SZIGMA

Matematikai Közgazdasági folyóirat

*

E szám szerzői:

FARAGÓ KÁLMÁN, az Építésgazdasági és Szervezési Intézet tudományos segídmunkatársa, GYULAI ANDRÁS, az Építésgazdasági és Szervezési Intézet tudományos segédmunkatársa, HALABUK LÁSZLÓ, a Központi Statisztikai Hivatal osztályvezetője, HÓDI GYÖRGY gépészmérnök, ERŐTERV, HUNYADI LÁSZLÓ, az INFELOR csoportvezetője, JÁNDY GÉZA, a műszaki tudományok doktora, egyetemi tanár, Budapesti Műszaki Egyetem. SIMONOVITS ANDRÁS, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos gyakornoka, STAHL JÁNOS, az INFELOR osztályvezetőhelyettese, SZAKOLCZAI GYÖRGY, az INFELOR osztályvezetője, SZÉKELY BÉLA, az Országos Tervhivatal főelőadója, ZIERMANN MARGIT, az Országos Tervhivatal csoportvezetője.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI. Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215–96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.
Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488., az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban: Budapest V., Váci utca 22. Telefon: 185–612.
Előfizetési díj egy évre: 40,– Ft

Székely Béla

Mátrixok egy speciális diadikus felbontása és ennek néhány alkalmazása az összehasonlító elemzésben

A cikkben a matrixok diadikus felbontásáról szóló általános ismertetés után először bemutatjuk egy **A** matrix olyan speciális felbontását, ahol a keletkező diádok sor, illetőleg oszloptényezői az **AA**′ illetőleg az **A**′**A** matrixok saját vektorai. A második részben megpróbáljuk magyarázni ezen felbontásból keletkezett diádok, mint segítőeszközök, használhatóságát az összehasonlító elemzésben.

Bevezetés

Röviden ismertetjük a matrixok diadikus felbontását és a későbbi bizonyításokban használatos jelöléseket, fogalmakat, tételeket.

A bevezetésben mindvégig Egerváry Jenő [2], illetőleg [6] munkáira támaszkodunk, ezért az egyes tételek, bizonyítások forrását külön nem adjuk meg.

Diadikus szorzaton értjük azt a **D** matrixot, amely úgy áll elő, hogy egy sorvektort szorzunk balról egy oszloppal a következő szabály szerint:

$$\mathbf{D} = [\mathrm{d}_{ij}] = uv' \quad \text{esetén} \quad \mathrm{d}_{ij} = v_i u_j, \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, n \\ j &= 1, 2, \ldots, m. \end{aligned}$$

Egy **A** matrix diadikus felbontásán értjük az **A** matrix

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i' \tag{1}$$

alakú előállítását, ahol **A** tetszőleges n×m-es matrix, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ n elemű oszlop, $v_1', v_2', \ldots, v'_k$ m elemű sorvektorok. (1)-ben k-ra nem teszünk fel $k > 0$-n kívül más feltételt, így a felbontás nyilvánvalóan nem egyértelmű. Felírható egy tetszőleges **A** matrix minimális számú diád összegeként is.

Legyen **A** egy r rangú matrix. Bontsuk ezen **A** matrixot egy r rangú **B** és egy r rangú **C**′ matrix szorzatára úgy, hogy

$$\mathbf{A} = \mathbf{BC}' = \sum_{i=1}^{r} u_i v_i'$$

teljesüljön, ahol u_i vektorok **B** oszlopai v_i' vektorok **C**′ sorai $i = 1, 2, \ldots, r$. **B** oszlopainak, illetve **C**′ sorainak száma tehát r.

Az előző felbontást alkalmas módszer segítségével elvégezve **A** matrix rangja automatikusan adódik, ezért sokszor éppen az előállító diádok minimális számát tekintik a rang definíciójának.

A minimális diadikus felbontásra bemutatunk egy módszert:

Ha **A** rangja $\varrho(\mathbf{A}) \geq 1$, akkor van legalább egy 0-tól különböző $a_{\beta\gamma}$ eleme. Képezzük az

$$a_{\beta\gamma}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\gamma} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \cdot & \dots & a_{2\gamma} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{\beta 1} & \dots & \dots & a_{\beta\gamma} & \dots & a_{\beta m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n\gamma} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{1\gamma} \\ a_{2\gamma} \\ \vdots \\ \vdots \\ \cdot \\ a_{n\gamma} \end{bmatrix} [a_{\beta 1}\ a_{\beta 2} \dots a_{\beta n}] =$$

$$= \begin{bmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & 0 & \dots & a^1_{1m} \\ a^1_{21} & a^1_{22} & \dots & 0 & \dots & a^1_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a^1_{n1} & a^1_{n2} & \dots & 0 & \dots & a^1_{nm} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \qquad (2)$$

különbséget.

Az így nyert $\mathbf{A}_1$ matrix egy sora és egy oszlopa csupa 0 elemet tartalmaz, a többi eleme pedig az **A** matrix elemeiből képzett másodrendű determinánsok. Ha a fenti eljárást alkalmazzuk $\mathbf{A}_1$ majd a keletkezett $\mathbf{A}_2$, A_3, stb. matrixokra r lépés után, ahol r az **A** matrix rangja, **0** matrixhoz jutunk, s ezzel a felbontásnak a végére értünk.

Egy adott **A** matrixnak minimális számú diád összegére való felbontása az előbbiek szerint, mivel a generáló elem tetszőleges, nem egyértelmű. Kimutatható azonban, hogy ha egy $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{V}'$ minimális előállítás már ismert, akkor abból az összes minimális előállítások az

$$\mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{M})\,(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{V}')$$

alakban adódnak, ahol **M** tetszőleges r-ed rendű nem szinguláris matrix.

A minimális diádfelbontás tehát feltételezi, hogy minden egyes leválasztott diád az eredeti **A** matrix rangját eggyel csökkenti. Egerváry kidolgozott egy olyan rangcsökkentő eljárást, amely a diadikus felbontás általánosításának tekinthető.

Az eljárás a következő *lemmán* alapul:

Ha valamely **A** matrixból levonunk egy uv' diádot, **A** rangja akkor, és csak akkor csökken eggyel, ha az uv' diád

$$uv' = \frac{\mathbf{A}xy'\mathbf{A}}{y'\mathbf{A}x}$$

alakban írható fel, ahol x és y tetszőleges, csupán az $y'\mathbf{A}x \neq 0$ feltételt kielégítő vektorok. Ezek szerint, ha kiindulunk egy tetszőleges r rangú **A** matrixból, azt r lineárisan független diád összegére tudjuk bontani az

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k x_k y'_k \mathbf{A}_k}{y'_k \mathbf{A}_k x_k} \qquad k = 1, 2, \dots, r$$

rekurzív eljárással. Az eljárásban $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ és x_k, y_k tetszőleges, csupán az $y'_k \mathbf{A}_k x_k \neq 0$ feltételt kielégítő vektorok.

Ekkor a minimális diadikus felbontást a következőképpen kapjuk:

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\mathbf{A}_k x_k y'_k \mathbf{A}_k}{y'_k \mathbf{A}_k x_k}$$

Az $x_k = e_k$, $y'_k = e'_k$ választás mellett éppen a (2) felbontást kapjuk.

Jelöljük a kvadratikus $\mathbf{A}$ matrix diagonális elemeinek összegét, nyomát, sp $\mathbf{A}$-val, az összes elemei négyzetösszegéből vont négyzetgyököt, a mátrix *euklideszi normáját* pedig $||\mathbf{A}||$-val. További bizonyításainkban többször felhasználjuk a következő két összefüggést:

1.* $||\mathbf{A}||^2 = \text{sp}\ \mathbf{A}\mathbf{A}'$

2.* $\text{sp}\ \mathbf{A}\mathbf{B} = \text{sp}\ \mathbf{B}\mathbf{A}$

melyek megtalálhatók a [4] illetőleg [5] munkákban.

Egy speciális diadikus felbontás.

Tekintsük az $\mathbf{A}$ matrix összes

$$\mathbf{A} = uv' + \mathbf{R} \tag{3}$$

alakú előállításait.

Az előbbiek szerint az ilyen előállításokban

$$\varrho(\mathbf{R}) = \varrho(\mathbf{A}) - 1$$

akkor áll fenn, ha uv' felírható

$$uv' = \frac{\mathbf{A}wz'\mathbf{A}}{z'\mathbf{A}w} \tag{4}$$

alakban, ahol w és z tetszőleges, csupán a

$$z'\mathbf{A}w \neq 0 \tag{5}$$

feltételt kielégítő vektorok.

Vizsgáljuk meg az $\mathbf{A}$ matrix olyan (3) alakú felbontását, amelyekre (4) és (5) is teljesül. Nevezzük az ilyen előállításokat *rangcsökkentő diád-leválasztásnak*. Mivel (2)-ből kitűnik, hogy az ilyen diádok meghatározása nem egyértelmű, módunkban áll az uv' diád rangcsökkentő hatásán kívül még más feltételt is előírnunk rá.

Be fogjuk bizonyítani a következő tételt:

Tétel: az $\mathbf{A}$ matrixnak

$$\mathbf{A}_k = u_{k+1} v'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}\,; \quad ||\mathbf{A}_{k+1}|| = \min \tag{6.a}$$

$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$, alakú rekurzív diadikus felbontása esetén az u_k az $\mathbf{A}\mathbf{A}'$ a v_k pedig az $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrix sajátvektora.

A tétel bizonyítása előtt bebizonyítunk két segédtételt.

1. segédtétel Az

$$\mathbf{A} = uv' + \mathbf{R} \qquad \|\mathbf{R}\| = \min \tag{6}$$

felbontás uv'-ben egyértelmű.

Bizonyítás: Átrendezve (3)-at

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} - uv',$$

mindkét oldal normanégyzetét véve

$$\|\mathbf{R}\|^2 = \|\mathbf{A} - uv'\|^2 = \operatorname{sp}[(\mathbf{A} - uv')(\mathbf{A}' - vu')] \tag{7}$$

az ismert 1* összefüggés alapján.

Minimalizálnunk kell tehát a (7) jobboldalát. Feltételezve, hogy u rögzített vektor, határozzuk meg v-t úgy, hogy (7) jobboldala a minimumát vegye fel. Elvégezve a kijelölt műveletet (7)--ben, majd egyszerűsítve:

$$\mathrm{F} = \|\mathbf{A} - uv'\|^2 = \operatorname{sp}\mathbf{AA}' + \operatorname{sp} u'uv'v - 2\operatorname{sp} u'\mathbf{A}v,$$

Deriválva v szerint az

$$\mathrm{F}_1 = \operatorname{sp}\mathbf{AA}' + u'uv'v - 2u'\mathbf{A}v$$

kifejezést:

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} = (\operatorname{sp}\mathbf{AA}' + u'uv'u - 2u'\mathbf{A}v)^* = 2u'uv' - 2u'\mathbf{A}.$$

Minimum hely keresés esetén

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v} = 2u'uv' - 2u'\mathbf{A} = 0,$$

és ez teljesül, ha

$$v' = \frac{u'\mathbf{A}}{u'u} \tag{8}$$

Vizsgáljuk továbbá, hogy az így kapott v rögzítése mellett milyen u értéknél veszi fel (7) jobboldala minimumát. Helyettesítsük vissza (8)-at (7)-be:

$$\|\mathbf{R}\|^2 = \operatorname{sp}\left[\left(\mathbf{A} - \frac{uu'\mathbf{A}}{u'u}\right)\left(\mathbf{A}' - \frac{\mathbf{A}'uu'}{u'u}\right)\right] =$$

$$= \operatorname{sp}\left(\mathbf{AA}' - \frac{\mathbf{AA}'uu'}{u'u} - \frac{uu'\mathbf{AA}'}{u'u} + \frac{uu'\mathbf{AA}'uu'}{(u'u)^2}\right).$$

Képezve tagonként a nyomot és a negyedik tagra alkalmazva a 2* összefüggést, majd egyszerűsítve:

$$\|\mathbf{R}\|^2 = \operatorname{sp}\left(\mathbf{AA}' - \frac{\mathbf{AA}'uu'}{u'u}\right).$$

A második tagra alkalmazva az előbb említett tételt, mivel az konstans

$$\|\mathbf{R}\|^2 = \operatorname{sp}\mathbf{AA}' - \frac{u'\mathbf{AA}'u}{u'u}, \tag{9}$$

$\mathbf{AA}'$ matrix pozitív szemidefinit lévén sp $\mathbf{AA}' \neq 0$ és

$$\frac{u'\mathbf{AA}'u}{u'u} \geqq 0. \tag{10}$$

(9) akkor veszi fel minimumát, mikor a (10) Rayleigh hányados felveszi a maximumát. Ez pedig akkor következik be, ha u az $\mathbf{AA}'$ matrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékéhez tartozó sajátvektor. Felírható tehát v az előbbiek alapján

$$\mathbf{AA}'u = \alpha u$$

segítségével

$$v = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\mathbf{A}'\mathbf{AA}'u}{u'u}$$

alakban, amelyből kitűnik, hogy v visszahelyettesítésével

$$\alpha v = \mathbf{A}'\mathbf{A}v$$

szerint v sajátvektora az $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrixnak. Így bebizonyítottuk, hogy a (6) felbontás uv'-ben egyértelmű.

A teljes felbontás egyértelműsége érdekében belátjuk, hogy:

2. *segédtétel* Az uv' diád az $\mathbf{A} = uv' + \mathbf{R}$ felbontásban $\|\mathbf{R}\| = \min$ esetén rangcsökkentő.

Bizonyítás: Be kell látni, hogy a (6)-ban előállt uv' diád előállítható

$$uv' = \frac{\mathbf{A}wz'\mathbf{A}}{y'\mathbf{A}w}$$

alakban. Lássuk be, hogy

a) A v' vektor $z'\mathbf{A}$ alakú.

(8)-ból
$$v' = \frac{u'\mathbf{A}}{u'u}$$

és ebből

$$\frac{u'}{u'u} = z'$$

helyettesítéssel a kívánt eredményt kapjuk.

b) Másodszor be kell látnunk, hogy az u vektor $\mathbf{A}w$ alakú. Segítségül véve, hogy u (6) teljesülése esetén $\mathbf{AA'}$ legnagyobb abszolút értékű sajátértékéhez tartozó sajátvektor,

$$\mathbf{AA'}u = \alpha u.$$

$\mathbf{AA'} \neq 0$; $\alpha \neq 0$ lévén

$$\mathbf{A}\left(\frac{1}{\alpha}\mathbf{A'}u\right) = u\,,$$

ahonnan

$$\frac{1}{\alpha}\mathbf{A'}u = w$$

helyettesítésével u tényleg $\mathbf{A}w$ alakú.

c) Meg kell még vizsgálni, hogy

$$z'\mathbf{A}w \neq 0 \tag{11}$$

teljesül-e?

$$z' = \frac{u'}{u'u} \quad \text{és} \quad w = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A'}u$$

esetén

$$z'\mathbf{A}w = \frac{u'\mathbf{AA'}u}{u'u}$$

amiből rögtön következik (11), mivel éppen (10) kvadratikus alak $\frac{1}{\alpha}$ -szorosáról van szó és (11) nem lehet zérus, mivel (10) éppen maximumát veszi fel.

Bebizonyítottuk tehát, hogy a (6) előállításban szereplő uv' diád rangcsökkentő.

Ha már most a (6) típusú felbontást alkalmazzuk az $\mathbf{R}$ matrixra, majd az így keletkezett $\mathbf{R}_1$ matrixra, stb.:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A} = u_1v_1 + \mathbf{R}_1 & \|\mathbf{R}_1\| = \min \\ \mathbf{R} = u_2v_2 + \mathbf{R}_2 & \|\mathbf{R}_2\| = \min \\ \vdots & \\ \mathbf{R}_{k-1} = u_kv_k' + \mathbf{R}_k & \|\mathbf{R}_k\| = \min\,. \end{array} \tag{12}$$

A megfelelő visszahelyetesítésekkel az $\mathbf{A}$ matrix

$$\mathbf{A} = u_1v_1' + u_2u_2' + \ldots + u_kv_k' + \mathbf{R}_k \tag{13}$$

alakú diadikus felbontását nyerjük, amely előállítás éppen megfelel (6.a)-nak és mivel a 2. *segédtétel* szerint

$$\varrho(\mathbf{R}_k) = \varrho(\mathbf{R}_{k-1}) - 1,$$

$$k = \varrho(\mathbf{A}) \quad \text{esetén} \quad \mathbf{R}_k = 0\,.$$

(13) az $\mathbf{A}$ matrix egyértelmű minimális számú diádfelbontását adja.

Lássuk ezek után a *főtétel* bizonyítását.

A főtételben azt mondtuk ki, hogy a (12) felbontás esetén az u_k, v_k vektorok az $\mathbf{AA}'$ illetőleg az $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrixok sajátvektorai. *Az első segédtételből* láthatjuk, hogy a (6)-os felbontásban — mely a (12)-es felbontás első lépéseként tekinthető — keletkező u, v' vektorok az $\mathbf{AA}'$ illetőleg $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrixok saját vektorai. Ezek után azt kell belátnunk, hogy a további lépésekben — most már a maradék matrixokból — keletkező u_k, v_k' vektorok szintén $\mathbf{AA}'$ illetőleg $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ sajátvektorai.

Tudjuk az *első segédtételből*, hogy az első diád u_1 vektora az $\mathbf{AA}'$ matrix legnagyobb abszolút értékű sajátértékéhez tartozó sajátvektor. Be kell bizonyítanunk, hogy u_1 sajátvektora $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1{}'$ matrixnak is, méghozzá a $\alpha = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektora. Ebben az esetben u_1 ortogonális u_2-re, amely az $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1{}'$ matrix legnagyobb abszolút értékéhez tartozó sajátvektor, mivel $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1{}'$ sajátvektorainak normáltjai ortonormált rendszert alkotnak. Tehát bizonyítanunk kell, hogy $\mathbf{AA}'$-ből $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1{}'$ defláció útján keletkezett, vagyis

$$\mathbf{AA}' - \gamma x y' = \mathbf{RR}_1',$$

ahol x, illetve y az $\mathbf{AA}'$ jobb, illetve baloldali sajátvektorai [5].

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1' = \left(\mathbf{A} - \frac{uu'\mathbf{A}}{u'u}\right)\left(\mathbf{A}' - \frac{\mathbf{A}'uu'}{u'u}\right).$$

Elvégezve a kijelölt műveletet és alkalmazva az $\mathbf{AA}'u = \alpha\, u$-t,

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1' = \mathbf{AA}' - \alpha \frac{uu'}{u'u}, \tag{14}$$

ahol

$$xy' = uu',$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{u'u}.$$

Tehát a leválasztott diád tényezői tényleg $\mathbf{AA}'$ jobb, illetve baloldali sajátvektorai ($\mathbf{AA}'$ szimmetrikus lévén ezek egyenlők), így az eljárás tényleg defláció.

Most azt lássuk be, hogy u_1 tényleg sajátvektora $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1{}'$-nek is. (14) szerint:

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1' = \mathbf{AA}' - \alpha \frac{u_1u_1'}{u'u_1}$$

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'u_1 = \left(\mathbf{AA}' - \alpha \frac{u_1u_1'}{u_1'u_1}\right) u_1.$$

Elvégezve a szorzást és felhasználva, hogy

$$\alpha\, u_1 = \mathbf{AA}'u_1,$$

$$\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'u_1 = \mathbf{AA}'u_1 - \alpha \frac{u_1u_1'u_1}{u_1'u_1} = \alpha\, u_1 - \alpha\, u_1 = 0.$$

Mivel $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1' \neq 0$ és $u_1 \neq 0$ vektor, ez csak $\alpha = 0$ esetén lehet igaz, amiből következik, hogy u_1 $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$-nek a $\alpha = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektora.

Ebből következik, ha $\mathbf{AA}'$ sajátértékei nagyság szerint rendre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, akkor $\mathbf{R}_1\mathbf{R}_1'$ megfelelő sajátértékei $0, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$. Folytatva a deflációt, az $\mathbf{R}_k\mathbf{R}_k'$, $k = 1, 2, \ldots, r$ megfelelő sajátértékeihez tartozó sajátvektorai megegyeznek. Ezzel tételünket bebizonyítottuk.

A konkrét számítások esetén a sajátvektorok megkeresését az úgynevezett Myses iterációval végezhetjük. Az $\mathbf{AA}'$ illetőleg az $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ matrixok szimmetrikusak lévén sajátértékeik valósak és így az említett iterációs eljárás mindenesetben alkalmazható.

A módszer alkalmazása az összehasonlító elemzésben

Fenti módszer többek között alkalmazhatónak tűnik időbeli változások (pl. struktúrák időbeli alakulásának) vizsgálatára, valamint keresztmetszeti elemzésre is.

Az időbeli vizsgálat esetén valamely gazdaság vagy a gazdaság valamely része időbeli változásának közös jellemzőit keressük. Keresztmetszeti elemzés esetén különböző gazdasági egységek (pl. iparágak, országok, stb.) egy azonos időpontra vonatkozó állapotait hasonlíthatjuk össze.

A diádok rendkívül egyszerű szerkezetéből — sorai illetőleg oszlopai egymás konstansszorosai — adódik, hogy az előbb bemutatott felbontás matrixok belső arányainak feltárásához nagy segítséget nyújthat. Éppen ezért alkalmas lehet pl. input-output táblák belső arányainak elemzésére is.

Eddig a módszert gyakorlatilag két esetben alkalmaztuk. Az egyik esetben input-output táblák időbeli összehasonlítására, — ezzel az esettel a továbbiakban részletesebben foglalkozunk. A másik esetben a gazdasági fejlődésre jellemző idősorok elemzésénél vettük segédeszközül. Erről az elemzésről Rimler Judittal írott cikkünkben szeretnénk részletesen beszámolni a Szigma egy későbbi számában.

Folyamatban van ezenkívül egy nemzetközi input-output elemzés, melynél a gazdaságilag hasonló ország-csoportok kiválasztásánál ugyancsak segédeszközként alkalmazzuk a bemutatott módszert.

A következőkben egy megoldott feladat alapján megpróbáljuk ismertetni a módszer — ezen feladatra vonatkozó — közgazdasági interpretációját.

A feladat a következő:

Adott egy gazdaság, jelen esetben Magyarország I—O tábláinak egy idősora 1959-től 1964-ig, öt szektorban. Keresünk egy olyan I—O táblát, melynek eltérése (egy-egy konstans számmal való szorzás után) az eredeti egy-egy időponthoz tartozó tábláktól minimális. Terítsünk ki minden ráfordítási együttható mátrixot egy oszlop-vektorba, úgy hogy az egyes szektorokat reprezentáló oszlopok egymás alá kerüljenek. Az így keletkező oszlopok az egész népgazdaság ráfordítási struktúráját írják le egy adott évben. Ezeket az egyes táblákból keletkező vektorokat helyezzük el egy matrixba, mint oszlopokat (lásd 1. táblázat).

1. táblázat

A kiterített ráfordítási együtthatók matrixa

		1959	1960	1961	1962	1963	1964
	ipar	4145,6	4152,4	4174,4	4195,9	4184,6	4188,7
	építőip.	160,3	157,1	157,8	145,9	130,0	155,2
ipar	mezőg.	1191,5	1063,8	1066,6	1054,4	1037,4	964,6
	közl.	175,7	172,2	164,1	170,2	174,5	180,6
	egyéb	206,2	186,2	162,5	153,2	159,4	157,3
	ipar	4331,0	3981,9	4330,9	4301,5	4359,9	4438,0
	építőip.	161,7	144,1	164,1	161,5	160,0	173,5
építőip.	mezőg.	135,6	90,7	80,2	58,3	68,0	83,5
	közl.	823,8	836,9	784,4	819,0	787,7	743,7
	egyéb	243,2	257,9	218,6	180,5	185,8	160,5
	ipar	699,1	877,9	945,3	916,4	1129,2	1363,3
	építőip.	65,6	68,9	60,3	63,7	76,3	79,1
mezőg.	mezőg.	3346,3	3366,7	3499,6	3469,7	3246,3	3055,9
	közl.	5,0	15,0	29,7	16,1	16,7	17,1
	egyéb	200,2	255,3	225,1	217,9	213,3	189,8
	ipar	3104,2	2919,7	2893,8	2994,7	2756,6	2814,1
	építőip.	97,3	86,4	114,0	120,9	101,4	102,6
közlek. száll.	mezőg.	130,4	126,6	110,6	123,6	114,6	162,3
	közl.	102,7	72,6	73,5	79,6	76,6	79,3
	egyéb	89,2	109,2	89,3	78,0	86,2	93,3
	ipar	2226,5	1487,3	1907,5	1792,2	1909,4	1613,6
	építőip.	104,5	94,0	119,1	126,6	120,8	122,6
egyéb	mezőg.	121,2	86,9	78,0	99,0	96,9	90,8
	közl.	1345,0	1469,1	1478,8	1709,4	1633,3	1807,7
	egyéb	346,8	339,1	267,4	262,7	276,2	368,5

Ennek a táblának az oszlopai tehát ráfordítási struktúrák egy adott évben, sorai pedig az egyes ráfordítási együtthatók idősorai.

Az így keletkezett alapmátrixot vizsgáljuk. Az első diád leválasztása során kapunk egy a diádot generáló oszlopvektort és sorvektort (lásd 2. táblázat). Az oszlop-vektor jelenti ebben az esetben a *közös* ráfordítási struktúrát. A sorvektor azon konstansokat *(súlyokat)* tartalmazza, melyekkel végig szorozva a közös ráfordítási struktúrát, az eredeti ráfordítási struktúrák legjobb közelítését kapjuk egy-egy időpontban.

Ez az első diád tehát olyan matrix (egymás mellé írva a súlyozott közös ráfordítási struktúrákat, mint oszlopokat), melynek a ráfordítási struktúrák idősorától (alapmatrix) való eltérése normában minimális.

Ha már most az eredeti matrixból levonjuk az első diádot — melyet nevezzünk el első *közelítésnek* — megkapjuk az első maradék-matrixot. A maradék-matrix oszlopai azt mutatják, hogy milyen mértékben tér el a közös struktúra az egyes évekhez tartozó ráfordítási struktúrától. Soraiból leolvashatjuk, hogy az egyes ráfordítási együtthatók idősorai hogy követik a közös ráfordítási struktúra ugyanezen együtthatóinak időbeli változását. A maradék matrix vizsgálata rendkívül fontos és nagy alaposságot igényel. Többek között ezen matrix elemeinek nagyságából és elhelyezkedéséből dönthető el, hogy érdemes-e folytatni a felbontást, érdemes-e keresni a maradék matrix közös struktúráját vagy sem.

2. táblázat

Az első közös struktúra és az első súlyrendszer

ipar	ipar	4357,7
	ép. ip.	157,7
	mezőg.	1110,3
	közl.	180,5
	egyéb	178,3
ép. ip.	ipar	4481,5
	ép. ip.	168,0
	mezőg.	89,9
	közl.	834,4
	egyéb	216,7
mezőg.	ipar	1031,4
	ép. ip.	72,0
	mezőg.	3478,3
	közl.	17,3
	egyéb	226,3
közl. száll.	ipar	3043,0
	ép. ip.	108,5
	mezőg.	133,6
	közl.	84,4
	egyéb	94,7
egyéb	ipar	1906,3
	ép. ip.	119,7
	mezőg.	99,8
	közl.	1643,3
	egyéb	325,5

1959	1960	1961	1962	1963	1964
0,9715	0,9262	0,9668	0,9710	0,9565	0,9531

Mivel a módszer éppen a maradék matrix normájának minimalizálásán alapul, előfordulhat, hogy az első diád leválasztása után a maradék matrix elemei olyan kicsik lesznek, hogy belülesnek a mérési hibahatáron. Ebben az esetben a felbontást nem érdemes tovább folytatni. Ez azt jelenti, hogy a struktúrák időbeli belső változása olyan kicsi, hogy egy közös struktúrával lehet jellemezni az egész időszakot. Amennyiben a maradék matrix még tartalmaz értékes információt, úgy folytathatjuk a felbontást, most már ezen maradék matrixra. Az így keletkező diád a közös struktúrától való eltérések közös struktúráját és ennek súlyait adja. Az így keletkező maradék matrix újbóli vizsgálata után folytathatjuk a felbontást, és így tovább.

Látható, hogy a bemutatott felbontás megkönnyítheti számunkra a vizsgálni kívánt struktúrák együttes időbeli alakulásának áttekintését.

Amennyiben az egyes leválasztásoknál keletkező súlyvektorokra (sorok) valamilyen formában trendgörbék illeszthetők, feltehetjük a kérdést: milyen lenne vizsgált struktúráink időbeli alakulása a jövőben, ha a különböző leválasztásokban kapott közös ráfordítási struktúrákhoz tartozó súlyvektorok engedelmesen követnék az őket legjobban közelítő analitikus függvényeket az extrapolációs szakaszon is?

Ebben az esetben, ha a keresett extrapolált struktúránkat e_i-vel az egyes lépésekben keletkezett súlyvektorokat s_j-vel, közös struktúráinkat k_j-vel jelöljük, akkor e struktúrák

$$e_i = \sum_{j=1}^{l} s_j(m+i)\, k_j$$

alakban állíthatók elő, ahol m az eredeti idősor hossza, l a leválasztott diádok száma $s_j(\mathrm{m}+\mathrm{i})$ a j-edik súlyvektor i-edik extrapolált értéke.

Visszatérve az említett példára: a bemutatott konkrét esetben az első diád leválasztásával már egészen pontos közelítést értünk el. A harmadik táblázatban közöljük az egyes szektorok évenkénti kibocsátásait abszolút számban és

3. táblázat

Az eredeti és az első közelítés szerinti kibocsátások abszolút számban és ezek %-os viszonya

	1959			1960		
	eredeti kibocs.	számított kibocs.	e/s %	eredeti kibocs.	számított kibocs.	e/s %
	a.	b.	c.	a.	b.	c.
ipar	103 230	105 866	102,5	112 067	111 299	99,3
ép. ip.	4 257	4 198	98,6	4 511	4 375	97,0
mezőg.	45 957	43 946	95,6	44 846	43 127	96,1
közl.	9 223	9 833	106,6	10 308	10 018	97,2
egyéb	6 869	6 225	90,6	7 380	6 322	85,6
M(%)			98,7			95,0
	1961			1962		
	a.	b.	c.	a.	b.	c.
ipar	124 654	125 145	100,4	132 448	134 215	101,3
ép. ip.	5 002	4 958	99,1	5 066	5 226	103,1
mezőg.	48 018	47 327	98,6	49 629	49 670	100,1
közl.	10 708	10 899	101,8	11 678	11 479	98,2
egyéb	6 730	6 830	101,4	6 628	7 380	111,3
M(%)			100,2			103,0
	1963			1964		
	a.	b.	c.	a.	b.	c.
ipar	143 259	141 593	98,8	156 979	153 207	97,6
ép. ip.	5 042	5 206	102,7	6 247	5 939	95,0
mezőg.	50 773	52 078	102,5	51 210	55 742	108,8
közl.	12 306	12 148	98,7	13 657	12 932	94,7
egyéb	7 232	7 780	107,5	7 782	8 347	107,2
M(%)			102,5			100,6

a közelített ráfordítási együttható táblákból az eredeti termelésekkel visszaszámított kibocsátásokat, valamint ezek %-os viszonyát, mely egyben a közelítés pontosságáról is felvilágosítást ad.

Látható, hogy a közelítés elég pontos. Az extremális közelítési mutatók: 85,6% és 111,3%. Mindkét érték az egyéb szektorban található, amiből kitűnik, hogy e szektor ráfordítási koefficiensei tudják legkevésbé követni a közös struktúra időbeli lefutását. A legjobban közelített év az 1961-es volt. A 4. táblázaton az 1961-es évi eredeti abszolút számos táblát az 5. táblán az ugyanezen évhez tartozó első közelítés abszolút számos tábláját mutatjuk be.

4. táblázat

Az eredeti 1961-es abszolút számos tábla

	1.	2.	3.	4.	5.
1. ipar	93 109	15 333	6 363	5 155	4 694
2. ép. ip.	3 519	581	406	203	293
3. mezőg.	23 789	284	23 556	197	192
4. közl.	3 661	2 777	200	131	3 939
5. egyéb	3 624	774	1 515	159	658
bttó term.	223 046	35 404	67 310	17 814	24 608

5. táblázat

Az első közelítésből visszaszámolt 1961-es abszolút számos tábla

	1.	2.	3.	4.	5.
1. ipar	93 964	14 694	6 711	5 241	4 535
2. ép. ip.	3 401	618	468	186	285
3. mezőg.	23 932	295	22 633	230	237
4. közl.	3 881	2 856	108	145	3 090
5. egyéb	3 682	742	1 473	164	769

A bemutatott feladat megoldásából keletkezett eredmények elemzésétől ezen cikkben eltekintünk. A bemutatás célja csak az volt, hogy szemléletesebben magyarázható legyen, milyen módon lehet a speciális diadikus felbontás egy bizonyos felhasználása esetén az alapmatrixot és a közelítő diádot (diádokat) értelmezni.

Világos, hogy keresztmetszeti elemzés esetén az egyes gazdaságok, országok bizonyos azonos mutatószámrendszereit is tekinthetjük egy matrix oszlopainak és ebben az esetben az első diád éppen a legtöbb közös részt tartalmazó közös mutatószámrendszert adja, mint oszlopot; a közös mutatószámrendszer egyes országokra, gazdaságokra vonatkozó súlyai lesznek a sorvektor elemei.

(Beérkezett: 1970. június 29.)

IRODALOM

[1] BODEWIG, E.: Matrix Calculus. Amsterdam, 1959. North-Holland Publishing Company. 452 p.
[2] EGERVÁRY, J.: Mátrix-függvények kanonikus előállításáról és annak néhány alkalmazásáról. MTA III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei, III. k., 1953. 4. sz.
[3] GANTMACHER: Matrizenrechnung. Berlin, 1965. VEB Verlag der Wissenschaften.
[4] MARCUS, M.: Basic Theorems in Matrix Theory. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series, 1960. 57. sz. Washington.
[5] ZURMÜHL, R.: Matrizen und Ihre technische Anwendungen. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1964. Springer.
[6] EGERVÁRY, J.: On rank-diminishing operations and their applications to the solution of linear equations. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 1960. 11. sz.

A SPECIAL DIADIC DECOMPOSITION OF MATRICES AND SOME APPLICATIONS IN COMPARATIVE ANALYSIS

The article is in two separate parts. In the first part the author proves the following proposition: If a matrix **A** is decomposed into the sum of diadic products by the formula

$$\mathbf{A}_k = u_{k+1} v'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}, \qquad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$$

— so that the Euclidean norm of $\mathbf{A}_{k+1}$ should be minimum — the u_k vectors are proportionate to the eigenvectors of matrix $\mathbf{AA}'$, and the v_k vectors are proportionate to the eigenvectors of matrix $\mathbf{A}'\mathbf{A}$. Furthermore, in this part an iterative method being similar to the Myses iteration is given for the calculation of these u_k and v_k vectors.

In the second part, making use of the fact that after the deduction of the diadic product $u_1 v_1'$ from **A** according to the above recursion the sum of the squared entries of the remainder matrix is minimum among all the detachable diads — the author considers some fields of analysis (time series, input-output matrices, comparison of structures) where the investigation of the inherent connections of the analysed systems can be made especially easy when approximating the system by a matrix with such a simple structure as a diad. Beside the foregoing possibilities of analysis the meaning of the first detached diad is explained by the help of a numerical example as well.

СПЕЦИАЛЬНОЕ ДИАДИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ И НЕСКОЛЬКО ПРИМЕНЕНИЕ ЭТОГО ПРИ АНАЛИЗЕ СОПОСТАВЛЕНИЯ

Статья подразделяется на две изолированных части. В первой части автор доказывает следующую теорему: если матрицу **A** с помощью рекурзионной формулы $\mathbf{A}_k = u_{k+1}\ v'_{k+1} + \mathbf{A}_{k+1}$, где $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ разбиваем на сумму диад так, чтобы Эвклидова норма $\mathbf{A}_{k+1}$ было минимальной, тогда векторы u_k пропорциональны собственным векторам матрицы $\mathbf{AA}'$ и векторы v_k соответственно матрицы $\mathbf{A}'\mathbf{A}$. Помимо этого в этой части статья дает итерационный способ для расчета векторов u_k и v_k, который похож на итерацию Myses.

Во второй части, используя тот факт, что сумма квадратов, построенная из элементов остаточной матрицы, оставщейся после вычета из **A** диада $u_1 v_1'$ полученного из предыдущего произведения — минимальная из всех отдельных диадов, автор показывает несколько таких областей анализа (порядковые ряды, матрицы input-output, сопоставление структур), где приближение анализируемых систем с помощью матрицы такой простой структуры, как диад, может чрезвычайно облегчить изучение внутренних связей системы. Наряду с упомянутыми возможностями анализа с помощью числового примера автор освещает и значение превого отделившегося диада.

Hódi György

Kétszintű tervezés a villamosenergia-termelésben

1. Bevezetés

Mint a gazdaság valamennyi ágában, a villamosenergia-iparban is az az egyik fő törekvés, hogy a fogyasztói igényeket az adott feltételek mellett az elérhető legkisebb önköltséggel kielégítsék. Ennek a célnak elérését nemcsak műszaki intézkedések segítik elő, hanem a korszerű termelésirányítás módszerei is. A Magyar Villamos Művek (MVM) már évekkel ezelőtt ismertette azt a tervezési módszert, amelynek alapján megszabják, hogy egy tervidőszakon belül mennyi villamos energiát termeljen az együttműködő erőműrendszer egy-egy erőműve és ennek az energiának előállításához milyen tüzelőanyagot használjon fel [6].

A modell arra a meggondolásra épült, hogy a jó közelítéssel előre felbecsülhető villamosenergia-igényt a tervidőszakban egy már meglevő erőműrendszer elégíti ki. Ez azt jelenti, hogy az állandó költségekre nincs hatással, melyik erőmű mennyit termel, és az önköltséget a változó költségek csökkentésével lehet javítani. Hazánkban — ahol ez idő szerint az energiaszolgáltatás szinte kizárólag hőerőművekre támaszkodik — a villamos energia változó költségeinek domináns részét a tüzelőanyag-költség alkotja. Az önköltség tehát akkor lesz a legkisebb, ha a tüzelőanyag-költséget leszorítják az elérhető minimumra.

A feladatot tehát a következőképpen fogalmazták meg: Mennyit termeljen egy-egy erőmű és milyen tüzelőanyaggal fűtsék az illető erőműben a kazánokat, hogy a felmerülő igényt a rendszer kielégítse és a ráfordítás a legkisebb legyen? Másként megfogalmazva, hogy kell elosztani az egyes erőművek között egy adott összterhelést és a rendelkezésre álló tüzelőanyagokat úgy, hogy a tüzelőanyag összköltsége minimális legyen.

A feladat megoldásához ismernünk kell azokat a műszaki és gazdasági mutatókat, melyek a tüzelőanyag-költséget befolyásolják. Így tudni kell, egy-egy erőműben milyen tüzelőanyagok tüzelhetők egyáltalán el és milyen hatásfokkal. Tehát az illető erőműben mennyi kell az adott fűtőanyagból ahhoz, hogy egységnyi villamos energiát fejlesszen. Egyszóval mennyi a fajlagos hőfogyasztás. A felhasznált mennyiségen kívül a tüzelőanyag egységára (loco bányatelep) és szállítási költsége szabja meg a tüzelőanyag-költséget, így ezek a mutatók is kellenek a számításhoz. Végezetül tudni kell, hogy a tervidőszakban mekkora lesz az egyes erőművek termelési kapacitása, azaz milyen nagy lesz az üzembiztosan igénybevehető teljesítőképességük. Az említett mutatókon kívül tudni kell azt, hogy mekkora készletek fognak rendelkezésre állni az egyes tüzelőanyagokból és — mint már említettük — az előző időszakok statisztikai adatai alapján jó közelítéssel fel lehet becsülni mekkora lesz az energiaigény.

Ezeknek az adatoknak a birtokában állították fel a feladat feltételrendszerét, mely két részre osztható: egyfelől a rendelkezésre álló tüzelőanyag-készletet kell szétosztani az erőművek között, másfelől azt kell előírni, milyen fokig használják ki egy-egy erőmű kapacitását. A felső korlátot egyfelől a tüzelőanyag-készletek nagysága, másfelől az erőművek kapacitása adja meg. A cél a költség minimalizálása, de másodlagos (műszakilag elsőrendű fontosságú) célként ki kell elégíteni azt a feltételt, hogy az előállított villamos energia összmennyisége megegyezzék a fogyasztói igénnyel.

E gondolatmenet egyértelműen arra a megállapításra vezetett, hogy az erőművek közti tüzelőanyag- és teherelosztás feladatának megoldására legalkalmasabb módszer a lineáris programozás szimplex eljárása (lásd pl. [7]). A feltételrendszer — néhány kisebb módosítástól és kiegészítéstől eltekintve — a szállítási feladat általánosított alakjának felel meg. A feladóállomások — tüzelőanyag fajtánként bontva — az egyes bányák (vagy más tüzelőanyag-források), a rendeltetési helyek az egyes erőművek, a változók pedig az egy-egy erőműben egy-egy tüzelőanyagból felhasznált mennyiséget adják meg. A célfüggvény együtthatóit úgy kapjuk meg, hogy a tüzelőanyag egységárához hozzáadjuk a szállítási költséget.

A feladat sajátos jellegéből adódó módosítások és kiegészítések az alábbiakban foglalhatók össze: A tüzelőanyagkészletek nagyobbak, mint a kérdéses időszakban felhasználásra kerülő összmennyiség, így igaz, hogy az elszállított tüzelőanyag-féleség mennyisége kisebb vagy egyenlő a rendelkezésre álló készletnél.

A rendeltetési helyekre — az erőművekre — vonatkozó feltételrendszer az együttműködő erőművek közti teherelosztás feladatával kapcsolatos követelményeket fejezi ki. Ebből adódik az alábbi két módosítás, mellyel eltér az általánosított szállítási feladat feltételrendszerétől. Egy-egy erőműre vonatkozó feltételnek itt azt kell kifejeznie, hogy az oda szállított tüzelőanyag mennyisége kisebb vagy egyenlő, mint amennyi ahhoz lenne szükséges, hogy az illető erőmű a kérdéses tervidőszakban végig teljes kapacitással termeljen. Ezért egyrészt át kell számítani villamos energiára az illető erőműbe szállított tüzelőanyag mennyiségét (a fajlagos hőfogyasztással osztva annak fűtőértékét) így az együttható mátrixban nem egységek, hanem a fajlagos hőfogyasztások reciprok értékei állnak. Másrészt itt sem egyenlőség szerepel, hiszen nem biztos, hogy az illető erőmű teljes kapacitással lesz üzemben.

A feltételrendszer még egy egyenlőséggel egészül ki. Az ugyan nincs megkötve, hogyan legyen kihasználva egy-egy erőmű kapacitása — a számítás egyik célja éppen ennek a meghatározása — a rendszer össztermelésének azonban egyenlőnek kell lennie az igénnyel.

Az eddigiekben leírt modell elég jól simul a valósághoz, azonban — mint minden modellnek — van néhány hiányossága. Egyik legnagyobb hiánya talán az, hogy nincs tekintettel a villamos energia egyik alapvető sajátosságára, arra ugyanis, hogy nem tárolható, akkor kell megtermelni, amikor az igény fellép. Az eddigiekben hallgatólagosan azt tételeztük fel, hogy a fogyasztói igény a vizsgált időszakon belül nem változik, és erre az esetre a fenti leírt modell érvényes is. A valóságban azonban az igény az idő függvényében pillanatról pillanatra változik, azaz e hallgatólagos kritérium csak elemi hosszúságú időintervallumra igaz. Modellünkben ez úgy jelentkezik, hogy annak az egyenletnek jobb oldalán, amely azt fejezi ki, hogy a termelt energia egyenlő a jelentkező igénnyel, nem konstans áll, hanem az idő függvénye.

Az így átfogalmazott feladat már nem lineáris. A következőkben ennek a megoldását keressük.

2. A kétszintű modell felépítése[1]

A feladat felállítása

A bevezetőben leírt modell továbbfejlesztésének ismertetését kezdjük azzal, hogy az ott elmondottakat matematikai formába öntjük. Ehhez az alábbi jelölésrendszert vezetjük be:

- q teljesítmény (indexben is)
- e energia (indexben is)
- t idő
- s fajlagos érték (fűtőérték vagy hőfogyasztás)
- f költség
- P tüzelőanyag, vagy más primer energiahordozó (index)
- V villamos (index)

A skalár mennyiségeket vagy mátrixelemeket kisbetű, a vektorokat félkövér kisbetű (a sorvektorokat még csillag), a mátrixokat nagybetű jelöli. A mátrix- ill. vektorelemek indexei szögletes zárójelben állnak.

Kiindulóadatként ismerni kell a következőket: A kérdéses t tervidőszakban rendelkezésre álló tüzelőanyag-készletet tüzelőanyag-féleségenkénti bontásban. Legyen m_p a tüzelőanyag-féleségek száma, ekkor a tüzelőanyag-készletet a következő vektor jellemzi:

$$\mathbf{e}_P^* = (e_{P[1]}, e_{P[2]}, e_{P[3]} \dots e_{P[i]} \dots e_{P[m_P]}), \tag{1}$$

ahol a tüzelőanyag-készletek nagyságát a bennük rejlő fűtőértékkel fejezzük ki.

Az erőművek üzembiztosan igénybevehető teljesítőképességét (általában MW-ban):

$$\mathbf{q}_V^* = (q_{V[1]}, q_{V[2]}, q_{V[3]} \dots q_{V[j]} \dots q_{V[m_V]}), \tag{2}$$

ahol m_V a rendszerhez tartozó erőművek száma.

A villamosenergia-igény változását az idő függvényében:

$$e_V = e_V(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} q(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

ahol $e_V(t)$ a $(t_0, t_0 + t)$ időintervallumban fellépő fogyasztói igény, $q(t)$ a pillanatnyi teljesítményigény.

A műszaki-gazdasági mutatók közül kiindulóadatként ismernünk kell a következőket:

A fajlagos hőfogyasztás tüzelőanyagonként és erőművenként:

$$S_V = \begin{bmatrix} s_{V[11]} & s_{V[12]} & \dots & s_{V[1j]} & \dots & s_{V[1m_V]} \\ s_{V[21]} & s_{V[22]} & \dots & s_{V[2j]} & \dots & s_{V[2m_V]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{V[i1]} & s_{V[i2]} & & s_{V[ij]} & \dots & s_{V[im_V]} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{V[m_p1]} & s_{V[m_p2]} & & s_{V[m_pj]} & \dots & s_{V[m_pm_V]} \end{bmatrix} \tag{4}$$

[1] Őszinte köszönetemet fejezem ki Csáki Endrének, aki a matematikai rész kidolgozásánál mélyreható segítséget nyújtott.

ahol $S_{V[ij]}$ fajlagos hőfogyasztás a j-ik erőműben az i-ik tüzelőanyagból.

Az egyes tüzelőanyagok kalóriánkénti ára:

$$\mathbf{f}_P^* = (f_{P[1]}, f_{P[2]}, f_{P[3]} \dots f_{P[i]} \dots f_{P[m_P]}). \tag{5}$$

A tüzelőanyagok szállítási költsége az egyes erőművekbe:

$$F_V = \begin{vmatrix} f_{V[11]} & f_{V[12]} & \cdots & f_{V[1j]} & \cdots & f_{V[1m_V]} \\ f_{V[21]} & f_{V[22]} & \cdots & f_{V[2j]} & \cdots & f_{V[2m_V]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{V[i1]} & f_{V[i2]} & \cdots & f_{V[ij]} & \cdots & f_{V[im_V]} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{V[m_p1]} & f_{V[m_p2]} & \cdots & f_{V[m_pj]} & \cdots & f_{V[m_pm_V]} \end{vmatrix} \tag{6}$$

ahol $f_{V[ij]}$ az i-ik tüzelőanyagnak a j-ik erőműbe történő szállítási költsége.

A tüzelőanyag egységárát loco erőmű megkapjuk, ha a kalória árhoz hozzáadjuk a szállítási költséget. Ezt a következő vektor összeg fejezi ki:

$$\mathbf{f}_{[j]} = \mathbf{f}_P + \mathbf{f}_{V[j]}, \qquad (j = 1, 2, \dots, m_v) \tag{7}$$

ahol az $\mathbf{f}_{[j]}$ vektor j-ik erőműre vonatkozik. (Az $\mathbf{f}_{V[j]}$ vektor az F_V mátrix -edik oszlopa.)

A teljes költség-mátrix az $\mathbf{f}_{[j]}$ oszlopvektorokból álló mátrix:

$$F = (\mathbf{f}_{[1]}, \mathbf{f}_{[2]}, \mathbf{f}_{[3]}, \dots \mathbf{f}_{[j]} \dots \mathbf{f}_{[m_V]}), \tag{8}$$

Legyen $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ a meghatározandó vektor, amelynek $n = m_p \cdot m_v$ koordinátája van, $x_{(i-1)m_v+j}$ $(i = 1, 2, \dots, m_p,\ j = 1, 2, \dots, m_v)$ jelenti az i-edik tüzelőanyagból a j-edik erőműbe szállítandó mennyiséget fűtőértékben.

1. A tüzelőanyag-elosztás feltételrendszere azt fejezi ki, hogy a kérdéses tervidőszakban felhasználható tüzelőanyag-mennyiség nem haladhatja meg a rendelkezésre álló készleteket:

$$A_P \mathbf{x} \leq \mathbf{e}_P, \tag{9}$$

ahol

$$\begin{aligned} a_{P[ij]} &= 1 \quad \text{ha} \quad im_v - m_v + 1 \leq j \leq im_v \\ a_{P[ij]} &= 0 \quad \text{különben} \end{aligned} \tag{10}$$

2. Az együttműködő erőművek közti villamos teherelosztás korlátait az szabja meg, hogy egyetlen erőművet sem lehet maximális kapacitásán túl terhelni, azaz egy erőmű legfeljebb annyi villamos-energiát fejleszthet, amennyi üzembiztosan igénybevehető teljesítőképességének és az időintervallum hosszának szorzata:

$$A_V \mathbf{x} \leq \mathbf{q}_V \cdot t, \tag{11}$$

ahol

$$a_{V[ij]} = \frac{1}{S_{V[hi]}} \quad \text{ha} \quad j = (h-1)\, m_v + i \ \ (h = 1, \dots m_p, i = 1, \dots, m_v) \tag{12}$$

$$a_{V[ij]} = 0 \qquad \text{különben.}$$

3. A fogyasztói igények kielégítésének feltétele az, hogy a termelt energia-

mennyiség egyenlő legyen az igénnyel:

$$\mathbf{a}_E^* \mathbf{x} = e_V\,, \tag{13}$$

ahol

$$\mathbf{a}_E^* = (a_{E[1]}, a_{E[2]} \ldots a_{E[j]} \ldots a_{E[n]})\,,$$

és itt

$$a_{E[(h-1)m_v-i]} = \frac{1}{S_{V[hi]}} \qquad \begin{array}{l} h = 1, 2, \ldots, m_p\,, \\ i = 1, 2, \ldots, m_v\,. \end{array}$$

4. Az energiafejlesztés összköltsége, amely a minimumra csökkentendő, az alábbi:

$$\mathbf{c}^* \mathbf{x} \to \min\,, \tag{14}$$

ahol

$$\mathbf{c}^* = (c_{[1]}, c_{[2]}, \ldots c_{[j]} \ldots c_{[n]})\,, \tag{15}$$

és itt

$$c_{[(h-1)m_v+i]} = f_{[hi]} \qquad \begin{array}{l} h = 1, 2, \ldots, m_p \\ i = 1, 2, \ldots, m_v\,. \end{array}$$

Összefoglalva a teljes feltételrendszert:

$$\begin{aligned} A_P \mathbf{x} &\leq \mathbf{e}_P \\ A_V \mathbf{x} &\leq \mathbf{q}_V t \\ \mathbf{a}_E^* \mathbf{x} &= e_V \\ \mathbf{c}^* \mathbf{x} &\to \min\,, \end{aligned} \tag{16}$$

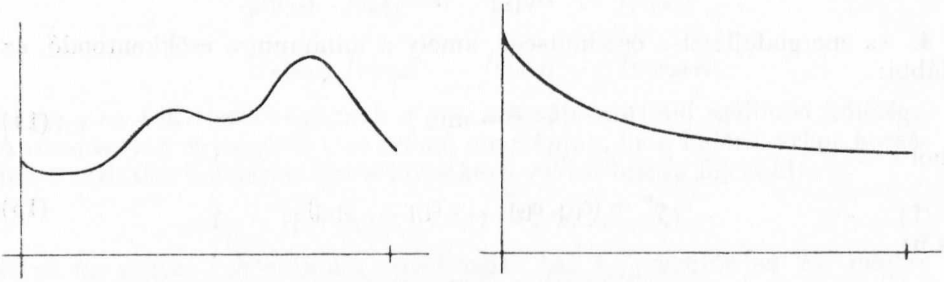
A feladat szétbontása

Amint azt a korábbiakban már hangsúlyoztuk, az előző pontban leírtak csak arra az esetre érvényesek, ha a fogyasztói igény állandó. A valóságban azonban ez az érték nem konstans, hanem valamilyen — általában grafikusan ábrázolva megadott — függvénye az időnek. Jelölje az elemi hosszúságú dt időre jutó de_V energiaigényt — azaz a t időpontban fellépő fogyasztói teljesítményigényt — $q(t)$ akkor a tervezéshez ismerni kell a

$$\frac{\mathrm{d}e_V}{\mathrm{d}t} = q(t) \tag{17}$$

függvényt. Egyszerűség kedvéért az ún. igénytartóssági görbével is dolgozhatunk, amely megadja, hogy a vizsgált időszakon belül mekkora időn át lesz az igény p vagy annál nagyobb. (1. sz. ábra).

A tervezés egyik szintjén — a teherelosztásnál — azt kell meghatározni, mely erőműveket, milyen tüzelőanyaggal fűtve vonjanak be a változó fogyasztói teljesítményigény kielégítésébe, a másik szinten — a tüzelőanyag-elosztásnál — pedig az a feladat, hogy gondoskodjanak róla, a tervezett teherelosztáshoz szükséges tüzelőanyag-mennyiségek ne haladják meg a rendelkezésre álló készleteket. A célkitűzés mindkét szinten: a legkisebb önköltséggel járó megoldás kiválasztása. Azonban, míg a tüzelőanyag elosztásnál a tényleges tüzelőanyagárak felhasználásával folyik a számítás, addig a villamos teherelosztásnál választott megoldást éppen azzal lehet befolyásolni, hogy a költségmátrixból alkotott célfüggvény-együtthatókat megfelelő módon módosítják és így a teherelosztás azokra az erőművekre fog esni, melyek önköltsége e látszólagos árnyék-árak mellett a legkisebb.



1. ábra. A fogyasztói igény változása az idő függvényében

1. A teherelosztás feltétele az, hogy az adott t pillanatban jelentkező $q(t)$ teljesítményigényt az egyes erőművek maximális kapacitásának korlátján belül úgy kell kielégíteni, hogy az önköltség minimális legyen:

$$A_V \mathbf{x} \leq \mathbf{q}_V \tag{18}$$

$$\mathbf{a}_e^* \mathbf{x} = q(t).$$

Az optimális megoldásokat — mint ismeretes — azokban az esetekben kapjuk, amikor az erőműveket kapacitásuk teljes korlátjáig igénybevesszük. Ezek a megoldások alkotják az erőművi kapacitások poliéderjének csúcspontjait és az optimális megoldás vektora ennek a poliédernek felületén fog a csúcspontról csúcspontra vándorolni.

A teherelosztás szemszögéből nézve ez azt jelenti, hogy a fogyasztói igényt kielégítő bázison belül mindig van egy olyan erőmű, amelynek termelése a leggazdaságtalanabb és a teljesítményigény csökkenésével ennek a terhelését kell csökkenteni egész addig, amíg egy ponton ki nem kerül a bázisból, azaz üzemen kívül helyezik. Ellenkező irányban, az igény növekedésével ennek a terhelési menetrendet tartó erőműnek a kapacitását kell egyre növekvő mértékben igénybevenni és abban a pontban, amikor már teljes kapacitással jár, egy újabb erőművet kell beindítani, mégpedig azt, melynek önköltsége a legkisebb. (Ebben a modellben a beindítás és leállás költségét nem vesszük figyelembe).

A feltételrendszer jobb oldalán álló q_v kapacitáskorlátok meghatározzák, hogy egy-egy billenésponthoz, ahol bázischere történik, milyen q teljesítmény tartozik. Jelölje a teherelosztás csúcsponti megoldásait $\mathbf{x}_q$, a kérdéses időszakon belül előforduló legkisebb teljesítményigényt q_{min}, a legnagyobb igényt q_{max}. Az $\mathbf{x}_q$ csúcsponti megoldáshoz tartozó q teljesítmény

$$\mathbf{a}_e^* \mathbf{x}_q = q\,, \tag{19}$$

de csak azoknál a bázismegoldásoknál lesznek billenéspontok, melyek kielégítik a

$$q_{\min} < q_i^q < q_{\max} \tag{20}$$

egyenlőséget.

A (17) összefüggésből kiolvasható, milyen t időpontok tartoznak a (19) által meghatározott lehetséges q értékekhez.

Legyenek ezek az időpontok rendre

$$t_1, t_2 \ldots t_k \ldots t_{nk-1}\,,$$

ahol e pontok száma $n_k - 1$ és ekkor ezek a pontok n_k részintervallumra osztják a kérdéses tervidőszakot. A tervidőszak kezdőpontját t_0-val, végpontját t_{n^k}-val jelölve, ezeknek az intervallumoknak a hossza

$$t_1 - t_0 = \Delta_1, t_2 - t_1 = \Delta_2, \ldots t_k - t_{k-1} = \Delta_k, \ldots t_{nk} - t_{nk-1} = \Delta n_k\,. \tag{21}$$

Azoknak a csúcsponti megoldásoknak a száma, melyek kielégítik a

$$q > q_{\min} \tag{22}$$

feltételt — az optimális megoldást ezek között keressük — legyen N_{cs} és erre

$$N_{cs} \geq n_k\,, \tag{23}$$

azaz az összes szóbajöhető csúcsponti megoldások száma nagyobb vagy egyenlő a billenéspontok számával.

Jelöljük a teljes (azaz mind a teherelosztást, mind a tüzelőanyag-elosztást magában foglaló) feladat egy egy csúcsponti megoldásához tartozó árnyékárak vektorait $\mathbf{c}^*_{v[l]}$ ... ahol az l index arra utal, hogy a teljes feladat l-ik $x_{q[l]}$ csúcsponti megoldásához tartozó értékről van szó. A teherelosztás feladata, hogy megkeresse azt a megoldást, melynél az igényeket — a kapott árnyékárakon számítva — a legolcsóbban tudják fedezni:

$$\mathbf{c}^*_{V[l]} \mathbf{x}_q \to \min. \tag{21}$$

2. Az energiafogyasztás alakulását a tüzelőanyagelosztásnál kell figyelemmel kísérni és irányítani. Itt kell felmérni a várható villamosenergia-igényt, összegezni az igény kielégítésére ráfordítani kívánt készletek nagyságát és szükség esetén olyan ármódositást végrehajtani, hogy az egyik — kimenő — tüzelőanyag-készlet helyett egy másik tüzelőanyagot vegyenek igénybe.

A (t_{k-1}, t_k) intervallumban felmerülő $e_{V[k]}$ energiaigény nagysága

$$e_{V[k]} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} q(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{25}$$

A teljes energiaigény a kérdéses időszakban:

$$e_V = e_{V[1]} + e_{V[2]} + \ldots + e_{V[k]} + \ldots e_{V[nk]}\,. \tag{26}$$

Vizsgáljuk meg, milyen tüzelőanyag-féleségekből mekkora mennyiségekre van szükség ahhoz, hogy az $\mathbf{x}_{q[l]}$ megoldásba bevont erőművek kielégítsék az $e_{v[k]}$ energiaigényt. A k-adik intervallum kezdetén jelentkező teljesítmény nagysága $q_{(t_{k-1})}$, az intervallum végén $q_{(t_k)}$ nagyságú. A két teljesítmény közti különbség

$$q_{(t_k)} - q_{(t_{k-1})} = \Delta q_{(t_k)}\,, \tag{27}$$

és a bázisba bevont erőművek közül annak teljesítményét kell változtatni az igénynek megfelelően, amelyeknek legnagyobb az önköltsége. A bázisba bevont többi erőmű az intervallumon belül végig teljes kapacitással fog termelni. Az igényt nyomonkövető erőművet csúcserőműnek, a többit alaperőműnek nevezzük. Legyen az $\mathbf{x}_{q\,\text{csúcs}}$ egy olyan vektor, melynek a csúcserőműre vonatkozó koordinátái megegyeznek az $\mathbf{x}_q$-nak a csúcserőműre vonatkozó koordinátáival, a többi pedig 0.

Az alapterhelést vivő erőművek vektora

$$\mathbf{x}_{q\,\text{alap}[l]} = \mathbf{x}_{q[l]} - \mathbf{x}_{q\,\text{csúcs}[l]}\,. \tag{28}$$

A fejlesztett villamos energia is két részre oszlik:

$$e_{V\,\text{alap}[k]} = \Delta_k \cdot \mathbf{a}_e^* \,\mathbf{x}_{q\,\text{alap}[l]} \tag{29}$$

és

$$e_{V[k]} - e_{V\,\text{alap}[k]} = e_{V\,\text{csúcs}[k]}\,. \tag{30}$$

Mivel az $\mathbf{x}_{q\,\text{csúcs}\,[l]}$ vektor azt reprezentálja, hogy a csúcserőmű (j-edik erőmű) teljes kapacitással működik, valójában azonban nyomon követi az igény változását, módosítsuk az $\mathbf{x}_{q\,\text{csúcs}\,[l]}$ vektort úgy, hogy egyetlen nem 0 eleme az átlagot fejezze ki:

$$\mathbf{x}_{q\,\text{csúcs}[k\,l]} = \left(0, 0 \ldots 0, \frac{e_{V\,\text{csúcs}[k]}}{\Delta_k\, a_{e[j]}}, 0 \ldots 0\right). \tag{31}$$

Összeadva a (28) egyenletben szereplő alapteljesítmény — és a (31) egyenletben szereplő csúcsteljesítmény — vektort, megkapjuk, hogy a k-ik intervallumban mekkora lesz az l-ik megoldás középértéke:

$$\mathbf{x}_{q\,\text{alap}[l]} + \mathbf{x}_{q\,\text{csúcs}[k,l]} = \mathbf{x}_{q[k,l]}\,. \tag{32}$$

Az egyes erőművekben elfogyasztott tüzelőanyagok mennyiségét az

$$\mathbf{x}_{l[k,l]} = \Delta_k \cdot \mathbf{x}_{q[k,l]} \tag{33}$$

vektor szolgáltatja.

A tüzelőanyag-elosztás feltétele, hogy az összes intervallumban együttesen elfűtött mennyiség nem haladhatja meg a készleteket:

$$A_p\, \mathbf{x}_{e[1l]} + \ldots + A_p\, \mathbf{x}_{e[kl]} + \ldots + A_p\, \mathbf{x}_{e[nkl]} \leq e_P\,. \tag{34}$$

A (18) és (28) feltételrendszert egybevonva és felhasználva a (33) összefüggést, most már felírható a két szintre bontott és intervallumokra oszló teljes táblázat:

$$
\begin{array}{llll}
A_P \mathbf{x}_{e[1]} + A_P \mathbf{x}_{e[2]} + \dots + A_P \mathbf{x}_{e[k]} + \dots + A_P \mathbf{x}_{e[nk]} & & & \leq \mathbf{e}_P \\
A_V \mathbf{x}_{e[1]} & & & \leq \mathbf{q}_V \cdot \Delta_1 \\
\mathbf{a}_e^* \mathbf{x}_{e[1]} & & & = e_{V[1]} \\
\quad A_V \mathbf{x}_{e[2]} & & & \leq \mathbf{q}_V \cdot \Delta_2 \\
\quad a_e^* \mathbf{x}_{e[2]} & & & = e_{V[2]} \\
\qquad \dots & & & \\
\qquad \dots & & & \\
& A_V \mathbf{x}_{e[k]} & & \leq \mathbf{q}_V \cdot \Delta_k \\
& \mathbf{a}_e^* \mathbf{x}_{e[k]} & & = e_{V[k]} \\
& & \dots & \\
& & A_V \mathbf{x}_{e[nk]} & \leq \mathbf{q}_V \, \Delta_{nk} \\
& & \mathbf{a}_e^* \mathbf{x}_{e[nk]} & = e_{V[nk]} \\
\mathbf{c}^* \mathbf{x}_{e[1]} + \mathbf{c}^* \mathbf{x}_{e[2]} + \dots + \mathbf{c}^* \mathbf{x}_{e[k]} + \dots + \mathbf{c}^* \mathbf{x}_{e[nk]} & & & \to \min.
\end{array}
\tag{35}
$$

A feladat megoldása

A (35) táblázatból kitűnik, hogy a részekre bontható — dekomponálható — feladatoknak egy speciális esetével állunk szemben. [1] Ez a felismerés rámutat arra, hogy mi a megoldás célszerű útja.

A megoldás menetének lényege — mint tudjuk — az, hogy a két szintet (esetünkben a teherelosztást és tüzelőanyag-elosztást) egybekapcsoljuk egy redukált feladatban. E redukált feladat azt fejezi ki, hogy az optimális megoldás a teherelosztás lehetséges csúcsponti megoldásainak azon súlyozott kombinációjából fog kikerülni, amely megoldások a tüzelőanyag-elosztás feladatába behelyettesítve és súlyozva kielégítik ezt a feltételrendszert is és a célfüggvény-együtthatóként szereplő tüzelőanyagárakkal szorzott majd súlyarányuk szerint összegezett költségük a minimum [3].

1. A redukált feladat felírásakor az imént elmondottakat kell megfogalmazni. Utaljon a redukált feladatra az R index, legyen az említett súlyozóvektor $\mathbf{x}_R$ és $\mathbf{1}$ olyan oszlop-vektor, amelynek mindegyik eleme az egység, akkor

$$
\begin{aligned}
A_{PR} \mathbf{x}_R &\leq \mathbf{e}_P \\
A_{VR} \mathbf{x}_R &= \mathbf{1} \\
\mathbf{c}_R^* \mathbf{x}_R &\to \min,
\end{aligned}
\tag{36}
$$

ahol az A_{PR} mátrix oszlopvektorai $\mathbf{a}_{PR[k\,l]}$, a k-ik intervallumhoz tartozó l-ik megoldás redukált alakja azaz

$$
\mathbf{a}_{PR[kl]} = A_P \mathbf{x}_{e[kl]} \,. \tag{37}
$$

A redukált feladat másik együttható-mátrixa, az A_{VR} azt fejezi ki, hogy a redukált feladat megoldását a redukált $\mathbf{a}_{PR[k\,l]}$ vektorok intervallumonként alkotott konvex lineáris kombinációja kell adja, azaz az egységnél kisebb súlyok összege intervallumonként 1 kell legyen. Ezt az fejezi ki, hogy ha

$$A_{VR} = \begin{vmatrix} a_{VR[1,1]} & \dots & a_{VR[1 n_{VR}]} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{VR[n_k 1]} & \dots & a_{VR[n_k n_{VR}]} \end{vmatrix} \tag{38}$$

ahol

$$\begin{aligned} n_{VR} &= n_k \cdot N_{cs}, \\ a_{VR[i,j]} &= 1, \quad \text{ha} \quad j = h\, n_k + i \\ &= 0 \quad \text{különben.} \end{aligned} \tag{39}$$

Végül a redukált feladat célfüggvényegyütthatója

$$\mathbf{c}_R^* = (c_{R[1]}, c_{R[2]}, \dots c_{R[j]}, \dots c_{R[n_m]}), \tag{40}$$

és az elemek képzésének szabálya:

$$\begin{aligned} c_{[(k-1)n_k+l]} &= \mathbf{c}^* \mathbf{x}_{c[k,l]} \\ k &= 1, 2, \dots, n_k, \\ l &= 1, 2, \dots, N_{cs}. \end{aligned} \tag{41}$$

A konkrét esetben, amikor az együttműködő erőműveknek és a tüzelőanyagoknak a száma több tucatnyi, a teljes redukált feladat mátrixát igen sok oszlop alkotja. Ezeket azonban nem kell mind meghatározni, hanem a dekompozíciós eljárás algoritmusának megfelelően a redukált feladat egy lehetséges megoldásából kiindulva csupán azoknak az oszlop-vektoroknak értékét határozzuk meg, melyek bevonásával az indulómegoldás még javítható. A (35) táblázat speciális felépítése lehetővé teszi a feladat megoldásának lerövidítését azzal is, hogy ha a teherelosztásnak egy $\mathbf{x}_{q[k\,l]}$ csúcsponti megoldása több intervallumon keresztül érvényes, akkor ezek az intervallumok összevonhatók.

2. A megoldás első lépése az, hogy olyan $\mathbf{x}_{q[k\,l]}$ vektorokat keresünk, melyek kielégítik a (36) feltételrendszer első sorát is. A feladat megoldhatóságának egyik kritériuma, hogy létezzenek ilyen vektorok. A másik kritérium az, hogy az erőművi teljesítmények összkapacitása nagyobb vagy egyenlő legyen az igénnyel. A keresett vektorok gyors megtalálása nehézségekbe ütközhet, ezért olyan utat választunk, amely azonnal biztosan célravezet.

Feltételezzük, hogy van egy olyan energiaforrás, amely tetszőleges mennyiségben áll rendelkezésre, és a teljesítményigényt mindig ki tudja elégíteni, ára azonban sok nagyságrenddel nagyobb, mint a többi primer energiahordozóé. A gyakorlati esetben ilyen forrás az importált villamosenergia.

Legyen ez az $l = 0$ indexű megoldás, melyre a c_R együtthatók jóval nagyobbak, mint a többi megoldásé.

Ez az $l = 0$ megoldás az összes intervallumra érvényes, azaz $l \le k \le n_k$ esetre igaz. Említettük, hogy ha egy megoldás több intervallumon keresztül érvényes, akkor ezek az intervallumok összevonhatók.

A redukált feladat induló alakjában egyetlen oszlopvektort fog tartalmazni, és ez a vektor teljes súllyal (azaz 1-gyel) súlyozva bekerül a redukált feladat bázisába. A redukált feladat bázisához tartozó ár-vektor — melyet jelöljünk $\mathbf{d}_R^*$-gal —, fogja megmutatni, mi az a megfelelő ármódosítás, melyet a teherelosztás célfüggvény-együtthatóinál végre kell hajtani és ez a $\mathbf{d}_R^*$ ár-vektor mutatja meg azt is, hogy az új árnyékárak mellett kapott $\mathbf{x}_{q[k\,l]}$ teherelosztási megoldás bevonása a megoldásba javíthatja-e az önköltséget. Osszuk ennek a kétféle feladatnak megfelelően két részre az ár-vektort. Ha

$$\mathbf{d}_R^* = (d_{R[1]}, d_{R[2]}, \dots d_{R[m_p]}, d_{R[m_p+1]}, d_{R[m_p+2]}, \dots d_{R[m_p+n_k]}), \tag{42}$$

akkor legyen

$$\mathbf{d}_{PR}^* = (d_{R[1]}, d_{R[2]}, \dots d_{R[j_p]}, \dots, d_{R[m_p]}) \tag{43}$$

és

$$\mathbf{d}_{VR}^* = (d_{R[m_p+1]}, d_{R[m_p+2]}, \dots d_{R[m_p+j_s]}, \dots d_{R[m_p+n_k]}). \tag{44}$$

A dekomponált feladatok megoldásmenetének algoritmusa szerint a szektorfeladat célfüggvény-együtthatója az l-ik lépésnél:

$$\mathbf{c}_{V[l]}^* = \mathbf{c}^* - \mathbf{d}_{PR[l]}^* A_p, \tag{45}$$

és mivel esetünkben a kezdőlépésnél, amikor $l = 0$, akkor $\mathbf{d}_{PR[0]}^* = 0$, így

$$\mathbf{c}_{V[0]}^* = \mathbf{c}^*. \tag{46}$$

A következő lépés a teherelosztás (18) alatti feltételrendszerét úgy megoldani, hogy a (24)-ben a célfüggvény helyébe a (45) összefüggés szerinti célfüggvény-együttható kerül.

3. A megoldás ismétlődő lépései követik ezután egymást mindaddig, amíg a kapott eredmény tovább már nem javítható. A soronkövetkező lépés a teherelosztás adott tüzelőárak mellett, azaz az említett (18) és (24) feltételrendszer megoldása szektorról szektorra haladva.

Az első szektorra felírva:

$$\begin{aligned} A_V \mathbf{x} &\leq \mathbf{q}_V \\ \mathbf{a}_e^* \mathbf{x} &= q \\ \mathbf{c}_{V[l]}^* \mathbf{x} &\to \min \end{aligned} \tag{47}$$

megoldása $\mathbf{x}_{q[1,l]}$ érvényes a jobb oldal változási tartományán belül a $q_{[k_2]}$ teljesítményhez tartozó t_{k_2} billenéspontig, és így tovább, a $t_{k_{j-1}}$ billenésponthoz tartozó megoldás $\mathbf{x}_q[k_j, l]$, végül az utolsó t_{r_k-1} billenésponthoz tartozó megoldás $\mathbf{x}_q[n_k, l]$.

Most az következik, hogy megvizsgáljuk, javítható-e a redukált feladat a teherelosztás valamelyik $\mathbf{x}_{q[k_s,l]}$, csúcsponti megoldásnak a bevonásával. A javíthatóság kritériuma, hogy

$$z_{V[k_s,l]} \leq d_{VR[k_s]}, \tag{48}$$

ahol

$$z_{V[k_s,l]} = \mathbf{c}_{V[k_s,l]}^* \cdot \mathbf{x}_{q[k_s,l]} \tag{49}$$

a k_s-ik szektorfeladat optimális megoldása az l-ik lépésnél.

Abban az esetben, ha a (48) reláció teljesül, akkor a megoldást (37), (38) és (41) összefüggést felhasználva bevonjuk a redukált feladatba. Ha egyik megoldás sem elégíti ki a (48) feltételt, akkor a feladat tovább már nem javítható.

Abban az esetben, ha bevontunk újabb szektormegoldást a redukált feladat mátrixába, akkor meg kell vizsgálni, hogy a bővített redukált feladat optimalizálásával jobb eredményt kapunk-e, mint az előző lépésnél. Ha igen, akkor újra kezdjük az e pontban elmondott lépéseket, ha nem, akkor a feladat megoldása tovább nem javítható.

Abban az esetben, ha a feladat megoldása tovább nem javítható, úgy a számítás lényegileg befejeződött és már csupán a kapott eredmények összegezésére van szükség. Ezt az összegezést — mint ismeretes — úgy végezzük, hogy a súlyozó vektorokkal megszorzott szektor-feladatmegoldásokat összeadjuk.

3. Példa a feladat megoldására

Kiinduló adatok

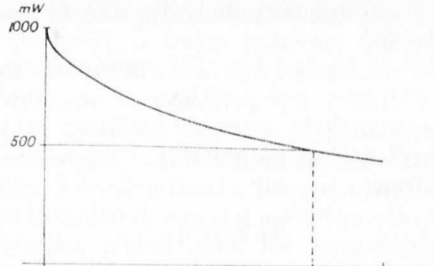
$m_p = 3$

$\mathbf{e}_p^* = (6000,\ 8000,\ 3000)$ [10^{12} kcal]

$m_v = 2$

$\mathbf{q}_v^* = (500,\ 500)$ [MW]

$\mathbf{q}(t)$: lásd a 2. sz. ábra



2. ábra

$$S_v = \begin{pmatrix} 2000 & 2500 \\ 2000 & 3200 \\ 4000 & 5000 \end{pmatrix} \quad [\text{kcal/kWh}]$$

$$f_p^* = (50, 60, 70) \quad [\text{Ft}/10^6\ \text{kcal}]$$

$$F_v = \begin{pmatrix} 50 & 60 \\ 60 & 30 \\ 70 & 14 \end{pmatrix} \quad [\text{Ft/tonna}] = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 20 & 10 \\ 20 & 4 \end{pmatrix} \quad [\text{Ft}/10^6\ \text{kcal}]$$

$$F = \begin{pmatrix} 70 & 74 \\ 80 & 70 \\ 90 & 74 \end{pmatrix} \quad [\text{Ft}/10^6\ \text{kcal}],$$

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_v = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 2{,}5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3{,}125 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad [10^5\,\mathrm{kWh}/10^{12}\,\mathrm{kcal}]$$

$$\mathbf{a}_E^* = (5,\ 4,\ 5,\ 3{,}125,\ 2,\ 5,\ 2) \quad [10^5\,\mathrm{kWh}/10^{12}\,\mathrm{kcal}$$

$$\mathbf{c}^* = (70,\ 74,\ 80,\ 70,\ 90,\ 74) \quad [\mathrm{Ft}/10^6\,\mathrm{kcal}]$$

Változók

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$$

x_1: 1) tüz. → 1 erőmű

x_2: 1) tüz. → 2 erőmű

x_3: 2) tüz. → 1 erőmű

x_4: 2) tüz. → 2 erőmű

x_5: 3) tüz. → 1 erőmű

x_6: 3) tüz. → 2 erőmű

(16) felt. rendszer

$$x_1 + x_2 \leq 6000$$
$$x_3 + x_4 \leq 8000$$
$$x_5 + x_6 \leq 3000$$
$$10^5(5x_1 + 5x_3 + 2{,}5x_5) \leq 500 \cdot t \cdot 10^3 \qquad (t = 8700 \text{ óra})$$
$$10^5(4x_2 + 3{,}125x_4 + 2x_6) \leq 500 \cdot t \cdot 10^3$$
$$10^5(5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3{,}125x_4 + 2{,}5x_5 + 2x_6) = 5930 \cdot 10^6$$
$$10_6(70x_1 + 74x_2 + 80x_3 + 70x_4 + 90x_5 + 74x_6) \to \min$$

Megoldás

$$x_1 = 2050$$
$$x_2 = 3950$$
$$x_3 = 6650$$

(35) felt. rendszer

$$n_k = 2,\ t_1 = 7000,\ t_2 = 8700$$
$$\Delta_1 = 7000,\ \Delta_2 = 1700$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} \leq 6000$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{14} + x_{24} \leq 8000$$
$$x_{15} + x_{16} + x_{25} + x_{26} \leq 3000$$
$$10^5(5x_{11} + 5x_{13} + 2{,}5x_{15}) \leq 35 \cdot 10^8$$
$$10^5(4x_{12} + 3{,}125x_{14} + 2x_{16}) \leq 35 \cdot 10^8$$
$$10^5(5x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 3{,}125x_{14} + 2{,}5x_{15} + 2x_{16}) = 5250 \cdot 10^6$$
$$10^5(5x_{21} + 5x_{23} + 2{,}5x_{25}) \leq 8{,}5 \cdot 10^8$$
$$10^5(4x_{22} + 3{,}125x_{24} + 2x_{26}) \leq 8{,}5 \cdot 10^8$$
$$10^5(5x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 3{,}125x_{24} + 2{,}5x_{25} + 2x_{26}) = 680 \cdot 10^6$$
$$10^6\, 70(x_{11} + x_{21}) + 74(x_{12} + x_{22}) + 80(x_{13} + x_{23}) + 70(x_{14} + x_{24}) + 90(x_{15} + x_{25}) + 75(x_{16} + x_{26}) \to \min$$

A két szektor feladat optimális megoldása

$$x_{11} = 7000$$
$$x_{12} = 4375$$
$$x_{21} = 1360$$

ez azonban a központi feladatot nem elégíti ki.

Ezért az induló redukált feladatban felveszünk egy olyan fiktív megoldást, amely semelyik energia, ill. teljesítmény kapacitást sem veszi igénybe. A szövegben leírt módon lépésről lépésre változtatjuk az árakat és ilyen módon a következő optimális megoldáshoz jutunk:

$x_{11} = 1625\ 10^{12}$ kcal

$x_{12} = 4375\ 10^{12}$ kcal

$x_{13} = 5375\ 10^{12}$ kcal

$x_{23} = 1360\ 10^{12}$ kcal

4. Összefoglalás

A villamosenergia-szolgáltatás együttműködő rendszerébe bekapcsolt erőművek közti teherelosztás és tüzelőanyag-elosztás célja az, hogy az erőművek kapacitásuk és a rendelkezésre álló tüzelőanyag-készletek korlátain belül minimális önköltséggel üzemeljenek. A feladat annak meghatározása, hogy a fajlagos hőfogyasztások ismeretében, adott tüzelőanyag-árak és szállítási költségek mellett egy-egy erőmű mennyi villamos energiát fejlesszen és milyen tüzelőanyag-féleségekből mennyit használjon fel erre a célra.

A kitűzött feladatot leíró feltételrendszer az általánosított szállítási feladat módosított és kiegészített alakját ölti, két részre bontható: a tüzelőanyag-elosztás és a teherelosztás feladatára. A tüzelőanyag-elosztás feladata annak meghatározása, hogy a rendelkezésre álló készletek korlátain belül milyen felhasználás arányok mellett legkisebb a tüzelőanyag-költség, a villamos teherelosztás feladata pedig az, hogy előírja, hogy az erőművek — kapacitásuk korlátain belül — milyen részt vegyenek magukra a fogyasztói igény kielégítéséből.

A fogyasztói igény nem állandó, hanem az idő függvényében változik. Az igényváltozás görbéje olyan szakaszokra osztható, melyeken belül az energiaszolgáltatás egy meghatározott erőmű-bázisra épül; a tüzelőanyag-fogyasztás a termelt villamos energiával, az önköltség pedig a kielégített teljesítményigénnyel arányosan változik. Ilyen szakaszokra bontva a feladat linearizálható, és ezt a szektorokra bontott feladatot kell megoldani.

E szektorokra bontott feladat megoldására igen alkalmas a dekompozíciós módszer, ahol a megoldás menete — a feladat speciális adottságait felhasználva — többféle módon is meggyorsítható. Egyrészt a szektorfeladatok együttható mátrixai azonosak és így a jobb oldal változásával a parametrikus programozás módszereivel lehet egyik bázisról átlépni a másikba. A központi feladat mátrixai csak egy skalár szorzóban térnek el egymástól, így — ezeket a skalárokat kiemelve — több szektor is egybefoglalható, ha a kapott megoldás közös. Harmadrészt a redukált feladat ár-vektorának és a központi feladat egy-egy oszlop-vektorának szorzata egy skalár (az ár-vektor egy-egy eleme) így ezt a szorzást nem kell elvégezni, hanem csak a megfelelő elemet kell kivonni a célfüggvény-együttható megfelelő eleméből.

Az ismertetett modell egy már használatban levő módszer továbbfejlesztése, de ez az új modell is továbbfejlesztésre szorul. Hiányosságai közé tartozik, hogy nem veszi tekintetbe, a fajlagos hőfogyasztás (azaz a teherelosztás mátrixelemei) a terhelés függvényében változik, egy-egy berendezés indítása ill. leállítása (azaz az áthaladás egy-egy billenésponton) külön többletköltséggel jár, az erőművek igénybevehető teljesítőképessége változik, stb. A matematikai programozás újabb és újabb módszerei bizonnyal lehetővé teszik olyan — a valósághoz még jobban simuló — modellek kidolgozását, melyekre épülő számítási eljárásokkal és a korszerű számítástechnika eszközeinek felhasználásával a gyakorlatban előforduló feladatok elfogadható időráfordítással megoldhatók.

(Beérkezett: 1970. augusztus 25.)

IRODALOM

[1] Abadie, J. M.—Williams, A. C.: Dual and Parametric Methods in Decomposition. Recent Advances in Mathematical Programming. New York, 1963. McGraw-Hill.

[2] Bathe, J.: Erfahrungen bei der Anwendung des dynamischen Modells zur Ermittlung der optimalen Kraftwerksstruktur im Verbundsystem. Energietechnik, 1968. 18. sz. 448—452. o.

[3] Hadley, G.: Nonlinear and Dynamic Programming. Reading—Palo Alto—London, 1964. Addison-Wesley Publishing Comp. 477 p.

[4] Hódi, Gy.—Elek, J.: Az erőművek közötti teherelosztás és tüzelőanyag-elosztás optimalizálása a lineáris programozás módszerével. ERŐTERV Közlemények, 1969. 9. sz.

[5] Kornai, J.: A gazdasági szerkezet matematikai tervezése. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 401 p.

[6] Résch, P.—Varsányi, E.: Villamos energia és tüzelőanyag-elosztás optimalizációja a villamosenergia-rendszerben. MVM kiadvány, Budapest.

[7] Szelezsán, J.: Lineáris programozás. Budapest, 1965. Műszaki Kiadó. 187 p.

TWO-LEVEL PLANNING IN THE PRODUCTION OF ELECTRIC ENERGY

For the more reliable planning of electric energy supply a linear programming problem has been worked out in the Hungarian Electric Works. It gives a solution how to distribute a given total load among the power plants so that the total cost of the utilized fuel should be minimum. The prepared model, however, has not taken into consideration that once electric energy is produced it cannot be stored. The article treats a possible way to develop further the prepared model. When developing it, an important part is played by the consideration of the time factor, where e.g. the change of the demand for electric energy can be expressed by the following connection:

$$\dot{e}_v = e_v(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} q(\tau)\, d\tau$$

where $e_v(t)$ is the demand in the t_0, $t_0 + t$ interval

$q(t)$ is the momentary demand for output.

In the first part of the article a description of the general problem can be found.

In fact, the problem involves calculations on two levels of planning and technology. One is the level of load distribution, the other is that of fuel. On both levels the aim is the minimization of costs. Thus the problem itself has a block-diagonal co-efficient matrix. In its solution the way of thinking applied with decomposition systems is followed.

The second part of the article deals with the steps of solution. When solving the problem, an important part is played by the shadow prices, their application makes the approximation of the optimal solution faster.

The third part of the article demonstrates the method by an example.

ДВУХСТУПЕНЧАТОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В ПРОИЗВОДСТВЕ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

С целью наиболее надежного планирования снабжения электроэнергией Венгерское Электрообъединение разработало задачу линейного программирования. Это дало ответ на то, как можно распределить заданную нагрузку между отдельными энергетическими станциями таким образом, чтобы затраты по использованному топливу были минимальными. Однако разработанная модель не учла того, что выработанную электроэнергию нельзя хранить. Эта статья обсуждает один из возможных путей дальнейшего развития разработанной модели. При дальнейшем развитии большую роль играет учет фактора времени, где например изменение потребности в электроэнергии выражается в следующей взаимозависимости:

$$e_v = e_v(t) = \int_{t_0}^{t_0+t} q(\tau)\, d\tau$$

где: $e_v(t)$ — потребность, появляющаяся в интервалах $(t_0, t_0 + t)$

$q(t)$ моментальная потребность в выработки.

В первой части статьи содержится изложение задачи в общих чертах. В сущности задача означает калькуляцию на двух планово-технологических уровнях. Одним из них является уровень распределения нагрузки, а другим — распределение топлива. На обоих уровнях целью является снижение себестоимости до минимального размера. Таким образом, задача располагает своей матрицей коэффициентов, характер расположения, который является блок-диагональным. При её решении преследуем ход мыслей, применяемому при декомпозиционных методах.

Вторая часть статьи обсуждает шаги решения. При решении важную роль играют теневые цены, при использовании которых можно быстрее достигнуть оптимальное решение.

В третьей части статьи автор на примере показывает вышеизложенный метод.

Faragó Kálmán — Gyulai András

Információs rendszer szervezésének egy matematikai modellje

Sok időt és költséget vesztenek el az iparban azzal, hogy az információtovábbítás nem kielégítő gyorsasággal, nagy kerülőutakkal történik. Az alább ismertetendő módszer ezen a tényen úgy kíván segíteni, hogy az egyes informálandó egységek között optimalizálja az információtovábbító-csatornák számát. Ezzel az információ útját és meghibásodásának valószínűségét minimálisra csökkentjük. Tudomásunk szerint az alábbi módszert még nem használták ilyenfajta problémák megoldására.

Definíciók

Jelöljük az informálandó egységeket a_i-vel ($i = 1, 2, \ldots, n$). A rendszerben futó információk (ezek nem feltétlenül különbözőek) száma legyen r. Jelük legyen K_j ($j = 1, 2, \ldots, r$). Legyen $\mathbf{b}^i$ a következő vektor:

$$\mathbf{b}^i = (b_1^i, b_2^i, \ldots, b_j^i, \ldots, b_r^i),$$

ahol

$$b_j^i = \begin{cases} 1, \text{ ha a } K_j \text{ információt } a_i\text{-be továbbítjuk,} \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Jelöljük S_i-vel $\mathbf{b}^i$ komponenseinek összegét, azaz

$$S_i = \sum_{j=1}^{r} b_j^i.$$

S_i nyilvánvalóan azt adja meg, a_i-be hány különböző információ érkezik és $\mathbf{b}^i$-ben az egyesek sorszáma egyben a befutó információ sorszámát is jelenti.

1. Definíció

Két a_i-t összekötő információtovábbító-vonalat (pl. telefonkábel) *csatornának* nevezzük.

2. Definíció

Az információk kiinduló helyét *forrás*-nak nevezzük és a továbbiakban A_j-vel ($j = 1, 2, \ldots r$) jelöljük.

3. Definíció

Azt mondjuk, hogy $\mathbf{b}^i$ *megelőzi* $\mathbf{b}^k$-t, ha

$$S_i < S_k.$$

Pl.: $\mathbf{b}^i = (1, 0, 0)$ és $\mathbf{b}^k = (0, 1, 1)$ esetén
$S_i = 1$ és $S_k = 2$, tehát $\mathbf{b}^i$ megelőzi $\mathbf{b}^k$-t.

4. Definíció

$\mathbf{b}^i$ *összehasonlítható* $\mathbf{b}^k$ -val, ha

$$S_i = S_k.$$

5. Definíció

Legyen $\mathbf{b}^i$ *következménye* $\mathbf{b}^k$, ha $\mathbf{b}^i$ megelőzi $\mathbf{b}^k$-t és

$$b_j^k - b_j^i \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, r.$$

Jelöljük ezt:
$$\mathbf{b}^i \Rightarrow \mathbf{b}^k.$$

Pl. ha $\mathbf{b}^i = (0, 1, 1, 0, 0)$ és
$\mathbf{b}^k = (1, 1, 1, 0, 1)$
akkor $\mathbf{b}^i \Rightarrow \mathbf{b}^k$

Ha nincs olyan p index, hogy $\mathbf{b}^i \Rightarrow \mathbf{b}^p$ és $\mathbf{b}^p \Rightarrow \mathbf{b}^k$, akkor $\mathbf{b}^k$-t $\mathbf{b}^i$ *közvetlen következményének* nevezzük.

6. Definíció

Azon $\mathbf{b}^{it}$ ($t = 1, 2, \ldots$), vektorok halmazát, melyek a $\mathbf{b}^{io}$ vektor következményei; *fának* nevezzük és $\mathbf{b}^{io}$ a fa kezdőeleme.

Célunk most már annak meghatározása, hogy mely a_i—k között kell csatornát létesíteni úgy, hogy a csatornák számát minimalizáljuk. Megadjuk azt is, hogy egy- vagy kétoldalú összeköttetést létesítünk-e az egyes helyek között. Egyoldalúnak nevezzük az összeköttetést, ha csak az egyik irányban, kétoldalúnak, ha mindkét irányban folyhat információ a csatornában.

Az algoritmus

1. Tegyük fel, hogy a K_j információt $a_{j1}, a_{j2}, \ldots a_{jm}$-be kell eljuttatnunk. Írjuk fel a $\mathbf{b}^i$ vektorokat úgy, hogy ha a_i-be a $K_{j_1}, K_{j_2}, \ldots, K_{j_v}$ információkat juttatjuk el, akkor a $\mathbf{b}^i$ vektor $j_1, j_2, \ldots, j_v$-ik komponense egyes, a többi zérus. Rendezzük $\mathbf{b}^i$-ket S_i-k növekvő sorrendjében.
2. Tekintsük az összehasonlítható $\mathbf{b}^{it}$ ($t = 1, \ldots, p$) vektorokat. Ha létezik olyan $\mathbf{b}^{iw}$, $w \in \{t\} \subset \{1, 2, \ldots p\}$ vektorhalmaz, melyre $\mathbf{b}^{iw} = \mathbf{b}^{iu}$ (minden $u, w \in \{t\}$), a megfelelő a_{iw} helyeket egyetlen csatornalánccal kötjük össze.
3. Tekintsük azon $\mathbf{b}^{it}$-ket, melyre $S_{it} = 1$, ekkor a megfelelő a_{it}-ket közvetlenül a forrásokkal kötjük össze és a további vizsgálatból kizárjuk.
4. Legyen $\mathbf{b}^{uo}$ az első olyan $\mathbf{b}$, hogy $S_{uo} \geq 2$.
Írjuk fel a $\mathbf{b}^{uo}$-hoz tartozó fát a következő módon:
Tekintsünk egy $\mathbf{b}^{u1}$-t, melyre $\mathbf{b}^{u1} \Rightarrow \mathbf{b}^{uo}$. Legyen $\mathbf{b}^{u2} \Rightarrow \mathbf{b}^{uo}$ és vizsgáljuk meg, $\mathbf{b}^{u1} \Rightarrow \mathbf{b}^{u2}$?

Ha ez fennáll, ábrázoljuk ezt a következő módon:

$$\mathbf{b}^{u0} \Rightarrow \mathbf{b}^{u1} \Rightarrow \mathbf{b}^{u2}.$$

Ha $\mathbf{b}^{u2} \nLeftarrow \mathbf{b}^{u1}$, akkor $\mathbf{b}^{u0} \begin{array}{l} \Rightarrow \mathbf{b}^{u1} \\ \Rightarrow \mathbf{b}^{u2} \end{array}.$

Végezzük ezt az eljárást mindaddig, amíg találunk olyan $\mathbf{b}$-t, amely $\mathbf{b}^{u0}$ következménye.

5. Ha ilyen $\mathbf{b}$ már nincs, vegyünk egy olyan vektort, amely nem szerepel az eddigi fákban és legyen ez a vektor a következő fa kezdőeleme. Ha egy fa a kezdőelemen kívül más vektort nem tartalmaz, közvetlenül a forrásokkal kötjük össze.
6. Írjuk fel az így definiált összes fát. A fáknak természetesen lesznek közös elemei, csak a kezdőelemek különbözőek.
7. Tekintsük a rendezésben legutolsónak álló elemet (legyen ez $\mathbf{b}^z$). S_z tehát maximális az S-k között. (az a_z-be futó információk száma maximális) Vizsgáljuk meg, mely fákban létezik oly elem, melynek $\mathbf{b}^z$ a közvetlen következménye, és erre a $\mathbf{b}^q$ elemre

$$S_z - S_q = 1$$

a) $\mathbf{b}^q$ létezése esetén a_z-t a_q-val és azzal a forrással kössük össze, mely nem szerepel a_q információforrásai között. Töröljük $\mathbf{b}^z$-t az összes fából és a rendezett vektorhalmazból is. Ismételjük a 7. pontot.

b) Ha ilyen $\mathbf{b}^q$ nem létezik, tekintsük azokat a közvetlen következményeket az egyes fákban, melyekre

$$S_z - S_{zd} \geq 2. \qquad d = 1, 2, \ldots$$

Számítsuk ki $\Delta = \min\limits_{d=1,2,\ldots} (S_z - S_{zd})$-t.

Tehát a_z-re nézve ez $\Delta + 1$ csatornát jelent. Ezt a számot úgy csökkenthetjük, hogy a $\mathbf{b}^z$ vektort előállítjuk Δ-nál nem több vektor szuperpozíciójaként.

Ehhez értelmezzük a következő vektor-összeadást:

$$\mathbf{u}(u_1, u_2, \ldots, u_e) \oplus \mathbf{u}(v_1, v_2, \ldots, v_e) = w(w_1, w_2, \ldots, w_e),$$

$$u_i \text{ és } v_j = 0 \text{ vagy } 1,$$

$$w_k = \begin{cases} 1, & \text{ha } u_k \text{ és } v_k \text{ közül legalább az egyik } 1 \\ 0, & \text{ha } u_k = v_k = 0. \end{cases}$$

Állítsuk elő $\mathbf{b}^z$-t Δ-nál nem több diszjunkt vektor egyesítéseként. Vegyük ebből a minimális darabszámú egyesítést. Ha

$$\mathbf{b}^{z1} \oplus \mathbf{b}^{z2} \oplus \ldots \oplus \mathbf{b}^{z\Delta} = \mathbf{b}^z,$$

akkor a_z-be a_{z1}-ből, a_{z2}-ből, $\ldots$, $a_{z\Delta}$-ből építünk ki csatornákat. $\mathbf{b}^z$-t töröljük a fákból és a rendezett vektor-halmazból, ezután a 7. pontnál folytatjuk az eljárást.

c) Az eljárás akkor ér véget, amikor $\mathbf{b}^z$ a vektor-halmaz első eleme.

A modell számítógépi megvalósítása rendkívül egyszerű, hiszen egy **b** vektor tárolása egy 0—1 bitű rekeszben történhet, ami kis memória esetén is gyorsan és kényelmesen programozható.

Példa

Adott 20 különböző helyen levő informálandó egység és 10 különböző információ.

Milyen jellegű csatornákat létesítünk az egyes a_i-k között? Mi a csatornák minimális száma?

K_1 információt: a_6, a_7, a_9 a_{11}, a_{15}, a_{19}-be
K_2 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_{12}, a_{15}, a_{18}-ba
K_3 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{14}, a_{15}, a_{20}-ba
K_4 : a_4, a_7, a_{10}, a_{13}, a_{16}, a_{17}, a_{18}, a_{19}, a_{20}-ba
K_5 : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{16}, a_{20}-ba
K_6 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{17}, a_{20}-ba
K_7 : a_1, a_2, a_3, a_4, a_8, a_{12}, a_{16}, a_{19}-be
K_8 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{14}, a_{15}, a_{17}, a_{20}-ba
K_9 : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{20}-ba
K_{10} : a_2, a_3, a_5, a_8, a_9, a_{12}, a_{16}, a_{17}, a_{20}-ba

kell eljuttatnunk.

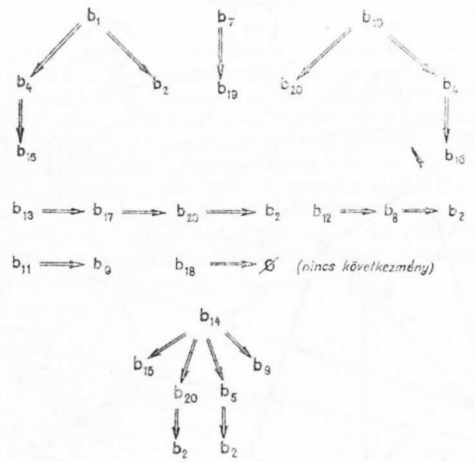
Az algoritmus egyes lépései:

1. $\mathbf{b}^1 = (0000101000)$, $S_1 = 2$ | $\mathbf{b}^{11} = (1000100000)$, $S_{11} = 2$
$\mathbf{b}^2 = (0110111111)$, $S_2 = 8$ | $\mathbf{b}^{12} = (0110001111)$, $S_{12} = 6$
$\mathbf{b}^3 = (0110111111)$, $S_3 = 8$ | $\mathbf{b}^{13} = (0001010001)$, $S_{13} = 3$
$\mathbf{b}^4 = (0001101000)$, $S_4 = 3$ | $\mathbf{b}^{14} = (0010010110)$, $S_{14} = 4$
$\mathbf{b}^5 = (0110110111)$, $S_5 = 7$ | $\mathbf{b}^{15} = (1110010110)$, $S_{15} = 6$
$\mathbf{b}^6 = (1000000000)$, $S_6 = 1$ | $\mathbf{b}^{16} = (0001101011)$, $S_{16} = 5$
$\mathbf{b}^7 = (1001000000)$, $S_7 = 2$ | $\mathbf{b}^{17} = (0001010101)$, $S_{17} = 4$
$\mathbf{b}^8 = (0110011111)$, $S_8 = 7$ | $\mathbf{b}^{18} = (0101000000)$, $S_{18} = 2$
$\mathbf{b}^9 = (1010110111)$, $S_9 = 7$ | $\mathbf{b}^{19} = (1001001000)$, $S_{19} = 3$
$\mathbf{b}^{10} = (0001100000)$, $S_{10} = 2$ | $\mathbf{b}^{20} = (0011110111)$, $S_{20} = 7$

A rendezett vektorhalmaz:

$\mathbf{b}^6, \mathbf{b}^1, \mathbf{b}^7, \mathbf{b}^{10}, \mathbf{b}^{11}, \mathbf{b}^{18}, \mathbf{b}^4, \mathbf{b}^{13}, \mathbf{b}^{19}, \mathbf{b}^{14}, \mathbf{b}^{17}, \mathbf{b}^{16}, \mathbf{b}^{12}, \mathbf{b}^{15}, \mathbf{b}^5, \mathbf{b}^8, \mathbf{b}^9, \mathbf{b}^{20}, \mathbf{b}^2, \mathbf{b}^3.$

2. Mivel $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}^3$, a_2 és a_3 között létesítünk kapcsolatot és $\mathbf{b}^3$-t töröljük.
3. $S_6 = 1$, ezért a_6-ot csak A_1-gyel kötjük össze. ($\mathbf{b}^6$-nak az első komponense **1**, ezért A_1-gyel).
4. Elkészítjük az összes fát:



Vizsgáljuk meg, a_2-t mely forrásokkal, ill. telephelyekkel kössük össze.
$\mathbf{b}^2$ közvetlen következménye $\mathbf{b}^5$-nek és $\mathbf{b}^{20}$-nak. Válasszuk a_5 és a_{20} közül azt, amelyet a_2-vel összekötve kisebb a költség. (Pl. kisebb távolság, jobb talajviszonyok). Ilyen legyen pl. a_{20}, ide három csatorna fut össze, a_{10}, a_{14}, és A_{10}-ből.

Ugyanis legyen $\mathbf{b}^E$ a következő vektor:

$$\mathbf{b}^E = \mathbf{b}^{10} \oplus \mathbf{b}^{14}.$$

Mivel $\mathbf{b}^{10}$ és $\mathbf{b}^{14}$ diszjunktak, $S^E = S_{10} + S_{14} = 2 + 4 = 6.$

Tehát a minimális csatornaszám; mivel $\Delta E = 2$;

$$S_{20} - S_E + \Delta E = 3.$$

Jól látható, hogy ha a_{17}-t kapcsolnánk össze a_{20}-szal, a befutó vonalak száma

$$S_{20} - S_{17} + 1 = 4$$

lenne.

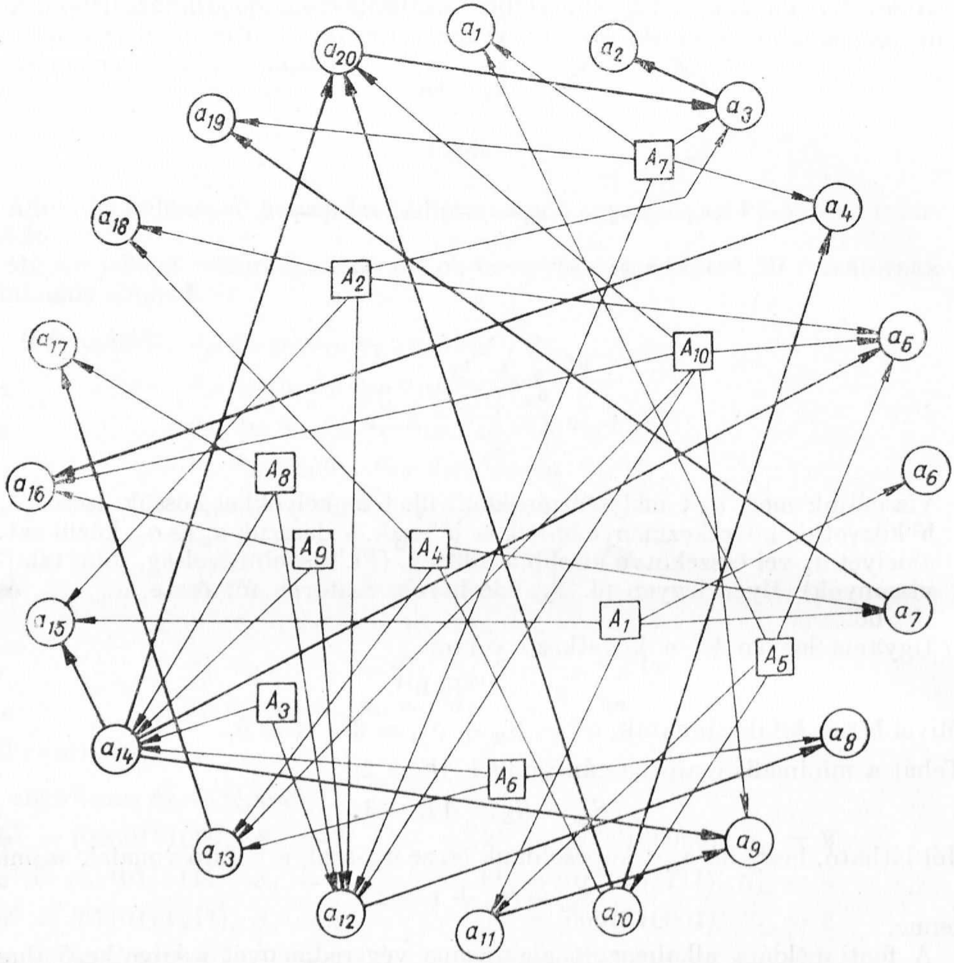
A fenti példára alkalmazott algoritmus végeredményét a következő ábra mutatja be. A körök az informálandó egységeket, a négyzetek a forrásokat jelzik. A nyilak a csatornákat és az információáramlás irányát mutatják.

Végezetül az algoritmus egyéb helyeken való felhasználhatóságával kapcsolatban még két alkalmazási területet említünk.

1. Víztároló rendszerek kiépítésénél a forráshelyek és a tárolómedencék közötti csatornahálózatot oly módon adja meg az algoritmus, hogy minimalizálja az egyirányú áramlást biztosító berendezések (zsilipek) számát.

2. Az elektrotechnikában tekintsük a következő problémát. A stadionokban felszerelt eredményjelző táblák kapcsolását eddig relékkel valósították meg. Az algoritmus olyan kapcsolást szolgáltat, mely megadja, hogy két égőt huzallal vagy diódával kell összekötni, avagy nem kell semmilyen kapcsolatot sem létesíteni közöttük. Az algoritmus nagy előnye, hogy a felhasznált diódák számát minimalizálja, amellyel egyúttal az előállítási költséget is minimalizáljuk. Ezzel elérjük, hogy a kapcsolás minimális térfogatot igényel, és ezt esztétikai szempontból sem hagyhatjuk figyelmen kívül.

(Beérkezett: 1970. május 20.)



A MATHEMATICAL MODEL FOR THE ORGANIZATION OF INFORMATION SYSTEMS

The algorithm described in the article solves the following problem:

There are r sources and n receiving places. The sources and the receiving places are connected with channels. The problem to be solved is how to form the channels so that their number should be minimum, furthermore the number of the channels establishing one-way contact should be minimum as well (latter being significant at the 2. application described at the end of the article).

When establishing the channels another essential standpoint is that only the envisaged plants shall receive information from a given source, the others shall not.

The algorithm described here is the authors' own creation but similar algorithms can be found in the book by László Béla Kovács: A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei (Combinatorial Methods of Discrete Programming).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОРГАНИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Описанный в статье алгоритм разрешает следующую проблему:

Существуют r источников и n приемочных пунктов. Источники и приемочный пункты связываются каналами. Проблемой, которую нужно разрешить, является то, как нужно создать каналы таким образом, чтобы их количество было минимальным, далее, чтобы было минимальным и количество каналов, создающих связь в одном направлении. (Это последнее важно при использовании 2, изложенном в конце статьи.)

При создании каналов существенной точкой зрения является и то, чтобы из одного источника получили лишь те пункты, для которых предписано, а остальные нет.

Изложенный здесь алгоритм является собственным творением авторов, но похожие алгоритмы можно найти в книге Ласло Бела Ковача под названием: «Комбинаторные методы дискретного программирования.»

STAHL JÁNOS

Algoritmus poliéderjátékok megoldására

Bevezetés

Az alábbiakban tárgyalandó algoritmus tulajdonképpen rendkívül kézenfekvő módja poliéderjátékok megoldásának: noha a [10]-ben bevezetett lineáris programozási feladat explicite általában nem ismert, megoldása — amennyiben egyáltalán létezik — többnyire lényegesen kisebb méretű lineáris programozási feladatok egy sorozatának megoldásával meghatározható.

Az 1. fejezetben ezt az eljárást tárgyaljuk, 2-ben pedig két olyan speciális poliéderjátékra történő alkalmazásával foglalkozunk röviden, amelyek ekvivalensek a lineáris programozási feladat megoldásával: így különféle dekompozíciós eljáráshoz jutunk.

Az alkalmazott jelölésmód: félkövér kisbetűvel oszlopvektort, felül vesszővel sorvektort, nagybetűvel mátrixot jelölünk. Az elemek valós számok, a méreteket, dimenziókat külön nem hangsúlyozzuk.

1.

Az $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, C)$ hármast, ahol $\mathcal{A}_1 = \{\mathbf{x}' | \mathbf{x}' A_1 \geq \mathbf{a}_1'\} \neq \emptyset$ és $\mathcal{A}_2 = \{\mathbf{y} | A_2 \mathbf{y} \leq \mathbf{a}_2\} \neq \emptyset$ konvex poliéderek, poliéderjátéknak nevezzük.

Legyen $v_1 = \sup\limits_{\mathcal{A}_2} \inf\limits_{\mathcal{A}_1} \mathbf{x}' C \mathbf{y}$ és $v_2 = \inf\limits_{\mathcal{A}_1} \sup\limits_{\mathcal{A}_2} \mathbf{x}' C \mathbf{y}$. Mint az belátható ([10], [11]), mindig fennáll a következő négy eset valamelyike:

$$(1.1.) \quad -\infty < v_1 = v_2 < +\infty$$

$$(1.2.) \quad -\infty = v_1 = v_2$$

$$(1.3.) \quad v_1 = v_2 = +\infty$$

$$(1.4.) \quad v_1 = -\infty, \; v_2 = +\infty$$

(1.1.) esetén v_1 és v_2 definíciójában inf és sup helyett min és max írható és van olyan $\overline{\mathbf{x}}' \in \mathcal{A}_1$, $\overline{\mathbf{y}} \in \mathcal{A}_2$ pár, amelyre $\min\limits_{\mathcal{A}_1} \mathbf{x}' C \overline{\mathbf{y}} = \overline{\mathbf{x}}' C \overline{\mathbf{y}} = \max\limits_{\mathcal{A}_2} \overline{\mathbf{x}}' C \mathbf{y}$. (Egyébként a következő algoritmus, illetve annak verifikálása is lényegében kiadja a fentieket).

A továbbiakban definiáljuk az (1.5.)—(1.8.) eljárást, amely véges számú lépésben eldönti, hogy egy adott poliéderjáték esetén (1.1.)-gyel vagy valamelyik további „kivételes" esettel van-e dolgunk, illetve (1.1.) teljesülése esetén megadja a fenti $\overline{\mathbf{x}}' \in \mathcal{A}_1$ és $\overline{\mathbf{y}} \in \mathcal{A}_2$ párt.

(1.5.) Legyen $\widetilde{x}_1$ tetszőleges $\mathcal{A}_1^4$-beli extremális elem, ahol $\mathcal{A}_1$ kanonikus felbontásában ([4], [8]) $\mathcal{A}_1^4$ jelöli a korlátos, $\mathcal{A}_1^<$ pedig a kúp komponenst. Minthogy $\mathcal{A}_1 \neq \emptyset$, ilyen van.

(1.6.) Tegyük fel, $\widetilde{\mathbf{x}}_1' \ldots \widetilde{\mathbf{x}}_{k-k'}' \in \mathcal{A}_1^4$ és $\widetilde{\widetilde{\mathbf{x}}}_1', \ldots \widetilde{\widetilde{\mathbf{x}}}_{k'}' \in \mathcal{A}_1^<$ extremális elemek már ismertek.

Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot:

$$\text{P. 1.}\qquad \left.\begin{array}{c} -\,\tilde{\mathbf{x}}_j' C\,\mathbf{y} + v \leq 0 \\ j = 1, 2, \ldots k - k' \\ -\,\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_j' C\,\mathbf{y} \leq 0 \\ j = 1, 2, \ldots k' \\ A_2\,\mathbf{y} \leq a_2 . \end{array}\right\}\; v \to \max .$$

Ha ezen feladatnak nincs lehetséges megoldása, az eljárás végetér, az (1.2.) vagy (1.4.) esettel van dolgunk.

Ha a feladat nem korlátos, legyen $\mathbf{y}_k \in \mathcal{K}_2^{\leq}$ olyan extremális elem, melyre $\tilde{\mathbf{x}}_j' C\mathbf{y}_k > 0$ és $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_j' C\mathbf{y}_k \geq 0$ minden P.1.-ben szereplő $\tilde{\mathbf{x}}_j$ és $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_j'$-re és $v_1^{(k)} = +\infty$.

Ha P.1.-nek létezik optimális megoldása, legyen $\mathbf{y}_k \in \mathcal{K}_2^{\Delta}$ egy extremális optimális megoldás és jelöljük $v_1^{(k)}$-val az optimumértéket.

(1.7.) Tekintsük a következő lineáris programozási feladatot:

$$\text{P. 2.}\qquad \mathbf{x}' A_1 \geq \mathbf{a}_1' \}\;\; \mathbf{x}' C\,\mathbf{y}_k \to \min$$

Ha ezen feladat nem korlátos, legyen $v_2^{(k)} = -\infty$ és $\mathbf{x}_{k+1}' \in \mathcal{K}_1^{\leq}$ olyan extremális elem, hogy $\mathbf{x}_{k+1}' C\mathbf{y}_k < 0$. Ellenkező esetben legyen $\mathbf{x}_{k+1}' \in \mathcal{K}_1^{\Delta}$ P.2. egy optimális extremális megoldása és $v_2^{(k)}$ az optimumérték.

(1.8.) Ha $v_1^{(k)} = +\infty$ és $v_2^{(k)} > 0$, az eljárás végetér, az (1.3.) vagy (1.4.) esettel van dolgunk.

Ha $v_1^{(k)} = v_2^{(k)}$ véges érték, az eljárás végetér, az (1.1.) esettel van dolgunk.

Más esetben legyen $\tilde{\mathbf{x}}_{k-k'+1}' = \mathbf{x}_{k+1}'$ ha $\mathbf{x}_{k+1}' \in \mathcal{K}_1^{\Delta}$, $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{k'+1}' = \mathbf{x}_{k+1}'$, ha $\mathbf{x}_{k+1}' \in \mathcal{K}_1^{\leq}$. Folytassuk az eljárást (1.6.)-tól k helyett $k+1$-gyel.

A fenti állítások a következőképpen láthatók be:

ad (1.6.) Ha a P.1, feladat nem oldható meg, akkor tetszőleges $\mathbf{y} \in \mathcal{K}_2$-re valamely $1 \leq j \leq k - k'$-vel $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_j' A\mathbf{y} < 0$. Minthogy $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_j \in \mathcal{K}_1^{\leq}$, $\inf\limits_{\mathcal{K}_1} \mathbf{x}' C\mathbf{y} = -\infty$ minden $\mathbf{y} \in \mathcal{K}_2$-re, tehát $v_1 = -\infty$.

ad (1.8.) Ha $v_2^{(k)} > 0$, akkor tetszőleges $\mathbf{x}' \in \mathcal{K}_1$-re $\mathbf{x}' C\mathbf{y}_k > 0$. Minthogy $v_1^{(k)} = +\infty$ folytán $\mathbf{y}_k \in \mathcal{K}_2^{\leq}$, azért $\sup\limits_{\mathcal{K}_2} \mathbf{x}' C\mathbf{y} = +\infty$ tetszőleges $\mathbf{x}' \in \mathcal{K}_1$-re, így $v_2 = +\infty$.

A $v_1^{(k)} = v_2^{(k)}$ véges érték esetben vezessük be a következő jelöléseket. Legyen $\overline{\mathbf{x}}' = \mathbf{t}' X$, ahol X az $\tilde{\mathbf{x}}_1', \ldots \tilde{\mathbf{x}}_{k-k'}'\ \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_1' \ldots \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}_{k'}'$ sorvektorokból alkotott mátrix, $\mathbf{t}'$ a P.1. feladat egy duális optimális megoldásának első k komponenséből alkotott vektor és $\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_k$. Ekkor $\overline{\mathbf{x}}' \in \mathcal{K}_1$ és P.2. alapján $\min\limits_{\mathcal{K}_1} \mathbf{x}' C\overline{\mathbf{y}} = v_2^{(k)}$. Másrészt P.1.-re a kiegészítő eltérések tételét ([8]) alkalmazva, $\overline{\mathbf{x}}' C\overline{\mathbf{y}} = v_1^{(k)}$, és tetszőleges $y \in \mathcal{K}_2$-re $\overline{\mathbf{x}}' Cy \leq v_1^{(k)}$, így $\max\limits_{\mathcal{K}_2} \overline{\mathbf{x}}' C\mathbf{y} = v_1^{(k)}$. Tehát a most definiált $\overline{\mathbf{x}}'$ és $\overline{\mathbf{y}}$ valóban szolgáltatja az (1.1.)-gyel kapcsolatban említett elempárt.

Minthogy P.2. extremális megoldásainak száma véges és egy extremális megoldás újbóli megjelenése olyan esetre vezet, mikor az eljárás befejeződik, az (1.5.)—(1.8.) eljárás véges számú lépésben végetér.

Ezzel kapcsolatban egyrészt azt kell meggondolnunk, hogy egy P.1.-ben szerepelt $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}' \in \mathcal{A}_1^{<}$ nem adódhat újra P.2. megoldásakor, hiszen ekkor $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}' C\mathbf{y}_k < 0$-nak kellene teljesülnie, míg P.1. szerint $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} C\mathbf{y}_k \geq 0$. Másrészt, ha egy P.1.-ben már szerepelt $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{A}_1^{4}$ adódna újra, akkor P.2. alapján $v_2^{(k)} = \tilde{\mathbf{x}}' C\mathbf{y}_k \leq \tilde{\mathbf{x}}'_j C\mathbf{y}_k$, $j = 1, 2, \ldots k-k'$-ra. Amennyiben most $\mathbf{y}_k \in \mathcal{A}_2^{4}$ akkor P.1. alapján ebből $v_1^{(k)} = \tilde{\tilde{\mathbf{x}}}' C\mathbf{y}_k$ is adódik, azaz $v_1^{(k)} = v_2^{(k)}$ véges érték. Ha viszont $\mathbf{y}_k \in \mathcal{A}_2^{<}$, akkor (1.6.) szerint $v_1^{(k)} = +\infty$ és $\tilde{\mathbf{x}}' C\mathbf{y}_k > 0$, azaz $v_1^{(k)} = +\infty$ és $v_2^{(k)} > 0$ teljesül. (1.8.) szerint mindkét esetben befejeződik az eljárás.

Ezen rész lezárásaként a következőket jegyezzük meg:

(1.9) Nyilván $v_1^{(k)} \geq v_1^{(k+1)} \ldots = v_1 = v_2^{(k)}$.

(1.10.) A k. képésben szereplő P.1. feladatból elhagyhatók a $k+1$. lépésre mindazon feltételek, amelyek nem egyenlőségként teljesültek a k. lépésbeli optimális megoldásnál. (Ha a k. lépésben ilyen egyáltalán volt).

(1.11.) Ha megengedjük, hogy $\mathcal{A}_1 = \emptyset$ vagy $\mathcal{A}_2 = \emptyset$, akkor az üres számhalmaz supremumára, illetve infimumára vonatkozó szokásos definíció alapján meg kell engednünk azt a lehetőséget is, hogy $v_1 = +\infty$ és $v_2 = -\infty$. Ekkor (1.5.)-ben egy lineáris programozási feladat megoldásával $\mathbf{x}_1$ meghatározható, vagy az adódik, hogy $\mathcal{A}_1 = \emptyset$, amivel a most bevezetett esettel az eljárás véget is ér. Ez utóbbi eset állhat fenn akkor is, ha $k = 1$ esetén P.1.-nek nincs lehetséges megoldása.

(1.12.) Az eljárással kapcsolatban elmondottakon nem változtat, ha $v_1^{(k)} < +\infty$ esetén 1.7. helyett $\mathbf{x}'_{k+1}$-t $\mathcal{A}_1$ olyan extremális elemeként definiáljuk, amelyre $\mathbf{x}'_{k+1} C\mathbf{y}_k \leq v_1^{(k)}$. Ekkor $v_2^{(k)} = \mathbf{x}'_{k+1} C\mathbf{y}_k$ szükséges a korábbi definíció helyett.

(1.13.) A k. lépésben szereplő P.1. feladat bővíthető a $k+1$. lépésre — az $\mathbf{x}'_{k+1}$-hoz tartozó feltételen kívül — tetszőleges $\mathbf{x}' \in \mathcal{A}_1$-nek megfelelő $-\mathbf{x}' C\mathbf{y} + v \leq 0$ feltétellel, illetve tetszőleges sok ilyen feltétellel.

(1.14.) Ha $\mathcal{A}_1$ és $\mathcal{A}_2$ korlátos poliéderek, azaz $\mathcal{A}_1^{<} = \emptyset$ és $\mathcal{A}_2^{<} = \emptyset$, akkor az algoritmusból ezen utóbbi halmazokkal kapcsolatos lehetőségek elhagyhatók és amennyiben nem üres poliéderekről van szó, mindig az (1.1.) esettel van dolgunk.

2.

Tekintsük a $\sup\{\mathbf{c}'\mathbf{x} \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ lineáris programozási feladatot.

(2.1.) Ha $A = [A_1 \ldots A_n]$, $\mathbf{c}' = [\mathbf{c}'_1, \ldots \mathbf{c}'_n]$ a feladat paramétereinek egy particiója és $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_n]$ a változók megfelelő particiója, akkor a fenti feladat nyilván ekvivalens a következővel ([7]):

$$\sup\Big\{\sum_i \mathbf{c}'_i \mathbf{x}_i \,\Big|\, \sum_i A_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b},\ \mathbf{x}_i \geq 0\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\sum_i \sup\{\mathbf{c}'_i \mathbf{x}_i \mid \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i,\ \mathbf{x}_i \geq 0\} \,\Big|\, \sum_i \mathbf{b}_i = \mathbf{b}\Big\} =$$

$$= \sup\Big\{\sum_i \inf\{\mathbf{p}'_i \mathbf{b}_i \mid \mathbf{p}'_i A_i \geq \mathbf{c}'_i\} \,\Big|\, \sum_i \mathbf{b}_i = \mathbf{b}\Big\} = \sup_{\mathcal{B}} \inf_{\mathcal{P}} \hat{\mathbf{p}}' \hat{\mathbf{b}}$$

ahol

$$\mathscr{B} = \left\{ \hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \mathbf{b}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| \sum_i \mathbf{b}_i = \mathbf{b} \right\}$$

és

$$\mathscr{P} = \{\hat{\mathbf{p}}' = (\ldots \mathbf{p}_i' \ldots) \mid \forall_i : \mathbf{p}_i' A_i = \mathbf{c}_i'\}.$$

Hallgatólag feltettük, hogy $+\infty + (-\infty) = -\infty$.

$\mathscr{B}$ nyilván nem üres és mint egyszerűen belátható $\mathscr{P} \neq \emptyset$ teljesül, ha egyetlen i-re sincs olyan $\mathbf{x}_i$, hogy $A_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ és $\mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i > 0$, ami gyengébb, mintha az eredeti lineáris programozási feladat korlátos voltát tennénk fel. (Egyébként lásd az (1.11.) alatti megjegyzést).

Ha az (1.5.)–(1.8.) algoritmust alkalmazzuk ezen poliéderjáték megoldására, akkor az (1.7.) lépésben a min $\{\mathbf{p}_i'\mathbf{b}_i | \mathbf{p}_i'A_i = \geq \mathbf{c}_1'\}$ feladatokat, vagy max $\{\mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i | A_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i,\ \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}\}$ duálisaikat kell megoldanunk, míg az (1.6.) lépésben szereplő P.2. feladat max$\{v | \bar{\mathbf{p}}_i'\hat{\mathbf{b}} \geq v, \ldots \tilde{\tilde{\mathbf{p}}}_1'\hat{\mathbf{b}} \geq 0, \ldots, \hat{\mathbf{b}} \in \mathscr{B}\}$. (A duálisra való áttérés lehetőségét most és a következőkben mint egy konkrét esetben alkalmazható eszközt tekintjük).

Ha az eredeti feladat a Dantzig–Wolfe-féle dekompozíciós eljárás ([3]) tárgyalásánál „szokásos" — de mindenképpen érdekes és fontos — max $\left\{\sum_i \mathbf{c}_i'\mathbf{x}_i \middle| \sum_i A_i\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_i,\ D_i\mathbf{x}_i = \mathbf{d}_i,\ \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}\right\}$ feladat és az előbbi partíció az $\mathbf{x}_i$-knek megfelelően történik, a fenti $\mathscr{B}$ definíciójához nyilván elegendő csak a „közös" feltételekhez tartozó jobboldalt felbontani. A „szektorfeladatok" mérete az (1.5.)–(1.8.) algoritmusnál nagyobb, mint a Dantzig–Wolfe algoritmusnál, a különbség a közös feltételek száma. A központi feladat is nagyobb ennél az algoritmusnál és általában egy feltétellel még növekszik is minden lépésben. [Lásd még az (1.10.) és (1.12.) megjegyzéseket].

Ezzel kapcsolatban — számítástechnikai tapasztalatok vagy további elmélet híján — csak annyit, hogy ha a közös feltételek száma nem túl nagy a szektorfeladat(ok) feltételei számához képest, a Dantzig–Wolfe algoritmushoz képest nagyobb szektorfeladatok kezelése nem jelent lényeges különbséget és többnyire csak ilyen esetekben alkalmazták sikerrel a Dantzig–Wolfe algoritmust is ([1]). Ide kívánkozik még az is, hogy több esetben az A_i mátrixok egy részében viszonylag alacsony a nemzérus sorok aránya.

Vegyük majd észre még, hogy a (2.2.) alatti megközelítésben a szektorfeladatok méreteivel nincs ilyen „baj".

(2.2.) Gyakorlatban egy másmilyen visszavezetés után alkalmaztuk az algoritmust lineáris programozási feladat megoldására ([5]). Az adódó algoritmus lényegében a Benders-féle eljárás ([2]) lineáris esetben.

Hasonló „mélységben" végezve ezen algoritmusnak a [7]-ben javasolt eljárással történő összevetését azt mondhatjuk, hogy a bonyolultabb központi feladat kezelése az a többletráfordítás, amellyel eljárásunk esetében a végességet elérjük.

Ha a lineáris programozási feladat paramétereinek $A = [A_1 A_2]$, $\mathbf{c}' = [\mathbf{c}_1', \mathbf{c}_2']$, illetve $\mathbf{x}$ megfelelő $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ partícióját tekintjük, akkor

$$\sup\{\mathbf{c}_1'\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2'\mathbf{x}_2 | A_1\mathbf{x}_1 + A_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{0}\} =$$
$$= \sup\{\mathbf{c}_1'\mathbf{x}_1 + \sup\{\mathbf{c}_2'\mathbf{x}_2 | A_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b} - A_1\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0\} | \mathbf{x}_1 \geq 0\} =$$
$$= \sup\{\mathbf{c}_1'\mathbf{x}_1 + \inf\{\mathbf{p}'(\mathbf{b} - A_1\mathbf{x}_1) | \mathbf{p}'A_2 \geq \mathbf{c}_2'\} | \mathbf{x}_1 \geq 0\} =$$
$$= \sup_{\mathscr{X}} \inf_{\mathscr{P}} \hat{\mathbf{p}}' C \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathscr{X} = \{\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{0}) | \mathbf{x}_1 \geq 0\},$$
$$\mathscr{P} = \{\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}', \mathbf{0}) | \mathbf{p}'A_2 \geq \mathbf{c}_2'\}$$

és

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{c}_1' \\ \mathbf{b} & -A_1 \end{bmatrix}.$$

Ezen megközelítést nyilván akkor célszerű alkalmazni, ha a $\mathbf{p}'A_2 \geq \mathbf{c}_2'$ feltételrendszer vagy duálisa jól kezelhető (pl. [5] esetén ez egy szállítási feladat volt), vagy

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{21} & & 0 \\ & A_{22} & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix},$$

mikoris az (1.7.)-beli P.2. feladat megoldása több kisebb méretű feladat megoldását jelenti.

Könnyű megmutatni, hogy az így adódó eljárás — és így a Benders algoritmus is — olymódon is származtatható, hogy a $\sup\{\mathbf{c}_1'\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2'\mathbf{x}_2 | A_1\mathbf{x}_1 + A_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}; \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \geq 0\}$ feladat helyett duálisát, az $\inf\{\mathbf{p}'\mathbf{b} | \mathbf{p}'A_1 \geq \mathbf{c}_1', \mathbf{p}'A_2 \geq \mathbf{c}_2'\}$ feladatot oldjuk meg az eredeti Dantzig—Wolfe algoritmus egy némileg módosított változatával, mely alkalmazásnál a $\mathbf{p}'A_2 \geq \mathbf{c}_2'$ feladat a szektorfeladat. A módosítás abban áll, hogy a központi feladat helyett mindig annak duálisát tekintjük és a központi feladatban megőrizzük azon változókat is, melyek elhagyták a bázist. Ennek következtében a Dantzig—Wolfe algoritmus központi feladatának egy bázistranszformációja helyett egy lineáris programozási feladat megoldása szerepel.

[1] szerint a Dantzig—Wolfe eljárásnál a központi feladat „régi" változóinak megőrzése, illetve minél több változó figyelembevétele a számoláshoz szükséges idő csökkenéséhez vezet. Valószínűleg ebben van az [5] -beli számítás „sikerének titka" is. Mindenesetre jó lenne ezt pontosan tudni.

(Beérkezett: 1970. szeptember 1.)

IRODALOM

[1] Beale, E. L. M.: Mathematical programming in practice. Pitman, 1969.
[2] Benders, J. F.: Partitioning Procedures for Solving Mixed-Variable Programming Problems. Numerische Mathematik, 1962. 4. sz. 238—252. o.
[3] Dantzig, G. B.—Wolfe, P.: The Decomposition Algorithm for Linear Programs. Econometrica, 1961. 29. sz. 767—778. o.

[4] Goldman, A. I.: Resolution and Separation Theorems for Polyhedral Convex Sets. Ld. [6].
[5] Kovács, Á.—Stahl, J.: Dekompozíciós eljárás egy széntermelést és elosztást optimalizáló modell megoldására. Szigma, 1970. 2. sz. 97—107. o.
[6] Kuhn, H. W.—Tucker, A. W. (eds): Linear Inequalities and Related Systems. Princeton, 1956. Princeton University Press.
[7] Lipták, T.: Two-level Programming. Ld. [9]
[8] Prékopa, A.: Lineáris programozás. Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa, 1968.
[9] Prékopa, A.: (ed): Colloquium on Applications of Mathematics to Economics. Budapest, 1965. Akadémiai Kiadó.
[10] Stahl, J.: An Existence Theorem for Polyhedral Games. Ld. [9]
[11] Wolfe, P.: Determinateness of Polyhedral Games. Ld. [6]

AN ALGORITHM FOR THE SOLUTION OF POLYHEDRAL GAMES

The paper deals with the solution of the so-called polyhedral game being a sort of generalization of the notion of the two-person 0-sum matrix game. The algorithm suggested in the first part of the paper is a series of solutions of linear programming problems. The second part is a certain inverse of the foregoing: the application of the algorithm to the solution of polyhedral games which are equivalent to the linear programming problem and some statements in connection with decomposition methods having derived from the above algorithm.

АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛИЭДЭРНЫХ ИГР

Статья занимается решением так называемых полиэдэрных игр, происходящих как некое обобщение понятия матричной игры двух лиц с нулевой суммой. Предлагаемый в первой части статьи алгоритм является серией решения задач линейного программирования. Вторая часть является определенным поворачиванием первого: применение алгоритма для решения таких полиэдэрных игр, которые эквивалентны задачей линейного программирования и несколько установлений в связи с таким образом появляющимися декомпозиционными методами.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

SIMONOVITS ANDRÁS

A team-elméletről

(J. Marschak és R. Radner sztochasztikus szervezetmodelljéről)

I. Bevezetés

Dolgozatom célja: Jacob Marschak és Roy Radner *team-elméletének* [12] ismertetése, bizonyos kiegészítése. A *team* – angol szó, magyarban is használatos; magyar megfelelője: munkaközösség, csapat stb.

A szervezet – tagjainak együttese, egységeinek rendszere. Adott a sztochasztikusan (véletlenszerűen) viselkedő Külvilág, amelyről a különböző tagok *különböző információival és döntési lehetőséggel* rendelkeznek. A tagok a szervezet által eleve meghatározott szabályok szerint tevékenykednek – *közös cél* érdekében. A szerzők ezt a homogén, egy célnak alárendelt tagokból álló szervezetet nevezik teamnek.

A team-elmélet célja: a team jó ill. legjobb információs- és döntési struktúrájának vizsgálata. E vizsgálat részben összefüggő matematikai modellrendszerre támaszkodik.

1. A dolgozat forrásai

Már említettem, hogy a dolgozat fő célja J. Marschak és R. Radner team-elméletének rövid ismertetése. A szerzők az USA-ban, az ötvenes évek közepétől rendszeresen közölnek team-elméleti cikkeket folyóiratokban, könyvekben: pl. Marschak [9], [10] és Radner [15], [16], [17], [18].

Nemrég készült el összefoglaló művük: „The Economic Theory of Teams" (magyarul: „A team gazdasági elmélete", röviden: „Team-Elmélet" [12].) A könyv 1970 szeptemberéig még nem jelent meg; kéziratát olvastam. A könyv többszáz oldalas, ezért ismertetésem csak bizonyos részeire szorítkozik. Nehézséget okoz, hogy magyar nyelven nem jelent meg olyan munka, amely a szükséges alapokat ismertetné.

Dolgozatomban több helyen hivatkozom Radner: „Team Decision Problems" („Team döntési problémák") c. [17] cikkre, amely matematikailag sokkal általánosabb és egzaktabb, mint a „Team-Elmélet".

Több új gondolatot ad H. Hax: „Döntések koordinálása" c. [4] könyve, amely eddig az egyetlen magyarul megjelent team-elméleti munka. Általános matematikai szintje alacsonyabb a „Team-Elmélet" szintjénél, viszont sokkal több gazdasági, főként üzemgazdaságtani gondolatot tartalmaz. Ezért is megengedhetőnek tartom, hogy e dolgozat főleg a matematikai kérdésekkel foglalkozzon.

2. Egy team-elméleti példa

A team-elmélet problémáit rögtön egy nagyon egyszerű példával illusztrálom.

Egy (külkereskedelmi) cég valamilyen termékét n (külföldi) ügynöknél lehet megvásárolni, az ügynökök a cégtől rendelik az árut. Az i. ügynök egy db-ot μ_i véletlen áron ad el. (A véletlen itt azt jelenti, hogy előre nem ismert az ár, de az *i*. ügynök minden terméket azonos áron ad el.) A cég összesen b db terméket kell hogy eladjon. Az *i*. ügynök az árvektorról bizonyos információval rendelkezik (pl. ismeri „szomszédai" árait). Jele: $y_i = \eta_i(\mu)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots, \mu_n)$.

Két kérdésre összpontosítunk:

— Adott információs rendszer esetén milyen általános szabályt írjon elő a cég az *i*. ügynök információ-rendelés kapcsolatára? A kérdéses függvényt $a_i = \alpha_i(y_i)$ jelöli.

— Milyen információkat kell az *i*. ügynöknek ismernie?

Mielőtt a cég megválasztja információs és döntési struktúráját, választási kritériumra van szüksége. Tegyük fel, hogy adott információs struktúra esetén maximális várható hozamú döntést választ; az információs struktúrák közül maximális hozamú struktúrát.

Legyen az *i*. ügynök rendelése $a_i \geq 0$, ekkor $\sum_{i=1}^{n} a_i = b_i$ és a cég bruttó bevétele $W(\mu, a) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i a_i$. Azaz (η,α) struktúra várható bevétele $V[\eta, \alpha] = MW\{\mu, \alpha(\mu)\}$.

Egyelőre csak a legegyszerűbb információs struktúrákkal foglalkozunk:

1. Semmilyen információ sincs az árak pillanatnyi értékéről. Ekkor $V[\eta, \alpha] = \sum_{i=1}^{n} (M\mu_i)a_i$. Feltehetjük, hogy úgy indexeltük a változókat, hogy $M\mu_1 \geq M\mu_2 \geq \ldots \geq M\mu_n$ teljesül. Nyilván $\hat{a} = (\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_n) = (b, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$ — optimális döntés. Persze, ha $M\mu_1 = M\mu_2$, akkor $\hat{a} = (\hat{a}_1, b - \hat{a}_1, 0, \ldots, 0, \ldots, 0)$ is optimális, $(0 \leq \hat{a}_1 \leq b)$, stb.

2. Mindegyik ügynök ismeri mindegyik ár tényleges értékét. Ekkor mindegyik ügynök tudja, ki(k) a legmagasabb árfekvésű ügynök(ök). Tegyük fel, hogy ezek közül mindig a minimális indexű ügynök adja el az egészet. — Sokszor egyszerűbb egy Központot létrehozni, amely kiválasztja a legmagasabb árakat és a megfelelő ügynököket utasítja a megfelelő mennyiség eladására.

3. Gyakran adódik olyan eset, mikor minden ügynök csak a „saját" árát ismeri. Ez az eset bonyolultabb annál, hogy illusztratív példaként tárgyaljuk.

3. *A dolgozat felépítése*

A dolgozat a *Bevezetés*en kívül további öt részből áll.

A II. rész: *Információ és döntés.* Először a „döntés — bizonytalanság mellett" klasszikus problémát érintjük; ismertetjük Marschak és Radner felfogásának alapelemeit. Ismertetjük az információs- és a döntésfüggvény fogalmát és számszerű értékét.

A III. rész: *A team információs- és döntési struktúrája.* A II. rész általánosítása többtagú szervezetre. Néhány fontos információs struktúrát definiálunk.

A IV. rész: *Optimális döntésfüggvények.* Ismertetem az optimalitás Radner-féle szükséges és elégséges feltételét, valamint új eljárásomat, mely fokozatosan javítja a döntésfüggvényeket és bizonyos feltétel mellett bebizonyítom, hogy az optimális döntésfüggvény tetszőlegesen megközelíthető eljárásommal.

Az V. rész: *Kvadratikus team.* A team nyereségfüggvénye kvadratikus függvénye a döntésnek. Ez a team-elmélet legjobban kidolgozott része — az általános tételek itt jól alkalmazhatók.

A VI. rész: *A team-elmélet és a rokonelméletek viszonya.* Rövid áttekintés.

II. Információ és döntés

A Bevezetésben már kiemeltem, hogy a team-elmélet a team információs- és döntési struktúrájára összpontosít. Ezért kiinduló fogalmaink: az *információ* és a *döntés;* szokás szerint e fogalmakat először az „egytagú team" esetében ismertetjük.

1. Döntés bizonytalanság esetén

Legtöbb döntésünket bizonytalanság mellett hozzuk. Gondoljuk azt, hogy meleg nyári reggel van, de estére 20%-os valószínűségű esőt jelzett a rádió. Vigyünk-e esőkabátot a munkába vagy ne? ...

Döntésünket valamilyen kritérium szerint hozzuk. „Semmi esetre se akarok megázni" — mondja a pesszimista. „Nagyon kényelmetlen az esőkabát" — mondja az optimista ...

Nyilván a következő két tényező együttesét (az ún. *kimenetelt)* értékeljük:
— a döntésthozó számára adott tényezőt (= a *Külvilág állapota)*
— a döntésthozó számára választható tényezőt (= a *döntés)*

Persze nem ért egyet ezzel a felosztással az az ember, aki esőben, esőkabát nélkül — azt mondja: „Ha esőkabátot hoztam volna, biztosan nem esett volna". Komolyra fordítva a szót: ha a döntés visszahat a Külvilág állapotára, akkor modellünk nem alkalmazható.

Vagyis feltehetjük, hogy létezik a Külvilág, állapota véletlenszerűen változik, s ezt egy ismert $(X, \mathcal{X}, P)$ — objektív vagy szubjektív — valószínűségi mezővel reprezentáljuk (Rényi: [19], Savage: [20]). Általában nem vesszük — nem is vehetjük — figyelembe az X eseménytér minden részhalmazát. Legyen $\mathcal{X}$ a *megfigyelhető események családja*, s $\mathbf{X} \subset X$, $\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ valamilyen megfigyelhető esemény. $P(\mathbf{X})$ $(0 \leq P(\mathbf{X}) \leq 1)$ $\mathbf{X}$ esemény valószínűsége. $x \in X$ — *elemi esemény* (= állapot).

Megjegyzem, hogy a döntéselméletben gyakran megelégednek véges elemszámú eseménytér vizsgálatával. A „Team-Elmélet" is csak a normális eloszlás alkalmazása miatt tér át általánosabb, bonyolultabb eseményterek vizsgálatára. Már a legegyszerűbb esetben is szükséges viszont a *megfigyelhető* esemény fogalma. Pl. „fej vagy írás"-t játszunk két pénzdarabbal, melyeket nem különböztetünk meg. Nyilván F, I és I, F elemi események nem megfigyelhető események, uniójuk viszont megfigyelhető.

2. Az egyén információs és döntési struktúrája

Kezdjük egy példával, mégpedig az előző példa módosításával! Képzeljük azt, hogy két megkülönböztethető pénzdarabbal játszunk, csak a megfigyelő nem tud különbséget tenni köztük. Ekkor két valószínűségi mezőt különböztethetünk meg: a valóságost, az eredetit és a képzeltet, a másodlagost. Természetesen egy távollevő személy számára egy harmadik valószínűségi mező létezik — ti. a triviális, amely két eseményből áll: a biztos és a lehetetlen eseményből.

Az előző példák után definiálhatjuk az *információs struktúra* fogalmát: A megfigyelő számára a Külvilág valódi állapota nem ismert; csak az ismert, hogy a valódi állapot milyen *állapot-osztályhoz* tartozik. Pl. nem ismert, hogy egy termék idei termelése hányszorosa lesz a tavalyinak; csak az ismeretes, hogy több lesz (vagy esetleg kevesebb).

Véges vagy megszámlálható elemű eseménytér esetén nincs különösebb értelmezési nehézség. Tegyük fel, hogy úgy osztályozzuk az elemi eseményeket (= állapotokat), hogy egy osztályba azok és csak azok az elemi események kerülnek, amelyeket a megfigyelő nem tud egymástól megkülönböztetni. Így minden elemi esemény pontosan egy ilyen eseményhalmazba (= állapot-osztály) tartozik. A későbbiek miatt absztraktan indexszeljük ezeket az állapot-osztályokat: $\{\mathbf{X}_y\}_{y\in Y}$ ahol $\mathbf{X}_y \in \mathcal{X}$, $\mathbf{X} = \bigcup_{y\in Y} \mathbf{X}_y$, $\mathbf{X}_{y_1} \cap \mathbf{X}_{y_2} = \emptyset$, $(y_1 \neq y_2)$.

y indexet *elemi információnak*, Y indexhalmazt *információs térnek*, $\mathcal{Y}$ halmazcsaládot *információs struktúrának* nevezzük. Az információs struktúrának megfelelő *információs függvényt* „$\eta(x) = y$ ekvivalens $x \in \mathbf{X}_y$” összefüggés adja.

Az általános definíció lényegesen bonyolultabb, a „Team-Elmélet” éppen csak érinti a kérdést – részletesen Radner [17] foglalkozik e kérdéssel.

Most először az *információ teret* definiáljuk – egyszerűen valamilyen absztrakt halmazként. Az *elemi információ* – az információ tér absztrakt eleme: $y \in Y$.

A megfigyelhető esemény analógiájára be kell vezetnünk a *megfigyelhető információ* fogalmát – ezen az információ tér valamilyen részhalmazát értjük. Nyilván több megfigyelhető információ létezik, családjuk jele $\mathcal{Y}$, azaz $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}$. *Információs függvényen* $\eta: X \to Y$, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ mérhető függvényt értünk.

Általában azért informálódunk, hogy dönthessünk. Pl. ha piaci konjunktúra van, akkor a vállalatok növelik eladásaikat. Elméletünkben a *döntés* alapfogalom; jele a, a *lehetséges döntések halmaza* A, $a \in A$.

Olyan döntéseket vizsgálunk, melyek az információtól függnek. Azaz, ha két különböző elemi eseménynek azonos elemi információ felel meg, akkor a két döntés azonos. Ezeket a függvényeket nevezzük *döntésfüggvény*eknek. Jelük: $\alpha: Y \to A$. A *lehetséges döntésfüggvények halmaza* $\mathcal{A}_\eta$. Követve a „Team-Elmélet”-et, ebben a dolgozatban is minden $Y \to A$ függvény megengedett. (Célszerű lehetne csak bizonyos típusú függvényeket szerepeltetni – pl. valós vektoroknál folytonos-, esetleg lineáris stb. függvényeket.) Viszont különböző információs struktúrákhoz különböző döntésfüggvények tartozhatnak.

Két triviális struktúra létezik:

1. a teljes informálatlanság, a *rutin*. Azaz az információs függvény állandó. (Persze a modell apriori adatai ismertek a team-nek!) Jele: $\mathcal{Y} = (\emptyset, Y)$. A megfelelő döntésfüggvények a *rutin döntések*: $\mathcal{A}_\emptyset = A$.

2. *a teljes informáltság:* Ekkor ismert a Külvilág tényleges, pillanatnyi állapota: $Y = X$, $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\{x\} \in \mathcal{X}$, ahol $\{x\}$ az x elemből álló halmaz.

3. *A döntésthozó kritériumáról*

Tegyük föl, hogy a team rendelkezik valamilyen preferencia-rendezéssel.

Bizonyos feltevések mellett Neumann és Morgenstern bebizonyították [14], [7], hogy a kimenetelek preferencia-rendezése egyértelműen reprezentálható egy valós értékű függvénnyel; s a döntéseket e *hasznosság-függvény* várható értékével mérhetjük. A „Team-Elmélet” nyomán mi is ezt a függvényt használjuk a továbbiakban. Jele: $W(x, a)$.

Félreértéshez vezet, ha a hasznosság- (= nyereség) függvényt azonosítjuk a döntésthozó valamilyen pénzbeli nyereségével. Ugyanis egy vállalat nem csupán nyeresége várható értékét figyeli, hanem — többek között — a nyereség ingadozását, minimumát stb. A Neumann—Morgenstern-féle — általában ismeretlen — nyereségfüggvénynél viszont ez a probléma explicite nem is létezik, bennfoglaltatik a hasznosságfüggvényben. (Részletesebben: Luce és Raiffa: [7].) Tegyük fel, hogy minden $\alpha \in \mathcal{A}_\eta$-ra $W\{x, \alpha[\eta(x)]\}$ várható értéke véges: $V[\eta, \alpha] = MW\{x, \alpha[\eta(x)]\}$ — ez (η, α) *hozama*. Mivel optimalizálunk, célszerű $V(\eta) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_\eta} V[\eta, \alpha]$-t nevezni η *információsfüggvény hozamának*. $\hat{\alpha}_\eta$ — *optimális döntésfüggvény* (η információs függvény mellett), ha maximális hozamú: $V[\eta, \hat{\alpha}_\eta] = V(\eta)$

4. *Kiegészítések*

Hasznosnak tartom itt megemlíteni, hogy Hax ([4] — 46. o. stb.) jóval általánosabban definiálja az információs struktúrát. Eredeti példánkon illusztrálom az általánosítást: két elemi információ legyen; Az érmék között {van F} ill. {van I}. Nyilván az elemi események közül a vegyes párok (F, I ill. I, F) mindkét elemi információnak megfelelnek, tehát egy elemi eseményről több, nem összeillő elemi információ is keletkezhet.

Hax gondolatát még általánosabban, de szándékosan nem teljes általánosságban fogalmazom meg. Legyen mind az eseménytér, mind az információ tér véges-dimenziós euklidesi tér. Azaz x és y valószínűségi változók (valamilyen közös valószínűségi mező fölött). Legyen együttes sűrűségfüggvényük (ill. diszkrét esetben valószínűségük) $f(x, y)$. Nyilván x sűrűségfüggvénye $g(x) = \int\limits_Y f(x, y)dy$, y-é $h(y) = \int\limits_X f(x, y)dx$. (Diszkrét esetben az integrálok helyett összeg szerepel!) Hax a következő feltételes sűrűségfüggvényt (ill. -valószínűséget) használja: $f(x|y) = \dfrac{f(x, y)}{h(y)}$. (Ha $h(y) = 0$, akkor $f(x|y)$ is legyen 0 — ennek úgyis nulla a valószínűsége.)

Könnyen megvilágíthatjuk a két definíció kapcsolatát: Tekintsük azon elemi események halmazát, melyek y-feltételes valószínűsége (az általános változatban) pozitív. Képletben: $\mathbf{X}_y = \{x;\ f(x|y) > 0\}$. Diszkrét esetben az a feltétel, hogy $y_1 \neq y_2$-ből következik $\mathbf{X}_{y_1} \cap \mathbf{X}_{y_2} = \emptyset$ ekvivalens az információs struktúra II./2.-beli definíciójával.

Mivel a döntésthozó nem az eseményt, hanem annak információs képét ismeri, gyakran át kell ill. át lehet térni a nyereségfüggvény *feltételes várható értékére*: $U(y, a) = \int\limits_X W(x, a)f(x, y)dx = M\{W(x, a)|y\}$. (Ha különböző struktúrákat hasonlítunk össze, akkor nem célszerű ez a transzformálás!)

A nyereség feltételes várható értéke nagyon fontos függvény, mert egy döntésfüggvény akkor és csak akkor optimális, ha (majdnem) minden elemi információnál maximalizálja e függvényt: $U(y, a) \leq U[y, \hat{\alpha}(y)]$, $y \in Y$, $a \in A$.

„A majdnem minden y-ra" azt jelenti, hogy csak 0-összvalószínűségű y-okra nem.

Hasznos fogalom az információ struktúrák *finomság szerinti* (részben) *rendezése*. Magyarul: Két struktúra közül melyik struktúra tagoltabb, melyik mond többet? Diszkrét esetben a finomabb struktúra az eseménytér finomabb felosztást jelent. Általánosan azt mondhatjuk, hogy a durvább információsfüggvény a finomabb információs-függvény függvénye — összetett függvény. Nyilván nem minden struktúra hasonlítható össze; viszont a rutin a legdurvább, a teljes információ a legfinomabb struktúra.

Mivel minden $Y \to A$ függvény megengedett döntésfüggvény, finomabb információs struktúrához tágabb döntésfüggvény-osztály tartozik, tehát finomabb struktúra nagyobb (esetleg egyenlő) hozamú. Természetesen a költsége is nagyobb.

Célszerű kiegészítést tesznek ezen a helyen a „Team-Elmélet" szerzői: Mivel a rutin nem igényel információt, az információ struktúra *értékénél* hozamából kivonjuk a rutin hozamát: $\hat{V}(\eta) = V(\eta) - V(\emptyset)$. (Pl. a rutin információ értéke nulla: $\hat{V}(\emptyset) = 0$.)

III. A team információs és döntési struktúrája

1. *A team-probléma legfőbb sajátosságáról*

Eddig egytagú „szervezet"-et vizsgáltunk, ami tulajdonképpen nem is szervezet. Most rátérünk az igazi (= többtagú) szervezet vizsgálatára. A formális általánosításon túl a következő tartalmi változással kell szembenézni:

Bármely tag számára nemcsak a Külvilág sztochasztikus, hanem a többi tag döntése is; de nem mondhatjuk, hogy ezek a tag környezetéhez tartoznak, mert a döntések *kölcsönösen* összefüggnek az egyén döntésével.

E dolgozat a legegyszerűbb team-modellel foglalkozik: Feltesszük, hogy *minden tag azonos időpontban dönt.* Ezzel kizártuk, hogy egyik tag döntése a másik tag számára információ legyen. Kiemelendő, hogy feltevésünk a jelenlegi team-elmélet egyik legszigorúbb feltevése, s nagyon leszűkíti a modell alkalmazhatósági körét. (Statikus modell, keresztmetszeti modell.)

2. *A team struktúrája*

A team információs- és döntési struktúrája a tagok információs- és döntési struktúráinak együttes rendszere. Az i. tag — $1 \leq i \leq n$ — struktúrájára ugyanaz vonatkozik, mint az előző rész egyéni struktúrájára. Csak a jelölés módosul — i indexszel. Index nélküli jel az egész team-re vonatkozó megfelelő fogalmat jelenti.

Tehát a *team* információtere $Y = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} Y$ ($\times$ itt szorzójel! Descartes szorzatról van szó), elemi információja $y = (y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$, információs struktúrája $\mathcal{Y} = \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \mathcal{Y}_i$, információs függvénye $\eta(x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_i(x), \ldots, \eta_n(x))$.

Hasonlóan a *team* döntése $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$, döntésfüggvénye $\alpha(y) = (\alpha_1(y_1), \ldots, \alpha_i(y_i), \ldots, \alpha_n(y_n))$, és a megengedett halmazok $A \subseteq \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i$ ill. $\mathcal{A}_\eta \subseteq \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} \mathcal{A}_{\eta i}$. Jegyezzük meg, hogy a lehetséges döntési halmazok értelmezés éné arról az egyszerű dologról van szó, hogy lehetnek olyan team-tagdöntések, melyekből alkotott formális team-döntés nem megengedett: $A \neq \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} A_i$.

Ettől a megszorítástól a következőképp szabadulhatunk meg: Gondoljuk azt, hogy a nyereségfüggvény értéke bármely nem megengedett team-döntésen annyira negatív, hogy nem jöhet szóba mint optimális döntés! Ez gyakorlati és elméleti szempontból is gyakran kielégítő. (Gondoljunk a bírságoló függvényekre, pl. a Lagrange-szorzók módszerére.) Tehát $A = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} A_i$ és $Q_{\eta i} = \overset{n}{\underset{i=1}{\times}} a_{\eta i}$. Itt azt is felhasználtuk, hogy a tagok döntései formálisan függetlenek egymástól — egyidejűek.

Formálisan azt mondhatjuk, hogy *a team nyereségfüggvényét minden tag elfogadja és döntésével maximalizálni akarja a team (várható) nyereségét*. Nemsokára láthatjuk, hogy ez csak formálisan igaz, valójában a *team tagjai egyszerű végrehajtók*. A modell egy teljesen bürokratikus szervezetet ír le, a tagok önállósága mindössze az, hogy a konkrét információs állapotnak megfelelően „maguk döntenek" — a Központ által teljesen meghatározott módon. Ezért általában szükséges, hogy létezzék egy optimalizáló, koordináló *Központ*.

A közönséges team-tagokkal ellentétben, a Központ nem hoz olyan „döntéseket", amelyek közvetlenül tükröződnek a nyereségfüggvényben. A termék eladása az ügynökök dolga, nem a cégé. (Bevezető példa I. 3.)

Vegyük észre, hogy a Központ szerepeltetése implicite megszünteti modellünk explicite keresztmetszeti jellegét. Most már elképzelhető, hogy egyik tag döntése egy másik tag számára információ, mert a mindenttudó Központ még az „egyik" tag döntése előtt közölheti e döntést a „másik" taggal, aki szintén döntés előtt van még.

Az egyéni struktúra értékeléséről mondottak (II.3.) változtatás nélkül átvihetők a team-struktúrára, még a jelölések is azonosak.

3. *Elfajult teamek*

Tanulságos külön megismerkedni a legegyszerűbb team-ekkel.

Elfajult team olyan team, amely közvetlenül visszavezethető egy vagy több egyéni struktúrára. Érdemes a következő két elfajult esetet megnézni:

1. Az egyéni döntések közötti összefüggéseket a módosított nyereségfüggvénybe építettük be. (Lagrange-szorzók!) Ezért a team nyereségfüggvényének elfajultságához kapcsolódik a legegyszerűbb elfajult team:

Ha $W(x, a) = \sum_{i=1}^{n} W_i(x, a_i)$, akkor az egyes tagok döntései közt nincs kapcsolat, mert a nyereségfüggvény nem tükröz ilyen kapcsolatot. Nyilván n független egyéni problémát kell megoldani.

2. *Teljes kommunikáción* olyan team-információs struktúrát ért a „Team-Elmélet", amelynél a „teljes" kommunikáció révén a team minden tagja azonos információs-struktúrával rendelkezik: $Y_i = Y_1$, $\eta_i = \eta_1$, $(2 \leq i \leq n)$. (Kissé paradox, de idetartozik a teljes informálatlanság, a rutin esete is.) Teljes kommunikáció esetén azt mondhatjuk, hogy a szervező az egyéni döntésfüggvényeket mint *egy* döntésfüggvény komponenseit határozza meg, szemben az általános esettel, ahol az egyes tagok döntésfüggvényének független változója is különböző!

Vagyis a team-elmélet (egyik) legfontosabb sajátossága a tagok információs struktúrájának különbözőségében van.

A továbbiakban ezek az elfajult struktúrák csak szélsőséges példaként vagy határesetként kerülnek elő.

4. *Néhány alapvető információs struktúráról*

Eddig csak a legdurvább és a legfinomabb információs struktúráról ill. közös általánosításukról beszéltünk explicite: a rutin, a teljes információ és a teljes kommunikáció esetéről.

Új információs struktúrák vizsgálatát teszi lehetővé a következő speciális alakú nyereségfüggvény:

$W(x, a) = \mu(x)a - S(a)$. Itt $\mu(x)$ n-dimenziós valószínűségi változó, a n-dimenziós vektor; $S(a)$ valós értékű függvény. Első közelítésben azt mondhatjuk, hogy a kisebbítendő a team bruttó bevétele (l. a bevezető példát — I.2.), a kivonandó a team kiadása.

Célszerű a modellt a következőképpen elképzelni: Az i. tag megfigyeli μ_i tényleges értékét: m_i-t. Itt nincs szükség a Külvilág x állapotának ismeretére ($\mu_i(x)$ elégséges statisztika). Sőt, általánosabban: az i. tag nem magát a valószínűségi változót, hanem annak valamilyen függvényét figyeli meg. (Pl. nem a véletlen árat figyeli meg, hanem valamilyen átlagárhoz viszonyított nagyságrendjét: magas ár, alacsony ár.) S ez alapján dönt: $\eta_i(x) = \zeta_i[\mu_i(x)]$. — Ez a *teljes decentralizáció*. (A pontosság kedvéért megjegyzem, hogy a rutin ebbe a kategóriába is beletartozik.)

A teljes kommunikáció viszont a *teljes centralizációnak* felel meg. A két véglet között több alapvető információs struktúrát találunk:

— Az „*alközpontok rendszere*": Soroljuk be a team tagjait csoportokba. Két különböző csoportnak nincs azonos tagja. Egy csoporton belül teljes kommunikáció van, a csoportok team-je viszont teljesen decentralizált struktúrával működnek — az alközpontok egymástól „függetlenül" dolgoznak.

— Közelebb áll a hosszanti struktúra (vö. III.2.) modellezéséhez az „*információ terjesztő*" modell. Ez a struktúra a következőképp modellezi az információáramlást: Az i. tag $z_i = \zeta_i(x)$ megfigyelés alapján $t_i = \tau_i(z_i)$ jelentést küldi a Központnak. A Központ e jelentések alapján új jelentéseket küld az egyes tagoknak: $t'_i = t'_i(t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_n)$. Azaz az i. tag eredő információja: $y_i = (z_i, t_i)$.

Ha a Központból mindenki ugyanazt a jelentést kapja: $\tau'_i = \tau'_1$ $(2 \leq i \leq n)$, akkor jól látható, hogy ez a struktúra a teljes kommunikáció (τ') és a teljes decentralizáció (ζ) keveréke.

— Sok szempontból nagyon előnyös a „*kivételek közlésé*"-n — alapuló rendszer: Különböztessük meg μ_i *szokásos* és *rendkívüli* értékeit! Ha az i. egység szokásos értéket észlel, akkor csak a saját megfigyelésére alapozza döntését. Ha viszont rendkívüli értéket észlel, akkor jelenti a megfigyelt értéket a Központnak. A Központ minden rendkívüli helyzetben levőnek jelenti a többi rendkívüli értéket, s ezek alapján dönthetnek a „rendkívüliek".

Külön érdekessége e struktúrának, hogy sztochasztikusan változik, — a szükségletekkel összhangban. A Külvilág adott állapotában e struktúra az előző két struktúra szintézise; megtalálható e rendszerben a „*csoportosítás*" is és a „*jelentés*" is. (Ez megfelel annak az elvnek, hogy az alacsonyabbrendű tevékenységek inkább decentralizálhatók, mint a magasabbrendűek.)

Az itt felsorolt struktúra-típusok is részlegesen fedik egymást. Természetesen sokféleképp tovább kombinálhatók egymással.

5. *A team kiadásai*

Ha jobban utánagondolunk, nem teljesen jogos, hogy a $W(x, a)$ függvényt a team nyereségfüggvényének nevezzük. Még akkor sem, ha eltekintünk attól a körülménytől, hogy nem mindig lehet a nyereségfüggvényt bevétel- és kiadásfüggvény különbségére bontani. Ugyanis a következő lényeges különbség van a team bevételi és kiadási függvénye között: Míg a bevétel jó közelítésben csak a Külvilág állapotától és a döntéstől függ, a kiadás a döntésfüggvénytől is függ, és méginkább függ az információs struktúrától. Tehát helyesebb volna $W(x, a, \eta, \alpha)$ függvényt vizsgálni! Sajnos, jelenleg ez az általánosítás csupán formális, csak elvétve találunk ez irányú tartalmi észrevételeket.

Néhány ilyen kivételt említek:

— T. A. Marschak [13] dolgozatában az „alkalmazkodó team" minél több javítás után hozza meg végső döntését, annál tovább marad érvényben a kedvezőtlenebb ideiglenes döntés.

— A „Team-Elmélet" különböző struktúrák hozamának összevetésénél bizonyos normálásokat alkalmaz: pl. az előbb említett többféle blokk-rendszerű struktúráknál az átlagos csoportnagyságot rögzíti — feltételezve, hogy az átlagos csoportnagyságtól függ a kommunikáció és a döntés költsége. (L. e dolgozat V.2. pontját!)

Itt jegyezzük meg, hogy Wald „A statisztikus döntésfüggvények elmélete"-ben [21] hasonló problémákat old meg — általánosan. Statisztikában az információnk mintavételből származik, s Wald figyelembe veszi a *mintavétel költségeit* — a nyereségfüggvény ellentételeként. Ez a komplex szemlélet sugallja az ún. *szekvenciális döntés* bevezetését, amelynél a statisztikus minden újabb mintavétel után megvizsgálja, érdemes-e új mintát venni, vagy sem. Mi nagyobb: az új minta költsége vagy az új információnak köszönhető többletnyereség?

IV. Optimális döntésfüggvények

Ebben a részben optimális döntésfüggvények meghatározásával és jellemzésével foglalkozunk — rögzített információs struktúra mellett.

1. *Az optimalitás szükséges feltétele*

A döntésfüggvény optimalitására olyan szükséges feltételt keresünk, amely bizonyos további feltevések mellett elégséges feltétel.

„Egytagú" team esetén már ismertettük *a* feltételt: Egy döntésfüggvény akkor és csak akkor optimális, ha (majdnem) minden elemi információra maximalizálja a nyereség feltételes várható értékét. Ennek általánosítását keressük $n \geq 1$-re.

Szükségünk lesz a *Nash-maximum* fogalmára: Valamilyen n-változós, valós értékű függvény Nash-maximuma olyan vektor, melyre a függvény értéke legalább akkora, mint bármilyen olyan pontban, amely csak egy koordinátában különbözik a tekintett ponttól. (Természetesen nem mindig létezik Nash-maximum, de létezhet több is.)

Képletben: $W(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n)$ függvény Nash-maximuma $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_i, \ldots, \tilde{a}_n)$, ha minden i-re és minden $a_i \in A_i$-re

$W(\tilde{a}_1, \ldots, a_i, \ldots, \tilde{a}_n) \leq W(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_i, \ldots, \tilde{a}_n)$. Nyilván minden abszolút maximum-hely Nash-optimum, de fordítva nem. — Először $V[\eta, \alpha]$ α szerinti *Nash*-optimumait vizsgáljuk. II.4.-beli egydimenziós eset általánosításaként vezessük be a következő függvény n-est:

$$U_i(y_i, \alpha_1, \ldots, a_i, \ldots, \alpha_n) =$$

$$= \int\limits_{\substack{\times Y_j \\ j \neq i}} U[y_1, \ldots, y_i, \ldots, y_n, \alpha_1(y_1), \ldots, a_i, \ldots, \alpha_n(y_n)] \cdot h(y) \prod_{j \neq i} dy_j =$$

$$= M(W\{x, \alpha_1[(\eta_1(x)], \ldots, a_i, \ldots, \alpha_n[\eta_n(x)]\} \mid y_i) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Elég egy tetszőleges, de rögzített komponenst vizsgálni. Ez a függvény azt fejezi ki, hogy mennyi a team nyereségének feltételes várható értéke, ha az i. tag a_i döntést hoz y_i információ esetén, míg a többiek α_j $(j \neq i)$ döntésfüggvény szerint cselekednek. Az elmondottakból könnyen adódik a következő

Tétel: $\hat{\alpha} \in \mathcal{A}_\eta$ akkor és csak akkor Nash-optimális, ha majdnem minden $y_i \in Y_i$ és minden $a_i \in A_i$ esetén

$$U_i(y_i, \hat{\alpha}_1, \ldots, a_i, \ldots, \hat{\alpha}_n) \leq U_i[y_i, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_i(y_i), \ldots, \hat{\alpha}_n] \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Ismét kiemeljük, hogy a probléma érdekességét az adja, hogy a különböző tagok döntésfüggvényének különböző a független változója, mert különböző információkkal rendelkeznek.

2. *Egy algoritmus*

Persze, e tételben megadott feltétel elég bonyolult. Ezért egy olyan algoritmust ismertetek, amely tetszőleges döntésfüggvényből lépésenként *egyre jobb* döntésfüggvényeket hoz létre, s minden lépés „*egytagú*" team-optimalizálás.

Először az algoritmus *általános lépését* ismertetem: α^m döntésfüggvényből kell α^{m+1}-et előállítani. Jelölje m n-nel való osztásának „maradékát" i, $1 \leq i \leq n$. Tekintsük azt az „egytagú" team-problémát, ahol a többi egység döntésfüggvénye változatlanul az előző döntésfüggvény megfelelő komponense, s az i. tag erre vonatkozóan optimalizál: Feltesszük, hogy az optimalizálás végrehajtható.

Képletben: Minden $y_i \in Y_i$-re van olyan $\alpha_i^{m+1}(y_i) \in A_i$, hogy $U_i(y_i, \alpha_1^m, \ldots, a_i, \ldots, \alpha_n^m) \leq U_i[y_i, \alpha_1^m, \ldots, \alpha_i^{m+1}(y_i), \ldots, \alpha_n^m]$, $a_i \in A_i$ és $\alpha_j^{m+1} = \alpha_j^m$ $(j \neq i)$; $m - i$ osztható n-nel.

Induljunk ki valamilyen α_1 döntésfüggvényből, s algoritmusunk egy döntésfüggvény sorozatot állít elő: $\{\alpha^m\}_{m=1}^{\infty}$. Nyilván a sorozat tagjai növekvő (pontosabban: nem csökkenő) hozamúak: $V[\eta, \alpha^m] \leq V[\eta, \alpha^{m+1}]$. Az m. egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $\alpha_i^m = \alpha_i^{m+1}$, azaz $\alpha^m = \alpha^{m+1}$. Ezért ha n egymásutáni döntésfüggvény hozama egyező, akkor a döntésfüggvények is egyezők. Így a következő tagok se változnak — az algoritmus véges lépésben elért egy Nash-optimumot.

A továbbiakban feltesszük, hogy minden team-tag döntése tetszőleges *valós* szám. A konvergencia kérdése több Nash-optimum létezése esetén nagyon bonyolult volna, ezért feltesszük, hogy $W(x, a)$ minden rögzített x-re mint a függvénye *szigorúan konkáv*. Ebből már következik, hogy $U(y, a)$ és $V[\eta, \alpha]$ is szigorúan konkáv a-ban ill. α-ban. Ezért *legfeljebb egy* Nash-optimum létezhet s ha létezik, akkor abszolút optimum is.

Az algoritmus konvergenciáját és az optimális döntésfüggvény létezését együtt bizonyítom — a következő speciális esetben.

Tegyük fel, hogy $V(\eta)$ véges.

Tétel: Legyen $W(x, a)$ szigorúan konkáv a-ban és felülről korlátos, s legyen az *információtér véges elemszámú.* Ekkor létezik pontosan egy optimális döntésfüggvény és algoritmusunk konvergál az optimumhoz.

Megjegyzés: A rutin triviális esetének módosításáról van szó!

Bizonyítás: $W(x, a)$-re tett feltevéseink átmennek $U(y, a)$-ra. Könnyen belátható, hogy ekkor $U(\cdot, a)$ „határértéke létezik a végtelenben" és e határérték $-\infty$. Pontosabban: Legyen $|a|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_2|^2$. Tetszőleges (kicsiny) v számhoz van olyan r_v pozitív szám, hogy $|a| > r_v$-ből következik $U(y, a) < v$.

— Először belátjuk, hogy létezik optimális döntésfüggvény. Használjuk fel, hogy információs terünk véges elemszámú, vagyis egy tag döntésfüggvénye véges (sok) döntésből áll, s e döntésekből alkotott vektornak tekinthető. A továbbiakban a vektor-sorozat konvergenciája mindig elemenkénti konvergenciát jelent. $V(\eta)$ véges értékű supremum, tehát van olyan

$$\left\{(\alpha_i^k(y_i))_{i=1}^{n}\right\}_{k=1}^{\infty} \leftrightarrow \left\{(\alpha_i^k(y_i))_{y_i \in Y_i,\, 1 \le i \le n}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

sorozat, melyre $V(\eta) = \lim_{k \to \infty} V[\eta, \alpha^k]$. Mivel az információtér véges, $V[\eta, \alpha] =$

$\sum_{y \in Y} P(y) U[y, \alpha(y)]$ összefüggésből következően $\{U[y, \alpha^k(y)]\}_{k=1}^{\infty}$ is korlátos minden $y \in Y$-ra.

Előző észrevételünk szerint tehát $\left\{(\alpha_i^k(y_i))_{y_i \in Y_i,\, 1 \le i \le n}\right\}_{k=1}^{\infty}$ is korlátos, így Weierstrass tétele szerint kiválasztható belőle egy konvergens részsorozat. Ennek határértéke az optimális döntés (-függvény).

— Jegyezzük meg, hogy az optimális függvény(ek) létezéséhez felesleges a konkavitási feltétel, (elegendő, ha létezik $V(\eta)$-nál kisebb v, amelyre $|a| > r_v$ implikálja, hogy $U(y, a) < v$); a továbbiakban viszont már nem.

— Bármilyen α_1 (végeshozamú) döntésfüggvényből indulunk ki, algoritmusunk korlátos döntéssorozatot származtat. Elegendő tehát belátni, hogy $\{\alpha^m\}_{m=1}^{\infty}$ bármilyen konvergens részsorozata $\hat{\alpha}$-hoz tart. ($U(\cdot, y)$ szigorú konkavitása miatt $\hat{\alpha}$ egyértelmű!)

Tekintsünk egy $\{\alpha^{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ konvergens részsorozatot, s jelöljük határértékét $\bar{\alpha}^1$-gyel. Szükségünk lesz arra az egyszerű észrevételre, hogy legalább egy i-re $(1 \le i \le n)$ m_k-t n-nel osztva végtelen sokszor i-t kapjuk „maradékul". Hagyjuk el a részsorozat többi tagját, s válasszunk olyan indexelést, melyre $i = 1$.

— Alkalmazzuk algoritmusunkat $\bar{\alpha}^1$-re, s kezdjük a ciklust az első változónál, s fejezzük be az utolsónál: $\bar{\alpha}^1 \to \bar{\alpha}^2 \to \ldots \to \bar{\alpha}^i \to \ldots \to \bar{\alpha}^n$. Ha belátjuk, hogy mind az n döntésfüggvény azonos, akkor az előzőkből tudjuk, hogy $\bar{\alpha}^1$ Nash-optimum, azaz abszolút optimum.

$U(\cdot, a)$ folytonosságából és Y végességéből következik, hogy $\lim_{k \to \infty} \alpha^{m_k} = \bar{\alpha}^1$ ekvivalens m$\alpha^{m_k+1} = \bar{\alpha}^2$-vel. A folytonosság miatt $\lim_{k \to \infty} V[\eta, \alpha^{m_k}] = V[\eta, \bar{\alpha}^1]$ ill. $\lim_{k \to \infty} V[\eta, \alpha^{m_k+1}] =$ $= V[\eta, \bar{\alpha}^2]$. Másrészt $\{V[\eta, \alpha^m]\}_{m=1}^{\infty}$ monoton korlátos sorozat, tehát két részsorozatának határértéke azonos: $\lim_{k = \infty} V[\eta, \alpha^{m_k}] = \lim_{k = \infty} V[\eta, \alpha^{m_k+1}]$ Az előző összefüggések szerint $V[\eta, \bar{\alpha}^1] = V[\eta, \bar{\alpha}^2]$

Értelemszerűen teljesülnek a következő egyenlőségek is: $V[\eta, \bar{\alpha}^i] = V[\eta, \bar{\alpha}^{i+1}]$, $1 \le i \le$ $\le n - 1$, azaz $\bar{\alpha}^1 \bar{\alpha}^2, \ldots, \bar{\alpha}^i, \ldots, \bar{\alpha}^n$ hozama azonos, vagyis azonosak a döntésfüggvények. Ezzel befejeztük a bizonyítást.

3. *Radner optimalitási feltétele*

Visszatérünk az optimalitási feltétel kérdéséhez. R. Radner [17] alapvető tételét ismertetem ebben a pontban.

Tétel: Tegyük fel, hogy $V(\eta)$ véges, $W(x, a)$ konkáv függvénye a-nak. Legyen $\tilde{\alpha}$ olyan döntésfüggvény, melyre $V[\eta, \tilde{\alpha}]$ véges; továbbá ha $V[\eta, \alpha + \delta]$ véges, akkor legyen olyan χ_δ pozitív szám, hogy $|h| < \chi_\delta$ esetén $V[\eta, \alpha + \langle h \rangle \delta]$ is véges. ($\langle h \rangle = \langle h_i \rangle_{i=1}$ diagonális mátrix.)

$$\text{Ekkor } \frac{\partial}{\partial a_i} M(\mathrm{W}\{x, \tilde{\alpha}_1[\eta_1(x)], \ldots, a_i, \ldots, \tilde{\alpha}_n[\eta_n(x)]\} \mid y_i)\,\Big|_{a_i=\tilde{\alpha}_i(y_i)} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

létezik és 1 valószínűséggel pontosan akkor nulla, ha $\tilde{\alpha}$ optimális. (Stacionaritási feltétel.)

Megjegyzések:

— Ez a tétel szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy döntésfüggvény mikor optimális. Viszont nem biztosítja — mert nem is biztosíthatja — az optimum létezését ill. egyértelműségét.

— A feltételben szereplő bonyolult végességi feltétel nélkül a tétel nem igaz, mint azt Radner ellenpéldája bizonyítja.

— A tétel ún. *stacionaritási feltétele* általában egy bonyolult (ún. integrál-) egyenletrendszert jelent az optimális döntésfüggvényre. Ha további feltevéseket teszünk pl. a nyereségfüggvény alakjára (ti. a döntéstől lineárisan vagy kvadratikusan függjön), akkor a stacionaritási feltételből érdekes következtetéseket vonhatunk le. Tovább egyszerűsíthetjük a problémát, ha a szereplő valószínűségi változóról kötünk ki valamit: pl. azt, hogy véges állapotú vagy normális eloszlású (1! a következő részben).

— Ismét látható, hogy az optimális döntésfüggvényt központilag határozzák meg — csak így határozható meg — s az i. tag $\hat{\alpha}_i$ szerint köteles „dönteni".

— Az összehasonlítás kedvéért említsük meg, hogy az általános információ fogalomnak megfelelő stacionaritási feltétel a következő:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} U_i(y_i, \tilde{\alpha}_1, \ldots, a_i, \ldots, \tilde{\alpha}_n) =$$

$$= \int\limits_{\substack{\times Y_j \\ j \neq i}} \frac{\partial}{\partial a_i} U[y, \tilde{\alpha}_1(y_1), \ldots, a_i, \tilde{\alpha}_n(y_n)]\, h(y) \prod_{j \neq i} dy_j = 0$$

E tétel az 1. pont alaptételének „erős" változata.

Bizonyítás: A teljes bizonyítás hosszú és bonyolult, itt csak a gondolatmenetet vázoljuk. A tétel bonyolult, de természetes végességi feltételei a várható értékképzést, és a differenciálással történő felcserélhetőségét biztosítják. Véges eseménytér esetén ezek a problémák teljesen leegyszerűsödnek — eltűnnek. A szokásos variációs gondolatmenetet alkalmazzuk. Rögzítsük egyelőre δ-t, s vezessük be $\varphi(h) = MW\{x, \tilde{\alpha}[\eta(x)] + \langle h \rangle \delta[\eta(x)]\}$-t. A feltételek miatt φ h--ban konkáv és differenciálható, s a konkavitás miatt lokális optimum = globális optimum. Azaz $\left.\frac{\partial}{\partial h} \varphi(h)\right|_{h=0} = 0$. Egyszerű számolással

$$0 = \frac{\partial}{\partial h_i}\varphi(0) = M\frac{\partial}{\partial h_i}W\{x, \tilde{\alpha}[\eta(x)] + \langle h\rangle\,\delta[\eta(x)]\} =$$
$$= M\,\{\delta_i[\eta_i(x)\,\frac{\partial}{\partial a_i}W\{x, \tilde{\alpha}[\eta(x)]\}.$$

Legyen $\delta_i^0(y_i^0) = 1$, ahol y_i^0 *tetszőleges*, de fix, és $\delta_i^0(y_i) = 0$ ha $y_i \neq y_i^0$. Tehát δ_i^0 eltérést alkalmazva, $\frac{\partial}{\partial a_i}M\big(W\{x, \tilde{\alpha}[\eta(x)]\}\,|\,y_i^0\big) = 0$ összefüggést nyerjük. Az átalakítások ekvivalensek voltak, s a lánc két végén a tétel szerinti két ekvivalens állítás áll. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

V. A kvadratikus team

A lineáris összefüggések után a kvadratikus összefüggések a legegyszerűbbek, a legalapvetőbbek a matematikában. Ezért nem meglepő, hogy a teamelmélet is többnyire ezeket az eseteket tanulmányozta. A lineáris nyereségfüggvényű team problémái a lineáris programozásra vezethetők vissza. Ez a kapcsolat már a bevezető példából is sejthető; az általános problémával azonban nem foglalkozunk. Lásd: [3], [4], [8], [15].

A kvadratikus eset bonyolultabb, de megvan az az előnye, hogy a döntések korlátozása már beleérthető. (vö. III. 2.)

Kvadratikus nyereségfüggvényen $W(x, a) = \mu(x)\,a - \frac{1}{2}\,a\,Q(x)\,a$ alakú függvényt értünk. $W(x, a)$ szigorú konkavitása a-ban ekvivalens $Q(x)$ pozitív definitségével.

1. *Általános tételek*

Az előző részekben elmondottakat alkalmazzuk most néhány problémára. Bővebben [16] és [17] foglalkozik a következő három ponttal — ott találhatók a bizonyítások is.

Néhány alapvető tételt sorolok fel:

— Radner [17]-ben egyszerű és kezelhető végességi feltételt ad, amely szükséges és elégséges *az* optimális döntésfüggvény létezéséhez.

— Ugyanitt a stacionaritási feltétel végességi feltételeit egy erősebb, de használhatóbb feltétellel helyettesíti, amely állandó $Q(x) = Q$ esetén triviálisan teljesül.

— Stacionaritási feltételünk konkretizálható:

$$\hat{\alpha}_i[\eta_i(x)]\cdot M[q_{ii}(x)\,y_i] + \sum_{j\neq i} M\{\hat{\alpha}_j[\eta_j(x)]\,q_{ij}(x)\,|\,y_i\} = M\{\mu_i(x)\,|\,y_i\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Most már feltehetjük, hogy a stacionaritási feltételt *egy* döntésfüggvény elégíti ki — az optimális döntésfüggvény.

— A stacionaritási feltételből egyszerűen következik, hogy $M\mu\hat{\alpha} = M\hat{\alpha}Q\hat{\alpha}$, azaz $\hat{V}(\eta) = \frac{1}{2}M\,\mu\hat{\alpha}$.

— Ha μ normális és η lineáris függvénye μ-nek, akkor $\hat{\alpha}_\eta$ is lineáris függvénye η-nak: $\alpha_i(y_i) = b_i y_i$, ahol b_i a megfelelő állandó vektor.

2. *Néhány tétel az alapstruktúrákról*

A legegyszerűbb struktúrák optimális döntésfüggvényét és értékét elemezzük az előző pontra támaszkodva. (Ld.[16])

A teljes kommunikáció esetében $\hat{\alpha}(y) = M\{Q^{-1}(x)\mu(x)|y\}$
speciálisan a teljes információnál $\hat{\alpha}(x) = Q^{-1}(x)\mu(x)$
és a rutinnál $\hat{\alpha} = MQ^{-1}(x)\mu(x)$

Ha μ_i-k függetlenek, akkor bármely blokkstruktúra döntésfüggvénye „egyszerű" blokk-döntésfüggvényekből áll. Pontosabban: legyen I_k valamilyen blokk indexhalmaza. Legyen $\alpha_{I_k} = (\alpha_i)_{i\in I_k}$, $Q_{I_k}^{-1} = (q_{ij})_{ij\in I_k}^{-1}$ stb. Ekkor: $\hat{\alpha}_{I_k}(\mu_{I_k}) = Q_{I_k}^{-1}\mu_{I_k}$. A teljes decentralizálás esetében $I_k = \{k\}$, azaz $\hat{\alpha}_k(\mu_k) = q_{kk}^{-1}\mu_k \quad (1 \le k \le n)$.

Ezeknél a struktúráknál η lineárisan függ μ-től, és az optimális döntésfüggvény lineáris bármilyen eloszlású valószínűségi változó esetén.

A „kivételek közlésé"-nél is érvényes ez az összefüggés, azzal a kiegészítéssel, hogy az indexhalmazok is függnek a Külvilág véletlen állapotától.

Bonyolultabb a kép az „információ terjesztésé"-nél, de itt is érvényes a szuperpozíció elve: a döntésfüggvény első tagja a teljes kommunikáció optimális döntésfüggvénye, a második tag a teljes decentralizálás optimális döntésfüggvényéhez kapcsolódik.

A kombinált struktúrák értéke is az alapelemek értékének lineáris kombinációja.

Ha a struktúrák bruttó értékeit hasonlítjuk össze, nem jutunk túl messze: nyilván a finomabb struktúra értéke nagyobb. Nagyobb viszont az itt elhanyagolt struktúra-költség is (l! III. 5.). Ezért normáló feltevéseket teszünk az összehasonlításoknál.

Mennél kevesebb paramétert használunk, annál egyszerűbb az összehasonlítás. Tegyük fel, hogy Q ún. kereszthatás-mátrix diagonális elemeinek értéke 1, a többi elem értéke q. Hasonlóan μ pozitív szemidefinit covariancia-mátrixára: $M\mu_i = 0$, $D^2\mu_i = s > 0$ $(1 \le i \le n)$ és $M\mu_i\mu_j = r$ $(1 \le i \ne j \le n)$. Q pozitív definitsége — $1 + (n-1)q$ és $1 - q$ sajátértékek pozitivitása miatt — $-\dfrac{1}{n+1} < q < 1$ korlátozással ekvivalens. Nyilván $-\dfrac{1}{n-1} \le \dfrac{r}{s} \le 1$. Asszimptotikusan: $0 \le q < 1$ és $0 \le \dfrac{r}{s} \le 1$.

Illusztrációképp a következő összefüéggseket említjük a struktúrák értékére vonatkozóan:

— teljes információnál $\hat{V}_n \sim \dfrac{n(s-r)}{2(1-q)}$

— teljes decentralizációnál

— ha μ normális eloszlású és $qr \ne 0$,

akkor $\hat{V}_n \sim \dfrac{1}{2qr}$

— ha $q = 0$ vagy μ_i-k függetlenek, akkor $V_n \sim \dfrac{ns}{2}$.

Célszerű olyan struktúrákat összehasonlítani, ahol a struktúra-költségeket is figyelembe vesszük. A „Team-Elmélet" különböző blokk-struktúrákat hasonlít össze, de úgy, hogy kiköti, hogy a tagszámon kívül az átlagos csoportnagyság is közös. Ezzel utal a költségek hozzávetőleges azonosságára. Három struktúrát hasonlít össze:

1. azonos nagyságú csoportok
2. (egy vagy) több egytagú csoport és egy többtagú csoport
3. a kivételek közlése

Kiemeljük, hogy a 3. struktúra csoportnagyságai függnek a Külvilág véletlen állapotától. Itt az átlagos csoportnagyság várható értékét rögzítjük. Az összehasonlítást az említett teljesen szimmetrikus esetben végezzük el. A számítások szerint a struktúrák fenti sorrendje értékük szerint növekedő sorrend. Ez nem meglepő, hiszen normáló feltevésünk látnivalóan kedvez a centralizációnak.

3. *A hibák szerepe*

Mind elméletben, mind gyakorlatban fontos a hibák vizsgálata. Három esetet különböztetünk meg — aszerint, hogy hol történt a hiba:

1. a megfigyelésnél
2. az utasításnál
3. a végrehajtásnál

A hibavektor is sztochasztikus, komponensei függetlenek; a hibavektor független az által eltorzított valószínűségi vektor változótól. A hiba additív. A számíthatóság érdekében feltesszük, hogy a változók normális eloszlásúak. Az 1. és a 3. eset nem túl érdekes — egyszerű kiegészítések szükségesek csak. Érdekes viszont a 2. eset, amit célszerű úgy elképzelni, hogy a teljes információ esete áll eredetileg — a hiba nélkül —, és a Központ nem a Külvilág tényleges állapotát közli az egyes tagokkal, hanem a végrehajtandó optimális döntés megfelelő komponensét. Amíg a Központtól az utasítás az egyes tagokhoz ér, hiba adódik hozzá. Ezt ellensúlyozandó, a Központ nem az igazi optimális döntést közli, hanem olyan korrigált utasítást, amely a torzulás *után* a lehető „legközelebb" kerül az optimális döntéshez. Érdemes kiemelni, hogy még akkor is célszerű az *összes* utasítás-függvényt az optimális döntésfüggvénytől eltérően választani, ha *nem mindenkinél* fordulhat elő hiba!

Teljes specializálás után most is elvégezhetjük e három eset összehasonlítását. A „Team-Elmélet" az eredeti valószínűségi változó és a hiba szórásának hányadosát rögzítette. A számítások azt mutatják, hogy fentebb érték szerint csökkenő sorrendben írtuk le a struktúrákat. Szemléletesen azt mondhatjuk, hogy mennél távolabb van a hiba a végrehajtástól, annál jobban korrigálható. Ennek hangsúlyozására vontam be a vizsgálat körébe a 3. esetet, melyet a „Team-Elmélet" nem említ.

4. *Néhány további probléma*

Eddig Marschak és Radner könyvének első hat fejezetét ismertettük — bizonyos kérdésekre összpontosítva. Az egyes részek címei nagyjából megfelelnek a könyv egyes fejezet-címeinek. Mielőtt tovább mennénk, újra gondoljunk arra, hogy az előző három pont tételei, gondolatai kvadratikus és konkáv esetre szólnak, többségük nem is vihető át más esetre!

Most távirati stílusban még néhány sort a könyv további fejezeteiről.

A könyv VII. fejezete: *Team — dinamikus környezetben.* Eddigi tételeink is alkalmazhatók diszkrét idő esetén, mert egy valódi tag különböző idejű információit és döntéseit több formális tag „időtlen" információjának és döntésének tekinthetjük. Képletben: $n = NT$; $1 \leq i \leq N$; $1 \leq t \leq T$; $\eta_i = (\eta_{it})_{t=1}^{T}$; $\eta = (\eta_i)_{i=1}^{N}$. stb. Új eredményekhez azonban csak akkor jutunk, ha érvényesítjük az idő sajátosságait: pl. feltesszük, hogy $\{\mu_t\}$ *valószínűségi változó-sorozat valamilyen sztochasztikus folyamat.* A „Team-Elmélet" ún. Markov-lánccal ill. ún. autóregresszív folyamattal foglalkozik. (Az idevágó fogalmak magyarul megtalálhatók [1]-ben.) Pl. Modellünkben most már az információ-tárolás költsége is explicite megjelenik: (i, t_1) „tag" (i, t_2) „tag"-hoz irányított közlésének költsége mutatja, hogy az i. tagnak mennyibe kerül a t_1-ben rendelkezésre álló információ megőrzése t_2-ig: $(1 \leq t_1 < t_2 \leq T)$. A szerzők egyszerű nyereségfüggvényekre szorítkoznak, de így is érdekes összefüggéseket bizonyítanak az *információ-késés* hatásáról és az *információ-teljességgel* való kapcsolatáról. Gyakran teljesül, hogy mennél tovább dolgozzuk fel az információt, annál többet tudunk meg, viszont a késés miatt relatíve annál jobban elavul. A szerzők „aranyszabályt" adnak a komplex optimalizálásra.

A „*Hálózatok*"-kal foglalkozó VIII. fejezet általánosítja az eddig használt modellt. Keresztmetszeten kívül hosszmetszetet is vizsgál explicite is. Konkrét eredményt azonban csak egészen speciális esetben érnek el, de azt is hosszas számolással. (Pl. olyan hálózatot mutatnak be, ahol célszerűbb a rutin, mint a hibákat rejtő teljes információ használata.)

Az utolsó három fejezettel itt nem foglalkozom.

VI. A team-elmélet és a rokon elméletek viszonya

Dolgozatom utolsó részében a team-elmélet és a rokon elméletek viszonyáról szólnék egészen röviden.

1. A kérdés formális, matematikai vonatkozására Marschak és Radner azt válaszolja, hogy *a team-elmélet a játékelméletnél speciálisabb, a statisztikus döntésfüggvények elméleténél általánosabb.* Ugyanis a team-elméletben a team-tagok teljes egységben játszanak a Külvilág nevű „játékos" ellen, s a statisztikus döntésfüggvények elméletében a team egy tagból áll.

A pontosság kedvéért említem, hogy mind a statisztikának, mind a játékelméletnek többféle irányzata létezik jelenleg, melyek lényegesen különböznek. Mindenesetre Radner [17] alapvető dolgozatának team-modellje tényleg magábanfoglalja a statisztikát.

2. A team-elméletnek tartalmi vonatkozásban elég sok rokona van. De először egy általános problémát tisztázunk: „A team gazdasági elmélete" c. könyv szerzői a „gazdasági" jelzővel arra utalnak, hogy elméletükben a team *korlátozott lehetőségeket optimálisan használ ki.* Tehát alkalmazási köre bővebb a szokásos értelemben vett gazdasági életnél ill. a közgazdaságtannál — hasonlóan a statisztikus döntésfüggvények elméletéhez.

A team-elmélet *normatív* elmélet, nem deskriptív. A szerzők ezt annyiban tekintik előnyösnek, amennyiben elméletük segít létező szervezetek munkájának javításában ill. új szervezetek létrehozásában. Viszont létező szervezetek, team-ek munkájának *megértésénél* hátrányos az elmélet normatív felfogása és gyakran közelítésként sem engedhető meg.

Ismertetett team-modellünkhöz elég közel állnak egyes *rendszerelméleti* vállalat-modellek. (Johnson—Kast—Rosenzweig: „A rendszerelmélet és a vállalatvezetés" [5].) A komplex szemlélet, az információs és a döntési struktúra együttes optimalizálása emeli a team-elméleti modellt a régebbi üzemgazdasági modellek fölé. (Hax i. m.)

Mit nyújthat a közgazdaságtannak a team-elmélet? Homogén gazdasági szervezetek információs-döntési rendszerének közelítő matematikai vizsgálatát. Sőt, ha képesek lennénk annak tárgyalására, hogy az egyes tagok érdekei nem azonosak, akkor bármilyen gazdasági egységre kiterjeszthetnénk vizsgálatainkat.

Az információs-döntési rendszer gyakorlati fontosságát felesleges hangsúlyozni. Viszont rá kell mutatnunk az elmélet, s különösen a matematikai közgazdaságtan mulasztásaira. Kornai János „Anti-Equilibrium" c. könyvében [6] az általános egyensúlyelmélet bírálatánál — többek között — a következőket állapítja meg:

Az általános egyensúlyelmélet túlzottan leegyszerűsíti az anyagi folyamatok, a reál-szféra modelljét — többek között eltekint a gazdaság sztochasztikus természetétől. Ennek megfelelően a gazdasági szabályozó- (információs-, döntési- stb. = irányítási) szféra modellje fokozottan leegyszerűsödik — a valósággal gyökeresen szembefordulva. A team-elmélet viszont a valóság sztochasztikus jellegéből indul ki, s elsősorban az irányítási szférát vizsgálja. Tegyük hozzá mindjárt, hogy a team-elmélet jelenleg fejletlenebb az általános egyensúlyelméletnél; pl. a létező team-modellek túlnyomó többsége statikus, gazdaságilag rosszul interpretálható stb.

Mégis találunk olyan statikus modellt, amelyben a team-elmélet megszüntetve-megőrzi az általános egyensúlyelméletet — Radner „Versenyzői egyensúly bizonytalanság mellett" (1968.) [18] dolgozatára gondolhatunk, melyre Kornai bírálatában szintén hivatkozik. Radner először team-elméleti nyelven általánosítja a „versenyző egyensúly" Arrow—Debreu modelljét és alaptételét [2]. Aztán egy példán mutatja be, hogy a Külvilág sztochasztikus volta és a gazdasági egységek döntési képességének korlátozottsága (= az információs és döntési ráfordítások létezése) miatt bizonyos konkavitási feltételek érvényüket vesztik, s az egyes tagok döntési önállósága is megszűnik, a pénz explicite is megjelenik, azaz az általános egyensúlyelmélet lényeges részei ellentmondásba kerülnek egy reálisabb, általánosabb modellel.

3. A team-elmélet erős feltevései (közös cél, speciális függvények stb.) miatt is kevés alkalmazás ismeretes az irodalomban. Beckmann 1958-ban írt [2] dolgozata „A repülőgépjegy eladásánál fellépő döntési és team-problémákkal" foglalkozik; Mac Guire „Az eladási szervezetek néhány team-modelljét" vizsgálta 1961-ben [8]. Az alkalmazás fejletlenebb az elméletnél.

Érdekesnek és hasznosnak látszik hálózattal rendelkező gazdasági szervezetek team-elméleti vizsgálata: pl. a vasúti helyjegy-rendszer vagy a bankrendszer hálózat elemzése.

(Beérkezett: 1970. július 13.)

IRODALOM

[1] ARATÓ, M.: Bevezetés a sztochasztikus folyamatok elméletébe. (soksz.) Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa. 1968.

[2] ARROW, K. J.—DEBREU, G.: Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, Econometrica, 1954. 22. sz. 265—290. o.

[3] BECKMANN, M.: Decision and Team Problems in Airline Reservations. Econometrica, 1958. 28. sz. 134—145. o.

[4] HAX, H.: Döntések koordinálása. Adalék az üzemgazdasági szervezéstanhoz. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 309 p.
[5] JOHNSON, A. R.—KAST, F. E.—ROSENZWEIG, J. E.: A rendszerelmélet és a vállalatvezetés. Rendszerelmélet. Válogatott tanulmányok. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
[6] KORNAI, J.: Anti-Equilibrium. Kézirat. 1969.
[7] LUCE, R. D.—RAIFFA, H.: Games and Decisions. New York—London, 1958.
[8] MacGUIRE, C. B.: Some Team Models of a Sales Organization. Management Science, 1961. 7. sz. 101—130. o.
[9] MARSCHAK, J.: Towards an Economic Theory of Organization and Information. Trall, Coombs, and Davies — Decision Processes. New York, 1954. Wiley.
[10] MARSCHAK, J.: Efficient and Viable Organizational Forms.
HAIRE, M.: Modern Organization Theory, New York, 1954. Wiley.
[11] MARSCHAK, J.: The Pay-off-Relevant Description of States and Acts. Econometrica, 1963. 31. sz. 179—726. o.
[12] MARSCHAK, J.—RADNER, R.: The Economic Theory of Teams. Kézirat. 1968.
[13] MARSCHAK, T. A.: Computation in Organizations: The Comparison of Price Mechanism and Other Adjustment Process. Working Paper No. 156. Center for Research in Management Sciences. University of California, Berkeley, 1966.
[14] von NEUMANN, J.—MORGENSTERN, O.: Theory of Games and Economic Behavior. Princeton, 1944. Princeton University Press. 641 p.
[15] RADNER, R.: The Linear Teams: An Example of Linear Programming under Uncertainty. Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming, Washington, D. C. 381—396. o.
[16] RADNER, R.: The Evaluation of Information in Organizations. Berkeley, 1961. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Probability and Statistics. University of California Press. Vol. 1. 491—530. o.
[17] RADNER, R.: Team Decision Problems. Annales of Mathematical Statistics, 1952. 33. sz. 857—881. o.
[18] RADNER, R.: Competitive equilibrium under uncertainty. Econometrica, 1968. 36. sz. 31—58. o.
[19] RÉNYI, A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó. 510 p.
[20] SAVAGE, L. J.: The Foundations of statistics. New York, 1954. Wiley.
[21] WALD, A.: Statistical Decision Functions. New York, 1950. Wiley.

Helyreigazítás: A III. évfolyam 2. számban a szerzők felsorolásánál MARÓTI LÁSZLÓ munkahelyét tévesen közöltük. Helyesen: DATORG Külkereskedelmi Adatfeldolgozó és Szervező Rt.

KÖNYVEKRŐL

Röviden új külföldi könyvekről

MALINVAUD, E.: *Leçons de théorie micro-économique.* (Mikroközgazdaságtani elmélet.) Paris, 1969. Dunod. 269 p.

A „Statisztika és Gazdasági Programok" elnevezésű sorozatban, amelyet a Dunod kiadó bocsát közre, ez a harmadik mikroközgazdaságtan a Henderson-Quandt és az Abraham-Thomas féle „Mikroközgazdaságtan"-ok mellett. Az olvasóban ezért önkéntelenül felmerül a kérdés: miben különbözik Malinvaud könyve a többi hasonló tárgyú munkáktól.

A kiindulás azonos: először a fogyasztó (haszon függvény, kardinális és ordinális haszon fogalom, fogyasztói egyensúly, keresleti függvény) és a termelő viselkedését tárgyalja (termelési és költség függvények, a vállalat kereslete és kínálata, rövidtávú és hosszútávú döntések).

Ezután az optimum fogalmát tárgyalja. A Pareto-féle optimumból indul ki. Ezt nevezi a „maximális társadalmi hozam" helyzetének. Ebből vezeti le az elosztás és a termelés optimumát.

Ezután tárgyalja az általános egyensúlyt tökéletes verseny esetében, majd a tökéletlen (monopolisztikus) versenyt. A tökéletlen verseny különböző modelljei közül a játékelméleti leírást alkalmazza, vagyis azt az esetet, amikor mindegyik monopolista vállalat annak figyelembe vételével dönt, hogy a többi monopolista vállalatok különböző meghatározott ellenintézkedésekkel válaszolhatnak. Ezzel a modellel elemzi a kétoldalú monopólium, a duopólium és a koalíciók (kartellek) esetét.

Nincs olyan tervhivatal, amely az összes egyéni haszon függvények és az összes vállalati termelési függvények ismeretében meg tudja határozni a társadalmi hozamot maximalizáló tervet. A tapasztalat bebizonyította, hogy a tökéletes verseny sem érhető el (mindig maradnak monopólium helyzetek), és ha megvalósulna akkor sem feltétlenül vezet igazságos elosztáshoz a fogyasztók között. Ezért javasolták a szocialisták a gazdaság többé vagy kevésbé kiterjedt tervszerű irányítását. Ennek megvalósítását tárgyalják a „szocializmus gazdasági elmélete" néven. Malinvaud három modellt mutat be, amely az optimumhoz vezethet olyan helyzetben, amikor a központi tervhivatal előterjeszt egy előzetes tervet, ennek ismeretében a vállalatok javaslatokat tesznek, és ezeknek alapján határozzák meg a végleges tervet.

A könyv utolsó fejezetei három további vonatkozásban terjesztik ki a mikroközgazdaságtanban hagyományosan tárgyalt témák körét. Ezek: 1. a külső megtakarítások és a közületi szolgáltatások, 2. az idő-tényező (diszkontálás, termelés az időben, késés a ráfordítás felhasználása és a termék kibocsátása között), 3. a bizonytalanság figyelembe vétele.

A könyv teljesen elvontan tárgyalja a mikroközgazdaságtan matematizált elméletét. A modelleket egyidejűleg leíróknak és normatívaknak is tekinti. Tehát nem veti el egészében a hagyományos elméletet, mint azt a szociológikusabb felfogású elméletek teszik, hanem megpróbálja azokat továbbfejlesztve (pl. a bizonytalanság figyelembe vételével) a valósághoz közelebb hozni.

A. R.

W. LEE HANSEN (szerk.): *Education, Income and Human Capital* (Oktatás, jövedelem és emberi tőke) Studies in Income and Wealth, No. 35, New York—London, 1970. National Bureau of Economic Research, 320 p.

A kötet a Wisconsin Egyetemen 1968-ban a jövedelemről és gazdagságról tartott konferencián elhangzott előadásokat tartalmazza. A tanulmányok témakörük szerint három fő csoportba sorolhatók. Az első csoport témaköre az oktatás és a termelési függvények, a másodiké az iskolai végzettség és a jövedelemeloszlás, a harmadiké pedig az oktatás és az emberi tőke világgazdasági aspektusaival foglalkoznak.

Az első fejezet első tanulmánya (SAMUEL BOWLES: *Az oktatási termelési függvényeik felé)* olyan termelési függvények felírásával és specifikálásával foglalkozik, amely egy-egy iskolatípus outputjának mérését teszik lehetővé. A termelési függvény függő változója az iskolatípus outputja, a független változók pedig az adott iskolatípusnak a diákokra gyakorolt különböző hatásait, a diákokra gyakorolt iskolán kívüli egyéb környezeti hatásokat, valamint a diákoknak az adott iskolatípusba való belépése előtti képességeit és iskolai végzettségét veszik figyelembe. A szerző részletesen foglalkozik az oktatás outputjának és inputjának mérési lehetőségeivel, valamint a függvényben szereplő ismeretlen paraméterek becslésével. Végül egy konkrét oktatási termelési függvényt ismertet. A fejezet második tanulmánya (ZVI GRILICHES: *Az oktatásnak termelési függvényekben és növekedéselméletben betöltött szerepéről)* azon kísérletek eredményeiről számol be, melyek az „oktatási" változóknak a szokásos aggregált termelési függvényekbe való beépítésére irányulnak. Az elméleti fejtegetéseket itt is konkrét gyakorlati példák teszik szemléletesebbé. Végül az e fejezetet záró tanulmány (szerzője: YORAM BEN-PORATH), az oktatásnak, mint az emberi tőkébe való beruházásnak a vizsgálatával foglalkozik.

A második fejezet egyetlen tanulmányt tartalmaz B. R. CHISWICK tollából, aki az iskolai végzettség és a jövedelemeloszlás aszimmetriája közötti kapcsolatot elemzi területi adatok alapján. Empirikus vizsgálatai alapján arra a megállapításra jut, hogy a jövedelemeloszlás aszimmetriájában meglevő területi különbségek jelentős részben visszavezethetők az iskolázottságban mutatkozó területi különbségekre. Az is kiderült, hogy az iskolázottság szerinti megoszlás önmagában a jövedelemeloszlás pozitív aszimmetriáját idézi elő. Ez azt sugallja, hogy a jövedelemeloszlás még akkor is pozitív aszimmetriájú volna, ha az emberi tőke volna az egyetlen jövedelemforrás.

A harmadik fejezet két tanulmányában az oktatás és a komparatív előnyök kapcsolatáról, valamint a „brain drain"-nel kapcsolatos problémákról olvashatunk. A tanulmányok szerzői P. B. KENEN, illetve A. SCOTT. A fejezet első tanulmánya egyrészt összefoglalja a képzésnek és az emberi tőkének (vagy általánosabban: a felhalmozott tudásnak) a komparatív előnyökre, s következésképpen a külkereskedelmi struktúrára gyakorolt meghatározó szerepét, másrészt azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy mit kell tanulni ezen előnyök érvényesítése érdekében: elméleti vagy gyakorlati ismereteket. A második tanulmány a brain drain közgazdasági vizsgálatának három típusára hívja fel a figyelmet: annak vizsgálatára, hogy egyáltalán okozhat-e a brain drain problémát, továbbá a brain drain okainak elemzésére vándorlási, valamint egyéni viselkedési adatok alapján.

A tanulmánykötetet szerkesztői előszó, az egyes tanulmányokhoz való hozzászólások és a konferencia rövid áttekintése egészítik ki.

V. L.

HELLWIG, Z. (szerk.): *Zarys ekonometrii.* (Az ökonometria vázlata.) Második, javított és kiegészített kiadás. Warszawa, 1970. Panstwowe Wydawnictwo Ekonomiczne. 575 p.

Ez a Hellwig és szerzőtársai (Bartosiewicz, Cieslak és Niedzielska) által megírt ökonometria tankönyv vagy kézikönyv érdekes összehasonlításokra ad alkalmat Pawlowski ugyancsak lengyel ökonometria könyvével, amely a közelmultban magyarul is megjelent. Az utóbbi ugyanis elsősorban makroközgazdaságtani ökonometriai elemzési módszereket tárgyal: népgazdasági modelleket, a létfenntartási költségek alakulását, a jövedelemeloszlást leíró modelleket, az aggregált keresleti függvényt stb. Hellwigék ökonometriája viszont alapvetően a vállalati közgazdászok számára íródott: piackutatással, vállalati termelési modellekkel (többek között vállalati input-output táblákkal), lineáris programozással, szervezési modellekkel, hálótervezéssel foglalkozik.

A gyakorlati alkalmazásokat tárgyaló második részt megelőzi egy módszertani rész és követi egy hosszú matematikai függelék.

A módszertani rész a regresszióelemzésen alapul. A teljesen gyakorlati mintapéldák mellett leírja Hellwig értelmezését a regressziós egyenletről. Eszerint az utóbbi egy közelítő függvény és a leghelyesebb azt a tartományt kijelölni, amelyen a belül a megközelíteni kívánt valóságos függvény elhelyezkedik, nem pedig a meghatározott regressziós függvényt azonosítani a valósággal.

A függvények paramétereinek meghatározási módszerei közül csak az egyszerű legkisebb négyzetek módszerét, valamint annak egy leegyszerűsített változatát tárgyalja, abból a megfontolásból, hogy ebben a könyvben, az input-output modellektől eltekintve, csak olyan modelleket tárgyalnak, ahol az egyszerű legkisebb négyzetek módszerét alkalmazni lehet, mivel nem fordulnak elő kölcsönösen összefüggő endogén változókat tartalmazó egyenletek.

Foglalkozik viszont azoknak a statisztikai hipotéziseknek verifikálásával, amelyeken a lineáris regresszióelemzés alapul. Ezek: a regressziós függvénytől való eltérések véletlenszerűsége, a valószínűségi tag normáleloszlása (Hellwig saját tesztje segítségével), valamint a változók közötti összefüggés linearitása.

Külön fejezet tárgyalja az előrebecslés módszereit.

A matematikai rész a kétdimenziós valószínűségi eloszlások alapfogalmait, a lineáris algebra és a lineáris programozás elemeit ismerteti.

A tárgyalás viszonylagos egyszerűsége és a sok konkrét példa használhatóvá teszi a könyvet azok számára, akik gyakorlati vállalati problémák megoldásában akarják az ökonometriai módszereket felhasználni. A vállalati problémákra koncentrálódás következtében a nem szoros értelemben vett ökonometriai fejezetek is, mint a szervezeti problémák és a hálótervezés, beleilleszkednek a munkába és nem hiányoljuk a makroproblémákat és az azokban használható bonyolultabb becslési módszereket. A vállalatok önállóságának növekedése feltehetően fokozni fogja a mikroszintű ökonometriai kutatások iránti érdeklődést.

A. R.

TUDOMÁNYOS ÉLET

Az operációkutatás mai általános helyzetéről*

1. Előzmények

Az ipari, kereskedelmi, közigazgatási és egyéb szervezetek viselkedésének, célirányos tevékenységének irányítása, mint igény és mint intuicióra alapuló gyakorlat messzire visszavezethető. Azonban az ilyen igazgatási feladatok elemzésénél, megszerkesztésénél a természettudományokban már korábban alkalmazott kutatási módszereknek, valamint a matematika, a statisztika és a logika tudományos nyelvének és ezek eszközeinek felhasználása lényegesen rövidebb múltra tekint vissza. Amint az ma már jól ismert, az ilyenfajta törekvések határozott formában először a II. világháborút megelőző évek hadműveleti kutatásainál jelentkeztek és a feladatot jól kifejező „operational research" elnevezést először az angol légierő egyik kutatócsoportja vette fel. Az angolszász katonai operációkutatási csoportok tevékenységéről a polgári világ csak a háború után szerezhetett némi tudomást, de a tevékenység jelentőségét felismerve és mivel az operációkutatásban gyakorlatot szerzett szakemberek jelentős része a hadseregtől más területekre mehetett át, az 50-es évek elejétől az operációkutatás közlekedési, ipari és kereskedelmi alkalmazása egyre nagyobb lendületet kapott. Majd rövidesen megjelentek az operációkutatás első társadalmi szervezetei és szaklapjai is.

Kezdetben — és ez jellemezte a katonai operációkutató csoportokat is — az operációkutatásnak nyilvánvalóan nem voltak saját szakemberei. Ezért az *operációkutatási csoportot* különböző diszciplinákban (mint thermodinamika, genetika, idegpszichológia stb.) képzett kutatókból hozták össze, akik különböző irányú tudásukat képesek voltak a vállalat (általában a vizsgálandó rendszer) megismerésében együttesen hasznosítani. Ezeket a körülményeket tükrözi az angol operációkutatási társaság St. Beertől[1] származó hivatalos definíciója, vagy pedig Ackoff és Sasieni[2] tömörebb megfogalmazása, amely szerint az operációkutatás

(1) a *szervezett* (ember-gép) *rendszerek* irányításának, illetve a teljes szervezet céljait legjobban szolgáló megoldások kialakításának érdekében
(2) *tudományos módszerek* alkalmazása
(3) interdiszciplináris „team"-ekben.

Ezt az irányzatot, amely az operációkutatást csupán tevékenységnek, tudományos magatartásnak tekinti, ma már „klasszikus" operációkutatásnak szokták nevezni. Ugyanis miközben a vezetési döntés és irányítás tanulmányozásának szükségessége mindinkább nyilvánvalóvá vált, a túl általánosnak tűnő „tudományos módszerek" keretében — több előzményt is feleleveníve — a matematikai és statisztikai *döntéselméleti módszerek* jelentős fegyvertára kezdett kialakulni. Az elektronikus számítógépek megjelenése és elterjedése, valamint az elektronikus adatfeldolgozás az operációkutatás fejlődését meggyorsította. Ma már számos egyetemen — bevezetés az operációkutatásba, matematikai programozás, rendszerelemzés, rendszertechnika, gazdasági kibernetika stb. címmel — 1—4 féléven keresztül oktatják az operációkutatás módszereit üzemmérnököknek, gazdasági mérnököknek és közgazdászoknak, de megfelelő matematikai előképzettség után más hallgatók előtt is nyitva áll ez a lehetőség. Néhol ennél tovább is mennek és különböző (matematikai, statisztikai, műszaki, gazdasági stb.) előképzettség után operációkutató szakembereket is képeznek. Így az operációkutatás klasszikus irányzatával szemben kialakult az ún. „technikai" operációkutatás a maga „hivatásos" szakembereivel. Természetesen a geometriai, algebrai és statisztikai módszerek előtérbe kerülése azzal a veszéllyel jár, hogy a „technikai" operációkutatás könnyen légüres térbe kerülhet.

* Ezt a cikket vita indításának szándékával közöljük. Reméljük, hogy a felvetett kérdésekről további véleményeket is kapunk és hogy ezekben a *hazai* helyzetet is részletesebben elemzik majd. (Szerk.)
[1] Beer, St.: Decision and Control, London, 1966.
[2] Ackoff, R. L.—Sasieni, M. W.: Fundamentals of Operations Research, New York, 1968.

2. Helyzetkép három ez évi konferencia alapján

1970 őszén az operációkutatás művelőinek a már megszokottnál is több alkalmuk volt színvonalas tapasztalatcserékre és a szakterület jelenlegi helyzetének, fejlődésének megítélésére.

Beszámolhatunk egy sikeres hazai operációkutatási konferenciáról, amit a Neumann János Számítógéptudományi Társaság patronálása mellett október 5—9 között a *Bolyai János Matematikai Társulat* rendezett meg Debrecenben. Ennek a különösebben elő nem készített találkozónak több mint 250 résztvevője volt. Így ez a szám is mutatja, hogy az operációkutatás iránti érdeklődés nálunk valóban nagyméretű, hiszen az operációkutatás számos ismert hazai művelője nem is volt ott ezen a konferencián. Örvendetes viszont, hogy fiatal matematikusok, tervmatematikusok és közgazdászok milyen nagy számban jelentek meg. Az elméleti és alkalmazási jellegű előadások körülbelül egyensúlyban voltak és a számítástechnikai vonatkozásokról is több szó esett. Jelentős előrehaladásnak kell tekinteni azokat az előadásokat, amelyek bonyolult és komplex ipari problémákról számoltak be, például termelésirányítás egy kőolajfinomítóban, gázvezetékhálózat fejlesztése, építési beruházások kapacitástervezése, stb. Az előadók között szép számban szerepeltek mérnökök is.

A *nyugatnémet* és a *svájci operációkutatási társaság* szeptember 23—25 között háromnapos közös konferenciát rendezett Zürichben. Ez egyben a nyugatnémet társaság szokásos évi közgyűlése is volt. Ezen a német nyelvű konferencián 240 szakember vett részt, és az egyes üléseken (általában 5 előadással) a következő témakörök szerepeltek:

Sztochasztika
Beruházások és finanszírozás tervezése
Az elméleti fejlődés áttekintése
Közszolgáltatások
Mezőgazdaság (üzemgazdasági rész)
Informatika
Kombinatorikus problémák
Matematikai optimálás
Raktározás
Mezőgazdaság (népgazdasági rész)

A plenáris ülés első előadását *H. P. Künzi* professzor, kormánytanácsos tartotta „operációkutatás és számítógépek alkalmazása a közigazgatásban" címmel. A szekcióüléseken elmondott és megvitatott előadások zöme tényleges ipari, mezőgazdasági, hitelgazdálkodási és közszolgáltatási problémákkal foglalkozott. Az elméleti előadások áttekintő jellegűek voltak, matematikai részletkérdésekről itt viszonylag kevés szó esett. Ugyanakkor *rendszerszemléletű* és *rendszertechnikai* előadások a korábban megszokottnál nagyobb hangsúlyt kaptak.

Nagy feltűnést keltett *A. Adam* osztrák professzor előadása az *informatikáról*, amit ő az ember, ill. társadalom, a vizsgálandó rendszer és a számítógép együtteseként, e három szubsztancia kölcsönhatásaként, együttműködéseként, másnéven *integrált információrendszerként* értelmez. Eltér tehát az angolszász értelmezéstől, mely szerint az informatika középpontjában a számítógép áll, vagyis ott az informatika a számítógéptudománynak egy másik neve. A Szovjetunióban pedig ezt a területet gazdasági kibernetikának, vagy rendszertechnikának nevezik. A valóságos vezetési, irányítási problémák megoldásában az operációkutatás (értsd technikai operációkutatás) tényleges és hasznos alkalmazásának lehetősége *Adam* szerint — de ezt a véleményt jelenleg mások is hangoztatják — erősen korlátozott, míg az informatika a maga egyszerűbb eszközeivel az adott rendszer struktúrájához, céljaihoz és vezetéséhez rugalmasabban tud alkalmazkodni.

Említést érdemel, hogy a Zürichi Egyetemen régóta működik egy operációkutatási és elektronikus adatfeldolgozási intézet, a híres Szövetségi Műszaki Főiskolának (ETH) pedig, ahol szeptember elején Európa egyik legkorszerűbb számítóközpontját helyezték üzembe, külön operációkutatási tanszéke van.

A konferencia bankettjén elmondott beszédében Künzi felvetette a mérnök, a közgazdász és matematikus között elhelyezkedő operációkutatás egyetemi szakképzésének gondolatát. Azonban az ilyen önálló operációkutatási szakra vonatkozó vélemények meglehetősen eltérőek.

Szeptember 14—18 között Hágában rendezték meg a 7. *matematikai programozási szimpóziumot*, amelynek több mint 500 résztvevője között a tudományterület legismertebb nevű és legtekintélyesebb művelőit csaknem kivétel nélkül megtalálhattuk, és mind a résztvevők, mind az előadók között a magyar matematikusok és operációkutatók igen szép számban szerepeltek.

Feltűnően sok szó esett a szimpóziumon a nem lineáris és az egészértékű programozás elméleti problémáiról. A szimpózium elméleti jellegét az is mutatja, hogy a 32 nem lineáris témakörű előadás közül csupán 6 foglalkozott algoritmussal. A főprofil a matematika volt, a tényleges alkalmazásokról itt viszonylag kevés szó esett. Ezt tükrözték a felkért áttekintő előadások témái is.

A szimpózium előadásai, légköre és a kötetlen beszélgetések ismét azt igazolták, hogy az operációkutatásból, vagy az operációkutatás megerősítése címén egy jelentős és gyorsan fejlődő új matematikai tudományterület alakult ki. A matematikai tudományt képviselő társaságok, bizottságok korábban ezt a területet számos országban alkalmazott matematikának tekintették, ami a matematikusok között nem mindig hízelgő megkülönböztetés. Az alkalmazott matematika mindig átmeneti kategória, amely — ha a gyakorlatban használható — a mérnök, statisztikus, haditechnikus stb. eszközévé lesz, ugyanakkor — ha elmélete elég bonyolult — matematikaként (tehát tiszta matematikaként) fejlődik tovább, vagyis helyet kap a matematika birodalmában. Ezt a folyamatot pontosan felismerhetjük az operációkutatás történetében is. Az operációkutatás matematikai módszereit korábban egyes szerzők döntéselmélet (matematikai döntéselmélet) gyűjtőnévvel illették, ami mögött egyre több matematikai elmélet halmozódott fel. Pár éve megjelent a *matematikai operációkutatás* elnevezés, amit inkább az „operációkutatás matematikája" címszóval helyettesíthetnénk. Hágában pedig a (korábban szűkebb fogalomként használt) *matematikai programozás* kapott ilyen szélesebb értelmezést. Igaz, a matematikai programozás módszereit az operációkutatáson kívül is lehet alkalmazni, amire a szimpózium néhány előadása példát is mutatott (alkalmazás a matematikai kutatásokban, alkalmazás a mérnöki tervezésben).

Olyan megfontolások mellett, hogy a matematikai programozási szimpóziumok rendszeres szervezését jó lenne egy nemzetközi bizottságra bízni, amelynek saját folyóirata és így valamennyi pénze is van, bizonyára a fenti gondolatok is szerepet játszottak abban, hogy egy külön esti ülésen a rendezőbizottság javaslatot terjesztett elő *Nemzetközi Matematikai Programozási Társaság* megalakítására, amiből — több ellenvélemény és tartózkodás ellenére — határozat is lett. Érdekes, hogy több tekintélyes operációkutató matematikus távol tartotta magát ettől az üléstől. Így például a záróbeszédet tartó *H. W. Kuhn* is, aki ott el is mondta, hogy nem örült ennek a fejleménynek. Szerinte a matematikai programozás nem ága a matematikának, hanem matematikai elméletből, számítógéptudományból és alkalmazásból tevődik össze és sorsa attól függ, hogy matematikai, számítógéptudományi és felhasználó környezetével milyen szorosak a kapcsolatai. Ezt a tiszteletreméltó álláspontot főleg azok képviselik, akik az operációkutatás szilárdabb egységét kívánnák megőrizni és e törekvésük közben hallgatólagosan azonossági jelet tesznek az operációkutatás és a matematikai programozás közé.

Bár a kapcsolat és az egymásrahatás igen erős e két terület között, mégis az operációkutatás lényegéből következik, hogy az nem azonos a matematikával. Ezért az operációkutatás matematikájának bizonyos önállósulását, elkülönülését természetes jelenségnek lehet csak tekinteni. Az operációkutató (csakúgy mint más felhasználó) a gyorsan fejlődő matematikai programozástól használható algoritmusokat kap és problémájának megoldásánál mindinkább számíthat a matematikai programozás módszertanának, ill. szakembe-rének segítségére.

Az operációkutatás vizsgálódásának tárgya valamely *szervezett rendszer struktúrája, mechanizmusa és irányítása*, amiből következik, hogy itt a *rendszerelemzésnek*, logikának gazdasági értékelésnek, vezetéselméletnek, de még a pszichológiának is szerepe van a probléma megfogalmazásában. Nagyobb feladatoknál pedig az informatikának feltétlenül szerepe van a probléma megoldásában, vagyis a vezetési (tervezési és szervezési) *döntés hozatalában*, vagy a folyamatos (operatív) *irányításban*. Így az operációkutatás lehetőségeit a matematikai programozás mellett egy másik irányzatnak, a *rendszerelmélet, vezetéselmélet* és *informatika* közös irányzatának fejlődése is meghatározza. És az operációkutatás módszertani sorrendjében a probléma megfogalmazása megelőzi a matematikai modellezést és az egzakt megoldást, amire nem is kerülhet mindig sor. Előzetesen sokmindent tisztáznunk kell. El kell határolnunk a rendszert a környezetétől, vagyis a nála tágabb rendszerektől. Meg kell fogalmaznunk a rendszer célját, meg kell ismernünk a rendszer saját eszközeit, erőforrásait és összetevőit, struktúráját. Meg kell szerveznünk a vezetés információs rendszerét. Majd kutatnunk kell, hogy a rendelkezésre álló erőforrásokkal a külső és belső feltételek mellett a rendszer egyáltalán elérheti-e a célját, tehát, hogy egyáltalán létezik-e lehetséges megoldás. Kedvezőbb esetekben vizsgálnunk kell továbbá, hogy a különböző lehetséges stratégiáknak és taktikáknak mi a várható eredménye, következménye, vagy, hogy mikor tekintjük a rendszer tevékenységét optimálisnak. Ez a munka — neve szerint — a valóságos tevékenységeknek, a rendszer „hadműveleteinek", valamint azok hatásának megfigyeléséből, méréséből és kikísérletezéséből áll, olyan kérdésekkel foglalkozik tehát, amelyekre előre senki nem ismeri a választ.

3. Visszaérkezés a probléma-orientációhoz magasabb technikai szinten

A hágai szimpózium hangulatát még obban megérthetjük, ha figyelembe vesszük, hogy az angol és az amerikai operációkutatási társaság a közelmúltban külön-külön kinyilatkoztatta, hogy az operációkutatás nem ága a matematikának és — bár lehetőség szerint alkalmazza a matematikát — nem alkalmazott matematika.

Egy ilyen figyelmeztetésnek volt tekinthető, hogy az „Operational Research Quarterly" 1970-ben borítólapjának megváltoztatásával is jelezni kívánta a szerkesztési politikájának egy kis változását, amit elsősorban a túlfinomodó módszerektől a *valódi problémákhoz való visszaérkezés* szándékával fejeztek ki. A gyakorló operációkutatók kívánságának eleget téve a lap a jövőben elsősorban a meglevő *alapokra* kíván építeni. Helyet ad elméleti, filozófiai és új módszereket ismertető cikkeknek is, de megkívánja tőlük a tényleges vagy lehetséges gyakorlati alkalmazhatóságot. A szerzőktől elsősorban az operációkutatási munkát szemléltető jó, gyakorlati *esettanulmányokat*, az operációkutatás egyes területeinek jelen helyzetét *áttekintő* cikkeket és a szakmán belüli módszertani, technikai és politikai *vitákban* való részvételt kéri. Említést érdemel itt még egy epizód, nevezetesen az, hogy az *angol operációkutatási társaság* a múlt évben *Stafford Beert*, a klasszikus operációkutatás irányzatának egyik legjellegzetesebb képviselőjét választotta elnökének, aki ez év januárjában szónoki hatásokra törekvő székfoglaló beszédében kikelt az öncélúvá váló módszerorientáció ellen és korunk legnagyobb problémáira irányította hallgatósága figyelmét, mondván, hogy az emberiség a vesztébe rohan, amitől csak az operációk kutatásával menekülhet meg.[3] E beszédében Beer önkritikusan elismerte, hogy az előző években ő is foglalkozott új elnevezés keresésével és ezért „vezetéstudomány" címen írt könyvet az operációkutatásról, noha az eredeti elnevezés időközben nagyon kifejezővé vált.

Jóval mértéktartóbb és konkrétabb az *amerikai operációkutatási társaság* mult évi leköszönő elnökének *Thomas E. Caywoodnak* értékelése, amely a hagyományoknak megfelelően a társaság tavaszi közgyűlésén hangzott el. Érdemes a beszéd több gondolatát itt feleleveníteni. Először is megállapíthatjuk, hogy az operációkutatás régi, kezdeti problémái, ha tartalmukban némely esetben változtak is az idők folyamán, ma is élnek, sőt közülük egyesek még nagyobbakká váltak. Például ipari vonatkozásban a gyakorlati termelésirányítás és készletgazdálkodás, csakúgy mint az elosztási és a szállítási problémák nem sokat változtak az elmúlt években. Még ma is gondot okoz egy kisebb gyár termelésének optimális ütemezése. Egy realisztikus készletgazdálkodási vagy sorbanállási szituáció nem tűri meg az analitikai eljárást, bár rendelkezésre álló eszközeink sokat fejlődtek és az összefüggéseket részleteiben igyekszünk mindjobban megérteni. A *lineáris programozásra* már van megbízható analitikai eszközünk és az asztali számológépet elektronikus számítógéppel helyettesítjük. Így az egyszerű, de nagyméretű, termelési és elosztási feladatok programozása, vagyis tervezése már megoldható, de sok gyakorlati szituációban például a *heurisztikusan* kifejlesztett elosztás még mindig használhatóbb. Létrehozhatunk nagyszabású *szimulációkat* is, amelyek lehetővé teszik, hogy szállítási és sorbanállási problémákat igen valósághű feltételek között oldhassuk meg. Caywood a rendszerelemzéssel megközelíthető legjelentősebb új területeknek tekinti a víz és a levegő szennyeződésének, környezetünk általános elpusztításának problémáit, amilyen mértékben ezeknek léteznek műszaki megoldásai. Ahogy környezetünket változtatjuk, az a részletek optimálásának tökéletes példája. Irtjuk az erdőt, kiszárítjuk a mocsarat, kimerítjük természetes erőforrásainkat, megmérgezzük a rovarokat és ugyanakkor megfertőzzük vizeinket és a levegőt anélkül, hogy a nagyobb költségek és a káros mellékhatások miatt aggódnánk. A rendszerelemzést ezen a területen két szempont is korlátozza. Először is a működésükbe való beavatkozást megelőzőleg nem ismerjük a meglevő környezeti (ökológiai) kölcsönhatásokat. Például a cserjék, a fák és a talaj együttműködő tulajdonságát akkor kezdjük méltányolni, amikor az erdőt már kiirtottuk és az erózió megkezdődött. Másodszor civilizációnknak nagyon primitív fogalmai vannak az erőforrások értékéről.

Az operációkutatás angol és amerikai értelmezése közötti árnyalati különbség tükröződik Caywoodnak abban a megállapításában, hogy a probléma megszerkesztése a rendszerelemzés feladata, míg az operációkutatás azokkal a műveleti aspektusokkal foglalkozik, amelyek kvantitatíve kezelhetők. Amilyen mértékben a *rendszerelemzés* egy bonyolult

[3] Beer, S.: Operational Research as Revelation, Operational Research Quarterly, Vol. 21. No. 1. March, 1970.

operációs szituációt jól kezelhető komponensekre[4] tud bontani, annyira lehetnek sikeresek eszközeink és eljárásaink. E szubproblémák közül némely megoldható és megoldásuk valóban segíti a vezetést. Az operációkutatónak épp ezt kell felismernie. A döntést-hozónak sok olyan dolgot is figyelembe kell vennie, amely nem kvanifikálható, de egy alapos rendszerelemzés után sok operációkutatási szubproblémát lehet megfogalmazni. Ez a munka legjobban egy olyan „interdiszcipliáris team"-ben végezhető el, amelyben a szakterület ismerői és az operációkutatók együtt vesznek részt. Látnunk kell azonban, hogy egyes rendszerek, különösen társadalmi rendszerek, olyan bonyolultak hogy, ha szerkezetük teljes feltárásához ragaszkodnánk, akkor sohasem kezdhetnénk hozzá egy részterületük operációkutatási tanulmányozásához. Ennek kockázatát pedig nem mindig lehet vállalni.

Caywood arról is szólt, hogy az USA-ban az operációkutatást egyre inkább egyetemi szakterületnek tekintik és célszerűnek tartják azt — legalábbis átmenetileg — a műszaki szakmához kapcsolni. Több egyetemen már régebben helyet is kapott az operációkutatás az üzemmérnöki vagy gazdasági mérnöki képzésben.[5]

4. A hazai kép

A fentiekről elgondolkozva megállapíthatjuk, hogy nálunk az operációkutatás nem a klasszikus, hanem a technikai irányzattal kezdődött. Jóllehet a klasszikus operációkutatás megelőzte például a lineáris programozást, mégis mi Dantzig és Kantorovics nevét hamarább ismertük meg a klasszikus operációkutatás legjelesebb képviselőinél. Tekintve, hogy az operációkutatás minden definíció szerint tudományos módszerek alkalmazása is, nem származhatott különösebb baj abból, hogy — történelmi adottságként — mi először a módszerekkel igyekeztünk felvértezni magunkat.

Az operációkutatás jellegzetes közelítésmódja, Beer szerint is, a rendszer *tudományos modelljének* megalkotása olyan *tényezők mérése* útján, amelyekkel az alternatív döntések, stratégiák és irányítások eredményei előre számba vehetők és összehasonlíthatók. A bevezető fejezetben említett definíció szerint nálunk számos MTA, OMFB és egyéb bizottsági munkát operációkutatásnak lehetne tekinteni anélkül, hogy a bizottságok tagjai közül erre valaki is gondolna. Pedig sok esetben e bizottságok feladatuk szerint valóban operációk kutatásával foglalkoznak és céljuk is ugyanaz, mint az operációkutatásnak, nevezetesen a rendszer vezetésének politikáját és cselekvéseit tudományosan elemezni és meghatározásához segítséget adni. Ezért a modellezés[6] és a mérés hangsúlyozása nélkül az operációkutatás definíciójában a „tudomány módszereinek alkalmazása" túl általánosnak tűnik és könnyen misztifikálható. Ugyanakkor nem feledkezhetünk meg az intuíció nagy jelentőségéről.

Az operációkutatás több komponensből (emberekből, gépekből, anyagokból és pénzből) összefonódott, *integrált rendszerek* irányításának, vezetésének komplex problémáival foglalkozik. A szó puszta értelme is azt fejezi ki, hogy az operációkutató feladata a *szervezett rendszerek operációinak kutatása*, elemzése. Tehát a probléma-orientáció, vagyis a *rendszerszemlélet* a gyakorlati operációkutatás alapfeltétele. A szóbanforgó rendszereknek igen sok közös tulajdonságuk mellett számos sajátosságuk is van. Így ezen az alapon, vagyis a szervezett rendszerek sajátosan eltérő szerkezete és célja szerint megindul az operációkutatás, illetve a tudományos szakterületek további differenciálódása, amit már több szakosodott folyóirat is jelez. Azonban a rendszerelemzés, illetve a rendszerelmélet fejlődésével és a gyakorlatban alkalmazható algoritmusok, heurisztikus eljárások körének bővülésével és a számítástechnikai lehetőségek javulásával a közös terület az osztódások ellenére is növekszik. Az operációkutatás ma már valóban témája az ágazati konferenciáknak, a matematikai és az informatikai szimpóziumoknak, de az operációkutatók táborát jelenleg ez láthatóan nem gyengíti, hanem éppen erősíti.

A magyar operációkutatók mai problémái lényegében már teljesen hasonlóak a külföldi operációkutatók és társaságaik problémáihoz és számos eredményünket sokfelé ismerik. Igaz, hogy a nyugati országok operációkutatóinak tényleges eredményeit titkosságuk miatt a szakmabeliek ritkán, de legalábbis csak nagy késéssel ismerhetik meg és ezért szakmai viták sem nagyon alakulhatnak ki, de sajnos, már terjed ez a divat nálunk is.

[4] Célszerű ezzel kapcsolatban a számítástechnika korlátaira, a könyvtári számítógépi programok figyelembe vételére is emlékeztetni.

[5] Caywood, T. E.: How Can We Improve Operations Research? Operations Research, Vol. 18, No. 4 (July-August 1970).

[6] Azonban itt nem csak matematikai, hanem logikai, analóg és számítógépi szimulációs modellekre is gondolhatunk.

A rendszerelemzésre, rendszertechnikára támaszkodó, abban gyökerező operációkutatás és az operációkutatás matematikájának megkülönböztetése nekünk különös gondot nem okoz, hiszen az ennek megfelelő társadalmi szervezeti keretek nálunk eddig is megvoltak. Ugyanez vonatkozik az ágazati differenciálódásra is. A fontos, hogy e területek között jó kommunikációs csatornáink legyenek és azok karbantartásáról ne feledkezzünk meg. Minekutána a matematikusok és a közgazdászok operációkutatási képzése terén nincs szégyellni valónk, jelenleg leginkább a mérnök-képzésünk ilyen hiányosságaira kell figyelmeztetnünk.

Dr. Jándy Géza

Nemzetközi Matemetikai Programozási Társaság alakul

1970. szeptemberében ülésezett a VII. Nemzetközi Matematikai Programozási Szim. Hágában. Ez alkalommal néhány neves matematikus — közöttük *G. B. Dantzig, A. Orden, P. Wolfe, A. W. Tucker, E. M. L. Beale, J. Abadie, G. Zoutendijk* és mások javasolták: alakuljon meg egy tudományos társaság a matematikai programozás területén működő szakemberek nemzetközi méretű társadalmi tömörítésére.

Javasolták, hogy az új társaság vállalja magára egy folyóirat kiadásának a gondját, azzal a célkitűzéssel, hogy magas színvonalú tudományos fórumot biztosít a matematikai programozás problémaköreivel összefüggő új elméleti és alkalmazási eredményeknek. Az új társaság egyben gazdája lehetne időről időre megrendezésre kerülő széleskörű nemzetközi tudományos tanácskozásoknak is.

A szimpozium résztvevőinek többsége, (a magyar szakemberek is) egyetértett a társaság megszervezésének gondolatával és örömmel üdvözölte az új folyóirat tervét.

Az elmúlt félévben jelentősen előre haladt a fenti tervek megvalósítása. Megalakult a Társaság Szervező Bizottsága, amely megalakulásáig és az első választásokig irányítja a Társaság létrehozásával kapcsolatos munkákat. A Szervező Bizottság elnöke *A. Orden*. A Társaság folyóirata *Mathematical Programming* címmel ez év első felében jelenik meg. A folyóiratot gondozó bizottság elnöke *P. Wolfe*. A folyóiratot a North-Holland kiadóvállalat fogja kiadni; főszerkesztő *M. L. Balinski*. A főszerkesztő irányítása alatt széleskörű nemzetközi szerkesztőbizottság működik majd.

A Társaság alapszabályainak kidolgozása most van folyamatban. Valószínű, hogy a Társaság tagjai tagdíjuk fejében a folyóiratot díjmentesen fogják megkapni.

Lapunk hasábjain rendszeresen tájékoztatjuk majd olvasóinkat a Nemzetközi Matematikai Programozási Társaság működéséről. *B. P*

Az Ökonometriai Társaság Világkongresszusa*

Az Ökonometriai Társaság 1970. szeptember 8—14-én tartotta az angliai Cambridgeben *Második Világkongresszusát*. Az első világkongresszus öt évvel ezelőtt volt Rómában, a többi években viszont az Ökonometriai Társaság általában három összejövetelt tart: egyet Európában, egyet Észak-Amerikában és egyet a Távol-Keleten. Az ez évi kongresszus ennek megfelelően kiemelkedően fontos volt, és lehetővé tette a tudományág helyzetének, fejlődésének és perspektívájának *teljes áttekintését*.

Az általános áttekintés lehetőségét tovább fokozta, hogy a Világkongresszust követő napokban tartották meg a hágai matematikai programozási összejövetelt. Ez a kongresszusok hatékonyságát két szempontból is fokozta. Egyrészt sokan vettek részt mindkettőn, másrészt viszont a programbizottságoknak módjuk volt arra, hogy szelektálják és átcsoportosítsák a beérkező előadásokat. Ennek folytán — a korábbi évek gyakorlatával ellentétben — matematikai programozási, illetve *operációkutatási jellegű előadások egyáltalán nem szerepeltek* a cambridgei kongresszus programján.

Érdemes röviden áttekinteni a *résztvevők és az előadások statisztikáját* is. Itt csak a programra vonatkozó előzetes kiadványra és a résztvevők ugyancsak előzetesen kiadott névsorára támaszkodhatunk, az utólagos módosítások — törlések és kiegészítések áttekinthetetlenek.

A Kongresszuson *résztvevők száma* a lista szerint 758, azonban sokan voltak, akik jelentkeztek, de nem mentek el, illetve akik résztvettek, de a listán nem szerepeltek. Így kb. *1000—1200* résztvevővel lehet számolni. Országonkénti megoszlásukat sajnos nem lehet megállapítani.

A program szerint *86 szekcióülést* tartottak (az utólagos összevonások miatt valójában valamivel kevesebbet). A programban szereplő *dolgozatok száma 304*: itt a törlések száma feltétlenül meghaladta a kiegészítésekét: összesen kb. 270—280 előadás hangzott el. Egy dolgozatot sokszor több szerző készített; így a *szerzők száma mintegy 400* volt. Ezek hozzávetőleges országonkénti megoszlása:

USA	206
Egyesült Királyság	36
Japán	28
Hollandia	18
Kanada	16
NSzK	14
Izrael	12
Belgium	11
Norvégia	9
Magyarország	9
India	7
Franciaország	7
Egyéb	27
Összesen	**400**

Az előadásokat az itt következő ismertetés áttekintésének megkönnyítésére a következő *öt témacsoportba* soroltuk:

(a) elméleti jellegű, matematikai-közgazdaságtani problémák:	78 előadás;
(b) gazdaságpolitikai, makroökonómiai modellek:	34 előadás;
(c) empirikus, gazdaságpolitikai célú részmodellek:	48 előadás;
(d) módszertani kérdések:	62 előadás;
(e) speciális problémák ökonometriai tárgyalása:	82 előadás;
Összesen	**304 előadás.**

Az adatok csak tájékoztató jellegűek.

Az előadásoknak ez a nagy száma és nagyon sok témakörre való megoszlása a tudományág helyzetére vonatkozó *általános értékelés*nek is a legfontosabb kiindulópontja. Egyrészt ma már szinte senkinek, valószínűleg még az ökonometria legkiválóbb művelőinek sincs áttekintésük valamennyi témáról, sőt a témák nagyobb hányadáról sem. A *kutatások specializálódása* tovább folyik, és egyértelműen meglátszott, hogy szakmai érdeklődés szempontjából a konferencia néhány főből álló kis csoportokra esett széjjel. Másrészt — amennyiben ezt az általános tájékozódás fentemlített nehézségei miatt egyáltalán meg lehet ítélni — a konferencia *nem hozott* nagyon *lényeges újításokat*. A fejlődés a már korábbiakban meghatározott úton, apró lépésekben halad, nincsenek drámai jellegű változások. Még az a néhány vita is, amelyet a kongresszus egész közönségének részvételével, tehát nem párhuzamos üléseken tartottak, csupán a már közismert — részben erősen ellentétes — álláspontok megismétlését hozta, de semmiképpen sem a problémák megoldását.

A továbbiakban az előbb megadott témacsoportok szerinti bontásban rövid áttekintést próbálunk adni a legfontosabb előadásokról és — amennyire ezt egy ilyen szétágazó tematika mellett megtehetjük — ezek legfontosabbnak tűnő problémáiról és eredményeiről.

(1) A *matematikai-közgazdaságtani jellegű elméleti előadások* a közgazdaságtudomány legalapvetőbb elméleti problémáival foglalkoztak. Ezek szigorú értelemben véve voltaképpen nem is tartoznak az ökonometria keretébe, hiszen az itt tárgyalt modellek statisztikai alapokon való empirikus verifikálása általában nem lehetséges.

Az *árrendszerrel*, az *allokációs mechanizmus* és a *jóléti közgazdaságtan* elvi kérdéseivel foglalkozó előadások új elméleti bizonyítékokat próbáltak adni arra, hogy a tényleges árrendszer valószínűleg közel áll az optimálishoz, továbbá hogy az optimálistól eltérő helyzetek valószínűleg az optimális helyzet felé konvergálnak. Az elmaradt országokkal foglalkozó empirikus vizsgálatok ugyanakkor arra mutattak rá, hogy ezeknek az országoknak a körülményei között az elméleti modellekben feltételezett, nyereségmaximáláson alapuló allokációs mechanizmus a valóságban nem működik. Vizsgálták a monopolisztikus viszonyoknak és az egyes piaci csoportok összejátszásának az allokációs rendszerre gyakorolt hatását, és az árrendszerben okozott torzítások valószínű mértékét is. Több előadás is foglalkozott azzal a fontosnak látszó kérdéssel, hogy a jelenlegi tőkés viszonyok mellett a tőkepiac egyensúlya mennyiben biztosítja az erőforrások optimális elosztását.

Ehhez a problémakörhöz szorosan kapcsolódnak az *általános egyensúlyi elmélet* kérdései. Itt is elsősorban a monopolisztikus viszonyoknak az általános egyensúly kialakulására való hatását vizsgálták, vagyis lényegében azt a kérdést elemezték, hogy tényleges viszonyaink között mennyire számíthatunk az optimális helyzet megközelítésére.

Az itt tárgyalt elméleti problémákban fontos szerepe van a *bizonytalanság figyelembevételé*nek is. Ilyen körülmények között — vagyis voltaképpen a valóságos körülmények között — még az optimális politika puszta létezése is kétséges. Ennek folytán elméleti szempontból van bizonyos jelentősége annak az eredménynek, hogy bizonyos feltevések bevezetése esetén az optimális politika létezése bizonyítható, és számszerűsítése elvben megoldható.

Az elméleti matematikai-közgazdasági modellek másik legfontosabb problémaköre az utóbbi évtizedben az *optimális növekedés* és az *optimális beruházási hányad* kérdése volt, vagyis az a probléma, hogy a nemzeti jövedelem fogyasztás és beruházás közötti megoszlásának módosításával hogyan lehet valamely adott fix vagy végtelen időhorizonton belül maximálni az elérhető jólétet. Az előadások itt az erősen leegyszerűsített körülményekre vonatkozó *megoldás általánosításá*val foglalkoznak. Figyelembe veszik a tőkeállomány évjáratok szerinti megoszlását, a tőkeállomány élettartamát, a végső felhasználás ágazati struktúráját és a probléma sztochasztikus jellegét. Figyelemreméltó, hogy *játékelméleti* megoldást próbálnak adni a különböző generációk érdekellentéteinek problémájára; a korábbi modellek ezt a kérdést többé-kevésbé mesterkélt feltevésekkel kizárták az elemzésből. Voltaképpen ugyanezzel a kérdéssel foglalkoznak azok a modellek, amelyek teljesen elméleti jelleggel vizsgálják a *különböző jövőbeni időpontokban jelentkező többletfogyasztások* értékelésének és *összehasonlításá*nak kérdését.

(2) A *gazdaságpolitikai célú többszektoros makroökonómiai modellek* között különös szerep jutott a *fejlődő országok fejlesztési programjai*nak meghatározásával kapcsolatos számításoknak. Erre a célra általában viszonylag *kisméretű lineáris, nem lineáris* vagy *dinamikus programozási modelleket* használtak fel. A *szektorszám* a legtöbb esetben *alig 15*. Olyan eredményekre jutottak, hogy a teljes munkaerő foglalkoztatása általában csökkenti az elérhető növekedési ütemet, ennek értelmében határozottan megkülönböztethető a teljes foglalkoztatásra illetve a gyors növekedésre vezető gazdaságpolitika, sőt a növekedés

és a foglalkoztatás közötti transzformációs görbe is felírható. Ugyanakkor a fejlődő országok legfontosabb szűk keresztmetszetének továbbra is a speciális képzettségű és vezető munkaerő hiánya látszik.

Módszertani szempontból érdemes ezekkel a modellekkel kapcsolatban kiemelni, hogy több esetben törekszenek a *növekvő hozadék*ok figyelembevételére. A problémát részben közelítő eljárással, részben pedig dinamikus programozással próbálják megoldani. Figyelemreméltó a *nem lineáris programozás árnyékárai*nak az erőforrások értékelésére való felhasználása is. Egyes modellekben a gazdasági számvitelben meg nem mutatkozó külső költségek és megtakarítások (nem gazdasági jellegű károk és eredmények) figyelembevételére is törekszenek, ami országos szintű távlati problémák megoldásával kapcsolatban nagyon fontos.

Ugyancsak figyelemreméltók a *fejlődő országok* tervezésével kapcsolatos *ágazati szintű és regionális jellegű tervezési modellek*. Ezek elsősorban szállítási-telepítési algoritmusokon alapulnak, és egyes ágazatok optimális struktúráját próbálják felírni részben operációkutatási módszerek felhasználásával. Ezekkel a modellekkel kapcsolatban is van példa az árnyékárakon alapuló értékelési rendszer bevezetésére.

Ezekkel a modellekkel ellentétben csak egyetlen előadás foglalkozott *sokszektoros konzisztenciamodellek*nek az elmaradott országok fejlesztési programjaival kapcsolatos felhasználásával, és egyetlen előadás sem tárgyalta *nagyméretű lineáris programozási modellek* ilyen célú alkalmazását. Ilyen modelleket csupán a *szocialista országok* kutatói ismertették. Úgy látszik, hogy az input-output számítások iránti érdeklődés is elsősorban a szocialista országokba tevődött át, habár az ezzel a kérdéssel foglalkozó előadóknak csak közel fele tartozott a szocialista országokhoz.

Az *input-output* technikával foglalkozó előadások egy része a technológiai koefficiens mátrixok *előrebecslésé*vel, továbbá az input-output technika felhasználásával végzett strukturális előrebecslések hatékonyságának elemzésével foglalkozott. A tapasztalatok nem mindig voltak a legkedvezőbbek. Más előadások a *hibaszámítások*kal foglalkoztak Monte Carlo módszer felhasználásával, volt példa az input-output táblák *árelemzés*re való felhasználására, és egy nagyon érdekes előadás az input-output technika felhasználásával próbálta felmérni a Kínai Népköztársaság gazdasági fejlődését.

A *fejlett tőkés országok*ban az érdeklődés elsősorban a *nagyméretű, negyedéves adatokon alapuló ökonometriai modellek* felé tolódott el. Az előadások elsősorban nem a modellek leírásával, hanem a modellek alapján végzett szimulációs vizsgálatokkal, valamint a *modellek hatékonyságá*val, tehát a számított eredményeknek a valósággal való egybevetésével foglalkoznak. A tapasztalatok nem teljesen egyértelműek. A holland modell alapján körülbelül két éves előrebecslést tartanak lehetségesnek, de rámutatnak arra, hogy már ilyen távon is feltétlenül figyelembe kell venni a hosszútávú hatásokat. Az eredmények egyértelműen a *változó áras tervezés* és előrebecslés szükségességére mutattak rá, ugyanis a mennyiségi és pénzügyi viszonyok aránya az árváltozások hatására már ilyen távon is nagyon nagy mértékben eltolódik. A kanadai tapasztalatok valamivel kedvezőbbek, és két évnél hosszabb előrebecslést is lehetségesnek tartanak. Az árváltozások figyelembevétele az ő tapasztalataik szerint is elkerülhetetlen. A különösképpen nagyméretű japán modell eredményeinek megbízhatóságáról viszonylag keveset lehetett megtudni, kitűnt azonban, hogy általában alábecsülte a fejlődést.

Ez volt a legfontosabb tapasztalata az *ökonometriai modellek hatékonyságá*nak értékelésével foglalkozó külön ülésnek is. A különböző amerikai modellek együttes értékelésével foglalkozó előadás kiemelte, hogy valamennyi modell extrapolációi az idő múltával egyre jobban eltolódnak a valóságtól, mégpedig mindig lefelé, vagyis *szisztematikusan alábecslik a jövőbeni fejlődést*, elsősorban a bruttó társadalmi termék növekedését. Nem kielégítő mértékű a konjunkturális fordulópontok előrebecslése sem, mert a fordulópontok egyharmadát a modellek nem jelezték. A modellek mérete és hatékonysága közötti összefüggés vizsgálata arra vezetett, hogy *a modellek méreteinek növelése*, bár előnyökkel is jár, a *hatékonyságot általában nem fokozza*. Kitűnt az is, hogy a jövőre vonatkozó *szakértői becsléseket is felhasználó* ex ante *számítások eredményesebbek*nek bizonyultak a csupán a modellek kipróbálását célzó és ezért teljesen mechanikus módon végzett ex post számításoknál.

Röviden meg kell még emlékezni a *fejlett tőkés országok*ban alkalmazott néhány más típusú *gazdaságpolitikai modell*ről is. Módszertani szempontból ezek vagy nagy modelleken alapuló szimulációs számításokon, vagy kisebb modelleken alapuló direkt, analitikus számításokon alapulnak. A távlati optimalitás problémáját általában nem vetik fel, hanem csak pontosan definiált céloknak, mint a stabilizációnak vagy a munkabér–ár arányok fenntartásának eszközeit keresik. Ezekben a modellekben általában nagy szerep jut az árszámításoknak és az árak előrebecslésének. Figyelem reméltó, hogy az *árakat* általában *költségoldalról* és nem a keresleti és kínálati viszonyok oldaláról próbálják meghatározni.

Megkülönböztetik a világpiaci versenynek kitett és a kizárólag a hazai viszonyok alapján fejlődő ágazatokat. Figyelemre méltó, hogy egyes esetekben az *oligopolisztikus* ipari szervezetnek az *árviszonyok*ra gyakorolt hatását is megpróbálják empirikus módon figyelembe venni, ami pedig nehéz — habár kétségtelenül nagyon fontos — feladat.

Az eddigiekben olyan modellekről beszéltünk, melyeket ugyan fejlett tőkés viszonyok között alkalmaznak, tapasztalataik azonban hasznosíthatók a mi viszonyaink között is. Most egészen röviden, csupán a teljesség kedvéért szeretnénk megemlékezni azokról a *kifejezetten pénzügyi jellegű modellek*ről, melyek iránt az előadások számát tekintve talán nagyobb volt az érdeklődés, mint az egyéb típusú modellek iránt együttvéve, ezek azonban a mienktől teljesen eltérő institucionális viszonyokból indulnak ki. E modellek a pénzügyi és a tőkepiac matematikai elemzésével foglalkoznak: a pénzforgalom és a kötvénypiac alakulásával, a vállalatok optimális osztalékpolitikájának meghatározásával, az értékpapír tárca optimális összeállításával (az adózási tételek figyelembevételével és anélkül), a fiskális és monetáris politika viszonylagos hatékonyságának számszerű elemzésével, végül pedig az egész pénzügyi szektor működését leíró ökonometriai modellek felírásával, ezek stabilitásának vizsgálatával, valamint a központi pénzügyi politika optimalitási kritériumaival. Egyes történelmi jellegű kutatások számszerűen elemzik a pénz piaci helyzet és a gazdasági fejlődési eredmények közötti kapcsolatot.

(3) Az egyes *részterületekkel foglalkozó, gazdaságpolitikai célú, empirikus* elemzést is lehetővé tevő *modellek* közé a termelési függvényeket, a keresletelemzést, valamint a nemzetközi kereskedelem és az „emberi tőke" problémájával foglalkozó kutatásokat soroljuk.

A *termelési függvények*kel foglalkozó előadások jó része továbbra is a *CES* termelési *függvények*kel foglalkozik, az empirikus eredmények azonban nem erősítik meg ennek a függvénynek a feltevéseit. Úgy látszik, hogy azok az empirikus adatok, melynek alapján ezt a függvényt felállították, más modellel jobban magyarázhatók, és hogy a hosszútávú időbeli fejlődés kérdése szerencsésebben elemezhető a differenciálegyenletek módszerével. Az ezzel foglalkozó kutatások általánosan elfogadták azt a javaslatot, hogy meg kell különböztetni az *ex ante* és *ex post*, illetve a *rövid- és hosszútávú elemzést*. A technikai változás jellegéről sikerült kimutatni, hogy az egyrészt általában anyagmegtakarító és nettó termelés kiterjesztő jellegű (nálunk ez az összefüggés nem mutatható ki), a nettó termelési értéken belül pedig élőmunka megtakarító jellegű.

A nagy makroökonómiai aggregátumok elemzésén alapuló termelési függvény számítások nem teljes mértékben kielégítő eredményei miatt nagy szerep jutott az *üzemi vagy vállalati, technológiai jellegű adatokon alapuló mikroökonómiai típusú termelési függvények*nek. Előadások hangzottak el a norvég iparvállalatok és bányák, az izraeli gyémántipar és a kanadai faipar termelési függvényeiről. Egy előadó termelési függvények felhasználásával próbálta utólag számszerűen igazolni Adam Smith híres példáját a gombostű gyártásról. Ismét más előadások az *állóeszközök kormegoszlását*, a termelési eredmény *több termék*ből való összetételét, valamint a *munkaerőállomány képzettségét* és a *növekvő vagy csökkenő hozadékot* próbálták figyelembe venni, illetve a *vállalatok optimális nagyságá*nak meghatározására törekedtek. Ezek a számítások azonban módszertani szempontból általában nem mennek túl a klasszikusnak tekinthető Cobb-Douglas illetve CES függvényeken, ugyanakkor azonban sok esetben részletesen tárgyalják az *aggregáció*val kapcsolatos problémákat, és a *dualitás* kérdését.

A *keresletelemzés* terén a kereslet egyedi összetevőinek vizsgálata helyébe a *komplex elemzés* igénye lépett. A Stone-féle megközelítést követve szinte valamennyi előadó azzal foglalkozott, hogy hogyan lehet előrebecsülni a *teljes kereslet összetételé*nek várható jövőbeni alakulását, és biztosítani az egyes cikkekre és cikkcsoportokra vonatkozó *előrebecslések konzisztenciáját*. Rámutatnak arra, hogy ez a probléma nem oldható meg a paraméterek stabilitásának feltételezésével, mert bizonyítható, hogy bizonyos pontokon a paraméterek eltolódnak illetve módosulnak, amit — ha reális elemzésre törekszünk — figyelembe kell venni. Bizonyítható az is, hogy a *kulturális fejlődés módosítja és eltolja az Engel-görbéket* és még hangsúlyozottabbá teszi a keresletnek a nagy jövedelmi elaszticitású cikkek felé való átcsoportosulását. Más előadások a háztartások összetételének, a családnagyságnak, az áraknak és jövedelmeknek a kereslet összetételére gyakorolt hatását elemzik, illetve olyan indifferencia felületeket írnak fel, melyek lehetővé teszik a különböző termékösszetételre vezető gazdaságpolitikai koncepciók összehasonlítását. Több előadás foglalkozik a *tartós fogyasztási cikkek* iránti kereslet alakulásával és az ezt befolyásoló tényezőkkel.

A *nemzetközi kereskedelem*mel kapcsolatos előadásoknak a számszerűsíthető, empirikus modellek közé való felvétele nem teljes mértékben indokolt, ugyanis számos modell empirikus verifikálása lehetetlen, és ezek tulajdonképpen az elméleti jellegű matematikai-közgazdaságtani előadások körébe tartoznak. Kifejezetten az erőforrások optimális elosztásához és az egyensúlyi elmélethez kapcsolódik a *vámok optimálásá*nak, a hatékony vámvédelemnek és az importtermékek belföldi termékekkel való optimális helyettesítésének, valamint az optimális nemzetközi tőkeforgalomnak a kérdése. Több empirikus modell foglalkozik ugyanakkor a nemzetközi kereskedelmi kapcsolatok számszerűsítésével és rámutatnak például arra, hogy még a belföldi és világpiaci áralakulás párhuzamossága esetén is számolni kell azzal, hogy egyes országok nemzetközi kereskedelmi és fizetési pozíciója romlik. Figyelemreméltóak azok a kísérletek, melyek az *optimálási eljárást egyidejűleg több országra* próbálják kiterjeszteni, illetve amelyek a külkereskedelemnek a nemzeti jövedelemhez és a növekedési folyamathoz való hozzájárulását próbálják számszerűen elemezni.

A *gazdasági fejlődés emberi oldalá*val viszonylag kevés előadás foglalkozott, ezek azonban határozottan előrevitték a kérdés számszerűsítését. Egyrészt megpróbálták különválasztani a képességek és a képzettség különbségének a kereseti különbségekre gyakorolt hatását, másrészt elemezték a speciális ismeretek elavulásának következményeit. Annak a felismerése alapján, hogy az ismeretek gyarapodása nagyobb mértékben növeli a nemzeti jövedelmet, mint a munka technikai felszereltségének növekedése, optimálni próbálták a nemzeti jövedelem fogyasztásra, termelő beruházásra, valamint kulturális és szociális jellegű beruházásra való felosztását. A probléma számszerű megoldására, sajnos, még várni kell.

(4) A *matematikai statisztikai és ökonometriai jellegű módszerek*kel kapcsolatban meg kell ismételnünk azt, amit már a bevezetőben mondottunk; ezek az előadások valószínűleg sehol sem számoltak be döntő, igazán nagy jelentőségű újításról, hanem csak részletekben fejlesztették tovább a módszereket. Ennek ellenére sikerült sok „fehér foltot" tisztázni. A módszerek ismertetése mellett mindig szerepeltek nem fiktív, gyakorlati példák is, úgyhogy a módszertani előadásokat általánosságban a gyakorlati felhasználhatóság igénye jellemezte.

Sok előadás foglalkozott az *idősor elemzés*sel, illetve konkrétabban az *időbeli aggregáció* és a *becslés pontosságá*nak kérdésével. A kiinduló probléma szinte mindig az, hogy a gazdasági idősorok általában rövidek ahhoz, hogy különféle becslések számára elegendő szabadságfokkal bírjanak. Ezért vizsgálják a részletesebb havi, negyedéves adatok felhasználásának lehetőségét. Ezek a részletesebb adatok viszont lényegesen nagyobb autokorrelációt tartalmaznak, így kerül előtérbe a *von Neumann statisztika* és a *Durbin-Watson teszt* az autokorreláció elemzésére. A negyedéves adatok felhasználása esetén negyedrendű autoregresszív sémát használnak, az autokorreláció elemzésére a Durbin-Watson teszt módosított formáját használják. Az aggregáció problémájához tartozik a térbeli aggregáció, amelyre vonatkozó vizsgálatok alapkérdése az volt, hogy vajon az erős keresztkorreláció hatásosabbá teszi-e egyes változók együttes becslését. *Monte-Carlo módszer*rel gyakorlati példákon bizonyították az előadók az együttes becslés hatékonyabb voltát.

Nagy teret kapott a *késleltetett változós modellek* elemzése. Az előadók foglalkoztak véges és végtelen eloszlású *lag*gel bíró modellekkel. Az *elosztott késések*et geometriai, módosított geometriai, Pascal eloszlásokkal elemezték. Egyre gyakrabban találkoztunk elosztott késésű modellek bayesi elemzésével. Szorosan kapcsolódik a késleltetett változós modellekhez a *szimultán egyenletek* problémája. Az előadások közül több foglalkozott többváltozós lineáris regressziós egyenletek szimultán egyenletekként való kezelésével. Vizsgálják a többváltozós regressziós egyenletek becslését lineáris és nem lineáris korlátok mellett, továbbá a szimultán egyenletek sajátosságait, valamint a *bayesi* és *nem bayesi elemzés* összehasonlítását. Ugyanakkor viszonylag keveset foglalkoztak a *spektrál elemzés* módszereivel és a többváltozás eljárásokkal: a faktor analízissel és a kanonikus analízissel. A paraméterbecsléseket a kétfokozatú, háromfokozatú, vagy általánosított legkisebb négyzetek és a maximum likelihood módszer változataival végezték.

A módszertani előadások körébe sorolható az *értékpapír tárca összeállítás* témakörbe tartozó több előadás is. Ezek foglalkoztak a portfolio választás módszerének általánosításával több periódusú esetre, csonkított maximumkritérium mellett stb. A gyakorlati alkalmazások a módszer jellegének megfelelően főként a beruházási politika és a fogyasztói megtakarítás — vásárlás témakörben mozognak.

Sok előadás hangzott el a *játékelmélet* köréből. Nagy részük meglehetősen elvont, elméleti jellegű volt; viszonylag ritka volt a konkrét, gyakorlati alkalmazás. Érdekes volt viszont a játékelmélet szervezési célokra való felhasználásáról szóló előadás, amely a szervezési kategóriákat játékelméleti alapokra helyezte, játékelméleti reprezentációt adott olyan fogalmaknak, mint önállóság, utasítás, felelősség, ellenőrzés, és így végső soron a szervezeti sémát játékelméleti modellel helyettesítette.

A fenti fő témakörökön kívül olyan előadások is elhangzottak, amelyek módszertanilag említést érdemelnek, bár nem sorolhatók egyik témakörbe sem. Hallottunk az *ökonometriai modellek kibernetikai interpretációjáról*, a specifikációs választás módszereiről, egyes kifejezetten *számítástechnikai módszerekről* és külön szekcióülés volt *nem lineáris módszerek* összefoglaló cím alatt. Egyes konkrét modellek megoldásával kapcsolatban természetesen sok programozási kérdés is felmerült, ezek részletes módszertani ismertetése azonban elmaradt, mert azt nem tekintették a kongresszus témakörébe tartozónak.

(5) Befejezésül megemlítjük a *speciális témakörű előadások* egy részét, melyek az ökonometriai módszerek használatának sokoldalúságát illusztrálják.

Külön ülés foglalkozott a *gazdaságtörténeti kérdésekkel*. Az előadások azt a kérdést vizsgálták, hogy az Egyesült Államok protekciós jellegű vámpolitikája a déli vagy északi mezőgazdasági érdeket sértette jobban; milyen hatása volt az Egyesült Államokban a megművelt földterület gyors kiterjesztésének az iparfejlesztésre; mi volt a vasutak szerepe az olasz gazdasági növekedés előmozdításában, és végül a vasúti személyszállítás bevezetésének mekkora volt a jóléti hatása és mekkora munkaerőt és egyéb erőforrás mennyiséget szabadított fel más célokra.

Ugyancsak külön ülés foglalkozott a *népesedés* és a *munkaerő*, illetve az *egészségügy* kérdésével. Az első esetben főként azok a keresztmetszeti számítások látszanak fontosaknak, amelyek a *termelékenységet befolyásoló különböző tényezők* hatását próbálják felmérni. Sikerült kimutatni, hogy bizonyos körülmények között a magasabb képzettség nem csökkenti, a magasabb jövedelem viszont általában növeli a termelékenységet. Az ide tartozó vizsgálatok jó része a *belső vándorlással* foglalkozik, más részük történeti jellegű és az 1250–1750 közötti angol népesedés modelljét akarja felírni. Tisztán az érdekesség kedvéért meg kell említeni azt a vizsgálatot, amely az Egyesült Államok 19. századi adatai alapján a rabszolgamunka és a farmermunka hatékonyságát próbálja összehasonlítani. Az egészségügyi jellegű vizsgálatok az egészségüggyel kapcsolatos költségek, valamint az egészségügyi munkaerő alakulását vizsgálják.

Nagy tér jutott a *városi és regionális közgazdasági elemzésnek*. Ezek a különböző régiók közti vándorlással és az ezeknek a vizsgálatoknak a szempontjából különösképpen fontos külső költségekkel és megtakarításokkal foglalkoztak. Külön ülés foglalkozott a *népgazdasági számvitellel*; itt hazai érdeklődésre elsősorban a *számológépi információrendszer* megszervezésével foglalkozó előadás tarthat számot. Volt példa az ökonometriai módszerek *szociológiai* alkalmazására is: a mezőgazdasági népesség magatartásmódjának alakulásával, és ennek az optimális beruházási politikára valamint az új technika elterjedésének sebességére gyakorolt hatásaival foglalkoztak. Végül két ülés is foglalkozott az *információelmélettel*.

Az Ökonometriai Társaság 1971. évi európai ülését Spanyolországban, Barcelonában, *1972. évi európai ülését* pedig *Budapesten* fogja tartani, mindkettőt szeptemberben. A nagyobb jelentőségű kongresszusok utáni évben általában kevésbé látogatott, kisebb konferenciák szoktak következni, míg az ezt követők általában ismét nagyobb jelentőségűek. A budapesti konferencia időpontja ebből a szempontból is szerencsés, emellett itt a szocialista országok nagyobb részvételére is lehet számítani. Ez a konferencia már csak ezért is népesebb és érdekesebb lehet az átlagosnál. Szerencsés lenne ez alkalommal a Magyarországon folyó matematikai-közgazdasági jellegű kutatások minél teljesebb skáláját bemutatni, hogy így össze tudjuk hasonlítani saját tapasztalatainkat a külföldiekkel.

SZAKOLCZAI GYÖRGY—HUNYADI LÁSZLÓ

A debreceni operációkutatási konferencia

1970. október 5–9-ig Debrecenben, a Kossuth Lajos Tudományegyetemen operációkutatási konferenciát tartott a Bolyai János Matematikai Társulat és a Neumann János Számítógéptudományi Társaság.

A konferenciára 310-en jelentkeztek és 280-an vettek részt rajta, 51 előadás hangzott el. A résztvevők magas száma is azt tanúsítja, hogy az operációkutatási módszerek iránti érdeklődés nemhogy nem lankad, ellenkezőleg e módszerek kutatása és alkalmazása virágkorát éri. A konferencián megjelentek zöme a fiatal huszonévesek soraiból került ki; azoknak, akik évtizedek óta fáradoznak a matematikai módszereknek a gazdasági élet problémáira történő alkalmazása elterjesztésén, ez külön nagy örömére szolgált. E fiatal szakemberek az élet legkülönbözőbb területeiről jöttek, budapesti és vidéki vállalatoktól, ipari és akadémiai kutatóintézetekből, minisztériumokból, egyetemekről, főiskolákról és más intézményektől. A szervezőbizottság külön gondot fordított arra, hogy a vidéki vállalatokhoz került fiatal matematikusokat és matematikus-közgazdászokat a konferenciáról tudósítsa és arra meghívja.

A konferencia iránt megnyilvánuló nagy érdeklődés is azt mutatja, hogy a gazdaságirányítás új rendszerében a vállalatok zöme igényli olyan új módszerek megismerését, alkalmazását, amelyek az eredményesebb gazdálkodáshoz, nagyobb vállalati eredmény eléréséhez hozzásegíti őket.

Az operációkutatási módszerek alkalmazásának azonban — sok esetben — előfeltétele egy olyan információrendszer kidolgozása, amely gyorsan és pontosan szállítja azokat az alapadatokat, információkat, amelyekre az operációkutatási modell épül. Éppen ezért az operációkutatással foglalkozó szakemberek örömmel fogadják a rendszerelemzés, a rendszerelmélet művelőinek törekvését, hogy a gazdasági rendszerek információbázisát tudományos kategóriák, módszerek és elektronikus gépek segítségével megszervezzék. Az operációkutatás hazai vezető szakemberei soha se zárkóztak el más tudományok művelőitől, annál is kevésbé, hisz az operációkutatás olyan komplex tudomány, amelynek eredményes műveléséhez a matematikus, a közgazdász, a mérnök, a számítástechnikus és a rendszertechnikus szoros és egymással egyenrangú tevékenységére van szükség.

Az elhangzott előadások zöme vállalati gazdálkodási problémák megoldására alkalmas módszerekkel, más részük makroökonómiai problémákkal foglalkozott. Mind a makro-, mind a mikroökonómiai vizsgálatok szakemberei érdeklődéssel hallgatták azokat az előadásokat, amelyek az operációkutatás generális nagy módszereiben elért újabb matematikai eredményekkel foglalkoztak. Ezek közül is kiemelkedett a sztochasztikus programozás legújabb eredményeiről szóló előadás.

Az előadások nagy részére jellemző volt, hogy előadóik a matematikai algoritmusoknak elektronikus számítógépre történő adaptálásáról és a tényleges futtatással kapcsolatos problémákról is beszámoltak. Az operációkutatási módszerek jelentős és hatékony alkalmazása nem is képzelhető el elektronikus számológép nélkül. Éppen ezért nagy figyelem és elismerés kísérte annak a munkacsoportnak a beszámolóját, amely az Országos Tervhivatal IV. ötéves terve lineáris programozási modelljének megoldására speciális matematikai és számítástechnikai algoritmust dolgozott ki s a tényleges futtatások eredményeiről adott számot. E kedvező tapasztalatok, s az a tény, hogy — az Országos Vezetőképző Központ után — a Magyar Tudományos Akadémia és az Országos Tervhivatal is kap nagyteljesítményű elektronikus számológépet, eloszlatják azokat a — korábban valóban jogos — aggodalmakat, hogy ilyen nagyméretű lineáris programozási feladat egzakt megoldására hazánkban vagy egyáltalában nincs lehetőség, vagy ha igen, csak illuzórikusan sok gépóra alatt.

Makroökonómiai problémákat tárgyaltak pl. a felhalmozási hányad tervezésével, a sztochasztikus előrejelzéssel, az állóeszközök optimális növekedési ütemével, a gazdasági rendszerek vegetatív működésével foglalkozó előadások. A makro- és mikroökonómiai problémák merev szétválasztására természetesen nincs lehetőség, annál is kevésbé, mert pl. fenti problémák bármelyike érdekelheti egy nagyvállalat vezetőségét is, s megfordítva, a kézenfekvő analógiák lehetőséget nyújtanak arra, hogy egy-egy mikroökonómiai kérdéskör kiterjeszthető legyen makroökonómiai problémává.

Több előadás hangzott el készletgazdálkodási, termelésirányítási, szállítási, vállalati beruházási, hálózattervezési modellekről és feladatokról. Néhány kutatócsoport automatizált tervezési- és irányítási modellrendszerről adott számot. Jelentős problémacsoportját képezték az előadásoknak a különböző lineáris, egészértékű és nem lineáris, dinamikus, sztochasztikus matematikai programozási módszerek. A felsorolás korántsem teljes, mint arról azonnal meggyőződhet az, aki az előadások kivonatait tartalmazó füzetet végiglapozza.

Végül hadd térjek ki a konferencia értékelésére, részben személyes tapasztalataim, részben pedig azon reflexiók alapján, amelyeket az azóta eltelt idő alatt hallottam. A konferencián résztvevő fiatalok nagyon jól érezték magukat, örültek annak, hogy egy ilyen rendezvényre sor került, s azon résztvehettek. Megismerkedhettek személyesen az operációkutatás — náluk idősebb és tapasztaltabb — művelőivel, s megfordítva, a fiatalság lendülete és friss kritikája, nem utolsósorban próbálkozásaik és eredményeik a régi szakemberek számára is érdekes volt. Elhangzott néhány olyan észrevétel is, hogy egyik-másik előadás színvonala alatta maradt a többiének. Ilyen észrevétel kivétel nélkül minden tudományos konferencián elhangozhat, kiváltképpen egy olyanon, amelyen a tudományágat olyannyira különböző előképzettségű és érdeklődésű szakemberek képviselik. Még azok az előadások is, amelyekre az említett reflexiókat tették, érdekesek és hasznosak voltak, mert jelentős gyakorlati vagy elméleti problémát vetettek fel. Ha a megoldás, vagy a tárgyalás módja most még nem is érte el a kívánt szintet, legközelebb — talán épp a konferencián elhangzott észrevételek, tapasztalatok hatására — bízvást remélhetjük, e téren is előbbre lépünk.

Mindent egybevetve, a debreceni operációkutatási konferencia épp oly sikeresnek mondható, épp oly hasznos volt, mint az 1967. évi veszprémi találkozás.

ZIERMANN MARGIT

Készletezési és tározási konferencia

A Bolyai János Matematikai Társulat 1971. szeptember 13-tól 17-ig Győrött *Készletezési és Tározási Konferenciát* rendez.

A konferencián olyan előadások tarthatók, amelyek vagy a készletezés, illetve a (víz-)tázozás elméletével kapcsolatos új matematikai eredményt tartalmaznak, vagy meglevő matematikai apparátus jelentős alkalmazását nyújtják. Az előadások nyelve magyar, angol, francia, német ésorosz (szinkron tolmácsolással), időtartama 30 perc. A konferencián elhangzott előadások teljes szövegét, illetve kivonatát (a szerkesztőbizottság döntése szerint) külön kötetben megjelentetjük, a konferenciát követően rövid idő alatt.

A konferencia részvételi díja 1500 Ft. (Étkezés, kirándulás, bankett, előadáskivonatok.)

A részvételi szándékot 1971. május 15-ig kell bejelenteni. Az előadáskivonatokat legfeljebb két gépelt oldal terjedelemben, egy magyar és egy idegen nyelvű példányban május 31-ig kell beküldeni.

Cím: Bolyai János Matematikai Társulat

Budapest V., Szabadság tér 7. Tel.: 311—793

Dr. PRÉKOPA ANDRÁS
egyetemi tanár
a szervező bizottság elnöke

Dr. HEPPES ALADÁR
osztályvezető
a szervező bizottság titkára

A Központi Statisztikai Hivatalban működő Ökonometriai Laboratórium tevékenységéről[1]

Az ökonometria — széleskörűen használt meghatározása szerint — az a társadalomtudomány, amely a közgazdasági elmélet, a matematika és a statisztikai inferenciaelmélet eszközeit alkalmazza és egyesíti a gazdasági jelenségek elemzésére. Az ökonometriai kutatás tekintetében többféle osztályozás lehetséges. Ezek közül az alábbi hármat emelném ki:

— Ökonometria szűkebb és tágabb értelemben: Az egyik felfogás a gazdasági kapcsolatok, összefüggések elemzését tekinti ökonometriának; ebben az értelemben az ökonometria lényeges tartalmát a termelési függvények, a keresletelemzés és az interdependens közgazdasági modellek adják. Mások az ökonometria fogalmát sokkal szélesebben értelmezik és a fentieken kívül ide sorolják pl. az idősorelemzést, a termelékenység- vagy költségelemzést, az ágazati kapcsolatok elemzését, fogyasztói ár- vagy költségindexek számítását vagy a jövedelemeloszlás elemzését stb.[2]

— Egy másik lehetséges osztályozás különbséget tesz az ökonometriai módszertan és a módszerek alkalmazása között.

— Nem ritkán fordul elő olyan megkülönböztetés, amely a sztochasztikus és determinisztikus módszerek és megoldások különbözőségéből indul ki.

A fenti néhány vonással nem rendszeralkotás volt a cél, hanem csupán az, hogy a Központi Statisztikai Hivatal Ökonometriai Laboratóriumának, illetőleg ennek munkájának lokalizálását és körülhatárolását megkönnyítse. A Laboratórium alkalmazott ökonometriával foglalkozik: *ökonometriai módszerek gyakorlati alkalmazásának kipróbálásával*. Ez a profil más szóval használhatónak ígérkező ökonometriai módszerek kiválasztásában, kísérleti kipróbálásában és a felhasználók széles köre felé való rendelkezésre bocsátásában áll. Utalva a fenti három ellentétpárra: a laboratórium az ökonometria körét a szélesebb értelemben használja; tevékenysége a módszertan fejlesztésére és alkalmazására egyaránt kiterjed; az egyes módszerek esetében — amennyiben logikailag és gyakorlatilag fennáll ennek lehetősége — előnyben részesíti a sztochasztikus megoldásokat a determinisztikusokkal szemben.

A laboratórium[1] munkájának egyik legfontosabb jellemzője a *kísérleti* jelleg. Ebből a jellegből következik, illetőleg ezzel szorosan összefügg a Laboratórium munkamódszerének több tulajdonsága. Megemlítek néhányat:

— A Laboratórium munkája kutatási témák kivitelezéséből áll. Minden egyes téma kidolgozása önálló kísérletet jelent; változatlan vagy akár csak nagyjából változatlan formában egyetlen munkát sem ismételünk meg;

— Noha a Laboratórium a legmodernebb külföldi irodalom felhasználásával fejti ki munkáját, az alkalmazási lehetőségek kutatása során a felhasznált módszereket kisebb-nagyobb mértékben továbbfejleszti;

— A laboratórium minden egyes kutatási téma lefolytatásával csak a „laboratóriumi" kísérleti munkát tekinti elvégzettnek; a „nagyüzemi" alkalmazást nem tekinti feladatának;

— A végrehajtott kísérletek eredményeképpen megállapítások születnek, amelyek vagy gazdasági vagy módszertani tartalmúak. Mindkét típusú megállapítások érvényességének korlátot szab a végrehajtott kísérletek mérete, a minta nagysága a statisztikai inferenciaelmélet szabályaival összhangban;

— A kísérletek során számítógépen végrehajtott számításokat lassítja az a tény, hogy kutatási témáinkra vonatkozó teljes programok nem állnak rendelkezésünkre, másrészt pedig a kísérleti számítások fázisokra tagolódnak, amelyek között a számítást meg kell szakítani, mivel ezeken a pontokon nem programozható döntések válnak szükségessé.

[1] Teljes nevén: Statisztikai és Matematikai Módszerek Közgazdasági Alkalmazásának Laboratóriuma.

[2] Nem érdektelen ebből a szempontból utalni egy-egy ökonometriai kongresszuson bemutatott előadások sorozatára, amelyek az említetteken kívül a tisztán matematikai problémáktól a tisztán leíró elszámolási rendszerekig terjedő, alig összefoglalható témákat ölelnek fel.

A Laboratórium kutatási tevékenysége pragmatikusan két részre tagolható. Az egyik részbe sorolhatók a *népgazdasági modellezés* témái, a másikba a Laboratórium többi kutatási témája.

A Laboratórium eddig három népgazdasági modellt készített. Ezek az M-1., M-2. és a közös csehszlovák—magyar modell.

Az M-1. modell, amely 1965-ben készült el, kisméretű, néhány egyenletből álló modell volt, azt a célt szolgálta, hogy kikísérletezzük az ökonometriai típusú modellek felhasználásának kérdéseit egy szocialista népgazdaságban. Ezt megelőzően a szocialista országok közül egyedül Lengyelországban készült ökonometriai modell (a Katowicei Közgazdasági Főiskolán Pawlowski professzor vezetésével). Az M-1. modell — anélkül, hogy közgazdasági információban különösen gazdag lett volna — betöltötte feladatát azzal, hogy az M-2. modell készítésének megfelelő módszertani tapasztalattal és a specifikáció terén szerzett fejlesztési elgondolásokkal láthattunk neki.

Az M-2. modell már egy közgazdaságilag átgondolt, konkrétan és realisztikusan megfogalmazott hipotézisrendszert juttat kifejezésre. A hipotézisrendszer a magyar népgazdaságon belül érvényesülő interdependenciák közül a leglényegesebbeket foglalja egy lineáris egyenletrendszerbe. Az egyenletrendszer öt blokkból tevődik össze, ezek: a termelési blokk, a felhasználási- fogyasztási blokk, a munkaerő-blokk, a külkereskedelmi blokk és a reáljövedelemegyenlet. A modell összesen 23 sztochasztikus és 3 definíciós egyenletet tartalmaz, a változók száma pedig: 26 nem késleltetett endogén és 32 predeterminált. A paraméterek becslésére az egyszerű legkisebb négyzetek módszere mellett az instrumentális változók módszerének két változatát és a főkomponensek módszerét használtuk. A becslés végrehajtása után a modell összesen 56 paraméter numerikus értékét szolgáltatta,[3] ami annyit jelent, hogy a népgazdaság leírására alkalmazott hipotézisrendszer keretében ugyanilyen számú egymásrahatás számszerűsítését nyújtotta. Bár a paraméterek egy kisebb részére nem adódott szignifikáns érték, túlnyomó részük mégis érdekes összefüggéseket kvantifikált.

Az ENSZ közreműködésével működő pozsonyi Számító Kutató Központ és a Laboratórium megállapodása és együttműködése alapján készült el a közös csehszlovák—magyar modell. E modellnek az a célja, hogy azonos specifikációból kiindulva lehetővé tegye a megfelelő kapcsolatokat számszerűsítő paraméterek összehasonlítását. A modell összesen 12 egyenletből áll (ebből 4 identitás) 26 változóval. A csehszlovák és a magyar népgazdaság azonos modellje elkészült és az ennek megfelelő struktúrák összehasonlítása most van folyamatban.

A fentiekben bemutatott három modell elkészítése bizonyos kiágazásokkal járt együtt. Ezeket 3 csoportba sűríthetjük össze.

Az M-1. modell egyik haszna az volt, hogy határozottan rámutatott arra, hogy a mezőgazdasági termelési egyenlet nem kvantifikálható eredményesen az időjárás szabálytalan tényezőjének figyelembe vétele nélkül. Abból a célból, hogy évenként egyetlen számból álló idősorba sűrítsük az időjárásnak a magyar mezőgazdaságra gyakorolt, felmérhetetlenül sok, egymásnak ellentmondó elemből álló hatását, igen részletekbe menő vizsgálatokat folytattunk, amelyek messze túlhaladtak az M-2. modellben alkalmazandó „időjárásváltozó" létrehozásán.

A modellezés tulajdonképpen két fázisból áll. Ezek közül az első a modell megépítése, a második a modell „üzemeltetése". Ez utóbbin főleg a modellek előrejelzésre és szimulációra való felhasználását értjük. A kísérleti M-1. modellel megtettük az előrejelzés és szimuláció ugyancsak kísérleti jellegű kezdeti lépéseit. Az M-2. modell hasonló célú felhasználása most van folyamatban.

Az M-2. modell elkészítésével párhuzamosan, annak előfeltételeként és egyszersmind következményeként egy sor módszertani kérdéssel foglalkoztunk. Ilyenek a multikollinearitás elemzése, az autokorreláció vizsgálata, keresztmetszeti megfigyelések felhasználása idősorokra épített modellekben, vagy nem lineáris kapcsolatok felhasználása lineáris modellben.

A Laboratórium kutatási témáinak másik csoportja nagyon szerteágazó. Ezeknek a témáknak jelentős része azonban három problémakörbe foglalható össze.

Az ökonometria igen jelentős részében *gazdasági folyamatok* (illetőleg az ezeket kifejező változók) *kapcsolatának* kutatásában áll. A priori ismeretek, illetőleg az alkalmazott — kisebb-nagyobb mértékben a valóságtól absztraháló — hipotézisek a kapcsolatoknak más-más típusát („modelljét") helyezik előtérbe, amelyek a kapcsolatok kvantifikálásának és elemzésének megfelelő módszereit igénylik. A lehetséges modellek közül a Laboratórium

[3] A paraméterek legnagyobb részénél az alternatív becslési módszereknek megfelelően több változatban. Ennél nagyobb a száma a redukált forma becslése alapján nyert paramétereknek.

az eddigiekben a korrelációs (egy- és többváltozós, parciális) modell, a kanonikus korreláció, a faktoranalízis és a főkomponensek módszerét tette vizsgálat tárgyává. Ez a témakör, amely tulajdonképpen az ún. többváltozós statisztikai elemzés egyes problémacsoportjait foglalja magában, nem választható el élesen a népgazdasági modellek témakörétől, hiszen ez utóbbi tulajdonképpen szintén a kapcsolatok felmérésére és kvantifikálására irányuló kísérlet. Az M-2. modell becslésére is — több más módszer mellett — éppen a főkomponensek módszerét használtuk fel.

Az *idősorelemzés* a formális komponensek elkülönítésének a módszere. A Laboratórium eddigi működése során a szezonális ingadozások vizsgálatával, azok mérésének és kiküszöbölésének módszerével foglalkozott; a ciklus és trendkomponensek szempontjából való elemzés a későbbi tervek között szerepel. A szezonális ingadozások vizsgálatának keretében a Laboratórium összehasonlító elemzéseket végzett egy sor szezonális kiigazítási módszerre vonatkozólag. Ezek között szerepelt négy ún. „hagyományos" módszer: a mozgó átlagok, az analitikus trend, a láncindexek és a havi átlagok módszere. Mindezeket a hagyományos módszereket a számítási egyszerűség és ugyanakkor a valószínűségelméleti megalapozottság hiánya jellemzi. Vonatkozik ez azokra a bizonyos értelemben továbbfejlesztett módszerekre is, amelyeket egyes amerikai intézményeknél (Bureau of Labour Statistics, Bureau of the Census) fejlesztettek ki (BLS, Census 1, Census 2, . . . stb.). A hagyományos módszerektől bizonyos eltérést jelent a változó szezonalitás feltételezése, illetőleg a szezonális indexek helyett az ún. szezonális faktorok alkalmazása. Elméletileg lényegesen megalapozottabb módszereket is bevont a Laboratórium összehasonlító vizsgálatába, így pl. a spektrálanalízis módszerét, vagy a D. W. Jorgenson által kidolgozott kiigazítási módszert („minimális szórású és torzítatlan, lineáris szezonális kiigazítás").

Az *információelméletnek*, illetőleg az információelmélet részét képező néhány alapvető, könnyen kezelhető összefüggésnek a gazdasági elemzésben való felhasználásának megvizsgálására, a lehetőségek ismertetésére, illetőleg illusztrálására irányul egy másik kutatási téma. A kutatás eredményeként a Laboratórium példák során mutatta be a mérőszámok felhasználását megoszlási struktúrák, azok változása, egymástól való eltérése jellemzésére.

*

Kutatási eredményeit a Laboratórium két kiadványsorozatban teszi közzé. Az *Ökonometriai Füzetek*nek (korábban Nemzetközi Módszertani Füzetek) eddig tizenegy száma jelent meg. Ennek a sorozatnak az a feladata, hogy egy-egy lezárt kutatási témáról adjon végleges tájékoztatást. Kisebb volumenű, többnyire egy-egy téma részeredményeiről szóló előzetes beszámolót tartalmaznak a *Laboratóriumi Munkaanyagok*, amelyek a másik sorozattal szemben, sok esetben félkészterméket jelentenek. Ennek a sorozatnak eddig ugyancsak tizenegy száma jelent meg.

Dr. Halabuk László

A MAGYAR KÖZGAZDASÁGI TÁRSASÁG MATEMATIKAI-KÖZGAZDASÁGI SZAKOSZTÁLYÁNAK 1971. ÁPRILIS–JÚNIUSI ELŐADÁSAI

1971. április 29:

Nagy András: A nemzetközi kereskedelem áramlásainak elemzése és prognosztizálása

1971. május 12:

Pölöskei Pál: A munkaerő felszabadító beruházások gazdaságosságának elemzésére felhasználható egyes matematikai módszerek

1971. június 9:

Hunyadi László: Idősorok elemzésére és extrapolációjára felhasználható egyes újabb matematikai módszerek.

INFORMÁCIÓ ELEKTRONIKA

V. évfolyam, 1970.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Helle Mária

A kézirat nyomdába érkezett: 1970. XII. 7. — Terjedelem: 8.85 (A/5) ív

Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST