, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{at}^{-1}$
a_2	átlagos nyomásváltozási tényező, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{at}^{-1}$
a_2	nyomásváltozási tényező t hőmérsékletnél és p nyomásnál, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{at}^{-1}$
β_1	átlagos hőtágulási tényező $\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$
β_1'	hőtágulási tényező t hőmérsékletnél és p nyomásnál, $\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$
β_2	átlagos összenyomhatósági tényező, $\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$
β_2'	összenyomhatósági tényező t hőmérsékletnél és p nyomásnál, $\text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$
δ	termelőő falvastagsága, m
ε	$= 10^9 \cdot d^4 / 0,4807 \cdot \bar{v}$ képletállandó
γ	olajfajsúly, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3}$
$\bar{\gamma}$	az áramló olaj átlagos fajsúlya, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3}$
γ', γ''	közelítő értékei $\bar{\gamma}$ -nak, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3}$
γ_t	olajfajsúly a kúttalpon, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3}$
γ_a	$=$ tartályolajfajsúly $\text{t} \cdot \text{m}^{-3}$
γ_T	olajfajsúly a termelőőfejnél, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3}$
γ_{15}	olajfajsúly atmoszferikus nyomáson és 15 C° hőmérsékletnél, $\text{t} \cdot \text{m}^{-3}$
λ'	kutat körülvevő közet hővezetési tényezője, $\text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot \text{C}^\circ^{-1}$
λ	súrlódási tényező, dim. nélkül
ν	olaj kinematikai viszkozitása, $\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$
$\bar{\nu}$	az áramló olaj átlagos kinematikai viszkozitása $\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}$
σ	geotermikus gradiens $\text{C}^\circ \cdot \text{cm}^{-1}$
σ_0	átlagos olajhőmérsékleti gradiens a kúttalp és kútfej között, $\text{C}^\circ \cdot \text{m}^{-1}$
τ	az olaj és eredeti közethőmérséklet különbsége a kúttalptól z m távolságban, m

* γ' jelölés bármely indexnél $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ egységet jelent

Bevezetés

Az elmúlt tíz évben a szakirodalomban számos olyan közlemény jelent meg, amely az olajkutaknak termelés közben és lezárás után kialakult nyomásviszonyaival foglalkozik. A folyadékot és általában gázt is adó réteg, a folyadék-gázkeveréket a felszínre szállító termelőő és a felszíni fuvóka olyan 3 tagú sorbakapcsolt hidraulikai rendszernek tekinthető, amelynek várható működése csak az egyes hidraulikai egységek üzemi jellemzőinek pontos ismeretével

határozható meg [1]. A fő nehézséget általában a termelőcsőben végbemenő áramlás összefüggéseinek üzemi célra kielégítő pontosságú meghatározása jelenti. A világszerte végzett kutatások elsősorban a gázos folyadéokra vonatkozó összefüggéseket vizsgálták, mivel az olajkutak túlnyomó része az olajat jelentős mennyiségű gázzal termeli.

A nagylengyeli olajmező egyik kútcsoportjából termelt olaj gáztartalma igen csekély ($0,3-0,5 \text{ m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$). A termelt gáz a termelőcsőben végbemenő áramlás közben gyakorlatilag teljesen oldódott az olajban, az áramlás egyfázisú. Ilyen típusú kutak üzemi viszonyaira az irodalomban csak elvétve található utalás [2]. A kétfázisú folyadékáramlásra érvényes összefüggések egyfázisú folyadékáramlásra nem vonatkoztathatók, mivel a kétfázisú áramlásnál több olyan tényező hatását hanyagoljuk el (például a kúttal harántolt közet termikus tulajdonságait), amelyek meghatározásának, illetőleg figyelembevételének az egyfázisú folyadékáramlásnál döntő jelentőségük van.

Az alábbiakban ismertetett, s 20 nagylengyeli olajkútban végzett vizsgálatok alapján kidolgozott összefüggések gáztalan olajat termelő kutakra, mint határesetre vonatkoznak. Az összefüggéseknek tudományos vonatkozásokon túlmenően, üzemi, gyakorlati jelentőségük is van. Alkalmazásukkal lehetővé válik, hogy túlnyomóan felszínen mért adatokból pontosan megállapíthassuk a kút termelékenységét, a kutak rétegnyomását és ennek felhasználásával a mező rétegnyomáseloszlását (rezervoármechanikai adatigények), továbbá meghatározhatjuk a termelés szempontjából legmegfelelőbb termelőcsőméretet és a felszálló termelés időtartamának megnövelésére tervezett intézkedések várható hatását (termelési szempontok).

I. A felszíni adatok használatának előnye

Olajkutak sztatikai, vagy dinamikai talpnyomásainak meghatározására túlnyomóan mélységi nyomásmérőt, egyes esetekben felszíni nyomásmérést, és megfelelő számítási összefüggéseket alkalmaznak. Ha a fajlagos gáztermelés kicsi, a talpnyomás felszíni adatokból történő meghatározása pontosabb lehet, mint közvetlen, mélységi nyomásmérővel történő mérés. W. J. BAKER szerint az iráni olajmezők mintegy 1800 m mély, s a nagylengyelinél gázosabb olajat termelő kútjainak *sztatikai* talpnyomását néhány század atmoszféra pontossággal határozzák meg felszíni adatokból [3]. A nagy pontosság mellett az eljárás igen nagy előnye a gyors és egyszerű mérés. Bár BAKER módszerétől az alább ismertetett nyomásmérési és számítási eljárások eltérnek, alkalmazásukra a fenti megállapítás érvényes.

További előny mutatkozik a nagylengyelihez hasonló igen nagy termelésű kutak termelési, azaz *dinamikai* talpnyomás mérésénél. A mélységi nyomásmérő és huzala a termelőcsőben növeli a termeléskor létrejövő súrlódási

nyomásveszteséget, ennek hatására a tényleges termelési talpnyomás, és következésképpen a depresszió a műszerbeszerelés előttitől különbözhetik. Pl. $286 \text{ t} \cdot \text{nap}^{-1} \cdot \text{at}^{-1}$ termelékenységi indexű nagylengyeli kútnál (9. ábra) a felszín alatti nyomásmérő 2 mm átmérőjű huzala jelenlétének hatására a termelőcső súrlódási nyomásvesztesége mintegy 9%-kal nő. Ha a kút hozama $100 \text{ t} \cdot \text{nap}^{-1}$ volt, úgy a 9. ábrából grafikusan meghatározható, hogy a műszerbevezetés után a hozam $72 \text{ t} \cdot \text{nap}^{-1}$ -ra csökken, s a termelési talpnyomás 0,1 at-val megnő. Hasonlóképpen megváltoznak a termelési üzemm jellemzők, ha az áramló olaj hőmérsékletét mélységi hőmérővel mérjük. Felszíni mérés a talpnyomást nem befolyásolja, s néhány perc alatt elvégezhető.

A felszíni mérések alapján végzett pontos mélységi nyomás- és hőmérsékletszámítás alapfeltétele, hogy az alkalmazott számítási eljárások megfelelőek, s a számításoknál felhasznált adatok kellő pontosságúak legyenek.

II. A kőolaj fizikai jellemzői és a kútban végbemenő áramlás alapösszefüggései

a) *A kőolaj fajsúlyának változása a nyomással és hőmérséklettel*

A nagylengyeli gáztalan nyersolaj átlagos fajsúlya atmoszférikus nyomáson és 15 C° hőmérsékleten 0,951. STANDING és KATZ módszerével [4] számított gázos olajfajsúly a fenti értéknél kereken 0,0005-el kisebb. Az eltérés a mérési pontosság határán belül van, ezért az oldott gázt a fajsúlyszámításnál nem vettem figyelembe.

A vizsgált kutaknál általános $0,3\text{—}0,5 \text{ m}^3 \cdot \text{m}^{-3}$ fajlagos gáztartalomnál az együtt termelt gáz a termelőcsőben történő felemelkedés közben túlnyomóan az olajban oldott állapotban marad. Csekély kiválás legfeljebb a felszín alatti utolsó néhány méterben (a termelőcsőhossznak 1—2%-ban) fordulhat elő, amint az KÁROLYINAK a nagylengyeli olajjal kapcsolatos laboratóriumi vizsgálataiból is kitűnik [5]. A további számításokban az olajat ezért gáztalannak tételezem fel.

Mint ismeretes, a valódi folyadékok térfogatváltozása a hőmérsékletváltozás hatására állandó nyomáson a $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right)_P$ és nyomásváltozás hatására állandó hőmérsékleten a $-\left(\frac{\partial^2 V}{\partial P^2}\right)_t$ kifejezésekkel jellemezhető. A fajlagos hőtágulás, azaz a hőtágulási tényező P nyomáson $\beta'_1 = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)_P$ a fajlagos nyomásváltozás, azaz az összenyomhatósági tényező t hőmérsékleten $\beta'_2 = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_t$.

A térfogategységre vonatkozó tényezőkkel arányosak a fajsúlyváltozási tényezők:

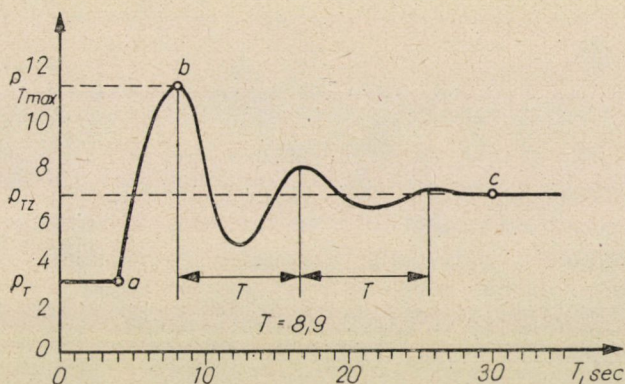
$$\alpha'_1 = 10^{-3} \cdot \gamma \cdot \beta'_1 \quad \text{és} \quad \alpha'_2 = 10^{-3} \cdot \gamma \cdot \beta'_2.$$

Talpnyomásszámításoknál az α'_1 és α'_2 tényezőknek az adott hőmérséklet, illetőleg nyomáshatárokon belüli átlagértékeire α_1 és α_2 -re van szükség.

α_1 laboratóriumi vizsgálatokból meghatározható. A vizsgált nagylengyeli kútesoport olajánál $\alpha_1 = 0,00058$, amely értéket a megkívánt pontossági határon belül állandónak tekintettük az előforduló nyomás- és hőmérséklet-határok között.

α_2 átlagértékének kielégítő pontosságú laboratóriumi meghatározása hosszadalmas. Kívánatosnak látszott az alábbi, kisebb felkészültséget igénylő és gyorsabb meghatározási eljárás kidolgozása:

Ha gáztalan olajat termelő kutat hirtelen lezárunk, akkor a kútfejnymás felemelkedik. A legnagyobb nyomásemelkedés a kútban a termelés alatt kialakult p_s súrlódási nyomásveszteség (lásd később) és a megállított



1. ábra

folyadékáram impulzusereje okozta p_i nyomásnövekedés összegével egyenlő, azaz $\Delta p_{\max} = p_s + p_i$. A nyomásnövekedés a cső lezárt végétől nyomáshullámként terjed tovább a kúttal felé, majd csillapítva visszaverődik, s a kútfejen jól regisztrálható nyomásváltozást okoz (1. ábra). A nyomáshullám hasonló a ZSUKOVSKIJ—ALLIEVI részéről értelmezett és csővezeték hirtelen lezárásakor keletkező nyomáshullámhoz [6]. A nyomáshullám terjedési sebessége egyrészt a

$$w = 6,657 \cdot 10^6 \frac{p_i \cdot d^2}{G},$$

másrészt az 1. ábrából lemérhető T hullámhossz ismeretében a

$$w' = \frac{4 \cdot H}{T}$$

összefüggésből kiszámítható [7]. Mivel

$$w = \sqrt{\frac{g}{\gamma} E_r} \text{ és } E_r = \frac{1}{\frac{1}{E_f} + \frac{d}{E_{cs} \cdot \delta}}$$

w ismeretében E_f , a folyadék rugalmassági tényezője meghatározható. Az összenyomhatósági tényező a rugalmassági tényező reciprokával egyenlő, azaz $\beta_2 = \frac{1}{E_f}$. Mivel az átlagos összenyomhatósági tényező

$$\beta_2 = \frac{V_2 - V_t}{V_2 \cdot \Delta P} = \frac{\gamma_t - \gamma_2}{\gamma_t \cdot \Delta P}$$

és az átlagos nyomásváltozási tényező

$$a_2 = \frac{\gamma_t - \gamma_2}{\Delta P},$$

a két egyenletből

$$a_2 = 10^{-3} \cdot \gamma_t \cdot \beta.$$

A rövid kútelzárás, illetőleg az azt megelőző hozam és a kútberendezés adataiból tehát az átlagos nyomásváltozási tényező éppen a vizsgált kútviszonyok mellett egyszerűen meghatározható.* Későbbi szám példánkban $a_2 = 0,000092$.

Az áramló olaj fajsúlya átlagos áramlási hőmérsékleten és nyomáson a

$$\bar{\gamma} = \gamma_{15} - a_1 (\bar{t} - 15) + a_2 \cdot \bar{p}$$

összefüggés alapján

$$\bar{\gamma} = 0,951 - 0,00058 (\bar{t} - 15) + 0,000092 \bar{p} \quad (1)$$

képletből számítható ki.

b) *A kőolaj viszkozitásának változása a hőmérséklettel és nyomással*

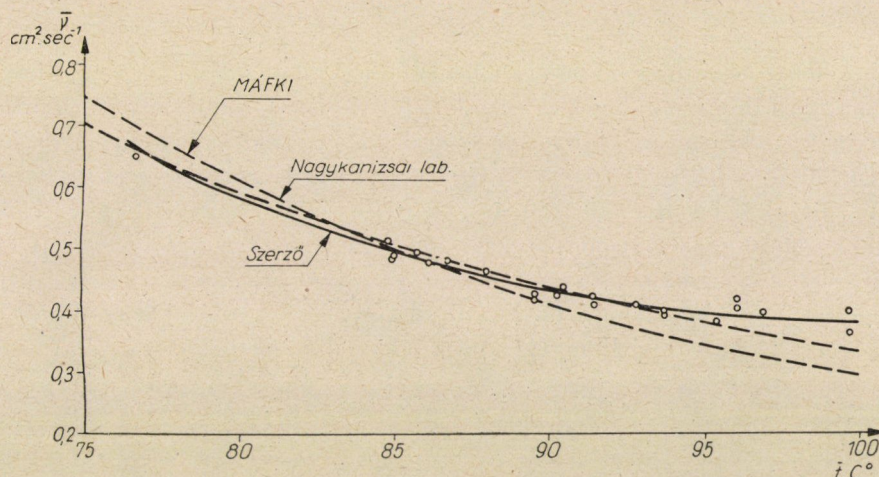
A vizsgált kutakból vett gázatlan olajminták átlagos viszkozitása 50 C° hőmérsékleten és atmoszférikus nyomáson 208,6 cSt. GRÁF vizsgálatai szerint [8] a nagylengyeli olajnak — HÖPPLER-féle rheoviszkoziméterrel mérve — viszonylag kis hőmérsékleten jelentős szerkezeti viszkozitása van. A szerkezeti viszkozitás azonban a hőmérséklet növekedésével jelentékenyen csökken. A termelőcsőben szokásos 80—100 C° átlaghőmérsékleten az áramlási sebességtől függő viszkozitáseltérés jelentéktelen. Hasonlóképpen csekély a vizsgált kutakból származó olajminták tényleges viszkozitáseltérése viszonylag nagy hőmérsékleten.

A 2. ábra a gázatlan nagylengyeli átlagolajnak két különböző laboratóriumban mért hőmérséklet-viszkozitásgörbáját mutatja [8]. Ugyanezen diagramon látható a különböző kutak üzemadataiból „visszafelé” kiszámított átlagos áramlási viszkozitás az átlagos áramlási hőmérséklet függvényében. Az ábrából

* Az eljárás részletesebb leírását és szám példa kidolgozását tartalmazza [7].

kitűnik, hogy atmoszférikus nyomáson laboratóriumban mért gáztalan olaj és a kútban nyomás alatt áramló, s némi oldott gázt tartalmazó olaj viszkozitásának változása a hőmérséklettel gyakorlatilag azonos, némi eltérés 95 C° felett észlelhető.

Atmoszférikus nyomású gáztalan olaj viszkozitását az áramlás közben uralkodó nyomás némileg növeli, viszont a csekély mennyiségű oldott gáz némileg csökkenti. A két ellenkező hatású tényező — ha egyébként külön-



2. ábra

külön észrevehető változást is okozna — a 2. ábra szerint kútviszonyoknál egymás hatását kiegyenlíti.

c) A kútban uralkodó hőmérsékletviszonyok

A kútba történő beáramláskor a kőolaj hőmérséklete közelítőleg megegyezik a kőzet hőmérsékletével, majd felemelkedés közben az áramlási hőmérséklet állandóan csökken [9]. A talpnyomászámítások céljára szükséges, hogy a kútban felemelkedő olaj átlagos fajsúlyát és viszkozitását ismerjük. Ezen átlagértékeket csak akkor tudjuk kellő pontossággal kiszámítani, ha ismerjük az olaj hőmérsékletét a termelőcsőhossz függvényében.

Az irodalomból ismertek olyan összefüggések, amelyek segítségével a homogén termikus jellemzőkkel bíró kőzetbe fúrt lyukban felemelkedő folyadék (általában víz vagy gáz) hőmérsékletét meg lehet határozni. Ilyen összefüggést ismertet BOLDIZSÁR [10]:

$$\tau = \frac{q \cdot c \cdot \sigma}{k \cdot \lambda'} \left(1 - e^{-\frac{k \cdot \lambda' \cdot z}{q \cdot c}} \right). \quad (2)$$

A k tényező

$$k(x) = \frac{8}{\pi} \int_0^{-\infty} \frac{e^{-x \cdot u^2}}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} \frac{du}{u} \quad (3)$$

kifejezésből határozható meg, ahol

$$x = \frac{a \cdot i}{r^2}. \quad (4)$$

A fenti összefüggésekben előforduló tényezőkön túlmenően azonban az olaj áramlási hőmérsékletét lényegesen befolyásolja az a hőátmeneti ellenállás, amelyet elsősorban az olaj-termelőcsőfal közötti belső hőátadás, továbbá a termelőcső és bélésű között nyugvó olajoszlop hővezetőképessége határoz meg. Céljainkra legalkalmasabbnak látszott olyan k -t szorzó C tényező alkalmazása, amely adott kútnál kísérletekből meghatározható. Ha C -t a kút meghatározott q hozamánál kiszámítjuk, úgy az változatlan kútkiképzésnél és viszonylag nagy hozamhatárok között állandó lesz, s más hozamoknál, illetőleg más, de hasonló jellemzőjű kutaknál is alkalmazható.

1. példa. Egyik nagylengyeli kút G_1 napi hozama 5 különböző kútfejnyomásnál a 2. táblázat 22. oszlopa szerint 93,5 ; 147,0 ; 178,5 ; 200,0 ; 231,0 t · nap⁻¹. t_{ki} , a kifolyási hőmérséklet ugyanezen hozamoknál a 2. táblázat 16. oszlopa szerint 69,0 ; 78,3 ; 82,0 ; 83,6 ; 85,0 C°. H_1 a kút mélysége 2108,0 m, L_1 a termelőcső hossza 2017,5 m, d , a termelőcső belső átmérője 0,062 m, σ a geotermikus gradiens $4,24 \cdot 10^{-4}$ C° · cm⁻¹, λ' a kőzet átlagos hővezetőképessége (BOLDIZSÁR szerint) $0,00439$ cal · cm⁻¹ · sec⁻¹ · C°⁻¹, a a kőzet hőmérséklet-vezetőképessége $0,0075$ cm² · sec⁻¹ [11] alapján, a kút a mérés előtt 382 napon át termelt. A 4. képlet szerint

$$x = \frac{0,0075 \cdot 3,3 \cdot 10^6}{3,1^2} = 2575$$

k [12] alapján x értékének megfelelőleg 1,40. A kísérletek alatti átlagos áramlási hőfokot durván 95 C°-ra becsülve, az átlagos fajhő [13] :

$$c = (345 + 0,000886 \cdot 95) \cdot (2,1 - 0,951) = 0,493 \text{ cal} \cdot \text{g} \cdot \text{C}^\circ\text{-}1.$$

Határozzuk meg C értékét pl. a 147,0 t · nap⁻¹ termelés és 78,3 C° kiömlési hőmérséklet alapján, s az így kapott C tényezőt behelyettesítve az alapösszefüggésbe, számítsuk ki a többi hozamnál érvényes kiömlési hőmérsékletet.

147,0 t · nap⁻¹ hozamnál a kiömlési hőmérséklet és a felszíni hőmérséklet közötti különbség a C hőszigetelési tényezővel kiegészített 2. összefüggés szerint :

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \frac{1701 \cdot 0,493 \cdot 4,24 \cdot 10^{-4}}{C \cdot 1,4 \cdot 0,00439} \left(1 - e^{-\frac{C \cdot 1,4 \cdot 0,00439 \cdot 2108 \cdot 10^{-2}}{1701 \cdot 0,493}} \right) = \\ &= \frac{57,85}{C} (1 - e^{-1,545 \cdot C}). \end{aligned}$$

Mivel az évi középhőmérsékletnek megfelelő felszíni talajhőmérséklet 11,0 C°, τ_2 -nek 78,3—11,0 = 67,3 C°-nak kell lennie. Behelyettesítve a fenti egyenletbe, $C = 0,3870$. C ezen értékét

minden adott hozamra felírt egyenletbe helyettesítve, az alábbi összefüggéseket kapjuk :

$$\tau_1 = 95,09 (1 - e^{-0,94005}) = 57,9 \text{ C}^\circ$$

$$\tau_2 = 149,5 (1 - e^{-0,59792}) = 67,3 \text{ C}^\circ$$

$$\tau_3 = 181,5 (1 - e^{-0,49240}) = 70,6 \text{ C}^\circ$$

$$\tau_4 = 203,4 (1 - e^{-0,43947}) = 72,3 \text{ C}^\circ$$

$$\tau_5 = 234,9 (1 - e^{-0,38049}) = 74,4 \text{ C}^\circ$$

A számított és mért értékeket az 1. táblázat foglalja össze :

I. táblázat

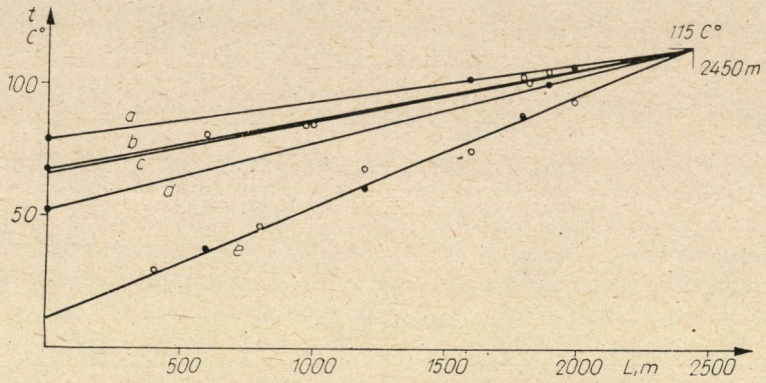
		1	2	3	4	5
τ számított	C°	57,9	67,3	70,6	72,3	74,4
t_{tf}	C°	11,0	11,0	11,0	11,0	11,0
t_{ki} számított	C°	68,9	78,3	81,6	83,3	85,4
t_{ki} mért	C°	69,0	78,3	82,0	83,6	85,0
Δt_{ki}	C°	-0,1	0,0	-0,4	-0,3	+0,4

Az 1. táblázat szerint a mért és számított kiömlési hőmérsékletek jól egyeznek, s ez az eljárás alkalmazhatóságára mutat. A jelen dolgozat alapjául szolgáló kandidátusi disszertáció megírásakor azonban az ismertetett hőmérsékletszámítási összefüggés még nem állt rendelkezésre. A vizsgált kutakban egyszerű, tapasztalati összefüggést határoztam meg :

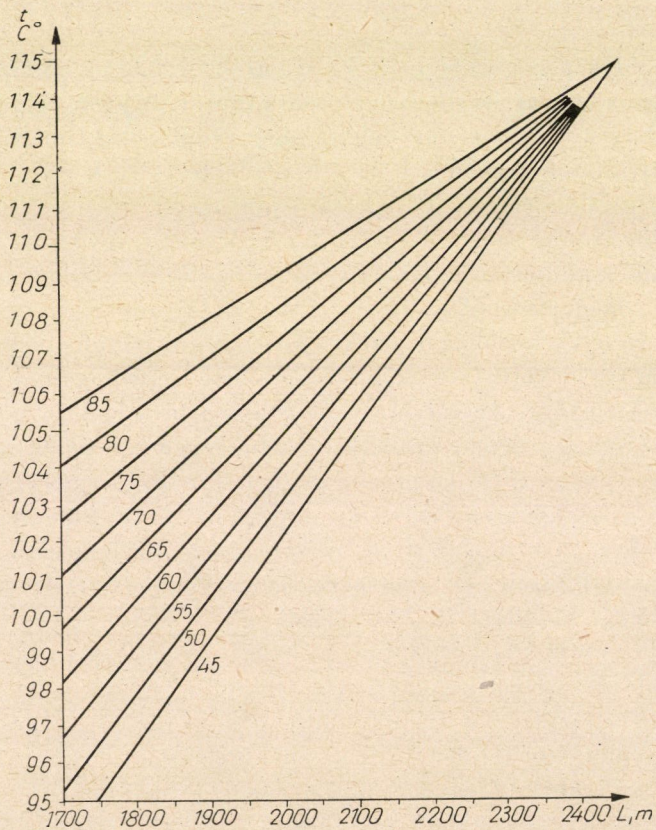
A 3. ábra a nagylengyeli kutak termelőcsövében végzett mélység-hőmérsékletmérések adatait mutatja. Mivel a műszerbeszerelés hatására az áramlási viszonyok megváltoznak, s így az áramló olaj hőmérséklete is csökken, a mérési eredmények közül csak azokat használtam fel, amelyeknél a mérési idő viszonylag rövid volt, és csak 1 felszín alatti s ezzel egyidejű felszíni hőmérsékletmérés történt. Az összetartozó mélységi és kiömlési hőmérsékletek jó megközelítéssel egy egyenesen fekszenek (*a, b, c, d* egyenesek). Az áramlási hőmérsékletösszefüggéseket kiegészíti a mező nem termelő vízkútjaiban mért hossz-hőmérsékletösszefüggés (*c* egyenes). Ha a különböző kiömlési hőmérsékletekhez tartozó $t = \Phi(L)$ egyeneseket meghosszabbítjuk, akkor azok jó megközelítéssel egy pontban metszik egymást. A metszőpontot 2450 m és 115 C° koordináták határozzák meg.

A fenti összefüggések alapján megszerkeszthető a 4. ábrán látható diagram, amelyről a termelőcsőhossz és a kiömlési hőmérséklet ismeretében az áramlási hőmérséklet a termelőcsősarunál közvetlenül leolvasható.

A (2) képlet ismeretében utólag ellenőriztük a 4. ábrán kidolgozott összefüggést. Az 5. ábrán *I.* egyenes az 1. példa 69 C°-os kiömlési hőmérsékletéhez tartozó lineáris, tapasztalati összefüggés. A *II.* görbét az 1. példa adatainak felhasználásával a (2) képlet segítségével számítottuk ki a kúttalpról



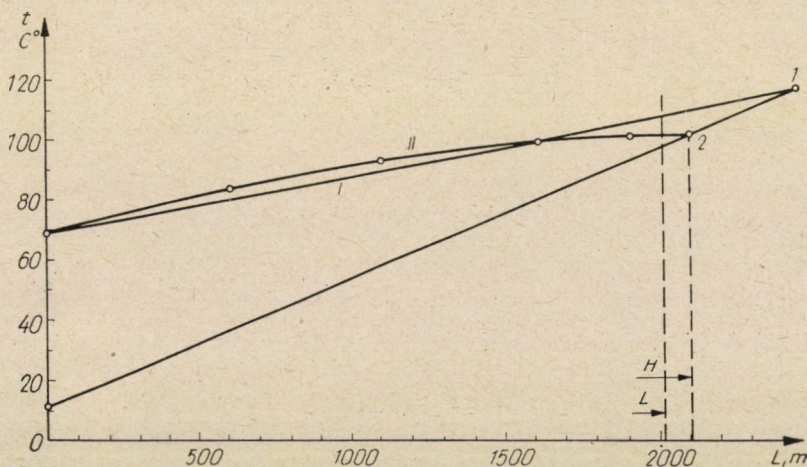
3. ábra



4. ábra

kiindulva. Az átlaghőmérséklet, a felszín és a termelőcsőszaru között mindkét esetben planimetrálással meghatározva 87,8, illetőleg 88,4 C°. A negatív eltérés növekvő kiömlési hőmérsékletnél csökken, majd pozitív irányban nő.

A talpnyomászámításhoz a tapasztalati összefüggés is kielégítő pontosságú alapot ad. Szükséges azonban, hogy a termelési idő előrehaladásával az összefüggéseket időnként tényleges mérésekkel ellenőrizzük.



5. ábra

d) A súrlódási nyomásvesztés meghatározása felszíni adatokból

Folyamatos termelés alatt a kúttalpon uralkodó nyomás

$$p_t = p_L + p_{H-L} + p_s + p'_s + p_T. \quad (5)$$

Ha a II/a alatt elmondottak szerint termelő kutat elzárunk, akkor a termelőcsőfejen nyomáshullám keletkezik. A nyomáshullám lecsillapodása után a termelőcsőfejen kialakuló p_{TZ} nyomás az előbbi változásokhoz képest igen lassan, folyamatosan csökken. (A csökkenés mértékét a kútba zárt olaj kihűlése és a talpnyomás emelkedése határozza meg.) A kútelzárás kezdete és p_{TZ} nyomás beállása között 20–30 mp telik el. Ezen rövid idő alatt a termelőcsőben levő olaj hőmérséklete, valamint a kúttalpon nyomása változatlanak tekinthető.

A p_{TZ} nyomás beállásakor a talpnyomás

$$p_t = p_L + p_{H-L} + p_{TZ}. \quad (6)$$

Az (5) és (6) egyenletek alapján

$$p_s + p'_s = p_{TZ} - p_T = \Delta p_T. \quad (7)$$

A termelőcsőfej nyomáskülönbsége tehát a kútban áramlás közben kialakuló összes súrlódási nyomásvesztéssel egyenlő. A kútelzárás alatt és után a bélés-csőfej nyomása is a termelőcsőfej nyomásához hasonlóan változik, a nyomáshullám amplitudója azonban lényegesen kisebb.

A folyamatos termelésnél adódó p_B és az elzárás után mutatkozó p_{BZ} nyomásokat ismerve

$$p_t = p_{LB} + p_{H-L} + p'_s + p_B \quad (8)$$

és

$$p_t = p_{LB} + p_{H-L} + p_{BZ}. \quad (9)$$

A (8) és (9) egyenletek alapján

$$p'_s = p_{BZ} - p_B = \Delta p_B. \quad (10)$$

A béléscsőfej nyomáskülönbsége tehát a kúttalp és termelőcsősaru közötti súrlódási nyomásvesztéssel egyenlő.

A (7) és (10) egyenletekből következik, hogy

$$p_s = \Delta p_T - \Delta p_B, \quad (11)$$

azaz a termelőcsőben kialakuló súrlódási nyomásvesztés, a kútelzárások a termelőcsőfejen és a béléscsőfejen észlelt nyomásnövekedések különbsége.

e) *A viszkozitással, áramlási hőmérséklettel és súrlódási nyomásvesztéssel kapcsolatban levezetett összefüggések ellenőrzése*

A vizsgált hozamoknál és termelőcsőméretnél az áramlás fonalas volt. A csővezetékben végbemenő áramlás súrlódási nyomásvesztésének számítására általánosan használt

$$p_s = \lambda \frac{l \cdot v^2}{d \cdot 2 \cdot g} \gamma$$

összefüggés tehát — metrikus egységeket használva — az alábbi egyszerűbb alakban fejezhető ki termelőcsőben történő áramlásnál

$$p_s = 0,4807 \cdot 10^{-9} \frac{L \cdot G \cdot \bar{v}}{d^4}. \quad (12)$$

Ha folyamatosan termelő kútnál p_s -t a II/d alatt ismertetett kútelzárási módszerrel határozzuk meg, akkor G , L és d üzemi adatokat ismerve, az áramlási közben kialakuló átlagos viszkozitás kiszámítható. Ha megmérjük a kiömlés-hőmérsékletet és a 4. ábrából a termelőcsősarunál feltételezett áramló olaj-

hőmérsékletet leolvassuk, az átlagos áramlási hőmérséklet a kiömlési és saru-hőmérséklet számtani átlagaként kiszámítható.

A 2. ábrán látható pontok különböző kutak vizsgálati adataiból a fenti módszerrel számított összetartozó $i-\bar{v}$ értékek. A pontok közé húzott átlag-görbe és a laboratóriumokban meghatározott $t-\nu$ összefüggések jó egyezéséből bizonyítottnak látszik, hogy a viszkozitással, az átlagos áramlási hőmérséklettel és a súrlódási nyomásvesztésnek kútelzárásból való számításával kapcsolatos összefüggések helyesek.

III. Az alapösszefüggések alkalmazása

a) Hozambecslés

A (12) képletből kifejezve

$$G = \frac{10^9 \cdot d^4}{0,4807 \cdot \bar{v}} \cdot p_s \cdot \frac{1}{L} = \varepsilon \cdot p_s \cdot \frac{1}{L} \quad (13)$$

d és L adott kútnál ismert. \bar{v} , a mért kifolyási hőmérséklet alapján a 4. ábrából kiszámítható átlagos áramlási hőmérséklet függvényében a 2. ábrából leolvasható. p_s a II/d alatt ismertetett módszerrel rövid kútelzárási adatokból meghatározható.

A (13) képlet ε tényezőjének gyors meghatározására szolgál a 6. ábra. A diagram egyenesseregét a 4. ábra alapján szerkesztettük úgy, hogy a termelőcsőhossz és a kiömlési hőmérséklet függvényében az ordinátán az átlagos áramlási hőmérséklet olvasható le.

Az egyenesseregre rajzolt görbe a 2. ábrán közölt hőmérséklet-viszkozitás-összefüggés alapján a $10^9 \cdot d^4 / 0,4807 \cdot \bar{v}$ kifejezést, azaz az ε tényezőt adja meg a felső abszcisszaléptéken a közepes áramlási hőmérséklet függvényében $2\frac{1}{2}$ ''-os termelőcsőnél.

Ha a kifolyási hőmérsékletet $0,2 \text{ C}^\circ$ és a nyomásokat $0,1$ at pontossággal mérjük, akkor a hozambecslés pontossága $\pm 2\%$. Az eljárás használhatóságának feltétele, hogy a méréskor a hozam állandósult legyen, s a termelőcsőben szennyeződés ne okozzon szelvényssűkülést. Ha a kútfelnyomás a tartályfelteléstől függően ingadozik, akkor a rövid kútelzárást, hőmérséklet- és nyomásleolvasásokat célszerű néhányszor megismételni, s a számításban átlagadatokat használni.

Az eljárás alkalmas arra, hogy

1. a külön nem mért termelő kutak hozamát térfogatmérés nélkül jó megközelítéssel megállapíthassuk,

2. ha később tárgyalat okok miatt egy kút egymást követően különböző átmérőjű fuvókán át termel, s így az állandósult termeléskor megfigyelt kül-

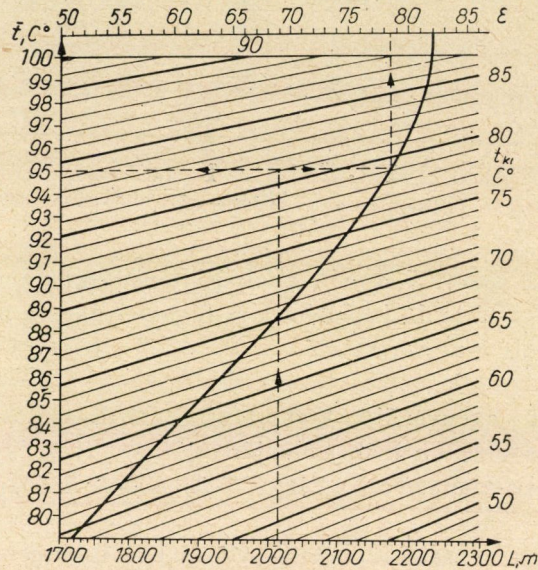
színi nyomás- és hőmérsékletadatok grafikusán kiegyenlíthetők, azaz pontosabbá tehetők, az eljárás feleslegessé teszi a térfogatos hozammérést.

b) Termelési talpnyomás számítása

1. módszer

A felszíntől l m mélységben legyen az áramló olaj hőmérséklete t és nyomása p . Az áramló olaj fajsúlya ekkor az 1. képlet alapján

$$\gamma = \gamma_{15} - \alpha_1(t - 15) + \alpha_2 p. \quad (14)$$



6. ábra

Feltételezve, hogy a termelőcsőben a hőmérséklet lineárisan változik a hosszal, az olaj kiömlési hőmérséklete t_{ki} és σ_0 a hőmérsékleti gradiens az áramló olajoszlopban, akkor

$$t = t_{ki} + \sigma_0 \cdot l.$$

A kapott értéket a (14) egyenletbe behelyettesítve

$$\gamma = \gamma_{15} - \alpha_1(t_{ki} + \sigma_0 \cdot l - 15) + \alpha_2 \cdot p.$$

A sűrűlási nyomásgradiens a (12) képlet szerint az áramló olaj átlagos viszkozitásával egyenesen arányos, azaz az olaj felemelkedése közben alulról felfelé nő. Mivel a gradiens értéke a vizsgált esetekben a hidrosztatikai nyomásgradiensnek mindössze $1/50 - 1/60$ része, s a levezetett eljárást csak a ter-

melőcső-sarunyomás meghatározására alkalmazzuk, a $p_s/L = b$, átlagos sűrűlési nyomásgradiens állandónak tekinthető. Az áramló olajoszlopban érvényes nyomásgradiens a felszíntől l mélységben tehát

$$\frac{dp}{dl} = 0,1[\gamma_{15} - \alpha_1(t_{ki} + \sigma_0 \cdot l - 15) + \alpha_2 \cdot p] + b.$$

Az egyenletet rendezve

$$\frac{dp}{dl} = 0,1[\gamma_{15} - \alpha_1(t_{ki} - 15) + b - 0,1 \cdot \alpha_1 \cdot \sigma_0 \cdot l + 0,1 \cdot \alpha_2 \cdot p].$$

Legyen

$$0,1[\gamma_{15} - \alpha_1(t_{ki} - 15)] + b = A \quad (15)$$

$$0,1 \cdot \alpha_1 \cdot \sigma_0 = B \quad (16)$$

és

$$0,1 \cdot \alpha_2 = F. \quad (17)$$

A differenciálegyenletet megoldva, s az integrálállandót $l = 0$ -nál $p = p_T$ feltétellel meghatározva a termelőcső-sarunál kialakuló termelési talpnyomás meghatározására az alábbi összefüggést kapjuk

$$p_l = (1 - e^{FL}) \cdot \left(\frac{B}{F^2} - \frac{A}{F} \right) + \frac{B}{F} \cdot L + p_T \cdot e^{FL}. \quad (18)$$

2. módszer

Az (5) képletből következik, hogy a termelési talpnyomás a termelőcső-sarunál

$$p_l = p_L + p_s + p_T. \quad (19)$$

A jobboldali képlettagok az alábbiak szerint számíthatók :

$$p_L = 0,1 \cdot L \cdot \bar{\gamma}.$$

A kifolyási hőmérsékletet és a termelőcsőhosszat ismerve, a 6. ábra ordinátáján az átlagos áramlási hőmérséklet leolvasható. A (14) képletből kiszámítható a $\bar{\gamma}$ átlaghőmérsékletű s első megközelítésként atmoszférikus nyomású olaj γ' fajsúlya. Az átlagos nyomás első megközelítésként

$$p' = \frac{0,1 \cdot L \cdot \gamma' + p_T + p_s}{2}. \quad (20)$$

Az átlagnyomás pontosabb ismeretében a (14) képletből pontosabb átlagfajsúly számítható. A közelítő számítással a termelési talpnyomást 0,01 at pontossággal kell kiszámítani.

p_s súrlódási nyomásveszteség vagy kútlezárás-adatok segítségével a (11) képlettel, vagy termelési adatok alapján a (12) képlet segítségével határozható meg. Utóbbi esetben az átlagos viszkozitást a már kiszámított átlagos áramlási hőmérséklet függvényében a 2. ábrából olvashatjuk le.

p_T a termelőcsőfejen elhelyezett nyomásmérőről közvetlenül leolvasható. Ha a tartálynívó-ingadozás miatt a termelőcsőfejnyomás változik, akkor több leolvasásból átlagot határozzunk meg.

2. példa. Kiszámítandó a termelési talpnyomás a termelőcsősaru talpánál, ha a kútjellemzők az alábbiak:

$$\begin{array}{ll} H = L & = 2016,3 \text{ m} & p_T & = 3,0 \text{ att} \\ d & = 2\frac{1}{2}'' \text{ (} d_l = 0,062 \text{ m)} & p_{TZ} & = 6,5 \text{ att} \\ G & = 130 \text{ t} \cdot \text{nap}^{-1} & p_B & = 5,4 \text{ att} \\ t_{kl} & = 79 \text{ C}^\circ & p_{BZ} & = 5,5 \text{ att.} \end{array}$$

1. módszer szerint:

A 4. ábra alapján az olaj hőmérséklete a termelőcsősarunál $108,6 \text{ C}^\circ$. A hőmérsékleti gradiens

$$\sigma_0 = \frac{108,6 - 79,0}{2016,3} = 0,014680 \text{ C}^\circ \cdot \text{m}^{-1}.$$

A súrlódási nyomásveszteség a (11) képlet szerint

$$p_s = (6,5 - 3,0) - (5,5 - 5,4) = 3,4 \text{ at.}$$

A nyomásveszteség (12) képlet szerint is kiszámítható. A 6. ábrából az átlagos áramlás hőmérséklet $93,8 \text{ C}^\circ$. A 2. ábra szerint az átlagos áramlási viszkozitás $0,400 \text{ St}$. Tehát

$$p_s = 0,4807 \cdot 10^{-9} \frac{130 \cdot 2016,3 \cdot 0,400}{0,062^4} = 3,4 \text{ at.}$$

A nyomásgradiens

$$b = \frac{3,4}{2016,3} = 0,001686 \text{ at} \cdot \text{m}^{-1}.$$

A (15), (16) és (17) képletek szerint

$$A = 0,1 (0,951 - 0,00058) \cdot (79 - 15) + 0,001686 = 9,3074 \cdot 10^{-2}$$

$$B = 0,1 \cdot 0,00058 \cdot 0,014680 = 8,51457 \cdot 10^{-7}$$

$$F = 0,1 \cdot 0,000092 = 9,2 \cdot 10^{-6}.$$

A kapott értékeket a (18) képletbe helyettesítve

$$\begin{aligned} p_l = & (1 - e^{9,2 \cdot 10^{-6} \cdot 2016,3}) \left(\frac{8,51457 \cdot 10^{-7}}{9,2^2 \cdot 10^{-12}} - \right. \\ & \left. - \frac{9,3074 \cdot 10^{-2}}{9,2 \cdot 10^{-6}} \right) + \frac{8,51457 \cdot 10^{-7}}{9,2 \cdot 10^{-6}} \cdot 2016,3 + 3,0 \cdot \\ & \cdot e^{9,2 \cdot 10^{-6} \cdot 2016,3} = 190,74 \text{ att.} \end{aligned}$$

2. módszer szerint :

Közelítő átlagos fajsúly (1. képlet atmoszferikus nyomásnál)

$$\gamma' = 0,951 - 0,00058 (93,8 - 15) = 0,9503 \text{ t} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Közelítő átlagos nyomás [(20) képlet] :

$$p' = \frac{0,1 \cdot 2016,3 \cdot 0,9053 + 3,4 + 3,0}{2} = 94,5 \text{ att.}$$

További megközelítésként

$$\gamma'' = 0,951 - 0,00058 (93,8 - 15) + 0,000092 \cdot 94,5 = 0,9140 \text{ t} \cdot \text{m}^{-3}.$$

A közelítő hidrosztatikai nyomás

$$p'_L = 0,1 \cdot 2016,3 \cdot 0,9140 = 184,29 \text{ att.}$$

A közelítő termelőcső-sarunyomás (19. képlet)

$$p'_i = 184,29 + 3,4 + 3,0 = 190,69 \text{ att.}$$

További megközelítésként

$$p'' = \frac{190,69}{2} = 95,34 \text{ att}$$

$$\gamma'' = 0,9053 + 0,000092 \cdot 95,34 = 0,9141 \text{ t} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$p''_L = 0,1 \cdot 2016,3 \cdot 0,9141 = 184,31 \text{ att.}$$

A termelési talpnyomás a termelőcsősarunál

$$p_t = 184,31 + 3,4 + 3,0 = 190,71 \text{ att.}$$

Ha minden kútnál ugyanazt a módszert használjuk, a két számítási eljárás gyakorlati használhatósága ugyanaz. Egyszerűsége miatt a későbbiekben a 2. módszert alkalmazzuk.

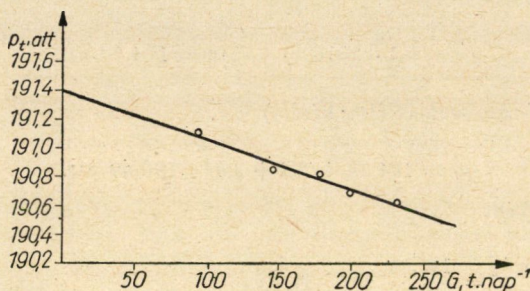
c) A rétegnyomás és termelékenységi index meghatározása

Az iráni Agha-Jari és Haft-Kel olajmezőkben a csekély gáztartalmú olajat termelő kutak rétegnyomását BAKER módszere alapján határozzák meg felszíni adatokból [3]. Az eljárás szerint a kutat a rétegnyomás beállításáig, azaz viszonylag hosszabb időre elzárják, majd a termelőcsőfej alatt összegyűlt, kivált gázt kifuvatják. A rétegnyomás a kifuvadás után mért termelőcsőfejnyomás és a termelőcsőbe zárt olajoszlop számított hidrosztatikai nyomásának összegével egyenlő. BAKER módszerének hátránya, hogy hosszú kútelzárást

igényel. További nehézséget jelent, hogy kútelzárás után a termelőcsőbe zárt olaj a környező közet hőmérsékletére hűl le, amelyet számos tényező, így a II/c alatt tárgyalt körülmények és az elzárási idő befolyásol. Ezen tényezők kvantitatív hatását a nagylengyeli olajmezőben nem vizsgálták.

A rétegyomás meghatározására szolgáló, s az alábbiakban ismertetett négy eljárás alkalmazása külön kútelzárást nem kíván, s a már ismertetett hőmérsékleti összefüggéseken túlmenő hőmérsékleti jellemzők meghatározását nem teszi szükségessé.

1. Ha egy kút több, egymást követő hozamához tartozó termelési talpnyomását a hozam függvényében ábrázoljuk és az összetartozó p_r-G pontokat összekötő hozamgörbét a $G = 0$ abszcissaértékig extrapoláljuk, a kimetszett



7. ábra

ordináta a rétegyomással egyenlő. A 2. táblázat 1—13. oszlopa egyik nagylengyeli olajkút hozamvizsgálatának eredményét mutatja. A kút öt különböző méretű fuvókán át termelt egymást követően, míg a hozamok állandósultak. A kísérleti adatok pontosságának növelésére a p_T , p_s , t_{ki} és G adatokat grafikusán kiegyenlítettük (14—17. oszlop). További korrekciót végeztünk úgy, hogy a III/a módszerrel kiszámítottuk a hozamokat (18—19. oszlop), s tényleges hozamnak a grafikusán kiegyenlített és számított hozamok számtani átlagát vettük (22. oszlop). A kiegyenlítés, illetőleg a korrekció mértékére jellemző, hogy a grafikusán kiegyenlített és a tényleges hozamok eltérésének algebrai összege az összhozam 0,4%-a, a III/a módszerrel számított és grafikusán kiegyenlített hozamok eltérésének algebrai összege az összhozam 2,1%-a.

A 3. táblázat a III/b—2 módszerrel számított termelési talpnyomások számítási adatait tartalmazza. A 6. oszlop a 2. táblázatban közölt, grafikusán kiegyenlített p_s és p_T nyomások összege.

A 7. ábra a 2. táblázat 22. oszlopában megadott hozamok függvényében ábrázolja a 3. táblázat 10. oszlopában található termelési talpnyomásokat. A számított pontok igen jó megközelítéssel egy egyenes mentén fekszenek. $G = 0$ értéknél kapott ordinátametszet a p_r rétegyomás, amely 191,4 att-val egyenlő.

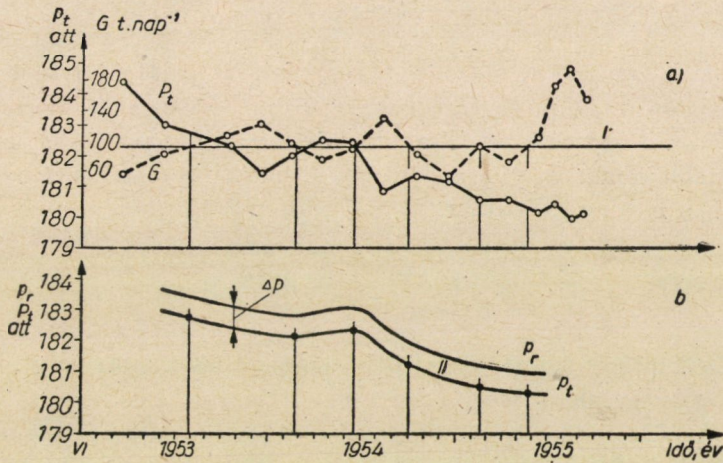
A termelékenységi index tetszés szerinti két diagrampont koordinátái alapján felírható :

$$PI = \frac{200 - 0}{191,40 - 190,70} = 286 \text{ t} \cdot \text{nap}^{-1} \cdot \text{at}^{-1}$$

s a hozamgörbe egyenlete

$$G = 286 (191,4 - p_t).$$

2. A rétegyomás — régi nyomásmérési adatok hiányában — megköze-
lítően, egyes kutaknál visszamenőlegesen is meghatározható termelési adatok-
ból. A nagylengyeli olajmező adottságait figyelembe véve (az olajat repedéses



8. ábra

mészkből termelik, a telepben gáz nem válik ki) a nem vizes kutak termelé-
kenységi indexe változatlanoknak tekinthető. Az ilyen kutaknál a kúttal-
kiképzés, illetőleg esetleges kúttalpkézelés időpontjáig visszamenőleg, közelítő
rétegyomás az alábbi megfontolás alapján határozható meg :

A vizsgált időszak termelési statisztikájából ismert a kutak hozama,
a termelőcső méretei, a termelőcsőfej nyomása és a kifolyási hőmérséklet.
Különböző időpontokban kiszámítható ezen adatok segítségével a III/b—2
módszer alapján a termelési talpnyomás. A 8/a ábra a különböző időpontok-
ban összetartozó p_t termelési sarunyomásokat és G hozamokat ábrázolja.
A hozamgörbét az abszcisszával párhuzamosan húzott I egyenes több, azonos
hozamú időpontban metszi. Mivel a termelékenységi index állandó, a metszés-
pontokra vonatkozólag felírható

$$G = PI(p_{r1} - p_{t1}) = PI(p_{r2} - p_{t2}) = \dots = PI(p_{rn} - p_{tn}).$$

A fenti egyenletből

$$p_{r1} - p_{t1} = p_{r2} - p_{t2} = \dots \quad \dots = p_{rn} - p_{tn} = \frac{G}{PI},$$

azaz a vizsgált időpontokban a depresszió állandó. Ha a vizsgált kút termelékenységi indexét aktuális hozamvizsgálat alapján a III/c—1 módszerrel meghatározzuk, akkor a metszéspontoknak megfelelő azonos hozamhoz tartozó $\Delta p = \frac{G}{PI}$ depresszió meghatározható.

A 8/b ábrán látható II görbe az azonos G hozamokhoz tartozó p_r -ket összekötő termelési talpnyomásgörbe. Ha ezen görbét Δp értékekkel függőlegesen felfelé eltoljuk, akkor megkapjuk a vizsgált időszakban a rétegnyomás változását.

3. Akkor, ha a kút aktuális rétegnyomását a III/c—1 módszer segítségével egyszer már meghatároztuk, s azóta a kút nem vizesedett és a kúttalpat nem kezelték, a későbbiekben a rétegnyomás a mindenkori termelési talpnyomás és a termelékenységi index ismeretében bármikor, termelés közben meghatározható a

$$p_{rx} = \frac{G_x}{PI} + p_{tx}$$

összefüggés alapján, ahol G_x aktuális hozammérésből kapott érték, p_{tx} a III/b eljárásokkal határozható meg.

A 3. módszer az előzőtől csak abban különbözik, hogy pontossága nagyobb, mivel a számítást nem a termelési statisztika ilyen célra nem mindig kielégítő pontosságú adatai alapján, hanem a megfelelő időpontban végzett pontos külszíni mérések adatait felhasználva végezzük.

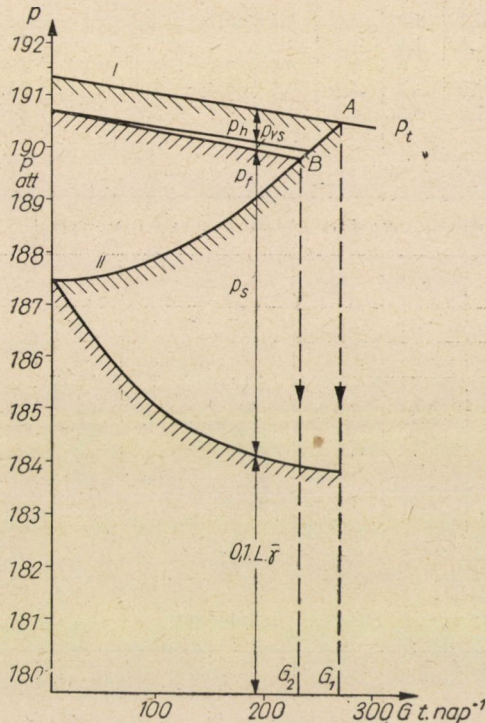
4. Olyankor, ha a mezőben olajtermelésre alkalmas, de hosszabb idő óta elzárt megfigyelőkutak vannak, és ezek körül a termelés folyamán kialakult „hőköpeny” megszűnik, akkor a kútba zárt olaj hőmérséklete a geotermikus gradiens segítségével számítható. A rétegnyomást ekkor a III/b eljárás segítségével, $p_s = 0$ feltételezéssel, meghatározhatjuk.

IV. Általános áramlási összefüggések

a) Azonos méretű termelőcsőnél

Különböző méretű fuvókák használatával végzett hozamvizsgálat adatai alapján szerkeszthető meg a nyomásfelhasználási diagram. A 9. ábra a 2. és 3. táblázatokban közölt kísérleti, illetve korrigált és extrapolált adatok fel-

használásával szerkesztett nyomásfelhasználási diagramot ábrázolja. Az *I* hozamgörbe a termelési talpnyomásnak a hozammal való változását mutatja. *II* a kút belső nyomásfelhasználási görbéje, amely a kútban áramló olajoszlop hidrosztatikai nyomása és súrlódási nyomásvesztése összegének a hozammal történő változását ábrázolja. A réteg és a kút működésére jellemző két jelleggörbe hasonló a csővezetéken át felfelé szállító centrifugális szivattyú és vezeték jelleggörbéihez.



9. ábra

A tárolóréteg fizikai és telítettségi viszonyaitól függő hozamgörbe a centrifugális szivattyú szerkezeti adottságaitól függő fojtási görbének, a kút belső nyomásfelhasználási görbéje a centrifugális szivattyúhoz kapcsolt csővezeték ellenállásgörbéjének felel meg.

A két „vezeték görbe” közötti különbség az, hogy a centrifugális szivattyúval történő szállításkor a hidrosztatikai nyomás és a viszkozitás a szállított folyadék mennyiségétől általában független, állandó, olajkútnál viszont a növekvő hozamokkal emelkedő olajhőmérséklet miatt a hidrosztatikai nyomás és a folyadékviszkozitás csökken. Az ellenállás görbe tehát másodfokú parabola, a nyomásfelhasználási görbe analitikusan nem fejthető ki.

2. táblázat

Kísérleti adatok												
d	P _T			P _B			P _S	t _{ki}	Q	t _{ta}	γ _{ta}	G
	P _T	P _{TZ}	ΔP _T	P _B	P _{BZ}	ΔP _B						
mm	att	att	at	att	att	at	at	C°	m ³ · nap ⁻¹	C°	t · m ⁻³	t · nap ⁻¹
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
9	3,1	6,3	3,2	4,0	4,1	0,1	3,1	69	91,2	55	0,928	84,6
12	2,4	6,5	4,1	4,2	4,5	0,3	3,8	78	152,6	68	0,920	140,4
15	2,0	7,0	5,0	4,3	4,5	0,2	4,8	82	188,8	69	0,920	173,7
18	1,6	7,0	5,4	4,3	4,7	0,4	5,0	84	232,7	73	0,917	213,4
f. nélk.	0,8	7,0	6,2	4,5	4,9	0,4	5,8	84	246,4	77	0,915	225,5

d	Grafikusan kiegyenlített adatok				Számított adatok		Hozameltérés		Korrigált hozam
	P _T	P _S	t _{ki}	G	ε	G	(17)–(13)	(19)–(17)	(19)+(17) 2
mm	att	at	C°	t · nap ⁻¹	—	t · nap ⁻¹	t · nap ⁻¹	t · nap ⁻¹	t · nap ⁻¹
1	14	15	16	17	18	19	20	21	22
9	3,1	2,9	69,0	90	67,8	97	+ 5,4	+ 7	93,5
12	2,4	4,0	78,3	142	76,5	152	+ 1,6	+ 10	147,0
15	2,0	4,6	82,0	177	79,1	180	+ 3,3	+ 3	178,5
18	1,6	5,0	83,6	202	80,0	198	—11,4	— 4	200,0
f. nélk.	0,8	5,8	85,0	230	10,7	232	+ 4,5	+ 2	231,0

3. táblázat

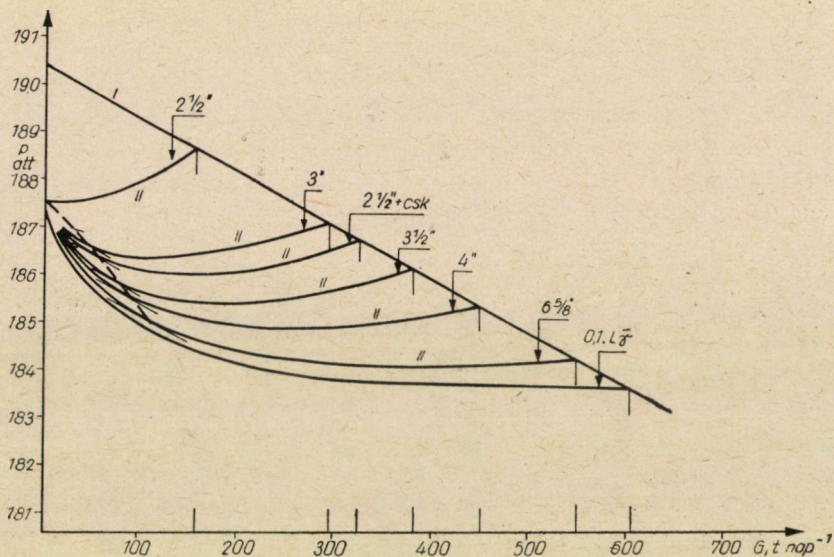
d	t _{ki}	i	γ'	0,1 · L · γ	P _S + P _T	(5)+(6) 2	γ*	0,1 · L · γ	P _t
mm	C°	C°	t · m ⁻³	at	att	att	t · m ⁻³	at	att
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
9	69,0	88,0	0,9087	183,3	6,0	94,7	0,9175	185,11	191,15
12	78,3	93,4	0,9055	182,7	6,4	94,6	0,9143	184,46	190,86
15	82,0	95,5	0,9043	182,4	6,6	94,5	0,9131	184,22	190,82
18	83,6	96,5	0,9037	182,3	6,6	94,5	0,9125	184,10	190,70
fn.	85,0	97,3	0,9033	182,2	6,6	94,4	0,9121	184,02	190,62

* γ értékei kétszeres megközelítéssel vannak kiszámítva.

A két jellegzőrbe metszéspontja centrifugális szivattyúnál a munkapontot, olajkútnál az adott termelősővel elérhető legnagyobb G₁ kúthozamot határozza meg. Kisebb hozamokat mindkét esetben fojtással lehet beállítani.

A 9. ábrán látható, hogy a külszíni vagy külső ellenállás a fuvóka által létrehozott nyomásvesztéséből (p_f), a folyóvezetékben létrejövő súrlódási nyomásvesztéséből (p_{vs}), továbbá a folyóvezeték és tartályban levő olajoszlop hidrosztatikai nyomásából tevődik össze. Az ábrából kitűnik, hogy az A munkaponthoz tartozó legnagyobb G_1 hozam csak külső ellenállás nélküli termelésnél, azaz az olajnak a kútszájon teljesen szelvényen át történő szabad kiömlésekor várható. Az adott külszíni berendezéseknél a tartályállomásra szállítható legnagyobb folyadékhozam G_2 .

A nyomásfelhasználási diagram lehetővé teszi annak meghatározását, hogy a külszíni berendezések tervezett megváltoztatásával (pl. vezetékátmérő



10. ábra

növelése, vezetékiszigetelés, vezetékmelegítés, tartályáthelyezés stb.) milyen mértékű hozamnövekedésre számíthatunk.

A termelékenységi index változatlansága miatt a rétegnomás csökkenésekor várható üzemviszonyokat előre kiszámíthatjuk, ha a hozamgörbét a csökkent rétegnomásértékig önmagával párhuzamosan függőlegesen eltoljuk. Így pl. előre meghatározható az a rétegnomás, amelynél a felszálló termelés megszűnik.

b) Különböző méretű termelőcsöveknél

Feltételezve első megközelítésként, hogy a $2\frac{1}{2}$ "-os termelőcsövön át történő termelésre meghatározott $\bar{i} = f(G)$ összefüggés más méretű termelőcső alkalmazásakor is érvényes, a belső nyomásfelhasználási görbe különböző méretű termelőcsövekre is megszerkeszthető (10. ábra). Abban az esetben,

ha korrózió és erózióvesztély nincsen, adott méretű termelőcsőnél a hozamnövelés kézenfekvő módja a csőközön át is való termelés. A súrlódási nyomásvesztés ekkor az alábbi megfontolás alapján számítható ki:

Közös termelésnél a kútfej és a termelőcsősaru magasságában a nyomás mind a termelőcsőben, mind a csőközben azonos, azaz a súrlódási nyomásvesztés mindkét térben való áramlásnál egyenlő. Ha tehát a kút hozama G , a termelőcsőben G_T , a csőközben $G - G_T$ folyadékmenyiség áramlik, azaz*

$$0,4807 \cdot 10^{-9} \frac{G_T \cdot L \cdot \bar{v}}{d^4} = 0,4807 \cdot 10^{-9} \frac{(G - G_T) \cdot L \cdot \bar{v}}{d_e^4} \cdot \Phi \left(\frac{d_k}{D} \right) x.$$

A fenti egyenlőségből következik, hogy

$$G_T = \frac{G}{\frac{1}{\Phi \left(\frac{d_k}{D} \right)} \cdot \left(\frac{d_e}{d} \right)^4 + 1}.$$

Például 2 1/2''-os termelőcső és 6 5/8''-os bélésűcső esetén $G_T = 0,38 G$.

Ha a 10. ábrán látható nyomásfelhasználási görbékhez a hozamgörbével párhuzamosan érintőket húzunk, akkor az érintési pontoknak megfelelő abszcisszaérték és $G = 0$ közötti hozamok kitermeléséhez olyan külső ellennyomások szükségesek, amelyekkel azonos külső ellennyomások az érintési ponttól jobbra eső szakaszon is vannak. Az érintési ponttól balra eső szakaszt — ugyancsak a centrifugális szivattyúk üzemével való hasonlóság miatt — labilis szakasznak nevezhetjük. Bár a labilis szakasz határára vonatkozólag pontos kvantitatív ellenőrző vizsgálatokat nem állt módunkban végezni, a megfigyelések azt mutatták, hogy a kutak termelése kis hozamoknál ingadozó, nem szabályozható, labilis. A labilis szakasz hossza, mint ahogyan az a 10. ábrából is leolvasható, annál nagyobb, minél nagyobb hidraulikus sugarú szelvényen át termelünk. Ugyancsak megállapítható, hogy a labilis szakasz hossza nagyobb, nagyobb termelékenységi indexű, azaz laposabb hozamgörbéjű kutaknál. A megállapított összefüggés világosan mutatja, hogy az eddigi felfogással szemben gáztalan olajat termelő kutaknál nem feltétlenül a „minél nagyobb átmérőjű termelőcső” biztosítja a kedvezőbb üzemviszonyokat. Ha a kút hozamát megadott határokon belül szabályozni akarjuk, akkor az lesz az egyedül helyes termelőcsőméret, amellyel a minimális hozam a labilis szakaszon kívül termelhető, s amely kút a termelőcsővön és a csőközön át történő együttes termeléskor a legnagyobb kívánt hozamot is szállítani tudja.

* $\Phi \left(\frac{d_k}{D} \right)$ kiszámítására vonatkozólag lásd [14].

A (2) képlet szerint nagyobb átmérőjű termelőcsőnél az azonos hozamhoz tartozó átlagos áramlási hőmérséklet némileg csökken. Ez a belső nyomásfelhasználási görbéket kissé módosítja, homorúbbá teszi, a labilis szakasz határa és az együttes termelés munkapontja balra tolódik. A $\bar{i} = f(G)$ összefüggés változatlanul való elfogadása tehát különböző méretű termelőcsőveknél biztonságot ad a labilis szakasz megállapításában. A biztonság mértékének számszerű vizsgálatát az ehhez szükséges kútkiképzések hiánya miatt elvégezni még nem tudtuk.

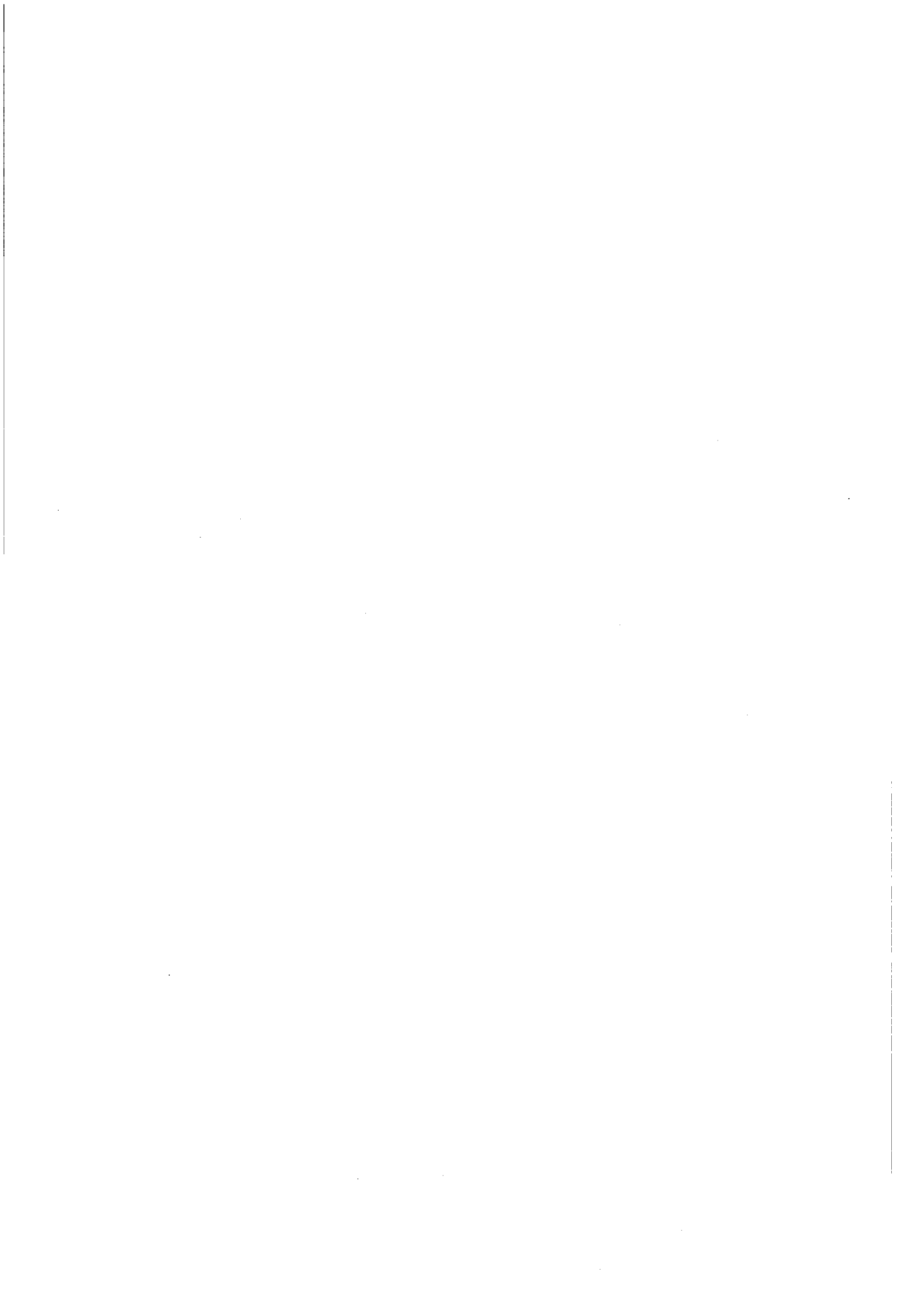
IRODALOM

1. W. E. GILBERT: Flowing and Gas-lift Well Performance. Drilling and Production Practice. 1955.
2. I. M. MURAVJEV—A. P. KRILOV: Kőolajtermelés. Nehézipari Könyvkiadó. 1950.
3. W. J. BAKER: The Application of Surface Observation. Proceedings Third World Petroleum Congress. Section II. 1951.
4. D. L. KATZ: Prediction of the Shrinkage of Crude Oils. Drilling and Production Practice. 1942.
5. KÁROLYI ÁRPÁD: PVT-mérések és kiértékelésük új metodikája. Bányászati Lapok. 1957, 7—8. sz.
6. CH. JAEGER: Technische Hydraulik. Verlag Birkhäuser, Basel. 1949.
7. A. P. SZILAS: Bestimmung des Druckkoeffizienten aus den Betriebsdaten der Ölsonde. Bányamérnöki és Földmérőmérnöki Karok Közleményei. 1958 (sajtó alatt).
8. GRÁF LÁSZLÓ: A nagylengyeli kőolaj viszkozitása és fajsúlya. Kiadatlan vállalati jelentés. 1954.
9. A. J. NAMIOT: Izmerenje temperaturi po sztvolu ekszpluatirujusciszsja szkvazsiny. Nyeftannoje Hozjajsztvo, 1955, 5. sz.
10. T. BOLDIZSÁR: The Distribution of Temperature in Flowing Wells. American Journal of Science, 1958 ápr.
11. E. S. L. BEALE, A. C. HARTLEY, W. D. J. VAN DICK, VAN WIK: Heat Loss from Buried Oil Pipelines. The Science of Petroleum. Oxford University Press. 1938.
12. J. C. JAEGER and CLARKE MARTHA: A short table of $\int_0^{\infty} \frac{e^{-xu^2}}{J_0^2(u) + Y_0^2(u)} \cdot \frac{du}{u}$ Proc. Roy. Soc., Edinburgh. 1942.
13. G. A. PEKTYEMIROV: Ásványolajtelepi kézikönyv. Nehézipari Kiadó. 1951.
14. I. G. KNUDSEN, D. L. KATZ: Fluid Dynamics and Heat Transfer. Mc Graw-Hill Book Company. 1958.

ÖSSZEFOGLALÁS

Olyan nagy termelékenységű olajkutaknál, ahol az áramlás a termelőcsőben egyfázisúnak tekinthető, a felszín alatti kútnyomások felszíni adatokból pontosabban és gyorsabban határozhatók meg, mint felszín alatti mérésekből. Felszíni adatok alkalmazhatóságának feltétele, hogy az olaj fizikai jellemzőit és a kútban felemelkedő olaj hőmérsékletváltozásának törvényszerűségeit ismerjük, s megfelelő számítási összefüggések álljanak rendelkezésre. A szerző mind a számításához szükséges alapadatok meghatározására, mind pedig a felszíni adatok használatára újszerű összefüggéseket közöl. Az összefüggések helyességét nagylengyeli olajkutakban végzett kísérletek adataival bizonyítja.

A mérési és számítási eljárás ezen túlmenően lehetővé tette a gáztalan olajat termelő kutak üzemviszonyaival kapcsolatos ismeretek jelentős kibővítését, ami elsősorban a kút felszállási idejét meghosszabbító termelőcsőméretezést teszi lehetővé.



A BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM VÍZGÉPEK TANSZÉKÉNEK KAVITÁCIÓS ANYAGRONCSOLÓ BERENDEZÉSE

FÁY CSABA *

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM VÍZGÉPEK TANSZÉKE]

[Beérkezett 1958. november 25-én]

Bevezetés

A vízgépek szerkesztése során világszerte kialakult az a felfogás, amely a vízgépek kismértékű kavitációját megengedettnek tekinti. Ahol a kavitációs károk várhatóak, ott az alkatrészt olyan anyagból készítik, amely kavitációval szemben jobb ellenállóképességű.

A hazai gyárak (vízgépgyárak, hajógyárak) az irodalomban fellelhető adatokra támaszkodtak. A fejlődés során azonban új (nitridált-titánacél stb.) acél ötvözetek, műanyagok kerültek felhasználásra. Ezek ellenállóképességének vizsgálatához hazai kavitációs anyagroncsoló berendezést építettünk.

E közlemény csak a berendezést ismerteti; nem terjed ki az anyagvizsgálati eredmények leírására, mert azt a Mechanikai Technológiai Tanszék fogja az anyagjellemzőkkel és egyéb anyagvizsgálati jellemzőkkel kiegészítve közölni. Noha a szakirodalom az ilyen berendezésekre vonatkozóan sok adatot közöl, vannak olyan hézagok, amelyek újra megoldása mindenütt problémát okozhat és ezért ezek leírása általános érdeklődésre tarthat számot.

A berendezés létesítése

A berendezés *magnetostrikiós* rendszerű. A magnetostrikiós elv szerint működő kavitációs anyagroncsoló készüléket NOLTINGK és NEPPIRAS [3, 4] elmélete nyomán, BERGMANN [1], KORNFELD [5], KERR [7] és NOWOTNY [8] munkáiban leírt gyakorlati útmutatások felhasználásával terveztük. A nikkelső kiválasztásában a *Nickel Company* [2] kiadványában foglaltakat vettük figyelembe. A közlemények azonban részint különféle adatokat adnak meg, részint nem közlik a berendezések valamennyi jellemzőjét. A közelmúltban az Amerikai Egyesült Államokban e berendezések szabványosítását kezdeményezték, hogy a különböző intézetekben végzett roncsolások adatai egymással összehasonlíthatók legyenek. Ezért a szabványosításra vonatkozó közle-

* A berendezés létesítésében közreműködött FÜZY Olivér egyetemi adjunktus, GEREY Tamás egyetemi adjunktus, BENKŐ Gábor kutatómérnök, TARI László okl. gépészmérnök és BÉRCZY Sándor vez. techn.

ményben [6] közölt adatokhoz mi is tartottuk magunkat. Mivel ez a közlemény csak az 1958. évben jelent meg s ekkor a már meglevő berendezést kellett átalakítanunk, a mi készülékünk néhány részletében eltér a szabványban leírttól.

A berendezés leírása •

A berendezés fő részei :

1. Elektromos rész, amely a kívánt frekvenciájú és erősségű mágneses teret előállítja.
2. Mechanikai rezgést végző nikkelcső, folyadéktartállyal, megfelelő hűtéssel és hangszigeteléssel.
3. Próbadarab, befogószerkezettel, mérőberendezéssel.

1. Elektromos rész (1. ábra)

A berendezés kapcsolását az 1. ábrán mutatjuk be. A berendezés a 220 V-os váltakozóáramú hálózatra és a 110 V-os egyenáramú hálózatra csatlakozik.

A nikkelcsövet körülvevő tekercsre egyfokozatú, két párhuzamosan kapcsolt OQQ 151/3000 jelű adócsővel működő öngerjesztett oszcillátorral csatlakozunk. Az oszcillátor áramszükségletét két db 4QO25 jelű higanygőz egyenirányítóból alkotott kétoldalas anódpótló adja. A nikkelcsövet előfeszítő mágneses teret a külső egyenáramú hálózatról tápláljuk.

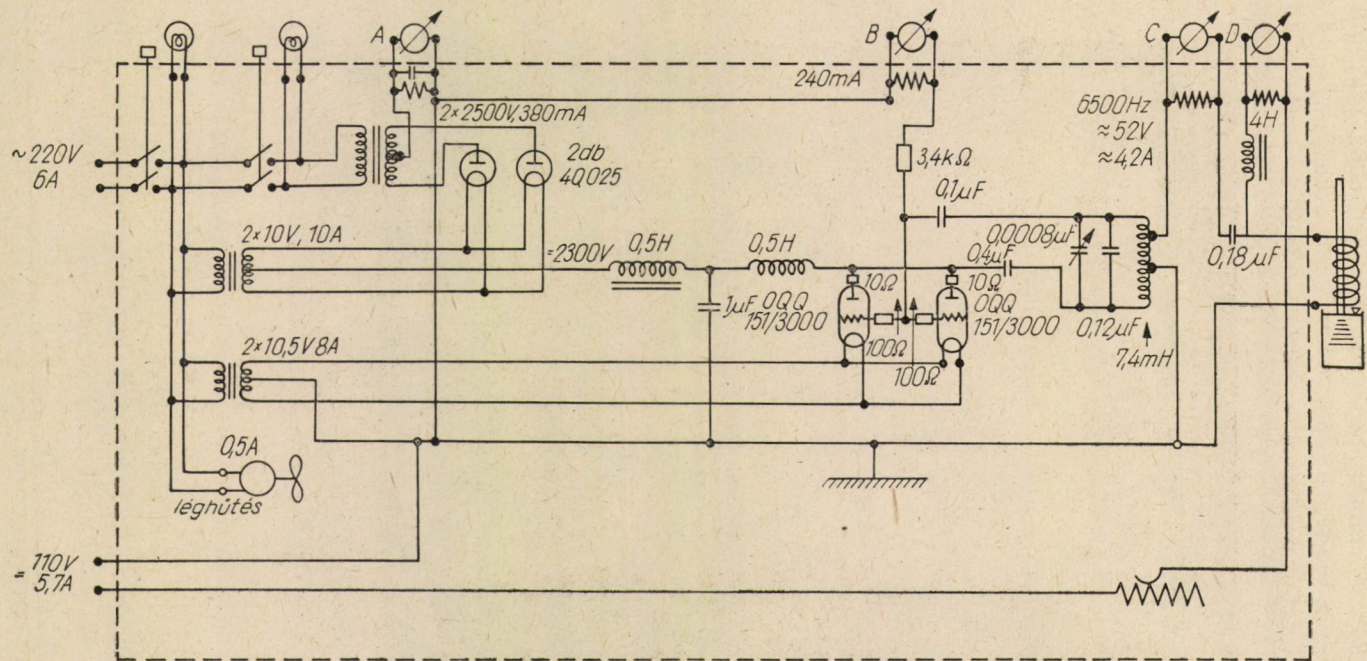
A villamos részben üzemszerűen mérjük : A) az anódáramot, B) a rácsáramot, C) a kimenő hangfrekvenciás áramot és D) az előmágnesező egyenáramot.

A berendezés utólagos nagyobb teljesítményűre történt átalakítása hűtő ventilátor beszerelését tette szükségessé.

A nikkelcsövet mágnesező tekercset sokszor két tekercsre bontják szét : külön végzik az előmágnesezést (előfeszítést), külön a rezgetést. Mi egy tekercset használunk, amelyet a nagy áramerősség miatt részszalagból készítettünk. A berendezés tartós üzeme alatt a tekercs erősen melegedett ($\frac{1}{2}$ óras üzem után $80-100\text{ C}^\circ$ -os volt). A hűtés megoldására a tekercset olajfürdőbe helyeztük s a keringetett olajat hűtöttük. Ezzel elértük, hogy a berendezés egésznapos üzeme ($\frac{1}{2}$ óránként 8 perc megszakítás a próbadarab lemérésére) alatt a tekercs üzemi hőfoka 40 C° körül maradt.

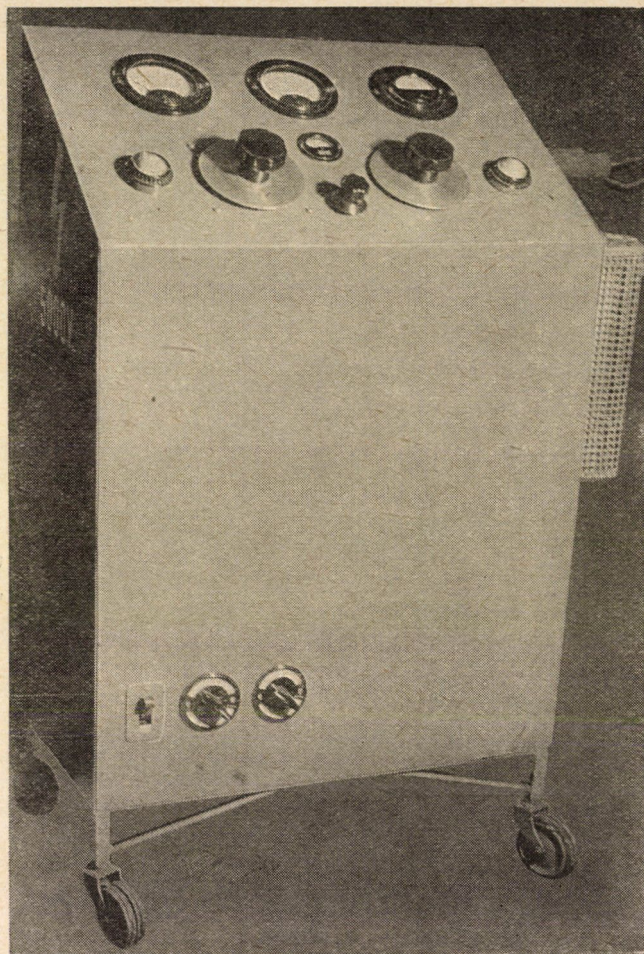
2. Rezgőberendezés

A villamos rezgést mechanikai rezgéssé a nikkelcső alakítja át a magnetostrikiós effektus alapján. A nikkelcső a szabványos követelményeknek megfelelően készült [6]. Kísérleteztünk felhasított nikkelcsővel is, de az eredmények gyakorlatilag megegyeztek a felhasítatlan csővel. A csövet mindkét



1. ábra

esetben kellett hűteni, aminek megoldása ép csővel sokkal kényelmesebb volt. A cső közepében a fenéig lenyúló 6 mm belső átmérőjű csővel szívtuk el vízszugár légszivattyú segélyével a hűtővíz-levegő keveréket. A hűtővizet



1. kép

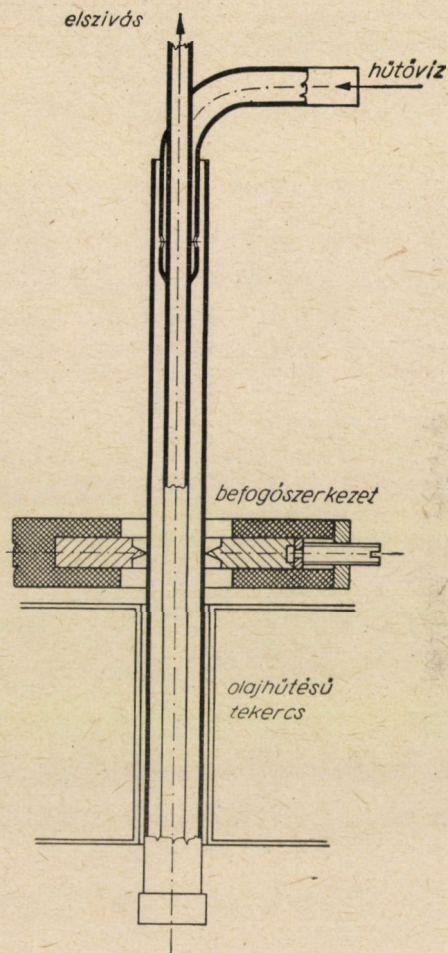
pedig állandó nyomással folytattuk ki az elszívócső köré szerelt köpenyből 8 db 1 mm átmérőjű nyíláson (2. ábra).

A próbadarabbal felszerelt nikkelcső súlypontjában van felfüggesztve bakelitbe ágyazott köríves éles rézcsúcsok közé, amelyeket csavarral lehet összefeszíteni. A mágneses teret előállító tekercs a nikkelcső megfogása és a próbadarab között van.

A próbadarab a szabványos előírásoknak megfelelően 3,2 mm-re merül a 90 mm belső átmérőjű üvegedényben elhelyezett desztillált vízbe. Az edény

feneke a próbadarabtól 114 mm-re van. A folyadék egy mérési periódus ($\frac{1}{2}$ óra) alatt 3 C° -ot melegszik, ezért hűtéséről gondoskodtunk.

A 6500 Hz-en szabványos amplitudóval rezgő berendezés igen éles füttyülő hangot ad, amely a kezelőszemélyzetnek rendkívül kellemetlen. Ezért a nikkel-



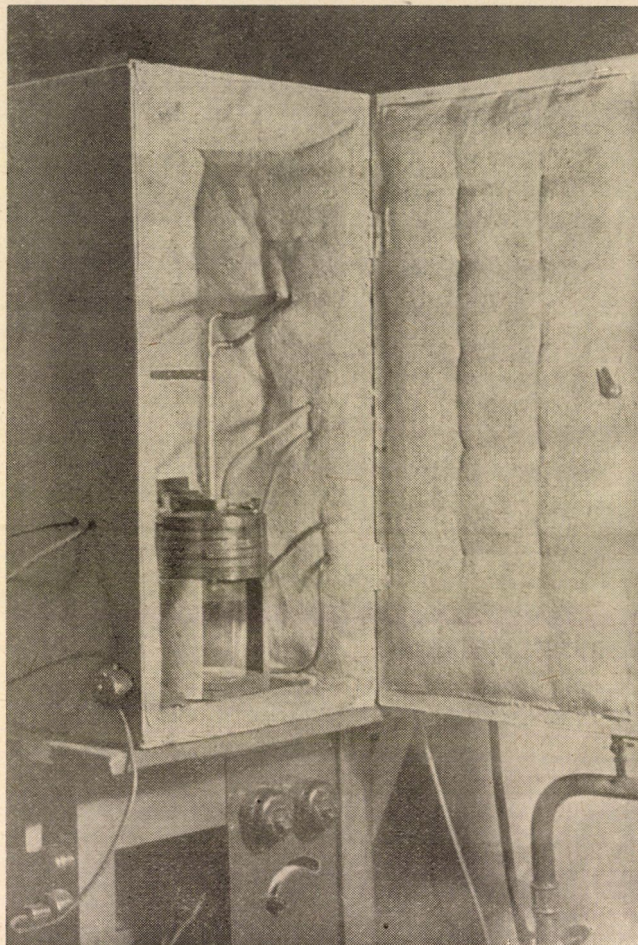
2. ábra

csövet a tekercssel, folyadékkal együtt egy vattával bélelt faláda belsejében helyeztük el (2. kép). A próbadarab felületén megfigyelhető kavitációs buborék láthatóvá tételére a hangszigetelő ládában megfelelő megvilágításról is gondoskodtunk.

A hangszigetelő ládán kívül vannak elhelyezve a tekercs olajfürdő-nikkelcső és vízfürdő-hűtés segédberendezései.

3. Próbadarab és mérőberendezés

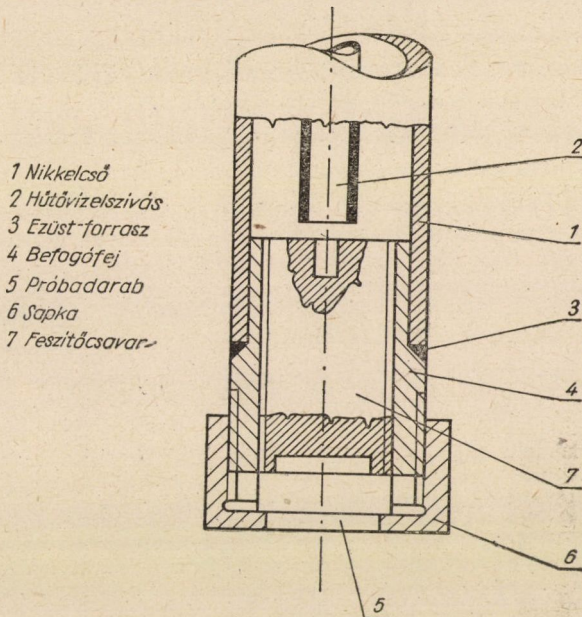
A próbadarab kiképzésével eltértünk a szabványostól. A szabványos próbadarabra rá munkált menet ugyanis ki- és becsavarás közben megsérülhet, ami súlyvesztést jelent. Nincs ezen kívül a szabványos próbadarab bizto-



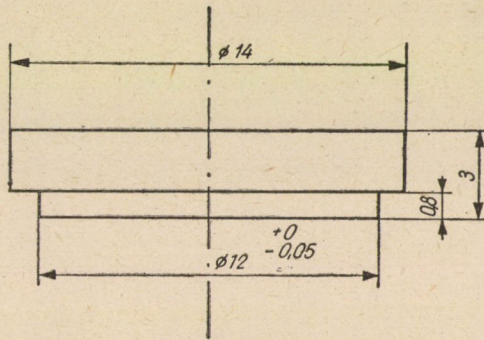
2. kép

sítva üzem közbeni kicsavarodás ellen. Végül a szabványos próbadarab súlyához képest a relatív súlyvesztés kicsi, nehéz mérni. Ezért újszerű megoldást alkalmaztunk (3. ábra). A próbadarabot 3 mm vastag anyagból készítjük. Ezzel lemezanyagokból vett mintát is lehet vizsgálni. A próbadarab illesztett vállal ül bele a sapkába, amelyet igen finom (M 16 × 0,25) menettel csavarunk a nikkelcsőbe ezüsttel forrasztott befogófejre. A sapkát kézzel húzzuk meg.

Biztosítása a befogófej belsejében elhelyezett csavarral történő ellenfeszítéssel történik. A befogófej súlya a próbadarabbal együtt a szabvány szerinti 37 g. A próbadarab súlya kb. 3,5 g. A próbadarab beszerelése biztosítja a feszültségmentességet a roncsolásnak kitett felületen.



3. ábra



4. ábra

A próbadarab méreteit a 4. ábrán adjuk meg.

A próbadarab súlyát és súlyvesztését analitikai mérleggel határozzuk meg, amelynek mérési pontossága: $0,5 \cdot 10^{-4}$ g. A kavitáció szempontjából legellenállóbb anyagokon végzett roncsolásaink eredménye szerint a $4 \times 1/2$ órás periódus alatt leroncsolt legkisebb anyagmennyiség: 10^{-3} g, tehát a súlymérés legrosszabb esetben 5% hibájú lehet. Tekintve, hogy anyagonként több próba-

darabot vizsgálunk, amelyek általában nem teljesen egyeznek, ez a pontosság elfogadható. Ha nagyobb pontosságra törekszünk, a roncsolási időt meghosszabbítjuk.

A roncsolt nyílás mélységét is meg szoktuk mérni ellenőrzésképpen oly módon, hogy a próbadarabot $300\times$ -os nagyítású fémmikroszkóp tárgylencséje alá helyezzük. A felszín képét élesre állítjuk a roncsolatlan részen, majd a mikroszkóp tárgylencsét a roncsolt nyílás fölött lejjebb süllyesztve a képet élesre állítjuk a roncsolt nyílás fenekén. A tárgylencse lesüllyedését a két beállítás között $1/100$ mm beosztású indikátor óráról olvashatjuk le. A kavitációnak legellenállóbb anyagok központi roncsolt nyílásának mélysége 2 óra roncsolási idő után kb. 0,2 mm. Ennek mérésében elkövetett relatív hiba 2,5% (feltételezve, hogy az indikátor órát egy fél osztás pontossággal tudjuk leolvasni).

IRODALOM

1. BERGMANN : Der Ultraschall. 5. kiadás. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 1949.
2. The Magnetic Properties of the Nickel-Iron Alloys. The Mond Nickel Company LTD kiadványa (tanulmánygyűjtemény).
3. NOLTINGK and NEPPIRAS : Cavitation Produced by Ultrasonics : Proc. Phys. Soc. B. 63. 1950. 674. o.
4. NEPPIRAS and NOLTINGK : Cavitation Produced by Ultrasonics : Theoretical Conditions for the Onset of Cavitation. Proc. Phys. Soc. B. 63. 1950. 1032. o.
5. KORNFELD : Elastizität und Festigkeiten von Flüssigkeiten. Verlag Technik, Berlin, 1952. 14 pont.
6. ROBINSON, HOLMES, LEITH : Progress Report on Standardization of the Vibratory-Cavitation Test. Trans. ASME 1958. Vol. 80. Nr. 1. 103. o.
7. KERR : Determination of the Relative Resistance to Cavitation Erosion by the Vibratory Method. Trans. ASME 1937. 373. o.
8. NOWOTNY : Werkstoffzerstörung durch Kavitation. Z. VDI. 1942. Bd. 86. 279. o.

ÖSSZEFOGLALÁS

A közlemény a Vízgépek Tanszékének magnetostrikiós rendszerű kavitációs anyag-roncsoló berendezését ismerteti. A berendezés igazodik az amerikai szabványosítás során kidolgozott készülékhez, csak a próbadarab befogófej megoldása tökéletesebb.

A KÖZÉPHIBAELLIPSZIS KISZÁMÍTÁSÁRÓL EGYSZERŰ ELŐMETSZÉSNEÉL*

TÁRCZY-HORNOCH ANTAL

AKADÉMIKUS

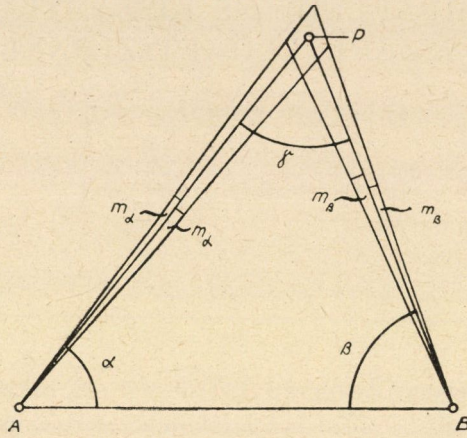
[Beérkezett 1959. január 5-én]

Azóta, hogy HELMERT ANDRAENAK 1858-ból származó tapogatózó kísérlete után 1868-ban alapvető disszertációjában a pontbizonytalanság meghatározására a középhibaellipszist bevezette, ez egyre fokozódó mértékben a legtöbb a kiegyenlítőszámításról szóló tankönyvben helyet talál. A meghatározás annyira össze van kötve a közvetítő és a feltételes megfigyelések kiegyenlítésével, hogy a középhibaellipszisnek a kiegyenlítéstől független megoldására nemigen mutatnak rá. Valami keveset [9 ; 343—345. o.] -on találunk erről, azonban a későbbi kiadásokban ez is elmaradt.

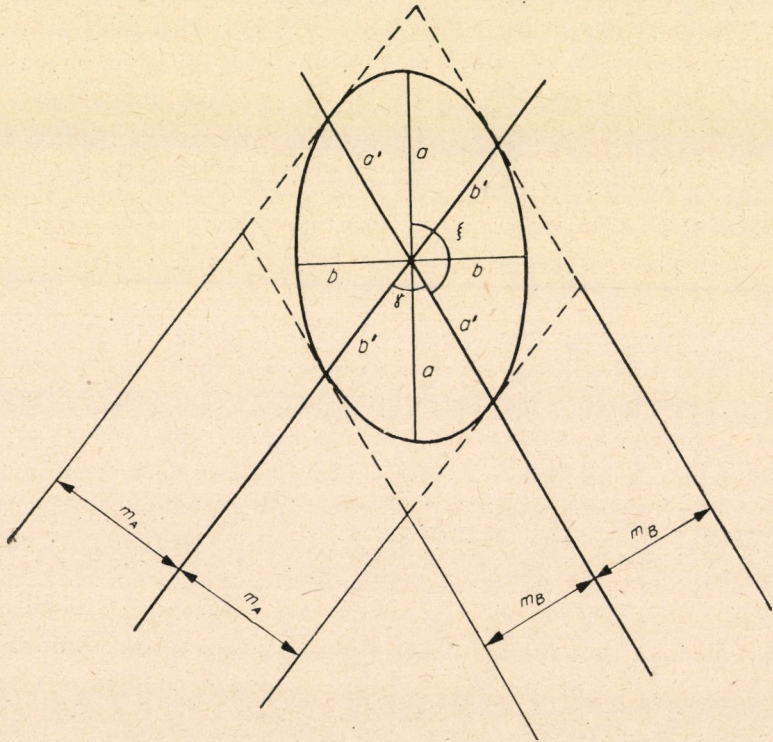
A középhibaellipszisnek a kiegyenlítéstől független fölös megfigyelések nélküli meghatározását a szakfolyóiratokban is eléggé gyéren találjuk meg. Megemlítjük itt WERKMEISTER 1920-ból származó tanulmányát [2 ; 561—566. o.], amelyhez az ugyanezen évben megjelent a kiegyenlített pontokra vonatkozó vizsgálatait is felhasználhatjuk [3 ; 405—406. o.]. Mindkettő JORDANNAK már említett 1888-ból származó vizsgálataira támaszkodik [9 ; 343—345. o.]. Ezt alkalmazta KONRÁD is az egyszerűen előmetszett pont pontosságvizsgálatára [4 ; 628—630. o.]. Mi magunk 1934-ben a nyitott sokszögvonal végpontjának középhibaellipsziséét vizsgáltuk meg [5], amelyet MILASOVSKY 1954-ben a hibaellipszis grafikus meghatározásának megkönnyítésére [6 ; 156—158. o.] használt fel. ALBRECHT is fölös megfigyelések nélkül tárgyalja a hibaellipszist, de összefüggései erősen kapcsolódnak a kiegyenlítőszámítás javítási egyenleteihez [20]. Ugyancsak a kiegyenlítőszámítás javításait használja fel BAESCHLIN [25] is az egyszerű előmetszés középhibaellipszisének a kiszámítására. A Gauss-féle hibatorvény alapján levezetett hibaellipszisek, így CZUBER [21], HÖPCKE [22] és BACHMANN [23] vizsgálataiban nincsenek a kiegyenlítéshez kötve.

Alábbi vizsgálataink JORDAN és WERKMEISTER vizsgálataihoz csatlakoznak. Ha P pontot az 1. ábrának megfelelően az A és B adott pontokból az α és β szögekkel előmetszünk, úgy az m_α és m_β szögműközéphibák következtében P pontban egy hibanégyszög keletkezik. Amennyiben figyelembe vesszük,

* E tanulmány németül a Zeitschrift für Vermessungswesen 1957. évi kötetének 395—411. l.-on jelent meg. A magyar szöveg néhány kisebb kiegészítést tartalmaz.



1. ábra



2. ábra

hogy m_α és m_β néhány másodperc nagyságú értékek, úgy a P pont körüli négyyszög gyakorlatilag romboidnak tekinthető a

$$2m_A = 2\widehat{m}_\alpha \overline{AP} \quad \text{és} \quad 2m_B = 2\widehat{m}_\beta \overline{BP} \quad (1)$$

oldaltávolságaival és a (PA) — (PB) irányok különbségével adott γ szöggel. Ez a romboid azonnal megadja a P pont középhibaellipszisének is (2. ábra), mint ahogy ezt WERKMEISTER is megmutatta [3 ; 562. o.]. Ezzel a hibaszámításban ismert pontossági mérőszámokat kapunk és nem kell hibaelméletileg nem teljesen megalapozott új pontossági mérőszámokat bevezetnünk, mint ahogy ez a [10 ; 34—35. o.] és [7 ; 43—45. o.]-ben történt. A középhibaellipszis két konjugált félátmérője a 2. ábra szerint a következő :

$$a' = \frac{m_A}{\sin \gamma} \quad \text{és} \quad b' = \frac{m_B}{\sin \gamma} . \quad (2)$$

A két konjugált félátmérő segítségével WERKMEISTER vizsgálataihoz hasonlóan kiszámítható a fél nagy- és fél kistengely. Mivel

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (a')^2 + (b')^2 \\ 2ab &= 2a' b' \sin \gamma , \end{aligned} \quad (2a)$$

ezért a [9 ; 344. o.]-lal összhangban :

$$\begin{aligned} a &= \frac{|\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B \sin \gamma}| + |\sqrt{m_A^2 + m_B^2 - 2m_A m_B \sin \gamma}|}{2 \sin \gamma} \\ b &= \frac{|\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B \sin \gamma}| - |\sqrt{m_A^2 + m_B^2 - 2m_A m_B \sin \gamma}|}{2 \sin \gamma} . \end{aligned} \quad (3)$$

Néha előnyösebb az a és b meghatározására a négyzetes alakot alkalmazni :

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{m_A^2 + m_B^2 + \sqrt{m_A^4 + 2m_A^2 m_B^2 (1 - 2 \sin^2 \gamma) + m_B^4}}{2 \sin^2 \gamma} = \\ &= \frac{m_A^2 + m_B^2 + \sqrt{m_A^4 + 2m_A^2 m_B^2 \cos 2\gamma + m_B^4}}{2 \sin^2 \gamma} . \end{aligned} \quad (3a)$$

hasonlóképpen :

$$b^2 = \frac{m_A^2 + m_B^2 - \sqrt{m_A^4 + 2m_A^2 m_B^2 \cos 2\gamma + m_B^4}}{2 \sin^2 \gamma} .$$

A középhibaellipszis vagy röviden hibaellipszis helyzetének meghatározására szükséges még a fél nagy- és fél kistengelyhez viszonyítva a konjugált átmérők helyzetét meghatározni, amelyekre WERKMEISTER nem tér ki. Erre célszerűen felhasználható a [8 ; 106. o. 1. képlet] akkor, ha ξ a fél nagy-tengely és az a' konjugált tengely közötti szöget jelöli (vö.: 2. ábra) :

$$\operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} (\xi + \gamma) = -\frac{b^2}{a^2}, \quad (4)$$

amelynek segítségével az ismert

$$\operatorname{tg} (\xi + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \xi + \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} \gamma}$$

összefüggés alapján írható, hogy

$$\operatorname{tg}^2 \xi + \operatorname{tg} \gamma \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \operatorname{tg} \xi + \frac{b^2}{a^2} = 0. \quad (5)$$

Ebből :

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\operatorname{tg} \gamma \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \gamma \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)^2 - 4 \frac{b^2}{a^2}}}{2}. \quad (6)$$

Miután a tangens függvény maga kétértékű, ezért az egyenletre négy megoldás adódik. A tangens értékek egyenlőségéből adódó két eredmény a nagy-tengely két ágának megfelelően egymástól 180° -kal különbözik, s így a hibaellipszis fekvése szempontjából nem jelentenek sem bizonytalanságot, sem kétértelműséget. A négyzetgyökjelből adódó kétértelműséget is kiküszöbölhetjük, ha a (4) egyenletnek megfelelően figyelembe vesszük, hogy az abban előforduló szögértékek csak pozitív értéket vehetnek fel és az egyenlet jobb oldalán levő negatív előjelre való tekintettel a ξ és $\xi + \gamma$ két szögérték közül az egyiknek tompának, a másiknak vagy hegyes-, vagy pedig harmadik negyedbeli szögértéknek kell lennie. A rombold alakzathból következik : ha $\gamma < 90^\circ$, akkor a nagy-tengely, míg ha $\gamma > 90^\circ$, akkor pedig a kistengely osztja ketté a γ szöget, aminek alapján a hibaellipszis helyzete egyértelműleg meghatározható.

A (6) egyenlet helyett a (4) képlet alapján egyszerűbb egyenletet is vezethetünk le.

$$\operatorname{ctg} (a + \beta) = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \beta}.$$

A képlet alapján következik, hogy

$$- \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} (a + \beta)} - 1,$$

tehát a mi esetünkben :

$$- \operatorname{tg} \xi \operatorname{tg} (\xi + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \xi + \operatorname{tg} (\xi + \gamma)}{\operatorname{tg} (2\xi + \gamma)} - 1 = + \frac{b^2}{a^2}. \quad (7)$$

Mivel azonban

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

és

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \},$$

ezért a (7) összefüggés a következőképpen írható :

$$\frac{1}{\operatorname{tg} (2\xi + \gamma)} \cdot \frac{\sin (2\xi + \gamma)}{\cos \xi \cos (\xi + \gamma)} - 1 = \frac{2 \cos (2\xi + \gamma)}{\cos (2\xi + \gamma) + \cos \gamma} - 1 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Ebből

$$\cos (2\xi + \gamma) = \frac{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cos \gamma}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{(a^2 + b^2) \cos \gamma}{a^2 - b^2}. \quad (8)$$

Habár $\cos (2\xi + \gamma)$ értéke a fentiek alapján egyértelműen adódik, mégis magának a ξ -nek meghatározására az előbbi megfontolások szükségesek, mint azt majd a számpéldában láthatjuk. Egyebek között szükséges ez annak a megállapítására is, hogy vajon a $2\xi + \gamma$ érték nem haladta-e túl a 360° -ot.

*

A problémát más oldalról is megközelíthetjük.

Ismert módon levezethetjük a hibaterjedés törvénye alapján az \overline{AP} és \overline{BP} oldalak középhibáit, ahol — mint eddig is — csupán a szögmérésekből adódó hibákat vesszük figyelembe.

$$\text{Mivel} \quad \overline{AP} = \frac{\overline{AB} \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \quad \text{és} \quad \overline{BP} = \frac{\overline{AB} \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}, \quad (9)$$

következik, hogy

$$m_{AP}^2 = \left(\frac{\overline{AB} \sin \beta \cos (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta)^2} \right)^2 \widehat{m}_\alpha^2 + \\ + \left(\frac{\overline{AB} (\sin (\alpha + \beta) \cos \beta - \sin \beta \cos (\alpha + \beta))}{\sin (\alpha + \beta)^2} \right)^2 \widehat{m}_\beta^2$$

és az (1) és (2) egyenleteknek megfelelően

$$m_{\overline{AP}}^2 = \overline{AP}^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma \widehat{m}_\alpha^2 + \overline{BP}^2 \widehat{m}_\beta^2 = \frac{m_A^2}{\sin^2 \gamma} \cos^2 \gamma + \frac{m_B^2}{\sin^2 \gamma} = (a' \cos \gamma)^2 + (b')^2. \quad (9a)$$

Hasonlóképpen :

$$m_{\overline{BP}}^2 = (a')^2 + (b' \cos \gamma)^2. \quad (9b)$$

Mármost az \overline{AP} és \overline{BP} hosszak meghatározott $m_{\overline{AP}}$ és $m_{\overline{BP}}$ középhibái egyúttal P pontnak az ezekben az irányokban mutatkozó középhibái is, pontosabban meghatározva : az oldalakra merőlegesen álló irányokhoz tartozó harántirányú középhibák. Ennélfogva a (9a) egyenletben megadott értéknek JORDAN alapvető vizsgálataival egyetértőleg egyenlőnek kell lennie a 3. ábrába baloldalt lent ferdén berajzolt $p_{(AP)\pm 90^\circ}$ talpponti távolság négyzetével. Tehát :

$$m_{\overline{AP}}^2 = p_{(AP)\pm 90^\circ}^2 = (a' \cos \gamma)^2 + (b')^2. \quad (10)$$

Fenti összefüggéseink az ellipszis tulajdonságaiból közvetlenül is levezethetők, mint ahogy azt a függelékben bemutatjuk.

Ez lehetővé teszi a $p_{(AP)\pm 90^\circ}$ talpponti távolság egyszerű grafikus meghatározását. Miután az $a' \cos \gamma$ az a' -nak az \overline{AP} -re eső vetületét jelenti, ezt a 3. ábrán jobboldalt fent x -szel jelöljük. Ha ezt az x értéket a P pontban \overline{AP} -re merőlegesen felrakjuk, úgy a pontozott vonal az \overline{AP} távolságra merőleges irányhoz tartozó megfelelő $p_{(AP)\pm 90^\circ}$ talpponti távolságot adja, amely egyúttal az $(AP) \pm 90^\circ$ -os irányhoz tartozó harántirányú középhiba.

Hasonlóan érvényes ez a (9b) egyenletnek megfelelően a \overline{BP} vonalhoz tartozó $m_{\overline{BP}}$ keresztirányú középhibára is. Itt is hasonló módon grafikusán meghatározható a $p_{(BP)\pm 90^\circ}$ érték, amikor is a $b' \cos \gamma$ értéket y -al jelöltük.

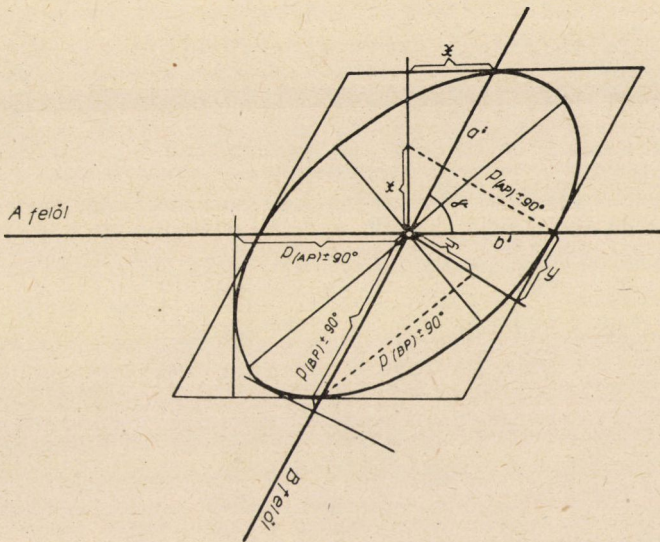
Ha most nem a konjugált félátmérőre merőleges irányban, hanem egy más irányban keressük a harántirányú középhibát, úgy ennek négyzete a (BP) iránytól ξ' szöggel elforgatott irányban a 4. ábra alapján a következő :

$$m_{\xi'}^2 = (a' \cos \xi')^2 + (b' \cos (\gamma - \xi'))^2. \quad (11)$$

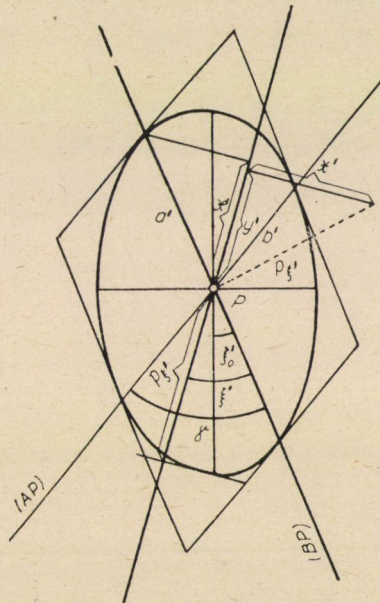
Annak a bizonyítását, hogy ez egyúttal a középhibaellipszis talpponti távolságát adja, a függelékben az ellipszis alaptulajdonságaiból kiindulva közvetlenül is levezetjük.

Az adott ξ' helyen a fenti középhibanégyzetnek szélsőértékeit a következőképpen kapjuk :

$$\frac{dm_{\xi'}^2}{d\xi'} = 0. \quad (12)$$



3. ábra



4. ábra

Ebből :

$$\begin{aligned} & -2a'^2 \cos \xi' \sin \xi' + 2b'^2 \cos (\gamma - \xi') \sin (\gamma - \xi') = 0 = \\ & = -a'^2 \sin 2\xi' + b'^2 \sin (2\gamma - 2\xi') = -a'^2 \sin 2\xi' + \\ & + b'^2 \sin 2\gamma \cos 2\xi' - b'^2 \cos 2\gamma \sin 2\xi' = 0. \end{aligned}$$

A $\cos 2\xi'$ -el való osztás útján adódik a ξ'_0 -al jelölendő érték az extremumra :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\xi'_0 &= \frac{b'^2 \sin 2\gamma}{a'^2 + b'^2 \cos 2\gamma} = \frac{\frac{m_B^2}{\sin^2 \gamma} \sin 2\gamma}{\frac{m_A^2}{\sin^2 \gamma} + \frac{m_B^2}{\sin^2 \gamma} \cos 2\gamma} = \\ &= \frac{m_B^2 \sin 2\gamma}{m_A^2 + m_B^2 \cos 2\gamma}. \end{aligned} \quad (13)$$

Amennyiben az m_A és m_B értékét az (1) képleteinek és az \overline{AP} és \overline{BP} értékét a (9) képletnek megfelelően behelyettesítjük, úgy megfelelő egyszerűsítések útján írhatjuk :

$$\operatorname{tg} 2\xi'_0 = \frac{m_\beta^2 \sin^2 \alpha \sin 2\gamma}{m_a^2 \sin^2 \beta + m_\beta^2 \sin^2 \alpha \cos 2\gamma}. \quad (13a)$$

Egyenlőpontos szögmérések esetén $m_a = m_\beta = m$, ezért :

$$\operatorname{tg} 2\xi'_0 = \frac{\sin^2 \alpha \sin 2\gamma}{\sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos 2\gamma}. \quad (13b)$$

Azonos eredményt kell kapnunk a kiegyenlített előmetszés ismert összefüggései alapján, feltéve, hogy a $+x$ tengelyt a (PB) irányban vesszük fel, mert csupán akkor felel meg a

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2[ab]}{[aa] - [bb]}$$

összefüggés alapján számított és a koordináta tengelyre vonatkozó irányszög a mi ξ_0 szögértékünknek. (Vö. [14 ; 458. o. 17. egyenlet]). Erre a koordináta-rendszerre vonatkozólag :

$$a_1 = -\frac{\sin^2 \gamma}{AB \sin \beta} \quad a_2 = 0 \quad b_1 = +\frac{\sin \gamma \cos \gamma}{AB \sin \beta} \quad b_2 = -\frac{\sin \gamma}{AB \sin \alpha},$$

ezért :

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{-\frac{2 \sin^2 \gamma \cos \gamma}{AB^2 \sin^2 \beta}}{\frac{\sin^4 \gamma}{AB^2 \sin^2 \beta} - \frac{\sin^2 \gamma}{AB^2 \sin^2 a} - \frac{\cos^2 \gamma \sin^2 \gamma}{AB^2 \sin^2 \beta}} = \frac{\sin^2 a \sin^2 \gamma}{\sin^2 \beta + \sin^2 a \cos 2\gamma}$$

megegyezően az előbbi a (13b) egyenlettel. Erre a különleges esetre más kifejezést is levezethetünk a [16 ; 141. o.] összefüggései alapján.

A második differenciálhányados segítségével könnyen meghatározhatjuk a maximum és minimum helyét, azaz a fél nagy- és fél kistengely fekvését, erre azonban itt nem vagyunk tekintettel, mivel az a szabály, hogy $\gamma < 90^\circ$ esetén a nagytengely, $\gamma > 90^\circ$ esetén pedig a kistengely osztja ketté a γ szöget, számunkra teljesen kielégítő. Az itt kiszámított ξ' szög a (6) és (8) összefüggésekben előforduló ξ szögnek 180° -ra kiegészítő szögértéke.

Ha az \overline{AP} -re vonatkoztatva kívánjuk a ξ' -et meghatározni, akkor

$$m_{\xi'}^2 = (a' \cos(\gamma - \xi'))^2 + (b' \cos \xi')^2$$

-ből végül az alábbi összefüggést kapjuk :

$$\operatorname{tg} 2\xi'_0 = \frac{m_A^2 \sin 2\gamma}{m_B^2 + m_A^2 \cos 2\gamma} \quad (14)$$

A (13) és (14) összefüggések az ellipszis nagy- és kistengelyének a konjugált átmérőkhöz viszonyított helyzetének meghatározására egyszerűbbek, mint a (6) és (8) képletek és még az az előnyük, hogy a nagy- és a kistengely ismerete nélkül is csupán a két konjugált félátmérő és az ezekkel bezárt szög segítségével a főtengely helyzete meghatározható. Hasonló összefüggést ad meg JORDAN is [9 ; 345. o.], azonban ezt külön segédkoordináta-rendszer bevezetésével és koordináta-transzformáció útján vezette le. Az az utalása, hogy az általa számított szög az ellipszis fél nagytengelyének fekvését is megadja, tévedésen alapszik [9 ; 345. o.], mivel $\operatorname{tg} 2 \xi'_0 = \operatorname{tg} (2 \xi'_0 \pm 180^\circ)$ és így a számítások alapján $\xi'_0 \pm 90^\circ$ is nyerhető. Annak az eldöntésére, hogy vajon melyik érték vonatkozik a nagy- és a kistengelyre, még külön megfontolás szükséges. KÖHR [26 ; 19. egyenl.] szintén levezeti az itteni (13) és (14) egyenletet ; ő a mellékfeltételű szélsőérték számításával, s nem hivatkozik JORDANra. A szélsőértékek jellegére vonatkozó megállapítása — utóbbtól eltérően — helyes.

Amennyiben meghatároztuk a fél nagytengelyhez tartozó ξ'_0 szögértéket, úgy a (11) egyenlet segítségével azt a talpponti távolság-négyzetet kapjuk, amely egyúttal a fél nagytengely négyzete is :

a) $\gamma < 90^\circ$ esetén

$$m_{\xi'_0}^2 = a^2 = (a' \cos \xi'_0)^2 + (b' \cos (\gamma - \xi'_0))^2 \quad (15)$$

b) $\gamma > 90^\circ$ esetén

$$a^2 = (a' \sin \xi'_0)^2 + (b' \sin (\gamma - \xi'_0))^2,$$

viszont a fél kistengely négyzete:

a) $\gamma < 90^\circ$ esetén

$$b^2 = (a' \sin \xi'_0)^2 + (b' \sin (\gamma - \xi'_0))^2 \quad (16)$$

b) $\gamma > 90^\circ$ esetén

$$b^2 = (a' \cos \xi'_0)^2 + (b' \cos (\gamma - \xi'_0))^2.$$

A fenti egyenletek alapján történő számítás lényegesen egyszerűbb, mint a (3a) egyenletek szerinti megoldás, és általánosan érvényes a konjugált átmérők-ből történő ellipszis félátmérők számítására. Egyébként a és b értékét grafikusán is meghatározhatjuk. E célból vetítsük a (15) és (16) egyenletek értelmében a konjugált félátmérők végpontjait a nagy- és kisfőtengelyek vonalára. A kapott értékeket derékszögben összetesszük, s az így kapott átmérők közvetlenül a és b értékeit adják. Teljesen hasonló szerkesztést alkalmazhatunk a főiránnyal tetszőleges ξ' iránnyal elforgatott helyzethez tartozó talpponti távolság megszerkesztéséhez, mint ahogy azt a 4. ábra mutatja. Ismeretes, hogy a szélsőértékek helyein a féltengelyek és a talpponti távolságok egyenlők.

A levezetett egyenletekből a meghatározó irányok kedvező, illetőleg kedvezőtlen metszésére vonatkozólag néhány következtetés is levonható.

A (3a) egyenletek a szélsőértékek közvetlen vizsgálata nélkül is megmutatják, hogy $m_A = m_B$ esetén $a^2 \gamma = 90^\circ$ mellett a legkisebb, b^2 pedig a legnagyobb értékét veszi fel és mindkettő egymással egyenlő. Erre már KÖHR is rámutatott [26 ; 778—779. o.]. A hibaellipszis körré fajul, melynek sugara $m_A = m_B$. A hibakör nyilvánvalóan a relatív legkedvezőbb alakja a hibaellipszisnek.

Ha $\gamma = 90^\circ$, de m_A és m_B nem egyenlők, úgy (13) egyenlet alapján ξ'_0 nullával lesz egyenlő, ami azt jelenti, hogy a hibaellipszis mindkét főtengelye beleesik a háromszög oldalakba; mégis ellipszis keletkezik, mégpedig, ha $m_A > m_B$ a fél nagy- és fél kistengelye m_A -val és fél kistengelye m_B -vel lesz egyenlő.

Ezzel szemben ha $m_A = m_B$ és $\gamma \neq 90^\circ$, úgy szintén egy hibaellipszis jön létre, amelynél a (13) egyenlet alapján $\xi'_0 = \frac{\gamma}{2}$, ami azt jelenti, hogy aszerint, hogy γ kisebb vagy nagyobb mint 90° , a fél nagy- vagy a fél kistengely felezi a γ szöveget.

Miután a középhibaellipszisnek a relatív hibakör a legkedvezőbb alakja (oly hibaellipszis, amelynek a fél nagytengelye kisebb, mint ennek a körnek a sugara, kell, hogy abszolút értelemben kedvezőbb legyen), úgy a középhibaellipszis annál kedvezőbb, mentől kisebb a két féltengely közötti különbség. A (3) egyenletek szerint ez

$$a - b = \frac{\sqrt{m_A^2 + m_B^2 - 2m_A m_B \sin \gamma}}{\sin \gamma}. \quad (\text{a})$$

Megengedett $a - b$ különbség esetén adott m_A és m_B értékek mellett az (a) egyenlet útján a γ szög megengedett határértéke meghatározható a következő egyenletből:

$$(a - b)^2 \sin^2 \gamma + 2m_A m_B \sin \gamma - m_A^2 - m_B^2 = 0.$$

Ha a két féltengely közötti megengedett különbséget pl. b -hez viszonyítva relatív vagy még egyszerűbben a és b -nek f viszonyával szabjuk meg, azaz:

$$a = f \cdot b,$$

akkor a (3) egyenletekből a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} & \frac{|\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B \sin \gamma}| + |\sqrt{m_A^2 + m_B^2 - 2m_A m_B \sin \gamma}|}{2 \sin \gamma} = \\ & = f \left\{ \frac{|\sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B \sin \gamma}| - |\sqrt{m_A^2 + m_B^2 - 2m_A m_B \sin \gamma}|}{2 \sin \gamma} \right\} \end{aligned}$$

vagy

$$(f - 1)^2 \sqrt{m_A^2 + m_B^2 + 2m_A m_B \sin \gamma} = (f + 1)^2 \sqrt{m_A^2 + m_B^2 - 2m_A m_B \sin \gamma}.$$

Fentiek alapján az adott határnál a még megengedett γ szögérték számítható:

$$\sin \gamma = \frac{f}{f^2 + 1} \cdot \frac{m_A^2 + m_B^2}{m_A m_B} = \frac{f}{f^2 + 1} \left(\frac{m_A}{m_B} + \frac{m_B}{m_A} \right). \quad (\text{b})$$

Mentől nagyobb a megengedett f viszony a és b között, azaz mentől nagyobb lehet a mint b , annál kisebb lehet a γ szög. A $\sin \gamma$ és γ szög minimumát a

$$\frac{\partial \sin \gamma}{\partial m_A} = \frac{f}{f^2 + 1} \left(\frac{1}{m_B} - \frac{m_B}{m_A^2} \right) = 0$$

egyenlet szerint változó m_A értéke mellett $m_A = m_B$ esetében veszi fel, amikor is, mint már az előbbieken említettük, a fél nagytegyely felezi a γ szöveget. Ez esetben a megengedett γ szögére a következő kifejezést kapjuk:

$$\sin \gamma = \frac{2f}{f^2 + 1}. \quad (c)$$

Másrészt a (3a) első egyenlete alapján egyenlő $m_A = m_B = m_q$ harántirányú hibák esetében

$$a^2 = \frac{2m_q^2 \begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} 2m_q^2 \cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma} = \frac{m_q^2 (1 \begin{smallmatrix} (+) \\ (-) \end{smallmatrix} \cos \gamma)}{\sin^2 \gamma}.$$

A fentiekből következik, hogy ha $\gamma < 90^\circ$

$$a = \frac{m_q \sqrt{1 + \cos \gamma}}{\sin \gamma} = m_q \sqrt{2} \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{m_q}{\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}},$$

ha pedig $\gamma > 90^\circ$ (d)

$$a = \frac{m_q \sqrt{1 - \cos \gamma}}{\sin \gamma} = m_q \sqrt{2} \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{m_q}{\sqrt{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

és

$$m_q = a \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2} \quad \text{illetőleg} \quad m_q = a \sqrt{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \quad (e)$$

A kettő közül a nagyobb érték a mértékadó. Így az első $\gamma > 90^\circ$ esetében, a második $\gamma < 90^\circ$ esetében érvényes. A (c) egyenlet lehetőséget nyújt a betartandó harántirányú középhiba kiszámítására.

A gyakorlati számításokat célszerűen a következőképpen végezhetjük el. Az a és b betartandó (pl. $a = f \cdot b = 1,5 b$) viszonya alapján a (c) egyenlet segítségével számíthatjuk a még megfelelő legkisebb γ szögértéket. Amennyiben az adott esetben γ nagyobb vagy egyenlő a számított értékkel, úgy f megadott értékét nem lépjük túl. Ezután kiszámítjuk a hibaellipszis biztosítandó a értéke mellett a betartandó m_q harántirányú hibát és ez utóbbi alapján a megkívánt m_α és m_β szögközéphibákat az alábbiak szerint:

$$m_\alpha = \pm \varrho'' \frac{m_q}{AP} = \varrho'' \frac{m_q \sin \gamma}{AB \sin \beta} \quad \text{hasonlóképpen} \quad m_\beta = \pm \varrho'' \frac{m_q}{BP} = \varrho'' \frac{m_q \sin \gamma}{AB \sin \alpha}. \quad (f)$$

Amennyiben ellenőrzésképpen b értékét is meg kívánjuk határozni, úgy a (3a) egyenletekből nem a (d) szerint a -t, hanem b -t fejezzük ki, s kapjuk végül, hogy :

$$\gamma < 90^\circ \text{ esetén } b = \frac{m_q}{\sqrt{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$\gamma > 90^\circ \text{ esetén } b = \frac{m_q}{\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}}.$$
(g)

Vegyük szemügyre a pontbizonytalanság megítélésének másik hibamértékét, az ugyancsak HELMERT részéről bevezetett közepes ponthibát [1], amely ellen FRIEDRICH erős kifogásokat hozott fel [10 ; 33—34. o.].

FRIEDRICH első kételye, hogy a közepes ponthiba nagyobb a hibaellipszis fél nagytengelyénél, tehát nagyobb az előforduló legnagyobb közepes lineáris eltolódásnál, és hogy a közepes ponthiba $\sqrt{2}$ -szer nagyobb a körre fajult hibaellipszis sugaránál, könnyen eloszlatható. A közepes ponthiba egy az iránytól független hossz mérték. Amennyiben ennél fogva a középhibát egy meghatározott irányban keressük, úgy abban a közepes ponthibának csupán egyik komponense hat. Az, hogy ebben az irányban a teljes közepes ponthibát, mint középhibát szerepeltessük, nem felelne meg a középhiba fogalmához fűződő valószínűségének. A probléma hasonló ahhoz az esethez, amelynél a teodolit felállítási excentricitási hatását keressük az iránymérésre. Erről pedig REEH kimutatta [11 ; 43. o.], hogy e közepes excentricitásnál az irányvonalra *merőlegesen* ható e_1 közepes excentricitás $e_1 = \pm \frac{e}{\sqrt{2}}$ értékű. Ez 45° -os bezárt szögnek felel meg, ami természetes is, mivel minden quadránsban az excentricitás 0° és 90° között, tehát a hatás nélküli és legnagyobb hatású értékek között minden helyzetet felvehet és 45° a középhelyzetnek felel meg. Más szavakkal : a keresett irányban a középhibát úgy kaphatjuk meg, hogy ezt a középhibát a különböző irányú excentricitásoknak az abba az irányba eső egyes komponenseinek négyzetéből számítjuk ki. Ezért az is természetes, hogy akkor, amikor a hibaellipszis körre fajul és így minden egyes irányban és egyúttal az erre merőleges irányban is ugyanaz a hiba mutatkozik, a lineáris hibának $\sqrt{2}$ -szeresének kell lennie a körsugárnak. Hasonló megfontolások alapján kell a közepes ponthibának is nagyobbnak lennie, mint a hibaellipszis fél nagytengelyének, mivel egyidejűleg a kistengely irányában a kistengely értékének megfelelő hiba is keletkezik és a lineáris ponthiba a kettőnek a derékszögű összetevődéséből adódik. HRISTOV, akivel a problémáról már régebben beszélgettünk, ezt a lövési szórás hibával hasonlítja össze. Az irányzott ponttól való lineáris eltérésekből számíthatjuk a találat lineáris középhibáját, míg egy

adott irányban a középhibát erre az irányra eső komponensek négyzeteiből kapjuk. Hasonló elgondolásokat ismertetett MÖHLE is ([18; 593—594. o.] és [19; 39. o.]) és a problémát ő is a céltáblával hasonlítja össze, további fejtegetésével azonban nem érthetünk egyet, különösen nem azzal, amely szerint a közepes ponthibának a hibaellipszis fél kis- és fél nagy tengelye közötti értéknek kell lennie.

A pontközéphiba és egy adott irányban ható pontközéphiba közötti különbséget az alábbi kísérlet útján mutathatjuk ki. Az 1. ábrának megfelelően P pontot határozzuk meg úgy, hogy az a és β szögeket többször, pl. hússzor mérjük meg. Emellett α -t és β -t célszerűen válasszuk 45° -nak, hogy így γ 90° -os legyen. A mérések számtani középértékével számítjuk a P pont legvalószínűbb koordinátáit, az összetartozó egyes mérések segítségével P_1, P_2, \dots, P_n ponthelyzeteket. Az egyes mérések útján adódó ponthelyzetek és P közötti lineáris eltérések négyzeteinek összegét osztva $n-1$ -gyel számíthatjuk tudvalevőleg a közepes ponthiba négyzetét. De az egyes koordináták között mutatkozó eltérésekből meghatározhatjuk az x és y irányú koordináta középhibákat is. Mivel $\gamma = 90^\circ$, és a szögmérési középhibák is közel egyenlők, következik, hogy a hibaellipszisnek legalább megközelítőleg körnek kell lenni és annak m_x és m_y félátmérői is közel egyenlők lesznek. Kézenfekvő, hogy a kapott közepes ponthiba $\sqrt{2}$ -szer nagyobb, mint a hibakör sugara. Egy erre a célra végzett kísérleti mérésnél (ahol $\overline{AB} = 1$ km volt) pl. az egyszeri meghatározás közepes ponthibájára 1,8 cm-t, s a hibakör sugarára 1,3 cm-t kaptunk. Ez egyúttal az egyszeri meghatározás irányhoz kötött pontközéphibája is. A hibaellipszis alapján számítható hibakör és a közepes ponthiba alapján meghatározható hibakör közötti különbséget Baeschlin (Schweiz. Zeitschr. f. Vermess. 1955 év, 85. o.) és Grossmann is kiemeli [16; 142. o.].

A fenti kísérleti mérések alapján is különbséget kell tennünk a lineáris pontközéphiba és az irányhoz kötött pontközéphiba között, amely utóbbi abban az esetben, amikor a hibaellipszis körré fajul, $\sqrt{2}$ -ed része a lineáris pontközéphibának. Kézenfekvőnek látszik ezt a hibaellipszishöz is megtenni és úgy általánosan:

$$M_r = \frac{M}{\sqrt{2}} \quad (17)$$

-nek venni.

A (2) és (2a) egyenletek segítségével:

$$M_r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = \sqrt{\frac{(a')^2 + (b')^2}{2}} = \frac{\sqrt{m_A^2 + m_B^2}}{\sin \gamma \sqrt{2}} \quad (17a)$$

Ezért 1950-ben MÁJAYnak, majd VINCZÉnek ajánlottuk ennek a részükről

bevezetettnél jobbnak látszó hibamértéknek a bevezetését. Hogy ennek az összefüggésnek geometriai tartalma is van, HOMORÓDI mutatta ki [12 ; 12—13. o.]. Eszerint a (17a) egyenlet útján számított irányhoz kötött pontközéphiba olyan kör sugarának felel meg, amelynek a területe egyenlő a hibaellipszis talpponti görbéjével bezárt területtel. Megjegyzendő, hogy már WERKMEISTER is megkísérelte a közepes ponthibát területtel kifejezni. Ő vizsgálatai alapjául az ellipszis területét választotta [3 ; 408—409. o.] ; azonban — mint látjuk — erre a talpponti görbe területe célszerűbb. Utólag megállapítottuk, hogy hasonló eredményű vizsgálatokat 1933-ban már FÖRSTNER is végzett egy nehezen hozzáférhető munkájában [17 ; 30. o.] (a Zeitschrift für Vermessungswesen 1933. évi kötetében megjelent tanulmányából hiányzik ez a rész), anélkül, hogy M -nek külön megnevezést adott volna. Az M közepes ponthibával szemben FRIEDRICHhez hasonló észrevételei vannak és ezért ez utóbbiak nem egészen indokoltak.

Mikor kell a lineáris és mikor az irányhoz kötött hibát használunk? Ez a pontmeghatározás céljától függ. Amennyiben pl. elveszett pontot kell felkeresnünk, vagy egy pontot kell kitzűznünk az akna lemélyítéséhez vagy a fúráshoz, úgy, hogy ezeknek egy meghatározott földalatti pontot kell elérniök, akkor a lineáris pontközéphibát kell választanunk. Iránykitűzéseknél vagy sokszögeléseknél annak a vizsgálatánál, hogy a megengedett hibahatárokat nem léptük-e túl, pl. az irányhoz kötött középhiba a jobb. Olyan hibaellipsziseknél, ahol igen nagy a különbség a nagy- és a kistengely között, természetesen ennél is célszerűbb a megfelelő talpponti távolságot venni. Általában az irányhoz kötött pontközéphibára gyakrabban van szükség, mint a lineáris pontközéphibára.

FRIEDRICH további ellenvetése [10 ; 34. o.], hogy a hibakör egy kedvezőbb pontmeghatározásra mutat, mint a nyújtott ellipszis, amely ugyanazt a ponthibát adja, önmagában kétségkívül igaz. Mégis, ha egy pont megbízhatóságát három érték helyett csupán egyetleneggyel kívánjuk kifejezni, úgy ez csak kör sugara, illetőleg kör lehet, amely az említett hibaellipszissel meghatározott talpponti görbét megfelelően helyettesíti. Mentől nagyobb a különbség a nagy- és a kistengely között, annál kevésbé lesz megbízható a körrel való helyettesítés. Ez általánosan fennáll a kiegyenlítőszámításban is : minél nagyobb a két megfigyelés közötti különbség, annál kevésbé lesz megbízható a számszerűleg egyforma középérték. Ezt a számított érték középhibája mutatja meg. Ilyen értelemben itt is megadhatunk egy középhiba jellegű értéket az irányhoz kötött, számított pontközéphibára, amire pl. a $\pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{2}}$ kifejezés alkalmasnak látszik. Mennél kisebb ez a kifejezés, annál megbízhatóbb a (17a) egyenlet alapján számított irányhoz kötött pontközéphiba.

Arra az ellenvetésre áttérve, hogy a lineáris közepes ponthibánál a legkedvezőbb eredményt a geodéták bosszúságára a két sugárnak $109^\circ 28'$ -es

metszési szögénél kapjuk, az az észrevételünk, hogy a lineáris pontközép-hibára az

$$M^2 = a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 = \frac{m_A^2 + m_B^2}{\sin^2 \gamma} \quad (18)$$

összefüggés alapján, ahol $M = f(\gamma)$, itt is $\gamma = 90^\circ$ esetében kapjuk a minimumot M^2 -re. Más a helyzet azonban akkor, ha m_A és m_B maga még függvénye más értékeknek, pl. lineáris függvénye a hosszaknak, és ez utóbbi függvénye az α , illetőleg β szögértékeknek. Ilyen esetben előfordulhat, hogy rövidebb távolságok esetében m_A és m_B hibák kisebbek lesznek és $\sin \gamma$ -nak $180^\circ > \gamma > 90^\circ$ közötti γ értékei mellett megnagyobbító hatása ellenére M^2 a (18) egyenletnek megfelelően mégis kisebb lesz, azaz a relatív kedvezőbb hibakör ellenére rövidebb oldalak esetében a keletkező hibaellipszishez tartozó talpponti görbe területe kisebbnek adódik, mint a hibaköré, és akkor ez a hibaellipszis mégis a kedvezőbb. Mi ezt az esetet egyszerűbben és áttekinthetőbb módon kívánjuk megvizsgálni, mint az a [9 ; 299—302. o.] alatt történt. Az (1) és (9) egyenletekből következik, hogy

$$m_A^2 = \overline{AP} \widehat{m}_a^2 = \frac{\overline{AB} \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \widehat{m}_a^2$$

$$m_B^2 = \overline{BP} \widehat{m}_\beta^2 = \frac{\overline{BP} \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \widehat{m}_\beta^2. \quad (19)$$

Vezessük be ezeket az értékeket a (18) egyenletbe és tegyük a $\sin \gamma$ helyébe a $\sin(\alpha + \beta)$ értéket. Így a pontközépheza négyzetére az α és β szögek függvényében az alábbiakat nyerjük :

$$M^2 = \frac{1}{\sin^2(\alpha + \beta)} \left(\frac{\overline{AB}^2 \sin^2 \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)} \widehat{m}_a^2 + \frac{\overline{AB}^2 \sin^2 \alpha}{\sin^2(\alpha + \beta)} \widehat{m}_\beta^2 \right) =$$

$$= \frac{\overline{AB}^2}{\sin^4(\alpha + \beta)} (\widehat{m}_a^2 \sin^2 \beta + \widehat{m}_\beta^2 \sin^2 \alpha). \quad (18a)$$

A szélső értékek meghatározása céljából képezzük a parciális differenciálhányadosokat α és β szerint és tegyük egyenlővé azokat nullával :

$$\frac{\partial M^2}{\partial \alpha} = 0 = \frac{2 \overline{AB}^2}{\sin^4(\alpha + \beta)} \cdot \widehat{m}_\beta^2 \sin \alpha \cos \alpha -$$

$$- \frac{4 \overline{AB}^2 (\widehat{m}_a^2 \sin^2 \beta + \widehat{m}_\beta^2 \sin^2 \alpha)}{\sin^5(\alpha + \beta)} \cos(\alpha + \beta) = \frac{2 \overline{AB}^2}{\sin^4(\alpha + \beta)} (\widehat{m}_\beta^2 \sin \alpha \cos \alpha -$$

$$- 2 (\widehat{m}_a^2 \sin^2 \beta + \widehat{m}_\beta^2 \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)). \quad (20)$$

Hasonlóképpen :

$$\frac{\partial M^2}{\partial \beta} = 0 = \frac{2\overline{AB}^2}{\sin^4(\alpha + \beta)} (\widehat{m}_\alpha^2 \sin \beta \cos \beta - 2(\widehat{m}_\alpha^2 \sin^2 \beta + \widehat{m}_\beta^2 \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg}(\alpha + \beta)).$$

Vonjuk ki ez utóbbi egyenletet az előzőből, úgy :

$$\frac{2\overline{AB}^2}{\sin^4(\alpha + \beta)} (\widehat{m}_\beta^2 \sin \alpha \cos \alpha - \widehat{m}_\alpha^2 \sin \beta \cos \beta) = 0.$$

Ebből, minthogy a nevező nem lehet végtelen :

$$\frac{\widehat{m}_\alpha^2}{\widehat{m}_\beta^2} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}. \quad (21)$$

Láthatjuk, hogy az α és β szögek értéke szögműközéhibájuk viszonyától függ. (A második differenciálhányadosok vizsgálatától eltekintünk; geometriai megfontolások alapján csupán minimumról lehet szó.) Amennyiben a (21) egyenlet alapján β -t a függvényében fejezzük ki és a (20) alatti első egyenletbe a nagy zárójelbe behelyettesítjük (a zárójel előtt előforduló $\frac{2\overline{AB}^2}{\sin^4(\alpha + \beta)}$ faktor nem lehet nulla), úgy megkapjuk azt az α értéket, amelynél M^2 minimuma mutatkozik. A (21) egyenlet útján számítható azután β értéke is.

Amennyiben $m_\alpha = m_\beta = m$, úgy a minimumhoz a (21) egyenlet szerint szükséges, hogy α és β értékek is egyenlők legyenek. Akkor a (20) alatti egyenletek első egyenlete alapján írhatjuk :

$$m^2 (\sin \alpha \cos \alpha - 2(\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} 2\alpha) = 0$$

vagy, mivel m^2 nulla értékű nem lehet, a jobboldali zárójeles részt $\sin \alpha$ -val történt osztás útján a következőképpen írhatjuk :

$$\operatorname{ctg} \alpha - 4 \operatorname{ctg} 2\alpha = 0 = \operatorname{ctg} \alpha - \frac{2(\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1)}{\operatorname{ctg} \alpha}.$$

Ebből következik :

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = 2 \quad \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{2} \quad (22)$$

és

$$\alpha = 35^\circ 15' 52'' \quad \beta = 35^\circ 15' 52'',$$

valamint

$$\gamma = 109^\circ 28' 52''.$$

A (20) egyenletekből következik egyébként, hogy akkor, amikor a kettő közül pl. β szög értéke adva van, a (20) alatti első egyenlet útján adott β mellett a legkedvezőbb α szögérték kiszámítható, és $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$ egyenlet megadja a két metsző iránnyal bezárt szöget is.

Amennyiben m_A és m_B értékek függetleníthetők a háromszög oldalhosszaitól, akkor — mint ahogy azt már a (18) egyenlet után említettük — a lineáris pontközéphiba szempontjából is a 90° -os metszési szögnél kapjuk a legkedvezőbb metszést. Ennek a feltételnek a teljesítése egyebek között azzal érhető el, hogy hosszabb oldalak esetében a szögeket pontosabban mérjük. Ezzel az m_A és m_B értékek egyenlősége is biztosítható. Az első követelmény elérése céljából, azaz a változatlan m_A és m_B középhibák biztosítására az α és β szögeket az alábbi középhibákkal kell meghatározni:

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \pm \varrho'' \frac{m_A}{AP} = \pm \varrho'' \frac{m_A}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} \\ m_\beta &= \pm \varrho'' \frac{m_B}{BP} = \pm \varrho'' \frac{m_B}{AB} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}. \end{aligned} \quad (23)$$

Ezek az összefüggések lehetőséget nyújtanak a számszerűleg betartani kívánt m_A és m_B értékekhez szükséges szög megbízhatóság meghatározására. Amennyiben célszerűen úgy döntünk, hogy $m_A = m_B$ legyen, akkor

$$\frac{m_\alpha}{m_\beta} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (24)$$

Ekkor betartandó M lineáris pontközéphiba esetében a (18) egyenletből a következő adódik:

$$m_A = m_B = \frac{M \sin \gamma}{\sqrt{2}}. \quad (25)$$

Ezt a (23) egyenletekbe behelyettesítve:

$$\begin{aligned} m_\alpha &= \pm \varrho'' \cdot \frac{M \sin \gamma}{AP \sqrt{2}} = \pm \varrho'' \frac{M \sin^2 \gamma}{AB \sqrt{2} \sin \beta} \\ m_\beta &= \pm \varrho'' \frac{M \sin \gamma}{BP \sqrt{2}} = \pm \varrho'' \frac{M \sin^2 \gamma}{AB \sqrt{2} \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (26)$$

Ebből adódik $\frac{M}{\sqrt{2}} = M$, az irányhoz kötött pontközéphiba, amely itt célszerűen

a háromszögoldalakra merőlegesen hatónak veendő. Így még a következő összefüggéseket is felírhatjuk :

$$m_a = \pm \varrho'' \frac{M_r \sin^2 \gamma}{AB \sin \beta} \quad m_\beta = \pm \varrho'' \frac{M_r \sin^2 \gamma}{AB \sin \alpha} \quad (27)$$

*

A kapott eredményeket néhány kisebb számpéldával kívánjuk kiegészíteni.

Legyen $m_A = \pm 5$ cm ; $m_B = \pm 4$ cm és $\gamma = 50^\circ$. Akkor (3) egyenletből a következőket kapjuk (a számításokat az összehasonlítás kedvéért lényegesen pontosabban végezzük el, mint egyébként szükséges lenne) :

$$a = \frac{8,464\,146 + 3,218\,419}{1,532\,089} = 7,625\,254 \text{ cm}$$

$$b = \frac{8,464\,146 - 3,218\,419}{1,532\,089} = 3,423\,905 \text{ cm}$$

$$a^2 = 58,144\,392 \quad b^2 = 11,723\,153.$$

Az (5) egyenlet ebben az esetben a következőket adja :

$$\operatorname{tg}^2 \xi + 1,191\,754 (1 - 0,201\,621) \operatorname{tg} \xi + 0,201\,621 = 0$$

és ebből a (6) egyenlet alapján :

$$\operatorname{tg} \xi_0 = \frac{-0,951\,471 \pm \sqrt{0,905\,298 - 0,806\,482}}{2}.$$

Az első érték :

$$\operatorname{tg} \xi_{1,0} = \frac{-0,951\,471 + 0,314\,349}{2} = -0,318\,561$$

szolgáltatja a

$$\xi_{1,0} = 162^\circ 19' 49'' \text{ illetve } 342^\circ 19' 49'' \text{ szögeket.}$$

A második érték :

$$\operatorname{tg} \xi_{2,0} = \frac{-0,951\,471 - 0,314\,349}{2} = -0,632\,910$$

adja a $\xi_{3,0} = 147^\circ 40' 11''$ illetve $317^\circ 40' 11''$ szögeket, melyek a másik konjugált félátmérők helyzetét határozzák meg a kis féltengelyhez viszonyítva.

Ha most a (8) egyenletet használjuk :

$$\cos(2\xi_0 + \gamma) = \frac{(1 + 0,201\,621) 0,642\,788}{1 - 0,201\,621} = 0,967\,443.$$

Ebből

$$2\xi_0 + \gamma = 14^\circ 39' 37'' \text{ illetve } 345^\circ 20' 23''$$

és

$$\xi_0 = \frac{374^\circ 39' 37'' - 50^\circ}{2} = 162^\circ 19' 48,5'' \text{ illetve } 147^\circ 40' 11,5''.$$

Mivel egy további 360° -kal nagyobb érték is kielégíti a $\cos(2\xi_0 + \gamma)$ -ra felírt feltételt, 2-vel történő osztás útján kapjuk a másik két 180° -kal eltérő értéket.

Amennyiben a számításokat a (13) egyenletnek megfelelően végezzük el, úgy az alábbiak szerint számítjuk ki a ξ_0 -hoz tartozó ξ'_0 kiegészítő szöveget:

$$\operatorname{tg} 2\xi'_0 = \frac{16 \cdot 0,984\,808}{25 - 16 \cdot 0,173\,648} = 0,709\,080$$

$$2\xi'_0 = 35^\circ 20' 22'' \text{ illetve } 215^\circ 20' 22''$$

$$\text{és } \xi'_0 = 17^\circ 40' 11'' \text{ illetve } 107^\circ 40' 11''.$$

A további másik két értéket $2\xi'_0$ -nek 360° -kal való megnagyobbításával kapjuk. A középpontbaellipszis egyértelmű fekvésének eldöntésére azt a szabályt alkalmazzuk, amely szerint a fél nagytengely a γ szögön belül vagy kívül fekszik, aszerint, hogy γ kisebb vagy nagyobb mint 90° .

A ξ'_0 szög ismeretében a (15) egyenlet alapján könnyen kiszámíthatjuk a fél nagy- és kistengely értékét:

$$a' = \frac{m_a}{\sin \gamma} = \frac{5}{0,766\,044} = 6,527\,037 \text{ cm}$$

$$b' = \frac{m_b}{\sin \gamma} = \frac{4}{0,766\,044} = 5,221\,629 \text{ cm}$$

$$a^2 = (6,527\,037 \cdot 0,952\,822)^2 + (5,221\,629 \cdot 0,844\,979)^2 = 58,144\,492$$

$$a = 7,625\,253 \text{ cm}$$

$$b^2 = (6,527\,037 \cdot 0,303\,530)^2 + (5,221\,629 \cdot 0,534\,799)^2 = 11,723\,128$$

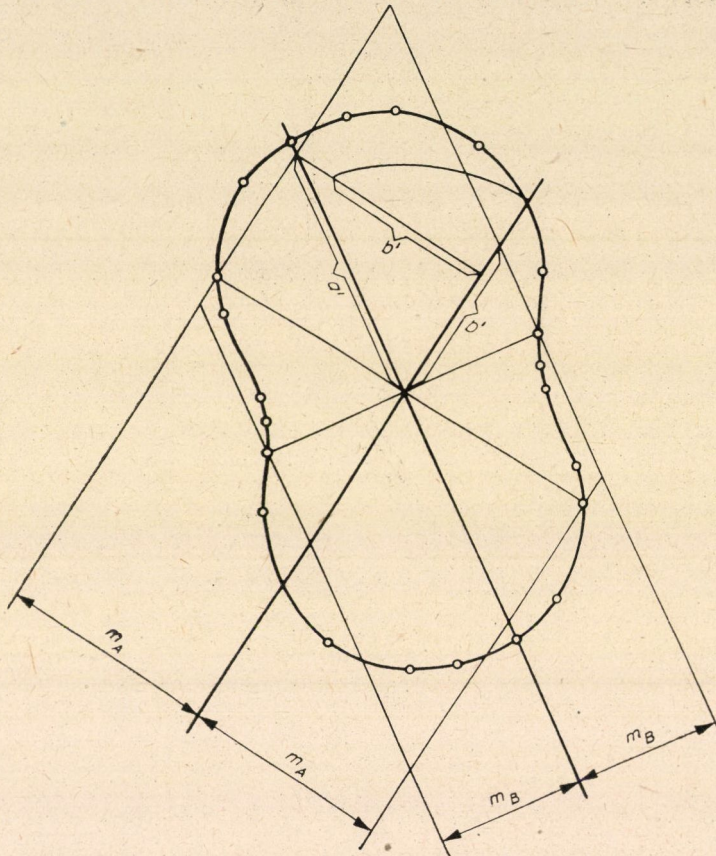
$$b = 3,423\,905 \text{ cm}.$$

Említettük már, hogy a és b grafikusán is könnyen megszerkeszthető, és hasonló módon bármely tetszőleges más irányban is P pont középpontja gyorsan megadható. Ez a gyakorlati vizsgálatoknál sokszor mind a hibaellipszis, mind talpponti görbéjének megszerkesztését feleslegessé teszi, mint ahogy ezt az 5. ábra mutatja, amelyben a $\xi' \pm 90^\circ$ -os irányhoz tartozó közepes harántirányú középpontot adtuk meg. A ξ' szögnek megfelelő egyenesre rávetítjük b' -t (a kapott komponens y') és a' -t (a kapott komponens x'). Ha x' -t és y' -t derékszög alatt összetesszük, a kapott p szerkesztési pontot a ξ' -nek megfelelő egyenesre forgatjuk, a P_r távolság a $p_{\xi' \pm 90^\circ}$ talpponti távolságot adja. Méretarányának célszerűen az 1:1 viszonyt vesszük, ami azt jelenti, hogy 1 cm hiba = 1 cm a rajzban. Amennyiben ξ' -t egyenlőnek vesszük a (13) összefüggés alapján logarléccel könnyen kiszámítható ξ'_0 -val, úgy a középpontbaellipszis fél nagytengelyét és a rá merőleges fél kistengelyét azonnal megszerkeszthetjük. Ez a módszer a talpponti görbe gyors és közvet-

számítani) a $\sin \gamma$ nem lehet kisebb, mint

$$\sin \gamma = \frac{1,5}{2,25 + 1} \left(\frac{5}{4} + \frac{4}{5} \right) = 0,946,$$

azaz a γ nem lehet kisebb 71° -nál.



6. ábra

Amennyiben az (f) egyenletek segítségével egyenlő nagy m_A és $m_B = m_q$ középhibákat biztosítunk ± 4 cm értékben, úgy a (c) egyenlet alapján

$$\sin \gamma = \frac{3}{3,25} = 0,923$$

γ 67° -ra csökkenthető.

Kérdés, hogy mekkora a fél nagytengely $m_A = m_B = m_q = \pm 4$ cm és $\gamma = 67^\circ$ esetében. A (d) egyenlet alapján kapjuk :

$$a = \frac{4}{\sqrt{2} \sin 33^\circ 30'} = \frac{4}{0,778} = 5,14 \text{ cm},$$

míg a (g) egyenleteknek megfelelően a fél kistengely :

$$b = \frac{4}{\sqrt{2} \cos 33^\circ 30'} = \frac{4}{0,834} = 3,40 \text{ cm}.$$

Az $\frac{a}{b}$ viszony a kerekítési hibákat nem tekintve, valóban az előírt 1,5-es érték.

Amennyiben a értéke nem léphet túl egy meghatározott értéket, úgy a megadott a -hoz kell m_q értékét az (e) egyenletek és m_a valamint m_β értékét az (f) egyenletek alapján meghatározni. $a = 4$ cm és $\gamma = 67^\circ$ esetében pl. $m_q = 3,11$ cm. Viszont ha γ értéke is a viszonyokkal adott, úgy az (e) és (f) egyenletekben is már ezzel az értékkel számolunk. $\gamma = 50^\circ$ esetében pl. $a = 4$ cm betartásához az (e) összefüggés alapján

$$m_q = 4 \cdot 1,41 \sin 25^\circ = 2,35 \text{ cm}$$

kell, s ennek segítségével a (f) egyenlet útján számítjuk a szükséges m_a és m_β értékeket. b -re a (g) egyenlet a következőt adja :

$$b = \frac{2,35}{1,41 \cdot 0,906} = 1,84 \text{ cm}.$$

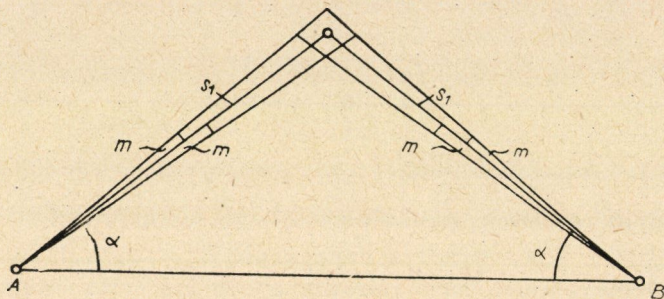
A γ szög csökkentésével nő természetesen az a és b közötti aránytalanság. Ez nyilvánvalóan más eset, mint az előbbi, ahol $m_A = 4$ cm és $m_B = 5$ cm volt. Egyenlő harántirányú középpontok esetében — mint látjuk — egyszerűbb a számítás.

Áttérve a pontközéppontokra, már kifejtettük, hogy a hibaellipszis fő-tengelyeivel csupán az irányhoz kötött pontközéppontot lehet összehasonlítani.

Vegyünk fel a 7. ábrában egy egyenlőszárú háromszöget és \overline{AB} legyen 1 km, és a mindkét oldalú α szög középpontja legyen $m = \pm 10''$. Vizsgáljuk meg egymásután a következő eseteket, ahol $\alpha = 30^\circ, 35^\circ, 40^\circ, 45^\circ, 50^\circ$ és 60° . A megfelelő γ szögértékek lesznek: $120^\circ, 110^\circ, 100^\circ, 90^\circ, 80^\circ$ és 60° . Az eredmények a következő táblázatban vannak összeállítva. Ebben az oldalhosszak méterben, a többi értékek cm-ben vannak megadva. A szimmetriára való tekintettel alkalmazhatók a (d) és (g) egyenletek.

* $109^\circ 28'$ -ről felkerekítve.

Miután a szimmetria következtében mindkét konjugált félátmérő egyenlő egymással, a (17a) egyenletből következik, hogy ezeknek az irányhoz kötött pontközéphibával kell egyenlőknek lenniök. A táblázat világosan mutatja, hogy $a = 35^\circ$ -től 45° -ig az oldalhosszak kerekén 100 m-rel nőnek és így egyenlő m_a szöghözéphibák mellett az m_q harántirányú középhiba 2,96 cm-ről 3,43 cm-re nő. Így $a = 45^\circ$, illetőleg $\gamma = 90^\circ$ esetében alakja miatt ugyan igen kedvező



7. ábra

hibakört kapunk, mégis $a = 35^\circ$ illetőleg $\gamma = 110^\circ$ esetében az észrevehetően kisebb m_q érték miatt a keletkező hibaellipszis mégis kedvező. Ha csupán a fél nagytengelyt vesszük szemügyre, $\gamma = 90^\circ$ esetében ez a legkisebb, viszont a fél kistengely itt a legnagyobb. A fél kistengely $\gamma = 110^\circ$ -nál mintegy 1,2 egységgel lesz nagyobb a $\gamma = 90^\circ$ -hoz tartozónál, míg a nagytengely $\gamma = 90^\circ$ -nál csupán 0,2 egységgel lesz kisebb, mint 110° -nál. Ezért kell, hogy az irányhoz kötött pontközéphiba itt a legkisebb legyen.

Szélg Érték	$a = 30^\circ$ $\gamma = 120^\circ$	$a = 35^\circ$ $\gamma = 110^\circ$	$a = 40^\circ$ $\gamma = 100^\circ$	$a = 45^\circ$ $\gamma = 90^\circ$	$a = 50^\circ$ $\gamma = 80^\circ$	$a = 55^\circ$ $\gamma = 70^\circ$	$a = 60^\circ$ $\gamma = 60^\circ$
	Oldalhossz, s_1	577,35	610,39	652,70	707,11	777,86	871,72
Közepes harántirányú hiba, m_q	2,80	2,96	3,16	3,43	3,77	4,23	4,85
Konj. félátmérő	3,23	3,15	3,21	3,43	3,83	4,50	5,60
Fél nagytengely	3,96	3,65	3,48	3,43	4,15	5,21	6,86
Fél kistengely	2,30	2,25	2,89	3,43	3,48	3,65	3,96
Irányhoz kötött pontközéphiba, M_r	3,23	3,15	3,21	3,43	3,83	4,23	4,85

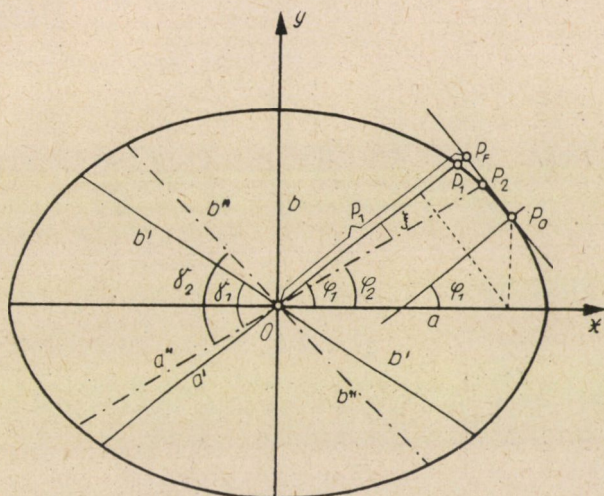
Egyébként a félátmérők közötti különbségek $\gamma = 80^\circ$ és $\gamma = 120^\circ$ között aránylag kicsinyek, és a fél nagytengely és a fél kistengely közötti viszony is megnyugtató, úgyhogy a (24) egyenletben kifejezett feltétel betartásával ez a tartomány kedvezőnek tekinthető. A kapott számértékek $\overline{AB} = 1$ km-es távolságra vonatkoznak. Más távolságok esetén kis átszámítás szükséges.

Kézenfekvő, hogy a többi fölös megfigyelés nélküli pontkapcsolásokat is hasonló értelemben megvizsgáljuk. Néhány itt alkalmazott gondolatmenet közvetlenül átvihető; egyes megállapítások a kiegyenlítés útján kapható hibaellipszisre is érvényesek, hiszen a HELMERT-féle equivalens egyenespárok szintén konjugált átmérői a középhibaellipszisnek (l. [15 ; 137. o.]-t is) és így a talpponti görbét az 5. és 6. ábrák szerint itt is egyszerűen megszerkeszthetjük. A további pontkapcsolásokra még visszatérünk.

A vizsgálatok számítási munkáiban EILINGZFELD F., FARKAS P. és SZÁDECZKY-KARDOS GY. munkatársaim vettek részt.

Függelék

A hibaterjedés törvénye alapján kapott (9a), (9b), (10), (11), (15), (16) egyenleteket közvetlenül az ellipszis tulajdonságaiból is levezetni kívánjuk, amikor is a számított értékek a talpponti távolságok négyzetét jelentik.



8. ábra

A 8. ábrán P_0 -al jelölt x_0, y_0 koordinátájú pont érintőjéhez keressük a P_1 talpponti távolságot. Az érintőre merőleges irány az x tengellyel φ_1 szöget zár be (megfelel az ellipszoid földrajzi szélességének).

Az ábra alapján az ellipszis P_1 pontjához (az OP_F egyenes metszése az ellipszissel) tartozó a' félátmérőjére felírható :

$$\overline{OP_1^2} = x_1^2 + y_1^2 = a'^2 \quad (28)$$

és mint az ellipszis pontjára :

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \quad (29)$$

A kettőből számítható x_1^2 :

$$x_1^2 = \frac{a^2(a'^2 - b^2)}{a^2 - b^2}. \quad (30)$$

Az ábra és a (28) egyenlet szerint :

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{y_1^2}{x_1^2} = \frac{a'^2 - x_1^2}{x_1^2} = \frac{b^2 (a^2 - a'^2)}{a'^2 (a'^2 - b^2)}. \quad (31)$$

Az ábra alapján a P_1 irányhoz tartozó p_1 talpponti távolság :

$$p_1 = x_0 \cos \varphi_1 + y_0 \sin \varphi_1. \quad (32)$$

Emellett a P_0 -ra mint az ellipszis egy pontjára érvényes (vö. [13 ; 245. o. 5—6 egyenlet]):

$$\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{a^4 \cos^2 \varphi_1}{a^2 \cos^2 \varphi_1 + b^2 \sin^2 \varphi_1} = \frac{a^4}{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1} \\ y_0^2 &= \frac{b^4 \sin^2 \varphi_1}{a^2 \cos^2 \varphi_1 + b^2 \sin^2 \varphi_1} = \frac{b^4}{a^2 \operatorname{ctg}^2 \varphi_1 + b^2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Amennyiben $\operatorname{tg}^2 \varphi_1$, illetőleg $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}$ értékét a (31) egyenletből behelyettesítjük, megfelelő rendezés útján írható :

$$\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{a^6 (a'^2 - b^2)}{a^4 (a'^2 - b^2) + b^4 (a^2 - a'^2)} \\ y_0^2 &= \frac{b^6 (a^2 - a'^2)}{b^4 (a^2 - a'^2) + a^4 (a'^2 - b^2)}. \end{aligned} \quad (34)$$

Míntogy továbbá :

$$\sin^2 \varphi_1 = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \frac{b^2}{a'^2} \cdot \frac{a^2 - a'^2}{a^2 - b^2} \quad (35)$$

és

$$\cos^2 \varphi_1 = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = \frac{a^2}{a'^2} \cdot \frac{a'^2 - b^2}{a^2 - b^2},$$

ezeknek a (32) egyenletbe való behelyettesítése útján kapjuk :

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{\frac{a^6 (a'^2 - b^2)}{a^4 (a'^2 - b^2) + b^4 (a^2 - a'^2)}} \cdot \frac{a}{a'} \sqrt{\frac{a'^2 - b^2}{a^2 - b^2}} + \\ &+ \sqrt{\frac{b^6 (a^2 - a'^2)}{b^4 (a^2 - a'^2) + a^4 (a'^2 - b^2)}} \cdot \frac{b}{a'} \sqrt{\frac{a^2 - a'^2}{a^2 - b^2}}, \end{aligned}$$

vagy a négyzetre áttérve megfelelő rendezés után lesz :

$$\begin{aligned} p_1^2 &= \frac{a^4 a'^2 - a^4 b^2 + b^4 a^2 - a'^2 b^4}{a'^2 (a^2 - b^2)} = \frac{a'^2 (a^4 - b^4) - a^2 b^2 (a^2 - b^2)}{a'^2 (a^2 - b^2)} = \\ &= a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{a'^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Ellipszis esetén tudvalevően (vö. 2a egyenl.) a konjugált félátmérők és a féltengelyek között felírható az alábbi összefüggés :

$$a' b' \sin \gamma_1 = a b.$$

Ebből :-

$$a' = \frac{a b}{b' \sin \gamma_1}.$$

Vezessük be ezt az értéket a (31) egyenletbe, így ebből :

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 = \frac{b'^2 \sin^2 \gamma_1 - b^2}{a^2 - b'^2 \sin^2 \gamma_1}$$

adódik,
vagy átalakítva :

$$b'^2 \sin^2 \gamma_1 = \frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1} = b^2 \cos^2 \varphi_1 + a^2 \sin^2 \varphi_1 = (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi_1 + b^2. \quad (37)$$

Ez utóbbi egyenletből az alábbi összefüggést kapjuk :

$$(a^2 - b^2) \sin^2 \varphi_1 = b'^2 \sin^2 \gamma_1 - b^2, \quad (38)$$

vagy bevezetve a $\sin^2 \varphi_1 = 1 - \cos^2 \varphi_1$ és $\sin^2 \gamma_1 = 1 - \cos^2 \gamma_1$ értékeket (vö. 41. egyenl. is):

$$(a^2 - b^2) \cos^2 \varphi_1 = b'^2 \cos^2 \gamma_1 - b'^2 + a^2 = b'^2 \cos^2 \gamma_1 + a'^2 - b^2. \quad (39)$$

Ha összeszorozzuk a (38) és (39) egyenletet egymással, akkor az alábbi összefüggéshez jutunk :

$$(a^2 - b^2) \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \varphi_1 = b'^4 \sin^2 \gamma_1 \cos^2 \gamma_1 - b^2 b'^2 (\cos^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_1) + \\ + b^2 (b^2 - a'^2) + a'^2 \frac{a^2 b^2}{a^2} = b'^4 \sin^2 \gamma_1 \cos^2 \gamma_1.$$

Négyzetgyökvonás után :

$$(a^2 - b^2) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 = b'^2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_1. \quad (40)$$

Keressük meg a talpponti távolságot ξ szöggel elforgatott P_2 -nek megfelelő irányban. A megfelelő konjugált átmérők legyenek a'' és b'' , a közbezárt szög γ_2 . Ezekre érvényes a következő összefüggés :

$$a'^2 + b'^2 = a''^2 + b''^2 = a^2 + b^2 \quad \cdot \quad (41) \\ a''^2 b''^2 \sin^2 \gamma_2 = a^2 b^2.$$

Az utóbbi alapján írhatjuk :

$$\frac{a^2 b^2}{a''^2} = b''^2 \sin^2 \gamma_2. \quad (42)$$

Amennyiben most a P_2 -nek megfelelő irányban a p_2 talpponti távolságot keressük, úgy a (36) egyenlet alapján a (42) összefüggés figyelembevételével kapjuk :

$$p_2^2 = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b^2}{a''^2} = a^2 + b^2 - b''^2 \sin^2 \gamma_2, \quad (43)$$

továbbá a (37) egyenlet alapján írhatjuk :

$$b''^2 \sin^2 \gamma_2 = (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi_2 + b^2. \quad (44)$$

Miután a 8. ábra alapján $\varphi_2 = \varphi_1 - \xi$, a (44) egyenletből lesz :

$$b'^2 \sin^2 \gamma_2 = (a^2 - b^2) \sin^2 (\varphi_1 - \xi) + b^2 = (a^2 - b^2) (\sin^2 \varphi_1 \cos^2 \xi - 2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \sin \xi \cos \xi + \cos^2 \varphi_1 \sin^2 \xi) + b^2.$$

Vezessük be a (38—40) egyenleteket, akkor megfelelő rendezés után a következő kifejezést kapjuk :

$$b'^2 \sin^2 \gamma_2 = a'^2 \sin^2 \xi + b'^2 \sin^2 (\gamma_1 - \xi).$$

Ha ezt az egyenletet a (43) összefüggésbe bevezetjük, úgy ebből lesz :

$$p_2^2 = a^2 + b^2 - a'^2 \sin^2 \xi - b'^2 \sin^2 (\gamma_1 - \xi),$$

vagy a (41) egyenlet segítségével az új vonalban a talpponti távolság négyzetére írható :

$$p_2^2 = a'^2 \cos^2 \xi + b'^2 \cos^2 (\gamma_1 - \xi). \quad (45)$$

Ez azonban megfelel a hibaelméleti megfontolások alapján kapott (11) egyenletnek. Ha $\xi = \emptyset$, illetőleg $\xi = \gamma_1 = \gamma$, úgy a (9a) és (9b) egyenletben megadott különleges esetek keletkeznek. A (45) egyenletben egy a mi céljainknak jól megfelelő összefüggést kaptunk a talpponti távolság és az ellipszis konjugált átmérői között.

A (9a) és (9b) egyenletekben a P pontot meghatározó háromszög oldalhosszainak középpontját a hibaterjedés törvénye alapján határoztuk meg. Ezek közismerten a P pont középpontját adják az adott egyenesben. Miután ezek a (45) egyenlet alapján a középpont-ellipszis talpponti távolságai, ezért csupán a talpponti távolságok alkalmasak adott vonalban, illetőleg egyenesben a pontbizonytalanság meghatározására.

IRODALOM

1. HELMERT : Studien über rationelle Verwendung im Gebiete der höhern Geodäsie. Zeitschr. f. Math. u. Physik. 1868. 73—142. o.
2. WERKMEISTER : Untersuchung der Genauigkeit von trigonometrischen Punktbestimmungen durch Einschneiden vor Ausführung der Messung. Zeitschr. f. Verm. 1920. 561—573. o.
3. WERKMEISTER : Über die Genauigkeit trigonometrischer Punktbestimmungen. Zeitschr. f. Verm. 1920. 401—412 és 433—456. o.
4. KONRÁD : Irányelvek a bányaműveletekkel kapcsolatos közetmozgások bányamérési eljárással történő megfigyelésére. Bányászati Lapok, 1951, 625—636. o.
5. Zur Fehlertheorie der offenen Polygonzüge. Soproni Közlemények. 1934. VI. kötet 289—309. o.
6. MILASOVSKY : A hibaellipszis és talppontgörbéjének meghatározása szerkesztéssel. Geodézia és Kartográfia, 1954. 151—159. o.
7. VINCZE : Pontkapcsolások számítása és vizsgálata. Geodéziai Közöny, 1949. 40—67. o.
8. GANTER—RUDIO : Die analytische Geometrie der Ebene. 10. kiadás (1927).
9. JORDAN : Handbuch der Vermessungskunde. I. kötet, 3. kiadás (1888).
10. FRIEDRICH : Über Punktgenauigkeit. Zeitschr. f. Vermessungswesen, 1927. 33—41. és 65—79. o.
11. REEH : Kritik der Genauigkeit polygonometrischer Punkt- und Richtungsbestimmung. Mitteilg. a. d. Markscheiden. Neue Folge, 10. füzet (1908) 35—90. o.
12. HOMORÓDI : A hibaellipszis és a ponthiba. Geodézia és Kartográfia, 1956. 5—15. o.
13. JORDAN—EGGERT : Handbuch der Vermessungskunde. III/1. kötet 8. kiadás (1939).
14. JORDAN—EGGERT : Handbuch der Vermessungskunde. I. kötet 8. kiadás (1935).
15. GROSSMANN : Symbolische Gewichtskoeffizienten und Fehlerellipse. Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1949. 133—139. o.

16. GROSSMANN: Grundzüge der Ausgleichsrechnung (1954).
17. FÖRSTNER, G.: Ausgleichung und Genauigkeit von Polygonzügen im weitmaschigen Netz (1933).
18. MÖHLE: Die Definition des „mittleren Punktfehlers“ und der „mittleren Fehlerellipse“. Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1936. 593—603. o.
19. MÖHLE: Zur Theorie der Genauigkeitsmasse in der Ebene. Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1941. 33—41. o.
20. ALBRECHT: Die Fehlerellipse bei trigonometrischen Punkteinschaltungen ohne überschüssige Beobachtungen. Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1941. 338—347. o.
21. CZUBER: Theorie der Beobachtungsfehler. 1891. 382—399. o.
22. HÖPCKE: Über die Ableitung der mittleren Fehlerellipse aus dem Fehlergesetz der Ebene. Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1937. 694—698. o.
23. BACHMANN: L'ellipsoïde d'erreur. Schweiz. Zeitschrift für Vermessungswesen u. Kulturtechnik. 1940. 181—197, 201—208. és 213—216. oldalak.
24. GOTTHARDT: Geometrische Konstruktion zur Fehlerellipse. Zeitschr. f. Vermessungswesen. 1943. 249—251. o.
25. BAESCHLIN, F.: Bestimmung der Fehlerellipse beim einfachen Vorwärtseinschneiden. Schweiz. Zeitschr. f. Vermess. u. Kulturtechn. 1921. év, 42—47. és 55—57. o.
26. KÖHR: Beitrag zur Fehlertheorie des einfachen Vorwärtsabschnittes mit Hilfstafeln zur Berechnung des mittleren Punktfehlers, mittlerer Koordinatenfehler und der mittleren Fehlerellipse. Allg. Vermessungsnachr., 1933. év, 762—766., 775—782. és 790—796. o.

ÖSSZEFOGLALÁS

Ha a két elméleti irány középhibáját \widehat{m}_α -val és \widehat{m}_β -val jelöljük, akkor az ezeknek megfelelő haránttéréseket P pontban az (1) egyenletek szerinti m_A és m_B értékek adják. A középhibaellipszis két konjugált félátmérőjét a (2) egyenlet szolgáltatja. A (3)—(8) egyenletek a fél nagy- és kistengely, valamint ezek irányának kiszámítását teszik lehetővé. Egy, a (BP) iránnyal ξ' szöveget bezáró irányban a két konjugált félátmérő segítségével a pont középhibáját a (11) egyenlet adja meg.

