SZIGMA

Matematikai Közgazdasági folyóirat

A Közgazdasági Szemle társlapja

E SZÁM SZERZŐI:

Bod Péter, az MTA Matematikai Kutató Intézetének főmunkatársa, **Glattfelder Péter,** az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének segédmunkatársa, **Kovács Géza,** az Élelmiszeripari Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézet tudományos munkatársa, **Kovács László Béla,** az MTA Matematikai Kutató Intézetének munkatársa, **Simon András,** a Konjunktúra- és Piackutató Intézet főelőadója, **Georg Wintgen,** a Humboldt-egyetem (Berlin) Közgazdasági-kibernetikai Szekciójának tanára.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor u. 7. — Telefon: 127—294

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓnál, Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

MNB egyszámlaszám: 46., csekkbefizetési számla: 05.915.111—46; az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTban, Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612; A POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODA 1. sz. HÍRLAPBOLTJÁban, Budapest V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban,* csekkszámlaszám: egyéni: 61 257, közületi: 61 066. MNB egyszámlaszám: 8.

Ára: 12,— Ft. Előfizetés egy évre: 40,— Ft

Georg Wintgen

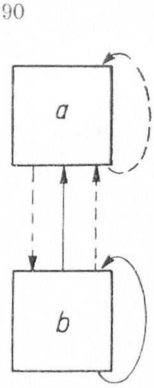
A kibernetikai rendszer fogalma és alkalmazása a közgazdaságtanban

A kibernetikai rendszer fogalommeghatározásának vitájában fő fogalomként két különböző általános rendszer fogalom terjedt el. Az egyik, nevezzük itt röviden rendszernek, a rendszert elemek strukturált összességének tekinti, míg a másik a rendszernek azt a képességét fejezi ki, hogy ingerekre reakciókkal válaszol. A rendszer ilyen módon történő meghatározását, melyet Greniewski [1] relatív izolált rendszernek nevez, mi O. Lange után [3] aktív elemnek nevezzük. A továbbiakban mind a két fent említett fogalmat a rendszert és az aktív elemet egzaktan definiáljuk, majd felállítjuk a kibernetikai rendszer egzakt definícióját, amelyben mind a két fogalom összeolvad.

Egzakt definíció alatt halmazelméleti definíciót értünk. A halmazelméleti fogalom élessége együtt jár azzal, hogy bizonyos tulajdonságokról, melyeket elképzelünk akkor, amikor rendszerről, illetve kibernetikai rendszerről beszélünk, le kell mondanunk. Megvan azonban az az előnye, hogy teljesen egyértelmű és biztos alapot ad a tudományos nyelvben kifogástalan terminológia felállítására, valamint különböző kibernetikai rendszerekre vonatkozó tételek matematikai levezetéséhez. Továbbá megadunk néhány általánosítást és specializációt a rendszerrel és a kibernetikai rendszerrel kapcsolatban, amelyek a közgazdasági rendszerek analízise és konstrukciója szempontjából jelentősek lehetnek.

Végül megvizsgálunk egy kibernetikai alapmodellt, egy egyszerű társadalmi gazdasági rendszerre, amelynek segítségével az ösztönzés problémáját kíséreljük megközelíteni. A rendszerfogalmak bevezetéséhez egy üzem erősen leegyszerűsített modelljéből indulunk ki. Az üzem egy „a" irányítószervből és egy „b" termelőrészlegből áll. Tekintsünk el minden sajátosságtól és akkor marad a tény, hogy egy M = {a, b} két elemű halmazzal van dolgunk, ahol M a vizsgált rendszer elemhalmaza. Rendszerünknek az elemhalmazon kívül struktúrája is van, amely abban áll, hogy az elemek egymással fizikailag (anyagi vonatkozásban) és információs szempontból össze vannak kapcsolva. A fizikai összekapcsolás b-től a-ig és b-től b-ig tart. Termékekkel történő ellátást jelent. Tekintsünk el az összekapcsolási viszonyok speciális természetétől és akkor marad az, hogy ez tulajdonképpen egy R_p reláció, amelyet M-ből vett rendezett elempárok halmazaként definiálhatunk: $R_p = \{[b, a], [b, b]\}$. (Az x elem akkor van y elemmel R_p relációban, ha $[x, y] \in R_p$. $[x, y] \neq [y, x]$ ez az, ami a rendezett $[x, y]$ párt megkülönbözteti az $\{x, y\}$ halmaztól.) Az információs kapcsolatok egy második relációt $R_i = \{[a, a], [a, b], [b, a]\}$ alkotnak (lásd 1. ábra).

Rendszerünk struktúrája az $S = [R_p, R_i]$ rendezett pár, ahol R_p és R_i az M fölött definiált relációk, az egész rendszert pedig a $\Sigma = [M, S]$



1. ábra

rendezett párként definiáljuk, amit rendezett hármasként is írhatunk $[M, R_p, R_i]$.

Általánosan definiáljuk a következőket:

1. definíció. Egy *rendszer* rendezett pár $[M, S]$, amely az M halmazból és az $S = [R_1, R_2, \ldots]$ sorozatból áll, ahol R_i M fölötti relációk. M-et a rendszer *elemhalmazának* S-et pedig a rendszer *struktúrájának* nevezzük. Hasznos lehet kétértékű relációk mellett többértékűeket is figyelembe venni.

Háromértékű reláció pl. három üzemrész közötti reláció, amely azt fejezi ki, hogy az első részleg a harmadiknak szóló közléseit a másodikon keresztül bonyolítja le.

Az 1. definícióból kiindulva alapvető rendszerelméleti fogalmakat, összefüggéseket és műveleteket definiálhatunk, mint pl. homomorfia és izomorfia, környezet, rendszerek egyesítése és közös része, részrendszer, parciális rendszer és aggregáció.

2. definíció. Legyen adva két rendszer $[M, S]$ és $[M', S']$, ahol $S = [R_1, \ldots, R_m]$ és $S' = [R'_1, \ldots, R'_m]$ R_i, ill. R'_i n_i, ill. n'_i értékű relációk M, ill. M' fölött; $[M', S']$ *homomorf* az $[M, S]$-sel, ha $m = m'$, $n_i = n'_i$ $(i = 1, \ldots, m)$ és ha létezik M-nek olyan egyértelmű f leképzése M'-re, hogy az $[a_1, \ldots, a_{n_i}] \in R_i$-ből következik, hogy $[f(a_1), \ldots, f(a_{n_i})] \in R'_i$.

$[M', S']$ *erősen homomorf* $[M, S]$-sel, ha homomorf $[M, S]$-sel és ezenkívül létezik minden i-re az M' elemeinek n_i rendezett csoportjához — mely csoport $[a'_1, \ldots, a'_{n_i}] \in R'_i$ — legalább egy olyan n_i rendezett csoport, amely $[a_1, \ldots, a_{n_i}] \in R_i$ és fennáll $a'_1 = f(a_1), \ldots, a'_{n_i} = f(a_{n_i})$.

$[M', S']$ *szigorúan homomorf* $[M, S]$-sel, ha homomorf $[M, S]$-sel és ha minden i-re az $[f(a_1), \ldots, f(a_{n_i})] \in R'_i$-ből az $[a_1, \ldots, a_{n_i}] \in R_i$ következik.

$[M,' S']$ *izomorf* $[M, S]$-sel, ha létezik M-nek megfordítható, egyértelmű és erősen homomorf leképzése M'-re.

Példák:

Az $[\{A, B, C\}, \{[A, B], [B, C]\}] \sim [\{a, b\}, \{[a, b], [b, a], [b, b]\}]$ homomorfizmus, amelyet az $f(A) = a$, $f(B) = f(C) = b$ leképzéssel hozunk létre nem erős, mivel a második rendszerben levő $[b, a]$ rendezett párnak nincs megfelelője az első rendszerben. Az ugyanezen leképzéssel előállított

$$[\{A, B, C\}, \{[A, B], [B, C]\}] \sim [\{a, b\}, \{[a, b], [b, b]\}]$$

homomorfizmus erős ugyan, mivel az $[a, b]$ párnak az $[A, B]$ és a $[b, b]$ párnak a $[B, C]$ pár felel meg, de a $[B, B]$ pár nem szerepel az első rendszerben. Csak ha bevesszük az első rendszerbe az összes $[a, b]$ és $[b, b]$-nek megfelelő párokat, lesz a homorfizmus szigorú, így tehát az

$$[\{A, B, C\}, \{[A, B], [A, C], [B, B], [B, C], [C, B], [C, C]\}] \sim$$
$$\sim [\{a, b\}, \{[a, b], [b, b]\}$$

szigorú homomorfizmus.

A csoportelmélettel ellentétben két rendszer kölcsönös homomorfiájából nem lehet azok izomorfiájára következtetni. Csak az alábbi *tétel* érvényes:

Ha $[M', S']$ homomorf $[M, S]$-sel és $[M, S]$ homomorf $[M', S']$-sel, valamint M és M' véges halmazok, akkor $[M, S]$ és $[M', S']$ izomorf.

Az izomorfia és homomorfia a valóságos rendszerek és azok modelljei közötti kapcsolatokat precizírozzák. Az izomorfia a modellezett rendszer hű leképzését adja. A homomorfia pedig annak egyszerűsített mását szolgáltatja. Látjuk, hogy csak az erős és még inkább a szigorú homomorfia alkalmas a modellezéshez, mert egy gyengén homomorf modellben lehetnek olyan kapcsolatok, amelyeknek az eredeti rendszerben nincs megfelelőjük. Az erősen homomorf modell kapcsolatait mindig kimutathatjuk az eredetiben is, ezek azonban nem állnak fent valamennyi eredeti pár között, amelyek a megfelelő képpárhoz tartoznak. Ez csak a szigorú homomorfiánál áll fenn.

A rendszer környezetének fogalmát a halmazelméletben ismert komplementer halmaz fogalmára támaszkodva definiáljuk. A halmazelmélet teljeshalmaz I, fogalmához hasonlóan bevezetjük az *univerzális rendszert* $[I, Q]$, ahol az *univerzális struktúra* $Q = [Q_1, Q_2, \ldots]$ az I fölötti valamennyi relációt magába foglalja. Az univerzális Q struktúrát csak olyan bonyolultságban tételezzük fel, hogy az a vizsgálat szempontjából érdekes valamennyi relációt tartalmazza. Így tehát az univerzális rendszer éppen úgy, nem egyértelműen meghatározott fogalom, mint a teljeshalmaz fogalma.

A lényeg csak az, hogy eléggé átfogóan válasszuk meg és hogy az a vizsgálat folyamán állandó maradjon.

Egy rendszer környezetének definiálásához szükségünk van az M felett definiált n értékű $R \subseteq M \times M \times M \times \ldots$ relációnak az M halmaz N részhalmazára vonatkozó *korlátozása* $R \mid N$ fogalmára. Ez alatt az $R \cap N \times N \times \times N \times \ldots$, közös részt értjük, ami N felett definiált reláció. Ennek megfelelően írhatjuk $S \mid N = [R_1, R_2, \ldots] \mid N =_{\text{Def}} [R_1 \mid N, R_2 \mid N, \ldots]$. Ezen megállapítás után definiáljuk:

3. definíció. Egy $[M, S]$ rendszer *környezete* az $[\bar{M}, \bar{S}]$ rendszer, ahol

$$\bar{M} \cup M = I, \ \bar{M} \cap M = \emptyset \text{ és } \bar{S} = Q \mid \bar{M}.$$

A halmazelmélethez analóg módon képezhetjük rendszerek egyesítését és közös részét is. A nehézség abból adódik, hogy két rendszer egyesítésénél figyelembe kell venni azokat a relációkat, amelyek az első és a második rendszer elemei között állnak fenn, de nem adódnak a rendszerek struktúráiból. Hasonló probléma lép fel a közös rész képzésénél is. Ezeket a nehézségeket feloldhatjuk, amennyiben a két művelet definíciójánál az univerzális Q struktúrát vesszük alapul.

4. definíció. Két rendszer $[M_1, S_1]$ és $[M_2, S_2]$ egyesítését és közös részét az

$$[M_1, S_1] \cup [M_2, S_2] =_{\text{Def}} [M_1 \cup M_2, Q \mid M_1 \cup M_2],$$
$$[M_1, S_1] \cap [M_2, S_2] =_{\text{Def}} [M_1 \cap M_2, Q \mid M_1 \cap M_2]$$

rendszerekkel definiáljuk.

A gráfelmélethez hasonlóan érvényes:

5. definíció. Egy $[M, S]$ rendszer részrendszere alatt az $[N, S \mid \mathrm{N}]$ rendszert értjük, ahol $N \subseteq M$. Az $[M, S] = [M, S_1, S_2, \ldots]$ rendszer parciális rendszere alatt az $[M, R] = [M, R_1, R_2, \ldots]$ rendszert értjük, ahol $\emptyset \subseteq R_i \subseteq S_i$, $(i = 1,2, \ldots)$. Az $[M, S] = [M, S_1, S_2, \ldots]$ rendszer parciális részrendszere alatt az $[N, R] = [N, R_1, R_2, \ldots]$ rendszert értjük, ahol $N \subseteq M$ és $R_i \subseteq \subseteq S_i \mid N$, $(i = 1, 2, \ldots)$.

A közgazdaságtan számára fontos aggregáció problémájának kezeléséhez szükségünk van a rendszer felbontásának fogalmára. Egy $[M, S]$ rendszer *felbontása* alatt a rendszernek véges sok diszjunkt részhalmazból álló részrendszerek egyesítéséből történő előállítását értjük, azaz

$$[M, S] = [M_1, S_1] \cup \ldots \cup [M_n, S_n], \text{ahol } S_i = S \mid M_i, M_i \cap M_k = \emptyset,$$

$(i, k = 1, 2, \ldots, i \neq k)$. Egy rendszer minden egyes felbontásához tartozik egy aggregáció.

6. definíció. Az $[M, S] = [M_1, S_1] \cup \ldots \cup [M_n, S_n]$ felbontáshoz tartozó *aggregáció* egy olyan $[M', S']$ rendszer, amelynek M' elemhalmaza az összes $m_i = [M_i, S_i]$ rendszerekből áll és amelynek S' struktúrája éppen annyi relációt tartalmaz, mint az S, éspedig S minden relációjához egy megfelelő R'-t — $[m_i, m_k, \ldots] \in R'$ — akkor ha létezik egy $x_i \in M_i$; egy $x_k \in M_k, \ldots$ úgy hogy $[x_i, x_k \ldots] \in R$.

Egy rendszer minden aggregációja erősen homomorf az adott rendszerrel. Egy $[M, S]$ rendszer minden erősen homomorf leképzésének egy $[M', S']$ rendszerre, megfordítva megfelel az $[M, S]$ egy aggregációja és egy felbontása, ahol a részhalmazok $M_i \subseteq M$, az M elemeiből állnak, amelyeket az M' ugyanazon elemére képezünk le.

Ezzel a fogalom alkotással ugyan nem oldjuk meg a konkrét esetek komplikált aggregációs problémáit, de mindenesetre hozzájárulunk e problémák fogalmi tisztázásához, ami a gyakorlati aggregációs kérdéseknél is hasznos lehet.

Az 1. definíció szerinti rendszer fogalom fontos általánosítása az asszociatív rendszer, amelynél a relációk nem az M elemhalmaz, hanem a P/M halmaz, valamennyi részhalmaza fölött vannak definiálva, és az erősen asszociatív rendszer, ahol a relációk a részrendszerek között állnak fenn. E fogalmak segítségével többek között leírhatók az összrendszer hatásai a részrendszerekre, ami szociológiai rendszerekben fontos lehet. Továbbá hasznos változó rendszereket is figyelembe venni, amelyekben az elemhalmaz és a struktúra is az idő függvényei. Bizonyos nehézséget jelentenek a konstans struktúrával és változó elemhalmazzal bíró rendszerek, mivel az 1. definíció szerint a struktúrát az elemhalmaz felett definiáljuk. Ebben az esetben a struktúrát az L, üres helyekből álló halmaz felett definiáljuk, amit az I L-be történő változó leképzése segítségével elemekkel töltünk meg.

A rendszer fogalom ezen általánosításaival kapcsolatos részletek az [5] munkában találhatók.

Tekintsük vállalati modellünk b elemét reakcióképes objektumnak. Ez inputként bizonyos nyersanyagokat kap a rendszer környezetétől, és információkat az a-tól. Átalakítja azokat és válaszként termékeket és információkat ad a környezetnek, illetve a-nak. Az input itt egy időtől függő $x(t)$ vektor és a válasz egy időtől függő $y(t)$ vektor. Más input függvényhez általában más válaszfüggvény tartozik. Az objektum viselkedése teljesen le van írva, ha minden lehetséges input függvényre adva van a válasza. Ilyen szemlélet mellett a b-t aktív elemként kezeljük.

Általánosan definiáljuk a következőket:

7. definíció. Az *aktív elem* egy rendezett hármas $[E, A, F]$, ahol E, ill. A függvényekből álló halmazok, amelyek egy rendezett halmazt T (az időpontok halmaza) az X (bemeneti halmaz), illetve az Y (kimeneti halmaz) halmazra képeznek le. Az E halmazt *bemenetnek* nevezzük, elemei bemeneti függvények vagy bemeneti jelek. Az A halmazt válasznak nevezzük. Elemei válasz függvények, válasz jelek. F egy operátor, amely a bemeneti és a válasz függvények közötti kapcsolatot teremti meg. F-t az aktív elem viselkedésének nevezzük. Ha F egyértelmű leképzése E-nek az A-ra, akkor az aktív elemet *determináltnak* nevezzük, ha F egyértelmű leképzése E-nek az A összes részhalmazaiból álló $P(A)$ halmazra akkor az aktív elemet *nem-determináltnak* nevezzük, ha F egyértelmű leképzése E-nek, az A fölötti valószínűség eloszlások halmazára $W(A)$, akkor az aktív elemet *sztochasztikusnak* nevezzük.

Általában az X bemeneti halmaz elemei x vektorok, $x_1, x_2, \ldots$ komponensekkel. Ekkor legyen $X = X_1 \times X_2 \times \ldots$ és ennek megfelelően $E = E_1 \times \times E_2 \times \ldots$. Az E_i halmazok mindegyikét az aktív elem egy *inputjának*, az X_i halmazt pedig az E_i inputok bemeneti halmazának nevezzük. Az A választ felbontjuk az A_z *állapotra* és az A_a, *kibocsátásra*, $A = A_z \times A_a$. Mindkét halmazt tovább bonthatjuk, vagyis $A_z = A_{z1} \times A_{z2} \times \ldots$ és $A_a = A_{a1} \times A_{a2} \times \ldots$ Az A_{zi}, ill. A_{ai} az állapot, ill. a kibocsátás komponensei és ha általában a választ az $A = A_1 \times A_2 \times \ldots$ formában bontjuk fel, akkor az A_k-t az aktív elem k-adik *output*jának nevezzük. Az E_i inputok X_i bemeneti halmazához hasonlóan vizsgáljuk, az A_k outputok válasz halmazát, továbbá az Y_z állapot halmazt és az Y_a kibocsátás halmazt, valamint ezek komponenseit.

Az aktív elem itt bevezetett fogalma még annyira általános, hogy viselkedése bizonyos körülmények között paradox lehet. Egy determinált aktív elem válasz függvényének értéke egy bizonyos t_0 időpontban egyértelműen meghatározott a bemeneti függvény teljes lefutása által, vagyis adott esetben a bemeneti függvény olyan értékei által is, amelyeket csak t_0-nál későbben adunk meg. Felmerül az az igény, hogy az aktív elemek egy szűkebb osztályát vizsgáljuk, amelyek nem mutatnak ilyen paradox viselkedést. Ilyen osztályt alkotnak a Greniewski által bevezetett prospektív rendszerek, amelyeket mi prospektív aktív elemeknek fogunk nevezni. (Az automaták elméletében ebben az összefüggésben egyenesen retrospektív operátorokról beszélnek, lásd [4].) Prospektív aktív elem esetén egy bemeneti függvény képének értéke egyértelműen meghatározott a bemeneti függvény t időpontbeli és t előtti valamennyi időpontbeli értéke által. A bemeneti függvény t utáni időpontokra vonatkozó értékei nincsenek befolyással a kép t időpontbeli értékére. A definíciót a következő módon fogalmazhatjuk meg:

8. definíció. Az $[E, A, F]$ aktív elemet *prospektívnek* nevezzük akkor, ha minden $t \in T$-re és E bármely két elemére, $x_1(t)$ és $x_2(t)$ érvényes; hogyha $x_1(\tau) = x_2(\tau)$ minden $\tau \leq t$-re, akkor $F(x_1)\,(t) = F(x_2)\,(t)$.

Különösen jól kidolgozott példa prospektív determinált aktív elemre a véges absztrakt automata. A bemeneti függvények itt egy véges bemeneti *ábc*-ből X, vett sorozatok $x_1, x_2, \ldots$ Az állapot és kibocsátás függvények szintén véges *abc*-ből Z, Y származó sorozatok. Ha adva van egy ilyen automata kezdőállapota z_1, akkor a kibocsátás és az állapot függvények rekurzív összefüggések segítségével adódnak:

$$y_t = g(x_t, z_t), \quad z_{t+1} = h(x_t, z_t), \qquad t = 1, 2, \ldots,$$

ahol g és h az automata kibocsátás, illetve átmenet függvényei [4].

Az aktív elemek hatást gyakorolnak egymásra annyiban, hogy egy elem output függvényeit input függvényként visszük át más elemekre. Ezt az eljárást nevezzük összekapcsolásnak.

9. definíció. Az a aktív elemet a b aktív elemmel egyszerűen sorbakapcsoltnak nevezzük, ha az a egy $y_k(t)$ outputjának értéke megegyezik a b egy $x_i(t)$

inputjának értékével. Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy a és b az $R(k', i)$ összekapcsolási relációban áll egymással. Az összekapcsolás fennállhat egy időpontra $t = t_0$, mindent t-re egy $t_1 \leq t \leq t_2$ időintervallumban vagy minden $t \in T$-re. Olyan összekapcsolásokat is vizsgálhatunk, amelyekben kettőnél több elem szerepel. Ehhez kettőnél több értékű relációkra van szükség. Az összekapcsolási reláció következő általános fogalmát vezetjük be.

10. definíció. Az *összekapcsolási reláció* több aktív elem közötti reláció, amely az elemek bizonyos, az indexük által adott inputjainak és outputjainak az azonosságát jelenti.

Így pl. $[a, b, c] \in R(1', 2, 4)$ az a aktív elem 1. outputjának azonosságát jelenti a b elem 2. és a c elem 4. inputjával.

Mint az egyszerű sorbakapcsolásnál, itt is megkülönböztetünk időpontra, időintervallumra vonatkozó és tartós összekapcsolást.

Mindezek után most már módunkban van a kibernetikai rendszert igen általánosan és egzaktan definiálni:

11. definíció. A *kibernetikai rendszer* egy $[M, S]$ rendszer, amelynek M elemhalmaza aktív elemekből áll, és amelynek $S = [R_1, R_2, \ldots]$ struktúrája az M fölötti összekapcsolási relációk sorozata. Egyetlen aktív a elemet is kezelhetünk kibernetikai rendszerként. Ezt a rendszert a következő formában írjuk fel: $[\{a\}, \emptyset]$. Megfordítva, bizonyos kibernetikai rendszereket is kezelhetünk aktív elemként, éspedig azokat a kibernetikai rendszereket, amelyekben van legalább egy szabad, azaz egy összekapcsolásban sem szereplő inputtal, és legalább egy szabad outputtal rendelkező aktív elem. Ebben az esetben a szabad inputok összessége a vizsgált kibernetikai rendszernek megfelelő aktív elem bemenete, a szabad outputok összessége pedig az elem válasza. A létrejövő aktív elem viselkedése azonban nem adódik egyértelműen és ellentmondás mentesen, akármilyen aktív elemek tetszőleges összekapcsolása esetén. A 11. definíció az automaták elmélete séma fogalmának egy általánosítása (lásd [4], 84. oldal). Ott egy séma korrekt szervezettségének fogalma van kifejtve. Egy korrektül szervezett séma együttes viselkedése egyértelműen és ellentmondás mentesen adódik az egyes elemek viselkedéséből. Ezt a problémát az általános kibernetikai rendszerek esetében még meg kell oldani.

A közgazdaságtan kibernetikai rendszereinek elemzésekor célszerűen közgazdasági rendszerekből indulunk ki, amelyek az anyag társadalmi mozgásformájának alkotó részei. Ezeket a rendszereket *társadalmi-gazdasági rendszerek*nek nevezzük. Ezek tartalmilag a következő három tulajdonsággal jellemezhetők:

1. A rendszer embereket foglal magába, pontosabban a rendszernek legalább egy eleme ember vagy egy rendszer, amely kellő mélységű felbontás esetén elemei között embert tartalmaz.

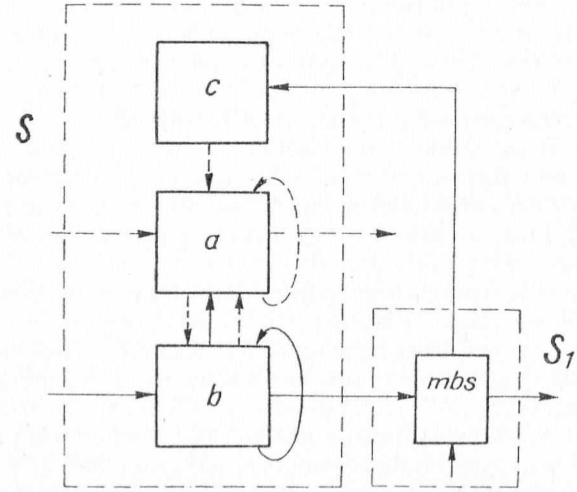
2. A rendszer „termel", ez azt jelenti, hogy a környezetnek legalább egy anyagi vagy információs terméket szállít, amely egy más rendszer igényének kielégítésére szolgál.

3. A rendszer „fogyaszt", ami azt jelenti, hogy saját igényének kielégítésére átvesz más rendszerből legalább egy anyagi vagy információs terméket.

Példaként társadalmi-gazdasági rendszerre felhozhatjuk a vállalatot és annak részrendszereit, le egészen az egyes munkásig, mint termelőig, illetve fölérendelt rendszereit fel egészen a népgazdaságig, továbbá kereskedelmi és szállítási vállalatokat, bankokat és piacokat. A munkaerő újraelőállítására szolgáló intézményeket, mint pl. kórházak, iskolák és az egyes háztartások is társadalmi-gazdasági rendszernek számítanak. Ezzel szemben nem társadalmi-gazdasági rendszer egy gép vagy géprendszer vagy akár egy egész automatizált üzem, ha nincs legalább egy ember felelősként hozzárendelve. A társadalmi-gazdasági rendszer fogalma relatív, a vizsgálattól függ, hogy egy adott objektum társadalmi-gazdasági rendszernek tekintendő-e vagy sem. A munkás és a család elsősorban biológiai rendszerek. Ezért beszélünk mi a munkásról mint termelőről, ami alatt a munkás a munkahelyén, szerszámaival vagy gépével együtt értendő. A család akkor lesz társadalmi-gazdasági rendszer, ha azt mint háztartást tekintjük, azaz ha fogyaszt és újratermeli egyes tagjai munkaerejét, vagy a jövő dolgozóit, gyerekeket nevel.

A társadalmi-gazdasági rendszerre megadható egy modell, amelyben a rendszer alapvető kibernetikai összefüggéseit és a környezethez való viszonyát írjuk le, erősen leegyszerűsített formában. Ezt a modellt a *társadalmi-gazdasági rendszer kibernetikai alapmodelljének* nevezzük. Ez a Greniewski-féle ,,Informatív-fizikai standardháló" [2] kibővítése. Ez egy kibernetikai rendszer (amelynek struktúráját az 1. ábrán mutattuk be), ahol az irányítószerv a információkat kap a környezettől, illetve ad át annak, a kivitelező szerv b pedig egy inputtal és egy outputtal van a környezettel fizikailag összekapcsolva.

A Greniewski-féle rendszert, amely éppúgy lehet önvezérlésű gép, mint egy élő szervezet vagy társadalmi szervezet, kibővítjük oly módon, hogy figyelembe vesszük a társadalmi-gazdasági rendszer első tulajdonságát: a rendszer embereket foglal magába. Egy önvezérlésű gép vezérlő berendezésének beindítása kevésbé bonyolult feladat, mint egy embert helyes cselekvésre ösztönözni. A vezérlő berendezés — jó konstrukciót és az előre nem látható zavarokból adódó hibákat is feltételezve — helyesen viszi véghez a konstruktőr által tervezett funkciókat. Az azonban, hogy egy ember helyesen ,,funkcionál"-e nemcsak képességeitől, hanem akaratától is függ. Ezért rá megfelelő ösztönző intézkedések segítségével hatást kell gyakorolni, hogy így az emberből vagy általánosabban egy társadalmi-gazdasági rendszerből helyesen funkcionáló rendszert csináljunk. Ezeket az összefüggéseket először Gerhardt elemezte kibernetikailag és használta fel effektív ösztönzési rendszerek kidolgozásánál [6]. Gerhardt szerint a társadalmi-gazdasági rendszerek vagy azok bizonyos részrendszerei potenciálisan ultra- vagy multistabil rendszerek; azonban csak ösztönzés következtében válnak ténylegesen ultra- vagy multistabillá. Ha ezeket a gondolatokat lehetőleg egyszerű módon figyelembe akarjuk venni, akkor az aktív elemet két elemre kell bontani, ezek közül az egyik — ezt ismét a-val jelöljük — a vezérlési vagy irányítási funkciókat gyakorolja, míg a másik, c, a motiváció funkcióját veszi át. Így adódik a társadalomgazdasági rendszer kibernetikai alapmodellje, ezt a második ábrán mutatjuk be, ahol a az irányítórendszer, b a kivitelező szerv, c pedig a motivációs centrumot jelenti. A b-t kivitelező szervnek és nem termelő szervnek nevezzük, mivel b terméke információ is lehet. A motivációs centrumra ösztönző hat, amely lehet fizikai vagy informatív (anyagi vagy eszmei ösztönzés). A társadalmi-gazdasági rendszer három szervből a, b és c tevődik össze, és S-sel jelöljük. Az a, b és c három különálló blokkba történő rajzolása nem azt jelenti, hogy ezek a valóságban helyileg elkülönülnek. Így pl. c igen gyakran a-val, néha b-vel van egyesítve. Itt arról van szó, hogy S-ben a három fogalmilag különböző funkció: motiváció, irányítás és kivitelezés jól felismerhető legyen. Ahhoz, hogy az S rendszer helyesen funkcionáljon, szükséges, hogy visszacsatolást létesítsünk az eredmény és a motivációs centrum között. Ez az *mbs* aktív elemen keresztül tör-



2. ábra

tėnik, amely nem az S rendszerhez, hanem annak környezetéhez tartozik. Ennek feladata a mérés, értékelés és ösztönzés. S eredményét az *mbs* aktív elembe beadott előírt értékkel történő összehasonlítás alapján megmérjük (értékeljük), és átváltjuk valamilyen megfelelő ösztönzőre, amely a legtágabb értelemben kapcsolatban van S jutalmazásával vagy megbüntetésével. Mivel az S rendszer az $[a, a]$ önösszekapcsolás révén tapasztalatokat tárolhat, megvan az a képessége, hogy magatartását idővel úgy alakítsa, hogy jutalmat kapjon és a büntetést elkerülje.

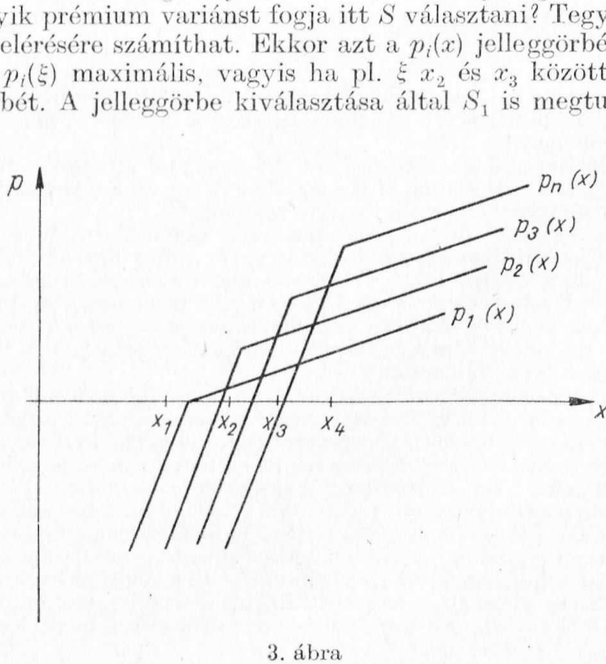
Jó eredményt csak különböző tényezők együttes hatása révén érhetünk el. Ezek közül elsődlegesek az S rendszer tulajdonságai, éspedig az, hogy legyen irányítható, (ez a legegyszerűbb eset), esetleg tanuló vagy önszervező. Továbbá az eredményt helyesen és megfelelő pontossággal kell mérnünk, végül pedig az értékelésnek és ösztönzésnek arra kell irányulnia, hogy az S rendszer képességeit optimálisan használja ki a kívánt eredmény elérése érdekében.

Az *mbs* aktív elem maga is legyen társadalmi-gazdasági rendszer, vagy tartozzon egy ilyen rendszerhez. Ezt a rendszert S_1-el jelöljük. A kibernetikai alapmodell különböző lehetséges szituációkat ölel fel. S_1 lehet S-nek fölérendelt rendszer, azaz gyakorolhatja az S fölötti irányítási funkciókat, azonban S is lehet az irányító és S_1 az irányított rendszer. Ebben az esetben például azt mutatjuk be, hogy hogyan van az S irányító tevékenysége az alulról jövő tudatos vagy nem tudatos kritikának alávetve. S és S_1 lehetnek kooperáló vagy konkuráló rendszerek, S azonban minden esetben az S_1-től származó ösztönzőben, S_1 pedig S termelésében érdekelt.

Az S és S_1 rendszereknek az alapmodellben leírt együttműködése legtöbb esetben hiányosságot mutat, amely mindkét rendszerre károsan hat ki. Az eredményeknek a motivációs centrumhoz történő visszacsatolása csak akkor következik be, amikor az eredmény már rendelkezésre áll. Az eredmény javítása és az ebből eredő jutalmazás az adott körülmények között igen hoszszú időt vesz igénybe. Az ebből adódó tétlenség mindkét rendszer által csökkenthető. Így pl. S_1 kiértékelheti az a-ból kiinduló informatív outputot, amelyben az S rendszer tervezett eredményét ismerteti. S_1 ehhez egy pótlólagos aktív elemet mbs' használ fel, amelyen keresztül informatív módon ösztönzi S-et, úgyhogy az, ígéret formájában a tervezett eredménynek megfelelő jutalmat kap. Mind az S-nek, mind az S_1-nek előnyös, ha előre látja a másik rendszer magatartását. E célból pl. S saját tapasztalatai alapján képezi magának az mbs aktív elem egy belső elemét. A belső modellen keresztüli ösztönzés gyorsabban hat, és hatékony marad, ha a várt jutalmazás nem marad el. Az mbs belső modelljét különböző módokon közölhetjük is az S rendszerrel (képzés, oktatás, utasítás, stb). S-nek azonkívül érdekeltnek kell lennie abban, hogy lehetőleg pontos ismeretekkel rendelkezzék a b kivitelező szerv átviteli tulajdonságaira vonatkozóan.[6] alatt jelzett művében Gerhardt felvázolta az anyagi ösztönző rendszerek egy új alapelvét, amely ebben az összefüggésben érdekes lehet. Befejezésül ezzel az alapelvvel akarunk még röviden foglalkozni.

Feltesszük, hogy S_1 az S eredményét egy x mutatószámmal értékeli, és hogy az ösztönzés a $p(x)$ prémiummal történik, amely általában x monoton növekvő függvénye. A hagyományos ösztönzési módszer szerint a $p(x)$ függvény még egy paramétertől függ, egy norma szerinti vagy tervezett eredménytől x_0, amelyet általában az S közreműködésével határoznak meg. Ilyen körülmények között S-nek nem érdeke, hogy magas x_0-t ajánljon fel, mivel ezáltal a tervtúlteljesítés nehezebbé válik és a magas prémium elérésének kilátásai csökkennek. Így olyan tervjavaslat születik, amelyik nem felel meg S tényleges teljesítőképességének.

A Gerhardt-féle elv lényege, hogy az S_1 az S rendszernek több $p(x)$ prémiumfüggvény variációt javasol, jelleggörbe-sereg formájában, amelyek közül S kiválaszthatja a számára legelőnyösebbnek látszót. Ilyen görbesereget ábrázol a 3. ábra. Melyik prémium variánst fogja itt S választani? Tegyük fel, hogy S a ξ eredmény elérésére számíthat. Ekkor azt a $p_i(x)$ jelleggörbét fogja választani, amelyre $p_i(\xi)$ maximális, vagyis ha pl. ξ x_2 és x_3 között van, akkor a $p_2(x)$ jelleggörbét. A jelleggörbe kiválasztása által S_1 is megtudja az S által



3. ábra

várt eredményt. S számára továbbra már nem jelent előnyt valóságos teljesítőképességének leplezése, mivel a $p_1(x)$ utáni premizálás kisebb prémiumot jelentene. A $p_3(x)$ választása, ami pedig a teljesítőképesség túlértékelését jelentené, szintén veszteséggel járna. Így tehát S érdekelve van abban, hogy saját teljesítőképességét pontosan becsülje meg. A javasolt ösztönzési eljárás tehát tudományos módszerek felhasználására ösztönöz, az S irányító szervén (a) keresztül, hogy lehetőleg pontos ismereteket nyerjünk b magatartására vonatkozóan. Az S-en belüli vita, a helyes premizálási jelleggörbe kiválasztásáról megköveteli ezenkívül valamennyi társadalmi-gazdasági részrendszer érdekeltségét, hogy jó munkával és együttműködéssel elérjék a kitűzött célt.

(Beérkezett: 1969. I. 10.)

IRODALOMJEGYZÉK

[1] GRENIEWSKI, H.: Cibernetics without mathematics, Warszawa, 1960.

[2] GRENIEWSKI, H.: Kybernetik und Planung. Wirtschaftswissenschaft 4, 1963. 535. p.

[3] LANGE, O.: Ganzheit und Entwicklung in kybernetischer Sicht, Berlin 1966.

[4] KOBRINSKI, N. E.,-TRACHTENBROT, B. A.: Einführung in die Theorie endlicher Automaten, Berlin 1967.

[5] WINTGEN, G.: Zu mengentheoretischen Definition und Klassifizierung kybernetischer Systeme, Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Ges.-Sprachw. Reihe XVII 1968. 6., 867—885. p.

[6] GERHARDT, G.: Struktur und Prozeßqualität materieller Anreizsysteme, Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt-Universität zu Berlin, Math. Mat. Reihe XVI., 1967. 6 S., 915—923. p.

THE CYBERNETIC SYSTEM — ITS CONCEPT AND APPLICATION IN ECONOMIC THEORY

The author attempts to build up an exact definition of the cybernetic system, to enable the investigation of the most general characteristics of the socio-economic systems with the aid of formal models.

In approaching the problem, the tools of the theory of sets are employed. The basic concept is the „system" consisting of the set of elements and of the aggregate of certain relations over them, the „structure" of the system.

Employing the concepts of homomorphism and isomorphism, it will be possible to establish the relationship between the real systems and their formal models, and abstraction itself will become interpretable. The environment concept serves to provide a basis for the connection between the modelled system and the outside world. Definitions are given for operations over systems such as union, intersection and partition. All this facilitates the precise definition of the concept of aggregation, which is so highly important in the case of socio-economic systems.

In the description of living and functioning systems, the concept of the „active element" plays a fundamental part. The cybernetic systems are built up of active elements. The author distinguishes between the general concept of the cybernetic system on the one hand and the concept of the socio-economic system on the other, defining the latter as one of which „man" constitutes an indispensable element.

Since the socio-economic systems necessarily include human activities, great care must be taken of the proper functioning of the „human elements" in such systems. As a matter of fact, the functioning of the „human element" depends not only on what the element is capable of but also on what it wants. It is this fact that lends great importance to incentive in the socio-economic systems. In the concluding section of the article, the author deals with the basic principles of a system of material incentives worked out by G. Gerhardt.

ПОНЯТИЕ КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭКОНОМИЧЕСКОЙ НАУКЕ

Автор старается дать точное определение понятию кибернетической системы, чтобы с ее помощью можно было с применением формальных моделей изучать наиболее общие специфические черты общественно-экономических систем.

Приближение к решению производится с использованием положений теории множеств. Исходным понятием суть «система», состоящая из т. н. множества элементов и из совокупности определенных взаимоотношений внутри этого множества, т. е. «структуры» системы.

Употребляя понятия гомоморфизма и изоморфизма, можно установить взаимосвязи между действительными системами и их формальными моделями; приобретает смысл и сама абстракция.

Понятие среды служит обоснованию взаимозависимостей между моделируемой системой и внешним миром. Даются определения операций, имеющих смысл внутри систем, как — объединение, образование общей части и подразделение. Все это способствует уточнению понятия агрегации, столь важной с точки зрения общественно-экономических систем.

При описании живых, функционирующих систем фундаментальная роль принадлежит понятию «активного элемента». Ибо т. н. кибернетические системы строятся из активных элементов. Автор различает общее понятие кибернетической системы и понятие общественно-экономической системы, указывая на то, что неотъемлемым элементом последней является «человек».

Ввиду того, что общественно-экономические системы обязательно содержат человеческую деятельность, большое внимание следует уделять «человеческим элементам» таких систем. Ибо функционирование «человеческого элемента» зависит не только от того, на что способен этот элемент, но и от того, чего он хочет. Именно поэтому стимулирование играет большую роль в общественно-экономических системах.

В заключительной части статьи автор знакомит читателя с основными принципами системы материального поощрения, разработанной Г. Герхардтом.

Simon András

A nemzetközi gazdasági együttműködés optimalizálásának problémái

A szocialista országokban a gazdasági fejlődés ún. intenzív szakaszába lépve — amelyben a termelés növelése elsősorban már nem újabb erőforrások (főleg munkaerő) termelésbe állításával történik — mind a közgazdasági elméletben, mind a gyakorlatban egyre inkább előtérbe kerülnek az erőforrások leghatékonyabb felhasználásával, a termelés optimális allokációjával kapcsolatos gazdasági problémák.

Az ilyen gyakorlati problémák megoldását — vagyis optimális termelési szerkezet kialakítását — szolgálja egyrészt a gazdasági döntéseknek egyre inkább optimumszámításokkal való megalapozása, másrészt a gazdasági mechanizmus több országban végbemenő reformja.

Mind a gyakorlatban megvalósuló optimumszámításoknak, mind a gyakorlati mechanizmusreformoknak általában jellemzőjük, hogy a külkereskedelmi lehetőségeket adottságnak tekintik. Bár találunk példát egyes részterületeken a termelés nemzetközi szintű koordinálására, és ezek az esetek nagyjelentőségűek az együttműködés szempontjából, de a népgazdaság egészéhez viszonyítva gazdasági hatásuk még igen csekély. Megállapíthatjuk azt is, hogy bár a szocialista országok egymás közti kereskedelmének mechanizmusa az elmúlt 25 évben sok változáson ment át, ezeknek a gazdasági kapcsolatoknak a formái általában kevésbé rugalmasak és lassabban változnak, mint az országokon belüli gazdasági kapcsolatok formái.

A nemzetközi gazdasági együttműködésben rejlő előnyök kihasználásának ez az elmaradása a termelés népgazdasági szintű optimalizálásához képest több okból fakad:

- az egyes országok szervezeti, jogi és gazdasági elkülönültsége (különböző valuták, a gazdasági szabályozók rendszerének különbözősége stb.) megnehezíti az információk áramlását egyik országból a másikba, a gazdasági egységek — a különböző országok vállalatai, valamint a vállalatok és fogyasztók — közvetlen kapcsolatának kialakítását, a termékek és a pénz országok közötti mozgását.
- A nemzetközi gazdasági kapcsolatokat szuverén államok létesítik, így egyik résztvevő sem kényszeríthető valamilyen hatékonysági szempontból kívánatos bármilyen termelésre vagy kereskedelemre vonatkozó „kívülről jött" határozat végrehajtására.
- A nemzetközi gazdasági együttműködés, mivel annak résztvevői szuverén államok, a hatékonyságnak és az abból származó előnyök elosztásának olyan problémáit veti fel, melyek jelentősége országon belüli viszonylatban lényegesen kisebb: Az együttműködésben résztvevő országok mindegyike más célokat követ (mások a gazdaságpolitikai céljaik,

fogyasztási struktúráik stb.), ha valamilyen közös optimumra törekszünk, ezeket a különböző célokat össze kell hasonlítani. Kérdés, hogy milyen elvek szerint és módszerrel történjen az összehasonlítás: mi legyen az a közös kritérium, amely szerint valamilyen specializációt gazdaságosnak tekinthetünk? Kapcsolódik a kérdéshez az a probléma, hogy milyen elvek szerint történjen az együttműködésből származó előnyök elosztása és mi biztosítja, hogy egy adott elosztási rendszert a résztvevő országok mindegyike elfogadjon. Ez az elosztás milyen formában valósuljon meg — egyszerűen a külkereskedelmi árakon keresztül vagy jövedelmek átutalása útján, esetleg kamatok, jutalékok mint a közös beruházások nyereségéből való részesedés formájában?

Cikkünk célja egyrészt az, hogy 2 ország 2 termékes modell segítségével néhány felvetett kérdést pontosan megfogalmazzon, néhány fogalmat tisztázzon, másrészt, hogy a kérdések egy részére bizonyos feltételek teljesülése esetén választ adjon.

A modell leírása

Tekintsünk két országot, I. és II. országot. Tételezzük fel, hogy mindkét ország két terméket, 1-t és 2-t termel. Mindkét országnak három-három erőforrás áll rendelkezésére a termeléshez: r_1^{I}, r_2^{I}, r_3^{I}, illetve r_1^{II}, r_2^{II}, r_3^{II}. I. országban 1 termelését az $(a_{11}\, a_{21}\, a_{31})$ és 2 termelését az $(a_{12}\, a_{22}\, a_{32})$ vektorokkal jellemezhetjük, II. országban 1 termelését a $(b_{11}\, b_{21}\, b_{31})$ és 2 termelését a $(b_{12}\, b_{22}\, b_{32})$ vektorokkal jellemezhetjük. Ez annyit jelent, hogy például egységnyi 1 előállítása az I. országban a_{11} mennyiséget igényel az r_1 erőforrásból, a_{21}-et az r_2 erőforrásból, a_{31}-et az r_3 erőforrásból. A többi vektor jelentése hasonló.

1 és 2 termelésének mennyiségét az I. országban — amit x_1^{I} és x_2^{I}-vel jelöltünk és 1 és 2 termelését a II. országban (x_1^{II} és x_2^{II}) a rendelkezésre álló erőforrások korlátozzák: a felhasznált erőforrások egyik országban sem haladhatják meg a rendelkezésre álló mennyiséget. A fenti követelményeket a következő egyenlőtlenségek fejezik ki:

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1^{\mathrm{I}} + a_{12}x_2^{\mathrm{II}} \leq r_1^{\mathrm{I}} & \qquad b_{11}x_1^{\mathrm{II}} + b_{12}x_2^{\mathrm{II}} \leq r_1^{\mathrm{II}} \\ a_{21}x_1^{\mathrm{I}} + a_{22}x_2^{\mathrm{I}} \leq r_1^{\mathrm{I}} & \qquad b_{21}x_1^{\mathrm{I}} + b_{22}x_2^{\mathrm{II}} \leq r_2^{\mathrm{II}} \\ a_{31}x_1^{\mathrm{I}} + a_{32}x_2 \leq r_3^{\mathrm{I}} & \qquad b_{31}x_1^{\mathrm{II}} + b_{32}x_2^{\mathrm{II}} \leq r_3^{\mathrm{II}} \end{array}$$

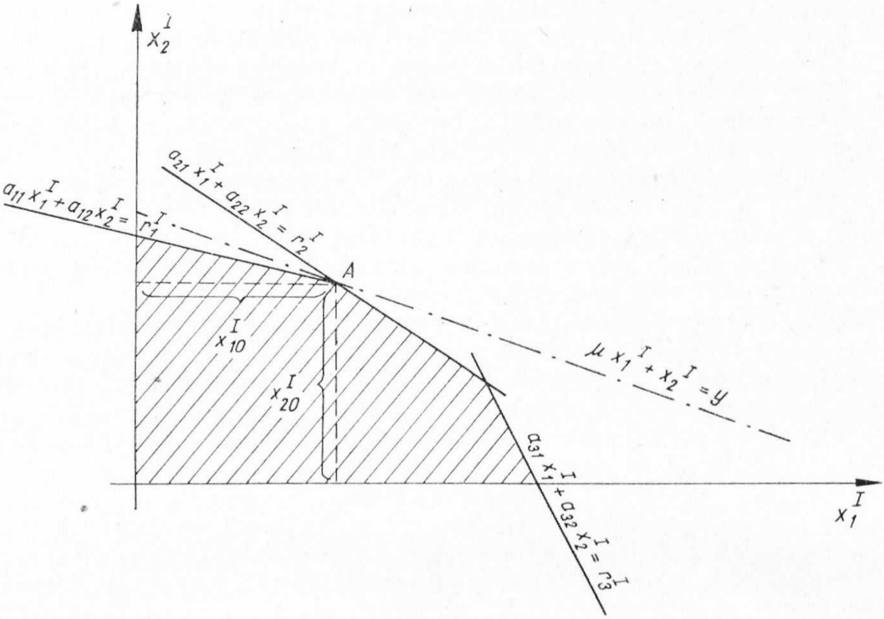
A termelés nem lehet negatív:

$$x_1^{\mathrm{I}} \geq 0, \quad x_2^{\mathrm{I}} \geq 0, \quad x_1^{\mathrm{II}} \geq 0, \quad x_2^{\mathrm{II}} \geq 0$$

Azon $(x_1^{\mathrm{I}}, x_2^{\mathrm{I}})$ és $(x_1^{\mathrm{II}}, x_2^{\mathrm{II}})$ vektorok halmazát, melyek kielégítik a fenti egyenlőtlenségeket, 1. és 2. ábránkon vonalazással jelöltük.

Ábrázoljuk a két ország együttes termelési lehetőségeit a 3. ábrán. Az abszcissza mentén ábrázoljuk a két ország által összesen termelhető 1 terméket ($x_1^{\mathrm{I}} + x_1^{\mathrm{II}} = x_1$) az ordináta mentén az összes termelhető 2 terméket ($x_2^{\mathrm{I}} + x_2^{\mathrm{II}} = x_2$).

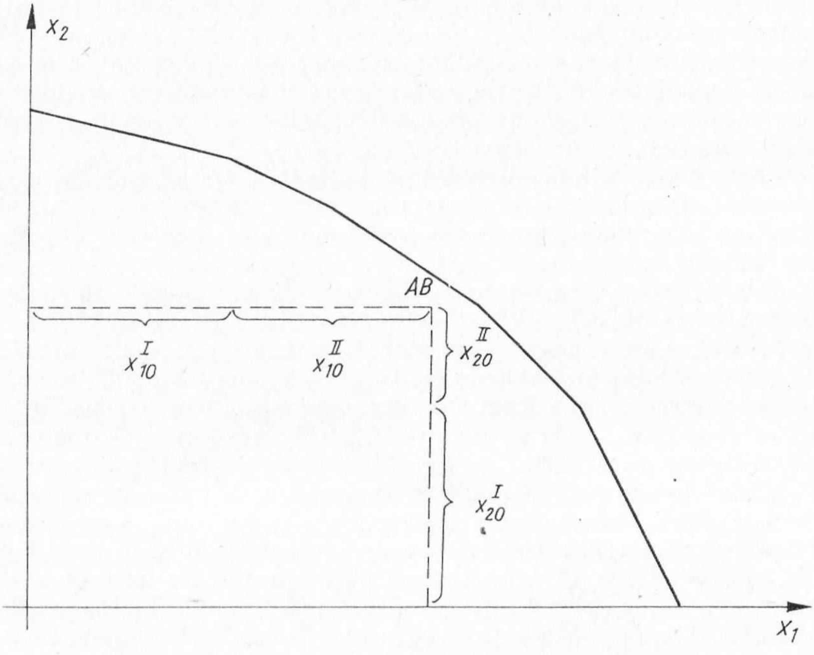
Feltételezzük, hogy mindkét ország saját fogyasztásának maximumára törekszik az 1 és 2 termékből. Tételezzük fel, hogy ez a törekvés x_1 és x_2 vala-


x_2^I
$a_{11}x_1^I + a_{12}x_2^I = r_1^I$
$a_{21}x_1^I + a_{22}x_2^I = r_2^I$
A
x_{10}^I
x_{20}^I
$\mu x_1^I + x_2^I = y$
$a_{31}x_1^I + a_{32}x_2^I = r_3^I$
x_1^I

1. ábra


x_2^{II}
$v x_1^{II} + x_2^{II} = z$
$b_{11}x_1^{II} + b_{12}x_2^{II} = r_1^{II}$
B
x_{10}^{II}
x_{20}^{II}
$b_{21}x_1^{II} + b_{22}x_2^{II} = r_2^{II}$
$b_{31}x_1^{II} + b_{32}x_2^{II} = r_3^{II}$
x_1^{II}

2. ábra



3. ábra

milyen c_1 és c_2 súlyokkal vett maximalizálásában nyilvánul meg és ezek a súlyok országonként különbözőek. I. ország tehát $c_1^I x_1 + c_2^I x_2$ függvény, II. ország $c_1^{II} x_1 + c_2^{II} x_2$ függvény maximumára törekszik. Mivel a maximalizálás eredményét csak a súlyok aránya befolyásolja, a függvények helyett $\mu x_1^I + x_2^I$, illetve $\nu x_1^{II} + x_2^{II}$-t is írhatunk, ahol $\mu = \frac{c_1^I}{c_2^I}$ és $\nu = \frac{c_1^{II}}{c_2^{II}}$. Nevezzük ezeket a függvényeket fogyasztási függvénynek vagy célfüggvénynek.

A célfüggvényre és a termelési technológiára tett feltevéseink lehetővé teszik, hogy a fogyasztás maximalizálása problémáinak megfogalmazásánál a továbbiakban a lineáris programozás elméletére támaszkodjunk. A lineáris programozás alapvető ismeretét feltételezzük.

Ha nincsen külkereskedelem, az I., illetve II. ország termelési lehetőségei halmazán az **A**, illetve a **B** pont koordinátái mutatják (x_{10}^I és x_{20}^I, illetve x_{10}^{II} és x_{20}^{II}) a termelés és egyben a fogyasztás maximumát a $\mu x_1 + x_2$, illetve $\nu x_1 + x_2$ célfüggvény esetén. **A** és **B** pontot két lineáris programozási feladat megoldásaként kaptuk, ahol $\mu x_1 + x_2$, illetve $\nu x_1 + x_2$ célfüggvényeket maximalizáltuk az I. és II. országok termelési lehetőségei halmazán. I. ország célfüggvény-értéke ekkor y-nal, II. országé pedig z-vel egyenlő.

A és **B** pontok összege a 3. ábrán az **AB** pont. Mint látjuk, az **AB** pont a két ország együttes termelési lehetőségei halmazának belső pontja — tehát bármelyik termék össztermelése növelhető lenne anélkül, hogy a másik termelését csökkenteni kellene. Azokat a termelési programokat, melyeknél egyik termék termelése sem növelhető anélkül, hogy a másikét csökkenteni kellene, a továbbiakban hatékony vagy efficiens programoknak nevezzük. Az efficiens programoknak megfelelő pontok 3. ábránkon a halmaz határpontjai közül a vastagított vonallal jelöltek.

Megállapíthatjuk, hogy ha mindkét ország saját célfüggvényét maximalizálja, a két különböző célfüggvénnyel végzett maximalizálás eredményének összegezése nem vezet hatékony programhoz a két ország együttes termelési lehetőségei halmazán.

Mielőtt taglalnánk a külkereskedelem hatását a két ország gazdaságára, néhány szóban kitérünk arra, hogy alkalmazott feltételezéseink mennyire szűkítik le azt a területet, melyre vonatkozóan még jogosan vonhatunk le általános következtetéseket.

Feltételezésünk szerint a termelési tevékenységek fajlagosai függetlenek a termelés volumenétől. Ebből következően megállapításaink csak olyan területre érvényesek, ahol a nagyobb termelési volumen nem eredményezi a fajlagos termelési költségek csökkenését. Ismeretes, hogy különösen az olyan kis országok esetében, mint Magyarország, éppen azokban a termelési ágazatokban van nagy jelentősége a nemzetközi munkamegosztásnak, melyekben a termelési volumen növekedése, a nagyobb gyártási szériák a fajlagos költségek csökkenését eredményezik. Ebben az esetben az optimum megközelítésére más módszerekre van szükség. Ha azonban feltételezzük, hogy az említett ágazatokban már valamilyen más módszerrel eldöntöttük, hogy melyik ország mire specializálódjék és az ágazatokban már létrejött az üzemek optimális nagysága, akkor újra csak a modellünkből levonható elveket használhatjuk fel a termelési volumen meghatározására és a jövedelmek elosztására.

Modellünk statikus olyan értelemben, hogy nem foglalkozik a különböző időszakok termelési és kereskedelmi struktúrája közti összefüggésekkel. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy következtetéseink nem érvényesek, ha időbeli lefolyásában különböző tevékenységek között kell dönteni. Modellünk alapján például választ tudunk adni arra is, hogy két ország közül melyikben milyen fejlesztési elképzeléseket valósítsunk meg. A modellben ugyanis, bár explicite nem szerepel az idő, elvileg nincs akadálya, hogy két különböző időpontban rendelkezésre álló, egyébként azonos terméket két különböző terméknek tekintsünk és ezáltal időbeli lefolyásában különböző egyébként azonos tevékenységek között döntsünk.

Hasonlóan, bár a szállítási költségektől eltekintünk a modellben, azok figyelembevétele csak a termékek és tevékenységek számát növelné, következtetéseink lényegét nem érintené.

A külkereskedelemből származó előnyök

A továbbiakban nézzük meg, hogy az egyes országok fogyasztásának milyen növelését teszi lehetővé a külkereskedelem.

Ábrázoljuk a két ország termelési lehetőségeinek halmazát egy koordinátarendszer 1., illetve 3. negyedében, a 4. ábra szerinti módon.

A 2. és 4. negyedben ábrázoljuk a külkereskedelemben előforduló összes lehetséges termékcsere-kombinációkat. Figyelembe véve, hogy az egyik ország exportja mindig megegyezik a másik ország importjával, kétféle irányú lehet a forgalom:

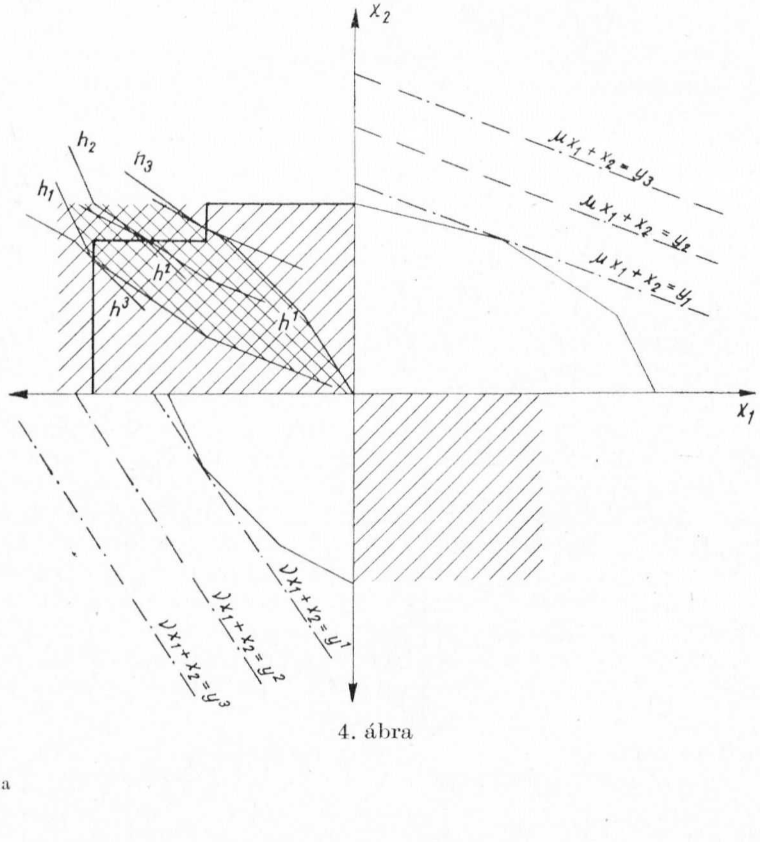
a) I. ország x_1 terméket exportál x_2 termékért cserébe — ebben az esetben a külkereskedelembe kerülő mennyiségeket a 2. negyed pontjaival ábrázoljuk: az abszcissza I. ország exportját (II. ország importját), az ordináta pedig I. ország importját (II. ország exportját) jelöli.

b) I. ország x_2 terméket exportál x_1 termékért cserébe — ebben az esetben a külkereskedelembe kerülő mennyiségeket a 4. negyed pontjaival ábrázoljuk: az ordináta I. ország exportját (II. ország importját), az abszcissza pedig I. ország importját (II. ország exportját) jelöli.

A lehetséges termékcsere-kombinációkat ábrázoló pontokat a 4. ábra bevonalazott tartományai adják. A tartományokat minden oldalról a megfelelő terméket exportáló ország termelési lehetőségei határozzák meg.

Nézzük meg egyelőre, hogy a különböző termékcsere-kombinációk milyen célfüggvény-értéket biztosítanak az egyes országok számára. A 4. negyedben ábrázolt cserelehetőségekkel nem foglalkozunk. Később látni fogjuk ugyanis, hogy ha I. ország x_2 terméket exportál x_1 termékért cserébe, nem találunk olyan esetet, hogy mindkét ország nagyobb célfüggvény-értéket érjen el, mint a külkereskedelem nélküli helyzetben — ekkor tehát az országok azokra a termékekre specializálódnak, melyek termelésében komparatív hátrányuk van.

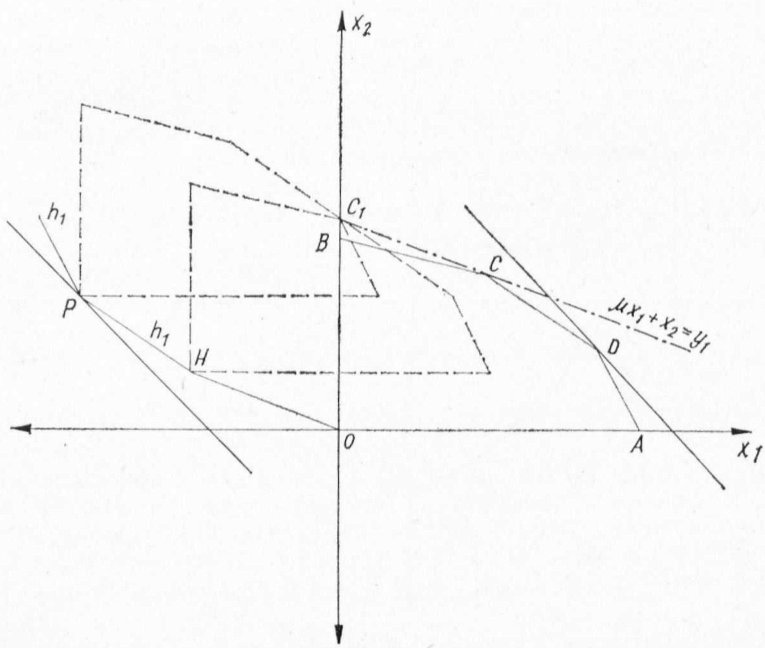
Fordítsuk ezért figyelmünket a koordináta-rendszer 2. negyedében ábrázolható cserelehetőségekre. A termékcserekombinációkat ábrázoló tartomány pontjait rendezni fogjuk aszerint, hogy az egyes pontoknak megfelelő cserék maximálisan (tehát feltételezve, hogy a résztvevő országok mindig optimálisan döntenek) mekkora célfüggvény-értéket biztosítanak a résztvevő országok számára.



4. ábra

A különféle termék-kombinációknak a kereskedelemben résztvevők célfüggvény-értéke szerinti rendezése az ún. jóléti közgazdasági irodalomban eléggé gyakori akár egyes fogyasztók, akár kereskedő országok a résztvevők. Itt a szerkesztés technikájának kialakításánál MEADE (3) művében alkalmazott módszert követtük. A különbség csupán annyi, hogy MEADE nemlineáris termelési halmazokat és célfüggvényt feltételezett modellünk lineáris feltevéseivel szemben.

Először I. ország célfüggvénye szerint rendezzük a tartomány pontjait. Ábrázoljuk 5. ábránkon I. ország termelési lehetőségeit az **AOB** halmazzal. Határozzuk meg, hogy melyek azok a pontok, melyeknek megfelelő külkereskedelem ugyanolyan célfüggvény-értéket tesz lehetővé, mint a külkereskedelem nélküli helyzet. Az ország fogyasztási céljait kifejező függvény a $\mu x_1 + x_2$ függvény, ha nincs külkereskedelem, a **C** pontban éri el maximális értékét, y_1-t. I. ország fogyasztási struktúráját ekkor a **C** pont koordinátái mutatják. Toljuk el az **AOB** halmazt északnyugati irányban a $\mu x_1 + x_2 = y_1$ egyenes mentén úgy, hogy az **AO** és a **BO** szakasz párhuzamos maradjon a koordinátatengelyekkel, egészen addig, amíg a **C** pont a $\mathbf{C}_1$ pontba megy át. Ekkor a $\mathbf{C}_1\mathbf{C}$ szakasz bármelyik pontja mutatja a fogyasztás szerkezetét, az egyenlő értékű a **C** pontnak megfelelő célfüggvény-értékkel. A fogyasztás és a termelés különbségét, a $\mathbf{C}_1\mathbf{C}$ szakasz pontjai és a **C** pont koordinátáinak különbségét, tehát a külkereskedelmet az eltolással származtatott új halmazok **O** pontjai mutatják (**HO** szakasz). Nemcsak a fogyasztás változtatásával jöhetnek létre azonban azonos y_1 célfüggvény-értéket biztosító különböző külkereskedelmi cserekombinációk. Ha a fogyasztást $\mathbf{C}_1$ mutatja (I. ország csak x_2 terméket fogyaszt),



5. ábra

az ország pedig a **C** pontnak megfelelő termeléshez képest több x_1 terméket és kevesebb x_2 terméket állít elő és a termelés és fogyasztás különbsége újra a külkereskedelembe kerül, y_1 célfüggvényértékét biztosító további külkereskedelmi cserekombinációkat kapunk.

Ha az **AOB** halmazt tovább eltolom a $\mathbf{C}_1$ pont mentén az előbbi módon, az új halmazok **O** pontjai mutatják az ilyen módon külkereskedelembe kerülő termékek mennyiségét. Ha például a fogyasztás $\mathbf{C}_1$ szerinti, a termelés a **D** pontnak megfelelő, a két pont koordinátáinak különbsége — mely x_2 termék esetében pozitív, x_1 termék, esetében negatív — éppen a **P** pont koordinátáival egyezik meg. Nevezzük azoknak a pontoknak összességét, melyeknek megfelelő külkereskedelem y_1 célfüggvény-értéket tesz lehetővé, h_1 görbének.

Az előbbi módszernek megfelelően a külkereskedelmi cserekombinációk egész tartományát rendezni tudjuk aszerint, hogy az egyes kombinációk I. országnak maximálisan mekkora célfüggvény-értéket biztosítanak. 4. ábránkon például a h_2 görbéhez az y_2 fogyasztási érték, h_3 görbéhez az y_3 fogyasztási érték tartozik.

Hasonlóan határozzuk meg II. ország h görbéit is. 4. ábránkon a h^1 görbéhez y^1 fogyasztási érték, h^2 görbéhez az y^2 fogyasztási érték, a h^3 görbéhez a II. ország y^3 fogyasztási értéke tartozik.

Húzzuk meg a **P** pontban a h görbének egy érintőjét, majd a **D** pontban az **AOB** halmaznak egy ezzel párhuzamos érintőjét. A h görbéket úgy származtattuk, hogy mindig van ilyen párhuzamos érintő. Ismeretes a lineáris programozás elméletéből, hogy bármely efficiens pont előállítható egy lineáris programozási feladat optimális megoldásaként, ahol a célfüggvény koefficiensei a pont érintő egyenesének koefficienseivel egyeznek meg. A h görbe érintői tehát mindig megmutatják, hogy ahhoz, hogy az érintési pont koordinátáinak megfelelő külkereskedelem létrejöjjön, az illető ország milyen célfüggvény szerint maximalizálja termelését.

Az I. és II. ország h görbéi a 4. ábrán a vastagon húzott vonal pontjaiban érintik egymást. Minden olyan pontból, mely a két ország h görbéjének nem érintési pontja, az egyik ország h görbéje mentén mindig olyan pontba juthatunk, mely az egyik ország számára ugyanakkora célfüggvény értéket, a másik ország számára pedig nagyobb célfüggvény értéket biztosít, mint az eredeti pont. A h görbék érintési pontjaiból bármelyik irányba haladunk, az egyik ország csak úgy tudja célfüggvény-értékét növelni, ha egyúttal a másik országé csökken. Az olyan helyzetet, melyben egyik ország sem tudja fogyasztását úgy növelni, hogy a másik ország fogyasztása változatlan maradjon, Pareto-optimális helyzetnek nevezzük. Azokat az export-import termékkombinációkat, melyek a Pareto-optimális helyzetet jellemzik, Pareto-optimális külkereskedelemnek nevezzük. 4. iábránkon tehát a vastagon húzott vonal pontjainak koordinátái Pareto-optimális külkereskedelmi szerkezetet mutatnak.[1]

Ha a külkereskedelmet ábrázoló pont a Pareto-optimális vonal alatt van, az országok kereskedelmi forgalma túl alacsony, „elégtelen" — a forgalom növelésével mindkét ország növelhetné célfüggvény értékét.

Ha a külkereskedelmet ábrázoló pont a Pareto-optimális vonal felett van az országok „túlzott mértékben" kereskednek — mindkét ország növelhetn célfüggvénye értékét a forgalom csökkentésével.

[1] A Pareto-optimális külkereskedelmi pontok halmaza nem más, mint az ismert Edgeworth-féle szerződési görbe [3.] Ismerteti [1.] 385—388. old.

Ha a külkereskedelmet ábrázoló pont a Pareto-optimális vonalon helyezkedik el, bármelyik ország csak a másik rovására tudja célfüggvény-értékét növelni.

A külkereskedelemből származó előnyök elosztásának hatása a nemzetközi kereskedelem hatékonyságára

Nézzük meg a továbbiakban, hogy különféle feltevéseket vezetve be a nemzetközi kereskedelem mechanizmusára vonatkozóan, hogyan alakul az egyes országok részesedése a külkereskedelem előnyeiből és különféle külkereskedelmi arányok milyen árak és kereskedelmi volumen mellett alakulnak ki.

Tekintsük először azt az esetet, amikor az egyes országok külkereskedelme központilag hozott döntéseken alapul: államközi megállapodások formájában termékenként rögzítik a cserére kerülő mennyiségeket — nemcsak az árban egyeznek meg, hanem kötelezően előírják az exportálandó és importálandó termékek mennyiségét is. Modellünkben a cserére kerülő mennyiségeket 4. ábránkon a koordináta-rendszer 2. negyedében levő pontok koordinátáival ábrázolhatjuk. Ha feltételezzük, hogy a külkereskedelmi megállapodásban a külkereskedelmi mérleg egyenlege O, akkor a pontok koordinátáinak (az export és az import mennyiségének) arányai egyben a termékek árarányait is mutatják. Ha az egyenleg O-tól eltér, az export és import mennyiségének aránya nem felel meg az árarányoknak, mert az export (vagy import) egy része a kiviteli (vagy behozatali) többlet fedezésére szolgál.

A külkereskedelem mechanizmusára tett feltevéseink mellett a külkereskedelmi alku eredménye bármelyik pontnak megfelelő cserekombináció lehet a 4. ábra bevonalazott tartományán belül. Hogy egy cserekombináció közül melyik lesz az, amelyik egy megállapodás eredményeként létrejön, arról igen keveset mondhatunk. A h_1 és h^1 görbék közötti tartományon (kétszeresen bevonalazva) kívüli pontoknak megfelelő forgalmat mint valószínűtlent, kizárhatjuk a lehetséges esetek közül, ezek ugyanis egyik vagy másik ország számára kisebb célfüggvény értéket biztosítanak, mint a külkereskedelem nélküli állapot. Valószínűtlen, hogy valamely ország annyira ne lenne birtokában a termelési lehetőségeire és céljaira vonatkozó információknak, hogy ilyen esetben külkereskedelmet folytasson. A h_1 és h^1 görbék közötti tartományt tekintve azonban valószínű, hogy nem állunk távol az igazságtól, ha azt mondjuk, hogy a gyakorlatban csak véletlenszerűen valósulhat meg Pareto optimális külkereskedelem. Az egyes országok külkereskedelmi politikájuk meghatározásakor ugyanis sem a szükséges széles körű információk, sem pedig olyan módszerek birtokában nincsenek, melyekkel számukra optimális külkereskedelmi megegyezésre juthatnának.

Ha azonban mégis feltételezzük, hogy a partner országok valamiképpen mindig képesek arra, hogy ne kössenek olyan egyezményeket, melyekben „túlzott mértékben" vagy „elégtelenül" kereskednek, a lehetséges külkereskedelmi alkuknak még mindig széles skálája van, melyek abban különböznek egymástól, hogy az egyik országnak nagyobb, a másiknak kisebb célfüggvény-értéket biztosítanak. Hogy végül valamilyen egyezség létrejön, arra biztosíték az, hogy a külkereskedelem mindkét fél számára előnyös. Arra vonatkozóan azonban, hogy melyik ország mekkora előnyöket harcol ki a megállapodásban, legfeljebb annyit mondhatunk, hogy az a gazdasági vagy politikai erőviszonyoktól, vagy a kettőtől együttesen függ.

A nemzetközi kereskedelem mechanizmusának előbb vázolt rendszeréhez sokban hasonlít a szocialista országok jelenlegi gyakorlata, mely a kötelező kontingensek rendszerén keresztül szabályozza a nemzetközi kereskedelmet. Ebben a rendszerben általában az adott árakon az egyes országoknak bizonyos termékekből többet, más termékekből kevesebbet lenne érdemes exportálni vagy importálni, mint a külkereskedelmi megállapodásokban rögzített alku eredménye. Az úgynevezett ,,kemény" cikkekből az adott árakon általában nagyobb, a ,,puha" cikkekből kisebb az importkereslet, mint az exportkínálat. A külkereskedelem szerkezete és volumene ilyen esetben a ,,kemény" és ,,puha" cikkek kereskedelmének bonyolult összekapcsolása és egymással szembeállítása révén alakul ki.

Mit nevezhetünk ebben az esetben kölcsönösen előnyös külkereskedelemnek és mit kölcsönösen előnyös áraknak? Láthattuk, hogy igen széles skálája van az olyan külkereskedelmi megállapodásoknak, melyek mindkét ország számára előnyösebbek, mintha nem kereskedtek volna. Ezek a lehetséges megállapodások egyes termékekre vonatkozóan olyan árakat is tartalmazhatnak, melyek mellett egy adott ország nagyobb jövedelmet érne el, ha a termékből csökkentené vagy megszüntetné exportját vagy importját. Ilyen értelemben tehát egyes termékek árai lehetnek előnytelenek is egy ország számára. Vannak például olyan kemény cikkek, melyeket ha nem a szocialista piacra, hanem kapitalista országokba exportálnánk, magasabb árat kapnánk érte. Ha azonban meggondoljuk, hogy csak ezeknek a kemény cikkeknek az exportjával nyílik esetleg mód rá, hogy számunkra előnyös importhoz jussunk, vagy puha cikkek exportját biztosítsuk, elveszti értelmét az adott cikk adott áron való exportját előnytelennek nevezni.

Ebben a rendszerben az áraknak annyiban van szerepük, hogy az export és az import összértékét meghatározzák (értéken az árak és a volumen szorzatösszegét értve) és ezáltal a partnerországok közötti jövedelmet elosszák. Közömbös, hogy ez az összérték az egyes termékek között hogyan oszlik meg.

A külkereskedelmi alku eredményességét az egész külkereskedelmet együttesen tekintve tudjuk csak értékelni, a termékenkénti áraknak ebben az értékelésben tehát önmagukban semmi szerepük nincs és ennek megfelelően egy termék ára semmiféle információt nem is nyújt arra vonatkozóan, hogy az illető terméket érdemes-e exportálni vagy importálni — ez utóbbi kérdésre csak a *teljes* külkereskedelmi forgalom ismeretében adható válasz.

Tételezzük fel a továbbiakban a nemzetközi kereskedelem egy olyan mechanizmusát, amelyben a külkereskedelmi döntéseket mint a termelésre vonatkozó döntéseket is, termelőegységek, vállalatok hozzák. Döntéseik kritériuma a maximális nyereség.

Kérdés, hogy a vállalatok nyereségmaximalizálása eredményeként létrejöhet-e Pareto optimális külkereskedelem, illetve, hogy milyen külkereskedelmi árak mellett vezet a vállalatok nyereségmaximalizálása Pareto optimális külkereskedelemhez és ez a Pareto optimum melyik résztvevőnek milyen célfüggvény-értéket biztosít.

Ahhoz, hogy a nyereségmaximalizáláson alapuló mechanizmus bonyolult folyamatát leegyszerűsítve át tudjuk tekinteni, bizonyos párhuzamosságot állapítunk meg a lineáris programozás és a decentralizált, nyereséget maximalizáló döntéseken alapuló mechanizmus között. Ennek felhasználásával vonhatunk le ugyanis majd következtetéseket a lineáris programozás módszerének segítségével a tényleges külkereskedelmi árakra és forgalomra vonatkozólag.

Ismeretes, hogy minden lineáris programozási feladat egy primál-duál feladatpárból áll, ahol az egyik feladat célfüggvény-értéket maximalizáló, a másik pedig költségeket minimalizáló feladat. Mivel a nyereség maximalizálása nem egyéb, mint a hozam és a költségek különbségének maximalizálása, mondhatjuk, hogy minden lineáris programozási feladat nyereséget maximalizál egy olyan árrendszerben, ahol a tevékenységek hozamát a célfüggvény koefficiensei, az erőforrások árát pedig a feladat duális megoldása szolgáltatja.

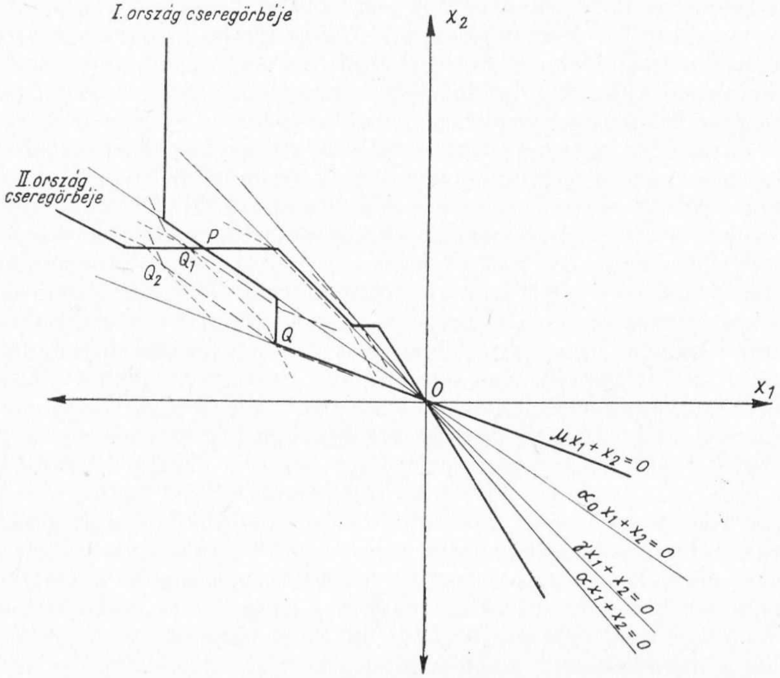
Modellünkben minden tevékenységet egy vektorral jellemeztünk. Ennek koefficiensei feltételezésünk szerint függetlenek a termelés volumenétől. Ha például egy tevékenységet **a** vektorral jelölünk, akkor $(\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a}$, vagyis $(\lambda_1 + \lambda_2)$ volumenű termelés előállítható $\lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}$ formában is — a termelőegységek nagyságának tehát nincs szerepe a modellben, közömbös, hogy a tevékenységek több kis egység tevékenységének összegeként jönnek-e létre, vagy egyetlen termelőegységünk van csak.

Ebből következően közömbös, hogy a termelési érték és a költségek különbségének maximalizálását aggregáltan végezzük-e, vagy a gazdaságot felosztjuk kisebb termelőegységekre, vállalatokra. Ha a számukra adott árrendszer megegyezik a lineáris programozási feladat értékelés-rendszerével és a termelési döntéseket ők hozzák saját nyereségüket maximalizálva, az így létrejövő tevékenységi programok összege megegyezik az aggregáltan végrehajtott nyereségmaximalizálás eredményével.[2]

Modellünkben tehát az elmondottak alapján — a mechanizmusra tett feltevésünkkel összhangban — feltehetjük, hogy mindkét ország egy-egy lineáris programozási feladatot old meg: adottak számukra termelési lehetőségeik, célfüggvényük és a nemzetközi kereskedelem árai, valamint a külkereskedelmi mérleg egyenlege. Ezek ismeretében határozzák meg a számukra legnagyobb hozamot (célfüggvény-értéket) biztosító termelést, valamint export-, illetve importmennyiséget. Ez utóbbiakat nevezzük exportkínálatnak, illetve importkeresletnek. Nézzük meg modellünk segítségével, hogy milyen nemzetközi árak mellett lesznek a két ország termelési lehetőségei maximálisan kihasználva, mikor alakul ki Pareto optimális külkereskedelem.

Tételezzük fel, hogy a külkereskedelmi mérleg egyenlege O. Ekkor 6. ábránkon azok az export-import kombinációk, melyekben x_1 és x_2 ugyanazon α arányban cserélődik, ugyanazon $\alpha x_1 + x_2 = O$ egyenesen helyezkednek el. Ha más külkereskedelmi árarányhoz tartozó export-import kombinációkat akarunk ábrázolni, a O ponton átmenő más sugarakat kapunk. Egy adott sugár pontjai különböznek egymástól abban, hogy attól függően, hogy melyik h görbén helyezkednek el, különböző célfüggvény-érték tartozik hozzájuk. Legnagyobb célfüggvény-érték ahhoz a ponthoz tartozik, amely az egyenesnek és valamely h görbének érintési pontja. A lehetséges O ponton átmenő áregyenesek és I. ország h görbeseregének összes érintési pontjai adják azokat az export-import kombinációkat, melyeket az különböző külkereskedelmi árakon O külkereskedelmi szaldó mellett az adott célfüggvényt maximalizálva felkínál. Nevezzük ezeket a pontokat, melyek I. ország együttes keresleti és kínálati

[2] A lineáris programozás és a decentralizált gazdasági döntések kapcsolatáról bővebb ismertetés található a felhasznált irodalom [2] sz. 369—371, valamint 407—408 oldalán, vagy magyar nyelven az [1] sz. 595—596 oldalán.



6. ábra

görbéjét alkotják, I. ország cseregörbéjének. Hasonlóan meghatározhatjuk II. ország cseregörbéjét is. 6. ábránkon vastagon húztuk a két ország cseregörbéit.[3]

Ha az α paramétert, vagyis a külkereskedelmi árakat μ és ν között változtatjuk, eljutunk egy **P** ponthoz, ahol a két ország cseregörbéje metszi egymást, a két ország kínálata és kereslete tehát megegyezik. Ha az α paraméter a $[\mu; \nu]$ intervallumon kívül esik, az egyik ország kereslete-kínálata megfordul — ami eddig exporttermék volt, az importtermék lesz és viszont. Így mindkét ország ugyanazt a terméket kínálja fel exportra — a kereslet nem egyezhet meg a kínálattal, a cseregörbék nem metszhetik egymást. Ábránkon ez úgy nyilvánul meg, hogy az egyik ország cseregörbéje a koordináta-rendszer 4. negyedében folytatódik, míg a másik ország kereslete-kínálata továbbra is a 2. negyedben ábrázolható.

Mivel a cseregörbék metszéspontjában a két ország h görbéje érinti egymást, egyik ország sem tudja célfüggvény-értékét növelni anélkül, hogy ezzel a másik ország célfüggvény-értéke ne csökkenne, Pareto optimumhoz jutottunk.

A létrejött Pareto-optimális helyzetet a következőkkel jellemezhetjük: mindkét ország termelése ugyanazon célfüggvény maximalizálása eredményeként jött létre; a külkereskedelmi árarány megegyezik ennek a célfüggvénynek koefficiens-arányaival.

[3] A cseregörbe fogalma Marshalltól származik, aki *offer curve*-nek vagy *reciprocal demand curve*-nek nevezte. [4.]

A lineáris programozás elméletének segítségével levont következtetést felhasználva a tényleges külkereskedelmi árakra vonatkozóan: decentralizált döntések eredményeképpen akkor jöhet létre Pareto-optimum, ha a nyereségüket maximalizáló vállalatok mindkét országban azonos árakkal találkoznak és ezek az árak megegyeznek a nemzetközi kereskedelem áraival.

Modellünk szerint egy adott külkereskedelmi egyenleghez tartozó cseregörbék egy pontban metszik egymást. A külkereskedelmi mechanizmusra tett feltevéseink mellett tehát csak egyetlen Pareto-optimális külkereskedelmi termék-struktúra valósulhat meg. A külkereskedelmi mérlegegyenleg ezáltal egyértelműen meghatározza azt is, hogy a létrejött Pareto-optimumon belül melyik ország mekkora célfüggvény-értéket érhet el. Természetesen, ha a külkereskedelmi mérleg egyenlege nem 0, a kereslet-kínálat egyensúlya más Pareto-optimális pontban jön létre. Ebben az esetben a külkereskedelmi árarány is más lesz. Így bármelyik Pareto optimális helyzet előállítható a kereslet-kínálat egyensúlyának eredményeként. Attól függően azonban, hogy egy ország nagyobb, vagy kisebb célfüggvény-értéket ér el az adott helyzetben, a külkereskedelmi mérleg egyenlege passzívabb vagy kevésbé aktív, illetve aktívabb vagy kevésbé passzív lesz.

A cseregörbék metszéspontjának unicitása modellünkben a 6. ábra alapján nyilvánvaló. Ha azonban modellünk egyszerűsítő feltételezéseit (két ország-két termék, speciális célfüggvény stb.) feloldjuk, az unicitás már korántsem nyilvánvaló, sőt bizonyos esetekben nem is áll fenn. A problémával azonban itt nem foglalkozunk, mert meghaladná cikkunk kereteit.

Az eddigiekben beláttuk, hogy a nemzetközi kereskedelem vázolt mechanizmusa mellett abban az esetben és csakis abban az esetben jön létre Pareto optimum, ha egy adott áron a partner-országok kereslete-kínálata termékenként megegyezik. Mi történik akkor, ha a partner-országok kereslete nem egyezik meg a kínálattal?

Ebben az esetben a tényleges külkereskedelem mindig a kisebb volumenű kereskedelemben érdekelt félhez igazodik. Ha a kereslet meghaladja a kínálatot, a forgalom a kínálat szintjén alakul ki, ha a kínálat nagyobb a keresletnél, a kereslet határozza meg a forgalmat — feltételezéseink mellett ugyanis a vállalatok szabadon dönthetnek, hogy mit exportáljanak, vagy importáljanak — így egyik felet sem lehet kényszeríteni, hogy többet exportáljon, vagy importáljon, mint amennyi számára előnyös. Ha tehát az egyik ország kisebb forgalomban érdekelt, a másik ország kénytelen kereskedelmében hozzá igazodni.

Ebben az esetben előfordulhat, hogy bár a kereskedelem nem Pareto optimális, az egyik ország mégis nagyobb célfüggvény-értéket ér el, mintha ugyanazon mérlegegyenleg mellett a kereslet-kínálat egyensúlyban lenne. Ha például, mint 6. ábránkon, a külkereskedelmi mérleg egyenlege 0 és a külkereskedelmi ár μ (pontosan μ-nél végtelen kicsivel nagyobb), akkor I. ország kereslete-kínálata a **Q** pont szerinti (pontosan **Q**-tól végtelenül kismértékben tér el), II. ország kereslete-kínálata pedig ennél jóval nagyobb (kívül esik ábránkon). A külkereskedelem tehát a **Q** pontnak megfelelően alakul ki.

A **Q** pont II. országnak nagyobb, I. országnak kisebb célfüggvény-értéket biztosít, mint a 0 mérlegegyenleg melletti Pareto optimális **P** pont. II. országnak tehát érdemes lehet olyan árban megegyezni, hogy a partner ország kereslete-kínálata kisebb legyen, mint saját kereslete-kínálata, a kisebb külkereskedelmi forgalomból származó veszteséget ugyanis kárpótolhatja, sőt meghaladhatja a számára előnyösebb árarányokból származó nyereség. Általában el-mondható, hogy bizonyos árarány-intervallumon belül az árarányeltolódásból származó nyereség meghaladja a forgalom csökkenéséből származó veszteséget. Ha azonban az árarányoknak a Pareto optimálistól való eltérése egy bizonyos határt meghalad, a forgalom csökkenése már olyan mértékű lesz, hogy mindkét kereskedő fél rosszabbul jár a Pareto optimális helyzethez képest. 6. ábránkon, ha a $[\mu; \gamma]$ intervallumon belül változtatjuk az árarányokat, a két ország közül valamelyik mindig nagyobb célfüggvény-értéket ér el, mint a Pareto optimális helyzetben. Ha azonban az árak aránya az intervallumon kívül esik, mindkét ország célfüggvény-értéke csökken a Pareto optimális helyzethez képest. Hangsúlyozzuk, hogy azok a pontok, amelyeknek megfelelő külkereskedelmet nem a kereslet-kínálat egyensúlya jellemez, bár egyik ország számára kedvezőbbek lehetnek, mint az ugyanazon mérlegegyenleg melletti Pareto optimális pont, mindig van végtelen sok olyan pont, mely mindkét ország számára kedvezőbb. **Q** ponthoz képest például $\mathbf{Q}_1$ pontban II. ország ugyanakkora célfüggvény-értéke mellett I. ország nagyobb célfüggvény értéket ér el, vagy $\mathbf{Q}_2$ pontban I. ország ugyanakkora célfüggvény-értéke mellett II. ország ér el nagyobb célfüggvény-értéket. $\mathbf{Q}_1$ és $\mathbf{Q}_2$ pontok között mindkét ország jobb helyzetben van, mint a **Q** pontban.

Mindkét ország tehát nagyobb célfüggvény-értéket érhetett volna el, ha II. ország a **P** pontbeli helyzethez képest kedvezőbb jövedelemelosztást nem a számára kedvezőbb árarányok biztosításával érte volna el, hanem ha olyan árakban egyezik meg, amelyen a kereslet-kínálat egyensúlyban van és a nagyobb célfüggvény-értéket behozatali többlettel biztosítja.

Visszatérünk következtetéseinket felhasználva a kölcsönösen előnyös árak és a szocialista országok nemzetközi kereskedelmi mechanizmusának kérdésére.

Az utóbbi években a KGST szerepének növekedésével felmerült a szocialista országok elszámolásában alkalmazott árrendszer reformja. Cikkünkben megállapítottuk, hogy ha a nemzetközi kereskedelem a közvetlen termékcseréhez hasonló kötelező kontingensek rendszerén alapul, közömbös az egyes termékek áraránya, hiszen az áraknak ez esetben a jövedelem elosztásán kívül nincs más funkciójuk.

Ha tehát a nemzetközi kereskedelem következetesen csak a központi szervek megegyezésében rögzítettek gyakorlati megvalósítása, mindegy, hogy az árakat a világpiaci árak alapján vagy valamilyen ún. saját árbázis alapján, vagy esetleg teljesen önkényesen állapítják-e meg, hiszen bármilyen árban állapodjanak is meg, az áraknak a termelésre és kereskedelemre semmi befolyásuk nincs. A jövedelem elosztását illetően pedig attól függően, hogy milyen lesz a kereskedelmi forgalom szerkezete, még mindig végtelen sok lehetőség van arra, hogy egyik ország számára előnyösebb vagy hátrányosabb megegyezésre jussanak.

Ha viszont a külkereskedelmi forgalom szerkezete nem központi szervek alkujának eredménye (vagy nem csak ennek az eredménye), hanem decentralizált vállalati döntések függvénye, akkor bármiféle árképzési elv alkalmazása a nemzetközi kereskedelemben a forgalom korlátozását, nem hatékony kereskedelmet eredményez. Bármilyen „árelv" alapján határozzuk meg az árakat, ha az árak nem biztosítják a vállalati döntések összegződése révén létrejött kereslet-kínálat egyensúlyát, a kereskedelem nem lesz hatékony.

(Beérkezett: 1969. I. 12.)

FELHASZNÁLT IRODALOM

1. Baumol, W. J.: Közgazdaságtan és operációanalízis Bp. 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Dorfman, R.—Samuelson, P.—Solow, R.: Linear Programming and Economic Analysis. New York, 1958.
3. Edgeworth, F. Y.: Mathematical Physics. London, 1881.
4. Marshall, A.: The Pure Theory of International Trade. London, 1930.
5. Meade, J. E.: Trade and Welfare. Oxford, 1955. Supplement: A Geometry of International Trade.
6. Mycielski—Piaszczynski, W.: A Mathematical Model of International Economic Cooperation. 1966. (kézirat.)
7. Tardos, M.: A regionális nemzetközi kereskedelem modellje. Közgazdasági Szemle, 1967/10. sz.

THE OPTIMIZATION PROBLEM OF INTERNATIONAL ECONOMIC COOPERATION

The article seeks an answer to the question, what commodity pattern of foreign trade, which distribution of the advantages deriving from trade, and what forms of international trade relations are needed to enable the optimum utilization of the productive capacities of the countries participating in international trade.

On hand of a two-product and two-country model, it is shown that foreign-trade prices will affect the efficiency of trade only in an economy based on decentralized decisions. In that case, it is a condition of optimality that foreign-trade prices ensure the equilibrium of demand and supply. This condition relating to prices will at the same time determine the distribution of advantages deriving from international trade.

In the model it has been assumed that both countries strive for such a combination of export and import commodities with which the maximum value of the objective function can — with their given production capacities, foreign-trade prices and external trade balances — be attained. The activities at the disposal of the countries as well as the objective function are assumed to be linear. It is proven that Pareto optimum can be achieved only with foreign-trade prices which ensure that both countries strive for the same combination of commodities.

The connection between the primal and dual problem of linear programming is used, on the basis of our model, to draw inferences concerning the efficiency of the forms of international trade relations and of the prices prevailing in foreign trade.

ПРОБЛЕМЫ ОПТИМИЗАЦИИ МЕЖДУНАРОДНОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА

В статье автор стремится дать ответы на вопросы, какая структура внешнеторговых товаров, какое распределение внешнеторговых преимуществ и какие формы международных внешнеторговых связей требуются для того, чтобы можно было оптимально использовать производственные возможность стран, принимающих участие в международной внешней торговле.

На модели, содержащей один-два продукта и две страны, автор представляет, что внешнеторговые цены оказывают влияние на эффективность внешней торговли только в хозяйстве, основывающемся на принятии решений в децентрализированном порядке. А в таком случае условием оптимума является обеспечение равновесия спроса и предложения внешнеторговыми ценами. Этим требованием, предъявляемым по отношению к внешнеторговым ценам, заодно предопределяется и распределение внешнеторговых преимуществ. В модели предполагается, что обе страны при данных производственных возможностях, внешнеторговых ценах и сальдо внешнеторгового баланса стремятся установить такую комбинацию экспорта и импорта, при котрой они могут достичь максимального значения целевой функции. Предполагается также линейная взаимозависимость

между имеющимися в распоряжении стран деятельностями и целевой функцией. Доказывается, что оптимум в том смысле, как его определил Парето, может получиться лишь при внешнеторговых ценах, обеспечивающих, чтобы обе страны стремились к той же комбинации товаров.

Автор использует взаимосвязь между примальной и дуальной задачей линейного программирования, что бы на основании модели сделать соответствующие выводы относительно эффективности форм международных внешнеторговых связей и действующих во внешней торговле цен.

Kovács Géza

A hozzárendelési probléma megoldása nem degenerált lineáris szállítási feladatként

Az ún. hozzárendelési probléma az operációkutatás egyik klasszikus feladattípusa. Megfogalmazását tekintve lineáris szállítási feladat, ennek ellenére a lineáris programozás hagyományos módszereivel eddig gyakorlatilag nem volt kezelhető. A legismertebb megoldási algoritmusa a külön erre a célra kifejlesztett ún. magyar módszer, melyet H. Kuhn javasolt 1955-ben [3]; ez Egerváry Jenő egy mátrix-kombinatorikai tételén alapul [1]. (Részletes leírása [2]-ben) Az alábbiakban szintén egy kombinatorikai tételt bizonyítunk be a mátrixok egy osztályára. Ennek ismerete lehetővé teszi, hogy a hozzárendelési feladatot olyan lineáris szállítási feladattal helyettesítsük, amelynek mérete (és költségmátrixa) az eredetivel azonos, de ahol a hozzárendelési feladatra jellemző ún. degeneráció előfordulása kizárt. A transzformáció előnye, hogy az új modellen a hozzárendelési feladat esetleges alternatív optimumainak megkeresése és az érzékenységi vizsgálatok is egyszerűbben, a szállítási feladatoknál általában alkalmazott módon vihetők keresztül.

1. $\mathcal{K}$ osztályú mátrixok

A mátrixok alább vizsgált tulajdonságainál a mátrix elemei között elegendő aszerint különbséget tenni, hogy megjelöltek-e, vagy sem. A jelöletlen elemeket üres mezők, a megjelölt elemeket ponttal ellátott mezők (röviden pontok) ábrázolják.

Útvonalnak nevezünk egy elágazás nélküli, összefüggő tört vonalat, mely szigorúan váltakozó sorrendben vízszintes és függőleges szakaszokból áll, továbbá kezdő- és végpontja és minden irányváltozása jelölt mezőben van. Utóbbiak a kérdéses útvonal csúcspontjai. Az önmagába visszatérő útvonalat (ahol tehát a csúcsok és a szakaszok száma megegyezik), körútnak nevezzük.

Független rendszer a mátrix pontjainak olyan részhalmaza, melynek egyik eleme sincs ugyanezen halmaz más elemével egy sorban vagy oszlopban.

A $\mathcal{K}$ osztályú mátrixokat ezek után úgy definiáljuk, mint amelyekben

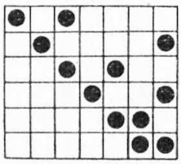
a) az oszlopok száma eggyel több a sorok számánál;

b) minden sor két pontot tartalmaz;

c) a pontok rendszerén körút nem rajzolható.

1.1 *Rendezett alakú mátrixok*

Ha egy $n\times(n+1)$ méretű mátrix minden sorában úgy helyezkedik el két pont, hogy egyik a bal felső sarokból induló főátlón, másik pedig attól jobbra van tetszőleges helyen, akkor a mátrixot „rendezett alakúnak" mondjuk (1. ábra). *Be fogjuk bizonyítani, hogy ez*

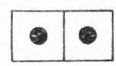


1. ábra

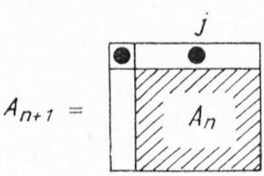
a) *mindig* $\mathcal{K}$ *osztályú:*

b) *bármely oszlopát elhagyva, a maradékrészben kiválasztható — mégpedig egyértelműen — egy* n *pontból álló független rendszer.*

A tételt teljes indukcióval igazoljuk. A 2. ábra szerinti rendezett alak triviálisan $\mathcal{K}$ osztályú és eleget tesz tételünk *b* állításának. Tegyük fel most, hogy van egy rendezett alakú, $n\times(n+1)$ méretű mátrix, melyre állításaink igazak. Jelöljük ezt $\mathbf{A}_n$-el. Illesszünk eléje új oszlopot és fölé egy újabb sort. Az „északnyugati" sarokban (az új sor és oszlop közös mezőjében) helyezzünk el egy pontot, egy másikat pedig az új sor egy tetszőleges helyén, például a j oszlopban. Jelöljük a bővített mátrixot $\mathbf{A}_{n+1}$-el (3. ábra).



2. ábra



3. ábra

A pontok fenti módon történő elhelyezése mellett nyilvánvaló, hogy ha $\mathbf{A}_n$ körút mentes volt, akkor $\mathbf{A}_{n+1}$ is körútmentes, minden sorában két pont van és eggyel több oszlopot tartalmaz, mint sorainak száma. Az új mátrix tehát szintén rendezett alakú és $\mathcal{K}$ osztályú.

Hagyjuk el $\mathbf{A}_{n+1}$-ből az új, bal szélső oszlopot. A kiinduló feltevés szerint $\mathbf{A}_n$-nek abban a részében, mely a j oszlopot nem tartalmazza, felvehető egy n pontból álló független rendszer. Ehhez az új sor j oszlopában álló pontot hozzávéve, az $\mathbf{A}_{n+1}$ maradékrészében egy $n+1$ elemű független rendszert kapunk.

Ha pedig $\mathbf{A}_{n+1}$-ből valamely másik oszlopot hagyunk el, akkor az $\mathbf{A}_n$ maradékrészében felvett n elemű független rendszerhez az „északnyugati" sarokpontot hozzávéve ismét $n+1$ elemű független rendszerünk van az $\mathbf{A}_{n+1}$ maradékrészében.

Figyeljük meg, hogy a független rendszer kiválasztása mindkét esetben egyértelmű volt. $\mathbf{A}_{n+1}$ tehát $\mathbf{A}_n$ minden tulajdonságával rendelkezik.

1.2 *A* $\mathcal{K}$ *osztályú mátrixok két tulajdonsága*

Egy n sort (illetve $n+1$ oszlopot) tartalmazó $\mathcal{K}$ osztályú mátrix

a) bármely oszlopát elhagyva, a maradékrészben kiválasztható — mégpedig egyértelműen — egy n pontból álló független rendszer;

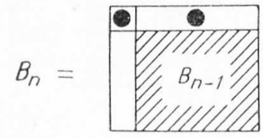
b) rendezett alakra hozható pusztán a sorok és oszlopok átrendezésével.

Elegendő a második állítást igazolni, mivel az elsőt rendezett alakú mátrixokra már bizonyítottuk és a kiválasztható független rendszer pontjainak maximális száma a sor- és oszlopcserékre nézve invariáns.

A második állítás igazolásához először azt kell belátnunk, hogy a $\mathcal{K}$ osztályú mátrixban mindig van olyan oszlop, melyben éppen egy pont van. Valahol ugyanis minden útvonalnak meg kell szakadnia (ellenkező esetben körutat lehetne képezni, ami ellentétben áll a definícióval). De egy útvonal csak olyan pontról nem folytatható, mely oszlopában egyedül áll, mivel (a definíció szerint) a saját sorában minden pontnak van párja.

Legyen most $\mathbf{B}_n$ egy tetszőleges $\mathcal{K}$ osztályú mátrix. Válasszunk ki egy, saját oszlopában egyedüli pontot, helyezzük ennek sorát legfelülre és oszlopát a bal szélső helyre. Így a kérdéses pont az „északnyugati" sarokba kerül (4. ábra).

Belátható, hogy a $\mathbf{B}_{n-1}$ részmátrix, mely az eredeti mátrixból az első sor és oszlop elhagyásával keletkezik, szintén $\mathcal{K}$ osztályú. Ha ugyanis az eredeti mátrix körút mentes, akkor nyilván a része is az; minden sorában két pontnak kell lenni, mert sorai előtt a $\mathbf{B}_n$ oszlopában nincsen pont és végül maga is eggyel több oszloppal bír, mint sorainak száma. Akkor pedig $\mathbf{B}_{n-1}$-ben is van olyan pont, mely oszlopában egyedül áll és az eljárás megismételhető. Így véges számú lépésben a teljes mátrixot rendezett alakra hozhatjuk.



4. ábra

2. Egy speciális szállítási feladat

Tekintsük az alábbi szállítási feladatot:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = n; \qquad j = 1, 2, \ldots n + 1$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = n + 1; \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Mint látható, az $[x_{ij}]$ mátrix formában felírt megoldásrendszer n sorból és $n + 1$ oszlopból áll, a változók összege minden sorban $n + 1$ és minden oszlopban n. A további vizsgálatokban felhasználunk néhány ismert fogalmat, ezek röviden a következők.

A lineáris szállítási feladat feltételi egyenletrendszerének rangja eggyel kevesebb a sorok és oszlopok számának összegénél. Így jelen esetben a rangszám $n + (n + 1) - 1 = 2n$.

Bázismegoldásnak nevezzük ezután azokat a megengedett megoldásokat, melyekben a pozitív értékű változók száma legfeljebb $2n$. (Ismeretes, hogy az optimális megoldást elegendő a bázismegoldások között keresni.)

Azokat a bázismegoldásokat, melyekben a pozitív értékű változók száma kisebb, mint $2n$, degeneráltnak nevezzük. (A hozzárendelési feladatban a gyakorlati nehézséget éppen az jelenti, hogy minden bázismegoldása degenerált.)

A rövidség kedvéért „kötött helyeknek” nevezzük az $[x_{ij}]$ megoldás-mátrixban azokat és csak azokat a mezőket, ahol a megfelelő változó értéke pozitív.

Be lehet mármost bizonyítani, hogy a szóban forgó szállítási feladat minden bázismegoldásának mátrixa — a kötött helyek elrendeződését tekintve — $\mathcal{K}$ osztályú.

a) A sorok és oszlopok száma eleve megfelel az 1. pontban adott definíciónak.

b) Mivel a mátrix bármely mezőjében a változó értéke legfeljebb n (az oszlopösszeg) lehet, a sorösszeg pedig mindenütt nagyobb: $n + 1$, ezért egy megengedett megoldás minden sorában legalább két kötött helynek kell szerepelnie. Ebből következik viszont, hogy ha egy megengedett megoldásban van olyan sor, ahol a kötött helyek száma kettőnél több, akkor — mivel n db sorunk van — az összes kötött helyek száma nagyobb $2n$-nél. Az ilyen megoldás tehát nem bázismegoldás.

Eszerint minden bázismegoldás soronként pontosan két kötött helyet tartalmaz (így összesen $2n$ darabot).

c) A kötött helyek rendszere körút mentes. Ha ugyanis lenne olyan körút, melynek minden csúcspontja kötött helyen van, akkor ennek segítségével a pozitív értékkel programozott helyek száma eggyel csökkenthető lenne, holott láttuk, hogy ezek száma minden lehetséges megoldásban legalább $2n$.

Így a $\mathcal{K}$ osztály minden ismérvét kimerítettük. A bázismegoldások imént igazolt tulajdonsága alapján tehát a tárgyalt szállítási feladat

— degeneráció mentes (mint a *b)* pontból következik), ami garantálja, hogy bármely nem optimális megoldásból úgy térhetünk át egy következő programra, hogy a célfüggvény értéke véges mértékben javul;

— a megoldás mátrixának bármely oszlopát elhagyva, a megmaradó $n \times n$ négyzetes mátrix kötött helyein felvehető, mégpedig egyértelműen egy maximális (n pontból álló) független rendszer.

A független pontok kijelölésével kapcsolatban megjegyezzük, hogy ez teljesen mechanikus, egyszerű művelet. Először az oszlopukban egyedül álló kötött helyeket karikázzuk be a sorukban levő másikat áthúzva. Így újabb olyan pontokat kapunk, melyek oszlopukban vagy sorukban már egyedül állanak. Ezeket bekarikázva a velük egyvonalban lévő összes többi pontot kihúzzuk és ezt folytatva végül csak a keresett pontok maradnak meg.

		2	5				7
	1			6			7
		4				3	7
					6	1	7
6			1				7
	5					2	7
6	6	6	6	6	6	6	

a)

		5			
	1		6		
					3
				6	1
6		1			
	5				2

b)

5. ábra

Az elmondottak illusztrálásaképpen az 5/a ábra $n = 6$ esetén mutat be egy bázismegoldást; az 5/b ábrán az a független rendszer látható, amit a harmadik oszlop elhagyásakor kapunk.

3. A hozzárendelési probléma

A hozzárendelési probléma megfogalmazása a következő:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad j = 1, 2, \ldots n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1; \qquad i = 1, 2, \ldots n;$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Ismeretes, hogy a hozzárendelési feladat bázismegoldásaiban a változók nulla vagy egységnyi értékűek, az utóbbiak $[x_{ij}]$-ben független rendszert alkotnak.

A 2. pontban definiált szállítási feladat optimális megoldásaira most igazolni fogjuk, hogy ha azokban bármelyik oszlopot elhagyjuk, akkor a maradékrészben kijelölt független rendszer az illető maradékrészben kitűzött hozzárendelési feladat optimális megoldását jelenti.

A szóban forgó szállítási feladat duálisának feltétel-rendszere — mint ismeretes — :

$$u_i + v_j \leq c_{ij},$$

$$i = 1, 2, \ldots n \text{ és}$$

$$j = 1, 2, \ldots n+1,$$

melyet a duális változók optimális megoldáshoz tartozó u_i^* és v_j^* értékei oly módon elégítenek ki, hogy valahányszor $x_{ij}^* > 0$, az $u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ egyenlőség áll fenn. (x_{ij}^*-al a primál feladat optimális megoldásának értékeit jelöltük.)

A bizonyítás gondolatmenete kedvéért most alakítsuk át a költségmátrixot úgy, hogy az új költségelem:

$$c'_{ij} = c_{ij} - (u_i^* + v_j^*).$$

Ez a költségmátrix az eredeti költségmátrixszal optimalizálás szempontjából egyenértékű, hiszen nem tettünk mást, mint hogy minden sorából és oszlopából levontunk egy konstanst.

Az elmondottakból következik, hogy a redukált költségmátrixban a kötött helyek költségelemei zérusok, az egyéb helyeké pedig nem negatívok lesznek. Mivel pedig a kötött helyeken biztosan ki tudunk jelölni maximális számú független pontot, az ide írt egyesek optimális hozzárendelési programot reprezentálnak.

3.1 *A hozzárendelési probléma megoldása nem degenerált lineáris szállítási feladatként*

A hozzárendelési feladat megoldására az eddigiek alapján kézenfekvően kínálkozik az a lehetőség, hogy a költségmátrixot kibővítjük egy új, $n + 1$-edik segédoszloppal, megoldjuk a 2. pont szállítási feladatát, majd a hozzáírt oszlopot a segédváltozókkal együtt ismét elhagyva megkeressük a független pontokat. Mivel azonban a segédoszlop költségelemei tetszőlegesek lehetnek, azokat egy (például a $c_{1,\,n+1}$) kivételével végtelennek vesszük. Ezáltal $x_{1,\,n+1}$ értékét is rögzítettük ($x_{1,\,n+1} = n$). Így a segédoszlop hozzáírása is feleslegessé válik.

Végezetül tehát a

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = n; \qquad j = 1, 2, \ldots n;$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \qquad i = 1, 2, \ldots n;$$

$$x_{ij} \geqq 0;$$

$$\sum_{o=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

degenerációtól mentes szállítási feladatot oldjuk meg, ahol $a_1 = 1$; $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = n + 1$. Ennek minden optimális megoldásához egy közvetlenül kijelölhető független rendszer tartozik, ezek a hozzárendelési feladat alternatív optimumait szolgáltatják. (Megjegyezzük, hogy a szállítási feladat különböző megoldásaihoz nem szükségképpen tartozik különböző független rendszer.)

5	2	5	4	6	1
2	1	1	2	1	6
4	1	4	2	4	6
2	1	2	2	3	6
4	2	3	2	4	6
5	5	5	5	5	

	v_j	4	2	4	3	4
u_i	0		1			
	−3			1		5
	−1		4		2	
	−2	5		1		
	−1			3	3	

6. ábra

Megemlítjük végül, hogy az előző pontban szereplő költségmátrix-redukció, mint könnyen igazolható, minimalizálja az új költségelemek összegét, miközben legalább $2n - 1$ költségelem zérus lesz. Ez a tény némely alkalmazásban hasznos lehet.

(Beérkezett: 1969.I.18.)

IRODALOM

[1] Egerváry, J.: Mátrixok kombinatorikus tulajdonságairól. Matematikai és Fizikai Lapok, 1931. 38., sz. 16—28 p.

[2] Krekó, B.: Lineáris programozás. Budapest, 1966. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[3] Kuhn, H. W.: The Hungarian Method for the Assignment Problem. Naval Research Logistics Quarterly 1955. 2, 83—98 p.

THE SOLUTION OF THE ASSIGNMENT PROBLEM AS A NON-DEGENERATE LINEAR TRANSPORT PROBLEM

The article deals with the classical assignment problem, the formulation of which as a linear programming problem is the following:

$$(*)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}{}' x_{ij} = 1\,; & j = 1, 2, \ldots n \\ \sum\limits_{j=1}^{n}{}' x_{ij} = 1\,; & i = 1, 2, \ldots n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqq 0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n}{}' c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

It is known that this linear model does not afford a possibility of the practical solution of the problem, the difficulty being due to the fact that all its basic solutions are degenerate.

To overcome this difficulty, the author proposes a method which consists simply in substituting for constraints (*) the following:

$$\sum_{i=1}^{n}{}' x_{ij} = n\,; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n}{}' x_{ij} = a_i\,; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

where

$$a_1 = 1 \text{ and}$$

$$a_1 = n + 1 \text{ for } i = 2, 3, \ldots, n.$$

The author proves that in this linear transport problem

a) none of the basic solutions is degenerate, a fact that ensures the passing from any non-optimal solution to a subsequent program in a way that the objective function value improves to a finite extent;

b) in matrix $[x_{ij}]$ belonging to the basic solution, over the set of positive variables there can always be determined one and only one maximal independent system (composed of n points);

c) the independent system belonging to the optimum solution constitutes also an optimum solution for the original assignment problem.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СООТВЕТСТВИЯ КАК НЕВЫРОЖДЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ

Автор статьи занимается классической проблемой соответствия, которая может быть сформулирована как задача линейного программирования следующим образом:

$$(*)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}{}' x_{ij} = 1\,; & j = 1, 2, \ldots, n \\ \sum\limits_{j=1}^{n}{}' x_{ij} = 1\,; & i = 1, 2, \ldots, n \end{cases}$$

$$x_{ij} \geqq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}{}' \sum_{j=1}^{n}{}' c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Известно, что эта модель линейного программирования не предоставляет возможности для практического решения задачи; трудность заключается в том, что все ее опорные решения являются вырожденными.

Для преодоления этой трудности автор предлагает метод, состоящий попросту в том что условия (*) заменяются следующими:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = n; \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \qquad i = 1, 2, \ldots n,$$

где

$$a_1 = 1 \text{ и}$$

$$a_i = n + 1; \qquad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Автор доказывает, что в этой линейной задаче транспортирования

а) ни одно из опорных решений не является вырожденным. Этим фактом обеспечивается условие, что от любого неоптимального решения можно перейти к следующей программе так, чтобы значение целевой функции улучшалось в *конечномерной* степени.

б) На множестве положительных переменных матрицы $[x_{ij}]$, относящейся к опорному решению, всегда можно выявить одну и только одну максимальную (состоящую из n элементов) независимую систему.

в) Независимая система, относящаяся к оптимальному решению, представляет собой оптимальное решение и для первоначальной задачи соответствия.

Glattfelder Péter

Mit is mutat a inverzmatrix?

Közismert, hogy a gazdasági élet különböző területein dolgozó szakemberek, akik számára az ágazati kapcsolati mérleg a mindennapi munka segédeszközévé vált, még ma is némi fenntartással kezelik a rendelkezésükre álló képleteket, számításokat, illetve táblákat. Véleményem szerint ez részben azzal magyarázható, hogy a szóban forgó eredmények közgazdasági értelmezése nem egy helyen pontatlan, sőt egyenesen félreérthető.

Úgy tűnik, hogy e problémák alapvetően az inverzmatrixszal kapcsolatosak. Néhány — helytálló, bár a kérdést összetetten vizsgáló — kivételtől eltekintve a szerzők az $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ matrix r_{ij} elemét úgy definiálják, mint egységnyi végsőfelhasználásra kerülő termék (netto output) kibocsátásához szükséges *halmozott* (közvetlen plusz közvetett) ráfordítást az adott i, j relációban. Ha ez így van, úgy jogos a kérdés, hogy vajon nem hibázunk-e akkor, amikor a közvetett ráfordítások vizsgálatához szembeállítjuk a bruttó output (össztermelés) egységére vetített közvetlen és a nettó kibocsátás egységére jutó halmozott ráfordításokat. A statisztika elmélete helyteleníti ezt az összevetést (hiszen különbözőek a viszonyítási alapok), mégis igen gyakran megtettük anélkül, hogy az említett dimenzióbeli eltéréssel számoltunk volna.

Hogyan lehetne feloldani a közvetlen és a halmozott ráfordításoknak ezt az ellentmondását? Néhány szerző már felvetette, hogy valamiféle „közös alapra" kellene hozni a kétféle együtthatót, hogy ily módon kiszűrhessük a halmozott ráfordításokból azt a növekedést, melyet a bruttó és a nettó kibocsátás nagyságrendi eltérése okozott.

Megítélésem szerint nincs szükség semmiféle „nettósításra", mivel az inverz-együtthatók — mint halmozott mutatók — ugyancsak a „bruttó" output egységére vonatkoznak. (Az idézőjelet a későbbi gondolatmenet igazolja.) Ha ez igaz — márpedig hogy az, azt a következőkben bizonyítani is fogom —, úgy ezáltal már automatikusan megszűnik a különböző viszonyítási alapok problémája, s a halmozott és a közvetlen ráfordítások közti eltérés kizárólag a közvetett ráfordításokkal magyarázható. (Szándékosan beszélek halmozott és nem teljes ráfordításokról. Nálunk e két kifejezést hosszú ideig azonos értelemben használták, napjainkban azonban „teljes" alatt inkább a népgazdasági szintű ráfordításokat értjük.[1]

A megfelelő külföldi és hazai szakirodalmat tanulmányozva azt láthatjuk, hogy az inverz-együtthatók olyan értelmezése, miszerint azok egységnyi nettó output előállításához szükséges *halmozott* ráfordítások lennének, a következő matematikai eredményekhez kapcsolódik:

[1] Lásd pl. Balsay Éva: Népgazdasági szintű ráfordítások meghatározása. — Statisztikai Szemle — 1965/11.

— az ún. „Neumann-sor"
— a bruttó és a nettó output leontiefi összefüggése.

A Neumann-sor az $\mathbf{R} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ matrixot írja fel egy olyan végtelen mátrix-polinom alakjában, melyben az egyes tagok az $\mathbf{A}$ technológiai mátrix fokozatosan növekvő hatványai. Eszerint

$$(1)\qquad (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{E} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{A}^3 \ldots + \mathbf{A}^n + \ldots$$

A fenti, matematikai szempontból kifogástalan összefüggésből még egyáltalán nem derül ki, hogy miként került az inverzmátrix definíciójába a nettó output mint vetítési alap. Ez utóbbi kérdésre az

$$(2)\qquad \mathbf{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{y}$$

képlet adja meg a választ, mely szerint a Leontief-inverz és a nettó output ($\mathbf{y}$) szorzataként mindig előállítható a bruttó kibocsátás vektora ($\mathbf{x}$). Az itt leírt azonosságot, mely a nettó outputra való vetítettségre utal, a továbbiakban összekapcsoltuk a halmozódást „szuggeráló" Neumann-sor értelmezésével. S éppen itt vélem felfedezni az ellentmondást, ugyanis ez utóbbi kizárólag az $\mathbf{A}$ mátrix hatványaiból képzi az $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$-et, mely $\mathbf{A}$-ról köztudott, hogy nem az $\mathbf{y}$, hanem az $\mathbf{x}$, a bruttó termelés egységére vonatkozik.[2] Az az igazság — és a továbbiakban erre szeretnék rámutatni —, hogy kétféle „jelentése" van az inverz-együtthatóknak, s mi ezt a kettőt kissé összekevertük. Nevezetesen: ezek tekinthetők egységnyi *bruttó termelés halmozott* ráfordításainak (1), illetve a *közvetlen ráfordítások* egységnyi nettó outputra vetített értékének (2).[3]

Félreértés ne essék: az számomra is világos, hogy elvileg nincs semmi különbség a kétféle kibocsátás *egysége* között. (A gyakorlatban persze lehet, hiszen — sajnos — még nem minden esetben azonos „egység" a termelő fogyasztásra és pl. az exportra átadott nyersanyag vagy félkésztermék.) Emiatt ezen „egység" előállításához — eltekintve a rendszer belső összefüggéseitől — azonos ráfordítás-igény tartozik. Csakhogy jogtalan ez az eltekintés, s így én sem az ellen protestálok, hogy ne kellene nagyobb termékráfordítás egységnyi végsőfelhasználási *kibocsátásához*, mint a bruttó output egységéhez (hiszen az előbbi egy meghatározott termelő fogyasztással párosul, s így az abból való igények kielégítéséhez az utóbbit terhelő ráfordításokat is meg kell „fizetni"). Arról van szó, hogy a halmozódás mint az input-output közismert és már tövéről hegyére elmagyarázott kategóriája nem ide tartozik, nem a nettó outputtal kapcsolatos. Azt sem szabad elfelejteni, hogy matematikai oldalról tekintve az inverzegyütthatók kizárólag azért nagyobbak az $\mathbf{A}$ megfelelő elemeinél, mivel ugyanazt az összráfordítást kisebb outputra vonatkoztattuk. Ebből az aspektusból tehát nincs itt semmiféle halmozódás: csupán az $\mathbf{x}$ helyett az $\mathbf{y}$-ra végeztünk egy lineáris transzformációt (ahol is $\mathbf{y} \leq \mathbf{x}$)[4]. Így lehet azután —

[2] Megjegyzendő, hogy egymással belső, termelési kapcsolatban nem álló szektorok esetében ez a különbség nem jelent problémát (hiszen ekkor azonos az összes és a végsőfelhasználási kibocsátás, az $\mathbf{A}$ pedig egy null-mátrix), ellenkező esetben viszont igen.

[3] Ezt az oldalt — elméletileg talán a legtisztábban — Szabó László fogta meg. (Az inverzmátrix értelmezése — Statisztikai Szemle 1963/4.)

[4] Más ez a transzformáció, mint ami az $\mathbf{A}$ képzésekor történt: ott a $\mathbf{T}$ sakktábla-mérleg oszlopait rendre elosztottuk a hozzájuk tartozó bruttó termeléssel, míg itt az $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ az $\mathbf{y} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}$ egyenletrendszer megoldásából adódott.

ismétlem: ebben a vonatkozásban — az $(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}$ elemeit *közvetlen* ráfordításként értelmezni.

Külön kérdés — s az eddigieknek nem mond ellene — hogy a Neumann-sorral való értelmezés lehetővé teszi, hogy ugyanezeket az elemeket egységnyi össztermék (bruttó output) *halmozott* ráfordítás-igényeként is interpretáljuk.[5] Ebből pedig logikusan következik, hogy határozott közgazdasági értelme van a halmozott ráfordítási együtthatók és a hozzájuk tartozó bruttó termelés szorzatának. (Képletszerűen az $\mathbf{R}_x = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{X}}$-nek, ahol $\hat{\mathbf{X}}$ az $\mathbf{x}$-ből képzett diagonális mátrix.) Valóban, így hiszem, s ez nem fából vaskarika, még ha ily módon ki is jutunk az $\mathbf{x}$ és az $\mathbf{y}$ korlátozta rendszerből. Ezek az abszolút értékű (tehát nem fajlagos!) halmozott ráfordítások, pontosabban ezek és a tényleges (halmozatlan) értékek különbségei azt a közvetett ráfordítás-tömeget mutatják, melyet a szóban forgó szektor a többitől — relációnként vagy összesen — a saját outputja érdekében, indirekte megkívánt, illetve feltételezett. A halmozott import-koefficiensek és a megfelelő bruttó termelés szorzata például kimutatja azt a szektoronkénti importanyag-*volument* is, melyet e szektor a többitől kapott termékekbe „ágyazva", már mint hazai eredetű erőforrást fogyasztott el.

A magam részéről a Neumann-sor és a többször idézett leontiefi összefüggés közgazdasági-matematikai jelentőségét éppen abban látom, hogy rámutatnak az inverz-együtthatók fentiekben vázolt kettős természetére. Ebből kifolyólag szerintem helyesebb lenne a továbbiakban az „egységnyi végsőfelhasználás halmozott... ráfordításai" címmel ellátott, illetve értelmezett számítási eredményeknél mindig egységnyi *termelés* halmozott ... ráfordításai"-ról beszélni.

(Beérkezett: 1969. I. 16.)

WHAT DOES THE INVERSE MATRIX ACTUALLY SHOW?

The article aims not so much at describing new scientific achievements as rather at clearing a theoretical misinterpretation assumed by the author to persist. It deals, indeed, with the interpretation of the traditional Leontief inverse which is defined in practice as the matrix of total (direct and indirect) inputs required to bring about one unit of net output. This definition is challenged by the author who claims that his proposed interpretation opens new possibilities for the further theoretical and practical development of input-output analysis.

ЧТО ЖЕ ПОКАЗЫВАЕТ ПО СУЩЕСТВУ ОБРАТНАЯ МАТРИЦА?

Цель данной статьи заключается не столь в представлении новых научных результатов, как в выяснении — как это предполагает автор — теоретического недоразумения. Конкретно, речь идет о трактовке традиционной обратной матрицы Леонтьева, которую на практике принято определять как матрицу кумулированных (прямых плюх косвенных) затрат, требующихся для создания единицы «чистого выпуска». Автор спорит с этим определением, открывая предлагаемой им трактовкой новые возможности для принципиального и практического развития анализов «затраты-выпуск».

[5] Nem tévedtek tehát a külföldi és hazai kutatók (W. Leontief, R. Stone, Bródy A., Kondor Gy., Simon Gy., Rácz A. stb.), amikor definíciót adtak, hanem inkább adósok maradtak — megítélésem szerint — a Leontief-inverz két oldalának észrevételével, s így könnyen létrejöhetett az a logikai zavar, mely megingatta jónéhány gyakorlati közgazdánk inverzmátrixba vetett hitét.

BOD PÉTER

A Wolfe-féle ún. általánosított lineáris programozásról

Ismeretes, hogy a lineáris programozás (röviden: LP) az operációkutatás egyik legelterjedtebb, a gyakorlatban legszélesebb körben alkalmazott matematikai módszere. Jól kidolgozott algoritmusrendszere és ezek különböző számítógépi realizációi lehetővé teszik jelentős méretű LP feladatok megoldását is. A modellalkotók ezért rendszerint komoly erőfeszítéseket tesznek, hogy saját problémáikat — hacsak lehetséges — mint LP feladatot fogalmazzák meg, vagy legalábbis ilyen természetű feladatok megoldására vezessék vissza.

Ezek a törekvések teljesen érthetők, de kétségtelenül magukban rejtik azt a veszélyt, hogy a modellek látják az igyekezet kárát. Ti. olyan egyszerűsítő feltevések kerülnek a modellekbe, amelyek azok valósághűségét erősen kétségessé teszik és így vitathatókká válnak a modellekből levont következtetések is.

Kétségtelen tény, hogy minden valóságos gazdasági folyamat matematikai modellezésénél bizonyos kompromisszumra van szükség. A gyakorlat szempontjából nyilvánvalóan csak olyan modelleknek van értelmük, amelyek számszerűsíthetők, megoldhatók és a megoldás a rendelkezésre álló számolóberendezéseken gyakorlati szempontból hasznos időn belül kiszámítható. Vagyis minden esetben össze kell egyeztetni a valósághűség és a megoldhatóság követelményeit.

Éppen ebből a szükséges kompromisszumnak a szempontjából van nagy jelentősége a matematikai programozás olyan eredményeinek, amelyek lehetővé teszik a LP technikailag jól kezelhető fegyverzetének a LP alapmodelljénél általánosabb problémák megoldására való eredményes felhasználását. Ilyen jellegű eredmény a Ph. Wolfe-tól származó „általánosított lineáris programozási" (röviden: ÁLP) eljárás [2].

I.

A LP alapfeladata ún. kanonikus alakjában megfogalmazva a következő:[1]

Meghatározandó az $x_1; x_2; \ldots; x_n$ nemnegatív változók olyan értékrendszere, amely eleget tesz a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i x_i = \mathbf{b} \tag{1}$$

lineáris egyenletrendszernek és amely mellett a

[1] A cikk olvasóitól feltételezzük a LP alapjainak az ismeretét. Az irodalomjegyzékben felsorolunk néhány magyar nyelvű tankönyvet, illetve tananyagot.

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

lineáris függvény maximális értéket vesz fel.

A feladatban szereplő $\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \ldots; \mathbf{a}_n$; $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok adott, valós számokat tartalmaznak; ezek a feladat numerikus paraméterei.

A feladat megoldása abban áll, hogy megkeressük a változók bizonyos tulajdonságokkal rendelkező (ti. megengedett és a megengedettség korlátain belül maximális célfüggvényértékű) értékeit és meghatározzuk az ehhez tartozó optimális célfüggvényértéket. Nyilvánvaló, hogy mind az optimális program, mind az ezzel elérhető maximális célfüggvényérték a paraméterek függvénye. Azonban adott konkrét LP feladatban a paraméterek értékei rögzítettek.

Fenti LP feladat Wolfe-féle általánosításában megszűnik a paraméterek számszerűen rögzített jellege. A paraméterek vagy egy részük, változókká lesz, amelyek vektoronként és egymástól függetlenül szabadon változhatnak bizonyos megadott korlátok között. Az ÁLP feladat megoldása tehát nem csak az LP-i értelemben vett változók optimális rendszerének meghatározására irányul, hanem a megengedett lehetőségek keretei között kiválasztja a maga számára a legkedvezőbb paraméterértékeket is. A feladat szempontjából természetesen azok a paraméterértékek a legkedvezőbbek, amelyek miközben megengedettek — a lehető legnagyobb célfüggvényérték elérését teszik lehetővé.[2]

Az ÁLP feladat most már precízebb megfogalmazásánál először abból indulunk ki, hogy az alapul szolgáló LP feladat kapacitásvektora és célfüggvény-együtthatói rögzítettek.[3] Feltételezzük, hogy adott annyi nemüres, konvex halmaz, ahány változója van az LP feladatnak. Legyenek ezek $K_i (i = 1, 2, \ldots, \ldots, n)$ és feküdjenek egy olyan dimenziós térben, ahány egyenlete van az LP feladat feltételrendszerének vagyis

$$K_i \subset R^m \qquad \forall\ i\text{-re.}$$

Meghatározandók ezek után az $x_1; x_2; \ldots; x_n$ nemnegatív változók és a $\mathbf{P}_1; \mathbf{P}_2; \ldots; \mathbf{P}_n$ ismeretlen együtthatóvektorok úgy, hogy

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(a) \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i x_i = \mathbf{b} \\ &(b) \quad \mathbf{P}_i \in K_i \qquad \forall\ i\text{-re} \end{aligned}$$

teljesüljön és $z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ maximális legyen.

Vegyük észre, hogy ha minden K_i halmaz egyetlen elemből áll csak $(\mathbf{a}_i)$, az ÁLP feladat közönséges LP feladatra redukálódik.

[2] Parametrikus programozásnak szokták nevezni az olyan jellegű számításokat, amelyekben az optimális program és az optimális célfüggvényérték változásait vizsgálják a paraméterek változásának a függvényében. Célszerű a parametrikus programozást az ÁLP kérdésfeltevésétől megkülönböztetni. Ez utóbbinál ismeretlen paraméterekkel való programozásról van szó.

[3] Ezt a feltevést később feloldjuk.

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az ÁLP feladatban szereplő valamennyi halmaz olyan konvex poliéder, amely valamilyen lineáris egyenletrendszer nem negatív megoldásainak a halmazával jellemezhető. Ez annyit jelent, hogy minden K_i halmazhoz tartozik egy F_i feltételrendszer

$$\text{(3)} \qquad F_i = \{\mathbf{y}^i \mid \mathbf{D}_i\mathbf{y}^i = \mathbf{d}^i;\ \mathbf{y}^i \geq 0\}$$

és megadható az F_i halmaz és a K_i halmaz elemeinek egy kölcsönösen egyértelmű egymáshoz rendelése. $\mathbf{P}_i \in K_i$ akkor és csak akkor, ha

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m^i \end{bmatrix}$$

megoldása a

$$\sum_{j=1}^{S_i} y_j^i \mathbf{d}_j^i = d^i; \quad y_j^i \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m, \ldots S_i)$$

feltételrendszernek.

A továbbiakban bemutatjuk, hogyan lehet az ÁLP feladat megoldását LP feladatok megoldásának a sorozatára visszavezetni. Ebben a megoldássorozatban felváltva kell 3. típusú feltételekkel bíró LP feladatokat és 2. alakú LP feladatot megoldani. A könnyebb hivatkozás érdekében a 3. alakú feltételrendszerrel rendelkező LP feladatokat a továbbiakban együtthatóvektorokat generáló programoknak, a 2. alakú feladatot alapfeladatnak fogjuk nevezni.

Feltevéseink szerint $K_i \neq \emptyset$ minden i-re, ezért valamennyi generáló programnak van megengedett megoldása. Legyen $\mathbf{y}_0^i$ egy megengedett megoldása F_i-nek ($i = 1, 2, \ldots, n$) és jelöljük e megoldás első m komponensét $\mathbf{P}_i^0$-val.

$$\mathbf{P}_i^0 = \begin{bmatrix} y_1^{i_0} \\ y_2^{i_0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m^{i_0} \end{bmatrix}$$

A mondottak alapján $\mathbf{P}_i^0$ az i-ik alapfeladatbeli tevékenységi változó megengedett együtthatóvektora. (Vegyük észre, hogy $\mathbf{P}_i^0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ már nem változókat tartalmaz.)

Oldjuk meg ezek után a 2. alatti feladatot $\mathbf{P}_i^0$ ($i = 1, 2, \ldots. n$) együtthatókkal. Ez már nem ÁLP, hanem LP feladat. Tételezzük fel, hogy ennek a feladatnak ti.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i^0 x_i = \mathbf{b}$$

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max!$$

van optimális megoldása.[4]

A 4. alatti feladat optimális megoldását szolgáltató bázist jelöljük $\mathbf{A}_{B^0}$-val. A bázisváltozók értéke az optimális megoldásban: $\mathbf{x}_{B^0} = \mathbf{A}_{B^0}^{-1}\mathbf{b}$ és a célfüggvény maximális értéke:

$$\hat{z}_0 = \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{b} \,,$$

ahol $\mathbf{c}_{B^0}^*$ a bázisváltozók célfüggvényegyütthatóit tartalmazó vektor. A bázis optimalitása miatt:

$$\mathbf{c}_k - z_k = c_k - c_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_k^0 \leq 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Az alapfeladat így nyert megoldása feltétlenül megengedett. Ugyanis 4.-ben megengedett együtthatóvektorokkal dolgoztunk és ezek választott értékei mellett $\mathbf{x}_{B^0}$ kielégíti az alapfeladat feltételeit, tehát maga is megengedett. Ugyanakkor $\mathbf{x}_{B^0}$ csak az együtthatók konkrétan választott értékeit figyelembevéve optimális. Elképzelhető az együtthatók más megengedett rendszerében ennél magasabb célfüggvényértékű program is.

Ennek a lehetőségnek a vizsgálata érdekében azt kell elemezni, hogy újabb együtthatók generálása kecsegtet-e ilyen lehetőségekkel. Itt használjuk fel azt a feltevést, hogy minden K_i konvex halmaz. Ismeretes ugyanis, hogy egy konvex halmaz tetszőleges véges sok elemének a konvex lineáris kombinációi is hozzátartoznak a halmazhoz. Ha tehát elemzésünkből az derül ki, hogy valamilyen x_i tevékenységnek egy a 4. alatti feladatban nem szereplő megengedett együtthatóvektora $\mathbf{P}_i^1$ révén a célfüggvény javítható, akkor ez azt jelenti, hogy az i-ik tevékenységet a $\mathbf{P}_i^0$ és a $\mathbf{P}_i^1$ valamilyen meghatározott konvex lineáris kombinációjával kell működtetni.

Vizsgáljuk meg, hogy a j-ik generáló program segítségével nyerhető együtthatókkal lehetséges-e az alap-feladat optimális megoldását javítani. Ehhez azt kell vizsgálni, hogy a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i^0 x_i + \mathbf{P}_j x_j^1 = \mathbf{b}$$

$$\text{(5)} \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\,; \qquad x_j^1 \geq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_j x_j^1 \right) \to \max!$$

LP feladat optimális megoldása jobb-e a 4. alatti feladatáénál. Látható, hogy 4. és 5. egyetlen változóban különböznek csak. Az 5. feladat: kibővített alapfeladat; azonos feltételrendszert és eggyel több változót tartalmaz, mint a 4.

[4] Ez a feltételezés egyáltalán nem magától értetődő. Könnyen előfordulhat, hogy míg 2-nek van optimális megoldása, 4-nek nincs megengedett megoldása sem. Fentiekre ezért még visszatérünk.

alatti. Mivel 4. optimális bázisát ismerjük — egyszerűen eldönthető, hogy x_j^1 bevonása a bázisba hozhat-e javulást 4. optimális megoldásához képest. Ennek érdekében csak a $c_{n+1} - z_{n+1}$ különbség előjelét kell meghatározni. Ha

$$c_{n+1} - z_{n+1} = c_j - \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j \leq 0$$

akkor a 4. feladat optimális megoldása optimális az 5. feladatban is. Ahhoz, hogy 5. optimális megoldása jobb lehessen, mint $\hat{z}_0$, az szükséges, hogy

$$c_j - \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j > 0$$

legyen, vagyis

$$c_j > \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j ,$$

$\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} P_j$ azonban a $\mathbf{P}_j$ vektor ismeretlen komponenseinek lineáris kifejezése. Ahhoz, hogy létezzék olyan további megengedett együtthatóvektor az x_j^1 tevékenységhez, amely mellett 5. optimális megoldása jobb, mint 4.-é — az szükséges, hogy legyen K_j-ben olyan $\mathbf{P}_j$, amelyre

$$\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j < c_j .$$

Vizsgáljuk tehát a $\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j$ lineáris függvény minimumát a j-ik generáló program feltételrendszerén. Ez egy LP feladat. Ha

$$\min (\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j) \geq c_j$$

$$\mathbf{P}_j \in \mathrm{K}_j$$

akkor a j-ik generáló program nem képes javításra alkalmas újabb együttható oszlopot generálni. Legyen ezzel szemben

$$\min (\mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j) < c_j \quad \mathbf{P}_j \in \mathrm{K}_j$$

és alkossa $\mathbf{P}_j^1$ a generáló program optimális megoldását. Ekkor

$$c_j - \mathbf{c}_{B^0}^* \mathbf{A}_{B^0}^{-1} \mathbf{P}_j^1 > 0$$

lévén az

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i^0 x_i + \mathbf{P}_j^1 x_j^1 = \mathbf{b}$$

$$(5') \qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \qquad x_j^1 \geq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_j x_j^1 \right) \rightarrow \max!$$

feladat optimális megoldása (degeneráció mentes esetben) jobb lesz, mint a 4. feladaté.

Legyen az 5′ feladat optimális megoldását meghatározó bázis $\mathbf{A}_{B^1}$ és a megfelelő optimális megoldás bázisváltozói:

$$\mathbf{x}_{B^1} = \mathbf{A}_{B^1}^{-1}\mathbf{b} .$$

Ezek között x_j^1 biztosan szerepel; x_j vagy szerepel, vagy az 5′ feladat megoldása során kikerült a bázisból. Ha ez történt, akkor x_j szerepét x_j^1 veszi át. Ha mind x_j, mind x_j^1 szerepelnek a bázisváltozók között, akkor — mivel ezek azonos tevékenységre vonatkozó változók — a tevékenység tényleges szintje $x_j + x_j^1$ lesz és ez a tevékenység az

$$\frac{x_j}{x_j + x_j^1}\mathbf{P}_j^0 + \frac{x_j^1}{x_j + x_j^1}\mathbf{P}^1$$

átlagos együtthatóvektorral kell hogy működjék.

Fenti megfontolásokat természetesen minden j-re ki kell terjeszteni, hiszen valamennyi generáló program adhat további javító hatású paraméter vektorokat.

A 4. feladat megoldása után tehát n közönséges LP feladatot kell megoldani. Ezek

$$\mathbf{D}_i\mathbf{y}^i = \mathbf{d}^i$$

$$\mathbf{y}^i \geq \mathbf{0}$$

$$t_i = \mathbf{c}_{B^0}^*\mathbf{A}_{B^0}^{-1}\begin{bmatrix} y_1^i \\ y_2^i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^i \end{bmatrix} \rightarrow \min!$$

Jelöljük $\mathcal{J}_1$-vel azon indexek halmazát, amelyekre

$$\min t_i < c_i$$

és legyenek a megfelelő optimális megoldások

$$\mathbf{P}_i^1 \quad i \in \mathcal{J}_1$$

ebben az esetben a következő kibővített alapfeladatot kapjuk:

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i^0 x_i + \sum_{j \in J_1}\mathbf{P}_j^1 x_j^1 = \mathbf{b}$$

(5″) $$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \qquad \mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j \in J_1} c_j x_j^1\right) \rightarrow \max!$$

Az 5″ feladat ugyanannyi feltételt tartalmaz, mint 4., de lényegesen több változót. Nem nehéz azonban belátni, hogy az 5″ alatt felírt feladatban sok felesleges változó is szerepel és ezek elhagyásával a feladat mérete jelentősen csökkenthető. Nem kell ugyanis tovább szerepeltetni azokat az eredeti x_{i_1}; x_{i_2}; ... változókat, amelyek az $\mathbf{A}_{B^0}$ bázisra nézve nem bázisváltozók. A számítás későbbi lépéseinél mindig kihagyhatók a további számításokból azok a változók, amelyek az alapfeladat valamelyik megoldása során nem szerepelnek a megfelelő optimális bázisban. Az eljárásnak ugyanis az a logikája, hogy minden ilyen fázis után azt vizsgálja, hogy a még nem szerepelt pótlólagos változók segítségével érhető-e el további javítás. Ennek során egyetlen korábban már szerepelt és az optimális bázisba be nem került változó sem jöhet vissza valamelyik későbbi optimális megoldásba.

Azt tapasztaljuk tehát, hogy az alapfeladat mérete az induláskor $(m \times n)$ és minden további fázisban legfeljebb $[m \times (m + n)]$.

Mivel minden K_i halmaz feltevéseink szerint konvex poliéder, minden egyes generáló program csak véges számú különböző együtthatóoszlopot hozhat létre. Így az egész eljárás véges sok lépés után feltétlenül befejeződik.

Minden LP feladatnál elvben fennáll annak a lehetősége, hogy a célfüggvény a megengedett megoldások halmazán nem korlátosnak bizonyul. Gyakorlati jellegű feladatoknál ez a körülmény arra utal, hogy a modell felállításánál nem vettünk figyelembe létező és aktívnak bizonyuló korlátokat. ÁLP feladat esetében a modell szerkesztő aligha tudja eleve áttekinteni, hogy a megengedett együtthatók különböző lehetséges kombinációi milyen irányban vihetik irreálisan félre a programot. Célszerű ezért az alapfeladatba előre olyan korlátot beépíteni, amely az alapfeladat megengedett megoldásainak a halmazát eleve korlátossá teszi — bármilyen együttható kombniáció is alakuljon ki. Ezt a célt éri el pl. egy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq M$$

alakú korlát felvétele, ahol M célszerűen választott elég nagy szám.

Ezzel az eljárás véges voltát beláthattuk. Röviden vissza kell azonban térni arra a feltevésünkre, hogy a 4. alatti alapfeladat optimális megoldása létezik. Ez eleve nem biztos, mert nem könnyű általános esetben elérni, hogy a generáló feladatok egymástól függetlenül talált megengedett megoldásai alapján összehozott együtthatómátrix oszlopvektoraiból a kapacitásvektornak létezzék nem negatív előállítása. A megoldhatóság eldöntése és az induló alapfeladat meghatározása ezért itt is az LP kétfázisos eljárásához hasonló megoldást követel.

A 2. feladatot először mesterséges változókkal kiegészítve kell tekintenünk és meg kell határoznunk a mesterséges változók összegének a minimumát. Ez egy teljes ÁLP feladat. Ha ennek a feladatnak a megoldása során az derül ki, hogy ez a minimum zérus, csak akkor állíthatjuk, hogy a feladatnak van megengedett megoldása. Ebben az esetben persze optimális megoldás is lesz, hiszen a korlátosságról már előzetesen gondoskodtunk. Amennyiben azonban a mesterséges változók összegének a minimuma pozitívnak bizonyul, akkor a 2. feladat inkonzisztens.

Ha viszont a konzisztencia fennáll, akkor a mesterséges változókat zérus minimális összegre redukáló program tartalmazza a 4. feladat érdemleges megoldásához szükséges $\mathbf{P}_1^0$; $\mathbf{P}_2^0$; ... $\mathbf{P}_n^0$ együtthatóvektoroknak egy olyan megengedett rendszerét, amelyre ennek a feladatnak már van optimális megoldása.

II.

Az ÁLP feladat bemutatásánál abból indultunk ki, hogy az alapfeladat kapacitásvektora és célfüggvényegyütthatói adott értékek. Nem nehéz azonban a feladatot olyan formában megfogalmazni, hogy a kapacitásvektor is egy adott konvex halmaz tetszőleges eleme legyen és hogy a célfüggvényegyütthatók is változókként legyenek kezelhetők.

Ennek érdekében a kiinduló 1. alatti LP feladatot átalakítjuk vele egyenértékű alakra a következő módon: keresendő az x_1; x_2; . . .; x_n; x_{n+1} nem negatív változók és az x_0 előjelkötetlen változó olyan értékrendszere, amely eleget tesz a

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i x_i - \mathbf{b} x_{n+1} = \mathbf{0}$$

$$x_{n+1} = 1$$

$$x_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0$$

egyenletrendszernek és amely mellett

$$z = x_0$$

lineáris függvény maximális értéket vesz fel.

Ebben az ekvivalens alakban az eredeti feladat kapacitásvektora az x_{n+1} változó együtthatóvektoraként jelenik meg és a célfüggvényegyütthatók a tevékenységek együtthatóvektorainak komponenseivé válnak. Ha tehát azt akarjuk elérni, hogy változókként kezelhessük a kapacitásvektort és a célfüggvényegyütthatókat is: tekintjük az alábbi ÁLP feladatot:

$$\mathbf{Q}_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{Q}_i x_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_i \in \mathrm{K}_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n, n+1)$$

$$x_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1)$$

$$x_0 \text{ előjelkötetlen}$$

$$x_0 \to \max!$$

Az ÁLP feladat, mint láthattuk, az LP modell lényeges általánosítását tartalmazza. Alkalmazási szempontból abban áll a legnagyobb jelentősége, hogy lehetővé teszi bizonyos ,,külső'' hatásoknak az együtthatókra való olyan érvényesítését, amely konzisztens az alapmodellel és alá van vetve az alapmodell optimumkritériumának.

Nem nehéz észrevenni, hogy az ÁLP modell ebben az értelemben „kétszintűen” működik. Az alapfeladatban tevékenységi változókat programoz, a generáló programokban megengedett együtthatókat állít elő. Ezen a szinten veszi az eljárás figyelembe az együtthatókra érvényesülő „külső” — ti. modellen kívülről eredő — hatásokat. Az ÁLP modell igen szoros rokonságban van a Dantzig—Wolfe-féle ún. dekompozíciós eljárással. Lényegét tekintve nem más, mint a dekompozíciós módszer alapgondolatának alkotó adaptálása az LP feladat általánosítására.

Az ÁLP modell csak formálisan lineáris, mert explicit módon tartalmazza változók szorzatait is. Azonban csak bizonyos típusú változók szorzatai szerepelhetnek benne. Így a modell — legalábbis a kidolgozottságának jelenlegi fokán — nem képes olyan összefüggéseket figyelembe venni, amelyek különböző tevékenységek együtthatói között állanak fenn; és olyanokat sem, amelyekben a tevékenység színvonalának hatása fejeződik ki az együtthatóira.

Az ismeretlen együtthatókkal kapcsolatban figyelembe vett összefüggések lehetőleg lineárisak kell hogy legyenek, vagy legalább is lineáris függvényekkel jól közelíthetők. Így a modell gyakorlati alkalmazásának természetes területe olyan alapjában véve lineáris termelési (és egyéb) rendszerek optimalizálása, amelyeknél a tevékenységek technológiai együtthatói, tevékenységenként, külső vezérlőváltozók (kontrolparaméterek) segítségével befolyásolhatók és minden egyes tevékenységre külön-külön a megengedett technológiai együtthatóvektorok halmaza konvex.

Adott ÁLP megoldása, mint láttuk, LP feladatok sorozatának megoldását teszi szükségessé. A számítási többlet mértéke ÁLP feladat és vele azonos méretű LP feladat között attól függ, hogy hány generáló programmal kell dolgozni, vagyis hány együttható oszlopvektor tartalmaz nem rögzített paramétereket is. Ha a generáló programok száma alacsony — a megoldandó számítástechnikai többletfeladat nem jelentős és sem memóriatartalom, sem futási idő tekintetében nem okoz különösebb gondot.

Joggal felvethető azonban a kérdés, hogy a gyakorlatban találhatunk-e olyan problémákat, amelyek ÁLP feladat formájában megfogalmazva ilyen számítástechnikailag viszonylag kényelmes tulajdonságokkal rendelkeznek. Ilyen típusú feladatok szép számmal vannak mind az operációkutatás, mind a matematikai közgazdaságtan területén. Hadd hivatkozzunk itt csak egyetlen modelltípusra, amely a népgazdasági tervezés területén széles körben alkalmazásra kerül.

Ez pedig az ún. „Kantorovics típusú” optimalizálás. A hazai szakirodalomban Kantorovics professzor nevéhez fűződik az olyan típusú lineáris termelési modellekkel való optimalizálás, amelyekben a cél adott anyagi összetételű végső kibocsátás volumenének a maximalizálása. A gyakorlatban ezt az optimumelvet úgy szokták alkalmazni, hogy nem a végső kibocsátás volumenét magát, hanem egy előírt végső kibocsátási minimum feletti többletnek adott anyagi összetétel szerint való volumenmaximalizálását tekintik optimálisnak. Ilyen típusú célfüggvény került alkalmazásra (legalábbis más célfüggvényekkel együtt) az ex post árprogramozásban, az ún. összevont népgazdasági programozásban, a harmadik ötéves tervvel kapcsolatos ún. „kétszintű programozásban”. Ilyen típusú modellel szándékozik az O. T. Távlati Tervezési Főosztálya és a Tervgazdasági Kutató Intézet a cseh—lengyel—magyar gazdasági együttműködés elemzését végrehajtani.

A jelzett feladat tömören így fogalmazható meg:

$$\mathbf{A}x = \mathbf{b} + \lambda\mathbf{d}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}; \qquad \lambda \geq 0,$$

$$\lambda \rightarrow \max!,$$

ahol **b** a minimális végső kibocsátás vektora és a **d** vektor rögzíti a többletkibocsátás előírt anyagi összetételét.

Az ilyen típusú modellek előnyösen szolgálják az anyagi egyensúly biztosításának a követelményeit, de optimumkritériumuk igen merev. A **d** vektor elemeinek rögzítése teljesen kívülről történik és az ebből származó merevségen csak keveset csökkent az, ha különböző egymástól függetlenül megállapított, különböző gazdaságpolitikai koncepciókat tükröző **d** vektorral variánsokat határozunk meg. Ezek összehasonlítható elemzése meglehetősen problematikus. A fő hiányosság azonban abban van, hogy a különböző többletkibocsátási szerkezetek modellen kívüli megállapítása nincs kapcsolatban az alapfeladat adottságaival.

Meg kell ugyanakkor jegyezni, hogy a „kívánatos többletkibocsátási" szerkezet problémája nemcsak akkor merül fel, ha kifejezetten ennek a volumenét akarjuk maximalizálni. Minden kombinált népgazdasági célfüggvénynél felmerül a kérdés: milyen legyen az összetétele az optimalizálás révén realizálható anyagi tartalékoknak. Kétségtelennek tűnik, hogy előnyösebb, gazdaságilag megalapozottabb, ha e kérdést nem helyezzük teljesen a modellen kívülre; hanem külsődlegesen csak az érvényesítendő struktúrák bizonyos korlátait rögzítjük. E korlátok keretei között azonban a modell saját optimumkritériumának rendeljük alá a választást. Ebben az esetben nem kell mást tenni, mint ÁLP feladatként fogalmazni meg modellünket. Természetesen csak a többletkibocsátási szerkezet (esetleg szerkezetek) elemeit kezeljük változókként. Így — ha nem is érjük el a probléma közgazdasági szempontból kifogástalan kezelését — jelentőset lépünk előre a modell komplexitásának a tekintetében.

(Beérkezett: 1969. I. 10.)

IRODALOMJEGYZÉK

[1] Bod, P.: Bevezetés a gazdasági programozásba. Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem jegyzete. Budapest, 1965. Tankönyvkiadó,

[2] Dantzig, G. B.: Linear Programming and Extensions. 22. fejezet. Princeton. University Press 1963.

[3] Krekó, B.: Lineáris programozás. Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 1966.

[4] Prékopa, A.: Lineáris programozás I. Az operációkutatás matematika módszerei c. tanfolyam jegyzete. Bólyai János Matematikai Társulat, 1968.

Kovács László Béla

A diszkrét programozás módszerei és alkalmazása gazdasági problémák megoldására

Gazdasági problémák megoldásában nagy szerepet játszik a matematikai programozás. Ennek feladata, hogy egy adott többváltozós függvény minimumát vagy maximumát és annak helyét meghatározza egy megadott tartományon. Ha a maximalizálandó függvény — az ún. célfüggvény — lineáris, továbbá a tartomány lineáris egyenlőtlenségek segítségével van megadva (vagy ilyen alakra hozható), akkor lineáris programozásról beszélünk. A lineáris programozás matematikai elméletét, valamint alkalmazásokat találhat az olvasó az alábbi könyvekben: Prékopa A. [36], Hadley [20], Dantzig [13], Charnes és Cooper [11]. Az említett művekben bőségesen vannak további irodalmi utalások. Gyakran a lineáris közelítés pontossága már nem megfelelő. Ha a célfüggvény vagy a feltételek nem lineárisak, akkor nemlineáris programozásról beszélünk. Exakt módszerek jelenleg többnyire csak arra az esetre vannak, amikor a maximalizálandó célfüggvény konkáv, esetleg kvázi-konkáv (vagy a minimalizálandó függvény konvex, ill. kvázi-konvex) és a határoló feltételek is konvex tartományt szolgáltatnak. Ha a feladat nem ilyen, akkor az okozza a nehézséget, hogy sok lokális (helyi) maximum lehetséges, amelyek nem globális maximumok. A nemlineáris programozás jó áttekintése néhány módszer alapos tárgyalásával megtalálható Hadley [21] könyvében, amelyben dinamikus programozás is található. Itt a „dinamikus" kifejezés nem feltétlenül ugyanazt jelenti, mint a közgazdaságtanban. Általában arra utal, hogy több egyszerre megteendő döntés helyett a döntések egymásutánjára vezeti vissza a problémát. Az újabb döntéseket a korábbiak következtében kialakult helyzetben optimálisan teszi meg. Lényegében tehát a dinamikus programozás egy bonyolult problémát egyszerűbb feladatok sorozatára vezet vissza. A dinamikus programozás alapos matematikai tárgyalása, valamint nagyszámú alkalmazás található Bellman[7], Bellman és Dreyfus [8] könyvében. Bevezetésként Neuhauser [34] műve ajánlható.

Ha a matematikai programozási feladatban valószínűségi változók is szerepelnek (igény, technikai koefficiensek, árak stb.) akkor sztochasztikus programozásról beszélünk. (Lásd: Dantzig [13]. 25. fejezet, Hadley [21]. 5. fejezet, Prékopa [37].)

Mind a lineáris mind a nemlineáris feladatokban, ha külön nem kötjük ki, általában folytonos változókra gondolunk. Sok esetben azonban egyes változók nem tekinthetők folytonosnak. Például nagyértékű gépek esetén nem mindegy, hogy az eredményül kapott 3,3 gépet 3 vagy 4-nek tekintjük. Különösen kritikus a helyzet az ún. beruházási problémákban, ahol a változó értéke 1 vagy 0 aszerint, hogy egy beruházást végrehajtunk-e vagy sem.

Az első részben a diszkrét programozási feladatok általános alakját, a másodikban néhány gazdasági alkalmazást tárgyalunk, míg a harmadik rész a diszkrét programozási módszerek áttekintését tartalmazza irodalmi utalásokkal.

1) A diszkrét programozási feladatok általános alakja

Diszkrét programozásról beszélünk olyan matematikai programozási feladat esetén, amelyben néhány vagy valamennyi változó csak véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok különböző értéket* vehet, más szóval értelmezési tartománya nem folytonos.

Diszkrét programozás helyett használatos még az egészértékű és az integer programozási elnevezés is.

A két utóbbi elnevezés magába foglalja azt a megkötést is, hogy a nem folytonos változók csak egész értékeket vehetnek fel, azonban ez nem jelent megszorítást. Ha ugyanis az x változó az

$$a_1, a_2, \ldots$$

véges vagy megszámlálhatóan sok (nem feltétlenül egész) értéket veheti fel, akkor az

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots$$

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots = 1$$

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1$$

felírásban már csak egészértékű változók szerepelnek.

Továbbiakban ezért a diszkrét változók csak egész értékeket vesznek fel. Ha egy feladatban csak egészértékű változók szerepelnek, akkor ezt *tiszta* egészértékűnek, egészértékű és folytonos változók fellépése esetén *vegyes* vagy *kevert* egészértékű feladatnak nevezzük.

Továbbá egy tetszőleges egészértékű feladatot is át lehet alakítani $0-1$ egészértékűvé, ha valamennyi változó korlátos. Legyen például

$$x = 0, 1, 2, \ldots, p$$

Természetesen adódik az

$$x = y_1 + y_2 + \ldots y_p$$

$$y_j = 0 \text{ vagy } 1 \; (j = 1, \ldots, p)$$

előállítás, ennél azonban sokkal jobb is van.

Határozzuk meg a k számot úgy, hogy

$$2^{k-1} \leq p < 2^k$$

* Például tetszőleges egész vagy nemnegatív egész értékeket vehet fel.

ekkor legyen

$$x = 2^{k-1}x_1 + 2^{k-2}x_2 + \ldots + 2x_{k-1} + x_k$$

ahol az

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

Ennek az előállításnak az a jó tulajdonsága is megvan, hogy az x változó és az $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ vektor változó között egy-egy értelmű megfeleltetés létesíthető és mindössze

$$\left[\overset{2}{\smile}\atop{\log p}\right]$$

számú változó szükséges hozzá.

A leggyakrabban előforduló típus a lineáris egészértékű feladat, mely a következőképpen írható fel.

$$\min (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n)$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \geq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_j = 0, 1, 2, \ldots, r_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = k + 1, \ldots, n)$$

ahol a_{ij}, b_i és c_j adott tetszőleges valós számok, az r_j, k számok adott pozitív egészek. A $k = n$ esetben tiszta, $0 < k < n$ esetén kevert egészértékű feladatról beszélünk.

Ha a célfüggvényt maximalizálni kell, annak (-1)-szeresét minimalizálhatjuk. A $\leq$ egyenlőtlenségeket (-1)-gyel való beszorzással $\geq$ típusúvá tehetjük, míg az egyenlőségeket felbonthatjuk egy $\leq$ és egy $\geq$ típusú egyenlőtlenségre.

Ha egyes egészértékű változókra nincs explicit felső korlát, de az egyenlőtlenségek által határolt tartomány korlátos, akkor ebből célszerű megállapítani a szóban forgó felső korlátot, ez megkönnyíti a megoldást.

Nem okoz nehézséget az a változó sem, amelyik negatív értékeket is felvehet, de sokszor egyöntetűség, illetve könnyebb kezelhetőség kedvéért ezeket felbonthatjuk pozitív és negatív részükre. Ha eredetileg x_j előjelkötetlen változó volt, akkor

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$

$$x_j^+ \geq 0, \qquad x_j^- \geq 0,$$

ha pedig

$$x_j = \ldots, -2, -1, 0, +1, +2, \ldots,$$

akkor

$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$
$$x_j^+ = 0, 1, 2, \ldots$$
$$x_j^- = 0, 1, 2, \ldots$$

Bevezetve az

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

jelöléseket, az (1) feladat a következő egyszerű formában írható fel:

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ &\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ &x_j = 0, 1, \ldots, r_j \qquad && (j = 1, 2, \ldots, k) \\ &x_j \geq 0 && (j = k+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

ahol a felső indexben szereplő T transzponáltat jelent. (Egy mátrix transzponáltját főátlójára való tükrözéssel, azaz a sorok és oszlopok felcserélésével kapjuk. Így egy oszlopvektor transzponáltja sorvektor, a sorvektor transzponáltja oszlopvektor. A továbbiakban a vektorok általában oszlopvektort jelentenek, hacsak külön másképpen nem kötjük ki.)

Hasonlóan írható fel a megfelelő nemlineáris probléma:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \min \quad &g_0(\mathbf{x}) \\ &g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \qquad && (i = 1, 2, \ldots, m) \\ &x_j = 0, 1, \ldots .r_j && (j = 1, 2, \ldots, k) \\ &x_j \geq 0 && (j = k+1, \ldots, n), \end{aligned}$$

ahol $g_i(\mathbf{x})$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ tetszőleges (egyértékű) függvények. Más kérdés természetesen, hogy ilyen általánosságban a feladat nem oldható meg, még akkor sem, ha csak egészértékű változók szerepelnek és a feladat méretei túl nagyok a teljes leszámlálásra. A későbbiekben adunk a tiszta egészértékű változatra a $g_i(\mathbf{x})$ függvényekre vonatkozó, nem túl erős feltételek mellett algoritmust, mely elég nagyméretű feladatokra alkalmazható.

Végül meg kell említeni, hogy az egészértékű változókra igen gyakran bizonyos típusú logikai feltételek is fennállnak. Ezek igen jól beleilleszthetők a leszámlálási típusú és a korlátozás és szétválasztáson alapuló algoritmusokba, sokszor még meg is gyorsítják azt.

Ilyen feltétel például, hogy nem lehet három egymás után következő egészértékű változó zérustól különböző, vagy az egészértékű változók egy csoport-jának nem zérus értékéből következik, hogy másoknak zérus értéket kell felvenni. Az ilyen típusú fetételek a legtöbb esetben megfogalmazhatók algebrai alakban is, azonban rendszerint csak igen nagyszámú feltétellel, ami két hátránnyal is jár. Az egyik az, hogy a sok feltétel igen sok helyet foglal el (gépi kapacitásban), a másik pedig, hogy a feltételek ellenőrzése nagyon sokáig tart. Míg, ha meg tudunk maradni a logikai kezelésmód mellett, akkor ezt úgy foghatjuk fel, mintha a fenti nagyszámú feltételnek mindig csak egy kis részét vizsgálnánk, mert a többiről egyszerűen ki tudjuk mutatni, hogy jelenleg nem jelentenek korlátozást.

2) A diszkrét programozás néhány gazdasági alkalmazása

A jelen szakaszban a teljesség igénye nélkül felsorolunk néhány alkalmazást. A modelleket lehetőleg egyszerű formában tárgyaljuk a könnyebb megértés kedvéért, ez azonban nem jelenti azt, hogy komplex problémák megoldására nem alkalmasak.

2.1 *Egy feltételes terhelési feladat*

Az irodalomban ez „hátizsák probléma" néven ismeretes, mert az első megfogalmazása egy gyalogtúrázó hátizsákjának optimális kitöltése volt egy megadott választékból. Ez azt jelenti, hogy egy adott súlykorlát alatti tárgykombinációk közül a maximális használati értékűt keressük.[1]

Ez a probléma nemcsak egyszerűsége és önmagában való használhatósága miatt érdekes, hanem azért is, mert a többfeltételes probléma megoldásában is jó segédeszköz.

A következő jelöléseket használjuk:

n a tárgyak száma (ha valamelyikből több van, azt többszörösen használjuk)
a_j a j-edik tárgy súlya,
c_j a j-edik tárgy értéke (használati érték),
K a megengedett maximális terhelés,

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{ha } j\text{-edik tárgyat választjuk,} \\ 0 & \text{ha nem.} \end{cases}$$

A feladat a következőképpen fogalmazható meg:

$$(\max)\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq K$$

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

[1] Feltételezzük, hogy a használati értékek összeadódnak. Csak egyszerűség kedvéért választottuk a feladatnak ezt a — gazdasági szempontból kifogásolható — értelmezését. Megfogalmazhattuk volna például úgy is, mint a 2.2 modellnek azt a speciális esetét, amikor csak egyetlen feltétel van.

Az általános alkalmazhatóság szempontjából megvizsgáljuk az együtthatók különböző előjelkombinációit. Feltételezhetjük, hogy $c_j > 0$ és $a_j > 0$ ($j = 1, \ldots, n$). Ugyanis, ha $c_j < 0$ és $a_j < 0$, akkor az $x'_j = 1 - x_j$ változó bevezetésével az együtthatók pozitívvá válnak. A $c_j > 0$, $a_j \leq 0$ esetén $x_j = 1$ és $c_j \leq 0$, $a_j > 0$ esetén pedig $x_j = 0$, ugyanis az első esetben pozitív értéket kapunk újabb kapacitás felhasználása nélkül (sőt $a_j < 0$ esetén még növeljük is azt), a másodikban pedig bizonyos kapacitás felhasználásával biztosan nem növeljük az összes értéket, sőt esetleg csökkentjük. Végül a $c_j = a_j = 0$ eset teljesen érdektelen, mert az x_j változó ekkor nem szerepel a feladatban.

A feladat optimális célfüggvény-értékére jó becslést kaphatunk a következő módon. Állítsuk a változókat olyan sorrendbe, hogy

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \ldots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

(Egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy eleve ilyen sorrendben indexeztük a változókat.)

Ekkor, ha

$$\sum_{j=1}^{r} a_j \leq K < \sum_{j=1}^{r+1} a_j,$$

akkor

$$\sum_{j=1}^{r} c_j \leq \max z \leq \sum_{j=1}^{r} c_j + \frac{c_{r+1}}{a_{r+1}} \cdot \left(K - \sum_{j=1}^{r} a_j\right).$$

Az $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 1$, $x_{r+1} = x_n = 0$ a feladat megengedett megoldása és rendszerint elég jó célfüggvény-értéket szolgáltat. Arra azonban semmi biztosíték nincs, hogy ez optimális megoldás volna. Például a

$$(\max)\ z = 5x_1 + 3x_2 + 9x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 10x_3 \leq 11$$

$$x_1, x_2, x_3 = 0 \text{ vagy } 1$$

feladat már rendezve van, mert

$$\frac{5}{2} > \frac{2}{3} > \frac{9}{10},$$

mégis az $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$ megoldás célfüggvényértéke $z = 8$, míg az $x_3 = 1$, $x_1 = x_2 = 0$ esetén $z = 9$.

Az említett feladatnál az összes megoldások száma $2^3 = 8$, így könnyű valamennyit ellenőrizni. Nagyobb n esetén azonban ez nem lehetséges, mivel a 2^n igen gyorsan növekszik n növelése esetén.

2.2 *Több-feltételes terhelési feladat*

A nehézségek jól látszanak már két feltétel esetén is, így ezzel az esettel foglalkozunk. Tegyük fel, hogy egy hajót kell terhelnünk értékes rakománnyal. Az érték most lehet használati érték (expedíció), valódi érték (mentési munkálatok) vagy szállítási költség (szállítási vállalat esetén). Az utóbbi esetben a szállító az árukért kapott díjat akarja maximalizálni. A többi esetben a cél nyilvánvaló. Legyen továbbá a súlykorlátozás mellett egy térfogati korlátozás is.

Az előző feladat jelölésein kívül még a következőket használjuk:

L a térfogati korlát,
b_j a j-edik tárgy térfogata,

Ekkor a feladat a következő:

$$(\max)\, z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq K \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \leq L$$

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1.$$

A feladat lényegesen nehezebb, mint az előző, hiszen még preferenciát sem tudunk megadni, minthogy ez teljesen különböző lehet az első, illetve második feltétel szerint. (Könnyű, nagy térfogatú, illetve nehéz, kis térfogatú tárgyak.)

A több-feltételes terhelési probléma egyébként $0-1$ lineáris egészértékű feladatra vezetett, sőt ha nem csak $1-1$ darab áll rendelkezésre belőlük és azok egyforma értékűek, akkor az általános lineáris tiszta egészértékű feladathoz jutottunk. Ugyanez a rendszer több különböző gyakorlati problémát ír le. A jelen fejezet célja azonban nem a matematikai hasonlóság keresése, hanem különböző alkalmazások bemutatása.

2.3 *Fix-költséges problémák*

A termelési költség általában két fő részből áll: egy fix-költségből és egy, a termelt mennyiséggel növekvő változó költségből. Most nem arról a fix-költségről van szó, amelyet minden termeléstől függetlenül ki kell fizetni (állóeszközök után fizetendő kamat, épületkarbantartás, állandó dolgozók alapbére stb.), mert hiszen ezt mindenképpen ki kell fizetni és a célfüggvényhez adott konstans nem változtatja meg az optimum helyét. Minden egyes sorozatgyártás beindításakor felmerül egy, a sorozatnagyságtól független költség. (Speciális szerszámok, betanulással kapcsolatos költségek stb.) Ez a költség azonban már nem független a termeléstől, mert egyáltalán nem merül fel, ha a megfelelő terméket nem állítjuk elő.

Nagy sorozatok gyártása esetén a darabszámot folytonosnak tekinthetjük. Az alábbi jelzéseket használjuk:

m az erőforrások száma,
n a gyártható termékek száma,
a_{ij} az i-edik erőforrásból a j-edik termék egységnyi mennyiségének előállításához szükséges mennyiség,
b_i az i-edik erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség,
c_j a j-edik termék egységének előállításához szükséges költség (fix-költség nélkül),
d_j a j-edik termék termelésének beindításához szükséges fix-költség (egyelőre $d_j \geq 0$),
x_j a j-edik termékből gyártandó mennyiség,
δ_j értéke 1 vagy 0 attól függően, hogy a j-edik terméket gyártjuk, vagy nem.

Egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy a változó költség a termelt mennyiséggel arányos. A következő feladathoz jutunk:

$$\min \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \delta_j d_j \right)$$

$$(6) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\delta_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_j = 0 \\ 1, & \text{ha } x_j > 0 . \end{cases}$$

Az erőforrás korlátokon kívül szerepelhetnek természetesen bizonyos termékekre vagy azok kombinációjára vonatkozó alsó korlátok. Ezek a feltételek is átalakíthatók a fenti típusúvá. A c_j jelenthet hasznot is, ekkor $c_j < 0$. A $d_j \geq 0$ kikötést azért tettük, mert az ellenkező esetben lehet, hogy a feladatnak nincs minimuma, csak infimuma és a gazdasági értelmezés is problematikus. A $d_j < 0$ felfogható ugyan úgy, hogy a j-edik termék gyártásához népgazdasági érdek fűződik, ezért gyártásakor a gyár célprémiumot kap (minek összegéből már levontuk a gyártás beindításához szükséges költséget). Ha azonban a termék gyártása egyébként nem gazdaságos (a többiekhez viszonyítva), akkor az üzem minél kisebb mennyiséget kíván majd gyártani, ami nem is gazdaságos, a célprémium is hiábavaló, továbbá $x_j \to 0$ esetén a célfüggvény állandóan csökken, de $x_j = 0$ esetén hirtelen megnő. Ezt kiküszöbölendő, a következőképpen járhatunk el. Megtartjuk továbbra is a beindításhoz szükséges $d_j \geq 0$ költséget és a $p_j < 0$ prémiumot (a célfüggvény költséget minimalizáljuk, tehát a prémiumnak negatívnak kell lennie) csak akkor kapja meg az üzem, ha legalább g_j mennyiséget gyárt a szóban forgó termékből.

Bevezetve az

$$\varepsilon_j = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_j < g_j \\ 1, & \text{ha } x_j \geq g_j \end{cases}$$

0—1 egészértékű változókat ($j = 1, 2, \ldots, n$) a célfüggvény a következőképpen alakul:

$$\min \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + \delta_j d_j + \varepsilon_j p_j),$$

a feltételek pedig változatlanok.

2.4 *Beruházási problémák*

A beruházások gazdaságosságának vizsgálatában fontos szerepet játszik az egészértékű programozás. Ha csak egyetlen beruházásról kellene dönteni, hogy végrehajtsuk-e vagy sem, akkor könnyű dolgunk volna, mert megoldanánk a feladatot azon feltételezéssel, hogy végrehajtjuk és azzal is, hogy nem hajtjuk végre. A probléma azonban általában nem így merül fel, hanem úgy, hogy egy tervet kell teljesíteni és ahhoz beruházások egész sorozatát kell végrehajtani.

Ezek közül bizonyosak helyettesíthetik egymást, mások kizárják egymást stb. Mindenképpen lehetetlen azonban az összes variációt kipróbálni ezek nagy számára való tekintettel (n lehetséges beruházás esetén 2^n), különösen azért, mert minden egyes variáció egy rendszerint elég bonyolult lineáris vagy nemlineáris feladat megoldását kívánja, melynek időigénye elég tekintélyes lehet. Tekintsük most a probléma egy egyszerű változatát, amelyben nincsenek folytonos változók és a beruházás egy jól meghatározott tevékenységet jelent adott erőforrás szükséglettel és költséggel. Tekintsük például az alábbi egyszerű modellt.

Legyen

c_j	a j-edik beruházás költsége,
a_{ij}	a j-edik beruházás szükséglete az i-edik erőforrásból,
b_i	az i-edik erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség,
d_{kj}	a j-edik beruházás segítségével, a k-adik termék számára létrehozott új kapacitás,
h_k	a k-adik termékből szükséges új kapacitás,
x_j	*1* vagy *0* aszerint, hogy a j-edik beruházást végrehajtjuk-e vagy sem,
m	az erőforrások száma,
n	a beruházások száma,
r	a gyártandó termékek száma.

Minimális összköltségű beruházás kombinációit keressük azok közül, amelyek együttesen nem lépik túl a rendelkezésre álló erőforrások mennyiségét és teljesítik az előírt termelési feladatot:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_{kj} x_j \geq h_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1.$$

A feltételek között szerepelhetnek a természeti adottságok, a körzetenkénti energiakorlátok, munkaerőkorlátozás stb. A költségeknél figyelembe lehet venni a beruházási költségen kívül az alapanyagok több időszakra vonatkozó diszkontált szállítási költségeinek összegét, ezzel is reálisabbá válik a modell változatlan szerkezet mellett.

Ha azonban az egyes létrehozandó új üzemek között is jelentős mennyiségű szállítások történnek, akkor ipartelepítési problémával állunk szemben, melyet a fenti modellel nem tudunk jól leírni. Erre a célra igen alkalmas az úgynevezett kvadratikus hozzárendelési feladat, mely szintén kizárólag *0—1* egészértékű változókat tartalmaz.

A feladat egy lehetséges megfogalmazása a következő: Tegyük fel egyszerűség kedvéért, hogy n számú, különböző típusú gyárat akarunk megépíteni, $q(\geq n)$ helyen úgy, hogy mindenütt legfeljebb egyet építhetünk.

c_{jt} a j-edik gyárnak a t-edik helyen való megvalósítási költsége,
f_{jp} a j-edik és p-edik gyár közötti szállítási intenzitás,
g_{ts} a t-edik helyről az s-edik helyre való egységnyi mennyiség szállítási költsége,
x_{jt} *1* vagy *0*, attól függően hogy a j-edik gyárat a t-edik helyen valósítjuk-e meg vagy sem.

Ekkor a feladat a következő:

$$\min \sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{q} \left(c_{jt} + \sum_{p=1}^{n} \sum_{s=1}^{q} f_{jt} g_{ts} x_{ps} \right) x_{jt}$$

$$\sum_{t=1}^{q} x_{jt} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jt} \leq 1 \qquad (t = 1, \ldots, q)$$

$$x_{jt} = 0 \text{ vagy } 1 .$$

3. A diszkrét programozás megoldási módszerei (Áttekintés)

Bár egy-egy speciális szerkezetű feladat megoldása néhány évvel korábban is történt, az első általános lineáris diszkrét programozási módszer GOMORY amerikai matematikus nevéhez fűződik és körülbelül egy évtizede született meg.

3.1 *A Gomory módszer*

Első változatát a szerző 1958-ban publikálta, majd a jelenlegi formájában 1963-ban a [19] cikk gyűjteményében (269—302 old.). A módszer lényege az, hogy először megoldjuk a megfelelő folytonos feladatot a szimplex módszer segítségével. Ha valamennyi változó, mely csak egész értéket vehet fel az eredeti feladatban a folytonos feladat optimális megoldásában is egészértékű, akkor megoldottuk a feladatot. Ellenkező esetben meghatározunk egy olyan egészértékű feltételt, amelyet az eredeti feladat valamennyi megengedett megoldása (azaz pl. tiszta feladat esetén a folytonos feladat megengedett tartományának valamennyi rácspontja) kielégít, de a jelenlegi (nem egészértékű) megoldás nem. Megoldjuk az újabb folytonos feladatot, amelyet úgy kapunk, hogy az eddigiekhez hozzávesszük a most meghatározott új feltételt. Az eljárást addig folytatjuk, míg az egészértékűnek deklarált változók a legutolsó folytonos feladat optimális megoldásában valamennyien valóban egész értékeket vesznek fel. Ez lesz az eredeti feladat optimális megoldása.

A módszer részletes leírására itt nincs lehetőség, de a Gomory-feltétel képzését egy példán keresztül szemléltetjük. Tekintsük az alábbi feladatot:

$$\max\ 3x + y$$

$$4x - 4y \leq -1$$

$$8x + 6y \leq 33$$

$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

$$x, y \text{ egészek.}$$

Egészítsük ki egyenlőségekké a fenti egyenlőtlenség formájában levő feltételeket, ekkor az eredetivel ekvivalens feladathoz jutunk, és minthogy a szereplő együtthatók és jobb oldalak egészek, az új bevezetett változókról is feltehetjük, hogy egészek.

$$\max\ 3x + y$$

$$4x - 4y + u = -1$$

$$8x + 6y + v = 33$$

$$x \geq 0,\quad y \geq 0,\quad u \geq 0,\quad v \geq 0.$$

$$x, y, u, v \text{ egészek.}$$

Szimplex módszer segítségével megoldva a folytonos változatot, az optimális megoldás

$$x=\frac{9}{4},\quad y=\frac{10}{4},\qquad u=v=0.$$

Kifejezve az x és y változókat:

$$x=\frac{9}{4}-\frac{3}{28}u-\frac{1}{14}v$$

$$y=\frac{5}{2}+\frac{1}{7}u+\frac{13}{14}v.$$

Az u, v nembázis változók megfelelő választásával minden megoldást megkapunk.

Válasszuk most külön az x kifejezésében az együtthatók egészrészét és törtrészét:

$$x=2-u-v+\frac{1}{4}+\frac{25}{28}u+\frac{13}{14}v.$$

Mivel az x változónak egész értéket kell felvennie, továbbá a $2-u-v$ is egész, az

$$\frac{1}{4}+\frac{25}{28}u+\frac{13}{14}v$$

egész kell hogy legyen. Továbbá minthogy $u\geq 0$, $v\geq 0$, a kifejezés értéke nemnegatív egész. Minthogy azonban $u\geq 0$, $v\geq 0$ esetén ez a kifejezés nem lehet 0, tehát értéke legalább 1.

$$\frac{1}{4}+\frac{25}{28}u+\frac{13}{14}v\geq 1.$$

Egyenlőséggé kiegészítve az s pótváltozónak és azt kifejezve:

$$s=-\frac{3}{4}+\frac{25}{28}u+\frac{13}{14}v.$$

Az eddigiekből következik, hogy $s\geq 0$ és egész értékeket vehet csak fel. Ez a feltétel megfelel a kívánalmaknak, mert a folytonos feladat optimális megoldása ($u=v=0$) nem elégíti ki, továbbá a fenti fejtegetésből nyilvánvaló, hogy viszont az eredeti feladat minden (egészértékű) megoldása (a tartomány minden rácspontja) kielégíti.

Gomory az említett dolgozatában bebizonyította, hogy — amennyiben a fenti módon az általa megadott sorrendben képezzük ezeket a pótlólagos feltételeket, az algoritmus véges sok lépésben végetér és megadja a feladat egészértékű optimális megoldását, amennyiben létezik a feltételeket kielégítő (tehát egészértékű) megoldás.[2]

GOMORY ugyanebben a dolgozatában kidolgozta a módszernek vegyes egészértékű feladatokra alkalmas módosítását.

Megjegyzendő, hogy nem kell minden egyes újabb feltétel hozzávételekor a megfelelő folytonos feladatot az elejétől megoldani, mert az ún. duál szimplex módszer lehetővé teszi, hogy az algoritmust az előző feladat optimális megoldásából kiindulva folytassuk.

A módszer eredeti formájában nem túl nagy méretű feladatok esetén (20—30 változó és ugyanennyi egyenlőtlenség alakú feltétel) is már elég lassú. Sok kísérlet történt az algoritmus gyorsítására, például jó eredményekről számol be MARTIN [33] dolgozatában.

Gomory-típusú módszer, ill. a számítási tapasztalatok találhatók az alábbi dolgozatokban: DALTON és LLEWELLYN [12], GLOVER [16], WILSON [42].

3.2 *Megoldás konvex programozással*

Egyszerűség kedvéért tekintsük az (1) lineáris kevert egészértékű feladatot abban az esetben, amikor valamennyi szereplő együttható egész és $r_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Mint korábban láttuk, az $r_j > 1$ visszavezethető erre az esetre. A feladat tehát röviden a következő formában foglalható össze:

$$\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} \tag{8}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \tag{9}$$

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{10}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = k+1, \ldots, m). \tag{11}$$

Tűzzük ki először célul, hogy egy megengedett megoldást, azaz a (9)—(11) feltételeket kielégítő $\mathbf{x}$ vektort keressük. Ebből a célból tekintsük az alábbi feladatot:

$$\min \sum_{j=1}^{k} x_j(1 - x_j) \tag{12}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \tag{13}$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{14}$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j = k+1, \ldots, m). \tag{15}$$

Ez már egy folytonos feladat, azonban a célfüggvény nem lineáris, hanem konkáv. (Elvégezve a beszorzásokat egy lineáris kifejezés és egy negatív definit kvadratikus alak összegét kapjuk.)

[2] Gomory előtt többen kísérleteztek ilyen vágásokkal, azonban a megfelelő algoritmusok konvergenciáját nem tudták igazolni, sőt a legtöbb esetben olyan példákat is tudtak konstruálni, amelyekre a módszer nem adta meg az optimális megoldást.

Ha ezt a feladatot meg tudjuk oldani, akkor három eset lehetséges.

a) Nincs megengedett megoldás. Ekkor az eredeti feladatnak sincs, hiszen a (14) feltétel gyengébb, mint a (10), a másik kettő pedig azonos.

b) Az optimális megoldáshoz tartozó célfüggvény-érték pozitív. A (9)—(11) feltételeket kielégítő megoldás ekkor sem létezik, mert ha volna ilyen, az kielégítené a (13)—(15) feltételeket is és *0* célfüggvény-értéket szolgáltatna.

c) Az optimális megoldáshoz tartozó célfüggvény-érték *0*. Ekkor nyilvánvalóan a (9)—(11) feltételeket kielégítő megoldáshoz jutunk, hiszen ekkor az összeadandók nemnegativitásából következik, hogy

$$x_j(1-x_j)=0 \qquad (j=1\,\ldots,k),$$

azaz

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1\,.$$

Következő lépésként, ha a *c)* esethez jutottunk, az eddiginél jobb megengedett megoldásokat keresünk. Jelöljük általában az r-edik lépésben kapott megengedett megoldást $\mathbf{x}^{(r)}$-rel. Ekkor a (12)—(15) feladathoz csatoljuk a

$$\text{(16)} \qquad \sum_{j=1}^{k} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^{(r)} - 1$$

feltételt, ahol a jobb oldalon egy konstans áll, minthogy $\mathbf{x}^{(r)}$-et már meghatároztuk.

Addig folytatjuk az eljárást, míg az utolsó lépésben az *a)* vagy *b)* esetet kapjuk, azaz az eredeti, (8)—(11) feladatnak nincs a legutoljára kapottnál jobb megengedett megoldása, ez tehát az optimális megoldás.

Természetesen lehet nagyobb lépésközzel is haladni, azaz a (16) egyenlőtlenségben 1-nél többet levonni, ekkor azonban az *a)* vagy *b)* eset elérésekor az addigi legjobb célfüggvény-érték és a csökkentett érték közötti részt is fel kell kutatni (például a szokásos intervallum felezéssel).

Most térjünk vissza a (12)—(15), ill. a (12)—(16) feladat megoldására. Ha egy konkáv függvényt akarunk minimalizálni egy konvex poliéder felett, akkor lokális, azaz helyi szélsőértékekhez is juthatunk. Amennyiben tehát a minimum *0*, akkor elértük a globális minimumot, mert a (12) célfüggvény ennél kisebb értéket nem vehet fel. Ha az *a)* eset fordul elő, akkor is minden rendben van. Ha azonban a *b)* esethez jutunk, akkor lehetséges, hogy csak egy lokális minimumot kaptunk és van ennél kisebb célfüggvény-érték is. Közelítő módszerhez juthatunk a Monte Carlo-módszer alkalmazásával, vagy úgy hogy a (13)—(16) poliéder több csúcsából kiindulva oldjuk meg a feladatot.

Rutledge [40] dolgozatában azonban másképp oldotta meg ezt a problémát. Helyettesítsük a (12) célfüggvényt a következővel:

$$\text{(17)} \qquad \max \sum_{j=1}^{k} \left(x_j - \frac{1}{2}\right)^2.$$

A *0* minimum szerepét most a

$$\text{(18)} \qquad \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{k}{4}$$

maximum veszi át, egyébként minden változatlan. Sajnos ebben az esetben is lokális szélsőértékekkel találkozunk, mert most egy konvex függvény maximumát keressük egy konvex tartomány felett. RUTLEDGE említett dolgozatában azonban bebizonyította, hogy ha a

$$\frac{\sum_{j=1}^{k}\left(x_j-\frac{1}{2}\right)^2+S}{-\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+Q} \tag{19}$$

függvényt maximalizáljuk, megfelelő S és Q esetén a (19) függvény (13)—(15) tartományon vett maximum helye a (8)—(11) feladat optimális megoldását szolgáltatja, azaz a lokális optimum egyben globális is. Módszert is adott ilyen Q és S számok meghatározására és a (19) célfüggvény maximalizálására a (13)—(15) feltételek mellett.

3.3 *Leszámlálási algoritmusok*

A [25] jegyzetben kombinatorikus módszerek összefoglaló cím alatt az olvasó részletesen kidolgozva megtalál néhány leszámlálási módszert, továbbá a következő szakaszban tárgyalt korlátozás és szétválasztás módszerét és a dinamikus programozás alkalmazását diszkrét feladatok megoldására.

Foglalkozzunk egyelőre a *0—1* tiszta diszkrét feladattal. A leszámlálási algoritmusok lényege, hogy valamilyen képzeletbeli sorrendbe állítja a szóba jövő rácspontokat, azaz n változó esetén 2^n vektort. Valamennyi vektor kipróbálása nem lehetséges, hiszen már $n = 30$ esetén $2^{30} = 10^9$, ami másodpercenként 1000 behelyettesítést véve néhány száz gépórát jelent. Ehelyett a leszámlálási algoritmusok a fenti képzeletbeli sorban nagy ugrásokkal haladnak előre, valamilyen módon biztosítva, hogy a közben kihagyott változó értékek vagy nem megengedett megoldásai a feladatnak, vagy az addig talált legjobb megoldásnál nem szolgáltatnak jobbat.

A legtöbb leszámlálási eljárásnál lehetőség van arra is, hogy a megoldás során nyert információknak megfelelően csoportosítsuk a még meg nem vizsgált vektorokat, és így hamarabb jussunk megengedett megoldáshoz, ill. az eddigi legjobbnál jobbhoz. Ez viszont ismét a hátralevő vektorhalmaz egy részének elhagyhatóságát jelenti. Az utóbbi csoportba tartozik például BALAS [1] és [2] dolgozata, valamint GLOVER [17] munkája. Hasonló típusú módszerekkel, illetve ezek értékelésével gépi felhasználás szempontjából sokan foglalkoztak, például GLOVER és ZIONTS [18], FLEISCHMANN [14], GEOFFRION [15] stb.

Arra az esetre, amikor a képzeletbeli sorrendet nem változtatjuk, példa LAWLER és BELL [28] algoritmusa. Hogy az olvasó képet nyerjen a leszámlálási algoritmusokról, ezt a módszert egyszerűsített formában bemutatjuk. A lineáris, *0—1* tiszta diszkrét probléma mindig átírható a következő alakúvá:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j \geq b_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{20}$$

$$(21) \qquad x_j = 0 \text{ vagy } 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

m feltétel és n változó van, a szereplő mátrixok és vektorok a megfelelő méretűek, továbbá

$$\mathbf{c} \geqq 0, \quad a_{ij} \geqq 0, \quad d_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n)$$

Nem jelent megszorítást, ha feltesszük, hogy az a_{ij} és d_{ij} együtthatók közül legfeljebb az egyik nullától különböző. A *0—1* komponensű n dimenziós vektorok képzeletbeli sorbaállítása (ebben a módszerben egyszer és mindenkorra) úgy történik, hogy a változók értékeit egymás mellé írva az így kapott számot bináris (kettes számrendszerbeli) számnak képzelve növekvő sorrendben írjuk fel őket. Például $n = 3$ esetén:

000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Definiáljuk továbbá egy tetszőleges n dimenziós *0—1* komponensű $\mathbf{x}$ vektorhoz az $\mathbf{x}^*$-ot úgy, hogy legyen

$$\mathbf{x}^* \ngeq \mathbf{x}$$

és az $\mathbf{x}$ után következők közül $\mathbf{x}^*$ az első ilyen. Legyen továbbá $\mathbf{x}^{*-}$ az $\mathbf{x}^*$-ot közvetlenül megelőző vektor. Példák $n = 5$ esetén

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{x} = (0, 0, 1, 0, 0) & \mathbf{x} = (0, 1, 1, 0, 0) & \mathbf{x} = (1, 1, 1, 0, 0) \\
\mathbf{x}^{*-} = (0, 0, 1, 1, 1) & \mathbf{x}^{*-} = (0, 1, 1, 1, 1) & \mathbf{x}^{*-} = (1, 1, 1, 1, 1) \\
\mathbf{x}^* = (0, 1, 0, 0, 0) & \mathbf{x}^* = (1, 0, 0, 0, 0) &
\end{array}$$

Az $\mathbf{x}^{*-}$ definiálható az $\mathbf{x}^*$-tól függetlenül is:

$$\mathbf{x}^{*-} \geqq \mathbf{x}$$

és $\mathbf{x}^{*-}$ az utolsó ilyen tulajdonságú az $\mathbf{x}$ után következők közül. A fenti utolsó példában $\mathbf{x}^*$ nem létezik.

Könnyen belátható, hogy a leszámlálásban $\mathbf{x}$-ről $\mathbf{x}^*$-ra ugorhatunk (azaz $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x}^*$ között nincs megengedett és az eddigi legjobbnál jobb megoldás, ha a következő feltételek valamelyike teljesül. (Jelölje az $\mathbf{x}$-ig talált legjobb megoldást $\widehat{\mathbf{x}}$):

a) ha $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \geqq \mathbf{c}^T\widehat{\mathbf{x}}$,
b) ha $\mathbf{x}$ megengedett megoldás, azaz kielégíti a (20) feltételeket,
c) ha bármely i-re kielégíti a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{*-} - \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j < b_i$$

egyenlőtlenséget.

A módszer tehát abban áll, hogy a fenti sorrendben vizsgáljuk egymás után az n dimenziós *0—1* komponensű vektorokat. Ha valamelyikre teljesül az *a)*, *b)* vagy *c)* feltétel, akkor az $\mathbf{x}^*$ vektornál egyébként a következőnél folytatjuk a leszámlálást. A változók jó rendezése lényeges! A módszer csekély változtatással abban az esetben is használható, ha a célfüggvény tetszőleges monoton nemcsökkenő függvény, az egyenlőtlenségek baloldalán álló függvények pedig két monoton nemcsökkenő függvény különbségeként állíthatók elő.

A korábban említett leszámlálási algoritmusok a most vázolt eljárástól nemcsak abban különböznek, hogy a leszámlálás sorrendje nem előre rögzített, hanem még két további fontos jellemvonásuk van.

A feltételek egy jól megválasztott nemnegatív lineáris kombinációját vesszük és először ezen végezzük el az ellenőrzést. Ha ugyanis már ezt sem elégíti ki egy n dimenziós vektor, akkor a teljes rendszert annál kevésbé. Az is nyilvánvalóvá válhat már ezen egyetlen feltételből, hogy bizonyos esetekben egyes változókat 0, másokat 1 értékűnek kell választani. Az említett nemnegatív szorzók megválasztása igen lényeges, az irodalomban részletesen foglalkoznak vele.

A másik jellemvonás az ún. tesztek alkalmazása. Tesztnek nevezünk egy olyan kritériumot, amely segítségével könnyen eldönthető bizonyos feltételek teljesülése esetén, hogy a vizsgált megoldás nem elégítheti ki az összes feltételt vagy nem lehet jobb, mint az addig talált legjobb. Teszteket az eredeti feltételekre és az említett — a feltételekből nemnegatív lineáris kombinációként kapott — pótlólagos feltételre is építhetünk.

3.4 *A korlátozás és szétválasztás módszere*

A korlátozás és szátválasztás módszerét először Land és Doig [26] alkalmazta vegyes egészértékű feladatokra. Az utazó ügynök probléma megoldására Little és mások [30] alkalmazták a módszert. Azóta igen sokan különböző típusú elméleti és gyakorlati feladatokra sikerrel dolgozták ki a módszer variánsait. Ugyanis az alapgondolatok egyszerűen leírhatók, azonban hatékony algoritmushoz csak úgy jutunk, hogy ha a szereplő kritériumokat a feladat természetének megfelelően választjuk ki. A korlátozás és szétválasztás módszeréről részletes ismertetést és bibliográfiát talál az olvasó Lawler és Wood [29] dolgozatában. A módszer lényegét — egyszerűség kedvéért $0-1$ tiszta egészértékű feladatra — a következőképpen lehet összefoglalni:

A megengedett megoldások halmazát — például egyes változók 0, ill. 1 szinten való rögzítésével — több részhalmazra bontjuk. Minden halmazhoz kiszámítjuk valamilyen alkalmas módon (minimalizálás esetén) a célfüggvény egy jó alsó becslését. Kiválasztjuk azt a halmazt, ahol ez a becslés a legalacsonyabb értéket adja és ott folytatjuk a felbontást. A felbontás után újra alsó becslések következnek, majd ismét a minimális alsó becslésű halmaz megkeresése stb. A minimális alsó becslésnél mindig a még felbontatlan halmazokat vesszük csak figyelembe, hiszen a felbontott halmazoknak már a részhalmazait is vizsgáljuk. A módszer sikere azon múlik, hogyan választjuk meg a felbontási kritériumot, továbbá milyen módon határozzuk meg az egyes halmazokban a célfüggvény alsó becslését. Ha például az alsó becslés nem jó, előfordul, hogy egy megoldáshalmazt csak azért bontunk tovább, mert a hozzátartozó célfüggvény-érték alsó becslés rossz (túl alacsony) és nem azért, mert a halmazban levő megoldások némelyikéhez valóban alacsony célfüggvény-érték tartozik.

Illusztratív példaként tekintsük a következő egyszerű típusú, de mégis fontos feladatot:

$$\min c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{22}$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b \tag{23}$$

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{24}$$

Tegyük fel, hogy a változók már úgy vannak rendezve, hogy

$$\frac{c_1}{a_1} \leq \frac{c_2}{a_2} \leq \ldots \leq \frac{c_n}{a_n}. \tag{25}$$

Könnyen belátható, hogy amennyiben véletlenül

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_p = b \tag{26}$$

valamilyen $1 \leq p \leq n$ esetén, akkor az optimális megoldás

$$x_1 = \ldots = x_p = 1 \qquad x_{p+1} = \ldots = x_n = 0. \tag{27}$$

Ha azonban

$$\sum_{j=1}^{p} a_j < b < \sum_{j=1}^{p+1} a_j \tag{28}$$

valamilyen $0 \leq p < n$ esetén, akkor előfordulhat, hogy a (27) egyenlőségekben szereplő megoldás nem optimális, sőt nem is állítható úgy elő, hogy csupán néhány 0 értékű változó 1 lesz, hanem ettől teljesen különböző megoldást kapunk. Ebben a feladatban a korlátozás és szétválasztás módszerét például úgy alkalmazhatjuk, hogy egy — valamilyen kritérium szerint (pl. a (25) rendezésnek megfelelő sorrendben az első még nem rögzített változó) — kiválasztott változó értékét 0, illetve 1 szinten rögzítjük. Ilyen módon két feladathoz jutunk, amelyben csak $n-1$ változó szerepel. Az egyik megoldáshalmaz az $x_1 = 0$, másik az $x_1 = 1$ változó értékrögzítésnek felel meg. A többi változó értéke mindkét halmazban tetszőleges. Az alsó korlát becslést pedig úgy kapjuk, hogy az $x_1 = 0$, ill. $x_1 = 1$ értékadással előállított feladat folytonos változatát oldjuk meg, azaz a

$$\begin{gathered} \min c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b \\ 0 \leq x_j \leq 1 \qquad (j = 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{29}$$

illetve a

$$\begin{gathered} \min c_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\ a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b - a_1 \\ 0 \leq x_j \leq 1 \qquad (j = 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{29}$$

feladatokat. Mivel az $x_j = 0$ vagy 1 helyett a gyengébb $0 \leq x_j \leq 1$ feltételt tekintettük, azaz bővebb tartományon optimalizálunk, a minimum kisebb vagy egyenlő, mint az egészértékű minimum. Így tehát a (29) és (30) feladatok megoldásával alsó korláthoz jutunk az $x_1 = 0$, ill. $x_1 = 1$ rögzítéssel nyert részhalmazokra vonatkozóan. Az is látszik, hogy ez a becslés elég jó. Másrészt a (29) és (30) feladatok megoldása igen egyszerű. Könnyen belátható, hogy — tekintettel a (25) rendezésre — a (29) feladat optimális megoldása:

$$x_2 = \ldots = x_p = 1\,; \qquad x_{p+1} = \frac{1}{a_{p+1}}\left(b - \sum_{j=1}^{p} a_j\right); \qquad x_{p+2} = \ldots = x_n = 0\,,$$

ahol

$$\sum_{j=2}^{p} a_j \leq b < \sum_{j=2}^{p+1} a_j\,.$$

Hasonlóan kapjuk a (30) feladat megoldását:

$$x_2 = \ldots = x_q = 1\,; \qquad x_{q+1} = \frac{1}{a_{q+1}}\left(b - \sum_{j=1}^{p} a_j\right); \qquad x_{q+1} = \ldots = x_n = 0\,,$$

ahol

$$\sum_{j=1}^{q} a_j \leq b < \sum_{j=1}^{q+1} a_j.$$

A felbontást abban a csoportban folytatjuk, amelyben a célfüggvény-érték becslése alacsonyabb, azaz az $x_1 = 0$, ill. $x_1 = 1$ csoportban aszerint, hogy a

$$\sum_{j=2}^{p+1} c_j x_j \quad \text{vagy a} \quad \sum_{j=1}^{q+1} c_j x_j$$

mennyiség kisebb. Egyenlőség esetén közömbös, hogy melyik halmazt választjuk. A felbontást addig folytatjuk, míg valamelyik halmazban csak egyetlen megengedett megoldás van és a hozzá tartozó célfüggvény-érték nem nagyobb, mint a többi, még felbontatlan megoldáshalmazhoz tartozó alsó becslés. Ekkor megkaptuk a feladat optimális megoldását.

A használt felbontás akkor jó, ha úgy bontja fel a megoldásokat, hogy az alsó becslések nagyon különböznek egymástól, feltéve természetesen, hogy az alsó becslésre jó módszerünk van és nem vagyunk nagyon távol a szóban forgó részhalmazban elért valódi minimumtól. Különösen jó a felbontás, ha az alacsony alsó becslésű halmaz sokkal kevesebb megoldást tartalmaz. A módszer alkalmazása során fontos olyan kritériumokat is találnunk, amivel felismerhetjük, hogy egy megoldáshalmaz elemei nem elégítik ki a feltételeket, így ezt a részhalmazt a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatjuk. (Itt a fenti feladatnál bonyolultabbakra gondolunk.) A kritériumok és az alsó becslés módszerének megválasztásán múlik a módszer sikeres alkalmazása.

3.5 *Vegyes egészértékű problémák*

Az előző két szakasz módszereit csak tiszta egészértékű feladatokra fogalmaztuk meg. Mivel a Gomory-módszer is és a 3.2 szakaszban leírt módszer is alapjában folytonos módszerek, itt nem okozott nehézséget a vegyes feladatok kezelése.

Mind a leszámlálási algoritmusok esetében, mind a korlátozás és szétválasztás típusú módszereknél elvileg elképzelhető, hogy az egészértékű változók felmerülő értékeire — egyszerű behelyettesítés helyett — egy tiszta folytonos feladatot oldunk meg. Ha a folytonos változók száma nem nagy vagy a feladat speciális szerkezete miatt a fellépő folytonos feladatok gyorsan megoldhatók, akkor ez járható út. Ellenkező esetben azonban valami fajta dekompozícióra van szükségünk. Benders [10] dolgozatában leír egy ilyen módszert, amely egy vegyes egészértékű feladat megoldását visszavezeti egy tiszta egészértékű és egy tiszta folytonos feladat megoldására. Minthogy ebben egy konvex poliéder összes csúcsainak előállítása is szerepel, nagyobb feladatok esetén ebben a formában nem megvalósítható. Azonban a szerző a módszer egy módosítását is megadja, mely elkerüli ezt a nehézséget és egy véges sok lépésből álló iteratív eljárást szolgáltat, melyben tiszta egészértékű és tiszta folytonos feladatok sorozatát kell megoldani. Bármely tiszta egészértékű feladat megoldására alkalmas módszer használható.

3.6 *Közelítő megoldások*

Bizonyos esetekben a feladat nagy mérete vagy a rendelkezésre álló kevés idő miatt közelítő megoldásokat használunk. Ez annyit jelent, hogy a végül elfogadott megoldásról nem tudjuk biztosan, hogy optimális, csak annyit, hogy bizonyos értelemben jó megoldás. A legtöbb ilyen módszer egy speciális feladatra készül, mint például Baumol és Kuhn [6] munkája. Van azonban olyan törekvés is, hogy legalább — gyengébb vagy erősebb értelemben — lokális optimumokhoz jussunk egy tetszőleges egészértékű feladat esetén. Ilyen módszer található például Reiter és Sherman [39] elméleti igényű munkájában. Lokálisan optimálisnak nevezünk egy megoldást, ha környezetében nincs nála jobb megoldás. A környezet definíciójától függően kapunk sokatmondó, de nagyobb számítási igényű vagy gyengébb állítást tartalmazó, de gyorsabban számítható algoritmusokat.

(Beérkezett: 1969. III. 10.)

IRODALOM

[1] Balas, E.: An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables. Operations Research, Vol. 13, 1965 517—546 p.

[2] Balas, E.: Discrete Programming by the Filter Method. Opers. Res. Vol. 15. 1967. 5., 915—957 p.

[3] Balinski, M. L.: Fixed-Cost Transportation Problems. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 8. 1961. 5136—5139 p.

[4] Balinski, M. L.: Integer Programming: Methods, Uses, Computation. Management Science, Vol. 12. 1965, 253—313 p.

[5] Balinski, M. L.—Quart, R. E.: On an Integer Program for a Delivery Problem. Operations Research, Vol. 12. 1964, 300—304 p.

[6] BAUMOL, W. J.—KUHN, H. W.: An Approximate Algorithm for the Fixed-Charges Transportation Problem. Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 9. 1962, 1—15 p.

[7] BELLMAN, R. E.: Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, 1957.

[8] BELLMAN, R. E.—DREYFUS, S. E.: Applied Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, 1962.

[9] BELLMORE, M.—NEUHAUSER, G. L.: The Travelling Salesman Problem. A Survay. Operations Research, 16. 1968, 538—558 p.

[10] BENDERS, J. F.: Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems, Numerische Mathematik, Vol. 4. 1962, 238—252 p.

[11] CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Management Models and Industrial Applications of Linear Programming. John Wiley, New York, 1961.

[12] DALTON, R. E.—LLEWELLYN, R. W.: An Extension of the Gomory Mixed-Integer Algorithm to Mixed-Discrete Variables, Management Science, Vol. 12, Series A. 1967, 569—575 p.

[13] DANTZIG, G. B.: Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963.

[14] FLEISCHMANN, B.: Computational Experience with the Algorithm of Balas. Operations Research, Vol. 15. 1967. 153—155 p.

[15] GEOFFRION, A.: Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas's Method, SIAM Review, Vol. 9. 1967, 178—190 p.

[16] GLOVER, F.: A Bound Escalation Method for the Solution of Integer Linear Programs. Cahiers du Centre d'Études de Recherche Operationnelle, Vol. 8. 1965, 131—168 p.

[17] GLOVER, F.: A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem. Operations Research Vol. 13. 1965, 879—919 p.

[18] GLOVER, F.—ZIONTS, S.: A Note on the Additive Algorithm of Balas. Operations Research, Vol. 13. 546—549 p.

[19] GRAVES, R. L.—WOLFE, P. Editors: Recent Advances in Mathematical Programming. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.

[20] HADLEY, G.: Linear Programming, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1962.

[21] HADLEY, G.: Nonlinear and Dynamic Programming. Addison-Wesley, Reading. Massachusetts, 1964.

[22] IGNALL, E.—SCHRAGE, L.: Application of the Branch and Bound Technique to Some Flow-Shop Scheduling Problems, Operations Research, Vol. 13. 1965, 400—412 p.

[23] KOOPMANS, TJALLING C.—BECKMAN, M.: Assignment Problems and the Location of Economic Activities. Econometrica. Vol. 25. 1967, 53—76 p.

[24] KOVÁCS, L. B.: A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei. Az operációkutatás matematikai módszerei c. tanfolyam jegyzete. Bólyai János Matematikai Társulat, Budapest. (Sajtó alatt.)

[25] KOVÁCS, L. B.: Leszámlálási struktúrák és alkalmazásuk diszkrét programozási feladatok megoldására. Matematikai Lapok, XIX. 1968. 1—2. 33—48 p.

[26] LAND, A. H.—DOIG, A. G.: An automatic Method of Solving Discrete Programming Problems, Econometrica, Vol. 28. 1960, 497—520 p.

[27] LAWLER, E. L.: The Quadratic Assignment Problem, Management Science, Vol. 9. 1963, 586—599 p.

[28] LAWLER, E. L.—BELL, M. D.: A Method for Solving Discrete Optimization Problems. Operations Research, Vol. 14. 1966, 1098—1112 p.

[29] LAWLER, E. L.—WOOD, D. E.: Branch-and-Bound Methods: A Survey Operations Research, 14. 1966, 699—719 p.

[30] LITTLE, J. D. C.—MURTY, K. G.—SWEENEY, D. W.—CAROLINE, K.: An Algorithm for the Travelling Salesman Problem. Operations Research, Vol. 11. 1963, 972—989 p.

[31] LOMMICKI, Z. A.: A Branch and Bound Algorithm for the Exact Solution of the Three-Machine Scheduling Problem, Operational Research Quarterly, Vol. 16. 1965, 89—100 p.

[32] MCCLUSKEY, E. J.: Minimization of Boolean Functions. Bell System Technical Journal, Vol. XXXVIII, 1959, 1485—1512 p.

[33] MARTIN, G. T.: An Accelerated Euclidean Algorithm for Integer Linear Programming, 311—318 p. in [19].

[34] NEUHAUSER, G. L.: Introduction to Dynamic Programming. Wiley, New York, 1966.

[35] PETERSEN, C. C.: Computational Experience with Variants of the Balas Algorithm Applied to the Selection of R and D projects. Management Science, Vol. 13. 1967, 736—750 p.

[36] PRÉKOPA, A.: Lineáris programozás I. Az operációkutatás matematikai módszerei c. tanfolyam jegyzete. Bólyai János Matematikai Társulat, Budapest, 1968.

[37] PRÉKOPA, A.: On the Probability Distribution of the Optimum of a Random Linear Program. SIAM Journal on Control 4. 1966, 1. 211—222 p.

[38] QUINE, W. V.: A Way to Simplify Truth Functions. American Mathematical Monthly, Vol. 62. 1955. 627—631 p.

[39] REITER, S.—SHERMAN, G.: Discrete Optimizing Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 3. 1965, 864—889 p.

[40] RUTLEDGE, R. W.: A Simplex Method for Zero-One Mixed Integer Linear Programs, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 18. 1967, 377—390 p.

[41] WAGNER, H. M.—GIGLIO—RICHARD, J.—GLASER, GEORGE, R.: Preventive Maintenance Scheduling by Mathematical Programming, Management Science, Vol. 10. 1964, 316—334 p.

[42] WILSON, R. S.: Stronger Cuts in Gomory's All-Integer Programmi Algorithm. Operations Research, Vol. 15 1967, 155—157 p.

[43] YOUNG, R. D.: A Simplified (All-Integer) Integer Programming Algorithm. Operations Research. 16 1968. 4. 750—782 p.

[44] BOD, P.: Újabb eredmények az egészértékű lineáris programozásban. Operációkutatás Aktuális Problémái sorozat. 6. sz. MTESZ Automatizálási, Információfeldolgozási és Operációkutatási Tanács kiad. 1967. 50 p.

KÖNYVEKRŐL

W. J. BAUMOL: *Közgazdaságtan és operációanalízis.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1968.

William J. Baumol professzor a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó gondozásában kiadott könyve méltán mondható nagysikerűnek mind a közgazdaságtant megtanulni akaró operációkutatási szakemberek, mind pedig azoknak a közgazdászoknak a körében, akik viszonylag kisebb matematikai felkészültséggel általános képzést kívánnak kapni az operációkutatás területén. „A könyv tárgya a közgazdaságtan elmélete, nem pedig az operációkutatás" — írja a szerző előszavában. A szerző könyvének négy részén keresztül rendszerbe foglalva mutatja be az olvasónak a hagyományos mikroökonómia alapvető fogalmait, feltárt összefüggéseit, és átfogó ismereteket nyújt a matematikai közgazdaságtan sok újabb területéről abban a szellemben, hogy a teoretikus pontos, elméleti eszközei nagy segítséget nyújthatnak a közgazdaságtan problémái elemzésében.

A szerző könyve első részében mintegy száz oldalon át elemi, de alapvető matematikai alapfogalmakat, optimalizálással kapcsolatos differenciálszámítási és határelemzési összefüggéseket tárgyal rendkívül világos és érthető előadásmódban. A matematikai módszerek, eszközök elemzését tárgyaló részek illusztratív jellegűek, ugyanis a könnyebb érthetőség kedvéért a szerző gyakorlati gazdasági interpretációkkal világítja meg a matematikai összefüggéseket. Hasonló közgazdasági interpretációban mutatja be a különböző programozási eljárásokat, kezdve a lineáris programozási feladattól — vele szoros összefüggésben a duális feladat megoldása —, a nem lineáris programozási feladatokon keresztül az egész számú programozásig.

A könyv második, legtartalmasabb, 11 fejezetből álló része, mintegy 360 oldal terjedelemben a mikroökonómiai elemzés beható és átfogó ismertetését nyújtja. Először a kereslet elméletével ismertet meg bennünket a szerző. Kritikusan elemzi azokat a feltételezéseket, amelyeken a kereslet hasznossági elemzései, valamint az indifferencia görbék és felületek egzisztencia vizsgálatai alapulnak. A továbbiakban a keresleti függvények empirikus meghatározásának különböző lehetséges módszereivel foglalkozik. E részben tárgyalja a szerző a „termelés és költség" problémákat, a lineáris programozást és a termelés elméletét, vizsgálja a vállalatot és annak céljait az optimális döntések meghatározása érdekében. Elemzi a piaci versenyfeltételek különböző típusait, a tökéletes versenytől a tiszta monopóliumig, ezek hatását az árakra és a termelésre, az általános egyensúly és pénzelmélet, az általános egyensúly és a jóléti közgazdaságtan problémáit, a jólétre vonatkozó megállapítások kritériumait.

A második rész utolsó fejezeteiben tárgyalja a szerző a jövedelemeloszlás elméletét, az árelméletből és a jövedelemeloszlás elméletéből kinőtt tőkeelméletet mind kínálati, mind keresleti oldalról vizsgálva, valamint a tőkeköltségvetés elkészítését, amely az üzletek és vállalatok beruházásdöntési eljárásaira vonatkozik.

A mikroökonómiáról átfogó és a szerző kritikus elemzésében széles körű ismereteket nyújtó második rész tanulmányozása után az olvasó megismerkedhet a matematikai közgazdaságtan területén elért új eredményekkel, az input-output elemzéssel, a „tevékenység elemzéssel". Ez utóbbi úgy fogható fel, mint a lineáris programozási módszereknek az általános egyensúlyi elméletre való alkalmazása. Behatóan foglalkozik a továbbiakban a Neumann—Morgenstern-féle kardinális hasznossággal, amely eltér a neoklasszikus közgazdászok által kidolgozott kardinális és ordinális hasznosságtól és a sztochasztikus folyamatok vizsgálatánál nagy jelentősége van.

Számunkra különösen e rész két utolsó fejezete nyújt új ismereteket. A játékelméletet tárgyaló fejezet a zérus-összegű kétszemélyes játékon túlmenően röviden foglalkozik a sokszemélyes, illetve ,,n" személyes játék elméletével, ezen elméletben használatos definíciókkal, fogalmakkal. Az ,,n" személyes játékoknak van a legszélesebbkörű gazdasági alkalmazási lehetőségük, eddig azonban a témára vonatkozó szakirodalom és az eredmények sokkal szűkösebbek, mint a zérus-összegű kétszemélyes játék esetében. Másik érdekes fejezet a még elemi fejlődési szakaszában levő döntéselmélet, amelynek célja a szerző definíciójában ,,a bizonytalanság körülményei közötti választási és döntési problémák vizsgálata, az olyan körülményeké, ahol a haszon számításához szükséges valószínűségi értékek nem állnak rendelkezésre". A döntéselmélet és a játékelmélet sok vonatkozásban hasonlítanak egymáshoz. Így pl. a játékelméletben szereplő fogalmak és módszerek a döntéselméletben is megjelennek. Van azonban egy alapvető különbség a két elmélet problémái között. Nevezetesen az, hogy amíg a játékelméletben — legalábbis a zérus-összegű kétszemélyes játék esetében — a másik játékos viselkedése bizonyos mértékig előre megállapítható, addig a döntéselméletben a másik játékos nem is ellenfél. Ezt a második játékost gyakran a természetnek nevezik és a megfelelő döntési problémákat a ,,természettel szembeni játékoknak" mondják.

A szerző könyvének utolsó, negyedik részében a számológépeket nem ismerők számára nyújt alapvető jellegű ismereteket az elektronikus digitális számológépekről. Különféle gazdasági problémákat mutat be, amelyek megoldására a számológép előnyösen alkalmazható. Felsorolja a gépek rendelkezésre álló típusait, megismertet néhány használatos programozási nyelvvel és végül nagy vonalakban a számológép működésével.

Baumolnak ez a mintegy 716 oldalnyi nagyterjedelmű műve széles körű ismeretanyagot nyújt az olvasó számára a közgazdaságtan elméletének és az operációkutatásnak nagyon sok területéről. Az egyes fejezetek tanulmányozásában jobban elmélyülni kívánó olvasókat az anyag jobb megértése céljából a fejezetek végén feltüntetett feladatok megoldására serkenti. A fejezetek végén a témához kapcsolódó legfontosabb szakirodalmak felsorolását adja a szerző.

Baumol könyve annál is inkább hasznos mind az elméleti közgazdászok, mind a matematikai módszereket felhasználni kívánó közgazdászok körében, mivel a közgazdasági élet számos kutatási területén az operáció-kutatási módszerek felhasználásával szemben felmerülő, egyre sürgetőbb igények kielégítésében jelentékeny segítséget nyújt.

Kovács Ilona

Programozási módszerek a könnyűipar IV. ötéves tervének kidolgozásában

A Könnyűipari Minisztérium vezetői az elmúlt évben határozatot hoztak az ágazat IV. ötéves tervének programozási számításokkal való megalapozásáról. A feladat megoldásával a *Könnyűipari Szervezési Intézetet* bízták meg.

A gyakorlati munkálatokban az ágazat nagyszámú szakembere vesz részt. A közreműködők egy része az Intézet szakértőiként közvetlenül, másik része — mint a vállalatfejlesztési elgondolások kialakítói — közvetve kapcsolódik a munkához. Az utóbbi széles körű információ-áramláson keresztül valósul meg: a vállalatok nemcsak koncepcióikat bocsátják a modell összeállítóinak rendelkezésére, hanem a modell speciális igényeit kielégítő adatgyűjtéssel is segítik a programozást.

Jelen cikk e munkáról — a számítások céljáról, az alkalmazott modell főbb vonásairól, a kivitelezés technikai-szervezeti elképzeléseiről — ad rövid áttekintést.

A számítások célja

A számítások célja a könnyűipar IV. ötéves tervére vonatkozó ágazati koncepció-javaslatok összehangolt, több variánsban történő kidolgozása, illetve megalapozása. Többek között vizsgálni kívánjuk a népgazdasági tervezésben felmerült különböző gazdaságpolitikai változatok könnyűipari kihatásait, az egyes népgazdasági célkitűzések könnyűiparra vonatkozó feladatainak megoldási lehetőségeit, a vállalati elképzelések és a népgazdasági célok között fellépő eltérések okait, valamint azok megszüntetésének útjait és módjait.

Az említett célnak csak akkor tudunk eleget tenni, ha az alkalmazott modellel variációs- és érzékenységi vizsgálatokat felölelő számítássorozatot végzünk. Ilyen számítássorozat elvégzését — konkrétabban —

- a könnyűipari cikkek különböző fogyasztási színvonala,
- a vállalati és a népgazdasági beruházási források különbözősége,
- az exportot fokozó (a devizakitermelést növelő), ill. csökkentő külkereskedelmi politika,
- a termelés és az értékesítés más-más lehetséges szerkezete,
- a vállalatok ösztönzési rendszerének különböző alternatívái

mellett tervezzük.

A modell

Modellünket egy iparáganként felépített modellrendszer alkotja, amely teljeskörűen átfogja (reprezentálja) a könnyűipart. A modell tehát nemcsak a minisztériumi iparra terjed ki — mint az 1966—70. évi népgazdasági programozás modellje —, hanem magában foglalja a tanácsi és a szövetkezeti könnyűipari vállalatok körét is. (Ezeket néhány nagy, jellemzőnek tekintett vállalat, ill. szövetkezet alapján reprezentáljuk a számításokban).

Mivel a modell komplex tervjavaslatok (programok) készítésére szolgál, alkalmas az ágazat termékeinek értékesítését végző külkereskedelmi vállalatok (Hungarotex, Tannimpex, Lignimpex, Konsumex) tevékenységének elemzésére is.

A könnyűipar túlságosan bonyolult, szerteágazó terület ahhoz, hogy egy ilyen széles körű — termelést, fejlesztést, értékesítést vizsgáló — programozást egyetlen feladatként, egyetlen modell segítségével meg lehessen elektronikus számítógépen oldani.*

A megoldást ezért az iparági programozási modellek — második menetben történő — összekapcsolásával keressük. Ezen

* A könnyűipari iparágak száma 10 és iparáganként átlagosan 40—50 termékkel számolunk.

a ponton is és a munka egy sor más módszertani kérdésében is az 1966—70. évi* és az 1971—75. évi népgazdasági programozásokban alkalmazott, ill. alkalmazásra javasolt** módszerekre és megoldásokra kívánunk támaszkodni.

A modell változói strukturális döntési változók és szabályozási változók. Az előbbiek a régi, a rekonstruált és az új üzemekben folyó termelés, valamint a külkereskedelem — az export és az import — változói, míg a szabályozási változók a finanszírozás és jövedelemelosztás főbb mozzanatait jelenítik meg a modellben.

A feltételek főbb típusai a következők: termék- és anyagmérlegek, munkaerő és kapacitás korlátok, külkereskedelmi piaci korlátok, devizamérlegek, finanszírozási forrásonként tagolt beruházási korlátok, valamint a jövedelemelosztást szabályozó vállalatfejlesztési, részesedési és tartalékalap korlátok.

Célfüggvényként a devizaegyenlegek, az iparági (ágazati) nyereség maximalizálását, valamint a munkaerő, illetve beruházási ráfordítások minimalizálását kifejező optimumkritériumok előírását tervezzük.

A munka időrendje és szervezete

Számítási eredményeinket — mint említettük — a tárca IV. ötéves tervkoncepcióinak megalapozásához kívánják felhasználni. Ez azt jelenti, hogy az első számítás eredményeit, az ún. alapszámításokét legkésőbb ennek az évnek az őszén, a további számítások eredményeit pedig az év végén, ill. a jövő év elején kell a minisztérium vezetőinek rendelkezésére bocsátanunk.

Munkánk határidői megszabják a közbenső fázisok ütemezését is. Jelenleg — a modellvázlat kidolgozása és a vállalati adatgyűjtés lebonyolítása után — az adatok ellenőrzése, feldolgozása és a modellek számszerű összeállítása folyik.

Terveink megvalósításához — a viszonylag rövid határidők miatt — fokozott erőfeszítésekre van szükség. Ilyen körülmények között nagy jelentősége van a munkában résztvevők harmonikus együttműködésének, az elvégzendő feladatok ésszerű megosztásának. E szempontokat a programozás irányítására kialakított munkaszervezetben kívánjuk érvényesíteni.

A munka irányítását, az elvi és módszertani kérdések tisztázását egy központi munkacsoport végzi. A munkacsoport tagjai a Könnyűipari Szervezési Intézet munkatársai, a Könnyűipari Minisztérium erre a munkára delegált munkatársa, valamint néhány iparági és programozási szakértő. Ez a munkacsoport tartja a kapcsolatot az iparági szakcsoportokkal, a Minisztérium Iparfejlesztési Főosztályával, a programozást patronáló külső szervekkel (a Külkereskedelmi Minisztériummal, az OKISZ-szal), valamint az adatfeldolgozást és a gépi számítást végző vállalatokkal.

A tervező főhatóságokkal (Országos Tervhivatal, Pénzügyminisztérium) és intézményekkel (Magyar Beruházási Bank, Magyar Nemzeti Bank) a Könnyűipari Minisztérium illetékes főosztályain keresztül tartjuk a kapcsolatot: szervezzük az információcserét.

Mégis, szükség van arra, hogy az elkövetkező hónapokban kísérletet tegyünk számításaink és más szerveknél folyó modellezési számítások összevetésére. Egy ilyen összehasonlítás az adatok és eredmények kölcsönös cseréjét eredményezhetné és közelebb vihetne a különféle szerveknél kidolgozott — hasonló célokat szolgáló — modellek formális összekapcsolásához is.

Hajnal Endre

Matematikai-közgazdasági kollokvium

(1969. IX. 11—13.)

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya Révfülöpön 3 napos tudományos tanácskozást szervez. A tanácskozás témája a „*Népgazdasági folyamatok matematikai modellek révén történő tervezése és elemzése*".

A tanácskozáson felkért előadók sokszorosított és előzetesen szétosztott elő-

* Lásd: A népgazdasági modell közgazdasági tartalma (Népgazdasági programozás 1966—70 4. sz. tájékoztató), MTA Számítástechnikai Központja — OT. Tervgazdasági Tudományos Önálló Osztály, Budapest, 1964. április.

** Lásd: Javaslat a lineáris programozás alkalmazására a IV. ötéves terv megalapozó számításaiban, OT. Közgazdasági Főosztály — Tervgazdasági Intézet, Budapest, 1969. március.

adásait vitatják meg. A tanácskozás napirendje a következő:

Szept. 11. csütörtök:

Délutáni ülés: *A matematikai elemzési módszerek és az új gazdasági mechanizmus.*
Elnök: Cságoly Ferenc.

1. Megyeri Endre: Vállalati érdekeltség és jövedelemszabályozás elemzése operációkutatási módszerekkel.
2. Szakolczai György: Árak előrebecslése és gazdasági ösztönzők optimális értékének meghatározása gazdaságmatematikai modellekkel.
3. Tardos Márton: Vállalatok viselkedésének elemzése; a vállalatok és a központi szervek kapcsolatának modellje révén.

Szept. 12. péntek:

Délelőtti ülés: *A gazdasági növekedési modellek felhasználása a népgazdasági tervezésben.*
Elnök: Ziermann Margit

1. Rimler Judit: A gazdasági fejlődés többtényezős vizsgálatának alapelvei.
2. Horváth József: Hosszútávú egyenletes növekedés és optimális beruházási hányad.
3. Virág Ildikó: A folyamatos tervezés problémáinak vizsgálata növekedési modellek segítségével.
4. Ulbrichné Ács Magda: Makroökonómiai folyamatok idősorelemzésének felhasználása a hosszútávú tervmunkában.

Délutáni ülés: *Néhány újabb — a népgazdasági tervezés modellezésénél felhasználható — matematikai módszer.*
Elnök: Krekó Béla

1. Lipták Tamás: Nagy lináris rendszerek optimalizálása.
2. ifj. Krekó Béla: Közelítő eljárás lineáris programozási feladatok megoldására.
3. Stahl János: Beruházási és egyéb „0—1" típusú változók kezelése lineáris rendszerek optimalizálásában.
4. Dancs István: Az optimális folyamatok elméletének alkalmazási lehetőségeiről.
5. Kondor György: Nem lineáris kapcsolatok és célfüggvény melletti optimalizálás és egyensúly.

Szept. 13. szombat:

Délelőtti ülés: *Többszektoros gazdaságmatematikai modellek felhasználása a népgazdasági tervezésben.*
Elnök: Augustinovics Mária

1. Újlaki Lászlóné: A hosszútávú tervezés modellezésének néhány kérdése.
2. Báger Gusztáv—Morva Tamás—Szabó László: Matematikai programozás a negyedik ötéves terv elkészítésében.
3. Simon György: Közép- és hosszútávú ártervezés programozási módszerekkel.

Délutáni ülés: *A hazai matematikai-közgazdasági kutatás helyzetének és feladatainak megvitatása.*
Elnököl és vitaindító bevezetőt mond: Bod Péter. A vita megalapozására — információs anyagként — rendelkezésre áll Andorka Rudolf—Szabó László: Tájékoztató összefoglaló a hazai matematikai-közgazdasági kutatásokról c. tanulmánya.

A Bólyai János Matematikai Társulat tanfolyama

A Bólyai János Matematikai Társulat 1969 októberétől kezdődően tanfolyamot indít két félévre

Matematikai statisztika címmel

A tanfolyam célja: hogy a matematikai statisztika modern elméleti megalapozásának és számos újabb gyakorlati felhasználásának ismertetése révén a népgazdaság különböző területein, az iparban, kereskedelemben, mezőgazdaságban, valamint különféle kutatóintézetekben dolgozó matematikusok részére specializálódási lehetőséget biztosítson.

A szakosztály szívesen lát matematikusokon kívül más alapképzettségű szakembereket is (mérnököket, orvosokat, közgazdászokat stb.), akik tudásukat e tárgykörben el akarják mélyíteni és kellő alapismeretekkel rendelkeznek.

A tanfolyam résztvevői jegyzeteket is vásárolhatnak, amelyek az előadások egy-egy témakörét foglalják össze. A tanfolyam elvégzése után azok számára, akik erre igényt tartanak, vizsgázási lehetőséget biztosítunk.

A tanfolyamon való részvétel az algebra, analízis és valószínűségszámítás alapvető fogalmainak és módszereinek ismeretét igényli.

Kellő számú jelentkezés esetén 1969. szeptember 1-től előkészítő tanfolyamot indítunk. Az előkészítés jellege konzultáció; terveink szerint heti egy alkalommal, az esti órákban fogjuk tartani.

Azok számára, akik ismereteiket fel akarják frissíteni ezeken a területeken, közöljük az alábbi könyvek címeit:

Szele T.: Bevezetés az algebrába,
Gelfand: Előadások a lineáris algebrából,
Grebencsa—Novoszjev: Matematikai analízis I—II.,
Szász Pál: A differenciál és integrálszámítás elemei I—II.,
Rényi A.: Valószínűségszámítás (1966),
Prékopa A.: Valószínűségelmélet.

A tanfolyam időpontja: hétfő és péntek de. 8—12 óráig.

A tanfolyam helye: a Bólyai János Matematikai Társulat előadóterme, Bp., V., Szabadság tér 17. II. e. 205.

Részvételi díj: félévenként 800— Ft.

Tematika. A matematikai statisztika alapjai, statisztikai adatok feldolgozása.
Statisztikai becslések elmélete.
Statisztikai próbák elmélete (nemparaméteres próbák, illeszkedésvizsgálat).
Korreláció- és regresszióanalízis.
Szórásanalízis.
Kovarianciaanalízis.
Szekvenciális analízis.
Minőségellenőrzés statisztikai módszerei.
Döntésfüggvények és döntési folyamatok.
Sztochasztikus folyamatok statisztikai problémái (idősorok analízise).
Mintavétel véges sokaságból.

A tanfolyammal kapcsolatban felvilágosítást nyújt a Társulat a 311—793 telefonszámon hétfőn és pénteken de. 9—14 óráig.

Bólyai János Matematikai Társulat Matematika Alkalmazási Szakosztály Vezetősége

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat a nyomdába érkezett: 1969. V. 12. — Példányszám: 1000 — Terjedelem: 6,65 (A/5) ív

69.67639. Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENT

GEORG WINTGEN: The cybernetic system — its concept and application in economic theory 89
ANDRÁS SIMON: The optimization problem of international economic cooperation 100
GÉZA KOVÁCS: The solution of the assignment problem as a non-degenerate linear transport problem 116
PÉTER GLATTFELDER: What does the inverse matrix actually show? 124

CONCEPTS AND METHODS

PÉTER BOD: Wolfe's so-called ,,generalized linear programming problem'' 127
LÁSZLÓ BÉLA KOVÁCS: Discrete programming and its applications to problems of economics 137

BOOK REVIEWS

J. BAUMOL: Economic theory and operations analysis 159

NEWS 161

СОДЕРЖАНИЕ

Георг Винтген: Понятие кибернетической системы и ее применение в экономической науке 89
Андраш Шимон: Проблемы оптимизации международного экономического сотрудничества 100
Геза Ковач: Решение задачи соответствия как невырожденной линейной задачи транспортирования 116
Петер Глатфельдер: Что же показывает по существу обратная матрица? 124

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

Петер Бод: Об т. н. «обощенном линейном программировании по Вольфе» 127
Бела Л Ковач: Методы дискретного программирования и его применение при решении экономических задач 137

О КНИГАХ

Й. Баумол: Экономика и оперативный анализ 159

ИНФОРМАЦИЯ 161

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX : 26793

TARTALOM

Georg Wintgen: A kibernetikai rendszer fogalma és alkalmazása a közgazdaságtanban 89
Simon András: A nemzetközi gazdasági együttműködés optimalizálásának problémái 100
Kovács Géza: A hozzárendelési probléma megoldása nem degenerált lineáris szállítási feladatként 116
Glattfelder Péter: Mit is mutat az inverzmátrix? 124

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

Bod Péter: A Wolfe-féle ún. „általánosított lineáris programozásról" 127
Kovács László Béla: A diszkrét programozás módszerei és alkalmazása gazdasági problémák megoldására 137

KÖNYVEKRŐL

J. Baumol: Közgazdaságtan és operációanalízis 159

HÍRADÓ

161