SZIGMA

Matematikai Közgazdasági folyóirat

*

E SZÁM SZERZŐI:

BOD PÉTER, kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézetének tudományos főmunkatársa, **GLATTFELDER PÉTER**, az Országos Anyag- és Árhivatal osztályvezetője, ifj. **KREKÓ BÉLA**, az Országos Tervhivatal előadója, **MIHÁLYFFY LÁSZLÓ** az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat osztályvezetőhelyettese, **MÓCSI JUDIT**, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat matematikusa, **PILLIS PÁL**, kandidátus, a Budapesti Kertészeti Egyetem rektorhelyettese, egyetemi tanár, **SZABÓ ISTVÁN**, az Építőipari Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalat tudományos munkatársa, **SZOLNOKY ANTAL**, az Építőipari Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalat műszaki-gazdasági tanácsadója, **VÁCZI PÁL**, a Magyar Vegyipari Egyesülés Mérnöki Irodájának programozója, **WINKLER GYÖRGY**, az Egyesült Izzó osztályvezetője

A Kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7. – Telefon: 127–294

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓnál, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

Pénzforgalmi jelzőszám: 215—11488, az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTban, Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185—612. A POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODA 1. sz. HÍRLAPBOLTJÁBAN, BUDAPEST, V., József nádor tér 1 és bármely postahivatalban, csekkszámlaszám: egyéni: 61 257, közületi: 61 066. MNB egyszámlaszám: 8.

Ára: 12,– Ft. Előfizetés egy évre: 40,– Ft.

GLATTFELDER PÉTER — VÁCZI PÁL

Egy algoritmus input-output sémák előrebecslésének korrekciójára

Az utóbbi néhány évben világszerte számos cikk, tanulmány jelent meg az input-output táblák, ezeken belül is alapvetően a koefficiensek előrejelzése tárgyában.[1]

A nagyfokú érdeklődést a közép- és hosszútávú tervezés matematikai módszereinek előtérbe kerülése indokolja, valamint az a körülmény, hogy az input-output táblákat ma már nemcsak elemzési célra használják, hanem azok alapköveivé váltak egy sor olyan (például optimalizálási) modellnek, melyekkel az előrejelzés illetve a tervezés tovább finomítható, újabb oldalakról közelíthető.

Az input-output analízissel kapcsolatban a leggyakoribb a bruttó és a nettó output-vektoroknak, valamint a technológiai matrix elemeinek a vizsgálata. A folyó tervezés egyik alapkérdése, hogy mekkora ágazati össztermelés (bruttó output) szükséges a nemtermelő fogyasztás, vagyis a nettó output kibocsátásához a közvetlen és a közvetett ráfordítások figyelembevételével, hogyha ismeretes (vagy előre meghatározott) a nettó output tervévi volumene és összetétele. A választ közismert módon a ráfordítási szerkezet, a technikai fejlődés addigi változása is befolyásolja és így a jól ismert

$$X = \mathbf{A}X + Y$$

összefüggésben az Y vektort tekintjük adottnak, az X vektort és az $\mathbf{A}$ matrixot pedig ismeretlennek. Az is előfordul, hogy az Y-ra nyert előrejelzéseinket éppoly pontatlannak tekintjük, mint az alapösszefüggés másik két összetevőjét, s így mindhárom tényezőt ismeretlenként kell kezelni. Dolgozatunk alapkérdését tehát az egyedi becslések konzisztenciájának biztosítása jelenti, vagyis egy olyan eljárás kidolgozása, amely ezeknek a becsléseknek egy, a Leontief-féle alapegyenletet is kielégítő korrekcióját szolgáltatja. Feltételezzük, hogy rendelkezésünkre állanak az előzőek során kapott $\mathbf{A}'$, Y' és X' előrebecslések, s keressük az ezekhez legközelebbi $\mathbf{A}$-t, Y-t és X-et, melyekre már fennáll az $X = \mathbf{A}X + Y$ összefüggés. A továbbiakban ennek a feladatnak a megoldására adunk egy numerikus algoritmust.

Tegyük fel, hogy $\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \mathbf{A}_3(t) \ldots \mathbf{A}_r(t)$ kétindexes tenzor-skalár, $X_1(t), X_2(t), X_3(t) \ldots X_s(t)$ vektor-skalár függvényértékei $t = t_k$ $(k = 1, 2 \ldots m)$ pontokban ismert matrixok illetve vektorok és eleget tesznek az

[1] Lásd például [3], [5].

$$F_1[\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \ldots \mathbf{A}_r(t) ; X_1(t), X_2(t) \ldots X_s(t)] = 0$$
$$F_2[\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \ldots \mathbf{A}_r(t) ; X_1(t), X_2(t) \ldots X_s(t)] = 0$$
$$F_p[\mathbf{A}_1(t), \mathbf{A}_2(t), \ldots \mathbf{A}_r(t) ; X_1(t), X_2(t) \ldots X_s(t)] = 0$$
$$p > 0 , r \geq 0 , s \geq 0 , r + s \geq 1$$

feltételeknek. Meghatározandók e tenzor-skalár illetve vektor-skalár függvények extrapolált (interpolált) értékei a $t = t_q$ pontban.

Nevezzük az ilyen típusú feladatokat feltételes vektor illetve tenzor extrapolációs (interpolációs) feladatnak, vagy röviden feltételes extrapolációnak (interpolációnak). A dolgozat keretében a feltételes extrapoláció (interpoláció) általános elméletével nem foglalkozunk, csupán a dolgozatban felhasználásra kerülő extrapolációs feladat kapcsán mutatunk lehetséges megoldási módszereket.

A konkrét esetben $r = 1$, $s = 2$, $p = 1$.

Legyen

$$F_1 [\mathbf{A}_1(t), X_1(t), X_2(t)] = \mathbf{A}_1(t)\, X_1(t) - X_2(t) = 0$$

Alkalmazzuk az

$$\mathbf{A}_1(t) = \mathbf{A}(t)$$
$$X_1(t) = X(t)$$
$$X_2(t) = Y(t)$$

jelöléseket, s jelöljük a tenzor- illetve vektorkomponenseket a megfelelő kisbetűkkel.

Feladatunk az $\mathbf{A}(t_q)$, $X(t_q)$ és $Y(t_q)$ matrix illetve vektorok meghatározása úgy, hogy

(1.1) $$\mathbf{A}(t_q)\, X(t_q) = Y(t_q)$$

teljesüljön, ahol t_q valamilyen, a $t_1, t_2, \ldots, t_m$ alappontoktól különböző (idő-)pont.

Egy lehetséges megoldás a következő. Határozzuk meg az $x_i(t_q)$ és $y_i(t_q)$ vektor- illetve az $a_{ij}(t_q)$ matrixelemeket legjobban közelítő $x_i'(t_q)$, $y_i'(t_q)$ és $a_{ij}'(t_q)$ vektor- illetve matrixelemeket az ismert $x_i(t_k)$, $y_i(t_k)$, $a_{ij}(t_k)$ $(k = 1, 2, \ldots m)$ vektor- illetve matrixelemek segítségével valamilyen skalár extrapolációs módszerrel. Ha az így nyert $X'(t_q)$, $Y'(t_q)$ illetve $\mathbf{A}'(t_q)$ kielégítik (1.1)-et, akkor a feladatot megoldottnak tekinthetjük, egyébként olyan megoldást kell keresnünk, melyre (1.1) teljesül, de jól közelíti a vesszővel jelölt értékeket is. Gyakran előfordul, hogy az $X'(t_q)$, $Y'(t_q)$ vektorok illetve $\mathbf{A}'(t_q)$ matrix valamelyikét kötelezően el kell fogadni, ezért a gyakorlatban a feladat alábbi részfeladatainak megoldása válhat szükségessé:

a) az előrebecsült $X(t_q)$, $Y(t_q)$ és $\mathbf{A}(t_q)$ változók egyike sem rögzített.
b) $Y(t_q) = Y'(t_q)$; Y' rögzített;
c) $X(t_q) = X'(t_q)$; X' rögzített;
d) $\mathbf{A}(t_q) = \mathbf{A}'(t_q)$; $\mathbf{A}'$ rögzített.

A továbbiakban a vektorok és matrixok t_q argumentumait elhagyjuk. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$H_1(\mathbf{A}, \mathbf{A}') = \sum_{ij} (a_{ij} - a'_{ij})^2$$
$$H_2(X, X') = \sum_{i} (x_i - x'_i)^2$$
$$H_3(Y, Y') = \sum_{i} (y_i - y'_i)^2$$

Vizsgáljuk ezután külön-külön az előzőekben jellemzett négy esetet.

a) Könnyen belátható, hogy az X', Y' és $\mathbf{A}'$ előrebecsléseket jól közelítő, (1.1)-nek eleget tevő komponensek meghatározása az alábbi szélsőérték számítási feladatra vezet:

$$H = H_1(\mathbf{A}, \mathbf{A}') + H_2(X, X') + H_3(\mathbf{A}X, Y') \to \text{minimum!}$$

A megoldhatóság szükséges és esetünkben elégséges feltétele is, hogy

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_{kr}} = a_{kr} - a'_{kr} + \sum_i a_{kj} x_j x_r - y'_k x_r = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial x_k} = x_k - x'_k + \sum_i a_{ik} \sum_j a_{ij} x_j - \sum_i a_{ik} y'_i = 0$$

teljesüljön. Megoldandó tehát az

$$\mathbf{A}(\mathbf{E} + X \bigcirc X) = \mathbf{A}' + Y' \bigcirc X \tag{1.a.1}$$

$$(\mathbf{E} + \mathbf{A}^T\mathbf{A})\, X = X' + \mathbf{A}^T Y' \tag{1.a.2}$$

vektor-matrix egyenletrendszer, ahol $\mathbf{A}^T$-vel az $\mathbf{A}$ matrix transzponáltját jelöltük, a $\bigcirc$ pedig a vektorok diadikus szorzatának műveleti jele.

Az (1.a.1), (1.a.2) egyenletek iteratív eljárással oldhatók meg. Az iterációra az előzőnél alkalmasabb alak:

$$X = (\mathbf{E} + \mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}(X' + \mathbf{A}^T Y') \tag{1.a.3}$$

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}' + Y' \bigcirc X)\left(\mathbf{E} - \frac{1}{1 + XX} X \bigcirc X\right) \tag{1.a.4}$$

Az utóbbi egyenlet levezetésénél felhasználtuk azt a mátrix-elméleti azonosságot, amely szerint az invertálandó

$$\mathbf{R} = \mathbf{S} + V \bigcirc W$$

matrix inverze

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{S}^{-1} - \frac{1}{1 + (W\,\mathbf{S}^{-1}\,V)}\,\mathbf{S}^{-1}\,V \bigcirc W\mathbf{S}^{-1} \tag{1.a.5}$$

alakba írható, feltéve, hogy az $\mathbf{S}$ matrix is invertálható; (L. pl. [1].)

Az (1.a.3)—(1.a.4) egyenletekkel definiált iterációs eljárás a kísérleti számítások során gyors konvergenciát eredményezett.

b) Ebben az esetben, vagyis amikor az Y rögzített, a szélsőértékszámítási feladatot $\mathbf{A}^{-1}$-re célszerű felírni, mivel, mint látni fogjuk, $\mathbf{A}$ kiszámítása így különösen egyszerűvé válik. Keressük tehát a

$$H = H_1(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}'^{-1}) + H_2(\mathbf{A}^{-1}\,Y', X') \to \text{minimum!}$$

szélsőérték számítási feladat megoldását. Képezve a parciális deriváltakat,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial a_{kr}^{-1}} = a_{kr}^{-1} - a'^{-1}_{kr} + \sum_j a_{kj}^{-1}\, y'_j\, y'_r - x'_k\, y'_r = 0$$

adódik, ami átrendezve illetve matrix-szimbólumokkal felírva azt jelenti, hogy az

$$(1.b.1) \qquad \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}'^{-1} + \mathbf{A}^{-1} Y' \bigcirc Y' - X' \bigcirc Y' = 0$$

egyenletet kell megoldanunk. Szorozzuk (1.b.1)-et balról **A**-val és rendezzük az egyenletet, aminek eredményeként az

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}'^{-1} + X' \bigcirc Y') = \mathbf{E} + Y' \bigcirc Y'$$

összefüggéshez jutunk. Ebből (1.a.5) felhasználásával kapjuk a keresett eredményt, a korrigált **A** matrixot:

$$(1.b.2) \qquad \mathbf{A} = (\mathbf{E} + Y' \bigcirc Y')\mathbf{A}' \left[\mathbf{E} - \frac{1}{1 + Y'\mathbf{A}'X'} X' \bigcirc Y'\mathbf{A}'\right]$$

Ezután az X vektor meghatározása az (1.1) alapján már egyszerű feladat.

c) Most az X előrebecsült értékét tekintjük konstans vektornak és olyan **A** matrixot illetve Y vektort akarunk meghatározni, amelyek kielégítik (1.1)-et és ugyanakkor **A**'-től illetve Y'-től való eltérésük minimális. Vagyis a

$$H = H_1(\mathbf{A}, \mathbf{A}') + H_3(\mathbf{A}\,X', Y') \rightarrow \text{minimum!}$$

feladatot kell megoldanunk. Ebből a megfelelő deriválás után az

$$\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial a_{kr}} = a_{kr} - a'_{kr} + \sum_j a_{kj} x'_j x'_r - y'_k x'_r = 0$$

azaz

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}' + \mathbf{A} X' \bigcirc X' - Y' \bigcirc X' = 0$$

formulához jutunk, melyből (1.a.5) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$(1.c.1) \qquad \mathbf{A} = (\mathbf{A}' + Y' \bigcirc X')\left[\mathbf{E} - \frac{1}{1 + XX} X' \bigcirc X'\right] =$$

$$= \mathbf{A}' + \frac{1}{1 + X'X'} (Y' - \mathbf{A}' X') \bigcirc X'$$

ami már a keresett megoldás. Az Y vektor meghatározása ugyancsak az (1.1) alapján történik.

d) Abban az esetben, ha az **A**-ra vonatkozó előrejelzést rögzítjük, akkor az X meghatározására szolgáló szélsőértékfeladat

$$H = H_2(X, X') + H_3(\mathbf{A}' X, Y') \rightarrow \text{minimum!}$$

amelynek megoldásához az

$$\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x_k} = x_k - x'_k - \sum_i a'_{ik} \sum_j a'_{ij} x_j - \sum_i a'_{ik} y'_i = 0$$

egyenlet, azaz

$$X - X' + \mathbf{A}'^T \mathbf{A}' X - \mathbf{A}'^T Y' = 0$$

kell hogy teljesüljön. Ebből

(1.d.1) $$X = (\mathbf{E} + \mathbf{A}'^T \mathbf{A}')^{-1} (X' + \mathbf{A}'^T Y')$$

Az Y vektor meghatározása itt is az (1.1) felhasználásával történhet.

Ha a fenti eredményeket input-output számításokban akarjuk alkalmazni, az **A** matrix szerepét értelemszerűen az **E** — **A** matrix veszi át.

Megemlítendő, hogy az input-output analízis egyik alapkikötése a technológiai koefficiens-matrix nem negativitása. Ezzel a kérdéssel az algoritmus kidolgozásánál nem foglalkoztunk, lévén, hogy az ágazati kapcsolati mérlegek előrebecslésére való alkalmazást amúgy is csak mint speciális esetet tekintettük. Az egyes fajlagos mutatók időbeli monoton csökkenése közismert jelenség, s a trendszámítás eszközei mellett egy idő múlva ezek az értékek feltétlenül nem-pozitívvá kell hogy váljanak. A közgazdasági gyakorlat ez esetben negatív koefficiensek helyett zéróval szokott operálni.

Egy numerikus alkalmazás

Példánk realitása érdekében a KSH illetve az OÁH 1959—1966 évekre készült 15 szektoros változatlan áras (1965) nettósított és azonos szerkezetre hozott ágazati kapcsolati mérlegeiből indultunk ki.[2]

Ezt a mérlegsort vontuk össze 5×5-ös méretűvé (ipar, építőipar, mezőgazdaság, közlekedés, kereskedelem) s az így nyert bruttó és nettó outputokat, valamint technológiai matrixokat extrapoláltuk. Az előrebecslés „ex post” jellegű volt, vagyis az 1959—65-ös adatok alapján történt 1966-ra. (Mely évre tehát tényadatunk is volt.) Az alapadatok prognózisa lineáris és exponenciális trendek alapján történt, s lévén, hogy mind az előrejelzések, mind pedig azok konzisztenciájának biztosítása vonatkozásában egymáshoz igen közel álló eredményt kaptunk, itt csupán a lineáris előrejelzés eredményét ismertetjük.

Bruttó termelés (X) 1966-ban (1965-ös áron)

m Ft

Ágazat	Tényadat	Lineárisan extrapolált	Feltételesen extrapolált		
			iterált	rögzített Y	rögzített **A**
Ipar	296 418	297 233	296 844	295 353	296 817
Építőipar	44 964	42 371	42 431	41 862	42 431
Mezőgazdaság	78 346	74 495	74 337	74 156	74 324
Közlekedés	23 497	23 767	23 929	23 856	23 934
Kereskedelem	21 173	21 598	21 521	21 201	21 517

[2] Az alapadatok ebben a formában megtalálhatók [7]-ben. A szóban forgó ökonometriai modell koefficienseinek előrebecslési, pontosabban konzisztencia-keresési módszertana nem azonos az itt ismertetésre kerülő eljárással.

Nettó outputok (Y) 1966-ban (1965-ös áron)

m Ft

Ágazat	Tényadat	Lineárisan extrapolált	Feltételesen extrapolált		
			iterált	rögzített X	rögzített **A**
Ipar	154 763	160 936	161 574	161 845	161 619
Építőipar	37 625	33 864	34 061	34 010	34 080
Mezőgazdaság	28 816	26 250	26 607	26 680	26 635
Közlekedés	7 195	7 991	7 974	7 809	7 984
Kereskedelem	15 011	15 294	15 463	15 529	15 476

Ipar fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965. évi áron)

Ágazat	Tényadat	Extrapolált	Feltételesen extrapolált		
			iterált	rögzített X	rögzített Y
Ipar	0,3489	0,3324	0,3326	0,3327	0,3367
Építőipar	0,0106	0,0142	0,0143	0,0142	0,0137
Mezőgazdaság	0,0870	0,0885	0,0887	0,0887	0,0911
Közlekedés	0,0203	0,0195	0,0195	0,0195	0,0204
Kereskedelem	0,0123	0,0129	0,0130	0,0130	0,0129

Építőipar fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965. évi áron)

Ágazat	Tényadat	Extrapolált	Feltételesen extrapolált		
			iterált	rögzített X	rögzített Y
Ipar	0,3900	0,3869	0,3865	0,3869	0,3725
Építőipar	0,0217	0,0178	0,0178	0,0178	0,0160
Mezőgazdaság	0,0070	0,0000	0,0011	0,0000	0,0000
Közlekedés	0,0859	0,0856	0,0856	0,0856	0,0843
Kereskedelem	0,0176	0,0144	0,0141	0,0144	0,0135

Mezőgazdaság fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965-ös áron)

Ágazat	Tényadat	Extrapolált	Feltételesen extrapolált		
			iterált	rögzített X	rögzített Y
Ipar	0,1483	0,1459	0,1460	0,1460	0,1414
Építőipar	0,0109	0,0117	0,0117	0,0117	0,0111
Mezőgazdaság	0,2953	0,2827	0,2827	0,2827	0,2815
Közlekedés	0,0020	0,0021	0,0021	0,0021	0,0018
Kereskedelem	0,0158	0,0156	0,0157	0,0157	0,0153

Közlekedés fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965-ös áron)

Ágazat	Tényadat	Extrapolált	Feltételesen extrapolált		
			iterált	rögzített X	rögzített Y
Ipar	0,2810	0,2853	0,2853	0,2854	0,2723
Építőipar	0,0710	0,0797	0,0797	0,0797	0,0783
Mezőgazdaság	0,0079	0,0111	0,0112	0,0112	0,0073
Közlekedés	0,0135	0,0264	0,0264	0,0264	0,0251
Kereskedelem	0,0125	0,0108	0,0108	0,0108	0,0100

Kereskedelem fajlagos (hazai) anyagfelhasználása (A) 1966-ban (1965-ös áron)

Ágazat	Tényadat	Extrapolált	Feltételesen extrapolált		
			iterált	rögzített X	rögzített Y
Ipar	0,1167	0,1132	0,1132	0,1132	0,1124
Építőipar	0,0324	0,0282	0,0282	0,0282	0,0281
Mezőgazdaság	0,0042	0,0055	0,0055	0,0055	0,0053
Közlekedés	0,2802	0,2663	0,2663	0,2663	0,2662
Kereskedelem	0,0082	0,0079	0,0079	0,0079	0,0078

Mint látható, a feltételesen extrapolált értékek, vagyis melyek az $X = \mathbf{A}X + Y$ egyenletnek is eleget tesznek, igen közel állnak az egyedileg becsült értékekhez. Tapasztalatunk szerint a legjobb közelítést általában az iterált, a legrosszabbat pedig a rögzített Y-nal történő számítás adja. A tényadatoktól való eltérés, a szórás nagyságrendje a feltételesen extrapolált értékekre általában nem rosszabb, mint az egyszerű becslés esetében.

(Beérkezett: 1970. május 15.)

IRODALOM

1. Fenyő, I.—Frey, T.: Matematika villamosmérnököknek. Budapest, 1964—65. Műszaki Könyvkiadó.
2. Glattfelder, P.: Extrapoláció rész-trendek átlagából. Szigma, 1968. I. sz. 29—41 o.
3. Glattfelder, P.: A Nehézipari Minisztérium ágazati kapcsolati modelljének előrebecslése. Statisztikai Szemle, 1969. 3. sz. 282—297. o.
4. Rácz, A.: Az ágazati kapcsolati mérlegek technológiai koefficiensei. Statisztikai Szemle, 1967. 6. sz. 507—528. o.
5. Stone—Bates—Bacharach: A Programme for Growth. Input-output Relationships 1954—66. University of Cambridge, 1963. 70 p.
6. Szakolczai, Gy.—Vásárhelyi, P.: Az ágazati kapcsolatok mérlege technológiai koefficienseinek előrebecsült mátrixai. Közgazdasági Szemle, 1967. 12. sz. 1444—1461. o.
7. Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei. II/1. Budapest, 1969. OÁH-INFELOR.

AN ALGORITHM FOR THE CORRECTION OF THE FORECAST OF INPUT-OUTPUT SCHEMES

In this paper the authors try to find a solution to the following problem.

Let us assume the vectors X' and Y' (originating mainly from estimates), as well as the matrix $\mathbf{A}'$ given and let us determine the vectors X, Y, and the matrix $\mathbf{A}$ in a way hat the equation

$$\mathbf{A}X = Y$$

should be satisfied and that the sum of the component's square in the differences $\mathbf{A}' - \mathbf{A}$, $X' - X$ and $Y' - Y$ should be minimum. The main result of the paper is an iterative procedure, solving the non-linear simultaneous equations equivalent to the above-mentioned extremum problem. Although there is no theoretical convergence proof in the paper, the procedure proved convergent when applied to practical numerical problems. The authors deal also with a special case of the problem, i.e. with the applicability in the input-output analysis, for which the solution can be written down explicitly.

АЛГОРИТМ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ ОЦЕНОК INPUT–OUTPUT СХЕМ

В настоящей работе авторы ищут решение следующей проблемы: Пусть даны (обычно получаются из оценок) векторы X' и Y', матрица $\mathbf{A}'$, и определим векторы X, Y и матрицу $\mathbf{A}$ таким образом, чтобы выполнялось уравнение

$$\mathbf{A}X = Y$$

и чтобы сумма квадратов компонентов разниц $\mathbf{A}' - \mathbf{A}$, $X' - X$ и $Y' - Y$ была минимальная Главным результатом работы является итеративный метод, с помощью которого авторы решают нелинейную систему уравнений, эквивалентную упомянутой экстремальной задачей. Хотя в работе не поставлена принципиальная критерия конвергенции в случае практических нумерических задач метод казалось сходимым. Авторы занимаются особенным случаем проблемы, возможностью употребления в input—output анализе, решение которого можно написать в явном виде.

PILLIS PÁL

A termőföld optimális hasznosítása

Az ipari fejlődés elkerülhetetlen velejárója a mezőgazdasági hasznosítású földek területének csökkenése. E jelenség figyelhető meg Magyarországon is. Az 1920-as években 13 millió kh mezőgazdasági és 9,73 millió kh. szántóterületünk volt. Ma a mezőgazdaságilag művelt terület és szántó kereken 1 millió kh-val kevesebb. Magyarországon nincs mód új földek művelésbe vételével kompenzálni a nem mezőgazdasági jellegű hasznosítás növekedését. Az ország népsűrűsége is nagy, a világátlag ötszöröse és 20%-kal haladja meg Európáét. Más oldalról viszont olyan folyamatot láthatunk, hogy növekszik a lakosság fogyasztása és a mezőgazdasági termékek exportja. Vagyis csökkenő tendenciát mutat a művelés alatt álló termőföld területe és növekvő tendenciát a mezőgazdasági termékek iránti igény. Ezen ellentmondás megoldása többféle módon megy végbe, nevezetesen:

1. Közgazdasági eszközökkel korlátozzuk egyrészt a földek nem mezőgazdasági jellegű igénybevételét, másrészt a gazdasági mechanizmus során olyan szabályozókat hoztunk működésbe, amelyek a mezőgazdasági üzemeket a földdel való takarékos gazdálkodásra serkentik.
2. Évről évre jelentős ráfordításokat végzünk a földek termőképességének megóvására és fokozására.
3. Korszerű agrotechnikai eljárásokkal, új bőtermő fajták létrehozásával, vagy honosításával növeljük a hozamokat.
4. Adminisztratív úton szabályozzuk a termőföldek rendeltetésszerű használatát, törvényt hoztunk a mezőgazdasági földek védelméről (1961. évi VI. törvény).

A „kevesebb földről több termék" ellentmondás megoldásaiban több eljárás is optimalizálható, például:

1. a talajjavításra rendelkezésre álló erőforrások optimális elosztása,
2. a rendelkezésre álló termőföldek optimális hasznosítása.

Mindkét említett témakör — a feladat természetétől függően — többféle modell alkalmazását igényli.

A továbbiakban csak a földhasznosítás optimalizálásáról lesz szó.

A földhasznosítás optimalizálásának lényege

A mezőgazdasági termelésben sok évszázad tapasztalata alapján kialakult egy bizonyos értékítélet arra nézve, hogy a különböző minőségű földeket milyen módon célszerű hasznosítani. Régóta ismerik az egyes növényeknek a termőtalajjal szembeni igényeit. Ismeretes az is, hogy egyes növényféleségekkel mekkora termelési értéket, nyereséget (vagy veszteséget) lehet különböző talajokon elérni. A szélső értékek között igen jelentős a különbség. Például a Kertészeti Egyetem Tangazdaságában a gyümölcstermesztés a leggyengébb talajokon 12—14 000,— Ft, a legjobb talajokon 70—80 000,— Ft termelési értéket ér el. A leggyengébb termőföldeken a kukoricatermesztés veszteséges, a legjobbakon nyereséges.

A termőföldek hasznosításában eddig kialakult gyakorlat két elgondolás együttes alkalmazására épült:

1. alapvetően biológiai szemléletből kiindulva arra törekedtek, hogy a növényeket olyan talajféleségeken termeljék, amelyeken a növények megkapják mindazokat a feltételeket, amelyek a legnagyobb, legjobb minőségű terméshez szükségesek,

2. gazdaságossági nézőpontból kiindulva olyan elhelyezést tartottak kívánatosnak, amely mellett a vállalat nyereséggel gazdálkodik.

Egyik elgondolás sem és mindkettő együtt sem jelenti a termőföld optimális hasznosítását.

Az optimális földhasznosítás üzemi modellje

Kétféle eljárás közül választhatunk:

1. A földhasznosítás optimalizálásának beépítése a vállalatfejlesztés komplex modelljébe.

2. Az adott és már optimalizált vállalatfejlesztési megoldás eredményeit feltételként beépítjük egy sajátos földhasznosítási modellbe.

Az első eljárás leírását itt mellőzhetjük, annak lényege megtalálható a Szigma 1969. évi 4. számában. (Csáki Csaba: Egy mezőgazdasági vállalat fejlesztési terve.)

A második megoldás sémája az alábbi.

$$
(1)\qquad
\begin{array}{cc|ccccc|c}
 & & \mathbf{x}_1^* & \mathbf{x}_2^* & & \mathbf{x}_m^* & & \\
\hline
 & \mathbf{u}_1 & \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \dots & \mathbf{E}_m & & = \mathbf{b}_1 \\
\hline
\multirow{7}{*}{} & & \mathbf{1}^* & \mathbf{0}^* & & \mathbf{0}^* & & \\
 & & \mathbf{0}^* & \mathbf{1}^* & & \mathbf{0}^* & & \\
 & & \cdot & \cdot & & & & \\
 & \mathbf{u}_2 & \cdot & \cdot & & & & \leq \mathbf{b}_2 \\
 & & \cdot & \cdot & & & & \\
 & & \mathbf{0}^* & \mathbf{0}^* & & \mathbf{1}^* & & \\
\hline
 & & c^* & c^* & & c^* & &
\end{array}
$$

E jelek értelme:

$\mathbf{x}_1^*$ vektorhoz tartozó tevékenységek egy meghatározott talajon folyó tevékenységet jelentik — pl. a leggyengébb minőségű talajokat képviselik,

$\mathbf{x}_2^*$ a jobb talajokat,

$\mathbf{x}_m^*$ pedig a legjobb talajokat,

$\mathbf{u}_1$ vektorhoz tartozó feltételek már optimalizált modell eredményeit tartalmazzák, s ezek kerülnek a programba, mint kötelező termékkibocsátás $\mathbf{b}_1$-ben,

$\mathbf{u}_2$ vektorhoz tartozó feltételek összegező és nullvektorokat tartalmaznak, és a különféle talajoktól rendelkezésre álló mennyiségeket jelentik.

A feladat feltételei:

$$\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots, \mathbf{x}_m^* \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{E}_2 \mathbf{x}_2 + \ldots \mathbf{E}_m \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{1}^* \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{1}^* \mathbf{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{1}^* \mathbf{x}_m \end{array}\right\} \leq \mathbf{b}_2$$

A célfüggvény:

$$Y = \mathbf{c}^* \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}^* \mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{c}^* \mathbf{x}_m \rightarrow \max/$$

Feltűnő e feladat hasonlósága a szállítási feladatokhoz. A szállítási program szokásos sémája átültethető egy föld-elosztási programba, mégpedig az alábbiak szerint:

$$
(2)\qquad
\begin{array}{c|ccc:ccc:ccc|l}
 & x_a & \dots & x_c & x_d & \dots & x_f & \dots & \dots & x_m & \\
\hline
u_a & 1 & & & 1 & & & 1 & & & b_a \\
\vdots & & \ddots & & & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\
u_g & & & 1 & & & 1 & & & 1 & b_g \\
\hdashline
u_h & 1 & \dots & 1 & & & & & & & b_h \\
\vdots & & & & 1 & \dots & 1 & & & & \vdots \\
u_n & & & & & & & 1 & \dots & 1 & b_n \\
\hline
 & c_a & \dots & c_c & c_d & \dots & c_f & & \dots & c_m &
\end{array}
$$

Mint szállítási feladat a (2) alatt jelzett modell homogén termékek szétosztását jelenti. A föld — bár igen eltérő minőségű — mégis homogénnek tekinthető abból a szempontból, hogy azon (a programba felvett) valamennyi termék előállítható.[1]

Ezek szerint:

x_a-tól x_c-ig futó sozlopok nemcsak egy feladóhelyről több átvevőhelyre való szállítást jelenthetnek, hanem egy talajféleségen előállítható többféle terméket is. Ebben az értelemben a x_a-tól x_c-ig futó oszlopok az első feladóhely helyett az egyik talajfélét — mondjuk a leggyengébbet, x_d-től x_f-ig futó oszlopok és másik talajfélét, míg az utolsó blokkban futó oszlopok a legjobb talajfélét jelentik.

[1] A célgéppel ellentétben a szó igazi értelmében nincs „célföld".

Az u_a-tól u_e-ig futó sorok azt írják elő, hogy mit kell elszállítani — vagyis mit kell a földeken előállítani, az u_h-tól u_n-ig futó sorok pedig korlátozzák az egyes átvevőhelyek átvevőképességét — azaz korlátozzák az egyes talajféleségekből rendelkezésre álló mennyiségeket.

Mint szállítási feladat, feltételei azonosak az (1) alatt jelzett modell feltételeivel, mert

$$x_{ij} \geq 0 \text{ ugyanaz, mint } \mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \ldots \mathbf{x}_m^* \geq 0$$

azaz negatív eredmény nem kerülhet a megoldások közé akár negatív mennyiség szállításáról, akár negatív földterületen való termelésről legyen szó;

$$\sum_{j=a}^{g} x_{ij} = b_i \text{ ugyanazt jelenti, mint}$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{E}_m\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_1$$

azaz meghatározott mennyiséget kell szállítani, vagy meghatározott módon kell az egyes talajokat hasznosítani, végül

$$\sum_{i=h}^{n} x_{ij} = b_j \text{ ugyanaz, mint}$$

$$\left.\begin{matrix} \mathbf{1}^*\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{1}^*\mathbf{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{1}^*\mathbf{x}_m \end{matrix}\right\} = \mathbf{b}_2$$

mert mindkettő korlátokat jelent, az előző az átvevőhelyek átvevőképességét, az utóbbi a földek korlátozott voltát.

De ebből következik, hogy fenn kell állni a

$$\sum_{i=}^{g} b_i = \sum_{k=h}^{n} b_k \text{ feltételnek éppen úgy, mint a}$$

$$\mathbf{E}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{E}_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{E}_m\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 = \left\{\begin{matrix} \mathbf{1}^*\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{1}^*\mathbf{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{1}^*\mathbf{x}_m \end{matrix}\right.$$

feltételnek, mint a maradék nélküli elosztás feltételének is.

Vagyis az (1) alatt jelzett modellben.

- a feltételek mind kivétel nélkül egyenlőségeket tartalmaznak,
- a matrixban csak 0 és 1 értékek szerepelnek,
- a felosztandó föld kétszer fordul elő a korlátok között (b_i és b_k)
- a matrix blokkokra osztható fel, mégpedig felső és alsó blokkokra, a felső blokkok mindegyike egy-egy egységmatrix, az alsó blokkok mindegyike egy összegező vektorból és több 0 vektorból áll
- a felső blokkok száma annyi, mint az alsó blokkokban levő sorvektorok száma — ez szükségszerű, mert egy-egy felső blokk egy-egy talajféleséget

jelent, az alsó blokkok sorai pedig a talajtípusból rendelkezésre álló területet képviselik.

A szállítási feladattól való eltérés abban áll, hogy itt a célfüggvénynek *nem a minimális, hanem maximális szélső értékét keressük.*

Ez az eltérés egyébként teljesen érthető, mert a termőfölddel való ésszerű gazdálkodás maximális termelési értékkel (vagy nyereséggel) indokolt.

Üzemi szintű számítások készültek a Kertészeti Egyetem Tangazdaságának modellje alapján. A legfontosabb, gyakorlatban alkalmazható következtetések az alábbiak:[2]

— Határozott tendencia mutatkozik arra, hogy a területegységenként legnagyobb termelési értéket vagy nyereséget adó növényfajtákat a legjobb termesztési körülmények között, a legjobb minőségű talajokon kell termelni, a kisebb értékűeket pedig a gyengébb talajokon.

Ez a következtetés ellentmond a kialakult gyakorlatnak, de ez érthető. A gyakorlati szakemberek a termőföldek hasznosításában egy-egy növényfajta igényéből indulnak ki, szemléletük agronómiai-biológiai beállítottságú. Ezzel szemben az optimalizálás közel sem jelenti azt, hogy minden növény *egyenként* a neki megfelelő elhelyezést kapja.

— Kialakul a növények rangsora abban, hogy a termőhelyi adottságok rangsorában a növények hol helyezkednek el. A két rangsor párhuzamosan fut: legértékesebb növények a legjobb földeken.

— A vizsgált talajok között nemcsak talajminőség, hanem öntözött és öntözés nélküli művelés szerint is különbséget tettünk. Az öntözött terület változása, mint paraméter, lehetőséget adott az öntözés és a termelési érték, valamint az öntözés és a nyereség kapcsolatának jellemzésére.

Néhány ilyen regressziós görbe:

a termelési érték (Y) növekedése az öntözött terület (X) függvényében

$$Y = 3{,}19 + 0{,}5496\ X$$

ami azt jelenti, hogy az öntözés hatására a termelési érték mintegy 50%-kal növekszik, vagy ugyanez a nyereségre nézve

$$Y = 17{,}79 + 0{,}989\ X$$

ami azt jelenti, hogy az öntözés hatására a nyereség (Y) nagyjából megkétszereződik.[3]

Az említett számításokat a gazdaság jól hasznosította, s a korábban deficites gazdálkodást évi 10 millió Ft nyereség váltotta fel.

Az (1) alatt jelzett modell föld minimalizálási feladattá alakítható át. Ilyen típusú feladat megoldására akkor van szükség, ha

— a termékkibocsátási kötelezettség adott, s azon számottevően nem lehet változtatni pl. szerződési kötelezettség, népgazdasági szükséglet miatt,

— ezen adott kibocsátást minimális földterület igénybevételével célszerű megoldani.

[2] Itt csak a termőföld hasznosítására vonatkozó következtetések szerepelnek.

[3] Ugyanezen összefüggést pontosabban — bár kevésbé szemléletesen fejezi ki a hatványfüggvény görbéje ($Y = aX^b$ ahol $0 < b < 1$) s eszerint az említett két összefüggés függvénye:

$$\log Y = 0{,}3639 + 0{,}867299 \log X$$

$$\log Y = 0{,}51159 + 0{,}78619 \log X$$

E feladat gazdasági értelme: a termelés koncentrációjával megtakarítás érhető el különböző költségekben, s ha van többlet kapacitás, a megtakarított föld is hasznosítható.

A földminimalizálási modell az alábbi:

$$
(3)\qquad
\begin{array}{c|cccc|c}
 & \mathbf{x}_1^* & \mathbf{x}_2^* & \dots & \mathbf{x}_m^* & \\
\hline
\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & & \mathbf{A}_m & \mathbf{b}_1 \\
\hline
\mathbf{u}_2 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right. &
\begin{array}{c} \mathbf{1}^* \\ \mathbf{0}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0}^* \end{array} &
\begin{array}{c} \mathbf{0}^* \\ \mathbf{1}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0}^* \end{array} & &
\begin{array}{c} \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{1}^* \end{array} &
\left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \mathbf{b}_2 \\
\hline
 & & & \mathbf{1}^* & &
\end{array}
$$

Ebben a modellben $\mathbf{x}_1^* \mathbf{x}_2^* \dots \mathbf{x}_m^*$ értelme ugyanaz, mint a (1) alatt jelzett modellben, valamint $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{u}_2$ és $\mathbf{b}_2$ jelölések is megegyeznek az ottanival. Az **A** matrixok azonban eltérnek.

Az **A**-k most diagonális mátrixok, melyeknek koefficiensei azt mutatják, hogy az egyes növények az egyes talajokra mekkora átlagtermést adnak.

Ez a modell is mutat bizonyos hasonlóságot a szállítási feladathoz. Itt is szigorú mennyiségi összefüggés van a sor- és oszlopvektorok között: annyi **A** matrix van, ahány összegező vektor szerepel az $\mathbf{u}_2$ feltételrendszerben (az alsó blokkokban annyi sorvektor van, ahány felső blokk van).

A feladat feltételei:

$$\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}^*, \dots, \mathbf{x}_m^* \geq 0$$

azaz a program a termőföld felhasználására nem adhat negatív eredményt

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m = \mathbf{b}_1$$

e feltételek a kötelező termékkibocsátást tartalmazzák,

$$
\left.
\begin{array}{l}
\mathbf{1}^* \mathbf{x}_1 \\
\mathbf{1}^* \mathbf{x}_2 \\
\cdot \\
\cdot \\
\mathbf{1}^* \mathbf{x}_m
\end{array}
\right\} \leq \mathbf{b}_2
$$

azaz a felhasznált föld nem haladhatja meg a talajfélék szerint rendelkezésre álló mennyiségeket.

A feladat hasonló a szállítási feladathoz, de nem azonos azzal. Ugyanis $\mathbf{b}_1$ értékek és $\mathbf{b}_2$ értékek egészen eltérőek.

Az előbb mint kibocsátási kötelezettség terméktömeget, súly vagy értékmennyiséget, az utóbbi viszont területet jelent. Vagyis:

$$\mathbf{1}^* \mathbf{b}_1 \neq \mathbf{1}^* \mathbf{b}_2$$

összefüggés áll fenn.

A célfüggvény azt tartalmazza, hogy az

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{A}_m\mathbf{x}_m = \mathbf{b}_1$$

egyenlőségben megfogalmazott kibocsátási kötelezettséget hogyan lehet minimális földterületen teljesíteni, azaz

$$Y = -(\mathbf{1}^*\mathbf{x}_1 + \mathbf{1}^*\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{1}^*\mathbf{x}_m) \rightarrow \max!$$

E modellhez még a következő megjegyzések szükségesek:

— Az **A** matrix nem minden esetben szabályosan diagonális, ugyanis lehetséges, hogy valamelyik talajcsoportban néhány termék nem szerepel.

— Valamilyen meggondolásból kiindulva szükségessé válhat még olyan kikötés, hogy előírjuk az elérhető föld-megtakarítást egy meghatározott talajféleségre. Nyilvánvalónak látszik ugyan, hogy a program a megtakarítást a leggyengébb minőségű földeken fogja kimutatni, de ugyanakkor lehetséges, hogy e talajcsoporthoz tartozó területen van már valamilyen létesítmény, vagy a fekvése kedvező és ezért nem kivánatos, hogy éppen itt keletkezzék megtakarítás.

Egy népgazdasági szintű földminimalizálási kísérleti modell

A (2) alatti modellhez hasonló számítások készültek a „Népgazdasági programozás 1966—70" három szektor-modelljének átalakítása és összekapcsolása révén. E számítások és a vele kapcsolatos vizsgálat célja az volt, hogy egyrészt tisztában lássuk a három szektor (zöldségtermesztés, szőlőtermesztés, gyümölcstermesztés) termékeinek a jobb minőségű földekért folyó versenyét: melyik termék melyik földről, melyik terméket szorítja ki, másrészt, hogy mekkora mértékű a megtakarítás a termőföld használatában, végül, hogy egyáltalán lehetséges-e az eredeti modellek átalakításával és összekapcsolásával olyan modell konstruálása, amely alkalmas arra, hogy más kapacitások — pl. szerves és műtrágyák, egyéb vegyszerek, gépek, bérek és munkaerő stb. optimális elosztását kutassa.

A népgazdasági programozás említett három szektorának modellje egyszerűsítve és blokkokra bontva az alábbi volt:

(4)

$\mathbf{x}^*$	$\mathbf{y}_s^*$	$\mathbf{y}_k^*$	$\mathbf{z}_s^*$	$\mathbf{z}_k^*$	
$\mathbf{A}$	$-\mathbf{E}$	$-\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{b}_1$
$\mathbf{B}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_2$
$\mathbf{C}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_3$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_4$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_5$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_6$
$\mathbf{D}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{b}_7$
$\mathbf{0}^*$	$\mathbf{d}_s^*$	$\mathbf{0}^*$	$-\mathbf{d}_t^*$	$\mathbf{0}^*$	b_8
$\mathbf{0}^*$	$\mathbf{0}^*$	$\mathbf{d}_t^*$	$\mathbf{0}^*$	$-\mathbf{d}_t^*$	b_9

E jelek értelme:

$\mathbf{x}^*$ a termelési változók vektora
$\mathbf{y}_s^*$ szocialista export változók vektora
$\mathbf{y}_k^*$ tőkés export változók vektora
$\mathbf{z}_s^*$ szoc. import változók vektora
$\mathbf{z}_k^*$ tőkés import változók vektora
$\mathbf{A}$ belső ellátási feladat matrixának együtthatói
$\mathbf{B}$ anyagfelhasználás matrixának együtthatói
$\mathbf{C}$ földfelhasználás matrixának együtthatói
$\mathbf{D}$ gép és építési felhasználások matrixának együtthatói
$\mathbf{E}$ és $-\mathbf{E}$ egységmatrixok
$\mathbf{0}$ nullmatrixok
$\mathbf{d}_s^*$ és $-\mathbf{d}_s^*$ szocialista export és importvektor
$\mathbf{d}_t^*$ és $-\mathbf{d}_t^*$ tőkés export és importvektor
$\mathbf{0}^*$ nullvektor
$\mathbf{b}_1$ belső ellátási feladat vektora
$\mathbf{b}_2$ anyagfelhasználások korlátainak vektora
$\mathbf{b}_3$ földfelhasználások korlátainak vektora
$\mathbf{b}_4$ szocialista export korlátainak vektora
$\mathbf{b}_5$ tőkés export korlátainak vektora
$\mathbf{b}_6$ szocialista import korlátainak vektora
$\mathbf{b}_7$ gép és építési felhasználások korlátainak vektora
b_8 szocialista devizamérleg
b_9 tőkés devizamérleg

Mivel a földhasznosítás vizsgálata csak azt a problémát állította előtérbe, hogy a már előzetesen, szektoronként optimalizált termelési előírást (belső ellátás és export együtt) lehetséges-e kevesebb föld igénybevételével teljesíteni, nyilvánvaló, hogy nincs szükség a (4) alatti modell valamennyi blokkjára és vektorára. A három szektor modellből (jelöljük a továbbiakban *Z*., *Sz*., *Gy*-vel) ki kellett venni az $\mathbf{A}$ blokkot ($\mathbf{A}^Z$ $\mathbf{A}^{Sz}$ $\mathbf{A}^{Gy}$) továbbá az ezekhez tartozó $\mathbf{b}_1^Z$ $\mathbf{b}_1^{Sz}$ és $\mathbf{b}_1^{Gy}$ korlátvektorokat, továbbá a $\mathbf{C}^Z$ $\mathbf{C}^{Sz}$ és $\mathbf{C}^{Gy}$ földfelhasználási blokkokat, valamint a hozzájuk tartozó $\mathbf{b}_3^z$ $\mathbf{b}_3^{Sz}$ és $\mathbf{b}_3^{Gy}$ földfelhasználási korlátvektorokat.

A vizsgálat két célfüggvénnyel történt: egyszer mint földminimalizálási, s egyszer mint termelési érték maximalizálási feladat. Ez utóbbihoz szükséges volt még a $\mathbf{d}_t^*$ vektorra, a célfüggvényben.

A három modell összekapcsolása során azonban nem arról volt szó, hogy a három eredeti matrix egyes blokkjait átalakítás nélkül lehetett volna összekapcsolni, mert az eredeti és az összekapcsolt modell struktúrája eltért egymástól.[4] Az összekapcsolt modellben a $\mathbf{C}$ blokk az alábbi

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}^* & \mathbf{0}^* & \dots & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{1}^* & \dots & \mathbf{0}^* \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{0}^* & \dots & \mathbf{1}^* \end{bmatrix}$$

[4] A három szektor-modell a földfelhasználási koefficienseket 1 t termék kibocsátásához szükséges földmennyiségben adta, az összekapcsolt modellben viszont 1 egység föld termékkibocsátása szerepelt.

vagyis azonos az (1) és (2) alatti modell alsó blokkjaival. Ennek megfelelően a következő modellt kaptuk:

$$
(5)\qquad
\begin{array}{ccc|c}
\mathbf{x}^{*Z} & \mathbf{x}^{*Sz} & \mathbf{x}^{Gy} & \\
\hline
\mathbf{A}^{Z} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^{Z} \\
\mathbf{0} & \mathbf{A}^{Sz} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^{Sz} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{Gy} & \mathbf{b}_1^{Gy} \\
\hline
 & \mathbf{C} & & \mathbf{b}_3^{Z}+\mathbf{b}_3^{Sz}+\mathbf{b}_3^{Gy} \\
\hline
 & c_1^{*} & & \\
 & c_2^{*} & &
\end{array}
$$

ahol $\mathbf{c}_1^*$ a földminimalizálási célfüggvény, ahol

$$\mathbf{c}_1^* = -\mathbf{1}^*$$

$\mathbf{c}_2^*$ pedig termelési érték maximalizálási célfüggvény, ahol

$$\mathbf{c}_2^* = [\mathbf{d}_t^{*Z}, \mathbf{d}_t^{*Sz}, \mathbf{d}_t^{*Gy}]$$

Az (5) alatti modell hosszú, szalagszerű matrixot adott; méretei: 26 feltétel, 84 változó (segédváltozók nélkül).

A feltételek közül a termékkibocsátási mérlegek száma 19, a földkorlátoké 7, az előzőek $\geq$ az utóbbiak $\leq$ relációban szerepeltek. A földkorlátok $\mathbf{b}_3^Z + \mathbf{b}_3^{Sz} + \mathbf{b}_3^{Gy}$ összegezése azt jelenti, hogy megengedett az egyik szektor földjének másik általi igénybevétele.

Az 1966—70. évi népgazdasági terv szerint a három szektor összesen 565,7 ezer kh területet kapott. Ugyanezen terméktömeg azonban a földek optimális elosztásával 31,7 ezer kh-dal kisebb területen is előállítható, s ez igen tekintélyes mennyiség.

A két célfüggvény szerint optimalizálás eredménye a termékek elhelyezkedése szempontjából nem mutatott eltérést: a $\mathbf{c}_2^*$ célfüggvény hasznosította a $\mathbf{c}_1^*$ célfüggvény eredményében megtakarított földet.

Mindkét optimumban kimutatható a termelés talajfélék szerinti koncentrációjának előnye, valamint tendencia arra nézve, hogy mely termékeket milyen feltételekre célszerű koncentrálni:

— a borszőlőt, ha homoktalajokra kerül, ajánlatos területének kereken 1/7 részén öntözni,

— a zöldségfélék a jobb minőségű középkötött talajokra kerültek,

— az összes paradicsomtermő területnek 87%-át ajánlatos az optimális megoldás szerint öntözni,

— kívánatos, hogy a gyümölcstermesztés is átcsoportosuljon a jobb minőségű földekre.

Az (5) alatti modell csak kísérletül szolgált egy nagyobb terület optimális földhasznosításának vizsgálatához. Ugyanis a termelés ilyen mértékű koncentrációja az egyes talajféléken rendkívüli egyenlőtlenséget idéz elő a jövedelmekben és a foglalkoztatásban az ország egyes tájai között. Hogy ezen a problémán hogyan lehet segíteni, ezt kutatta Bács-Kiskun megye modellje.

Egy megyei modell

Megyei modell szerkesztése rendkívül sok problémába ütközik. Ezek mindjárt a számításokhoz szükséges adatok összeállításánál kezdődnek. A három szektor-modell is és általában az üzemi méreteket meghaladó szintű programozás többéves munkát és sok szakértő közreműködését igényli. Közismert, hogy a jelenlegi statisztikai adatszolgáltatás eredménye alig használható fel közvetlenül a számításokhoz, mert az adatgyűjtés, feldolgozás, csoportosítás és összesítés nem olyan szempontok szerint történik, mint amelyeket a kutatás követel.

Mellőzve a nehézségek okát és természetét,[5] a megye területét 12 részre bontottuk és 17 növénycsoportra vonatkozóan első közelítésként az (3) alatti modellel számoltunk, vagyis a feladat tartalma kötelező termékkibocsátás volt a termőföld minimális igénybevétele mellett. A modell adatai: 29 fel tétel, 179 változó.

A kapott eredményeket nagyjából előre sejtettük. Változatlan termésmennyiség 54 ezer kh termőföld megtakarításával is előállítható. Ez a megye termőterületének 15%-át teszi ki!

Az optimális megoldásban a termékek területi elhelyezkedése természetesen egészen eltér a hagyományostól. A „megtakarított" 54 ezer kh földterület természetesen hasznosítható, bár meg kell jegyezni, hogy ezek a földek éppen a legrosszabb minőségűek.

Az ismertetett modell csak kísérleti jellegű volt. Realizálása lehetetlen, mert a termelés olyan erős koncentrálását ajánlotta, amely mellett megoldhatatlan a munkaerő közelítően egyenletes foglalkoztatása, tovább óriási különbségeket hoz létre a jövedelmekben a megye egyes tájai között.

A megyei vizsgálat lényegét a következő modell alkotta:

$$
(6)\qquad
\begin{array}{c|ccc|c}
 & \mathbf{x}_1^* & \mathbf{x}_2^* \;\ldots & \mathbf{x}_m^* & \\
\hline
\mathbf{u}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \;\ldots & \mathbf{A}_m & = \mathbf{b}_1 \\
\hline
\mathbf{u}_2 & \left\{\begin{array}{c} \mathbf{1}^* \\ \mathbf{0}^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0}^* \end{array}\right. & \begin{array}{c} \mathbf{0}^* \;\ldots \\ \mathbf{1}^* \;\ldots \\ \\ \\ \mathbf{0}^* \;\ldots \end{array} & \left.\begin{array}{c} \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0}^* \\ \\ \\ \mathbf{1}^* \end{array}\right\} & = \mathbf{b}_2 \\
\hline
\mathbf{u}_e & \left\{\begin{array}{c} \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{0} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{0} \end{array}\right. & \begin{array}{c} \mathbf{0}^* \;\ldots \\ \mathbf{K}_2 \;\ldots \\ \\ \\ \mathbf{0} \;\ldots \end{array} & \left.\begin{array}{c} \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0}^* \\ \\ \\ \mathbf{K}_m \end{array}\right\} & \geq \mathbf{b}_e \\
\hline
 & & \mathbf{c}^* & &
\end{array}
$$

[5] A megyei vizsgálat során kitűnt, hogy a szükséges koefficiensek összeállítása sokkal nehezebb, mint a modell megszerkesztése, hogy az előbbi ráadásul hálátlanabb munka, nem „mutatós", mert több hónapi számolás eredménye egyetlen szám.

E modell felső ($\mathbf{u}_1$ és $\mathbf{u}_2$ feltételeket magában foglaló) blokkja azonos a (3) alatti modellel, azonos a megyei vizsgálat első, kísérleti részében alkalmazott modellel. Ez egészült ki az $\mathbf{u}_e$ feltételekkel, amelyeket „korlátok között mozgó jövedelemkiegyenlítő feltételeknek" — röviden egyenlítő feltételeknek neveztük el, amelyeknek eleget kell tenni a következő egyenlőtlenségeknek:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{K}_1\ \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{K}_2\ \mathbf{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{K}_m\ \mathbf{x}_m \end{array}\right\} \geq \mathbf{b}_e$$

A **K** matrixok együtthatói a különböző termékek területegységenkénti hozamát jelentik.

Az „egyenlítő feltételek" természetesen nem azt kívánták, hogy a megyében valóban egyenlő jövedelmek jöjjenek létre. De korlátozni kellett a jövedelmek óriási egyenlőtlenségét. E feltételek hiányában ugyanis az első számítás szerint a legjobb földekkel rendelkező járásokban koncentrálódott például a kertészeti termelés nagy része is, itt a termelési érték a korábbinak több mint kétszeresére emelkedett, más járásokban viszont a réginek a felét sem érte el.

Az „egyenlítő feltételek" korlátvektora $\mathbf{b}_e$ vektor alsó korlátokat adott, s ezzel lehetővé tettük, hogy a jövedelem az egyes járásokban legfeljebb 5%-kal csökkenjen — miközben más járásokban ennél nagyobb mértékben növekedhet. A növekedésnek felső határt nem adhatunk.

Az 5% jövedelemcsökkenés elviselhető nagyságnak tűnik. Mivel az előzetes kísérleti program már elég biztosítékot nyújtott arra, hogy a jövedelmek csökkenése a leggyengébb földekkel rendelkező területeken fog bekövetkezni, ez ösztönözni fogja a mezőgazdasági keresőket arra, hogy ott vállaljanak munkát, ahol jobb földek vannak.

Az „egyenlítő feltételek" számszerű meghatározása nem egyszerűen közgazdasági probléma, hanem elsősorban politikai, szociálpolitikai téma, amelyet rendkívül sok körülmény határoz meg. Például az érintett népesség mozgása, szaporodása, mezőgazdaságon kívüli jövedelmek szerzésének lehetőségei stb.

A megyei modellből fakadó legfőbb következtetések:

1. Az „egyenlítő feltételek" megakadályozták azt, hogy a leggyengébb földekkel rendelkező területeken a jövedelem 5%-nál nagyobb mértékben csökkenjen, de az egész megye termelési értéke mégis kereken 125 millió Ft-tal növekedett.

2. Ha az „egyenlítő feltételekbe" kevésbé erős korlátokat engedünk — pl. 5%-nál nagyobb mértékű jövedelemcsökkenést — az egész megye termelési értéke még nagyobb mértékben nő.

3. Az előzőkből következik, hogy nincs megoldva a gyenge talajok hasznosításának problémája.

(Beérkezett: 1970. II. 10.)

OPTIMUM UTILIZATION OF ARABLE LAND

Increasing yield from a diminishing area of arable land is a necessary concomitant of Hungarian agricultural development. In this process the optimum utilization of disposable arable lands plays great part.

In the study three optimization subjects are reviewed.

1. Agricultural plant model.

There are two possible procedures, viz. optimization of land exploitation in the framework of a complex enterprise development model, or an already optimized product pattern as output obligation built into a land "distribution" model. The latter is similar to the general transport problem with maximum objective function. The calculations reveal the tendency that it is advisable to produce the plants yielding the highest value or profit per area unit on the best soil. This model can also be converted into an area minimization model.

2. Area minimization model on economy-wide level.

The model constructed by linking the land utilization constraints of the 3 agricultural sectors of an economy-wide program, showed a saving of more than 40 thousand acres in vine, vegetable and fruit growing area.

3. County model.

The county model was constructed in two phases. In the first phase, as an area minimization model it saved 15% of the county's arable land but brought about extremely wide differences in income levels between the county's different regions. In the second phase the admissible income differences were restricted. The model allowed at most 5% decrease of incomes in some districts with a 125 million forint increase in production for the county as a whole.

ОПТИМАЛЬНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБРАБОТАННОЙ ЗЕМЛИ

Для венгерского экономического развития характерно достижение возрастающего количества продуктов с убывающего участка земли. В этом процессе имеет большое значение оптимальное использование имеющихся земельных участков.

В статье изложены три темы оптимализации.

1. Производственные модели.

Имеются два возможных метода: оптимализация использования земли в рамках комплексной модели развития предприятия, или уже оптимализированная структура продуктов, включённая в модель «распределения» земли как обязательство по выпуску продуктов. Эта последняя похожа на общую транспортную задачу с максимумом в целевой функции. Расчёты, употребленные в практике, показывают такую тенденцию, что растения, которые дают наибольшую стоимость или наибольшую прибыль, целесообразно выращивать на наилучших участках. Изложенную модель можно преобразовать в модель минимализации земли. В этом случае достижима экономия земли.

2. Модель минимализации земли на уровне народного хозяйства.

Трёхсекторная модель программирования народного хозяйства, сделанная с объединением условий по использованию земли, показала возможность экономии 17 тысяч гектаров на площади, предназначенной для овощей, винограда и фруктов.

3. Областная модель.

Областная модель сделана из двух ступеней. На первой ступени как модель минимализации земли сэкономила 15%-ов площади посевных участков области, но создала огромные расхождения в доходах различных краёв области, на второй же ступени возникновение возможных расхождений в доходах ограничилось. Модель в отдельных районах допустила уменьшения доходов на 5%-ов и при этом в области целиком производство увеличилось на 125 миллионов форинтов.

Bod Péter

Egy további matematikai modell a hosszútávú tervezés összefoglaló munkáihoz

Bevezetés

Az elmúlt évek során több matematikai modell került nálunk kidolgozásra azzal a céllal, hogy a hosszútávú (15—20 éves) népgazdasági tervezés centrális, összefoglaló munkájában felhasználásra kerüljenek [1], [2], [3].

Ezek a különböző modelljavaslatok sok tekintetben egymástól eltérő módon közelítik meg céljukat. Különböznek a tevékenységek megragadásának módjában, a folyó termelés és a fejlesztés (beruházási tevékenység) összekapcsolásának formáiban, a szűkebb értelemben vett újratermelési szféra és a „külvilág" közötti kapcsolatok mikénti megteremtésében, stb. Ugyanakkor természetesen sok a közös, vagy legalábbis közös nevezőre hozható vonásuk. Ez szükséges is, hiszen valamennyi azonos célra irányul; ti. a jelenleg folyó hosszútávú tervmunka makroökonómiai számításokkal való alátámasztására. Ilyen okok miatt az összes említett modell valamilyen formában támaszkodik és kell is, hogy támaszkodjék a hosszútávú tervezés kialakított általános metodikájára és megszervezés alatt levő egységes adatbázisára.

Ismeretes, hogy a népgazdasági tervezés minden fokán komoly elvi és gyakorlati problémát jelent a népgazdaság egyes konkrét részterületeinek fejlesztésére irányuló tervező munka olyan koordinálása és összefoglalása, amely alapján kialakítható a népgazdaság egészének egy konzisztens és hatékony fejlesztési útvonala.

A népgazdasági tervezés eddigi tapasztalatai alapján ma már alig képzeli valaki azt, hogy ilyen terveket lehetséges lenne kizárólag a központi tervező apparátus munkájára támaszkodva kidolgozni. Kialakításra került ezért a hosszútávú tervezés egy sajátos szervezete. A matematikai modellezésnél mindig helyes arra törekedni, hogy a lehetőségek határai között a tényleges folyamatot modellezzük és ezt úgy tegyük, ahogy azt az „élet" teszi. Ez a mi vonatkozásunkban annyit jelent, hogy a hosszútávú népgazdasági tervezés modellrendszere maga is vissza kell, hogy tükrözze azt a körülményt, hogy a hosszútávú terv nem egyszerűen a központi tervező szervek „agyából" pattan ki.

Valamennyi említett modell éppen ezért valamilyen formában gondoskodik arról, hogy az ún. ágazati és az ún. központi tervező munka közötti kommunikációt biztosítsa. E kommunikáció alapjában jelenleg úgy kerül realizálásra, hogy az ágazati fejlesztési koncepciók szolgáltatják majd a központi jellegű számítások céljait szolgáló modellek részére a paraméterek számszerűsítéséhez szükséges információkat. Míg a központi modellek megoldásai támpontokat adnak majd az ágazati koncepciók módosításához.

Ugyanakkor meg kell azonban állapítani, hogy ez a közlekedési lehetőség erősen áttételes. Olyan feltevéseket implikálunk az ágazati információk makroökonómiai célú számításoknál történő integrálásakor, amelyek realitása sok tekintetben vitatható. Az összefoglaló modellek ugyanis nem magukat a konkrét ágazati koncepciókat veszik alapul, hanem azok különböző átlagait. Ez a fogyatékosság mindenekelőtt az összefoglaló modelleknek azzal a közös sajátosságával függ össze, hogy valamennyi kizárólag folytonos tevékenységi változókat tartalmaz.

A modellek folytonos jellege nagyon megnehezíti olyan alternatív ágazati koncepciók népgazdasági szinten történő összehasonlító elemzését, amelyek egymást kizáró jelleggel versengenek. Nem érzékenyek megfelelően modelljeink a „növekvő hozadék'' lehetőségeire pedig feltehető, hogy egy hosszútávú terv keretei között az ilyen jellegű koncepcióknak nagy jelentőségük lehet. Nem nyújtanak modelljeink elég teret arra, hogy az olyan alternatív lehetőségeket egymással szembeállítsuk, amelyek lényegében a 15 év alatt egészében ugyanoda viszik a népgazdaságot, de a kiinduló állapotból a végállapotba más úton jutnak el.

Célszerűnek tűnik ezért, hogy a meglevő és jelenleg kipróbálási stádiumban levő modelljeink sorát megkíséreljük bővíteni olyan további modellekkel, amelyek a fent jelzett szempontok szerint mást és többet is tudnak, mint a meglevők. Nem felesleges talán hangsúlyozni, hogy nem arról van itt most szó mintha a korábban kialakított modellek említett fogyatékosságai nem lettek volna mindjárt kezdetben ismeretesek. Ha adott konkrét feladat megoldására készítünk matematikai modelleket; célszerű mindig számot vetni a megoldhatóság és számíthatóság ténylegesen rendelkezésre álló konkrét lehetőségeivel. Ebből a szempontból (és nem csak ebből) a modellezés mindig kompromisszumos jellegű. Amikor a távlati tervezés céljaira szolgáló első modelljeinket kialakítottuk, abból indultunk ki, hogy kizárólag a lineáris programozás fegyverzetével tudunk dolgozni. Ha arra vártunk volna, hogy a biztonságosan felhasználható fegyvertár már az induláskor szélesebb legyen — évekre el kellett volna halasztani a munka megkezdését.

Az elmúlt évek során a hazai számítástechnikai lehetőségek jelentősen növekedtek és a jövőre vonatkozóan a kilátások lényegesen biztatóbbak, mint két-három évvel ezelőtt. Ez a körülmény bátorít arra, hogy megpróbáljunk olyan fejlettebb elemeket modelljeinkbe beépíteni, amelyek révén az elemzés lehetőségei bővülnek. Miközben továbbra sem vagyunk hajlandók pusztán azért, mert modelljeink természetesen továbbra is kompromisszumos jellegűek maradnak — kockáztatni a megoldhatóság és kezelhetőség reális lehetőségeit.

A továbbiakban ismertetésre kerülő modelljavaslat integer változók igénybevételével igyekszik a problémák egy jobb közelítését adni. Az integer változók segítségül vétele matematikai közgazdasági modellekben, ennek haszna és lehetőségei a matematikai programozási irodalomból ismertek. G. B. Dantzig [4] ezt a kérdést már több mint tíz éve tisztázta és ez ma már egyetemeinken tananyag. Amikor most első ízben javasolunk egy integer változókat is tartalmazó modellrendszert alkalmazni a népgazdasági tervezésben, a szerző hangsúlyozni szeretné, hogy ez már sok mindenkinek korábban is eszébe jutott. Az O. T. távlati tervezési főosztály matematikai modellek osztályának megalakulásakor kialakított programjában mindjárt szerepelt, hogy fel kell készülni integer változókat is tartalmazó modellekkel való munkára. E célkitűzések realizálása irányában szeretnénk most lépni egyet és ezért a szerző itt a maga szerepét csak abban látja, hogy korábban kidolgozott modelljét az alábbiak szerint továbbfejleszti illetve kibővíti.

A modell leírása

A modell matematikai szempontból egy több periódusra vonatkozó, folytonos és $\{0, 1\}$ egész értékű változókat tartalmazó, lineáris feltételekkel és lineáris célfüggvénnyel működő programozási feladatra vezet. Azzal a kiegészítő megjegyzéssel, hogy bizonyos paraméterei (meghatározott változók együtthatóvektorai) nem megadott számértékek, hanem ezek az együttható vektorok egy lineáris feltételrendszerrel megadott konvex poliedrikus halmazból szabadon választhatók. A modell ebben a vonatkozásában a Wolfe-féle ún. általánosított lineáris programozási feladatok családjába esik [5].

A modell abból az alapszituációból indul ki, hogy hosszútávú ágazati tervezés folyik és a tervező ágazatok egymástól függetlenül fejlesztési koncepciókat dolgoznak ki. Minden ágazat homogén (nem szükségképpen termelő) tevékenységet folytat. Az ágazatok két csoportba vannak sorolva: kombinálható fejlesztési lehetőségekkel rendelkező és kizárólag alternatív fejlesztési lehetőségekkel rendelkező ágazatokra. Az ágazatok száma: n és a terv N egyenlő hosszúságú periódusra oszlik.

Az ágazatok kiinduló helyzetét a tervidőszak elején a bruttó tevékenységi szintjükre vonatkoztató kapacitásaik: $\mathbf{k}_0$ és a népgazdaság induló készletei jellemzik: $\mathbf{s}_0$.

Az ágazati fejlesztési koncepciók: teljes tervidőszakra szóló fejlesztési előirányzatok. Feltételezzük, hogy minden periódusban, minden koncepció alapján, olyan fejlesztés történik, amelynek a hatása a következő periódusban kapacitásnövekedés és (illetve) technológiai változás formában azonnal életbe lép. Minden egyes fejlesztési koncepció az ágazati tervezés keretében kidolgozott alábbi adatokkal kerül jellemzésre:

a) a teljes tervidőszak alatt a koncepció alapján belépő új kapacitások nettó nagysága (belépő-selejtezett kapacitások);

b) az a) alatt tervezett kapacitásnövekedés időbeni lefutásának előirányzatai;

c) a különböző időszakokra a) és b) szerint tervezett fejlesztési intézkedések egyszeri ráfordításigényei;

d) az ágazati tevékenységnek a koncepció alapján mutatkozó folyó ráfordítási együtthatói minden egyes tervperiódusban.

Az ágazati tervvariánsokat a modell kizárólag fejlesztési koncepcióként fogja fel — annak ellenére, hogy azok kidolgozásakor a tevékenységek mérete is megtervezésre kerül.

A modell változókként kezeli a tevékenységek színvonalát minden egyes tervperiódusban, valamint dönt az ágazati koncepciók elfogadását illetően. Az ágazati variánsok ún. „keverhető" osztályában a koncepciók tetszőleges, nem negatívan súlyozott átlaga is lehetséges, beleértve valamennyi elvetését. Az egymást kizáró variánsok közül azonban a modell legfeljebb egy alternatív variáns érvényesülését engedi meg. Ez utóbbi esetben a megvalósuló variáns teljes egészében megvalósításra kerül az ágazat szerinti időbeni ütemezésnek megfelelően. A modell ilyen alapon történő megoldása után a nyert optimális megoldás programja szerint rögzítjük az egész értékű változók értékeit. Azok megszűnnek a továbbiakban ismeretlenek lenni — ezzel szemben ismeretleneknek tekintjük a keverhető koncepciók időbeni lefutására vonatkozó tervelőirányzatokat és megvizsgáljuk, hogy nem lehet-e, azok megengedett határok között történő módosítása révén, a tervet tovább javítani. Mivel a modellben ágazatként szerepelnek nem termelő tevékenységű területek is — ez a vizsgálat a gazdaságpolitikai koncepciók elemzésének hasznos eszköze lehet.

A modell feltételrendszere sok tekintetben azonos a [2] alatt leírt modellünkével. A különbség főként a fejlesztés kezelésében van. Ott folytonos ágazati fejlesztési változók fejezik ki minden időszakra a kapacitás bővítését; ezek egyetlen átlagos típusú fejlesztésnek felelnek meg, és az átlagolás a modellen kívül történik. Ebben a modellben az átlagolást, illetve a kiválasztást az optimalizálási eljárás végzi el. Mivel a különböző fejlesztési variánsok — feltevésünk szerint — különböző technológiai következményekkel járnak — a modellben a tevékenységi változók is technológiánként meg vannak különböztetve. Így ebben a tekintetben modellünk hasonlít a [3] alattihoz, amelyben szintén több technológiai alternatíva szerepel.

Ebben a cikkben nem ismételjük meg azokat a megállapításokat, amelyeket a hosszútávú népgazdasági tervezésben alkalmazható modelekkel kapcsolatban különös tekintettel a felhasználás jellegére a [2] alatti cikkünkben kifejtettünk. Az ott mondottakat továbbra is teljes egészükben fenntartjuk és itt csak utalni szeretnénk ismét rá, hogy természetesen ez a modell is a gazdaságpolitikai kísérletezés eszköze és nem célozza a népgazdaság valamiféle egyértelműen „optimális" hosszútávú programjának kiszámítását, mert ilyen program létezésében a szerző maga nem hisz.

A modell formális ismertetése

A modellben N periódusra vizsgáljuk a népgazdaság homogénnek tekintett n ágazata megvalósítható, konzisztens fejlesztési lehetőségeit: ágazati koncepciók alapján.

Minden ágazat $K_j^{(1)}, K_j^{(2)}, \ldots K_j^{(k_j)}$ fejlesztési variánst dolgoz ki.

$$j \in J = \{1, 2, \ldots, n\}$$

Az ágazatok egy részében ($j \in J_1$) a különböző koncepciók tetszőlegesen keverhetők. A többi ágazatban ($j \in J_2$) az alternatív koncepciók egymást kizárják. Feltesszük, hogy

$$J_1 \neq \Phi;\ J_2 \neq \Phi;\ J_1 \cup J_2 = J \text{ és } J_1 \cap J_2 = \Phi$$

Ezek a feltevések célszerű ágazati agregációval mindig biztosíthatók.

Adott ágazat $K_j^{(l)}$ koncepcióját a modellben a $\xi_j^{(l)}$ változó reprezentálja. Ezekre

(1) $$0 \leq \xi_j^{(l)} \leq 1;\ j \in J \text{ és } l = 1, 2, \ldots, k_j,$$

valamint

(2) $$\xi_j^{(l)} \in \{0, 1\};\ \forall j \in J_2\text{-re}$$

A j-ik ágazat összes variánsát a ξ_j: k_j elemű vektor fejezi ki. Az alkalmazott szimbólumok számának csökkentése érdekében jelölje $K_j^{(l)}$ egyúttal azt az új nettó kapacitást, amely legkésőbb az N-ik periódusban elkészül, ha a $K_j^{(l)}$ fejlesztési variáns teljes egészében megvalósításra kerül, vagyis, ha: $\xi_j^{(l)} = 1$. Az ágazat megadja egy $\varkappa_j^{(l)}$: N elemű vaktorral, hogy teljes kivitelezés esetén a t-ik ($t = 1, 2, \ldots, N$) periódusban milyen méretű fejlesztést szándékozik megvalósítani. A $\varkappa_j^{(l)}$ vektor tehát abszolút nagyságokat tartalmaz. A vektornak lehetnek zérus elemei is, de mindenképpen teljesülnie kell az

$$(3)\qquad \mathbf{1}^{*}\varkappa_j^{(l)} = K_j^{(l)}$$

azonosságnak (ahol $\mathbf{1}^{*}$ a megfelelő méretű összegező vektor); valamint a $\varkappa_j^{(l)} \geq \mathbf{0}$ egyenlőtlenségnek, mert ágazati szinten való visszafejlesztés nem látszik indokoltnak és így nem érdemes a nem negativitástól eltekinteni.

A $\varkappa_j^{(l)}$ vektor minden eleméhez egy n elemű egyszeri ráfordítási mennyiségeket kifejező vektor tartozik: $\mathbf{b}_j^{(l)}(t)$.

Ez a vektor nem fajlagos ráfordításokat tartalmaz, hanem a szóban levő $K_j^{(l)}$ koncepció teljes kivitelezése esetén a t-ik periódusban lekötésre kerülő eszközök volumenét. A j-ik szektor valamennyi fejlesztési variánsára kialakított vektorok minden periódusban egy $(n\times k_j)$ méretű matrixot alkotnak:

$$(4)\qquad \mathbf{B}_j^{(t)} = [\mathbf{b}_j^{(1)}(t);\ \mathbf{b}_j^{(2)}(t);\ \ldots\ \mathbf{b}_j^{(kj)}(t)]$$

Míg a népgazdaság egészére periódusonként az alábbi beruházási matrix áll össze:

$$(5)\qquad \mathbf{B}^{(t)} = [\mathbf{B}_1^{(t)};\ \mathbf{B}_2^{(t)};\ \ldots\ \mathbf{B}_n^{(t)}]$$

A beruházási ráfordításokat a „keverhető" alternatívák osztályában a tényleges kivitelezési szintekkel arányosaknak tekintjük, a nem „keverhető" alternatívák esetében ez a kérdés nem merül fel.

A fejlesztési akciók eredményeként létrehozott kapacitásokon, akár csak a tervidőszak kezdetén meglevő induló kapacitásokon ágazati tevékenység folyik. A t-ik periódusban a j-ik ágazat $\mathbf{x}_j^{(t)}$ méretű tevékenységet fejt ki, ahol $\mathbf{x}_j^{(t)} : k_j$ komponensű vektor. E tevékenységek alapján a szektor teljes bruttó tevékenysége a t időszakban

$$(6)\qquad \mathbf{1}^{*}\mathbf{x}_j^{(t)}$$

ahol $\mathbf{1}^{*}$ megfelelő rendű összegező vektort jelöl. Az $\mathbf{x}_j^{(t)}$ vektor különböző komponensei a $K_j^{(1)}; K_j^{(2)}; \ldots K_j^{(kj)}$ variánsoknak megfelelő kapacitásokon megvalósuló, különböző technológiai szerkezetű, de azonos outputú tevékenységeknek felelnek meg. Mindezekhez az azonos outputú tevékenységekhez periódusonként különböző ráfordítási együtthatók tartoznak, amelyek szintén az ágazati tervezés során kerülnek meghatározásra. Jelöljük az ezek alkotta $(n\times k_j)$ méretű matrisokat

$$(7)\qquad \mathbf{A}_j^{(t)} = [\mathbf{a}_j^{(1)}(t);\ \mathbf{a}_j^{(2)}(t);\ \ldots\ \mathbf{a}_j^{(kj)}(t)]$$

-val. A t-ik periódusra vonatkozó szektormatrixokat egyesítve nyerjük a népgazdaság folyó tevékenységi szerkezetét tükröző technológiai matrixot:

$$(8)\qquad \mathbf{A}^{(t)} = [\mathbf{A}_1^{(t)};\ \mathbf{A}_2^{(t)}:\ \ldots\ \mathbf{A}_n^{(t)}]$$

A változók kényelmesebb jelölése érdekében vezessük be a következő összefoglaló változókat:

$$(9)\qquad \mathbf{X}^{(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{(t)} \\ \mathbf{x}_2^{(t)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^{(t)} \end{bmatrix};\quad \Xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

Látható, hogy a fenti vektorok rendre $\sum_{j=1}^{n} k_j$ komponenst tartalmaznak.

Használni fogjuk a következő operátort:

$$(10) \qquad \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_1^* & \mathbf{0}^* & \mathbf{0}^* & \dots & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{1}_2^* & \mathbf{0}^* & \dots & \mathbf{0}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{0}^* & \mathbf{0}^* & \dots & \mathbf{1}_n^* \end{bmatrix} : \left(n \times \sum_{j=1}^{n} k_j\right)$$

méretű matrix, amelyben az $\mathbf{1}_j^*$ szimbólum k_j elemű összegező vektort jelöl.

Tekintsük az összes $\varkappa_j^{(l)}$; $(j = 1, 2, \dots, n)$; $(l = 1, 2, \dots k_j)$ vektort. Válasszuk ki valamennyi t-ik komponensét $(t = 1, 2, \dots N)$ és foglaljuk össze ezeket az elemeket egy $\mathbf{K}_j^{(t)}$ vektorban. Ez a vektor $\sum_{j=1}^{n} k_j$ komponenst tartalmaz és komponenseit az Ξ vektor megfelelő komponenseivel szorozva megkapjuk $(t+1)$-ik periódusban belépő különböző új kapacitások nagyságait. A megfelelő műveletek elvégzéséhez szükségünk van a $\mathbf{K}_j^{(t)}$ vektorokból képezhető diagonális matrixokra: $\langle \mathbf{K}_j^{(t)} \rangle$.

Alkalmazzuk még a következő változókat — ugyanúgy, mint a [2] alatt ismertetett modellben:

$\mathbf{y}^{(t)}$: a lakosság fogyasztása a t-ik periódusban; $\mathbf{z}^{(t)}$: közületi fogyasztás a t-ik periódusban; $\mathbf{s}^{(t)}$: évvégi záró készletek a t-ik periódusban; $\mathbf{e}_s^{(t)}$; $\mathbf{e}_k^{(t)}$; $\mathbf{i}_s^{(t)}$; $\mathbf{i}_k^{(t)}$: külkereskedelmi tevékenységek a t-ik periódusban.

Az eddigiekben bevezetett jelölések segítségével most már megfogalmazhatjuk a társadalmi újratermelés legfontosabb belső összefüggéseit kifejező mérlegrendszert minden periódusra:

$$(11) \qquad \mathbf{s}^{(t-1)} + \hat{\mathbf{E}}\,\mathbf{X}^{(t)} = \mathbf{A}^{(t)}\mathbf{X}^{(t)} + \mathbf{B}^{(t)}\Xi + \mathbf{i}_s^{(t)} + \mathbf{i}_k^{(t)} - \mathbf{e}_s^{(t)} - \mathbf{e}_k^{(t)} + \mathbf{y}^{(t)} + \mathbf{z}^{(t)} + \mathbf{s}^{(t)}$$

$$(t = 1, 2, \dots, N)$$

A társadalmi termékmérlegeknek ez a legegyszerűbb formájuk. Szükségünk lesz azonban egy olyan alakjukra is, amelyben a koncepciók időben lefutását meghatározó paraméterek explicit formában is szerepelnek. Ezt a következő módon érhetjük el:

$$(12) \qquad \mathbf{B}^{(t)} = \mathbf{B}^{(t)}\langle \mathbf{K}^{(t)} \rangle^{-1} \langle \mathbf{K}^{(t)} \rangle = \overline{\mathbf{B}}^{(t)} \langle \mathbf{K}^{(t)} \rangle$$

ahol

$$(13) \qquad \overline{\mathbf{B}}^{(t)} = \mathbf{B}^{(t)} \langle \mathbf{K}^{(t)} \rangle^{-1}$$

Tartalmilag ez annyit jelent, hogy a beruházási matrixból is fajlagos együttható matrixot készítünk. Ezáltal a termékmérlegben

$$(14) \qquad \overline{\mathbf{B}}^{(t)} \langle \mathbf{K}^{(t)} \rangle\, \Xi$$

jelenik meg

$$(15) \qquad \mathbf{B}^{(t)}\,\Xi$$

helyett.

A termékmérlegnek ezt a módosított alakját használjuk majd akkor, ha a keverhető tevékenységű szektorokban a $\varkappa_j^{(t)}$ elemeit változókként fogjuk kezelni.

Tételezzük fel, hogy az egymással keverhető kapacitások összegezhetők és együttesen képezik az ágazati tevékenységek korlátait. Ez a feltevés nem teljesen kifogástalan, hiszen minden koncepciós variáns alapján tulajdonképpen más és más technológiával folyó termelés valósul meg. Azonban minden kapacitás különvaló kezelése esetén periódusonként $\sum_{j=1}^{n} k_j$ darab kapacitásmérleggel kellene számolni, amit a fenti feltevéssel periódusonként n egyenletre szorítunk le. A t-ik periódus kapacitásmérlege a következő:

$$\hat{\mathbf{E}}\,\mathbf{X}^{(t)} + \mathbf{v}^{(t)} = \mathbf{k}_0 + \hat{\mathbf{E}}\left(\sum_{i=1}^{t-1} \langle \mathbf{K}^i \rangle\right) \Xi \tag{16}$$

ahol $\mathbf{v}^{(t)}$: n elemű vektor a ki nem használt ágazati kapacitások összegét jelöli.

A szektorvariánsokra a következő feltételek állanak fenn:

$$\mathbf{1}^* \xi_j \leq 1 \quad \forall j \in J \tag{17}$$

A modell feltételrendszerének legfontosabb elemei ezzel össze vannak állítva. A korábbi modellünkhöz hasonlóan itt is szükség van még bizonyos további feltételekre, amelyek a szűkebb értelemben vett újratermelési szférát a külvilág modellen kívül becsült adottságaival köti össze. Ilyen korlátok a periódusonként megadott fizetési mérlegek és az ún. külső feltételekre vonatkozó és szintén periódusonként definiált feltételek. Ezekről azonban itt nem érdemes tovább beszélni, mert működésük teljesen azonos a [2] alatt ismertetett modellbeli működésükkel. Ezekben a feltételekben ugyanis fejlesztéssel kapcsolatos változók nem szerepelnek és ezért jelenlétük semmiféle külön problémát sem jelent, a méretek növekedésén kívül.

A modell működése

A modell lényege a feltételrendszer. Minden e rendszernek eleget tevő megoldás egy-egy népgazdaságilag konzisztens realizációja bizonyos ágazati koncepciók összességének.

Az ilyen értelemben konzisztens tervvariánsok generálása különböző célfüggvények alapján történő optimalizálással megy végbe, miközben a korlát paramétereket is változtatjuk. Technikailag pontosan úgy járunk el, mint a [2] alatti modell esetében.

Jelen esetünkben azonban nem egyszerűen egy lineáris programozási feladatot kell ismételten megoldanunk, hanem egy folytonos és kétértékű {0, 1} változókat tartalmazó modellt. A modellben periódusonként szerepel

$\sum_{j \in J} k_j$ termelési változó

$2n$ fogyasztási változó

$4n$ külkereskedelmi változó

n készletváltozó
n kapacitáskihasználási változó

Ezen felül $\sum_{j \in J} k_j$ számú 0 és 1 között korlátozott változónk van még, amelyek közül $\sum_{j \in J_1} k_j$ folytonos és $\sum_{j \in J_2} k_j$ diszkrét értékű. A változók teljes száma tehát (pót- és mesterséges változók nélkül)

$$N \left(8n + \sum_{j=1}^{n} k_j\right) + \sum_{j=1}^{n} k_j$$

A modellben minden időszakra

$$2n + m + 2$$

feltétel szerepel (ha m jelöli a ,,külső'' korlátok számát). Ezeken kívül n feltételt jelentenek a (17) alatti korlátok és $\sum_{j \in J_1} k_j$ (1) típusú felső korlát szerepel még. A feltételek száma összesen

$$N(2n + m + 2) + n + \sum_{j \in J_1} k_j$$

A hosszútávú tervezés jelenleg kialakult agregációs szerkezete szerint $n \approx 40$. Ha 10 olyan szektort tételezünk fel, amelyekben nem keverhetők a koncepciók és szektoronként átlag 4 tervkoncepcióval számolunk, akkor 40 kétértékű változónk lesz. A modell teljes méretét alapjában N dönti el. Ha minden évet reprezentálni akarnánk, akkor a modell a jelenlegi számítástechnikai lehetőségeinket biztosan meghaladja. $N = 4$ mellett a méretek kezelhetőnek tűnnek, ha rendelkezünk olyan gépi kóddal, amely a $40 : \{0, 1\}$ típusú változót — amelyek 10 változó csoportban úgy vannak korlátozva, hogy minden csoportban a változók összege legfeljebb 1 —, megfelelően figyelembe tudja venni. Ilyen típusú feladat megoldására alkalmas gépi kódok kidolgozás alatt állnak.

Nehezebb számítástechnikai problémát jelent a modell második fázisban való működtetése. Amikor is azt vizsgálnánk, hogy a különböző ágazati tervjavaslatok időbeni ütemezésének módosítása milyen további tartalékokat rejt magában. Ezt a vizsgálatot az teszi lehetővé, hogy az ütemezést adó $\varkappa_j^{(l)}$ paraméterek kizárólag a $\xi_j^{(l)}$ változó együttható oszlopvektorában ($P_j^{(l)}$) jelennek meg. Más szóval, $\xi_j^{(l)}$ együtthatói a $\varkappa_j^{(l)}$ vektor N számú komponensének lineáris függvényei. Minden $\varkappa_j^{(l)}$ vektorhoz meg lehet adni olyan korlátokat, amelyek a gazdaságilag és műszakilag megvalósítandó követelményeket fejezik ki a szóban levő variáns időbeni kivitelezésével összefüggésben. Ezek a feltételek $P_j^{(l)}$ számára egy konvex poliedrikus halmazt határoznak meg és (3)-nak mindenképpen teljesülnie kell — ezért $P_j^{(l)}$ egy konvex poliéderből szabadon választható. Ezzel azonban egy [5] alatt ismertetett ún. ,,általánosított lineáris programozási'' feladatra jutunk. Ha azt mondjuk, hogy $|J_1| \approx 30$, akkor a $\{0, 1\}$ változók értékének rögzítése után kb. 30 szubprogramot kell a feladathoz csatolni. Bár ezek kisméretű feladatok — az egész rendszer gépi megoldási algoritmusának a kidolgozása további feladatot jelent. Megjegyezzük ugyanakkor, hogy a népgazdasági programozási célokra felhasználásra kerülő lineáris programozási gép kódokat a jelen modell igényeitől függetlenül is érdemes alkalmassá tenni arra, hogy képes legyen változónak tekintett együtthatókkal is dolgozni. Mint ezt [5]-ben megmutattuk — ezáltal számos — a jelenlegi modelljeinkben elnagyoltan megoldott — probléma válik jobban megközelíthetővé.

(Beérkezett: 1970. június 1.)

IRODALOM

1. Augustinovics, M.: Egy hosszútávú modellsorozat. Szigma, 1970. I. 3—22. o.
2. Bod, P.: A népgazdaság hosszútávú (15—20 éves) tervezésének egy lehetséges matematikai modelljéről. Szigma, 1969. 59—66. o.
3. Ujlaki, Zs.: Hosszútávú összevont (B_2) programozási modell. Szigma, 1969. 299—312. o.
4. Dantzig, G. B.: On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables. Econometrica, 1960. pp. 30—44.
5. Bod, P.: A Wolfe-féle ún. „általánosított lineáris programozásról". Szigma, 1969. 127—136. o.

A FURTHER MATHEMATICAL MODEL FOR THE COMPREHENSIVE WORK OF LONG-RANGE PLANNING

In the past few years several mathematical models have been worked out in Hungary for use in the comprehensive work of long-range (15 to 20 years) economy-wide planning [1], [2], [3].

In this article the author presents an improved version of his model described under [2]. Also this model is to serve as a means for the working out and for the comparative analysis of the different consistent long-range plan variants of national economy.

The model represents the activity of n (not exclusively producing) sectors of the national economy during N plan periods of equal lengths. The most important inner and outer conditions of enlarged reproduction are expressed in every period by n activity balances, n capacity balances, a certain number of bounds affecting outer resources, and by two balances of payment. The conditions work with coefficients assumed as constant over time.

The model starts on the assumption that in the course of sectoral planning each sector works out different perspective development variants for its own activity. The model divides the sectors in two large groups: those sectors whose development variants may be combined with each other and those whose development variants compete for being accepted excluding the others. Accordingly, in all sectors the variants are represented by a so-called development variable, each. The latter are such non-negative variables whose value ranges between 0 and 1. For each sector the sum of the development variables cannot surpass the value 1. The non-combinative development variables must take integer values, i.e. 0 or 1.

Development variables concern the whole of the sectoral development propositions. Every development variable is accompanied by a schedule vector given by the sector, which will show the proportion of the planned development to be realised in each plan period. The activities outside the development (production, consumption, foreign trade, storing, capacity idling, etc.) are described in the model by continuous variables defined for each period.

In this way the model can be treated as a linear programming problem containing both continuous and 0—1 integer variables. In the basic calculations parameters are considered given. In the course of further calculations the components of vectors expressing the schedules of sectoral development variables will be considered unknown, instead of given and these can be freely changed subject to linear constraints. In this form the model is a sort of Wolfe's „generalized linear programming" problem and can be solved accordingly.

ДАЛЬНЕЙШАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ К СВОДНЫМ РАБОТАМ ДОЛГОСРОЧНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

В течение последних лет в Венгрии вырабатывали несколько математических моделей для употребления в сводных работах долгосрочного (15—20 лет) народнохозяственного планирования (1), (2), (3).

В настоящей статье автор излагает усовершенствованный вариант своей модели, опубликованной в (2). Целью и этой модели является то, чтобы с её помошью возможно было выработать и сравнительно анализировать различные варианты сходимого долгосрочного народнохозяйственного плана.

Модель представляет собой деятельность n (необязательно только производительного) сектора народного хозяйства в течение N одинакового периода планирования. Наиболее важные внутренние и внещние условия расширенного воспроизводства в каждом периоде выражаются в n балансах деятельности, в n балансах мощности, в нескольких условиях на внешних источниках и в двух балансах платежа. Условия действуют с коэффициентами, которые считаются постоянными для каждого периода.

Модель исходит из пердположения, что идёт отраслевое планирование и каждая отрасль вырабатывает различные варианты долгосрочного развития относительно своей пеятельности. Модель разделяет отрасли в две большие группы: на отрасли, варианты развития которых можно осуществить комбинируя их между собой и на отрасли, варианты развития которых соревнуются за принятие, исключая друг друга. В соответствии с этим в модели каждый варнант каждой отрасли представляет так называемые переменные развития. Переменные развития являются такими не негативными переменными, значение которых может меняться от 0 до 1. Для каждой отрасли сумма переменных развития, соответствующих ими вариантами, не может быть больше 1-ы. Для переменных развития тех вариантов, которые нельзя комбинировать друг с другом, кроме этого ещё ставится условие целочисленности.

Переменные развития относятся ко всей системе отраслевых вариантов развития. Для каждой переменной развития имеется вектор темпа, который задается соответствующей отраслью и который показывает, что в отдельных периодах планирования какая часть планируемого развития осуществилась бы. Деятельности, кроме развития (производство, потребление, внешняя торговля, накопление запасов, недостаточное использование мощности и т. д.), модель описывает непрерывными переменными, которые определяются в каждом периоде.

Таким образом модель может быть употреблена как задача линейного программирования, содержащая непрерывные или целочисленные (со значением 0 или 1) переменные. В предварительных расчётах считаем, что параметры модели известные. В последующих расчётах компоненты векторов — выражающих темпы отраслевых вариантов развития, которые считались непрерывными — вместо заданных величин считаем неизвестными, которые, внутри некоторых ограничений, заданных определёнными линейными условиями, свободно можно изменять. В этой своей форме модель является так называемой „обобщённой задачей линейного программирования", задачей Вольфа и в соответствии с той можно решить её.

Szabó István—Szolnoky Antal

Az ERALL-2 hálótechnikai algoritmus

1. Bevezetés

A hálótechnikai módszerek alkalmazása rohamosan terjedt el az egész világon, elsősorban nagy vállalkozások szervezésénél és egyedi termékek, így építőipari termékek gyártásának programozásánál. Már kezdetben nyilvánvalóvá vált, hogy a hálótechnikai módszerek a naptári ütemtervek készítésénél, a koordinációs kapcsolatok felderítésénél a műszaki és gazdasági vezetésnek könnyen elsajátítható és hatékony eszközei.

A kezdeti alkalmazásoknál ugyanakkor kiderült, hogy nem elegendő a hagyományos CPM, illetőleg PERT matematikai apparátus használata. A *műszaki* kritikus út mellé belépett a *gazdasági* kritikus út fogalma. Egyáltalában nem bizonyos, hogy figyelmünket a műszaki kritikus útra kell fordítani, azaz arra az útra, amelyen a feladat megkezdésétől a feladat befejezéséig összességükben a leghosszabb időigényű tevékenységek feküsznek. Amennyiben feladatunkat korlátos erőforrásokkal kell megvalósítanunk — és a gyakorlatban mindig ez a helyzet —, nagyon gyakori, hogy a műszakilag párhuzamosan végezhető tevékenységeknek csak egy részét tudjuk egyidejűleg — vagy a kívánt intenzitással — erőforrásokkal kielégíteni és figyelmünket a műszaki kritikus útról a domináló gazdasági kritikus útra kell fordítani. A gazdasági kritikus út a műszakitól időről időre eltérhet, hol az egyik erőforrás, hol a másik válik szűkössé.

Akár arra keresünk választ, hogy szűkös erőforrásainkkal mikorra tudjuk feladatunkat teljesíteni, akár arra, hogy mikor és milyen erőforrásokat kell kibővítenünk a befejezés előrehozatalához, az erőforrások korlátossága erősebben hathat ki tervünkre, mint a műszaki kritikus út.

Különösen fontos tehát az erőforrások matematikai kezelése munkaerőhiánnyal küzdő társadalmunkban. De világszerte egyre nagyobb figyelmet fordítanak erre a kérdésre, és ez vezetett az erőforrásokat allokáló módszerek kidolgozásához. Az eddig kidolgozott módszerek mind hálótechnikára támaszkodó heurisztikus eljárások és még nem ismerünk olyan matematikai módszert, amely e kérdést a gyakorlatban egzaktul megoldaná.

Mi ennek az oka? A probléma elméletileg egzakt algoritmussal is megoldható, algebrai struktúrákként felírható. Miért alakultak ki mégis az egzakt matematikai módszerek helyett heurisztikus, illetőleg szimulációs eljárások? Két okot említhetünk:

1. A feladat típusát tekintve nem ismerünk olyan egzakt módszert, mely közös feltételekkel összekötött, de gazdasági célkitűzéseiben eltérő optimálási feladatokat old meg egyidejűleg. Pl. egy építőipari vállalat termelésének átfogó programozásánál közös feltételrendszert képeznek az erőforrások. Ugyanakkor a vállalat több száz terméknél más-más gazdasági célt tűzhet ki, mint például

— egyes objektumok rohamütemben készüljenek,
— egyes objektumok az előírt befejezési határidőre készüljenek el,
— egyes objektumok minimális költséggel létesüljenek,
— egyes objektumok egyenletesen vegyék igénybe az erőforrásokat.

2. A másik ok, ami miatt heurisztikus eljárásokat dolgoztak ki, gazdasági természetű. Többek között:

a) A memóriaigény kérdése.

Heurisztikus algoritmus esetén kevés információból eldönthető, hogy a lebegéssel bíró tevékenységek elhelyezhetők-e és ezért kicsi a memóriaigény.

Egzakt eljárás esetén az összes lehetséges elhelyezési variánst, illetőleg azok képzési szabályait inputként kellene kezelni. Ennek amúgy is nagy memóriaigénye még többszöröződik a megvalósítási intenzitások variánsaival is.

b) A számítási idő kérdése.

Heurisztikus eljárásoknál az iterációk száma előre jól meghatározható, és általában egyenlő a programozási időegységek számával.

Egzakt eljárásoknál az iterációk száma nehezen becsülhető, de az bizonyos, hogy sok nagyságrenddel nagyobb.

Bár összehasonlításra a gépidő-szükséglet szempontjából — tudomásunk szerint — még nem került sor, nyilvánvaló, hogy ha rendelkeznénk is egzakt eljárással, alkalmazása nem lenne gazdaságos.

Ilyen heurisztikus módszer az ERALL-2 nevű eljárás, melyet elsősorban az építőipar számára dolgoztunk ki. Ez matematikailag egy szélsőértékszámítási feladat, melyben a tevékenységek olyan ütemezését (az erőforrások időbeli elosztását) keressük, amelyik minimálissá teszi a teljes átfutási időt és egyben figyelembe veszi az adott szervezet erőforrásainak korlátozottságát. Az eljárást a gyakorlatban már hosszabb ideje alkalmazzák, de eddig csak a speciális gépi program korlátainak figyelembevételével publikáltuk [3].

Felmerült az igény az eljárás olyan leírására, mely a feladat matematikai modelljét és megoldó algoritmusát a gépi megoldástól függetlenül ismerteti. Ezzel foglalkozunk cikkünk további részében.

2. Hálótechnikai bevezető

A háló fogalma az algebra elemeiből jól ismert. Az ERALL-eljárás a hálók egy speciális osztályára épül, ezért legelőször ennek ismertetésével foglalkozunk.

2.1. Legyen P' egy $(n+1)$-elemű részben rendezett halmaz, s jelöljük ennek elemeit a $0, 1, \ldots, n$ számmal, azaz $P' = \{0, 1, \ldots, n\}$. A részleges rendezést megszabó relációt nevezzük „közvetlen megelőzési reláció"-nak; legyen a jele: $\leqslant$. E közvetlen megelőzési reláció a következő három tulajdonságnak tegyen eleget:

2.1.1. Semelyik $w \in P'$ elemre nem igaz a következő két állítás egyike sem: $w \leqslant 0$, $n \leqslant w$.

2.1.2. Bármely $w \neq 0$ $(w \in P')$ elemre igaz, hogy
vagy $0 \leqslant w$,
vagy létezik egy vagy több w_i elem $(w_i \in P')$, hogy $0 \leqslant \ldots \leqslant w_i \leqslant \ldots \leqslant w$, és hasonlóan bármely $w \neq n$ $(w \in P')$ elemre igaz, hogy vagy $w \leqslant n$, vagy létezik egy vagy több w_j elem $(w_j \in P')$, hogy $w \leqslant \ldots \leqslant w_j \leqslant \ldots \leqslant n$.

2.1.3. Egyetlen $w \in P'$ elemhez sem találunk olyan w_k ($w_k \in P'$) elemeket, hogy $w \leqslant \ldots \leqslant w_k \leqslant \ldots \leqslant w$ fennálljon.

2.2. A 2.1.1.–2.1.3. feltételeket kielégítő P' halmazt „*kaszkádszerű háló*"-nak, elemeit *esemény*eknek nevezzük.

Válasszuk meg i-t és j-t ($i \in P', j \in P'$) úgy, hogy $i \leqslant j$ esetén $i < j$ legyen. Könnyen belátható, hogy a 2.1.1.–2.1.3. teljesülése esetén ez (nem feltétlenül egyértelműen) mindig megvalósítható. Az ily módon két különböző számhoz tartozó $<$ reláció tranzitív és így a hálóaxiómák teljesülnek.

Legyen $i \in P'$, $j \in P'$, továbbá $i \leqslant j$. Tekintsük az (i, j) alakú elempárok halmazát; legyen ez P. (P-re tehát áll: $P \subset P' \times P'$.) P elemeit tevékenységeknek nevezzük. Az (i, j) és (j, k) tevékenységekhez az $i \leqslant j$, $j \leqslant k$ relációk összekapcsolása egy $(i, j) \leqslant (j, k)$ részben rendezési relációt definiál. A

$$P^* = P' \cup P$$

halmazt „hálóterv"-nek nevezzük. Egy hálótervet tehát az események és tevékenységek olyan halmaza képez, melyben minden tevékenységet egyértelműen meghatároz két esemény és fordítva, minden esemény egyértelműen megadható két vagy több tevékenység segítségével.

2.3. A 3.-ban leírt ütemezés lényegét nem érinti, de egy további fontos kapcsolat is fennállhat az egyes tevékenységpárok között. A (h, i) és (i, j) között ugyanis olyan kapcsolat is lehetséges, hogy az (i, j) tevékenység gyakorlati megvalósításának nem előfeltétele a (h, i) tevékenység *teljes* megvalósítása, vagyis a $(h, i) \leqslant (i, j)$ kapcsolat nem áll fenn szükségszerűen. Viszont a (h, i) tevékenységet egy *fiktív* h^* esemény segítségével felbonthatjuk egy (h, h^*) és (h^*, i) tevékenységpárra úgy, hogy

$$(h, h^*) \leqslant (h^*, i)\,,$$

és

$$(h, h^*) \leqslant (i, j)\,,$$

e lehetőséget azonban az ütemezés során nem kötelező kihasználni (míg a közvetlen rákövetkezés relációját minden esetben érvényesíteni kell!). E kapcsolatot *átlapolás*nak nevezzük, és a $-\!\leqslant$ jellel jelöljük.

A $(h, i) -\!\leqslant (i, j)$ reláció is részleges rendezést valósít meg, egyes elemek összehasonlíthatók, mások nem.

Az átlapolás a továbbiakban csak a CPM időszámítás lépéseit módosítja, ennek részletes taglalásával a [2]-ben találkozhatunk.

3. A modell változói és paraméterei, a feladat megfogalmazása

3.1. A 2.-ben bevezettük azt a P^* halmazt, melyen értelmezzük a feladatot. P^* a gyakorlatban egy tényleges szervezet (pl. építésvezetőség) munkavégzéseit jelenti: a tevékenységek az egyes munkák (pl. falazás), az események pedig a munkák bizonyos mennyiségének befejezése utáni állapotot (pl. pincefödém elkészülte) jelentik. Most a P^* elemeihez hozzárendelünk néhány, a további tárgyaláshoz szükséges paramétert és változót. Először is legyen a feladat független változója az idő: t, ahol is

$$t = 0, 1, 2, \ldots$$

Legyen értelmezve a feladatban egy véges A halmaz, melynek $a \in A$ elemeit *erőforrás*oknak nevezzük.

Minden $(i, j) \in P$ tevékenységhez hozzárendeljük a következő konstansokat:

3.1.1. $$K(i, j);\quad a_k;\quad M_{ij}^k \qquad (k = 1, \ldots, K(i, j)),$$

ahol $K(i, j)$ megmutatja, hogy az (i, j) tevékenységhez ténylegesen hány elemet rendeltünk az A halmazból. (Egy elemet esetleg többször is hozzárendelhetünk); a_k a k-ik hozzárendelt erőforrás ($a_k \in A$).

Minden M_{ij}^k-ra

$$M_{ij}^k \geq 0,$$

M_{ij}^k neve: *munkamennyiség*. Jelentése: általában az egységnyi erőforrás (1 fő, 1 gép) által a tevékenység elvégzéséhez szükséges idő (munkaóra/fő stb. jellegű mennyiség).

3.1.2. $$\underline{c}_{ij}^k, \text{ ill. } \bar{c}_{ij}^k$$

ezen értékeket *alsó*, illetve *felső lokális erőforráskorlátoknak* nevezzük, és fennáll, hogy

$$0 < \underline{c}_{ij}^k \leq \bar{c}_{ij}^k$$

Ezek jelentése: az (i, j) tevékenységhez egy-egy időegységben a k-iknak hozzárendelt a_k erőforrásból allokálható minimális, ill. maximális mennyiség.

3.2. A 3.1.1.—3.1.2.-ben bevezetett mennyiségekről feltesszük, hogy egész számok. Legyen továbbá értelmezve minden $a \in A$ elemhez egy

$$C^a(t)$$

változó, amelyre érvényes, hogy

$$C^a(t) \geq \max \bar{c}_{ij}^a,$$

(ahol a az erőforrás fajtájára utal), e mennyiség is egészszámú változó, neve: *globális erőforráskorlát*.

3.3. A 3.1.1.-ben bevezetett M_{ij}^k értékek szerint az (i, j) tevékenységeket 2 csoportra osztjuk:

3.3.1. $$\sum_{k=1}^{K(i,j)} M_{ij}^k > 0\,;$$

3.3.2. $$\sum_{k=1}^{K(i,j)} M_{ij}^k = 0.$$

Ez utóbbi esetben vegyünk $K(i, j) = 1$-et és az $(i, j) \in P$ tevékenységhez hozzárendelünk még egy konstans egészértékű $t_{ij}^* \geq 0$ mennyiséget (ez a tevékenység elvégzéséhez szükséges idő mennyiségét jelenti), s ezzel a 3.3.2-ben felsorolt tevékenységek ismét 2 csoportba oszthatók:

3.3.2.1. $t_{ij}^* = 0$; ez esetben az $(i, j) \in P$ tevékenységeket *látszattevékenységek*nek nevezzük; jelöljük ezek halmazát R_L-lel.

3.3.2.2. $t_{ij}^* > 0$; — az ilyen tevékenységeket *időtevékenységek*nek (time-activity) nevezzük; jelöljük ezek halmazát R_T-vel. Érvényes, hogy

$$R_L \cap R_T = 0.$$

3.4. *A tevékenységek adatainak átalakítása*

Az egységes kezelés végett minden tevékenységhez vezessük be az N_{ij}^k értéket a következőképpen:

$$N_{ij}^k = \begin{cases} M_{ij}^k, & \text{ha } (i, j) \in P - (R_T \cup R_L) \\ 0, & \text{ha } (i, j) \in R_L \\ t_{ij}^*, & \text{ha } (i, j) \in R_T \end{cases}$$

Az értelmezésből következik, hogy N_{ij}^k értéke is egész szám; neve: *„módosított munkamennyiség"*. Ennek segítségével elértük, hogy az R_L és R_T halmazok nem mutatnak különleges sajátságot a továbbiakban. Tegyük még meg, hogy ha

$$(i, j) \in R_L \cup R_T\,,$$

akkor $\underline{c}_{ij} = \bar{c}_{ij} = 1$ értéket veszünk. ($K(i, j) = 1$ miatt a felső indexre nincs szükség.) A 3.8-ban használt képlet szerint ekkor ugyanis a tevékenység tartama éppen egyenlő lesz a 3.3.2.2-ben hozzárendelt tartammal, és ezzel e képlet e tevékenységekre is közvetlenül érvényes lesz.

3.5. Legyen a feladat változója (akcióparamétere)

$$X_{ij}^k(t) \qquad (i, j) \in P\,;\ k = 1, \ldots, K(i, j)$$

egészértékű függvény; képezzük ennek segítségével az $M_{ij}^k(t)$ ún. *„aktuális munkamennyiség"*-et a következőképpen:

$$M_{ij}^k(t) = N_{ij}^k - \sum_{t'=0}^{t-1} X_{ij}^k(t')$$

3.6. Az eddig elmondottak segítségével a P halmazt felosztjuk az alábbi, időegységenként páronként diszjunkt részhalmazokra:

3.6.1. $R_0(t)$; e halmaz elemeinek neve: *normál* tevékenységek. Ezek ütemezésekor a hozzátartozó erőforrások *egymástól függetlenül* kerülnek ütemezésre. Érvényes, hogy

$$(R_L \cup R_T) \subset R_0(0)\,;$$

valamint, ha $t > 0$, akkor

$$R_0(t) \supseteq R_0(0)\,.$$

(Megjegyzés: ha $(i, j) \in R_0$ és $K(i, j) > 1$, akkor (i, j)-t *párhuzamos tevékenység*nek is nevezzük.)

3.6.2. R_1 (konstans), a halmaz elemeinek neve: *koherens* tevékenységek. Ha $(i, j) \in R_1$, akkor fenn kell állania, hogy

$$\frac{N_{ij}^k}{\underline{c}_{ij}^{a_k}} \quad \text{minden } k\text{-ra } [k = 1, \ldots, K(i, j)]$$

azonos érték; azon kívül e halmaz elemeire jellemző, hogy ha valamely t' időpontban egy k-ra $X_{ij}^k(t') > 0$, akkor az fennáll minden k-ra is. ($k = 1, \ldots, K(i, j)$), azaz a koherens tevékenységeknél az összes hozzárendelt erőforrás *együttesen* kerül ütemezésre.

3.6.3. R_2 (konstans); e halmaz elemei az ún. *soros* tevékenységek. Jellemzőjük, hogy ha valamely k-ra $X^k_{ij}(t') > 0$, ahol $k \in \{1, \ldots, K(i, j)\}$; akkor ugyanezen t' időszakban

$$X^{k'}_{ij}(t') = 0$$

$$k' \neq k$$

$$k' \in \{1, \ldots, K(i, j)\}$$

azaz: a soros tevékenységeknél a megadott sorrend szerint minden időszakban csak 1 erőforrás kerül ütemezésre (a soros tevékenység tehát tulajdonképpen egy tevékenységbe összefogott lánc).

3.6.4. $R_3(t)$; e halmaz elemei az ún. *alternatív* tevékenységek. Ha $(i, j) \in R_3(t')$ úgy, hogy

$$M^k_{ij}(t') = M^k_{ij}(0),$$

de

$$M^k_{ij}(t' + 1) < M^k_{ij}(t'),$$

akkor minden $t'' > t'$-re

$$(i, j) \notin R_3(t''),$$

és

$$(i, j) \in R_0(t'').$$

E tevékenységek ütemezése tehát a hozzárendelt erőforrások *valamelyik*ével történik, s ha egyszer az ütemezés elkezdődött valamelyik $a \in A$ erőforrással, akkor végig ezzel ütemezünk, mint a normál tevékenységeknél.

3.6.5. R_4 (konstans); e halmaz elemei az ún. *helyszínentartó* tevékenységek. Ha

$$(i, j) \in R_4,$$

akkor

$$M^k_{ij}(t) = \underline{c}^k_{ij} = \bar{c}^k_{ij}(= c^k_{ij})$$

$$k = 1, \ldots, K(i, j)$$

E tevékenységek ütemezése a megadott c^k_{ij} értékkel történik az első i-ből kiinduló tevékenység ütemezésének megkezdésétől a j esemény bekövetkezéséig.

3.6.6. Megkívánjuk, hogy e halmazokra nézve bármely időszakban a következő legyen érvényes:

$$\bigcup_{s=0}^{4} R_s(t) = P,$$

azaz minden tevékenység ezen halmazok valamelyikébe beletartozzék (de csak egyikbe).

3.7. *Különleges kikötések alkalmazása*

Bármely $(i, j) \in P$ tevékenységre különleges kikötések tehetők, a lehetséges eseteket az alábbi halmazokkal határozzuk meg:

3.7.1. $R_5(t)$: az ún. *megszakíthatatlan* tevékenységek halmaza.
$R_6(t)$: az *azonnal folytatandó* tevékenységek halmaza.
Ha valamely t' időpontban

$$X_{ij}^k(t') > 0, \quad \text{és} \quad M_{ij}^k(t') > X_{ij}^k(t')$$

$$(i, j) \in R_5(t'),$$

akkor ugyanezen (i, j) tevékenységre

$$X_{ij}^k(t' + 1) > 0,$$

és

$$(i, j) \in R_6(t' + 1).$$

Ha pedig

$$\sum_{\substack{(h,i)\in P \\ (h,i) \ll (i,j)}} M_{hi}^k(t') = 0,$$

$$k = 1, \ldots, K(h, i),$$

de

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} M_{ij}^k(t') > 0 \qquad (i, j) \in R_6(t'),$$

akkor

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} X_{ij}^k(t') > 0.$$

Azaz: a megszakíthatatlan tevékenységek ütemezésük megindulása után minden következő időperiódusban is ütemezésre kerülnek, míg munkamennyiségük el nem fogy, de az ütemezés kezdetével várhatunk; míg az azonnal folytatandó tevékenységek ütemezését azonnal el kell kezdeni, mihelyt az előfeltételek teljesültek (az i esemény bekövetkezett).

Érvényes még, hogy $R_4 \subset R_5(t)$, vagyis a helyszínentartó tevékenység mindig megszakíthatatlan.

3.7.2. $R_7(t_1, t_2)$: *a tevékenység bizonyos időintervallumban nem ütemezhető*, azaz $(i, j) \in R_7(t_1, t_2)$ esetén

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} X_{ij}^k(t) = 0, \quad \text{ha} \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

3.7.3. $R_8(t_1, t_2)$: *az időszakosan csökkentett intenzitású tevékenységek* halmaza; e halmazok minden elemére $K(i, j) = 2$; és ha

$$t < t_1 \text{ vagy } t_2 < t,$$

akkor

$$X_{ij}^2(t) = 0, \qquad (i, j) \in R_8(t_1, t_2),$$

ha pedig $t_1 \leq t \leq t_2$, akkor

$$X_{ij}^1(t) = 0 \qquad (i, j) \in R_8(t_1, t_2).$$

$R_8(t_1, t_2)$-re mindig érvényes:

$$R_8(t_1, t_2) \subset R_0(0),$$

azaz ilyen kikötést csak a normál tevékenységekre tehetünk.

Értelemszerűen érvényes továbbá a következő két összefüggés:

$$R_7(t_1, t_2) \cap R_8(t_1, t_2) = 0,$$

és

$$[R_7(t_1 t_2) \cup R_8(t_1, t_2)] \cap R_4 = 0;$$

mivel az időszakos tilalom ellentmond annak, hogy a tilalmi időben ütemezni lehessen, s mindkettő ellentmondásban van a helyszínentartással (adott események közt a helyszínentartás nem szünetelhet).

3.8. Ezután minden $(i, j) \in P$ tevékenységhez hozzárendelünk egy $d_{ij} \geq 0$ ún. ,,rohamtartam''-ot (crash duration) a következőképpen:
legyen

$$d_{ij}^* = \begin{cases} \max\limits_k \dfrac{N_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k}, & \text{ha} \quad (i,j) \in R_0(0) \cup R_1 \\ \sum\limits_{k=1}^{K(i,j)} \dfrac{N_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k}, & \text{ha} \quad (i,j) \in R_2 \\ \min\limits_k \dfrac{N_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k}, & \text{ha} \quad (i,j) \in R_3(0)\,. \\ 0\,, & \text{ha} \quad (i,j) \in R_4 \end{cases}$$

és ebből

$$d_{ij} = -[-d_{ij}^*]\,,$$

ahol [ ] az entier függvény jele (azaz minden d_{ij} értékét egészekre felkerekítjük).

A nemnegativitás ténye az N_{ij}^k és $\bar{c}_{ij}^k$-ra adott feltételekből adódik (3.1.1. és 3.1.2.). A 3.6. értelmében így minden $(i, j) \in P$ tevékenységhez egyetlen nemnegatív egész d_{ij} érték tartozik.

3.9. A 3.8-ban meghatározott d_{ij} tartamok segítségével végezzük el a CPM/TIME számítást, s határozzuk meg minden $i \in P'$ eseményhez a $t_i^{(0)}$, ill. $t_i^{(1)}$ legkorábbi és legkésőbbi bekövetkezési értékeket (lásd [1] és [2]).

Képezzük ezután minden $(i, j) \in P$ tevékenységhez a következő értéket:

$$E_{ij} = t_j^{(1)} - d_{ij}\,.$$

3.10. Tegyük 3.8-ban mindenütt N_{ij}^k helyébe $M_{ij}^k(t)$, $R_0(0)$ és $R_3(0)$ helyébe $R_0(t)$ és $R_3(t)$ értéket, s nevezzük az így kapott $d_{ij}(t)$ értéket ,,aktuális rohamtartam''-nak. Ennek segítségével a 3.9-hez hasonló módon értelmezzük $E_{ij}(t)$ értékét a következőképpen:

$$E_{ij}(t) = t_j^{(1)} - d_{ij}(t)\,.$$

3.11. Végül jelöljük T_i-vel azt a *legkisebb* (legkorábbi) t időpontot, amelyre érvényes:

$$\sum_{(h,i)\in(P-R_4)} \sum_{k=1}^{K(h,i)} \sum_{t'\leq t} X_{hi}^k(t') = \sum_{(h,i)\in(P-R_4)} \sum_{k=1}^{K(h,i)} N_{hi}^k\,,$$

de

$$\sum_{\substack{(i,j)\in P \\ (h,i) \gg (i,j)}} \sum_{k=1}^{K(i,j)} X_{ij}^k(t) = 0,$$

azaz: az (i, j)-t közvetlen megelőző tevékenységeket már ütemeztük (átlapolás esetén annak megfelelő mértéke szerint), de az (i, j) ütemezését még nem kezdtük el.

Nevezzük ezen T_i-t az $i \in P'$ esemény *„tényleges bekövetkezési időpontjá"*-nak.

3.12. Ezek után az ütemezési feladatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

adva a 2.2-ben definiált P halmaz a tevékenységekre meghatározott $\leqslant$, ill. $-\leqslant$ relációval.

Feladat a P halmaz (i, j) elemeinek időbeli elrendezése (ütemezése), azaz annak megállapítása, hogy valamely t időpontban az egyes (i, j) tevékenységekhez mekkora $X_{ij}^a(t)$ értékeket rendeljünk. Ezt az ütemezést úgy végezzük, hogy $T_n \to \min!$ legyen, betartva a relációkat, az egyes tevékenységekre fennálló különleges kikötéseket, és hogy minden (rögzített) t időpontra teljesüljön:

$$\sum_{(i,j)\in P} X_{ij}(t) \leq C^a(t)\,. \tag{*}$$

4. Az ütemezési feladat megoldása

(ERALL-2 algoritmus)

4.1. *1. lépés:* a t időperiódusban ütemezhető tevékenységek kiválasztása:

Egy $(i, j) \in P$ tevékenységet akkor nevezünk a t időperiódusban *ütemezhetőnek*, ha

$$\sum_{(h,i)\in(P-R_4)} \sum_{k=1}^{K(h,i)} M_{hi}^k(t) = 0\,,$$

de

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} M_{ij}^k(t) > 0$$

$$(h, i) \leqslant (i, j) \in P,$$

[$(h, i) -\leqslant (i, j)$ esetén a 2.3-ban ismertetett h^* segítségével hasonlóképpen értelmezhető az ütemezhetőség fogalma.]

Azaz egy tevékenység ütemezhető, ha a megelőző tevékenységeket már ütemeztük (munkamennyiségük „elfogyott"), de az illető tevékenységen még van ütemezhető erőforrás (melynek munkamennyisége pozitív szám).

Jelöljük a t időperiódusban ütemezhető tevékenységek halmazát $Q(t)$-vel.

Jelöljük továbbá az ütemezés során a t periódusban már beütemezett tevékenységek halmazát $Q'(t)$-vel, azaz

$$(i, j) \in Q'(t)\,,$$

ha

$$(i, j) \in Q(t) \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{K(i,j)} X_{ij}^k(t) > 0\,.$$

Mármost egy adott t időperiódusban az ütemezhető tevékenységek kiválasztása — $Q(t)$ megalkotása — után a tevékenységeket az alábbiak szerint vonjuk be sorban $Q'(t)$-be:

először az $R_6(t)$ összes (i, j) elemét, és ha a t időperiódus ütemezésének befejezésekor

$$Q'(t) \subset Q(t)\,,$$

vagyis még van ütemezhető, de be nem ütemezett tevékenység, akkor min $E_{ij}(t)$, majd az i, ill. ezen belül j értékek növekvő sorrendjében járunk el.

4.2. *2. lépés:* a tényleges ütemezés:

$$X_{ij}^k(t)$$

megállapítása az eddig előrebocsátottak segítségével a következőképpen történik (a továbbiakban feltétel, hogy $(i, j) \in Q(t)$ legyen, amit értelemszerűen nem írunk ki):

4.2.1. Legyen először is $(i, j) \in R_6(t)$. Ekkor a megoldhatóság szükséges feltétele, hogy

$$\sum_{(i,j)\in R_6(t)} \underline{c}_{ij}^a \leq C^a(t) \qquad (a \in A)$$

és

$$R_6(t) \cap R_7(t_1, t_2) = 0 \qquad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

legyen. Vagyis: a globális erőforráskorlát ne legyen kisebb, mint az azonnal indítandó tevékenységek alsó lokális erőforráskorlátainak összege, és ne álljon fenn az időszakosan nem ütemezhetőség követelménye.

Ezek nem teljesülése esetén a megoldás nem elégítheti ki a 3.12. (*) feltételt, az ütemezést azonban mégis elvégezzük [az $(i, j) \in R_6(t)$ előírás tehát „erősebb'', mint bármelyik másik!], éspedig az 1. táblázattal megadott módon (tehát a (*) feltételtől függetlenül!):

1. táblázat

$X_{ij}^k(t)$	(i, j)	k'	Egyéb feltétel
$\min\,[\underline{c}_{ij}^k, M_{ij}^k(t)]$	$R_0(t) \cup R_1$	—	—
$\min\,[\underline{c}_{ij}^{k'}, M_{ij}^{k'}(t)]$	R_2	$\min k: \left[\underset{k^*<k}{M_{ij}^{k^*}}(t) = 0,\ M_{ij}^k(t) > 0\right]$	—
$\underline{c}_{ij}^{k'}$	$R_3(t)$	$\min k: \left[\dfrac{M_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k} \to \min,\ C^{a_k} - \sum_{(i,j)\in Q'(t)} \underline{c}_{ij}^k - \sum_{(i,j)\in Q(t)-Q'(t)} \underline{c}_{ij}^k > 0\right]$	—
$\underline{c}_{ij}^1$	$R_3(t)$	—	$C^{a_k} - \underline{c}_{ij}^k < 0$ minden k-ra $(i, j) \in Q'(t)$
c_{ij}	R_4	—	$t \leq T_j$
0	R_4	—	$t > T_j$

Megjegyzés: C^{a_k} **arra utal, hogy** azon $a_k \in A$ erőforrásról van szó, **amely** (i, j) **tevékenységen éppen** k**-iknak van hozzárendelve;** más tevékenységnél ez nem éppen a k-ik, sőt lehet, hogy más tevékenységhez nem is tartozik hozzá.

4.2.2. Ha valamely t időperiódusban $Q'(t) = R_6(t)$ és $Q(t) \supset Q'(t)$, akkor $Q'(t)$ további bővítését — amennyiben a feltételek lehetővé teszik —, a 4.1-ben megadott módon végezzük, hiszen az $R_6(t)$ halmazra vonatkozó (4.2.1-ben adott) feltétel már teljesült. A következőkben tehát feltételezzük, hogy az $(i, j) \in R_6(t)$ tevékenységek fenti módon való ütemezése megtörtént. A további ütemezés során mégsem élhetünk az $(i, j) \notin R_6(t)$ feltevéssel, hiszen a már beütemezett tevékenység a $\min E_{ij}(t)$ kritérium szerint újból sorra kerülhet. A következőkben az ütemezést — a leírás egyszerűsítése végett — tevékenységtípusonként tárgyaljuk.

A könnyebb tárgyalásmód kedvéért azonban még bevezetünk egy újabb mennyiséget, $Z^a(t)$-t, nevezzük ezt „*erőforrásmaradék*”-nak:
legyen

$$Z^a(t) = C^a(t) - \sum_{(i,j)\in Q'(t)} X_{ij}^a(t) \quad [a \in A].$$

A továbbiakban Z^a és k együttes előfordulásakor mindig olyan k értéket értünk az (i, j) tevékenységhez, amely az a erőforrásra utal.

4.2.3. Legyen $(i, j) \in [R_5(t) \cap R_7(t_1, t_2)]$.
Ha mármost $t_1 \leq t \leq t_2$, akkor nyilván

$$X_{ij}^k(t) = 0\,.$$

Ha $t > t_2$, akkor az ütemezést ugyanúgy végezzük, mint

$$(i, j) \in \{R_5(t) \cap [P - R_7(t_1, t_2)]\}$$

esetében, amelyet a továbbiakban megadunk. Végül, ha $t < t_1$, akkor az ütemezést a 2. táblázat mutatja.

2. táblázat

$X_{ij}^k(t)$	(i, j)	Egyéb feltételek
$\min[\bar{c}_{ij}^k, Z^a(t), M_{ij}^k(t)]$	$P - R_2$	$\dfrac{M_{ij}^k(t)}{\underline{c}_{ij}^k} \cdot (t_1 - t) \geq N_{ij}^k$; $Z^a(t) \geq \underline{c}_{ij}^k$
$\min[M_{ij}^k(t), \bar{c}_{ij}^k]$	$P - R_2$	$\dfrac{M_{ij}^k(t)}{\underline{c}_{ij}^k} > \dfrac{N_{ij}^k}{\overset{*}{c}_{ij}^k}$; $\bar{c}_{ij}^k \leq Z^a(t)$; $\dfrac{M_{ij}^k(t)}{\underline{c}_{it}^k} \cdot (t_1 - t) < N_{ij}^k$; $\dfrac{M_{ij}^k(t)}{\overset{*}{c}_{ij}^k} (t_1 - t) \geq N_{ij}^k$ $\underline{c}_{ij}^k < \overset{*}{c}_{ij}^k \leq \bar{c}_{ij}^k$
0	$P - R_2$	$Z^a(t) < \underline{c}_{ij}^k$ vagy $\dfrac{M_{ij}^k(t)}{\bar{c}_{ij}^k} \cdot (t_1 - t) < N_{ij}^k$

3. táblázat

$x^k_{ij}(t)$	(i, j)	Egyéb feltétel
$\min\,[M^k_{ij}(t), \bar{c}^k_{ij}, Z^a(t)]$	$P - [R_6(t) \cup R_8(t_1, t_2)]$ vagy $R_7(t_1, t_2) \cap \left[P - \bigcup_{s=5}^{6} R_s(t)\right]$	$Z^a(t) > \underline{c}^k_{ij}$; $t < t_1$ vagy $t > t_2$
$\min\,[M^1_{ij}(t), \bar{c}^1_{ij}, Z^a(t)]$	$R_8(t_1, t_2)$	$Z^a(t) \geqq \underline{c}^1_{ij}$; $t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$\min\,[M^2_{ij}(t), \bar{c}^2_{ij}, Z^a(t)]$	$R_8(t_1, t_2)$	$Z^a(t) \geqq \underline{c}^2_{ij}$; $t_1 \leqq t \leqq t_2$
$M^k_{ij}(t)$	$\bigcup_{s=5}^{6} R_s(t) \bigcup_{s=7}^{8} R_s(t_1, t_2)$	$M^k_{ij}(t) \leqq Z^a(t) < \underline{c}^k_{ij}$
	$\bigcup_{s=5}^{6} R_s(t) \cup R_7(t_1, t_2) \cup [P - R_8(t_1, t_2)]$	$M^k_{ij}(t) \leqq Z^a(t) < \underline{c}^k_{ij}$; $t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$M^1_{ij}(t)$	$\bigcup_{s=5}^{6} R_s(t) \cup R_7(t_1, t_2) \cup [P - R_8(t_1, t_2)]$	$M^1_{ij}(t) \leqq Z^a(t) < \underline{c}^1_{ij}$; $t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$M^2_{ij}(t)$	$\left\{P - \left[\bigcup_{s=5}^{6} R_s(t) \cup R_7(t_1, t_1)\right]\right\} \cap R_8(t_1, t_2)$	$M^2_{ij}(t) \leqq Z^a(t) < \underline{c}^2_{ij}$; $t_1 \leqq t \leqq t_2$
$\min\,[\bar{c}^k_{ij} - \underline{c}^k_{ij};\, M^k_{ij}(t) - \underline{c}^k_{ij};\, Z^a(t) - \underline{c}^k_{ij}]$	$R_6(t) \cap \left[P - \bigcup_{s=7}^{8} R_s(t_1, t_2)\right]$	$\underline{c}^k_{ij} < \min\,[\bar{c}^k_{ij}, M^k_{ij}(t), Z^a(t)]$
	$R_6(t) \cap R_7(t_1, t_2)$	$t < t_1$ vagy $t_2 < t$
	$R_6(t) \cap R_8(t_1, t_2)$	$t < t_1$ vagy $t_2 < t$ és $k = 1$ vagy $t_1 \leqq t \leqq t_2$ és $k = 2$
0	—	egyéb esetekben

4. táblázat

$X^k_{ij}(t)$	(i, j)	m	Egyéb feltétel
$\min\limits_k \{\min [M^k_{ij}(t),\ m\cdot \underline{c}^k_{ij},\ Z^a(t)]\}$	$P - [R_6(t) \cup R_7(t_1, t_2)]$	$m\cdot \underline{c}^k_{ij} \leq \bar{c}^k_{ij}$; $(m+1)\cdot \underline{c}^k_{ij} > \bar{c}^k_{ij}$	$Z^a(t) \geq c^k_{ij}$
	$R_7(t_1, t_2) \cap [P - R_6(t)$	$m\cdot \underline{c}^k_{ij} \leq \bar{c}^k_{ij}$; $(m+1)\cdot \underline{c}^k_{ij} > \bar{c}^k_{ij}$	$t < t_1$ vagy $t_2 < t$; $Z^a(t) \geq \underline{c}^k_{ij}$
$M^k_{ij}(t)$	$P - [R_6(t) \cup R_7(t_1, t_2)]$	—	$M^k_{ij}(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}^k_{ij}$ $k = 1, \ldots, K(i, j)$ mindegyike[illegible]
	$R_7(t_1, t_2) \cap [P - R_6(t)]$	—	$M^k_{ij}(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}_{ij}$ $k = 1, \ldots, K(i, j)$ $t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$\min\limits_k \{\min [M^k_{ij}(t) - \underline{c}^k_{ij};\ (m-1)\cdot c^k_{ij};\ Z^a(t) - \underline{c}^k_{ij}]\}$	$R_6(t)$	$m\cdot c^k_{ij} \leq \bar{c}^k_{ij}$; $(m+1)\cdot c^k_{ij} > \bar{c}^k_{ij}$	$c^k_{ij} < \min [M^k_{ij}(t), Z^a(t)]$
0	—	—	egyébként

Ha $(i, j) \in R_2$, akkor $\frac{M_{ij}^k(t)}{c_{ij}^k}$ helyett

$$\sum_{k=1}^{K(i,j)} \frac{M_{ij}^k(t)}{c_{ij}^k}$$

értékét vesszük (mindig a megfelelő c_{ij}^k-val — $\underline{c}$, c^*, $\bar{c}$ —), s az ütemezést ugyanígy végezzük.

4.2.4. Legyen most $(i, j) \in R_0(t)$ és a 4.2.3-ban tárgyalt esetek egyike se álljon fenn.

Ekkor az ütemezést a 3. táblázat mutatja.

4.2.5. Legyen $(i, j) \in R_1$ (és a 4.2.3-ban tárgyalt eset ne álljon fenn). Ekkor a 4. számú táblázat mutatja az ütemezést.

4.2.6. Legyen $(i, j) \in R_2$ (a 4.2.3-ban tárgyalt eset ne álljon fenn). Ekkor az ütemezést az 5. táblázat mutatja.

4.2.7. Legyen $(i, j) \in R_3(t)$. Ekkor ütemezés előtt a következő számítást végezzük el:

ha minden k-ra a hozzátartozó $Z^a(t) < \underline{c}_{ij}^k$, akkor

$$X_{ij}^k(t) = 0\,;$$

ellenkező esetben viszont határozzuk meg ezen k-kra

$$\min \left[\frac{N_{ij}^k}{\bar{c}_{ij}^k}\right]$$

értékét, és a tevékenység tartalmát átalakítjuk az alábbi módon:

$$M_{ij}^k(t) = \begin{cases} N_{ij}^{k'}, \text{ ahol } k' = \min k\colon \{\max\limits_k [\min(N_{ij}^k, Z^a(t))]\}^1 \\ 0, \quad \text{ha} \quad k \neq k' \end{cases}$$

és az ütemezés a 3.6.4. alapján azonos a 4.2.4-ben leírttal.

4.2.8. Legyen végül $(i, j) \in R_4$.

Ekkor

$$X_{ij}^k(t) = \begin{cases} c_{ij}^k, \text{ ha } T_i \leq t \leq T_j, \\ 0, \text{ egyébként.} \end{cases}$$

4.3. *3. lépés:* t helyébe $t^* = t + 1$ értéket helyettesítünk. Ekkor visszatérünk az 1. lépésre.

Fenti lépéseket mindaddig ismételjük, míg

$$\sum_{(i,n) \in P} \sum_k M_{in}^k(t) = 0$$

nem lesz.[2] Ezzel az ütemezés végetért.

[1] Ez azt jelenti, hogy kiválasztjuk a legalább $\underline{c}_{ij}^k$ mennyiséggel ütemezhető tevékenységek közül a legkisebb átfutási időt igénylő erőforrások mellett a legkevésbé szűk keresztmetszetűt, ill. több ilyen közül a sorrendben legelőbb hozzárendeltet, s azután már az 1 erőforrású normál tevékenységként kezeljük (és ütemezzük).

[2] Vagyis: míg az összes tevékenységet beütemeztük. (i, n) jelenti az n (záró) eseményben végződő tevékenységeket.

5. *táblázat*

$X^k_{ij}(t)$	i, j	k'	Egyéb feltétel
$\min\,[M^{k'}_{ij}(t), \bar{c}^k_{ij}, Z^a(t)]$	$P - [R_6(t) \cup R_7(t_1, t_2)]$	$k: \left[\sum_{t'=1}^{t-1} X^{k''}_{ij}(t') = N^{k''}_{ij}, \; (k'' < k) \; \sum_{t'=1}^{t-1} X^k_{ij}(t') < N^k_{ij} \right]$	—
	$R_7(t_1, t_2) \cap [P - R_6(t)]$		$t < t_1$ vagy $t_2 < t$
$M^{k'}_{ij}(t)$	—		$M^{k'}_{ij}(t) \leq Z^a(t) < \underline{c}^k_{ij}$
$\min\,[M^{k'}_{ij}(t) - c^{k'}_{ij}; Z^a(t) - \underline{c}^{k'}_{ij}; \bar{c}^{k'}_{ij} - \underline{c}^{k'}_{ij}]$	$R_6(t) \cap Q'(t)$		$\underline{c}^{k'}_{ij} < \min\,[M^{k'}_{ij}, Z^a(t), \bar{c}^{k'}_{ij}]$
0	—	—	egyébként

Mivel minden tevékenység egyszer ütemezésre kerül (N^k_{ij}, $K(i, j)$ is véges), ezért ez véges számú lépésben bekövetkezik. A kapott megoldás jóságát az eddigi tapasztalatok is mutatják, erről az 5.-ben számolunk be röviden.

5. Gyakorlati tapasztalatok

Noha az ismertetett módszer a heurisztikus eljárások közé tartozik, a gyakorlatban igen jól bevált és rendszeresen alkalmazzák nemcsak az építőiparban, hanem más területeken is.

A módszer hatékonyságát az okozza, hogy a gyakorlati életből vett szervezetekre (építésvezetőség, kihelyezett munkahely, főépítésvezetőség, koordináló vállalatok, stb.) épül és a tevékenységtípusok, valamint az algoritmus heurisztikus lépései e szervezetek sajátosságait jól tükrözik. Különösen a tevékenységek megszakíthatósága, valamint a változtatható erőforrás intenzitás nagyban növeli hatékonyságát más hasonló eljárásokhoz képest.

Össze is hasonlították más módszerekkel: a KGST Építésügyi Állandó Bizottságában a csehszlovák delegáció kidolgozott egy közös számítási feladatot. Ezzel több tagország 5 hasonló programjának hatékonyságát hasonlították össze. Itt az ERALL-eljárás bizonyult leghatékonyabbnak, amennyiben átfutási ideje (T_n) 30 nappal rövidebb volt, mint a második legjobb programé.

A gyakorlati eredményekről már több ismertetés és cikk is jelent meg [4], [5], [6], [7].

(Beérkezett: 1969. november 10.)

IRODALOM

1. KELLEY, JAMES E. JR.: Critical Path Planning and Scheduling: mathematical basis. Operations Research. 1961. 9/3. pp. 296–320.
2. SZABÓ, I.: Átlapoló tevékenységtípusok kezelése a hálótechnikai ütemező eljárásokban. Információ–Elektronika, 1969. 4. sz. 307–312. o.
3. SZABÓ, I.: Az ERALL-2 eljárás matematikai leírása. Információ–Elektronika 1967. 2. sz. 98–102. o.
4. PVC gyáregység-bővítés beruházási tevékenységek ERALL-2 módszerrel számított koordinációs programja I–II–III. (Budapest–Kazincbarcika, 1967–68.) BVK–ÉM. SZÁMGÉP.
5. „Hálótervezési módszerek". (4., 5., 6. fejezet: Erőforrás allokációs módszerek. Az ERALL-módszer. Gyakorlati tapasztalatok. 158–232.) Budapest, 1968. Országos Ügyvitelgépesítési Felügyelet.
6. SZABÓ, I.–SZOLNOKY, A.: Az építőipari termelésszervezés hálótechnikán alapuló módszereinek 1966. évi tapasztalatai. Budapest, 1967. ÉM. SZÁMGÉP.
7. SZABÓ, I.–SZOLNOKY, A.: Hálótechnikai módszerek a gyakorlatban. Magyar Építőipar, 1967. 7. sz. 429–433. o.

THE ERALL-2 NETWORK ALGORITHM

The introductory portion of the article provides references and justification of why the heuristical algorithms, one of which is the ERALL-2, are generally applied in modern network procedures which deal with the allocation of resources. Following this, it contains a short description of the mathematical foundation of the network technique, introduces the concept of overlapping, and then the mathematical model of the problem is constructed, and the task itself defined. Here the article discusses certain special activities handled by the model (normal, coherent, series, alternative, keeping on-the-spot),

constraints and variables of the problem, its parametres, and certain special stipulations (uninterruptable or immediate activities, assumptions dependent on time), and here it gives the method for calculating the time data also needed for the classic CPM technique (based on the values already given).

In solving the problem, the detailed mathematical description of the ERALL-2 algorithm is given in the next chapter, where we can find the method of allocation and scheduling.

The conclusion contains a brief review on the study of the effectivity of the procedure, and on the experiences gained with it so far. The reference list contains previous reports on the procedure and on pratical results already published.

АЛГОРИТМ СЕТЕВОЙ ТЕХНИКИ: ЭРАЛЛ-2

Вводная часть статьи показывает и обясняет тот, что в современных методах сетевой техники, которые занимаются распределением, тактированием источников, соответствующих действиям, почему применяются обычно геуристические алгоритмы, к которым относится и ЭРАЛЛ-2. Дальше работа даёт краткое описание математических основ сетевой техники, вводит понятие перекрытия и после этого составляется математическая модель задачи и оформляется задача. Здесь занимается статья некоторыми особенными типами деятельностей, которые включаются в модель, ограничениями, переменными задачи, параметрами и также некоторыми особенными ограничениями (деятельности, которые нельзя перерывать или немедленно надо продолжать, ограничения, зависящиеся от времени), и здесь даёт метод вычисления нужных данных времени, которые нужны и к классической технике критической пути (по заранее заданным величинам).

При решением задачи, подробное математическое описание алгоритма ЭРАЛЛ-2 даётся в следующей главе, где мы находим метод выполнения распределения и тактирования во времени, группированно по отдельными типами деятельностей.

Формулы чаще всего сопровождаются коротким объяснением, особенно относительно некоторым новым понятиям.

В заключение коротко описывается испытание эффективности метода и имеющийся опыт испытания, а в списке литературы находятся с одной стороны уже имеющнеся описания метода, а с другой стороны список литературы опубликованных результатов практики.

MIHÁLYFFY LÁSZLÓ

Megjegyzés egy kvadratikus szélsőértékfeladathoz*

1. Bizonyos közgazdasági problémák (l. alább) a következő szélsőértékfeladatra vezetnek: határozzuk meg az

$$\frac{1}{2} x^* Cx - b^* x \tag{1.1}$$

kvadratikus függvény

$$E^* x = f \tag{1.2}$$

feltételt kielégítő minimumát, ahol

C adott $n \times n$-es szimmetrikus pozitív definit matrix,
b^* adott n-dimenziós (sor-) vektor,
E^* adott $m \times n$-es matrix, $m \leq n$,
f adott m-dimenziós (oszlop-) vektor és
x a változók n-dimenziós vektora[1]

$(\ )^*$-gal matrixok és vektorok transzponáltját jelöljük; oszlopvektorok transzponáltja sorvektor és viszont. A dolgozatban kizárólag valós skalárokkal, vektorokkal illetve matrixokkal foglalkozunk.

Az (1.1) kifejezéssel és az (1.2) egyenlőséggel meghatározott szélsőértékfeladat megoldható pl. a Lagrange-multiplikátorok klasszikus módszerével [1]; a megoldást — feltéve, hogy az E^* matrix rangja m — a következő formula szolgáltatja:

$$\begin{pmatrix} x \\ \hline \lambda \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} C^{-1} - C^{-1} E(E^* C^{-1} E)^{-1} E^* C^{-1} & C^{-1} E(E^* C^{-1} E)^{-1} \\ \hline (E^* C^{-1} E)^{-1} E^* C^{-1} & -(E^* C^{-1} E)^{-1} \end{array}\right) \begin{pmatrix} b \\ \hline f \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

ahol λ az ún. Lagrange-féle multiplikátorok m-dimenziós (oszlop-) vektora.

Ebben a dolgozatban egy, a későbbiek során említett kivételtől eltekintve feltesszük, hogy (1.1) a következő alakba írható:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i (x_i - \hat{x}_i)^2, \tag{1.1a}$$

* Az ebben a tanulmányban közölt eredményeket megalapozó kutatómunkát az Országos Anyag- és Árhivatal megbízásából az INFELOR Rendszertechnikai Vállalatnál az ártervezés ökonometriai modelljének előkészítése során végeztem. M. L.

[1] Hangsulyozzuk, hogy ebben a dolgozatban kvadratikus függvények lineáris egyenletrendszerrel korlátozott minimálásának problémáival foglalkozunk. és nem kvadratikus programozási feladatokkal. A korlátozó feltételek között nem szerepelhetnek tehát lineáris egyenlőtlenségek, beleértve ezekbe a nemnegativitási feltételeket is.

ahol az s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mennyiségek pozitív súlyok, $\hat{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ pedig az x vektorváltozó i-edik komponenséhez tartozó célkitűzés, az x_i komponensnek rendszerint valamilyen előrebecsült értéke. Ily módon az előzőekben ismertetett feladatnak egy fontos speciális esetéhez jutunk, amelynek például az ágazati kapcsolatok mérlegéből képzett technológiai együttható matrixok konzisztens előrebecslésével kapcsolatban van közgazdasági jelentősége. Ezeknek a konzisztens előrebecsléseknek az esetében az a feladatunk, hogy az egyes elemek jövőben várható alakulására vonatkozó, trendszámítással vagy más módszerrel kapott előrebecsléseket olyan konzisztens rendszerré fogjuk össze, amely rendelkezik az ilyen technológiai együttható matrixok közismert tulajdonságaival, és ugyanakkor a lehető legjobban megközelíti az eredeti, egymástól független előrebecslések eredményeképpen kapott értékeket. Ebben az esetben (1.1a) az eredeti, egymástól független előrebecslésekből álló rendszer közötti különbségek minimálásának követelményét írja fel, (1.2) pedig az együttható matrix közismert konzisztencia-feltételeinek rendszerével azonos.[2]

(1.1) és (1.1a) egybevetéséből világos, hogy esetünkben

$$C = 2\begin{pmatrix} s_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & s_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & s_n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

és

$$b^* = 2(s_1\hat{x}_1, s_2\hat{x}_2, \ldots, s_n\hat{x}_n)\,. \tag{1.5}$$

Mivel az $\hat{x}_i$-k nagyságrendje általában — például technológiai együttható matrixok konzisztens előrebecslésének esetében is — különböző, az (1.3) képlet alkalmazása egymással egyenlő, például egységnyi súlyok esetén azt eredményezi, hogy bár az (1.1a) kifejezés értéke kielégítően kicsi lesz, egyes kis abszolút értékű $\hat{x}_i$-khez relatíve nagy $|x_i - \hat{x}_i|$ eltérés fog tartozni. Ezt a jelenséget oly módon igyekeznek elkerülni, hogy kis abszolút értékű $\hat{x}_i$ célkitűzéshez nagy abszolút értékű s_i súlyt rendelnek, és viszont. Természetesnek tűnik, hogy a súlyokat a következőképpen válasszuk:

$$s_i = \frac{1}{|\hat{x}_i|}, \tag{1.6}$$

feltéve, hogy $\hat{x}_i \neq 0$. Igy jutunk ahhoz a kérdéshez, hogy $\hat{x}_i = 0$ esetén választhatjuk-e az s_i súly értékét $+\infty$-nek? A következőkben látni fogjuk, hogy bizonyos feltételek mellett a válasz igenlő, és ilyen esetekben az $\hat{x}_i = 0$, $s_i = \infty$ egyenlőségek maguk után vonják az $x_i = 0$ egyenlőséget.

2. Tegyük fel, hogy $\hat{x}_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Akkor az s_i súlyokat választhatjuk az (1.6) képletnek megfelelően és így (1.4) figyelembevételével a C^{-1} matrixra a

[2] Megjegyezzük, hogy a dolgozatban ismertetett eljárás az E^* mátrixra és az f vektorra vonatkozó további feltevések nélkül nem biztosítja azt, hogy nemnegatív $\hat{x}_i$ célkitűzések esetén a számított x_i értékek feltétlenül nemnegatívok legyenek; ezzel a problémával azonban ebben a tanulmányban nem foglalkozunk.

$$C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} |\hat{x}_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\hat{x}_2| & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & |\hat{x}_n| \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

összefüggés adódik. Észrevéve, hogy (2.1) jobb oldala értelmes marad akkor is, ha egy vagy több i-re $\hat{x}_i = 0$, önként kínálkozik a gondolat, hogy a szélsőértékfeladat megoldását ebben az esetben is az (1.3) képlettel értelmezzük, hiszen (1.3) jobb oldala csak C^{-1}-től függ, C-től független. Ezzel az értelmezéssel kapcsolatban a következő két probléma vetődik fel:

1. Milyen függvény veszi át (1.1a) szerepét a minimálásnál? Célszerűtlen lenne ugyanis olyan „kvadratikus függvény" minimálásáról beszélnünk, amelynek együtthatói között a $+\infty$ is szerepel.

2. Milyen értelmet tulajdonítsunk az (1.3)-ban szereplő $(E^*C^{-1}E)^{-1}$ kifejezésnek, ha „C^{-1} szingularitása" (vö. (2.1)) maga után vonja az $E^*C^{-1}E$ matrix szingularitását?

A két kérdés közül a másodikra könnyebb feleletet adni. Reguláris matrixok inverzének közvetlen általánosítása tetszőleges (nem szükségképpen négyzetes) matrixok Moore—Penrose-féle általánosított inverze [2], [3], amely a közönséges inverzek sok tulajdonságát örökli, pl. lineáris egyenletrendszerek megoldására hasonlóképpen alkalmazható. Emlékeztetünk ennek a fogalomnak az értelmezésére.

Definíció. Tetszőleges $m\times n$-es A matrix Moore—Penrose-féle általánosított inverzén azt az egyetlen A^+ matrixot értjük, amely kielégíti az

$$AA^+A = A \tag{2.2a}$$

$$A^+AA^+ = A^+ \tag{2.2b}$$

$$(AA^+)^* = AA^+ \tag{2.2c}$$

$$(A^+A)^* = A^+A \tag{2.2d}$$

egyenleteket.

Az idézett forrásmunkákban megtalálható annak bizonyítása, hogy a (2.2) egyenleteknek tetszőleges, zérustól különböző A matrix esetén egy és csak egy megoldása van, azaz, tetszőleges, zérustól különböző matrixnak van M.—P.-féle általánosított inverze és az egyértelmű.

Az elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy esetünkben az $(E^*C^{-1}E)^{-1}$ kifejezés helyén egy általánosított inverz fog szerepelni.

Másrészt, az 1. problémával kapcsolatban vegyük észre, hogy (1.3) szerint x_i zérusnak adódik, ha C^{-1} helyébe egy olyan diagonális matrixot helyettesítünk, amelynek i-edik fődiagonáleleme 0. Ez a körülmény azt mutatja, hogy valamely $\hat{x}_i = 0$ célkitűzés esetén az x_i változó értéke a célkitűzéssel, tehát zérussal lesz egyenlő, ha az s_i súly értékét plusz végtelennek választjuk; vö. (2.1). Más szóval, ha $\hat{x}_{i_1} = \hat{x}_{i_2} = \dots = \hat{x}_{i_r} = 0$, és az összes többi célkitűzés 0-tól különböző, akkor az $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_r}$ súlyok alábbi választása

$$s_{i_1} = s_{i_2} = \dots = s_{i_r} = +\infty$$

annyit jelent, hogy az $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}$ változókat 0 értékkel rögzítettük. Magától értetődő tehát, hogy (1.1a) helyett a következő célfüggvényt fogjuk tekinteni:

$$(2.3)\qquad \sum_{\hat{x}_i \neq 0} s_i(x_i - \hat{x}_i)^2 = \sum_{\hat{x}_i \neq 0} \frac{1}{|\hat{x}_i|}(x_i - \hat{x}_i)^2$$

ahol az összegzést mindazokra az i indexekre kell elvégezni, amelyekre $\hat{x}_i \neq 0$.

Felvetődik ármost az a további probléma, hogy a változóknak milyen részrendszereihez lehet zérusértékű célkitűzést, és ezekhez végtelen értékű súlyt rendelni úgy, hogy az (1.3) módosításával nyert képletből számított x vektor az (1.2) egyenletnek megoldása legyen. Világos, hogy $f \neq 0$ esetén egyidejűleg valamennyi s_i nem lehet egyenlő plusz végtelennel, mert ekkor az x megoldás is zérusvektornak adódnék.

3. Az előzőekben felvetett kérdésekre a 4. pont 2. tételével fogjuk megadni a választ. Ennek a tételnek a bizonyítása egy olyan újabb problémát vet fel, amelynek megoldása önmagában véve is érdekes és hasznos. Tekintsük ismét az

$$(1.1)\qquad \frac{1}{2}x^* Cx - b^*x$$

kvadratikus függvény és az

$$(1.2)\qquad E^*x = f$$

lineáris egyenletrendszer által meghatározott feltételes szélsőértékfeladatot; ebben a pontban C *tetszőleges* szimmetrikus pozitív definit matrix lehet. Az (1.3) formula alkalmazhatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a C matrix pozitív definit, E^* rangja maximális, E^* sorainak száma pedig oszlopai számánál nem nagyobb legyen. Gyakorlati szempontból is feltehető a kérdés: mit állíthatunk akkor, ha az E^* matrixra vonatkozó feltevéseket elejtjük, illetve azzal a gyengébb feltevéssel pótoljuk, hogy az (1.2) egyenletnek van megoldása? A válasz a következő.

1. tétel. Legyen C pozitív definit matrix, és legyen az (1.2) egyenletrendszer megoldható. Akkor az (1.1) kvadratikus függvény az (1.2) feltételt kielégítő egyértelmű minimumát az

$$(3.1)\qquad x_0 = C^{-1}b - C^{-1}E(E^*C^{-1}E)^+(E^*C^{-1}b - f)$$

pontban veszi fel.

A (3.1) formula (1.3)-tól csak abban különbözik, hogy az $E^*C^{-1}E$ matrixnál közönséges inverz helyett Moore—Penrose-féle általánosított inverz szerepel.

Bizonyítás. Az (1.2) egyenletre vonatkozó feltevésünk azt jelenti, hogy — a sorok esetleges felcserélésével — az E^* matrix és az f vektor következőképpen particionálható:

$$(3.2)\qquad E^* = \begin{pmatrix} E_1^* \\ \cdots \\ H^*E_1^* \end{pmatrix}$$

$$(3.3)\qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdots \\ H^*f_1 \end{pmatrix}$$

ahol E_1^* $m_1 \times n$-es $(m_1 \leq m)$ matrix, amelynek a rangja m_1, f_1 m_1-dimenziós oszlopvektor, H^* pedig egy olyan $(m - m_1)\times n$-es matrix, amely (1.2) utolsó $m - m_1$ egyenletének az első m_1 egyenlettől való függésmódját adja meg. Az (1.1) kvadratikus függvény az

$$(1.2') \qquad E_1^* x = f_1$$

egyenletrendszerrel együtt már egy olyan kvadratikus szélsőértékfeladatot határoz meg, amelyre (1.3) alkalmazható. Bizonyítani fogjuk, hogy a (3.1) képlettel definiált x_0 vektor azonos ennek az utóbbi feladatnak az egyértelműen meghatározott megoldásával; ebből a tétel állítása már következik.

Felhasználva E^* (3.2) alatti előállítását, egyszerű számítással belátható, hogy az

$$A = E^* C^{-1} E = \begin{pmatrix} E_1^* \\ \cdots \\ H^* E_1^* \end{pmatrix} C^{-1}(E_1, E_1 H)$$

és az

$$A^+ = \begin{pmatrix} I \\ \cdots \\ H^* \end{pmatrix} (I + HH^*)^{-1} (E_1^* C^{-1} E_1)^{-1} (I + HH^*)^{-1} (I, H)$$

matrixok, ahol I m_1-dimenziós egységmatrix, teljesítik a (2.2) egyenleteket, tehát A^+ az $E^* C^{-1} E$ matrix általánosított inverze. Ennek a részeredménynek és f (3.3) alatti előállításának alkalmazásával egyszerű számítás útján belátható, hogy (3.1) jobb oldala egyenlő a

$$C^{-1} b - C^{-1} E_1 (E_1^* C^{-1} E_1)^{-1} (E_1^* C^{-1} b - f_1)$$

vektorral, amely (1.3) szerint azonos az (1.1)—(1.2') feladat (egyértelmű) megoldásával. Tételünk bizonyítását ezzel befejeztük.

Az 1. tétel mellet a következőkben szükségünk lesz még az alábbi segédtételre is:

LEMMA (Penrose [3]). Legyen U k × m-es, V pedig m × n-es mátrix, és legyen

$$U^* U V = 0;$$

akkor szükségképpen

$$UV = 0.$$

Bizonyitás. Feltevésünk értelmében tetszőleges n-dimenziós x vektorra

$$U^* U V x = 0.$$

tehát

$$x^* V^* U^* U V x = 0,$$

más szóval, a k-dimenziós UVx vektor hossza egyenlő zérussal. Ebből x tetszőlegessége folytán a lemma állítása közvetlenül kovetkezik.

4. Térjünk vissza a kiindulópontként szolgáló problémához. Evvel kapcsolatban a következő eredményt mondhatjuk ki:

2. tétel. Legyen

$$(4.1) \qquad \bar{C} = \begin{pmatrix} |\hat{x}_1| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\hat{x}_2| & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & & |\hat{x}_n| \end{pmatrix}$$

$$b^* = (\operatorname{sign}(\hat{x}_1), \operatorname{sign}(\hat{x}_2), \dots, \operatorname{sign}(\hat{x}_n)).$$

Akkor az

$$(4.2)\qquad E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+f=f$$

egyenlőség szükséges és elegendő ahhoz, hogy a

$$(2.3)\qquad \sum_{\hat{x}_i\neq 0}\frac{1}{|\hat{x}_i|}(x_i-\hat{x}_i)^2$$

kvadratikus függvény

$$(1.2)\qquad E^*x=f$$

feltételt kielégítő minimumát az

$$(4.3)\qquad x_0=\bar{C}b-\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+(E^*\bar{C}b-f)$$

pontban vegye fel.

(2.3)-ban az összegzést azokra az i indexekre kell elvégezni, amelyekre $\hat{x}_i\neq 0$.

Bizonyítás. A tétel bizonyítását két lépésben végezzük: az elsőben kimutatjuk, hogy (4.2) szükséges és elégséges ahhoz, hogy a (4.3) képlettel definiált x_0 (1.2)-nek megoldása legyen, a másodikban pedig az x_0 vektor minimumtulajdonságát igazoljuk.

A (4.3) egyenlőség mindkét oldalát balról E^*-gal szorozva

$$(4.4)\qquad E^*x_0=E^*\bar{C}b-E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+(E^*\bar{C}b-f)$$

adódik. Kimutatjuk, hogy a jobb oldal első két tagjának összege 0. Jelöljük Q-val azt a diagonális matrixot, amelyben a főátló i-edik eleme $\sqrt{|\hat{x}_i|}$; nyilvánvaló, hogy $Q^*Q=Q^2=\bar{C}$. Akkor (2.2a) szerint

$$E^*Q^*QE=E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+E^*Q^*QE.$$

A Penrose-féle lemma szerint $\left(U=QE,\ V=[I-E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+]^*\right)$ ez az egyenlőség maga után vonja az

$$E^*Q^*=E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+E^*Q^*$$

egyenlőséget is. Ebből, jobbról Q-val szorozva és (4.4)-be téve, kapjuk, hogy

$$E^*x_0=E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+f,$$

tehát (1.2) akkor és csak akkor áll fenn, ha (4.2) teljesül.

A második résszel kapcsolatban az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\bar{C}$ főátlójának első $r\leq n$ eleme zérustól különböző, $n-r$ eleme pedig 0, más szóval, $\bar{C}$ következőképpen particionálható:

$$\bar{C}=\begin{pmatrix}\bar{C}_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

ahol $\bar{C}_1$ r-dimenziós nemszinguláris diagonális matrix. Legyen b^*, E^* és x_0 megfelelő particionálása rendre

$$b^*=(b_1^*,0),$$

$$E^*=(E_1^*,E_2^*),$$

$$x_0=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ 0\end{pmatrix},$$

ahol b_1^* és u r-dimenziós sor- illetve oszlopvektor, E_1^* és E_2^* pedig $m\times r$-es, illetve $m\times(n-r)$-es matrixok. Ezeknek a jelöléseknek a felhasználásával (4.3) a következő alakba írható:

$$x_0=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar C_1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\0\end{pmatrix}-$$

$$\begin{pmatrix}\bar C_1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1\\E_2\end{pmatrix}\left((E_1^*,E_2^*)\begin{pmatrix}\bar C_1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_1\\E_2\end{pmatrix}\right)^+\left((E_1^*,E_2^*)\begin{pmatrix}\bar C_1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\0\end{pmatrix}-f\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\bar C_1 b_1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\bar C_1 E_1\\0\end{pmatrix}(E_1^*\bar C_1E_1)^+(E_1^*\bar C_1b_1-f),$$

és ez az összefüggés az 1. tétel alapján azt mutatja, hogy az r-dimenziós u vektor a

$$\sum_{\hat x_i\neq 0}\frac{1}{|\hat x_i|}(u_i-\hat x_i)^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{|\hat x_i|}(u_i-\hat x_i)^2 \tag{4.5}$$

kvadratikus függvény és az

$$E_1^*u=f \tag{4.6}$$

feltételrendszer által meghatározott szélsőértékfeladat megoldása. A 2. tétel bizonyítását ezzel befejeztük.

Megjegyzések. I. Az általánosított inverzek (2.2a) és (2.2c) tulajdonsága szerint $E^*\bar CE\,(E^*\bar CE)^+$ az $E^*\bar CE$ mátrix oszlopvektorainak terére vonatkozó Hermitikus projekció. Másrészt, a Penrose-féle lemma alkalmazásával belátható, hogy $E^*\bar CE$ oszlopvektorainak tere megegyezik azzal az altérrel, amelyet az E^* mátrixnak olyan oszlopai feszítenek ki, amely oszlopoknak megfelelő változókhoz zérustól különböző célkitüzés tartozik. Ezek szerint (4.2) pontosan azt jelenti, hogy az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ változók tetszőleges olyan $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ részrendszeréhez rendelhetünk zérusértékű célkitűzést és ezekhez $+\infty$ értékű súlyokat, amely részrendszer mellett az f vektor előállítható az E^* matrix nem törölt (azaz zérustól különböző $\hat x_i$ célkitűzésekhez tartozó) oszlopainak lineáris kombinációjaként.

II. A 2. tétel állítása bizonyos szempontból triviálisnak tűnhet. Hogy ez nincs így, azt következőképpen láthatjuk be. Tegyük fel, hogy az (1.1a) kvadratikus függvénynek az (1.2) feltétel melletti minimumát keressük, ahol

$\hat x_i\neq 0$ és $s_i=\dfrac{1}{|\hat x_i|}$, $i=1,2,\ldots,n$. Rögzítsük az utolsó $n-r$ változót következőképpen:

$$x_{r+1}=\hat x_{r+1},\ x_{r+2}=\hat x_{r+2},\ \ldots,x_n=\hat x_n,$$

és jelöljük E^* utolsó $n-r$ oszlopát — mint az előzőkben is — E_2^*-gal, a rögzített komponensekből álló oszlopvektort pedig v-vel. Tegyük fel továbbá, hogy az $f-E_2^*v$ vektor előállítható E^* első r oszlopának lineáris kombinációjaként. Akkor a (4.5) kvadratikus függvénynek az

$$E_1^*u=f-E_2^*v \tag{4.6a}$$

feltétel melletti minimuma általában nagyobb lesz, mint az eredeti feladaté. A két feladat minimuma közötti eltérés annál kisebb, minél kisebb a rögzített $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ változók abszolút értéke.

5. Befejezésül az előzőekben mondottakat néhány numerikus példával illusztráljuk. A korábbiakban bevezetett jelölésekkel élve, legyen

$$E^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^*$$

és

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

és tekintsük az

$$E^* x = f \tag{5.1}$$

egyenletrendszert. Ennek olyan megoldását akarjuk meghatározni, amelynek bizonyos előre adott $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5)^*$ célkitűzéstől való eltérése a lehető legkisebb abban az értelemben, hogy egy

$$\sum_i \frac{1}{|\hat{x}_i|}(x_i - \hat{x}_i)^2$$

alakú négyzetösszeget minimál.

Megfigyelve, hogy az f vektor előállítható E^* első három oszlopának lineáris kombinációjaként — például a 0, 0,5 és 0,5 együtthatók segítségével — az $\hat{x}_1$ és $\hat{x}_5$ célkitűzések értékét választhatjuk zérusnak, a megfelelő súlyok értékét pedig $+\infty$-nek.

Tekintsük például az

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4, \hat{x}_5)^* = (2, 1, 1, 0, 0)^*$$

célkitűzések rendszerét, és legyen

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b^* = (1, 1, 1, 0, 0).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$(E^* \bar{C} E)^+ = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}^+ = \frac{1}{20.11^2} \begin{pmatrix} 335 & -50 & 95 \\ -50 & 170 & 40 \\ 95 & 40 & 45 \end{pmatrix}$$

továbbá

$$E^*\bar{C}E(E^*\bar{C}E)^+f = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -1 & 3 \\ -1 & 10 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f.$$

A 2. tétel alapján az

$$x_0 = \bar{C}b - \bar{C}E\,(E^*\bar{C}E)^+\,(E^*\bar{C}b - f) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektor a

$$(5.2) \qquad \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{|\hat{x}_i|}(x_i - \hat{x}_i)^2 = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2$$

kvadratikus függvény (5.1) feltételt kielégítő minimumának helye; a minimum értéke 1,5.

Tekintsük most a célkitűzéseknek egy olyan rendszerét, amelyben mindegyik célkitűzés zérustól különböző. Legyen például

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5)^* = \left(2, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^*.$$

Akkor a

$$(5.3) \qquad \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{|\bar{x}_i|}(x_i - \bar{x}_i)^2 = \frac{1}{2}(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 +$$

$$2(x_4 - 0{,}5)^2 + 2(x_5 - 0{,}5)^2$$

kvadratikus függvény az (5.1) feltétellel együtt egy olyan feltételes szélsőértékfeladatot alkot, amelyre az (1.3) képlet alkalmazható. A részletek mellőzésével közöljük, hogy a minimum helyéül az

$$x_0^* = \left(1\, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

vektor adódik, a hozzátartozó minimum értéke pedig 2. Most vizsgáljuk meg, hogy mi történik akkor, ha ebben a feladatban egy vagy több, alkalmasan választott változó értékét rögzítjük, és a minimálást a nem rögzített változókra vonatkozóan próbáljuk elvégezni. Rögzítsük például az x_4 és x_5 változókat

$$x_4 = \bar{x}_4 = 0{,}5$$

illetve

$$x_5 = \bar{x}_5 = 0{,}5$$

értékkel. Ezt megtehetjük, mert ekkor (5.1) az

$$
(5.1a) \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2 - 2.\,0{,}5 = 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \end{aligned}
$$

egyenletrendszerre redukálódik, amely megoldható: egy megoldása például $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0{,}5$. Vegyük észre, hogy (5.1a) jobb oldala azonos $\frac{1}{2}f$-fel, továbbá $x_4 = \bar{x}_4$ és $x_5 = \bar{x}_5$ miatt (5.3) egybeesik (5.2)-vel, és hogy ily módon feladatunk visszavezethető az előző feladatra, amelyet a 2. tétel alapján oldottunk meg. Felhasználva az ott kiszámított $(E^*\bar{C}E)^+$ matrixot, azt az eredményt találjuk, hogy az

$$
x' = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}25 \\ 0{,}75 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}
$$

vektor az (5.1) egyenletrendszernek olyan megoldása, amelyre vonatkozóan $x_4' = \bar{x}_4$, $x_5' = \bar{x}_5$, és az (5.2) kvadratikus függvény értéke minimális. Azonban – összhangban az előző pont II. megjegyzésével – ennek a minimumnak az értéke

$$
\frac{1}{2}(1-2)^2 + (-0{,}25-1)^2 + (0{,}75-1)^2 = 2{,}125\,,
$$

tehát nagyobb, mint 2, mely érték a szokványos (1.3) eljárás alkalmazásával adódott.

(Beérkezett: 1970. április 28.)

IRODALOM

1. Boot, John C. G.: Quadratic Programming. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1964. XI + 207 p.
2. Egerváry, J.: Az inverz mátrix általánosításáról. Az MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei. 1956. 3. sz. 315–324. p.
3. Penrose, R.: A generalized inverse for matrices. Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1955. 406–413.

COMMENT ON A QUADRATIC EXTREME VALUE PROBLEM

The paper extends the problem of minimizing the weighted sum of squares of the form

$$
\sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - \hat{x}_i)^2
$$

subject to linear equality constraints, so that certain s_i weights are allowed to take the value $+\infty$. Then it gives also an explicit solution to the generalized problem with the aid of the Moore–Penrose generalized inverse of matrices. A weight $s_i = \infty$ cannot be assigned but to such x_i variables, to which a 0-valued $\hat{x}_i$ (called target) belongs in which case this assignement entails also the relations $x_i = 0$. In other words, assignement of an infinitely large s_i weight to an x_i variable means to fix the variable in question auto-

matically at the value 0. The paper gives the necessary and sufficient conditions as to which sub-systems of the x_i variables may be fixed at 0 value. The formula (4.3) yielding the explicit solution of the problem contains, as a special case, the formula which results from the Lagrange multiplier method in the case of finite s_i weights.

The theoretical results are illustrated by numerical examples. The paper indicates also the possibility of economic application.

ЗАМЕЧАНИЕ В СВЯЗИ С КВАДРАТИЧЕСКОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕЙ

Работа распространяет проблему минимализации взвешенных сумм квадратов

$$\sum_{i=1}^{n} s_i(x_i - \hat{x}_i)^2$$

при линейной системы ограничений, таким образом, чтобы для некоторых весов s_i было допустимо значение $+\infty$, дальше с помощью обобщённой обратной матрицы типа Мор-Пенрос, даёт явное решение для обобщённой проблемы. Только к той переменной x_i можно придавать весы $s_i = \infty$, которой соответствует так называемая целевая установка $\hat{x}_i = 0$, и тогда это придание влечёт за собой связь $x_i = 0$, другими словами, придавать какой-то переменной x_i бесконечно большой вес s_i, значит заранее закрепить данную переменную равным нулю. Работа даёт необходимое и достаточное условие того, что какиеподсистемы переменных x_i можно закрепить со значением *0*. Формула (4.3), дающая явное решение проблемы, включает в себе, как особенный случай, формулу, которая получается из метода мультипликаторов Лагранжа в случае конечных весов s_i.

Теоретические результаты иллюстрированы нумерическим значением.

Работа показывает возможность экономического применения проблемы.

IFJ. KREKÓ BÉLA

Egy közelítő eljárás lineáris programozási feladatok megoldására

A lineáris programozási feladatokat numerikusan általában a szimplex módszer valamelyik változatával oldják meg (bár ismeretesek egyéb módszerek is). Ez természetesen nem véletlen. A szimplex módszernek sok előnyös tulajdonsága van: véges (és gyakorlatilag elfogadható) számú lépésben megadja mind a primál, mind a duál optimális megoldást (vagy jelzi, hogy a feladatnak nincs megoldása), nem igényli a feladat egy lehetséges megoldásának ismeretét, és igen hatékony olyan számítássorozatok esetén, ahol az egyes feladatok csak kismértékben különböznek egymástól.

Van azonban a szimplex módszernek egy olyan tulajdonsága, amely nagyobb méretű feladatok esetén már nehézségeket okozhat: a feltételek számával megegyező rendű inverzsorozat[1] kiszámítását igényli, ahol a sorozat egyes tagjait a megelőző tag felhasználásával számítjuk ki. Nagyobb méreteknél[2] egyetlen inverz kiszámításához is igen sok műveletre van szükség: ez a kerekítési hibák felhalmozódásához vezethet. Fokozza a problémát, hogy az egymást követő inverzek számítási módja miatt bármelyik inverz hibáját „öröklik" az utána következő inverzek.

A kerekítési hibák felhalmozódásának kivédésére sok módszer ismeretes: dupla pontosságú műveletek alkalmazása, újrainvertálás, stb. A nagyobb pontosságnak természetesen ára van: megnő az időigény, dupla pontosságú műveletek alkalmazása esetén nagyobb lesz a memóriaigény. Így a feladat méreteinek növekedésével elérünk egy olyan határhoz, amelyen túl már e módszerek felhasználása sem segít.

Ezért indultak meg — és folynak jelenleg is — olyan kutatások, amelyek célja az, hogy bizonyos (a gyakorlatban gyakran előforduló) feladattípusokra ezek speciális szerkezetét kihasználó, a feltételek számánál lényegesen kisebb méretű inverzet (vagy inverzeket) alkalmazó algoritmusokat szerkesszenek. Így születtek meg a különböző dekompozíciós eljárások és az ezek speciális esetének tekinthető egyedi és általánosított felsőkorlát-technikák. (Ez utóbbiak igen hasznos módszereknek bizonyultak. Kevésbé mondható el ugyanez az általános dekompozíciós eljárásokra: ezek a gyakorlati tapasztalatok szerint nagyon sok iterációt igényelnek, emiatt a kerekítési hibák felhalmozódnak.)

[1] A gyakorlatban általában a módosított szimplex-módszer különböző változatait alkalmazzák.

[2] Hogy mekkora feladatot tekintünk „nagynak", ez viszonylagos. A felhasználandó gép jellemzőitől függ: a belső- és a háttérmemóriák kapacitásától, az elérési időktől, a műveleti sebességtől. A hazánkban jelenleg található legjobb gépeket alapul véve a „közepes" és „nagy" feladatok határa kb. 700—800 feltételnél van.

Végső soron azonban ezen eljárások esetében is az inverz méretei határozzák meg a megoldható feladat nagyságát.

Ezért elképzelhető, hogy nagyméretű feladatok esetén a szimplex módszerrel eredményesen versenyezzenek olyan eljárások, amelyek nem alkalmaznak inverzet és kevésbé érzékenyek a kerekítési hibákra. Különösen előnyösek az utóbbiak, ha ki tudják használni, ha e matrix nagyon „üres", és azt is, ha rendelkezésre áll egy, az optimálishoz viszonylag közel eső, kiinduló program. A gyakorlatban mindkét eset gyakran előfordul.

Az Országos Tervhivatal egyik kidolgozás alatt levő modelljének[3] megoldására széleskörű kutatómunka folyik. Ennek keretében több ilyen algoritmus áll gépi kipróbálás alatt. Ezek közé tartozik az alábbi eljárás is.

A feladat

Az egyszerűbb tárgyalás kedvéért csak olyan lineáris programozási feladatokkal foglalkozunk, ahol minden feltétel „$\leq$" alakban van előírva (egyetlen feltételnek sem kell egyenlőségre teljesülnie). Ismeretes, hogy bármely lineáris programozási feladat megfogalmazható ilyen formában.

Megoldandó tehát az

$$(1)\quad \begin{cases} Ax \leq b \\ \\ c^*x \to \max \end{cases} ; \quad A = \begin{bmatrix} a_1^* \\ \vdots \\ a_m^* \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

feladat. (Az esetleges nemnegativitási feltételeket nem kezeljük megkülönböztetett módon, ezek is benne foglaltatnak az (1) feltételi rendszerét alkotó „m" egyenlőtlenségben.)

A továbbiakban (1) lehetséges megoldásainak halmazát X-szel, optimális megoldásainak halmazát pedig X^0-lal jelöljük.

Szükségünk lesz még (1) duálisára is:

$$(1a)\quad \begin{cases} u \geq o \\ u^*A = c^* \\ u^*b \to \min \end{cases}$$

Jelöljük (1a) lehetséges megoldásainak halmazát U-val, optimális megoldásainak halmazát U^0-lal.

A közelítő feladat

(1)-hez a következő „közelítő feladatot" rendeljük:

$$(2)\qquad \Phi_s(x) = c^*x - s\,\varphi^*(x)\,\varphi(x) \to \max\,,$$

[3] Lásd: Báger–Morva–Szabó: A középlejáratú népgazdasági terv programozása, Közgazdasági Szemle, 1969. 7–8. sz.

ahol: s megfelelően nagyra választott pozitív *konstans*, továbbá

$$(2a)\quad \varphi(x)=\begin{bmatrix}\varphi_1(x)\\ \vdots\\ \varphi_m(x)\end{bmatrix},\ \text{ahol}\ \varphi_i(x)=\begin{cases}a_i^*x-b_i & \text{ha}\ a_i^*x-b_i>0\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}\ ;\ i=1,2,\ldots m.$$

(2) optimális megoldásainak halmazát X^0-lal fogjuk jelölni.

Könnyen belátható, hogy $\Phi_s(x)$ konkáv és mindenütt folytonosan differenciálható függvénye x-nek, továbbá

$$(3)\qquad g_s(x)=\operatorname{grad}\Phi_s(x)=[c^*-2s\,\varphi^*(x)A]^*.$$

Egyébként E_n-nek[4] minden olyan poliedrikus tartományában, amelyben $Ax-b$ egyetlen komponense sem vált előjelet, $\Phi_s(x)$ kvadratikus függvénye x-nek. Ezen tartományok száma véges (legfeljebb 2^m), teljesen lefedik E_n-t és két ilyen tartomány legfeljebb a határán érintkezik egymással.

Összefüggések az eredeti és a közelítő feladat között

Az eljárás lényege: az (1) feltételes szélsőértékfeladat helyett a (2) feltétel nélküli feladatot oldjuk meg. (Tehát egy SUMT típusú eljárásról[5] van szó.)

A közelítés jogosságát a következő (itt nem bizonyított) tétel igazolja:

1. tétel: Tegyük fel, hogy X^0 nem üres és korlátos. Tekintsünk egy szigorúan monoton növekvő, végtelenhez tartó, pozitív $\{s_k\}_1^\infty$ sorozatot. Ekkor

a) $X^0_{s_k}\neq\emptyset$ $(k=1,2,\ldots)$,

továbbá tetszőleges $S=\{x_{s_k}\}$ sorozat esetén $(x_{s_k}\in X^0_{s_k})$,

b) $c^*x_{s_k}\geq c^*x_{s_{k+1}}$ és $\lim\limits_{k\to\infty}c^*x_{s_k}=c^*x^0$ $(x^0\in L^0)$,

c) $\varphi^*(x_{s_k})\,\varphi(x_{s_k})\geq\varphi^*(x_{s_{k+1}})\,\varphi(x_{s_{k+1}})$ és $\lim\limits_{k\to\infty}\varphi^*(x_{s_k})\,\varphi(x_{s_k})=0$,

d) S-nek legalább egy torlódási pontja van, és bármely torlódási pontja optimális megoldása (1)-nek.

A tétel speciális esetként következik McCormick és Fiacco nemlineáris feladatokra vonatkozó tételéből ([3], 104. o.).

E tétel alapján [3] a következő eljárást ajánlja (55. o.): $k=1$-től kezdve oldjuk meg a $\Phi_{s_k}(x)\to\max$ feladatokat. Haladjunk ilyen módon addig, amíg a kapott megoldás elég jól közelíti (1) megoldását. (A korábbi feladatok megoldásából következtetni tudunk a következő feladat megoldására.)

McCormick és Fiacco egy véges eljárást is ad (2) megoldására ([3], 180. o.), amelynek során a változók számával megegyező rendű inverzekkel kell dolgozni.

[4] E_n-nel az n-dimenziós euklideszi teret jelöljük.

[5] Lásd: [2], [3] és [4]. Ezek az eljárások bizonyos matematikai programozási (feltételes szélsőérték-számítási) feladatok közelítő megoldására alkalmasak. Lényegük: képezünk egy olyan függvényt, amelynek feltétel nélküli szélsőértékhelye közelítő megoldása lesz az adott programozási feladatnak. Ennek a függvénynek az egyik tagja a megoldandó feladat célfüggvénye, másik tagja pedig azt méri (valamilyen mérték [„segédfüggvény”] szerint), hogy „milyen messze” vannak az egyes programok a lehetséges megoldások halmazának határától.

A dolgozat egyrészt az 1. tétel általánosításával foglalkozik, másrészt olyan összefüggésekkel, amelyek lehetővé teszik, hogy bizonyos információk birtokában egyetlen feltétel nélküli feladat megoldásával előre adott pontosságú közelítő megoldást kapjunk (1)-re. Tárgyal továbbá egy (általában véges), invertálást nem igénylő eljárást (2) megoldására, végül rámutat arra, hogy a dualitást felhasználva (1) megoldására több hasonló eljárás alkalmazható.

A továbbiakban gyakran fel fogjuk használni a következő lemmát ([3], 98. o.):

1. lemma: $x_s \in X_s^0$ akkor és csak akkor, ha $2s\varphi(x_s) \in U$

Bizonyítás: Minthogy $\Phi_s(x)$ konkáv és differenciálható, $g_s(x_s) = o$ szükséges és elégséges ahhoz, hogy $x_s \in X_s^0$ fennálljon. Ebből (3)-at és (2a)-t felhasználva a lemma közvetlenül következik.

2. tétel: (2) megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy U ne legyen üres.

Bizonyítás: A szükségesség az 1. lemmából következik. Az elégségesség belátásához tekintsük a

$$(4)\qquad \begin{cases} Ax - y \leq b \\ c^*x - sy^*y \to \max \end{cases}$$

feladatot. Mivel

$$\Phi_s(x) = \max_y \{c^*x - sy^*y \mid Ax - y \leq b\},$$

nyilvánvaló, hogy X_s^0 akkor és csak akkor nem üres, ha (4)-nek van optimális megoldása. (4) célfüggvénye kvadratikus, ezért az optimum létezéséhez elégséges a célfüggvény korlátossága. Szorozzuk be (4) feltételi rendszerének mindkét oldalát egy tetszőleges $u \in U$-val. Ekkor az

$$(5)\qquad \begin{cases} c^*x - u^*y \leq u^*b \\ c^*x - sy^*y \to \max \end{cases}$$

feladathoz jutunk. Minthogy $u \geq o$, (4) bármely lehetséges megoldása lehetséges megoldása lesz (5)-nek is. Így (5) optimális célfüggvényértéke (ha létezik) legalább akkora, mint (4)-é. Viszont (5) bármely lehetséges megoldására fennáll, hogy

$$c^*x - sy^*y \leq u^*b + u^*y - sy^*y \leq \max_y \{u^*b + u^*y - sy^*y\} = u^*b + u^*u/4s.$$

A továbbiakban fel fogjuk használni a fenti bizonyításból következő

$$(6)\qquad \Phi_s(x) \leq u^*b + u^*u/4s \qquad (u \in U)$$

egyenlőtlenséget.

3. tétel: Ha (1)-nek van optimális megoldása, akkor

$$(7)\qquad 2s\,\varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s) \leq c^*xs - c^*x^0 \leq s\varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s) + u^{0*}u^0/4\,s,$$

ahol $x_s \in X_s^0$, $x^0 \in X^0$ és $u^0 \in U^0$.

Bizonyítás: Felhasználva az 1. lemmát kapjuk, hogy

$$(8)\qquad c^*x_s - c^*x^0 = 2s\,\varphi^*(x_s)\,(Ax_s - Ax^0) = 2s\,\varphi^*(x_s)\,[(Ax_s - b) + (b - Ax^0)].$$

Minthogy (2.a) miatt $\varphi^*(x_s)\,(Ax_s - b) = \varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s)$, (8)-ból következik, hogy

$$2s\,\varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s) \leq cx_s - cx^0.$$

A második egyenlőtlenség bizonyításához tekintsük (6)-ot. Legyen $u = u^0$; így $b^*u^0 = c^*x^0$, és

$$\Phi_s(x_s) = c^*x_s - s\,\varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s) \leq c^*x^0 + \frac{1}{4s}\,u^{0*}u^0, \tag{9}$$

amiből állításunk már következik.

(7)-et a következőképpen is megfogalmazhatjuk:

$$2s\,\varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s) \leq c^*x_s - c^*x^0 \leq \frac{1}{2s}\,u^{0*}u^0, \tag{10}$$

ami nyilvánvalóan igaz, mivel (7) alapján

$$s\,\varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s) \leq \frac{1}{4s}\,u^{0*}u^0.$$

4. tétel: Ha (1)-nek van optimális megoldása, akkor

$$2s\,\varphi^*(x_s)\,b - u^{0*}b \leq \frac{1}{4s}\,u^{0*}u^0 - s\,\varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s) \leq \frac{1}{4s}\,u^{0*}u^0. \tag{11}$$

Bizonyítás: Felhasználva, hogy

$$2s\,\varphi^*(x_s)\,b = 2s\,\varphi^*(x_s)\,[Ax_s - \varphi(x_s)] = c^*x_s - 2s\,\varphi^*(x_s)\,\varphi(x_s)\,,$$

(9) alapján állításunk következik.

A közelítő feladat megoldása

Mivel (2) megoldása nem más, mint egy differenciálható konkáv függvény feltétel nélküli maximum-helyének meghatározása, kézenfekvőnek látszik valamilyen grandiens-módszert alkalmazni. Mivel $\Phi_s(x)$ tartományonként kvadratikus, hasznos eszköz lehet a kvadratikus függvények feltétel nélküli szélsőérték-helyének meghatározására szolgáló ún. „konjugált gradiensek módszere"[6] egy, az adott függvény természetének megfelelően módosított változata.

Az egyik lehetséges változat — vázlatosan — a következő:

1. iteráció: tetszőleges $x_0 \in E_n$-ből kiindulva x_1-nek a

$$\max\{\Phi_s(x) \mid x = x_0 + t\,g_s(x_0)\}$$

feladat x_0-hoz legközelebb eső optimális megoldását választjuk.

[6] Lásd: [1], 195—200. o., vagy [6]. A konjugált gradiensek módszere iteratív algoritmus, amely tetszőleges x_0 kezdőpontból indulhat, és egyre jobb függvényértékeket szolgáltató pontokon keresztül haladva véges számú lépésben eléri egy konkáv kvadratikus $Q(x)$ függvény maximumhelyét. x_i-vel jelölve az i-edik közelítést, x_{i+1}-et az $x_i + td_i$ egyenes legjobb függvényértéket adó pontjaként határozza meg, ahol $d_0 = g_0$, és $d_i = g_i^* + (g_i^* g_i / g_{i-1}^* g_{i-1})\, d_{i-1}$ ($g_i = \text{grad}\, Q(x_i)$).

Áttérve az $i+1$-edik iterációra ($i = 1, 2 \ldots$):
$i+1$-edik iteráció: x_{i+1}-nek a

$$\max\{\Phi_s(x) \mid x = x_i + t d_i\}$$

feladat x_i-hez legközelebb eső optimális megoldását választjuk, ahol:

$$d_i = \begin{cases} g_s(x_i) + \dfrac{g_s^*(x_i)\, g_s(x_i)}{g_s^*(x_{i-1})\, g_s^*(x_{i-1})} d_{i-1}, \text{ ha} \\ (a_j^* x_i - b_j)(a_j^* x_{i-1} - b_j) \geq 0 \text{ minden } j\text{-re, és } \sum\limits_{j=1} \varphi_j(x_i) > 0, \\ g_s(x_i) \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Tehát tulajdonképpen arról van szó, hogy valahányszor $\Phi_s(x)$ új kvadratikus függvény alakját ölti fel, újra kezdjük (most már az új függvényre) a konjugált gradiens módszert. Az eljárás monoton és $\Phi_s(x)$ egy maximumhelyéhez konvergált, ha $X_s^0 \neq \emptyset$.

Az eljárás véges, ha $a_j^* \hat{x} \neq b_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), ahol: $\hat{x} = \lim\limits_{i \to \infty} x_i$. Ekkor ugyanis létezik $\hat{x}$-nek olyan $K(\hat{x})$ környezete, hogy

$$(12) \qquad \Phi_s(x) = c^* x - s \sum_{\varphi_j(\hat{x}) > 0} (a_j^* x - b_j)^2 \quad \text{ha} \quad x \in K(\hat{x}),$$

tehát ezen x-ekre $\Phi_s(x)$ egyszerű kvadratikus függvény; továbbá létezik olyan „M" küszöbszám, hogy $x_i \in K(\hat{x})$, ha $i \geq M$.

Így a fent vázolt algoritmus $i \geq M$ esetén megegyezik a (12)-re alkalmazott konjugált gradiens módszerrel. Ez az eljárás pedig véges számú (legfeljebb n) lépésben ad eredményt.

Az eljárás néhány változata

A fentiek alapján többféle eljárás képzelhető el lineáris programozási feladatok megoldására:

1. A legegyszerűbbnek a következő megoldás látszik: a megoldandó feladat duálisából indulunk ki, erre írjuk fel és oldjuk meg a közelltő feladatot. A gyakorlatban mindig tudunk megbízható felső becslést adni a primál feladat optimális megoldásának egyes komponenseire, így (11) alapján s megválasztható úgy, hogy az adott pontosság biztosítva legyen. Az 1. lemma és a 4. tétel alapján az eljárás olyan lehetséges megoldást szolgáltat a primál feladatra, amelynek célfüggvény-értéke legfeljebb előre megadott nagysággal tér el az optimálistól. Ezt a változatot akkor célszerű alkalmazni, ha meg tudunk adni egy, a duális feladat optimális megoldásától nem túl messze eső kiinduló megoldást. (Ennek nem kell lehetséges megoldásnak lennie.)

2. Ha meg tudunk adni egy, a primál feladat optimális megoldásától nem túl messze eső kiinduló megoldást, akkor a primál feladatra oldjuk meg a közelítő feladatot.

Amennyiben a duális feladatra vonatkozó megfelelő információk rendelkezésre állnak, a (10) összefüggés alapján s előre megadható úgy, hogy a kapott közelítő primál megoldás mind a célfüggvény-értéket, mind az egyes feltételek megsértésének mértékét tekintve eleget tegyen az előre megadott pontossági követelményeknek.

Ha ezen túlmenően még lehetséges megoldást is akarunk a primál feladatra kapni, a következőképpen járhatunk el: megoldjuk a primál feladatra vonatkozó közelítő feladatot: ezután a feltételi rendszert bővítjük egy, a célfüggvény — (10)-ből vagy (11)-ből meghatározott — alsó korlátját előíró feltétellel, c helyébe pedig 0-t írunk, és erre a feladatra oldjuk meg a közelítő feladatot. Ehhez a korábban kapott közelítő megoldás jó kiinduló megoldást szolgáltat.

3. Ha sem a primál, sem a duál feladatra nem állnak rendelkezésre megfelelő információk (ez a gyakorlatban általában nem fordul elő), akkor tetszőleges s mellett megoldjuk a közelítő feladatot mind a primál, mind a duál feladatra. Ha a pontosság nem kielégítő, nagyobb s-sel megismételjük az eljárást. A (10) és (11) összefüggések biztosítják, hogy így előbb-utóbb elérjük a megfelelő pontosságú megoldást.

4. Megadható olyan eljárás is, amely a primál, illetve duál feladat optimális megoldásához konvergál: a

$$\begin{aligned} -x &\leq 0 \\ Ax &\leq b \\ -u &\leq 0 \\ -A^*u &\leq -c \\ c^*x + b^*u &\leq 0 \end{aligned}$$

egyenlőtlenség-rendszerhez a (2a)-hoz hasonló módon megkonstruáljuk a $\varphi(x; u)$ függvényeket, és megoldjuk a

$$\varphi^*(x; u)\,\varphi(x; u) \to \min$$

feladatot. Amennyiben az optimális célfüggvényérték 0, megkaptuk a primál és duál feladat egy-egy optimális megoldását.

A 2. változat gépi kipróbálása folyamatban van. A kísérletek eredményéről másutt számolunk majd be.

(Beérkezett: 1970. január 23.)

IRODALOM

1. Bodewig, E.: Matrix Calculus. Amsterdam, 1959. North-Holland.
2. Fiacco, A. V. and Mc'Cormick, G. P.: The Sequential Unconstrained Minimization Technique for Nonlinear Programming. Management Science, Vol. 10, No. 2, January, 1964. 360—366. p.
3. Fiacco, A. V. and Mc'Cormick, G. P.: Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. John Wiley and Sons, 1968.
4. Forgó, F.: Egy módszer nemlineáris programozási problémák közelítő megoldására. Szigma, 1959. 1. szám, 67—74. o.
5. Krekó, B.: Nemlineáris programozás (kiadás alatt).
6. Ralston, A.: Bevezetés a numerikus analízisbe. Budapest, 1969. Műszaki Könyvkiadó.

AN APPROXIMATION METHOD FOR THE SOLUTION OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

In our country a wide-range research work is going on with the aim to work out algorithms and computer programmes enabling the solution of large linear programming problems. The procedure described in the article belongs to those attempts which expect to overcome the computational difficulties involved in the treatment of a large inverse by employing algorithms of „non-simplex" type.

The essence of our procedure is that instead of the linear programming problem (1) we solve the unrestricted extreme value problem (2). For the solution of (2) we can apply gradient methods, whereby the rounding-off errors cause less difficulty than in the case of the simplex method. A version of the method of conjugate gradients can also be applied solving (2) generally in a finite number of steps. The procedure yields an approximation to the solution of (1) and (1a). The formula (10) and (11) [in which x^0, u^0 and x_s are the optimal solutions to (1), (1a) and (2)] enable us — to change s so that a prescribed accuracy be ensured, if we can estimate the primal or dual optimal solution's components.

A computer programme has been prepared for the procedure and the trial computations are under way.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В нашей стране в настоящее время происходит широкое исследование для выработки алгоритма и машинных программ, которые дают возможность решить задачи линейного программирования большого размера. Метод, излагаемый в статье, относится к той группе исследований, которая надеется решить проблемы расчёта в связи с обращением обратной матрицей большого размера, с помощью алгоритмов «не-симплекс» характера.

Сущность метода состоит в том, что вместо задачи линейного программирования (1) решает экстремальную задачу без ограничений (2). Для решения задачи (2) можем употреблять градиентные методы, таким образом ошибки округления вызывают меньше проблем, чем при симплекс методом. Можно употреблять такой вариант «метода сопряжённых градиентов», который решает задачу (2) обычно в конечном числе шагов. Этот метод даёт приближённое решение задач (1) и (1a). Формулы (10) и (11) (в которых x^0, u^0 и x_s являются оптимальным решением задач (1), (1a) и (2)) дают возможность, зная порядок компонентов решения прямой или двойственной задачи, изменить s таким образом, чтобы заранее заданная точность была обеспечена.

На этот метод составлена машинная программа, идут предварительные расчёты.

KÖNYVEKRŐL

KOVÁCS L. BÉLA: *A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei.* Budapest, 1969. Bólyai János Matematikai Társulat.

Az egészértékű programozásról az utóbbi években igen sok cikk jelent meg, azonban egyetlen összefoglaló, rendszerező munka sem. Jelen könyv viszont ilyen típusú: a témában jártas és az abban tájékozatlan olvasónak is új, hozzáférhető ismereteket nyújt. A könyv nyolc fejezetben tárgyalja a kombinatorikus meggondolásokon alapuló megoldási módszereket.

Az első fejezetben a témakörben járatlanabb olvasót vezeti közelebb a problémákhoz, gazdasági példákon keresztül mutatja meg az egészértékű programozás használhatóságát a gyakorlatban. Az irodalomból jól ismert hátizsák-probléma, a hajórakodás, az utazó-ügynök és a gyártelepítés problémái mind megfogalmazhatók diszkrét programozási feladatként.

A második fejezet a munka matematikailag legegységesebb része. A szerző rendet teremtett a sokféle, alig különböző, de jelöléseikben és megfogalmazásukban heterogén leszámlálási módszerek zűrzavarában. Egységes jelölésrendszert vezetett be, és tömören megfogalmazta azt az alapelvet, amelyre ezek az algoritmusok épülnek. A leszámlálási módszerek tisztán kombinatorikus megoldásokon alapulnak. Mivel a diszkrét halmaz, amelyen egy célfüggvény optimumát keressük, legtöbbször véges is, minden elemet egyszer és csak egyszer megvizsgálva biztosan eljutunk az optimális megoldáshoz. A cél a lehetséges megoldások olyan sorbarendezése, amelynél a lehető legkevesebb megoldást kell explicite megvizsgálni. A szerző megadja annak az algoritmusnak a vázát, amely egy tetszőleges véges halmaz leszámlálására alkalmas. Ugyanakkor tág teret hagy a probléma specialitásának figyelembevételére úgy, hogy különféle teszteket vezet be. A tesztek annak eldöntésére szolgálnak, hogy a megengedett halmazt hogyan szűkíthetjük kisebb, de az optimális megoldást még tartalmazó halmazzá. Az algoritmusok hatékonysága attól függ, milyen jó teszteket alkalmazunk. A könyv nagy segítséget nyújt rendszerezésükben és értékelésükben.

A második fejezet eredményeire épülnek az ötödik és a hatodik fejezetben részletesen leírt algoritmusok.

Az ötödik fejezet Glover többfázisú duál algoritmusát ismerteti. Ebben a lineáris diszkrét programozásban használatos csaknem valamennyi teszt-típus megtalálható. Némelyikük eléggé munkaigényes és használatuk akkor célszerű, ha segítségükkel jelentősen szűkíthetjük a vizsgált halmazt. A feladat jellegétől és méreteitől függ, melyiket célszerű választani.

A hatodik fejezet Balas additív algoritmusát tárgyalja. Megmutatja, hogy a második fejezetben adott algoritmus-vázba hogyan illeszkedik be Balasnak az eddigiektől látszólag eltérő leszámlálása és tesztjei.

Elnagyoltabb, és az operációkutatásban járatlanabb olvasó számára nehezebben érthető a harmadik és a negyedik fejezet, ahol a korlátozás és szétválasztás módszereit (Branch and Bound) és a dinamikus programozást alkalmazza egészértékű problémák megoldására. A Branch and Bound módszer leírása szükségtelenül elválik a leszámlálási algoritmusoktól: a második fejezet alapján megfogalmazható lenne egy alig általánosabb algoritmus, melynek speciális eseteként megkaphatók mind a leszámlálási, mind a Branch and Bound eljárások.

Ez a kapcsolat jobban kitűnik a nyolcadik fejezetben, amely Balas filter módszerét ismerteti a könyv egységes jelölésrendszerében átfogalmazva. Ez az algoritmus a megoldásoknak a korlátozás és szétválasztás elvén alapuló implicit leszámlálását bővíti ki a korábban megismert tesztekkel.

Míg az eddig tárgyalt módszerek tiszta egészértékű problémák megoldására vonatkoztak, a hetedik fejezet vegyes egészértékű feladatokat tárgyal. A módszer Bender dekompozíciós algoritmusára támaszkodik úgy, hogy folytonos feladatok és tiszta egészértékű feladatok sorozatát oldja meg.

Ki kell emelni a munka matematikai igényességét és azt, hogy a szerző ügyes kézzel válogatta ki az ismertetett, egy-egy típust jól reprezentáló algoritmusokat, nem feledkezve meg az értékelésükről, bírálatukról sem. A fejezetek végén jól szemléltető, kidolgozott numerikus példák találhatók. A könyv végén bőséges irodalomjegyzék áll rendelkezésre. Kovács L. Béla munkája a témakör iránt érdeklődőknek, matematikusoknak és nem matematikusoknak egyaránt hasznos kézikönyv.

Mócsi Judit

JATI K. SENGUPTA—KARL A. FOX: *Economic Analysis and Operations Research:* Optimization Techniques in Quantitative Economic Models. (Gazdasági elemzés és operációkutatás: Optimálási módszerek a kvantitatív gazdasági modellekben.) North-Holland Publ. Co. Amsterdam—London. 1969.

A könyv különböző optimálási módszerek gazdasági (elsősorban mikroökonómiai) alkalmazásának gazdag választékát nyújtja. A cím hosszúsága már jelzi a mű interdiszciplináris jellegét.

A szerzők a kvantitatív gazdasági politikát az operációkutatás és a közgazdasági elmélet közötti hídként jellemzik, majd a könyv első felét az alkalmazott módszerek szerint csoportosítják. A lineáris programozási módszerek és általánosításaik a lineáris tört-programozást, az egész értékű lineáris programozást, a dekompozíciós eljárásokat és a rekurzív programozást is magukban foglalják. E módszerek gazdasági alkalmazását a következő példákon mutatják be: a nemzeti jövedelem növekedési rátájának maximálása; „első a biztonság" elv alkalmazása a kockázati programozásban; allokációs problémák; tervezetek közötti válogatás; földhasznosítás; technológiák közti választás; statisztikai becslés. A nem lineáris és dinamikus programozással foglalkozó fejezet kitér variáció-számítási problémákra és szabályozáselméleti modellekre is és ezeket iparfejlesztési, kapacitásnövelési problémákra alkalmazza, valamint a termelés időbeni ütemezésére és egy makroökonómiai növekedési modellre. A következő két téma: érzékenységi vizsgálatok és valószínűségi programozás. Mindkettőt egy mezőgazdasági üzem termékstruktúrájának részletes numerikus vizsgálatára használják, feltételezve, hogy az árak véletlenszerűen változnak.

A könyv második fele olyan gazdaságpolitikai problémákat tárgyal, amelyeknek megoldása az előzőleg bevezetett (és esetleg további) módszerek kombinációját igényli. A vállalati magatartás modelljei közül a termelési-készletezési és a kapacitásfejlesztési feladatok játszák a vezető szerepet, de sorbanállási modellek és CPM-PERT módszerek is helyet kapnak. Az oktatási intézmények tervezésével és erőforrásainak allokációjával foglalkozó modellekben változatos módszerek szolgálnak a tanári kar beosztásának, a beiskolázási politikának és az intézmény növekedésének tervezésére. A kibocsátás mérésére vonatkozó megfontolások, amelyek először az oktatási intézményeknél lépnek fel, az utolsó fejezetben kiterjednek olyan általánosabb társadalmi formációkra, amelyek magukban foglalnak mind piaci, mind nem piacra dolgozó intézményeket. Az utolsó előtti fejezet dekompozíciós modelleket alkalmaz egyrészt kiskereskedelmi vállalatok különböző verseny-szituációinak elemzésére, másrészt a nemzet gazdasági politikájának regionális felbontására.

Mint a fenti felsorolás mutatja, a szerzőknek sikerült olyan könyvet írniok, amelyben valóságos gazdasági problémák optimálás útján való megoldására törekszenek és nem azt a szokásos utat járják, hogy az optimálási módszereket egyszerűsített numerikus példákkal vagy kiagyalt modellekkel illusztrálják. E tekintetben imponáló a szerzők által összegyűjtött és hivatkozott anyag, beleértve saját kutatási eredményeiket is. Nagyon ajánlható a könyv mindazoknak, akik gazdasági modellek megformulázásával és elemzésével foglalkoznak, ennek módszereit oktatják vagy tanulják.

A könyv azonban nem nyújtja, hanem inkább feltételezi az alkalmazott matematikai módszerek ismeretét, ellentétben az előszóval, amely szerint a szerzők egyik fő célja az volt, hogy „a közgazdászokat megismertesse azokkal az operáció-kutatási módszerekkel, amelyek gazdaságilag lényegesek". A matematikai szempontból érzékeny olvasót a szövegben előforduló matematikai lomposság, a pontatlan kijelentések, egyes gondolatmenetek összefüggéstelensége is meghökkentik, nem beszélve a jelölésrendszer és a terminológia következetlenségeiről, amelyek a megértést is gyakran nehezítik.

M. B.

TUDOMÁNYOS ÉLET

Az ENSZ Európai Gazdasági Bizottságának szemináriuma

Az ENSZ Európai Gazdasági Bizottsága Várnában 1970. szeptember 28 és október 10 között rendezte meg a *középtávú népgazdasági modellekkel* foglalkozó szemináriumot. A szeminárium célja az volt, hogy az egyes országok tervezéssel foglalkozó testületeinél és kutatóintézeteinél működő gazdasági és statisztikai szakemberek ismertessék azokat a tapasztalataikat, amelyeket az európai országokban a középtávú tervmodellek alkalmazása során az utóbbi években szereztek.

A szeminárium programja szerint a 4 szakosztályban a következő előadások hangzottak el:

A. 1. — Morva Tamás és Báger Gusztáv: Az 1971—75. évi ötéves terv programozási modelljének fő jellemző vonásai;
A. 2. — R. Očenašek és L. Trcka (Csehszlovákia): A középtávú modellek komputerizálásának kutatása;
B. 1. — S. Spurkland (Norvégia): A többszektoros növekedési modell (MSG) mint 2 hosszútávú tervezés segédeszköze;
B. 2. — V. Nikiforov (Bulgária): A Bolgár Népköztársaság makroökonómiai fejlesztési modellje;
B. 3. — E. B. Jersov (Szovjetunió): A középtávú dinamikus modell alkalmazásánál szerzett tapasztalatok és néhány — az alkalmazással kapcsolatban felmerült — probléma;
C. 1. — P. Sevaldson (Norvégia): A „MODIS"-modell alkalmazása a tervezésben;
C. 2. — R. Courbis (Franciaország): A naturális-pénzügyi (FIFI) modell;
C. 3. — B. Isszajev (Szovjetunió): Egy köztársaság általános naturális-pénzügyi mérlege;
C. 4. — J. H. van de Pas (Hollandia): A holland gazdaság makromodellje;
D. 1. — M. Aglietta (Franciaország): Egy nagy szimulációs modell alkalmazásáról (franciaországi tapasztalatok);
D. 2. — Kornai János: A matematikai tervezés helye a gazdasági rendszerek irányításában.

A szemináriumon — az említett előadókon kívül — Magyarországról ifj. Krekó Béláné (OT Távlati Tervek Főosztálya) és Patyi Károly (OT Tervgazdasági Intézet) vettek részt.

B. G.

Közlemény

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának vezetősége 1970 októberl 4-én ülést tartott. Az ülésen leköszönt dr. Bod Péter a Szakosztály elnöke. Az elnöki tisztséget az alelnök dr. Szakolczai György vette át.

Az alapszabály értelmében a vezetőség a Szakosztály elnökét és alelnökét két évre választja meg, amelynek lejártával az elnöki tisztséget automatikusan az alelnök veszi át. Tekintettel a Társaság 1971-ben sorrakerülő tisztújítására az alelnöki tisztséget a Szakosztály jelenleg betöltetlenül hagyta és felkérte dr. Bod Pétert, hogy ebben az időszakban legyen segítségére az elnöknek a Szakosztály irányításában.

Az Egyesült Izzó optimális termékösszetételének meghatározása

Az Egyesült Izzóban napirendre került a korszerű matematikai módszerek felhasználása a vállalati vezetésben és tervezésben. A cél olyan matematikai módszer (model) keresése volt, mely a vállalati tervezés és vezetés számára információkat nyújt és saját elektronikus gépparkjával megoldható.

Mivel olyan módszert igyekszünk alkalmazni, amely felhasználható nyereségtervezésre, a feladat megoldását jelentős mértékben nehezíti az a körülmény, hogy jelenleg a nyereségtervezés módszertana még kialakulatlan. A feladat újszerűsége és bonyolultsága miatt a kísérleteket több lépcsőben kell elvégezni. Ezért a vállalaton belül kiemeltünk először egy ágazatot — a rádiócsőgyártást — és arra vonatkozóan teljeskörű kísérleti számítást végeztünk.

Jelen cikkben az alkalmazott matematikai-közgazdasági modellt és az alkalmazás során szerzett főbb tapasztalatokat tekintjük át.

A modell leírása

Mivel a rádiócsőgyártással kapcsolatos termelési műveletek eleget tesznek a linearitás követelményeinek, az optimális termékösszetétel meghatározására alkalmas a lineáris programozási módszer.

A modell 20 termék — vezértípus — termelését programozza hazai és külföldi piacra. Ennek megfelelően a modell változói:

- termelés hazai piacra,
- termelés rubelelszámolású piacra,
- termelés dollárelszámolású piacra.

Ami a korlátozó feltételrendszert illeti, az alkalmazott főbb feltételtípusok a következők:

- kapacitáskorlátok,
- kereskedelmi korlátok.

A kapacitáskorlátok oly módon épülnek be a modellbe, hogy az egyes vezértípusok termelése számára igénybevehető időalapot munkaórában vagy gépórában fejezzük ki. A kapacitás értéke tehát a rádiócsőgyártásra rendelkezésre álló időalapot jelenti.

A modellben a kereskedelmi korlátok az eladhatóság határait vezértípusonként és értékesítési viszonylatonként határozzák meg. Belföldi vonatkozásban — mivel az értékesítéssel foglalkozók a hazai piacot viszonylag állandónak és feltétlenül kielégítendőnek ítélték meg — a modell e termékválasztékot szigorú egyenlőséggel írta elő.

Rubelelszámolású viszonylatban piaci felső korlát szerepelt, az eladhatóság felső értékét a külkereskedelmi szakértők a kontingensek figyelembevételével határozták meg.

A dollárelszámolású piacra történő értékesítés viszonylag tágan megadott határok között mozoghatott. A minimum-korlát egy meghatározott időponti rendelésállomány volt, amely főleg a fiókhálózat rendeléseit tartalmazza. Az értékesítés felső határait kifejező korlátokat a piaci viszonyok mérlegelése alapján határoztuk meg.

Ami a célfüggvényt illeti: optimumkritériumként az árbevétel és a nyereség (fedezeti rés) maximalizálását használtuk. Az utóbbihoz a célfüggvény koefficienseket oly módon számítottuk ki, hogy az ár és a szűkített önköltség különbségét képeztük. Amennyiben a nyereség és a fel nem osztható költség termékre vonatkozóan mérhető lenne, úgy az optimalizálás közvetlenül a szűkebb értelemben vett nyereségre irányulhatna.

A vázolt modell a rádiócsőgyártás esetében 103 sorból és 56 oszlopból áll. A modell összeállítását, a munka megszervezését a Közgazdasági Osztály, a gépi számításokat pedig a rendelkezésre álló könyvtári program alapján a vállalat Számítástechnikai és Módszertani Csoportja végezte el.

Főbb tapasztalatok

A legfontosabb eredmény kétségtelenül az, hogy bebizonyosodott: a kidolgozott modell hasznos információkat adhat az optimális termékösszetétel kialakításához. Az eredmények értékelésekor a két célfüggvény szerinti optimalizálás közel azonos eredményt hozott.

A kapott eredmények más oldalról történő értékelésével lehetőség nyílt annak megvizsgálására is, hogy hogyan javítható a program a kapacitások esetleges bővítésével, s hogy melyek azok a vertikumok, amelyek kapacitása alapvetően korlátozza a gyártható volumen nagyságát. A szóban forgó kapacitás szűk keresztmetszetéről a rádiócsőgyártás vezetőivel történt megbeszélés alapján is egyöntetű kép alakult ki.

Ezután érzékenységi vizsgálatot végeztünk oly módon, hogy a beállítandó berendezések éves kapacitásával megnöveltük az eredeti kapacitást és az így módosított feladatot újra lefuttattuk. A kapott eredmény választ adott arra, hogy a beruházás milyen termelési és bevételi eredménnyel jár. Mivel a szóban forgó fejlesztés a rádiócsőgyártáson kívül eső beruházást igényel, a módszer lehetőséget ad arra, hogy a kapacitások kihasználását ellenőrizni lehessen, valamint arra, hogy ha kapacitásbővítéssel növeljük a termelést, akkor ennek hatását valamennyi vertikumon keresztül ki tudjuk fejezni.

Egy másik érzékenységi vizsgálat azt kutatta, hogy a modellbe paraméterként bevitt árak változása hogyan hat a termékösszetétel alakulására. Az eredmények közül példaként megemlítjük, hogy az árak bizonyos intervallumban történő változása nem érinti az optimális termékösszetétel alakulását.

A programozási számítások információs bázisát illetően a szükséges adatok általában nem álltak a kívánt formában rendelkezésre, az adatokat át kellett csoportosítani, helyenként pedig teljesen új mérésekkel kellett megállapítani. Ezért fontos tapasztalat, hogy a munka folytatása megkívánja az információs rendszer bizonyos fokú átalakítását.

A lineáris programozás felhasználásában vállalatunknál a továbblépés feltételeinek megteremtése van soron.

Dr. Winkler György

Felhívás

A Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási Szakosztálya operációkutatási szakbibliográfiát kíván készíteni, amelynek célja, hogy összefoglalja az eddig elért hazai eredményeket.

*

Kérjük a t. Olvasót, hogy amennyiben az operációkutatás területén publikációi vagy tanulmányai vannak, közölje nevét és címét a Szakosztállyal, a kapcsolatok felvétele céljából.

*

Az Operációkutatási Szakosztály címe:

MTESZ Neumann János Számítógéptudományi Társaság

Operációkutatási Szakosztálya

Budapest VI., Anker köz 1.

Tel: 222—093

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Helle Mária

A kézirat nyomdába érkezett: 1970. XI. 7. – Terjedelem: 6.65 (A/5) ív

70.70327 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György