SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Közgazdasági Szemle társlapja

E SZÁM SZERZŐI:

Augustinovics Mária, kandidátus, az Országos Tervhivatal osztályvezetője, **Bod Péter**, kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézetének főmunkatársa, **Forgó Ferenc**, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem tanársegéde, **Kornai János**, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének osztályvezetője, **Radnóti Éva**, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos munkatársa, **Simonovits András**, az ELTE Természettudományi Karának hallgatója, **Virág Ildikó**, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos munkatársa.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor u. 7. — Telefon: 127—294

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓnál, Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

MNB egyszámlaszám: 46., csekkbefizetési számla: 05 915.111—46: az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTban, Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612: A POSTA KÖZPONTI HIRLAP IRODA 1. sz. HIRLAPBOLTJÁban, Budapest V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban*, csekkszámlaszám: egyéni: 61 257, közületi: 61 066. MNB egyszámlaszám: 8.

Ára: 12,— Ft. Előfizetés egy évre: 40.— Ft

CONTENT

BOOK REVIEWS

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX : 26793

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

HÍRADÓ

Augustinovics Mária

A külkereskedelem az ágazati kapcsolatok nyílt statikus modelljében

Sokat írtak már a külkereskedelem kezeléséről az ágazati kapcsolatok *mérlegében*; közismert a Központi Statisztikai Hivatal által publikált mérlegek A, B és C változatának értelmezése.[1] Ugyanakkor az ágazati kapcsolatok nyílt, statikus *modelljével* végzett gyakorlati elemzések és tervszámítások mindeddig csak az A, vagy a B mérlegváltozaton alapultak; mert a modell eredeti alakjában csak ezek befogadására alkalmas. Némi általánosítás szükséges ahhoz, hogy a modell képes legyen befogadni, konzisztens rendben és szerves egységben feldolgozni azt a többlet-információt, amelyet a külkereskedelmi adatok differenciáltabb kezelése — az import-matrixokat tartalmazó C mérlegváltozat — biztosít.

Az itt bemutatandó általánosított modell lehetővé teszi, hogy ábrázoljuk a gazdaság tényleges helyzetét, amikor ugyanis hazai termelés és külkereskedelem egymást kiegészítve, kölcsönös összefüggésben biztosítják a végső felhasználásra kerülő terméktömeget. Emellett meghatározható a gazdaság feltételezett autarkiás állapota, amikor az azonos végső felhasználást kizárólag a hazai termelés fedezné, saját, adott termelési feltételei mellett; továbbá nyilvánvalóan meghatározható a kétféle állapot különbsége, amelyet a külkereskedelmi csere hatásának tekinthetünk.

1. A tényleges helyzet leírása (általános eset)

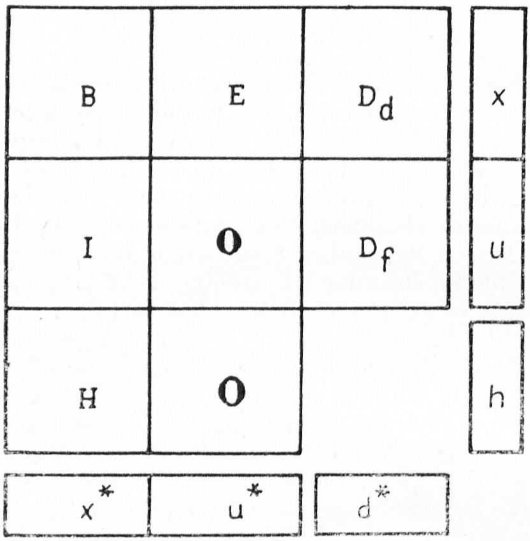
A hazai termelés technológiáját az input-output modellben az egyes ágazatok anyagráfordítási, illetve eredeti ráfordítási együtthatói írják le. A külkereskedelmet folytató gazdaság azonban a javak egy részét más „technológiával" teremti elő: behozza őket külföldről, s erre a „ráfordítás" a cserébe adott export. Ez a szemlélet a lényege az itt bemutatandó számítási módszernek. Az exportot és az importot nem egymástól, meg a termelés és a felhasználás struktúrájától függetlennek tekintjük, hanem „technológiának", amely meghatározott rendeltetésű javakat meghatározott ráfordításokkal produkál.

Egyelőre nem szabjuk meg, milyen legyen az import belső csoportosítása, csak azt kötjük ki, hogy azonos legyen az exportéval. Tehát k külkereskedelmi szektort ábrázolunk — ezek lehetnek különböző piacok (relációk) vagy különböző devizák; alapulhatnak a kompetitív-nemkompetitív megkülönböztetésen; lehetnek árucsoportok a hagyományos külkereskedelmi statisztika nomen-

[1] Lásd például: Lukács Ottó: A magyar ágazati kapcsolati mérlegek és összeállításuk statisztikai alapjai. (Az ágazati kapcsolati mérlegek összeállításának és felhasználásának kérdései, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1962. 256. p.)

klatúrájában vagy árucsoportok a hazai termelő ágazatok nomenklaturájában. Minden egyes külkereskedelmi szektor output-ja az import, ez szétosztandó ugyanazon termelő és végső felhasználók között, akik között a hazai termelést szétosztjuk; input-ja pedig valamilyen adott struktúrájú, vele azonos devizaértékű export.[2]

Akkor az n termelő ágazatból és k külkereskedelmi tevékenységből álló gazdaság (r féle hozzáadott érték-fajtával és m végső felhasználási céllal) a következőképpen ábrázolható:



$\mathbf{B}_{(n,n)}$ = hazai termékek termelő felhasználása

$\mathbf{E}_{(n,k)}$ = export

$\mathbf{D}_{d(n,m)}$ = hazai termékek végső felhasználása

$\mathbf{I}_{(k,n)}$ = import a termelő ágazatoknak

$\mathbf{D}_{f(k,m)}$ = import végső felhasználásra

$\mathbf{H}_{(r,n)}$ = hozzáadott érték

$x_{(n)}$ = teljes termelés

$u_{(k)}$ = teljes import

$d_{(m)}$ = végső felhasználás célonként

$h_{(r)}$ = $\mathbf{H}\,1$

További jelölések:

— a nagybetűk mindig matrixokat, a kisbetűk vektorokat jelölnek; a rendszámra utaló indexek elmaradnak
— a sorvektorokat *-gal jelöljük
— **1** egységmatrix, **0** zérus-matrix, mindig a szükséges rendű
— $1^* = (1, 1, \dots 1)$, az egységvektorok összege, mindig a szükséges rendű
— 1 = ugyanaz oszlopvektorként
— $\langle\ \rangle$ diagonál-matrix, elemei a belülírt vektor elemei

A termékek közvetlen elosztását, illetve közvetlen ráfordításait az alábbi mérlegazonosságok írják le:

$$(1.\,a)\quad \begin{cases} \mathbf{B}\,1 + \mathbf{E}\,1 + \mathbf{D}_d\,1 = x \\ \mathbf{I}\,1 \qquad\quad\;\; + \mathbf{D}_f\,1 = u \end{cases} \qquad (1.\,b)\quad \begin{cases} 1^*\,\mathbf{B} + 1^*\,\mathbf{I} + 1^*\,\mathbf{H} = x^* \\ 1^*\,\mathbf{E} \qquad\qquad\qquad\;\; = u^* \end{cases}$$

[2] Az egész exportnak a k tevékenység közötti felbontásához rendelkezésre állhatnak konkrét információk, például kétoldalú árucsere-egyezmények esetén. Elvégezhető a felosztás arányosítással, például partnerországonként. Végső esetben azonban tartozhat több vagy akár valamennyi importkategóriához azonos exportstruktúra is, ha az import részletezése szükségesnek látszik, de az exporté nem oldható meg. A devizaértékek azonosságát pedig úgy oldjuk meg, hogy az exporttöbbletet vagy -hiányt – tevékenységenként – a hazai végső felhasználásban szerepeltetjük, az egyenlegek felhasználási vagy finanszírozási módjától függően fogyasztásként, vagy felhalmozásként.

Az input-output modell összes szokásos feltevéseivel definiáljuk a ráfordítási együtthatókat:

$$(2)\qquad \begin{aligned} B &= \mathbf{B}\langle x\rangle^{-1} & H &= \mathbf{H}\langle x\rangle^{-1} \\ I &= \mathbf{I}\langle x\rangle^{-1} & E &= \mathbf{E}\langle u\rangle^{-1} \end{aligned}$$

és átírjuk az (1) alatti mérlegazonosságokat:

$$(3.\mathrm{a})\qquad \begin{cases} Bx + Eu + \mathbf{D}_d\mathbf{1} = x \\ Ix \qquad\;\; + \mathbf{D}_f\mathbf{1} = u \end{cases}$$

$$(3.\mathrm{b})\qquad \begin{cases} \mathbf{1}^* B\langle x\rangle + \mathbf{1}^* I\langle x\rangle + \mathbf{1}^* H\langle x\rangle = \mathbf{1}^*\langle x\rangle \\ \mathbf{1}^* E\langle u\rangle = \mathbf{1}^*\langle u\rangle \end{cases}$$

A (3.a) rendszer megoldható x-re és u-ra szimultán; de megoldható behelyettesítéssel is. Akkor előbb az első matrixegyenletet oldjuk meg x-re, ezt behelyettesítjük a második matrixegyenletbe, majd az u-ra kapott megoldást visszahelyettesítjük az első egyenletbe. A behelyettesítéses eljárás közgazdasági interpretációja világos: ilyenkor először a hazai termelőrendszert vizsgáljuk s az export-import szektorok exogének; azután a külkereskedelmi rendszert vizsgáljuk, de a hazai termelőrendszer tovagyűrűző kapcsolatait már figyelembe vesszük; végül az eredeti ráfordításokat a végső célokra vonatkoztatjuk, mindkét rendszeren keresztülgyűrűztetve azokat. Ez az eljárás lépésről lépésre tárja fel a hazai termelőrendszer és a külkereskedelmi rendszer egymás közötti kapcsolatait, de végeredménye természetesen azonos a szimultán megoldás eredményével. Itt az egyszerűbb szimultán megoldást mutatjuk be.

A termelés és a külkereskedelem együttes végső kibocsátása, illetve fajlagos eredeti ráfordításai:

$$(4.\mathrm{a})\qquad \begin{bmatrix} \mathbf{D}_d & \mathbf{1} \\ \mathbf{D}_f & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}-B, & -E \\ -I, & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

$$(4.\mathrm{b})\qquad \mathbf{1}^*[H,\mathbf{0}] = \mathbf{1}^* \begin{bmatrix} \mathbf{1}-B, & -E \\ -I, & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Bevezetjük még a következő jelöléseket:

$$(5)\qquad \begin{aligned} Q &= (\mathbf{1}-B)^{-1} \\ \mathrm{W} &= (\mathbf{1}-IQE)^{-1} \end{aligned}$$

és a (4.a.) megoldásaként Frobenius—Schur tétele[3] alapján a következőt kapjuk:

[3] Lásd például E. Bodewig: Matrix Calculus (North-Holland Publishing Co., 218. oldal). Természetesen az inverz előállítása bármilyen módszerrel történhet; a Frobenius—Schur tétel itt az egyes blokkok tartalmának meghatározására szolgál.

$$(6.\text{a})\qquad \begin{bmatrix} Q+QEWIQ, & QEW \\ WIQ, & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_d\mathbf{1} \\ \mathbf{D}_f\mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

$$(6.\text{b})\qquad \mathbf{1}^*[H, \mathbf{0}] \begin{bmatrix} Q+QEWIQ, & QEW \\ WIQ, & W \end{bmatrix} = \mathbf{1}^*.$$

Ezzel előállítottuk az adott végső felhasználást biztosító teljes termelést és teljes importot, illetve összes (közvetlen és közvetett) fajlagos hozzáadott értéket.

A négy blokkból álló inverz egyes blokkjai feltárják a hazai termelőrendszer és a külkereskedelmi rendszer belső és kölcsönös kapcsolatait. Ezek közelebbi kommentárra érdemesek. Kezdjük (6.a) második matrixegyenletével:

$$(7)\qquad W(IQ\mathbf{D}_d\mathbf{1} + \mathbf{D}_f\mathbf{1}) = u\,.$$

A zárójelben szereplő kifejezés a *hazai célú import:* a végső felhasználásra kerülő $\mathbf{D}_d$ hazai termékek összes IQ importtartalma, plusz a $\mathbf{D}_f$ végső importfelhasználás. Ez a kifejezés sűrűn szerepel a továbbiakban, ezért bevezetjük a

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathbf{F} &= IQ\mathbf{D}_d + \mathbf{D}_f \quad \text{és} \\ f &= IQ\mathbf{D}_d\mathbf{1} + \mathbf{D}_f\mathbf{1} \end{aligned}$$

jelöléseket. Így

$$(9)\qquad Wf = u \quad \text{ebből}$$

$$(10)\qquad f = (\mathbf{1} - IQE)\,u \quad \text{vagyis}$$

$$(11)\qquad f + IQEu = u.$$

Így oszlik meg a teljes import a hazai rendeltetés és az export között. Az önmagában tekintett külkereskedelmi rendszernek f a „végterméke” és $IQEu$ a „belső forgalma”. A W inverz szerepe éppen e „belső forgalom” figyelembevétele: a W-vel való szorzás juttatja kifejezésre, hogy adott hazai célú importhoz ennél nagyobb teljes import tartozik, mert az export importszükségletét is biztosítani kell.

Az egyes végső célokhoz rendelt (például a lakosság fogyasztása, vagy a termelő beruházások érdekében behozandó) teljes importot, amelyet a továbbiakban *„felosztott teljes importnak”* nevezünk, a

$$(12)\qquad W\mathbf{F}$$

matrix írja le. Ebből következik, hogy $EW\mathbf{F}$ viszont az exportot osztja fel a hazai célú importot élvező végső felhasználók között. Így most már áttekinthetőbb a (6.a) összefüggés első egyenlete:

$$(13)\qquad Q(\mathbf{D}_d\mathbf{1} + EWf) = x$$

ahol a zárójelben a végső felhasználásra kerülő hazai termékek, plusz az export szerepelnek, vagyis az önmagában tekintett belföldi termelő rendszer *extern* termelése. Vezessük be erre a fogalomra a

$$(14)\qquad \begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{D}_d + EW\mathbf{F} \quad \text{és} \\ y &= \mathbf{D}_d\mathbf{1} + EWf \end{aligned}$$

jelölést. Akkor a (13) összefüggés a jól ismert

$$Qy = x \tag{15}$$

alakra egyszerűsödik és már nem is igényel kommentárt; a végső célok között *felosztott teljes termelést* pedig a

$$Q\mathbf{Y} \tag{16}$$

kifejezés adja meg.

Hasonlóképpen értelmezhető közgazdaságilag a hozzáadott értékre vonatkozó (6.b) összefüggés is, ezt azonban itt mellőzzük.

Az egész eljárás lényege, hogy az export hazai ráfordításait — mind a teljes termelést, mind az eredeti ráfordításokat — az import ráfordításainak tekintjük, és felosztjuk azon felhasználók között, akik a hazai rendeltetésű importot felhasználják. Ezáltal kimutathatjuk az összefüggést a hozzáadott érték és a végső felhasználás között is a

$$1^*[H, \mathbf{0}]\begin{bmatrix} Q+QEWIQ, & QEW \\ WIQ, & W \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{D}_d \\ \mathbf{D}_f \end{bmatrix} = HQ\mathbf{Y} \tag{17}$$

allokációs matrix segítségével, amelyre (6.a) és (6.b) alapján

$$HQ\mathbf{Y}\mathbf{1} = h \quad \text{és} \tag{18}$$

$$1^* HQ\mathbf{Y} = d^* \tag{19}$$

amely tehát egyértelműen felosztja a hozzáadott értéket a végső felhasználási célok között, figyelembe véve a hazai termelő rendszeren és a külkereskedelmen átgyűrűző összes kapcsolatokat.

2. A tényleges helyzet leírásának bővítése (négyzetes külkereskedelmi matrixok)

Az eddig bemutatott összefüggések függetlenek a k külkereskedelmi tevékenység specifikálásától. Ha viszont az import és export bontása megegyezik a hazai termelés bontásával, azaz I és E négyzetes matrixok, akkor további lehetőségek adódnak. Ebben az esetben a belföldi termelés és a külkereskedelmi tevékenység összegezhető, a hazai és az import-ráfordítások együtt is tekinthetők; az export és az import nemcsak a kölcsönös kapcsolatokon átgyűrűztetve, hanem közvetlenül is, nemcsak értékben, hanem használati értékben is szembeállítható egymással.

Mindenekelőtt definiáljuk a külkereskedelmi forgalom

$$s = u - Eu \tag{20}$$

egyenlegét, továbbá vezessük be az

$$\begin{aligned} A &= B + I \\ Z &= (\mathbf{1} - A)^{-1} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{D}_d + \mathbf{D}_f \end{aligned} \tag{21}$$

jelöléseket. Akkor a (3.b.) alatti két egyenletrendszert összegezve a

(22) $$p = \mathbf{D}\,1 - s = (\mathbf{1} - A)\,x$$

jól ismert összefüggéshez jutunk. Ez az összefüggés a hazai termelés p *tényleges végtermékét* adja meg, amely abban különbözik az y-nal jelölt extern termeléstől, hogy itt a teljes termelésből nemcsak a hazai, hanem az import anyagfelhasználást is leszámítjuk. Ez a forma megfelel a külkereskedelem szokásos kezelésének: az export-import egyenleg a végső felhasználást módosítja. Azonban az eddigi összefüggések segítségével ezt a módosítást, vagyis a tényleges végterméket az egyes végső felhasználási célokra tudjuk vonatkoztatni, hiszen (15) alapján

(23) $$p = (\mathbf{1} - A)\,Qy = (\mathbf{1} - IQ)\,y\,.$$

Az $(\mathbf{1} - IQ)$ matrix az extern termelésből még kiválasztja annak *hazai eredetű* részét, levonván belőle a termelésében felhasznált importanyagokat; így adja meg a tényleges végterméket. A végső célok között *felosztott végterméket* pedig

(24) $$\mathbf{P} = (\mathbf{1} - IQ)\,\mathbf{Y}$$

kifejezés írja le.

Ezzel teljessé vált az import helyettesítése exporttal; a teljes termelés (16) és a hozzáadott érték (17) után most a hazai termelő rendszer végtermékét (24) is felosztottuk a végső felhasználási célok között.

3. Az autarkia, valamint a tényleges helyzet és az autarkia közötti különbség leírása (négyzetes külkereskedelmi matrixok)

Leírtuk eddig a valóság egyik oldalát, azt, hogy az ország *mit ad* a külkereskedelmi cserében. A valóság másik oldalát, azt, hogy *mit kap*, és e csere komparatív előnyeit nem ismerjük, mert ehhez valamennyi külkereskedelmi partnerének azonos formájú input-output táblája kellene, országonként részletezett export-import forgalommal.

Mégis megközelíthetjük a csere eredményeit egyoldalúan, pusztán az adott ország szempontjából, egy hipotézis segítségével. Ez a hipotézis: „mi lenne, ha" azt, amit a valóságban importál, maga termelné meg, olyan ráfordításokkal, amelyek saját gazdaságában átlagosan jellemzik a megfelelő ágazat termelését. Nevezzük ezt a feltételezett helyzetet a rövidség kedvéért *autarkiának*. Az autarkia persze nem reális feltevés, nem valódi alternatíva a legtöbb ország számára; csupán mérce, amellyel — jobb híján — jellemezhető a külkereskedelem szerepe, jelentősége az egész termelésben és a különböző felhasználási területeken.

Autarkia esetén tehát a hazai termelés $\mathring{p}$ végtermékének kellene fedeznie a végső felhasználást, vagyis

(25) $$\mathring{p} = \mathbf{D}\,1$$

lenne, a teljes termelés és a hozzáadott érték pedig

(26) $$\mathring{x} = Z\mathring{p}$$ és

(27) $$\mathring{h} = HZ\mathring{p}$$ szerint alakulna.

Mármost az autarkia és a tényleges helyzet közötti különbség mindezen kategóriákra nézve kifejezhető a külkereskedelmi egyenleg függvényeként, csupán a $Q = Z(\mathbf{1} - IQ)$ összefüggést kell szem előtt tartanunk. Ugyanis (22) és (23) szerint:

(28) $$\mathring{p} - p = s \quad \text{továbbá}$$

(29) $$\mathring{x} - x = Zs \quad \text{és}$$

(30) $$\mathring{h} - h = HZs$$

Ez az egyszerű forma teszi lehetővé, hogy ezeket a különbségeket akkor is meghatározzuk, ha csak H, Z és s ismeretesek, vagyis a külkereskedelem szokásos — (22)-vel leírt — kezelése esetén.[5]

Nem elegendő viszont ennyi információ annak vizsgálatához, hogy a külkereskedelem milyen mélyen hatol be az egész termelésbe és egyes ágazatok termelésébe. Ehhez ugyanis nemcsak a külkereskedelmi forgalom egyenlegét, hanem külön az importot és külön az exportot kell vizsgálni, például az autarkiás termelési színvonalhoz viszonyítani. Ezt a megkülönböztetést viszont, a végső felhasználási célokra való felosztással együtt, csak az itt leírt, többletinformációt hasznosító, általánosabb módszer teszi lehetővé. Ennek birtokában ugyanis megadható a

(31) $$\mathbf{S} = \mathbf{D} - \mathbf{P}$$

különbség-matrix, a végső felhasználás (egyben autarkiás végtermék) és a tényleges végtermék különbsége. Ezt ugyanakkor *felosztott külkereskedelmi egyenlegnek* is tekinthetjük, hiszen egyidejűleg

(32) $$\mathbf{S} = \mathbf{F} - (\mathbf{1} - IQ)\,EW\mathbf{F} = [\mathbf{1} - (\mathbf{1} - IQ)\,EW]\,\mathbf{F}$$

és így, mivel (5) szerint $IQEW = W - \mathbf{1}$ és (3.b) szerint $\mathbf{1}^*E = \mathbf{1}^*$, azt kapjuk, hogy

(33) $$\mathbf{1}^*\,\mathbf{S} = \mathbf{0}^* \quad \text{és}$$

(34) $$\mathbf{S}\,\mathbf{1} = s\,.$$

Vagyis $\mathbf{S}$ az egyes végső célokra használt import és a cserébe adott hazai eredetű export termékösszetétele közötti különbséget írja le; ennek összege minden egyes végső célra nézve zérus, az egyes termékfajtákra nézve viszont éppen s, a külkereskedelmi egyenleg.

Ennek alapján (29)-et és (30)-at is helyettesíthetjük a nekik eleget tevő, de teljesebb

(35) $$Z\mathbf{S} = Z\mathbf{D} - Q\mathbf{Y} = [Z - QEW]\,\mathbf{F} \quad \text{és}$$

(36) $$HZ\mathbf{S} = HZ\mathbf{D} - HQ\mathbf{Y} = H\,[Z - QEW]\,\mathbf{F}$$

formákkal. Ezek az autarkia és a valóságos helyzet közötti különbséget végső felhasználási célonként adják meg, a külkereskedelmi egyenleg vagy a hazai

[5] Ezen a formán alapszik W. LEONTIEF két nevezetes számítása (Domestic production and foreign trade . . . ; és The structure of development. Input-Output Economics, Oxford University Press 1966.)

célú import függvényében. Az utóbbi forma az import-helyettesítést, mint két, az ország által alkalmazható „technológia" különbségét fejezi ki: a hazai termelés (Z) helyett a külkereskedelmi csere (QEW) választásának következményeit.

*

A magyar gazdaságról, valamint az Európai Gazdasági Közösség (Közös Piac) országairól rendelkezésre álló mérlegek négyzetes import-matrixot tartalmaznak, sőt importmatrixokat: külön négyzetes matrixot a szocialista, illetve közöspiaci és külön az egyéb országokból származó importról. Ezzel szemben az exportról relációnként egyetlen vektort közölnek.

Következésképpen az import elosztásáról, közvetlen és végső felhasználásáról, a hazai extern termék egészének és bármely részének (beleértve az exportot is) teljes importtartalmáról teljes képet alkothatunk, mindezen kategóriákat nemcsak relációnként, hanem importált termékcsoportonként is vizsgálhatjuk.

Az importra történő ráfordításokat ezzel szemben csak nagyon aggregáltan, mindössze két relációra bontva határozhatjuk meg. Hiába tudunk különbséget tenni például szocialista szénimport és szocialista gépimport között a hazai felhasználás szempontjából, „ráfordítási struktúrája" mindkettőnek azonos: az átlagos összetételű szocialista export. (Nincs részletesebb információnk arról, hogy mit exportálunk a szénért és mit a gépért cserébe.)

Mindazon számításokat tehát, amelyek az exportot az import ráfordításaként kezelik és az export költségeit felosztják az import felhasználói között, — ezek lényegében az 1. pontban leírt számítások — csak relációs bontásban végezhetjük el.

Azokat a számításokat viszont, amelyek az importot közvetlenül (termékcsoportonként) állítják szembe az exporttal, továbbá azokat, amelyek az import és a hazai ráfordítások összegezését kívánják — ezek lényegében a 2. és 3. pontban leírt számítások, — hiánytalanul elvégezhetjük.

A bemutatott modellnek ilyen korlátozott alkalmazásával gyakorlati számításokat végeztünk, Magyarország és az EGK országok külkereskedelmi struktúrájának összehasonlítására. A számításból levont következtetéseket a *Gazdaság* 1968. 2. számában közölt cikk ismerteti.

(Beérkezett: 1968. VIII. 15.)

AN OPEN STATIC MODEL OF THE INTERINDUSTRY RELATIONS IN FOREIGN TRADE

The article shows a generalized form of the open static model of interindustry relations. The aim of generalization was that the model include, and analyze in consistent order and organic unity, all the additional information ensured by the differenciated handling of foreign trade which is now standard in input-output tables.

The model makes it possible to depict the economy's real situation, when domestic production and foreign trade complement one another, and by their interdependence, they ensure all the products for final use (paragraphs 1. and 2.). Besides this it is possible to determine a hypotetic state of the economy, the autarky when the same final use is covered solely by home production, under its own, given production conditions; and furthermore, it is obviously possible to determine the differences between the two situations, which we can consider to be the effect of foreign trade (paragr. 3.)

Definitions

n = number of production sectors
k = number of foreign trade activities
r = number of types of value added
m = number of final uses
$\mathbf{B}_{(n,m)}$ = productive use of home products
$\mathbf{E}_{(n,k)}$ = export
$\mathbf{D}_{d(n,m)}$ = final use of home products
$\mathbf{I}_{(k,n)}$ = import for the productive sectors
$\mathbf{D}_{f(k,m)}$ = imports for final use
$\mathbf{H}_{(r,n)}$ = value added
$x_{(n)}$ = total production
$u_{(k)}$ = total import
$d_{(m)}$ = final use by destination
$h_{(r)}$ = $\mathbf{H}\ 1$

1. Description of the actual situation (general case)

(1.a) and (1.b) are the starting balance identities. The relations (6.a) and (6.b) which are reduced from them produce the total production and total import needed for the given final use and the total (indirect and direct) value added. The four separate blocks of the inverse expose the home production system's and the foreign trade system's internal and mutual interconnections. The content of these, and their economic interpretation are further analyzed in relations (7)—(19). All of these are independent of the specification of foreign trade activity.

2. A broader description of the actual situation (square foreign trade matrices)

If the break-down of export and import agrees with the break-down of home production, that is I and E are square matrices, then there are further possibilities. The actual final domestic product p can be determined (in accordance with the usual handling of foreign trade), but its break-down according to their final home destination can also be given (24).

3. The autarky, and the description of the differences between the actual situation and the autarky. (square foreign trade matrices)

In the case of autarky, the final home product would be $\mathring{p}$, total production $\mathring{x}$, and value added $\mathring{h}$. Their deviation from the actual values is given in (28)—(30), as a function of the balance of trade in vector form. (35) and (36) distributes them among final domestic destinations.

ВНЕШНЯЯ ТОРГОВЛЯ И ОТКРЫТАЯ СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВЫХ СВЯЗЕЙ

В статье представляется приведенный к общему виду вариант открытой статической модели межотраслевых связей. Цель такого обобщения заключается в обеспечении того, чтобы модель могла охватить, обработать в консистентном порядке и органическом единстве дополнительные информации, вытекающие из более дифференциального подхода к внешней торговле в межотраслевых балансах.

Модель позволяет изображать действительное положение хозяйства, при котором массу продуктов, используемую конечным потреблением, отечественное производство и внешняя торговля обеспечивают совместно, дополняя друг друга, в тесной взаимозависимости. (пп. 1 и 2.) Наряду с этим можно определить и предполагаемое автаркическое состояние хозяйства, в котором то же конечное потребление покрывалось бы исключительно отечественным производством, в собственных, данных производственных условиях; и далее, очевидно можно определить и разницу между двумя положениями, рассматриваемую как воздействие внешнеторгового обмена. (п. 3.)

Обозначения:

n	= число производственных отраслей
k	= число внешнеторговых деятельностей
r	= число прибавленных видов стоимости
m	= число целей конечного потребления
$\mathbf{B}_{(n,n)}$	= производственное потребление отечественных продуктов
$\mathbf{E}_{(n,k)}$	= экспорт
$\mathbf{D}_{d(n,m)}$	= конечное потребление отечественных продуктов
$\mathbf{I}_{(k,n)}$	= импорт в производственных отраслях
$\mathbf{D}_{f(k,m)}$	= импорт для конечного потребления
$\mathbf{H}_{(r,n)}$	= прибавленная стоимость
$x_{(n)}$	= общая продукция
$u_{(k)}$	= общий импорт
$d_{(m)}$	= распределение конечного потребления по целям
$h_{(r)}$	= $\mathbf{H}$ 1

1. Описание действительного положения (общий случай)

(1.a) и (1.b) — исходные балансовые тождества. Взаимозависимости (6.a) и (6.б) дают обеспечивающие данное конечное потребление общую продукцию и общий импорт, а также общую (прямую и косвенную) удельную прибавленную стоимость. Отдельные блоки состоящей из четырех блоков обратной раскрывают внутренние и взаимные связи системы отечественного производства и внешнеторговой системы. Их содержание и экономическая интерпретация развиваются взаимозависимостями (7)—(19). Все они независимы от спецификации внешнеторговых деятельностей.

2. Расширение описания действительного положения (внешнеторговые квадратичные матрицы)

Если подразделение импорта и экспорта совпадает с подразделением отечественного производства, то есть *I* и *E* являются квадратичными матрицами, то имеются налицо дальнейшие возможности. Можно определить действительную конечную продукцию отечественного потребления — p (в соответствии с общепринятым подходом к внешней торговле), и кроме того — ее распределение между целями конечного отечественного потребления (24).

3. Описание автаркии, а также разницы между действительным положением и автаркией (внешнеторговые квадратичные матрицы)

В случае автаркии конечная отечественная продукция равнялась бы $\mathring{p}$, общая продукция — $\mathring{x}$, а прибавленная стоимость — $\mathring{h}$. Разницу между этими величинами и действительными значениями дают векторы (28)—(30) в виде функции внешнеторгового сальдо, а (35) и (36) — их распределение между целями конечного отечественного потребления.

Radnóti Éva

Matematikai modellek az infláció-elméletben

Az infláció jelenségével, keletkezésének okaival, lefolyásának mechanizmusával és gazdasági kihatásaival rendkívül gazdag irodalom foglalkozik a mai polgári közgazdaságtanban. Ez az irodalom kiterjed mind a viharos ütemű úgynevezett „hiperinfláció"-ra, mind a tőke körforgásában lényeges zavart nem okozó, mérsékelt ütemű „kúszóinfláció"-ra. A kétféle infláció problémái természetszerűleg lényegesen eltérnek, noha egyes kérdésekben rokonságot, sőt azonosságot is mutatnak. Ez a cikk a napjainkban aktuálisabb kúszóinfláció problémájával foglalkozik, s nem is említi meg külön, ha olykor az elmondottak általánosabban az inflációra, vagyis mind a hiper-, mind a kúszóinflációra érvényesek.

Nem kíván a cikk még a kúszóinflációra vonatkozólag sem irodalmi áttekintést nyújtani[1] vagy annak problémáit átfogóan tárgyalni. Mindössze azt a kérdést veti fel, hogy mit nyújt a matematikai elemzés az infláció elmélete számára. Tehát nem is az inflációval kapcsolatos problémák gyakorlati megoldása, hanem az elmélet számára. Noha felvethetnénk a közvetlen gyakorlat kérdését is, hiszen az infláció egyike azoknak a területeknek, amelyen a közgazdaságtudomány először ért el a nemzetgazdasági szintű tudatos beavatkozás bizonyos színvonalára. Mégis az inflációval foglalkozó matematikai modellek többségükben inkább elméleti, mint gyakorlati jelentőségűek. Az elméleti és gyakorlati kutatások kapcsolata tekintetében azonban Diderot véleményét vallom magaménak, aki kétféle kutatást különböztetett meg: „világosságot hozó" elméletit, és „gyümölcsöt adó" gyakorlatit. De bár a világosságot hozó kutatás *közvetlenül* nem ad gyümölcsöt, mégis a gyümölcsök érlelődésének elősegítésével nemegyszer lehetővé teszi, hogy a gyümölcsöt hozó kutatások egy későbbi időpontban ezerszerte több gyümölcsöt adjanak, mint annakelőtte. Ezért hosszú távon a világosságot hozó kutatások nemegyszer még több gyümölcsöt adnak, mint a közvetlenül gyümölcsözők. Ez a cikk azt vizsgálja néhány jelentősebb inflációs modell példáján, hogy mit nyújthat a matematikai modellezés a kúszóinfláció egyes problémáinak *megvilágítása* tekintetében.

Az inflációs nyomás fogalma

Talán a legjelentősebb abból, amit a matematikai közgazdaságtan az infláció-elméletben adott, az inflációs nyomás fogalmának bevezetése és pontos meghatározásának kísérletei.

[1] Az infláció (hiper és kúszó) elmélet irodalmáról jó áttekintést nyújt [1], amelynek matematikai leírásait néhány fontosabb inflációs modellről ebben a cikkben forrásmunkaként felhasználtam.

Magának a fogalomnak a bevezetése Bent Hansentől származik, aki 1951-ben megjelent munkájával [2] hatalmas lökést adott az infláció-elmélet tanulmányozásának. Bent Hansen az inflációs nyomás fogalmát mennyiségi relációkkal matematikai formákban definiálta.

Az inflációra ösztönző pénzügyi nyomás — „monetary pressure of inflation" szerinte akkor áll fenn, ha

1. $$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq 0$$

2. $$\sum_{j=1}^{m} P_j X_j \geq 0$$

3. $$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \sum_{j=1}^{m} P_j X_j > 0$$

ahol

x_i i jószág keresletének az a mennyisége, amely i jószág kínálatát felülmúlja
p_i i jószág ára
X_j j szolgáltatás keresletének az a mennyisége, mely kínálatát felülmúlja
P_j j szolgáltatás ára.

Ha a forgalomban levő pénz mennyisége nagyobb a forgalom szükségleteinél, amelyet a készpénzért vett áruk árösszege és az esedékessé vált fizetések összegének a felváltva forgalmi eszközként és fizetési eszközként működő pénz forgási sebességével való hányadosa határoz meg, akkor nyilván fennáll a monetary pressure of inflation is, hiszen a fölös mennyiségű pénz keresletet támaszt s így az inflációs nyomást jellemző három egyenlőtlenség is fenn fog állni. De az inflációs nyomást jellemző három egyenlőtlenség létrejöhet akkor is, ha a pénz csak a forgalom szükségleteinek megfelelően kerül a forgalomba. A hanseni definíció tehát lehetőséget ad arra, hogy az inflációs nyomás okát ne csak a pénz oldaláról, hanem közvetlenül a kereslet s kínálat viszonyából vezessük le. S míg a hiperinfláció szempontjából általában kielégítő az infláció pénzmennyiség oldaláról való elemzése, addig a kúszóinfláció lényegét aligha érthetnénk meg a túlkereset fogalmának bevezetése nélkül. Ebből a szempontból nem is túlságosan sikerült a monetary pressure of inflation kifejezés. Sokkal több joggal beszélhetnénk demand pressure of inflation-ról.[2] Az inflációs nyomás lényegét azzal határoztuk meg, hogy a kereslet tartósan felülmúlja a kínálatot, s a kínálat nem tud lépést tartani a kereslet növekedésével. E szerint az elmélet szerint a kúszóinfláció állandósulása a tőkésországokban azt mutatja, hogy náluk tartós inflációs nyomás, állandósult túlkereslet van. Érdemes ezt

[2] Bent Hansen egyébként a monetary pressure of inflation mellett meghatároz egy quantitative pressure of inflation-t is, amikor a keresleti felesleg csak egyetlen termékből, illetőleg egyetlen szolgáltatásból áll fenn

1. $x \geq 0$

2. $X \geq 0$

De éppen a „mennyiségi inflációs nyomásnak" ez a meghatározása világít rá, hogy B. Hansen számára a monetary vagyis pénzügyi inflációs nyomás is csak egy az árkifejezés eszközével aggregált mennyiségi inflációs nyomás.

összevetni azzal a sztálini tétellel, hogy a szocializmusban a kereslet szükségképp felülmúlja a kínálatot, mert az inflációelmélet nyelvére fordítva ezt úgy is szövegezhetnénk, hogy a szocializmusban szükségképp túlkereslet (excess demand) mutatkozik, vagyis inflációs nyomás áll fenn. Persze a sztálini tétel ennél többet is tartalmaz. Azt is, hogy az inflációs nyomást nem eliminálják a növekvő árak, az infláció kibontakozását a rögzített árak megakadályozzák.

Ez a sztálini tétel úgy igaz, mint egy gazdaságpolitikából — s hozzá kell tenni, hogy hibás gazdasági politikából — fakadó törvényszerűség, de nem igaz mint a szocializmus törvényszerűsége. Mert a szocializmusban sem az inflációs nyomás, sem annak eliminálatlansága nem szükségszerű, de adódhatnak olyan gazdasági feltételek, amelyek közt az inflációs nyomás létrehozása ösztönzően hat a termelés fejlődésére, s olyanok is, amelyek szükségessé teszik az árak kisebb vagy nagyobb körű rögzítését.

A sztálini tétel a szocializmus törvényszerűségeként megfogalmazva, az egyensúlyhiányt teszi a szocializmus törvényszerűségévé. Voltaképpen az inflációs nyomás hanseni megfogalmazása sem más, mint egy bizonyos fajta egyensúlyhiány matematikai formulázása,[3] de ha ez a nyomás egy lassú kúszóinflációban eliminálódik, akkor ennek matematikai modellezése már nem feltétlenül egyensúlyhiányt, hanem esetleg inkább egy mozgó egyensúlyt fejez ki, amelyben a folytonosan létrejövő egyensúlyhiány folytonosan eliminálódik, állandó mozgás van az egyensúly kialakulásának irányában. Ha az egyensúlyhiány inflációban való eliminálódását megakadályozzák a rögzített árak, az inflációs nyomás attól még változatlanul megmarad, csak nem az árak állandó emelkedésében, hanem a „hiány" állandósulásában szerez érvényt magának.[4]

Az állandósult túlkereslet nem a szocializmus törvényszerűsége s nem is egy, csak specifikusan a szocializmusban létrejövő jelenség. Létrejötte megfigyelhető mind a szocializmus, mind a modern kapitalizmus feltételei közt. Az állandósult túlkereslet a forszírozott fejlesztés törvényszerűsége. Nem a gyors ütemű fejlődésé, hanem az adott feltételek között inflációs nyomás létrehozása nélkül lehetséges ütemű fejlődéshez képest gyors ütemű fejlődésé. Eszerint a fejlődés forszírozottnak tekinthető akkor is, ha nemhogy nem gyors, de alacsonyabb a megelőző évek átlagánál, de nem tekinthető forszírozottnak még a sok év átlagát messze felülmúló ütemű fejlődés sem, ha annak a fejlődésnek a feltételei reálisan adottak s ezért tervszerűen, harmonikusan, állandó hiánnyal való küszködés és árszintnövekedés nélkül valósul meg.

Hogy az inflációs nyomás a forszírozott fejlesztés velejárója, illetőleg, hogy tőkésországokban s általában piaci gazdaságban csak az inflációs helyzet

[3] Az inflációs nyomás egy bizonyos fajta egyensúlyhiány. Önálló meghatározására azért van szükség, mert: 1. Egyensúlyhiány lehet a kereslet, és kínálat globális egyensúlya esetén is, az inflációs nyomás viszont olyan egyensúlyhiányt fogalmaz meg, amikor a kereslet és kínálat egyensúlya globálisan sincs meg. 2. Egyensúlyhiány az is, amikor a kínálat múlja felül a keresletet, ami az inflációs nyomásnak épp ellenkezője, vagyis deflációs nyomás. 3. Az inflációs nyomás definíciója másfajta szemléletű vizsgálatot jelez, mint az egyensúly, illetve egyensúlyhiány általánosabb fogalma, mert az egyensúlyt, illetve ennek hiányát vizsgálhatjuk az újratermelési folyamat zavartalansága, gyorsasága, bővülése szempontjából anélkül, hogy az ármozgásokat elemeznénk, az inflációs nyomás definíciója viszont arra utal, hogy az egyensúlyhiányt az ármozgásokra való hatása szempontjából elemezzük.

[4] [3] foglalkozik azzal a problémával, hogy az infláció a gazdasági élet belső feszültségének következménye, s hogy milyen okok váltják ki azt a szocializmus körülményei közt.

okozta kúszóinfláció körülményei közt lehet forszírozott fejlesztés, ezzel a gondolattal Keynes 1940-ben megjelent könyvében [4] találkozunk először. Nem idegen ez a gondolat Bent Hansentől sem, azonban Smithies inflációs nyomásról adott definíciójában még inkább kidomborodik, mint Bent Hansenéban. Smithies az inflációs nyomást úgy határozza meg, hogy az akkor áll fenn, ha a végső termelésből tervezett összes vásárlásnak növekedési rátája felülmúlja azt a rátát, amelyet a teljes kapacitás, illetőleg teljes foglalkoztatottság növekedése tenne lehetővé. Smithies ezzel már közvetlenül a forszírozott, az erőforrások növekedési rátáját meghaladó termelés növekedési ráta igényét adja meg az inflációs nyomás okának.[5]

Smithies modellje az inflációs nyomás jellemzésére

Az inflációs nyomás mennyiségi relációkkal való pontos definiálása önmagában még nem volna *matematikai-közgazdasági* tevékenység, de jó kiindulópont a *matematikai-közgazdasági* tevékenység számára. A jelenség okának ilyen pontosan meghatározott, mennyiségi relációkra való visszavezetésére lehet matematikai-közgazdasági modellt építeni. Smithies ezt meg is teszi. Megadja, hogy mely tényezők határozzák meg a teljes végső termelésből tervezett vásárlások növekedési rátáját és mely tényezők a teljes kapacitás felhasználása mellett lehetséges termelés növekedési rátáját, s ennek alapján szerkeszti meg az inflációs nyomás jellemzésére alkalmas modelljét. Smithies modelljében 5 egyenlőséget állít fel:

1. $$I_t = \beta_1(r)(1-k)\,Y_{t-1} + \beta_2(r)\,(Y - Y^F)_{t-1}$$

2. $$C_t = [1 - \alpha(r)(1-k)]\,Y_t$$

3. $$G_t = gY_t$$

4. $$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

5. $$Y_t^F = Y_{t-1}^F + \sigma I_{t-1}$$

ahol

Y a teljes tényleges végső termelésből tervezett vásárlások összege
Y^F a teljes kapacitáskihasználás melletti teljes végső termelés
I beruházás
G állami felhasználás kiadásai
g állami felhasználás aránya a teljes végső termelésből tervezett vásárlásokhoz
r kamatláb
C fogyasztás

[5] Nem kívánok itt kitérni annak elemzésére, hogy a teljes kapacitás és teljes foglalkoztatottság rátájának növekedését meghaladó tervezett összes vásárlások növekedési rátája milyen sajátosan értelmezendő az állandó kapacitáskihasználatlanság és a teljes foglalkoztatottság hiányának körülményei közt, mert mondanivalójának lényegét tekintve mindenesetre egyet lehet érteni Smithies véleményével, azzal, hogy a forszírozott fejlesztés inflációs nyomást hoz létre, s ehhez még hozzátehetjük azt is, hogy az infláció rögzített árakkal való visszanyomása az inflációs nyomás eliminálása nélkül nem oldja meg az inflációs nyomás okozta problémákat, csak átalakítja a növekvő árak problémáját az állandósult „hiány" problémájává.

k adóhányad
σ beruházáshatékonysági mutató
α, β_1, β_2 a függvénykapcsolatok jelölése.

Az öt egyenlőségből voltaképpen csak három az, ami elemzésre szorul. Az 5-ik egyenlőség nem szorul elemzésre, mert csak definiáló egyenlőség. Nem más, mint a beruházáshatékonysági mutató σ definiálása

$$\sigma = \frac{Y_t^F - Y_{t-1}^F}{I_{t-1}}.$$

A σ tehát megmutatja, hogy a teljes kapacitás növekedése milyen arányban van az előző időszaki, vagyis az őt létrehozó beruházással. Gyakorlatilag persze ez a *vagyis* nem olyan egyszerű, hiszen meghatározva az időszak hosszát, már nem feltétlenül igaz, hogy a kapacitásnövekedés a közvetlen megelőző időszak beruházásának eredménye, lehet az több időszakon át tartó beruházás eredménye is. Egy elméleti modell azonban joggal elhanyagolhat sok mindent, ami majd a ráépülő közvetlen gyakorlati felhasználást szolgáló modellek alkotóinak okoz gondot.

A harmadik egyenlőség azt mondja ki, hogy az állami felhasználás kiadásai (G) egyenlő a tervezett állami vásárlások összegével ($g\,Y_t$). Ezt az állítást azonban (mint látni fogjuk) a négyes egyenlőség is magában foglalja, így a harmadik egyenlőség a modellből fennakadás nélkül el is hagyható.

Megmaradt az 1-es, 2-es és 4-es egyenlőségünk. A 4-es egyenlőség azt mondja ki, hogy a tényleges felhasználás ($C_t + I_t + G_t$) egyenlő a teljes végső termelésből tervezett vásárlások összegével.[6] Itt eltekintettünk attól, és ez egy elméleti modell számára valóban megengedhető, hogy a tényleges felhasználás a készletek képződése, illetőleg elfogyasztása miatt nem feltétlen egyenlő a teljes végső termeléssel. De állításunk még ennek az absztrakciónak a megengedése mellett sem kifogástalan, mert a modell elméleti koncepciója alapján mindenképp meg kellene engedni, hogy a tervezett vásárlások összege nagyobb lehessen a tényleges felhasználás összegénél. Ez teljes összhangban van a túlkereslet tényével. De azért a négyes egyenlőség még sincs ellentmondásban a túlkereslettel. C_t, I, G_t ugyanis pénzösszegben adott. Ezért a sokszor kellemetlen egyenlőtlenség egyenlőséggel való helyettesítése megengedi a túlkereslet létezését, de azt feltételezi, hogy a tervezett vásárlásokra szánt pénzösszeg mindenképp felhasználásra kerül, vagyis az árszínvonal úgy alakul, hogy a teljes felhasználás ($C_t + I_t + G_t$) egyenlő a tervezett vásárlásokkal. Ez így nyilvánvalóan nem igaz, hiszen a tervezett vásárlás maga sem független az árak alakulásától. Eltekinteni attól, hogy a vásárlások megtervezésénél számításba veszik az árak alakulását, ez olyan absztrakció, amit már egy elméleti modellnél is joggal tekinthetünk fogyatékosságnak.

Az első egyenlőség azt mondja ki, hogy a beruházás nagysága a megelőző időszak tervezett vásárlásaitól, e vásárlásoknak az azonos időszak teljes kapacitás melletti végső termeléséhez való arányától, továbbá az adó és a kamat rátájától függ. A második egyenlőség azt, hogy pénzösszegben a tényleges

[6] Ezt az állítást tartalmazza a 3-as egyenlőség is az állami felhasználásokra konkretizálva, ti. hogy az állami felhasználás kiadásai egyenlők a tervezett állami vásárlások összegével.

fogyasztás a kamat és az adó rátájának és az azonos időszakbeli tervezett vásárlásoknak függvénye. Ez magában rejti azt a 4-es egyenlőségnél már kifogásolt feltevést is, hogy a fogyasztás árösszege nem függ a fogyasztási cikkek árszínvonalától. Ezt az elméletileg már eleve kifogásolható feltevést leszámítva, az 1-es és 2-es egyenlőség bizonyítása és konkretizálása már nem a szigorúan vett matematikai-közgazdaságtan, hanem a statisztikai elemzés, az önkonometria feladata.

A felsorolt matematikai-közgazdasági egyenletekből egyszerű számolással meghatározható mind a tervezett vásárlások, mind a teljes kapacitás melletti végső termelés növekedési rátája:

$$Y^* = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \frac{\beta_1(r)(1-k) + \beta_2(r)\left(1 - \dfrac{1}{\dfrac{Y}{Y^F}}\right)_{t-1}}{\alpha(r)(1-k) - g} - 1$$

$$Y^{F*} = \frac{Y_t^F - Y_{t-1}^F}{Y_{t-1}^F} = \sigma\,[\alpha(r)(1-k) - g]\left(\frac{Y}{Y^F}\right)_{t-1}.$$

Eszerint az, hogy t időszakban inflációs nyomás van-e, attól függ, hogy a megelőző időszakban volt-e és ha igen, milyen mértékű volt a túlkereslet $\left(\frac{Y}{Y^F}\right)$, továbbá hogy mekkora a kamat, az adó és az állami felhasználás kiadásainak rátája (r, k, g), és hogy milyen a beruházás hatékonysága (σ).

Smithies modellje az inflációs nyomás jellemzésére úgy tűnik elénk, mint egy olyan növekedési modell, amely a növekedést az egyensúlyhiány körülményei közt ábrázolja. $Y^* > Y^{F*}$. Más modellek tanulmányozásánál azt látjuk, hogy e modellek többsége olyan növekedési modell, amelyben az egyensúly folytonosan megbomlik, sőt nemegyszer a gyorsabb növekedés érdekében erőszakosan megbontják, de folytonosan újra helyreáll az automatikus szabályozók segítségével. Ezt az automatikus szabályozást elsősorban az árszínvonal alakulása biztosítja.

Néhány egyszerű inflációs modell

Smithies eddig ismertetett egyenlőségei még nem alkotnak inflációs modellt, csak az inflációs nyomás elemzésére szolgálnak. Inflációs modellről akkor beszélhetünk, ha a modell az árszínvonal változását is magában foglalja. Ezek közül egyik legegyszerűbb a Keynes nyomain elinduló *Goodwin—Simkin—Brown*-féle modell. Ez három egyenlőségből áll:

1. $$C_t^m = aY_{t-1}^m + k$$

2. $$Y_t^m = C_t^m + I_t^m$$

3. $$Y^r_t = \frac{Y_t^m}{P_t}$$

ahol:

Y a nemzeti jövedelem,
P az árindex,
C a fogyasztás,
I a beruházás.

Indexek: m nominálérték, r reálérték (illetve a tárgyidőszaki volumen a bázisidőszak árain számítva), t idő.

Konstansnak tekintett: a, k, I_t^m, Y_t^r.

A modell szerint, ha adott a tavalyi nemzeti jövedelem (nominálértékben), az idei fogyasztás nominálértéke C_t^m ennek lineáris függvénye. I_t^m konstansnak vett, ezért Y_t^m csak C_t^m-től függ ($Y_t^m = C_t^m + I_t^m$). Mivel Y_t^r is konstans, ezért $P_t = \frac{Y_t^m}{Y_t^r}$ is C_t^m függvénye. Az árnövekedés, P_t tehát annál nagyobb, minél nagyobb C_t^m, vagyis minél nagyobb a és k, amely a fogyasztásnak a nemzeti jövedelemben való részesedését adja meg. Gyakorlatilag ez a modell semmitmondó, köztudottak az állításai, hogy az idei fogyasztás függ a tavalyi nemzeti jövedelemtől, hogy a nemzeti jövedelem fogyasztásra és felhalmozásra oszlik, és hogy az árindex a nominálérték és a reálérték hányadosa. Elméletileg sokatmondóvá az teszi, hogy megadja, mit tekint konstansnak. Ebből derül ki, hogy az árszínvonal emelkedését a nominál-fogyasztás elmúlt évi nemzeti jövedelemből való részaránya határozza meg. Ezt a feltételezést számos inflációs modell tartalmazza. Nézzünk egy valamivel bonyolultabb, a bérből élők és a tőkések fogyasztását megkülönböztető modellt.

Keynes—Smithies—Turvey-modell

1. $$1 + P_t = \frac{W_t + C_t^c}{Y_t^r - I}$$

2. $$W_t = W_0(1 + \alpha P_{t-1})$$

3. $$C_t^c = c[Y_t^r(1 + P_{t-1}) - W_t]$$

ahol:

W_t a béralap, ill. a bérből élők fogyasztása,
C_t^c tőkés fogyasztás,
Y_t^r a nemzeti jövedelem reálértéke,
I a beruházás reálértéke,
P árindex.

Konstansnak tekintett: I, Y_t^r, α, c.

Az első egyenlőség a fogyasztási cikkek árindexét definiálja. A második W_t-re ad meghatározást. A harmadik egyenlőség C_t^c és W_t ellentétes irányú mozgására mutat rá. Mivel I konstans volta miatt W_t meghatározása után C_t^c a megelőző év nemzeti jövedelmének reálértékéből rezidiumként adódik, figyelmünket a lényegesebbnek látszó második egyenlőség felé fordíthatjuk.

Ezt tartja a modellben leglényegesebbnek egyik interpretálója A. J. Hagger [1] 73. o. is, aki a második egyenlőséget

$$W_t = W_0\left[1+\alpha\left(\frac{Y_{t-1}}{Y_t^r}-1\right)\right] \text{ formából}$$

$a = W_0(1-\alpha)$; $b = \alpha \dfrac{W_0}{Y_t^r}$ helyettesítéssel $W_t = a + bY_{t-1}$ formába írja, s rámutat, hogy ha $\alpha = 1$, azaz $a = 0$, akkor $\dfrac{W_t}{Y_{t-1}}$ konstans, ha $\alpha < 1$, azaz $a > 0$, akkor $\dfrac{W_t}{Y_{t-1}}$ csökken, amint Y_{t-1} növekszik, s ha $\alpha > 1$, azaz $a < 0$, akkor $\dfrac{W_t}{Y_{t-1}}$ nő, ha Y_{t-1} növekszik. Vagyis, vonja le a következtetést, az infláció tartama alatt a reálbér, amit W_t, Y_{t-1} arányával határoz meg, α értékétől függően csökkenhet, nőhet vagy konstans maradhat. De ez az elemzés nem teljes, mert hozzá kell tennünk, hogy ebben a modellben a bérből élők fogyasztásának reálértéke csak akkor nőhet, ha a tőkés fogyasztás reálértéke ennek megfelelő mértékben csökken. Ugyanis a 3-as egyenlőségből

$$\frac{C_t^c}{Y_{t-1}} = \frac{c(Y_{t-1}-W_t)}{Y_{t-1}} = c\left(1-\frac{W_t}{Y_{t-1}}\right).$$

Ebben a modellben is az árszínvonal növekedését a fogyasztási cikkek iránti túlkereslet idézi elő

$$1+P_t > 1, \text{ mert } W_t + C_t^c > Y^r{}_t - I.$$

Mind a két modellt a beruházás árszínvonalra való hatásának elhanyagolása jellemzi. Az árszínvonal növekedésének okát mindkét modell a fogyasztási cikkek iránti túlkeresletben véli megtalálni.

Más modellek nem veszik konstansnak a beruházást, hanem a *Harrod—Domar-modellhez* hasonlóan konstansnak tekintik a beruházási hányadot (s), és konstansnak a beruházások hatékonyságát (σ), vagyis konstans σs, a termelés növekedési rátája. A konstans termelés növekedési ráta mellett az árszínvonal emelkedésének okát megint csak a túlkeresletben vélik megtalálni. Szemléltessük ezt az *A. T. Peacock* modelljén: [5]

$$Y_t^m = C_t^m + I_t^m + G_t^m$$
$$C_t^m = c(1-k)\, Y_{t-1}^m$$
$$I_t^m = s\, Y_t^m$$
$$G = g\, Y_t^m$$

jelölés mint *Smithies modelljénél*
c, s, konstans.

Ebből

$$\frac{\Delta Y^m}{Y^m} = \frac{c(1-k)}{1-(s+g)} - 1.$$

A *Harrod—Domar-modellből* a termelés növekedési rátája[7] $\frac{\Delta Y_R}{Y_R} = s\,\sigma.$

Az árindex:

$$P = \frac{1 + \frac{\Delta Y^m}{Y^m}}{1 + \frac{\Delta Y^R}{Y^R}} \cdot 100 = \frac{c(1-k)}{[1-(s+g)]\,(1+s\sigma)} \cdot 100$$

Bonyolultabb modelleket is bemutathatnánk, amelyeknek ugyanez az alapfeltevése, de nem tesszük, mert itt most csak maga az alapfeltevés az, ami bennünket érdekel. Az, hogy az infláció okát a fogyasztás oldalán kell keresnünk, abban, hogy a lakosság vásárlóereje nagyobb a fogyasztási alapnál. A fejlett tőkésországok viszonyai között ez a feltevés teljesen kielégítőnek látszik. Kielégítő, mert az állandó kapacitás kihasználatlanság körülményei közt néhány százalékkal gyorsabb fejlesztés nem ütközik a rendelkezésre álló erőforrások szűkösségének korlátaiba. Ezért nem tételezzük fel a túlkeresletet a termelési eszközök piacán. De akkor milyen korlátokba ütközik a termelés, hogy nem képes a túlkereslet változatlan áron való megszüntetésére? A profit nagyságától függő vállalkozói kedv korlátaiba. Adott profitráta mellett már nem érdemes több munkást foglalkoztatni, de a profitráta növelhető, ha a munkásokat magasabb termelékenység elérésére ösztönzik. Az ösztönzés azonban anyagi ösztönzés, ami a nominálbérek növekedését követeli meg, de ez, hacsak nem az infláció körülményei közt történik, a profitérdekeket sérti. Az infláció nem azt jelenti, hogy a reálbéreket az infláció segítségével csökkentik, noha adott szituációban azt is jelentheti, általában azonban csak annyit jelent, hogy erős anyagi ösztönzést alkalmaznak a termelékenység (munkaintenzitás) növelésére, de a reálbérek kisebb arányban nőnek, mint ahogy a termelékenység (munkaintenzitás) a munkaerő tökéletesedése folytán növekszik.[8]

Mint a munkások ösztönzésének sok más formája, a kúszóinfláció rendszere is haladó elemeket rejt magában. Erősebb anyagi ösztönzést gyakorolni a termelékenység növelésére, mint amekkora ösztönzést a reálbér-növekedés által adott lehetőség megengedne, nem értelmetlen és nem eleve elvetendő a szocializmus viszonyai közt sem. Hoch Róbert az általa felvázolt inflációs modellben [3] példát hoz arra, hogy meghatározott és eléggé reális feltételek között (ti. amikor I. o. termelése II. o.-nál gyorsabban növekszik és a fejlesztés intenzív irányú) szükségképp megbomlik a vásárlóerő és az árualap egyensúlya, s inflációs nyomás jön létre. Elemzése különösen akkor helytálló, ha az infláció fogalmát tágan értelmezem, beleértve abba a *relatív inflációt* is. Relatív infláció, amikor áremelkedés ugyan nincsen, az árszínvonal változatlan vagy akár csökken, de kisebb mértékben, mint ahogy azt a költségek

[7] $Y = Y_0\, e^{s\sigma t};\ \frac{dY}{dt} = s\sigma Y_0\, e^{s\sigma t};\quad \frac{\Delta Y}{Y} = s\sigma$

[8] A nagyobb anyagi ösztönzés a munkaerő tökéletesedését váltja ki. Ez nem feltétlenül jelenti a munkaintenzitás káros fokozódását. Az ösztönzés hatására tökéletesedhet a munkaerő oly módon is, hogy szakképzettebbé válik.

csökkenése indokolná. Igaz, hogy extenzív fejlesztés mellett a költségcsökkenés, ha a bér teljesítményarányos, nem lehet nagyon nagy, de bizonyos csökkenés mégis bekövetkezhet a gépeknek a magasabb termelékenységből fakadó jobb kihasználása és az általános üzemi költségek csökkenése, általában az egy darabra jutó fix költségek csökkenése révén. De még ha az abszolút inflációt nem is ismerjük el szükségszerűnek, akkor is elismerhetjük hasznosnak a munkatermelékenység fokozására való anyagi ösztönzés szempontjából. Más szempontból viszont károsnak is tarthatjuk. Feltétlen káros és súlyosan sérti a szocializmus törvényszerűségeit, ha nemcsak a reálbéreknek a nemzeti jövedelemben való hányadát, hanem a reálbérek abszolút értékét is csökkenti. De ez csak akkor fordulhat elő, ha az egy keresőre jutó árualap csökken. A kárt ilyenkor valójában nem az árszínvonal, hanem a túl alacsonyra tervezett árualap okozza. Kárt okozhat az infláció a nemzeti jövedelemelosztás nem megfelelő megváltoztatásával is, de csak akkor, ha a nominálbérek arányainak kialakításánál nem megfelelően veszik figyelembe az árszínvonal alakulását. S káros, mert tendenciát idéz elő a fogyasztási cikkek minőségének s ezzel a fogyasztási cikkeket előállító ipar színvonalának rontására. De ezt a kárt sem az árszínvonal-változás, hanem annak oka, a túlkereslet váltja ki. A fogyasztási cikkek iránti túlkereslet hasznossága tehát nem abszolút érvényű.

Azt, hogy az inflációnak mennyire érvényesülnek a pozitív és mennyire a negatív hatásai, elsősorban a mérték dönti el. Minél inkább hiperinflációvá válik a kúszóinfláció, vagy „hiper”-hiánnyá a hiány, annál inkább érvényesülnek a túlkereslet negatív hatásai. A túlkereslet negatív hatásáról beszélek és nem az árszínvonal emelkedésének negatív hatásáról, mert ha árszabályozással az árszint emelkedését 2—3%-osra redukáljuk, de emellett az árszint mellett állandó hiánnyal küszködünk, akkor a túlkereslet és annak negatív hatása nagyobb, mint ahogy arra a 2—3%-os áremelkedésből következtetni lehetne. Ráadásul a szocializmusban nemcsak a fogyasztás oldaláról keletkezhet túlkereslet. A teljes kapacitáskihasználtságra törekedve, egy túlfeszített terv, vagy egy elég feszes terv túlteljesítése túlkeresletet támaszthat a termelési eszközök iránt és súlyos zavarokat okozhat a termelés arányaiban.

Az erős túlkereslet a termelési eszközök piacán káros aránytalanságokat idéz elő a termelésben, de piaci gazdaságban a fogyasztási cikkek iránti túlkereslet fennállása nélkül nem váltja ki a fogyasztási cikkek általános áremelkedését. A fogyasztási cikkek áremelkedése piaci gazdaságban csak akkor jön létre, ha adott árak mellett a fogyasztási cikkek iránti kereslet nagyobb a kínálatnál.[9] A termelési eszközök áremelkedése megnöveli a fogyasztási cikkek költségeit, de ez közvetlenül csak a fogyasztási cikkek termelésének nyereségét csökkenti, elvonva a termelés nyereségének realizálását a II. o.-tól az I. o. javára. A fogyasztási cikkek áremelkedése csak akkor következik be, ha a csökkenő nyereség a II. o.-ban a termelés csökkentésére vezet s ezt nem

[9] Igaz, hogy egyes merev keresletű cikkek ára emelhető túlkereslet fennállása nélkül is. (Keresletük nem vagy csak kevéssé csökken az árak emelkedésekor, de ha általában nincs túlkereslet, akkor a merev cikkek iránti megnövekedett nominálkereslet kereslet-hiányt idéz elő a rugalmas cikkeknél, s így a merev cikkek áremelkedését a rugalmas cikkek árcsökkenése fogja rekompenzálni. Ez ararányváltozást jelent és a reáljövedelem elosztását is megváltoztatja, de nem tekinthető árszínvonal-változásnak.) Cikkünkben általában az árak flexibilitását tételeztük fel, és nem mutattunk be olyan modellt, amely merev árakkal is vagy kizárólag merev árakkal dolgozik.

követi a kereslet megfelelő csökkenése. Ekkor túlkereslet jön létre a fogyasztási cikkek piacán, s ez eredményezi a fogyasztási cikkek árszínvonalának növekedését. Ugyanakkor a II. o. termelésének csökkenése csökkenti a túlkeresletet a termelési eszközök piacán, s ezzel az inflációs nyomás csökken.

Ha viszont mind a fogyasztási cikkek, mind a termelési eszközök piacán túlkereslet mutatkozik, akkor a fogyasztási cikkek áremelkedése a termelési eszközök áremelkedése miatti költségnövekedés következményének tűnik. Ha a fogyasztóra áthárított költségek melletti új árakon a fogyasztási cikkek piacán egyensúly van, a túlkereslet megszűnt, akkor a fogyasztási cikkek piacán az infláció tisztán költséginflációnak látszik, holott valójában a fogyasztási cikkek túlkereslete váltotta ki. A növekvő árból adódó többletnyereséget azonban a II. o. helyett az I. o. realizálja.

Az inflációs nyomás a fogyasztási cikkek piacán csak akkor nő, ha a személyi jövedelmek gyorsabban nőnek az árualapnál, a termelési eszközök piacán pedig, ha a tervezett (központilag vagy vállalatok által tervezett) fejlesztés nagyobb, mint ahogy azt az erőforrások megengedik. Még nagyobbá teheti ezt az inflációs nyomást, ha az állam a keresletet felülmúló, akár terven felül, akár terv szerint termelt cikkeknél az ár hatósági garantálásával megakadályozza az ár csökkenését. Akkor túlkereslet, inflációs nyomás jöhet létre, noha egyidejűleg fölös állami készletek halmozódnak fel. S a fogyasztási cikkek piacán úgyszintén a keresletet felülmúló kínálat adott áron való realizálásának hatósági biztosítása olyan inflációs nyomást idézhet elő, amely azonnal megszűnne, ha nem vennék elejét az árcsökkenésnek. Az ár hatósági megállapítása mellett nem a pozitív és negatív túlkereslet aggregálása, hanem csak a pozitív túlkereslet aggregálása jelenti az inflációs nyomást gyakorló túlkeresletet, vagyis ilyenkor a kínálat szerkezetének a kereslet szerkezetétől eltérő alakulása is inflációs nyomást vált ki. S ha ez az inflációs nyomás nem nyilvánulhat meg nyílt áremelkedésben, akkor is megnyilvánul burkolt áremelkedésben, minőségrontásban, a gazdasági élet hiány okozta feszültségében.

A kúszóinfláció nem szükségszerű jelenség egy piaci mechanizmusra épülő szocialista gazdaságban, de ha nincsenek meg a feltételei a reáljövedelmek olyan mértékű növekedésének, amekkora reáljövedelem-növekedésre a termelés fejlesztésének ösztönzésére szükség lenne, akkor az inflációs nyomás keletkezése hasznos lehet a termelés fejlődése s ezen keresztül a reáljövedelem színvonalának alakulása számára is. Jelöljük R_t-vel a fogyasztási alapot, P_t-vel a fogyasztási cikkek árát, $\Delta R_t P_t$ a fogyasztási alap növekedése. $\Delta R_t^0 P_t$ további fogyasztási alapra lenne szükség ahhoz, hogy a megfelelő mértékben ösztönözzünk a termelés fejlesztésére. Ha ezt ki is fizetik, akkor az árszínvonal-emelkedés:

$$\frac{P_{t+1}}{P_t} = \frac{R_t P_t + \Delta R_t P_t + \Delta R_t^0 P_t}{R_t P_t + \Delta R_t P_t} = 1 + \frac{R_t^0 P_t}{R_t P_t + \Delta R_t P_t}.$$

A modell nem tartalmaz kikötést arra nézve, hogy a fogyasztási alap a nemzeti jövedelemmel arányosan, kevésbé vagy jobban nő. Csak azt tételezi fel, hogy ez a növekedés nem elégséges arra, hogy megfelelően ösztönözzék a termelés fejlesztését. Az árszínvonal-növekedés nem változtatja meg a reáljövedelem növekedési rátáját, az már a priori eldőlt, amikor a fogyasztási alapot létrehozták. Az árszínvonal-növekedés csak megváltoztatja a reáljövedelem elosztását, a változatlan árszint mellett lehetséges jövedelemelosztáshoz képest azok javára, akiket erősebben kívánnak anyagilag ösztönözni, illetve akik jobban ösztönözhetők, és azok kárára, akiket kevésbé kívánnak ösztönözni, illetőleg kevésbé ösztönözhetők.

Sőt az árszínvonal-növekedés nemcsak hogy nem csökkenti a reáljövedelmeket, de még hozzá is járulhat ahhoz, hogy a következő évben a reáljövedelem növekedjen. Modellezve állításunkat:

Jelölésrendszer:

Y_t a társadalmi össztermék reálértékben,
K_t a lekötött termelési eszközök reálértéke,
T_t az elhasznált termelési eszközök reálértéke,
R_t fogyasztási alap, reáljövedelmek,
W_t nomináljövedelmek
G nyereség (felhalmozásra és fogyasztási alap bővítésre).
P_t árindex

definiáló egyenlőségek $P_t = \dfrac{W_t}{R_t}$; $g_t = \dfrac{G_t}{R_t}$

A modell

1. $Y_t = T_t + R_t + G_t = T_t + R_t\,(1 + g_t)$

$$\left.\begin{aligned} &2.\ T_t = T_t\,(K, W) \\ &3.\ g_t = g_t\,(W_t) \end{aligned}\right\}\ \text{a függvénykapcsolat jelölése}$$

innen

4. $Y_t = T_t\,(K, W) + R_t\,[1 + g_t\,(W_t)]$

és

5. $\dfrac{\partial T}{\partial W} \geq 0$ 6.[10] $\dfrac{\mathrm{dg}(W)}{\alpha W} > 0$

következésképp $\dfrac{\partial Y}{\partial \mathrm{W}} > 0$

de $\mathrm{W}_t = P_t\,R_t$-ből $\dfrac{dW}{dP} = R_t > 0$

ezért $\dfrac{\partial Y_t}{\partial P} > 0$, vagyis az árindex növekedésével a társadalmi össztermék reálértéke növekszik. Ha a fogyasztási alap aránya a társadalmi össztermékben változatlan, $\dfrac{Yt}{R_t}$ konstans, akkor az árszint növekedésével a reáljövedelmek is nőnek.

[10] A 6-os egyenlőtlenség azt fejezi hi, hogy változatlan reáljövedelem mellett azért emeltük a nomináljövedelmeket, hogy ezzel a g_t növekedését segítsük elő.

Cikkünk következtetései:

1. A szocializmus viszonyai közt helyénvaló az *inflációs nyomás* fogalmának értelmezése, még akkor is, ha a hatósági árszabályozás megakadályozza az infláció kibontakozását.

2. Az inflációs nyomást úgy határoztuk meg, hogy az a fogyasztási cikkek piacán szabad áralakulás mellett akkor áll fenn, ha a pozitív és negatív túlkereslet egyenlege pozitív, szabályozott árak vagy részben szabályozott árak esetén, ha a pozitív túlkereslet és a csökkenthető árú cikkek negatív túlkeresletének egyenlege pozitív, a termelési eszközök piacán pedig akkor, ha a fejlesztés adott fejlesztési struktúra mellett a rendelkezésre álló anyagi erőforrásokhoz képest túlfeszített.

3. A fogyasztási cikkek piacán az inflációs nyomás kialakulása nem függ közvetlenül a beruházások színvonalától. Közvetve függ attól, amennyiben a beruházás nagysága befolyásolja a fogyasztási alap és a nominàljövedelmek nagyságát is. Mivel a beruházás közvetlen befolyást a fogyasztási cikkek árszínvonalára nem gyakorol, ezért a fogyasztási cikkek árszínvonalának modellezésénél általában figyelmen kívül hagyható.

4. A termelési eszközök áremelkedése közvetlenül nem vált ki árszínvonalemelkedést a fogyasztási cikkek piacán, csak a fogyasztási cikkek túlkereslete miatti áremelkedés következtében keletkező nyereségből von el a II. o.-tól az I. o. javára. Ez kiválthatja a II. osztály termelésének csökkenését, s így a fogyasztási cikkek csökkenő kínálata miatt túlkereslet jöhet létre a fogyasztási cikkek piacán, s ez kiválthatja a fogyasztási cikkek áremelkedését. Az I. osztály termékeinek áremelkedése tehát elindíthat egy olyan folyamatot, amely a termelés struktúrájának megváltoztatásán keresztül túlkeresletet idéz elő a fogyasztási cikkek piacán s ezzel a fogyasztási cikkek áremelkedésének okává válik, de közvetlenül a termelés struktúrájának megváltoztatása és a fogyasztási cikkek iránti túlkereslet előidézése nélkül nem válhat a fogyasztási cikkek áremelkedésének okává.

5. A fogyasztási cikkek piacán mérsékelt inflációs nyomás hatása a gazdasági életre túlnyomórészt pozitív, nagyméretű inflációs nyomásé negatív.

6. A nem nagyon nagy méretű inflációs nyomás negatív hatásait általában csökkenti, ha az az árszínvonal emelkedésében és nem hiánycikkek keletkezésében szerez érvényt magának.

7. A termelési eszközök piacán az inflációs nyomás általában negatív hatású, ezért a kapacitások lehetőleg jó kihasználása mellett a termelés mérlegegyensúlyának megőrzésére kell törekedni.

8. A fogyasztási cikkek piacán az inflációs nyomás keletkezése akkor szükségszerű, ha a reáljövedelem-növekedés nem teremt kellő lehetőséget a termelés fejlesztésének megfelelő anyagi ösztönzésére. Ilyenkor az árszínvonal-emelkedés nem a reálbér-növekedési rátát változtatja meg, hanem a reáljövedelem elosztásának arányait az erősebben ösztönözni kívánt, illetve erősebben ösztönözhető rétegek javára.

9. Az árszint-növekedés nemcsak hogy nem csökkenti a reálbér növekedési rátáját, amelyet az árszinttől függetlenül a fogyasztási alap növekedése határoz meg, hanem még elő is segítheti a reáljövedelmek növekedésének meggyorsulását.

(Beérkezett: 1968. X. 10.)

IRODALMI HIVATKOZÁSOK

1. A. J. HAGGER: The Theory of Inflation. 1964. Melbourne University Press. 238 p.
2. HANSEN, B.: A study in the theory of inflation. Allen & Unwin, London 1951.
3. HOCH, R.: Piaci egyensúly és árszínvonal-változás. Közgazdasági Szemle, 1965. 9. sz. 1030–1049. old.
4. KEYNES, M.: How to pay for the war. London 1940. Macmillan.
5. PEACOCK, A. T.: Built in Flexibility and Economic Growth. (Gyűjt. kötet.) Stabile Preise in wachsender Wirtschaft c. cikk 206–218. old. 1960. Tübingen.

MATHEMATICAL MODELS IN INFLATION THEORY

The article deals with the problems of „creeping" inflation. Starting from a survey of the concept of inflationary pressure based on the definition of B. Hansen and Smithies it is pointed out that the concept of inflationary pressure must be interpreted also under socialist conditions. Inflationary pressure is defined as existing in the market of consumer goods in the case of free price formation whenever the balance of positive and negative excess demand is positive, and in the case of totally or partially controlled prices whenever the balance of positive excess demand and the negative excess demand for commodities whose price could be lowered is positive, and in the market of the means of production whenever development on the basis of the given structure is overstrained in relation to the available material resources (i.e. planned input exceeds the available resources).

It is shown on hand of some inflation models that the latter are tracing back inflation to excess demand for consumer goods, without taking into account the trends in investment. This is justified in view of the fact that the formation of inflationary pressures in the market of consumer goods will not depend directly on the level of investment activity. A rise in the price level of the means of production will not directly release a price rise in the market of consumer goods; it may, however, cause changes in the production structure which, bringing about excess demand in the market of consumer goods, lead to a rise in the price level.

The effect of moderate inflationary pressure in the market of consumer goods on the economy as a whole is largely positive, that of large-scale inflationary pressure negative. The negative effects of not too heavy inflationary pressure are generally mitigated when the pressure asserts itself in the form of a rising price level and not in that of bringing about scarcity in some commedities.

In the market of the means of production the effect of inflationary pressure is generally negative; it must, accordingly, be endeavoured to maintain the equilibrium of the production balance, together with a high degree of capacity utilization.

In the market of consumer goods, inflationary pressure will necessarily arise whenever the increase in real income fails to create adequate material incentives to develop production. In this case, the rise in the price level will, instead of altering the growth rate of real wages, bring about a shift in the distribution of real income in favour of the strata to which it is intended or possible to give stronger incentives.

Not only that the rise in the price level will not decrease of growth rate of real wages, which is actually determined by the growth of the consumption fund, independently of the price level; it may even be instrumental in accelerating the rise in real incomes.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ИНФЛЯЦИОННОЙ ТЕОРИИ

Статья занимается проблематикой «ползущей» инфляции. Автор при этом исходит из трактовки понятия инфляционного давления согласно определениям, данным Б. Ханзеном и Смиссисом. Она констатирует, что понятие инфляционного давления имеет смысл и в условиях социализма. По данному ею определению инфляционное давление имеется налицо на рынке предметов потребления при свободном формировании цен в том случае, если сальдо положительного и отрицательного сверхспроса положительно, а при регулируемых или частично регулируемых ценах — в том случае, если сальдо положительного сверхспроса и отрицательного сверхспроса на товары, количество которых можно сократить, положительно. На рынке же средств производства — в том случае, если при данной структуре развития по сравнению с имеющимися в распоря-

жении материальными ресурсами развитие является чрезвычайно напряженным. (Планируемое потребление превышает имеющиеся ресурсы.)

На примере нескольких инфляционных моделей автор показывает, что они при представлении инфляции исходят из сверхспроса на предметы потребления и не учитывают динамики капиталовложений. Это мотивируется тем, что на рынке предметов потребления возникновение инфляционного давления не зависит непосредственно от уровня капитальых вложений. Повышение уровня цен на средства производства непосредственно не вызывает повышения цен на рынке предметов потребления, но может привести к такому преобразованию структуры производства, при котором на рынке предметов потребления возникает сверхспрос, в результате чего наблюдается повышение цен.

Возникающее на рынке предметов потребления умеренное инфляционное давление оказывает на хозяйственную жизнь большей частью положительное влияние, значительное инфляционное давление же — отрицательное воздействие. Отрицательные влияния не очень большого инфляционного давления, как правило, умериваются, если оно проявляется в повышении уровня цен, а не в возникновении дефицитных товаров.

Возникающее на рынке средств производства инфляционное давление имеет, как правило, отрицательное влияние, поэтому при возможно рациональном использовании мощностей следует стремиться к сохранению балансового равновесия производства.

Возникновение инфляционного давления на рынке предметов потребления является об''ективно необходимым в том случае, если повышение реального дохода не предоставляет возможности для должного материального поощрения развития производства. В таких случаях повышение уровня цен изменяет не норму роста реальной заработной платы, а соотношения разделения реального дохода в пользу слоев, усиленное поощрение которых считается желательным или возможным.

Повышение уровня цен не только не понижает нормы роста реальной заработной платы, определяемой независимо от уровня цен ростом фонда потребления, а наоборот, может способствовать даже ускорению роста реальных доходов.

Virág Ildikó

Egy sztochasztikus növekedési modell

A gazdasági élet leírására jelenleg használt matematikai modellek nagy része determinisztikus modell. Azonban jól ismert, hogy ha egy ilyen modellel például tervezni akarunk, akkor fel kell tételeznünk bizonyos gazdasági összefüggéseket, amelyek előre nem látott s a tendenciák bonyolultsága miatt nem is látható hatások miatt nem a feltevéseknek megfelelően fognak érvényesülni. Ezért egy ilyen modellel számított eredményeket egy jó tervező soha sem tekinti biztosan bekövetkező ténynek, hanem csak közelítésnek. Azonban az ilyen előre nem látott véletlen hatásokról a tervezés során soha nem tudjuk meg, hogy mennyire változtatják meg feltételeinket, és így azt sem, hogy a kapott eredmény a tervezetthez nagyon közel, kevésbé közel, vagy egyenesen távol lesz.

Létezik azonban olyan matematikai apparátus, amelynek segítségével előre nem látott véletlen események is figyelembe vehetők. Ezt nyújtja a valószínűségszámítás és a családjába tartozó tudományágak, a sztochasztikus folyamatok elmélete, a matematikai statisztika, az információelmélet stb.

A sztochasztikus folyamatok elmélete a ξ_t valószínűségi változók halmazának vizsgálatával foglalkozik, ahol t végigfut egy valós paraméterhalmazon, pl. egy időintervallumon. Ez az elmélet lehetővé teszi véletlen jelenségek időbeni lefutásának vizsgálatát. A gazdasági valóságot a nagyszámú számbavehetetlen véletlen hatás miatt hasznos éppen ilyen időben lefutó véletlen jelenségként kezelni.

A sztochasztikus folyamatok elméletének különösen a mikroökonomiában számos sikeres alkalmazása van, azonban kevesebb makroökonomiai alkalmazásáról tudunk.

Ebben a dolgozatban a sztochasztikus folyamatok elméletének egy makroökonomiai alkalmazását fogjuk bemutatni. Szeretnénk megmutatni azt a gondolatmenetet, ahogyan egy determinisztikus modellt általánosíthatunk.

Egy *Harrod—Domar típusú növekedési modellből* indulunk ki, amely Sz. Sztrumilintől származik [1], [2], [3]. Ezzel a modellel a szerző azt az optimális felhalmozási hányadot kívánja meghatározni, amely mellett egy meghatározott időszak alatti összes fogyasztás maximális. E modell alapvető feltevése az, hogy az $Y(t)$ nemzeti jövedelem csak a $K(t)$ tőkéből származik és a nemzeti jövedelem c konstansszorosa a t-edik időpillanat $K(t)$ tőkeállományának.

$$Y(t) = c\,K(t)\,.$$

Az általánosítási lehetőség az, hogy a c konstans értékét sztochasztikus folyamatnak fogjuk fel, tehát az általa felvett értéket minden időpillanatban valószínűségi változónak tekintjük.

Ebből a feltevésből következik, mint látni fogjuk, hogy az összes többi változót, tehát a $K(t)$ tőkét, $Y(t)$ nemzeti jövedelmet, $J(t)$ beruházást, $C(t)$ fogyasztást is sztochasztikus folyamatként kell kezelnünk.

A modellel, a determinisztikus modell analógiájára itt is az optimális felhalmozási hányadot határozzuk meg, miközben a T időszak alatti összes fogyasztás várható értékét maximálizáljuk.

A dolgozat két részből áll. Az egyik részben azt az esetet vizsgáljuk, amikor a $c(\omega, t)$ tőkehatékonyság sztochasztikus folyamatát, mint általános sztochasztikus folyamatot vizsgáljuk, a másik részben pedig feltesszük, hogy Gauss folyamat.

Az általános esetben a T idő alatti összes fogyasztás várható értékét végtelen sor alakjában kapjuk, Gauss folyamat esetén azonban zárt képletben, így ebben az esetben részletesebben vizsgálhatjuk az optimális felhalmozási hányad létezésének és unicitásának feltételeit.

A modell leírása

Legyen $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ egy valószínűségi mező és legyen az $[O, T]$ zárt intervallum egy paraméterhalmaz ([4] III. fejezet), ahol T éppen a horizontidő. Legyenek értelmezve $Y(\omega, t)$, $c(\omega, t)$, $K(\omega, t)$ és $J(\omega, t)$ sztochasztikus folyamatok az $\Omega x[O, T]$ téren, azaz minden $\omega_0 \in \Omega$-re és $t_0 \in [O, T]$ értékre vegyenek fel valamilyen valós értékeket, úgy, hogy rögzített $t_0 \in [O, T]$ esetén az $Y(\omega, t_0)$, $c(\omega, t_0)$, $K(\omega, t_0)$ és $J(\omega, t_0)$ egy-egy az $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó és minden rögzített $\omega_0 \in \Omega$ esetén az $Y(\omega_0, t)$, $c(\omega_0, t)$, $K(\omega_0, t)$ és $J(\omega_0, t)$ egy-egy a $[O, T]$ intervallumon értelmezett közönséges függvény, amelyeket a sztochasztikus folyamat realizációinak nevezünk. ([4]. I. fejezet.)

$Y(\omega, t)$-vel a nemzeti jövedelem sztochasztikus folyamatát jelöljük.

$c(\omega, t)$ a tőkehatékonyság sztochasztikus folyamata, amely a pillanatnyi tőkehatékonyságot mutatja.

$y(\omega, t)$ a pillanatonként eszközölt beruházás sztochasztikus folyamata.

$K(\omega, t)$ a t-edik időpillanat tőkeállományának sztochasztikus folyamata.

A modell feltevései

1. A $t = O$ időpillanatban $K(O) = K_0$ mennyiségű tőke áll rendelkezésre. Ezt nem tekintjük véletlentől függő mennyiségnek, hiszen a valóságban ismert mérhető mennyiség.

2. $Y(\omega, t) = c(\omega, t)$, $K(\omega, t)$, vagyis a t-edik pillanat nemzeti jövedelmét a t-edik pillanat tőkehatékonysága és az illető pillanat tőkeállományának szorzataként kapjuk. Ez véletlentől függő mennyiség, hiszen a véletlentől függ az is, hogy mennyi az illető pillanatban a tőkehatékonyság és az is, hogy mennyi az addig felgyülemlett tőkemennyiség.

3. $J(\omega, t) = s\ Y(\omega, t)$, ahol $O \leq s \leq 1$ valós szám. Szavakban kifejezve ez a feltevés azt jelenti, hogy a pillanatnyi nemzeti jövedelemnek valamilyen s konstansszorosát fordítjuk mindig beruházásra. Természetes, hogy a $y(\omega, t)$ pillanatnyi beruházás is véletlentől függő mennyiség, hiszen $Y(\omega, t)$ az.

4. $K'(\omega, t) = y(\omega, t)$, ahol a $K'(\omega, t)$ az a sztochasztikus folyamat, amelynek realizációi a $K(\omega, t)$ folyamat realizációinak közönséges analízisbeli értelemben

vett deriváltjai. Ez a feltevés itt is, mint a determinisztikus modellben azt fejezi ki, hogy a beruházás azonnal hatni kezd, azaz nincs időbeni késleltetés.

5. Tegyük fel továbbá, hogy a $c(\omega, t)$ sztochasztikus folyamat majdnem minden realizációja folytonos függvény, ahol a „majdnem minden" fogalom azt jelenti, hogy azon realizációk előfordulásának valószínűsége, amelyek mellett a $c(\omega, t)$ nem folytonos függvénye t-nek, nulla.

6. Legyen ezenkívül a $c(\omega, t)$ rögzített t mellett korlátos, azaz létezzen olyan $n(t)$ valós függvény, hogy

$$c(\omega, t) \leq n(t)\,.$$

Ez utóbbi két feltevésnek főleg technikai jellege van, azonban közgazdaságilag teljesen kézenfekvő követelmények, hiszen azt jelentik, hogy a folyamat minden realizációja olyan, hogy az időben változó tőkehatékonyság folytonos, másrészt pedig rögzített időpillanatban nem vehet fel akármilyen nagy értéket.

A 2, 3 és 4 feltételből $K(\omega, t)$-re a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$K'(\omega, t) = s \cdot c(\omega, t) \cdot K(\omega, t)\,.$$

Az 5. feltevés miatt a kapott sztochasztikus differenciálegyenlet megoldható, egy valószínűséggel bármilyen rögzített ω mellett.

A megoldást úgy kapjuk, hogy az egyes realizációk között fennálló függvényekre vonatkozó differenciálegyenleteket megoldjuk. A kapott megoldásfüggvények a megoldásfolyamat realizációi.

A megoldás tehát

$$K(\omega, t) = K_0 \exp\,[s\int_0^t c\,(\omega, t)\mathrm{d}t]$$

ahol felhasználtuk az 1. alatti feltételt.

Ez az egyenlőség $K(\omega, t)$ majdnem minden realizációjára teljesül.

Célunk a T idő alatti összesfogyasztás várható értékek maximálása, ezt a következőképpen kapjuk:

Mivel felhalmozásra időpillanatonként a nemzeti jövedelem s-szeresét fordítjuk, fogyasztásra az $(1—s)$-szerese kerül.

Mivel $Y(\omega, t) = c(\omega, t)\ K(\omega, t)$, és $K(\omega, t) = K_0\exp[s\int_0^t c(\omega, t)\,\mathrm{d}t]$

a T idő alatti összes fogyasztás a következő:

$$K_0\int_0^T (1 - s)\,c(\omega, t)\exp\,[s\int_0^t c\,(\omega, t)\,\mathrm{d}t]\,\mathrm{d}t$$

ennek a várható értékét a következő alakban kapjuk:

$$(1)\qquad \begin{cases} K_0\left(\dfrac{1}{s} - 1\right)\left[\mathbf{M}\left(\exp\,\{s\int_0^T c(\omega, t)\,\mathrm{d}t\}\right) - 1\right], & \text{ha } 0 < s \leq 1 \\ K_0\int_0^T c(\omega, t)\,\mathrm{d}t\,, & \text{ha } s = 0. \end{cases}$$

Ennek a kifejezésnek keressük a maximumát, miközben $0 \leq s \leq 1$. Megjegyzés:

Konkrét esetekben nagyon nehéz kimutatni, hogy egy sztochasztikus folyamat majdnem minden realizációja folytonos (azaz a folyamat egy valószínűséggel folytonos).

A következő tétel ([4] IV. fejezet 5. §.) ad egy elégséges feltételt egy sztochasztikus folyamat egy valószínűséggel való folytonosságára.

Tétel: Ha léteznek olyan C, r és β pozitív konstansok, hogy

$$\mathbf{M}\left[\,|c(\omega, t_2) - c(\omega, t_1)|^{\beta}\right] \leq C\,|t_2 - t_1|^{1+r}$$

és a $c(t, \omega)$ szeparábilis, akkor a $c(t, \omega)$ egy valószínűséggel folytonos.

Ha a folyamatról még azt is feltesszük, hogy Gauss-folyamat, akkor a következő még könnyebben ellenőrizhető feltételek teljesülését kell megvizsgálnunk. Ezek a folyamat korreláció függvényére vonatkoznak, amely egy jól kezelhető valós függvény.

A tétel ([4] IV. fejezet 5. §.) a következő:

Ha léteznek $C > O$, $\alpha > O$ konstansok úgy, hogy teljesül az

$$|R(t_2, t_2) - 2\,R(t_2, t_1) + R(t_1, t_1)| \leq C(t_2 - t_1)^{\alpha},$$

minden $(t_1, t_2) \in [O\ T]$, és $m(t)$ a $c(\omega, t)$ Gauss-folyamat várható értéke folytonos, akkor a szeparábilis Gauss-folyamat egy valószínűséggel folytonos.

Ezek a tételek szeparábilis sztochasztikus folyamatokra vonatkoznak. Közgazdaságilag a szeparábilitás nem jelent erős megkötést. Ha folyamataink nem szeparábilisak, dolgozhatunk a velük sztochasztikusan ekvivalens szeparábilis folyamatokkal ([4] IV. fejezet 2. §.).

Az általános eset

Az (1) alatti kifejezést fogjuk maximalizálni, miközben $0 \leq s \leq 1$. Problémát csak az

$$\mathbf{M}[\exp(\int_0^T s(c\omega, t)\,dt)] \tag{1}$$

kiszámítása jelent.

Készítsük el az $\exp[s\int_0^T c(\omega, t)dt]$ hatványsorát.

$$\exp\left[s\int_0^T c(\omega, t)\,dt\right] = 1 + \frac{s\int_0^T c(\omega, t)\,dt}{1!} + \ldots + \frac{s^n\left(\int_0^T c(\omega, t)dt\right)^n}{n!} + \ldots \tag{2}$$

Ha képezzük mindkét oldal várható értékét, akkor azt kapjuk, hogy

(3)

$$\mathbf{M}\left[\exp\left(s\int_0^T c(\omega, t)\,dt\right)\right] = 1 + M\left[\frac{s\int_0^T c(\omega, t)\,dt}{1!}\right] + \ldots + M\left[\frac{s^n\left(\int_0^T c(\omega, t)dt\right)^n}{n!}\right] + \ldots$$

ahol

$$\mathbf{M}\left[\frac{s^n\left(\int_0^T c(\omega, t)\,dt\right)^n}{n!}\right] = \frac{s^n}{n!}\int_{\Omega}\left(\int_0^T\int_0^T \ldots \int_0^T c(\omega, t_1)\,c(\omega, t_2) \ldots\right. \tag{4}$$

$$\ldots c(\omega, t_n)\,\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_n)\,dP$$

(2) jobb oldalán tagonként képezhetjük a várható értéket, mivel a 6. pont alatti feltétel miatt a (2) jobb oldalának részletösszegeiből képezhető függvénysorozatra teljesülnek a Lebesgue-tétel ([4] II. fejezet 5. §.) feltételei. A Fubini-tétel ([4] II. fejezet 3. §.) n-szeres alkalmazásával felcseréljük az integrálások sorrendjét és így (4)-től a következő összefüggést kapjuk:

$$(5)\ \mathbf{M}\left[\frac{s^n(\int\limits_0^T c(\omega, t)\,\mathrm{d}t)^n}{n!}\right] = \frac{s^n}{n!}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\ldots\int\limits_0^T \mathbf{M}[c(\omega, t_1)\cdot c(\omega, t_2)\ldots c(\omega, t_n)]\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n$$

(3)-ból és (5)-ből kapjuk

$$\mathbf{M}\,[\exp(s\int\limits_0^T c(\omega, t)\,\mathrm{d}t)] = 1 + s\int\limits_0^T \mathbf{M}[c(\omega, t)]\,\,\mathrm{d}t +$$

$$+\frac{s^2}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \mathbf{M}[c(\omega, t_1)\cdot c(\omega, t_2)]\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 + \ldots$$

$$+\frac{s^n}{n!}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\ldots\int\limits_0^T \mathbf{M}\,[c(\omega, t_1)\,c(\omega, t_2)\ldots c(\omega, t_n)]\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n + \ldots$$

Ha most ezt (2)-be behelyettesítjük, azt kapjuk, hogy

$$(6)\begin{cases} K_0\Big[(1-s)\int\limits_0^T \mathbf{M}[c(\omega, t)]\,\mathrm{d}t + \dfrac{(1-s)\,s}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \mathbf{M}[c(\omega, t_1)\ c(\omega, t_2]\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 + \ldots + \\ \quad + \dfrac{(1-s)\,s^{n-1}}{n!}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\ldots\int\limits_0^T \mathbf{M}[c(\omega, t_1)\,c(\omega, t_2)\ldots c(\omega, t_n)]\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2\ldots\mathrm{d}t_n + \ldots\Big], & \text{ha } 0 < s \leq 1 \\ K_0\int\limits_0^T c(\omega, t)\,\mathrm{d}t, & \text{, ha } s = 0 \end{cases}$$

(2) helyett most egy meglehetősen komplikált formulát kaptunk, azonban az $\mathbf{M}\,[\exp(s\int\limits_0^T c(\omega, t)\,\mathrm{d}t)]$ helyett ebben az esetben elegendő ismerni vagy kiszámítani az $\mathbf{M}[c(\omega, t_1)\,c(\omega, t_2)\ldots c(\omega, t_n)]$ várható értéket.

Közelítő számítást végezhetünk a képlet segítségével $s_{\max}$ $(0 < s \leq 1)$ meghatározására. Válasszunk egy nagy N számot (amelyet a kívánt pontossághoz határoztunk meg), és vizsgáljuk (6) első N tagját. Az így kapott polinom maximumhelyével, amelyet ismert numerikus módszerekkel számolhatunk, approximálhatjuk $[O, T]$-ben $s_{\max}$-t.

c $(\omega$, t) Gauss-folyamat

Az itt következő részben azt az esetet tárgyaljuk, amikor a $c(\omega, t)$ Gauss-folyamat, melynek várható értéke $m(t) = \mathbf{M}[c(\omega, t)]$ és kovariancia-függvénye $B(u, v) = \mathbf{M}[c(\omega, u)\,c(\omega, v) - m(u)\,m(v)]$.

Hogy $c(\omega, t)$ milyen folyamatnak tekinthető, azt pontos statisztikai vizsgálattal lehetne megállapítani. Egy hozzávetőleges vizsgálat nem mond ellent ennek a feltevésnek. Egyrészt ezért tesszük fel, másrészt pedig azért, mert mint a továbbiakból látható lesz, lényegesen egyszerűbben lehet számolni Gauss-folyamat esetén. (6) típusú végtelen sor helyett zárt kifejezés lesz a maximálandó függvény, azonkívül pedig Gauss-folyamat esetén a (4) típusú mennyiségek helyett elegendő ismerni az $m(t)$ és $B(u, v)$ paramétereket.

Gauss-folyamatnak nevezünk egy $c(t, \omega)$ sztochasztikus folyamatot, ha tetszőleges n természetes egész szám és $[O\,T]$-beli $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ szám n-es esetén a $[c(\omega, t_1), c(\omega, t_2), \ldots, c(\omega, t_n)]$ valószínűségi változó vektor együttes eloszlás függvényének karakterisztikus függvénye [5] a következő alakú:

$$\varphi_{t_1 t_2, \ldots, t_n}(y_1, y_2, \ldots y_n) = \exp\left\{i\left[\sum_{j=1}^{n} m(t_j)\, y_j\right] - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} B(t_l, t_k)\, y_l\, y_k\right\} \tag{7}$$

ahol $m(t)$ egy tetszőleges függvény (a folyamat várható értéke) és $B(u, v)$ pozitív definit függvény (a folyamat kovariancia-függvénye).

A valószínűségszámításból ismert [5], hogy (7) alatti karakterisztikus függvényhez tartozó valószínűség-sűrűségfüggvény a következő:

$$g(x_1 x_2 \ldots x_n) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{lk}(x_l - m_l)(x_k - m_k)\right] \tag{8}$$

ahol $A = |\, a_{lk}\, |$ mátrix a $B = |\, B(x_l, x_k)\, |$ kovarianciamátrix inverze.

A továbbiakban használni fogjuk a következő tételt, amelyet, mivel nem tudjuk idézni, vázlatosan itt bebizonyítunk.

Tétel: Ha $c(\omega, t)$ egy Gauss-folyamat a $[O\,T]$-ben $m(t) = \mathbf{M}[c(\omega, t)]$ várható értékkel és $B(u, v) = \mathbf{M}[c(\omega, u)\, c(\omega, v)] - m(u)\, m(v)]$ kovarianciafüggvénynyel, akkor az $\int_0^T c(\omega, t)\, dt$, normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke $m_T = \int_0^T m(t) dt$ és szórásnégyzete $\sigma_T^2 = \int_0^T\int_0^T B(u, v) du\, dv$.

Bizonyítás: Az $\int_0^T c(\omega, t) dt$ integrál létezését az 5. pontban foglalt feltétel biztosítja (a $c(\omega, t)$ folyamat egy valószínűséggel folytonos).

Először megmutatjuk, hogy az $\int_0^T c(\omega, t) dt$ normális eloszlású valószínűségi változó.

Közelítsük az integrált a következő téglányösszeggel (elegendő a felső összeg, hiszen tudjuk, hogy az integrál létezik):

$$\int_0^T c(\omega, t)\, dt = \lim_{n \to \infty} S_n(\omega)\,.$$

ahol

$$S_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} (t_{j+1} - t_j)\, c(\omega, t_{j+1})\,.$$

A $t_1, t_2, \ldots t_j, \ldots t_n$ pontok ekvidisztans pontok $[O\,T]$-ben, $t_1 = 0$, $t_n = T$. Természetesen mivel $c(\omega, t)$ Gauss-folyamat, $c(\omega, t_{j+1})$ normális eloszlású valószínűségi változó ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$).

A valószínűségszámításból tudjuk, hogy normális eloszlások konstansszorosa is normális eloszlás, az alábbiakban pedig röviden vázoljuk annak bizonyítását, hogy együttesen normális eloszlású valószínűségi változók összege is normális eloszlású, amellyel beláttuk, hogy normális eloszlású valószínűségi változók lineáris kombinációja is normális eloszlású.

Lemma: Együttesen normális eloszlású valószínűségi változók összege is normális eloszlású.

A lemma bizonyítása: Tudjuk, hogy független normális eloszlású valószínűségi változók összege normális eloszlású. ([5] 184. old.) Ezenkívül tudjuk ([5] 178. old.), hogy ha $c(\omega\, t_1)$, $c(\omega, t_2) \ldots c(\omega, t_n)$ tetszőleges normális eloszlású valószínűségi változók, akkor megadható olyan $D = | d_{ij} |$ ortogonális mátrix, hogy a

$$c'(\omega, t_k) = \sum_{j=1}^{n} d_{jk}[c(\omega, t_j) - m(t_j)] \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

és a $c'(\omega, t_1)$ $c'(\omega, t_2) \ldots c'(\omega, t_n)$-ek független normális eloszlású valószínűségi változók.

A $D = | d_{j,k} |$ mátrix ortogonalitásából következik, hogy

$$c(\omega, t_j) = \sum_{k=1}^{n} d_{jk}\, c'(\omega, t_k) + m(t_j) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Innen pedig következik az állítás, hiszen

$$\sum_{j=1}^{n} c(\omega, t_j) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{d}_{jk}\, c'(\omega, t_k) + m(t_j)\Big),$$

és a jobb oldalon független, normális eloszlású valószínűségi változók összege áll.

Ezzel a lemmát bebizonyítottuk.

A fentiek miatt $S_n(\omega)$ normális eloszlású valószínűségi változó tetszőleges n-re.

Nem kívánjuk itt részletezni, de könnyen bebizonyítható, hogy normális eloszlású valószinűségi változók határértéke is — ha létezik — normális eloszlású.

Így, mivel a felosztás minden határon túli finomításával nyert téglányösszegek, az $S_n(\omega)$-k, mind normális eloszlásúak, a

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = \int_0^T c(\omega, t)\, \mathrm{d}t \quad \text{is az.}$$

Ezzel állításunk első részét bebizonyítottuk.

Nem kívánjuk részletesen bizonyítani, mivel könnyen belátható, hogy

$$m_T = \int_0^T m(t)\mathrm{d}t\,.$$

Ezek után már csak azt kell megmutatnunk, hogy

$$\sigma_T^2 = \int_0^T \int_0^T B(u, v)\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Mivel

$$\sigma_T^2 = \mathbf{D}^2[\int_0^T c(\omega, t)\mathrm{d}t] = \mathbf{M}[\int_0^T c(\omega, t)\mathrm{d}t]^2 - \mathbf{M}^2[\int_0^T c(\omega, t)\mathrm{d}t],$$

ahol

$$\mathbf{M}[\int_0^T c(\omega, t)\mathrm{d}t] = m_T$$

a

$$\sigma_T^2 = \int_0^T \int_0^T \mathbf{M}[c(\omega, u)\, c(\omega, v)]\mathrm{d}u\, \mathrm{d}v - m_T^2 .$$

(Itt az általános esetnél már ismertetett integrálfelcserélést hajtottunk végre.)

Behelyettesítve az $\mathbf{M}[c(\omega, u)\, c(\omega, v)]$ helyére az $\int_0^T \int_0^T (B(u, v) + m(u)\, m(v))\, du\, dv$-t, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_T^2 = \int_0^T \int_0^T B(u, v) + m(u)\, m(v)\, du\, dv - m_T^2$$

ahonnan, mivel

$$\int_0^T \int_0^T m(u)\, m(v)\, du\, dv = \int_0^T m(u)du \int_0^T m(v)dv = m_T m_T = m_T^2,$$

az állítás már következik.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A továbbiakban az általános esethez hasonlóan kiszámítjuk

$\mathbf{M}[\exp(s \int_0^T c(\omega, t)\, \mathrm{d}t)]$-t, amelyet most zárt képletben kapunk.

A továbbiakban jelöljük ξ-vel a $\int_0^T c(\omega, t)\, \mathrm{d}t$ valószínűségi változót.

A karakterisztikus függvény segítségével [5] könnyen kiszámíthatjuk $\mathbf{M}[e^{s\xi}]$-t.

$$\mathbf{M}[e^{s\xi}] = \mathbf{M}[e^{-i(si)\xi}] = \varphi_\xi \quad (-is) .$$

A ξ mint tudj uk, normális eloszlású valószínűségi változó, így

$$\varphi_\xi(-is) = \exp\left[i\, m_T(-is) - \frac{\sigma_T^2(-is)^2}{2}\right]$$

azaz

$$\mathbf{M}(e^{s\xi}) = \varphi_\xi(-is) = \exp\left(m_T s + \frac{\sigma_T^2 s^2}{2}\right) .$$

A kapott kifejezést (1)-be behelyettesítve kapjuk, hogy maximalizálandó az

$$(9) \quad F(s) = \begin{cases} K_0\left(\dfrac{1}{s} - 1\right)\left[\exp\left(m_T s + \dfrac{\delta_T^2 s^2}{2}\right) - 1\right], & \text{ha } 0 < s \leq 1 \\ K_0 m_T, & \text{ha } s = 0 \end{cases}$$

Az F(s) függvény vizsgálata

A továbbiakban azt fogjuk megvizsgálni, hogy az $F(s)$ függvény szélső értékei hogyan helyezkednek el. Meg fogjuk mutatni, hogy ha az m_T várható értékre és a σ_T szórásra a (10) és (11) feltételt kötjük ki, akkor az $F(s)$ függvény a $0 < s \leq 1$ intervallumban csupán egy helyen veszi fel a maximumát, így az optimalizálási feladatunknak egyértelmű megoldása van.

$$m_T \geq \sigma_T \sqrt{3 - \sqrt{6}} \tag{10}$$

$$m_T^2 > 2\,m_T - \sigma_T^2 \quad m_T > 0; \; \sigma_T \geq 0\,. \tag{11}$$

A továbbiakban foglalkozzunk az

$$f(s) = \left(\frac{1}{s} - 1\right)\left[\exp\left(m_T s + \frac{\sigma_T^2 s^2}{2}\right) - 1\right] \text{ függvénnyel} \tag{12}$$

ha $0 < s \leq 1$, hiszen ennek maximumhelyei megegyeznek a $F(s)$ függvényével.

Képezzük az $f'(s)$ deriváltat:

$$f'(s) = \frac{1}{s^2} + \exp\left[m_T s + \frac{\sigma_T^2 s}{2}\right] \frac{-1 + s(m_T + \sigma_T^2 s) - s^2(m_T + \sigma_T^2 s)}{s^2}\,. \tag{13}$$

Az $f(s)$ függvénynek szélső értéke nyilván csak ott lehet, ahol az $f'(s) = 0$, az $f'(s)$ pedig akkor és csak akkor egyenlő 0-val, ha

$$\exp\left[-m_T s - \frac{\sigma_T^2 s^2}{2}\right] = \sigma_T^2 s^3 + (m_T - \sigma_T^2)\, s^2 - m_T s + 1\,. \tag{14}$$

A továbbiakban a (14) alatti egyenlet gyökeit vizsgáljuk. Ennek során többször felhasználjuk a következő lemmát, melyet itt nem szükséges bizonyítani.

Lemma: Ha a $g(s)$ és $h(s)$ folytonosan deriválható egy intervallumban, akkor a $g(s) = h(s)$ egyenletnek legfeljebb eggyel több gyöke lehet az adott intervallumban, mint $g'(s) = h'(s)$-nek.

Készítsük el most a (14) egyenlet első négy deriváltját. Ezek rendre a következők:

$$3\,\sigma_T^2 s^2 + 2(m_T - \sigma_T^2)\, s - m_T = -(m_T + \sigma_T^2 s) \exp\left(-m_T s - \frac{\sigma_T^2 s^2}{2}\right) \tag{15}$$

$$6\,\sigma_T^2 s + 2(m_T - \sigma_T^2) = \left[(m_T + \sigma_T^2 s)^2 - \sigma_T^2\right] \exp\left(-m_T s - \frac{\sigma_T^2 s^2}{2}\right) \tag{16}$$

$$\sigma_T^2 = -(m_T + \sigma_T^2 s)\left[(m_T + \sigma_T^2 s) - 3\,\sigma_T^2\right] \exp\left(-m_T s - \frac{\sigma_T^2 s^2}{2}\right) \tag{17}$$

$$0 = \left[(m_T + \sigma_T^2 s)^4 - 6\,\sigma_T^2 (m_T + \sigma_T^2 s)^2 + 3\,\sigma_T^4\right] \exp\left(-m_T s - \frac{\sigma_T^2 s^2}{2}\right). \tag{18}$$

Vizsgáljuk most tehát (14) gyökeit.

(18)-nak pontosan négy gyöke van hiszen (14) jobb oldala akkor és csak akkor lehet 0-val egyenlő, ha

$$(19)\qquad (m_T + \sigma_T^2 s)^4 - 6\,\sigma_T^2(m_T + \sigma_T^2 s)^2 + 3\,\sigma = 0$$

Mivel ez s-ben negyedfokú egyenlet, pontosan négy gyöke van. Keressük meg ezeket.
(19)-ből adódik, hogy

$$(m_T + \sigma_T s)^2 = \sigma_T^2(3 \pm \sqrt{6})$$

ahonnan

$$m_T + \sigma_T^2 s = \pm\, \sigma_T \sqrt{3 \pm \sqrt{6}})$$

amelyből s-et kifejezve megkapjuk (18) gyökeit:

$$s_1 = -\frac{m_T - \sigma_T\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sigma_T^2}, \quad s_2 = -\frac{m_T - \sigma_T\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sigma_T^2},$$

$$s_3 = -\frac{m_T + \sigma_T\sqrt{3-\sqrt{6}}}{\sigma_T^2}, \quad s_4 = -\frac{m_T + \sigma_T\sqrt{3+\sqrt{6}}}{\sigma_T^2}.$$

Most megmutatjuk, hogy (15)-nek legfeljebb négy olyan gyöke van, amely nagyobb mint s_2.
Vizsgáljuk (17)-et.
(17)-nek s_3 és s_4 között legfeljebb egy gyöke lehet, (17) jobb oldala ugyanis s_4-től jobbra negatív értékeken keresztül tart 0-hoz, a ∞-ben, s_4-ben tehát csak lokális minimuma lehet. (17)-nek s_3-nál lokális maximuma van. s_3 és s_4 között (17) jobb oldalának van egy monoton pozitív szakasza. (17)-nek ezen a szakaszon lehet csak gyöke, hiszen (17) bal oldala egy pozitív konstans, és egy monoton függvény csak egyetlen helyen lehet egyenlő egy konstanssal.
A fenti lemma alapján így s_3-tól jobbra (16)-nak legfeljebb két gyöke lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy (16)-nak legalább három gyöke van s_3-tól jobbra. Ekkor az elemi analízisben jól ismert Cauchy-féle középértéktétel szerint (17) legalább két közbülső helyen lenne 0, ami lehetetlen, hiszen (17)-nek s_3-nál nagyobb gyöke csak s_4.
Az egész gondolatmenetet megismételve (15) és (16)-ra kimondhatjuk, hogy (15)-nek s_3-tól jobbra legfeljebb három gyöke van. Hasonló meggondolások alapján (14)-nek s_3-tól jobbra legfeljebb négy gyöke lehet.
A (10)-es feltevés miatt $s_3 \leq 0$, így fenti okoskodásunkkal tulajdonképpen azt mutattuk meg, hogy (14)-nek legfeljebb négy nullánál nagyobb gyöke lehet.
A továbbiakban megmutatjuk, hogy (14)-nek a [0, 1] intervallum belsejében csupán egyetlen gyöke van.
Tegyük fel, hogy (14)-nek két nullánál nagyobb gyöke van és ezek mindegyike egyszeres gyök.

A (11)-es feltevésből kapjuk, hogy mivel $m_T^2 > 2\,m_T - \sigma_T^2$

$$2(m_T - \sigma_T^2) < m_T^2 - \sigma_T^2\,.$$

Ez éppen a (16) egyenlet két oldala az $s = 0$ helyen. Ez azt jelenti, hogy az $s = 0$ helytől jobbra a (14)-es egyenlet jobb oldalán álló függvény a bal oldalán álló felett indul. Ezért a két gyök után, amely (14) jobb és bal oldalán álló függvények két átmetszésénél van, ismét (14) jobb oldala van felül. Mivel azonban (14) jobb oldala $-\infty$-hez tart, ha $s \to +\infty$-hez, a bal oldala pedig nullához, kell, hogy még egyszer messék egymást. Így tehát (14)-nek a nullát is beleértve 4 gyöke van. Közöttük a Cauchy-féle középértéktétel szerint a derivált három közbülső helyen nulla. Fent megjegyeztük, hogy (15)-nek az $s = 0$ helyen is gyöke van. Indirekt feltételünkből kiindulva azt kapjuk, hogy (15)-nek négy nem negatív gyöke van, ez pedig mint fent láttuk, lehetetlen.

Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor indirekt feltételként azt tesszük fel, hogy a (14)-es egyenletnek két nullánál nagyobb gyöke van és az egyik kétszeres multiplicitású. Ekkor az előző esethez hasonló meggondolások alapján két közbülső helyen nulla a derivált is, ezenkívül az $s = 0$-ban és a kétszeres gyöknél is nulla, tehát (15)-nek ebben az esetben is legalább négy gyöke van, ami lehetetlen.

Így tehát bebizonyítottuk, hogy a (14)-es egyenletnek a (10) és (11) feltételek mellett legfeljebb egy $0 < s_0 \leq 1$ gyöke lehet.

(9)-nek így az idézett feltételek mellett valóban egyetlen szélső értéke van $0 < s \leq 1$-ben, és ez maximum, mivel az $s = 0$-ban a függvény növekvő.

A (10) és (11) feltevés problémánk szempontjából nem jelent túl erős megkötést, (11) már $m_T > 2$ és $\sigma_T \geq 0$ esetén is teljesül, és ezt minden gyakorlatilag szóba jövő esetben feltehetjük. (10) pedig azt követeli meg, hogy az $m(t)$ várható érték viszonylag nagy legyen $\sigma(t)$-hez képest. Ez a feltevés szintén kézenfekvő a gyakorlatban előforduló feladatoknál, hiszen ha nem teljesülne minden t időpillanatban, akkor a $c\,(\omega, t)$ folyamat nagy valószínűséggel vehetne fel negatív értékeket is. Márpedig a tőkehatékonyság a valóságban csak igen kis valószínűséggel lehet negatív.

Ha a most ismertetett modellt összevetjük a kiindulási modellel [2], akkor láthatjuk, hogy ott a $c\,(\omega, t)$ Gauss-folyamat helyett egyszerűen c-azonosan konstans függvény szerepelt. Ebben az esetben $m(t) = c$ és $B\,(u, v) = 0$, így az $m_T = \int_0^T m(t) = cT$, $\sigma_T = 0$.

Összefoglalás

Dolgozatunkban egy Harrod—Domar típusú sztochasztikus növekedési modellben meghatároztuk az optimális felhalmozási hányad várható értékét.

Két esetet vizsgáltunk. Meghatároztuk a felhalmozási hányad várható értékét, egyrészt bizonyos általános feltételek mellett, másrészt abban a speciális esetben, amikor a tőkehatékonyság Gauss-folyamat.

Eredményül mindkét esetben az s felhalmozási hányad bizonyos függvényét kaptuk (6), (9), amelyekben ismert, illetve számítható paraméterekként szerepelnek a tőkehatékonyság sztochasztikus folyamatának olyan jellemzői, mint a folyamat n-edik momentuma, illetve a Gauss-folyamat esetében a folyamat integráljának m_T várható értéke és σ_T^2 szórásnégyzete.

Az optimális felhalmozási hányad várható értékét mindkét esetben e függvények maximumhelyei adják. Konkrét adatokat behelyettesítve e maximumhelyek meghatározása közismert numerikus feladat.

A dolgozatunkkal tehát egy *konkrét számítási eljárást* adtunk meg a modellből számolható optimális felhalmozási hányad várható értékére. Megjegyezzük azonban, hogy modellünknek inkább elméleti jelentősége lehet, hiszen közismert, hogy a kiindulási modell sem alkalmas gyakorlati számításokra elvont egyszerűsége és egyéb hibái miatt. Ezekhez a sztochasztikus modell esetében még statisztikai nehézségek is adódnak, hiszen ilyen jellegű statisztikai adatok legfeljebb csak becsülhetők.

A szerző dolgozatát inkább kísérletnek tekinti, amely elvezethet a gyakorlati tervezés számára is hasznosítható és a véletlent is figyelembe vevő aggregált modell kidolgozásához.

(Beérkezett: 1968. XI. 14.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. Sztrumilin, Sz.: Az optimális arányok problémája. Statisztikai Szemle. 1962. 12. sz. 1191–1205. old.
2. Virág, I.: A felhalmozási hányad és az időhorizont. Statisztikai Szemle, 1966. 11. sz. 1120–1128. old.
3. Kenndert, Th. és Klock, J. J.: A note on Strumilin's model of optimal saving. (Csak kézirat.)
4. Гихман, И. И., Скороход, А. В.: Введение в теорию случайных процессов Москва, 1965. Издательство «Наука» Физико-математической литературы. 656 п.
5. Rényi, A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó, 510 p.

A STOCHASTIC GROWTH MODEL

The paper constitutes an attempt at working out a highly aggregate model which takes also into consideration the random fluctuations in the economic processes.

The starting point is a Harrod—Domar type growth model which serves to determine the optimum rate of accumulation while total consumption within a finite period is maximal. The output-capital coefficient which is constant in the case of a deterministic model, is a stochastic process here, and so are, consequently, all other variables — capital stock $K(t)$, national income $Y(t)$, investment $J(t)$ and consumption $C(t)$.

With the aid of the model it is possible to determine the optimum rate of accumulation with which the expected value of consumption within the finite period will assume a maximum value.

In one part of the paper the stochastic process of capital efficiency $c(\omega, t)$ is a general stochastic process, in the other part a Gauss process. In both cases the expected value of the optimum rate of accumulation is given in the form of a numerically computable formula.

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА

Данная статья представляет собой попытку разработки сильно агрегированной модели, учитывающей в частности случайные колебания экономических процессов.

Исходной служит модель роста типа Гаррода—Домара, при помощи которой можно определить оптимальную долю накопления, когда общее потребление в течение определенного конечного периода является максимальным. В представленной модели в случае её определенности постоянный фактор эффективности капитала является стохастическим процессом, вследствие чего и все остальные переменные: объем капитала — $K(t)$, национальный доход —$Y(t)$, капитальные вложения — $J(t)$ и потребление — $C(t)$ также являются стохастическими процессами.

При помощи модели можно определить оптимальную долю накопления, при которой ожидаемое значение общего потребления конечного периода будет максимальным.

В одной части статьи стохастический процесс эффективности капитала $c(\omega, t)$ является общим стохастическим процессом, а в другой её части — процессом Гаусса.

Для обоих случаев ожидаемое значение оптимальной доли накопления дается в форме нумерически исчисляемой формулы.

Bod Péter

A népgazdaság hosszútávú (15—20 éves) tervezésének egy lehetséges matematikai modelljéről

Az alábbi tanulmányban bemutatunk egy modellrendszert, amelynek jelentős szerepe lehet a távlati népgazdasági tervezés központi irányító, szervező és koordináló funkciói megvalósításában. Az Országos Tervhivatalban folyamatban van a modell konkretizálása az 1970—1985-ös hosszútávú tervezés általános módszertani követelményeinek kidolgozásával párhuzamosan.

I.

A hosszútávú népgazdasági tervezés az egész világon kísérleti állapotban van. Nem beszélhetünk kialakult és kipróbált módszertanról; nem állanak rendelkezésre sem hazai, sem külföldi összefüggéseikben értékelhető tapasztalatok. Méginkább kezdeti stádiumban van a matematikai modellek felhasználása a hosszútávú tervezés céljaira. Sehol sem alakítottak még ki „bevált" modelleket erre a célra. Kísérletezni kell tehát a hazai gyakorlatban is.

Ebben a tanulmányban is egy kísérleti modellt ismertetünk. Hogy az olvasó számára világosabb legyen, hogy miért éppen ilyen szerkezetű modellt javasolunk, elöljáróban megkíséreljük rögzíteni azokat a legfontosabb közgazdasági követelményeket és gondolatokat, amelyek a modell alapkoncepcióját indokolják. Ezek a meggondolások indokolják a modellrendszer fő jellemzőit; ebből derül ki, hogy „mit tud", és hogyan illeszkedhet be a hosszútávú tervező munka egész rendszerébe.

A magunk részéről a népgazdaság hosszútávú tervét, mint az *állami gazdaságpolitikai stratégia kialakításának az eszközét* fogjuk fel. Ebből először is az következik, hogy a hosszútávú terv nem merülhet ki különböző prognózisokban arra vonatkozóan, hogy a népgazdaság milyen fejlődési vonalai képzelhetők el, hanem tartalmaznia kell a központi hatalom megfelelő elhatározásainak az elemeit is. Olyan elhatározásokét, amelyek a kívánatosnak tartott fejlődési vonal megvalósulásának fő feltételeit teremtik meg.

A népgazdaság távlati fejlődése ugyanakkor egyáltalában nem kizárólag a központi hatalom elhatározásainak a függvénye. A gazdasági fejlődés belső és külső körülményeinek van egy bizonyos *önmozgása,* amely nem függ, vagy alig függ csak a gazdaságpolitikai elhatározásoktól. Ennek az önmozgásnak az előrelátása csak bizonytalanul lehetséges. Ezért a távlati tervezésben meg kell találni a lehetőséget arra, hogy az egyszer kialakított fejlesztési stratégia rugalmasan módosuljon: megváltozzék és alkalmazkodjék a fejlődés lehetőségeinek és feltételeinek alakulásáról rendelkezésre álló újabb információkhoz.

Minden eddigi tervezési tapasztalat azt mutatta, hogy a társadalmi újratermelés egyes konkrét szféráiban és területein a szükséges és lehetséges fejlesztés részletes felmérése és elemzése, a különböző szóbajöhető fejlesztési alternatívák feltárása és összehasonlítása nem valósulhat meg eredményesen a népgazdaság központi tervező szerveinél. Ehhez ezen a szinten nem állnak és nem is állhatnak megfelelő információk rendelkezésre. Ezért is, meg népgazdaságunk konkrét termelési viszonyai miatt is (amelyeket a gazdaságirányítási rendszer reformja során alakítottunk és alakítunk ki) szükségszerű és helyes, ha a távlati népgazdasági tervek az ún. *ágazati fejlesztési koncepciókra* épülnek. Az ágazati koncepciók azonban szükségképpen egymástól bizonyos fokig függetlenül, párhuzamosan készülnek. Ezért a távlati tervezés alapvető feladata a központi tervező szervnél úgy jelentkezik, hogy az ágazati koncepciókból egy, az egész népgazdaság szempontjából *konzisztens és hatékony fejlesztési stratégiát* kell kialakítani.

Törekvésünk az, hogy a távlati tervezésnek ebben a központi funkciójában *felhasználható matematikai modellt* alakítsunk ki. A hangsúly tehát a koordináláson, a népgazdasági egyensúly megtalálásán és a különböző lehetséges fejlesztési vonalak hatékonyság szempontjából való összevetésén van.

Az elmondottakból következik, hogy a körvonalazott rendeltetésű matematikai modellnek (akármilyen is legyen a konkrét szerkezete és tartalma) rendelkeznie kell a következő fő sajátosságokkal:

1. Nagy szabadságfokú rendszert kell reprezentálnia, kifejezve azt az objektív körülményt, hogy hosszú időszakra tekintve a társadalomnak sokirányú lehetőségei vannak saját gazdasági céljai kialakításában.

2. Tartalmaznia kell a bővített társadalmi újratermelés legfontosabb belső összefüggéseit explicit módon, mert ezek az összefüggések képezik mindenfajta gazdaságpolitikai elhatározás legfontosabb belső korlátját.

3. Tartalmaznia kell valamilyen formában a saját elhatározásainktól nem függő vagy alig függő körülmények figyelembevételének a lehetőségét, mert ezek a körülmények képezik elhatározásaink külső korlátait.

4. Lehetővé kell tennie a kiinduló feltevések sokoldalú variálását. Erre a jövőbelátás bizonytalansága és az újabb információkhoz való rugalmas alkalmazkodás miatt van szükség.

5. A hosszabb (15—20 éves) tervidőszak egyes részeire külön is útmutatást kell adnia; lehetővé téve az egyes ágazatok időben eltérő ütemű fejlesztései összhangjának vizsgálatát, illetve a fejlesztés időben való variálását.

6. Kapcsolatban kell lennie az ágazati tervezéssel, fel kel vennie az ágazati koncepciókból eredő információkat, és korrekciós szempontokat kell adnia az ágazati fejlesztés tervezéséhez.

Természetes, hogy az említett speciális követelmények mellett teljesülniük kell mindazoknak az általános modellalkotási követelményeknek, amelyek nélkül egyetlen matematikai-közgazdasági modell sem lehet működőképes. Nevezetesen a modellben csak rendelkezésre álló, vagy megszerezhető adatok szerepelhetnek; mind matematikai mind számítástechnikai szempontból kezelhetőnek kell lennie és eredményeit a szokványos közgazdasági kategóriák nyelvén is értelmezni kell tudni.

II.

A fent vázolt célkitűzések elérésére többszakaszos, ágazati szinten aggregált, folytonos lineáris változókkal működő programozási modellt javasolunk. Az ilyen modellekről mindenkinek a lineáris programozáson alapuló optimalizálás jut eszébe. Az esetleges félreértések elkerülése végett nem felesleges talán leszögezni, hogy a modell formája ellenére itt nem arról van szó, hogy segítségével a népgazdaság távlati fejlesztésének valamiféle „optimális" változatát gondolnánk kidolgozni; és arról sincs szó, hogy az újratermelés folyamatait szigorúan lineáris folyamatokként írjuk le.

A modell gerince a *feltételrendszer*. Ez matematikailag egy többé-kevésbé bonyolult és viszonylag nagyméretű egyenletrendszer, amelynek nem negatív megoldásai felelnek meg konzisztens távlati stratégiáknak. Mivel az egyenletrendszer — nem véletlenül — nagy szabadságfokkal rendelkezik, célszerű a különböző szempontok alapján extremális tulajdonságú megoldásait vizsgálni. Ezt a célt realizálja technikailag az optimalizálás, vagyis azoknak a megoldásoknak a megkeresése, amelyek különböző tartalmú célfüggvények szerint a legkedvezőbbek.

A modell tehát kísérletező eszköz, amellyel különböző ágazati koncepciók, a külső körülmények alakulásával kapcsolatos különböző elképzelések és eltérő gazdaságpolitikai célkitűzések alapján, viszonylag rövid idő alatt, konzisztens népgazdaságfejlesztési koncepciók „gyárthatók", illetve kimutatható bizonyos feltételezések egymást kizáró, egymásnak ellentmondó volta.

A modell időben változó koefficiensekkel dolgozik, és így szigorú értelemben nem lineáris; hanem *lineárisan közelít nem lineáris kapcsolatokat*. A modell változói ágazati tevékenységek aggregátumai, amelyek mögött konkrét ágazati koncepciók húzódnak meg. A modell ráfordítási fajlagosait ezeknek a koncepcióknak a konkrét adottságai határozzák meg.

Az ágazati tervezés tehát elsősorban az aggregált ágazati tevékenységet reprezentáló „technológiai együtthatókat" adja a modellnek. Válaszként aggregált tevékenységi szinteket kap a modelltől vissza. Nyilvánvaló, hogy ezek általában eltérnek majd azoktól a tevékenységi szintektől, amelyek alapján az ágazati tervezés a maga koefficienseit meghatározta. Az ágazati tervezés és a központi koordinálás között tehát egy iterációs folyamatban megvalósuló „egyezkedésnek" kell lefutnia. Ez az „egyezkedés" a koordináló modell szintjén főként a ráfordítási együtthatók korrekciójában ölt testet.

Az ágazati koncepciók készítésénél különböző módszerek képzelhetők el. Nyilvánvalóan kívánatos lenne, hogy minél több ágazatban matematikai modellek révén történjék a koncepciók számszerűsítése és kialakítása. Ez azonban nem feltétele a koordináló modell működésének. Ehhez az is elegendő, ha biztosítani lehet az ágazatokban folyó tervezés fogalmi és számbavételi rendszerének az egységét és logikai zártságát. Ez azonban mindenféle értelmes tervkoordinálás nélkülözhetetlen feltétele, és így biztosítása a tervkoordinálás matematikai modellezésétől függetlenül is szükséges.

III.

A népgazdaság termelő szféráját n homogén aggregátumot kibocsátó ágazatra bontva képzeljük el és N egyenlő hosszúságú periódusból álló időszakra tervezünk. A tervidőszak kezdetén a népgazdaság helyzetét a rendelkezésre álló készletek, az ágazatok bruttó termelőkapacitásainak nagysága és az első tervperiódusra rendelkezésre álló — a modellben újra nem termelhető — (ún. külső) erőforrások mennyisége jellemzi. A modellben m külső erőforrás szerepel. Külső erőforrásnak tekintjük pl. a munkaerőt (esetleg több csoportra bontva), a megművelhető földterületet, a vízkészleteket stb. De ide soroljuk az export- és importlehetőségek összevont korlátait is (pl. szocialista országokból beszerezhető összes nyersanyag rubelben stb.). A külső erőforrások nagyságát minden tervperiódusra külső információk alapján, a modellen kívül kell megállapítani; illetve bizonyos kiinduló koncepciók szerint megtervezni. Nyilvánvaló, hogy a külső erőforrások nagysága nem becsülhető egyértelműen és nem független a politikai és gazdaságpolitikai alapelképzelésektől sem. A népgazdaság számára rendelkezésre álló munkaerő-alapot nemcsak a demográfia nagyjából tőlünk független alakulása befolyásolja, hanem nem utolsósorban pl. a munkaidő csökkentése terén elképzelt intézkedéseink, foglalkoztatáspolitikai elgondolásaink stb. Hasonlóan a tőkés export várható lehetőségei sem csak a világpiac egyébként sem könnyen becsülhető várható alakulásától függnek, hanem attól is, hogy magunk milyen relációs politikát akarunk folytatni, hogyan értékeljük a nemzetközi helyzet várható alakulását stb. A feltételrendszer külső feltételeket tartalmazó része tehát számos *„politikai" és „gazdaságpolitikai paramétert"* tartalmaz. Fő szerepe, hogy a távlati tervnek az újratermelés szűkebben értelmezett szféráján kívüli feltételekkel való összhangját biztosítsa.

A külső feltételektől elkülönítve szerepeltetünk a modellben két fizetési mérleget minden periódusra. (Nincs akadálya több relációs fizetési mérlegnek sem). Ezeknek az a szerepük, hogy a külkereskedelmi egyensúly nagy vonalakban való figyelembevételét szolgálják. A fizetési mérlegek elkülönített kezelését az indokolja, hogy ezekhez előjelkötetlen maradékváltozókat rendelünk. Vagyis a modell eleve nem zárja ki az aktív vagy passzív hitelállomány növekedését, és ezzel újabb jelentős „politikai" paraméter áll rendelkezésre.

A termelő szféra technológiai szerkezetét periódusonként két matrix jellemzi: $\mathbf{A}^{(t)}$ és $\mathbf{B}^{(t)}$

$a_{ij}^{(t)}$	a j-edik ágazat egységnyi termeléséhez szükséges ráfordítás az i-edik ágazat kibocsátásából a t-edik periódusban.
$b_{ij}^{(t)}$	a j-edik ágazat egységnyi új termelőkapacitásának létesítéséhez szükséges egyszeri ráfordítás az i-edik ágazat kibocsátásából a t-edik periódusban.

A modellben szereplő minden tevékenység ezenkívül kapcsolódhat a külső feltételekhez; a külső feltételekre vonatkozó együtthatókat a $\mathbf{C}^{(t)}$ matrix tartalmazza:

A terv minden periódusára definiáljuk a következő nem negatív változókat:
ágazati bruttó termelés a t-edik periódusban: $\mathbf{x}_t$
ágazati kapacitásnövelés a t-edik periódusban: $\Delta\mathbf{x}_t$
ágazati export tőkés piacra a t-edik periódusban: $\mathbf{e}_t^k$
ágazati export szocialista piacra a t-edik periódusban: $\mathbf{e}_t^s$
ágazati import tőkés piacról a t-edik periódusban: $\mathbf{i}_t^k$
ágazati import szocialista piacról a t-edik periódusban: $\mathbf{i}_t^s$
készlet a t-edik periódus végén: $\mathbf{s}_t$
a lakosság fogyasztása a t-edik periódusban: $\mathbf{y}_t$
közületi fogyasztás a t-edik periódusban: $\mathbf{z}_t$
kihasználatlan ágazati kapacitások a t-edik periódusban: $\mathbf{v}_t$
fel nem használt külső erőforrások a t-edik periódusban: $\mathbf{w}_t$
dollár felesleg (hiány) a t-edik periódusban: δ_t
rubel felesleg (hiány) a t-edik periódusban: ϱ_t
(Valamennyi vektor n elemű, kivéve $\mathbf{w}_t$-t, amely m elemű. δ_t és ϱ_t előjelkötetlen változók.)

Használjuk még a következő jelöléseket:
induló kapacitás a tervidőszak elején: $\mathbf{K}_0$
induló készletek: $\mathbf{s}_0$
külső erőforrások kapacitása a t-edik periódusban: $\mathbf{k}_t$
dollár-egyenleg a t-edik periódusban: D_t
rubel-egyenleg a t-edik periódusban: R_t
export és import árak a t-edik periódusban: $\mathbf{p}_{ek}^{(t)*}$; $\mathbf{p}_{es}^{(t)*}$; $\mathbf{p}_{ik}^{(t)*}$; $\mathbf{p}_{is}^{(t)*}$
Fenti jelölések segítségével minden tervperiódusra 4 blokkból álló feltételrendszer adódik. Ezek közül háromban zömben az adott tervperiódusra vonatkozó változók szerepelnek. Nevezetesen:
A periódus újratermelésének egyensúlyát kifejező blokk:

$$\mathbf{s}_{t-i} + \mathbf{x}_t + \mathbf{i}_t^k + \mathbf{i}_t^s = \mathbf{A}^{(t)}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}^{(t)}\Delta\,\mathbf{x}_t + \mathbf{e}_t^s + \mathbf{e}_t^k + \mathbf{y}_t + \mathbf{z}_t$$

A külső feltételek teljesülését előíró blokk:

$$\mathbf{C}^{(t)}\mathbf{X}_t + \mathbf{w}_t = \mathbf{k}_t$$

ahol:

$$\mathbf{X}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_t \\ \Delta\mathbf{x}_t \\ \mathbf{e}_t^k \\ \mathbf{e}_t^s \\ \mathbf{i}_t^k \\ \mathbf{i}_t^s \\ \mathbf{y}_t \\ \mathbf{z}_t \end{bmatrix}$$

A fizetési mérlegek:

$$\mathbf{p}_{ek}^{(t)*}\mathbf{e}_t^k - \mathbf{p}_{ik}^{(t)*}\mathbf{i}_t^k + \delta_t = D_t$$
$$\mathbf{p}_{es}^{(t)*}\mathbf{e}_t^s - \mathbf{p}_{is}^{(t)*}\mathbf{i}_t^s + \varrho_t = R_t$$

Fenti feltételeken kívül figyelembe kell venni azt, hogy minden periódusban a termelés lehetőségei korlátozottak:

$$\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t = \mathbf{K}_0 + \sum_{j=1}^{t-1}\Delta\mathbf{x}_j$$

és a feltételeknek ez a blokkja kapcsolja össze a vizsgált tervperiódusban folyó tevékenységet a megelőző periódusokban megvalósult fejlődéssel.

A modellben láthatóan periódusonként $2n + m + 2$ egyenlet alakú feltétel szerepel. Az egész tervidőszakra együtt $N(2n + m + 2)$

A változók száma periódusonként: $10n + m + 2$

A változók együttes száma: $N(10n + m + 2)$

A vázolt modell nyilvánvalóan nagy szabadságfokkal rendelkezik: hiszen periódusonként legalább $8n$ változó értéke a korlátok adta kereteken belül szabadon választható meg.

A modell változói a hagyományos közgazdasági mutatókkal tartalmilag könnyen azonosíthatók, így maga a feltételrendszer alkalmas konkrét ágazati tervjavaslatok konzisztenciájának a vizsgálatára. A modell véges időhorizontja miatt az utolsó tervperiódus speciális kiegészítő feltételt is tartalmaz. Ha ugyanis nem írjuk elő külön az utolsó tervperiódusban a kapacitások kötelező bővítését, akkor több később ismertetésre kerülő számításnál a modell ezt a tevékenységet automatikusan zérus szintre állítaná, mert e tevékenység valamiféle „hasznát" a modell nem tudná érzékelni; hiszen ez csak egy a modellben már nem szereplő periódusban jelentkeznék. A

$$\Delta \mathbf{x}_{N-1} - \Delta \mathbf{x}_n \leqq 0$$

feltétel alkalmasan biztosítja, hogy a produktív beruházások az utolsó tervperiódusban ne csökkenjenek a korábban kialakult szint alá.

IV.

Míg egyik oldalról a modell feltételrendszere az időben változó feltételek közötti egyensúly ellenőrzését képes szolgálni, másik oldalról különböző célfüggvények alkalmazásával történő optimalizálási számítások révén a távlati fejlesztési koncepciók széles skálájának a generálására alkalmas.

A tervidőszakra vonatkozó politikai és gazdaságpolitikai alapelképzelések és feltételezések rögzítése a változók bizonyos értékeinek diktálása, illetve az ún. külső erőforrások kapacitásadatainak megadása révén lehetséges. A változók egy része feletti előzetes döntés természetesen csökkenti a rendszer szabadságfokát. A rögzített értékek feloldása, illetve más értékeken való rögzítése azonban lehetővé teszi a különböző politikai és gazdaságpolitikai feltételezések hatásainak az összemérését.

A modell feltételrendszere által megengedett megoldások halmazán különböző közgazdasági tartalmú célfüggvények szélsőértékeihez tartozó extremális megoldások határozhatók meg. A célfüggvények típusai és az azonos típusú célfüggvényeken belül az időhorizont és az időtényező eltérő kezelése további széles lehetőségeket nyújt a legkülönbözőbb gazdaságpolitikai előfeltevések és célkitűzések számszerűsítéséhez és hatásaik összemérésére.

A korlát- és célfüggvénytípusok kombinálásának szinte korlátlan lehetőségei biztosítják a modell alkalmazkodóképességét a legkülönfélébb koncepciók elemzésére. Alapszámításként három különböző alapállást kifejező korlátpolitika és három különböző irányba húzó célfüggvénytípus kombinált alkalmazása látszik célravezetőnek. A korláttípusok a következők lennének:

A: a személyes és közületi fogyasztás növekedésének a színvonala periódusonként alulról korlátozott;

B: a kapacitásnövelés színvonala periódusonként alulról korlátozott;

C: mind a fogyasztásnövelés, mind a kapacitásnövelés színvonala periódusonként alulról korlátozott.

Az alábbi célfüggvénytípusok kerülnének felhasználásra:

I. a személyes és a közületi fogyasztás többletének a maximalizálása;

II. a kapacitásnövelés maximalizálása;

III. az összes produktív munkaráfordítás minimalizálása.

A három korláttípus és a három célfüggvényfajta 9 alapszámítást határoznak meg.

A vázolt modell adatbázisa az ágazati kapcsolatok mérlegén alapuló információs rendszerre támaszkodik. Mivel azonban a modell hosszú időszakra szól, ragaszkodni kell a periódusonként eltérő együtthatómatrixok speciális módszerekkel való meghatározásához. Az egész tervidőszakra azonos együtthatókkal való számolás nem lenne megnyugtató.

A modellben szükséges adatok kimunkálásához két párhuzamos utat célszerű választani. A fő módszer a koefficienseknek az ágazati fejlesztési koncepciókból való meghatározása kell hogy legyen. Ez biztosítja csak azt, hogy a modell valóban hatékony eszköze lehessen az ágazati koncepciók koordinálásának. Az ágazati koncepciók alapján való koefficiensképzés azonban lehet nagyon hibás is; mind tervezési pontatlanságok egymásrarakódása miatt, mind tendenciózus okokból. Ezért szükség van a koefficiensek statisztikai módszerekkel való előrebecslésére is. A kétféle megközelítés tisztázhatja majd azokat a kényes pontokat, amelyeknél külön speciális vizsgálatok szükségesek megnyugtatóan felhasználható adatok kimunkálásához.

A modell mérete az ágazati bontás mélységétől, a számbaveendő külső erőforrások számától és a tervidőszak periodizációjától függ. Célszerűnek látszik induláshoz kb. 20 szektort, 10 külső erőforrást és 4 periódust definiálni. Igy az egész modell valamivel több, mint 200 feltételből és kb. 850 változóból állna. Ilyen méretű feladatok a rendelkezésre álló számítógépeken könnyen futtathatók. A feltételrendszer együtthatómátrixa nem sűrű; a zérustól eltérő pozíciók nem haladják meg a 10%-ot.

A modell eredményeinek értelmezhetősége jelentősen növekednék, ha a szektorbontásban és a periodizációban a bontást fokozni lehetne. Ez a feladat méreteinek gyors növekedését eredményezi. Hamar elérkezünk olyan méretekhez, hogy az egy lépésben való megoldás már számítástechnikailag nem látszik reményteljesnek.

Ha azonban figyelembe vesszük a modell speciális szerkezetét, akkor azonnal szembetűnik kényelmes dekomponálhatósága. Ha a készleteket kifejező változók helyett készletváltozási változókra térünk át, akkor csak $(N-1)\,n$ olyan feltétel szerepel a modellben, amely több, mint egy periódusra vonatkozó változókat tartalmaz. Így a modellt fel lehet bontani periódus-modellekre és a periódusok közötti intertemporális kapcsolatokat kifejező kapacitásmodellre. Mivel a periódus-modellek szerény méretűek — még megnövelt szektorszám mellett is, — igen részletezett modellrendszerrel lehet dolgozni, ha megteremthetők a rendszer dekompozíciós eljárással való kezelésének számítástechnikai feltételei.

(Beérkezett: 1968. IX. 5.)

ON A POSSIBLE MATHEMATICAL MODEL OF LONG-TERM (15–20 YEAR) NATIONAL ECONOMIC PLANNING

The paper presents a model system proposed for application to long-term economic planning while accomplishing its central — directive, organizational and coordinating — functions.

The model assumes the availability of detailed conceptions for the long-term development of the various sectors of the national economy, worked out largely independently of one another, on the basis of which the prospective changes in the input-output pattern of the individual sectors can be estimated.

Relying on the information contained in the sector development proposals and on estimates relating to the exogenous conditions of the global development possibilities of the national economy, the model will enable the investigation of the following problem: Is it possible to unite the development proposals of the sectors into a consistent plan reflecting the long-term development of the economy as a whole? If yes, how efficient can it be done?

As regards its form, the model is a multi-period one. It contains continuous linear variables relating to activities aggregated on the sector level. The model's backbone is a system of constraints which is to ensure the internal harmony of extended socialist reproduction and its consistency with the external conditions of development during and between the individual periods of the long-term plan.

Each non-negative solution of the constraints corresponds to a consistent long-term development variant.

The model is operated with the technique of linear programing. Feasible solutions with extremal properties are sought with the aid of linear objective functions corresponding to various social preferences. The systematical variation of the model's parameters (fixed for each course of computation) will enable us to compare the effects of different concepts of economic policy.

The model is not aimed to determine an „optimal'' variant of the long-term plan but is meant to constitute a rational tool for the so called summarizing work in the long-term planning procedure.

О ВОЗМОЖНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА НА ДОЛГУЮ ПЕРСПЕКТИВУ (15—20 ЛЕТ)

В статье представляется модель-система предлагаемая для применения при осуществлении центральных функций перспективного народнохозяйственного планирования — управления, организации, координации.

Модель предполагает, что в отношении перспективного развития различных отраслей народного хозяйства имеются детальные концепции, разработанные, по существу, независимо друг от друга, на основании которых можно ориентировочно определить ожидаемые изменения в структуре затрат и выпуска отдельных отраслей.

На основании информаций, имеющихся в предложениях по развитию отраслей, и ориентировочного определения экзогенных условий и возможностей общего развития народного хозяйства — при помощи модели — можно исследовать: можно ли — и если да, то с какой эффективностью — объединить предложения по развитию отдельных отраслей в консистентный план, отражающий перспективное развитие народного хозяйства в целом.

Модель по своей форме является многоступенчатой. На уровне отраслей она содержит непрерывные, линейные переменные относительно агрегированных деятельностей. Костяк модели представляет система условий, призванных обеспечить по отдельным отрезкам перспективного планового периода и между ними внутреннее равновесие расширенного социалистического воспроизводства и его консистенцию с внешними условиями развития.

Каждое из неотрицательных решения системы условий есть вариант консистентного перспективного развития.

Модель функционирует с применением техники линейного программирования таким образом, что при помощи линейных целевых функций, устанавливаемых на основании различных общественных преференций, следует найти возможные решения с экстремальными свойствами. Систематическия вариация параметров, устанавливаемых на отдельных этапах исчисления модели, позволяет сопоставлять эффективность различных концепций экономической политики.

Модель, таким образом, служит не для определения какого-то «оптимального» варианта перспективного плана, а может быть рациональным пособием «большающей» работы в системе деятельностей перспективного планирования.

FORGÓ FERENC

Egy módszer nemlineáris programozási problémák közelítő megoldására*

Bevezetés

A nemlineáris programozási problémák széles osztálya a következő formában fogalmazható meg:

$$f(\mathbf{x}) \to \min \tag{1}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

ahol $\mathbf{x}$ az n dimenziós euklideszi tér — a továbbiakban röviden E^n — vektora, $f, g_1, g_2, \ldots g_m$ függvények pedig az egész E^n felett értelmezett skalárértékű alulról félig folytonos függvények.

Az (1) probléma megnyugtató, számítástechnikailag is kivitelezhető megoldása csak speciális $f, g_1, g_2 \ldots g_m$ függvények esetén ismeretes. Számos módszer van arra az esetre, amikor az előforduló függvények mindegyike konvex, azonban ezek, kivéve a lineáris g_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ függvények esetét, gyakorlati méretű feladatok esetén számítástechnikailag nehezen kezelhetők.

Jelen dolgozat célja az (1) feladat bizonyos értelemben közelítő megoldását keresni. Az (1) probléma közelítő megoldását visszavezetjük egy nemlineáris függvény feltétel nélküli minimalizálására.

Amennyiben van olyan módszerünk, mely alkalmas egy többváltozós függvény feltétel nélküli globális minimumának meghatározására, akkor az (1) probléma egy globális optimumpontjának megkeresését is célul tűzhetjük ki.

Az (1) megoldásra általunk javasolt módszer alapgondolatát tekintve az ún. SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) módszerek közé tartozik [6].

Az általános eset

Az eddigi feltételezéseinken túl még két feltételezéssel fogunk élni. A világosság kedvéért foglaljuk össze az (1) problémára tett valamennyi kikötést.

I. $f, g_1, g_2, \ldots g_m$ alulról félig folytonos függvények[1]

* Ez a cikk a „Számítógépek alkalmazása" című, 1968—72. évi kutatási program keretében kidolgozott egyes eredményeket tartalmazza. A kutatás a Kohó- és Gépipari Minisztérium Műszaki Főosztályának megbízásából és a KGM Ipargazdasági, Üzemszervezési és Számítástechnikai Intézetének irányításával folyik.

[1] Ez a feltétel biztosítja azt, hogy a lehetséges megoldások halmaza zárt, és ha ez a halmaz korlátos is, akkor a célfüggvény felveszi a minimumát.

II. $L_0 = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0;\ i = 1, 2, \ldots m\}$ nem üres és van olyan $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ vektor, hogy $L_\lambda = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq \lambda_i;\ i = 1, 2, \ldots m\}$ korlátos ($\boldsymbol{\lambda}^* = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m]$).

III. $f(\mathbf{x}) \geq 0$ minden $\mathbf{x} \in E^n$ esetén.

Tekintsük a következő függvényt:

$$\Phi(\mathbf{x},\ a,\ b) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m} \exp\,[a\, g_i(\mathbf{x})] \tag{2}$$

ahol a és b határozatlan pozitív paraméterek.

Definiáljuk feltétel nélküli minimumfeladatok sorozatát a következőképpen: k-ik probléma ($k = 1, 2, \ldots$)

$$\Phi(\mathbf{x},\ a_k,\ b_k) \to \min \tag{3}$$

ahol

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \qquad 0 < a_k < a_{k+1} \\ &\lim_{k\to\infty} b_k = \infty \qquad 0 < b_k < b_{k+1} \\ &\lim_{k\to\infty} \frac{\log b_k}{a_k} = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Legyen $\{\varepsilon_k\}$ egy monoton csökkenő, 0-hoz tartozó sorozat, és $\hat{\mathbf{x}}\,(a_k, b_k, \varepsilon_k) = \hat{\mathbf{x}}_k$ (3)-nak egy ún. ε_k- közelítő megoldása, amelyen a következő értendő:

$$\Phi(\hat{\mathbf{x}}_k,\ a_k,\ b_k) \leq N_k + \varepsilon_k$$

ahol $N_k = \inf\limits_{\mathbf{x}\in E^n} \Phi\,(\mathbf{x}, a_k, b_k) \geq 0$

1. tétel: $\{\hat{\mathbf{x}}_k\}$ sorozat minden torlódási pontja (1)-nek optimális megoldása.
Bizonyítás: Minthogy $f(\mathbf{x})$ alulról félig folytonos és L_0 nemüres, zárt és korlátos, $f(\mathbf{x})$ L_0-on felveszi a minimumát. Legyen

$$M = \min_{\mathbf{x}\in L_0} f(\mathbf{x})\,.$$

Válasszunk egy optimális megoldást, $\mathbf{x}^0$-t. Ekkor mivel $\hat{\mathbf{x}}_k$ a (3) feladatnak ε_k közelítő megoldása, fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\Phi\,(\hat{\mathbf{x}}_k, a_k, b_k) \leq \Phi\,(\mathbf{x}^0, a_k, b_k) + \varepsilon_k \leq f(\mathbf{x}^0) + \frac{m}{b_k} + \varepsilon_k\,. \tag{5}$$

(Mivel $\mathbf{x}^0 \in L_0$ és $\exp\,[a_k\, g_i(\mathbf{x}^0)] \leq 1$). Az (5) egyenlőtlenség bal oldalát nemnegatív tagok elhagyásával nem növeljük, így kapjuk az

$$\frac{1}{b_k} \exp\,[a_k\, g_i(\hat{\mathbf{x}}_k)] \leq f(x^0) + \frac{m}{b_k} + \varepsilon_k \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

egyenlőtlenségeket. (Itt használtuk ki a III. kikötést.) Innen adódik

$$g_i(\hat{\mathbf{x}}_k) \leq \frac{1}{a_k} \log\,\{b_k f(\mathbf{x}^0) + m + b_k \varepsilon_k\} = c_k \qquad i = 1, 2, \ldots m \tag{6}$$

A (4) feltételek miatt

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0. \tag{7}$$

Ugyanis tetszőleges kis Θ pozitív számhoz van olyan k_0 küszöbszám, hogy minden $k > k_0$ esetén $b_k > 1$, és fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\frac{1}{a_k} \log \{b_k f(\mathbf{x}^0) + m + b_k \varepsilon_k\} \leq \frac{1}{a_k} \log \{b_k[f(\mathbf{x}^0) + \varepsilon_k + m]\} =$$

$$= \frac{\log b_k}{a_k} + \frac{\log [f(\mathbf{x}^0) + \varepsilon_k + m]}{a_k} < \Theta .$$

Így van olyan k_1 index is, hogy minden $k > k_1$ esetén $c_k \leq \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, és így $\hat{\mathbf{x}}_k \in L_\lambda$. Mivel L zárt és korlátos, az $\{\hat{\mathbf{x}}_k\}$ sorozatnak van torlódási pontja. Legyen $\bar{\mathbf{x}}$ egy torlódási pont. (7) miatt $\bar{\mathbf{x}} \in L_0$. Azt kell tehát még belátni, hogy $\bar{\mathbf{x}}$ optimális is. Könnyen belátható, hogy a következő egyenlőtlenségek fennállnak:

$$f(\hat{\mathbf{x}}_k) \leq \Phi(\hat{\mathbf{x}}_k, a_k, b_k) \leq f(\mathbf{x}^0) + \frac{m}{b_k} + \varepsilon_k$$

ahonnan

$$f(\hat{\mathbf{x}}_k) - f(\mathbf{x}^0) \leq \frac{m}{b_k} + \varepsilon_k = d_k . \tag{8}$$

Mivel $\lim\limits_{k\to\infty} d_k = 0$, $\bar{\mathbf{x}}$ optimális. Q.e.d.

Az 1. tétel alapján meg tudunk fogalmazni egy olyan feltétel nélküli szélsőértékfeladatot, melynek közelítő megoldása „jó közelítő megoldása" lesz (1)-nek is.

Az (1) probléma (δ, ϱ)-közelítő megoldásának $(\delta > 0, \varrho > 0)$ olyan $\mathbf{y} \in E^n$ pontot fogjuk nevezni, melyre fennáll

$$g_i(\mathbf{y}) \leq \delta \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \varrho .$$

Ez a közelítő megoldás, tekintve hogy δ és ϱ tetszőlegesen kicsi lehet, gyakorlati szempontból mindig kielégítő.

Ha tehát ismerjük (1) egy lehetséges megoldását, $\bar{\mathbf{x}}$-t, és (δ, ϱ)-közelítő megoldást keresünk, akkor Φ függvény a és b paraméterét a következőképpen határozzuk meg:

A (6) és (8) összefüggések alapján

$$\frac{m}{b} + \varepsilon \leq \varrho ,$$

ahonnan

$$b \geq \frac{m}{\varrho - \varepsilon,} \qquad (\varepsilon < \varrho) \tag{9}$$

valamint

$$\frac{1}{a} \log \{b\, f(\mathbf{x}^0) + m + \varepsilon\, b\} \leq \frac{1}{a} \log \{b\, f(\bar{\mathbf{x}}) + m + \varepsilon\, b\} \leq \delta$$

ahonnan

$$a \geq \frac{1}{\delta} \log \{b\, f(\bar{\mathbf{x}}) + m + \varepsilon\, b\} \tag{10}$$

Ha tehát a és b paramétereket a fenti formuláknak megfelelően választjuk, akkor a

$$\Phi\,(\mathbf{x}, a, b) \to \min$$

egyetlen szélsőértékfeladat ε-közelítő megoldása egyúttal (1) probléma (δ, ϱ)-közelítő megoldása.

Konvex függvények esete

Az előzőekben az (1) problémát visszavezettük a Φ függvény feltétel nélküli minimalizálására. A (10) probléma megoldása azonban egyes speciális, kevés változójú feladatok kivételével számítástechnikailag csak akkor kezelhető hatásosan, ha $f, g_1, g_2, \ldots g_m$ függvények konvexek. Könnyű belátni, hogy ekkor Φ is konvex. Egy konvex függvény minimalizálására számos módszer ismert (lásd [4]). Vizsgáljuk meg, hogyan lehet Φ-nek ε-közelítő megoldását kapni, ha feltesszük, hogy $f, g_1, g_2, \ldots g_m$ folytonosan differenciálható konvex függvények.

Tegyük fel, hogy ismerünk egy $\bar{\mathbf{x}} \in L_0$ megoldást. Legyen

$$c = \frac{1}{a} \log \{bf(\bar{\mathbf{x}}) + m + \varepsilon b\} \tag{11}$$

és $L_c = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq c;\ i = 1, \ldots m\}$. Az a megfelelő választásával II. kikötés értelmében mindig elérhető, hogy $c \leq \lambda_i$ $(i = 1, \ldots m)$, s így L_c korlátos legyen. Mivel Φ folytonos, L_c-n felveszi a minimumát. Viszont minden közelítő megoldás eleme L_c-nek, így Φ feltétel nélküli minimumát is felveszi L_c-ben.

Ágyazzuk be L_c-t egy egyszerű T tartományba, ahol könnyen ki tudjuk számítani a maximális távolságot:

$$D = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T} \quad |\mathbf{x} - \mathbf{y}|\,.$$

A feltétel nélküli minimumpont stacionárius pont, melyre fennáll

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_j}\right)^2 = 0\,.$$

Tegyük fel, hogy Φ minimalizálása során megállunk, ha $\Psi(\mathbf{x}) \leq \Delta$. Φ folytonos differenciálhatósága miatt

$$|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y})| \leq \sqrt{\Psi(\mathbf{x})}\,|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq \sqrt{\Delta}\, D$$

ahol $\mathbf{y}$ Φ-nek minimumpontja.

E közelítő megoldás nyerése érdekében teljesülni kell a

$$D \sqrt{\Delta} \leq \varepsilon$$

egyenlőtlenségnek, vagyis előre megadott ε-hoz, Δ-t a

$$\Delta \leq \frac{\varepsilon^2}{D^2} \tag{12}$$

egyenlőtlenségnek megfelelően kell megválasztani.

(10) megoldása során tehát az adott minimalizálási eljárást (például gradiens módszert) addig folytatjuk, míg L_ε-be érve $\Psi(\mathbf{x}) \leq \Delta$ teljesül.

Az alkalmazott feltételezésekről

Először a II. feltétel közgazdasági realitását, ill. teljesíthetőségét vizsgáljuk meg. A II. feltétel implicite tartalmazza azt az állítást, hogy L_0 korlátos. Mit jelentene, ha L_0 nem lenne korlátos? Tekintsünk egy olyan modellt, amelyben $\mathbf{x}$ termelésvektor, a $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ feltételek pedig a kapacitáskorlátozásokat fejezik ki. Ekkor L_0 nemkorlátossága miatt

$$\sup_{\mathbf{x} \in L_0} [\max_{1 \leq j \leq n} |x_j|] = \infty,$$

más szóval legalább egy olyan termék van, melyből korlátlan mennyiséget lehet termelni véges erőforrás felhasználásával. Ez irreális, tehát a $\sum_{j=1}^{n} | x_j | \leq K$ feltétel csatolása, ahol K egy alkalmas nagy pozitív szám, a gyakorlati esetekben közgazdaságilag mindig indokolt.

Mit jelent a II. feltétel azon része, mely megköveteli olyan $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ létezését, hogy L korlátos legyen? Tegyük fel, hogy nincs ilyen. Ez azt jelentené, hogy a kapacitásokat bármilyen kis mértékben növelve, legalább egy termék termelését korlátlanul növelni lehetne. Egybevetve ezt L_0 korlátos voltával, azt a következtetést vonhatnánk le, hogy a kapacitások („termelési tényezők") együttes határtermelékenysége végtelen. Ez pedig nyilvánvaló közgazdasági képtelenség.

A III. feltétel pedig olyan természetű, melynek teljesülését mindig biztosítani lehet. Tegyük fel ugyanis, hogy eredeti problémánk

$$\varphi(\mathbf{x}) \to \min \tag{13}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots m$$

volt és $\varphi(\mathbf{x})$ nem teljesíti a III. kikötést. Ha $\varphi(\mathbf{x})$ alulról korlátos E^n-en, vagyis $\varphi(\mathbf{x}) \gtrless R$, $\mathbf{x} \in E^n$, akkor $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + R$ célfüggvény már teljesíti a III. kikötést. Ha $\varphi(\mathbf{x})$ nem korlátos, akkor legyen $f(\mathbf{x}) = \exp\{\varphi(\mathbf{x})\}$ a célfüggvény. Minthogy az exponenciális függvény monoton, az optimális pontok ugyanazok maradnak; ha $\varphi(\mathbf{x})$ konvex és differenciálható volt, $f(\mathbf{x})$ is az. Változik azonban az optimális célfüggvényérték.

Az előzőekben leírt (δ, ϱ)-közelítő megoldás, $\mathbf{y}$ olyan, hogy

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \varrho$$

Ez így is írható:

$$\exp\{[\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}^0)] + \varphi(\mathbf{x}^0)\} - \exp\{\varphi(\mathbf{x}^0)\} \leq \varrho$$

továbbalakítva

$$[\exp\{\varphi(\mathbf{x}^0)\}]\,[\exp\{\varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x}^0)\}-1]\leq\varrho \tag{14}$$

Tegyük fel, hogy ismerjük $\exp\{\varphi(\mathbf{x}^0)\}$ egy pozitív alsó korlátját, α-t (ez mindig létezik L_0 korlátossága miatt, és gyakorlatilag mindig könnyen meghatározható). Ekkor (14)-ből következik

$$\alpha[\exp\{\varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x}^0)\}-1]\leq\varrho$$

továbbalakítva

$$\varphi(\mathbf{y})-\varphi(\mathbf{x}^0)\leq\log\left(1+\frac{\varrho}{\alpha}\right).$$

Ha tehát a (13) feladatnak szeretnénk (δ,ω)-közelítő megoldást választani, akkor fenn kell állni a

$$\log\left(1+\frac{\varrho}{\alpha}\right)\leq\omega$$

vagy másképpen a

$$\varrho\leq\alpha[(\exp\omega)-1)$$

egyenlőtlenségnek. ϱ-t így választva biztosak lehetünk abban, hogy az $f(\mathbf{x})$ célfüggvénnyel rendelkező feladat (δ,ϱ)-megoldása a (13) probléma (δ,ω)-megoldása is.

Egy numerikus példa

Tekintsük a következő konvex programozási problémát:

$$\begin{aligned} Q(x_1,x_2)=0{,}3\,x_1+x_1^2+0{,}3x_2+x_2^2+0{,}0450 &\to \min\\ -x_1 &\leq 0\\ -x_2 &\leq 0\\ -1+2x_1^2+3x_2^2 &\leq 0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Keressük meg a (15) feladat egy (δ,ϱ)-közelítő megoldását, ahol $\delta=0{,}125$, $\varrho=0{,}1$. Könnyen igazolható, hogy a (15) probléma eleget tesz az I—III. kikötéseknek. Válasszuk ε-t (9)-nek megfelelően, $\varepsilon=0{,}05$. Mivel $m=3$

$$b=\frac{3}{0{,}1-0{,}05}=60\,.$$

Az $x_1=0$, $x_2=0$ (15)-nek egy lehetséges megoldása, $Q(0{,}0)=0{,}0450$. Ekkor (9)-nek megfelelően[2]

$$a\geq\frac{1}{0{,}125}\log\{60\cdot0{,}0450+3+3\}=7{,}516\,.$$

Legyen $a=8$.

[2] A példa során log tizes alapú, ln pedig természetes alapú logaritmust jelent.

Ekkor a minimalizálandó függvény:

$$\Phi(x_1, x_2) = 0{,}3x_1 + x_1^2 + 0{,}3x_2 + x_2^2 + \frac{1}{60}[\exp\{-8x_1\} + \exp\{-8x_2\} + $$
$$+ \exp\{8(2x_1^2 + 3x_2^2 - 1)\}].$$

A gradiens abszolút értékének négyzete pedig

$$\Psi(x_1, x_2) = [0{,}3 + 2x_1 - \frac{8\ln 10}{60}\Big) \exp\{-8x_1\} - 4x_1 \exp\{8(2x_1^2 +$$
$$+ 3x_2^2 - 1)\})]^2 + [0{,}3 + 2x_2 - \frac{8\ln 10}{60}\Big) \exp\{-8x_2\} - 6x_2 \exp\{8(2x_1^2 +$$
$$+ 3x_2^2 - 1)\})]^2$$

$$(11) \text{ szerint } c = \frac{1}{8}\log\{60 \cdot 0{,}0450 + 3 + 3\} = 0{,}1174$$

L_c tehát a következő egyenlőtlenségek által leírt tartomány:

$$-x_1 \leq 0{,}1174$$
$$-x_2 \leq 0{,}1174$$
$$2x_1^2 + 3x_2^2 \leq 1{,}1174$$

Könnyű belátni, hogy L_c a következő csúcspontkoordinátákkal rendelkező négyszögtartományba esik: (—0,2; —0,2) (—0,2; 0,8), (0,8; —0,2), (0,8; 0,8). Ebben a tartományban a maximális távolság $\sqrt{2}$. Tehát (12) szerint

$$\Delta = \left(\frac{0{,}05}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0{,}00125.$$

Ezek után könnyen igazolhatjuk, hogy induló lehetséges megoldásunk $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ (δ, ϱ)-közelítő megoldás. Ugyanis

$$\Psi(0{,}0) = 0{,}000098 < \Delta. \tag{16}$$

A példa a rövidség kedvéért leegyszerűsített volt. Amennyiben a kiinduló megoldás nem elégítette volna ki a (16) egyenlőtlenséget, $\Phi(x_1, x_2)$-t valamilyen gradiensmódszerrel minimalizálni kellene, és minden lépésnél ellenőrizni a (12) egyenlőtlenség teljesülését.

(Beérkezett: 1968. X. 10.)

IRODALOMJEGYZÉK

1. HADLEY, G.: Nonlinear and dynamic programming. Addison Wesley, London 1964
2. KÜNZI, H. P.: Zum heutigen Stand der nichtlinearen Optimierungstheorie. Unternehmensforschung, Band 12. 1968 Heft 1. (1—22)
3. KLEIBOHM, K.: Äquivalenz eines Optimierungsproblems mit Restriktionen und einer Folge von Optimierungsproblemen ohne Restriktionen. Unternehmensforschung, Band 11. 1967 Heft 2. (111—118)

4. KEMPTHORNE et. al.: Some algorithms for minimizing a function of several variables. SIAM Journal on Applied Mathematics, 12. 1964 (74—92)
5. HUARD, P.: Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centres. Nonlinear Programming (NATO Summer School, Menton 1964) (207—219) North Holland, Amsterdam 1967.
6. FIACCO, A. V. and MC CORMICK, G. P.: Extension of SUMT for nonlinear programming: Equality constraints and extrapolation. Management Science, Vol 12. July 1966 (816—828)

A METHOD FOR THE APPROXIMATIVE SOLUTION OF NON-LINEAR PROGRAMING PROBLEMS

Solve the non-linear programing problem:

$$f(\mathbf{x}) \to \min$$
$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \ \ldots, \ m \tag{1}$$

with the following assumptions:

I. $f, g_1, g_2, \ \ldots, g_m$ are lower semi-continuous scalar-valued functions

II. $L_0 = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0; \ i = 1, \ \ldots, m\}$ is non-empty and there exists a $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ vector such that

$L_{\boldsymbol{\lambda}} = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq \lambda_i; \ i = 1, \ \ldots, m\}$ is bounded $\boldsymbol{\lambda}' = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m]$)

III. $f(\mathbf{x}) \geq 0$ for all $\mathbf{x} \in E^n$

We will consider as (δ, ϱ)-approximate solution $(\delta > 0, \varrho > 0)$ of problem (1) the point $\mathbf{y} \in E^n$ satisfying:

$$g_i(\mathbf{y}) \leq \delta \qquad i = 1, \ \ldots, \ m$$
$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \varrho,$$

where $\mathbf{x}^0$ is an optimal solution of (1).

Our principal result is the following: The unconditional minimum point of the function

$$\Phi(\mathbf{x}, a, b) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m}{}' \exp\left[a \, g_i(\mathbf{x})\right]$$

where parameters a and b are suitably constructed from the initial data, will be (δ,ϱ)-approximate solution of problem (1).

The article also contains the application of the method in the case of convex functions, the economic motivation of assumptions (I—III), the comparison of the method to KLEIBOHM's procedure [3], as well as a numerical example.

МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель заключается в решении следующей проблемы нелинейного программирования:

$$f(\mathbf{x}) \to \min$$
$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad i = 1, \ \ldots, \ m \tag{1}$$

при следующих предположениях:

I. $f, g_1, g_2, \ \ldots, g_m$— функции, скалярное значение которых является снизу наполовину непрерывным

II. $L_0 = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0; i = 1, \ldots, m\}$ является непустым и имеется такой вектор $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$, гто $L_{\boldsymbol{\lambda}} = \{\mathbf{x} \mid g_i(\mathbf{x}) \leq \lambda_i; i = 1, \ldots, m\}$ является ограниченным ($\lambda^* = | \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m]$)

III. $f(\mathbf{x}) \geq 0$ в случае любого $x \in E^n$

(δ, ϱ) — приближенным решением ($\varrho > 0, \varrho > 0$) проблемы (I) будем считать точку $\mathbf{y} \in E^n$, для которой действительно, что

$$g_i(\mathbf{y}) \leq \delta \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$f(\mathbf{y}) - r(\mathbf{x}^\circ) \leq \varrho$$

где $\mathbf{x}^0$ является одним из оптимальных решений проблемы (I).

Основной результат заключается в следующем. Точка безусловного минимума функци

$$\Phi(\mathbf{x}, a, b) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^{m} \exp\,[a\; g_i(x)]$$

построенной при помощи подходящим образом выбранных параметров a и $б$, является (δ, ϱ) — приближенным решением задачи (I).

Статья содержит еще и применение метода в случае выпуклых функций, экономическую мотивацию предположений (I—III), сопоставление метода с методом Клейбома [3], а также нумерический пример.

SIMONOVITS ANDRÁS

Pozitív matrixok domináns Rayleigh-hányadosáról

1. Elméletileg és gyakorlatilag egyaránt fontos a következő két kérdés: adott matrix sajátvektorának közelítő ismeretében hogyan számítható a sajátvektorhoz tartozó közelítő sajátérték? Adott számítási eljárás esetén hogyan becsüljük meg e sajátérték hibáját?

Az általam ismert irodalom e kérdéseket csak normális matrixok esetében tárgyalja. Kimutatják, hogy alkalmas (euklideszi) vektornormát használva, közelítő sajátérték relatív hibája a közelítő sajátvektor relatív hibájának négyzetével azonos nagyságrendű. Azonban a közgazdasági alkalmazásokban szereplő matrixok általában nem normálisak. Jellemző tulajdonságuk ezzel szemben az, hogy pozitívak. Az alkalmazásokban különösen a legnagyobb abszolút értékű, ún. domináns sajétérték és a megfelelő sajátvektor számítása szükséges. Az alábbiakban erre a domináns sajátértékre bizonyítom a hiba négyzetes jellegét.

2. Állapodjunk meg a következő jelölésekben: kis görög betűk skalárokat, kis latin betűk vektorokat, nagy latin betűk matrixokat jelölnek. Végig valós számokkal dolgozunk, a vektortér n-dimenziós, a matrixok $n \times n$-szeresek. A bal és a jobb oldali vektorok jelzése azonos, sor és oszlopvektorokat tehát nem különböztetünk meg. Két vektor skalárszorzatát egyszerű egymás mellé írással jelöljük.

Elméleti bevezetésül vetjük fel a következő problémát: Adott T és v esetén milyen λ mellett lesz λ a T valamilyen sajátértékének „legjobb" közelítése? Azaz $|Tc - \lambda v|$ milyen λ-ra minimális? (Vektor abszolút értéke a koordináták négyzet-összegének pozitív négyzetgyöke.) Felhasználva, hogy a $|v| = \sqrt{vv}$, $|Tv - \lambda v|^2$ pedig λ-ban másodfokú, egyszerűen adódik, hogy a minimum-hely $\tau = \tau(v) = \dfrac{vTv}{vv}$, $(v \neq 0)$; azaz itt τ a v függvénye ([1] 172. old.). Ez az észrevétel szemléletesen azt jelenti, hogy a λv egyenes Tv-hoz legközelebbi pontja Tv pont vetülete a λv egyenesre. Ez a $\tau(v)$ érték a T mátrix v vektorához tartozó ún. *Rayleigh-hányados*.

A Rayleigh-hányados számlálójában szereplő kvadratikus alak helyébe általánosabb bilineáris formát írhatunk, a nevezőbe pedig skalárszorzatot. Ez a formális általánosítás matematikailag nem ad újat, de közgazdasági értelmezése jól kiaknázható. Pl. a bal oldali vektor valamilyen árat, a jobb oldali vektor volument jelölhet. $\tau = \tau(u, v) = \dfrac{uTv}{uv}$, $(uv \neq 0)$ a T matrix u és v vektoraihoz tartozó Rayleigh-hányadost jelenti. ([1] 179. old.) Közgazdaságilag ez általában hatékonysági mutatóként értelmezhető.

3. Rátérünk a hibabecslésre. Legyen T pozitív (elemű) matrix, u_0 és v_0 a T domináns bal ill. jobb oldali sajátvektorai, τ_0 közös domináns sajátértékük. Ismert, hogy egy skalár faktortól eltekintve u_0 és v_0 egyértelműen adottak és pozitívak τ_0-val együtt ([2] 283. old.). Jól látható, hogy $\tau(u_0, v) = \tau_0$ és $\tau(u, v_0) = \tau_0$; természetesen $\tau(u_0, v_0) = \tau_0$ — ezért a nullaindexelés megfelelő.

Általánosságban a szorzat hibája a tényezők hibájának összege. Két szorzat hányadosának hibája még nagyobbá válhat. Itt azonban más a helyzet. Ha egyik tényező, pontos, az eredő is pontos. Az eredő hiba szorzat jellegét mutatja a következő elemi átalakítás:

$$\Delta u = u - u_0,\ \Delta v = v - v_0 \text{ jelöléssel } \frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} = \frac{uTv}{\tau_0 uv} - 1 =$$

$$= \frac{(u_0 + \Delta u)T(v_0 + \Delta v) - \tau_0(u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v)}{\tau_0(u_0 + \Delta u)(v_0 + \Delta v)}.$$

(Itt a zárójelek arimetikai jelölések.)

Felhasználva, hogy $u_0T = \tau_0 u_0$ és $Tv_0 = \tau_0 v_0$, összevonás után a $\frac{\tau - \tau_0}{\tau_0} =$

$$= \frac{\Delta u \left(\frac{1}{\tau_0} T - I\right) \Delta v}{uv} \text{ formulát kapjuk.}$$

Mivel a vektorok elemei a közgazdaságtanban gyakran összemérhetetlen mennyiségek (pl. a volumenvektor esetében), célszerű a relatív hibát elemenként venni. Vektorok közötti egyenlőtlenség is elemenként értendő, tehát az α hibakorlát $-\alpha u_0 \leq u \leq \alpha u_0$ képlettel értelmezendő. Természetesen $\alpha > 0$ és $u_0 > 0$, $v_0 > 0$.

Ha a hányadost felülről becsüljük, akkor a számlálót is felülről, a nevezőt alulról becsülhetjük. Az elemenkénti írásmódból látszik, hogy $-\alpha u_0 v_0 \leq (\Delta u) v_0 \leq \alpha u_0 v_0$; $-\beta u_0 v_0 \leq u(\Delta v) \leq \beta u_0 v_0$; $\tau_0 \beta v_0 \leq T\Delta v \leq \tau_0 \beta v_0$; $-\alpha \tau_0 \beta u_0 v_0 \leq \Delta u T \Delta v \leq \alpha \tau_0 \beta u_0 v_0$;

Összegezve:

$$\left| \Delta u \left(\frac{1}{\tau_0} T - I\right) \Delta v \right| \leq \left| \Delta u \frac{1}{\tau_0} \cdot \tau \Delta v \right| + |\, \Delta u \Delta v \,| \leq 2\alpha\beta u_0 v_0$$

$$\text{és } |\, u\, v \,| \geq u_0 v_0 - u_0 \Delta v - (\Delta u) v_0 - \Delta u \Delta v \geq u_0 v_0 (1 - \alpha - \beta - \alpha\beta)$$

$$\text{azaz } \frac{-\tau_0|}{\tau_0} \leq \frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha - \beta - \alpha\beta}, \text{ ha } \alpha + \beta + \alpha\beta < 1.$$

Ezzel bizonyításunk végére jutottunk. Nyilvánvaló, hogy kicsi α és β hibákra a jobb oldal $2\alpha\beta$ nagyságrendű.

Megjegyzések:

4. Konkrét közgazdasági elemzésnél jól látható az egész kérdés szemléletes tartalma. Vegyük példának Leontief dinamikus lineáris modelljét, ahol A a

folyó-, B az eszközlekötési ráfordítások matrixa. $Q = (I - A)^{-1}$ az ún. Leontief-inverz, a teljes ráfordítások matrixa. Vezessük be $T = BQ$ matrixot, amely v nettó termékhez szükséges Tv bruttó eszközlekötést mutatja. Ha u a termelési ár vektora, ekkor $\tau = \tau(u, v) = \frac{uTv}{uv}$ az u árakon és v nettó termelés mellett számított ún. időtényező, az átlagos növekedési ütem = átlagprofitráta) reciproka ([2], 175. old. 223—225. old.) Példánkban τ nemcsak a Rayleigh-hányadost jelenti, hanem egy centrális gazdasági-hatékonysági mutatóként is értelmezhető. A becslés szerint az időtényező relatív hibája nem nagyobb, mint a termelési ár és a nettó termék relatív hibáinak kétszeres szorzata. Ez egyben igazolja az aggregálás jogosságát is az ilyen típusú modellek esetében.

5. Érdekesség kedvéért megemlítem a következő eredményeket ([1] 172—173. old.): Megfelelően értelmezve vektorok és matrixok normáját, általános esetben a következő becslés igaz:

$$\frac{|\tau - \tau_0|}{\tau_0} \leq \frac{\|\Delta u\| \left\| \frac{1}{\tau_0} T - I \right\| \|\Delta v\|}{\Delta u \, \Delta v} \qquad ([1]\ 179.\ \text{old.})$$

Normális matrixnál a domináns sajátértékre euklideszi normával a $\frac{2\alpha\beta}{1 - \alpha - \beta - \alpha\beta}$ eredő hibakorlátot kapjuk, amely azonos 3.-beli eredményeinkkel, csak más normával!

6. Pozitív matrixok helyett lehet nem-negatív primitív matrixokat is vizsgálni. A-ról és B-ről úgyis csak az utóbbit tehetjük fel. Q viszont pozitív, ezért példánkban T is pozitív.

(Beérkezett: 1968. XI. 28.)

IRODALOM

1. WILKINSON, J. H.: The Algebraic Eigenvalue Problem. Clarendon Press. Oxford 1965.
2. BRÓDY, A.: Érték és újratermelés. MTA Közgazdaságtudományi Intézet 1968.

ON THE DOMINANT RAYLEIGH QUOTIENT OF POSITIVE MATRICES

The Rayleigh quotient serves for the computation of eigenvalues of matrices. The estimation of errors in this computation method, when applied to normal matrices, is well known from the literature. These results are extended in the paper to the case of positive (not necessarily normal) matrices occuring in mathematical economics.

О ДОМИНАНТНОМ КРАТНОМ РАЙЛЕЙГА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ

Кратное Райлейга служит для исчисления собственных значений матриц. Из литературы известно определение погрешности этого метода исчисления в случае нормальных матриц. В статье эти общеизвестные результаты распространяются на встречающиеся в математической экономии положительные (и не обязательно нормальные) матрицы.

KÖNYVEKRŐL

Kovács János: *Szakképzés és népgazdaság* Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 174 p.

Szakmai körökben kevés könyv gondolatai váltak olyan gyorsan ismertté és népszerűvé, mint Kovács Jánosé. E népszerűségnek több oka, számos tényezője van. Először is a könyv, amely több éves gondos kutatómunka eredménye, olyan problémákat fejteget, amelyek évek óta megoldásra várnak nemcsak Magyarországon, hanem szerte a világon. A hasonló témákkal foglalkozó szerzők eddigi munkájának eredményeit Kovács János nemcsak helyesebb kérdésfeltevéseivel, hanem jórészt megnyugtató válaszaival is meghaladja. Ezenkívül az adott válaszok az olvasót továbbgondolkodásra is késztetik.

A könyv másik nagy érdeme, hogy a matematikai módszereket, az ezek mögött levő gondolati modellt és az ezekből adódó gondolatmenetet mindig szorosan a közgazdasági ismereteinkhez, a valósághoz kapcsolja. A könyvben modell és elmélet egymástól elválaszthatatlanná válik, anélkül hogy egyik a másikat feleslegessé vagy öncélúvá tenné. Sőt éppen a matematikai modell folyamatos felépítésével válik döntő jelentőségűvé a szerző több megállapítása. Az eddig pusztán minőséginek érzett kategóriákat számszerűsíteni tudja, kiszámítható és értékelhető mennyiségekké változtatja. Mindez lehetővé teszi többek közt azt is, hogy az oktatás, a szakképzés költségeit és hozamát összehasonlítsa a szokásos értelemben vett beruházásokkal.

A könyv négy fejezetre tagolódik, az első rész a „Szakképzés és nemzeti jövedelem" címet viseli. Először is összefoglalja az e témakörben folyt eddigi kutatásokat és eredményeket, kijelölve ezzel saját munkájának helyét, valamint definiálja a továbbiakban használt legfontosabb fogalmakat. „A szakképzés egy eredményességi mutatója" című részben vonja le első lényeges megállapítását: hogy a különböző szakképzettségű munkák szakképzés-hatékonysági tényezői úgy aránylanak egymáshoz, mint a szakképzési költségek. E megállapításnak azonban egy fontos feltétele van: az optimális arányok fennállása. Kovács János szerint minél inkább megközelíti a népgazdaság struktúrája a nemzeti jövedelem szempontjából optimális szerkezetet, és ezen belül a szakképzettség optimális szerkezetét, annál reálisabb ez a feltétel. A fő kérdés azonban a népgazdaság optimális szerkezete, s erre még korántsem ismerünk végleges választ. Elvileg elképzelhető több optimális variáció is, ezekhez pedig különböző optimális szakképzettségi szerkezet tartozna.

A szakképzés hatékonysági mutatójának nevezőjében álló ráfordítások definiálása is komoly probléma. Ez túlmegy a könyv keretein, hiszen maga a szakképzetlen munka eltérő oktatási szinteket jelenthet, különösen, ha hosszabb időt figyelünk meg. A mutató számlálójában pedig az átlagos hatékonyság és a szakképzetlen munka hatékonyságának különbsége szerepel.

A szerző végül is olyan oktatásgazdaságossági mutatót dolgoz ki, amely a lakosság különböző időpontban megszerzett tudásának költségeit azonos költségszinten veszi számításba, ez az r_1-nek nevezett mutató. E mutató egy adott év nemzeti jövedelmének azt a részét mutatja, amely a nagyobb bonyolultságú munkának tudható be.

„A szakképzés mint beruházás" című fejezetben Kovács János kibővíti vizsgálatát, és az oktatási beruházásokat a termelőeszköz-beruházásokkal együtt vizsgálja, kimutatva: mennyi tulajdonítható a nemzeti jövedelem növekedéséből az átlagosnál bonyolultabb munkának, tehát az erre fordított oktatási költségek hozamának. A szerző ezzel kapcsolatosan több hasznos elvet leszögez. Közülük legalább egyet úgy gondolom nem árt itt ismételni, azt, hogy a „a munkaerő magasabb szakképzettsége a munkafolyamatban csak megfelelő termelési eszközökkel egyesítve hoz létre nagyobb nemzeti jövedelmet". Ez egyben azt is jelenti, hogy a kiképzett munkaerő részéről éppen úgy vannak követelmények, mint a termelési eszközök oldaláról, míg mi gyakran csak az utóbbit vesszük figyelembe. Az is következik ebből, hogy meg kell találni a hosszú és rövid távon megfelelő arányt az oktatási és a termelőeszköz-beruházások között, mivel az egyik a másik nélkül nem hozhat létre nagyobb nemzeti jövedelmet. Ha az összhang megbomlik az oktatási beruházások túlfutása miatt, az nemcsak beruházási veszteség, hanem társadalmilag is káros lehet.

Nagyon tanulságosnak tartom a szerzőnek a modell alapján végzett számításait a magasabb fokú oktatás hozamára és a beruházási költségek eredményességi rátájára vonatkozóan. Számításainak talán legérdekesebb része az, ahol megkísérli a túlképzésből származó veszteségek becslését és mintegy 22 milliárdos „szellemi túlberuházást" állapít meg. A könyv egyik legnagyobb érdemének azt tartom, hogy ezt az eddig csak elméletben felvetett problémát és annak körülbelüli mértékét számszerűen vizsgálja. Ugyanakkor viszont hiányolható, hogy csak a túlberuházás általános, mintegy összevont mutatóiról tájékoztat. A lehetséges túlberuházás, az oktatási veszteségnek egy összegben történő kimutatásán túlmenően, részletes elemzést is megkívánna. A szocialista átszervezés következtében bekövetkezett oktatási veszteségeket ugyanis nem helyes összekeverni a tulajdonképpeni túlképzés problémájával, amely a fiatalabb generációkra, az utolsó 10—15 évre korlátozódik. A túlképzés mértékének és az ebből eredő gazdasági veszteségeknek további vizsgálatához azonban a szerző mindenképpen megfelelő számítási módszert ad.

A szerző a szakképzést beruházásként kezeli, és ezt azért is fontosnak tartom, mivel igen lényeges szemléletváltozást tükröz, illetve indít el. Az oktatás hosszú távra tervezendő és koordinálandó. A szakképzési beruházások azonban speciálisak és több szempontból is különböznek a termelőeszközökbe eszközölt beruházásoktól. Az oktatási beruházások hosszabb ideig fejtik ki hatásukat, mint a termelőeszköz-beruházások. Ugyanakkor az elértéktelenedés folyamata is különböző: gondoljunk csak arra, hogy egy 40 éves gépet már többnyire nem használunk, ugyanakkor viszont általában éppen az ellenkezője mondható el szakembereink tekintetében.

A harmadik fejezet a „Szakképzés és bérarányok" címet viseli, de már az első fejezet utolsó része is utal erre a problémakörre. Itt Kovács János azt fejtegeti, hogy a munka bonyolultságát mennyiben tükrözik a bérarányok. Alaptétele, hogy a nagyobb bonyolultságú munkaerő képzési és fenntartási költségei magasabbak, mint a szakképzetlen munkaerőé. Feltevése tehát az, hogy az újratermelés költségei úgy aránylanak egymáshoz, ahogyan az elméleti bérarányok. Ez a feltevés bizonyos mértékig elfogadhatónak tűnik, különösen, ha az utána következő kiegészítő tényezőket is figyelembe vesszük, nevezetesen a munka nehézségi fokát, intenzitását, a kínálat és kereslet alakulását, a társadalmi megbecsülést, a munkafeltételeket és munkakörülményeket, valamint az egyéni adottságokat. A munka bonyolultságát meghatározó tényezőket is szétbontja a szakképzettségre, a képességre és a munkával járó felelősségre. A modellben azonban a munka bonyolultsági foka mellett a szerző csak a munka intenzitását tudja számszerűsítve figyelembe venni. A bérarányok számításánál már a munka intenzitását is figyelmen kívül hagyja. A számítások csak a négy fő szakképzettségi kategóriára vonatkoznak, véleménye szerint az intenzitáskülönbség elhanyagolható. Érdemes lenne persze ezeket a számításokat mélyebb bontásban is elvégezni. A családi szakképzési költségeket is figyelembe véve, a számított bérarányok Kovács János szerint nem olyan differenciáltak, mintha csak a munka bonyolultsági fokát venné alapul. 1957. évi adatok alapján a műszaki egyetemet végzettek fizetése 2,06-szorosa volt a szénrakodó munkásénak, míg a modellben levezetett bérarányok alapján 3,3, illetve 3,7-szeresnek kellene lennie. A közbeeső két kategóriában azonban (szakmunkás és középfokú végzettség) a tényleges és modell alapján számított bérarányok meglepően közel vannak. Kovács János számításai ezen a területen újak és gyakorlati szempontból is igen értékesek. Hiszen a bérarányok többnyire tapasztalati úton alakultak ki, nemcsak nálunk, de feltehetően majdnem minden országban. Kovácsé talán nem az egyetlen lehetséges elméleti megközelítése a bérarányok problémájának, mindenesetre rendkívül elgondolkoztató és gyümölcsöző.

„Az oktatásgazdaságossági modellből adódó néhány következtetés" című utolsó fejezet, bár logikailag helyesen áll utolsóként, fontosságát tekintve elsőnek kellett volna említenem. A szakemberképzés költségei részben a népgazdaságot terhelik, a munkaerőt felhasználó vállalat a munkabérben mégis csupán a munkaerő fenntartásának egyéni részét és a kiképzés egyéni költségeinek amortizációját fizeti meg. A szerző felveti egy esetleges munkaerőlekötési illeték bevezetésének gondolatát, amellyel a vállalatokat ösztönözni lehetne a munkaerőpazarlás elkerülésére. A javaslatnak ez a formája nem tűnik közvetlenül megvalósíthatónak, de az feltétlenül elgondolkoztató, milyen más formát lehetne találni. Különösen a négy népgazdasági ág dolgozóinak társadalmi szakképzési költségeire vonatkozó számítás indokolja ennek elvi szükségességét. E költségek ugyanis nagyságrendileg egyenlőek az állóalapberuházásokkal, azaz körülbelül 200 milliárd forintot tesznek ki. Az emberekbe fektetett 200 milliárdot azonban nagyon gyakran elfelejtjük vagy nem érzékeljük, és ezért nem is hasznosítjuk megfelelően.

A könyv stílusát külön kell értékelnünk, a mindössze 147 oldalnyi terjedelmű kötet rendkívül tömör és világos megfogalmazásaival tűnik ki. A szerző nyíltsága a felvetett kérdések tárgyalása és a számítások során külön becsülendő.

Mausecz Zsuzsa

A. KAUFMANN: *Az operációkutatás módszerei és modelljei.* Műszaki Könyvkiadó. Budapest 1968. 375 p. Bibliográfia 376–379. o.

Kaufmann e könyve az immár második kiadásban megjelenő „Az optimális programozás" c. kötetének folytatása és kiegészítése. Míg az első kötetben az operációkutatás alapvető modelljeit, a lineáris programozást, a sorbanállási jelenségeket, a készletproblémákat, valamint a felújításelméletet tárgyalta, e második művét a gráfelmélet, a dinamikus programozás és a játékelmélet ismertetésének szentelte.

Az első kötethez hasonlóan e könyv is két nagy és párhuzamosan kifejtett részre tagolódik. Az első rész minden modellt egyszerű gyakorlati példákon mutat be. Ezek megértése és követése nem kíván magasabb matematikai ismereteket és minden mérnök, közgazdász vagy szervező számára közvetlenül is érthetők.

A második rész, az elsővel azonos tagolásban a matematikai tételeket és levezetéseket ismerteti, s ezek nemegyszer bonyolultabbak, mélyebb vagy speciálisabb ismereteket kívánnak, illetőleg adnak meg. Még e második rész sem tartalmazza azonban hiánytalanul és teljesen az elméleti anyagot, és néhány kérdésben a további szakirodalomra utalja az olvasót.

A szerző olyan alkalmazott matematikai munkát akart az olvasó kezébe adni, amelyet sok, különböző alapképzettségű ember használhat, hogy az operációkutatást megismerje vagy tudását tökéletesítse, anélkül, hogy a gyakorlati alkalmazások szempontjából túlságosan el kellene mélyítenie matematikai ismereteit.

Különösen jól sikerültnek tekinthető az első, gráfelméleti rész. E kérdéseknek a szerző igen alapos ismerője, és kiemelkedő népszerűsítője, sőt kutatója is. Alkalmazásként hálózatok kritikus útjának megállapítását, sorbarendezési problémákat, optimális hálózatok szerkesztését, valamint a maximális átbocsátóképességet vizsgálja. Két érdekes, bár távoleső felhasználási lehetőséget is bemutat a pszichoszociológiai vizsgálatok és a szövegkritika köréből.

A dinamikus programozást ismertető rész lényegében Bellmann optimalitási tételének kiaknázásán alapul, amelyet sztochasztikus problémákra is alkalmaz. Alkalmazásként többek közt beruházások nem arányos hozamok melletti optimális elosztását, készletbeszerzési stratégiák megválasztását, berendezések pótlási rendjét tárgyalja.

A játékelméleti rész lényegében a kétszemélyes játékok elméletén épül fel. Csak a kötet utolsó három fejezete utal igen röviden a folytonos, valamint az n-személyes játékok néhány problémájára. Alkalmazási példái igen fiktívek, érdekes azonban a statisztikai döntéselmélettel való kapcsolatnak és a szekvenciális játékoknak a bemutatása.

A kötet szép kivitelű, és az első kötettel egyetemben hasznos lehet mindazok számára, akik első lépéseiket kívánják megtenni, áttekintést akarnak szerezni az operációkutatás fiatal, de máris gazdag irodalmában és lehetőségeiben. Sajnálatos viszont, hogy a fordító a magyar nyelvű szakirodalomban már meghonosodott kifejezésektől néhol eltérő terminológiát alkalmaz.

B. A.

HÍRADÓ

Matematikai-közgazdasági tanácskozás Freibergben (NDK)

1968. október 3. és 5. között rendezte a Német Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai és Mechanikai Intézete és az Állami Tervbizottság Közgazdasági Kutató Intézete — több más intézménnyel közösen — az MKÖ (Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie) II. konferenciájának tanácskozásait. A házigazdai tisztet a patinás múltú freibergi Bányászati Akadémia kollektívája töltötte be.

A konferencián mintegy 700 NDK-beli matematikus, közgazdász, statisztikus, tervező és számítógép-szakember mellett szovjet, csehszlovák, magyar és nyugatnémet vendégek vettek részt. A konferencián megjelent és felszólalt Kantorovics professzor is.

Az MKÖ első, 1964-ben tartott tanácskozása óta az NDK-ban ugrásszerűen fejlődött a matematikai és számítógépes módszerek közgazdasági felhasználásának kutatása és gyakorlati alkalmazása. A freibergi konferencia e fejlődés hű képét adta.

A konferencián négy szekció működött:

1. Matematikai alapok.
2. Kibernetika.
3. Mikroökonómiai alkalmazások.
4. Makroökonómiai alkalmazások.

Az előadók elméleti jellegű eredményekről és gyakorlati alkalmazásokkal összefüggő kutatásokról számoltak be.

Több előadás igen élénk vitát, nemegyszer heves ideológiai diszkussziót váltott ki. A referátumokból kitűnt, hogy német kollégáink jól ismerik a baráti országokban folyó matematikai-közgazdaságtani kutatásokat, és igyekeznek azok tapasztalatait saját munkájukban hasznosítani. Kétségtelen például, hogy a lengyel gazdaságkibernetikai kutatások és a magyar kétszintű tervezéssel kapcsolatos kutatások serkentő hatást gyakorolnak az NDK-ban folyó munkákra.

Magyar részről Bod Péter, az MTA Matematikai Kutató Intézetének tudományos főmunkatársa és Gyurkó Lajos, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa vett részt a konferencián.

B. P.

Az ENSZ Európai Gazdasági Bizottsága országai Gazdasági Főtanácsadóinak VI. Konferenciája

Az ENSZ Európai Gazdasági Bizottsága rendezésében 1968. november 4—9. között Genfben konferenciát tartottak, amelyen a többszintű tervezés és döntéshozatal kérdéseit vitatták meg. E téma nemcsak a szocialista országok részéről keltett nagy érdeklődést, ahol — a gazdasági reformok következtében — a döntéshozatali szintek átalakulása folyamatban van, hanem a nyugati országok részéről is.

A többszintű tervezés és döntéshozatal bonyolultsága, szerteágazó volta miatt a téma alcsoportokban került napirendre. Ezek az alcsoportok a következők voltak.

— Az átfogó (népgazdasági) tervek kidolgozása és a gazdasági döntések.
— Az átfogó (népgazdasági) tervek végrehajtása és a gazdasági döntések.
— A regionális tervek és a gazdasági döntések.
— A tervek és a gazdasági döntések az alapvető gazdasági és szociális szolgáltatások területén.
— A többszintű tervezés és döntéshozatal modellrendszerei.

A bevezető tanulmány: *A többszintű tervezés és döntéshozatal* megvitatása után, amelyet J. MARGOLIS (USA, Stanford Egyetem) és W. TRZECIAKOWSKI (Lengyelország, Külkereskedelmi Kutató Központ) készített, a konferencia a részt vevő országok tanulmányait vitatta meg.

Magyar részről két tanulmány szerepelt: az egyik a többszintű tervezés és döntéshozatal kérdéseivel foglalkozott az új gazdasági mechanizmusban, a másik a kétszintű népgazdasági programozás (1966—70) főbb tapasztalatait összegezte.

A konferenciára benyújtott tanulmányokat, valamint a vita alapján levont következtetéseket az Európai Gazdasági Bizottság Titkársága a jövő évben önálló kiadványban teszi közzé. (Megemlítem, hogy a Gazdasági Főtanácsadók IV., 1964. évi konferenciájának anyaga — Macro-Economic Models for Planning and Policy-Making, United Nations, Geneva — 1967-ben jelent meg.)

A konferencián 25 ország és néhány nemzetközi gazdasági szervezet képviseletében mintegy 70 gazdasági tanácsadó vett részt. Hazánkat Ganczer Sándor, a Tervgazdasági Intézet igazgatója, Gadó Ottó, az Országos Tervhivatal főosztályvezetője és Báger Gusztáv a Tervgazdasági Intézet mb. osztályvezetője képviselte.

B. G.

Tudósítás a Közgazdasági Társaság matematikai közgazdasági szakosztályának életéről

1968 októberében — a Közgazdasági Társaság közgyűlése előtt — újjáválasztottuk szakosztályunk vezetőségét. A szakosztály elnöke Bod Péter, alelnöke Szakolczai György lett. A vezetőség megválasztásánál fontos szempont volt annak biztosítása, hogy a testület — lehetőség szerint — valamennyi érdekelt intézményt képviselje. Az új tagokkal kibővített vezetőség a következő:

Báger Gusztáv	Tervgazdasági Intézet
Bod Péter	Matematikai Kutató Intézet
Bródy András	Közgazdaságtudományi Intézet
Cságoly Ferenc	NIM Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézet
Deák Jánosné	Pénzügyminisztérium
Éltető Ödön	Központi Statisztikai Hivatal
Ganczer Sándor	Tervgazdasági Intézet
Váginé Jónás Anna	Tervgazdasági Intézet
Kornai János	Közgazdaságtudományi Intézet
Krekó Béla	Egyetemi Számítóközpont
Meszéna György	Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem
Nagy András	Konjunktúra és Piackutató Intézet
Simon György	Közgazdaságtudományi Intézet
Szakolczai György	Infelor
Tardos Márton	Konjunktúra és Piackutató Intézet
Theisz Ede	Központi Statisztikai Hivatal
Ziermann Margit	Országos Tervhivatal

Szakosztályunk is, mint a Közgazdasági Társaság többi szakosztálya, társadalmi-egyesületi bázis, amely arra hivatott, hogy elősegítse a hazai tapasztalatok megismerését és megvitatását, valamint a külföldi eredmények átvételét. Céljaink között szerepel, hogy más szakosztályokkal is kapcsolatba kerüljünk, megismerkedjünk munkájukkal és segítsük őket a matematikai módszerek tudományos színvonalon történő alkalmazásában. E célkitűzés jegyében 1968. október végén a matematikai-közgazdasági, a népgazdaságtervezési és a statisztikai szakosztályok közösen szervezték meg két holland professzor, J. SANDEE és T. KLOEK előadását, melyet az „Ökonometriai modelleknek a holland gazdaságpolitikában való felhasználásáról", illetve a „Keresleti függvényekről" tartottak. FILEP GYÖRGY „A kohó- és gépipari vállalatok IV. ötéves terveinek meghatározása lineáris programozási modellek alapján" című előadását az ipargazdasági és népgazdaságtervezési szakosztályok tagjainak részvételével terveztük.

A Közgazdasági Társaság Elnökségét régóta foglalkoztatta az intézményesített közgazdász-továbbképzés. Ennek érdekében született meg az a döntés, hogy Közgazdász Továbbképző Intézetet hozzanak létre. Az intézet munkáját azzal kívánjuk segíteni, hogy felmérjük tagságunk érdeklődését a továbbképzés iránt. Emellett a szakosztályon belül — speciális szemináriumok szervezésével is — megpróbáljuk a legújabb matematikai módszereket megismertetni.

Szakosztályunk programjának fontos része, hogy ez év őszére több napos tudományos kollokviumot tervezünk *A hosszútávú népgazdasági tervezés és az ún. „gazdasági szabályozók" tervezésének matematikai modellezésével összefüggő problémák* címmel. Ismeretes, hogy e témakörben számos tudományos publikáció született és széles körben folynak kutatások. A kutatók közül jó néhányat már felkértünk, hogy eredményeikről tartsanak előadást a kollokviumon.

A Közgazdasági Társaság 1968. októberi közgyűlésén az Elnökség beszámolója hangsúlyozta a pályázatok kiírásának fontosságát. Szakosztályunk e gondolat jegyében pályázatot szándékozik hirdetni a matematikai módszerek közgazdasági alkalmazásáról. Pályázatunk eredményesen szolgálhatja a szakosztály tagjai közötti kapcsolatok elmélyítését, és elősegítheti tehetséges fiatal matematikai közgazdászaink érvényesülését.

Szakosztályunk együttműködik a hazai rokon területeken működő egyesületekkel — többek között a Bolyai Társulattal és a Neumann Társulattal — és feladatának tekinti a matematikai közgazdászok nemzetközi szervezeteivel való kapcsolatok kiépítését és elmélyítését. Segíteni kívánjuk tagjaink részvételét a nemzetközi rendezvényeken.

Új matematikai közgazdasági folyóiratunknak, a SZIGMÁnak megindításában szakosztályunk kezdeményező szerepet játszott. Jelentős szerkesztő bizottsági funkciót vállalt vezetőségünk a folyóirat további gondozásában is. Többek között tervezzük, hogy a folyóirat egyes számainak megjelenése után kritikai értékelést végzünk.

Végül megjegyzem: szeretnénk új tagokat bevonni a Szakosztály munkájába. Elsősorban azok közül, akik az elmúlt években kezdtek foglalkozni matematikai módszerek alkalmazásával. Különösen fontosnak tartjuk fiatal terv-matematikus kollégáink aktivizálását; a Fiatal Közgazdászok Klubjával és a Közgazdaságtudományi Intézet KISZ-szervezetével együttműködve a fiatal kutatók számára önálló tudományos fórum megteremtését is tervezzük.

Kovács Ilona
a szakosztály titkára

Az Ökonometriai Társaság megbízása

A nemzetközi Ökonometriai Társaság (Econometric Society) lehetővé tette, hogy magyarországi tagjai tagdíjukat forintban fizessék be. A tagsággal kapcsolatos szervezési teendők ellátásával a Társaság dr. MARTON ÁDÁMOT (Központi Statisztikai Hivatal, Bp. II., Keleti Károly u. 5—7.) bízta meg.

Szerkesztőségi hír

Lapunk szerkesztője, MARTOS BÉLA (Közgazdaságtudományi Intézet) az Egyesült Államokba utazott, ahol a Purdue Egyetemen (Lafayette, Indiana) vendégprofesszorként előadásokat tart. Távollétében, februártól júniusig, a szerkesztői teendőket BOD PÉTER (Matematikai Kutató Intézet) és BRÓDY ANDRÁS (Közgazdaságtudományi Intézet) látja el.

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya és a SZIGMA szerkesztősége

pályázatot hirdet

„Matematikai (operációkutatási) módszerek konkrét felhasználása vállalati gazdasági döntések előkészítésében" címmel

Pályázati feltételek:

1. A pályázaton egyénileg vagy csoportosan bárki részt vehet.
2. A pályaművek terjedelme lehetőleg a 100 gépelt oldalt ne haladja meg. A felhasznált irodalmat fel kell tüntetni.
3. Pályázni csak eddig nem publikált pályaművekkel lehet; disszertációs munkák a pályázatból ki vannak zárva.
4. A Bíráló Bizottság nem javasol jutalmazásra olyan tanulmányokat, amelyekben kizárólag a szakirodalomra támaszkodó modellelképzelések és javaslatok találhatók, és hiányzik belőlük a vizsgált vállalat adottságainak a konkrét elemzése. A gyakorlatban kipróbált, bevált és ténylegesen felhasználásra kerülő módszereket ismertető tanulmányokat előnyben részesítjük a kizárólag elméleti értékű eredményeket tartalmazó tanulmányokkal szemben.
5. A pályaműveket lezárt borítékban, jeligével ellátva 3 példányban 1969. augusztus 31-ig kell a SZIGMA szerkesztőségéhez (Budapest V., Münnich Ferenc u. 7. II. e.) eljuttatni. A borítékon feltünően meg kell jelölni: „Pályázat". A pályázathoz jeligével ellátott lezárt borítékot kell mellékelni, amely a szerző (szerzők) nevét, lakáscímét, munkahelyét és beosztását tartalmazza. A jeligés borítékokat a Bíráló Bizottság a díjak odaítélése után és csak díjazott, vagy dicséretben részesített pályázatok esetén bontja fel.
6. A pályadíjakat az erre felkért Bíráló Bizottság javaslatai alapján a Matematikai Közgazdasági Szakosztály vezetősége ítéli oda 1969. november 30-ig. Eredményhírdetésre 1969. decemberében a szakosztály nyilvános ülésén kerül sor.
7. A pályadíjak a következők:

   I. díj 10 000.- Ft.
   II. „ 5 000.- „

   A szakosztály vezetősége a pályaművek alkalmasságától függően további néhány pályázatot dícséretben és 1000—2000 forintos jutalomban részesíthet.
8. A díjazott pályamunkákat szerzőik a pályázat elbírálása után saját belátásuk szerint publikálhatják. Kívánságra a tanulmányokat, vagy egyes részeiket a SZIGMA külön szerzői honorárium mellett közli.
9. A pályázat részleges sikertelensége esetére a Szakosztály vezetősége fenntartja magának azt a jogot, hogy a díjakat egyáltalában ne, illetve csökkentett összegben, vagy más megosztásban adja ki.
10. A pályázattal kapcsolatban szükség esetén felvilágosítást nyújt Kovács Ilona, a Matematikai Közgazdasági szakosztály titkára. (MTA. Közgazdaságtudományi Intézet. Tel: 127—294)

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai
Közgazdasági Szakosztálya
és a
SZIGMA Szerkesztősége

PÁLYÁZAT

az Econometric Society 1969. évi európai konferenciájára való kiküldésre

Az Econometric Society ezévi európai konferenciáját szeptemberben rendezi Bruxelles-ben. Szakosztályunk vezetőségének előreláthatóan lehetősége lesz arra, hogy egy vagy két matematikus-közgazdász szakember részvételének a devizatámogatását előmozdítsa.

Ezuton hívjuk fel olvasóink figyelmét erre a lehetőségre. Azok a szakemberek, akik a konferencián részt kívánnak venni és kiutazásukat munkahelyük nem tudja biztosítani: f. év április hó 30.-ig írásban kérhetik a fentjelzett támogatás elnyerését.

A támogatás elnyerése érdekében írt jelentkezésben kérjük közölni a pályázó személyi adatait (név, életkor, munkahely és munkakör, iskolai végzettség, tudományos fokozat, nyelvtudás) valamint a részvételi szándék speciális indokait (a konferencián előadást kíván tartani, a konferencia anyaga kutatási témájába vág, stb.).

A szakosztály vezetősége május hó folyamán dönt a támogatási kérelmek ügyében. A jelentkezéseket közvetlenül a szakosztály elnökének kérjük megküldeni (Bod Péter. MTA Matematikai Kutató Intézet. Bp. V. Reáltanoda utca 13.).

Magyar Közgazdasági Társaság
Matematikai-Közgazdasági
Szakosztály

KORNAI JÁNOS

MATHEMATICAL PLANNING OF STRUCTURAL DECISIONS — MATHEMATISCHE METHODEN BEI DER PLANUNG DER ÖKONOMISCHEN STRUKTUR

(A gazdasági szerkezet matematikai tervezése)

Angol nyelven 526 oldal · 61 ábra · 55 táblázat · Kötve 180,— Ft
Német nyelven 492 oldal · 62 ábra · 55 táblázat · Kötve 130,— Ft

A mű témája egy-egy ágazat vagy egy egész népgazdaság szerkezetére vonatkozó tervek matematikai megalapozásának módszertana. Olyan matematikai modelleket ismertet, amelyek felhasználják a hagyományos tervezés által rendszeresen összeállított adatokat; e munka eredményei közvetlenül összehasonlíthatók a hagyományos módon megalapozott tervekkel.

*

DAVID RICARDO

MEGJEGYZÉSEK MALTHUS „A POLITIKAI GAZDASÁGTAN ELVEI" CÍMŰ MŰVÉHEZ

(Malthus könyvének szövegével)

Kb. 450 oldal · Kötve kb. 60,— Ft
(Sajtó alatt)

A kötet voltaképpen két művet tartalmaz: Thomas Robert Malthus (1766—1843) *A politikai gazdaságtan elvei* c. könyvét és David Ricardo (1772—1823) hozzáfűzött, erősen polemikus jellegű *Megjegyzéseit*. Malthus könyve már eleve a Ricardo nézeteivel való vitában született. Érthető tehát, hogy Ricardo alapos bírálatnak vetette alá Malthus munkáját; különösen Malthus értékmérőjével, továbbá földjáradék-elméletével és a túlságos tőkefelhalmozás hátrányos hatásáról vallott felfogásával nem értett egyet. A Malthus—Ricardo-vita nemcsak tartalmi szempontból érdekes, hanem módszertanilag is: bepillantást enged a klasszikus közgazdaságtan két jelentős képviselőjének munka- és vitamódszerébe.

Megjelent

A Magyar Tudományos Akadémia

Közgazdaságtudományi Intézetének Közleményei c. sorozatban:

1

Schmidtné Kígyóssy Éva

A SZAKKÉPZÉS TÁRSADALMI RÁFORDÍTÁSAI

92 oldal · Ára 25, – Ft

2

Ihrig Károly

A FÖLDÁR ÉS A FÖLDÉRTÉK A KAPITALIZMUSBAN

Szabó Gábor

A FÖLD GAZDASÁGI ÉRTÉKELÉSÉRŐL A SZOCIALIZMUSBAN

112 oldal · Ára 25, — Ft

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat nyomdába érkezett: 1969. I. 10. – Példányszám: 1000 – Terjedelem: 7,7 (A/5) ív
69.66904 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

SZIGMA

I.-II. évfolyam

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

SZIGMA

VOL. I.—II.

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

СИГМА

Том I.—II.

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

Tájékoztató a szerzők számára

Folyóiratunk rovatai: Cikkek — Fogalmak és Módszerek — Könyvekről — Híradó.

A cikkek maximális terjedelme egy szerzői ív, 32 oldal.

A cikket 3 példányban, egy—másfél oldalas magyar nyelvű tartalmi kivonattal kérjük.

Gépelése: 25 soros szabványoldalon, soronként átlag 50 betűvel, 2-es sortávolsággal. Gépelés csak a papír egyik oldalán lehet. Mondatok, hosszabb szövegek aláhúzását kerüljük, ha feltétlenül szükséges, egyes szavakat vagy kifejezéseket húzzunk alá. **Félkövér** szedést kétszeres, *kurzív* szedést egyszeres aláhúzással jelöljünk. (A matematikai jeleket egyéb előírás hiányában kurzívval szedjük, ezt tehát külön nem kell jelölni.)

Formulák sorszámozása: a tükör bal oldalán, zárójelben.

Lábjegyzetek: számozva, felső indexként, zárójel nélkül.

Irodalmi hivatkozások: szöveg közben, szögletes zárójelben.

A lábjegyzeteket és az irodalmi hivatkozásokat külön-külön oldalra gyűjtsük ki.

Az irodalmi hivatkozások formája:

Könyveknél: ERDŐS, P.: Adalékok a mai tőkés pénz, a konjunktúraingadozások és a gazdasági válságok elméletéhez. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 431 p.

Folyóiratcikkeknél: MESZÉNA, GY.: Számítások Burns-sorokkal a természetes vizekben található uránnyom statisztikai értékeléséhez. ATOMKI Közlemények, 1960. 2. sz. 99—107. p.

A formai szempontból nem megfelelő cikkeket újra kell gépeltetni, ebben az esetben a gépelési költség a szerzőt terheli.