

# SZIGMA

## Matematikai Közgazdasági folyóirat

Szerkesztő bizottság:

A MAGYAR KÖZGAZDASÁGI TÁRSASÁG  
MATEMATIKAI-KÖZGAZDASÁGI SZAKOSZTÁLYÁNAK VEZETŐSÉGE

Szerkeszti: MARTOS BÉLA

Munkatársak: ANDORKA RUDOLF, BÁGER GUSZTÁV, BOD PÉTER,  
PONGRÁCZ TIBOR

\*

### E SZÁM SZERZŐI:

**BRÓDY ANDRÁS**, a közgazdasági tudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének főmunkatársa, **FILEP GYÖRGY**, az Építőipari Számítástechnikai és Ügyvitelgépésítési Vállalat munkatársa, **HALABUK LÁSZLÓ**, a Központi Statisztikai Hivatal osztályvezetője, **KÉRI GERZSON**, az MTA Matematikai Kutató Intézetének tudományos segédmunkatársa, **KOVÁCS ÁLMOS**, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat csoportvezetője, **MARÓTI LÁSZLÓ**, a Központi Statisztikai Hivatal munkatársa, **NÉMETH SÁNDOR**, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének munkatársa, **STAHL JÁNOS**, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat osztályvezetőhelyettese, **VITA LÁSZLÓ**, a Központi Statisztikai Hivatal előadója.

A Kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7. — Telefon: 127—294

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓNÁL, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

Pénzforgalmi jelzőszám: 215—11488, az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTban, Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185—612. A POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODA 1. sz. HÍRLAPBOLTJÁBAN, BUDAPEST, V., József nádor tér 1. és bármely postahivatalban, csekkszámom: egyéni: 61 257, közlel: 61 066. MNB egyszámom: 8.

Ára: 12,— Ft. Előfizetés egy évre: 40,— Ft.

## Dekompozíciós eljárás a szén termelésének és elosztásának optimalizálására\*

### 1. Bevezetés

A széntermelés és elosztás optimalizálásának modellje a következő feltételekkel fogalmazható meg [2]:

$$(1) \quad x_{ij} \geq 0; \quad y_k \geq 0$$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^n h_{ij} x_{ij} = b_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(3) \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} + r_j \leq y_k a_j \quad (k = 1, \dots, t) \\ (j = j^{(k-1)}, \dots, j^{(k)} - 1)$$

$$(4) \quad y_k \geq s_k$$

$$(5) \quad y_k \leq 1 \quad (k = 1, \dots, t)$$

$$(6) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{k=1}^t y_k d_k \rightarrow \min.$$

ahol  $x_{ij}$  jelöli az  $i$  felhasználóhoz juttatott  $j$  szénfajta mennyiségét (szénfajtáknak a minőség és előfordulási hely tekintetében különböző szenekeket nevezünk),  $h_{ij}$  e viszonylatban egységnyi szén felhasználásával járó igénykielégítés mértékét (hatásfok),  $c_{ij}$  pedig a megfelelő szállítási költséget.  $b_i$ -vel  $i$  fogyasztó igényét,  $a_j$ -vel a  $j$  szénfajtából maximálisan termelhető mennyiséget,  $r_j$ -vel pedig e szénfajtából minimálisan termelendő (az „invariábilis”, rögzített szénfajtákat használó fogyasztóknak jutó) mennyiséget jelöltük. E fogyasztók igényei nem szerepelnek a modellben, a szén hozzájuk való szállításával kapcsolatos költség nyilvánvalóan konstans. A bányákban termelt szenet az osztályozókban választják szét a kereskedelmi forgalomban levő mennyiségeknek megfelelő csoportokra, az azonos osztályozókban „termelt” szénfajták mennyiségei közötti arányok rögzítettek.  $y_k$  jelöli  $k$  osztályozó termelési szintjét (azaz, hogy teljes kapacitásának hány százalékáig dolgozik),  $j^{(0)} = 1$ ,  $j^{(k)} = \sum_{i=1}^k l_i + 1$ , ahol  $l_k$  a  $k$  osztályozóban termelt szénfajták száma,  $d_k$  pedig a  $k$  osztályozó teljes kapacitással való termelése esetén felmerülő, a

\* Az OEGH megbízta az INFELOR Rendszertechnikai Vállalatot a széntermelést és elosztást optimalizáló modellek kialakításával és a modellek alapján való számítások elvégzésével. Az OEGH részéről Erdősi Pál, Füredi Tamás és Ligeti Pál vett részt a kutatásban. A cikk e kutatások eredményei alapján készült. A számításokat az INFELOR MINSZK-2 típusú számítógépén végezték.

termelés mértékével arányos (változó) termelési költség,  $s_k$  az osztályozó termelési szintjének alsó korlátja, amelynek értékét (3) feltétel határozza meg. A felesleges (4) feltételt a további tárgyalás egyszerűsítése érdekében szerepeltetjük.

Világos, hogy az azonos osztályozóban termelt szénfajtákhoz azonos  $y$  tartozik, a modell azonban nem írja elő a megtermelt szén felhasználását is, tehát előfordulhat, hogy valamely szénfajta kitermelése esetén nem kerül felhasználásra (ha a vele együtt termelt szénfajták kedvező tulajdonságai miatt ez a gazdaságos megoldás). Ugyanakkor a modell a termelési költséget az osztályozó működéséhez kapcsolja, így nincs szükség annak szénfajták közötti — csak önkényesen megvalósítható — felosztására.

Az (1)–(6) feltételekkel megadott feladat duálisa:

$$(7) \quad p_j \geq 0; \quad w_k \geq 0; \quad z_k \geq 0$$

$$(8) \quad u_i \leq \frac{c_{ij} + p_j}{h_{ij}} \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$(j = 1, \dots, n)$$

$$(9) \quad \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j p_j - w_k + z_k = d_k \quad (k = 1, \dots, t)$$

$$(10) \quad \sum_{i=1}^m u_i b_i + \sum_{j=1}^n r_j p_j - \sum_{k=1}^t w_k + \sum_{k=1}^t s_k z_k \rightarrow \max$$

Mint ismeretes, ennek optimális megoldásában szereplő  $u_i$  a fogyasztók egységnyi energiaigénye kielégítése minimális költségét adja,  $p_j$  a szénfajta egyensúlyi ára,  $w_k$  a  $k$  osztályozó pozitív,  $z_k$  pedig negatív járadékát jelöli. ( $w_k \cdot z_k = 0$ ). A (8) feltétel jobb oldalai ekkor a fogyasztó egységnyi energiaigénye kielégítésének költségeit (a különböző szénfajták esetén) mérik, a (9) feltétel pedig azt biztosítja, hogy az egyes osztályozókhoz tartozó szénfajták árai fedezzék a termelési költség és a járadék összegét. A járadék a kötelező termelési feladat (invariábilis fogyasztók) miatt negatív is lehet.

A dualitási tételekből következik, hogy azokra az osztályozókra vonatkozóan, amelyeket az optimális program teljesen kihasznál, a járadék nemnegatív, az alsó és felső korlát között használt osztályozók járadéka pedig zérus. Mivel pedig a (8) egyenlőtlenség csak az optimális program viszonylataira vonatkozóan teljesül egyenlőség formájában, a  $p_j$  árakat valóban egyensúlyi árak tekinthetjük, ugyanis ilyen árak mellett a fogyasztók választásai nem lesznek ellentétesek az optimális program döntéseivel.  $p_j$  értékeinek meghatározásakor tehát nem csak az egyes szénfajták különbözőzeti járadékát kapjuk meg, hanem a modell „elosztja” a termelési költségeit is az egyes szénfajták között. Ha azonban a termelési költség valamilyen szétosztásából indulunk ki — tehát meghatározunk olyan  $k_j$  értékeket, hogy

$$\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j k_j = d_k,$$

akkor a  $v_j = p_j - k_j$  formulával különbözőzeti járadékhoz jutunk. Világos, hogy

$$\sum_{j=1}^n a_j v_j = \sum_{k=1}^t (w_k + z_k).$$

Ha az osztályozók termelési szintje rögzített, akkor (1)–(6) feladat általánosított szállítási, illetve a  $h_{ij} = t_{ij}f_i$  feltevés esetén szállítási feladatként hatékony módszerekkel oldható meg ([2]). Mivel a szénbányászatban a termelési szerkezet nem változtatható meg máról holnapra, éves tervezés esetén az  $y$  értékeket rögzítettnek tekinthetjük, ekkor a modellnek csak elosztási kérdésekről kell döntenie. Hosszabb távon azonban — amikor a modell feladatának tekintjük az optimális termelési szerkezet meghatározását is — ezek az egyszerű modellek már nem használhatók, a modell méretei (mind a fogyasztók, mind a szénfajták száma többszáz, így a változók száma legalábbis több tízezer) pedig nem teszik lehetővé a lineáris programozás általános megoldási módszereinek használatát.

A következőkben egy speciális dekompozíciós eljárást ismertetünk (1)–(6) feladat megoldására, melynek alap gondolata lényegében a Benders-féle dekompozíciós elv [1], majd ennek az adott modellre történő alkalmazásával és a számítások eredményeivel foglalkozunk.

A leírás során ismertetnek tételezzük fel a lineáris programozás elméletét, és a szállítási feladattal kapcsolatos, ma már elfogadottnak tekinthető terminológiát.

## 2. A dekompozíciós eljárás

Az (1)–(6) feltételekkel megfogalmazott feladat

$$\begin{aligned} (11) \quad & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq 0 \\ (12) \quad & \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y} = \mathbf{a} \\ (13) \quad & \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{b} \\ (14) \quad & \mathbf{c}_1^* \mathbf{x} + \mathbf{c}_2^* \mathbf{y} \rightarrow \min \end{aligned}$$

formában írható.

Feltesszük, hogy

$$\begin{aligned} (15) \quad & Y = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{B} \mathbf{y} = \mathbf{b}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\} \neq \emptyset \text{ és korlátos, és hogy} \\ (16) \quad & \text{minden } \mathbf{y} \in Y \text{ esetén létezik } \min \{\mathbf{c}_1^* \mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

(Feladatunk esetén ezek a feltételek teljesülnek.)

Legyenek a  $P = \{\mathbf{p}^* \mid \mathbf{p}^* \mathbf{A}_1 \geq \mathbf{c}\}$  konvex poliéder extrémális csúcsai  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_L$ , extrémális irányai  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_N$ . Mint majd látható, ezek explicit előállítására a (11)–(14) feladat megoldása során általában nincs szükség.

Legyen  $\mathbf{y} \in Y$  esetén  $c_1(\mathbf{y}) = \min \{\mathbf{c}_1^* \mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ . Minthogy (16) szerint a  $\min \{\mathbf{c}_1^* \mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1 \mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  feladatnak minden  $\mathbf{y} \in Y$  esetén van optimális megoldása, tehát  $\mathbf{q}_n^*(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y}) \geq 0$  tetszőleges  $n$ -re és  $\mathbf{y} \in Y$ -ra és így

$$c_1(\mathbf{y}) = \max_l \{\mathbf{p}_l(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y})\} = \min \{u \mid u \geq \mathbf{p}_l^*(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2 \mathbf{y}); l = 1, 2, \dots, L\}.$$

A (11)–(14) feladat nyilván ekvivalens a

$$(17) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{B} \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} c_1(\mathbf{y}) + \mathbf{c}_2^* \mathbf{y} \rightarrow \min$$

feladattal, azaz a

$$(18) \quad \left. \begin{aligned} u &\geq \mathbf{p}_l^*(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}) \quad (l = 1, \dots, L) \\ \mathbf{B}\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} u + \mathbf{c}_2^*\mathbf{y} \rightarrow \min$$

feladattal.

Nyilvánvaló továbbá, hogy tetszőleges  $\bar{\mathbf{p}}_1^*, \bar{\mathbf{p}}_2^*, \dots$  esetén a (18) feladatot a

$$(19) \quad u \geq \bar{\mathbf{p}}_i^*(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}) \quad (i = 1, 2, \dots)$$

feltételekkel kiegészítve is az előzővel ekvivalens feladathoz jutunk.

Legyen  $\mathbf{y}_1 \in \bar{Y}$  és legyen  $c(\mathbf{y}_1) = \mathbf{p}^{(1)*}(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}_1)$ .

Ha már meghatároztuk  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k$ -t és  $\mathbf{p}^{(1)}, \mathbf{p}^{(2)}, \dots, \mathbf{p}^{(k)}$ -t, akkor oldjuk meg a

$$(20) \quad \left. \begin{aligned} u &\geq \mathbf{p}^{(1)*}(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ u &\geq \mathbf{p}^{(k)*}(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}) \\ \mathbf{B}\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} u + \mathbf{c}_2^*\mathbf{y} \rightarrow \min.$$

feladatot. Ha ennek  $u = \mathbf{p}^{(k)*}(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y})$  optimális megoldása, akkor ez optimális megoldása nyilván a (17) ekvivalens feladatnak is, míg ellenkező esetben az optimális megoldásból nyert  $\mathbf{y}_{k+1}$ -hez határozzuk meg  $\mathbf{p}^{(k+1)*}$ -t  $c(\mathbf{y}_{k+1}) = \mathbf{p}^{(k+1)*}(\mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{k+1})$  alapján és folytassuk az eljárást.  $\mathbf{p}^{(k+1)*}$ -t most mint a  $\min \{\mathbf{c}_1^*\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  feladat duálisának optimumát kapjuk. Az eljárás nyilván módosítható oly módon, hogy minden lépésben a (20) feltételeket további  $\bar{\mathbf{p}}^* \in P$ -knek megfelelőekkel bővítjük (lásd 19).

Az eljárás nyilvánvalóan véges, hiszen az extrémális  $\mathbf{p}^*$ -k száma is az.

Az így konstruált feladatok optimumértékei monoton nem csökkenő sorozatot adnak, mindegyik érték alsó becslés az eredeti feladat optimumára.

Ha egy (20) alakú feladat megoldása során a (17) ekvivalens feladat optimális megoldásához jutunk, a (11)–(14) feladat optimális megoldása  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k)$ , ahol  $\mathbf{x}_k$  optimális megoldása a  $\min \{\mathbf{c}_1^*\mathbf{x} \mid \mathbf{A}_1\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{A}_2\mathbf{y}_k, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  feladatnak. A (11)–(14) feladat

$$(21) \quad \left. \begin{aligned} \mathbf{p}^*\mathbf{A}_1 &\geq \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{p}^*\mathbf{A}_2 + \mathbf{q}^*\mathbf{B} &\geq \mathbf{c}_2 \end{aligned} \right\} \mathbf{p}^*\mathbf{a} + \mathbf{q}^*\mathbf{b} \rightarrow \max$$

duálisának megoldása

$$\mathbf{p} = \mathbf{t}^* \mathbf{P}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$$

ahol  $\mathbf{P}$  a szóbanforgó (20) alatti  $\mathbf{p}$ -kből alkotott mátrix,  $(\mathbf{t}^*, \mathbf{q}^*)$  pedig a (20) feladat duálisának optimális megoldásai.

### 3. A dekompozíciós eljárás alkalmazása

Az eljárást a  $h_{ij} = f_i t_j$  feltevés mellett az  $u_{ij} = t_j x_{ij}$  változó bevezetésével az alábbi átalakított feladaton mutatjuk be.

$$\begin{aligned}
 & u_{ij} \geq 0 \qquad y_k \geq 0 \\
 & \sum_{j=1}^n u_{ij} = b'_i, \\
 (22) \quad & \sum_{i=1}^m u_{ij} \leq y_k a'_j - r'_j \\
 & y_k \geq s_k \\
 & y_k \leq 1 \\
 & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c'_{ij} u_{ij} + \sum_{k=1}^t y_k d_k \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

( $a'_i$ ,  $b'_i$ ,  $r'_j$  és  $c'_{ij}$ ) az eredeti feladat megfelelő értékeiből  $f_i$  és  $t_j$  felhasználásával egyszerűen átszámított értékek.)

1.  $y$ -okat választunk úgy, hogy

$$\begin{aligned}
 (23) \quad & s_k \leq y_k \leq 1 \text{ és} \\
 & \sum_{k=1}^t y_k \left( \sum_{j=\sum_{k=1}^{k-1} j}^{j^{(k)}-1} a_j \right) \geq \sum_{i=1}^m b_i + \sum_{k=1}^n r_j
 \end{aligned}$$

Ez a feltétel biztosítja, hogy teljesüljön (16), a szállítási feladat megoldására használt eljárás ugyanis ilyen esetekben mindig ad megoldást. Ugyanakkor előfordulhat, hogy a kapott megoldás az eredeti feladatnak nem lesz megoldása, (a szállítási feladat ugyanis tiltott helyekre is programozhat), ezért szükség esetén további feltételekkel kell biztosítanunk, hogy a kapott  $y$ -k mellett (16) teljesüljön. Így szükség esetén pl. előírhatjuk, hogy az egyes szénminőségekből az összes termelés legyen nagyobb a csak az adott szénminőséggel kielégíthető igények összegénél, stb.)

2. Meghatározzuk az

$$\begin{aligned}
 (24) \quad & \sum_j u_{ij} = b'_i \\
 & \sum_i u_{ij} \leq y_k a'_j - r'_j \\
 & \sum_i \sum_j c'_{ij} u_{ij} \rightarrow \min
 \end{aligned}$$

feladat duálisának néhány megoldását.

Kezdetben esetleg célszerű az optimális duális megoldás helyett közelítő megoldásokkal megelégedni, az eljárás így valószínűleg gyorsítható. Nagyméretű szállítási feladat megoldása során ugyanis általános tapasztalat, hogy a számítás első felében a célfüggvény gyorsan csökken, majd viszonylag hosszú számítási idő után jut el az optimumig és ebben a szakaszban a célfüggvény értéke már nem lesz lényegesen kisebb. A számítás során időnként kiíratott aktuális célfüggvényérték vizsgálata alapján a feladat ismeretében meg lehetős

biztonsággal eldönthető, hogy várható-e még a célfüggvény lényeges csökkentése. A szállítási feladat aktuális „potenciáljaiból” könnyen konstruálhatunk lehetséges duális megoldásokat. Mi a következő módon jártunk el: legyenek  $u_i$ , illetve  $v_j$  az aktuális potenciálok.

- a)  $v_j \leq 0$  esetén a megfelelő  $v_j$  értéket 0-ra emeljük,  
 b) ha ezután valamennyi  $c_{ij}$ -re  $c_{ij} \geq u_i - v_j$

teljesül, megoldásunk már lehetséges duális megoldás, ellenkező esetben vagy  $u_i$  értékét csökkentjük addig, míg  $c_{ij} = u_i - v_j$  teljesül, vagy  $v_j$  értékét növeljük ennek a feltételnek megfelelően.

Ily módon, ha  $k$  olyan  $c_{ij}$  érték van, amelyre  $c_{ij} < u_i + v_j$ ,  $2^k$  számú duális megoldáshoz juthatunk. Legegyszerűbb ezek közül azt a két megoldást megkapni, amelyekben valamennyi esetben  $u_i$ -t csökkentjük, ill.  $v_j$ -t növeljük. A duális célfüggvényérték alapján képet kaphatunk a közelítés mértékéről is.

### 3. Megoldjuk az

$$(25) \quad y_k \geq s_k \quad y_k \leq 1$$

$$(26) \quad u + \sum_{k=1}^t y_k \left( \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j v_j \right) \geq \sum_{i=1}^m u_i b_i + \sum_{j=1}^n r_j v_j$$

$$(27) \quad \sum_{k=1}^t y_k \left( \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j \right) \geq \sum_{i=1}^m b_i + \sum_{j=1}^n r_j$$

$$(28) \quad u + \sum_{k=1}^t y_k d_k \rightarrow \min$$

lineáris programozási feladatot.

Valamennyi duális megoldásból származtatunk egy (26) típusú feltételt.

4. Az eljárást a 2. ponttól folytatjuk, a (25)–(28) feladat eredményeként kapott  $y$  értékekkel megoldva a (24) feladatot. Az eljárást mindaddig folytatjuk, míg (25)–(28) az előző lépésben adódott értékek esetén legsz optimális, ekkor ezek az  $y$ -ok és (24) megoldása szolgáltatják (22) optimális megoldását.

A (22) feladat duálisa a következő lesz:

$$(29) \quad \begin{aligned} p_j &\geq 0, \quad w_k \geq 0, \quad z_k \geq 0, & (j = 1, \dots, n) \\ & & (k = 1, \dots, t) \\ u_i - p_j &\leq c_{ij} & (i = 1, \dots, m) \\ & & (j = 1, \dots, n) \\ \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j p_j - w_k + z_k &\leq d_k & (k = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^m u_i b_i + \sum_{j=1}^n p_j v_j + \sum_{k=1}^t s_k z_k - \sum_{k=1}^t w_k \rightarrow \max .$$

(29) megoldását (24) és (25)–(28) duálisának megoldásából származtathatjuk. (24) duálisának  $u_i, v_j$  megoldásai ugyanis kielégítik a  $v_j \geq 0$ ,  $u_i - v_j \leq c_{ij}$  feltételeket, és ezek a  $v_j$  és  $u_i$  értékek szerepelnek (25)–(28) feltételeiben.

(25)–(28) duálisa a következő lesz:

$$(30) \quad t_l \geq 0, \quad t \geq 0, \quad w_k \geq 0, \quad z_k \geq 0,$$

$$\sum_{l=1}^r t_l \leq 1$$

[ $r$  (24) figyelembe vett duális megoldásainak a száma)

$$t \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j + \sum_{l=1}^r t_l \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j v_j + z_k - w_k \leq d_k \quad (k = 1, \dots, t)$$

$$\sum_{l=1}^r t_l \left[ \sum_{i=1}^m u_{il} b_i + \sum_{j=1}^n r_j v_{jl} \right] + t \left[ \sum_{i=1}^m b_i + \sum_{j=1}^n r_j \right] + \sum_{k=1}^t s_k z_k - \sum_{k=1}^t w_k \rightarrow \max$$

Könnyen belátható, hogy a (30) megoldásából kapott

$$(31) \quad p_j = \sum_{l=1}^r t_l v_{jl} + y,$$

$$u_i = \sum_{l=1}^r t_l u_{il} + y,$$

$w_k, z_k$  értékek (29) lehetséges megoldásai, és így (25)–(28) optimális megoldásához tartozó (30)-beli megoldásokból képzett (31) megoldások az optimális duális megoldást adják.

Végül megjegyezzük, hogy mivel (24) duálisnak lehetséges megoldásai a jobb oldaltól függetlenek, a jobb oldal (a szállítási feladat „peremei”) változása esetén a korábbi duális megoldásokat továbbra is felhasználhatjuk a (26) típusú feltételek képzésénél.

#### 4. A számítás eredményei

Két feladatot oldottunk meg, (B és C modell), a feladatok paraméterei a  $b$  vektor (fogyasztói igények) és a költségmátrix egyik oszlopa kivételével azonosak voltak.

Előzőleg megoldottunk egy feladatot, amelyben nem vettük figyelembe az azonos osztályozóból kikerülő szénfajták közötti kötött arányokat (A modell), tehát a (22) feladatban az

$$\sum_{i=1}^m u_{ij} \leq y_k a'_j - r'_j \text{ feltétel helyett az } \sum_{i=1}^m u_{ij} \leq a'_j - r'_j$$

feltételt alkalmaztuk, és a termelési költségeket szétosztottuk az egyes szénfajták között:

$$\sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j k_j = d_k.$$

A modell egyéb feltételei azonban nem tértek el lényegesen a B modell feltételeitől. A B modell megoldása során az induló  $y$  vektort az A modell árnyékárjai ismeretében választottuk. Az A modell ( $u_i, v_j$ ) árnyékáraiból az



1. sz. tábla  
y vektorok a B modell megoldása során

Osztályozó	Iteráció				
	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1
17	1	1	0,952	1	1
18	0	1	0	0	0
19	1	1	0	1	1
20	0	1	0	0	0
21	1	1	1	1	1
22	0	0	0	0	0
23	0,01	1	0,00035	1	0,40
24	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1
26	0	1	0	1	1
27	1	1	1	1	1
28	0	0	0	0	0
29	1	1	0,07	1	1
30	0	0	0	0	0
31	0,15	0,27	0,12	0,12	0,12
32	1	1	1	1	1
33	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1
35	1	1	1	1	1
36	0,01	1	0,006	0,006	0,006
37	1	0,947	0,947	0,947	0,947
38	1	1	1	1	1
39	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1
42	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1
44	1	1	1	1	1
45	1	1	1	1	1
46	0	0	0	0,07	1
47	1	1	1	1	1
48	1	1	1	1	1
49	1	1	1	1	1
50	1	1	1	1	1

$$u_i = u_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

$$p_j = v_j + k_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$w_k = \sum_{j=j^{(k-1)}}^{j^{(k)}-1} a_j v_j \quad (k = 1, \dots, t)$$

formulákkal a B modell lehetséges duális megoldásaihoz jutunk. Az  $u_i$  és  $p_j$  értékekkel megoldhatjuk a (26)–(28) feladatot és így az eljárást innen folytathatjuk. A gyakorlatban egyszerűbb módon jártunk el: a számított  $w_k$  értékek nagysága alapján választottuk  $\gamma$ -kat, úgy, hogy már az 5 legkisebb pozitív  $w_k$  esetén is  $\gamma_k = 0$  legyen.

A továbbiakban az eljárást a leírásnak megfelelően folytattuk.

A B modell megoldása során hat iterációs lépést végeztünk. Az 1. sz. táblában és az alábbiban összefoglaljuk a számítás főbb mutatóit.

Iteráció	Termelési	Szállítási	Összes	A célfüggvény alsó korlátja
	költség			
1	722 953	84 741	807 694	744 157
2	744 157	62 913	807 070	776 213
3	711 233	116 830	828 063	797 871
4	735 906	66 510	802 416	799 009
5	738 461	62 777	801 238	800 948

Az eljárást itt befejeztük, bár a pontos optimumot nem értük el, de az eltérés 0.1%-nál kisebb, így a megoldás gyakorlatilag optimum. A következő lépésre egyébként egyetlen  $\gamma$  érték, a 23. osztályozóhoz tartozó 0.4 változott volna 0,33-ra.

A fogyasztók és a szénfajták árnyékárai a 4. és az 5. lépés szállítási feladatának súlyozott átlagai, a súlyok 0,511 ill. 0,489.

A C modell megoldása során lényegében a B modell optimális termelési szerkezetével kezdtük az eljárást, egyedül a 23. osztályozó termelése tért el a B modell-beli értéktől. (A B. modellben az ötödik iterációban ugyanis ez az érték 0,58 lett volna, ezt az értéket szakértői becslés alapján csökkentettük 0,4-re.) Hat iterációs lépést végeztünk, a legjobb eredményt az ötödik lépésben kaptuk, az optimumtól való eltérés ismét 0,1 százalék alatt maradt.

