SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Közgazdasági Szemle társlapja

E SZÁM SZERZŐI:

Bródy András, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének főmunkatársa, **Éltető Ödön,** a Központi Statisztikai Hivatal mb. osztályvezetője, **Frigyes Ervin,** kandidátus, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének csoportvezetője, **Glattfelder Péter** a Nehézipari Minisztérium Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézetének tudományos, segédmunkatársa, **Meszéna György,** a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, **Schmidtné Kigyóssy Éva,** az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos segédmunkatársa, **Simon György,** kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének csoportvezetője.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor u. 7. — Telefon: 127—294
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.
A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓnál, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.
MNB egyszámlaszám: 46., csekkbefizetési számla: 05.915.111—46; az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTban, Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612; A POSTA KÖZPONTI HIRLAP IRODA 1. sz. HIRLAPBOLTJÁBAN, BUDAPEST V., József-nádor tér 1. és *bármely postahivatalban,* csekkszámlaszám: egyéni: 61 257, közületi: 61 066. MNB egyszámlaszám: 8.
Ára: 12,— Ft. Előfizetés egy évre: 40,— Ft.

Az olvasóhoz

Nehéz a dolga a matematika gazdasági alkalmazása iránt érdeklődő szakembernek, ha lépést kíván tartani e tudományterület hazai fejlődésével, ismerni akarja eredményeit. Testvérlapunk, a Közgazdasági Szemle szinte minden számában közöl ilyen tárgyú cikket, és a többi hazai, ágazati gazdálkodással foglalkozó folyóirat is megteszi a magáét. Mégis sok kutatási eredmény, szélesebb érdeklődésre számottartó gondolat lappang sokszorosított kutatási beszámolókban, vagy jelenik meg olyan idegennyelvű folyóiratban, amelyik itthon csak egy-két szakkönyvtárban lelhető fel. Az elméleti és gyakorlati eredmények szaporodása láttán hozta a Magyar Tudományos Akadémia Elnöksége azt a határozatot, amelynek nyomán a SZIGMA megszületett.

A szerkesztőbizottság és a szerkesztőség munkatársai arra törekszenek, hogy a SZIGMA alkalmas forum legyen a közgazdászok széles körének tájékoztatására. Elérhetetlen cél lenne, hogy minden cikkünk minden olvasónkhoz szóljon. De változatos, sokszínű lapot szeretnénk az olvasó kezébe adni, úgy, hogy minden számban találjon őt érdeklő anyagot. Egyes cikkek megértéséhez speciális matematikai ismeretek lehetnek szükségesek, mások csak már elterjedt, szélesebb körben ismert technikát alkalmaznak. Egyesek újszerűségét a kutatásban alkalmazott módszer biztosítja, másokét az, hogy ismert módszerekkel új közgazdasági tanulsághoz jut. Új matematikai eredményeket, módszereket is ismertetünk. Nem korlátozzuk az alkalmazási területet és a kutatás rendeltetését sem. Helyet adunk a közgazdasági elméletet matematikai eszközökkel tárgyaló dolgozatoknak, a népgazdaság egésze vagy egy-egy szférája gazdasági elemzését, tervezését, szabályozását tárgyaló írásoknak és nem kevésbé olyanoknak, amelyek a vállalati gazdálkodás kérdéseit tárgyalják. A spektrum tehát egyes matematikai diszciplínáktól kezdve a matematikai közgazdaságtanon, az ökonometrián, a praxeologián keresztül az operációkutatásig terjed.

Fogalmak és módszerek *című rovatunk matematikai és közgazdaságtudományi ismeretek terjesztésére szolgál. Ebben nem új hazai kutatási eredményeket közlünk, hanem áttekintést, ismertetést adunk egy-egy hazánkban még kevésbé ismert témáról, el nem terjedt módszerről, főképp nemzetközi irodalom alapján. Szívesen látjuk az olvasók javaslatait, kívánságait: milyen témákról szeretnének olvasni e hasábokon. Hasonló célt szolgálnak* Könyvekről *rovatunk bírálatai és ismertetései, és a* Híradó. *Ez utóbbiban tájékoztató anyagot közlünk, beszámolunk tudományos eseményekről, szervezetekről és személyekről. Szívesen vállalkoznánk olyan levelek közlésére, melyekben megoldatlan problémát vetnek fel, hogy így szakembereink és kutatóink könnyebben egymásra találhassanak.*

Bízunk abban, hogy tudományterületünk művelői java eredményeiket folyóiratunkban fogják közzétenni. Ez újabb bizonyítéka lesz annak, hogy munkásságuk a magyar tudomány fejlődését, népünk felemelkedését szolgálja.

Simon György

A népgazdasági árprogramozás dinamikus modellje[1]

Kérdésfeltevés

Az új gazdaságirányítási rendszer viszonyai között nagymértékben megnőtt az árak és általában a gazdasági emelők szerepe. Ezért rendkívül fontos, hogy a központi szervek — elsősorban az OAÁH — sokrétű és megbízható információval rendelkezzenek arra vonatkozóan: *milyen árviszonyok segíthetik elő leginkább a népgazdaság gyors és zökkenőmentes fejlődését.*

A vázolt követelménynek nem mond ellent, hogy az új mechanizmus viszonyai között az árakat csak részben határozzák meg központilag. Az állami irányítószervek ugyanis befolyásolhatják az árakat ott is, ahol szabad, vagy limitált — bizonyos korlátok közt változtatható — árak vannak. Emellett központilag kerül megállapításra s időnként felülvizsgálásra: hol lehet szabad árformákat alkalmazni. Rugalmasan kezelhetők (a korábbinál gyakrabban módosíthatók) a központilag megállapított fix árak is, a gazdaságfejlődés követelményeinek függvényében.[2]

A továbbiak megértéséhez mindenekelőtt azt kell meghatározni: *mit értünk árakon.* Ugyanis jelen cikkben a köznapinál *szélesebb értelemben* használjuk az árak fogalmát. Nemcsak a termékek és szolgáltatások pénzbeli értékeléseit nevezzük áraknak, hanem az ,,elsődleges'' erőforrások (munkaerőfajták, termelési alapok, természeti kincsek stb.) felhasználásának pénzben kifejezett értékelését, valamint a deviza-átszámítási kulcsokat, például a rubel és a dollár forintárát is. Vagyis azt is, amit a köznapi életben bérnek (munkadíjazásnak), eszközhasználati járuléknak, illetményadónak stb. neveznek, az ártípusszámításoknál pedig ártényezőnek, tisztajövedelem-elvonási módnak (,,csatornának''), nyereségnek.

Az árfogalom fentebb vázolt kiterjesztése lehetővé teszi, hogy a népgazdasági programozás duális feladatának — ha a primál feladat a szorosabb értelemben vett népgazdasági terv (*volumenterv*) — megoldását (az árnyékárakat), mint *népgazdasági ártervet* értelmezzük, s magát az eljárást *népgazdasági árprogramozás*nak nevezzük.

A népgazdasági árprogramozás egyidejűleg szolgáltatja:

- a termékek és szolgáltatások árait: árnyékárakat a modell egyes szektorainak kibocsátásaira;
- az optimális valutaszorzókat (például rubel és dollár bontásban);
- az optimális ártényezőket (az élőmunka, eszközlekötés, stb. értékelését).

[1] Az Országos Anyag- és Árhivatalban (OAÁH) 1968. májusában megvitatott tanulmány átdolgozott változata; a kutatás az MTA Közgazdaságtudományi Intézetében folyik, szerző irányításával, az OAÁH Közgazdasági Főosztályával együttműködve.

[2] Lásd például az OAÁH és más szervek képviselői által 1967. februárjában elfogadott ártervezési irányelveket.

A népgazdasági árprogramozásnál is fennáll — mint általában a matematikai programozási feladatoknál — a *komplementaritás*.[3] Az ártervvel meghatározott összefüggésben áll a volumenterv, illetve a volumentervvel az árterv. Az optimális volumentervben csak olyan tevékenységek (termelési technológiák, importok, exportok stb.) szerepelnek, amelyek árnyékáron mérve rentábilisak (nem veszteségesek), másrészt: az árnyékáron mérve nem veszteséges tevékenységek bekerülnek az optimális tervbe. A komplementaritás tehát itt azt jelenti, hogy *nem lehet ésszerű népgazdasági tervet* (volumentervet) *készíteni ésszerű árterv nélkül és fordítva.*[4]

Természetesen a népgazdasági árprogramozás mellett szükség van egyéb módszerekre is az ártervezésben. Részben azért, mert a népgazdasági árprogramozás rendkívül bonyolult feladat, amely még nem végezhető el termékmélységben. Másrészt bizonyos feltételezésekkel — pl. szakaszosan lineáris közelítés, a bizonytalanság elhanyagolása — kénytelen élni, amelyek miatt a nyert eredmények többoldalú ellenőrzést és korrigálást igényelnek.

Közgazdasági feltételezések

A népgazdaság optimális árviszonyait kívánjuk *többperiódusú, dinamikus modell*el közelíteni. E cikk az 1968—1975-ös időszakot felölelő modellel foglalkozik. A vázolt modell terészetesen hosszabb időszakra is kiterjeszthető.

A többperiódusú, dinamikus modell *alkalmazásának jelentőségét* az egyperiódusúval szemben nem nehéz belátni. Ha az árak hatnak a gazdálkodásra, akkor valamely időszak árai a későbbi időszakok eredményét is befolyásolják. Például meghatározott beruházási döntéseket segítenek vagy gátolnak, bizonyos exportpiacok bővítésére ösztönöznek, ill. nem ösztönöznek stb. A társadalomnak nem az az érdeke, hogy valamely rövid időszakban legyenek csak kedvező eredmények, a későbbi időszakok rovására, hanem hogy a gazdaságfejlődés hosszabb időszakot tekintve is kedvezően alakuljon. Vagyis *a jó árrendszernek érzékenynek kell lennie nemcsak a gazdálkodás adott feltételeire, hanem a később várható feltételekre, s az utóbbiak kialakulását kedvezően kell befolyásolnia.*

Tehát az ésszerű árrendszer jó közelítése oly modell alapján képzelhető el, amelyben *több időszak, kellő „tervezési horizont"* kerül figyelembevételre.[5] Az ily modell, ha jól szerkesztik meg, kiküszöböli az egyperiódusú modelleknek azt a problémáját, hogy bizonyos termékkészletek *zéró értékelést* (árnyékárat) kaphatnak.[6] Ugyanis, ha a készletek tárolhatók, helyettesítik a jövőbeni termelést (vagy importot), s így a többperiódusú modellben a későbbi periódusban általuk helyettesített erőforrások árnyékárösszegével értékelődnek.

A *készletkérdés* kapcsán rá kell mutatni a következőkre:

1. A matematikai programozási modelleknél általában és a többperiódusú modelleknél különösen nem kötelező feltételezni a készletnélküliséget. A programozási modell termelőegységeinek felhasználási koefficiensei az egyes termékekből (vagy szektorkibocsátásokból) tartalmazhatják a tevékenység normális folytatásához szükséges fajlagos készletszükségleteket is.

[3] Vö. (1)-gyel, (2)-vel, (3)-mal és (9)-cel.
[4] Lásd pl. (10)-ben, (6)-ban és (11)-ben.
[5] Lásd pl. (5)-öt és (7)-et.
[6] Lásd pl. (10) Függelékében.

2. A korlátozó feltételek biztonsági készleteket is előírhatnak.
3. A normális készletfajlagosok, valamint a biztonsági készletek meghatározása külön feladat, a modell többi kiinduló-adatának meghatározásával együtt. Erre a célra hagyományos tervezési módszerek vagy speciális modellek használhatók fel.
4. Az időszak elején meglevő esetleges fölös készleteket a hosszabb időszakot felölelő programozási modell felszámolhatja, megfelelően csökkentve azokat a tevékenységeket (termelést, vagy importot), amelyek kibocsátásaiból fölös készletek vannak, illetve fokozva a termékfajta felhasználását.

A többperiódusú, dinamikus modelleknél is problémát okoz (ha nem végtelen hosszú időszak ravonatkozó modellről van szó) *a gazdasági folyamatok időbeni „elvágása”*. Az egyperiódusú modellel szemben annyi e tekintetben a haladás, hogy a *többperiódusú programozás* a tervezés bázisidőszakához képest *később* vágja el a gazdasági folyamatokat, s így az első időszak (vagy időszakok) tervezéséhez viszonylag jobb alapot teremt. Döntést közvetlenül mindig csak az előttünk álló időszakra kell hozni. A programozást egy periódussal később megismételve, s időhorizontját arányosan kiterjesztve, a szóbanforgó probléma csökkenthető.

Jelentős mértékben *ellensúlyozható* a modell időhorizontjának korlátozottsága a programozás megfelelő szerkezeti felépítésével és az optimumkritérium (célfüggvény) megválasztásával is. Hogyan? Nézzük előbb a *szerkezeti felépítés* kérdését.

Tekintsük a modell valamely j szektorát. Ez esetünkben ágazat, de lehet kisebb termelőegység is. Ha a j szektor a tervidőszak elején már létezik, lekötve tart bizonyos, részben specializált erőforrásokat (munkaerőt, termelési alapokat). Ezeket az erőforrásokat nem lehet tetszőleges sebességgel átcsoportosítani más felhasználási területekre.

Tegyük fel, hogy az át nem csoportosítható erőforrásokat a szektor nem hagyja kihasználatlanul. Ezzel lényegében adva van a szektor fejlesztésének egyik lehetséges — minimális — programja a többperiódusú modell számára. A minimális programhoz tartozó összes ráfordítások és kibocsátások a modell egyetlen oszlopában felírhatók (T számú oszlop helyett, ahol T az időszakok száma).

Analóg módon kezelhető a szektor maximális (műszaki-gazdasági lehetőségek által megengedett leggyorsabb ütemű) fejlesztési tevékenysége.

Feltételezhetjük, hogy a j termelőág minimális és maximális fejlesztését jellemző két *intertemporális — több időszakot felölelő — tevékenység*[7] együttes terjedelme az alábbi összefüggésben áll egymással:

$$x_j^{\mathrm{I}} + x_j^{\mathrm{II}} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ n \text{ a szektorok száma}) \tag{1}$$

ahol x_j^{I}, x_j^{II} a j szektor tevékenységének terjedelmét jellemző szám minimális, illetve maximális fejlesztés esetén, továbbá

$$0 \leq x_j^{\mathrm{I}} \leq 1\,; \quad 0 \leq x_j^{\mathrm{II}} \leq 1\,. \tag{2}$$

Az (1) és (2) típusú feltételek beépítése a modellbe azt jelenti, hogy a programozás során *választani lehet a szektor minimális és maximális fejlesztése, illetve a két szélső eset összes nem-negatív lineáris kombinációi között.*

[7] Vö. (4)-gyel.

Valamely szektor fejlesztési változatainak száma a modellben természetesen kettőnél több is lehet. Felölelhet a fejlesztés-növekedési üteme szempontjából azonos, de a technikai felszereltség szempontjából eltérő változatokat. Továbbá olyan változatokat is, amelyek a fejlesztés üteme szempontjából eltérőek. Az 1968—1975-ös árprogramozási modellben egy-egy szektorra az alábbi négy fejlesztési változatot kívánjuk figyelembe venni:

1. Minimális fejlesztés 1968—1975-ben (beruházások csak saját forrásból — amortizációból, vállalatfejlesztési alapból — költségvetési hozzájárulás és bankkölcsön nélkül); jelölése x_j^I;
2. Maximális fejlesztés 1968—1975-ben; jelölése x_j^{II};
3. Maximális fejlesztés 1968—1975-ben (+ minimális fejlesztés 1971—1975-ben); jelölése x_j^{III};
4. Maximális fejlesztés 1971—1975-ben (minimális fejlesztés 1968—1970-ben); jelölése x_j^{IV}.

Meg kell jegyezni, hogy maximális fejlesztésen általában a hivatalos tervben előírtnál gyorsabb fejlesztést — nagyobb beruházásokat stb. — értünk.
A fenti csoportosítás nemcsak arra ad módot, hogy az egész tervidőszakot (1968—1975) figyelembe véve válasszon a programozás a minimális és maximális fejlesztés lehetséges kombinációi között, hanem hogy két periódusra (1968—1970-re, ill. 1971—1975-re) esetleg eltérő jellegű tervet alakítson ki. Például, minimális fejlesztést 68—70-re, maximálist 71—75-re, valamely szektorban.
Ezenkívül *modellünkben mástípusú — a technikai felszereltség vagy a szektorkibocsátás összetétele szempontjából eltérő* — variációk is figyelembe vehetők. Ez a szakértőkkel való konzultáció alapján döntendő el.
Négy változatot feltételezve az (1) ill. (2) összefüggés a következő lesz:

$$x_j^{\mathrm{I}} + x^{\mathrm{I}} + c_j^{\mathrm{III}} + x_j^{\mathrm{IV}} = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ n \text{ szektorok száma}) \tag{1a}$$

$$0 \leq x_j^{\mathrm{I}} \leq 1;\ 0 \leq x_j^{\mathrm{II}} \leq 1;\ 0 \leq x_j^{\mathrm{III}} \leq 1;\ 0 \leq x_j^{\mathrm{IV}} \leq 1\,. \tag{2a}$$

A modellben a szocialista külkereskedelmet és a fogyasztást szintén intertemporális változókkal szerepeltetjük.
Előbbinél abból a megfontolásból indulunk ki, hogy a forgalmat nagyrészt államközi szerződések szabályozzák, általában hosszabb lejáratra. Itt is legalább négy fejlesztési változat alakítandó ki: *a)* minimális fejlesztés 68—75-ben (már megkötött export-import szerződések konzekvenciái); *b)* maximális fejlesztés 68—75-ben; *c)* maximális fejlesztés 68—70-ben, s minimális 71—75-ben; *d)* maximális fejlesztés 71—75-ben, s minimális 68—70-ben. A négy változatra az (1a), illetve (2a) típusú feltételek vonatkoznak. Kialakíthatók persze egyéb változatok is, például a könnyűipari export maximális növelését feltételezve.
A fogyasztást ugyancsak több változó képviseli a modellben. Az egyik (y^I) a hivatalos tervben előírt fogyasztásnövekedési ütemet reprezentálja. Egy másik (y^{II}) a maximálisan lehetséges fogyasztásnövekedési ütemet. E két fogyasztási változó oszlopának összeállításánál a tervidőszakra előirányzott fogyasztói árak melletti fogyasztói keresletszerkezettel számolunk. Terjedelmüket — a többi fogyasztási változóval együtt — (1), ill. (2) típusú feltételekkel korlátozzuk, ami azt jelenti, hogy *a népgazdasági árprogramozás biztosítja legalább a hivatalos tervben előirányzott fogyasztásnövekedést.*

A modellben figyelembe veendők más fogyasztási változók is. Például olyan fogyasztási keresletszerkezet, amely az előzetesen tervezettől eltérő fogyasztói árak esetén alakulna ki, alacsonyabb tartós fogyasztási cikkárak, magasabb élelmiszerárak mellett.

Az utóbbi típusú fogyasztási változó aszerint is variálható, hogy a gyökeres fogyasztói árrendezést az első (68—70-es) vagy második (71—75-ös) periódusban hajtják végre. Ily módon további intertemporális fogyasztási változókhoz jutunk: hivatalos, ill. maximális fogyasztásnövekedés 68—75-ben, az első periódusban végrehajtott fogyasztói árrendezéssel (y^{III}, y^{IV}), illetve a második periódusban végrehajtott fogyasztói árrendezéssel (y^{V}, y^{VI}).

A népgazdasági árprogramozás a felsorolt fogyasztásszerkezeti variánsok közül válogatva bizonyos értelemben — bár nem teljes mértékben — a fogyasztói árarányokat is programozza.[8] Ugyanis kiválasztja azt a fogyasztásszerkezetet, amely a modellben figyelembe vett árkombinációk közül az árnyékárakhoz leginkább hasonló fogyasztói árak mellett alakulna ki. A választott fogyasztási szerkezet a programozás folyamatában az árnyékárrendszerre is visszahat. A modellel végezhető árszámítás ily értelemben szintén dinamikus.

A modell rugalmasságának fokozása érdekében a változók egy részét nem kezeljük intertemporálisan, hanem periódusonként megbontjuk, és külön korlátozzuk. Így a tőkés export és import változókat, amelyeket szektoronként bontunk és az importot kompetitiv, ill. non-kompetitiv importra osztjuk.[9]

Megkülönböztetetten kezeli modellünk az ún. *mobilizálható és a nem mobilizálható termelési alapokat.* Nem „mobilizálhatók" — nem csoportosíthatók át szektorok között — feltételezésünk szerint a tervidőszak elején meglevő és a tervidőszak folyamán el nem használódó állóeszközök. Ezzel szemben a tervidőszak folyamán eszközölhető beruházásokat, valamint a forgóeszközöket *mobilizálható termelési alapoknak* tekintjük. Mit jelent ez a modell összeállítása szempontjából?

— Az intertemporális szektorfejlesztési változók termékmérlegekhez — szektorkibocsátásokhoz — tartozó koefficienseiben nemcsak az anyagfelhasználás (felújítással) és termékkibocsátás szerepel, hanem a mobilizálható termelési alapok igénybevétele is.

— A modell fő célfüggvénye tartalmazza a mobilizálható termelési alapok tervidőszak utáni nettó értékét (lásd később).

A modell ily szerkesztése számítástechnikailag előnyös, mert megtakarítja a külön beruházási, forgóeszközfelhasználási, stb. változókat és az azokhoz tartozó speciális korlátozó feltételeket. Ugyanakkor közgazdaságilag is indokolható.

A *nem mobilizálható termelési alapok* transzformáltan figyelembevételre kerülnek a termelőszektorok (1), ill. (2) típusú korlátozó feltételeinek konstansaiban.

A *mobilizálható termelési alapok* igénybevételükkor konkréten (kibocsátó szektorok szerint részletezve) számításbavételre kerülnek, mint ráfordítások a modell feltételi rendszerében. Az a részük viszont, amely a tervidőszak folyamán nem használódik el, „megtérül" a célfüggvényben.[10]

[8] Vö. (11) 10. fejezetével.

[9] Vö. (8)-cal.

[10] A „megtérülés" az alább ismertetett célfüggvény esetén az utolsó tervév (1975) felhalmozására vonatkozik.

Az árprogramozás fő célfüggvénye a fogyasztást + a mobilizálható termelési alapok tervidőszak utáni értékét maximálja (nemzeti jövedelemmaximálás). Képletben:

$$\mathbf{c}_y^* \mathbf{y} + \mathbf{c}_x^* \mathbf{x} \rightarrow \max\,; \tag{3}$$

ahol **y**, ill. **x** vektor komponensei az intertemporális fogyasztási, illetve termelési változók terjedelmére jellemző számok (0 és 1 közötti értékek);

$\mathbf{c}_y^*$ sorvektor komponensei az intertemporális fogyasztási változókhoz tartozó fogyasztási volumenek a tervidőszak utolsó évében (1975-ben), változatlan áron;

$\mathbf{c}_x^*$ sorvektor valamely c_{xj} komponensét (j itt az intertemporális termelési változók futóindexe) a (4) összefüggés adja:

$$c_{xj} = \check{\mathbf{p}}_k^* \mathbf{k}_j \tag{4}$$

ahol $\check{\mathbf{p}}_k^*$ sorvektor komponensei a termékek (szektorkibocsátások) optimális árai a T-ik időszakban (esetünkben 1975-ben), az időtényezővel korrigálva (lásd alább);

$\mathbf{k}_j$ vektor komponensei a mobilizálható termelési alapok növekményei az utolsó tervidőszakban (esetünkben 1975-ben), változatlan áron.

A $\check{\mathbf{p}}_k^*$ árvektor valamely i elemét, $\check{p}_{k_i}$-t elvileg az (5) összefüggés adja:

$$\check{p}_{k_i} = \frac{p^{k_i}(T)}{p_{k_i}(T-1)}\, p_{k_i}(T) \tag{5}$$

ahol $p_{k_i}(T-1)$, $p_{k_i}(T)$ az i-edik szektorkibocsátás árnyékára a $(T-1)$-edik, ill. T-edik időszakban (évben).

A (4), ill. (5) összefüggésben feltételezzük, hogy a $(T+1)$-edik időszak árnyékára valamely i jószágra *ugyanolyan arányban* tér el a T-edik időszak árnyékárától, mint a T-edik időszak árnyékára a $(T-1)$-edik időszak árnyékárától.

Mivel az árnyékárakat a programozás előtt nem ismerjük — vagyis a T-edik és a $(T-1)$-edik időszak árnyékárait sem — ezért az optimális megoldást iteratív úton kell közelíteni. Az első programozásnál $\check{\mathbf{p}}_k^*$-ra előrebecsült értékek alkalmazandók. Ezután az (5) képlet felhasználásával megvizsgálandó, hogy van-e számottevő eltérés az előrebecsült és a tényleges $\check{p}_{k_i}$ értékek között. Ha van, a programozás az új $\check{p}_{k_i}$ értékek alapján ismétlendő.

Meg kell jegyezni, hogy elegendő a (4) összefüggés alapján vizsgálni az eltérések nagyságát. Ugyanis az előrebecsült $\check{}_k^*$ árvektor hibáinak kihatását a $\mathbf{c}_x^*$ vektorra a $\mathbf{k}_j$ vektorral való szorzás általában csökkenti.

A modell szerkezetének az a sajátossága, hogy az intertemporális fejlesztési változók a beruházásokat is tartalmazzák, nemcsak a modell méretét csökkenti, hanem mérsékli annak modellen belüli kihatását, hogy a tervidőszak vége mesterségesen elvágja a fejlesztési folyamatokat. A vázolt modell azoknak a beruházásoknak a volumenét és szerkezetét is kedvezően befolyásolhatja, amelyek pozitív hatása a programozási időszak (a T. év) után bontakozik ki. A (3) célfüggvényt alkalmazó modell *a fogyasztás és felhalmozás arányát* is optimalizálja bizonyos korlátokon belül. Felmerül a kérdés, *milyen alapon?*

A programozás legalább olyan ütemű fogyasztás-növekedést biztosít, mint a hivatalos terv. Feltéve persze, hogy a programozási feladatnak van lehetséges megoldása. Az ezen felül elérhető, vagy a hivatalos tervben előirányzott felhalmozásból megtakarítható értékeket a programozás osztja el fogyasztás és felhalmozás között.

A fogyasztás növelésével a jószág teljes árnyékáron mért értékével növelhető a célfüggvény. Amennyiben a jószág felhalmozásra kerül, közvetlenül csak az az értékrésze növeli a célfüggvény nagyságát, amely a $(T+1)$-edik időszakban még megvan a felhalmozott javakból. Ugyanakkor azonban a felhalmozás elősegíti a termelés és nemzeti jövedelem bővítését. E hatásnak legalábbis egyenértékűnek kell lennie az amortizáció és időtényező miatt kieső értékrésszel ahhoz, hogy a többlet nemzeti jövedelmet a modell fogyasztás helyett felhalmozásra adja.

A többperiódusú, dinamikus modell elvileg minden programozott időszakra (évre) külön korlátozó feltételeket és változókat tartalmaz. Az intertemporális változók bekapcsolása e helyzetet módosítja. Ezen túlmenően jelen modellben csak bizonyos kiemelt évekre — 1970-re és 1975-re, a két tervperiódus utolsó évére — veszünk be termék- és devizamérlegeket, létszámkorlátokat, valamint egyperiódusú változókat és azok korlátait.[11]

Szektorbontás szempontjából a modellt több változatban dolgozzuk ki. Mivel a kiindulóadatok összeállításánál elsősorban a KSH AKM-ek felhasználásával történő előrebecslésekre támaszkodunk, *a modell ágazati szerkezete a rendelkezésre álló ÁKM-ekhez igazodik.*

A legösszevontabb változat 15 szektort fog tartalmazni. A nyert tapasztalatok felhasználásával 28 és 83 szektoros modell is készül. A különböző változatok eredményeinek összehasonlítása lehetőséget biztosít az aggregáció hatásának tanulmányozására.

Az árprogramozáshoz több célfüggvényt alkalmazunk. A (3) összefüggésben szereplő célfüggvényen kívül fogyasztás-maximálási, valamint tőkés devizaegyenleg-maximálási célfüggvényt.

A továbbiakban a modell általános sémáját, valamint feltételi rendszerét ismertetjük. (L. köv. old.)

A modellsémában alkalmazott jelöléseket a feltételi rendszer tárgyalásánál ismertetjük. Előzetesen néhány megjegyzést kívánunk tenni.

A vastagon szedett nagybetű matrixot, vastagon szedett kisbetű vektort jelöl. A sorvektort csillaggal különböztetjük meg az oszlopvektortól. A zárójeles jobb felső index az időszak jelölése: $(^1)$ = 1970 évi adatok; $(^2)$ = 1975 évi adatok; $(^0)$ = intertemporális feltételekhez tartozó matrixok és vektorok megkülönböztető jele. $\mathbf{0}$ = nullmatrix; $\mathbf{1}$ = összegező vektor (minden komponense 1).

A modell fő (nemzeti jövedelem-maximálási) célfüggvényét az előzőekben ismertettük. A *fogyasztásmaximálási célfüggvény* a következő alakban írható fel (lényegében a fogyasztás növekedési ütemének maximálása):

$$\text{(6)} \qquad \mathbf{c}_y^* \, \mathbf{y} \rightarrow \max!$$

A jelölések tartalmát már korábban — a (3) összefüggés kapcsán — ismertettük.

A devizamaximálási célfüggvény többféleképpen is felírható. Például az 1975. évi devizaegyenleg maximálásaként vagy az 1970 + 1975 évi devizaegyenleg együttes maximálásaként stb. Ezzel ehelyütt közelebbről nem foglalkozunk.

[11] Nemszocialista exportot és importot, s az ágazati exportváltozók korlátozó feltételeit.

A modell általános sémája

Feltételek \ Változók		Intertemporális változók: Termelés[3]	Intertemporális változók: Szocialista exp. – imp.	Intertemporális változók: Fogyasztás	Egyperiódosú változók[1] 1970: Export	1970 Import: Kiegész.	1970 Import: Versenyző	1975: Export	1975 Import: Kiegész.	1975 Import: Versenyző	Erőforrás keretek $\mathbf{b}$
Intertemporális változók korlátai	Termelés	$\mathbf{K}^{(0)}$									$\mathbf{b}_x^{(0)}$
	Szoc. külker.		$\mathbf{1}^*$								$\mathbf{1}$
	Fogyaszt.			$\mathbf{1}^*$							$\mathbf{1}$
1970. évi mérlegek											
Termék (hazai + vers. imp.)		$\mathbf{A}_1^{(1)} - \mathbf{K}^{(1)}$	$\mathbf{A}_2^{(1)}$	$\mathbf{A}_3^{(1)}$	$\mathbf{A}_4^{(1)}$		$-\mathbf{A}_5^{(1)}$				$\mathbf{b}_1^{(1)}$
Nonkompetitiv import		$\mathbf{C}_1^{(1)}$	$-\mathbf{C}_2^{(1)}$	$\mathbf{C}_3^{(1)}$		$-\mathbf{C}_4^{(1)}$					$\mathbf{b}_2^{(1)}$
Deviza			$\mathbf{D}_1^{(1)}$		$-\mathbf{D}_2^{(1)}$	$\mathbf{D}_3^{(1)}$	$\mathbf{D}_4^{(1)}$				$\mathbf{b}_3^{(1)}$
Munkaerő		$\mathbf{L}^{(1)}$									$\mathbf{b}_4^{(1)}$
Exportkorlátok (tőkés)					$\mathbf{M}^{(1)}$						$\mathbf{b}_5^{(1)}$
1975. évi mérlegek											
Termék (hazai + vers. imp.)		$\mathbf{A}_1^{(2)} - \mathbf{K}^{(2)}$	$\mathbf{A}_2^{(2)}$	$\mathbf{A}_3^{(2)}$				$\mathbf{A}_4^{(2)}$		$-\mathbf{A}_5^{(2)}$	$\mathbf{b}_1^{(2)}$
Nonkompetitiv import		$\mathbf{C}_1^{(2)}$	$-\mathbf{C}_2^{(2)}$	$\mathbf{C}_3^{(2)}$					$-\mathbf{C}_4^{(2)}$		$\mathbf{b}_2^{(2)}$
Deviza			$\mathbf{D}_1^{(2)}$					$-\mathbf{D}_2^{(2)}$	$\mathbf{D}_3^{(2)}$	$\mathbf{D}_4^{(2)}$	$\mathbf{b}_3^{(2)}$
Munkaerő		$\mathbf{L}^{(2)}$									$\mathbf{b}_4^{(2)}$
Exportkorlátok (tőkés)								$\mathbf{M}^{(2)}$			$\mathbf{b}_5^{(2)}$
Célfüggvény[2]		$\mathbf{c}_x^*$	$\mathbf{o}^*$	$\mathbf{c}_y^*$	$\mathbf{o}^*$	$\mathbf{o}^*$	$\mathbf{o}^*$	$\mathbf{o}^*$	$\mathbf{o}^*$	$\mathbf{o}^*$	

[1] Nemszocialista külkereskedelem; [2] A (3) összefüggésnek megfelelő változat; [3] Beruházással, felújítással és készletváltozással együtt.

Feltételi rendszer

Menjünk végig a modellsémában szereplő feltételcsoportokon. Először a *intertemporális változókhoz tartozó kapacitáskorlátok*at ismertetjük.

$$K^{(0)}\mathbf{x} = \mathbf{b}_x^{(0)} \tag{7}$$

ahol $\mathbf{b}_x^{(0)}$ vektor komponensei az intertemporális termelési-beruházási (röviden: fejlesztési) változók kapacitáskorlátai; esetünkben minden komponens 1;

$K^{(0)}$ matrix elemei az intertemporális fejlesztési változók kapacitásfajlagosai (illetve zéró értékek); a kapacitásfajlagosok esetünkben 1-esek;

$\mathbf{x}$ vektor tartalma azonos a (3) összefüggésben említettel.

$$\mathbf{1}^*\mathbf{u} = 1 \tag{8}$$

ahol $\mathbf{u}$ vektor komponensei az intertemporális szocialista külkereskedelmi (export-import) változók terjedelmére jellemző számok (a modellben 0 és 1 közötti értékek).

$$\mathbf{1}^*\mathbf{y} = 1\,. \tag{9}$$

Az intertemporális változók erőforráskereteit együttesen a következőképp jelöljük:

$$\mathbf{b}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_x^{(0)} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

A modell egyes időszakaira (1970-re és 1975-re) vonatkozó korlátozó feltételeket alább írjuk fel. A különböző időszakok azonos típusú feltételeit együtt tárgyaljuk.

$$(A_1^{(1)} - K^{(1)})\,\mathbf{x} + A_2^{(1)}\mathbf{u} + A_3^{(1)}\mathbf{y} + A_4^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} - A_5^{(1)}\mathbf{f}_2^{(1)} \leq \mathbf{b}_1^{(1)} \tag{11}$$

$$(A_1^{(2)} - K^{(2)})\,\mathbf{x} + A_2^{(2)}\mathbf{u} + A_3^{(2)}\mathbf{y} + A_4^{(2)}\mathbf{v}^{(2)} - A_5^{(2)}\mathbf{f}_2^{(2)} \leq \mathbf{b}_1^{(2)} \tag{12}$$

ahol $\mathbf{b}_1^{(1)}$, $\mathbf{b}_1^{(2)}$ vektorok komponensei az 1., ill. 2. időszak termékmérlegeinek konstansai (esetünkben zéró értékek);

$\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$ vektorok jelentése azonos a korábbival;

$\mathbf{v}^{(1)}$ $\mathbf{v}^{(2)}$ vektorok komponensei az 1., ill. 2. időszak nemszocialista exportjának terjedelme szektoronként (pl. dollárban);

$\mathbf{f}_1^{(1)}, \mathbf{f}_1^{(2)}$ vektorok komponensei a nonkompetitív (kiegészítő) nemszocialista import terjedelme az 1., ill. 2. időszak termékeiből, szektoronként;

$\mathbf{f}_2^{(1)}, \mathbf{f}_2^{(2)}$ vektorok komponensei a kompetitív (versenyző) nemszocialista import terjedelme az 1., ill. 2. időszak termékeiből, szektoronként;

$K^{(1)}, K^{(2)}$ matrixok elemei az intertemporális fejlesztési változók termék; kibocsátásai az 1., ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában, változatlan áron (elvileg természetes mértékegységben)-

$\mathbf{A}_1^{(1)}, \mathbf{A}_1^{(2)}$ matrixok elemei az intertemporális fejlesztési változók hazai eredetű, vagy versenyző importból származó termékigénye anyagfelhasználási, felújítási és beruházási célra, valamint készlet- (forgóeszköz-) növelésre az 1., ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában, változatlan áron;

$\mathbf{A}_2^{(1)}, \mathbf{A}_2^{(2)}$ matrixok elemei a szocialista külkereskedelem hazai termékigénye (kompetitív import esetén termékkibocsátása) az 1., ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában, változatlan áron;

$\mathbf{A}_3^{(1)}, \mathbf{A}_3^{(2)}$ matrixok elemei a fogyasztás (lakossági + közületi) igénye hazai termékekből, valamint versenyző importtermékekből az 1. ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában, változatlan áron;

$\mathbf{A}_4^{(1)}, \mathbf{A}_4^{(2)}$ matrixok elemei a nemszocialista export fajlagos igénye hazai termékekből az 1., ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában, változatlan áron;

$\mathbf{A}_5^{(1)}, \mathbf{A}_5^{(2)}$ matrixok elemei a nemszocialista versenyző import termékkibocsátásai az 1., ill. 2. időszakban a modell szektorbontásában, változatlan áron.

(13) $$\mathbf{C}_1^{(1)}\mathbf{x} - \mathbf{C}_2^{(1)}\mathbf{u} + \mathbf{C}_3^{(1)}\mathbf{y} - \mathbf{C}_4^{(1)}\mathbf{f}_1^{(1)} \leq \mathbf{b}_2^{(1)}$$

(14) $$\mathbf{C}_1^{(2)}\mathbf{x} - \mathbf{C}_2^{(2)}\mathbf{u} + \mathbf{C}_3^{(2)}\mathbf{y} - \mathbf{C}_4^{(2)}\mathbf{f}_1^{(2)} \leq \mathbf{b}_2^{(2)}$$

ahol $\mathbf{b}_2^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(2)}$ a nonkompetitív importra vonatkozó korlátozó feltételek konstansai az 1., ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában, változatlan áron (esetünkben nullvektorok);

$\mathbf{C}_1^{(1)}, \mathbf{C}_1^{(2)}$ matrixok elemei a fejlesztési változók nonkompetitív importigényei (anyagfelhasználási, felújítási, beruházási és készletnövelési) az 1. ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában, változatlan áron;

$\mathbf{C}_2^{(1)}, \mathbf{C}_2^{(2)}$ matrixok elemei a szocialista relációjú nonkompetitív import az 1., ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában, változatlan áron;

$\mathbf{C}_3^{(1)}, \mathbf{C}_3^{(2)}$ matrixok elemei a fogyasztás nonkompetitív importigényei az 1., ill. 2. időszakban, a modell szektorbontásában változatlan áron;

$\mathbf{C}_4^{(1)}, \mathbf{C}_4^{(2)}$ matrixok elemei a nemszocialista nonkompetitív (kiegészítő) importtevékenység termékkibocsátási fajlagosai, a modell szektorbontásában, változatan áron.

(15) $$\mathbf{D}_1^{(1)}\mathbf{u} - \mathbf{D}_2^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{D}_3^{(1)}\mathbf{f}_1^{(1)} + \mathbf{D}_4^{(1)}\mathbf{f}_2^{(1)} \leq \mathbf{b}_3^{(1)}$$

(16) $$\mathbf{D}_1^{(2)}\mathbf{u} - \mathbf{D}_2^{(2)}\mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{D}_3^{(2)}\mathbf{f}_1^{(2)} + \mathbf{D}_4^{(2)}\mathbf{f}_2^{(2)} \leq \mathbf{b}_3^{(2)}$$

ahol $\mathbf{b}_3^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(2)}$ vektorok komponensei a relációnkénti (szocialista és nemszocialista) devizaegyenlegek rubelben, ill. dollárban, az 1., ill. 2. időszakban;

$\mathbf{D}_1^{(1)}, \mathbf{D}_1^{(2)}$ matrixok elemei az intertemporális szocialista export-import változók devizaegyenlegei rubelben (bevétel-kiadás), az 1., ill. 2. időszakban;

$\mathbf{D}_2^{(1)}, \mathbf{D}_2^{(2)}$ matrixok elemei a nemszocialista exporttevékenységek fajlagos devizabevételei dollárban, az 1., ill. 2. időszakban;

$\mathbf{D}_3^{(1)}, \mathbf{D}_3^{(2)}$ matrixok elemei a nemszocialista nonkompetitív (kiegészítő) import fajlagos devizaigénye dollárban, az 1., ill. 2. időszakban;

$\mathbf{D}_4^{(1)}, \mathbf{D}_4^{(2)}$ martixok elemei nemszocialista kompetitív (versenyző) import fajlagos devizaigénye dollárban, az 1., ill. 2. időszakban.

$$\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_4^{(1)} \tag{17}$$

$$\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_4^{(2)} \tag{18}$$

ahol $\mathbf{b}_4^{(1)}, \mathbf{b}_4^{(2)}$ vektorok komponensei az 1., ill. 2. időszakban rendelkezésre álló munkaerő (évi átlagos létszám), főbb csoportok szerint bontva;

$\mathbf{L}^{(1)}, \mathbf{L}^{(2)}$ matrixok elemei a fejlesztési változók létszámigénye az 1., ill. 2. időszakban főben, a tervezett munkaidőváltozás figyelembevételével.

$$\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{v}^{(1)} \leq \mathbf{b}_5^{(1)} \tag{19}$$

$$\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{v}^{(2)} \leq \mathbf{b}_5^{(2)} \tag{20}$$

ahol $\mathbf{b}_5^{(1)}, \mathbf{b}_5^{(2)}$ vektorok elemei a nemszocialista exporttevékenységek maximálisan lehetséges terjedelme az 1., ill. 2. időszakban, dollárban (természetesen alsó korlátok, vagy egyenlőségek is előírhatók);

$\mathbf{M}^{(1)}, \mathbf{M}^{(2)}$ matrixok elemei a nemszocialista export terjedelmét jellemző fajlagosok az 1., ill. 2. időszakban, dollárban (ill. zéró elemek).

A modell egyes időszakaira vonatkozó erőforráskereteket összefoglalóan a következőképp jelöljük:

$$\mathbf{b}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(1)} \\ \mathbf{b}_2^{(1)} \\ \mathbf{b}_3^{(1)} \\ \mathbf{b}_4^{(1)} \\ \mathbf{b}_5^{(1)} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\mathbf{b}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(2)} \\ \mathbf{b}_2^{(2)} \\ \mathbf{b}_3^{(2)} \\ \mathbf{b}_4^{(2)} \\ \mathbf{b}_5^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

A (3), ill. (6) célfüggvényt valamint (7)—(9), (11)—(20) feltételeket tartalmazó feladatot lineáris programozással (például az ún. primál szimplex módszerrel) megoldva mind a volumentervet, mind az árnyékárakat (ártervet) megkapjuk.

A *volumenterv* az 1970. és az 1975. évi termelést, beruházásokat, készletváltozást, fogyasztást, exportot és importot határozza meg *közvetlenül.* Az intertemporális változók fajlagosait a többi évre is ismerjük. Így *postoptimalizációs számítások*kal minden évre (például 1969-re, vagy 1973-ra) meghatározhatók a termelési-beruházási, fogyasztási és külkereskedelmi előirányzatok (a nemszocialista export és import a többi évre egyenlegként adódik).

Az *árterv*, mint utaltunk rá, tulajdonképpen a leírt feladat duálisának megoldása. Mivel azonban meghatározható a fenti feladat megoldásának egyik termékeként is, ehelyütt a duális feladatból csak a célfüggvényt írjuk fel, felhasználva a (10), valamint (21)—(22) összefüggést:

$$\mathbf{p}^*_{(0)}\mathbf{b}^{(0)} + \mathbf{p}^*_{(1)}\mathbf{b}^{(1)} + \mathbf{p}^*_{(2)}\mathbf{b}^{(2)} \to \min! \tag{23}$$

ahol $\mathbf{p}^*_{(0)}$ sorvektor komponensei az intertemporális változók kapacitásainak árnyékárai;

$\mathbf{p}^*_{(1)}$, $\mathbf{p}^*_{(2)}$ sorvektorok komponensei az 1., ill. 2. időszak korlátozó feltételeiben szereplő erőforrások árnyékárai; vagyis kiterjednek mind a termékekre (külön a hazai és nonkompetitív javak szektoronként), mind pedig a devizákra (rubel és dollár devizaszorzó), továbbá a munkaerőfelhasználásra (csoportonként), valamint a nemszocialista exportkorlátokra (szektoronként).

A programozásban nem szereplő évek árai a két kiemelt évre (1970-re és 1975-re) nyert árak figyelembevételével interpolálhatók, illetve becsülhetők.

(Beérkezett: 1968. VIII. 2.)

IRODALOM

[1] DANTZIG, G. B.: Linear Programming and Extensions. Berkeley, 1963.

[2] DORFMAN—SAMUELSON—SOLOW: Linear Programming and Economic Analysis. New York, 1958.

[3] ФЕДОРЕНКО, Н.: Цена и оптималное планирование. Коммунист, 1966 №8.

[4] FRISCH, R.: A Survey of Types of Economic Forecasting and Programming and a Brief Description of the Oslo-Channel Model Oslo, 1961.

[5] КАНТОРОВИЧ, Л.—МАКАРОВ, Л.: Оптималные модельи перспективного планирования. Применение математики, 3. Москва, 1965. Соцэклит.

[6] KONDOR GY.: Az értékelés és piac egyes kérdései nemlineáris modellekben; kandidátusi értekezés, Budapest, 1967.

[7] KORNAI J.: A gazdasági szerkezet matematikai tervezése. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[8] KORNAI J.—ÚJLAKI L.: Összevont programozási modell alkalmazása az ötéves tervezésben. Közgazdasági Szemle 1967. 5. sz.

[9] KREKÓ B.: Lineáris programozás. Budapest, 1966. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[10] SIMON GY.—KONDOR GY.: Gazdasági hatékonyság, árnyékárak. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[11] SIMON GY.: Árnyékárak és népgazdasági programozás. Doktori értekezés, Budapest, 1968.

THE DYNAMIC MODEL OF ECONOMY-WIDE PRICE PROGRAMMING

The article contains the economic conditions and description of a mathematical programming model, which covers a number of time periods, and in solving the dual problem it simultaneously gives the optimal evaluation (shadow prices) of the primary resources (labour, productive capacities, etc.), as well as the shadow prices of the different sector outputs. The solution of the primal problem yields the optimum value of a multi-period economy-wide plan, in sectoral break-down.

The model is being constructed for the National Material and Price Office, at the Institute of Economics of the Hungarian Academy of Sciences, and is being directed by the author. Variants in a break-down to 15, and later to 80 sectors are under elaboration both covering the period from 1969 to 1975. In collecting basic data, estimates from the input-output tables of the Central Statistical Office were applied. With this aim, 15 sector tables were prepared for each year from 1959 to 1966 in a comparable form. Under preparation are the more detailed (abt 80 sector) input-output tables comparatively for 1959 and 1965, as well as the compilment of investment, labour, and working assets matrices.

The model handles production, investments, foreign trade and consumption variables. All branches have a number of production-investment variables in them. In general each programmed time period contains two production-investment variants per sector 1. inputs and outputs for a minimum development (perhaps a certain regression) 2. inputs and outputs for a maximum development (in general faster than determined by official plans). In inputs, we consider not only flow input (material utilization, necessary number of workers, etc.) but stock input to increase production basis (investments, and stock changes) as well. The growth of production basis remaining after the plan period is taken into account in the model's objective function.

Foreign trade is divided according to relations (socialist, and non-socialist). In socialist foreign trade complex export-import variables are included (e.g. import and export as prescribed in international contracts). In non-socialist relations each sector contains separate export and import variables. The model takes account of both competitive and non-competitive import.

Consumption is also represented by a number of variables. One variable contains consumption as determined in the official plan, along with a demand structure corresponding to the officially determined consumer prices.

With other variables the demand structure is different: we assume the approach of consumer price ratios to costs. The model also enables planning consumption larger than the official one.

The calculations are worked out in a number of alternatives, with a number of objective functions (maximum consumption, maximum national income etc.) and we want to examine the „sensitivity" of shadow prices to the choice of the objective function. Dividing the system of restrictions into periods, also makes it possible to study time changes in optimal price ratios.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ЦЕН

Статья содержит экономические предположения и описание математической модели программирования, охватывающей несколько периодов (многопериодной), решение двойственной задачи которой одновременно дает оптимальную оценку (теневые цены) первичных ресурсов (рабочей силы, производственных мощностей и т. п.), а также выпусков отраслей. Решение первой задачи дает многопериодный оптимальный объемный план народного хозяйства, в отраслевом подразделении.

Модель разрабатывается для Государственного комитета материалов и цен в Институте экономики Венгерской Академии Наук, под руководством автора. Разрабатываемыми вариантами охватывается период 1969—1975 гг., в 15-и, а позже 80-и секторном подразделении. При составлении исходных данных в значительной мере используются и прогнозы, устанавливаемые на основании фактических межотраслевых балансов ЦСУ. В интересах этого с 1959 по 1966 каждый год составлялись 15-и секторные сопоставимые фактические балансы. В настоящий момент производится обеспечение сопоставимости детальных (прибл. 80-и секторных) межотраслевых балансов на 1959 и 1965 годы, а также разработка матриц капитальных вложений, рабочей силы и оборотных средств.

В модели производство и капитальные вложения, внешняя торговля и потребление рассматриваются как переменные. К отдельным отраслям относится несколько переменных по производству и капитальным вложениям. Как правило, для каждого программируемого периода различаются два варианта производства и капиталовложений: 1) выпуск, достигаемый в случае минимального развития (возможно, даже определенного содерживания), и связанные с ним затраты (в подразделении, соответствующему системе условий модели); 2) выпуск и затраты при максимальном развитии (как правило, превышающем предписанный в официальном плане темп). В числе затрат учитываются не только текущие затраты (расход материалов, потребность в численности рабочей силы и т. п.), но и увеличивающие производственные фонды разовые затраты (капиталовложения и изменение запасов). Та часть прироста производственных фондов, которая остается после планового периода, учитывается в целевой функции модели.

Внешняя торговля подразделяется на социалистическую и несоциалистическую. В отношении социалистической внешней торговли фигурируют комплексные переменные по экспорту и импорту (например, предписываемый межгосударственными договорами экспорт и импорт). В несоциалистическом отношении к каждой отрасли относятся отдельные переменные по экспорту и импорту. В модели предусматривается как компетитивный, так и некомпетитивный импорт.

Потребление учитывается также с несколькими переменными. Одно из переменных содержит предусматриваемое в официальном плане потребление, со структурой спроса, соответствующей официально предусматриваемым розничным ценам. Другим переменным соответствует иная структура спроса: в их случае предполагается приближение пропорций розничных цен к пропорциям затрат. Модель позволяет планировать и объем потребления, превышающий официально предусматриваемый уровень.

Производится несколько альтернативных расчетов с различными целевыми функциями (максимизация потребления, максимизация национального дохода и т. д.) и предусматривается изучить «чувствительность» теневых цен по отношению и выбору целевой функции. Разделение системы условий модели по периодам позволяет исследовать и изменение оптимальных пропорций цен во времени.

Éltető Ödön—Frigyes Ervin

Új jövedelem-egyenlőtlenségi mutatók, tulajdonságaik és hasznosítási lehetőségeik

1. Bevezetés

A személyi jövedelemeloszlás közgazdasági és matematikai-statisztikai vizsgálata során a kutatók az ún. egyenlőtlenségi mutatók egész sorát alakították ki. E mutatók célja, hogy a jövedelemeloszlás egyenlőtlenségét kevés — lehetőleg egyetlen — számadattal fejezzék ki. E mutatók egy része a jövedelemeloszlást leíró eloszlásfüggvények paramétereihez kapcsolódik, más részük pedig (koncentrációs ráta, kvantilis eloszlások, stb.) a koncentrációs görbe segítségével geometriailag interpretálható. Legtöbbjüknek azonban nincs egyszerű, kézenfekvő közgazdasági tartalma. E mutatók közös hiányossága továbbá, hogy nem nyújtanak módot (és nem is törekednek) arra, hogy az egyenlőtlenséget közgazdaságilag motiválják, vagyis kifejezzék az arra ható egyes tényezők intenzitását.

Az alábbiakban bemutatásra kerülő új egyenlőtlenségi mutatók kidolgozásánál nem az volt a célunk, hogy az amúgy is tekintélyes mennyiségű mutatók számát tovább növeljük. Az új mutatók kidolgozását a szimulációs jövedelemeloszlási modell igényei tették szükségessé. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a bemutatásra kerülő mutatók hasznosítási lehetőségei túlnőnek az említett modell keretein.

A tervezés egyik soronkövetkező módszertani feladata valamely elkövetkező időszak személyi jövedelemeloszlásának előrebecslése. E probléma megoldására az Országos Tervhivatalban kísérleti szimulációs modell készül [1], [2]. E modell fő célja, hogy véletlenszerűen kiválasztott háztartásokból álló reprezentatív minta segítségével kövesse a munkás és alkalmazott háztartások személyi jövedelemeloszlását befolyásoló gazdasági és demográfiai változók hatását.

E tanulmány nem tér ki az említett modell speciális problémáira, mint pl. a bérekben, a családi pótlékokban és nyugdíjakban, valamint a foglalkoztatottsági és demográfiai változókban a népgazdasági terv előirányzataival konzisztensen bekövetkező változások követési módszereire. A tanulmány célja az, hogy tájékoztatást nyújtson a tervezett, vagy tényleges jövedelemeloszlás egyenlőtlenségének mérésére és az egyenlőtlenségre ható tényezők elemzésére kidolgozott mutatókról. Más szavakkal, az említett szimulációs kísérlettel kapcsolatban felmerül annak a szüksége, hogy olyan mérési módszereket dolgozzunk ki, amelyek amellett, hogy bemutatják a különböző terv-variánsoknak az egyenlőtlenségre gyakorolt hatását, lehetővé teszik annak megállapítását, hogy bizonyos közgazdasági és tervezési szempontokból értelmezhető tényezők milyen hatást gyakorolnak a jövedelemeloszlás egyenlőtlenségére. Eddigi ismereteink szerint a különböző ismert egyenlőtlenségi mutatók egyike sem alkalmas ez utóbbi feladatra.

2. Az új egyenlőtlenségi mutatók és tulajdonságaik

Az irodalomból az egyenlőtlenségi mutatók széles köre ismeretes, a leginkább elterjedtnek mégis a Lorenz által definiált koncentrációs együttható tekinthető. Mint ismeretes, ez az együttható szorosan kapcsolódik a jövedelemeloszlás Lorenz-görbéjéhez és legfőbb előnye egyszerű geometriai interpretációjában rejlik. Ugyanakkor a Lorenz-együtthatónak néhány kedvezőtlen tulajdonsága is van: így pl. viszonylag kevéssé érzékeny, továbbá elég nehézkes az együttható értékének tapasztalati adatokból való kiszámítása. Mindezen felül — az egyenlőtlenségi mutatók nagyobb részéhez hasonlóan — nem rendelkezik közvetlen közgazdasági tartalommal. Az általunk javasolt [1] új mutató — pontosabban három új mutató — alkalmas arra, hogy valamely jövedelemeloszlást jól jellemezzen. Az új egyenlőtlenségi mutatók a következő követelményeknek tesznek eleget:

a) Plauzibilis közgazdasági tartalmuk van;

b) Csoportosított adatokból is könnyen kiszámíthatók;

c) A javasolt mutatók nemcsak az egyenlőtlenség számszerű kifejezésére alkalmasak, hanem oly módon faktorizálhatók, hogy az így létrejött (közgazdaságilag értelmezhető) komponensek rámutatnak arra, hogy különböző tényezők milyen mértékben vettek részt az egyenlőtlenség kialakításában;

d) A Lorenz-féle koncentrációs együtthatóhoz hasonlóan a javasolt mutatók — ugyancsak a Lorenz-görbe segítségével — geometriailag is könnyen értelmezhetők;

e) A jövedelemeloszlás matematikai leírásánál számbajöhető eloszlásfüggvények legtöbbjénél az új mutatók értéke egyszerűen kifejezhető az eloszlásfüggvény paraméterei segítségével. A kétparaméteres lognormális eloszlás esete különösen fontos.

A javasolt mutatók a következők:

$$u = \frac{m}{m_1}, \quad v = \frac{m_2}{m_1}, \quad w = \frac{m_2}{m}$$

ahol

$$m = E(X), \quad m_1 = E(X \mid X < m), \quad m_2 = E(X \mid X \geq m)$$

és X egy véletlenszerűen kiválasztott jövedelmi egység jövedelmét jelenti.

Más szavakkal m az átlagos jövedelem, míg m_1, (m_2) azoknak az átlagos jövedelmét jelöli, akik m-nél kisebb (egyenlő, vagy nagyobb) jövedelemmel rendelkeznek. v úgy értelmezhető, mint a teljes eloszlás egyenlőtlenségét kifejező mérőszám, míg u és w az eloszlás két megfelelő részének egyenlőtlenségét méri. Az u, v és w mutatók lehetséges értéke $(1, +\infty)$, de könnyen transzformálhatók a szokásos $(0,1)$ intervallumra.

E standardizált mutatók a következők:

$$u' = 1 - \frac{1}{u} = \frac{m - m_1}{m}$$

$$v' = 1 - \frac{1}{v} = \frac{m_2 - m_1}{m_2}$$

$$w' = 1 - \frac{1}{w} = \frac{m_2 - m}{m_2}$$

Természetesen $v = uw$ és $v' = u' + w' - u'w'$, tehát általános esetben is csak két mutató tekinthető függetlennek.

Könnyen belátható, hogy u, v és w a következőképpen is kifejezhetők:

$$(1) \qquad u = \frac{F(m)}{F_1(m)} \qquad v = \frac{1 - F_1(m)}{1 - F(m)} \frac{F(m)}{F_1(m)}$$

$$w = \frac{1 - F_1(m)}{1 - F(m)}$$

ahol $F(x)$ és $F_1(x)$ az eloszlásfüggvényt és az első momentum-eloszlásfüggvényt jelölik. Az első momentum-eloszlásfüggvényt $X > 0$ esetben az alábbi kifejezés definiálja:

$$F_1(x) = \frac{1}{m} \int_0^x t dF(t).$$

A standardizált mutatók ugyancsak kifejezhetők $F(m)$ és $F_1(m)$ segítségével.

A javasolt mutatók nagyságrendjének szemléltetésére a következő példákat mutatjuk be tényleges jövedelemeloszlásokból:

Az első a jövedelmi egységek adózás utáni[1] eloszlására vonatkozik 1959-ben az Egyesült Államokban, ahol:

$$u = 1{,}775 \quad v = 3{,}018 \quad w = 1{,}701$$

a második példa pedig u, v és w értékeit a magyar munkás és alkalmazott népességnek az egy főre jutó jövedelem szerinti megoszlására adja ugyancsak 1959-ből:

$$u = 1{,}440 \quad v = 2{,}088 \quad w = 1{,}450.$$

A következőkben rátérünk a javasolt új egyenlőtlenségi mutatók tulajdonságainak részletesebb ismertetésére:

Ad *a)* Az új mutatók átlagok hányadosai. Hasonló mutatókat igen széles körben alkalmaz az általános és gazdaságstatisztika. Így pl. w azt mutatja, hogy a főátlagnál magasabb jövedelműek átlagos jövedelme mennyivel haladja meg az általános átlagot. A standardizált mutatószámoknak is kézenfekvő közgazdasági tartalmuk van. Így pl. w' azt mutatja, hogy az általános átlag és az annál tehetősebbek átlagjövedelme közötti differencia milyen hányadát teszi ki a kedvezőbb jövedelmi helyzetűek átlagának.

Ad *b)* m, m_1 és m_2 értékei egyedi adatokból még hagyományos lyukkártya-feldolgozás segítségével is könnyen megállapíthatók. Némi nehézséget okoz, ha csak csoportosított adatok állnak rendelkezésre (kivéve, ha az átlag véletlenül egybeesik valamelyik csoporthatárral). E probléma azonban interpoláció segítségével könnyűszerrel áthidalható.

Ad *c)* Igen elterjedt statisztikai eljárás, hogy valamely mennyiség, vagy index elemzése során ezeket az indexeket, vagy mennyiségeket több tényező szorzatának tekintjük. Így valamely társadalmi csoport egy főre jutó jövedelme is meghatározható különböző — közgazdasági és demográfiai értelmezéssel bíró — tényezők szorzataként.

[1] A szükséges adatok [3]-ból származnak.

E faktorizáció egyik lehetséges módja pl. a következő:

$$\frac{I}{N} = \frac{W}{k} \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{n}{N} \cdot \frac{I}{W} \tag{2}$$

ahol I a kérdéses csoport összes jövedelme
N az összes személyek száma
W a bérek és fizetések összege
k az aktív keresők száma
n a lehetséges keresők, azaz a társadalmilag munkaerőnek tekinthető személyek száma.

A tényezők jelentése kézenfekvő:

$\frac{I}{N}$ = az átlagos egy főre jutó jövedelem

$\frac{W}{k}$ = a keresők átlagos keresetét mutatja

$\frac{k}{n}$ = a lehetséges munkaerőforrás hasznosítottságának mértékét jelzi

$\frac{n}{N}$ = a foglalkoztatottság demográfiai aspektusát, vagyis a munkaerőforrásnak tekinthető személyek részarányát tükrözi

$\frac{I}{W}$ = pedig azt mutatja, hogy az összes jövedelmek milyen mértékben múlják felül az aktív keresők munkaviszonyból származó jövedelmeit.

A (2) azonosság (vagy más ahhoz hasonló azonosságok) igen alkalmasak jövedelemeloszlások elemzésére és összehasonlítására. A (2) azonosság hasznosításának több lehetséges módja van. Vegyük az azonosság mindkét oldalának logaritmusát és jelölje sorban y, x, z, t és s I/N, W/k, K/n, n/N és I/W logaritmusát! Így (2)-ből azt kapjuk, hogy:

$$y = x + z + t + s' \quad .$$

Ebből viszont az következik, hogy:

$$V(y) = \text{cov}(y, x) + \text{cov}(y, z) + \text{cov}(y, t) + \text{cov}(y, s) . \tag{3}$$

A (3) azonosság úgy értelmezhető, hogy minden figyelembe vett tényező az egy főre jutó jövedelemmel alkotott logaritmikus kovarianciájával járul hozzá az egy főre jutó jövedelem logaritmikus szórásnégyzetének kialakulásához. A szükséges egyedi adatok birtokában ez az elemzés minden nehézség nélkül elvégezhető.

Ugyanakkor meg kell említeni, hogy hasonló elemzés hajtható végre sokkal egyszerűbb és gyorsabb úton az új egyenlőtlenségi mutatók segítségével. A (2) azonosságban ismertetett fakrotizáció kiterjeszthető ugyanis az u, v és w egyenlőtlenségi mutatókra is. Így pl. v esetében a következő formulához juthatunk:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{(W/k)_2}{(W/k)_1} \cdot \frac{(k/n)_2}{(k/n)_1} \cdot \frac{(n/N)_2}{(n/N)_1} \cdot \frac{(I/W)_2}{(I/W)_1} \tag{4}$$

ahol az 1, és 2 indexek az m_1-hez és m_2-höz tartozó részsokaságok jelölésére szolgálnak. Ha ismét mindkét oldal logaritmusát vesszük, a következő kifejezéshez jutunk:

$$\log v = (x_2 - x_1) + (z_2 - z_1) + (t_2 - t_1) + (s_2 - s_1) \tag{5}$$

Az $(x_2 - x_1)$, stb. kifejezések nagysága azt mutatja, hogy az egyes részkomponensekben mutatkozó különbségek milyen szerepet játszanak a v mutató által jelzett egyenlőtlenség kialakulásában. Amennyiben (3) vagy (5) kifejezésekben szereplő tényezők valamelyike negatív értéket vesz fel, az azt a nivelláló hatást fejezi ki, amivel az adott faktor a többi tényezők által létrehozott egyenlőtlenséget csökkenti.

Úgy véljük, hogy a bemutatott egyenlőtlenségi mutatóknak ez utóbbi tulajdonsága, vagyis felbonthatóságuk (pontosabban kifejezve logaritmikus felbonthatóságuk) e mutatókat az elemzés és összehasonlítás igen hatékony eszközeivé teheti. Ez a tulajdonság, valamint az a tény, hogy a javasolt mutatók értéke igen egyszerűen meghatározható, különösen jelentősek a bevezetőben már említett szimulációs modell szempontjából. E mutatók segítségével könynyen kifejezhető a különböző terv-variánsoknak az egyenlőtlenség mértékére (és összetevőire) gyakorolt hatása és ezáltal elősegítik a leginkább kedvezőnek tekinthető variáns kiválasztását.

Rá kell azonban ugyanakkor mutatnunk, hogy valamely jövedelmi egységre (pl. személyek, háztartások, fogyasztási egységek) jutó jövedelem szorzati tényezőkre való felbontásánál messzemenő óvatosságra van szükség. Fennáll ugyanis az a körülmény, hogy bármely tényező, amelyik magasabb jövedelem-elaszticitással bír, vagyis a jövedelmek növekvő sorrendjében következő jövedelmi egységeknél gyorsabban nő, mint valamely másik tényező, automatikusan magasabb részét motiválja a v mutatóval jelzett egyenlőtlenségnek. A szorzati azonosság kialakításánál mindig a vizsgált jövedelemmutató és a vizsgált társadalmi-gazdasági csoport jövedelmei képződésének közgazdasági elemzéséből kell kiindulni.

Általában szabályként lehet elfogadni, hogy a leíró azonosság egyik tényezője a jövedelmek döntő többségét képező valamely jövedelmi tétel és az ahhoz jutó jövedelmesek számának hányadosa kell hogy legyen.

Ez a körülmény bizonyos mértékig korlátot szab a v mutató kauzális elemzésekre való hasznosításának. Valamely népességcsoportnál sikeresen alkalmazható leíró azonosság más társadalmi rétegnél esetleg helytelen képet nyújt. Ugyanakkor a szorzati azonosság sikeres alkalmazásának egyik alapvető feltétele, hogy olyan homogén társadalmi-gazdasági csoporton belül alkalmazzuk, ahol a jövedelmek túlnyomó része egy adott jövedelmi forrásból származik.

Megjegyzendő továbbá, hogy a (2) azonosságban ismertetett tényezőkre bontás és az azzal összefüggő elemzési lehetőségek nem állnak fenn a standardizált u', v' és w' mutatóknál. Ez az egyik oka annak, hogy az eredetileg definiált u, v és w mutatókat előnyösebbeknek tekintjük a standardizált változatnál.

Ad. *d)* A javasolt mutatók geometriai értelmezésének lehetősége az (1)-ben ismertetett kifejezéseken alapul. Amennyiben a Lorenz-görbét az $[F(m)$,

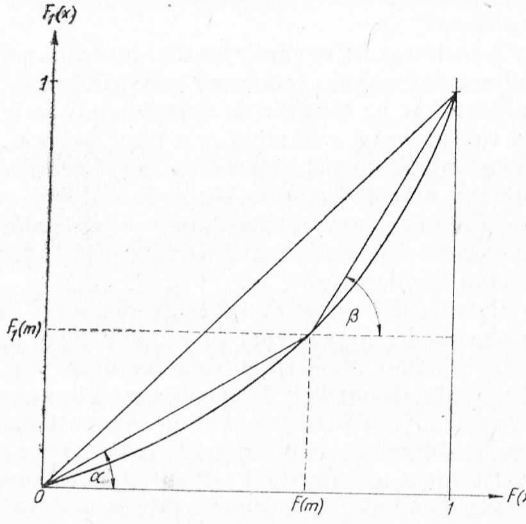
$F_1(m)]$ pontban a koordináta-tengelyekkel párhuzamos két egyenessel metszszük, s a mellékelt ábrán megjelölt szögeket α-val, illetve β-val jelöljük, könynyen belátható, hogy

$$u = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$w = \operatorname{tg} \beta$$

$$v = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$$

E geometriai interpretáció jobban megvilágítja, miért értelmezhetők u, illetve w az eloszlás alsó, illetve felső részének egyenlőtlenségi mutatójaként.



$U = ctg\alpha$, $W = tg\beta$, $V = ctg\alpha \cdot tg\beta$.

Ad. *e)* Amennyiben $F(m)$, illetve $F_1(m)$ értéke kifejezhető valamely adott eloszlás-függvény paramétereinek segítségével, ugyanez fennáll az u, v és w egyenlőtlenségi mutatókra is. E kifejezéseket meghatároztuk több ismert eloszlás-függvény típusra. Néhány eredményt a Függelékben ismertetünk.

A továbbiakban néhány megjegyzést tartunk szükségesnek: Először is meg kell említenünk, hogy a különböző szerzők által javasolt számos jövedelem-egyenlőtlenségi mutató között kettő bizonyos hasonlóságot mutat az általunk javasoltakkal. R. Gibrat híres munkájában [4] említést tesz egy Maure által bevezetett mutatóról, amely

$$M = \frac{1 - F_1(m)}{F_1(m)}$$

A két-paraméteres lognormális eloszlás speciális esetében M pontosan u-nak (és w-nek) felel meg. De általános esetben kevesebb információt tartalmaz a jövedelemeloszlásról, mint pl. v, hiszen csak az első momentum-eloszlás egyetlen speciális értékét veszi figyelembe.

Egy másik, R. R. SCHUTZ [5] által javasolt egyenlőtlenségi mutató $F(m)-F_1(m)$, azaz amíg u $F(m)$-nek és $F_1(m)$-nek hányadosa, a Schutz-együttható a különbségük; ez az együttható továbbá egyenlő $F(m)u'$-vel.[2]

Az u, v és w egyenlőtlenségi mutatókat kissé módosíthatjuk azáltal, hogy az (1) formulákban m helyébe Me-t, az eloszlás mediánját helyettesítjük. Ez megkönnyíti a mutatók értékének kiszámítását, különösen ha az adatok nem abszolút, hanem relatív jövedelem-kategóriákban vannak megadva, pl. decilisenként. Ezen módosított mutatók is rendelkeznek az előbbiekben felsorolt *a)*. . .*e)* tulajdonságokkal, ámbár ebben az esetben tulajdonképpen csak egy mutatóról beszélhetünk, mondjuk v^*-ról, a másik kettő ugyanis függvénye v^*-nak; emellett v^* is az első momentum-eloszlás egyetlen pontjának értékén alapszik. A magyar jövedelemeloszlások terén szerzett tapasztalataink arra mutatnak, hogy v jobban kifejezi az eloszlás egyenlőtlenségét, mint v^*.

Az u, v és w mutatók becslési módszereivel és e becslések matematikai-statisztikai tulajdonságaival [10] és [11.] foglalkozik. Két paraméteres lognormális elosztás esetén a mintából kapott becslések megbizhatósági határainak számításához táblázatok is készültek.

3. Alkalmazások

A 2. fejezetben adott két, tényleges jövedelemeloszlások egyenlőtlenségét mutató példán túlmenően e fejezetben a javasolt mutatókra és a velük kapcsolatos elemzésekre vonatkozó további, magyarországi jövedelemeloszlásokkal kapcsolatos alkalmazásokat mutatunk be.

A javasolt új egyenlőtlenségi mutatók részletes kifejtésére és alkalmazására először [1]-ben került sor az ún. tiszta munkás és alkalmazotti népesség 1959 évi jövedelemeloszlásával kapcsolatban. E népesség egy főre jutó jövedelem szerinti eloszlása 1959-ben igen jó közelítéssel lognormális eloszlásúnak tekinthető $\sigma = 0{,}4672$ paraméterértékkel. Így nemcsak az egyenlőtlenségi mutatók értékét, hanem azok hibahatárait is meg lehetett határozni. A mutatók értéke ezen eloszlásnál a 95%-os megbízhatósági határokkal:

$$u = 1{,}414 \pm 0{,}014$$

$$v = 2{,}099 \pm 0{,}035$$

$$w = 1{,}484 \pm 0{,}010.$$

A 2/c. pontban leírt elemzés szerint az ott szereplő tényezők százalékos hozzájárulása a v mutató értékéhez:

$\frac{w}{k}$-ban, a keresők átlagkeresetében fennálló különbség 33,8%

$\frac{k}{n}$-ben, a munkaerő hasznosításában lévő különbség 35,6%

[2] A tanulmány megírása után jutott tudomásunkra, hogy eredményeink publikálása után, de tőlünk függetlenül Rabkina is közöl kétparaméteres lognormális eloszlással kapcsolatban egy v típusú egyenlőtlenségi mutatót. ([9])

$\frac{n}{N}$-ben, a társadalmilag munkaerőnek tekinthető népességnek az össznépességhez viszonyított arányában levő eltérés 46,1%

$\frac{I}{W}$-ben, az összjövedelemnek a munkabéreket meghaladó arányában fennálló eltérés –15,5%

Mint arra már a 2/c. pontban is rámutattunk, az utolsó tényező negatív hozzájárulása azt jelenti, hogy az alacsonyabb jövedelmű családok béren felüli egyéb jövedelme viszonylag nagyobb, mint a magasabb jövedelmi szinten élőké, s így e tényező csökkenti a másik három tényező által előidézett jövedelmi egyenlőtlenséget.

A KSH által 1963-ban végrehajtott jövedelmi felvétel módot nyújtott annak megvizsgálására, hogy 1959 és 1962 között mennyiben változott a tiszta munkás-alkalmazotti népesség jövedelemeloszlásának egyenlőtlensége, illetve a már vizsgált tényezőknek az egyenlőtlenséghez való hozzájárulása. Az eredmények azt mutatták, hogy az egyenlőtlenség nem változott szignifikáns mértékben és a tényezők százalékos szerepében sincs nagy változás. A tényezők százalékos hatása 1962-ben:

$$\frac{W}{k}: 36{,}0\ \%$$

$$\frac{k}{n}: 35{,}7\ \%$$

$$\frac{n}{N}: 42{,}0\ \%$$

$$\frac{I}{W}: -13{,}7\ \%$$

Összehasonlításképpen elvégeztük a számításokat az 1963-as jövedelmi felvétel anyagából az összes munkás-alkalmazotti háztartások (mindazon háztartások, ahol a háztartásfő alkalmazásban álló kereső) népességének egy főre jutó jövedelem szerinti eloszlására is. E jövedelemeloszlás is jó közelítéssel lognormálisnak tekinthető $\sigma = 0{,}455$ paraméterrel. Az egyenlőtlenség valamivel — de nem szignifikáns mértékben — kisebb, mint a tiszta munkás-alkalmazotti népességnél. Az egyenlőtlenségi mutatók értéke a 95%-os megbízhatósági határokkal:

$$u = 1{,}455 \pm 0{,}020$$

$$v = 2{,}079 \pm 0{,}050$$

$$w = 1{,}479 \pm 0{,}014\,.$$

Az alábbi táblában megadjuk a már előzőkben is vizsgált tényezőknek az *u, v* és *w* egyenlőtlenségi mutatók értékének kialakításában játszott százalékos szerepét.

I. tábla

Tényezők	Százalékos hozzájárulás az egyenlőtlenséghez		
	u	v	w
$\frac{W}{k}$	36,6	28,2	19,4
$\frac{k}{n}$	45,6	38,5	30,9
$\frac{n}{N}$	81,8	84,1	86,6
$\frac{I}{W}$	−64,0	−50,8	−36,9

Ugyanakkor amikor a két réteg jövedelem-egyenlőtlenségének mértéke nagyjából ugyanaz, az egyes tényezőknek az egyenlőtlenséghez való hozzájárulása lényegesen eltér a tiszta és az összes munkás-alkalmazotti népességnél. Ez utóbbi népességnél lényegesen nagyobb eltérés van az átlagos jövedelem alatt, illetve felett élő háztartások demográfiai összetételében, pontosabban a társadalmilag munkaerőnek tekintett népességnek az össznépességen belüli arányában. E tényező járul hozzá legnagyobb mértékben az egyenlőtlenség kialakulásához. Ugyanakkor a béren felüli jövedelmek kompenzáló hatása is sokkal lényegesebb, ami elsősorban avval van összefüggésben, hogy ezen háztartások között elég jelentős a vegyes (pl. mezőgazdasági termelőszövetkezeti tagokat is tartalmazó) háztartások aránya, s ezek zöme az átlag alatti háztartásokhoz tartozik. E háztartásoknál a háztáji gazdaságból, illetve a termelőszövetkezetből származó jövedelem jelentős mértékben egészíti ki a munkabér-jövedelmeket, s e kiegészítés relatíve sokkal jelentősebb az átlag alatt élő családok esetében, mint a tehetősebb háztartásoknál. Érdemes megjegyezni végül, hogy a munkabéres keresők átlagkeresetében levő különbségnek csak szerény szerepe van az egyenlőtlenség létrehozásában.

Meg kell jegyeznünk, hogy noha az új mutatórendszert elsősorban a jövedelemeloszlás egyenlőtlenségének mérésére dolgoztuk ki, más típusú gazdasági egyenlőtlenségek vizsgálatára is alkalmazható.

A javasolt elemzési eljárások, bár nem minden elemzési probléma megoldására alkalmasak, alkalmazási lehetőségeik mindenesetre meghaladják a jövepelemeloszlás problematikáját.

(Beérkezett: 1968. VII. 1.)

Függelék

Az u, v, és w egyenlőtlenségi mutatók kifejezése a személyi jövedelemeloszlás különböző elméleti eloszlásfüggvényekkel való megközelítésénél

Elméleti eloszlásfüggvény:	u	v	w
Normális eloszlás: $N(\mu, \sigma^2), \mu > 0$	$\frac{1}{1-C\sqrt{2/\pi}}$ 1)	$\frac{1+C\sqrt{2/\pi}}{1-C\sqrt{2/\pi}}$ 1)	$1+C\sqrt{2/\pi}$ 1)
Egyenletes eloszlás: 2) $a < x < b$	$\frac{2a+2b}{b+3a}$	$\frac{3b+a}{b+3a}$	$\frac{3b+a}{2a+2b}$
Pareto — eloszlás: $f(x) = \frac{\alpha a^\alpha}{x^{\alpha+1}}$, $a > 0,\ \alpha > 1,\ x > a$	$\frac{\beta^\alpha - 1}{\beta^\alpha - \beta}$ 3)	$\frac{\beta^\alpha - 1}{\beta^{\alpha-1} - 1}$ 3)	β 3)
Gamma eloszlás: $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} e^{-x}, x > 0$	$1 + \frac{f(\nu)}{F(\nu) - f(\nu)}$ 4)	$\frac{F(\nu)}{1-F(\nu)} \cdot \frac{1+f(\nu)-F(\nu)}{F(\nu)-f(\nu)}$ 4)	$1 + \frac{f(\nu)}{1-F(\nu)}$ 4)
Kétparaméteres lognormális eloszlás: $\Lambda(x \mid \mu, \sigma^2)$	$\frac{\Phi(\sigma/2)}{1-\Phi(\sigma/2)}$ 5)	$\frac{\Phi^2(\sigma/2)}{[1-\Phi(\sigma/2)]^2}$ 5)	u
Háromparaméteres lognormális eloszlás: $\Lambda(x \mid \tau, \mu, \sigma^2) = \Lambda(x-\tau \mid \mu, \sigma^2)$	$\frac{(\alpha+\tau)\Phi(\sigma/2)}{\alpha-(\alpha-\tau)\Phi(\sigma/2)}$ 6)	$\frac{\Phi(\sigma/2)}{1-\Phi(\sigma/2)} \cdot \frac{(\alpha-\tau)\Phi(\sigma/2)+\tau}{\alpha-(\alpha-\tau)\Phi(\sigma/2)}$ 6)	$\frac{(\alpha-\tau)\Phi(\sigma/2)+\tau}{(\alpha+\tau)[1-\Phi(\sigma/2)]}$ 6)

Megjegyzések: 1) $C=\sigma/\mu$, a variációs együttható.
2) $a = 0$ esetén a mutatók értéke nem függ az eloszlás terjedelmétől, hanem konstans $u = 2$, $v = 3$, $w = 3/2$.
3) $\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}$
4) $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \Gamma_\nu(x)$, és $\Gamma_x(x)$ a nem teljes gamma függvényt jelöli.
5) Φ a standard (0 várható értékű, 1 szórású) normális eloszlás függvényt jelöli.
6) $\alpha = M(x) - \tau$, $\tau < 0$ esetén (a magyarországi jövedelem eloszlások közül számos esetben ezt tapasztaltuk), az eloszlást az $x = 0$ pontban csonkítani kell, és így u, v és w kifejezései komplikáltabbak lesznek. Ha a csonkítás hatása az eloszlásra elhanyagolható (Eddigi tapasztalatainkban majdnem mindig így volt), akkor a megadott formulákat kapjuk vissza.

IRODALOM

[1] FRIGYES, E.: A munkások és alkalmazottak jövedelemeloszlásának elemzése és tervezési módszerei. Kandidátusi értekezés, Budapest, 1965.

[2] FRIGYES, E.: A simulation experiment for estimating per capita income distribution. Economics of Planning, Vol. 5. 1965. No. 3. pp. 94–105.

[3] FITZWILLIAMS, J. M.: Size destribution of income in 1962. Survey of Current Business, April 1964.

[4] GIBRAT, R.: Les inegalités économiques. Paris. Libraire du Recueil Sirey. 1931.

[5] SCHUTZ, R. R.: On the measurement of income inequality. The American Economic Review. Vol. 41. 1951. pp. 107–122.

[6] AITCHISON, J. and BROWN, J. A. C.: The Lognormal Distribution. Cambridge: Cambridge University Press. 1963.

[7] CRAMER, H.: Mathematical Methods of Statistics. Princeton, University Press. 1954.

[8] ÉLTETŐ, Ö.: Large-sample lognormality tests based on new inequality measures. Paper submitted to the 35-th session of the International Statistical Institute. Beograd. 1965.

[9] РАБКИНА, Н. Е.: О некоторых соотношениях и показателях в логаритмически — нормалном распределении заработной платы и доходов. Математические методы в экономики труда. Москва, 1967.

[10] ÉLTETŐ Ö.—FRIGYES E.: Új jövedelem-egyenlőtlenségi mutatók, tulajdonságaik és hasznosítási lehetőségeik. Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet Közleményei 1967. 5. sz. Budapest, 1967. kézirat.

[11] ÉLTETŐ, Ö.—FRIGYES, E.: New income inequality measures as efficient tools for causal analysis and planning. Econometrica, Vol. 36, No. 2 (April, 1968)

NEW INCOME INEQUALITY MEASURES, THEIR PROPERTIES AND APPLICATIONS

The system of measures proposed, besides indicating the level of the inequality, shows the role played by several factors having economic or demographic meaning which contribute to the formation of incomes and the inequality itself. As far as the authors know the widely used inequality measures have never been applied for this latter purpose.

The measures proposed are:

$$u = \frac{m}{m_1}, \qquad v = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{and} \quad w = \frac{m_2}{m},$$

where:
$m = E(X)$, $m_2 = E(X/X > m)$ $m_1 = E(X/X \leq m)$ and E symbolizes the mathematical expectation and X means the income of an income unit selected by random.

u, v and w may be expressed as

$$u = \frac{F(m)}{F_1(m)}, \qquad v = \frac{1 - F_1(m)}{1 - F(m)} \; \frac{F(m)}{F_1(m)} \quad \text{and} \quad w = \frac{1 - \mathbf{F}_1(m)}{1 - F(m)},$$

where:
$F(X)$ means the distribution function of X and
$F_1(X)$ symbolizes the first moment distribution function of X

$$F_1(X) = \frac{1}{m} \int t \, dF(t)$$

The range of u, v and w is $(1, +\infty)$ but they are easily transformable to the usual interval $(0, 1)$.

From the economic point of view u and w indicate the inequality of the lower (resp. upper) part of the distribution and v shows that of the distribution as a whole.

The measures proposed, similarly to the Lorenz-rate of concentration are geometrically interpretable in an easy way, also with the aid of the Lorenz-curve.

Perhaps the most advantageous property of these indicators seems to be their fractionability. This factorization may be performed by using descriptive identities of multiplicative character.

For the well known distribution functions used for describing income distributions the measures are easily expressed as terms of the parameter(s) of the given function. The case of a lognormal distribution is of special importance, where:

$$u = w = \frac{\Phi(\sigma/2)}{1 - \Phi(\sigma/2)} \quad \text{and} \quad v = u^2, \text{ where:}$$

Φ symbolizes the standard normal distribution function with parameters 0,1.

The statistical properties of sample estimations of u, v and w are described in [11].

The measures proposed have been succesfully applied in analyzing Hungarian income distributions.

НОВЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НЕРАВЕНСТВА ДОХОДОВ, ИХ СВОЙСТВА И ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ

В статье трактуются измерители неравенства, выработанные нами в ходе исследований по планированию и анализу распределения личных доходов.

Предложенная система измерителей, информирующая о степени неравенства, способна показать также и интенсивность некоторых экономических и демографических факторов влияющих на неравенства. По нашему сведению, ни один из раньше разработанных многочисленных измерителей неравенства не был использован для такой цели.

Предложенные измерители:

$$u = \frac{m}{m_1}, \qquad v = \frac{m_2}{m_1} \quad \text{и} \quad w = \frac{m_2}{m}, \qquad \text{где}$$

$m = E(X)$, $m_2 = E(X/X \geq m)$, $m_1 = E(X/X < m)$ и

E — означает (математическое) ожидание,

X— означает доход случайно выбранной доходной единицы.

u, v и w можно выразить и по следующей форме:

$$u = \frac{F(m)}{F_1(m)}, \quad v = \frac{1 - F_1(m)}{1 - F(m)} \; \frac{F(m)}{F_1(m)}, \qquad w = \frac{1 - F_1(m)}{1 - F(m)},$$

где $F(X)$ означает функцию распределения от X

$F_1(X)$ означает распределение первого момента от X.

$$F_1(X) = \frac{1}{m}\int t\, d\,F(t)$$

Возможные величины u, v и $w : (1, +\infty)$, однако их нетрудно преобразовать на интервал (0,1) традициональный вообще для измерителей неравенства.

На самом деле u означает неравенство нижней части распределения, w означает неравенство верхней части распределения и v означает неравенство всего распределения.

Измерители могут быть интерпретированы — при помощи кривой Лоренца — и геометрически — аналогично коэффициенту концентрации Лоренца, который является наиболее распространенным на международной практике.

Найбольшее преимущество данных измерителей вероятно заключается в их способности к факторизации. Эта факторизация может быть осуществлена посредством описательных тождеств имеющих характер произведений.

В случае известных функций распределения примененных для описания распределений доходов, u, v и w могут быть выражены в качестве функции от параметра (параметров) упомянутых функций распределения. Особое значение имеет двухпараметровое логнормальное распределение, где:

$$u = w = \frac{\Phi(\sigma/2)}{1 - \Phi(\sigma/2)} \quad \text{и} \quad v = u^2$$

Статистические свойства оценок показателей u, v и w описаны в [11].

Предложенные измерители были применены в венгерской статистической практике.

Glattfelder Péter

Extrapoláció rész-trendek átlagából

A hosszútávú tervezés, a közvetett irányítási formák előretörése szükségszerűen megkívánják az extrapolációs módszerek alkalmazását illetve továbbfejlesztését. Ezekkel az egyre kevésbé nélkülözhető eljárásokkal szemben az lenne a legfőbb igény, hogy a használatosaknál pontosabbak, a jövőben realizálódó eseményekhez jobban igazodók legyenek.

A bemutatásra kerülő extrapolációs algoritmus éppen e követelménynek szeretne megfelelni. Lényegét tekintve idősorok elemzésén, trendszámításon alapul, illetve annak összefüggéseit kombinálja más algebrai elemekkel. A módszer általános ismertetésénél — ahol a mélyebb matematikai részek tárgyalásától igyekszem eltekinteni — a következő ideiglenes absztrakciókkal élek:

a) Az extrapoláció bázisául szolgáló idősor viszonylag hosszú időszakra vonatkozik.

b) Az egész idősor és annak valamennyi rész-intervalluma vagy lineáris, vagy exponenciális vagy más — adott típusú — függvénnyel közelíthető. Másszóval: eleve kizárjuk a szakaszosságot illetve a különböző típusú trendvonalak keveredését.

c) Feltételezzük, hogy az egyes tagok autokorreláltak, azaz nem függetlenek egymástól. Ez más megfogalmazásban azt jelenti, hogy az n-edik időszak realizációjára hat az $(n-1)$-edik, $(n-2)$-edik, $(n-3)$-adik stb. realizáció, méghozzá vagy közvetlenül, vagy olyan áttétellel, hogy valamennyien egy másik — nem egyszer ismeretlen — idősor sztochasztikus függvényei.

Az előbbi feltételek a hagyományos trendszámításnál is megvoltak, különösen gazdasági változások elemzésénél. Ami az elsőt illeti: három-négy, vagy még kevesebb adatból köztudott, milyen hamis képet nyerhetünk az esetleg valóban meglevő tartós tendenciáról. Emiatt a viszonylag nagy időszakot átfogó adatsor igénye nem jelent újabb követelményt a régiekhez képest. A második, a szakaszosság kérdését eddig úgy oldották meg, hogy szétválasztották az alapvetően más függvénytípussal közelíthető időintervallumokat. (Azonos „típusú" alatt itt a csupán paramétereiben eltérő képlettel, felépítéssel bíró függvények értendők.) Kikötésünk emellett még azt a megszorítást is tartalmazza, hogy pl. exponenciális trend esetén ilyen görbe közelítsen akár két egymás melletti pontot is. (Úgy vélem, ez a pótlólagos igény kisebb hibát visz a számításokba, mint az eddigi gyakorlat azon hiányosságai, melyekre a későbbiekben még visszatérek). A harmadik feltétel, az autokorreláció — különösen az említett áttételes formában — ugyancsak megvan a legtöbb közgazdasági idősorban. Általában mindig ott találkozunk valamiféle határozott tendencia-hiánnyal, ahol hiányzik a tagok egymásközti korrelációja is. Az olyan esetekben azonban, mint a nemzeti jövedelem vagy a beruházások alakulása — vagyis ahol egy-egy eseményt, annak bekövetkezését döntően meghatározza az a szint, melyet az azelőtti időszakban elértünk — világosan kimutatható az „evolutív", a tendenciózus változás.

A trendszámításon, pontosabban a trendvonalak meghosszabbításán alapuló előrebecslési eljárások az utóbbi években ismét az érdeklődés középpontjába kerültek.[1] Ennek szükségességét — mint már említettük — elsősorban a gazdasági növekedés hosszútávú vizsgálata vetette fel. Azok a munkák, melyek e kérdéssel foglalkoznak, még jobban meggyőztek, hogy az extrapoláció azon módszerei, melyek egy-egy trendvonal puszta kivetítésével operálnak, pontatlanságuk és egyéb közgazdasági gyengeségeik miatt továbbfejlesztésre szorulnak. Az említett eljárások „félkész" volta két területen fedezhető fel:

a) Egyenlő súllyal értékelik a legfrissebb és a legrégibb időszakok realizációit, s így egy-egy, meglehet több évtizede végbement esemény éppúgy rányomja bélyegét az extrapolációs vonalra, mint a legutóbbi értékek bármelyike.

b) Az extrapoláció alapját képező időszak változásait mint egyetlen tendenciát fogják fel, nem pedig mint tendenciák szakadatlan egymásutánját.

Az első ellenvetés, mely az egyenlő súlyozást helyteleníti, könnyen igazolható. Gyakori, hogy a vizsgált sztochasztikus folyamat $(n+1)$-edik időpontra bekövetkező realizációja leginkább attól függ, hogy mekkora értékkel jelentkezett az előző, vagyis az n-edik időpont. Ez a legutolsó ismert érték az, melyhez a legreálisabban viszonyíthatunk, amitől a várható plusz—mínusz eltérést a legpontosabban előrebecsülhetjük. Igen nagy, bár az előzőnél valamivel kisebb hatással van az említett jövőbeli eseményekre az $(n-1)$-edik időponthoz tartozó érték, még kisebbel az $(n-2)$-edik és így tovább. Mindez az öröklődéstan egy jelenségéhez hasonlítható: az utód alkati és egyéb tulajdonságait döntően a szülők, kisebb mértékben a nagyszülők, majd a dédszülők, de végső soron egy több generációval korábbi „ős" is befolyásolja. Közgazdasági jellegű idősoroknál persze ez a genetika sokkal nehezebben vehető észre, illetve szemléltethető: különösen azért, mivel a „gyermek" alakulására nemegyszer tucatnyi „szülő", ezernyi „dédszülő" hat különböző súllyal és irányokban. (Nem is beszélve az olyan esetekről, amikor bizonyosfokú késést tapasztalhatunk, vagyis ahol a „gyermeket" nemegyszer négy-öt generációval korábbi „ősök" határozzák meg.) Mégis, a brutto termelés, a nemzeti jövedelem vagy éppen az állóalapok összvolumenének elemzésekor jogos, sőt kimondottan szükséges, hogy az előrebecslésnél a különböző „korú" értékeket más és más súllyal vegyük figyelembe. Arra, hogy ezek a súlyok mikor mekkorák legyenek, még visszatérünk.

Idősor, mint tendenciák átlaga

Az az észrevétel, hogy a trendvonal egyszerű kivetítése pontok (konkrét realizációk), nem pedig tendenciák alapján való extrapolációt jelent — s hogy az utóbbi helyesebb lenne — ugyancsak közgazdasági megfontolásból ered. Azok, akik gazdasági előrebecsléseiknél felhasználták a trendszámítás eredményeit, állandóan szembetalálhatták magukat azzal a problémával,

[1] E cikk keretében nem térünk ki Jánossy Ferenc legújabb könyvére, a körülötte kialakult vitára. Ennek ellenére tagadhatatlan az a hatás, melyet e dolgozat kérdésfelvetésére gyakorolt.

hogy vajon mi helyesebb: az utóbbi néhány (esetleg 5—6) vagy pedig a lehető legtöbb idő-adatot figyelembe vevő extrapoláció. Úgy tűnik, mindkét útnak megvan a logikája: az elsőnek annyiban, hogy várhatóan a legutóbbi időszakok tendenciája az, ami döntő hatással lesz a további (főként a közeljövőben végbemenő) fejlődésre. A második — s az előzővel némiképp ellentétes — koncepció azzal támasztható alá, hogy ezek a „legutóbbi" értékek nemegyszer véletlen, külső okoknál fogva a tényleges trendtől való szignifikáns eltérést jelentenek, s így az ezek alapján való előrebecslés teljesen hamis eredményt fog szolgáltatni.

Nem nehéz belátni, hogy mindkét érv megfordítható, s hogy ami az egyiknél hiba, a másiknál erény. A javasolt tendencia-előrebecslési eljárás éppen ezeket az ellentmondásokat igyekszik kiküszöbölni, méghozzá oly módon, hogy az extrapolációs görbét nem pontok (diszkrét realizációk) hanem trendek — méghozzá különböző hosszúságú trendvonalak — átlagaként írja fel.

Jelölje a továbbiakban $y_1, y_2, y_3, \ldots y_n$ a rendelkezésünkre álló idősor elemeit. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy ezek lineáris „evolúciót" mutatnak, vagyis az őket legjobban közelítő függvény

$$Y = a + b \cdot x \tag{1}$$

alakú.

Mint a kiindulásnál feltételeztük, az utolsó két, az utolsó három . . . stb. időpontok közti változás is hasonló — ezesetben lineáris — trendet mutat, s így ezek a visszamenőleg egyre több időpontot figyelembe vevő görbék egyenletei,

$$\begin{aligned} Y_2 &= a_2 + b_2 \cdot x \\ Y_3 &= a_3 + b_3 \cdot x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_j &= a_j + b_j \cdot x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= a_n + b_n \cdot x \end{aligned} \tag{2}$$

ahol a j azt mutatja, hogy az alap-idősor hány elemét vettük figyelembe (a „legfrissebbtől" visszafelé számítva) az adott rész-trend felírásánál.

Az eddigi gyakorlat a legutolsó görbe meghosszabbítása alapján végezte az előrebecslést. Emiatt a b_n, a trend-egyenes iránytangense valamint az a_n már kijelölték az extrapolációs vonal irányát és nagyságrendjét. Ugyanakkor viszont, ha figyelembe kívánjuk venni azokat a tendenciákat is, melyek az utóbbi két, az utóbbi három . . . stb. éveket jellemezték, úgy az Y_e-vel jelölhető extrapolációs görbe felírásához az $Y_2, Y_3, \ldots Y_n$ trendek paramétereire is szükségünk lesz. Másszóval: a javasolt eljárás az $Y_e = a_e + b_e \cdot x$ görbe együtthatóinak a többiek átlagát tekinti, vagyis:

$$a_e = \frac{\sum_{k=2}^{n} s_k \cdot a_k}{\sum_{k=2}^{n} s_k} \tag{3}$$

$$b_e = \frac{\sum\limits_{k=2}^{n} s_k \cdot b_k}{\sum\limits_{k=2}^{n} s_k}$$

ahol s_k az alkalmasan megválasztott súlyrendszer megfelelő eleme.

Sajnos a trendvonalak ilymódon értelmezett „súlyozott átlaga" csak bizonyos – mondhatni speciális – esetekben írható fel egy konkrét, folytonos függvény alakjában. Így van ez például akkor, amikor az eredeti trend képlete

$$Y = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + c_3 \cdot x^3 + \ldots + c_n \cdot x^n \qquad (4)$$

(ahol $n = 1, 2, 3 \ldots$ stb.) alakú. Ez esetben ugyanis az $Y = f(x)$ időfüggvény egy, az x hatványaiból képzett n-ed fokú polinom, melynél a paraméterek átlagolása viszonylag egyszerű feladat. Ezért azután külön szerencse, ha függvényünk ilyen, vagy legalább is ilyen (véges) polinomba „fejthető".[2] Ez a helyzet – többek között – a lineáris vagy a parabolikus trend esetében, amikoris igaz az, hogy az Y_e valamely jövőbeli időponthoz tartozó értéke egyenlő az Y_2, Y_3, .. Y_n „rész-trendek" meghosszabbításával kapott görbék adott időponthoz tartozó értékeinek súlyozott átlagával. Akkor azonban, amikor nincs mód a rész-trendek (4) vagy hasonló alakban való felírására, nem tudjuk az Y_e-t egyetlen összefüggő görbeként megadni, hanem meg kell elégednünk ennek az $(n + 1)$, $(n + 2)$, ... $(n + m)$-edik jövőbeli időpontokra vonatkozó diszkrét értékeivel. Ez a helyzet a gazdasági előrebecslésnél oly gyakori exponenciális trend esetében, amikor az $Y_k = a_k \cdot b_k^x$ alakú résztrendekből – a szóbanforgó súlyozási elv mellett – nem tudunk egy $Y_e = a_e \cdot b_e^x$ alakú „átlagos" extrapolációs vonalat konstruálni. (Függetlenül attól, hogy a különböző x időpontokhoz tartozó előrebecsült értékek meghatározhatók, mint az Y_k görbék extrapolált értékeinek súlyozott átlagai.)

Rövid és hosszútávú előrebecslés – a súlyrendszerről

Mint már említettem, az extrapolációs görbét úgy kívánjuk megszerkeszteni, hogy abban az utolsó két időpont közötti tendencia más súlyt kapjon, mint az, amely az utolsó három realizációt jellemzi: mást, mint ami az utolsó négyet – és így tovább. Ha elfogadjuk azt a feltételezést, miszerint a legutóbbi évek eredményei valamivel erősebben befolyásolják a jövőbeli változást, mint a nemegyszer 30–40 éve végbement események; valamint, hogy a résztrendek átlagolása jobb közelítést ad, mint egy-egy trendvonal puszta kivetítése, úgy a következő súlyozási lehetőségeink vannak:

1. Egyszerű átlagolás
2. Direkt súlyozás

Az első esetben, amikor az alap- illetve résztrendeket egyenlő súllyal értékeljük, valójában igen differenciált súlyozás történik. Az átlagolás miatt ugyanis az előrebecsült értékeket az n elemű trend $n-1$ résztrendje befolyásolja, s így az utolsó két trend-érték hatása $(n-1)$-szeres, az $(n-2)$-edike

[2] A függvények sorbafejtésével a megfelelő szakirodalom, így pl. Szép Jenő: Analízis c. könyve is foglalkozik.

($n-2$)-szeres, s végül az első, a legrégibb érték már csak egyszeres „nyomatékot" kap, lévén, hogy ezt csak az alaptrend szerepelteti. Persze itt a „súly" kifejezést inkább a közvetett hatásra, mintsem a szó lineáris, pontosabban numerikus értelmében használom — hiszen köztudott, hogy a pontsort legjobban közelítő görbére csak bonyolult áttétellel hat egy-egy realizáció kisebb-nagyobb „kilógása" az esetleg valóban meglevő tartós tendenciából.

Látható tehát, hogy az egyszerű átlagolás önmagában is egy igen erős súlyozást jelent. Ezzel szemben a másik, a direkt eljárás éppen arra törekszik, hogy olyan súlyrendszert találjon, mely az előbbi durvaságát némiképp finomítani tudja. Erre a következő meggondolások adnak lehetőséget:

a) Nem az egyes trend-értékeket súlyozzuk, hanem a résztrendeket (illetve, ha átlagolásukra egyetlen Y_e nyerésére nincs lehetőség, ezek előrebecsült értékeit);

b) A legnagyobb súlyt a teljes idősort magába foglaló rész- (pontosabban: alap-) trendnek adjuk;

c) A súlyokban érvényre juttatjuk azt az elvet, hogy minél rövidebb a szóbanforgó résztrend, annál kisebb a valószínűség, hogy a további fejlődés tényleges irányát mutatja;

d) A súlyoknak érzékeltetniök kell azt a feltételezést, miszerint az utóbbi évek realizációi inkább a közeli, mint a messze jövőbeli tendenciák hordozói.

A fenti elvek helyességét, közgazdasági megalapozottságát Román Zoltán egy találó hasonlatával szeretném alátámasztani: „Repülőről lepillantva, az út kisebb kanyarai nem látszanak, irányát nagyszerűen beláthatjuk; de földön haladva ilyen kisebb kanyarokban is fának ütközhetünk. A tartós tendenciák és a rövidtávú változások tehát egyaránt figyelmet érdemelnek."[3]

A kitűnő példa önmagáért beszél, mégis folytassuk a szemléltető képet. Felmerül a kérdés: mi legyen a továbbhaladás iránya (mondjuk a földön), ha zeg-zugos útunk egy ponton véget ér? Nagyon valószínű, hogy az építőket már eddig is az a törekvés vezette, hogy a kitűzött végpontot a lehető legrövidebb úttal közelítsék. Így feltehetőleg már az eddigi útszakasz is ezt „célozta", méghozzá a különböző természeti akadályok miatt több-kevesebb eltéréssel. Ebből viszont az következik, hogy a végcélt legjobban az eddigi haladás fő-irányvonalának előrevetítésével lehet megbecsülni. (Legalábbis: azáltal, hogy ennek adjuk a legnagyobb valószínűséget.)

Gazdasági növekedésnél persze hiba lenne valamiféle „végpontról" beszélni — mint ahogy ezt Román Zoltán sem teszi — s így e képet is csak bizonyos megszorítással lehet a közgazdaság nyelvére transzformálni. Ettől függetlenül igen erős a csábítás, hogy még tovább vezessük, újabb aspektusból szemléljük a fenti hasonlatot. Tételezzük fel ugyanis, hogy már a féligkész út végpontján állunk, mögöttünk távolba vesznek a kilométerkövek, s mi folytatni akarjuk az utazást. Az előttünk lévő ismeretlen terepen valahol már kitűzték az irányjelző póznát, de hogy pontosan hová, nem tudjuk. Hogy megtaláljuk, legokosabb, ha az utolsó (legalábbis: egy viszonylag rövidebb) útszakasz vonalát követjük, hiszen semmi okunk feltételezni, hogy ott, ahol az út végetért, törés volt „beütemezve", vagy hogy éppen ott készültek beállni az alapirányzatra. Persze ekkor is figyelembe kell venni az eddigi fő-tendeciát (meglehet, hogy az utolsó szakasz mégiscsak egy nagy „sziklát" került ki), de lényegesen kisebb súllyal, mint az előbb. (Még valósághűbbnek látszik a fenti

[3] Román Zoltán: A trendvonalak csodája? — Közgazdasági Szemle 1967/3.

hasonlat, ha azt is figyelembe vesszük, hogy a gazdasági folyamatok „ország-útjait" nemigen szoktuk ismételten bejárni, s így a régebbi adatok „elévülése" reális feltételezés.)

Az eddigiek alapján azt mondanám: rövidebb időszakra vonatkozó előrebecslésnél a legfrissebb periódusok tendenciáit viszonylag nagyobb súllyal kell értékelni, s minél jobban előremegyünk az időben, relatíve úgy kell növekedniök a hosszabb résztrendek súlyainak. Vagyis: ha kiindulási alapul két év „tendenciáját" vesszük, akkor ez és általában a rövidebb résztrendek annál kisebb — s az alaptrend relative annál nagyobb — súlyokat kell hogy kapjanak, minél távolabbi az extrapolációs időpont. Mindezt — a fenti úthasonlat mellett — számításaink is alátámasztani látszanak; függetlenül attól, hogy távolról sem merném a javasolt súlyrendszert tökéletesnek nevezni.

De mekkorák is legyenek a résztrendek súlyai? Az említett négy feltétel közül az első kettővel már részletesen foglalkoztunk, illetve a másodikra még visszatérünk. Ezeknek, valamint a két utolsónak eleget tevő súlyrendszert az

$$s_{ij} = \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_j}\right) \tag{5}$$

formulával véltük megtalálni, ahol

s_{ij} = a j-edik résztrend súlya az i-edik extrapolációs időpontra
A = a rendelkezésre álló idősor hossza
R_j = a j-edik résztrend alapjául szolgáló idősor hossza
E_i = az extrapolációs időpont távolsága.

Az (5) képlet szolgáltatta súlyok oly módon felelnek meg az *a)*—*d)* feltételeknek, hogy egyenes arányt mutatnak a rész-intervallum relatív hosszával (R_j/A), miközben a jövőbeli időpont viszonylagos távolságával (E_i/R_j) fordított arányban vannak. Azt, hogy mindezt egy exponenciális függvénnyel fejezzük ki, a bekövetkezés, a konkrét realizáció valószínűségi jellegével, az exponenciális eloszlással való szoros kapcsolattal magyarázhatjuk. (Könnyen belátható, hogy a fenti arányok lineáris formában való érvényre juttatása az esetek zömében még erősebb súlyozást jelentene, mint amit az egyszerű átlagolásnál láttunk.) Az, hogy alap-idősorunk egyes értékei ($y_1, y_2, \ldots y_n$) tompítottabb súlyokat kapnak, ott derül ki, amikor az (5) képlet alapján nem a rész-trendek, hanem az azokat meghatározó (y_n, y_{n-1}), (y_n, y_{n-1}, y_{n-2}) ... stb. rész-idősorok összetevőinek egyedi (közvetett) súlyát nézzük az Y_e „átlagos" trendben. Ekkor ugyanis az első, (legrégibb érték — mely csak az alaptrendet befolyásolja —)

$$s_{in} = \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_n}\right)$$

a második (y_2) már

$$s_{in} + s_{i,n-1} = \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_n}\right) + \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_{n-1}}\right)$$

míg a legfrissebb érték (y_n)

$$\sum_{j=2}^{n} s_{ij} = \sum_{j=2}^{n} \exp\left(-\frac{A+E_i}{R_j}\right)$$

súlyt kap, s ezek egymásközti arányai — éppen az s_{ij}-k exponenciális volta miatt — lényegesen „valósághűbbek" az egyszerű átlagolás lineáris súlyainál. (Mindez a későbbiekben közölt számszerű feladatból is kiderül.)

Az eddigiek, vagyis a javasolt extrapolációs algoritmus, az egyszerű és a súlyozott trend-átlagolás konkrét, numerikus példával történő bemutatása előtt néhány — nem elhanyagolható — körülményre szeretnék rámutatni.

a) Nehéz a fenti metódusok viszonylagos „jóságát" egzakt közgazdasági-matematikai érvekkel bizonyítani. Ez különösen a „direkt" eljárásra vonatkozik, ahol az a feltételezés, hogy a legjobb súlyrendszer kizárólag az idő, pontosabban bizonyos periódusok relatív hosszának lenne a függvénye, már maga is egy nagyfokú absztrakció. (A vizsgáltat tárgyát képező közgazdasági idősorok alakulására a már említett külső tényezők lényegesen nagyobb hatással lehetnek, mint amit az idő változása, a „természetes evolúció" okoz. Ennek még az sem mond ellent, hogy a trendszámításnál mindig feltételezzük, hogy az egyes realizációk kizárólag az idő függvényei.) Éppen ezért egy alkalmasabb súlyrendszer keresése jelenthetné a továbbfejlesztés egyik irányát.

b) Nem szabad elfelejteni, hogy az extrapoláció kiinduló pontja ez esetben a legutolsó időszak. Ez tágabb megfogalmazásban azt jelenti, hogy nincs semmiféle közgazdasági tartalma az Y_e görbe $(n-1)$-edik, $(n-2)$-edik stb. időpontokhoz tartozó, vagyis a „múltra" visszavetített értékeinek. Azt az eljárást tehát, melyet a trendvonalak meghosszabbításával való előrebecslés jelent, itt nem lehet megfordítani, s interpolációra használni az extrapolációs görbét. (Az utolsó két, három stb. időpont realizációi ugyanis nem hatnak vissza az első, második . . . stb. időpontban már bekövetkezett eseményekre.)

c) Az az elv, hogy az extrapolációs görbét a legfrissebb adatok beérkezésével állandóan módosítani kell (tehát pl. évről évre) itt hatványozottan érvényesül. Ez azzal magyarázható, hogy míg az „alap-trend" előrevetítésénél egy-egy új érték csak egy idősor módosítását igényelte, addig itt megváltozik mind a súlyok, mind a rész-trendek egész rendszere. (Ez esetben ugyanis a számítások legfőbb bázisa a legutóbbi időpont realizációja.)

d) A legnagyobb problémát az okozza, hogy az előrejelzés különböző módszereinek helyességét — vagyis hogy melyik ad pontosabb becslést a jövőre vonatkozólag — nemigen lehet kimutatni.[4] Elvileg ugyanis — az $(n + m)$-edik időpontra becsült értéket y'_{n+m}-mel jelölve — a

$$\delta_{n+m} = (y'_{n+m} - y_{n+m}) \tag{6}$$

eltérés minimumát szeretnénk biztosítani minden jövőbeli realizációra. (Ahol is y_{n+m} a ténylegesen bekövetkező, jelenleg még ismeretlen nagyságú kimenetel.) Ha ismernénk ezeket az y_{n+i}-ket, úgy a

$$\sum_{i=1}^{m} (\delta_{n+i})^2 \rightarrow \text{minimum!} \tag{7}$$

célkitűzés biztosításával — vagyis a közismert „legkisebb négyzetek módszerével" — már megállapíthatnánk, hogy melyik az az y'_{n+i} sorozat, mely a legjobban közelíti őket.[5]

Mivel azonban éppen ezek az ismeretlenek, így a (6) differencia egyik tagjáról sincs konkrét információnk, s be kell érnünk az általunk legjobbnak vélt

[4] M. Ezekiel amerikai kutatónak tulajdonítják azt a megjegyzést, miszerint a jó görbe-illesztés „nem tudomány, hanem művészet" lenne.

[5] Megjegyzendő, hogy a legkisebb négyzetek elve ugyancsak konvenció: „szabálytalan" pontsor „legjobb" közelítésének nincs abszolút matematikai kritériuma.

közgazdasági-matematikai hipotézis elfogadásával. Megítélésem szerint a tendencia-átlagolás elve — mely nagyjában-egészében hipotéziseken alapul — hatékonyabb eljárás, mint az alaptendencia puszta kivetítése. Mindez távolról sem jelenti azt, hogy a valószínűségszámítás, a matematikai analízis módszerei bizonyos esetekben ne tennék lehetővé az összehasonlítást, vagy éppen az előrebecslés pontosabbá tételét. Úgy tűnik azonban, hogy a matematikai apparátus további előretörése sem nélkülözheti a vizsgált folyamat nem-matematikai — jelen esetben közgazdasági — tulajdonságainak mélyebb elemzését. E kérdésre — talán egy másik cikk keretében — még szeretnék visszatérni.)

e) Igen gyakran megesik, hogy bizonyos szakaszosságot észlelünk az idősoron belül. Előfordulhat, hogy az első i érték lineáris, a következő $(n-i)$ pedig parabolikus trendre enged következtetni — hogy csak egy egyszerű példát említsek. Különösen így van ez a szóbanforgó eljárásnál, amikor az utolsó két adat feltétlenül lineáris, az utolsó három már lehet, hogy exponenciális trendet határoz meg, s a többi ,,részhalmaz'' még vagy hat-nyolc félét. (Annak megállapítására, hogy mikor milyen típusú görbét célszerű az adott idősorra fektetni, megvannak a matematikai statisztika egyszerű kritériumai.) Az, hogy a kiindulásnál teljesen figyelmen kívül hagytuk ezt a lehetőséget, még nem jelenti azt, hogy ne lenne itt is megoldás; jóllehet egyetlen (folytonos) Y_e-t itt sem adhatunk. Maga az előrebecslés ugyanúgy történhet, mint az exponenciális esetben: meghatározzuk az egyes (tetszőleges függvénytípusú) rész-trendeket, ezeket előrevetítjük a megfelelő jövőbeli időpontra s a kapott értékekből — súlyozva vagy anélkül — meghatározzuk az ismeretlen Y_e keresett realizációját.

Az előzőekben vázolt extrapolációs algoritmust egy közismert idősoron: nemzeti jövedelmünk 1950—1967 közötti alakulásán fogjuk bemutatni. Az eljárás sarkalatos elve a következő: ismertnek tekintjük a szóbanforgó idősor 1950—1959-es értékeit, majd ezek alapján ,,ex post'' előrebecslést végzünk az 1960—1967-es évekre. Az alaptrendet tehát az 1950—59-es, a rész-trendeket pedig az 1951—59, 1952—59 . . . 1958—59-es periódusok értékeiből képezzük. A számítások során valamennyire kétféle görbét fektettem: egy lineárist és egy exponenciálist. Azt, hogy mikor melyiket fogadtam el jobbnak, mindig a korrelációs együttható nagysága döntötte el; feltételezvén, hogy a jövőbeli alakulást a múltbeli adatokhoz legjobban simuló görbe közelíti helyesen. (Ez — mint ismeretes — nem mindig igaz, mégis úgy vélem, a jelen esetben ez a legszerencsésebb megoldás).

Az ex post előrejelzés lehetővé tette a hagyományos, valamint az általam javasolt extrapolációs módszerek numerikus összevetését. (Az előrebecsült értékek ugyanis az idősor tényleges ,,folytatásával'' kerültek szembeállításra.) Még a számítások ismertetése előtt be kell vallanom, hogy nem okozott volna különösebb nehézséget olyan — ugyancsak tényadatokra épülő — számpéldát találni, mely akár az egyik, akár a másik eljárás ,,tökéletességét'' bizonyítaná. Éppen ezért választottam azt a — kevésbé látványos, de talán becsületesebb — megoldást, hogy olyan numerikus feladatot ismertessek, mely nem az általam inkább favorizált ,,direkt'' súlyozásos eljárást, hanem az egyszerű átlagolást hozza ki előnyösebbnek. (Hogy ez miként lehetett, arra még külön kitérek.)

A számítások* a következő eredményt adták: (Lásd a táblázatot a 37. oldalon.)

* A számítások gépi futtatása, a gépi program elkészítése Bíró András, illetve Vásárhelyi Péter munkája.

A nemzeti jövedelem alakulása és „ex post" előrebecslése
(1959-es árakon, md Ft-ban)*

Bázisértékek: (1950—59) — 78,8; 91,8; 89,6; 100,7; 96,2; 104,2; 92,4; 113,4; 119,6; 127,3
Extrapolált értékek (valamint tényleges realizációk)

Év	Tényadat	Periódus	1958—59	1957—59	1956—59	1955—59	1954—59	1953—59	1952—59	1951—59	1950—59	Sima átlag	Súlyozott átlag
		Trend típusa	lin.	lin.	lin.	expon.	expon.	expon.	expon.	expon.	expon.		
1960	139,5		135,0	134,0	140,9	134,9	132,3	127,5	127,6	125,7	127,5	131,7	128,9
1961	148,1		142,7	140,9	152,0	144,0	140,2	133,2	133,3	130,8	133,2	138,9	135,1
1962	155,1		150,4	147,9	163,1	153,8	148,5	139,1	139,3	136,0	139,1	146,3	141,4
1963	163,9		158,1	154,8	174,2	164,3	157,3	145,3	145,5	141,5	145,3	154,0	147,9
1964	171,7		165,8	161,8	185,3	175,5	166,7	151,8	152,1	147,2	151,7	161,9	154,6
1965	173,7		173,5	168,7	196,4	187,4	176,5	158,6	158,9	153,2	158,5	170,1	161,6
1966	188,3		181,2	175,7	207,5	200,2	187,0	165,7	166,1	159,3	165,5	178,6	170,3
1967	199,4**		188,9	182,6	218,6	213,8	198,1	173,1	173,5	165,8	172,8	187,4	176,3

Bázis év = 10 év = A

A felhasznált súlyok $s_{ij} = \exp\left(-\frac{A + E_i}{R_j}\right)$

Extrapolációs idő (év) $-E_i$									
1	0,0041	0,0256	0,0639	0,1108	0,1599	0,2077	0,2528	0,2946	0,3329
2	0,0025	0,0183	0,0498	0,0907	0,1353	0,1801	0,2231	0,2636	0,3012
3	0,0015	0,0131	0,0388	0,0743	0,1146	0,1561	0,1969	0,2359	0,2725
4	0,0009	0,0094	0,0302	0,0608	0,0970	0,1353	0,1738	0,2111	0,2466
5	0,0006	0,0067	0,0235	0,0498	0,0821	0,1173	0,1534	0,1889	0,2231
6	0,0003	0,0048	0,0183	0,0408	0,0695	0,1017	0,1353	0,1690	0,2019
7	0,0002	0,0035	0,0143	0,0334	0,0588	0,0882	0,1194	0,1512	0,1827
8	0,0001	0,0025	0,0111	0,0273	0,0498	0,0764	0,1054	0,1353	0,1653

* **Forrás:** Idősorok a népgazdaság 1950—1967 közötti időszakának tanulmányozásához. Gazdaságkutató Intézet — 1968.
** KSH becsült értéke.

Mint látható, itt sem lehetett egyetlen Y_e görbét konstruálni, s ezért az egyes rész-trendek „ideális" típusát — vagyis hogy melyik alapján számoltunk, melyiknek volt szorosabb az illeszkedése — ugyancsak feltüntettük. Nem nehéz azt sem észrevenni, hogy a „tisztán" és a súlyozva átlagolt értékek jelentősen eltérnek a ténylegesen bekövetkezett realizációktól. Jóllehet a tökéletes előrebecslés igénye — sztochasztikus folyamatoknál — nyilvánvalóan ábránd, mégis felmerül a kérdés, vajon melyik eljárás adott pontosabb közelítést. A választ a (7)-ből képzett szórás-mutató, a

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} (\sigma_{n+i})^2}{m}} \tag{8}$$

mindenkori nagysága adja meg. Esetünkben — kizárólag a módszer szemléltetése céljából — ismertnek vettük a jövőbeli y_i-ket, s így a fenti, speciálisan értelmezett szórásokat egyszerűen kiszámíthattuk:

Az extrapoláció bázisául szolgáló periodus	A tényleges és a számított értékek átlagos eltérése (σ_j)	Sorrend*
1950—59	18,02	8.
1951—59	23,30	11.
1952—59	18,42	9.
1953—59	18,68	10.
1954—59	5,44	1.
1955—59	8,59	3.
1956—59	13,82	6.
1957—59	9,21	5.
1958—59	6,13	2.
Direkt súlyozásos	15,89	7.
Egyszerűen átlagolt	9,13	4.

* Legkedvezőbbnek értelemszerűen a legkisebb szórású résztrendet vettük.

Jóllehet igyekszem ellenállni annak a csábításnak, hogy mélyebb közgazdasági értékelését adjam a fenti eredményeknek, a következőket kell megjegyeznem. Minden esetben — a már említett okoknál fogva — el kell vetni azt a lehetőséget, hogy csupán az utolsó két-három évet tekintjük az előrejelzés bázisának. (Még akkor is, ha nemegyszer — mint példánkban is — oly megdöbbentően pontos a rövid-távú közelítés.) Ezért — az adott esetben — a kétféleképp nyert „átlagos" trenddel csak az 1954—59-es és az 1955—59-es konkurrálhat. Ráadásul ha még azt is figyelembe vesszük, hogy általában nem tudjuk mekkorák lesznek a jövőbeli értékek — vagyis semmiféle információnk sincs arra vonatkozóan, hogy az egyes rész-trendek kivetítése önmagában milyen extrapolációt biztosít — úgy csakis az első, a teljes idősor trendjével lehet reális az összevetés. Az pedig — esetünkben — a nyolcadik helyre rangsorolódik, s rosszabb közelítést ad, mint bármelyik a szóbanforgó két eljárás közül.

És itt mindjárt felmerül a kérdés: a „sima" átlagolás miért adott lényegesen jobb előrebecslést, mint a súlyozásos? Általános-e ez a kép s vajon mivel magyarázható? — A válasz igen egyszerű. Az alap-idősor: nemzeti jövedelmünk 1950—59-es alakulása rendkívüli ingadozást, tendencia-hullámzást mutat. Lényegében csak 1957—59-cel indult be az a nivellálódás, az a viszonylag kisebb amplitúdójú fejlődés, mely a hatvanas éveket közismerten jellemzi. Éppen ezért történhetett meg az, hogy az utolsó éveket lényegesen nagyobb súllyal értékelő egyszerű átlagolás hozta meg a valósághűbb előrejelzést, s nem az alaptrendre nagyobb súlyt fektető direkt eljárás. Számításaim — melyeket több, az előzőhöz hasonló „globális" mutatóra is elvégeztem (ipari termelés, kiskereskedelmi forgalom, stb.) alátámasztani látszanak azt az egyre gyakrabban hallható véleményt, miszerint 1957—59 között lenne egy olyan gazdasági határkő, melyet a népgazdaság főbb mutatóinak elemzésénél mindig figyelembe kell venni. Ez pedig azt jelenti, hogy a magam részéről az 1970-es évekre történő előrejelzés kiinduló pontjának a fenti évek valamelyikét venném.

Végezetül még a következőket szeretném megjegyezni. Egyáltalán nem állítható, hogy minden idősorra, bármely esetben a tendencia-átlagolás módszere adja a legjobb előrejelzést. (Szabad legyen itt még egyszer e módszerek nem összehasonlítható, hipotetikus jellegére hivatkoznom.) Mindezek ellenére a számítások minden esetben igen jó, szinte meggyőző eredménnyel szolgáltak. Ettől függetlenül már most szándékomban áll a továbbfejlesztés azon útjait keresni, melyek az „egyéb" hatótényezők bekapcsolásával, vagyis több változó egyidejű figyelembevételével pontosabbá, használhatóbbá teszik az eljárást.

(Beérkezett: 1968. aug. 10.)

EXTRAPOLATION ON THE AVERAGE OF SECTIONAL TRENDS

This thesis reviews a special method of prediction based on trend calculations. The author refers to the fact that long range planning, and different territories of economic prediction have already made use of the method of trend calculation. Nevertheless, he feels that there are possibilities for development of its use. There are two fields in which he finds that extrapolation based on trend calculation is "semi-finished".

a) It evaluates the most recent and the oldest events with equal weight, and because of this it happens that a realization decades old may leave the same stamp on the extrapolation line, as any of the most recent values.

b) Changes in the time period on which the extrapolation is based are handled as a single tendency, and not as an unbroken sequence of tendencies.

His first observation is in connection with a question which has still not been decided: whether it would be more suitable to base extrapolation on the most recent time data (perhaps a period selected on the basis of certain economic ideas), or on the longest possible time period.

It would seem that both directions are logical. The first is so insofar as it would be expected that the tendency of the most recent time period is the one which has a decisive effect on further (particularly regarding the near future) development. The second conception, and this is to an extend in contradiction with the first, can be supported by the fact that these "most recent" values are sometimes accidental. They represent a significant deviation from the actual trend, due to objective circumstances, and because of this, predictions based on them may be totally inaccurate. It's not difficult to see that both reasonings can be inverted, and what is a drawback in one can be an advantage in the other.

The proposed tendency prediction system attempts to remove these contradictions, using a method in which the extrapolation curve is not expressed is the average of points but as that of trends, or rather of trend lines of different length. He achieves this by handling fluctuation between the two most recent points of time as an independent "tendency",

as well as we experience between the most recent 3, 4, 5 ... etc. time periods, and this way, taking an n-element time series, and constructing a $(n-1)$ sectional time series, he determines, and with certain weights, averages their trends. The derivation of the extrapolation curve — in a linear case — can be done on the basis of (2) or (3), when the curve can be characterized by a straight line using the equation $Y_e = a_e + b_e \cdot x$. The author stresses that averaging the part-trends can not be solved with the averaging of parameters, but in case when,

a) the basic time series shows exactly the same tendencies as each of the part-series (in other words, if all can be approached through linear, exponencial or other functions, which are indentical in structure, and only differ in their parameters).

b) the approximating function is such that each point in the extrapolation curve achieved through averaging the suitable parameters is indentical with the value of the part-trends for the same point of time averaged in the same way. This does not always hold, not even in the exponential case which is so frequent in economic prediction. In cases like this, and when the uniformity mentioned in point *a)* is missing, a continuous Y_e curve cannot be constructed, so we must be satisfied with an averaging of the individual part-trends "projected" to the future.

Then the author discusses the question of applied weights. This is necessary in order that realizations from different time periods be validated with different weight in predicting future events. He proposes two solutions: the "simple" and the "direct" methods. In the first case we take the simple average of the part-trends' predicted values and in this way the freshest values receive increasing weight, so that the most recent value is included in all the time series thus in all the part trends as well, while the oldest value is included in only one trend. For this reason in an n-element basic time series, the first value effects future events only simply, while the two most recent have a $(n-1)$ "weight", and in this way it turns out that simple average in reality has a very strong weight. The direct system calculates the weight on the basis of a formula, in which we can include factors such as the relative length of the time series, or the future distance of the extrapolational time. The numerical example shown demonstrates the weights gained on the basis of formula (5), in which the two algorithms are exhibited, based on the statistical figures of Hungary's national income between 1950 and 1967. Here, in fact, an ,,ex-post" extrapolation takes place: the individual part trends' predicted values for the years 1960—1967 and their "averages" are compared with the 1960—1967 actual data, and this way the different results can be compared numerically.

In conclusion the author refers to the incomparability of extrapolation methods, and to the fact that the algorithm he proposes is nothing else than a hypothetic system based on certain theoretical and practical ideas. Nevertheless, his calculations lead one to assume that the system and its further development can be successfully applied in iconomic predictions.

ЭКСТРАПОЛЯЦИИ НА ОСНОВАНИИ УСРЕДНЕНИЯ ЧАСТНЫХ ТРЕНДОВ

В данном труде представляется специальный метод прогнозирования, основывающегося на исчислении трендов. Автор, ссылаясь на то обстоятельство, что в различных областях перспективного планирования, экономического прогнозирования уже и ранее употреблялись методы исчисления трендов, все же полагает, что возможно их дальнейшее усовершенствование. По его мнению, основанная на исчислении трендов экстраполяция имеет «полуготовый» характер в двух областях:

а) события наиболее близких и самых отдаленных периодов оцениваются ею с одинаковым удельным весом, и, таким образом, та или иная, возможно, проистекавшая десятилетиями назад реализация накладывает свою печать на экстраполяционную линию, в такой же мере, как и любое из последних значений;

б) изменения, происшедшие за представляющий основу экстраполяции период, рассматриваются как единственная тенденция, а не как непрерывная последовательность тенденций.

Первое замечание связано с вопросом, нерешенным до сегодняшнего дня и заключающимся в том, что правильнее: производить экстраполяцию с учетом данных нескольких последних сроков (возможно, избранных на основании определенных экономических соображений) или же на основании как можно более длительного периода.

Представляется, что оба пути имеют свою логику. Логичность первого заключается в том, что предположительно тенденция последних периодов должна оказать решающее влияние на дальнейшее (предусматриваемое в ближайшем будущем) развитие. Вторая — несколько противоречащая первой — концепция подтверждается тем, что такие «последние» значения по случайным, внешним причинам не раз означают значительные отклонения от действительного тренда, и поэтому производимое на их основании прогнозирование может дать совершенно ложные результаты. Не трудно заметить, что оба довода могут быть повернуты, и то, что в одном случае является недостатком, в другом случае значает положительную черту.

Предлагаемый способ прогнозирования тенденций старается исключить как раз эти противоречия, изображая экстраполяционную кривую не посредством усреднения точек (дискретных реляций), а трендов, вернее: отрезков трендов различной длины. Это достигается посредством того, что динамика между последними двумя сроками, как и динамика между последними 3-им, 4-ым, 5-ым и т. д. сроками рассматриваются как самостоятельные «тенденции»; и на основании $(n-1)$ рядов, полученных из содержащего n элементов ряда, определяются, а затем при определенном взвешивании усредняются их тренды. Получаемая таким образом экстраполяционная кривая — в случае линейности — может быть образована на основании (2) и (3), причем эта кривая представляет собой прямую, характеризуемую формулой $Ye = a_e + b_e$. Автор особо подчеркивает, что усреднение частных трендов может производиться путем усреднения параметров лишь в тех случаях, когда

а) исходный ряд показывает ту же тенденцию, что и каждый из частных рядов (то есть, когда каждый из них может быть приближен линейными, показательными или прочими функциями тождественного построения, различающимися только по своим параметрам);

б) приближающая функция выбрана таким образом, что все точки экстраполяционной кривой, полученной путем усреднения соответствующих параметров, совпадают с усредненными по тем же принципам значениями отдельных частных трендов, относящимися к тем же срокам. Это не всегда наблюдается, как например, и в столь часто встречающемся при экономическом прогнозировании случае показательной функции. В таких случаях, а также если не имеется упомянутой в пункте а) однородности, нет возможности для построения непрерывной кривой Ye, а приходится довольствоваться усреднением «проектируемых» на будущее значений отдельных частных трендов.

В дальнейшем автор затрагивает вопрос применяемых при взвешивании соотношений. Это необходимо для того, чтобы при прогнозировании будущих событий реализации различного «возраста» фигурировали с различным удельным весом. Он предлагает два метода: «простой» и «прямой». В первом случае берутся обыкновенные средние величины прогнозируемых значений трендов, и в этом случае все более поздние значения приобретают все больший удельный вес посредством того, что последняя реляция фигурирует во всех частных рядах (а таким образом, и в частных трендах), в то время как, самое старое значение фигурирует лишь в одном единственном тренде. Из-за этого в случае n-элементного исходного ряда первое значение влияет на будущие события лишь с однократной «силой», в то время как два самых последних с $(n-1)$-ной «силой», и, таким образом, оказывается, что простое усреднение производится с весьма сильным взвешиванием. При прямом способе употребляемые при взвешивании соотношения исчисляются на основании формулы, в которой могут быть учтены такие факторы, как относительная длина частного ряда или относительная будущая отдаленность экстраполяционного срока. Эти полученные на основании формулы (5) соотношения взвешивания представлены и в сообщаемом далее нумерическом примере, в котором два типа алгоритмов показаны на основании данных национального дохода Венгрии в период между 1950—67 гг. Здесь, по существу, производится экстраполяция (ex post»: прогнозированные на период 1960—67 гг. значения отдельных частных трендов и их «средние» сопоставляются с фактическими данными этого же периода, и, таким образом, можно нумерически сравнить различные результаты.

В заключительной части своего труда автор ссылается на несопоставимость экстраполяционных методов, указывая на то, что и предлагаемый им алгоритм является ничем иным, как гипотетическим способом, строящимся на определенных принципиальных и практических соображениях. Все же его расчеты позволяют заключять, что этот метод, его усовершенствованные варианты могут быть полезно применены при экономическом прогнозировании.

Bródy András

Ciklus és mérlegegyensúly

Az utóbbi időben többen, így például Goldmann (1964), Hoch-Berényi (1965), Bródy (1967) rámutattak arra, hogy a szocialista gazdaság nem mentes bizonyos erőteljes ingadozásoktól, amelyek a tőkés konjunktúraciklus menetére emlékeztetnek.

Valószínűnek látszik, hogy az ilyen ingadozások fő oka a szocializmus sajátos körülményei közt nem a piaci viszonyokban vagy a pénzügyi mechanizmusban keresendő. Kézenfekvő tehát az ingadozásokat kiváltó mozzanatokat magában a tervezésben, a tervezéssel összefüggő kérdésekben kutatni. A tapasztalat ugyanis azt mutatja, hogy az ingadozások nemcsak a tényszámokban, hanem a tervszámokban is tükröződnek. Maguk a tervek is tartalmazzák tehát a ciklust.

Az alábbiakban a tervszámítások egy igen elvont matematikai modelljéről számolok be, amely képes némi fényt vetni az ilyen ingadozások kialakulásának körülményeire, lehetőségeire, sőt szükségszerűségére. Arra a következtetésre jutottam, hogy a terv mérlegeinek egyensúlya összefér a bennük szereplő mutatók ingadozásával. Ezt lényegében, bár más kontextusban, Erdős (1966) is kimutatta a marxi sémák elemzésekor. De ennél több is igaz az elvont modellban: *a ciklus éppen annak következtében alakul ki, hogy a tervek a mérlegek teljes egyensúlyára törekednek.*

Ez, másképpen fogalmazva azt jelenti, hogy amikor a terv mérlegein belül a keresletet és a kínálatot (vagy a szaknyelven szólva: a forrásokat és az elosztást) az itt leírandó módon egyensúlyba hozzuk, akkor ez az eljárás olyan eredményhez vezet, amely a ciklusmentes fejlődés útjától eltávolít. Ez az eljárás csak akkor képes a ciklusmentes fejlődés útján tartani a tervszámokat és ezzel a gazdaságot, ha már a tervezés előtti időszak, a bázisidőszak idején is megfelelő arányok alakultak ki. Ha azonban ettől a sima fejlődési útvonaltól, illetve az ennek megfelelő arányoktól a bázisidőszakban a legkisebb eltérés is mutatkozott, akkor a mérlegek szokásos módon való kiegyensúlyozása az eltérést fokozni fogja. Az eljárás a netán fennálló feszültségeket, zavaró tendenciákat tovább erősíti.

A tárgyalt modell, a tervszámítások eszmei váza, a mérlegegyensúly megfogalmazása és a távlati, ciklusmentes fejlődési út meghatározása, mind igen elvont és leegyszerűsített. Csak arra törekszem, hogy a jelenség „logikai csontvázát" bemutassam, s matematikai levezetéssel, valamint egy kis számpéldával illusztráljam. Szeretném e modellt a jövőben valóságos statisztikai adatok fényében konkrétebben is kidolgozni. Ilyen adatok azonban, elsősorban a részletes beruházási matrix, csak a jövőben állanak majd rendelkezésre. Így helyesnek láttam az alapvető elgondolást — elsősorban tervezéselméleti fontossága miatt — már ebben az előzetes formájában is vitára bocsátani.

1. Problémafelvetés és modell

Egy adott időszak terve — első közelítésben — arra szolgál, hogy az illető időszak társadalmi anyagcseréjének egyensúlyát biztosítsa. Ez annyit jelent, hogy olyan bruttó termelési szinteket veszünk tervbe, amelyek a termelés pótlási alapjának fedezésén kívül lehetővé teszik a termelési kapacitások megfelelő bővítését.

Legyen k ($k = 0, 1, \ldots$) az egyes időszakaszok jele (ahol egy-egy időszakasz maga is egy vagy több év lehet.) Legyen a $k + 1$ időszak a tervidőszak, amelyre az x_{k+1} vektorral megadott bruttó termelési szinteket tervezzük. A folyó ráfordítások koefficiens-matrixát A, a beruházások koefficiens-matrixát B betűvel jelölve a fenti mérlegegyensúly keresése az alábbi matematikai feladat formájában vetődik fel:

Ismeretes az x_k bázisidőszaki (tényleges vagy várható) termelés. Keressük azon x_{k+1} tervidőszaki termelést, amely mellett

(1) $$x_{k+1} = A\,x_{k+1} + B(x_{k+1} - x_k).$$

A probléma világos áttekintése kedvéért elvonatkoztattam:

a) a külkereskedelem létezésétől
b) a végső fogyasztás egyéb elemeitől
c) a beruházások időbeli áthúzódásától.

Ezeket a kérdéseket, amelyek modellünket nyilván bonyolultabbá tennék (s ezért vizsgálatuk nem lehet elhanyagolandó), azért tartottam mellőzhetőknek az első megközelítéskor, mert ugyan enyhíthetik vagy erősbíthetik a számítás instabilitását, s így az ingadozásokat, de sem ki nem váltják, sem önmagukban megszüntetni nem képesek ezt a tárgyalandó sajátosságot.

Ugyancsak igen elvontan határozom meg a távlati, ciklusmentes fejlődési útvonal termelési arányait, mint amelyek az $\bar{x} = A\bar{x} + \lambda\, B\bar{x}$ egyenletnek tesznek eleget, tehát egyöntetű, egyenletes, λ ütemű fejlődést tesznek lehetővé. Adott A és B matrixok esetén ezek az arányok szabatosan és egyértelműen meghatározhatók. (Lásd pl. Bródy (1968). Természetesen, ha a technika érezhetően és gyorsan változik, akkor az A és B matrixok, s így a sima fejlődés útvonala is módosul. Feltesszük azonban, hogy a tervszámítások idején kellő pontossággal ismeretesek ezek az adatok. Miután most nem azt vizsgáljuk, hogy a technikai változást milyen szabatosan vagyunk képesek tervezni, a jelen probléma szempontjából adottnak, ismertnek és pontosnak tekintjük mindezeket az adatokat. Tehát nem azokat a *véletlen* eltéréseket és ingadozásokat vizsgáljuk, amelyeket a koefficiensváltozás (norma- és normatívaváltozás) pontatlan tervezése idéz elő, hanem azt a *szisztematikus* hibát, amelyet a mérlegek kiegyensúlyozásának fent megadott 1. egyenlete okoz.

A ciklusmentes, egyenletes (sőt bizonyos értelemben maximális) fejlődésnek ilyen elvontan megfogalmazott $\bar{x}$ arányai természetesen mindig kielégítik az 1. egyenletet, amiről behelyettesítés révén meg is győződhetünk, ha figyelembe vesszük, hogy ez esetben $\bar{x}_{k+1} = (1 + \lambda)\bar{x}_k$.

Dolgozatunk alapvető kérdése mármost az, hogy ha az x_k bázisidőszaki arányok nem azonosak ezekkel a ciklusmentes fejlődést biztosító $\bar{x}_k$ arányokkal, akkor a tervezett x_{k+1} termelési arányok általában *közelebb* vagy *távolabb* visznek-e ezekhez az arányokhoz? Nagyobb vagy kisebb lesz-e az eltérés, a feszültség a tervidőszak végére, mint amekkora az elején fennállt?

2. A megoldás és tárgyalása

Az 1. egyenlet könnyen átrendezhető, ha az invertálandó matrix regularitását feltételezzük (erről még lesz szó) az

$$x_{k+1} = -(1-A-B)^{-1}Bx_k \tag{2}$$

alakban.

E megoldás sajátságait a $K = -(1-A-B)^{-1}$ B matrix elemzésével adhatjuk meg. $(1-A)$ kiemelésével és a Leontief-inverz szokásos $(1-A)^{-1} = Q$ jelölésével élve.

$$-K = (1-A-B)^{-1}B = [(1-A)(1-QB)]^{-1}B = (1-QB)^{-1}QB. \tag{3}$$

Az x_k vektorból tehát a K matrix-szal való szorzással jutunk el a tervidőszak adataihoz: $x_{k+1} = K\,x_k$.

Tudvalevő, hogy a matrix-vektor szorzatot úgy is felfoghatjuk, hogy a matrix a szorzott vektornak a matrix saját-vektorai irányába eső komponenseit a sajátértékeknek megfelelően nyújtja vagy rövidíti meg. Tanulmányozhatjuk tehát, hogy á K matrix-szal való szorzás az x_k vektornak milyen összetevőit erősíti és milyen összetevőit gyengíti.

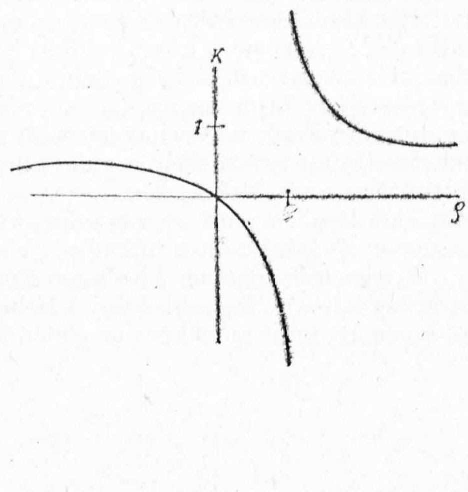
Tudjuk mármost, hogy a távlati, ciklusmentes egyensúly $\bar{x}$ vektora a QB matrix legnagyobb abszolút értékű pozitív sajátértékéhez tartozó pozitív sajátvektor, s e matrixnak nincs is több pozitív sajátvektora. Mivel K a QB matrix racionális függvénye, ezért sajátvektoraik azonosak. (Lásd pl. Bodewig (1962). *K domináló* sajátértéke azonban általában nem QB imént említett domináló sajátértékéből ered. Ha ugyanis QB sajátértékei rendre $\varrho_1 > \varrho_2 > \ldots > \varrho_n$ (ahol $\frac{1}{\varrho_1} = \lambda$ a ciklusmentes fejlődés már említett üteme), akkor K sajátértékeit 3. alapján a

$$\varkappa_i = -\frac{\varrho_i}{1-\varrho_i} = \frac{\varrho_i}{\varrho_i - 1} \tag{4}$$

összefüggés adja meg.

Ismeretes az, hogy QB maximális sajátértéke gyakorlatilag az $5 < \varrho_1 < 40$ számközben található (azaz az éves növekedési ütem 2,5 és 20% közt lehet). Ennek megfelel K-nak egy a $\frac{40}{39} < \varkappa_1 < \frac{5}{4}$ számközben található sajátértéke.

$\varkappa_i$ és ϱ_i összefüggését a 4. egyenlet alapján az alábbi ábra adja meg:



Ha tehát ϱ_i kisebb, mint ϱ_1, de nagyobb, mint 0,6, akkor a megfelelő $\varkappa_i$-k nagyobbak $\varkappa_1$-nél, s ez azt jelenti, hogy ha x_k-nak van komponense a megfelelő sajátvektorok irányában, akkor ez az összetevő a K matrix-szal való szorzás folyamán erősödni fog a ciklusmentes $\bar{x}$ fejlődés irányába mutató összetevő terhére. A K-val való szorzás tehát jelentősen eltéríthet a ciklusmentes fejlődéstől abban az esetben, ha már x_k-ban is volt ilyen feszültséget keltő összetevő.

Érdekes annak az esetnek vizsgálata is, ha valamely ϱ_i közel esik az 1 értékhez. Ekkor ugyanis az ennek megfelelő $\varkappa_i$ tetszőlegesen nagy pozitív vagy negatív értéket felvehet. Ha $\varrho_i = 1$, akkor az $(1 - QB)$ matrix, s igy $(1 - A - - B)$ is szinguláris. Ennek ellenkezőjét tételeztük fel a levezetésben, de nem zárhatjuk ki, hogy a gyakorlati adatok e szingularitáshoz igen közel ne kerülhessenek.

Ilyenkor a mérlegek egyensúlyának megteremtése gyakorlatilag szinte lehetetlen. A mérleg „áthullámoztatása", szukcesszív egyensúlybahozása folyamán érthetetlenül nagy ingadozások lépnek fel, s a tervezés kénytelen megelégedni egy ellentmondásos, csonka számítással, mivel ahogy mondani szokás „szétestek" a mérlegek. (Ez a jelenség nem egyszer fellépett már a gyakorlati munkában, magyarázata tehát a megfelelő, de ismeretlen matrixok „rosszul kondicionált" volta, 1-hez közel eső sajátértéke.)

Általában tehát azt várhatjuk, hogy a tervezési számítások, a mérlegek kiegyensúlyozásának az a logikája, amely az 1. egyenletben megadott tervegyensúlyra törekszik, éppen ezzel *eltávolít* a valódi hosszútávú, ciklusmentes fejlődési arányoktól. Ha a kezdeti x_k vektornak volt összetevője a nem pozitív sajátvektorok irányában, akkor ezt a tervszámítások csak fokozzák, s a számítás végén az x_{k+1} vektornak ez a komponense jobban növekszik, mint a ciklusmentes hosszú távú fejlődés irányába mutató pozitív komponens.

Összefoglalóan tehát: a mérlegek kiegyensúlyozásának, a terv egyensúlyának elve — legalábbis abban az elvontságban, ahogy az előbbiekben figyelembevettük — nem *enyhíti*, hanem *fokozza* a számokban meglevő feszültségeket, elszakadási tendenciákat, káros irányzatokat, *súlyosbítja és nem orvosolja* az eltéréseket.

3. Számpélda

Egy kétszektoros, könnyen számítható, adataiban sem teljesen irreális példa a következő.

A folyó ráfordítások koefficiens-matrixa:

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,5 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}$$

a tőkeigényességi (beruházási) matrix:

$$B = \begin{bmatrix} 6,6 & 0,5 \\ 4,7 & 1,9 \end{bmatrix}$$

a K matrix kiszámításához vezető lépések:

$$-(1 - A - B) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Ennek inverze:

$$-(1 - A - B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

S végül maga a K matrix

$$K = -(1 - A - B)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1.9 & -1.4 \\ -4.8 & 8.9 \end{bmatrix}$$

A ciklusmentes fejlődés útvonalának arányai 4 tizedes pontosságig [1,6365; 1,000] Ugyanis

$$K \begin{bmatrix} 1.6365 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.70935 \\ 1.04480 \end{bmatrix}$$

Ez tehát mintegy 4 és félszázalékos évi növekedésnek felel meg. Ha azonban például az ehhez látszólag igen közel fekvő „bázisidőszaki" [1,6; 1,0] arányból indulunk ki, akkor a „mérlegegyensúly" a következő időszakra [1,64; 1,22] értéket, majd az erre következő időszakra [1,408; 2,986] „tervet" diktál — amely tehát ciklikus (az első ágazat termelése csökken).

Ha viszont a szintén közeli [1,7; 1,0] arányból számítjuk ki az egyensúlyt, ez a tervévre [1,83; 0,74] értéket (a második szektor azonnali csökkenését) adja.

A számítás tehát — az A és B matrix ártalmatlan alakja ellenére — rendkívül instabil. Az ok nem más, mint hogy a K matrixnak a „ciklusmentes" 1.045 sajátértéke mellett a másik sajátértéke 9.755 nagyságú, tehát mintegy kilencszeres — s így ez utóbbi a domináló.

E két sajátérték megfelel a QB matrix 23 és 0,907 sajátértékének.

Összefoglalás

A mérlegegyensúly keresése — amennyiben fenti elv alapján történik — nem biztosítja a ciklusmentes fejlődést, sőt alkalmas a ciklust előidéző összetevők erősítésére.

A mérlegegyensúly fenti számítását ugyanis nem a jövő (x_{k+1} óhajtott arányai), hanem a múlt (x_k ténylegesen megvalósult, káros tendenciáktól nem mentes) adatai determinálták. Az eljárás javítása sokféle módon elképzelhető. Úgy vélem, hogy a javítás legfontosabb módja a *távlati terv által kijelölt arányokhoz való tudatos alkalmazkodás*, még a mérlegegyensúly terhére is.

Ha a kiinduló adatok nem biztosítanak egyenletes, sima ciklusmentes fejlődést, akkor az egészséges fejlődés pályája felé csak tartalékok képzése, készletnövekedés, ki nem használt kapacitások — esetleg e „fölöslegeknek" a külkereskedelem révén történő „átváltása" — révén lehet áttörni.

(Beérkezett: 1968. VIII. 1.)

IRODALOM

[1] Bodewig, E.: Matrix-Calculus. North Holland Publishing Company, Amsterdam 1962.
[2] Bródy A.: Gazdasági növekedésünk üteme 1924-től 1965-ig. Közgazdasági Szemle, 1967. 4. sz.
[3] Bródy A.: Érték és újratermelés. Doktori értekezés. MTA Közgazdaságtudományi Intézet. Budapest, 1968.
[4] Erdős P.: Adalékok a mai tőkés pénz, a konjunktúraingadozások és a gazdasági válságok elméletéhez. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.
[5] Goldmann, J.: Planovane Hospodarstvi, 1964. 9. 11. sz.
[6] Hoch R.—Berényi J.: A fogyasztás ütemének tervezése. MTA Közgazdaságtudományi Intézetének IV. Évkönyve. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1965.

CYCLE AND EQUILIBRIUM

An abstract mathematical model of plan calculation shows that an economic cycle can develop exactly because the plan balances are pressed to reach equilibrium.

The plan of a given period always tries to attain a certain equilibrium in social metabolism. It strives for a x_{k+1} production level which covers the Ax_{k+1} current inputs (A being the current input coefficient matrix) and the $B(x_{k+1} - x_k)$ inputs needed for widening capacity. (B is the matrix of tied-down capital).

The resulting equation, assuming the regularity of matrix B, and knowing the starting x_k production levels, can be solved in the form:

$$x_{k+1} = -(1 - A - B)^{-1} Bx_k .$$

It can be proved that the matrix of this equation weakens the long run equilibrium (or turn-pike) components, while the components strengthen deviations from the long-run equilibrium. The reason is that the eigenvector belonging to the dominant eigenvalue fails to be positive.

Following the analysis of eigenvalues, a small numerical example illustrates the main point: the principle of balancing does not lessen, but rather increases deviations from the long-run equilibrium proportions.

ЦИКЛ И РАВНОВЕСИЕ БАЛАНСА

Отвлеченная математическая модель плановых расчетов показывает, что экономический цикл складывается именно в силу того, что в планах стремятся к равновесию плановых балансов.

Дело в том, что план какого-то данного периода всегда предусматривает осуществление определенного равновесия в общественном обмене материалов. В нем стремятся найти такие производственные уровни x_{k+1}, которыми покрываются текущие затраты Ax_{k+1} (где «A»-матрица коэффициентов текущих затрат) и затраты на требующееся расширение мощностей B $(x_{k+1} - x_k)$ (где «B» — матрица коэффициентов фондоемкости).

Получаемая таким образом система уравнений в случае регулярности матрицы B и при известных исходных производственных уровнях x_k может быть решена в следующей форме:

$$x_{k+1} = -(1 - A - B)^{-1} Bx_k$$

О матрице же этой системы уравнений можно доказать, что она ослабляет компоненты «turn-pike-path» длительного равновесия и зато усиливает компоненты отклонения от сформулированного таким образом пути равновесия. Причина этого заключается в том, что к ее доминирующим собственным значениям не относятся собственные векторы.

После анализа собственных значений матрицы на небольшом числовом примере иллюстрируется основная мысль: принцип уравновешивания балансов не умеривает, а усиливает отклонение от перспективных пропорций равновесия.

Schmidtné Kigyóssy Éva

A szakképzés ráfordításai

Az utóbbi időben egyre inkább előtérbe kerül az oktatásgazdaságosság kérdése. A szakképzettség a termelési folyamat egyik legjelentősebb tényezőjévé lépett elő. A gazdasági fejlődést ábrázoló modellek nem hagyhatják figyelmen kívül a szakképzés szerepét.

Még inkább szembetűnővé válik a szakképzés jelentősége, ha az elméleti megfontolásokkal párhuzamosan a konkrét szakképzési ráfordításokat is tekintjük. Elfogadva azt a definíciót, amely szakképzés alatt az általános iskola elvégzése után végbemenő oktatási folyamatot érti, a szakképzési költségek Magyarországon 1961-ben közel 1700 millió Ft-ot, 1965-ben pedig több, mint 2500 millió Ft-ot tettek ki, a nemzeti jövedelemből való arányuk pedig 1,15%, ill. 1,51% volt. Emelkedő tendenciát mutat a szóbanforgó kiadások közületi kiadásokhoz viszonyított aránya is, 1961-ben a közületi kiadások 24,4%-a, 1965-ben 37,3%-a a szakképzés költségvetési ráfordítása.

A következőkben a szakképzési ráfordítások elemzésével kívánunk foglalkozni. Bemutatunk egy olyan modellt, amely alkalmas arra, hogy egy népgazdaságoptimalizálási modellbe beépítve a gazdaságosság másik oldalának, az eredménynek a kimutatásához kiindulásul szolgáljon. Ezen túlmenően megkíséreljük, hogy a szakképzés összes társadalmi ráfordítását számba vegyük.

A ráfordítások felmérésénél a népgazdasági tervezés jelenlegi gyakorlatával összhangban a társadalmi ráfordítások nagyságát becsültük meg. Dobrovits Iván felosztása szerint az oktatási költségek fedezése történhet a személyes jövedelmek, a vállalati jövedelmek és a központi pénzügyek (a költségvetés, a nagyvállalatok, a felekezeti, egyházi intézmények, a szakszervezetek, valamint a bank- és hitelintézmények) oktatási hozzájárulása révén. Az egyes adott esetekben ezen fedezeti források közötti arány más és más lehet. Amikor mi a személyes jövedelem felhasználásától az oktatási ráfordítások tanulmányozásánál eltekintünk, nem azért tesszük ezt, mintha ezt a ráfordítási tényezőt lebecsülnénk, hanem egyszerűen azért, mert egy olyan népgazdaságoptimalizálási modell céljának megfelelően kívánjuk felmérni a ráfordítás nagyságát, amely modell a gyakorlatra épül, s jelenlegi népgazdasági terveink nem foglalkoznak a családi ráfordítások tervezésével.

A szakképzés társadalmi ráfordításain azokat a ráfordításokat értjük, amelyek vagy közvetlenül kimutathatók a társadalmi közös erőforrások felhasználása révén (ld. a költségvetési kiadásokat) vagy indirekt módon terhelik azokat (amortizáció, eszközlekötés, kamat stb.). Ennek megfelelően felmértük a költségvetési kiadás összegét, s számoltunk egy ún. összes költséget, amely költség a költségvetési kiadáson kívül a bruttó állóeszköz állomány utáni amortizációt (3%) és eszközlekötési költséget (a gyakorlatban használatos 5%-ot vettük), valamint készletérték utáni eszközlekötést (szintén 5%), továbbá egy becsült diákotthoni költséget is tartalmaz. Az utóbbi költségek opportunity cost jellegű költségek, amelyek körét még kibővítettük, amikor a társadalmi teljes ráfordításokat vettük számba. Ennek során az összes költséghez még a tanulók, illetve az oktatók oktatásban eltöltött ideje miatt kieső nemzeti jövedelmet is hozzászámoltuk, s az így nyert képzett ráfordításokat a lemorzsolódás figyelembevételével korrigáltuk, majd évi 3%-os kamatot számoltunk a képzés idejére a lekötött összegekre. Nem vitatható, hogy az oktatási ráfordításokat még igen sok egyéb módon is fel lehetne mérni, az azonban kétségtelenül fennáll, hogy ha csak a közvetlenül felmerülő költségvetési kiadásokat tekintjük is, igen jelentős összegeket fordít az állam az oktatásra, s ezért körültekintően, több és nagyobb gazdaságossági megalapozottsággal kell dönteni a szakképzett dolgozók alkalmazásáról.

A szakképzés távlati tervezéséről

Kérdés, hogyan alakíthatók ki és milyenek legyenek azok a módszerek, amelyek segítségével a szakképzés gazdaságosságáról dönthetünk. Véleményünk szerint elsősorban hosszú távra alkalmazható, dinamikus optimalizálási modellek felhasználása lenne ajánlatos. Szükség van hosszabb szakra alkalmazható modellekre, mivel a szakképzés átfutási ideje meglehetősen hosszú (3—10 évig tarthat). Ha a szakképzésről akarunk dönteni, akkor tulajdonképpen arra kell választ kapnunk, hogy bizonyos szakembertípusból hány főre van szükség egy optimális népgazdasági program megvalósításához. Egy jó népgazdasági tervnek biztosítania kell ezt az igényt, ami csak azáltal lehetséges, ha megfelelő időben beiskolázzuk a különböző szakképzési formák mindegyikébe a várható igénynek megfelelően, lemorzsolódás és egyéb tényezők figyelembevétele mellett, legalább a minimális, azaz a jövőbeni igényt pontosan kielégítő létszámot. Ahhoz tehát, hogy az oktatási ráfordításokat és az ezek révén elérhető eredményeket szembeállíthassuk, hosszútávú modellekre van szükség.

Egy másik szempont, amit a szakképzés gazdaságos tervezésénél szem előtt kell tartanunk az, hogy az oktatási szférát ne önmagában, hanem a termelő ágazatokkal együtt, azokkal szorosan összekapcsolva vizsgáljuk. Mivel a szakképzés elsődleges feladata, hogy ezeket az ágazatokat ellássa szakemberekkel, nem szakíthatók el az oktatásgazdaságosság problémái az egész népgazdaság optimális tervezésére irányuló vizsgálatoktól

A konkrét tervezési módszereknek természetesen igen sokféle változata képzelhető el. A következőkben felvázolunk egy ilyen tervezési módszert. Az eljárás lényege abban áll, hogy egy adott népgazdaságoptimalizálási modellt (a jelen esetben SIMON GYÖRGY: „A népgazdasági árprogramozás közgazdasági feltételezései és modellje 1968—70-re", Budapest, 1968. értekezésében leírt modelljét) kibővítjük a szakképzéssel, mint tevékenységgel,s ilyen körülmények között vizsgáljuk a modell viselkedését. A szakképzési tevékenységgel kibővített és az évek szempontjából általánosított modell sémája: lásd 50. o.

Ebben a modellben a szakképzési tevékenységek és a termelési tevékenységek összekapcsolhatók, amennyiben megfelelő időbeli egyeztetés után az egyes szakképzési tevékenységek révén nyert szakemberek számát a munkaerőmérlegek kibocsátásaként vesszük figyelembe.

Az e_1-ben az egyes szektorok, a szocialista külkereskedelem és a fogyasztás, $e_2, e_3, \ldots, e_{n+1}$ blokkok mindegyikében termékmérlegek, munkaerőmérlegek,

Feltételek \ Változók	Intertemporális változók				Speciális változók						Erőforrás keretek
	Termelés	Szoc. kül. ker.	Fogyasztás	Szakképzés	Szakképzés $t=1$	$t=2$ ...	$t=n$	Egyéb spec. vált. $t=1$	$t=2$ ...	$t=n$	
e_1 Intertemporális változók korlátai	A_s	A_u	A_y	M_f	0						b_0
e_2 Speciális feltételek $t=1$ évre	H_{s_1}	H_{u_1}	H_{y_1}	M_{f_1}	$M_{(1)(1)}$	$O\ldots$	O	$H_{(1)(1)}$	$O\ldots$	O	b_1
e_3 Speciális feltételek $t=2$ évre	H_{s_2}	H_{u_2}	H_{y_2}	M_{f_2}	$M_{(1)(2)}$	$M_{(2)(2)}\ldots$	O	O	$H_{(2)(2)}\ldots$	O	b_2
$\vdots$											
e_{n+1} Speciális feltételek $t=n$ évre	H_{s_n}	H_{u_n}	H_{y_n}	M_{f_n}	$M_{(1)(n)}$	$M_{(2)(n)}\ldots$	$M_{(n)(n)}$	O	$\ldots$	$H_{(n)(n)}$	b_n
Célfüggvény	$c_s^* + b_s^*$	c_u^*	c_y^*	c_f^*	c_1^*	$c_2^*\ldots$	c_n^*	c_{n+1}^*	$\ldots$	c_{2n}^*	

devizamérlegek, valamint tőkés export korlátok szerepelnek. Az intertemporális, azaz minden évre vonatkozó változók szektoronként különböző fejlesztési változatokat kifejező változókat, valamint a szocialista külkereskedelemre, ill. a fogyasztásra vonatkozó *fejlesztési változókat* foglalják magukban. A speciális változók, a tőkés relációban lejátszódó külkereskedelmet szabályozzák évenként.

A fejlesztési változatok tartalmának megvilágítása végett tekintsük a szakképzésre vonatkozó fejlesztési változatokat, amelyek az optimális beiskolázási arány meghatározását segítik elő.

Minimális fejlesztés:

A bázisévi oktatási helyzet által determinált szakképzés a tervidőszakban. A korábban beiskolázottak oktatásának befejezése, a várható lemorzsolódás figyelembevétele mellett.

Maximális fejlesztési változatok:

1. Az első tervévben maximális beiskolázás, ennek hatása a többi tervévre.
2. A második tervévben maximális beiskolázás, ennek hatása a következő tervévekre.

$\vdots$

$(n-1)$. Az $(n-1)$-ik évben maximális beiskolázás, ennek hatása az n. évre.

n. Az n. évben maximális beiskolázás.

A minimális és a maximális fejlesztési változat alsó és felső határt jelent. Az átmenetet képező változatokat a programozás kiválaszthatja a két változat különböző kombinációinak bevonása révén. A változók kezelését a következőképpen képzeljük:

A minimális szakképzésre vonatkozó változókat intertemporálisan építjük be a modellbe. A maximális fejlesztésre vonatkozó egyes fejlesztési változókat pedig speciális változókként kezeljük. A modell koefficienseinek összeállításakor nem szabad szem elől téveszteni a szakképzési tevékenységek között fennálló belső kapcsolatot. Feltételezhetjük, hogy a szakmunkásképzés önálló, vagyis nem követi szervezett továbbképzés. A középfokú oktatás és a felsőfokú oktatás vonatkozásában azonban megfelelő időbeni egyeztetést kell megvalósítanunk, továbbá a lemorzsolódással is számolnunk kell.

A modell összeállítása során eltekintettünk attól a követelménytől, hogy mivel létszám tervezésre kívánjuk felhasználni, tulajdonképpen egész számú megoldásokat fogadhatnánk csak el lehetséges megoldásként. A szakképzés tervezésénél szóba jövő százas nagyságrendű létszámok azonban megengedik, hogy ettől a kikötéstől eltekintsünk.

A modell feltételei révén egy bizonyos termelési ágban csak akkor lesz érdemes a szakképzett munkaerő számát bővíteni, ha a képzés költségei az ágazat számára még kifizetődnek. Az eljárás így mintegy megadóztatja a szakemberek alkalmazását, s ennek következtében hatékonyabb, meggondoltabb szakember felhasználásra ösztönöz.

A szakképzési ráfordítások modellje

A szakképzési ráfordítások modelljét, ahogyan azt már az előzőekben is említettük, úgy szerkesztettük meg, hogy az egy népgazdaságtervezési modell céljainak feleljen meg. Másrészt arra törekedtünk, hogy a szakképzési ráfordítások elemzését minél inkább elősegítse a modell. A ráfordításokat 1961-re és 1965-re vonatkozóan mértük fel. A modell soronként a különböző költségnemeket, oszloponként az egyes oktatási módozatokra vonatkozó teljes, ill. egységráfordításokat tartalmazza. A költségeket úgy bontottuk, hogy azokat a különböző népgazdasági ágakba be tudjuk sorolni. A költségvetési kiadást *bérjellegű költségre* (bérköltség és ösztöndíj együtt), *anyagköltségre* (tüzelőanyag, villamosenergia, gyógyszer, vegyszer, textil, élelmiszer, ingatlan és ingó fenntartás, szolgáltatás, egyéb anyag), felújításra (építési és egyéb felújítás), valamint *egyéb költségre* osztottuk fel. A költségvetési kiadáson túl, mint népgazdasági ráfordításként felfogható tételeket, figyelembe vettünk — a vizsgált oktatási szféra területén lekötött bruttó állóeszközállomány után felszámítva — *amortizációt* (3%) és *eszközlekötést* (a népgazdasági gyakorlatban használatos 5%-ot vettük) és a *készletek utáni eszközlekötést* (szintén 5%). Ez utóbbi két tétel alkotja az ún. *eszközlekötési költség* tartalmát.[1]

A költségvetési kiadást és az eszközlekötési költséget kiegészítettük továbbá egy becsült diákotthoni költséggel. Ez a költség a diákotthoni férőhelyek arányában tartalmaz diákotthoni költséget, valamint a bruttó állóeszközérték után amortizációt és eszközlekötést, az eszközlekötési költségnél említett arány szerint.[2]

[1] Megállapításánál nem kis nehézséget okozott, hogy a kívánt bontásban nem állott rendelkezésre sem a bruttó állóeszközállomány, sem a készletek értéke. Az oktatási intézmények bruttó állóeszközértékének megállapításához rendelkezésünkre állott, a Pénzügyminisztérium felmérése alapján, az épületek és építmények bruttó értéke, az 1960. dec. 31-i állapotot tükrözve, az újraértékelés után. A következő évekre csak az épületek és építmények összértékét tudtuk kigyűjteni a költségvetési szervek és a költségvetési folyószámlás szervek vagyoni mérlegei alapján. Ezeket az értékeket az oktatási intézmények beépített légtér adatainak arányaiban választottuk szét az adott évre vonatkozóan. A készletértékre vonatkozóan a Művelődésügyi Minisztérium Pénzügyi Főosztályának „A Művelődésügyi Minisztérium közvetlen felügyelete alá tartozó költségvetési szervek gazdálkodása a II. ötéves tervidőszakban, 1961—65." Budapest, 1966. c. tanulmányában találtunk részben adatokat. Ezeket az értékeket viszonyítottuk az anyagköltségekhez, s a kapott arányszámok átlagát használtuk fel a hiányzó készletértékek megbecsléséhez.

[2] Pénzügyminisztériumi becslések alapján a felsőfokú oktatási intézmények diákotthoni férőhelyeire 3 ezer forintos, a középfokú diákotthoni férőhelyekre, mivel ott a diák-

Az előbbi módon összeállított, direkt és indirekt úton felmerülő költségek együttes összegét összes költségnek nevezzük, s ezt a költséget tekintjük a szorosabb értelemben vett *társadalmi ráfordításnak.*

Oszloponként az egyes oktatási tevékenységeket tartalmazza a modell. Oktatási rendszerünkről meglevő adataink alapján lehetőségünk lett volna a mérnökképzést általában, az ipari mérnök-képzést, az agrármérnök-képzést, a közgazdász képzést, az orvosképzést, az oktatóképzést (tudományegyetemi ill. főiskolai oktatás-bontásban), valamint az egyéb felsőfokú képzést különkülön tevékenységként felírni a felsőfokú oktatás vonatkozásában. A középfokú oktatás területén lehetőség lenne a technikusképzést általában, az ipari technikus-képzést, a mezőgazdasági technikus-képzést, a gimnáziumi, a közgazdasági technikumi, valamint az egyéb középfokú képzésre fordított kiadásokat elemezni. Mi a termelőágazatok szempontjából legkönnyebben kezelhető ipari szakember-képzést és a mezőgazdasági szakember-képzést emeltük ki. *Külön* szakképzési tevékenységként szerepeltetjük az egész *felsőfokú oktatást,* a *műszaki egyetemeken folyó képzést,* az *agrártudományi egyetemeken folyó oktatást,* az egész *középfokú oktatást,* az *ipari technikumi képzést* és a *mezőgazdasági technikumi képzést.* Feltüntetjük továbbá az *iparitanuló-képzést,* mint szakmunkásképzést.

Az egyes oktatási típusok ráfordításait összes tanulóra jutó ráfordítás és nappali tanulókra jutó ráfordítás bontásban szerepeltetjük. A nappali tanulókra eső tisztított költségeket egy kulcsszám segítségével nyertük, amely kulcsszámot a különböző tagozatokon tanulók súlyozott száma segítségével kaptuk. A súlyozás alapja egy pénzügyminisztériumi becslés volt, amelynek értelmében a középfokú oktatásban az egy nappali tanulóra eső kiadás az esti ill. levelező tanulókra jutó kiadás 8-szorosa, a felsőfokú oktatás területén pedig egy nappali hallgató költségeinek 2,5 esti vagy 6 levelező hallgató költsége felel meg. Az ösztöndíjat és a diákotthonnal kapcsolatos költségeket természetesen teljes egészében a nappali tanulókra vetítettük. Az egy általános tanulóra jutó ráfordításon az összes tanulóra jutó ráfordítás (tehát nappali, esti és levelező tagozatokon tanulókra jutó összes ráfordítás) és az összes tanuló számának hányadosát, az egy nappali tanulóra jutó ráfordításon a nappali tanulókra jutó tisztított költség és a nappali tanulók számának hányadosát értjük. A gyakorlatban az egy tanulóra jutó költséget csak tájékozódás céljából szokták kiszámítani, a tervezés közvetlen céljára a sok zavaró tényező miatt nem használják. Mi is csak a ráfordítások elemzésére kívánjuk felhasználni ezt a mutatót, s bár meggyőződésünk, hogy a lehetőségekhez képest az itt megadott értékek elég jól megközelítik a valóságot, nem az abszolút nagyságok értékelésére kívánjuk helyezni a fő súlyt, hanem bizonyos *relációkat* kívánunk érzékeltetni.

Az 1. sz. és a 2. sz. táblában bemutatjuk a felsőfokú és a középfokú oktatási ráfordítások alakulását 1961 és 1965 évek alapján.

Ha akár az 1961-es, akár az 1965-ös évet tekintjük, rögtön szembetűnik, hogy a bruttó jellegű, egy általános tanulóra eső ráfordítások minden vonatkozásban alacsonyabbak, mint az egy nappali tanulóra jutó tisztított költség. Az eltérés az esti és levelező tagozatokon tanulók kisebb kimutatható ráfordí-

---

otthoni költségben élelmezés is szerepel, 8 ezer Ft-os kiadást számítottunk évente. A bruttó állóeszközérték becslése az előzőekben megnevezett pénzügyminisztériumi felmérés alapján, a férőhelyek arányában történt.

1. sz. tábla

A felsőfokú oktatási ráfordítások alakulása 1961 és 1965 évek alapján

(1000 Ft)

Szakképzési szférák / Ráfordításfajták	Felsőfokú oktatás összesen				Műszaki egyetemek				Agrártudományi egyetemek és főiskolák			
	1961		1965		1961		1965		1961		1965	
	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali
	hallgatóra jutó ráfordítás											
Bérjellegű költség	9,60	11,88	9,23	14,04	10,22	12,06	9,13	13,25	13,82	19,06	15,41	22,80
Anyagköltség	3,12	3,97	2,89	4,19	3,50	4,08	3,21	4,43	5,19	7,10	5,46	7,89
Felújítás	1,48	1,87	1,30	1,88	1,69	1,97	1,21	1,67	1,05	1,43	0,85	1,23
Egyéb költség	1,59	2,02	1,65	2,39	1,48	1,72	1,79	2,47	3,29	4,49	3,14	4,53
Költségvetési kiadás	15,79	19,74	15,07	22,49	16,89	18,99	15,34	21,82	23,36	32,08	24,86	36,45
Amortizáció	2,01	2,55	1,30	1,88	3,37	3,92	2,56	3,53	2,38	3,24	1,96	2,83
Eszközlekötési ktg.	5,26	6,68	3,42	4,95	8,68	10,11	6,61	9,12	6,29	8,56	5,23	7,55
Diákotthoni költség	1,46	2,00	1,15	1,95	1,84	2,30	1,22	2,05	1,94	2,86	1,87	2,97
Összes költség	24,52	30,97	20,94	30,32	30,78	36,16	25,73	36,52	33,96	46,74	33,92	49,80

2. sz. tábla

A középfokú oktatási ráfordítások alakulása 1961 és 1965 évek alapján

(1000 Ft)

Szakképzési szférák / Ráfordításfajták	Középfokú oktatás összesen				Ipari technikumok				Mezőgazdasági technikumok			
	1961		1965		1961		1965		1961		1965	
	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali	egy általános	egy nappali
	tanulóra jutó ráfordítás											
Bérköltség	1,07	1,65	1,15	1,94	1,03	2,22	1,04	2,45	1,72	3,56	1,38	3,80
Anyagköltség	0,53	0,81	0,61	1,02	0,74	1,60	0,74	1,74	1,78	3,66	1,06	2,91
Felújítás	0,12	0,19	0,13	0,22	0,19	0 41	0,18	0,43	0,16	0,32	0,13	0,36
Egyéb költség	0,19	0,30	0,23	0,39	0,27	0,58	0,21	0,50	0,34	0,70	0,17	0,46
Költségvetési kiadás	1,91	2,94	2,13	3,57	2,23	4,81	2,17	5,12	4,00	8,24	2,74	7,53
Amortizáció	0,30	0,47	0,24	0,41	0,23	0,50	0,19	0,46	0,42	0,87	0,19	0,53
Eszközlekötési ktg.	0,79	1,22	0,64	1,08	0,63	1,35	0,54	1,26	1,17	2,41	0,54	1,50
Diákotthoni költség	0,97	1,64	0,73	1,38	1,24	3,19	0,98	2,87	2,41	5,83	1,43	5,25
Összes költség	3,98	6,27	3,74	6,43	4,34	9,85	3,88	9,71	8,00	17,35	4,90	14,81

tásigényével magyarázható. Semmiképpen sem lehet azonban ebből azt a következtetést levonni, hogy az esti és levelező tagozatokon való képzés „olcsósága" miatt a népgazdaság számára előnyösebb lenne. Attól eltekintve, hogy ez az oktatási forma a nappali tagozatokon folyó oktatás kiegészítője, s mint ilyen, önmagában elképzelhetetlen, kiterjesztése bizonyos határon túl ugrásszerűen megnövelné a ráfordításigényt. Másrészt meglehetősen problematikus a ráfordítások mérhetősége ebben a vonatkozásban. Pl. a tanulás miatt kieső munkaidő ill. termelés szintén a ráfordítások közé lenne sorolható, felmérésükre azonban nem állnak rendelkezésre megfelelő adatok.

Az egy főre jutó ráfordítások alakulásánál lényeges szerepet játszott a nappali tagozaton tanulók hányadának változása az összlétszámon belül. A felsőfokú oktatás területén pl. 1961-ben még több, mint 70% a nappali tagozatosok aránya, 1965-ben viszont alig 60%. Amellett, hogy a ráfordítások abszolút volumene a költségvetési kiadás vonatkozásában átlagosan közel 50%-kal, az összes költséget tekintve pedig 30%-kal emelkedett, jórészt a létszám eltolódással magyarázható az a tény, hogy míg a nappali hallgatókra jutó költségek alig változtak, az egy átlagos hallgatóra jutó kiadás jelentősen csökkent. A felsőfokú oktatási ráfordítások alakulását vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a ráfordítások változását inkább tükröző egy nappali hallgatóra eső tisztított költség az összes költség vonatkozásában 1961—1965-ben alig változott. Ez egyrészt annak tudható be, hogy a nappali hallgatók számának növekedését (közel 31%) a meglevő épületek és építmények bruttó állóeszközértékének jóval alacsonyabb (kb. 5%-os) emelkedése kísérte, másrészt azzal indokolható, hogy az egy nappali hallgatóra jutó tisztított költségvetési kiadás is csak viszonylag kis mértékben (14%-kal) nőtt.

A középfokú oktatás vonatkozásában is hasonló tendenciát figyelhetünk meg a létszám-összetétel és az egy főre jutó költségek alakulásának tanulmányozásakor. A nappali tagozaton tanulók aránya az összlétszámon belül csökkent (kb. 3%-kal) és az egy általános tanulóra jutó összes költség is kevesebb lett. (1961-ben 3,98 és 1965-ben 3,74 ezer Ft.) Még inkább figyelemre méltó ez a mozgásirány, ha a nappali tanulókra eső tisztított költséget is megnézzük. Ez a költség ugyanis, a felsőfokú oktatási szféra hasonló költségével szemben, emelkedett a vizsgált periódusban. (1961-ben 6,27 és 1965-ben 6,43 ezer Ft.) A növekedés az eszközlekötési és amortizációs költségek, valamint a diákotthoni ráfordítások csökkenése mellett ment végbe, így teljes egészében a költségvetési kiadás emelkedésével indokolható. (Az egy nappali tanulóra jutó tisztított költségvetési kiadás 1961-ben 2,94, 1965-ben 3,57 ezer Ft.)

Mind a középfokú, mind a felsőfokú oktatási szféra vonatkozásában megfigyelhető, hogy a műszaki képzés ráfordításai az átlagos felett vannak általában, az agrárszakember képzésének ráfordításai pedig *meghaladják* a műszaki szakemberek képzésének ráfordítás igényét.

A szakmunkás-képzést reprezentáló iparitanuló-oktatás elemzésekor szembetűnő, hogy az egy főre jutó költségek milyen közel állnak a középfokú oktatás nappali tagozatának az egy főre jutó költségeihez. 1965-ben pl. az egy főre jutó összes költség az iparitanuló-képzésnél 6,08 ezer Ft, a középfokú oktatás megfelelő költsége 6,43 ezer Ft. Az ipari tanulók létszámának emelkedését (közel 31%-os a létszámnövekedés 1961-től 1965-ig) az összes költség és a költségvetési kiadás nagyobb arányú növekedése kísérte (az előbbi 34%-kal, az utóbbi 45%-kal nőtt), s ennek következtében az egy főre jutó költségek is, ha nem is jelentős mértékben, de emelkedtek. Az egy tanulóra jutó költségvetési kiadás 1961-ben 4,02, 1965-ben 4,46 ezer Ft, az összes költség 5,91 ill. 6,08 ezer Ft volt.

A felsőfokú oktatás egyes ráfordításait kivéve mindenütt bizonyos emelkedés figyelhető meg a folyó évi ráfordítások alapján. Ez a növekedés azonban nem volt számottevő. Így tulajdonképpen azt mondhatnánk a három képzési fok figyelembevételével, hogy oktatási rendszerünk ezen területein nem történt különösebb változás a vizsgált periódusban.

A szakemberképzés teljes ráfordításai

Amikor kísérletet teszünk arra, hogy a szakképzés teljes ráfordítását megbecsüljük, ismét a népgazdaságtervezés problémáit tartjuk szem előtt, és elsősorban a konkrét népgazdasági ráfordításként felfogható mutatókat vesszük számba. Ennek megfelelően a szakemberképzés teljes költségeit a következő mutatókkal közelítjük:

1. Költségvetési kiadás
2. Összes költség
3. Összes költség a tanulmányi idő miatt kieső nemzeti jövedelemmel (A továbbiakban: teljes költség/1.)
4. Összes költség a tanulmányi idő és a szakembereknek az oktatásban történő foglalkoztatottsága miatt kieső nemzeti jövedelemmel. (A továbbiakban: teljes költség/2.).

Vegyük sorra az egyes mutatók közgazdasági tartalmát. A költségvetési kiadás az állami ráfordítások meghatározásának természetes kiindulópontja. Nagyságában megegyezik az állami költségvetés megfelelő összegeivel. Az összes költséggel jelölt ráfordítás-fajta tartalmát az előzőekben definiáltuk már: a költségvetési kiadás valamint az amortizációnak és az állóeszközök bruttó értéke, valamint a készletek utáni eszközlekötésnek az összegét értjük alatta. Az említett kiadások tágabb értelemben vett állami ráfordításokként értelmezhetők. Ezen túlmenően felmerül az a kérdés, hogy mi lenne, ha a szakképzés területén foglalkoztatottak, oktatók és oktatottak nem az oktatásban lennének lekötve, hanem közvetlenül járulnának hozzá a nemzeti jövedelem megtermeléséhez. Kovács János becslését, l. [4], alkalmazva az oktatottak tanulmányai miatt elmaradó nemzeti jövedelmet 10 ezer Ft-ra becsültük a szakmunkás képzés idejére, 40 ezer Ft-ra a középiskolai évekre és 150 ezer Ft-ra az egyetemi kiképzés idején. A felsőfokú és középfokú végzettségű szakemberek oktatásban történő foglalkoztatása miatt kieső nemzeti jövedelem nagyságát Simon György [7]-ben megjelölt tanulmánya alapján az oktatók bérének ötszörösében állapítottuk meg. Nagy súllyal esik latba az oktatói tevékenység miatt elmaradó nemzeti jövedelem a ráfordításokon belül, mivel az oktatás költségvetési kiadásainak kb. 40—50%-a bérköltség.

A kiképzés összes ráfordításának teljesebb elemzése érdekében kiszámítottuk az egyes oktatási fokozatokban a szakképzés évi átlagos, a szakképzési évek összes és a kiképzés összes ráfordítását. A szakképzés átlagos ráfordításaként az 1961-es és 1965-ös ráfordítások számtani átlagát vettük, meg kell azonban jegyeznünk, hogy az adott két év ráfordításnagyságai nem mutatnak lényeges eltérést. A tanulmányi idő hosszának az iparitanuló oktatásban 3, a középfokú oktatás területén 4 és a felsőfokú oktatási szférában 5 évet tekin-

3. sz. tábla

A teljes szakképzési ráfordítások alakulása

(1000 Ft)

Egy nappali tanulóra	A szakképzési évek átlagos	A szakképzési évek összes	A szakképzési évek kamattal	A szakképzési évek kamattal és lemorzsolódással	A kiképzés összes kamattal	A kiképzés összes kamattal és lemorzsolódással
			figyelembe vett			
	ráfordítása					
FELSŐFOKÚ OKTATÁS						
Költségvetési kiadás	21,12	105,60	122,54	143,98	169,79	193,80
Összes költség	30,65	153,25	177,83	208,95	250,30	285,37
Teljes költség/1	60,65	303,25	351,89	413,47	482,11	550,79
Teljes költség/2	77,57	387,85	450,05	528,81	655,23	745,19
KÖZÉPFOKÚ OKTATÁS						
Költségvetési kiadás	3,26	13,04	14,75	16,58	37,02	41,61
Összes költség	6,35	25,40	28,74	32,30	56,78	63,82
Teljes költség/1	16,35	65,40	73,99	83,16	102,03	114,68
Teljes költség/2	21,41	85,64	96,89	108,90	160,77	180,71
IPARITANULÓ KÉPZÉS						
Költségvetési kiadás	4,24	12,72	14,03	16,68	35,24	41,90
Összes költség	5,99	17,97	19,83	23,58	46,54	55,34
Teljes költség/1	9,32	27,97	30,85	36,68	57,56	68,44
Teljes költség/2	13,96	41,88	46,21	54,94	107,04	127,27

tettünk, így számítottuk ki a szakképzési évek összes ráfordítását. Ehhez az összes szakképzési ráfordításhoz adtuk hozzá az előtanulmányok során felmerült ráfordításokat, s így jutottunk a kiképzés összes ráfordításához. Az előtanulmányok költségeként a szakmunkásképzésnél és a középfokú oktatásnál az általános iskolai ráfordításokat (szintén 1961 és 1965 átlaga alapján), a felsőfokú oktatásnál az általános iskolai és a középiskolai átlagos ráfordítást vettük figyelembe.

Ha az oktatási folyamatot, mint beruházást tekintjük, jogosnak tűnik, hogy a lekötött tőke után kamatot számítsunk fel. Ilyen meggondolásból kiindulva a szakképzés és a kiképzés összes ráfordításait kamattal (évi 5%-os nagyságú kamattal) együtt is számba vettük. Számításaink pontosabbá tétele céljából tekintettel voltunk a lemorzsolódási arányokra is.

Tájékoztatásul közöljük a teljes ráfordítások alakulását a felsőfokú, a középfokú, valamint az ipari tanuló oktatásra. (L. 3. sz. tábla.) Ennek alapján az egy nappali tanulóra jutó teljes ráfordítás valamennyi korrekció elvégzése után a felsőfokú oktatásban átlagosan mintegy 750, a középfokú oktatásban 180 és az ipari tanuló képzésben 130 ezer Ft-ra becsülhető. A költségvetési kiadás alapján számított megfelelő ráfordítás a három oktatási módban kb. 190, 40 és ugyancsak 40 ezer Ft. A közölt számok jól mutatják, milyen lényeges, hogy ne álljunk meg a költségvetési ráfordítások elemzésénél. A teljes ráfordítások általunk számított végső összegének kialakításában a költségvetési kiadáson túlmenően az eszközlekötésnek és az amortizációnak, valamint a kieső nemzeti jövedelemnek volt elsősorban szerepe.

A szakképzési ráfordításokat természetesen igen sok egyéb szempont figyelembevétele mellett is lehetne vizsgálni. A ráfordítások korrekcióinál használt konstansok nagysága is vitatható. Vizsgálatunknak mindenekelőtt az volt a célja, hogy az egyik igen sok eszközt lekötő népgazdasági szféra, az oktatás ráfordításainak bemutatásával még inkább hangsúlyozzuk azt a napjainkban már világossá vált tényt, hogy a szakemberképzés népgazdaságunk jelentős ráfordítása révén valósul meg, s éppen ezért nem közömbös, hogyan gazdálkodunk ezen a területen.

(Beérkezett: 1968. VII. 13.)

IRODALOM

[1] ANDORKA R.–DÁNYI D.–MARTOS B.: Dinamikus népgazdasági modellek. Bp. 1957. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
[2] BRÓDY A.: A gazdaság lineáris matematikai modelljeiről. Közgazdasági Szemle, 1967. 2. sz. 168–181.
[3] JEFFREY B. NUGENT: Programming the Optimal Development of the Greek Economy 1954–1961, Athen, 1966. Type by Constantinidis and Mihalas.
[4] KOVÁCS J.: Szakképzés és népgazdaság, Bp., 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
[5] KREKO B.: Lineáris programozás, Bp., 1966, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
[6] LANGE, O.: Optimális döntések, Bp., 1966, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó
[7] SIMON, GY.: Az árnyékárak viselkedése ex post programozás alapján, Bp., 1967. MTA Közgazdaságtudományi Intézetének sokszorosított anyaga.
[8] SIMON GY.: A népgazdasági árprogramozás közgazdasági feltételei és modellje, Bp., 1968. sokszorosított anyag
[9] VERSLUIS, J.–ZANDEE, W. D.: Mathematical Models of Education Planning, Netherlands Economic Institute Divison of Balanced International Growth, Rotterdam, 1966.

COSTS OF PROFESSIONAL EDUCATION

Today there is no need to prove the fact that the educational process is one of the most important factors in encouraging economic development. However, a quantitative definition of the economy of education is rather a difficult task, because of problems stemming from the special character of education In literature on the subject we often come across the opinion that it is impossible to achieve a quantitative expression of the economic effects of education, while others have been attempting to achieve it.

In our examination of the effectiveness of education, we base ourselves on the point that education is not an end in itself, but must serve social advancement. The basic stimulus for social advance is economic development, and under socialist relations, economy-wide optimum plans can express their realization programmes. For successful planning we must know the costs of professional education in individual fields, their interrelations with sectors of the economy, etc. But first, we must establish the possibility for choosing between the different alternatives. A study of the economy of professional education requires combining input and output, and education itself must be directed towards fulfilling the demands of the various branches of the economy. As a result, a suitable solution for measuring the effectiveness of professional education seems to be a dynamic national economy-wide optimization model, which would contain both material and intellectual input and allocation, while at the same time presenting a picture of the possibilities for successful utilization. This produced the idea that in a given national economy-wide optimization model, skilled labour power could be represented similarly to material power resources.

When we examined the possibilities for collecting satisfactory basic data for a model of this sort on educational input, based on available data we were attempting to attain certain information on the conditions for the practical application of the theoretical plan outlined earlier. In the course of this work we processed about ten thousand data, using the years 1961 to 1965 as a basis, showing input for higher education, secondary education, and vocational training, broken down into separate branches of the national economy. Within higher and secondary education, we separately stressed technical and agrarian education, and expenses for day students, and the total number of students.

We also attempted to show the total social input for professional education, beyond the directly demonstrable i.e. budgetary costs. In establishing the total social input for education we used budgetary costs, and beyond that, calculated the amortization and interest using the fixed asset value of buildings and stocks tied down in the educational field, the costs of student's hostels, and the assessment of the loss to the national income for an average year of professional education, for the whole period of professional education and for the whole period of education, professional or not. Corrections have been made for drop-outs.

The total budgetary input for one day student in higher education was rouhly 190 thousand, secondary education 40 thousand and vocational training again 40 thousand forints, based on the period studied. The total per capita input was roughly 750 thousand, 180 thousand, and 130 thousand in the three educational forms.

ОБЩЕСТВЕННЫЕ ЗАТРАТЫ НА ПОДГОТОВКУ КВАЛИФИЦИРОВАННОЙ РАБОЧЕЙ СИЛЫ

Автор в связи с вопросами экономической эффективности специального обучения анализирует связанные с ним затраты. Она пытается связать в данной модели по оптимизации народного хозяйства ресурсы умственного и не-умственного характера. Затраты на подготовку квалифицированной рабочей силы она анализирует с точки зрения того, каким образом можно их определить в соответствии с целями модели по оптимизации народного хозяйства, на основании имеющейся базы данных. В связи с этим на основании данных за 1961 и 1965 гг. она приводит по отдельным народнохозяйственным отраслям затраты на подготовку специалистов с высшим образованием, на обеспечение среднего образования, а также на обучение трудовых резервов. По обеспечению высшего и среднего образования автор отдельно выделяет обучение в заведениях политехнического и аграрного характера, а также затраты, приходящиеся на обучающихся с отрывом от производства и на общее число обучающихся.

Помимо непосредственно выявляемых издержек на специальное обучение, т. е. бюджетных затрат, посредством учета различных прочих затрат (например, амортизации, исчисляемой по первоначальной стоимости используемых основных средств; платы за пользование фондами; дополнительных затрат, требующихся из-за выпадения некоторого числа учащихся и т. п.) прикидываются и общие общественные затраты на специальное обучение.

В приложении содержатся детальное описание источников данных и методов исчисления, таблицы, а также библиография.

В таблицах (19 анализирующих и 6 модельных) содержатся результаты обработки приблизительно десяти тысяч исходных данных.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

MESZÉNA GYÖRGY

Valószínűségeloszlások és idősorok felbontása

Az adatokon nyugvó elemző tevékenység, a közgazdász munkájának mindenkor visszatérő, központi jelentőségű részét alkotja. A gazdasági valóság belső összefüggéseinek feltárása gyakran igen sok tényező együttes hatásának vizsgálatát, az összetevők számának, súlyának megállapítását, kívánja meg. Az adatgyűjtés közismert technikai és gazdasági nehézségei, a sokféle véletlen hatás megismerése mintavételi eljárások alkalmazására, reprezentatív megfigyelésekre vezet. Ha az éppen vizsgált alapsokaság valószínűségeloszlásában különböző tényezők hatása keveredik, a mintából szerzett információk ezt tükrözni fogják. A mélyreható elemző munkához ilyenkor szolgálnak jó segítségül a valószínűségeloszlások felbontására kidolgozott, hatékony módszerek. Lehetőség nyílik az egyes összetevők jellegének, paramétereinek meghatározására, ezáltal terveinkbe külön-külön is beépíthetők s figyelembevehetők lesznek.

A legkülönbözőbb tartalmú és szintű ipari és mezőgazdasági termelési, beruházási, bel- és külkereskedelmi adatok, indexek illetve mutatók, stb. időbeni változásait a matematika speciális sztohasztikus folyamatok, idősorok alakjában tárgyalja. Az egyes társadalmi, gazdasági, sőt természeti törvényszerűségek hatása, a véletlen ingadozásokkal együtt, szuperponálódva jelenhet meg megfigyelt alapadatainkban. A jelenségek alapos megismerése, reális közgazdasági tartalommal rendelkező magyarázata, nem képzelhető el, az együttesen ható összetevő tényezők szétválasztása nélkül.

Egy eredő hatás felbontása, — bármely területen is jelentkezik, — általában nem könnyű, vagy legalábbis, minden további nélkül, nem egyértelmű feladat. Ezek a nehézségek indokolják egyrészt a terület távolról sem lezárt voltát, (napjainkban is széleskörű kutatás tárgyát képezi), másrészt azt a tényt is, hogy a meglevő eredményeknek is csak kisebb részét tekinthetjük közismertnek. Ugyanakkor társadalmi-gazdasági törvényszerűségeink jelentős része is sztochasztikus hatásokat tartalmazó, tendenciaszerűen ható, összetett jelenség, s így alaposan, csak az összetevők birtokában ismerhetjük meg. Ez a magyarázata a felbontás-problémakör egyre mélyülő tanulmányozásának.

Az alábbiakban nem törekszünk teljességre. Célunk az, hogy a problémát előtérbe állítsuk, felhívjuk a figyelmet egyes módszerekre és közgazdasági alkalmazási lehetőségeikre. A matematikai apparátus részleteit illetően, esetenkint a vonatkozó szakirodalomra utalunk.

1. Összetett valószínűségeloszlások vizsgálata

Nagy vonalakban áttekintve a valószínűségeloszlások kialakulásának történetét, abban *három szakaszt* különböztethetünk meg. Kezdetben a „harang alakú" Gauss-görbével mint sűrűségfüggvénnyel rendelkező normális eloszlás, szinte egyeduralkodónak volt tekinthető. Ha egy tapasztalati adathalmazban a szimmetricitás követelménye csorbát szenvedett, az különböző mérőszámokkal számszerűsíthető volt, s kifejezte a „normális eloszlástól való eltérés" mértékét. Később sikerült a legkülönbözőbb igényeket kielégítő asszimmetrikus eloszlások konstrukciója, így nagymértékben bővült az egyes esetekben alkalmazható hipotézisek választéka is. Napjainkban viszont már az összetett eloszlások előállítása, felbontása az aktuális problémakör.

Empirikus eloszlásfüggvény Bruns-sorba fejtése

Első lépésként egy sajátos, régebbi eljárás rövid ismertetésével szeretnénk foglalkozni. Gyakorlati kivitele formálisan igen hasonlít más, később kialakult, s elvileg eltérő módszerekhez.

Ha egy tapasztalati eloszlás nem, vagy csak közelítőleg nevezhető normálisnak, a „kumulált" relatív gyakoriságok lépcsős függvényét (empirikus eloszlásfüggvény), a normális eloszlás eloszlásfüggvénye nem fogja jól közelíteni. A lépcsős függvényt $V(x)$-el jelölve, az valamely $N(x)$ alapfüggvény szerint a következőképpen fejthető sorba:

$$V(x) - N(x) = c_0 N'(x) + c_1 N''(x) + \dots$$

A c_k együtthatókra megfelelő képletek állnak rendelkezésre, alapfüggvényül viszont a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényét fogjuk választani. A deriválás során szorzó tényezőként a Hermite-polinomoktól csak kevéssé eltérő polinom kifejezéseket kapunk, ezek az egész eljárással együtt, praktikusan, táblázatosan elrendezhetők, számolhatók.

A sorbafejtést tetszőleges lépésig folytathatjuk, s az így adódó azonos típusú „komponensek" segítségével az igényeknek megfelelő legjobb közelítést előállíthatjuk.

1. Példa:

Az alábbi példa uránlelőhelyek keresésének egy gyakorlati eljárása keretében készült, természetes vizekben található uránnyomok statisztikai értékelése során [11], [12]. A közgazdasági vonatkozások nyilván nem igényelnek bővebb magyarázatot. (A szivárgó víz a kőzetek tulajdonságaitól — pl. szemcsenagyság — függően, oldja a talajban levő uránt, s így a geológiai viszonyok ismeretében a vízminták speciális, a további következtetésekhez jól felhasználható térképek készítésére alkalmasak.)

A feldolgozásban a Hegyalja eruptív kőzeteiből fakadó forrás- és kútvizei képezik az alapsokaságot, ezekből történt a mintavétel, s az urán-koncentráció alkalmas egységekben való meghatározása, az empirikus eloszlás előállításával együtt.

A hét tagig felírt Bruns-sor a következő volt:

$$B(x) = \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} [-0{,}01787\, p_2(x) - 0{,}002479\, p_3(x) +$$

$$+ 0{,}000789\, p_4(x) - 0{,}0000367\, p_5(x) + 0{,}00005008\, p_6(x) + 0{,}0000\,138\, p_7(x)].$$

A szereplő „Hermite" polinomok:

$$p_2(x) = 4\,x^2 - 2$$

$$p_3(x) = 8\,x^3 + 12\,x$$

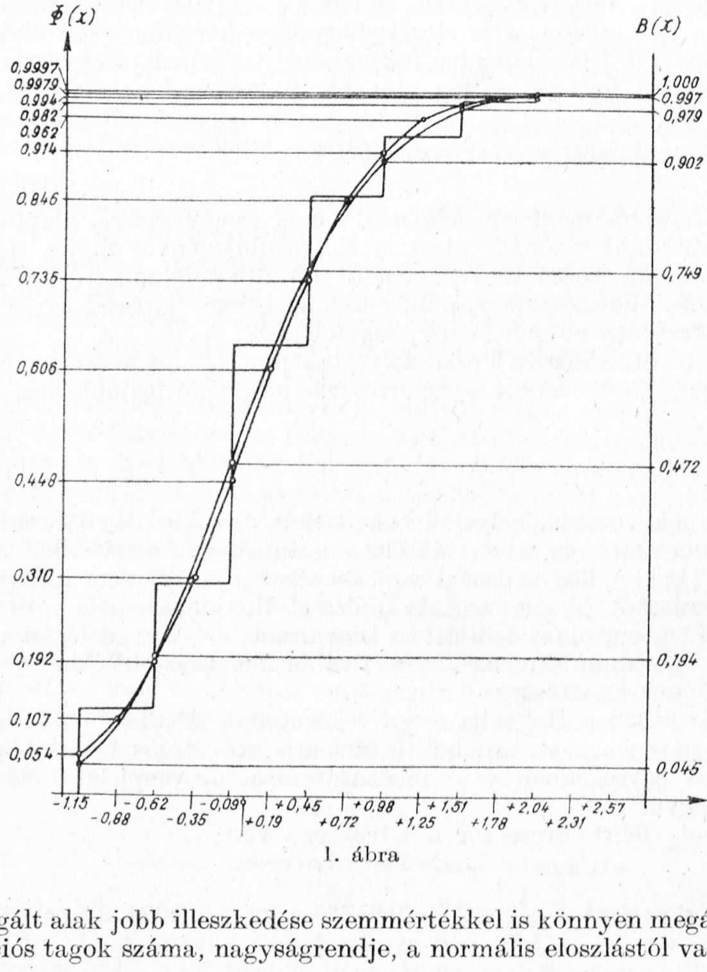
$$p_4(x) = 16\,x^4 - 48\,x^2 + 12$$

$$p_5(x) = -\,32\,x^5 + 160\,x^3 - 120\,x$$

$$p_6(x) = 64\,x^6 - 480\,x^4 + 720\,x^2 - 120$$

$$p_7(x) = -\,128\,x^7 + 1344\,x^5 + 1680\,x$$

Az empirikus eloszlás, a Gauss-görbe és a Bruns-sorral korrigált alak ábráit egy rendszerben felrajzolva (a szükséges transzformációk elvégzésével) a következő képet kapjuk:



1. ábra

A korrigált alak jobb illeszkedése szemmértékkel is könnyen megállapítható. A korrekciós tagok száma, nagyságrendje, a normális eloszlástól való eltérésre jellemző.

„Gauss analízis”

Ha $f(x, a, b)$ egy kétparaméteres, egycsúcsú sűrűségfüggvény, akkor a

$$k(x) = \sum_{k=1}^{N} p_k \cdot f(x; a_k, b_k) \qquad (p_k > 0)$$

összefüggés által meghatározott $k(x)$ függvényt, az $f(x; a_k, b_k)$ komponensek p_k súlyokkal képezett szuperpozíciójának nevezzük [19].

Több helyi maximummal rendelkező „hullámos” empirikus sűrűségfüggvények elemzésénél szoktunk találkozni ezzel a problémával. Ha az alapsokaság ismeretében feltételezhető, hogy az eredő több normális eloszlás keverékeként jött létre, érdekes és fontos feladatként vetődik fel a komponens-eloszlások, s azok paramétereinek meghatározása.

Ekkor tehát a keverék alakja:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} A_k \cdot \frac{\exp\left(-\dfrac{(x - m_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k}$$

s feladatunk $f(x)$ ismeretében az A_k; m_k; σ_k paraméterek értékének megállapítása lesz (7).

E területen kiemelkedő, úttörő munkát, MEDGYESSY PÁL végzett [1—9] [18].

Az igen sokrétűen felvetődő, és nagy apparátussal tárgyalható anyag részleteit illetően, ismételten a megadott szakirodalomra utalunk, az alábbiakban néhány példát szeretnénk előnyben részesíteni.

2. Példa:

A (7) közleményben található az alábbi érdekes alkalmazás. Az előzőekben leírt, sok véletlen hatással is zavart, összetett spektrumot mértek egy berendezéssel. Az eszköz pontossága sem volt a legmegfelelőbb. Ilyen esetekben új problémaként jelentkezik az egyes komponensek egzisztenciája, következésképpen az összetevők száma is. A vizsgálatot Gauss-analízissel végezték, így válaszolni tudtak a vitatott kérdésekre. Később lehetőség nyílt nagyobb pontosságú, tökéletesebb mérőberendezés alkalmazására. s ez igen szépen igazolta a számítási eredményeket. „A matematikai eljárás mintegy pótolta a nagyobb felbontóképességű készüléket.”

3. példa:[1]

Egy gyárban 903 munkás dolgozik az alábbi besorolásban:
takarító személyzet
segédmunkások
betanított munkások
szakmunkások

Az egyik bérfizetés alkalmával készült az alábbi összeállítás.

[1] BÉKÉSI GÁBOR tud. diákköri dolgozatából

Havi kereset Ft	Munkások száma	Havi kereset Ft	Munkások sz.
576— 625	2	1376—1425	106
626— 675	3	1426—1475	109
676— 725	4	1476—1525	102
726— 775	8	1526—1575	92
776— 825	16	1576—1625	91
826— 875	34	1626—1675	91
876— 925	48	1676—1725	83
926— 975	61	1726—1775	68
976—1025	88	1776—1825	54
1026—1075	105	1826—1875	42
1076—1125	99	1876—1925	32
1126—1175	85	1926—1975	23
1176—1225	74	1976—2025	18
1226—1275	71	2026—2075	14
1276—1325	75	2076—2125	10
1326—1375	92	2126—2175	7
		2176—2225	5

Feladatunk ennek a táblázatnak az ismeretében megállapítani az egyes besorolási kategóriák átlag fizetéseit.

Felhasználjuk még a következőket:

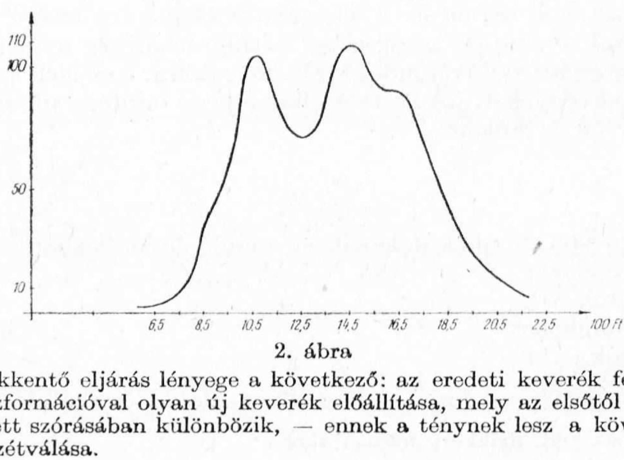
a) A négy besorolás fizetési kategorizálást is jelent. (Tehát a kategóriák átlagfizetései nem egyezhetnek meg.)

b) Az egyes kategóriákon belül a munkások fizetése normális eloszlást követ.

Amint az a mellékelt ábrákból is megállapítható, az eljárás szóráscsökkentéssel[2] dolgozik, az alapgörbéből kiindulva, az egyes lépések után előálló, egyre „hegyesebb tűk" jelzik a kopmonensek elhelyezkedését. A példában két lépés végigszámolása történt meg, (munkaigénye logarléc alkalmazásával kb. 2^h). A folytonos görbék a szemléletesség céljából szerepelnek.

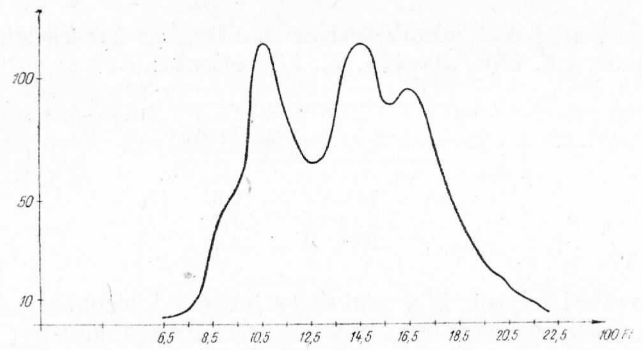
Az alkalmazott közelítés mellett az eredményül kapott átlagok:

takarító személyzet:	900 Ft	betanított munk.:	1400 Ft
segédmunkások:	1050 Ft	szakmunkások:	1650 Ft

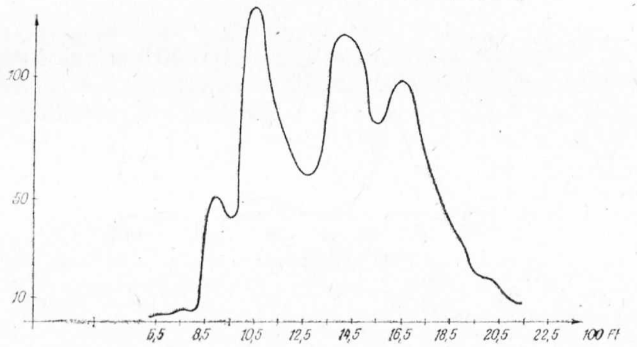


2. ábra

[2] A szóráscsökkentő eljárás lényege a következő: az eredeti keverék felhasználásával, megfelelő transzformációval olyan új keverék előállítása, mely az elsőtől csak az összetevők csökkentett szórásában különbözik, — ennek a ténynek lesz a következménye, a komponensek szétválása.



3. ábra



4. ábra

4. példa:

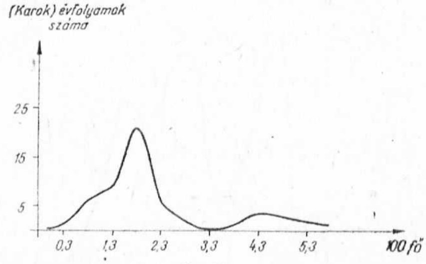
Az 1966/67-es tanévben Magyarországon a tudományegyetemek nappali tagozatán 12 kar, és az esetek többségében karonként 5 évfolyam volt található. Ha tekintjük az egyes karok létszámadatait, évfolyamok szerinti bontásban, 55 adatot kapunk:

Nappali hallgatók száma	karok számának gyakorisága
6— 55	1
56—105	6
106—155	9
156—205	21
206—255	6
256—305	2
306—355	0
356—405	1
406—455	4
456—505	3
506—555	2
	55

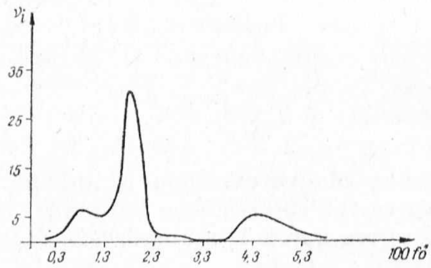
Az empirikus adatokat szemlélteti az 5. ábra, az ismeretlen paraméterek megállapíthatók a 6. ábra alapján, pl. közvetlenül:

k	m_k átlagok
1	0,8
2	1,8
3	4,3

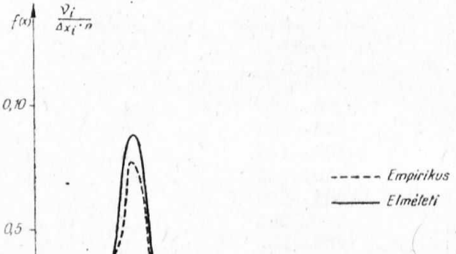
Valamint további adatok is a szükséges meggondolásokkal). Az empirikus, és az eljárás révén illesztett összetett elméleti sűrűségfüggvényt a 7. ábra tartalmazza. (Az egyes esetekben nem indokolt folytonos vonalak, csak a szemléltetést szolgálják.)



5. ábra



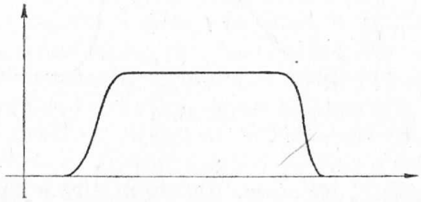
6. ábra



7. ábra

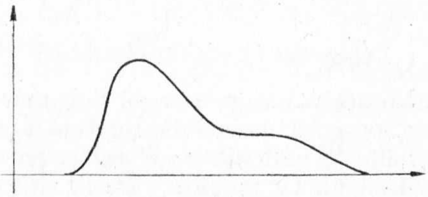
Keverékeloszlás típusok

Elméletileg az egyszerű eloszlások száma is végtelen. Gyakorlatilag azonban 10—20 eloszlástípus a problémák döntő többségében hozzásegít a megoldáshoz. Ugyanilyen okokból célszerű számbavenni a fontosabb keverékeloszlások alakjait is.



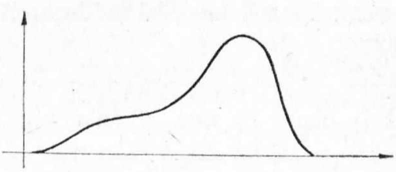
8. ábra

Ilyen típusú keverékeloszlás akkor keletkezik, ha a szóbajövő időtartam alatt az eredeti eloszlás középértékét meghatározó véletlen viszonyokra stabil, egyenletes változás szuperponálódik.



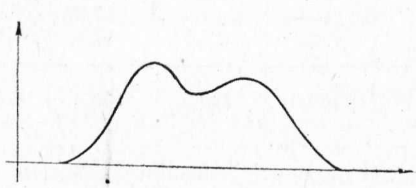
9. ábra

Ez a típus akkor keletkezik, ha a tekintett időtartam alatt az *a)* pont alatti egyenletes változás helyett kezdetben gyorsabb, majd egyre lassúbb változás lép fel.



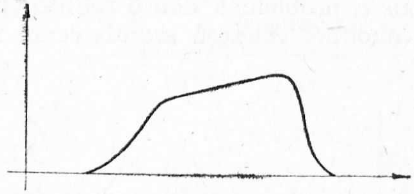
10. ábra

Ilyen típusú keveréket kapunk akkor, ha a változás a *b)* pont alatt leírttal ellentétes irányú, kezdetben lassú, majd egyre gyorsabb lesz.



11. ábra

Ezt a keverékeloszlás típust kapjuk, ha az előzőekben leírt változás *üteme* kezdetben gyorsuló, majd később lassulóvá válik.



12. ábra

Ezt az eredményt kapjuk, ha az *a)* pontban leírt körülmények mellett, valamilyen okból a szórás egyenletesen növekszik.

Ha a felbontást el akarjuk végezni, a komponensekre hipotéziseket kell felvennünk, de ebben az esetben is komoly számítástechnikai nehézségekre lehet számítani. A következő pontban egy ilyen természetű példával foglalkozunk. További elméleti megfontolásokat mindezzel kapcsolatban pl. a [14], [15] könyvekben találhatunk.

Összetett jövedelem-eloszlások

A társadalom egyes osztályai vagy rétegei más-más megoszlást mutatnak készpénzbevételeiknek kategóriánkénti összetétele szempontjából. Sőt, egy választott csoporton belül is változik az eloszlás, paraméterei, sőt típusa is módosulhat az idő múlásával. Ugyanakkor ezek a változások a vásárlóképesség alakulásával, az életszínvonal emelkedésével, stb. kapcsolatos törvényszerűségek lényeges részét képezik, megismerésük tehát igen fontosnak tekinthető.

5. Példa:

Anélkül, hogy a számszerű adatok becslési módszereit részleteznénk, tekintsük az alábbi táblázatot:

Pénzbevételi kategóriák a parasztság esetében:	1961	1962	1963	1964	1965
—3600	30,1	25,2	25,5	31,4	36,7
3601—4000	15,2	14,2	11,3	9,3	7,4
4001—4400	13,2	12,7	10,4	9,1	7,0
4401—4800	11,5	11,3	10,1	8,9	7,1
4801—5200	11,5	12,3	11,8	10,5	8,9
5201—5600	10,0	11,8	13,3	12,3	12,4
5601—	8,5	12,5	17,6	18,5	20,5
	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0

A táblázat későbbi éveinél az empirikus eloszlásban *második csúcs* alakul ki. (Az osztályközök határai nem szerencsések, de az eredeti adatok hiányában már nem voltak megváltoztathatók). Jövedelemeloszlási problémák esetében elsősorban a logaritmikus normális eloszlást szoktuk alkalmazni, s valószínűségszámítási megfontolásokból kiindulva, a második csúcsot egy χ_n eloszlás alkalmas súlyozással történő keverésével vehetjük tekintetbe. A felbontás megvalósítása érdekében egyes konstansokat bizonyos feltételek alapján közvetlenül, másokat alkalmas egyenletrendszer felírásával, s annak közelítő módszerekkel való megoldásával határozhatunk meg. Ha az eljárást minden évben elvégezzük, s a paraméterek változását függvényalakban feltüntetjük, extrapolálással külön-külön megbecsülhetjük ezek későbbi értékeit is. Ezen adatok birtokában felírva a keverékeloszlás kifejezését, „megjósolhatjuk" a pénzbevételek kategóriánkénti %-os alakulását az elkövetkező években. — Az eljárás nem mentes számítástechnikai nehézségektől, nem is kívánjuk részletezni, csak szerettünk volna bemutatni egy, az összetevőkre bontással kapcsolatos, jellegzetes, gyakorlati gondolatmenetet.

2. Idősorok vizsgálata

Statisztikai adatok egy sorozatát *idősornak* nevezzük, ha ezek az adatok valamely mutató különböző időpontokban mért értékei, és az adatokat a növekvő idő szerint rendeztük [10].

A matematikai statisztika egyik leginkább fejlődésben lévő és eredményeit is a legutóbbi évtizedekben elért területe az *idősorok analízise*. Nehezíti ugyanis az idősorok problémáinak a megoldását az a tény, hogy az esetenkint rendelkezésünkre álló egyetlen realizáció kizárólagos birtokában kell a kérdésekre válaszolnunk. Az időtengely alkalmas pontjaihoz tartozó idősor-adatok ugyanis valószínűségi változók, s éppen megfigyelt értékeik a lehetséges értékek összességéből egy mintaelemet képviselnek. Ráadásul a dolog természetéből még az is következik, hogy az egyes időpontokban nincs lehetőség újabb információk szerzésére, a megfigyelés ismételt elvégzésére. Erre vezethetők vissza az idősorok statisztikai analízisében megnyilvánuló nehézségek, s a fejlődés is ezért indult csak később meg. Felettébb megtévesztő lehet a mindennapi gyakorlatban elterjedt néhány egyszerű módszer, s ezek mechanikus használata (pl. lineáris trendvonal közvetlen alkalmazása, stb.). Gyakran találkozhatunk az idősorok vizsgálatát erre a szintre egyszerűsítő szemlélettel.

Az idősor-analízis legfontosabb problémái a paraméterek meghatározására, az összetevők szétválasztására (szűrésre), extrapolációra, és interpolációra terjednek ki. Hazai szakirodalmunkból is hiányzik még az idősorok elméleti és gyakorlati kérdéseivel behatóan foglalkozó könyv, ami az egyre szaporodó alkalmazások hatékonyságát és megbízhatóságát igen megnövelné.

Felbontás egyszerűbb esetekben

Több komponensből álló, összetett idősor felbontása esetén is a konkrét terület ismerete alapján, feltételekkel kell élnünk az egyes összetevők természetét illetően. Az egyik legegyszerűbb esetben például feltételezhetjük egy *lineáris alaptendencia* létezését (egyenes trendvonal), egy ismert periodicitással fellépő *periódikus komponens* szereplését, valamint az előzőek összegére természetszerűleg még szuperponálódó *véletlen hatásokat.* (Ezen utóbbiról szoktuk a stacionárius jelleget feltenni.)

Ebben az esetben a trend meghatározható pl. egyszerűen mozgó átlagolással, ezután kivonással leválasztható az eredeti idősorról, s már csak a másik két komponens összege áll előttünk. A periódikus összetevőt az azonos „fázishoz" tartozó adatok átlagolásával kapjuk meg, s ismételt kivonás után tisztán megmarad a véletlen komponens.

Meg kell jegyezni, hogy a bevezetőben mondott nehézségek, valamint a mozgó átlagolásból származó adatveszteségek miatt minden statisztikai feldolgozás esetén minél hosszabb idősor biztosítása kívánatos.

Kicsit is igényesebb munkák esetén lehetőség van pl. a trendvonal *megbízhatóságának* meghatározására, úgynevezett *konfidenciasáv* alakjában, a felbontás igazában csak ennek birtokában értékelhető. Fokozott mértékben merül fel ez az igény, ha extrapolálni akarjuk eredményeinket. Rövid idősor esetén ugyanis a megbízhatóság rohamosan romlik a szélső pontokban, nem is beszélve az extrapolált szakaszokról [10], [16].

Nem-lineáris alaptendenciák

Egyes területeken elméleti eredmények indokolják meghatározott görbetípusok szerepeltetését, más esetekben a tapasztalati adatok ábrázolása, vagy a mozgó átlagokkal való kiegyenlítés után dönthetünk alkalmasnak látszó függvények választásáról. Bár a két eset elméletileg lényegesen eltér, számítástechnikai szempontból hasonlóan kezelhető.

Röviden összefoglaljuk a leggyakrabban feltételezett nemlineáris alaptendencia-típusokat: (a többváltozós esetekre nem térünk ki):

$y = a \cdot t^b$ hatványfüggvény;

$y = a \cdot b^t$ exponenciális függvény;

$y = \dfrac{1}{a + b \cdot t}$ reciprok vagy hiperbolikus függvény;

$y = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_n \cdot t^n$ n-ed foku parabola

$y = \dfrac{k}{1 + b \cdot e^{-a \cdot t}}$ logisztikus trend;

Természetesen mindig felléphetnek periódikus komponensek is, és ugyancsak szerepel a véletlen hatásokat tartalmazó összetevő is. Ennek megfelelően egy nem lineáris, összetett esetre vonatkozó feltételezés, pl. a következőképpen alakulhat:

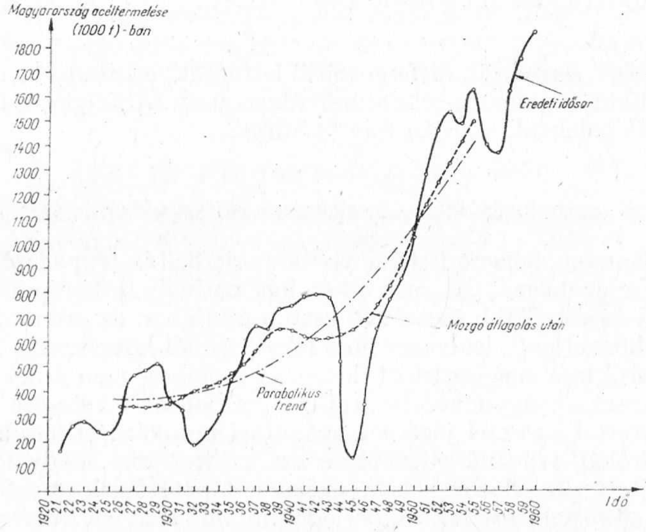
$$X_t = a \cdot t^b + d_t + Y_t$$

itt:

X_t = az idősor „t" időponthoz tartozó értéke;
$a \cdot t^b$ = az alaptendencia „t" időponthoz tartozó értéke;
d_t = a periódikus komponens időponthoz tartozó értéke;
Y_t = a véletlen hatásokat magába foglaló összetevő.

6. példa:

Tekintsük pl. az 1921—1960 között Magyarország évi acéltermelését megadó idősort. Az adatok és mellékszámítások nagy mennyisége, s így mellőzése miatt a példát egy ábrában foglaljuk össze. Bár ebben az esetben a periodicitás konjunkturális jellegű, s így hossza ingadozó, első lépésben mozgó átlagolást alkalmaztunk, s az ebből adódó görbéhez illesztettünk analitikusan, parabolikus trendet. A periódikus komponenseket a leírt módon egyszerűen meg tudtuk határozni. (Az idősor és a felbontás további diszkussziót igényelne, erre azonban a példa szemléltető jellege miatt nem térünk ki.)



13. ábra

Illeszkedő polinom fokszámának megállapítása

A kérdést gyakran közvetlen szemlélettel döntik el. Megnyugtató elintézése pl. a szukcesszív differenciák módszerével történhet [10]. Egy k-ad fokú polinom k-adik differenciálhányadosaként nyerhető konstans analógiájára, egy egész t értékeken értelmezett k-adfokú $q(t)$ polinom, k-adik differenciája is konstans lesz. Ha tehát rendre elkészítjük a vizsgált idősor növekvő rendű differenciáit, az így leszármaztatott idősorok tagjai a keresett fokszámnak megfelelő számú lépés után, véletlen ingadozásoktól, eltekintve, stabilizálódnak. A szórás minden lépés utáni kiszámításával a kívánt helyzetet könnyen felismerhetjük. [$q(t)$ első differenciája: $\Delta q(t) = q(t+1) - q(t)$, második differenciája: $\Delta^2 q(t) = \Delta q(t+1) - \Delta q(t) = q(t+2) - q(t+1) - [q(t+1) - - q(t)] = q(t+2) - 2\,q(t+1) + q(t)$ stb. A módszer igazolásához szükséges: a differenciák általános képzése (mivel ezek az eredeti idősor elemeihez hasonlóan valószínűségi változók), meg kell még keresni várható értéküket és szórásnégyzetüket.]

7. Példa:

Az alábbi példa[3] az USA-ban 1919 és 41 között évente fogyasztott húsmennyiség idősora alapján készült:

[3] (Átvéve a [10]-ből)

	Szórásnégyzet:
Az eredeti idősor adatai esetén:	62,25174
Az első differenciákból készült idősor esetén:	23,58636
A második differenciákból készült idősor esetén:	17,04112
A harmadik differenciákból készült idősor esetén:	15,73921
A negyedik differenciákból készült idősor esetén:	15,28964
Az ötödik differenciákból készült idősor esetén:	15,30118

A stabilizálódás a harmadik differenciától kezdődik, a trend-vonal egyenletéül tehát harmadfokú polinomot célszerű alkalmaznunk. A felbontás további lépései azután már a leírtak alapján folytatódnak.

Nagyobb számú periódikus komponens előfordulásának vizsgálata

Amilyen könnyen felismerhető a tiszta periodicitás, éppen olyan nehezen kezelhető ez a probléma, ha csak akár két periódikus komponens egyidejű hatásáról van is szó. Több összetevő esetén általában az eredőről semmilyen periodicitást közvetlenül leolvasni nem lehet. Ebből következik, hogy hosszú, a trend hatástól már megtisztított idősorok esetében igen érdekes vizsgálati lehetőséget jelent az úgynevezett „rejtett periódusok" keresése és meghatározása. Tekintettel az ezzel járó sok számítási munkára, kiindulásul célszerű statisztikai próbát végezni, ellenőrizve azt a hipotézist, hogy idősorunkban nincsenek rejtett periódusok. Ha a próba a hipotézisnek megfelelő szinten ellene mond, akkor elkészítjük a „periodogramot" melyről leolvasható a keresett periódikus komponensek száma és periódus hossza [10]. Ezután nyílik lehetőség a kapott eredmények például közgazdasági értékelésére. A módszerben rejlő sajátságok, lehetőségek, matematikai igazolása igen komoly apparátust igényel, egy adott esetben történő végigszámoláshoz viszont a gimnáziumi matematikaanyag is elegendő. A számítások mennyisége általában indokolja számítógép használatát.

8. példa:

A közelmúltban nagyobb meteorológiai adatgyűjtést végeztem a következő meggondolásokkal: az ország két megyényi — több szempontból meteorológiai egységet képező — területén a mérőállomások tavasztól őszig terjedő csapadékadatait 5 napos egységekre számítva rendeztem, 1900-ig visszamenően. (Az adatok végül 36 db 17×64-es típusú mátrixban helyezkedtek el.) Ezen az úton lehetőség nyílik az egyes évek ugyanazon 5 napos egységeiből valószínűségeloszlások konstruálására, s az egymásután következő 5 napos egységekhez tartozó eloszlások közötti kapcsolat, törvényszerűség keresésére. Másrészt felvetődik az a kérdés, találhatók-e rejtett periódusok egy meghatározott 5 napos egység hosszú távon való követésében, ill. van-e kapcsolat az egyes egységekhez tartozó rejtett periódusok között. Az eredményeket igen jól fel lehetne használni sztohasztikus, mezőgazdasági, távlati tervezési modellek készítésében. Érdekes módon kapcsolódik az előbbi adatgyűjtéshez egy párhuzamos vízügyi felmérés is, jelenleg az adatok elektronikus gépi feldolgozása folyik, az eredmények közlésére visszatérünk.

9. példa:

Szeretnék utalni a vonatkozó szakirodalom egy klasszikus példájára is, melyet W. Beveridge közölt [10]. Ezek az adatok az angliai walesi búza ár-indexek trendhatástól már megszűrt értékeit tartalmazzák 1500-tól 1869-ig. A hosszúsága miatt feldolgozásra különösen alkalmas idősor periodogramja alapján 20 db eredetileg rejtett periódikus komponens (s ezek különböző periódus hossza) volt felismerhető.
Megjegyezzük, hogy a probléma sajátos vonását az idősor elemeinek valószínűségi változó jellege adja. Ha ugyanis az összetett görbe determinisztikus természetű, a „Fourier-analízis" eljárása a komponensek megkeresésének minden igényt kielégítő, általános módszere.

Trendszámítás ortogonális polinomokkal

Vizsgálni kívánt idősorunk ismert realizációja tartalmazzon n elemet. Kimutatható, hogy minden n-hez meghatározható a

$$\Phi_0(t) = 1;\ \Phi_1(t);\ \Phi_2(t), \ldots$$

polinomoknak egy olyan rendszere, melyekre:

$$\sum \Phi_i(t) \cdot \Phi_k(t) = 0 \qquad (i \neq k)$$

ezeket a polinomokat ortogonális polinomoknak nevezzük.[4]
Említettük már az előzőekben az idősorok analízisének azt az esetét, amikor a vizsgált terület ismerete alapján semmilyen görbetípus eleve nem rögzíthető, a tapasztalati adatokból kell tehát kiindulni. Ugyanakkor lehetséges, hogy ezek egy bonyolult görbét határoznak meg, s egy magasabb fokú polinom illesztése igen fáradságos lehet. Ilyenkor igen jó hasznát vehetjük az ortogonális polinomoknak [10], [13]. Technikailag igen jól kezelhetők, használatukhoz kényelmes képletek állnak rendelkezésre, helyettesítési értékeik széles határok között táblázva vannak [17], s belőlük a bonyolult görbék is jól előállíthatók. Sok szempontból nem jó, de egy lényeges vonásra mégis rámutató hasonlattal élve, idézhetjük a modern elektrotechnika „építőkocka elv" szerint felépített konstrukcióit. Előre alkalmasan elkészített, egymáshoz módszeresen illeszthető elemekből igen összetett rendszereket tudnak előállítani. Bizonyos határokon belül lehetőség nyílik arra is, hogy az egyes „kockák" tervezéséhez, előállításához szükséges ismeretek nélkül — jellemzőik ismeretében —, konstruktív munkánkban, felhasználhassuk őket. Bizonyos gyakorlattal és óvatossággal, a táblázatok és képletek használatával hasonló helyzetet teremthetünk az ortogonális polinomok alkalmazásánál is. Az előállított közelítő függvény ábrázolása az alapadatokat tartalmazó rendszerben, várhatóan úgyis felhívja a figyelmet az elkövetett elvi vagy számolási hibákra.

10. Példa:

Vizsgálva az Egyesült Királyság hajógyártásának adataiból készült idősort, bruttó regiszter tonnában:

[4] Ha $n = 2m$ páros szám, akkor: $t = -(2m-1),\ -(2m-3), \ldots, -1,\ +1, \ldots, 2m-3,\ 2m-1$; Ha $n = 2m+1$, páratlan szám, akkor: $t = -m,\ -m+1 \ldots, m$

a) 1861—1901 közötti 50 évben,
b) 1861—1960 közötti 100 évben,

(adatokat lásd a „Világgazdasági idősorok” c. könyvben), megállapítható, hogy a hosszú időszak ellenére a trendvonal egyenlete a legegyszerűbb összetevőkből felépíthető.

a) használva az ortogonális polinomokra bevezetett: $\Phi_k(t)$ jelölést, a közelítést

$$X_t = a_0 + a_1 \cdot \Phi_1(t) + a_2 \cdot \Phi_2(t)$$

alakban keressük, ahol:

$$\hat{a}_i = \frac{\sum_t X_t \cdot \Phi_i(t)}{\sum_t \Phi_i^2(t)}$$

($\hat{a}_i$ a_i becslését jelöli).

$$\Phi_1(t) = \lambda_1 \cdot t$$

$$\Phi_2(t) = \lambda_2 \cdot \left(t^2 - \frac{1}{12}(n^2 - 1)\right)$$

λ_1 és λ_2 tetszőleges, de praktikusan megválasztható, s a táblázatokban szintén közölt konstansok.

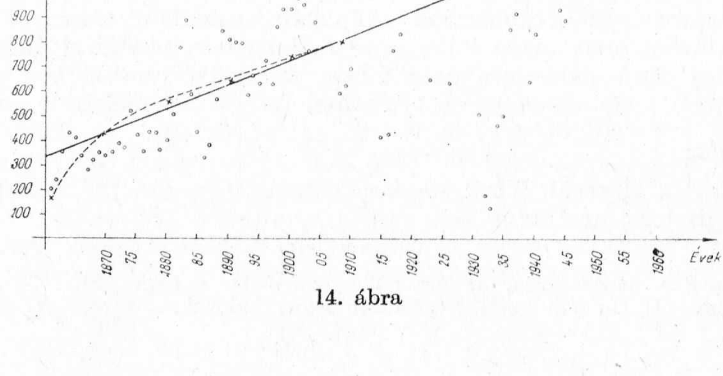
A számítások elvégzése után:

$$X_t = 594{,}66 + 4{,}770\, \Phi_1(t) + 0{,}103\, \Phi_2(t)$$

alakban adódott a trend.

b) Hosszabb távon a közelítés egész egyszerűvé vált, és

$$X_t = a_0 + a_1 \cdot \Phi_1(t)$$



14. ábra

alakban volt kereshető. Az együtthatók kiszámítása után:

$$X_t = 822{,}3 + 4{,}8494\, \Phi_1(t)$$

összefüggést kapjuk.

(t értéke ebben az esetben: $-99, -97, -95, \ldots -1, +1, \ldots, +97, +99$; értékeken van értelmezve.)

Végül szeretnék köszönetet mondani Chikán Attilának és Sólyom Csabának, akik a példák összeállításában voltak segítségemre.

(Beérkezett: 1968. VIII. 12.)

IRODALOM

[1] DOETSCH, G.: Zerlegung einer Funktion in Gauss'sche Fehlerkurven und zeitliche Zurückverfolgung eines Temperaturzustandes, Math. Zeitschrift 41. 1936. p. 283–318.

[2] GNYEGYENKO–KOLMOGOROV: Független valószínűségi változók összegeinek határeloszlásai Budapest, 1951.

[3] JOHN, F.: Numerical solution of the equation of heat cond. Annali di Matematica Pura ed Applicata Serie IV. XL. 1955. p 129–142.

[4] MEDGYESSY, P.: Egy konvolúciós típusú integrálegyenlet numerikus megoldása MTA III. Oszt. Közleményei 16. 1966. 47–64. p.

[5] MEDGYESSY P.: Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire. MTA Alk. Mat. Intézet Közl. II. 1952. 165–177. p.

[6] MEDGYESSY, P.: Anwendungsmöglichkeiten der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen Zeitschr. für angew. Math. und Mech. Band 37. 1957. Nr. 3/4. März–Apr.

[7] MEDGYESSY P.: Újabb eredmények val.-eloszlásfüggvények keverékének összetev. bontásával kapcs. MTA Alk. Mat. Int. Közl. III. 1954. 155–170. p.

[8] MEDGYESSY, P.: Decomposition of superposition of distr. functions Akadémiai Kiadó 1961.

[9] MEDGYESSY, P.: Stabil val. függvényekre fennálló parc. differenciálegyenletek és alkalmazásaik. MTA Alk. Mat. Kutató Közleményei I. 1956. 489–518. p.

[10] PRÉKOPA A.–ÉLTETŐ Ö.: Matematikai Jegyzetek IV. (Matematikai Statisztika) Statisztikai Kiadó Vállalat

[11] MESZÉNA GY.: Számítások Bruns-sorokkal a természetes vizekben található uránnyom statisztikai értékeléséhez. Atomki Közlemények II. kötet 1960. 2. sz. MTA Atommagkutató Intézet Debrecen 99–107. p.

[12] SCHERF E.–MESZÉNA GY.: Matematikai statisztikai vizsgálatok a természetes vizek uránban való feldúsulásának fizikai feltételeiről. Atomki Közlemények II. kötet 1960. 2. sz. 109–143. p.

[13] NATANSZON, I. P.: Konstruktív függvénytan, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952.

[14] VINCZE I.: Statisztikai minőség ellenőrzés Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1958.

[15] SMIRNOW, N. W.–DUMIN, I. W.–BARKOWSKI: Mathematische Statistik in der Technik. WEB. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin, 1963.

[16] KÖVES–PÁRNICZKI: Általános Statisztika. Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.

[17] PEARSON, E. S.–HARTLEY, H. O.: Biometrika tables for statisticians Cambridge-University Press, 1956.

[18] MEDGYESSY P.: Sűrűségfüggvény szuperpozíciók felbontásának egy lényegileg új módszeréről. MTA III. Osztály közleményei 17. 1967.

KÖNYVEKRŐL

Kornai János: A gazdasági szerkezet matematikai tervezése. Lipták Tamás és Wellisch Péter közreműködésével. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965. 401 p.

A könyv a szerző többéves tudományos munkásságának eredményeit foglalja össze. Ezek az utóbbi évek hazai közgazdasági kutatási eredményei között a legjelentősebbek közé tartoznak, és méltán váltottak ki — már a korábbi publikációk alapján is — széleskörű nemzetközi érdeklődést a szocialista országokban és nyugaton egyaránt. A népgazdasági és ágazati méretű optimumszámítás matematikai-közgazdasági irodalma rendkívül gazdag. Ugyanakkor a módszerrel összefüggő elméleti-közgazdasági kérdések nem kielégítően tisztázottak, a gyakorlati alkalmazás útjában pedig súlyos statisztikai és számítástechnikai nehézségek állanak.

Nyilvánvalóan messze van még az az idő, ha egyáltalán bekövetkezik, amikor az optimális népgazdasági terv a maga egészében előállítható lesz elektronikus gépeken végzett matematikai programozással. Viszont a tervezésnek már ma is sürgősen szüksége van matematikai segédeszközökre, exakt számítási módszerekre. Kornai János kutatásainak fő érdeme és eredménye abban van, hogy módot keresett és talált az elméleti és gyakorlati nehézségek áthidalására; olyan módszereket dolgozott ki, amelyek a mai adottságok mellett is lehetővé teszik a matematikai programozás gyakorlati felhasználását a népgazdasági és ágazati tervezés javítására.

A könyv három gyakorlatilag végrehajtott iparági optimum-számítás (a pamutipari, a műszálipari és az alumíniumipari) eredményeit foglalja össze, és ismerteti a népgazdasági méretű programozásra kidolgozott úgynevezett kétszintű tervezési modellt, amely jelenleg a kísérleti számítások befejezésének stádiumában van. Az elvégzett számítások Magyarországon úttörő jelentőségűek; éppen a fokozott nemzetközi érdeklődés mutatja azonban, hogy az iparági és népgazdasági szintű programozás gyakorlati alkalmazásában a szerző eredményei más országok szempontjából is újak és érdekesek.

A könyv azonban nem egyszerű leírása a végrehajtott és tervezett számításoknak. A konkrét programozási modellek felállítása és a számítási eredmények elemzése számos olyan kérdést vetett fel, amely a matematikai programozással kapcsolatban, sőt ezen túlmenően, e módszertől függetlenül is, a közgazdaságtan egyes alapvető problémáit érintik. A szerző ezeket a kérdéseket világosan megfogalmazza, tudományos színvonalon tárgyalja, és — az Előszóban felvázolt korlátokon belül — nagyon sok eredeti és lényeges gondolattal járul hozzá megoldásukhoz.

Az említett elvi, elméleti kérdések többnyire azoknak az engedményeknek kapcsán vetődnek fel, amelyeket a bonyolult gazdasági valóság hiteles ábrázolásának rovására teszünk, amikor döntési problémáinkat matematikai — mégpedig lényegében lineáris — programozási modellek formájában fogalmazzuk meg; továbbá azoknak a kompromisszumoknak kapcsán, amelyekre az „ideális" matematikai modellekkel szemben kényszerülünk, amikor a gyakorlatilag megszerezhető információk alapján numerikus számításokat akarunk végezni.

Az utóbb említett kérdéscsoportban a szerző eredményei feltétel nélküli elismerésre késztetnek. A nehézségek világos és őszinte feltárása, a szellemes módszerek, hasznosítható következtetések biztosítására azokban az esetekben is, amikor zárt matematikai megoldás nem adható, a számítási eredmények jelentőségének és korlátainak, azaz hasznosíthatóságának reális értékelése — megannyi feltétele annak, hogy a számításokat valóban el lehessen végezni, és a gyakorlati tervező munka szolgálatába állítani. A feladatnak ez a józan, gyakorlatias megközelítése szorosan összefügg azzal, hogy a szerző álláspontja mentes a matematikai módszerek túlbecsülésétől és a hozzájuk fűződő illúzióktól. Sőt, inkább az kifogásolható, hogy a tárgyilagos összehasonlításra törekedve, néhol kissé túlértékeli a „hagyományos" tervezési módszerek előnyös oldalait.

Az előbb említett kérdéscsoport a dolog természetéből következően nehezebb, bonyolultabb, és inkább elméleti jellegű. Ezek a problémák részben a racionális gazdasági döntések elméletéhez tartoznak, és ezért szükségképpen átnyúlnak a közgazdasági elméletnek arra a másik területére, amelynek feladata az objektív gazdasági törvényszerűségek feltárása.

A szerző világosan különbséget tesz e két kérdés közt, és már maga ez a világos elhatárolás előnyösen megkülönbözteti más programozási munkáktól, amelyek gyakran összecserélik a programozási modelleket az objektív gazdasági valóság törvényeivel. A kutatás tárgyának, a könyv jellegének ez a szigorú körülhatárolása azonban természetesen azzal jár, hogy az „átnyúló" problémák a könyvben nem vezetnek el az objektív törvényszerűségek kutatásához, az objektív adottság és a racionális döntés kölcsönhatásának vizsgálatához. Ez önmagában nem kifogásolható; senkisem vállalkozhat az egész közgazdaságtudomány minden feladatának megoldására, és mindenki maga választja meg, hogy melyik feladat megoldására vállalkozik. Ráadásul a szerző által választott feladat hallatlanul fontos és hasznos a szocialista tervgazdaság gyakorlata számára. Az olvasóban megmaradó hiányérzetet tehát nem az okozza, hogy a szerző „csak" a kérdések praxeológiai, döntéselméleti oldalával foglalkozik; ez fontos és érdekes oldal, amellyel hazai közgazdasági irodalmunk még alig foglalkozott, legalábbis ilyen módszeresen és színvonalasan nem. A hiányérzetet az okozza, hogy a zerző nagyon kevéssé mutatja meg a „másik oldalt". Gondosan és elismerésre méltó tudományos lelkiismeretességgel, szinte kínos pontossággal sorolja fel és elemzi a maga „praxeológiai" kérdésfeltevéseinek absztrakcióit, hipotéziseit, az egyszerűsítő megszorításokat; de valójában mindezeknél erősebb megszorítást jelent maga a szigorúan csak „praxeológiai" kérdésfeltevés. Ezért az olvasó úgy érzi, hogy a szerző némiképp túlbecsülte a racionális döntések szerepét a gazdaságban és elméletüket a közgazdaságtanban; hogy lebecsülte azt a megalapozást, amelyet a törvényfeltáró, az objektív valóság megismerését célzó közgazdasági elmélet adhat — kellene, hogy adjon — a döntéseknek és a döntéselméletnek.

Az elmondottak talán leginkább vonatkoznak az V. részre, a népgazdasági szintű programozási modell elvi megalapozására. Rendkívül érdekes és újszerű mindaz, amit a szerző a gazdaságpolitikai „cél" fogalmának misztifikálása ellen, a célok és eszközök kölcsönös viszonyáról, részbeni felcserélhetőségéről mond. Különösen fontos ez azért, mert az „optimum-kritérium" megválasztásának jelentőségét valóban gyakran túlbecsülik, a népgazdasági szintű programozás mellett és ellene szólók egyaránt. Emellett tény, hogy ma és a nem túl rövid közeljövő időszakban aligha lehetne más alapon gyakorlati népgazdasági programozást megkísérelni, a tervezésnek valóban hasznos segítséget adni. Mindezt figyelembe véve, az olvasó megérti a szerzőt, és egyetért vele a megadott „praxeológiai" keretben; csak egy kicsit szűknek érzi a keretet. A gazdaságpolitikai koncepció egésze valóban sokrétű, a fő célok és fő eszközök együtteséből áll. Csakhogy ezt az egészet feltétel nélkül elfogadni, a konzisztencia szempontjából ellenőrizni, és a legracionálisabb végrehajtási módozatot megkeresni — ez valóban csak a praxeológia feladata lehet, de nem általában a közgazdaságtudományé. Az utóbbinak a gazdaságpolitikai koncepció helyességéhez is — nemcsak konzisztenciájához — kell, hogy legyen mondanivalója; nemcsak a végrehajtás mikéntjében hanem az általánosan értelmezett célok kitűzésében is képesnek kell lennie a gazdasági gyakorlat megalapozására. Ez azonban már a közgazdaságtudomány másik területének, az objektív gazdasági törvényszerűségeket feltáró elméletnek a feladata.

Külön szólni kell arról, ahogyan a szerző a matematikai apparátust kezeli, mert ez messze felülmúlja a matematikai-közgazdasági irodalomban megszokott színvonalat. A szerző jóval messzebbre jutott ezen a téren, mint a matematikát késve tanuló közgazdásznemzedékek legtöbb tagja. Nemcsak megtanulta és alkalmazni tudja a matematika egyes fejezeteit, hanem a felhasznált fejezeteket valóban „elsajátította", föléjük kerekedett és kézben tartja ezeket. (Természetesen nem a matematikus társszerzők érdemeit kívánom a szerző javára írni, nem is a matematikai megoldásokra utalok, hanem a közgazdasági teljesítményre.) Más, hasonló tárgyú munkáknál az olvasónak gyakran az a benyomása, hogy a szerző kínlódva igyekszik értelmezni azt, amit kiszámolt, illetve megmagyarázza: mit is jelent a matematikai gondolatmenet logikája szerint soronkövetkező képlet. Itt ezzel szemben a szerző láthatóan azt számolta ki, amit már értelmezett, és ki akart számítani; illetve azt mutatja be, hogyan lehet a közgazdasági gondolatmenet logikája szerint soronkövetkező lépést matematikailag megfogalmazni.

Imponáló az a biztonság, amellyel a szerző nem képleteket interpretál, hanem közgazdasági gondolatokat fejez ki képletekben. Nyilvánvalóan ezzel függ össze, hogy nem restell elemi eszközöket is igénybevenni, amikor céljait fejlettebb megoldásokkal nem érheti el matematikai vagy közgazdasági nehézségek miatt. A könyvben új és bonyolult matematikai megoldásoktól a százalékszámításig minden fajta számítási módszert találunk, bizonyítékául annak, hogy itt a matematikai szépség nem öncél, hanem a közgazdasági problémák megoldásának eszköze, s hogy kellő rugalmasság és ötletesség majdnem minden közgazdasági problémához biztosít a „hagyományosnál" exaktabb számítási módszereket.

A matematikai apparátus ilyen kezelése, a szerző kiemelkedően világos és áttekinthető, olvasmányos stílusával párosulva hozzáférhetővé teszi a kutatás lényegét és gyakorlati eredményeit a matematikában járatlan közgazdász-olvasó számára is; a valamelyes ismeretekkel rendelkező olvasónak pedig a könyv könnyen követhető, élvezetes olvasmány.

Ugyancsak kiemelendő a könyv igen gondos kidolgozása, „felszerelése" tudományos szempontból. Hivatkozásainak korrektsége, a definíciók pontossága, a mondanivaló előadásában uralkodó rend és fegyelem mintaszerű.

Dicséret illeti a kiadót is a kötet gondos és szép kiállításáért.

A.—B.

M. Kalecki: Vállalatvezetés — Tervezés — Gazdasági növekedés. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1968. 204 p.

Ebben a recenzióban, noha a kötet más tanulmányokat is tartalmaz, a szerző növekedési modelljét ismertetjük. Ezt a modellt több közgazdász (elsősorban lengyelek és csehek), akik a szocialista gazdaság növekedési problémáival foglalkoznak, kutatásuk kiindulópontjának tekintik.* A modell alapvető összefüggése a következő:

A bruttó (az amortizációs összeget magában foglaló) nemzeti jövedelem (D) növekedési üteme (r) = a beruházási hányad (i) szorozva a tőkeigényesség (m) reciprokával (a beruházások hatékonyságával), mínusz az állóeszközök elhasználódásából eredő nemzeti jövedelem-csökkenés együtthatója (a) plusz a beruházásoktól független (a munkaszervezés állandó javulásának következtében fellépő) növekedés együtthatója (u). Csak jelölésekkel:

$$r = \frac{1}{m} \cdot i - a + u.$$

Amennyiben az m, a és u paraméterek állandóak, úgy változatlan i-hez egyenletes növekedés párosul, amelynek üteme annál magasabb, minél nagyobb i. Az egyenletes növekedés során a beruházások volumene is ugyanabban az ütemben nő, mint a nemzeti jövedelem. Mivel a tőkeigényesség változatlan, az évenként átadott beruházások termelése is a beruházások volumenével — következésképp a nemzeti jövedelemmel — megegyező ütemben növekszik.

A tőkeigényesség csak úgy maradhat állandó, ha a munka technikai felszereltsége és a munkatermelékenység viszonya nem változik, tehát ha az előbbi növekedése az utóbbi azonos arányú növekedésével jár együtt. Ez azonban csak a technikai haladás révén lehetséges. Ha a technikai haladás a technikai felszereltségnek α ütemű növekedését teszi lehetővé úgy, hogy a tőkeigényesség változatlan maradjon, akkor az adott évi beruházásokkal létesített munkahelyeken foglalkoztatottak száma az előző évinek $\frac{1+r}{1+\alpha} = 1 + \varepsilon$-szerese kell, hogy legyen. Ha viszont az új munkahelyeken foglalkoztatottak száma ε ütemben nő, akkor — mint a szerző bebizonyítja — ugyanez áll az összfoglalkoztatottságra is. Mivel pedig a nemzeti jövedelem r ütemben nő, a munkatermelékenység népgazdasági átlagban is $\frac{1+r}{1+\varepsilon} = 1 + \alpha$ ütemben nő.

Adott m, a, u és α értékek esetén tehát i nemcsak r-t, hanem a termelő foglalkoztatottak számának növekedési ütemét, ε-t is meghatározza. Ez azt jelenti, hogy míg korlátlan munkaerőtartalék esetén r tetszőlegesen változtatható i megfelelő változtatásával (egyéb problémáktól elvonatkoztatva), addig teljes foglalkoztatottság esetén az ε csak azt az értéket veheti fel, amely megfelel a munkaerőállomány természetes szaporodásának. Vagyis, ha a munkaerőállomány gyarapodásának ütemét β jelöli, akkor teljes foglalkoztatottság esetén $\varepsilon = \beta$, tehát $r = \alpha + \beta + \alpha \cdot \beta \approx \alpha + \beta$ (az $\alpha \cdot \beta$ szorzat ugyanis elhanyagolható nagyságrendű). Teljes fog-

* A tanulmánykötetek eredeti címei:
I. Z zagladnicu gospodarczo-spotecznych Polski Ludowej (Varsó, 1964.)
II. Zarys teorii wzrostu gospodarki socjalistycznej (Varsó, 1963)
Fordították: Dr. Andorka Rudolf és Nemény Vilmos

lalkoztatottságnál ez az egyetlen ütem, amely mellett egyenletes növekedés lehetséges. Az $\alpha + \beta = \frac{1}{m} i + u - a$ egyenletből pedig meghatározható az a beruházási hányad, amely mellett a munkaerőegyensúly fennáll. Ha a beruházási hányad ennél nagyobb, akkor fölös kapacitás keletkezik.

Hogyan valósíthatunk meg a jelenleginél nagyobb növekedési ütemet? Ez a kérdés áll az egész mű középpontjában.

Korlátlan munkaerőtartalék esetén — mint láttuk — a beruházási hányad egyszeri felemelésével egy magasabb növekedési ütemre térhetünk át (ti. ε ennek megfelelően nagyobb lesz). Ez a gyorsítás nagyobb fogyasztást igér a hosszú távon, a beruházási hányad emelése azonban kedvezőtlen hatást gyakorol a közeljövő fogyasztására. Ezért a beruházási hányad emelésében nem mehetünk túl messzire, s így a növekedési ütem emelése is korlátozott. Ezt a szerző úgy fejezi ki, hogy szembeállítja a pótlólagos növekedési ütemet a fogyasztási hányad relatív csökkenésével, ez utóbbit megszorozva egy pozitív ω tényezővel, amely a tervező szervek preferenciáját fejezi ki, mennyivel értékelik többre a jelenlegi (illetve közeljövőbeni) fogyasztást a távolabbi jövő fogyasztásánál:

$$\Delta r - w(i) \frac{\Delta i}{1 - i}$$

ahol $\omega(i)$ az i növekvő függvénye. A beruházási hányadot addig emelhetjük, amíg ez a különbség még pozitív.

Teljes foglalkoztatottság esetén csak átmenetileg emelhetjük fel a növekedési ütemet az $r_0 = \alpha + \beta$ szint fölé, mégpedig úgy, hogy nagyobb tőkeigényesség mellett végezzük a beruházást. Ez a munkatermelékenységnek λ-nál nagyobb növekedési ütemét teszi lehetővé, amely az első évben a legmagasabb, majd — amilyen mértékben a népgazdaság állóeszközeiben nő a nagyobb tőkeigényességű évjáratok hányada — egyre csökken, míg végül visszatér az eredeti szintre. Ettől kezdve a nemzeti jövedelem — és ezzel együtt a fogyasztás — növekedési üteme újból $r_0 = \alpha + \beta$. A tőkeigényesség azonban magasabb, ezért magasabb a beruházási hányad is. A növekedésnek ez az átmeneti meggyorsítása magasabb szintre emelte a nemzeti jövedelmet, mint lett volna gyorsítás nélkül. Ezen belül azonban csökkent a fogyasztási hányad, ezért nem biztos, hogy a fogyasztás volumene nagyobb, mint amilyen a növekedési ütem emelése nélkül lett volna. Így ebben az esetben még nyomatékosabb érvek szólnak a beruházási hányad növelése ellen, mint korlátlan munkaerőtartalék esetén. A növekedési ütem emelését lényegesen korlátozzák még a külkereskedelmi mérleg kiegyensúlyozásában fellépő nehézségek, amelyek annál nagyobbak, minél gyorsabb a növekedés üteme.

Horváth József

HÍRADÓ

Nemzetközi szeminárium a mezőgazdasági döntések és tervezés matematikai modelljéről

1.

A Keszthelyi Mezőgazdasági Főiskolán 1968. június 24. és július 4. között tartották ezt a szemináriumot. Megszervezésének gondolata 1964. novemberében — az Agrárközgazdák Nemzetközi Szövetsége 13. konferenciájának előkészítése során — merült fel.

A téma iránti érdeklődést jelzi, hogy a résztvevők eredeti elképzelés szerinti létszámának mintegy négyszerese jelent meg, s alkotott még így is „szűkkörű vitacsoportot". Ebből következett aztán az is, hogy élénk, változatos, széleskörű volt a program: mind a szocialista, mind a tőkés államok képviselőit élénken érdekelte a másik fél véleménye a tervezés és döntés üzemi, regionális és országos szintű problémáiról.

A szemináriumon a következő előadásokat vitatták meg:

1. C. B. Baker (USA): Az üzemi tervezési és döntési modellek fejlődése.
2. G. Tintner (USA): Tervezési és döntési eljárások és módszerek.
3. Ju. A. Olejnyik-Ovod (Szovjetunió): A tervezési és döntési eljárások rendszere.
4. E. O. Heady (USA): A tervezési és döntési eljárások, valamint a környezet szintézise.
5. U. Renborg (Svédország): A tervezés problémái és feladatai vállalati szinten.
6. E. M. Reisch (NSZK): Az üzemi tervezés és döntések bevált eszközei.
7. G. Weinschenck (NSZK): Az üzemi szintű kvantitatív elemzés újabb fejlődése.
8. R. G. Kravcsenko (Szovjetunió): Az üzemi szintű tervezés és döntések gazdasági modelljei.
9. E. R. Swanson (USA): Normatív kínálati reakciók, üzem és körzet közti kapcsolatok a mezőgazdaságban.
10. B. Oury (Franciaorsz.): A kínálat becslése és előrejelzése regressziós és hasonló modellekkel.
11. H. H. Hall—E. O. Heady (USA): Modellek a területközi verseny, a termelés elhelyezés és földhasználat, valamint a térbeli egyensúly elemzésére.
12. V. A. Mas—V. I. Kiszeljov (Szovjetunió): A mezőgazdaságfejlesztés optimalizálása egy körzetben, tekintettel a fogyasztásra és az élelmiszeripari feldolgozásra.
13. Kazareczki K.—Sebestyén J. (Magyarország): Célkitűzés, probléma felvetés és agrárpolitikai követelmények a mezőgazdaság országos tervezésében.
14. W. Herer (Lengyelország): Az országos tervek és gazdaságpolitika megformulálása szisztematikus gazdasági modellekben.
15. K. Porwit (Lengyelország): Példa egy átfogó népgazdasági modellre.
16. Beszámolók országos mezőgazdasági tervezés céljára kidolgozott modellekről (Csehszlovákia, Franciaország, Hollandia, Magyarország, NSZ, Szovjetunió, USA).
17. J. C. Tirel (Franciaország): Alternatív országos tervezési modellek a mezőgazdaságban.
18. V. Eremiás (Csehszlovákia): A tervek és a megvalósulás közti eltérések.
19. F. Reisegg (Norvégia): A tervek és a megvalósulás közti eltérések.
20. J. De Veer (Hollandia): A tervezési gyakorlat követelményei és problémái a szaktanácsadás és szakigazgatás területén.

2.

Az üzemi tervezés modelljeivel kapcsolatban sokoldalú vita folyt, amelyhez a magasabb (területi, országos) szintek vitájánál rendszerint visszatértek. Az előadók megmutatták a lehetőségek gazdagságát mind a módszerek, mind a számítástechnika terén. Jónéhányan erős kritikával illették az olyan eljárásokat, mint a standard programozási módszerek, a termelési függvények, a játékelmélet, stb., elsősorban az üzemi gyakorlatban való használhatóság szempontjából. Többen azt tartották célszerűnek, ha szuboptimális variánsokat javasolnak az üzemi vezetőknek, hogy azok választhassanak közülük. Mások az optimalizáló modellek helyett satisficing modellek alkalmazása mellett törtek lándzsát. Jónéhányan azonban továbbra is az optimalizált variánsokat ajánlották a szaktanácsadó eszközeként. A satisficer-szemlélettel kapcsolatban a vita során rámutattak arra is, hogy a célkitűzés-vektor sem dimenziójában, sem az egyes elemekre vonatkozó aspiráció szintjében nem állandó, továbbá a szocialista országokban az optimalizáló és a satisficer-szemléletnek együtt kell megjelennie a modellben (pl. a többéves időszakra szóló termelőszövetkezeti terveknél).

A modellképzéssel kapcsolatban felmerült a kérdés: kinek a feltétel-rendszerét, kinek a célkitűzését tükrözze e modell: a termelőét-e, vagy a szaktanácsadóét? Arra ugyancsak felhívták a figyelmet, hogy a tervek alapjául szolgáló modellek általában a szorosan vett termelésre orientálódnak, más vonatkozásokat elhanyagolnak, vagy teljesen figyelmen kívül hagynak. Lényeges e szempontból az is, hogy a mezőgazdasági üzem tervének elkészítése különböző módszerek és eljárások kombinálását követeli meg.

A mezőgazdaság természete bonyolultabb módszerek alkalmazását is igényelné. Ezek bevezetése azonban ma még elég sok nehézséggel jár. Vannak kezdeti eredmények az integer, a sztohasztikus, valamint a Bellman-típusú dinamikus programozás terén, de a gyakorlatilag is megoldható feladatok túlságosan leegyszerűsítettek — a valóság igényeihez képest. Egyes résztvevők lelkes hívei voltak például a játékelmélet alkalmazásának, mások véleménye szerint azonban ez a módszer nem váltja be a hozzáfűzött reményeket.

3.

Az üzemről a nagyobb egységek tervezésére áttérve, az elégtelen információ okozta nehézségeket hangsúlyozták: a támasz-üzemek adatainak aggregációjával kapcsolatos problémákat és a termelői magatartásra vonatkozó ismeretek problematikus voltát. Mindazonáltal egy sor országban — gyakran igen nagy méretekben — végzett számítások és vizsgálatok számos új ismeretet adtak. Említésre érdemesek itt e körben a rekurzív programozást alkalmazó elemzések, amelyek egyesítik a deskriptív és a normatív elemeket. Erősen vitatták több termeléselhelyezési modell valóságtartalmát, egybevetve ellentmondó eredményeiket, nagyobb szigorúságot követeltek a modellszerkesztésben. Említésre méltó, hogy — az országos szintű problémák tárgyalása során — az országos tervet térben kell értelmezni. A vitában nagyobb hangsúlyt kaptak a „felépítő" jellegű modellek, mint a „lebontó" típusúak.

4.

A mezőgazdaság országos tervezési problémáinak tárgyalása során hosszan vitatták a célkitűzés kérdését is: a fő gazdaságpolitikai célok és tervfeladatok meghatározását és sorrendelését. A növekedéssel, illetve fejlesztéssel kapcsolatos célkitűzések kapcsán rámutattak, hogy egyes időszakokban az ún. érett gazdaságokban is alapvető követelménnyé válhat a struktúra lényeges átalakítása. Gyakran visszatért és sokak által elfogadott gondolatnak látszott a többéves tervek időszakonkénti újra-optimalizálása az aktuális körülmények és információk alapján.

A szocialista országokban a termelői kínálatra nézve egyelőre nincs olyan becslési lehetőség, mint a piaci gazdaságban; ezért lényeges feladat mielőbb elérni, hogy a termelőknek az árakkal és más gazdaságpolitikai eszközök alkalmazásával kapcsolatos magatartása számszerűen is becsülhető legyen. Az emberi tényező számbavételének fontosságát más oldalról húzta alá az az angol közlés, hogy az országos jelentőségű termeléstechnikai újítások közül jónéhány az üzemi gyakorlatból származik, továbbá az az aggodalom, hogy a matematikai modellek alkalmazása esetében elveszhetnek a mezőgazdaságban dolgozó emberek a sok papír között. Végső időpontra szóló állapot-tervek helyett az időközi feltételek beiktatása az emberi tényező — az életszínvonal — szempontjából is fontos. A különböző gazdaságpolitikai elgondolásokra épülő variánsok sem keverhetők minden további nélkül: egy-egy gazdaságpolitikai variáns szerves egység és így oszthatatlan. A „felépítő" típusú tervezésnél tehát célszerű a zéró vagy egy típusú integer programozást alkalmazni.

A mezőgazdaság országos szintű tervezésében használt modellek a beszámolók szerint zömmel idődimenzió nélküli, végállapotra vonatkozó interregionális programozási modellek, de van köztük szimulációs és ökonometriai természetű is. A francia modell a dekompozíciós eljárást használja, a feltételrendszer egyes elemeit parametrizálva. Az amerikai Földművelésügyi Minisztérium modellje rekurzív programozást alkalmaz. A szovjet standard interregionális programozási modelleknél a különböző célfüggvényeken van a hangsúly: a legalkalmasabb optimum-kritériumot keresik.

5.

Bármely szint modelljeiről, tervezési és döntési problémáiról folyt a vita, mindig tettek fel kérdést az elméleti háttérre, a modellképzésnél alkalmazott gazdaságelméleti meggondolásokra. Ennek ellenére sem mondható, hogy az elméleti vita arányban állt volna a gazdaságpolitikai és módszertani természetűvel. Ez elsősorban a túlzottan széles tárgysorozat miatt volt így. A következő — hasonló témájú — szemináriumon a gazdaságelmélet kérdései minden bizonnyal tágabb teret kapnak.

Sebestyén József

Számológépek Magyarországon

(ÁTTEKINTÉS)

A hazai helyzet leírásának szempontjai a következők lesznek:

— a számológép állomány időbeli alakulása,

— a géppark minőségi összetételének változása,

— a gépeket üzemeltető szervezetek.

A számológép állomány alakulása idősorral egyszerűen jellemezhető:

Év	Gyarapodás db	Kiselejtezés db	Állomány db
1959	4	—	4
1961	1	—	5
1962	5	—	10
1964	13	—	23
1966	19	2	40
1967	7	—	47

(Az 1968-as várható állomány kb. 60 darabot tesz ki.)

Az idősorból kiolvasható, hogy az első számológépek beállítása 1959-ben történt; közülük az első — szovjet dokumentációk alapján készült — hazai építésű gép volt. 1967 végére már 47 gép üzemelt. Ez a fejlődés nemzetközi környezetbe helyezve a következőképpen néz ki: a világon az első elektronikus számológépet a második világháború alatt építették; kereskedelmi forgalomban pedig 1950-ben jelent meg az első gép. Az USA-ban 1967 végén az állomány 44 ezer darabot tett ki, mely a világ gépparkjának mintegy 70 százaléka. A növekedés trendje ebben az országban léptékben eltolva megegyezik a hazai trenddel.

A hazai géppark minőségi összetétele két szempont szerint vizsgálható. Egyrészt a korszerűség színvonala, másrészt a számológép jellege szerint. A korszerűség mértékét az mutatja, hogy a gép hányadik generációhoz tartozik. Jelenleg gyakorlatilag három különböző generációról beszélhetünk; a negyedik generációt jelentő legkorszerűbb gépek még csak kutatási szinten vannak. A hazai gépállomány 10 százaléka az első, a többi pedig a második generációhoz tartozik.

A számológépeket jellegük szerint két főbb csoportba oszthatjuk: vannak kimondottan *adatfeldolgozó* gépek és az *univerzális* gépek. A hazai helyzetet az jellemzi, hogy a gépállomány mintegy 30 százaléka az adatfeldolgozó gépek csoportjába tartozik. E csoport időbeli alakulására az egyenletes növekedés a jellemző.

A gépeket üzemeltető szervezeteket négy kategóriába sorolhatjuk: egyetemek, tudományos kutatóintézetek, ágazati központok, vállalatok. A számológép állomány százalékos megoszlása jelenleg e kategóriák között a következő: egyetemek 20, tudományos kutatóintézetek 10, ágazati központok 20, vállalatok 50 százalék. A megoszlás időben erősen változott. Az első és második kategória kezdeti súlya erősen visszaesett, majd az utóbbi három évben jelentősen növekedett. Érdekességként említjük meg, hogy a gépállomány 90 százaléka jelenleg Budapesten üzemel.

A közgazdasági feladatok megoldásáról

A közgazdasági munka magában foglalja az elméleti-logikai összefüggések feltárását, a gazdasági elemző tevékenységet, a különböző szintű döntéselőkészítő vizsgálatokat. A következő felsorolás a gyakorlatban leggyakrabban előforduló matematikai-közgazdasági modelleket, közgazdasági problémákat és azok matematikai apparátusait ismerteti:

makroökonómiai modell — regresszió analízis;

ágazati kapcsolati mérleg — input-output analízis;

népgazdasági optimalizálás — matematikai programozás;

vállalati optimalizálás — matematikai programozás;

vállalati szintű összefüggésvizsgálat — regresszió analízis.

Az esetek döntő hányadában, amikor arról van szó, hogy valamely közgazdasági problémát elektronikus számológépen kívánnak megoldani, a matematikai modell felállításakor már figyelembe veszik, hogy a számológépen milyen kipróbált könyvtári program áll rendelkezésre. A leggyakrabban használt programok a korreláció- és regressziószámítás, a lineáris programozás, a szállítási feladat és a matrixinvertálás könyvtári programjai.

A következő összeállítás néhány — a közgazdasági feladatok megoldására rendelkezésre álló — számológép-típus főbb paramétereit mutatja be:

Típus	Operatív memória K	Szóhossz bit	Átlagos sebesség művelet/sec
Elliott 803/B	8	39	1 500
Ural-2	2	40	5 000
Minszk-2	8	36	5 000
Gier	5	42	10 000
Razdan-3	32	48	15 000
ICT 1904—5	32	24	100 000

Ezeken a gépeken a fenti feladatok a gépkapacitásnak megfelelően különböző méretekben oldhatók meg.

A korreláció- és regressziószámítási programok a gyakorlatban előforduló maximális igényeket, ami kb. 50 változó, még a kisebb gépeken is képesek kielégíteni.

A lineáris programozási feladatok legnagyobb méretben az ICT gépeken oldhatók meg, ahol még gazdaságosan futtathatók 100×400-as méretű feladatok.

A szállítási feladatok megoldása hatékony programmal történik a Minszk-2 gépen, ahol a méret korlátozás: $m + n = 400$.

Matrixinvertálások 100×100-as matrixokkal gazdaságosan végezhetők a nagyobb operatív memóriájú gépeken.

Ezek a mérethatárok a perifériális tárolókkal rendelkező gépek esetén természetesen növelhetők, ez azonban jelentős mértékű futási időtöbblettel jár.

Számítási bérmunkalehetőségek

A számítógépeket üzemeltető szervezetek egy része berendezkedett arra, hogy a gépkapacitás egy hányadát, esetleg a teljes kapacitást külső szerveknek adja bérbe. Bérmunkát a következő számolóközpontok vállalnak:

Számítástechnikai és Ügyvitelszervező V. (Szüv)

Információfeldolgozási Laboratórium (Infelor)

Központi Fizikai Kutatóintézet, Számolóközpont (Kfki)

Vegyipari Egyesülés, Számolóközpont (Vemi)

ÉM Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési V. (ÉMSzámgép)

KGM Vaskohászati Vezérigazgatóság Számolóközpont (Kgm)

Műv. M. Egyetemi Számolóközpont (Eszk)

NIM IGÜSzI Elektronikus Számolóközpont (Nim)

Az igénybe vehető szolgáltatások többfélék lehetnek, annak megfelelően, hogy az egyes munkafázisok — feladat megfogalmazása, algoritmus-készítés, programírás, futtatás — közül mit végeznek el a számolóközpontok. A különböző lehetséges szolgáltatások a következők:

a) A megrendelő kész program és adathordozóval rendelkezik és csupán gépidőt bérel a program futtatásához.

b) A megrendelő megírt programmal, összeállított adathalmazzal rendelkezik és a számolóközpont végzi a lyukasztást és futtatást.

c) A megrendelő kész algoritmussal, adathalmazzal rendelkezik és a számolóközpont végzi a programozást, lyukasztást, futtatást.

d) A megrendelő szavakban fogalmazza meg a feladatot, adatokat szolgáltat és a számolóközpont dolgozza ki az algoritmust, írja meg a programot, végzi a lyukasztást és futtatja a programot.

A felsorolt számolóközpontok *a)—d)* pontokba foglalt szolgáltatásai és ezek árai a következők:

Számolóközpont	Szolgáltatás	Ár Ft/óra
Szüv		
Gier gépen	*a)*	1400
	b)	1400 + max 800
	c)—d)	megegyezés szerint
ICT gépen	*a)*	4500
	b)	4500 max 1500
	c)—d)	megegyezés szerint
Infelor		
Minszk-2 gépen	*a)—b)*	1700
	c)—d)	megegyezés szerint
Kfki		
ICT gépen	*a)—b)*	8000
Vemi		
Gier gépen	*a)—b)*	2500
	c)—d)	megegyezés szerint
ÉMSzámgép		
Ural-2 gépen	*a)—b)*	1600
	c)—d)	megegyezés szerint
Kgm		
Elliott 803/B gépen	*a)*	2000
	b)	2000 + 10%
	c)—d)	megegyezés szerint
Eszk		
Ural-2 gépen	*a)—b)*	1600
	c)—d)	megegyezés szerint
Razdan-3 gépen	*a)—b)*	5000
	c)—d)	megegyezés szerint
Nim		
Elliott 803/B gépen	*a)—b)*	1400
	c)—d)	megegyezés szerint

Patyi Károly

Szervezeti változások az Országos Tervhivatalban

Az Országos Tervhivatal Távlati Tervezési Főosztályán illetve Tervgazdasági Intézetében új osztályok alakultak. A két új osztály hasonló céllal jött létre. Feladatuk a matematikai módszerek felhasználása a népgazdasági tervezésben.

A Távlati Tervezési Főosztály MATEMATIKAI TERVEZÉSI OSZTÁLYA:

— kezdeményezi és ösztönzi azokat a hosszútávú matematikai tervszámításokat, melyeket nem az Országos Tervhivatal szervei végeznek;
— konzultációval segíti a hosszútávú matematikai tervszámításokat végző OT szerveket, valamint ágazati tervező bizottságokat;
— Elvégzi különböző típusú modellek előkészítő, számszerűsítő, számítástechnikai munkálatait, az eredmények közgazdasági elemzését és értékelését. E modellek közé tartoznak az ágazati kapcsolatok modelljei, aggregált programozási modellek és a kétszintű programozási modellek népgazdasági szintű összehangolása. A munkába matematikusokat, közgazdászokat és gépi programozó szakértőket von be;
— gondoskodik a matematikai tervszámításoknak a tervmunka egészébe való beillesztéséről, valamint a hosszútávú matematikai tervszámítások összefoglaló közgazdasági értékeléséről;

A Tervgazdasági Intézet MATEMATIKAI MÓDSZEREK ALKALMAZÁSI OSZTÁLYA;

— megszervezi az elméletileg kellően kidolgozott, a kísérleti számítások során módszertanilag kipróbált és a népgazdasági tervezőmunkában alkalmazható modellekkel végzett számításokat;

— a számítások során nyert tapasztalatok alapján továbbfejleszti a modelleket.

Személyi hírek

Kornai János 1968. I. 15-től 1968. V. 15-ig — K. Arrow professzor meghívására — vendégprofesszorként a Stanford Egyetem Társadalomtudományokat Matematikai Módszerekkel Kutató Intézetében tartózkodott, ahol a gazdasági mechanizmus elméletével foglalkozó kutatásokban vett részt. Egyesült Államok-beli tartózkodása alatt előadásokat tartott a Berkeley-i, rochesteri, torontói (Kanada), a Harvard, Yale és az M. I. T. egyetemeken. Visszatérőben — hollandiai tartózkodása során — a Holland Központi Tervhivatalban, az amsterdami és rotterdami egyetemeken tartott előadást.

Kondor György, a Közgazdaságtudományi Intézet tudományos főmunkatársa 1967. VI. 30-tól 1968. VI. 4-ig Ford ösztöndíjasként az Egyesült Államokban végzett tanulmányokat. Tudományos témája a piaci mechanizmus konvergenciájával és stabilitásával kapcsolatos matematikai vizsgálatok tanulmányozása volt. Kutatásait a Berkeley-i, New Orleans-i, a Stanford egyetemeken és New Yorkban végezte.

CONTENT

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