A középhibaellipszis és a pontközéphiba egymással össze nem hasonlítható pontossági mérőszámot szolgáltatnak. Az első talpponti görbéje segítségével egy bizonyos irányban adja meg a pont középhibáját, míg a másik az iránytól független. Ezért a két érték akkor sem egyezik, ha a középhibaellipszis történetesen kör. A pontközéphiba ekkor $\sqrt{2}$ -ször nagyobb sugarat ad.

A (11) egyenlet alapján a talpponti görbe szerkezetét az 5. és 6. ábra mutatja.

A függelék bizonyítását adja, hogy a középhibaszámitás szerint levezetett (11) egyenlet a középhibaellipszishöz mint síkgörbéhez is megkapható.

A MEGMÉRT OLDALHOSSZÚ GEODÉZIAI NÉGYSZÖGEKNEK A LEGKISEBB NÉGYZETEK MÓDSZERE SZERINTI KIEGYENLÍTÉSÉRŐL*

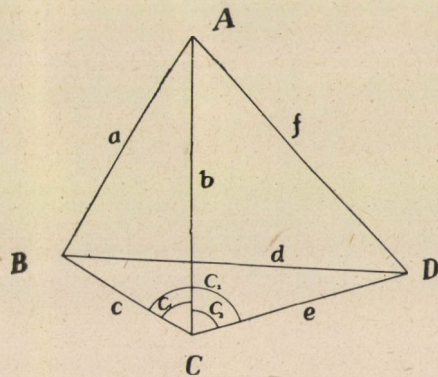
TÁRCZY-HORNOCH ANTAL

AKADÉMIKUS

[Beérkezett 1959. január 5-én]

B. T. MURPHY és G. J. THORNTON—SMITH érdekes tanulmányban (Emp. Surv. Rev. XIV, 106, 175—184) számolnak be a megmért hosszakból álló háromszöghálózat kiegyenlítésére kidolgozott eljárásukról. Lábjegyzetükben megemlítik WARCHALOWSKI 1948-as munkáját (Triangulation d'un Type Nouveau), amelynél saját eljárásukat a számításra megfelelőbbnek találják.

Itt mindjárt említsük meg, hogy a WARCHALOWSKI-féle képletek már 1908-ban KRÜGERNÉL is előfordulnak (Bedingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte; Veröffentl. d. Preusz. Geodätischen Institutes, Neue Folge N° 34. 4. és köv. oldalak), amint erre H. WOLF 1957-ben a München-



1. ábra

ben tartott Internationaler Streckenmesskurs alkalmával tartott előadásában rámutatott.

De a MURPHY és THORNTON—SMITH-féle képletek, így a számításra felhasznált (6.) –(9.) képletek is megvannak KRÜGERNÉL [2. o. (2) és (3) képletek], csupán azzal a különbséggel, hogy (1. ábra) a $c \cdot \sin B_1$, $c \cdot \sin B_2$ és $e \cdot \sin D_3$ helyett az ezeket az értékeket jelentő h háromszögmagasságot vezette be. KRÜGER említi, hogy a vonatkozó képlet már HAMMERNÉL (Lehr- und Handbuch

* Megjelent az Empire Survey Review 1958. évi 111. füzetének 22—29. o.-án.

der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Stuttgart, 1907; 417. és 628. oldalain) is megvan. E kiadás nem áll rendelkezésünkre, de az 1916-ból származó IV. kiadás 428. oldalán a magasság helyett a megfelelő oldalnak a megfelelő szög szinuszával való szorzata is meg van adva.

Utalunk itt arra, hogy érdekes megoldásokat adtak meg a többek között HUBENY (Die Ausgleichung von Dreiecksnetzen mit direkt gemessenen Seiten; Österr. Zeitschr. f. Vermessungsw. 1950, 103—112. o.) és RINNER (Geometrie mit Strecken; Schweiz. Zeitschr. f. Vermessungsw. u. Kulturtechnik 1950; 176—180. és 195—198. o.) is.

A MURPHY és THORNTON—SMITH-féle, illetőleg HAMMER-féle megoldás kétségtelenül egyszerű a felírásban, bizonyos hátránya azonban, hogy a szögeket úgy szólván mind ki kell már a kiegyenlítéshez számítani. Ezért gyorsabbnak látszik az a módszer, amelyet 1954-ben adtunk meg (Über die Ausgleichung von Streckennetzen, Acta Technica Acad. Scient. Hung., Bd. VIII., 399—424. o.) és amelyben a szögföltételt képező

$$\left(C_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}\right) + \left(C_3 + \frac{\varepsilon_3}{3}\right) = \left(C_2 + \frac{\varepsilon_2}{3}\right) \quad (1)$$

egyenletben előforduló szögek kiszámításánál kiírt logaritmikus táblakülönbségekkel tudjuk a javítási egyenletet felírni.

Induljunk ki a félszög koszinuszára érvényes:

$$\cos \frac{C_1}{2} = \sqrt{\frac{S_1(S_1 - a)}{bc}} \quad (2)$$

ismert összefüggésből. (Lehetne a félszögek szinuszára és tangensére vonatkozó összefüggéssel is számítani.) Jelöljük a mért és még meg nem javított értékeket vesszővel, tehát esetünkben ezek a' , b' és c' , valamint S'_1 lesznek, amikor is

$$S'_1 = \frac{a' + b' + c'}{2}. \quad (3)$$

A megmért értékekből számított szögeket nulla indexszel különböztetjük meg a végleges értékektől. Ezért (2) egyenlet a megmért értékekkel így is írható:

$$\cos \frac{C_{1,0}}{2} = \sqrt{\frac{S'_1(S'_1 - a')}{b'c'}}. \quad (4)$$

Ha $C_{1,0}$ -nak a hosszjavítások következtében történő változását mi is

ΔC_1 -gyel, a hosszjavításokat a megfelelő indexszel ellátott V -vel jelöljük, akkor :

$$\begin{aligned} \cos \frac{C_1}{2} &= \cos \frac{C_{1,0} + \Delta C_1}{2} = \\ &= \sqrt{\frac{\left(S'_1 + \frac{V_a + V_b + V_c}{2} \right) \left(S'_1 - a' + \frac{V_b + V_c - V_a}{2} \right)}{(b' + V_b)(c' + V_c)}} \end{aligned} \quad (4a)$$

Ha a logaritmikus táblakülönbségeket λ -val jelöljük, s alsó indexe azt az értéket adja meg, amelyre vonatkozik, felső indexe pedig szögfüggvény esetén a szögfüggvény milyenségét jelenti, tehát pl. $\lambda_{\frac{C_{1,0}}{2}}^{\cos}$ jelenti $\frac{C_{1,0}}{2}$ szög koszinuszának logaritmikus táblakülönbségét, akkor (4a) egyenletből δC_1 és V javítások kis értékére való tekintettel írhatjuk :

$$\begin{aligned} \log \cos \frac{C_{1,0}}{2} + \lambda_{\frac{C_{1,0}}{2}}^{\cos} \Delta C_1 &= \\ &= \left\{ \frac{\log S'_1 + \lambda_{S'_1} \frac{V_a + V_b + V_c}{2} + \log (S'_1 - a') + \lambda_{(S'_1 - a')} \frac{V_b + V_c - V_a}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \log b' - \lambda_{b'} V_b - \log c' - \lambda_{c'} V_c}{2} \right\} \end{aligned} \quad (4b)$$

Mínt hogy a (4) egyenletből

$$\log \cos \frac{C_{1,0}}{2} = \frac{\log S'_1 + \log (S'_1 - a') - \log b' - \log c'}{2},$$

azért (4b)-ből a következő egyenletet kapjuk :

$$\Delta C_1 = \frac{\lambda_{S'_1} - \lambda_{(S'_1 - a')}}{2\lambda_{\frac{C_{1,0}}{2}}^{\cos}} V_a + \frac{\lambda_{S'_1} + \lambda_{(S'_1 - a')} - 2\lambda_{b'}}{2\lambda_{\frac{C_{1,0}}{2}}^{\cos}} V_b + \frac{\lambda_{S'_1} + \lambda_{(S'_1 - a')} - 2\lambda_{c'}}{2\lambda_{\frac{C_{1,0}}{2}}^{\cos}} V_c.$$

Hasonlóképpen :

$$\Delta C_2 = \frac{\lambda_{S'_2} - \lambda_{(S'_2 - d')}}{2\lambda_{\frac{C_{2,0}}{2}}^{\cos}} V_d + \frac{\lambda_{S'_2} + \lambda_{(S'_2 - d')} - 2\lambda_{c'}}{2\lambda_{\frac{C_{2,0}}{2}}^{\cos}} V_c + \frac{\lambda_{S'_2} + \lambda_{(S'_2 - d')} - 2\lambda_{e'}}{2\lambda_{\frac{C_{2,0}}{2}}^{\cos}} V_e \quad (5)$$

$$\Delta C_3 = \frac{\lambda_{S'_3} - \lambda_{(S'_3 - f')}}{2\lambda_{\frac{C_{3,0}}{2}}^{\cos}} V_f + \frac{\lambda_{S'_3} + \lambda_{(S'_3 - f')} - 2\lambda_{b'}}{2\lambda_{\frac{C_{3,0}}{2}}^{\cos}} V_b + \frac{\lambda_{S'_3} + \lambda_{(S'_3 - f')} - 2\lambda_{e'}}{2\lambda_{\frac{C_{3,0}}{2}}^{\cos}} V_e.$$

A fentiek segítségével az (1) egyenlet így is írható :

$$C_{1,0} + C_{3,0} - C_{2,0} + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - \varepsilon_2}{3} = \delta C = \Delta C_2 - (\Delta C_1 + \Delta C_3), \quad (6)$$

ahol δC a föltételi egyenlet ellentmondása. Kapjuk tehát az (5) egyenletek segítségével a következő javítási egyenletet :

$$\begin{aligned} & - \frac{\lambda_{S_1'} - \lambda_{(S_1' - a')}}{2\lambda_{C_{1,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} V_a - \left(\frac{\lambda_{S_1'} + \lambda_{(S_1' - a')} - 2\lambda_{b'}}{2\lambda_{C_{1,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} + \frac{\lambda_{S_3'} + \lambda_{(S_3' - f')} - 2\lambda_{b'}}{2\lambda_{C_{3,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} \right) V_b - \\ & - \left(\frac{\lambda_{S_1'} + \lambda_{(S_1' - a')} - 2\lambda_{c'}}{2\lambda_{C_{1,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} - \frac{\lambda_{S_2'} + \lambda_{(S_2' - a')} - 2\lambda_{c'}}{2\lambda_{C_{2,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} \right) V_c + \frac{\lambda_{S_2'} - \lambda_{(S_2' - a')}}{2\lambda_{C_{2,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} V_d + \\ & + \left(\frac{\lambda_{S_2'} + \lambda_{(S_2' - a')} - 2\lambda_{e'}}{2\lambda_{C_{2,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} - \frac{\lambda_{S_3'} + \lambda_{(S_3' - f')} - 2\lambda_{e'}}{2\lambda_{C_{3,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} \right) V_e - \frac{\lambda_{S_3'} - \lambda_{(S_3' - f')}}{2\lambda_{C_{3,0}}^{\cos} \frac{2}{2}} V_f - \delta C = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

A javítások itt előforduló koefficienseit tudvalevőleg a kiegyenlítőszámításban a -val jelöljük. Tehát a_a, a_b, a_c stb. Az ebben a javítási egyenletben előforduló valamennyi logaritmusos táblakülönbségre a $C_{1,0}, C_{2,0}$ és $C_{3,0}$ szögek kiszámításakor szükség van, s nem kell külön kikeresni. Mint a számítási példánál látni fogjuk, a számítás így rendkívül gyors és egyszerű.

A gömbi fölösleget is a mért értékekből kapott $C_{1,0}, C_{2,0}$ és $C_{3,0}$ -val számítjuk :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varrho'' \frac{bc \sin C_{1,0}}{2R^2} & \varepsilon_2 &= \varrho'' \frac{ec \sin C_{2,0}}{2R^2} \\ \varepsilon_3 &= \varrho'' \frac{be \sin C_{3,0}}{2R^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Ebben $R^2 = \varrho v$, azaz a két főgörbületi sugár szorzata.

Lássuk most már a MURPHY és THORNTON—SMITH tanulmányában előforduló számítási példát. Itt meg kívánjuk jegyezni, hogy a szögfeltételi egyenlet jobb lett volna A -ra, mint C -re felírni, mert HOVÁNYI L. munkatársunk végzett, de nyomtatásban még meg nem jelent vizsgálata szerint ezt legcélszerűbb a legnagyobb területű háromszög csúcspontjára felírni. Nem véletlen tehát, hogy ezt a legérzékenyebb feltételt a 183. o. számpéldája nem elégíti ki, mert mint a mérethelyesebb 1. ábránk mutatja, C éppen a legkisebb területű háromszög csúcspontja. Az összehasonlítás kedvéért azonban mi is C mellett maradunk.

Az 1. ábrának megfelelő mérési adatok :

$$\begin{aligned}
 a &= 69\,847,62 \text{ láb} & d &= 102\,017,34 \\
 b &= 83\,587,77 & e &= 65\,824,23 \\
 c &= 44\,679,24 & f &= 94\,277,10.
 \end{aligned}$$

Számítsuk ki előbb a (4) egyenlet szerint $\frac{C_{1,0}}{2}$ -t, valamint értelemszerűen $\frac{C_{2,0}}{2}$ -t és $\frac{C_{3,0}}{2}$ -t, s írjuk ki egyszersmind a táblakülönbségeket. A koszinusz táblakülönbség az első negyedben tudvalevőleg negatív, mivel a koszinusz a szög növekedésével csökken. A századmásodpercnyi számítási pontosság-nak nyolc számjegyű logaritmustábla felel meg; ezért ilyenrel számítunk. Az áttekinthetőség céljából a félszögeknek a (4) egyenlet szerinti számításának részletezését mellőzzük.

		log	λ
a'	69 847,62		
b'	83 587,77	4,922 142 73	+ 519
c'	44 679,24	4,650 105 77	+ 972
$2S'_1$	198 114,63		
S'_1	99 057,315	4,995 886 55	+ 439
$-a'$	-69 847,62		
$S'_1 - a'$	29 209,695	4,465 527 02	+ 1487
c'	44 679,24	4,650 105 77	+ 972
d'	102 017,34		
e'	65 824,23	4,818 385 79	+ 660
$2S'_2$	212 520,81		
S'_2	106 260,405	5,026 371 47	+ 409
$-d'$	-102 017,34		
$S'_2 - d'$	4 243,065	3,627 679 69	+ 10235
b'	83 587,77	4,922 142 73	+ 519
e'	65 824,23	4,818 385 79	+ 660
f'	94 277,10		
$2S'_3$	243 689,10		
S'_3	121 844,55	5,085 806 11	+ 356
$-f'$	-94 277,10		
$S'_3 - f'$	27 567,45	4,440 396 60	+ 1575

$$\cos \frac{C_{1,0}}{2} = \sqrt{\frac{S'_1(S'_1 - a')}{b'c'}}$$

$$\frac{C_{1,0}}{2} = 28^\circ 19'59,57''$$

$$\lambda_{C_{1,0}}^{\cos} = -114$$

$$\cos \frac{C_{2,0}}{2} = \sqrt{\frac{S'_2(S'_2 - d')}{e'c'}}$$

$$\frac{C_{2,0}}{2} = 66^\circ 56'57,98''$$

$$\lambda_{C_{2,0}}^{\cos} = -495$$

$$\cos \frac{C_{3,0}}{2} = \sqrt{\frac{S'_3(S'_3 - f')}{b'e'}}$$

$$\frac{C_{3,0}}{2} = 38^\circ 37'1,42''$$

$$\lambda_{C_{3,0}}^{\cos} = -168$$

A táblakülönbségek segítségével kapjuk a javítási egyenlet a koefficien-seit a (7) egyenlet szerint :

$$a_d = -\frac{439 - 1487}{-2 \times 114} = -4,596$$

$$a_b = -\frac{439 + 1487 - 2 \times 519}{-2 \times 114} - \frac{356 + 1575 - 2 \times 519}{-2 \times 168} = +3,895 + 2,658 = +6,553$$

$$a_c = -\frac{439 + 1487 - 2 \times 972}{-2 \times 114} + \frac{409 + 10235 - 2 \times 972}{-2 \times 495} = -0,079 - 8,788 = -8,867$$

$$a_d = \frac{409 - 10235}{-2 \times 495} = +9,925$$

$$a_e = \frac{409 + 10235 - 2 \times 660}{-2 \times 495} - \frac{356 + 1575 - 2 \times 660}{-2 \times 168} = -9,418 + 1,818 = -7,600$$

$$a_f = -\frac{356 - 1575}{-2 \times 168} = -3,628.$$

Amint látjuk, a szögek számításához amúgy is szükséges logaritmusos táblakülönbségek egymagukban is elegendők a javítási egyenlet koefficienseinek kiszámítására. Ez elengedő pontossággal logarléccel is végezhető, mi csupán az összehasonlítás kedvéért számítunk pontosabban. A MURPHY és THORNTON—SMITH számította koefficienseknél a mi értékeink 2,06625-ször nagyobbak, mivel a szögek függvényeinek táblakülönbségei 1"-re vonatkoznak. Ezért δC -t sem kell átszámítani, mint náluk (180. o. utolsó sor).

Számítsuk ki most a (8) egyenletek szerint a gömbi fölösleget, amikor R gyanánt az ausztráliai viszonyoknak megfelelően elegendő 20 888 000 láb-t venni. A számítás logarléccel végezhető.

$$\varepsilon_1 = 206265 \frac{83588 \times 44679 \sin 56^\circ 40'}{2 (20888000)^2} = 0,736 = 0,74''.$$

Hasonlóképpen :

$$\varepsilon_2 = 0,50'' \quad \varepsilon_3 = 1,26''.$$

A (6) egyenlet értelmében :

$$\delta C = C_{1,0} + C_{3,0} - C_{2,0} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = +6,02'' + \frac{0,74'' + 0,50'' + 1,26''}{3} = 6,52''$$

és így (7) egyenlet szerint a javítási egyenlet :

$$-4,596 v_a + 6,553 v_b - 8,867 v_c + 9,925 v_d - 7,600 v_e - 3,628 v_f - 6,52 = 0.$$

Ebből az egyetlen normálegyenlet :

$$[aa]k - \delta C = 0 \quad 312,117 k - 6,52 = 0$$

és a k — korreláta (Lagrange multiplier)

$$k = \frac{\delta C}{[aa]} = \frac{6,52}{312,117} = +0,02089.$$

Ennek megfelelően a javítások és a megjavított értékek :

$$\begin{array}{ll}
 v_a = a_a k = -0,096 & a' + v_a = 69\ 847,52 \\
 v_b = a_b k = +0,137 & b' + v_b = 83\ 587,91 \\
 v_c = a_c k = -0,185 & c' + v_c = 44\ 679,06 \\
 v_d = a_d k = +0,207 & d' + v_d = 102\ 017,55 \\
 v_e = a_e k = -0,159 & e' + v_e = 65\ 824,07 \\
 v_f = a_f k = -0,076 & f' + v_f = 94\ 277,02.
 \end{array}$$

A logaritmikus táblakülönbségek segítségével az a -koefficienseknél megadott részértékekkel számíthatjuk az (5) egyenletek szerint a C szögeknek a hosszak javítása következtében történő változásait :

$$\begin{array}{l}
 \Delta C_1 = +4,596 (-0,096) - 3,895 \times 0,137 + 0,079 (-0,185) = -0,99'' \\
 \Delta C_2 = +9,925 \times 0,207 - 8,788 (-0,185) - 9,418 (-0,159) = +5,18'' \\
 \Delta C_3 = +3,628 (-0,076) - 2,658 \times 0,137 - 1,818 (-0,159) = -0,35''.
 \end{array}$$

Ezeket az értékeket is közvetlenül kapjuk, s a 206265-tel való szorzás itt is elesik.

Így a gömbi \widehat{C} szögek :

$$\widehat{C}_1 = C_{1,0} + \Delta C_1 + \frac{\varepsilon_1}{3} = 56^\circ 39' 59,14'' - 0,99'' + 0,25'' = 56^\circ 39' 58,40''$$

$$\widehat{C}_2 = C_{2,0} + \Delta C_2 + \frac{\varepsilon_2}{3} = 133^\circ 53' 55,96'' + 5,18'' + 0,17'' = 133^\circ 54' 01,31''$$

$$\widehat{C}_3 = C_{3,0} + \Delta C_3 + \frac{\varepsilon_3}{3} = 77^\circ 14' 02,84'' - 0,35'' + 0,42'' = 77^\circ 14' 02,91''.$$

Az egyezés a századmásodpercig teljes.

A megmért hosszak kiegyenlítésénél mutatkozó több más problémára itt nem kívánunk kitérni, hanem utalunk már említett 1954. évi tanulmányunkra. Csupán a szerzők értékes tanulmányának két utolsó bekezdéséhez szeretnék valamit hozzáfűzni.

A geodiméterrel megmért oldalak a legtöbb esetben aligha lesznek egyenlő súlyúak. A súlyok ismeretében a (7) egyenlet megfelelően megoldható lenne, de egyelőre legalább még nem sokat mondhatunk a súlyok kiválasztására vonatkozóan. Még egyenlő mérési feltételek mellett is a megmért oldal súlya a hosszaknak valamilyen függvénye lesz, mivel a fény terjedési sebességének meghatározásához szükséges átlagos hőmérséklet és barométer-nyomás általában annál bizonytalanabb, mennél hosszabb oldalra vonatkoznak. Erre vonatkozólag érdemes lenne kísérleti méréseket végezni, mégpedig különböző hosszaknak többszöri megmérése útján pl. úgy, hogy egy 40 km-es hosszon 10, 15, 20, 25, 30, 35 és 40 km-t többször, pl. tízszer megmérünk, s a különböző

hosszakra kapott valószínű hibákból a hibáknak a hosszaktól való függését megállapítani.

A számított szögeknek a közvetlenül megmért szögekkel történő összehasonlítása is használható az ilyen vizsgálatra, de ez túl bizonytalan értékeket ad, mert itt a (4a) egyenlet segítségével a megmért hosszak hosszegységre eső keresett valószínű hibájával az egyes hosszak valószínű hibáját, majd a belőlük számított szögek valószínű hibáját kell kiszámítani. Ez utóbbiakra a számított és mért szögek különbségeiből kaphatunk értékeket, s így visszafelé a hosszegység valószínű hibáját ki tudjuk számítani. Ez a módszer feltételezi azonban, hogy a hibáknak a hosszaktól való függési formáját már ismerjük.

Ha szögeket is mértünk, legcélszerűbb ezeket is a kiegyenlítésbe bevinni. Több szög és a hosszak megmérése esetében a feltételes mérések módszere helyett célszerűbb a közvetítő mérések kiegyenlítésének a módszerével a pontok koordinátáit, mint ismeretleneket kiegyenlíteni, amint ezt az Acta Technica Scient. Hungariae kiadványban rövidesen megjelenő „Weiteres zur Ausgleichung kontinentaler Triangulierungsnetze” c. német nyelvű tanulmányunkban részletesebben kifejtjük.*

Nem tudunk egyetérteni a szerzőknek azzal a nézetével, hogy amennyiben az első négyszöghöz egy további négyszög csatlakozik, a csatlakozó oldalnak az első négyszög kiegyenlítéséből kapott értékét a második négyszög kiegyenlítésénél hibamentesnek tekintsük, s így ennek további javítást ne adjunk. Ezt azért tartjuk aggályosnak, mivel az első négyszög kiegyenlítése folytán a csatlakozó oldal súlya — mint látni fogjuk — csak kevéssel növekszik, másrészt az ilyen kényszer folytán — különösen, ha több ilyen négyszöget csatlakoztatunk egymás után — az egész így kiegyenlített idom fokozatosan deformálódik. Ennek az az oka, hogy a záró hibákat csakis a többi oldal megváltoztatásával tüntetjük el.

Lássuk most, mennyire nő a négyszög egy kiegyenlített oldalának súlya a kiegyenlítés folytán, ha — mint példánkban — az egyes oldalak mérését egyenlő pontosagnak tételezzük fel. A kiegyenlített értékek függvényének reciprok súlya föltételes méréseknél egy föltételi egyenlet esetében tudvalevőleg (lásd GROSSMANN: Grundzüge der Ausgleichsrechnung, 1954. 158. o.):

$$\frac{1}{P_F} = \left[\frac{ff'}{p} \right] - \frac{[af]^2}{\left[\frac{aa}{p} \right]},$$

illetőleg egyenlő mérési súlyok esetében :

$$\frac{1}{P_F} = [ff] - \frac{[af]^2}{[aa]}.$$

* Időközben megjelent az Acta Technica XXII. köt.-ének 9—16. old.-án.

Ha pl. az f oldal kiegyenlítés utáni súlyát akarjuk kiszámítani a kiegyenlítés előtti 1-es súllyal szemben, akkor a függvény :

$$F = 1f' + a_f v_f$$

és ezért

$$\frac{1}{P_F} = 1 - \frac{a_f^2}{[aa]} = 1 - \frac{(-3,628)^2}{312,117} = 0,958 \text{ és } P = 1,044.$$

A súly növekedése tehát nagyon csekély. Azt is láthatjuk, hogy a súlynövekedés a kérdéses oldal koeficiensének nagyságától is függ, s így a különböző oldalakra különböző.

Hogyan lehet az egyes csatlakozó négyszöget helyesebben kiegyenlíteni. Elsősorban is úgy, hogy az eredeti mérési adatok segítségével újból és együtt fölírjuk a javítási egyenleteket, s együttesen egyenlítjük ki. De lehet a BOLTZ-féle eljárás értelemszerű alkalmazásával az első kiegyenlítésből kapott korrelátához a további föltételi egyenletek hozzávétele útján kiegészítő korrelátákat számítani, anélkül, hogy az első kiegyenlítést egészen meg kellene ismételni. A legegyszerűbb azonban esetünkben úgy eljárni, hogy az első négyszög kiegyenlítéséből eredő hosszát a további kiegyenlítésbe ennek P_F súlyával visszük bele, s az így kapott javítást az első kiegyenlítésből kapott javítással összeadva kapjuk a végleges hosszát. Az első kiegyenlítésből eredő hosszának a végleges hosszhoz való arányában azután az első négyszög első kiegyenlítéséből származó összes javítását is meg kell változtatnunk, hogy az első feltételi egyenletnek is továbbra eleget tegyen.

ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány rámutat arra, hogy a hosszálózatok kiegyenlítésére MURPHY és THORNTON—SMITH által megadott módszer már KRÜGERNÉL előfordul. Ennél egyszerűbb a szerző részéről a (4)—(8) egyenletekben megadott módszer, amint ezt a számítási példa is igazolja.

Ha több hosszálózati négyszöget kell kiegyenlíteni, nem helyes ezt egymás után elvégezni, s a második négyszögnél az elsőből kapott értékeket már hibamentesnek tekinteni. Az első négyszög kiegyenlítése a kérdéses oldal pontosságát ugyanis csak mérsékelten fokozza. Ezért, ha valamennyi négyszöget nem együttesen egyenlítünk ki, az az előző kiegyenlített négyszög oldalainak középhibáját és súlyát ki kell számítani, s a következő négyszög kiegyenlítésébe ezekkel a súlyokkal kell bevinni.

KÉPLETGYŰJTEMÉNY

SINUS- ÉS COSINUS-VONAL SZERINT VÁLTOZÓ INTENZITÁSÚ TERHELÉSSEL TERHELT DERÉKSZÖGŰ NÉGYSZÖG ALAPRAJZÚ LEMEZ FESZÜLTSEGI ÁLLAPOTÁRA ÉS ALAKVÁLTOZÁSÁIRA

PATTANTYÚS-ÁBRAHÁM ÁDÁM

MTA ÉPÍTÉS- ÉS KÖZLEKEDÉSTUDOMÁNYI MUNKAKÖZÖSSÉG SZILÁRDSÁGTANI KUTATÓCSOPORT,
BUDAPEST

[Beérkezett 1959. jan. 16-án]

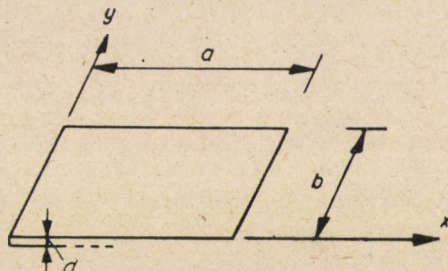
Lemezelemekből összeállított szerkezetek (orthotrop lemezek, lemez-művek stb.) közelítő számítása során, szükség van a lemezelemek terhelési alapeseteinek és ezen terhelések hatására létrejövő feszültségi állapot, valamint alakváltozások ismeretére.

Jelen dolgozat sinus-, és cosinus-vonal szerint változó intenzitású terhelésekkel előidézett feszültségi állapotokra és deformációkra vonatkozó képletgyűjteményt tartalmaz. Az itt felsorolt képleteket két fejezetben csoportosítottuk: I. élein terhelt síkbeli feszültségi állapotú lemezek, II. hajlított lemezek. Ez utóbbi fejezetben külön vannak választva a peremükön és a felületükön terhelt lemezek alapesetei.

A dolgozatban közölt képletek elsősorban akkor használhatók fel, amikor a lemezelemekre ható terheléseket Fourier-sorba fejtjük.

Feltevésék, jelölések

A lemezszerkezetek számítása során használatos feltételezések jelen esetben is érvényben vannak. A hajlított lemezeknél általában elfogadott egyszerűsítést, mely szerint a Poisson-féle szám $\mu = 0$, itt is alkalmazzuk.



1. ábra. A lemez méretei

A lemez méreteit és elhelyezkedését a koordináta-rendszerben az 1. ábra mutatja.

A lemez élei különböző módon lehetnek megtámasztva. A különböző megtámasztási módok jelölése a $2a$, és $2b$ ábrákon látható. A $2a$ ábrán a síkjában terhelt lemez, a $2b$ ábrán a hajlított lemez megtámasztásai találhatók.

A számítások során gyakran előfordulnak a $\operatorname{sh} \alpha_n b$ és $\operatorname{ch} \alpha_n b$ kifejezések. Ezek rövidítésére a

$$\operatorname{sh} \alpha_n b = S_n \quad \text{és} \quad \operatorname{ch} \alpha_n b = C_n \quad \left(\text{ahol } \alpha_n = n \frac{\pi}{a} \right)$$

jelölést vezettük be, ahol n tetszőleges pozitív szám.

I. Síkjában terhelt lemez

A lemez éleire ható terheléseket minden esetben a

$$X_{(x)} = X_n \sin \alpha_n x, \quad \text{ill.} \quad X_{(x)} = X_n \cos \alpha_n x$$

$$\alpha_n = n \frac{\pi}{a}$$

kifejezés jellemzi, ahol $X_n = \text{const.}$ a lemezél egységnyi hosszára jutó maximális teherintenzitást jelenti.

Síkbeli élterhelésű lemez alapegyenlete

$$\Delta \Delta F = \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

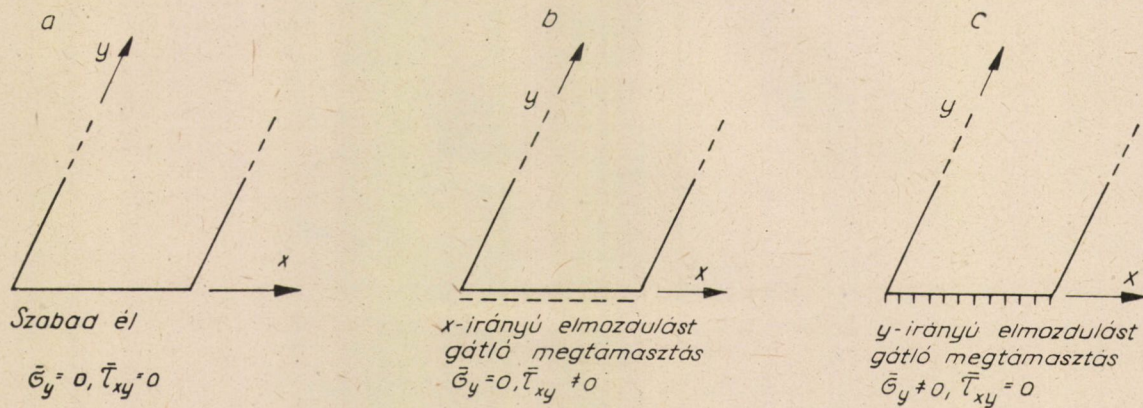
Az alapegyenletet az

$$F = \frac{1}{\alpha_n^2} [B_1 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n y B_2 \operatorname{sh} \alpha_n y + B_3 \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y B_4 \operatorname{ch} \alpha_n y] \sin \alpha_n x \quad (2)$$

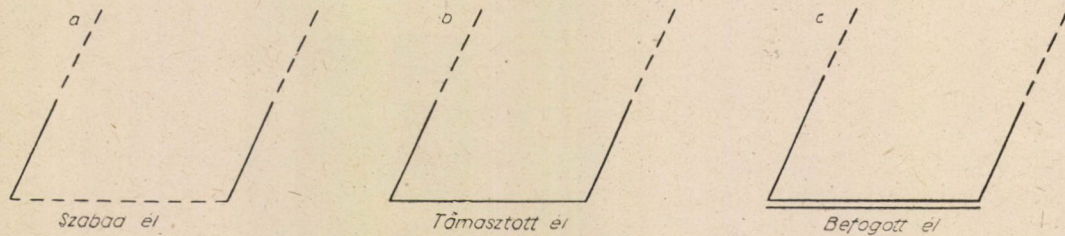
függvény elégíti ki. Az egyenletben előforduló B_1 , B_2 , B_3 és B_4 együtthatók a kerületi feltételek alapján határozhatók meg.

A feszültségek az $F(x, y)$ függvény ismeretében közvetlenül számíthatók, nevezetesen

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \quad (3a, b, c)$$



2a ábra. Síkjukban terhelt lemezek megtámasztásainak jelölése



2b ábra. Hajlított lemezek megtámasztásainak jelölése

Az elmozdulások pedig integrálás útján határozhatók meg :

$$Eu = \int \sigma_x dx + \Phi(y) = \int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dx + \Phi(y), \quad (4a)$$

$$Ev = \int \sigma_y dy + \Psi(x) = \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy + \Psi(x). \quad (4b)$$

(u az x -irányú és v az y -irányú elmozdulás.)

Az integrációs állandóként jelentkező $\Phi(y)$ és $\Psi(x)$ függvények nem függetlenek egymástól, u és v között fennálló összefüggés miatt :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

ahol γ_{xy} a τ_{xy} feszültség okozta szögtorzulást jelenti. Ha ez utóbbi összefüggést az $F(x, y)$ feszültséggfüggvény segítségével kifejezzük, akkor $\Phi(y)$ és $\Psi(x)$ között a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0$$

kapcsolatot kapjuk. Ez csak akkor következik be, ha

$$\Phi = C_1 + C_2 y \quad \text{és} \quad \Psi = C_3 - C_2 x.$$

Mivel ez a lemeznek merev testként való elmozdulását jelenti, feladatunk szempontjából nem jön számításba. Jogos tehát az a feltevés, hogy

$$\Phi = \Psi = 0. \quad (5)$$

A) Nyomóerőterhelés az egyik élen

a) *A lemez két éle nyírófeszültségek felvételére alkalmas módon megtámasztott*

Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen} : \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=0} = -\frac{Y_n}{d} \sin \alpha_n x,$$

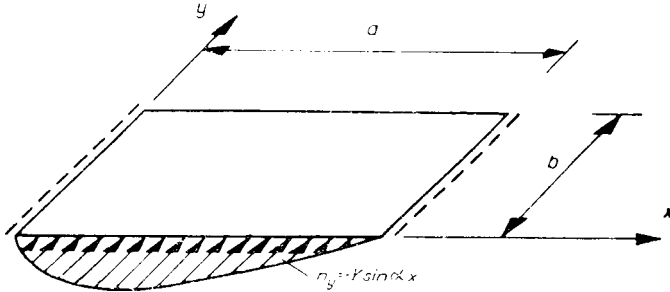
$$\tau_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen} : \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\tau_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} = 0.$$

A feszültségfüggvény :

$$F = \frac{Y_n}{a_n^2 d} \frac{\sin a_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [S_n \operatorname{sh} a_n (b-y) + a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b-y) - a_n^2 b (b-y) \operatorname{ch} a_n y - a_n b \operatorname{sh} a_n y].$$



3. ábra

Feszültségek :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{Y_n}{d} \frac{\sin a_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [S_n \operatorname{sh} a_n (b-y) - a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b-y) + a_n^2 b (b-y) \operatorname{ch} a_n y - a_n b \operatorname{sh} a_n y],$$

$$y = 0 \text{ élen: } \sigma_x = - \frac{Y_n}{d} \frac{S_n^2 + a_n^2 b^2}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \sin a_n x,$$

$$y = b \text{ élen: } \sigma_x = \frac{Y_n}{d} \frac{2 a_n b S_n}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \sin a_n x,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \frac{Y_n}{d} \frac{\sin a_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [S_n \operatorname{sh} a_n (b-y) + a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b-y) - a_n^2 b (b-y) \operatorname{ch} a_n y - a_n b \operatorname{sh} a_n y],$$

$$\tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{Y_n}{d} \frac{\cos a_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [a_n y S_n \operatorname{sh} a_n (b-y) + a_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} a_n y].$$

Elmozdulások :

$$Eu_{y=0} = \frac{Y_n}{a_n d} \frac{S_n^2 + a_n^2 b^2}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \cos a_n x, \quad Eu_{y=b} = - \frac{Y_n}{a_n d} \frac{2 a_n b S_n}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \cos a_n x;$$

$$Ev_{y=0} = \frac{Y_n}{a_n d} \frac{S_n C_n + a_n b}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \sin a_n x, \quad Ev_{y=b} = \frac{2 Y_n}{a_n d} \frac{a_n b C_n + S_n}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \sin a_n x.$$

b) A lemez három éle nyírófeszültségek felvételére alkalmas módon megtámasztott

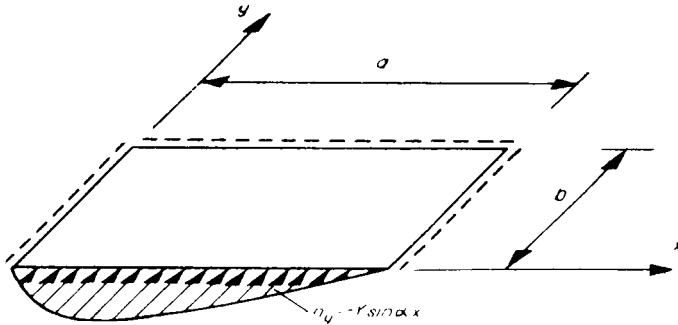
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen : } \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=0} = - \frac{Y_n}{d} \sin a_n x,$$

$$\tau_{xy} = - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen : } \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\sigma_x = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0.$$



4. ábra

A feszültségfüggvény :

$$F = \frac{Y_n}{a_n^2 d} \frac{\sin a_n x}{S_n C_n - a_n b} [C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n y C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n b \operatorname{ch} a_n y].$$

Feszültségek :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{Y_n}{d} \frac{\sin a_n x}{S_n C_n - a_n b} [C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n y C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + a_n b \operatorname{ch} a_n y],$$

$$y = 0 \text{ élen : } \sigma_x = - \frac{Y_n}{d} \frac{S_n C_n + a_n b}{S_n C_n - a_n b} \sin a_n x,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \frac{Y_n}{d} \frac{\sin a_n x}{S_n C_n - a_n b} [C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n y C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n b \operatorname{ch} a_n y],$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{Y_n}{d} \frac{\cos a_n x}{S_n C_n - a_n b} [a_n y C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n b \operatorname{sh} a_n y];$$

$$y = b \text{ élen: } \tau_{xy} = \frac{Y_n}{d} \frac{a_n b S_n}{S_n C_n - a_n b} \cos a_n x.$$

Elmozdulások :

$$Eu_{y=0} = -\frac{Y_n}{a_n d} \frac{S_n C_n + a_n b}{S_n C_n - a_n b} \cos a_n x,$$

$$Ev_{y=0} = \frac{Y_n}{a_n d} \frac{2C_n^2}{S_n C_n - a_n b} \sin a_n x, \quad Ev_{y=b} = \frac{Y_n}{a_n d} \frac{a_n b S_n + 2C_n}{S_n C_n - a_n b} \sin a_n x.$$

c) A lemez két éle nyírófeszültségek felvételére, a harmadik éle derékfeszültségek felvételére alkalmas módon megtámasztott

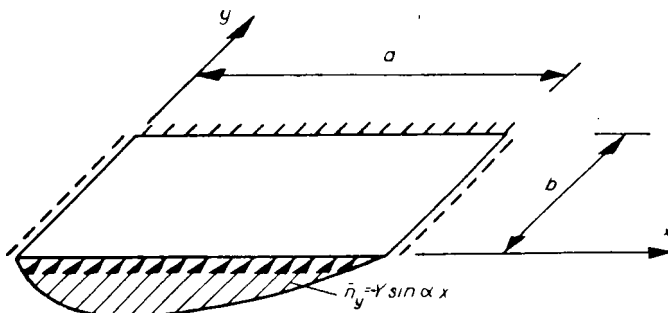
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen: } \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=0} = -\frac{Y_n}{d} \sin a_n x$$

$$\tau_{xy} = \left(\frac{-\partial^2 F}{\partial_x \partial_y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen: } \tau_{xy} = \left(\frac{-\partial^2 F}{\partial_x \partial_y} \right)_{y=b} = 0,$$

$$v = \left(\int \sigma_y dy \right)_{y=b} = 0.$$



5. ábra

A feszültségfüggvény :

$$F = \frac{Y_n}{a_n^2 d} \frac{\sin a_n y}{S_n C_n + a_n b} [S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + a_n y S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n b \operatorname{ch} a_n y].$$

Feszültségek :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{Y_n}{d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n + \alpha_n b} [-S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$y = 0 \text{ élen: } \sigma_x = -\frac{Y_n}{d} \frac{S_n C_n - \alpha_n b}{S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$y = b \text{ élen: } \sigma_x = -\frac{Y_n}{d} \frac{S_n + \alpha_n b C_n}{S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{Y_n}{d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n + \alpha_n b} [S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$y = b \text{ élen: } \sigma_y = -\frac{Y_n}{d} \frac{S_n + \alpha_n b C_n}{S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x;$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{Y_n}{d} \frac{\cos \alpha_n x}{S_n C_n + \alpha_n b} [\alpha_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y].$$

Elmozdulások :

$$Eu_{y=0} = \frac{Y_n}{\alpha_n d} \frac{S_n C_n - \alpha_n b}{S_n C_n + \alpha_n b} \cos \alpha_n x, \quad Eu_{y=0} = -\frac{Y_n}{\alpha_n d} \frac{S_n + \alpha_n b C_n}{S_n C_n + \alpha_n b} \cos \alpha_n x;$$

$$Ev_{y=0} = -\frac{Y_n}{\alpha_n d} \frac{2S_n^2}{S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

B) Nyíróerőterhelés az egyik élen

a) A lemez két éle nyírófeszültségek felvételére alkalmas módon megtámasztott

Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen: } \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0,$$

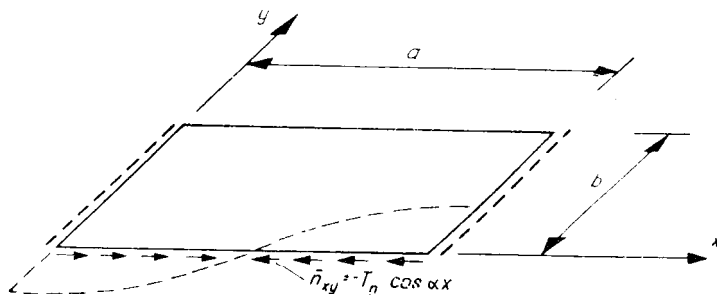
$$\tau_{xy} = -\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = -\frac{T_n}{d} \cos \alpha_n x;$$

$$y = b \text{ élen: } \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\tau_{xy} = - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} = 0.$$

A feszültségfüggvény:

$$F = \frac{T_n}{a_n^2 d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [a_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - a_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y].$$



6. ábra

Feszültségek:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = - \frac{T_n}{d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [2S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - a_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - 2a_n b \operatorname{ch} \alpha_n y + a_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$y = 0 \text{ élen: } \sigma_x = - 2 \frac{T_n}{d} \frac{S_n C_n - a_n b}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \sin \alpha_n x,$$

$$y = b \text{ élen: } \sigma_x = 2 \frac{T_n}{d} \frac{a_n b C_n - S_n}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \sin \alpha_n x,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = - \frac{T_n}{d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [a_n y S_n \alpha_n \operatorname{sh} (b - y) - a_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y];$$

$$\tau_{xy} = \frac{-\partial^2 F}{\partial x \partial y} = - \frac{T_n}{d} \frac{\cos \alpha_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - a_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + a_n b \operatorname{sh} \alpha_n y - a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y].$$

Elmozdulások :

$$Eu_{y=0} = 2 \frac{T_n}{a_n d} \frac{S_n C_n - a_n b}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \cos \alpha_n x, \quad Eu_{y=b} = 2 \frac{T_n}{a_n d} \frac{S_n - a_n b C_n}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \cos \alpha_n x;$$

$$Ev_{y=0} = \frac{T_n}{a_n d} \frac{S_n^2 + a_n^2 b^2}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \sin \alpha_n x, \quad Ev_{y=b} = 2 \frac{T_n}{a_n d} \frac{a_n b S_n}{S_n^2 - a_n^2 b^2} \sin \alpha_n x.$$

b) A lemez három éle nyírófeszültségek felvételére alkalmas módon megtámasztott

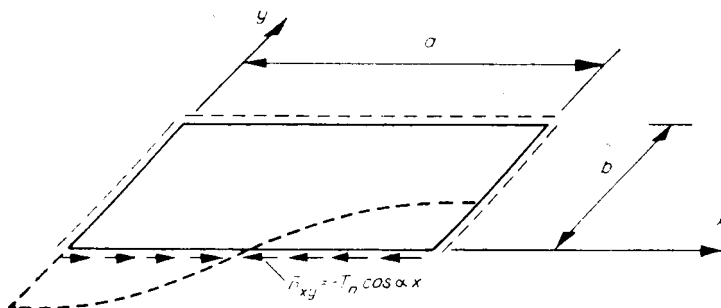
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen: } \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0,$$

$$\tau_{xy} = \left(- \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = - \frac{T_n}{d} \cos \alpha_n x;$$

$$y = b \text{ élen: } \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\sigma_x = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0.$$



7. ábra

A feszültségfüggvény :

$$F = \frac{T_n}{a_n^2 d} \frac{\sin \alpha_n b}{S_n C_n - a_n b} [a_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - a_n b \operatorname{sh} \alpha_n y].$$

Feszültségek :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{T_n}{d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - a_n b} [-2S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + a_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - a_n b \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$y = 0 \text{ élen: } \sigma_x = -\frac{T_n}{d} \frac{2S_n^2}{S_n C_n - a_n b} \sin a_n x;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{T_n}{d} \frac{\sin a_n x}{S_n C_n - a_n b} [-a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b-y) + a_n b \operatorname{sh} a_n y],$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{T_n}{d} \frac{\cos a_n x}{S_n C_n - a_n b} [-S_n \operatorname{ch} a_n (b-y) + a_n y S_n \operatorname{sh} a_n (b-y) + a_n b \operatorname{ch} a_n y],$$

$$y = b \text{ élen: } \tau_{xy} = \frac{T_n}{d} \frac{a_n b C_n - S_n}{S_n C_n - a_n b} \cos a_n x.$$

Elmozdulások:

$$Eu_{y=0} = \frac{T_n}{a_n d} \frac{2S_n^2}{S_n C_n - a_n b} \cos a_n x;$$

$$Ev_{y=0} = \frac{T_n}{a_n d} \frac{S_n C_n + a_n b}{S_n C_n - a_n b} \sin a_n x, \quad Ev_{y=b} = \frac{T_n}{a_n d} \frac{a_n b C_n + S_n}{S_n C_n - a_n b} \sin a_n x.$$

c) *A lemez két éle nyírófeszültségek felvételére, a harmadik éle derékfeszültségek felvételére alkalmas módon megtámasztott*

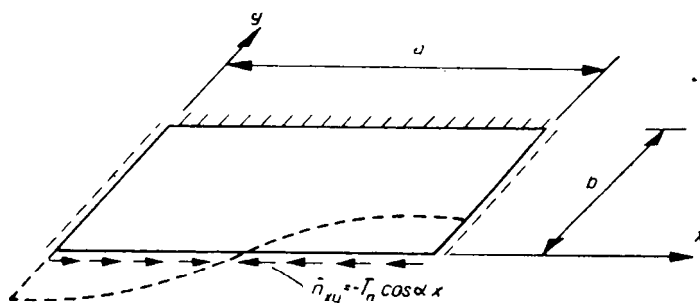
Kerületi feltételek:

$$y = 0 \text{ élen: } \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0,$$

$$\tau_{xy} = \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=0} = -\frac{T_n}{d} \cos a_n x;$$

$$y = b \text{ élen: } \tau_{xy} = \left(-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right)_{y=b} = 0,$$

$$v = \left(\int \sigma_y dy \right)_{y=b} = 0.$$



8. ábra

A feszültségfüggvény :

$$F = \frac{T_n}{\alpha_n^2 d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n + \alpha_n b} [a_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y].$$

Feszültségek :

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{T_n}{d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n + \alpha_n b} [-2C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$y = 0 \text{ élen : } \sigma_x = -\frac{T_n}{d} \frac{2C_n^2}{S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$y = b \text{ élen : } \sigma_x = -\frac{T_n}{d} \frac{2C_n - \alpha_n b S_n}{S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x;$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{T_n}{d} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n + \alpha_n b} [a_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$y = b \text{ élen : } \sigma_y = -\frac{T_n}{d} \frac{\alpha_n b S_n}{S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -\frac{T_n}{d} \frac{\cos \alpha_n x}{S_n C_n + \alpha_n b} [C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y].$$

Elmozdulások :

$$Eu_{y=0} = \frac{T_n}{\alpha_n d} \frac{2C_n^2}{S_n C_n + \alpha_n b} \cos \alpha_n x, \quad Eu_{y=b} = \frac{T_n}{\alpha_n d} \frac{2C_n - \alpha_n b S_n}{S_n C_n + \alpha_n b} \cos \alpha_n x;$$

$$Ev_{y=0} = \frac{T_n}{\alpha_n d} \sin \alpha_n x.$$

II. Hajlított lemezek

A lemezekre ható terheléseket az összes tárgyalt esetben az

$$X(x) = X_n \sin \alpha_n x, \quad \text{ill} \quad p(x) = p_n \sin \alpha_n x$$

összefüggés jellemzi, ahol X_n a perem, és $p(x)$ pedig a lemezfelület maximális teherintenzitását jelenti.

A hajlított lemezek $w(x, y)$ lehajlás függvényének a

$$\Delta \Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P(x)}{K} \quad (6)$$

inhomogén negyedrendű differenciálegyenletet kell kielégítenie. Ha a lemezt csupán a peremén terheljük, akkor $p(x) = 0$ lesz, miáltal a negyedrendű inhomogén differenciálegyenlet homogénné válik. A (6) egyenletben előforduló K a lemezmerevséget jelenti:

$$K = \frac{Ed^3}{12}$$

A differenciálegyenlet egyik megoldása a

$$w = \frac{1}{\alpha_n^2} [B_0 + B_1 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n y B_2 \operatorname{sh} \alpha_n y + B_3 \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y B_4 \operatorname{ch} \alpha_n y] \sin \alpha_n x \quad (7)$$

függvény, ahol B_0, B_1, B_2, B_3 és B_4 együtthatókat a kerületi feltételek alapján kell meghatározni. Ha a lemez csak a peremén van megterhelve, akkor a differenciálegyenlet homogén lévén, a B_0 együttható zérussal lesz egyenlő.

A $w(x, y)$ függvény ismeretében a lemez belső erőhatásai az ismert összefüggések segítségével számíthatók:

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad m_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad m_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad (8a, b, c)$$

és

$$q_x = -K \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x}, \quad q_y = -K \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y}, \quad (9a, b)$$

ahol m_x, m_y a metszeteken keletkező hajlítónyomatékokat, m_{xy} pedig a csavarónyomatékokat jelöli, q_x, q_y a metszeteken keletkező nyíróerőket jelenti; a kifejezésekben előforduló Δw pedig:

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

A szabadon támaszkodó lemezeleken működő nyíróerőket a

$$\bar{q}_x = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (10a)$$

$$\bar{q}_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (10b)$$

összefüggések adják. Támasztás nélküli lemezeknél $\bar{q}_x = 0$ és $\bar{q}_y = 0$. (Befogott éleken működő nyírőerők a (4a) és (4b) szerint számíthatók.) A lemezek sarkain keletkező sarokerőket az

$$A = 2m_{xy} = -2K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

összefüggés adja. Ha a sarkokhoz csatlakozó élek közül csak egyik is befogott sarokerő nincs.

1. Peremén terhelt lemez

A) Merőleges erőkkel a szélein terhelt lemez

a) Két élen támaszkodó lemez

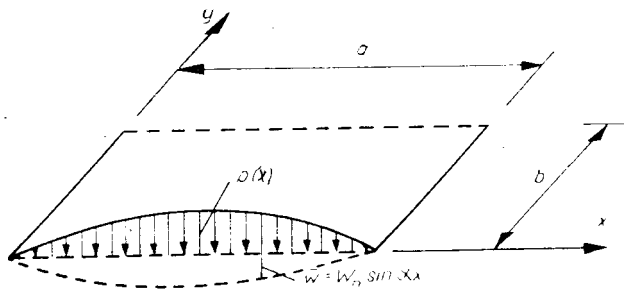
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0,$$

$$w_{y=0} = W_n \sin \alpha_n x;$$

$$y = b \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\bar{q}_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=b} = 0.$$



9. ábra

A lehajlás függvénye :

$$w = \frac{W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [6S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + 3\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y + 2\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y].$$

$y = 0$ és $y = b$ élek szögforgásai :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = -\frac{\alpha_n W_n}{2} \frac{3S_n^2 - \alpha_n^2 b^2}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b} = -\frac{\alpha_n W_n}{2} \frac{2\alpha_n b S_n}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Belső erők :

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [6S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) +$$

$$+ 3\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y + 2\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$m_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [3\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) +$$

$$+ \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$m_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\cos \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [3S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) +$$

$$+ 3\alpha_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y];$$

$$q_x = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} = \alpha_n^3 K W_n \frac{3S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y}{3S_n C_n + \alpha_n b} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} = -\alpha_n^3 K W_n \frac{3S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=0,a} = \pm \frac{\alpha_n^3 K W_n}{2(3S_n C_n + \alpha_n b)} [-6S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) +$$

$$+ 3\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y - 2\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$p(x) = \bar{q}_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=0} = -\frac{\alpha_n^3 K W_n}{2} \frac{9S_n^2 - \alpha_n^2 b^2}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x;$$

$$A^0 = -2K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=0,a}^{y=0} = \pm \alpha_n^2 K W_n \frac{3S_n^2 - \alpha_n^2 b^2}{3S_n C_n + \alpha_n b},$$

$$A^b = -2K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=0,a}^{y=b} = \pm \alpha_n^2 K W_n \frac{2\alpha_n b S_n}{3S_n C_n + \alpha_n b}.$$

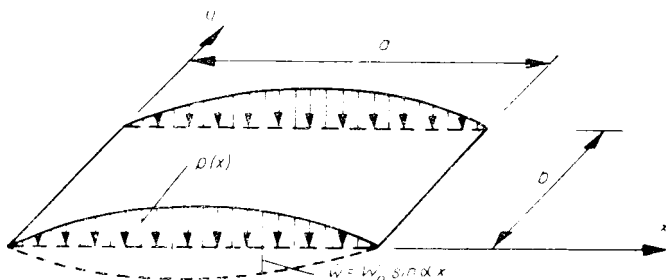
b) Két élen terhelt, két élen támaszkodó lemez

Kerületi feltételek :

 $y = 0$ és $y = b$ éleken :

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0,b} = 0,$$

$$w_{y=0,b} = W_n \sin \alpha_n x.$$



10. ábra

A lehajlás függvénye :

$$w = \frac{W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{C_n + 1} [2 \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + 2 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y].$$

 $y = 0$ és $y = b$ élek szögforgása :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0,b} = \mp \frac{\alpha_n W_n}{2} \frac{S_n - \alpha_n b}{C_n + 1} \sin \alpha_n x.$$

Belső erők :

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{C_n + 1} [2 \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + 2 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$m_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{C_n + 1} [\alpha_n (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n (b - y)],$$

$$m_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\cos \alpha_n x}{C_n + 1} [-\operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y];$$

$$q_x = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} = \alpha_n^3 K W_n \frac{\operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \operatorname{ch} \alpha_n y}{C_n + 1} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} = -\alpha_n^3 K W_n \frac{\operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - \operatorname{sh} \alpha_n y}{C_n + 1} \sin \alpha_n x.$$

Perem és sarokerők:

$$\bar{q}_x = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=0,a} = \pm \frac{\alpha_n^3 K W_n}{2(C_n + 1)} [2 \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + 2 \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$p(x) = \bar{q}_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{=0,b} = \mp \frac{\alpha_n^3 K W_n}{2} \frac{3 S_n + \alpha_n b}{C_n + 1} \sin \alpha_n x;$$

$$A^0 = -A^b = -2K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=0}^{y=0} = \pm \alpha_n^2 K W_n \frac{S_n - \alpha_n b}{C_n + 1}.$$

c) Három élen támaszkodó lemez

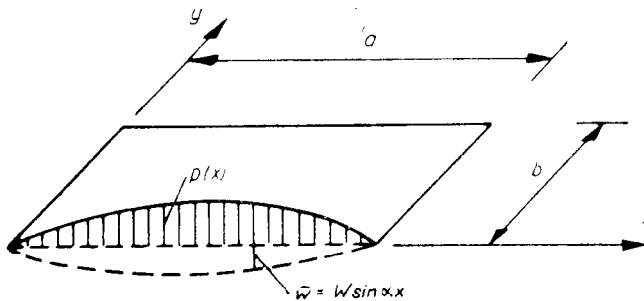
Kerületi feltételek:

$$y = 0 \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0,$$

$$w_{y=0} = W_n \sin \alpha_n x;$$

$$y = b \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0$$

$$w_{y=b} = 0.$$



11. ábra

A lehajlás függvénye :

$$w = \frac{W_n}{2S_n^2} [2S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n b \operatorname{sh} a_n y] \sin a_n x.$$

$y = 0$ és $y = b$ élek szögforgása :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = - a_n W_n \frac{S_n C_n + a_n b}{2S_n^2} \sin a_n x,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = - a_n W_n \frac{S_n + a_n b C_n}{2S_n^2} \sin a_n x.$$

Belső erők :

$$m_x = - K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{a_n^2 K W_n}{2S_n^2} [2S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + a_n b \operatorname{sh} a_n y] \sin a_n x,$$

$$m_y = - K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{a_n^2 K W_n}{2S_n^2} [- a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + a_n b \operatorname{sh} a_n y] \sin a_n x,$$

$$m_{xy} = - K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{a_n^2 K W_n}{2S_n^2} [S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + a_n y S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n b \operatorname{ch} a_n y] \cos a_n x;$$

$$q_x = - K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} = a_n^3 K W_n \frac{\operatorname{sh} a_n (b - y)}{S_n} \cos a_n x,$$

$$q_y = - K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} = - a_n^3 K W_n \frac{\operatorname{ch} a_n (b - y)}{S_n} \sin a_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = - K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=0,a} = \mp \frac{a_n^3 K W_n}{2S_n^2} [- 2S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n y S \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n b \operatorname{sh} a_n y],$$

$$p(x) = \bar{q}_y = - K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=0} = - a_n^3 K W_n \frac{3S_n C_n + a_n b}{2S_n^2} \sin a_n x,$$

$$q_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=b} = -\alpha_n^3 K W_n \frac{3S_n + \alpha_n b C_n}{2S_n^2} \sin \alpha_n x;$$

$$A^0 = -2K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=0, a}^{y=0} = \pm \alpha_n^2 K W_n \frac{S_n C_n + \alpha_n b}{S_n^2},$$

$$A^b = -2K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=0, a}^{y=b} = \pm \alpha_n^2 K W_n \frac{S_n + \alpha_n b C_n}{S_n^2}.$$

d) Két élén szabadon támaszkodó, harmadik élén befogott lemez

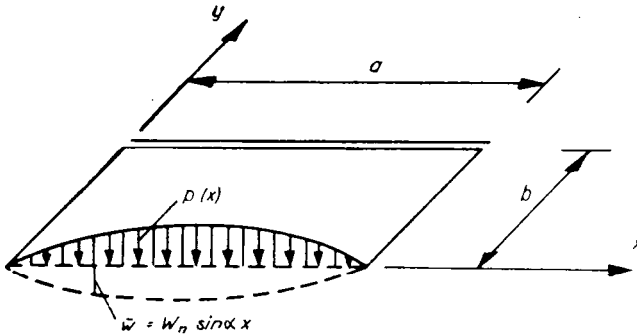
Kerületi feltételek :

$$y=0 \text{ élén : } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0,$$

$$w_{y=0} = W_n \sin \alpha_n x;$$

$$y=b \text{ élén : } w_{y=b} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=b} = 0.$$



12. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [2 C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n (2b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y].$$

$y=0$ él szögforgása :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = -\frac{\alpha_n W_n}{2} \frac{S_n^2 + \alpha_n^2 b}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Belső erők :

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [2 C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \\ + \alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n (2b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$m_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [\alpha_n y C \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \\ + 2 \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$y = b \text{ élen: } \quad \bar{m}_y = -\alpha_n^2 K W_n \frac{\alpha_n b C_n + S_n}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$m_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\alpha_n^2 K W_n}{2} \frac{\cos \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \\ + \alpha_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha^2 b (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y - \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y];$$

$$q_x = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} = \alpha_n^3 K W_n \frac{C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y - \operatorname{sh} \alpha_n y}{S_n C_n - \alpha_n b} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} = -\alpha_n^3 K W_n \frac{C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y + \operatorname{ch} \alpha_n y}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{\alpha_n^3 K W_n}{2} \frac{1}{S_n C_n - \alpha_n b} [2 C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \\ - \alpha_n (2b + y) \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y - 4 \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$p(x) = \bar{q}_{y=0} = -\frac{\alpha_n^3 K W_n}{2} \frac{3 C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$\bar{q}_{y=b} = -\alpha_n^3 K W_n \frac{2 C_n + \alpha_n b S_n}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x;$$

$$A^0 = \alpha_n^2 K W_n \frac{S_n^2 + \alpha_n^2 b^2}{S_n C_n - \alpha_n b}.$$

B) Peremnyomatékkal terhelt lemez

a) Három élen szabadon támaszkodó lemez

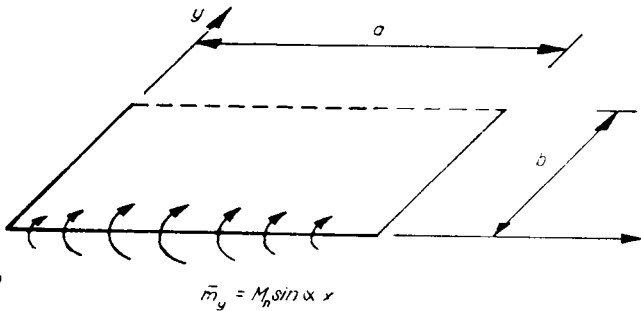
Kerületi feltételek:

$$y = 0 \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = M_n \sin \alpha_n x,$$

$$w_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\bar{q}_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=b} = 0.$$



13. ábra

A lehajlás egyenlete:

$$w = \frac{M_n}{2\alpha_n^2 K} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [3\alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y + 2 \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y].$$

 $y = 0$ és $y = b$ élek szögforgásai:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{M_n}{2\alpha_n K} \frac{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = \frac{M_n}{\alpha_n K} \frac{2C_n - \alpha_n b S_n}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Belső erők :

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [3\alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \\ + \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y + 2 \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$m_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{M_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [6C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - 3\alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \\ + \alpha_n (2b+y) \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$m_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{M_n}{2} \frac{\cos \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [3C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) -$$

$$- 3\alpha_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - \alpha_n (b+y) \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha^2 b (b-y) \operatorname{ch} \alpha_n y + \operatorname{ch} \alpha_n y];$$

$$q_x = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} = \alpha_n M_n \frac{3C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y + \operatorname{sh} \alpha_n y}{3S_n C_n + \alpha_n b} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} = \alpha_n M_n \frac{-3C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y + \operatorname{ch} \alpha_n y}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{\alpha_n M_n}{2} \frac{1}{3S_n C_n + \alpha_n b} [12C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - 3\alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \\ + \alpha_n (4b+y) \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y + 2 \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$\bar{q}_y = -\frac{\alpha_n M_n}{2} \frac{3S_n^2 - \alpha_n^2 b^2}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x;$$

$$A^0 = \mp M_n \frac{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1}{3S_n C_n + \alpha_n b}, \quad A^b = \mp M_n \frac{4C_n - 2\alpha_n b S_n}{3S_n C_n + \alpha_n b}.$$

b) Négy élen szabadon támaszkodó lemez

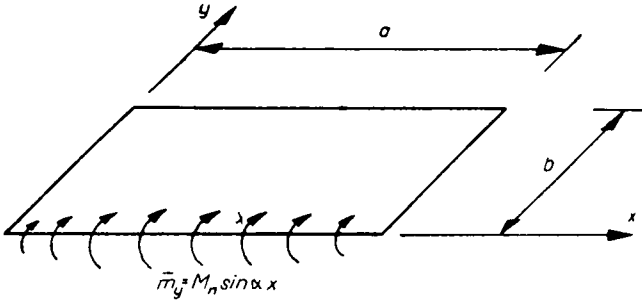
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = M_n \sin a_n x,$$

$$w_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$w_{y=b} = 0.$$



14. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{M_n}{2 a_n K} \frac{\sin a_n x}{S_n^2} [a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n b \operatorname{sh} a_n y].$$

 $y = 0$ és $y = b$ élek szögforgásai :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{M_n}{2 a_n K} \frac{S_n C_n - a_n b}{S_n^2} \sin a_n x, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = \frac{M_n}{2 a_n K} \frac{S_n - a_n b C_n}{S_n^2} \sin a_n x.$$

Belső erők :

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_n}{2} \frac{\sin a_n x}{S_n^2} [a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n b \operatorname{sh} a_n y],$$

$$m_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{M_n}{2} \frac{\sin a_n x}{S_n^2} [2 S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + a_n b \operatorname{sh} a_n y],$$

$$m_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{M_n}{2} \frac{\cos a_n x}{S_n^2} [S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n y S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n b \operatorname{ch} a_n y];$$

$$q_x = -K \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} = \alpha_n M_n \frac{\text{sh } \alpha_n (b-y)}{S_n} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = -K \frac{\partial(\Delta w)}{\partial y} = -\alpha_n M_n \frac{\text{ch } \alpha_n (b-y)}{S_n} \sin \alpha_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{\alpha_n M_n}{2 S_n^2} [4 S_n \text{sh } \alpha_n (b-y) - \alpha_n y S_n \text{ch } \alpha_n (b-y) + \alpha_n b \text{sh } \alpha_n y],$$

$$\bar{q}_{y=0} = -\frac{\alpha_n M_n}{2} \frac{S_n C_n + \alpha_n b}{S_n^2} \sin \alpha_n x, \quad \bar{q}_{y=b} = -\frac{\alpha_n M_n}{2} \frac{S_n + \alpha_n b C_n}{S_n} \sin \alpha_n x;$$

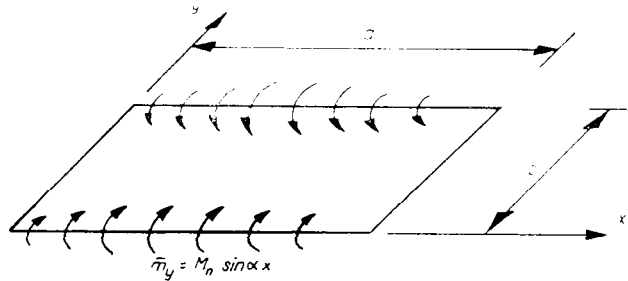
$$A^0 = \mp M_n \frac{S_n C_n - \alpha_n b}{S_n^2}, \quad A^b = \mp M_n \frac{S_n - \alpha_n b C_n}{S_n^2}.$$

c) *Két élen terhelt, négy élen szabadon támaszkodó lemez*

Kerületi feltételek :

$$y=0 \text{ és } y=b \text{ éleken: } w_{y=0} = w_{y=b} = 0,$$

$$m_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = M_n \sin \alpha_n x.$$



15. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{M_n}{2\alpha_n^2 K} \frac{\sin \alpha_n x}{C_n + 1} [\alpha_n y \text{sh } \alpha_n (b-y) + \alpha_n (b-y) \text{sh } \alpha_n y].$$

$y=0$ és $y=b$ élek szögforgása :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0,b} = \pm \frac{M_n}{2\alpha_n K} \frac{S_n + \alpha_n b}{C_n + 1} \sin \alpha_n x.$$

Belső erők :

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_n}{2} \frac{\sin a_n x}{C_n + 1} [a_n y \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n (b - y) \operatorname{sh} a_n y],$$

$$m_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{M_n}{2} \frac{\sin a_n x}{C_n + 1} [2 \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n y \operatorname{sh} a_n (b - y) + 2 \operatorname{ch} a_n y - a_n (b - y) \operatorname{sh} a_n y],$$

$$m_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{M_n}{2} \frac{\cos a_n x}{C_n + 1} [\operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n y \operatorname{ch} a_n (b - y) - \operatorname{sh} a_n y + a_n (b - y) \operatorname{ch} a_n y];$$

$$q_x = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} = a_n M_n \frac{\operatorname{ch} a_n (b - y) + \operatorname{ch} a_n y}{C_n + 1} \cos a_n x,$$

$$q_y = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} = -a_n M_n \frac{\operatorname{sh} a_n (b - y) - \operatorname{sh} a_n y}{C_n + 1} \sin a_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{a_n M_n}{2} \frac{1}{C_n + 1} [4 \operatorname{ch} a_n (b - y) - a_n y \operatorname{sh} a_n (b - y) + 4 \operatorname{ch} a_n y - a_n (b - y) \operatorname{sh} a_n y],$$

$$\bar{q}_y = \mp \frac{a_n M}{2} \frac{S_n - a_n b}{C_n + 1} \sin a_n x;$$

$$A^0 = A^b = \mp M_n \frac{S_n + a_n b}{C_n + 1}.$$

d) *Három élen szabadon támaszkodó, negyedik élen befogott lemez*

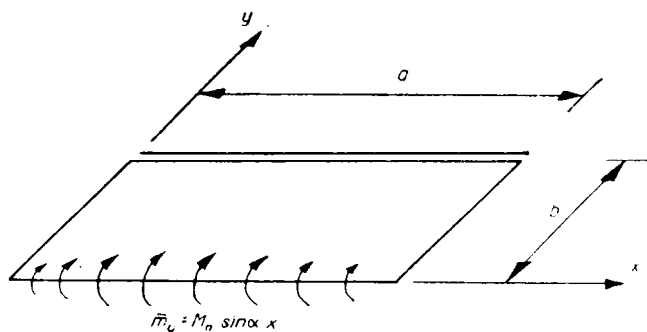
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \quad m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = M_n \sin a_n x,$$

$$w_{y=0} = 0;$$

$$y = b \quad w_{y=b} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = 0.$$



16. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{M_n}{2\alpha_n^2 K} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [\alpha_n y S_n \sin \alpha_n (b - y) - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y].$$

$$y = 0 \text{ \u00e9l sz\u00f3gforg\u00e1sa: } \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{M_n}{2\alpha_n K} \frac{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Bels\u0151 er\u0151k :

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{M_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$m_y = -K \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{M_n}{2} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [2S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - 2\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$y = b \text{ \u00e9l nyomat\u00e9ka: } \bar{m}_y = M_n \frac{S_n - \alpha_n b C_n}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$m_{xy} = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{M_n}{2} \frac{\cos \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y];$$

$$q_x = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} = \alpha_n M_n \frac{S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y}{S_n C_n - \alpha_n b} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = -K \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} = -\alpha_n M_n \frac{S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{\alpha_n M}{2} \frac{1}{S_n C_n - \alpha_n b} [4S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - \alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - 4\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$\bar{q}_{y=0} = -\frac{\alpha_n M}{2} \frac{S_n^2 + \alpha_n^2 b^2}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x, \quad \bar{q}_{y=b} = -\alpha_n M_n \frac{\alpha_n b S_n}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$A^\circ = -M_n \frac{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2}{S_n C_n - \alpha_n b}.$$

C) A lemez egyik, befogott éle elmozdul \bar{w} értékkel

a) A lemez két élen szabadon támaszkodik

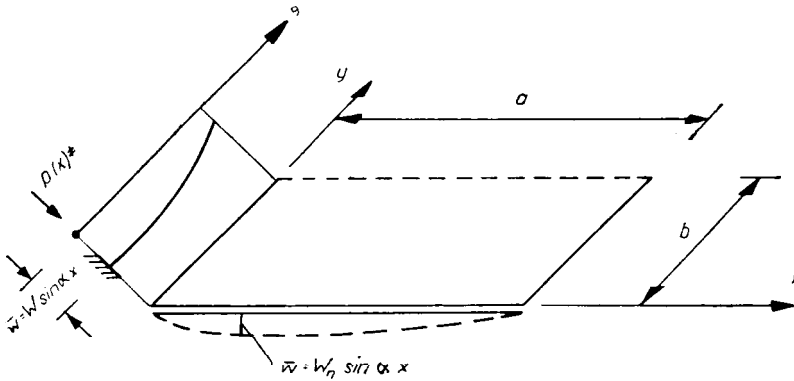
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen: } w_{y=0} = W_n \sin \alpha_n x,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen: } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\bar{q}_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=b} = 0.$$



17. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{W_n \sin a_n x}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} [3 C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + 3 a_n y C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + \\ + a_n (b + y) \operatorname{sh} a_n y + a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} a_n y + \operatorname{ch} a_n y].$$

$$y = b \text{ \u00e9l sz\u00f6gforg\u00e1sa : } \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = -2 a_n W_n \frac{a_n b C_n - S_n}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} \sin a_n x.$$

Bels\u0151 er\u0151k :

$$m_x = \frac{a_n^2 K W_n \sin a_n x}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} [3 C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + 3 a_n y C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + \\ + a_n (b + y) \operatorname{sh} a_n y + a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} a_n y + \operatorname{ch} a_n y],$$

$$m_y = \frac{a_n^2 K W_n \sin a_n x}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} [3 C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - 3 a_n y C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + \\ + a_n (b - y) \operatorname{sh} a_n y - a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} a_n y - 3 \operatorname{ch} a_n y],$$

$y = 0$ \u00e9l nyomat\u00e9ka :

$$\bar{m}_y = a_n^2 K W \frac{3 S_n^2 - a_n^2 b^2}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} \sin a_n x.$$

$$m_{xy} = \frac{a_n^2 K W_n \cos a_n x}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} [3 a_n y C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - \\ - 2 \operatorname{sh} a_n y - a_n y \operatorname{ch} a_n y - a_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} a_n y];$$

$$q_x = \frac{2 a_n^3 K W_n}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} [3 C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - \operatorname{ch} a_n y + a_n b \operatorname{sh} a_n y] \cos a_n x,$$

$$q_y = \frac{-2 a_n^3 K W_n}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} [3 C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + \operatorname{sh} a_n y - a_n b \operatorname{ch} a_n y] \sin a_n x.$$

Perem \u00e9s saroker\u0151k :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{a_n^3 K W_n}{3 C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} [9 C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - 3 a_n y C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) - \\ - 5 \operatorname{ch} a_n y + a_n (3b - y) \operatorname{sh} a_n y - a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} a_n y],$$

$$\bar{q}_{y=0} = -2 \alpha_n^3 K W_n \frac{3 S_n C_n - \alpha_n b}{3 C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} \sin \alpha_n x;$$

$$A^b = \pm 4 \alpha_n^2 K W_n \frac{\alpha_n b C_n - S_n}{3 C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1}.$$

b) *A lemez három élen szabadon támaszkodik*

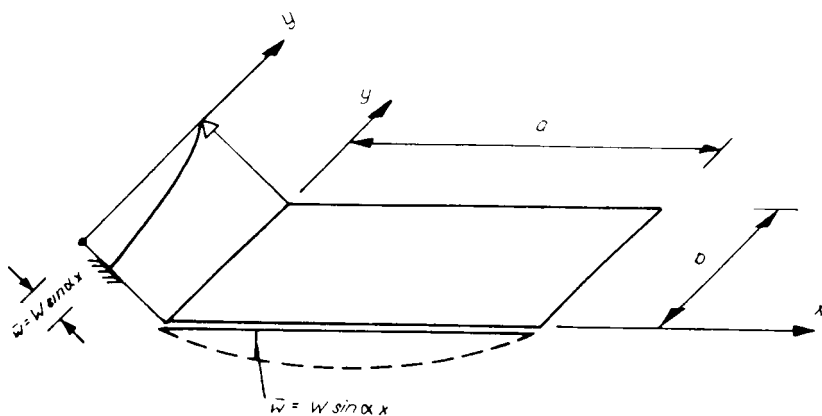
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen } w_{y=0} = W_n \sin \alpha_n x,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen } w_{y=b} = 0,$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0.$$



18. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = W_n \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$y = b$ él szögforgása

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = -\alpha_n W_n \frac{\alpha_n b S_n}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Belső erők :

$$m_x = \alpha_n^2 KW_n \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$m_y = \alpha_n^2 KW_n \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$y = 0$ él nyomatóka :

$$\bar{m}_{y=0} = \alpha_n^2 KW_n \frac{S_n C_n + \alpha_n b}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$m_{xy} = \alpha_n^2 KW_n \frac{\cos \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} [\alpha_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y]:$$

$$q_x = 2\alpha_n^3 KW_n \frac{C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y)}{S_n C_n - \alpha_n b} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = -2\alpha_n^3 KW_n \frac{C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y)}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \alpha_n^3 KW_n \frac{3C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y}{S_n C_n - \alpha_n b},$$

$$\bar{q}_{y=0} = -2\alpha_n^3 KW_n \frac{C_n^2}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$\bar{q}_{y=b} = -\alpha_n^3 KW_n \frac{2C_n + \alpha_n b S}{S_n C - \alpha_n b} \sin \alpha_n x;$$

$$A^b = 2\alpha_n^2 KW_n \frac{\alpha_n b S_n}{S_n C_n - \alpha_n b}.$$

c) *A lemez két éle szabadon támaszkodik, a harmadik mereven befogott*

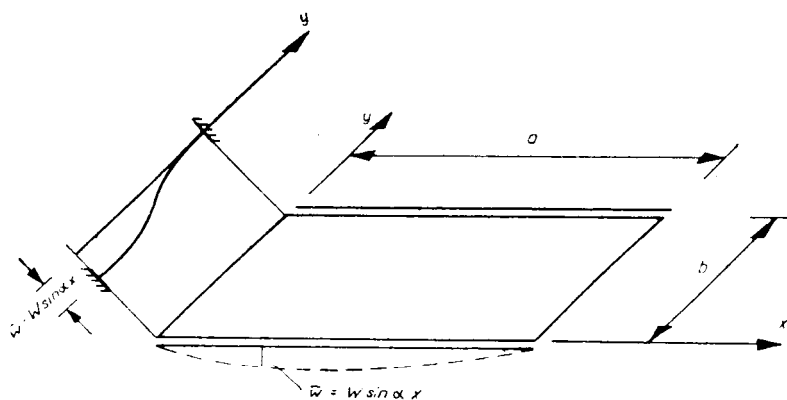
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen } w_{y=0} = W_n \sin a_n x,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen } w_{y=b} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = 0,$$



19. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{W_n \sin a_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - \\ - a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} a_n y - a_n b \operatorname{sh} a_n y].$$

Belső erők :

$$m_x = \frac{a_n^2 K W_n \sin a_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) - \\ - a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} a_n y - a_n b \operatorname{sh} a_n y],$$

$$m_y = \frac{a_n^2 K W_n \sin a_n x}{S_n^2 - a_n^2 b^2} [S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n y S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) + \\ + a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} a_n y - a_n b \operatorname{sh} a_n y],$$

$y = 0$ él nyomatóka :

$$\bar{m}_{y=0} = \alpha_n^2 KW_n \frac{S_n^2 + \alpha_n^2 b^2}{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2} \sin \alpha_n x,$$

$y = b$ él nyomatóka :

$$\bar{m}_{y=b} = -\alpha_n^2 KW_n \frac{2\alpha_n b S}{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2} \sin \alpha_n x,$$

$$m_{xy} = \frac{\alpha_n^2 KW_n \cos \alpha_n x}{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2} [\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n^3 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y];$$

$$q_x = 2\alpha_n^3 KW_n \frac{S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y}{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = -2\alpha_n^3 KW_n \frac{S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y}{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2} \sin \alpha_n x.$$

Perem és sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{\alpha_n^3 KW_n}{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2} [3 S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + \\ + \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y - 3 \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$\bar{q}_{y=0} = -2\alpha_n^3 KW_n \frac{S_n C_n + \alpha_n b}{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2} \sin \alpha_n x, \quad \bar{q}_y = -2\alpha_n^3 KW_n \frac{S_n + \alpha_n b C_n}{S_n^2 - \alpha_n^2 b^2} \sin \alpha_n x.$$

2. Felületén terhelt lemez

a) Három élen támaszkodó, felületén terhelt lemez

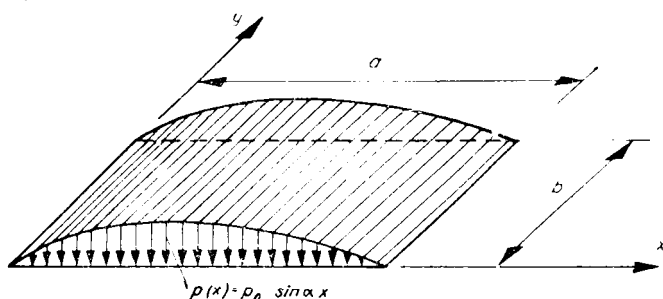
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen}; \quad w_{y=0} = 0,$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen}; \quad m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\bar{c}_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right)_{y=b} = 0.$$



20. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{p_n}{2\alpha_n^4 K} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [2(3S_n C_n + \alpha_n b) - 6S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - 3\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y - 2\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y].$$

$y = 0$ és $y = b$ élek szögforgásai :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{p_n}{2\alpha_n^3 K} \frac{3S_n^2 - \alpha_n^2 b^2}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{y=b} = \frac{p_n}{2\alpha_n^3 K} \frac{2\alpha_n b S_n}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Metszeterők :

$$m_x = -\frac{p_n}{2\alpha_n^2} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [2(3S_n C_n + \alpha_n b) - 6S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - 3\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y - 2\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$m_y = \frac{p_n}{2\alpha_n^2} \frac{\sin \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [3\alpha_n y S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$m_{xy} = -\frac{p_n}{2\alpha_n^2} \frac{\cos \alpha_n x}{3S_n C_n + \alpha_n b} [3S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + 3\alpha_n y S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n^2 b (b-y) \operatorname{ch} \alpha_n y];$$

$$q_x = \frac{p_n}{\alpha_n} \frac{(3S_n C_n + \alpha_n b) - 3S_n \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y}{3S_n C_n + \alpha_n b} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = \frac{p_n}{\alpha_n} \frac{3S_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y}{3S_n C_n + \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Peremek nyíróerői, sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{P_n}{2a_n} \frac{1}{3S_n C_n + a_n b} [6S_n C_n + 2a_n b - 6S_n \operatorname{ch} a_n (b - y) +$$

$$+ 3a_n y S_n \operatorname{sh} a_n (b - y) + a_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} a_n y - 2a_n b \operatorname{ch} a_n y],$$

$$\bar{q}_y = \frac{P_n}{2a_n} \frac{9S_n^2 - a_n^2 b^2}{3S_n C_n + a_n b} \sin a_n x,$$

$$A^0 = \mp \frac{P_n}{a_n^2} \frac{3S_n^2 - a_n^2 b^2}{3S_n C_n + a_n b}, \quad A^b = \mp \frac{P_n}{a_n^2} \frac{2a_n b S_n}{3S_n C_n + a_n b}.$$

b) Két élen szabadon megtámasztott, harmadik élen befogott, felületén terhelt lemez

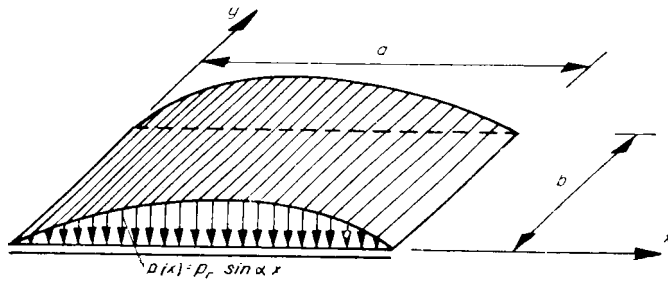
Kerületi feltételek :

$$y=0 \text{ élen : } w_{y=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y=b \text{ élen : } m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0,$$

$$\bar{q}_y = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=b} = 0.$$



21. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{P_n}{a_n^2 K} \frac{\sin a_n x}{3C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1} [(3C_n^2 + a_n^2 b^2 + 1) - 3C_n \operatorname{ch} a_n (b - y) -$$

$$- 3a_n y C_n \operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n (b + y) \operatorname{sh} a_n y - a_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} a_n y - \operatorname{ch} a_n y].$$

$y = b$ él szögforgása :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = \frac{2p_n}{\alpha_n^3 K} \frac{\alpha_n b C_n - S_n}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} \sin \alpha_n x.$$

Metszeterők :

$$m_x = \frac{P_n}{\alpha_n^2} \frac{\sin \alpha_n x}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} [(3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1) - 3C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - 3\alpha_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n (b + y) \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y - \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$m_y = -\frac{P_n}{\alpha_n^2} \frac{\sin \alpha_n x}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} [3C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - 3\alpha_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - 3 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$y = b$ élen :

$$\bar{m}_y = -\frac{P_n}{\alpha_n^2} \frac{3S_n^2 - \alpha_n^2 b^2}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} \sin \alpha_n x,$$

$$m_{xy} = -\frac{P_n}{\alpha_n^2} \frac{\cos \alpha_n x}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} [3\alpha_n y C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - 2 \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y];$$

$$q_x = \frac{p_n}{\alpha_n} \frac{(3C_n + \alpha_n^2 b^2 + 1) - 6C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + 2 \operatorname{ch} \alpha_n y - 2\alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = 2 \frac{p_n}{\alpha_n} \frac{3C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} \sin \alpha_n x.$$

Peremek nyíróerői, sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{P_n}{\alpha_n (3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1)} [(3C_n + \alpha_n^2 b^2 + 1) - 9C_n \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) + 3\alpha_n y C_n \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + 5 \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n (3b - y) \operatorname{sh} \alpha_n y + \alpha_n^2 b (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$\bar{q}_y = 2 \frac{P_n}{\alpha_n} \frac{3S_n C_n - \alpha_n b}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1} \sin \alpha_n x;$$

$$A^b = \mp 4 \frac{P_n}{\alpha_n^2} \frac{\alpha_n b C_n - S_n}{3C_n^2 + \alpha_n^2 b^2 + 1}.$$

c) Négy élen támaszkodó, felületén terhelt lemez

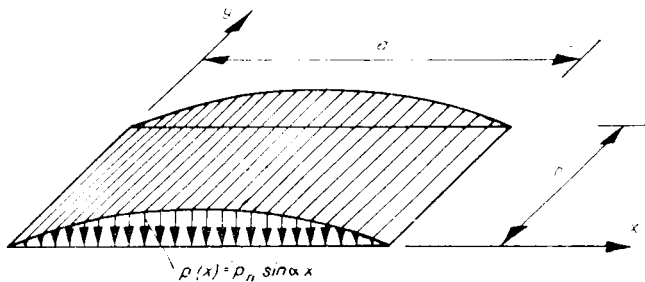
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen : } w_{y=0} = 0,$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen : } w_{y=b} = 0,$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=b} = 0.$$



22. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{P_n}{2 a_n^4 K} \frac{\sin a_n x}{C_n + 1} [2(C_n + 1) - 2 \operatorname{ch} a_n(b - y) - a_n y \operatorname{sh} a_n(b - y) - 2 \operatorname{ch} a_n y - a_n(b - y) \operatorname{sh} a_n y].$$

 $y = 0$ és $y = b$ élek szögforgásai :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = \frac{P_n}{2 a_n^3 K} \frac{S_n - a_n b}{C_n + 1} \sin a_n x.$$

Metszeterők :

$$m_x = \frac{P_n}{2 a_n^2 K} \frac{\sin a_n x}{C_n + 1} [2(C_n + 1) - 2 \operatorname{ch} a_n(b - y) - a_n y \operatorname{sh} a_n(b - y) - 2 \operatorname{ch} a_n y - a_n(b - y) \operatorname{sh} a_n y],$$

$$m_y = \frac{P_n}{2 a_n^2 K} \frac{\sin a_n x}{C_n + 1} [a_n y \operatorname{sh} a_n(b - y) + a_n(b - y) \operatorname{sh} a_n y],$$

$$m_{xy} = -\frac{p_n \cos \alpha_n x}{2 \alpha_n^2 C_n + 1} [\operatorname{sh} \alpha_n (b-y) + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - \\ - \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n (b-y) \operatorname{ch} \alpha_n y],$$

$$q_x = \frac{p_n (C_n + 1) - \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) - \operatorname{ch} \alpha_n y}{\alpha_n C_n + 1} \cos \alpha_n x,$$

$$q_y = \frac{p_n \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - \operatorname{sh} \alpha_n y}{\alpha_n C_n + 1} \sin \alpha_n x.$$

Peremek nyíróerői, sarokerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{p_n}{2 \alpha_n C_n + 1} [2 (C_n + 1) - 2 \operatorname{ch} \alpha_n (b-y) + \\ + \alpha_n y \operatorname{sh} \alpha_n (b-y) - 2 \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n (b-y) \operatorname{sh} \alpha_n y],$$

$$\bar{q}_y = \pm \frac{p_n}{2 \alpha_n} \frac{3 S_n - \alpha_n b}{C_n + 1} \sin \alpha_n x;$$

$$A^0 = -A^b = \mp \frac{p_n}{\alpha_n^2} \frac{S_n - \alpha_n b}{C_n + 1}.$$

d) *Három élen szabadon megtámasztott, negyedik élen befogott, felületén terhelt lemez*

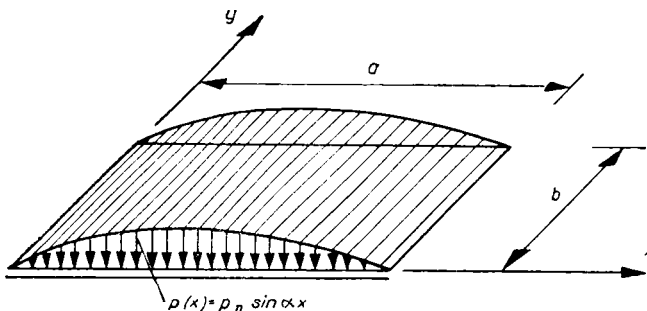
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen: } w_{y=0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen: } w_{y=b} = 0,$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0.$$



23. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{P_n}{2\alpha_n^4 K} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} \left\{ 2 (S_n C_n - \alpha_n b) - 2 (C_n - 1) [\operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \right. \\ \left. + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n (b - y)] - 2 S_n \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n (b - y) S_n \operatorname{sh} \alpha_n y + 2 \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y + \right. \\ \left. + \alpha_n^2 b y \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) \right\}.$$

$y = 0$ él szögforgása :

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = - \frac{P_n}{2\alpha_n^3 K} \frac{(S_n - \alpha_n b)^2}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Metszeterők :

$$m_x = \frac{P_n}{2\alpha_n^2} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} \left\{ 2 (S_n C_n - \alpha_n b) - 2 (C_n - 1) [\operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \right. \\ \left. + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n (b - y)] - 2 S_n \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n (b - y) S_n \operatorname{sh} \alpha_n y + 2 \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y + \right. \\ \left. + \alpha_n^2 b y \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) \right\},$$

$$m_y = \frac{P_n}{2\alpha_n^2} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} \left\{ 2 (C_n - 1) [-\operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n (b - y)] + \right. \\ \left. + \alpha_n (b - y) S_n \operatorname{sh} \alpha_n y - 2 \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y + 2 \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y - \alpha_n^2 b y \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) \right\},$$

$y = 0$ élen :

$$\bar{m}_y = - \frac{P_n}{\alpha_n^2} \frac{(C_n - 1) (S_n - \alpha_n b)}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

$$m_{xy} = \frac{P_n}{2\alpha_n^2} \frac{\cos \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} \left[- 2 \alpha_n y (C_n - 1) \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + S_n \operatorname{sh} \alpha_n y + \right. \\ \left. + \alpha_n (b - y) S_n \operatorname{ch} \alpha_n y - 2 \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) + \alpha_n^2 b y \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) \right]$$

$$q_x = \frac{P_n}{\alpha_n} \frac{\cos \alpha_n x}{S_n C_n - \alpha_n b} \left[(S_n C_n - \alpha_n b) - 2 (C_n - 1) \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - S_n \operatorname{ch} \alpha_n y + \right. \\ \left. + \alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) \right],$$

$$q_y = \frac{P_n}{\alpha_n} \frac{2 (C_n - 1) \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - S_n \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n b \operatorname{sh} \alpha_n (b - y)}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x.$$

Peremek nyíróerői, sarokerők :

$$q_x = \pm \frac{p_n}{2\alpha_n} \frac{1}{S_n C_n - \alpha_n b} \left\{ 2(S_n C_n - \alpha_n b) - 2(C_n - 1) [3 \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n (b - y)] - 2S_n \operatorname{ch} \alpha_n y + \alpha_n (b - y) S_n \operatorname{sh} \alpha_n y - 2\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n y + 4\alpha_n b \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \alpha_n^2 b y \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) \right\},$$

$$\bar{q}_{y=0} = \frac{p_n}{\alpha_n} \frac{2C_n^2 - 2C_n - \alpha_n b S_n}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$\bar{q}_{y=b} = \frac{p_n}{2\alpha_n} \frac{4(C_n - 1) - 3\xi_n^2 + 2\alpha_n b S_n - \alpha_n^2 b^2}{S_n C_n - \alpha_n b} \sin \alpha_n x,$$

$$A^b = \pm \frac{p_n}{\alpha_n^2} \frac{S_n^2 - 2\alpha_n b S_n + \alpha_n^2 b^2}{S_n C_n - \alpha_n b}.$$

e) Két élen megtámasztott, két másik élen befogott, felületén terhelt lemez

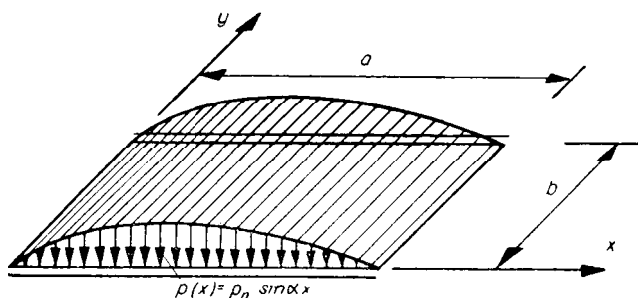
Kerületi feltételek :

$$y = 0 \text{ élen: } w_{y=0} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0;$$

$$y = b \text{ élen: } w_{y=b} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} = 0.$$



24. ábra

A lehajlás egyenlete :

$$w = \frac{p_n}{\alpha_n^4 K} \frac{\sin \alpha_n x}{S_n + \alpha_n b} \left[(S_n + \alpha_n b) - \operatorname{sh} \alpha_n (b - y) - \alpha_n y \operatorname{ch} \alpha_n (b - y) - \operatorname{sh} \alpha_n y - \alpha_n (b - y) \operatorname{ch} \alpha_n y \right].$$

Metszeterők :

$$m_x = \frac{p_n}{a_n^2} \frac{\sin a_n x}{S_n + a_n b} [(S_n + a_n b) - \operatorname{sh} a_n (b - y) - \\ - a_n y \operatorname{ch} a_n (b - y) - \operatorname{sh} a_n y - a_n (b - y) \operatorname{ch} a_n y],$$

$$m_y = - \frac{p_n}{a_n^2} \frac{\sin a_n x}{S_n + a_n b} [\operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n y \operatorname{ch} a_n (b - y) + \\ + \operatorname{sh} a_n y - a_n (b - y) \operatorname{ch} a_n y],$$

$y = 0$ és $y = b$ éleken levő befogási nyomatékok :

$$\bar{m}_{y=0} = - \bar{m}_{y=b} = - \frac{p_n}{a_n^2} \frac{S_n - a_n b}{S_n + a_n b} \sin a_n x;$$

$$m_{xy} = - \frac{p_n}{a_n^2} \frac{\cos a_n x}{S_n + a_n b} [a_n y \operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n (b - y) \operatorname{sh} a_n y];$$

$$q_x = \frac{p_n}{a_n} \frac{(S_n + a_n b) - 2 \operatorname{sh} a_n (b - y) - 2 \operatorname{sh} a_n y}{S_n + a_n b} \cos a_n x,$$

$$q_y = 2 \frac{p_n}{a_n} \frac{\operatorname{ch} a_n (b - y) - \operatorname{ch} a_n y}{S_n + a_n b} \sin a_n x.$$

Peremeken működő nyíróerők :

$$\bar{q}_x = \pm \frac{p_n}{a_n} \frac{1}{S_n + a_n b} [(S_n + a_n b) - 3 \operatorname{sh} a_n (b - y) + \\ + a_n y \operatorname{ch} a_n (b - y) - 3 \operatorname{sh} a_n y + a_n (b - y) \operatorname{ch} a_n y],$$

$$\bar{q}_y = \pm 2 \frac{p_n}{a_n} \frac{C_n - 1}{S_n + a_n b} \sin a_n x.$$

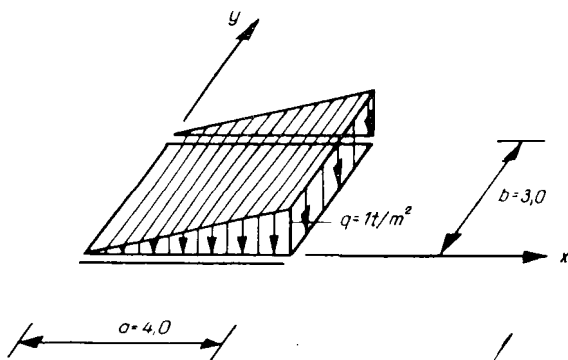
A képletgyűjteményben megadott formulák átalakíthatók oly módon, hogy az ott előforduló $\operatorname{sh} a_n b$ és $\operatorname{ch} a_n b$ kifejezések helyébe azok Taylor-sorának első tagjait helyettesítjük. A képletek alkalmazása ezzel egyszerűbbé válik és a szükséges pontosság is biztosítható.

Számpélda

A 25. ábrán látható terhelés Fourier-sorát

$$q(x) = \frac{2q}{\pi} \sum \frac{1}{n} \sin a_n x$$

kifejezés adja.



25. ábra

A lehajlás egyenletét a $2e$ terhelési eset alapján határozhatjuk meg:

$$w = \frac{\sum}{n} \frac{2q}{\pi n a_n^4 K} \frac{1}{S_n + a_n b} [(S_n + a_n b) - \operatorname{sh} a_n (b - y) - a_n y \operatorname{ch} a_n (b - y) - \operatorname{sh} a_n y - a_n (b - y) \operatorname{ch} a_n y] \sin a_n x.$$

Az $y = 0$ és $y = b$ éleken keletkező befogási nyomaték:

$$\bar{m}_{y=0} = -\frac{2q}{\pi} \sum \frac{1}{n} \frac{S_n - a_n b}{S_n + a_n b} \sin a_n x.$$

A 25. ábrán feltüntetett adatokat behelyettesítve, a Fourier-sornak csupán első négy tagját számítjuk:

$$\begin{aligned} \bar{m}_{y=0} &= -\frac{2.1}{\pi} \left[\frac{4^2}{\pi^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{4} 3 - \frac{\pi}{4} 3}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{4} 3 + \frac{\pi}{4} 3} \sin \frac{\pi}{4} x + \frac{4^2}{2^3 \pi^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} 3 - \frac{\pi}{2} 3}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} 3 + \frac{\pi}{2} 3} \sin \frac{\pi}{2} x + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4^2}{3^2 \pi^2} \frac{\operatorname{sh} 3 \frac{\pi}{4} 3 - 3 \frac{\pi}{4} 3}{\operatorname{sh} 3 \frac{\pi}{4} 3 + 3 \frac{\pi}{4} 3} \sin 3 \frac{\pi}{4} x + \frac{4^2}{4^3 \pi^2} \frac{\operatorname{sh} \pi 3 - \pi 3}{\operatorname{sh} \pi 3 + \pi 3} \sin \pi x \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[0,6138 \sin \frac{\pi}{4} x + 0,1771 \sin \frac{\pi}{2} x + 0,0586 \sin \frac{3\pi}{4} x + 0,0253 \sin \pi x \right]. \end{aligned}$$

A sor ötödik tagjának figyelembevétele már csupán 1%-nál alacsonyabb kiigazítást eredményezne.

IRODALOM

GIRKMANN, K. : Flächentragwerke (4. Auflage), Wien. Springer Vlg. pp : 18—28 ; 53—55 ; 159—171 ; 205—219.

ÖSSZEFOGLALÁS

Jelen dolgozat sinus- és cosinus-vonal szerint változó intenzitású terhelésekkel terhelt derékszögű négyszög alaprajzú lemezek feszültségi állapotára és alakváltozásaira vonatkozó képletgyűjteményt tartalmaz. A dolgozatban I. síkjában terhelt, síkbeli feszültségi állapotban levő lemezre, II. hajlított lemezre vonatkozó képletek találhatók. Ez utóbbi fejezet külön csoportosítja az élein és felületén terhelt lemezek alapeseteit.

A dolgozatban közölt képletek elsősorban olyan számításokhoz használhatók fel, amikor lemezelemek terhelését Fourier-sor segítségével írjuk fel.

ÖNMŰKÖDŐ SZABÁLYOZÁSI RENDSZEREK MINŐSÉG- JAVÍTÁSÁNAK FŐ FELADATAI ÉS MÓDSZEREI*

V. SZ. KULEBAKIN

A SZOVJETUNIO TUDOMÁNYOS AKADÉMIAJÁNAK RENDES TAGJA

A SZOVJETUNIO TUDOMÁNYOS AKADÉMIAJA AUTOMATIKAI ÉS TELEMECHANIKAI INTÉZETE, MOSZKVA

Bevezetés

Az automatikát a Szovjetunió népgazdaságának minden ágában egyre szélesebb körben alkalmazzák. Nemcsak az egyes gyártási műveleteket automatizálják, hanem különböző termékek gyártásának egész folyamatát is. Létesültek már olyan üzemek, amelyekben minden gyártási művelet teljes mértékben automatizált.

A további haladásért, az SzKP-nak és a szovjet kormánynak a nehézipar és a nehézipar szívéét alkotó gépgyártás, a többi iparágak és a mezőgazdaság további fejlesztésére, valamint az ország védelmi képességének megerősítésére vonatkozó határozatai végrehajtásáért vívott harcban a szovjet tudósok, mérnökök, feltalálók és az összes gyakorlati dolgozók előtt nagy feladatok vannak. Ezek a feladatok nemcsak az automatikának az ipar minden ágában történő meghonosítására vonatkoznak, hanem az automatizálás módjainak és módszereinek további tökéletesítésére, valamint az önműködő szabályozás rendszereinek minőségjavítására és az automatikához szükséges eszközök gyártásának kiszélesítésére.

Melyek hát azok az alapvető feladatok, amelyek az önműködő szabályozás területén ma a tudomány előtt állanak és amelyeknek megoldása az önműködő rendszerek további minőségjavítására és tökéletesítésére kell hogy irányuljanak ?

Mielőtt erre a kérdésre felelnénk, határozzuk meg pontosan : mit értünk automatizálás, önműködő rendszerek, gépek, gépegységek, és más olyan berendezések alatt, amelyeknek segítségével gyártási, üzemtechnikai folyamatok és sok más egyéb művelet megy végbe.

Az automatizálás korszerű eredményei és jelenlegi feladatai alapján ezeket a fogalmakat a következőképpen határozhatjuk meg :

Az automatizálás olyan gyártó gépekből, végrehajtó mechanizmusokból és vezérlő készülékekből álló rendszerek létrehozását és felhasználását jelenti, amelyek, valamilyen energiaforrás segítségével, az ember közvetlen beavat-

* A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának 1958. október 2-iki ülésén elhangzott előadás.

kozása nélkül a megadott feltételek és követelmények szerinti összes feladatot nagy üzembiztonsággal, hatásossággal és pontossággal végrehajtják. Az automatizálási rendszerben mindezen műszaki eszközök egységes rendszert kell hogy alkossanak. E rendszer kiszolgálása az ember számára csak ellenőrzést, megfigyelést, a szükséges üzemállapotok beállítását és a rendszer működésbe hozását vagy leállítását jelenti.

Minden önműködő rendszerben a szabályozott vagy a vezérelt szakasz képezi a rendszer alapvető elemét. Ezért az automatizálás megvalósításakor mindenekelőtt az szükséges, hogy megállapítsuk a megfelelő gyártási módszert, valamint olyannak válasszuk a gyártó gépek vagy végrehajtó mechanizmusok és a hozzájuk tartozó energiatáplálás jelleggörbéit, hogy maga az automatizálás tárgya a legteljesebben megfeleljen az automatizálás követelményeinek, továbbá a legnagyobb mértékben önműködő, gyors és pontos legyen a kívánt feladat teljesítésében.

Az automatizált rendszert nem szabad elszigetelten vizsgálni azoktól a terhelésektől, zavarásoktól, amelyek szüntelenül hatnak rá, valamint attól a környezettől és azoktól a körülményektől, amelyekben az egész rendszernek működnie kell.

Ha az önműködő rendszer nem így épül fel, az irányító berendezéssel való összekapcsolás útján nem mindig lehetséges elérni az automatizálás szükséges hatását.

Az irányító berendezésnek és az automatizálás egyéb technikai eszközeinek nem mechanikusan, hanem szervesen kell beleilleszkedniök a közös rendszerbe. A lehetőség szerint legyenek egyszerűek és üzembiztosak.

Sok szabályozott szakasz szabályozásának gyakorlata teljes mértékben alátámasztja az elmondottakat. Ennek megvilágítására néhány példát ismertetünk.

1. A hőmérséklet és a nyomás állandó értéken tartása kazánokban igen nehéz feladat és bonyolult szabályozó berendezést kíván, ha a kazánok tervezésekor nem vették figyelembe azt, hogy önműködő szabályozással kell működniök. Ha azonban a kazánok tervezésekor már előre számolnak az automatizálás szükségszerűségével és ennek megfelelő módon választják a statikus és dinamikus jelleggörbéket, akkor az önműködő szabályozás egyszerűbb és üzembiztosabb lesz, maga a szabályozás pedig tökéletesebb.

2. Nagy vízerőművek vízturbináinak önműködő fordulatszám- és teljesítményszabályozása jelentősen könnyebbé vált, és maga a szabályozási folyamat is tökéletesebb lett azzal, hogy az új típusú turbinaberendezéseken az automatizálást megkönnyítő és a szabályozók konstrukcióját egyszerűsítő elemeket alkalmaztak.

3. A változtatható osztású légcsavarok használata a repülőgépeken elősegítette, hogy a repülőgépmotor teljesítményét a repülés minden üzemállapotában teljes mértékben kihasználják, a repülési minőséget jelentősen javít-

sák, valamint azt, hogy a motor szabályozását egyszerűbbé és tökéletesebbé tegyék.

Szembe kell helyezkednünk azzal a még ma is elterjedt véleménnyel, amely szerint az automatizálás nem más, mint a szabályozó vagy vezérlő készülékeknek az automatikusan működtetendő, már kész gépegyeségekkel, gépekkel vagy más objektumokkal való egyesítése anélkül, hogy magában a szabályozás tárgyában változtatást hajtanánk végre, illetve alkalmassá tennénk az automatizálásra.

A korszerű automatizált rendszernek egységes rendszert kell alkotnia, amely az automatizálásra alkalmassá tett szabályozott szakaszból, energetikai elemből és irányító berendezésből tevődik össze. Ezen részek egymással szoros kapcsolatban kell hogy álljanak s az egész rendszernek a legteljesebb mértékben ki kell elégítenie az adott folyamatokkal kapcsolatos összes követelményt, számolva a reális üzemmállapotokkal, terhelésekkel és külső behatásokkal.

1. Az önműködő szabályozási és vezérlési elmélet további fejlődésének útjai

Az automatika gyors fejlődése hazánkban, különösképpen pedig az új típusú gyártási folyamatok automatizálásának szükségessége megköveteli, hogy az önműködő szabályozás feladatainak megoldásánál ne csak a stabilitás feltételeiből induljunk ki, hanem a szabályozás minőségi feltételeiből is. Szükséges emellett a külső zavarások jellegének számításbavétele.

Az önműködő szabályozás és vezérlés, valamint az utóbbi években teret hódító követő rendszerek elméletének fejlődése ezen rendszerek tökéletesítését nagyban elősegítette. A korszerű gyakorlat egyre nagyobb követelményeket támaszt, az önműködő szabályozó és követő rendszerek előtt. Szükségessé vált olyan módszerek kidolgozása, amelyeknek segítségével meghatározhatók önműködő szabályozó és követő rendszerek alapvető jellemzői és vizsgálhatók e rendszerben létrejövő folyamatok olyan szüntelenül zavaró hatás figyelembevételével, amely a legkritikusabb, legvalószínűbb és a legkedvezőtlenebb az adott rendszerre nézve reális körülmények között.

Az önműködő szabályozás elméletének egyik legidősebb feladata: a rendszerek szintézise. A szabályozás vagy vezérlés tárgya minden automatizált rendszer legfontosabb alkotórésze. Ezért elsősorban erre kell irányítanunk a figyelmet és mindent meg kell tennünk, hogy a szabályozott szakasz lehetőség szerint legalkalmasabb legyen az automatizálásra.

Ha konkrétan adott berendezés automatizálására szolgáló szabályozó rendszer jellemzőinek kiválasztása és szintézise a feladat, akkor igen fontos, hogy pontosan ismerjék a berendezés statikus és dinamikus tulajdonságait. Emellett tisztáznunk kell, hogy miképpen lehet a legcélszerűbben megváltoz-

tatni ezeket a tulajdonságokat, avégett, hogy az automatika a lehető leg-tökéletesebben működjék. Sajnos, sok berendezésre vonatkozóan ezekről a tulajdonságokról igen kevés adat áll rendelkezésre. A statikus és dinamikus tulajdonságok ismerete nélkül az automatizálással kapcsolatos feladatok megoldása nem teljes értékű. Előbbiek alapján tehát az elsősorban megoldandó feladatok egyike a szabályozandó szakasz statikájának és dinamikájának részletes tanulmányozása.

A szintézis különösen nehezzé válik, ha a rendszernek és a rendszer egyes elemeinek jellemzőit az összes adott hatás, zavarás vagy terhelés figyelembevételével kell meghatározni. Itt megint le kell szögeznünk, hogy a különböző automatizált berendezésekre ható zavarások és terhelések jellegének tanulmányozása, valamint az adott rendszerre legkedvezőtlenebb zavarások tisztázása végett eddig igen keveset tettek.

Azon hatások és zavarások jellegének és megjelenési formáinak sokoldalú tanulmányozása, amelyeknek az automatizált rendszerek ki vannak téve, továbbá ezen zavarásokra, terhelésekre és a valóságos viszonyok mellett létrejött üzemállapotokra vonatkozó statisztikai anyag összegyűjtése, — ezek az elsőrendű feladatok az önműködő szabályozás és vezérlés elméletében és gyakorlatában.

Annak céljából, hogy a különböző automatizált szabályozási rendszerekre ható zavarások és terhelések minden fajtájára és jellegére nézve adatokat kapjunk, megfelelő műszereket, készülékeket és berendezéseket kell kifejleszteni ezen mennyiségek mérésére és regisztrálására.

Az ilyen műszaki eszközök létrehozása jelentősen elő fogja segíteni mind a terhelésekre vonatkozó értékes anyag összegyűjtését, mind pedig a szabályozási és vezérlési területeken felmerülő feladatok elméleti és gyakorlati megoldását nemcsak a szabályozott jellemző hibájának elve szerint, hanem a zavarás szerinti szabályozás elve alapján is.

A zavarás vagy terhelés szerinti hatások felhasználási módszereinek kikutatása pedig az önműködő szabályozási rendszerekben a szabályozási folyamatok minőségének javítására régen megérett és megoldásra váró probléma.

Mindmáig igen kevés figyelmet szenteltek az automatizált rendszerek energetikájának tanulmányozására. Pedig az energiaszolgáltató elem egyike az automatikus rendszer legfontosabb alkotórészeinek. Az irányítástechnika jellemző vonása az energiaforrás felhasználása bizonyos munka elvégzésére, amely munka az esetek többségében lényegesen nagyobb az utasítás adásához, vagyis ezen külső energiaforrás vezérléséhez szükséges energiánál. Az esetek túlnyomó többségében sem az analízisnél, sem a szintézisnél egyáltalán nem veszik számításba azon rendelkezésre álló teljesítmény- vagy energiakészlet megengedett határait, amelytől lényegében az automatizált rendszer működésének sebessége, üteme és hatásossága függ. Ha az automatizálásnál az ener-

getikai kérdések jelentőségét nem vesszük kellő mértékben figyelembe, akkor a rendszer nem fog kielégítően működni.

Sok példát lehet felhozni az önműködő rendszerek nem kielégítő működésére annak következtében, hogy ezen rendszerekben nem biztosítottak kellő teljesítmény- vagy energiakészletet. Ezért különös figyelmet kell fordítani az önműködően szabályozott és vezérelt rendszerek energetikai kérdéseire, és olyan irányítástechnikai elméletet kell kidolgozni, amely tükrözi a folyamatok energetikai oldalát is.

Minden automatikus rendszerrel szemben támaszthatunk követelményeket a gazdaságosságot, jó hatásfokot és a veszteségek minimumra csökkentését illetően. Erre a kérdésre az önműködő szabályozással és vezérléssel foglalkozó munkákban szinte egyáltalán nem világítanak rá. Kevés gondot fordítanak a jellemzők oly módon történő kiválasztására, hogy a lehető legjobb hatást és gazdaságosságot ériék el. Így pl. aszinkron motoroknak a primer vagy szekunder kör villamos jellemzői megváltoztatása segítségével, vagy a primer kör feszültségének változtatása útján történő táv határok közötti fordulatszám-szabályozása mindig nagy energiavesztéssel kapcsolatos. Csak a frekvencia változtatásával történő fordulatszám-szabályozás alkalmazása biztosítja ezen motoroknál az önműködő szabályozási rendszer hatásfokának jelentős mértékű növelését.

Ezért azon munkák fejlesztése, melyek a vezérlési és szabályozási folyamatok gazdaságossági mutatóit tisztázzák, nemcsak kívánatos, hanem igen szükséges; ezen feladatok megoldása különös jelentőséggel bír azokra a berendezésekre nézve, melyeket széles tömegméretekben alkalmaznak.

2. Önműködő szabályozási rendszerekben létrejött folyamatok további minőségjavításának módszerei

a) Zavarás (terhelés) szerinti szabályozás alkalmazása

Mint ismeretes, az önműködő szabályozás és vezérlés alapvető feladata az, hogy a szabályozott jellemző és az alapjel közti eltérést a zavaró hatások működése mellett a lehetséges minimumra korlátozzuk.

Minden egyetlen szabályozott jellemzőjű önműködő rendszert, függetlenül a rendszer bonyolultságától, három alapvető részre oszthatunk:

1. A szabályozott szakasz.
2. Érzékelő elemek, amelyek valamilyen zavarás vagy valamely koordinátaértéktől való eltérés következtében lépnek működésbe, továbbá erősítő és stabilizáló berendezések.
3. Végrehajtó vagy vezérlő berendezések az energiaforrásokkal együtt.

A szabályozott berendezés dinamikai tulajdonságait sok esetben a következő módon, eléggé egyszerű egyenlettel fejezhetjük ki:

$$a_{11} x + a_{13} z = f(t) \quad (1)$$

Itt: $f(t)$ — a terhelés vagy a zavarás;
 x — a szabályozott jellemző;
 z — a vezérlő elem koordinátája;
 a_{11}, a_{13} — operátoros együtthatók.

Az adott esetben két mennyiséget használhatunk fel arra, hogy hatást gyakoroljunk a szabályozó érzékelő elemére: a szabályozott jellemzőt (x) és a külső zavarást [$f(t)$].

A szabályozott jellemzőt vagy ennek a kívánt értéktől való eltérését (Δx) a korszerű szabályozóknál gyakorlati céloknak megfelelő pontossággal tudjuk mérni. Nehezebb feladat a külső zavarások vagy terhelések mérése, azonban sok esetben ezek is kellő pontossággal mérhetők. Ha az önműködő rendszerben a szabályozó érzékelő eleme vagy a vezérlő szerv a szabályozott jellemző hibája következtében lép működésbe, akkor ezt a szabályozási módszert hiba szerinti szabályozásnak nevezzük. Ha viszont az önműködő rendszerben a szabályozó vagy vezérlő berendezés a zavarás hatására kezd működni, akkor zavarás szerinti szabályozásról (vagy vezérlésről) beszélünk.

Olyan szabályozást is létesíthetünk, ahol a szabályozás a szabályozott jellemző és a zavarás egyidejű hatására lép működésbe. A szabályozásnak ezt a módját vegyes vagy kombinált szabályozásnak nevezzük.

Egyparaméteres linearizált szabályozási rendszerben létrejövő folyamatok általános esetben a következő állandó együtthatójú egyenlettel írhatók fel:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z &= f(t) && \text{— a szabályozott szakasz} \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z &= b_2 f(t) + \psi(t) && \text{— az érzékelő elem} \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z &= b_3 f(t) + c_3 \psi(t) && \text{— a szabályozó szerv} \end{aligned} \right\} (2)$$

differenciálegyenlete. Itt

y — az érzékelő elem koordinátája,

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ az egyes elemek dinamikai tulajdonságait vagy egy koordinátának a másikkra gyakorolt hatásának jellegét kifejező differenciáloperátorok,

$\psi(t), c_3 \psi(t)$ — a vezérlő jelek,

b_2, b_3 — a terhelésnek az érzékelő és szabályozó elemre gyakorolt befolyását vagy a terhelés szerinti hatást jellemző operátorok.

Az esetek többségében az önműködő szabályozásokban az a_{12} , és a_{31} operátorok értéke nulla.

Ha a szabályozás egyedül a hiba szerint történik, akkor a (2) egyenletrendszerben b_2 és b_3 operátorok nullával egyenlők.

Ha a szabályozás folyamata egyedül zavarás hatására történik, a (2) egyenletrendszerben a_{21} és a_{31} operátorok értéke zérus.

Ekkor a szabályozás módszerétől függően a következőt kapjuk: a hiba szerinti szabályozásra:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + 0 + a_{13}z &= f(t) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= 0 + \psi(t) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= 0 + c_3\psi(t) \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

a zavarás szerinti szabályozásra:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x + 0 + a_{13}z &= f(t) \\ 0 + a_{22}y + a_{23}z &= b_2f(t) + \psi(t) \\ 0 + a_{32}y + a_{33}z &= b_3f(t) + c_3\psi(t) \end{aligned} \right\} \quad (2'')$$

Az eredeti (2) egyenletrendszer a szabályozási folyamatot kombinált vezérlésű módszer esetén írja le.

Az első módszer — a szabályozott jellemző hibája hatására történő beavatkozás módszerét — mint ismeretes, már 1765-ben javasolta honfitársunk, I. I. POLZUNOV feltaláló a kazánban levő víz állandó szintmagasságának biztosítására. Kb. 20 évvel ezután, 1784-ben használt fel hasonló elvet J. WATT az általa javasolt gőzgép fordulatszámának szabályozására.

A második módszer — a zavarás hatására történő beavatkozás módszerét — régóta alkalmazzák a legkülönbözőbb mechanizmusokban, rendszerekben és kapcsolásokban. Ez a módszer ismert volt az automatika fejlődésének kezdeti szakaszában is, sokkal előbb, mint POLZUNOV módszere. Széles körben alkalmazzák e módszert ma is különféle stabilizátoroknál, kompenzáló berendezésekben stb.

Meg kell jegyeznünk, hogy a hiba hatására történő szabályozás módszerét nem alkalmazhatjuk minden fajta stabilizáló és követő rendszerben. Ugyanez vonatkozik a zavarás szerinti szabályozó rendszerekre is. Így pl. óraszerkezetek pontossági stabilizálásának megvalósítása a hiba szerinti módszerrel legtöbbször nem ésszerű, sőt gyakorlatilag egyes esetekben lehetetlen.

A zavarás hatására működő szabályozók a szabályozott jellemzőt nem képesek meghatározott értéken tartani az önkiegyenlítésre képtelen szabályozott szakaszokban. Ilyenek pl. a gőzgépek. A vizsgált esetben a rendszer labilissá válik és a szabályozott jellemző, vagyis a fordulatszám, tetszés szerinti értéket vehet fel.

Valóban, ha a (2'') egyenletrendszer olyan szabályozott szakaszra írjuk fel, amely nem önkiegyenlítő, s a szabályozási folyamat vizsgálatának egyszerűsítése céljából úgy vesszük, hogy

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_1 D; \quad D = \frac{d}{dt}; \quad \psi(t) = 0 \\ a_{13} &= k_1 = \text{áll.}; \quad a_{23} = 1; \quad b_2 = \text{áll.}; \\ a_{22} &= 0; \quad a_{32} = 0; \quad a_{33} = 0; \quad b_3 = 0, \end{aligned}$$

akkor

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{1}{a_1} \int_0^t (1 - k_1 b_2) f(t) dt. \quad (3)$$

A gyakorlatban lehetetlen az $(1 - k_1 \cdot b_2) = 0$ azonosságot kielégíteni, ezért a szabályozott jellemző Δx hibája különböző értékű lehet. A hiba $(1 - k_1 \cdot b_2) \neq 0$ és $t \rightarrow \infty$ esetén rendkívül nagy lehet.

Fentiekkel magyarázható az a szerencsétlenség, amely PONCELET-et érte 1829-ben, amikor terhelésre érzékeny szabályozót próbált alkalmazni gőzgépek fordulatszámának stabilizálására.

Egészen más a helyzet, ha a zavarás hatására működő szabályozást önkiegyenlítő szabályozott szakaszban valósítjuk meg. Az átmeneti folyamatok a legegyszerűbb esetben a következő egyenletekkel írhatók le ezekben a rendszerekben:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 D + a_0) x + k_1 z &= f(t) \\ z &= b_2 f(t) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ekkor $t \rightarrow \infty$ és $f(t) \rightarrow B = \text{áll.}$ mellett

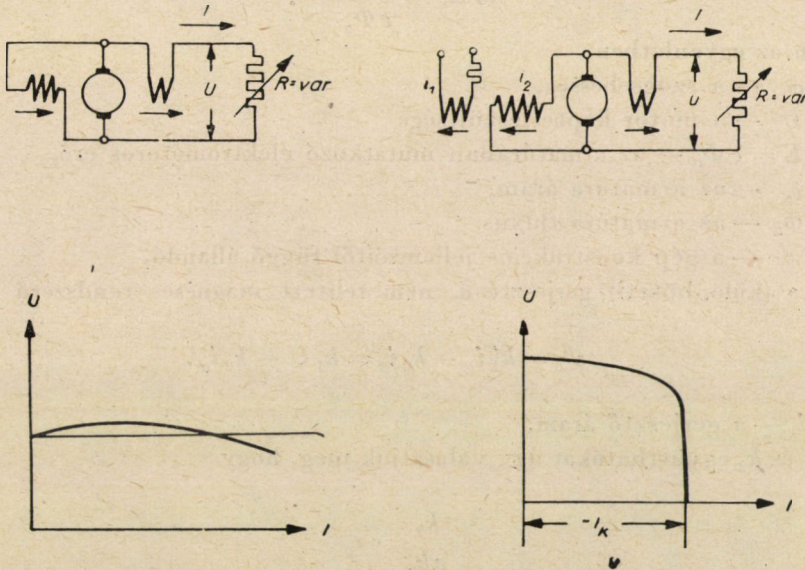
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x = \frac{1 - k_1 b_2}{a_0} [B - B_0]; \quad B_0 = f(t), \quad \text{ha } t = 0,$$

azaz $\Delta x(\infty)$ véges értéket vesz fel.

Ezek szerint tehát egyes szerzőknek azt a megállapítását, hogy a zavarás hatására működő szabályozók nem működőképesek, nem általánosíthatjuk.

A zavarás hatására működő szabályozás módszerét széles körben alkalmazták különféle villamosberendezésekben és rendszerekben a gyakorlati elektrotechnika fejlődésének kezdete óta. Ennek a módszernek meghonosítását nagyban elősegítették az orosz elektrotechnika úttörői: V. N. CSIKOLJEV a múlt század hatvanas éveiben, M. O. DOLIVO—DOBROVOLSZKIJ a XX. század elején és mások. V. N. CSIKOLJEV 1869-ben elsőnek mutatott rá arra, hogy a terhelés hatására működő visszacsatolt szabályozás a villamos ív jó minőségű stabilizálását teszi lehetővé.

A zavarás hatására történő szabályozás olyan berendezéseknél is alkalmazható, amelyekben az önkiegyenlítés a szabályozott jellemzőtől függő terhelés útján valósul meg. Így pl. gőz- és gázturbinákban a fordulatszám könnyen stabilizálódik, ha ezeket a gépeket lapátos szellőzők, centrifugál légfúvók, hajócsavarok, légesavarok stb., egyszóval olyan berendezések hajtására használjuk fel, amelyek a fordulatszámtól függő terhelő nyomatékot fejtenek ki.



1. ábra. Generátor kapcsolása vegyes (kompaund) gerjesztés esetén
 2. ábra. Kompaund gerjesztésű generátor külső jelleggörbéje
 3. ábra. Vegyes (különbözeti) gerjesztésű generátor kapcsolása
 4. ábra. Különbözeti gerjesztésű generátor külső jelleggörbéje

A zavarás hatására történő szabályozást alkalmazva sok esetben viszonylag egyszerű eszközökkel vagy konstrukciós változtatásokkal sikerül a szabályozott szakaszt önkiegyenlítővé tenni, s ezzel megkönnyíteni az önműködő szabályozás megvalósítását.

Szemléletes példaként szolgálnak erre a kompaund gerjesztésű egyenáramú motorok. Ha ezek a gépek generátorként működnek, akkor állandó fordulatszámmal járva őket, valamint a soros tekercsek menetszámának megfelelő megválasztásával állandó feszültség szintet lehet tartani, azaz különböző terhelések (azaz változó külső ellenállás) esetén is állandó áramerősséget biztosíthatunk.

Az 1—4. ábrákon kompaund gerjesztésű egyenáramú generátorok kapcsolási típusait és a gépek külső jelleggörbéit mutatjuk be.

A vegyes (különbözeti) gerjesztésű egyenáramú motorokban a fordulatszám önműködően csaknem teljesen állandó értéken marad állandósult üzemben, függetlenül a terhelő nyomatéktól vagy a motor kapocsfeszültségének változásától.

Valóban, állandósult üzemállapotra az egyenáramú motor fordulatszámát az alábbi általánosan ismert egyenletből határozhatjuk meg :

$$\omega = \frac{U - r_a i_a}{c \Phi_a} . \quad (5)$$

Ebben az egyenletben

ω — a szögsebesség,

U — a motor kapocsfeszültsége

$E = c \Phi_a$ — az armatúrában mutatkozó elektromotoros erő,

i_a — az armatúra áram,

Φ_a — az armatúra fluxus,

c — a gép konstrukciós jellemzőitől függő állandó.

Vegyes (különbözeti) gerjesztésű, nem telített mágneses rendszerű gépben

$$\Phi_a = k'_1 i_g - k_2 i_a = k_1 U - k_2 i_a , \quad (6)$$

ahol i_g — a gerjesztő áram.

Ha k_1 és k_2 együtthatókat úgy választjuk meg, hogy

$$\frac{k_2}{c k_1} = r_a ,$$

akkor a szögsebesség

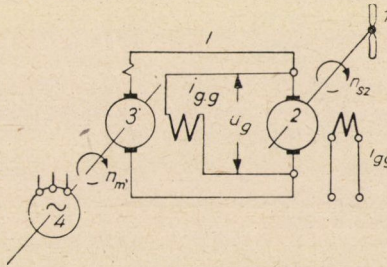
$$\omega = \frac{U - r_a i_a}{c [k_1 U - k_2 i_a]} = \frac{1}{c k_1} = \text{áll} . \quad (7)$$

Vegyes gerjesztésű egyenáramú motoroknak ezt a tulajdonságát széles körben felhasználják különféle mechanizmusokban és gépegységekben a fordulatszám állandóvá tételére. Az 5. ábrán állandó periódusszámú váltakozó feszültséget szolgáltató szélérómű kapcsolása látható. E kapcsolat szerint a (3) vegyes gerjesztésű egyenáramú motort, amely a (4) szinkron generátort forgatja n_m fordulatszámmal, a (2) egyenáramú generátor táplálja. Ez a külső gerjesztésű generátor kinematikailag az (1) szélkerékhez összekapcsolódik. A szélkerék n_{sz} fordulatszáma a szél sebességétől függ.

Bár a szélmotorral forgatott generátor kapocsfeszültsége a szélkerék fordulatszámváltozása miatt változik, az egyenáramú motorból és a szinkron generátorból álló gépegység állandó fordulatszámmal forog, s így a szinkron generátor állandó periódusszámú váltakozó feszültséget szolgáltat.

Sok példát hozhatnánk fel, hogy bemutassuk a zavarás hatására működő módszer alkalmazásának célszerűségét különféle folyamatok szabályozására, valamint arra, hogy a szabályozott szakaszt önkiegyenlítővé — és önszabályozóvá tegyük. A továbbiakban látni fogjuk, hogy a zavarás hatására működő szabályozás igen hatásos eszköz az önműködő szabályozási rendszerek gyors működésének biztosítására.

Akkor azonban, amikor a zavarás hatására működő szabályozási rendszer egyik vagy másik módszere alkalmazásának célszerűsége felől akarunk dönteni, feltétlenül figyelembe kell vennünk, hogy nem mindig lehetséges



5. ábra. Szélerővel hajtott generátor kapcsolása. 1 szélkerék, 2 generátor, 3 motor, 4 szinkron generátor

a zavarást mérni, akár megfelelő módszerek hiánya miatt, akár magával a méréssel kapcsolatos nehézségek következtében.

Meg kell még említenünk, hogy a zavarásra működő szabályozás csak akkor hatásos teljes mértékben, ha az önműködő szabályozás rendszerébe szerelt érzékelő elemek minden alapvető zavarást érzékelnek, amelynek a szabályozott berendezés ki van téve.

Ilyen szabályozók megvalósítása azonban némely esetben nagy nehézségekkel járna. Ez a körülmény korlátozza az ismertetett módszer alkalmazását.

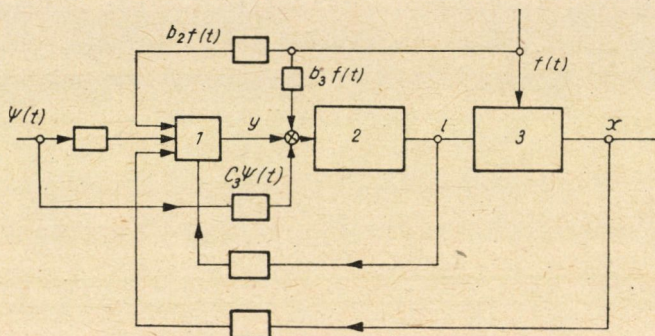
b) Kombinált vezérlés

A hiba hatására működő önműködő szabályozás lehetővé teszi, hogy a szabályozott jellemző előírt értékét meghatározott pontossággal fenntartsuk, függetlenül attól, hogy az önműködő szabályozás a zavarás milyen fajtájának van kitéve. Azonban ez a módszer bizonyos esetekben bonyolultabb berendezéseket követel meg, mint a zavarás szerinti szabályozás. Emellett a szabályozási folyamat megkövetelt gyors működését és szükséges minőségét nem mindig tudja biztosítani.

Sok esetben jobb eredményt ad a szabályozásnak vagy vezérlésnek kombinált módszere, azaz a hiba és a zavarás szerinti irányítási módok egyidejű alkalmazása.

A korszerű önműködő szabályozásokban a kombinált módszer egyre nagyobb alkalmazási területhez jut.

A 6. ábrán olyan önműködő szabályozás egyszerűsített kapcsolása látható, amelyben a szabályozás a szabályozott mennyiség hibája szerint és egyidejűleg a zavarás szerint valósul meg.



6. ábra. Kombinált vezérlés szerkezetének kapcsolása. 1 érzékelő elem, 2 vezérlő elem, 3 szabályozott szakasz

A (2) differenciál-egyenletrendszer megoldásával leírható az egyes koordináták változása.

A szabályozott jellemző koordinátájára

$$\Delta x = \begin{vmatrix} f(t) & & a_{12} & a_{13} \\ b_2 f(t) + \psi(t) & & a_{22} & a_{23} \\ b_3 f(t) + c_3 \psi(t) & & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

vagy

$$F(D)x = [(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) b_2 + (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) b_3] f(t) + [(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) c_3 - (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32})] \psi(t), \quad (8)$$

ahol

$$F(D) = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (9)$$

vagy általános alakban a szabályozott jellemző koordinátáira vonatkozóan:

$$F(D)x = \Phi_x(D)\psi(t) + X(D)f(t);$$

az érzékelő elem koordinátáira vonatkozóan:

$$F(D)y = \Phi_y(D)\psi(t) + Y(D)f(t); \quad (10)$$

a szabályozó szerv koordinátáira vonatkozóan :

$$F(D)z = \Phi_z(D)\psi(t) + Z(D)f(t). \quad (11)$$

Ha $\psi(t) = \text{áll.}$, akkor a szabályozott jellemzőre felírt $F(D)x = X(D)f(t)$ egyenlet így fejezhető ki :

$$\begin{aligned} & \left[A_n \frac{d^n}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + A_0 \right] x = \\ & = \left[B_m \frac{d^m}{dt^m} + B_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + B_0 \right] f(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Itt A_j, B_j — állandó együtthatók, $m < n$.

A kapott (12) egyenlet azt mutatja, hogy a szabályozott jellemző változása általános esetben nemcsak a zavarástól, hanem annak az idő szerinti deriváltjától is függ.

Mint ismeretes, az asztatikus szabályozási folyamatot matematikailag az jellemzi, hogy a zavarásra vonatkozó $X(D)$ differenciáloperátorban a szabályozott jellemzőre a (12) egyenletben a B_0 tag nullával egyenlő. Ennek fizikai jelentése a következő : az asztatikus szabályozási rendszerben a szabályozott szakasz és a szabályozók paraméterei, továbbá a kapcsolás szerkezete és az egyes jellemzők közötti kapcsolatok úgy vannak választva, hogy a szabályozott jellemző ne függjön közvetlenül a zavaró hatástól. Az adott esetben x csak a zavarás, illetve terhelés deriváltja hatásának van kitéve. Szerkeszthető a szabályozási rendszer oly módon, hogy a zavarásnak ne csak a nulladik, hanem az első és magasabb deriváltjait is kompenzáljuk, vagyis ne csak zérusrendű, hanem első- és másodrendű asztatizmust hozunk létre. Természetesen annál tökéletesebb a szabályozási folyamat, minél kompenzáltabb a szabályozási rendszerben a zavarásoknak és ezek idő szerinti deriváltjainak hatása az adott koordinátára.

A hiba elvén létesített önműködő szabályozási rendszerben a másodrendű asztatizmus megvalósítása azonban néha nehézségekbe ütközik. Viszont a zavarás szerinti pótlólagos vezérlés bevezetésével a másod- sőt magasabbrendű asztatizmusú rendszerek megvalósítása jelentős mértékben könnyebbé válik.

A (8) egyenletből következik, hogy olyan önműködő szabályozási rendszerekben, amelyekben a szabályozás nemcsak a hiba szerint, hanem a zavarás szerint is történik, az egyes elemek jellemzőinek megfelelő megválasztásával az $f(t)$ külső zavarójelnek az x szabályozott jellemzőre gyakorolt hatása jelentősen csökkenthető. Eszerint elérhető, hogy $X(D)f(t) \rightarrow 0$, bár $f(t) \neq 0$. Így a szabályozás minősége javítható.

Pl. ha a (8) egyenlettel leírt szabályozási rendszert vesszük szemügyre, és $a_{12} = 0$; $a_{23} = 0$ és $a_{31} = 0$ egyszerűsítéseket tesszük, akkor könnyen belátható, hogy b_2 és b_3 operátorok megfelelő választásával $X(D) \rightarrow 0$ megvalósítható, vagyis x -nek $f(t)$ -től való teljes függetlensége.

Olyan önműködő szabályozásokban, amelyekben a szabályozás kombi-nált módszerrel történik, a $\Delta = F(D)$ fődetermináns értéke nem függ b_2 , b_3 és c_3 operátoroktól. Ezért az önműködő szabályozási rendszerben az érzékelő elemre és a szabályozó elemre a zavarással (terheléssel) kifejtett pótlólagos hatás bevezetése nem okozhatja a dinamikai jelleggörbéknek és a szabályozási rendszer stabilitási körülményeinek megváltozását. Ez igen értékes tulajdonsága a vegyes szabályozású rendszereknek. A pótlólagos zavarás szerint vezérelt rendszereknek ez a tulajdonsága olyan rendszerek létrehozását teszi lehetővé, amelyek nemcsak asztatikusak, hanem negatív statikai tulajdonsággal is rendelkeznek, ahogyan erre 1947-ben Z. JA. BEJRAH rámutatott.

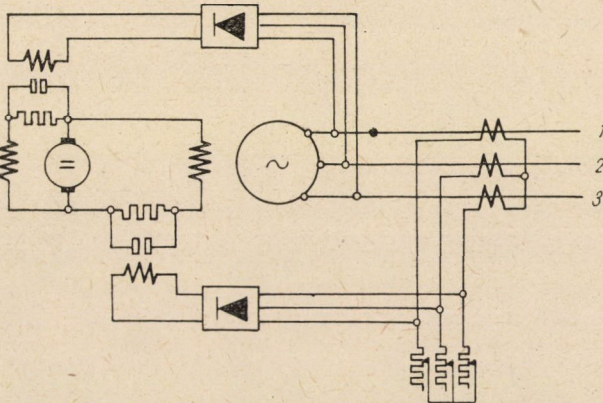
A kombinált szabályozások másik jellegzetes tulajdonsága az, hogy ezekben a rendszerekben a zavarás pótlólagos hatásának eredményeképpen jelentősen növelhető a működés gyorsasága, amellet, hogy a stabilitás megmarad és elérhető a szabályozási folyamat lehetséges legjobb minősége.

A hiba és a zavarás szerinti szabályozás párosításával kapott rendszer hatásosságának igazolására a technika különböző területein alkalmazott sokféle berendezés szolgálhat.

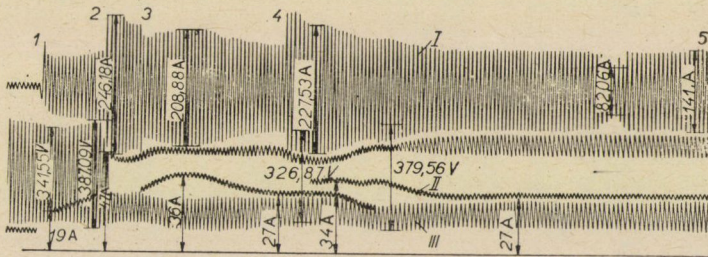
Az előzőkben hivatkoztunk arra, hogy a változtatható osztású légsavarnak és a repülőgépmotorok önműködő szabályozásának meghonosítása a repülőgépekben egyszerűbbé tette a repülés technikáját és biztosította a légsavart meghajtó motorcsoport optimális üzemállapotát. Azonban ebben az automatikában a csak hiba hatására működő szabályozók alkalmazása arra vezetett, hogy hirtelen gázadagolásnál veszélyes mértékben és igen rövid idő alatt megnövekedett a sebesség. Így ez a szabályozási mód nem biztosította a hajtómotor biztonságos gyors indítását. Azzal viszont, hogy kapcsolatot teremtettek a légsavar és a gázadagolás között, azaz zavarás szerinti hatást vezettek be, meglehetősen tökéletes szabályozási módszert sikerült kapni. Megszűntek a sebességi túlfutások, elérték, hogy a motor egyik üzemállapotból igen gyorsan térjen át a másikba. A csatlós paramétereinek megfelelő választása lehetővé tette, hogy a fordulatszámváltozás átmeneti folyamata aperiodikus, azaz lengésmentes legyen.

Korlátozott teljesítményű dieselmotorral hajtott szinkron generátor feszültségét csaknem állandó értéken tarthatjuk a generátorról táplált aszinkron motor teljes terheléssel történő indításakor vagy forgásirányváltatásakor (pl. exkavátor kotróvödrének emelése és süllyesztése), ha a generátor gerjesztésszabályozója feszültségre és terhelésre érzékeny berendezéssel van ellátva (7. ábra).

A 8. ábrán látható oszcillogram ennek a generátornak lökészerű terheléskor végbemenő szabályozási folyamatát mutatja. Az I. görbe a terhelő váltakozóáram időbeli változását, a II. görbe pedig a gerjesztő áram alakulását ábrázolja a szabályozó működésekor. A III. görbe a generátor kapcsolófeszültségének görbéje.



7. ábra. Szinkron generátor kapcsolása kombinált módszerű feszültség szabályozással
1, 2, 3 — különböző fázisok



8. ábra. Feszültségek és áramok oszcillogramja szinkron generátor feszültség szabályozásnál.
I terhelőáram, II gerjesztőáram, III a generátor kapcsolófeszültsége

Az előbbieken alapján megállapíthatjuk tehát, hogy pótlólagos zavarás vagy terhelés szerinti hatás bevezetése az önműködő szabályozási rendszerben egyike a szabályozási folyamat minőségjavítására szolgáló hatásos módszereknek.

Meg kell állapítanunk, hogy az önműködő szabályozás és a hiba elvén működő szabályozási rendszerek elméletének fejlettsége ellenére a zavarás szerinti vagy kombinált önműködő vezérlés és szabályozás területén a kutatás eléggé kezdetleges állapotban van. Még nem szűnt meg a zavarás szerinti irányítás jelentőségének lebecsülése. A zavarás szerinti és a kombinált szabályozás területén végzett elméleti munka és a kapott gyakorlati eredmények

tásával elérhetjük, hogy az $f(t)$ mellett álló $X(D)$ operátor zérussá váljék. Megállapította azokat a körülményeket, amelyeknél a zavarás az x_1 koordinátára gyakorolt hatása teljesen vagy részlegesen kompenzálódik, vagyis x_1 teljesen független $f(t)$ -től (SCSIPANOV, 1939).

N. N. LUZIN (1940), majd vele együtt P. I. KUZNYECOV (1946, 1951) részletesen foglalkozott a (14) differenciál-egyenletrendszerrel. Felállították a teljes függetlenség vagy invariancia kritériumait.

N. N. LUZIN bebizonyította a következő elvet:

Az $x_1(t)$ ismeretlen függvény függetlenségének szükséges feltétele az, hogy a fenti egyenletrendszerben, vagyis a

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(D) x_j = \begin{cases} f(t) & i=1 \text{ esetén} \\ 0 & i>1 \text{ esetén} \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

rendszerben (ahol a_{ij} — a fenti rendszer jobb oldalán előforduló $f(t)$ tetszőleges analitikai függvényre vonatkozó állandó együtthatójú differenciáloperátorok), a rendszer $A_{11} = |a_{ij}|$ ($i, j = 2, 3, \dots, n$) aldeterminánsa (a D betűre vonatkozólag) azonosan egyenlő legyen nullával. Ez a szükséges feltétel ugyanakkor elégséges is akkor, ha $f(t)$ a $t = 0$ pontban holomorf függvény.

E körülmények között, ha az egyenletrendszer megoldása (x_1, x_2, \dots, x_n) lehet zérus kezdeti feltételekkel [$x_i(t_0) = 0, x'_n(t_0) = 0$] bármely, t_0 pontban holomorf analitikai függvény, akkor a függvény bármely, a t_0 pontot tartalmazó $a-b$ holomorf intervallumában $x_1(t) \equiv 0$.

Mivel az x_1 változását érzékelő elemnek $x_1 \equiv 0$ esetén állandóan nyugalmi állapotban kell maradnia, ezért természetesen önműködő szabályozási rendszerekben vagy stabilizáló berendezésekben csak akkor lehetséges elméletileg abszolút invariancia, ha ezek a rendszerek vagy berendezések zavarásnak, s nem pedig a szabályozott jellemzőnek hatására működő szabályozóval vannak ellátva. Ezért semmiképpen sem terjeszthető ki a teljes invariancia az ún. zárláncú szabályozási rendszerekre. Magától értetődik, hogy fizikailag reális stabilizáló rendszert a teljes invariancia alapján, csak a hiba szerinti módszer szerint megszerkeszteni nem lehet.

Az invariancia elve sok kompenzátor, stabilizátor és egyéb dinamikai rendszer alapjául szolgál. Különösen nagy az alkalmazási területe a villamos stabilizáló kapcsolások különböző fajtáinál, a számológéptechnikában, a mérés-technikában és sok mechanizmusnál.

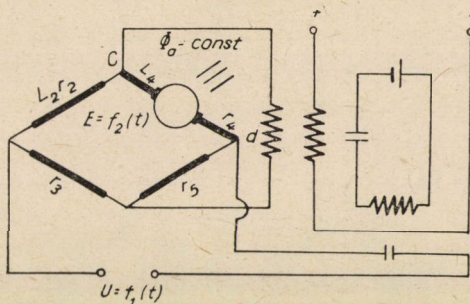
Sok esetben egyszerűen megvalósíthatók a stabilizáló berendezések a zavarás módszerével és a teljes invariancia elve alapján.

A 9. és 10. ábrán néhány olyan elemi villamos kapcsolást láthatunk, amelyeknél az áramerősségnek vagy a feszültségnek egy bizonyos áramkörben a többi körök terhelésétől függetlenül állandó értéken tartására az invariancia elvét használták fel.

létrehozhatók olyan körülmények, amelyek mellett bármely x_i koordináta független marad egy avagy több zavarástól, azaz elérhető a *kiválasztó* vagy más néven *szelektív invariancia*. (KULEBAKIN, 1948.)

Itt x_i koordinátának a zavarásra vonatkozó ilyen invarianciájának feltétele a megfelelő elemek aldeterminánsnak eltűnése.

A *kiválasztó invariancia avagy függetlenség* sok villamos és mechanikai rendszer alapjául szolgál. Olyan rendszerek alapjául, amelyeket még a XIX. században hoztak létre. Ez az elv ma is igen elterjedt, mivel az önműködő szabályozás többparaméteres rendszereiben a folyamatok minőségének megjavítására szolgáló eléggé hatásos módszerek bizonyultak.



11. ábra. Egyenáramú motorok szabályozásának kapcsolása az invariancia elve alapján

Különösen a villamos kapcsolásokban és rendszerekben alkalmazzák széleskörűen.

A 11. ábrán a szerző részéről 1949-ben kidolgozott rendszer kapcsolása látható, amelynek szabályozásában az invariancia elvét használta fel. A kiválasztó invariancia elve képezi a több jellemzőt autonóm módon szabályozó rendszerek alapját. Ezt a szabályozást 1938-ban I. N. VOZNESZENSZKIJ javasolta. A kutatások, kísérletek és a gyakorlat szerint igen sok önműködő szabályozási és vezérlési rendszer készíthető az invariancia elvén. Ezeknek az elveknek az alkalmazása jelentősen megkönnyíti az automata és a szabályozási folyamatok minőségjavítása sok fontos konkrét kérdésének megoldását.

Tekintve, hogy a sokparaméteres önműködő szabályozásnak olyan rendszerekben való megvalósításakor, amelyek alapelvül a kiválasztó invariancia szolgál, az egyes szabályozott jellemzőket csak egynéhány zavarás hatása alól mentesítjük, nem pedig az összes jelek hatása alól, ezért természetes, hogy ezeknek a rendszereknek még a hiba hatására működésbe lépő szabályozókat is kell tartalmazniok.

A megadott terhelésre vonatkozó invariancia. Nézzük meg, hogy ha $X(D) \neq 0$ és $f(t) \neq 0$, milyen feltételek mellett kapunk

$$X(D)f(t) = 0 \quad (17)$$

egyenlőséget.

Az esetek többségében az adott zavarást vagy hatást kifejező $f(t)$ függvény elegendő pontossággal előállítható a következő módon:

az $(a \leq t \leq b)$ véges időközben CSEBISEV—WEIERSTRASS polinommal

$$f(t) = \sum_{i=0}^k A_i t^i \quad (18)$$

vagy a következő trigonometrikus polinommal

$$f(t) = \sum_{i=0}^k (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t); \quad (19)$$

a jobboldali féltengelyre a $\leq t \leq \infty$ pedig exponenciális polinommal

$$f(t) = \sum A_i e^{\lambda_i t}, \quad (20)$$

ahol λ_i — negatív valós szám, vagy pedig negatív valós részű komplex mennyiség.

Általános esetben pedig, ahogy ez (1940, 1949, 1951-ben) bebizonyult, bármely folytonos, a $(0 \leq t < +\infty)$ féltengelyen értelmezett $f(t)$ függvény, amely t korlátlan növekedése esetén állandó C értékhez tart, az egész féltengely hosszában úgy tekinthető, mint a $K(D)f(t) = 0$ $\left(D = \frac{d}{dt}\right)$ homogén, a HURVITZ-féle stabilitási szabálynak alárendelt, állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet integrálja, ha ε tetszés szerinti kis hibát elhanyagoljuk.

SHANNON 1941-ben bebizonyította, hogy bármely analitikai függvény pontosan előállítható állandó együtthatójú, homogén differenciálegyenlet megoldásaként. Ez alól két kivétel van: ha az adott függvény hipertranszcendens függvény (ilyenek a γ és ξ függvények). Azonban még ezekben az esetekben is kifejezhetőek ezek a függvények tetszés szerinti pontossággal, mint homogén differenciálegyenletek megoldásai.

Így bármely megadott függvényre található olyan differenciáloperátor (KD) , amelyet az adott $f(t)$ függvényre alkalmazva 0 értéket kapunk, vagyis

$$K(D)f(t) = 0. \quad (21)$$

Azt ajánljuk, hogy $K(D)$ operátort tekintsük úgy, mint az $f(t)$ megadott függvény transzformáltját: $K(D) \div f(t)$. $K(D)$ operátoros transzformációnak ez a fajtája különbözik ugyanezen függvény Laplace-féle $L(p)$ transzformációjától.

A mellékelt táblázatban néhány függvény $K(D)$ és $L(p)$ transzformációját foglaltuk össze.

Könnyen bebizonyítható, hogy az ebben a táblázatban előforduló függvényekre nézve $K(D)$ transzformált nem más, mint a LAPLACE-féle transzformáció törtjének nevezője.

Mint ismeretes, bármely $x(t)$ koordináta, amelyre $f(t)$ zavarás állandóan hat, két összetevőből, szabad és kényszerített komponensből állónak tekinthető:

$$x(t) = x_{sz}(t) + x_k(t).$$

A szabad komponens az $F(D) x_{sz} = 0$ homogén differenciálegyenlet általános megoldása. A kényszerített komponens pedig $x_k(t)$ az inhomogén differenciálegyenlet egy megoldása.

Önműködő szabályozásokban a tökéletesebb szabályozás vagy követő rendszerekben a bejövő mennyiség pontosabb reprodukálása céljából kívánatos, hogy a szabályozott mennyiség hibájának vagy szögeltérésének *kényszerített komponensét* nullává tegyünk. Ez csak akkor lehetséges, ha $K(D)$ operátorpolinom az $X(D)$ differenciál polinomnak tényezője, vagyis

$$X(D) = K(D)C(D). \tag{22}$$

A függvény megnevezése	$L(p)$	$K(D)$
$a = \text{áll.}$	$\frac{a}{p}$	D
bt	$\frac{b}{p^2}$	D^2
ct^2	$\frac{c}{p^3}$	D^3
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	D^{n+1}
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$D^2 + \omega^2$
$e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$	$(D + \lambda)^2 + \omega^2$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$D^2 + \omega^2$
$e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$	$(D + \lambda)^2 + \omega^2$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{p \mp a}$	$D \mp a$
te^{-at}	$\frac{1}{(p + a)^2}$	$(D + a)^2$
$t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{n-1}{(p + a)^n}$	$(D + a)^n$ ^(n- egész szám)

Ekkor az $F(D)x_k = C(D)K(D)f(t) = 0$ és következésképpen $x(t) = x_{sz}$ most az

$$F(D)x = 0$$

egyenlet általános megoldását jelenti.

Hasonlóképpen könnyű megtalálni annak a feltételeit, hogy követő rendszerekben a kimenő mennyiség, szabályozott rendszerekben pedig a szabályozó jellemző, a kívánt hatást a szabad összetevőig terjedő pontossággal újra előállítsa. (KULEBAKIN, 1951.)

Valóban a (12) alapvető differenciálegyenletet felhasználva, előállít-hatjuk a szabályozott rendszer szabályozott jellemzőjének vagy követő rendszer kimenő mennyiségének egyenletét

$$F(D)z = Z(D)f(t).$$

Hogy szabályozott rendszerekben a szabályozott jellemző vagy a kimenő mennyiség a megadott terhelést vagy $f(t)$ hatást kövesse a szabad összetevőig terjedő pontossággal, amely egyedül és kizárólag a szabályozott vagy követő rendszer, továbbá a kezdeti feltételek következtében jött létre, szükséges, hogy

$$F(D)z_k \equiv \{[F(D) - Z(D)] + Z(D)\}z_k = Z(D)f(t) \quad (23)$$

egyenletben $Z_k \equiv f(t)$ esetében az $F(D) - Z(D)$ többtagúnak, a $K(D)$ operátorpolinom tényezője legyen $[K(D)f(t) = 0]$.

Valóban $z_k \equiv f(t)$ azonosság esetén az

$$F(D)z_k \equiv Z(D)f(t)$$

azonosság csak akkor lehetséges, ha

$$[F(D) - Z(D)]z_k = [F(D) - Z(D)]f(t) = 0,$$

azonban ez $f(t)$ fenti, z_k -val azonossága esetén csak akkor lehetséges, ha $[F(D) - Z(D)]$ -nek a $K(D)$ operátorpolinom tényezője.

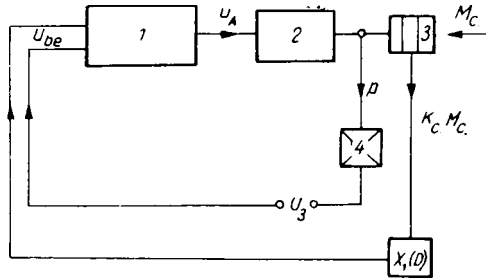
Mivel az $F(D)$, $X(D)$, $Y(D)$, $Z(D)$ és $F(D) - Z(D)$ operátoros polinomok a (2) közös differenciál-egyenletrendszerben a z koordináta és $f(t)$ zavarójel esetén keletkező operátorokból jöttek létre, ezért ezen operátorokat is a fent megszabott feltételeknek megfelelően kell választanunk. Ekkor az egész rendszer saját dinamikáját jellemző, $F(D)$ operátoros polinomnak szintén ki kell elégítenie természetesen nemcsak a stabilitás feltételeit, hanem a szabályozás vagy vezérlés minőségével kapcsolatos többi feltételt is.

A továbbiakban példákat ismertetünk annak megvilágítására, hogyan lehet önműködő szabályozási rendszerekben felhasználni az adott zavarás szerinti invariancia előbbiekben ajánlott módszerét.

Példák

1. A 12. ábrán olyan villamos követő hajtás-rendszert láthatunk, amelyekre az alábbi, harmonikus törvényszerűség szerint változó terhelő nyomaték hat :

$$M_c = M_c \cdot M \cdot \sin \omega t = M_c \cdot M \cdot \sin \frac{t}{T}, \quad T = \frac{1}{\omega}.$$



12. ábra. Egyenáramú motor vezérlésére szolgáló kapcsolás
1 erősítő, 2 motor, 3 a nyomatékot átvívő tengelykapcsoló, 4 tahométer dinamó

Meghatározandó az a zavarási operátor $X(D)$, amelynél a villamos hajtás rendszere invariánssá válik (a szabad összetevőig terjedő pontossággal) a terhelésre vonatkozóan :

1. Az erősítő egyenlete :

$$(T_1 D + 1)(T_2 D + 1) U_A = K_1 K_2 U_{be} \tag{24}$$

2. A motor egyenlete :

$$(T_M T_a D^2 + T_M D + 1) n = K U_A - M_c (T_c T_a D + T_c) = K U_A - (T_a D + 1) T_c M_c \tag{25}$$

3. A szabályozás törvényszerűsége :

$$U_{be} = U_e - K_T n + X_1(D) K_c M_c, \tag{26}$$

Itt $X_1(D)$ a meghatározandó operátor.

A (24)—(26) egyenletekből :

$$\begin{aligned} [(T_1 D + 1)(T_2 D + 1) T_M T_a D^2 + T_M D + 1] + K_1 K_2 K K_T] n = \\ = K_1 K_2 K U_e - [(T_1 D + 1)(T_2 D + 1)(T_a D + 1) T_c - \\ - K_1 K_2 K K_c X_1(D)] M_c = K_1 K_2 K U_e - X(D) M_c \\ (T_1 D + 1)(T_2 D + 1)(T_a D + 1) T_c - K_1 K_2 K_c X_1(D) = X(D). \end{aligned} \tag{27}$$

Ha az $X(D)M_c$ polinomot sikerülne nullával egyenlővé tennünk, akkor olyan egyenletre jutnánk, amely leírná a szabályozási folyamatot az adott terhelést kompenzáló rendszerben.

Mivel

$$M_c = M \sin \omega t = M \sin \frac{t}{T},$$

ezért erre a függvényre alkalmazva a $k(D)$ transzformációt :

$$K(D) \equiv (T^2 D^2 + 1).$$

$X(D)M_c$ nullával egyenlővé tétele az alábbi módon történik :
a (27) differenciál-egyenletrendszerben a

$$\begin{aligned} & (T_1 D + 1)(T_2 D + 1)(T_a D + 1) \equiv \\ & \equiv [T_1 T_2 T_a D^3 + (T_1 T_2 + T_2 T_a + T_1 T_a) D^2 + (T_1 + T_2 + T_a) D + 1] \end{aligned}$$

operátoros polinomot két operátor összegeként foghatjuk fel

1. $[T_1 T_2 T_a D^3 + (T_1 + T_2 + T_a) D]$;
2. $[(T_1 T_2 + T_2 T_a + T_1 T_a) D^2 + 1]$.

Legyen $T_1 \neq T_2 \neq T_a$.

Az 1. és 2. operátorokat könnyen átalakíthatjuk a következő formájú operátorokká :

$$\text{a) } a_1 D(T^2 D^2 + 1) + b_1 D ; ,$$

$$c_1(T^2 D^2 + 1) + d_1,$$

ahol :

$$a_1 T^2 = T_1 T_2 T_a ; a_1 = \frac{T_1 T_2 T_a}{T^2} ;$$

$$a_1 + b_1 = T_1 + T_2 + T_a ;$$

$$c_1 T^2 = (T_1 T_2 + T_1 T_a + T_2 T_a) ; c_1 = \frac{T_1 T_2 + T_1 T_a + T_2 T_a}{T^2} ;$$

$$c_1 + d_1 = 1.$$

Ebből következik, hogy

$$T_c [(a_1 D + c_1)(T^2 D^2 + 1) + b_1 D + d_1] = T_c [(a_1 D + c_1)K(D) + b_1 D + d_1] ;$$

$$(T^2 D^2 + 1) = K(D),$$

s ekkor a (27) operátoros polinom a

$$[K_1 K_2 K K_c X_1(D) - T_c (a_1 D + c_1)(T^2 D^2 + 1) - T_c b_1 D - T_c d_1] M_c$$

kifejezéssel lesz egyenlő. Ha most $X_1(D)$ -t úgy választjuk, hogy

$$X_1(D) = \frac{T_c b_1}{K_1 K_2 K K_c} D + \frac{T_c d_1}{K_1 K_2 K K_c} = AD + B,$$

akkor $X(D)M_c$ zérussá válik, mert

$$T_c (a_1 D + c_1)(T^2 D^2 + 1) M \sin \frac{t}{T} = 0.$$

A feladat megoldása O. P. DEMCSENKÓTÓL származik.

2. A 13. ábra dinamikai lengéscsillapító rendszert ábrázol. Ezt a rendszert két, rugóra helyezett súly (1 és 2) képezi. Az első súly (1) $F = F_M \sin \omega t$ szinuszos zavaró erő hatásának van kitéve. Határozzuk meg azokat a feltételeket, amelyek mellett az első súly lengései megszűnnek.

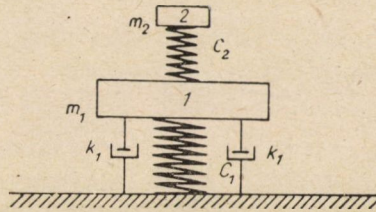
A mozgás differenciálegyenletei a következők:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + k_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x - c_2 (x_2 - x_1) = F_M \sin \omega t;$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + c_2 (x_2 - x_1) = 0.$$

Ebből:

$$\{[m_1 D^2 + k_1 D + (c_1 + c_2)] [m_2 D^2 + c_2] - C_2^2\} x_1 = (m_2 D^2 + c_2) F_M \sin \omega t.$$



13. ábra. Rezgéscsillapító vázlata

1, 2 súlyok, m_1, m_2 tömegek, c_1, c_2 rugók keménységi együtthatói, k_1 csillapítási tényező

Azért, hogy X_1 kényszerített $\equiv 0$, szükséges, hogy a zavarás operátorának $K(D)$ transzformációs szorzója létezzék, amely az adott esetben

$$K(D) = D^2 + \omega^2$$

alakú. Ez akkor teljesül, ha

$$\frac{c_2}{m_2} = \omega^2,$$

vagyis, ha a második súly sajátfrekvenciája (mozdulatlan 1. súly esetén) megegyezik a zavaró erő frekvenciájával.

3. Vegyünk olyan lineáris rendszert, melyben az átmeneti folyamatot a következő differenciálegyenlet fejezi ki:

$$[a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0] z = [b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_0] f(t).$$

Kérdés, milyen feltételek mellett reprodukálja ez a rendszer az $f(t) = c_1 t + c_2 t^2$ hatást a szabad összetevők pontosságáig?

A megadott $f(t)$ függvényt $K(D)$ transzformáltja: $K(D) \equiv D^3$. Abból a célból, hogy $[F(D) - Z(D)]$ -nek D^3 a szorzója legyen, a_0, a_1, a_2 és b_0, b_1, b_2 értékeket úgy kell megválasztani, hogy

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = K.$$

3. A terhelések vagy zavarások jellege

Az előbbieken kiemeltük az önműködő szabályozási vagy vezérlési rendszerre ható zavarások tanulmányozásának szükségességét azért, hogy ezeknek a zavarásoknak a figyelembevételével végezhesük a rendszerre vonatkozó számításokat.

Az imént leírt módszer azt mutatja, hogy a szabályozási rendszer paramétereinek meghatározásához annak céljából, hogy a megadott folyamatos zavarás mellett tökéletesebb rendszerhez jussunk, feltétlenül ismernünk kell ennek a zavarásnak $K(D)$ transzformáltját.

A $K(D)$ differenciáloperátor, amely a szóban forgó $f(t)$ függvény transzformáltja, könnyen kifejezhető, ha ismerjük a függvényt megközelítő polinom karakterisztikus egyenleteket :

$$\sum_{i=0}^{i=k} A_i^i t^i = f(t). \quad (28)$$

Ekkor

$$K(D) = \prod_{i=0}^{i=k} (D - \lambda_i). \quad (29)$$

Azt javasoljuk, hogy az adott terhelést a modulussal és jellemző mutatókkal fejezzük ki. Ezek a mutatószámok, amelyek a különböző szabályozott szakaszokra ható terhelést írják le, megadhatók, vagy tapasztalati úton meghatározhatók. A zavarások jellemző mutatóinak ismerete hozzájárulna olyan szabályozási rendszerek megalkotásához, amelyek inkább megfelelnek a kitűzött követelményeknek, a terhelések esetén való viselkedést illetően.

Azzal, hogy az adott zavarást $K(D)$ transzformálttal állítjuk elő, a mátrix számítás alkalmazása lehetővé válik a szabályozási rendszerek viselkedésének vizsgálatában, s így a korszerű integrátorok segítségével a szabályozás terén sok feladat megoldását könnyíti meg. (GUTENMACHER, 1949.)

Szabályozási folyamatok minőségének elemzése

Szabályozási folyamatok minőségének meghatározására széles körben alkalmazzák a szabályozott jellemző eltérésének, vagy pedig a követő rendszerekben a szögeltérés hibájának integrál-értékelését.

Azonban a szabályozás minőségének értékelésére kidolgozott integrál-értékelési módszerek csak abban az esetben egyszerűek, hogyha a szabályozási rendszerben lezajló folyamatok homogén differenciálegyenletekkel írhatók le. Ezért fontos, hogy az állandó zavarás hatása alatt álló önműködő szabályozások viselkedését homogén differenciálegyenletekkel írjuk le. Tekintve, hogy az adott függvényt képviselő inhomogén differenciálegyenlet jobb oldala

könnyen képezhető $K(D)$ operátoros polinommal, ezért lehetőség nyílik ilyen módon az inhomogén differenciálegyenlet homogénné tételére. (KULEBAKIN 1949.)

Valóban, ha a szabályozás folyamatát

$$F(D)x = f(t)$$

egyenlet írja le és $f(t)$ a

$$K(D)f(t) = 0$$

homogén differenciálegyenlet megoldása meghatározott kezdeti feltételek esetén, akkor az alapegyenlet mindkét oldalának $K(D)$ operátorral történő megszorzásával a következő homogén egyenletet kapjuk :

$$K(D)F(D)x = K(D)f(t), \quad (30)$$

vagy

$$K(D)F(D)x = 0.$$

Természetesen a fent ismertetett módszerrel kapott egyenlet rendszáma nagyobb, mint a kiindulási inhomogén differenciálegyenleté, mégpedig azon differenciálegyenlet rendszámával nagyobb, amelynek általános megoldása megközelíti az $f(t)$ zavarást.

Amennyiben olyan differenciálegyenletünk van, amelyben a rendszerre ható zavarás is tükröződik, akkor különlegesebb nehézség nélkül alkalmazhatók rá a szabályozási folyamatok minőségének integrál-értékelésére szolgáló meglévő hatásos módszerek.

Következtetések

1. Minden automatikus rendszer alapvető része a szabályozott vagy vezérelt szakasz. Ahhoz, hogy tökéletes automatikát hozzunk létre, az szükséges, hogy ez az alapvető rész — statikai és dinamikai jelleggörbét tekintve — teljes mértékben megfeleljen az automatizálás követelményeinek és az automatizmus természetes tulajdonságaival rendelkezzen.

2. Az önműködő szabályozás és vezérlés egész berendezésének alapvetően arra kell szolgálnia, hogy a szabályozás folyamatát a megkövetelt módon tökéletessé tegye. Szükséges, hogy a berendezés a lehető legegyszerűbb, legpontosabb és legüzembiztosabb legyen.

3. Ahhoz, hogy jó minőségű önműködő szabályozást és vezérlést kapjunk, a rendszer minden paraméterét a szabályozási folyamat minőségével kapcsolatban támasztott követelményeknek megfelelően kell méretezni, az adott terhelések vagy zavarások számításbavételével. E feladat megoldására elég hatásosan felhasználható sok, szovjet tudósok által kidolgozott tétel.

4. Az önműködő szabályozási és vezérlési rendszerek számításához részletesen ismerni kell a szabályozott szakasz minden statikai és dinamikai jellemzőjét. Ezért a szabályozott szakasz automatizálási problémájának megoldását meg kell hogy előzze a szakasz tulajdonságainak tanulmányozása.

5. A szabályozási rendszerre ható legvalószínűbb, legkedvezőtlenebb és esetleges zavarások tanulmányozása is igen fontos feladat. Az ismert vagy megadott zavarásokat a modulusszal és a $K(D)$ transzformációval kell megadni.

6. A szabályozási folyamatok minőségének javítása szorosan összefügg a hiba szerinti és a zavarás szerinti irányítási módok kombinációinak alkalmazásával. Ezeknek a rendszereknek a számításakor célszerű az invariancia elvét alkalmazni. Különös figyelmet kell fordítani az önműködő szabályozás és vezérlés fenti módszerek alapján történő továbbfejlesztésére.

7. Az automatizálás minden ágában felmerülő elméleti és gyakorlati feladatokat a tervezőknek és technológusoknak a szabályozástechnika szakembereivel szoros együttműködésben kell megoldani.

IRODALOM

- Бейрах З. Я. 1947: К вопросу о характере кривой неравномерности регулирования. (Bejrah Z. Ja. 1947.: A szabályozás egyenetlenségi görbéjének jellege.) Автом. и телемех., т. 8. № 6, стр. 451—455.
- Вознесенский И. Н. 1938: О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров. (Vozneszenszkij, I. N. 1938.: Gépek szabályozása sok szabályozott jellemzővel.) Автом. и телемех., т. 3. № 4—5., стр. 65—78.
- Гутенмахер Л. И. 1949: Электрические модели. (Gutenmaher, L. I. 1949.: Villamos kisminták.) Изд. АН СССР. М.—Л., 404 стр.
- Ивахненко А. Г. 1952: О способах устранения установившейся составляющей ошибки систем автоматического регулирования. (Ivahnenko, A. G.: Automatikus szabályozási rendszerek hibája állandósult komponensének kiküszöbölési módjai.) ДАН СССР, т. 87, № 6, стр. 949—952.
- Ивахненко А. Г. 1953: Автоматическое регулирование скорости асинхронных двигателей небольшой мощности. (Ivahnenko, A. G. 1953. Kisteljesítményű asszinkron motorok önműködő sebességszabályozása.) Изд. АН УССР, Киев, 228 стр.
- Иносов В. Л. и Л. В. Цукерник. 1946: Компаундированное возбуждение синхронных генераторов с электромеханическим корректором напряжения. (Inosov, V. L. és L. V. Cukernik: Elektromechanikus feszültség szabályozóval ellátott szinkron generátorok vegyes gerjesztése.) Электрические Станции, № 4—5., стр. 19—22.
- Кулебакин В. С. 1940а: Общие основы автоматического регулирования. (Kulebakin, V. Sz. 1940а: Az önműködő szabályozás általános alapjai.) Автом. и телемех., т. 5. № 4, стр. 3—21.
- Кулебакин В. С. 1940б: Об определении основных параметров автоматических регуляторов. (Kulebakin, V. Sz. 1940б: Önműködő szabályozók alapvető paramétereinek meghatározása.) Автом. и телемех., т. 5. № 6, стр. 3—24.
- Кулебакин В. С. 1948: О применимости принципа абсолютной инвариантности в физических реальных системах. (Kulebakin, V. Sz. 1948.: Az abszolút invariancia elvének alkalmazhatósága fizikailag megvalósítható rendszerekben.) ДАН СССР т. 60. № 2, стр. 231—234.
- Кулебакин В. С. 1949: О поведении непрерывно возмущаемых автоматизированных линейных систем. (Kulebakin, V. Sz. 1949.: Zavaró hatásnak állandóan kitett automatizált lineáris rendszerek viselkedése.) ДАН СССР, т. 68, № 5, стр. 855—858.

- Кулебакин В. С. 1951a: О выборе оптимальных параметров автоматических регуляторов и следящих систем. (Kulebakin, V. Sz. 1951a: Önműködő szabályozók és követő rendszerek optimális jellemzőinek megválasztása.) ДАН СССР, т. 77. № 2, стр. 265—267.
- Кулебакин В. С. 1951b: В редакцию журнала «Успехи математических наук.» (Kulebakin, V. Sz. 1951b: „A matematikai tudományok eredményei” című folyóirat szerkesztőségének.) Усп. мат. наук, т. 6. вып. 5 (45) стр. 211.
- Лойцянский Л. Г. и А. И. Лурье. 1949. Курс теоретической механики. ч. II. (Lojczjanszkij, L. G és A. I. Lur'е. 1949: Elméleti mechanika, II. rész.) Гостехиздат, Л.—М., стр. 580.
- Лузин Н. Н. 1940: К изучению матричной теории дифференциальных уравнений. (Luzin, N. N. 1940: Differenciálegyenletek mátrixelméletének tanulmányozásához.) Автом. и телемех. № 5, стр. 3—66.
- Лузин Н. Н. и П. И. Кузнецов, 1946, 1951: Об абсолютной инвариантности и инвариантности до ε в теории дифференциальных уравнений. (Luzin N. N. és P. I. Kuznyecov: Az abszolút invariancia és az ε -ig terjedő invariancia a differenciálegyenletek elméletében.) ДАН СССР т. 51. № 4, стр. 251—253; № 5.
- Поповский А. М. 1949: О свободе выбора параметров автономных процессов регулирования нескольких взаимосвязанных величин. (Popovszkij, A. M.: Több, egymással kapcsolatban álló jellemző autonom szabályozási folyamata paramétereinek szabad megválasztásáról.) Автом. и телемех., т. 10. № 6, стр. 401—423.
- Щипанов Г. В. 1939: Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. (Sesipanov, G. V. 1939.: Önműködő szabályozók tervezésének elmélete és módszerei.) Автом. и телемех., т. 4. № 1, стр. 49—66.
- Shannon C. E. 1941: Mathematical theory of the differential analyzer. (Shannon C. E. 1941.: A differenciál-analizátor matematikai elmélete.) Journ of math. and phys., vol. 20. No 4, pp. 337—354.

ÖSSZEFOGLALÁS

A szabályozások javítása céljából elsősorban a szabályozott szakaszok dinamikai viselkedését kell tanulmányozni és a szabályozott szakaszok tervezésekor is messzemenően figyelembe kell venni a szabályozástechnikai követelményeket. Tanulmányozni kell azokat a zavarásokat és terheléseket is, amelyek az egyes szabályozott szakaszok dinamikai igénybevételét jelentik, meg kell állapítani ezek statisztikus vagy egyéb jellegzetességeit. A legkedvezőtlenebb és leggyakoribb zavarásokra való számítás céljából új, mégpedig az ún. $K(D)$ transzformációt javasolja, amelynek az az előnye a szokásos Laplace-transzformáltakkal szemben, hogy adott zavarásokra homogén egyenletet szolgáltat. Megadja néhány alapfüggvény $K(D)$ transzformáltját. A szabályozások minőségét tovább lehet javítani a klasszikus zártláncú szabályozás és a zavarójel rákapcsolás kombinálásával.

TÖBB SZABÁLYOZOTT JELLEMZŐJŰ, NAGY ÁLLANDÓSULT PONTOSSÁGŰ, TÖBBKÖRÖS RENDSZEREK SZERKEZETÉNEK NÉHÁNY ELVE*

M. V. MEJEROV

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

A SZOVJETUNIO TUDOMÁNYOS AKADÉMIAJA AUTOMATIKAI ÉS TELEMECHANIKAI INTÉZETE, MOSZKVA

Az önműködő szabályozás gyakorlatában gyakran van dolgunk olyan szabályozott szakasszal, amelynél több, egymással kapcsolatban álló jellemzőt kell szabályozni. Ilyenek pl.: villamosenergia-rendszerek, melyekben szabályozni kell a feszültséget, a periódusszámot, a hasznos és meddő teljesítményt; ilyen a gőzkazán, amelyben a nyomást és a hőmérsékletet szabályozzák stb.

Minden szabályozott jellemzőnek megvan a maga zárt szabályozási köre, a rendszer egészében viszont többkörös. Az üzemi körülmények szerint minden szabályozott jellemzővel szemben különböző követelményeket támaszthatunk. Ilyen követelmények lehetnek: a szabályozott jellemző pontossága, a szabályozási folyamat sebessége, vagy a szabályozás minőségének egyéb mutatójával kapcsolatos követelmények. Így pl. a villamosenergia-rendszerekben a periódusszámot asztatikusan szabályozzák, a feszültséget bizonyos hibával tartják fent stb. A szabályozott jellemzők kapcsolatban vannak egymással és közülük valamelyiknek megváltoztatása a többi szabályozott jellemző megváltozását okozza. Ez a tény bonyolulttá teszi az önműködő szabályozás folyamatát és megnehezíti az egyes jellemzők hatásának tisztázását.

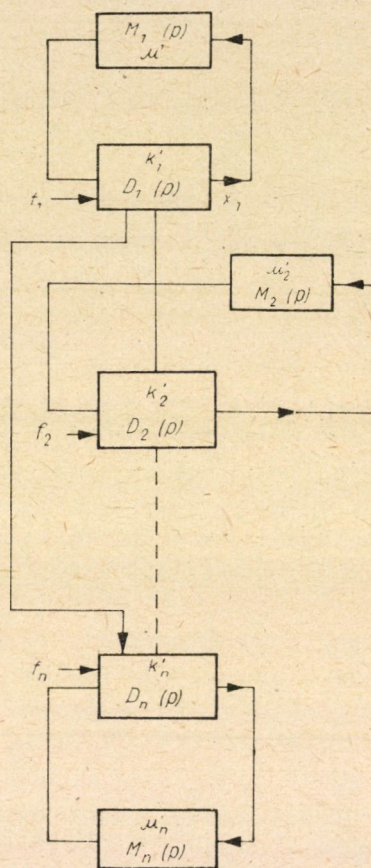
Ez a tanulmány több, egymással kapcsolatban levő szabályozott jellemzőt tartalmazó, többkörös rendszer vizsgálatának eredményeit ismerteti. Vizsgálatunk célja az, hogy tisztázzuk: a gyakorlatban hogyan lehetséges előre meghatározott pontossággal működő szabályozási rendszert kapni bármely jellemzőre nézve. A tanulmányban meghatározzuk ezen rendszerek felépítésének törvényszerűségeit és tisztázzuk dinamikai tulajdonságait.

1. Az állandósult hiba, mint az erősítési tényező függvénye

Ismeretes, hogy az egyetlen szabályozott jellemzőt tartalmazó rendszerekben az állandósult hiba fordítottan arányos a nyitott szabályozási kör erősítési tényezőjével. Vizsgáljuk meg, miképpen függ az i -edik szabályozott

* A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának 1958. okt. 2-i ülésén elhangzott előadás.

jellemző állandósult hibája az i -edik nyitott kör erősítési együtthatójától és a rendszer egyéb paramétereitől. Tételezzük fel, hogy a szabályozott szakasz n szabályozott jellemzőt tartalmaz. A szabályozott szakaszt minden szabályozott jellemzőt illetően megfelelő átviteli függvény jellemzi. Szorítkozzunk olyan szabályozási rendszerek vizsgálatára, amelyek az 1. ábrán látható kapcsolás-



1. ábra. n szabályozott jellemzőjű rendszer elvi kapcsolása

sal ábrázolhatók. A következőkben a nyitott elem vagy a kapcsolás egy része operátorának nevezőjét saját operátornak, számlálóját pedig kölcsönös operátornak fogjuk nevezni. Vezessük be ezenkívül a következő jelöléseket :

- $D_i(p)$ — az i -edik szabályozott jellemző (x_i) saját operátora,
 $M_i(p)$ — az alapvető (stabilizálás nélküli) elemekből álló i -edik szabályozott jellemző szabályozott szakasz nélküli szabályozási körének saját operátora,

- k'_i és μ'_i — a szabályozott szakasz, valamint a szabályozott szakasz nélküli szabályozási kör erősítési tényezője az i -edik szabályozott jellemzőre vonatkozóan. Így tehát $k_i = k'_i \mu'_i$ az i -edik szabályozott jellemző nyitott szabályozási körének eredő erősítési együtthatója,
- f_i — az i -edik szabályozott jellemzőre ható, a szabályozott szakaszra kapcsolt terhelés (1. ábra).*

Először olyan rendszer tulajdonságait igyekszünk tisztázni, amely nem tartalmaz stabilizáló berendezéseket. Ezután stabilizáló berendezések bekapcsolása útján érjük el a rendszer kívánt tulajdonságait.

A továbbiakban feltételezzük, hogy az egyes szabályozott jellemzők között csak a szabályozott szakaszon keresztül van kapcsolat. Ez a kapcsolat lehet algebrai, vagy differenciálegyenlettel megadott. Nevezzük el az i -edik és k -adik szabályozott jellemző között fennálló kapcsolatot α_{ik} -nak. Következésképpen α_{ik} lehet állandó mennyiség, vagy a p differenciáloperátor valamilyen függvénye.

Utóbbi esetben tételezzük fel, hogy p -nek α_{ik} kifejezésében előforduló legmagasabb hatványkitevője kisebb, mint $D_i(p)$, $M_i(p)$ és $D_k(p)$, $M_k(p)$ saját operátorok hatványkitevője. Ezenkívül úgy vesszük, hogy α_{ik} előjelet is tartalmaz. Ilyen rendszerben az önműködő szabályozás folyamata olyan differenciál-egyenletrendszerrel írható le, amely a következő alakra hozható:

$$\left. \begin{aligned} [D_1(p)M_1(p) + k_1]x_1 + k'_1 M_1(p)\alpha_{12}x_2 + \dots + k'_1 M_1(p)\alpha_{1n}x_n &= f_1 k'_1 M_1(p) \\ k'_1 M_2(p)\alpha_{21}x_1 + [D_2(p)M_2(p) + k_2]x_2 + \dots + k'_2 M_2(p)\alpha_{2n}x_n &= f_2 k'_2 M_2(p) \\ \dots &\dots \\ k'_n M_n(p)\alpha_{n1}x_1 + \dots + [D_n(p)M_n(p) + k_n]x_n &= f_n k'_n M_n(p) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Az állandósult állapot meghatározására helyettesítsük az (1)-be $p = 0$ értéket. Ekkor a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left. \begin{aligned} (1 + k_1)x_1 + k'_1 \alpha_{12}x_2 + k'_1 \alpha_{13}x_3 + \dots + k'_1 \alpha_{1n}x_n &= k'_1 f_1 \\ k'_2 \alpha_{21}x_1 + (1 + k_2)x_2 + k'_2 \alpha_{23}x_3 + \dots + k'_2 \alpha_{2n}x_n &= k'_2 f_2 \\ \dots &\dots \\ k'_n \alpha_{n1}x_1 + k'_n \alpha_{n2}x_2 + \dots + (1 + k_n)x_n &= k'_n f_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

A (2) egyenletrendszerben minden $\alpha = \alpha(0)$. Az i -edik változó állandósult értéke állandó terhelés mellett az

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_c}$$

* Ha a f_i terhelés nem az 1. ábrán látható módon kapcsolódik a szabályozott szakaszra, akkor f_i operátora és együtthatója megváltozik. A továbbiakban kapott alapvető következtetések azonban nem változnak.

maznak stabilizáló elemeket). Az (1) differenciál-egyenletrendszer alapján a karakterisztikus egyenlet a következő módon írható fel :

$$\begin{vmatrix} [D_1(p) M_1(p) + k_1], & k'_1 M_1(p) \alpha_{12}, \dots, k'_1 M_1(p) \alpha_{1n} \\ k'_2 M_2(p) \alpha_{12}, & [D_2(p) M_2(p) + k_2], \dots, k'_2 M_2(p) \alpha_{2n} \\ \dots & \dots \\ k'_n M_n(p) \alpha_{n1}, & k'_n M_n(p) \alpha_{n2}, \dots, [D_n(p) M_n(p) + k_n] \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Felbontva a determinást, az (5) egyenletet írjuk fel a következő alakban :

$$\begin{aligned} F_{NO}(p) + \sum_{i=1}^n k_i F'_{Ni}(p) + \sum_{i,j=1}^n k_i k_j F'_{Nij}(p) + \dots + k_1 k_2 \dots k_n + \\ + f_1(a_1, \dots, a_n) F_n(p) + f_2(a_1, \dots, a_n) F_{n-1}(p) + \dots \\ \dots + f_n(a_1, \dots, a_n) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Itt : $F'_N(p)$, F_N — olyan p változójú polinomok, amelyeknek együtthatói nem függenek k_i -től

$F_n(p)$ — olyan polinomok, amelyeknek együtthatói nem függenek k_i -től, a_i -től

$f(a_1, \dots, a_n)$ — a_{ik} csatolási tényező bizonyos függvényei.

Győződjünk meg arról, hogy bizonyos körülmények között egyetlen, néhány, vagy pedig az összes erősítési tényező növelése elkerülhetetlenül a stabilitás megbomlásához vezet és hogy ezen rendszerben éppenúgy, mint az egykörös rendszerben, ellentmondásban van a rendszer stabilitásával az erősítési tényezők növelésének lehetősége.

Tételezzük fel, hogy az egyes körök erősítési tényezői között a következő összefüggések állnak fenn (vagy létrehozhatók) :

$$\begin{aligned} k_2 &= \eta_1 k_1 \\ k_3 &= \eta_3 k_1 \\ &\dots \\ k_n &= \eta_n k_1 \end{aligned}$$

a (7) összefüggéseket behelyettesítve a (6) egyenletbe és $k_1 = k$ helyettesítéssel kapjuk :

$$\begin{aligned} F'_{N0}(p) + F_{N1}(p) + k^2 F_{N2}(p) + k^3 F_{N3}(p) + \dots \\ \dots + k^n \prod_{i=1}^n \eta_i + f_1(a_1, \dots, a_n) F_n(p) + f_2(a_1, \dots, a_n) F_{n-1}(p) + \\ \dots + f_n(a_1, \dots, a_n) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Elosztva (8)-t k^n -nel és $\frac{1}{k^i} = m^i$ jelöléssel a következő egyenletre jutunk :

$$m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + m^{n-2} F_{N_2}(p) + \dots \quad (9)$$

$$\dots + m F_{N, n-1}(p) + \prod_{i=1}^n \eta_i = 0.$$

Itt

$$F_{N_0}(p) = F_{N_0}'(p) + f_1(a_1, \dots, a_n) F_n(p) + \dots + f_n(a_1, \dots, a_n).$$

Az erősítő tényező növelése egyértelmű m csökkentésével. Vizsgáljuk meg, hogy milyen lehetőség nyílik stabilis rendszer létrehozására $m \rightarrow 0$ esetén. Ezért oldjuk meg a következő feladatot.

Tételezzük fel, hogy általános esetben a karakterisztikus egyenlet a következő alakba írható :

$$m^n F_N(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + m^{n-2} F_{N_2}(p) + \dots + m F_{N, n-1}(p) + F_{N_n}(p) = 0. \quad (10)$$

Itt F indexei a polinomok fokszámát mutatják. Meg kell állapítanunk, hogy $m \rightarrow 0$ esetén a (10) egyenletek gyökei milyen feltételek mellett helyezkednek el a gyököket tartalmazó síknak a képzetes tengelytől balra levő részén.

Tételezzük fel, hogy $N > N_1 > N_2 > \dots > N_n$. Következésképpen a (10) egyenlet fokszáma N lesz. Ha $m \rightarrow 0$, akkor a (10) egyenlet N_n gyökei az elfajuló egyenlet N_n gyökeihez közelednek (MEJEROV, 1947/b, 1949). Az elfajuló egyenlet :

$$F_{N_n}(p) = 0. \quad (11)$$

Tételezzük fel, hogy az elfajuló egyenlet kielégíti a stabilitás feltételeit (ellenkező esetben a rendszer kis m esetén labilissá válik és a további vizsgálatnak nincs értelme). Vizsgáljuk meg, stabilis lesz-e az egész rendszer ezen feltételek mellett. Ehhez ismernünk kell a (10) egyenlet azon $N - N_n$ gyökeinek helyét a komplex síkon, amelyek $m \rightarrow 0$ esetén végtelenhez tartanak.

Vizsgáljuk meg a következő eseteket :

a) $N_1 = N - 1, N_2 = N - 2, \dots, N_n = N - n$. Ekkor a (10) egyenletet a következő alakba írhatjuk át :

$$m^n F_N(p) + m^{n-1} F_{N-1}(p) + m^{n-2} F_{N-2}(p) + \dots \quad (12)$$

$$\dots + m F_{N-n+1}(p) + F_{N-n}(p) = 0.$$

A további közleményekben (MEJEROV 1947/b, 1948, 1949) bebizonyítottuk, hogy a (12)-höz hasonló rendszer stabilitásának vizsgálata lényegében ugyanaz, mint az $m = 0$ feltételezés alapján felírt elfajuló egyenlet (a vizsgált esetben a (11) egyenlet) együtthatóinak stabilitásra való ellenőrzése, továbbá a segéd-

egyenlet elemzése, amelyet a (10) egyenletben előforduló polinomok legmagasabb rangú tagjaiból képeztünk.

Ha felállítjuk a segédegyenletet és előírjuk, hogy a segédegyenlet együtt-hatói tegyenek eleget a ROUTH—HURWITZ feltételeknek, olyan stabilis rendszert kapunk, amelyben tetszés szerint növelhető minden erősítési együttható.

A vizsgált eset olyan rendszernek felel meg, amelyben a körök saját operátorai minden egyes szabályozott jellemzőre vonatkozóan elsőrendűek és nincsen semmiféle stabilizáló berendezés.

b) Tételezzük fel most, hogy $N_1 = N-2$, $N_2 = N-4$, ..., $N_n = N-2n$. Ez annak az esetnek felel meg, amikor a szabályozott szakasz saját operátorának és a szabályozó saját operátorának szorzata az összes szabályozott jellemzőre vonatkozóan másodrendű lesz.

Írjuk át a (10) egyenletet a következő alakba :

$$m^n F_N(p) + m^{n-1} F_{N-2}(p) + m^{n-2} F_{N-4}(p) + \dots + F_{N-2n}(p) = 0. \quad (13)$$

Tételezzük fel, hogy az elfajuló egyenlet $F_{N-2n}(p) = 0$ itt is kielégíti a stabilitás feltételeit. Határozzuk meg az $m \rightarrow 0$ esetén végtelenhez tartó $2n$ gyök helyét.

Írjuk fel a (13) egyenletet kifejtett alakban, előzőleg elosztva m^n -nel :

$$\begin{aligned} a_{00} p^N + a_{01} p^{N-1} + a_{02} p^{N-2} + \dots + \frac{1}{m} [a_{10} p^{N-2} + a_{11} p^{N-3} + \dots] + \\ + \frac{1}{m^2} [a_{20} p^{N-4} + a_{21} p^{N-5} + a_{22} p^{N-6} + \dots] + \dots \quad (14) \\ \dots + \frac{1}{m^n} [a_{n0} p^{N-2n} + a_{n1} p^{N-2n-1} + a_{n2} p^{N-2n-2} + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Vezessünk be új változót a következő egyenlet értelmében :

$$p = \frac{q}{m^{\frac{1}{2}}}. \quad (15)$$

A (15) összefüggést (14)-be helyettesítve, majd a kapott egyenletet $m \frac{N}{2}$ -vel megszorozva és áttérve az $(m \rightarrow 0)$ határértékre, egyszerű átalakítással a következőképpen írhatjuk át a segédegyenletet :

$$a_{00} q^{2n} + a_{10} q^{2n-2} + a_{20} q^{2n-4} + \dots + a_{n0} = 0. \quad (16)$$

Vezessünk be a (16) egyenletbe új változót : $x = q^2$ egyenlet szerint, vagyis $q = \sqrt{x}$.

Ha minden m kettővel emeli az egyenlet rendszámát, akkor a rendszer stabilis, ha a közös egyenletből m nullává tételével kapott elfajuló egyenlet eleget tesz a stabilitás feltételeinek, továbbá, ha ugyanazon feltételeket a másodlagos segédegyenlet is kielégíti.

c) Vizsgáljuk meg végül azt az esetet, amikor minden kis paraméter hárommal (vagy ennél nagyobb értékkel) emeli az egyenlet rendszámát. Ez annak az esetnek felel meg, amikor a szabályozott szakasz saját operátorainak és a szabályozó saját operátorainak szorzata harmadrendű.

Hasonlóan a b) pontban végzett átalakításokhoz és a

$$p = \frac{p}{m^{1/3}}$$

helyettesítéssel, a segédegyenletet így írhatjuk fel:

$$a_{00}q^{3n} + a_{10}q^{3n-3} + a_{20}q^{3n-6} + \dots + a_{n0} = 0. \quad (20)$$

Ha végrehajtjuk a következő helyettesítést:

$$y = q^3, \quad (21)$$

akkor a (20) egyenlet a következő alakba írható:

$$a_{00}y^n + a_{10}y^{n-1} + \dots + a_{n0} = 0. \quad (22)$$

Könnyen belátható, hogy a (20) egyenlet gyökei mindig a képzetes tengelytől jobbra helyezkednek el, vagyis a rendszer nem stabilis. A valóságban tehát az egyetlen eset, amelyet ellenőriznünk kell az, amikor a (22) egyenlet gyökei valósak és negatívak. A rendszer minden más esetben ugyanis labilis lesz. Tegyük fel, hogy a (22) egyenlet együtthatói eleget tesznek az aperiodikus stabilitás feltételeinek (MEJEROV, 1945). Ekkor ezen egyenlet minden gyöke valós és negatív lesz. A (20) egyenlet gyökeinek meghatározására használjuk fel a (21) összefüggést a következő alakban:

$$q = \sqrt[3]{y}.$$

Kéttagú egyenletek tulajdonságai (SZUSKEVICS, 1937), valamint a további közleményekben kapott következtetések alapján leszögezhető, hogy a (21) egyenlet három gyöke közül a komplex számsíkon legalább egy a képzetes tengelytől jobbra van. Mivel a (22) egyenletnek m gyöke van, ezért a (20) segédegyenletben a $3n$ közül legalább m gyök van a képzetes tengelytől jobbra. Így a rendszer nem lesz stabilis.

Visszatérve az n egymással kapcsolatban álló szabályozott jellemzőt tartalmazó rendszerre, amelynek viselkedését az (1) egyenletrendszer írja le, a következő eredményekre jutottunk :

1. Ha az alapelemeket tartalmazó körök mindegyikének elsőrendű a saját operátora, akkor egyidejűleg minden erősítési tényezőt növelhetjük anélkül, hogy a stabilitást veszélyeztetnénk. Ebben az esetben szükséges, hogy az elfajuló egyenlet és a segédegyenlet külön-külön is eleget tegyen a stabilitás feltételeinek.

2. Ha az alapelemekből álló körök mindegyikének másodrendű a saját operátora, akkor a stabilitás megbomlása nélkül növelhető az összes erősítési tényező. Ebben az esetben szükséges, hogy a másodrendű segédegyenlet és az elfajuló egyenlet külön-külön eleget tegyen a stabilitási feltételeknek.

3. Amennyiben az alapelemeket tartalmazó körök mindegyikének harmad- vagy ennél magasabbrendű a saját operátora, akkor egyetlen, néhány, avagy az összes erősítési tényező egyidejű növelése elkerülhetetlenül a stabilitás megbomlására vezet. Ebben az értelemben éppúgy, mint a másodiknál magasabbrendű saját operátorral rendelkező egykörös rendszerekben, az erősítési tényező (vagy tényezők) növelése a stabilitással ellentétben van. Így tehát szükségesnek látszik olyan kapcsolások szerkesztési elvének tisztázása, amelyeknél ez az ellentét az elhanyagolt kis paraméterek pontosságáig megszüntethető.

3. Az erősítési tényezők korlátlan növelését lehetővé tevő, több szabályozott jellemzőt tartalmazó rendszerek megalkotása

Valóságos körülmények között az egyes körök saját operátorainak rendszáma nagyobb lehet kettőnél. Amint ez az előző fejezet eredményeiből következik, az említett körülmények között egy, avagy néhány erősítési tényező növelése elkerülhetetlenül a stabilitás megbomlására vezet.

Ennek alapján éppen úgy, mint az egyetlen szabályozott jellemzőt tartalmazó rendszereknél, a feladat a következő: meghatározni olyan rendszerek megalkotásának törvényszerűségeit, amelyekben a stabilitás és a pontosság között nincs meg ez az alapvető ellentmondás. (Itt, mint mindenütt, feltételezzük, hogy az eredmények pontosságát az elhanyagolt kis paraméterek nagyságrendje határozza meg).

Tételezzük fel, hogy a szabályozás körének egy szabályozott jellemzőre, pl.: x_1 -re vonatkozó saját operátorának rendszáma $\nu_1 > 2$. E kör erősítési tényezőjének növelése mindenképpen a rendszer stabilitásának megbomlására vezet. Ez a következtetés az előzőekben kapott eredményekből folyik és helyes-ségéről közvetlenül meggyőződhetünk.

Valóban : az (5) determinánst első sora szerint kifejtve

$$[D_1(p) M_1(p) + k_1] \Delta_{11} + k_2^1 M_2(p) a_{21} \Delta_{21} + \dots \quad (23) \\ \dots + k_n^1 M_n(p) a_{n1} \Delta_{n1} = 0.$$

Itt : Δ_{ik} — az első sor elemeihez tartozó aldeterminánsokat jelenti.

Könnyű belátni, hogy a (23) összegnek első tagja p -re nézve legmagasabb fokú lesz, mivel ez a tag tartalmazza a legkevesebb kölcsönös együtthatót. A kölcsönös együtthatók pedig vagy állandó mennyiségek, vagy pedig operátorok, melyeknek rendszáma kisebb az egyes körök saját operátorainak rendszámánál. A (23) egyenlet a következő formába írható :

$$F_{N_2}(p) + k_1 F_{N_1}(p) = 0. \quad (24)$$

Itt : F indexei $F_{n_2}(p)$ és $F_{n_1}(p)$ többtagúak fokszámát jelentik.

A feltétel szerint

$$N_2 - N_1 = \nu_1.$$

Innen pedig az következik, hogy ha $\nu_1 > 2$, akkor k_1 növelése feltétlenül a rendszer stabilitásának megbomlását okozza. A (24) egyenletből látható, hogy az

$$N_2 - N_1 \leq 2 \quad (25)$$

feltétel akkor fog teljesülni, ha az első körbe $(\nu_1 - 2)$ -szeres derivált szerinti hatást vezetünk be.

Valóban, ha az első körbe $(\nu_1 - 2)$ -szeres derivált szerinti hatást vezetünk be, akkor a (24) egyenlet a következő alakot ölti :

$$F_{N_2}(p) + k_1 (p^{\nu_1 - 2} + 1) F_{N_1}(p) = 0. \quad (26)$$

Ez az egyenlet kielégíti a (25) feltételt.

Általánosítva ezt az eredményt arra az esetre, amikor a rendszer minden egyes körének saját operátora ν_i rendű lesz, a következő eredményre jutunk : ahhoz, hogy bármely k esetén biztosíthassuk a rendszer stabilitását, az szükséges, hogy $(\nu_i - 2)$ -rendű differenciál-hatást vezessünk be minden körbe, amelyben a saját operátor rendszáma $(\nu_i > 2)$.

A $\nu_i - 2$ differenciál bevezetésével biztosítjuk a (25) feltétel teljesülését. Azonban vizsgáljuk meg azt, hogy szükséges-e a $\nu_i - 2$ deriválton kívül bevezetni az összes alacsonyabbrendű deriváltat is egészen az elsőig? Azért, hogy erre a kérdésre feleletet kapjunk, keressünk megfelelő kifejezést az el-

fajuló egyenletre, feltételezve, hogy minden körbe bevezetünk $\nu_i - 2$ deriváltat. Nem nehéz bebizonyítani, hogy az elfajuló egyenlet a következő lesz :

$$(p^{\nu_1-2} + 1)(p^{\nu_2-2} + 1) \dots (p^{\nu_n-2} + 1) F_n(p) = 0. \quad (27)$$

Függetlenül $F_n(p)$ függvény jellegétől, világos, hogy a rendszer $\nu_i > 3$ esetén labilis lesz. Innen az következik, hogy az elfajuló egyenlet stabilitását csak akkor biztosítottuk, hogyha a $\nu_i - 2$ deriválton kívül minden alacsonyabb rendű deriváltat bevezetünk egészen az első deriváltig.

Az eddigiek alapján tehát kimondhatjuk a következőket : Az n egymással kapcsolatban álló szabályozott jellemzőt tartalmazó rendszerben is biztosítható a stabilitás tetszés szerinti erősítési tényező esetén, bármely szabályozott mennyiségre nézve ; evégből a megfelelő körbe egy, a $(\nu_i - 2)$ derivált szerinti hatást kell bevezetni (ν_i — az i -edik kör saját operátorának rendszáma).

4. A kitűzött feladat megoldásának módja

Az előző fejezetben olyan rendszereket találtunk, amelyek a stabilitás megtartása mellett lehetővé teszik az erősítési tényezők korlátlan növelését. Azok a nehézségek, amelyek ezen rendszerek fenti módon történő gyakorlati megvalósításakor mutatkozhatnak, azzal kapcsolatosak, hogy tiszta deriváltakra van szükségünk. Különösen bonyolulttá válik ez a módszer, ha a szabályozási kör saját operátorának fokszáma magasabb háromnál és a szükséges rendszer elérésére második és ennél magasabb fokú deriváltakat kell bevezetni.

Jelen fejezetben olyan rendszereket ismertetünk, amelyek a stabilitás megbomlása nélkül lehetővé teszik az erősítési tényezők korlátlan növelését és tiszta deriváltak bevezetését nem követelik meg. Stabilizáló eszközökként közönséges stabilizáló, passzív elemekből álló berendezések szolgálhatnak. Vezessük be a következő jelöléseket : $M_i(p) D_{ip}$ — az i -edik kör saját operátora a stabilizáló elem nélkül ; $\frac{F_{ni}(p)}{F_{mi}(p)}$ — az i -edik kör stabilizáló elemének operátora ; k_0 — a stabilizáló elem hatása alatt álló szabályozási kör-rész erősítési tényezője ; k_{ie} — a szabályozási kör azon részének erősítési tényezője, amelyre nem terjed ki a stabilizáló elem hatása ; k'_i — a szabályozott szakasznak az i -edik szabályozott jellemzőre vonatkozó erősítési tényezője ; $M_{ie}(p)$ — a szabályozó azon részének saját operátora, amelyre nem terjed ki a stabilizáló elem hatása ; $M_{10}(p)$ a kör azon része, amelyre a $k_v = k_0 \cdot k'_i \cdot k_e$ stabilizáló elem hatása kiterjed.

A 2. ábrán a vizsgált rendszer elvi kapcsolását láthatjuk.

től függenek és a szorzás elvégzése után k_0 tényezőjeként jelentkeznek. A (31) egyenlet további tagjai is analóg módon alakulnak. A (31) egyenlet utolsó tagja, amelynek együtthatója k_0^n , a $\prod_{i=1}^n B_i(p)$ szorzatból, valamint azon tagokból áll, amelyek a_{ik} -tól függenek, továbbá a szorzás elvégzése után k_0^n szorzójaként működnek.

Tételezzük fel, hogy külön-külön minden szabályozási kör saját stabilizáló elemével olyan struktúrát képez, amely lehetővé teszi az erősítési tényező korlátlan növelését a stabilitás biztosítása mellett. Ekkor, amint ez a (31) egyenletben előforduló polinomok szerkezetének törvényszerűségéből adódik, az egymás melletti polinomok fokszámának különbsége nem lehet kettőnél nagyobb.

Az elmondottakból következik, a több, egymással kapcsolatban álló szabályozott jellemzőjű, tetszés szerinti, nagy pontosságú, többkörös rendszerek szerkezetének törvényszerűsége: Ahhoz, hogy fenti rendszerben minden egyes szabályozott értéknek tetszőleges állandósult pontossággal való fenntartása lehetséges legyen, elégséges, hogy minden körre külön-külön teljesüljön ez a feltétel. Ekkor a rendszer stabilis lesz az erősítési tényező korlátlan növelésekor is, ha a segédegyenlet, vagy a másodlagos segédegyenlet és az elfajuló egyenlet külön-külön kielégíti a stabilitás feltételeit.

5. Példa három egymással kapcsolatban álló szabályozott jellemzőjű rendszer számítására

Vizsgáljuk meg részletesebben az előzőekben kapott eredményeket egy példa segítségével. Példaként három szabályozott jellemzőt tartalmazó rendszert vegyünk. A példán tisztázzuk ezen rendszerek néhány tulajdonságát.

A (29) egyenletrendszert három körre felírva:

$$[\pi_1(p) + k_0 B_1(p)] x_1 = - [D_1(p) + k_0 k'_1 F_{n1}(p) M_{e1}(p)] \times a_{12} x_2 + [D_1(p) + k_0 k'_1 F_{n1}(p) M_{e1}(p)] a_{13} x_3,$$

$$[\pi_2(p) + k_0 B_2(p)] x_2 = - [D_2(p) + k_0 k'_2 F_{n2}(p) M_{e2}(p)] a_{21} x_1 + [D_2(p) + k_0 k'_2 F_{n2}(p) M_{e2}(p)] a_{23} x_3,$$

$$[\pi_3(p) + k_0 B_3(p)] x_3 = - [D_3(p) + k_0 k'_3 F_{n3}(p) M_{e3}(p)] a_{31} x_1 + [D_3(p) + k_0 k'_3 F_{n3}(p) M_{e3}(p)] a_{32} x_2.$$

A karakterisztikus egyenlet a következő lesz :

$$\left[\begin{array}{l} \pi_1(p) + k_0 B_1(p), [D_1(p) + k_0 k'_1 F_{n1}(p) M_{e1}(p)] \alpha_{12}, [D_1(p) + \\ \quad + k_0 k'_1 F_{n1}(p) M_{e1}(p)] \alpha_{13}. \\ [D_2(p) + k_0 k'_2 F_{n2}(p) M_{e2}(p)] \alpha_{21}, \pi_2(p) + k_0 B_2(p), [D_2(p) + \\ \quad + k_0 k'_2 F_{n2}(p) M_{e2}(p)] \alpha_{23} \\ [D_3(p) + k_0 k'_3 F_{n3}(p) M_{e3}(p)] \alpha_{31}, [D_3(p) + \\ \quad + k_0 k'_3 F_{n3}(p) M_{e3}(p)] \alpha_{32}, \pi_3(p) + k_0 B_3(p) \end{array} \right] = 0 \quad (32)$$

Fejtsük ki a determinánst és csoportosítsuk a megfelelő tagokat. Ekkor a következő egyenletet kapjuk :

$$\begin{aligned} f(p) = & [\pi_1(p) \pi_2(p) \pi_3(p) + D_1(p) D_2(p) D_3(p) \alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} - \\ & - D_3(p) D_1(p) \pi_2(p) \alpha_{31} \alpha_{13} - D_3(p) D_2(p) \pi_1(p) \alpha_{32} \alpha_{23} - \\ & D_1(p) D_2(p) \pi_3(p) \alpha_{21} \alpha_{12}] + k_0 \{ B_1(p) \pi_2(p) \pi_3(p) + \\ & + B_2(p) \pi_1(p) \pi_3(p) + B_3(p) \pi_1(p) \pi_2(p) + [U_1(p) D_2(p) D_3(p) + \\ & + U_2(p) D_1(p) D_3(p) + U_3(p) D_1(p) D_2(p)] (\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \\ & + \alpha_{21} \alpha_{32} \alpha_{13}) - \\ & - [U_3(p) \pi_2(p) D_1(p) + U_1(p) \pi_2(p) D_3(p) + B_2(p) D_1(p) D_3(p)] \\ & \alpha_{13} \alpha_{31} - \\ & - [U_3(p) D_2(p) \pi_2(p) + U_2(p) D_3(p) \pi_1(p) + B_1(p) D_2(p) D_3(p) \\ & \alpha_{32} \alpha_{23} - \\ & - [U_1(p) D_2(p) \pi_3(p) + U_2(p) D_1(p) \pi_3(p) + B_3(p) D_2(p) D_1(p) \alpha_{21} \alpha_{12} + \\ & + k_0^2 \{ B_1(p) B_2(p) \pi_3(p) + B_1(p) B_3(p) \pi_2(p) + B_2(p) B_3(p) \pi_1(p) \} + \\ & + [U_1(p) U_2(p) D_3(p) + U_1(p) U_3(p) D_2(p) + \\ & + U_2(p) U_3(p) D_1(p)] (\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{13} + \alpha_{21} \alpha_{32} \alpha_{31}) - [U_1(p) U_3(p) \pi_2(p) + \\ & + U_1(p) B_2(p) D_3(p) + B_2(p) U_3(p) D_1(p)] \alpha_{31} \alpha_{13} - \\ & - [U_3(p) U_2(p) \pi_1(p) + U_3(p) B_1(p) D_2(p) + \\ & + U_2(p) B_1(p) D_3(p)] \alpha_{23} \alpha_{32} - [U_1(p) U_2(p) \pi_3(p) + \\ & + U_1(p) B_3(p) D_2(p) + U_2(p) B_2(p) D_1(p)] \alpha_{21} \alpha_{12} S + \\ & + k_0^3 [B_1(p) B_2(p) B_3(p) + U_1(p) U_2(p) U_3(p) (\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \\ & + \alpha_{21} \alpha_{32} \alpha_{13}) - U_1(p) B_2(p) U_3(p) \alpha_{13} \alpha_{31} - U_3(p) U_2(p) B_1(p) \alpha_{32} \alpha_{23} - \\ & - U_1(p) U_2(p) B_3(p) \alpha_{12} \alpha_{21}] = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Itt

$$U_i(p) = k'_i F_{ni}(p) M_{bi}(p).$$

A (33) egyenletet k_0^3 -el végigosztva és a $m^i = \frac{1}{k_0}$ helyettesítést elvégezve :

$$m^3 F_{N_0}(p) + m^2 F_{N_1}(p) + m F_{N_2}(p) + F_{N_3}(p) = 0. \quad (34)$$

Ebben az egyenletben $F_{N_0}(p)$ a (33) egyenletben a szögletes zárójelben levő azon tagok összegét jelenti, amelyeknek k_0 nem szorzója. $F_{N_1}(p)$ a k_0 -val, $F_{N_2}(p)$ a k_0^2 -vel, $F_{N_3}(p)$ a k_0^3 -nel szorzott tagok összegét jelképezi.

Az egyenlet rendszámát $\pi_1(p) \pi_2(p) \pi_3(p)$ tag rendszáma határozza meg. A feltétel szerint mindhárom szabályozási körben korlátlanul növelhető k_0 értéke, a stabilitás megtartása mellett. Ezért, amint ezt az előzőkben bebizonyítottuk (és a (33) egyenletből közvetlenül látható) a (34) egyenlet egymás melletti polinomjainak fokszám-különbsége nem nagyobb kettőnél. A (34) egyenlet gyökei $m \rightarrow 0$ esetében (ha $k_0 \rightarrow \infty$), a komplex számsík képzetes tengelyétől balra lesznek, ha mind a segédegyenlet, mind pedig az elfajuló egyenlet, külön-külön eleget tesz a stabilitás feltételeinek.

Írjuk fel az elfajuló egyenletet :

$$\begin{aligned} F_{N_3}(p) = & B_1(p) B_2(p) B_3(p) + U_1(p) U_2(p) U_3(p) \times \\ & \times (\alpha_{12} \alpha_{23} \alpha_{31} + \alpha_{21} \alpha_{31} \alpha_{13}) - U_1(p) B_2(p) U_3(p) \alpha_{13} \alpha_{31} - \\ & - U_3(p) U_2(p) B_1(p) \alpha_{32} \alpha_{23} - U_1(p) U_2(p) B_3(p) \alpha_{12} \alpha_{21} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

A (35) egyenlet első tagja nem más, mint a három parciális elfajuló egyenlet szorzata. A többi tagok az egyes szabályozott jellemzők között fennálló kapcsolat következtében szerepelnek az egyenletben.

Az átmeneti folyamat jellegét eléggé kis k_0 esetén teljes mértékben az elfajuló egyenlet határozza meg. Ha a szabályozók között olyan járulékos kapcsolatokat valósítunk meg, hogy az első tag kivételével az elfajuló egyenlet minden tagja zérus értékű legyen, akkor minden körben biztosítottuk a szabályozási folyamatok abszolút autonómiáját. Az ilyen kapcsolatok célszerűségét külön tárgyaljuk. Itt most csak a következőt szögezzük le: van lehetőség arra, hogy a stabilitás az összes erősítési tényező korlátlan növelésekor is fennálljon. Ehhez csupán úgy kell szerkeszteni minden egyes kört, hogy az egyes körökben elvileg k_0 bármilyen mérvű növelése se zavarhassa meg a stabilitást.

6. Általánosítás

Valóságos körülmények között nem mindig szükséges az összes szabályozott jellemző nagy állandósult pontossággal való tartása. Ezenkívül vannak egyes esetek, amikor a szabályozott jellemzők közül néhánynak igen nagy pontossággal való tartása egyenesen nem kívánatos.

Példaként szolgálhat olyan vízturbinák sebességszabályozása, amelyekkel hajtott generátor a többi generátorral a hálózaton keresztül párhuzamosan jár. Mint ismeretes, a hasznos teljesítmény elosztása párhuzamosan járó gépek között a turbinák sebességszabályozásának statikus karakterisztikája szerint történik. A szabályozás pontosságának növelése azt jelenti, hogy a turbina statikus szabályozási karakterisztikájának meredekségét meg kell változtatni. A jelleggörbe meredekségének megváltoztatása viszont a gépek közötti hasznos terhelés elosztásának a változásával jár, ami pedig nem kívánatos. Általánosítás céljából nézzük meg tehát ezt az esetet, amikor az m szabályozott jellemző közül $n-n_1$ -et nagy pontossággal akarunk tartani.

Ekkor a (13) egyenlet a következő lesz :

$$m^{n-n_1} F_N(p) + m^{n-(n_1+1)} F_{N_1}(p) + \dots + F_{N(n-n_1)}(p) = 0. \quad (36)$$

Tudjuk, hogy $(n-n_1)$ szabályozott jellemző tetszés szerinti pontossággal akkor tartható, ha a (36) egyenlet kielégíti a stabilitás feltételeit $m \rightarrow 0$ esetén is. Mint ez az előzőkből látható, kis m esetén a rendszer stabilis lesz, ha

$$a) \text{ az elfajuló egyenlet : } F_{N(n-n_1)}(p) = 0 \quad (37)$$

kielégíti a stabilitás feltételeit és

$$b) \text{ a megfelelő segédfüggvény szintén eleget tesz a stabilitás feltételeinek.}$$

Az említett feltételek kielégítésére az előzőkben kifejtett valamelyik módszer segítségével törekedhetünk.

7. A rendszerek részünkről vizsgált osztályának néhány dinamikus tulajdonsága

A stabilitáson és az állandósult pontosságon kívül az önműködő szabályozási rendszerekkel szemben a követelményeknek még egész sorát támasztják. Ezeknek a követelményeknek kielégítése határozza meg alkalmasságukat egy vagy más konkrét esetben. A legfontosabb követelmények egyike a gyors működés (a szabályozás és túlszabályozás folyamatának kis időtartama). Itt most nem nézzük meg minőségi szempontból a rendszerek vizsgált osztályának tulajdonságait. Egyedül néhány olyan gondolatot közlünk, amelyek az előzőkben ismertetett kutatásokból folynak és amelyek az ilyen rendszerek szerkesztésekor és vizsgálatokor hasznosaknak bizonyulhatnak.

1. Az erősítési tényezők választásában nagy szabadságunk van, s így a rendszerek tulajdonságait az erősítési tényezők változásának árán széles határok közt változtathatjuk.

2. Ha az erősítési tényezőt nagyra választjuk, a rendszer stabilis lesz a többi paraméter jelentős változásakor is. Ez az elv felhasználható a kívánt minőség biztosítására.

3. Az olyan rendszerekben, melyek nagy erősítés esetén is stabilisak, az átmeneti folyamatot teljes mértékben az elfajuló egyenlet határozza meg, feltéve, ha az erősítési tényezők elég nagyok. Az elfajuló egyenlet sok paraméterét szabadon választhatja meg a tervező, s ezzel mód nyílik a rendszer iránt támasztott műszaki követelmények kielégítésére.

4. Ha a segédegyenlet elsőrendű, akkor az elfajuló egyenlettel leírt folyamatra gyorsan csillapodó összetevők szuperponálódnak. Ezeket a segédegyenlet végtelenhez tartó gyökei határozzák meg. Ha pedig másodrendű a segédegyenlet, akkor gyökei olyan komplex számok lesznek, amelyeknek képzetes része nagy. A nagy frekvencia általában nem veszélyes a szabályozási rendszerekre, mivel ezek tulajdonképpen aluláteresztő szűrők.

5. Azon rendszerekre nézve, melyeknek saját operátoraik rendszáma nem nagyobb kettőnél, az összes kör szabályozási tényezőinek növelése egyenértékű a stabilitás fokának növelésével. Ekkor tetszőlegesen gyors működés valósítható meg.

8. Az erősítési tényezők mennyiségi meghatározása és a kis, elhanyagolt paraméterek figyelembevétele

Azon kérdések, amelyek a határátmenetek módszerének alkalmazásakor felmerülnek (a mi esetünkben a határátmenet $m \rightarrow 0$ és $k \rightarrow \infty$) általában a következők:

1. Valóságos körülmények között az erősítési tényezők nem tetszőlegesen nagyok, hanem teljes mértékben meghatározott véges értékek. Mikor tekintjük tehát az erősítési együttható értékét nagynak? Vagy másképpen: az erősítési együtthatók milyen számértékeire érvényesek e dolgozatban kapott eredmények?

2. A szabályozási rendszerekben (éppen úgy, mint bármely dinamikai rendszerben) a számításba vett paramétereken kívül elhanyagolt paraméterek is vannak. Ezek az erősítési tényezők nagy értékeinél hatást gyakorolhatnak a szabályozási rendszerben lezajló folyamatokra. Ezzel kapcsolatban két kérdés adódik:

a) Gyakorolhatnak-e kis paraméterek jelentős hatást a rendszer viselkedésére, ha ezen paraméterek tetszőlegesen kicsik? (Itt most azt vizsgáljuk, hogy A. A. ANDRONOV értelmezésében durvák vagy nem durvák-e a részünkről vizsgált rendszerek.)

b) A másik kérdés a következő: hogyan határozhatjuk meg mennyiségileg a kis elhanyagolt paraméterek hatását a vizsgált rendszerben lezajló folyamatok jellegére.

Vizsgáljuk meg mindenekelőtt k erősítési tényezők kérdését. Az a tény, hogy k véges szám (nem pedig tetszés szerinti nagy érték), nem változtatja

meg a (7) egyenlet rendszámát, csak együtthatóinak értékét befolyásolja. Tételezzük fel, hogy az átalakított (segédegyenlet-) egyenlet gyökei q_1, q_2, \dots, q_n . E gyököket annak a feltételezésével kaptuk, hogy $m \rightarrow 0$. Most tételezzük fel, hogy m különbözik a 0-tól és véges értékű.

Legyen m értéke kicsi. Annak a tételnek alapján, amely szerint az egyenlet együtthatóinak változása a gyökök folytonos függvény szerinti változását vonja maga után, m mennyiségi figyelembevétel azt okozza, hogy a segédegyenlet együtthatói kismértékben megváltoznak és következésképpen kis változást szenvednek q_i gyökök is.

Írjuk fel a segédegyenletet a következő módon :

$$a_0 q^n + a_1 q^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (38)$$

Ekkor m figyelembevétel a (28) egyenlet együtthatóit Δa_i -val és a gyököket ennek megfelelően Δq_i -val változtatja meg. Ennek következtében a (38) egyenletet így írhatjuk fel :

$$\begin{aligned} (a_0 + \Delta a_0)(q_i + \Delta q_i)^n + (a_1 + \Delta a_1)(q_i + \Delta q_i)^{n-1} + \dots \\ \dots + (a_n + \Delta a_n) = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Fentiek alapján az i -edik gyök meghatározásánál elkövetett hibát másodrendűen kicsiny pontossággal az előző munkámban (MEJEROV 1947) kapott eredmények alapján az alábbi képlet szerint lehet meghatározni :

$$\Delta q_i = - \frac{\Delta a_0 q_i^n + \Delta a_1 q_i^{n-1} + \dots + \Delta a_n}{\varphi'(q)_{q=q_i}}. \quad (40)$$

Itt $\varphi'(q)$ a (38) egyenlet q -szerinti deriváltját jelenti $q = q_i$ esetén. Ha ismerjük q_i értékét, akkor ki tudjuk számítani a gyök meghatározásánál elkövetett hibát. Eszerint a gyök valóságos értéke a következő egyenletből számítható :

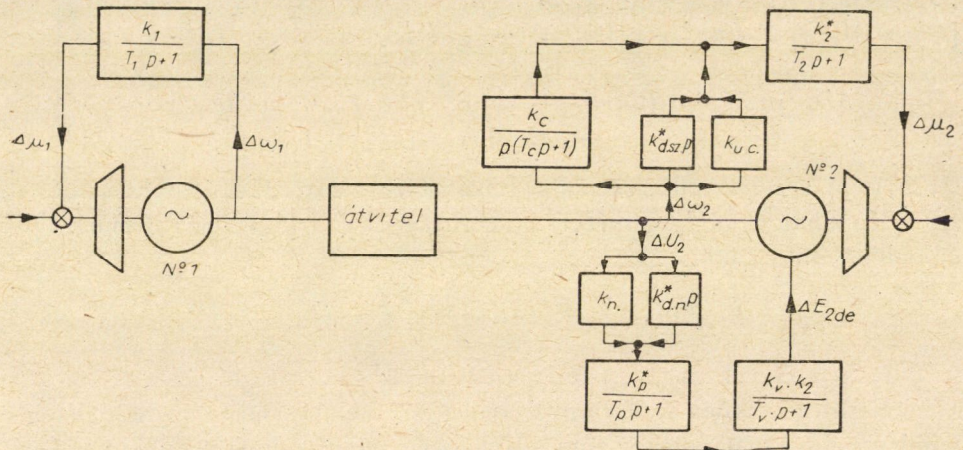
$$p_i = \frac{q_i + \Delta q_i}{m} = (q_i + \Delta q_i) \cdot K. \quad (41)$$

Ha k adott, akkor a gyök valóságos értékét meghatározhatjuk a (41) egyenletből. A gyakorlatban célszerűbb a számítást fordítva végezni : mindenekelőtt kiszámítjuk a segédegyenlet, vagyis az $m \rightarrow 0$ feltételezéssel kapott egyenlet gyökeit. Ezután felvesszük a gyök megengedett hibáját, Δq -t és a (41) összefüggésből felállítjuk a k kiszámítására szolgáló egyenletet. k -nak durvább meghatározása a következő módon történhetik : Δq_i értéke mellett felvesszük

tartozik. Ami pedig az elhanyagolt paraméterek stabilitásra gyakorolt hatásának és az egyéb jellemzőjű értékek megbecsülését illeti, ez úgy végezhető, ahogy k meghatározásánál tettük, valamint ahogy előző munkámban található (MEJEROV, 1947/b).

9. példa

Példaképpen* vizsgáljuk meg két olyan szinkron gép önműködő szabályozási rendszerét, amelyek terheléssel ellátott hosszú vezetéken keresztül járnak párhuzamosan. A szabályozott jellemzők a következők: feszültség, fordulatszám és periódusszám. Az üzemi viszonyok szerint a fordulatszám szabályozást statikus szabályozóval valósítjuk meg. A szabályozás statikus jelleggörbéje meghatározza a párhuzamosan járó gépek között a hasznos terhelés elosztását. Ennek alapján úgy vesszük, hogy a sebesség szerinti sztatizmus (vagy ennek megfelelően a sebesség-kör erősítési együtthatója) adott szám. A periódusszámot asztatikusan szabályozzuk szekunder szabályozóval.



3. ábra. Energiarendszer periódusszám-, sebesség- és feszültség szabályozásának kapcsolása

Az energiarendszer helyzetére a statikus és dinamikus stabilitás szempontjából nagy jelentőségű a feszültség szabályozása.

E példánál fontos számunkra az átmeneti folyamat sebessége és a feszültségtartás pontossága. Ezért nagy figyelmet fordítunk a feszültség szabályozás törvényszerűségének kiválasztására és a szabályozó paramétereinek meghatározására. Úgy vesszük, hogy a sebesség és a periódusszám szabályozási rendszere adott. Vizsgálataink folyamán figyelembe fogjuk venni az egyes szabályozott jellemzők egymáshatását, amelyet a szabályozott szakasz tulajdonsága határoz meg. A 3. ábrán látható a szabályozási rendszer elvi kapcsolása. A rendszer két, terheléssel ellátott hosszú vezetéken keresztül egyesített szinkron gépből áll. Az 1. gépnél csak a sebességet szabályozzuk, a 2-nál pedig a sebességet, periódusszámot és feszültséget.

A linearizált rendszerben létrejött folyamatokat a következő differenciál-egyenlet-rendszer fejezi ki:

$$\frac{\partial M_1}{\partial \delta_{12}} \Delta \delta_{12} + \left(I_1 p + \frac{\partial M_1}{\partial \omega_0} \right) \Delta \omega_1 + \frac{\partial M_1}{\partial E_{2d}} \Delta E_{2d} = \Delta \mu_1 \quad (45)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \delta_{12}} \Delta \delta_{12} + \left(I_2 p + \frac{\partial M_2}{\partial \omega_0} \right) \Delta \omega_2 + \frac{\partial M_2}{\partial E_{2d}} \Delta E_{2d} = \Delta \mu_2 + \Delta M_{2B} \quad (46)$$

* Ezt a példát szerző E. N. FOMINÁVAL és N. G. SELEUMOVÁVAL együtt számította ki.

$$p\delta_{12} = \Delta\omega_1 - \Delta\omega_2 \quad (47)$$

$$p(T_2 p + 1)(T_c p + 1)\Delta\omega_2 = [p(T_c p + 1)(k_{dc} p + 1) + k_2 k'] = \Delta\mu_2 \quad (48)$$

$$(1 + T_1 p)\Delta\omega_1 = k_1 \Delta\mu_1 \quad (49)$$

$$\Delta E_{2de} = \Delta E_{2d} + T_{2d} \frac{dE'_{2d}}{dt} \quad (50)$$

$$(1 + T_3 p)(1 + T_4 p)\Delta E_{2de} = k\Delta U_2 \quad (51)$$

$$\Delta E'_{2d} = A\Delta\delta_{12} + B\Delta E_{2d} \quad (52)$$

$$\Delta U_2 = C\Delta\delta_{12} + D\Delta E_{2d} \quad (53)$$

Ebben az egyenletrendszerben a következő jelöléseket használtuk: I_1, I_2 — az első és a második szinkron gép tehetetlenségi nyomatéka. $\Delta\omega_1, \Delta\omega_2$ — a gépek periódusszámának változása. ΔM_{2B} — az átmeneti nyomatékkal létrehozott nyomaték. E_{2d} — a 2. generátor üresjárási elektromotoros ereje. E_{2de} — a generátor gerjesztő feszültsége. E'_{2d} — a 2. generátor tranziens reaktanciája mögötti elektromotoros erő. T_{2d} — a 2. generátor gerjesztő körének időállandója. T_c — a periódusszám szabályozójának időállandója. T_2 a 2. generátor szabályozójának szabályozási sebességét jellemző időállandó. T_1 ugyanez az 1. generátorra. $\mu_1 \mu_2$ — a gépek szabályozó szerveinek koordinátái. k_c — a periódusszám szabályozó erősítési tényezője. k_2 — a 2. generátor sebességszabályozójának erősítési tényezője. k_1 — ugyanez az 1. generátornál. k_{dc} — a sebességszabályozó differenciálja szerinti hatás együtthatója. T_3 — a gerjesztőgép gerjesztőkörének időállandója. T_4 — a feszültségszabályozó időállandója. U_2 — a 2. generátor kapocsfeszültsége. k — a gerjesztőgép feszültségszabályozó és a 2. generátor feszültség erősítésének együtthatója. δ_{12} — a 2. generátor elektromotoros ereje és az 1. generátor kapocsfeszültsége által bezárt szög. ABC és D — állandók.

A tárgyalt példában az állandók számértéke a következő:

$$I_1 = 0,469 \text{ MWs}^3, \quad B = 0,843 \quad I_2 = 0,222 \text{ MWs}^3$$

$$C = 112 \text{ kV/fok} \frac{\partial M_1}{\partial \omega_0} = 0,0312 \text{ MWs}^2, \quad D = 0,75$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \omega_0} = 0,022 \text{ MWs}^3, \quad T_{2d} = 5 \text{ s}, \quad \frac{\partial M_1}{\partial \delta_{12}} = 2,23 \text{ MWs/o}$$

$$T_3 = 0,2 \quad T_4 = 0,2, \quad \frac{\partial M_2}{\partial \delta_{12}} = 1,231 \text{ MWs/fok} \quad k_{dc} = 0,5$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial E_{2d}} = 0,00468 \text{ kAs} \quad T = 0,5 \quad \frac{\partial M_2}{\partial E_{2d}} = 0,00648 \text{ kAs}$$

$$k_1 = 0,25 \quad k_2 = 0,53 \quad A = 70,5 \text{ kV/fok}, \quad k_c = 0,5 \quad T_1 = 1 \text{ s} \quad T_2 = 2 \text{ s}$$

Amint azt már fent említettük, a sebesség- és periódusszám szabályozó erősítési tényezőjét adottnak vesszük. A feszültségszabályozónál igen lényeges, hogy a szabályozás pontossága 1—1,5% nagyságrendű legyen. Emellett kívánatos, hogy a feszültségszabályozás folyamata ne befolyásolja észrevehetően a periódusszám szabályozás folyamatát.

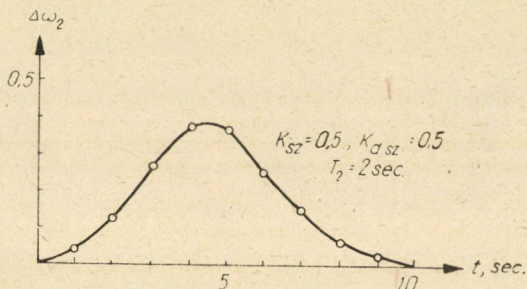
A 4. ábrán látható a periódusszám szabályozási folyamatának annak feltételezésével számított görbéje, hogy a generátorok tranziens reaktanciája mögötti elektromotoros erői, E_{1d} és E_{2d} , állandók. A rajzból látható, hogy a szabályozási folyamat 10—12 mp alatt lezajlik $\Delta\omega_2 = 0,4$ maximális hibával.

A vizsgált példában a feszültség szabályozás körének saját operátora harmadrendű. Ezért az előzőekben kapott eredmények alapján a karakterisztikus egyenlet a következő lesz:

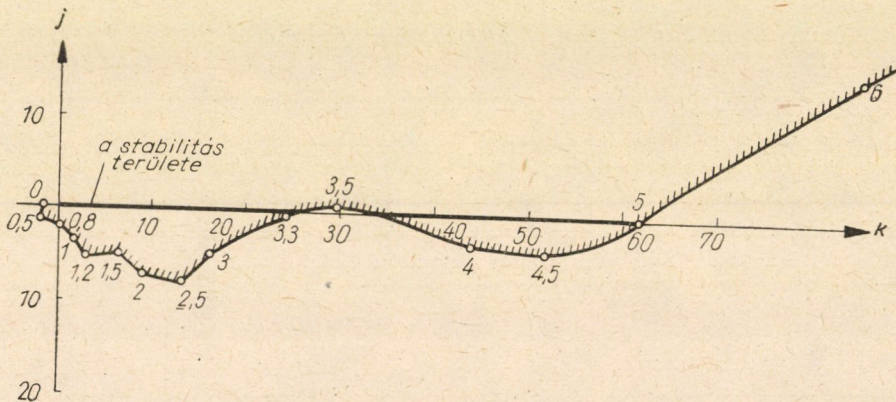
$$F_n(p) + kF_{N-3}(p) = 0.$$

A (36)–(44) egyenlet-rendszert megoldva, a következő karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$0,00233 p^{10} + 0,0567 p^9 + 0,544 p^8 + 2,959 p^7 + 10,83 p^6 + 28,67 p^5 + \\ + 49,44 p^4 + 50,07 p^3 + 30,27 p^2 + 18,21 p + 0,788 + k(0,0104 p^7 + \\ + 0,147 p^6 + 0,69 p^5 + 2,598 p^4 + 6,069 p^3 + 6,72 p^2 + 4,278 p + 0,777) = 0. \quad (54)$$



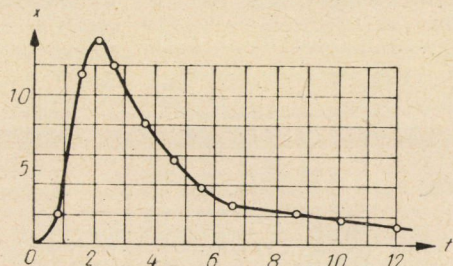
4. ábra. Periódusszám változás folyamata $E'_{2d} = \text{const.}$ esetben



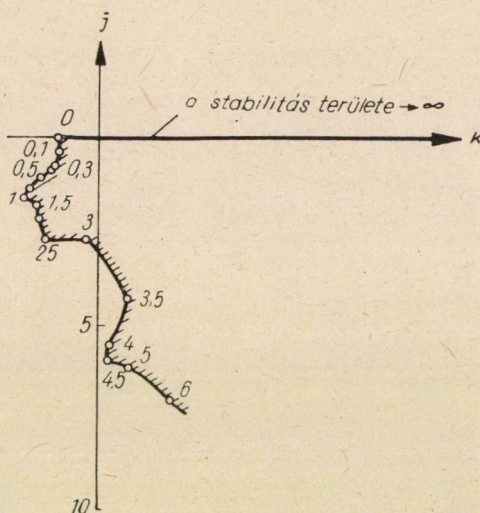
5. ábra. Derivált hatás nélküli rendszer k -szerinti D elválasztása $U_d = \text{const.}$ esetén

Az 5. ábrán a k szerinti D -elválasztás görbét láthatjuk a vizsgált esetre. Az ábrából látszik, hogy az erősítési tényező kritikus értéke 27. Ebből mindenképp az következik, hogy ilyen alakban a rendszer nem alkalmas a pontosság szempontjából. Azonban könnyen belátható, hogy az átmeneti folyamat jellege alapján sem felel meg céljainknak ez a rendszer.

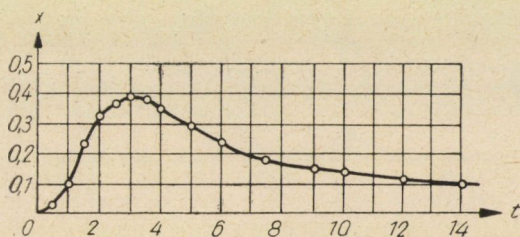
A 6. ábrán a periódusszám szabályozás számított görbét láthatjuk $k = 10$ erősítési tényező esetén. Ha összehasonlítjuk ezt a görbét a 4. ábra görbéjével, akkor láthatjuk, hogy a túlszabályozás 30-szorosára növekszik, a szabályozási idő pedig 5-szörösére, hogyha akkor vesszük befejezettnek a folyamatot, amikor $\omega(t) < 0,1$. Ennek alapján a rendszer a statikus pontosság és az átmeneti folyamat minősége szempontjából sem alkalmas.



6. ábra. Periódusszám változásának átmeneti folyamata $k = 10$, $k_{dn} = 0$, $U_d = \text{const.}$ esetre



7. ábra. k -szerinti D -elválasztás az első derivált szerinti hatás figyelembevételével $U_r = \text{const.}$ mellett



8. ábra. Periódusszám változásának átmeneti folyamata $k = 200$, $k_{dn} = 2$, $U_d = \text{áll.}$ esetén

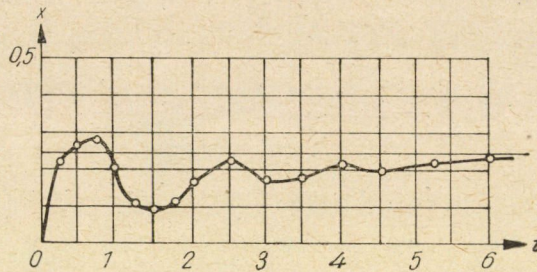
Vezessük be most a feszültség szabályozási körbe a feszültség első deriváltja szerinti hatást. Ekkor a karakterisztikus egyenlet a következő lesz:

$$F_N(p) + k(k_1 p + 1) F_{N-3}(p) = 0. \quad (55)$$

Fenti egyenletben k' — a derivált szerinti hatás együtthatója.

A 7. ábrán a k szerinti D -elválasztás görbéje látható $k' = 2$ esetre. A stabilitás területe egyenlő az egész valós félsíkkal.

A 8. ábra a periódusszám szabályozás számított görbéjét mutatja $k = 200$ esetre. A 8. ábrát a 4. ábra görbéjével összehasonlítva, azt láthatjuk, hogy e görbék mind a hiba nagyságára, mind pedig a szabályozás időtartamára nézve csaknem teljesen megegyeznek.



9. ábra. Átmeneti folyamat $k = 200$, $k_{dr} = 2$, $U_d = \text{áll.}$ mellett

A 9. ábra a feszültség időbeli változását mutatja. A feszültség szabályozás folyamata kb. 6 mp alatt zajlik le, ugyanakkor a fordulatszám szabályozás 12 mp után ér véget.

Fenti vizsgálat alapján a következő megállapítást tehetjük: a feszültség és periódusszám szabályozási folyamata gyakorlatilag nem azért marad autonóm, mert e két folyamat időtartama különböző (12 mp és 6 mp), hanem ezen autonómiát a nagy erősítési tényezővel érjük el. Az erősítési tényező a vizsgált esetben 200.

IRODALOM

- Мееров М. В. 1945: Критерий аperiodичности регулирования. (Mejerov, M. V. 1945.: A szabályozás aperiodikus voltának kritériuma.) Изв. АН СССР, ОТН № 12, стр. 1169—1178.
- Мееров М. В. 1947a: О системах авторегулирования, устойчивых при сколь угодно большом коэффициенте усиления. (Mejerov, M. V. 1947a: Tetszőlegesen nagy erősítési együttható esetén is stabilis önszabályozó rendszerek.) Автом. и телемех., т. VIII, № 4, стр. 225—242.
- Мееров М. В. 1947б: Об учете малых параметров при исследовании устойчивости систем авторегулирования. (Mejerov, M. V. 1947b: Automatikus szabályozási rendszerek stabilitási vizsgálatánál figyelembe veendő kis paraméterek.) Электричество, № 6, стр. 55—58.
- Мееров М. В. 1948: Системы автоматического регулирования, устойчивые при сколь угодно малой статической ошибке, и следящие системы, устойчивые при любой сколь угодно малой динамической ошибке. (Mejerov, M. V., 1948.: Automatikus szabályozási rendszerek, amelyek stabilisak tetszés szerinti kis statikus hiba esetén is. Követő rendszerek, amelyek stabilisak a dinamikus hiba tetszés szerinti kis értékénél is.) Докт. дисс. Инст. автомат. и телемех. АН СССР. 206. стр.
- Мееров М. В. 1949: Принципы построения систем авторегулирования с малой установившейся ошибкой. (Mejerov, M. V., 1949.: Kis állandósult hibájú automatikus szabályozási rendszerek felépítésének alapelvei.) Автом. и телемех., Т. X. № 2, стр. 84—98.
- Сушкевич А. К. 1937. Основы высшей алгебры. (Szuskevics, A. K.: A felsőbb algebra alapjai.) ОНТИ НКТП СССР, М.—Л., 475. стр.

ÖSSZEFOGLALÁS

Többkörös rendszerek szabályozásának tárgyalásakor abból az elvből indul ki, hogy a korábbi közleményekben bizonyítottak alapján az egyes körök erősítési tényezőjének korlátlan növelése mellett az egyes hurkok autonómmá tehetők. Az erősítési tényező bizonyos mértékű növelése mellett már ez a hatás jelentős és a csatlóási értékek elhanyagolhatók. Az elhanyagolás mértékére vonatkozólag adatokat közöl. Ismerteti a módszer hatását a stabilitásra és a dinamikai pontosságra, továbbá ezek javításának módjait. Befejezésül az ismertett elvek alapján példaként közli két hosszú vezetéken párhuzamosan működő szinkron generátor önműködő szabályozásának számítását.

AZ ÁLLANDÓSULT PONTOSSÁG KORLÁTLAN NÖVELÉSE MELLETT IS STABILIS, TÖBBHURKOS RENDSZEREK AUTONÓMIÁJA*

M. V. MEJEROV

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK DOKTORA

A SZOVJETUNIO TUDOMÁNYOS AKADÉMIAJÁNAK AUTOMATIKAI ÉS TELEMECHANIKAI INTÉZETE, MOSZKVA

Korábbi közlményekből ismeretes [1, 2], hogy az olyan rendszerben, melynek több szabályozott jellemzője van, bármely szabályozási körben az erősítési együttható korlátlan növelésekor a szabályozott jellemző pontossága korlátlan mértékben nő.

Ebben a munkában azoknak a többhurkos rendszereknek az autonómiája kérdésével foglalkozunk, melyek a pontossági fok korlátlan növelése mellett is stabilisak. Fontos kiemelni, hogy sokszor az autonómia fölöttébb kívánatos még akkor is, ha ez az egyes szabályozott jellemzők szabályozási folyamatát bizonyos mértékben rontaná (bár ezt itt nem tételezzük fel). Így pl. aszinkron motor periódusszabályozásánál a szabályozott áramforrás feszültségének és periódusszámának autonóm szabályozása biztosíthatja a szabályozási rendszer tökéletes jelleggörbáját. Ezért nagy jelentőségű ilyen rendszerekben az autonómia kérdése.

Az idevonatkozó irodalomban a szabályozási autonómia kérdésének elég nagy figyelmet szentelnek [3 — 7, 11].

Ebben a dolgozatban az autonóm szabályozási rendszerek szerkezetét más szempontból vizsgáljuk.

1. Önkiegyenlítő szabályozott szakasz és ideális szabályozó

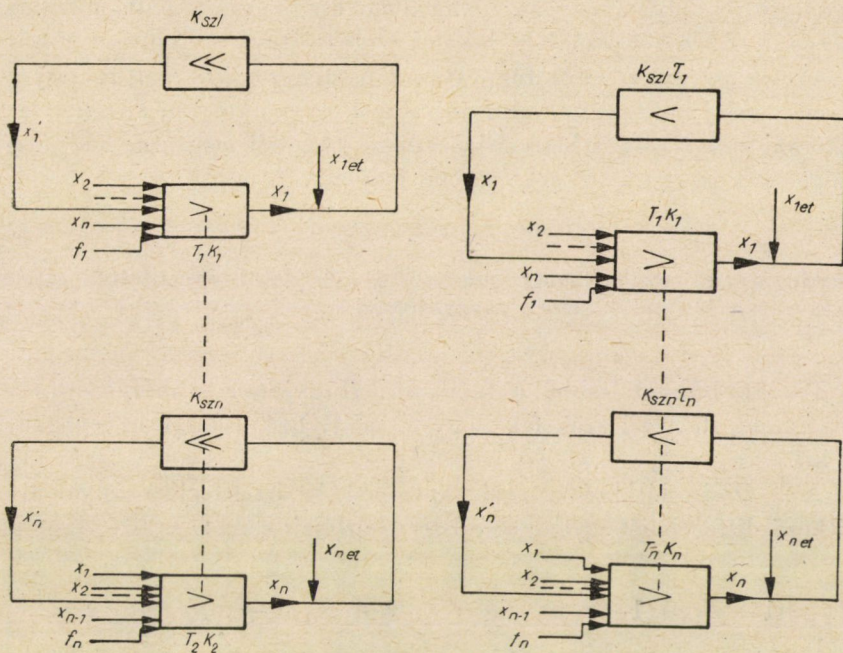
Tételezzük fel, hogy az egyes szabályozott jellemzők közötti kapcsolat a szabályozott szakasz révén jön létre. Az 1. ábrán a vizsgált önműködő szabályozási rendszer kapcsolása látható. A tárgyalás egyszerűsítésére álljon a szabályozott szakasz n elemből, a szabályozott jellemzők számának megfelelően. Minden ilyen elemet elsőfokú differenciálegyenlet fejez ki. Mindegyik szabályozott jellemzőnek megvan a maga szabályozási rendszere.

A saját terhelés és a többi szabályozott jellemző hatása a szabályozott szakasz megfelelő elemének bemenetére érkezik. Vezessük be a következő jelöléseket.

* A Magyar Tudományos Akadémia Műszaki Tudományok Osztályának 1958. október 2-i ülésén elhangzott előadás.

Annak, hogy a rendszer $m \rightarrow 0$ esetén stabilis legyen, szükséges és elégséges feltétele az, hogy az elfajuló egyenlet

$$F_0(p) = 0$$



1—2. ábra

legyen, valamint a segédegyenletek külön-külön kielégítsék a stabilitás feltételeit.

Az adott esetben stabilitásra csak a segédegyenletet kell ellenőrizni [1, 2], amely a következő alakú :

$$\prod_{i=1}^n (K_i + T_i pm) = 0. \tag{3}$$

Ezen egyenlet n tényezőből áll. Ezek közül mindegyik a megfelelő változónak a többitől független csillapított folyamatát jellemzi, tehát az egész rendszer stabilis. A segédfüggvény gyökei :

$$p_i = - \frac{K_i}{mT_i}. \tag{4}$$

Így a vizsgált esetben a különböző szabályozott jellemzők szabályozási folyamatának autonómiáját pusztán azzal értük el, hogy a szabályozók erősítési tényezőjét eléggé megnöveltük.

bilitást. Ha feltételezzük, hogy az m_i -k egyformán kis m nagyságrendűek, akkor a karakterisztikus egyenlet az alábbi alakba írható :

$$m^n F_{2n}(p) + m^{n-1} F_{2n-2}(p) + \dots + F_0(p) = 0. \tag{6}$$

Itt F indexei az $F(p)$ polinomok fokát mutatják. A (6) egyenletből látható, hogy az adott esetben az [1, 2] segédegyenletet az $F_i(p)$ polinomok két legmagasabb fokú tagjának összegeként állítjuk elő. A segédegyenlet másodrendű lesz. Elemi műveletek végrehajtása után ezt az egyenletet a következő alakban írhatjuk fel :

$$\prod_{i=1}^n [(1 + T_i q)(1 + \tau_i q) + K_i] = 0. \tag{7}$$

Tekintve, hogy T_i, τ_i és K_i mindig pozitív valós számok, a (7) egyenlet eleget tesz a stabilitás feltételeinek. A (7) egyenletből azt is láthatjuk, hogy a szabályozási rendszerben végbemenő átmeneti folyamat n független átmeneti folyamatból tevődik össze. Ez n szabályozott jellemző független, autonóm változásának felel meg.

Így a szemügyre vett bonyolultabb esetben az egyes szabályozott jellemzők szabályozási folyamatának autonómiáját szintén az egyes körök erősítési tényezőinek növelésével érjük el.

Mindkét esetben feltételeztük, hogy a $K_{sz, i}$ -k nagyságrendje egyenlő és egyenlő értékűeknek vettük őket. Ez nem jelent lényeges korlátozást, mivel a szabályozók erősítési tényezőjét mindig a megfelelő módon választjuk.

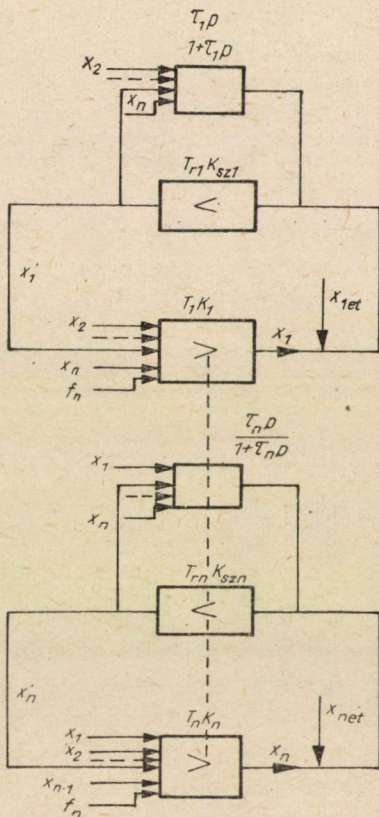
Akkor pedig, amikor a szabályozók erősítési tényezőinek értékei egymástól eltérők, akkor mindegyik kifejezhető az egyik (például a legkisebb) erősítési tényezőnek és egy saját arányossági tényezőnek szorzataként. A vizsgálat a továbbiakban az előzőkhöz hasonló módon történhetik, vagyis felállítjuk a segédegyenletet, amelynek együtthatói az egyenletbe bevitt arányossági tényezők függvényei. Ezután következik a stabilitás vizsgálata.

Nézzük meg még azt az esetet, amikor a szabályozó integráló elem (3. ábra). Ekkor az egyenletrendszer a következő lesz :

$$\begin{aligned} [(1 + T_1 p) \tau_1 p + K_1 K_{1sz}] x_1 + K_1 \tau_1 p \sum_{i=2}^n \alpha_{1i} x_i &= K_1 K_{1sz} x_{1et} + K_1 \tau_1 p f_1 \\ [(1 + T_2 p) \tau_2 p + K_2 K_{2sz}] x_2 + K_2 \tau_2 p \sum_{i=1,3,\dots}^n \alpha_{2i} x_i &= \\ &= K_2 K_{2sz} x_{1et} + K_2 \tau_2 p f_2 \\ \dots & \\ [(1 + T_n p) \tau_n p + K_n K_{nsz}] x_n + K_n \tau_n p \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{ni} x_i &= K_n K_{nsz} x_{net} + K_n \tau_n p f_n. \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} & \{(1 + T_n p) [(1 + T_{rn} p) (1 + \tau_n p) + K_{nsz} \tau_n p] + K_n K_{nsz} (1 + \tau_n p)\} x_n + \\ & + K_n [(1 + T_{rn} p) (1 + \tau_n p) + K_{nsz} \tau_n p] \sum_{i=1}^{n-1} a_{ni} x_i = \\ & = K_{nsz} K_n (1 + \tau_n p) + K_n [(1 + \tau_n p) (1 + T_{2n} p) + K_{nsz} \tau p] f_n. \end{aligned}$$

Elemezzük a kérdést az előzőkhöz hasonló módon. Mindenekelőtt nyilvánvaló, hogy bármely kör eredő erősítési tényezője korlátlanul növelhető



4. ábra

a szabályozó erősítési tényezőjének növelésével. A rendszer egészében stabilis marad, ha az elfajuló és a segédegnyelet külön-külön kielégítik a stabilitás feltételeit a szabályozók elég nagy erősítési tényezője mellett. Az autonómia lehetőségének tisztázására osszuk el valamennyi egyenletet a megfelelő K_{isz} -el. Vezessük be a következő jelölést :

$$\frac{1}{K_{isz}} = m_i.$$

A (12) egyenletből fejezzük ki X'_1 -t és helyettesítsük be a (13)-ba. Ekkor :

$$\begin{aligned} & \{(1 + T_1 p) [(1 + T_{r1} p) (1 + \tau_1 p) + K_{1sz} \tau_1 p] + K_1 K_{1sz} (1 + \tau_1 p)\} x_1 - \\ & - K_1 [(1 + T_{r1} p) (1 + \tau_1 p) + K_{1sz} \tau_1 p] \sum_{i=2}^n a_{1i} x_i + K_1 K_{1sz} \sum_{i=2}^n a_{1i} x_i \tau p = \quad (14) \\ & = K_1 K_{1sz} (1 + \tau_1 p) x_{1et} + K_1 f_1 [(1 + T_{r1} p) (1 + \tau_1 p) + K_{1sz} \tau_1 p]. \end{aligned}$$

Hasonló egyenleteket kapunk az összes többi változóra is. Ezen egyenletek felírhatók egyszerűen úgy, hogy a (14) egyenletben megfelelően átírjuk az indexeket. Eszerint a k -adik változóra :

$$\begin{aligned} & (1 + T_K p) [(1 + T_{rK} p) (1 + \tau_K p) + K_{Ksz} \tau_K p] + K_K K_{Ksz} (1 + \tau_{KK}) - \\ & - K_K [(1 + T_{rK} p) (1 + \tau_K p) + K_{Ksz} \tau_K p] \sum_{i=1, \dots, K-1, K+1, \dots}^u a_{Ki} x_i + \\ & + K_K K_{Ksz} \sum_{i=1, \dots, K-1, K+1, \dots}^n a_{Ki} x_i \tau p = K_K K_{Ksz} (1 + \tau_{Ksz}) x_{Ket} + \\ & + K_K f_K [(1 + T_{rK} p) (1 + \tau_K p) + K_{Ksz} \tau_K p]. \end{aligned}$$

Osszunk el minden ilyen egyenletet a megfelelő $K_{isz} = \frac{1}{m_i}$ -vel.

Feltételezve, hogy az összes m_i egyenlő nagyságrendű és eléggé kicsi, az elfajuló egyenletet minden egyes változóra előállíthatjuk a következő alakban :

$$[(1 + T_K p) \tau_K p + K_K (1 + \tau_K p)] x_n = K_K (1 + \tau_K p) x_{ket} + K_K \tau_K p f_n. \quad (15)$$

Ez az egyenlet a k -adik szabályozási körben létrejött autonóm folyamatot írja le és a többi szabályozott jellemzőtől független. Az adott esetben a segéd-egyenlet sem függ a csatolási tényezőktől.

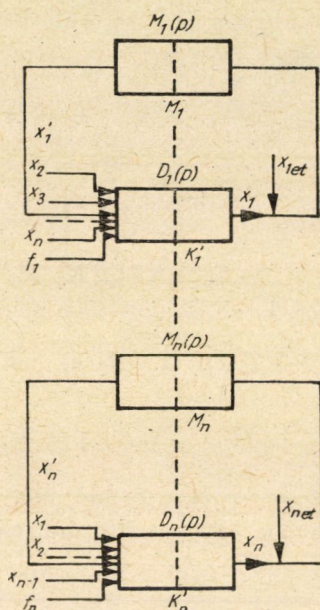
4. Autonómia megvalósítása ideális deriváltak bevezetésével

Vizsgáljuk azt az általános esetet, amikor a szabályozott szakasz minden szabályozott mennyiséget illetően i -edik rendű differenciálegyenlettel írható fel és a stabilizáló elemek nélküli szabályozó i -edik rendű differenciálegyenlettel jellemezhető.

Azon célból, hogy a stabilitás nagy erősítési tényezők mellett is megmaradjon, minden rendszerbe bevezetünk $n - 2$ deriváltat ($n = i + j$).

Vezessük be a következő jelöléseket: $D(p)$ a szabályozott szakasznak az i -edik szabályozott mennyiségre vonatkozó saját operátora, K_{isz} a szabályozó erősítési tényezője az i -edik szabályozott mennyiségre vonatkozóan, $M_i(p)$ — a szabályozó i -edik szabályozott jellemző szerinti saját operátora, K_i a szabályozott tárgy i -edik szabályozott mennyiségre vonatkozó erősítési tényezője.

Az 5. ábrán a szabályozási rendszer elvi szerkezete látható. Határozzuk meg a vizsgált esetben létrejövő folyamatokat leíró differenciál-egyenlet-rendszert.



5. ábra

A szabályozott szakasznak az első szabályozott mennyiség (elsőként a szabályozott mennyiségek bármelyikét vehetjük) szerint vett egyenlete

$$D_1(p) x_1 = K_1 \left(x_1' - \sum_{i=2}^n a_{1i} x_i + f_1 \right); \quad (16)$$

a szabályozó egyenlete

$$M_1(p) x_1' = K_{isz} [x_{1et} - x_1 - (a_{01} p^{n_1-2} + a_{11} p^{n_1-3} + \dots + a_{1n-1} p) x_1]. \quad (17)$$

Behelyettesítve a (16)-ba x_1' értékét a (17)-ből és a többi egyenletbe is ugyanilyen módon behelyettesítve, kapjuk

szabályozott mennyiségre vonatkozóan az erősítési tényezők korlátlan növe-
lésekor is megmarad. A szabályozás körébe a stabilizálás céljából a $\frac{F_{ni}(p)}{F_{mi}(p)}$
átviteli függvénnyel jellemezhető stabilizáló berendezést kapcsolunk, amely
hatást gyakorol az $M_{zi}(p)$ szabályozókör egy részére (6. ábra).

Vezessük be a következő jelöléseket : $D_i(p)$ — a szabályozott szakasznak
az i -edik szabályozott jellemzőre vonatkozó saját operátora, $M_{i0}(p)$ — a sza-
bályozási kör azon része, amelyre kiterjed a stabilizáló kör hatása, $M_{ie}(p)$ —
a szabályozó azon része, amelyre a stabilizáló kapcsolat nem terjed ki, K_i —
az i -edik szabályozott jellemző erősítési tényezője, K_{i0} — a szabályozási kör
azon részének erősítési tényezője, amelyre kiterjed a stabilizáló hatás, K_{ie} —
a szabályozási kör azon részének erősítési tényezője, amelyre nem terjed ki
fenti hatás. A 6. ábrán a vizsgált esetre vonatkozó vázlat és jelölések láthatók.

Az [1], [2]-ben bebizonyítottuk, hogy bizonyos esetekben az $\frac{F_{in}(p)}{F_{im}(p)}$ átviteli
függvény megfelelő választása mellett a stabilitás elérhető az egyes szabályo-
zási körök erősítési tényezőjének korlátlan növelése esetén is.

Azonban a jelenleg részünkről vizsgált általános esetben az autonómiát
egyedül az erősítési tényezők növelése árán elérni nem sikerül. Erről közvetlen
számítások segítségével meggyőződhetünk. Az autonómia elérése céljából
minden stabilizáló berendezés bemenetére pótlólag a

$$\sum_{K=2,3,\dots,i-1,i+1,\dots,n} \alpha_{iK} x_K$$

zavarások összegét adjuk meg úgy, ahogy ez a 7. ábrán látható.

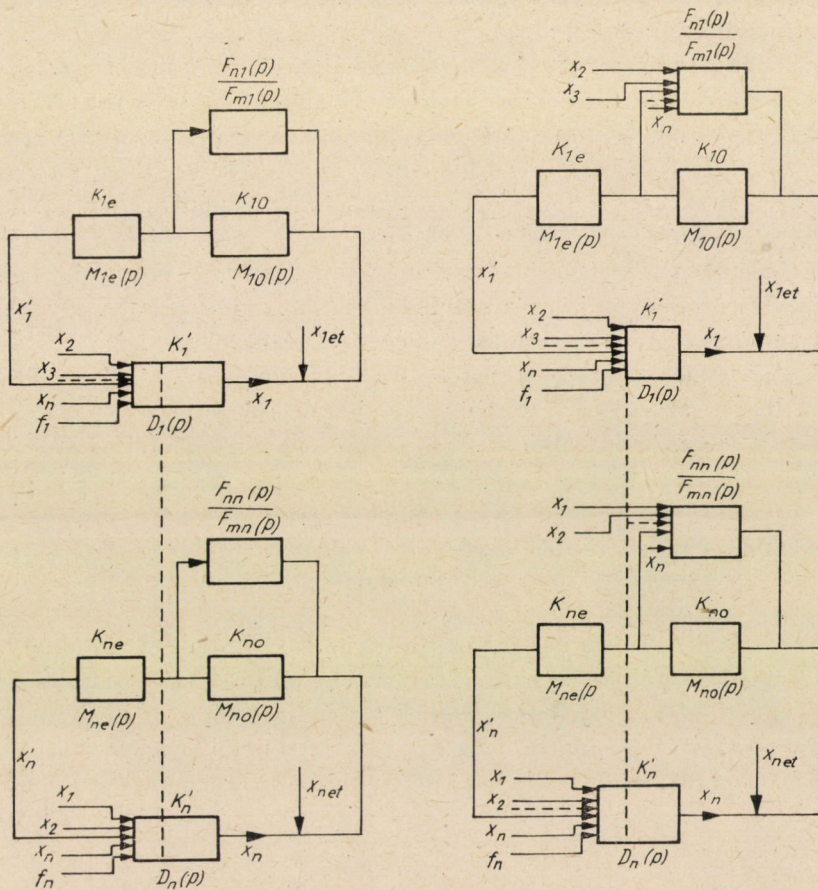
A vizsgált esetben a szabályozási folyamatot a következő differenciál-
egyenletekkel írhatjuk le :

$$\begin{aligned} & \{D_i(p) M_{ie}(p) [M_{i0}(p) F_{mi}(p) + K_{i0} F_{ni}(p)] + K_{i0} K_{ie} K_i F_{mi}(p)\} x_i = \\ & = K_{i0} K_{ie} K_i F_{mi}(p) x_{iet} - K_i K_{ie} K_{i0} F_{ni}(p) \sum_{i=2}^n \alpha_{ij} x_j + \\ & + K_i M_{ie}(p) M_{0i}(p) F_{mi}(p) + K_i K_{0i} F_{ni}(p) \sum_{j=2}^n \alpha_{ij} x_j + \\ & + K_i M_{ie}(p) [M_{i0}(p) F_{mi}(p) + K_{i0} F_{in}(p)] f_i \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{20}$$

Az $\frac{F_{ni}(p)}{F_{mi}(p)}$ operátor alakja és a szabályozási körbe való kapcsolásának módja
úgy választandó, hogy a kapott rendszer struktúra szempontjából azon rend-
szerek osztályába tartozzék, amelyek stabilisak minden egyes szabályozási

kör eredő erősítési tényezőjének korlátlan növelésekor. Ezért minden körben korlátlanul növelhető K_{0i} . Az egész rendszer stabilitásának tehát az lesz a feltétele, ha az elfajuló és segédegyenlet külön-külön eleget tesznek a stabilitás feltételeinek.

Tételezzük fel, hogy minden K_{0i} eléggé nagy szám és hogy mindegyik ugyanolyan nagyságrendű. A (20) egyenletek mindegyikét K_0 -val elosztva



6.—7. ábra

azt kapjuk, hogy eléggé kicsi $m = \frac{1}{K_0}$ és $K_{ei} - 1$ esetén az egyenletrendszer n számú egymástól független egyenletre esik szét, amelyek mindegyike a szabályozott jellemzők egyikének szabályozási folyamatát írja le.

Ezért a szabályozás folyamatának számítása és az egyes szabályozási körök főbb jellemzőinek kiválasztása a többtől függetlenül történik, az egyetlen szabályozott jellemzőjű rendszerek szabályozási elméletének ismert módszereivel.

Hangsúlyozni kell, hogy a kapott eredmények pontosságát az m kis mennyiség nagyságrendje határozza meg és minél nagyobbra választjuk K_0 -t, annál pontosabbak lesznek a kapott eredmények. A gyakorlatban, ha a rendszer jellemzőit ismerjük, akkor K_0 értéke nehézség nélkül választható az előbbieken ismertetett módszerekkel. Nem feltétlenül szükséges, hogy K_e pontosan egyenlő legyen 1-gyel. A $K_{ei} - 1 = m$ -nek olyan nagyságrendűnek kell lenni, mint m -nek. A kapott eredményeket a következőképpen foglalhatjuk össze :

1. Több szabályozott jellemzőt tartalmazó önműködő szabályozási rendszerek, amelyek tetszőleges (tehát bármilyen nagy) erősítési tényező mellett is stabilisak, autonómmá tehetőek minden szabályozott mennyiségre vonatkozóan. Legegyszerűbb körülmények között (1. és 2. pont), továbbá ideális deriváltak esetén (4. pont) az autonómia m pontosságig elérhető az egyes körök erősítési tényezőjének növelése árán. Általános esetben az autonómiát oly módon valósíthatjuk meg, hogy K_{0i} megfelelő erősítési tényezőket növeljük és ezzel egyidejűleg a stabilizáló elem bemenetére az egyes szabályozott mennyiségek zavarásának összességét vezetjük.

2. A vizsgált rendszerek jellemzőinek kiválasztására teljes mértékben felhasználhatók az egyetlen szabályozott jellemzőjű rendszerek szabályozási elméletének összes módszerei.

6. A korlátlanul nagy erősítési együttható mellett is stabilis rendszerek további sajátossága

Az [1, 2, 8, 9, 10] munkákban bizonyítottak, hogy az önműködő rendszerek vizsgált osztályában gyakorlatilag az elfajuló egyenlet határozza meg a szabályozási folyamat jellegét. Mennél kisebb m értéke, annál jobban megközelíti az elfajuló egyenlettel leírt folyamat a teljes egyenlettel leírt szabályozási folyamatot. Mindig található olyan m_0 , hogy $m \leq m_0$ mellett az $m \rightarrow 0$ esetében stabilis rendszerekben az elfajuló egyenlet a szabályozási folyamatot kellő pontossággal határozza meg.

Az önműködő szabályozási rendszerek elemeinek munkapontja a szabályozási folyamatban jelleggörbéjük különböző részein található. Ezek a jelleggörbék rendszerint nemlineárisak. Ezért nagyon fontos, hogy helyesen értékeljük azon elemek nonlinearitásának befolyását a kapott eredményekre, amelyekre kiterjed a stabilizáló hatás. Ezt a feladatot példaképpen egyetlen szabályozott jellemzőjű rendszerre oldjuk meg, azonban eredménycink minden nehézség nélkül kiterjeszthetők többszörösen csatolt, s ezen belül az autonóm rendszerekre.

Vegyünk szemügyre N számú sorbakapcsolt elemből álló szabályozási rendszert. Az N elemből n rendelkezék nemlineáris statikus jelleggörbével.

A továbbiakban olyan nonlinearitásokat fogunk vizsgálni, amelyeket az jellemez, hogy statikus jelleggörbájük minden pontjára érvényes a

$$\frac{dx_2}{dx_1} > 0 \quad (21)$$

egyenlőtlenség. Itt x_2 — a kimenő érték, x_1 pedig a bemenő. Mivel $\frac{dx_2}{dx_1}$ meghatározza az elem erősítési tényezőjét, a fenti követelmény azt jelenti, hogy a nemlineáris elem erősítési tényezőjének a jelleggörbe minden pontjában zérusnál nagyobbak kell lennie. Ilyen nemlineáris elemre példaként szolgálhatnak villamos gépek mágnesezési görbéi, s az ezekhez hasonló jelleggörbék.

Kapcsoljunk sorba minden egyes nemlineáris elemmel egy lineáris erősítőt és vezessünk minden nemlineáris elemre saját erősítőjéről $F_{ni}(p)$ operátoros negatív visszacsatolást (i indexszel az i -edik nemlineáris elemet és az i -edik erősítőt jelöljük). $p = \frac{d}{dt}$ — differenciáloperátor. Itt tehát tulajdonképpen az ideális deriváltakat használjuk fel stabilizálásra.

Az i -edik nemlineáris elemnek és lineáris erősítőjének operátoros egyenletét a következő alakban írjuk fel:

$$Q_i(p) x_{iKl} = \frac{dx_{ikl}}{dx_{ibe}} K_i x_{ibe}. \quad (22)$$

Itt k_i a lineáris erősítő erősítési együtthatója.

A nemlineáris elem, erősítő és a hozzájuk vezetett stabilizáló csatolás együttes egyenlete:

$$\left[Q_i(p) + \frac{dx_{ikl}}{dx_{ibe}} K_i F_{ni}(p) \right] x_{iKl} = \frac{bx_{ikl}}{dx_{ibe}} K_i x_{ibe} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Osszuk el a (23) egyenlet minden tagját $K_i \frac{dx_{ikl}}{dx_{ibe}}$ kifejezéssel és alkalmazzuk a következő jelölést:

$$m_i = \frac{1}{K_i \frac{dx_{ikl}}{dx_{ibe}}}.$$

Ekkor a (23) egyenlet így írható át:

$$[m_i Q_i(p) + F_{ni}(p)] x_{iKl} = x_{ibe}. \quad (24)$$

Itt m_i — olyan változó mennyiséget jelöl, amelynek értéke az adott elem munkapontjának a nemlineáris elem jelleggörbájén való elhelyezkedésétől függ. Válasszuk úgy a lineáris erősítő erősítési együtthatóját, hogy $\frac{dx_{iki}}{dx_{ibe}}$ minimális értéke esetén $m_i < m_0$ legyen, ahol m_0 kis érték. Ekkor bármely lehetséges értéknél

$$m_i < m_0 \text{ legyen, ahol } m_0 \text{ — kis érték.} \quad (25)$$

Ekkor $\frac{dx_{ikl}}{dx_{ibe}}$ minden lehetséges értéke mellett $m_i < m_0$.

Tételezzük fel, hogy a nemlineáris jelleggörbék és a hozzájuk tartozó lineáris erősítők között biztosítani tudjuk az alábbi összefüggést :

$$K_i \frac{dx_{iki}}{dx_{ibe}} = \eta_i K_1 \frac{dx_{1ki}}{dx_{1be}}. \quad (26)$$

Ekkor a szabályozott jellemző változását leíró egyenlet a következő alakban írható fel :

$$\begin{aligned} & \left\{ m^n F_{N_0}(p) + m^{n-1} F_{N_1}(p) + \dots + m F_{N_{n-1}}(p) + \right. \\ & \left. + \prod_{i=1}^n F_{ni}(p) \prod_{j=n+1}^N Q_j(p) + \prod_{i=2}^n \eta_i \prod_{j=n+1}^N K_j R_j(p) \right\} x_{ki} = \\ & = \prod_{i=2}^n \eta_i \prod_{j=n+1}^N K_j R_j(p) x_{be}. \end{aligned} \quad (27)$$

Figyelembe véve, hogy m elég kis érték, az átmeneti folyamatot annak stabilitása esetében az alábbi elfajuló egyenlet teljesen meghatározza :

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{i=1}^n F_{ni}(p) \prod_{j=n+2}^N Q_j(p) + \prod_{i=2}^n \eta_i \prod_{j=n+1}^N K_j R_j(p) \right\} x_{ki} = \\ & = \prod_{i=2}^n \eta_i \prod_{j=n+1}^N K_j R_j(p) x_{be}. \end{aligned} \quad (28)$$

A (27) és (28) egyenletben

$$Q_j(p) x_{jki} = K_j R_j(p) x_{ne}$$

a szabályozási rendszer lineáris elemeinek egyenletei. A (28) egyenletből az derül ki, hogy az átmeneti folyamat független a rendszer nonlinearitásától. Ez azonban csak akkor igaz, ha kis m mellett a rendszer mind kicsiben, mind nagyban stabilis, mert bár $m > m_0$, mégis a szabályozási folyamatban a szabályozási rendszer üzemviszonyaitól függő változóként hat.

A szabályozási rendszer kielégíti a kicsiben való stabilitás feltételeit, ha az erősítési együttható korlátlan növelése esetén is stabilis rendszerek osztályába tartozik. Azt kell figyelembe venni, hogy a rendszer kicsiben mindig stabilis, ha $m > m_0$ esetén a munkapont a jelleggörbe bármely pontjában található. A nagyban való stabilitás kérdésének tisztázása külön vizsgálatot kíván.

Eredményeinket a következőkben foglalhatjuk össze: jelen munkánkban olyan elemekben levő nonlinearitásokat vizsgáltunk, amelyekre visszacsatolást vezetünk. Az ilyen nonlinearitások nem gyakorolnak hatást a szabályozási folyamatra, ha a rendszer nagyban stabilis. Ez az adott nonlinearitás-típusokra gyakorlatilag minden esetben teljesül.

Példa*

Példaképpen vizsgáljuk meg egy szinkron generátor feszültségének és periódusszámának szabályozását.

SzG szinkrongenerátort egyenáramú motor hozza forgásba. Az egyenáramú motor fordulatszámát a forgórész feszültségével változtatjuk. Az egyenáramú generátort EMU amplitudin gerjeszti. Mérőelemként tahométerdinamó szolgál, amelynek feszültségét etalonnal hasonlítjuk össze. A tahométerdinamó és az etalon feszültségének különbségét elektronikus erősítő erősíti fel. Az elektronikus erősítő kimenő kapcsait az erősítőgép bemenő kapcsaival kötjük össze. A kapcsolás működése a 8a ábrán látható.

Avégből, hogy a feszültség és periódusszám szabályozása autonóm legyen, a stabilizáló transzformátorok bemenetére az elméleti úton kapott összefüggésnek megfelelő jeleket adunk (lásd a 8. ábrát).

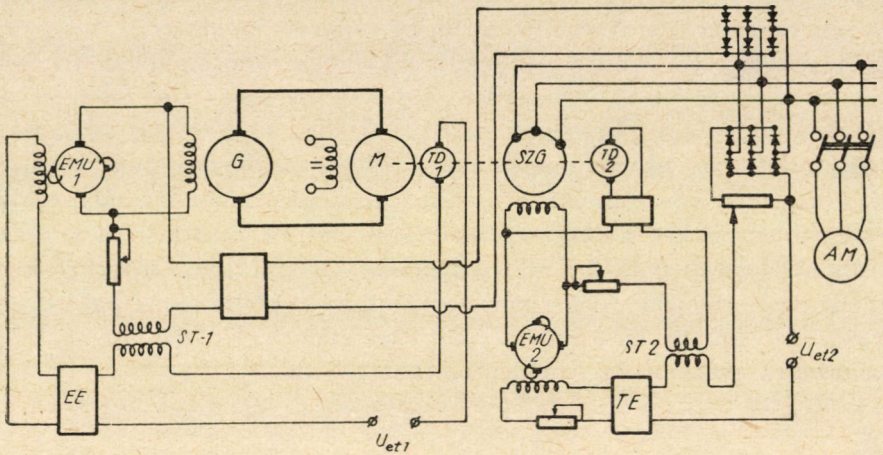
Itt most nem vizsgáljuk részletesen ezen szabályozási rendszert, mivel ez eléggé önálló kérdés és külön tanulmány témája lehet. Közöljük azonban a gépek és a kapcsolás elemeinek adatait, s a kísérleti eredmények azon részét, amely bennünket a cikkben tárgyalt kérdések szempontjából érdekel. A mellékelt táblázatban megtalálhatók a teljesítmények, időállandók és a gépek, valamint a kapcsolási elemek erősítési tényezői.

A 9. ábrán a szabályozási folyamatról készült oszcillogram látható. Az átmeneti folyamatot a szinkron generátorra olyan aszinkron motor rákapcsolásával idézték elő, amelynek teljesítménye összemérhető a generátoréval. Ez a szabályozási rendszer számára igen súlyos feltételt jelent.

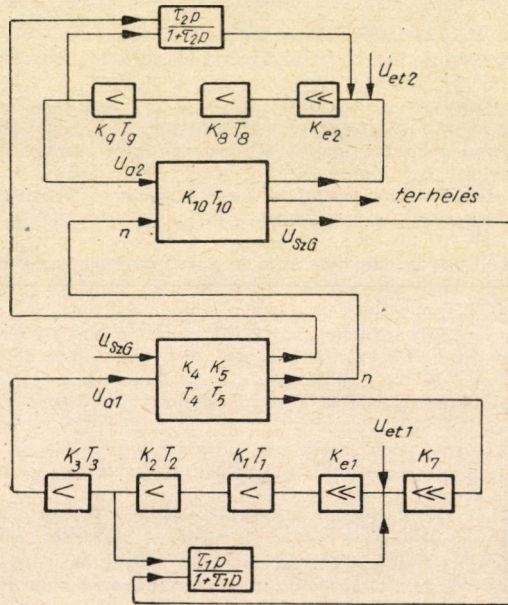
Az oszcillogramból látható, hogy a periódusszámnak (az egyenáramú motor fordulatszámának) és a feszültségnek szabályozása függetlenül történik. Így például a feszültség szabályozása 0,053 mp alatt befejeződik, ugyanakkor a fordulatszám szabályozásának folyamata 1,02 mp után ér csak véget. Ezenkívül mindkét szabályozás igen jó minőségű mutatókkal jellemezhető. Az igen nehéz üzemi körülmények ellenére is annyira kicsi a feszültség hibája és olyan rövid idő alatt visszamegy a feszültség az alapértékre, hogy gyakorlatilag állandónak vehető.

Az ismertetett példa a kapott elméleti eredményeket kellőképpen illusztrálja.

* Az ismertetett szabályozási rendszert D. P. PETELIN aspiráns dolgozta ki. Valamennyi kísérletet ő végezte.



3

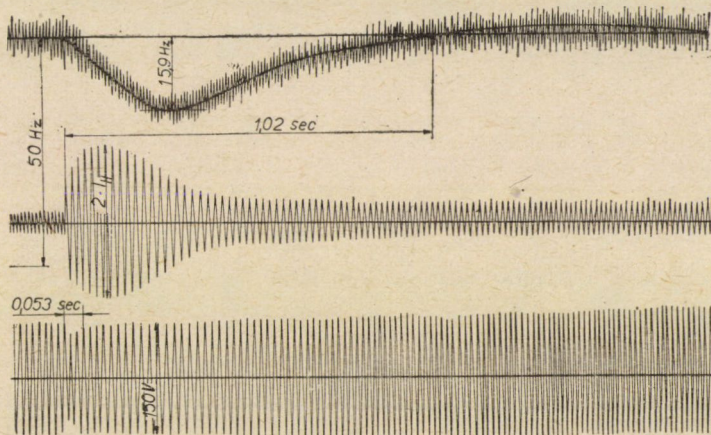


0

8. ábra

A példában ismertetett önműködő szabályozás műszaki adatai

Sor-szám	A szabályozási rendszer elemének megnevezése	P kW	U V	h n/perc	I A	Erősítési tényezők	Időállandók mp	Megjegyzés
1	1. sz. erősítőgép	4,5	230	19,6	2890	$K_1 K_2 = 10$	$T_1 = 0,04$ $T_2 = 0,1$	Az erősítési tényező dimenziója : ford/perc/ Volt
2	Egyenáramú generátor	1,5	230	65	1000	$K_3 = 3,04$	$T_3 = 0,3$	
3	Egyenáramú motor	4,4	220	23,5	1500	$K_4 = 7,15$ $K_5 = 7,35$	$T_4 = 0,01$ $T_5 = 0,06$	
4	Szinkron generátor	2,2	230	22,6	1500	$K_{10} = 10,3$	$T_{10} = 0,4$	
5	2. sz. erősítőgép	4,5	230	19,6	2850	$K_8 K_9 = 80$	$T_8 = 0,06$ $T_9 = 0,05$	
6	Aszinkron motor (terhelés)	5,3	220/380	223/13	980	—	—	A transzformátor típusa: TSz 72—60
7	Stabilizáló transzformátor ST-1 ..	—	—	$\frac{0,3}{1,4}$	—	—	0,04	
8	Stabilizáló transzformátor ST-2 ..	—	—	$\frac{0,3}{1,4}$	—	—	0,2	Mint 7.-nél
9	Tahométer dinamo No 1	—	—	—	—	0,013	—	Az erősítési tényező dimenziója : $\frac{V}{\text{ford/perc}}$
10	Tahométer dinamo No 2	—	—	—	—	0,013	—	
11	Elektronikus erősítő	—	—	—	—	10	—	Mint 9.-nél
12	Tiratronos erősítő	—	—	—	—	4,3	—	



9. ábra

IRODALOM

1. Мееров М. В.: Принципы построения многосвязанных систем, устойчивых при неограниченном увеличении их коэффициентов усиления. (Mejerov, M. V.: Az erősítési tényező korlátlan mértékű növelése esetén is stabilis, többszörösen kapcsolt rendszerek felépítésének elvei.) Труды Второго всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования, т. 1. Изд. АН СССР, 1955.
2. Мееров М. В.: Многосвязанные системы с малой установившейся точностью по каждой из регулируемых величин. (Mejerov, M. V.: Többszörösen kapcsolt rendszerek, minden szabályozott jellemzőt illetően kis pontossággal.) Сборник памяти А. А. Андропова. Изд. СССР. 1955.
3. Корнилов Ю. Г.: Автономное регулирование как экстремальная задача. (Kornilov, Ju. G.: Autonóm szabályozás, mint szélsőérték-feladat.) Изв. АН СССР. ОТН, № 4, 1954.
4. Иносов В. Л.: Исследование параллельной работы регулирующих систем. (Inoszov, V. L.: Szabályozási rendszerek párhuzamos üzemének vizsgálata.) Сборник научных-технических статей. Ин-т электротехники АН УССР, вып. 1, 1948.
5. Вознесенский И. Н.: О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров. (Vozneszenszkij, I. N.: Gépek szabályozása sok szabályozott jellemzővel.) Автоматика и телемеханика, 4—5, 1938.
6. Вознесенский И. Н.: К вопросу о выборе схемы регулирования теплогенерационных турбин. (Vozneszenszkij, I. N.: Fűtőerőművekben levő turbinák szabályozási kapcsolásának megválasztása.) За советское энергооборудование. Сборник ВИТГЭО. Госэнергоиздат, 1934.
7. Корнилов Ю. Г., Пивень В. Д.: Основы теории автоматического регулирования в приложении к теплосиловым установкам. (Kornilov, Ju. G., Piven', V. D.: Hőerőberendezésekben alkalmazott automatikus szabályozás elméletének alapjai.) Машгиз, 1947.
8. Мееров М. В.: Принципы построения систем с малой установившейся ошибкой. (Mejerov, M. V.: Kis állandósult hibával működő rendszerek felépítésének elvei.) Автоматика и телемеханика, № 2, 1949.
9. Мееров М. В.: Об одном случае использования кривой Д-разбиения для исследования качества систем регулирования. (Mejerov, M. V.: Egy eset a D-elválasztás görbéjének felhasználására szabályozási rendszerek minőségének vizsgálata céljából.) Изв. АН СССР, ОТН № 12, 1950.
10. Мееров М. В.: Основы автоматического регулирования электрических машин. (Mejerov, M. V.: Villamos gépek automatikus szabályozásának alapjai.) Госэнергоиздат, 1952.
11. Поповский А. М.: О свободе выбора параметров автономных процессов регулирования нескольких взаимосвязанных величин. (Popovszkij, A. M.: Több, egymással kapcsolatban álló jellemző autonóm szabályozási folyamata paramétereinek szabad megválasztásáról.) Автоматика и телемеханика, т. X. № 6, 1949.

ÖSSZEFOGLALÁS

A közlemény olyan többkörös rendszerekkel foglalkozik, amelyek a pontosság korlátlan növelése mellett is stabilisak. Kimutatja, hogy az egyes önálló szabályozási körökben az erősítési tényező növelésével az egyes hurkokat autonómmá lehet tenni és így a rendszer mint autonóm körök összessége tárgyalható. Amennyiben az erősítési tényező növelésének akadályai vannak, megfelelő stabilizáló tagok alkalmazásával a szükséges eredmény mindig elérhető. A közlemény befejezéséül szinkron generátor feszültségének és periódusszámának szabályozására szolgáló többkörös rendszer megoldását ismerteti a cikkben közölt elvek alapján.

A KIEGYENLÍTÉS SZEMPONTJÁBÓL LEGKEDVEZŐBB FELTÉTELI EGYENLET MEGÁLLAPÍTÁSA TISZTA HOSSZMÉRÉSES DIAGONÁLIS RENDSZERBEN*

HOVÁNYI LEHEL

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
ÓZDVIDÉKI SZÉNBÁNYÁSZATI TRÖSZT BÁNYAMÉRÉSI OSZTÁLYA, PUTNOK

[Beérkezett 1959. február 5-én]

A tiszta hossz méréses háromszögelési hálózatok feltételi egyenletei a hálózatban levő centrális és diagonális rendszerekből adódnak és amint ismeretes, minden ilyen rendszerre egy-egy feltételi egyenlet írható fel.

Centrális rendszerben a feltételi egyenlet azt fejezi ki, hogy az oldalhosszak kiegyenlített értékével számított szögek összege a centrumban 360° legyen.

Az 1. ábra szerint tehát:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - 360^\circ = 0. \quad (1)$$

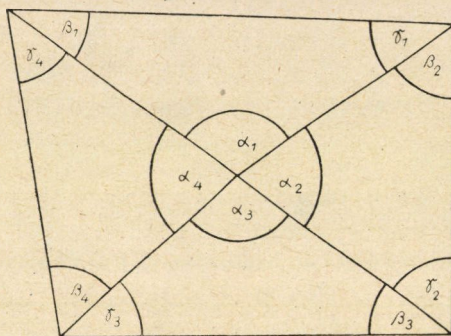
Diagonális rendszerben a feltételi egyenlet elvileg tetszés szerinti sarokpontra felírható. Itt a feltételi egyenlet azt fejezi ki, hogy az oldalhosszak kiegyenlített értékével számított szögek között a sarokpontoknál ne legyenek ellentmondások. Például a 2. ábránál az A pontra:

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0. \quad (2)$$

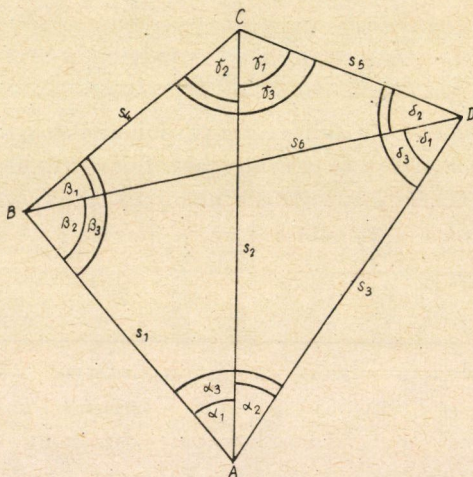
A feltételi egyenletek felírására — amint mondtunk — egyaránt választhatjuk a B , C és D sarokpontokat is, mert a *számítási munka szempontjából* teljesen mindegy, hogy melyik sarokpontot részesítjük előnyben. TÁRCZY-HORNOCH azonban a hossz hálózatok kiegyenlítésével foglalkozó tanulmányában felveti a pontosság szempontját is [vö. 1; 195. o. 2. bek.], vagyis azt a problémát, hogy *pontossági követelmény szempontjából* melyik sarokpontra, illetőleg szögekre célszerűbb felírni a feltételi egyenleteket. Tekintve, hogy TÁRCZY-HORNOCH a probléma részleteiben történő megvizsgálására külön felhívta a figyelmünket, rövid tanulmányunkban a részéről felvetett kérdéssel, azaz tiszta hossz méréses diagonális rendszerben a kiegyenlítés szempontjából legkedvezőbb feltételi egyenlet megállapításával fogunk foglalkozni.

* Kivonat szerzőnek a műszaki tudományok kandidátusa cím elnyeréséért a Magyar Tudományos Akadémia Tudományos Minősítő Bizottságához benyújtott értekezéséből. Budapest, 1955.

A feladat megoldására, jóllehet a szakirodalom HAMMERÉnél már jobb eredményeket is közöl [vö. 2 ; 586. o. (5) és 587. o. (8) és (9) összefügg.], célszerűségi okokból mégis HAMMER eredményeit használjuk fel, tekintve, hogy feltevéseink bizonyítására ezekből kaphatjuk a viszonylag legegyszerűbb



1. ábra



2. ábra

összefüggéseket. Fejezzük ki először a 2. ábrabeli diagonális alakzatban előforduló összes szög változását a ds hosszváltozások függvényében a HAMMER adta összefüggés alapján [vö. 3 ; 526. o. 29. összefügg.] és írjuk fel egyben az A , B , C és D sarokpontokon a lineáris javítási egyenleteket is. Tehát az a szögek esetén a da szögváltozások :

$$da_1 = \left(\frac{\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right) ds_4 - \left(\frac{\text{ctg } \beta_3}{s_1} \right) ds_1 - \left(\frac{\text{ctg } \gamma_2}{s_2} \right) ds_2 \quad (3)$$

$$da_2 = \left(\frac{\text{ctg } \gamma_1 + \text{ctg } \delta_3}{s_5} \right) ds_5 - \left(\frac{\text{ctg } \gamma_1}{s_2} \right) ds_2 - \left(\frac{\text{ctg } \delta_3}{s_3} \right) ds_3 \quad (4)$$

$$da_3 = \left(\frac{\text{ctg } \beta_2 + \text{ctg } \delta_1}{s_6} \right) ds_6 - \left(\frac{\text{ctg } \beta_2}{s_1} \right) ds_1 - \left(\frac{\text{ctg } \delta_1}{s_3} \right) ds_3. \quad (5)$$

Az összefüggésekben s a mért hosszakat, ds ezek változásait és a szögek a mért hosszakból számított közelítő szögértékeket jelentik.

A mért értékeknek — a szokás szerint — vesszővel, a mért értékekből számított közelítő szögértékeknek nulla indexszel történő jelölésére — kivéve a tiszta tagokban előforduló szögértékeket — jelölési egyszerűsítés miatt nem vagyunk tekintettel. A közelítő szögértékek és ezek változásai ismeretében (2) egyenletünk a következő alakba írható :

$$a_{1,0} + da_1 + a_{2,0} + da_2 - a_{3,0} - da_3 = 0. \quad (6)$$

Rendezve

$$da_1 + da_2 + da_3 + (a_{1,0} + a_{2,0} - a_{3,0}) = 0. \quad (7)$$

Ezen utóbbi egyenletünkben a zárójeles kifejezés a tiszta tag. Ha most a da_1 , da_2 és da_3 szögváltozásoknak a ds hosszváltozások, illetve a v hosszjavítások függvényében kifejezett értékeit fenti (7) összefüggésünkbe visszahelyettesítjük, úgy a lineáris javítási egyenlet szokványos alakjára jutunk. A mondottakat elvégezve az A pontra felírható lineáris javítási egyenlet az ellentmondást másodperc értékben behelyettesítve :

A.)

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left(\frac{-\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } \beta_2}{s_1} \right) v_1 + \varrho'' \left(\frac{-\text{ctg } \gamma_2 - \text{ctg } \gamma_1}{s_2} \right) v_2 + \\ & + \varrho'' \left(\frac{-\text{ctg } \delta_3 + \text{ctg } \delta_1}{s_3} \right) v_3 + \varrho'' \left(\frac{\text{ctg } \beta_3 + \text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right) v_4 + \varrho'' \left(\frac{\text{ctg } \gamma_1 + \text{ctg } \delta_3}{s_5} \right) v_5 + \\ & + \varrho'' \left(\frac{-\text{ctg } \beta_2 - \text{ctg } \delta_1}{s_6} \right) v_6 + (a_{1,0} + a_{2,0} - a_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

A fentiek analógiájára a β szögek esetében a $d\beta$ szögváltozások :

$$d\beta_1 = \left(\frac{\text{ctg } \gamma_3 + \text{ctg } \delta_2}{s_5} \right) ds_5 - \left(\frac{\text{ctg } \gamma_3}{s_4} \right) ds_4 - \left(\frac{\text{ctg } \delta_2}{s_6} \right) ds_6 \quad (9)$$

$$d\beta_2 = \left(\frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } \alpha_3}{s_3} \right) ds_3 - \left(\frac{\text{ctg } \delta_1}{s_6} \right) ds_6 - \left(\frac{\text{ctg } \alpha_3}{s_1} \right) ds_1 \quad (10)$$

$$d\beta_3 = \left(\frac{\text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \gamma_2}{s_2} \right) ds_2 - \left(\frac{\text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right) ds_4 - \left(\frac{\text{ctg } \alpha_1}{s_1} \right) ds_1. \quad (11)$$

A B pontra felírható lineáris javítási egyenlet :

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \alpha_3 + \operatorname{ctg} \alpha_1}{s_1} \right) v_1 + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \gamma_2 - \operatorname{ctg} \alpha_1}{s_2} \right) v_2 + \\ & + \varrho'' \left(\frac{\operatorname{ctg} \delta_1 + \operatorname{ctg} \alpha_3}{s_3} \right) v_3 + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \gamma_2}{s_4} \right) v_4 + \varrho'' \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{s_5} \right) v_5 + \\ & + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \delta_2 - \operatorname{ctg} \delta_1}{s_6} \right) v_6 + (\beta_{1,0} + \beta_{2,0} - \beta_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

A $d\gamma$ szögváltozások és a C pont lineáris javítási egyenlete :

$$d\gamma_1 = \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \delta_3}{s_3} \right) ds_3 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2}{s_2} \right) ds_2 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \delta_3}{s_5} \right) ds_5 \quad (13)$$

$$d\gamma_2 = \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_3}{s_1} \right) ds_1 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{s_2} \right) ds_2 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_3}{s_4} \right) ds_4 \quad (14)$$

$$d\gamma_3 = \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \delta_2}{s_6} \right) ds_6 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{s_4} \right) ds_4 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \delta_2}{s_5} \right) ds_5. \quad (15)$$

C.)

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_3}{s_1} \right) v_1 + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \alpha_2 - \operatorname{ctg} \alpha_1}{s_2} \right) v_2 + \varrho'' \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \delta_3}{s_3} \right) v_3 + \\ & + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \beta_1}{s_4} \right) v_4 + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \delta_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{s_5} \right) v_5 + \\ & + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \delta_2}{s_6} \right) v_6 + (\gamma_{1,0} + \gamma_{2,0} - \gamma_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

A δ szögek esetében :

$$d\delta_1 = \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_3 + \operatorname{ctg} \beta_2}{s_1} \right) ds_1 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_3}{s_3} \right) ds_3 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_2}{s_6} \right) ds_6 \quad (17)$$

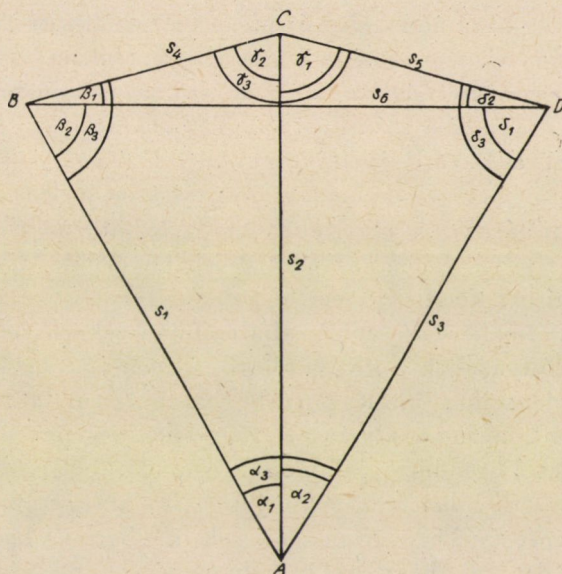
$$d\delta_2 = \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \gamma_3}{s_4} \right) ds_4 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{s_6} \right) ds_6 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{s_5} \right) ds_5 \quad (18)$$

$$d\delta_3 = \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{s_2} \right) ds_2 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2}{s_3} \right) ds_3 - \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{s_5} \right) ds_5. \quad (19)$$

D.)

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_3 + \operatorname{ctg} \beta_2}{s_1} \right) v_1 + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \alpha_2 - \operatorname{ctg} \gamma_1}{s_2} \right) v_2 + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \alpha_3 + \operatorname{ctg} \alpha_2}{s_3} \right) v_3 + \\ & + \varrho'' \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \gamma_3}{s_4} \right) v_4 + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{s_5} \right) v_5 + \\ & + \varrho'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_2}{s_6} \right) v_6 + (\delta_{1,0} + \delta_{2,0} - \delta_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Számítsuk ki most a 3. ábrabeli esetben a (8), (12), (16) és (20) lineáris javítási egyenletek koefficienseit, foglaljuk azokat össze 1. táblázatunkban, és ezeketán rátérhetünk tulajdonképpeni feladatunk megoldására.



3. ábra

Adataink a következők:

$$\beta_1 = \delta_2 = 15^\circ$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$$

$$\alpha_3 = \beta_2 = \delta_1 = 60^\circ$$

$$\beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_3 = 75^\circ$$

$$\gamma_3 = 150^\circ$$

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_6 = s$$

$$s_4 = s_5 = 0,51763 s.$$

1. táblázat

	A	B	C	D
	$\frac{q''}{s}$			
a_1	0,3094	1,1547	2,0000	1,1547
a_2	-0,5358	-2,0000	-3,4642	-2,0000
a_3	0,3094	1,1547	2,0000	1,1547
a_4	1,0353	3,8638	6,6924	3,8638
a_5	1,0353	3,8638	6,6924	3,8638
a_6	-1,1547	-4,3095	-7,4642	4,3095

Az 1. táblázatban összefoglalt koeficiensek, aszerint, hogy melyik sarokpontra írjuk fel a feltételi egyenleteket, az azonos javítások mellett levő koeficiensek a számítási élesség határán belül arányosan változnak. Az 1. ábrabeli alakzat azonban egy elméleti, mondhatjuk kiegyenlített alakzat. Gyakorlati esetben, amikor nem kiegyenlített alakzatról van szó, azaz amikor ellentmondás is van, a koeficienseknek a számítási élesség határán belüli arányos változása megszűnik, mert a lineáris javítási egyenletek koeficiensei mért értékből számított közelítő értékek és így az azonos javítások mellett levő koeficiensek többé-kevésbé hibásak. A sarokpontokra felírható négy lineáris javítási egyenlet közül nyilvánvalóan az lesz a legkedvezőbb, amelyeknek a mért értékből számított koeficiensei a legkevésbé térnek el a kiegyenlített értékekből számított koeficiensektől, szabatosabban a koeficiensek valódi hibái a legkevésbé befolyásolják a kiegyenlítés eredményét. Ezen lineáris javítási egyenlet koeficienseiben ui. legkevésbé hatnak azok a hibák, amelyek a szögváltozásoknak a hosszváltozások függvényében történő kifejezésénél a Taylor-sor magasabbrendű tagjainak elhanyagolásából erednek. Természetesen a hosszak valódi hibáit nem ismerjük és így az egyes mérés $\pm \mu$ középhibájának bevezetésével a koeficiensek valódi hibáiról a koeficiensek középhibáira fogunk áttérni, hogy az összehasonlításokat elvégezhesük.

Vizsgálatainknál induljunk ki az A sarokpontra felírható (8) lineáris javítási egyenlet koeficienseiből. Előrebocsátjuk, hogy az összehasonlítás szempontjából teljesen elegendő, ha csak az A és C sarokpontokra felírható lineáris javítási egyenletek koeficienseinek középhibáját számítjuk ki.

A.) *sarokpont.* A (8) egyenletben a v_1 javítás melletti $a_{1,\alpha}$ koeficiens:

$$a_{1,\alpha} = q'' \left(\frac{-\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \beta_2}{s_1} \right). \quad (21)$$

Az $a_{1,\alpha}$ koeficiens $da_{1,\alpha}$ változását, tekintve, hogy a szögek a hosszak függvényei, előbb a β_2 és β_3 szögek és az s_1 hossz változásainak a függvényében fejezzük ki.

Tehát :

$$da_{1,\alpha} = \varrho \left\{ \left(+ \frac{1}{s_1 \sin^2 \beta_3} d\beta_3 + \frac{\text{ctg } \beta_3}{s_1^2} ds_1 - \frac{1}{s_1 \sin^2 \beta_2} d\beta_2 - \frac{\text{ctg } \beta_2}{s_1^2} ds_1 \right) \right\}. \quad (22)$$

A $d\beta_2$ és $d\beta_3$ szögváltozások a (10) és (11) egyenleteinkkel adottak, így ezeket a (22) egyenletbe behelyettesítve megkapjuk az $a_{1,\alpha}$ koeficiens $da_{1,\alpha}$ változását tisztán a hosszváltozások függvényében. Tehát :

$$da_{1,\alpha} = \varrho \left[\frac{1}{s_1 \sin^2 \beta_3} \left\{ \left(\frac{\text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \gamma_2}{s_2} \right) ds_2 - \left(\frac{\text{ctg } \gamma_2}{s_4} \right) ds_4 - \left(\frac{\text{ctg } \alpha_1}{s_1} \right) ds_1 \right\} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\text{ctg } \beta_3}{s_1^2} \right) ds_1 - \frac{1}{s_1 \sin^2 \beta_2} \left\{ \left(\frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } \alpha_3}{s_3} \right) ds_3 - \frac{\text{ctg } \delta_1}{s_6} ds_6 - \right. \right. \quad (22) \\ \left. \left. - \left(\frac{\text{ctg } \alpha_3}{s_1} \right) ds_1 \right\} - \left(\frac{\text{ctg } \beta_2}{s_1^2} \right) ds_1 \right].$$

Rendezve :

$$da_{1,\alpha} = \varrho \left\{ \frac{1}{s_1^2} \left(- \frac{\text{ctg } \alpha_1}{\sin^2 \beta_3} + \text{ctg } \beta_3 + \frac{\text{ctg } \alpha_3}{\sin^2 \beta_2} - \text{ctg } \beta_2 \right) ds_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{s_1 s_2} \left(\frac{\text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) ds_2 - \frac{1}{s_1 s_3} \left(\frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } \alpha_3}{\sin^2 \beta_2} \right) ds_3 - \right. \quad (23) \\ \left. - \frac{1}{s_1 s_4} \left(\frac{\text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) ds_4 + \frac{1}{s_1 s_6} \left(\frac{\text{ctg } \delta_1}{\sin^2 \beta_2} \right) ds_6 \right\}.$$

Az egyes mérés középhibáját $\pm \mu$ -vel jelölve $a_{1,\alpha}$ koeficiensnek $\pm \mu_{a_{1,\alpha}}$ középhibájára a következő összefüggés adódik :

$$\mu_{a_{1,\alpha}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_1^2} \left(- \frac{\text{ctg } \alpha_1}{\sin^2 \beta_3} + \text{ctg } \beta_3 + \frac{\text{ctg } \alpha_3}{\sin^2 \beta_2} - \text{ctg } \beta_2 \right) \right\}^2 + \right. \\ \left. + \left\{ \frac{1}{s_1 s_2} \left(\frac{\text{ctg } \alpha_1 + \text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ - \frac{1}{s_1 s_3} \left(\frac{\text{ctg } \delta_1 + \text{ctg } \alpha_3}{\sin^2 \beta_2} \right) \right\}^2 + \right. \quad (24) \\ \left. + \left\{ - \frac{1}{s_1 s_4} \left(\frac{\text{ctg } \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_1 s_6} \left(\frac{\text{ctg } \delta_1}{\sin^2 \beta_2} \right) \right\}^2 \right].$$

A (8) javítási egyenletünkéből a v_2 javítás mellett előfordul

$$a_{2,\alpha} = \varrho \left(\frac{- \text{ctg } \gamma_2 - \text{ctg } \gamma_1}{s_2} \right)$$

koefficiens $\pm \mu_{a_{2,a}}$ középhibája a fentiek analógiájára (13) és (14) egyenleteink felhasználásával:

$$\mu_{a_{2,a}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_2 s_1} \left(\frac{\operatorname{ctg} a_1 + \operatorname{ctg} \beta_3}{\sin^2 \gamma_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2^2} \left(-\frac{\operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \gamma_2} + \operatorname{ctg} \gamma_2 - \frac{\operatorname{ctg} a_2}{\sin^2 \gamma_1} + \operatorname{ctg} \gamma_1 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_3} \left(\frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 \gamma_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_4} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \beta_3}{\sin^2 \gamma_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_5} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 \gamma_1} \right) \right\}^2 \right]}. \quad (25)$$

A (8) egyenlet v_3 javítása mellett előforduló

$$a_{3,a} = \varrho \left(\frac{-\operatorname{ctg} \delta_3 + \operatorname{ctg} \delta_1}{s_3} \right)$$

koefficiens $\pm \mu_{a_{3,a}}$ középhibája:

$$\mu_{a_{3,a}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_3 s_1} \left(-\frac{\operatorname{ctg} a_3 + \operatorname{ctg} \beta_2}{\sin^2 \delta_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3 s_2} \left(\frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3^2} \left(-\frac{\operatorname{ctg} a_2}{\sin^2 \delta_3} + \operatorname{ctg} \delta_3 + \frac{\operatorname{ctg} a_3}{\sin^2 \delta_1} - \operatorname{ctg} \delta_1 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3 s_5} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3 s_6} \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_2}{\sin^2 \delta_1} \right) \right\}^2 \right]}. \quad (26)$$

Az

$$a_{4,a} = \varrho \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \gamma_2}{s_4} \right)$$

koefficiens esetében:

$$\mu_{a_{4,a}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_4 s_1} \left(\frac{\operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \beta_3} - \frac{\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \gamma_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4 s_2} \left(\frac{\operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \gamma_2} - \frac{\operatorname{ctg} \gamma_2 + \operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4^2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} - \operatorname{ctg} \beta_3 + \frac{\operatorname{ctg} \beta_3}{\sin^2 \gamma_2} - \operatorname{ctg} \gamma_2 \right) \right\}^2 \right]}. \quad (27)$$

Az

$$a_{5,\alpha} = \varrho \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \delta_3}{s_5} \right)$$

koefficiens esetében :

$$\mu_{a_{5,\alpha}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_5 s_2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2}{\sin^2 \gamma_1} - \frac{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5 s_3} \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2}{\sin^2 \delta_3} - \frac{\operatorname{ctg} \delta_3 + \operatorname{ctg} \alpha_2}{\sin^2 \gamma_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5^2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 \gamma_1} - \operatorname{ctg} \gamma_1 + \frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} - \operatorname{ctg} \delta_3 \right) \right\}^2 \right]} \quad (28)$$

Az

$$a_{6,\alpha} = \varrho \left(\frac{-\operatorname{ctg} \beta_2 - \operatorname{ctg} \delta_1}{s_6} \right)$$

koefficiensnél :

$$\mu_{a_{6,\alpha}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_6 s_1} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \alpha_3}{\sin^2 \beta_2} + \frac{\operatorname{ctg} \beta_2 + \operatorname{ctg} \alpha_3}{\sin^2 \delta_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_6 s_3} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \alpha_3}{\sin^2 \delta_1} + \frac{\operatorname{ctg} \delta_1 + \operatorname{ctg} \alpha_3}{\sin^2 \beta_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_6^2} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \delta_1}{\sin^2 \beta_2} + \operatorname{ctg} \beta_2 - \frac{\operatorname{ctg} \beta_2}{\sin^2 \delta_1} + \operatorname{ctg} \delta_1 \right) \right\}^2 \right]} \quad (29)$$

C.) sarokpont. A (16) lineáris javítási egyenletünkben a v_1 javítás mellett előforduló

$$a_{1,\gamma} = \varrho \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_1 + \operatorname{ctg} \beta_3}{s_1} \right)$$

koefficiens $\pm \mu_{a_{1,\gamma}}$ középhibája :

$$\mu_{a_{1,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_1^2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_3}{\sin^2 \alpha_1} - \operatorname{ctg} \alpha_1 + \frac{\operatorname{ctg} \alpha_1}{\sin^2 \beta_3} - \operatorname{ctg} \beta_3 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_1 s_2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 \alpha_1} - \frac{\operatorname{ctg} \gamma_2 + \operatorname{ctg} \alpha_1}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_1 s_4} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 \alpha_1} + \frac{\operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 \right]} \quad (30)$$

Az

$$a_{2,\gamma} = \varrho \left(\frac{-\operatorname{ctg} a_2 - \operatorname{ctg} a_1}{s_2} \right)$$

koefficiens középhibája :

$$\mu_{a_{2,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_2 s_1} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \beta_3}{\sin^2 a_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2^2} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 a_2} + \operatorname{ctg} a_2 - \right. \right. \right.} \quad (31)$$

$$\left. \left. \left. - \frac{\operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 a_1} + \operatorname{ctg} a_1 \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_3} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 a_2} \right) \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{1}{s_2 s_4} \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 a_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_2 s_5} \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 a_2} \right) \right\}^2 \right].$$

Az

$$a_{3,\gamma} = \varrho \left(\frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \delta_3}{s_3} \right)$$

koefficiens középhibája :

$$\mu_{a_{3,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_3 s_2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 a_2} - \frac{\operatorname{ctg} a_2 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_3^2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 a_2} - \right. \right. \right.} \quad (32)$$

$$\left. \left. \left. - \operatorname{ctg} a_2 + \frac{\operatorname{ctg} a_2}{\sin^2 \delta_3} - \operatorname{ctg} \delta_3 \right) \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{1}{s_3 s_5} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1 + \operatorname{ctg} \delta_3}{\sin^2 a_2} + \frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 \right].$$

Az

$$a_{4,\gamma} = \varrho \left(\frac{-\operatorname{ctg} \beta_3 + \operatorname{ctg} \beta_1}{s_4} \right)$$

koefficiens középhibája :

$$\mu_{a_{4,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_4 s_1} \left(-\frac{\operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4 s_2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_2 + \operatorname{ctg} a_1}{\sin^2 \beta_3} \right) \right\}^2 + \right.} \quad (33)$$

$$\left. + \left\{ \frac{1}{s_4} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \gamma_2}{\sin^2 \beta_3} + \operatorname{ctg} \beta_3 + \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \beta_1} - \operatorname{ctg} \beta_1 \right) \right\}^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{1}{s_4 s_5} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{\sin^2 \beta_1} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_4 s_6} \left(\frac{\operatorname{ctg} \delta_2}{\sin^2 \beta_1} \right) \right\}^2 \right].$$

Az

$$a_{5,\gamma} = \varrho \left(\frac{-\operatorname{ctg} \delta_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{s_5} \right)$$

koefficiens középhibája :

$$\mu_{a_{5,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_5 s_2} \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2 + \operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5 s_3} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \alpha_2}{\sin^2 \delta_3} \right) \right\}^2 + \right.} \quad (34)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{s_5 s_4} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \delta_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_5^2} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \gamma_1}{\sin^2 \delta_3} + \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{ctg} \delta_3 + \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \delta_2} - \operatorname{ctg} \delta_2 \right) \right\}^2 + \left. \left\{ \frac{1}{s_5 s_6} \left(\frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{\sin^2 \delta_2} \right) \right\}^2 \right].$$

Az

$$a_{6,\gamma} = \varrho \left(\frac{-\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \delta_2}{s_6} \right)$$

koefficiens középhibája :

$$\mu_{a_{6,\gamma}} = \pm \sqrt{\mu^2 \varrho^2 \left[\left\{ \frac{1}{s_6 s_4} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \beta_1} + \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \delta_2} \right) \right\}^2 + \right.} \quad (35)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{s_6 s_5} \left(\frac{\operatorname{ctg} \gamma_3 + \operatorname{ctg} \delta_2}{\sin^2 \beta_1} - \frac{\operatorname{ctg} \gamma_3}{\sin^2 \delta_2} \right) \right\}^2 + \left\{ \frac{1}{s_6^2} \left(-\frac{\operatorname{ctg} \delta_2}{\sin^2 \beta_1} + \right.$$

$$\left. \left. + \operatorname{ctg} \beta_1 - \frac{\operatorname{ctg} \beta_1}{\sin^2 \delta_2} + \operatorname{ctg} \delta_2 \right) \right\}^2 \right].$$

A (24)–(35) összefüggéseinkkel megadtuk az *A* és *C* sarokpontokra adódó két lineáris javítási egyenlet összes koefficiensének a középhibáját. Megemlítjük, hogy az így kapott koefficiens-középhibáknak szintén van középhibájuk, tekintve, hogy a jobb oldalon előforduló tagok részben mérési eredmények, részben mérési eredményekből számított közelítő értékek. Természetesen ezeknek meghatározása igen messzire vezetne és gyakorlatilag nem vinne közelebb feladatunk megoldásához. Megemlítjük továbbá, hogy az egyenletek jobb oldalán a négyzetgyökök alatt levő tagok egy részét a megfelelő koefficiensértékek behelyettesítésével egyszerűbb alakra is lehetne hozni, a részünkről megadott alakzat azonban — amint látni fogjuk — szemléltetőbb. Ha megnézzük ugyanis a négyzetgyökök alatti négyzetes tagokat,

azt látjuk, hogy az egyes koeficiensek mellett előforduló szögek a koeficiens középhibájában döntő többségben a nevezőben a szögek szinuszának négyzetével vannak, viszont a számlálóban a szögek cotangensei állnak, tehát hegyesszögeknél az illető koeficiens középhibája igen nagy lesz. Nyilvánvaló tehát, hogy a négy lineáris javítási egyenletben azok a koeficiensek lesznek relative igen pontatlanok, amelyeket hegyesszögekből számítunk, így a négy javítási egyenlet közül azt lesz célszerű kiválasztani, amelyik koeficienseit a hegyesszögek elkerülésével tudjuk kiszámítani.

A fentiekben levezetetteket és mondottakat nézzük most a 3. ábrabeli esetben. A (24)—(35) összefüggéseinkkel számítsuk ki és foglaljuk táblázatba az összes koeficiens-középhibákat és ugyanakkor adjuk meg a koeficiensek relatív hibáit is.

2. táblázat

Sarokpont		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
A	a_a	0,3094 $\frac{Q''}{s}$	-0,5358	0,3094	1,0353	1,0353	-1,1547
	μa_a	3,13 $\frac{\mu Q''}{s^2}$	4,46	3,13	0,8	0,8	1,15
	Rel. hiba	10,1 $\frac{\mu}{s}$	8,3	10,1	0,8	0,8	1,0
C	a_γ	2,0000 $\frac{Q''}{s}$	-3,4642	2,0000	6,6924	6,6924	-7,4642
	μa_γ	3,85 $\frac{\mu Q''}{s}$	6,19	3,85	190,4	190,4	184,2
	Rel. hiba	1,90 $\frac{\mu}{s}$	1,8	1,9	28,4	28,4	24,6

2. táblázatunkból azt látjuk, hogy az A sarokpontra felírható lineáris javítási egyenlet első három koeficiense pontatlanabb, mint a C sarokpontra felírható lineáris javítási egyenlet megfelelő három koeficiense. A kiegyenlítés szempontjából azonban ez adott esetben nem az első, hanem a második három, tehát az a_4 , a_5 és a_6 koeficiens a döntő, tekintve, hogy ezek relatív hibái az A sarokpont esetében C-hez viszonyítva igen kedvezőek. Ami a kiegyenlítést illeti, ugyanis a $[aa]$ tehát a koeficiensek négyzetösszegének kiszámításánál a legnagyobb befolyásuk a nagy, azaz esetünkben az a_4 , a_5 és a_6 koeficienseknek van. Nyilvánvalóan, ha ezek a koeficiensek igen pontosak, úgy a $[aa]$ és így a k korreláta is relative jóval pontosabb, mint akkor, ha ezen koeficiensek igen pontatlanok.

A fentiekben mondottak szigorú bizonyítására a koeficiensek $[aa]$ négyzetösszegének $d[aa]$ valódi hibájából kellene kiindulni, azaz abból a valódi hibából, amelyet a hosszak valódi hibái a koeficiensek négyzetösszegében okoznak. Nézzük, hogyan adódik ez az A sarokpontra felírható lineáris javítási egyenlet koeficiensei esetében. Amint ismeretes :

$$[a_a a_a] = a_{1,a}^2 + a_{2,a}^2 + a_{3,a}^2 + a_{4,a}^2 + a_{5,a}^2 + a_{6,a}^2.$$

Differenciálva :

$$d [a_a a_a] = 2 (a_{1,a} da_{1,a} + a_{2,a} da_{2,a} + a_{3,a} da_{3,a} + a_{4,a} da_{4,a} + a_{5,a} da_{5,a} + a_{6,a} da_{6,a}). \tag{36}$$

Ha most az a_a koeficiensek da_a változásait a ds hosszváltozások függvényében kifejezzük és (36) egyenletünkbe behelyettesítjük, úgy megkapjuk az a_a koeficiensek $[a_a a_a]$ négyzetösszegének $d [a_a a_a]$ változását a ds hosszváltozások függvényében. Az egyes mérés $\pm \mu$ középhibájának bevezetésével ezek után már áttérhetünk a koeficiensek négyzetösszegének $\mu_{[a_a a_a]}$ középhibájára.

Vegyük (23) összefüggésünket. Itt az $a_{1,a}$ koeficiens $da_{1,a}$ változása ki van fejezve a hosszváltozások függvényében. Ha mármost továbbmenve a (25), (26), (27), (28) és (29) egyenleteinknél is újból visszatérnénk a megfelelő koeficiensek valódi hibájára és az így kapott koeficiens valódi hibákat (36) egyenletünkbe visszahelyettesítenénk, majd a középhibákra áttérnénk, úgy a $\mu_{[a_a a_a]}$ értékére több mint száz részlettagból álló összefüggést kapnánk. Természetesen analóg módon kellene eljárni a C sarokpontokon $\mu_{[a_\gamma a_\gamma]}$ középhiba számításakor is.

A fentiekben csak szóban elmondottakból is láthatjuk, hogy a koeficiensek négyzetösszege középhibáinak kiszámítása hallatlanul bonyolult eredményt adna, ezért ennek részletes ismertetését és közlését mellőzzük, mert a koeficiensek négyzetösszege pontosságára tett megjegyzéseink e szigorú bizonyítás nélkül is könnyen beláthatók.

Nézzük most a k korreláta relatív pontosságára mondottakat. Az A sarokpontra felírható feltételi egyenlet esetében a k_a korreláta :

$$k_a = - \frac{l_a}{[a_a a_a]} .$$

Differenciálva :

$$dk_a = \frac{l_a}{[a_a a_a]^2} d [a_a a_a] . \tag{37}$$

Az l_a tiszta tagot nyilvánvalóan hibátlannak tekinthetjük, mert ennek pontosságát csak a szögek kikeresésénél a logaritmustábla vagy a függvénytábla utolsó egységében elkövetett kikerekítési bizonytalanság befolyásolja, ezt pedig a legkedvezőbb függvényalak felhasználásával [vö. 4 ; D. fejezet] gyakorlatilag kiküszöbölhetjük. Előbbi (37) egyenletünkben a középhibákra áttérve és k_a értéket behelyettesítve :

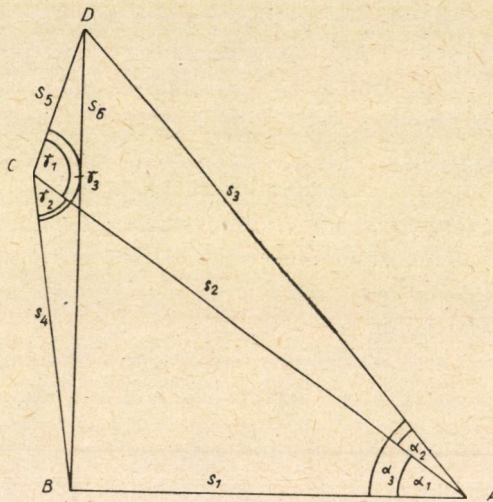
$$\mu_{k_a} \doteq \frac{l_a}{[a_a a_a]} \cdot \frac{\mu_{[a_a a_a]}}{[a_a a_a]} \doteq k_a \frac{\mu_{[a_a a_a]}}{[a_a a_a]} .$$

Innen :

$$\frac{\mu_{k_a}}{k_a} = \frac{\mu[a_a a_a]}{[a_a a_a]} . \quad (38)$$

Látjuk, hogy a korreláta relatív hibája gyakorlatilag egyenlőnek vehető a koeficiensek négyzetösszegének relatív hibájával, tehát a koeficiensek pontosságának növekedésével az említett arányban növekedik a korreláta pontossága is.

Vizsgálataink eredményei alapján összefoglalólag tehát megállapíthatjuk: *átlós négyszög négy sarokpontjára felírható lineáris javítási egyenletek közül azt célszerű felhasználni, amelyiknek a tiszta tagja a legkisebb, mert ennek a koeficienseit tudjuk a kiegyenlítés szempontjából a legkedvezőbben, azaz a hegyesszögek elkerülésével kiszámítani.*



4. ábra

Nézzünk ezután egy számszerű példát (4. ábra). Mérési eredményeink a következők :

$$s_1 = 2246,2 \text{ m}$$

$$s_2 = 3320,2 \text{ m}$$

$$s_3 = 4290,0 \text{ m}$$

$$s_4 = 2263,2 \text{ m}$$

$$s_5 = 1282,0 \text{ m}$$

$$s_6 = 3541,3 \text{ m}$$

A feltételi egyenleteket először az A , majd a C sarokponton írjuk fel. A lineáris javítási egyenletek (8) és (16) összefüggéseink alapján, továbbá a javítások :

A sarokpont esetében :

$$+2,995 v_1 - 11,280 v_2 + 9,297 v_3 + 92,155 v_4 + 84,163 v_5 - 91,952 v_6 + 50,778'' = 0$$

$$k_a = - \frac{l_a}{[a_a a_a]} = - \frac{50,778}{24253,8} = -0,0020936.$$

A javítások :

$$\begin{aligned} v_1 &= -0,0063 \text{ m} \\ v_2 &= +0,0236 \text{ m} \\ v_3 &= -0,0195 \text{ m} \\ v_4 &= -0,1929 \text{ m} \\ v_5 &= -0,1762 \text{ m} \\ v_6 &= +0,1925 \text{ m} \end{aligned}$$

C sarokpont esetében :

$$+91,46 v_1 - 341,9 v_2 + 281,7 v_3 + 2588,7 v_4 + 2346,3 v_5 - 2582,6 v_6 + 1479'',754 = 0$$

$$k_\gamma = - \frac{l_\gamma}{[a_\gamma a_\gamma]} = - \frac{1479,754}{19080931} = -0,000077551.$$

A javítások :

$$\begin{aligned} v_1 &= -0,0071 \text{ m} \\ v_2 &= +0,0265 \text{ m} \\ v_3 &= -0,0218 \text{ m} \\ v_4 &= -0,2008 \text{ m} \\ v_5 &= -0,1820 \text{ m} \\ v_6 &= -0,2003 \text{ m} \end{aligned}$$

Nézzük most, hogy a kiegyenlített hosszakkal számított szögek milyen ellentmondást fognak adni.

A sarokpontnál kapott javításokkal :

$\alpha_1 = 42^\circ 46' 39'', 542$	$\gamma_1 = 132^\circ 26' 19'', 738$
$\alpha_2 = 12^\circ 44' 11'', 678$	$\gamma_2 = 42^\circ 23' 06'', 024$
$\alpha_1 + \alpha_2 = 55^\circ 30' 51'', 220$	$\gamma_1 + \gamma_2 = 174^\circ 49' 25'', 762$
$-\alpha_3 = 55^\circ 30' 51'', 224$	$-\gamma_3 = 174^\circ 49' 27'', 454$
$l_a = -0'', 004$	$l_\gamma = -0'', 692$

C sarokpontnál kapott javításokkal :

$\alpha_1 = 42^\circ 46' 38'', 604$	$\gamma_1 = 132^\circ 26' 19'', 634$
$\alpha_2 = 12^\circ 44' 11'', 514$	$\gamma_2 = 42^\circ 23' 05'', 694$
$\alpha_1 + \alpha_2 = 55^\circ 30' 50'', 118$	$\gamma_1 + \gamma_2 = 174^\circ 49' 25'', 328$
$-\alpha_3 = 55^\circ 30' 52'', 116$	$-\gamma_3 = 174^\circ 50' 26'', 654$
$l_a = -1'', 998$	$l_\gamma = -61'', 326$

A közölt példából láthatjuk, hogy ha a kiegyenlítéshez a nagyobb ellentmondással bíró C sarokponti lineáris javítási egyenletet használjuk fel, úgy a kiegyenlítés után még mindig elég tekintélyes ellentmondás marad. Ebben az esetben tehát csak ismételt kiegyenlítéssel érhetnénk el azt az eredményt, amit a legkisebb tiszta taggal bíró A sarokpontra felírható feltétel esetén azonnal elérünk.

A közölt számpéldával kapcsolatban megjegyezzük, hogy ez lényegében SCHUMANN kilométer nagyságrendűre növelt és az utolsó egységben kissé megváltoztatott számpéldája [vö. 5 ; 12. o. I. példa]. Szándékosan választottam ezt a példát, mert SCHUMANN ezzel kapcsolatban a szögméréses átlós-négyszög alakzat legkedvezőbb oldalfeltételi egyenletére utal [vö. 5 ; 15. o. c. fejezet], ahol ugyanis a lineáris javítási egyenletek közül azt a legcélszerűbb kiválasztani, amelyiknél a tiszta tag a legnagyobb. A közölt számpéldával kapcsolatban SCHUMANN ellenőrzésképpen példánk jelölése szerint éppen a kedvezőtlen, azaz a B , C és D sarokpontokra felírható lineáris javítási egyenleteket használja fel. Példája az ellenőrzés szempontjából természetesen nem ad reális képet, mert a hosszakat tizedmilliméter pontosságra adja meg és ugyanakkor a javítások ezredmilliméter nagyságrendűek, vagy még kisebbek és így érthető, hogy ZAHARIAE tételének [6] érvénytelenségére tisztán hossz-méréses diagonális alakzatnál nem jött rá.

A legkedvezőbb feltételi egyenlet kiválasztásának gondolata egyébként már SCHUMANN előtt is felvetődött, de számunkra — amint azt a bevezetőben már említettük — a kérdés megvizsgálásának gondolatát TÁRCZY-HORNOCH adta.

Itt jegyezzük meg, hogy ZAHARIAE tétele részben érvényesülne tisztán hossz-méréses átlós-négyszög alakzatnál is, ha a szögeket a $\log \sin \frac{x}{2}$ összefüggés segítségével számítanánk, mert ilyenkor TÁRCZY-HORNOCH logaritmusos módszere szerint [1], [7] a koefficiensekben a félszögek szinuszánál levő táblakülönbségek szerepelnének. Hegyesszögeknél nyilvánvalóan nagy táblakülönbségről lévén szó, a kikerekítési bizonytalanság kedvezően befolyásolná, természetesen ezzel szemben jóval kedvezőtlenebbül hatna a hegyesszögek nagy hibája, mert a nagy táblakülönbség csak igen kis szögváltozást bír el.

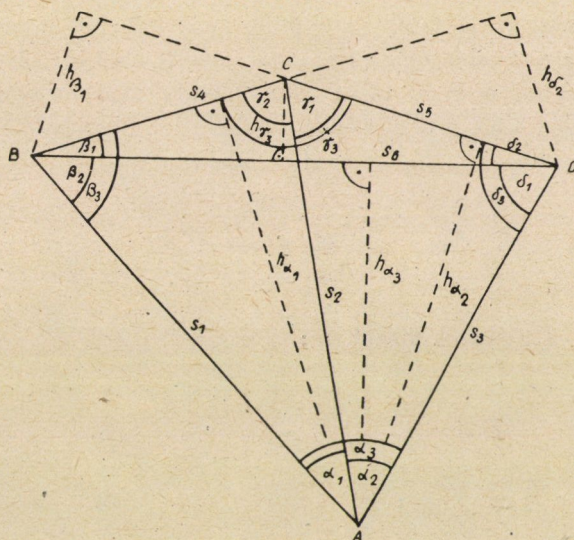
Lássuk befejezésül, hogy a négy sarokpontra felírható feltételi egyenlet közül hogyan tudjuk a legkedvezőbbet, tehát a legkisebb tisztaggal bíró kiválasztani.

Írjuk fel evégből az 5. ábrabeli alakzat A és B sarokpontjára a KRÜGER adta összefüggés alapján [vö. 8; 4. o. (2) összefügg.] a két lineáris javítási egyenletet.

Tehát :

A sarokpont :

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left(-\frac{\cos \beta_3}{h_{\alpha_1}} + \frac{\cos \beta_2}{h_{\alpha_3}} \right) v_1 + \varrho'' \left(-\frac{\cos \gamma_2}{h_{\alpha_1}} - \frac{\cos \gamma_1}{h_{\alpha_3}} \right) v_2 + \\ & + \varrho'' \left(-\frac{\cos \delta_3}{h_{\alpha_2}} + \frac{\cos \delta_1}{h_{\alpha_3}} \right) v_3 + \varrho'' \left(\frac{1}{h_{\alpha_1}} \right) v_4 + \varrho'' \left(\frac{1}{h_{\alpha_3}} \right) v_5 - \\ & - \varrho'' \left(\frac{1}{h_{\alpha_3}} \right) v_6 + (\alpha_{1,0} + \alpha_{2,0} - \alpha_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (39)$$



5. ábra

B sarokpont :

$$\begin{aligned} & \varrho'' \left(-\frac{\cos \alpha_3}{h_{\beta_2}} + \frac{\cos \alpha_1}{h_{\beta_3}} \right) v_1 - \varrho'' \left(\frac{1}{h_{\beta_3}} \right) v_2 + \varrho'' \left(\frac{1}{h_{\beta_2}} \right) v_3 + \\ & + \varrho'' \left(-\frac{\cos \gamma_3}{h_{\beta_1}} + \frac{\cos \gamma_2}{h_{\beta_3}} \right) v_4 + \varrho'' \left(\frac{1}{h_{\beta_1}} \right) v_5 + \varrho'' \left(-\frac{\cos \delta_2}{h_{\beta_1}} - \right. \\ & \left. - \frac{\cos \delta_1}{h_{\beta_2}} \right) v_6 + (\beta_{1,0} + \beta_{2,0} - \beta_{3,0})'' = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Az $(\alpha_{1,0} + \alpha_{2,0} - \alpha_{3,0}) = l_\alpha$ és $(\beta_{1,0} + \beta_{2,0} - \beta_{3,0}) = l_\beta$ megszokott jelölést használva (39) és (40) egyenleteinkből a következő összefüggést írhatjuk fel :

$$\frac{|\alpha_{5,\alpha}|}{|\alpha_{5,\beta}|} = \frac{|h_{\beta_1}|}{|h_{\alpha_1}|} = \frac{|l_\alpha|}{|l_\beta|}. \quad (41)$$

Az összefüggésből látjuk, hogy a koefficiensek a szögekhez tartozó háromszögmagasságokkal fordítva arányosak. Természetesen az arány megállapításánál csak olyan koefficienseket szabad kiválasztani, amelyek a szögekkel szemben levő mindkét háromszögben közös oldal javítása mellett vannak. Nyilvánvaló, hogy az ACD és BCD háromszögekben az α_2 és β_1 szögekkel szemben levő közös oldal s_5 . Természetesen a koefficiensek aránya — nem tekintve a sorbafejtésnél a magasabbrendű tagok elhanyagolását — egyben a tiszta tagok arányát is megadja és így az 5. ábrabeli esetben könnyen megállapíthatjuk, hogy az A sarokponton felírt feltételi egyenlet esetében a tiszta tag kisebb lesz, mint a B pontra felírt feltételi egyenlet esetében.

Ha mármost az A és C sarokpontoknál akarjuk megállapítani, hogy melyik tiszta tag nagyobb, úgy az s_6 oldal mellett levő javítások koefficienseit állíthatjuk arányba, mert s_6 mint közös oldal egyaránt előfordul az ABD és BCD háromszögekben. Az s_6 közös oldallal szemben levő szögekhez tartozó h_{α_3} és h_{γ_3} háromszögmagasságok segítségével:

$$\frac{|h_{\gamma_3}|}{|h_{\alpha_3}|} \doteq \frac{|l_\alpha|}{|l_\gamma|}. \quad (42)$$

Továbbá az A és D sarokpontokra:

$$\frac{|h_{\delta_2}|}{|h_{\alpha_1}|} \doteq \frac{|l_\alpha|}{|l_\delta|}. \quad (43)$$

A (41), (42), (43) egyenletekből:

$$\left. \begin{aligned} |l_\alpha| &\doteq \frac{|h_{\beta_1}|}{|h_{\alpha_2}|} |l_\beta| \\ |l_\alpha| &\doteq \frac{|h_{\gamma_3}|}{|h_{\alpha_3}|} |l_\gamma| \\ |l_\alpha| &\doteq \frac{|h_{\delta_2}|}{|h_{\alpha_1}|} |l_\delta| \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Innen:

$$|l_\alpha| = \frac{|h_{\beta_1}|}{|h_{\alpha_2}|} \cdot |l_\beta| = \frac{|h_{\gamma_3}|}{|h_{\alpha_3}|} \cdot |l_\gamma| = \frac{|h_{\delta_2}|}{|h_{\alpha_1}|} \cdot |l_\delta|. \quad (45)$$

A kapott összefüggés alapján grafikusán igen egyszerűen eldönthető a legkisebb ellentmondás kérdése. Gyakorlati szempontból még arra sincsen szükség, hogy a megfelelő háromszögmagasságokat felrajzoljuk, mert a háromszögmagasságok helyett a területeket is arányba állíthatjuk és így gyakorlatilag

egyszerű rátekintéssel is eldönthető a legkisebb tiszta tag kérdése, annál is inkább, mert a probléma gyakorlati szempontból hegyesszögek, illetve ebből adódólag nagy és egészen kis területű háromszögekombinációk esetében bír figyelemre méltó jelentőséggel.

IRODALOM

1. TÁRCZY-HORNOCH A.: A hosszálózatok kiegyenlítéséről. Földméréstani Közlemények. 1953. 4. sz.
2. Geodéziai Kézikönyv I. kötet. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó 1956.
3. E. HAMMER: Zur Ausgleichung von Streckennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen. 1911. Heft. 19.
4. L. HOVÁNYI: Hosszálózatok feltételes mérések módszere szerinti kiegyenlítéséről. Kandidátusi disszertáció. Tud. Min. Bizottsághoz benyújtva 1955.
5. R. SCHUMANN: Zur Ausgleichung von Liniennetzen. Mitteilungen a. d. Markscheidewesen. 1909. Heft 11.
6. F. R. HELMERT: Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Zweite Auflage 1907. 518. o.
7. TÁRCZY-HORNOCH A.: Über die Ausgleichung von Streckennetzen. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae VIII. köt. 399–424. o.
8. L. KRÜGER: Redingungsgleichungen für Liniennetze und für Rückwärtseinschnitte. Veröffentlichung d. K. Pr. Geod. Institut. N. F. № 34.

ÖSSZEFOGLALÁS

A tanulmány szigorú bizonyítását adja annak, hogy a kiegyenlítés szempontjából az átlós négyszög négy sarokpontja közül melyikre a legkedvezőbb felírni a feltételi egyenletet.

A vizsgálatok szerint a diagonális rendszer feltételi egyenletének felírásához azt a sarokpontot célszerű kiválasztani, amelynél a tiszta tagra a legkisebb érték adódik, mert ennek az egyenletnek a koefficienseit tudjuk a kiegyenlítés szempontjából a legkedvezőbben, a hegyes szögek mellőzésével kiszámítani. A legkedvezőbb feltételi egyenletet annál a sarokpontnál lehet felírni, amelynél levő szögek a legnagyobb területű háromszögekhez tartoznak.

A tanulmány befejezésül gyakorlati számpéldát közöl, majd igen könnyen kezelhető összefüggéseket ad a legkedvezőbb sarokpont megállapítására vonatkozólag.

DIASZPÓROS BAUXITFAJTÁK FELTÁRTHATÓSÁGA

GEDEON TIHAMÉR
AZ ÁSVÁNY-FÖLDTANI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA

[Beérkezett 1959. február 19-én]

Hazánkban három helyen ismerünk diaszpór tartalmú bauxitot. Majdnem azt mondhatnók, hogy a legdélibb és a legészakibb bauxit előfordulásunk diaszpóros. Így a villányi vonulatban ilyen a harsányhegyi, a nógrádi rögökben a nagyszáli és nézsai bauxit.

A harsányhegyi előfordulást TELECDI-RÓTH KÁROLY ismerte föl és RAKUSZ GYULA vizsgálta meg részletesen, a bányanyitást és a termelés előmunkálatait AJTAY ZOLTÁN végezte még 1938-ban. A felsőjúra és alsókréta mészkőrétegek közé települt bauxitban a diaszpór kristályok mikroszkópi csiszolatban jól felismerhetők. Az egyes lencsék középrésze kiváló minőségű ipari érc, mégis csak műkorundgyártásra vásárolták. Ez tehát azt jelenti, hogy a Bayer-rendszerű timföldgyártásban nem tudták felhasználni. A lencsék fedő felé eső részében világos, vasban szegény, de kovasavban dús bauxitváltozatot találtak, melyet tűzállóanyag gyárok vásároltak (helytelenül és megtévesztő módon ezt az anyagot szilimanit anyagnak nevezték). RAKUSZ GYULA gyűjtéséből három mintát vizsgáltunk (1. táblázat), melyek mind nagy keménységűek (Mohs = 5—6) és apróntöréses szerkezetűek voltak.

1. táblázat

A harsányhegyi bauxitfélések elemzése (RAKUSZ GYULA gyűjtéséből)

	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	th ¹
Váralja ércetest alsó része	63,93	3,98	13,66	3,23	14,85	16,07
középső része.....	67,93	1,83	13,04	3,36	14,44	37,10
felső része	42,00	35,69	3,99	2,67	14,99	1,17

A harsányhegyi bánya művelése a háború alatt megszakadt, azóta annyira tönkrementek a tárók, hogy ma már bejárásuk lehetetlen.

¹ th = timföldhányados = $\frac{\text{Al}_2\text{O}_3\%}{\text{SiO}_2\%}$ számítása az elemzési adatokból. Eddig általában ezt az értéket idegen szó alapján M (modulus), vagy H (hányados), illetve TH (timföldhányados) jelölték. A nagybetűvel jelölés germán behatásnak minősíthető, sőt vegyjelszerű jelölése tévedésre adhat alkalmat, ezért magyaros frászmóddal ezután a kisbetűs jelölést használjuk.

Váctól északra, mint jellegzetes sashérc emelkedik a térszín fölé (mintegy 300 m-rel) a Nagyszál triász mészkőömege. Ennek nyugati szegélyén a hegy lejtőjén, egészen a tetőig találjuk az aránylag kemény, diaszpóros téglavörös bauxitot. Ezt a kis telepet (alig néhány ezer tonna) 1942-ben három aknával megkutatták. Az első aknát a hegy lejtőjén a bauxit kibúvás alsó részében mélyítették, mely alig néhány méter után már elérte a fekü mészkövet. A 2. és 3. aknát a hegytetőn mélyítették, mindkettőből eléggé egyöntetű bauxitanyag került felszínre.

Alkalmunk volt a bauxitkutatás során a 2. akna szelvényét megvizsgálni. Az akna 18. méterében ütötték meg a triázmészkövet. A 3. akna csak 14 méter mély volt. Ennek átlagmintáját vizsgáltuk, melynek timföldhányadosa (th) majdnem pontosan azonos a 2. akna ércének átlagával (2. táblázat). A 3. akna felső harmadából felszínre került pizolitos anyagból fehéres pizolitokat válogattunk ki elemzésre. Ennek összetétele a nézsai bauxittal van igen közeli kapcsolatban.

2. táblázat

A Nagyszálon mélyített 2. és 3. számú kutatóaknák mintáinak elemzése

	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	th
2. sz. akna 1 m	35,8	27,0	23,4	1,7	12,1	1,33
3 m	31,5	35,0	18,8	2,2	12,5	—
5 m	38,6	30,0	17,5	2,3	11,6	1,27
8 m	40,6	32,0	15,0	1,7	12,7	1,27
10 m	47,8	25,2	13,2	1,7	12,1	1,87
16 m	47,3	25,6	12,9	1,7	12,5	1,84
3. sz. akna átlaga	41,0	29,0	12,9	2,9	11,9	1,41
válogatott fehér pizolitok	54,9	13,9	16,5	1,8	12,9	3,95
Nézsai fehér pizolitos bauxit	56,4	11,9	17,1	2,2	12,3	4,74

A bauxitszelvényben a mélység felé a vasoxid rendszeres csökkenését tapasztaljuk. Ez eltér az általános dunántúli bauxitszelvényektől, ahol inkább a kovasav jelentős csökkenését figyelhetjük meg, bár kismértékben ez a csökkenési jelleg itt is észlelhető, amint az a th-értékben is kifejezésre jut.

A nagyszáli bauxitelőfordulást FÖLDVÁRI ALADÁRNÉ is vizsgálta és megállapította a diaszpór és kaolinit jelenlétét. A második akna 10. méteréből vett bauxit anyagának és a pizolitoknak elemzési adatokból számított diaszpór és kaolinit tartalma a következő értéket adta :

	diaszpór	kaolinit
10. m bauxitjában	31,06%	54,18%
pizolitokban	50,68%	29,85%

Tekintve, hogy a nagyszáli bauxit mai ismereteink szerint semmiféle ipari feldolgozásra sem használható és várható mennyisége sem biztató, a feltérési kísérleteket mellőztük.

A Nagyszáltól kelet felé 12 km-re levő Nézsa községtől délnyugatra a Szelehegy lábánál nyitottak bauxitbányát. A háború utolsó éveiben innen Norvégiába szállítottak jelentős mennyiséget, ahol a vaskohászatban használták fel és kénmentes nyersvas mellett mészaluminát salakot termeltek, melyből timföldet állítottak elő.

A nézsai bauxit is jellegzetesen diaszpóros. Ezt igazolja Habicht-készülékkel felvett hőbomlási görbéje, valamint feltárthatósága is. Feltárási kísérletre legutóbb gyűjtött (1955. szept.) fehéreküllemű sejtes bauxitot használtuk föl. Ez az érc részben fehéres pizolitokból, részben fehér törmelékes darabokból áll, melyeket utólagosan agyagos gőtít kérgezett be és egyben össze is cementezett. Az agyagos gőtít csak 1,0—1,5 mm-es rétegben burkolja a szemcséket, de a rendelkezésre álló teret teljesen nem tölti ki. Ezért a fehértörésű bauxit sejtes szerkezetű, porítva azonban elegyszíne barna.

A nézsai bauxitot nagy részletességgel KISS JÁNOS vizsgálta. Ehez a további vizsgálatok alapján kiegészítésül érdekes adatot fűzhetünk. Egyes pizolitokban hintve fehér szögletes, viaszszerűen áttetsző darabkákat találunk, amilyenek a többi magyarországi bauxitpizolitokban sohasem láthatók. A szögletes törmelékdarabkák mérete a 2 mm-t ritkán haladja meg. Savval nem pezsegnek és a viaszszerű jelleget megtartják. Röntgenfelvétele csak kaolinit, alárendelten dikit és illit vonalakat adott. A kevés diaszpór vonal a pizolit anyagának szennyezése lehetett. Bőmit, hidrargillit vonalat nem mutatott. A törmelékes fehér darabkák anyaga tehát alumíniumhidroszilikát.

Bihar megyében a Jád folyó völgyében és Barátka környékén a júra és kréta mészkőrétegek határán, hasonlóan a harsányhegyi bauxitelőforduláshoz jó minőségű ipari bauxit található. Anyaga diaszpóros. A timföld-monohidrát azonban nem teljes mennyiségében diaszpór, hanem részben bőmit. Kitűnik ez feltárthatóságából is. Ismeretes, hogy 1,38 fs marónátron oldattal (= 40 Bé° = 500 g/l NaOH) 6 légköri nyomáson, 3 órán át főzve a bőmit maradéktalanul oldható, míg a diaszpór oldhatatlan. Ily módon ez a vizsgálat a kétféle timföld-monohidrát mennyiségi meghatározására és elválasztására is felhasználható.

A jádvölgyi Izvor bányában majdnem fekete színű bauxitot is találtunk, melynek szintén meghatároztuk a hőbomlási görbéjét. Összehasonlításként (3. táblázat) még két görögországi bauxit görbéjét is felvettük és elemzésük után a szokásos számítással megállapítottuk a vizsgált minták bőmit, diaszpór és kaolinit tartalmát.

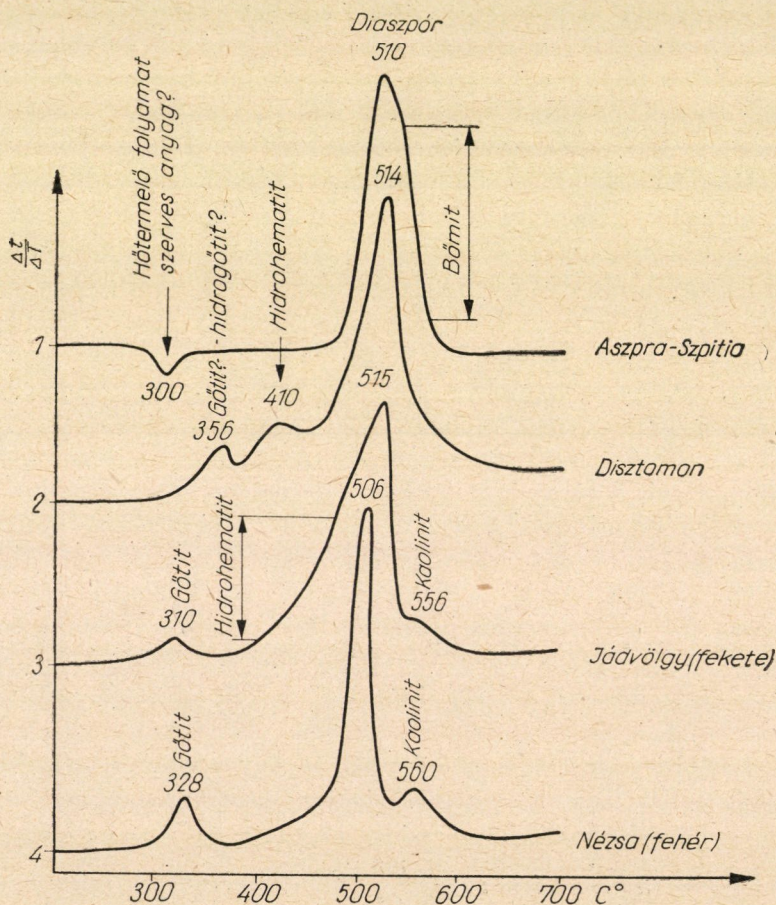
A hőbomlási görbék a meghatározott ásványos alkotórészek jelenlétét mindenben igazolják (1. ábra), a görbék alakjából azonban még más következtetést is levonhatunk. A Habicht-készülék az adott hőfokon az időegységben végbemenő hőfok változást írja: $\frac{\Delta t}{\Delta T} \frac{mp}{C^\circ}$. Éles, hegyes csúcs, mint az a nézsai bauxit görbéjén látható, három tiszta, jól elkülöníthető ásványi elegyrész

3. táblázat

Görögországi, jád völgyi, nézsai bauxit összehasonlító vizsgálata

	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	th	felt.	bőmit	diasz.	kaol.
Görögország:										
Aszpra-Szpitia ...	63,4	1,9	18,2	2,3	14,2	33,36	22,2	16,57	56,11	4,09
Disztamon	59,2	6,1	19,1	3,3	12,3	9,70	—	—	—	13,10
Jád völgy:										
Izvorbánya	56,4	5,7	23,9	2,8	11,2	9,89	14,3	9,49	51,18	12,26
Nézsai:										
fehér pizolitos ...	54,9	13,9	16,1	2,2	12,9	3,94	29,5	19,05	31,65	29,88

jellegzetes hőbomlási pontját mutatja: götít 328 C°, diaszpór 506 C°, kaolinit 560 C°. A görögországi Aszpra-Szpitia bauxitmintája 300 C°-on hőtermelő folyamatot (exoterm csúcsot) jelez, mely valószínűleg szervesanyag elégését,



1. ábra

vagy más oxidációs változást jelent. A diaszpór csúcs 510 C°-on nem olyan éles, mint a nézsai bauxit hasonló csúcsa. Az emelkedő hőmérséklet felé a görbe kiszélesedik, ami a jelenlevő bőmitre vall, melynek 530 C°-on bekövetkező hőbomlása folyamatosan simán kapcsolódik a diaszpór bomlási folyamatához és annak lefelé irányuló szárát megfelelően jobbra eltolja. Más szavakkal: a diaszpór hőbomlásának befejeződésekor megkezdődött bőmit bomlás folyamata kapcsolódik hozzá és így új csúcsképződés helyett a görbe lefutása látszólag késlekedik, ami a lefutó szár kiszélesedésében nyilvánul meg.

Hasonló jelenséget látunk a jádvölgyi fekete bauxit hőbomlási görbéjén is. Itt a gőtít 310 C°-on lezajlott bomlása után 380—400 C°-on megindul látszólag a diaszpór hőbomlása. Ekkor azonban a hidrohematit az az ásványi alkotórész, melynek hőbomlása megkezdődik és ehhez a folyamathoz közvetlenül csatlakozik a diaszpór hőbomlási folyamata. A görbe alakjának kiszélesedését ezért a baloldali emelkedő szárban észleljük.

A romániai Barátka (Bratka) határában Szekatúra (Secatura) bányából gyűjtött bauxit feltárhatósága kifejezetten a diaszpóros jelleget mutatja (4. táblázat).

4. táblázat

Szekatúra bauxitbányáiból származó minták elemzése és értékelése

	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	felt.	th	kh
I. bánya mintája	57,22	3,76	25,00	2,90	11,12	—	15,22	6,65
vörösizapja	51,70	3,96	28,80	3,10	—	21,57	—	7,26
II. bánya mintája	58,04	5,48	21,50	2,90	11,98	—	10,59	3,94
vörösizapja	52,70	5,84	23,20	3,00	—	15,48	—	3,96

Timföldásványok megoszlása

	bőmit	diaszpór	kaolinit
I. bánya mintája	14,52	49,05	8,08
II. bánya mintája	10,57	52,32	11,78

A vizsgálati eredmények alapján kiszámított timföldtartalmú ásványi alkotórészek megoszlását a bihari bauxit mintákban Debye—Scherrer röntgenfelvétellel minden esetben igazolni lehetett.

Izvor bánya szállítási mintáinak átlagából is tanulmányoztuk annak feltárhatóságát. A kísérleteket a szokásos cementfinomságra porított (MSz 695, szitafinomság: 0,09 mm) bauxittal végeztük, 110 C°-on 4 órán át történt szárítás után. Célkitűzésünk, hogy fokozott nyomáson a bauxit diaszpór tartalma feloldható-e? Ezért kísérleteinket 6, 10, 20, 40 légköri nyomáson végeztük forgóautoklávban 1,38 fs NaOH-dal 1,8 Na₂O : Al₂O₃ viszonyzámmal, 3 órán át (5. táblázat).

5. táblázat

Izsvori bánya bauxitjának feltárhatósági vizsgálata

	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	felt.	th	kh
Bauxit-minta	58,4	4,62	22,6	2,9	11,5	—	12,69	4,91
Vörösiszap 6 atm	51,8	4,98	24,7	3,1	—	18,83	10,40	4,96
„ 10 „	37,6	7,63	38,1	3,9	—	61,81	4,92	4,99
„ 20 „	7,9	13,70	67,7	7,8	—	96,26	—	4,94
„ 40 „	5,0	1,84	72,2	7,7	—	97,32	—	39,20

A táblázat utolsó oszlopában „kh”-értékeket tüntettük fel. Ez az érték a „kovahányados”, számítása az elemzéskor kapott vasoxid %-ának a kovásv %-ával történt osztásából adódik :

$$\text{kovahányados : kh} = \frac{\text{Fe}_2\text{O}_3 \%}{\text{SiO}_2 \%}$$

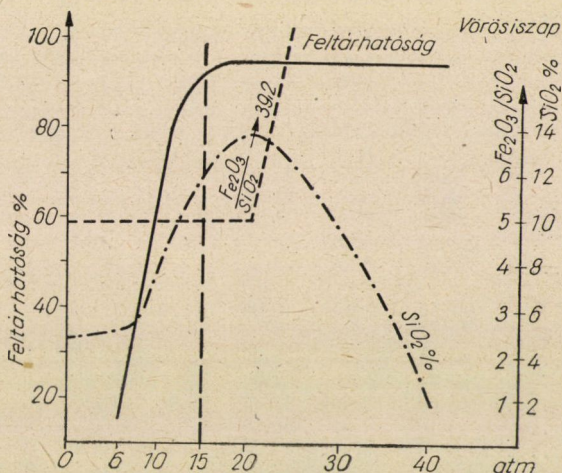
A kovahányados számítása tehát azonos a régebben ismert „korundhányados”-sal, melyet a nyersbauxit értékeléséhez használnak, mint mutatószámot, ha a bauxitot műkorund gyártásában kívánják feldolgozni. Jelen esetben a kh-érték az autoklávus kezelés után kapott aluminátlúg jóságára ad biztos támpontot. Amint látjuk, a kh-érték a nyersbauxitra és a bauxit oldása után kapott vörösiszapra közelítően állandó. Ezt mutatják a 6, 10 és 20 légköri túlnyomáson kapott vörösiszapnak kovahányados értékei. A 40 atm-án kapott iszapban a kovásv mennyisége jelentősen csökkent, mert a feltárólúg jelentős részét feloldotta, ezért a kh-érték növekedett.

Az urali bauxit jelentős része szintén diaszpór tartalmú. Ezért a szovjet timföldgyárak, hogy a diaszpór kristályrácsát kellően föllazítsák, a bauxit pörkölését 500 C° körüli hőmérsékleten végzik (lásd az 1. ábra hőbomlási görbéit, amelyeken jól látható, hogy 500 C°-on a diaszpór hőbomlása már megkezdődik, tehát a kristályrács egyidejűleg szerkezeti változást is szenved, anélkül azonban, hogy a timföldanyag korundizálódása, azaz az új kristályforma kialakulása bekövetkezhetne), majd a Bayer-eljárás szerint 13—15 légköri túlnyomáson lúgozzák ki. A 2. ábrán a bihari diaszpóros bauxit előbbi eredményeiből rajzolt görbéket tüntetjük fel. A 15 légköri nyomáson behúzott egyenes világosan igazolja az optimális körülmények egybeesését. A szovjet timföldipar is ezt az optimális állapotot használja ki.

Régi megállapítás, hogy minden bauxitlelőhely más-más bauxit típust képvisel. Ha ez a szigorú kőzetminősítési kritikát nem is állja meg, mégis tudjuk, hogy ipari feldolgozáskor az egyes műveleteket az új bauxit tulajdonságainak megfelelően kell módosítani. Míg a szovjet kutatók szerint az urali bauxitot timföldgyári felhasználás előtt 500 C°-on előnyös pörkölni, addig mint

a kísérletek eredményéből láttuk, a bihari, diaszpóros bauxitot az autokláv nyomásának fokozásával — optimálisan 15 légköri túlnyomáson — már 93—95%-os kitermeléssel feldolgozhatjuk. Ez a kísérletsorozat azonban rámutat egyben arra is, hogy a nyomás fokozása kedvezőtlen eredményt is adhat, mert a bauxit kóvasav tartalmának mind nagyobb mennyisége válik oldhatóvá a nyomás mértékének függvényében.

Klasszikus példája a diaszpóros bauxitnak a görögországi előfordulás. Földtani körülményeinek tanulmányozásában úttörő munkát végzett VADÁSZ ELEMÉR. Bár a görögországi telepeket azóta már több földtani szakember is



2. ábra

tüzetesen átvizsgálta, mégis ennek a bauxitnak fizikai, vegyi és feltárhatósági tulajdonságait már kevesebben tanulmányozták. VADÁSZ ELEMÉR gazdag bauxit gyűjtésének néhány mintáját a magyar diaszpóros bauxittal összehasonlítva vizsgáltuk meg, a feltárhatóság körülményeinek szempontjából.

A görögországi bauxitfajták röntgenfelvételét DELÜANISZ és ALEXOPOULOSZ, majd legújabban WACHTL J. ismertette. Feltárhatóságával ROTH A. és GINSBERG H. foglalkozott és mindannyian kétségtelenül megállapították a diaszpór, bőmit és kaolinit jelenlétét.

Görögország bauxitteltelepeit főleg a Parnasszosz hegységben, majd KDK felé a hozzá csatlakozó Helikon hegységben és Athén fölött az Olimposzon, onnan tovább haladva KDK-i csapásban, a Kikládok szigetsorozatjában Amorgosz és Naxosz szigetén ismerjük. Ez a legutóbbi előfordulás korundot tartalmazó diaszpóros érc és ezért az eddig ismert legkeményebb bauxit.

Vizsgálataink a korintoszi öböl északi partján húzódó júra és kréta mészkő határán települt parnasszoszi és helikoni bauxitok feltárhatóságára terjedtek ki (6. táblázat).

6. táblázat
Görögországi bauxitminták vizsgálati adatai

	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	felt.	th	kh
Ergosztília, delfi körzet								
1.	63,20	2,30	18,50	3,30	12,70	—	27,47	8,04
vörös i.	15,10	6,70	63,50	—	—	93,04	—	9,47
2.	61,60	3,10	19,80	3,30	12,20	—	19,87	6,39
vörös i.	19,10	6,80	56,50	—	—	89,14	—	8,31
3.	61,90	5,20	16,70	3,20	13,00	—	11,90	3,21
vörös i.	27,20	12,00	41,10	—	—	82,15	—	3,34
4.	63,70	1,40	19,30	3,20	12,40	—	45,50	13,78
vörös i.	37,50	2,10	41,00	—	—	72,28	—	19,52
Sztiri, déli-Parnasszosz								
5.	59,00	6,10	19,10	3,50	12,30	65,73	9,67	3,13
6.	63,10	1,65	19,40	3,30	12,55	89,84	38,24	11,77
7.	64,10	3,90	15,40	3,10	13,50	88,27	16,43	3,94
8.	64,40	1,30	17,70	3,30	13,30	53,19	49,53	13,63
Angelosz — Chorafi								
9.	60,50	0,85	23,70	3,10	11,85	—	71,20	27,88
vörös i.	33,00	1,68	47,00	—	—	72,50	—	27,97
10.	63,10	0,85	20,20	3,40	12,45	—	74,23	23,78
vörös i.	20,20	2,00	59,30	—	—	89,10	—	29,65
11.	69,20	0,50	13,30	3,35	13,65	—	138,40	26,60
vörös i.	56,70	0,86	23,30	—	—	53,23	—	27,09
12. Variáni, ÉNy-i Parnasszosz	63,50	1,40	19,00	3,30	12,80	69,30	45,35	13,57
Topolia, Parnasszosz								
13.	61,70	1,80	20,90	3,30	12,30	—	34,24	11,56
vörös i.	35,30	3,20	44,00	—	—	72,82	—	13,75
14.	64,00	2,80	17,35	2,90	12,95	—	22,86	6,49
vörös i.	24,10	7,00	50,20	—	—	86,90	—	7,07
15.	64,90	1,95	17,25	3,00	12,90	—	33,28	8,84
vörös i.	9,90	5,50	71,00	—	—	96,26	—	12,91
16. Olimposz	47,50	4,00	21,25	2,60	16,40	—	11,88	5,31
vörös i.	20,20	6,60	37,10	—	—	75,64	—	5,62
17.	56,80	1,35	27,65	3,00	11,20	—	42,08	20,48
vörös i.	19,50	2,50	60,30	—	—	84,26	—	24,10
Megara, Athéntól Ny-ra								
18.	47,50	9,30	30,10	2,10	11,00	—	5,11	3,23
vörös i.	16,85	18,50	44,50	3,80	—	76,00	—	3,30
19.	55,00	2,60	29,00	2,40	11,00	—	21,15	11,16
vörös i.	10,70	5,30	68,00	5,80	—	91,70	—	12,83
20.	55,75	1,10	29,20	2,30	11,65	—	51,21	26,55
vörös i.	10,50	1,90	72,50	5,60	—	92,41	—	38,15

Megjegyzés : a bauxitminták oldását 6 atm nyomáson 3 órán át számított lúgmennyiség-gel forgóautoklávban végeztük. Az 5., 6., 7., 8. és 12. számú mintáknak vörösiszap elemzése hiányzik.

Az előbbieken már rámutattunk, a kovahányadosnak (kh-érték) állandósága a bauxitra és a belőle kapott vörösiszapra számítva azt igazolja, hogy a lúgban kovasav nem oldódott. Növekvő kh-érték az oldódott kovasav mértékére enged következtetni.

Az értékelt 15 feltárási kísérletből kitűnik, hogy csak olyan bauxitnak kh-értéke egyezik a vörösiszapjáéval, amelynek feltárhatósága kicsi, tehát aránylag nagy a diaszpór tartalma (3, 9, 11, 14, 16, 18. számú minták). Ezek-

nek a feltárhatósága 53,23% és 86,90% között változik (a 6. táblázat 11. és 14. sz. minta). A kh-értékek között nagy eltérést mutató bauxitfajták mind a jól feltárható csoportjába tartoznak (7. táblázat), mint azt az előbbi összeállítás is igazolja.

7. táblázat

A jól feltárható görögországi bauxitok adatai

Sorszámuk	1	2	10	15	19	20
Feltárhatóság.....	93,04	89,14	89,10	96,26	91,70	92,41
kh-érték növekedése	1,43	1,92	5,87	4,07	1,67	11,60

Ha a bauxitfajták kovasav tartalmát nézzük (mint a 11. és 18. számú 0,50% és 9,30% SiO₂ tartalommal, valamint 53,23% és 76,00% feltárhatósággal), azt találjuk, hogy ha kisebb feltárhatóságú értéket kaptunk, a kh-értékek közelítően állandók, azaz a kovasavból alig oldódott valami kis mennyiség a lúgos kezelés közben. Ezzel szemben találunk olyan bauxitot, melynek timföld tartalma jól oldódott (10. és 2. sz. mintáknál, ahol 0,85% és 3,10% kovasav esetében a feltárhatóság 89,10% és 89,14%), míg egyidejűleg a kovasav tartalma is részben oldható volt, mint azt a kh-érték nagy változása (vörösiszapban meghatározott kh-érték növekedése: 5,87 és 1,92 alapján) is igazolta. A 20 görögországi bauxitminta között három olyan mintát találunk (4, 13, 17. sz. 1,40%, 1,80%, 1,35% kovasav tartalommal és 72,28%, 72,82% és 84,26% feltárhatósági értékkel), melynek kovasavja kicsi és feltárhatósága mégsem kielégítő.

A diaszpóros bauxitok kovasavjának oldhatatlanságára következtetni, hogy az, az esetleges kvarc, vagy pl. metakaolinit tartalomtól függ-e, még nem elegendő fizikai ásványszerkezet vizsgálat miatt, kielégítően nem tudunk. Az előbbi megállapítás a további kutatásra serkentő adat.

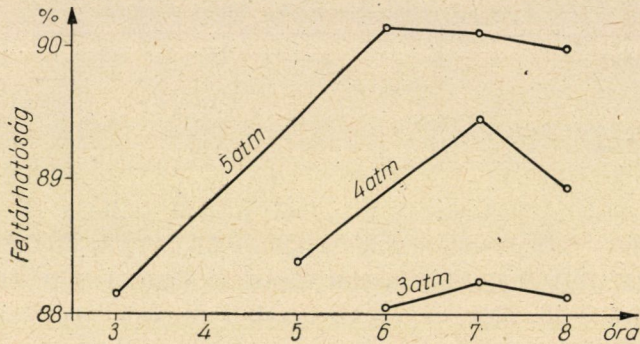
A diaszpóros bauxitfajták timföldkioldási viszonyainak részletesebb tanulmányozására a már megvizsgált minták maradékából keverék átlagot készítettünk (1, 2, 3, 6, 7, 10, 14, 15, 17, 19. sz. mintákból) és változó nyomáson (8. táblázat) különböző ideig végeztünk timföld kioldást a szokásos Bayer-eljárás szerint.

8. táblázat

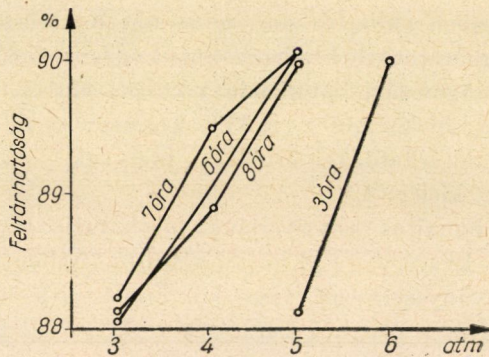
Görögországi bauxitkeverék feltárhatóságának adatai

Bauxitelegy	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	th	kh
	63,00	3,00	18,00	3,20	12,80	21,00	6,00
Feltárás ideje: óra	3	5	6	7	8		
3 atm-án	—	—	88,03	88,22	88,11		
4 „	—	88,38	—	89,49	88,96		
5 „	88,14	—	90,16	90,10	89,98		
6 „	90,05	—	—	—	—		

A táblázatból kitűnik, hogy a 3 légköri túlnyomáson 6 óráig tartó kezelés nem adja azt a feltárási eredményt, amit a szokásos klasszikus Bayer előírással (6 atm + 3 óra) kapunk. Azonos nyomáson az időtartam növelésével a kitermelhető timföld tartalom alig növekszik. A 3 és 4 légköri túlnyomáson



3. ábra



4. ábra

végzett sorozat oldás ezt a megállapítást igazolja. Az 5 atm nyomáson folytatott kísérletben a 3 és 6 órás kezelési idő után kapott értékek között már van kitermelési növekedés, míg a főzési idő további hosszabbításával javulás nincs, sőt alig számba vehető visszaesést láthatunk. A 3. ábra a feltáráhatóság változását szemlélteti különböző nyomáson az idő függvényében. A 4. ábra azonos idő alatt a nyomás fokozásával elérhető feltáráhatósági emelkedést mutatja.

Az előbbi kísérletek kiegészítése végett fokozott nyomáson is végeztünk oldást. Erre a célra közelítően egyező timföld, de növekvő kovásv tartalmú bauxitmintákat választottunk ki (th-érték csökkenő irányú). Ilyenek a Parnassosz déli részéről (Sztiri), valamint az ÉNy-i előfordulásból (Variani, Graviától délre) származó minták (9. táblázat). A kísérletet 6 és 10 atm nyo-

9. táblázat
Parnasszosi bauxitelőfordulások mintáinak vizsgálata

	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	th	f-6	f-10	kh
21. Sztiri	63,50	1,90	19,30	3,00	12,30	33,42	—	—	10,16
„ vörösiszap	28,50	3,66	47,20	—	—	—	81,65	—	12,90
„ „	24,00	3,90	53,30	—	—	—	—	86,30	13,66
22. Sztiri	64,40	2,65	16,70	3,20	12,95	24,30	90,25	90,57	6,07
23. Variáni.....	63,00	4,90	15,80	3,40	12,90	12,85	84,89	85,54	3,22

máson végeztük el (táblázatban jelzése : f-6 és f-10). A feltárthatóság az első esetben a nyomás növelésével mintegy 5%-kal, a másik két esetben alig néhány tizeddel volt növelhető. Ezzel szemben a kovahányados (kh-érték) növekedéséből a kovasav jelentős mennyiségű feloldódására következtethetünk. A kh-érték változatlansága esetében a 10 atm nyomáson kapott vörösiszapban 5,25% SiO₂-nak kellett volna lenni, de 1,35%-kal kevesebb van, tehát 25,9%-a a SiO₂-nak feloldódott. Ez a kísérlet is igazolja az előbbi megállapítást, hogy a nagy bőmit tartalmú, jól feltárható bauxitból a kovasav kioldása is nagyobb.

Bőmites bauxit hidratációját — szerkezeti víz felvételét — már többen megfigyelték (FINKEY, POLINSZKY, GEDEON, MÁRIÁSSY). Ismeretlen volt azonban, hogy a diaszpór tartalmú bauxit is hidrálható legyen.

Már említettük és számos röntgen, valamint hőbomlási vizsgálat is igazolja, hogy tisztán diaszpóros bauxit alig található. Diaszpór és bőmit változó elegymennyiségben van a kemény bauxitfajtákban. A görögországi bauxitvonulat legdélibb előfordulásában mutatták ki a diaszpór mellett a korund jelenlétét (naxoszi smirgel). Mikroszkóppal a nézsai bauxitban mutatta ki a diaszpór kristályt bőmitlel átszöve KISS JÁNOS. Ilyenkor azonban nehéz megállapítani, hogy melyiket tekinthetjük elsődleges ásványnak. OSBORN 300—400 C° között különböző nyomáson víztérben vizsgálta a bőmit és diaszpór egyensúlyát (10. táblázat). Mintegy 600 kísérletből vonta le következtetéseit, melyekből néhányat közlünk :

10. táblázat

Ervin—Osborn kísérletsorozatának néhány kiválasztott adata

Kísérleti nyomás atm	Időtartam óra	Termék ásványi összetétele
210	43	diaszpór
210	76	bőmit
400	37	bőmit
400	95	bőmit, diaszpór
1000	3	bőmit, diaszpór, korund
1000	10	bőmit, diaszpór
1000	70	diaszpór, korund
3400	100	bőmit, diaszpór

Ezekből az adatokból arra következtethetünk, hogy a nyomástól függetlenül a bőmit és diaszpór egymás mellett jelen lehet, sőt kristályrácsuk valószínűleg reverzibilisen módosulhat. Erre mutat az alábbi kísérlet, melyet ergosztíliai (Parnasszosz) bauxittal végeztünk (11. táblázat). Ez a kísérletünk is a szokásos körülmények között 6 és 10 légköri nyomáson 3 órán át kezelve történt, azonban a 10 atm-ás kísérlet után is még mindig olyan nagy mennyiségű vörösiszapunk maradt, hogy azt kimosás után másnap számított mennyiségű friss lúgmennyiséggel 6 atm nyomáson ismételtelt feltártuk.

11. táblázat

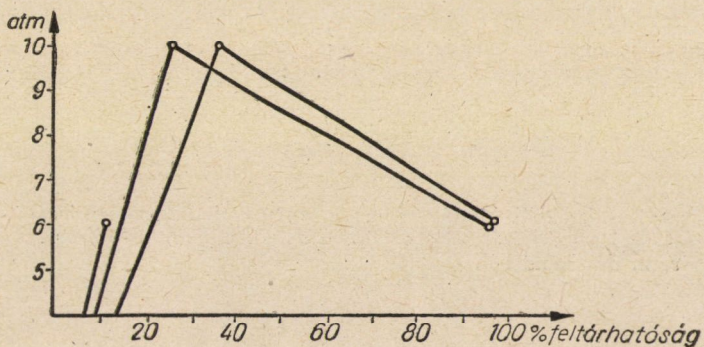
Ergosztíliai bauxit feltárhatósága két lépcsőben

Al ₂ O ₃	SiO ₂	Fe ₂ O ₃	TiO ₂	izz. v.	th	Feltárhatóság		
						6 atm	10 atm	ismét 6 atm
63,50	0,85	20,40	3,20	12,50	74,70	11,72	26,73	95,66
	m e g i s m é t e l v e :					—	35,28	96,10

A 10 légköri túlnyomáson végzett kezeléskor a timföldből már valamivel nagyobb mennyiség oldódott, mint a 6 atm-ás kezelésnél, de a 10 atm nyomáson az autoklávban már kristályszerkezet változás folyamata is kezdetét vette. Ez a szerkezetváltozási folyamat a feltárás után a lassú lehűlés alatt fejeződhetett be, mert ha a főzés alatt következik be, akkor a timföld oldódása is befejeződik. A bőmites átkristályosodás folyamatának kezdetét már jelzi a 10 atm nyomáson elért nagyobb feltárhatóság, mint 6 atm-án volt. Az eredeti 15,80% bőmit és 57,46% diaszpór tartalmú bauxit a lúgos közegben bőmitté kristályosodott át. Hidrargillit nem keletkezhetett, mert nagyobb és nagy nyomáson (10—400 atm) hidrargillitből mindig tisztán bőmit képződik. Erre számos röntgenfelvétellel és hőbomlási görbével igazolt kísérleteink vannak.

Ipari vonatkozásban tehát a diaszpóros bauxitot Bayer-eljárással is feldolgozhatjuk, ha azt a szovjet eljárás szerint 500 C°-on előzetesen pörköljük, amikor így a diaszpór kristályszerkezetét megbontva, kedvező körülményt teremtünk a 15 atm nyomás alatti lúgos közegben a bőmitté alakulás feltételének és ezáltal egyben a timföld oldódásának is. Pörkölés nélkül is oldhatóvá válik a diaszpór timföld tartalma, ha legalább 15 légköri túlnyomáson, de 20 atm-nál kisebb nyomáson oldjuk (amikor a bőmitté alakulás után a timföld oldódása azonnal végbe is megy), vagy előkezeléssel először 10 atm nyomáson a szokásos feltárolóúggal főzzük, majd lassan lehűtve időt adunk a diaszpórnak bőmitté alakulására és ezután már a szokásos 6 atm nyomáson a klasszikus Bayer-eljárás szerint feltárhatjuk. Ezt az utóbbi folyamatot mutatja az 5. ábra.

A diaszpóros bauxitfajtákkal végzett kísérletsorozatok rámutattak arra, hogy a jól feltárthatók — a bőmitesek — mindig több oldható kovasavat tartalmaznak, mint a diaszpórban dúsabb változatok. A kovahányados (kh-érték) számításával a Bayer-eljárásban biztos mutatószámot kapunk a bauxitból kioldott kovasav jelzésére.



5. ábra

Megállapítottuk, hogy a bauxit diaszpór tartalma különböző módon bőmitté alakítható és így timföld tartalma a Bayer-eljárással jó kitermeléssel könnyen kioldhatóvá válik.

IRODALOM

- AJTAY ZOLTÁN: Bány. és Koh. Lapok, 74, 213. 1941.
 DELÜANISZ, A. A.: Metall u. Erz, 34, 282. 1937.
 DELÜANISZ, A. A.: Metall u. Erz, 37, 194. 1940.
 DELÜANISZ és ALEXOPOULOSZ: Metall u. Erz, 34, 476. 1937.
 BJELJAJEV, A. J.: Könnyűfémek kohászata, 45. o. 7. bek. 1950.
 ERVIN, G. és OSBORN, E. F.: Journ. of Geology, 59, 381. 1951.
 FINKEY J.: Bány. és Koh. Lapok, 64, 21–22. sz. 1931.
 FÖLDVÁRI A.-NÉ: M. T. A. Műsz. Oszt. Közleményei, 5, 63. 1952.
 FÖLDVÁRI A.-NÉ: Földt. Közlöny, 83, 145. 1953.
 GEDEON, T.: Alumínium, 3, 111. 1951.
 GEDEON, T.: M. T. A. Műsz. Oszt. Közleményei, 3, 201. 1952.
 GEDEON, T.: Alumínium, 4, 105. 1952.
 GEDEON, T.: Földt. Közlöny, 83, 151. 1953.
 GEDEON, T.: Földt. Közlöny, 84, 201. 1954.
 GINSBERG, H.: Zeitschr. f. Erzbb. u. Met. 7, 93. 1954.
 KISS JÁNOS: Acta Geologica, 1, 113. 1952.
 MÁRIÁSSY, M.: Alumínium, 3, 205. 1951.
 MAZELJ, V. A.: Timföldgyártás, 91. o. b, pont. 1953.
 ROTH, A.: Metall u. Erz, 35, 447. 1938.
 VACHTL, J.: Vestnik U. U. G. Roc. 31, 105. 1956.
 VADÁSZ ELEMÉR: Zeitschr. f. prakt. Geol. 41, 97. 1933.
 VADÁSZ ELEMÉR: Centrbl. f. Min. Abt. „A”, 6, 182. 1934.

ÖSSZEFOGLALÁS

Több diaszpóros bauxitelőfordulás anyagát vizsgáltuk meg és megállapítottuk, hogy megfelelő előpörkölés nélkül is kitermelhető a diaszpór tartalmú bauxit timföld tartalma Bayer-eljárás szerint, ha a munkatér (autokláv) nyomását legkedvezőbben 15—20 atm-ra növeljük. Ennél nagyobb nyomáson már nagy mennyiségű kovasav is oldódik az alumínát-lúgban. Diaszpóros bauxitból a timföld két lépésben végzett Bayer-oldással is jól kitermelhető, ha az első lépésben 10 atm nyomáson a bőmites kristályszerkezetet alakítjuk ki, majd a második lépésben a szokásos 6 atm nyomáson oldjuk.

A kovasav oldódására új jelzőszám bevezetésével pontos következtetést vonhatunk. Ez a jelzőszám a vasoxid és kovasav hányadosa, mely mind a bauxit, mind a vörösiszap összetételéből számítva azonos kell legyen. Jelzése :

$$\text{kovahányados} = kh = \frac{\text{Fe}_2\text{O}_3\%}{\text{SiO}_2\%} = \text{konstans}$$

A sorozatvizsgálatokból kiadódott, hogy vegyes timföld-monohidrátot (bőmitet és diaszpórt) tartalmazó bauxitfajtákból a bőmitben dúsakból mindig több kovasav oldódik ki, mint a diaszpórban dús bauxitból.

SZIGETELŐANYAGOK INHOMOGENITÁSA, MINT ROMLÁSUK EGYIK JELLEMZŐJE

VAJDA GYÖRGY

A MŰSZAKI TUDOMÁNYOK KANDIDÁTUSA
VILLAMOS ENERGETIKAI KUTATÓINTÉZET, BUDAPEST

[Beérkezett 1959. március 2-án]

1. Szigetelőanyagok inhomogenitása

A tapasztalatok szerint a szigetelőanyagok romlása az anyag inhomogenitásának növekedésével jár együtt. Az eredeti, romlatlan szerkezetű szigetelőanyagban kisebb-nagyobb beteg helyek keletkeznek, melyeknek szerkezete és tulajdonságai eltérnek az ép szigetelőanyagtól. Ezek a részek gáznemű, folyékony vagy szilárd anyaggal lehetnek kitöltve, geometriai elrendeződésük pedig rendkívül változatos lehet. Azok kiterjedése is széles határok között változhatik, a diszpergált molekuláktól kezdve a szigetelőréteg teljes vastagságát kitöltő csatornáig. Az 1. táblázat vázlatos áttekintést ad a diszperzió lehetőségeiről.

1. táblázat

Alapanyag halmazállapota	Diszpergált anyag				
	halmazállapota	Mérete, A			
		molekula diszperz ~1	kolloid-diszperz 10 ⁻¹ —10 ³	mikroszkópos 10 ⁴ —10 ⁶	makroszkópos >10 ⁶
gáz	gáz	gázkeverék	—	—	—
	folyadék	—	aerosol, köd	köd	eső
	szilárd	—	aerosol	por, füst	
folyadék	gáz	abszorbeált gáz	hab	buborék	
	folyadék	folyadék keverék	emulzió		rétegzett folyadék
	szilárd	oldat	szuszpenzió		szennyeződés
szilárd	gáz	abszorbeált gáz	szilárd hab	gázzárvány, üreg, kapilláris	
	folyadék	—	szilárd hab	folyadék zárvány	
	szilárd	szilárd oldat	szilárd szol	szilárd zárványok, szennyeződések	

A szigetelőanyagok eredetileg sem homogének, maguk a nyersanyagok is tartalmaznak járulékos anyagokat, a kémiai feldolgozásnál segédanyagokat adagolnak hozzájuk, a gyártás, a tárolás, a szállítás és a felhasználás során különböző szennyeződések kerülhetnek az anyagba. A villamos berendezéseket többnyire nem egyszerű anyagokkal szigetelik. Nagyon gyakoriak a rétegezett szigetelések, a rétegek közötti kötést rendszerint külön kötőanyaggal biztosítják. A szálas szigetelőanyagok többnyire telítőanyagokkal vannak itatva vagy telítve. Mindezek alapján világos, hogy nagyon nehéz feladat az üzem közben keletkező inhomogenitások (romlás) kimutatása.

A gázok romlása gyakorlati szempontból jelentéktelen, a további vizsgálatok során ezért csak a szilárd és folyékony szigetelőanyagokkal foglalkozunk.

A romlás okozta inhomogenitások sorba vagy párhuzamosan kapcsolódnak a szigetelőanyag többi részéhez és megváltoztatják az egész szigetelés eredő anyagjellemzőit.

A romlás tárgyalásakor [1] már szó volt arról, hogy milyen kényes feladat a romlás mérőjének kiválasztása. A 2. táblázatban fel vannak tüntetve a legfontosabb anyagjellemzők, melyek a szigetelőanyagok használhatósága szempontjából lényegesek. Hogy adott szigetelésnél mely anyagjellemzők a legfontosabbak, egyrészt a szigetelés rendeltetésétől, másrészt a működési körülményeitől függ [2, 3].

Az anyagjellemzők legnagyobb részét csak a szigetelés elroncsolódásával lehet megmérni, a továbbiakban csak azokkal fogunk foglalkozni, melyek roncsolásmentesen állapíthatók meg. A roncsolásmentes anyagvizsgálat szempontjából elsősorban a sűrűség és a villamos anyagjellemzők jönnek számításba.

A lehetőségek elemzése végett célszerű megvizsgálni, hogy az inhomogenitások anyagi tulajdonságai és geometriai elrendeződésük hogyan befolyásolják a szigetelőanyagok eredő anyagjellemzőit.

2. Az inhomogenitások anyagi tulajdonságai

Aszerint, hogy az inhomogén részt milyen anyag tölti ki, a következő fontosabb eseteket lehet megkülönböztetni :

- a) gázzárványok a szigetelőanyagban,
- b) vízzel telt üregek a szigetelőanyagban,
- c) vezető és félvezető csatornák a szigetelőanyagban,
- d) módosult tulajdonságú szilárd szigetelő részek a szigetelőanyagban,
- e) szigetelő folyadékkal telt üregek a szigetelőanyagban.

2. táblázat

Villamos anyagjellemzők	Mechanikai anyagjellemzők	Hőtani anyagjellemzők	Kémiai anyagjellemzők	Egyéb anyagjellemzők
Átütési szilárdság Átívelési szilárdság Kúszóútkepződésre való hajlam Fajlagos térfogati ellenállás Fajlagos felületi ellenállás Dielektromos állandó Veszteségi tényező Anyagjellemzők frekvenciafüggősége	Szakítószilárdság Nyomószilárdság Nyírószilárdság Hajlítószilárdság Útőszilárdság Repedési szilárdság Rugalmassági együttható Keménység Kopásállóság Nyúlás Hajlékonyság Viszkozitás Megmunkálhatóság Kifáradás	Hővezetőképesség Hőkiterjedés Plasztikus folyás Termikus bomlékonyság Szikraállóképesség Ívállóképesség Lángállóképesség Olvadáspont Dermedéspont Gőztenzió Anyagjellemzők hőmérsékletfüggése	Reagensekkel szembeni stabilitás Hatás a környező anyagokra Elektrokémiai stabilitás Stabilitás öregedéssel szemben Oldhatóság Oldóképesség	Fajsúly Átlátszóság Refrakciós együttható Gáz és gőz átteresztő képesség Nedvesség felvőképesség Vízáteresztő képesség Nedvesség adszorpció a felületen Ellenállóképesség sugárzásoknak Ellenállóképesség baktériumokkal szemben

a) Gázúrványok szigetelőanyagokban

Vizsgálataink szempontjából a különböző gázok egységesen tárgyalhatók, mert anyagjellemzőik nagyjából azonos nagyságrendűek és lényegesen különböznek a szilárd és folyékony szigetelőanyagok anyagjellemzőinek nagyságrendjétől.

A gázok fajsúlya normál állapotban 10^{-2} – 10^{-3} g/cm³ körüli érték, ami a szilárd és folyékony anyagok fajsúlyánál 2–3 nagyságrenddel kisebb [4].

A *dielektromos állandó* legfeljebb néhány ezrelékkal különbözik az egységtől és gyakorlati esetekben ezeket az eltéréseket el lehet hanyagolni.

A *fajlagos vezetőképesség* a gázoknál nem anyagjellemző, ha tisztán megállapodásszerűen az áramsűrűség és térerősség hányadosának jelölésére használjuk,

$$\gamma = \frac{G}{E} \quad (1)$$

változatlan állapotjellemzők esetében is erősen függ a térerősségtől [5]. Az áramsűrűség-térerősség jelleggörbét általános csetre az 1. ábra tünteti fel.

Egész kis térerősségnél ($E < 10^2$ – 10^3 V/cm) Ohm törvénye érvényes, ilyenkor a vezetőképesség legfeljebb 10^{-15} 1/Ohm,cm nagyságrendű.

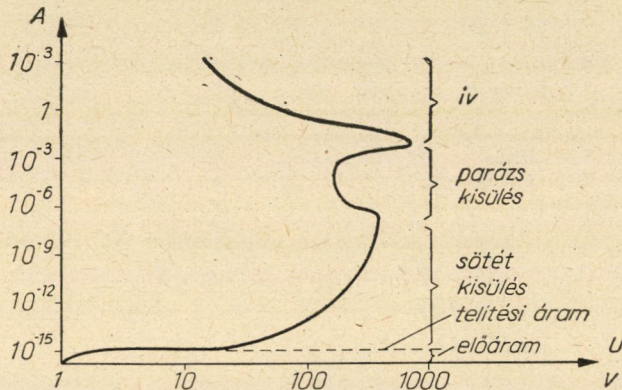
A telítési tartományban normál állapotban az áramsűrűség [6] nagyon

kicsi, $G_t \sim 10^{-19} \cdot d \text{ A/cm}^2$, ahol d az elektródatávolság, a gázok ilyenkor is kiváló szigetelők. A telítési tartomány végén kezdődik az ütközési ionizáció (néhány ezer V/cm-nél), mikor a gázok szigetelőképesége rohamosan csökken, és a térerősség növelésével megindulnak az önálló kisülések.

A gázok *veszteségi tényezője* az ütközési ionizáció kezdetéig rendkívül kicsi, formálisan felírható [6], hogy

$$\operatorname{tg} \delta \approx \frac{10^{-6} \cdot d}{f \cdot E} \quad (2)$$

$d = 1 \text{ cm}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $E = 10^3 \text{ V/cm}$ esetében $\operatorname{tg} \delta \approx 10^{-9}$.



1. ábra. Áramfeszültség jelleggörbe gázokban

Az ütközési ionizáció bekövetkeztével a vezetési áram rohamosan nő (1. ábra) és ennek megfelelően, mivel

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{G_R}{G_C}, \quad (3)$$

a veszteségi tényező is.

A gázok *átütési szilárdsága* 10^4 – 10^5 V/cm [4, 7] jóval kisebb, mint a szilárd és folyékony szigetelőanyagoké, a rétegvastagság csökkenésével erősen nő.

Az eddigiek alapján a viszonyok részletesebb elemzése nélkül is meg lehet becsülni a gázzárványok várható hatását.

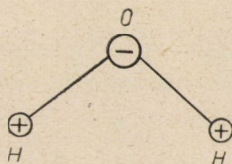
A szigetelőanyag eredő sűrűsége csökken és a zárványok az anyag szerkezetében erős egyenlőtlenségeket idéznek elő. A dielektromos állandó csökken, a szigetelési ellenállás és a veszteségi tényező gyakorlatilag nem változik, ha a térerősség nem elegendő az ütközési ionizációhoz. Ha a térerősség ezt a határt meghaladja, ρ_v csökken és $\operatorname{tg} \delta$ nő. Nagy térerősségeknél a gázréteg átüt, az anyagban belső kisülések keletkeznek. Rontja a viszonyokat, hogy

a feszültség a szigetelésben nem egyenletesen oszlik el, hanem a gázrétegre a nagy ellenállásnak és kis dielektromos állandónak megfelelően viszonylag nagyobb feszültség jut.

b) Vízzel telt üregek szigetelőanyagokban

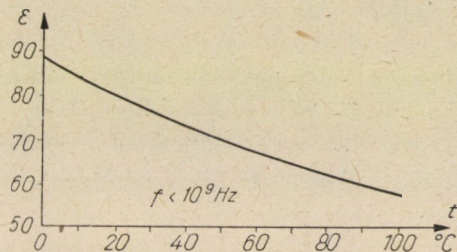
A víz *fajsúlya* nem tér el lényegesen a szilárd és folyékony szigetelőanyagok fajsúlyától, a különböző folyadékok fajsúlya 0,6 és 1,5 g/cm³, a szilárd szigetelőanyagoké 0,5 és 4 g/cm³ közötti érték [4].

A víz dielektromos tulajdonságait a vízmolekulák erősen poláros szerkezete határozza meg. A molekulák dipólnyomatéka $\mu = 1,8 \cdot 10^{-18}$ cgs egység = $0,6 \cdot 10^{-27}$ A. mpcm. A molekulák legvalószínűbb (hatásos) átmé-



2. ábra. Vízmolekula sematikus ábrázolása

rője viszonylag kicsi, $D = 2,5 \cdot 10^{-8}$ cm és így a térfogategységben levő molekulák száma nagy (20 C°-on $n = 3,27 \cdot 10^{22}$), ezért a víz *dielektromos állandója* is viszonylag nagy, szobahőmérsékleten 81 körüli érték. A víz relatív dielektromos állandójának és a hőmérsékletnek függését a 3. ábra tünteti fel [4].



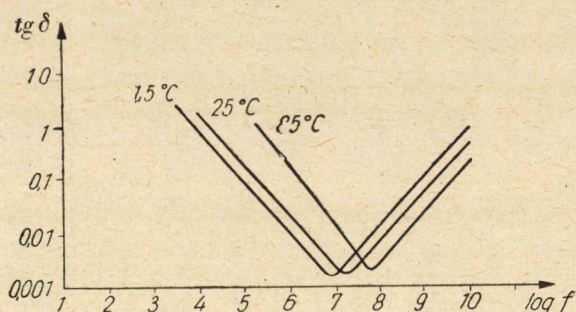
3. ábra. A víz dielektromos állandójának hőfokfüggése

A víz *vezetőképessége* ugyancsak nagy érték. A teljesen tiszta víz is jól vezet, mivel az erősen poláros vízmolekulák öndisszociációra hajlamosak, 18 C°-on $\gamma \cong 4,2 \cdot 10^{-8}$ 1/Ohm cm [8]. A víz környezetéből különböző anyagokat old, sok vegyületre disszociáló hatása van és ezekkel elektrolitot képez. A vízben nem oldódó részecskék is gyakran feltöltődnek a hidratáció következtében. Gyakorlati viszonyok között a vízben nagy számmal vannak töltéshordozók, így a vezetőképesség erősen megnő, pl. 0,07% KCl-t oldva a vezetőképesség $7,2 \cdot 10^{-3}$ 1/Ohm cm-re nő. Gondos tisztítással is nehéz

a víz vezetőképességét 10^{-5} 1/Ohm cm alá csökkenteni. Fenti értékekből kitűnik, hogy a víz a szigeteléstechika szempontjából vezetőnek tekinthető, hiszen vezetőképessége sok nagyságrenddel nagyobb, mint a szigetelőanyagok szokásos értékei.

A felületen adszorbeált nedvességréteg rendkívül erősen csökkenti a *felületi ellenállást*. A felülethez tapadó n vízmolekularéteg esetén a felület egységnyi hosszú és egységnyi széles szakaszának fajlagos ellenállása közelítőleg

$$\rho'_F \approx \rho_{H_2O} \cdot \frac{1}{D_{H_2O} n \cdot 1} \approx \frac{10^8}{4,2} \cdot \frac{1}{2,5 \cdot 10^{-8} \cdot n} \approx \frac{10^{15}}{n} \text{ Ohm.}$$



4. ábra. Veszteségi tényező frekvenciafüggése víznél

Ha a víz nem tiszta, fajlagos ellenállása 4–5 nagyságrenddel kisebb. Fenti értékek jó egyezésben vannak a tapasztalatokkal. A felületi ellenállás a nedvesedés mértékétől függően több nagyságrenddel változik [1].

A víz *veszteségi tényezője* nehezen mérhető, ezért e téren nincs még kiforrott álláspont. HIPPEL [9] szerint 60 Hz-nél a veszteségi tényező 25 C°-on 0,4, 85 C°-on 1,24-re nő. A frekvenciától való függést a 4. ábra szemlélteti. Más anyagba bekerülve a viszkozitási viszonyok megváltoznak és a minimum helye kisebb frekvenciák felé tolódik el. Az abszorpciós maximum csak egész nagy frekvenciáknál jelentkezik (5. ábra).

Elméletileg [8] 20 C°-on a veszteségi szög maximuma

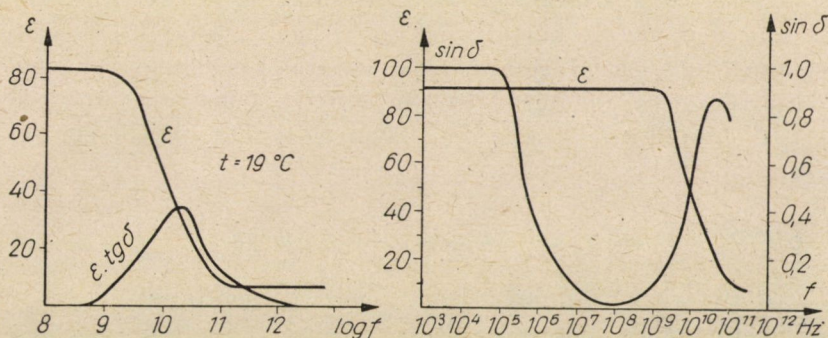
$$(\text{tg } \delta)_{\text{max}} = \frac{\varepsilon_{\text{sztat}} - \varepsilon_{\infty}}{2 \sqrt{\varepsilon_{\text{sztat}} \cdot \varepsilon_{\infty}}} = \frac{80 \cdot 3}{2 \sqrt{80 \cdot 3}} \approx 2,5$$

$$\text{és ez } f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} \sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{sztat}}}{\varepsilon_{\infty}}} = \frac{1}{2\pi \cdot 8,1 \cdot 10^{-12}} \sqrt{\frac{80}{3}} \approx 10^{11}$$

Hertz-nél következik be ($\varepsilon_{\infty} \approx 3$).

A víz átütési feszültségéről nem lehet beszélni. A nagy vezetőképességnek megfelelően jelentős áramok folynak, a térerősség növekedésével az áramsűrűség megnő, ezzel együtt nő a melegedés, ami a vezetőképesség növekedését idézi elő. Ha a melegedés eléri a 100 C° -t, erős gőzképződés indul meg és a víz felforr. Egyenfeszültségnél a vízbontás következtében indul meg gázképződés, ami a hőmérséklettől kevéssé függ.

A szigetelőanyagba került nedvesség hatását egyelőre kvalitatíve becsülve meg, a dielektromos állandó, a vezetőképesség és a veszteségi tényező növekedése, valamint az átütési feszültség csökkenése várható.



5. ábra. Dielektromos állandó frekvenciafüggése víznél

Érdemes megemlíteni, hogy a hőmérséklet növekedésével a nedvességtartalom csökken és 100 C° felett teljesen eltávozik.

c) Vezető és félvezető csatornák a szigetelőanyagban

Ilyen jellegű csatornák a szigetelőanyagok nagymérvű romlásakor keletkeznek. A félvezető, elektrolitikus és elszenesedett csatornákon kívül ide lehet sorolni azt is, mikor egyenfeszültségnél az elektródákból fémrészek válnak le.

Az anyag sűrűségváltozása ilyenkor nem jelentős, kivéve a fémcsatornák zárványokat.

A dielektromos állandó a félvezetőknél nem nagy, az elektrolitoknál és fémeknél nincs definiálva, az erőterek alakulása szempontjából olyan a hatásuk, mintha a dielektromos állandó nagy érték lenne.

Az ilyen zárványok jellemzője elsősorban vezetőképességük, mely sokkal nagyobb a szigetelőanyagokra jellemző értékeknél.

Veszteségi tényező helyett fajlagos veszteségről célszerű beszélni, mely elsősorban a vezetési áramtól függ és annál nagyobb, minél nagyobb a vezetőképesség.

Átütési feszültségről ugyancsak nem lehet szó, a zárványok hatása olyan, mintha a szigetelőanyag egy szakaszon rövidre záródott volna, az ép részek igénybevétele ennek megfelelően megnő.

A zárványok hatása nem annyira az anyagszerkezet, mint inkább a villamos tér inhomogenitásában nyilvánul meg, a dielektromos állandó kismértékű, a vezetőképesség és a veszteségi tényező erős növekedése, valamint az átütési feszültség erős csökkenése várható.

d) *Módosult tulajdonságú szilárd szigetelő tartományok a szigetelőanyagban*

A *sűrűség* és a *dielektromos anyagjellemzők* az eredeti és a módosult anyag között nem nagyon különböznek, így az anyagjellemzők erős változását a szigetelésnél nem lehet várni. Az inhomogenitások kismértékben a villamos erőtér eltorzulását és a határfelületeken töltések felhalmozódását okozzák, melyek $\text{tg } \delta$ -t növelhetik és az átütési feszültség némi csökkenését vonhatják maguk után.

e) *Szigetelő folyadékkal telt üregek szigetelőanyagokban*

Ez az eset vizsgálataink szempontjából a d) ponttal azonosnak tekinthető, külön tárgyalása nem indokolt.

Az anyagjellemzők előbb említett változásai kevésbé alkalmasak arra, hogy valamilyen szigetelőanyagnál ezek alapján megállapítsuk, hogy milyen elváltozásokat okozott a romlás. Inkább segédeszköznek tekintendő, melyek lehetőséget nyújtanak, hogy az adott szigetelőanyagnál tapasztalati úton megállapított szokásos elváltozások bekövetkeztét vagy mérvét megbecsüljük.

3. Helyettesítő áramkörök

Szokásos a szigeteléseket, az anyagban lejátszódó mikroszkópi folyamatokat makroszkópi modellel megközelítve, villamos áramkörökkel is helyettesíteni. Nem lehet elég nyomatékosan hangsúlyozni, hogy ez a tárgyalásmód csak analitikai közelítés, mely csak bizonyos korlátok között igaz és csak állandó vizsgálati körülmények (térrősség, frekvencia, hőmérséklet stb.) között alkalmazható. Ha ezek a körülmények változnak, lehet olyan villamos áramkört találni, mely az anyagjellemzők változását helyesen írja le, például a veszteségi szög frekvenciafüggését, ez azonban meglehetősen bonyolult feladat és főleg csak elméleti jelentősége van.

A viszonyok szemléltetésére szolgáljon a legegyszerűbb példa, $F = 1 \text{ cm}^2$ felületű, $d = 1 \text{ cm}$ vastag szigetelőréteget tartalmazó veszteséges síkkondenzátor. A kondenzátort soros vagy párhuzamos elemekkel lehet helyettesíteni (6b és 6c ábra).

Párhuzamos kapcsoláskor az áram

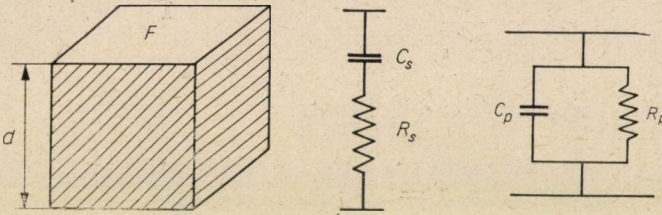
$$I = I_c + I_r = \left(j\omega C_p + \frac{1}{R_p} \right) U = Y_p \cdot U. \quad (4)$$

Célszerű bevezetni [11] az

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (5)$$

komplex dielektromos állandót, úgy definiálva, hogy $C_0 = \varepsilon_0 \frac{F}{d}$ geometriai kapacitás esetében az áram

$$I = j\omega \bar{\varepsilon} C_0 U = (j\omega \varepsilon' + \omega \varepsilon'') C_0 U \quad (6)$$



6. ábra. Helyettesítő áramkörök szigetelőanyagok tulajdonságainak leírására

és az áramsűrűség

$$G = j\omega \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} E. \quad (7)$$

Ennek a jelölésnek az az előnye, hogy lehetővé teszi a (7) képlet általánosításával a szigetelőanyagban folyó komplex áram egyszerű tárgyalását.

A (4) és (6) kifejezések szerint

$$j\omega C_p = j\omega \varepsilon C_0 = j\omega \varepsilon' C_0, \quad (8)$$

vagyis ε' a relatív dielektromos állandóval egyenlő, továbbá

$$\frac{1}{R_p} = \gamma \frac{F}{d} = \omega \varepsilon'' C_0 = \omega \varepsilon'' \varepsilon_0 \frac{F}{d} \quad (9)$$

$$\gamma = \omega \varepsilon_0 \varepsilon'', \quad (10)$$

vagyis $\varepsilon'' = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0}$ a vezetési áramra jellemző (γ a váltakozóáramú vezetőképesség).

A (8) egyenlethől továbbá kitűnik, hogy a relatív dielektromos állandó

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{C_p}{C_0}. \quad (11)$$

Mivel a veszteségi tényező megállapodásszerűen a hatásos és meddő áram viszonya

$$\operatorname{tg} \delta = \left| \frac{I_r}{I_c} \right| = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{1}{\omega R_p C_p}. \quad (12)$$

Az $\varepsilon'' = \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \delta$ szorzatot szokásos veszteségi számnak is nevezni.

Soros kapcsoláskor a vezetőképesség

$$Y = \frac{1}{R_s + \frac{1}{j\omega C_s}} = \frac{\omega^2 R_s C_s^2}{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2} + j \frac{\omega C_s}{1 + \omega^2 R_s^2 C_s^2}. \quad (13)$$

A komplex dielektromos állandót bevezetve

$$\varepsilon = \varepsilon' = \frac{C_s}{C_0 [1 + (\omega R_s C_s)^2]} \quad (14)$$

$$\varepsilon'' = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0} = \frac{\omega R_s C_s^2}{C_0 [1 + (\omega R_s C_s)^2]} \quad (15)$$

és

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \omega R_s C_s. \quad (16)$$

A párhuzamos és soros elemek közötti kapcsolatot a következő egyenletek szolgáltatják :

$$C_s = C_p (1 + \operatorname{tg}^2 \delta) \quad (17)$$

$$R_s = \frac{1}{R_p} \cdot \frac{1}{\omega^2 C_p (1 + \operatorname{tg}^2 \delta)}, \quad (18)$$

amikből

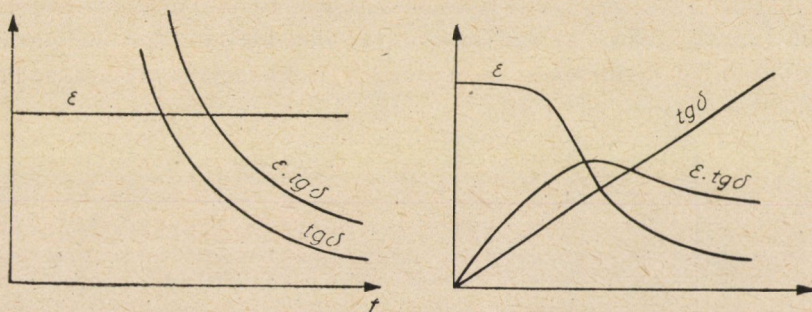
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega C_p R_p} = \omega C_s R_s. \quad (19)$$

A kétféle helyettesítés esetén a veszteségek

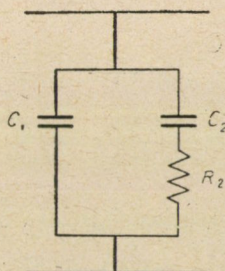
$$W = \frac{U^2}{R_p} \equiv U^2 \omega C_p \operatorname{tg} \delta = \frac{U^2}{R_s} \equiv U^2 \omega C_s \frac{\operatorname{tg} \delta}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}. \quad (20)$$

A két esetre a jellemző értékek frekvenciamenetét a 7. ábra tünteti fel.

Az ábrák egyúttal felhívják a figyelmet a helyettesítések korlátaira, hiszen ugyanazt a szigetelőanyagot lehet mindkét képpel helyettesíteni, és teljesen eltérő függvények adódnak. Adott esetben a valóságot jobban megközelítő helyettesítés alkalmazása célszerű.



7. ábra. Anyagjellemzők frekvenciafüggése párhuzamos és soros helyettesítő kapcsolásnál



8. ábra. Helyettesítő kapcsolás inhomogén szigetelőanyagra

A szigetelőanyagok vizsgálatokor használatos a 8. ábra szerinti helyettesítő kapcsolás is [9]. Ekkor a vezetőképesség

$$Y = \frac{\omega^2 C_2 \tau_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} + j \left[\omega C_1 + \frac{\omega C_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right], \quad (21)$$

ahol $\tau_2 = R_2 C_2$ a 2 ág időállandója.

A komplex dielektromos állandó komponensei $C_0 = \varepsilon_0 \frac{F}{d}$ geometriai kapacitással

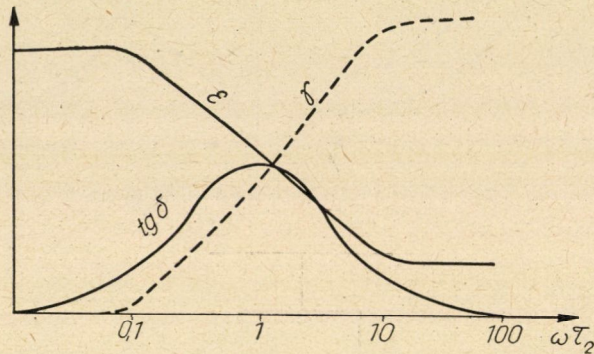
$$\varepsilon' = \frac{C_1}{C_0} + \frac{C_2}{C_0} \left(\frac{1}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \right) \quad (22)$$

$$\varepsilon'' = \frac{C_2}{C_0} \cdot \frac{\omega \tau_2}{1 + \omega^2 \tau_2^2} \quad (23)$$

és a veszteségi tényező

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\omega \tau_2}{1 + \frac{C_1}{C_2} (1 + \omega^2 \tau_2^2)} = \frac{\operatorname{tg} \delta_2}{1 + \frac{C_1}{C_2} (1 + \omega^2 \tau_2^2)}. \quad (24)$$

Ezzel a képpel szokás az erősen poláros dielektrikumokat helyettesíteni, valamint a belső kisluléceket tárgyalni. A frekvenciameneteket a 9. ábra tükrözi.



9. ábra. Anyagjellemzők frekvenciafüggése a 8. ábra szerinti kapcsolásnál

Egyenfeszültségnél $\omega = 0$, a sztatikus dielektromos állandó

$$\varepsilon_s = \frac{C_1}{C_0} + \frac{C_2}{C_0}, \quad (25)$$

nagyon nagy frekvenciáknál

$$\varepsilon_\infty = \frac{C_1}{C_0}, \quad (26)$$

amiből

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau_2^2}. \quad (27)$$

A veszteségi tényezőnek $\omega_m = \frac{1}{\tau_2} \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_\infty}}$ -nél maximuma van,

$$(\operatorname{tg} \delta)_{\max} = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{2 \sqrt{\varepsilon_s \cdot \varepsilon_\infty}}. \quad (27/a)$$

COLE és COLE [12] kimutatta, hogy a komplex dielektromos állandó két

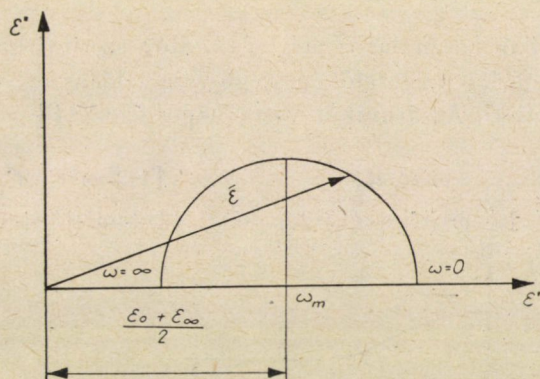
tényezője közötti összefüggést erre az esetre kördiagrammal lehet ábrázolni, mivel a (22), (23), valamint a (25)–(27) egyenletek összevonásából

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{1 + j\omega\tau_2} \quad (28)$$

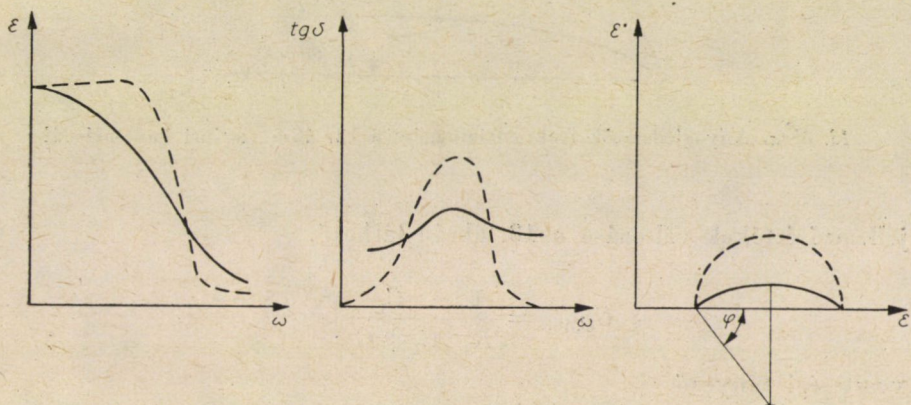
és

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty} = \bar{\varepsilon} - \varepsilon_{\infty} + j(\bar{\varepsilon} - \varepsilon_{\infty})\omega\tau_2, \quad (29)$$

ami a kör komplex egyenlete (10. ábra).



10. ábra. Cole-Cole diagram

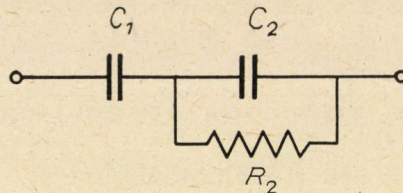


11. ábra. Valóságos és elméleti jelleggörbék viszonya

A valóságban a görbék nem ilyen kifejezettek, az eltérések jellege a 11. ábrán látható.

Javasolták, hogy a φ középponti szöghöz tartozó $a = \varphi / \frac{\pi}{2}$ tényezőt, mely a tárolt és disszipált energia arányára jellemző, tárolási tényező néven vezessék

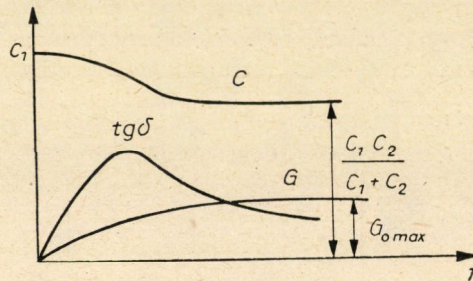
be a szigetelőanyagok vizsgálatánál. A COLE-COLE diagramok alkalmazására FIELD érdekes példákat közöl [13], a módszer gyakorlati célokra azonban túlságosan bonyolult.



12. ábra. Helyettesítő áramkör hibahely vizsgálatára

Az irodalomban használatos még a 12. ábra szerinti kapcsolás is, mely egy jó és egy gyengébb szigetelőképeségű szigetelőanyag soros kapcsolatát (pl. hibahely) fejezi ki. Az áramkör vezetőképessége [14]

$$Y = G + j\omega C = \frac{\omega^2 C_1 R_2}{1 + \omega^2 (C_1 + C_2)^2 R_2^2} + j \frac{\omega C_1 [1 + \omega^2 C_2 (C_1 + C_2) R_2^2]}{1 + \omega^2 (C_1 + C_2)^2 R_2^2}. \quad (30)$$



13. ábra. Anyagjellemzők frekvenciafüggése a 12. ábra szerinti kapcsolásnál

A jellemző értékek változása a 13. ábrán látható.

$$G_{0\max} = \frac{1}{R_2} \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)^2$$

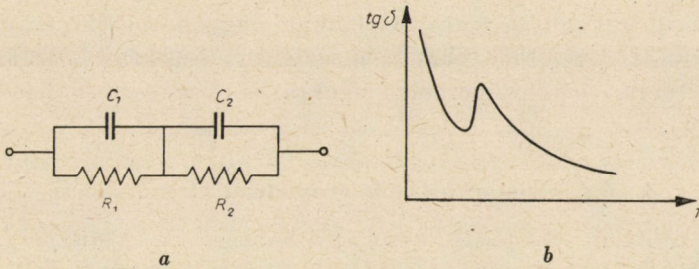
A veszteségi tényező

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{G}{\omega C} = \frac{\omega C_1 R_2}{1 + \omega^2 C_2 (C_1 + C_2) R_2^2} \quad (31)$$

és maximuma

$$(\operatorname{tg} \delta)_{\max} = \frac{C_1}{2 \sqrt{C_1 (C_1 + C_2)}}. \quad (32)$$

A feszültség és áramviszonyok részletesebb tárgyalása megtalálható KÜPF-MÜLLER könyvében [14 : 112—114. o.].

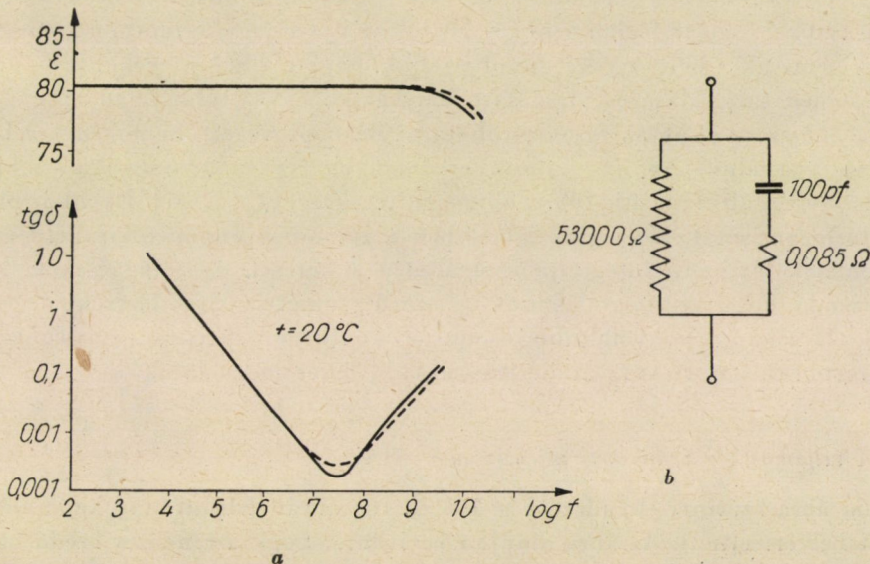


14. ábra. Kétrétegű szigetelés helyettesítő kapcsolása és veszteségi tényezőjének frekvenciafüggése

A 14a ábra szerinti kapcsolat két veszteséges réteg soros kapcsolatát jelképezi. Levezethető, hogy ebben az esetben a vezetőképesség

$$Y = \frac{(R_1 + R_2)(1 - \omega^2 R_1 C_1 R_2 C_2) + \omega^2 R_1 R_2 (C_1 + C_2)(R_1 C_1 + R_2 C_2)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 (R_1 R_2)^2 (C_1 + C_2)^2} + j\omega \frac{(R_1 + R_2)(R_1 C_1 + R_2 C_2) + (C_1 + C_2)[\omega^2 C_1 C_2 (R_1 R_2)^2 - R_1 R_2]}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 (R_1 R_2)^2 (C_1 + C_2)^2} \quad (33)$$

A veszteségi tényező változása a 14b ábrán látható.



15. ábra. Anyagjellemzők frekvenciafüggésének megközelítése helyettesítő áramkörrel víznél

Fenti relaxációs áramkörök alkalmazhatóságát illusztrálja, hogy a víz anyagjellemzőinek frekvenciamenetét (15a ábrán teljes vonal), a 15b ábrán

feltüntetett áramkörrel milyen jól meg lehet közelíteni (szaggatott vonal a 15a ábrán) [10].

Természetesen ugyanilyen karakterisztikát nagyon sokféle áramkörrel elő lehet állítani, az egyezésből tehát nem szabad messzemenő következtetéseket levonni. HIPPEL más szigetelőanyagokra is szerkesztett hasonló áramköröket [10].

4. Az inhomogenitások geometriai elrendeződése

Az 1. táblázatból kitűnik, hogy az inhomogenitások diszpergált atomok vagy molekulák is lehetnek. Az ilyen beilleszkedett részecskék jelentősen módosítják az anyagot alkotó elemi részecskék közötti belső erőtereket. Ezekről a belső erőterektől alapvetően függ az elemi részecskék viselkedése külső behatásokkal szemben, vagyis — makroszkópi fogalomhasználatlaltal — a rendszer kémiai és fizikai anyagjellemzői. A molekula-diszperz viszonyok csak a kvantummechanika módszereivel lennének tárgyalhatók, ez a tárgyalásmód azonban gyakorlati célokra még kevésbé alkalmas.

Vizsgálataink szempontjából ez nem jelent súlyos problémát. Ha a diszpergált molekulák száma kicsi, az anyagjellemzők változása nem nagy, ha a diszpergált molekulák száma nagy, akkor azt a tartományt, melyre ez fennáll, más tulajdonságú anyagnak lehet tekinteni.

A továbbiakban csak kolloidális vagy ennél nagyobb kiterjedésű inhomogenitásokkal fogunk foglalkozni ($> 10 \text{ \AA}$). Az ilyen nagyságrendű inhomogenitások nemcsak a belső tereket befolyásolják, hanem a külső tereket is módosítják, ennek tárgyalása és vizsgálata lényegesen egyszerűbb feladat.

A viszonyokat az egyszerűbb tárgyalásmód végett homogén terekben fogjuk vizsgálni. Az így kapott eredmények az elektrosztatika szokásos módszereivel általánosíthatók inhomogén terekre [14, 15, 16]. Ilyenkor olyan kis térfogatrészt kell vizsgálni, melyben a tér homogénnek tekinthető és az egyenletek térfogati integrálja szolgáltatja a keresett összefüggéseket. Megjegyzendő, hogy az integrálás csak egyszerű geometriai elrendezéseknél végezhető el, néhány bonyolultabb esetet a konform leképezés segítségével a CHRISTOFFEL—SCHWARTZ átalakítással [17] lehet megoldani.

a) *A villamos tér irányával párhuzamos rétegzés*

A 16a ábra szerinti elrendezést a 16b és 16c ábrán feltüntetett kapcsolással lehet helyettesíteni. Az ábra alapján belátható, hogy a rendszer eredő kapacitása

$$C = C_1 + C_2 \quad (34)$$

és az eredő dielektromos állandó

$$\varepsilon = x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2, \quad (35)$$

ahol

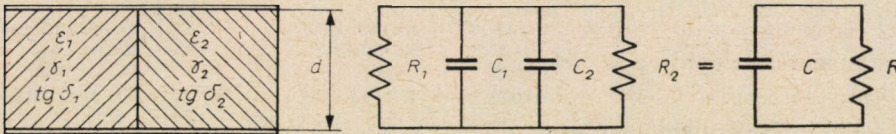
$$x = \frac{F_1 d_1}{F_1 d_1 + F_2 d_2} \quad \text{és} \quad y = \frac{F_2 d_2}{F_1 d_1 + F_2 d_2} \quad (36a, b)$$

az egyes szigetelőanyagok térfogati koncentrációja (jelen esetben $d_1 = d_2 = d$).
Hasonlóképpen az eredő ellenállás

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad (37)$$

illetve az eredő vezetőképesség

$$\gamma = x\gamma_1 + y\gamma_2. \quad (38)$$



16. ábra. A villamos térrel párhuzamos szigetelőanyagrétegek

A veszteségi tényező

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_r}{I_c} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (39)$$

A (35) és (38) egyenletek figyelembevételével (39) átalakítható a

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} x \operatorname{tg} \delta_1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} y \operatorname{tg} \delta_2 \quad (40)$$

alakra.

Az egymástól d távolságra levő elektródákra kapcsolt U feszültség hatására mindkét szigetelőrétegben

$$E = \frac{U}{d} \quad (41)$$

térerősség fog uralkodni. A két réteg egymástól függetlenül tárgyalható, a rétegekben az eltolás és a vezetési áramsűrűség már nem lesz azonos

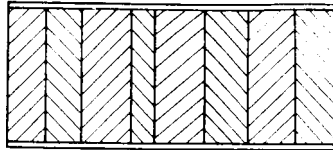
$$D_1 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E \quad \text{vagy} \quad D_2 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E \quad (42a, b)$$

és

$$G_{1v} = \gamma_1 E \quad \text{vagy} \quad G_{2v} = \gamma_2 E. \quad (43a, b)$$

A 16c ábrán feltüntetett helyettesítő kapcsolási vázlat nem tekintendő egyenértékűnek magával a rétegzett szigeteléssel, és csak gondos mérlegeléssel lehet eldönteni alkalmazhatóságának korlátait. Így például, mivel

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{R\omega C},$$

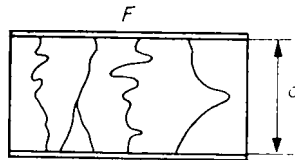


17. ábra. Egyenlőtlen eloszlású rétegek

$\operatorname{tg} \delta$ frekvencia szerinti változásának a 7a ábrát kellene követni, a valóságban pedig nem feltétlenül ez a helyzet.

Mivel a képletekben mindenütt csak a térfogati koncentrációk fordulnak elő, a kifejezések alkalmazhatók minden olyan esetben, mikor két szigetelőanyag van rétegzve, függetlenül a rétegek elrendezésétől és számától, mindaddig, míg a határfelületek az erőteret nem zavarják meg, vagyis amíg az erővonalakkal párhuzamosak.

Ezen az alapon például a 17. ábra szerinti elrendezést a 16a ábra szerintire lehet visszavezetni.



18. ábra. Kapillárisok szigetelőanyagban

A (40) képletből az a figyelemre méltó következtetés vonható le, hogy kis veszteségi tényezőjű szigetelőanyagban levő nagy veszteségi tényezőjű réteg az eredő veszteségi tényezőt nemcsak a térfogati koncentráció arányában növeli meg, hanem a dielektromos állandónak is jelentősége van. Ha például nedvességgel kitöltött csatornák vannak a szigetelőanyagban, kis y koncentrációnál is a veszteségi tényező erős növekedése várható, mivel $\frac{\epsilon_2}{\epsilon} \sim 20-30$ a víz nagy dielektromos állandója miatt.

Párhuzamos rétegekre lehet visszavezetni a szigetelőanyagokat átszelő csatornákat. Ez az eset jellemző az átmenő kapillárisokra, hajszálrepedésekre stb. (18. ábra). A csatornák száma, tényleges hossza és keresztmetsze ismeret-

len, de elvileg helyettesíthetők l hosszúságú F_2 keresztmetszetű eredő csatornával, melynek ellenállása

$$R_{cs} = \varrho_2 \frac{l}{F_2}. \quad (44)$$

Ha a csatornák térfogati koncentrációja

$$y = \frac{lF_2}{dF} \quad (45)$$

és az $\frac{l}{d}$ viszony átlagát k -val jelöljük, mely tényező a csatornák tekervényességére jellemző, (45)-ből

$$F_2 = \frac{y}{k} F \quad (46)$$

és az ellenállás

$$R_{cs} = \varrho_2 \frac{d}{F} \cdot \frac{k^2}{y}. \quad (47)$$

Egységnyi élhosszúságú szigetelőanyagkockára ($d = 1$ cm, $F = 1$ cm²)

$$r_{cs} = \varrho_2 \frac{k^2}{y}. \quad (48)$$

Ha az ép szigetelőanyag fajlagos ellenállása ϱ_1 , az egész rendszer fajlagos ellenállása kis y koncentrációknál

$$\varrho = \frac{\varrho_1 r_{cs}}{\varrho_1 + r_{cs}} = \frac{\varrho_1 \varrho_2 k^2}{\varrho_2 k^2 + \varrho_1 y}. \quad (49)$$

Ha $\varrho_2 \gg \varrho_1$, például vízzel telt kapillárisok vannak a szigetelőanyagban mikor $\varrho_1 > 10^{12}$ Ohm cm és $\varrho_2 = \varrho_{v\text{íz}} < 10^8$ Ohm cm

$$\varrho \approx \frac{\varrho_2 k^2}{y} \quad (50)$$

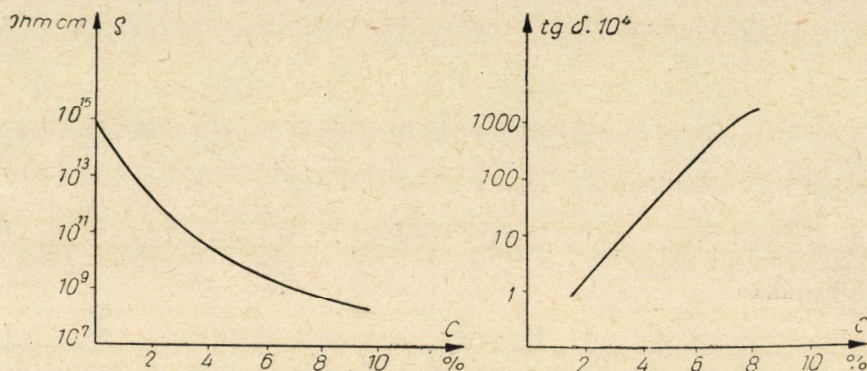
vagy a c súlykoncentrációt bevezetve

$$\varrho \approx a \frac{\varrho_2}{c}. \quad (50a)$$

Nedves papírnál a térfogati ellenállás változása a nedvességtartalom függvényében valóban megfelel az (50a) összefüggésnek, MIHAJLOV erre vonatkozó mérései a 19. ábrán láthatók [8].

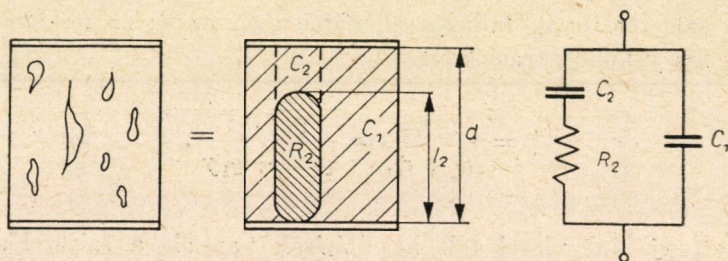
A veszteségi tényező hasonló közelítéssel

$$\operatorname{tg} \delta \approx \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_Q} \approx \frac{c}{a \omega \varepsilon_0 \varepsilon_Q^2}. \quad (51)$$



19. ábra. Anyagjellemzők változása a nedvességtartalom függvényében papírnál

Az eltéréseket avval lehet magyarázni, hogy a koncentráció növekedésével a kapillárisok megtelnek vízzel és az áramutak megrövidülnek. Az (50a) és (51) képletek nedves papír esetében $0,1 \text{ g víz/cm}^3$ nagyságrendnél jól megközelítik a valóságot [8: 125. o.].



20. ábra. Zárványok szigetelőanyagban

Párhuzamos rétegek tárgyalására lehet visszavezetni az elnyújtott, lencseszerű szennyeződések példáját is. A 20. ábra nagy vezetőképességű anyaggal (pl. nedvesség) kitöltött zárványokra vonatkozik. Mint látható, lényegében a 3. fejezetben tárgyalt 8. ábra szerinti kapcsolásra jutunk. Az ott tárgyaltak szerint $\operatorname{tg} \delta$ -nak

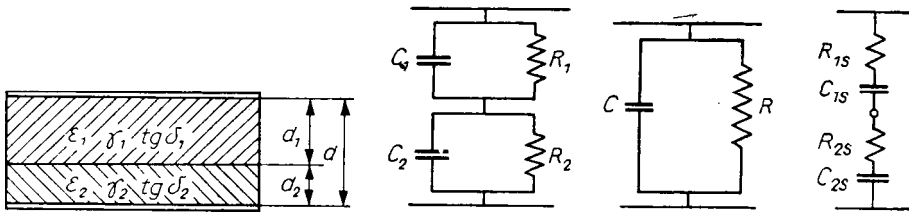
$$\omega_0 = \frac{1}{R_2 C_2} \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_1}} \quad (52)$$

frekvenciánál van maximuma. Az előzőhöz hasonló módon egységnyi térfogatra bevezetve az $\frac{l_2}{d} = h$ jelölést

$$R_2 = \delta_2 \frac{l_2}{F} = \rho_2 \frac{h^2}{y}. \quad (53)$$

Kis koncentrációknál ($y < 5-6\%$), $C_1 \approx \varepsilon_0 \varepsilon_1$ és $C_2 \approx \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 y}{h(1-h)}$ ezeket figyelembe véve (52) a következő alakra egyszerűsíthető

$$\omega_0 \approx \frac{1-h}{\rho_2 \varepsilon_1 \varepsilon_0 h^{3/2}}, \quad (54)$$



21. ábra. Villamos térre merőleges szigetelőanyag-rétegek

vagyis h növekedésével ω_0 csökken, amit kísérletileg is tapasztaltak [8].

b) A villamos térre merőleges rétegzés

Az előzőkhöz hasonló számítás alapján

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}, \quad (55)$$

illetve

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (d_1 + d_2)}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{x \varepsilon_2 + y \varepsilon_1}. \quad (56)$$

Az ellenállás

$$R = R_1 + R_2 \quad (57)$$

és

$$\gamma = \frac{\gamma_1 \gamma_2 (d_1 + d_2)}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} = \frac{\gamma_1 \gamma_2}{x \gamma_2 + y \gamma_1}. \quad (58)$$

A veszteségi tényező

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon} \quad (59)$$

és γ értékét behelyettesítve

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{\omega \varepsilon_0} \cdot \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \gamma + \varepsilon_2 x}{\gamma_1 \gamma + \gamma_2 x} = \frac{x \varepsilon_2 + \gamma \varepsilon_1}{\frac{x \varepsilon_2}{\operatorname{tg} \delta_1} + \frac{\gamma \varepsilon_1}{\operatorname{tg} \delta_2}}. \quad (60)$$

A viszonyok tárgyalására szokásos a soros helyettesítő kapcsolás alkalmazása is (21d ábra). Mivel a soros helyettesítésnél a kapacitás és ellenállás nem azonos a geometriai viszonyoknak megfelelő párhuzamos helyettesítő elemekkel (C_p , R_p), az összefüggések bonyolultabbak.

A soros helyettesítéssel a

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{C_{25} \operatorname{tg} \delta_1 + C_{15} \operatorname{tg} \delta_2}{C_{15} + C_{25}} = \frac{\varepsilon_2 x \operatorname{tg} \delta_1 + \varepsilon_1 \gamma \operatorname{tg} \delta_2}{\varepsilon_1 \gamma + \varepsilon_2 x} \quad (61)$$

kifejezés vezethető le [6 : 422—423. o.]. Ugyanakkor a dielektromos állandóra SZKANAVI az

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2) (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_1)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \delta) [x \varepsilon_2 (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2) + \gamma \varepsilon_1 (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_1)]} \quad (62)$$

egyenletet vezeti le, $\operatorname{tg}^2 \delta_1 \ll 1$ és $\operatorname{tg}^2 \delta_2 \ll 1$ esetén a (62) kifejezés az (56) egyenletbe megy át.

A párhuzamos helyettesítő kép egyszerűbben kezelhető, szemléletesebb, ezért a továbbiakban általában ezt fogjuk alkalmazni. Ahol soros helyettesítéssel kell dolgozni (pl. Schering-híd), ezt mindig külön ki fogjuk emelni.

Ismeretes módon egyenfeszültség rákapcsolásakor a kezdő pillanatban a térerősségek :

$$E_1 = U \frac{\varepsilon_2}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1}, \quad \text{illetve} \quad E_2 = U \frac{\varepsilon_1}{d_1 \varepsilon_2 + d_2 \varepsilon_1}. \quad (63a, b)$$

a stacioner állapotban pedig

$$E_1 = U \frac{\gamma_2}{d_1 \gamma_2 + d_2 \gamma_1}, \quad \text{illetve} \quad E_2 = U \frac{\gamma_1}{d_1 \gamma_2 + d_2 \gamma_1}. \quad (64a, b)$$

A két állapot közötti tranzienst folyamatosan viszonylag egyszerűen tárgyalható, az 1 rétegben a térerősség

$$E_1 = \frac{(\varepsilon_2 \gamma_1 - \gamma_2) d_2 U}{(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1) (\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1)} e^{-\frac{t}{\theta}} + \frac{\gamma_2 U}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} = \frac{U}{d_1} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[1 - \left(1 - \frac{C_2 R_2}{\theta} \right) e^{-\frac{t}{\theta}} \right] \quad (65)$$

összefüggés szerint változik, ahol az időállandó

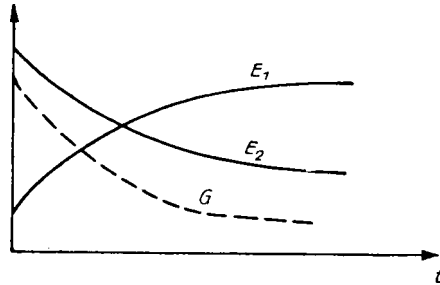
$$\theta = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1} = \frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} \quad (66)$$

és a két rétegen átfolyó áram sűrűsége

$$G = \frac{(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2)^2 d_1 d_2 U}{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)^2 (\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1)} e^{-\frac{t}{\theta}} + \frac{\gamma_1 \gamma_2 U}{\gamma_1 d_2 + \gamma_2 d_1}. \quad (67)$$

Az időbeli változásokat a 22. ábra tünteti fel.

A térátrendezéshez a határfelületen töltések halmozódnak fel, melyeket az áramsűrűség exponenciálisan csökkenő komponense szállít [(67) képlet első tagja].



22. ábra. A téreloszlás időbeli változása

Ez az úgynevezett abszorpciós áram kizárólag az inhomogenitásból ered és csak akkor nincs jelentősége, ha $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$.

Váltakozó feszültség esetében a viszonyok bonyolultabbak, a matematikai tárgyalásmódot MAXWELL és WAGNER [18] alapozták meg, ezt mások [9] továbbfejlesztették. A számítások szerint a térerősség [6, 9]

$$\begin{aligned} E_1 &= A e^{-\frac{t}{\theta}} + B e^{j\omega t} + j(A_1 e^{-\frac{t}{\theta}} + B_1 e^{j\omega t}) = \\ &= \frac{(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2) d_2 U_m}{(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1) (\bar{\gamma}_2 d_1 + \bar{\gamma}_1 d_2)} e^{-\frac{(\bar{\gamma}_2 d_1 + \bar{\gamma}_1 d_2)}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)} t} + j\omega t + \frac{\bar{\gamma}_2 U_m e^{j\omega t}}{\bar{\gamma}_1 d_2 + \bar{\gamma}_2 d_1} \end{aligned} \quad (68)$$

a képletekben

$$\bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_1 \quad \text{és} \quad \bar{\gamma}_2 = \gamma_2 + j\omega \varepsilon_0 \varepsilon_2. \quad (69a, b)$$

A térerősségek aránya stacionárius esetben

$$\frac{E_{1m \text{ stac}}}{E_{2m \text{ stac}}} = \frac{\varepsilon_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2}}{\varepsilon_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_1}} \quad (70)$$

és az áramsűrűség

$$G = \frac{(\varepsilon_2 \gamma_1 - \varepsilon_1 \gamma_2)^2 U_m d_1 d_2 e^{-t/\theta}}{(\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1)^2 (\bar{\gamma}_1 d_2 + \bar{\gamma}_2 d_1)} + \frac{\bar{\gamma}_1 \bar{\gamma}_2 U_m e^{j\omega t}}{\bar{\gamma}_1 d_2 + \bar{\gamma}_2 d_1} \quad (71)$$

Állandósult állapotban a helyettesítő kapcsolás jelöléseit alkalmazva

$$I = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2} \cdot U = \frac{1}{R_1 + R_2} \frac{(1 + j\omega\tau_1)(1 + j\omega\tau_2)}{1 + j\omega\tau} \cdot U, \quad (72)$$

ahol

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2 \quad \text{és} \quad \tau = \frac{R_1 \tau_2 + R_2 \tau_1}{R_1 + R_2}.$$

A (6) és (72) képleteket összevetve

$$\varepsilon' = \frac{\tau_1 + \tau_2 - \tau + \omega^2 \tau_1 \tau_2 \tau}{C_0 (R_1 + R_2) (1 + \omega^2 \tau)} \quad (73)^*$$

és

$$\varepsilon'' = \frac{\frac{1}{\omega} + \omega\tau_1\tau + \tau_2\tau - \tau_1\tau_2}{C_0 (R_1 + R_2) (1 + \omega^2 \tau_2)} \quad (74)$$

A frekvenciamenetben ennél a helyettesítő kapcsolásnál a sztatikus dielektromos állandó ($\omega = 0$)

$$\varepsilon_s = \frac{\tau_1 + \tau_2 - \tau}{C_0 (R_1 + R_2)} \quad (75)$$

és nagyon nagy frekvenciáknál ($\omega \rightarrow \infty$)

$$\varepsilon_\infty = \frac{\tau_1 \tau_2}{C_0 (R_1 + R_2) \tau} = \frac{1}{C_0} \cdot \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}, \quad (76)$$

amiből

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty \left[1 + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty (1 + \omega^2 \tau^2)} \right] \quad (77)$$

* HIPPEL könyvében [9] a képlet levezetése hibás.

és

$$\varepsilon'' = \varepsilon_{\infty} \frac{\tau}{\omega \tau_1 \tau_2} + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}) \omega \tau}{\varepsilon_{\infty} (1 + \omega^2 \tau^2)}. \quad (78)$$

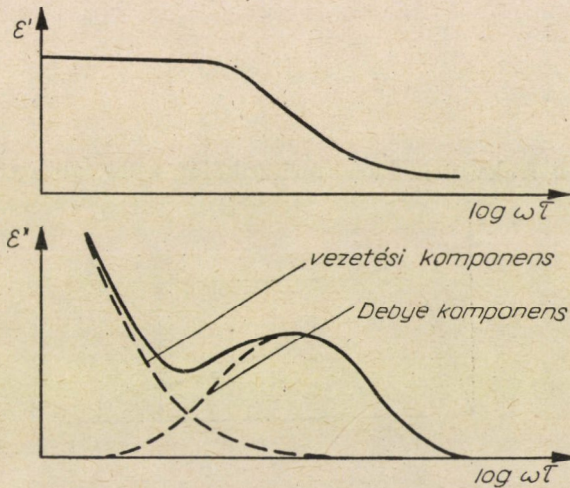
A (77) és (78) képletek összevonásával

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{\infty}}{1 + j\omega\tau} - j \frac{\gamma}{\omega}, \quad (79)$$

ahol

$$\gamma = \frac{\varepsilon_{\infty} \tau}{\tau_1 \tau_2} = \frac{1}{C_0 (R_1 + R_2)}. \quad (80)$$

A két rétegben folyó vezetési áram itt sem egyenlő, $\gamma_1 = e_1 n_1 b_1 \neq \gamma_2 = e_2 n_2 b_2$, vagyis a határfelületen töltések halmozódnak fel.



23. ábra. Relaxáció rétegzett szigetelőanyagban

A (79) egyenlet a szivárgási áramot figyelembe vevő utolsó korrekciós tagot leszámítva azonos a poláris anyagokra levezetett DEBYE-képlettel [9]. Az összefüggések szerint a rendszernek — kizárólag abból eredően, hogy rétegzett — relaxációs spektruma van (23. ábra) és a rétegzés többletveszteséget okoz. A rétegzés hatása olyan, mintha a polarizáció egy típusával állnánk szemben. Az irodalomban a polarizációnak ezt a típusát határfelületi, interfaciális polarizációnak szokás nevezni. Jelentőségéről még nincs egységes felfogás, SZKANAVI szerint [6 : 418—419. o.] semmilyen körülmények között nem okozhat többletveszteséget, HIPPEL viszont [10 : 231—232. o.] az ellenkező felfogást képviseli.

Sajnos, ezt a kérdést eddig kísérletileg eldönteni nem sikerült. Fenti matematikai analízis nem tekinthető perdöntőnek, hiszen az önkényesen felvett helyettesítő kapcsolás épp az anyagjellemzők frekvenciafüggésére nem ad feltétlenül helyes felvilágosítást. Rá kell azonban mutatni, hogy a 23. ábrán feltüntetett jelleggörbékhez hasonlókat több anyagnál mérésekkel is felvettek.

Az irodalomban néha más kifejezéseket is alkalmaznak [8 : 73—74 o.], így МИХАЙЛОВ a

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{K\omega T}{1 + K + \omega^2 T^2} \quad (81)$$

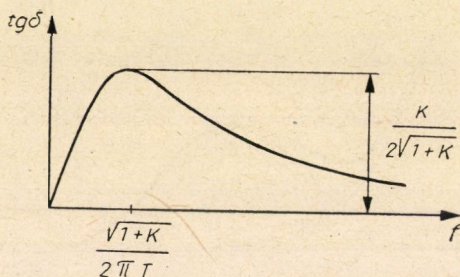
összefüggést, ahol a K követési együttható

$$K = \frac{(\varepsilon_1 \gamma_2 - \varepsilon_2 \gamma_1)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\gamma_1 + \gamma_2)^2} \quad (82)^*$$

és a T időállandó

$$T = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)}. \quad (83)$$

Ezek szerint $\operatorname{tg} \delta$ frekvencia karakterisztikáját a 24. ábra tünteti fel.



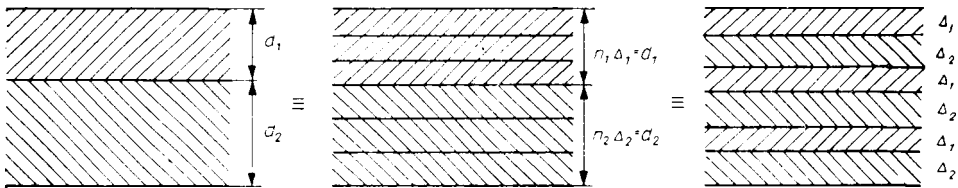
24. ábra. Veszteségi tényező frekvenciafüggése rétegzett szigetelőanyagban

Hogy ezeknek az összefüggéseknek nemcsak elméleti jelentőségük van, az alábbi példával támasztható alá. Legyen egy jól kiszáritott szigetelőréteggel ($d_1 = 1$ cm, $\varepsilon_1 = 3$, $\gamma_1 \approx 0$) egy nedves réteg ($d_2 = 1$ cm, $\varepsilon_2 = 20$, $\gamma_2 = 10^{-8}$ 1/Ohm cm) sorbakapcsolva. Ekkor $K \approx \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 0,15$ $T \approx 0,2 \cdot 10^{-3}$ és $f = 50$ Hz-nél $\operatorname{tg} \delta = 0,0002$. A maximális veszteségi tényező $f = \frac{1 + K}{2\pi T} \approx 800$ Hz-nél lesz, $(\operatorname{tg} \delta)_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{1 + K}} \approx 0,07$. Ez a kis számítás felhívja

* МИХАЙЛОВnál a képlet hibás.

a figyelmet arra, hogy a nedvességtartalmat a frekvencia függvényében felvett veszteségi tényező értékekkel is meg lehet állapítani, viszont arra is rámutat, hogy üzemi frekvencián $\operatorname{tg} \delta$ nedvesen is nagyon kis érték lehet.

A tárgyaltak az *a)* pontban említettekhez hasonlóan kiterjeszthetők olyan esetekre, melyeknél a villamos tér geometriája azonos marad. Egy ilyen leszármaztatást a 25. ábra mutat be.

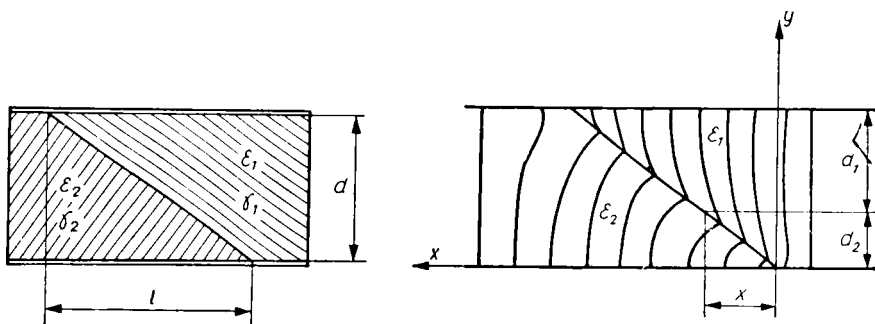


25. ábra. Többrétegű szigetelések

Ha több különböző anyagú réteg van sorbakapcsolva, a 14a ábra szerinti kapcsolást lehet megtöbbszörözni. Ilyenkor a $\operatorname{tg} \delta$ görbének több helyi maximuma lesz, általánosságban n réteg esetében a rendszernek $(n - 1)$ relaxációs ideje lesz.

c) Az erővonalakhoz képest ferde rétegek

Ha a határréteg az erővonalakhoz képest ferdén helyezkedik el, nemcsak az erőtér nagysága változik, hanem iránya is. A határfelületen a normálissal bezárt szögek tangenseinek aránya a dielektromos állandók arányával egyenlő.



26. ábra. Ferdén rétegzett szigetelés

Erre az esetre a viszonyok analitikai megoldása még nem ismeretes. A 26b ábrából látható, hogy minél nagyobb a dielektromos állandók különbsége, annál inhomogénebb a tér. A tendenciák és nagyságrendek megítéléséhez

mód nyílik, ha a határfelületet lépcsős törtfelülettel közelítjük meg. Ekkor x helyen a két réteg vastagsága

$$d_1 = d \left(1 - \frac{x}{l} \right)$$

és

$$d_2 = d \frac{x}{l}.$$

Ezzel a viszonyok közelítő tárgyalása visszavezethető az előző 4b pontra, csupán azt kell szem előtt tartani, hogy az $l \geq x \geq 0$ tartományban d_1 és d_2 változó értékek. Ezen szakaszon a teret homogén térrel közelítve meg — stacioner esetben

$$E_1 = \frac{U}{d} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \frac{x}{l} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$$

és

$$E_2 = \frac{U}{d} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \frac{x}{l} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}.$$

Az $x = 0$ helyen $E_1 = \frac{U}{d}$, $E_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{U}{d}$, $x = l$ helyen $E_1 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \frac{U}{d}$
 $E_2 = \frac{U}{d}$.

Megjegyzendő, hogy a határfelületen ekkor is töltések halmozódnak fel, a felületi töltéssűrűség azonban nem állandó, hanem a hely függvénye.

d) Homogén anyagban elosztott inhomogenitások

Az elektrosztatika hosszú ideje tárgyalt problémája a viszonyok vizsgálata inhomogenitásoknál. Ismeretes, hogy homogén térbe helyezett forgástestekben a tér homogén marad [19]. Ha a tér eredeti értéke E_0 , a forgástestben a térerősség

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1 E_0}{\varepsilon_1 - N (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}. \quad (84)$$

Az N tényező összelapított forgási ellipszoidnál

$$N = \frac{x^2}{x^2 - 1} \left[1 - \frac{\arccos \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - 1}} \right],$$

elnyújtott forgási ellipszoid esetében

$$N = \frac{x^2}{1-x^2} \left[\frac{\operatorname{ar\,ch} \frac{1}{x}}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right],$$



27. ábra. Forgástest alakú inhomogenitások szigetelőanyagban

ahol x a keresztirányú méret viszonya a térirányúhoz. N néhány értéke az alábbi táblázatban látható.

3. táblázat

x	Elnyújtott forgási ellipszoid	Összelapított forgási ellipszoid
1,0	0,33	0,33
0,9	0,31	0,36
0,8	0,28	0,39
0,7	0,24	0,44
0,6	0,21	0,48
0,5	0,17	0,53
0,4	0,13	0,59
0,3	0,094	0,66
0,2	0,056	0,75
0,1	0,021	0,84
$\rightarrow 0$	$\rightarrow x^2 \left(\log \frac{2}{x} - 1 \right)$	$\rightarrow 1 - \frac{\pi}{2x}$

Néhány jellegzetes esetre az értékek a 4. táblázatban láthatók :

4. táblázat

Hossz / vastagság	0 lemez	1 gömb	10	20	50	100	500	∞ végtelen huzal
N	1	$\frac{1}{3}$	0,0203	0,0068	0,0014	0,0004	$2,4 \cdot 10^{-5}$	0

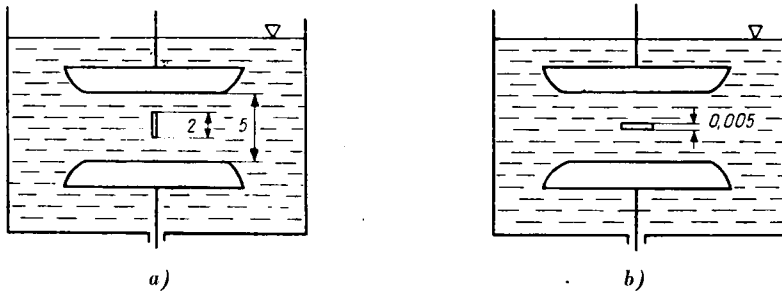
Gömb esetében (27b ábra) a legnagyobb igénybevételek a gömbfelületeken az elektródákhoz legközelebb eső pontokon [15]

$$E_2 = E_0 \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \quad (85)$$

$$E_{1 \max} = E_0 \frac{3\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1} \quad (86)$$

E_2 lehetséges legnagyobb értéke ha $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1 : 1,5 E_0$ (például nagy dielektromos állandójú szigetelőanyagban gázbuborék), $E_{1 \max}$ lehetséges legnagyobb értéke, ha $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1 : 3 E_0$ (például nagy dielektromos állandójú, vagy fémes szennyeződés).

A térerősség ilyen változásai elsősorban a belső kisülések kifejlődésével kapcsolatban lehetnek fontosak. A viszonyokat lényegesen befolyásolja az inhomogenitások elhelyezkedése a térhez képest.



28. ábra. Szálak olajban

STÄGER [20 : 290. o.] olajban az egyenpotenciálú felületekkel párhuzamos (28b ábra) és azokra merőleges (28a ábra) elhelyezkedésű szálak esetében 25 kV feszültségnél az alábbi igénybevételeket számította :

5. táblázat

Állapot	ε	28/a eset Igénybevétel kV/cm		28/b eset Igénybevétel kV/cm	
		a szálban	az olajban	a szálban	az olajban
Szálak erősen nedvesek	~ 10	16	73	50	50
Szálak levegővel tele	~ 1	73	35	50	50

Az előbbi összefüggések előfeltétele, hogy az inhomogenitások kiterjedése az elektródatávolsághoz képest kicsi. Természetes, hogy ilyenkor az inhomogenitás hatására a különböző anyagjellemzők változása is kicsi.

Az anyagjellemzők alakulását elsősorban elosztott inhomogenitásoknál és dielektrikum keverékeknél vizsgálták. A ferroelektromos anyagok vizsgálata az utóbbi időben ismét előtérbe hozta a keverékek dielektrikus állandójának kérdését. Az összefüggések meglehetősen bonyolultak, ezért e helyen csupán néhány eredmény ismertetésére szorítkozunk, megjegyezve, hogy egyes összefüggéseket a kísérletek meglepően jól alátámasztottak [6, 10].

Keverékek dielektrikus állandójának számításával már RAYLEIGH [21] foglalkozott, az ő eredményeit fejlesztette tovább WIENER [22], aki az

$$\frac{1}{\varepsilon + u} = \frac{x}{\varepsilon_1 + u} + \frac{y}{\varepsilon_2 + u} \quad (87/a)$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon + u} = \frac{x \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + u} + \frac{y \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + u} \quad (87/b)$$

általános képleteket állította fel az u formafaktor bevezetésével. Fenti egyenletekből mátrixos eloszlású zárványokat (ε_2) tartalmazó dielektrikumokra levezethető

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \left(1 + \frac{y}{\frac{x}{3} + \frac{y}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} \right) \quad (88)$$

képletét ma is használják.

A témakörben LICHTENECKER munkái [23] jelentették a következő lépéseket. Legkönnyebben két kevésbé különböző dielektrikus állandójú keverékre levezetett összefüggése használható, eszerint

$$\varepsilon^k = x \varepsilon_1^k + y \varepsilon_2^k, \quad (89)$$

ahol k állandó az elrendezéstől függ. Az erőterrel párhuzamos rétegezésnél $k = 1$ és a (89) képlet a (35) összefüggésbe megy át, merőleges rétegezésnél $k = -1$ és az (56) képletre jutunk, egyenletesen diszpergált homogén komponensek homogén eloszlásakor

$$\ln \varepsilon = x \ln \varepsilon_1 + y \ln \varepsilon_2. \quad (90)$$

A (90) képletet Parnasz [6] a komplex dielektrikus állandókra $\left(\bar{\varepsilon} = \varepsilon - j \frac{\gamma}{\varepsilon_0 \omega} \right)$ kiterjesztve a

$$\ln \gamma = x \ln \gamma_1 + y \ln \gamma_2 \quad (90/a)$$

és

$$\ln \operatorname{tg} \delta = x \ln \operatorname{tg} \delta_1 + y \ln \operatorname{tg} \delta_2 \quad (90/b)$$

vagy

$$\operatorname{tg} \delta \simeq x \operatorname{tg} \delta_1 + y \operatorname{tg} \delta_2 \quad (90/c)$$

kifejezéseket vezette le.

A számítási módszereket BRUGGEMANN, OGYELJEVSZKIJ, NIESEL és mások [24, 25, 26] továbbfejlesztették.

Kétfázisú statisztikai keverékekre OGYELJEVSZKIJ az

$$\varepsilon = \frac{(3x-1)\varepsilon_1 + (3y-1)\varepsilon_2}{4} + \sqrt{\left[\frac{(3x-1)\varepsilon_1 + (3y-1)\varepsilon_2}{4} \right]^2 + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{2}} \quad (91)$$

kifejezést állította fel.

Porózus anyagokra NIESEL $y < 0,3$ esetre

$$x = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} \quad (92)$$

összefüggést vezette le, a képlet szerinte szemcsés anyagokra, zárványokra, adalék- és itatóanyagokat tartalmazó szigetelőanyagokra is alkalmazható. Lamellás zárványokra NIESEL képlete

$$\varepsilon = \varepsilon_2 \frac{3\varepsilon_1 + 2y(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3\varepsilon_1 - y(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \quad (93)$$

A veszteségi tényező számítása keverékeknél nehezebb feladat, mint a dielektromos állandóé.

WAGNER [18, 27] a rétegezett szigetelésekre kidolgozott elméletét továbbfejlesztette, diszpergált gömbökre feltételezve, hogy a szennyező anyag koncentrációja olyan kicsi, hogy az erőteret nem torzítja el. Az eredmények természetesen nemcsak a keverési aránytól, hanem a részecskék alakjától és térirányú helyzetétől is függenek, SILLARS [28] erre vonatkozó eredményeit a 29. ábra tünteti fel.

MIHAJLOV [8] egyenletesen elosztott gömbök esetére

a

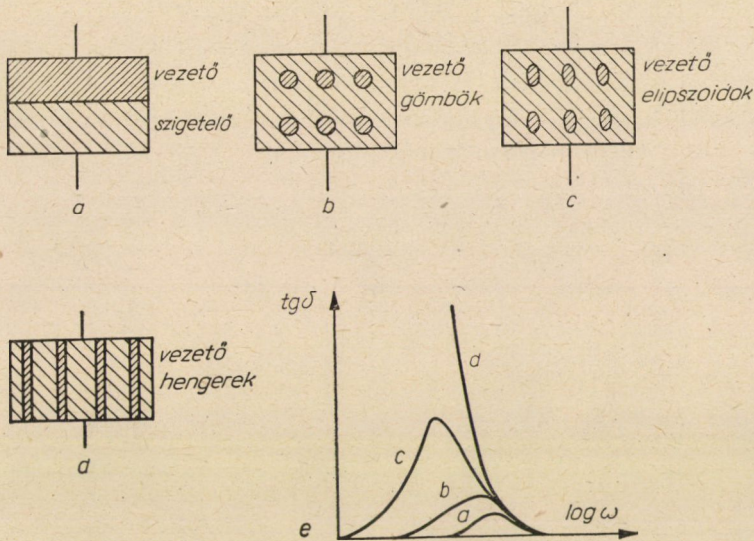
$$\operatorname{tg} \delta = \frac{K\omega T}{1 + K\omega^2 T^2} \quad (94)$$

képletet használja, ahol

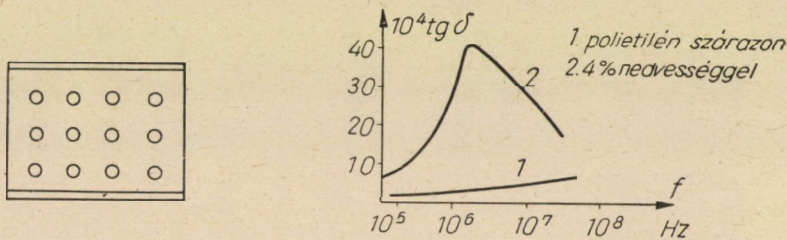
$$K = \frac{9c\varepsilon_1^2}{2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad (95)$$

$$T = \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_0\gamma_2}, \quad (96)$$

ha $\gamma_1 = 0$.



29. ábra. Elosztott vezető jellegű inhomogenitások szigetelőanyagban



30. ábra. Elosztott inhomogenitások befolyása a jelleggörbékre

Gyengén poláros dielektrikumokban lehetnek így eloszlott vízcseppek.

A (94) képlet szerint $\omega_0 \simeq \frac{1}{T}$ nél $\text{tg } \delta$ -nak maximuma van, $\text{tg } \delta_{\max} \simeq \frac{K}{2}$. Például ha $\varepsilon_1 = 2,5$, $\varepsilon_2 = 80$, $\gamma_2 = 10^{-4}$ 1/Ohm cm, akkor $T = 7,5 \cdot 10^{-8}$ mp, és $f_0 = 2 \cdot 10^6$ Hz, $K = 0,27$ c és $c = 0,04$ -nél $K \simeq 10^{-2}$, vagyis $\text{tg } \delta_{\max} \simeq 0,005$. A 30b ábrán fel van tüntetve száraz polietilén (1.

görbe) és 4% nedvességet tartalmazó polietilén (2. görbe) esetében a veszteségi tényező frekvenciafüggése, látható, hogy fenti becslés jó közelítést jelent.

KUVSINSZKIJ fenti esetre a veszteségi tényezőre a következő összefüggést vezette le:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \delta_1 + \frac{9 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \cdot \frac{y}{x} (\operatorname{tg} \delta_2 - \operatorname{tg} \delta_1)}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \left(2 + 2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \left(2 + 3 \frac{y}{x} \right) + \left(1 + 3 \frac{y}{x} \right) (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2)}. \quad (97)$$

Az elosztott inhomogenitásokkal kapcsolatban említést érdemel még RENNE [29] munkája, aki a kondenzátor papirosokat vizsgálva a következő összefüggéseket állította fel:

6. táblázat

Telítetlen papiros, az üregekben levegő	Folyadékkal itatott papiros
$\varepsilon = \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{\varrho_r} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right)}$	$\varepsilon = \frac{\varepsilon_f}{1 - \frac{\varrho}{\varrho_r} \left(1 - \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_r} \right)}$
$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \delta_r}{1 + \frac{\varepsilon_r (\varrho_r - \varrho)}{\varrho}}$	$\operatorname{tg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \delta_r}{1 + \frac{\varepsilon_r (\varrho_r - \varrho)}{\varepsilon_f \varrho}} + \frac{\operatorname{tg} \delta_f}{1 + \frac{\varepsilon_f \varrho}{\varepsilon_r (\varrho_r - \varrho)}}$
$U_k = U_{kl} \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\varrho_r}{\varrho} - 1 \right) \varepsilon_r} \right]$	$U_k = U_{kf} \left[1 + \frac{\varepsilon_f}{\left(\frac{\varrho_r}{\varrho} - 1 \right) \varepsilon_r} \right]$

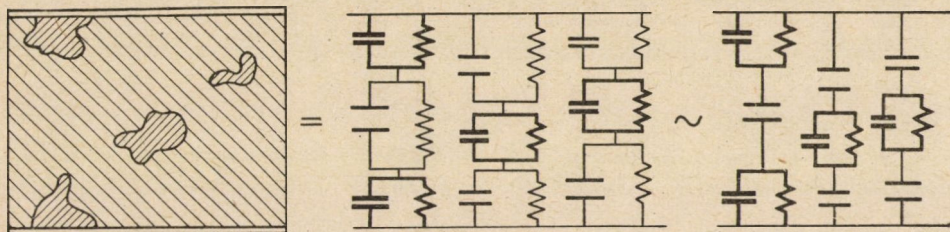
A képletekben r a papírostokra, f az itatófolyadékra utaló index, ϱ a papiros sűrűsége, ϱ_r a rostoké ($\sim 1,5 \text{ g/cm}^3$). Az átütési feszültség telítetlen állapotban a levegőre (U_{kl}), telítve a folyadékra (U_{kf}) van vonatkoztatva.

Az inhomogenitásokat legáltalánosabb esetben villamos hálózatokkal lehet helyettesíteni. Példa erre a 31. ábra.

A b ábrán a vastagabban kihúzott elemek az inhomogenitásokat helyettesítik, ha ezek vezetőképessége sokkal nagyobb, mint az alapanyagé ($\gamma_{\text{inh}} \gg \gamma_{a \sim 0}$), a c ábrán látható egyszerűbb helyettesítő vázlatához lehet jutni. Ez utóbbi esetben a vázlat alapján például az alábbi következtetéseket lehet levonni:

a) a szivárgási vezetőképesség zérus, mert nincs vezető út a két elektróda között,

b) egyenfeszültségre kapcsolva a rendszert, a feszültség a dielektromos állandók szerint oszlik el, majd az áram hatására a határfelületek feltöltőd-



31. ábra. Általános helyettesítő kapcsolás

nek. A végső állapotban az inhomogenitásokban a töltések az ellenálláson keresztül kiegyenlítődnek, ezeken nem lesz feszültség. (!)

c) Váltakozó feszültségnél a veszteségi tényező frekvenciafüggő.

IRODALOM

1. VAJDA, GY.: Szigetelőanyagok öregedése, VILENKI 207. sz. tanulmány. 1958. június.
2. EISLER, J.: Szigetelőanyagok alkalmazása. Tank. Kiadó. Bp. 1957.
3. JACKSON, W. et. al.: The insulation of electrical equipment. Chapman and Hall, London, 1954.
4. ESPE, W.: Werkstoffe der Elektrotechnik in Tabellen und Diagrammen. Ak. Verlag, Berlin, 1954.
5. VAJDA, GY.: Gázok villamos szilárdsága. MTA Műsz. Oszt. Közl. 18 (1956) 277.
6. SZKAHAVI, G. I.: A dielektrikumok fizikája. Ak. Kiadó, Bp. 1953.
7. KAPCOV, N. A.: Elektricseszkiye javlénija v gazah i vakuumje. Gosztehorizdat. Moszkva, 1950.
8. MIHAJLOV, M. M.: Elektromaterialovedenyije. Goszenergoizdat, Moszkva, 1953.
9. HIPPEL, A. R.: Dielectrics and waves. Wiley, New York, 1954.
10. HIPPEL, A. R. et al.: Dielectric materials and application. Wiley, New York, 1954.
11. GEMANT, A.: Elektrophysik der Isolierstoffe. Springer, Berlin, 1950.
12. COLE, K. S. és COLE, R. H.: J. Chem. Phys. 9. 341 (1941).
13. FIELD, R. F.: The basis for the nondestructive testing of insulation. Trans. AIEE. 60. 890 (1941).
14. KÜPFMÜLLER, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. Springer, Berlin, 1952.
15. URBANEK, J.: Bevezetés a műszaki elméleti villamosságtanba. Tank. Kiadó, Bp. 1952.
16. SIMONYI, K.: Elméleti villamosságtan. Tank. Kiadó. Bp. 1952.
17. FUKSZ, B. A., SABAT, B. V.: Komplex változás függvények és néhány alkalmazásuk. Tank. Kiadó. Bp. 1953.
18. WAGNER, K. W.: A. f. El. 2. 371 (1914).
19. POHL, R. W.: Elektrizitätslehre. Springer, Berlin, 1955.
20. STÄGER, H.: Werkstoffkunde der elektrotechnischen Isolierstoffe. Borntrager, Berlin, 1955.
21. RAYLEIGH, J. W.: Phil. Mag. 34. 481 (1892).
22. WIENER, O.: Abh. der Sächs. Ges. der Wiss. 32. 509 (1912).
23. LICHTENECKER, K.: Phys. Z. 19. 374 (1918), 25. 69, 193, 225 (1924), 27. 115, 833 (1926). 37. 906 (1936).

24. BRUGGEMANN, D. A. G. : *Ann. der Phys.* (5). 24. 636 (1935). 25. 645 (1936).
25. BÜCHNER, A., WISS, VERÖFF. Siemens-Werken. 18. 84 (1939).
26. NIESEL, W. : *Ann der Phys.* 6. 10. 336 (1952).
27. WAGNER, K. W., *J. IEE.* 64. 1152 (1926).
28. SILLARS, R. W. : *J. IEE.* 80. 378 (1937).
29. RENNE, V. T. : *Elektricseszkiye kondenzatorü. Goszenergoizdat. Moszkva.* 1947.
30. HARTSHORN, L., PARRY, J. V. L., RUSHTON, E. : *Proc. IEE.* 100. II/A. 23 (1953).

ÖSSZEFOGLALÁS

A szigetelőanyagok romlása (öregedés, szennyeződés, nedvesedés stb.) inhomogenitásuk növekedésével jár együtt. Az anyagszerkezet inhomogenitása hatással van az anyagjellemzőkre, köztük a sűrűsége és a villamos anyagjellemzőkre. Fenti paraméterek változása általában nem a szuperpozíció elvét követi, a kapcsolatok bonyolultabbak és nagyban függenek az inhomogenitások geometriai elrendeződésétől.

A tanulmányban közölt elvi összefüggések felhívják a figyelmet arra, hogy a szigetelőanyagok inhomogenitása bizonyos lehetőségeket nyújt a romlás roncsolásmentes kimutatására. Ismert jellegű inhomogenitások esetében a közöltek támpontokat nyújtanak a mérési eredmények interpretálásához is. Annak megállapítására, hogy a különböző szigetelőanyagoknál milyen mérési módszerek a legalkalmasabbak, további részletes vizsgálatok szükségesek.

KÖNYVSZEMLE

Bendefy László

SZINTEZÉSI MUNKÁLATOK MAGYARORSZÁGON. 1820—1920.

Akadémiai Kiadó, Budapest, 1958. 736 o.

15 melléklet, ára 175,— Ft

A vaskos könyvet kézbe véve önkéntelenül latolgatni kezdjük és csodálkozva kérdezzük: miként lehet erről a tárgyról ennyit írni? Ha azonban belelapozgatunk, hamarosan megállapítjuk, hogy mind a címe, mind az alcíme szerény cégér, mert kevesebbet ígér, mint amennyit a könyv ad. Nemcsak szintezésről van benne szó, hanem egyéb geodéziai műveletekről is (trigonometriai magasságmérés, háromszögelés stb.) és sok-sok oldala telt meg geológiai, geofizikai, földrajzi, történeti, oktatásügyi, nyelvészeti és egyéb kérdések tárgyalásával. A naptárt pedig nem 1820-nál ütötte fel a szerző, hanem ie. 100 körül és lényegesen tovább forgatta az 1920. esztendőnél. Mindezt azonban nem korholásnak, hanem dicséretnek szántuk. Tökéletesebb képet kapunk így a címbe említett évszázadról, nemcsak azért, mert a szak-történeti ábrázolást sokszínű rajz egészíti ki, hanem azért is, mert a képet bele tudjuk illeszteni az évszázadok sorába. Emellett gondoskodott BENDEFY arról, hogy mai szemmel is nézzünk és korszerű mértékkel mérve bírálhassunk.

Meglepően nagy a megemlített forrásmunkák mennyisége. A könyvben 1068 hivatkozási tétel van. Még ha figyelembe vesszük is, hogy ugyanarra a munkára általában többször hivatkozik, hatalmas szám ez. Jellemző a szerző nagy szorgalommal végzett munkájára. A forrásmunkáknak ilyen lelkiismeretes felsorolása lényegesen megkönnyíti a további kutatást is.

A könyv 13 fejezetre oszlik.

Az elsőnek 0 a jele és „Bevezetés” a címe. A szintezőműszerek fejlődéséről, a szintezésnek a mérnöki műveletek között kialakult helyzetéről, a magyarországi mérnöki oktatás történetéről, a régi geodéták szakmai színvonaláról, az Országos Építészeti Főigazgatóság szervezetéről és működéséről, végül a szintezés magyar műszavainak kialakulásáról tájékoztat.

Kétségtelen, hogy a szintezés fejlődése szorosan összefügg a műszerek tökéletesedésével, így a műszerek fejlődésének alapos tárgyalása nélkül a könyv csonka volna. Ez szép és érdekes tárgy feldolgozására a könyv keretében két mód választható.

Az első mód e célra külön fejezetet kíván. Ebben ismertethető lett volna a szintezőműszerek fejlődésének története az ókortól 1920-ig, vagy akár napjainkig. Hálás téma. A későbbi fejezetekben, rövid hivatkozással meg lehetett volna mondani, hogy a szóban forgó szintezést milyen műszerrel és felszereléssel végezték. Az olvasó rögtön látta volna, hogy a munkálathoz használt mérőfelszerelés korszerű volt-e, milyen pontosság volt várható attól, és könnyen mérlegelhette volna maga is az eredmény értékét.

BENDEFY a másik, a nehezebb módot választotta. Az egyes fejezetekben külön-külön ismertette az ott leírt munkálatokhoz használt szintezőfelszerelést. Ezzel a felszerelés (e fogalomba tartozónak tartjuk természetesen a szintezőműszert is) fejlődésének történetét sok apró, egymástól elválasztott részre bontotta. Nemcsak az ő munkája vált ezzel nehezebbé, hanem az olvasó is. A műszerfejlődés egyes szakaszainak eleje és vége ugyanis nem esik egybe a különböző magyarországi szintezési munkálatok kezdetével és befejezésével. Ezért az említett felbontás az áttekinthetőséget zavarja, az író pedig ismétlésekre és átnyúlásokra kényszeríti.

Így pl. az első (0) fejezet 0.01 része („A szintezőműszerek fejlődéstörténetének áttekintése”) a szintezőfelszerelés fejlődését írja le HERON dioptrájától az íves csiszolású libella megjelenéséig. Ugyanennek a fejezetnek 19 oldallal távolabb kezdődő 0,06, jelű „Szintezőműszerek a XIX. század elején hazánkban” című része PICARD 1674-ben szerkesztett szintezőműszerével kezdődik, vagyis csaknem két évszázaddal ugrik vissza, noha ezt a műszert nálunk nem használták. Lényegében ez a rész 1840-ig halad, mégis 9 oldallal tovább lapozva, a következő fejezet elején, két XVIII. századbeli műszer képét látjuk (az egyik a sárospataki ref. kollégium gyűjteményéből való). Vagy másik példa: a második fejezet „Újabb szintezőműszerek” című részében, a 174. oldalon olvasunk az 1836-ban gyártott Stampfer-féle szintezőcsavarról

és ott találjuk STAMPFER színtezőműszerének leírását is. A csavar képe azonban az 5.05 részben a 298. oldalon látható, a műszer a 299-en, a Stampfer-féle zseb-színtezőműszer pedig a 321-en.

Visszatérve az első fejezethez, meg kell említenünk, hogy 0.02 jelű részének címe (A színtezés helyzete a mérnöki tudományok között) és szövegének kezdete tévedésre adhat alkalmat. A színtezés — úgy véljük — nem tudomány, hanem geodéziai művelet. A színtezést „tudományos szinten művelni” nem lehet. Tudományos vizsgálatokkal ki lehet alakítani a legcélszerűbb színtezési eljárást, a színtezés eredményét is felhasználhatjuk különböző tudományos vizsgálatokra, de ez még nem teszi a színtezést tudománnyá.

A 47. oldal kis javításra szorul. Az alján levő első jegyzet szerint ugyanis: „VAY MIKLÓS születési évét nem ismerjük. 1824 második felében halt meg Pesten.” KAZINCZY Ferenc „Pályám emlékezetem” című naplójában azonban közli, hogy VAY Miklós 1756. szeptember 6-án született és 1824. május 11-én halt meg. (SZENT-IVÁNYI György: Ramsden magyarországi kapcsolatai. Földméréstani Közlemények, 1951.)

Egyébként az egész első (0) fejezet nagyon érdekes és tanulságos, a színtezés magyar műszavainak kialakulásával foglalkozó részt pedig külön dicséret is illeti.

A második (1. jelű) fejezet a magyarországi szabatos színtezési munkák kezdetéről szól. Ebben leírja HUSZÁR Máttyás életét és geodéziai tevékenységét. Tollának érdeme, hogy a leírás korrajzával finomult. Közli HUSZÁR 1820. évi nagyon érdekes színtezési utasítását és világosan magyarázza, helyesen bírálja. A fejezet a Körösök vidékén készült első országos jellegűnek mondható színtezési hálózatunk munkálataival záródik.

A 2. jelű fejezet a Duna menti nagy színtezést tárgyalja. Itt kerülünk közelebb HUSZÁR Máttyás nagynevű tanítványához, VÁSÁRHELYI Pálhoz. Nagyon tanulságos VÁSÁRHELYI Pál 1829. évi és az Országos Építészeti Főigazgatóság 1835-ben kiadott színtezési utasításának ismertetése.

A 3. fejezet az előbbiben olvasottnál még nagyobb és mellékkörülményei miatt nehezebb munkát tár elénk: a Tiszának és többi folyónak a színtezését. Itt találjuk az Adriai-tengerhez történt első csatlakozás leírását is. Fontosságának megfelelően foglalkozik az egységes alapszintre törekvés első látható eredményével, VÁSÁRHELYI 1843-ban készült: „Magyarország eszmérei térképe” című művével. Ismerteti WALLANDT Henriknek ezt az egységet mindjárt meg is bontó, 1862-ben kiadott „színméresi” térképét is.

Kegyeletes gondolat szülte tett volt VÁSÁRHELYI Pál és egykori kartársai sírjának a felkeresése. A Csörsz utcai régi temetőben* készült fényképek elmulkedésre készítettek.

A 4. fejezet ugyancsak változatos: 54 régi ármentesítő és belvízszabályozó társulat színtezési munkálatait ismerteti. Nem kis türelem kellett ennek az anyagnak az összegyűjtéséhez.

Az 5. fejezet az 1838. évi árvízzel kapcsolatban, majd később 1874-ig Pesten és Budán végzett színtezésekkel foglalkozik. Megismertet minket a budapesti régi épületek falán néhol még ma is látható, 120 esztendőös árvízjegyek megszületésével.

Boncolgatja a fővárosi lejtmerések alapszintjének kérdését. Ezzel kapcsolatban vizsgálja, milyen élesen irányozható meg a Lánchíd pillérére vésett mérce kezdővonalása (a Duna „lejtmereti szempontja”) és mi e vonásnak a régi budai vízmérce kezdővonalásához viszonyított magassága. Értékesen egészíti ki ezt a fejezetet a Pest (1863) és Buda (1872) színtezésére vonatkozó árajánlatok és szerződések alapjául szolgáló részletes feltételek közlése.

A 6. fejezet 26 város régi színtezésével ismerteti meg minket. Kár volt ennek a hasznos, érdekes fejezetnek tarkasága ellenére egységes képét, a legújabb olasz országos felsőrendű színtezés 1950-ből származó falitáblájának és függőmércejének a könyv tárgykörébe nem illő ábrájával (6.27 a és b) megzavarni.

Nagyon fontos a következő 7. fejezet. Az egykori bécsi Katonai Földrajzi Intézet szabatos színtezését ismerteti bíráló szóval. Részletesen leírja és szemlélteti a magasságjegyeket, a műszereket és felszerelést, valamint az utóbbiak vizsgálatát. Elmondja a mérés módszerét. Külön tanulmánynak beillenék az Osztrák-Magyar Monarchia területén létesített színtezési főalappontokkal és környezetük geológiai viszonyaival foglalkozó rész. Érdekes és színtezési hálózatunkkal való kapcsolata miatt figyelemre méltó a trieszti kikötő vízmércéinek és thalattogrófjának ismertetése.

Álapon tárgyalja a hálózat kiegyenlítését. Bírálataiban azonban ellentmondást is találunk. A 457. oldalon ugyanis ezt olvassuk: „a kész hálózatot három darabban egyenlítették ki, és a második, illetőleg harmadik rész kiegyenlítése alkalmával a már elkészült részek határán csatlakozási kényszereket alkalmaztak. Így az egyes poligonokban levő durva záróhibák nem tudtak a legmegfelelőbbben eloszlni, hanem hatásuk mindig csak a hálózat

* Vászárhelyit a régi vízivárosi temetőben temették el, ahonnan földi maradványait mintegy 30 évvel ezelőtt a németvölgyi azaz a Csörsz-utcai temetőbe vitték. (Szerk.)

egy-egy részére korlátozódott.” Ezzel szemben a 463. oldalon ezt olvassuk : „Az újabb kiegyenlítés igen tanulságos eredménnyel szolgált, amennyiben betekintést engedett az első kiegyenlítésbe bevitt durva hibák hatásába. Más szóval: láthatóvá tette, hogyan terjedtek szét ezek a durva hibák — a kiegyenlítés következtében — az egész szintezési hálózatban.”

Nemcsak hazánkban, hanem a Monarchia ún. utódállamaiban is nagy a jelentősége a bécsi katonai szintezés második, teljes kiegyenlítésének. Ezt a számítást BENEDEY kezdeményezte és irányításával a Háromszögelő Hivatal szintezői végezték el. Nagy érdeklődéssel olvastuk tanulságos eredményeit.

Szintúgy fontos a külföld számára is annak a tévhitnek az eloszlatása, hogy a Monarchia déli tartományaiban levő szintezési hálózat közzétett magassági adatai nem az eredeti Farolfi-féle alapszintre vonatkoznak, hanem attól 9 centiméterre fekvő szintfelületre.

A 8. fejezetet a századforduló táján készült szabatos vízrajzi szintezési hálózatnak szánta a szerző. A tőle megszokott alaposággal írja le a pontjelöléseket, a felszerelést, a munkát és a Vízrajzi Osztály 1889. évi szintezési utasítását is így ismerteti. A bőséges szemléltetésből talán kimaradhatott volna a 8.01b ábra.

A 9. fejezet tulajdonképpen a 7-nek a folytatása, mert a bécsi Katonai Földrajzi Intézet szintezéseinek hibaforrásait kutatja. 6—8 évtized távolában nem könnyű feladat.

Bevezetőül kitűzi a szerző a vizsgálat kettős célját: megállapítani, hogy

1. „szabatos szintezésnél melyek azok a geodéziai feltételek, amelyeknek betartása elengedhetlenül szükséges ahhoz, hogy a szintezésből olyan végeredmény kerekedjék ki, amelyet további tudományos célra teljes értékűen fel is lehet használni.”

2. „melyek azok a korábbi magyarországi szintezések, amelyeknek eredményei az említett geofizikai célszerű vizsgálatok céljára felhasználhatók.”

Az első kérdésel kapcsolatos terjedelmes vizsgálatokat BENEDEY gondosan elvégezte és leírta, de adós maradt eredményüknek összefoglalásával: a határozott rövid válasszal. Ezt az olvasónak magának kell a közölték alapján megszerkesztenie.

Nem hallgathatjuk el, hogy a vizsgálatokban sok eredeti gondolat, szellemes ötlet van. Azonban a dolog természeténél fogva valószínűleg még sok vita fog belőlük támadni. Minket meggyőz a három utolsó országos szintezés eredményének összehasonlítása. Látjuk belőle, hogy a GÁRDONYI részéről között értékkülönbségeket az első szintezésben rejlő olyan nagy hibák terhelik, hogy azok magasságkülönbségnek nem minősíthetők. A hibaforrások keresése közben azonban a refrakció jelentőségét a szerző valószínűleg kissé túlértékeli.

Nem egészen világos az 590. oldalon ez a része: „Amikor a bécsi katonai szintezés az egykori magyar—osztrák határt elérte, kb. 35—50 cm nagyságú összes hibát tartalmazott. A horvát síkságon áthaladó vonalakat is 20—25 cm-es hiba terhelte. Az alappontok névleges magassága ennyivel tért el a valóságostól. Ez a hiba a Balaton és Budapest irányában ellenkező értelmű hibák hatására lassan csökkent, majd a már említett önkényes alapszinteltolás következtében teljesen el is tűnt, a továbbiakban pedig ellenkező értéket vett fel.” Nem értjük, hogy az alapszint eltolása miként hathatott a bécsi katonai szintezés hibáira. Az is különösen hangzik, hogy a magyar határig felhalmozódott tetemes hibát hazánk területén ellenkező értelmű hibák melesik felemlesztették, hanem azután még az utóbbiak fel is halmozódtak. Ebből arra következtethetünk, hogy hazánkban viszonylag sík területén a szintezés rendkívül rossz volt.

A második kérdésre egyszerű a válasz, mert az olvasottak alapján nyilvánvaló, hogy a két világháború között létesített felsőrendű szintezési hálózatunk az első, amelyik már felhasználható elmozdulások tanulmányozására. A gondolatmenetet azonban egy mellékút kissé zavarja.

Az 507. oldalon azt olvassuk, hogy „a bécsi katonai szintezés és a Vízrajzi Osztály szintezése egymással nagyjában azonos minőségű munkálat volt.” Az 521. oldal ezt a kijelentést megerősíti, mondván, hogy a vízrajzi szintezések végeredménye hajszálnyival sem megbízhatóbb a régi bécsi szintezések eredményénél.

Az 500. oldal szerint az aldunai szintezés a Vízrajzi Osztály szintezéseinél gyengébb minőségű volt, mert: „A szintezési módszer a Vízrajzi Osztályétól eltérő volt. Két mérnök hajtotta végre ez is, két műszerrel, egymástól függetlenül, de a két észlelő ezúttal egymás nyomában, jobban mondva egymás sarkában haladt. Ezért nem nevezhető annyira szabatosnak.” Igazolja ezt az aldunai szintezések megbízhatóságával foglalkozó 10.02 rész is.

Az olvasóban tehát az a meggyőződés alakul ki, hogy az aldunai szintezés megbízhatótlanabb a bécsi katonai szintezésnél, ez utóbbiról pedig az 561. oldalon ezt olvassuk: „a bécsi Katonai Földrajzi Intézet szabatos szintezési hálózatát olyan súlyos, igen különböző eredetű mérési hibák terhelik, amelyek az ebből a szintezésből származó bécsi magassági koordinátákat mindennemű geológiai, geofizikai vagy talajmechanikai célszerű vizsgálatra teljességgel alkalmatlanná teszik.” Az 506. oldalon mégis ezt olvassuk: „Napjainkban mindinkább előtérbe kerül a Vaskapu szorosában létesítendő, hatalmas méretű duzzasztómű

megvalósításának terve. Ha ez a kolosszális vízierőmű valóban megépül, örökre elvész a lehetősége annak, hogy az Alduna szorosában létesített és fentebb felsorolt magasságjegyeket (Az 1890. évi szintezés pontjairól van szó. R.) újra szintezzék, és ezáltal tudomást szerezzünk a Déli-Kárpátoknak ezen a részén végbemenő jelenkori szerkezeti mozgások jellegéről és megközelítő nagyságáról. Ezért igen fontosnak és kívánatosnak tartom, hogy ennek az aránylag nem túl hosszú vonalnak újbóli szintezése, a régi alappontok felkutatásával és bekapcsolásával együtt mielőbb megtörténjék.”

Tévedés ne essék, hangsúlyozzuk, hogy e kisebb, könnyen áthidalható zavarok ellenére ez a fejezet nagyon érdekes és értékes. Mit sem von le ebből az a kis szépséghiba, ami lapozás közben ötlött a szemünkbe: az 532. oldalon közölt ábrát már láttuk a 411. oldalon is.

A 10. fejezet a vizrajzi szintezések alapszintkülönbségeivel, geodéziai hibáival és megbízhatóságával foglalkozik. Tulajdonképpen a 8. fejezet folytatása.

A 11. fejezet az önálló magyar országos felsőrendű szintezés megszervezésére irányuló kísérleteket ismerteti. Fontos szaktörténeti adatokat és okmánymásolatokat tartalmaz. Különösen tanulságos és e helyen is említésre méltó az a tény, hogy bár az önálló magyar felsőrendű szintezés megszervezésére irányuló próbálkozások már 1872-ben megkezdődtek, megvalósítását 1919-ben a Tanácsköztársaság pénzügyi népbiztosa rendelte el.

A 12. fejezet topográfiai térképeink magassági adatait és a nadapi alapszint kérdéseit tárgyalja. A hazánk területén trigonometriai magasságméréssel létesített magassági hálózatok munkálatainak részletes ismertetésével és tárgyilagos bírálatával sok, eddig homályos problémát világít meg.

A könyvhöz 22 oldal terjedelmű, hasznos tartalmú függelék tartozik.

Már nem egy fejezet bírálása közben tollunkra kíváncszott, de csak most vetjük papírra a könyvnek egyik nagy hasznát. Az országos egységes alapszint megteremtése, vagyis az ország területén végzett mindennemű korábbi mérésből származó magassági adatnak egy alapszintre hozatala (és ezzel természetesen a jövőben meghatározandó új adatok egységességének biztosítása is) BENEDEFYnek régi törekvése. Igyekevése a megvalósulás állapotába jutott. Az Állami Földmérési és Térképészeti Hivatal megbízásából nyolc esztendeje ténylegesen folyó szerteágazó munkát ő irányítja. Miként a könyv sok részletéből is kitűnik, ennek a népgazdasági szempontból fontos feladatnak a megoldása nem egyszerű. BENEDEFY kutatásai és könyvében közzétett eredményei a munka helyes elvégzését hathatósan elősegítik.

Az új könyvet azzal tesszük könyvszekerényünknek a gyakran forgatott művek számára fenntartott részébe, hogy állománya értékes kötettel gyarapodott.

Regőczy Emil

Dr. Széchy Károly

ALAPOZÁSI HIBÁK

Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1958. 116 oldal, 76 ábra

Az építményeken észlelhető repedések, süllyedések és egyéb elváltozások számos alkalommal oly alapozási hibákból erednek, melyek könnyűszerrel elkerülhetők lettek volna, ha azok lehetőségét és következményeit a szakközvegek előre felismerték volna. Ezért különös örömmel kell fogadnunk dr. Széchy Károly professzor könyvét, mely komoly figyelmeltetést és útmutatást jelent az alapozási munkákat tervezők és kivitelezők számára.

A könyv az ismertetendő anyagot áttekinthető csoportosításban, négy fejezetbe foglalva tárgyalja.

Az *első fejezet* oly hibákat mutat be, melyek az előkészítés és talajfelderítés elmulasztásából, vagy hiányos végrehajtásából erednek. Itt tanulságos példák kapcsán ismerteti a Budapest tözezes területein végrehajtott építkezések hibáit is. Ez a rész azért is érdekes, mert a pestihez hasonló tözezes települések majd minden nagyobb városunkban fellelhetők. A közép-korban ui. — városaink alapításakor — elődeink, kellő védelmi berendezések híján, előszere-tettel választottak letelepedési helyül mocsarakat, nádasokkal övezett területeket.

A *második fejezet* a helytelen tervezésből származó alapozási hibákkal foglalkozik. Ezek közt igen érdekesek a hídépítő gyakorlatból választott példák, de komoly figyelmet érdemelnek a magasépítési gyakorlat köréből ismertettek is.

A *harmadik és negyedik fejezet* a helytelen kivitelből származó hibákra, valamint az elemi erők okozta különféle károsodásokra mutat be tanulságos példákat. Az alapozások, főleg a mélyalapozások helyes tervezése és kivitele biztos tudáson és gazdag tapasztalatanyagon nyugvó szakismereteket, előrelátást és leleményességet kíván. A tervező és kivitelező mérnök

csak e képességek birtokában tudja felvenni a harcot az alapozási munkák során jelentkező különféle természeti erőkkal. A könyvben ismertetett példák, melyek a mély- és magasépítéssel legkülönbözőbb területeit ölelik fel, és a könyv kritikai megállapításai igen hasznos segítséget nyújthatnak ahhoz, hogy a mérnöknek a természeti erők ellen folytatott ezen harca eredményes legyen.

Áttanulmányozva az igen változatos tartalmú, gazdag ábraanyaggal kísért, izlése kiállítású könyvet, örömmel állapíthatjuk meg, hogy ezzel a magyar műszaki irodalom felette hasznos, hézagpótló művel gyarapodott. Szerző úi. helyes célkitűzéssel nemcsak az észlelt hibák leírására szorítkozik, hanem azokat értékes kritikai megjegyzésekkel kíséri és nem mulasztja el kifejtetni, hogy a felmerült hibákat az adott esetben milyen módon kerülhették volna el. Ezért munkája a magyar műszaki oktatás és mérnöktovábbképzés szempontjából is jelentős.

Mínt hogy dr. Széchy Károly professzor könyvéhez hasonló tárgyú könyv külföldön sem jelent meg, kívánatos lenne a könyvet idegen nyelven is kiadatni.

Dr. Csonka Pál

ATOMENERGIE- (TECHNIK)

A könyv az 1955. július 1—5 között Moszkvában a Szovjet Tudományos Akadémia rendezésében megtartott, az atomenergia békés felhasználásával foglalkozó értekezlet előadásait ismerteti. Az alábbiakban a III. kötetet ismertetjük, amely a műszaki felhasználásokkal foglalkozó ülés során elhangzott 18 előadást tartalmazza 380 oldalnyi terjedelemben. Az előadások egy része a radioaktív izotópok kohászati alkalmazásával, azoknak egyes fizikai és kémiai folyamatok feltárásában, néhány mérés-technikai feladat megoldásában és végül az olajbányászatban és az olajkutatásban történő alkalmazásával foglalkozik. Az egyes előadásokban bemutatott eredmények, melyeket ma már túlnyomó többségükben a tudományos kutatásban és az iparban egyaránt használnak, az alábbiakban foglalhatók röviden össze:

1. E. S. KALINIKOV, A. M. SAMARIN: Az acélöntő berendezések tűzálló falzatának befolyása az acélok nem fémes zárványtartalmára.

A kutatók célja volt, hogy a különféle tűzálló belésfajták közül a samott, a kaolin és a nagy alumíniumoxid tartalmú téglákkal bélelt csapoló esaternában és öntőüstben kísérletek révén megállapítsák az egyes falzathézagokból az acélba jutó nem fémes zárványok eredetét és mennyiségét.

2. A. I. OSSIPOV, L. A. SCHWARZMAN, W. I. INDIN, M. SASONOW: Keverési folyamatok vizsgálata SM-kemencében radioaktív izotópokkal.

Eljárás ismertetése a legkisebb mennyiségű radioaktív kobalttal (0,12—0,15 mC/t) üzem közben is kivethető minták aktivitásának meghatározása révén a fémfürdőben végbe menő keveredési, diffúziós és áramlási viszonyok tanulmányozására.

3. O. W. TRAWIN, L. A. SCHWARZMAN: Nyersvasból a $\text{CaO—Al}_2\text{O}_3$ típusú salakba történő kénátmenet kinetikája.

S 35 izotóp segítségével vizsgálták a nyersvas kéntelenedési viszonyait $\text{CaO—Al}_2\text{O}_3$ típusú salakok révén különféle hőmérsékleten a fém kén, szilícium és mangán tartalmának függvényében.

4. S. M. GNUTSCHEW, E. G. KUKLEV: Acélok nem fémes zárványainak vizsgálata radiográfiai eljárással.

Nem fémes zárványok eloszlásának kimutatása tuskókban kalciumoxid és szilikát alakú radioaktív izotópokkal. Dermédés után a tuskókat szétfűrészelték, majd ezt követően legelőször kontakt autoradiográfiai felvételekkel tanulmányozták a nem fémes zárványok eloszlását mind alsó, mind felső öntésű tuskókban.

5. AN. N. NESMEJANOW, N. F. LEBEDEV, W. I. LOSCATSCHEW, E. G. TSCHUDINOW: Fémek párolgási sebességének és diffúziós együtthatójának mérése radioaktív izotóp eljárással.

A jelentés a párolgási sebesség és az öndiffúziós koefficiens mérési módszerének leírását tartalmazza. Szerzők számításai helyességét a jelentésben leírt módon kísérletileg is igazolták.

6. A. A. SHUCHOWIZKI: Diffúziós vizsgálatok radioaktív izotópokkal.

A cikk a diffúziós együttható meghatározására szolgáló abszorpciós eljárás három különféle változatát ismerteti. Ezek egyikéhez sem szükséges az abszorpciós jellemzők meghatározása.

7. J. S. ZASLAVSKY: Olajok és tüzelőanyagok kenési tulajdonságainak vizsgálata radioaktív izotópokkal.

A dolgozat napjaink egyik legégetőbb gépipari problémáját, a rohamos gépkopás megakadályozásának kérdésével kapcsolatban a kenőanyagok minőségének jelentőségét

vizsgálja. E célra 3 LE-s 2200 ford/perc egyhengeres négyütemű kísérleti benzinmotort használt, melynek felső dugattyú gyűrűjét tették radioaktívvá. A kísérlet során az aktívvá tett olaj aktivitását mérték különféle üzemi viszonyok között. Vizsgálták a motor kopási viszonyait is az olajban alkalmazott adalék anyagok esetén is.

8. J. E. P. NADEINSKAJA: Forgácsoló szerszámok kopásvizsgálata radioaktív izotópokkal.

A radioaktívvá tett szerszám kopási termékeinek aktivitás mérése révén lehetővé válik a forgácsoló szerszámok üzem közbeni kopás ellenőrzése is. Megállapították a szerszámok kopását az idő és a forgácsolási viszonyok függvényében.

9. J. G. FAKIDOW, A. A. SAMOCHWALOW: Belső anyaghiba kimutatása γ -sugarakkal nagy acélvastagság esetén ionizációs eljárással.

A dolgozat vastag fémtárgyakban levő hibák γ -sugárzással és ionizációs kamrával történő kimutatásának módszerét ismerteti. Az eljárás előnyeként jelöli meg a nagy érzékenységet, a nagyobb vizsgálati sebességet, a folyamatos ellenőrzés lehetőségét, a röntgenfilm és egyéb fotoanyagok költségeinek megtakarítását.

10. A. M. BOGATSCHEW, B. I. WERCHOWSKI, A. N. KAMAROW: Vastagság- és sűrűség-mérés radioaktív izotópokkal.

A közlemény foglalkozik a β - és γ -sugarakkal történő abszorpciós vastagságméréssel. Elemzi a módszer hibáit és összefüggéseket állít fel a sugárforrás aktivitása és a vizsgálandó anyag abszorpciós tényezője között. Az eredmények alapján a vastagságméréshez szükséges izotópok és a sugárforrás racionális aktivitásának kiválasztása eszközölhető. Eljárás hengerelt acélok vastagságának ellenőrzésére. Berendezéseket szerkesztettek acélanyagok folyamatos vastagságmérésére 5—150 μ , 50 μ —1 mm és 2—10 mm között.

11. W. A. JANUCHOWSKI: Tapasztalatok, melyeket izotópok ipari alkalmazása során a hengerelt acélok jelölése terén szereztek.

Mivel a hidegen hengerelt acélszalag gyártási körülményei nem teszik lehetővé a hengerelt áru automatikus jelölését, sem mechanikai, sem mágneses vagy egyéb úton, kézenfekvő volt e műveletet radioaktív izotópos eljárással végezni.

12. M. A. STYRIKOVITSCH: A Szovjet Tudományos Akadémia lev. tagja: A gőzszennyeződés és a gőz-vízkeverék szerkezetének vizsgálata radioaktív izotópokkal.

A korszerű gázturbina-telepek megbízható és gazdaságos működésének előfeltétele a gőz kellő tisztasága. A gőz tisztaságát ellenőrző vizsgálati módszerek ki nem elegendő érzékenysége miatt kellett a kérdés megoldását radioaktív izotópokkal vizsgálni.

13. W. N. DACHANOW: Radioaktív eljárások az ásványi kincsek kutatása terén.

Rövid áttekintés a geológiai vizsgálati eljárások jelenlegi helyzetéről. Ezzel kapcsolatban leszögezi, hogy a radioaktív izotópokkal történő legújabb kutatómódszerek lényegesen jobb hatásokúak az eddigi eljárásokhoz viszonyítva. Részletesen ismerteti hatféle eljárást.

14. F. A. ALEXEJEV, A. P. GRUBKOW, J. E. KIRSCHFELDT: Radiometriai módszerek alkalmazási lehetőségei az olajkutatásban.

Szerzők rövid leírását adják a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának Kőolajkutató Intézetében tervezett és kivitelezett olajkutató műszernek, valamint ismertetik az ezzel végzett kőolajkutatások eredményeit.

15. A. J. CHOLIN: Olaj- és víztartalmú rétegek megkülönböztetése radioaktív eljárásokkal betétcsöves kutakban.

Béléscsovezett kutakban a rétegsorok megállapítása az utóbbi időben mindinkább fontos kérdéssé vált. A probléma leghatásosabban radioaktív eljárásokkal oldható meg. E célból a Butkin-petróleumintézet Moszkvában kidolgozott és mind laboratóriumban, mind terepen kipróbált négy különböző eljárást a rétegek olaj- vagy víztartalmának meghatározására.

16. W. K. KUKHARENKO: Neutron és Na_{24} szelvényezés az olaj-vízhatár megállapítására.

Az olaj- és víztartalmú rétegek helyzetének meghatározása és a víz-olaj érintkezések helyének megállapítása bélelt kutakban az olajmennyiség kiaknázása szempontjából jelentős kérdés. A legtöbb esetben a használatos geofizikai eljárások nem adnak egyértelmű megoldást. Az előadás új eljárást tárgyal, a neutron aktivizálási eljárást, amely lényegesen nagyobb lehetőségeket biztosít a kérdés megoldására.

17. G. N. FLEROV lev. tag. és AND F. A. ALEXEJEV: Távlati lehetőségek a radioaktív sugárzások alkalmazásai olajkutakban és olajmezők feltárása terén.

A radiometriai eljárások tág lehetőséget biztosítanak új és az olajkutatásban igen fontos problémák megoldására. Az eljárások egyrészt a víz és olaj érintkezési helyének megállapítására vonatkoznak, csövezett kutakban, továbbá a rétegbe fecskendezett víz elmozdulásának ellenőrzését, a vizsgált kútszakaszokban az olajsztint helyének meghatározását, a rétegek olajteltettségeinek kvalitatív meghatározását és végül a geológiai szakasz és a termelőkutak fizikai paramétereinek összefüggő tanulmányozását.

18. B. G. JEROSOLIMSKI, D. F. BESPALOW: Scintillációs számláló alkalmazása az olajiparban használatos radiológiai módszerekkel.

Radioaktív helymeghatározás céljából sorozatokban gyártott készülékeknel ez idő szerint GM-számlálókat használnak az olyan készülékekben is, amelyekkel a kőzetminták radioaktivitását mérik. Scintillációs számláló használata ezeken a területeken új lehetőségeket tár fel az olajipar sok problémájának megoldásában. A cikk ipari célra szolgáló kísérleti műszereket ismertet, amelyeket a Szovjetunió Tudományos Akadémiájának Olajkutató Intézete fejlesztett ki.

A bemutatott tanulmányok mind a gyakorlatban előforduló legégetőbb kérdésekre adnak elméleti és ipari megoldásokat. A mintegy három év előtt ismertetett eljárások természetesen nagymértékű fejlesztésen mentek keresztül, különösen ami a műszereket és berendezéseket illeti. Az eljárások egy része jelentősen gyarapította ismereteinket a technológiai és kohászati tudományokban. Számos kérdésben adtak elméleti magyarázatot olyan kérdésekben, melyeket más módszerekkel meg sem tudunk közelíteni, mint pl. a Siemens Martin kemencékben lejátszódó folyamatok, diffúziós jelenségek, vagy az olajkutatás példaiban. Egyes eljárások, mint amilyenek pl. a vastagságmérés — a fólia vastagságmérés kivételével — és a vastag acéltárgyak vizsgálata ionizációs kamrával, nem mutattak lényeges fejlődést, sőt az utóbbit kiszorítani látszik a kiserősségű preparátumokkal történő átvilágítás, melyhez nagyfokú erősítés folytán televíziós értékkelő berendezés csatlakozik.

Tekintve, hogy a hazai alkalmazásban az 1955-ben a Szovjetunió Tudományos Akadémiája részéről közzétett és kipróbált eljárások is csak alig nyertek bevezetést, igen jelentősnek mondható a tanulmánygyűjtemény német nyelvű megjelenése szakembereink számára.

Réti Pál

Bürgermeister, G.—Steup, H.:

STABILITÄTSTHEORIE MIT ERLÄUTERUNGEN ZU DIN 4114, TEIL I.

(Stabilitätsproblem, Spannungsproblem, Verzweigungslasten, Traglasten, Gleichgewichtsmethode, Energetische Methode, Biegedrillknickung, Kippung, Näherungsmethoden)
Akademie-Verlag, Berlin 1957, 8° alak, 407 oldal, 306 ábra. Kötve 35,50 DM (NDK)

Az építéstudomány fejlődésével párhuzamosan egyre inkább előtérbe kerülnek a régi-fajta vasos szerkezetek mellett a különféle új, könnyed szerkezetek, s ezzel egyidejűleg egyre nagyobb súllyal jelentkeznek a megszokott szilárdsági kérdések mellett a különféle újszerű stabilitási problémák. Utóbbiak megoldására az elméleti kutatások számos új módszert dolgoztak ki, de ezeknek a gyakorlatba bevezetése, főleg a feladatok megoldásával kapcsolatos matematikai nehézségek miatt, ez ideig nemigen sikerült. Ily körülmények közt határozott nyereségként kell elkönyvelnünk minden olyan törekvést, mely e hiányt pótolni, az elmélet és gyakorlat közt tatóngó űrt áthidalni igyekszik. A *Bürgermeister—Steup*-könyv ezt a célt kívánja szolgálni.

A feladat, melyre szerzők vállalkoztak, felette nehéz, hiszen a terjedelmes anyagot úgy kellett tárgyalniuk, hogy a könyvet az elméleti kutatók és a gyakorlat szakemberei egyaránt haszonnal forgathassák. E kettős cél elérését szerzők azzal óhajtották biztosítani, hogy egyrészt gondosan lefektették a különféle stabilitási problémák tárgyalásához szükséges elméleti alapokat, másrészt pedig bőséges példaanyagon mutatták meg az elmélet alkalmazási lehetőségeit.

A könyv — igen helyes pedagógiai érzékkel — a részletes tárgyalások bevezetéseként először általános tájékoztatást ad a tárgyalandó anyagról. E bevezető célja, hogy az olvasót egyes alapfogalmakkal megismertesse, a feladatokat világosan szétválassza, s ezzel a tárgyalandó problémák tömkelegében rendet teremtsen. Ezt a feladatot a bevezető fejezet szellemesen összeválogatott példaanyag keretében igen sikeresen végzi el.

A bevezető fejezet után a könyv igen részletesen, mintegy 100 oldal terjedelemben, a különféle stabilitás-feladatoknak az egyensúlyi módszerrel történő megoldását ismerteti. A rugalmasságtan legegyszerűbb kihajlás-feladataiból indul ki, s fokról fokra helyes ütemezéssel halad a bonyolultabb feladatok felé. Tárgyalásra kerül a rugalmas befogású, a rugalmas agyazású, valamint a változó nyomóerővel terhelt rúd esetén kívül a zavaró nyomatékkal terhelt nyomott rúd problémája is. Ezután áttér a központos nyomóerővel terhelt elasztikus anyagból levő rúd kihajlásának az ENGESSER—KÁRMÁN és SHANLEY-féle elmélet szerint való tárgyalására, majd pedig a központos nyomás esetét ismerteti CHWALLA, ROŠ—BRUNNER, JEŽEK vizsgálatai alapján. Végezetül szép áttekintést ad a rugalmasságtannak véges, de kis

elmozdulások esetére vonatkozó általános érvényű összefüggéseiről, s ezek birtokában az indifferens egyensúlyi állapotnak véges elmozdulások esetére vonatkozó KAPPUS-féle feltevéseiről.

Ezután áttér a stabilitás-feladatoknak energetikai módszerrel történő tárgyalására. Itt a rugalmasságtan munkatételeit, a külső és belső erők potenciáljára vonatkozó tételeket, a stabilis-, indifferens- és labilis-egyensúlyi állapot energetikai kritériumait ismerteti, majd ezen elvek alkalmazását mutatja be a szóban forgó kérdések megoldását az egyensúlyi, illetve energetikai módszer elveit, célszerű lett volna a felvetett kérdéseknek részletesebb, könnyebben követhető elemzése.

Igen sikerült, s a gyakorlat számára értékes segítséget jelent, a könyvnek a különféle közelítő módszereket ismertető fejezete. Ez a jól ismert fokozatosan közelítő eljárásokon kívül részletesen foglalkozik többek közt a RITZ- és GALERKIN-féle eljárásokkal, a differenciálegyenletek és integrálegyenletek módszerével.

Külön fejezet foglalkozik az osztott szelvényű rudakkal, különös tekintettel a DIN idevonatkozó előírására. Ez a fejezet főleg a gyakorló mérnökök igényeit kívánja kielégíteni.

Érdekes és tanulságos a könyv utolsó fejezete is, mely az egyenes tengelyű, rugalmas anyagú, rudak elcsavarodással kapcsolatos stabilitás-problémáit tárgyalja. A könyv itt egymással párhuzamosan mutatja be a szóban forgó kérdések megoldását az egyensúlyi, illetve energetikai módszerrel. E kérdések tárgyalása a szilárdságtani egyes újabb oly fejezeteinek ismertetését teszi szükségessé, melyeket főleg az orosz és szovjet szerzők (TIMOSHENKO S., VLASZOV V. Z., UMANSZKIJ A. A.) dolgoztak ki.

Értekes részét képezik a könyvnek az egyes fejezetek végén időrendi sorrendben közölt irodalmi összeállítások, valamint a könyv végén közölt számpéldák. Utóbbiak közül különös figyelemre tarthat igényt az a példa, mely folytonosan változó keresztmetszetű rúd kritikus nyomóerejének meghatározását ötféle különböző módszerrel mutatja be, s mint ilyen, felette hasznos összehasonlításokra nyújt lehetőséget.

Az elmondottakból megállapítható, hogy a Bürgermeister—Steup-féle könyv értékes, hézagpótló munka, mely az acélszerkezetek tervezésével, valamint elméleti kérdésekkel foglalkozó mérnök hasznos munkatársa lesz. Érdeklődéssel várjuk második kötetét.

Dr. Csonka Pál

PROCEEDINGS OF THE SYMPOSIUM ON „PRESTRESSED CONCRETE AS APPLIED TO BUILDINGS”, 10—12 FEBRUARY 1958, ROORKEE

A *Central Building Research Institute*, Roorkee (India) 1958 februárjában nemzetközi konferenciát tartott, mely a feszített betonszerkezetek magasépítészeti alkalmazásával foglalkozott. A konferencián az indiai szakközegen kívül számos külföldi tudós és szakember is részt vett. Az elhangzott előadások és a beküldött szakdolgozatok az *Indian Construction News* 1958. évi augusztusi számában tétettek közzé (7. évfolyam pp. 18—136). Sajnos, a szovjet tudósok részéről benyújtott három dolgozat elkésve érkezett meg, s így a folyóirat későbbi számaiban jelenhetnek csak meg.

A konferencia bevezető előadását A. N. KHOSLA (India) tartotta. Szerinte India a feszített betonszerkezetek terén a hídépítészetben már jelentős eredményeket könyvelhet el, ellenben a magasépítészet terén számos próbálkozás dacára még nem dicsekedhetik hasonló eredményekkel. H. WILLIAMS (India) szerint a feszített betonszerkezetek magasépítészeti alkalmazását több ok gátolja. A tervezők főként azért idegenkednek ezen újfajta szerkezetek alkalmazásától, mert nem ismerik eléggé számítási és tervezési elveiket, valamint a készítésükhöz szükséges berendezéseket. Nehézségek vannak a külföldről beszerezhető huzalanyag behozatala terén is. Nincsenek kellő tapasztalatok arra nézve, hogy az újfajta építésmód mennyiben gazdaságos. Akadályozza a fejlődést az általánosan elfogadott tervezési szabályok hiánya is.

A konferenciáról kiadott összefoglaló jelentés (Proceedings) az elhangzott előadásokat, valamint a beküldött szakdolgozatokat négy csoportba foglalva közli, de a viták anyagát nem hozza.

A dolgozatok első csoportja a feszített betonszerkezetek anyagaival és készítési módzataival foglalkozik. K. K. BANERJEE (India) a feszített beton előállításának sajátos indiai lehetőségeit ismertette. A részéről előadottak közül különös érdeklődésre tarthat számot a *Central Building Research Institute*, Roorkee részéről tervezett, a Magnel—Blaton-féle feszítőberendezéshez hasonló berendezés, melyet sűrített levegő működtet. Ez egyszerre két huzalt feszít meg, majd a feszítési művelet megtörténtével a huzalokat önműködően szabadítja fel.

S. K. NARAYANA (India) szállítható feszítőpadot ismertet. Ennek alkalmazásával lehetőség nyílik arra, hogy feszített épületelemek bárhol, vidéken is gyárthatók legyenek.

A tanulmányok *második* csoportja a feszített betonnak a csarnoképítészetben történő alkalmazásával foglalkozott. Ezek közt Z. ZIELINSKI (Lengyelország) dolgozata feszített betonból készített különféle rácsos tartókat ismertet. Lengyelországban e téren már jelentős eredményeket értek el. Beszámol többek közt egy 49 m feszítávolságú rácsos tartó terhelési próbájáról is. Az ismertetett eredmények azért is érdekesek számunkra, mert az ottani viszonyok sok tekintetben hasonlóak sajátos hazai viszonyainkhoz. Érdeklődésre tarthat számot N. T. PATEL et Co (India) dolgozata is. Ez részletes beszámolót ad a Trivandrum-ban épült gyűlésterem utófeszített szerkezeteinek számításáról és készítmódjáról.

A dolgozatok *harmadik* csoportja a feszített betonszerkezetek magasépítészeti alkalmazásával kapcsolatos kísérleti és elméleti megállapításokat ismertet. Ezek közül kiemelkedik Prof. R. H. EVANS (Anglia) tanulmánya az előfeszített szerkezetekben alkalmazott acélhuzalok tapadásáról. Megállapítja, hogy a huzal sima, rovátkolt vagy hullámos volta sokkal kevésbé befolyásolja a tapadást, mint az az enyhe rozsdaréteg, mely a huzal felületén magától keletkezik. Ezért a rozsdaréteget nem ajánlatos eltávolítani. Érdekes kísérleti eredményekről számol be Prof. A. M. OZELL és J. F. DINIZ (USA) is. Ők utólagos felbetonozással erősített négyszög- és T-szelvényű feszített gerendáknak ismétlődő terheléssel szemben való ellenálló-képességéről számoltak be. Szerintük az ilyen gerendák törése sosem következett be a kétféle betonrész elválása folytán. A teherbírást igen lényegesen befolyásolja a kétféle beton zsugorodásbeli különbsége, ellenben a rugalmassági tényezők különböző voltának nincs döntő jelentősége. Érdekesek TAI KRISHNA és A. S. ARYA (India) vizsgálatai is utófeszített többtámaszú folytatólagos vasbetontartókon. A vizsgálatok célja a feszítő huzalok legcélszerűbb helyének megállapítása. S. M. K. CHETTY (India) a hajlításra igénybe vett elő-, illetve utófeszített gerendák méretezéséhez egyszerűsített számító eljárást ismertet. Y. GUYON (Franciaország) emeletes keretszerkezeteken végzett modellkísérletekről s ezek tanulságairól számol be.

A tanulmányok *negyedik* csoportja a feszített szerkezetek gazdaságossági problémáit öleli fel. Ebből a csoportból különös érdeklődésre tarthat igényt Prof. T. Y. LIN és E. K. RICE (USA) tanulmánya. Ez előfeszített lemezek, fal- és födemelemek, elő- és utófeszített rácsos tartók és héjak különféle gazdaságossági problémáival foglalkozik. Külön érdekessége a tanulmánynak annak az eredetileg magyar részről javasolt eljárásnak részletes ismertetése, mely a többemeletes épület födémlemezeit egymás feletti rétegekben betonozva a terepen állítja elő, s onnan emeli fel utólag a megfelelő szintre (Lift slab-eljárás). Igen érdekes az a modellfénykép is, mely kör-alaprajzú 130 m feszítávolságú, oly csarnokot ábrázol, melyet előfeszített elemekből összeállított függőtető fed le.

Végigtekintve a konferencia anyagán, megállapítható, hogy az jelentősen hozzájárult a feszített szerkezetekre vonatkozó ismeretek fejlesztéséhez és a még fennálló bizonytalanságok kiküszöböléséhez. A konferencia egyben alkalmas volt arra is, hogy a feszített betonszerkezetek iránti érdeklődést felkeltse, s e szerkezetekkel szembeni idegenkedést eloszlassa. E tekintetben hazai vonatkozásban is sok a tennivaló, s felette kívánatos lenne itt is hasonló jellegű konferencia rendezése. Indoklásul álljanak itt FREYSINNET szavai: „A feszített szerkezetek elterjedését nem technikai jellegű okok hátráltatják. Az igazi ok az, hogy az idősebb mérnök-generáció és beosztottaik nem rendelkeznek kellő ismeretekkel a feszített szerkezetek terén, és tartózkodnak mindenféle újítástól, mely őket megszokott gondolkodásmódjuk megváltoztatására késztené.”

Dr. Csonka Pál

HELYREIGAZÍTÁS

E folyóirat XXIII. 1—2. számában megjelent K. PONOMARIOV „Álló hengeres tartályok valóságos alakváltozása” című közleményben néhány értelemzavaró hiba van, amelyeket az alábbiakban helyreigazítunk :

1. 120. oldal :

$$q_1 = 0,92 E \frac{h_1}{R} \frac{5}{2} \quad \text{helyett} \quad (5)$$

$$q_1 = 0,92 E \frac{h_1^{\frac{5}{2}}}{R} \quad (5)$$

2. (6) képlet :

$$q_{kp} = \varphi(\Omega) q \quad \text{helyett} \quad (6)$$

$$q_{kp} = \varphi(\Omega) q_1 \quad (6)$$

3. 122. o. (11) képlet :

$$M = p \cdot \max \quad \text{helyett} \quad (11)$$

$$M = p \cdot \eta \max \quad (11)$$

4. 116. o. (2) képlet :

$$\Delta = 70 + 0,25 S + 1,41 e^{0,02 S} \quad \text{helyett} \quad (2)$$

$$\Delta = 70 + 0,25 S + 1,41 e^{0,02 S} \text{ (mm-ben)} \quad (2)$$

TARTALOMJEGYZÉK

<i>Csonka Pál</i> : Rácsos kerettartók merevségi jellemzői	1
<i>Borbély Samu</i> : Hengerszimmetrikus bugák felhevítéséről. I. Hengerszimmetrikus nem-lineáris hőátadási folyamat közelítő vizsgálata a Newton-féle hőátadási feltétel alapján	7
<i>Czibere Tibor</i> : Hengerszimmetrikus bugák felhevítéséről. II. Hengerszimmetrikus nem-lineáris hővezetési folyamat közelítő vizsgálata az első peremfeltétel alapján..	23
<i>Czibere Tibor</i> : Hengerszimmetrikus bugák felhevítéséről. III. Nem-lineáris hővezetési folyamat meghatározása eléggé hosszú kör-keresztmetszetű rúdiban, a harmadik peremfeltétel alapján	33
<i>Csonka Pál</i> : Valamennyi lépcsőfokon azonosan terhelt gyámolított lépcsők fokainak hajlító igénybevétele	43
<i>Mankher Lajos</i> : Patentozott és hidegen húzott acélhuzal szakító szilárdságának megállapítása számítással	45
<i>Csonka Pál</i> : Két végén megfogott négyzetes cső csavarása	61
<i>Csonka Pál</i> : A Macaulay-féle eljárás általánosítása	65
<i>Faller Gusztáv</i> : A beszálló akna helyének kijelöléséhez szükséges adatokról.....	67
<i>Sáfrán Gusztáv</i> : Zsalurázó vibrátor használata a vasbeton építőelemek előregyártásában	97
<i>Fodor József—Varga Károly</i> : Radioaktív izotópok felhasználása a folyamatos öntés ellenőrzésére	119
<i>Hazay István</i> : A statikai koordinátakiegyenlítés végrehajtása. I. Az egyponthoz kiegyenlítés	125
<i>Hazay István</i> : A statikai koordinátakiegyenlítés végrehajtása. II. Többponthoz kiegyenlítés	157
<i>Bardócz Árpád</i> : A nagy pontosságú spektroszkópiai szikragerjesztő berendezések felépítési alapelvei és néhány alkalmazása	195
<i>Réti Pál</i> : Gömbszilikon vasöntvény minőségének ellenőrzése ultrahanggal.....	207
<i>Csóka János</i> : Belsőégésű motorok hatásfokának vizsgálata tetszőleges, időben adott hőközlés esetén	219
<i>Szilás A. Pál</i> : Gázatlan olajat termelő kutak üzemjellemzőinek meghatározása felszíni adatokból	227
<i>Fáy Csaba</i> : A Budapesti Műszaki Egyetem Vízgépek Tanszékének kavitációs anyagroncsoló berendezése	253
<i>Tárczy-Hornoch Antal</i> : A középhibaellipszis kiszámításáról egyszerű elméletésznél ...	261

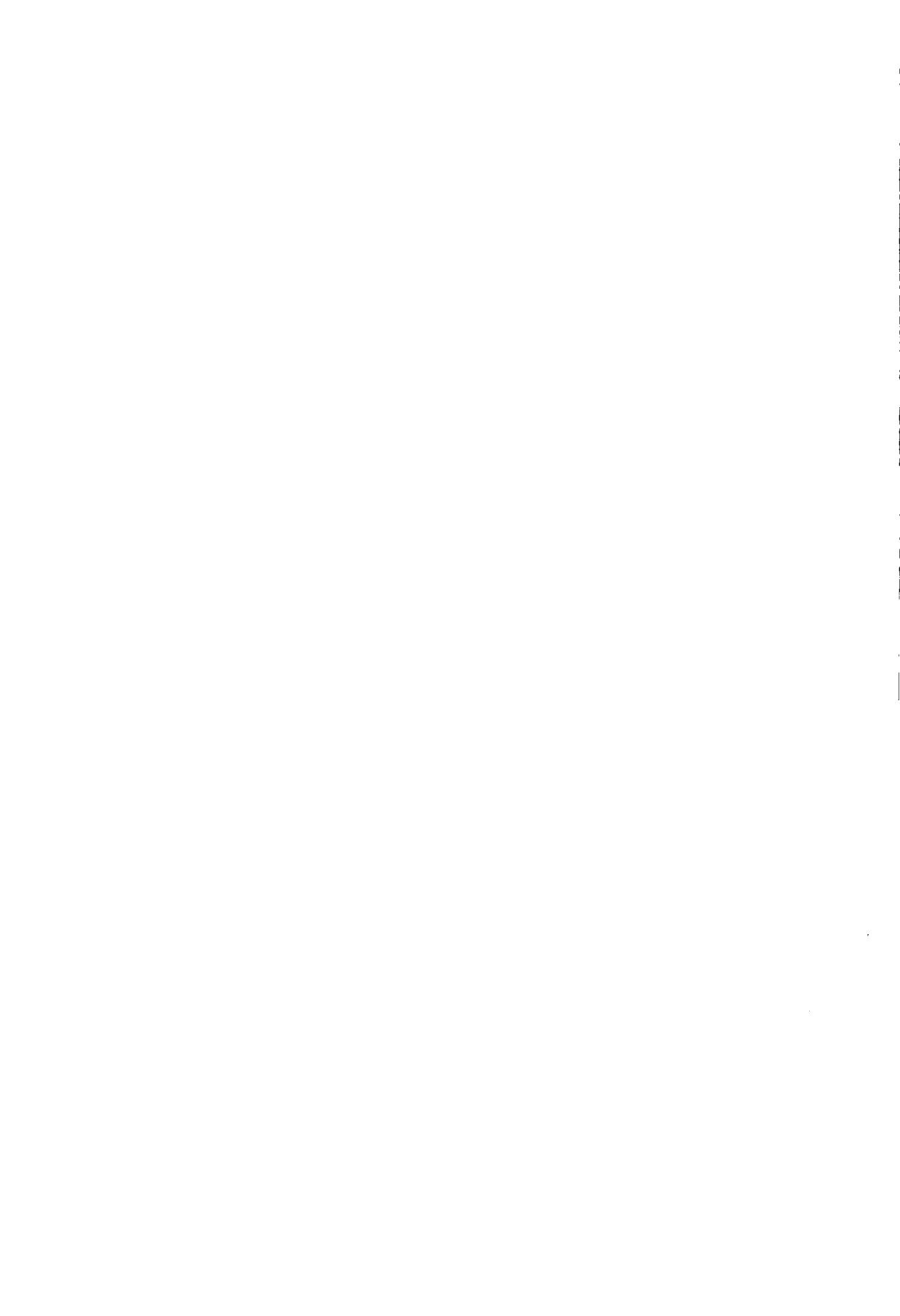
<i>Tárczy-Hornoch Antal</i> : A megmért oldalhosszú geodéziai négyszögeknek a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítéséről	291
<i>Pattantyás-Ábrahám Ádám</i> : Képletgyűjtemény sinus- és cosinus-vonal szerint változó intenzitású terheléssel terhelt derékszögű négyszög alaprajzú lemez feszültségi állapotára és alakváltozásaira	301
<i>V. Sz. Kulebakin</i> (Moszkva) : Önműködő szabályozási rendszerek minőségjavításának főfeladatai és módszerei	343
<i>M. V. Mejerov</i> (Moszkva) : Több szabályozott jellemzőjű, nagy állandósult pontosságú, többkörös rendszerek szerkezetének néhány elve	373
<i>M. V. Mejerov</i> (Moszkva) : Az állandósult pontosság korlátlan növelése mellett is stabilis, többhurkos rendszerek autonómiája	399
<i>Hoványi Lehel</i> : A kiegyenlítés szempontjából legkedvezőbb feltételi egyenlet megállapítása tiszta hossz mérési diagonális rendszerben	419
<i>Gedeon Tihamér</i> : Diaszpóros bauxitfajták feltárhatósága	439
<i>Vajda György</i> : Szigetelőanyagok inhomogenitása, mint romlásuk egyik jellemzője	453
KÖNYVSZEMLE	489
Helyreigazítás	498

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Farkas Sándor

A kézirat nyomdába érkezett: 1959. IV. 22. — Terjedelem: 43,75 (A/5) ív, 208 ábra, 1 melléklet

Akadémiai Nyomda, Budapest, V., Gerlőczy u. 2. — Felelős vezető: Bernát György



Ara : 94, - Ft