## 2. sz. tábla

y vektorok a C modell megoldása során

Osztályozó	I t e r á c i ó					
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	1	1
18	0	0	0	0	0	0
19	1	1	1	1	1	1
20	0	0	0	0	0	0
21	1	1	1	1	1	1
22	0	0	0	0	0	0
23	0,58	0,00035	0,00035	0,00035	0,00035	0,00035
24	1	1	1	1	1	1
25	1	1	1	1	1	1
26	1	1	1	1	1	1
27	1	1	1	1	1	1
28	0	0	0	0	0	0
29	1	1	1	1	1	1
30	0	1	1	1	0,355	0,262
31	0,12	1	1	1	1	1
32	1	1	0,51	0,66	0,8	0,896
33	1	1	1	1	1	1
34	1	1	1	1	1	1
35	1	0,15	1	0,64	0,78	0,612
36	0,006	0,006	0,006	0,0006	0,006	0,006
37	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947	0,947
38	1	1	1	1	1	1
39	1	1	1	1	1	1
40	1	1	1	1	1	1
41	1	1	1	1	1	1
42	1	1	1	1	1	1
43	1	1	1	1	1	1
44	1	1	1	1	1	1
45	1	1	1	1	1	1
46	1	1	1	1	1	1
47	1	1	1	1	1	1
48	1	1	1	1	1	1
49	1	1	1	1	1	1
50	1	1	1	1	1	1

A 2. számú és az alábbi táblázatban, a B modellhez hasonlóan, összefoglaljuk a C modell számítási eredményeit.

Iteráció	Termelési	Szállítási	Összes	A célfüggvény alsó korlátja
	k ö l t s é g			
1	739 932	66 664	806 056	804 687
2	742 944	63 928	806 872	804 779
3	732 728	63 151	805 879	804 924
4	741 937	63 647	805 584	804 924
5	741 418	63 716	805 134	804 951
6	740 968	64 328	805 296	

Látható, hogy valamennyi iterációs lépés az optimumhoz közeli értéket adott, ugyanakkor a célfüggvény alsó korlátja csak lassan nőtt. Mindkét jelenség ellentmond a B modell megoldása során szerzett tapasztalatoknak, ugyanakkor a kellő pontosság eléréséhez szükséges iterációk száma mindkét esetben lényegében azonos volt.

A C modell esetében a fogyasztók és a szénfajták árnyékárjai az 1., 2. a 4. és 5. lépés szállítási feladatának súlyozott átlagai, a súlyok rendre 0.760, 0.005, 0.113, 0.122.

(Beérkezett: 1970. I. 5.)

#### IRODALOM

- [1] BENDERS J. F.: „Partitioning procedures for Solving Mixed-Variables Programming Problems”, Num. Math., 4. (1962).  
 [2] KOVÁCS Á.: Az éves szénelosztás optimalizálása. Információ Elektronika, 1967/3. Sz.

#### DECOMPOSITION METHOD FOR THE OPTIMIZATION OF COAL MINING AND DISTRIBUTION

The purpose of the model is to determine a production and transport program to satisfy a fixed demand of coal consumers with minimum cost. The solution of the dual problem enables to work out prices for each coal type, such that the consumers choice based on their own economic interest will not be contradictory to the optimum program.

The model is a linear programming problem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}, \mathbf{y} &\geq, 0 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{y} &= \mathbf{a} \\ \mathbf{B} \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_1 \mathbf{x} + \mathbf{c}_2 \mathbf{y} &\rightarrow \min \end{aligned}$$

characterized by the fact that the number of variables  $\mathbf{x}$  (delivery directions) is a multiple of that of variables  $\mathbf{y}$  (production level of coal breakers).

This study presents a decomposition method for the solution of the problem and deals with its application to the model. The idea underlying the decomposition method is the Benders decomposition principle and in the case of the model under discussion, the procedure consists in solving a series of transport problems where the constant terms of the constraints come from the solution of a small-size linear program.

Some results of the actual calculation are also presented.

ДЕКОМПОЗИЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ МОДЕЛИ ОПТИМАЛИЗАЦИИ  
ПРОИЗВОДСТВА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ УГЛЯ

Целью модели является определение программы производства и транспорта, по которой с минимальной затратой удовлетворяются установленные потребности потребителей угля. Решение двойственной задачи позволяет установить такие цены на отдельные виды угля, при которых выборы потребителей, основаны на их экономических интересах, не будут противоположными с решениями оптимальной программы.

Модель

$$\begin{aligned}x, y &\geq 0 \\ \mathbf{A}_1 \mathbf{x} &= \mathbf{A}_2 \mathbf{y} = \mathbf{a} \\ \mathbf{B} \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ c_1 \mathbf{x} + c_2 \mathbf{y} &\rightarrow \min\end{aligned}$$

является задачей линейного программирования, для которой характерно, что число переменных  $x$  (направления транспорта) во много раз больше числа переменных  $y$  (уровни производства сепараторов).

В статье излагается декомпозиционный метод для решения этой задачи, далее занимается применением этого метода к модели. Основным замыслом декомпозиционного метода является декомпозиционный принцип Бендерса и в случае излагаемой модели метод состоит из решения серии транспортных задач, где ограничения для транспортных задач даются в решении небольшой задачи линейного программирования.

Излагаются также некоторые результаты конкретного расчета.

# Átlagos késleltetés a gazdaságban

Megjegyzés W. Leontief tanulmányához

W. Leontief tanulmányában<sup>1</sup> fontos módszert dolgozott ki az adott végső fogyasztáshoz szükséges elsődleges ráfordítások teljes idősorának kiszámítására. E módszer segítségével megválaszolhatjuk azt a kérdést is: átlagosan mennyivel korábban kellett e ráfordításokat eszközölni, mielőtt a kívánt hatást, a kibocsátást, kiválthatták volna. A ráfordítások bizonyos hányada ugyanabban az évben szükséges, amikor a kibocsátás is megtörténik, másik része egy évvel, harmadik része két évvel, három évvel stb. korábban. Ha e hányadok ismeretesek, akkor — súlyozott átlagként — kiszámíthatjuk azt, hogy átlagosan hány évvel előzi meg a ráfordítás a kibocsátást. Így például válaszolhatunk arra, hogy a ma exportált termék átlagosan hány évvel ezelőtt importált termékből készült, vagy hogy a ma fogyasztott létfenntartási cikket átlagosan hány évvel korábbi munkával termeltük meg s.i.t.

Nem más ez, mint a népgazdaságon belüli anyagsere, termékáramlás átlagos átfutási idejének, a ráfordítások és a kibocsátás közti átlagos késleltetési időnek a kiszámítása. S valóban az említett tanulmányban szereplő (4) inverz alapján ez az érték meghatározható, ha az inverz általános oszlopának segítségével megfelelő módon súlyozott átlagot számítunk.

Az egyes években ráfordítandó mennyiség az idézett (4) képlet alapján táblázatba foglalva:

Ráfordítandó mennyiség	A kibocsátást megelőzve
$G^{-1}$	0 évvel
$RG^{-1}$	1 évvel
$R^2G^{-1}$	2 évvel
.	.
.	.
$R^nG^{-1}$	$n$ évvel
.	.
.	.

Itt  $G = 1 - A + B$  és  $R = G^{-1}B$ , ahol  $A$  a folyó ráfordítás,  $B$  a tőkelekötés matrixa.

<sup>1</sup> A dinamikus inverz. Sigma, 1969. 4. sz.

Feltéve, hogy a táblázatban szereplő sor konvergencia,<sup>2</sup> az összes ráfordítás is és az egyes évek megfelelő ráfordításaival szorzott (súlyozott) átfutás képlete is kijelölhető, sőt — némi közbenső számítás árán — igen egyszerű alakot ölt.

1. Az összes ráfordítás,  $\Omega$ , a táblázatban szereplő ráfordítások egyszerű összege:

$$(1) \quad \Omega = (1 + R + R^2 + \dots + R^n + \dots) G^{-1} = (1 - R)^{-1} G^{-1} = \\ = [G(1 - R)]^{-1} = \{(1 - A + B)[1 - (1 - A + B)^{-1}B]\}^{-1} = (1 - A)^{-1} = Q$$

vagyis egyenlő a nyílt statikus Leontief-inverz értékével. Ez tisztán közgazdasági megfontolásokból is nyilvánvaló, hiszen a dinamikus inverz lényegében nem más, mint a statikus inverz időbeli dezaggregációja.

2. A ráfordításokkal szorzott átfutási idők összege:

$$\Sigma = (R + 2R^2 + \dots + nR^n + \dots)G^{-1} = R(1 - R)^{-2}G^{-1}.$$

A fenti összegképlet a hasonló skaláris sor összegképletének matrix-változata. Figyelembe véve azt, hogy (1) alapján  $(1 - R)^{-1}G^{-1} = Q$  kapjuk, hogy

$$\Sigma = R(1 - R)^{-1}Q = (1 - A + B)^{-1}B[1 - (1 - A + B)^{-1}B]^{-1}Q.$$

Mindenünnen kiemelve  $(1 - A)^{-1} = Q$  értékét, végülis

$$(2) \quad \Sigma = (1 + QB)^{-1}QB[1 - (1 + QB)^{-1}QB]^{-1}Q = QBQ$$

ahol figyelembe vettük, hogy a  $QB$  matrix felcserélhető racionális függvényének  $(1 + QB)^{-1}$ -nek matrixával.

Ennek alapján az átlagos átfutási időket a  $\Sigma$  és az  $\Omega$  matrixok megfelelő elemeinek hányadosaként kapjuk, az  $i$ . szektorból a  $k$ . szektorba való átlagos átmenet idejét,  $R_{ik}$  értékét tehát a

$$(3) \quad T_{ik} = \frac{\Sigma_{ik}}{\Omega_{ik}} = \frac{(QBQ)_{ik}}{Q_{ik}} = \frac{Q_{i \cdot} B Q_{\cdot k}}{Q_{ik}}$$

hányados adja, ahol  $Q_{i \cdot}$  az inverz  $i$ -edik sora,  $Q_{\cdot k}$  pedig  $k$ -edik oszlopa.

\*

Ugyanennek a (3) képletnek a felépítését egy — látszólag eltérő — szemléletnek alapján is elvégezhetjük.

Ismeretes, hogy a  $B$  tőkelekötési matrix  $b_{ik}$  elemei felfoghatók úgy is, mint az  $A$  folyó ráfordítási matrix  $a_{ik}$  elemeinek és a  $t_{ik}$  megtérülési időnek szorzatai:

$$(4) \quad B = \{b_{ik}\} = A \otimes T = \{a_{ik} t_{ik}\}.$$

Kézenfekvő mármint, hogy e megtérülési idők összegezésével kísérjük meg kiszámítani az átlagos lekötési időt, amelyet akkor szenved el a termék, amikor

<sup>2</sup> Leontief csak azt bizonyítja, hogy az időegység megváltoztatásával a sor mindig konvergencia tehető. Számításai, valamint az azóta megjelent magyar számítás is (KSH: Kísérlet az első magyar dinamikus ÁKM összeállítására, Bp. 1969.) konvergensek voltak.

az  $i$ . szektorból a  $k$ . szektorba áramlik át — részben közvetlenül, részben pedig közvetve, több  $(1, 2, \dots, n, \dots)$  más szektor közvetítésével.

Közvetlenül csak  $a_{ik}$  mennyiség áramlik át, s ez persze megtörténik  $t_{ik}$  idő alatt. Az  $a_{ik}$  mennyiséggel súlyozott idő itt tehát  $a_{ik} t_{ik}$ , s ez megegyezik a  $B$  matrix elemeivel. Hátra van azonban a több vertikumon keresztül áramló termékek idősükséglete, amelyeket természetesen ismét a megfelelő mennyiségekkel beszorozva kell figyelembe venni.

Ha az egy közvetítő szektoron keresztül történő átáramlásokat vesszük figyelembe, akkor ezek mennyiségét a  $\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}$  nagyság adja meg — az  $A^2$  matrix  $i$ -edik sorában és  $k$ -adik oszlopában álló elem. Azonban ezeknek az áramlatoknak az idősükséglete már két részből összegeződik: míg eljut  $k$ -ből  $j$ -be, azaz  $t_{ij}$ , majd míg átjut  $j$ -ből  $k$ -ba, azaz  $t_{jk}$ . A súlyozott idősükséglet tehát

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk} (t_{ij} + t_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_{ij} a_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk} t_{jk} = (BA)_{ik} + (AB)_{ik},$$

ahol az utóbbi jelölésnél már figyelembe vettük a (4) képlet adta összefüggést.

Ugyanígy a két közvetítő szektoron történő átáramlás mennyisége

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jl} a_{lk} = (A^3)_{ik}.$$

Az idősükséglet itt három részből tevődik össze: a  $t_{ij} + t_{jl} + t_{lk}$  időkből. Az összidősükséglet ez esetben, megfelelően súlyozva

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jl} a_{lk} (t_{ij} + t_{jl} + t_{lk}) &= \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} t_{ij} a_{jl} a_{lk} + \\ + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jl} t_{jl} a_{lk} + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jl} a_{lk} t_{lk} &= (BA^2)_{ik} + (ABA)_{ik} + (A^2B)_{ik}. \end{aligned}$$

Folytathatnánk a gondolatot három, négy,  $\dots$ ,  $n$  s. i. t. szektoron keresztül követve az egyre növekvő idősükségletet s az egyre csökkenő mennyiségi súlyokat. Úgy vélem azonban a képzési szabály már világos. S ha megfelelő formában írjuk fel a  $QBQ = (1 - A)^{-1} B (1 - A)^{-1}$  kifejezés hatványsorát, szabatosan megkapjuk az egymás után álló oszlopokban a fenti 1, 2, három és  $n$ . lépcsős átmenetek súlyozott idősükségletét.  $QBQ$  ugyanis így írható fel:

$$\begin{aligned} B + BA + BA^2 + BA^3 + \dots + BA^{n-1} + BA^n + \dots \\ AB + ABA + ABA^2 + \dots + ABA^{n-2} + ABA^{n-1} + \dots \\ A^2B + A^2BA + \dots + A^2BA^{n-3} + A^2BA^{n-2} + \dots \\ A^3B + \dots + A^3BA^{n-4} + A^3BA^{n-3} + \dots \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ A^{n-2}BA + A^{n-2}BA^2 + \dots \\ A^{n-1}B + A^{n-1}BA + \dots \\ A^n B + \dots \end{aligned}$$



Itt az első három oszlop sorra a közvetlen, egylépcsős, kétlépcsős átmenet súlyozott idősükségletét adja az előbb számítottal egybehangzóan. Feltűntettük még a három lépcsős,  $n - 1$  lépcsős és  $n$  lépcsős átmeneteket is. E szerkesztési módból világos, hogy az összes súlyozott idősükségletet a  $QBQ$  matrix elemei adják meg, a súlyok összegét, az összes átáramló mennyiséget pedig a  $Q$  matrix, a teljes ráfordítási matrix elemei. Az átlagos átfutási idő tehát e két matrix megfelelő helyen álló elemeinek hányadosa, mint ahogy azt már a dinamikus inverz képleteiből is azonosan levezettük.

Megjegyzendő azonban, hogy a második levezetés nem kívánt meg újabb feltételezést a benne szereplő sor konvergenciájával kapcsolatban. A  $Q = (1 - A)^{-1} = 1 + A + A^2 + \dots + A^n + \dots$  sor konvergenciája és pozitív volta régóta bizonyított, ebből közvetlen folyik  $QBQ$  véges pozitív volta. Érdekes az is, hogy két eléggé eltérő szemlélet — a  $B$  matrixnak a megtérülési idők alapján történő, lényegében a marxi elméletre visszanyúló s először O. Lange-nál megtalálható értelmezése egyrészt, másrészt W. Leontief növekedési differenciaegyenlete, amely ugyanezt a matrixot csak a bővítés tőkelekötési szükségleteként értelmezi — szabatosan azonos eredményre vezet.

\*

Néhány befejező szó helyénvaló az átlagos átfutási idők, a népgazdaság e strukturális késleltetési idői, a nyugati irodalom műszavával „lag”-jai konkrét nagyságrendjét illetően.

Ha zárt modellel dolgozunk (ahol tehát a munkaerő, külkereskedelem, amortizáció, állami szektor stb. is szerepel az  $A$  és így a  $Q$  és  $B$  matrixokban), meglehetősen nagy átfutási időket fogunk kapni. Átlagosan — mivel a (3) képletnek megfelelően számolunk — a  $QB$  matrix legnagyobb pozitív sajátértékének megfelelő számot kapunk: ennyi év az átlagos késés. Mivel e sajátérték az átlagos növekedési ráta (átlagprofitráta) reciproka, ezért pl. az évi 5–6%-kal növekvő Magyarország esetében átlagosan 16–20 éves késleltetésekre készülhetünk fel. Példaképpen álljon itt az 1961. évi adatokból számított 5 szektoros modell késleltetési éveinek száma:<sup>3</sup>

*Átlagos átfutási idő*

	Ipar	Mezőgazdaság	Egyéb	Külkereskedelem	Munkaerő
Ipar	14	23	29	18	24
Mezőgazdaság	18	6	27	18	20
Egyéb	17	18	6	18	19
Külkereskedelem	19	24	32	7	27
Munkaerő	21	20	26	22	17

<sup>3</sup> Az alapadatokért Horváth Józsefnek, Madarász Aladárnak és Spitzer Györgynek kell köszönetet mondani, a számítás Székely Béla és Spitzer György munkája. Felesleges említeni, hogy mivel lényegében kísérleti számítás történt, felelősséget csak a módszerért és nagyságrendekért vállalhatunk, nem az — egyelőre igen durvának érzett — konkrét számadatokért.

Valószínűleg az erős aggregáció következménye, hogy az adatok szórása igen csekély. Figyelemreméltó és elgondolkoztató azonban, hogy milyen hosszúak az átfutási idők: a népgazdaság hatásmechanizmusa sokkalta lassúbb, mint azt véltük, vagy hinni szeretnénk. Átlagosan is 20 évnyi kihatása van minden gazdasági cselekedetünknek, amikor terveink egyelőre csak az 1–5 éves távot fogják át, s azt sem mindig kielégítően.

Persze, ha a modell nem zárt – ha tehát a számított adatok nem ölelik fel a munkaerő szektorában elszenvedett igen jelentős késleltetéseket – akkor jóval rövidebbek az átlagos átfutási idők. Utóbbi rövidebb tartamok közelebb állanak a közgazdászok hagyományos és szokásos nagyságrendi becsléseihez. Az átlagos átfutási idő azonban még így – csonkítottan számbavéve – sem mondható rövidnek. Mivel az ismert nyílt, statikus Q Leontief-inverzek oszlopösszegei 2 körül mozognak, s a tőke/termelés hányados, azaz a B matrix átlagos oszlopösszege 3 körüli, ezért az átlagos késleltetés mintegy  $2 \times 3 = 6$  év lesz. Azoknak a tervezési és elemzési feladatoknak tehát, amelyek eltekintenek a munkaerő (és a külkereskedelem) szektorában keletkező visszahatásoktól, s csupán a szorosan vett termelés területén elszenvedett késleltetéseket veszik számba, a 16–20 éves átfutási idő helyett 3–7 éves késleltetésekkel kell számolniuk. A számítás teljesen azonos képletek segítségével történik, csak a B és Q (illetőleg A) matrixok által felölelt szféra lesz kisebb, kevésbé „zárt” és teljes.

(Beérkezett: 1970. III. 18.)

#### AVERAGE LAG IN THE ECONOMY

The average lag can be calculated from the dynamic Leontief inverse, as the weighted mean value of the components in an (infinite) column of the inverse. So we have the

value  $\frac{(Q B Q)_{ik}}{Q_{ik}}$ , where Q is the Leontief inverse and B is the investment matrix.

The same value can be calculated otherwise, too, starting with the  $b_{ik} = t_{ik} a_{ik}$  representation of B, where  $a_{ik}$  is an entry of the technology matrix and  $t_{ik}$  its turnover time. This approach avoids a convergence condition which was necessary when using the dynamic inverse.

#### СРЕДНЕЕ ЗАПАДЫВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Среднее время запаздывания можно вычислить по динамической обратной матрице Леонтьева, как взвешенная средняя элементов одного (бесконечного) столбца обратной

матрицы. Получается величина  $\frac{(Q B Q)_{ik}}{Q_{ik}}$ , где Q-обратная матрица Леонтьева, а B-матрица

капитальных вложений.

Тот же самую величину можно получить другим путём, исходя из представления матрицы в виде  $b_{ik} = t_{ik} a_{ik}$ , где  $a_{ik}$  — элемент технической матрицы, и  $t_{ik}$  — соответствующие сроки окупаемости. При такой приближении, можно пропустить одно условие сходимости, которое было необходимое при непосредственной использовании динамической обратной матрицы.

## Módosított „stepping-stone“ algoritmus a szállítási probléma megoldására

1. *Bevezetés.* A szállítási probléma egyik megoldási módjául szolgál a „stepping-stone” algoritmus, vagy más elnevezéssel disztribúciós eljárás. Ez lényegében a lineáris programozás szimplex módszere, de nagymértékben kihasználja a szállítási probléma sajátos szerkezetében rejlő egyszerűsítési lehetőségeket. (Az utóbbi tény indokolja a külön elnevezést.) A „stepping-stone” algoritmus szokásos tárgyalásmódja a módszer kézi számolás esetén előnyös leírását tartalmazza. Dolgozatom célja kettős: egyrészt a „stepping-stone” módszernél alkalmazható további egyszerűsítésre kívánom felhívni a figyelmet, másrészt olyan irányban szándékozom kidolgozni az algoritmust, amely a szállítási táblától elszakadva, kézi számolás helyett a gépi megoldás szempontjait helyezi előtérbe. Ezenkívül kidolgozott példával illusztrálom a módosított „stepping-stone” módszer mindkét (kézi, ill. gépi megoldásra szánt változatát.

A fenti szakaszban említett egyszerűsítésre az a felismerés vezetett, hogy a  $\delta_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$  számok minden báziscsere alkalmával úgy transzformálódnak, hogy bizonyos sorokhoz hozzáadódik, egyúttal bizonyos oszlopokból levonódik ugyanaz a szám, mégpedig a bázisba bevonandó cellához tartozó  $\delta_{ij}$  szám.

2. *Jelölések és definíciók.* A szállítási probléma matematikai megfogalmazásban:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\
 & \left( \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \right) \\
 & x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

A szállítási tábla  $m \cdot n$  téglalap alakban elrendezett cellából áll. Az  $(i, j)$  cellához hozzá van rendelve a  $c_{ij}$  célfüggvényegyüttható és a szállítási probléma mátrixának

$$x_{ij} = e_i + e_{m+j}$$

oszlopvektora.

*Cellagráf*: Az  $m \cdot n$  cella halmazának tetszőleges részhalmazát kiválasztjuk. Ezek a cellagráf pontjai. E részhalmaz két celláját akkor és csak akkor kötjük össze éllel, ha vagy egy sorban vagy egy oszlopban vannak. Az egy sorban levő cellákat összekötő éleket vízszintes, az egy oszlopban levő cellákat összekötő éleket függőleges vonalaknak képzeljük el.

*Egyszerű út*: olyan cellagráf, amely merőlegesen csatlakozó élekből és ezek végpontjaiból áll, továbbá minden sorból és minden oszlopból legfeljebb két cellát tartalmaz.

*Egyszerű hurok*: olyan egyszerű út, amelynek kezdő és végpontja azonos, kezdő és végele pedig merőlegesen egymásra. (Így lényegtelen, hogy melyik cellát tekintjük kezdő és egyúttal végpontnak.)

Egy cellagráf *összefüggő*, ha az  $m \cdot n$ -es tábla minden sorában és minden oszlopában van hozzá tartozó cella, és a cellagráf bármely két cellája összeköthető egyszerű úttal.

Egy cellagráf *fa*, ha hurokmentes és összefüggő.

3. *A szimplex módszer alkalmazása*. Ismertnek tekintjük a következő fontosabb eredményeket:

A szállítási probléma mátrixának bizonyos  $\alpha_{ij}$  oszlopvektorai akkor és csak akkor alkotnak bázist, ha a megfelelő  $(i, j)$  cellák a szállítási táblában olyan cellagráfot alkotnak, amely fa. Így egy cellarendszert *báziscellarendszernek* nevezünk, ha a cellagráfja fa.

Ha egy báziscellarendszert kibővítünk egy további cellával, akkor a kibővített cellarendszer gráfja tartalmaz egy és csak egy hurkot. Ez a hurok egyszerű és áthalad az újonnan bevont cellán.

A szimplex módszer alkalmazása során adott báziscellarendszer esetén minden  $(i, j)$  cellához hozzárendelünk egy

$$\delta_{ij} = z_{ij} - c_{ij}$$

számot a következő módon: Ha  $(i, j)$  báziscella, akkor  $\delta_{ij} = 0$ . Egyébként tekintünk azt az egyszerű hurkot, amely áthalad az  $(i, j)$  cellán és rajta kívül csak báziscellákon halad át. Legyenek e hurok pontjai sorrendben

$$(2) \quad (i, j) = (i_1, j_1), (i_1, j_2), (i_2, j_2), (i_2, j_3), \dots, (i_{k-1}, j_k), (i_k, j_k) = (i, j).$$

Ekkor

$$(3) \quad \delta_{ij} = c_{i_1, j_2} - c_{i_2, j_2} + c_{i_2, j_3} - \dots + c_{i_{k-1}, j_k} - c_{ij}.$$

Ha most az adott báziscellarendszerből elhagyjuk az

$$(i_1, j_2), (i_2, j_3), \dots, (i_{k-1}, j_k)$$

cellák valamelyikét,<sup>1</sup> mondjuk az  $(i_r, j_{r+1})$  cellát, és bevonjuk helyette az  $(i, j)$  cellát, akkor újabb bázisrendszerhez jutunk. A stepping-stone algoritmus során mindig ilyen báziscserét végzünk. A bázisba bevonandó cella tetszőleges olyan  $(i, j)$  cella lehet, amelyre a megfelelő  $\delta_{ij}$  szám aktuális értéke pozitív. Ha  $\delta_{ij} \leq 0$  minden  $(i, j)$  párra, akkor az optimális megoldásnál vagyunk. A bázisból kilépő cella  $(i_r, j_{r+1})$  koordinátáit az

$$(4) \quad x_{i_r, j_{r+1}} = \min_{1 \leq s \leq k-1} x_{i_s, j_{s+1}}$$

<sup>1</sup> Itt csak az  $(i, j)$  cellától a hozzá tartozó hurok mentén páratlan távolságra levő báziscellák jöhetnek szóba, tehát a (2) alatti cellák közül minden második szerepel.

kritérium jelöli ki, ahol  $x_{\alpha\beta}$  az  $(\alpha, \beta)$  báziscellához tartozó bázisváltó aktuális értéke. A bázisváltók a báziscsere után a következő értékeket veszik fel:

$$(5) \quad \begin{aligned} x'_{i_s, j_{s+1}} &= x_{i_s, j_{s+1}} - x_{i_r, j_{r+1}}, & (s = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, k-1, \\ x'_{i_s, j_s} &= x_{i_s, j_s} + x_{i_r, j_{r+1}}, & (s = 2, 3, \dots, k-1), \\ x'_{i_1, j_1} &= x_{i_r, j_{r+1}}, \end{aligned}$$

és  $x'_{\alpha\beta} = x_{\alpha\beta}$  minden más  $(\alpha, \beta)$  báziscellára.

4. A  $\delta_{ij}$  számok megadása duál változók segítségével. Tekintsük az

$$(6) \quad u_\alpha + v_\beta = c_{\alpha\beta}$$

egyenleteket minden olyan  $(\alpha, \beta)$  párra, amelyre  $(\alpha, \beta)$  báziscella. Legyenek az  $u_i, v_j$  számok ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ) a (6) rendszer egy tetszőleges megoldása.

Ismeretes, hogy ekkor

$$(7) \quad \delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}.$$

5. A  $\delta_{ij}$  számok transzformációja a báziscserék során. Legyen  $H$  egy báziscellarendszer. Tekintsük a  $H$ -hoz tartozó  $u_i, v_j, \delta_{ij}$  számokat, és legyen  $u'_i, v'_j, \delta'_{ij}$  ezek új értéke a 3. szakaszban leírt báziscsere után, másszóval a  $H'$  báziscellarendszerben, amely abban különbözik  $H$ -tól, hogy az  $(i_r, j_{r+1})$  cella helyett az  $(i_1, j_1)$  cellát tartalmazza.

Definiáljuk a bizonyos sor-, ill. oszlopindexekből álló  $C$  és  $D$  halmazokat a következőképpen:

a) Ha az  $i_r$ -edik sorban  $H$  csak az  $(i_r, j_{r+1})$ , azaz  $H'$  csak az  $(i_1, j_1)$  báziscellát tartalmazza ( $r = 1$  szükségszerűen), akkor legyen  $C = \{i_r\}$ ,  $D = \emptyset$ .

b) Ha a  $j_{r+1}$ -edik oszlopban  $H$  csak az  $(i_r, j_{r+1})$  báziscellát tartalmazza, akkor legyen  $C = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $D = \{1, 2, \dots, j_{r+1} - 1, j_{r+1} + 1, \dots, n\}$ .

c) Ha az  $(i_r, j_{r+1})$  cella sorában is, oszlopában is van további báziscella, akkor tekintsük azt a csak  $H$  celláiból álló maximális összefüggő  $H_1$  cellagráfot, amely az  $(i_r, j_r)$  cellát tartalmazza, de az  $(i_r, j_{r+1})$  cellát nem. Legyen most  $C$  és  $D$  a  $H_1$  halmaz két vetülethalmaza, azaz

$$C = \{i : (i, j) \in H_1 \text{ valamely } j\text{-re}\},$$

$$D = \{j : (i, j) \in H_1 \text{ valamely } i\text{-re}\}.$$

Bebizonyítjuk, hogy az

$$(8) \quad u'_i = \begin{cases} u_i - \delta_{i, j_1} & \text{ha } i \in C \\ u_i & \text{ha } i \notin C, \end{cases}$$

$$v'_j = \begin{cases} v_j + \delta_{i_1, j} & \text{ha } j \in D \\ v_j & \text{ha } j \notin D \end{cases}$$

számok az

$$(9) \quad u_\alpha + v_\alpha = c_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta) \in H'$$

rendszer egy megoldását alkotják.

A bizonyítás az  $a)$  esetben nagyon egyszerű.  $(i, j) \in H \cap H'$  esetén ugyanis  $i \neq i_r$ , tehát  $i \notin C$ ,  $j \notin D$ , így (8) és (6) miatt  $u'_i + v'_j = u_i + v_j = c_{ij}$ , az új  $(i_1, j_1)$  báziscellára pedig  $i_1 = i_r \in C$ ,  $j_1 \notin D$ , tehát (8) és (7) miatt  $u'_{i_1} + v'_{j_1} = (u_{i_1} - \delta_{i_1, j_1}) + v_{j_1} = c_{i_1, j_1}$ .

A  $b)$  eset bizonyítása analog. Végül a  $c)$  esetben  $(i, j) \in H \cap H'$  típusú új báziscellákra  $(i, j) \in H_1$  esetén  $i \in C$  és  $j \in D$ , így (8) és (6) miatt  $u'_i + v'_j = (u_i - \delta_{i, j_1}) + (v_j + \delta_{i, j_1}) = u_i + v_j = c_{ij}$ ,  $(i, j) \notin H_1$  esetén viszont a  $H_1$  gráf maximál-tulajdonsága miatt az  $(i, j)$  cellának sem a sorában, sem az oszlopában nem lehet  $H_1$ -hez tartozó cella, így  $i \notin C$ ,  $j \in D$ , továbbá ismét (8) és (6) miatt  $u'_i + v'_j = u_i + v_j = c_{ij}$ . Belátandó még, hogy  $u'_{i_1} + v'_{j_1} = c_{i_1, j_1}$ . Mivel az  $(i_1, j_2)$  cellát  $H_1$  tartalmazza,  $i_1 \in C$ . Másrészt  $j_1 \notin D$ . Tegyük fel ugyanis ennek ellenkezőjét, vagyis azt, hogy  $j_1 \in D$ . Ekkor azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az  $i_1$ -edik sorban is, a  $j_1$ -edik oszlopban is van  $H_1$ -hez tartozó báziscella,  $(i_1, j_1) \notin H_1$  miatt ezek egymástól különbözőek,  $H_1$  összefüggő volta miatt összeköthetők egy csak  $H_1$  celláin áthaladó úttal. Vegyük hozzá ehhez az úthoz az  $(i_1, j_1)$  cellát. Ekkor olyan hurokhoz jutunk, amely az  $(i_1, j_1)$  cellán kívül csak  $H$ -beli báziscellákat tartalmaz, de az  $(i_r, j_{r+1})$  cellát nem tartalmazza. Ez ellentmond az  $(i_1, j_1)$  cellán és ezenkívül csak báziscellákon áthaladó hurok egyértelműségének. Következésképpen  $j_1 \notin D$ , továbbá (8) és (7) miatt  $u'_{i_1} + v'_{j_1} = (u_{i_1} - \delta_{i_1, j_1}) + v_{j_1} = c_{i_1, j_1}$ .

Beláttuk, hogy (8) tekinthető az  $u_i, v_j$  duál változók transzformációs formuláinak, következőképpen a  $\delta_{ij}$  számok transzformációját a

$$(10) \quad \begin{aligned} \delta'_{ij} &= \delta_{ij} && \text{ha } i \in C \text{ és } j \in D, \\ & && \text{vagy } i \notin C \text{ és } j \notin D, \\ \delta'_{ij} &= \delta_{ij} - \delta_{i_1, j_1} && \text{ha } i \in C \text{ és } j \notin D, \\ \delta'_{ij} &= \delta_{ij} + \delta_{i_1, j_1} && \text{ha } i \notin C \text{ és } j \in D \end{aligned}$$

formulák adják meg.

Végül az olvasóra hagyom annak a bizonyítását, hogy a  $C, D$  halmazok az  $a), b), c)$  esetek bármelyikében elkészíthetők a következő algoritmikus úton: Jelöljük meg először az  $i_1$ -edik sort és az  $i_1$ -edik sorban levő  $(i_r, j_{r+1})$ -től különböző báziscellák oszlopait. Az általános lépés során jelöljük meg a közvetlenül előzőleg megjelölt oszlopokban levő báziscellák sorai közül azokat, amelyek még jelöletlenek, majd a most megjelölt sorokban levő  $(i_r, j_{r+1})$ -től különböző báziscellák oszlopai közül azokat, amelyek még jelöletlenek. Az eljárás véget ér, ha már nem tudunk ily módon újabb sort vagy újabb oszlopot megjelölni. A végeredményben megjelölt sorok, ill. oszlopok indexei fogják alkotni a  $C$  ill.  $D$  halmazt.

6. *Induló bázis keresése.* A szokásos módszernek egy olyan változatát alkalmazom, amelynél a báziscellákat úgy választjuk meg, hogy a hozzájuk tartozó  $c_{ij}$  értékek lehetőleg kicsik legyenek. Az  $u_i, v_j$  duál változók és a  $\delta_{ij}$  számok kezdeti értékének meghatározása az induló bázis celláinak és a bázis-változók értékének megadásával szimultán történik.

7. *Az algoritmus.* Újabb vagy az eddigiektől eltérő jelölések: a báziscellák regisztrálása az  $A_i, B_j$  halmazok segítségével történik, ahol

$$\begin{aligned} A_i &= \{j : (i, j) \text{ báziscella}\} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\ \text{és } B_j &= \{i : (i, j) \text{ báziscella}\} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

A bázisba bevonandó cella koordinátáit  $(r, s)$ , a hozzátartozó hurok pontjait

$$(r, s) = (\alpha_1, \beta_{11}), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_{1i}, \beta_{1i})$$

fogja jelölni;  $(\alpha_{i_0}, \beta_{i_0})$  a bázisból kilépő cella. A kezdeti  $\delta_{ij}$  értékek meghatározására szolgáló duál változók jelölésére elég két változó:  $u$  és  $v$ . A  $C$ ,  $D$  halmazok sorozata a hurokkeresési eljárás számára szolgál.

Most következzenek az algoritmus lépései, az utasításokat zárójelen kívül, a magyarázatokat és megjegyzéseket szögletes zárójelek közt megadva. Más típusú zárójelek használata értelemszerű.

1° [Báziskeresés és a  $\delta_{ij}$  számok kezdeti értékének meghatározása.  $r, s, C$  és  $D$  itt csak segédváltozók, a báziscserék során más, lényeges célra fogjuk használni ezeket a betűket.]

$$A_i = \emptyset \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad B_j = \emptyset \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$c_{rs} = \min \{c_{ij} : i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n\}$  [ $r$  és  $s$  kijelölése számára. Ha a minimális  $c_{ij}$  nem egyértelmű, akkor mindegy hogy a lehetséges  $(r, s)$  párok közül melyiket választjuk.]

$$C = \{r\}, \quad D = \{s\}, \quad A_r = \{s\}, \quad B_s = \{r\}$$

$$a'_i = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad b'_j = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$\delta'_{ij} = -c_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

$$x_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

$$u = 0, \quad v = c_{rs}$$

2°  $i = 1, j = 1$

3°  $j = n$  esetén folytassuk 7°-nál, egyébként 4°-nél.

4°  $a'_r < b'_s$  esetén folytassuk 6°-nál, egyébként 5°-nél.

5°  $x_{rs} = b'_s$

$$a'_r = a'_r - b'_s$$

$$\delta_{ks} = \delta_{ks} + v \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

$$j = j + 1$$

$c_{rs} = \min \{c_{rl} : l \in \{1, 2, \dots, n\} - D\}$  [ $r$  a régi, de  $s$  eddigi értéke törlendő, az utasítás  $s$  új értékének kijelölésére szolgál. Ha ezzel  $s$  értékét nem egyértelműen jelöljük ki, akkor a lehetséges  $s$ -ek bármelyikét választhatjuk.]

$$D = D \cup \{s\}$$

$$A_r = A_r \cup \{s\}, \quad B_s = B_s \cup \{r\}$$

$$v = c_{rs} - u$$

Térjünk vissza 3°-hoz.

6°  $x_{rs} = a'_r$

$$b'_s = b'_s - a'_r$$

$$\delta_{rl} = \delta_{rl} + u \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

$$i = i + 1$$

$c_{rs} = \min \{c_{ks} : k \in \{1, 2, \dots, m\} - C\}$  [ $s$  a régi, de  $r$  eddigi értéke törlendő, az utasítás  $r$  új értékének kijelölésére szolgál.]

$$C = C \cup \{r\}$$

$$A_r = A_r \cup \{s\}, \quad B_s = B_s \cup \{r\}$$

$$u = c_{rs} - v$$

Térjünk vissza 3°-hoz.

7°  $i < m$  esetén folytassuk 6°-nál, egyébként 8°-nál.

8°  $x_{rs} = a'_r$

- $\delta_{rl} = \delta_{rl} + u$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ )  
 $\delta_{ks} = \delta_{ks} + v$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ )
- 9° [A bázisba bevonandó cella meghatározása.]  
 $\delta_{rs} = \max \{ \delta_{ij} : i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \}$  [ $r$  és  $s$  kijelölésére]  
 $\delta_{rs} \leq 0$  esetén menjünk 34°-hez, egyébként 10°-hez.
- 10° [Hurokkeresés és a bázisból kilépő cella meghatározása.]  
 $C_1 = \{r\}$   
 $D_1 = A_r$   
 $l = 2$
- 11°  $C_l = \cup \{B_j : j \in D_{l-1}\} - C_{l-1}$   
 $D_l = \cup \{A_i : i \in C_l\} - D_{l-1}$   
 $s \in D_l$  esetén folytassuk 13° nál, egyébként 12°-nél.
- 12°  $l = l + 1$   
 Térjünk vissza 11°-hez.
- 13°  $l_0 = l, l_1 = l$  [Értékük legfeljebb  $\min \{m, n\}$ .]  
 $\beta_l = s$   
 $\alpha_l \in B_{\beta_l} \cap C_l$  [Ez a metszet mindig egy elemből áll.]
- 14°  $l = 1$  esetén folytassuk 17°-nél, egyébként 15°-nél.
- 15°  $l = l - 1$   
 $\beta_l \in A_{\alpha_{l+1}} \cap D_l$   
 $\alpha_l \in B_{\beta_l} \cap C_l$  [Ezek is szükségképpen egy elemű halmazok.]  
 $x_{\alpha_l, \beta_l} \geq x_{\alpha_0, \beta_0}$  esetén folytassuk 14°-nél, egyébként 16°-nál.
- 16°  $l_0 = l$   
 Menjünk vissza 14°-hez.  
 [A keresett hurok  $(r, s) = (\alpha_1, \beta_{l_1}), (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_1), \dots, (\alpha_l, \beta_{l_1})$ , a bázisba bekerül az  $(r, s)$  cella az  $(\alpha_{l_0}, \beta_{l_0})$  cella helyett.]
- 17° [A  $\delta_{ij}$  számok transzformációja.]  
 $l_0 \neq 1$  esetén folytassuk 20°-nál, egyébként 18°-nál.
- 18°  $A_r \neq \{\beta_1\}$  esetén folytassuk 27°-nél, egyébként 19°-nél.
- 19°  $\delta_{rj} = \delta_{rj} - \delta_{rs}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )  
 Menjünk 32°-höz.
- 20°  $l_0 \neq l_1$  esetén folytassuk 23°-nál, egyébként 21°-nél.
- 21°  $B_s \neq \{\alpha_{l_1}\}$  esetén folytassuk 23°-nál, egyébként 22°-nél.
- 22°  $\delta_{is} = \delta_{is} - \delta_{rs}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ )  
 Menjünk 32°-höz.
- 23°  $C = C_1, D = D_1$   
 $l = 2$
- 24°  $C = C \cup C_l$   
 $l = l_0$  esetén folytassuk 25°-nél, egyébként 26°-nál.
- 25°  $C' = C_l$   
 Menjünk 28°-hoz
- 26°  $D = D \cup D_l$   
 $l = l + 1$   
 Térjünk vissza 24°-hez.
- 27°  $C = \{r\}, C' = \{r\}, D = \emptyset$
- 28°  $D' = \cup \{A_i : i \in C'\} - (D \cup \{\beta_{l_0}\})$   
 $D' = \emptyset$  esetén folytassuk 31°-nél, egyébként 29°-nél.
- 29°  $D = D \cup D'$   
 $C' = \cup \{B_j : j \in D'\} - C$   
 $C' = \emptyset$  esetén folytassuk 31°-nél, egyébként 30°-nál.



30°  $C = C \cup C'$

Térjünk vissza 28°-hoz.

31°  $\delta_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{rs} \quad (i \in C, j \notin D)$

$\delta_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{rs} \quad (i \notin C, j \in D)$

32° [A báziscellák új rendszerének elkészítése.]

$A_{\alpha_{l_0}} = A_{\alpha_{l_0}} - \{\beta_{l_0}\}, B_{\beta_{l_0}} = B_{\beta_{l_0}} - \{\alpha_{l_0}\}$

$A_r = A_r \cup \{s\}, B_s = B_s \cup \{r\}$

33° [Az  $x_{ij}$  változók új értéke.]

$x_{\alpha_l, \beta_l} = x_{\alpha_l, \beta_l} - x_{\alpha_{l_0}, \beta_{l_0}} \quad (l = 1, 2, \dots, l_0 - 1, l_0 + 1, \dots, l_1)$

$x_{\alpha_{l+1}, \beta_l} = x_{\alpha_{l+1}, \beta_l} + x_{\alpha_{l_0}, \beta_{l_0}} \quad (l = 1, 2, \dots, l_1 - 1)$

$x_{rs} = x_{\alpha_{l_0}, \beta_{l_0}}$

$x_{\alpha_{l_0}, \beta_{l_0}} = 0$

Térjünk vissza 9°-hez

34° Az algoritmus vége.

[ $x_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$  az optimális megoldás.]

8. Példa a módosított stepping-stone algoritmus alkalmazására. Tekintsük az

(1) szállítási problémát a következő adatokkal:

$m = 4$	$b_1 = 14$	$c_{11} = 10$	$c_{21} = 1$	$c_{31} = 4$	$c_{41} = 1$
$n = 7$	$b_2 = 30$	$c_{12} = 15$	$c_{22} = 5$	$c_{32} = 3$	$c_{42} = 2$
	$b_3 = 22$	$c_{13} = 3$	$c_{23} = 21$	$c_{33} = 24$	$c_{43} = 22$
$a_1 = 17$	$b_4 = 27$	$c_{14} = 4$	$c_{24} = 12$	$c_{34} = 7$	$c_{44} = 4$
$a_2 = 29$	$b_5 = 13$	$c_{15} = 0$	$c_{25} = 12$	$c_{35} = 1$	$c_{45} = 11$
$a_3 = 30$	$b_6 = 2$	$c_{16} = 13$	$c_{26} = 14$	$c_{36} = 23$	$c_{46} = 5$
$a_4 = 50$	$b_7 = 18$	$c_{17} = 13$	$c_{27} = 15$	$c_{37} = 1$	$c_{47} = 6$

Az algoritmus 1°–9° részét alkalmazva az

$A_1 = \{3, 5\}, A_2 = \{1, 3\}, A_3 = \{4, 6, 7\}, A_4 = \{1, 2, 4\},$

$B_1 = \{2, 4\}, B_2 = \{4\}, B_3 = \{1, 2\}, B_4 = \{3, 4\}, B_5 = \{1\}, B_6 = \{3\},$

$B_7 = \{3\}$

halmazokat és induló szállítási táblaként az 1. táblát kapjuk. Itt a bekeregetett számot tartalmazó

1. tábla

-27	-31	4	-18	13	-11	-33	17
12	-3	18	-8	6	6	-17	29
0	2	0	10	20	2	18	30
3	30	-1	17	7	15	-8	50
14	30	22	27	13	2	18	126

cellák alkotják az induló báziscellarendszert, a bázisváltozók értékével a körök belsejében. A cellák jobb felső sarkában a  $\delta_{ij}$  értékek találhatóak. A báziscellákhoz tartozó  $\delta_{ij}$  számok és a bázison kívüli cellákhoz tartozó  $x_{ij}$  számok értéke természetesen 0. A  $c_{ij}$  célfüggvényegyütthatókra ezentúl már nem lesz szükségünk.

$9^\circ$ -nél folytatva az algoritmust,  $\max \delta_{ij} = 20 = \delta_{35}$ , tehát  $r = 3$ ,  $s = 5$ .  
Most a  $10-13^\circ$  közötti lépéseket elvégezve

$$C_1 = \{3\}, \quad D_1 = \{4, 6, 7\},$$

$$C_2 = \{4\}, \quad D_2 = \{1, 2\},$$

$$C_3 = \{2\}, \quad D_3 = \{3\},$$

$$C_4 = \{1\}, \quad D_4 = \{5\}.$$

Láthatjuk, hogy  $s \notin D_1, D_2, D_3$ , de  $s \in D_4$  így  $l_1 = 4$ ,  $\beta_4 = 5$ , és  $\alpha_4 = 1$ .  
A  $14-17^\circ$  lépéseket alkalmazva

$$\beta_3 = 3, \alpha_3 = 2, x_{23} = 18 > x_{15} = 13 \quad \text{miatt} \quad \text{marad } l_0 = 4,$$

$$\beta_2 = 1, \alpha_2 = 4, x_{41} = 3 < x_{15} = 13 \quad \text{miatt} \quad l_0 = 2,$$

$$\beta_1 = 4, \alpha_1 = 3, x_{34} = 10 > x_{41} = 3 \quad \text{miatt} \quad \text{marad } l_0 = 2.$$

Következik a  $C, D$  halmazok elkészítése a  $17-29^\circ$  lépések szerint.  $l_0 \neq l$   
és  $l_0 \neq l_1$  miatt  $23^\circ$ -hoz ugorhatunk. A  $25^\circ$ -höz érés pillanatában

$$C = \bigcup_{l=1}^{l=l_0} C_l = C_1 \cup C_2 = \{3, 4\},$$

$$D = \bigcup_{l=1}^{l=p-1} D_l = D_1 = \{4, 6, 7\},$$

ezután  $25^\circ$  és  $28-29^\circ$  szerint  $C' = \{4\}$ , majd  $D' = \{2\}$ ,  $D = \{2, 4, 6, 7\}$  és  
 $C' = \emptyset$ . Végeredményben  $C = \{3, 4\}$  és  $D = \{2, 4, 6, 7\}$ . Most a  $31-33^\circ$   
utasítások formái szerint elkészítjük az

$$A_1 = \{3, 5\}, \quad A_2 = \{1, 3\}, \quad A_3 = \{4, 5, 6, 7\}, \quad A_4 = \{2, 4\},$$

$$B_1 = \{2\}, \quad B_2 = \{4\}, \quad B_3 = \{1, 2\}, \quad B_4 = \{3, 4\}, \quad B_5 = \{1, 3\},$$

$$B_6 = \{3\}, \quad B_7 = \{3\}$$

halmazokat és az új szállítási táblát (2. tábla)

2. tábla

-27	-11	(7)	2	(10)	9	-13
(14)	17	(15)	12	6	26	3
-20	2	-20	(7)	(3)	(2)	(18)
-20	(30)	-21	(20)	-13	15	-8

A következő bázisba bevonandó cella a (2, 6) cella, a hozzá tartozó hurok a

$$(2, 6), (2, 3), (1, 3), (1, 5), (3, 5), (3, 6)$$

cellákból áll. A bázisból kilép a (3, 6) cella, amely egyetlen báziscellája a  
6-ik oszlopnak. Eszerint  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$  és következik  
a 3. szállítási tábla.

3. tábla

-27	-11	9	2	8	-17	-13
14	17	13	12	6	2	3
-20	2	-20	7	5	-26	18
-20	30	-21	20	-13	-11	-8

A bázisba bevonandó (2, 2) cellához tartozó hurok a (2, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 5), (3, 5), (3, 4), (4, 4), (4, 2) cellákból áll. A bázisból kilép a (3, 4) cella. A (3, 4) cellát nem tartalmazó, de a (3, 5) cellát tartalmazó báziscellákból álló maximális összefüggő  $H_1$  cellagráf a

$$(3, 5), (3, 7), (1, 5), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (2, 6)$$

cellákból áll, tehát  $C = \{1, 2, 3\}$  és  $D = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ .

Az újabb szállítási tábla a 4. tábla.

4. tábla

-27	-28	16	-15	1	-17	-13
14	7	6	-5	6	2	3
-20	-15	-20	-17	12	-26	18
-3	23	-4	27	4	6	9

Most bejön a bázisba a (4, 7) cella az (1, 5) cella helyett. A  $C$  és  $D$  halmazoknak a jelölési algoritmussal való elkészítéséhez elsőként az 1. sort és a 3. oszlopot kell megjelölnünk. Ezután a 2. sort és az 1., 2. és 6. oszlopot, majd a 4. sort és a 4. oszlopot fogjuk megjelölni. Mivel újabb sort már nem tudunk megjelölni a kritériumunk alapján, végeredményben  $C = \{1, 2, 4\}$ ,  $D = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ . Következik az 5. tábla

5. tábla

-27	-28	17	-15	-9	-17	-22
14	8	5	-5	-3	2	-6
-11	-6	-11	-8	13	-17	17
-3	22	-4	27	-5	6	1

Most a bázisba csak a (4, 6) cella vonható be, a (2, 6) cella helyett.  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ . A következő 6. tábla már az optimális megoldáshoz tartozó szállítási tábla.

6. tábla

-27	-28	17	-15	-9	-23	-22
14	10	5	-5	-3	-6	-6
-11	-6	-11	-8	13	-23	17
-3	20	-4	27	-5	2	1

(*Béérkezett: 1970. III. 24.*)

## IRODALOM

- [1] HADLEY, G.: Linear Programming. Reading, 1962. Addison-Wesley.  
 [2] DANTZIG, G. B.: Linear Programming and Extensions. Princeton, 1963. University Press.  
 [3] KREKÓ, B.: Lineáris programozás. Budapest, 1962. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.  
 [4] PRÉKOPA, A.: Lineáris programozás I. Az operációkutatás matematikai módszerei c. tanfolyam jegyzete. Bolyai János Matematikai Társulat, 1968.

MODIFIED STEPPING-STONE ALGORITHM TO SOLVE THE  
TRANSPORTATION PROBLEM

It is possible to reduce the amount of computations in the stepping stone algorithm (or distribution procedure) which is one of the methods to solve the well known transportation problem, if in the course of the basis changes the transformation of figures  $\delta_{ij}$  is carried out as follows: Let  $H$  be a basis cell system. Let us consider figures  $\delta_{ij}$  belonging to  $H$  and let  $\delta'_{ij}$  be their new value after drawing cell  $(i_1, j_1)$  into and withdrawing cell  $(i_0, j_0)$  from the basis. Let us form sets  $C$  and  $D$  composed of certain row and column indexes in the following algorithmic way: Let us first mark row  $i_1$  and the columns of basis cells in row  $i_1$  which differ from  $(i_0, j_0)$ . In the course of the general step, let us mark those rows of the basis cells in the already marked columns which are not yet marked, and now in the newly marked rows the basis cell columns which differ from  $(i_0, j_0)$  which are not marked.

The procedure comes to an end when it is no longer possible to mark a new row or a new column in this way, and in the final result the indices of the marked rows and columns will form the sets  $C$  and  $D$ . The transformation of figures  $\delta_{ij}$  are as follows:

$$\begin{aligned} \delta'_{ij} &= \delta_{ij} \text{ if } i \in C \text{ and } j \in D \\ &\text{or } i \notin C \text{ and } j \notin D, \\ \delta'_{ij} &= \delta_{ij} - \delta_{i_1 j_1} \text{ if } i \in C \text{ and } j \notin D, \\ \delta'_{ij} &= \delta_{ij} + \delta_{i_1 j_1} \text{ if } i \notin C \text{ and } j \in D. \end{aligned}$$

The author sets the above-described method of transformation of figures  $\delta_{ij}$  into a detailed algorithm.

ВИДОИЗМЕНЕННЫЙ „STEPPING – STONE”  
АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Возможно сокращение расчётов при использовании stepping stone алгоритма (или по другому: дистрибуционного метода) для решения транспортной задачи, если при замене базисов преобразование чисел  $\delta_{ij}$  производим следующим образом.

Пусть  $H$  система базисных элементов. Рассмотрим числа  $\delta_{ij}$ , принадлежащие множеству  $H$  и пусть  $\delta'_{ij}$  их новые значения после включения элемента  $(i_1, j_1)$  в базис и после вывода из базиса элемента  $(i_0, j_0)$ . Построим множества  $C$  и  $D$ , состоящие из каких-то индексов строчек и столбцов, по следующему алгоритму: Отметим сначала строчку  $i_1$  и в строчке  $j_1$  столбцы базисных элементов, отличных от  $(i_0, j_0)$ . На общем шаге отметим в только что отмеченных столбцах те базисные элементы, которые ещё не отмечены, далее во вновь отмеченных строчках те столбцы базисных элементов, которые ещё не отмечены.

Метод кончается, если таким способом уже не можем обозначить новую строчку или новый столбец, и в результате индексы отмеченных строк и столбцов дают множества  $C$  и  $D$ .

Формулы преобразования чисел  $\delta_{ij}$ :

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij} \text{ если } i \in C \text{ и } j \in D$$

$$\text{или } i \notin C \text{ и } j \notin D$$

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij} - \delta_{i_1, j_1} \text{ если } i \in C \text{ и } j \in D$$

$$\delta'_{ij} = \delta_{ij} + \delta_{i_1, j_1} \text{ если } i \notin C \text{ и } j \notin D$$

Автор вставляет изложенный способ преобразования чисел в подробно разработанный алгоритм.

# FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

VITA LÁSZLÓ

## A faktoranalízis közgazdasági alkalmazásának lehetőségeiről

A faktoranalízis a többváltozós elemzéseknek mintegy 5–6 évtizedes múltra visszatekintő ága. Kidolgozása Charles Spearman és Karl Pearson nevéhez fűződik. Mivel a faktoranalízis számos modelljét különböző pszichológiai elméletekre építve dolgozták ki, a faktoranalízist sokáig — igen tévesen — speciális pszichológiai módszerként tartották számon. E nézet téves voltát éppen a módszer széleskörű, egyre több területre kiterjeszkedő alkalmazásai bizonyítják. A faktoranalízis tehát nem speciális pszichológiai, hanem igen széles körben alkalmazható statisztikai módszer.

Mivel a faktoranalízis leglényegesebb eleme a jelenségek közötti bonyolult összefüggések minél egyszerűbb formában történő leírása, különösen olyan tudományokban alkalmazható sikerrel, mint a közgazdaságtudomány. A társadalmi-gazdasági jelenségek igen bonyolultan, kölcsönösen összefüggő rendszere ugyanis szinte kimeríthetetlen tárháza a faktoranalízis alkalmazási lehetőségeinek. Annak ellenére, hogy közgazdasági alkalmazásai viszonylag újkeletűek, a faktoranalízis igen hasznos segédeszköze lehet a közgazdasági jelenségeket mélyebben megismerni akaró, azokat modellezni kívánó közgazdászoknak.

Mivel eddig — tudomásom szerint — nem jelent meg részletes magyar nyelvű ismertetés a faktoranalízis módszereiről, e cikk első részében az ezekkel kapcsolatos legfontosabb tudnivalókat foglalom össze, a második részben pedig az első részben ismertetett módszer legérdekesebb közgazdasági alkalmazási lehetőségeire térek ki vázlatosan.

Mielőtt azonban rátérnék magának a módszernek az egzakt matematikai tárgyalására, célszerűnek tartom egy olyan példa előrebocsátását, ami egyrészt képet ad az ezután ismertetendő módszer lényegéről, felveti annak teljes matematikáját, másrészt megkönnyíti az ezután következő matematikai modell megértését is.

Tekintsük feladatunknak bizonyos — mondjuk  $N$  — számú ország „gazdasági fejlettség” szerinti rangsorolását. E feladat megoldása során az okozza a legfőbb nehézséget, hogy a „gazdasági fejlettség” rendkívül bonyolult, összetett, közvetlenül nem mérhető jelenség. Bonyolultsága elsősorban abban jut kifejezésre, hogy bár számtalan olyan tényező adható meg, amely többé-kevésbé szoros kapcsolatban áll a „gazdasági fejlettséggel”, s ugyanakkor mérhető is, de ezek egyike sem azonosítható teljes mértékben azzal. Ezért a kitűzött rangsorolási feladat megoldásakor vagy úgy járunk el, hogy egyetlen, általunk a „gazdasági fejlettség” szempontjából a legfontosabbnak ítélt mérhető tényező (a továbbiakban: változó) alapján végezzük el az  $N$  ország rangsorolását, vagy valamilyen „komplex mutató” alapján kíséreljük meg azt.

Míg az első esetben hallgatólagosan feltételezzük, hogy a „gazdasági fejlettség” teljes mértékben azonosítható a kiemelt változóval, és ezzel nyilvánvalóan lemondunk a feladat megoldásához rendelkezésre álló információ egy részéről, addig a második esetben egy olyan mutatószám meghatározását tartjuk célnak, ami a rendelkezésre álló információ minél nagyobb hányadát használja fel a rangsorolási feladat megoldásához. A gyakorlatban mindkét fajta megoldással találkozunk.

Az  $N$  ország „gazdasági fejlettség” szerinti rangsorolása a faktoranalízis segítségével a másodiknak említett módon végezhető el. Gyűjtsük össze mindazokat az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  mérhető változókat, amelyekről feltételezhető, hogy sztochasztikus kapcsolatban állnak az általunk mérhetővé tenni kívánt „gazdasági fejlettséggel”.<sup>1</sup> Ezek az eddigi tapasztalatok szerint különböző ellátottsági és demográfiai mutatók ([2] és [7]). Ha megvizsgáljuk az így összegyűjtött változók különböző országokra vonatkozó értékeit, akkor általában azt tapasztaljuk, hogy az egyes változók értékei nem egymástól függetlenül alakulnak. Ha tehát ismerjük pl. az első változó különböző országokra vonatkozó

$$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1N}$$

értékeit, akkor ennek ismeretében néhány más, esetleg akár az összes többi változó országonkénti alakulására következtethetünk. E következtetéseink természetesen nem lesznek egyértelműek, hanem csak sztochasztikus jellegűek lehetnek.

Az összegyűjtött változók egymástól való függése azonnal magyarázatot nyer, ha arra gondolunk, hogy a vizsgálatba vont változók maguk is valamilyen változók függvényei lehetnek. Az összegyűjtött  $X_1, X_2, \dots, X_n$  változók egymástól való függősége tehát azzal magyarázható, hogy e változók mindegyike, vagy egy része egy vagy több, számunkra még egyelőre ismeretlen közös tényezőtől függ, amelyeket *közös faktoroknak* nevezünk. A közös faktorok tehát olyan *hipotetikus változók*, amelyek *csak közvetett módon*, a vizsgálatba vont változókra vonatkozó megfigyelések elemzése útján számszerűsíthetők, s jelenlétükre csak a vizsgált változók egymástól való függéséből következtethetünk.

Ezzel el is érkeztünk a faktoranalízis kiinduló hipotéziséhez, mely szerint a vizsgálatba vont változók maguk is további változók, az ún. közös faktorok lineáris függvényei, azaz

$$(1) \quad \begin{aligned} \hat{X}_1 &= a_{11}K_1 + a_{12}K_2 + \dots + a_{1m}K_m \\ \hat{X}_2 &= a_{21}K_1 + a_{22}K_2 + \dots + a_{2m}K_m \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \hat{X}_n &= a_{n1}K_1 + a_{n2}K_2 + \dots + a_{nm}K_m \end{aligned}$$

Az eredeti változóknak itt természetesen nem a pontos, hanem csak a becslészerű előállításáról van szó, amire az  $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \dots, \hat{X}_n$  jelölések is felhívják a

<sup>1</sup> Itt elvonatkoztatunk a változók összegyűjtésénél fellépő problémáktól.

figyelmet.<sup>2</sup> A változók e felírásában szereplő  $a_{jp}$  együtthatók egyik meghatározási módszerét az 1.4 alpontban ismertetem.

Ha meghatározzuk a fenti sémában szereplő  $a_{jp}$  együtthatókat, akkor azt tapasztaljuk, hogy találhatók olyan közös faktorok, amelyekre minden változó előállításához szükség van (azaz az adott közös faktor minden egyes változóhoz tartozó együtthatója nullától különböző), de találhatók olyanok is, amelyek egynél több, de nem az összes változó előállításához szükségesek. Az előbbieket *általános*, az utóbbiakat *csoportfaktoroknak* nevezzük.

Eredeti feladatunk megoldása szempontjából nyilván az a kérdés, hogy léteznek-e a „gazdasági fejlettség”-gel kapcsolatban álló  $X_1, X_2, \dots, X_n$  változóknak általános faktorai és ha igen, akkor mennyi ezeknek a száma. Nyilvánvaló ugyanis, hogy abban az esetben, ha csak egy általános faktor létezik, akkor ez a „gazdasági fejlettség” egy komplex mérőszámának tekinthető, s az egyes országokra vonatkozó értékei alapján elvégezhető az országok rangsorolása. Ennek az a magyarázata, hogy eleve olyan változókat vontunk be a vizsgálatba, melyekről feltételezhető, hogy valamilyen kapcsolatban állnak a „gazdasági fejlettséggel”, s így az az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  változók egy általános faktorának tekinthető.

Az a kérdés, hogy a „gazdasági fejlettség” az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  változók *együttlen* általános faktora-e, már jóval bonyolultabb az előbbinél, s vagy az összegyűjtött változók logikai vizsgálata, vagy az (1) sémában szereplő együtthatók vizsgálata alapján válaszolható meg.<sup>3</sup> Mivel az eddigi kutatások nagymértékben valószínűsítik ezt, a továbbiakban feltételezzük, hogy az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  változók egyetlen általános faktora a „gazdasági fejlettség”. Tegyük fel, hogy ez az (1) sémában a  $K_1$ -gyel jelölt faktor. Ezen kívül természetesen lehet az összegyűjtött változóknak egy vagy akár több csoportfaktora<sup>4</sup> is, ezeknek azonban feladatunk megoldása szempontjából nem tulajdonítunk jelentőséget.

Mivel az eredeti feladatunk megoldásához végső soron a  $K_1$  általános faktor előállítására van szükség, az eddigi gondolatmenetet megfordítva azt állítjuk, hogy ha minden egyes változó előállítható a közös faktorok — s köztük a  $K_1$  általános faktor — felhasználásával, akkor az egyes közös faktorok is előállíthatók kell hogy legyenek a ténylegesen megfigyelt változók segítségével. Legyen ez az előállítás a  $K_1$  általános faktor esetében a következő:

$$\hat{K}_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n,$$

melynek részleteire a 2.1 alpontban térünk ki.<sup>1</sup>

Tekintettel a  $\hat{K}_1$  előállításában szereplő változók mérhetőségére, egy eredetileg nem mérhető változót — a „gazdasági fejlettséget” — egy mérhető változóval közelítettünk, amelynek értéke minden egyes országra nézve meghatározható, s ezek alapján elvégezhető az országok „gazdasági fejlettség” szerinti rangsorolása.

<sup>2</sup> A modell pontosabb megfogalmazására az 1.1. alpontban térek ki.

<sup>3</sup> Maga az (1) séma megoldása ugyanis nem tételezi fel feltétlenül a közös faktorok előzetes ismeretét. Itt csak a megértés megkönnyítése érdekében indultunk ki a változók közötti kapcsolat logikai elemzéséből.

<sup>4</sup> Például: hasonló földrajzi adottságok, hasonló demográfiai helyzet stb.



Az előbb vázolt eljárással szemben természetesen felmerülhet egy olyan — egyébként teljesen jogos — ellenvetés, hogy hogyan tulajdoníthatunk közgazdasági tartalmat egy olyan mesterséges változónak, amely esetleg a legkülönbélebb jellegű változók lineáris kombinációjaként áll elő. E kérdéssel a 2.1 alponthban foglalkozom részletesebben.

## 1. A módszer rövid ismertetése

### 1.1 *A faktoranalízis modellje és alapfogalmai*

Tegyük fel, hogy egy  $N$  elemből álló statisztikai sokaságot egyidejűleg  $n$  számú valószínűségi változó<sup>5</sup> (mennyiségi ismérv) szerint vizsgálunk. Ha az egyes változókat  $X_j$ -vel ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) jelöljük, akkor az előbbi megfogalmazás azt jelenti, hogy a vizsgált statisztikai sokaság minden egyes egységére vonatkozóan feljegyezzük az  $X_j$  változók  $X_{ji}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) értékeit, és ezek felhasználásával végezzük el a sokaság elemzését.

A további tárgyalást és formulákat nagymértékben leegyszerűsíthetjük azzal, hogy az eredetileg megfigyelt  $X_{ji}$  értékek helyett a

$$(1.1.1) \quad z_{ji} = \frac{X_{ji} - \bar{X}_j}{s_j} \quad \begin{matrix} (j = 1, 2, \dots, n) \\ (i = 1, 2, \dots, N) \end{matrix}$$

ún. *standardizált értékekkel* dolgozunk, ahol

$$\bar{X}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ji} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

az  $X_j$  változó átlaga,

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_{ji} - \bar{X}_j)^2} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

pedig az  $X_j$  változó szórása. A  $z_{ji}$  értékeket felvevő változókat  $z_j$ -vel jelöljük, és *standardizált változóknak* nevezzük. E standardizált változók átlaga nulla, szórása pedig egy.

A faktoranalízis abból a hipotézisből indul ki, hogy minden egyes standardizált változó további hipotetikus változók, az ún. *faktorok* lineáris függvényeként írható fel. Ez a hipotézis matematikailag a

$$(1.1.2) \quad \mathbf{z} = \mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{A}_k \mathbf{k} + \mathbf{A}_u \mathbf{u}$$

*f = u + u*

lineáris modell segítségével írható fel ahol

$\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^*$  — a standardizált változók oszlopvektora,

$\mathbf{k} = [K_1, K_2, \dots, K_m]^*$  — az ún. *közös faktorok* oszlopvektora,

$\mathbf{u} = [U_1, U_2, \dots, U_n]^*$  — az ún. *egyedi faktorok* oszlopvektora,

<sup>5</sup> E valószínűségi változók együttes eloszlására vonatkozóan nem teszünk semmiféle megkötést. A további tárgyalás során az egyszerűség kedvéért mindig e valószínűség-eloszlás empirikus jellemzőit használjuk a megfelelő elméleti jellemzők helyett.

$\mathbf{A}_k = [a_{jp}]$  ( $j = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots, m$ ) — a közös faktorokra vonatkozó együtthatók — az ún. *közös faktorsúlyok* —  $n \times m$  típusú matrixa,

$\mathbf{A}_u = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  — az egyedi faktorokra vonatkozó együtthatók diagonális matrixa,

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_k, \mathbf{A}_u]; \mathbf{f} = [\mathbf{k}, \mathbf{u}]^*,$$

$m$  pedig a közös faktorok száma.

Ezt a lineáris modellt *faktorsémának* is szokás nevezni, a benne szereplő  $\mathbf{A}$  matrix pedig az ún. *sémamatrix*.

Az (1.1.2) modellt egy  $z_j$  változóra részletesen felírva a

$$(1.1.3) \quad z_j = a_{j1} K_1 + a_{j2} K_2 + \dots + a_{jm} K_m + a_j U_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

alakú speciális regressziós egyenletekhez jutunk. E regressziós egyenletek specialitása egyrészt abban áll, hogy a bennük szereplő független változók olyan *közvetlenül nem mérhető standardizált változók*, melyekről csak közvetve — az általunk megfigyelt  $z_j$  változókra vonatkozó  $z_{ji}$  megfigyeléseken keresztül — nyerhetünk információt, s így az (1.1.3)-ban szereplő ismeretlen  $a_{jp}$  és  $a_j$  faktorsúlyok nem határozhatók meg a regressziós elemzés szokásos módszereivel. Másrészt itt olyan regressziós egyenletekről van szó, amelyek az ún. maradéktagot (hibatagot) *önálló változó*, az ún. egyedi faktor formájában tartalmazzák, tehát melyekre nézve a többszörös korrelációs együttható értéke egy.

A faktoranalízis modellje még egy másik szempontból is eltér az ún. regressziós modellektől. Míg ugyanis a regressziós modellek egy-egy *realizációja* az (1.1.2)-höz igen hasonló.

$$\mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{b} + \mathbf{e}$$

formában írható fel, addig a faktoranalízis (1.1.2) modelljének egy *realizációja*

$$(1.1.4) \quad \mathbf{Z} = \mathbf{A} \mathbf{F} = \mathbf{A}_k \mathbf{K} + \mathbf{A}_u \mathbf{U}$$

alakú, ahol

$$\mathbf{Z} = [z_{ji}] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nN} \end{bmatrix}$$

az  $n$  számú standardizált változónak a vizsgált sokaság egyes egységeinél megfigyelt  $z_{ji}$  értékeit tartalmazó  $n \times N$  méretű matrix, amit a továbbiakban a *megfigyelések matrixának* nevezünk,

$$\mathbf{K} = [K_{pi}] \quad \text{és} \quad \mathbf{U} = [U_{ji}]$$

pedig a közös, illetve egyedi faktoroknak a sokaság egységeire vonatkozó

$K_{pi}$ , illetve  $U_{ji}$  értékeiből álló  $m \times N$ , illetve  $n \times N$  méretű matrixok<sup>6</sup> és  $\mathbf{F} = [\mathbf{K}, \mathbf{U}]^*$ . Az (1.1.2) modell egy (1.1.4) realizációjának  $z_{ji}$  eleme részletesen kiírva tehát a következő:

$$z_{ji} = a_{j1} K_{1i} + a_{j2} K_{2i} + \dots + a_{jm} K_{mi} + a_j U_{ji} \quad \begin{matrix} (j = 1, 2, \dots, n; \\ i = 1, 2, \dots, N) \end{matrix}$$

A faktoranalízis modelljének (1.1.2) felírásából látható, hogy az abban szereplő faktorok két nagy csoportba sorolhatók. A modellben egyrészt szerepelnek olyan faktorok, amelyek egynél több változó leírásához szükségesek, másrészt olyanok is, amelyekre csak egy változó leírásához van szükség. Az előbbieket *közös faktoroknak* ( $K_p$ ), az utóbbiakat *egyedi faktoroknak* ( $U_j$ ) nevezzük. Az egy változó leírásához szükséges közös faktorok számát az adott változó *komplexitásának* nevezzük, ami az adott változó bonyolultságának kifejezője. A modellben szereplő közös faktorok számáról ( $m$ ) feltesszük, hogy az jóval kisebb a megfigyelt változók számánál ( $n$ ). Részletesebb vizsgálatára a következő alpontban térünk ki.

A közös faktorok újabb két csoportba sorolhatók. Az első csoportba azok a közös faktorok tartoznak, melyekre minden egyes változó lineáris előállításához szükség van. Ezeket *általános faktoroknak* nevezzük. A másik csoportba az egynél, több, de nem az összes változó előállításához szükséges, *csoportfaktoroknak* nevezett közös faktorok kerülnek.

A faktoranalízis modelljének ismeretében már megfogalmazhatjuk a faktoranalízis feladatát, célját. A faktoranalízis feladata kettős: az egyik a közös faktorokra vonatkozó  $a_{jp}$  közös faktorsúlyok becslése, a másik pedig maguknak a faktoroknak az előállítása. Ez utóbbi feladat természetesen csak az  $\mathbf{A}_k$  matrix ismeretében oldható meg.

Mielőtt áttekintenénk a faktoranalízis két alapeladatának megoldására szolgáló módszereket, meg kell ismerkednünk a faktoranalízis alapfogalmival és az (1.1.2) modell legfontosabb tulajdonságaival is.

Könnnyen belátható ([6], 13. old.), hogy a  $j$ -edik standardizált változó  $\sigma_j^2$ -tel jelölt szórásnégyzete az (1.1.2) modell alapján a következőképpen írható fel:

$$\sigma^2 = \mathbf{a}_j^* \Phi \mathbf{a}_j$$

ahol  $\mathbf{a}_j^*$  az  $\mathbf{A}$  teljes sémamatrix  $j$ -edik sora,  $\mathbf{a}_j$  pedig ugyanez oszlopvektor formában felírva, és

$$(1.1.6) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_n \end{bmatrix}$$

ahol  $\Phi_k = [r_{K_p, K_q}]$  a közös faktorok  $m$ -edrendű korrelációs matrixa.<sup>7</sup>

A  $\Phi$  matrix azért írható fel az (1.1.6) módon, mert az  $U_j$  egyedi faktorokról minden esetben feltesszük, hogy egymással is és a közös faktorokkal is páronként korrelálatlanok, azaz  $r_{K_p U_j} = 0$  és  $r_{U_i U_j} = 0$ , ha  $i \neq j$ . A közös faktorok ezzel szemben lehetnek egymással korreláltak és páronként korrelálatlanok is

<sup>6</sup> A  $\mathbf{K}$  és  $\mathbf{U}$  matrixok elemei természetesen nem figyelhetők meg közvetlenül.

<sup>7</sup>  $\mathbf{E}_n$  itt az  $n$ -edrendű egységmatrixot jelöli.

Ha a közös faktorok páronként korrelálatlanok, akkor az (1.1.5) kifejezés a következőképpen egyszerűsödik:

$$(1.1.7) \quad \sigma_j^2 = \mathbf{a}_j^* \mathbf{a}_j = \sum_{p=1}^m a_{jp}^2 + a_j^2 = h_j^2 + a_j^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

mely eredmény a következőképpen értelmezhető. Minden változó szórásnégyzete két részre bontható: az egyik rész az adott változó szórásnégyzetének a közös faktorok által *együttesen megmagyarázható része*, amit az adott változó *lommunalitásának* ( $h_j^2$ ) nevezünk, a másik rész pedig az adott változó szórásnégyzetének az egyedi faktor által megmagyarázható része ( $a_j^2$ ), amit az adott változó *egyediségének* szokás nevezni. Csak utalni kívánok rá, hogy ez utóbbi részt — általában becslésszerűen — további két részre: a modell adott megválasztásából, specifikációjából származó *specifikációs hibára*, és a mérési pontatlanságokból adódó *maradék hibára* szokás felbontani. Mivel minden  $z_j$  standardizált változó  $\sigma_j^2$  szórásnégyzetének értéke 1, (1.1.7) felírható a

$$h_j^2 + a_j^2 = 1$$

módon is. Ez a tény a magyarázata annak, hogy a megoldás során elegendő csak a közös faktorsúlyokat meghatározni.

A faktoranalízisben fontos szerepet játszik a

$$(1.1.8) \quad V_p = \sum_{j=1}^n a_{jp}^2 \quad (p = 1, 2, \dots, m)$$

mennyiség is, ami azt mutatja, hogy a  $p$ -edik közös faktor milyen mértékben járul hozzá az összes vizsgált változó szórásnégyzetéhez.

Bizonyos esetekben — elsősorban a faktorok elnevezésének megválasztásakor, ami a kapott megoldás értelmezésének fontos mozzanata — szükség van az egyes változók és a faktorok közötti korrelációs együtthatók, azaz az

$$s_{jp} = r_{z_j k_p} \quad \begin{array}{l} (j = 1, 2, \dots, n; \\ p = 1, 2, \dots, m) \end{array}$$

és az  $r_{z_j U_j}$  értékek ismeretére. Ezeket az értékeket *struktúra-együtthatóknak*, a belőlük felépülő

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}_k, \mathbf{S}_u] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nm} & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

matrixot pedig *struktúramatrixnak* nevezzük, amely az  $\mathbf{A}$  sémamatrixhoz hasonlóan két részből: a közös faktorokra vonatkozó *struktúraegyütthatókat* tartalmazó  $\mathbf{S}_k$  blokkból, és az egyedi faktorokra vonatkozó *együtthatókat* tartalmazó  $\mathbf{S}_u = \mathbf{A}_u$  blokkból tevődik össze.

Bebizonyítható ([6], 32–34. old.), hogy az  $\mathbf{S}$  struktúramatrix és az  $\mathbf{A}$  sémamatrix között az

$$(1.1.9) \quad \mathbf{S} = \mathbf{A} \Phi, \text{ illetve } \mathbf{S}_k = \mathbf{A}_k \Phi_k$$

összefüggés áll fenn, ahol  $\Phi$  az (1.1.6) korrelációs matrix. Ebből az is látható, hogy páronként korrelálatlan közös faktorok esetén

$$S = A,$$

mivel ebben az esetben  $\Phi = E_{n+m}$ . Ebből az eredményből látható, hogy abban az esetben, ha a megoldás páronként korrelálatlan közös faktorokból áll, elegendő csak az  $A$  sémamatrixot meghatározni. Ezzel szemben, ha a modellben korrelált közös faktorokat is megengedünk, akkor a megoldásnak mind a séma-, mind a struktúramatrixot tartalmaznia kell. Röviden összefoglalva: a séma a változóknak a faktorokból való össze tevődését mutatja, a struktúra pedig a változók és a faktorok közötti korrelációs együtthatókat tartalmazza.

Az (1.1.2) modell, illetve annak (1.1.4) realizációja alapján nemcsak az egyes változók szórásnégyzetének felbontására nyílik lehetőség, hanem lehetővé válik az egyes változók közötti ún. *reprodukált korrelációs együtthatók* meghatározása is, melyek alapján megvizsgálható a faktoranalízis modelljének valóság-hűsége. Mielőtt megadnánk a reprodukált korrelációs együtthatók definícióját, néhány új fogalmat kell bevezetnünk.

Ismeretes, hogy a megfigyelt változók közötti korrelációs együtthatókból felépülő korrelációs matrix ( $R$ ), a vizsgált változókra vonatkozó megfigyelések felhasználásával az

$$(1.1.10) \quad R = \frac{1}{N} ZZ^*$$

módon állítható elő.<sup>8</sup> Ezt a továbbiakban *teljes korrelációs matrixnak* nevezzük. Ha a teljes korrelációs matrix diagonális elemeiből rendre levonjuk az egyes változók egységességét, akkor az

$$(1.1.11) \quad R_h = R - A_u^2$$

*redukált korrelációs matrixhoz* jutunk. A redukált korrelációs matrix (1.1.11) definíciójából jól látható, hogy annak diagonális elemei éppen az egyes változók kommunalitásai.

Tegyük fel azután, hogy a vizsgált változók halmazára nézve helyes az (1.1.2) módon megfogalmazott hipotézis. Ez egyben azt is jelenti, hogy

$$(1.1.12) \quad Z = A_k K + A_u U$$

áll fenn. Ez az összefüggés természetesen csak az  $A_k$  matrix ismeretében írható fel. Helyettesítsük ezután (1.1.12)-t (1.1.10)-be. Így a következő eredményre jutunk:

$$(1.1.13) \quad \begin{aligned} R_r &= \frac{1}{N} (A_k K + A_u U) (A_k K + A_u U)^* = \\ &= A_k \frac{KK^*}{N} A_k^* + 2 A_k \frac{KU^*}{N} A_u + A_u \frac{UU^*}{N} A_u \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Ez a tény egyszerűen a korrelációs együtthatók definíciójából és a vizsgált változók standardizáltságából következik.

