SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Közgazdasági Szemle társlapja

E SZÁM SZERZŐI:

TOMÁŠ GÁL, kandidátus, prágai Mezőgazdasági Főiskola, KONDOR GYÖRGY, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének főmunkatársa, KOVÁCS JÁNOS, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének főmunkatársa, MARTOS BÉLA, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének munkatársa, JOSEF NEDOMA, a Csehszlovák Tudományos Akadémia közgazdasági-matematikai laboratóriuma tudományos munkatársa, SZABÓ ZOLTÁN, az ikladi Ipari Műszergyár matematikusa, VARGA JÓZSEF, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem matematika tanszékének adjunktusa.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Szerkesztőség: Budapest V., Nádor u. 7. — Telefon: 127—294
Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010
A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓnál Budapest V., Alkotmány u. 21., Telefon: 111—010.
MNB egyszámlaszám: 46., csekkbefizetési számla: 05.915.111 — 46; az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTban, Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612; A POSTA KÖZPONTI HIRLAPIRODA 1. sz. HIRLAPBOLTJÁBAN, BUDAPEST V.. József-nádor tér 1. és *bármely postahivatalban*, csekkszámlaszám: egyéni: 61 257, közületi: 61 066. MNB egyszámlaszám: 8.
Ára 12,— Ft. Előfizetés egy évre: 40,— Ft

Varga József

Egy híradástechnikai vállalat programozási modelljének kialakítása

A decentralizált gazdaságirányítási rendszer zöld utat nyitott a matematika gazdasági alkalmazása előtt, mert a vállalatok nagyobb önállósága és felelőssége magában hordja a tudományos tervezés szükségességét és lehetőségét is. Hiszen a válllatot már nem mutatószámok igazgatják, ezeket a dinamikusan változó körülményekhez való rugalmas alkalmazkodás, a felelős gazdálkodás helyettesíti. A vállalat követi a piaci kereslet változásait, ami meghatározza a termelés összetételét, a gyártmányfejlesztés irányát, az egységárakat, és így tovább. A piaci tendenciák ösztönzik vagy fékezik a termelőkapacitások bővítését. A fejlesztés mikéntjéből eltűnik a mennyiségi szemlélet, előtérbe kerül a belső tartalékok aktiválása, a termelőeszköz piac megismerése és a leggazdaságosabb beruházási kombináció keresése.

A vállalat már nem szállító és átvevő, hanem kereskedelmi partner, aki vesz és elad, minőséget vizsgál, összehasonlít, latolgat, árengedményt kér vagy tesz, kockázatot vállal, megválaszthatja partnereit, tehát döntési joggal felruházott és döntéseiért felelős szerv. Ilyen helyzetben az eredményes gazdálkodás tervezése és szervezése korszerű módszereket kíván. A korszerű módszerek egyik eszköze a vállalat standard matematikai modellje.

Olyan modellről van szó, amely *egy meghatározott* vállalat gazdálkodásának minden lényeges és tartós összefüggését visszatükrözi, hazai számítógéppel megoldható, változói és feltételei viszonylag stabilak, paraméterei kidolgozhatók, amely támpontot tud adni a termelés összetételére, az export és import lekötésére, a kapacitások fejlesztésére, pénz és valutagazdálkodásra és így tovább.

A tsndard modell tehát lényegében egy tervező-apparátus, amely aktuális paraméterek mellett rövid és középlejáratú terveket képes szolgáltatni, de a pillanatnyi stratégia követésére is nyújt információkat, ha meghatározott céllal vezérlik.

Ilyen standard modellt dolgoztunk ki egy híradástechnikai gyár számára a KGM *Ipargazdasági, Számítástechnikai és Szervezési Intézetének*[1] megbízásából.

A vállalat vezetősége igen jó alanynak bizonyult. A modell nem született, hanem kifejlődött, ahogyan a közgazda, a kereskedő, a műszaki tervező, az anyaggazdálkodó, a pénzügyes, a beruházó, a kalkulátor stb. hozzátette a maga gondolatait, megbírálta az addig elkészült részt, újabb kapcsolatokra hívta fel a figyelmet, vitára késztette munkatársait. Így fejlődött spirálisan

[1] Filep—Tardos—Bene: Módszertani útmutató a KGM IV. ötéves tervének matematikai programozásához. KGM ISZSZI. 1968. (Sokszorosítás.)

a modell, mert az új gondolatok gyakran módosították a már véglegesnek tűnő részeket. Engedjék meg, hogy bemutassam a modell kialakulását. *A modellt 1975-re időzítettük.*

1. Termékjegyzék és termelés

Összeállítottuk a vállalat 1975. évi termékjegyzékét. A jegyzékbe felvettük a jelenleg gyártott termékek közül azokat, amelyek közben nem avulnak el, továbbá olyan új termékeket, amelyek kifejlesztése addigra befejeződik, vagy licencia vásárlással honosításra kerül. 18 termék került a jegyzékbe: $T_1, \ldots, T_{18}$.

A felsorolt termékek telefonkapcsolat létesítésére szolgáló berendezések (központok), amik az egyidejűleg létesíthető telefonkapcsolatok (vonalak) számával jellemezhetők. A termékek mindegyike több diszkrét vonalszámra építhető. Egy termék vonalszáma egyenesen arányos a létrehozásra felhasznált anyagi-műszaki stb. erőforrások mennyiségével. Ez lehetővé tette a 18 termék bontásnélküli kezelését. Bevezettük az 1000-vonalas központ fogalmát a tervezés egységeként.

$$\mathbf{x}_1 = [x_1, \ldots, x_{18}]^*\text{-al jelöltük}$$

az 1975-ben gyártásra kerülő telefonközpontok számát. Első megközelítésben úgy tűnt, hogy $\mathbf{x}_1$ realizációját csak a vállalat üzemi kapacitásai és a külső anyagellátás lehetőségei befolyásolják. Tervezési modellünk feltételi rendszere tehát

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \\ (1) \qquad &\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_1, \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

volt, ahol $\mathbf{A}_1$ és $\mathbf{A}_2$ az 1000-vonalas központok fajlagos üzemi kapacitás-, illetve anyagnorma-mátrixai, a $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_2$ vektorok pedig az 1975-ben felhasználható erőforrásmennyiségeket jelölik.

2. Termékeladás és nomenklaturabővítés

A vállalat monopolhelyzetet élvez belföldön, de az exportpiacon korlátozottak a lehetőségei. Mivel ugyanaz a telefonközpont más áron értékesíthető belföldön, szocialista és kapitalista piacon, azért külön exportváltozókat vezettünk be.

$$\mathbf{y}_1^1 \text{ és } \mathbf{y}_2^1\text{-vel jelöltük}$$

termékek szocialista és kapitalista exportját 1975-ben és

$$\mathbf{b}_3,\ \mathbf{b}_4\text{-el}$$

az export-korlátokat.

Az (1) modell feltételi rendszerét kibővítettük a

$$\begin{aligned} &\mathbf{0} \leq \mathbf{y}_1^1 \leq \mathbf{b}_3, \\ &0 \leq \mathbf{y}_1^2 \leq \mathbf{b}_4 \end{aligned} \tag{2}$$

feltételekkel.

Az értékesítés vizsgálatakor derült ki, hogy a termékek egyes alkatrészei keresett cikkek az exportpiacon. 7 olyan alkatrészt jelöltünk meg, amelyek önálló exportja szóbajöhet: $A_1, \ldots, A_7$.

A termékjegyzéket bővítettük a felsorolt alkatrészekkel. Az alkatrészek termelési- és export-változóit

$$\mathbf{x}_2,\ \mathbf{y}_2^1 \text{ és } \mathbf{y}_2^2\text{-vel}$$

jelöltük. Az alkatrész-exportot nem korlátoztuk, mert a kereslet nagyobb a vállalat termelésénél. (A fejlődő országok importalkatrészekből gyártanak központokat.) A változók 100 (A_1, A_2, A_3), illetve 1000 darabot jelentenek.

A modell (1) feltételeit módosítja az alkatrész-export:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_3(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_1, \\ &\mathbf{A}_2\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_4(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_2, \\ &\mathbf{y}_2^1 \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_2^2 \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{3}$$

ahol $\mathbf{A}_3$ és $\mathbf{A}_4$ az alkatrészek (100, 1000) gyártásához felhasznált üzemi- és anyag-normákat jelölik (A termékben szereplő alkatrészek erőforrás-felhasználását együtt kezeltük.)

3. Hazai szükségletek

A vállalatnak ki kell elégítenie a belföldi keresletet. A konkurencia vizsgálatára importtevékenységet tételeztünk fel nyugati relációból.

$$\mathbf{z}_1^2\text{-vel}$$

jelöltük az import-központok számát (1000 vonal).

A belföldi fogyasztás elemzésekor feltűnt, hogy a 18 termék 5 csoportra vonható össze (helyettesítő termékek), és a hazai megrendelések is összevontan jelentkeznek.

Célszerűnek látszott a központokhoz külön hazai kereskedelmi változókat rendelni.

$$\mathbf{h}^s\text{-el } (s = 1, 2, \ldots, 5)$$

jelöltük az egy csoportba tartozó központokból a hazai eladásra tervezett mennyiségeket.

Így a (2) és (3) feltételek mellett, termékmérlegekkel hangoltuk össze a termelést és az importot az exporttal és a hazai fogyasztással:

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}_1 + \mathbf{z}_1^2 = \mathbf{y}_1^1 + \mathbf{y}_1^2 + \mathbf{h}; \quad (\mathbf{h} = [\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^5]^*), \\ &\mathbf{1}^*\mathbf{h}^s = b_5^s; \quad (s = 1, 2, \ldots, 5), \\ &\mathbf{h} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4}$$

ahol b_5^s az összevont termékigényt jelöli.

4. Belső arányok és alkatrész-import

A termékek $\mathbf{x}_1$ és alkatrészek $\mathbf{x}_2$ vektorai nem függetlenek. A legtöbb alkatrész minden központnak eleme, de az elemek száma és összetétele központtípusonként változik. A szóbanforgó alkatrészeket beszerezhetjük kapitalista piacról is.

$$\mathbf{z}_2^2\text{-vel}$$

jelöltük az alkatrész-import 100, illetve 1000 darabját. A vállalatnak ki kell elégítenie a hazai fogyasztók alkatrészutánpótlási igényét is, amint $\mathbf{b}_6$-al jelöltünk.

A (2), (3) és (4) feltételek megoldáshalmazát módosítottuk az (5) alkatrészmérlegekkel:

$$\text{(5)} \qquad \mathbf{A}_5\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2 + \mathbf{b}_6 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{z}_2^2; \quad \mathbf{z}_2^2 \geq \mathbf{0},$$

ahol $\mathbf{A}_5$ a központok fajlagos alkatrész-tartalmát jelöli (1000 vonalhoz szükséges 100, ill. 1000 darab alkatrész).

5. Külső arányok

Az alkatrész-exportot eddig nem korlátoztuk. Az árak összehasonlításakor észrevettük, hogy előnyösebb lenne alkatrészexporttal foglalkozni, mint késztermékeket eladni. Ez a megoldás mégsem célravezető, mert a vállalat elveszítené késztermékpiacait, ugyanakkor az alkatrész-export lehetősége már csökkenő tendenciát mutat.

A vállalat előzetes döntése alapján az alkatrész-exportot a késztermékexport 10%-a alá szorítottuk a következő (6) feltétellel:

$$\text{(6)} \qquad \mathbf{a}_2^{1*}\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{a}_2^{2*}\mathbf{y}_2^2 \leq 0{,}1\,(\mathbf{a}_1^{1*}\mathbf{y}_1^1 + \mathbf{a}_1^{2*}\mathbf{y}_1^2),$$

ahol $\mathbf{a}^*$ az alkatrész- és termékárakat jelöli forintban (az exportárakat forintosítottuk).

6. A termelő-kapacitás tervezése

Az (1) feltételben állandónak tekintettük a termelő-kapacitást, ami nem felelt meg a valóság követelményének.

Feltettük ezért, hogy az 1975. évi kapacitás nem állandó és három részből áll:

1. az 1968-as kapacitás 1975-ben is működő része (nem kerül selejtezésre), amit $\mathbf{b}_1$-el jelöltünk,

2. az 1. kapacitás tartaléka, ami két műszak bevezetésével nyerhető az uralkodó 1,5 műszak felett, ezt $\mathbf{b}_7$-el jelöltük,

3. az 1975-ig, saját erőből megvalósítható beruházások kaapcitása.

1-2., A $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_7$ kapacitás reális becsléséhez bontást kellett alkalmaznunk. Részletesen elemeztük a termelési folyamatokat, majd felbontottuk a vállalatot műszaki egységekre. A műszaki egységeket úgy választottuk meg, hogy egymás tevékenységét nem helyettesíthetik. Így egy műhely több műszaki egységet is magában foglalhat, de több műhely is alkothat egy egységet.

Kiválasztottuk minden műszaki egységben azt a kapacitáshordozót (szerszámgép, szerelőszalag, beállító lakatos stb.), amelyik meghatározza az egység profilját. A műszaki egységek kapacitását ezek összesített technológiai idejével azonosítottuk. A számolást egy évre az érvényes műszakszám alapján végeztük. Az összesítés összeadást jelentett, ha az egység kapacitás-hordozói egyenlő teljesítményűek voltak. A különböző teljesítményű kapacitás-hordozóknál normalizáltuk a kapacitásokat egy kitüntetett kapacitás-hordozóra (a kétszer, háromszor termelékenyebb gépek technológiai ideje kétszer, háromszor több a kitüntetett gép technológiai idejénél). Az 1975-ig elavuló kapacitás-hordózókat figyelmen kívül hagytuk. Nem számoltunk a profilokat kiegészítő berendezések (köszörűgép a forgácsoló üzemben stb.) kapacitásaival sem.

A fenti számítások alapján $\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_7$ vektorokat óra/év-ben kaptuk meg (a vektorok m elemszáma a felvett műszaki egységek számával egyezik).

A műszaki egységek szerepe a termelésben különböző:

1. a központok ($\mathbf{x}_1$) gyártásával kapcsolatos,
2. az alkatrészek ($\mathbf{x}_2$) gyártásával kapcsolatos,
3. az alkatrészek és központok gyártásával is kapcsolatos.

A kapacitás adott éretelmezése miatt a (3) feltételeket a következő (7) feltételekre módosítottuk:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{71},\\
(7)\qquad &\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_{12} + \mathbf{b}_{72},\\
&\mathbf{A}_{13}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{33}(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_{13} + \mathbf{b}_{73} \text{ és}\\
&\mathbf{A}_2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_4\,(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_2,
\end{aligned}
$$

ahol $\mathbf{A}_{11}$ és $\mathbf{A}_{13}$ a központok, $\mathbf{A}_{12}$ az alkatrészek (100, ill. 1000), $\mathbf{A}_{33}$ pedig az export-alkatrészek időnormáit jelöli ($\mathbf{A}_{33}$ kisebb a központokba szerelt alkatrészek normáinál, amik $\mathbf{A}_{13}$-ban szerepelnek összevontan).

3. A beruházási tervet is a műszaki egységekhez kapcsoltuk. Számbavettük a kapacitás-hordozók piaci kínálatát és felvettük teljesítmény, ár, helyfoglalás, kiszolgáló létszám, kapcsolódó berendezések stb. jellemzőiket. Bevezettük a

$$\mathbf{W} = [w_{ij}]$$

beruházási változók mátrixát, ahol i a műszaki egységet, j pedig a piaci változatot (pl. Verőczy-, Jet 2-, Auman- stb. rendszerű tekercselőgép) jelöli, és a mértékegység óra/év.

A modell kapacitás mérlegeit (7) helyett (8)-al fejeztük ki.

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_{11} + \mathbf{b}_{71} + \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{1},\\
(8)\qquad &\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_{12} + \mathbf{b}_{72} + \mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{1},\\
&\mathbf{A}_{13}\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_3(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_{13} + \mathbf{b}_{73} + \mathbf{W}_3 \cdot \mathbf{1} \text{ és}\\
&\mathbf{A}_2\,\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_4(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_2\,.
\end{aligned}
$$

7. Pénzügyi feltételek

Nem szerepeltettük a modellben azokat a beruházásokat, amelyek a műszaki egységeinken kívül estek. (Szociális és kulturális létesítmények, energiarendszer korszerűsítése, festő és galvanizáló berendezések modernizálása stb.) Ezek várható költségeit levontuk az 1975-ig számított beruházási keretből, és így egy b_8 maradékkal számoltunk. Mivel a

$$\mathbf{w}_i^* \cdot \mathbf{1}$$

kapacitások a termelési terv és b_8 függvényei, bevezettük a

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_3^i \leq b_8 \tag{9}$$

feltételt, amelyben $\mathbf{a}_3^i$ az i-edik műszaki egység kapacitás-hordozó változatainak fajlagos beruházási költsége. A fajlagos költségeket az évi 1 kapacitásórát teljesítő „eszmei" kapacitás-hordozók beruházási költségével azonosítottuk, miáltal a különböző termelékenység is érvényre jutott az árak mellett. A beruházási költségek között felszámoltuk a közvetlen kapcsolódó, kiegészítő berendezések költségeit is.

A (9) feltétel paramétereit forintban számoltuk, jóllehet a kínálat hazai, szocialista és kapitalista piacokon jelentkezett. Olyan kombinációnk is volt, ahol a kapacitás-hordozót szocialista piacon, kiegészítő berendezését nyugaton találtuk, és költséges felszerelésüket itthon végezhetnék.

Mivel a vállalat önellátó kategóriába tartózik a deviza-gazdálkodást illetően,[2] függővé kellett tennünk a $\mathbf{W}$ elemei közötti választást a vállalat epxorttevékenységétől. Bevezettünk egy nem-negatív rubelegyeuleget és olyan dolláregyenleget, amely tartalmaz egy b_9 nagyságú devizatermelést, amelyből a modellen kívül beruházások dollárkiadásait fedezhetik:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}_1^{1*} \mathbf{y}_1^1 + \mathbf{a}_2^{1*} \mathbf{y}_2^1 - \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^* W \mathbf{a}_{31}^i \geq 0 \quad \text{és} \\ &\mathbf{a}_2^{1*} \mathbf{y}_1^2 + \mathbf{a}_2^{2*} \mathbf{y}_2^2 - \mathbf{a}_{1}{}_1^{2*} \mathbf{z}_1^2 - \mathbf{a}_{42}^{2*} \mathbf{z}_2^2 - \\ &- \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_{32}^i \geq b_9 , \end{aligned} \tag{10}$$

ahol $\mathbf{a}_{31}^i$ és $\mathbf{a}_{32}^i$ a beruházási változatok fajlagos rubel-, ill. dollár-tartalma az $\mathbf{a}_{41}^{2*}$ és $\mathbf{a}_{42}^{2*}$ pedig a termékek és alkatrészek importára a kapitalista piacon.

8. A fejlesztés hely- és létszámfeltétele

A műszaki egységek kétirányú fejlesztését a pénzügyi feltételek mellett megakadályozhatja a munkaerőhiány is. A vállalat már korábban elhatározta az első 5 műszaki egység vidékre telepítését. A kitelepítés hely- és munkaerőfedezetét előzetesen biztosította, ezért modellünkben csak a további fejlesztés szerepel ($\mathbf{b}_7$ és $\mathbf{W}$). Mivel $\mathbf{b}_7$ működtetéséhez is létszámot kell biztosítani,

[2] Időközben a devizagazdálkodási kötöttségek megszűntek.

de előre nem tudhatjuk, hogy a termelési terv milyen mértékben aktíválja azt, bevezettük a $\mathbf{k}_7$ változót, amely a tartalék-kapacitás kihasznált óraszámát méri, aminek $\mathbf{b}_7$ a felsőkorlátja. Így a (8) feltételeket a (11)-re módosítottuk.

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 \leqq \mathbf{b}_{11} + \mathbf{k}_{71} + \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{1},\\
&\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \leqq \mathbf{b}_{12} + \mathbf{k}_{72} + \mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{1},\\
&\mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_3(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_{13} + \mathbf{k}_{73} + \mathbf{W}_3 \cdot \mathbf{1},\\
&\mathbf{0} \leq \mathbf{k}_{71} \leq \mathbf{b}_{71}, \mathbf{0} \leq \mathbf{k}_{72}, \leq \mathbf{b}_{72}, \mathbf{0} \leq \mathbf{k}_{73} \leq \mathbf{b}_{73} \text{ és}\\
&\mathbf{A}_2\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_4(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_2 .
\end{aligned}
$$

Felmértük az $\mathbf{k}_7$ és $\mathbf{W}$ fejlesztéseknél felhasználható munkáslétszámot vidéken, és Budapesten (felszabaduló munkaerő, tanulóképzés stb.) és b_9^T, b_9^B-vel jelöltük.

A számított b_9^B olyan kevésnek adódott, hogy φ főnyi vidéki toborzást is figyelembe vettünk, amit azonban előre nem ismerünk.

A modell tehát két munkaerő-mérleggel növekedett:

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&\mathbf{a}_{61}^* \mathbf{k}_7^T + \sum_{i=1}^{5} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}\mathbf{a}_{62}^i \leq b_9^T \text{ és}\\
&\mathbf{a}_{71}^* \mathbf{k}_7^B + \sum_{i=6}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}\mathbf{a}_{72}^i \leq b_9^B + \varphi ,
\end{aligned}
$$

ahol $\mathbf{a}_{61}^*$ és $\mathbf{a}_{71}^*$ a tartalék, $\mathbf{a}_{62}^i$ és $\mathbf{a}_{72}^i$ pedig a beruházással nyert kapacitások működtetésének fajlagos létszámfedezete. Fajlagos fedezeten az „eszmei" kapacitásegység működtetéséhez szükséges dolgozók számát értettük (ebben benne van a kisegítő berendezések igénye is).

Az említett kitelepítéssel felszabadul Budapesten b_{10}^B m² alapterület. Vidéken és Budapesten is építéssel kell számolnunk az új kapacitás-hordozók felszereléséhez φ_T és φ_B m² csarnok építését terveztük. Az építés pénzügyi kihatásai miatt módosítani kellett a (9) feltételt (13)-ra.

$$
(13)\quad \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}\mathbf{a}_3^i + a_{51}\varphi_T + a_{52}\varphi_B \leq b_8 ,
$$

ahol a_{51} és a_{52} egy m² csarnok átlagos építési költsége vidéken és Pesten.

A fejlesztés mértéke és változatai függnek attól is, hogy mekkora terület-igénnyel lépnek fel.

A modell tehát bővült a (14) terület-mérlegekkel:

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{5} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}\mathbf{a}_8^i \leq \varphi_T \text{ és}\\
&\sum_{i=5}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}\mathbf{a}_9^i \leq b_{10}^B + \varphi_B ,
\end{aligned}
$$

ahol $\mathbf{a}_8^i$ és $\mathbf{a}_9^i$ az új kapacitáshordozók fajlagos területigénye.

9. A „Standard modell" feltételi rendszere

A vállalati gazdálkodás legfontosabb összefüggéseit kifejező és így a vállalat konzisztens döntéseit körülhatároló lineáris egyenlőtlenségrendszer a következő formát nyerte:

a) Változók:

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1^1, \mathbf{y}_1^2, \mathbf{y}_2^1, \mathbf{y}_2^2, \mathbf{z}_1^2, \mathbf{z}_2^2, \mathbf{h}, \mathbf{k}_7, \mathbf{W}, \varphi, \varphi_T, \varphi_B,$$

amik nem lehetnek negatívak.

b) Termékmerlegek (4):

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{z}_1^2 = \mathbf{y}_1^1 + \mathbf{y}_1^2 + \mathbf{h},$$

$$\mathbf{l}^* \mathbf{h}^s = b_5^s, \quad s = 1, \ldots, 5.$$

c) Exportkorlátok (2):

$$\mathbf{y}_1^1 \leq \mathbf{b}_3 \text{ és } \mathbf{y}_1^2 \leq \mathbf{b}_4.$$

d) Alkatrészmérlegek (5):

$$\mathbf{A}_5\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2 + \mathbf{b}_6 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{z}_2^2.$$

e) Kapacitásmérlegek (11):

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 \leq \mathbf{b}_{11} + \mathbf{k}_{71} + \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{1}, \ \mathbf{k}_{71} \leq \mathbf{b}_{71},$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \leq \mathbf{b}_{12} + \mathbf{k}_{72} + \mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{1}, \ \mathbf{k}_{72} \leq \mathbf{b}_{72},$$

$$\mathbf{A}_{13}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_3(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_{13} + \mathbf{k}_{73} + \mathbf{W}_3 \cdot \mathbf{1}, \ \mathbf{k}_{73} \leq \mathbf{b}_{73} \text{ és}$$

$$\mathbf{A}_2\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_4(\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{y}_2^2) \leq \mathbf{b}_2.$$

f) Exportarány (6):

$$\mathbf{a}_2^{1*}\mathbf{y}_2^1 + \mathbf{a}_2^{2*}\mathbf{y}_2^2 \leq 0{,}1(\mathbf{a}_1^{1*}\mathbf{y}_1^1 + \mathbf{a}_1^{2*}\mathbf{y}_1^2).$$

g) A beruházás pénzügyi mérlege (13)

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_3^i + a_{51}\varphi_T + a_{52}\varphi_B \leq b_8$$

h) Devizamérlegek (10):

$$\mathbf{a}_1^{1*}\mathbf{y}_1^1 + \mathbf{a}_2^{1*}\mathbf{y}_2^1 - \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_{31}^i \geq 0 \text{ és}$$

$$\mathbf{a}_1^{2*}\mathbf{y}_1^2 + \mathbf{a}_2^{2*}\mathbf{y}_2^2 - \left\{\mathbf{a}_{41}^{2*}\mathbf{z}_1^2 + \mathbf{a}_{42}^{2*}\mathbf{z}_2^2 + \sum_{i=1}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_{32}^i\right\} \geq b_9$$

i) Munkaerőmérlegek (12):

$$\mathbf{a}_{61}^* \mathbf{k}_7^T + \sum_{i=1}^{5} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_{62}^i \leq b_9^T \text{ és}$$

$$\mathbf{a}_{71}^* \mathbf{k}_7^B + \sum_{i=6}^{m} \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_{72}^i \leq b_9^B + \varphi.$$

k) Területmérlegek (14):

$$\sum_{i=1}^{5} \mathbf{e}_i^* \, \mathbf{Wa}_8^i \leq \varphi_T \text{ és}$$

$$\sum_{i=6}^{m} \mathbf{e}_i^* \, \mathbf{Wa}_9^i \leq b_{10}^B + \varphi_B \, .$$

A leírt modell, mint mondottuk, az 1975-ig terjedő időszakot veszi figyelembe. Nem ütemezi a tennivalókat, csak azt mondja meg, hogy 1975-ig milyen termelési tevékenységre kell felkészülni, milyen technikai — műszaki megoldásokat kell alkalmazni, és ha a felkészülés megtörtént, akkor 1975-ben mit és mennyit kell termelni és azt hogyan kell értékesíteni. (1975 helyett 1970 is írható.) A modell alkalmas a középtávú terv lebontására is.

10. Célfüggvény

A vállalati gazdálkodás eredményességének kifejezésére a fedezeti nyereséget választottuk, amit a termékek piaci árának és szűkített önköltségének különbözeteként definiáltunk.[3] A vállalat maximális fedezeti nyereségre törekszik, amit a (15) függvénnyel fejeztünk ki:

$$(15) \qquad \mathbf{c}_1^* \mathbf{h} + \mathbf{c}_1^{1*} \mathbf{x}_1^1 + \mathbf{c}_1^{2*} \mathbf{y}_1^2 + \mathbf{c}_2^{1*} \mathbf{y}_2^1 + \mathbf{c}_2^{2*} \mathbf{y}_2^2 - \mathbf{d}_1^* \mathbf{z}_1^2 - \mathbf{d}_2^* \mathbf{z}_2^2 \Rightarrow \max \, ,$$

ahol $\mathbf{c}^*$ a termékek és alkatrészek fedezetét (1000 vonal, 100, ill. 1000 db) jelöli, $\mathbf{d}^*$ pedig import árkülönbözetet (pozitív és negatív is lehet).

11. A modell paraméterei

A paraméteres modell megalkotásakor már figyelembe vettük az adatszolgáltatók jelzéseit a paraméterek becsülhetőségét illetően, ami a jelenlegi „hagyományos" tervezés függvénye.

A b_5^s paramétereket a Magyar Posta IV. ötéves tervéből vettük (munka közben megváltoztak).

A $\mathbf{b}_3$ és $\mathbf{b}_4$ exportkorlátokat a BUDAVOX Külkereskedelmi Vállalat piackutatási csoportja és a gyár kereskedelmi csoportjának tájékoztató adataiból vettük (közben több céggel alakultak ki kapcsolatok, amit előre nem lehetett látni). A korlátok stabilitását a vásárlók ama viselkedésére építettük, hogy nem szívesen térnek át vegyes telefonközpont-rendszerre.

$\mathbf{A}_5$ a termékek alkatrészmérlege, amit a műszaki tervekből kalkulátorok gyűjtöttek ki. A termékjegyzék vagy a termékek áttervezése esetén $\mathbf{A}_5$ változik, de mindig meghatározható.

$\mathbf{b}_6$ előrebecsléséhez az alkatrészek meghibásodási valószínűségei és az 1975-re belföldi használatban levő központok alkatrésztartalma adott megfelelő alapot.

[3] LADÓ—DELI: Optimális akcióváltozat kiválasztása költség- és nyereség-fedezeti számítással. Mérnöki Továbbképző Intézet kiadása, Budapest, 1967. Sokszorosítás.

$\mathbf{b}_1$ és $\mathbf{b}_7$ meghatározását korábban részleteztük. 20 műszaki egységet különböztettünk meg összesen ($M_1, \ldots, M_{20}$). $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$ és $\mathbf{A}_{13}$ a termékek és alkatrészek előállításához és egyes műszaki egységek kitüntetett kapacitáshordozóján szükséges óraszámok, amiket elő- és utókalkulációs adatok számtani közepeiként becsültünk, és azokat évi 2%-os termelékenység-növekedési tényezővel korrigáltuk. $\mathbf{A}_3$ becslése hasonlóan történt az $\mathbf{A}_{12}$-höz.

$\mathbf{A}_2$ a termékek 1000 vonalának anyagszükséglete. 12 olyan anyagot vettünk fel (ezüst, platina, Elfe szalag stb.), amelyek korlátozott volta nem a gazdaságirányítási rendszertől függ. Az $\mathbf{A}_2$ és $\mathbf{A}_4$ adatait ismert anyagnormák és műszaki rajzok alapján kalkulálta az anyagosztály. A $\mathbf{b}_2$ meghatározása az 1968. előtti tíz év fejlődési sorából történt, anyagonként eltérő, átlagos fejlődési mutatókkal.

$\mathbf{a}_1^1, \ldots, \mathbf{a}_2^2$ árak középtávon stabilnak tekinthetők, ezért a tényleges üzletkötések elért árait fogadtuk el a hagyományos termékeknél. Az új termékek árát viszonyítási alapon becsültük.

Az $\mathbf{a}_3^i$ adatait számítottuk. Ismertük az új kapacitás-hordozók árait forintban, rubelben, vagy dollárban kifejezve. A rubelt és a dollárt forintra számoltuk át, 40-es, illetve 60-as szorzószámmal. A szerelési költségeket azonosítottuk korábbi hasonló szerelési munkák költségeivel, amiket árindexszel korrigáltunk. Ismertük termelékenységüket, amit viszonyítottunk a kitüntetett kapacitás-hordozókéhoz. A viszonyt jelölje α_{ij}^0. Ha pl. 4000 techn. órát teljesít egy kitüntetett kapacitás-hordozó, akkor a j-edik változat

$$\alpha_{ij}^0 \cdot 4000 \text{ órát teljesíthet.}$$

Ezek alapján

$$\frac{K_{ij}}{\alpha_{ij}^0 \cdot 4000}$$

hányados az „eszmei kapacitás beruházási fajlagosa lesz, ha K_{ij} a beszerzési és felszerelési költségek összege.

Az $\mathbf{a}_{31}^i$ és $\mathbf{a}_{32}^i$ adatokat $\mathbf{a}_3^i$ mintájára számoltuk, de K_{ij}-nek csak a rubel és a dollár-tartalmát vettük alapul.

Az a_{51} és a_{52} paramétereket az ÉM. típusköltségvetéseiből átlagoltuk.

A b_8 beruházási keretet a vállalat „hagyományos" eszközökkel kidolgozott tervéből vettük át.

Az $\mathbf{a}_{61}$ és $\mathbf{a}_{71}$ vektorok a $\mathbf{b}_7$ kapacitás működtetéséhez szükséges létszámok és a $\mathbf{b}_7$ megfelelő komponenseinek arányaként adódtak.

Az $\mathbf{a}_{62}^i$ és $\mathbf{a}_{72}^i$ adatok $\mathbf{a}_3^i$ mintájára készültek, csak K_{ij}-t a kapacitás-hordozókat két műszakos kiszolgáló szak- és segédmunkások száma helyettesítette.

A b_9^T és b_9^B a vidéki és budapesti munkaerőkínálatot jelenti, melyeket a személyzeti csoport kalkulált a vidéki tanács jelzésére támaszkodva, illetve Budapesten a szakmunkásképzés, a fluktuáció, a nyudgíjazások, valamint a kapacitások kitelepítése és részleges szanálása alapján.

Az $\mathbf{a}_8^i$ és $\mathbf{a}_9^i$ adatokat szintén $\mathbf{a}_3^i$ szerint nyertük, ahol K_{ij} helyett, a kapacitás-hordozóhoz és mellék-berendezéseihez szükséges alap- és kiszolgálóterület m^2 száma szerepelt.

b_{10}^B a kitelepítésre kerülő műszaki egységek által felszabadított terület, amit felmértünk. Ez a terület csak ésszerű átszervezéssel válik a bővítés eszközévé. Az átszervezés költségeit nem tekintettük beruházási költségnek.

12. A numerikus modell

A paraméterek számszerűsítésekor derült ki, hogy több változó és feltétel kiesik: nem minden termék adható el mindhárom piacon; egyes termékekre nincs exportkorlát; nem minden műszaki egységnél van tartalék-kapacitás; bizonyos kapacitás-hordozóknak csak egy változata ismert vagy jöhet szóba, és így tovább.

A numerikus modell részletezése nélkül bemutatunk néhány konkrét feltételt ($\mathbf{x}_1 = [\mathbf{x}_1, \ldots, x_{18}]^*$, $\mathbf{x}_2 = [x_{19}, \ldots, x_{25}]^*$ és a kapcsolódó változók indexe megegyezik). Pl.:[4]

4.3. A T_3 termékből annyit kell termelni, amennyit a piac felvesz, tehát

$$x_3 - y_3^1 - y_3^2 - h_3 = 0\,.$$

4.15. Az első termékcsoportból rendelt mennyiséget biztosítani kell a belföldi fogyasztónak,

$$h_1 + h_2 + h_3 = 2.$$

2.4. A T_{13}-ból legfeljebb 15 ezer vonal adható le szocialista piacon,

$$y_{13}^1 \leq 15\,.$$

5.6. Az A_6-ból annyi darabot kell termelni, amennyi fedezi a $T_4, \ldots, T_{10}$ és T_{14} termékek szükségleteit, valamin a kétirányú exportot és a 135 000 db-os utánpótlást, vagyis

$$x_{24} = 15{,}2\,x_4 + \ldots + 11{,}356\,x_{10} + 9{,}662\,x_{11} + y_{24}^1 + y_{24}^2 + 135\,,$$

ha 15 200, ... db A_6 épül be egy 1000 vonalas T_4, ... termékbe.

11.8. A sajtoló üzem (műszaki egység) termelési tevékenysége minden termékre, továbbá az A_1, A_2, A_5 és A_6 alkatrészek export-volumenére terjed ki. Ennek megoldására 187 200 órás aktív, 48 000 órás tartalék, továbbá az $S_1, \ldots$, S_5 márkájú gépek megfelelő számú beszerzésével további

$$\mathbf{w}^* \cdot 1 \text{ órás}$$

új kapacitás áll rendelkezésére, tehát

$$1237\,x_1 + \ldots + 2346\,x_{18} + 208\,y_{19}^1 + \ldots + 47\,y_{24}^2 \leq$$
$$\leq 187\,200 + k_8 + w_8^1 + w_8^2 + w_8^3 + w_8^4 + w_8^5 \text{ és } k_8 \leq 48\,000\,,$$

ha 1237, ..., 2346 óra sajtológép-munkát ad a „sajtoló'' műszaki egységnek a $T_1, \ldots, T_{18}$ termékek 1000 vonala, 208, ..., 47 órát a szocialista exportra kerülő alkatrészek 100, ill. 1000 darabja. (Egyenlőséget nem írunk elő, mert a 187 200 óra lehet bő keresztmetszet is.)

11.32. Az összes termékek és exportalkatrészek gyártásához felhasználható forrasztóanyag egy évre $7929 \cdot 1{,}02^8$ kg, tehát

$$35\,x_1 + \ldots + 60x_{18} + 0{,}5\,y_{19}^1 + \ldots + 2y_{24}^2 \leq 7929 \cdot 1{,}02^8,$$

ha 35, ..., 60 kg forrasztóanyag szükséges egy 1000 vonalas $T_1, \ldots, T_{18}$ termék és 0,5, ..., 2 kg az alkatrészek 100, ill. 1000 darabjának gyártásához.

[4] A 4.3., 4.15. stb. számok első száma a feltételcsoportra, a második a feltétel számára vonatkozik.

13.1. Az új beruházások összköltsége nem lépheti túl a B keretet,

$$w_1 + (6{,}7w_2^1 + 15{,}5\, w_2^2 + 63{,}2\, w_3^1) + \ldots + (16{,}7\, w_8^1 + 125{,}6\, w_8^2 + 71{,}6\, w_8^3 + \\ + 255{,}5\, w_8^4 + 81\, w_8^5) + \ldots + 125\, w_{20} + 3200\, \varphi_T + 2400\, \varphi_B \leq B,$$

ahol pl. 6,7; 15,5; 63,2 egy magyar, egy orosz és egy francia tekercselőgép „eszmei" kapacitásának beruházási költségét jelenti forintban.

12.2 A budapesti fejlesztés csak 200 helybeli és φ számú, vidékről toborzott munkavállalóval számolhat, tehát

$$0{,}00055\, k_6 + \ldots + 0{,}0006\, w_6 + \ldots + 0{,}0005\, w_8^1 + 0{,}00033\, w_8^2 + 0{,}00102\, w_8^3 + \\ + \ldots + 0{,}0006\, w_{20} \leq 200 + \varphi,$$

ha 0,00055, ..., 0,0006 fő működtethet egy-egy „eszmei" órakapacitást az $M_1, \ldots, M_{20}$ műszaki egységekben. (Pl. 20 000 órás kapacitás aktiválódása esetén 11 főt kell munkába állítani az M_6-nál.)

14.1. Az új kapacitás-hordozók számára (vidéken) építeni kell egy φ_T alapterületű épületet, de

$$0{,}00175\, w_1 + 0{,}00125\, w_2^1 + 0{,}00083\, w_2^2 + 0{,}00025\, w_2^3 + \ldots + 0{,}00075\, w_4 \leq \varphi_T,$$

ha 0,00175, ..., 0,00075 m² az „eszmei" kapacitások területigénye (pl. 100 000 évi kapacitásórát teljesítő kapacitás-hordozók elhelyezéséhez és kiszolgálásához 175 m² területet kell biztosítani az M_1 esetében).

15.1. A vállalat fedezeti nyeresége:

$$1415{,}8\, h_1 + 1415{,}8\, y_1^1 + 491\, y_1^2 + \ldots + 943\, h_{17} + 3203\, y_{17}^1 + 5603\, y_{17}^2 + \\ + \ldots + 68 y_{24}^1 + 100\, y_{24}^2 - (2080\, z_{13}^2 + \ldots + 170{,}6\, z_{22}^2) \Rightarrow \max,$$

ahol pl. 943 Ft, 3203 rubel-forint és 5603 dollár-forint a fedezeti nyereséget jelöli egy 1000 vonalas T_{17} terméknél (1000 forintban számoltunk), vagy 68 és 100 az A_6 alkatrész 1000 darabjánál, míg 2080 a T_{13}-om terméket helyettesítő import termék 1000 vonalához tartozó árkülönbözet (pl. T_{13} hazai ára 2000, importára 4080 forint, veszteség 2080 forint.)

13. A modell korrigálása

Numerikus modellünk 86 feltételt és 112 változót tartalmazott. Első megoldása GIER típusú számítógéppel történt. A számítási idő 3,25 óra volt. A kapott optimális megoldást kielemeztük és elégedetlenek voltunk, mert

a) A számítási eredmények pontatlanok voltak, és hosszúnak tűnt a számítás ideje.

b) A célfüggvény nem takarékoskodott a beruházási kerettel.

c) A szocialista exportváltozók nem értékesültek.

d) A T_{15} termék lefoglalta a vállalat kapacitásának mintegy 70 százalékát, és a terméket kapitalista exportra javasolta a modell.

Az elemzés kiterjedt az okok megállapítására és kiküszöbölésére is. Az *a)* probléma abból adódott, hogy a modell numerikus paraméterei $10^{-5} - 10^6$ nagyságrend között változtak (a számítógép homogén nagyságrendű adatokkal gyorsabban és pontosabban számol). Ezt a hibát bizonyos feltételek 10^n-el való beszorzásával és egyes változók definíciójának megváltoztatásával szüntettük meg ($\mathbf{k}$ és $\mathbf{W}$ változók mértékegységét 1000 óra/évre változtattuk az óra/év helyett, miáltal együtthatóik 1000-el szorzódtak).

A *b)* probléma a célfüggvény konstrukciós hibájából eredt. A modell ugyan „elköltötte" a teljes beruházási keretet, de nem hozta működésbe a keletkező kapacitások egyikét (1600 db fúrógép maradt kihasználatlanul). Ennek az volt az oka, hogy több anyagkorlát kimerült az optimális programban. A kialakult termelési terv nem tudta kitölteni a beruházási keret által biztosított kapacitásokat. Mivel a keret tartalékolása nem növelte volna a program fedezeti nyereségét, ezért az a számítások során keletkező legutolsó szűk keresztmetszeten ragadt (ez következik a szimplex módszer logikájából). A problémát az anyagkorlátok „kiiktatásával" próbáltuk feloldani. Ezzel lehetővé tettük a vállalat belső lehetőségeinek teljes kihasználását, mert csak a beruházási keret maradt fix korlát (bizonyos exportváltozók még nem korlátozottak). A „kiiktatást" az anyagkorlátok megháromszorozásával oldottuk meg, mert így nem kellett újra „lyukasztani" a modellt (javító szalaggal dolgoztunk). Az így átalakított modell méri az optimális program anyagszükségletét is, és takarékoskodik a beruházási kerettel is, mert az anyagkorlátok elérhetetlenül magasak, a többi korlátfajták pedig legalább egy-egy mozgó korláttal rendelkeznek, így a fedezetnövekedés egyetlen eszköze a beruházási keret optimális felhasználása lesz. A *c)* probléma okát a devizaszorzókban találtuk, amit a 40-es, illetve 60-as szorzószámok módosításával vagy bizonyos termékek állami dotációjának fenntartásával lehetne feloldani.

A *d)* problémát fontos prognózisként értékeltük. A T_{15} ugyanis a vállalat által kifejlesztett, korszerű, nyomtatott áramkörös termék, amire szabad exportot terveztünk. Jó paraméterei alapján az első helyre került a termelésben és a kapitalista exportban is. Tehát valódi exportlehetőségeket kell teremteni (megfelelő reklámmal) a termék számára. A vállalat kérésére exportkorlátokat állítottunk be, remélve a *c)* probléma megoldását is.

A felsorolt módosítások után újra megoldottuk a mostmár 86 feltételt és 112 változót tartalmazó modellt. A számítási idő mintegy 35 százalékkal csökkent, és a megoldás pontossága is elfogadható volt (az egyenlőségek teljesültek, az egyenlőtlenségek 0—2%-os eltérést mutattak).

A T_{15} termékre felvett exportkorlátok alapvetően módosították a termelési struktúrát. A megoldás értékelése sok fontos információt nyújtott a vállalatnak. A modell a *b)* és *c)* szempontból nem felelt meg a várakozásnak, ezért újabb módosításoknak vetettük alá.

A *c)* probléma megoldására minden termék kapitalista exportját korlátoztuk.

A *b)* probléma pedig a célfüggvény módosítására vezetett. (Az előbbi megoldás azért nem vált be, mert a megváltozott termelési struktúra kimerített egy „elérhetetlenül magas" anyagkorlátot).

Bevezettünk néhány, a fedezeti nyereséget csökkentő tényezőt és ezek összegét

$$\alpha^*\mathbf{k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{W}\mathbf{a}_3^i + \gamma(a_{51}\varphi_T + a_{52}\varphi_B) + \delta\cdot\varphi\text{-vel}$$

jelöltük. Az $\alpha^*\,\mathbf{k}$ az a költségtöbblet, ami a kapacitás-hordozók intenzívebb kihasználásával jár (javítási, karbantartási költségtöbblet). A

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_3^i + \gamma(a_{51}\varphi_T + a_{52}\varphi_B)$$

a beruházások egy év alatt megtérülő része, ahol β_i és γ a berendezések és épületek élettartamától függő állandók (β_{ij} is szóbajöhet). A $\delta \cdot \varphi$ a toborzott munkaerő egyévi utaztatási vagy letelepítési költsége volt.

A módosísott célfüggvény tehát a következő alakot nyerte:

$$\mathbf{c}_1^* \cdot \mathbf{h} + \mathbf{c}_1^1 \mathbf{y}_1^1 + \mathbf{c}_1^2 \mathbf{y}_1^2 + \mathbf{c}_2^1 \mathbf{y}_2^1 + \mathbf{c}_2^2 \mathbf{y}_2^2 - (\mathbf{d}_1^* \mathbf{z}_1^2 + \mathbf{d}_2^* \mathbf{z}_2^2) -$$

$$- [\alpha^* \mathbf{k} + \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{e}_i^* \mathbf{W} \mathbf{a}_3^i + \gamma(a_{51}\varphi_T + a_{52}\varphi_B) + \delta\varphi] \Rightarrow \max$$

A módosított modell 94 feltételt és 120 változót tartalmazott. A számítások elvégzése után megállapítottuk, hogy a modell korrektül működik, és — a gazdaságpolitikai kérdéseket leszámítva —, minden kérdésre válaszolni tud. Pl.:

1. Milyen termékeket termeljen a vállalat 1975-ben?

A modell 9 terméket nem javasolt termelésre, amelyek árnyékáraik alapján sorrendbe állíthatók veszteségességüket illetően.

2. Hol kell a termékeket értékesíteni?

A modell megnevezte a termékcsoportokban azt a terméket, amellyel a hazai keresletet ki kell elégíteni, és — a korlátokon belül — kijelölte a termékek szocialista és kapitalista exportját is.

3. Milyen mennyiséget kell beszerezni a nyersanyagokból? Ezt az anyagkorlátok és a hiányváltozók különbségeként számítottuk ki.

4. Milyen kapacitások működését kell biztosítani? Mely műszaki egységek kapacitását milyen módon, milyen változat felhasználásával kell bővíteni? Erre a következő megoldást nyertük:

Tervezett kapacitások (óra/év)

Műszaki egység	$\mathbf{b}_7$	$\mathbf{k}_7$	$\mathbf{e}_7^* \mathbf{W} 1$	Tartalék 1975-ben
M_1	—	—	—	271 800
M_2	—	—	41 824	—
M_3	10 000	—	—	236 942
M_4	10 000	—	—	482 948
M_5	10 000	10 000	131 163	—
M_6	300 000	245 336	—	54 663
M_7	—	—	—	1 112 502
M_8	46 000	—	89 068	46 000
M_9	120 000	62 487	—	57 512
M_{10}	21 120	21 120	37 268	—
M_{11}	21 780	21 780	101 577	—
M_{12}	—	—	—	51 406
M_{13}	—	—	—	12 210
M_{14}	—	—	—	23 756
M_{15}	—	—	13 828	—
M_{16}	110 000	28 944	—	81 055
M_{17}	96 000	96 000	919 815	—
M_{18}	—	—	251 746	—
M_{19}	—	—	9 081	—
M_{20}	—	—	185 551	—

A táblázatból leolvasható, hogy csak ott aktiválódott a ($\mathbf{b}_7$) tartalék, ahol a ($\mathbf{b}_1$) kapacitás szűknek bizonyult, és új beruházás is csak olyan mértékben keletkezett, ahogyan a termelés kívánta, (nincs 1975-ben tartalék), bár itt M_8 kivételt képez, ami az új kapacitás-hordozók csekély munkaerőigényéből adódik (a munkaerő letelepítése pénzbe kerül, ami rontja a fedezetet). Az $\mathbf{e}_1^*$ $\mathbf{W}$ változatait nem részleteztük a táblában, de az érdekesség kedvéért megjegyezzük, hogy minden esetben a korszerűbb, automatizált, termelékenyebb gépeket választotta ki a modell. Az 1975. évi tartalékok egyes műszaki egységeknél igen magasak. Célszerűnek látszik ezeket b_7-ben szerepeltetni, és az általuk lekötött létszámot és területet a modell megfelelő korlátaihoz adni (b_9 és b_{10}), ugyanakkor a célfüggvényt megterhelni a lekötött eszközök megfelelő járadékával.

5. Milyen építési és munkaerő-toborzási tevékenységet kell folytatni? A megoldás Budapesten javasolt erőteljes fejlesztést, ami építéssel és toborzással jár. Felvetődött azért további műszaki egységek vidékre telepítése is.

6. Milyen nagyságú rubel- és dollár-bevétel érhető el 1975-ben?

7. Milyen fedezeti nyereséggel számolhat a vállalat? stb.

14. A standard modell használata

A próbaszámítások során korrigált modell tekinthető a vállalat standard modelljének. E modellt a vállalat rendelkezésére bocsájtottuk a következő tanácsok kíséretében:

a) A modell szerkezete megfelel a vállalat tervezési követelményeinek, de a változók és feltételek száma nem állandó.

b) A modell összes paramétere 1975-re érvényes. Megváltoznak a paraméterek, ha rövidtávú tervet számolunk. Változhatnak a paraméterek 1975-re is, ha korszerűbb technológiákat alkalmaznak és jobb a munkaszervezés. A paramétereket tehát időnként pontositani kell.

c) A belső paraméterek (anyag- és kapacitás-normák) lényeges megváltozásakor két programot kell kiszámítani:

1. Export- és anyagkorlátok *nélkül* mi lenne az optimális terv?

2. A valóság korlátai *mellett* mi az optimális terv?

Az első arról tájékoztat, amihez a feltételeket kellene megteremteni, a második pedig arról, hogy a feltételek változatlansága mellett mit kell tenni.

d) A távlati terveket a tervidőszak utolsó évére kell programozni.

e) Az éves tervek fejlesztési döntéseit a következő évi szükségletek, de az adott év pénzügyi lehetőségei alapján célszerű programozni.

f) Ha új terméket fejleszt ki a vállalat vagy licenciát óhajt vásárolni, meg kell vizsgálni, anyag és exportkorlátok nélküli modellel, hogy beilleszkedik-e a termék az optimális megoldásba (paramétereit a sorozatgyártás feltételeihez kell előrebecsülni). Figyelembe kell venni az új termék beruházási igé nyeit (célgépek, stb.) is.

g) Nagyobb üzletkötések előtt meg kell vizsgálni a szóban forgó termék árparaméterét, hogy milyen alsó határnál nem lehet további engedményt tenni, mert a termék már nem illeszkedik be az optimális programba.

h) A standard modell numerikus adatait és aktuális bázisának inverzét, valamint gépi programját tárolni kell, hogy mindig működésképes munkaeszköz, valóban standard modell lehessen.

(Beérkezett: 1969. március 13.)

ESTABLISHING THE PROGRAMMING MODEL OF A FIRM IN THE TELECOMMUNICATION ENGINEERING

The article follows up the generation of the medium-term planning model of an industrial enterprise, the trial computations, the analysis of the solutions, the modifications of the model, and gives in conclusion advice concerning the manner of continuous application.

In paragraphs 1 to 8, the variables representing the firm's activities are introduced. Thus, $\mathbf{x}_1$ denotes the production variables of the product, $\mathbf{x}_2$ those of the parts, $\mathbf{y}^{1,2}$ the two-directional export variables, $\mathbf{z}^2$ the one-directional import variable, and $\mathbf{h}$ the variable of domestic supply. The variables $\mathbf{k}_7$ and $\mathbf{W}$ measure the increases in productive capacity; $\mathbf{k}_7$ denotes the increment due to the extension of the daily operation time of existing capacities, and the row vectors of $\mathbf{W}$ those brought about by investment, taking also into account the possible technical, financial and other alternatives. The φ variables represent the labour and construction requirements of the development activities. Parallel with the introduction of the variables we also write up the conditions of the model which will change in the course of acquiring an ever more profound knowledge of the internal and external relationships of the firm's realities.

In paragraph 9, the system of constraints of the firm's planning model is surveyed, which includes the balances of products (*b*), parts (*d*), capacity (*e*), finances (*g*), foreign exchange (*h*), manpower (*i*) and area (*k*), together with the constraints concerning the volume of exports (*c*) and their composition (*f*).

In paragraph 10, the objective function of the firm is formulated, which measures the sales returns less direct costs for a year.

In paragraph 11, the estimates of the model's parameters, the arising problems, and some conditions of the numerical model (12) are surveyed.

In paragraph 13, the lessons to be drawn from the trial computations are summed up, together with the modifications that have become necessary in order to render the representation of reality more accurate.

Finally, in paragraph 14, the possibility of the continuous application of the "Standard Model" is described and its use is outlined in connection with the working out of annual and five-year plans as well as of the long term orientation and the everyday policy.

The described model can be applied in firms of serial production which operate with productive capacities that can be converted for production of several products. The author and his co-workers have used the model with considerable success in several engineering, vehicle and telecommunication works, taking the specific local conditions into consideration.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ ТЕХНИКИ СВЯЗИ

В статье автор представляет построение модели среднесрочного планирования конкретного промышленного предприятия, проверочные исчисления, анализ решений модификацию модели и, наконец, дает советы относительно ее перманентного применения.

Под пунктами 1—8 вводятся переменные, представляющиеся деятельности предприятия в области планирования. Так например, $\mathbf{x}_1$ обозначает производственные переменные продукции, а $\mathbf{x}_2$ — деталей; $\mathbf{y}^{1,2}$ — переменные экспорта различных направлений, $\mathbf{z}^2$ — импорта одного направления, а $\mathbf{h}$ — отчечественного снабжения. Посредством переменных, $\mathbf{k}_7$ и $\mathbf{W}$ измеряется увеличение производственных мощностей, причем, $\mathbf{k}_7$ обозначает их прирост в результате внутрисуточного удлинеиия времени эксплуатации имеющихся мощностей, а векторы-строки $\mathbf{W}$ — в результате капиталовложений, с одновременным учетом возможных технических, финансовых и т. п. альтернатив. Переменные обозначают связанные с развитием потребности в численности и строительстве. Параллельно с введением переменных описываются и условия модели, изменяющиеся со все более основательным познанием внутренних и внешних взаимозависимостей реальной деятельности предприятия.

Под пунктом 9. обобщается система условий модели планирования предприятия, в которой фигурируют балансы продукции — (b), деталей — (d), мощностей — (e), финансо вых средств — (g), валюты — (h), рабочей силы — (i) и территориальные балансы – (k) наряду с условиями относительно об'ема (c) и структуры экспорта (f).

Под пунктом 10. формулируется целевая функция предприятия, измеряющая, т. н. «покрывающую прибыль» (выручка минус прямые затраты), реализуемую в результате годовой деятельности предприятия.

Под пунктом 11. излагаются ориентировочное определение параметров модели, возникающие проблемы и некоторые конкретные условия нумерической модели (12).

Под пунктом 13. обобщаются выводы, вытекающие из проверочных исчислений, и изменения, требующиеся в интересах более достоверного отражения действительности.

Наконец, под пунктом 14 показываются возможности и необходимость перманентного применения полученной таким образом «стандартной модели» при разработке годовых и пятилетних планов, а также ориентировочных планов и актуальной стратегии.

Представленная здесь модель применима к предприятиям, в которых происходит серийное производство и производственные мощности которых пригодны для производства различных видов продукции. Автор и его сотрудники с учетом местной специфики успешно применяют ее в ряде машиностроительных предприятий, на предприятиях техники связи на предприятиях по производству средств транспорта.

Szabó Zoltán

CPM/TIME-algoritmusok korlátozott kapacitások esetén

Bevezetés

A hálótervezési módszerek közül legismertebb és legelterjedtebb a kritikus út módszere, a CPM/TIME. Tekintsük át röviden e módszert.

Az egy kezdő- és egy végponttal rendelkező, irányított, körútmentes, véges gráf (hálózat) minden ívéhez (tevékenységéhez) hozzárendelünk egy nem negatív számot, a tevékenység időtartamát. Ezek segítségével a csomópontokhoz (eseményekhez) hozzárendelhetjük a legkorábbi és a legkésőbbi bekövetkezési időket a következőképpen.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a kezdő eseménynek a legkorábbi bekövetkezési ideje zérus. Tetszőleges i esemény legkorábbi bekövetkezési ideje a kezdő eseményből az i-be érkező utak hálótervezési értelemben vett (azaz a tevékenységek időtartamainak összegeként képzett) hosszainak maximuma. A hálózat befejező eseményének legkorábbi bekövetkezési idejét a hálózat teljes tervezési idejének nevezzük, s λ-val jelöljük. Tetszőleges j esemény legkésőbbi bekövetkezési ideje a λ-nak és a j-ből a befejező eseménybe érkező leghosszabb út hosszának a különbsége.

Minden tevékenységhez két esemény (a tevékenység kezdő és befejező eseménye), így négy időpont tartozik: a legkorábbi és legkésőbbi kezdés, valamint a legkorábbi és legkésőbbi befejezés időpontjai. A tevékenység időtartaléka a legkorábbi és a legkésőbbi kezdési időpontok különbsége. A kezdő eseményből a végeseménybe vezető utak leghosszabbikát (ha több van, úgy ezek mindegyikét) kritikus útnak nevezzük. A kritikus út hossza nyilván λ. Az is ismeretes, hogy a kritikus út tevékenységeinek és csak ezeknek az időtartalékuk zérus. A CPM/TIME algoritmusok kiszámítják a tevékenységekhez tartozó négy időpontot, és megjelölik a kritikus út tevékenységeit.

A túlterhelési probléma megfogalmazása

A termelésben gyakran előfordul, hogy több azonos típusú műveletet (tevékenységet) kell egyidőben elvégezni, mint amennyi a rendelkezésre álló termelési erőforrások (kapacitások) segítségével elvégezhető. Állapítsuk meg, mely műveleteket hagyjuk későbbre és mennyivel, hogy a végtermék előállítása minél kisebb mértékben késsen.

Operációkutatási terminológiában a következőképpen fogalmazzuk meg a problémát. Legyen adva egy fent definiált hálózat, tevékenységi időtartamokkal ellátva. A tevékenységek osztályát diszjunkt csoportokra, ún. azonos kapacitást terhelő (röviden azonos) tevékenység-csoportokra osztjuk. Minden csoporthoz tartozzon egy $c \geq 1$ természetes szám, a kapacitás mértéke, mely azt mutatja meg, hogy legfeljebb hány tevékenység végezhető egyidőben. Amennyiben van olyan tevékenység-csoport, melyből kiválasztható $c + p$ ($p > 0$) számú tevékenység úgy, hogy legkorábbi kezdési és legkésőbbi befejezési időpontjaik által alkotott időintervallumaik **I** metszetének mértéke pozitív, akkor túlterhelésről beszélünk. Nem okoz zavart, ha a tevékenység időintervallumát röviden tevékenységnek is nevezzük. Az **I** intervallumot túlterhelési helynek nevezzük. A dolgozatban olyan algoritmusokat adunk meg, melyek a hálózat túlterheléseit megszüntetik.

A későbbiekben a következő fogalmakra lesz szükségünk.

A tevékenység felezőpontja a legkorábbi kezdés és a legkésőbbi befejezés számtani közepe.

A tevékenység lényeges része az időintervallumnak és az időtartaléknak a különbsége.

Két tevékenység időtartalékaival metsz egymásba, ha a közös metszet nem nagyobb egyik tevékenység időtartalékánál sem.

Egyik tevékenység időtartalékával metsz a másik tevékenység lényeges részébe, ha a közös metszet kisebb az egyik tevékenység időtartalékánál, de nagyobb a másikénál.

Két tevékenység lényeges részeivel metsz egymásba, ha a közös metszet mindkét tevékenység időtartalékánál nagyobb.

Egyik tevékenység balról (jobbról) metsz a másik tevékenységbe, ha a két tevékenység egymásba metsz, és az előbbi tevékenység felezőpontja nem nagyobb (nem kisebb) az utóbbiénál.

Az **A** tevékenység megelőzi a **B** tevékenységet (**A** balra van **B**-től), ha **A** végpontjából a hálózat élei mentén az irányításnak megfelelően haladva, elérhetünk **B** kezdőpontjába. Ekkor **B** követi az **A**-t (**B** jobbra van **A**-tól).

Az **A** tevékenységet jobbra (balra) toljuk, ha legkorábbi vagy legkésőbbi időpontjait egyenlő mértékben növeljük (csökkentjük).

Az algoritmus

1. A hálózatra végezzük el a CPM/TIME algoritmust, azaz a tevékenységekhez tartozó négy időpontot számítsuk ki. Menjünk a 2. ponthoz.

2. Keressük meg a túlterhelési helyeket. Ha ilyen nincs, menjünk a 8. ponthoz, különben menjünk a 3. ponthoz.

3. A túlterhelési helyek baloldali végpontjaik közül a legkisebbikhez (ha több van, ezek bármelyikéhez) tartozó túlterhelési hellyel menjünk a 4. ponthoz.

4. A túlterhelésbe belejátszó tevékenységeket állítsuk legkorábbi kezdési időpontjaik szerint növekvő nagyság szerinti sorrendbe, és az első $c + 1$ számú tevékenységgel menjünk az 5. ponthoz.

5. Ha van két olyan tevékenység, melyek csak időtartalékaikkal metszenek egymásba, menjünk a 7. ponthoz.

Ha van két olyan tevékenység, melyek egyike időtartalékával metsz a másik tevékenység lényeges részébe, menjünk a 6. ponthoz.

Válasszuk ki a tevékenységek legkésőbbi kezdései közül a legnagyobbikat (t_1) és a második legnagyobbat (t_2), továbbá a legkorábbi befejezési időpontok közül a legkisebbet (T_1) és a második legkisebbet (T_2). Ha t_1 és T_1 ugyanazon tevékenységhez tartoznak, akkor vegyük

$$m = \min (T_1 - t_2, T_2 - t_1)\text{-hoz tartozó } T_i, \text{ ill. } t_i$$

időpontokat, s jelöljük T, ill. t-vel; különben $t_1 = t$, $T_1 = T$. A t-hez tartozó **A** tevékenység legkorábbi és legkésőbbi kezdési időpontját toljuk el T időpontba. Ezáltal az **A**-val közös úton, **A**-tól jobbra eső tevékenységek kezdési időpontjai rendre egy-egy közös pontba, jobbra eltolódnak, és keletkezik egy **A**-t közvetlenül megelőző ún. várakozási (vagy idő-) tevékenység (time-activity). A T-hez tartozó **B** tevékenység legkésőbbi időpontjait pedig toljuk el balra az időtartalék mértékével, miáltal a **B**-től balra levő, vele azonos úton fekvő tevékenységek legkésőbbi időpontjai is balra tolódnak. Keletkezik a **B** tevékenységet közvetlenül követő várakozási tevékenység. Menjünk a 2. ponthoz.

6. Ha van olyan **A** tevékenység, melynek időtartaléka balról metsz egy tevékenység lényeges részébe, akkor a lényeges részbe történő metszés mértékével balra toljuk az **A** tevékenység legkésőbbi időpontjait (ezáltal **A**-tól balra levő tevékenységeknél is ugyanez történik), és az **A**-tól jobbra most is fellép egy várakozási tevékenység. Menjünk a 7. ponthoz.

Kiválasztjuk azokat a tevékenységeket, melyeknek időtartalékai metszenek más tevékenységek lényeges részeibe. Ezek közül kiválasztjuk azt a tevékenységet, melynek időtartalékából a metszetet elvéve, a legnagyobb maradékidőtartalékhoz jutunk. Ezen tevékenység legkorábbi időpontjait jobbra toljuk a metszet mértékével (miáltal előtte egy várakozási tevékenység keletkezik), és a tőle jobbra álló tevékenységek is jobbra tolódnak. Menjünk a 7. ponthoz.

7. A balról metsző tevékenységek közül kiválasztjuk azt, amelyiknek időtartalékából kivonva a metszet-intervallumot, a legnagyobb időtartalék marad. Ezen tevékenységnek a legkésőbbi időpontjait a metszet mértékével balra toljuk (miáltal a tőle balra lévő tevékenységekkel is ugyanez történik). Itt is keletkezett egy várakozási tevékenység. Menjünk a 2. ponthoz.

8. Lépjünk ki az algoritmusból.

1. Megjegyzés

Nyilvánvaló, hogy a túlterhelések megszüntetésének egyetlen módja a tevékenységek időbeli eltolása. Szimmetriai okokból azonban világos, hogy két tevékenység vizsgálata esetén az egyik tevékenységet ugyanannyival kell előretolni, mint a másikat hátratolni, azaz az előre- és hátratolás a teljes tervezési idő szempontjából equivalens. Lényeges részek metszése esetén azonban csak a hátratolás alkalmazható, ugyanis előretolás alkalmával a túlterhelési helytől balra felléphetne újabb túlterhelés, ami azt eredményezheti, hogy az eljárás végtelen ciklusba ugrik. Időtartalékok csökkentése esetén természetesen mindkét eltolás alkalmazható, hiszen ekkor újabb túlterhelés nem léphet fel a tevékenységek időintervallumainak csökkenése miatt.

1. Tétel: A túlterhelési hely jobb oldali végpontjától balra az algoritmus folyamán nem lép fel újabb túlterhelés.

Bizonyítás:

A hálózattal, a tevékenységekkel az algoritmus folyamán a következők történhetnek:

a) A túlterhelésbe belejátszó egyik tevékenységnek és a tőle balra (következésképpen a túlterhelési helytől még inkább balra) levő néhány tevékenységnek a legkésőbbi időpontja balra tolódik (legfeljebb a megfelelő legkorábbi időpontig), miáltal az említett tevékenységek időintervallumainak jobboldali végpontjai nem növekednek. Tehát ekkor nem lép fel újabb túlterhelés.

b) A túlterhelésbe belejátszó egyik tevékenység legkorábbi időpontjai vagy legkésőbbi időpontjai (esetleg minden időpontja) jobbra tolódik, miáltal fellépő újabb túlterhelési hely baloldali végpontja nem lehet balra az említett tevékenység eredeti jobboldali végpontjától, annál inkább nem lehet balra az eredeti túlterhelési hely jobboldali végpontjától.

c) A túlterhelési helybe belejátszó egyik tevékenységtől jobbra (tehát a túlterhelési hely jobboldali **P** végpontjától még inkább jobbra) levő tevékenységek jobbra eltolódnak. Ezáltal a **P** ponttól balra természetesen nem lép fel túlterhelés.

d) Várakozási tevékenységek keletkeznek, melyek egyetlen azonos kapacitást terhelő tevékenység-csoportba sem tartoznak, következésképpen nem okoznak újabb túlterhelést.

A fenti meggondolásokból a tétel igazsága következik.

1. Következmény

Eljárásunk lépéseinek véges voltából, a hálózat, a túlterhelések végességéből az 1. tétel felhasználásával azt kapjuk, hogy az eljárás minden túlterhelést megszüntet (balról jobbra haladva, amit az eljárás 4. pontja biztosít). Következésképpen eljárásunk nem ugorhat végtelen ciklusba, tehát algoritmus.

2. Megjegyzés

Az algoritmus folyamán keletkező várakozási tevékenységeket nem adhatjuk hozzá sem az előtte, sem az utána álló tevékenységek időtartalékaihoz, ugyanis ellenkező esetben az eljárás végtelen ciklusba ugorhatna. Ugyanezen ok miatt nem végezhető el egyik tevékenységeltolás után sem a CPM/TIME algoritmus. Pontosabban mondva, ha egy tevékenységet jobbra (balra) eltolunk, úgy az eltolást csak az őt követő (megelőző) tevékenységekre kell elvégezni. A vég- (kezdő-) esemény megváltozott időpontjai szerint nem szabad a fennmaradó tevékenységek időpontjait is megváltoztatni, mert különben ugyanaz a túlterhelés újra felléphet, vagy más, újra fellépő túlterhelés miatt ugrik az eljárás végtelen ciklusba.

2. Tétel

Az algoritmus 5. pontjának egyszeri alkalmazása a teljes tervezési időt a lehető legkisebb mértékben növeli meg.

Bizonyítás

Világos, hogy az 5. pont alatti eljárás egyszeri elvégzésekor a teljes tervezési idő a $(T - t)$ időtartam mértékével növekszik meg. A $(T - t)$ konstrukciójából következik, hogy a $(c + 1)$ számú tevékenység közül bármelyik kettő lényeges részeinek metszete nem kisebb $(T - t)$-nél. Tehát a túlterhelés megszüntetésére irányuló, 5. pontban leírt eltolás minimális, $(T - t)$ mértékben növeli meg a teljes tervezési időt.

(Az 1. megjegyzés alapján a teljes tervezési idő növekedése a hálózat befejező eseménye bekövetkezési idejének $(T - t)$ mértékben történő késése útján valósul meg az algoritmus minden olyan szakaszában, amikor az 5. pont alatti eljárást alkalmazzuk.)

3. Megjegyzés

Hálózatunk általánosítása a CPM rendszerben tárgyalt hálózatoknak. Utóbbiak ugyanis az előbbieknek olyan speciális esetei, amikor nincs túlterhelés, vagy egész egyszerűen minden tevékenység-csoportnál c majorálja a tevékenységek számát.

4. Megjegyzés

Bár algoritmusunk a túlterheléseket oly módon szünteti meg, hogy az 5. pont egyszeri alkalmazása esetén λ minimális mértékben növekszik meg, mégsem tarthat igényt az „optimális" elnevezésre. Ennek oka az, hogy az egyik túlterhelés megszüntetése hatással lehet az illető túlterhelési helytől jobbra levő túlterhelésekre.

Ezt a hiányosságot igyekszik csökkenteni az algoritmus következő módosítása.

Mivel a teljes tervezési idő csak olyan túlterhelések megszüntetésekor növekszik, melyek a tevékenységek lényeges részeinek egymásba metszése útján állnak elő, az algoritmust csak ilyen esetben módosítjuk. E célból szükségünk lesz a csökkenési és a növekedési mérték fogalmára.

Ha egy **A** tevékenységet lényeges részével jobbra eltolunk, az **A**-tól jobbra lévő tevékenységek is eltolódnak. Ezek az eltolódások hatással lehetnek a túlterhelésekre: kevesebb vagy több azonos időben ütemezett tevékenység kerülhet a túlterhelésekbe. Túlterhelési csökkenési (ill. növekedési) mértéknek nevezzük valamely **A** tevékenységnek, és ezáltal az **A**-tól jobbra lévő tevékenységeknek lényeges résszel történő eltolásakor fellépő túlterhelés-csökkenések (ill. túlterhelés-növekedések) hossz-összegét az összes tevékenységcsoportokra vonatkozóan.

Az algoritmus módosítása

Az olyan túlterheléseket, melyeket időtartalékok metszeteként kaptunk, eredeti algoritmusunk szerint szüntetjük meg. A lényeges részek egymásba metszése által keletkezett túlterhelési helyeket baloldali végpontjaik növekvő nagysági sorrendje szerint rendezzük sorba. Az első túlterhelést (ha több ilyen van, úgy mindegyiket) vizsgálat alá vesszük. Megnézzük, hogy ezen túlterhelésbe (ill. ezen túlterhelésekbe) belejátszó tevékenységek olyan jobbra tolásai, melyek a túlterhelésből a tevékenységeket „kiszabadítják", milyen mértékű túlterhelési csökkenést és növekedést idéznek elő a tevékenység-csoportok összességében. Azt a tevékenységeltolást alkalmazzuk, melynél a

$$(1) \qquad \frac{\text{túlterhelési csökkenési mérték} - \text{túlterhelési növekedési mérték}}{\text{az eltolás mértéke}}$$

kifejezés maximális. (Ha több ilyen van, úgy ezek közül azt alkalmazzuk, melynél az eltolás mértéke a legkisebb.)

Ezt az eljárást addig folytatjuk, míg a túlterhelések meg nem szűnnek.

5. *Megjegyzés*

Könnyen belátható, hogy a módosított eljárás is algoritmus, hiszen a tevékenységek, így a túlterhelések száma is véges, továbbá az 1. tétel ebben az esetben is érvényes.

6. *Megjegyzés*

Módosított eljárásunknak az eredeti, általunk megadott algoritmus speciális esete abban az értelemben, hogy ott az (1) kifejezés maximalizálása csupán a pillanatnyilag tekintetbe vett túlterhelésbe belejátszó tevékenységekre vonatkozott.

7. *Megjegyzés*

A módosított modellben lehetőség van arra is, hogy a különböző tevékenység-csoportok esetén a túlterhelési növekedési (és csökkenési) mértékeket az (1) kifejezésben súlyozva vegyük figyelembe.

Erre szükség lehet, ha

a) a túlterhelések közül néhányat elhanyagolunk, másokat a leggyorsabban meg kell szüntetnünk (ugyanannak a hálózatnak más-más időszakban történő ütemezése esetén);

b) a túlterheléseket fontossági sorrendjük szerint vesszük figyelembe;

c) a kapacitások sztochasztikus jellegűek.

Ez nagymértékű általánosítása a módosított modellnek is.

Lehetőség van továbbá arra is, hogy a növekedési (csökkenési) mértékek az idő függvényében is súlyozva legyenek. Erre több, egymástól független hálózat esetén lehet szükség, ha néhány hálózat határidős termékelőállításra vonatkozik.

(Beérkezett: 1969. I. 7.)

IRODALOM

[1] Abramov, Sz. A.—Marincsev, M. I.—Poljakov, P. D.: Hálódiagramos tervezési és irányítási módszerek. Budapest, 1966.

[2] Berge, C.: The theory of graphs and its applications. London, 1962.

[3] Kelley, J. E., Jr.: Critical-path planning and schedulding: mathematicalbasis. Operations Research, 1961, Vol. 9. pp 296–320

[4] Martin, J. J.: Distribution on the time through a directed, acyclic network. Operations Research, 1965. Vol. 13., No. 1.

THE CPM/TIME ALGORITHM IN THE CASE OF LIMITED SOURCES

The paper generalizes the CPM/TIME network planning (i.e. critical path) method in the following manner:

It is assumed that in the case of the various types of activity groups the sources and capacities are limited. The author gives an algorithm which carries out scheduling, with

due regard to the source constraints, in an optimal manner, in the sense that the final event occurs at the earliest point in time. Following the CPM/TIME scheduling carried out without taking into account the source constraints, the algorithm modifies the time points of the events in a way that the number of activities scheduled for the same time should not exceed the given constraint in the case of any activity group (relying on the same source). The author then proves the finite and optimal character of the algorithm

АЛГОРИТМ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ (CPM/TIME) В СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕСУРСОВ

В статье дается общее применение метода сетевого планирования в системе CPM/TIME (то есть метода критического пути). Автор предполагает при этом, что в отношении деятельностей различного типа имеются ограниченные ресурсы, мощности. Он представляет алгоритм, при помощи которого с учетом ресурсов как ограничений можно получить оптимальный сетевой график с наиболее близким сроком конечного события. Алгоритмом сроки событий сетевого графика, получаемого при помощи метода CPM/TIME без учета ресурсов как ограничений, корректируются таким образом, чтобы количество деятельностей, приходящихся на тот же отрезок времени, не превышало заданные ограничения ни по одной группе деятельностей (использующих тождественные ресурсы). После этого автор доказывает конечномерность и оптимальность алгоритма.

Kovács János

A munkaerő társadalmi újratermelésének tervezéséhez

A munkának, amelyet itt röviden ismertetek, eredeti célja egy olyan oktatási modell elkészítése volt, amely az iskolarendszer különböző fokozataiba és típusaiba való beiskolázási előirányzatok meghatározásához nyújt segítséget. Ahhoz azonban, hogy meghatározhassuk a különböző szakképzettséget nyújtó iskolatípusokba való beiskolázási igényt, szükség van a népgazdaság szakemberszükségletének becslésére. Ez a jövő termelési struktúrájára vonatkozó ismereteket tételez fel. A termelési modellnek viszont tartalmazniok kell a várható fogyasztásra vonatkozó hipotéziseket. Az eddig ismert termelési modellek a munkaerő és a fogyasztás közötti kapcsolatot a termelésen keresztül teremtik meg. Ez fontos, de nem egyedüli kapcsolat, és e vonatkozásban nem is a legfontosabb. Legalább ilyen fontos kapcsolat — a munkaerő és a fogyasztás között — a kereset, jövedelem és fogyasztás kapcsolata. E sokrétű összefüggés szükségszerűen egyszerűsített ábrázolása az itt leírt modell vagy inkább modellrendszer célja. Egy másik lényeges szempont a számíthatóság. Ez indokolja, hogy a számítástechnikailag kipróbált modelleket lehetőség szerint építőelemként felhasználjuk.

1. Termelés és munkaerőfelhasználás

A szakmunkaerő-szükségletet a tervperiódus végpontjában különböző típusú modellekkel kaphatjuk meg. Leginkább ismertek — és úgy tűnik, jelenlegi feltételeink között legalkalmasabbak – a Leontief-típusú és a lineáris programozási modellek. E modelleknek a munkaerőszükséglettel kapcsolatos problémáit most a zárt dinamikus Leontief-modellen [4] vizsgáljuk, azzal, hogy ennek tapasztalatai analóg módon érvényesek a lineáris programozási modellekre is.
Ennek formája:

$$x = Ax + \lambda Bx$$

hol
ax = a termelési szintek vektora
A = a folyó ráfordítások mátrixa
B = az eszközlekötési mátrix
λ = a maximális növekedési ráta.
Itt a λ olyan maximális növekedési ráta, amelynek elérérése ahhoz a feltételhez lenne kötve, hogy

a) minden ágazat az optimális struktúrára való beállás után azonos ütemben nő.
b) minden jövedelem a modellbe felvett ágazatokból származik.

Természetesen a valóságban egyik feltétel sem teljesül, nem is kívánatos teljesülése, ezért a λ soha nem érhető el. [2]

Az A és a B mátrix legközismertebb formájukban csupán a termelés anyagi folyó ráfordításait, illetve a termeléshez szükséges eszközlekötést tartalmazza. Kiegészíthető azonban az A mátrix a termelés fajlagos munkaerőszükségletét tartalmazó sorokkal, a munkaerő célszerű kategóriánkénti bontásában. Ez esetben a B mátrix sorai értelemszerűen a modell által tartalmazott ágazatok munkaerőlekötését tartalmazzák, mégpedig ugyanolyan módon, ahogyan a lekötött eszközöket. Ha a lekötött eszközök az eszköz-formában lekötött társadalmi munkát jelentik, akkor a B mátrix megfelelő munkaerő-sorai a munkaerő formájában lekötött társadalmi munkát tartalmazzák. Ez alatt azt a társadalmi munkát kell érteni, amit a munkaerő megfelelő szakképzettségének megszerzésére a munkába lépést megelőzően kell fordítani. A két mátrix megfelelő soraiban ilymódon az ágazatok fajlagos munkaráfordításai, illetve munkalekötései kerülnek.

Ennek következtében az A és a B mátrix munkaerő-oszlopaiba értelemszerűen az egységnyi megfelelő kategóriájú munkaerő újratermeléséhez szükséges „folyó ráfordítások”, illetve „eszközlekötés” kell, hogy kerüljön.

E folyó ráfordítások, illetve eszközlekötés mibenlétének meghatározása azonban egyáltalán nem problémamentes.

2. A fajlagos fogyasztás problémája

Már korábban, több javaslat hangzott el (többek között e dolgozat szerzője részéről is [5]: A munkaerő újratermeléséhez szükséges folyó ráfordítások a fogyasztásban öltenek testet; szerepeljen tehát az A mátrix megfelelő oszlopaiban a fogyasztás. A munkaerő újratermelésében lekötött eszközöket viszont az oktatásban és egészségügyben lekötött eszközök jelentik, szerepeljenek tehát a B mátrix megfelelő oszlopaiban ezek.

Amíg modelljeinkben egyetlen egységes munkaerőt szerepeltetünk, ez viszonylag egyszerűen megoldható

$$\begin{pmatrix} x \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & f \\ m & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_m \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B & l \\ h & o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_m \end{pmatrix}$$

Itt az f fogyasztási vektor a *lakosság* munkaegységre jutó átlagos fogyasztását jelenti a vektor elemei által megadott termékekből és szolgáltatásokból, míg l a munkaegységre jutó azokat az eszközöket, amelyeket a munkaerő újratermelését szolgáló szektorban kötöttek le.

(Már itt is felmerül azonban az a kérdés, hogy mit tekintsünk a munkaerő újratermelésében lekötött eszköznek? Csak az oktatásban lekötött eszközeiket; vegyük hozzá az egészségügyben lekötötteket vagy éppen a lakóépületeket is, a kommunális ellátást szolgáló berendezéseket is?) Ez azonban még csak a könnyebbik része a dolognak, és adott esetben a számítás céljának megfelelően eldönthető.

A probléma ott kezdődik, amikor nem egyetlen, egységes munkaerő-felhasználással számolunk, hanem a munkaerőt kategóriákra bontjuk.

Kézenfekvő a fogyasztást is annyi réteg fogyasztására bontani, ahány munkaerőkategóriát alkalmazunk, és ezek fogyasztását az A mátrix utolsó oszlopaiként beilleszteni. A B mátrix munkaerő-soraiba a munkaerőtípusonként lekötött fajlagos társadalmi munka („szellemi beruházás") kerül, a B mátrix urolsó oszlopaiba pedig a típusonként megkülönböztetett munkaerő-újratermelési szektorokban lekötött eszközök kerülnének.

Ez esetben ha m munkaerő-kategóriát és n „termelési" ágazatot tüntetünk fel, akkor

$$x = A^*x + \lambda\, B^*x$$

ahol

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} A_1^* & A_2^* \\ A_3^* & A_4^* \end{pmatrix} \quad B^* = \begin{pmatrix} B_1^* & B_2^* \\ B_3^* & B_4^* \end{pmatrix}$$

x_1 n elemű vektor, a „termelő" ágazatok outputja

x_2 m elemű vektor, az ezekhez szükséges munkaerő

A_1^* $n \times n$-es mátrix az ÁKM ismert technológiai mátrixa

A_2^* $n \times m$-es mátrix az egységnyi munkaerő újratermelésére jutó fogyasztás koefficienseinek mátrixa, termelési ágazatok és szakképzettség szerint bontva

A_3^* $m \times n$-es mátrix a termékek egységének termeléséhez felhasznált munkaerő koefficienseinek mátrixa, n kategória szerinti bontásban

A_4^* $m \times n$-es mátrix, a fogyasztási szolgáltatásokban felhasznált eleven munka koefficienseinek mátrixa.

B_1^* $n \times n$-es mátrix, a termelés eszközlekötési koefficienseinek mátrixa

B_2^* $n \times m$-es mátrix, a munkaerő-újratermelés eszközlekötési koefficienseinek mátrixa

B_3^* $m \times n$-es mátrix, a termelés *munkaerőlekötési* mátrixa

B_4^* $m \times m$-es mátrix, a munkaerő-újratermelési szektorok *munkaerőlekötési* mátrixa.

A rendszer egy megoldását

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$$

fogja jelölni

Ez a mátrixegyenlet megoldható [2], csupán (a statisztikai nehézségekről itt nem beszélve) el kell dönteni, hogy közgazdaságilag mit helyes az egyes elemek számszerű értékeként felvenni. És itt nehézségekbe ütközünk.

A legnehezebb problémát az A^* elemeinek meghatározása jelenti. Fogyasztása ugyanis nem valamilyen meghatározott kategóriájú munkaerőnek van, mint egyednek. A fogyasztási egység a család. A különböző kategóriájú keresők jövedelmei a családban családi jövedelemmé tevődnek össze, és a családi jövedelem határozza meg (egyéb itt nem vizsgált tényezőkkel együtt) a család fogyasztását.

3. Kereset és családi jövedelem

Különböző munkaerőkategóriába tartozók meghatározott valószínűséggel lépnek egymással életközösségre és alapítanak családot.

Jelöljük k_{ij}-val annak valószínűségét, hogy egy i kategóriájú (aktív) kereső egy j kategóriájú keretővel életközösségre lép. Az így adódó életközösségi lehetőségek a következő táblázatban ábrázolhatók:

	1	2	. . .	m
1	k_{11}	k_{12}		k_{1m}
2	k_{21}	k_{22}		k_{2m}
. . . .				
m	k_{m1}	k_{m2}		k_{mm}

A táblázat átlójában annak valószínűsége szerepel, hogy egy meghatározott kategóriájú kereső saját kategóriájából választ élettársat vagy egyáltalán nem választ.

Így egy meghatározott $i = h$ kategóriájú keresőre[1]

$$\sum_{j=1}^{m} k_{h,j} = 1.$$

Legyen az i kategóriájú keresők száma N_i és átlagkeresetük b_i.

A h kategóriájú keresőknek a különböző típusú családokban kialakuló egy főre jutó átlagkeresete:

$$\bar{b}_h = \frac{N_h b_h + \sum_{i \neq h} N_i k_{ih} b_i}{N_h + \sum_{i \neq h} N_i k_{ih}}.$$

Ahhoz, hogy ebből az egy keresőre jutó átlagkeresetből egy családtagra jutó családi átlagjövedelemhez jussunk, ezt még el kell osztanunk az egy keresőre jutó családtagok átlagos számával, és meg kell szoroznunk az egy keresőre jutó kereseten felüli jövedelmek arányával.

$$b_h^* = \frac{\bar{b}_h t_h}{c_h},$$

ahol

t_h a kereseten felüli jövedelmek és a kereset összegének aránya a keresethez képest

c_h az egy keresőre jutó összes családtagok aránya

[1] E mátrix elemeinek alakulása a társadalmi átrétegeződés szempontjából érdekes szociológiai eredményekre vezethet önmagában is.

4ł A fajlagos fogyasztás meghatározása

Az egy főre jutó jövedelem kiszámítása után már megbecsülhető a hozzá tartozó fogyasztás a háztartásstatisztika segítségével. Az alacsonyabb jövedelemkategóriába tartozók fogyasztása a saját háztartásstatisztikából határozható meg olymódon, hogy feltesszük: jövőbeni magasabb jövedelmük olyan fogyasztási struktúrát vált ki, mint amilyennel a jelenbeli magasabb jövedelmi kategóriákba tartozók rendelkeznek. A magasabb jövedelműek jövőbeni fogyasztásáról feltehetjük, hogy a gazdaságilag fejlettebb országok megfelelő jelenlegi fogyasztási struktúrájához közelálló lesz a fogyasztásuk.

Az egy főre jutó jövedelem függvényeként tehát meghatározható az egy főre jutó fogyasztás kategóriánként, legyen az $f\,(b_h^*)$ és hogy megkaphuk az A^* mátrix h kategóriájához tartozó fogyasztási vektort, ezt meg kell szoroznunk az eltartott-kereső aránnyal (pontosabban ennek eggyel növelt számával).

$$a^*_{.,n+h} = c_h f(b_h^*) = f_{hl}^*$$

Ezután megoldjuk $A_2^* = F^*$ mellett az

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda\, B^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

egyenletet és a belőle kapott munkaerőszükséglettel megismételjük az egy keresőre jutó családi átlagkeresetre vonatkozó számítást

$$\bar{b}_h^1 = \frac{x_{2h}\, b_h + \sum\limits_{i \neq h} x_{2i}\, k_{ih}\, b_i}{x_{2h} + \sum\limits_{i \neq h} x_{2i}\, k_{ih}}$$

majd ebből

$$a^*_{.,n+h} = f_h^{*1}$$

A számítássorozatot addig ismételjük, míg az r-edik iterációban kapott jövedelemértékek eltérése az előző sorozatban kapottaktól kisebb nem lesz egy meghatározott küszöbszámnál.

$$\frac{b_i^r}{\bar{b}_i^{r-1}} \leq \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots m)$$

5. Kereseti arányok

A b_i kereseti arányokat az eddigiekben kívülről, ha úgy tetszik, gazdaságpolitikailag meghatározottnak vettük. Ennek van jó és rossz oldala. Előnye, hogy megmutatja egy adott bérpolitika (keresetpolitika) fogyasztási konzekvenciáit. Ez a modell maga azonban nem ad támpontot a bérpolitika kialakításához. A modell duálisának $\left(p = p\; A^* + \lambda p B^* \text{ ahol } p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}\right)$ megoldása ugyanis semmiképpen sem ad bérarányokat.

Kétségtelen ugyan, hogy a modell megoldása amellett, hogy becslést ad a fogyasztás várható alakulásáról, egyúttal a p_2 elemei révén hasznos információt szolgáltat arról is, hogy végső soron mibe kerül a népgazdaságnak a családstruktúra transzformációján keresztül a számított munkaerőstruktúra fenntartása — adott fogyasztáspolitika, illetve inkább a várható fogyasztási szokások mellett. A p_2 azonban nem kereseti vagy bérarányokat ad.

Van azonban egy másik megoldás is az A^* utolsó m számú vektorának kezelésére. Nevezetesen tekintsük ezeket a különböző szakképzettségi szakembereket létrehozó ágazatok ráfordítási vektorainak, azaz, az $n + h$ -adik oszlop azt mondja meg, hogy a h -adik kategóriájú munkaerő egységének létrehozásához milyen társadalmi ráfordításai vannak a h -adik szakképzési szektornak. Itt a h -adik szektort úgy kell érteni, amely magában foglalja az oktatási (szakképzési) rendszernek nemcsak a h -adik típusú szakembert kibocsátó fokozatát, hanem az oktatási rendszer mindazon fokozatait, amelyeken keresztül kell menni a h -adikig való eljutásig.

Az ily módon felfogott modell duálisának megoldása támpontul szolgálhat a bérarányok becsléséhez.

$$p = p\, A^{**} + \lambda\, p\, B^{**}\,,$$

ahol
$$p^{**} = \begin{pmatrix} p_1^{**} \\ p_2^{**} \end{pmatrix}$$

$A_2^{**} = K$ a „kiképzés" társadalmi ráfordításait tartalmazza

p_1^{**} = a termékek termelési ára

p_2^{**} = a munkaerő „termelési ára"

és az első modellben szereplő b_i-kre

$$b_i = l_i\, p_i^{**},$$

ahol l_i bérpolitikai paraméter.

Az r-edik iteráció végén így kapott x_2 megadja a szükséges munkaerőstruktúrát. Ha D az összes munkaerőforrás, akkor ebből a tényleges termelési szinteket (volumenben)

$$x^v = \frac{D}{e'\, x_2^*}\, x^* \qquad \text{adja}$$

és a h-adik kategóriájú munkaerőszükséglet

$$x_{2h}^v = \frac{D}{e'\, x_2^*}\, x_{2h}^*.$$

A fogyasztás pedig
$$f = A_2^*\, x_2^v$$

Az elmondottakból egyértelműen következik, hogy a két modellben különbözik a B_2 tartalma is. Az első modellben B_2^*-ban szerepelnek az összes úgynevezett lakossági beruházások, míg a B_2^{**}-ban csupán a munkaerő termelési szektorának eszközlekötései. A két fogalmi kör között persze igen sok átfedés van, a B_2^{**} azonban a gyakorlati céloknak megfelelően leválasztható B_2^*-ból.

6. A szakemberszükséglet kielégítése az oktatási rendszeren keresztül

Amennyiben a számítások T tervezési periódusra vonatkoznak, az x_2^v adja a tervezési periódus végére várható szakemberszükségletet, m kategóriára bontva.

Nevezzük ezt a továbbiakban s_T-nek.

Legyen $s_0 = (s_{01}, s_{02} \dots, s_{0m})$, a bázisévben rendelkezésre álló munkaerő. Vegyük ennek életkor szerinti bontását. (s_{0h}^a) A h kategóriájú és k életkorú munkaerő számát jelöljük s_{0hk}^a-val $(k = 15, 16 \dots)$

$$s_{oh}^a = (s_{oh15}, s_{oh16}, \dots) .$$

Legyen továbbá g_{hk} a h-adik kategória összetett gazdasági továbbélési valószínűségét korbontásban tartalmazó vektor:

$$g_{hk} = \frac{l_{h,k+T}}{l_{h,k}} w_{h,k+T}$$

ahol $l_{h,k}$ a demográfiai továbbélési rend a h kategóriájú és k korú emberekre vonatkozóan,

$w_{h,k+T}$ a gazdasági aktivitási útmutató a bázisévben meglevő h kategóriájú és a bázisévben k életkorú dolgozókra vonatkozóan.

Képezzük az s_{0h}^a vektorokból az

$$S_0 = \begin{pmatrix} s_{01}^a & 0 & 0 \\ 0 & s_{02}^a & 0 \\ 0 & 0 & s_{0m}^a \end{pmatrix} \qquad \text{mátrixot.}$$

Hasonlóképpen a $g_h = (g_{h15}, g_{h16} \dots)$ vektorokból (ahol 15 év a munkaképes életkor alsó határa) a G mátrixot.

$$G = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & g_2 \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & g_m \end{pmatrix}$$

$$G'S_0 = \hat{s}_0^1 = \langle s_0^1 \rangle$$

$\hat{s}_0^1$ diagonális mátrix, amelynek diagonális elemeiből képezzük az s_B „tovább-éltetett" bázisévbeli munkaerő-létszámot tartalmazó vektort. Azaz s_B adja meg azt a létszámot, amely a tervezési időszak végén rendelkezésre fog állni a bázisévben meglevő m különböző típusú munkaerőből.

$s_T - s_B = s^0$ az a szakemberszükséglet, amelyet a T időszak alatt ki kell képezni.

Ábrázoljuk a szakemberszükségletet megfelelő struktúrában kielégítő oktatási rendszert egy olyan $O = [o_{ij}]$ mátrix-szal, amelynek o_{ij} eleme annak valószínűségét adja meg, hogy — egyik oktatási évről a másikra — milyen valószínűséggel kerülnek a tanulók a rendszer i-edik helyéről a j-edikre.

Az O mátrix három részből áll. Az első rész (X) az oktatási rendszeren belüli belső mozgásokat írja le, a második rész (Y) az oktatási rendszernek a munkaerő-csatornákba való kibocsátásait, míg a harmadik (Z) a gazdaságilag inaktívvá válás (mortalitás, háztartásba való visszavonulás) arányait tartalmazza.

$$O = (X \; Y \; Z)$$

Az O egyes elemei (bukás, lemorzsolódás, egy adott iskolatípuson belül egyik osztályból a következőbe való átkerülés, mortalitás, és bizonyos mértékig a háztartásba való visszavonulás) a gazdasági társadalmi fejlődés adott szintjén és az oktatás adott színvonala mellett statisztikailag adottnak tekinthetők. Döntési változók viszont az alacsonyabb iskolai fokozatból magasabb fokozatba való átmenet, a továbbtanulás arányai.

Jelentse $x_{i(l)\,j(k)}$ az l-edik iskolatípusban tanulók továbbtanulási arányát a k-adik iskolatípusban, $i(l)$ az l-edik iskolatípus utolsó osztályát, $j(k)$ a k-adik iskolatípus első osztályát.

$$g_k\, x_{i(l),j(k)} = \frac{\mu_k\, \nu_{i(l),j(k)}\, s_k^0 + \sum_{h_1} \mu_{h_1}\, \nu_{i(k),j(h_1)}\, s_{h_1}^0}{\mu_k \nu_{i(l),j(k)} s_k^0 + \mu_l\, s_l^0 + \sum_{h_1} \mu_{h_1}\, \nu_{i(k),\,j(h_1)}\, s_{h1}^0 + \sum_{h_2} \mu_{h_2}\, \nu_{i(l),\,j(h_2)}\, s_{h_2}^0},$$

ahol

- μ_k az az arány. amelyben k-adik iskolatípus kielégiti a k-adik szak emberszükségletet
- $\nu_{i(l),j(k)}$ az az arány, amelyben k-adik iskolatípus első osztályának hallgatói között az l-edik iskolatípusban végzett tanulók szerepelnek
- s_h^0 az s^0 h-adik eleme és
- h_1 végigmegy mindazokon az iskolatípusokon, amelyek felé a k iskolatípusnak elágazása van
- h_2 pedig azokon, amelyek felé az l iskolatípusból k-n kívül főirány vezet
- g_k a tervezési időszakban az iskolarendszerből kibocsátott k kategóriájú munkaerő átlagos összetett gazdasági továbbélési valószínűsége a tervidőszak végéig.

Ez a megoldás akkor igaz, ha az egymást követő fiatal korosztályokból a továbbtanulási arányok változatlanok. Ha azonban a gazdasági fejlődés a képzettségi színvonal *emelkedését* igényli, csúszó tervezéssel kombinálva az eljárás elég jó közelítést ad.

*

E dolgozat[2] kísérletet tesz a társadalmi újratermelési folyamat humán oldalról való megfogalmazására. Nyilvánvaló, hogy ez csak egyik közelítése a problémának és más fajták is lehetségesek. Széles körben ismert pl. Richard Stone prognosztikai jellegű és Jean Benard tervezési modellje. Ez utóbbinak rokonságát az itt leírtakkal még fokozza, hogy a francia tervezésben való felhasználásra készült, és nagyon erősen hangsúlyozza az oktatás szerepét. Mi viszont a magyar tervezési tapasztalatokat vettük figyelembe, és annak igényeit szeretnénk kielégíteni. Részben ebből következnek az eltérések is (más az oktatás, a jövedelem, a fogyasztás megközelítése és ebből következően közgazdaságilag a termelésé is).

Elgondolásaink vázlatosnak tűnhetnek — és bizonyos tekintetben azok is. Számos közgazdasági vonatkozás csak implicite van bennük — kiolvashatóan vagy kikövetkeztethetően. Egyes részproblémákat, ha azokat különálló kér-

[2] Az oktatási rendszer döntési paramétereit valójában egy iterációs algoritmussal határozzuk meg. [6]

déseknek tekintjük, mélyebben kell vizsgálni. A jövedelem-átlagok szerepeltetése pl. éppen hogy megkívánja jövedelem-eloszlási modellek kidolgozását.[7] Mindennek részletes kifejtése azonban egy cikk keretein túlmenő tanulmányt igényel.

(Beérkezett: 1969. augusztus 11.)

IRODALOM

1. BENARD, J.: Un modéle d'affectation optimale des ressources entre l'économie et le systéme éducation. Bulletin du CEPREL, Paris, 1966.
2. BRÓDY, A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
3. FRIGYES, E.: A személyi jövedelemeloszlás komponens modellje. 1969. (Kézirat.)
4. KARLIN, S.: Mathematical methods and theory in games, programming and economics. Vol. I. London, 1959. Addison-Wesley.
5. KOVÁCS, J.: Szakképzés és népgazdaság. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
6. KOVÁCS, J.: Tervezési modell az iskolarendszer beiskolázási előirányzataira. Az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének Évkönyve. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. STONE, R.: Demographic input-output: an extension of social accounting. Cambridge.

ON THE PLANNING OF THE SOCIAL REPRODUCTION OF LABOUR

The author employs for the planning of the pattern of labour and consumption the closed dynamic Leotief model

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

where

x_1 = the volume of production (in n branches);
x_2 = the volume of labour employed in production (broken down into m categories);
A_1 = the technological matrix;
A_2 = the consumption coefficients of labour employed in production;
A_3 = the labour input coefficients of production;
A_4 = the labour input coefficients of consumer services;
B_1 = the matrix of assets tied up in production;
B_2 = the matrix of assets tied up in the social reproduction of labour;
B_3 = the matrix of labour tied up in production;
B_4 = the matrix of labour tied up in consumer services.

The relationship between consumption and labour is established with the aid of a matrix which contains the probabilities of persons belonging to different categories of labour living together. With the help of these, the earning are transformed into family incomes.

In determining the earnings, the author relies on the solution of the dual of a Leontieff model with modified contents where

A_2 contains only the cost of bringing into existence the labour, and
B_2 contains only the assets tied up in the sectors of labour reproduction.

The labour requirements established in this way should be satisfied by means of a model of education planning.

К ПЛАНИРОВАНИЮ ОБЩЕСТВЕННОГО ВОСПРОИЗВОДСТВА РАБОЧЕЙ СИЛЫ

Автор применяет динамическую модель Леонтьева к планированию структуры рабочей силы и потребления:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

где

x_1 = об'емы продукции (в n отраслях)

x_2 = использованный в производстве объем рабочей силы (в подразделении на m категорий)

A_1 = технологическая матрица

A_2 = коэффициенты потребления использованной в производстве рабочей силы

A_3 = коэффициенты использования рабочей силы в производстве

A_4 = коэффициенты использования рабочей силы в предотавлении услуг потребления

B_1 = матрица используемых в производстве средств

B_2 = матрица средств, используемых в общественном воспроизводстве рабочей силы

B_3 = матрица используемой в производстве рабочей силы

B_4 = матрица рабочей силы, используемой в предоставлении услуг потребления

Взаимосвязь между потреблением и рабочей силой автор устанавливает при помощи матрицы, содержащей вероятности бытового положения рабочей силы различных категорий. Заработки таким образом преобразуются им в семейные доходы.

При определении заработков автор опирается на двойственное решение модели Леонтьева с модифицированным содержанием, в которой

A_2 содержит лишь затраты создания рабочей силы, а B_2 — лишь средства, используемые в секторах воспроизводства рабочей силы. Получаемые таким образом потребности в рабочей силе удовлетворяются моделью планирования обучения.

MARTOS BÉLA

Kvadratikus programozás kvázikonvex célfüggvénnyel

Gazdasági optimálási problémák gyakran nem modellezhetők valósághűen lineáris programozási feladatként, de megfogalmazhatók oly módon, hogy a korlátozó feltételek lineárisak legyenek, míg a célfüggvény nem lineáris. Ennek egyik legegyszerűbb esete az, amikor a célfüggvény kvadratikus, vagy legalábbis olyan típusú függvény, amely kvadratikussal jól közelíthető. Így érthető, hogy a kvadratikus programozás iránti érdeklődés viszonylag régi keletű és a témának kiterjedt irodalma van. [2], [4], [7], [11], [12] Ezek a vizsgálatok, amelyek számos hatékony algoritmust eredményeztek, megegyeztek abban, hogy feltételezték a minimálandó célfüggvény konvexitását. E cikkben megmutatjuk, hogy a korábban kidolgozott módszerek egyike, éspedig FRANK és WOLFE [6] módszere, alkalmazható abban az esetben is, ha a célfüggvény nem konvex, de a változók nem-negatív értékére kvázikonvex.
Megjegyzendő azonban, hogy ez esetben az eljárás általában nem véges, míg a konvex kvadratikus programozási módszerek legtöbbje véges számú lépésben eljut az optimális megoldáshoz. Viszont egy példán meg fogjuk mutatni, hogy a véges algoritmusok közül az egyik legismertebb, WOLFE [12] módszere, az általunk vizsgált esetben már csődöt mond. E cikk 1. fejezetében a nem-negatív ortánsban kvázikonvex függvények néhány fontos tulajdonságával foglalkozunk. A 2. fejezetben leírjuk FRANK és WOLFE algoritmusát, ahogyan az erre a függvénytípusra alkalmazható, és bizonyítjuk az eljárás konvergenciáját. A 3. fejezet egy példát tartalmaz és az imént említett ellenpéldát.

1. A nem-negatív ortánsban kvázikonvex kvadratikus függvények

Tekintsük a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} x'Cx + p'x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \tag{1}$$

kvadratikus függvényt, ahol $x = [x_1, \ldots, x_n]'$ és $p = [p_1, \ldots, p_n]'$ n elemű vektorok és $C = [c_{ij}]$ egy valós szimmetrikus $n \cdot n$-es mátrix. $E^n_+ = \{x \in E^n \mid x \geq 0\}$ az n dimenziós euklideszi tér nem-negatív ortánsát jelöli.

Ismeretes, hogy egy differenciálható $\psi(x)$ függvény az $X \subset E^n$ konvex halmazon akkor és csak akkor *konvex*, ha minden $x^1, x^2 \in X$-re

$$\psi(x^1) - \psi(x^2) \leq (x^1 - x^2)' \nabla \psi(x^1) \tag{2}$$

ahol
$$\nabla\psi(x^1) = \left[\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial\psi(x)}{\partial x_n}\right]_{x=x^1},$$
a $\psi(x)$ függvény x^1 pontbeli gradiense.

Hasonlóképpen $\psi(x)$ akkor és csak akkor *kvázikonvex* a X halmazon, [1] ha

$$\left.\begin{array}{r} x^1, x^2 \in X \\ \psi(x^1) \geq \psi(x^2) \end{array}\right\} \Rightarrow (x^1 - x^2)'\nabla\psi(x^1) \geq 0 \tag{3}$$

(2) és (3)-ból közvetlenül látható, hogy ha $\psi(x)$ konvex, akkor egyben kvázikonvex is X-en.

Ha (2)-t, ill. (3)-at az (1) alatti kvadratikus függvényre alkalmazzuk, némi számolással a következő kritériumokat kapjuk:
A $\varphi(x)$ kvadratikus függvény akkor és csak akkor *konvex* a konvex $X \subset E^n$ halmazon, ha minden x^1, $x^2 \in X$-re

$$(x^1 - x^2)'C(x^1 - x^2) \geq 0; \tag{4}$$

valamint akkor és csak akkor *kvázikonvex*, ha

$$\left.\begin{array}{r} x^1, x^2 \in X \\ \varphi(x^1) \geq \varphi(x^2) \end{array}\right\} \Rightarrow (x^1 - x^2)'(Cx^1 + p) \geq 0\,. \tag{5}$$

Már itt látható, hogy amíg a kvadratikus függvény konvexitása csak a C mátrixtól függ, addig kvázikonvexitása a lineáris rész p koefficiensvektorától is.

Annak megmutatására, hogy létezik olyan kvadratikus függvény, amely egy konvex halmazon kvázikonvex, de nem konvex, tekintsük a kétváltozós

$$\varphi(x, y) = -xy$$

függvényt E^2_+-on. Itt

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p' = [0,\ 0]$$

és nyilván $[x^1, y^1] = [0, 0]$; $[x^2, y^2] = [1, 1]$-ra

$$[-1, -1]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 < 0$$

ellentétben (4)-gyel, tehát $\varphi(x, y)$ nem konvex E^2_+-on. Viszont ha x^1, x^2, y^1, $y^2 \geq 0$ és

$$-x^1\, y^1 \geq -x^2\, y^2$$

azaz
$$x^2\, y^2 \geq x^1\, y^1$$

akkor

$$[x^1 - x^2,\ y^1 - y^2]\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ y^1 \end{bmatrix} = x^1y^2 + x^2y^1 - 2\,x^1y^1 \geq$$

$$\geq 2\sqrt{x^1x^2y^1y^2} - 2\,x^1y^1 = 2\sqrt{x^1y^1}\left(\sqrt{x^2y^2} - \sqrt{x^1y^1}\right) \geq 0,$$

tehát (5) áll, $\varphi(x, y)$ kvázikonvex E^2_+-on.

A következő két állítás viszonylag könnyen belátható:

a) Ha $\varphi(x)$ konvex E^n_+-ban, akkor konvex E^n-ben is

b) Ha $\varphi(x)$ kvázikonvex E^n-ben, akkor konvex is E^n-ben

E tételeket nem használjuk fel, ezért itt nem is bizonyítjuk, viszont motiválják azt, hogy a következőkben olyan kvadratikus függvényekkel foglalkozzunk, amelyek E^n_+-ban kvázikonvexek, de nem konvexek. Ezt készíti elő a következő tétel:

1. *TÉTEL* A $\varphi(x) = \frac{1}{2}x'Cx + p'x$ függvény akkor és csak akkor kvázikonvex E^n_+-on, ha minden $v \in E^n$-re áll:

$$v'Cv < 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} Cv \\ p'v \end{bmatrix} \gtreqless 0 \tag{6}$$

(ahol $\gtreqless$ azt jelenti, hogy vagy $\geq$ vagy $\leq$, tehát az $(n+1)$ elemű $\begin{bmatrix} Cv \\ p'v \end{bmatrix}$ vektornak nincs két ellentétes előjelű komponense).

Bizonyítás: Legyen $x^1, x^2 \in E^n_+$ és $\varphi(x^1) \geq \varphi(x^2)$, azaz

$$(x^1 - x^2)' \left[\frac{1}{2} C(x^1 + x^2) + p\right] \geq 0\,. \tag{7}$$

$\varphi(x)$ pontosan akkor kvázikonvex E^n_+-on, ha

$$(x^1 - x^2)'(Cx^1 + p) \geq 0\,. \tag{8}$$

Elégségesség Azt bizonyítjuk, hogy ha (6) áll, akkor (7) $\Rightarrow$ (8). Először tegyük fel, hogy $x^1, x^2 > 0$

a) Ha $\frac{1}{2}(x^1 - x^2)'C(x^1 - x^2) \geq 0$, akkor ezt (7)-hez adva (8)-at kapjuk.

b) Ha $\frac{1}{2}(x^1 - x^2)'C(x^1 - x^2) < 0$, akkor (6) alkalmazásával:

$$\begin{bmatrix} C(x^1 - x^2) \\ p'(x^1 - x^2) \end{bmatrix} \gtreqless 0\,, \tag{9}$$

úgy hogy $C(x^1 - x^2) \neq 0$. Továbbá (7) némi átalakításával

$$\left[\frac{1}{2}(x^1 + x^2)', 1\right] \begin{bmatrix} C(x^1 - x^2) \\ p'(x^1 - x^2) \end{bmatrix} \geq 0\,.$$

Itt az első tényező egy pozitív vektor, a másodiknak pedig van legalább egy 0-tól különböző komponense és nincs két különböző előjelű komponense. De 0-tól különböző komponensei nem lehetnek negatívak, mert akkor a szorzat is negatív lenne. Tehát (9) csak abban a változatban állhat, hogy

$$\begin{bmatrix} C(x^1 - x^2) \\ p'(x^1 - x^2) \end{bmatrix} \geq 0\,.$$

Ezt balról az $[x^{1\prime}, 1]$ nem-negatív vektorral szorozva (8)-at kapjuk. Így $\varphi(x)$ kvázikonvex E_+^n belsejében, tehát a folytonosság miatt kvázikonvex E_+^n-on.

Szükségesség Azt bizonyítjuk, hogy ha van olyan $v = v^0$, amelyre (6) nem áll, akkor van olyan x^1, $x^2 \in E_+^n$, amelyre (7) áll, de (8) nem. Tegyük fel tehát, hogy

$$v^{0\prime} C v^0 < 0, \tag{10}$$

de $\begin{bmatrix} C v^0 \\ p' v^0 \end{bmatrix}$-nak van két ellenkező előjelű komponense.

Ekkor azonban van olyan $(n+1)$ elemű pozitív

$$\begin{bmatrix} y^0 \\ \eta \end{bmatrix} > 0$$

vektor hogy

$$[y^{0\prime}, \eta] \begin{bmatrix} C v^0 \\ p' v^0 \end{bmatrix} = 0 \,.$$

Itt $\eta > 0$-val az első tényezőt osztva és $x^0 = \dfrac{y^0}{\eta}$-t téve, valamint a tényezők sorrendjét felcserélve azt kapjuk, hogy

$$v^{0\prime} \, (C \, x^0 + p) = 0 \,. \tag{11}$$

Emlékezve arra, hogy $x^0 = \dfrac{y^0}{\eta} > 0$, van egy olyan kicsiny $\alpha > 0$ szám, hogy

$$x^1 = x^0 + \frac{1}{2} \alpha \, v^0 \geqq 0$$

és

$$x^2 = x^0 - \frac{1}{2} \alpha \, v^0 \geqq 0 \,.$$

Így

$$\alpha v^0 = x^1 - x^2$$

$$x^0 = \frac{1}{2} (x^1 + x^2)$$

és (10)-ből, ill. (11)-ből

$$\alpha^2 \, v^{0\prime} \, C v^0 = (x^1 - x^2)' C \, (x^1 - x^2) < 0 \tag{12}$$

$$\alpha \, v^{0\prime} (C x^0 + p) = (x^1 - x^2)' \left[\frac{1}{2} C (x^1 + x^2) + p \right] = 0 \,. \tag{13}$$

(13) szerint (7) áll, de (12) $\dfrac{1}{2}$-szeresét (13)-hoz adva azt kapjuk, hogy

$$(x^1 - x^2)' \, (C x^1 + p) < 0,$$

azaz (8) nem áll. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés: A tétel alapján, $p = 0$-t téve, könnyen belátható, hogy ha $\varphi(x) = \frac{1}{2} x'Cx + p'x$ kvázikonvex E^n_+-on, akkor a $Q(x) = \frac{1}{2} x'Cx$ kvadratikus forma is az. Továbbá azt is tudjuk, hogy ha $\varphi(x)$ nem konvex, akkor $Q(x)$ sem az. Ez a megjegyzés lehetővé teszi, hogy a további tételek bizonyításában felhasználjuk a szubdefinit mátrixoknak [9]-ben részletesebben kifejtett és bizonyított tulajdonságait.

2. *TÉTEL.* Ha a $\varphi(x) = \frac{1}{2} x'Cx + p'x$ függvény kvázikonvex E^n_+-on, de nem konvex, akkor a C együtthatómátrixról és a p vektorról a következőket mondhatjuk:

a) $C \leqq 0$, $C \neq 0$,

b) C-nek pontosan egy (egyszeres) negatív sajátértéke van, ez a sajátérték domináns,

c) a domináns sajátértékhez tartozó sajátvektornak nincsenek különböző előjelű komponensei,

d) $p \leqq 0$,

e) $Ce_i = 0 \Rightarrow p_i = 0$. ($e_i$ = az i-ik egységvektor)

Bizonyítás: A tétel *a)*, *b)* és *c)* alatti állításainak bizonyítását [9] Theorem 1-ben találhatjuk.

d) Az *a)* állítás és (6) következtében

$$v > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} v'Cv < 0 \\ Cv \leqq 0, \; Cv \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow p'v \leqq 0$$

Mivel ez minden $v > 0$-ra áll, következik $p \leqq 0$.

e) Legyen $e = [1, 1, \ldots, 1]'$ és $v = e + \beta e_i$, $\beta \neq 0$. Ekkor

$$Ce_i = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} v'Cv = e'Ce < 0 \\ Cv = \quad Ce \leqq 0, \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow p'v = p'e + \beta p_i \leqq 0$$

minden $\beta \neq 0$-ra. Tehát $p_i = 0$.

A 2. Tétel *e)* állítását a következőképpen is megfogalmazhatjuk: Ha valamelyik x_i változó a $\varphi(x)$ függvény kvadratikus részében nem lép fel, akkor a függvényben egyáltalán nem lép fel (azaz minden koefficiense 0). Az ilyen változókat *irreleváns* változóknak nevezzük, a többit *relevánsnak*. Most már bizonyítani tudjuk a következő tételt:

3. *TÉTEL.* Ha $\varphi(x) = \frac{1}{2} x'Cx + p'x$ kvázikonvex E^n_+-on, de nem konvex és x minden komponense releváns, akkor

$$(14) \qquad \left. \begin{matrix} x^1, x^2 \geqq 0, \; x^1 \neq 0 \\ (x^1 - x^2)'(Cx^1 + p) \leqq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \varphi(x^1) \leqq \varphi(x^2)$$

Bizonyítás: Másutt ([9], Theorem 2) már bizonyítottam, hogy ha $\varphi(x)$ eleget tesz e tétel feltételeinek, akkor minden $v \in E$-re

$$(15) \qquad v'Cv < 0 \Rightarrow Cv \gtrless 0$$

(ahol $\gtrless$ azt jelenti, hogy $>$ vagy $<$).

a) Ha $\frac{1}{2}(x^1-x^2)'\,C\,(x^1-x^2) \geqq 0$, akkor ennek (-1)-szeresét az $(x^1-x^2)'\,(Cx^1+p) \leqq 0$ egyenlőtlenséghez hozzáadva átrendezés után $\varphi(x^1) \leqq \varphi(x^2)$-t kapjuk. Tehát (14) áll.

b) Ha $1/2\,(x^1-x^2)'C\,(x^1-x^2) < 0$, akkor (15) szerint

$$C(x^1-x^2) \gtrless 0 \tag{16}$$

Ha most $C(x^1-x^2) > 0$, akkor $x^1 \geqq 0$, $x^1 \neq 0$-ra tekintettel

$$(x^1-x^2)'C\,x^1 > 0.$$

Másrészt (6) szerint

$$(x^1-x^2)'p \geqq 0.$$

E kettőből $(x^1-x^2)'(Cx^1+p) > 0$, feltevésünkkel ellentétben.

Ha pedig

$$C(x^1-x^2) < 0 \tag{17}$$

akkor (6) miatt

$$p'(x^1-x^2) \leqq 0. \tag{18}$$

(17)-et $\frac{1}{2}(x^1+x^2)$-vel megszorozva és (18)-hoz adva, megfelelő átrendezés után $\varphi(x^1) \leqq \varphi(x^2)$-hez jutunk, azaz (14) ez esetben is áll. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés: A (14) implikáció, mint (2) és (3) alapján könnyen látható, az x előjelének minden megkötése nélkül áll, ha $\varphi(x)$ konvex E^n-en. A tétel valójában azt fejezi ki, hogy az adott feltételek mellett $\varphi(x)$ pszeudokonvex [8] az $E^n_+ - \{0\}$ halmazon (a szemipozitív ortánsban).

A gradiens módszerek alkalmazása szempontjából alapvető a 3. Tételből levonható alábbi korollárium:

4. *korollárium:* Legyen $X \subset E^n_+$ konvex, $\varphi(x)$ elégítse ki a 3. Tétel feltételeit Ha $x^* \in X$, $x^* \neq 0$ minden $x \in X$-re kielégíti az

$$(x^*-x)'(Cx^*+p) \leqq 0 \tag{19}$$

egyenlőtlenséget, akkor x^* optimális megoldása a $\min\,\{\varphi(x) \mid x \in X\}$ programozási feladatnak.

Mivel (19) azt fejezi ki, hogy $\varphi(x)$ függvénynek minden, az x^* pontból kiinduló megengedett irány menti deriváltja e pontban nem negatív, valójában optimalitási kritériumhoz jutottunk a 3. Tételben körülírt függvényekre.

2. A Frank-Wolfe-algoritmus

Tekintsük a következő kvadratikus programozási feladatot (QP): Keressük a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}x'\,Cx + p'x$$

kvadratikus függvény minimumát az

$$Ax + By = b$$
$$x \geqq 0, \; y \geqq 0$$

lineáris korlátozó feltételek mellett. Itt x a célfüggvény szempontjából releváns, y az irreleváns változók n ill. k elemű vektora, A egy $m \cdot n$, B egy $m \cdot k$ méretű mátrix, b egy m elemű vektor. A

$$z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$L = \{z \mid [A \;\; B]\, z = b, \; z \geqq 0\}$$

jelölés bevezetésével a feladat

$$QP: \qquad \min \{\varphi(x) \mid z \in L\}$$

alakban is írható. (L-et *megengedett halmaznak* nevezzük)

(Továbbiakban az azonos jelzéssel vagy felső indexszel ellátott z, x, y vektorok összetartoznak, pl. x^0, y^0 a z^0 részvektorai.)

Mint már említettük, számos módszer, éspedig az alábbinál hatékonyabb módszerek is rendelkezésre állnak a QP feladat megoldására, ha $\varphi(x)$ konvex. Ezért a továbbiakban a nem konvex esetre szorítkozhatunk. A következő feltevésekkel élünk:

A. $\varphi(x)$ kvázikonvex E_n^+-on, de nem konvex.

B. L korlátos.[1]

A Frank—Wolfe-algoritmus lényegében abból áll, hogy kiindulva egy megengedett bázismegoldásból, olyanból, amelynek x részvektora nem 0, felváltva egy lineáris programozási feladatot és egy egyváltozós kvadratikus szélsőértékfeladatot oldunk meg. Az LP feladat célfüggvény koefficienseit mindig $\varphi(x)$-nek az előző kvadratikus feladatot megoldó pontban vett gradiense szolgáltatja, azaz a $\varphi(x)$ célfüggvényt e pontban vett lineáris közelítésével helyettesítjük. Az egyváltozós kvadratikus feladat megoldásakor a $\varphi(x)$ célfüggvényt minimáljuk egy egyenes szakasz mentén, amely az előző LP feladat megoldásának megfelelő csúcspontot és az előző kvadratikus feladatot megoldó pontot köti össze.

Az algoritmus részletes leírása

1. fázis. Kiinduló megoldás keresése

Oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot

$$LP(0): \qquad \min \{-e'x \mid z \in L\}. \qquad e = [1, 1, \ldots, 1]'$$

a) Ha $\min(-e'x) = 0$, állj! Minden megengedett megoldás optimális, $\varphi(x) = 0$ célfüggvény-értékkel.

b) Ha $\min(-e'x) < 0$, legyen egy optimális bázis-megoldás $\hat{z}^{0\prime} = [\hat{x}^{0\prime}, \hat{y}^{0\prime}]$. Tegyük $z^1 = \hat{z}^0$ és térjünk át a 2. fázisra.

2. fázis. r-ik iteráció

1. lépés: Legyen $r = 1$ és oldjuk meg a következő lineáris programozási feladatot

[1] Ez a feltétel regularizálással [5] mindig teljesíthető.

$$LP(r): \qquad \min \{x'(Cx^r + p) \mid z \in L\}$$

Egy optimális bázismegoldást jelöljön

$$\hat{z}^{r\prime} = [\hat{x}^{r\prime}, \hat{y}^{r\prime}]$$

a) Ha

$$\alpha^r = (x^r - \hat{x}^r)'(Cx^r + p) = 0$$

állj! z^r optimális megoldás.

b) Ha $\alpha^r > 0$, áttérünk a 2. lépésre

2. *lépés:*

a) Ha

$$\beta^r = (\hat{x}^r - x^r)'(C\hat{x}^r + p) \leq 0$$

legyen

$$z^{r+1} = \hat{z}^r$$

b) Ha $\beta^r > 0$, legyen

$$z^{r+1} = \frac{1}{\alpha^r + \beta^r} (\alpha^r \hat{z}^r + \beta^r z^r) .$$

Tegyük r helyébe $r + 1$-et és térjünk vissza az 1. lépésre.

Az algoritmus konvergenciájának bizonyítása

A bizonyítás több lépésből áll. Bebizonyítjuk, hogy az algoritmusban szereplő $LP\,(r)$ feladatoknak van optimális megoldása (1^0) és hogy az adott megállási szabályok helyesek (2^0, 5^0). Megmutatjuk továbbá, hogy a z^r sorozat megengedett pontokból áll (3^0), úgy hogy $x^r \neq 0$ (4^0) és $\varphi(x^r)$ szigorúan monoton csökken (6^0). Végül bebizonyítjuk, hogy z^{r+1} minimumhely $[\hat{z}^r, z^r]$-en (7^0) és hogy az eljárás konvergens (8^0).

1^0 A QP feladattal kapcsolatban tett *B)* feltevés miatt az $LP(r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ feladatoknak van optimális bázismegoldása.

2^0 Ha $\min\,(-e'x) = 0$, akkor minden megengedett z-nek az x részvektora 0. Tehát $\varphi(x) = 0$ minden megengedett pontban. Ezzel igazoltuk az 1. fázis *a)* esetének megállási szabályát. Ellenkező esetben (*b)* eset) olyan $z^1 = \hat{z}^0$ kiinduló megoldáshoz jutottunk, amelyben $x^1 = \hat{x}^0 \neq 0$.

3^0 Könnyen beláthatjuk, hogy a $z^1, z^2, \ldots$ sorozat megengedett pontokból áll. Abból ugyanis, hogy $\hat{z}^r$ optimális megoldása $LP(r)$-nek, következik, hogy $\alpha^r \geq 0$, minden r-re. $z^1 = \hat{z}^0 \in L$ és $\hat{z}^1, \hat{z}^2, \ldots \hat{z}^r$ is megengedettek. Tegyük fel, hogy $z^r \in L$, ekkor z^{r+1} is az, mert ha a 2. fázis 2. lépés *a)* esete szerint képeztük, akkor $\hat{z}^{r+1} = z^r \in L$, ha pedig a *b)* eset szerint képeztük, akkor $\alpha^r > 0$, $\beta^r > 0$, tehát $z^{r+1} \in [\hat{z}^r, z^r] \subset L$. Így teljes indukcióval beláttuk, hogy az algoritmus egy megengedett pontsorozatot generál.

4^0 Bebizonyítjuk továbbá, hogy $x^r \neq 0$, $r = 1, 2, \ldots$ Láttuk, hogy $x^1 \neq 0$. Tegyük fel, hogy $x^s \neq 0$. Ekkor $\hat{x}^s = 0$-ból következnek $\alpha^s = x^{s\prime}\,(C\,x^s + p) \geq$ ≥ 0. De mivel $C \leq 0$ és $p \leq 0$ (2. Tétel), $\alpha^s \leq 0$, tehát $\alpha^s = 0$. Ekkor z^{s+1} képzésére az 1. lépés *a)* szabálya szerint nem kerül sor. Tehát ha z^{s+1}-et egyáltalán képezzük, akkor $\hat{x}^s \neq 0$, és mivel $z^{s+1} \in [\hat{z}^s, z^s]$, tehát $x^{s+1} \neq 0$. Így teljes indukcióval beláttuk, hogy $x^r \neq 0$, $r = 1, 2, 3 \ldots$

5^0 Tegyük most fel, hogy

$$\alpha^r = (x^r - \hat{x}^r)'(C\, x^r + p) = 0$$

Mivel $\hat{z}^r$ optimális megoldása $LP(r)$-nek

$$(\hat{x}^r - x)'(C\, x^r + p) \leqq 0 \quad \text{minden} \quad z \in L\text{-re.}$$

E kettő összegéből.

$$(x^r - x)'(C\, x^r + p) \leqq 0 \quad \text{minden} \quad z \in L\text{-re.}$$

Ebből — tekintve, hogy x minden komponense releváns és hogy $x^r \neq 0$, — a 4. korollárium alkalmazásával adódik, hogy z^r optimális megoldása QP-nek. Ezzel igazoltuk a 2. fázis 1. lépés *a)* megállási szabályát.

Eddigi megállapításainkat összefoglalva: az algoritmus vagy véges számú lépésben eljut az optimális megoldáshoz, vagy egy végtelen megengedett pontsorozatot állít elő, amelynek minden z^r tagjára áll: $x^r \neq 0$, és $\alpha^r > 0$.

6^0 Most bebizonyítjuk, hogy e pontsorozaton haladva a célfüggvény értéke szigorúan monoton csökken. Ugyanis, ha z^{r+1}-et a 2. lépés *a)* szabálya szerint képeztük, akkor (némi számolással)

$$\varphi(x^r) - \varphi(x^{r+1}) = \varphi(x^r) - \varphi(\hat{x}^r) = \frac{1}{2}(\alpha^r - \beta^r) > 0$$

mivel $\alpha^r > 0$, $\beta^r \leqq 0$. Ha pedig *b)* szabályt alkalmaztuk, akkor

$$\varphi(x^r) - \varphi(x^{r+1}) = \varphi(x^r) - \varphi\left(\frac{\alpha^r\, \hat{x}^r + \beta^r\, x^r}{\alpha^r + \beta^r}\right) = \frac{(\alpha^r)^2}{2(\alpha^r + \beta^r)} > 0$$

mivel $\alpha^r > 0$, $\beta^r > 0$. Tehát mindkét esetben

$$\varphi(x^r) > \varphi(x^{r+1}) \tag{20}$$

azaz a z^r sorozaton $\varphi(x^r)$ szigorúan monoton csökken.

7^0 Továbbá bebizonyítjuk, hogy z^{r+1} minimumhelye a $\varphi(x)$ függvénynek, a $[\hat{z}^r, z^r]$ szakaszon. Tekintsük ugyanis az egyváltozós

$$\psi(\lambda) = \varphi[\lambda \hat{x}^r + (1 - \lambda)\, x^r] \qquad 0 \leqq \lambda \leqq 1$$

függvényt. Ekkor, némi számolással:

$$\frac{d\psi}{d\lambda} = \lambda\beta^r - (1 - \lambda)\,\alpha^r$$

$$\frac{d^2\psi}{d\lambda^2} = \alpha^r + \beta^r\,.$$

Mivel $\alpha^r > 0$, ha $\beta^r \leqq 0$, akkor $\dfrac{d\psi}{d\lambda} < 0$ a $[0, 1]$ szakaszon. Tehát minimumát a $\lambda = 1$, $z = \hat{z}^r = z^{r+1}$ helyen veszi fel. (2. lépés *a)* eset.) Ha viszont $\beta^r > 0$, akkor $\dfrac{d^2\psi}{d\lambda^2} > 0$, így $\psi(\lambda)$ a minimumát ott veszi fel, ahol $\dfrac{d\psi}{d\lambda}$ eltűnik, azaz a $\lambda = \dfrac{\alpha^r}{\alpha^r + \beta^r}$, $z = z^{r+1}$ helyen. Mindkét esetben

(21) $$\varphi\,(x^{r+1}) \leq \varphi(x), \text{ ha } z \in [\hat{z}^r, z^r]$$

8⁰ Következik annak bizonyítása,[2] hogy az algoritmus előállít egy, az optimális megoldáshoz konvergáló pontsorozatot. Tekintve, hogy L korlátos, $\varphi(x)$ alulról korlátos L-en, tehát a monoton csökkenő $\varphi(x^r)$ sorozatnak van véges határértéke. Legyen

$$\omega = \lim_{r\to\infty} \varphi(x^r)\,.$$

Ekkor azonban a $\{z^r\}$ sorozatnak van konvergens részsorozata (ennek indexhalmazát jelölje R), úgy, hogy

$$z^r \to \tilde{z} \in L, \qquad \text{ha} \qquad r \in R,\ r \to \infty$$

és

$$\varphi(\tilde{z}) = \omega$$

Bebizonyítjuk, hogy ω a célfüggvény minimuma és $\tilde{z}$ egy optimális megoldás. E célból válasszunk ki R-ből egy olyan $\hat{R}$ részhalmazt, hogy

$$z^r_j \to \tilde{z}, \text{ ha } r \in \hat{R} \text{ és } \hat{z}^r = \bar{z} \text{ minden } r \in \hat{R}\text{-re.}$$

Ilyen $\hat{R}$ részhalmaz létezik, mivel L csúcspontjainak száma véges, tehát legalább egyikük a $\hat{z}^r$ sorozatban végtelen sokszor ismétlődik. Egy ilyet jelöltünk $\bar{z}$-vel.

Következésképp $\bar{z}$ optimális megoldása minden $LP(r)$-nek, ha $r \in \hat{R}$, azaz

$$(x-\bar{x})'(Cx^r + p) \geq 0, \text{ minden } r \in \hat{R},\ z \in L\text{-re,}$$

és ha

$$z^r \to \tilde{z}:$$

(22) $$(x-\bar{x})'(C\tilde{x} + p) \geq 0, \qquad \text{minden } z \in L\text{-re.}$$

Legyen most s, $r \in \hat{R}$ és $s > r$. Ekkor (20) miatt

(23) $$\varphi(x^s) \leq \varphi(x^{r+1}) < \varphi(x^r)$$

és (21) miatt

(24) $$\varphi(x^{r+1}) \leq \varphi[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\,x^r], \quad \text{ha} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

(23) és (24)-ből:

$$\varphi[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\,x^r] \geq \varphi(x^s), \qquad \text{ha} \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

és így

$$\frac{\varphi\,[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\,x^r] - \varphi(x^r)}{\lambda} \geq \frac{\varphi(x^s) - \varphi(x^r)}{\lambda}, \text{ ha } 0 < \lambda \leq 1\,.$$

Ha most r és s tart a $+\infty$-hez, akkor x^r és x^s tart $\tilde{x}$-hez, tehát

$$\frac{\varphi\,[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\,\tilde{x}] - \varphi(\tilde{x})}{\lambda} \geq 0, \text{ ha } 0 < \lambda \leq 1\,.$$

[2] Vö. [3]

$\lambda \to 0$ határátmenettel

$$(\bar{x} - \tilde{x})' \nabla \varphi(\tilde{x}) = (\bar{x} - \tilde{x})' (C\tilde{x} + p) \geq 0 \tag{25}$$

(22) és (25)-ből

$$(x - \tilde{x})'(C\tilde{x} + p) \geq 0 \qquad \text{minden } z \in L\text{-re.}$$

Tehát a 4. korollárium értelmében $\tilde{x}$ optimális megoldása QP-nek, hacsak $\tilde{x} \neq 0$. Ez a feltétel azonban fennáll, hiszen

$$\varphi(\tilde{x}) < \varphi(x^1) \leq 0.$$

3. Két példa

Példa Frank *és* Wolfe *módszerére*

Minimáljuk a

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}[(x_1)^2 + 4x_1 x_2 + 14x_1 x_3] - 50x_1$$

függvényt a következő feltételek mellett

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16$$
$$x_2 + 2x_3 \leq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \leq 0$$

A célfüggvény nyilván nem konvex, de az 1. tételt alkalmazva belátható, hogy $x_1, x_2, x_3 \geq 0$-ra kvázikonvex. Irreleváns változót nem tartalmaz. A megengedett halmaz korlátos és így a Frank–Wolfe algoritmus alkalmazható. Az eljárás egyes lépéseiben kapott megoldásokat az alábbi táblázat tartalmazza:

r	x_1	x_2	x_3	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{x}_3$	α	β	$\varphi(x)$
0	—	—	—	2	12	0	—	—	—
1	2	12	0	8	0	0	408	−156	−150
2	8	0	0	5	0	6	162	81	−432
3	6	0	4	8	0	0	0	—	−486

Ez esetben tehát az eljárás véges számú lépésben eljutott az optimális [6, 0, 4] megoldáshoz.

Ellenpélda Wolfe *módszeréhez*

Wolfe [12] véges algoritmust adott a konvex kvadratikus programozási feladat megoldására. Ez azon alapszik, hogy az

$$Ax = b$$
$$Cx + Au + p \geq 0$$
$$x \geq 0, \ u \text{ előjelben nem korlátozott}$$

feltételekkel meghatározott poliédrikus halmaz olyan csúcspontjai, amelyek kielégítik az

$$x'C\,x + p'x + b'u = 0$$

komplementaritási feltételt, egyben megoldásai a

$\min\left\{\varphi(x) = \frac{1}{2}x'Cx + p'x \mid Ax = b,\ x \geq 0\right\}$ programozási feladatnak is. Ezért mesterséges változók bevezetésével és a bázisba való belépés szabályainak olyan korlátozásával, amely a komplementaritási feltétel állandó kielégítését biztosítja, szimplex módszerrel megolja a feladatot. Ugyanezek a KUHN—TUCKER-feltételek szükségesek és elégségesek az E_+^n-on kvázikonvex kvadratikus függvény minimálására is (lásd [1] 1. tétel), ha az $x = 0$ pontot kizárjuk. Ennek ellenére Wolfe módszere a kvázikonvex esetben nem biztosítja e feladat megoldását. A továbbiakban a módszert ismertnek tételezzük fel, az eredeti publikációból vesszük a jelölésmódot és a „rövid formát" alkalmazzuk.[3] Az ellenpélda az előbbi példától csak abban különbözik, hogy a célfüggvény lineáris tagját elhagyjuk és a korlátozó feltételekben egyenlőséget írunk elő. Az így keletkező

$$\min\left\{-\frac{1}{2}\left[(x_1)^2+4x_1x_2+14x_1x_3\right] \mid 2x_1+x_2+x_3+16;\ x_2+2x_3=12; x_1,x_2,x_3 \geq 0\right\}$$

feladat optimális megoldása [5, 0, 6] és a célfüggvény minimuma (—222,5). Az induló táblázat:

bázis	bv. értéke	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	z_1	z_2	z_3	u_1	u_2	w_1	w_2
w_1	16	2	1	1									1	
w_2	12	0	1	2										1
z_1	0	—1	—2	—7	—1			1			2	0		
z_2	0	—2	0	0		—1			1		1	1		
z_3	0	—7	0	0			—1			1	1	2		

bázis	bv. értéke	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	z_1	z_2	z_3	u_1	u_2
x_1	2	1	0	— 1/2								
x_2	12	0	1	2								
z_1	26	0	0	— 7/2	—1			1			2	0
z_2	4	0	0	— 1		—1			1		1	1
z_3	14	0	0	— 7/2			—1			1	1	2

[3] Ezt lehetővé teszi, hogy példánkban $p = 0$.

Itt u_1 és u_2 előjelben nem korlátozott Lagrange-szorzók, w_1 és w_2 pedig mesterséges változók. Ezeket x_1 és x_2 változókkal felcserélve a következő, megengedett táblát kapjuk:
A két utolsó oszlopot, mint feleslegest elhagytuk és így fogunk tenni a továbbiakban az u_1, u_2 előjelben nem korlátozott (bázis) változóknak megfelelő sorokkal és oszlopokkal is. Most ugyanis $(z_1 + z_2 + z_3)$-at minimáljuk és e célból z_1 ill. z_2 helyett u_1 és u_2 lesznek a bázisváltozók. Így a következő táblázathoz jutunk:

bázis	bv. értéke	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	z_1	z_2	z_3
x_1	2	1	0	$-1/2$						
x_2	12	0	1	2		O			O	
z_3	19	0	0	$-\frac{13}{4}$	$-\frac{1}{2}$	2	-1	$\frac{1}{2}$	-2	1
	19	0	0	$-\frac{13}{4}$	$-\frac{1}{2}$	2	-1	$-\frac{1}{2}$	-3	0

Itt v_2 a WOLFE-algoritmus szabálya szerint nem vonható be a bázisba, mivel x_2 bázisváltozó, a többi változó bevonása pedig vagy a $\sum z_i$ célfüggvény növekedéséhez vagy meg nem engedett megoldáshoz vezetne. Az algoritmus tehát megáll, mielőtt $\sum z_i = 0$-t, illetőleg az optimális megoldást elértük volna. Az utolsó táblázatban szereplő $[2, 12, 0]$ megoldáshoz tartozó függvényérték: (-50).

(Beérkezett: 1969. *augusztus* 5.*)*

IRODALOM

1. ARROW, K. J.—ENTHOVEN, H. C.: Quasi-concave programming. Econometrica, 1961. 29., 779—800 pp.
2. BEALE, E. M. L.: On minimizing a convex function subject to linear inequalities. Journ. Royal Stat. Soc., 1955. 17., 173—184 pp.
3. BERGE, C.—GHOUILA-HOURI, A.: Programmes, jeux et réseaux de transport. Paris, 1962. Dunod.
4. BOOT, J. C. G.: Quadratic programming. Amsterdam, 1964. North-Holland Publ. Co.
5. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Management models and industrial applications of linear programming. Vol. 1.—2. New York, 1961. Wiley.
6. FRANK, M.—WOLFE, PH.: An algorithm for quadratic programming. Naval Research Logistic Quarterly, 1956. 3., 95—110 pp.
7. KÜNZI, H. P.—KRELLE, W.: Nichtlineare Programmierung. Berlin, 1962. Springer Verlag.
8. MANGASARIAN, O. L.: Pseudo-convex functions. J. SIAM. Control Ser. A. 1965. 3., 281—290 pp.
9. MARTOS, B.: Subdefinite matrices and quadratic forms. SIAM. J. Appl. Math. 1969. 17., (Megjelenés alatt.)
10. PONSTEIN, J.: Seven kinds of convexity. SIAM Review, 1967. 9., 115—119 pp.
11. VAN DE PANNE, C.—WHINSTON, A.: The simplex and the dual method for quadratic programming. Operational Res. Quart. 1964. 15., 355—388. pp.
12. WOLFE, PH.: The simplex method for quadratic programming. Econometrica, 1959. 27., 382—398 pp.

QUADRATIC PROGRAMMING WITH QUASICONVEX OBJECTIVE FUNCTION

The linearly constrained quadratic programming problem can be solved by the method of FRANK and WOLFE not only if the objective function is convex but also if it is only quasiconvex in the nonnegative orthant.

In the proof of the convergence of the algorithm (Chap. 2) some properties of the mentioned class of functions find application, these properties are also discussed here at first (Chap. 1). An example illustrates the application of the method and an other shows that WOLFE's quadratic simplex method is inappropriate for this kind of problems. (Chap. 3.)

КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ КВАЗИВЫПУКЛОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Задача квадратичного прграммирования с линейными условиями как ограничениями может быть решена методом Франка и Вольфе не только в случае выпуклой целевой функции, но и если целевая функция является квазивыпуклой в неотрицательном орте.

Чтобы доказать конвергенцию алгоритма (глава 2), автор использует некоторые специфические черты рассматриваемого класса функций, излагаемые также впервые в данной статье (глава 1). Применение метода представляется на примере, на другом же примере показывается, что метод квадратичного симплексного программирования Вольфе непригоден для решения такого рода проблем (глава 3).

Tomáš Gál — Josef Nedoma

Lineáris programozás több paraméterrel a jobb oldalon vagy a célfüggvény-koefficiensekben

E dolgozatunkban célul tűztük ki a többparaméteres lineáris programozási feladat egy megoldási módszerének megadását, amely numerikus megoldásra alkalmas és gépi programozáshoz is alapot szolgáltathat.

I. A többparaméteres jobboldal esete

I.1. *A probléma megfogalmazása*

Keresendő a

$$z = c^T x \tag{I.1,1}$$

függvény maximuma az

$$Ax = b^* + F\lambda\,, \tag{I.1,2}$$

$$x \geq 0 \tag{I.1,3}$$

feltételek mellett, ahol $A = (a^1, \ldots, a^n) = (a_{ij})$ egy $m \times n$ mátrix, $c^T = (c_1, \ldots, c_n)$, $b^* = (b_1^*, \ldots, b_m^*)^T$ konstans vektorok. Megköveteljük, hogy $m < n$ és A rangja m legyen. $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)^T$ vektorparaméter, $F = (f_{ij})$ adott $m \times s$ mátrix. A maximálás az x vektorra történik.

A jobb oldali vektor számára bevezetjük az alábbi rövidített jelölést:

$$b(\lambda) = b^* + F\lambda. \tag{I.1,4}$$

Jelöljük $I = \{i{:}i = 1, \ldots, m\}$, $J = \{j{:}j = 1, \ldots, n\}$. Tetszőleges, az A mátrix $a^{j_1}, \ldots, a^{j_m}$ oszlopvektorai által alkotott bázis esetén a $\varrho = [j_1, \ldots, j_m]$ halmazt a bázis indexnek nevezzük. A bázismátrixra a ${}^{\varrho}B = (a^{j_1}, \ldots, a^{j_m})$ jelölést használjuk. Minthogy ${}^{\varrho}B$ reguláris mátrix, létezik a ${}^{\varrho}B^{-1} = ({}^{\varrho}A_1, \ldots, {}^{\varrho}A_m)$ inverz mátrix. Legyen ${}^{\varrho}J_1 \subset J$ az összes bázisváltozó indexének a halmaza, ${}^{\varrho}J_2 \subset J$ pedig az összes nem bázis változó indexének a halmaza. Természetesen ${}^{\varrho}J_1 \cup {}^{\varrho}J_2 = J$ és ${}^{\varrho}J_1 \cap {}^{\varrho}J_2 = \emptyset$. Jelöljük továbbá $T = \{k{:}k = 1, \ldots, s\}$-el az összes paraméter indexének a halmazát.

A ${}^{\varrho}B$ bázishoz tartozó szimplex táblát a következő módon írjuk fel:

$$z + {}^{\varrho}c^T x = {}^{\varrho}p^T \lambda + z^{(\varrho)}, \tag{I.1,5}$$

$${}^{\varrho}Ax = {}^{\varrho}F\lambda + {}^{\varrho}b^*\,, \tag{I.1,6}$$

ahol

(I.1,7) $${}^{\varrho}A = {}^{\varrho}B^{-1}A,\ {}^{\varrho}F = {}^{\varrho}B^{-1}F,\ {}^{\varrho}b^* = {}^{\varrho}B^{-1}b^*.$$

(I.1,8) $${}^{\varrho}b(\lambda) = {}^{\varrho}b^* + {}^{\varrho}F\lambda = {}^{\varrho}B^{-1}b(\lambda),$$

$${}^{\varrho}b(\lambda) = \left({}^{\varrho}b_1(\lambda), \ldots, {}^{\varrho}b_m(\lambda)\right)^T,$$

(I.1,9) $${}^{\varrho}c^T = c_{\varrho}^T\, {}^{\varrho}A - c^T,\ {}^{\varrho}p^T = c_{\varrho}^T\, {}^{\varrho}F,\ z^{(\varrho)} = c_{\varrho}^T\, {}^{\varrho}b^*.$$

Itt c_{ϱ} a bázisvektorok indexeihez tartozó célfüggvény együtthatók által alkotott vektort jelenti.

Tetszőleges rögzített $\lambda \in E^s$ vektor esetén az (I.1,1) – (I.1,3) feladat a szimplex módszerrel megoldható. Ebben a cikkben a célfüggvény optimális értékét mint a λ vektorparaméter függvényét fogjuk vizsgálni, mégpedig azokra a paraméterértékekre, amelyekre

(I.1,10) $$G\lambda \leq d.$$

Itt $G = (g_{ik})$ konstans $r \times s$ mátrix, $d = (d_1, \ldots, d_r)^T$ konstans vektor. Azoknak a $\lambda \in E^s$ vektoroknak a halmazát, amelyek (I.1,10)-et kielégítik, M-mel fogjuk jelölni.

Célunknak a következő feladat megoldását tekintjük: 1. Határozzuk meg a λ vektorparaméterek azon $K \subset M$ tartományát, melyre fennáll,hogy minden $\lambda \in K$ vektorra az (I.1,1) – (I.1,3) feladatnak létezik véges optimális megoldása, $\lambda \in M - K$ esetén viszont az (I.1,1) – (I.1,3) feladatnak nincs véges optimális megoldása. 2. Találjunk véges sok nem üres $R_{\varrho 1}, \ldots, R_{\varrho p}$ tartományt azzal a tulajdonsággal, hogy $\bigcup_{k=1}^{p} R_{\varrho k} = K$, és minden $k = 1, \ldots, p$ esetén létezik olyan ${}^{\varrho k}B$ bázis, hogy tetszőleges $\lambda \in R_{\varrho k}$ vektorra ${}^{\varrho}B$ az (I.1,1) – (I.1,3) feladatnak optimális bázisa. 3. Írjuk le a ${}^{\varrho k}b(\lambda)$, $z_{\max}^{(\varrho k)}(\lambda)$ függvényeket minden $R_{\varrho k}$ tartományon.

I.2. *Az alapdefiníciók és tételek*

I.2,1. tétel: Tegyük fel, hogy egy bizonyos $\lambda^0 \in E^s$ vektorra létezik az (I.1,1) – (I.1,3) feladat véges maximuma. Ekkor tetszőleges $\lambda \in M \subset E^s$ vektorra vagy létezik az (I.1,1) – (I.1,3) feladat véges optimális megoldása, vagy a feladatnak nincs megengedett megoldása.

Bizonyítás: Készítsük el az (I.1,1) – (I.1,3) feladat duálisát:

(I.2,1) $$\min w = u^T b(\lambda)$$

feltéve, hogy

(I.2,2) $$A^T u \geq c.$$

Abból a feltevésből, hogy λ^0-ra létezik az adott feladat optimuma, a dualitási tétel szerint következik, hogy ha $\lambda = \lambda^0$, akkor az (I.2,1) – (I.2,2) feladatnak is létezik egy $u^0 \in E^m$ megengedett megoldása. Mivel az (I.2,2) feltételrendszer nem függ λ-tól, u^0 az (I.2,1) – (I.2,2) feladat megengedett megoldása tetszőleges $\lambda \in E^s$ vektorra. Most az (I.2,1) – (I.2,2) feladatra mint primálra alkalmazva a dualitás tételt tetszőleges $\lambda \in M$ esetén, nyerjük az I.2,1. tétel állítását.

I.2,1. definíció: Mindazokat a $\lambda \in M \subset E^s$ vektorokat, amelyekre létezik az (I.1,1) – (I.1,3) feladat véges optimális megoldása, megengedett vektorparamétereknek nevezzük. Az összes megengedett vektorparaméter zárt tartományát K-val fogjuk jelölni.

Megjegyzés: Ha legalább egy $\lambda \in M$ vektorra létezik egy véges optimális megoldás, akkor az I.2,1. tétel szerint K azonos mindazon $\lambda \in M$ vektorok halmazával, melyekre az (I 1,1) — (I.1,3) feladatnak létezik megengedett megoldása.

I.2.2. tétel: K konvex poliedrikus halmaz E^s-ben.

Bizonyítás: Legyen ${}^{\varrho}B$ valamely az A mátrix oszlopvektorai által alkotott reguláris $(m \times m)$ mátrix. Azon $\lambda \in E^s$ vektorok halmazát,[1] amelyekre az (I.1,1) — (I.1,3) feladatnak ${}^{\varrho}B$ (primális) megengedett bázisa, az alábbi feltétellel adhatjuk meg:

(I.2,3) $$ {}^{\varrho}B^{-1}b(\lambda) \geq 0\,, $$

azaz

(I.2,4) $$ -{}^{\varrho}F\lambda \leq {}^{\varrho}b^*. $$

Az összes olyan $\lambda \in E^s$ vektor halmaza, amelyekre az (I.1,1) — (I.1,3) feladatnak létezik megengedett bázisa, véges sok (I.2,4) típusú konvex poliedrikus halmaz egyesítése. Ezt a halmazt K_1-el jelöljük.

Megmutatjuk, hogy K_1 konvex halmaz.

Legyen λ^1, $\lambda^2 \in K_1$ két különböző vektor. Ekkor léteznek olyan x^1, $x^2 \in E^n$ vektorok, hogy

(I.2,5) $$ \begin{aligned} Ax^1 &= b^* + F\lambda^1, \\ Ax^2 &= b^* + F\lambda^2, \\ x^1 &\geq 0,\ x^2 \geq 0. \end{aligned} $$

Legyen $t \in (0, 1)$ valós szám. Jelöljük

(I.2,6) $$ \begin{aligned} x^t &= (1 - t)x^1 + tx^2, \\ \lambda^t &= (1 - t)\lambda^1 + t\lambda^2. \end{aligned} $$

(I.2,5)-ből következik, hogy

(I.2,7) $$ \begin{aligned} Ax^t &= b^* + F\lambda^t, \\ x^t &\geq 0. \end{aligned} $$

Ez azt jelenti, hogy a $\lambda = \lambda^t$ vektorra x^t az (I.1,1) — (I.1,3) feladat megengedett megoldása, úgy hogy $\lambda^t \in K_1$.

A $K_1 \subset E^s$ halmaz tehát konvex poliedrikus halmaz, mert konvex, és ki lehet fejezni véges számú konvex poliedrikus halmaz egyesítéseként. Következésképpen $K = M \cap K_1$ szintén konvex poliedrikus halmaz.[2] Qu.e.d.

I.2,3. tétel: $z_{\max}(\lambda)$ konkáv függvény a $K \subset E^s$ halmazon.

E tétel bizonyítását CHARNES és COOPER és később NYKOWSKI [25], [26] közölték.

[1] Természetesen ez a halmaz üres is lehet.

[2] Hallgatólagosan feltettük, hogy K nem üres halmaz. Ekkor az I.2,1. definícióhoz fűzött megjegyzés miatt írható $K = M \cap K_1$. A $K = \emptyset$ eset érdektelen, egyébként akkor a tétel triviálisan igaz.

I.2,2. definíció: A ${}^{\varrho}B$ bázist optimális bázisnak nevezzük, ha létezik olyan $\lambda \in K$, melyre ${}^{\varrho}B$ primálisan és duálisan is megengedett.

Megjegyzés: A ${}^{\varrho}B$ bázis primálisan megengedett, ha az (I.2,3) vagy (I.2,4) feltétel teljesül, és duálisan megengedett, ha a

$$ {}^{\varrho}c \geqq 0 \tag{I.2,8} $$

feltételt kielégíti.

Tetszőleges ${}^{\varrho}B$ optimális bázishoz hozzárendelünk egy $R_{\varrho} \subset K$ zárt tartományt, amelyet a

$$ -{}^{\varrho}F\lambda \leqq {}^{\varrho}b^*, \tag{I.2,9} $$

$$ G\lambda \leqq d \tag{I.2,10} $$

feltételekkel definiálunk. R_{ϱ} tehát azon megengedett vektorparaméterek halmaza, amelyekre ${}^{\varrho}B$ az (I.1,1) – (I.1,3) feladat optimális bázisa.

I.2,3. definíció: Legyen ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$ két különböző optimális bázis. Ha

1. létezik $\lambda^* \in K$ úgy, hogy ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$ mindegyike az (I.1,1) – (I.1,3) feladat optimális bázisa $\lambda = \lambda^*$ esetén, és
2. a ${}^{\varrho_1}B$ bázisból a ${}^{\varrho_2}B$ bázisba (vagy fordítva) át lehet menni egy duális szimplex algoritmus lépéssel,

akkor a ${}^{\varrho_1}B$ és a ${}^{\varrho_2}B$ bázisokat szomszéd bázisoknak nevezzük.

I.2,4. definíció: Ha az R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} tartományoknak megfelelő bázisok szomszéd bázisok, akkor az R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} tartományokat szomszéd tartományoknak nevezzük.

A fenti definíciókból nyilvánvaló, hogy az R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} szomszéd tartományokra fennáll

$$ R_{\varrho_1} \cap R_{\varrho_2} \neq \varnothing . \tag{I.2,11} $$

I.2,4. tétel: Ha R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} szomszéd tartományok, akkor az E^s tér ellentétes féltereiben helyezkednek el.

Bizonyítás: Jelöljük ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$-vel az R_{ϱ_1} és R_{ϱ_2} tartományokhoz hozzárendelt optimális bázisokat. A megfelelő szimplex táblák:

$$ {}^{\varrho_1}B: \quad z + {}^{\varrho_1}c^T x = {}^{\varrho_1}p^T\lambda + z^{(\varrho_1)}, \qquad {}^{\varrho_1}Ax = {}^{\varrho_1}F\lambda + {}^{\varrho_1}b^*, \tag{I.2,12} $$

$$ {}^{\varrho_2}B: \quad z + {}^{\varrho_2}c^T x = {}^{\varrho_2}p^T\lambda + z^{(\varrho_2)}, \qquad {}^{\varrho_2}Ax = {}^{\varrho_2}F\lambda + {}^{\varrho_2}b^*. \tag{I.2,13} $$

Legyen ${}^{\varrho_1}a_{i_0 j_0}$ a kulcselem (pivot) az ${}^{\varrho_1}A$ mátrixban a ${}^{\varrho_1}B$ bázisból a ${}^{\varrho_2}B$ bázisba való átmenetnél. Ez az elem feltevés szerint negatív. Az (I.2,13) rendszer i_0-ik sorát az (I.2,12) rendszer i_0-ik sorának ${}^{\varrho_1}a_{i_0 j_0}$-el való osztásával kapjuk.[3] Ennélfogva

$$ \operatorname{sgn} {}^{\varrho_1}b_{i_0}(\lambda) = -\operatorname{sgn} {}^{\varrho_2}b_{i_0}(\lambda) \tag{I.2,14} $$

[3] Feltesszük, hogy a két rendszernél a sorok sorrendje ugyanaz, abban az értelemben, hogy az egyik bázisból a másik bázisba való átmenetnél nem kell őket átszámozni.

minden $\lambda \in E^s$ vektorra. Mivel $\lambda \in R_{\varrho_1}$ esetén ${}^{\varrho_1}b_{i_0}(\lambda) \geq 0$, $\lambda \in R_{\varrho_2}$ esetén pedig ${}^{\varrho_2}b_{i_0}(\lambda) \geq 0$, azaz (I.2,14) szerint ${}^{\varrho_1}b_{i_0}(\lambda) \leq 0$, megkaptuk a tétel állítását.

Az optimális bázisok halmazának szerkezetét jól le lehet írni a gráfelmélet segítségével. A továbbiakban az (S, Γ) szimbólum egy irányítatlan gráfot fog jelenteni, ahol S a csúcsok vagy másszóval csomópontok halmaza, Γ pedig egy többrétű leképezés, amely minden $\varrho \in S$ csomóponthoz a szomszédos csomópontokat rendeli hozzá, azaz olyan csomókat, amelyeket ϱ-val él köt össze.

I.2,5. definíció: Az (I.1,1) — (I.1,3) feladathoz hozzárendeljük a következő (S, Γ) gráfot:

1. Az (S, Γ) gráf minden csomópontja egy $\varrho = [j_1, \ldots, j_m]$ halmaz,[4] ahol a j_i-k különböző pozitív egész számok, $1 \leq j_i \leq n$.

2. $\varrho \in S$ akkor és csak akkor, ha ${}^{\varrho}B$ az (I.1,1) — (I.1,3) feladat optimális bázisa.

3. $\varrho_1, \varrho_2 \in S$, $\varrho_1 \neq \varrho_2$ esetén $\varrho_2 \in \Gamma(\varrho_1)$ (egyúttal $\varrho_1 \in \Gamma(\varrho_2)$) akkor és csak akkor, ha ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$ szomszédok.

I.2,5. tétel: Legyen λ^1, $\lambda^2 \in K$ két tetszőleges megengedett vektorparaméter és legyen $\varrho_1 \in S$ olyan, melyre $\lambda^1 \in R_{\varrho_1}$. Ekkor az (S, Γ) gráfban létezik olyan $\{\varrho_1, \ldots, \varrho_k\}$ út, hogy $\lambda^2 \in R_{\varrho_k}$.

Bizonyítás: Fejezzük ki parametrikusan a λ^1, λ^2 pontokat összekötő szakaszt:

$$\lambda(t) = \lambda^1 + t(\lambda^2 - \lambda^1), \qquad 0 \leq t \leq 1. \tag{I.2,15}$$

K konvexitása miatt $\lambda(t) \in K$ minden $t \in [0, 1]$ értékre. λ helyébe a $\lambda(t)$ kifejezést helyettesítve az (I.1,1) — (I.1,3) feladatban, egy egyparaméteres lineáris programozási feladatot kapunk a t paraméterrel. Elvégezzük e feladatra a $0 \leq t \leq 1$ intervallumon a szisztematikus parametrizációt úgy, hogy a ${}^{\varrho_1}B$ bázisból kiindulva folyamatosan átmegyünk további optimális bázisokhoz a duális szimplex algoritmus segítségével. Eredményül egy olyan bázis sorozatot fogunk kapni, amely megfelel a keresett útnak az (S, Γ) gráfban.

I.2.6. tétel: Legyen (S_0, Γ_0) az (S, Γ) gráf egy tetszőleges komponense.[5] Ekkor fennáll $\bigcup_{\varrho \in S_0} R_\varrho = K$.

Bizonyítás: Az előző tételből közvetlenül következik az állítás.

I.3. *A többparaméteres jobb oldali vektor szisztematikus parametrizációjának módszere a lineáris programozásban*

Az I.2.6. tétel azt mutatja, hogy az I.1. szakaszban kitűzött parametrikus probléma megoldása tulajdonképpen az (S, Γ) gráf egy tetszőleges (S_0, Γ_0) komponense összes csúcspontjának meghatározását jelenti.

Egy $\varrho_0 \in S$ szögpont választásával egyértelműen meghatározott az az (S_0, Γ_0) komponens, amelyre $\varrho_0 \in S_0$. Az (S_0, Γ_0) gráf összes csomópontjainak meghatározására hatékony módszernek látszik a következő algoritmus.

[4] Különböző csomóknak természetesen különböző m elemű halmazok felelnek meg.

[5] Az (S, Γ) gráf egy komponensén tetszőleges olyan összefüggő részgráfot értünk, amely nem részgráfja (S, Γ) más összefüggő részgráfjainak.

I.3,1. Algoritmus az összefüggő (S_0, Γ_0) gráf összes csomópontjának megkeresésére.

Az algoritmus során két jegyzéket konstruálunk, melyek egyike a már megtalált csomópontok regisztrálására szolgál, a másik pedig az összes, az előző jegyzékben még nem szereplő, szomszédos csomópontot tartalmazza.

A) Választunk egy $\varrho_0 \in S_0$ csomót.

B) Elkészítjük a

$$V_0 = \{\varrho_0\},\ W_0 = \{\Gamma(\varrho_0)\}$$

halmazokat (jegyzékeket).

C) Tegyük fel, hogy az algoritmus k-ik lépése során megkaptuk a ϱ_{k-1} csomót és a V_{k-1}, W_{k-1} jegyzékeket. Leírjuk most a $(k+1)$-ik lépést:

C.1. Ha $W_{k-1} = \emptyset$, akkor az eljárás véget ér mert az (S_0, Γ_0) gráf összes csomópontját feljegyeztük a V_{k-1} jegyzékben..

C.2. Ha $W_{k-1} \neq \emptyset$, választunk egy $\varrho_k \in W_{k-1}$ csomót. A választást — amennyiben lehetséges — úgy végezzük, hogy $\varrho_k \in W_{k-1} \cap \Gamma(\varrho_{k-1})$ legyen. Egyébként arra törekszünk, hogy ϱ_{k-1} és ϱ_k minél közelebb legyenek egymáshoz.

C.3. Elkészítjük a

$$V_k = V_{k-1} \cup \{\varrho_k\}, \tag{I.3,1,1}$$

$$W_k = W_{k-1} \cup \Gamma(\varrho_k) - V_k \tag{I.3,1,2}$$

halmazokat. Ezután áttérünk az algoritmus $(k+2)$-ik lépésére.

A fenti algoritmus véges számú lépésben célhoz vezet. Bizonyítása megtalálható a [22] munkában.

I.3,2. Az algoritmus alkalmazása az adott problémára.

Lássuk, mit jelentenek az algoritmus egyes lépései az adott probléma esetén.

Először egy bizonyos $\varrho_0 \in S$ elemet kell meghatározni, ami azt jelenti, hogy meg kell találni az (I.1,1) — (I.1,3) feladat egy optimális bázisát. Ezt a következő módon fogjuk megtenni:

1° Meghatározzuk az

$$Ax - F\lambda = b^*, \tag{I.3,2,1}$$

$$G\lambda + \eta = d, \tag{I.3,2,2}$$

$$x \geq 0,\ \eta \geq 0 \tag{I.3,2,2a}$$

rendszer egy (x^0, λ^0) megengedett megoldását. (λ előjelben nem korlátozott változó.) Ha az (I.3,2,1) — (I.3,2,2) rendszernek nincs megoldása, akkor $K = \emptyset$, és így nincs mit megoldani.

2° Az (I.1,1) — (I.1,3) feladatba a $\lambda = \lambda^0$ vektort helyettesítjük és megoldjuk a

$$\max z = c^T x\,, \tag{I.3,2,3}$$

$$Ax = b(\lambda^0)\,, \tag{I.3,2,4}$$

$$x \geq 0$$

feladatot. Ha ennek a feladatnak nincs véges optimuma, akkor az I.2.1. tétel szerint $K = \emptyset$. Ellenkező esetben létezik az (I.3,2,3) — (I.3,2,4) feladatnak egy optimális ${}^{\varrho_0}B$ bázisa, amely egyidejűleg az (I.1,1) — (I.1,3) feladat optimális bázisa az I.2,2. definíció értelmében. Emellett $\lambda^0 \in R_{\varrho_0} \subset K$ és ϱ_0 az S halmaz keresett eleme.

Bővebb magyarázatot igényel még a C.3. pont is.

Itt feltételeztük, hogy a k-ik lépésben elkészítettük a V_{k-1} és W_{k-1} jegyzékeket. A V_{k-1} jegyzék tartalmazza azon optimális bázisok (és megfelelő tartományok) indexeit, amelyeket már teljesen le tudunk írni. Ismerjük az $R_{\varrho_0}, \ldots, R_{\varrho_{k-1}}$ tartományok meghatározó feltételeit és a feladat megoldását ezeken a tartományokon.

A W_{k-1} jegyzék azon R_ϱ tartományok indexeit tartalmazza, amelyeknek meghatároztuk a létezését az előző lépések folyamán, de nem ismerjük a teljes leírásukat.

A $\varrho_k \in W_{k-1}$ elem választása után átmegyünk a ${}^{\varrho_{k-1}}B$ bázisból a ${}^{\varrho_k}B$ bázisba. Megkapjuk a

$$z + \sum_{j \in J} {}^{\varrho_k}C_j\, X_j - \sum_{l=1}^{s} {}^{\varrho_k}p_l\, \lambda_l = z^{(\varrho_k)},$$

$$\sum_{j \in J} {}^{kk}a_{1j} x_j - \sum_{l=1}^{s} {}^{\varrho_k}f_{1l}\, \lambda_l = {}^{\varrho_k}b_1^*,$$

$$\text{(I.3,2,5)} \qquad - - - - - - - -$$

$$- - - - - - - -$$

$$\sum_{j \in J} {}^{\varrho_k}a_{mj}\, x_j - \sum_{l=1}^{s} {}^{\varrho_k}f_{ml}\, \lambda_l = {}^{\varrho_k}b_m^*,$$

$$x_j \geq 0, \; j \in J$$

rendszert.

(I.3,1,2) előállítható

$$\text{(I.3,2,6)} \qquad W_k = W_{k-1} \cup Q_k - \{\varrho_k\}$$

alakban, ahol

$$\text{(I.3,2,7)} \qquad Q_k = \Gamma(\varrho_k) - V_{k-1} - W_{k-1}.$$

Most $W_{k-1} \cap Q_k = \emptyset$, a Q_k halmaz tehát éppen azokat a csomókat tartalmazza, amelyeket a W_{k-1}-hez kell csatolni. (Azután már csak a ϱ_k csomót kell áthelyezni a W_{k-1} jegyzékből a V_k jegyzékbe.)

A Q_k halmaz meghatározására alkalmazott módszer könnyebb leírása céljából bevezetjük a következő definíciót.

I.3,2,1. definíció: Az R_ϱ tartománynak ($\varrho \in S$) az i-edik fal szerint ($i \in I$) szomszédja van, ha át lehet menni egy szomszéd tartományba az i-edik bázisváltozónak, x_{j_i}-nek a bázisból való kidobásával az (I.3,2,5) rendszerben.

Megjegyzés: A bázisváltozók sorrendjét az (I.3,2,5) rendszer sorainak sorrendje határozza meg. A falak számozása tehát függ a rendszer leírásának módjától, vagyis egy transzformáció sorozattal van megadva, amellyel az (I.3,2,5) rendszert megkapjuk az (I.1,1) — (I.1,3) rendszerből.

Az R_ϱ tartománynak van tehát szomszédja az i-edik fal szerint, ha

1′ ${}^{\varrho_k}a_{ij} < 0$ legalább egy $j \in {}^{\varrho_k}J_2$-re,

2′ létezik $\lambda^0 \in R_{\varrho_k}$ úgy, hogy ${}^{\varrho_k}b_i(\lambda^0) = 0$.

A Q_k halmaz konstrukcióját az alábbi terv szerint végezzük:

1°° Meghatározzuk a ϱ_k csomó potenciális $\pi_1^k, \ldots, \pi_t^k$ szomszédait, vagyis azon duálisan megengedett bázisok indexeit, amelyekhez át lehet menni egy duális szimplex algoritmus lépéssel.

Az ily módon nyert csomók közül egyesek már bent lehetnek a W_{k-1} vagy V_{k-1} jegyzékekben.

2°° Jelöljük $P(\subset I)$-vel az R_{ϱ_k} tartomány azon falai indexeinek a halmazát, amelyekről még nem tudjuk, hogy létezik-e szerintük szomszéd tartomány. (Nem tudjuk, teljesül-e a 2′ feltétel.)

3°° Elkészítjük a

$$\xi = {}^{\varrho_k}b^* - (-{}^{\varrho_k}F)\,\lambda,$$
$$\eta = d - G\lambda, \tag{I.3,2,8}$$
$$\xi \geq 0,\ \eta \geq 0,$$

vagyis a

$$\xi_i = {}^{\varrho_k}b_i^* - \sum_{j=1}^{s}(-{}^{\varrho_k}f_{ij})\,\lambda_j, \qquad i = 1, \ldots, m,$$
$$\eta_t = d_t - \sum_{j=1}^{s} g_{tj}\lambda_j, \qquad t = 1, \ldots, r, \tag{I.3,2,9}$$
$$\xi_i \geq 0, \eta_t \geq 0$$

rendszert és keressük ξ_i minimumát az (I.3,2,9) feltételekre nézve minden egyes $i \in P$ indexre.

4°° Legyen $\widetilde{P}$ azon $i \in P$ indexek halmaza, amelyekre $\min \xi_i = 0$ (az (I.3,2,9) feltételek mellett).

5°° A Q_k jegyzékhez hozzácsapjuk az R_{ϱ_k} tartomány összes, eddig még nem regisztrált azon falak szerinti szomszédait, melyek indexeit a $\widetilde{P}$ halmaz tartalmazza.[6]

Az algoritmus használatához a szimplex algoritmuson néhány fontos, de egyszerű módosítást kell végrehajtani. Ezekkel itt helyszűke miatt nem foglalkozunk, hanem az Ekonomicko Matematicky Obzor című lapban való publikálásra előkészített kéziratra [24] utalunk.

II. A célfüggvény együtthatóinak lineáris parametrizációja

II.1. *A probléma megfogalmazása, alaptételek és definíciók*

A jobb oldali vektor lineáris parametrizációjának az I. részben tárgyalt módszere bizonyos módosításokkal használható a célfüggvény együtthatóinak (az árvektornak) lineáris parametrizációjára is. Mivel az egész eljárás analóg,

[6] Egy fal szerint több szomszéd is létezhet, ha a kulcselem választása nem egyértelmű a megfelelő sorban.

nem fogjuk részletesen leírni. Csak azokkal az eltérésekkel kívánunk foglalkozni, amelyek a definíciókat, vagy a számítás technikáját érintik.

A feladat most a következő:

$$\max w = (c^* + Hv)^T x, \tag{II.1,1}$$

feltéve, hogy

$$Ax = b, \tag{II.1,2}$$

$$x \geqq 0. \tag{II.1,3}$$

Itt A konstans $m \times n$ mátrix, H konstans $n \times s$ mátrix, $v \in E^s$ vektor paraméter, $c^* \in E^n$, $b \in E^m$ konstans vektorok. Jelöljük

$$c(v) = c^* + Hv. \tag{II.1,4}$$

A parametrizációt most is egy $M \subset E^s$ halmazon végezzük, melyet a

$$Gv \leqq d \tag{II.1,5}$$

egyenlőtlenségrendszer definiál. (G és d ugyanaz, mint az I. részben.)

A feladatot most célszerű a következő ekvivalens alakba átírni:

$$\max w = v^T y + z, \tag{II.1,6}$$

$$Ax = b, \tag{II.1,7}$$

$$y - H^T x = 0, \tag{II.1,8}$$

$$z - c^{*T} x = 0, \tag{II.1,9}$$

$$x \geqq 0. \tag{II.1,10}$$

A vektorparamétert továbbra is (II.1,5)-el korlátozzuk. $y \in E^s$ változó vektor, z skalár változó.

Mivel y komponensei és z előjelben nem korlátozott változók, végig a bázisban maradnak, így a (II.1,6) – (II.1,10) feladat bázisait karakterizálni lehet az x vektor komponensei közé tartozó bázisváltozók indexeivel.

A $\varrho = [j_1, \ldots, j_m]$ bázis indexet és a hozzá tartozó ${}^{\varrho}B$ bázist ugyanúgy értelmezzük, mint az I. részben. A (II.1,7) – (II.1,10) rendszer, a ${}^{\varrho}B$ bázisba traszformálva, a következő alakot ölti.

$${}^{\varrho}Ax = {}^{\varrho}b, \tag{II.1,11}$$

$$y + {}^{\varrho}H^T x = {}^{\varrho}q, \tag{II.1,12}$$

$$z + {}^{\varrho}c^{*T} x = z^{(\varrho)}, \tag{II.1,13}$$

$$w = -({}^{\varrho}Hv + {}^{\varrho}c^*)^T x + v^T\, {}^{\varrho}q + z^{(\varrho)}, \tag{II.1,14}$$

ahol

$${}^{\varrho}A = {}^{\varrho}B^{-1}A, \quad {}^{\varrho}b = {}^{\varrho}B^{-1}b, \tag{II.1,15}$$

továbbá, H_ϱ-val H-nak azt a részét jelölve, amely H-nak a bázisváltozókhoz tartozó soraiból áll,

(II. 1,16) $\qquad {}^{\varrho}H^T = H_{\varrho}^T\,{}^{\varrho}B^{-1}A - H^T,\quad {}^{\varrho}c^{*T} = c_{\varrho}^{*T}\,{}^{\varrho}B^{-1}A - c^{*T},$

(II. 1,17) $\qquad {}^{\varrho}q = H_{\varrho}^T\,{}^{\varrho}b,\quad z^{(\varrho)} = c_{\varrho}^{*T}\,{}^{\varrho}b\,.$

A ${}^{\varrho}B$ primál megengedett bázis azokra a $\nu \in M \subset E^s$ vektorparaméterekre optimális, melyekre ${}^{\varrho}c(\nu) \geqq 0$ vagyis

(II.1,18) $\qquad -{}^{\varrho}H\nu \leqq {}^{\varrho}c^*$

és ezenkívül

(II.1,19) $\qquad G\nu \leqq d.$

A (II.1,18) és (II.1,19) feltételek meghatározzák a ${}^{\varrho}B$ bázishoz tartozó $R_{\varrho} \subset E^s$ tartományt. ${}^{\varrho}B$ a (II.1,1) – (II.1,3) feladatnak (vagyis a (II.1,6) – (II.1,10) feladatnak) optimális bázisa, ha $R_{\varrho} \neq \emptyset$. A megengedett vektorparamétert ugyanúgy definiáljuk, mint az I.2,1 definícióban (λ helyébe ν-t téve).

Jelöljük most is K-val az összes megengedett $\nu \in E^s$ vektorparaméter halmazát. K az összes optimális ${}^{\varrho}B$ bázishoz tartozó R_{ϱ} halmazok egyesítése.

Az I.2,1. tétellel analóg a következő tétel.

II.1,1. tétel: Tegyük fel, hogy egy bizonyos $\nu^0 \in E^s$ vektorra létezik véges optimum. Ekkor a (II.1,1) – (II.1,3) feladatnak tetszőleges $\nu \in E^s$ esetén van megengedett megoldása, tehát tetszőleges $\nu \in E^s$ esetén vagy létezik véges optimum, vagy pedig a feladatnak nem korlátos megoldása van.

Változás nélkül fennáll az I.2,2. tétel. Az I.2,3. tétel analógja a következő: A $w_{\max}(\nu)$ függvény konvex a $K \subset E^s$ halmazon.

II.1,1. definíció: A ${}^{\varrho_1}B$, ${}^{\varrho_2}B$ optimális bázisokat szomszéd bázisoknak nevezzük, ha

1. létezik $\nu^* \in K$ úgy, hogy ${}^{\varrho_1}B$ és ${}^{\varrho_2}B$ a (II.1,1) – (II.1,3) feladat optimális bázisai $\nu = \nu^*$ esetén, továbbá

2. a ${}^{\varrho_1}B$ bázisból a ${}^{\varrho_2}B$ bázisba (vagy fordítva) át lehet menni egy primál szimplex algoritmus lépéssel.

Változtatás nélkül érvényesek az I.2,4., I.2,5. definíciók és az I.2,4. – I.2,6. tételek (természetesen a λ és ν vektorok cseréjével).

II.2. *Az eljárás*

Az (S, Γ) gráf egy (S_0, Γ_0) komponense összes csomópontjának megkeresésére ismét az előző részben ismertetett algoritmust fogjuk használni. Most is tüzetesebben meg fogjuk vizsgálni a ${}^{\varrho_0}B$ optimális bázis meghatározásának (azaz az S_0 halmaz első eleme megtalálásának) módját, továbbá a szomszédok megadásánál követett módszert.

A ${}^{\varrho_0}B$ optimális bázis kereséséhez

1* Meghatározzuk az

(II.2,1)
$$\begin{aligned} A^T u - H\nu &\geqq c^* \\ -G\nu &\geqq -d \end{aligned}$$

rendszer egy (u^0, ν^0) megengedett megoldását. A (II.2,1) rendszert duálisan oldhatjuk meg az

$$\begin{aligned} Ax \qquad &= b, \\ y - H^T x - G^T v &= 0, \\ z - c^{*T} x + d^T v &= 0, \\ x \geq 0,\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

rendszer duálisan megengedett megoldásának keresése útján. Ha a (II.2,1) rendszernek nincs megoldása, akkor $K = \varnothing$.

2* A (II.2,1) rendszer megoldásával kapott ν^0 vektorparamétert behelyettesítjük (II.1,1) be és megoldjuk a

$$\max w = c^T(\nu^0)x, \tag{II.2,2}$$

$$Ax = b, \tag{II.2,3}$$

$$x \geq 0 \tag{II.2,4}$$

feladatot, ahol

$$c(\nu^0) = H\nu^0 + c^*. \tag{II.2,5}$$

Ha ennek a feladatnak van megengedett megoldása, akkor létezik a (II.2,2) — (II.2,4) feladat ${}^{\varrho_0}B$ optimális bázisa, amely a (II.1,1) — (II.1,3) feladatnak is optimális bázisa minden $\nu \in R_{\varrho_0}$ vektorra.

Az algoritmus általános lépésénél keressük a ϱ_k csomó még nem regisztrált (azaz szabad) szomszédait. A potenciális szomszédokat most természetesen mindazon primál megengedett bázisok között keressük, melyekhez át tudnuk menni a ${}^{\varrho_k}B$ bázisból a primál szimplex módszer egy lépésével.

II.2,1. definíció: Az R_{ϱ_k} tartománynak létezik szomszédja a j-edik fal szerint, ha át lehet menni egy szomszéd tartományba a j-edik nem bázis változónak a bázisba való bevonásával a (II.1,11)–(II.1,13) rendszerben, azaz ha

1″ ${}^{\varrho_k}a_{ij} > 0$ legalább egy $i \in I$-re,
2″ létezik $\nu^0 \in R_{\varrho_k}$ úgy, hogy ${}^{\varrho_k}c_j(\nu^0) = 0$.

A Q_k halmaz meghatározására az első részben leírt módszerrel analóg eljárást alkalmazunk. Most a

$$\begin{aligned} \xi &= {}^{\varrho_k}c^{*N} - (-{}^{\varrho_k}H^N)\,\nu, \\ \eta &= d - G\nu, \\ \xi &\geq 0,\ \eta \geq 0 \end{aligned} \tag{II.2,6}$$

rendszert tanulmányozzuk, ahol $\xi \in E^{n-m}$, $\eta \in E^r$. ${}^{\varrho_k}H^N$ a ${}^{\varrho_k}H$ mátrixnak azt a részét jelöli, amely ${}^{\varrho_k}H$-nak a nem bázis változókhoz tartozó soraiból áll, hasonlóan a ${}^{\varrho_k}c^{*N}$ vektor a ${}^{\varrho_k}c^*$ vektornak a nem bázis változókhoz tartozó komponensei által alkotott része. A Q_k halmazba berendeljük az R_{ϱ_k} tartomány összes, eddig még nem regisztrált azon falak szerinti szomszédait, melyek indexére min $\xi_j = 0$ $(j \in {}^{\varrho_k}J_2)$.

III. Illusztrációs példák

III.1. *A jobb oldali vektor parametrizációja*

Tekintsük a következő feladatot:

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad &\leq 10 + \lambda_1 + 2\lambda_2,\\
x_2 &\leq 2 - \lambda_1 + \lambda_2,\\
x_1 + x_2 &\leq 20 - \lambda_2,\\
-x_1 + x_2 &\geq 4 - \lambda_3,\\
x_1 + 2x_2 &\leq 12 + \lambda_1 - \lambda_3,\\
x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0
\end{aligned}$$

feltételek mellett, továbbá a λ vektorparamétert korlátozó

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 &\leq 10\\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &\geq 20
\end{aligned}$$

mellékfeltételek mellett.

Az adott feltételrendszert átírjuk az (I.3,2,1) – (I.3,2,2) rendszernek megfelelő alakba:

$$\begin{array}{lllllll}
x_1 & -\lambda_1 - 2\lambda_2 & & +x_3 & & & = 10\\
x_2 + \lambda_1 - \lambda_2 & & & +x_4 & & & = 2\\
x_1 + x_2 & +\lambda_2 & & +x_5 & & & = 20\\
-x_1 + x_2 & & +\lambda_3 & -x_6 & & +p_1 & = 4\\
x_1 + 2x_2 - \lambda_1 & & +\lambda_3 & +x_7 & & & = 12\\
\lambda_1 + \lambda_2 & & & & +\eta_1 & & = 10\\
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & & & & -\eta_2 & +p_2 & = 20
\end{array}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 7;\ \eta_1, \eta_2 \geq 0;\ p_1, p_2 \geq 0.$$

Az induló szimplex táblát az 1,1 táblázat tartalmazza. A λ^0 megengedett vektorparaméterhez az 1,2–1,4 táblákon keresztül jutunk. Az 1,4 táblából már a szimplex algoritmus egyetlen lépésével (a p_2 mesterséges változó helyett a λ_2 változót helyezve a bázisba) át lehet menni a megengedett megoldásra, amely a $\lambda^0 = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{46}{3}\right)^T$ vektorparamétert szolgáltatja.

$\lambda = \lambda^0$-nak a kitűzött feladatba való behelyettesítésével kapott új feladatnak egyetlen lépéssel (2. → I. táblázat) megkapjuk egy optimális megoldását. Végrehajtottuk egyúttal a $-F$ mátrix és a b^* vektor transzformációját. A $\varrho_0 = [1, 3, 4, 5, 6]$ bázis indexhez tartozó R_{ϱ_0} tartományt tehát a

$$
\begin{array}{lrl}
 & -2\lambda_2 - \lambda_3 \leq -2\,, & \\
 & \lambda_1 - \lambda_2 \leq 2\,, & \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \leq 8\,, & \\
\text{(III.1,1)} & \lambda_1 - 2\lambda_3 \leq -16\,, & \\
 & -\lambda_1 + \lambda_3 \leq 12\,, & \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 \leq 10\,, & \\
 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geq 20\,, &
\end{array}
$$

feltételrendszer definiálja. Az R_{ϱ_0} halmazon a célfüggvény maximumát és az optimális megoldást a következő függvények adják meg:

$$
\begin{array}{ll}
 & z_{\max}^{(\varrho_0)}(\lambda) = 36 + 3\lambda_1 + 3\lambda_3, \\
 & x_1(\lambda) = 12 + \lambda_1 - \lambda_3, \\
 & x_2(\lambda) = 0, \\
\text{(III.1,3)} & x_3(\lambda) = -2 + 2\lambda_2 + \lambda_3, \\
 & x_4(\lambda) = 2 - \lambda_1 + \lambda_2, \\
 & x_5(\lambda) = 8 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \\
 & x_6(\lambda) = -16 - \lambda_1 + 2\lambda_3, \\
 & x_7(\lambda) = 0.
\end{array}
$$

Az A algoritmus szerint most meghatározzuk a potenciális szomszédokat. $P = \{1, 3, 4\}$, tehát a potenciális szomszédok $\pi_1^0 = [1, 2, 4, 5, 6]$, $\pi_2^0 = [1, 3, 4, 6, 7]$ és $\pi_3^0 = [1, 2, 3, 4, 5]$. Ezután a 3^{00} pontnak megfelelően elvégezve a ξ_1, ξ_3, ξ_4 változók minimálását, (I.1–I.6 táblázatok) azt találjuk, hogy csak a negyedik fal szerint létezik szomszéd, vagyis $\widetilde{P} = \{4\}$. Így tehát megkaptuk, hogy $V_0 = \{[1, 3, 4, 5, 6]\}$, $W_0 = \{[1, 2, 3, 4, 5]\}$, és áttérhetünk az algoritmus második lépésére.

$\varrho_1 = [1, 2, 3, 4, 5]$ választása most kötött. Az x_6 változó helyett bevonva a bázisba az x_2 változót, a *II.* táblát kapjuk. Itt negatív együtthatók az 1., 2., 3. és 4. sorban vannak. Mivel a negyedik fal szerinti, még nem regisztrált szomszéd most nem lehetséges, elég a következő potenciális szomszédokat tekinteni:

$$\pi_1^1 = [1, 2, 4, 5, 6],\ \pi_2^1 = [1, 2, 3, 5, 7],\ \pi_3^1 = [1, 2, 3, 4, 7].$$

Az előbbivel azonos módon kapjuk, hogy $\widetilde{P} = \{2\}$,

tehát
$$V_1 = \{[1, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 5]\},$$
$$W_1 = \{[1, 2, 3, 5, 7]\}.$$

Az algoritmus következő lépésére térve, vesszük a $\varrho_2 = [1, 2, 3, 5, 7]$ indexet. A hozzátartozó szimplex tábla a III. táblázat. Megismételve a szokásos eljárást, újabb szomszédot már nem kapunk, tehát az algoritmus végetér. Végül

$$V_2 = \{[1, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 5], [1, 2, 3, 5, 7]\},$$
$$W_2 = \varnothing.$$

A II. és III. tábla alapján könnyen felírhatók az R_{ϱ_1} ill. R_{ϱ_2} tartományok meghatározó feltételei, valamint a $z_{\max}(\lambda)$ és $x_i(\lambda)$ függvények e tartományokon.

III.2. *Az árvektor parametrizációja*

Tűzzük ki a

$$\max z = (-2 + 2\nu_1 + 2\nu_2)x_1 + (1 - \nu_1 + \nu_2)x_2 + (1 - \nu_2)x_3$$

$$x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 4,$$
$$x_1 + x_2 \leq 10,$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

feladatot. (Az egyszerűség kedvéért kihagytuk a mellékfeltételeket, így M most azonos az E^s térrel.)

Az x_4, x_5 maradékváltozók bevezetésével a feltételrendszer

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 \quad &= 4, \\ x_1 + x_2 \quad + x_5 &= 10, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 5. \end{aligned}$$

A kiinduló szimplex tábla a 3. táblázatban van. Mivel az induló megoldás duálisan nem megengedett, a táblázatot kibővítjük a p_1, p_2 duál mesterséges változókkal.

A $p_1 + p_2$ függvényt a duál algoritmus segítségével minimálva, folyamatosan elimináljuk a mesterséges változókat, és végül a IV. táblázathoz jutunk, amely a $\varrho_0 = [2, 4]$ bázis indexhez tartozik. Alkalmazva a dolgozat első részében közölt algoritmust, annak egyes lépései során a

$$V_0 = \{[2, 4]\},\ W_0 = \{[1, 2]\};$$
$$V_1 = \{[2, 4],\ [1, 2]\},\ W_1 = \{[1, 3]\};$$
$$V_2 = \{[2, 4],\ [1, 2],\ [1, 3]\},\ W_2 = \varnothing$$

halmazokat kapjuk. A megfelelő táblázatokból most is fel tudjuk írni az R_{ϱ_0}, R_{ϱ_1}, R_{ϱ_2} tartományok meghatározó feltételeit, valamint az optimális megoldást és az optimumot megadó függvényeket e tartományokon.

(Beérkezett: 1969 január 16.)

TÁBLÁZATOK

1.1. tábla

	x_1	x_2	x_6	λ_1	λ_2	λ_3	η_2	
x_3	1	0	0	—1	—2	0	0	10
x_4	0	1	0	1	—1	0	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	0	20
p_1	—1	1	—1	0	0	$\boxed{1}$	0	4
x_7	1	2	0	—1	0	1	0	12
η_1	0	0	0	1	1	0	0	10
p_2	0	0	0	1	1	1	—1	20
$-\sum_{i=1}' p_i$	1	—1	1	—1	—1	—2	1	—24

1.2. tábla

	x_1	x_2	x_6	λ_1	λ_2	η_2	
x_3	1	0	0	—1	—2	0	10
x_4	0	1	0	$\boxed{1}$	—1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	20
λ_3	—1	1	—1	0	0	0	4
x_7	2	1	1	—1	0	0	8
η_1	0	0	0	1	1	0	10
p_2	1	—1	1	1	1	—1	16
$-\sum_{i=1}^{2}' p_i$	—1	1	—1	—1	—1	1	—16

1.3. tábla

	x_1	x_2	x_6	x_4	λ_2	η_2	
x_3	1	1	0	1	—3	0	12
λ_1	0	1	0	1	—1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	20
λ_3	—1	1	—1	0	0	0	4
x_7	2	2	$\boxed{1}$	1	—1	0	10
η_1	0	—1	0	—1	2	0	8
p_2	1	—2	1	—1	2	—1	14
$-\sum_{i=1}^{2}' p_i$	—1	2	—1	1	—2	1	—14

1.4. tábla

	x_1	x_2	x_7	x_4	λ_2	η_2	
x_3	1	1	0	1	−3	0	12
λ_1	0	1	0	1	−1	0	2
x_5	1	1	0	0	1	0	20
λ_3	1	3	1	1	−1	0	14
x_6	2	2	1	1	−1	0	10
η_1	0	−1	0	−1	2	0	8
p_2	−1	−4	−1	−2	$\boxed{3}$	−1	4
$-\sum_{i=1}^{2}{}' p_i$	1	4	1	2	−3	1	−4

2. tábla

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	b^*	$b(\lambda^0)$
x_3	1	0	−1	−2	0	10	16
x_4	0	1	1	−1	0	2	0
x_5	1	1	0	1	0	20	56/3
x_6	1	−1	0	0	−1	−4	34/3
x_7	$\boxed{1}$	2	−1	0	1	12	0
	−3	−2	0	0	0	0	0

I. tábla

	x_7	x_2	λ_1	λ_2	λ_3	${}^{\varrho_0}b^*(\lambda)$	${}^{\varrho_0}b(\lambda^0)$
x_3	−1	−2	0	−2	−1	−2	16
x_4	0	1	1	−1	0	2	0
x_5	−1	−1	1	1	−1	8	56/3
x_6	−1	$\boxed{-3}$	1	0	−2	−16	34/3
x_1	1	2	−1	0	1	12	0
	3	4	−3	0	3	36	0

I.1. tábla

	λ_1	λ_2	λ_3	
ξ_1	0	—2	—1	—2
ξ_2	$\boxed{1}$	—1	0	2
ξ_3	1	1	—1	8
ξ_4	1	0	—2	—16
ξ_5	—1	0	1	12
η_1	1	1	0	10
η_2	—1	—1	—1	—20

I.2. tábla

	ξ_2	λ_2	λ_3	
ξ_1	0	—2	—1	—2
λ_1	1	—1	0	2
ξ_3	—1	2	—1	6
ξ_4	—1	1	—2	—18
ξ_5	1	$\boxed{-1}$	1	14
η_1	—1	2	0	8
η_2	1	—2	—1	—18

I.3. tábla

	ξ_2	ξ_5	λ_3	
ξ_1	—2	—2	—3	—30
λ_1	0	—1	—1	—12
ξ_3	1	2	1	34
ξ_4	0	1	—1	—4
λ_2	—1	—1	—1	—14
η_1	1	2	2	36
η_2	—1	—2	$\boxed{-3}$	—46

I.4. tábla

	ξ_2	ξ_5	η_2	
ξ_1	—1	0	—1	16
λ_1	1/3	—1/3	—1/3	10/3
ξ_3	2/3	4/3	1/3	56/3
ξ_4	1/3	$\boxed{5/3}$	—1/3	34/3
λ_2	—2/3	—1/3	—1/3	4/3
η_1	1/3	2/3	2/3	16/3
λ_3	1/3	2/3	—1/3	46/3

I.5. tábla

	ξ_2	ξ_4	η_2	
ξ_1	—1	0	—1	16
λ_1	2/5	1/5	—2/5	28/5
ξ_3	2/5	—4/5	3/5	48/5
ξ_5	1/5	3/5	—1/5	34/5
λ_2	—3/5	1/5	—2/5	18/5
η_1	$\boxed{1/5}$	—2/5	4/5	4/5
η_3	1/5	—2/5	—1/5	54/5

I.6. tábla

	η_1	ξ_4	η_2	
ξ_1	5	—2	3	20
λ_1	—2	1	—2	4
ξ_3	—2	0	—1	8
ξ_5	—1	1	—1	6
λ_2	3	—1	2	6
ξ_2	5	—2	4	4
λ_3	—1	0	—1	10

II. tábla

	x_7	x_6	λ_1	λ_2	λ_3	$e_1 b(\lambda)$
x_3	—1/3	—2/3	—2/3	—2	1/3	26/3
x_4	$\boxed{-1/3}$	1/3	4/3	—1	—2/3	—10/3
x_5	—2/3	—1/3	2/3	1	—1/3	40/3
x_2	1/3	—1/3	—1/3	0	2/3	16/3
x_1	1/3	2/3	—1/3	0	—1/3	4/3
	5/3	4/3	—5/3	0	1/3	44/3

II.1. tábla

	λ_1	λ_2	λ_3	
ξ_1	—2/3	—2	1/3	26/3
ξ_2	4/3	—1	—2/3	—10/3
ξ_3	2/3	1	—1/3	40/3
ξ_4	—1/3	0	2/3	16/3
ξ_5	—1/3	0	—1/3	4/3
η_1	1	1	0	10
η_2	—1	$\boxed{-1}$	—1	—20

II.2. tábla

	λ_1	η_2	λ_3	
ξ_1	4/3	—2	7/3	146/3
ξ_2	7/3	—1	1/3	50/3
ξ_3	—1/3	1	—4/3	—20/3
ξ_4	$\boxed{-1/3}$	0	2/3	16/3
ξ_5	—1/3	0	—1/3	4/3
η_1	0	1	—1	—10
λ_2	1	—1	1	20

II.3. tábla

	ξ_4	η_2	λ_3	
ξ_1	4	—2	5	70
ξ_2	7	—1	$\boxed{5}$	54
ξ_3	—1	1	—2	—12
λ_1	—3	0	—2	—16
ξ_5	—1	0	—1	—4
η_1	0	1	—1	—10
λ_2	3	—1	3	30

II.4. tábla

	ξ_4	η_2	ξ_2	
ξ_1	—3	—1	—1	16
λ_3	7/5	—1/5	1/5	54/5
ξ_3	9/5	3/5	2/5	48/5
λ_1	—1/5	—2/5	2/5	28/5
ξ_5	2/5	—1/5	1/5	34/5
η_1	7/5	4/5	$\boxed{1/5}$	4/5
λ_2	—6/5	—2/5	—3/5	18/5

II.5. tábla

	ξ_4	η_2	η_1	
ξ_1	4	3	5	20
λ_3	0	−1	−1	10
ξ_3	−1	−1	−2	8
λ_1	−3	−2	−2	4
ξ_5	−1	−1	−1	6
ξ_2	7	4	1	4
λ_2	3	2	3	6

III. tábla

	x_4	x_6	λ_1	λ_2	λ_3	$\varrho^2 b(\lambda)$
x_3	−1	−1	−2	−1	1	12
x_7	−3	−1	−4	3	2	10
x_5	−2	−1	−2	3	1	20
x_2	1	0	1	−1	0	2
x_1	1	1	1	−1	−1	−2
	5	3	5	−5	−3	−2

III.1. tábla

	λ_1	λ_2	λ_3	
ξ_1	−2	−1	1	12
ξ_2	−4	3	2	10
ξ_3	−2	3	1	20
ξ_4	$\boxed{1}$	−1	0	2
ξ_5	1	−1	−1	−2
η_1	1	1	0	10
η_2	−1	−1	−1	−20

III.2. tábla

	ξ_4	λ_2	λ_3	
ξ_1	2	−3	1	16
ξ_2	4	$\boxed{-1}$	2	18
ξ_3	2	1	1	24
λ_1	1	−1	0	2
ξ_5	−1	0	−1	−4
η_1	−1	2	0	8
η_2	1	−2	−1	−18

III.3. tábla

	ξ_4	ξ_2	λ_3	
ξ_1	—10	—3	—5	—38
λ_2	—4	—1	—2	—18
ξ_3	6	1	3	42
λ_1	—3	—1	—2	—16
ξ_5	—1	0	—1	—4
η_1	7	2	4	44
η_2	—7	—2	$\boxed{—5}$	—54

III.4. tábla

	ξ_4	ξ_2	η_4	
ξ_1	—3	1	—1	16
λ_2	—6/5	—1/5	—2/5	18/5
ξ_3	9/5	—1/5	3/5	48/5
λ_1	—1/5	—1/5	—2/5	28/5
ξ_5	2/5	2/5	—1/5	34/5
η_1	7/5	$\boxed{2/5}$	4/5	4/5
λ_3	7/5	2/5	—1/5	54/5

III.5. tábla

	ξ_4	η_1	η_2	
ξ_1	—13/2	—5/2	—3	14
λ_2	—1/2	1/2	0	4
ξ_3	5/2	1/2	1	10
λ_1	1/2	1/2	0	6
ξ_5	—1	—1	—1	6
ξ_2	7/2	$\boxed{5/2}$	2	2
λ_3	0	—1	—1	10

III.6. tábla

	ξ_2	η_1	η_2	
ξ_1	13/7	15/7	4/7	124/7
λ_2	1/7	6/7	2/7	30/7
ξ_3	—5/7	—9/7	—3/7	60/7
λ_1	—1/7	1/7	—2/7	40/7
ξ_5	2/7	—2/7	—3/7	46/7
ξ_4	2/7	5/7	4/7	4/7
λ_3	0	—1	—1	10

3. tábla

	(u_3) x_1	(u_4) x_2	(u_5) x_3	
(u_1) x_4	1	—2	—1	4
(u_2) x_5	1	1	0	10
ν_1	—2	1	0	0
ν_2	—2	—1	1	0
	2	—1	—1	0

3a. tábla

	(u_3) x_1	(u_4) x_2	(u_5) x_3	
(u_1) x_4	1	—2	—1	4
(u_2) x_5	1	1	0	10
p_1	0	1	0	0
p_2	0	0	1	0
ν_1	—2	1	0	0
ν_2	—2	—1	1	0
	2	—1	—1	0

3.b. tábla

	x_1	p_1	p_2		$\sum_{i=1}^{2} p_i$
x_4	1	2	1	4	3
x_5	1	—1	0	10	—1
x_2	0	1	0	0	1
x_3	0	0	1	0	1
ν_1	—2	—1	0	0	—1
ν_2	—2	1	—1	0	0
	2	1	1	0	2

4. tábla

	x_1	x_5	p_2		$\sum_{i=1}^{2} p_i$
x_4	3	2	1	24	1
x_2	1	1	0	10	0
x_3	0	0	1	0	1
ν_1	—3	—1	0	—10	0
ν_2	—1	1	—1	10	—1
	3	1	1	10	1

IV. tábla

	x_1	x_5	x_3	
x_4	$\boxed{3}$	2	−1	24
x_2	1	1	0	10
ν_1	−3	−1	0	−10
ν_2	−1	1	1	10
	3	1	−1	10
$\varrho_0 c^T(\nu^0)$	2	2	0	20

IV.1. tábla

	ν_1	ν_2	
ξ_1	3	1	3
ξ_2	1	−1	1
ξ_3	0	$\boxed{-1}$	−1

IV.2. tábla

	ν_1	ξ_3	
ξ_1	$\boxed{3}$	1	2
ξ_2	1	−1	2
ν_2	0	−1	1

IV.3. tábla

	ξ_1	ξ_3	
ν_1	1/3	1/3	2/3
ξ_2	−1/3	−4/3	4/3
ν_2	0	−1	1

V. tábla

	x_4	x_5	x_3	
x_1	1/3	2/3	−1/3	8
x_2	−1/3	1/3	$\boxed{1/3}$	2
ν_1	1	1	−1	14
ν_2	1/3	5/3	2/3	18
	−1	−1	0	−14

V.1. tábla

	ν_1	ν_2	
ξ_1	$\boxed{-1}$	−1/3	−1
ξ_2	−1	−5/3	−1
ξ_3	1	−2/3	0

V.2. tábla

	ξ_1	ν_2	
ν_1	−1	1/3	1
ξ_2	−1	−4/3	0
ξ_3	1	$\boxed{-1}$	−1

V.3. tábla

	ξ_1	ξ_3	
ν_1	−2/3	1/3	2/3
ξ_2	−7/3	−4/3	4/3
ν_2	−1	−1	1

VI. tábla

	x_4	x_5	x_2	
x_1	0	1	1	10
x_3	−1	1	3	6
ν_1	0	2	3	20
ν_2	1	1	−2	14
	−1	−1	0	−14

VI.1. tábla

	ν_1	ν_2	
ξ_1	0	$\boxed{-1}$	−1
ξ_2	−2	−1	−1
ξ_3	−3	2	0

VI.2. tábla

	ν_1	ξ_1	
ν_2	0	−1	−1
ξ_2	−2	−1	0
ξ_3	$\boxed{-3}$	2	−2

VI.3. tábla

	ξ_3	ξ_1	
ν_2	0	−1	1
ξ_2	−2/3	−7/3	4/3
ν_1	−1/3	−2/3	2/3

IRODALOM

1. Beightler, Ch. S.—Wilde, D. J.: Sensitive analysis gives better insight into linear programming. Petr. Ref. 44, 1965, II 2, 111—126 pp.
2. Courtillot: Programmation linéaire. Étude de la modification de tous les parameters. CR de Siences de L'Academie de Siences, 247, 1958. 7., 670—673 pp.
3. Černikov, S. N.: Svertyvanije konečnych sistem linejnych neravenstv. Ž. vyčisl. mat. i mat. fiz. 5. 1965. 1., 3—20 pp.
4. Černikova, N. V.: Algoritm dlja nachoždénija obščej formuli neotricatelnych rešenij sistemy linejnych neravenstv. Ž. vyčisl. mat. i mat. fiz. 5, 1965. 2., 334—337 pp.
5. Dragan, I.: Un algorithm pour la résolution de certains problèmes paramétriques, avec un seul parametre contenu dans la fonction économique. Rev. Roum. Mat. pur. et appl. 11, 1966. 4., 447—451 pp.
6. Finkelštejn, B. V.: Obobščenije parametričeskoj zadači linejnogo programmirovanija. Ekon. mat. met. 1, 1965. 3., 442—450 pp.
7. Fischer, M.: Rozbor jednoho systému charakterizovaného lineární transformací a řízeného lineární cílovou funkcí. Výzk. práce č. 134, Praha 1967. VÚNP
8. Fotr, J.: Poznámky ke konstrukci modelů lineárního programování a interpretaci jejich výsledků. Ekon. mat. obzor 3, 1967, 3. sz., 366—378 pp.
9. Gál, T.: Příspěvek k lineárnímu systémovému programování. 1. Sledování změn prvků a_{ij} matice soustavy podmínek simplexové úlohy lineárního programování. Ekon. mat. obzor. 3, 1967. 4., 446—456. pp.
10. Gál, T.: Příspěvek k lineárnímu systémovému programování. 2. Sledování změn koeficientů a_{ij} základních strukturních proměnných simplexové úlohy lineárního programování. Ekon. mat. obzor 4, 1968. 1., 76—92 pp.
11. Gál, T.: Příspěvek k lineárnímu systémovému programování. 3. Sledování současné změny všech koeficientů a_{ij} základních i nezákladních strukturních proměnných simplexové úlohy lineárního programování. Ekon. mat. obzor 4, 1968. 2., 190—201 pp.
12. Gál, T.: Modifikovaná metoda lineárního parametrického programování. Zeměd. ekon. 14, 1968. 1., 17—36 pp.
13. Gál, T.—Habr, J.: Příspěvek k lineárnímu systémovému programování. 4. Ekonomicko matematický pohled na problémy degenerace. Ekon. mat. obzor 4, 1968. 3., 320—336 pp.

14. GASS, S. I.—SAATY, T. L.: The parametric objective function. I. Opns. Res. 2, 1954. 316—319 pp.
15. GASS, S. I.—SAATY, T. L.: The parametric objective function. II. Opns. Res. 3, 1965. 395—401 pp.
16. GASS, S. I.—SAATY, T. L.: The computational algorithm for the parametric objective function. Naval Res. Log. Quart. 2, 1955. 39—45 pp.
17. HABR, J.: Systémové programování. Statistika a demografie 5, 1965. 145—153 pp.
18. HESS, H. D.: Anwendung einer parametrischen linearen Programmierung in einem chemischen Betrieb. Ind. Org. 35, 1966. 2. 76—77 pp.
19. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Systems evaluation and repricing theorems. Managem. Sci. 9, 1962. 209—228 pp.
20. JOKSCH, H. C.: Constraints, objectives, efficient solutions and suboptimisation in mathematical programming. Z. ges. Staatwis. 122, 1966, 1., 5—13 pp.
21. KAŠKA, J.: O jedné úloze parametrického programování. Ekon. mat. obzor. 3, 1967. 3., 298—307 pp.
22. MAŇAS, J.—NEDOMA, J.: Finding all vertices of convex polyhedron. Numer. Math. 12, 1968. 225—229 pp.
23. MARUNOVÁ, E.: Lineární parametrizace vstupních dat úloh lineárního programování a možnosti jejího uplatnění v zemědělství. Kand. dis. práce VŠZ Praha—Čes. Budějovice, 1968.
24. NEDOMA, J.: Některé modifikace simplexového algoritmu. (Kézirat.)
25. NYKOWSKI, I.: Dwuparametryczny dualny problem liniowy. I. Przegl. statyst. 12, 1965. 3., 203—217 pp.
26. NYKOWSKI, I.: Dwuparametryczny dualny problem liniowy. II. Przegl. statyst. 12, 1965. 4., 311—323 pp.
27. PANNE, C. VAN DE: Post optimality analysis via the reverse simplex method and the Tarry method. Faculty of Economics, State Univ. of Groningen, July 1966.
28. SAATY, T. L.: Coefficient perturbation of a constrained extremum. Opns. Res. 7, 1959, 284—303 pp.
29. SOKOLOVÁ, L.: Problém víceparametrického lineárního programování. Ekon. mat. obzor. 4, 1968. 1., 44—68 pp.
30. ZELINKA, J.: Řešení úloh lineárního programování s dolními a horními omezeními. Ekon. mat. labor. při Ekon. ústavu ČSAV, Výzk. publ. č. 7, Praha 1965.
31. ZOUTENDIJK, G.: Methods of feasible directions. Elsevier Publ. Co. Amsterdam—London—New York—Princeton. 1960.

MULTI-PARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING ON THE RIGHT-HAND SIDE OR IN THE OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENTS

The problem of multiparametric linear programming has been studied and solved in several works on a high theoretical level. The application however, requires the knowledge not only of theoretical relations, but also of methods which can be used in pratical work.

The purpose of the work under review is to present a method of multiparametric linear programming of the righthand side vector, or the vector of prices, which may be found convenient for numerical computation, and, hence, for the construction of corresponding computer programmes. An example illustrates the applicability of the method.

The multiparametric linear programming problem can be written down as follows:

Maximize

$$z = c^T x \text{ (max)}$$

subject to

$$Ax = b(\lambda),\ x \geq 0$$

where A is an m by n matrix of constant coefficients, $c, x, 0 \in E^n$, $\lambda \in E^s$ is a vector-parameter, $b(\lambda) \in E^m$. Further:

$$b(\lambda) = b^* + F\lambda,$$

where F is an m by s matrix of constant entries.

Or: Maximize

$$z = c^T(\nu)\, x \ \text{(max)}$$

subject to

$$Ax = b, \quad x \geq 0,$$

where

$$c(\nu) = c^* + H\nu,$$

and H is an n by s matrix of constant coefficients, $\nu \in E^s$ is a vectorparameter.

The structure of the matrix, F, or H is closely connected with the analysis of a specified system, and its environmental interrelations. The economic interpretation of the coefficients of the vectorparameters is not discussed here.

The method of multiparametric linear programming is based upon a method for finding all vertices (extreme points) of a convex polyhedron, which works with the aid of the theory of graphs.

In deriving the method of multiparametric linear programming the simplex algorithm had to be slightly modified.

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ С НЕСКОЛЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРАВОЙ СТОРОНЕ ИЛИ В КОЕФФИЦИЕНТАХ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Проблема многопараметрического линейного программирования (далее толко MLP) была изучена и решена в некоторых научных работах на высоком теоретическом уровне. Для практического использования этого метода не является достаточным знать только теоретические соотношения, но нужно иметь метод, которым можно пользоваться непосредственно на практике.

Целой представленной работы является разработка метода линейной параметризации вектора правых сторон, или коэффициентах целевой функции, применение которого пригоден для нумерических вычислений и раздаботки для ЭВМ. В конуе статьи представляется метод на иллюстративном примере.

Проблем M L P можно сформулировать как следующую задачу:

Максимизировать функции

$$z = c^T x \ \text{(max)}$$

при условиях $\quad Ax = b(\lambda), \ x \geq 0,$

где A матрица типа $\quad (m, n), \ c \ \ x, \ 0 \in E^n b(\lambda) \in E^m, \quad \lambda \in E^s$ вектор-параметр.

Далее $\quad b(\lambda) = b^* + F\lambda,$

где F матрица постоянных элементов типа (m, s).

Или же: максимизировать функции

$$z = c^T(\nu)x \ \text{(max)}$$

При условиях

$$Ax = b, \ x \geq 0,$$

где

$$c(\nu) = c^* + H\nu$$

и H матрыца постоянных элементов типа (n, s), $\nu \in E^s$ вектор-параметр.

Конструкция элементов матрыц F и H тесно связана с анализом данной экономической системы и с взаимосоотношениями ее средой. Экономическим истолкованием помощи элементов вектор-параметров в работе авторы не занимаюся.

Метод M L P основан на методе нахождения всех вершин выпуклого многогранника; при помощи из теории графиков.

Для выведения соответсвующих соотношений метода M L P нужны некоторые модификации симплекс метода.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KONDOR GYÖRGY

Leképezés fix pontjának és a gazdaság egyensulyi helyzetének numerikus approximációja Scarf módszereivel

*(Első rész)**

E dolgozat célja felhívni a figyelmet SCARF két nevezetes [18], [19] dolgozatára, amelyek a versenyzői egyensúlyi helyzetek megközelítését tárgyalják. Versenyzői egyensúlyi modellekkel számos dolgozat foglalkozik, a legjelentősebb műveket megemlítem az irodalomjegyzékben. E dolgozat II. és III. fejezetében feltételezem az egyensúlyelmélet legfontosabb fogalmainak ismeretét.

Az egyensúly létezésének kimutatásához általában, de nem mindig, a fix pont tételeket használták fel. A fix pont tételektől többnyire közvetlenül juthatunk el az egyensúlyi árak és helyzetek (egyensúlyi termelési és fogyasztási struktúrák) létezéséhez; ezeknek a bizonyításoknak azonban az a fő hátrányuk, hogy *nem konstruktívak*, vagyis, hogy nem adnak módszert ilyen helyzetek kiszámításához illetve megközelítéséhez.

Scarf 1967-ben megjelent [18] munkája konstruktív bizonyítást ad. Eléggé különös, annak ellenére, hogy az utolsó két évtizedben a matematikai közgazdaságtan oly sokat fejlődött, az egyensúlyi helyzet kiszámítására Scarf szóban forgó dolgozatáig nem vált más módszer ismertté. Ez részben annak tudható be, hogy többnyire a gazdaság termelési oldalát érintő modelekkel foglalkoztak és figyelmen kívül hagyták az eltérő hasznosságfüggvényekkel rendelkező fogyasztók szerepét.

Az ismertetésre kerülő dolgozatok matematikai lényege két tétel. Az első a Sperner lemmával rokon, és ahhoz hasonlóan használható fel folytonos leképzés fix pontja létezésének kimutatásához. A tétel bizonyításához Scarf megad egy algoritmust, amelyről kimutatja, hogy véges és hogy segítségével meglehetősen hamar juthatunk el egy közelítő fix ponthoz. Erről a kérdésről a továbbiakban részletesen lesz szó. A második tétel szintén felhasználható a Brouwer tétel bizonyításához, amikor egy szimplextől különböző korlátos poliédrikus konvex halmazt képezünk le saját magába. E tétel segítségével elégséges feltételeket kaphatunk arra is, hogy egy n-személyes játék magja ne legyen üres [20]. Végül eredményesen alkalmazható a később bemutatásra kerülő közgazdasági probléma megoldása is. Bár a tárgyalásból nem tűnik ki közvetlenül, Scarf algoritmusai közvetlen kapcsolatban állnak a LEMKE–HOWSON [13] és LEMKE [14] dolgozatában publikált eredményekkel.

Az ismertetendő dolgozatok közgazdasági lényege az, hogy numerikus módszert kapunk két, eltérő tulajdonságokkal rendelkező (absztrakt) gazdaság egyensúlyi helyzeteinek megközelítésére.

* A cikk befejező második részét következő számunkban közöljük.

Mielőtt rátérnék Scarf dolgozatainak ismertetésére, hangsúlyozni szeretném, hogy Scarf eredményei minden bizonnyal egyéb területeken is alkalmazhatók.

Először a matematikai tárgyalásra kerül sor. Ezt követi a matematikai eredmények közgazdasági alkalmazása és a numerikus példák bemutatása. E dolgozat első és második fejezete túlnyomórészt Scarf [18] munkáján alapszik. Az első fejezetben olyan folytonos leképzést vizsgálunk, amely egy *szimplexet* sajátmagába képez le. Scarf szóban forgó dolgozatának utolsó, hetedik fejezetét nem ismertetem teljes egészében. Bár [18] hetedik fejezetének 2. tételét e dolgozat első fejezetének végén részletesen tárgyalom, a 3. tételt — amelyik zárt korlátos *poliéder* sajátmagába való folytonos leképezésével foglalkozik — elhagyom, mert egyrészt e dolgozat főcímében jelzett problémát nem érinti,[1] másrészt e dolgozat lehetséges terjedelme is erre kényszerít. A 2. tétel bizonyításának alapját és a harmadik fejezet lényegét Scarf [19] dolgozata adja.

I. Folytonos leképezés fix pontjának megközelítése

Legyen az S szimplex $S : \{\boldsymbol{\pi} \mid \Sigma_{i=1}^{n} \pi_i = 1;\ \pi_i \geq 0\}$, ahol $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$. A szimplex önmagába való folytonos leképzését az $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) = (f_1(\boldsymbol{\pi}), \ldots, f_n(\boldsymbol{\pi}))$ folytonos vektor-vektor függvény adja, amelyre tehát $\Sigma_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{\pi}) = 1$ és $f_i(\boldsymbol{\pi}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$. Brouwer tétele azt állítja, hogy létezik olyan $\hat{\boldsymbol{\pi}}$, $\hat{\boldsymbol{\pi}} \in S$ vektor, amelyre $\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\pi}}) = \hat{\boldsymbol{\pi}}$.

A tétel a Sperner lemma néven ismeretes kombinatorikai eredmény segítségével bizonyítható be([10], [21]). Scarf kifejtésének megértéséhez hasznos ezt áttekintenünk.

Legyen $\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ önkényesen kiválasztott, egymástól eltérő pontok sorozata az S szimplexen. Összekötve $\boldsymbol{\pi}^1$-et S n számú csúcsa mindegyikével. S-nek n számú alszimplexbe való felbontásához jutunk (lásd az 1. ábrát). Ekkor összekötjük $\boldsymbol{\pi}^2$-t azon alszimplex n darab csúcsával, amelyhez tartozik és folytatjuk ezt a szukcesszív finomítást a $\boldsymbol{\pi}^3, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ pontok mindegyikével. Eredményül S-nek egy specifikus felbontását kapjuk, amelyben a $\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ sorozat megfelelő kiválasztásaival az alszimplexek maximális átmérőjét önkényesen kicsivé tehetjük.

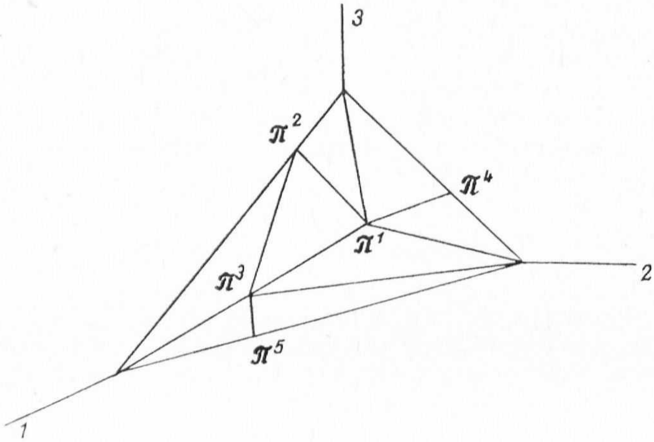
Mindegyik $\boldsymbol{\pi}$ csúcsnak megfeleltetünk egy olyan indexet, amelyre $\pi_i > 0$ és $f_i(\boldsymbol{\pi}) \leq \pi_i$. Világos, hogy mindig található legalább egy ilyen index. A perner lemma azt állítja, hogy a felbontásnak legalább egy alszimplexében az összes csúcs különféleképpen van indexelve. Más szavakkal, a leképzéshez található olyan alszimplex, amelyben az n csúcs mindegyikénél egy egymástól különböző koordináta *nem* növekszik.

Újabb csúcsok hozzáadásával a felosztás finomítható úgy, hogy a felosztásban szereplő alszimplexek maximális átmérője zéróhoz tartson. Mindegyik felosztás tartalmaz olyan alszimplexet, amelynek összes csúcsa különféleképpen van indexelve. Ebből már következik, hogy található az alszimplexeknek olyan sorozata, amelyek csúcsai egy $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ ponthoz konvergálnak. Mivel a leké-

[1] Zárt korlátos halmaz (nem feltétlenül poliéder) sajátmagába való folytonos leképezésével — az erre vonatkozó Brouwer tétellel — magyar nyelven SZÉP JENŐ [21] könyve foglalkozik. Lásd: Id. mű 472—477.

pezés folytonos $f_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) \leq_i \hat{\boldsymbol{\pi}}_i$ minden i-re, amiből — tekintettel arra, hogy $\Sigma_{i=1}^n f_i(\boldsymbol{\pi}) = 1$ — következik, hogy $f_i(\hat{\pi}) = \hat{\boldsymbol{\pi}}_i$ $i = 1, \ldots, n$, vagyis hogy $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ a leképezés fix pontja.

Scarf a $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ fix pont numerikus approximációjaként egy olyan $\boldsymbol{\pi}$ vektort fogad el, amelynek képe kevesebb, mint egy adott $\gamma > 0$ távolságra van sajátmagától. Válasszuk az $\| \mathbf{x} \|$ normát max $\{| x_1 |, \ldots, | x_n |\}$-nek, és két vektor távolsága mértékéül vegyük a két vektor különbségének e normáját,



1. ábra.

vagyis a különbségvektor legnagyobb abszolút értékű komponensének abszolút értékét. Belátható, hogy a Sperner lemma felhasználható $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi})$ fix pontjának ilyen értelmű megközelítésére.

Ehhez mindenekelőtt vegyük tekintetbe azt, hogy az $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi})$ függvény folytonos egy korlátos és zárt halmazon. Ezért adott $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy $\| \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}') - \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}'') \| \leq \varepsilon$, ha $\| \boldsymbol{\pi}' - \boldsymbol{\pi}'' \| \leq \delta$. *Lemma. Ha a felosztásban szereplő alszimplexek maximális átmérője kisebb vagy egyenlő mint δ, akkor bármely $\boldsymbol{\pi}$ pont egy olyan alszimplexben, amelynek csúcsai különbözőképpen vannak indexelve, ki fogja elégíteni az*

$$\| \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi} \| \leq (n-1)(\varepsilon + \delta) \tag{I.1}$$

egyenlőtlenséget és ezért a fix pont ilyen értelmű approximációjaként szolgál'

Jelöljük ugyanis $\boldsymbol{\pi}^i$-kel $i = 1, \ldots, n$ annak az alszimplexnek csúcsait' amelyre

$$f_i(\boldsymbol{\pi}^i) \leq \pi_i^i \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{I.2}$$

Legyen $\boldsymbol{\pi}$ tetszőleges pontja a szóban forgó alszimplexnek, továbbá legyen a $\boldsymbol{\pi}'$ vektor $\boldsymbol{\pi}$ δ sugarú környezetében. Ekkor

$$\| \boldsymbol{\pi} - \boldsymbol{\pi}' \| \leq \delta \text{ és így } \| \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}') \| \leq \varepsilon \tag{I.3}$$

Ebből $\boldsymbol{\pi}' = \boldsymbol{\pi}^i$-re:

$$f_i(\boldsymbol{\pi}) \leq f_i(\boldsymbol{\pi}^i) + \varepsilon \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.4}$$

és így (I.2) és (I.3) alapján

$$f_i(\pi) \leq \pi_i^i + \varepsilon \leq \pi_i + \delta + \varepsilon \quad i = 1, \ldots, n$$

másképpen

$$f_i(\pi) - \pi_i \leq \delta + \varepsilon \quad i = 1, \ldots, n. \tag{I.5}$$

Vegyük most figyelembe, hogy

$$\textstyle\sum_{i=1}^n f_i(\pi) = \sum_{i=1}^n \pi_i \, (= 1) \tag{I.6}$$

és ezért

$$\textstyle\sum_{i=i}^n (f_i(\pi) - \pi_i) = 0 \tag{I.7}$$

Tekintsük a bal oldal valamelyik $i = i_0$ tagját. Nyilvánvalóan

$$f_{i_0}(\pi) - \pi_{i_0} = - \textstyle\sum_{i \neq i_0} \big(f_i(\pi) - \pi_i\big) . \tag{I.8}$$

Vizsgáljuk meg, hogy (I.8) bal oldala abszolút értékének mi a maximális értéke. Ha $f_{i_0}(\pi) - \pi_{i_0} \geq 0$, akkor (I.5)-ből a maximális érték $\delta + \varepsilon$. Ha azonban $f_{i_0}(\pi) - \pi_{i_0} < 0$, a jobb oldali szumma pozitív értékű és (I.5) alapján az nem lehet nagyobb, mint $(n - 1)(\delta + \varepsilon)$.

Ez azt jelenti, hogy

$$| f_{i_0}(\pi) - \pi_{i_0} | \leq (n - 1)(\delta + \varepsilon) \tag{I.9}$$

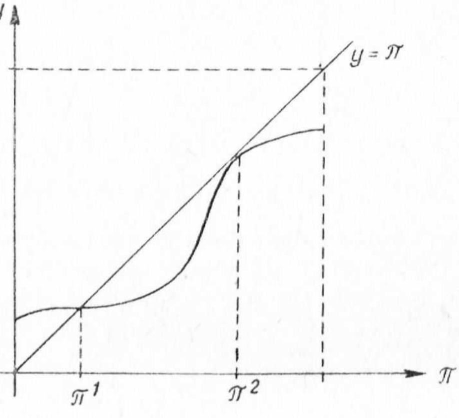
Tekintettel arra, hogy az i_0 index megválasztása tetszőleges volt, ezzel a lemma állításához jutottunk.

A levezetésből kitűnik, hogy az $\mathbf{f}(\pi)$ és a π vektorok távolságára jobb becslés nem adható, de egyben az is látszik, hogy ilyen eltérés csak rendkívül speciális esetben fordulhat elő. Erre mutatnak a későbbi számpéldák is. A γ kellő pontosságot biztosító felosztáshoz úgy juthatunk el, hogy n konkrét értékének figyelembevételével ε és ezzel együtt $\delta = \delta(\varepsilon)$ értékét elég kicsire választjuk (δ nem lehet kisebb, mint a maximális átmérőjű alszimplex).

A Sperner lemma nem ad ötletet ahhoz, hogy hogyan lehetne a fix pontot másként megközelíteni, mint addig vizsgálni az alszimplexeket, amíg egy olyat találunk, amelyben az összes csúcs különbözőképpen van indexelve. E közelítésnek azonban komoly gyakorlati akadálya van. Még n szerény értékei esetén is azoknak a csúcsoknak a száma, amelyeket egy elég kis átmérőjű felosztásban kell meghatározni, rendkívül nagy. Ha a csúcsoknak a $(k_1/D, \ldots, k_n/D)$ rácspontokat választjuk, ahol a k_i nem negatív egész számok kielégítik a $\sum_{i=1}^n k_i = D$ összefüggést, akkor $n = 7$, $D = 200$ esetén körülbelül 800 milliárd csúcs függvényértékének kiszámítására volna szükség, és a felosztásban szereplő alszimplexek száma ennél még nagyobb.

Scarfnak a továbbiakban bemutatásra kerülő kombinatórikai tételét Brouwer fix pont tétele bizonyításához is felhasználhatjuk. Ez a tétel a Sperner lemmához hasonlóan az S szimplexen levő finom felosztású ponthalmaz létezéséből indul ki. A Sperner lemmától abban a hatásos algoritmusban tér el, amely a megvizsgálandó pontok sorozatának meghatározására használható fel. Mielőtt azonban ennek tárgyalásába kezdenénk, mégegyszer érdemes kitérni arra, hogy milyen értelemben is közelíti meg Scarf a fix pontot. A szóban forgó approximáció olyan π pontot illetve pontokat eredményez, amelyre az $\| \mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi} \|$ *egy előre adott kis pozitív számot* nem halad meg. A gyakorlat szempontjából egy ilyen tulajdonságú $\boldsymbol{\pi}$ pont bizonyára sok esetben betöltheti a fix pont szerepét. Nincsen azonban arra biztosíték, hogy a fenti $\boldsymbol{\pi}$ pont valamilyen kis környezetében található legyen *valódi* fix pont is, vagyis amelyre $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}$.

Az az $y = f(\pi)$ folytonos függvény, amely a $[0,1]$ intervallumot sajátmagába képezi le, mindenképpen rendelkezik fix ponttal (ábránkon π^1). Az $f(\pi)$ függ-



2. ábra.

vény π^2 pontbeli értéke azonban megközelítheti a π^2 értéket a γ hibahatáron belül, anélkül, hogy a függvény az $y = \pi$ egyenest π^2 kis környezetében metszené:

Ilyen esetben — a tárgyalt approximáció értelmében — π^2 is betöltheti egy közelítő fix pont szerepét. Természetesen azonban, hogy ha az előírt γ elég kicsi, az approximáció csak a π^1 értékhez tarthat.

I.1. *A primitív halmaz fogalma és egy kombinatórikai tétel*

Tekintsük E^n-ben a $\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^n, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorokból álló véges P_k halmazt. A $\boldsymbol{\pi}^{k+1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorok az $S : \{\boldsymbol{\pi} \mid \sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1;\ \pi_i \geq 0\}$ szimplexből vannak önkényesen választva. Az első n vektorról feltesszük, hogy az alábbi alakú:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\pi}^1 &= (0, \quad M_1 \ \ldots, M_1) \\ \boldsymbol{\pi}^2 &= (M_2, \quad 0, \ \ldots, M_2) \\ &\ \vdots \\ \boldsymbol{\pi}^n &= (M_n, M_n, \ldots, \quad 0) \end{aligned} \tag{I.10}$$

ahol az $M_1, \ldots, M_n$ számok egymástól különböznek és nagyobbak 1-nél. Ezek a vektorok tehát *nincsenek* az S szimplexen.

Definíció. Az n elemből álló $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ vektorhalmazt P_k-ban *primitív halmaznak* nevezzük, ha *nincsen* olyan $\boldsymbol{\pi}^j$ vektor P_k-ban, amelyre

$$\begin{aligned} \pi_1^j &> \min\,[\pi_1^{j_1}, \ldots, \pi_1^{j_n}] \\ &\vdots \\ \pi_n^j &> \min\,[\pi_n, \ldots, \pi_n^{j_n}] \end{aligned} \tag{I.11}$$

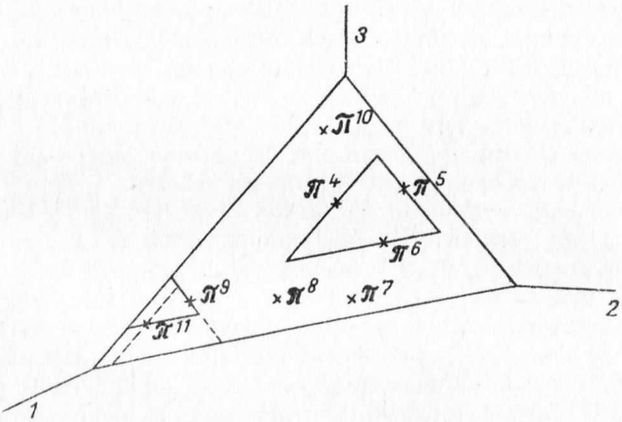
A primitív halmaz geometriailag könnyen interpretálható. Legyen $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j}$ egy n elemből álló halmaz P_k-ban és tekintsük S-nek azt az alszimplexét, amely a következőképpen van definiálva:

$$\pi_i \geq \min\,[\pi_i^{j_1}, \ldots, \pi_i^{j_n}] \qquad i = 1, \ldots n$$

és

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1\,; \pi_i \geq 0\,. \tag{I.12}$$

Abban az esetben, ha az alszimplex élén elhelyezkedő $\boldsymbol{\pi}^{j_i}$ vektorok primitív halmazt alkotnak, vagyis, ha a szóban forgó alszimplex P_k egyetlen vektorát



3. ábra

sem tartalmazza belsejében, az alszimplexet *primitív alszimplex*nek nevezzük.

A szóban forgó alszimplexek eltérnek azoktól, amelyekről a Sperner lemma kapcsán volt szó. Az (I.12) által definiált alszimplexeket — függetlenül attól, hogy azok primitívek-e vagy sem — az S szimplexben fekvő, a koordinátatengelyekre merőleges (a koordináta hipersíkokkal párhuzamos) és a $\boldsymbol{\pi}^{j_i}$ vektorokat metsző egyenesek határolják.

A 3. ábrán a $\boldsymbol{\pi}^4$, $\boldsymbol{\pi}^5$ és $\boldsymbol{\pi}^6$ vektorok egy primitív halmazt alkotnak, mivel nincs olyan $\boldsymbol{\pi}^j \in P_k$ vektor, amely a $\boldsymbol{\pi}^4$, $\boldsymbol{\pi}^5$ és $\boldsymbol{\pi}^6$ által meghatározott alszimplex belsejében feküdne. Amint látható, a $\boldsymbol{\pi}^2$, $\boldsymbol{\pi}^9$ és $\boldsymbol{\pi}^{11}$ szintén primitív halmazt alkot, mivel P_k-ban nincs olyan vektor, amely a $\boldsymbol{\pi}^9$, $\boldsymbol{\pi}^{11}$ és S azon éle által

[2] Scarf [20]-ban az „ordinális bázis" terminológiát használta, hogy felhívja a figyelmet a primitív halmaznak vagy másképpen primitív alszimplexnek a lineáris programozásban szereplő „bázis"-sal való kapcsolatára.

meghatározott alszimplex belsejében feküdne, amelyen a második koordináta zéró.

Azt hiszem, elégséges az előző ábrára hivatkozni, mert ennek alapján is világosan látható, hogy *az alszimplexet generáló* π^{j_i} *vektorok nem feküdhetnek az alszimplexek csúcsain kívül.* Ha például az előző ábrán a π^6 vektor a rajta keresztülmenő egyenesen az alszimplex bal csúcsától balra feküdne, akkor második koordinátája kisebb volna, mint π^4 második koordinátája és így π^4 nem generálhatná az alszimplex egyik oldalélét adó — a második koordinátatengelyre merőleges — korlátozó egyenesét. Ekkor π^4, π^5 és π^6 közül π^6 határozná meg az alszimplexnek a második és harmadik koordinátatengelyre, míg π^5 az első koordinátatengelyre merőleges élét. Ez esetben π^6 az alszimplex egyik csúcsát alkotná és π^4 a π^5 és π^6 által meghatározott alszimplex belsejében volna. Ekkor tehát π^4, π^5 és π^6 már nem adhatna primitív halmazt. Ha a $\pi^{j_i} i = 1, \ldots, n$ vektorok primitív halmazt képeznek, úgy, hogy a $\pi^{j_1}, \ldots, \pi^{j_n}$ vektorok közül az egyik — mondjuk a π^{j_1} — az általuk meghatározott alszimplexnek egy csúcsában van, akkor kell lenni közöttük legalább egy olyan másik $\pi^{j_{i_0}}$ $i_0 \neq 1$ vektornak is, amelyikkel a π^{j_1} vektor annak valamelyik koordinátájában megegyezik. Ilyenkor fordulhat elő az az eset, hogy a π^{j_i} $i = 1, \ldots, n$ vektorhalmaz ugyanazt a primitív alszimplexszet determinálná, mint ugyanez a halmaz $\pi^{j_{i_0}}$ nélkül. Ebből következik, hogy ha *kizárjuk* azt, hogy P_k bármely két elemének lehessen azonos i-edik $i = 1, \ldots, n$ koordinátája, akkor kizártuk azt az esetet is, hogy egy primitív alszimplexet generáló primitív halmaz valamelyik eleme a primitív alszimplex csúcsában legyen és *így a primitív halmaz előállításához mindig* P_k n *elemére van szükség.*

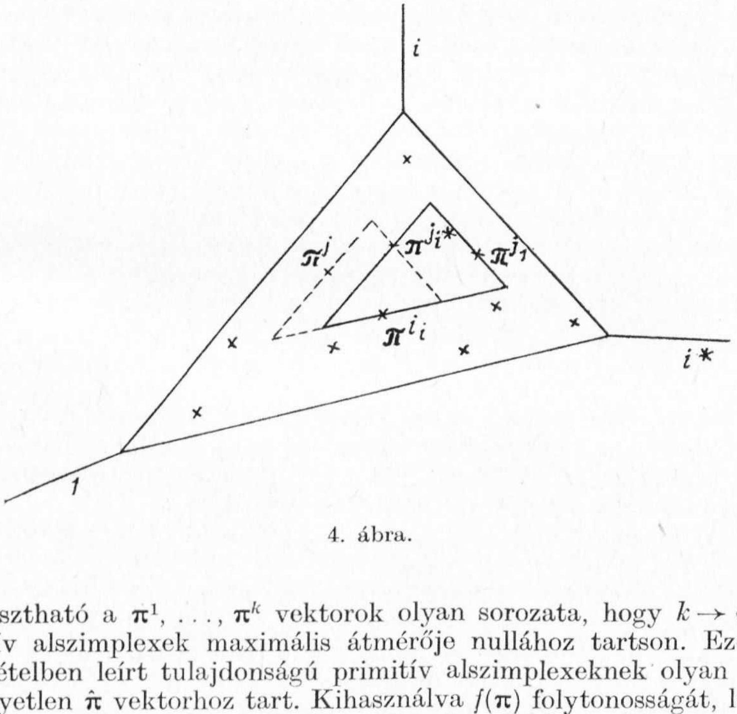
A degenerációmentesség feltétele: Nincs két olyan vektor P_k-ban, amelyeknek valamely $i = 1, \ldots, n$ koordinátájuk azonos volna. *Ezzel a feltétellel biztosítjuk azt, hogy a korlátozó felületek mindegyike a primitív halmaznak pontosan egy vektorát tartalmazza.* Nevezetesen azt a vektort, amelyben a megfelelő koordináta a legkisebb. Ha a primitív halmaz $i \leq n$-re tartalmazza π^i-t, akkor a primitív alszimplex egyik korlátozó felületét S megfelelő határfelülete adja és e felületen az i-edik koordináta zéró. (Többek között a degenerációmentesség biztosításához kellett feltennünk, hogy P_k első n vektorának nemzéró koordinátái nagyobbak legyenek az egységnél. Ha az M_i értékek egynél kisebbek is lehetnének, akkor előfordulhatna például az, hogy $M_2 = \pi_1^9$ volna és ez ellentmondana a degenerációmentesség feltételének. Ha $M_2 < \pi_1^9$ lehetne, akkor π^2, π^9 és π^n már nem alkotnak primitív halmazt, mivel eredetileg e primitív halmazban π^9 első koordinátája volt a legkisebb első koordináta, mint ahogyan ez a 3. ábrán is látható. Mivel továbbá az olyan primitív alszimplexeket, amelyeknek egyik oldalát S egyik korlátozó hipersíkja determinálja — ilyen többek között a π^9, π^{11} és az S szóban forgó éle által meghatározott alszimplex — nem volna célszerű a primitív halmazok sorából kizárni, ezért P_k első n vektorát — és így a π^2 vektort is — Scarf úgy definiálta, hogy annak szerepeltetése valamely n elemű halmazban kizárólag csak az S szimplex élét reprezentálja. Az M_i értékeknek (I.10)-nél jelzett megválasztása — $M_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$ — eleget tesz ennek a célnak.)

A P_k vektorhalmaz elemei mindegyikének feleltessük meg az $1, 2, \ldots, n$ egészszámokból kiválasztott egy-egy indexet. A megfeleltetés — a vektorlista első n tagját kivéve — önkényes. *Megköveteljük*, hogy π^1-nek az 1, π^2-nek a $2, \ldots,$ π^n-nek az n index feleljen meg. Ezekután kimondható az alábbi kombinatórikai tétel:

1. *Tétel. Létezik olyan primitív halmaz, amelynek mindegyik vektora különbözőképpen van indexelve*

E tételt — belátása után — alkalmazhatjuk a Brouwer tétel bizonyítására. Ekkor a $\pi^{n+1}, \ldots, \pi^k$ vektorok mindegyikének olyan i indexet feleltetünk meg, amelyikre $f_i(\pi^j) \geq \pi_i^j$, $j = n+1, \ldots, k$. $j > n$-re, minthogy $\sum_{i=1}^n f_i(\pi) = \sum_{i=1}^n \pi_i \; (=1)$, nyilvánvaló, hogy van ilyen i index.

Egy olyan primitív halmaz, amelynek π^{j_i} vektorai mind különbözőképpen vannak indexelve, tartalmazhat néhány vektort az első n-ből is. Legyen I ezen vektorok indexeinek a halmaza. A primitív halmaznak megfelelő alszimplexet $i \in I$-re a $\pi_i = 0$ élek korlátozzák. Ebből következik mármost, hogy egy olyan alszimplexben, amelyre mint primitív halmazra a fenti tétel áll, mindegyik i-hez található olyan π vektor, amelyre $f_i(\pi) \geq \pi_i$.



4. ábra.

Kiválasztható a $\pi^1, \ldots, \pi^k$ vektorok olyan sorozata, hogy $k \to \infty$ esetén a primitív alszimplexek maximális átmérője nullához tartson. Ezért található a tételben leírt tulajdonságú primitív alszimplexeknek olyan sorozata, amely egyetlen $\hat{\pi}$ vektorhoz tart. Kihasználva $f(\pi)$ folytonosságát, láthatjuk, hogy $f_i(\hat{\pi}) \geq \hat{\pi}_i$ minden i-re, úgyhogy $\hat{\pi}$-nek a leképzés fix pontjának kell lennie.

Segédtétel Legyen $\pi^{j_1}, \ldots, \pi^{j_n}$ egy primitív halmaz és legyen π^{j_α} ezekből a vektorokból az egyik. Ekkor, eltekintve egy kivételes esettől, egyetlen olyan $\pi^j \in P_k$; $\pi^j \neq \pi^{j_\alpha}$ vektor létezik, amelyikre $\pi^{j_1}, \ldots, \pi^{j_{\alpha-1}}, \pi^j, \pi^{j_{\alpha+1}}, \ldots, \pi^{j_n}$ primitív halmazt ad. A kivételes eset akkor áll elő, amikor az $n-1$ darab π^{j_i} $i \neq \alpha$ vektort P_k első n vektora közül választjuk. Ez esetben helyettesítés nem lehetséges.

A segédtétel azt állítja, hogy eltekintve a kivételes esettől, ha egy tetszőleges vektort kivesszünk egy primitív halmazból,csak egyetlen olyan helyettesítése lehetséges, amellyel a vektorhalmaz ismét primitív halmazt ad. Ekkor a

π^{j_α}-t helyettesítő π^j-t egyszerű geometriai szerkesztéssel kaphatjuk meg. Ahhoz, hogy illusztráljuk ezt a szerkesztést, tegyük fel, hogy

$$\pi_i^{j_i} = \min [\pi_i^{j_1}, \ldots, \pi_i^{j_n}] \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(I.13)}$$

vagyis, hogy π^{j_i} a primitív alszimplexnek azon a felületén van, amelyen az i-edik koordináta konstans. Tegyük fel továbbá, hogy π^{j_1}-et vesszük ki a halmazból. (Ezekkel a feltevésekkel az általánosság megszorítása nélkül élhetünk.) π^{i^*}-gal jelöljük a primitív halmaznak azt a vektorát, amelynek az első koordinátája a *második* legkisebb értékű. Ahhoz, hogy olyan vektort találjunk, amelyik π^{j_1}-et helyettesíti, a $\pi^{j_{i^*}}$-ot tartalmazó felületet magával párhuzamosan elmozgatjuk, csökkentve az i^*-odik koordinátát, egészen addig, amíg az *először* metsz át egy P_k-ban levő π^j vektort úgy, hogy

$$\pi_i^j > \pi_i^{j_i} \quad \text{minden} \quad i \neq 1, i^* \ \text{-ra és} \quad \pi_1^j > \pi_1^{j_{i^*}}$$

vagy amíg az S szimplex azon felületével fog egybeesni, amelyre $\pi_{i^*} = 0$.

Az új primitív halmaz fenti előállítását matematikailag a következőképpen fogalmazzuk meg: Ha a primitív halmazból π^{j_1}-et zárjuk ki (amelynek az első koordinátája a legkisebb a π^{j_i} $i = 1, \ldots, n$ vektorok első koordinátái között) és ha $\pi^{j_{i^*}}$ az a vektor, amelynek első koordinátája a *második* legkisebb, akkor π^{j_1} vektor helyett a primitív halmazba az a $\pi^l \in P_k$ vektor lép be, amelyre

$$\max_{1 \leq j \leq k} \pi_{i^*}^j = \pi_{i^*}^l \qquad \text{(I.14)}$$

$$\pi_{i^*}^j < \pi_{i^*}^{j_{i^*}} \qquad \text{(I.15)}$$

$$\pi_1^j > \pi_i^{j_{i^*}} \qquad \text{(I.16)}$$

$$\pi_1^j > \pi_i^{j_i} \quad \text{minden} \quad i \neq 1, i^*\text{-ra} \qquad \text{(I.17)}$$

Mint az előző ábrán látható, az ott felrajzolt megoldás az (I.14—17) relációknak eleget tesz. A segédtétel pontos kimutatásához azonban egyrészt azt kell bebizonyítani, hogy az (I.14—17) relációkkal leírt feladat a kivételes esettől eltekintve tetszőleges elhelyezkedésű és méretű vektorok esetén egyértelműen megoldható, másrészt azt, hogy a π^{j_α} ($= \pi^{j_1}$) vektor helyettesítésére más lehetőség nincs.

Vegyük mindenekelőtt figyelembe, hogy a $\pi^{j_{i^*}}$ vektor j_{i^*} indexe nagyobb n-nél, mert ha nem, akkor a kivételes esettel állunk szemben. Ha ugyanis $\pi^{j_{i^*}}$ P_k első n eleme közül volna az egyik, akkor — mivel feltételezésünk szerint $\pi^{j_{i^*}}$ első koordinátája a második legkisebb és így az nem lehet zéró — szükségképpen nagyobb volna az egységnél. Ekkor azonban — szintén a $\pi^{j_{i^*}}$vektor első koordinátájára kirótt feltevés alapján — minden egyes π^{j_i} $i = 2, \ldots, n$ vektor elős koordinátája is egynél nagyobb volna. Ez vagy éppen azt jelentené, hogy a segédtételben említett kivételes esettel van dolgunk, vagy azt, hogy a π^{j_i} $i = 1, \ldots, n$ vektorhalmazt P_k első n vektora adja. Utóbbi esetben azonban ez a halmaz csak akkor lehetne primitív, ha P_k csupán a szóban forgó n vektor halmaza volna ($k = n$), mivel ezek (I.13)-ban éppen az S szimplexet generálják. Ettől az esettől nyilván eltekinthetünk.

Az elmondottakból következik, hogy a kivételes esettől eltekintve a $\pi^{j_{i^*}}$ vektor j_{i^*} indexe nagyobb n-nél, így mindegyik koordinátájára: $0 < \pi_i^{j_{i^*}} < 1$; $i = 1, \ldots, n$. (Itt kihasználtuk a degeneráció-mentességre tett kikötést.)

Ebből azonnal következik, hogy *a kivételes esettől eltekintve az* (I.15—17) *egyenlőtlenségrendszernek mindig van megoldása*, például a

$$\pi^{i^*} = (M_{i^*}, \ldots, M_{i^*}, \underbrace{0}_{i^*}, M_{i^*}, \ldots, M_{i^*})$$

vektor. A degeneráció-mentesség kikötéséből folyik az is, hogy *az* (I.14—17) *feladatnak egy és csak egy megoldása van.* Könnyen látható, hogy így primitív halmazhoz jutunk.

A kivételes esetben — könnyű belátni — *helyettesítés nem lehetséges.* A fentiekben használt, az általánosságot meg nem szorító jelölések mellett ekkor a π^{j_i} $i = 2, \ldots, n$ vektorhalmaz azonos a π^i $i = 2, \ldots, n$ vektorhalmazzal, míg $\pi^{j_1} \neq \pi^1$. (Ha $k > n$, akkor $\pi^{j_1} = \pi^1$ esetén π^i $i = 1, \ldots, n$ nem szolgáltatna primitív halmazt.) Ekkor π^{j_1} kirekesztésével azért nem kaphatnánk ismét primitív halmazt, mivel az újabb $\pi^l, \pi^2, \ldots, \pi^n$ halmaz π^{j_1}-et belsejében tartalmazná.

A segédtétel pontos kimutatásához még be kell bizonyítanunk, hogy *nem található az* (I.14)*-ben szereplő* π^l*-től különböző olyan vektor, amelyet* π^{j_1} *helyére írva szintén primitív halmazhoz jutnánk.*

A bizonyítást két lépésben végezzük el. Először is megállapítjuk, hogy:
1. *Ha* $\pi^l, \pi^{j_2}, \ldots, \pi^{j_n}$ *egy primitív halmaz, akkor minden* i; $i \neq 1$, i^**-ra* a π^{j_i} *vektor az új alszimplexnek azon a korlátozó felületén lesz, amelyik i-edik koordinátája konstans.* Ha e primitív alszimplexnek azon a korlátozó felületén, amelyen az i; $i \neq 1$, i^* koordináta konstans nem a π^{j_i} vektor feküdne, akkor (I.13)-ra tekintettel ezen szükségképpen π^l volna rajta. Mivel ekkor azon a korlátozó felületen, amelyen az első koordináta konstans csak $\pi^{j_{i^*}}$ feküdhetne, azt a korlátozó felületet, amelyen az i^*-odik koordináta konstans csak egy π^{j_i}, $i \neq 1$, i^* vektor határozhatná meg. Ez azonban lehetetlen, mert (II.12) $i = i^*$-ra is vonatkozik.

E megfigyelés folyományaként látható, hogy az új primitív halmazra:

$$\pi_i^{j_i} = \min\,[\pi_i^l, \pi_i^{j_2}, \ldots \pi_i^{j_n}] \quad \text{minden} \quad i \neq 1, i^*\text{-ra}$$

Ez a reláció egyben azt is igazolja, hogy a primitív halmaz új elemének ki kell elégítenie az (I.17) egyenlőtlenséget.

A maradó két koordinátára két alternatíva állhat fenn. Vagy π^l van a konstans első koordinátájú és $\pi^{j_{i^*}}$ a konstans i^*-odik koordinátájú felületen, vagy fordítva.

A következő 2. lépésben azt bizonyítjuk be, hogy *ha a* $\pi^l, \pi^{j_2}, \ldots, \pi^{j_n}$ primitív halmazban $\pi^l \neq \pi^{j_1}$, *akkor* π^l*-nek kell lenni az új primitív alszimplex konstans* i^* *koordinátájú felületén és* $\pi^{j_{i^*}}$ *van azon a felületen, amelyen az első koordináta állandó.*

Ha ez nem volna igaz, akkor az előzőek alapján bármelyik $i = 2, \ldots, n$-re a π^{j_i} vektor volna az új alszimplexnek azon a felületén, amelyiken az i-edik koordináta konstans. Ekkor azonban $\pi_\alpha^{j_1} < \pi_\alpha^l$ esetén a régi alszimplex tartalmazná belsejében π^l-t és így az nem lett volna primitív, vagy $\pi_1^l < \pi_1^{j_1}$ esetén az új alszimplex tartalmazná belsejében π^{j_1}-et és ezért ez nem volna primitív. Ellentmondáshoz jutottunk, tehát indirekt feltevésünk hibás. Ez azt jelenti, hogy π^l-nek kell azon a felületen lennie, amelyiken az i^* koordináta konstans. Így nyilvánvaló az is, hogy a $\pi^{j_{i^*}}$ vektor (amelynek első koordinátája a *második* legkisebb volt az eredeti primitív halmazban) lehet csak azon a felületen, amelyben az első koordináta konstans. Ez azonban azt jelenti, hogy π^l eleget tesz az (I.15—17) relációknak $j = l$-re és nyilvánvaló, hogy (I.14)-nek is fenn kell állnia ahhoz, hogy primitív halmazt kapjunk. Ezzel a segédtétel bizonyítását befejeztük.

Most térjünk rá az 1. tétel bizonyítására. Mindenekelőtt emlékeztetünk arra, hogy a P_k halmaz mindegyik vektorának megfeleltetünk egy, az $1, \ldots, n$ számok közül választott indexet. A tételben nincs szó arról, hogy ezt a megfeleltetést hogyan végezzük, ez önkényes, eltekintve attól, hogy $j=1, \ldots, n$-re π^j-nek a j indexet feleltetjük meg. (A tételnek a Brouwer tétel bizonyításához való felhasználásánál — mint ahogyan arról a tétel kimondásánál már szó volt — az indexek kiválasztása függ a leképzéstől, azokat nem választhatjuk meg tetszés szerint.)

Az a célunk, hogy egy olyan primitív halmazt határozzunk meg, amelynek elemei különbözőképpen vannak indexelve. Erre egy véges algoritmust mutatunk be az alábbiakban. Az algoritmus egy olyan primitív halmazzal kezdődik, amelynek mindegyik tagja eltérően van indexelve azzal a lehetséges kivétellel, hogy egyetlen vektorpár rendelkezhet azonos indexeléssel.

Tekintsük a $\pi^2, \ldots, \pi^n, \pi^{j*}$ vektorhalmazt, ahol π^{j*} az első n vektor után következőkből van kiválasztva úgy, hogy maximálja az első koordinátát. Világos, hogy

$$\min\,[\pi_i^{j*}, \pi_i^2, \ldots, \pi_i^n] \tag{I.18}$$

$i = 1$-re π_1^{j*}-gal egyenlő és zéró $i > 1$-re. Ez a vektorhalmaz (az (I.11) definíció alapján) primitív, mivel nincs olyan vektor P_k-ban, amelynek összes koordinátái nagyobbak lennének, mint a $(\pi_1^{j*}, 0, \ldots, 0)$ vektor koordinátái.

Ha a π^{j*} vektort az 1-es indexnek feleltettük volna meg, akkor a probléma már meg volna oldva, mivel ez esetben a primitív halmaz összes eleme különböző indexszel rendelkezne. Általában nem ez a helyzet, és ilyen esetben π^{j*}-nak ugyanaz az indexe, mint a $\pi^2, \ldots, \pi^n$ vektorok valamelyikének. Az algoritmus mindegyik lépésében (kivéve a végállapotot) olyan primitív halmazunk lesz, amelynek indexei a következő tulajdonsággal rendelkeznek.

(i) Az 1 index egyik vektornak sem fog megfelelni.
(ii) A primitív halmaz mindegyik vektora különbözően lesz indexelve, kivéve egy vektorpárt, amelyek azonosan.

Az algoritmus a két azonos indexszel rendelkező vektor egyikét hagyja ki a primitív halmazból. Ezáltal vagy kap egy ugyanilyen tulajdonságú új primitív halmazt, vagy befejeződik az algoritmus azzal, hogy a primitív halmaz mindegyik vektora különbözőképpen lesz indexelve. Ez esetben megkaptuk a kívánt megoldást. Eltekintve a kiinduló és a végső helyzettől, az algoritmus mindegyik lépésnél tehát a közös indexű két vektor egyike került éppen bevezetésre, hogy a konkrét helyzetbe jussunk. Az algoritmus azzal megy tovább, hogy kirekeszti a pár *másik* tagját.

Ami a kezdeti primitív halmazt illeti, abból csak egy olyan π^j ($j = 2, \ldots, n$) vektor hagyható ki, amelynek ugyanaz az indexe, mint π^{j*}-nak. A második lehetőség, vagyis π^{j*} kizárása annak a kivételes esetnek felel meg, amelyről a segédtételben volt szó.

Világosan kell látni, hogy az algoritmus sohasem térhet vissza egy előző primitív halmazhoz. Ellenkező esetben ugyanis, ha az *első* visszatérés a *kezdeti* primitív halmaztól *eltérő*höz vezetne, akkor ettől az „előző" primitív halmaztól az algoritmus folytatásának három (és nem két) módja volna. Ha az első visszatérés a kezdeti primitív halmazhoz vezetne, akkor ebből a halmazból az algoritmus folytatására két mód állna rendelkezésre és nem egy.

Az algoritmus csak akkor áll le, ha egy olyan primitív halmazhoz jutott, amelynek összes vektora különbözőképpen van indexelve. Ha ilyen tulajdonságú primitív halmaz nem létezne, az algoritmus végtelenné válna, miközben mindegyik lépésben más-más primitív halmazt állítana elő. Mivel azonban a különböző primitív halmazok száma *véges*, ez nem fordulhat elő. Ez a tény, amikor bizonyítja a kívánt tulajdonságú primitív halmaz egzisztenciáját, arra is rávilágit, hogy ilyen primitív halmazhoz az algoritmus véges számú lépésben jut el. Ezzel tételünk bizonyítását befejeztük.

A II. fejezet elején volt arról szó, hogy a Sperner lemme garantálja olyan alszimplex létezését, amelynek minden csúcsa különbözőképpen van indexelve. A Sperner lemma azonban nem ad más ötletet ahhoz, hogy hogyan találjunk egy ilyen tulajdonságú alszimplexet, minthogy sorra vizsgáljuk az alszimplexeket, amíg egy kívánt tulajdonságút nem találunk. Scarf eljárása ennél többek között azzal nyújt többet, hogy nála elégséges olyan alszimplexet sorra venni, amelyben csupán két csúcs indexe lehet azonos, és így a szükséges számítások mennyiségét igen nagy mértékben csökkenti.

I.2. *A számítási technikáról*

Az algoritmus programozásakor mindenekelőtt azzal a feladattal találkozunk, hogy hogyan válasszunk ki egy megfelelő P_k vektorhalmazt. Az algoritmus mindegyik lépésében ezekből a vektorokból kiválasztott n tagból álló primitív halmazzal van dolgunk. Ezekből az egyiket kihagyjuk a primitív halmazból és helyére egy másik vektort helyettesítünk, azáltal, hogy meghatározunk egy $\mathbf{a}$ vektort és egy i^* koordinátát, majd megvizsgáljuk P_k azon összes vektorát, amelyre $\pi_i^j > a_i$ $i \neq i^*$ és azt a vektort választjuk ki, amelynek i^*-odik $\pi_{i^*}^j$ koordinátája a legnagyobb, de kisebb, mint $\pi_{i^*}^{j_{i^*}}$. Az $\mathbf{a}$ vektor első koordinátája — a 3. ábrával kapcsolatos jelölések esetén (lásd az (I.13) és az (I.15—17) relációkat) — $\pi_1^{j_{i^*}}$, az i-edik $(i \neq i^*)$ $\pi_i^{j_i}$, míg az i^*-odik koordinátája érdektelen.

A P_k halmazt hasznos úgy megkonstruálni, hogy a primitív halmazba belépő új vektorokat P_k összes vektorának megvizsgálása nélkül tudjuk kiválasztani. Például, ha P_k vektorait (eltekintve az első n-től) a $(k_1/D, \ldots, k_n/D)$ szám n-esek összes lehetséges kombinációi adják (ahol $k_i > 0$; $k_1 + \ldots + k_n = D$), továbbá, ahol a k_i és a D számok egészek), akkor az előbb említett vektor komponensei egy egészszámnak és D-nek hányadosai lesznek. Az új belépő $\boldsymbol{\pi}^j$ vektor komponenseit ekkor vagy

$$\pi_i^j = a_i + 1/D \quad (i \neq i^*)\,; \quad \pi_{i^*}^j = 1 - \textstyle\sum_{i \neq i^*} (a_i + 1/D) \tag{I.19}$$

adja, vagy ha nem, akkor P_k első elemének egyike.[3]

[3] Tegyük fel, hogy a folytonosság definíciójában szereplő $\delta = \delta(\varepsilon)$ függvény $\varepsilon > 0$-hez és tetszőleges $\pi : \pi \in S$-hez olyan *maximális* δ környezetet rendel, amelyre $\| \mathbf{f}(\pi') - \mathbf{f}(\pi'') \| \leq \varepsilon$ ha $\| \pi' - \pi'' \| \leq \delta$. Tegyük fel továbbá, hogy létezik a $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\varepsilon)$ függvény inverze is. Mivel ekkor δ választható az S felosztásában szereplő alszimplexek maximális átmérőjének, ez a fenti felosztásban $1/D$-vel egyenlő. A $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}(\varepsilon)$ függvény inverzéből meghatározható a $\delta^0 = 1/D$ értékhez tartozó *minimális* ε^0. Az approximáció hibáját S fenti felosztása esetén (I. 1) alapján $\gamma = (n - 1)(1/D + \varepsilon^0)$ adja meg.

Ha tehát P_k-nak megvan ez a speciális szerkezete, akkor igen egyszerű számítással kaphatjuk meg a mindenkor belépő új vektorokat. Megjegyzendő azonban, hogy a P_k halmaz fenti megválasztása nem elégíti ki az előző pontban, a degenerációmentességre tett feltevést (miszerint P_k-ban *nincs* olyan két vektor, amelyeknek valamely i-re koordinátájuk azonos lenne). Ez pedig egy olyan kikötés, amely elengedhetetlen a segédtételben leírt szabály alkalmazásához. A célból, hogy Scarf elkerülje a degeneráció okozta nehézséget, az algoritmus mindegyik lépésnél megkonstruál egy

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & M_n & \pi_1^{n+1} & \dots & \pi_1^{\varrho} \\ M_1 & & & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_1 & & 0 & \pi_n^{n+1} & & \pi_n^{\varrho} \end{bmatrix} \tag{I.20}$$

mátrixot, amely tartalmazza P_k első n elemét és még azokat, amelyek előzőleg kerültek bevezetésre a primitív halmazba. A sorrend a bevezetés sorrendje. Ekkor, ha a mátrix valamely két oszlopának komponensei egy i sorban megegyeznek, akkor az előzőt tekintjük nagyobbnak. Hasonlóan, ha a mátrix valamely vektora és egy mátrixon kívüli vektor valamely eleme azonos, akkor is az előbbit tekintjük nagyobbnak. Belátható, hogy ez az eljárás véges algoritmust eredményez.

A belépő $\boldsymbol{\pi}^j$ vektor meghatározása céljából csak azokat a vektorokat kell megvizsgálni, amelyeket valamely előző lépésben már felhasználtunk; ezenkívül csupán egyetlen számítás szükséges. E szerint azoknak a vektoroknak a száma, amelyeket kifejezetten meg kell vizsgálni, nem lehet nagyobb, mint az iterációk száma plusz n. Ha az iterációk száma viszonylag kicsi, ez a vizsgálat könnyen elvégezhető. (Az ilyen nehézségek feloldására más módszerek is lehetségesek. Ezek között valószínűleg olyanok is találhatók, amelyek még kevesebb számítást igényelnek.)

Az algoritmus egy olyan primitív halmazzal fejeződik be, amelynek vektorai mind különbözőképpen vannak indexelve. A primitív alszimplexnek bármely pontja a fixpont approximációjaként szolgál.[4]

A célból, hogy e kívánt tulajdonságú σ^0 alszimplex pontjai közül egyetlen pontot válasszunk ki, célszerű ezt úgy tenni, hogy ezzel minimalizáljuk az

$$\|\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) - \boldsymbol{\pi}\| \tag{I.21}$$

normát — vagy a közelség valamely más mértékét — a $\boldsymbol{\pi} \in \sigma^0$ pontokra.

A számítás megkönnyítése érdekében — de a kívánt pontosságot megkövetelve — általában megengedhető és célszerű csupán az $f_i(\boldsymbol{\pi})$ függvények lineáris közelítését — Taylor soruknak első két tagját — figyelembe venni. Ha a σ^0 alszimplex csúcsait a $\boldsymbol{\pi}^{j_i}$ $i = 1, \dots, n$ vektorok adják, akkor célszerű a sorbafejtést az $1/n \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\pi}^{j_i}$ vektor körül elvégezni. Jelöljük az $f_i(\boldsymbol{\pi})$ $i = 1, \dots, n$ függvény lineáris közelítését $\varphi_i(\boldsymbol{\pi})$ -vel, ekkor a feladatunkat az alábbiak szerint fogalmazhatjuk meg:

[4] Lásd az (I.1) egyenlőtlenséget, vagy a 3. lábjegyzetet.

Keresendő az a γ_0 érték, melyre

$$\min \gamma = \gamma_0 \tag{I.22}$$

alávetve a következő feltételeknek:

$$-\gamma \leq \varphi_i(\boldsymbol{\pi}) - \pi_i \leq \gamma \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.23}$$

és $\boldsymbol{\pi} \in \sigma^0$, vagyis (I.12) alapján:

$$\pi_i \geq \min [\pi_i^{j_1}, \ldots, \pi_i^{j_n}] \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.24}$$

valamint

$$\sum_{i=1}^n \pi_i = 1\,; \pi_i \geq 0\,; \qquad \gamma > 0 \tag{I.25}$$

(I.22—25) egy lineáris programozási feladatot ad. E feladat mindig megoldható és nagyban fokozza az (I.1) relációval jelzett értelmű approximáció pontosságát.

I.3. *Egy érdekes tétel*

Az előző fejezetben ismertetett algoritmus alapgondolatát nemcsak az előzőkben megkívánt tulajdonságú primitív halmaz megkeresésére használhatjuk fel, hanem egy általánosabb probléma megoldására is. Ahogyan az előző fejezetben, legyen a $\boldsymbol{\pi}^{n+1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorhalmaz az S szimplexen, és a $\boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorok legyenek szintén az előzőkkel azonosak.

Tekintsük a

$$\mathbf{Bz} = \boldsymbol{\omega} \tag{I.26}$$

egyenletrendszert, ahol $\mathbf{B}$ egy $n \times k$ mátrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_{1,n+1} & \cdots & b_{1,k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & b_{n,n+1} & \cdots & b_{n,k} \end{bmatrix}$$

és $\boldsymbol{\omega}$ egy szigorúan pozitív vektor. A (II.1) egyenletrendszer megengedhető bázisának — a lineáris programozásban használatos értelemben — az n számú $j_1, \ldots, j_n$ oszlopból álló vektorrendszert nevezzük, ha azok lineárisan függetlenk és ha a

$$\sum_{\nu=1}^n b_{i \cdot j_\nu} z_{j_\nu} = \omega_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{I.27}$$

egyenletrendszer megoldása nemnegatív.

2. *Tétel. Ha az* (I.26) *rendszer nemnegatív megoldásainak halmaza korlátos, akkor létezik olyan* $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ *primitív halmaz, hogy a* $\mathbf{B}$ *mátrix* $j_1, \ldots, j_n$ *oszlopai megengedhető bázist alkotnak.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\boldsymbol{\pi}^2, \ldots, \boldsymbol{\pi}^n, \boldsymbol{\pi}^{j^*}$ vektorhalmazt, ahol a $\boldsymbol{\pi}^{j^*}$ vektor P_k első n vektora után következőkből úgy van kiválasztva, hogy ezek között $\boldsymbol{\pi}^{j^*}$ első koordinátája a legnagyobb. Ez a halmaz primitív mint ahogyan azt az (I. 18) relációval kapcsolatban már megállapítottuk.

Az $1, \ldots, n$ oszlopok a $\mathbf{B}$ mátrixnak megengedhető bázisát alkotják. Hajtsunk végre egy elemi bázistranszformációt azáltal, hogy a j^*-nak megfelelő oszlopot vezetjük be. Nincs további probléma, ha ezzel az 1-es oszlop marad ki a bázisból, mivel $2, \ldots, n, j^*$ primitív halmaz és a $\mathbf{Bz} = \omega$ rendszernek is egy megengedhető bázisa. Általában nem ez lesz a helyzet és valamely más, nem az első sozlop marad ki a bázisból. Az algoritmus következő lépése abból áll, hogy a primitív halmazból eltávolítjuk azt a vektort, amelyik annak az oszlopnek felel meg, amelyet éppen kivettünk a $\mathbf{Bz} = \omega$ egyenletrendszer megengedhető bázisából.

Az algoritmus alternál a **B** mátrixra vonatkozó lineáris transzformáció és a primitív halmazon végzendő analóg operáció között. **B** megengedhető bázisába belevesszük annak a $\pi^{j_{b0}}$ vektornak megfelelő oszlopot, amelyiket éppen belevettünk a primitív halmazba; ezt követően kivesszük a primitív halmazból azt a $\pi^{j_{k1}}$ vektort, amelyik annak az oszlopnek felel meg, amelyiket éppen elhagytunk **B** megengedhető bázisából.

A számítás bármelyik közbülső lépésében **B** megengedhető bázisa az 1-es oszlopot és $n-1$ másikat, mondjuk a $j_2, \ldots, j_n$ oszlopokat tartalmazza, amíg a primitív halmaz a $\pi^{j_1}, \pi^{j_2}, \ldots, \pi^{j_n}$ vektorokból áll, ahol $j_1 \neq 1$. Az algoritmusra végig érvényes az az összefüggés, hogy a primitív halmaz vektorainak és a bázisban szereplő oszlopoknak indexei között $n-1$ azonos. Ez azért van így, mert *mindig két lehetséges operáció egyikét hajtjuk végre.* Ha a **B** mátrix bázisán hajtunk végre elemi transzformációt, akkor az e bekezdésbeli jelölések szerint a j_1 oszlopot kell bevezetnünk a bázisba, míg ha a primitív halmaz egy elemét helyettesítjük, akkor π^{j_1}-et kell kizárni. Eltekintve attól a kezdeti helyzettől, amikor a primitív halmazt $\pi^2, \ldots, \pi^k, \pi^{j*}$ adja és a megengedhető bázis az első n oszlopból áll, mindkét operáció alkalmazható. Kezdeti helyzetben csak egy operáció hajtható végre, mivel π^{j*} kizárása azt a kivételes helyzetet teremti meg, amiről az előző fejezet segédtételében volt szó.

Az algoritmus mindegyik közbülső lépésében két folytatás lehetséges. Visszatérünk az előző állapotba — amit nyilván kizárunk — vagy az előző bekezdésben tárgyaltak alapján a másik lehetséges operációt hajtjuk végre. Ebből következik, hogy az algoritmus nem lehet ciklikus. Ellenkező esetben ugyanis, ha az első állapot, amelyre az algoritmus visszatér, nem a kezdeti helyzet, akkor ebből a helyzetből három és nem két folytatásnak kellene lennie. Ha az első olyan állapot, amelyikhez az algoritmus visszatér, a kezdeti helyzet, akkor ebből két és nem egyetlen folytatási lehetőségünk volna.

Mivel az algoritmus nem ciklikus és a lehetséges helyzetek száma véges, az algoritmusnak be kell fejeződnie, ami csak akkor történhet meg, ha a konkrét $\pi^{j_1}, \ldots, \pi^{j_n}$ halmaz primitív halmazt alkot és ugyanakkor a tételben megadott módon felel meg a $\mathbf{Bz} = \omega$ megengedhető bázisának. Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

IRODALOM

1. Arrow, K. J.: An Extension of the Basic Theorems of Classical Welfare Economics in J. Neyman (ed.): Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley and Los Angeles, 1951. Univ. of California Press. 503—532.
2. Arrow, K. J.—Block, D.—Hurwicz L.: „On the Stability of the competitive equilibrium II." — Econometrica, *27* (1959) 82—109.
3. Arrow, K. J.—Debreu, G.: „Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy" — Econometrica, *22* (1954), 265—290.

4. ARROW, K. J.—HURWICZ, L.: „Decentralization and Computation in Resource Allocation". Essays in Economics and Econometrics, 1960. (pp. 34—104) University of North Carolina Press.
5. DEBREU, G.: „Valuation Equilibrium and Pareto Optimum" Proc. Nat. Acad. Sci., *40* (1954) 588—592.
6. DEBREU, G.: Theory of Value. An axiomatic analysis of economic equilibrium. New York 1959 Wiley.
7. DEBREU, G.: „New Concepts and Techniques for equilibrium analysis" — International Economic Review, *3* (1962), 257—273.
8. FISHER, I.: Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices. Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, Vol. 9., New Haven 1892.
9. GALE, D.: „The Law of Supply and Demand" — Mathematica Scandinavia, *3* (1955) pp. 155—169.
10. GRAVES, L. M.: The Theory of Functions of Real Variables. New York, 1956. McGraw.
11. KARLIN, S.: Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics Vol. I. London—Paris, 1959. Addison-Wesley.
12. KONDOR GY.: Az értékelés és a piac egyes kérdései nemlineáris modellekben. Kandidátusi disszertáció. Budapest, 1967. Soksz. anyag.
13. LEMKE, C. E.—HOWSON J. T.: „Equilibrium Points of Bi-Matrix Games" SIAM Journal, *22* (1959), 54—71.
14. LEMKE, C. E.: „Bimatrix equilibrium ponts and mathematical programming" —Management Sci., *11* (1965) 681—689.
15. MCKENZIE, L.W.: „On the Existence of a General Equilibrium for a Competite Market" — Econometrica *27* (1959), 54—71.
16. NASH, J. F. JR.: „Equilibrium States in N-Person Games". Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A. Vol. 36, 1960 pp. 48—49.
17. QUIRK, J.—SAPOSNIK, R.: Introduction to general equilibrium theory and welfare economics. New York 1968. McGraw.
18. SCARF, H. E.: „The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping" — SIAM Journal on Applied Math, *15* (1967), 1328—1343.
19. SCARF, H. E.: „On the Computation of Equilibrium Prices". Ten Economic Studies in the Tradition of Irving Fisher. New York, 1967. Wiley (pp. 207—230).
20. SCARF, H. E.: „The Core of an N-Person Game" — Econometrica, *35* (1967), 50—69.
21. SZÉP J.: Analízis. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
22. WALD, A.: „On Some Systems of Equations of Mathematical Economics" — Econometrica, *19* (1951) pp. 368—403.
23. WALRAS, L.: Elements of Pure Economics. London, 1954. George Allen and Unwin.

KÖNYVEKRŐL

BRÓDY ANDRÁS: *Érték és újratermelés — Kísérlet a marxi értékelmélet és újratermelési elmélet matematikai modelljének megfogalmazására.* Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 358 p.

Bródy új könyve impozáns munka. Magas színvonalon foglalkozik a közgazdaságtudomány egyik központi kérdésével, az érték- és árelmélettel. Az olvasóra nagy hatást gyakorol a munka mélysége, sok részének logikai tisztasága, a matematikai apparátus kifinomultsága és biztos kezelése, a szerző számos figyelemre méltó ötlete.

Bródy évek óta foglalkozik az input-output-analízissel. Ő volt a Leontief-modellek első propagátora Magyarországon. De sohasem elégedett meg azzal, hogy egyszerűen átültessen külföldi tapasztalatokat a magyar talajba — bár ez magában is hasznos tevékenység lett volna. Kezdettől fogva az input-output-technika továbbfejlesztésére törekedett. Az elsők között vizsgálta az ágazati kapcsolati mérlegek pontosságának problémáit. Emellett hosszú évek óta foglalkoztatták e technika elméleti alkalmazásának lehetőségei. Éppen ez a tevékenysége kulminált most új könyvében.

A mű egyik ereje: az eredetiség. Ki nem taposott ösvényeken jár; kerüli a könnyen elfogadható, de unalmas igazságokat. Sajátos színt képvisel a magyar közgazdasági irodalomban; egyidejűleg politikai gazdaságtani és metematikai közgazdasági munka.

A szerző erős absztraháló képességén kívül megmutatkozik sokoldalú műveltsége is. Járatos mind a marxista, mind a nemmarxista irodalomban, tájékozott a napi gazdaságpolitikában. Műveltségének egyik érdekes összetevője: természettudományi és műszaki ismeretei, amelyek nem is egyszer inspirálják közgazdasági gondolatait. Még egy fontos erény: a könyv stílusa, amely világos, logikus, jól követhető. Hasonlatai találóak, fogalmazása színes, elegáns.

E recenzióban négy témával foglalkozom részletesebben. Részben Bródy megállapításait ismertetem, hozzáfűzve néhány saját gondolatomat, amelyekre a könyv inspirált. Részben pedig vitába szállnék a szerző egyik-másik elgondolásával.

1. *A statikus és a dinamikus modell viszonya*

Bródy alapjában véve kétféle modellel dolgozik. Az egyik egy zárt statikus Leontief-modell: ez csak a folyó ráfordítások belső áramlását írja le. A másik egy zárt dinamikus modell, amely rokon Neumann, Leontief és Lange dinamikus modelljeivel; számbavéve nemcsak a folyó ráfordításokat, hanem az eszközök lekötését is. Utóbbi megszerkesztésekor Bródy fontos fogalmi tisztázást végez, finom disztinkciókkal megvilágítva a tőkelekötés, tőkemegtérülés és állóeszköz-élettartam közti viszonylatokat.

Bródy egyik mély és figyelemre méltó gondolata: rokonságot mutat ki egyfelől a statikus és dinamikus modellpár, másfelől a marxi gondolatrendszer következő kategória-párjai között: egyszerű és bővített újratermelés, érték és termelési ár.

Első olvasásra a rokonság, az analógia szorosnak tűnik. A könyv legkerekebb, logikailag leginkább zárt és befejezett fejezetei éppen azok, amelyek e kétféle modellt leírják, s a marxi fogalom-párokkal való analógiájukat elemzik. A könyv itt fontos új eredményeket tartalmaz. Jelentősen előrelép a marxi érték- és reprodukciós elmélet matematikai modellezésében, felülmúlva olyan alkotók, mint Oscar Lange, Nyemcsinov, Johansen, Morishima korábbi kísérleteit.

Egy tudományos elmélet magas színvonalának egyik gyakori ismertetőjele (bár nem okvetlenül szükséges feltétele) az egyszerűség, tömörség, szimmetria. Neumann János kifejezésével: a tudományos elméletnek is van esztétikuma. Bródy munkájának ez a része valóban *szép;* a gondolat világos ritmusának, kerekségének örömét szerzi meg az olvasó számára.

Hadd valljam meg azonban őszintén: kialakult bennem sokféle rossz tapasztalat alapján egy előítélet minden szép, mondhatnám, megvesztegető gondolatmenettel szemben. Minél kerekebb és szebb, annál kétkedőbbé válok. Ez a kételkedés késztetett ismételt olvasásra, s végül is úgy tűnt: Bródy gondolatmenetében vannak vitatható pontok.

Mindenekelőtt el kell gondolkodnunk a statikus és a dinamikus modell egymáshoz való viszonyán. A tradicionális Marx-interpretációk mindig hangsúlyozzák, hogy az értékelmélet nem csupán gazdaságtörténeti, vagy didaktikai megfontolások alapján előzi meg a termelési ár elméletét, hanem az értékelmélet a politikai gazdaságtan általános elméleti alapja. Eszerint a Tőke I. kötetének kell megadnia az általános elméletet, míg a II., és főképp a III. kötetnek a speciális elméletet. Bródy ezzel nem száll vitába, de amikor a formalizált modellel dolgozni kezd, tulajdonképpen az ellenkezőjét bizonyítja. *A Bródy-féle dinamikus modell az általános modell, s a statikus modell az előbbinek csupán speciális esete.*

Amíg nem-egzakt definíciókkal operálunk, nem dönthető el egyértelműen az általános és speciális viszonya. A formalizálás egyik haszna abban áll, hogy egyértelműen megállapítható: valamely modell speciális esete-e egy másik, általánosabb modellnek vagy sem. Nyilvánvalóan erről van szó, ha egy modellre jellemző paraméterek az általános esetben tágabb, a speciális esetben viszont csak szűkebb határok között helyezkedhetnek el. Bródynál éppen erről van szó. Dinamikus modelljében a B mátrix együtthatói nem-negatívak, statikus modelljében viszont okvetlenül zérók. Dinamikus modelljében a folyó ráfordítások mátrixának legnagyobb saját értéke lehet nagyobb, egyenlő, vagy kisebb 1-nél, míg statikus modelljében éppen egyenlőnek kell lennie 1-gyel. Így tehát a statikus modell lehet egy a dinamikus modellel formalizált történelmi korszakot megelőző korszak reprezentánsa. Lehet ügyes didaktikai fogás, az egyszerűbb statikus modellel kezdeni a magyarázatot. De a statikus modell, s az erre épülő értékelmélet nem minősíthető a Bródynál leírt reprodukciós tan általános elméleti megalapozásának.

2. *A munka szerepe*

Egy további lényeges probléma: a munka szerepe a modellben. Bródy a zárt Neumann-Leontief-modellek tradíciójának megfelelően egy (esetleg több) munkaerő-szektort épít be a modellbe. A folyó ráfordítások körében a munkaerő ráfordítása a fogyasztás, kibocsátása pedig a munka.

Bródy ugyanúgy — az adott mátrixra nézve — rögzített, konstans együtthatókkal jellemzi a munkaerő-szektor ráfordítási együtthatóit, mint akár a vegyipari, vagy a textilipari szektorét. Ez a szemlélet kétségkívül nem idegen az angol klasszikusok és Marx gondolataitól. Eszerint a munkaerő is áru, amelynek értékét az előállításához társadalmilag szükséges ráfordítások határozzák meg. Bródy itt tudatosan marxista; de joggal állapították meg marxista és nem-marxista elmélettörténészek egyaránt, hogy tulajdonképpen már Neumann is, zárt modelljének megalkotásakor, a munkaerő-szektornak a fentiek szerinti kezelésével, öntudatlanul is marxistaként járt el.

Miközben azonban egyfelől Bródy modelljei ténylegesen találóan formalizálják a munkaértékelméletnek a fentiekben jelzett gondolatát (azaz a munkaerő is áru, amelynek ráfordításai vannak), másfelől ugyanebben a formalizmusban elsikkad a munkaerő-áru különleges jellege, kitüntetett szerepe. A marxizmus szerint a munkaerő ugyan áru, de nem közönséges, hanem a többiektől lényegesen különböző áru. Ezzel szemben a Neumann—Leontief—Bródy-féle zárt modellekben közönséges áruvá válik; egyszerűen egy a sokféle szektor közül.

Ennek megfelelően a Bródy-modellekből levezetett árrendszerek — akár a statikus modellből nyert „értékarányos árak", akár a dinamikus modellből nyert „termelési árak" — végeredményben nem kapcsolódnak a mátrixok egy kitüntetett sorához, illetve oszlopához, a munkaerő-szektorhoz, hanem a mátrixok egészéből, azok minden eleméből együttesen kerülnek levezetésre.

Bródy egyik legszellemesebb, leginkább eredeti, a matematikai közgazdaságtanban új, s alkotó gondolata: az értékarányos árrendszert megkaphatjuk, mint a ráfordítási együtthatómátrix legnagyobb sajátértékéhez tartozó pozitív sajátvektort. De ebben a gondolatmenetben teljesen eltűnt a munkaerő-szektor bármiféle megkülönböztetett jelentősége; az egyszerűen egyike a mátrix sorainak, illetve oszlopainak.

A problémát nyilván a szerző is érzékeli. Ezért a következőképpen érvel a munkaerő kitüntetett szerepe mellett: a gazdaság egyes részeit az kapcsolja össze, hogy valamennyi munkaerőt vesz igénybe. Másszóval: a munkaerő-sorban minden elem pozitív, s ez a biztosítéka annak, hogy a mátrix ne legyen reducibilis. Ez az érvelés nem tűnik meggyőzőnek. Ha erősen aggregált modellel dolgozunk, akkor a többi sorban sem lesznek nullák. Minden szektor használ pl. villamosenergiát, s mégsem építhető erre egy általános érték- és árelmélet.

Ha viszont dezaggregált modellel dolgozunk, akkor indokolt a munkaerő-szektort is dezaggregálni, pl. szakmák szerint. Ebben az esetben viszont mindjárt megjelennek nulla koefficiensek számos speciális munkaerő-sorban.

Mint említettem, már Bródy előtt, illetve tőle függetlenül is történtek kísérletek a marxi politikai gazdaságtan egyes gondolatainak matematikai modellezésére. Néhányan úgy vélték megközelíteni a munka értékelmélet problémáját, hogy az eleven munka felhasználásának minimálását adták meg célfüggvényként, s ezzel különböztették meg a ráfordításnak ezt a kategóriáját minden egyéb, a modell feltételi rendszerében számbavett ráfordítástól. Megvallom, ez a kísérlet sem tűnik meggyőzőbbnek Bródy próbálkozásánál.

Nemcsak értékelméleti oldalon, de az újratermelés oldalán is problematikus a munka szerepének tárgyalása. Éppen itt, a gazdasági fejlődésről szólva válik leginkább nyilvánvalóvá, hogy a növekedés alapvető korlátja a termelésben résztvenni képes és akaró eleven emberek száma és teljesítőképessége: szorgalma, szaktudása, kultúrája. A Bródy-féle zárt modellek azonban képtelenek kifejezésre juttatni ezt a korlátot: a munkaerő-szektor akadálytalanul bővülhet ugyanabban az ütemben, amelyben a többi, közönséges szektor terjeszkedik.

Mindenesetre azt kell megmondanunk: eddig még nem sikerült olyan matematikai elméleti modellt alkotni, ami logikus és konzisztens lenne, s ugyanakkor minden tekintetben tükrözné Marx elgondolásait és sejtéseit, ezen belül a munka kitüntetett szerepét a gazdaság folyamatában. Bródy munkássága fontos előrelépés, bátor intellektuális vállalkozás e feladat megoldására — de a feladat ezután sem tekinthető valóban elvégzettnek.

3. *Dualitás*

Bródy könyvének egyik leginkább gondolatébresztő témája: a dualitás. Nem tudom, hogy a dualitás fogalmának adhatunk-e teljesen általános érvényű definíciót. A kérdésről kialakult hazai vitában némi fogalomzavar mutatkozik. A magam részéről mindenesetre most megelégednék lazább körülírással. Dualitásról akkor szoktunk beszélni a matematikai közgazdaságtanban, ha egy matematikai feladatpár jellegzetes szimmetriájával van dolgunk. Egy adat-együttes kétféleképpen rendezhető el; kétféle egyenletrendszer alakítható ki belőlük. Az ugyanazon adategyüttesre épülő kétféle egyenletrendszer megoldásai között meghatározott összefüggések állnak fenn.

Bródy áttekinti és rendszerezi az általa vizsgált modellek dualitási tulajdonságait. Ezek egyrésze közismert. Tudjuk, hogy a Neumann-modell egyszerre szolgáltat egyfelől termelési szinteket, és növekedési rátát, másfelől árarányokat és kamatlábat. Tudjuk, hogy a Leontief-modellekből levezethetők termelési szintek és árrendszerek. Ugyancsak ismeretes, hogy a matematikai programozási feladatok számottevő részében van primális és duális megoldás, azaz, tevékenységi szintek és árnyékárrendszerek.

Bródy az ismert dualitási összefüggéseket kiegészíti eddig nem-ismertekkel is. A mátrixok sajátvektorainak, illetve sajátértékeinek ad közgazdasági interpretációt, s ezek segítségével jut el a ráfordítások és kibocsátások mátrixaihoz tartozó, azokkal konform értékelési rendszerekhez, vagy ha úgy tetszik, árrendszerekhez. Amint azt már az előbbiekben is hangsúlyoztam: ez könyvének egyik új, fontos, eredeti hozzájárulása a matematikai közgazdaságtudományhoz.

Bródy figyelemre méltó és elgondolkodtató módon mutat rá arra, hogy rokonság van egyfelől a munkaértékelmélet használati érték-érték fogalompárja, másfelől a matematikai-közgazdasági egyenletrendszerek dualitási összefüggései között. A tanulmány korábbi kritikusai rámutattak: lehet, hogy Bródy eltúlozza azt a pluszt, amit Marx adott éppen ezen a területen elődeinek, Smithnek és Ricardonak az elméletéhez. Az is lehetséges, hogy kissé túlméretezi Marx prioritásának hangsúlyozását a szorosabb értelemben vett dualitás felfedezésében. Túlméretezi, mert — mint említettem — a dualitás fogalma a legtöbb közgazdász tudatában kifejezetten *matematikai* egyenletrendszerek szimmetriatulajdonságaihoz kapcsolódik. Meggyőzőbb lenne prioritás helyett szellemi előfutárságról beszélni; a használati érték-érték fogalompár és a modern dualitási tételek azonossága helyett csupán eszmei rokonságot, analógiát emlegetni. Itt azonban inkább fogalmazási árnyalatokról van szó, s Bródy szereti túlexponálni gondolatait. Ami a lényeget illeti: Bródy legalábbis engem meggyőzött arról, hogy erős analógia áll fenn; a szellemi rokonság szoros.

Hadd tegyem azonban mindjárt hozzá: éppen Bródyt olvasva világosodott meg számomra, hogy az ismert dualitás-tételek nem válhatnak egy valósághű árelmélet formális modelljeinek gerincévé. Tudom, hogy ezzel a kijelentéssel egyszeriben egy igen széles áramlattal találom magam szemközt. Bródytól Kantorovicsig, Neumanntól Arrow-ig és Debreu-ig. Mégis szeretném kifejteni ellenérveim lényegét, mégpedig Bródy modelljein illusztrálva.

Bródy primális modelljeiben kizárólag *strukturális* egyenletek jelennek meg. Meghatározott outputokhoz meghatározott inputok szükségesek. Hadd hanyagoljam el ennek kapcsán azt a kérdést, vajon a Bródy-féle egyenletek jól vagy rosszul tükrözik-e a szóban forgó strukturális összefüggéseket. Nyilván nem nagyon jól, de nem is nagyon rosszul. A modell zártsága, a kívülről adott korlátoktól, szűkösségektől, kiinduló állapotoktól való tökéletes elvonatkoztatás bizonyára erős megszorítást jelent, az árelmélet, a racionális gazdasági döntésre való orientáció szemszögéből is. Hadd tekintsek azonban most el a Bródy-modelleknek ettől a tulajdonságától, mert további érvelésem szempontjából nem lényeges. Nyugodtan kiindulhatok akár abból is, hogy Bródy egyenletei megközelítésként elfogadhatóak, mint a gazdaság strukturális modelljei. Akkor is elmondható róluk: semmiképpen sem vállalkoznak másra, mint *reál*folyamatok — termelés, beruházás, forgalom, fogyasztás, felhasználás — összefüggéseinek leírására.

Első megközelítésben azt mondhatnánk: ezek technikai és természeti összefüggések ábrázolásai. Persze, ellene vethető, hogy nem „vegytisztán" technikai relációk; végeredményben emberek döntenek a ténylegesen alkalmazott technológia megválasztásáról. Ráadásul a Bródy-féle zárt modell munkaerő-szektorának ráfordítási koefficienseiben emberek fogyasztási szokásai, életkörülményeik, kulturális színvonaluk tükröződik.

Annyi azonban bizonyos: a Bródy-féle egyenletrendszer nem is törekszik a gazdasági döntéshozók, a gazdasági életben szereplő, cselekvő személyek, emberek, csoportok, kollektívák, rétegek, osztályok jellegzetes viselkedési szabályosságainak leírására. A modellben nincsenek intézmények. Nem ábrázolja az emberek érdekeit, a különböző érdekű emberek konfliktusait és e konfliktusok megoldásait. Nem írja le a gazdaság szereplőinek reakcióit az őket érő impulzusokra; válaszait a kapott információkra. Nem ábrázolja a gazdaság információáramlását. Röviden: nem tartalmaz ún. viselkedési egyenleteket. Ez kizárólag a gazdaság reálszférájának modellje, nem pedig a gazdaság szabályozási-információs szférájának, mechanizmusának modellje.

Márpedig minden valóságos árrendszer valójában csupán egyik része, összetevője egy sok részből, sok összetevőből álló szabályozási-információs rendszernek. Nem beszélhetünk arról, hogy egy árrendszer „jó"-e, „rossz"-e, vagy éppenséggel optimális-e, elősegíti-e a gazdaság szereplőinek helyes orientációját, ésszerű viselkedését, a folyamatok gazdaságosságát, ha kiszakítjuk környezetéből, a szabályozási rendszer egészéből. Csakhogy Bródy dualitási tételei — akárcsak Neumann-é, vagy Kuhn-Tucker-é, ezt teszik.

Úgy gondolom, valóban létezik egy mélyebb, átfogóbb értelmű kettősség a gazdaságban. A reálfolyamatok meghatározott rendszerét csupán velük konform mechanizmusok, információs és szabályozási rendszerek képesek regulálni, működtetni. Utóbbiaknak csak egyik, nem kizárólagos összetevője: az árrendszer. Reméljük, tudományunk minél előbb képes lesz majd formális modellekkel is elemezni ezt a mélyebb, átfogóbb kettősséget. Későbbi kutatások majd kimutathatják, vajon az említett kettősségek nevezhetők-e valamiféle szigorúbb matematikai értelemben vett dualitásnak. Egyenlőre azonban ilyen modellek még nem ismeretesek.

Úgy hiszem, Bródy itt bizonyos fokig visszalép éppen Marxhoz képest, holott az ő elméletét szeretné modellezni. Marx egyik érdeme a közgazdasági elmélet történetében, hogy szociológiai szemléletet vitt a közgazdaságtudományba. Hangsúlyozta, hogy az ő politikai gazdaságtana nemcsak a termelőerőkkel, hanem termelési viszonyokkal, emberi viszonyokkal foglalkozik. Ezzel szemben egy Neumann-modell, vagy egy Leontief-modell de-szociologizált, dehumanizált modell. Kizárólag a termelőerők modellje, s mint ilyen, jól használható — nem pedig a termelési viszonyoké. Márpedig az árrendszer embereket kapcsol össze, emberekre hat, emberek döntéseit befolyásolja, — hatása tehát nem elemezhető az emberi magatartás modellezése nélkül.

Meggyőződésem, hogy a Bródy-féle modelleknek, akárcsak elődei — Neumann, Leontief, Lange, Kantorovics és mások — modelljeinek, *nem* az árelmélet megalapozásában lesz számottevő szerepük, hanem a gazdaság reálfolyamatainak elemzésében.

4. *A modell és a tervezés*

S itt már el is jutottunk a negyedik vitakérdéshez: mi a Bródy-modellek szerepe a tervezésben. Ma már eléggé általánosan elfogadott nézet, legalábbis a higgadtabb magyar matematikai tervezők között, hogy nincsen egyedül üdvözítő modell. Modellrendszerre van szükség. Részben egymást kiegészítő modellekre, amelyek kölcsönösen felhasználják egymás eredményeit. Részben pedig egymással „versenyző" modellekre, amelyek egymás kölcsönös ellenőrzésére, korrekciójára alkalmasak.

Nem hiszem, hogy Bródy modelljeinek centrális szerepük lehet egy tervmodellrendszerben. Feltevéseinek egyrésze ugyanis igen erős. A leginkább megszorító feltevések, amelyek éppen tervezési felhasználásukat korlátozzák: a technológiai választást a modellen kívül kell elvégezni. A modell teljes zártsága, amint azt már hangsúlyoztam, azt jelenti, hogy nincsenek kívülről adott korlátok, szűkösségek, kiinduló állapotok, amelyek behatárolnák a gazdaság pályáját. Így azután a modell nem alkalmas a gazdaság szerkezeti változásainak, input- és outputstruktúrabeli módosulásainak megtervezésére.

De e megszorítások ellenére is a modell hasznos elemzési, ellenőrzési eszköz lehet, főképpen a növekedési ütemek megtervezésében. Amikor kiszámítja a modell alapján levezethető maximális növekedési rátákat, egyúttal megóvhat tervezési munkánk egyik szokásos hibájától, a növekedési ütem gyorsításának túlbecsülésétől.

Noha még számos kérdést érinthetnék, a fenti négy probléma felvetése is elégséges annak jelzésére, miféle vitákat indíthatna el Bródy munkája. A közgazdasági irodalom tele van lapos művekkel, amelyek azért nem találnak ellenállásra az olvasó tudatában, mert nincsen bennük egyetlen ingerlő gondolat sem. Bródy érdeme, hogy izgató, gondolkodásra ösztönző (sőt valósággal kényszerítő) problémákat vet fel; provokál a szó legjobb értelmében. Ezért érdemel figyelmet és alapos tanulmányozást.

KORNAI JÁNOS

DINKELBACH, W: *Sensitivitätsanalysen und parametrische Programmierung.* (Érzékenységi vizsgálatok és paraméteres programozás.) Berlin, 1969. Springer Verlag, 190 p.

A könyv azt a kérdést tekinti át, hogyan alkalmazzuk az érzékenységi vizsgálatokat döntési modellek felállítására és megoldására.

Az első fejezet a döntési modell fogalmának elemzésével, definíciójával kezdődik, ezt követi a modellek csoportosítása. Megkülönböztet statikus modelleket egy célfüggvénnyel (bizonyosság, bizonytalanság, illetőleg kockázat mellett hozott döntések), dinamikus modelleket (determinisztikus döntési folyamatok), és végül statikus modelleket több célfüggvénnyel. A második fejezet a szűk értelemben vett érzékenységi vizsgálat fogalmát ismerteti és magyarázza meg gazdasági példákon. A harmadik a lineáris programozás alapjairól szól.

E bevezető fejezetek után kezdődik a lineáris programozásban alkalmazható érzékenységi vizsgálatok tárgyalása. A kérdés az, hogyan viselkedik a programozási feladat optimális bázismegoldása, ha az egyes koefficiensek változnak. (4. fejezet.) Így vizsgálja a jobboldali korlátvektor, a célfüggvény-koefficiensek és a rendszer mátrixa egyes elemeinek változását. Megoldási módszert ad arra az esetre, ha pótlólagosan új változót vezetünk be, vagy új korlátozó feltételt csatolunk a modellhez. A következő fejezet a paraméteres lineáris programozás problémájával foglalkozik, nagyobbik része a skalárparaméter esetével. Először csak külön-külön vezet be egy paramétert a jobboldali korlátvektorba, a célfüggvény-koefficiensekbe, illetőleg a koefficiens-mátrixba, majd kitér arra, ha egyidejűleg az említett összes koefficienseket egy paramétertől függőnek tekintjük. A fejezet egy része a többparaméteres (vektorparaméteres) esetet tárgyalja, a korlátvektor és a célfüggvény-vektor vonatkozásában.

Legérdekesebbnek az utolsó, hatodik fejezet tűnik. Ez tárgyalja a több célfüggvény esetét és az efficiens megoldás két különböző fogalmára támaszkodik. Az egyik a Charnes és Cooper által bevezetett K-efficiencia, a másik a funkcionális efficiencia. Nagyon érdekes az, amit a szerző a célfüggvények súlyozásának problémájáról ír: „Ha több eredeti célfüggvény súlyozásával előálló (fölérendelt) célfüggvényt maximálunk, a kapott megoldás bizonyos feltételek mellett efficiens lesz minden egyes eredeti célfüggvény vonatkozásában. Csak ebből a szempontból jogosult a célok közötti konfliktusokat súlyozással áthidalni." (159. o.) Ha viszont a célfüggvények között konfliktus van, azaz, az említett feltételek nincsenek kielégítve, akkor a döntési modell tulajdonsoéppen nem tudja megoldani a problémát. Erre az esetre az érzékenységi vizsgálat feladatát a szerző a következőképpen fogalmazza meg: „Egy több célfüggvénnyel rendelkező döntési modell egyértelműen megadhatja az egyes célfüggvények közötti összefüggéseket, meg lehet állapítani, hogy egy célfüggvény szerinti maximálás egy másik célfüggvény maximumának elérését befolyásolja-e és ha igen, milyen erős ez a kölcsönhatás. Más szavakkal: milyen érzékeny az egyik célfüggvény valamelyik másikra vonatkozólag. Ebben a vonatkozásban a paraméteres programozás, mint az efficiens megoldások meghatározásának számítástechnikai segédeszköze működik." (31. o.)

Az egyes témakörök megértését jól segíti a könyv fejezeteinek egymáshoz hasonló szerkezete. Mindegyik a matematikai alapgondolat kifejtésével (definíciók, tételek és bizonyítások) kezdődik, ezt illusztratív numerikus példák követik. A példák második csoportja kevés változóval rendelkező, de gazdaságilag is értelmezett feladatokból áll.

A közgazdasági problémák elemzésében a szerző nem hatol túlságosan mélyre, és így könyve nem bizonyítja a paraméteres programozás széleskörű használhatóságát olyan erővel, mint lehetne. Hiányolható az is, hogy a bemutatott algoritmusok csak a kézi számítás igényeinek felelnek meg, a számítógépi vonatkozások a szerző figyelmén kívül maradtak.

Érdeme a műnek, hogy megközelítően teljes, átfogó képet ad az érzékenységi vizsgálatokkal kapcsolatos jelenlegi tudásunkról, beleértve ebbe azt is, ami a szerző saját eredménye. Korszerű matematikai tárgyalásmódja, pontossága és világos előadása hasznossá teszi mindazok számára, akik döntési modellek tanulmányozásával és megoldásával foglalkoznak.

Tomáš Gál

A KGM-vállalatok IV. 5 éves tervjavaslatának kidolgozása

A KGM Ipargazdasági, Szervezési és Számítástechnikai Intézetét (a továbbiakban: Intézet) bízták meg azzal, hogy a KGM vállalatai IV. 5 éves tervjavaslatát matematikai módszerekkel kidolgozza.

Az első lépésben készülő vállalati modelleknek a vállalati optimumot kellett kifejezniök. A modellek összekapcsolásával végzett további számítások már az alágazati, ágazati és részben népgazdasági optimumra irányuló központi döntéseket készítik elő.

Annak érdekében, hogy két gépipari és egy kohászati ágazati modellt szerkeszthessünk, 70 KGM vállalatot kellett volna a munkába bevonni.

A részvétel önkéntes volt, és így a javasolt vállalatok közül 30 bejelentette, hogy nem kapcsolódik be a munkába. Ezek közül különösen sajnálatos az Április 4. Gépgyár, a Ganz Villamossági Művek, a MOM, az Orion, a Videoton, a Gamma és a Telefongyár kimaradása.

A 30 kimaradó vállalattal szemben 11 új vállalat jelentkezett, s így végül 51 vállalat matematikai modelljét készítettük el.

A tervezett módszer alapgondolata az volt, hogy a távlati tervezés hagyományos módszere és a matematikai módszer kiegészítse egymást, lehetőleg azonos információbázisra épüljön. A kidolgozott modellekkel szinte valamennyi lényeges döntési probléma megoldható;

- termelési
- értékesítési
- fejlesztési
- és a gazdálkodással kapcsolatos egyéb döntési problémákat vizsgálhatunk.

Az alkalmazott modellek szerkezeti felépítése

Valamennyi modell lineáris programozási feladat volt, numerikus megoldásukra GIER-típusú számítógépet használtunk.

A modell változói

a) Termelési változók — arra a kérdésre adnak választ, hogy a termékek közül melyikből mennyit termeljünk 1975-ben.

b) Export változók — arra adnak választ, hogy a termékekből mennyit exportáljunk és melyik piacra.

c) Import változók — arra adnak választ, hogy mennyi és milyen versenyző terméket importáljunk 1975-ben.

d) Beruházási változók — a termékek zárt ciklusos gyártása esetén alkalmaztuk, ha a beruházást egy bizonyos termék termelése érdekében hajtjuk végre. Arra ad választ, hogy hány egységnyi „új" termék érdekében kell a beruházást végrehajtani.

e) Kapacitásfejlesztő változó — a termékek műhelyrendszerű gyártása esetén alkalmazzuk. Arra adnak választ, hogy melyik gépi kapacitásfajtát (homogén gépcsoport) milyen mértékben kell bővíteni.

1. Extenzív fejlesztő változók: — azonos tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a meglevő gépi kapacitások.
2. Intenzív fejlesztő változók: — termelékenyebb gépeket állítanak be, munkát takarítanak meg.

f) Kooperációs változók — gépi kapacitást és létszámot takarítanak meg; a beruházás versenytársai.

g) Hitelnyújtási változók — a beruházási kereteken túlmenő igények kielégítésére szolgálnak.

h) Túlteljesítési változók — a feltételi rendszerbe alsó korláttal beépített célfüggvények túlteljesítését mutatják.

A fentiek az általánosságban alkalmazott változók. Ezeken kívül egyes esetekben alkalmaztunk még:

- összegező változókat
- anyag-alkatrész beszerzési változókat
- anyag helyettesítő változókat, és
- létszám-toborzó változókat.

A korlátozó feltételek rendszere

a) *Termékmérlegek* — előírják, hogy a termékek 1975. évi termelése és importja az export és a belső felhasználás levonása után fedezze az 1975. évi extern szükségletet.
b) *Meglevő termelőberendezések kapacitásának korlátai* — lehetőség szerint homogén gépcsoportokra bontva fejezik ki az 1975. évben rendelkezésre álló kapacitásokat.
c) *Létszámkorlátok* — lehetőség szerint szakmánkénti bontásban tartalmazzák az 1975. évi rendelkezésre álló munkaerőt.
d) *Beruházásokra vonatkozó korlátok* — az igénybevehető különféle beruházási erőforrások felhasználását szabályozzák.
e) *Fedezeti nyereség, szocialista deviza-egyenleg, tőkés deviza-egyenleg, mint korlátozó feltételek* — a hagyományos úton tervezett összegeket alsó korlátként írtuk elő, vagy az optimálás ezek túlteljesítését célozta.
g) *Egyedi korlátok*
— termékenként az export, import,
— termékenként a beruházási változók,
— fajtánként a kapacitásfejlesztések,
— az igénybevehető hitelek.

A célfüggvények

Az elsődleges célfüggvény a fedezeti nyereség maximálása volt. A nyereség tömegének alakulására a következő tényezők hatottak: a programozási egység állandó költségekkel növelt 1975. évi nyeresége, a külkereskedelmi tevékenységből származó többlet-nyereség (veszteség), az intenzív fejlesztés lineárisan változó költségcsökkentő hatása és a beruházási hitel törlesztése.
További célfüggvények voltak: a tőkés devizamérleg vagy a szocialista devizamérleg egyenlegének maximálása.

A számítások néhány eredménye

A matematikai program által elért eredményeket a vállalat hagyományos úton készült tervéhen hasonlítottuk. Néhány vállalat többletnyeresége:

Csepeli Csőgyár	26%
Metallochémia	13%
Qualitál	12%
Budapesti Vegyipari Gépgyár	30,1%
Láng Gépgyár	43%
Hajtómű- és Felvonógyár	49%
Csepel Autógyár	19%
Vörös Csillag Traktorgyár	37%
Elektroakusztikai Gyár	87%
Remix	42%
Mechanikai Művek	26%

A modell és az eredmények használhatósága a szerkezeti felépítéstől, a koefficiensek és a korlátok „jóságától" függ. Amenynyiben a későbbiek folyamán kiderül, hogy az egyes fajlagosok, korlátok megállapítása nem volt tökéletes, vagy pedig időközben az értékek megváltoztak, akkor az adatok módosításával újabb számításokat kell végeznünk.
A modell tehát a vállalatoknak egy olyan alapdokumentumot nyújt, amely időközi javítások, módosítások és kiegészítések után — ismételt futtatással — „hónapra kész" állapotban mutathatja a vállalati optimumot.
A modell újraszámításával egyes újabb problémákat, döntési lehetőségeket is értékelni lehet. Itt elsősorban kereskedelmi tárgyalásokra gondolunk, már a tárgyalások előtt megállapíthatjuk, hogy egy terméket milyen határig érdemes eladni, vagy vásárolni akár a vállalat jelenlegi kapacitása mellett, akár további fejlesztéssel.

Néhány általános tapasztalat

A számítási eredményeken kívül a munka legnagyobb hasznának azt tartjuk, hogy a vállalatok megismerkedtek a matematikai programozás alkalmazásával. A számítások értékelése után az a vélemény alakulhatott ki, hogy a modell módosításával egy sor más, őket érdeklő kérdésre is feleletet kaphatnak.
Fény derül az információs rendszer hiányosságaira is. Nemcsak a matematikai tervezéshez szükséges adatok hiányoztak, hanem még a hagyományos tervkészítéshez szükséges adatok is csak hézagosan állnak a vállalatok rendelkezésére.
Néhány vállalat már meg is bízta az Intézetet információs rendszerének megszervezésével.
A következő lépés az ágazati, alágazati összevont modellek elkészítése lesz a kohászati ágazatra, a gépek, gépi berendezések és a közlekedési eszközök gyártására. A járműipari modell jellegzetessége, előnye a gépgyártóipari és kohászati modellel szemben az, hogy a vállalati modellek majdnem 100%-osan reprezentálják az alágazatot.
A vállalati tervek ágazati, alágazati összehangolásánál a következő főbb célokat tűztük ki:
a) a vállalatok termelési kooperációjának összehangolása;
b) az ágazattal szemben támasztott népgazdasági követelmények kielégítése;

c) a más ágazatoktól származó és korlátozottan rendelkezésre álló erőforrások elosztása.

Az ágazati szintű feladat megoldására a következő módszerek egyikét fogjuk kiválasztani:

a) Direkt megoldás
b) Kicsinyített modell megoldása
c) Dekompozíciós módszer
d) Közelítő módszer.

VEÉR BALÁZS

Az Országos Tervhivatal Számítástechnikai Központja

1968. október 1-el az Országos Tervhivatalban Számítástechnikai Központ alakult. Feladata a korszerű tervezés számítástechnikai munkáinak ellátása, makroökonómiai modellek megoldása. Saját géppel a Központ még nem rendelkezik, de felkészül a később beszerzendő gép fogadására. A közbeeső időben idegen gépeket vesz igénybe. Résztvesz annak a nagyméretű matematikai programozási modellnek a megoldásában is, amelyet az OT Közgazdasági Főosztálya és a Tervgazdasági Intézet a negyedik ötéves terv számításaihoz kidolgozott.

Az Econometric Society II. világkongresszusa

Az Econometric Society 1970. szeptember 9—14 között tartja II. világkongresszusát az angliai Cambridge-ben. A magyar részvétel előmozdítására a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának vezetősége *magyar intézőbizottságot* alakított. A bizottság tagjai: KORNAI JÁNOS, (MTA Közgazdaságtudományi Intézet) aki a II. világkongresszus programbizottságának is tagja, KOVÁCS ILONA, (MTA Közgazdaságtudományi Intézet) a Szakosztály titkára, MARTON ÁDÁM, (Központi Statisztikai Hivatal) a Society magyarországi képviselője és SZAKOLCZAI GYÖRGY (INFELOR).

A Bizottság kéri mindazokat, akik a kongresszuson előadást szeretnének tartani, küldjék el előadásuk címét és rövid angol nyelvű tartalmi kivonatát 1970. január 15-ig Marton Ádámnak.

Pályázat

Az Econometric Society és a Magyar Közgazdasági Társaság előreláthatóan fedezni tudja két-három magyar matematikai közgazdász számára az 1970. évi Cambridge-i világkongresszuson való részvétel költségeit. Előnyben részesülnek azok, akik a kongresszuson előadást tartanak. A kongresszus magyar intézőbizottsága arra törekszik, hogy a küldöttek között legalább egy fiatal kutató legyen.

Pályázatot hirdetünk mindazok számára, akik ezt a kiküldetési lehetőséget igénybe kívánják venni. A pályázók rövid tudományos életrajzukat, továbbá a kongresszusra szánt előadásuk címét és rövid kivonatát küldjék meg 1970. január 15-ig MARTON ÁDÁMNAK (Központi Statisztikai Hivatal).

Az Econometric Society 1969. évi európai konferenciájára meghirdetett pályázat eredménye

A SZIGMA 1969. évi 1. számában a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai — Közgazdasági Szakosztálya pályázatot tett közzé egy vagy két matematikus — közgazdász szakember részvételének biztosítására az Econometric Society 1969. évi konferenciáján.

FORGÓ FERENC, *a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai Tanszékének tanársegéde* volt az egyetlen pályázó és ő el is nyerte a kért devizatámogatást a brüsszeli konferencián való részvételre.

A SZIGMA olvasóinak ankétja

A Magyar Közgazdasági Társaság matematikai-közgazdasági szakosztálya és a SZIGMA szerkesztősége 1970 január hó 18.-án, csütörtökön d. u. 3 órakor olvasói ankétot rendez a Kossuth Klubban (VIII. ker. Muzeum utca 7. sz.)

Minden olvasónkat szivesen látjuk.

CONTENT

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

Ára: 12,— Ft

Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL