SZIGMA

Matematikai Közgazdasági folyóirat

A Közgazdasági Szemle társlapja

*

E SZÁM SZERZŐI:

Csáki Csaba, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, **W. W. Leontief,** a Harvard Egyetem (USA) professzora, **Tényi György,** az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének munkatársa, **Ujlaki Zsuzsa,** az Országos Tervhivatal osztályvezető-helyettese

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor u. 7. — Telefon: 127—294

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓnál, Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

MNB egyszámlaszám: 46., pénzforgalmi jelzőszám 215—11488; az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTban, Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612; A POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODA 1. sz. HÍRLAPBOLTJÁban, Budapest V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban*, csekkszámlaszám: egyéni: 61 257, közületi: 61 066. MNB egyszámlaszám: 8.

Ára: 12,— Ft. Előfizetés egy évre: 40,— Ft

W. W. LEONTIEF*

A dinamikus inverz**

1. E tanulmány célja, hogy bevezesse a dinamikus inverz fogalmát, amely a gazdasági változások empirikus tanulmányozásában hasonló szerepet játszhatna, mint amit a statikus input-output elemzésben a folyó ráfordítások matrixának inverze játszik.

Először a nyílt dinamikus input-output rendszert írom le a lineáris egyenletek egyszerű csoportja segítségével. Azután bemutatom e rendszer általános megoldását, azaz strukturális matrixának inverzét. Ennek az inverznek mindegyik eleme a megfelelő sor iparának kombinált közvetlen és közvetett ráfordítását képviseli, amely ahhoz szükséges, hogy a megfelelő oszlop iparága pótlólagosan 1 millió dollárnyi terméket bocsáthasson ki. Míg a statikus inverz az ilyen szükségleteket egyetlen szám segítségével tudja leírni, a dinamikus analízis keretében ezeket egy idősor képében kell megadni. Mihelyt a kapacitásbővítést és a megfelelő beruházási folyamatokat beépítjük a rendszerbe, szükségessé válik az is, hogy keltezéssel lássuk el azokat a ráfordításokat, amelyek — közvetlenül vagy közvetve — hozzájárulnak egy adott végső kibocsátás létrejöttéhez. Ezeket a számítógép számsorozat képében adja meg, amely visszafelé nyúlik az időben. E tanulmány utolsó fejezetei a megfelelő dinamikus árrendszer rövid megvitatásának vannak szentelve.[1]

2. Képviselje az n számú szektor kibocsátását, amelyet a t évben termeltek meg, az $\mathbf{x}_t = ({}_tx_1, {}_tx_2, \ldots, {}_tx_n)$ oszlopvektor és legyen $\mathbf{c}_t = ({}_tc_1, {}_tc_2, \ldots, {}_tc_n)$ a végső kibocsátás megfelelő oszlopvektora. E végső kibocsátás *nem* tartalmazza az álló- és forgótőke (készletek) évi növelésére szánt termelést, amelyet a fenti n számú szektor felhasznál. A gazdaság strukturális jellegzetességeit írja le a folyó ráfordítások együtthatóinak **A** matrixa, amely négyzetes, n-edrendű és az egyes iparágak közvetlen folyó ráfordításait adja meg, valamint a tőkeráfordítási együtthatók megfelelő **B** matrixa. Feltesszük, hogy a t évben előállított tőkejavakat a következő, $t + 1$, évben használatba veszik.

* E tanulmány a IV. Nemzetközi Input-Output Konferencián (1968 Genf) került előadásra. Angol nyelven a CARTER—BRÓDY (ed): *Contributions to Input-Output Analysis* (North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1970) c. kötetben jelent meg. A közlési jogért itt mondunk köszönetet LEONTIEF professzornak és a kiadónak. A fordítást BRÓDY ANDRÁS végezte. (Szerk.)

** E tanulmány előkészítésében a szerzőt Brookes Byrd, Richard Berner és Peter Petri segítették.

[1] Az alapvető folyamatokat, szektorbontást és az adatok forrását a II., III. és IV. Függelék mutatja be.

Egy adott nemzeti gazdaság szektorainak kibocsátása közti közvetlen kölcsönviszonyt két egymásra következő évben az alábbi jól ismert mérlegegyenletben lehet leírni:

$$\mathbf{x}_t - \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{B}_{t+1}(\mathbf{x}_{t+1} - \mathbf{x}_t) = \mathbf{c}_t \,. \tag{1}$$

A bal oldal második tényezője az összes, n számú, iparág folyó ráfordításigényét képviseli a t évben; a harmadik a beruházásigényeket, azaz a termelőtőkének azt a kiegészítését, amely lehetővé teszi az összes iparág számára, hogy kapacitását a t évről a $t+1$ évre megnövelje, mégpedig $\mathbf{x}_t$-ről $\mathbf{x}_{t+1}$ nagyságúra. A strukturális matrixok idő-indexe módot ad arra, hogy a különböző években különböző folyó ráfordítási és tőkelekötési együtthatókkal számoljunk, és így dinamikus rendszerünkben felöleljük a technológiai változást is. Meg kell jegyezni, hogy a $\mathbf{B}_{t+1}$ matrix idő-indexe nem azt az évet mutatja, amelyben az illető tőkejószágot előállították, hanem azt az évet, amelyben először vették azt használatba.

Az (1) egyenletet átalakíthatjuk az alábbi módon:

$$\mathbf{G}_t \mathbf{x}_t - \mathbf{B}_{t+1} \mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{c}_t \tag{2}$$

ahol $\mathbf{G}_t = (1 - \mathbf{A}_t + \mathbf{B}_{t+1})$. Mármost az egymáshoz kapcsolódó mérlegegyenletek csoportja, amely az adott gazdaság fejlődését egy $m+1$ éves időszakasz során leírja, összekapcsolható $m+1$ számú lineáris egyenlet rendszerévé:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{-m} & -\mathbf{B}_{-m+1} & & & & \\ & \mathbf{G}_{-m+1} & -\mathbf{B}_{-m+2} & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{G}_{-2} & -\mathbf{B}_{-1} & \\ & & & & \mathbf{G}_{-1} & -\mathbf{B}_0 \\ & & & & & \mathbf{G}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{-m} \\ \mathbf{x}_{-m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{-2} \\ \mathbf{x}_{-1} \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{-m} \\ \mathbf{c}_{-m+1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{-2} \\ \mathbf{c}_{-1} \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

3. E rendszer megoldása meghatározza az évi teljes szektorkibocsátások sorozatát, amely képessé tenné a gazdaságot arra, hogy előállítsa az évi végső kibocsátásoknak azt a sorozatát, amelyet a jobboldalon feltüntetett oszlopvektor sorozat ír le. Az utolsó egyenlettel kezdve, behelyettesítve ennek megoldását az utolsó előttibe és így lépésenkint haladva az elsőig, a (3) rendszer alábbi megoldását nyerjük az ismeretlen $\mathbf{x}$ értékekre az adott $\mathbf{c}$ vektorok függvényében:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_m \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{-2} \\ \mathbf{x}_{-1} \\ \mathbf{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{-m}^{-1} & \mathbf{R}_{-m} \ldots \mathbf{R}_{-2} \mathbf{G}_{-1}^{-1} & \mathbf{R}_{-m} \ldots \mathbf{R}_{-2} \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-1} \\ & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{R}_{-2} \mathbf{G}_{-1}^{-1} & \mathbf{R}_{-2} \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-1} \\ & \mathbf{G}_{-1}^{-1} & \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-1} \\ & & \mathbf{G}_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{-m} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{-2} \\ \mathbf{c}_{-1} \\ \mathbf{c}_0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

ahol $$\mathbf{R}_t = \mathbf{G}_t^{-1}\mathbf{B}_{t+1}(\mathbf{1} - \mathbf{A}_t + \mathbf{B}_{t+1})^{-1}\mathbf{B}_{t+1}$$

A (4) egyenlet jobb oldalán álló négyzetes matrix a (3) egyenlet bal oldalán megjelenő strukturális matrix inverze. Az inverz minden eleme maga is négyzetes matrix.

Az ék-alakú oszlop a jobboldalon azokat a közvetlen és közvetett ráfordítási szükségleteket írja le, amelyeket az n számú iparág bármelyikének zérus évi egységnyi (vagyis 1 millió dollár értékű) végső kibocsátása kelt. Ezek a szükségletek visszafelé oszlanak el az időben. A $\mathbf{G}_0^{-1}$ matrix mutatja azokat a ráfordítási szükségleteket, amelyeket a zérusadik évben kell kielégíteni, azaz ugyanabban az évben, amikor a végső kibocsátás történik. Mint a statikus inverzben is, $\mathbf{G}_0^{-1}$ egyes oszlopai arra az iparágra vonatkoznak, amelynek a végső kibocsátásáról szó van, egyes sorai azokra az iparágakra, amelyek az előbbieket a megfelelő ráfordításokkal ellátják. Az előző tag, $\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-1}$, azokat a szükségleteket írja le, amelyeket az előző, -1, évben kell kielégíteni, $\mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-1}$ azokat, amelyeket a -2 évben kell kielégíteni és így tovább. A leghosszabb tag, $\mathbf{R}_{-m} \ldots \mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}\mathbf{G}_0^{-1}$ a termelés növekedése az egyes iparágakban a $-m$ évben, azaz azok a ráfordítások, amelyekről m évvel korábban kell gondoskodni, mintsem a végső felhasználóknak leszállíthatnánk a pótlólagos jószághalmazt. A (4) egyenlet minden egyes, az átló feletti matrixát úgy számíthatjuk, hogy az alatta álló matrixot megszorozzuk a megfelelő $\mathbf{R}_{-t}$ transzformáló matrixszal.

4. Ha nincs semmilyen technológiai változás, akkor az idő-index elhagyható az összes strukturális együtthatóról. Bármelyik oszlop elemei ilyenkor leírhatók visszafelé ugyanazzal az egyszerű mértani sorral:

$$\mathbf{G}^{-1},\ \mathbf{R}\mathbf{G}^{-1},\ \mathbf{R}^2\mathbf{G}^{-1}, \ldots, \mathbf{R}^m\mathbf{G}^{-1}. \tag{5}$$

Ismeretes, hogy ha a kitevő, t, eléggé naggyá válik, akkor $\mathbf{R}_t$ és $\mathbf{R}^{t+1}$ azonos helyen álló elemeinek aránya aszimptotikusan közeledik egyazon konstanshoz, amely egyenlő $\mathbf{R}$ domináló sajátértékének valós részével. Ha μ a domináló sajátérték, akkor $\mathbf{R}^{t+1} = \mathrm{re}(\mu)\mathbf{R}^t$, ha $t \to \infty$, ahol $\mathrm{re}(\mu)$ a μ sajátérték valós része. Ha μ valós, pozitív és kisebb mint 1, akkor a zérus évi végső kibocsátás bármilyen kombinációjához szükséges pótlólagos kibocsátások — elégségesen hosszú időszakaszt tekintve visszafelé — egyre kisebbé és kisebbé válnak, és végül végtelenül kicsik lesznek.[2]

Tehát, gyakorlatilag a ráfordítási láncolat, amely visszafelé húzódik attól az évtől kezdve, amikor a végső felhasználókat valóban kielégítik, az ilyen konvergencia esetében úgy kezelhető, mintha véges hossza volna. Ez igaz marad akkor is, ha a gazdaság technikai struktúrája évről-évre változik, azaz, ha az $\mathbf{R}$ matrixok megtartják idő-indexeiket. A szükséges ráfordítások sorozata visszafelé akkor is konvergál, habár nem szükségképp oly simán mint technikai változások hiányában. Az ilyen szükséges ráfordítások időbeli eloszlása azonban erősen különbözik az egyes iparágak tekintetében. Egyes ráfordítási sorozatok még a zérus vonal alá is merülnek elülső végükön. Ez jól ismert következménye az úgynevezett akcelerátor-elvnek. Mihelyt a végső felhasználók által közvetlenül vagy közvetve igényelt pótlólagos termékeket előállí-

[2] A dinamikus inverz konvergencia-tulajdonságainak matematikai elemzését az I. Függelék adja meg.

tották, azok a lekötött tőkejavak, amelyeket előállításukban foglalkoztattak, most fölössé válnak. Az (1) mérleg-egyenletet úgy állítottuk fel, hogy negatív beruházást, azaz leépítést mutat, ha $\mathbf{x}_{t+1} < \mathbf{x}_t$. Ténylegesen az ilyen potenciálisan fölös kapacitást lefoglalják azok a közvetlen vagy közvetett ráfordítási igények, amelyeket a további és rákövetkező években jelentkező végső kibocsátás növekedése kelt. Mint ahogy alább bemutatjuk, ezeket a dinamikus input-output számvitelbe mint külön-külön, de egymást mégis átfedő láncolatokat kell bevezetni. Amíg egy adott évben a pozitív pótlólagos kibocsátási igények összege meghaladja a negatív összegeket, addig e szektor kibocsátásának növekednie kell.

A nyílt input-output rendszer egyik leghasznosabb tulajdonsága az elemzés és számítás szempontjából a megoldások összegezhetősége a végső kereslet bármely változása tekintetében. A végső kibocsátás mindegyik eleme a közvetlen és közvetett ráfordítási szükséglet külön láncolatát hívja létre. A végső kereslet bármely adott vektora által keltett teljes szükségletet így az egyes ilyen láncolatok összege adja meg, miközben mindegyik láncolat megfelel a vektor egy-egy elemének.

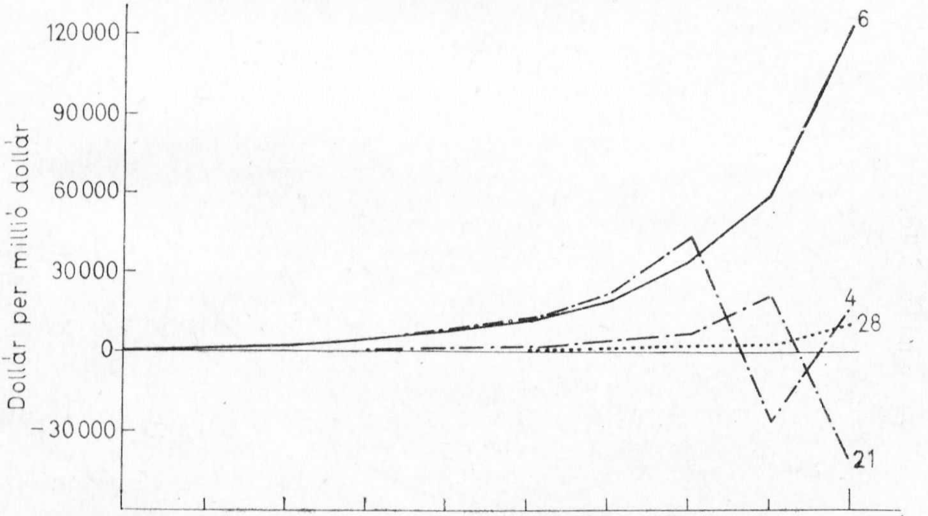
Ez igaz marad akkor is, ha az egyes szétválasztható csoportok közül némelyikben negatív elemek fordulnak elő, hacsak a többi elég nagy pozitív elemeket tartalmaz ahhoz, hogy pozitív vagy legalábbis nem-negatív végösszeget biztosítson. Például a statikus input-output elemzésben a kompetitív importot úgy kezelik, mint ami negatív (közvetlen és közvetett) ráfordítási szükségleteket kelt, ezeket levonják azokból a megfelelő ráfordítási szükségletekből, amelyeket a hazai végső kereslet pozitív vektora kelt, s így egy kisebb, habár még mindig pozitív (vagy legalábbis nem-negatív) végösszeg jön létre. Szigorúan véve ez már letérés a valódi szétválaszthatóság útjáról: ha a végösszeg valamelyik ráfordítás tekintetében negatív, ez vitássá teszi az egész eredményt. Új számításba kell kezdeni, ahol a korábban kompetitívnek kezelt importot most át kell helyezni a nem-kompetitív kategóriába. A végső kereslet egy részének közvetlen és közvetett hatását attól függően kell kezelni ebben az esetben, hogy mekkora az a — bevallottan elkülönítetten kiszámított — szükséglet, amelyet a vektor többi eleme kelt. Ez az elemzési összképbe keresztösszefüggéseket vezet be, amelyek a nem-lineáris rendszerekre jellemzőek.

A dinamikus inverz használata az elkülöníthetőség és összegezhetőség nyilvánvaló előnyeit kölcsönzi a gazdasági változások tapasztalati elemzése számára. Negatív elemek jelenléte több ilyen külön ráfordítási láncolatban (amelyek leírják a közvetlen — bár főként közvetett — ráfordítási szükségleteknek azt az idősorát, amit az adott és keltezett végső kibocsátás egy-egy külön eleme kelt) nyilvánvalóan korlátozza az összegezési feltevés szigorú értelemben vett érvényességét. Konzisztens, azaz lehetséges teljes ráfordítási szükségletek idősorait egy adott dinamikus inverz alapján csak olyan keltezett végső kibocsátás számára lehet meghatározni, amely nagyobb pozitív mint negatív kibocsátási szükségletet kelt minden egyes iparágban és minden egyes időszakban.

A végső kereslet keltezett vektorát megszorozva az adott dinamikus inverzzel számszerűen negatív teljes közvetlen és közvetett kibocsátási szükségleteket eredményezhet egyes termékek és egyes időszakaszok tekintetében. Ha így van, akkor legalábbis egyes mérlegegyenletek a (3) rendszerben nem a valóságos világot képviselik. Mindenki, aki foglalkozott ilyen típusú rendszerekkel tudja, e probléma abból fakad, hogy a (3) rendszer felteszi: az összes szektorokban és mindenkor teljesen kihasználják a kapacitást. A lineáris programozás szimplex-módszerének rutinszerű alkalmazásával például egy sor lehetséges termelési programot találhatnánk, ezek alkalmasak egy ilyen keltezett végső felhasználás előállítására. Mindegyikük a termelőkapacitások szabatosan időzített ki- és bekapcsolásaival járna és esetleg a folyó kibocsátások tervszerű felhalmozásával.

Az ilyen szakaszos jellegű gazdasági folyamat működésének megértése és magyarázata sokkalta bonyolultabb volna, mint egy olyan rendszeré, amelynek változását folytonos és összegezhető komponensekkel lehet leírni. Más szavakkal: a divergens dinamikus inverzű rendszer negatív elemeket tartalmaz, amelyek növekszenek ahogy az időben hátrafelé haladunk. Az ilyen rendszert programozni lehetne, azonban nagyon bonyolult elképzelni egy ilyen gazdaság tényleges létezését. Az amerikai gazdaság ténylegesen megfigyelt dinamikus inverze, amelyet az alábbiakban mutatok be, valószínűleg azért konvergál, mivel az új oszlopok fokozatosan helyettesítik a régieket az **A** és **B** együttható matrixokban, jellemezve ezzel a hosszútávú technikai változásokat.

5. Egy nyílt dinamikus input-output rendszert alkottunk és kiszámítottuk az inverzét mégpedig kétfajta **A** és **B** matrixszal, az egyik az amerikai gazdaság 1947. évi, a másik az 1958. évi strukturális sajátságait tükrözte. Egy harmadik rendszert azon feltevés alapján alkottunk meg és invertáltunk, hogy az 1947 és 1958 közötti technológiai eltolódás fokozatosan történt a közbenső években. Mindhárom esetben a dinamikus inverz jó viselkedést mutatott. Minden alkotó idősora visszafelé zérushoz konvergált.



1. ábra. A dinamikus inverz elemei, amelyek a 3. iparág, a gépgyártási termékek végső keresletében a zérus évben bekövetkező 1 millió dollárnyi növekedés közvetlen és követett hatásait mutatják be a 4., 6., 21. és 28. iparágakra, ebben és a megelőző években

járművek és fogyasztói berendezések (4)
fémek (6)
fa és faáru, kivéve göngyölegek (21)
gumi- és műanyagtermékek (28)

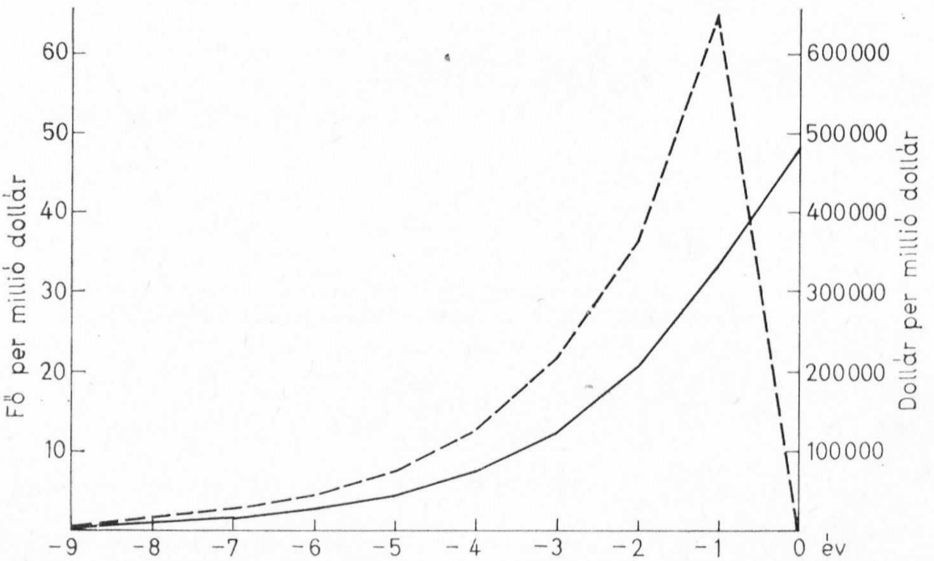
Mindkét évben ugyanazt a szektorbontást alkalmaztuk. 52 iparágból áll, és a végső kibocsátást felosztottuk háztartási (tartós és nem tartós) fogyasztásra és állami felhasználásra. A magánfogyasztás egy alternatív kezelése szétválasztja a végső háztartási szállításokat a nem-tartós fogyasztási cikkekre és a tartós fogyasztási cikkek becsült pótlási igényeire. Az utóbbi maradványát egy speciális háztartási beruházási számla terhére írjuk, ezt a tőkelekötési együtthatók megfelelő vektora szabályozza.

A munkaerőszükségletet szektoronkénti munkaráfordítási együtthatók alapján számoltuk és az egyes szektorok teljes tőkeszükségletét úgy határoztuk meg, hogy összegeztük a **B** matrix megfelelő oszlopának összes elemét.

Minden kibocsátást és ráfordítást mind 1947-ben, mind 1958-ban az 1958. évi árakon számoltunk. Más szavakkal, azokat az egységeket, amelyekkel végrehajtottuk a számításokat és amelyekben az eredményeket bemutatjuk, úgy kell értelmezni, mint az egy dollárért 1958-as árakon vásárolható áruk és szolgáltatások megfelelő tömegét.

Az egész számítás mintegy egy órányi időt igényelt az IBM 7094 számítógépen. A program tartalmazta az eredményül kapott idősorok automatikus gépi kirajzolását. E rajzokból választottuk az alábbi nyolc ábrát, amelyet itt bemutatok.

Az 1. ábra bemutatja az idősorokban található tipikus alakzatokat. Ezek mindegyike a dinamikus inverz egy-egy eleme, a négy görbe mindegyike a négy különböző iparág egyike termelésének időzített mennyiségeit képviseli, amely — közvetve vagy közvetlenül — hozzájárult a végső fogyasztónak a gépgyártási termék egy pótlólagos egységével való ellátásához (a zérus évben). A ráfordítások közül kettő — a fémek, valamint a gumi- és műanyagtermékek — főképpen anyagok, ráfordítási görbéik fokozatosan, de állandóan emel-



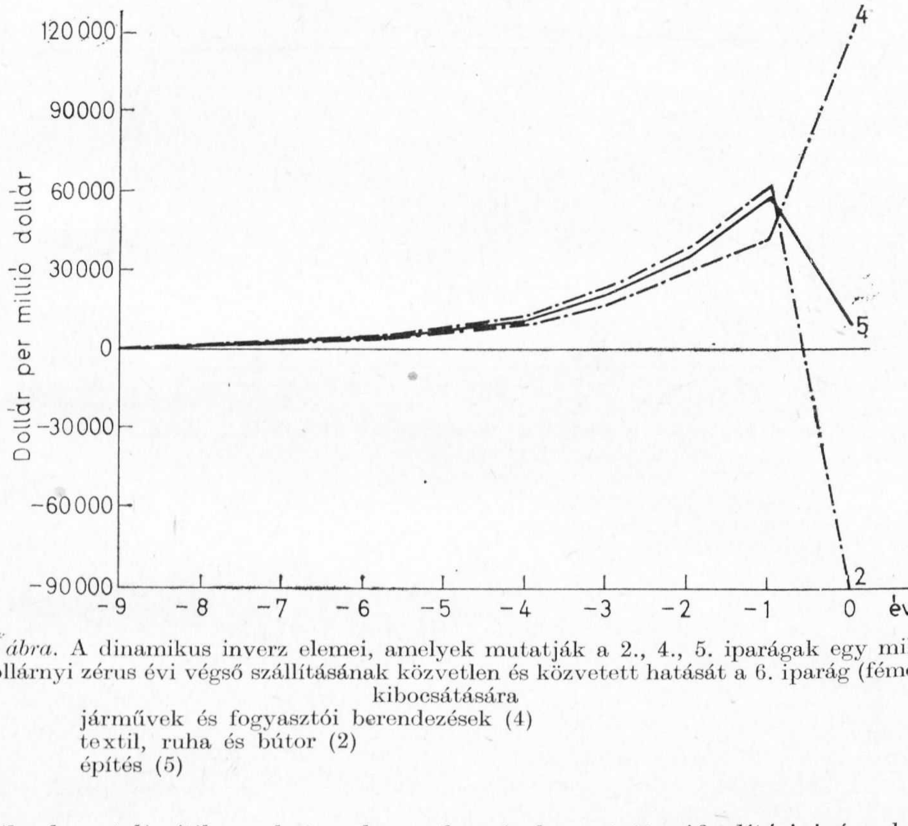
2. *ábra.* A teljes (közvetlen és közvetett) munka- és tőkeráfordítási igények, amelyek 1 millió dollárnyi gépgyártási termék zérus évi leszállításához szükségesek a 3. iparágban. A bal oldali skála a munkára, a jobb oldali a tőkére vonatkozik

——— munka

– – – – tőke

kednek kezdettől fogva végig. Az elsődleges fém iránti kereslet sokkal nagyobb, és a végső szállítást jelentős tömegekben mintegy 8 évvel korábban előzi meg. A gumi- és műanyagtermékek iránti első jelentős keresletet a —3 évben találjuk. A megfelelő ráfordítási igények a járművek és fa iránt, másrészt, a zérus vonal alá merülnek a végső szállítást megelőző évben. Mint ahogy fent kifejtettük, ez jellemzi azokat a javakat, amelyek fontos szerepet játszanak a tőkefelhalmozásban.

A 2. ábra kiegészíti az 1. ábrát, bemutatva a munkának és tőkének, azaz a beruházási javaknak azt a tömegét, amelyet az *összes* iparágban elnyelnek,



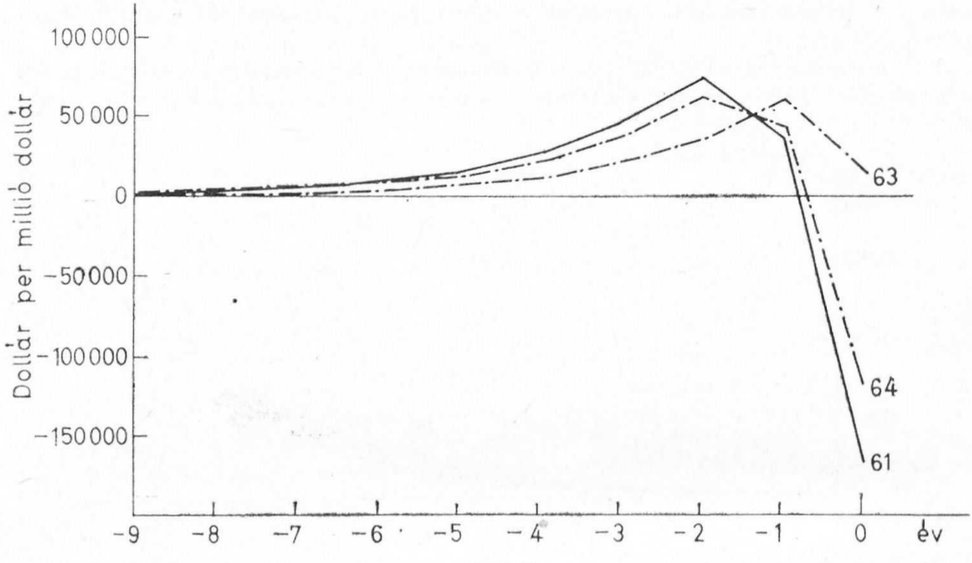
3. *ábra.* A dinamikus inverz elemei, amelyek mutatják a 2., 4., 5. iparágak egy millió dollárnyi zérus évi végső szállításának közvetlen és közvetett hatását a 6. iparág (fémek) kibocsátására

járművek és fogyasztói berendezések (4)
textil, ruha és bútor (2)
építés (5)

miközben teljesítik azokat a közvetlen és közvetett ráfordítási igényeket, amelyeket a gépgyártási termékek 1 millió dollárnyi mennyiségű zérus évi végső szállítása keltett. A fokozatos növekedés simasága természetesen mindkét esetben annak köszönhető, hogy a sok különböző egyéni iparág foglalkoztatási és beruházási igényeinek szabálytalanságai kiegyenlítik egymást e két végösszegben. Az új kapacitások beállítása és a végső szállítás közötti egyéves késleltetés magyarázza a beruházási görbe utolsó évi esését.

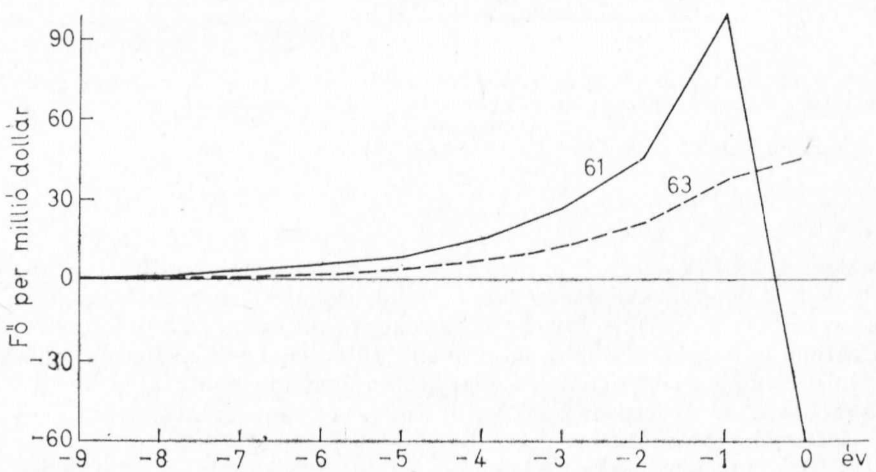
A 3. ábra egyazon iparág reakcióinak különbségeit mutatja különböző fajta végső szállítások következtében. A fémek tipikus nyersanyagként viselkednek a járművek — tehát főként autók — termelésében való közreműködésükben. Tipikus beruházási jószágként reagálnak azonban a textil végső keresletének növekedésére. Közbenső viselkedési alakzat jellemzi a fém-szektor hozzájárulását az építőipar végső kibocsátásának kielégítéséhez.

Hasonló eltéréseket találhatunk a 4. ábrában a két idősor alakjában, mindkettő a fém-szektor termék eiiránti igényeket rajzolja ki, az egyik egy millió



4. ábra. A dinamikus inverz elemei, amelyek mutatják a háztartási, állami és teljes végső kereslet 1 millió dollárnyi zérus évi növekedésének különböző közvetlen és közvetett hatását a 6. fémek iparág kibocsátására

háztartási végső kereslet (61)
állami végső kereslet (63)
teljes végső kereslet (64)

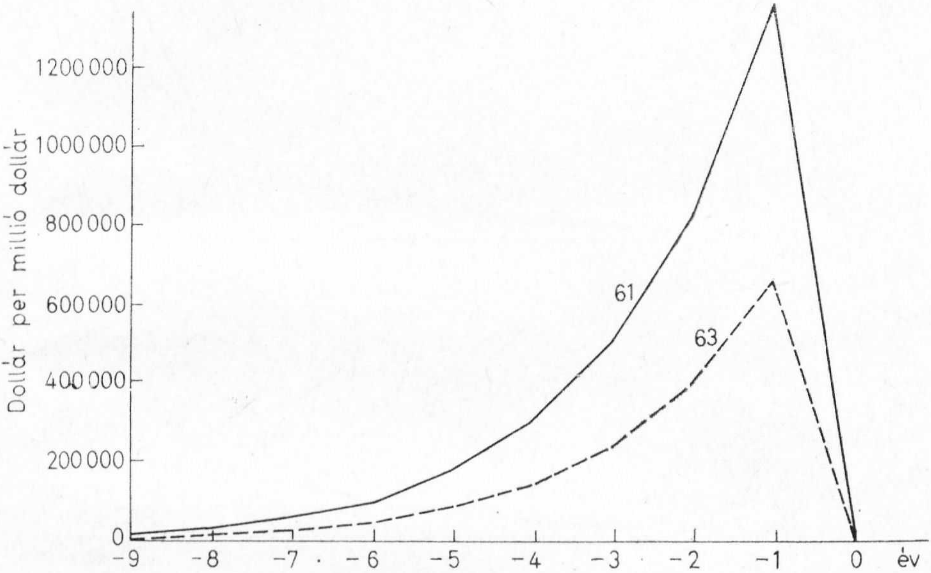


5. ábra. Az alternatív közvetlen és közvetett munkaráfordítás idősorai, amelyek az állami és háztartási végső keresleti vektorok zérus évi 1 millió dollárnyi növekedését szolgálják

——— háztartási végső kereslet (61)
— — — állami végső kereslet (63)

dollárnyi pótlólagos állami keresletet tükröz, a másik a háztartások javak és szolgáltatások iránti egy millió dollár értékű keresletét anticipálja. Az első görbe egy évvel azelőtt éri el tetőpontját, mintsem a végső szállítás ténylegesen megtörténhetne és a zérus vonal felett marad az utolsó évben, a második egy évvel korábban kezd esésbe és végül a zérus vonal alá merül. Ahogy várhattuk is, a kombinált teljes kereslet közbenső idő-profilja a háztartások javára üt ki.

A teljes munkaráfordítások idősora, amely a végső kereslet két fő összetevőjét szolgálja, mint ahogy azt az 5. ábra mutatja, hasonlóan alakul, mint a 4. ábrán látható görbék. Ugyanez áll a megfelelő teljes tőkeigényekre, amelyek a 6. ábrán láthatók.

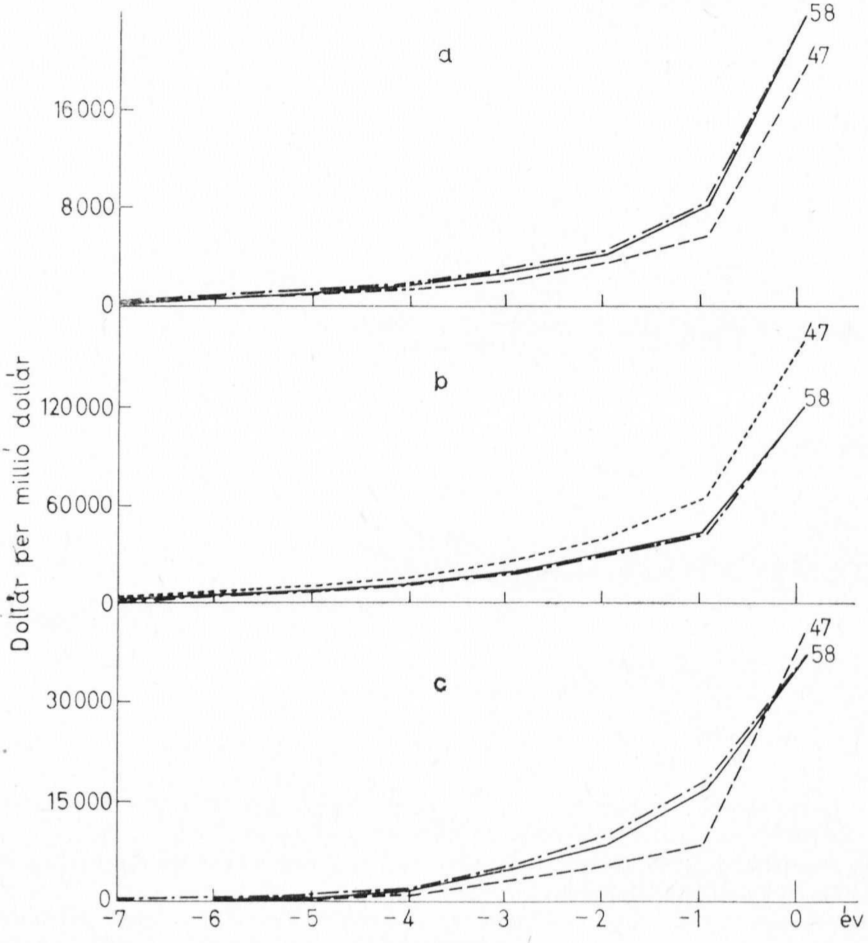


6. ábra. Az alternatív közvetlen és közvetett tőkeráfordítás idősorai, amelyek az állami és háztartási végső keresleti vektorok zérus évi 1 millió dollárnyi növekedését szolgálják
háztartási végső kereslet (61)
állami végső kereslet (63)

A 7. ábra három görbeserege mutatja hogyan tárhatja fel a dinamikus inverz meghatározott technikai változás hatását egy adott gazdasági rendszer dinamikus tulajdonságaira. Az ábra minden egyes része a dinamikus inverz egy-egy elemének három alternatíváját mutatja.

A felső ábra mindhárom görbéje a vegyszerek keltezett termelésnövekedését képviseli, amely — közvetve és közvetlenül — egy millió dollárnyi élelmiszer és gyógyszer zérus évi végső keresletének leszállításához járul hozzá. Az elsőt $\mathbf{A}_{1947}$ és $\mathbf{B}_{1947}$ alapján számítottuk, azaz azon folyó- és tőkeráfordítási együtthatók alapján, amelyek az amerikai gazdaság 52 termelő szektorának ráfordítási struktúráját az 1947. évben jellemezték. A másodikat $\mathbf{A}_{1958}$ és $\mathbf{B}_{1958}$ alapján számítottuk, azaz az 1958. évi technológiával. A harmadik inverzet — a (4) egyenletnek megfelelően — 11 különböző pár keltezett **A** és **B** matrix alapján számítottuk, ezek az 1947. évi technológia fokozatos eltolódását követték az 1958. évi technológia felé. Baloldalt ez a görbe egybeesik az első görbével, de az utolsó évben eléri a másodikat.

A három görbesereg bizonyítja milyen különböző módon hathat ugyanaz az általános változás ugyanazon dinamikus inverz különböző elemeire. Az amerikai gazdaság 52 szektorának ráfordítási struktúráját 1947-ben és 1958-ban leíró folyó- és tőkeráfordítási együtthatók nagyságkülönbsége igen sok technikai változás kombinált hatását tükrözi. Ezek felfelé való eltolódást okoztak azon vegyipari ráfordítások idősorában, amelyek 1 millió dollárnyi élelmiszer



7. *ábra.* A technológiai változás hatása a dinamikus inverz elemeire. a*)* A vegyipar (8) iránti közvetlen és közvetett szükséglet idősora 1 millió dollár értékű élelmiszer és gyógyszer (1) szállítására a zérus évben. *b)* A fémek (6) iránti közvetlen és közvetett szükséglet idősora 1 millió dollár értékű jármű (4) szállítására a zérus évben. *c)* A vegyipar (8) iránti közvetlen és közvetett szükséglet idősora 1 millió dollár értékű nem-vas fémbányászati termék (16) szállítására a zérus évben

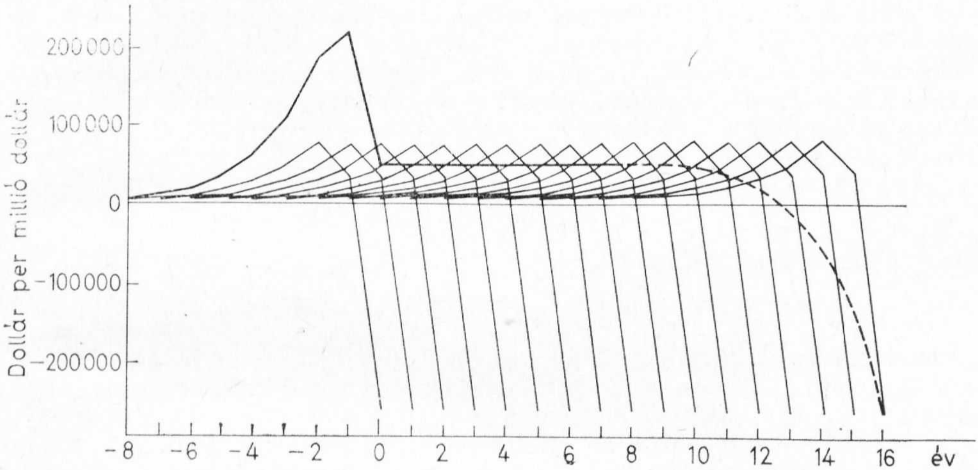
— — — 1947. évi technológia

—.—.— 1958. évi technológia

——— 1947-től 1958-ig évente változó technológia alapján számolva és gyógyszer végső szállításához szükségesek. A középső rész három görbéje arra mutat, hogy a struktúraváltozásoknak ugyanez a kombinációja csökkentette a fogyasztói berendezések végső szállításához hozzájáruló fémek ráfordítását.

A vegyszerek nem-vas fémbányászathoz történő hozzájárulását mutató alsó ábrán ugyanezek a strukturális változások bonyolultabb hatást okoznak: a ráfordítási szükségletek a sor utolsó évében, azaz a végső szállítás évében csökkentek, azonban az összes előző évben növekedtek.

6. A fent leírt dinamikus input-output rendszer — ugyanúgy mint a statikus input-output rendszer — kevéssé lehet segítségünkre a gazdasági növeke-



8. ábra. A háztartási végső keresleti vektor (61) évi egy millió dollárnyi növekedésének, amely 17 éven keresztül tart (0-tól +16 évig) közvetlen és közvetett hatása a 6. fémipar kibocsátására

——— egy év keresletnövekedésének hatása

——— az éves keresletek összességének kombinált hatása

dés aranyszabályainak kifejtésében, vagy bármilyen más, tisztán elméleti általánosítás megformulázásában. Túlságosan lazán összekapcsolt, túlságosan hajlékony ahhoz, hogy ilyen magas célkitűzést szolgálhasson. A dinamikus inverz elsősorban a rendszerbe szervezett valóságos információk tárháza. Ezt az információt olyan formába önti, amely különösen alkalmassá teszi időbeli összefüggések elemző leírására. Az inverz egyéni elemeit hosszabb fonatokba foghatjuk, mindegyikük a végső szállítások egy-egy adott idősorához tartozik. E fonatok a szektorközi és időbeli összefüggések dús szőnyegévé szőhetők, amely a gazdasági növekedés elemző képét adja ki.

A 8. ábra egy ilyen egyszerű fonadék struktúráját ábrázolja, leírva — vagy ha úgy tetszik, megmagyarázva — az elsődleges fémek kibocsátásának növekedését, amelyet a végső fogyasztók évi egy millió dollárnyi nem-tartós fogyasztási cikk (és a tartós fogyasztási cikkek arányosan megnövelt szolgáltatásai) iránti igénye vált ki egy 17 éves időszakaszban. A végső fogyasztóknak az első szállítás a 0 évben, az utolsó a +16 évben történik.

A részben egymásra rajzolt görbék mindegyike azt a ráfordítási idősort ábrázolja, amelyet 1 millió dollárnyi pótlólagos fogyasztási cikk szállítása igényel. A végső szállítás időpontját az egyes görbék utolsó pontjának helyzete mutatja. Míg az első szállítás a 0 évben esedékes, az első el nem hanyagolható ráfordításnövekmény szükségessége a −8 évben merül fel. Ettől kezdve új ráfordítás-sorozatot kell indítani minden évben, 17 éven keresztül; a szükséges teljes évi ráfordítások egész sora — amelyet az ábrán a vastag fekete vonal ábrázol — egy 25 éves időszakaszt fog át. A tipikus púp az elején a szükséges pótlólagos tőke lekötését tükrözi; a végén mutatkozó csökkenés mutatja, másrészt, e tőkék csökkenését, a fokozatos tőkeelvonást, amely sok évvel az előtt megindul, hogy az utolsó pótlólagos 1 millió dollárnyi fogyasztási cikket leszállították volna.

A görbe lapos része jellemzi azt, amit a stacionárius újratermelésnek lehet nevezni, amelynek folyamán csupán évi ráfordítási szükségleteket kell fedezni, beleértve a tőke pótlását. Ha az **A** és **B** matrixok változatlanok és a végső szállítás **c** vektora elégségesen hosszú időszak folyamán konstans, akkor a kibocsátások megfelelő keltezett **x** vektorát — az (5) egyenlet alapján — a következőképpen lehet meghatározni:

$$\mathbf{x} = (1 + \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 + \ldots + \mathbf{R}^m)\,\mathbf{G}^{-1}\mathbf{c}\,.$$

Ha a jobb oldalon álló sor konvergens, akkor, ha $m \to \infty$:

$$\mathbf{x} \to (1 - \mathbf{R})^{-1}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{c} = [\mathbf{G}(1 - \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B})]^{-1}\mathbf{c} = (\mathbf{G} - \mathbf{B})^{-1}\mathbf{c} = (1 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{c}$$

Stacionárius körülmények között, amelyek a halmozott görbe lapos részét szabályozzák a 8. ábrán, a szektorkibocsátások a végső kereslettel a statikus inverz, $(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$, alapján függenek össze.

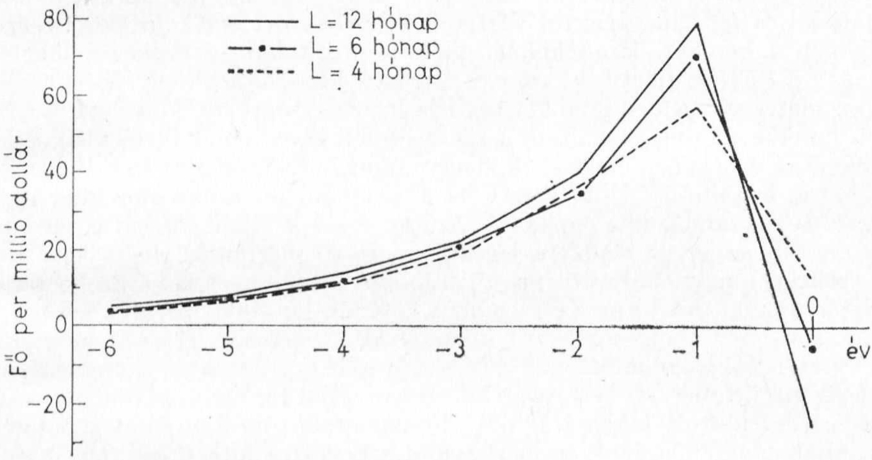
A mostantól nyolc évre bekövetkező végső keresletet anticipáló információ ebben az esetben elégséges volna a közvetlen és közvetett ráfordítási igények gyakorlatilag szabatos felbecsüléséhez. Az előrelátás szükséges foka természetesen függ az inverz azon elemeinek idő-profiljától, amelyekből a teljes ráfordítás görbéjét kell összeállítani. Amíg a teljes végső kereslet évről évre növekedőben van, nem valószínű, hogy termelő tőke elvonására legyen szükség. A végső szállítás egymásra következő változásainak megfelelő átlapolódó közvetlen és közvetett hatás-sorok összegezésekor a dinamikus inverz pozitív elemei dominálni fogják a néhány negatív elemet.

A gazdasági növekedés absztrakt elméletének újabb kutatásaiban sok figyelmet szenteltek az úgynevezett „végfeltételek" problémájának. A fent bemutatott tények alapján annak az időhorizontnak, amelyre terveinket építhetjük, szektorról szektorra változnia kellene. A dinamikus inverz elemeinek időalakzata, amely egy-egy iparág termékeinek közvetlen és közvetett keresletét szabályozza, olyan lehet, hogy egy adott évi kibocsátás elsősorban az ugyanazon évi végső keresleti vektor összetételétől és színvonalától függ. Egy másik iparág esetében ez az alakzat olyan lehet, hogy adott évi kibocsátásának szintje mondjuk négy vagy öt év múlva bekövetkező végső szállításokat tükröz.

7. Az (1) mérleg-egyenlet, és ennek megfelelően azok a formulák, amelyek a belőle származtatott dinamikus inverzet írják le az általános egyöntetű egy periódusú (egyéves) késleltetés feltevésére épülnek. Ez az az idő, amely eltelik a pótlólagos tőkejavak beállítása és a kibocsátási áramlat azon növekedése közt, amely használatuk révén bekövetkezik. Ugyanez az időegység szerepel a **B**

tőkeráfordítási együttható matrix összes elemének meghatározásakor (tőkelekötés az *évi* kibocsátás egységére számítva). Valóban a késleltetés a pótlólagos kapacitások beállítása és első teljes kihasználása közt az amerikai gazdaság különböző termelő szektoraiban — az ebben a tanulmányban használt összevonás fokának megfelelő bontásban — úgy tűnik egy év körül van, vagy tán valamivel rövidebb.

A valóságos gazdasági rendszer leírására használt időegység abszolút nagyságának megváltoztatása az (1) egyenlet értelmében valamennyi késleltetés időtartamának megfelelő valóságos megváltozását jelentené. Ha e változtatás ellenére, az összes szektor valóságos tőkeszükséglete azonos marad, akkor a **B** matrixban foglalt tőke-együtthatókat át kell váltani az új időegységre. Így, ha a késleltetés egy évről fél évre csökken, a **B** matrix minden elemét 2-vel kell szorozni.



9. ábra. Egy millió dollárnyi zérus évi végső kereslet szállításához szükséges közvetlen és közvetett munkaráfordítás változása, ha a beruházás késleltetése 12 hónap, 6 hónap és 4 hónap

Az ilyen eltolódásnak a rendszer domináló sajátértékére, és következésképp a konvergenciára gyakorolt hatását az I. Függelék elemzi, a késleltetés változásai és **B** együtthatóinak nagyságváltozásai egymás ellen hatnak.

A 9. ábrában feltüntetett három görbe mutatja, hogyan változik a végső kereslet 1 millió dollárnyi növeléséhez szükséges munkaráfordítások idősora, ha az alapvető strukturális beruházási késleltetést egy évről 6 vagy 4 hónapra rövidítjük, a grafikon vízszintes tengelye természetes években van megadva.

8. A statikus input-output elemzésben egy adott gazdaság strukturális matrixának inverzét beszorozva a végső kereslet oszlopvektorával, megkapjuk a megfelelő teljes szektorkibocsátások vektorát. Ugyanennek az inverznek transzponáltja beszorozva a hozzáadott érték vektorával (bér, profit, adó és más végső kifizetések, amelyek az egyes iparágakban a teljes fizikai kibocsátás egységére esnek) az egyensúlyi árak megfelelő vektorát adja, azaz olyan árakat, amelyek mellett a teljes kiadás (beleértve a hozzáadott értéket) minden szektorban megegyezik az összes bevétellel. A dinamikus input-output

elemzésben a dinamikus inverz transzponáltja meghatározza a termelő szektorok mindegyikében a hozzáadott értékek idősora, és azon egyensúlyi ár-sorozat közti viszonyt, amely egyenlővé tenné a teljes kiadást és a teljes bevételt, minden termelő szektorban az egész idő folyamán.

Legyen a $\mathbf{p}_t = ({}_t\mathbf{p}_1, {}_t\mathbf{p}_2, \ldots, {}_t\mathbf{p}_n)$ oszlopvektor a t évben különböző szektorok által vásárolt és eladott jószágok és szolgáltatások ára és a $\mathbf{v}_t = ({}_t\mathbf{v}_1, {}_t\mathbf{v}_2, \ldots, {}_t\mathbf{v}_n)$ oszlopvektor az egyes szektorokban a t évben hozzáadott érték. A hozzáadott értéket a legjobban mint maradékot határozhatjuk meg, mint a termelő szektor mindazon folyó kiadásait, amely nem más vagy azonos szektortól való ráfordítások vásárlásának ellenértéke.

Az alábbi (7) egyenlet azt mondja ki, hogy bármely t évben valamennyi jószág árának, amelyet a bal oldalon álló vektor képvisel, egyenlőnek kell lennie egységköltségével, amelyet a jobb oldalon álló tagok képviselnek. A folyó ráfordítási együtthatók transzponált $\mathbf{A}'$ matrixának és a $\mathbf{p}$ árvektornak szorzata adja a folyó ráfordítások költségét, amelyeket minden termelő szektor önmagától és más iparágaktól vásárol. A hozzáadott érték (oszlop) vektora, $\mathbf{v}_t$, felöleli a béreket, járadékokat, adókat, profitokat — ezeket a megfelelő iparágak a t évben fizetik ki vagy terhelik rá kibocsátásuk egységére.

A szögletes zárójelben levő két tag írja le az egységre eső költséget és nyereséget, amelyet konvencionálisan a tőkeszámlán könyvelnek el. A világos költségszámítás érdekében feltesszük, hogy minden szektor egy évvel a termelt kibocsátás leszállítása előtt szerzi be a technológiai szükségletekkel egybehangzó tőkejavainak állományát és azután ezzel a kibocsátással együtt el is adja; valójában ez az eladás a legtöbb esetben pusztán névleges lesz, mivel az a szektor, amely eladja tőkejavait, újból és újból vissza is vásárolja azokat. Mindkét tranzakciót természetesen azokon az árakon bonyolítja le feltevésünk szerint, amelyek lebonyolódásuk időszakában érvényesek. A $t - 1$ időszakaszban vásárolt tőkeállomány értékét $1 + r_{t-1}$-gyel szorozzuk; r_{t-1} az évi kamatrátát képviseli, amely ez évben van hatályban. Mint már fentebb megjegyeztük, a t évben leszállított kibocsátás után felszabaduló tőkeállományt azonnal felhasználják olyan jószágok termelésére, amelyeket a következő, $t + 1$ évben fognak leszállítani. Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ matrixoknak a jobb oldalon idő-indexük van, hogy tükrözzék a technikai változást.

$$(7) \qquad \mathbf{p}_t = \mathbf{A}'_t\,\mathbf{p}_t + [(1 + r_{t-1})\,\mathbf{B}'_t\,\mathbf{p}_{t-1} - \mathbf{B}'_{t+1}\,\mathbf{p}_t] + \mathbf{v}_t.$$

A (7) egyenlet átírható

$$(8) \qquad \mathbf{G}'_t\,\mathbf{p}_t - \alpha_{t-1}\,\mathbf{B}'_t\,\mathbf{p}_{t-1} = \mathbf{v}_t$$

alakra, ahol

$$\mathbf{G}'_t = (1 - \mathbf{A}'_t + \mathbf{B}'_{t+1}) \text{ és } \alpha_t = 1 + r_t.$$

Ha az idő-indexnek a $-m, -m + 1, -m + 2, \ldots, -2, -1, 0$ értékeket adjuk, akkor a láncolódó egyenletek (3)-hoz hasonló rendszerét építhetjük fel. Az új rendszer bal oldalának strukturális matrixa hasonlítana a (3) egyenletben megjelenő strukturális matrix transzponáltjához, azzal a különbséggel, hogy minden egyes $\mathbf{B}_t$ szorozva van a megfelelő α_{t-1} skalárral.

E rendszer megoldása az ismeretlen $\mathbf{p}_0$ árvektorral az ugyanazon és előző évi hozzáadott-érték vektorok, $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_{-1}, \mathbf{v}_{-2}, \ldots$ és a megfelelő kamatteher tényezők, $\alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots$ függvényében a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_0 = {} & (\mathbf{G}_0^{-1})' \mathbf{v}_0 + (\mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-1})' \alpha_{-1} \mathbf{v}_{-1} + (\mathbf{R}_{-2} \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-1})' \alpha_{-2} \alpha_{-1} \mathbf{v}_{-2} + \\
(9) \qquad & + , \ldots , + (\mathbf{R}_{-m} \ldots \mathbf{R}_{-2} \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-t})' \alpha_{-m} \ldots \alpha_{-2} \alpha_{-1} \mathbf{v}_{-m} + \\
& + (\mathbf{R}_{-m} \ldots \mathbf{R}_{-2} \mathbf{R}_{-1} \mathbf{G}_0^{-t})' \alpha_{-m} \ldots \alpha_{-2} \alpha_{-1} \mathbf{B}'_{-m} \mathbf{p}_{-(m+1)}
\end{aligned}
$$

formát ölti.

Az első sor jobb oldalán megjelenő zárójeles matrix-szorzatok azonosak a (4) egyenlet jobb oldalán levő dinamikus inverz utolsó oszlopának elemeivel. Ezek az együtthatók azonban a (9) egyenletben transzponált formában jelennek meg. Mivel az $\mathbf{R}_{-1}, \mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}, \mathbf{R}_{-3}\mathbf{R}_{-2}\mathbf{R}_{-1}, \ldots$ sorozat zérushoz konvergál, a jobb oldal utolsó elemét — amely a $\mathbf{p}_{-(m+1)}$ árvektort tartalmazza — el lehet hanyagolni, feltéve, hogy a sort elégséges számú éven keresztül folytattuk visszafelé.

Bármely év árvektora tehát függ az egyazon és az összes megelőző év hozzáadott értékvektoraitól. Ezt a függést a dinamikus inverz transzponáltja szabályozza, ez meghatározza a ráfordítások keltezett idősorát, amelyet a megfelelő fizikai rendszerben a végső kereslet adott idősora kelt. Például technikai változás híján és feltéve, hogy mind a kamatráta, mind a hozzáadott érték vektora konstans marad az idő folyamán, a (9) egyenlet visszavezetődik a

$$
(10) \qquad \mathbf{p}_0 \to [\mathbf{G}^{-1}]' [1 + \mathbf{R}' \alpha + (\mathbf{R}')^2 \alpha^2 + (\mathbf{R}')^3 \alpha^3 \ldots (\mathbf{R}')^t \alpha^t] \mathbf{v}
$$

egyenletre, ha $t \to \infty$.

Ha t megfelelően naggyá vált, a jobb oldal mértani sorának két egymásra következő tagja közti arány $\mu_1 \alpha$ felé tart, ahol μ_1 az $\mathbf{R}'$domináló sajátértéke. A sor csak akkor konvergál és csak akkor ad véges $\mathbf{p}$ árvektort, ha $\mu_1 \alpha < 1$, vagy — mivel $\alpha = 1 + r$ — ha

$$
r < \frac{1 - \mu_1}{\mu_1} .
$$

Ezt a következtetést, hogy bizonyos körülmények közt egy nyílt dinamikus input-output rendszer sajátértéke felső korlátot kényszerít a kamatrátára, sok évvel ezelőtt levonta már Michio Morishima.[3]

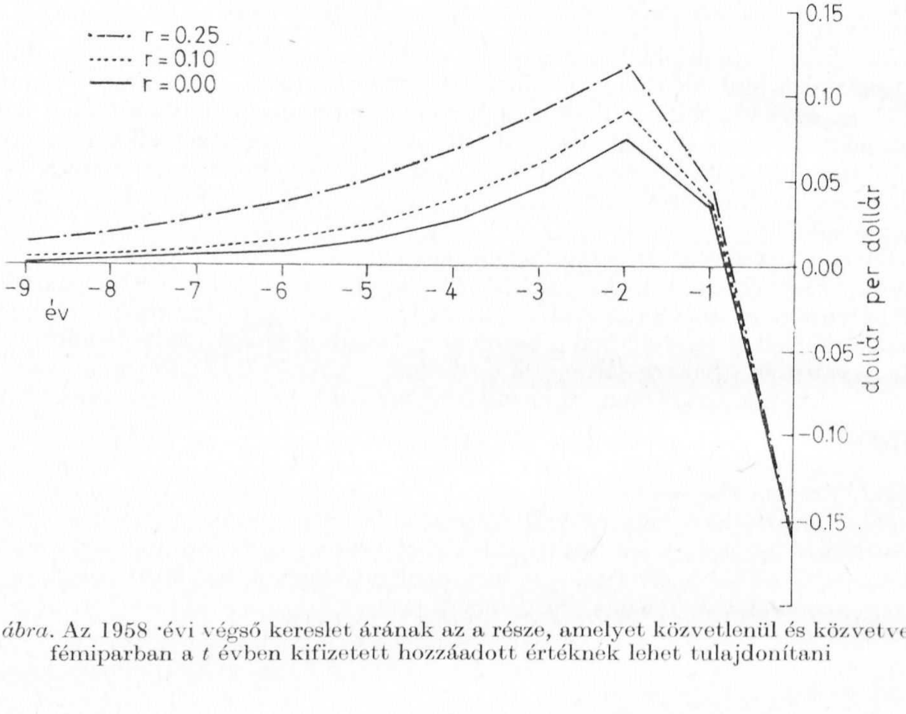
A 10. ábra mutatja, hogyan függ az 1958-ban a végső felhasználónak leszállított fogyasztási cikkek[4] ára a fémipar kibocsátásának egységére eső évi hozzáadott értéktől. A folytonos görbe, amely azon a nem reális feltevésen alapul, hogy a kamatráta az egész 11 éves periódusban zérus volt, (tehát $\alpha = 1$) megfelel a 4. ábra folytonos görbéjének. A zérusvonal alá esés az utolsó évben negatív költséget jelent, azaz azt a jövedelmet, amelyet a korábbi években vásárolt tőkeállomány likvidálása biztosított volna. A tőkejavak vásárlására fordított pozitív kiadások, amelyeket ugyanazon görbe más pontjai mutatnak, a legtöbb esetben ellensúlyozzák ezt a negatív összeget.

[3] Michio Morishima: Equilibrium, Stability and Growth. Oxford University Press. London 1964.

[4] A végső keresletet alkotó jószágok 1958-as 1 $ értékű kosara, amelyet az 1958. évi fogyasztási szerkezet szerint alakítottunk ki.

A másik két görbét azon feltevés alapján rajzoltuk meg, hogy az egész időszakban 10%, illetve 25% volt a kamatráta. Ezek megmutatják, hogyan erősíti a kamatráta növekedése a jelenlegi árak függését a múltbeli hozzáadott értékektől (következésképpen a múltbeli áraktól is).

Abból, amit itt elmondtam, sok dolognak jól ismerten kell visszhangzania. Francois Quesnay „termelő előlegei", Karl Marx „bővített újratermelési



10. ábra. Az 1958 -évi végső kereslet árának az a része, amelyet közvetlenül és közvetve a fémiparban a t évben kifizetett hozzáadott értéknek lehet tulajdonítani

folyamata" és Bőhm—Bawerk „körkörös termelési útjai" mind tartalmazzák azokat az alapvető elméleti eszméket, amelyek beépültek a dinamikus inverz levezetésébe. De míg e nagy közgazdászoknak meg kellett elégedniök szóbeli leírásokkal és deduktív okoskodással, mi mérni tudunk és számolni tudunk. Ebben rejlik az igazi különbség a közgazdaságtan múltbeli és jelen helyzete között.

(Beérkezett: 1969. IX. 15.)

I. Függelék

Az

$$\mathbf{R}_{-1}, \mathbf{R}_{-2}\,\mathbf{R}_{-1}, \mathbf{R}_{-3}\,\mathbf{R}_{-2}\,\mathbf{R}_{-1}, \ldots, \mathbf{R}_{-t} \ldots \mathbf{R}_{-3}\,\mathbf{R}_{-2}\,\mathbf{R}_{-1} \tag{A1}$$

$$\mathbf{R}_t = (1 - \mathbf{A}_t + \mathbf{B}_{t+1})^{-1}\,\mathbf{B}_{t+1}$$

sorozat konvergencia-tulajdonságainak vizsgálatakor előbb azt az esetet tekinthetjük, amikor $\mathbf{A}_t = \mathbf{A}$ és $\mathbf{B}_t = \mathbf{B}$ minden t-re, következésképpen $\mathbf{R}_t = \mathbf{R}$ minden t-re.

Ez esetben az (A1) sor átalakul mértani sorrá

$$\text{(A2)} \qquad \mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3, \ldots, \mathbf{R}^t.$$

$$\text{(A3)} \qquad \mathbf{R} = (1 - \mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}$$

$$\text{(A4)} \qquad (1 - \mathbf{A} + \mathbf{B}) = (1 - \mathbf{A})\,[1 + (1 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]$$

$$\text{(A5)} \qquad (1 - \mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}\mathbf{B} = [1 + (1 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}(1 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = (1 + \mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}$$

ahol $\mathbf{U} = (1 - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

Mivel $(1 - \mathbf{A})^{-1} > 0$ és $\mathbf{B} \geq 0$ és irreducibilis, ezért $\mathbf{U} > 0$.

$$\text{(A6)} \qquad [(1 + \mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}]^{-1} = \mathbf{U}^{-1}(1 + \mathbf{U}) = (1 + \mathbf{U}^{-1});$$

következésképpen

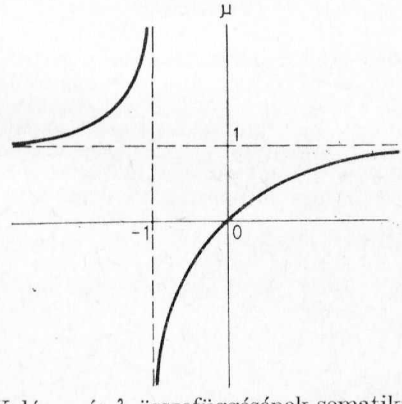
$$\text{(A7)} \qquad \mathbf{R} = (1 + \mathbf{U}^{-1})^{-1}.$$

Legyenek most a négyzetes, reguláris és irreducibilis $\mathbf{U}$ matrix sajátértékei $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Mivel $\mathbf{U} > 0$, ezért Frobenius ismert tétele értelmében van egy domináns pozitív egyszerű sajátértéke. Sőt ehhez és csak ehhez a sajátértékhez tartozik pozitív sajátvektor. Legyen ez a sajátérték λ_i.

Valós λ_i esetében $\mathbf{U}^{-1}$ és $1 + \mathbf{U}^{-1}$ megfelelő sajátértékei $1/\lambda i$, illetve $1 + 1/\lambda_i$. Tehát az (A7) egyenletnek megfelelően $\mathbf{R}$ sajátértékei $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{1 + \lambda_i}$ alakúak, és különösképpen

$$\text{(A8)} \qquad \mu_1 = \frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1}.$$

Mármost $\lambda_i > 0$ következményeképpen $0 < \mu_1 < 1$, ami azt jelenti, hogy $\mathbf{R}$-nek mindig van egy egyszerű egynél kisebb pozitív sajátértéke, amelyhez pozitív sajátvektor tartozik.



11. ábra. Valós μ_i és λ_i összefüggésének sematikus ábrája

A 11. ábra mutatja μ_i és λ_i viszonyát valós λ_i esetére. Ha e nem-domináló sajátértékek valamelyike kisebb mint $-0{,}5$, a megfelelő μ_i nagyobb lesz 1-nél, abszolút értékben. A hozzá tartozó sajátvektor elemei különböző előjelekkel fognak bírni.[4]

[4] Ez az elemzés komplex sajátértékek esetére a következő módosítással érvényes: legyen $\lambda_i = a + b_i$. Akkor a megfelelő μ_i valós része $re(\mu_i) = \dfrac{a(a+1) + b^2}{(a+1)^2 + b^2}$. Hogy biztosítsuk a konvergenciát szükséges, hogy $a^2 + 1{,}5\,a > -(b^2 + 0{,}5)$ legyen. Ha $b = 0$, akkor e formulák visszavezetődnek a szövegben tárgyalt egyszerűbb alakra.

Ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, ... sor divergenssé válhat. Attól függően, hogy domináló sajátértéke valós vagy komplex és a valós része pozitív vagy negatív, a dinamikus inverz elemei divergálnának, ahogy visszafelé haladunk az időben — vagy korlát nélkül növekednének pozitív, illetve negatív irányban, vagy növekvő kilengésekkel ingadoznának pozitív és negatív irányban.

Ha $\mathbf{R}^t$ változik ugyan t változásával, de ezt véges alsó és felső korlátok, mondjuk $\underline{\mathbf{R}}$ és $\overline{\mathbf{R}}$ közt teszi, akkor elemei a megfelelő $\underline{\mathbf{R}}^1$, $\underline{\mathbf{R}}^2$, ... és $\overline{\mathbf{R}}^1$, $\overline{\mathbf{R}}^2$, ... sorok elemei közt maradnak.

A dinamikus inverz konvergencia-tulajdonságai függenek attól az időegységtől, amelyek révén a **B** matrixban bekerülő tőkelekötési együtthatókat meghatározzuk. Az alapvető (1) mérleg-egyenletben ez az egység azt a késleltetést is képviseli, amely eltelik a pótlólagos tőkejavak vagy folyó készletek felhalmozása és használatba vétele közt.

Legyen t egy adott időszakasz az eredeti egységekben és legyen t^* ugyanez az időszakasz, más egységekben mérve. Ha α az aránya az első és a második egység hosszának, akkor

$$t^* = \alpha t \tag{A9}$$

Ha például t egy adott időszakaszt években mér és t^* hónapokban méri, akkor $\alpha = 12$.

A technikai folyó együtthatóknak nincs idődimenziójuk, ezért az **A** matrix elemei változatlanok maradnak, ha az időegységet — és ennek megfelelően az (A1) egyenletben szereplő késleltetést — megváltoztatjuk, mondjuk 1 évről 1 hónapra. De az összes tőkelekötési együttható, azaz a **B** matrix összes eleme 12-szeresére növekszik. Ha továbbra is csillagot használunk a matrixok és sajátértékeik jelölésére az időegység megváltoztatása után, akkor

$$\mathbf{B}^* = \alpha \mathbf{B}\,.$$

$$\mathbf{U}^* = \alpha \mathbf{U} \quad \text{és} \quad 1 + \mathbf{U}^{*-1} = 1 + 1/\alpha\, \mathbf{U}^{-1}\,. \tag{A10}$$

Ebből következik, hogy

$\lambda_i^* = \alpha\lambda_i$ és az (A8) összefüggésnek megfelelően

$$\mu_i^* = \frac{\lambda_i/\alpha}{1 + \lambda_i/\alpha}\,. \tag{A11}$$

Az összefüggés μ_i^* és λ_i/α között tehát azonos, mint amit μ_i és λ_i között fent kifejtettünk. Megvizsgálva ezt, azt találjuk, hogy ha a μ_1 sajátérték a domináló, akkor domináló voltát nem érinti az időegység és a késleltetés bármilyen változtatása. Ha azonban más részről, valamilyen más μ_i sajátérték volna domináló, és ezért a rendszer divergálna, akkor α növelése — azaz a késleltetés csökkentése — ha ez elégséges nagyságú, áttolhat bármely λ_i/α negatív értéket a $-0{,}5$ és 0 közti intervallumba és így dominálóvá teheti μ_1^*-et. A késleltetés növelése természetesen ellenkező hatással járna.

II. Függelék

Fogalmak

I. *Az* **A** *matrix*

Az **A** matrix folyó ráfordítási és pótlási együtthatókat tartalmaz. Hazai kibocsátás alapján számítottuk.

II. *A* **B** *matrix*

A **B** matrix az összes iparág tőkelekötési együtthatóiból áll. A lakásépítést a telek- és bérleti iparban tüntettük fel. A tőkeegyütthatókat a kapacitások alapján számítottuk.

III. *Munka sor*

A munka sor a kibocsátás ezer dollárjára eső „emberévekből" áll.

IV. *Teljes tőke sor*

Ez a sor egyszerűen a **B** matrix oszlopösszege.

V. *Alternatív végső kibocsátás*

A. Háztartási nem-tartós cikkek, beleértve a tartós cikkek pótlását.

A végső kereslet e vektora tartalmazza a nem-tartós cikkek folyó vásárlását és a tartós cikkek háztartási pótlását. Tartalmaz egy tőkelekötési együttható oszlopot is, amely a tartós fogyasztási cikkek készletéből áll. (A lakásalap a telek és bérleti oszlopba került.) A munkaráfordítás ebben a vektorban a háztartási segítség.

B. Háztartási tartós és nem-tartós javak.
A végső kereslet e vektora a háztartások folyó tartós és nem-tartós cikkvásárlásait tartalmazza.

C. Állam.
A végső kereslet állami vektora a helyi és szövetségi kormányzatok vásárlásaiból áll.

D. Teljes végső kereslet.
A teljes végső kereslet vektora tartalmazza a (tartós és nem-tartós) háztartást, exportot, kompetitív importot és a helyi és szövetségi kormányzatot. Nem szerepel benne a bruttó magán tőkeképződés és a nettó készletváltozás vektora,

az összes tétel 1958-as árakon.

Adatok 1947-*től* 1958-*ig*

A tőke- és folyó együtthatókra vonatkozó információ általában hozzáférhetetlen évenkénti részletességben. Mivel a technológia változásait felölelő dinamikus modell mondjuk egy tucat egymásra következő évre igényel ilyen adatokat, és mivel adatokat esetleg csak három évre találunk ebben az időszakaszban, az információ oroszlánrészét interpolációval kell előállítani. A legtöbb együttható esetében exponenciális interpolációt alkalmaztunk, hogy közelítsük a konstans rátájú növekedést. Ha az utolsó évi együtthatók valamelyike zérus, akkor az exponenciális közelítés nem használható és a program lineáris közelítést alkalmaz. Legyen a (47) és az (58) a két végső év matrixának megfelelő eleme, akkor, ha

a (47) > 0 és a (58) > 0	exponenciális interpolációt használtunk
a (47) = 0 és a (58) > 0	lineáris interpolációt használtunk
a (47) > 0 és a (58) = 0	lineáris interpolációt használtunk
a (47) = 0 és a (58) = 0	lineáris interpolációt használtunk.

III. Függelék

59 szektoros bontás

Szám	Név	Megfelelő 83 szektoros bontás
1	Élelmiszer és gyógyszer	14, 15, 29
2	Textil, ruházat, bútor	16, 17, 18, 19, 22, 23, 34
3	Gép (csak végső)	44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 63
4	Jármű és fogyasztói berendezés	52, 54, 56, 59, 60, 61, 62,
5	Építés	11, 12
6	Fémek	37, 38
7	Energia	7, 31, 68
8	Vegyszer	27
9	—	—
10	—	—
11	Állattenyésztés	1
12	Növénytermesztés	2
13	Erdészet	3
14	Mezőgazdasági szolgáltatás	4
15	Vasércbányászat	5
16	Nem-vas fémbányászat	6
17	Olajbányászat	8
18	Kő- és agyagbányászat	9
19	Ásványbányászat	10

Szám	Név	Megfelelő 83 szektoros bontás
20	—	—
21	Fa és faáru, kivéve göngyöleg	20
22	Fagöngyöleg	21
23	Papíripar és göngyöleg	24, 25
24	—	—
25	Nyomda és kiadó	26
26	Szerves vegytermék	28
27	Festék és rokonipar	30
28	Gumi és műanyag	32
29	Bőrcserzés	33
30	Üveg és üvegáru	35
31	Kő- és agyagáru	36
32	Fémtartály	39
33	Fűtés- és vízcsővezeték, szerkezeti fém	40
34	Fémtömegcikk	41
35	Cső, drót, szerszám	42
36	Gép és turbina	43
37	Elektromos motor és apparátus	53
38	Elektromos világítás és vezeték	55
39	Elektronikus komponensek	57
40	Akkumulátor, szárazelem, röntgen	58
41	Egyéb feldolgozóipar	64
42	Szállítás és raktározás	65
43	Hírközlés, rádió és tv nélkül	66
44	Rádió és televízió	67
45	Kereskedelem	69
46	Pénzügy és biztosítás	70
47	Telek és bérlet	71
48	Szálloda és javítószolgálat	72
49	Üzleti szolgáltatások	73
50	Kutatás és fejlesztés	74
51	Autójavítás	75
52	Szórakozás és üdülés	76
53	Egészségügyi és oktatási intézmények	77
54	—	—
55	—	—
56	Nem-kompetitív import	80
57	Vendéglátási és üzleti kiadások	81
58	—	—
59	Hulladék és melléktermék	83
60	Teljes munka sor	
61	Háztartási nem-tartós, beleértve a tartós pótlások	
62	Háztartási tartós és nem tartós	
63	Állami végső kereslet	
64	Teljes végső kereslet, kivéve a bruttó magán tőkeképződést és a nettó készletváltozást	
65	Teljes tőke sor	

Alternatív végső kibocsátás (61–64)

IV. Függelék

Az adatok forrása

1958. **A** matrix, folyó ráfordítási együtthatók.

Ez a matrix az 1958. évi input-output táblán alapul, amelyet az Office of Business Economics, Department of Commerce tett közzé. Lásd A. Carter: „Changes in the Structure of the American Economy, 1947 to/1958 and 1962" Review of Economics and Statistics. XLIX. (1967 május).

1958. **A** matrix, pótlási együtthatók.
Ezt a matrixot a Harvard Economic Research Project készítette az 1958. évi tőkelekötési matrix és a „Depreciation Guidelines and Rules" (Leírási irányvonalak és szabályok) U. S. Treasury Department. Internal Revenue Service. Revised August 1964. kiadvány alapján.

1958. **B** matrix, tőkelekötési együtthatók.
A feldolgozó ipar tőkelekötési együtthatóit a Waddell—Ritz—Norton—DeWitt—Wood: „Capital Expansion Planning Factors, Manufacturing Industries" National Planning Association. Washington D. C. (April 1966) c. kiadványból merítettük. A nem feldolgozó ipari együtthatókat a Harvard Economic Research Project-ben S. A. Rea Jr. és mások állították össze.

1958. Munka együtthatók.
A munka együtthatók Jack Altermann: „Interindustry Employment Requirements" Monthly Labor Review 88. No. 7. (1965 Július) c. tanulmányán alapulnak.

1958. Végső keresleti vektorok.
A végső keresleti vektorok az 1958. évi input-output táblán alapulnak, amelyet az Office of Business Economics, Department of Commerce tett közzé, valamint R. W. Goldsmith: „The National Wealth of the United States in the Postwar Period" National Bureau of Economic Research. Princeton 1962. c. könyvén.

1947. **A** matrix, folyó ráfordítási együtthatók.
Ez a matrix a Bureau of Labor Statistics 450 szektoros 1947. évi input-output tábláján alapul, amelyet a Harvard Economic Research Project néhány évvel ezelőtt kártyákra lyukasztva megkapott („Deck A") a Bureau of Labor Statistics jóvoltából, az egyes szektorokra vonatkozó sokszorosított dokumentáció kíséretében. 50 szektoros bontásban került nyilvánosságra W. D. Evans és M. Hoffenberg: „The Inter-Industry Relations Study for 1947" The Review of Economics and Statistics XXXIV (1952 Május) c. tanulmányában. Az 1947. évi matrixot módosítani kellett, hogy összehasonlíthatóvá váljék az 1958. évivel. Lásd A. P. Carter: idézett művét. További munkát végeznek e téren B. Vaccara és mások az Office of Business Economics és a Harvard Economic Research Project keretében.

1947. **A** matrix, pótlási együtthatók.
E matrixot a Harvard Economic Research Project készítette az 1947. évi tőkelekötési matrix és az idézett értékcsökkenési kiadvány (U. S. Treasury Department) alapján.

1947. **B** matrix, tőkelekötési együtthatók.
E matrix együtthatói James M. Henderson és mások: „Estimates of the Capital Structure of American Industries, 1947" Harvard Economic Research Project c. sokszorosított tanulmányán és Robert N. Grosse: „Capital Requirements for the Expansion of Industrial Capacity" Vol. I. Part. I. Executive Office of the President. Bureau of the Budget, Office of Statistical Standards (1953. November) c. művén alapulnak. További módosításokat eszközöltek az együtthatókon Alan Strout és mások 1958 és 1962 között. Samuel A. Rea Jr. tette összehasonlíthatóvá az 1947. évi együtthatókat 1966—7-ben a Harvard Economic Research Project keretében.

1947. Munka együtthatók.
Ugyanaz a forrás, mint az 1958. évi munka együtthatók tekintetében.

1947. Végső keresleti vektorok.
A végső kereslet vektorai a Bureau of Labor Statistics 450 szektoros input-output tábláján és Raymond W. Goldsmith idézett művén alapulnak.

THE DYNAMIC INVERSE

The English original of the paper can be found in the volume:
Carter, A. P.—Bródy, A. (ed.) *Contributions to Input-Output Analysis* (North-Holland Publ. Co. Amsterdam, 1970).

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ

Общее решение открытой динамической системы «затраты-выпуск» представляет собой обратную, содержащую периодические ряды полных затрат. Периодические ряды обратной, таким образом, показывают затраты, требующиеся для обеспечения данного конечного потребления, причем привязывая затраты к срокам возникновения потребности в них.

При помощи транспонации системы могут быть исчислены соответствующие цены посредством установления взаимосвязи между периодическими рядами прибавленных стоимостей и цен равновесия.

Наряду с анализом математической специфики обратной, представляются некоторые характерные периодические ряды двух динамических обратных, исчисленных при помощи технологических коэффициентов США за 1947 и 1958 гг., а также несколько периодических рядов, составленных с предположением постоянно изменяющейся техники и показывающих влияние структурных изменений.

В приложениях анализируются математические вопросы егзистенции и конвергенции обратной, а также излагаются источники и группировка исходных данных и метод экстраполяции технологического изменения.

Csáki Csaba

Egy mezőgazdasági vállalat fejlesztési terve

Az új gazdaságirányítási rendszer bevezetése megnövelte a vállalati tervezés jelentőségét és egyre inkább nélkülözhetetlenné teszi a távlati tervek kidolgozását az állami gazdaságokban és a termelőszövetkezetekben. Érthető tehát, hogy mezőgazdasági vállalataink komoly érdeklődést tanúsítanak a távlati tervezés problémái iránt és mind több gazdaságban készítenek ilyen terveket. A matematikai módszerek, köztük a lineáris programozás is jelentős segítséget adhatnak ebben a munkában.

A népgazdasági szintű, valamint az ipari ágazati és vállalati fejlesztési programok kidolgozásában a matematikai módszerek már hosszú idő óta eredményesen felhasználásra kerülnek. A fejlesztési terv elkészítése a mezőgazdasági vállalatoknál is hasonló problémák megoldását követeli meg. Meg kell határozni a rendelkezésre álló adottságok és feltételek figyelembevételével a termelésfejlesztés (termelési szerkezet, beruházások stb.) olyan programját, amely lehetőleg a legkedvezőbb eredményre vezet. Éppen ezért a mezőgazdasági vállalati tervezés során felhasználható matematikai modellek felépítése elvileg megegyezik az iparban alkalmazott modellekkel. Az alapvető azonosság ellenére azonban számos vonatkozásban sajátos megoldásra van szükség, és több speciális probléma jelentkezik.

A mezőgazdasági vállalatfejlesztési modellek sajátos vonásaiban a mezőgazdasági termelés természeti-technológiai, valamint társadalmi-gazdasági sajátosságai jutnak kifejezésre. A matematikai modellek összeállításánál ezek közül elsősorban az alábbiakkal kell számolni:

a) A mezőgazdasági termelő tevékenység *élőlények* — növények, állatok — *élettevékenységével fonódik össze,* attól elválaszthatatlan. Az élő szervezetek sajátosságai a növekedés-fejlődés szakaszai, a termelés kritikus mozzanatai, a szaporulat szabályai, a növényi- és állatbetegségek elleni védekezés követelményei stb. a fejlesztési lehetőségek fontos meghatározói.

b) Az élő szervezetek termelési folyamatban játszott szerepével összefüggésben nagyon lényeges sajátosság a *termelési idő és a munkaidő különválása* a mezőgazdaságban, illetve a kézi munkaerő és a gépi munka felhasználás *idényszerűsége*. Az év bizonyos hónapjaiban az átlagosnál jóval nagyobbak lehetnek a kézi és a gépi munka iránti igények, a téli időszakokban pedig a dolgozók foglalkoztatása, illetve az eszközök kihasználása okoz problémát.

c) A mezőgazdaságban a *föld* az ipartól eltérően nem csupán a termelés általános feltétele, színhelye, hanem a legfontosabb munkatárgy és munkaeszköz is. A vállalat rendelkezésére álló termőföld és annak minősége objektív adottságot jelent, amelyhez a gazdaság alkalmazkodni kénytelen.

d) Az élő szervezetek és a föld különleges szerepe miatt az *éghajlati, időjárási tényezőknek* a mezőgazdasági termelésre gyakorolt hatása rendkívül nagy. Ebből eredően a mezőgazdasági termelést, ezen belül különösen a növénytermesztést nem lehet az iparihoz hasonló pontossággal és biztonsággal tervezni. Különleges figyelmet kell tehát fordítani az éghajlati tényezők előre nem látható változásaiból eredő bizonytalanság csökkentésére, nem szabad elmulasztani az időjárás-alakulás különböző lehetőségeinek a figyelembevételét.

e) A mezőgazdaságban a *társadalmi munkamegosztás színvonala elmarad az ipartól.* A mezőgazdasági vállalatok sokféle, egymástól eltérő minőségű termék előállításával foglalkoznak. A sokágú, vegyes termelés az általános és ennek megfelelően a termelési eszközök jelentős része is univerzálisan hasznosítható. Így a fejlesztési elképzelések kidolgozása során nagyszámú termelési és egyéb tevékenységet indokolt számításba venni.

f) Végül feltétlenül speciális körülménynek tekinthető a mezőgazdaságban a *szövetkezeti gazdaságok léte* és e vállalatoknál az adott taglétszám megfelelő foglalkoztatásának a követelménye, valamint a szövetkezeti formával együtt járó számos egyéb társadalmi-gazdasági sajátosság (bruttó jövedelem-érdekeltség, a jövedelmek rendkívüli mértékű differenciáltsága stb.) is.

A mezőgazdasági vállalati fejlesztés lineáris programozási modelljének ismertetése során elsősorban azokra a sajátos vonásokra fordítjuk a figyelmet, amelyek a mezőgazdaság fenti sajátosságaival függenek össze, és amelyek a más területeken alkalmazott modellekhez képest speciális megoldást igényelnek.

1. *A változók*

A mezőgazdasági vállalatok tevékenysége, mint már említettük, sokrétű. Ennek megfelelően a termelésfejlesztési modellben szerepelhetnek:

— növénytermelési,
— állattenyésztési,
— feldolgozó és egyéb kiegészítő tevékenységeket kifejező,
— értékesítési és beszerzési,
— valamint egyéb változók.

Növénytermelési változóként célszerű figyelembe venni a növénytermelés mindazon ágait, amelyek jövedelmező bevezetésére a gazdaságban lehetőség kínálkozik, függetlenül attól, hogy az a tervkészítés időpontjában a vállalatnál megtalálható-e vagy sem. (Amennyiben valamely növény fajtaváltozatai is számításba jöhetnek, ezeket külön növényként kezeljük.) Minden növénytermelési ágat annyi változó képviseli, *ahány talajtípuson és technológiával* végezhető a termelés (például, ha a Bezosztája búzafajta két talajtípuson és háromféle technológiával termelhető, úgy ezt a fajtát hat változó képviseli).

Állattenyésztési változót tenyésztési áganként annyit kell felvenni, *ahány féle épülettípus lehetséges és amennyi a tartási, takarmányozási lehetőségek száma.* (Például, ha a sertéshizlalás két különböző telepen folyik és kétféle új épülettípus megépítése jöhet számításba, valamint épülettípusonként a takarmányozás és tartás két megoldása képzelhető el, akkor nyolc sertéshizlalási változóra van szükség.)

A növénytermelési és az állattenyésztési változókat többféleképpen értelmezhetjük. Jelenthetik a növénytermelés és az állattenyésztés valamelyik ágát, vagy pedig a különböző végtermékeket. A növénytermelésben a két megoldás nem okoz nagy különbséget, az állattenyésztésben azonban a két szemlélet a modell két eltérő felépítéséhez vezet. A kérdésnek természetesen csak módszertani jelentősége van, az eredmények szempontjából közömbös, hogy melyik megoldást választják. A gazdaságokban ágazati rendszerben terveznek, és a ráfordításokat így is tartják nyilván, azért ezt a megoldást célszerűbb alkalmazni.

A változók következő csoportja *a feldolgozó és egyéb kiegészítő tevékenységek* méreteinek tervezésére szolgál. Az egyszerűbb, kisebb jelentőségű feldolgozó tevékenységek (például a tej lefölözése) beépíthetők a növénytermelési és az állattenyésztési változókba is. Általában azonban a termékek feldolgozása tetemesen növelheti a jövedelmet. Ezért a gazdaság meglevő eszközeivel vagy új beruházással elvégezhető feldolgozó tevékenységet helyes önálló elemként kezelni. Hasonlóan külön változók képviselik mindazokat a kiegészítő tevékenységet is (például bérmunkákat, szállítást, javítást, építést stb.), amelyek a gazdaság számára jövedelmet hozhatnak.

Az értékesítési és beszerzési változók segítségével az értékesítés és beszerzés különféle lehetőségeit építjük be a modellbe. Értékesítési változóra csak az olyan termékeknél van szükség, amelyeket a gazdaságon belül is felhasználnak, de egy részüket a gazdaság el is adhatja. Az értékesítési változók megbonthatók, ha a jövedelem nagysága az eladás irányától is függ. Beszerzési változókra csak a felhasznált mezőgazdasági eredetű anyagokkal, illetve felnevelt állatokkal kapcsolatban van szükség, amennyiben ezek gazdaságon belüli előállítása is és megvásárlása is lehetséges, és dönteni kell a termelés és vásárlás között.

A modellben az említetteken kívül *egyéb változókra* is szükség lehet. Így oldható meg például a különböző traktortípusok egymással való helyettesítése. Változókkal kell jelképezni azokat a termelési tényezőket is, amelyeknek igénybevételét a fejlesztési program határozza meg (például, ha egy gazdaságban elegendő munkaerő van, azaz a szükséges létszám biztosítható, és a felesleg szabadon elbocsátható, olyan változókat kell beállítani, amelyek az egyes időszakok munkaerő-szükségleteit képviselik). Végül számos változóra lehet szükség számítástechnikai okokból is.

A változók kiválasztásával összefüggésben kell döntenünk *a mértékegységről** is. Ez a termelési tevékenységek sokszínűségével összefüggő módszertani probléma, amely a számítási eredményeket nem befolyásolja. De a mértékegységek jó megválasztása mégis nagyon fontos, mert jelentősen csökkentheti a feladat megkonstruálásának időigényét. A kérdés tehát az, milyen mértékegységekben fejezzük ki a változókat úgy, hogy a technikai koefficiensek kidolgozása minél könnyebb legyen.

A változók egységnyi mérete jellemezhető forintban vagy természetes mértékegységben, de felhasználhatók a termelési méret kifejezésére alkalmas egyéb mérőszámok is (például kh., évi átlagos állatlétszám, 1 db állat stb.). A modellhez szükséges adatok megszerzése akkor jár a legkisebb munkaráfordítással, ha az egyes mértékegységeket a vállalat tervezési és nyilvántartási rendszerével összhangban választjuk ki. A mezőgazdaságban a termelési ágakat termelő-

* Például, ha a növénytermelési változók mértékegysége a kh. ez azt jelenti, hogy ezekre eredményként kh-ban kifejezett számokat kapunk, illetve a technikai koefficiensek és a célfüggvény konstansai 1 kh-ra vonatkoztatott mennyiségek.

egységek szerint tervezik. Ennek megfelelően indokolt tehát a mértékegységeket is meghatározni.

Amennyiben a változók első csoportját (a növénytermelési tevékenységeket) x-szel jelöljük, a további csoportokat pedig (az állattenyésztési változókat) y-nal, (a feldolgozó és kiegészítő tevékenységeket) z-vel, (a beszerzési és értékesítési tevékenységeket) u-val, és (az egyéb változókat) v-vel, a változók jelölési rendszere a következő:

x_{def} = d-edik növényfajta e-edik technológiai variánsának területe kh-ban a gazdaság f-edik talajtípusán, illetve területrészén (az azonos növények különféle fajtáit külön növényeknek tekintjük), ahol
$d = 1 \ldots l$; l = a modellben szereplő növényfajták száma;
$e = 1 \ldots m$; m = a technológiai variánsok száma növényenként;
$f = 1 \ldots n$; n = a figyelembe vett talajtípusok, illetve területrészek száma.

y_{gh} = a g-edik állattenyésztési tevékenység mérete évi átlagos létszámban kifejezve a h-adik típusú istállóban, az annak megfelelő tartási és takarmányozási körülmények között, ahol
$g = 1 \ldots p$; p = az állattenyésztési tevékenységek száma;
$h = 1 \ldots q$; q = a modellben szereplő tartási lehetőségek száma állatfajonként.

z_i = i-edik feldolgozó vagy egyéb kiegészítő tevékenység mérete a tevékenység jellegének megfelelő mértékegységben, ahol
$i = 1 \ldots r$; r = a feldolgozó és kiegészítő tevékenységek száma a modellben.

u_j = a j-edik kereskedelmi tevékenység (beszerzés vagy értékesítés) volumene q-ban, db-ban, Ft-ban vagy egyéb mértékegységben, ahol
$j = 1 \ldots s$; s = a kereskedelmi tevékenységek száma.

v_k = a k-adik egyéb tevékenység mérete a tevékenységnek megfelelő mértékegységben, ahol
$k = 1 \ldots t$; t = az egyéb tevékenységek száma.

2. *A korlátozó feltételek*

A fejlesztési terv alakulására befolyást gyakorló tényezők száma a mezőgazdasági termelés sajátosságaiból eredően rendkívül nagy. Minden összefüggést, hatást természetesen a lineáris programozás alkalmazása esetén sem lehet figyelembe venni, mint ahogy a hagyományos tervező munkában sem teszik meg ezt. A matematikai modellben a fejlesztési programot komolyabb mértékben befolyásoló, tehát a tervezés szempontjából meghatározó jelentőségű összefüggések szerepelnek.

a) A rendelkezésre álló *gépek, felszerelések, szállítóeszközök, a meglevő épületek* a mezőgazdasági vállalatoknál is fontos alakítói a fejlesztési lehetőségeknek. Ezeket illetően a más területeken felhasznált modellekben alkalmazott megoldásokhoz hasonlóan kell eljárni. Korlátozó feltételként figyelembe vehetők a fontosabb gépek, eszközök kapacitásai, beépíthető a különböző géptípusok közötti helyettesítés lehetősége. Az idényszerűen használt gépek kapacitásait célszerű időszakonkénti bontásban megadni. Hasonló jellegűek a meglevő tárolóhelyekre vonatkozó korlátozó feltételek is A mezőgazdasági vállalatok speciális épületei az állati férőhelyek. A rendelkezésre álló állattartási épületek kapacitásai megszabják az új beruházások nélküli állattartás volumenét:

$$\sum_{g=1}^{p} i_{gh} y_{gh} \leq I_h$$

Ahol:

i = egységnyi állattenyésztési tevékenység igénye a h-adik típusú férőhelyre,
I_h = a h-adik férőhelytípus kapacitása.

A meglevő állati férőhelyekkel kapcsolatban gyakran szükség lehet a minimális kihasználás mértékének az előírására is.

b) *Az anyaggazdálkodási összefüggések* több korlátozó feltételt tesznek szükségessé. A termeléshez felhasznált anyagok jelentős része a szükséges mennyiségben és minőségben korlátlanul beszerezhető. Az ezekre vonatkozó korlátozást elegendő egyetlen feltételben forintra átszámítva megadni az anyagokra fordítható összeg rögzítésével. Az anyagok közül a mezőgazdaság sajátosságainak megfelelően kiemelten érdemes kezelni a műtrágyákat és a takarmányokat.

*A műtrágyák*kal kapcsolatban a nitrogén-, a foszfor- és a káliumtartalmú műtrágyák felhasználható mennyiségét rögzítjük a következő összefüggés szerint:

$$\sum_{d=1}^{l} \sum_{e=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} n_{\alpha\mathrm{def}} x_{\mathrm{def}} \leq N_\alpha$$

Ahol:

n_α = az egyes növénytermelési ágak igénye α fajta műtrágyából,
N_α = az α fajta műtrágyából rendelkezésre álló mennyiség.

Valamivel bonyolultabb a helyzet a *takarmányok*nál. A takarmánymérleg összefüggései a növénytermelés és az állattenyésztés ágait kapcsolják össze. A takarmánytermelés és -vásárlás lehetőségei, az állattenyésztési ágak igényei mellett számolni kell a takarmányok értékesítésével is. A takarmányvásárlásra felhasználható pénzösszeget külön is érdemes korlátozni. A takarmánymérleg matematikai megfogalmazása:

$$\sum_{g=1}^{p} \sum_{h=1}^{q} t_{\beta gh} y_{gh} - \sum_{d=1}^{l} \sum_{e=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} t_{\beta\mathrm{def}} x_{\mathrm{def}} + \sum_{j=1}^{s} t_{\beta j} u_j = 0$$

Ahol:

$t_{\beta\mathrm{def}}$ = az egyes növénytermelési ágak egy kh-ra vetített termelése a β takarmányféleségből,
$t_{\beta gh}$ = egységnyi állattenyésztési tevékenységek igénye a β takarmányból,
$t_{\beta j}$ = a kereskedelmi tevékenységek egységnyi volumene által biztosított ($t_{\beta j} < 0$) vagy elvont ($t_{\beta j} > 0$) β fajta takarmány.

c) A korlátozó feltételek következő csoportját a fejlesztési program legfontosabb *munkaerőgazdálkodási összefüggés*eit kifejező egyenlőtlenségek, illetve egyenletek alkotják. A termelőszövetkezetekben és az állami gazdaságokban az év minden részében meghatározott élőmunka-mennyiség áll rendelkezésre. Nyilvánvaló, hogy csak olyan fejlesztési program valósítható meg, amelynek munkaerő-igénye összhangban áll a lehetőségekkel. A munkaerő-kapacitások különösen a termelőszövetkezetekben befolyásolhatják a fejlesztési döntéseket. Ez esetben a modellbe be kell építeni az igénybe vehető munkaerő felső korlátját és a tagság bizonyos mértékű foglalkoztatásának követelményét is. Elképzelhető azonban az is — elsősorban a mezőgazdaság állami szektorában —, hogy az igényeket kielégítő munkaerő mindig rendelkezésre áll. Ilyenkor a munkaerőgazdálkodási korlátozó feltételekben a munkaerő-kapacitások nem konstans felső korlátként szerepelnek, hanem mint változók, amelyeknek az értékei megfelelnek az egyes időszakokban jelentkező igényeknek. Bizonyos foglalkoztatottsági kötöttségekkel azonban ilyenkor is számolhatunk, mivel az időszakonkénti munkaerőfelhasználás túl nagy ingadozásai az állami gazdaságokban is komoly problémákat okozhatnak. Az utóbbi típusú munkaerő összefüggések általános alakja (az ilyen feltételből annyi szerepel a modellben, ahány időszakra a kézi munkaerő-felhasználás szempontjából az évet bontjuk):

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n} m_{\mathrm{def}}\, x_{\mathrm{def}} + \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q} m_{gh}\, y_{gh} + \sum_{i=1}^{r} m_i z_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s} m_j u_j + \sum_{k=1}^{t} m_k v_k - v_m = 0$$

Ahol:

m = az egyes tevékenységek egységnyi volumenének kézi munkaerő-igénye,

v_m = az összes kézi munkaerő-szükséglet.

d) A fejlesztési program szempontjából nagy jelentőségű a *beruházási lehetőségek* alakulása. A rendelkezésre álló beruházási keretet elegendő csupán pénz formában feltüntetni, ha emögött rendelkezésre áll az építőipari kapacitás és a szükséges anyagot, gépet, felszerelést meg lehet vásárolni. A valóságban azonban legtöbbször az építési és beszerzési lehetőségek is korlátozzák a beruházási döntéseket. A beruházások megfelelő szerepeltetése a mezőgazdasági modelleknél is nagyon lényeges kérdés, bár meg kell jegyezni, hogy itt a beruházások korántsem olyan kizárólagos meghatározói a fejlesztésnek, mint az iparban.

e) A mezőgazdasági termelés egyik legfontosabb tényezője a termőföld. Éppen ezért a mezőgazdasági vállalati fejlesztési modellek fontos részét képezik a *földdel kapcsolatos* feltételek.

Mindenekelőtt elő kell írnunk, hogy a növénytermesztés egészének volumene nem haladhatja meg a rendelkezésre álló földterület nagyságát és a minőségi megoszlásból eredő lehetőségeket. Képletben kifejezve:

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m} x_{\mathrm{def}} \leq T_f$$

Ahol:

T_f = az f-edik talajtípus (területrész) nagysága.

A gazdaság földterületének különböző részei az eltérő fizikai, kémiai, fekvésbeli adottságokból eredően más és más feltételeket biztosítanak a növénytermelés számára. A talajtani adottságok bizonyos termelési ágak maximális méretét is eleve meghatározhatják. Tegyük fel, hogy a k-adik növényfajta a h-adik talajtípuson termeszthető, ez esetben:

$$\sum_{e=1}^{m} x_{keh} \leq T_h$$

Ahol:

T_h = a h-adik talajtípus területének nagysága.

Az öntözhető földterület megszabja az öntözéses technológiák alkalmazásának lehetőségét. (Az öntözési kapacitások talajtípusonként is megbonthatók.) Az öntözési kapacitásokra vonatkozó korlátozás, feltételezve, hogy valamennyi növényfajtánál az e-edik az öntözéses technológia, általános alakja:

$$\sum_{d=1}^{e} \sum_{f=1}^{n} x_{\mathrm{def}} \leq \text{Ö}$$

Ahol:

Ö = az öntözhető terület nagysága.

A talaj termőerejének fenntartása minden mezőgazdasági vállalatnál fontos követelmény. A műtrágya-felhasználás hazánkban elért viszonylag magas szintjén sem nélkülözhetők teljesen a szerves trágyák. Ma még a legtöbb gazdaságban szükség van szervestrágyázásra is. Ehhez a trágyát az állattenyésztési ágak adják, vagy pedig vásárolni kell. A szervestrágya-szükséglet fedezése a következő feltétellel oldható meg:

$$\sum_{g=1}^{p} \sum_{h=1}^{q} f_{gh}\, y_{gh} + u_f = F$$

Ahol:

f = egységnyi állattenyésztési tevékenység által biztosított szervestrágya-mennyiség,

u_f = a vásárolt ($u_f > 0$) vagy értékesített ($u_f < 0$) szerves trágya mennyisége,

F = szervestrágya-szükséglet.

f) A mezőgazdaság természeti technológiai sajátosságai miatt a modellben nagyszámú olyan feltételt is szerepeltetni kell, amelyek a legfontosabb *biológiai, agronómiai* jellegű megkötöttségeket fejezik ki.

A növénytermelés egyes ágainak méretét bizonyos esetekben szabályozni kell, mert:

— gazdaságaink jelentős része még nem áll a kemizálás, a műtrágya-felhasználás olyan fokán, hogy a vetési sorrendet, mint a talajerő fenntartásának fontos tényezőjét teljesen figyelmen kívül hagyhatná;

— a kártevők, valamint az időjárás előre nem látható ingadozásai elleni védekezés érdekei is meghatározhatnak bizonyos ágazati arányokat.

A biológiai-feltételek főbb típusai a növénytermelés területén:

— a d-edik növényféle területének korlátozása:

$$\sum_{e=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} x_{\mathrm{def}} \lesseqgtr B$$

Ahol:

B = a d-edik növényféle agronómiai kötöttségek által meghatározott legkisebb vagy legnagyobb területe;

— a d-edik növényféleség e-edik technológiájának alkalmazására vonatkozó előírás:

$$\sum_{f=1}^{n} x_{\mathrm{def}} \lesseqgtr C$$

Ahol:

C = az e-edik technológia alkalmazásának agronómiai szempontból megkövetelt maximális vagy minimális mérete;

— a d és a $d+1$ növényféleség közötti összefüggés:

$$\sum_{e=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} x_{\mathrm{def}} - \sum_{e=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} b x_{(\mathrm{d}+1)\mathrm{ef}} \lesseqgtr 0$$

Ahol:

b = a d és a $d+1$ növényféleség biológiai sajátosságok miatt feltétlenül megkövetelt arányát kifejező koefficiens.

*Az állattenyésztés*ben a biológiai összefüggések még bonyolultabbak. Az állatállomány tervezett szaporulati és állományváltozási adatai alapján (milyen időszakot tölt egy állat az egyes kor és hasznosítási csoportokban, milyen arányú az elhullás és kiselejtezés stb.) az állatvásárlási lehetőségeket figyelembe véve meg kell fogalmazni:

— a tenyésztés, a növendéknevelés és a hizlalás összefüggéseit;

— a kiselejtezett tenyészállomány pótlásának követelményeit.

Amennyiben feltételezzük, hogy a g, a $g+1$ és a $g+2$ állattenyésztési tevékenységek egy azonos állatfajon belül a tenyésztést, a továbbtenyésztésre történő növendéknevelést és a hizlalást szimbolizálják, az állattenyésztés biológiai jellegű feltételeinek főbb típusai a következők:

— a saját szaporulat felnevelésének előírása:

$$\sum_{h=1}^{q} q_1 y_{gh} - \sum_{h=1}^{q} q_2 y_{(g+1)h} - \sum_{h=1}^{q} q_3 y_{(g+2)h} \leq 0$$

Ahol:

q_1 = egységnyi tenyészállat szaporulata,

q_2, q_3 = a növendéknevelés és a hizlalás állatigényét kifejező koefficiensek;

— a kiselejtezett tenyészállatok pótlására vonatkozó feltétel:

$$\sum_{h=1}^{q} p_1 y_{gh} - \sum_{h=1}^{q} p_2 y_{(g+1)h} + u_p = 0$$

Ahol:

p_1 = a tenyészállat kiselejtezés arányszáma,

p_2 = egységnyi növendéknevelés által felnevelt tenyészállat,
u_p = vásárolt ($u_p < 0$) vagy értékesített ($u_p > 0$) tenyészállatok száma
— a növendéknevelési lehetőség felső határának rögzítése:

$$-\sum_{h=1}^{q} q_2 y_{(g+1)h} + \sum_{h=1}^{q} K y_{gh} + u_k = 0$$

Ahol:

K = tenyészcélú növendéknevelésre alkalmas állatok aránya az össszes szaporulaton belül,
u_k = növendéknevelésre alkalmas vásárolt ($u_k > 0$) vagy eladott ($u_k < 0$) állatok száma;
— a hizlalás, a növendéknevelés és az állatvásárlások (eladások) összefüggése:

$$\sum_{h=1}^{q} q_1 y_{gh} - \sum_{h=1}^{q} q_2 y_{(g+1)h} - \sum_{h=1}^{q} q_3 y_{(g+2)h} + u_k + u_h = 0$$

Ahol:

u_h = hizlalásra vásárolt ($u_h > 0$) vagy eladott ($u_h < 0$) állatok száma.

g) Végül mérlegelni kell *egyéb megkötöttségeket* is. Ezek a gazdaság valamilyen speciális adottságát, értékesítési, gazdaságpolitikai vagy más kötöttségét fejezhetik ki (pl. a halmozott bruttó termelési érték bizonyos szintjének, meghatározott mennyiségű kenyérgabona megtermelésének stb. az előírása.)

3. *A célfüggvény*

A lineáris programozási feladat célfüggvénye a modellben megfogalmazott probléma megoldását meghatározó gazdasági célkitűzés matematikai kifejezése. Modellünk célfüggvényét tehát a távlati fejlesztés alapvető gazdasági céljának megfelelően kell kiválasztani.

Először azt kell tisztázni, hogy a gazdaság a fejlesztési időszakban mit tekint fő gazdasági céljának és melyik közgazdasági kategória maximalizálása vagy minimalizálása fejezi ki ezt legjobban. E kérdést a gazdaság társadalmi-gazdasági sajátosságai és ezen belül elsősorban anyagi érdekeltségi rendszere döntik el.

Állami gazdaságainkban a jelenlegi irányítási és anyagi érdekeltségi rendszerben a vállalati érdek a minél nagyobb tömegű nettó jövedelem (vállalati eredmény) eléréséhez kapcsolódik. A gazdaságfejlesztés alapvető célja tehát a tiszta jövedelem lehetőségekhez mérten maximális mértékű növelése, vagyis a *nettó jövedelem maximálása*.

A termelőszövetkezetekben megítélésünk szerint az egy tagra eső bruttó jövedelem maximális mértékű növelése a gazdaságok központi törekvése. Ennek megfelelően a termelőszövetkezetek fejlesztésére vonatkozó számításoknál a *bruttó jövedelem maximálásáé* az elsőbbség. A bruttó jövedelem tömegének a maximumához kapcsolódó fejlesztési program — mivel a földterület és a taglétszám a termelőszövetkezetekben viszonylag állandó — az adott gazdaságokban egy kh-ra és egy tagra vonatkoztatva is maximális bruttó jövedelmet ad.

A célfüggvény a következő általános alakban írható fel:

$$\sum_{d=1}^{l} \sum_{e=1}^{m} \sum_{f=1}^{n} J_{\mathrm{def}} x_{\mathrm{def}} + \sum_{g=1}^{p} \sum_{h=1}^{q} J_{gh} y_{gh} + \sum_{i=1}^{r} J_i z_i + \sum_{j=1}^{s} J_j u_j +$$

$$+ \sum_{k=1}^{t} J_k v_k = \max!$$

Ahol:

J = az egyes tevékenységek egységnyi volumenéhez tartozó bruttó vagy nettó jövedelem összege.

4. *A véletlen tényezők hatásának csökkentése*

A matematikai módszerrel számított optimális fejlesztési program a modell összeállításánál figyelembe vett ár- és hozamadatoktól és kapacitásoktól függ. A termelés természeti-technológiai sajátosságai, az időjárás különleges szerepe, valamint az árak előre nem látható mozgása miatt a mezőgazdaságban a tervek több variánsa egyaránt reálisnak tekinthető. Megalapozott döntés csak együttes mérlegelésük alapján hozható. A matematikai módszerek is csak akkor adhatnak igazán segítséget a mezőgazdaság vezetőinek, ha mód van a fejlesztési program minél több változatának a kiszámítására.

A modell összeállításánál ismertnek tekintett költség- és ár-, de különösen a hozamadatok a valóságot csak durván közelítik, hiszen nagy eltérésekkel lehet számolni. A tervezettől eltérően alakulhat a rendelkezésre álló kapacitások nagysága is. Válaszolnunk kell arra, hogyan érintik ezek a változások az optimális programot, meddig tekinthető optimálisnak a fejlesztés egy variánsa és melyek a változások fő tendenciái. Ez a probléma az alapmodellhez kapcsolódó *érzékenységi vizsgálatokkal* oldható meg.

Az érzékenységi vizsgálatok nagymértékben megnövelik a fejlesztéssel kapcsolatos ismereteinket, csökkentik a véletlen tényezőkkel kapcsolatos bizonytalanságot. Megteremtik annak a lehetőségét, hogy a gazdaság vezetői szinte teljes egészében figyelembe vegyék a feltételek megváltoztatásában rejlő lehetőségeket és ennek alapján hozzák meg végső döntésüket.

5. *A modell alkalmazásának tapasztalatai*

Az előzőekben ismertetett modell alapján dolgoztuk ki az *Orosházi Állami Gazdaság fejlesztési tervét.* A munka tapasztalatai egyértelműen bebizonyították, hogy a lineáris programozás nagyban segítheti a mezőgazdasági vállalat tervező munkáját is, és a korábbiaknál pontosabb tervet állíthatunk össze.

A modell megoldása révén kapott eredmények közvetlenül megadták a gazdálkodás optimális fejlesztési programjának legfontosabb elemeit, mégpedig:

a) a termelés legkedvezőbb szerkezetét, vagyis

— az árunövénytermelés összetételét;
— az állattenyésztés szerkezetét, az egyes állattenyésztési ágak méretét;
— az állattenyésztéshez kapcsolódó takarmányozási programot;
— a mezőgazdasági termelést kiegészítő feldolgozó és egyéb tevékenységek méretét;

b) az értékesítendő feldolgozatlan és a gazdaságon belül feldolgozott növényi és állati termékek mennyiségét, az értékesítendő állatok számát, valamint a fontosabb vásárlások (takarmányok, hízóalapanyag stb.) volumenét, tehát a gazdaság *értékesítési és beszerzési programját;*

c) a növénytermesztés technológiai fejlesztésének fő irányait, a növénytermelési ágakban szóba jövő technológiai megoldások közül a legkedvezőbb változatokat, illetve a különböző technológiai variánsok optimális arányait;

d) az állattenyésztésben alkalmazandó *tartási módokat* és a legkedvezőbb *épülettípusokat;*

e) a *földhasznosítás optimális programját,* tehát a növénytermesztési ágaknak, illetve azok technológiai variánsainak az elosztását a gazdaság talajtípusai között;

f) a *pénzeszközök legésszerűbb felosztási módját* a növénytermelés, az állattenyésztés és a feldolgozó, valamint az egyéb tevékenységek között;

g) A rendelkezésre álló *erőforrások felhasználási területeit* és kihasználásuk mértékét;

h) az optimális termelési programhoz kapcsolódó *munkaerő-, vonóerő-, műtrágya- és takarmánymérleget;*

i) a *realizálható vállalati eredmény* (bruttó vagy nettó jövedelem) *maximális nagyságát* és a halmozott bruttó termelési érték szintjét.

Az érzékenységi vizsgálatok során (összesen 19 tervváltozatot számítottunk ki) tisztáztuk a legfontosabb változó tényezők várható ingadozásainak a hatásait is.

(Beérkezett: 1969. VI. 5.)

IRODALOM

[1] Csete, L.—Tóth, B.: A takarmánytermelés és az állattenyésztés arányainak és szerkezetének meghatározása a lineáris programozás segítségével. Gazdálkodás, 1963. 4. sz.

[2] Heady, E. O.: A tervezési, döntési eljárások, valamint a környezet szintézise. 1968. június 24. és júl. 4. között Keszthelyen tartott Nemzetközi Szemináriumon elhangzott előadás. (Kézirat.)

[3] Heady, E. O.—Candler, W.: Linear Programming Methods, Iowa State College.

[4] Kravcsenkó, R. G. :Ökonometrikus modellek alkalmazása a mezőgazdasági üzemek tervezésében és irányításában. 1968. jún. 24. és júl. 4. között Keszthelyen tartott Nemzetközi Szemináriumon elhangzott előadás. (Kézirat.)

[5] Kornai, J.: A gazdasági szerkezet matematikai tervezése. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[6] Krekó, B.: Matrix-számítás. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[7] Sebestyén, J.: Optimumszámítások alkalmazása a legkedvezőbb termelési szerkezet meghatározására. MTA Mezőgazdasági Üzemtani Intézet Közleményei, 1960. 19. sz.

[8] Sebestyén, J.: Matematikai módszerek alkalmazása a mezőgazdasági termelés szolgálatában. Budapest, 1962. Akadémiai Kiadó.

[9] Tóth, J.: A termelési szerkezet és a források optimumának meghatározása. Statisztikai Szemle, 1969. 5. sz.

DEVELOPMENT PLAN FOR AN AGRICULTURAL FIRM

The paper discusses a programming model which enables to work out the main features of agricultural firm's development plans. Its structure is essentially identical with those applied in the industry. In spite of this similarity, a fair deal of special problems arise. How to solve these problems, which come from the specific circumstances of agriculture, is the main concern of the author.

The activity of agricultural firms is many-sided. Correspondingly, the model contains *variables* which represent plant cultivation, animal husbandry, manufacturing and complementary activities, selling, purchasing and others.

Among the *constraints*, like in models applied to other branches, we find equations and inequalities expressing scarcity of machines, equipment, premises, investment funds, raw materials and manpower.

A special task is to formulate mathematically the constraints which refer to *land* and to *biological* relations due to the role played by living organisms in production. Therefore constraints which refer to the quality and quantity of land available, to the possibilities of irrigation and to maintaining the productive capacity of soil, all form important part of the model. Many constraints are necessary to express the proportions of plants required by crop rotation and for parasite control, as well as the fodder balance which connects plant cultivation and animal husbandry. The most interesting part of the model is the mathematical expression of the biological relations of animal husbandry, which control the interdependence among breeding, raising the young animals, fattening, selling and buying of animals and the complementing of the breeding stock.

In the *objective function* of the models of agricultural firms a distinction must be made according to differences in the incentive systems, and, therefore, with cooperative farms the gross income while with state-owned farms the net income is to be maximized.

The paper emphasizes the significance of sensitivity analysis in lessening the uncertainty due to the effect of random factors which are particularly numerous in agriculture. Finally, experiences with the practical application of the model are briefly summarized.

ПЛАН РАЗВИТИЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

В статье представляется модель линейного программирования, при помощи которой можно разработать основные взаимозависимости планов развития сельскохозяйственных предприятий. Построение моделей развития сельскохозяйственных предприятий в принципе соответствует конструкции моделей, применяемых для аналогичных целей в промышленности. Однако вопреки их существенной тождественности возникает и ряд специфических проблем. Автор детально оставливается именно на этих специфических решениях, связанных с условиями сельского хозяйства.

Деятельность сельскохозяйственных предприятий весьма многообразна. В соответствии с этим в модели фигурируют *переменные* относительно сбыта и закупок, переменные, выражающие деятельности по растениеводству, животноводству, обрабатывающие и прочие дополняющие деятельности, а также прочие переменные.

В числе *ограничивающих условий* подобно применяемым в других областях моделям фигурируют имеющиеся в распоряжении машины, механизмы, средства транспорта, параметры имеющихся зданий, возможные капиталовложения, материалы, а также рабочая сила, в виде выражающих взаимозависимости равенств или же неравенств.

Специфическую задачу представляют собой математическая формулировка *биологических взаимозависимостей, связанных с землей* и с ее ролью в производстве живых организмов. Таким образом, важное место занимают в модели ограничивающие условия, фиксирующие количество и качество имеющихся в распоряжении земель, устанавличающие границы орошаемого производства и обеспечивающие поддержании плодородия почвы. Включения ряда ограничивающих условий требуют также пропорции растениеводства, обусловливаемые севооборотом и защитой от вредителей, а также взаимозависимости баланса кормовых, связывающего между собой отрасли растениеводства и животноводства. Наиболее интересную часть описываемой модели представляет собой математическое выражение биологических взаимозависимостей животноводства, в рамках которого определяются взаимосвязи между разведением, воспитанием молодняка, откормом и продажей, а также закупкой скота и птицы, и, кроме того, требования по замене племенных животных.

В *целевой функции* моделей развития сельскохозяйственных предприятий следует в соответствии с их материальной заинтересованностью предписывать максимизацию валового дохода — в производственных кооперативах и чистого дохода — в государственных хозяйствах.

Автор подчеркивает в статье, насколько важно исследование т. н. *чувствительности* при сокращении неопределенности, связанной с воздействием случайных факторов, имеющих место в сельском хозяйстве особенно часто. В заключении кратко обобщается и опыт практического применения модели.

Ujlaki Zsuzsa

Hosszú távú többperiódusos összevont (B_2) programozási modell

Magyarországon néhány korábbi kísérlettől eltekintve az elmúlt két évben indult meg a hosszútávú (15—20 éves) tervezés. A munka egyik legfontosabb célkitűzése, hogy megfelelő időhorizontot biztosítva a középtávú (ötéves) tervezés számára, megalapozottabbá tegye az ötéves tervezés keretén belül szükséges döntéseket.

A hosszútávú tervezésnek még kevés tudományos és irodalmi támpontja van; módszerei általában kialakulatlanok, és ezen belül a matematikai módszerek ugyancsak a kutatás stádiumában vannak. A munka tehát világszerte útkereső, kísérletező jellegű.

Jelenleg, amikor első ízben kíséreljük meg az 1971—85. évekre vonatkozó tizenötéves terv kidolgozásánál a matematikai módszerek alkalmazását, érthető módon az ötéves tervezésben nyert modellezési tapasztalatokra támaszkodunk. Ez nem jelentheti természetesen az ötéves tervezési módszerek vagy modellek egyszerű átvételét. A hosszútávú tervezés jellege és módszerei mások, tehát mások a modellekkel szemben támasztott követelmények is [1], [2], [5], [7], [8]. Mégis úgy gondoljuk, a már kipróbált és többé-kevésbé bevált modelleket érdemes a hosszútávú tervezés szemszögéből felülvizsgálni, és megkísérelni e követelményeknek megfelelő átalakításukat, módosításukat.

A hosszútávú tervezés céljaira nem egyetlen modellt kívánunk kidolgozni, hanem egy egész „modell-családot". A modell-család egyes tagjai a statikus és dinamikus Leontief-modellek körébe tartoznak [3]. Mások közülük lineáris programozási modellek. [4], [9], [10]. Az utóbbiak több változatban készülnek.

Előreláthatólag lesznek viszonylag részletes ágazati modellek, amelyeket a többszintű tervezés módszereivel kapcsolnak össze népgazdasági modellekké. Ezen kívül készülnek kevésbé részletes, összevont modellek is.

A B_2 modell, amelyet ismertetek, a modell-család egyik tagja. Az ötéves tervezésben már alkalmazott, egyetlen tervperiódusra vonatkozó összevont népgazdasági programozási modellre (az ún. B_1 modell) épül. [12]

E cikkben a magyar gyakorlati alkalmazás céljaira kidolgozott konkrét modellt ismertetem és csak egy későbbi tanulmányomban szeretném összehasonlítani azt néhány más, rokon modellel (pl. L. V. Kantorovics, Kornai J., A. Mann, R. Eckhaus modelljeivel).

Az 1966—1970. és 1971—1975. évek [12], [13] ötéves terveinek előkészítésénél felhasznált modell a tervperiódus utolsó évi termelését és külkereskedelmi struktúráját programozza. A periódus alatt végbemenő beruházások ágazatközi elosztását a záróév termelési struktúrájához kapcsolva oldja meg anélkül, hogy a beruházási javakat termelő ágazatok termelése és a népgazdaság egészének beruházásigénye közötti kapcsolatokat figyelembe venné.

A többperiódusos B_2 modell az egyperiódusos B_1 modell továbbfejlesztését jelenti.

A modellnek természetesen nem az a hivatása, hogy 15—20 évre előre cselekvési programot adjon, hanem, hogy felmérje a soron következő öt év tartósabb következményeit, illetve a távolabbi jövő igényeit a közelebbi jövővel szemben. *A többperiódusos aggregált programozási modell feladata a közeli és távoli jövő kölcsönhatásainak elemzése.*

A modell közgazdasági alapgondolatai

A modell több — jelenlegi alkalmazásakor 3—4 (egyenként ötéves) tervperiódust fog át. Egy-egy tervperiódus modellje külön is életképes. Alkalmas arra, hogy kiszámítsuk vele például az 1971—75. éves időszak, vagy az 1981—85. évi időszak tervét. Ugyanakkor a négy modell összekapcsolható, s így egyetlen nagyméretű modellel számítható az egész húszéves korszak programja.

A t-edik ötéves tervperiódus ($t = 1, 2, 3, 4$) feltételi rendszerének általános formája:

$$(1) \qquad \begin{cases} A\,x(t) \leq b(t) \\ x(t) \geq 0 \\ c\,x(t) \rightarrow \max! \end{cases}$$

Feltételezzük, hogy a t-edik periódus korlátvektora, $b(t)$ a megelőző periódus programjától függ:

$$(2) \qquad b(t) = f[x(t-1)]\,.$$

Ezt a függést kétféleképpen vehetjük figyelembe. Az egyik lehetőség: a modellen kívül, azaz *exogén* módon vezetjük le a $b(t)$ korlátvektor minden egyes komponensét. Az egyes periódusok modelljét tehát közvetlenül nem egyesítjük, nem kapcsoljuk össze egy egységes húszéves modellé. A kapcsolódást csupán a (2) reláció modellen kívüli, ,,kézi'' érvényesítése biztosítja.

Ennek az eljárásnak az az előnye, hogy figyelembevehetők a (2) intertemporális reláció nem-lineáris összefüggései is.

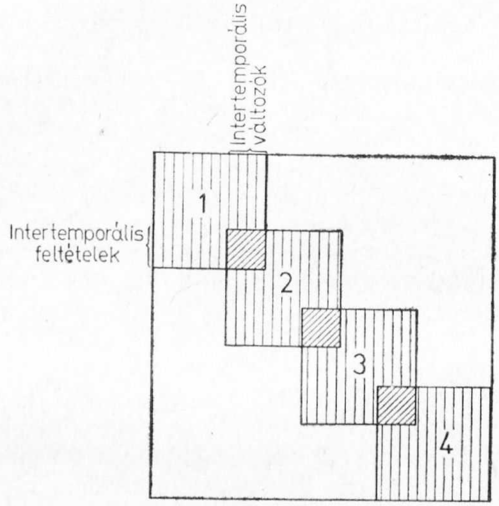
A másik lehetőség: egyesítjük egyetlen modellé a négy periódus külön blokkjait. Ehhez az kell, hogy a (2) intertemporális relációt a következőképpen linearizáljuk:

$$(3) \qquad b(t) = b_0(t) + B\,x(t)\,,$$

ahol a jobboldalon szereplő első tag, $b_0(t)$, a korlátvektornak exogén adott, a korábbi periódus programjától nem függő összetevője, a második tag pedig az előző periódus programjától függő összetevő.

Amennyiben a (3) szerinti linearizálást alkalmazzuk, úgy a periódusok közti kapcsolatokat *endogén* módon, a modellen belül kezelhetjük. Ezt mutatjuk be az alábbi ábrán, amely az összekapcsolt blokkok közös együttható-matrixának struktúráját szemlélteti.

A négy blokk: a négy periódus modellje. A függőlegesen csíkozott kockák átlósan, sarkaiknál fedik egymást. A sűrűn csíkozott kis kockák: az intertemporális kapcsolatok blokkjai, itt szerepelnek az intertemporális feltételek. Intertemporális feltételeknek nevezzük azokat az összefüggéseket, amelyekben egyaránt szerepelnek a t-edik és a $(t+1)$-edik periódus változói.[1] A t-edik periódus beruházási tevékenységei például megteremtenek olyan kapacitásokat, amelyek a $(t+1)$-edik periódusbeli termelő tevékenységek kapacitás korlátai lesznek. A modellben folyamatosan bővíteni kívánjuk az intertemporális feltételek körét.



1. ábra.

Az ábrán szemléltetett struktúra esetleg átalakítható a szabványos kétszintű struktúrára. Ez esetben felhasználható a kétszintű programozás bármely egzakt vagy közelítő dekompozíciós algoritmusa [6], [15]. Lehetséges azonban, hogy előnyösebb lesz kihasználni a matrix speciális szerkezetét és kifejezetten erre a feladatra kidolgozott eljárást alkalmazni. A probléma vizsgálata folyamatban van.

A B_2 modell egy-egy periódushoz, s ezen belül egy-egy ágazathoz többféle technológiát rendel, amelyek különböznek egymástól részben műszaki megoldásban, részben pedig a korábbi periódusok állóalapjaihoz való viszonyukban.

Ismeretesek többperiódusos modellek, amelyek periódusonként eltérő, de egy perióduson belül ágazatonként egységes, átlagos technológiai koefficienseket használnak. Azaz például az i-edik ágazatnak az l-edik ágazattól igényelt termékfelhasználását az a_{li} (1975), a_{li} (1980), a_{li} (1985), a_{li} (1990) koefficienssorozat adja meg.

A B_2 modellben másképp járunk el. Egy-egy technológiához az időben állandó koefficiensek tartoznak, viszont periódusról periódusra változhat a technológiák súlya, részaránya aszerint, hogy a program milyen arányban

[1] Ilyen intertemporális feltételek pl. a (7) és (15—16) feltételek.

kombinálja a különböző technológiákat. A t-edik periódusban az i-edik ágazatnak az l-edik ágazattól igényelt fajlagos termékfelhasználását a következőképpen kapjuk meg:

$$(4) \qquad a_{li}(t) = \frac{\sum\limits_j a_{lij} x_{ij}(t)}{\sum\limits_j x_{ij}(t)},$$

ahol $x_{ij}(t)$ az i-edik ágazatnak a j-edik technológiával folytatott termelése a t-edik periódusban.

A (4) képlet bal oldalán szereplő ágazati átlagos együttható nem jelenik meg közvetlenül a modellben, amelyben csupán a képlet jobb oldalán olvasható, technológiánként eltérő együtthatók szerepelnek.

Nézetem szerint a választott megoldás kedvező a technikai fejlődés tervezése szempontjából. Az ágazati átlagos technológiai koefficiens ugyanis nem eleve elrendelt nagyság, hanem attól függ, hogy milyen beruházásokkal fejlesztjük az ágazatot, milyen ütemben vezetjük be az új technológiát.

Ez közgazdaságilag azt a feltevést foglalja magában, hogy a technikai fejlesztés a gépek, felszerelések, általában az állóalapok műszaki összetételének változásában testesül meg (Embodied technological progress). A feltevés jogosságát alátámaszthatja, hogy az állóalapok összetételének változása az egyéb technikai feltételek (anyagfelhasználás struktúrája és javuló anyagfajlagosok, munkaerő minőségi összetétele) változását is maga után vonzza.

Az ágazatonkénti technológiai variánsok három fő típusba sorolhatók:

1. típusú technológiák: a periódus kezdetén már fennálló kapacitáson változatlan technológiával folyó termelés. Ez a periódus alatt csupán az állóalap egyszerű fenntartásához szükséges bruttó beruházási ráfordításokat igényli.

2. típusú technológiák: a periódus kezdetén már fennálló kapacitáson módosított technológiával folyó termelés. A módosítás jelentheti a régi géppark részleges vagy teljes kicserélését, az épülettér bővítését, szűk keresztmetszetek feloldását, a gyártás energiafelhasználásának korszerűsítését stb. Az ilyen akciók a tervperiódus alatt a régi állóalapok puszta fenntartásán túlmenő beruházási ráfordításokat is igényelnek. A beruházási akciók végeredményben a termelés ráfordításainak megváltozásához és esetleg a termelés extenzív bővüléséhez is vezetnek. Az alternatíváknak ezt a típusát röviden „rekonstrukció"-nak nevezzük.

3. típusú technológiák: a periódus kezdetén még nem létező, a periódus alatt létrehozott kapacitáson folyó termelés. Az ilyen akciók a tervperiódus alatt „új" beruházási ráfordításokat igényelnek.

Az 1. típusú technológiából az első periódusban ágazatonként csak egy-egy szerepelhet. Ezzel szemben az 1. típushoz a további periódusokban, valamint a 2. és 3. típushoz valamennyi periódusban ágazatonként több változó is tartozhat. A 2.1., 2.2., 2.3., ... változók a rekonstrukciók különböző változatait, a 3.1., 3.2., 3.3., ... pedig a teljesen új létesítmények különböző műszaki megoldásait képviselik.[2]

[2] Jelölésünkben a továbbiakban nem teszünk különbséget 1, 2, 3 technológián belüli műszaki variánsok között, noha valójában feltételezzük ezek létezését.

Lényegesnek érezzük a három fő típus megkülönböztetését. A hosszútávú tervezés egyik fő problémája: mennyire determinálja a tervidőszak kezdetén működő állóalap, a történelmileg örökölt induló állapot a további fejlődést, illetve a gazdaság növekedésének további menete mennyire szakadhat el kiinduló struktúrájától. Ebből a szempontból lényeges az induló állománytól függő 1. és 2. típusú változók megkülönböztetése az induló állománytól független 3. típusú változóktól.

A többperiódusos modellek (köztük például a dinamikus Leontief-modell) rendszerint teljes tőke-matrixokat használnak fel, amelyek azt adják meg, hogy az i-edik ágazat termeléséhez mennyi olyan termelési alapot használnak fel, amely az l-edik ágazatból ered. A B_2 modell ettől az eljárástól két szempontból tér el:

— nem a termelési alap igénybevételét, tőkelekötést vesz számításba, hanem beruházásokat, azaz a termelési alapnak a tervperiódus alatti bruttó növekményét;

— kiemeljük a beruházási ráfordítások közül azokat, amelyek a gépiparból és építőiparból erednek. Ez számszerűsíthető a legmegbízhatóbban, s amúgy is ez teszi ki a beruházások zömét. Az egyéb ágazatokból származó beruházási ráfordítások forrásainak ágazatok szerinti tagolására csak kevéssé megbízható becsléseket adhatnánk.

A modellben az egyes periódusokon belüli dinamika kezelésének módszere hasonlít az összevont egyperiódusos modellnél alkalmazotthoz. Azaz az utolsó tervév termelési struktúráját programozzuk, s ehhez kapcsolódik a tervperiódus alatti beruházási tevékenység. Itt sem tekintjük a modell döntési problémájának a beruházások időbeni elosztását, ütemezését a tervperióduson belül.

A modell leírása

A modell tevékenység-változói

$x_{ij}^{(t)}$ = az i-edik szektor üzemeltetése a t-edik periódus utolsó évében, a j-edik technológiával; valamint az üzemeltetéshez szükséges állóalap fenntartása a tervperiódus alatt. A változó tehát két tevékenység együttesét reprezentálja; egy termelési tevékenységet a záróévben és egy bruttó beruházási (fenntartási) tevékenységet a tervperiódus alatt. A változó mértékegysége: a záróévi termelés értéke forintban. Az első periódusra, $t = 1$-re csak $j = 1$ van értelmezve. Viszont a 2., 3. stb. tervperiódusra $j = 1, 2, 3$. A többi tervperiódusban ugyanis lehetséges fenntartással változatlan szinten tartani és tovább üzemeltetni olyan rekonstruált vagy teljesen új állóalapot is, amelyek rekonstrukciója vagy újonnan való létesítése a korábbi tervperiódusokban ment végbe.

$y_{ij}^{(t)}$ = az i-edik szektor üzemeltetése a t-edik tervperiódus záróévében, a j-edik technológiával; valamint az üzemeltetéshez szükséges állóalap beruházással való megteremtése a tervperiódus alatt. A változó itt is két tevékenységet reprezentál, egy termelési tevékenységet a záróévben és egy bruttó beruházási tevékenységet a tervperiódus alatt. A változó mértékegysége: a záróévi termelés értéke forintban. Ez a változó minden tervperiódusra csupán $j = 2, 3$-ra van értelmezve.

A változó tartalmának definíciójából következik, hogy a csupán fenntartást igénylő 1. technológiára nem értelmezhető.

Az x és y típusú változók közti kapcsolat akkor válik majd teljesen világossá, amikor a modell intertemporális kapcsolatait, a periódusok összekapcsolását írjuk le.

Összefoglalva talán csak annyit jegyzünk itt meg, hogy az x típusú változó (bármely technikát reprezentálja is) a bruttó beruházási erőforrásokból *csak* fenntartási költséget, az y típusú (2.—3. technikára értelmezve) *csak* beruházási költséget igényelhet. Az x és y típusú változók az egyes tervperiódusokban az alábbiak szerint értelmezhetők:

Változó	Tervperiódus	
	$t = 1$	$t > 1$
x_1	×	×
x_2	0	×
x_3	0	×
y_1	0	0
y_2	×	×
y_3	×	×

× = van 0 = nincs

A feltételek leírásakor, a szummázások indexhatárainak megadásakor már nem fogunk külön utalni arra, hogy $x_{ij}^{(t)}$ és $y_{ij}^{(t)}$ mely t-kre és j-kre nincs értelmezve; ezt a fenti definíciók alapján ismertnek tekintjük.

$q_{ik}^{(t)}$ = az i-edik szektor termékével versenyző kompetitív import a t-edik periódus záróévében, a k-adik piacról. Mértékegység: rubel, illetve dollár.

$p_{ik}^{(t)}$ = az i-edik szektor termékének exportja a t-edik periódus záróévében, a k-adik piacra. Mértékegység: rubel, illetve dollár.

A modell indikátor-változói

Indikátor-változónak nevezzük a modellnek azon változóit, amelyek nem valamely ágazat termelési, beruházási vagy külkereskedelmi tevékenységét írják le, hanem a népgazdaság valamely aggregált, makro-mutatóját, indikátorát (pl. összes fogyasztás, összes felhalmozás) reprezentálják. A modellben elfoglalt helyét illetően ez esetleg valamely feltétel maradék-, illetve túlteljesítési változója is lehet.

$r_h^{(t)}$ = többletfogyasztás a t-edik periódus záróévében. Mértékegysége: forint. A modell korlátvektorában konstansként adjuk meg — a végső felhasználás egyik tételeként — a lakossági és közületi fogyasztás előírt minimumát. Az e fölötti többletet reprezentálja r, amelyeknek összetételére H számú alternatív struktúrát adunk meg; a h index ezen struktúrák sorszámára utal.

$z^{(t)}$ = többletfelhalmozás a t-edik tervperiódus alatt, a korlátvektorban előírt, alsó korlátként megszabott színvonal felett. Mértékegység: forint.

$\sigma_k^{(t)}$ = a k-adik főpiac fizetési mérlegének többletegyenlege, a korlátvektorban előírt nem negatív kötelező egyenleg felett. Mértékegység: rubel, illetve dollár.

$\omega^{(t)}$ = létszámtartalék; munkaerőmegtakarítás a létszám felső korlátjához képest. Mértékegység: fő.

A modell korlátozó feltételei

A termékmérleg a záróévre

$$\sum_{j=1}^{3} \bar{a}_{lj} x_{lj}^{(t)} + \bar{b}_{lj} y_{lj}^{(t)} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} \sum_{j=1}^{3} (a_{lij} x_{ij}^{(t)} + b_{lij} y_{ij}^{(t)}) +$$

$$+ \sum_{k=1,2} (d_{lk} q_{lk}^{(t)} - e_{lk} p_{lk}^{(t)}) - \sum_{h=1}^{H} \delta_{lh} r_h^{(t)} - \mu_l z^{(t)} = D_l^{(t)} \tag{5}$$

$$l = 1, \ldots, n$$

A fenti képletben szereplő a_{lij} és $\bar{a}_{lj}$, illetve b_{lij} és $\bar{b}_{lj}$ koefficiensek levezetése a következő:

A gépiparban és építőiparban[3] ($l = 1, i \neq 1$), ($l = 2, i \neq 2$)

$$a_{1ij} = \gamma_1 \alpha_{1ij} + g_{1ij} \qquad \bar{a}_{1j} = 1 - \gamma_1 \alpha_{1lj} - g_{1lj}$$

$$b_{1ij} = \gamma_1 \beta_{1ij} + g_{1ij} \qquad \bar{b}_{1j} = 1 - \gamma_1 \beta_{1lj} - g_{1lj}$$

A többi ágazatban ($l = 3, \ldots, n,\ i \neq l$)

$$a_{lij} = g_{lij} \qquad \bar{a}_{lj} = 1 - g_{llj}$$

$$b_{lij} = g_{lij} \qquad \bar{b}_{lj} = 1 - g_{llj}$$

ahol

g_{1ij} = az i-edik szektor input koefficiense az l-edik szektor termékéből a j-edik technológia alkalmazása esetén. Mértékegység: Ft/Ft.

α_{1ij} = az i-edik szektorban a záróévben a j-edik technológiával folytatott termelés egységére eső igény; mégpedig az egész tervperiódus alatt felmerült állóalap-fenntartási tevékenységhez szükséges kompetitív (hazai termelésből és kompetitív importból fedezhető) gépek iránti igény. Az α_{1ij} koefficiens eszerint egy évi outputhoz öt évi inputot rendel hozzá; a fenntartáshoz szükséges kompetitív gépszükségletet.

β_{1ij} = az i-edik szektorban a záróévben a j-edik technológiával folytatott termelés egységére eső igény; mégpedig az egész tervperiódus alatt felmerült állóalap-létesítési, beruházási tevékenységhez szükséges kompetitív gépek iránti igény. A β_{1ij} koefficiens is, akárcsak α_{1ij} egy évi outputhoz ö tévi inputot rendel hozzá. A különbség az, hogy α a kizárólag fenntartást igénylő az állóalapokat *konzerváló* típusú üzemeltetési változókhoz tartozik, míg β a beruházást igénylő, az állóalapokat fejlesztő y típusú változók koefficiense.

[3] A képletben csak a gépipari koefficiens levezetését adjuk meg.

γ_1 = a záróévbeli endogén bruttó beruházási gépigény részaránya a tervperiódus alatti endogén bruttó beruházási gépigényből. A $\gamma_{1,2}$ együttható alkalmazása azon az egyszerűsítő feltevésen alapul, hogy a gépipar felfutásának ütemezése a tervperiódus alatt független a programtól és kívülről adva van. Számszerű nagyságát a gépipar (és hasonlóképpen az építőipar) tényleges felfutásának statisztikailag megfigyelhető szabályosságai alapján becsüljük meg.

A modell végeredményben a következő, józannak tűnő közgazdasági megfontoláson alapul: kapcsolat van a beruházási igények zömét kielégítő gépipar és építőipar záróévi potenciálja és a tervperiódus alatti összes beruházási tevékenység között. Ha az említett két ágazat a záróévig kellő színvonalat elér, akkor ez többé-kevésbé biztosítja az eddig felmerülő igények kielégítését is, feltéve, hogy sikerül a felfutás ütemezését megfelelően előrebecsülni.

d_{lk} = import devizaárfolyam az l-edik szektorban, a k-adik piacra: Ft/rubel, illetve Ft/dollár.

e_{lk} = export devizaárfolyam az l-edik szektorban, a k-adik piacra: Ft/rubel, illetve Ft/dollár.

δ_{lh} = az l-edik szektor hozzájárulási részaránya a h-adik struktúrájú többletfogyasztáshoz.

μ_l = az l-edik szektor hozzájárulási részaránya a többletfelhalmozáshoz.

D_l = az l-edik szektor kibocsátása iránti exogén igény, mértékegysége: Ft. Ez megfelel annak, amit az input-output analízisben végső felhasználásnak nevezünk, a következő eltérésekkel: nem tartalmazza a záróévben végrehajtott endogén bruttó beruházást, az exportot és a többlet-életszínvonalat biztosító személyi és közületi fogyasztást. Viszont tartalmazza a záróévben végrehajtott, exogén adatként kezelt bruttó beruházást. Ez utóbbi az 1. és a 2. szektor termékmérlegében kizárólag a gépipari, illetve építőipari termékek nem termelő bruttó beruházási célra történő kibocsátását foglalja magában, míg a többi szektor termékmérlegében az exogén bruttó beruházás magában foglalja a záróév minden bruttó beruházási célra történő kibocsátását.

A gépipari szektor termékmérlege tehát az (5) képlet alapján, bizonyos átrendezéssel, az alábbiakat fejezi ki:

A gépipar összes kibocsátásának plusz a gépipari importnak együttesen fedeznie kell a termelő ágazatok folyó és beruházás jellegű gépipari eredetű ráfordításait, az exportot, a kötelezően előírt végső felhasználás, valamint a többletfogyasztás és/vagy a többletfelhalmozás gépszükségletét. A modellben ötévi beruházási kerettel számolunk, viszont az ötödik évi termelést programozzuk. A termékmérleg tehát csak az összes gépberuházás ötödik, záró évre jutó részét tartalmazza.

A bruttó beruházás korlátai

(6) $$\underline{B}^{(t)} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} (\eta_{ij} x_{ij}^{(t)} + \vartheta_{ij} y_{ij}^{(t)}) - z^{(t)} \leq \overline{B}^{(t)},$$

ahol

η_{ij} = az i-edik szektorban j-edik technológiával folytatott záróévi termelés egységére eső összes fenntartásigény az egész tervperiódusban (Ft/Ft).

δ_{ij} = az i-edik szektorban j-edik technológiával folytatott záróévi termelés egységére eső összes beruházásigény az egész tervperiódusban (Ft/Ft).

Az η és δ koefficiensek tartalma eszerint abban különbözik, hogy előbbieket azokhoz az x típusú változókhoz rendeljük hozzá, amelyek igénye már csak kizárólag az állóalap fenntartása az öt év alatt, míg utóbbiak a fejlesztő jellegű y típusú változókhoz tartoznak.

$\underline{B}^{(t)}, \bar{B}^{(t)}$ = a tervperiódus alatti összes bruttó beruházás alsó, illetve felső korlátja. Mértékegység: Ft. Ezeket gazdaságpolitikai megfontolások alapján kívülről adott nagyságúaknak tekintjük.

A gépipar és az építőipar felfutási korlátja

(7) $$\sum_{j=1}^{3} (x_{ij}^{(t)} + y_{ij}^{(t)}) \leq F_i^{(t)} \qquad i = 1,2$$

ahol

$F_i^{(t)}$ = a gépipari, illetve építőipari termelés felső korlátja a t-edik periódusban. Mértékegység: Ft.

A (6) feltételek gazdaságpolitikai oldalról korlátozzák a felhalmozási tevékenységeket, míg itt a felhalmozás szempontjából döntő jelentőségű két ágazat technikai-szervezési lehetőségeinek figyelembevételét reprezentáljuk. Bármennyi pénzt adnánk is a tervperiódus alatt ennek a két ágazatnak, bizonyos határnál feljebb semmiképpen nem emelhetnék a termelésüket.

Az $F_i^{(t)}$ felfutási korlátot a következőképpen határozhatjuk meg:

(8) $$F_i^{(t)} = \varphi_i \sum_{j=1}^{3} (x_{ij}^{(t-1)} + y_{ij}^{(t-1)}) \qquad i = 1,2$$

ahol φ_i a maximálisan elérhető felfutási arány.

Amennyiben az egyes periódusokat külön-külön, össze nem kapcsolt modellekkel számítjuk, úgy $F_i^{(t)}$ nagyságát a modellen kívül számítjuk ki, a (8) formula alapján, a $(t-1)$-edik periódusra kapott program alapján.

Amennyiben a periódusokat összekapcsoljuk, s a négy modellt egy modellé egyesítjük, úgy a (8) formulát behelyettesítjük (7)-be. Ez esetben csupán az 1. periódusra kell exogén módon rögzíteni az $F_i^{(t)}$ felfutási korlátok nagyságát.

Szektoronkénti külkereskedelmi korlátok

(9) $$p_{ik}^{(t)} \leq P_{ik}^{(t)} \qquad i = 1, \ldots, n;$$
$$q_{ik}^{(t)} \leq Q_{ik}^{(t)} \qquad k = 1, 2$$

ahol $P_{ik}^{(t)}$ és $Q_{ik}^{(t)}$ az export és az import piaci felső korlátai.

Fizetési mérlegek

$$(10)\qquad \sum_{i=1}^{n}(p_{ik}^{(t)}-q_{ik}^{(t)})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}s_{kij}(x_{ij}^{(t)}+y_{ij}^{(t)})-\sum_{h=1}^{H}\varrho_{kh}r_h^{(t)}-\sigma_k^{(t)}\geq S_k^{(t)}\qquad k=1,2$$

ahol

s_{kij} = a termelés nem-kompetitív importanyag ráfordítási együtthatója. Azonos s_{kij} koefficiens tartozik az x_{ij} és y_{ij} változókhoz. Feltételezzük ugyanis, hogy a kompetitív koefficiensekhez hasonlóan (g_{lij}), a t-edik periódusban üzembehelyezett kapacitáson folyó termelés nem kompetitív koefficiensei a $(t+1)$ periódusban is azonosak maradnak. Ugyanez a feltételezés vonatkozik a (11), (12) és (13) képlet koefficienseire is.

ϱ_{kh} = a h-adik struktúrájú többlet-életszínvonal nem-kompetitív importanyagköltség együtthatója.
Közgazdasági tartalma: a h-adik struktúrájú többlet-életszínvonal indikátor változójának exogén nem-kompetitív importanyagköltségének együtthatója, a k-adik piacon. Ezek tehát azok a többletfogyasztáshoz szükséges import anyagköltségek, amelyek nem mennek keresztül az exogén változókkal modellezett termelő szféra változóin. (Pl. déligyümölcs, személygépkocsi.)

Létszámkorlátok

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}(x_{ij}^{(t)}+y_{ij}^{(t)})+\omega^{(t)}=L^{(t)}$$

$$(12)\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\bar{\lambda}_{ij}(x_{ij}^{(t)}+y_{ij}^{(t)})\leq \bar{L}^{(t)}$$

ahol

λ_{ij} = a létszámkoefficiensek. Mértékegység: fő/Ft.
$L^{(t)}$ = a létszámkorlát. Mértékegység: fő.
$\bar{\lambda}_{ij}$ = a férfilétszám-koefficiensek. Fő/Ft.
$\bar{L}^{(t)}$ = a férfilétszám-korlát. Fő.

Bérek és jövedelmek korlátai

$$(13)\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\varepsilon_{ij}(x_{ij}^{(t)}+y_{ij}^{(t)})-\sum_{h=1}^{H}r_h^{(t)}\geq E^{(t)}$$

ahol

ε_{ij} = a termelési változók bérkoefficiensei.
$E^{(t)}$ = a termelésben keletkezett bérek és jövedelmek alsó határa. Ez gazdaságpolitikailag előírt nagyság. A program kioszthat ennél több jövedelmet, ha az r változókkal megteremti az ehhez szükséges többlet-árualapot.

Kapacitáskorlátok

Mielőtt a kapacitáskorlátokat megfogalmaznánk, vezessük be a következő jelöléseket:

$K_{i1}^{(1)}$ = a változatlanul konzervált induló állóeszközállomány kapacitáskorlátja, az 1. periódus záróévében.

$K_{i2}^{(1)}$ = az induló állóeszközállományon végrehajtott rekonstrukció nyomán kialakult új kapacitáskorlát az 1. periódus záróévében. $K_{i2}^{(1)}$ nagyobb $K_{i1}^{(1)}$-nél vagy egyenlő vele aszerint, hogy a rekonstrukció output-volumen bővítést tesz-e lehetővé vagy nem.

A két kapacitáskorlát hányadosaként a következő koefficienst képezzük:

$$\zeta_{i2}^{(1)} = \frac{K_{i1}^{(1)}}{K_{i2}^{(1)}} = \text{kapacitás változási koefficiens.}$$

E koefficiens felhasználásával fogalmazzuk meg az alábbi feltételt:

$$x_{i1}^{(t)} + \zeta_{i2}^{(1)} y_{i2}^{(t)} \leq x_{i1}^{(t-1)} \tag{14}$$

$$x_{i2}^{(t)} \leq x_{i2}^{(t-1)} + y_{i2}^{(t-1)} \tag{15}$$

$$x_{i3}^{(t)} \leq x_{i3}^{(t-1)} + y_{i3}^{(t-1)} \tag{16}$$

$$i = 1, \ldots, n \qquad t = 2, \ldots, T$$

Ha csak egy periódusra számolunk, azaz a modelleket nem egyesítettük, s ez az egy periódus történetesen éppen az első, úgy a (15) és (16) feltétel elesik. Ez esetben a (14) feltétel elegendő a kapacitások korlátozására.

Ha csak egy periódusra számolunk, s ez a második vagy annál későbbi periódus, akkor a (15), illetve (16) feltétel jobb oldalán szereplő tagok nem változók, hanem *konstansok* — értéküket az előző periódusokra végzett programozások eredményeiből vesszük át.

Több periódus együttes számítása esetén a (15)—(16) feltétel az itt megadott formában szerepel.

A fentiek azt a feltételezést tartalmazzák, hogy — a tervezett — 15—20 éves periódusban üzembehelyezett kapacitások ugyanezen időszakban nem igényelnek rekonstrukciót. A rekonstrukciós jellegű beruházást tehát csak a tervidőszak előtt létrehozott kapacitásokra értelmezzük.

A korlátozó feltételi rendszer áttekintésének befejezéséül szeretnénk visszatérni a periódusok összekapcsolásának problémáira. A modellben, annak jelenlegi, első változatában, kétféle intertemporális feltétel szerepel: a (7)—(8) felfutási korlátok és a (14)—(16) kapacitáskorlátok. Mindkét feltételcsoport ismertetésénél két variánst fejtettünk ki: mi a teendő akkor, ha a négy periódus modelljét nem egyesítjük, s mi a teendő akkor, ha egyesítjük őket. Első esetben az intertemporális összefüggéseket „kívülről" számítjuk ki, a második esetben beépítjük az egyesített modellbe.

A 6. oldalon közölt sémán sűrűn vonalkázott blokkok jelölik az intertemporális feltételek helyét. Itt szerepelnének tehát — egyesítés esetén — a (7)—(8) és (14)—(15)—(16) feltételek.

A modell továbbfejlesztésének eredményeképpen, későbbi, továbbfejlesztett változataiban valószínűleg sor kerül az intertemporális feltételek kibővítésére.

Célfüggvények

A következő alternatív „tiszta" célfüggvények alkalmazására kerülhet sor:

1. maximáljuk $z^{(t)}$-t, a többletfelhalmozást;
2. maximáljuk valamely meghatározott h_0-adik struktúrájú $r_{h_0}^{(t)}$ többletfogyasztási változót. Vagy pedig maximáljuk valamennyi alternatív struktúrájú többletfogyasztási változó súlyozott közepét:

$$\sum_{h=1}^{H} \pi_h r_h^{(t)} \rightarrow \max! \tag{18}$$

ahol

π_h az egyes alternatív struktúrák preferencia súlya;
3. maximáljuk a két fizetési mérleg valamelyikének a kötelező szint feletti többlet-egyenlegét, $\sigma_k^{(t)}$-t;
4. maximáljuk a létszámtartalékot, $\omega^{(t)}$-t. Ez gyakorlatilag nem a munkanélküliség maximálását jelentené, mert a munkaerő-megtakarítás realizálható munkaidő-csökkentésben, a nyugdíjkorhatár leszállításában stb.

Amennyiben teljes foglalkoztatottságot akarunk biztosítani a munkaidő és nyugdíjkorhatár fenntartása mellett, úgy az $\omega^{(t)}$ változót kiiktatjuk a modellből, vagyis előírjuk a globális létszámkorlát egyenlőségre való teljesítését.

Természetesen paraméteres programozások keretében mód lesz e „tiszta" célfüggvények kombinálására is.

A kutatás állása

A többperiódusos B_2 modell tényleges felhasználásában körülbelül a munka közepén tartunk. A modell elméleti előkészítését, szimbolikus formában való felírását elvégeztük.

A számításokat két szakaszban kívánjuk végrehajtani. Előreláthatólag mindkét szakaszban 1971—85-ös időszakra, vagyis három ötéves periódusra számolunk.

Az e l s ő szakaszban próbaszámításokat végzünk egy 20 szektoros modellel. Ebben a részletezettségben ugyanis rendelkezésünkre áll az első 1971—75. évekre vonatkozó technológiai együttható matrix. Minthogy a modell technológiai matrixában a többi két blokk is jórészt az első megismétlését jelenti, a próbaszámításokhoz rendelkezünk az adatok nagy részével. Hátra van még azonban azoknak az együtthatóknak a meghatározása, amelyek a 2. és 3. blokkban eltérnek az 1. blokkbelitől, továbbá a korlátvektorok számszerűsítése. Amint ezt elvégeztük, hozzákezdünk a számításokhoz. A modell 20 szektor és három periódus esetén, az intertemporális feltételeket is figyelembe véve, kb. 450—500 feltételt és 550—600 tevékenységváltozót tartalmaz. Terveink szerint az első próbaszámítások 1970 első felében készülnek el.

A m á s o d i k szakaszban (előreláthatólag 1970 második felében) végzendő számítások a hosszútávú tervezési bizottságok adataira épülnek.

Az állami szervek, intézmények és az ágazati szakértő bizottságok kidolgozzák a társadalmi-gazdasági fejlődés és a technikai fejlesztés egyes területeire vonatkozó alterntív feltevések, becslések egész sorát.

A metamatikai modellek nyelvére is „lefordítható", számszerűsített szakértői becslések szolgáltatják azt a számanyagot, amely kifejezi *az ágazati fejlesztések irányát*, a fejlesztés ágazati variációs lehetőségeit. Ezeket azután a központi modell népgazdasági szinten ütközteti és összehangolja.

Természetesen, amint azt már a bevezető is hangsúlyozta, egyetlen összevont, többperiódusos modell nem oldhatja meg a hosszútávú tervezés minden kérdését. Van azonban néhány közgazdasági összefüggés, amely jól elemezhető a modell segítségével:

Melyek a fogyasztás és felhalmozás arányának jellegzetes időbeli pályái?

Milyen legyen a beruházások ágazatközi megoszlása; mely ágazatokat fejlesszük gyorsabban és melyeket lassabban?

Milyen mértékű legyen a technikai fejlődés a különböző ágazatokban; milyen legyen az új és régi technika aránya?

Hogyan illeszkedjék be országunk a nemzetközi munkamegosztásba; milyen ágazatokban törekedjünk számottevő exportkapacitások létrehozására?

A lakossági fogyasztás, az életszínvonal-emelés különböző alternatív struktúráihoz és növekedési ütemeihez milyen termelési szerkezet, beruházási és felhalmozási politika tartozik.

Azt reméljük, hogy a többperiódusos, többtechnológiás, aggregált programozási modellel elvégzendő számítás-sorozat hasznos támpontokat ad majd a hosszútávú tervezéshez.

(Beérkezett: 1969. XI. 15.)

IRODALOM

[1] AUGUSTINOVICS, M.: A hosszútávú tervezés módszertanához; Közgazdasági Szemle, 1969. 10. sz. 1153—1167. p.

[2] AUGUSTINOVICS, M.: A hosszútávú tervezés kvantifikálásáról; Közgazdasági Szemle, 1969. 11. sz. 1269—1281. p.

[3] BRÓDY, A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 357. p.

[4] BOD, P.: A népgazdaság hosszútávú (15—20 éves) tervezésének egy lehetséges matematikai modelljéről; Szigma, 1969. II. évf. 1. szám. 59. p.

[5] CSAPÓ, L.: Népgazdasági tervezés és központi irányítás szabályozott piaci modellben; Közgazdasági Szemle, 1967. 9. sz. 1020—1034. p.

[6] DANTZIG, G. B.—WOLFE, P.: The decomposition algoritm for linear programs. Econometrica, 1959. 767—778. p.

[7] FRISS, I.: Gondolatok népgazdaságunk hosszútávú tervezéséről; Társadalmi Szemle, 1969. 9. 16—28. p.

[8] HETÉNYI, I.: A népgazdasági tervek nemzetközi összehangolása és a távlati tervezés; Közgazdasági Szemle, 1968. 1. sz. 10—20. p.

[9] KORNAI, J.: A többszintű népgazdasági programozás modellje; Közgazdasági Szemle, 1969. 1. sz. 54—69. p.

[10] KORNAI, J.: A többszintű népgazdasági programozás alkalmazásáról; Közgazdasági Szemle, 1969. 2. sz. 173—191. p.

[11] KORNAI, J.—LIPTÁK, T.: Kétszintű tervezés: játékelméleti modell és iteratív számítási eljárás népgazdasági távlati tervezési feladatok megoldására. A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, 1962. 4. sz. 577—621. p.

[12] KORNAI, J.—UJLAKI, L.-né: Összevont programozási modell alkalmazása az ötéves tervezésben; Közgazdasági Szemle, 1967. 5. sz., 552—565. p.

[13] UJLAKI, L.-né: Összevont programozási modell alkalmazása a IV. ötéves tervkoncepció kialakításában; Közgazdasági Szemle, 1969. 9. sz., 1033—1047. p.

A LONG-TERM MULTIPERIOD AGGREGATE PROGRAMMING MODEL

One of the most important purposes of long-term (15—20 years) planning is to provide a better foundation for the medium-term planning decisions.

This is the first time we experiment with the application of mathematical models in long-term planning. Most likely it is not a single model but a whole family of models which may yield answers to the intricate problems of long-term planning.

The model under discussion (B_2) is an improved variant of the model B_1 which was a single-period economy-wide planning model applied in five-year planning. The new model comprises several periods, five years each. The model of a single period is viable in itself. They can, however, be combined and e.g. a 20 year period can be calculated by a single large-scale model.

In model B_2 several techniques belong to each industry which differ either in the technology adopted or in the use of the fixed assets inherited from earlier periods. The model does not require a full investment matrix, but picks out the real investments stemming from the machine engineering industry and from the construction and only these are handled endogenously.

The periods are connected by intertemporal conditions.

Besides describing the model, the paper also gives ideas how to collect the data, what kind of problems may arise in the real calculations and what are the results to be expected.

ОБЪЕДИНЕННАЯ МНОГОПЕРИОДНАЯ МОДЕЛЬ ДОЛГОСРОЧНОГО ПЕРСПЕКТИВНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В Венгрии, не считая нескольких произведенных ранее экспериментов, долгосрочное планирование (на 15—20 лет) было начато в последние два года. Важнейшая задача этой работы — обоснование решений, принимаемых в рамках среднесрочного планирования, при обеспечении соответствующего горизонта времени.

Применение математических моделей в долгосрочном перспективном планировании экспериментировалось у нас впервые. При этом предполагалось, что на сложные и многообразные вопросы долгосрочного планирования можно дать ответы посредством применения целой сетьи моделей, а не одной единственной модели.

Представленная в статье модель B_2 является усовершенствованным вариантом модели народнохозяйственного программирования, (так называемой модели B_1), уже нашедшей применение при пятилетнем планировании и охватываюшей только один плановый период. Этой моделью охватывается несколько периодов, каждый по пять лет. Модели отдельных плановых периодов жизнеспособны и сами по себе. В то же время они могут быть объединены, в случае чего на единственной укрупненной модели могут быть произведены расчеты по двадцатилетнему периоду.

В модели B_2 к отдельным отраслям относятся различные технологии, отличающиеся друг от друга частью по своим техническим решениям, частью же в отношении использования основных фондов предыдущих периодов. Модель не требует употребления полной матрицы капиталовложений, а эндогенным образом учитывает лишь капиталовложения, происходящие из строительства и машиностроения.

Периоды связываются между собой посредством интертемпоральных условий.

В статье кроме описания модели даются соображения относительно базы данных; возможные проблемы, связанные с конкретными расчетами, и ожидаемые от них результаты.

Ténnyi György

Az adatsorozatok spektrálelemzésének általánosítása és alkalmazása

Nem újkeletű az a felismerés, hogy a nyers statisztikai adatsorozatok gyakran kiigazításra szorulnak, mert az adatsorozatokban rejlő többféle tendenciát, (nem mindig szigorúan) periodikus ingadozást el kell különítenünk egymástól, hogy jobban értékelhessük a szóban forgó adatsorozat jövőbeli alakulására gyakorolt hatásukat. Például a szezonális ingadozások olyan erősek lehetnek, hogy „elfedik" az összes többi tendenciát. Minthogy a szezonális ingadozások a legszembetűnőbbek, és ezek okozzák a legtöbb nehézséget, a „hagyományos", empirikus kiigazítási eljárások mind a szezonális ingadozásoknak a kiküszöbölésére szolgáltak. Kezdetben a spektrálelemzést is elsősorban úgy fogták fel, mint a szezonális ingadozások vizsgálatának egy sztochasztikusan megalapozott módszerét.

A spektrálelemzés hatósugara azonban — legalábbis elméleti erejét tekintve — jóval nagyobb ennél. Cikkünk célja, hogy nagy vonalakban ismertesse a spektrálanalízis néhány olyan alkalmazási területét, amelyről — úgy tűnik — nem esett még szó a magyar irodalomban. A problémakör egzakt matematikai tárgyalása iránt érdeklődő olvasónak Grenander és Rosenblatt [1] könyvét ajánljuk figyelmébe. Könnyen érthető, bár kevésbé pontos — és a nehezebb, hosszadalmasabb levezetéseket mellőző — tárgyalás található Granger és Hatanaka [2] monográfiájában, ebben viszont a szerzők nagy teret szentelnek a módszer közgazdasági alkalmazásaival kapcsolatos problémáknak is.

A spektrálelemzés alapjai ugyan hozzáférhetők magyarul [3], [4], [5], mégis a teljesség kedvéért itt is röviden összefoglaljuk őket.

Sztochasztikus folyamatnak nevezzük valószínűségi változók egy $\{x(t, w)\}$ összességét, ahol a t időparaméter valamely (t_1, t_2) intervallumban veszi föl értékeit, w pedig az eseménytéren fut végig. Egy ilyen folyamatnak lényeges jellemzője az $M(t)$ várható értéke és a $\sigma(t)$ szórása, továbbá az, hogy a különböző időpontokban felvett értékei között milyen szoros kapcsolat van. Ennek a kapcsolatnak a szorossága az alábbi ún. autokovariancia-függvénnyel definiálható

$$r(t, \tau) = M\left[\big(x(t, w) - M(t)\big)\big(x(t+\tau, w) - M(t+\tau)\big)\right].$$

Ha mármost két időpontra, t-re és $t+\tau$-ra vonatkozóan rendelkezésünkre áll egy-egy N elemű, független megfigyelésekből álló minta (legyenek ezek $x_i(t)$, ill. $x_i(t+\tau)$; $i = 1, \ldots, N$) akkor $r(t, \tau)$-ra a következő becslést írhatjuk föl:

$$\hat{r}(t, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [x_i(t) - M(t)] [x_i(t+\tau) - M(t+\tau)] .$$

Vagyis az átlagolást úgy kellene elvégezni, hogy t és τ értékét rögzítve, a kívánatos számú mintára átlagolnánk. Csakhogy a gazdasági adatsorozatok elemzésénél éppen az okozza az egyik fő problémát, hogy adott t értékhez igen sokszor csak egyetlen adatot tudunk megállapítani, mert a folyamatnak csak egyetlen megvalósulása létezik, vagy legalábbis csak egyet ismerünk. Pl. egy bizonyos évben adott országra vonatkozóan csak egy adatunk van a nemzeti jövedelemre. Viszont hosszabb-rövidebb *időszakra* vonatkozóan vannak adataink. Az ilyen adatsorozatot szokták — időbeli jellegére utalva — idősornak nevezni. Az idősort a mögötte rejlő sztochasztikus folyamat egyik realizációjának, magát a folyamatot pedig az adatsorozat generálójának nevezzük. Az $\{x(t, w)\}$ sztochasztikus folyamat generálta adatsorozatot $\{x(t); t = 1, \ldots, n\}$-nel jelöljük.

Az elmondottak miatt egyelőre csak azokkal az adatsorozatokkal fogunk foglalkozni, amelyeknél az *idő szerinti* átlagból tudunk következtetni az $r(t, \tau)$ értékére.

Ergodikusnak nevezünk egy $\{x(t, w)\}$ sztochasztikus folyamatot, ha négyzetes átlagban konvergens, azaz ha $t_1, t_2, \ldots \to t$, akkor

$$\lim_{n \to \infty} M[(x(t, w) - x(t_n, w))^2] = 0 .$$

Ismeretes (lásd pl. [6]-ot), hogy az idő szerinti és a mintasokaságra vonatkozó átlagolás felcserélhető az olyan ergodikus folyamatokra, amelyek kielégítik a következő feltételeket:

$$M[x(t, w)] = m,$$

$$M[(x(t, w) - m)^2] = \sigma^2$$

és
$$M[(x(t, w) - m)(x(t+\tau, w) - m)] = r(\tau),$$

tehát a várható érték, a szórás és az autokovariancia *független* az időtől. Az ilyen folyamatot gyengén vagy másodrendben stacionáriusnak szokás nevezni. Ekkor tehát $r(\tau)$ becslésére az alábbi formulát alkalmazhatjuk:

$$\hat{r}(\tau) = \frac{1}{n - \tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} [x(t) - m] [x(t+\tau) - m] . \tag{1}$$

Az eddigiekben előlegeztük, hogy az autokovariancia-függvénynek fontos szerepe van az adatsorozatok elemzésében. Ahhoz azonban, hogy rátérhessünk arra, miben is áll ez a szerep, be kell vezetnünk néhány új fogalmat.

Mielőtt valóságos, tapasztalati adatsorozatokkal kezdenénk foglalkozni, vegyük a következő „mesterséges" sztochasztikus folyamatot:

$$x(t, w) = \sum_{j=1}^{k} w_j \cos \omega_j t$$

ahol ω_j-k valós számok, w_j-k pedig független valószínűségi változók ($j = 1, 2, \ldots k$), továbbá

$$M[w_j] = 0, \qquad M[w_j^2] = \sigma_j^2 \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

és

$$M[w_i w_j] = 0, \qquad \text{ha } j \neq i$$

Az $x(t, w)$ sztochasztikus folyamat minden egyes $w_j \cos\omega_j t$ alakú tagja egy $\frac{\omega_j}{2\pi}$ frekvenciájú, azaz $\frac{2\pi}{\omega_j}$ periódusú és w_j – tehát véletlen – amplitudójú periodikus függvény.

Látható, hogy

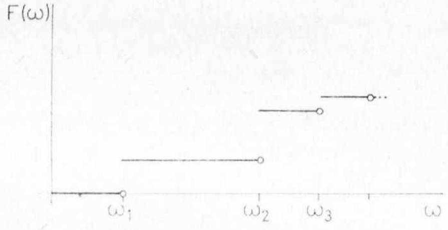
$$M[x(t, w)] = 0,$$

$$r(\tau) = M[x(t, w)\, x(t + \tau, w)] = \sum_{j=1}^{k} \cos\omega_j t \cdot \sigma_j^2$$

és ez utóbbi így is írható:

(2) $$r(\tau) = \int_0^{\pi} \cos\tau\omega \, dF(\omega),$$

ahol $F(0) = 0$ és innen kezdve $F(\omega)$ lépcsőzetesen növekszik az előre rögzített ω_j helyeken σ_j^2 értékkel, amíg el nem éri a $\sum_{j=1}^{k} \sigma_j^2$ értéket. (Lásd az 1. ábrát.)



1. ábra.

Az $F(\omega)$ függvényt a folyamat „spektrális eloszlásfüggvényének" nevezzük. Vegyük észre, hogy a (2) egyenlet összefüggést állít fel a szóban forgó speciális folyamat esetében az $r(\tau)$ és az $F(\omega)$ függvény között.

Mármost, ha sem k értékét, sem pedig az w_j valószínűségi változókat nem rögzítjük előre, akkor igen sokféle adatsorozatot generálhatunk, sőt [7] alapján tudjuk, hogy ha az $F(\omega)$ függvényről nem kötjük ki, hogy lépcsős függvény legyen, hanem csak annyit kívánunk meg, hogy $\frac{F(\omega)}{\Sigma\sigma_j^2}$ eloszlásfüggvény legyen – azaz monoton nem-csökkenő, $F(0) = 0$, $F(\pi) = \Sigma\sigma_j^2$ – akkor igaz, hogy *minden* $x(t, w)$ gyengén stacionárius sztochasztikus folyamathoz található olyan – a fenti osztályba tartozó – $F(\omega)$ függvény, hogy

(3) $$r(\tau) = 2\int_0^{\pi} \cos\omega \, dF(\omega)$$

továbbá találhatók olyan $u(\omega)$ és $v(\omega)$ valószínűségi változók, hogy

$$x(t, w) = 2 \int_0^\pi \cos t\,\omega\, du(\omega) + 2 \int_0^\pi \sin t\,\omega\, dv(\omega)\,; \tag{4}$$

ahol

$$\begin{aligned} &M[(u(\omega_1 + \Delta\omega) - u(\omega_1))(u(\omega_2 + \Delta\omega) - u(\omega_2))] = \\ &= M[(v(\omega_1 + \Delta\omega) - v(\omega_1))(v(\omega_2 + \Delta\omega) - v(\omega_2))] = \\ &= \begin{cases} 0, \text{ ha } (\omega_1 + \Delta\omega, \omega_1) \text{ és } (\omega_2 + \Delta\omega, \omega_2) \text{ diszjunkt;} \\ F(\omega + \Delta\omega) - F(\omega), \text{ ha } \omega_1 = \omega_2 = \omega\,; \end{cases} \end{aligned} \tag{5a}$$

illetve

$$M[(u(\omega_1 + \Delta\omega) - u(\omega_1))(v(\omega_2 + \Delta\omega) - v(\omega_2))] = 0 \tag{5b}$$

$$0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi.$$

Vagyis minden gyengén stacionárius folyamat végtelen sok frekvenciából összetevődöttnek fogható fel, amelyeknek amplitúdója a (5a) és (5b) tulajdonságokkal rendelkező — úgynevezett ortogonális — valószínűségi változó és minden egyes frekvencia két — egymáshoz képest $\pi/2$ fáziskülönbségű — komponensre bontható.

A továbbiakban olyan sztochasztikus folyamatokkal foglalkozunk, amelyeknek létezik a

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = f(\omega)$$

egyenlettel definiált ún. *spektrális sűrűségfüggvényük* (röviden spektrumuk), ahol $f(\omega)$ abszolút folytonos függvény.

Az ilyen folyamatokra a (3) egyenlet a következő alakot ölti:

$$r(\tau) = 2 \int_0^\pi \cos \tau\omega\, f(\omega)\, d\omega. \tag{3'}$$

Mármost az $f(\omega)$ függvényt jól felhasználhatjuk a sztochasztikus folyamatok vizsgálatára. Ha ugyanis egy adatsorozatban periodikus ingadozások vannak, akkor az őt generáló sztochasztikus folyamat $f(\omega)$ spektruma a megfelelő $\omega_1, \omega_2, \ldots$ frekvenciáknál a közvetlen környezethez képest többé-kevésbé kiugró csúcsértékeket vesz föl, az ingadozás erősségétől függően.

A Fourier-transzformáció elmélete szerint (3') formális inverziójával a következőt kapjuk:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[r(0) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} r(j) \cos j\omega\right] \tag{6}$$

Ha most az adatsorozat rendelkezésünkre álló elemei $x_1, x_2, \ldots, x_n$, akkor ezekből (1) alapján elkészítve az $\hat{r}(\tau)$ becsléseket és (6)-ba behelyettesítve, az

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\hat{r}(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \hat{r}(j) \cos j\omega\right] \tag{7}$$

becslés adódik. Világos, hogy véges sok adat alapján nem lehet ω minden értékére becslést adni, hanem $f(\omega)$-nak csak alkalmasan megválasztott intervallumokra vonatkozó átlagait becsülhetjük. A (7) formulával azonban van egy további nehézség is. Ismeretes ugyanis (lásd pl. [8] 52. és kk.) hogy [7] torzítatlan becslése ugyan [6]-nak, de nem konzisztens (tehát várható értéke $f(\omega)$-val egyenlő, de szórása nem tart zérushoz, ha $n \to \infty$).

Ez a nehézség vezetett ahhoz, hogy [7] helyett a következő alakú becsléseket kezdjék vizsgálni:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\hat{r}(0)\,\lambda_0(\omega) + 2\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j(\omega)\, r(j) \cos \omega j\right], \tag{7'}$$

ahol $m < n$.

A $\{\lambda_i(\omega),\ i = 0, 1, \ldots, m-1\}$ súlyfüggvények alkalmas megválasztásán múlik a becslés jósága. Leggyakrabban a Tukey—Hanning-féle súlyfüggvényeket $\left\{\lambda_i(\omega) = 1 + \cos\frac{\pi i}{m}\right\}$ alkalmazzák. Ha ezt a súlyfüggvényt írjuk (7′)-be, a kapott becslés nem lesz ugyan torzítatlan, de a torzítás megbecsülhető, és a legtöbb esetben elhanyagolható.

Ha mármost a spektrumot valamilyen (ω_1, ω_2) intervallumban akarjuk behatóbban tanulmányozni, vagy ellenkezőleg, ki akarunk küszöbölni valamely frekvenciát vagy frekvenciasávot, amely zavarja a lappangó tendenciák felismerését, ezt az ún. szűrők segítségével tehetjük meg.

Szűrőnek nevezzük az adatsorozatok következő alakú lineáris transzformációit:

$$y(t) = L[x(t)] = \sum_{-m}^{m} a_j x_{t+j}, \text{ ahol } a_j \text{ valós szám.}$$

Bebizonyítható, hogy az $y(t)$ adatsorozat spektruma

$$f_y(\omega) = f_x(\omega)\, g^2(\omega),$$

ahol

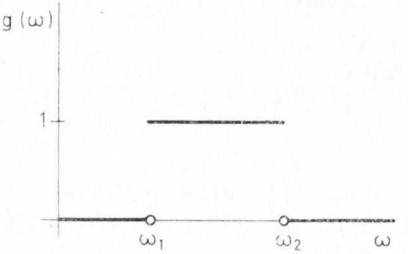
$$g(\omega) = a_0 + 2\sum_{j=1}^{m} a_j \cos \omega j\,,$$

$g(\omega)$-t nevezzük transzferfüggvénynek. Ha mármost valamilyen (ω_1, ω_2) intervallumot akarunk részletesen megvizsgálni, olyan szűrőre volna szükségünk, amelynek transzferfüggvénye

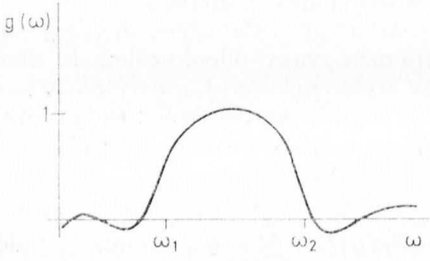
$$g(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

(lásd a 2. ábrát). Mivel azonban ilyen transzferfüggvénnyel bíró rövid szűrő nincs, olyan szűrőkkel kell megelégednünk, amelyeknek transzferfüggvénye a 3. ábrán látható. Ekkor az okoz problémát, hogy ha az (ω_1, ω_2) intervallum közelében a spektrumnak kiugró csúcsa van, a szűrő ezt nem küszöböli ki teljesen, hiszen transzferfüggvényének értéke ott nem azonosan nulla. Az ebből eredő „szivárgást" figyelembe kell venni.

Mivel célunk itt csupán az eljárás elvi vázának az ismertetése, nem térünk ki a becslésekkel kapcsolatos többi kérdésre (konfidencia-intervallumok stb.). Annyi azonban az eddigiek alapján is világos, hogy megbízható becsléseket csak olyan nagyszámú adat birtokában készíthetünk, amennyi a gazdasági adatosorzatok esetében nem mindig áll rendelkezésünkre. Ha pl. éves adatokat



2. ábra.



3. ábra.

kell vizsgálnunk, kevés olyan adatsorozat létezik, amely 60–100 éven keresztül birtokunkban van, és jó közelítéssel stacionáriusnak nevezhető. Elsősorban tehát a sűrűbb adatsorokra lehet ebből a szempontból számítani.

Az adatsorozatok közötti összefüggések

A spektrálelemzés nemcsak egyetlen adatsorozat vizsgálatára alkalmas, hanem arra is, hogy két adatsorozat összefüggésének „finomszerkezetét" felderítsük vele. A spektrálelemzés fogalmainak ehhez szükséges általánosítását Granger [2] tárgyalásmódját követve a következőkben adjuk meg:

Legyen $x(t, w)$ és $y(t, z)$ két gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat, ahol t az időparaméter, w és z pedig valószínűségi változó, és legyen ezenkívül az is igaz, hogy ha m_x, ill. m_y jelöli az $x(t, w)$, ill. az $y(t, z)$ folyamat várható értékét, akkor

$$M\left[\left(x(t, w) - m_x\right)\left(y(t + \tau, z) - m_y\right)\right] = r_{xy}(\tau)\,, \tag{8}$$

tehát a kovariancia szintén csak a szóban forgó időpontok *különbségétől* függjön.

Mint említettük, a „gyengén stacionárius" tulajdonság voltaképpen azt jelenti, hogy az adatsorozatok generáló folyamata mögött rejlő szabályszerűségek nem változnak a vizsgált időtartam folyamán; a (8) feltétel ehhez lényegében azt teszi hozzá, hogy a két idősor közötti összefüggés is változatlan.

Fölírva $x(t, w)$ és $y(t, z)$ Cramér-féle előállítását:

$$x(t, w) = \int_0^\pi \cos t\omega \, du_x(\omega) + \int_0^\pi \sin t\omega \, dv_x(\omega)$$

$$y(t, w) = \int_0^\pi \cos t\omega \, du_y(\omega) + \int_0^\pi \sin t\omega \, dv_y(\omega);$$

ebben az esetben érvényes a következő:

$$r_{xy}(\tau) = \int_0^\pi \cos(\tau\omega)\, c(\omega)\, d\omega + \int_0^\pi \sin(\tau\omega)\, q(\omega)\, d\omega, \tag{9}$$

ahol

$$M[du_x(\omega_1)\, du_y(\omega_2)] = M[dv_x(\omega_1)\, dv_y(\omega_1)] =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ ha } \omega_1 \neq \omega_2 \\ 2c(\omega)\, d\omega, \text{ ha } \omega_1 = \omega_2 = \omega, \end{cases} \tag{10a}$$

$$M[du_x(\omega_1)\, dv_y(\omega_2)] = -M[du_y(\omega_1)\, dv_x(\omega_2)] =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ ha } \omega_1 \neq \omega_2 \\ 2q(\omega)\, d\omega, \text{ ha } \omega_1 = \omega_2 = \omega. \end{cases} \tag{10b}$$

A (9), (10a) és (10b) egyenletek a következőképpen értelmezhetők: a $c(\omega)$ függvény a két folyamat azonos fázisban levő, ω frekvenciájú komponensének a kapcsolatára jellemző, $q(\omega)$ a $\pi/2$ fáziskülönbségű komponensek összefüggését méri; a különböző frekvenciájú komponensek között pedig nincs korreláció. Tehát pl. ha valamilyen adott $x(w, t)$ és $y(z, t)$ esetében $c(\omega_0) \neq 0$ és $q(\omega_0) = 0$, ez azt jelenti, hogy a két folyamat ω_0 frekvenciájú komponense között van korreláció, és hogy pontosan azonos fázisban vannak. Ha $q(\omega_0)$ sem zérus, akkor a két folyamat ω_0 frekvenciájú komponense között valamekkora fáziskülönbség is van. Vagyis két stacionárius folyamat összefüggése *kimerítően* leírható úgy is, hogy minden frekvenciára megadjuk, az azonos frekvenciájú komponensek közötti összefüggést.

Az $x(t, w)$ és $y(t, z)$ sztochasztikus folyamat közötti összefüggést a

$$C(\omega) = \frac{c^2(\omega) + q^2(\omega)}{f_x(\omega) + f_y(\omega)}$$

ún. koherencia-függvénnyel fejezzük ki. Bebizonyítható, hogy

$$0 \leq C(\omega) \leq 1.$$

Minél közelebb van $C(\omega)$ értéke 1-hez, annál erősebb a korreláció az $x(t, w)$ és $y(t, z)$ folyamat ω-frekvenciájú komponense között.

Ha a két komponens közötti fáziskülönbséget is meg akarjuk állapítani, a

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{q(\omega)}{c(\omega)}\right)$$

függvényt kell meghatároznunk. Természetesen $\varphi(\omega)$-nak csak olyan ω-értékek esetében van jelentősége, amelyekre $C(\omega)$ elég nagy, hiszen ha két azonos frekvenciájú komponens között nincs számottevő korreláció, a fáziskülönbségük nem érdekes.

Amennyiben tehát módunkban áll $C(\omega)$-t és $\varphi(\omega)$-t becsülni valamely $x(t, w)$ és $y(t, z)$ folyamatra vonatkozólag, akkor — ha nem is minden egyes frekvenciára, hiszen csak véges sok adatunk van — de legalábbis bizonyos frekvenciasávokra külön-külön meg tudjuk becsülni a két adatsor közötti korrelációt. Ez azért fontos, mert semmilyen biztosíték nincs arra, hogy pl. két gazdasági adatsorozat esetében akár a korreláció, akár pedig a fáziskülönbség ugyanakkora legyen a két adatsorozat különböző periódusú komponensei között. Pl. a sajtgyárak kibocsájtásának hosszútávú ingadozása valószínűleg szorosabb kapcsolatban áll a tejtermelés hasonló ingadozásaival, mint ugyancsak a sajtgyártás heti ingadozása a tejtermelés heti ingadozásával.

Röviden érintjük még a koherencia és bázisfüggvény becslésének problémáját. Ha a rendelkezésre álló adatok:

$$\{x(t),\quad y(t);\quad t = 0, 1, \ldots, n\},\quad \text{akkor az}$$

$\omega_j = \dfrac{\pi j}{m}$ (ahol $m < n$ és $j = 1, \ldots, m$) pontokban a következőképpen kaphatunk becslést:

$$\hat{C}(\omega_j) = \frac{\hat{c}^2(\omega_j) + \hat{q}^2(\omega_j)}{\hat{f}_x(\omega_j) + \hat{f}_y(\omega_j)}, \tag{11}$$

ahol

$$\hat{c}(\omega_j) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{a_0 \lambda_0(\omega_j)}{2} + \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k(\omega_j)\, a_j \cos k\,\omega_j\right], \tag{12}$$

és

$$\hat{q}(\omega_j) = \frac{1}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{m-1} \lambda_k(\omega_j)\, a_k \sin k\,\omega_j\right], \quad \text{ahol} \tag{13}$$

$$a_k = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} [x(j)\, y(j-k) + y(j)\, x(j-k)] \qquad j, k = 1, \ldots, m$$

Mindaz, amit ebben a részben elmondtunk, értelemszerűen alkalmazható kettőnél több adatsorozat esetében is.

Nem-stacionárius adatsorozatok

Idáig stacionárius adatsorozatokkal foglalkoztunk. Sajnos azonban a legtöbb gazdasági adatsorozatról nem tételezhetjük fel, hogy stacionárius. Még a legegyszerűbb eset az, ha ez a nem-stacionárius jelleg csupán abban nyilvánul meg, hogy az idősorban valamilyen trend van, és ha a trendet az adatsorozatból kiszűrve, már stacionárius sorozatot kapunk. Ekkor ugyanis több módszer áll rendelkezésünkre (lásd [2]-t) ennek a trendnek a becslésére.

Vegyük viszont a következő folyamat-sorozatot:

$$x_0(t, z) = \int_0^\pi \cos t\omega \, du(\omega) + \int_0^\pi \sin t\omega \, dv(\omega)\,,$$

ahol $u(\omega)$ és $v(\omega)$ olyan valószínűségi változó, amelyre érvényes az (5a), ill. (5b) összefüggés, valamint

$$F(\omega + \Delta\omega) - F(\omega) = C$$

továbbá

$$x_k(t, z) = \int_0^\pi \cos t\omega \, a(k, \omega) \, du(\omega) + \int_0^\pi \sin t\omega \, a(k, \omega) \, dv(\omega)\,, \tag{14}$$

$k = 1, 2, \ldots,$; ahol $a(k, \omega)$ minden k-ra ω-ban folytonos függvény.

Belátható, hogy az $x_k(t, z)$ folyamat spektruma

$C.a^2(k, \omega)$-tel egyenlő, és hogy ha

$M\,[x_0(t, z)] = 0$, akkor $M\,[x_k(t, z)] = 0$.

Legyen most

$$y(t, z) = x_t(t, z)\,. \tag{15}$$

Az $y(t, z)$ folyamat nyilván nem stacionárius, hiszen

$$M\,[y(t, z)\, y(t + \tau, z)] = C \int_0^\pi \cos \tau\omega \, a(t, \omega)\, a(t + \tau, \omega)\, d\omega\,,$$

ez pedig általában függ t-től. Mármost mivel a spektrum fogalmát stacionárius stochasztikus folyamatokra értelmeztük, az

$$f_y(t, \omega) = C \cdot a^2(t, \omega)$$

függvény nem tekinthető spektrumnak, de megőriz néhányat a spektrum tulajdonságaiból. Pl. ha F olyan szűrő, amelynek transzferfüggvénye

$$g(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \omega \neq \omega_0 \\ 1, & \text{ha} \quad \omega = \omega_0 \end{cases}$$

akkor belátható, hogy F-et $y(t, z)$-re alkalmazva, az

$$Y(t, z) = F\,[y(t, z)]$$

folyamat csak az ω_0 frekvenciát fogja tartalmazni, és az $f_y(t, \omega_0)$ függvény azt mutatja, hogyan változik az ω_0 frekvenciához tartozó amplitúdó az idő függvényében, ami pedig a stacionárius esettel analóg. Fontosabb azonban a következő tulajdonság:

Legyen

$$\hat{r}(\tau) = \frac{1}{n - \tau} \sum_{t=1}^{n-\tau} y(t)\, y(t + \tau)\,;$$

belátható, hogy ha $n \gg \tau$, $a(t, \omega)$ pedig lassan változik az időben, akkor

$$M[\hat{r}(\tau)] \approx \int_0^\pi \cos\omega\tau \left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} a^2(t,\omega)\right] d\omega;$$

azaz, ha az adatosorzatból úgy becsüljük az autokorrelációt, mintha a sorozat stacionárius volna, és ezt az $\hat{r}(\tau)$-t írjuk be a (7') becslésbe, akkor valójában az

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f(t,\omega)$$

átlagot becsüljük. Ami a becslés megbízhatóságához szükséges feltételek pontosabb megfogalmazását illeti, Granger [2] könyvének 9. fejezetére utalunk. Durván annyit mondhatunk, hogy némi információ nyerhető az itt leírt eljárással nem-stacionárius adatsorozatokra is, mégpedig annál több, minél lassúbb a spektrum változása a vizsgált időszakban.

Ha ármost két nem-stacionárius adatsorozat összefüggését vizsgáljuk, figyelembe kell vennünk azt is, hogy maga ez az összefüggés sem lesz általában már független az időtől. Bizonyos összefüggések felírhatók abban az általános esetben is, amikor mind a koherenciafüggvény, mind pedig a fázisfüggvény függ az időtől; gyakorlatilag azonban nem látszanak alkalmazhatónak. Ha azonban legalább az a feltevés jogosult, hogy a fázisfüggvény nem függ az időtől, akkor némileg a koherenciafüggvény is egyszerűsödik. Ugyanis, ha $y_1(t)$ és $y_2(t)$ a (14) és (15) egyenlet szerinti nem-stacionárius adatsorozat, akkor a (12), illetve (13) becslés formális alkalmazásával valójában az

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} c(\omega,t)$$

és

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} q(\omega,t)$$

átlagokra kapunk becslést, ebből pedig — a fázisfüggvényre vonatkozó előbbi feltevésünket kihasználva — a következőt kaphatjuk (a levezetést mellőzve):

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(\omega,t) \approx \frac{\left[\sum_{t=1}^{n} r(\omega,t)\right]^2}{\left[\sum_{t=1}^{n} f_{y1}(\omega,t)\right]\left[\sum_{t=1}^{n} f_{y2}(\omega,t)\right]}$$

vagyis a koherenciafüggvények átlagára adódik becslés; a fázisfüggvényre a stacionárius esetben megadott becslés pedig most is a fázisfüggvény konzisztens, torzítatlan becslése lesz. Így tehát nem-stacionárius adatsorozatok összefüggéséről is kaphatunk információkat, ha a spektrumok változása lassú.

Alkalmazási lehetőségek

Az irodalomban bemutatott alkalmazások közül kettőt emelünk ki, mint amelyek jól illusztrálják a spektrálelemzés lehetőségeit.

Godfrey és Karreman [9] azt vizsgálva, milyen tényleges hatást gyakorolnak a szokásos szezonális kiigazítási eljárások az adatsorozatokra, a következő kísérletet végezték: Elektronikus számítógépen mesterségesen generáltak másodrendű autoregresszív sémával egy alapadat-sorozatot, továbbá olyan sorozatokat, amelyek változó — mégpedig más és másképpen változó — szezonális ingadozást képviseltek. Az alapadat-sorozat tagjaihoz rendre hozzáadták valamelyik ingadozássorozat megfelelő tagját, az így kapott adatsorozatot pedig valamelyik vizsgált kiigazítási eljárásnak vetették alá.

Mármost több sorozat állt rendelkezésükre: a nyers adatsorozat és két komponense — tudniillik az alapadat-sorozat és az ingadozás-sorozat — ezen felül a szóban forgó eljárással kiigazított sorozat és az elkülönített szezonális ingadozás. Ezután a koherencia-, illetve fázisfüggvény becslésével meghatározták a tényleges és a számított szezonális ingadozás stb. között az összefüggést. Így bizonyos következtetésekre lehetett jutni arra vonatkozóan, milyen hatékonyan szűrik ki az egyes kiigazítási eljárások a különbözőképpen változó szezonalitást az adatsorozatból, illetve nem okoznak-e torzításokat.

Egy másik érdekes lehetőségre — tudniillik a sztochasztikus ökonometriai modellek vizsgálatára — Granger hívta fel a figyelmet [10]-ben.

Vegyük a következő egyszerű ökonometriai modellt:

$$C_t = cY_{t-1} + \varepsilon'_t$$

$$I_t = v(Y_t - Y_{t-1}) + \eta'_t$$

$$Y_t = C_t + I_t,$$

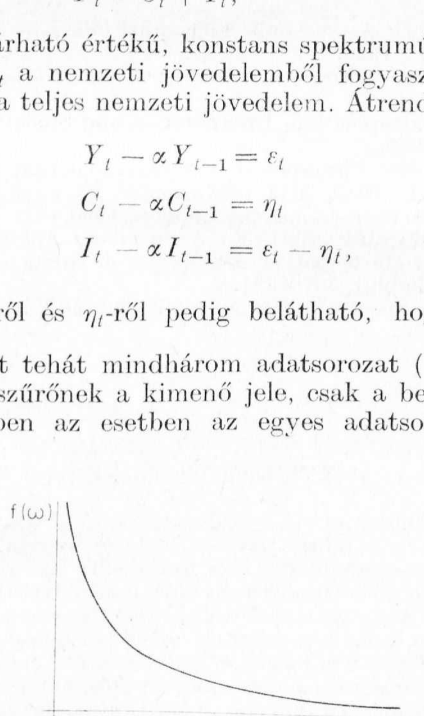
ahol ε'_t és η'_t zérus várható értékű, konstans spektrumú sztochasztikus folyamat („fehér zaj") C_t a nemzeti jövedelemből fogyasztásra fordítható rész, I_t a felhalmozás, Y_t a teljes nemzeti jövedelem. Átrendezve:

$$Y_t - \alpha Y_{t-1} = \varepsilon_t$$

$$C_t - \alpha C_{t-1} = \eta_t$$

$$I_t - \alpha I_{t-1} = \varepsilon_t - \eta_t,$$

ahol $\alpha = \dfrac{v - c}{v - 1}$, ε_t-ről és η_t-ről pedig belátható, hogy mindkettő szintén „fehér zaj". Mármost tehát mindhárom adatsorozat (Y_t, C_t, I_t) felfogható, mint ugyanannak a szűrőnek a kimenő jele, csak a bemenő jel más és más. Belátható, hogy ebben az esetben az egyes adatsorozatok spektruma a következő:



4. ábra.

$$f_Y(\omega) = \frac{f_\varepsilon(\omega)}{2(1 - \alpha \cos \omega)},$$

$$f_C(\omega) = \frac{f_\eta(\omega)}{2(1 - \alpha \cos \omega)},$$

$$f_I(\omega) = \frac{f_\varepsilon(\omega)}{2(1 - \alpha \cos \omega)},$$

Ha α közel van 1-hez, akkor a nevezők igen kicsinyek lesznek, ahogy $\omega \to 0$, ezért az elméleti spektrumok alakja a 4. ábrán látható görbéhez hasonlít. Amennyiben a tényleges adatok alapján becsült spektrumok lefutása valóban ilyen, ez alátámasztja a felírt modell helyességét.

(Beérkezett: 1969. VII. 7.)

IRODALOM

[1] GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: Statistical Analysis of Stationary Time Series, New York, 1957.

[2] GRANGER, C. W. J.—HATANAKA, M.: Spectral Analysis of Economic Time Series, Princeton University Press, 1964.

[3] ÁCS, M.: Idősorelemzés és tervezés, OT. Tervgazdasági Intézet, 1968. (Sokszorosított anyag.)

[4] HRUBOS, I., PAJZS, J.: A szezonális kiigazítási eljárások összehasonlítása, Ökonometriai füzetek, 9. sz., 1968.

[5] THEISS, E.: Idényszerű változások mérése spektrálelemzés segítségével, 1966. (Kézirat.)

[6] WIENER, N.: The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Times Series, New York, 1949.

[7] KOLMOGOROFF, S.: Sur l'interpolation et extrapolation des suites stationnaires, C. R. Acad. Sci. Paris, 1939, 2043—2045. p.

[8] HANNAN, E. J.: Time Series Analysis, London, 1960.

[9] GODFREY, M. D.—KARREMAN, H. F.: A Spectrum Analysis of Seasonal Adjustement, az „Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern" c. kötetben. (Ed. M. Shubik), 367—421. p.

[10] GRANGER, C. W. J.: Spectral Shape of an Economic Variable, Econometrica, 1966, 34. 150—161. p.

THE GENERALIZATION AND APPLICATION OF THE SPECTRAL ANALYSIS OF DATA SERIES

The purpose of the analysis of statistical data series is the forecasting of the future development of the data series on the basis of the investigation and separation of trends, long- and short-term periodical fluctuations, seasonality and random fluctuations.

The article presents the theoretically most effective analytical method, that of spectral analysis. The first part deals with definitions and theorems concerning the breaking down of stationary data series into infinitely many periodical components with chance-depending amplitudes. The second part introduces the concept of coherence function which lends itself to the investigation of the relationships between several data series. The third part contains the generalization of spectral analysis for certain types of non-stationary data series, and in the fourth part the author presents two examples relating to the application of the method for checking econometric models.

ОБОБЩЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА РЯДОВ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Цель анализа рядов статистических данных — прогнозирование их будущей динамики на основе изучения и выявления тренда, долгосрочных или краткосрочных периодических колебаний, сезонности и случайных колебаний.

В статье представляется наиболее эффективный метод анализа — спекральный анализ. В первой части статьи даются определения и основные положения относительно разбивки стационарных рядов данных на бесконечное множество периодических колебаний, амплитуда которых зависит от случайных моментов. Во второй части фигурирует понятие функции когеренции, при помощи которой может быть изучена взаимозависимость между несколькими рядами данных. В третьей части статьи спектральный анализ распространяется на определенные типы нестационарных рядов данных, а в четвертой части приводится два примера относительно использования этого метода для проверки эконометричеких моделей.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK c. rovatunk e számunkból anyagtorlódás miatt maradt ki. Az előző számban elkezdett KONDOR GYÖRGY cikk befejező részét a következő számban (3. évf. 1. szám) közöljük.

(Szerk.)

KÖNYVEKRŐL

HAJTMAN BÉLA: *Bevezetés a matematikai statisztikába.* Budapest, 1968. Akadémiai Kiadó, 492 p.

Magyarországon eddig nem jelent meg olyan matematikai statisztikai kézikönyv, mint amilyen például H. M. BLALOCK Social Statistics című műve, vagy G. CLAUSS és H. EBNER Grundlagen der Statistik-ja, amelyek a nem-matematikus képzettségű társadalomtudósok számára íródtak és bemutatják: különböző gazdasági, társadalmi, lélektani kutatási problémákban milyen módszereket és hogyan lehet felhasználni annak érdekében, hogy a kutató elméleti hipotéziseit konkrét adatokon verifikálhassa. Az alapvető ÉLTETŐ—ZIERMANN-féle matematikai statisztika ugyanis elsősorban matematikusoknak szól. A klasszikusnak számító YULE—KENDALL-könyv használatát a társadalomtudományok mai gyakorlatától való bizonyos távolállás nehezíti meg. A CSEH-SZOMBATHY LÁSZLÓ és FERGE ZSUZSA szerkesztette szociológiai módszertani könyv a társadalomtudományi kutatások összes módszer-kérdéseit tárgyalja a mintavételtől a kódolásig, így érthetően alig maradt hely a matematikai statisztikai módszerek számára. A KÖVES—PÁRNICZKY-féle általános statisztika sem adhatott tankönyv-jellege következtében annyit, amennyire a kutatónak szüksége lenne. A VINCZE ISTVÁN szerkesztette minőségellenőrzési kézikönyv csupán egy részproblémát tárgyal és elsősorban nem társadalomtudósok számára készült. A KREKÓ—PÁRNICZKY—PINTÉR—THEISS-féle korreláció- és regressziószámítás csak egy módszert tárgyal, és a különböző szerzőktől származó fejezetek hiányos egybeszerkesztése is megnehezíti néha a megértést.

Ugyanakkor senki számára sem kétséges már, hogy a közgazdaságtani kutatásokban minél nagyobb mértékben kell statisztikai verifikálást alkalmazni, hogy azok ne ragadjanak meg az elméleti konstrukciók szintjén, hanem a valósággal való összevetés útján ellenőrizzék a kidolgozott elméletek, hipotézisek valóságtartalmát. Kétségtelen, hogy ezt a verifikálást el lehet végezni matematikai módszerek nélkül is, a közgazdaságtan és a szociológia klasszikusai jó példákat mutattak erre. Ezek a módszerek azonban nagy mértékben megkönnyítik és biztosabbá teszik a statisztikai adatok elemzését és a következtetések levonását. A matematikai közgazdaságtan — mivel hipotéziseit matematikai alakban fogalmazza meg — különösen kínálkozó terület a matematikai statisztika alkalmazására. Egyes módszereket széles körben alkalmaznak a magyar ökonometriai kutatásokban is, de mivel újabban (pl. az 1969 szeptemberi révfülöpi konferencián, valamint a Kornai János „Anti-equilibrium"-a körüli vitában) felmerült az igény, hogy a viszonylag könnyen kvantifikálható gazdasági folyamatok és tényezők mellett más gazdasági-társadalmi tényezőket is figyelembe kell venni, a matematikai közgazdaságtan módszertanával dolgozó kutatónak is egyre inkább szüksége van a matematikai statisztika társadalomtudományi alkalmazásának ismeretére.

Ebben a helyzetben nem meglepő, hogy már Hajtman Béla egyetemi jegyzetét is használták a társadalomtudományi kutatók. Még fokozottabban érvényes ez a jóval bővebb könyvre.

Alcíme szerint „pszichológusok számára" íródott. Ennek megfelelően állította össze a szerző a tartalmát: a gyakorisági eloszlások, különböző középértékek és szóródási mérőszámok után igen röviden foglalkozik a statisztika elméletének elemeivel és a statisztikai következtetés alapfogalmaival. Majd a következő matematikai statisztikai módszereket tárgyalja: t-próbák, egy- és többszempontos varianciaanalízis, korreláció- és regressziószámítás, χ^2. Eddig a könyv követi a korábbi jegyzet felépítését, ezután azonban két majdnem teljesen új fejezet következik a nem-paraméteres eljárásokról

(Mann—Whitney próba, Kruskal—Wallis próba, Wilcoxon próba stb.), valamint néhány további statisztikai eljárásról (sorozat próba, differencia próba, előjel próba, Bartlett próba). Kiegészíti a könyvet egy fejezet az eredmények prezentálásáról, egy matematikai függelék és egy táblázatgyűjtemény.

A könyv legfőbb érdeme a használhatóság. Bár a szerző pszichológusok számára ismerteti a metamatikai statisztikát és a bemutatott (igen szemléletes) példákat mind a lélektan területéről veszi, „mutatis mutandis" a szociológus és a közgazdász is alkalmazhatja őket. Valószínűleg a pszichológiára összpontosulás magyarázza meg néhány olyan módszer részletesebb ismertetésének hiányát, amely a közgazdász számára igen hasznos lenne. Mindenekelőtt azt lehet hiányolni, hogy a többváltozós regresszióelemzést éppen csak megemlíti, és csupán utal a faktoranalízisra. Kár, hogy a nagyon népszerű és egyben egyszerű Kendall-féle τ rangkorrelációs együttható kiszámításának módszerét sem ismerteti. Nagyon hasznos lenne egy olyan táblázatot összeállítani, amely megadja: milyen típusú problémában, milyen feltételek mellett, milyen matematikai, statisztikai módszereket lehet felhasználni. (Ilyen táblázatot közöl pl. az említett G. Clauss—H. Ebner: Grundlagen der Statistik.) Végül hiányzik a könyvből egy olyan fejezet, amely rendszeresen tárgyalja a méréselméletet. (Ezt a hiányt az olvasó pótolhatja a Cseh-Szombathy—Ferge-féle szociológiai módszertan megfelelő fejezetének elolvasásával.)

E hiányosságok ellenére a könyv a szó szoros értelmében hézagpótló szerepet tölt be. Esetleges újabb kiadásában érdemes lenne megfelelően kiegészíteni. Az új kiadást indokolja, hogy — sok más nagy sikerű és azonnal elfogyott társadalomtudományi szakkönyvhöz hasonlóan — igen kis példányszámban adták ki. A könyvterjesztők úgy látszik, rendszerint túlságosan borúlátóan ítélik meg az alapvető társadalomtudományi kézikönyvek értékesítési lehetőségeit, pedig e munkák legalábbis többezres olvasó- és vásárló táborra számíthatnak. Kis példányszámuk miatt nem fejthetik ki teljesen pozitív hatásukat a tudományos kutatásokra.

Andorka Rudolf

HÍRADÓ

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának Kollokviuma

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya 1969. szeptember 11—13. között tartotta első kollokviumát Révfülöpön. A kollokviumra meghívott szakemberek — mintegy 100 résztvevő — előtt 13 előadás hangzott el, amelyek közül 8 a gazdaságmatematika különböző makroökonómiai alkalmazásával foglalkozott, 5 pedig a nemzetközi és hazai matematikai kutatások egyes területeiről adott összefoglaló jellegű áttekintést. Az előadásokat írásban is benyújtották.

Az ismertetett modellekből, a modellekben megfogalmazott problémákból és az előadásokat követő hosszú és élénk vitákból világosan látszott, hogy gazdasági életünk majdnem minden fontos és aktuális problémájának vizsgálatára történnek kísérletek egzakt matematikai módszerek felhasználásával. Megállapítható az is, hogy a modellekkel végzett számítások eredményei egyre inkább felhasználásra kerülnek a tényleges gazdasági döntéseket hozó szervek és gazdasági vezetők munkájában, a matematikai módszerek lassan beépülnek a gazdasági elemzésbe és tervezésbe. Ezt bizonyította a „Matematikai módszerek népgazdasági (ágazati) tervezésben való alkalmazása" (Andorka Rudolf—Szabó László) című összeállítás is, amely a hazánkban folyó kutatások helyzetéről, céljairól és alkalmazásairól adott részletes tájékoztatást.

Ami a kollokviumon elhangzott előadásokat illeti, azokat az előadások sorrendjében kívánom röviden ismertetni. Elsőnek *Szakolczay György „Árak előrebecslése és a gazdasági ösztönzők optimális értékének meghatározása gazdaság-matematikai modellekkel"* című előadása hangzott el. Az előadó a kétféle problémára azonos struktúrájú modellekkel ágazati szinten keresi a megoldást. Módszertani szempontból a modell kombinációja az aggregált makroökonómiai növekedési és optimálási modelleknek, amely koefficiens előrebecsléseket, termelési függvényeket, jövedelem- és árrugalmassági számításokat, valamint egy kvadratikus programozási és egyeztetési eljárást is magában foglal.

A kutatás elsődleges célja az ágazati árarányok várható alakulásának előrebecslése. Az előrebecslések alapján egyfelől fel lehetne mérni, hogy a tapasztalható árváltozások beilleszkednek-e az alapvető gazdasági összefüggések tartós irányzataiba vagy nem, másfelől az előrebecslések nagy segítséget nyújthatnának a távlati tervezés számára, mivel az árindexek jövőbeli alakulásának megfelelő pontosságú előrebecslése esetén felmérhető lenne, hogy mely ágazatok termékei drágulnak, illetve válnak olcsóbbá, azaz mely termékek felhasználásának kiterjesztése előnyös vagy hátrányos. A modell a gazdasági ösztönzők értékeiből indul ki, felhasználja a különböző változók és technológiai paraméterek értékeire vonatkozó előrebecsléseket, biztosítja konzisztenciájukat és lehetővé tesz optimumszámításokat is.

A gazdasági ösztönzők optimálása esetében a modell átfogalmazására van szükség. Az ösztönzőket már nem konstansokként, hanem változókként szerepeltetik, hogy elemezhessék a különböző gazdaságpolitikai célkitűzések és a gazdasági ösztönzők közötti összefüggéseket. Így a növekedési ütemet és a beruházási hányadot befolyásoló eszközhasználati díjnak a nyereségfelosztási rendszerrel, a külkereskedelmi mérlegnek a devizaárfolyammal való kapcsolatát vizsgálják, és még más hasonló összefüggéseket.

A szerző foglalkozott a modell kiterjesztésének lehetőségeivel és vázolta a felhasználás problémáit is. Kiemelte, hogy a modell kizárja a különböző technológiák közötti választási lehetőséget, az átlagos technológiai változást az idő függvényének tekinti. További probléma, hogy a modellben szereplő elaszticitásokra nincsenek kellőképpen megalapozott becslések, valamint az, hogy nem tudják biztosítani a gyakorlati és a matematikai elemzések teljes összhangját.

A modell alkalmazásának két alapfeltétele — az ÁKM technológiai koefficienseinek és a termelési függvény paramétereinek előrebecslése — már biztosított. Az előadó ezek alapján érdekes eredményekről számolt be az árindex-változások összehasonlító vizsgálata terén.

Tardos Márton „*A közgazdasági élet elemzésének lehetőségei programozási modellek segítségével*" címmel tartott előadást a kollokviumon, amely a vállalatok és a központi szervek viselkedését elemezte egy lineáris programozási modell segítségével. A vizsgálat főbb célkitűzései közül a szerző a következőket emelte ki:

— a népgazdaság valóságos viszonyait programozási modellekkel milyen mértékben lehetséges jellemezni;

— a népgazdaság konkrét szabályozó rendszere az ún. eszmei szabályozó rendszertől mennyiben tér el;

— a vállalatok tényleges működését milyen mértékben jellemzi a nyereség maximalizálása.

A vizsgálatot — az elemezni kívánt többszáz vállalat közül — csak néhány vállalatra végezték el. A levont következtetések közül az előadó a következőket említette:

1. A vállalatok érzékenysége a piaci eseményekre nem nőtt a kívánatos mértékben. Ennek okai, hogy

— a vállalatok nem a maximális nyereség, hanem csak egy bizonyos nyereségtartomány elérésében érdekeltek;

— a vállalatok a belföldi árakat — monopolhelyzetük alapján — magasan tudják tartani.

2. A vállalatok ösztönzése—szabályozása több vonatkozásban nem felel meg a népgazdasági érdekeknek. A jövedelemszabályozás, elsősorban a részesedési alap kiszámítási módja és adózási rendszere erősen eltéríti egymástól a két érdeket.

Végül az előadó néhány javaslatot bocsátott vitára e problémák megoldásának lehetséges módjairól. Megemlítette, hogy

— a belső piacokon — részben az indokolatlanul összevont vállalatok decentralizálásával, részben az importverseny fokozásával — a versenyfeltételeket javítani kell;

— meg kell változtatni a jövedelemszabályozás rendjét azért, hogy a vállalatok érdekeltségében jelentkező differenciálódás elkerülhető legyen;

— meg kell szüntetni az átlagbérellenőrzés kialakult rendjét;

— a nehezen megoldható feladatok különleges ösztönzését meg kell kísérelni;

— a gazdasági elemzésekre nagyobb súlyt kell helyezni (a szabályozó rendszerek hatása, a vállalati viselkedés kérdései stb. területén).

Ehhez rendszeres információgyűjtésre, körültekintő modellezési munkára van szükség a központi szerveknél. Az elemzés egyik ilyen hatékony eszköze lehet a szerző által ismertetett modell.

Rimler Judit „*A gazdasági fejlődés többtényezős vizsgálatának alapelvei*" című előadásában a növekedést olyan komplex folyamatként értelmezte, amelynek alakulására nemcsak az elsődleges ráfordítások gyakorolnak hatást, hanem a gazdasági-társadalmi környezet is. A szerző ezeknek az összefüggéseknek a formalizálását tűzte ki célul. A magyarországi gazdasági fejlődést az 1950—1966. években két mutatószámmal jellemezte: az egy aktív keresőre eső megtermelt nemzeti jövedelemmel (termelési oldal), és a nemzeti jövedelemből az egy főre eső fogyasztás értékével (fogyasztási oldal). A fejlődésre ható tényezőket direkt (forrás jellegű) és indirekt (környezet jellegű) tényezők csoportjaira bontotta. A kutatás jelenlegi szakaszában összesen 15 tényező hatását vizsgálta. Abból a feltételezésből kiindulva, hogy a fejlődés szakaszaiban más-más tényezők mutatnak szoros és kevésbé szoros összefüggést a fejlődés ütemével és mértékével, a vizsgálatokat nemcsak az 1950—1966-os periódusra, hanem kisebb — egységes fejlődési jellegzetességeket mutató — szakaszokra is elvégezte.

Horváth József egy aggregált, egyszektoros növekedési modell segítségével elemezte a hosszútávú növekedés lehetséges ütemét „*Hosszútávú egyenletes növekedés és optimális beruházási hányad*" című előadásában. A szerző abból az alapelvből indult ki, hogy gazdaságpolitikánkra ma már nem a gazdasági növekedés ütemének állandó emelésére való törekvés a jellemző, hanem inkább egy olyan ütem kiválasztása, amely a népgazdaság tartós, kiegyensúlyozott fejlődését biztosítja.

A modell időváltozója diszkrét. Alapötlete — amelyet a szerző Kaleckitől vett át — az állóeszközök évjáratok szerinti bontása és a termelésnek is ennek megfelelő felosztása. Így lehetőség van arra, hogy csak a beruházások révén újonnan belépő termelési kapacitásokkal foglalkozzunk, míg a meglevő állóeszközökön folytatott termelésről csak egy állandó ütemű növekedést tételezzünk fel. Az új kapacitásokat így még a tervezés stádiumában — vagyis döntés előtt — vizsgálni lehet. A felvázolt modell segítségével különböző tőke-munka kombinációkat lehet számítani, a munkatermelékenység a technikai felkészültség függvényeként fejezhető ki.

Ha a termelés, a beruházás és a fogyasztás ugyanakkora ütemben nő, akkor az ún. „aranykori növekedési út" valósul meg. Hosszútávon a fogyasztás volumenének ez a maximális és állandó növekedési üteme. A fogyasztás volumene tehát mindenkor aszerint lesz nagyobb vagy kisebb, hogy az egyenletes növekedés kezdetén mekkora volt. Ezért meg kell vizsgálni a fogyasztás nagyságát abban az évben, amikor a népgazdaság rááll erre az egyenletes növekedési ütemre. A termelésnek n évre van szüksége arra, hogy ezt a növekedési ütemet elérje. A közbenső időszakot „átállási időszaknak" nevezi a szerző: ezalatt áll át a népgazdaság a nem egyenletes ütemről az egyenletes ütemre, miközben az utóbbi végett fejtjük ki beruházási és selejtezési politikánkat. Ha a beruházások átfutási ideje h év, úgy ezt a politikát ennyivel előbb kell megkezdeni. Az előadó ezek alapján az optimális induló beruházás nagyságát és megvalósításának lehetőségeit vizsgálta, majd meghatározta az ezzel járó beruházási hányadokat is.

Virág Ildikó „Folyamatos tervezés problémájának vizsgálata növekedési modell segítségével" című dolgozata a tervezés időhorizontjának sokat vitatott problémáját vizsgálta. Megállapította, hogy pl. az ötéves tervek tényadatait vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy a tervidőszak elején általában alacsonyabb a fogyasztás növekedése és viszonylag magas a felhalmozási hányad, míg a tervidőszak végén ennek az ellenkezője jelentkezik. A jelenség egyéb okai mellett okvetlenül jelentős szerepet kell játszania ebben a tervezés ciklikusságának. Az egyes rövid-, közép- és hosszúlejáratú tervek ciklusai nyilván egymásra szuperponálva jelentkeznek.

A probléma egyik elképzelés szerinti megoldása az ún. „folyamatos tervezés" gyakorlati megvalósítása lenne. (Pl. az ötéves tervek esetében minden évben elkészülne a terv — az új információk alapján — a következő öt évre.) A probléma azonban elméleti szempontból sem tekinthető ilyen egyszerű úton-módon megoldhatónak. A szerző ezt a következtetést egy Harrod—Domar típusú növekedési modell segítségével végzett vizsgálatból vonta le. Az egyik legfontosabb következménye a folyamatos tervezés megvalósításának — a vizsgálat szerint — az lehet, hogy tartósan csökken az évenkénti fogyasztás attól függően, hogy milyen gyakran ismételjük meg a tervezést.

Ulbrichné, Ács Magdolna „Makroökonómiai folyamatok idősor elemzéseinek felhasználása a hosszútávú tervezésben" című előadásában a hosszútávú tervezés keretében végzett trendszámítások problematikájáról és tapasztalatairól számolt be. Előadását módszertani kérdések vizsgálatával kezdte. Megállapította, hogy az idősorok alaptendenciájának leírására alkalmas függvénytípus objektív meghatározása közgazdaságilag is, matematikailag is megoldatlan feladat. Véleménye szerint a makroökonómiai volumenek időbeli alakulását csak olyan szigorúan monoton növekvő függvények írhatják le, amelyeknek második deriváltjuk is pozitív mind a tény-, mind az extrapolációs időszakban, tehát nem fogadhatjuk el a statisztika által javasolt alapelveket, amelyek szerint elsődlegesen az illeszkedés jóságára törekszünk.

Az idősorok analitikus függvényekkel közelített trendjei azonban egyszerűvé teszik az extrapolálást. A hosszútávú tervezésnél a modellek adat-inputjait extrapolációval kell meghatározni, mégpedig minél aggregáltabb kategóriákra, hogy determináltságuk csak nagy behatások miatt változhasson meg.

Ezek után 11 gazdasági kategória idősorát vizsgálta meg és a következő összefüggéseket elemezte:

— a nemzeti jövedelem dinamikája és a nemzeti jövedelem mérleg konzisztenciája;
— a nemzeti jövedelem felhasználásának fő arányai (fogyasztás-felhalmozás);
— a felhalmozási alap bizonyos strukturális vonatkozásai;
— a külkereskedelmi mérleg egyensúlya, a forgalom relációnkénti struktúrája és egyenlege.

A magyar nemzeti jövedelem termelésének és felhasználásának alakulását az 1950-től 1967-ig terjedő időszak adatai alapján a szerző 1985-re extrapolálta.

Fóti Tamás—Hunyadi László „Kísérlet a gazdasági növekedést leíró függvények meghatározására" című dolgozata az előbbihez hasonló kérdésekkel foglalkozott. Az előadás alapproblémája az volt, hogy olyan esetben, amikor a gazdasági idősorokat analitikus függvényekkel közelítjük, és egy lineáris, valamint egy exponenciális függvénnyel egyaránt jó közelítést kapunk, melyiket válasszuk a két függvény közül. A probléma egyik megoldása lehet, ha egy olyan függvényt sikerül találni, amely a tényadatokhoz jól illeszkedik és előrevetített értékei a lineáris és exponenciális függvény értékei közé esnek, mivel a fejlődés általában lassabb az exponenciálisnál és gyorsabb a lineárisnál. A szerzők ezután kísérletet tettek számítástechnikailag is használható függvény meghatározására és paraméter-becslési eljárást adtak erre a függvényre.

A matematikai tárgyú előadások a kollokviumra meghívott *dr. G. Zoutendijk professzornak a SUMT módszerekről* tartott előadásával kezdődtek. Zoutendijk professzor röviden ismertette a SUMT módszerek lényegét, a korlátozó feltételeknek és a célfüggvénynek összekapcsolási módját és a súlyozás kérdéseit. Részletesen kitért arra, hogyan keressük meg az összevont függvény feltétel nélküli szélső értékeit különböző esetekben. Végül bebizonyította, hogy kvadratikus konkáv célfüggvény esetén, n változós függvénnyel végzett számításoknál n lépésben eljutunk a feltétel nélküli optimumhoz.

Lipták Tamás „Nagy rendszerek optimalizálása" címmel tartott referátumot a témában elért legfigyelemreméltóbb eredményekről. Ezek között ismertette a Dantzig—Wolfe, az Abadie—Williams, a Müller—Merbach, a Rosen- és a Balas-féle módszerek célszerű alkalmazási területeit, ezek egyes előnyös, illetve hátrányos tulajdonságait, felhasználási lehetőségeiket közelítő jellegű számításoknál és néhány számítástechnikai tapasztalatot. Kiemelte, hogy az Abadie—Williams módszernél egyszerűbb a Martos-féle hiperbolikus programozás alkalmazása. A téma többek között a IV. ötéves terv népgazdasági programozási modelljének számítási problémái miatt is aktuális.

Stáhl János „Nem-lineáris programozási eljárások" címmel tartott referátuma jó áttekintést adott a témában használatos fontosabb eljárásokról a hazai és nemzetközi szakirodalom gondosan szelektált felhasználásával. Az előadás érzékeltetni kívánta, hogy hogyan „dolgoznak" az egyes módszerek és röviden utalt egy-egy módszer hatékonyságára is. Az előadó részletesebben ismertette a rács-módszert, a közelítő programozás módszerét (Griffith és Stewart alapján), a metszősík-módszert, a hosszú léptű gradiens módszereket, a SUMT módszereket, a dekompozíciós eljárásokat, valamint a globális optimumot szolgáltató módszereket. Sajnálattal állapította meg, hogy ezen a területen hazai számológépes tapasztalatok mind ez ideig nincsenek.

Kovács László Béla „Diszkrét programozási módszerek" című referátuma a lineáris programozás után nálunk talán legismertebbnek és leginkább alkalmazottnak tekinthető tiszta és kevert egészértékű programozás módszereiről adott áttekintést. Részletesen ismertette a Gomory-féle módszert, az integer programozási feladat konvex programozással történő megoldását, a különböző leszámlálási algoritmusokat (Balas, Lawler—Bell stb.), a *branch and bound* módszereket, a dinamikus programozás egészértékű adaptációját és néhány közelítő eljárást.

Ifj. Krekó Béla „Közelítő eljárás lineáris programozási feladatok megoldására" című referátumában egy, a SUMT módszerek körébe tartozó eljárást mutatott be. A SUMT módszereknél szokásos „súlyfüggvény" speciális megválasztásával a szerző — bizonyos feladattípusok esetén — lényegesen leegyszerűsíti a számításokat. Az előadásban a probléma és a megoldás módjának részletes ismertetésén túlmenően a szerző kitért a gyakorlati alkalmazásokkal kapcsolatos kérdésekre is, és vázolta módszerének a szimplex módszerrel szemben fennálló számítástechnikai előnyeit. Közülük néhány: az alapadatokon kívül viszonylag kevés részeredményt kell tárolni, mivel az eljárás tetszőleges pontból indulhat és iteratív; a számítási hibákra kevésbé érzékeny, mint a szimplex módszer; egy jó kiinduló megoldás — amelynek nem kell lehetségesnek lennie — megkonstruálása útján a modellen kívüli információk felhasználhatók a számítások volumenének csökkentésére; egy iteráció viszonylag kevés számítást igényel és jól ki tudja használni az együttható mátrix üresességét.

Hátrányos lehet ez a megoldási mód, ha az iterációk száma lényegesen meghaladja a szimplex módszer iterációinak számát. A módszerrel jelenleg próbaszámítások folynak és a várakozások szerint a nagymértékű feladatok megoldásánál a felsorolt előnyöket ki lehet majd aknázni.

A matematikai módszereknek a tervezési gyakorlatban való alkalmazásában látunk biztató lépéseket *Báger Gusztáv—Morva Tamás—Szabó László „Lineáris programozási modell a IV. ötéves terv megalapozására"* című előadása alapján, amely bemutatta azt a modellt, amelyet a szerzők irányításával az ötéves tervezés céljaira dolgoztak ki az Országos Tervhivatalban, illetve a Tervgazdasági Intézetben. A nagyméretű lineáris programozási modell jól hasznosítja az 1966—70. évi népgazdasági programozási kísérlet tapasztalatait, közel áll a hagyományos tervezéshez, ennek követelményeihez alkalmazkodik, és — úgy látszik — bizonyos mértékben máris visszahat rá. A modell figyelembe veszi továbbá az új gazdasági mechanizmus bevezetésével járó módszerbeli és tartalmi változásokat is. Jelentős eredménynek tekinthető, hogy az Országos Tervhivatalban a modellt a konkrét tervezési munka részeként kezelik. A szerzők kifejezésével élve: a szóban forgó programozási számítás beépülő alkalmazás. A modell további jellemző vonása, hogy átfogja a termelés és felhasználás egészét, változói a termelés strukturális problémáin kívül a pénzügyi összefüggésekre is kiterjednek és így a modell a gazdasági szabályozók rendszerének vizsgálatára is alkalmas. A modellbe — párhuzamosan — értékbeni és naturális mértékegység szerinti koordinációt építettek be, s alkalmassá tették különböző makroökonómiai szintű mutatók (társadalmi termék, nemzeti jövedelem stb.) értékeinek levezetésére is. A modell matematikai struktúrája egy háromszorosan dekomponált lineáris programozási feladat alakját ölti, amelynek numerikus megoldására több számítástechnikai eljárást kívánnak kidolgozni. A matematikai- és gépi programozási munkák jelenleg több helyen is folynak.

Ujlaki Zsuzsa „*A hosszútávú tervezés modellezésének néhány kérdése*" című előadásában áttekintést adott az Országos Tervhivatalban folyó hosszútávú matematikai modellezés munkálatairól és részletesen ismertetett egy többperiódusos összevont programozási modellt.

Nézete szerint a matematikai tervezés a hosszútávú tervezés esetében nem optimális terv meghatározását jelenti, hanem az előterjesztendő nagyszámú, belső ellentmondásoktól mentes tervváltozat kiválasztását. Értelmezése szerint a matematikai tervezéssel előállítható variánsok a különböző fejlődési útvonalak konzisztens számszerűsített leírását adják, amelyek részletes elemzésével lehetővé válik a tervdöntések következményeinek előzetes felmérése.

Ezután beszélt a távlati tervezés céljaira figyelembe vett modellcsaládról, melyek közül némelyek a statikus és dinamikus Leontieff-modellek körébe tartoznak, mások pedig a lineáris programozás módszereire támaszkodnak. Az előadás második felében ismertetett összevont többperiódusos modell feladata a közeli és távoli jövő kölcsönhatásainak elemzése. A modell négy önállóan is életképes ötéves részmodellt tartalmaz. A lineáris részmodelleket intertemporális feltételek és változók kapcsolják össze.

A kollokviumot a hazai matematikai közgazdasági kutatások helyzetének és feladatainak megvitatása zárta le, amelyet *Bod Péter* előadása vezetett be. A vitában információs anyagként felhasználásra került *Szabó László—Andorka Rudolf* „*Matematikai módszerek népgazdasági (ágazati) tervezésben való alkalmazása*" című összeállítása, amely a hazai kutatásokat mérte fel.

Az elmúlt évtized eredményei között fel lehet sorolni, hogy sikerült leküzdenünk a matematika közgazdasági alkalmazásaival kapcsolatos előítéleteket, hogy ma már a gazdaságmatematika művelőinek széles tábora van hazánkban. A matematikai közgazdászok tevékenységének egyik, és talán legfontosabb eredménye, hogy — egzaktságra, zártabb összefüggésekre törekedve — pozitívan hatnak a közgazdasági gondolkodásra. Kifejlesztett módszereik, modelljeik már nemcsak a kutatás szintjén jelentkeznek, hanem fokozatosan gyakorlati felhasználásuk is tért hódít. Az egyetemi matematika-oktatás az elmúlt évtizedben szintén ugrásszerűen fejlődött. Megemlíthető az is, hogy a magyar matematikai közgazdászok nemzetközi téren is jó hírnévnek örvendenek.

A gazdaságmatematika alkalmazási területén azonban még sok problémát és hiányosságot találunk. Bod Péter előadásán kívül számos hozzászólás érintette ezt a kérdést. Közöttük szerepelt, hogy az elért eredményeket a szóba jöhető területnek csak mintegy 50 százalékán értük el. Még sok fehér foltot, feltáratlan területet találunk. A gazdasági mechanizmus elemzésével, nemzetközi összehasonlításokkal és a növekedésre ható tényezők elemzésével még alig-alig foglalkoznak. A gyengeség jelének számít, hogy a modellek zöme a lineáris programozásra és a matematikai statisztika egyes fejezeteire támaszkodik. A kutatók között egyes területeken még nem alakult ki a megfelelő kapcsolat. Sokszor előfordul, hogy a gazdasági modellek nem az objektív belső gazdasági összefüggéseket tükrözik, hanem felszínes vagy konzervatív közgazdasági elképzelésekhez adnak „egzakt" alapot.

Ezek a megjegyzések a matematikai közgazdászok önkritikájának tekinthetők. A fejlődést azonban — az elmondottakon túl — egyéb feltételek hiánya is gátolja. Ilyen feltételek mindenekelőtt a korszerűtlen és szűk elektronikus számológépi bázis, a megfelelő adatok, információk hiánya. A kutatások pártfogolása és támogatása egyes intézmények és gazdasági vezetők részéről nem mindig jár együtt az elért eredmények hasznosításával. Az eredmények elfogadtatásában sokszor a hivatali apparátusok második vagy harmadik vonalának averziója és felkészületlensége nehezíti meg a matematikai közgazdászok dolgát. Noha az elért eredmények kétségtelenül biztatóak, számos olyan terület van még, ahol előre kell lépnünk.

A résztvevők méltán tartották eredményesnek a kollokviumot. Sokak szerint egyike volt az elmúlt évek legjobban sikerült konferenciáinak. A kollokvium szervezése kitűnő volt, ami a — házigazdai tisztet betöltő — Matematikai-Közgazdasági Szakosztály Vezetőségének köszönhető.

Pongrácz Tibor

Beszámoló az Ökonometriai Társaság brüsszeli konferenciájáról

1969. szeptember 1-től 3-ig tartották Brüsszelben az Ökonometriai Társaság európai kongresszusát.

A szervező bizottság titkára J. Waelbroeck, a Brüsszeli Egyetem Közgazdasági Karának igazgatóhelyettese volt, aki a Kar fiatal oktatóinak és titkárságának segítségével megszervezte a konferencia tudományos programját és gondoskodott annak technikai lebonyolításáról. A tudományos program az ő üdvözlő szavaival kezdődött, majd J. Hurwitz, a Társaság elnöke, a minneapolisi egyetem professzora tartott egyórás előadást, melyben összefoglalta a matematikai közgazdaságtan eddigi legfontosabb eredményeit, ismertette azokat a főbb területeket, amelyeken jelenleg kutatások folynak és vázolta azokat, ahol kilátás van gyors ütemű fejlődésre.

A kongresszus programjában a következő főbb területeken elért újabb eredmények szerepeltek: általános egyensúlyelmélet, dinamikus makroökonómiai modellek, az egyéni és társadalmi preferenciák viszonyának vizsgálata, a gazdasági folyamatok véletlen ingadozását figyelembe vevő döntési modellek, tervezési és matematikai-programozási modellek. Beszámoltak néhány kutatásról a növekedési modellekkel és különféle prognosztikai modellekkel kapcsolatban. Hallhattunk ezenkívül néhány empirikus vizsgálatról (például a kereslet alakulásának megfigyelésével kapcsolatban), matematika-statisztikai problémákról és számítógépi módszerekről.

Számomra különösen érdekes volt az, hogy viszonylag sok olyan előadás hangzott el, amely a gazdasági folyamatokat, mint véletlen folyamatokat vizsgálta. A korábbi konferenciák programjait olvasva, csak elvétve találunk ebbe a témakörbe vágó eredményeket.

Igen érdekesnek tartottam egy kimondottan elméleti jellegű előadást. B. Gordal és J. F. Mertens (Belgium) arról számoltak be, hogy ha adva van gazdasági folyamatok olyan tere, melyben a tevékenységek lefolyása a véletlentől függ, és ha tervezni akarunk valamilyen tevékenységet, akkor gyakran szükséges tudnunk, milyen összefüggés van ezen tevékenységek valamilyen megadott értékrendje között. Létezik-e olyan hasznossági függvény, hogy két tevékenység hasznosságainak bizonyos halmazokon vett integráljai között fennálló egyenlőtlenség pontosan megfelel preferencia relációjuknak. Az előadás megmutatta, hogy milyen körülmények között és milyen tulajdonságú hasznossági függvény mellett lehet erre a kérdésre pozitív választ adni. A kérdés általános (nem csak valószínűségi) mértéktérben is megfogalmazható és ekkor pl. a Pontrjagin maximum-elv alkalmazása közben is felmerülhet.

T. F. Bewley (Belgium) egy neoklasszikus egyensúlyi modellt mutatott be, melyet azért említek meg, mert kitűnt, hogy ma már ilyen témák megértéséhez is modern matematikai apparátusra, topológiai, mértékelméleti és ezeken nyugvó valószínűségszámítási ismeretekre van szükség.

Elhangzott még néhány mikoökonómiai problémáról szóló előadás is ebben a szekcióban. Közülük kiemelnénk egy közvetlen gyakorlati feladatot, amely egy optimális csomagolási rendszer megadására vonatkozott.

Egyébként csak elvétve akadt olyan előadás, amely kimondottan gyakorlati problémák megoldását célozta. Igaz, hogy az Ökonometriai Társaság kongresszusai eddig is inkább elméleti irányúak voltak.

Az előadásokat felkért hozzászólók méltatták, illetve vitatták. A bírálat általában nem volt kíméletes. Ez a szellem — úgy vélem — segítette a konferencia munkáját, jóllehet, a hallgatóság hozzászólásaira és kérdéseire már általában nem maradt idő.

A kongresszusra három magyar dolgozatot nyújtottak be: Bródy András: „A linear theory of cycles", Forgó Ferenc és Szép Jenő: „On approximative solutions of large scale linear programming problems", Virág Ildikó: „A stochastic growth model" c. munkáit. Magyarországot a kongresszuson 11 tagú delegáció képviselte.

Virág Ildikó

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai–Közgazdasági Szakosztályának 1970. I. félévi munkaterve

A Szakosztály munkaterve három részből áll:

1. a Szakosztály elnökség munkaterve;
2. a rendezvények terve;
3. egyéb célkitűzések.

1. A Szakosztály elnökségét általában kéthónaponként hívjuk egybe.
   Az ülések tervezett napirendje:
   Február végén: A SZIGMA ankét tapasztalatai.
   Április végén: A matematikai-közgazdasági könyvkiadás helyzete.

2. Rendezvények:
   Január: A SZIGMA olvasóinak ankétja.
   Február: DANCS ISTVÁN: Az optimális folyamatok elmélete, felhasználási lehetőségei közgazdasági alkalmazásokban.
   Március: SZÉKELY BÉLA: A hosszútávú népgazdasági tervezés bázisadat-rendszere.
   Április vagy Május: A IV. ötéves terv kidolgozásához felhasznált matematikai modellel szerzett első tapasztalatok. (Az előadó személyét később közöljük.)

3. Egyéb tevékenység:
   - Rendezvények egyeztetése a Neumann János Társasággal és a Bólyai János Matematikai Társulat Alkalmazott Matematikai Szakosztályával.
   - „Farkas Gyula emlékpályázat" kezdeményezése.
   - Az érdekelt könyvkiadókkal felveszszük a kapcsolatot a matematikai-közgazdasági szakirodalom kiadásának tervszerűbbé tétele végett.

Bod Péter
a Szakosztály elnöke

Tájékoztatás az 1969. évi pályázatról

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-közgazdasági Szakosztálya és a SZIGMA szerkesztősége 1969. évre pályázatot írt ki; pályázni lehetett vállalati operációkutatási problémák megoldását ismertető tanulmányokkal.

A pályázati felhívásra mindössze két pályamű érkezett be. Elbírálásukra a Szakosztály elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki: Bod Péter, Éltető Ödön, Krekó Béla és Martos Béla.

A bíráló bizottság a dolgozatok és az előzetesen felkért lektorok véleményeinek áttanulmányozása alapján úgy döntött, hogy egyik pályamű sem ütötte meg a díjazhatóság mértékét. Ugyanakkor a bíróló bizottság megállapította, hogy a „*Homogén profilú építőipari vállalatok termelésprogramozása*" című dolgozat bizonyos értékelendő pozitív vonásokat tartalmaz. A dolgozat egy gyakorlatban tényleg alkalmazható és alkalmazásba is vett konkrét CPM-típusú modellt ír le. A modellhez számítógépes program is tartozik és a dolgozat kísérleti számítások eredményeiről is beszámol.

A dolgozat fő hiányosságai: 1. a modellt kizárólag verbálisan írja le, 2. nem világos milyen mértékben tartalmaz a modell újszerű elemeket az irodalomból ismertekhez képest, 3. a pályázat formai követelményeit a tanulmány nem teljesíti, mert nem mellékeltek hozzá irodalomjegyzéket.

A bíráló bizottság úgy határozott, hogy a fenti pályaművet „*Dicséret*"*-ben és 2000 Ft pénzjutalomban részesíti.*

A döntés után a felbontott jeligés levélből kitűnt, hogy a tanulmány szerzői:

ALMÁSY GÉZA okl. mérnök és okl. gazd mérnök,

ARNOLD LÁSZLÓ matematikus;
mindketten az *Építőipari Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalatnál* dolgoznak.

CONTENTS

BOOK REVIEWS

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

6
8