Vegyük most figyelembe, hogy  $\frac{\mathbf{K}\mathbf{K}^*}{N}$ , illetve  $\frac{\mathbf{U}\mathbf{U}^*}{N}$  nem más, mint a közös, illetve egyedi faktorok korrelációs matrixa,  $\frac{\mathbf{K}\mathbf{U}^*}{N}$  pedig a közös és egyedi faktorok közötti korrelációs együtthatókból álló matrix. Mivel azonban az egyedi és közös faktorokról, illetve az egyedi faktorokról is feltettük a páronkénti korrelálatlanságot (1.1.13) az

$$(1.1.14) \quad \mathbf{R}_r = \mathbf{A}_k \frac{\mathbf{K}\mathbf{K}^*}{N} \mathbf{A}_k^* + \mathbf{A}_u^2 = \mathbf{A}_k \Phi_k \mathbf{A}_k^* + \mathbf{A}_u^2 = \mathbf{A} \Phi \mathbf{A}^*$$

alakba megy át, ahol  $\Phi$  az (1.1.6) korrelációs matrix. Az  $\mathbf{R}_r$ -rel jelölt matrix az ún. *reprodukált korrelációs matrix*. Elnevezését az indokolja, hogy az (1.1.14) és az (1.1.13) egyenlőségek teljesülésének egyaránt az (1.1.2) hipotézis helyes sége a feltétele, itt tehát a teljes korrelációs matrix (1.1.2) modellen keresztüli visszaszámolásáról, reprodukálásáról van szó.

Ezek után kézenfekvő az (1.1.2) modell valóságosságának ellenőrzése is. Képezzük ugyanis az

$$(1.1.15) \quad \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_r$$

*reziduális matrixnak* nevezett különbséget. Mivel az  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_r$  egyenlőség teljesülésének feltétele az (1.1.2) s következésképpen az (1.1.12) pontos teljesülése, a reziduális matrix elemeinek nagysága lehetővé teszi a faktoranalízis kiinduló hipotézise valóságosságának vizsgálatát.

A gyakorlatban általában — később ismertető okokból — megelégszünk a redukált korrelációs matrix ( $\mathbf{R}_h$ ) reprodukálásával is. Ilyenkor az (1.1.14)-nek csak a közös faktorokra vonatkozó

$$(1.1.16) \quad \mathbf{R}_{r|h} = \mathbf{A}_k \Phi_k \mathbf{A}_k^*$$

részét tekintjük, ami (1.1.9) felhasználásával az

$$\mathbf{R}_{r|h} = \mathbf{S}_k \mathbf{A}_k^* = \mathbf{A}_k \mathbf{S}_k^*$$

módon is felírható. Ha a közös faktorok páronként korrelálatlanok, akkor (1.1.16) az

$$(1.1.17) \quad \mathbf{R}_{r|h} = \mathbf{A}_k \mathbf{A}_k^*$$

alakba megy át, amit a faktoranalízis *Thurstone-féle alaptételének* szokás nevezni.

Az egyedi faktorok figyelmen kívül hagyása esetén a reziduális korrelációs matrix természetesen a redukált korrelációs matrix és  $\mathbf{R}_{r|h}$  különbségként adódik.

Sajnos annak megítélésére, hogy a reziduális korrelációs matrix elemei szignifikánsan különböznek-e a nullától, nem állnak rendelkezésre minden megoldási módszer esetén alkalmazható statisztikai próbák. Ehelyett különböző, gyakorlati tapasztalatokon alapuló kritériumokat szoktak adni ennek eldöntésére. Egy ilyen kritérium például a következő

$$(1.1.18) \quad \sigma_{rr} \leq \frac{1}{\sqrt{N}},$$

ahol  $\sigma_{\bar{r}}$  a reziduális korrelációs matrix  $\bar{r}_{jk}$  ( $j, k = 1, 2, \dots, n$ ) elemeiből számított szórás. Az (1.1.18) teljesülése esetén elfogadjuk az (1.1.2) formában kifejezett hipotézist, ellenkező esetben pedig elvetjük azt, és új modell számításával kísérletezünk.

### 1.2 A kommunalitásokról

Ebben az alpontban egyrészt a kommunalítások és a közös faktorok számának kapcsolatával, másrészt pedig a kommunalítások becslésével foglalkozunk.

A faktoranalízis feladata úgy is megfogalmazható, hogy minél kevesebb számú közös faktor segítségével írjunk le egy adott változóhalmazt. Ennek érdekében minden egyes eredetileg megfigyelt változót két egymással korrelálatlan változó összegére bontjuk fel a

$$(1.2.1) \quad z_j = z'_j + z''_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

módon ahol

$$z'_j = a_{j1}K_1 + a_{j2}K_2 + \dots + a_{jm}K_m \text{ és } z''_j = a_jU_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

és eltekintünk a  $z_j$  változók  $z''_j$  komponensétől. A  $z_j$  változók  $z'_j$  komponenseit a továbbiakban *redukált változóknak*, az azokra vonatkozó megfigyeléseket tartalmazó

$$\mathbf{Z}' = [z'_{ji}] \quad (j = 1, 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, N)$$

matrixot pedig — melynek elemei természetesen nem figyelhetők meg közvetlenül — a *megfigyelések redukált matrixának* nevezzük. Könnyen belátható, hogy a redukált változók korrelációs matrixa az (1.1.11) redukált korrelációs matrix, ami felírható az

$$(1.2.2) \quad \mathbf{R}_h = \frac{1}{N} \mathbf{Z}' \mathbf{Z}'^*$$

módon is. Az (1.2.2) alapján azt is mondhatjuk, hogy a minél egyszerűbb faktoranalitikus megoldás előállítása érdekében lemondunk az eredetileg megfigyelt  $z_j$  változók szórásnégyzetének, vagy más kifejezéssel élve a  $z_j$  változó által tartalmazott információmennyiség egy részéről.<sup>9</sup> A  $z_j$  változók szórásnégyzetének e figyelmen kívül hagyott része az  $a_j^2$  egyediség.

Ez a magyarázata annak, hogy a kommunalítások értéke és a közös faktorok száma között szoros kapcsolat van, aminek pontosabb megfogalmazására csak az (1.1.2) modell geometriai interpretációjának megadása után térhetünk ki.

A megfigyelések  $\mathbf{Z}$  matrixának

$$z_j^* = [z_{j1}, z_{j2}, \dots, z_{jN}] \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

sorai az  $N$ -dimenziós euklideszi tér (jelölése  $R^N$ )  $n$  pontjának tekinthetők. Ezt az  $N$ -dimenziós teret, melynek koordinátatengelyei a vizsgált statisztikai sokaság (minta) egy-egy elemét reprezentálják, *mintatérnek* szokás nevezni.

<sup>9</sup> Amennyiben a  $z_j$  változó által tartalmazott információmennyiséget annak  $\sigma^2$  szórásnégyzetével mérjük.

Az is nyilvánvaló, hogy e pontok egy a mintatérbe beágyazott legfeljebb  $n$ -dimenziós altér, az ún. *változótér* pontjainak is tekinthetők. Ez a szemlélet annak felel meg, hogy most a megfigyelések matrixának oszlopait tekintjük, a változótér dimenziójára vonatkozó megállapítás pedig egyszerűen abból következik, hogy a  $\mathbf{Z}$  matrix rangja legfeljebb  $n$ , hiszen általában  $n \ll N$  teljesül. A változótér koordinátatengelyei az egyes  $z_j$  változóknak felelnek meg.

Ha a  $z_j$  változók *lineárisan függetlenek*, azaz a  $\mathbf{Z}$  matrix sorai lineárisan függetlenek, akkor a változótér  $n$  dimenziós, minden más esetben  $n$ -nél kisebb dimenziójú. A változók ilyen értelemben vett lineáris függetlensége azonban nem zárja még ki azok páronkénti korreláltságát. A változók páronkénti korreláltságából viszont az következik, hogy legalább egy változó *közelítőleg* előállítható az összes többi lineáris függvényeként. Másképpen fogalmazva a változók páronkénti korreláltsága esetén legalább az egyiküknek az összes többire vonatkozó többszörös korrelációs együtthatója elég nagy. Geometriailag ez annyit jelent, hogy a változótér pontjainak helyzetét kisebb-nagyobb mértékben megváltoztatva elérhetjük azt, hogy mind az  $N$  megváltoztatott helyzetű pont egy  $n$ -nél kisebb dimenziószámú altérben helyezkedjen el. A faktoranalízis feladata tehát geometriailag fogalmazva az, hogy megkeresse azt a legkisebb dimenziószámú ún. közös *faktorteret*, amely még a változótér minden módosított helyzetű pontját tartalmazza. E módosított helyzetű pontoknak a változótér koordinátatengelyeire vonatkozó koordinátáit a megfigyelések redukált matrixának oszlopai, az egyes változóknak a közös faktortér közös faktorokat reprezentáló koordinátatengelyeire vonatkozó koordinátái pedig az  $\mathbf{A}_r$  sémamatrix soraiból olvashatók ki. Míg a változótér dimenziószámát a  $\mathbf{Z}$  matrix rangja, addig a közös faktortér dimenziószámát, melyet a továbbiakban  $m$ -mel jelölünk, a  $\mathbf{Z}'$  matrix rangja határozza meg.

Eddigi fejtegetéseinket a megfigyelések  $\mathbf{Z}$  matrixára alapoztuk. Mivel azonban a faktoranalízis alapadatait a legtöbbször a vizsgált változók között megfigyelt korrelációs együtthatók képezik, ezután következő állításainkat célszerűbb a teljes, illetve redukált korrelációs matrixra alapozni. Ennek lehetőségét az adja meg, hogy mind a teljes, mind a redukált korrelációs matrix ún. Gram-féle matrix, melynek rangja megegyezik a  $\mathbf{Z}$ , illetve  $\mathbf{Z}'$  matrix rangjával. ([10], 124. old.)

Mielőtt megfogalmaznánk a közös faktortér dimenziószámára vonatkozó tételt, megjegyezzük, hogy a *faktoranalízis* és a *komponenselemzés*<sup>10</sup> egységes tárgyalhatósága érdekében a továbbiakban a teljes korrelációs matrixot speciális redukált korrelációs matrixnak, a megfigyelések matrixát pedig a megfigyelések speciálisan redukált matrixának tekintjük.

A közös faktortér dimenziószáma ( $m$ ) az alábbi tétel alapján határozható meg:

Ha a redukált korrelációs matrix rangja  $m$ , akkor a benne szereplő korrelációs együtthatókat teljes mértékben reprodukáló, lineárisan független közös faktorok legkisebb száma  $m$ , azaz a közös faktorok tere legalább  $m$  dimenziós ([6], 64. old.)

Mivel a redukált korrelációs matrix rangja a kommunalítások alkalmas megválasztása esetén *kisebb* a teljes korrelációs matrix rangjánál, tételünk szerint a közös faktorok számára nézve mindig teljesül az

$$1 \leq m \leq n$$

<sup>10</sup> A komponenselemzés modelljét az 1.3 alpontban ismertetem.



egyenlőtlenség. A közös faktorok számára vonatkozó hipotézis helyessége az (1.1.18) kritériummal ellenőrizhető, bár egyes faktoranalitikus megoldásokra vannak ennél jóval egzaktabb kritériumok is [16].

Annak, hogy az (1.1.18) kritérium nem teljesül, két oka lehet. Az egyik az, hogy *kevés* közös faktort vettünk be (1.1.2) modellünkbe, a másik pedig az, hogy nem igaz az (1.1.2) modellbe foglalt *linearitási hipotézis*. Arról, hogy a két ok közül melyik forog fenn, csak úgy lehet meggyőződni, hogy a közös faktorok számát növeljük, és ismételten ellenőrizzük, hogy teljesül-e (1.1.18).

Mivel a később ismertető faktoranalitikus megoldási módszerek egy része feltételezi a kommunalitások előzetes ismeretét, röviden foglalkoznunk kell a kommunalitások becslésével is. Az eddig elmondottakból következik, hogy elvileg olyan *maximális* kommunalitások meghatározása lenne a cél, amelyek *minimalizálják* a redukált korrelációs matrix rangját azon feltétel mellett, hogy  $\mathbf{R}_h$  pozitív definit. Ez ugyanis annak a biztosítéka, hogy minimális számú közös faktoral magyarázzuk meg változóink szórásnégyzetének maximális hányadát, azaz a változók minimális számú közös faktoral való leírása minimális információvesztéssel járjon. E feltételes szélsőértékfeladat azonban csak igen szigorú, a gyakorlatban szinte sohasem teljesülő feltételek mellett oldható meg. Ezért a gyakorlatban csak ezen elvi optimumot közelítő becslésekről lehet szó.

A kommunalitások részleges vagy teljes módon becsülhetők. Míg a részleges becslések a teljes korrelációs matrix nem-diagonális elemeinek csak egy részét, addig a teljes becslések a nem-diagonális elemek összességét használják fel.

A legegyszerűbb *részleges* becslési eljárás az, amikor a  $h_j^2$  kommunalitásnak a  $z_j$  változó és az azzal legjobban korreláló változó közötti korrelációs együtt-  
hatót tekintjük, azaz

$$(1.2.3) \quad h_j^2 = \max_{i \neq j} r_{ji}$$

Egy másik, ugyancsak e csoportba tartozó becslési eljárás a

$$(1.2.4) \quad h_j^2 = \frac{r_{jk} r_{jl}}{r_{kl}}$$

uñ. triádok alkalmazása, ahol a  $z_k$  és  $z_l$  a  $z_j$ -vel legjobban korreláló két változó.

Az egyik legegyszerűbb teljes becslés a következő:

$$(1.2.5) \quad h_j^2 = \frac{n}{n-1} \frac{\left( \sum_{k=1}^n r_{jk} \right)^2}{\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n r_{kl}} \quad (k \neq j; k \neq l)$$

Végül a kommunalitások „lehető legjobb” becslésének az adott  $z_j$  változó összes többi változóra vonatkozó többszörös korrelációs együtt-  
hatójának tekintik, ami az

$$(1.2.6) \quad R_{j(n-1)}^2 = 1 - \frac{1}{r_{jj}}$$

módon határozható meg, ahol  $r_{jj}$  a teljes korrelációs matrix *inverzének*  $j$ -edik diagonális eleme. Ennek az a magyarázata, hogy Dwyer bebizonyította az

$$(1.2.7) \quad R_{j(n-1)}^2 \leq h_j^2 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

egyenlőtlenséget és azt, hogy (1.2.7) akkor teljesül egyenlőség formájában, ha a redukált korrelációs matrix rangja minimális.<sup>11</sup>

### 1.3 A faktoranalízis megoldási módszerei

A faktoranalitikus módszerek áttekintése előtt célszerű a *faktoranalízis* és a *komponenselemzés* közötti kapcsolat tisztázása. A komponenselemzés a faktoranalízis azon speciális esete, amelyben minden egyes változó kommunalitása egy. Ez azt jelenti, hogy minden változó teljes szórásnégyzetét meg kívánjuk magyarázni a közös faktorokkal, azaz a redukált korrelációs matrix helyett a teljes korrelációs matrixból indulunk ki. Ez azt jelenti, hogy az (1.1.2) modell helyett a

$$z = A_k \cdot k$$

modellből indulunk ki, ami *csak* közös faktorokat tartalmaz. E módszer nem a változók számának csökkentését, hanem olyan új változók bevezetését tűzi ki célul, amelyen páronként ortogonálisak és egyre csökkenő mértékben járulnak hozzá az eredeti változók szórásnégyzetéhez. Ez igen hasonló az alapvető faktorok módszerének célkitűzéséhez, aminek részletes ismertetésére a következő alpontban térek ki.

Az ezután következő rendszerezés csak a *faktoranalitikus* megoldásokra vonatkozik. E megoldások két nagy csoportba, a *közvetlen megoldások* csoportjába és az ún. *leszármaztatott* megoldások csoportjába sorolhatók. Ez utóbbiak az előbbiekből ortogonális transzformációval származtatott megoldások, míg az előbbieket közvetlenül a redukált korrelációs matrix alapján határozhatók meg. A leszármaztatott megoldásoknak az a céljuk, hogy egy valamilyen közvetlen módszerrel már meghatározott  $A$  sémamatrixból kiindulva egy adott tulajdonságokkal rendelkező, többnyire az  $A$ -nál egyszerűbb szerkezetű sémamatrixú megoldást szolgáltatassanak. A Thurstone-féle ún. *egyszerű struktúrák* is ilyen leszármaztatott megoldások, melyekre az jellemző, hogy sémamatrixuk a lehető legnagyobb számú zérust tartalmazza. Ilyen „egyszerű struktúrákhoz” többnyire csak páronként korrelált közös faktorok megengedésével lehet eljutni. A leszármaztatott megoldások léte azt bizonyítja, hogy nem létezik egyértelmű faktoranalitikus megoldás, mert bármely adott megoldáson egy ortogonális transzformációt vérehajtva újabb megoldáshoz jutunk.

A közvetlen megoldások két szempont szerint rendszerezhetők. Az első szempont a megoldás alapját képező modell változóinak *komplexitása*. Eszerint egy-, két- stb. faktoros megoldásokról beszélhetünk.

A rendszerezés másik szempontja az, hogy a megoldás igényeli-e a kommunalitások előzetes becslését vagy nem. A kommunalitások előzetes becslését igénylő megoldások csoportjába tartozik az *alapvető faktorok módszere* (Principal Factor Solution), melynek részletes ismertetésére a következő alpontban térek ki, valamint az ún. *centroid* módszer, mely az előbbihez közeleső eredményeket szolgáltat. E módszert eredetileg az alapvető faktorok módszerének nagy számításigénye miatt dolgozták ki, jelentősége azonban az elektronikus számító-

<sup>11</sup> Lásd: DWYER, P. S.: The Contribution of An Orthogonal Factor Solution to Multiple Correlation (Psychometrika 4 (1939)).

gépek megjelenése óta csökkent. E módszereket igen sok szerző csak előzetes, kiinduló megoldásoknak tekinti, melyek aztán valamilyen leszámraztatott megoldás alapját képezik. Végül e csoportba tartoznak az ún. *többszoros* megoldások is, amelyek egymást „átfedő” csoportfaktorokat is tartalmazhatnak, tehát egy változó leírásában egynél több csoportfaktor is szerepelhet.

A kommunalítások előzetes becslését nem igénylő megoldásokat csak a megoldások rendszerezésének első szempontja szerint szokás megkülönböztetni.

Ugyancsak a közvetlen megoldások közé tartozik a faktorsúlyok Lawley-tól származó, maximum likelihood módszeren alapuló becslése, ami azonban szigorúan véve nem tartozik a közvetlen megoldások egyik nagy csoportjába sem.

Itt kívánom végül megjegyezni, hogy véleményem szerint nem sok értelme van a páronként korrelált közös faktorokat tartalmazó megoldásoknak, mert ez igen megnehezíti a kapott eredmények értelmezhetőségét. Részben ez az oka annak is, hogy a faktoranalízis számos megoldási módszere közül csak az alapvető faktorok módszerét ismertetem részletesen.

#### 1.4 Az *alapvető* faktorok módszere

A faktoranalízis módszerei kétféle módon alkalmazhatók. Az első esetben rendelkezünk valamilyen előzetes, *a priori* modellel a vizsgált jelenségre vonatkozóan, s ilyenkor a faktoranalízis feladata e modell paramétereinek becslése, s az *a priori* modellel felírt hipotézis helyességének ellenőrzése. Ez utóbbi célra részben az (1.1.18) kritérium, részben pedig különböző matematikai statisztikai próbák állnak rendelkezésre. A második esetben nincs semmi-féle elképzelésünk az általunk vizsgált jelenség modelljére vonatkozóan, s éppen e modell megkeresésére a faktoranalízis célja. A faktoranalízis megoldási módszerei közül e célra véleményem szerint az alapvető faktorok módszere a legalkalmasabb, s elsősorban ezért tartom szükségesnek e módszer részletes ismertetését. Ezt indokolja továbbá az előző alpont végén említett tény is, melyből számos a 2. részben ismertetendő előny származik.

Az alapvető faktorok módszere olyan közös faktorok meghatározását tűzi ki célul, amelyek

1. a lehető legnagyobb mértékben járulnak hozzá az összes változó

$$(1.4.1) \quad H^2 = \sum_{j=1}^n h_j^2 = \sum_{p=1}^m V_p$$

teljes kommunalitásához,

2. a lehető legjobban megközelítik a reprodukálható redukált korrelációs matrixot ( $\mathbf{R}_p$ -t), és

3. páronként ortogonálisak.

Mivel az ezután következő eljárás lényege az lesz, hogy a közös faktorokat egyenként, az összes változó  $H^2$  teljes kommunalitásához való hozzájárulásuk nagyságának esökkenő sorrendjében határozzuk meg, meg kell vizsgálni azt, hogy az egyes közös faktorok milyen szerepet játszanak az első két kritérium teljesülésében. Nyilvánvaló, hogy ilyen szempont szerint az első kritérium az (1.1.8)-cal definiált  $V_p$  ( $p = 1, 2, \dots, m$ ) mennyiségek egyenkénti maximalizálását jelenti.

A második kritériummal kapcsolatban először is azt jegyezzük meg, hogy a redukált korrelációs matrix „lehető legjobb” megközelítésén a legkisebb négyzetek módszere értelmében vett közelítést értjük. Ami az egyes közös faktoroknak a második kritérium teljesülésében betöltött szerepét illeti, könnyen belátható, hogy a faktoranalízis (1.1.17)-tel felírt Thurstone-féle alaptétele felírható az

$$(1.4.2) \quad \mathbf{R}_{r|h} = \sum_{p=1}^m \mathbf{a}_p \mathbf{a}_p^* = \sum_{p=1}^m \mathbf{Q}_p$$

alakban is, ahol  $\mathbf{a}_p$  az  $\mathbf{A}_k$  közös sémamatrix  $p$ -edik oszlopa, és  $\mathbf{a}_p \mathbf{a}_p^* = \mathbf{Q}_p$ . Ez a felbontás pedig éppen az egyes közös faktoroknak a redukált korrelációs matrix<sup>12</sup> reprodukálásában betöltött szerepét mutatja.

Mint látni fogjuk, a három fenti kritérium közül az első és az utolsó el is hagyható, mert azok teljesülése a második teljesüléséből automatikusan következik. Első lépésként ezért egy olyan  $K_1$  közös faktort keresünk, ami a lehető legnagyobb mértékben résztvesz a redukált korrelációs matrix reprodukálásában, azaz amelyre nézve az

$$S_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (r_{jk} - a_{j1} a_{k1})^2 \quad (r_{jj} = h^2)$$

eltérés-négyzetösszeg minimális. Az egyszerűség kedvéért írjuk fel  $S_1$ -et az

$$(1.4.3) \quad S_1 = \text{tr}[(\mathbf{R}_h - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^*)(\mathbf{R}_h - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^*)] = \text{tr}(\mathbf{R}_h^2) - 2\mathbf{a}_1^* \mathbf{R}_h \mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1)^2$$

módon,<sup>13</sup> ahol  $\mathbf{a}_1$  az  $\mathbf{A}_k$  közös sémamatrix első oszlopa.

Elvégezve (1.4.3)  $\mathbf{a}_1$  szerinti deriválását, és a deriváltat  $\mathbf{O}$ -val egyenlővé téve, majd az így kapott egyenletet rendezve:

$$(1.4.4) \quad (\mathbf{R}_h - \lambda_1 \mathbf{E}) \mathbf{a}_1 = \mathbf{O},$$

ahol  $\lambda_1 = \mathbf{a}_1^* \mathbf{a}_1$ . Arra az eredményre jutottunk tehát, hogy a 2. kritériumnak elegettevő  $\mathbf{a}_1$  vektor az  $\mathbf{R}_h$  matrix egyik sajátvektora. Az (1.4.4)-ből adódó

$$(1.4.5) \quad \mathbf{R}_h \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1$$

összefüggést figyelembe véve (1.4.3) az

$$S_1 = \text{tr}(\mathbf{R}_h^2) - \lambda_1^2$$

alakba megy át. Tekintettel arra, hogy egy szimmetrikus pozitív definit, illetve pozitív szemidefinit matrix sajátértékei pozitív, illetve nem-negatív valós értékek, az  $S_1$  eltérés-négyzetösszeg csak abban az esetben lehet minimális, ha  $\lambda_1$  az  $\mathbf{R}_h$  matrix legnagyobb sajátértéke. Az  $\mathbf{a}_1$  vektort tehát az  $\mathbf{R}_h$  legnagyobb sajátértékéhez tartozó sajátvektorok halmazából kell kiválasztanunk, amit az első kritérium figyelembevételével tehetünk meg. Ugyanis a maximalizálandó  $V_1$  mennyiség éppen  $\lambda_1$  gyel egyenlő, amiből az következik, hogy az

<sup>12</sup> Abban az esetben, ha komponenselemzést végzünk, a redukált korrelációs matrix szerepét a teljes korrelációs matrix veszi át.

<sup>13</sup> A  $\text{tr}(\mathbf{A})$  jelölés az  $\mathbf{A}$  kvadratikus matrix nyomát jelenti. Egy kvadratikus  $\mathbf{A}$  matrix nyomán az  $\mathbf{A}$  matrix diagonális elemeinek összegét értjük. Szokásos még a matrix nyomának  $S_p(\mathbf{A})$  jelölése is.

első két követelménynek együttesen elegettevő  $\mathbf{a}_1$  vektor az  $\mathbf{R}_h$  matrix legnagyobb  $\lambda_1$  sajátértékéhez tartozó  $\sqrt{\lambda_1}$  hosszúságú sajátvektor. Vegyük észre, hogy az  $\mathbf{a}_1$  ilyen megválasztása esetén a harmadik követelmény is teljesül, mert a sajátvektor definíciója értelmében  $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$  nem állhat fenn.

Az  $\mathbf{A}_k$  matrix második,  $\mathbf{a}_2$  oszlopának meghatározása az  $\mathbf{a}_1$  meghatározásához képest azzal a különbséggel történik, hogy  $\mathbf{R}_h$  szerepét az

$$(1.4.6) \quad \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_h - \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^*$$

ún. *első reziduális korrelációs matrix* veszi át. Az előzőekhez teljesen hasonlóan belátható, hogy az első két kritériumot egyszerre kielégítő  $\mathbf{a}_2$  vektor az  $\mathbf{R}_1$  matrix  $\lambda_2$  vel jelölt legnagyobb sajátértékéhez tartozó  $\sqrt{\lambda_2}$  hosszúságú sajátvektor, ahol  $\lambda_2 = \mathbf{a}_2^* \mathbf{a}_2$ . Könnyen igazolható, hogy az így kapott  $\mathbf{a}_2$  vektor ortogonális az előbbi  $\mathbf{a}_1$  vektorra.

Az  $\mathbf{A}_k$  oszlopai tehát, most már általánosan fogalmazva, a következőképpen határozhatók meg. Defináljuk az  $s$ -edik reziduális korrelációs matrixot az

$$(1.4.7) \quad \mathbf{R}_s = \mathbf{R}_h - \sum_{p=1}^s \mathbf{a}_p \mathbf{a}_p^* = \mathbf{R}_h - \sum_{p=1}^s \mathbf{Q}_p$$

$$(s = 0, 1, \dots, m-1)$$

előírással, ahol  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_h$ . Az  $\mathbf{A}_k$  matrix  $(s+1)$ -edik oszlopa ekkor az

$$(1.4.8) \quad \mathbf{S}_{s+1} = \text{tr} [(\mathbf{R}_s - \mathbf{a}_{s+1} \mathbf{a}_{s+1}^*)(\mathbf{R}_s - \mathbf{a}_{s+1} \mathbf{a}_{s+1}^*)]$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots, m-1)$$

eltérés-négyzetszöget minimalizáló  $\mathbf{a}_{s+1}$  vektor. Az  $\mathbf{a}_1$  meghatározásához teljesen hasonlóan eljárva belátható, hogy  $\mathbf{a}_{s+1}$  az  $\mathbf{R}_s$  matrix legnagyobb,  $\lambda_{s+1} = \mathbf{a}_{s+1}^* \mathbf{a}_{s+1}$  sajátértékéhez tartozó,  $\sqrt{\lambda_{s+1}}$  hosszúságú sajátvektor. Teljes indukációval bebizonyítható, hogy az egymást követő

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$$

vektorok páronként ortogonálisak.

Az  $\mathbf{a}_p$  ( $p = 1, 2, \dots, m$ ) vektorok páronkénti ortogonalitására támaszkodva az is könnyen bebizonyítható, hogy az előbbi eljárás során adódó

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m$$

sajátértékek mindegyike egyben az  $\mathbf{R}_h$  redukált korrelációs matrixnak is sajátértéke, s így nincs szükség az eljárás során az egymást követő reziduális korrelációs matrixok meghatározására.

Az utolsó  $\mathbf{R}_m$  reziduális matrixról a sajátértékek négyzetösszegére vonatkozó ismert tétel ([1], 224. old.) felhasználásával bebizonyítható, hogy értéke  $\mathbf{0}$ , azaz a fenti eljárás teljes mértékben reprodukálja a redukált korrelációs matrixot.

Ezzel az általunk kitűzött feladatot matematikailag megoldottnak tekinthetjük. *Kaiser* szerint az  $\mathbf{A}_k$  közös sémamatrixnak csak az  $\mathbf{R}_h$  matrix 1-nél nagyobb sajátértékéhez tartozó oszlopait érdemes meghatározni, mert az ezekhez tartozó közös faktorok az egyes változók kommunalitását csaknem teljes mértékben megmagyarázzák. Ily módon eljárva a közös faktorok száma az eredeti változók számának általában  $1/6 - 1/3$ -a.

A faktoranalízis módszerét ismertető rész befejezéseként a páronként korrelálatlan közös faktorokat tartalmazó faktoranalitikus megoldás megadásának szokásos táblázatos formáját ismertetem.

Változó (j)	Sémaegyütthatók				Kommunalitás		
	1	2	...	m	Eredeti $h_j^2$	Számított $\sum_{p=1}^m \alpha_{jp}^2$	Különbség $h_j^2 - \sum_{p=1}^m \alpha_{jp}^2$
1	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1m}$			
2	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2m}$			
.	.	.	.	.			
.	.	.	.	.			
n	$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	$a_{nm}$			
Összesen	<del>X</del>	<del>X</del>	...	<del>X</del>			
A faktorok hozzájárulása ( $V_p$ )	$a_1^* a_1$	$a_2^* a_2$	...	$a_m^* a_m$	<del>X</del>	<del>X</del>	<del>X</del>
Az eredeti teljes kommunalitás %-ában							

## 2. A közgazdasági alkalmazás lehetőségeiről

A faktoranalízis közgazdasági alkalmazásának *lehetőségét* elsősorban a közgazdasági jelenségek bonyolultsága, összetett volta adja meg. A faktoranalízis alkalmazása ugyanis elsősorban olyan esetekben vezethet hasznos eredményre, amikor a vizsgálatba vont változók szoros sztochasztikus kapcsolatban állnak egymással, kölcsönösen függenek egymástól. Ellenkező esetben, tehát független változók esetén csak egyszerűen arról van szó, hogy egy sor bonyolult számítás után magukat az eredeti változókat kapjuk vissza közös faktorokként. Az ilyen felesleges számítások azonban a vizsgált változók korrelációs matrixának előzetes vizsgálata alapján elkerülhetők.

A faktoranalízis legjellegzetesebb közgazdasági alkalmazásai az alábbi három csoportba sorolhatók ([11]):

1. a változók számának csökkentése,
2. osztályozási (csoportosítási) feladatok megoldása,
3. indexsúlyozási feladatok megoldása.

Az egyes alkalmazási területekkel itt elsősorban elméleti szempontból foglalkozom, a konkrét gyakorlati alkalmazásokkal kapcsolatban a téma egyre jobban bővülő irodalmára utalok. Az egyes alkalmazási területek részletesebb ismertetése előtt külön alponthoz foglalkozom a faktorok értelmezésével.

### 2.1 A faktorok előállítása és értelmezése

Ebben az alponthoz először a faktorok változókkal történő előállítását ismertetem. Ekkor célszerű az alábbi két eset megkülönböztetése.

1. *Komponenselemzés*: Ekkor a közös faktorok száma  $n$ , s azok egyértelműen előállíthatók a  $z_j$  változók lineáris kombinációjaként a

$$(2.1.1) \quad \mathbf{k} = \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{A}_k^* \mathbf{z}$$

formula alapján.<sup>14</sup> Mint az már ismeretes, a komponenselemzés esetében nincsenek egyedi faktorok.

2. *Faktoranalízis*: Tekintettel arra, hogy ebben az esetben a megoldás egyedi faktorokat tartalmaz, nem lehet szó a faktorok egyértelmű előállításáról. Itt a faktorok előállításának egyik legegyszerűbb módját, az ún. *regressziós módszert* ismertetem. ([6] és [16]) Ebben az esetben — a levezetések mellőzésével —

$$(2.1.2) \quad \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{S}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z} = \Phi \mathbf{A}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z},$$

ami páronként korrelálatlan közös faktorok esetén az

$$(2.1.3) \quad \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{A}^* \mathbf{R}^{-1} \mathbf{z}$$

alakba megy át. Az  $\hat{\mathbf{f}}$  jelölés mindkét esetben arra utal, hogy itt a faktorok egy lehetséges becsléséről van szó.

Mivel ezen előállítás egyértelműsége nem jelenti feltétlenül azt, hogy egy faktor előállításában csak egy változó szerepel, a faktorok értelmezhetőségének problémáját célszerű mindjárt az  $m < n$  esetre vonatkoztatva tárgyalni.

Ha a kapott eredményeket valamilyen jelenség közelítésére, előrejelzésére kívánjuk felhasználni, akkor nincs is feltétlenül szükség a kapott faktorok értelmezésére. Ilyen volt a helyzet bevezető példánk esetében is, amikor elsősorban az általános faktorok számára vonatkozó hipotézis helyessége bírt döntő jelenséggel. Ennek eldöntése után már szinte „magától” adódott a kapott eredmény értelmezése. Ugyanez a helyzet akkor is ha a faktoranalízist egy a priori modell helyességének ellenőrzésére kívánjuk felhasználni. Más a helyzet azonban akkor, ha a kapott eredményeket valamilyen jelenség közgazdasági elemzésére, mélyebb megismerésére kívánjuk felhasználni. Ekkor ugyanis óhatatlanul szembekerülünk a faktorok értelmezésének, interpretálásának problémájával. Ilyen esetekben döntő jelentőségű az, hogy sikerül-e a kapott faktorokat valamilyen közgazdaságilag értelmezhető, esetleg közvetlenül megfigyelhető változóval azonosítani.

A faktorok értelmezésének alapját a faktorok változók segítségével történő (2.1.2) előállítása, és a megoldás szerves részeként adódó *struktúramatrix* vizsgálata képezi. Ha a faktorok (2.1.2) előállítását megvizsgálva azt tapasztaljuk, hogy az egyes faktorok olyan diszjunkt változócsoportok lineáris kombinációi, hogy az egyes csoportokba tartozó változóknak létezik valamilyen lényeges közös jellemzője, s a különböző változócsoportok közös jellemzői mind különbözők, akkor a faktorok rendre a hozzájuk tartozó változócsoportok közös jellemzőivel azonosíthatók.

Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor azt a tényt használhatjuk fel a faktorok értelmezésére, hogy tekintettel a változók és faktorok standardizáltságára az egyes faktoroknak a változókból való összetevődését mutató szorzókonstansok nagysága éppen az egyes változók faktorok kialakításában játszott szere-

<sup>14</sup> Az  $\mathbf{A}_k^{-1} = \mathbf{A}_k^*$  egyenlőség a közös faktorok páronkénti ortogonalitásából következik.

pének fontosságát mutatják. Erre támaszkodva pedig kiválasztható az adott faktor értékeinek alakulását a legdöntőbb mértékben befolyásoló változó, amivel az adott faktor azonosítható.

Tekintettel arra, hogy itt már csak páronként korrelálatlan közös faktorokat tartalmazó megoldásokkal foglalkozunk ez az eljárás azzal egyenértékű, hogy az adott faktort a vele legszorosabban korreláló változóval azonosítjuk.

Ha a faktorok változókkal történő azonosításakor a faktorok és a változók közötti korrelációs együtthatókat vesszük alapul, akkor sok esetben igen hasznos lehet az alapvető faktorok módszerével kapott megoldást *kiinduló megoldásnak* tekinteni, s abból egy ortogonális transzformáció segítségével egy újabb megoldást származtatni. K. A. Schäffer véleménye szerint ([12]) erre a célra a *Kaiser*-tól származó *varimax*-módszert érdemes alkalmazni. Az e módszerrel kapott megoldás igen közel áll a már említett „egyszerű struktúrához”, ami sokszor igen megkönnyíti a kapott eredmények értelmezését. A varimax módszer ismertetésére nem térek ki, részletes leírása pl. a [6]-ban található meg.

A kapott eredmények értelmezésénél felmerülő nehézségek véleményem szerint elsősorban a közelíteni kívánt közgazdasági jelenségek rendkívül bonyolult természetéből fakadnak. A faktoranalitikus megoldások éppen arra mutatnak rá, hogy a közgazdasági jelenségek annyira összetettek, hogy csak ún. összetett változók segítségével közelíthetők. Az értelmezésüknél fellépő nehézségek ellenére úgy vélem, hogy a faktoranalízis egyrészt a közgazdasági jelenségek modellezésének igen hatékony segédeszköze lehet, másrészt pedig jól felhasználható az egyes jelenségekre adott — sokszor igen semmitmondó — definíciók pontosabbá tételére is. A faktoranalízis ilyen jellegű alkalmazhatóságáról a következő két alpontban lesz szó.

## 2.2 A változók számának csökkentése

A közgazdasági elemzések során ma már egyre gyakoribb az ún. *regressziós modellek* alkalmazása. Ezek közül is a leggyakoribb az

$$(2.2.1) \quad \mathbf{y} = \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

lineáris modellek alkalmazása, ahol

$\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_N]^*$   
— az eredményváltozóra vonatkozó  $N$  megfigyelést tartalmazó oszlopvektor

$\mathbf{X} = [x_{ij}]$ , ( $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ )  
— a modellben szereplő  $n$  magyarázó változóra vonatkozó megfigyeléseket tartalmazó  $N \times n$  méretű matrix

$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]^*$   
— a modell ismeretlen paramétereit tartalmazó oszlopvektor

$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_N]^*$   
— az ún. hibavektor.

A modellben szereplő  $Y, X_1, X_2, \dots, X_n$  változókról feltesszük, hogy azok standardizált formában adott valószínűségi változók, melyek együttes elosz-



lásának sűrűségfüggvénye  $f(Y, X_1, X_2, \dots, X_n)$ ,  $Y$  feltételes várható értéke pedig

$$E(Y | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

alakú, ahol a  $\beta_i$ -k ismeretlen együtthatók, az  $x_i$ -k pedig az egyes valószínűségi változók rögzített értékei. A (2.2.1) modell ezen ún. elméleti regressziófüggvény lineáris közelítése.

A (2.2.1) modellben szereplő  $\beta$  paramétervektor legkisebb négyzetek módszere szerinti becslése,

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^* \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^* \mathbf{y}$$

alakú, ami azt jelenti, hogy a (2.2.1) elméleti modellt az

$$(2.3.2) \quad \mathbf{y} = \mathbf{X} \mathbf{b} + \mathbf{e}$$

formában becsüljük, ahol  $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{X} \mathbf{b}$ .

Könnyen belátható, hogy a  $\beta_i$  regressziós együtthatók e becsléseinek varianciája akkor lesz minimális, ha a magyarázó változók páronként korrelálatlanok. Ez azonban a közgazdasági gyakorlatban csak igen ritkán teljesül. Sokkal inkább jellemző a magyarázó változók páronkénti korreláltsága, aminek következményét már az 1.2 alpontban említettük. E jelenség az irodalomban *multikollinearitás* néven ismert.

A multikollinearitás fellépése azonban nemcsak a regressziós együtthatók hibáját növeli meg, hanem megnehezíti a magyarázó változók hatásának szétválasztását is, ami már közgazdasági probléma. A magyarázó változók hatásának szétválaszthatatlansága ugyanis azt jelenti, hogy nem, illetve csak erős fenntartásokkal adható meg a regressziós együtthatók szokásos értelmezése. Minél erősebb fokú a multikollinearitás, annál inkább számolni kell a jelenlétéből adódó káros következménnyel.

Ha a modellben szereplő változókra vonatkozó megfigyelések adott száma ( $N$ ) mellett növeljük a modell változóinak számát, akkor ezzel párhuzamosan egyre növekszik a multikollinearitás veszélye is. Éppen ezért a változók számát ésszerűen kell megválasztani. A változók ésszerű, „optimális” számát igen nehéz pontosan definiálni. Célszerű azonban optimalitási kritériumnak a többszörös determinációs együttható — a többszörös korrelációs együttható négyzetének — értékét tekintni. Ha azonban a többszörös determinációs együttható értékét minden megkötés nélkül maximalizálnánk, akkor ez a változók számának minden határon túli növelését igényelné, ami viszont a multikollinearitás fokának növekedését is maga után vonná. Ezzel szemben ha a többszörös determinációs együttható értékét azon feltétel mellett maximalizáljuk, hogy a modellbe kerülő magyarázó változók páronként korrelálatlanok legyenek, akkor a feltétel egyrészt gátat szab a magyarázó változók száma minden határon túli növekedésének, másrészt a multikollinearitást is kiküszöböli. Ez az optimalitási kritérium igen hasonló az alapvető faktorok módszerénél alkalmazotthoz. Hangsúlyozni kívánom, hogy ez a kritérium csak a változók optimális számához való közelítés egyik lehetséges módja, s korántsem oldja meg teljesen a problémát. Mindenesetre a vázolt kritérium elég ésszerűnek látszik.

Ha elfogadjuk az előbbi kritériumot, akkor kézenfekvőnek látszik az a gondolat, hogy a (2.2.1) modellben szereplő magyarázó változókat azok páron-

ként korrelálatlan közös faktoraival helyettesítsük. Ez az alapgondolata az M. G. Kendalltól származó ún. mesterséges *ortogonalizálás módszerének*.

Induljunk ki a modellünk szempontjából szóbajöhető maximális számú magyarázó változóból, s jelöljük ezek halmazát  $X$ -szel. Tekintsük ezután az  $X$  változóhalmaz

$$(2.2.3) \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}_k \mathbf{k} + \mathbf{A}_u \mathbf{u} = \mathbf{A}_k \mathbf{k} + \mathbf{v}$$

előállítását, ahol az alkalmazott jelölések pontosan megegyeznek az 1.1 alpontban használtakkal,  $\mathbf{v}$  pedig az egyedi faktorok elhanyagolásából adódó hibát jelenti. Ha a (2.2.3)-ban szereplő közös faktorokat az 1.4 pontban ismertetett alapvető faktorok módszerével határoztuk meg, akkor ez azt jelenti, hogy a (2.2.1) modellben szereplő magyarázó változókat páronként korrelálatlan mesterséges változókkal helyettesíthetjük. Fogalmazzuk meg ezután a (2.2.1) modell

$$(2.2.4) \quad \mathbf{y} = \mathbf{K}^* \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\delta}$$

módosított változatát, amit az eredeti modell reparametrizált alakjának nevezünk.

A (2.2.4) modellt ezután az

$$\mathbf{y} = \mathbf{K}^* \mathbf{a} + \mathbf{d}$$

formában becsüljük, ahol

$$\mathbf{a} = (\mathbf{K} \mathbf{K}^*)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{y} \text{ és } \mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{K}^* \mathbf{a}$$

és  $\mathbf{a}$   $m$ -elemű oszlopvektor.

Kihasználva azt a tényt, hogy a közös faktorok egyrészt páronként korrelálatlanok, másrészt a centrális határeloszlás tétele értelmében közelítőleg normális eloszlásúak, reparametrizált modellünk paraméterei — amelyek nem egyeznek meg az eredeti (2.2.1) modell paramétereivel, hanem azoknak lineáris függvényei — sokkal kisebb hibával becsülhetők, mint az eredeti modell paraméterei, sőt azoknál sokkal megalapozottabban vizsgálhatók a szokásos statisztikai próbákkal is.

Az ezután következő lépés a megoldásul kapott közös faktorok, s ezt felhasználva a reparametrizált modellben szereplő paraméterek értelmezése. Ez az előző alpontban elmondottaknak megfelelően történhet. Ha a közös faktorok, s így a reparametrizált modellben szereplő paraméterek végképp nem értelmezhetők, akkor kénytelenek vagyunk a

$$(2.2.5) \quad \mathbf{b}' = \mathbf{A}_k \mathbf{a}$$

transzformáció segítségével visszatérni az eredeti modell paramétereire. Ez azonban azt jelenti, hogy eredeti feladatunkat csak látszólag oldottuk meg. Itt ugyanis csak arról van szó, hogy az eredeti modell  $X$  magyarázó változóhalmaza által tartalmazott információ-mennyiség csökkentése után nyerjük a paraméterek becslését, ami esetleg még az eredeti adatok alapján kapható becsléseknel is bizonytalanabb lehet. Ennek ellenére a mesterséges ortogonalizálás módszere sok esetben hasznos eredményre vezethet.

Az eddigiek során a faktoranalízisnek a multikollinearitás kiküszöbölésére vonatkozó alkalmasságát hangsúlyoztam. Mivel azonban a módszer ilyen esetekre történő alkalmazása szinte minden esetben együttjár a magyarázó

változók számának nagymértékű csökkentésével, a faktoranalízis nemcsak a multikollinearitás kiküszöbölésére szolgáló hatékony eszköznek tekinthető, hanem sikerrel alkalmazható igen bonyolult közgazdasági jelenségek viszonylag egyszerű, kevés számú változóval való közelítésére is. Ha ugyanis a faktorok változókkal való azonosítását, interpretálását a 2.1. pontban elmondottaknak megfelelően végezzük el, akkor a faktoranalízis alkalmas arra, hogy egy regressziós modell szempontjából szóba jövő nagyszámú magyarázó változó közül kiemelje a legfontosabb, közelítőleg páronként korrelálatlan változókat. Ilyen értelemben tehát a faktoranalízis a *modellalkotás igen hatékony segéd-eszközének* tekinthető. Egy ilyen tárgyú konkrét alkalmazásra még egy későbbi cikkben szeretnék visszatérni.

A *mesterséges ortogonálisítás* módszerét R. Stone alkalmazta először a gyakorlatban, aki az USA bruttó nemzeti termékére, illetve nemzeti jövedelmére ható 17 tényezőtől indult ki, és arra az eredményre jutott, hogy a vizsgált függő változók alakulása 3 közös faktor segítségével gyakorlatilag teljes mértékben (97,5%-ban) megmagyarázható ([11]).

A faktoranalízis ezen túlmenően jól felhasználható egy már adott regressziós modell specifikációjának vizsgálatára is. Ha ugyanis a modell magyarázó változóinak faktorelemzését elvégezve arra az eredményre jutunk, hogy a magyarázó változóknak létezik egy *lényeges általános faktora*, akkor ez nagymértékben valószínűsíti a modell helyes specifikációját.

### 2.3 Csoportosítási feladatok

Igen sok esetben merül fel az az igény, hogy egy  $N$  elemből álló sokaság egységeit egy vagy egyidejűleg több ismérv szerint olyan kisebb csoportokba, részsokaságba soroljuk, hogy az egy csoportba tartozó egységek minél homogénebbek legyenek a csoportképző ismérv(ek) szempontjából.

A faktoranalízis ilyen területen történő alkalmazása két esetben válhat szükségessé. Az első eset az, amikor egy csoportképző ismérvet jelöltünk ugyan ki, de az közvetlenül nem mérhető. Ilyen csoportképző ismérv lehet például az ún. „városiassági fok”, vagy „gazdasági fejlettség”. Mindkét példaként említett csoportképző ismérvre az jellemző, hogy nem lehetséges egyetlen olyan mérhető változót kijelölni, amely teljesen azonosítható volna az adott csoportképző ismérvvel, sőt éppen ellenkezőleg, mindkét ismérvünkre az jellemző, hogy számtalan olyan mérhető tényező nevezhető meg, amely többé-kevésbé szoros kapcsolatban áll azokkal.

Ilyen esetekben a következőképpen járhatunk el. Gyűjtsük össze mindazon mérhető változókat, melyekről feltételezhető, hogy valamilyen kapcsolatban állnak a kiválasztott csoportképző ismérvvel. Legyenek ezek az  $X_1, X_2, \dots, X_n$  változók, melyek között valamilyen többé-kevésbé önkényesen számszerűsített minőségi ismérvek is szerepelhetnek, s melyekről feltesszük most, hogy standardizált formában adottak. Határozzuk meg ezután a figyelembe vett változók  $A$  sémamatrixát az alapvető faktorok módszerével, s ennek alapján a (2.1.3) alapján állítsuk elő az első alapvető faktort. Tegyük fel, hogy ez a eredeti változók

$$(2.3.1) \quad K_1 = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n$$

lineáris kombinációja.

Ily módon eljárva a  $K_1$  az adott csoportképző ismérv olyan *komplex* mutatójának tekinthető, ami magába sűríti az adott csoportképző ismerve ható tényezők által tartalmazott információ jelentős részét. A gyakorlati tapasztalatok ugyanis azt mutatják, hogy az első alapvető faktor a vizsgált változók szórásnégyzetének 60–80%-át „megmagyarázza”, s a többi alapvető faktor csak jelentéktelen mértékben járul hozzá azokhoz. A (2.3.1)-ben szereplő  $\alpha_j$  skalárok olyan „értékelési rendszernek”, pontszámrendszernek tekinthetők, amelyek azt mutatják, hogy az egyes  $X_j$  változók milyen szerepet töltenek be, milyen súllyal vesznek részt a kiválasztott, közvetlenül nem mérhető csoportképző ismérvvel jellemezendő jelenség kialakításában.

Ilyen jellegű gyakorlati alkalmazás pl. R. S. Thorn [12] cikkében található.

Ezután a sokaság minden egyes egységére nézve meghatározzuk az első alapvető faktor  $K_{1i}$  értékét a

$$(2.3.2) \quad \mathbf{k}_1^i = [K_{11}, K_{12}, \dots, K_{1N}]^* = \mathbf{X} \alpha$$

módon, ahol  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^*$  a (2.3.1)-ben szereplő  $\alpha_j$  skalárokból felépülő  $n$ -elemű oszlopvektor,  $\mathbf{X}$  pedig a vizsgált változókra vonatkozó megfigyeléseket tartalmazó  $N \times n$  méretű matrix. Ezen értékek alapján pedig elvégezhető a sokaság egységeinek rangsorolása, majd ennek felhasználásával viszonylag homogén csoportokba történő besorolása. Itt tehát a faktoranalízis annyiban segít, hogy — eltekintve magának a módszernek az önkényességétől — ami azonban a matematikai statisztika szinte minden eszközével kapcsolatban elmondható — kiküszöböli az ilyen problémák megoldására használt módszerek nagyfokú önkényességét.

A csoportosítási feladatok megoldására azonban akkor is szükség lehet a faktoranalízis alkalmazására, amikor azt tűzzük ki célul, hogy a csoportosítás elvégzésekor minden egyes csoportképző ismérvet egyenlő súllyal vegyünk figyelembe. Ilyen esetekben a kitűzött feladat a faktoranalízis alkalmazása nélkül a legtöbbször meg sem oldható. A csoportképző ismérvek kijelölt változók ugyanis csak a legritkább esetben függetlenek egymástól. Ez a tény pedig lehetetlenné teszi a csoportképző ismérvek egyenlő súllyal történő figyelembevételét. Ha például négy olyan változó alapján kívánjuk elvégezni a csoportosítást, melyek közül kettő szoros sztochasztikus kapcsolatban áll egymással, akkor a négy változót a csoportosítás során egyenlő súllyal figyelembe véve kettőt majdnem dupla súllyal szerepeltetnénk. Ilyen esetekben ezért sokkal célszerűbb a változók helyett azok közös faktorait figyelembe venni a csoportosítás során.

#### 2.4 Az index-problémáról

Ebben az alponthban a faktoranalízis ár- és volumenindexek meghatározására történő alkalmazását ismertetem röviden. Ezen alkalmazás elméleti kidolgozása H. Theil nevéhez fűződik, első gyakorlati alkalmazói pedig T. Kloek és G. M. de Wit voltak, akik cikkükben tovább is fejlesztik a H. Theil által kidolgozott módszert ([8] és [13]).

Az ár- és volumenindex-számítás feladata az, hogy több különmemű, s így közvetlenül nem összesíthető termék (árucikk) egységárának, illetve termelt (eladott stb.) mennyiségnek együttes átlagos időbeni változását vagy térbeni különbözőségét mutassa ki. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csak az

időbeni összehasonlítással foglalkozom, de az ezután következő gondolatmenet — értelemszerű módosításokkal — térbeni összehasonlításra is alkalmazható.

Induljunk ki  $n$  számú termék (árucikk)  $t$  számú időszakra vonatkozó egység-áraiból és termelt (eladott stb.) mennyiségeiből. E kiinduló adatokat a könnyebb áttekinthetőség érdekében célszerű egy-egy  $t \times n$  típusú ár-, illetve volumenmatrixba foglalni a

$$\mathbf{P} = [p_{ij}] \text{ és } \mathbf{Q} = [q_{ij}]$$

módon, ahol  $p_{ij}$  a  $j$ -edik termék (árucikk)  $i$ -edik időszakra vonatkozó egység-ára,  $q_{ij}$  pedig a  $j$ -edik termék (árucikk)  $i$ -edik időszakban termelt (eladott stb.) mennyisége. A  $\mathbf{P}$  és  $\mathbf{Q}$  matrixok segítségével igen egyszerűen előállítható az indexszámítás alapját képező aggregátumok

$$(2.4.1) \quad \mathbf{V} = \mathbf{P} \mathbf{Q}^* = [v_{ij}]$$

$t$ -edrendű matrixa, amelynek  $v_{ij}$  eleme a  $j$ -edik időszak  $i$ -edik időszaki egység-árai alapján meghatározott termelési értéke (eladási forgalma stb.). A  $\mathbf{V}$  matrix elemeinek felírásakor az egyszerűség kedvéért eltekintettünk az egyes termékekre (árucikkekre) utaló futóindex kiírásától.

Tekintsük ezután feladatunknak egy olyan  $\mathbf{p}$  árvektor és egy olyan  $\mathbf{q}$  volumenvektor meghatározását, amelyek segítségével az aggregátumok (2.4.1) matrixa a legkisebb négyzetek módszere értelmében a lehető legjobban megközelíthető, reprodukálható, azaz amelyekre nézve a

$$(2.4.2) \quad \mathbf{D} = \mathbf{V} - \mathbf{p} \mathbf{q}^*$$

ún. eltérésmatrix elemeinek négyzetösszege minimális. Ez másképpen megfogalmazva annyit jelent, hogy minden  $\Sigma p_i q_j$  alakú aggregátumot egy az  $i$ -edik időszakra jellemző „átlagár” ( $\bar{p}_i$ ) és egy a  $j$ -edik időszakra jellemző „átlagos mennyiség” ( $\bar{q}_j$ ) szorzatával kívánunk közelíteni. Az eltérésmatrix elemeinek négyzetösszege a legegyszerűbben a

$$(2.4.3) \quad tr(\mathbf{D} \mathbf{D}^*) = tr(\mathbf{V} \mathbf{V}^*) - 2 \mathbf{p}^* \mathbf{V} \mathbf{q} + (\mathbf{p}^* \mathbf{p})(\mathbf{q}^* \mathbf{q})$$

módon írható fel. A szélsőértékszámítás szokásos módszerét alkalmazva, s az így adódó egyenleteket kissé átalakítva arra az eredményre jutunk, hogy a keresett

$$\mathbf{p} = [\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_t]^* \text{ és } \mathbf{q} = [\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_t]^*$$

vektorok a

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} [\mathbf{V} \mathbf{V}^* - (\mathbf{p}^* \mathbf{p})(\mathbf{q}^* \mathbf{q}) \mathbf{E}] \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ [\mathbf{V}^* \mathbf{V} - (\mathbf{p}^* \mathbf{p})(\mathbf{q}^* \mathbf{q}) \mathbf{E}] \mathbf{q} = \mathbf{0} \end{cases}$$

egyenletek megoldásaként adódnak. A (2.4.4) alatti egyenletek alapján belátható, hogy a (2.4.3) eltérés négyzetösszeget minimalizáló  $\mathbf{p}$  árvektor, illetve  $\mathbf{q}$  volumenvektor a  $\mathbf{V} \mathbf{V}^*$ , illetve  $\mathbf{V}^* \mathbf{V}$  matrix maximális,

$$\lambda^2 = (\mathbf{p}^* \mathbf{p})(\mathbf{q}^* \mathbf{q})$$

sajátértékéhez tartozó sajátvektora. Ha még azt is kikötjük, hogy mind a  $\mathbf{p}$ , mind a  $\mathbf{q}$  vektor  $\sqrt{\lambda}$  hosszúságú legyen, a megoldás egyértelművé válik.

Az itt követett módszer technikailag igen hasonlít az alapvető faktorok módszeréhez, bár nem teljesen azonos azzal. A legszembetűnőbb eltérés a két módszer között az, hogy itt nem a korrelációs matrixból kiindulva véghezvük el a számításokat.<sup>15</sup> Ennek ellenére Kloek és de Wit már idézett cikkükben a  $\mathbf{p}$  árvektort a (2.4.1) matrix oszlopai első alapvető faktorának, a  $\mathbf{q}$  volumenvektort pedig a (2.4.1) matrix sorai első alapvető faktorának nevezik.

Az így kapott  $\mathbf{p}$  és  $\mathbf{q}$  vektorok elemei az egyes időszakokra jellemző „átlagárak”, illetve „átlagos” mennyiségek konstansszorosai, amelyek még nem értelmezhetők közvetlenül indexekként. Ha az  $i$ -edik időszakot tekintjük bázisidőszaknak, akkor maguk az indexek az

$$(2.4.5) \quad \mathbf{i}_p = \frac{1}{\mathbf{e}_i^* \mathbf{p}} \mathbf{p} \quad \text{illetve} \quad \mathbf{i}_q = \frac{1}{\mathbf{e}_i^* \mathbf{q}} \mathbf{q}$$

módon állnak elő, ahol  $\mathbf{e}_i^*$  az  $i$ -edik  $t$ -elemű egységvektort jelenti sorvektor-ként felírva.

Két időszak esetén megmutatható, hogy az ár ( $P$ )- és volumenindex ( $Q$ ) az alábbi közelítő formulák segítségével határozható meg:

$$(2.4.6) \quad P \simeq P_0 \left( 1 + \eta \frac{Q_0^2}{1 + Q_0^2} \right), \quad \text{ill.} \quad Q \simeq Q_0 \left( 1 + \eta \frac{P_0^2}{1 + P_0^2} \right),$$

ahol  $P_0$ , illetve  $Q_0$  a Laspeyres-féle ár-, illetve volumenindex,  $P_1$  illetve  $Q_1$  pedig a Paasche-féle ár-, illetve volumenindex, és

$$\eta = \frac{P_1}{P_0} - 1 = \frac{Q_1}{Q_0} - 1$$

Ami az ily módon meghatározott indexek közgazdasági tartalmát illeti, meg kell jegyeznünk, hogy kettőnél több időszak esetén igen nehéz annak megítélése. Ez részben matematikai korlátokba ütközik, részben pedig a kapott eredmények nehéz értelmezhetőségén alapszik. Általánosságban csak annyit szögezhetünk le, hogy az a tény, hogy a fenti indexek egyes időszakokra vonatkozó „átlagárakon” illetve „átlagos mennyiségeken” alapulnak nagymértékben korlátozza azok alkalmazhatóságát. Egy adott időszakra vonatkozó átlagár, illetve átlagos mennyiség meghatározása ugyanis csak olyan esetekben indokolt közgazdaságilag, amikor a  $\mathbf{P}$  illetve  $\mathbf{Q}$  matrix egyes soraiban álló elemek összegezhetőek. (Ez a helyzet például akkor, ha azonos fajta termék (árucikk) különböző minőségeiről van szó.) Azt is megállapíthatjuk, hogy a fenti indexek állandó súlyozásúak, azaz az említett átlagárakra, illetve átlagos mennyiségekre nézve

$$\mathbf{p} = \mathbf{P} \boldsymbol{\alpha} \quad \text{illetve} \quad \mathbf{q} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\beta}$$

érvényes. Ehhez mindjárt hozzá kell tennünk azt is, hogy ez az „állandó” súlyozás bizonyos értelemben változó is. Ugyanis a fenti indexek legfőbb pozitívuma az, hogy mind az ár-, mind a volumenindex-számítás e módszere az összes vizsgált időszak mennyiségi- és áradatát figyelembe veszi. Ez pedig azt

<sup>15</sup> Itt jegyezzük meg, hogy a faktoranalízis nem szükségképpen a korrelációs matrixból indul ki. Egyes esetekben a korrelációs matrix helyett az ún. variancia-kovariancia matrix képezi a faktoranalízis alapját.

jelenti, hogy a vizsgált időszakot akár egy időszakkal kibővítve megváltozik az egész indexsor, megváltozik az indexsor súlyrendszere. Ez pedig bizonyos szempontból változó súlyozást is jelent.

Két időszak esetére az eddig elmondottakon kívül még az is igaz, hogy mind az ár, mind a volumenindex a megfelelő Laspeyres-féle indexek körül ingadozik, ami egyúttal arra is rávilágít, hogy a Laspeyres-féle ár-, illetve volumenindexek bizonyos aszimptotikusan optimális tulajdonsággal is rendelkeznek.

Ezzel a faktoranalízis közgazdasági alkalmazásának legfőbb lehetőségeit — ha nagy vonalakban is — áttekintettük. Az eddig elmondottakból látható, hogy a faktoranalízis igen érdekes, hasznos, bár korántsem problémamentes módszer. Véleményem szerint a felsorolt alkalmazási lehetőségek közül a 2.2 és 2.3 alpontban ismertetettek a legérdekesebbek és legizgalmasabbak, mert azok a közgazdasági kutatómunka igen hatékony segédeszközeivé válhatnak.

#### IRODALOM

- [1] BELLMAN, R.: *Introduction to Matrix Analysis*. London—New York—Toronto, 1960. Mc Graw-Hill Book Company, 328 p.
- [2] BERRY, J. L. B.: *An Inductive approach to the Regionalization of Economic Development*. *Geography and Economic Development* (Edited by Ginsburg, N) 78—107. p.
- [3] FARRAR, D. E.—GLAUBER, R. R.: *Multicollinearity in Regression Analysis*. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 49. (1967). No. 1, 92—107. p.
- [4] GRAYBILL, F. A.: *An Introduction to Linear Statistical Models*, Vol. 1. New York, 1961. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. 463 p.
- [5] HAJÓS GY.: *Bevezetés a geometriába*. Budapest, 1960. Tankönyvkiadó, 594 p.
- [6] HARMAN, H. H.: *Modern Factor Analysis*. The University of Chicago Press, 1960. 469 p.
- [7] JÁNÓSSY, F.: *A gazdasági fejlettség mérhetősége és új mérési módszere*. Budapest, 1963. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 323 p.
- [8] KLOEK, T.—WIT, G. M. de: *Best Linear and Best Linear Unbiased Index Numbers*. *Econometrica*, Vol. 29 (1961). No. 4, 602—616. p.
- [9] KÖVES, P.—PÁRNICZKY, G.: *Általános statisztika* (egyetemi jegyzet). Budapest, 1967. Tankönyvkiadó, 571 p.
- [10] KREKÓ, B.: *Matrixszámítás*. Budapest, 1964. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 374 p.
- [11] RICHTER, P.: *Anwendungen der Faktorenanalyse auf ökonomische Daten*, *Allgemeines Statistisches Archiv*. Bd. 52 (1968), Nr. 2., 125—152. p.
- [12] SCHÄFFER, K.-A.: *Faktorenanalyse und ihre Anwendungsmöglichkeiten*, *Allgemeines Statistisches Archiv*. Bd 53 (1969). Nr. 1., 51—72. p.
- [13] THEIL, H.: *Best Linear Index Numbers of Prices and Quantities*, *Econometrica*, Vol. 28 (1960), No. 4., 464—480. p.
- [14] THORN, R. S.: *Per Capita Income as a Measure of Economic Development*. *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Bd. 28 (1968), Heft 2., 206—216. p.
- [15] YULE, G. U.—KENDALL, M. G.: *Bevezetés a statisztika elméletébe*. Budapest, 1964. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 697. p.
- [16] LAWLEY, D. N. — MAXWELL, A. E.: *Factor Analysis as a Statistical Method*. London 1963. Butterworth and Co. Ltd., 117 p.

# KÖNYVEKRŐL

SZÉP JENŐ (szerkesztő): *Döntési modellek I–II.* Budapest, 1967., 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 211 p., 253 p.

A Közgazdaságtudományi Egyetem Matematika Tanszékének munkaközössége azt a célt tűzte maga elé, hogy ebben a két könyvben a gyakorlati téren dolgozó közgazdászoknak, operációkutatóknak ad segédeszközt. Mint azt az előszóban írják, a szakkönyvek többsége elsősorban a matematikai módszereket, technikákat ismereti és csak példákat mutat be a gazdasági életből. Ezzel szemben a szerzői munkaközösség valóságos gazdasági problémák teljes modelljeit kívánja bemutatni, hogy ezzel segítse elő hasonló konkrét problémák modellezését, megoldását.

Mindkét kötetben kilen-kilenc tanulmány szerepel. A legtöbb (összesen öt tanulmány) beruházási problémákat tárgyal. Az első kötet második tanulmánya — szerzője Varga József — egy erdőtelepítési feladatot mutat be. Adott esemételeállomány, pénzügyi lehetőségek, erdőterület, valamint talajviszonyok mellett kell a telepítendő fafajták kombinációját meghatározni. A feladatot szimplex módszerrel oldja meg. Több lehetséges célfüggvényt vesz figyelembe (az 50 éves erdő várható faállománya, a területfelhasználás minimalizálása, az importköltség minimalizálása). Forgó Ferenc és Komoróczy György írta az I/5 fejezetet, amely integer programozási feladatban fogalmazza meg a beruházási javaslatok optimális variánsának összeállítását. Megengedi a modell a „többszörös és tört” terjedelmet is. Ennek figyelembevétele egyszerű transformációval történik. A Halmi Erzsébet — Meszéna György — Szép Jenő által írt II/1. fejezet a következő problémával foglalkozik: egy adott termelési program számára kell kiválasztani azokat a beruházásokat, amelyekkel a program megoldható. Varga József a II/2. fejezetben sztochasztikus beruházási modellt ír le. Egy öntözőművet

kell létesíteni. A folyó vízhozama és a csapadék valószínűségi változó. Az öntözőmű nagyságát befolyásolják a termelési struktúra és az öntözött terület nagysága is, ugyanakkor az öntözőmű visszahat a termelési struktúrára. Mekkora legyen a beruházás (prograsszíven növekvő költségek mellett), hogy a terméshozamban realizálható nettó nyereségtöbbletet maximalizáljuk. Végül a II/3. fejezet, mely Bikics Istvánnétól és Varga Józseftől származik ipari beruházások telepítésének problémájával foglalkozik.

Három tanulmány foglalkozik szállítási modellekkel. Gáspár László fejezete az I/3, homogén anyagnak gépkocsikon történő szállítását fogalmazza meg modell alakjában két változatban: egyetlen és több rakodóhellyel. A szállítási irányokon kívül a használt gépkocsitípust is meg lehet választani. A célfüggvény a költséget minimalizálja. Az I/8. tanulmány, melynek szerzői: Bikics Istvánné — Meszéna György — Szép Jenő, ásványolajtermékek (benzin, gázolaj, fűtőolaj) elosztóhálózatának megtervezését tárgyalja. A modell segítségével meghatározzák az ellátási körzeteket, a körzeteken belüli szállítást és a telepek optimális tartálynagyságát. Megyeri Endre, Meszéna György és Szép Jenő az I/6. fejezetben a fenyőfűrészáru-forgalmat optimalizálja; nevezetesen meghatározza az import és a termelés elosztását (figyelembe véve az átalakíthatóságot), valamint a raktárkészleteket. A feladatnak az utóbbi részét valószínűségi modellel írja le, ahol a meghatározható eloszlású valószínűségi változó a beérkező import.

A harmadik nagy témakör a raktárkészlet meghatározása, amellyel három tanulmány foglalkozik. Az I/4. fejezetben — írta Denkinger Géza — a megoldandó probléma egy adott üzem termékeinek szétosztása olyan módon, hogy a felhasznált üzemek együttes költsége minimális legyen. Az I/7. fejezetben Megyeri Endre, Meszéna György és Szép Jenő négy diszkrét és egy folytonos modellt ismertet gya-



korlatilag ugyanarra a problémára, de eltérő korlátozó feltételekkel, amelyek bizonyos esetekben egymást kiegészítve is felhasználhatók. A modellek célja optimális raktárkészletek kialakítása a felhasználóknál és a készletezőknél, illetve azoknak a felhasználóknak a kiválasztása, akiket közvetlenül a termelő lát el. A célfüggvény a költségeket minimalizálja. Meszéná György és Szép Jenő a II/5. fejezetben igen nehéz készletgazdálkodási problémát ír le. Egy nagy kereskedelmi vállalat optimális készletnagyságát határozza meg oly módon, hogy a fizetendő 5%-os eszközlektétési járuléka és a bevételként jelentkező ár és különbözete a legnagyobb legyen. Mivel a vállalat bevételei és a készletek mennyisége, értéke a véletlentől függenek, valószínűségi változóknak kell őket tekinteni. A szerzők nomografikus készletgazdálkodási rendszerrel oldják meg a kérdést.

Szoros értelemben vett termelési modell csupán egy szerepel a két kötetben, melynek szerzői Csáki Csaba és Hámori Miklós, a II/7. fejezetben. Ez a takarmánytermelést, vásárlást és eszerét optimalizálja együttesen. A modellt az egyes befolyásoló tényezőknek a célfüggvényre gyakorolt hatását kimutató értékenységvizsgálat egészíti ki.

Bod Péter a kötetek utolsó tanulmányaiban ágazati (élelmiszeripar) és népgazdasági tervezéssel foglalkozik. Az utóbbi azt a kérdést boncolja, hogy a lineáris kapcsolatok feltételezése a hosszútávú tervezésben az egész modellt fiktívvé teszi. Felveti annak a lehetőségét, hogy az ágazati kapcsolatok modelljében szereplő koeficiens a termelés méreteitől függenek.

A II/4. fejezet a fogyasztási struktúra vizsgálatának matematikai módszereiről tájékoztat, szerzője Szentpéteri Szabolesné. Huszti Ernő és Szép Jenő a II/6. fejezetben a forgóeszközök hitelfinanszírozása és a kamatpolitika közötti összefüggést vizsgálja. A szerzők elsősorban a kialakult helyzetet és egyes döntések várható következményeit elemzik.

Végül két tanulmány elméleti kérdéseket tárgyal: a Krekó Béla által írt I/1. fejezetben a szerző a Dantzig—Wolfe féle dekompozíciós módszernek egy változatát írja le, a Förgő Ferenctől származó II/8. fejezet pedig a konvex célfüggvény lineáris korlátozó feltételek melletti maximalizálásával foglalkozik.

A két kötetben közölt tanulmányokról összefoglalóan azt lehet mondani, hogy a kezdő operációkutatók és az olyan gyakorlati gazdasági szakemberek számára hasznosak, akik szeretnék meggyőződni a gazdaságmatematikai modellek gyakorlatban történő alkalmazhatóságáról. Az

operációkutatásban már jártas szakember viszonylag kevesebb újat talál bennük.  
Maróti László

JOSEF GRUBER: *Ökonometrische Modelle des Cowles-Commission-Typs: Bau und Interpretation.* (Cowles Commission-típusú ökonometriai modellek: felépítésük és értelmezésük.) Hamburg és Berlin, 1968, Verlag Paul Parey, 320 p.

Az ökonometria sokféleképpen variált definíció megegyeznek abban, hogy az ökonometria feladata a matematikailag megfogalmazott közgazdasági hipotézisrendszernek statisztikai megfigyelések alapján, a statisztikai inferencia módszerével végrehajtott verifikálása. A sokféleképpen árnyalt, de nagyjából azonos tartalmú definíciók tág lehetőséget hagynak arra, hogy egyik vagy másik szerző milyen területeket sorol az ökonometria szférájába. Nincs azonban eltérés a tudomány művelői között abban a felfogásban, hogy az ökonometria körébe sorolják az interdependens (különleges esetben rekurzív vagy független) sztochasztikus egyenletekből álló rendszert, amelynek paramétereit megfelelő statisztikai módszerek segítségével becsülik. Ezeket a modelleket a lineáris vagy nem lineáris programozási (optimumszámítási) módszerekkel szembeállítva nevezi a szerző „Cowles—Commission-típusú modelleknek” és ezek módszertanának és felhasználásának ismertetését tűzi ki könyve céljával.

A „Cowles—Commission-típusú modellek” elnevezéshez való ragaszkodás egyébként jellegetesen végighúzódik a könyvön. A könyv címétől kezdve mindvégig ezt a kifejezést használja a szerző olyankor, amikor általában az „ökonometriai modellek” vagy „szűkebb értelemben vett ökonometriai modellek” kifejezést használatos. Az ökonometriai modelleknek a „Cowles—Commission”-nal való ilyen szoros asszociációja nem tekinthető indokoltnak. Kétségtelen, hogy a „Cowles—Commission” — ez a tekintélyes amerikai kutatóintézet — kiemelkedő hozzájárulást nyújtott a diszciplína kidolgozásához, de ugyanennek a „Cowles—Commission”-tól függetlenül más fontos úttörői és munkásai is voltak.

Az ökonometriai modellek készítésének módszerei csak az utolsó három évtizedben alakultak ki, ma is a gyors fejlődés fázisában vannak, és csupán az utolsó másfél-két évtizedben jelentek meg az első rendszeres ökonometriai kézi- és tankönyvek. (Főleg Tinbergen 1952, Tintner 1952, Klein 1953, Theil 1958, Klein 1962, Johnston 1963, Goldberger 1964, Christ 1966, Theil 1966,

Fox 1968.) Ezeknek a kézikönyveknek a sorozatában az egyik legújabbban megjelent mű Gruber könyve, amely kifejezetten kezdők számára való bevezetés kíván lenni. Gruber a következőképpen fogalmazza meg könyvének speciális célkitűzését: a jelenleg rendelkezésre álló ökonometriai tankönyvek a Cowles-Commission-típusú modelleket csaknem kivétel nélkül az utolsó részben tárgyalják; még ha ezek a könyvek kezdők számára elfogadható színvonalon is indulnak, a könyv végére olyan nehézségi fokot érnek el és olyan szimbolikát fejlesztenek ki, amelyek a nem specialistának lehetetlenné teszik az ilyen típusú modellekkel való megismerkedést anélkül, hogy a könyvek megelőző részeit át ne tanulmányozzák; ez a könyv kizárólag a Cowles-Commission-típusú modellek készítésével, vizsgálatával és alkalmazásával kíván foglalkozni, minimális matematikai ismeretek alapján és az ökonometria más területeinek bevonása nélkül.

A könyv a szerző által kitűzött célnak kiválóan megfelel: a lehető legegyszerűbb eszközökkel, ugyanakkor logikai és matematikai szigorral és következetességgel nyújt az ökonometriai modellek problematikájáról rendszeres, teljes és a legújabb irodalmat is felölelő, didaktikai szempontból igen értékes áttekintést. Olvasása sem közgazdasági, sem matematikai, valószínűségszámítási vagy statisztikai előismeret nem igényel.

Gruber könyve a témáról nemcsak rendszeres, hanem teljes képet is ad. Az olvasó az ökonometriai modellek problematikájának egészéről kap áttekintést, megismerkedik az egyes kérdések egymásba kapcsolódásával és a problémakör bármelyik részével találkozhat olvasmányai vagy kísérletei, munkája során, tudni fogja a kérdés jelentőségét, szerepét és helyét a problémakörön belül. Amennyiben részletesebb tájékozódásra van szüksége, a szerző az irodalmi utalásokon keresztül megbízhatóan eligazítja.

Az előbbiek már implikálják a könyv didaktikai értékét. A könyvet a laikus olvasó nehézségek nélkül kezdheti olvasni és a továbbiakban megbízható óvatossággal vezetik az egyszerűtől a bonyolultabb felé. Egyetlen terület van, ahol ezt az elvet a szerzőnek nem sikerül teljes mértékben megvalósítani. A könyv a modellkészítés menetében tárgyalja a specifikációt (az identifikáltság kérdésével együtt), a becslési módszereket és a modell jóságának megítélésére alkalmas módszereket. Ezeket a részeket megelőzi azonban több összefoglaló bevezető fejezet (tartalmi ismertetésüket lásd alább), közöttük az ökonometriai modellek formáival és típu-

saival foglalkozó. Ez utóbbi fejezet a strukturális forma mellett olyan modellformákkal és kérdésekkel is foglalkozik, amelyek létrehozása, illetőleg felmerülése a gyakorlatban általában a becslés és a modell jóságának ellenőrzése után következik. Ezeknek a kérdéseknek tárgyalása ebben az összefoglaló fejezetben logikailag indokoltnak tekinthető, didaktikai szempontból azonban hátrányosan befolyásolja a könyv hatékonyságát.

A könyv első fejezete egyszerű ökonometriai minta-modelleket mutat be és az ökonometriai modellek „alkatrészeit” tárgyalja, ezek között a változókat (késleltetett és nem késleltetett, kvantitatív és kvalitatív, idősorokon és keresztmetszeti sorokon alapuló, megfigyelt és nem megfigyelt, magyarázott és magyarázó, endogén és exogén, kölcsönösen összefüggő és preterminált, valamint látnans változók, a változók, megfigyelési hibája), a paramétereket és az egyenletek fajtáit.

Manapság az ökonometriai kézikönyvek-nél szinte általánossá vált, hogy bevezetőben vagy függelékben bemutatják a lineáris algebrai azokat a tételeit, összefüggéseit, szabályait, amelyek a tárgyaló témakör, illetőleg a könyv megértéséhez szükségesek. Ennek a feladatnak tesz eleget a könyv 2. fejezete.

A könyvnek viszonylag legnehezebb része a 3. fejezet, amely az ökonometriai modellek formáival és típusaival foglalkozik. Jó rendszerezését adja a strukturális formának (ezen belül foglalkozik az interdependens, rekurzív, független, valamint a blokk-rekurzív és blokk-független modellekkel) és a redukált formának. Késleltetett multiplikátorok (Lag-Multiplikátor) címszó alatt újszerű rendszerezését adja az angolszász irodalom „impact multipliers”, illetőleg „interim multipliers” néven ismert fogalmainak, amelyek az ökonometriai modellekkel való előrebecslés legmegalapozottabb bázisait jelentik.

A 4. fejezet az ökonometriai modellek specifikációjával foglalkozik. A modellkészítésnek ezt a fázisát, a specifikációt, gyakran vélik tulajdonképpen közgazdasági fogalmazásnak és alapjában ez a fázis valóban ebből a funkcióból indul ki. A közgazdasági hipotézisek felállításában azonban olyan módszertani kontroll tevékenység kíséri, amelyet legjobban e fejezet tartalma világít meg. A könyv e fejezetében a szerző a feladatok következő sorával foglalkozik: a magyarázott változók meghatározása; a magyarázó változók meghatározása (ennek keretében többek között a reprezentatív változók, a faktoranalízis, az első differenciák, az elosztott késleltetések alkalmazása); a magyarázó válto-

zók osztályozása, vagyis a magyarázó változók egymásközötti és a látens változókkal való kapcsolatának vizsgálata a korrelációs kritérium, illetőleg a sztochasztikus függetlenség kritériuma segítségével; a modell teljességének ellenőrzése; az egyenletek identifikáltságának ellenőrzése; a becslési módszer kiválasztása; a statisztikai adatok rendelkezésre állásának a vizsgálata; az egyenletek típusának a kiválasztása; a változók sztochasztikus tulajdonságai tekintetében felállított hipotézisek kérdése.

Az 5. fejezet foglalkozik a becslés problémakörével. A becslési módszerek ismertetése előtt a könyv általános ismertetést ad a becslési függvények kívánatos tulajdonságairól: a torzítatlanságról, a hatékonyságról, a paraméter körüli minimális második momentumról, az aszimptotikus torzítatlanságról, a konzisztenciáról.

A könyv az ökonometriai modellek becslési módszerei közül a legkisebb négyzetek klasszikus módszerét és a legkisebb négyzetek kétfokozatú módszerét ismerteti. Mindkét módszert a hagyományos algebrai eszközökkel és a mátrix algebra alkalmazásával párhuzamosan mutatja be. A becslési módszerek tárgyalása a regressziós együttműködésnek, azok variancia-kovariancia mátrixának és a determinációs együttműködés kiszámításán és elemzésén kívül kiterjed többek között a regressziós hipersíki tulajdonságaira és a regressziós egyenletek sztochasztikus tulajdonságainak a becslési függvényekkel való összefüggéseire.

Bár a könyv további becslési módszerek tárgyalására nem tér ki, a tárgyalt két módszer ismeretében, különösen a kétfokozatú módszer bizonyos változatai viszonylag könnyűszerrel megismerhetők és alkalmazhatók.

A 6. fejezet foglalkozik a modell jószágának megítélésére szolgáló módszerekkel. A szerző itt is arra törekszik, hogy a tár-

gyalt kérdésről, bár vázlatos, de teljes képet adjon. E fejezet keretében is áttekinti valamennyi felmerülő módszer lényegét. Részletesebben a regressziós együttműködés módszertani elemzésével és a reziduumok autokorrelációjával foglalkozik, az előző kérdés tekintetében főleg a standardizált regressziós együttműködés (β-koefficiensek), a t-próbával, az F-próbával, a második kérdés tekintetében pedig a grafikus módszerek mellett a Durbin—Watson próbával és a von Neumann próbával.

Az ökonometriai modellkészítésnek sok olyan problémáját lehetne említeni, amelyekkel a szerző nem foglalkozik, ha azonban az intenciójának, a könyv terjedelmének és a fentiekben ismertetett tulajdonságainak tükrében nézzük ezt a tényt, nem kifogásolhatjuk. Amellett, hogy az ökonometria fejlődő, új tudomány, sok vonatkozásában már nagy irodalma van, amelynek egy kisebb terjedelmű kézikönyvben való össze-sűrítése lehetetlen. Főleg a becslési módszerekkel volt kénytelen a szerző nagyon takarékosan bánni. Így pl. egyáltalán nem foglalkozik a paraméterbecslési módszerek legnagyobb részével, amilyenek pl. a korlátozott információ alapuló módszerek közül a maximum-likelihood módszer, vagy Theil k-ad és h-ad osztályú becslési módszerei; a teljes információ alapuló módszerek közül ugyancsak a maximum-likelihood módszer, a háromfokozatú legkisebb négyzetek módszere stb. A nem tárgyalt témák között vannak olyanok, amelyek a kézikönyvek ismert fejezeteit képezik, a szerző viszont azért mellőzi részletesebb tárgyalásukat, mert gyakorlati felhasználásuk alig fordul elő. Ilyen pl. az idősorok és keresztmetszeti adatok kombinációja, vagy a sztochasztikus tag mellett a változók hibájának egyidejű figyelembevétele.

*Halabuk László*

## Az Építőipari Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalat matematikai közgazdasági kutatásai

A legrégebbi ágazati számítástechnikai bázisok közé tartozó Építőipari Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalatnál — az ügyviteli adatfeldolgozás mellett — már megalakulásakor jelentős szerepet kapott a matematikai módszerek közgazdasági alkalmazásának kutatása. Ma a vállalat kutatási osztályán olyan alap- és alkalmazási jellegű kutatásokkal találkozhatunk, amelyek eredményei nemcsak a hazai szakmai körökben, hanem külföldön is ismertek. Az élénk hazai és nemzetközi érdeklődés jelzi, hogy nemcsak az építőiparban, hanem a népgazdaság más területein dolgozó szakemberek számára is hasznos segítséget nyújthatnak kutatásaink.

A vállalatnál folyó alap- és alkalmazási jellegű kutatások szerves egységben vannak egymással; az alap kutatások eredményeit a gyakorlatban is alkalmazzuk.

Az elmúlt évben vállalatunknál kidolgozták E. Balas „szitálási” algoritmusának egy továbbfejlesztett változatát, kiterjesztve azt nagyméretű programozási feladatok megoldására is. Az algoritmus felhasználásával a valóságot jobban leíró tervezési modellek kidolgozása válik lehetővé.

Intenzív kutatás folyik az optimális folyamatok elmélete alapján az olyan algoritmus kidolgozására, amely az erőforrásoknak hálókban történő elosztását oldja meg.

Az ágazati középtávú tervezés módszerei kutatásának a vállalatnál immár hagyományai vannak, mivel a korábbi években a „kétszintű” tervezés megalapozásában és gyakorlati kivitelezésében több munkatársunk működött közre. Az elmúlt években célul tűztük ki, hogy a kétszintű tervezés tapasztalatait felhasználva, valamint a gazdasági reform követelményeit és az ágazat sajátosságait figyelembe véve olyan matematikai modellt dolgozzunk ki, melynek üzemszerű használata biztosítja az ágazati szintű döntések megalapozását.

A kutatás eredményeként két modell-típus született. Az egyik a 0–1-értékű és

folytonos változókat egyben tartalmazó modell, a hozzá tartozó megoldási algoritmusmal, a másik pedig egy ágazati lineáris programozási modellrendszer. A gyakorlati igények sürgetése, valamint az előbbi modellhez tartozó gépi program elkészülésének elhúzódása miatt először az utóbbi modellrendszer kidolgozását kezdtük meg. Segítségével egy olyan feladatot kívánunk megoldani, amilyent a kétszintű tervezés keretében kidolgozott ágazati (könnyűipari és gépipari) programozások több-kevesebb sikerrel megoldottak.

A modellezésnél alapvető követelmény volt az ágazati irányítás részére szükséges részletezettség és teljességtudás, valamint az, hogy az építő- és építőanyagipari termelés és fejlesztés egysége, összefüggő rendszert képezzen. Így a modellrendszer lehetővé teszi különböző népgazdasági eljárásokhoz tartozó ágazati tervek kidolgozását.

A modellrendszer három — egymással szorosan összefüggő — részből áll.

Központi részében egy — a büntetéses modellek családjába tartozó — lineáris programozási feladatot oldunk meg, melyben a szóba jöhető magas- és mélyépítőipari technológiákkal, az építőipari gépesítéssel, továbbá az építőanyagok termelésének fejlesztésével és külkereskedelmével kapcsolatos kérdések vizsgálhatók.

A központi feladat oszlopszerkezetéhez igazodva további két matrixot állítunk elő. Az egyik az ún. nem korlátos feltételek matrixa: olyan építőanyagipari termékek vagy külső ágazatokból származó anyagok alkotják sorait, amelyekre nem lehet vagy nem is szükséges korlátot előre megállapítani. A másik matrix dezaggregáló szerepet tölt be. Ebben a központi feladatban összevontan kezelt erőforrások (pl. létszám, anyagok) további specifikálása történik, hogy lehetőség nyíljon a programmal összefüggő részletekben tervek kidolgozására is.

A számítástechnikai két egymást követő fázisban végezhető el. Az első fázis a központi feladat optimalizálása, melynek eredménye a

programvektor. A második fázisban — a programvektor elemeinek felhasználásával — a nem korlátos és a dezaggregáló matrix sorvektorainak skaláris szorzása történik, amelynek eredménye az erőforrásigények részletekbe menő ismerete.

A modellezh szükséges adatokat három forrásból merítjük:

- építőipari normatívákból, melyeket az utóbbi években dolgozott ki az Építésgazdasági és Szervezési Intézet;

- iparági fejlesztési tanulmányokból, melyek a hagyományos tervezéshez kapcsolódva készültek;

- prognózisokból, melyeknek kidolgozása részben megtörtént, részben folyamatban van.

A modell számszerűsítési munkálatai 1970-ben kezdődtek. Segítségével megvizsgáljuk a IV. ötéves terv záróévében az építőipar termelési és elosztási szerkezetét és az ezzel összefüggő ipari hátteret. A számszerűsítés első szakaszában az említett normatívák mintegy 200 ezer adatát dolgozzuk fel és gépi úton nyerjük a modellrendszer együttthatóit. Az alapadatokat tároló rendszer (adatbank) olyan feldolgozási programja áll rendelkezésünkre, amely automatikusan előállítja a tervezési modellrendszer aggregáltsági fokának megfelelő adatokat.

Vállalatunk nagy figyelmet szentel az építőipari ágazati kapcsolatok mérlegének kidolgozására is. A folyó munkák arra irányulnak, hogy az építőipar népgazdasági összefüggéseit az építő- és építőanyagipari szektorok részletes kibontásával vizsgálhassuk.

Fontos feladat a telepítési problémák matematikai módszereinek feltárása is. Az egytermékes feladatok megoldására a vállalat egzakt módszereket, közelítő eljárásokat dolgozott ki. A többtermékes feladatok megoldására néhány algoritmus is rendelkezésre áll. A létesíthető kapacitásokat egyes eljárások folytonosan, mások diszkrét módon kezelik.

A modellekben általában három költség-típus szerepel:

- egyszeri beruházási költségek, amelyeknek egy évre vetített részével dolgozik a modell;

- termelési költségek, amelyek a telephelytől és a kérdéses kapacitás nagyságtól függő fix és lineárisan változó költségeket tartalmaznak;

- szállítási költségek, amelyek a nyersanyagoknak és a késztermékeknek a termelőhelytől a fogyasztóhelyre történő szállításainak költségeit ölelik fel.

Az alábbiakban — a teljesebb áttekintés kedvéért — címszavakban utalunk a vállalatnál kidolgozott telepítési model-

lekre: Egyetlen centrum elhelyezésének módszerei; Adott számú centrum elhelyezése csak a szállítási teljesítmény figyelembevételével; Telepítés optimális diszkrét kapacitásokkal és állandó költségekkel; A dinamikus programozás módszerein alapuló egzakt telepítési optimalizálás csak a telepítési költségek figyelembevételével; Egzakt telepítési optimalizálási algoritmus a telepítési, termelési és szállítási költségek minimalizálására a Dantzig—Wolfe féle felbontási elv és a dinamikus programozás kombinált alkalmazásával; Kétfokozatú szállítási feladat megoldása szállítási alprogramra alapozott Dantzig—Wolfe féle felbontási algoritlussal; Egzakt algoritmus többtermékes telepítési és szállítási feladatok megoldására, az azonos időszakra vetített összes beruházási, üzemeltetési és szállítási költség minimalizálásával; Szimplex módszerrel alapuló közelítő eljárás többtermékes telepítési feladatok megoldására; Többtermékes telepítési problémák megoldása szállítási feladatokon alapuló közelítő eljárással.

Az építőipari vállalatok számára készült a DIVÁTERV (dinamikus vállalási tervszámítás) elnevezésű program. Ezzel a diszkrét programozási eljárással olyan vállalási tervek alakíthatók ki, amelyekben a kötelező munkák célszerű időrendi besorolása után fennmaradt kapacitásokat a legelőnyösebb kivitelezési munkák beütemezésével kötik le.

A beruházások irányítására kidolgozott ERALL (erőforrásallokációs eljárás) módszerrel olyan kivitelezési terv dolgozható ki, amely a kooperáló vállalatok számára biztosítja a beruházások optimális megvalósításának feltételeit. A hálótechnikán alapuló modell számítási eredményei kiterjednek:

- a tervezési és beruházási cél határidőire,

- a szállítási szerződések megkötésére,

- az építmények, üzemenrészek kezdési és befejezési határidőire és a teljesítéshez szükséges erőforrásszintek biztosítására, illetve változtatására,

- a szerelésre kész állapot határidőinek bekövetkezésére.

A modell számításba veszi az erőforrásokat, a tevékenység tartalmát és sebeségét, s azok összefüggéseit az erőforrásokkal, valamint a környezet korlátait. A teljesítmény időléptékben kidolgozott terv mind a beruházó, mind a kivitelező szervezetnek biztosítja az optimális megoldást. A módszer szinte minden szempontból kedvezőbb eredményt adott, mint a különböző külföldi kutatóhelyeken kidolgozott hasonló eljárások.

A hálótechnikán alapuló modellek esa-

ládjába tartozik az összvállalati optimumot kereső VOP (vállalati optimális program) modell. Figyelembe veszi a létesítmények kivitelezési szakaszainak műszaki-technológiai követelményeit (sorrendiség, párhuzamosság, előfeltételek, megszakítások és tilalmak, munkasebesség, stb. és a határidős kikötéseket (kezdés, befejezés). Számlol a vállalat erőforrásainak korlátaival, amelyeknél figyelembe veheti az egyes irányítási szintek intézkedési lehetőségeit, a lehetséges mozgáskörzeteket, a viszonylag változatlan erőforrásszinteket, valamint a kiegészítés-jellegű alvállalkozói ka-

pacitások lehetséges mértékeit. A modellben előírhatók az egyes kivitelezésekre vonatkozó prioritási követelmények is. A célfüggvény az erőforrások (élmunka, gép, üzem stb.) maximális kihasználását fejezi ki, s így — bár közvetett módon — a maximális nyereség elérését is biztosítja. A modell típushálóból és speciálhálóból épül fel. A hálók — az összefüggések figyelembevételével — összevarrhatók, és ezután egyetlen hálótt alkotnak. A feladat megoldására kidolgozott gépi program gyors alkalmazást tesz lehetővé.

*Filep György*

## INFORMÁCIÓ ELEKTRONIKA

1970. 2. szám

T a r t a l o m

DR. ORMAI LÁSZLÓ: Számító Kutató Központ Pozsonyban

GROSZMANN GUSZTÁV: A multiprogramozás néhány problémája, különös tekintettel az EMG 830 számítógépre

DR. POPPER GYÖRGY—DÉVÉNY ILONA: Nemlineáris egyenletrendszerek egy numerikus megoldásáról

VARGA FERENC: A Lipcsei Tavaszí Vásár

HEGYESI LAJOS: Távadatfeldolgozó rendszerek a Posta hírközlő hálózatain

DR. KÁDÁR IVÁN—SAMU JÓZSEF: Adatbank létesítése a külkereskedelemben

BÓTI JUDIT—HUNFALVY TIBOR—DR. VECSENYÉS LAJOS: Dinamikus sorrend-programozás az építőiparban

GOMBOS FERENC: Egzakt módszerek alkalmazása a homlokfogaskerekerek evolvensmetriai kérdéseinek megoldására

BAKOS LÁSZLÓNÉ: A Manage programcsomag alkalmazása a Ganz-MÁVAG bérügyviteli feldolgozásában

DR. RÉVÉSZ GYÖRGY: A GPSS általános célú szimulációs rendszer az IBM 360 gépcsaláddhoz

TÓTH FERENC: Területi statisztikai adatfeldolgozó bázisok fejlesztése kiscomputerekkel

Az „Azur 1” és földi üzemeltető rendszere

GYARMATI PÉTER: A KSH 1904-es gépén végzett mágnesszalag állagvizsgálat tapasztalatairól

PONGRÁCZ TIBOR: Gazdaságmatematikai módszerek alkalmazása a külkereskedelemben

FILEP GYÖRGY: Az építőipari ágazat közép-távú tervezésének lineáris programozási modellrendszere. I. rész

Központi Programnyilvántartás

## Az Európai Gazdasági Bizottság szakértői értekezlete az összehasonlítható input-output táblák felhasználásáról

1970 áprilisában az ENSZ Európai Gazdasági Bizottságának Titkársága nemzetközi szakértői értekezletet tartott Genfben az EGB országok gazdasági struktúrájának összehasonlításáról az input-output (AKM) táblázatok alapján.

A konferencia előzményeihez tartozik, hogy 1969-ben az EGB Gazdasági Tanácsadói Testületének javaslata alapján az EGB Titkárságának irányításával megkezdődött az ún. MATHECO program végrehajtása. A program célja a matematikai módszerek és a számítástechnika közgazdasági alkalmazásának vizsgálata és elterjesztése. A módszereket illetően a Titkárság — támaszkodva az input-output technika kutatásának és felhasználásának eredményeire — részletes programot dolgozott ki mind a kutatások, mind a gyakorlati alkalmazások területére. Különös súlyt helyezett a tagországok közötti összehasonlítható elemzések lehetőségeinek feltárására. Az input-output technika felhasználását lehetővé tette az a tény is, hogy 18 ország a Titkárság ösztönzésére lényegében azonos metodika alapján nemzeti valutában input-output táblákat dolgozott ki az 1960-as évek elejére. Közülük hat ország<sup>1</sup> érdekelt intézetei a Titkársággal karöltve további munkával azonos szektorokat alakítottak ki, véglegesítették a táblázatokat, majd az ENSZ New York-i Számítástechnikai Központja e táblázatok alapján elvégezte a szokásos input-output számításokat.

A konferencián két fő kérdés volt napirenden:

- a kutatás további programjának meghatározása,
- az árkérdés tisztázása, pontosabban a nemzeti valuták összehasonlíthatóságának elméleti és gyakorlati kérdései.

Az input-output táblázatok összehasonlításánál azzal az egyébként ugyancsak bizonyításra szoruló feltevéssel szoktak élni, hogy az azonos fejlettségi, iparosodási szinten levő országokban az egyes iparágak technológiája is hasonló. Így a ráfordítási táblázatok tanulmányozása hasznos lehet a gazdaságukat fejleszteni kívánó országok számára. Érthető tehát, ha a kutatási program iránt nagy az érdeklődés mind az EGB-ben, mind pedig az ENSZ többi

gazdaságfejlesztéssel foglalkozó intézményeiben.

Magának az alapfeltevésnek a vizsgálata is érdekes, hiszen még nincs bebizonyítva, hogy a hasonló fejlődési szintet elért országokban az alkalmazott technológiák közötti „tiszta technikai és műszaki” eltérések elhanyagolhatók. Nem kevésbé izgalmas a ráfordítási együtthatók közötti eltérések okainak vizsgálata. Ilyen ok lehet az is, hogy országonként eltérőek lehetnek a hozzáadott értékek, amelyek nagyban befolyásolhatják a ráfordítási együtthatók nagyságát azonos technológia mellett is.

Az alapkérdések tisztázásával egyidejűleg — az árkérdésen kívül — két fő kutatási irányvonalban állapodott meg a konferencia. Ezek a következők:

1. *Az ipari struktúra összehasonlító elemzése.* E témán belül vizsgálják:

- az ipari struktúrában levő hasonlóságokat és különbözőségeket;

- az ipari struktúrát befolyásoló tényezőket (a gazdaság méretét, termelési nagyságát, nyitott vagy zárt jellegét, a végső felhasználás struktúráját stb.);

- a különböző tényezők befolyását, hogy fényt derítsenek az input struktúrát irányító törvényekre és tendenciákra.

2. *A kereskedelem, elsősorban a külkereskedelem és a gazdasági struktúra kölcsönös kapcsolatának vizsgálata.* E téma magában foglalja:

- az import rendeltetésének elemzését szektoronként, esetleg cikkesoportonként;

- az import méretét és rendeltetését befolyásoló tényezők meghatározását;

- ha lehetséges, a tényezők befolyásának mérését, hogy megállapíthatók legyenek a gazdaságok kereskedelmi struktúráját irányító tendenciák és törvények.

A konferencián részt vevő szakértők — köztük a magyar delegáció is — egyhangúlag javasolták, hogy az összehasonlító elemzéseket lehetőség szerint a legváltozatosabb módszerek alapján végezzék el. Több javaslat hangzott el a szektorok számának növelésére. Ha ez nem is valósítható meg mind a hat országra együttesen, néhány országban elérhetőnek látszik. Ezek az országok a kutatás későbbi szakaszában külön alcsoportot képeznének.

<sup>1</sup> Ausztria, Csehszlovákia, Franciaország, Lengyelország, Magyarország, Norvégia.

Az árkérdés — jelentőségénél és a probléma bonyolultságánál fogva — nagy figyelmet és élénk vitát váltott ki a konferencián. A vitára benyújtott tanulmányok egyike — Dr. Cságoty Ferenc: „Árproblémák a nemzetközi input-output összehasonlításban” — úgy foglal állást, hogy az összehasonlító elemzés értékes eredményeket hozhat akkor is, ha eltérő nemzeti valuták alapján végezzük. Ugyanis az adott értékviszonyok adott használati érték viszonyokkal függenek össze, s egyikük sem változtatható meg anélkül, hogy az adott mérleg tükrözze összefüggések realitását ne veszélyeztetnék. Bár a kérdés elméleti vitája korántsem zárult le, gyakorlatilag elfogadták azt az elvet, hogy az elemző munka első szakaszában a nemzeti valuták alapján számított mutatókat hasonlítják össze.

A konferencia nagy érdeklődéssel fogadta az EGB Titkársága és a Bratislavai Számítástechnikai Kutató Központ közös tanulmányát: „Kísérletek az input-output összehasonlításokban szereplő ártényező értékelésének formalizált megközelítésére.”<sup>2</sup> A tanulmányban is felteszik, hogy azonos fejlettségi szintet elért országok technológiája azonos, így a ráfordítási mutatók eltérései az eltérő árakkal magyarázhatók. Ennek alapján olyan árvektorokat képezhetünk, amelyek minimálisra csökkentik a ráfordítási együtttható mátrixok közötti eltéréseket. A vita során bebizonyosodott, hogy a módszer konkrét árszámításokra való felhasználása előtt további kísérletre van szükség, de strukturális vizsgálatokra minden további nélkül felhasználható. Ezért az eljárást a kutatási konferencia felvette kutatási programjába, és javasolta, hogy az érdekelt országok használják fel a belső gazdasági struktúra vizsgálatára.

Az árkérdés tanulmányozásánál a konferencia javasolta a közvetett adózásban és a profitrátában, valamint az országok közötti kereskedelmi és szállítási határvonalakban fennálló különbségek torzító

hatásainak vizsgálatát. Ennek értelmében az input-output táblákat átdolgoznák a „szabványos” adó és profitráták alapján, valamint a kereskedelmi és szállítási határvonalak beépítésével. A feladat nem az eltérő árkülönbségek indokolása, hanem ezek hatásának értékelése lenne. A konferencia reálisan megállapította, hogy e téma részletes vizsgálatát a norvég tapasztalatok feldolgozása után később kell majd folytatni.

A konferencia felhasználásra elfogadott két módszertani javaslatot, amelyeket dr. AUGUSTINOVICS MÁRIA vezetésével dolgoztak ki:

— DIAD-módszer, amely egy matrix ortogonális faktorizációján alapul, s így alkalmas a matrixok belső struktúrájának elemzésére, input-output táblák és idősorok összehasonlítására és értékelésére. A módszer SZÉKELY BÉLA közreműködésével készült.

— Standard Open Static (S.O.S.) elnevezésű teljes input-output elemző program, amely lehetővé teszi az árrendszerekben levő különbségek megkerülését is. A módszert FÖLSZ ATTILA közreműködésével dolgozták ki.

Az összehasonlító elemzés alapjául szolgáló input-output táblákat az egyes országok statisztikai hivatalai által kidolgozott 1960. évi ténymérlegek alapján az EGB Titkársága állította össze az illető ország szakértőinek bevonásával. Jelenleg az 1965. évi tálbázatok összeállítása folyik, és az 1968—70. évi táblák kidolgozását is tervezik. Az elemző munkában elsősorban az érintett országok tervezési, statisztikai és közgazdasági intézményei vesznek részt. A számítástechnikai feladatokat nagyrészt a Bratislavai Számítástechnikai Kutató Központ végzi.

A tervek szerint az érdekelt intézmények az EGB Titkárságának irányításával közös beszámolót készítenek az 1971-re tervezett V. Nemzetközi Input-Output Konferenciára.

*Német Sándor*

<sup>2</sup> A módszer alapját, a probléma matematikai megoldását M. Hamala, a Bratislavai Számítástechnikai Kutató Központ munkatársa dolgozta ki.



## CONTENT

ÁLMOS KOVÁCS—JÁNOS STAHL: Decomposition method for the optimization of coal mining and distribution .....	97
ANDRÁS BRÓDY: Average lag in the economy .....	109
GERZSON KÉRI: Modified stepping-stone algorithm to solve the transportation problem .....	115

### CONCEPTS AND METHODS

LÁSZLÓ VITA: Economic utilization possibilities for the factor analysis .....	127
---	-----

### BOOK REVIEWS

JENŐ SZÉP: Decision Models I—II. ( <i>László Maróti</i> ) .....	153
JOSEF GRUBER: Econometric Models of the Cowles-Commission Type: Construction and Interpretation ( <i>László Halabuk</i> ) .....	154

### SCIENTIFIC LIFE

GYÖRGY FILEP: Research in Mathematical Economics within the Company for Computation and Management Mechanization in Construction .....	157
SÁNDOR NÉMETH: Expert's Conference of the UN Economic Commission for Europe on the Utilization of Comparable Input-Output Tables .....	160

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

Алмош Ковач—Янош Штал: Декомпозиционный метод решения модели оптимализации производства и распределения угля .....	97
Андраш Броди: Среднее запаздывание в экономике .....	109
Гержон Кери: Видоизмененный «stepping-stone» алгоритм для решения транспортной задачи .....	115

### ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

Ласло Вита: О возможностях экономического употребления анализа факторов .....	127
---	-----

### О КНИГАХ

Йене Сэп: Модели решения I—II ( <i>Ласло Мароти</i> ) .....	153
Йозеф Грубер: Экономические модели, типа Cowles-Commission их построение и описание ( <i>Ласло Халабук</i> ) .....	154

### НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Дёрдь Филеп: Эконометрические исследования Института Расчетной Техники и Механизации Учета в строительстве .....	157
Шандор Немет: Экспертная анкета Европейской Экономической Комиссии об использовании сопоставимых межотраслевых балансов .....	160

Ára: 12,— Ft

Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

## TARTALOM

KOVÁCS ÁLMOS—STAHL JÁNOS: Dekompozíciós eljárás a szén termelésének és elosztásának optimalizálására .....	97
BRÓDY ANDRÁS: Átlagos késleltetés a gazdaságban .....	109
KÉRI GERZSON: Módosított „stepping-stone” algoritmus a szállítási probléma megoldására .....	115

## FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

VITA LÁSZLÓ: A faktoranalízis közgazdasági alkalmazásának lehetőségeiről ....	127
---	-----

## KÖNYVEKRŐL

SZÉP JENŐ: Döntési modellek I—II. ( <i>Maróti László</i> ) .....	153
JOSEF GRUBER: Ökonometrische Modelle des Cowles-Commission-Typs: Bau und Interpretation ( <i>Halabuk László</i> ) .....	154

## TUDOMÁNYOS ÉLET

FILEP GYÖRGY: Az Építőipari Számítástechnikai és Ügyvitelgépesítési Vállalat matematikai közgazdasági kutatásai .....	157
NÉMETH SÁNDOR: Az Európai Gazdasági Bizottság szakértői értekezlete az összehasonlítható input-output táblák felhasználásáról .....	160



AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST