SZIGMA

Matematikai Közgazdasági folyóirat

*

E SZÁM SZERZŐI:

J. ABADIE, egyetemi tanár, Párizsi Egyetem Statisztikai Intézete, **AUGUSTINOVICS MÁRIA**, kandidátus, az Országos Tervhivatal osztályvezetője, **CHIKÁN ATTILA**, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egytem tanársegéde, **JAKABFFY IMRE**, Datorg, **KÉRI ELEMÉRNÉ**, a NIM Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézetének tudományos munkatársa, **KISS FERENC**, a NIM Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézetének tudományos műszaki — gazdasági tanácsadója, **KONDOR GYÖRGY**, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos főmunkatársa, **SIVÁK JÓZSEF**, az Országos Tervhivatal előadója, **SZABÓ ALADÁR**, a NIM Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézetének tudományos osztályvezető helyettese.

A Kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója

Szerkesztőség: Budapest, V., Münnich Ferenc u. 7. — Telefon: 127—294

Kiadóhivatal: Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

A kiadvány előfizethető vagy példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓnál, Budapest, V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010.

Pénzforgalmi jelzőszám: 215—11488, az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLTban, Budapest, V., Váci u. 22. Telefon: 185—612. A POSTA KÖZPONTI HÍRLAP IRODA 1. sz. HÍRLAPBOLTJÁBAN, BUDAPEST, V., József nádor tér 1. és *bármely postahivatalban*, csekkszámlaszám: egyéni: 61 257, közületi: 61 066. MNB egyszámlaszám: 8.

Ára: 12,— Ft. Előfizetés egy évre: 40,— Ft.

RÉNYI ALFRÉD
1921–1970

Rényi Alfrédra a nemzetközi tudományos élet mint a matematika legkülönbözőbb ágainak kiváló művelőjére emlékezik. Munkásságának nemzetközi hatását sok más mellett ma már a különböző külföldi társulatok ülésein elhangzott megemlékezésekből és a külföldi folyóiratok hasábjain megjelent méltatásokból is le tudjuk mérni.

A magyar tudományos élet és a magyar matematikai iskola tagjai Rényi Alfrédban nemcsak a kiváló matematikust vesztették el, hanem a nevelőt, a tudományos élet lelkes szervezőjét és a matematika alkalmazásának harcos képviselőjét is.

Már fiatalkorában is sokat foglalkozott a kezdő matematikusok nevelésével és a matematika népszerűsítésével, munkásságának ez az oldala az utóbbi években vált nemzetközileg is elismertté. Népszerűsítő könyveit, a Dialógusokat és a Leveleket számos nyelvre lefordították, és ezek a művei a magyaron kívül más nyelveken is a második, harmadik kiadásnál tartanak.

A magyar tudományos élet szervezésében 1949 óta (ekkor tért vissza Szovjetunióbeli aspirantúrájából) vesz részt. Évekig dolgozik a Magyar Tudományos Akadémia III. osztályának titkáraként, tagja a Tudományos Minősítő Bizottságnak és 20 évig igazgatója a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének. Talán nem volt az elmúlt 20 évben olyan, a matematikai életet érintő jelentősebb vita, amelyen ne vett volna részt és ne harcolt volna a matematika és a matematikusok érdekeiért.

A matematika alkalmazásaival kapcsolatban főfeladatának azt tekintette, hogy az alkalmazások számára az életnek egyre újabb területeit fedezze fel. Jelen volt a magyar biometria megszületésénél, aktív érdeklődéssel kísérte a pszichometriai és a matematikai nyelvészeti vizsgálatokat. Elsők között volt, akik Magyarországon valószínűségszámítási módszereket alkalmaztak a kémiai kutatásban. Örömmel látta, hogy gráfelméleti eredményei sikeresen alkalmazhatók a láncmolekulákkal kapcsolatos kutatásokban.

Azt is igen hamar felismerte, hogy a gazdasági élet vezetése akár országos, akár vállalati szinten elképzelhetetlen matematikai módszerek nélkül. Ennek bizonyítására először raktározási problémákkal foglalkozott; megmutatta, hogy az áru-

ellátás (árurendelés) matematikai módszerekkel irányítható. Ezen eredmények értékelésekor nem szabad elfeledkeznünk arról, hogy 1952-ben, amikor e kérdésekkel foglalkozott, a matematika a társadalomtudomány és a gazdasági irányítás területéről száműzve volt. „Igazi" matematikai-közgazdasági dolgozatot is jóval előbb publikált, mint bárki más Magyarországon. Első ilyen dolgozata 1956-ban jelent meg (Bródy Andrással közösen) az árrendezés matematikai problémáiról.

1970. február 1-én bekövetkezett halála eredményekben gazdag életet tört derékba. Félbenmaradt jegyzetei világosan mutatják, milyen sok új kérdéssel kívánt még foglalkozni mind az elméleti, mind az alkalmazott matematika területén. (R. P.)

Augustinovics Mária

Egy hosszú távú tervezési modellsorozat

Bevezető gondolatok

Hosszú távú tervezésre azért van szükség, mert sok mai gazdasági akciónk évtizedekre szóló, meg nem másítható következményekkel jár. E következményeket azonban éppen jövőbeli környezetünkben kell felmérnünk s ez a környezet az akkori társadalmi-gazdasági viszonyok összessége lesz. A hosszú távú terv tehát nem korlátozódhat a hosszú átfutású folyamatok, az úgynevezett „döntő" akciók részletesebben kidolgozott programjaira; ha csak nagy vonalakban is, de figyelembe kell vennie a gazdaság egész összefüggésrendszerének alakulását a maga teljességében. A hosszú távú tervnek *komplex, makroökonómiai* tervnek kell lennie.

Nem képzelhető el olyan matematikai-közgazdasági modell, amely a hosszú távú tervezés teljes kvantifikációs feladatának megoldására alkalmas: minden modell a gazdasági folyamatok meghatározott körét képes csak ábrázolni meghatározott absztrakciók mellett. Nem egy, hanem sok hosszú távú tervezési modellre van tehát szükség. Sok, össze nem hangolt modell, össze nem függő eredményeivel azonban inkább megzavarná, mint segítené a tervezőket. Összehangolt *hosszú távú tervezési modellek rendszerére* van szükség, amelyek részben kiegészítik, részben ellenőrzik egymás eredményeit.

Ezen a modell-rendszeren belül középponti, szintetizáló szerep jut a *központi* tervezőmunkát szolgáló, viszonylag aggregált *makroökonómiai* modellek családjának. Ezeknek hármas funkciót kell betölteniük. Először, legyenek önállóan is életképesek, alkalmasak arra, hogy a tervező központ a tervezés kezdeti szakaszában, a széles tervezőapparátus munkáját megelőzve, elvégezhesse saját kiinduló számításait, feltárhassa azokat a kritikus pontokat, amelyek vizsgálatára a tervezőmunkát orientálnia kell. Másodszor, ezek a modellek legyenek alkalmasak arra, hogy a tervezés későbbi szakaszában befogadják az egyes részterületeken folytatott tervmunka eredményeit, ellenőrizzék és foglalják szintézisbe azokat; ebben az értelemben töltsenek be szervező és módszertani koordináló szerepet. Harmadszor, ezek a modellek legyenek összekapcsolhatók az egyes fontos részterületek tervezőmunkáját szolgáló többi matematikati tervezési modellel, például egyes termelő ágazatok (energetika, vízgazdálkodás, közlekedés stb.) szektormodelljeivel; ebben az értelemben alkossák egy két- vagy többszintű tervezési modellrendszer központi magját.

Nem bizonyos, hogy e három funkció betöltésére ugyanazok a modellek a legalkalmasabbak. Sőt, valószínűleg más modelleket kíván az első, mint a harmadik funkció. Ezért beszélünk a központi, makroökonómiai modellek családjáról – ennek is népes, gyarapodó családnak kell lennie. Feltétlenül szükség van azonban e családon belül olyan modellekre, amelyek mindhárom funkcióban alkalmazhatók és alkalmazásra is kerülnek. Csak így biztosítható ugyanis a folytonosság, a tervező munka különböző szakaszaiban keletkező, különböző forrásokból származó eredmények összehasonlíthatósága.

Azok a modellek, amelyek ennek a követelménynek eleget tesznek, bizonyosan sokszektoros modellek — egy-két szektoros növekedési modellek nem tölthetik b› a második és harmadik funkciót. Ugyanakkor nem igényelhetnek részletes információt egy-egy szektor belső, sajátos döntési problémáiról — ilyen információ nem áll rendelkezésre akkor, amikor az első funkcióban kell számításokat végezni. Olyan modellekről van tehát szó, amelyek meghatározott részletezésben ábrázolják a népgazdaság egészét, amelyek népgazdasági szintű, stratégiai variánsok kidolgozására alkalmasak úgy, hogy a gazdasági struktúra változásának fő tendenciáit képesek nyomon követni.

Az alábbiakban egy ilyen modellsorozatot próbálok felvázolni. A hosszú távú tervezés számára Magyarországon kidolgozott többi modelleket, amelyekkel ez a sorozat sok rokon vonást mutat, s amelyek — a gyakorlati tervezőmunka szükségletei mellett — inspirálták kidolgozását, az Irodalomjegyzékben sorolom fel. Modellsorozatom mindegyiktől eltér valamiben — később, ha az első számítások már lezajlottak, szeretném majd a magam számára is egészen pontosan tisztázni, hogy melyiktől miben, s hogy az eltérések közül melyek fejeznek ki lényegbevágó, szemléleti különbséget, melyek csupán a gyakorlati tervezési szükségletek más megközelítését.

Jelölések

$\otimes$ logikai szorzat: $A \otimes B = \{a_{ij} b_{ij}\}$
$\langle\ \rangle$ diagonál matrix
$\langle 1 \rangle$ egységmatrix
0 zérusmatrix
$1^* = [1, 1, \ldots, 1]$ összegező sorvektor
$1 = [1, 1, \ldots, 1]^*$ összegező oszlopvektor

1. A figyelembe veendő összefüggések

1.1. *Három rendszer kapcsolatai*

A gazdaság a természettel, a társadalommal és a világ többi részével kölcsönhatásban fejlődik. Modellünknek a gazdaság belső összefüggésrendszerén kívül ezeket a külső kapcsolatokat is ábrázolnia kell. Ezek közül a természettel való kölcsönös kapcsolatot modellünk nem tartalmazza, ez fogyatékossága.

A gazdaságot alapjában véve mint az anyagi javak és szolgáltatások bővített újratermelésének rendszerét ábrázoljuk. Ebből a rendszerből outputok áramlanak a társadalom és a világ többi része felé: a fogyasztásra kerülő javak, illetve az export. A visszaáramló megfelelő inputok: az eleven munkateljesítmény, illetve az import.

Modellünkben a társadalom és a világ többi része „fekete doboz": belső transzformációjukat nem ismerjük, csak következményeit észleljük. Nem ábrázoljuk azt a sokrétű fiziológiai és társadalmi folyamatot, amelynek inputja az anyagi javak fogyasztása és outputja a munkateljesítmény; de figyelembe vesszük, hogy nemcsak munka szükséges a fogyasztáshoz, hanem fogyasztás is szükséges a munkához. Nem ábrázoljuk, nem is ismerjük más országok újratermelési folyamatát, amely inputként szívja fel exportunkat és outputként bocsátja ki importunkat; de figyelembe vesszük, hogy nem minden import fizethető ki minden exporttal, hogy a világ bizonyos importokért adott összetételű exportot kíván. (Külkereskedelmi szakértők gyakran és joggal kifogásolják ennek a visszahatásnak a mellőzését; más kérdés, hogy eléggé ismerik-e törvényszerűségeit, fel tudják-e mérni konkrét, számszerű formáját.)

Éppen mert a társadalom és a világgazdaság belső transzformációja ismeretlen, ezek a rendszerek tulajdonképpen nem szerepelnek a modellben, csak a gazdasági rendszer velük való kétoldalú kapcsolatai. Viszont az a tény, hogy figyelembe vesszük a befelé irányuló áramlás (a munka, illetve az import) hatását a kifelé irányuló áramlás (a fogyasztás, illetve az export) volumenére és összetételére, a modellt logikailag mégis többé-kevésbé zárttá teszi.

A modellben tehát a következő tevékenységek szerepelnek:

$$x(t) = [x_1(t), \ldots, x_{j(x)}(t), \ldots, x_{n(x)}(t)]^*$$

$$i(t) = [i_1(t), \ldots, i_{j(i)}(t), \ldots, i_{n(i)}(t)]^*$$

$$e(t) = [e_1(t), \ldots, e_{j(e)}(t), \ldots, e_{n(e)}(t)]^*$$

$$l(t) = [l_1(t), \ldots, l_{j(l)}(t), \ldots, l_{n(l)}(t)]^*$$

$$f(t) = [f_1(t), \ldots, f_{j(f)}(t), \ldots, f_{n(f)}(t)]^*$$

$x_{j(x)}(t)$ = a $j(x)$-edik szektor termelése a t-edik évben

$i_{j(i)}(t)$ = a $j(i)$-edik fajta import a t-edik évben (például a $j(i)$-edik importtermék vagy például a $j(i)$-edik piacról származó összimport)

$e_{j(e)}(t)$ = a $j(e)$-edik fajta export a t-edik évben (például a $j(e)$-edik országba irányuló, vagy például a $j(e)$-edik valutáért értékesített export)

$l_{j(l)}(t)$ = a $j(l)$-edik fajta munkateljesítmény a t-edik évben (például a $j(l)$-edik szakmájú, vagy például a $j(l)$-edik beosztási kategóriába tartozó, vagy például a $j(l)$-edik képzettségi fokozatú munkaerő teljesítménye)

$f_{j(f)}(t)$ = a $j(f)$-edik fogyasztói csoport fogyasztása a t-edik évben (például a $j(f)$-edik jövedelem-kategóriába tartozó családok, vagy például a $j(f)$-edik csoportba tartozó közületek fogyasztása)

E tevékenységek színvonalát a következő összefüggések határozzák meg:

$$x(t) = G_0x(t) + G_1x(t+1) + \ldots + G_Kx(t+K) - H\,i(t) + E\,e(t) + F\,f(t) \quad (1)$$

$$i(t) = \bar{G}_0x(t) + \bar{G}_1x(t+1) + \ldots + \bar{G}_Kx(t+K) + \bar{F}\,f(t) + \langle u \rangle\, i(t) \quad (2)$$

$$e(t) = W\,i(t) + \langle s \rangle\, e(t) \quad (3)$$

$$l(t) = L\,x(t) + \langle v \rangle\, l(t) \quad (4)$$

$$f(t) = D\,l(t) + \langle z \rangle\, f(t) \quad (5)$$

$G_k = \{G_k[m(x), j(x)]\}$ a $j(x)$-edik szektor $t + k$-adik évi termelésével arányos produktív felhasználás az $m(x)$-edik termékekből ($k = 0, \ldots, K$)

$\bar{G}_k = \{\bar{G}_k[m(i), j(x)]\}$ a $j(x)$-edik szektor $t + k$-adik évi termelésével arányos produktív felhasználás az $m(i)$-edik fajta importból ($k = 0, \ldots, K$)

$E = \{E[m(x), j(e)]\}$ a $j(e)$-edik fajta export egységére jutó export az $m(x)$-edik termékekből

$F = \{F[m(x), j(f)]\}$ egységnyi összfogyasztásra jutó fogyasztás az $m(x)$-edik termékekből a $j(f)$-edik fogyasztói csoportban

$\bar{F} = \{\bar{F}[m(i), j(f)]\}$ egységnyi összfogyasztásra jutó fogyasztás az $m(i)$-edik fajta importból a $j(f)$-edik fogyasztói csoportban

$H = \{H[m(x), j(i)]\}$ a $j(i)$-edik fajta importnak olyan termékekből álló hányada, amelyeket a hazai termelésben az $m(x)$-edik szektor állít (vagy állítana) elő

$\langle u \rangle = \{U_{j(i)}\}$ a $j(i)$-edik fajta importnak az a hányada, amely nem a hazai termeléssel, illetve fogyasztással arányos

$W = \{W[m(e), j(i)]\}$ a $j(i)$-edik import egységének kifizetéséhez szükséges $m(e)$-dik export

$\langle s \rangle = \{s_{j(e)}\}$ a $j(e)$-edik exportnak az a hányada, amely nem szolgál import kifizetésére (hanem például más természetű fizetésekre vagy a devizakészletek növelésére)

$L = \{L[m(l), j(x)]\}$ a $j(x)$-edik szektor egységnyi termelésére jutó felhasználás az $m(l)$-edik fajta munka teljesítményből

$\langle v \rangle = \{v_{j(l)}\}$ a $j(l)$-edik munka teljesítménynek az a hányada, amely nem a termeléssel arányos

$D = \{D[m(f), j(l)]\}$ a $j(l)$-edik munka teljesítmény egységére jutó fogyasztási rendeltetésű jövedelem az $m(f)$-edik fogyasztói csoportban (például a $j(l)$-edik kategóriájú munkásoknak az $m(f)$-edik fajta családban élő hányada, szorozva e munkások átlagos nettó keresetével)

$\langle z \rangle = \{z_{j(f)}\}$ a $j(f)$-edik fogyasztói csoport fogyasztásának származékos jövedelmekből finanszírozott hányada

Az egyes összefüggések tartalma a következő:

(1) A termelés egyenlő: az újratermelés termékszükséglete (ezt az 1.2. pontban részletesen tárgyaljuk) mínusz az import plusz az export plusz a fogyasztás.

(2) Az import egyenlő: az újratermelés (lásd az 1.2. pontban) és a fogyasztás importfelhasználása plusz egy ezektől független hányad. Az importnak ez a kettős szerepeltetése lehetővé teszi, hogy az importstruktúrát két oldalról ábrázoljuk: az (1) összefüggésben termékek szerint, a (2) összefüggésben felhasználók szerint.

(3) Az export egyenlő: az import ellenértéke plusz egy, egyéb fizetésekre és a devizakészletek növelésére szolgáló hányad. A W matrix reprezentálja

a világ többi részében zajló transzformáció hatását, azt, hogy a világ bizonyos importokért meghatározott exportokat kíván; az $\langle s \rangle$ pedig azt, hogy a külkereskedelmen kívül más, többek között hitel-kapcsolatok is fűznek a világhoz.

(4) A munkateljesítmény (főben vagy órában kifejezve) egyenlő: az újratermelés munkafelhasználása plusz egy ettől független hányad.

(5) A fogyasztás egyenlő: a munkateljesítménnyel arányos fogyasztás plusz a fogyasztásnak a származékos jövedelmekből (pl. nyugdíj, családi pótlék stb.) finanszírozott hányada. A D matrix reprezentálja a társadalmon belüli transzformáció következményeit, például a demográfiai tényezőket, amelyek alapvetően meghatározzák az egyes család-típusok fogyasztási szerkezetét. Itt ábrázolódik az átlagkeresetek differenciáltsági fokának hatása is. Végül a $\langle z \rangle$ matrix, ha nem is írja le, de végső eredményében képviseli a jövedelmek újraelosztásának folyamatát.

Az (5) összefüggésben a munkával arányos fogyasztást a munkateljesítményhez szükséges ráfordításnak, az élő munka kibocsátás inputjának tekintjük. Ez csak részben helyes. A valóságban a fogyasztás egy része, nevezetesen az oktatási, szakképzési és részben az egészségügyi szolgáltatások „elfogyasztása" (sőt szélesebben értelmezve a gyermekek és tanulók egész termékfogyasztása) nem a tárgyévi, hanem a jövőbeni munkateljesítmény inputja, azaz nem is fogyasztás a szó szoros értelmében, hanem beruházás. Ez a tényező kívül marad az itt definiált összefüggésrendszeren; csupán a t-edik évre vonatkozó végeredmény jut kifejezésre az F és $\bar{F}$ matrixok szerkezetében, amelyek természetesen tartalmazzák ezt a — tulajdonképpeni beruházási természetű — fogyasztást is.

1.2. *A gazdaságon belüli transzformáció*

Az (1) összefüggés szerint a gazdaság belső termékfelhasználása egy adott évben $K + 1$ egymást követő év termelési színvonalától függ. Ez a felhasználás a folyó anyagráfordításból, a beruházásból és a készletek növekedéséből tevődik össze.

$$G_0x(t) + \ldots + G_Kx(t+K) = a(t) + b(t) + c(t) \tag{6}$$

Vegyük sorra ezeket a tételeket.

$$a(t) = Ax(t) \tag{7}$$

$A = \{A[m(x), j(x)]\}$ a $j(x)$-edik szektor egységnyi termelésére jutó folyó ráfordítás az $m(x)$-edik termékekből

Figyelembe vesszük, hogy a beruházások kivitelezése maximálisan K évig tart:

$$b(t) = \{R_1 \otimes U(t) + R_2 \otimes U(t+1) + \ldots + R_K \otimes U(t+K-1)\}1 \tag{8}$$

$U = \{U[m(x), j(x)](t)\}$ a $j(x)$-edik szektorban a t-edik évben üzembehelyezendő, $m(x)$-edik szektor által kibocsátott állótőke javak értéke

$R_k = \{R_k[m(x), j(x)]\}$, $k = 1, \ldots, K$ a $j(x)$-edik szektorban a $t + k - 1$-edik évben üzembehelyezendő, $m(x)$-edik szektorból származó állótőke javak értékének az a hányada, amelyet a t-edik évben kell beruházni

Tehát a beruházás egyenlő: a tárgyévi üzembehelyezésre teljesítendő utolsó hányad plusz a következő évi üzembehelyezésre teljesítendő utolsó előtti hányad, és így tovább, végül a $K-1$ évvel későbbi üzembehelyezés első hányada.

Az üzembehelyezést viszont a következőképpen határozzuk meg:

$$U(t) = B\langle x(t+1) - x(t)\rangle + S(t) \tag{9}$$

$B = \{B[m(x), j(x)]\}$ a $j(x)$-edik szektor egységnyi termelésére jutó állóeszköz állomány az $m(x)$-edik szektor által kibocsátott állótőkejavakból

$S(t) = \{S[m(x), j(x)](t)\}$ a $j(x)$-edik szektorban a t-edik évben kiselejtezett, $m(x)$-edik szektorból származó állótőke javak értéke

Tehát üzembe kell helyezni a következő évi termelésnövekedéshez szükséges állóeszközöket plusz pótolni kell a meglevő állományból kiselejtezésre kerülő állóeszközöket. Ez utóbbit a tárgyévi állóeszköz állomány százalékában határozzuk meg:

$$S(t) = P \otimes B\langle x(t)\rangle \tag{10}$$

$P = \{P[m(x), j(x)]\}$ a $j(x)$-edik szektorban az $m(x)$-edik szektorból származó állóeszközállomány selejtezési rátája

Helyettesítsük be (9)-et és (10)-et (8)-ba:

$$\begin{aligned} b(t) = {} & R_1 \otimes \{B\langle x(t+1)\rangle - (B - P \otimes B)\langle x(t)\rangle\, 1 + \\ & + R_2 \otimes \{B\langle x(t+2)\rangle - (B - P \otimes B)\langle x(t+1)\rangle\}\, 1 + \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & + R_K \otimes \{B\langle x(t+K)\rangle - (B - P \otimes B)\langle x(t+K-1)\rangle\}\, 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Rendezzük át $x(t)$ szerint:

$$\begin{aligned} b(t) = & - \{R_1 \otimes (B - P \otimes B)\}\, x(t) + \\ & + \{R_1 \otimes B - R_2 \otimes (B - P \otimes B)\}\, x(t+1) + \\ & + \{R_2 \otimes B - R_3 \otimes (B - P \otimes B)\}\, x(t+2) + \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & + \{R_{K-1} \otimes B - R_K \otimes (B - P \otimes B)\}\, x(t+K-1) + \\ & + \{R_K \otimes B\}\, x(t+K) \end{aligned} \tag{12}$$

Ezzel kifejeztük a t-edik évi beruházást a t-edik évi és a következő K évi termelés függvényében.

Végül a készletváltozás szintén a termelés növekedésétől függ:

$$c(t) = C\{x(t+1) - x(t)\} \tag{13}$$

$C = \{C[m(x), j(x)]\}$ a $j(x)$-edik szektor egységnyi termelésére jutó forgóeszközállomány az $m(x)$-edik szektor termékeiből

Így most már pontosan definiálhatjuk az (1) összefüggésben szereplő G_k matrixokat, amelyek a gazdasági rendszeren belüli transzformációt jellemzik:

$$\begin{aligned}
G_0 &= A - R_1 \otimes (B - P \otimes B) - C \\
G_1 &= R_1 \otimes B - R_2 \otimes (B - P \otimes B) + C \\
G_2 &= R_2 \otimes B - R_3 \otimes (B - P \otimes B) \\
&\;\;\vdots \\
G_{K-1} &= R_{K-1} \otimes B - R_K \otimes (B - P \otimes B) \\
G_K &= R_K \otimes B
\end{aligned} \tag{14}$$

Teljesen azonos módon kellene levezetni a (2) összefüggésben szereplő $\bar{G}_k$ matrixokat, a megfelelő $\bar{A}$, $\bar{R}_k$, $\bar{U}(t)$, $\bar{S}(t)$, $\bar{P}$, $\bar{B}$ és $\bar{C}$ matrixokból, ahol a felülvonás jelzi, hogy importfelhasználásra vonatkoznak. Éppen a teljes azonosság miatt ezt a levezetést mellőzzük.

1.3. *Összefoglalás*

Az itt leírt összefüggésrendszer legfontosabb sajátosságai, amelyek egy szokásos formában felírt input—output rendszertől megkülönböztetik, hogy explicit formában számol

1. egyes demográfiai tényezők, valamint a jövedelemeloszlás és újraelosztás hatásával a fogyasztási struktúrára,

2. az importstruktúra és az exportstruktúra közötti összefüggésekkel,

3. K éves beruházási átfutási idővel és az állóeszköz állomány megújítását szolgáló selejtezéssel.

Az összefüggésrendszer ilyen megfogalmazása azt a gyakorlati célt szolgálja, hogy a modell alkalmas legyen *életszínvonalpolitikai*, *műszaki fejlesztési* és a *nemzetközi gazdasági* kapcsolatokra vonatkozó stratégiai tervvariánsok számszerűsítésére, hogy képes legyen ábrázolni azokat a legfontosabb tényezőket, amelyek egy-egy ilyen variáns gazdaságpolitikai tartalmát meghatározzák.

Foglaljuk össze a rend kedvéért, hogy milyen valóságos összefüggések hiányoznak még ebből, a szokásosnál általánosabb, rendszerből is:

1. Hiányzik a gazdaság és a természeti környezet közötti kölcsönhatás.

2. Mivel a társadalom és a világ többi része ,,fekete doboz'', hiányzik e két rendszerrel való kölcsönhatás dinamikus, időbeli meghatározottsága. Csak a tárgyévi fogyasztás és munka, export és import köti össze a három rendszert; holott a valóságban e kapcsolatok adott évi nagysága éppúgy nem független az előző évek és a következő évek kapcsolataitól, mint ahogy a termelés nem független az előző és a következő évek termelésétől. Éspedig ez az időbeli függés nemcsak a termelés oldaláról határozódik meg (amit figyelembe veszünk), hanem a társadalom, illetve a világgazdaság oldaláról is (amit nem veszünk figyelembe).

3. Ha feltesszük, hogy az állóeszközök élettartama adott — akár a fizikai, akár az erkölcsi kopás által meghatározott —, akkor a valóságban az állóeszköz állomány megújítása, a selejtezés, nem az állomány nagyságától függ, hanem életkorától, azaz múltbeli felnövekedésének ütemétől és egyenletes vagy ciklikus voltától.

Mindezek a tényezők nem maradnak feltétlenül figyelmen kívül a modellel végzett tervszámításoknál, de „kívülről”, a paraméterek meghatározásával kerülhetnek csak bele — implicit módon — a számításba.

Egyelőre azonban még csak egy összefüggésrendszert írtunk fel, nem modellt. Ez az összefüggésrendszer tulajdonképpen egyszerű azonosságokat tartalmaz, amelyeknek a népgazdaság tetszőleges t-edik évi tényleges állapota definíció szerint eleget tesz. A statisztikai elszámolásnál legfeljebb azzal a ténnyel kell szembenézni, hogy a B és C tőkeigényességi együttható-matrixok nem maradtak változatlanok a t-edik évet követő $K+1$ éven keresztül. Ha vállaltuk volna azt a kényelmetlenséget, hogy minden együttható-matrix mellé időindexet írjunk, akkor olyan rendszert írtunk volna fel, amelyet minden népgazdasági mérlegrendszer ábrázol — statisztikailag persze csak $K+1$ év elmúltával fejezhető be az elszámolás.

A jövőre vonatkozó terveinknek is ki kell elégíteniük ezeket az összefüggéseket. Ez a rendszer azonban önmagában csupán tényeket ír le, tények rendszerezésére és elemzésére alkalmas. A tervezőnek valamilyen további *feltevésre* van szüksége, mert nem képes e rendszer minden egyes elemét külön-külön megtervezni úgy, hogy az összefüggések teljesüljenek — még egyféleképpen sem, nem hogy több változatban.

A feltevés első része mindig ugyanaz: a tevékenységek jövőbeli színvonala ismeretlen, a ráfordítási struktúrák — az együttható-matrixok — azonban valamilyen módon adottak, ismertek, s ezek meghatározzák a tevékenységek konzisztens színvonalát. A feltevés második, változó része a kritikus: hogyan, milyen módon adottak, honnan ismertek a ráfordítási struktúrák? Ettől függ a modell matematikai formája.

2. Feltevések a struktúráról: matematikai formák

A jobb áttekintés kedvéért ábrázoljuk így az (1)—(5) összefüggésekkel leírt rendszert:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ i(t) \\ e(t) \\ l(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_0 & -H & E & & F \\ \bar{G}_0 & \langle u \rangle & & & \bar{F} \\ & W & \langle s \rangle & & \\ L & & & \langle v \rangle & \\ & & & D & \langle z \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ i(t) \\ e(t) \\ l(t) \\ f(t) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{K} \begin{pmatrix} G_K \\ \bar{G}_k \\ \\ \\ - \end{pmatrix} \left(x(t+k) \right) \tag{15}$$

2.1. *Kötött ráfordítási struktúra — zárt modellek*

Feltesszük, hogy *a ráfordítási struktúrák adottak és a t-edik év valamilyen környezetében* (a rá következő K évben mindenesetre) *változatlanok.*

(Megjegyzés: nincs szükségünk arra a feltevésre, hogy ezek a struktúrák az időben *örökké* változatlanok. Megtervezhetjük például az 1980-as évek átlagosan jellemző ráfordítási struktúráját, amely határozottan különbözhet az 1960-as és 1970-es évek struktúrájától — a megoldásból levonható következtetések átlagosan, tendenciaszerűen jellemzők lesznek az 1980-as évek gazdaságára.)

E feltevés mellett keressük a (15) rendszer megoldását.

Mindenek előtt foglaljuk egybe azokat a tevékenységeket, amelyeknek csak t-edik évi értéke szerepel változóként:

$$y(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ e(t) \\ l(t) \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$Z_0^{(1,2)} = [-H, E, O, F] \text{ és } Z_0^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \bar{G}_0 \\ O \\ L \\ O \end{bmatrix}$$

$$Z_0^{(2,2)} = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \langle u \rangle & & & F \\ \hline W & \langle s \rangle & & \\ \hline & & \langle v \rangle & \\ \hline & & D & \langle z \rangle \end{array} \right\|$$

$$Z_k^{(2,1)} = \begin{bmatrix} \bar{G}_k \\ O \\ O \\ O \end{bmatrix} \quad k = 1, \ldots, K$$

Ezekkel a jelölésekkel a (15) rendszer így írható:

$$x(t) = G_0 x(t) + Z_0^{(1,2)} y(t) + G_1 x(t+1) + \ldots + G_K x(t+K) \tag{16}$$

$$y(t) = Z_0^{(2,1)} x(t) + Z_0^{(2,2)} y(t) + Z_1^{(2,1)} x(t+1) + \ldots + Z_K^{(2,1)} x(t+K) \tag{17}$$

(17)-ből $y(t)$-t kifejezhetjük — feltéve, hogy $(\langle I \rangle - Z_0^{(2,2)})^{-1}$ létezik:

$$y(t) = (\langle I \rangle - Z_0^{(2,2)})^{-1} \{ Z_0^{(2,1)} x(t) + Z_1^{(2,1)} x(t+1) + \ldots + Z_K^{(2,1)} x(t+K) \} \tag{18}$$

és behelyettesítve (16)-ba

$$\begin{aligned} x(t) = & \{ G_0 + Z_0^{(1,2)} (\langle I \rangle - Z_0^{(2,2)})^{-1} Z_0^{(2,1)} \} x(t) + \\ & + \{ G_1 + Z_0^{(1,2)} (\langle I \rangle - Z_0^{(2,2)})^{-1} Z_1^{(2,1)} \} x(t+1) + \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & + \{ G_K + Z_0^{(1,2)} (\langle I \rangle - Z_0^{(2,2)})^{-1} Z_K^{(2,1)} \} x(t+K) \end{aligned} \tag{19}$$

Az egyszerűség kedvéért vezessük be a

$$Q = \{ \langle I \rangle - G_0 - Z_0^{(1,2)} (\langle I \rangle - Z_0^{(2,2)})^{-1} Z_0^{(2,1)} \}^{-1} \text{ és} \tag{20}$$

és

$$M_k = \{ G_k + Z_0^{(1,2)} (\langle I \rangle - Z_0^{(2,2)})^{-1} Z_k^{(2,1)} \} \tag{21}$$

jelöléseket, akkor feltéve, hogy Q létezik, (19)-et így írhatjuk:

$$x(t) = QM_1x(t+1) + \ldots + QM_Kx(t+K) \tag{22}$$

Végeredményben tehát — mivel a gazdasági rendszer külső kapcsolatainak csak t-edik évi színvonala szerepel az összefüggésekben — a (15) feladat a (22) feladattá redukálódott.

2.1.1. K évi tevékenységi struktúra adott

Látható, hogy ha a $t+1, \ldots, t+K$-adik évi termelési színvonal adott, akkor a t-edik évi termelés — s ezzel a külső kapcsolatok — színvonala egyértelműen meghatározott. Természetesen ezzel már a $t-1$, $t-2, \ldots$ évi színvonalak is adódnak.

Az eljárás kényelmetlensége a tervező számára, hogy így az időben visszafelé kell haladnia; a tervidőszak végét kell megterveznie, mielőtt az elejét — a múlt és jelen adottságaiból kiindulva — megtervezte volna. Nem teljesen elképzelhetetlen ilyen tervezési szituáció sem. Mindenesetre használható azonban ez az összefüggés, mint elemzési eszköz: ha már van — más forrásból származó, más módon kialakított — elgondolás a tervidőszak végére, hasznos lehet a szóban forgó elgondolás szerint oda vezető utat összehasonlítani az onnan — a (22) szerint — visszafelé vezető úttal. Végül felhasználható ez az összefüggés egyszerű „statikus" elemzésre is. A (22) összefüggést interpretálhatjuk ugyanis egyszerű nyílt input—output rendszerként, amelynek „nettó output"-ja $\{M_1x(t+1) + \ldots + M_Kx(t+K)\}$ 1, és hasznosíthatjuk a nyílt statikus input—output modell már kialakult, gazdag elemzési fegyvertárát.

Kérdés, hogy haladhatunk-e előre is az úton? A (22) egyszerű átírása világossá teszi, hogy a

$$x(t) - QM_1x(t+1) - \ldots - QM_Kx(t+K) = O \tag{23}$$

K-ad rendű, homogén lineáris differencia egyenletrendszerrel van dolgunk. E rendszer megoldásának lehetősége és módja az együttható-matrixok konkrét tulajdonságain múlik. Ha QM_K reguláris, akkor inverzével balról megszorozva (23)-at, $x(t+K)$-ra egyértelmű megoldást kapunk, feltéve, hogy $x(t), \ldots$ $\ldots, x(t+K-1)$ adottak. Ebben az esetben tehát K múltbeli év termeléséből kiindulva, tetszőleges számú jövőbeli év tevékenységi színvonalát határozhatjuk meg.

Mindenesetre akár a (22), akár a (23) forma felhasználásáról van szó, a kötött és változatlan ráfordítási struktúra feltételezése mellett még valamit feltételezünk: azt, hogy K egymást követő év tevékenységi színvonala adott. A ráfordítási struktúra nem egyedül, hanem a kezdő vagy befejező tevékenységi struktúrával együtt határozza meg a gazdasági rendszer időbeli alakulását.

Ezt az utóbbi feltevést most elejtjük, s egy másikkal helyettesítjük.

2.1.2. Egyenletes növekedés

Ha a gazdaság minden szektora minden évben azonos ütemben növekedne, vagyis ha

$$x(t) = \lambda\, x(t-1) \tag{24}$$

lenne minden t-re, akkor a (22) összefüggés így alakulna:

$$x(t) = QM_1\,\lambda\, x(t) + QM_2\,\lambda^2 x(t) + \ldots + QM_K\,\lambda^K x(t) \tag{25}$$

vagyis

$$(I - QM_1\lambda - QM_2\lambda^2 - \ldots - QM_K\,\lambda^K)\, x(t) = O \tag{26}$$

Kérdés, hogy melyik a lehető legnagyobb növekedési ütem, amely ezt a feltételt teljesíti és milyen a hozzátartozó termelési struktúra?

(25)-öt az alábbi alakban is írhatjuk:

$$\begin{bmatrix} QM_1, QM_2, \ldots, & QM_K \\ \langle I \rangle, \quad O, \quad \ldots, & O \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ O, \quad O, \quad \ldots, \langle I \rangle, & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ x(t+2) \\ \\ \\ \\ x(t+K) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t+1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(t+K-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} x(t+1) \\ x(t+2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(t+K) \end{bmatrix} \tag{27}$$

s ebből látható, hogy az egyenletes növekedés legnagyobb λ^* rátája a (26)-ban szereplő $K \cdot n(x)$ méretű matrix legkisebb abszolút értékű pozitív sajátértékének reciproka. Ha ilyen van és számítástechnikailag lehetséges meghatározni, akkor megtaláltuk az adott ráfordítási struktúra mellett lehetséges legnagyobb egyenletes bővülési ütemet. A hozzá tartozó sajátvektor pedig megadja az egyenletes bővülés állandó fenntartására képes termelési struktúrát.

Az egyenletes növekedés feltételezése tehát mintegy „időtleníti" a problémát, irrelevánssá teszi azt a kérdést, hogy az időben előre vagy hátra haladunk-e. Ebben az esetben is könnyebb azonban a helyzet számítástechnikailag, ha QM_K reguláris, mert akkor a

$$\Delta = (QM_K)^{-1} \tag{28}$$

jelöléssel (27) helyett az alábbi formát vizsgálhatjuk:

$$\begin{bmatrix} \Delta QM_{K-1}, \Delta QM_{K-2}, \ldots, & \Delta \\ \langle I \rangle \;, \quad O \quad , \ldots, & O \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ O \;, \quad O \quad , \ldots \langle I \rangle, & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t+K-1) \\ x(t+K-2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(t) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x(t+K) \\ x(t+K-1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(t+1) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x(t+K-1) \\ x(t+K-2) \\ \\ \\ \\ x(t) \end{bmatrix} \tag{29}$$

Ebben az esetben tehát egy $K \cdot n(x)$ méretű matrix legnagyobb pozitív sajátértékét kell keresnünk. Ha ez egyben a domináns sajátérték, akkor a (23) differencia egyenletrendszer megoldása is az ehhez tartozó sajátvektorhoz fog konvergálni, a gazdaság tetszőleges kiinduló állapotból, önként átvezeti önmagát az egyenletes növekedés pályájára.

2.2. *Részben szabad ráfordítási struktúra — optimalizálási modellek*

A továbbiakhoz írjuk a (15) összefüggésrendszert most ilyen formában:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \langle 1\rangle - G_0 & H & -E & & -F \\ \hline -\bar{G}_0 & \langle 1-u\rangle & & & -\bar{F} \\ \hline & -W & \langle 1-s\rangle & & \\ \hline -L & & & \langle 1-v\rangle & \\ \hline & & & -D & \langle 1-z\rangle \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x(t) \\ \hline i(t) \\ \hline e(t) \\ \hline l(t) \\ \hline f(t) \end{array}\right) + \sum_{k=1}^{K}\left(\begin{array}{c} -G_k \\ \hline -\bar{G}_k \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \end{array}\right)(x(t+k)) = \left(\begin{array}{c} \\ \\ 0 \\ \\ \\ \end{array}\right) \tag{30}$$

Feltesszük, hogy a struktúra egyes elemei adottak, más elemei azonban bizonyos korlátok között tetszőlegesen alakíthatók.

Ezt az általános feltevést implikálja minden programozási modell. Ezeket a modelleket ugyanis a nekik megfelelő zárt modellből az alábbi konkrét feltevések tetszőleges kombinációjával lehet levezetni:

— bizonyos tevékenységek csoportokat alkotnak úgy, hogy a csoportba tartozó tevékenységek outputjai a felhasználásban tetszőlegesen helyettesíthetők egymással (aggregáljuk a tevékenységek színvonalát meghatározó egyenleteket anélkül, hogy aggregálnánk a tevékenységek színvonalát reprezentáló változókat);

— vannak tevékenységek, amelyek outputja tetszőlegesen osztható el más tevékenységek inputjaként (bevezetünk olyan változókat, amelyekhez nem tartozik feltétel — ilyenek az úgynevezett indikátor-változók, de ilyenek az egyenlőségnek egyenlőtlenséggé alakításával keletkező maradék-változók is);

— vannak tevékenységek, amelyek színvonala nem függ a többi tevékenység színvonalától (ezeket nem változóval, hanem konstanssal reprezentáljuk, ilyenek az úgynevezett „külső erőforrások" is);

— vannak ráfordítások, amelyek függetlenek a felhasználó tevékenység színvonalától (ezeket a ráfordításokat nem együtthatókkal, hanem konstansokkal reprezentáljuk).

Formálisan is igazolható, hogy mindezek a konkrét feltevések az említett általános feltevést implikálják, de ezt a levezetést ennek a cikknek a terjedelme nem teszi lehetővé.

Nyilvánvaló, hogy minden makroökonómiai programozási modell „hitelessége", megoldásainak gyakorlati realizálhatósága[1] két tényezőn múlik: 1. figye-

[1] Több megoldásról beszélünk, mert eleve alternatív jobb oldalakkal és alternatív célfüggvényekkel folyó számítássorozatot tételezünk fel. Ez egyben azt is mutatja, hogy a „gyakorlati realizálhatóság" követelményét nem azért állítjuk fel, mintha bármelyik megoldást az egyedül üdvözítő, optimális tervként realizálandónak tarthatnánk, hanem azért, mert realizálhatatlan megoldásokat produkáló modellből elemző következtetéseket sem lehet levonni.

lembe veszi-e mindazokat a tényezőket, amelyek a programozott szférára hatnak, vagyis milyen a neki megfelelő zárt modell; 2. valóban szabadon alakíthatók-e a struktúrának azok az elemei, amelyeket szabadon alakíthatónak tételez fel, vagyis helyesen méri-e fel a zárt kereten belüli cselekvési szabadságot, reálisak-e a modell „kinyitásánál" bevezetett feltevések. Ennek megítéléséhez mindenesetre célszerű ezeket a feltevéseket pontosan megfogalmazni.

Feltesszük, hogy

— a gazdasági rendszer belső transzformációjának egyik tényezője, az állóeszközök cseréje függetleníthető az állomány (s így a termelés) színvonalától; abszolút mennyisége szabadon meghatározható, tehát az állománynak tetszőleges hányada lehet;

— a gazdasági rendszer, valamint a társadalom és a világ többi része közötti áramlásoknak az a része, amely nem függ a termelés színvonalától, függetleníthető az áramlások színvonalától; abszolút mennyisége szabadon meghatározható, tehát az áramlásnak tetszőleges hányada lehet; sőt maga ez a mennyiség adott minimum felett tetszőleges lehet.

2.2.1. A kötött struktúra az időben változatlan

Az előbbi feltevések értelmében a (30) összefüggésrendszert a következővel helyettesítjük:

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \langle 1\rangle - G_0 + \nabla_0 & H & -E & & -F \\ \hline -\bar{G}_0 + \bar{\nabla}_0 & \langle 1\rangle & & & -\bar{F} \\ \hline & -W & \langle 1\rangle & & \\ \hline -L & & & \langle 1\rangle & \\ \hline & & & -D & \langle 1\rangle \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x(t) \\ \hline i(t) \\ \hline e(t) \\ \hline l(t) \\ \hline f(t) \end{array}\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{K} \left[\begin{array}{c} -G_k + \nabla_k \\ \hline -\bar{G}_k + \bar{\nabla}_k \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \end{array}\right] \left(x(t+k) \right) \begin{array}{c} = \\ \geq \\ \geq \\ \geq \\ \geq \end{array} \left[\begin{array}{c} \hat{S}(t)\,1 \\ \hline \hat{u}(t) + \hat{\bar{S}}(t)\,1 \\ \hline \hat{s}(t) \\ \hline \hat{v}(t) \\ \hline \hat{z}(t) \end{array}\right] \qquad (31)$$

$$t = 1, \ldots, T \qquad \nabla_k = R_k \otimes P \otimes B$$

$$\bar{\nabla}_k = \bar{R}_k \otimes \bar{P} \otimes \bar{B}$$

Természetesen, amikor a jobboldalon szereplő, ˆ-al jelzett konstans mennyiségeket valamely t-edik évre „szabadon" meghatározzuk, a megfelelő tevékenységeknek valamilyen elképzelt, becsült színvonalát tartjuk szem előtt. De feltesszük, hogy ha e tevékenységeknek a modell által kialakítandó színvonala ettől tetszőlegesen eltér, az eltérés valahogyan áthidalható lesz. (Például kétszer akkora állóeszközállományból is lehet ugyanannyit selejtezni. Például kétszer akkora exportforgalmat is le lehet bonyolítani ugyanolyan devizaszaldóval. Például kétszer akkora összfogyasztás mellett is lehet a származékos jövedelmekből finanszírozott fogyasztás ugyanakkora.) Az egyenlőtlenségek esetében feltesszük továbbá, hogy a minimum feletti többlet szabadon elhelyezhető. (Például kétszer akkora devizaszaldót is hasznosan lehet kamatoztatni vagy turistautakra költeni. Például kétszer akkora, származékos jövedelemből finanszírozandó, fogyasztáshoz is lehet találni megfelelő jövedelemújraelosztási rendszert.)

A (31) összefüggés jobboldalán szereplő konstansokat csak konkrét $t = 1, \ldots, T$ évekre határozhatjuk meg, következésképpen a megoldást is csak ugyanezen évekre kereshetjük. Ezzel az egész folyamat időbeli folytonossága megszakadt; a múltból és a jövőből eredő adottságokat és követelményeket a véges $t = 1, \ldots, T$ időszakra „kívülről", pótlólagos feltételekkel kell érvényesíteni. Egyidejűleg határozatlanná vált a megoldás; ez módot ad arra, hogy a lehetséges megoldások közötti választásnál bizonyos preferenciákat érvényesítsünk; ezek közül egyet nem feltételként, hanem a változók maximálandó vagy minimálandó függvényeként adunk meg.

A (31) rendszert tehát kiegészítjük az alábbiakkal:

$$\langle 1^*B\rangle\, x(1) \leq \hat{d} \qquad (32a)$$

$$\langle 1^*B - 1^*(R_1 + \ldots + R_k) \otimes B\rangle \{x(k+1) - x(k)\} \leq \hat{g}(k) \qquad (32b)$$
$$k = 1, \ldots, K-1$$

$$\sum_{t=T+1}^{T+K} 1^*x(t) - \sum_{t=T-K+1}^{T} \mu\, 1^*x(t) \geq 0 \qquad (32c)$$

$$\sum_{t=1}^{T} \eta_t\, 1^* \{e(t) - Wi(t)\} \geq \hat{q} \qquad (32d)$$

$$1^*f(t+1) - \omega 1^*f(t) \geq 0 \qquad (32e)$$
$$t = 1, \ldots, T-1$$

$$\sum_{t=1}^{T} \delta_t 1^*f(t) \to \max! \qquad (33)$$

A feltételek tartalma a következő:

(32a) Az első évi termelés nem lehet nagyobb, mint amit az állóeszközök $\hat{d}$ nyitó állománya megenged.

(32b) Az első K évben a termelés növekedése nem lehet nagyobb, mint amit a k-adik ($k = 1, \ldots, K-1$) évi üzembehelyezésre megkezdett beruházások $\hat{g}(k)$ nyitó állománya megenged.

(32c) A tervidőszak utáni K év kumulált termelése (amelyhez a beruházásokat még a tervidőszakban meg kell indítani) nem lehet kisebb, mint a tervidőszak utolsó K évi kumulált termelésének μ-szerese. Más szóval a tervidőszak végéről áthúzódó beruházások nem süllyedhetnek az ezt biztosító színvonal alá.

(32d) A tervidőszakbeli kumulált devizaszaldó — a T-edik évre felkamatolva — nem lehet $\hat{q}$-nál kisebb.

(32e) A fogyasztásnak legalább ω évi rátával kell növekednie.

(33) A tervidőszak alatti fogyasztásnak az első évre diszkontált összértéke legyen maximális.

2.2.2. A kötött struktúra az időben változik

Végül feltesszük, hogy a ráfordítási struktúrák kötött elemei a tervidőszak folyamán megváltoznak.

E változás irányáról és mértékéről a tervező munka kezdeti szakaszában — amikor a modellek a Bevezetőben említett első funkciót teljesítik — még nem lehetnek megalapozott információink, prognózisaink vagy tervszámításaink, csupán hipotéziseink. Valamilyen irányt és mértéket általánosságban valószínűnek vagy kívánatosnak, vagy egyszerűen tanulmányozandónak tarthatunk, de nem tudjuk differenciáltan számszerűsíteni.

Ebben az esetben célszerű lehet a (31) rendszert az alábbival helyettesíteni:

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \langle \mathit{1}\rangle - G_0 + Y_0(t) & H & -E & & -F \\ \hline -\bar{G}_0 + \bar{Y}_0(t) & \langle \varrho^t\rangle & & & -\bar{F} \\ \hline & -W & \langle \sigma^t\rangle & & \\ \hline -L & & & \langle \pi^t\rangle & \\ \hline & & & -D & \langle \varphi^t\rangle \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x(t) \\ \hline i(t) \\ \hline e(t) \\ \hline l(t) \\ \hline f(t) \end{array}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\vartheta}\left(\begin{array}{c} -G_k + Y_k(t) \\ \hline -\bar{G}_k + \bar{Y}_k(t) \\ \hline \\ \hline \\ \hline \\ \end{array}\right)\left(x(t+k)\right) \begin{array}{c} = \\ \geqq \\ \geqq \\ \geqq \\ \geqq \end{array} \left(\begin{array}{c} \hat{s}(t)\,\mathit{1} \\ \hline \hat{u}(t) \\ \hline \hat{s}(t) \\ \hline \hat{v}(t) \\ \hline \hat{z}(t) \end{array}\right) \tag{34}$$

$$t = 1, \ldots, T$$

$$Y_0(t) = \langle \mathit{1} - \alpha^{t,}\rangle A - (R_1 - \langle \beta^{t+1,}\rangle \check{R}_1) \otimes B - \langle \mathit{1} - \gamma^{t+1,}\rangle C + R_1 \otimes P \otimes B$$

$$Y_1(t) = \{(R_1 - \langle \beta^{t+1,}\rangle \check{R}_1) - (R_2 - \langle \beta^{t+2,}\rangle \check{R}_2)\} \otimes B + \langle \mathit{1} - \gamma^{t+1,}\rangle C + R_2 \otimes P \otimes B$$

$$Y_k(t) = \{(R_k - \langle \beta^{t+k,}\rangle \check{R}_k) - (R_{k+1} - \langle \beta^{t+k+1,}\rangle \check{R}_{k+1}\} \otimes B + R_{k+1} \otimes P \otimes B$$

$$Y_\vartheta(t) = (R_\vartheta - \langle \beta^{t+\vartheta,}\rangle \check{R}_\vartheta) \otimes B$$

$$\check{R}_k = R_k + \frac{1}{\vartheta}(R_K + R_{K-1} + \ldots + R_{\vartheta+1}) \qquad k = 1, \ldots, \vartheta$$

Természetesen a (32a) és (32b) feltételeket is megfelelően át kell fogalmazni, ennek felírását azonban itt mellőzzük.

Modellünket tehát a következő paraméterekkel „kormányozzuk”, a jobboldali konstansokon kívül:

ϑ = a beruházások maximális kivitelezési ideje években és az ennek megfelelően átalakított $\check{R}_k$ matrixok

$\langle \alpha\rangle = \{\alpha_{m(x)}\}$ az $m(x)$-edik termékekre vonatkozó ráfordítási együtthatók átlagos évi változása

$\langle \beta\rangle = \{\beta_{m(x)}\}$ az $m(x)$-edik szektor által kibocsátott állótőkejavakra vonatkozó lekötési együtthatók átlagos évi változása

$\langle \gamma\rangle = \{\gamma_{m(x)}\}$ az $m(x)$-edik szektor által kibocsátott forgótőkejavakra vonatkozó lekötési együtthatók átlagos évi változása

$\langle \varrho \rangle = \{\varrho_{m(i)}\}$ az $m(i)$-edik importtevékenység rugalmasságának átlagos évi változása ($\varrho < 1$ a fajlagos import nő; $\varrho > 1$ importhelyettesítés hazai termeléssel)

$\langle \sigma \rangle = \{\sigma_{j(e)}\}$ a $j(e)$-edik exporttevékenység devizakitermelési mutatójának átlagos évi változása ($\sigma > 1$ a mutató javul)

$\langle \pi \rangle = \{\pi_{j(l)}\}$ a $j(l)$-edik munkateljesítmény-fajta termelékenységének átlagos évi növekedése

$\langle \varphi \rangle = \{\varphi_{j(f)}\}$ a $j(f)$-edik fogyasztói csoportban a munkából eredő jövedelmek részarányának átlagos évi változása

Sajnos, ha több mint egy paramétert változtatunk meg egyszerre, a modellt újra meg kell oldani. ,,Kormányzásról'' tehát nem számítástechnikai, hanem közgazdasági értelemben beszélünk: ϑ, $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$, $\langle \sigma \rangle$ és $\langle \pi \rangle$ megválasztásával — a jobb oldalon szereplő $\hat{S}(t)$-kel együtt — a technikai haladás általános irányaira, a műszaki fejlesztés tempójára vonatkozó hipotéziseket és stratégiákat, $\langle \varrho \rangle$ megválasztásával — a jobb oldali $\hat{s}(t)$-kel és $\hat{q}$-val együtt — a nemzetközi munkamegosztásba való beilleszkedésre vonatkozó koncepciókat, $\langle \varphi \rangle$ megválasztásával pedig — a jobb oldali $\hat{v}(t)$-kel és $\hat{z}(t)$-kel együtt — életszínvonalpolitikai elgondolásokat fejezhetünk ki.

Amikor a tervező munka előrehaladásával, a széles tervezőapparátus munkájának eredményeként — akár ,,hagyományos'' jellegű tervező munkából, akár matematikai modellek megoldásaiból — megalapozottabb és differenciált információk állnak rendelkezésre a valószínűsíthető struktúra-változásokról, akkor a (34) rendszert a következővel helyettesítjük:

$$
\begin{pmatrix}
\langle 1 \rangle - G_0(t) & H(t) & -E(t) & & -F(t) \\
-\bar{G}_0(t) & \langle 1 \rangle & & & -\bar{F}(t) \\
 & -W(t) & \langle 1 \rangle & & \\
-L(t) & & & \langle 1 \rangle & \\
 & & & -D(t) & \langle 1 \rangle
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
x(t) \\ i(t) \\ e(t) \\ l(t) \\ f(t)
\end{pmatrix}
+
\sum_{k=1}^{\vartheta}
\begin{pmatrix}
-G_k(t) \\ -\bar{G}_k(t) \\ \\ \\ \\
\end{pmatrix}
\big(x(t+k)\big)
\begin{matrix} = \\ \geqq \\ \geqq \\ \geqq \\ \geqq \end{matrix}
\begin{pmatrix}
\hat{S}(t)\,1 \\ \hat{u}(t) \\ \hat{s}(t) \\ \hat{v}(t) \\ \hat{z}(t)
\end{pmatrix}
\qquad (35)
$$

$$t = 1, \ldots, T$$

Ennek a helyettesítésnek nem kell feltétlenül egy lépésben történnie; lehetnek olyan tervezési szakaszok, amikor egyes blokkokban még az előbbi, durva módszert alkalmazzuk, másutt már tervezett együtthatók szerepelnek.

Amikor a helyettesítés befejeződik, akkor a népgazdasági szintű, a rendszer egészére vonatkozó stratégiák egyedüli hordozóivá ismét a (32) és (33)-ban szereplő paraméterek, az idő-preferenciák kifejezői válnak.

3. Számítássorozat

A 2. fejezetben leírt modell-sorozat *lehetőségeit* próbálom bemutatni, függetlenül attól, hogy jelenlegi számítástechnikai adottságaink mellett egy-egy tervezési szakaszban mennyi realizálható ezekből a lehetőségekből. A leírás csak a primális megoldásokat veszi figyelembe; nem tárgyalom a duális megoldásokban rejlő elemzési lehetőségeket.

Egyik modell egyik megoldását sem tekintjük tervjavaslatnak; a számítássorozatot *elemzési* céllal végezzük. Következésképp, ha egy modellnek adott numerikus értékek mellett *nincs megoldása*, vagy nincs egyértelmű megoldása, a megoldás hiányát okozó tényezők felderítése és elemzése a tervező számára éppoly tanulságos lehet, mint a megoldás. Az ilyen szituáció azonban mindig nagyon konkrét, speciális. A továbbiakban tehát azt tételezem fel, hogy a szóban forgó modellek matematikailag megoldhatók és a megoldást számítástechnikailag elő tudjuk állítani.

Számításaink mindig objektív adottságok és/vagy gazdaságpolitikai stratégiák összehasonlító elemzésére irányulnak. Az adottságok és a stratégiák mindig a ráfordítási struktúrákban (illetve a programozási modellek néhány paraméterében) fejeződnek ki, összehasonlító vizsgálatuk alapvető szempontja pedig az, hogy milyen tevékenységi (termelési, fogyasztási, külkereskedelmi) színvonalat, struktúrát és növekedési ütemet eredményeznek.

Számításaink tehát nem közvetlenül a ráfordítási struktúra megtervezését vagy a gazdaságpolitikai stratégia kidolgozását célozzák; ezeket készen, ,,kívülről'' kell kapniuk akár durva hipotézisek, akár kimunkált tervelgondolások formájában. Számításaink a lehetséges alternatívák vizsgálatával a megalapozott döntést készítik elő.

3.1. *Adott struktúra vizsgálata*

Önálló jelentőségű a tervidőszak kezdetén fennálló tényleges, valamint a tervidőszak végére tervezett struktúra vizsgálata. Az előbbivel kezdődik, az utóbbival fejeződik be a hosszú távú tervezés egy adott munkaszakasza. A kettő között számos átmeneti alternatíva vizsgálatára kerülhet sor, mint a változás elemzésének módszerére (lásd a 3.2. pontban).

Egy adott struktúrát mindig meghatározott időszakra értelmezünk, például az 1960-as évek elejére vagy például az 1980-as évek közepére. Ismerjük (a bázisidőszak esetében), vagy megterveztük (a tervidőszak végére tervezett struktúra esetében), vagy vélelmezzük (az átmeneti struktúrák esetében, azokkal összhangban) a megfelelő időszakban K egymást követő év tevékenységi színvonalát.

Első lépés: a struktúra egyes elemeinek tanulmányozása. Tanulmányozzuk a (14) összefüggésben definiált G matrixokat, amelyek a gazdasági rendszer belső transzformációját jellemzik. Tanulmányozzuk a társadalommal és a gazdasággal fennálló kapcsolatokat: e kapcsolatok rendszerét ,,szabályos'' nyílt, statikus input—output modellnek tekintve, a (18) összefüggés alapján vizsgáljuk e rendszer részeit, a rendszerben végbemenő ,,halmozást'' stb. Tanulmányozzuk a két rendszer összekapcsolódását: együttesüket ,,nyílt, statikus'' input—output modellnek tekintve, a (22) összefüggés alapján vizsgáljuk az együttes rendszer belső ,,halmozását'', ,,hozzáadott értékének'' és ,,végső kibocsátásának'' szerkezetét stb.

Második lépés: a struktúrához tartozó növekedési ütem és tevékenységi szerkezet tanulmányozása. Megoldjuk — ha felírható — a (29) sajátérték-feladatot. (Ha nem, akkor a (27) feladatot; ebben az esetben azonban nem mellőzhetjük annak vizsgálatát: milyen konkrét közgazdasági jelenségek tükröződnek a QM_K matrix szinguláris voltában?) Van-e, ha igen, mekkora a legnagyobb λ^* növekedési ráta? Vannak-e, ha igen, milyenek a nála nagyobb abszolút értékű komplex vagy negatív sajátértékek? (Ezek ugyanis befolyásolni fogják a differencia-egyenletrendszer megoldását.) Milyen a hozzá tartozó sajátvektor által definiált termelési szerkezet? Ezt behelyettesítve (18)-ba, milyen munkateljesítményi, fogyasztási és külkereskedelmi tevékenységi szerkezet adódik? Hogyan tér el mindez a tényleges (tervezett, vélelmezett) tevékenységi szerkezettől?

Harmadik lépés: a struktúra és adott K évi termelési színvonal együttes tanulmányozása. Megoldjuk a (23) differencia-egyenletrendszert. (Ha nincs egyértelmű megoldása — miért nincs? Ebben az esetben a (22) összefüggés alapján iterálunk.) A megoldást (18)-ba is behelyettesítjük. A megoldás konvergál, divergál, oszcillál? Milyen a termelés, munka és fogyasztás, export és import időbeli alakulása véges T évnyi szakaszban? Milyen a átlagos növekedési ütem, kisebb-e vagy nagyobb, mint az előbbi λ^*? Kimutathatók-e ciklusos tendenciák, ha igen, milyenek? Hogyan változik időben a tevékenységi szerkezet, tart-e a λ^*-hoz tartozó szerkezet felé, vagy távolodik tőle, vagy körülötte ingadozik?

Ha nem a nyitó, tényleges struktúráról van szó, a harmadik lépést esetleg megismételhetjük a K évi termelési színvonal alternatív sorozataival.

Negyedik lépés: a struktúra kötöttségeinek részbeni feloldása mellett alternatív stratégiák tanulmányozása. Megoldjuk a (31)—(32)—(33) összefüggésekkel definiált lineáris programozási modellt. Először megkíséreljük a jobb oldali konstansokat a $t = 1$ évhez képest a második lépésben nyert λ^* ütemben növelni, az időpreferenciákban szereplő μ, ω, γ és δ paramétereket ugyancsak λ^*-nak megfelelően beállítani. Van-e megoldása ennek a ,,nyílt-zárt'' modellnek; ha nincs, milyen korlátokba ütközik?

Ezután a konstansok és az időpreferenciát kifejező paraméterek változtatásával alternatív stratégiákat számszerűsítünk és mindegyikkel megoldjuk a modellt. A megoldásokkal kapcsolatban ugyanazokat a kérdéseket tesszük fel, mint a harmadik lépésben; a megoldásokat összehasonlítjuk egymással és a differencia-egyenletrendszer megoldásával.

Ötödik lépés: a modell további ,,kinyitásával'' újabb, itt le nem írt lineáris programozási modell-változatokat definiálhatunk. Ez akkor célszerű, ha a makroökonómiai tervezés keretében más lineáris programozási modellek is alkalmazásra kerülnek, s a különböző modellek eredményeinek összehasonlítása során részletesebben is fel kívánjuk tárni az eltérések okait. Ebben az esetben ugyanis hasznos lehet az itt leírt, tulajdonképpen ,,majdnem zárt'' programozási modellt fokozatosan, lépésről lépésre közelíteni a többi modellekhez és lépésenként vizsgálni a megoldások eltéréseit.

3.2. *A struktúra-változás vizsgálata*

Az időbeli struktúra-változás vizsgálatára az itt leírt modell-sorozat keretében kétféle módszer kínálkozik:

— a korábbi és a későbbi struktúrát egyaránt megvizsgáljuk a 3.1. pontban leírt módon és az eredményeket összehasonlítjuk;

— megoldjuk a (34), illetve a (35) összefüggésekkel definiált lineáris programozási modelleket, és a megoldást egybevetjük az előbbi, negyedik lépésben nyert eredményekkel.

Ennek a számítássorozatnak a módszerbeli vonatkozásai az elmondottak alapján, úgy vélem, világosak. Tartalmi, közgazdasági sajátosságait viszont az adott tervezési munkaszakasz ismeretében, konkrét problémáinak függvényeként — és sajnos, a számítástechnikai lehetőségek függvényeként — kell meghatározni.

(Beérkezett: 1970. január 19.)

IRODALOM

BOD, P.: A népgazdaság hosszú távú (15—20 éves) tervezésének egy lehetséges matematikai modelljéről. Szigma, 1969. 1. sz. 59—66 p.

BRÓDY, A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvikadó. 358 p.

BRÓDY, A.: Beszámoló a dinamikus ÁKM-modellel végzett első magyarországi számításokról. Budapest, 1970. MTA Közgazdaságtudományi Intézet, 43 p.

KOVÁCS, J.: A munkaerő társadalmi újratermelésének tervezéséhez. Szigma, 1969. 3. sz. 189—198 p.

UJLAKI, ZS.: Hosszú távú többperiódusos összevont (B_2) programozási modell. Szigma, 1969. 4. sz. 35—48 p.

A MODEL SERIES OF LONG-RANGE PLANNING

In the article a linear model series is described which lends itself for use in long-range economy-wide planning.

The author defines the system of economic interrelations reflected in the models, a system that embraces the extended reproduction of material goods and services as well as the relationships which connect this system of production with the society and with the rest of the world (labour and consumption, import and export). The system of interrelations takes into account — over and above the macro-economic relationship covered by the usual models — also 1) an investment lag of K years and scrapping to serve the reneval of the stock of fixed assets, 2) the effects of certain demographical factors and of the distribution and redistribution of incomes on the consumption pattern, 3) the interaction between the pattern of imports and that of exports.

This system of interrelations finds its expression — in accordance with the various assumptions concerning the structural situation — in the form of various mathematical models. The closed models include a homogeous linear difference equation system of the K-th order as well as an eigenvalue—eigenvector problem; the assumption of freedom in forming the structure leads to linear programing models.

In conclusion, the article outlines the possibilities of planning calculations based on the model series.

СЕРИЯ МОДЕЛЕЙ ДОЛГОСРОЧНОГО ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

В статье представляется серия линейных моделей, применяемых в долгосрочном макроэкономическом планировании.

Автор дает в своей статье определение отраженной в моделях системы экономических взаимозависимостей, распространяющейся на расширенное вопроизводство материальных благ и услуг, а также на взаимосвязи этой производственной системы с обществом и с

остальными частями мира (труд и потребление, импорт и экспорт). Помимо обычных моделлируемых макроэкономических взаимозависимостей в системе взаимозависимостей в форме явных функций учитываются и взаимодействия между 1) запаздыванием капитальных вложений на K лет и об''емом списываемых и обновляемых основных средств, 2) некоторыми демографическими факторами и влиянием распределения и перераспределения доходов на структуру потребления, 3) структурой импорта и структурой экспорта.

Эта система взаимозависимостей в соответствии с различными предположениями относительно структурных условий выражается в форме различных математических моделей. В числе замкнутых моделей фигурируют система однородных линейных разностных уравнений K-ой степени и задача собственных значений — собственных векторов; а предположение свободы в формировании структуры ведет к моделям линейного програмирования.

В заключение в статье кратко представляются возможности выполнения плановых расчетов при помощи данной серии моделей.

J. Abadie

Egy elágaztatási módszer diszkrét változókat is tartalmazó nem-lineáris programozási feladatok megoldására

Bevezetés

Az elágaztatási módszerek a diszkrét változókra vonatkozó optimálási problémák megoldásánál indokolt népszerűségnek örvendenek. Ugyanakkor még a legutóbbi publikációkban sem oldották meg; sőt nem is szenteltek kellő figyelmet annak a problémának, amely az elágaztatási módszerek keretében definiálásra kerülő irányított, ültetett fa (a továbbiakban csak fának nevezzük) méreteinek ellenőrizhetetlen növekedéséből származik (Hervé, 1968; Roy, Benayoun és Tergny, 1970). Ez a nehézség a számológépen csak külső tárolók révén hidalható át. Ugyanekkor számos, néhány száz (egész vagy nem egész értékű) változót és hasonló nagyságrendű feltételt (amelyekhez a pozitivitási vagy általánosabban a változók korlátossági feltételei csatlakoznak) tartalmazó probléma mégis teljesen megoldható lenne a központi tárolóban, ha biztosítható lenne, hogy a fa hasznos része ne növekedjék bizonyos határon túl. Maradjon mondjuk N és $2N$ között, ahol N a diszkrét értékeket felvevő x_j-k száma (ami egyébként nincs korlátozva).

A fent jelzett nehézség egy sereg ún. „heurisztikus" módszer kibontakozását segítette elő. A jelen összefüggésben a „heurisztikus"-t olyan módszerek elnevezésére használjuk, amelyeknél semmi bizonyosat sem tudunk arról, hogy az optimális megoldás elérhető-e, de amelyek mégis az optimális megoldást — pontatlanul szólva — „nagy valószínűséggel megközelítő" pontokat szolgáltatnak. Az idézőjelekbe tett szavak a legtöbb esetben egyébként nincsenek is definiálva. Ezeknek a heurisztikus módszereknek van bizonyos jelentőségük, ugyanis meg kell elégednünk egy probléma „majdnem megoldásával", ha a megoldása lehetetlen vagy nagyon költséges. Idézzünk három ilyen heurisztikus eljárást:

1. oldjuk meg a felvetett problémának megfelelő „folytonos" optimálási problémát, azután az így kapott megoldásban „a lehető legjobban" kerekítsük azokat a változókat, amelyeknek egész értékűeknek kellett lenniök (ebben a tanulmányban a „folytonos" gyakran „nem diszkrét"-et jelent); ezt követően a nem egész értékű változókat tekintve optimalizáljuk azt a problémát, amelyet az előbbi problémából úgy nyerünk, hogy rögzítjük abban az eredeti probléma egész értékű változóira előzően nyert értékeket (ez a rögzített egész értékekhez tartozó ún. *redukált* probléma);

2. kezdjük a fenti heurisztikus eljárással, azután változtassuk meg egy egész értékű változónak az értékét mégpedig úgy, hogy növeljük vagy csökkentjük 1-gyel és oldjuk meg az ennek megfelelő redukált problémát; ismételjük meg ezt az eljárást ugyanezzel az egész értékű változóval mindaddig, amíg a minimalizálandó $\varphi(x)$ függvény csökken, ezután változtassuk meg egy másik egész értékű változó értékét; állítsuk meg az eljárást egy olyan ponton, hogy

a külön választott egész értékű változók ± 1-gyel való megváltoztatásai ne tegyék többé lehetővé a $\varphi(x)$ csökkenését. Ez azzal a kockázattal jár, hogy elhanyagoljuk azokat a szimultán megváltoztatásokat, amelyek csökkenthetnék a $\varphi(x)$-et, márpedig, ha N egész értékű változó van, akkor ezeknek a megváltoztatásoknak a száma — ami 2^N — nagyon nagy lehet;

3. úgy alkalmazzuk az elágaztatási eljárást, hogy a fa tárolandó csúcsainak a számát N'-ben korlátozzuk. Valahányszor a csúcsok száma $N' + 1$-re nő, a „legrosszabb" csúcsot töröljük; kockáztatva azt, hogy ez utóbbi egy optimális megoldáshoz vezető ágon van, amelyet ezáltal biztosan nem tudunk majd megtalálni.

Egyéb, sokkal jobban kidolgozott heurisztikus eljárásokat is használnak. Ezeket nem ismertetjük, mert kifejtésük hosszadalmas lenne. A jól használható heurisztikus eljárásoknak közös tulajdonságuk, hogy elég gyorsan adnak egy olyan diszkrét megoldást, ami még ha nem is optimális, a „gyakorlatban elfogadható".

Az egzakt módszerekre vonatkozó eddigi tapasztalatok (ellentétben a heurisztikus módszerekkel) különösen a diszkrét lineáris problémák területéről valók. Azonban egy általános kísérleti kód megadásához feltétlenül túl kell lépni a lineáris problémákon; ez tökéletesen megvalósítható: Colville (1968) munkája mintegy harminc nem-lineáris, folytonos optimálási módszerre vonatkozó gépi összehasonlító tesztet tartalmaz (az említett problémakörrel foglalkoznak még: Abadie (1967), (1969), (1970); Abadie és Carpentier (1966 és 1969), Abadie és Guigon (1969)). Egyébként e tanulmány tárgyától eltérő elágazgatási módszerek is léteznek, a nem-lineáris programozási feladatok megoldásának általános módszereivel vannak párosítva (Carpentier (1969)), sőt vannak speciális problémák számára létesített kódok is (Carpentier, Cassapoglou és mások (1968)).

Az az elágazgatási módszer, amelyet most leírunk (és amelyet mi a „Bounded Branch and Bound" után BBB-nek kereszteltünk el) egy rokon változata annak a módszernek, amit Land és Doig (1960) javasoltak részlegesen diszkrét változókat is tartalmazó lineáris programozási feladat megoldására. A módszer beletartozik a Hervé-féle axiomatikába, amely magában foglalja az összes ismert elágazgatási eljárást, beleértve a SEP (B. Roy) eljárást is. Rendelkezik mindazokkal az alapvető tulajdonságokkal, amelyeknek, úgy hisszük, érzékeltettük szükségességét és megvalósíthatóságát:

1. a fa tárolandó csúcsainak a száma elenyésző ($2N - 2$, sőt néha N);
2. alkalmazható, ha a célfüggvény és a feltételek nem lineárisak (tetszőleges meglevő nem lineáris programozási gépi kódot használhat szubrutinként);
3. rendelkezik a heurisztikus eljárásoknak azzal az — ámbár nem precízen definiált — alapvető sajátosságával, hogy elég gyorsan ad egy „elfogadható" diszkrét megoldást.

A következőkben jelbeszédet (sőt jeleket) fogunk használni. A tanulmánynak célja, hogy azok az olvasók is megértsék, akik nem járatosak az elágaztatási eljárásokban. Módszerünket egy teljes részletességgel tárgyalt numerikus példával illusztráljuk: nem azért választottuk ezt a példát, hogy — az iterációk számát minimálisra csökkentve — csillogtassuk módszerünk használhatóságát; a látszat ellenére egy nehéz példáról van szó. A legtöbb heurisztikus módszer nem ad rá ésszerűen jó megoldást, a mi algoritmusunkhoz szükséges iterációk száma pedig abnormális módon meg van benne emelve. A példa azonban olyan, hogy illusztrálja a legtöbb előforduló jelenséget.

1. A P probléma és a hozzátartozó G gráf

Tekintsük a következő részlegesen diszkrét változókra vonatkozó programozási feladatot:

határozzuk meg a $\varphi(x)$ minimumát az alábbi feltételek mellett:

$$x \in K$$

$$x_j \in F_j, \ \forall j \in E$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \ \forall j \in E',$$

ahol x az $(x_j)_{j \ni J}$ vektor, $j = \{1, 2, \ldots, n\}$;
K az R^n térnek egy részhalmaza;
E a J-nek egy részhalmaza; $E' = J - E$;
F_j valós számokból álló véges halmaz.

Ez a probléma megoldható — a φ-re és K-ra vonatkozó bizonyos feltevések mellett — módszerünk segítségével. A módszer bemutatása abban a speciális esetben a legegyszerűbb, amikor a következő a probléma (megjegyezzük, hogy az általános eset hasonlóképpen tárgyalható):

P: minimalizáljuk a $\varphi(x)$-et az alábbi feltételek mellett:

$$x \in K \tag{1}$$

$$a_j \leq x_j \leq b_j, \ \forall j \in J \tag{2}$$

$$x_j \text{ egész}, \ \forall j \in E; \tag{3}$$

feltesszük, hogy az a_j és b_j egészek $\forall j \in E$. (Vagyis részlegesen egészértékű feladattal van dolgunk.)

A bizonyítások egyszerűsége kedvéért feltesszük, hogy a (2) által definiált Π parallelotop korlátos (ami a gyakorlatban sohasem okoz zavart) és feltesszük, hogy a φ függvény szigorúan kvázi-konvex a Π-n. Emlékeztetünk arra, hogy akkor mondjuk a φ-t szigorúan kvázi-konvexnek a Π-n, ha nincs olyan Π-hez tartozó intervallum, amelynek belső pontjában a φ eléri a maximumát. Hogy a legegyszerűbb példát idézzük, minden olyan konvex függvény szigorúan kvázi-konvex, amely nem éri el több pontban a minimumát (speciálisan így van ez a nem azonosan konstans lineáris függvények esetében). A K halmazról feltesszük, hogy konvex.

Legyen A egy tetszőleges részhalmaz $A \subset E$, és $x_A = (x_j)_{j \in A}$ az x-nek egy olyan részvektora, amelynek komponensei az x azon komponensei, melyek indexei az A-ból valók. A következőkben az $\bar{x}_A$, $\tilde{x}_A$, $\hat{x}_A$ olyan x_A vektorokat jelölnek, amelyeknek a komponensei egészek és értékeik — a (2)-nek megfelelően — vannak rögzítve.

Egy adott $S = (A, \bar{x}_A)$ párnak megfeleltetjük a következőképpen definiált $P(S)$ problémát:

$P(S)$: minimalizáljuk a $\varphi(x)$-et az alábbi feltételek mellett:

$$x \in K \tag{1}$$

$$a \leq x \leq b \tag{2}$$

$$x_j = \bar{x}_j, \ \forall j \in A \tag{4}$$

Legyen $\hat{x}(S)$ a $P(S)$ probléma megoldása (amelyről az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy egyértelmű) és legyen $\hat{\varphi}_S$ a φ minimális értéke a $P(S)$ problémában, ahol a szokásos megegyezés szerint $\varphi_S = +\infty$, ha az (1), (2), (4) feltételek ellentmondóak. Az előzőkből következik, hogy $\bar{x}_j = \hat{x}_j(S)$, $\forall j \in A$. Legyen $E(S)$ azon $j \in E$ indexek halmaza, amelyekre $\hat{x}_j(S)$ egész.

Tekintsük a következőképp definiált G irányított gráfot:

1. G csúcsai a fent definiált különböző $S = (A, \bar{x}_A)$ párok.
2. Minden S csúcshoz a $\hat{\varphi}_S$ értéke van hozzárendelve.
3. Amikor A üres, a megfelelő csúcsot a G S_0 gyökerének nevezzük.
4. Ha $E(S) = E$, akkor azt mondjuk, hogy az $S = (A, \bar{x}_A)$ csúcs végpont.
5. Minden $S = (A, \bar{x}_A)$ csúcsnak megfeleltetjük az ő t_s-el jelölt emeletét, ami az A elemeinek a száma (az emelet Roy (1969) terminológiájában a rendnek felel meg).
6. Tegyük fel, hogy az $S = (A, \bar{x}_A)$ nem végpont és legyen $\beta \in E(S) - A$. Definiáljuk az S-nek β-ra vonatkozó egy ,,magasabb emeletű'' utódát a következőképp:

$$T = (B, \tilde{x}_B)\,,$$

ahol:

$$B = A \cup \{\beta\}$$

$$\tilde{x}_j = \bar{x}_j, \ \forall j \in A$$

$$\tilde{x}_\beta = [\hat{x}_\beta(A)] \text{ vagy } [\hat{x}_\beta(A)] + 1$$

(a $[\lambda]$ a szokásnak megfelelően a λ valós szám egész része). Az S-nek a β-ra vonatkozólag két utóda létezik.

7. Általánosabban, ha adott az $S = (A, \bar{x}_A)$ csúcs és az nem végpont, akkor a $(t_S + 1)$-ik emelet csúcsait definiáljuk a következőképp:

$$\beta \in E(S) - A$$

$$B = A \cup \{\beta\}$$

$$\tilde{x}_j = \bar{x}_j, \ \forall j \in A$$

$$\tilde{x}_\beta = [\hat{x}_\beta(A)] + \gamma$$

$$T = (B, \tilde{x}_\beta)\,,$$

ahol γ nulla vagy tetszőleges előjelű egész szám úgy, hogy a (2) feltétel teljesüljön.

A $\gamma = 0, -1, -2, \ldots$-nek megfelelő csúcsokat egymás utáni irányított élekkel (a továbbiakban csak élt mondunk) összekötjük, ezek alkotják a balszárnyat, amelynek kezdőpontja a $\gamma = 0$-nak megfelelő csúcs. Hasonlóképp egymás utáni élekkel összekötjük a $\gamma = 1, 2, \ldots$-nek megfelelő csúcsokat, ezek alkotják a jobbszárnyat, amelynek kezdőpontja a $\gamma = 1$-nek megfelelő csúcs. A két szárnyat ellentétesnek és az S-ből keletkezőnek mondjuk.

Egy csúcsnak szárnyában való eltávolodása $|\gamma|$ a balszárnyra és $\gamma - 1$ a jobbszárnyra.

Példa: Minimalizáljuk a

$$2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - (x_1 + x_2 + 9x_3)$$

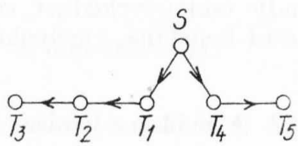
kifejezést az alábbi feltételek mellett:

$$-2 \leq x_j \leq 2, \forall j \in J = \{1, 2, 3\}$$

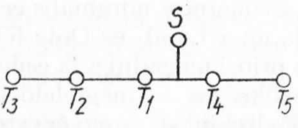
$$x_j \text{ egész}, \forall j \in E = J$$

Ha az $S = (A, \bar{x}_A)$ csúcsot az $A = \{1\}$, $\bar{x}_1 = 2$-vel definiáljuk, akkor a $P(A)$ probléma megoldása $\hat{x}(A) = (2; {}^1/_4; 2)$.

A G-nek az $S = (A, \bar{x}_A)$-ból, ennek a $\beta = 2$-re vonatkozó 2-ik emeleti utódaiból és a megfelelő két ellentétes szárnyból álló parciális részgráfja az 1a ábrán látható (az 1a ábrát mindig az 1b ábra szerint fogjuk rajzolni, ahol az élek irányát mutató nyilak odaértendőek).



1a ábra



1b ábra

A feltevések miatt:

$$T_i = (B_i, \tilde{x}^i_{Bi}),$$

ahol:

$$B_i = \{1, 2\}, \; i = 1, 2, \ldots, 5$$

$$(\tilde{x}^i_1, \tilde{x}^i_2) = \begin{cases} (2, 1 - i), & i = 1, 2, 3 \\ (2, i - 3), & i = 4, 5 \end{cases}$$

T_1 és T_4 a két ellentétes szárny kezdőpontjai. T_i-nek az eltávolodása:

$$i - 1, \quad i = 1, 2, 3$$

$$i - 4, \quad i = 4, 5.$$

A G gráfban az ,,utód'' fogalmán kívül (a T akkor utód, ha az ST egy él; az utód ugyanazt jelenti, mint a ,,követő'' (Roy (1969) terminológiájában) még létezik a ,,leszármazott'' (Roy, 1969) fogalma is. A T az S-nek egy leszármazottja, ha létezik az S-et a T-vel összekötő irányított út (a későbbiekben csak utat mondunk). Nyilvánvaló, hogy egy utód az egy olyan leszármazott, amelyet egyetlen élből alkotott út hoz létre.

1. Tétel. *Ha T az S-nek egy leszármazottja a G-ben, akkor $\hat{\varphi}_T \geqq \hat{\varphi}_S$.*

Bizonyítás. Vegyük figyelembe a G definíciója 6. részében szereplő fogalmakat és tegyük fel, hogy a T az S-ből közvetlenül keletkező jobbszárnyhoz tartozik. Az $(\bar{x}_S, \hat{x}_T)$ szakasz metszi az $x_\beta = [\hat{x}_\beta(A)] + \gamma$ hipersíkot az x^γ pontokban mégpedig úgy, hogy a $\varphi(x^\gamma)$ növekszik γ-val. Ebből mindenesetre következik, hogy $\hat{\varphi}_T \geqq \hat{\varphi}_S$, s ezért a bizonyítást befejeztük, ha $\gamma = 1$; ha $\gamma > 1$, akkor tekintve a $(\gamma - 1)$-nek megfelelő T'-t adódik: $\hat{\varphi}_{T'} \leqq \hat{\varphi}_T$ azaz a $\hat{\varphi}_T$ növekszik, amikor az eltávolodás növekszik a jobbszárnyon. Hasonló okoskodás alkalmazható a balszárnyra is.

2. Tétel. *A G gráfban nincs körút.*

Bizonyítás. Egy csúcs rendje csak növekedhet, vagy konstans marad. Csak azokban a szárnyakban marad konstans, amelyekben nincs körút.

2. A módszer leírása

Látni fogjuk, hogy a Land- és Doig-féle módszer (Land és Doig, 1960; Balinski, 1967; Hervé, 1968) abban áll, hogy szerkesztünk az előző G gráfban egy olyan utat, amely az S_0 gyökeret a minimális értékű végponttal köti össze. Az alkalmazások szempontjából a Land- és Doig-féle konstrukciónak van egy lényeges hibája: nem lehet a priori megadni a fa csúcsainak a számára — a közbeeső lépések tárolásához szükséges — megfelelő korlátot. Egyetlen S csúcs tárolása — néhány egységtől eltekintve — egyenértékű $\hat{x}(S)$ nyilvántartásával, ami n rekeszt igényel.

Nyilvánvaló, hogy megelégedhetünk a G végpontjainak a megvizsgálásával és a kapott csúcsok közül elég a legkisebb értékűt megtartani (ha $E = J$, akkor ez arra vezet, hogy a $\varphi(x)$ értékét a $p = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ pontokra kell kiszámítani, ahol $p_j = [b_j - a_j]$, pl. $p = 10^n$, ha $p_j = 10$, $\forall j$). Egyébként léteznek olyan esetek, amikor ez a legjobb eljárás (pl. ha $E = \{1\}$, $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, akkor a Land- és Doig-féle eljárás, illetve a következőkben leírt, három optimalizációra vezet; a végpontok teljes vizsgálata e három közül csak kettőre).

A továbbiakban bemutatunk egy olyan iteratív módszert, amely a G-ben egy fát szerkeszt (Berge, 1958; Hervé, 1968; Roy, 1969); ebből bennünket az érdekel, hogy a szerkesztett fa parciális részgráfja lesz G-nek. Tartalmazza az S_0 gyökeret és az S_0 kivételével minden csúcs egy és csak egy élnek a végpontja lesz. A gráfnak minden pontjához hozzárendelünk egy bizonyos számú jelet (l. az illusztráló példát).

Minden iteráció kezdetén a fa egy bizonyos állapotban van és van egy becslésünk a φ P-ben való minimális értékére. Ezt a becslést $\hat{\varphi}$-nek nevezzük ($\hat{\varphi} = +\infty$ az első iteráció kezdetén, kivéve, ha ismeretes egy az (1), (2), (3) feltételnek eleget tevő megoldás: ekkor a $\hat{\varphi}$ értékének az ismert megoldásnak megfelelő φ értéket vesszük).

Vizsgáljunk egy olyan $S = (A, \bar{x}_A)$ csúcsot, amely megoldása a $P(S)$ problémának, azaz:

vagy ellentmondóak a $P(S)$ (1), (2), (4) feltételei és S-nek a $\hat{\varphi}_S = +\infty$ értéket adjuk;

vagy $\hat{x}(S)$ a $P(S)$ megoldása és S-nek a $\hat{\varphi}_S = p(\hat{x}(S))$ értéket adjuk.

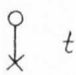
Egy S csúcsot elutasítunk, ha $\hat{\varphi}_S \geq \hat{\varphi}$, vagy ha az S minden leszármazottjának az értéke legalább $\hat{\varphi}_S$. Az 1. tétel miatt egy elutasított csúcs minden leszármazottja elutasított lesz. Az elutasított csúcsokat nem tároljuk a tárlóban (l. még később az Sz. 6 szabályt).

A csúcsok megvizsgálása után minden csúcs vagy elfogadott, vagy elutasított lesz. Mindannyiszor elfogadunk egy csúcsot, amikor az nem elutasított. Ez az elfogadás ideiglenes, mivel a $\hat{\varphi}$ iterációról iterációra csökken, ami azt eredményezi, hogy egy bizonyos iterációnál elfogadott csúcs egy későbbi iterációnál elutasított lehet (maga az elutasítás végleges, mert nem lehet az eredeti P probléma optimális megoldása egyetlen olyan végpont sem, amely egy elutasított csúcs leszármazottja). Egy elfogadott csúcsot mindig tárolunk a tárolóban, egészen az esetleges elutasításig.

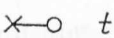
A következő jelbeszédet fogjuk alkalmazni:

a t-ik emelet (ideiglenesen) elfogadott csúcsa;

a t-ik emelet (az összes leszármazottaival együtt véglegesen) elutasított csúcsa;

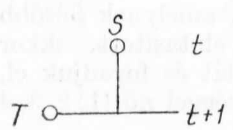


a t-ik emelet olyan (ideiglenesen) elfogadott csúcsa, amelynek a t-nél nagyobb sorszámú emeleteken levő leszármazottai elutasítottak;

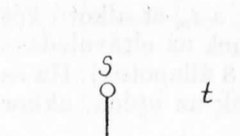


a t-ik emelet olyan (ideiglenesen) elfogadott csúcsa, amelynek a – szárnyában (itt a bal) levő – nála nagyobb eltávolodású leszármazottai elutasítottak;

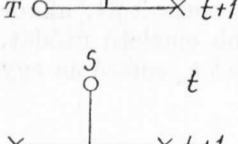
jelentése hasonló (jobb szárny a bal helyett);



a t-ik emelet (ideiglenesen) elfogadott S csúcsa, valamint a $(t+1)$-ik emelet ugyancsak ideiglenesen elfogadott T csúcsa; a T csúcs az S egy olyan leszármazottja a G-ben, amely az S-ből keletkező balszárnyhoz tartozik (a T nem feltétlen lesz az S utóda a G-ben); az ellentétes szárny egyetlen csúcsát sem vizsgáltuk meg;

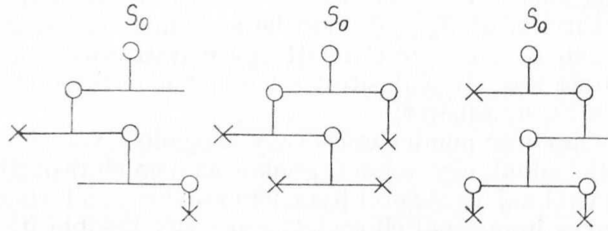


jelentése hasonló, de az ellentétes szárny elutasított (valamint minden olyan csúcsnak a leszármazottja, amely ebben a szárnyban szerepel);



az S csúcs (ideiglenesen) elfogadott a t-ik emeleten; a két ellentétes szárny visszautasított a $(t+1)$-ik emeleten.

A fa minden állapotának megfelel egy bizonyos grafikus séma. A következő példákban az emeletek száma négy:



2. ábra.

A legmagasabb emelet sorszáma, amelyet t_m-mel jelölünk, legfeljebb akkora, mint az E elemeinek a száma. A séma minden elfogadott $S = (A, \bar{x}_A)$ csúcsához hozzátartozik az ő $\hat{\varphi}_S$ értéke és a $P(S) : \hat{x}(S)$ megoldása; ezenkívül tároló rekeszek vannak fenntartva a $\hat{\varphi}$ és az (1), (2), (3)-nak — az előző iterációk során kapott — legjobb $\hat{x}$ megoldása számára.

A javasolt algoritmushoz egy bizonyos számú szabály tartozik. Ezeket a szabályokat (Sz. 1-től Sz. 6-ig) szukcesszíve kell alkalmazni, sematikus illusztrálásukat — a legmagasabb t_m-ik emeletre vonatkozólag a 0, 1, . . . , 9 állapotokra — l. később. Minden emeleten, mint majd meglátjuk, csak két elfogadott csúcs lehet, és ha kettő van, akkor ezek a két ellentétes szárnyhoz tartoznak.

Az algoritmus szabályai.

Sz. 0. Tekintsük a legmagasabb t_m-ik emeletet (az első iterációnál $t_m = 0$, vizsgáljuk az S_0 kezdőpontot).

Sz. 1. Ha az S_0-nál magasabb emelet leszármazottai mind elutasítottak, VÉGE a problémának: az (1), (2), (3) legjobb megoldására fenntartott tároló rekeszek tartalmazzák a P megoldását, ha korábban ide (1), (2), (3)-nak valamilyen megoldása bekerült. Ha nem: (1), (2) és (3) ellentmondóak.

Sz. 2. Ha van a t_m-ik emeleten olyan elfogadott T csúcs, amelynek felsőbb emeletéről való leszármazottai között van nem elutasított, akkor vizsgáljuk a $(t_m + 1)$-ik emeleten a T egy U utódát és fogadjuk el, vagy utasítsuk el. Az emelet t_m sorszáma egy egységgel nő (1, 2, 3, 4 állapotok).

Sz. 3. Ellenkező esetben, amikor ez lehetséges, vizsgáljuk a t_m-et alkotó két ellentétes szárny halmazában azt a csúcsot, amelynek az eltávolodása a legkisebb és fogadjuk el vagy utasítsuk el (5, 6, 7, 8 állapotok). Ha ez az utóbbi csúcs ugyanazon szárnyban egy másiknak az utóda, akkor ez az utóbbi törlődött (7, 8 állapotok).

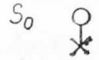
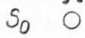
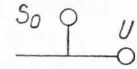
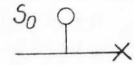
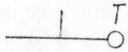
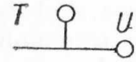
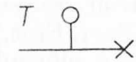
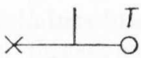
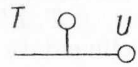
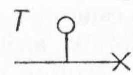
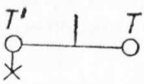
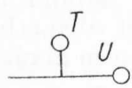
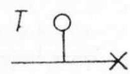
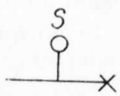
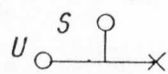
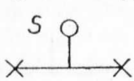
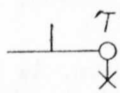
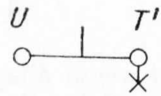
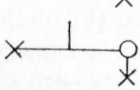
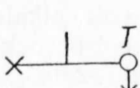
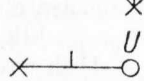
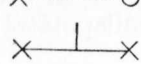
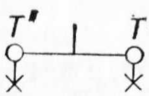
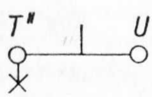
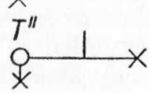
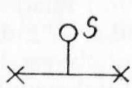
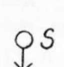
Sz. 4. Ha a t_m-ik $(t_m > 0)$ emelet két ellentétes szárnya elutasított, akkor elutasítjuk annak az S csúcsnak valamennyi felsőbb emeletű utódát, amelyből ez a két ellentétes szárny eredt. Az emelet t_m sorszáma egy egységgel csökkentendő (9-es állapot).

Sz. 5. Az iteráció végén a következő áll:

$\hat{\varphi}$ új, $\leq \hat{\varphi}$ régi.

Ha:

$\hat{\varphi}$ új, $< \hat{\varphi}$ régi,

Előtte				Utána		
sorszám	állapot	emelet	szabály	sorszám	állapot	emelet
0		0	Sz. 1		vége	
1		0	Sz. 2 Elf.	2		1
			Sz. 2 Elut.	5		1
2		t_m	Sz. 2 Elf.	2		$t_m := t_m+1$
			Sz. 2 Elut.	5		$t_m := t_m+1$
3		t_m	Sz. 2 Elf.	2		$t_m := t_m+1$
			Sz. 2 Elut.	5		$t_m := t_m+1$
4		t_m	Sz. 2 Elf.	2		$t_m := t_m+1$
			Sz. 2 Elut.	5		$t_m := t_m+1$
5		t_m	Sz. 3 Elf.	3		$t_m := t_m$
			Sz. 3 Elut.	9		$t_m := t_m$
6		t_m	Sz. 3 Elf.	4		$t_m := t_m$
			Sz. 3 Elut.	7		$t_m := t_m$
7		t_m	Sz. 3 Elf.	3		$t_m := t_m$
			Sz. 3 Elut.	9		$t_m := t_m$
8		t_m	Sz. 3 Elf.	4		$t_m := t_m$
			Sz. 3 Elut.	7		$t_m := t_m$
9		t_m	Sz. 4	0		$t_m := t_m-1$

tekintsük át a tárolóban tárolt valamennyi $\hat{\varphi}_S$-t és utasítsuk el (a tároló rekeszek törlésével) azokat az S csúcsokat, amelyekre:

$$\hat{\varphi}_S \geqq \hat{\varphi} \text{ új}.$$

Sz. 6. Ha $\hat{x}_j(S)$ minden $j \in E$-re egész, akkor az S-et elutasítjuk. Ha ezenkívül $\hat{\varphi}_S < \hat{\varphi}$, akkor $\hat{x}(S)$ a P jelenlegi legjobb megoldása és ez helyettesíti az előzőt az erre a célra fenntartott tároló rekeszekben, amikor is $\hat{\varphi} := \hat{\varphi}_S$. Az ellenkező esetben, azaz ha $\hat{\varphi}_S \geqq \hat{\varphi}$, akkor az előző legjobb megoldás a helyén marad.

Az Sz. 1—Sz. 4. szabályok az utolsó emelet átalakulását írják le, sematikus ábrázolásukat l. a továbbiakban. Az Sz. 5. és Sz. 6. szabályok lehetővé teszik a tárolóban tárolt csúcsok számának csökkentését, ezeket nem ábrázoljuk. Az Sz. i. Elf. (Sz. i. Elut.) azt jelenti, hogy az Sz. i. szabály alkalmazásával megvizsgált csúcs elfogadott (elutasított).

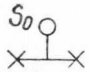
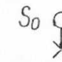
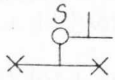
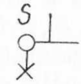
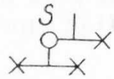
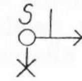
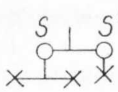
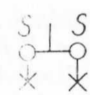
Magyarázatok. A T, T', T'' az Sz. 1-től az Sz. 4-ig terjedő szabályok alkalmazása előtt elfogadott csúcsok a t_m-ik ($t_m > 0$) legmagasabb emeleten. A vizsgálandó csúcsot — ha van ilyen U — jelöli; amikor ez elutasított, akkor nem jelöljük azért, hogy emlékeztessünk arra, hogy az elutasított csúcsokat nem tároljuk a tárolóban. A 7. és 8. állapotokban U a T' utóda; ha ebben a két állapotban az U elutasított, akkor egy közbeeső állapotot a következőképpen ábrázoltunk:

ha pedig U elfogadott, a közbeeső állapot a következő:

Ez a táblázat végső állapotaiba van közvetlenül átalakítva. Az S a t_m-ik emelet egyetlen (közvetlen) elődjét jelöli (feltéve, hogy van ilyen). A $t_m := t_m + \varepsilon$, ($\varepsilon = 0, 1$ vagy -1) azt jelenti, hogy az Sz. 1-től Sz. 4-ig terjedő szabályok alkalmazása előtti legmagasabb emelet a t_m-ik volt, alkalmazásuk utáni pedig a $(t_m + \varepsilon)$-ik. A 9-es állapotban olyan alesetek lehetnek a t_m-re, amelyek a $(t_m - 1)$-ik emeletnek az Sz. 1-től Sz. 4-ig terjedő szabályok alkalmazása előtti állapotától függenek.

Egy állapotból egy másikba való átmenet

1. Ha a t_m-ik emelet t_m sorszáma egy egységgel nő (1, 2, 3, 4 sorszámú állapotok), akkor az x_β változónak megváltozik az értéke. Ha az $\hat{x}(T)$-ből kiindulva, az egyetlen x_β koordináta megváltoztatásával nyert pont kielégíti a feltételeket, úgy kitűnő kiinduló megoldásul szolgál a $P(U)$ feladat iteratív megoldásához. Ha ez a pont nem megengedett; még mindig jó induló megoldást jelent, ha a $P(U)$ feladat megoldására ,,pönálés'' módszerrel működő algoritmust használunk. Ha ezzel szemben olyan eljárással dolgozunk, amelynél minden iterált pont megengedett kell hogy legyen; akkor egy előkészítő

Előtte				Utána		
sorszám	állapot	emelet	szabály	sorszám	állapot	emelet
9.1		0 1	Sz. 4	0		0
9.2		t_m-1 t_m	Sz. 4	6		$t_m := t_m-1$
9.3		t_m-1 t_m	Sz. 4	7		$t_m := t_m-1$
9.4		t_m-1 t_m	Sz. 4	8		$t_m := t_m-1$

fázisra van szükség (amelyben természetesen magát ezt az eljárást használjuk fel). Ha előre gondoskodunk az előkészítő fázisról, akkor egy automatikus indulási lehetőséget biztosítottunk. Ugyanakkor a jelen esetben célszerűbbnek véljük a következő módon eljárni. Kiindulunk az $\hat{x}(T)$-ből és maximalizáljuk (vagy minimalizáljuk) az x_β-t, egészen addig, amíg eléri a kívánt értéket (hogy ezt megtehessük, (2)-t a kívánt x_β értékkel megegyező felső vagy alsó korláttal vesszük). Az x_β ezen maximalizálásának eredménye egy, a $P(T)$ korlátozásainak eleget tevő pont (ha van ilyen; ellenkező esetben azt a következtetést vonjuk le, hogy $\hat{\varphi}_T = +\infty$).

2. Ha a t_m-ik emelet t_m sorszáma változatlan marad, akkor hasonlóképpen járunk el, az S-ből (5-ös állapot) vagy a T'-ből (5, 7, 8-as állapotok) kiindulva.

3. Ha a t_m-ik emelet t_m sorszáma csökken (9-es állapot vagy az Sz. 6 szabály alkalmazása), akkor nem merül fel az a kérdés, hogy bizonyos feltételeknek eleget tevő pontot kell kapni.

3. Elméleti eredmények

Megmutatjuk, hogy az algoritmus rendelkezik a tároló rekeszek számára (4. tétel) és a konvergenciára (5. tétel) vonatkozó tételekben kimondott tulajdonságokkal. Előbb bebizonyítjuk a 3. tételt, amely éppúgy használható a két további tétel bizonyítására, mint a módszer gépi programozásának megkönnyítésére.

3. Tétel. *Az algoritmus alkalmazása során a legmagasabb emelet — minden iteráció kezdetén, a fenti* 0*-tól* 9*-ig terjedő sorszámú állapotok egyikében, az alacsonyabb emeletek pedig a* 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8*-as állapotok egyikében találhatók.*

Bizonyítás. Az Sz. 1—Sz. 4 szabályok alkalmazásakor az 0—9 állapotok csak 0—9 állapotot hozhatnak létre. Az alsóbb emeleteknek van egy elfogadott pontjuk; számukra az 5 és 9-es állapotok ki vannak zárva. Az Sz. 5 és Sz. 6 szabályok alkalmazása — az 1. tétel miatt — nem változtat a helyzeten.

4. Tétel. *A fa állapota, bármely iterációnál, legfeljebb* $2N - 1$ *elfogadott csúcsot vesz számításba;* N *az egész értékű változók számát* (azaz E elemeinek a számát) *jelenti.*

A 3. tétel miatt ez a szám legfeljebb $2N + 1$, ami az Sz. 6 szabályt alkalmazva $(2N - 1)$-re redukálódik.

Megjegyzések

1. Tekinthetjük a fa csúcsainak maximális számát $(2N - 2)$-nek is megjegyezve, hogy az S_0 gyökér feleslegessé válik, mihelyt megkezdjük a két ellentétes szárny vizsgálatát.

2. Ezt a maximális számot elérjük, ha $t_m = N - 1$ és az 1-től $(N - 2)$-ig terjedő sorszámú emeletek a 4-es állapotban, az $(N - 1)$-ik emelet pedig a 4-es vagy 8-as állapotban van.

5. Tétel. *Véges számú iteráció után az algoritmus a P egy megoldását adja, vagy kiderül, hogy a P feltételei ellentmondóak.*

Bizonyítás. Az iterációk száma véges, mivel a G csúcsainak száma véges és egyiket sem érintjük kétszer.

A két lehetséges befejezés a következő:

VÉGE 1: 0 állapot és $\hat{\varphi} < +\infty$ (a probléma meg van oldva),

VÉGE 2: 0 állapot és $\hat{\varphi} = +\infty$ (a korlátozások ellentmondóak).

Az elutasított $S = (A, \bar{x}_A)$ csúcsokra vonatkozólag kétféle eset van: vagy azért lettek elutasítva, mert azoknak a $P(S)$ problémáknak felelnek meg, amelyek korlátozásai ellentmondóak (ami azt jelzi, hogy $\bar{x}_A$ nem lehet része P egyetlen megengedett megoldásának sem) vagy azért, mert $\hat{\varphi}_S \geq \hat{\varphi} \geq$ $\geq \min \{\varphi \,/\, (1), (2), (3)\}$. Az 1. tétel miatt ugyanez áll az S-ből leszármazó végpontokra is. Ebből következik, hogy a VÉGE 1 és VÉGE 2 a fenti jelentéssel bír.

Az az eset, amikor a P probléma konvex és differenciálható

Tegyük fel, hogy a φ függvény konvex és differenciálható a Π parallelotópon és hogy a K konvex halmaz a következő egyenlőtlenségek által van definiálva:

$$f_i(x) \leq 0\,, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

ahol az f_i függvények konvexek és differenciálhatók a Π-n. Legyen $U = (B, \hat{x}_B)$ a $T = (B, \tilde{x}_B)$ utóda az $S = (A, \bar{x}_A)$-ból keletkező valamelyik szárnyban. Emlékeztetünk arra, hogy

$$B = A \cup \{\beta\}\,, \text{ ahol } \beta \in E(S) - A$$

$$\tilde{x}_j = \hat{x}_j = \bar{x}_j\,, \; \forall j \in A$$

$$\tilde{x}_\beta = [\hat{x}_\beta(S)] + \gamma$$

$$\hat{x}_\beta = \tilde{x}_\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 \text{ a jobb szárnyra} \\ -1 \text{ a bal szárnyra} \end{cases}$$

A $P(T)$ megoldása a $\lambda_i(T)$, $\mu_k(T)$ multiplikátorokat adja, amelyekre:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(T) \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_T = \mu_k(T)\,,\ k \in J - B$$

$$\lambda_i(T) \geq 0\,,\quad \lambda_i(T) f_i(\hat{x}(T)) = 0\,,\quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\mu_k(T) \geq 0\,,\ \text{ha}\quad \hat{x}_k(T) = a_k$$

$$\mu_k(T) \leq 0\,,\ \text{ha}\quad \hat{x}_k(T) = b_k$$

$$\mu_k(T) = 0\,,\ \text{ha}\ a_k < \hat{x}_k(T) < b_k\,,$$

ahol a $(\ )_T$ jelölés azt jelenti, hogy a zárójelben levő kifejezést $x = \hat{x}(T)$-re kell venni.

A konvexitás egyenlőtlensége:

$$\varphi(\hat{x}(U)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(T) f_i(\hat{x}(U)) \geq \varphi(\hat{x}(T)) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(T) f_i(\hat{x}(T)) +$$

$$+ \sum_{k \in J-B} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(T) \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)_T (\hat{x}(U) - \hat{x}(T)) +$$

$$+ \varepsilon \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(T) \frac{\partial f_i}{\partial x_\beta}\right)_T$$

azt adja, hogy:

$$\hat{\varphi}_U \geq \hat{\varphi}_T + \varepsilon \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(T) \frac{\partial f_i}{\partial x_\beta}\right)_T = \tilde{\varphi}_T$$

Ez az összefüggés lehetővé teszi az U elutasítását akkor, ha $\tilde{\varphi}_T \geq \hat{\varphi}$, anélkül, hogy azt előzetesen megvizsgáltuk volna. Ha nem teljesül az összefüggés, akkor a T-vel egyidejűleg a $\tilde{\varphi}_T$-t is tárolni fogjuk: mivel a $\hat{\varphi}$ csak csökkenhet, lehetséges, hogy az U-t egy későbbi iterációnál fogjuk elutasítani.

Másrészt, a $P(S)$ probléma megoldásakor minden — a $P(S)$ probléma megoldására használt — iterációnál — a konvexitás egyenlőtlenségeiből — a $\hat{\varphi}_S$-re egy alsó korlát adódik, legalábbis ha, amit mi felteszünk, egy olyan iteratív módszert használunk, amely a $P(S)$ feltételeinek eleget tevő x^ν pontokat ad. Legyen φ^ν az x^ν-höz tartozó alsó korlát. Ekkor:

$$\varphi^\nu \uparrow \hat{\varphi}_S\,,\ \text{ha}\ \nu \to +\infty$$

Ha tehát $\hat{\varphi}_S > \hat{\varphi}$ (S elutasítandó), akkor a számítások ténylegesen leállíthatók, mihelyt $\varphi^\nu > \hat{\varphi}$.

A kétértékű változók esete

Lehetnek olyan egészértékű változók, amelyek csak két értéket vesznek fel (a továbbiakban ezeket kétértékű változóknak nevezzük): feltesszük, hogy az a két érték, amit felvehetnek a 0 és az 1. Ebben az esetben a módszer általános leírásából nyilvánvaló, hogy $a_j = 0$ és $b_j = 1$ minden kétértékű x_j változóra. Megjegyezzük, hogy minden egyes — kétértékű változónak megfelelő — szárny a kezdőpontjára redukálódik.

Az a legérdekesebb eset, amikor mind az N egész értékű változó kétértékű, mert ekkor a gépi-programozás egyszerűsödik, minthogy minden gráfcsúcsnak legfeljebb két utódja lehet. Jóval kevesebb tároló rekeszre lesz tehát szükség, mivel N bit elegendő az N db kétértékű változó tárolására, s így lehetővé válik egy sereg ilyen típusú probléma gyors megoldása. Megjegyezzük, hogy az általános eset is visszavezethető erre azáltal, hogy az egész értékű változókat felírjuk a 2-es alapú számrendszerben:

$$x_j = a_j + \sum_{k=0}^{n_j} 2^k x_{jk}, \quad 0 \leq x_{jk} \leq 1,$$

ahol az n_j-t a b_j határozza meg. Ezen átalakítás előnyeire és hátrányaira nem fogunk kitérni. Mégis megjegyezzük, hogy konvex programoknál valószínűleg nem lépnek fel speciális elutasítások.

4. Illusztráló példa

A következőkben teljes egészében tárgyaljuk a következő P problémát: P: minimalizáljuk a

$$\varphi = (5x - 13)^2 + 15(130x - 100y - 23)^2 + 30(20x + 10y - 20z - 10)$$

függvényt az alábbi feltételek mellett:

$$0 \leq x_j \leq 6, \; j \in J = \{1, 2, 3\} \tag{2}$$

$$x_j \text{ egész}, \; j \in E = J \tag{3}$$

(a K konvex halmaz legyen a teljes R^3 tér). Könnyen látható, hogy a φ függvény konvex és differenciálható.

Ha a megoldandó problémák „kicsinyek", az ésszerű megoldás, legalábbis egy gép számára (az ember esetében ez nem így van), az lenne, hogy teljes leszámolással járjon el, esetünkben ez azt jelenti, hogy $7^3 = 343$ ponttal számoljon.

A (3) elhanyagolásával kapott $P(\varnothing)$ probléma (ami annak felel meg, hogy a változókat nem egész értékűeknek tekintjük, hanem valós változóknak) megoldása a következő:

$$\hat{x}(\varnothing) = (2{,}6;\ 3{,}15;\ 3{,}7575), \quad \varphi(\hat{x}(\varnothing)) = 0.$$

A P probléma megoldása pedig:

$$\hat{x} = (1; 1; 1), \quad \varphi(\hat{x}) = 829.$$

A fentiekből a „legjobb kerekítéssel" nyert megoldás:

$$x^\circ = (3; 3; 4), \quad \varphi(x^\circ) = 67609.$$

Azon nyolc pont közül, amelyeket úgy nyertünk, hogy az $\hat{x}_j(\varnothing)$ – t ($j = 1, 2, 3$) bármely lehetséges módon kerekítettük, a legjobb az:

$$x^1 = (3; 4; 4), \quad \varphi(x^1) = 21219.$$

Így tehát a ,,legjobb kerekítéssel" kapott megoldás (67609) egyáltalán ,,nem kielégítő", sőt még ,,az összes lehetséges kerekítések legjobbika" (21219) is alig javasolható. Ha az algoritmust az elsőnek talált megoldásnál megállítjuk, akkor már valamivel jobb eredményt kapunk (17419 a harmadik iterációnál), a másodszorra talált egész pontnál való megállás pedig egy olyan megközelítést (934, a második iterációnál) ad, amelynek az az érdeme, hogy hasonló nagyságrendű, mint az optimális érték (829, a tizennegyedik iterációnál). Három kiegészítő iteráció szükséges, hogy meggyőződhessünk: a már korábban megkapott, optimális megoldás tényleg a P probléma optimális megoldása.

A számításokat egy tízoszlopos táblázat formájában mutatjuk be.

1. oszlop: a fában megvizsgált $T = (B, \bar{x}_B)$ csúcs megnevezése (0, 1, 2, . . .); ez megegyezik az iteráció sorszámával.

2. oszlop: a B halmaz; az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy ez mindig a következő négy halmaz valamelyike: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$; nyilvánvaló, hogy egyéb szabályok is lehetségesek: miután az x_1-et az $\bar{x}_1$ egész értékkel rögzítettük, az x_2 rögzítése helyett rögzíthetjük az x_2 és x_3 közül azt, amely a legmesszebb (vagy a legközelebb) van egy egész számhoz.

Mindez összhangban van az Sz. 2 szabályban biztosított bizonyos fajta szabadsággal.

3. oszlop: Az $i.b$ jelölés azt jelenti, hogy a vizsgált csúcs az i csúcs utóda az ő szárnyában, ami a balszárny; az $i.fb$ jelölés azt jelenti, hogy a vizsgált csúcs az i következő emeleti utóda és hogy ő egy balszárny kezdőpontja (az $i.j$ és $i.fj$ ugyanazt jelentik, csak a ,,bal" a ,,jobb"-al helyettesítendő).

4., 5., 6. oszlopok: a $P(T)$ optimális megoldásának a koordinátái az x_1, x_2, x_3 értékek; az, hogy egy x_j érték alá van húzva, azt jelenti, hogy egész értékre rögzítettük azért, mert $j \in A$; amikor ezen kívül még egy csillag is van, ez azt jelenti, hogy $j = \beta$; az $x_j = 6°$ csak annak a ténynek kifejezésére szolgál, hogy $x_j = 6$ és így az $x_j \leq 6$ eredeti feltétel: hatékony; hasonlót jelent az $x_j = 0°$, zéró alsó korlát esetén.

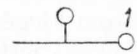
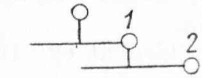
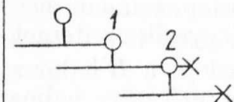
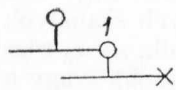
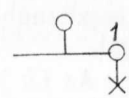
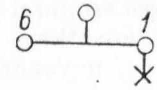
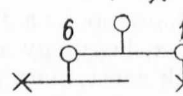
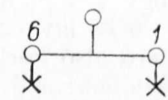
7., 8. oszlopok: a $\hat{\varphi}_T$, $\tilde{\varphi}_T$, amiket már előzőleg definiáltunk; a 7. oszlopban aláhúzott számnak a legjobb egész értékű pont felel meg.

9. oszlop: a fa állapota a folyamatban levő iteráció végén (a fa gyökerének a megjelölését mellőztük; minthogy a 9-es állapot a fa legmagasabb emeletének állapota: közvetlenül az általa létrehozott 0, 6, 7, 8-as állapotok valamelyikébe megyünk).

10. oszlop: t_m, a legmagasabb emelet sorszáma.

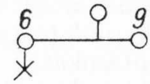
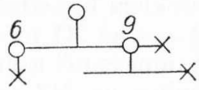
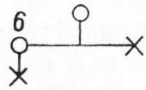
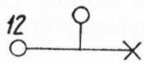
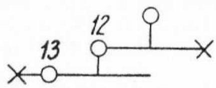
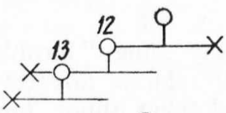
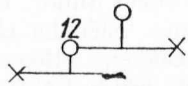
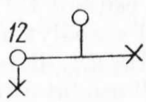
Az $\hat{x}_j(T)$, $\hat{\varphi}_T$, $\tilde{\varphi}_T$ értékei pontos értékek, kivéve, ha $T = 9$, ahol az értékek $(^+)$-al vagy $(^-)$-al vannak jelölve. Az algoritmusnál a három változóra való minimalizálás után 17 iteráció szükséges; ebből két változóra 5, egy változóra 8 és a $\varphi(x)$ számítására 4 esik.

A bemutatott módszerrel szemben gyakran ajánlható heurisztikus eljárások alkalmazása, feltéve, ha ezek egyszerűek és kevés számolásra vezetnek. Az (1), (2), (3) egy $\hat{x}$ megoldásának ismeretében, a $P(S)$-nek az $S = (E, \hat{x}_E)$-vel való megoldása valóban ad a $\hat{\varphi}$-re egy olyan értéket, amelyet elég kicsinek remélhetünk ahhoz, hogy lehetővé tegye a G elég sok csúcsának az elutasítását; ez viszont azt adja, hogy minél kisebb a $\hat{\varphi}$, annál több olyan csúcsa lesz a G-nek, amelyeket nem kell megvizsgálni. Nem mond ellent ezeknek az a tény sem, hogy a jelen példában a legtöbb heurisztikus eljárás csődöt mond.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			$\hat{x}(T)$						
T	B	S	x_1	x_2	x_3	$\hat{\varphi}_T$	$\tilde{\varphi}_T$	a fa állapota	t_m
0	∅		2.6	3.15	3.7575	0			Kezdés 0
1	1	0. fj	*3.**	3.67	4.5185	4	44		1
2	1, 2	1. fj	*3.*	*4.**	4.7	16 339	115 379		2
3	1, 2, 3	2. fj	*3.*	*4.*	*5.**	*17 419*			3
4	1, 2, 3	2. fb	*3.*	*4.*	*4.**	21 219			2
5	1, 2	1. fb	*3.*	*3.**	4.15	67 339			1
6	1	0. fb	*2.**	2.37	2.8035	9	39		1
7	1, 2	6. fb	*2.*	*2.**	2.06	20 544			2
8	1, 2	6. fj	*2.*	*3.**	3.15	59 544			1

Nevezzük 1. példának az előző példát, 2-nak pedig azt, amit ebből úgy kapunk, hogy elhagyjuk a (2) feltételeket. Nevezzük a fent kifejtett módszert M1-nek és M2-nek a következő módszert: a tárolt csúcsok közül minden iterációnál tekintsük azt az S csúcsot, amelyen a $\hat{\varphi}_S$ értéke a legkisebb és vizsgáljuk a három utódot (kettő a felsőbb emeletről való, egy az S szárnyában van — ez utóbbi nem létezik, ha S a gyökér —, mivel az utód a szárnyban mindig a harmadik); alkalmazzuk a 2. § elutasítási eljárásait és ha sor kerül rá, a konvexitásból levezetett elutasítási eljárást. Egyébként a Land- és Doig-féle eljárásnak a nem-lineáris programozásra való kiterjesztett változatáról van szó. A számításokat nem fogjuk részletezni. Az érdeklődő olvasó megkaphatja ezeket a szerzőtől.

Az összehasonlítás a következő pontokra vonatkozik: az első változó minimalizációinak száma (1. tábla), a második változó minimalizációinak száma (2. tábla), a tárolandó csúcsok száma (3. tábla), az egészértékű optimális megoldásokat adó iterációk száma (4. tábla, ahol a zárójelben levő számok a φ-nek a megfelelő értékeit jelentik).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
			x(T)						
T	B	S	x_1	x_2	x_3	$\hat{\varphi}_T$	$\tilde{\varphi}_T$	a fa állapota	t_m
9	1	1. j	*4.**	4.9600+	6.	187+	6 808−		1
10	1, 2	9. fj	4.	*5.**	6.	*934*			2
11	1, 2	9. fb	4.	*4.**	5.7	141 184			1
12	1	6. b	*1.**	1.07	1.0885	64	144		1
13	1, 2	12. fb	*1.*	*1.**	1.05	799	21 799		2
14	1, 2, 3	13. fb	*1.*	*1.*	*1**	*829*			3
15	1, 2, 3	13. fj	*1.*	*1.*	*2**	14 029			2
16	1, 2	12. fj	*1.*	*2.**	1.6	129 735			1
17	1	12. b	*0.**	0.°	0.°	11 104			0 VÉGE

Megoldás: T = 14

	M1	M2
1. Példa	8	8
2. Példa	24	26

1. tábla

	M1	M2
1. Példa	5	6
2. Példa	12	12

2. tábla

	M1	M2
1. Példa	3	8
2. Példa	3	15

3. tábla

	M1	M2
1. Példa	3 (17 419), 10 (934), 14 (829)	11 (11 104), 12 (934), 15 (829)
2. Példa	3 (17 419), 11 (934), 19 (829)	21 (934), 40 (829)

4. tábla

Így az adódik, legalábbis e példák láttán, hogy az M1-től az M2-höz viszonyítva a következő előnyöket várhatjuk:

1. kevesebb a minimalizációk száma (1. és 2. tábla),
2. kevesebb a tárolandó csúcs (3. tábla),
3. kevesebb időre van szükség ahhoz, hogy ugyanazokat az egész megoldásokat kapjuk (4. tábla) (ez az előny akkor áll fenn, ha elhagyjuk a befejezés előtti számításokat).

Mindezekhez hozzátehetjük, hogy a tároló rekeszek számának maximuma $2N - 2 = 4$ az M1 módszer esetében és ennél több az M2 módszer (3. tábla) esetében, ami ennél a módszernél a priori nem is korlátozható. Ez arra vezet, hogy amikor az M2 módszert alkalmazzuk, vagy fenntartandó N' tároló rekesz a központi tárolóban és kell a külső tárolóban is tárolni, ha a tárolandó csúcsok száma N-nél nagyobb (így a programozás nehézkes és rendkívül lassú lesz), vagy amikor $N' + 1$ csúcs van, akkor el kell hagyni a legrosszabbat (kockáztatva azt, hogy nem találjuk meg a felvetett probléma optimális megoldását).

5. Az N csoportos elágaztatási módszer

Néhány „nagy" problémánál előfordul, hogy a $2N - 2$ csúcs tárolása is túl sok rekeszt követel meg. Megmutatjuk, hogy hogyan kell irányítani a műveleteket ahhoz, hogy a $2N - 2$ helyett N legyen a szükséges rekeszek maximuma. Elég ha elérjük azt, hogy az összes $t < t_m$ sorszámú emeleten egy és csak egy elfogadott csúcs legyen, miközben a t_m-ik emelet 0 vagy 1 elfogadott csúcsot tartalmaz (ha $t_m = N$, ez a szám a 0 lesz). E célból elég, ha az Sz. 3 szabályt a következő Sz. 3a szabállyal helyettesítjük:

Sz. 3a: Ha a t_m-ik emelet a 6-os vagy 7-es állapotban van, akkor vizsgáljuk meg a T' utódát az ő szárnyában és fogadjuk el vagy utasítsuk el (ez a 2, 5 vagy 9 állapothoz vezet). Ha a t_m-ik emelet az 5-ös állapotban van, akkor vizsgáljuk meg az ellenkező szárny kezdőpontját és fogadjuk el vagy utasítsuk el (ez a 3 vagy a 9-es állapothoz vezet).

Most — bizonyítás nélkül — felsorolunk néhány tételt.

6. Tétel. *Az algoritmus alkalmazása során az iterációk kezdetén a legmagasabb emelet a* 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 *állapotok valamelyikében van és a kevésbé magas emeletek a* 0, 1, 2, 3 *állapotok egyikében vannak.*

7. Tétel. *Bármely iterációnál a fa állapota legfeljebb N elfogadott csúcsot tartalmaz.*

8. Tétel. *Véges számú iteráció után a módosított algoritmus a P-nek egy megoldását adja, vagy kiderül, hogy a P feltételei ellentmondóak.*

Érdemes megnézni, hogy mit ad a módosított algoritmus az előző paragrafus numerikus példája esetén. Pontosan ugyanazokat a csúcsokat adja, de más sorrendben. A csúcsokat ugyanúgy jelölve, mint ahogy ezt tettük, ez a sorrend a következő:

0, 1, 2, $\underline{3}$, 4, 5, 9, $\underline{10}$, 11, 6, 7, 8, 12, 13, $\underline{14}$, 15, 16, 17

(az aláhúzott csúcsok az egész megoldásokat jelentik).

A módosított módszer érdekes. Nincs módunk azonban arra, hogy a tároló rekeszek számának a második paragrafusban megadott vizsgálatával való összevetésén kívül egyéb szempontokkal is összevessük. Valószínű, hogy elsősorban az a hátránya ennek a módszernek, hogy túlságosan megvizsgál egy szárnyat, még mielőtt az ellenkező szárny megvizsgálását elkezdené.

Fordította: *Baróti György*

(Beérkezett: 1970. február 5.)

IRODALOM

Abadie, J. (1967), ed. Nonlinear Programming, North Holland Publishing Company.

Abadie, J. (1969), On the GRG method for nonlinear optimization and its application to control problems, EDF Note HI 141/00 (to appear, slightly modified, in Abadie, 1970).

Abadie, J. (1970), ed., Integer and Nonlinear Programming, North Holland Publishing Company.

Abadie, J. et J. Carpentier (1966), Généralisation de la méthode du Gradient Réduit de Wolfe au cas des contraintes non-linéaires, pages 1047—1953 de Proceedings of the Fourth IFORS Conference, D. B. Hertz and J. Mélèse (editors), Wiley — Interscience.

Abadie J., and J. Carpentier (1969), Generalization of the Wolfe Reduced Gradient method to the case of nonlinear contraints, in: Optimization, R. Fletcher (editor), Academic Press.

Abadie, J., et J. Guigou (1969), Gradient Réduit Généralisé, Note EDF HI 069/02.

Balinski, M. L. (1967), Some general methods in integer programming, Chap. IX of Abadie, 1967.

Berge, C. (1958), Théorie des Graphes et ses applications, Dunod.

Carpentier, J. (1969), Generalized Reduced Gradient algorithm, combination with integer programming, application to an electric power system problem (mimeographed), paper presented to the NATO Advanced Study Institute on Integer and Nonlinear Programming, Bandol 8—20 June 1969.

Carpentier, J., C. Cassapoglou, et. al. (1968), Une méthode générale de résolution des problèmes de dispatching économique avec variables entières, tenant compte des coûts de marche à vide des groupes, paper presented at the International Conference on Operational Research & Power Systems, Athens, 1968.

Colville, A. R. (1968), A comparative study of nonlinear programming codes, IBM NYSC Report 320—2949.

Herve, P. (1968), Les procédures arborescentes d'optimisation, R. I. R. O., *14*, 69—80.

Land, A. H., and A. G. Doig (1960), An automatic method of solving discrete programming problems, Econometrica, *28*, 497—520.

Roy, B. (1969), Algèbre moderne et théorie des graphes, Dunod.

Roy, B., R. Benayoun, and J. Tergny (1970), From S.E.P. procedure to the mixed Ophélie programme, in Abadie, 1970.

Roy, B., P. Bertier et P. T. Nghiem (1965), Programmes linéaires en nombres entiers et procédure SEP. Metra, IV, n° 3, 1965.

A BRANCH AND BOUND METHOD FOR MIXED INTEGER NON-LINEAR PROGRAMMING

The paper presents the „BBB algorithm'' (Bounded Branch and Bound), and illustrates it by mean of a numerical example. This algorithm possesses, with respect to other Branch and Bound methods, the following advantages: (a) there exists an *a priori* upper bound to the number of egdes of the tree to be memorized; (b) this bound is reasonably small (2N-2, or even N, where N is the number of integer valued variables); (c) „acceptable'' solution are quicker to obtain (this advantage comes to work in the case where computations must be stopped before completion). Proofs are given under quasi-convexity hypothesis.

МЕТОД ОТВЕТВЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, СОДЕРЖАЩИХ ДИСКРЕТНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В статье представляется «Метод-BBB» («Bounded Brauch and Bound»), илюстрируемый на нумерическом примере. Этот метод по сравнению с другими методами ответвления имеет следующие преимущества: (а) число попадающих в меморию вершин управляемого дерева априори ограничено сверху; (б) ограничение является рационально малым (2N-2 или иногда N, где N = число целозначных переменных); (в) можно быстрее получить приемлемое решение (это является благоприятным в том случае, если расчеты следует остановить перед окончанием).

В доказательстве предполагается квази-выпуклость.

Chikán Attila

Többraktáras készletezési rendszerek matematikai modelljei

A szocialista bővített újratermelés különböző szféráiban — mindenütt, ahol a termelési folyamat egyes szakaszai térben vagy időben elszakadnak egymástól — elkerülhetetlen és a folyamatok stabilitása szempontjából alapvető jelentőségű különböző készletek tartása. A készletek optimális szintje igen jelentős az egész gazdálkodás hatékonysága szempontjából. A készletek növekedése vagy csökkenése rendszerint ellentétes irányú költségmozgásokat eredményez a gazdálkodás kapcsolódó egyéb területein.

A megfelelő nagyságú készletek más erőforrások felszabadításával járhatnak, ugyanakkor a készletek túlzott nagysága — mivel lényegében inaktív eszközlekötést jelent — egyértelműen előnytelen. A ráfordítások helyettesíthetősége és különböző hatásfoka szükségessé teszi optimalizálási feladatok megfogalmazását, és a korszerű matematikai eljárásoknak a készletgazdálkodási döntések előkészítésében való felhasználását.

A problémák modellizálhatóságát jelentősen megkönnyíti az a tény, hogy — véleményem szerint — a készletgazdálkodásnak önálló tevékenységként való kezelése rendszerint elfogadható absztrakció. Ennek oka, hogy a készletgazdálkodási döntések a gazdaság más szféráiban hozott döntésekhez képest viszonylagos függetlenséggel bírnak: abban az értelemben, hogy a készletezéssel kapcsolatos költségek csökkentése átlagos gazdasági feltételek mellett egyértelműen célszerű.

A készletproblémának egy általános megfogalmazását a következőképpen adhatjuk meg [17]:

„A készlet úgy definiálható, mint valamely passzív *forrás*, azzal a feltétellel, hogy ennek a forrásnak gazdasági értelemben vett értéke van. Ebből következik, hogy *kereslet* jelentkezik iránta. A kereslet a készletből output útján elégíthető ki. A készlet helyreállítása *input* útján történik. A termelés ilyen input és/vagy output folyamnak fogható fel."

$$\text{—input}\rightarrow\boxed{\text{készlet}}\text{—output}\rightarrow\boxed{\text{kereslet}}$$

Valamely készletezési rendszer állapotát, illetve hatékonyságát — a készletprobléma fenti megfogalmazása esetén — mindenkor az

$$E = E\{a(t),\ b(t),\ r(t)\}$$

dőfüggvény-halmazzal írhatjuk le, ahol

$a(t)$: az input
$b(t)$: az output
$r(t)$: a kereslet az idő függvényében

A $b(t)$ és $r(t)$ függvények igen gyakran — de nem mindenkor — ekvivalensek. Az $a(t)$ és $b(t)$ függvények a döntéshozó ellenőrzése alatt állnak és $r(t)$ alakulását is befolyásolhatják (például áralakítással).

Általánosságban a készletezési probléma lényege abban áll, hogy meg kell találni azon $a(t)$, $b(t)$, $r(t)$ függvényeket, amelyek maximalizálják a rendszer hatékonyságát. Ezt az E-hez rendelt valamilyen mennyiséggel (pl. veszteség, nyereség stb.) mérjük. Az optimalizálandó függvények rendszerint korlátozó feltételeknek vannak alávetve.

Az ily módon értelmezett készletgazdálkodási modellek, más döntési modellekhez hasonlóan, négy szférából állanak:

1. *A döntési változók halmaza,* amelynek alapján a döntéshozó megválasztja üzleti taktikáját. Készletgazdálkodási modellek esetében ilyen döntési változók lehetnek például a kritikus készletszintek, a rendelendő mennyiség, a raktárkapacitás, a raktárak száma, elhelyezése stb. Természetes, hogy adott probléma esetén ezen változóknak csak egy részhalmaza befolyásolja a döntést.

2. *A feltételi rendszer,* amely a változók halmazában feltételezett empirikus relációk halmaza („korlátozó feltételek"). Készletezési problémák esetében ilyen korlátozó feltételek például a különböző kapacitáskorlátok (termelés, raktár, piac stb.), pénzügyi korlátok, szállítási feltételek, időkorlátok stb.

3. *A célfüggvény.* Ez egy olyan, a döntési változók halmazán értelmezett függvény, amelynek valamilyen szélsőértéke a vizsgált rendszer egy kedvező állapotát fejezi ki. Így készletezési modellekben a költségek minimális szintje, a kereslet kielégítésének elérhető maximális mértéke vagy a készletvolumen minimuma lehet például a döntéshozó számára kívánatos állapot.

4. Végül az alkalmazott *számítási eljárások,* amelyek elemzik a döntési változók alternatív értékeinek hatását a célfüggvényre a modell feltételi rendszerében. Ilyen, a készletgazdálkodási modelleknél gyakran alkalmazott eljárások például a klasszikus szélsőérték-számítás vagy az optimális programozás egyes módszerei.

A fent általánosságban leírt modellek speciális tulajdonságaik (az egyes szférák jellemző vonásai) segítségével sokféleképpen csoportosíthatók és szerteágazó problémakört ölelnek fel. Éppen a sokrétűség miatt nagy jelentőséggel bír a fellépő problémák és megoldásaik rendszerezése — hiszen a térben és időben szétszórtan jelentkező modellek, eljárások, eredmények megismerése feleslegesen köti le a felhasználásukkal foglalkozó szakemberek idejét és energiáját. Ennek tulajdonítható, hogy az utóbbi időben több olyan munka jelent meg, amely a készletezési modellek rendszerezésével, általános leírásával, elemzésével, összehasonlításával foglalkozik. Ezen rendszerezések döntő többsége főként azokkal a modellekkel foglalkozik, amelyek a legnagyobb számosságú osztályt alkotják: egy, ritkábban több termék egy raktárban történő készletezésének modelljeivel. Ilyen modellek rendszerezésére több kitűnő munka is ismeretes az irodalomban (pl.: [12], [17], [26]).

Viszonylag kisebb teret szenteltek azonban eddig egy nem kevésbé fontos problémakörnek, a többraktáras modelleknek. Ez részben abban nyilvánul meg, hogy kevesebb modellt ismerünk e tárgykörben, másrészt pedig abban, hogy sem a hazai, sem a külföldi irodalomban nem találkozunk valamennyire is átfogó rendszerezésükkel. Több ilyen modellt ismertet Hanssmann [17] és Gebhardt-Seele [14], de ők sem törekedtek többszempontú, átfogó kép kialakítására. A hazai irodalomban — amely ezen a területen egyébként is meglehetősen szórványos — pedig egyáltalán nem jelent még meg ilyen munka

A többraktáras modellek tulajdonképpen egy általánosítást jelentenek és kiemelt gyakorlati jelentőséggel bírnak. Könnyen belátható, hogy a népgazdaság objektíve csak többraktáras készletgazdálkodási rendszerként kezelhető; ezt a termelés tényleges anyagi-műszaki összefüggései, valamint a vállalatoknak mint elkülönült gazdálkodási egységeknek a létezése implikálják. Ez a tény makroökonómiai szinten húzza alá a többraktáras rendszerek, illetve modellek jelentőségét. Mikroszinten pedig a több gyáregységgel, üzemrészleggel rendelkező ipari nagyvállalatok készletgazdálkodásának korszerű igényeket s a gazdaságosság követelményeit kielégítő, alapvető kritériumait szem előtt tartó irányítása aligha képzelhető el ilyen modellek alkalmazása nélkül. Emellett az új gazdaságirányítási rendszerben fokozódott a fogyasztók jobb kiszolgálásának igénye is, és az ország egész területét ellátó rendszer (TEK vállalat, szervízhálózat) irányítása szempontjából nagy jelentősége van az olyan irányításnak, amely a rendszer egészére vonatkozó optimalizálást a komplex matematikai apparátust felhasználó többraktáras, esetleg többtermékes modellek segítségével végzi, az egyes raktárak, egységek operatív gazdálkodását pedig egyszerű közelítő eljárások, például nomogramok felhasználásával teszi eredményesebbé. Ezen a területen — bár már történtek kísérletek — még jelentős fejlődésre számíthatunk.

A többraktáras készletgazdálkodási modellek jelentőségének felismerése vezetett akkor, amikor egy hosszabb időre tervezett kutatómunka első fázisaként feldolgoztam az idevonatkozó irodalmat. Bár teljességre nem törekedhettem (főként az irodalom egy jelentős részének hazai hozzáférhetetlensége miatt), úgy érzem, hogy az áttekintett modellek alapján egyrészt képet nyerhetünk az operációkutatás e téren elért eredményeiről, másrészt kiinduló alap áll rendelkezésünkre további modellek, eljárások konstruálására.

Azt, hogy a készletezésre vonatkozó vizsgálatunkat egy vagy több raktárra terjesztjük-e ki, a modellek osztályozásakor a változók közti relációk halmazának tulajdonságai közé sorolhatjuk. Ha e nézőpontból kiindulva kívánjuk pontosabban körülírni a többraktáras modelleket, a következő definíciót adhatjuk:

Többraktáras készletgazdálkodási modelleknek azon közgazdasági-matematikai modelleket tekintjük, amelyek készleteknek olyan rendszerekben történő elosztásával, átcsoportosításával, felhasználási és felújítási politikájával (illetve ennek optimalizálásával) foglalkoznak, ahol a rendszert alkotó raktárak egymással input—output kapcsolatban állnak, vagy állhatnak.

A feldolgozás fő eredményeit a következőkben megkísérlem ismertetni. Sajnos a rendelkezésre álló terjedelem nem teszi lehetővé a részletes fejtegetéseket, így csak igen tömören, a leglényegesebbnek vélt jellemzők felsorolásával ismertethetjük a modelleket, és nem nyílik mód ezen a helyen az értékelés, elemzés leírására sem.

A vizsgálatba bevont modellek osztályozását több szempont szerint elvégeztem és végül — a legalapvetőbbnek bizonyult jellemzők alapján — a következő négy csoportot képeztem:

I. Adott központ körül elhelyezett parallel raktárak elosztási modelljei
II. Többszintű raktárrendszerek elosztási modelljei.
III. Adott központ körül elhelyezkedő parallel raktárak optimális készletezési politikája.
IV. Hierarchikus raktárrendszerek optimális készletezési politikája.

Az alábbiakban a modelleket ebben a csoportosításban tárgyaljuk. A fenti alapcsoportokon belül a modellek tulajdonságait még a következő fő szempontok szerint vizsgáltam:

— időhorizont (statikus—dinamikus),
— a rendszerre vonatkozó ismeretek (determinisztikus—sztochasztikus),
— a termékek száma (egy—több termék),
— alkalmazott matematikai apparátus.

Ezek azonban már inkább az elemzés, mint a csoportosítás szempontjai. Természetesen a modellek egy jelentős részét nem lehet szeparáltan egyik vagy másik csoportba sorolni: a leglényegesebb jellemzők vizsgálata azonban lehetővé teszi az alapvető csoportok elválasztását.

Tekintettel a felhasználandó jelölések nagy számára, valamint arra a körülményre, hogy sok közülük több modellben is előfordul, célszerűnek látszik összefoglalásuk. Emellett — amennyiben szükséges — konkrét tartalmukra az egyes modelleknél is utalunk.

a: veszteség egységköltsége
b: segédváltozó
C: költségfüggvény
c: költségtényező
D: szállítás volumentől független költsége
d: szállítás lineárisan változó költsége
E: raktárhalmaz
$F(S)$: a kereslet eloszlásfüggvénye
$f(S)$: a kereslet sűrűségfüggvénye
f: index ($f = 1, 2 \dots g$)
G: függvénykapcsolat, rekurzív összefüggéseknél
g: függvénykapcsolat
H: változók halmaza
h: index ($h = 1, 2 \dots l$)
I: raktárban levő készlet
i: raktárak indexe ($i = 1, 2, \dots n$)
j: index ($j = 1, 2 \dots m$)
K: kapacitás
k: index ($k = 1, 2 \dots r$), máshol az iterációs lépések száma
L: függvénykapcsolat
M: várható érték
P: valószínűség
p: valószínűség
Q: készletmennyiség
R: raktározás volumentől független költsége
r: raktározás fajlagos költsége
$r^{(1)}$: a felhasznált termékek raktározásának egységköltsége
$r^{(2)}$: a felesleg után fizetendő raktározási költség
S: kereslet (felhasználás, szükséglet)
T: időtartam, időintervallum
t: időtartam, máshol idő-index
U: változók felső korlátja
u: változó

v: hiány fix költsége, máshol hiányköltség-függvény
v: hiány egységköltsége
W: profit, nyereség
w: egységnyi termékre jutó profit, nyereség
x: változó, készletmennyiség
y: változó, készletmennyiség
z: kritikus készletszint
Z: készletmennyiség, általában a rendelés volumene
α: szorzókonstans; $\alpha > 1$
β: szorzókonstans; $0 < \beta < 1$
Γ: rendelés fix költsége
γ: rendelés egységköltsége
δ: kijelölő változó
Δ: növekmény, különbség
∂: parciális derivált jelölése
ε: készletszint
η: hiány várható értéke
μ: visszautasított rendelések várható értéke
ν: index
ξ: valószínűségi változó
Π: egységnyi fel nem használt készlet értékcsökkenése
σ: szórás
τ: időtartam
Φ: függvénykapcsolat
φ: függvénykapcsolat
χ: változó
ω: felesleg várható értéke

I. Adott központ körül elhelyezett parallel raktárba történő készletelosztás

A modelleknek ebbe a csoportjába azokat soroltam, amelyek valamely központ (gyártó mű, központi raktár) körül elhelyezkedő, egyenrangú raktárak közötti optimális készletelosztással foglalkoznak. Ezen modellek döntő többsége egytermékes, statikus, sztochasztikus modell, de néhány más típust is bemutatok.

Az elosztási feladatok legáltalánosabb megfogalmazását HANSSMANN-nél találjuk [17], mint az újságárus-probléma általánosítását. Az újságárusnak Q mennyiségű tőkéje van, amelyet különböző újságokba fektethet. Az egyes újságtípusokba (n-féle típus van) való befektetés pénzértéke x_i. Ha $M(W_i(x_i))$ jelöli az egyes újságokból származó nyereség x_i-től függő várható értékét, akkor a feladat az alábbi módon fogalmazható meg:

$$x_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = Q$$

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M\left(\sum_{i=1}^{n} W_i(x_i)\right) \to \max$$

A megoldáshoz konstans Δ növekményű befektetéseket feltételez és a differenciális nyereség rangsorolásával adja meg az optimális elosztást. A módszer egyszerűen kiterjeszthető nem osztható befektetésekkel (gépek, tervek stb.) kapcsolatos elosztási problémákra is. Az eltérő megfogalmazás ellenére a feladatnak készletelosztási problémaként való kezelhetősége evidens.

A hazai irodalomban DENKINGER GÉZA modellje [10] foglalkozik ilyen típusú feladat megoldásával. A modell alapját képező probléma betonacélkészletek optimális elosztásával kapcsolatban lépett fel és azt vizsgálja, hogy egy adott ellátó üzem hogyan ossza szét a feldolgozó üzemeknek az általa egy, adott időszakban termelt félkésztermékek mennyiségét úgy, hogy a feldolgozó üzemeket együttesen a lehető legkisebb költség terhelje. Az ellátó üzem minden termékét szétosztja. A modellt a szerző a feltételi rendszer különböző változataira írja fel, először determinisztikus, majd sztochasztikus esetre. Az első változatban a feldolgozó üzemeket raktározási költség csak a szükségleten felüli mennyiség tárolásával kapcsolatban terheli, ezen mennyiség felülről korlátozva van.

Adott és konstans az egyes feldolgozó üzemekre vonatkozólag a szükséglet, a raktárkapacitás (a szükségleten felüli mennyiségre!), a raktározás és a hiány egységköltsége.

A fentiek alapján a modell az ismertetett jelölésekkel a következőképpen írható fel:

$$0 \leq x_i \leq S_i + K_i \quad (i = 1,2, \ldots n)$$

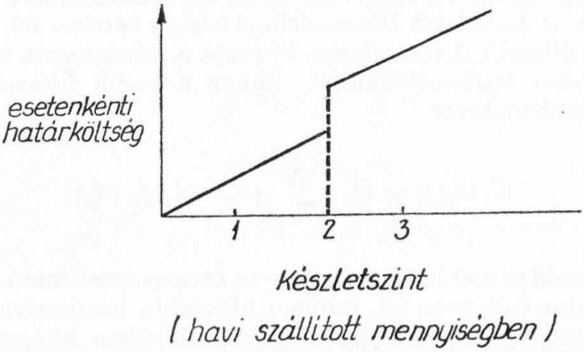
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = Q$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i = \sum_{i=1}^{n} \{v_i \max\,(0; S_i - x_i) + r_i^{(2)} \max\,\big(0; \min\,(K_i; x_i - S_i)\big)\}$$

A feladat megoldását az üzemeknek a fajlagos költségek szerinti sorbarendezésével könnyen megkaphatjuk, tekintetbe véve a szétosztandó anyag mennyisége és az igények közt fennálló nagyságrendi összefüggést.

A modellt további változataiban a szerző az összes raktározási költség, továbbá a szállítási költség figyelembevételével bővíti — ez utóbbi esetben a modell egyszerű szállítási feladatként fogalmazható meg. Leglényegesebb továbbfejlesztése a modellnek az elosztandó mennyiség folytonos valószínűségi változóként való kezelése, ahol a megoldást az előző esetekhez hasonló módon, sorbarendezési eljárással nyerhetjük.

Lényegében analóg feladat megoldását tárgyalja EAGLE [11]. A matematikai modell leírása nélkül ismerteti esettanulmányát, amely a Hawai-i Ananász Társaság idénykészletének elosztásával foglalkozik. Terméke — jellegének megfelelően — kifejezetten idénytermék, amelyet konzervként szállítanak az Egyesült Államokban levő raktárakba. Minden raktár egy adott területet szolgál ki, amelynek ismert a kereslete. A társaság politikája kizárja az egyes raktárak közti szállítás lehetőségét, valamint a készleteknek egyik idényből a másikba való átvitelét. Az egyes raktárak különböznek egymástól a raktározási költségben, valamint az adózás időpontjában. Amikor egy szállítmány megérkezik a kontinensre, úgy kell elosztani, hogy a hiány és az adó költsége a minimális legyen. Ha egy adott készletszinthez tartozó jövőbeli teljes raktározási költség a készletszint négyzetével arányos, ebből következik, hogy a raktározás határköltsége a készletszint lineáris függvénye. Mivel a készletszintet a havi szállítások mennyiségével mérjük, a határköltségnek az adózás miatti megugrása az ábrán látható módon beépíthető a rendszerbe.



Ilyen ábrákat minden raktárra elkészíthetünk, a határköltségek egyenlővé tétele útján az optimális elosztás meghatározható. Az optimális elosztás operatív megszervezésére retrospektív szimulációs eljárást alkalmaztak.

Szintén szimulációs módszerrel oldott meg elosztási problémát WEINSTOCK [39], ismerteti [14]. Tartalékalkatrészt forgalmazó vállalat szétszórt raktárhálózata számára határozta meg az optimális elosztást, a kereslet és a beszerzési idő valószínűségeloszlásának szimulálásával. Tízezer hétre (200 év) játszották le az átlagos heti kereslet különböző értékeit. Így minden értékhez egy olyan görbét kaptak, amely a készlethiányból származó veszteséget mutatja a raktárkészlet nagyságának függvényében.

Raktárhálózat kezdeti készleteinek a szükségleteknek megfelelő újraelosztását, átcsoportosítását optimalizálja RÜZSIKOV [29]. Feltételezi, hogy ismert a szükséglet sűrűségfüggvénye minden raktárra nézve, adottak a raktárakban levő kezdeti mennyiségek és azt vizsgálja, hogyan kell átcsoportosítani a készleteket, hogy a szállítási és hiányköltségek összege minimális legyen. Jelölje H^+ azon raktárak halmazát, ahonnan elszállítunk, H^- azokét, amelyekbe szállítás történik az újraelosztás során. Ekkor a költségfüggvény a következő módon írható fel:

$$C = \sum_{j \in H^-} v_j \int\limits_{I_j + \sum\limits_{i \in H^-} y_{ij}}^{\infty} (S - I_j - \sum_{i \in H^+} y_{ij})\, f_j(S)\, dS +$$

$$+ \sum_{i \in H^+} v_i \int\limits_{I_i - \sum\limits_{i \in H^-} y_{ij}}^{\infty} (S - I_i + \sum_{j \in H^-} Y_{ij})\, f_i(S)\, dS +$$

$$+ \sum_{j \in H^-} \sum_{i \in H^+} d_{ij} y_{ij} \to \min.$$

Ekkor az egyes raktárakban levő optimális készleteket az integrálok alsó határai állítják elő. Az egyes relációkban történő szállítások optimális mennyiségét (a modell tulajdonképpeni változóját) a függvény minimumpontjának a klasszikus szélsőértékszámítás segítségével történő meghatározása útján állíthatjuk elő.

Hasonló újraelosztási problémát ábrázol dinamikus modell keretében BERMAN [5]. Olyan raktárrendszert vizsgál, amelyben a vizsgálat elején adott készletmennyiség egyenlően van elosztva az egymástól ismert távolságra levő raktárak között. A keresletet Poisson-eloszlásúnak tételezi fel. Az átcsoportosítás késésideje állandó. A vizsgálatba bevonja a készletezett termékek raktáranként különböző értékcsökkenését. Ekkor a t-edik időszakban az egyes raktárak költségfüggvénye:

$$C_i(I_i; t) = \Pi_i \sum_{S_y = I_i + 1}^{\infty} (S_y - I_i) f_{it}(S_y)$$

Monte-Carlo-módszerrel határozza meg az átcsoportosítandó mennyiségeket. Fiktív időperiódusokat vesz fel, minden időszakra meghatároz egy, a t-edik időszaki szállítás (S_y) egységköltségének százalékában kifejezett β_t változót ($0 \leq \beta_t \leq 1$). Alternatív β_t értékekre végzi el a szimulációt, és a rendszer várható költségeit kiszámítva minden esetre azt a β_t-t választja, amely a minimális költséget adja.

MINAS és MITTEN modellje [25], ismerteti [17] a gyakorlathoz közelálló kettős készletezési problémát fogalmaz meg: a termékek készletezésének optimalizálása mellett a szállításhoz felhasznált, adott nagyságú gépkocsiállomány lehető legjobb elosztását is biztosítani kell. A modell dinamikája a kereslet időtől függő voltában, valamint a döntéseknek a jövőre gyakorolt közvetlen hatásában rejlik. A modell elsődlegesen a gépkocsik optimális elosztását célozza, meglehetősen általános alakban felírva: a raktározási, szállítási költségek teljes elhanyagolásával a hiányból és a gépkocsik üresjáratából származó veszteséget minimalizálja.

Érdekes áttekintést ad az elosztási problémák néhány gyakorlati vonatkozásáról MAGEE [22]. Megoldáshoz az esetek nagy részében felhasználhatónak tartja az ismert szállítási algoritmus valamely változatát. Emellett egy szellemes grafikus közelítő eljárást ismertet VIDALE [38] nyomán. Ismerve a területegységenként jelentkező igényeket, a forrásokból (raktárakból) az egyes területegységek ellátásának költségeit, ezeket egy költségtérképpé dolgozza fel. Költségdifferenciagörbék segítségével határozható meg az egyes raktárak által ellátandó terület (és ezen keresztül az egyes raktárakban tartandó készlet) nagysága.

Többtermékes, parallel raktárak közötti elosztásra szolgáló modellként kezelhető a HANSSMANN-nél [17] szereplő, repülőgépek elosztásának optimalizálására szolgáló eljárás. Különböző típusu repülőgépek segítségével bonyolítható le a forgalom több útvonalon. Jelölje a „j" index a különböző típusú repülőgépeket, „i" pedig a különböző útvonalakat. Adott az egyes típusú repülőgépek száma (K_j) és a kereslet eloszlása minden útvonalra. A keresletet diszkrét eloszlású valószínűségi változóként kezeli, ahol az egyes keresleti szintek (S_{hi}; $h = 1, 2 \ldots l$) felülről korlátozzák a hozzájuk rendelendő kapacitásokat (K_{hi}). A „j" repülőgép kapacitása az „i" útvonalon K_{ij}, a szállítási költség d_{ij}. Jelentse p_{hi} az egyes keresleti szintek elérésének valószínűségét, W_i az i-edik útvonalon kielégített egységnyi kereslet hozamát, x_{ij} pedig az i-edik útvonalra kijelölt „j" típusú repülőgépek számát.

Ekkor a feladat a következőképpen írható fel:

$$x_{ij} \geq 0 \text{ és egész!}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = K_j$$

$$\sum_{j=1}^{m} K_{ij} x_{ij} = \sum_{h=1}^{l} K_{hi}$$

$$0 \leq K_{hi} \leq S_{hi}$$

$$\sum_{i=1}^{n} W_i \cdot \sum_{h=1}^{1} p_{hi} \cdot K_{hi} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} x_{ij} \to \max$$

II. Többszintű rendszerek; hierarchikus raktárrendszerek elosztási modelljei

A hierarchikus rendben egymást követő raktárak rendszerével foglalkozó modellek döntő többsége az optimális készletezési politika kialakításával is foglalkozik. Ezeket később fogjuk tárgyalni. Ebben az osztályban olyan modelleket ismertetünk, amelyek három szinten (pl. gyártómű → kereskedelem → felhasználó) történő készletezéssel, optimális elosztással foglalkoznak — az egyes szinteken paralell raktárakat is megengedve. Nyilvánvaló, hogy ezek a modellek az I. részben tárgyaltaknak általánosításaként kezelhetők.

Raktárhálózat—telepítés problémát ismertet, a termeléssel és a szállítással összefüggésben BAUMOL és WOLFE [4]. Jelölje y_{fij} az f-edik gyárból ($f = 1, 2 \ldots g$) az i-edik raktáron át ($i = 1, 2, \ldots n$) a j-edik felhasználóhoz ($j = 1, 2 \ldots m$) szállított mennyiséget. A gyárak és a raktárak kapacitása korlátozott és ismert a felhasználók igénye is. $x_{fij}(y_{fij})$ jelöli a szállítástól függő raktározandó mennyiséget. Ekkor a modell:

$$y_{fij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_{fij} = K_f$$

$$\sum_{f=1}^{g} \sum_{j=1}^{m} x_{fij}(y_{fij}) \leq K_i$$

$$\sum_{f=1}^{g} \sum_{i=1}^{n} x_{fij} = S_j$$

$$\sum_{f=1}^{g} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} C_{fij}(y_{fij}) \to \min$$

A megoldáshoz a feladatot lényegében két szeparált szállítási feladatra bontja, a gyár → raktár és a raktár → felhasználó viszonylatokban.

A költségfüggvényt a két relációnak megfelelően felbontja és a megoldást rekurzív formula alkalmazásával állítja elő.

Azonos problémán alapuló modellt ismertet JÁNDY GÉZA [18]. Az előzőekben használt jelölésekkel a modell a következő:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{fi} \leq K_f$$

$$\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \leq K_i$$

$$\sum_{f=1}^{g} y_{fi} \leq K_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = S_j$$

$$\sum_{f=1}^{g} K_f \geq \sum_{j=1}^{m} S_j$$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i \geq \sum_{j=1}^{m} S_j$$

$$y_{fi};\, y_{ij} \geq 0$$

$$C = \sum_{f=1}^{g} \sum_{i=1}^{n} d_{fi} y_{fi} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} d_{ij} y_{ij} + \sum_{f=1}^{g} C_f \left(\sum_{i=1}^{n} y_{fi} \right) + \sum_{i=1}^{n} r_i \left(\sum_{j=1}^{m} y_{ij} \right) \to \min.$$

A költségfüggvény négy tagja közül az első kettő a gyár → raktár, illetve raktár → felhasználó relációkban történő szállítás költségeit fejezi ki (lineáris függvények). A harmadik tag a termelés, a negyedik a raktározás volumentől függő költsége — ezen két függvény típusára nem tesz kikötést. Ha ezek is lineárisak, akkor a feladat a lineáris programozás módszereivel megoldható. Ha ez nem teljesül, akkor lineáris programozások sorozatával közelíthetünk.

Többtermékes modellt ad a három raktárszint: a gyártómű, a nagykereskedelmi vállalat és a felhasználó raktárai közötti elosztásra URBANEK [36], a rendszer egészére feltételezve az összefüggések linearitását. Feltételezi, hogy a raktárak kapacitása, valamint az egyes termékek kereslete korlátozott. Jelölje az „f" index a gyártóművet, az „i" a nagykereskedelmi vállalatot, a „j" a felhasználót, a k ($k = 1, 2, \ldots r$) a termékfajtát. Ekkor a modell a szokásos jelölésekkel a következőképpen írható fel:

$$x_{kf};\, x_{ki};\, x_{kj} \geq 0$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_{kf} = K_f \qquad \sum_{k=1}^{r} x_{ki} = K_i$$

$$\sum_{k=1}^{r} x_{kj} = K_j$$

$$\sum_{f=1}^{g} x_{kf} + \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + \sum_{j=1}^{m} x_{kj} = S_j$$

$$C = \sum_{f=1}^{g} C_{kf} x_{kf} + \sum_{i=1}^{n} C_{ki} x_{ki} + \sum_{j=1}^{m} C_{kj} x_{kj} \to \min.$$

Az egységköltségek a szállítási, raktározási stb. költségeket tartalmazzák. Ilyen — elég erős — kikötések mellett a probléma egyszerű lineáris programozási feladat alakját ölti.

III. Adott központ körül elhelyezkedő parallel raktárak optimális készletezési politikája

Bonyolultabb problémákkal találkozunk, ha a készletek elosztásán kívül a velük kapcsolatos egyéb műveletek optimális végrehajtására is törekszünk. A rendelési eljárás, az utánpótlási idő megválasztása, a készleteknek egyes raktárak közötti átcsoportosítására vonatkozó szabályok és egyéb kritikus értékek meghatározása az alkalmazott matematikai apparátust is bonyolítja. A legáltalánosabban vizsgált eset: egy központi elosztó raktár és n körzeti ellátó raktár optimális politikájának kialakítása. Fontos megkülönböztetés, hogy a modellek megengedik-e (s ha igen, milyen feltételek mellett) az egyes raktárak közötti közvetlen szállítást.

Gross modellje [15] olyan rendszerre vonatkozik, amelyben egy központi forrás körül elhelyezkedő raktárak bármelyikébe elhelyezhető a vizsgált egyetlen termék. A raktárak közvetlenül egymásnak is szállíthatnak. A készletezési politikának két alapvető esete lehetséges, 1. az egyes raktárak független politikát folytatnak egyedi érdekeik szerint, 2. centralizálják a döntéseket az egész rendszer igényeinek megfelelően. Ennek közvetlenül belátható előnyei vannak. Időnként például bizonyos raktárak túlterhelődhetnek, mások üresen maradhatnak és ekkor az átszállítás gazdaságos lehet, és gyorsan elvégezhető. Ezzel szemben viszont bonyolultabb készletezési politika és nagyobb központi apparátus szükséges.

Az utóbbi típusnak megfelelő, sztochasztikus modellt alakít ki, amely minimalizálja a rendszer egy időszakra vonatkozó összes költségét. Nincs akadálya, hogy az eljárást a legutóbbi információk felhasználásával minden időszak elején megismételjük.

A modellt először két raktárra írja fel. Jelölje „i" a raktárak indexét, ($i = 1, 2$). Adott a rendelés előtti készletszint (I_i). Raktározási költség ($r_i^{(2)}$) csak az időszak alatt fel nem használt készletekkel kapcsolatban merül fel. A rendelés fix költsége elhanyagolható, a volumennel lineárisan változó költség egysége γ_i. Utánpótlási idő elhanyagolható, viszontszállítás és a rendszerből kilépő egység nincsen.

Ekkor a célfüggvény a következőképpen írható fel: x_i jelentse a rendelés utáni készletszintet, az y a raktárak közötti szállítást ($y > 0$, ha $2 \to 1$ relációban szállítunk, ellenkező esetben $y < 0$).

$$C = \gamma_1 (x_1 - I_1) + \gamma_2 (x_2 - I_2) + d\,|y| + r_1^{(2)} \int_0^{x_1+y} (x_1 + y - S) f_1(S)\, dS +$$

$$+ v_1 \int_{x_1+y}^{\infty} (S - x_1 - y)\, f_1(S)\, dS +$$

$$+ r_2^{(2)} \cdot \int_0^{x_2-y} (x_2 - y - S) f_2(S)\, dS + v_2 \int_{x_2-y}^{\infty} (S - x_2 + y) f_2(S)\, dS$$

(ahol $x_1 = I_1$, $x_2 = I_2$ az induláskor).

A megoldáshoz a klasszikus szélsőértékszámítást használja fel. Két raktár esetén a parciális deriváltak segítségével meghatározza a különböző lehetséges esetekre (amelyek a rendelés előtti és utáni készletszinthez tartoznak) vonatkozó alpolitikákat és így állítja össze a rendszer egészének politikáját. A modellt ezután „n" raktár esetére bővíti, és a költségfüggvény formális átalakításával (az egyes raktárak által rendelendő és az átcsoportosítandó mennyiségek függvényében) iterációs eljárást alkalmaz. Mindkét javasolt eljárás jól áttekinthető és viszonylag egyszerűen végigvihető.

Nagy jelentőséggel bír HADLEY és WHITIN modellje [16]. Ez egylépcsős készletezési modell „n" központilag ellenőrzött ellátó raktárral. A beszerzést az egész rendszerre vonatkozólag a központ végzi, amely folytonosan informálva van minden raktár készletszintjéről. A kereslet az egyes raktárakból elégíthető ki. Ha a készlet nem elegendő, a kereslet elvész. Feltesszük, hogy a kereslet minden raktárral szemben S_i paraméterű Poisson-elosztású valószínűségi változó, amely az idővel nem változik. A telephelyek közötti újraelosztásnak két módja van, gyors és lassú szállítás útján történhet. A modell célja, hogy döntési szabályt adjon:

1. mikor és mennyit kell rendelni,
2. a beszerzéseket hogyan osszák szét,
3. mikor és mennyit osszanak újra az egyes raktárak között és melyik (gyors vagy lassú) módon.

A cél a beszerzés, rendelés, készletezés, a központból a raktárba történő szállítás, a rendszer egészére és az egyes raktárakra vonatkozó hiány, valamint a telepek közötti újraelosztás költségeinek minimalizálása.

Az optimumszámítást több lépcsőben végzik el, öt típusú változó mennyiségre vonatkozólag, ezek:

— A rendszer összkészletének kritikus szintje (z) (ahol a központ a rendelést feladja).
— A központ által rendelendő mennyiség (Z).
— Az egyes raktárak részesedése a központ készletéből.
— Az átcsoportosítás kritikus készletszintjei (gyors és lassú esetre) minden raktárban.
— Az egyes raktárak közt szállítandó mennyiség.

Az első lépésben a z és Z meghatározásához a rendszer egészére vonatkozó költségfüggvényt írunk fel. Kihasználják azt, hogy n db Poisson-eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson-eloszlású, amelynek paramétere megegyezik az eredeti paraméterek összegével — így nyerik a rendszer egészére vonatkozó kereslet várható értékét. A volumentől függő költségekre érdekes kikötést tesznek: az időszak alatt fellépő összes mennyiséggel (amely éppen az összkereslettel egyenlő) lineárisan változik, de a költségszorzó értéke függ az egyszerre rendelt mennyiségtől. A készletezés egységköltsége a rendelés egységköltségének adott hányada, és ez a költség a hiány egységköltségében is megjelenik.

A második lépése a modellnek, hogy dinamikus programozási eljárással meghatározza az átcsoportosítási szabályt. Minden időszakban csak egy raktár jut ezen az úton készletkiegészítéshez. Ennek a raktárnak a költsége az átcsoportosítás során kapott készlet összegétől függ, a többi raktáré pedig a készletérték és a szállítási idő függvénye — a rendszer egészét terheli még a szállítási költség. Az eredeti modell analitikus részletezésben tárgyalja a költségfüggvényt — annak terjedelmes és komplex volta miatt e dolgozat keretében leírására nem vállalkozhattunk. Az elosztásra vonatkozó eljárás a megelőző osztályba sorolt modellekhez hasonló elgondoláson alapul: a fentebb megállapított optimális rendelt mennyiséget kell úgy elosztani a raktárak között, hogy a készletezési és szállítási költségek összege minimális legyen. Az elosztás során természetesen tekintettel vannak a kereslet és a kritikus készletértékek alakulására. A modell a valósághoz közelállóan fogalmazza meg a problémát, minden jelentős tényezőt bevon a vizsgálatba — ennek ára viszont a szerkezetnek és megoldó algoritmusnak nagyfokú komplexitása.

Könnyebben kezelhető — de kevésbé komplex SIMPSON [31] modellje. Egy termék n raktár közötti elosztásával foglalkozik. Ő is feltételezi, hogy ha a készlet egy kritikus z_i érték alá csökken, a készletet sürgősen kiegészítik — a kiegészítés költségeként egy konstans, és egy, a sürgős utánpótlás eseteinek számával arányos tényezőt ad meg.

Feltételezi, hogy helyes gazdálkodás esetén legfeljebb egyszeri kiegészítésre van szükség. Feltételezi, hogy az induló készlet az egyes raktárakban 0, és az időszak során x_i mennyiséget kap a raktár. Összes elosztandó mennyiség:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = Q .$$

Ekkor az átcsoportosítás várható teljes költsége:

$$C = \sum_{i=1}^{n} c_i P(S_i \geq x_i - z_i) ,$$

ahol

$$x_i \geq 0 \text{ és } \sum_{i=1}^{n} x_i = Q ,$$

továbbá $P\ (S_i \geq x_i - z_i)$ annak valószínűsége, hogy a szükséglet az i-edik raktárban akkora, hogy a készlet a kritikus szintre süllyed.

A feladat a C költségfüggvényt minimalizáló és a feltételeket kielégítő x_i értékek meghatározása. Bebizonyítja, hogy a minimális költségű elosztás szükséges feltétele, hogy

$c_i \cdot f_i\ (x_i - z_i)$ konstans legyen, ahol $f_i(S_i)$ a kereslet sűrűségfüggvénye. Ez nyilván diszkrét esetre is igaz, így:

$c_i P(S_i = x_i - z_i) =$ konstans az optimum feltétele.

A feladatot hasonló megfontolásokkal oldhatjuk meg a hiány megengedése (cél: a veszendőbe ment kereslet vagy a várható hiány minimuma) esetén.

Egy sok raktárral rendelkező értékesítő szervezet számára dolgozott ki a rendelési pontokat és mennyiségeket meghatározó többtermékes modellt CLARK [6], ismerteti [15]. A forgalomról feltételezi, hogy olyan időtől nem függő elosztást követ, amelyet három paraméterrel adhatunk meg. Az eloszlásnak két maximuma van, mivel a vevők részben nagyvállalkozók, részben kisvállalkozók. A szállítási idő nem-normális eloszlású véletlen változó.

A rendszer jellegzetessége, hogy az esetek 90%-ában, ha egy megrendelés valamely raktárból nem elégíthető ki, a vevő vár, amíg

a) a szállítás a gyárból beérkezik,
b) valamelyik másik raktár szállít.

A költségfüggvény (amelynek változói a rendelési idő és a rendelt mennyiség) minden cikk és minden raktár esetében különböző minimumát kell meghatározni.

Tetszőleges számú felhasználó és gyártómű, valamint egy központi raktár készletgazdálkodásának optimalizálását szolgálják MEGYERI—MESZÉNA—SZÉP modelljei [24]. Négy változatot dolgoztak ki, amelyeknek feltételrendszere kisebb-nagyobb mértékben eltér egymástól.

Az alapváltozatban a következő feltételezésekkel élnek: Egy meghatározott cikk (a modell tulajdonképpen többtermékes: az egyes termékek készletezése azonban egymástól függetlenül folyik, és csak a raktárkapacitás kitöltése szempontjából van számításba véve a termékek különböző volta), termelése különböző helyeken telepített üzemekben folyik, egy központi raktár készletez, s a felhasználás is szétszórt hálózatban történik. A szükségletek kielégítésére import is igénybevehető. A felhasználók ellátása egyaránt történhet a központi raktárból és közvetlenül a gyártó művekből. Adott a megrendelések és szállítások rendje mind a gyártó vállalatok, mind az import esetében. Ismert a szükséglet időszakonként (minden időszakot m kisebb egységre bontanak) és körzetenként. Adott a központi raktár kapacitása. A hiány összköltsége a hiány átlagos nagyságával és időtartamával lineárisan változik. A felhasználás az egyes vállalatoknál egyenletes.

Az első modellváltozat alapján kiszámítható a központi raktárban és a felhasználóknál összesen tartandó készletek optimális nagysága, majd a szerzők annak kritériumát adják meg, hogy mely felhasználók kapjanak készletet közvetlenül a gyártó műből és melyek a központi raktárból. A szóba jöhető variációk nagy száma miatt ez nehéz feladat, de az alkalmazott mintavételi eljárás szellemesen hidalja át a nehézségeket.

Diszkrét és folytonos változatban is kidolgozták a modell részletesebb változatát, ahol szintén a művi és raktári ellátás minimális költségű kombinációját határozták meg. Először a diszkrét változatot ismertetjük. Ha összesen n felhasználó van, és ebből k számút ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$) vonunk be a raktári ellátásba, akkor $n - k$ felhasználó részesül közvetlenül művi ellátásban.

Mivel a két ellátási mód egymást kizárja, maximálisan

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

lehetőség van. A feladat e lehetőségek közül egy olyan k-ad osztályú kombináció kiválasztása, amely a minimális költséget eredményezi. A célfüggvény ekkor

$$C(k; \nu_j) = \sum_{\nu_j=0}^{k} S_{\nu_j} r_{\nu_j} + \sum_{j=k+1}^{n} S_{\nu_j} \bar{r}_{\nu_j} + \left(R + r'S + r''Q(S) \cdot S\right),$$

ahol r_i a raktári ellátás esetén az i-edik felhasználó egységnyi költsége (a raktár költségei nélkül), $\bar{r}_i$ a művi ellátás fajlagos költsége, R a központi raktár viszonylag állandó, r' a forgalommal, r'' az átlagos készlettel lineárisan változó költség $Q(S)$ az egységnyi forgalomra eső átlagkészlet, S_i az i-edik raktár forgalma, ν_j a k-ad osztályú kombinációkba sorolt fogyasztókat jelenti, és

$$S = \sum_{j=0}^{k} S_{\nu_j}$$

Így az összeg első tagja a raktári, második tagja a művi ellátás összköltsége, harmadik tagja pedig a központi raktár költsége.

A megoldáshoz sorbarendezzük a fogyasztókat a művi ellátással szemben raktári ellátással elérhető fajlagos (egységnyi felhasználásra eső) megtakarítása $(\bar{r}_{\nu_j} - r_{\nu_j})$ szerint. A raktári ellátás bővítésével a forgalom összköltsége mindaddig csökken, míg a felhasználóknál elérhető megtakarítás növekménye meghaladja a központi raktár költségeinek növekményét.

NADDOR és SALTZMANN azt vizsgálja, hogy egy ellátó rendszer területi raktárai időszakonként hányszor rendeljenek és a készletezett termékféleségek közül melyiket, ha az egyszeri rendelés költsége egy állandó és egy, a rendelt cikkfajtákkal lineárisan változó költségtényező összege.

A kereslet az egész időszakra előre ismert. Ez elég erős korlátozás — az egyenletes felhasználás feltételezése azonban az általánosság még ennél is jelentősebb megszorítása. Ilyen kikötések mellett azonban a felhasználandó algoritmus igen egyszerűvé válik. A modell szerkezetének megváltoztatása nélkül bevezethető azonban a véletlenszerűen jelentkező kereslet. Minden költségelem lineárisan változó. A szerzők által javasolt politikák közül egyértelműen kiválasztani a legjobbat csak a konkrét költségadatok alapján lehet. A vizsgált esetek többségében a probléma tulajdonképpen egyraktáras — ugyanis az egyes raktárak egymástól függetlenül készleteznek.

FABRYCKY és BANKS [12] másoktól eltérő módon, a beszerzés oldaláról csoportosítja a készletezési rendszereket. Azt vizsgálják, hogy adott terméket (vagy termékeket) melyik raktárból (vagy raktárakból) célszerű beszerezni. A függőségi kapcsolatot is a termékek és nem a források között tételezik fel és így a modellek tulajdonképpen visszavezethetők az egy termék, egy forrás esetre. Feltételrendszerükben a forrás megválasztásától függ a késésidő, a tétel és beszerzési költség.

Szintén FABRYCKY és BANKS a [13] cikkében az előzőekben leírt alapállásban közöl egy többtermékes, több forrás esetére kidolgozott determinisztikus modellt. A modell célja, hogy meghatározza a rendelési szintet, mennyiségeket és forrást, úgyhogy az időszak összes költsége az egész rendszerre nézve minimális legyen. Feltételezik, hogy a j-edik termék egysége a raktár diszkrét b_j térfogategységét foglalja el. A maximálisan felhalmozható készlet az egyes termékekből K_j, az egész raktárkapacitás K. Ekkor a cél az, hogy a következő függvény minimumát adó beszerzési és készletezési politikát találjuk meg.

$$C(K_1 \cdot b_1; K_2 b_2; \dots K_m b_m) = g_1(K_1 b_1) + g_2(K_2 b_2) + \dots + g_m(K_m b_m)$$

olyan feltételek mellett, hogy

$$K_j b_j \geq 0 \; (K_j \text{ egész})$$

$$\sum_{j=1}^{m} K_j b_j \leq K$$

A rendszer készletezési politikája abban áll, hogy ha a készlet adott z értékre csökken, utánarendelünk Z-t.

A megoldáshoz a költségfüggvényre táblázatot adnak, az optimumot dinamikus programozással határozzák meg.

Ezen feladat speciális esetének fogható fel az egy termék — több forrás modell: ekkor egylépcsős dinamikus programozási feladatot kell megoldani.

A fenti szerzőkhöz hasonló javaslatot tesz a többraktáras rendszerek kezelésére STARR és MILLER [34]. Rámutatnak, hogy az általuk vizsgált feltételek között a probléma visszavezethető a több cikk — egy raktár modellek megoldására. Ha az egyes raktárak függetlenek, a megoldás evidens, ha pedig időszakonként beküldik igényeiket a központi raktárba, amely központilag intézi a rendelést, és az egyes raktárak szükséglete, költségtényezői eltérőek, ez úgy fogható fel, mint az előző probléma (több termék — egy raktár) megfordítása: az előzőekben az egyes cikkekhez rendelt költségeket itt az egyes raktárakhoz rendelik.

IV. Hierarchikus raktárrendszerek optimális készletezési politikája

Raktárak egymást követő elhelyezése esetén minden lépcső (fokozat) egyazon cél elérésére törekszik, amely cél a legutolsó lépcsőnél jelentkezik közvetlenül (pl. a kereslet kielégítése) — ezért ez a szint áll az érdeklődés középpontjában. A megelőző szintek készletei csak segédszerepet töltenek be. Az ilyen típusú modelleknél megválaszolandó két fő kérdés:

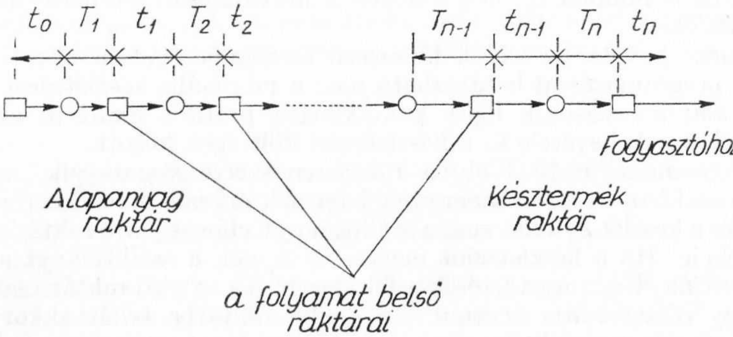
1. Legyen-e készlet egy adott szinten?
2. Ha igen, mi legyen ezen szint készletezési politikája?

Igen ötletes megközelítése a problémának az újságárus-probléma egy másik általánosítása, amelyet HANSSMANN [17] ad meg. Egy adott időszakban legyen S kereslet $F(S)$ sűrűségfüggvénnyel valamilyen késztermékre vonatkozólag. A termelési folyamat során négy szinten készleteznek: nyersanyag formájában (3), félkésztermék formájában (2,1) és késztermékként (0). A fel nem használt készletre vonatkozó egységnyi veszteség $r_i^{(2)}$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Minden kielégített rendelés (az utolsó, 0 szinten) w egységnyi profitot eredményez (w nem tartalmazza $r_i^{(2)}$-t). Kielégítetlenség esetén csak a fogyasztók bizonyos %-a hajlandó várni. Amikor a 0-dik szinten elfogy a készlet, β_1 % kielégítetlen keresletet továbbítanak az 1. szint felé.

Innen tovább (ha 1-en, illetve 2-n jelentkezik kielégítetlen kereslet) β_2%, illetve β_3% megy. Az a kereslet, amit a 3. szint sem tud kielégíteni, elvész. A feladat annak meghatározása, mekkora mennyiséget (Q_i) tároljanak az egyes szinteken, hogy a várható profitot maximalizálják. A megoldáshoz a klasszikus szélsőértékszámítást alkalmazzák.

SIMPSON [32] egy olyan nagyvállalat készletezési rendszerének modelljét konstruálta meg, amely egyetlen terméket hoz létre műveletek sorozatával. A „befejezetlen" terméket minden művelet után raktározzák — ha a munkafázisnak — ez lehet egyszerűen szállítás is — vége, a raktárba viszik és onnan megy tovább. A folyamatot a következő ábrán láthatjuk.

Gyártási folyamat belső raktározással



Az ábrán a □ jelöli a raktárakat, a ○ az egyes gyártási (szállítási) fázisokat.

Amikor valamely raktárba rendelés érkezik (tehát kereslet van a „befejezetlen" termékkel szemben is), ezt azonnal kielégítik, ha van készlet. Ha nincs, továbbítják a rendelést az alacsonyabb szintek felé (legyártják a terméket), és az végigfut az egész rendszeren. A rendelést adott t_i időn belül ki kell elégíteni (azaz: minden szintről továbbítani kell a felette levő lépcső számára). Feltesszük, hogy az alapanyag és a végtermék iránti kereslet azonnal kielégíthető, azaz

$$t_n = t_0 = 0\,,$$

míg a többi t_i értékek a rendszer készletezési politikájának döntési változói.

Egy rendelés (ebben a modellben minden szintre azonos értelemben tekintjük a kereslet fogalmát) kielégítésének ideje két tényezőből tevődik össze: a megelőző szint raktárából való szállítás és a megfelelő termelési fázis időszükségletéből (ezek egyike vagy mindkettő lehet 0 is!). A maximálisan elfogadható késésidő a rendszer politikájától függ. Kritikus az egész folyamatra nézve az az elhatározás, hogy mekkora maximális keresletre készüljenek még fel (a hiányból származó veszteségeket nem veszik figyelembe) — a modell megfogalmazása teljesen általános, így tetszőleges érték vehető fel. A kereslet várható értékét és szórását a kiszolgálási idő függvényében írja fel és a várható raktározási költséget (raktáranként különböző, lineáris költségtényezővel számolva) minimalizálja.

A legáltalánosabban HANSSMANN [17] fogalmazza meg az eddigiekben tárgyalt problémát. Simpsonhoz hasonlóan felteszi, hogy a normális eloszlású kereslet várható értéke és szórása a maximális kereslet és a késésidő függvénye. Az első változatban, ahol csak egyetlen szinten lehet készletet tartani, a várható bevétel és kiadás különbségét maximalizálja: előbbi a legfelső szinten történő eladásból származik, az utóbbi az átlagkészlet lineáris függvénye.

A profit várható értékét minden szintre kiszámítja és a legnagyobbat választja — ez, miután itt csak három szintet tételez fel, nehézség nélkül elvégezhető. Az általánosabb esetben a döntési változó az egyes szinteken tartandó készletek nagysága, bármely szintet megengedve. A várható profitot itt is a termelési folyamat időszükséglete és a szállítási késésidő függvényében írja fel, normális eloszlású keresletet feltételezve. A modell további kiterjesztése tetszőleges számú terméknek a vizsgálatba történő bevonása. Feltételezi, hogy a kereslet minden termékre nézve a maximálisan elérhető mennyiség azonos százaléka.

Az egymást követő késésidők láncszerű összekapcsolódása következtében dinamikus programozással határozható meg a minimális készletezési költség, amelynek alapján második lépés a maximális profitot biztosító egyensúly elérése az eladások bevétele és a készletezési költségek között.

Singleton modellje [33] olyan raktárrendszerre vonatkozik, amelyben minden időszakban véletlen mennyiségű termék érkezik a rendszerbe. Ha az 1. raktárban a készlet Z_1 alatt van, a szállítmányt elfogadják a raktárkapacitás (K_1) mértékéig. Ha a készletszint magasabb Z_1-nél, a szállítmányt a 2. raktárba irányítják. Ugyanez történik a felesleggel, ha az első raktár csak a szállítmány egy részét tudja átvenni. Az n-edik raktárba tehát akkor érkezik a szállítmány vagy annak egy része, ha az előzőek már telítettek. Feltételezi, hogy a rendszeren való átfutás időigénye elhanyagolható az egész tekintett időhorizonthoz képest, továbbá, hogy az egyes raktárakban jelentkező kereslet és az ideszállított mennyiség eloszlása kölcsönösen független.

Jelentse S_{ij} az i-edik raktárnál jelentkező keresletet a j-edik időszakban. Ezek függetlenek, azonos eloszlásúak (minden j-re!) $f_i(S)$ sűrűségfüggvénnyel. A függetlenség az egyes raktárakra (minden i-re) is fennáll, és hasonlóképpen független a rendszerbe szállított mennyiségeknek (ezek is valószínűségi változók) x_j-nek a sorozatától. Legyen $G_j(x)$ az „x" eloszlásfüggvénye.

Alapfeltétel a rendszer stabilitásához (hogy a készletszint egyetlen raktárlépcső esetében se tartson $-\infty$-hez), hogy az átlagos szállított mennyiség, „x" várható értéke, $M(x)$, meghaladja az átlagos keresletet, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} S f_i(S)\, dS < M(x)\,.$$

Mivel a raktár csak akkor vesz át szállítmányt, ha készletszintje egy adott véges értéknél kisebb, az átlagkészletszint nem tarthat $+\infty$-hez. Ez akkor is fennáll, ha az egyes raktárak kapacitása $+\infty$.

Kimutatható, hogy a feltételezett készlet-elfogadási politika mellett a készletszint stacionárius eloszlása az első raktárra nézve ($F_1(Q)$) előállítható. Erre a többi raktár nincs befolyással — ez viszont hat az őt követő lépcsőkre. Ez a kiinduló lépés. Bemutatja, hogy általában, ha az $F_i(Q)$ az i-edik raktárra előállítható, akkor a szállított mennyiség eloszlása az $(i+1)$-dik raktárra nézve.

$$G_{(i+1)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{I_i+S} \int_0^{x+K_i+S-Q} f_i(S)\,d\,G_2(\varrho)\,dF_i(Q)\,dS + \\ \displaystyle + G_i(a) \int_0^{\infty} \int_{I_i+S}^{\infty} f_i(S)\,dF_i(Q)\,dS; \text{ ha } x > 0 \\ 0\,, \text{ ha } x < 0 \end{cases}$$

Amennyiben $f_i(S)$-t folytonosnak tételezzük fel, $\dfrac{dG_{i+1}(x)}{dx}$ előállítható, és meghatározható az $F_{i+1}(Q)$ a készletszint stacionárius eloszlása a szállítás után az $(i+1)$-edik raktározási lépcsőben. Az eljárást ily módon végigvihetjük valamennyi raktáron.

Sajátos készletezési eljárást ad kétszintű raktározás esetére COMES és STEINBERG [9]. Az 1. raktár a 2-től kapja a készletet és vele szemben normális eloszlású kereslet jelentkezik. A készletezési politika az, hogy szabályos időközönként meghatározzák az elméleti készletet (Q), amely a tényleges és a már megrendelt készletek összege, és összehasonlítják egy előre adott z_1 és z_2 készletszinttel.

$$z_2 - z_1 = 2\Delta > 0$$

Ha $z_1 \leq Q \leq z_2$, akkor a Q konkrét értékétől független állandó x értéket rendelnek (x lehet például az átlagos értékesítés volumene).

Ha $Q < z_1$ a rendelés mennyisége $x + (z_1 - Q)$, ha $Q > z_2$, akkor pedig $x - (Q - z_2)$.

A politika előnye, hogy alkalmasan választott z_1, z_2, x értékek mellett viszonylag stabil rendeléseket lehet leadni. A rendszerre a döntő befolyást a sávszélesség, a $2\,\Delta$ értéke gyakorolja. Ennek optimalizálására a rendszer egészére vonatkozó forgókészletet minimalizálják (amelynek várható értéke az egyes szinteken adódó forgókészletek várható értékeinek összege) úgy, hogy a W nyereségszázalék maximumát keresik a Δ függvényében

$$W = 1 - \frac{\omega(\Delta)}{\omega(o)},$$

ahol $\omega(\Delta)$ és $\omega(0)$ a készletfelesleg várható értéke a tartománysáv függvényében.

CLARK és SCARF dinamikus modellje [7] kétlépcsős helyzetre vonatkozik. Két raktár van (a rendszert így jelöljük: $2 \to 1$, a nyíl a készletmozgás irányára utal), a kereslet az 1-en jelentkezik, $f(S)$ sűrűségfüggvénnyel.

Közvetlenül a rendelés előtt legyen I_1 az első raktár készlete, I_2 pedig a két raktárban levő, valamint a két raktár között útonlevő készletek összege. A $2 \to 1$ szállítás késésideje legyen két periódus, a második raktárba való beérkezésé egy periódus. y_1 jelöli a következő időszakban az 1. raktárba szállítandó már kijelölt mennyiséget.

A rendszer állapotát így az I_1, I_2, y_1 mennyiségek írják le, és az optimális politikát a $C_m\,(I_1; I_2; y_1)$ függvény (minimális várható diszkontált költség) rekurzív meghatározásával állítják elő, ahol m a vizsgált időszakok száma. — Az eljárás első lépéseként elhanyagoljuk a 2. raktárt, és kiszámítjuk az optimális politikát az 1-re vonatkozólag, eltekintve attól a lehetőségtől, hogy a 2-n fellépő készlethiány megakadályozhatja a politika érvényesítését. A kielégítetlen kereslet elvész. Így az optimális politika csak az 1. raktárban készletezett és rendelés alatt levő mennyiségtől függ és a következő rekurzív összefüggéssel határozható meg

$$G_m(u) = \min_{I_0 > u} \Big\{ d_1(I_0 - u) + \beta^2 \int\int C(I_0 - S_1 - S_2)\, f(S_1)\, f(S_2)\, dS_1\, dS_2 + \beta \int_0^\infty G_{m-1}(I_0 - S)\, f(S)\, dS \Big\},$$

ahol d_1 a $2 \to 1$ szállítás egységköltsége a várható időszakonkénti készletezési és hiányköltség, mint az időszak elején raktáron levő mennyiség függvénye, β pedig a diszkontfaktor és $G_1(u) = G_2(u) = 0$.

A $G_m(u)$ és az első raktárral kapcsolatos $C_m(I_1\,;\,y_1)$ minimális költségfüggvény között a következő kapcsolat áll fenn:

$$C_m(I_1; y_1) = C(I_1) + \beta \int C(I_1 + y_1 - S) f(S)\, dS + G_m(I_1 + y_1)\,.$$

Ha most $C(I_0)$ konvex, mint az általában feltehető, az optimális politika az $I^{(3)}, I^{(4)} \ldots$ kritikus értékek sorozatával határozható meg úgy, hogy ha

$$I_1 + y_1 < I^{(m)}$$

az u időszak kezdetén, akkor a differenciát rendeljük, ellenkező esetben ($I_1 + y_1 \geq I^{(m)}$) nem rendelünk. Ha vizsgálatunkat a teljes rendszer-készletre kiterjesztjük, akkor az $I_2 < I^{(m)}$ összefüggés fennállása esetén a fenti politika nem alkalmazható. Ez esetben az összes, a 2. raktárban levő készlet az 1-be szállítandó. Ha $I_2 > I^{(m)}$, akkor csak az a része, amely elegendő az $I_1 + y_1 = I^{(m)}$ reláció teljesüléséhez.

Hátra van még a 2. raktár számára rendelendő mennyiség optimális értékének meghatározása. Ez a döntés nem hozható meg az 1. raktárra gyakorolt hatás figyelembevétele nélkül. Az optimális politika lényeges jellemzője, hogy a rendelési döntés egyedül a rendszer összkészlete (I_2) alapján meghozható, ha a költségeket egy olyan additív hiányköltséggel megnöveljük, amely az 1. raktárban jelentkező kereslet ki nem elégítését bünteti.

Ha ezt a költséget hozzáadjuk a készletezés és hiány „természetes" költségéhez (legyen az $\tilde{C}(I_2)$), akkor a rendszer optimális politikája a következő függvényegyenlet megoldásával oldható meg:

$$g_m(I_2) = \min_{x \geq 0} \left\{ d(x) + \tilde{C}(I_2) + \Delta_m(I_2) + \beta \int g_{m-1}(I_2 + x - S)\, f(S)\, dS \right\}$$

Egy másik modelljében Clark és Scarf [8] az előző modellt egészíti ki egy, a $2 \rightarrow 1$ szállításra vonatkozó rendelési költséggel, és közelítő megoldást mutat az optimumra.

Ha $C(I_1)$ konvexitása és a kielégítetlen kereslet elvesztése fennáll, akkor az optimális eljárás a (z; Z) típusú politika. E politikánál a kritikus értékek — jelöljük Z_m és z_m-mel — minden időszakra meghatározhatók a következő függvényegyenlet segítségével:

$$\begin{aligned} G_m(u) = \min_{I_0 \geq u} \Big\{ & D\delta(I_0 - u) + d_1(I_0 - u) + \\ & + \beta^2 \int\int C(I_0 - S_1 - S_2) f(S_1) f(S_2)\, dS_1\, dS_2 + \\ & + \beta \int G_{m-1}(u - S) f(S)\, dS \Big\}, \end{aligned}$$

ahol

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x = 0 \\ 1 & \text{ha } x > 0\,. \end{cases}$$

Belátható, hogy az additív hiányköltség nem egyedül I_2 függvénye. Ezért közelítő eljárásra van szükség, amely az optimális értékekhez rekurzív összefüggés felhasználásával vezet. Mindkét modell értelemszerűen kiterjeszthető többszintűre is.

Lényegében az előzőekben leírt eljárás alkalmazását javasolja Kosszov és Zsemajtajtite [21] makroökonómiai készletezési probléma megoldására.

Ha $C(x)$ jelenti az x készletvolumen melletti országos szintű ráfordításokat, $C_j(x_j)$ pedig a j-edik vállalat vagy raktár ráfordításait, akkor nyilván

$$C(x) = \sum_{j \in H} C_j(x_j),$$

ahol H a vállalatok és raktárak száma. A H halmazban van n raktár és $H - n$ vállalat, minden raktár $(i = 1, 2, \ldots, n)$ g_i vállalatot lát el $(\Sigma g_i = H - n)$. Ekkor

$$C(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(0)}(x_i),$$

ahol $C_i^{(0)}(x_i)$ az i-edik raktár összes ráfordításai, beleértve a g_i mennyiségű vállalathoz kapcsolódó ráfordítást is. Ha a raktárak függetlenek, nyilván fennáll a

$$\min C(x) = \sum_{i=1}^{n} \min C_i^{(0)}(x_i)$$

összefüggés.

Először egylépcsős raktározási modellben ábrázolják a készletirányítás sajátosságait, s ezután térnek vissza az eredeti problémához. A vizsgált rendszer kétlépcsős: első lépcső a vállalat, második a raktár. Az optimalizáláshoz a Clark—Scarf-féle első modellváltozat gondolatmenetét használják fel.

Scarf [30] általánosabban is megfogalmazza az előzőekben leírt problémát, a kvalitatív leírás mellett azonban alkalmazásként szintén csak két lépcsőre írja le a modellt, amely jelentéktelen változtatásokkal azonos a [27] modellel (nem közli a bizonyításokat és néhány jelölést egyszerűsít). Ha n különböző lépcsőt tekintünk, és feltesszük, hogy a készlet az n-edik lépcsőben lép be a rendszerbe, és átszállítják a rendszeren $(n \to (n-1) \to \ldots \to 3 \to 2 \to 1)$, hogy az első raktárral szemben jelentkező véletlen keresletet kielégítse. A dinamikus programozás eljárása (az optimális tételnagyság és szállítási szabály meghatározása rekurzív összefüggéseket kielégítő költségfüggvények sorozatának segítségével) akkor alkalmazható, ha a rendszer lehetséges állapotainak száma nem túl nagy. Az optimális politika meghatározását a következő feltevések könnyíthetik meg jelentősen:

1. Az egyes lépcsőkből való továbbszállítás költsége arányos a szállított mennyiséggel.
2. A kielégítetlen kereslet elvész.
3. A várható készletezési és hiányköltségek (amelyek az időszak alatt minden lépcsőt terhelnek) az adott lépcsőben elhelyezett készleteknek és az alacsonyabb fokozatokon, valamint a szállítás alatt levő készletek összegének függvénye.

V. A vizsgált modellek összefoglaló áttekintése

Az ismertetett modellek természetesen még egyéb tulajdonságaik szempontjából is elemezhetők. Néhány tanulság azonban e rövid áttekintés alapján is levonható:

— a modellek döntő többsége statikus. A dinamikussá való bővítés tetszetős igény, gyakorlatban azonban rendszerint az alkalmazott apparátus szabja meg a korlátot — egyes modellek dinamizálása olyan egyéb, esetenként jelentős feltételezések elhagyását igényelheti, amely nem áll arányban a dinamizálás nyújtotta előnyökkel,

— a legtöbb modell sztochasztikus, kevés foglalkozik azonban a véletlennek tekintett változók tényleges eloszlásával. Rendszerint egyáltalán nem specifikálják az eloszlást, ha igen, akkor Poisson- vagy normális eloszlást tételeznek fel,

— túlsúlyban vannak az egy termékes modellek. Több közülük viszonylag egyszerű módon átalakítható több termékessé, de rendszerint azzal a — gyakorlatilag többnyire elfogadható — feltételezéssel él, hogy az egyes termékek raktározása egymástól független,

— a költségfüggvény összetevői általában a raktározási, szállítási és a hiány okozta költségek, ritkábban a rendeléssel, illetve az egyes raktárak közötti átcsoportosítással kapcsolatos költségek. Ezen általános megfogalmazások mögött elég változatos tartalom rejlik. A további elemző vizsgálatok egyik legfontosabb szempontja éppen a költségösszefüggések feltárása lehet.

— csaknem minden modell célfüggvénye minimalizálandó költségfüggvény. Ennek fő oka, hogy ezáltal a vizsgált készletezési rendszer zárt rendszerként kezelhető, hiszen a felmerülő költségekkel kapcsolatban leginkább feltehető az, hogy nem függenek a rendszeren kívüli tényezőktől. Valamilyen hozam maximálása esetén a készletezett egységek értékének realizálási feltételeit is be kellene vonni a vizsgálatba — ez azonban egyrészt bonyolítja a problémát, főként pedig eltorzíthatja a rendszer belső összefüggéseiről alkotott képet. Emellett jelentős tény az is, hogy a költségek minimalizálása bármilyen társadalmi-gazdasági környezetben célszerű egy adott rendszer számára,

— a felhasznált matematikai apparátus igen változatos: az optimális programozás különböző módszerei (kiemelt szerepe van a dinamikus programozásnak) mellett főként a klasszikus szélsőérték számítás és különböző iterációs eljárások fordulnak elő. Mint már említettük, a megoldás algoritmusa legtöbb esetben korlátozza a modellek feltételrendszerének általánosítási lehetőségeit. Érdekes eredményeket hozhatna annak mélyrehatóbb elemzése, hogy ez a korlátozás milyen következményeket jelent az egyes konkrét modellekre nézve, és esetleg hogyan oldható fel.

A készletezési tevékenységnek a dolgozat elején említett viszonylagos függetlensége következtében a tőkés és szocialista gazdálkodásnak a termelési viszonyok különbözőségében gyökerező eltérése viszonylag kevésbé érezteti hatását, mint az operációkutatás alkalmazásának más területein. A polgári irodalomban szereplő nagyszámú modell közvetlen adaptálása azonban így sem lehetséges. A lényegileg eltérő gazdálkodási célkitűzések mellett a szocialista gazdaságban mások a konkrét termelési feltételek, s azok a hipotézisek, amelyek meghatározó szerepet játszanak az említett modelleknél (hogy csak egyet említsek: rendszerint feltételezik, hogy a rendelő megszabhatja például a szállítás ütemezését), hazai viszonylatban az esetek többségében nem teljesülnek. Ezért nagy szükség van a speciális hazai körülményeket, a készletgazdálkodás sajátos vonásait jobban figyelembe vevő modellek kidolgozására. (Alapvető jelentőségűnek tartom ebből a szempontból azt az irányt, amelyet az ismert Prekopa–Ziermann modellcsalád kijelöl.) Az anyagban szereplő, hazai gyakorlati feladatokon nyugvó modellek igazolják, hogy a probléma foglalkoztatja szakembereinket – a készletgazdálkodási modellek hazai kutatása területén azonban még nagyok a lehetőségek, és további jelentős fejlődésre van szükség.

(Beérkezett: 1970. január 5.)

IRODALOM

[1] ALLEN, S. G.: Redistribution of Total Stock over Several User Locations. Naval Research Logistics Querterly, 1958. Vol. 5. No. 4.

[2] ARROW, K. J.–KARLIN, S.–SCARF, H.: The Nature and Structure of Inventory Problems; Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production (ed. Arrow, K. J.–Karlin, S.–Scarf, H.) Stanford University Press. Stanford, California, 1958.

[3] BAUMOL, W. J.: Közgazdaságtan és operációanalízis. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[4] BAUMOL, W. J.–WOLFE, PH.: A Warehouse – Location Problem; Operations Research, March-April 1958. Vol. 6. No. 2.

[5] BERMAN, E. B.: Monte-Carlo Determination of Stock Redistribution. Operations Research, July-August, 1962. Vol. 10. No. 4.

[6] CLARK, E. D.: Mathematical Analysis of an Inventory Case; Operations Research, Sept-Oct 1957. Vol. 5. No. 5.

[7] CLARK, A. J.–SCARF, H.: Optimal Policies for a Multi-Echelon Inventory Problem; Management. Science, 1960, 6. (4)

[8] CLARK, A. J.–SCARF, H.: Approximate Solutions to a Simple Multi-Echelon Inventory Problem; Studies in Applied Probability and Management Science (ed. Arrow, K. J.–Karlin, S.–Scarf, H.) Stanford, California, 1962. Stanford University Press.

[9] COMES, G.–STEINBERG, N.: La methode du stock à bande dans la gestion de stocks a plusieur niveaux; Revue Francaise de Recherche Operationelle, 1965. Vol. 6. No. 34.

[10] DENKINGER, G.: Egy optimális készletelosztás. Döntési modellek. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

[11] EAGLE, A. R.: Distribution of Seasonal Inventory of the Hawaiian Pine-apple Company. Operations Research, May-Jun. 1957. Vol. 5. No. 3.

[12] FABRYCKY, W. J.–BANKS, J.: Procurement and Inventory Systems. New York–Amsterdam–London, 1967. Reinhold Publishing Corporation.

[13] FABRYCKY, W. J.–BANKS, J.: A Hierarchy of Deterministic Procurement – Inventory Systems. Operations Research, Sept-Oct 1966. Vol. 14. No. 5.

[14] GEBHARDT–SEELE, P.: Rechenmodelle für wirtschaftliches Lagern und Einkaufen. München. 1962. Verlag R. Oldenbourgh.

[15] GROSS, D.: Centralized Inventory Control in Multilocation Supply Systems. Multistage Inventory Models and Techniques (ed. Scarf, H. E.–Gilford, D. M.–Shelly, M. W.) Stanford, California, 1963. Stanford University Press.

[16] HADLEY, G.–WHITIN, T. M.: An Inventory – Transportation Model with N. Locations; Multistage Inventory Models and Techniques (ed. Scarf, H. E.–Gilford, D. M.–Shelly, M. W.) Stanford, California, 1963. Stanford University Press.

[17] HANSSMANN, F.: Operations Research in Production and Inventory Control New York–London, 1962. John Wiley and Sons, Inc.

[18] JÁNDY G.: Szállítási és telepítési operációkutatás. Budapest, 1966. Műszaki Könyvkiadó.

[19] KAUFMANN, A.: Az optimális programozás. Budapest, 1968. Műszaki Könyvkiadó.

[20] KAUFMANN, A.: Az operációkutatás módszerei és modelljei. Budapest, 1968. Műszaki Könyvkiadó.

[21] KOSSZOV, V. V.–ZSEMAJTAJTITE, SZ. S.: Az anyagkészletekkel való gazdálkodás irányításának módszertani kérdései matematikai módszerek és elektronikus szá-

mítógépek alkalmazásával (fordítás, kézirat). IV. Nemzetközi Anyaggazdálkodási Szimpozium, Varsó, 1965.
[22] MAGEE, J. F.: Production Planning and Inventory Control New York—Toronto—London 1958. Mc Hraw Hill Book Company, Inc.
[23] MEGYERI E.: A készletek optimális elosztása a készletező és felhasználó vállalatok között (sokszorosítás) KGM IGÜSZI, Budapest, 1967.
[24] MEGYERI E.—MESZÉNA GY.—SZÉP J.: Matematikai-közgazdasági modellek az ipari készletgazdálkodás céljaira — tetszőleges számú gyártómű és felhasználó, valamint egy központi raktár esetében. Döntési modellek. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
[25] MINAS, J. G.—MITTEN, L. G.: The Hub Operation Scheduling Problem Operations Research, May-Jun 1958. Vol. 6. No 3.
[26] NADDOR, E.: Inventory Systems. New York, 1966. John Wiley and Sons, Inc.
[27] NADDOR, E.—SALTZMAN, S.: Optimal Reorder Periods for an Inventory System with Variable Costs Ordering Operations Research, Sept-Oct. 1958. Vo. 6. No. 5.
[28] RÉNYI A.: Valószínűségszámítás. Budapest, 1966. Tankönyvkiadó.
[29] RÜZSIKOV, J. I.: Pereraszpredelenyije zapaszov v sziszteme szkladov. Ekonomika i matematicseszkije metodü, 1968. Tom IV. vüp. 5.
[30] SCARF, H. E.: A Survey of Analytic Techniques in Inventory Theory. Multistage Inventory Models and Techniques (ed. Scarf, H. E.—Gilford, D. M.—Shelly, M. W.) Standford, California, 1963. Standford University Press.
[31] SIMPSON, K. F.: A Theory of Allocation of Stocks to Warehasuses; Operations Research, Nov-Dec. 1959. Vol. 7. No. 6.
[32] SIMPSON, K. F.: In — Process Inventories. Operations Research Nov-Dec 1958. Vol. 6. No. 6.
[33] SINGLETON, R. C.: Steady-State Properties of Selected Inventory Models. Studies in Applied Probability and Management Science (ed. Arrow, K. J.—Karlin, S.—Scarf, H. E.) Standford, California, 1962. Standford University Press.
[34] STARR, M. K.—MILLER, D. W.: Inventory Control: Theory and Practice. Englewood—Cliffs, N. J. 1962. Prentice — Hall, Inc.
[35] SZÉP J.: Analízis. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
[36] URBANEK, T.: Optymalizacja rozmieszczenia zapasów. Ekonomika i Organizacja Pracy 1966. (XVII/4.).
[37] VAZSONYI, A.: Scientific Programming in Business and Industry. New York, 1958. John Wiley and Sons. Inc.
[38] VIDALE, M. L.: A Graphical Solution of the Transportation Problem. Operations Research, April 1956. Vol. 4. No. 2.
[39] WEINSTOCK, J. K.: An Inventory Control Solution by Simulation. Report of System Simulation. Symposion. New York 1957.

MATHEMATICAL MODELS OF MULTI-STORE INVENTORY SYSTEMS

The paper presents a general formulation of the inventory problem, where the stock of goods is being considered as a passive resource and demand is defined as the motive force of the inventory system. The multi-store models represent an important category of the storage models, since multi-store systems can actual by be met with both on the macro- and micro-levels whereas the assumption of a single store is usually a simplifying hypothesis.

Having defined the multi-store models, the author proceeds to outlining the results of a systemizing work in the course of which he has surveyed the multi-store models described in the literature on the subject. Investigation of the models and their classification according to various points of view have led the author to establish four basic groups, namely

— the distribution models of parallel stores situated around a given centre;
— the distribution models of multi-revel storage systems;
— the storage-policy models of parallel stores situated around a given centre;
— the optimal storage-policy models of hierarchical storage systems.

The author bases the survey of the models on the above classification, describing their main characteristics and mathematical formulation, with references to their solution.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ЗАПАСОВ В СЛУЧАЕ НЕСКОЛЬКИХ СКЛАДОВ

В статье дается описание общей формулировки проблемы оптимизации запасов, в которой запасы рассматриваются как пассивные ресурсы, а двигателем системы образования запасов является спрос. Модели с несколькими складами представляют собой очень значительную категорию моделей оптимизации запасов, так как в действительности как на макро-, так и на микроэкономическом уровне нам встречаются системы с несколькими складами, а предположение одного склада мотивируется только упрощенным подходом.

Дав определение моделей с несколькими складами, автор представляет в статье результаты систематизирующей работы, в рамках которой он обработал фигурирующие в специальной литературе модели с несколькими складами. Изучив и квалифицировав эти модели в нескольких аспектах, он образовал четыре группы:

— модели распределения параллельных складов, располагающихся вокруг данного центра;
— модели распределения многоступенчатых систем складов;
— модели политики образования запасов в параллельных складах, располагающихся вокруг данного центра;
— модели политики оптимального образования запасов иерархических систем складов.

Автор дает описание обработанных моделей в вышеуказанной квалификации: их наиболее существенных характерных черт математической формулировки, а также — в общих чертах — их решения.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KONDOR GYÖRGY

Leképezés fix pontjának és a gazdaság egyensúlyi helyzetének numerikus approximációja Scarf módszereivel

(Második, befejező rész*)

II. Közgazdasági alkalmazás: az egyensúlyi ár

II.1. *A feladat megfogalmazása*

A matematikai közgazdaságtan egyik központi elméletét az egyensúlyi helyzetekre: az egyensúlyi termelési és fogyasztási szerkezetekre és az egyensúlyi árakra vonatkozó ismeretek alkotják. A cserét leíró általános gazdasági modellekben a figyelem gyakran kifejezetten az egyensúlyi árak vizsgálatára irányul, mivel ezekből gyakran már levezethetők az egyensúlyi termelési és fogyasztási struktúrák. E fejezetben az egyensúlyi árak szerkezete és megközelítése lesz vizsgálatunk tárgya.

Tegyük fel, hogy a gazdaságban n árufajta szerepel és legyen m a gazdasági ügynökségeknek, a fogyasztóknak, illetve azok képviselőinek és a termelési egységeknek, illetve azok képviselőinek a száma. Feltesszük, hogy az ügynökségek gazdasági tevékenységét a többletkeresleti $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ függvények írják le, amelyek kizárólag a nem-negatív $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ árak függvényei. Az r-edik ($r = 1, \ldots, m$) gazdasági ügynökség $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ többletkeresleti függvénye azt mondja meg, hogy az adott árakon az r ügynökségnek az i árufajtából mennyivel nagyobb a kereslete, mint a kínálata. Ha $g_i^r(\boldsymbol{\pi}) < 0$, akkor az ügynökség csökkenteni kívánja az i árufajtából rendelkezésre álló készleteit és növelni akarja azt pozitív $g_i^r(\boldsymbol{\pi}) > 0$ esetén.

1. Feltesszük, hogy a $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ függvény zérófokú homogén, vagyis feltesszük, hogy a keresletet, illetve kínálatot (pontosabban a többletkeresletet) az árak arányai már meghatározzák. Ezért megengedhető, hogy csupán olyan $\boldsymbol{\pi}$ árrendszereket vizsgáljunk, amelyek rajta vannak az S szimplexen, vagyis amelyekre $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$; $\pi_i \geq 0$.

2. Mindegyik többletkeresleti függvény folytonos az S szimplexen. Ez egy meglehetősen szigorú feltevés, amelyre a továbbiakban még visszatérünk.

3. Általában feltételezik, hogy mindegyik r ügynökség elkölti jövedelmét, vagyis vásárlásait eladásaiból fedezi.[5]

$$\pi_1 g_1^r(\boldsymbol{\pi}) + \ldots + \pi_n g_n^r(\boldsymbol{\pi}) \equiv 0 \qquad r = 1, \ldots, m \qquad \text{(II.1)}$$

A továbbiakban azonban csak azt használjuk ki, hogy a piaci összkeresletnek tetszőleges áron vett összege megegyezik a kínálat árösszegével:

* A cikk első része a II. évf. 3. számában jelent meg.

[5] (II.1) a Walras-törvény érvényét mondja ki.

$$\pi_1 g_1(\boldsymbol{\pi}) + \ldots + \pi_2 g_2(\boldsymbol{\pi}) \equiv 0\,, \qquad \text{(II.2)}$$

ahol

$$g_i(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{r=1}^{m} g_i^r(\boldsymbol{\pi}) \qquad i = 1, \ldots, n$$

és e függvényt a piac többletkeresleti függvényének nevezzük.

A $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ árvektorról akkor mondjuk, hogy egyensúlyban van, ha ezeken a $\hat{\boldsymbol{\pi}} = (\hat{\pi}_1, \ldots, \hat{\pi}_n)$ árakon

$$g_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) \leq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(II.3)}$$

és

$$\hat{\pi}_i\, g_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(II.4)}$$

(II.3) azt mondja, hogy az egyensúlyi árakon egyik áru kereslete sem haladhatja meg kínálatát. (II.4) szerint, ha egy áru kínálata egyensúlyban meghaladja keresletét, akkor az áru egyensúlyi ára zéró, és ha egy áru egyensúlyi ára pozitív, akkor kereslete megegyezik kínálatával.

A Brouwer-tétel segítségével egyszerűen kimutatható, hogy a fentiekben leírt modellben mindig létezik egyensúlyi árvektor.

Tekintsük ugyanis az S szimplexnek saját magára történő alábbi leképzését:

$$f_i(\boldsymbol{\pi}) = \frac{\pi_i + \lambda \max\,[0, g_i(\boldsymbol{\pi})]}{1 + \lambda \sum\limits_{\nu=1}^{n} \max\,[0, g_\nu(\boldsymbol{\pi})]} \qquad i = 1, \ldots, n \quad \text{(II.5)}$$

ahol λ egy kis pozitív konstans.

Az mindenesetre világos, hogy a (II.5)-ben definiált $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi}) = (f_1(\boldsymbol{\pi}), \ldots, f_n(\boldsymbol{\pi}))$ leképezés folytonos és hogy az S szimplexet saját magára képezi le. Ebből következik, hogy a Brouwer-tétel alkalmazható és így létezik egy $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ fix pont.

Tegyük fel, hogy $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \max[0, g_\nu(\hat{\pi})] > 0$. Ekkor, mivel $f_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) = \hat{\pi}_i$, $\hat{\pi}_i + \lambda \max[0, g_i(\hat{\boldsymbol{\pi}})] = \alpha\, \hat{\pi}_i$, ahol α (II.5) jobb oldalának nevezője és így előző feltételünk alapján $\alpha > 1$. Ebből azonnal következik, hogy $g_i(\hat{\boldsymbol{\pi}}) > 0$ minden i-re. Figyelembe véve, hogy $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ és $\pi_i \geq 0$ $i = 1, \ldots, n$, eredményünk ellentmond (II.2)-nek, ezért e bekezdés elején tett hipotézisünk hibás. Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{\nu=1}^{n} \max\,[0, g_\nu(\hat{\boldsymbol{\pi}})] = 0$$

és ezzel igazoltuk a (II.3) relációt. Figyelembe véve most már (II.3)-at, és hogy $\pi_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ (II.2) alapján belátható a (II.4) összefüggések érvénye is.

Ha az első fejezetben ismertetett algoritmust alkalmazzuk a fix pont megközelítésére, akkor P_k minden $\pi^j (j > n)$ vektorát egy olyan indexszel látjuk el, amelyre $f_i(\pi^j) \geq \pi_i^j$ vagy (II.5) szerint, amelyre

$$\max\,[0, g_i(\boldsymbol{\pi}^j)] \geq \pi_i^j \sum_{\nu=1}^{n} \max\,[0, g_\nu(\boldsymbol{\pi}^j)] \qquad \text{(II.6)}$$

(II.6) alapján az indexezést úgy is elvégezhetjük, hogy megkeressük azt az i indexet, amelyre $g_i(\pi^j)/\pi_i^j$ maximális.

Mielőtt rátérnénk néhány fiktív numerikus példa bemutatására, a matematikai-közgazdasági irodalomban kevéssé járatos olvasó kedvéért még néhány szót szólunk arról, hogy hogyan vezeti le a tradicionális iskola a fogyasztók többletkeresleti függvényeit, és hogy milyen erős megszorítást jelenthet e függvények folytonosságára vonatkozó 2. kikötés.

A tradicionális iskola a többletkeresleti függvényeket az individuumok hozammaximálási törekvéseiből vezeti le. Eszerint mindegyik individuum hasznosságfüggvényét kívánja maximalizálni és e törekvés egyetlen korlátját a pénzügyi mérleg adja. Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a tradicionális iskola hogyan jut el a többletkeresleti függvényekhez.

Legyen az r individuum hasznosságfüggvénye

$$u_r = (\sum_{i=1}^{n} a_{ri}^{1-a_r} k_{ri}^{a_r})^{1/a_r} \tag{II.7}$$

ahol k_{ri} az r individuum kereslete az i árufajtából, az a_{r_i} paraméter a kereslet intenzitását fejezi ki az i árufajta iránt és a_r a kereslet árrugalmasságával kapcsolatos állandó.[6]

Tegyük fel, hogy az r individuum az i árufajtából w_{ri} mennyiséggel rendelkezik, amelyet a csere folyamán elfogyaszthat, illetve elcserélhet. Feltételezzük, hogy az individuum annyit költ, amennyi jövedelemre készleteinek eladásából szert tesz. Vagyis az r individuum pénzügyi feltétele:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_{ri}\pi_i \equiv \sum_{i=1}^{n} k_{ri}\pi_i \tag{II.8}$$

Maximalizáljuk a hasznosságfüggvényt a (II.8) feltétel mellett. Az individuum L_r Lagrange függvénye:

$$L_r = u_r - \mu_r(\sum_{i=1}^{n} \omega_{ri}\pi_i - \sum_{i=1}^{n} k_{ri}\pi_i) \tag{II.9}$$

ahol μ_r a pénz határtermelékenységét adja az r individuum számára.

Deriváljuk (II.9)-et k_{ri} $i = 1, \ldots, n$ szerint. A deriváltat nullával egyenlővé téve és felhasználva a $b_r = 1/1 - a_r$ helyettesítést az optimális ξ_{ri} keresletre

$$-\mu_r^{-b_r}\pi_i^{-b_r}(\sum_{i=1}^{n} a_{ri}^{1-a_r}\xi_{ri}^{a_r})^{1/a_r} a_{ri} = \xi_{ri} \tag{II.10}$$

amelyet összevetve (II.8)-cal

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \omega_{ri}\pi_i}{(\sum_{i=1}^{n} a_{ri}^{1-a_r}\xi_{ri}^{a_r})^{1/a_r} \sum_{i=r}^{n} a_{ri}\pi_i^{1-b_r}} = \mu^{-b_r} \tag{II.11}$$

és így (II.10) és (II.11) alapján

$$\xi_{ri}(\pi) = \frac{a_{ri}\sum_{v=1}^{r} \omega_{rv}\pi_v}{\pi_i^{b_r}\sum_{v=1}^{r} a_{rv}\pi_v^{1-b_r}} \tag{II.12}$$

[6] E hasznosságfüggvények konstans helyettesítés-rugalmassággal rendelkeznek. Ez azt jelenti, hogy egy rögzített indifferencia felületen mozogva (tehát a jövedelemhatástól eltekintve) a kereslet árrugalmassága konstans. Értéke $b_r = 1/1 - a_r$.

(II.12) megadja az optimális keresletet (keresleti függvényt) az i árufajtából. Ha ebből levonjuk a rendelkezésre álló ω_{ri} készletet (ami kínálatot jelent saját maga vagy más számára), akkor jutunk a $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ többletkeresleti függvényhez.

$$g_i^r(\boldsymbol{\pi}) = \xi_{ri}(\boldsymbol{\pi}) - \omega_{ri} \qquad \text{(II.13)}$$

A fenti, igen leegyszerűsített modellben nem volt szó termelésről, csupán cseréről. Ha azonban a termelést is figyelembe kívánjuk venni modellünkben, és feltételezzük — mint ahogyan azt a tradicionális iskola teszi — a termelők racionális magatartását, akkor nem tekinthetünk el attól, hogy az árak a termelésre is hatással vannak. A pénzügyi feltételek ilyen esetekben bonyolultabbak lehetnek, mert a kínálatot adó tényezők ártól függővé válhatnak. Ezek pedig egyáltalán nem biztos, hogy az árak folytonos függvényei. Ekkor a piaci többletkeresleti függvény levezetése nehézségbe ütközhet és nem biztos, hogy az algoritmus alkalmazásához (elvileg) nélkülözhetetlen folytonossági feltétel kielégül. Ilyen probléma adódik például akkor, amikor a termelési egységek (gazdasági ügynökségek) által választható eljárásokat olyan konstans input—output koefficiensek jellemzik, amelyek a közönséges egyszerű lineáris programozási feladatokban szoktak szerepelni. Az ilyen cseremodellek egyensúlyproblémái egészen más kezelést igényelnek. Ilyet mutatunk majd be a III. fejezetben. Ez előtt azonban néhány egyszerű cseremodellre alkalmazzuk Scarfnak az I. fejezetben bemutatott algoritmusát, illetve bemutatjuk az általa kapott eredményeket.

II.2. *Numerikus tapasztalatok. Fiktív gazdasági számpéldák*

Legyen $n = 3$, vagyis három árufajta és $m = 5$, azaz öt individuum. A többletkeresleti függvények paraméterei

$$[W_{ri}] = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 3{,}0 & 10{,}0 & 1{,}0 & 2{,}0 \\ 1{,}0 & 2{,}0 & 20{,}0 & 5{,}0 & 6{,}0 \\ 1{,}5 & 5{,}0 & 15{,}0 & 5{,}0 & 10{,}8 \end{bmatrix};$$

$$[a_{ri}] = \begin{bmatrix} 2{,}0 & 1{,}0 & 0{,}8 & 1{,}5 & 1{,}0 \\ 3{,}0 & 0{,}5 & 1{,}2 & 1{,}6 & 1{,}8 \\ 0{,}9 & 0{,}8 & 2{,}0 & 1{,}0 & 1{,}8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 1{,}3 \\ 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

A fenti táblázatok segítségével felépíthetők a (II.13) $g_i^r(\boldsymbol{\pi})$ függvények, majd ezekből (II.2) alapján az $\mathbf{f}(\boldsymbol{\pi})$ vektor-vektor függvény (II.5) komponensei. Ezek után még a P_k halmazt kell megadni.

A P_k halmazt — első öt elemétől eltekintve — Scarf a $(^{k_1}/_{160}, \ldots, {}^{k_5}/_{160})$ vektorokkal definiálta, ahol a k_i számok pozitív egészek és összegük 160. Körülbelül $0{,}26 \times 10^8$ ilyen vektor létezik. Az algoritmus azonban már 158 iteráció után az alábbi primitív halmazzal fejeződött be:

$$\begin{array}{ccccc} \pi^{j_1} & \pi^{j_2} & \pi^{j_3} & \pi^{j_4} & \pi^{j_5} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 101 & 102 & 103 & 102 & 103 \\ 13 & 12 & 13 & 13 & 12 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 25 & 25 & 25 & 24 & 25 \\ 15 & 15 & 14 & 15 & 14 \end{bmatrix}$$

ahol az oszlopvektorokat még 160-nal végig kell osztani.

A következő lépésben, hogy végül is egyetlen $\check{\pi}$ ponthoz jussunk, az (I.21) kifejezést minimalizáljuk. ($\check{\pi}$-vel a $\hat{\pi}$ közelítő értékét jelöljük.) Eljárhatunk úgy is, ahogyan az (I.22—25)-ben írtuk le. Így kapjuk

$$\check{\pi} = (104{,}9 \quad 12{,}3 \quad 5{,}2 \quad 23{,}6 \quad 14{,}1)$$

és ez alapján a piaci többletkeresletekre:

$$g(\check{\pi}) = (0{,}02 \quad 0{,}02 \quad 0{,}27 \quad 0{,}01 \quad 0{,}00).$$

$\check{\pi}$ képét (II.5)-ből számíthatjuk ki, miután $\check{\pi}$ fenti numerikus értékeit 160-nal végigosztjuk. Az algortimus gyorsaságát λ választása is befolyásolja. Az approximáció eredményességét — közgazdasági szempontból — a többletkeresleteknek a teljes kínálathoz ($[w_{ri}]$ oszlopösszegeihez) való viszonya mutatja.

SCARF [18] tanulmányában három numerikus feladatot ismertet. Második feladatában nyolc árufajta $n = 8$ és öt individuum $m = 5$ volt. A szóba jöhető vektorokat $({}^{k_1}/_{200}, \ldots, {}^{k_8}/_{200})$ adta meg. Az algortimus 640 iteráció után eredményezett csak primitív halmazt. Részletes ismertetésétől terjedelmi korlátok miatt el kell tekintenünk, ezért mindjárt a harmadik, legnagyobbméretű feladat ismertetésére térek rá.

Scarf beszámol arról, hogy e feladat nagyon gyorsan, meglehetősen jó illeszkedéssel fejeződött be annak ellenére, hogy az előzőnél nagyobb méretű. Ez a feladat tíz árufajtát és öt individuumot tartalmazott.

Scarf 3. *példája*

$$[w_{ri}] = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 & 20{,}0 & 0{,}1 & 2{,}0 & 9{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 15{,}0 \\ 0{,}2 & 11{,}0 & 12{,}0 & 13{,}0 & 14{,}0 & 15{,}0 & 16{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 9{,}0 \\ 0{,}4 & 9{,}0 & 8{,}0 & 7{,}0 & 6{,}0 & 5{,}0 & 4{,}0 & 5{,}0 & 7{,}0 & 12{,}0 \\ 1{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 5{,}0 & 8{,}0 & 3{,}0 & 17{,}0 \\ 8{,}0 & 1{,}0 & 22{,}0 & 10{,}0 & 0{,}3 & 0{,}9 & 5{,}1 & 0{,}1 & 6{,}2 & 11{,}0 \end{bmatrix}$$

$$[a_{ri}] = \begin{bmatrix} 1{,}0 & 1{,}0 & 3{,}0 & 0{,}1 & 0{,}1 & 1{,}2 & 2{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}7 \\ 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 \\ 9{,}9 & 0{,}1 & 5{,}0 & 0{,}2 & 6{,}0 & 0{,}2 & 8{,}0 & 1{,}0 & 1{,}0 & 0{,}2 \\ 1{,}0 & 2{,}0 & 3{,}0 & 4{,}0 & 5{,}0 & 6{,}0 & 7{,}0 & 8{,}0 & 9{,}0 & 10{,}0 \\ 1{,}0 & 13{,}0 & 11{,}0 & 9{,}0 & 4{,}0 & 0{,}9 & 8{,}0 & 1{,}0 & 2{,}0 & 10{,}0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2{,}0 \\ 1{,}3 \\ 3{,}0 \\ 0{,}2 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Scarf most a $({}^{k_1}/_{250}, \ldots, {}^{k_{10}}/_{250})$; $\sum_{i=1}^{10} k_i = 250$ vektorokkal határozta meg a P_k halmazt. Körülbelül $0{,}87 \times 10^{16}$ ilyen vektor létezik. Az algoritmus 468 lépésben fejeződött be. A primitív halmaz vektorainak — az előzőkhöz hasonló — átlagolásával a következő árakat és többletkeresleti vektort kapta:

$$\check{\pi} = \quad (47{,}0 \quad 28{,}5 \quad 24{,}0 \quad 10{,}0 \quad 26{,}7 \quad 19{,}3 \quad 29{,}4 \quad 25{,}7 \quad 24{,}8 \quad 12{,}6)$$

és

$$\mathbf{g}(\check{\pi}) = (0{,}07 \quad 0{,}04 \quad 0{,}03 \quad 0{,}00 \quad 0{,}02 \quad 0{,}00 \quad 0{,}02, \quad 0{,}02 \quad 0{,}02 \quad 0{,}07)$$

Ebben a feladatban a többletkereslet vektora nagyon közel van a nullavektorhoz, ha azt a teljes kínálattal hasonlítjuk össze.

A számításokhoz az IBM 7094-es számítógépet használták fel. A gép a három feladat megoldásához összesen 1 perc 36 másodpercet vett igénybe. Ebből arra következtethetünk, hogy az algoritmus és a programozás továbbfejlesztésével a leképzés fix pontjának approximációja valószínűleg nagyon könnyen lehetséges 15—20 dimenziós feladatok esetén is — írja Scarf.

III. Scarf módosított algoritmusa az egyensúlyi ár és termelési vektor meghatározására, amikor a lehetséges termelési vektorok halmaza konvex poliéder

III.1. *A kérdés felvetése*

E fejezetben olyan termelési rendszerrel foglalkozunk, amelynek véges számú tevékenységét az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,n+1} & \ldots & a_{1,m} \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & a_{n,n+1} & \ldots & a_{n,m} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.1)}$$

mátrix oszlopai adják meg. A felhasználást negatív, a kibocsátást pozitív számok jelölik. Az első n eljárás az ún. fel nem használási tevékenységeket adja. A továbbiakban ezek koefficienseit is az a_{ij} szimbólumokkal jelöljük. Tehát az első n tevékenységre, amelyet fel nem használási tevékenységnek is nevezhetünk: $a_{ij} = -1$, ha $i = j$ és $a_{ij} = 0$, ha $i \neq j$.

A fogyasztók aggregált (nem-negatív) piaci keresleti függvényeit a

$$\xi_i(\pi_1, \ldots, \pi_n) = \xi_i(\boldsymbol{\pi}) \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.2)}$$

kifejezéssel jelöljük. Legyenek e függvények, amelyek csak nem-negatív árakra vannak definiálva, folytonosak és zérófokú homogének. Ebből következik, hogy az általánosság megszorítása nélkül kiköthetjük, hogy az árak összege 1 legyen.

A piacon a termelés és a csere számára rendelkezésre álló árukészletek nagyságát az $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ vektor adja. Feltesszük, hogy a piac résztvevőinek együttes fogyasztását jövedelmük összege határozza meg, vagyis, hogy

$$\pi_1 \xi_1(\boldsymbol{\pi}) + \ldots + \pi_n \xi_n(\boldsymbol{\pi}) \equiv \pi_1\omega_1 + \ldots + \pi_n \omega_n \qquad \text{(III.3)}$$

Végül feltesszük, hogy a vizsgálatra kerülő gazdaságot a keresleti függvények, az $\mathbf{A}$ technikai mátrix és a termelésre rendelkezésre álló tényezőkészletek teljesen leírják.

A fenti jelölés mellett *akkor beszélünk versenyző egyensúlyról, ha a* $\boldsymbol{\pi}$ *árvektor és a tevékenységek alkalmazásának nem-negatív* $x_1, \ldots, x_m$ *terjedelmei kielégítik a következő két kritériumcsaládot:*

1. A kínálat minden egyes termék piacán egybeesik a kereslettel, vagy matematikailag

$$\xi_i(\boldsymbol{\pi}) - \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = \omega_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.4)}$$

Ez természetesen csak úgy igaz mindegyik piacra, ha a nem-szűkös áruk esetén a maradékváltozókat is figyelembe vesszük.

2. Csak azokat a tevékenységeket használjuk, amelyek a $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ áron nem veszteségesek, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\pi}_i a_{ij} \leq 0 \qquad j = 1, \ldots, m \qquad \text{(III.5)}$$

és az egyenlőség jele érvényes, ha $x_j > 0$. E reláció már magában foglalja azt a követelményt, hogy egy áru ára nulla, ha annak kereslete nem fedi annak kínálatát (vagyis ha a maradékváltozó pozitív).

A fentiekben leírt egyensúlyi helyzet (ár- és termelési vektor) meghatározásának problémáját nem lehet az egyensúlyi árak meghatározásának feladatára redukálni. Most szó van termelésről is (nemcsak cseréről) és a lehetséges termelési vektorok halmaza konvex poliéder. Ekkor az árak bizonyos halmazán a tevékenység alkalmazása bármilyen terjedelemben kifizetődő és az árak bizonyos, más halmazán a termelés nem fizetődik ki. A termelési egységek keresleti és kínálati függvényei ilyen esetben nem folytonosak és így a többletkeresleti függvények sem, ami pedig az előző fejezet egyik alapvető kikötése volt. Megállapíthatjuk tehát, hogy a szóban forgó problémánk az előző fejezetben tárgyalttól eltér, arra visszavezetni nem lehet.

Eddigi feltételeinken túlmenően kikötjük még, hogy a tevékenységek terjedelmeinek azon halmaza, amely növeli az árufajták nem-negatív nettó kínálatait, legyen korlátos. Matematikailag: legyen korlátos az az $x = (x_1, \ldots, x_m)$ vektorokból álló halmaz, amelyre

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j + \omega_i \geq 0\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad \text{(III.6)}$$

(Az **A** mátrix konstrukciójából következik, hogy ez a halmaz nem üres.) Alkalmilag felhasználjuk, hogy $\omega_i > 0$ minden i-re, habár ez a kikötés realisztikusabb feltétellel is helyettesíthető.

Hasonlóan, mint az előző fejezetben, az egyensúlyi árvektor kiválasztásánál nem kerül szóba az S szimplex akármilyen eleme. Itt is kiválasztunk egy véges $P_k : \boldsymbol{\pi}^1, \ldots, \boldsymbol{\pi}^n, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorhalmazt és ezek közül keressük ki azokat, amelyek legjobban közelítik a kívánt árvektort.

Miután a $\boldsymbol{\pi}^{n+1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^k$ vektorokat kiválasztottuk, megkonstruálunk egy $\mathbf{B}_k$ mátrixot. $\mathbf{B}_k$ első n oszlopát az egységmátrix adja. A $\mathbf{B}_k$ mátrix j oszlopát $n + 1 \leq j \leq k$-ra a π^j vektorral állítjuk kapcsolatba, az alábbi szabálynak megfelelően:

Legyen

$$\begin{matrix} a_{1l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{nl} \end{matrix}$$

az **A** technikai mátrixnak az a tevékenysége, amely a $\boldsymbol{\pi}^j$ árakon a maximális profitot adja. (Ha több ilyen van, akkor ezek között az egyik.)

1. Ha e profit *pozitív*, akkor $\mathbf{B}_k$ oszlopát per definitionem az alábbi vektor adja:

$$\begin{matrix} -a_{1l} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a_{nl} \end{matrix}$$

2. Ha a $\boldsymbol{\pi}^j$ árakon elérhető legnagyobb profit *zéró vagy negatív*, akkor $\mathbf{B}_k$ j oszlopát definíció szerint

$$\begin{matrix} \xi_1(\boldsymbol{\pi}^j) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n(\boldsymbol{\pi}^j) \end{matrix}$$

alkotja. Így tehát a P_k halmazhoz rendelt $\mathbf{B}_k$ mátrix általános alakja

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & & & & \boldsymbol{\pi}^{j_1} & & \boldsymbol{\pi}^{j_2} \end{matrix} \\ \mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_{1l} & \ldots & \xi_1(\boldsymbol{\pi}^{j_2}) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{nl} & & \xi_n(\boldsymbol{\pi}^{j_2}) \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{(III.7)}$$

ahol a felülírott $\boldsymbol{\pi}^{j_1}$ és $\boldsymbol{\pi}^{j_2}$ az árak és oszlop közötti kapcsolatot jelzi.

Eltekintve a maradékváltozókra vonatkozó első n oszloptól, $\mathbf{B}_k$ oszlopai vagy az adott áron vett piaci keresletekből állnak, vagy azon tevékenységek negatívjaiból, amelyek az adott árakon maximalizálják a profitot. Elképzelhető természetesen, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix egyes oszlopainak negatívjai igen sokszor szerepelnek a fenti mátrixban. $\mathbf{B}_k$ oszlopainak száma általában igen nagy, és szerencse, hogy sohasem szükséges, hogy a $\mathbf{B}_k$ mátrix explicite tárolva legyen a számítógép memóriaegységében.

Számunkra a $\mathbf{B}_k\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega}$ egyenletrendszer nem-negatív megoldásai lesznek lényegesek. A rendszer egyenletei a következő struktúrával rendelkeznek

$$\sum_j a_{il(j)} x_j + \sum_j \xi_i(\boldsymbol{\pi}^j)\, y_j = \omega_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.8)}$$

Nyilvánvaló, hogy az l index j-től függ és azokra a tevékenységekre vonatkozik, amelyek a $\boldsymbol{\pi}^j : \boldsymbol{\pi}^j \in P_k$ áron maximalizálják a profitot úgy, hogy a profit pozitív. A (III.8)-relációban az ezeknek a tevékenységeknek megfelelő z_j változókat jelöljük x_j-vel, míg a második szummában y_i-t írunk z_j helyébe, hogy hangsúlyozzuk azt a különbséget, amely a két oszlopfajta között fennáll.

A $\mathbf{B}_k$ mátrix (III.7) konstrukciójából következik, hogy a következő összefüggések teljesülnek:

1. Ha valamely $y_j > 0$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i^j a_{il} \leq 0$ *minden* l-re ($l = 1, \ldots, m$).
2. Ha bármelyik fel nem használási tevékenységtől *eltérő* l tevékenység pozitív x_j súllyal rendelkezik, akkor erre $\sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i^j a_{il} > 0$.

Az egyensúlyi árvektort és termelési tervet a $\mathbf{B}_k\mathbf{z} = \boldsymbol{\omega}$ *egyenletrendszernek olyan nem-negatív bázismegoldásának segítségével kívánjuk megközelíteni, amely azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy a* $\boldsymbol{\pi}^j$ *árak mindegyike, amelyek pozitív* x_j- *vagy* y_j-*kre vonatkoznak, közel vannak egymáshoz és hogy a* $\boldsymbol{\pi}^j$ *áraknak i koordinátája közel van zéróhoz, ha az i maradékváltozó pozitív.*

P_k valamely n elemű $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ halmazának elemeiről akkor mondjuk azt, hogy P_k-ban közel vannak egymáshoz, ha azok primitív halmazt alkotnak A következőkben azt mutatjuk ki, hogy egy ilyen megoldás az egyensúlyi árvektor közelítésére szolgálhat, ha e primitív halmaz eleget tesz az I.3-ban tárgyalt 2. tétel állításának.

III.2. *Matematikai tárgyalás*

A 2. tétel értelmében mindegyik P_k felosztásban létezik olyan $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ elemű primitív halmaz, amelyhez található $\mathbf{B}_k$-ban olyan bázis, amelyik $\mathbf{B}_k$ $j_1, \ldots, j_n$ oszlopaiból áll. Jelöljük a szóban forgó primitív halmaz által meghatározott primitív alszimplexet σ_0-lal. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy e primitív halmaz első $j_1, \ldots, j_s$ elemére vonatkozó tevékenység származik az $\mathbf{A}$ mátrixból és a többi $n-s$ számú felel meg a $(\xi_1, \ldots, \xi_n)^*$ oszlopnak. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{B}_k$ minden bázisában az $\mathbf{A}$ mátrix tetszőleges oszlopa legfeljebb egyszer szerepelhet, mert a bázisban az oszlopok lineárisan függetlenek.

(III.8) helyére ekkor az alábbit írhatjuk:

$$-\sum_{\nu=1}^{s} a_{il_\nu(j_\nu)}\, x_{j_\nu} + \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\pi^{j_\nu})\, y_\nu = \omega_i \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.9)}$$

ahol az első szummában az l_ν oszlopindex j_ν függvénye és az $a_{il_\nu(j_\nu)}$ koefficiensek arra a tevékenységre vonatkoznak, amely a $\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}$ $\nu = 1, \ldots, s$ árrendszerrel maximálja a profitot úgy, hogy a profit pozitív.

A (III.8) reláció után két megállapítást tettünk $\mathbf{B}_k$ konstrukciójával kapcsolatban. Figyelembe véve (III.9)-et, 1. most így fogalmazható:

1'. Ha valamely $y_\nu > 0$, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{j_\nu} a_{il} \leq 0 \text{ minden } l\text{-re} \tag{III.10}$$

(tehát nemcsak azokra, amelyek (III.9) első szummájában szerepelnek).

Mielőtt 2.-t átfogalmaznánk, vegyük figyelembe a következőt:

A $\mathbf{B}_k$ mátrix konstrukciójából és a 2. tételből folyik, hogy (III.9)-ben akkor és csak akkor szerepel egy fel nem használási tevékenység, ha a primitív halmazban szerepel az annak megfelelő $\boldsymbol{\pi}^j$; $j \leq n$. Emlékeztetőül megemlítjük, hogy a fel nem használási tevékenység alkalmazásának terjedelmét mérik az x_j maradékváltozók. Ha tehát a 2. tételt kielégítő bázisban a fel nem használási tevékenységnek megfelelő $x_j > 0$ (elégséges feltenni, hogy a fel nem használási tevékenység szerepel a bázisban), akkor a megfelelő primitív halmazban van olyan árvektor, amelynek i-edik koordinátája zéró.

2'. A (III.9)-ben szereplő bármelyik l_ν tevékenységre — *beleértve* a fel nem használási tevékenységeket is

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{j_\nu} a_{il_\nu(j_\nu)} \geq 0 \qquad \nu = 1, \ldots, s \tag{III. 11}$$

ahol az egyenlőség jele csak a fel nem használási tevékenységekre vonatkozhat. Ha az l_ν tevékenység egy fel nem használási tevékenység, (III.11) azt állítja, hogy a szóban forgó π_i^j ár csak nem-pozitív lehet. Összevetve ezt az árak nemnegativitására tett kikötéssel, az adódik, hogy ez az ár nulla.

Az alábbiakban kimutatjuk, hogy ha az S szimplex P_k felosztása elég finom, vagyis ha a primitív alszimplexek maximális átmérőjénél nem kisebb δ elég kicsi, akkor

a) legalább egy $y_\nu > 0$.

Ebből (III.10) és (III.11) figyelembevételével következik, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix mindazon tevékenységére, amely (III.9)-ben szerepel (vagyis mindenképpen azokra, amelyekre $x_{j_\nu} > 0$):

b) $$\sum_{i=1}^{n} \pi_i a_{il_\nu(j_\nu)} \approx 0\,; \qquad \boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$$

és az $\mathbf{A}$ mátrix minden más tevékenységére

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i a_{il} \lesssim 0\,; \qquad \boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$$

amin azt értjük, hogy a többi tevékenység értékelése nem haladhat meg egy nullához közeli értéket. Itt a $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ vektorról csak azt tesszük fel, hogy az a 2. tételben szereplő $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ vektorokkal generált primitív alszimplexnek egy tetszőleges eleme. Közgazdaságilag ez azt jelenti, hogy a szóban forgó bázismegoldásnak megfelelő tevékenységek minden $\boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$-ra közelítőleg eleget tesznek a rentabilitás követelményének.

Ezután be fogjuk látni, hogy ha az S szimplex felosztása elég finom, akkor

c) $$\sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \approx 1 .$$

Ebből egyszerűen következik majd, hogy (III.9) közelítőleg biztosítja a kereslet és kínálat egyensúlyát az összes áruk piacán. Vagyis a szóban forgó primitív alszimplexnek bármely pontja közelítőleg betölti az egyensúlyi árrendszer szerepét.

Legyen az S szimplexen $\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i$ alsó határa ω_0. Ez pozitív, mert $\omega_i > 0$ $i = 1, \ldots, n$ és $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$. Jelöljük $\bar{A}_j$-vel az $\mathbf{A}$ mátrix koefficienseinek abszolút értékeiből képzett mátrix j-edik oszlopának oszlopösszegét.

A (III.6) egyenlőtlenségrendszert kielégítő nem-negatív x vektorok halmaza feltevésünk értelmében korlátos. Maximáljuk e halmazon a $\sum_{j=1}^{m} \bar{A}_j x_j$ függvényt és jelöljük e függvény maximumát K-val.

A $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\pi}) = (\xi_1(\boldsymbol{\pi}), \ldots, \xi_n(\boldsymbol{\pi}))$ vektor-vektor függvény folytonossága azt jelenti, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$, hogy

$$|\xi_i(\boldsymbol{\pi}') - \xi_i(\boldsymbol{\pi}'')| \leq \varepsilon \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\text{(III. 12)}$$

hacsak $$|\pi_i' - \pi_i''| \leq \delta \qquad i = 1, \ldots, n$$

Folytonos függvény zárt tartományban felveszi maximumát. Legyen

$$\max_{i} \max_{\pi \in S} \xi_i(\boldsymbol{\pi}) = \xi^0 \tag{III. 13}$$

Végül megjegyezzük, hogy a továbbiakban $\boldsymbol{\pi}$-vel annak a primitív alszimplexnek egy tetszőleges elemét jelöljük, amelyet az S szimplexen a $\boldsymbol{\pi}^{j_1}, \ldots, \boldsymbol{\pi}^{j_n}$ primitív halmaz határoz meg.

Az a) állítás belátása

Legyen az S szimplex felosztása oly finom, vagyis ε és ezzel együtt a primitív alszimplexek maximális átmérőjénél nem kisebb $\delta = \delta(\varepsilon)$ oly kicsi, hogy

$$\delta < \frac{\omega_0}{K} \tag{III. 14}$$

Ekkor van legalább egy olyan y_ν, amelyre $y_\nu > 0$.

Tegyük fel ugyanis az állítás ellenkezőjét. Ekkor (III.9) az alábbi alakot öltené:

$$\sum_{\nu=1}^{s} a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu} = \omega_i \qquad i = 1, \ldots, n \tag{III. 15}$$

Szorozzuk ezt az egyenlőséget végig π_i-vel, $\boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$, és összegezzük i-re

$$-\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{s} \pi_i a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i$$

vagy másképpen

$$-\sum_{\nu=1}^{s} x_{j_\nu}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{j_\nu} a_{il_\nu(j_\nu)}\right)+\sum_{\nu=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}(\pi_i^{j_\nu}-\pi_i)\, a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu}=\sum_{i=1}^{n}\pi_i\,\omega_i\,. \qquad \text{(III. 16)}$$

A 2. észrevételből következik, hogy a bal oldal első tagja nem-pozitív, ezért (III.16) bal oldala nem nagyobb, mint

$$\delta \sum_{\nu=1}^{s} x_{j_\nu} \sum_{i=1}^{n} |a_{il_\nu(j_\nu)}| = \delta \sum_{\nu=1}^{s} \bar{A}_{j_\nu} x_{j_\nu} \le \delta K\,. \qquad \text{(III. 17)}$$

Vagyis (III.17)-ből

$$\delta K \ge \sum_{i=1}^{n} \pi_i\,\omega_i \ge \omega_0 \qquad \text{(III. 18)}$$

(III.18) ellentmond (III.14)-nek, így indirekt feltevésünk hibás. Kell tehát pozitív y_ν-nek léteznie.

A b) állítás igazolása

Az *a)* állításból tudjuk már, hogy ha az S szimplex felosztása elég finom, ha (III.14) fennáll, akkor létezik pozitív y_ν. Ezért (III.10)-ból minden l-re:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i^{j_\nu} a_{il} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il} + \sum_{i=1}^{n} (\pi_i^{j_\nu}-\pi_i)\, a_{il} \le 0$$

és így, ha $\boldsymbol{\pi} \in \sigma_0$

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il} \le \delta\, \bar{A}_l \qquad \text{(III. 19)}$$

Ehhez teljesen hasonlóan kapjuk (III.11)-ből, hogy mindegyik bázisban szereplő l_ν tevékenységre

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il_\nu} \ge -\delta\, \bar{A}_{l_\nu} \qquad \text{(III. 20)}$$

amiből (III.19) alapján mindegyik bázisban szereplő tevékenységre

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il_\nu}\right| \le \delta\, \bar{A}_{l_\nu} \qquad \text{(III. 21)}$$

és minden más tevékenységre (III.19) érvényes. Ezzel a *b)* állítás fennállását beláttuk.

A c) állítás igazolása

Szorozzuk meg a (III.9) egyenlőséget π_i-vel és összegezzük i-re.

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{s} \pi_i\, a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=s+1}^{n} \pi_i\, \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu})\, y_\nu = \sum_{i=1}^{n} \pi_i\,\omega_i \qquad \text{(III. 22)}$$

(III.21)-ből

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{s} \pi_i\, a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu} = \sum_{\nu=1}^{s} x_{j_\nu} \sum_{i=1}^{n} \pi_i\, a_{il_\nu(j_\nu)} \le \sum_{\nu=1}^{s} x_{j_\nu}\, \delta\, \bar{A}_{l_\nu} \le \delta K\,. \qquad \text{(III. 23)}$$

Fontoljuk meg továbbá azt is, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=s+1}^{n} \pi_i \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) y_\nu = \Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \xi_i(\boldsymbol{\pi})\Big)\Big(\sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i\Big) \sum_{\nu=s+1}^{n} \big(\xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) - \xi_i(\boldsymbol{\pi})\big) y_\nu$$

és így (III.12)- és (III.3)-ból, tekintettel arra, hogy $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i - \varepsilon\Big) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=s+1}^{n} \pi_i \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) y_\nu \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i + \varepsilon\Big) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu . \qquad \text{(III. 24)}$$

(III.23) és (III.24) felhasználásával (III.22)-ből

$$-\delta K + \Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i - \varepsilon\Big) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq \sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i \leq \delta K + \Big(\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i + \varepsilon\Big) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu$$

amiből most már kapjuk, hogy

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i - \delta K}{\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i + \varepsilon} \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i + \delta K}{\sum_{i=1}^{n} \pi_i \omega_i - \varepsilon}$$

vagy még inkább:

$$1 - \frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 + \varepsilon} \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq 1 + \frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 - \varepsilon} \qquad \text{(III. 25)}$$

amiből

$$\Big| \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu - 1 \Big| \leq \frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 - \varepsilon} . \qquad \text{(III. 26)}$$

Ez azt jelenti, hogy ε és ezzel együtt $\delta = \delta(\varepsilon)$ elég kicsire választásával $\sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu$ tetszőleges közel „vihető" az egységhez, feltételezve, hogy a primitív alszimplexek maximális átmérője kisebb, mint $\delta < \frac{\omega_0}{K}$.

A fentiek segítségével azt kell még belátnunk, hogy ha S felosztása elég finom, akkor az a megoldás, amely (III.9)-et kielégíti, közelítőleg (III.4)-nek is eleget tesz.

Mivel (III.9) baloldalának második szummájára:

$$\sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) y_\nu = \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{\pi}) y_\nu + \sum_{\nu=s+1}^{n} \big(\xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) - \xi_i(\boldsymbol{\pi})\big) y_\nu \qquad \text{(III.27)}$$

$$i = 1, \ldots, n$$

ezért

$$\big(\xi_i(\boldsymbol{\pi}) - \varepsilon\big) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\boldsymbol{\pi}^{j_\nu}) y_\nu \leq \big(\xi_i(\boldsymbol{\pi}) + \varepsilon\big) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu \qquad i = 1, \ldots, n$$

Vonjunk le mindegyik oldalból $\xi_i(\pi)$-t:

$$(\xi_i(\pi) - \varepsilon) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu - \xi_i(\pi) \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\pi^{j_\nu}) y_\nu - \xi_i(\pi) \leq$$

$$\leq (\xi_i(\pi) + \varepsilon) \sum_{\nu=s+1}^{n} y_\nu - \xi_i(\pi) \qquad \text{(III.28)}$$

amiből (III.25) segítségével, tekintettel ξ° (III.13)beli definíciójára:

$$-(\xi^\circ - \varepsilon) \frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 + \varepsilon} - \varepsilon \leq \sum_{\nu=s+1}^{n} \xi_i(\pi^{j_\nu}) y_\nu - \xi_i(\pi) \leq (\xi^\circ + \varepsilon) \frac{\delta K + \varepsilon}{\omega_0 - \varepsilon} + \varepsilon \ \text{(III.29)}$$

A (III.29) egyenlőtlenségből (III.9) alapján azonban már egyszerűen következik, hogy

$$|\xi_i(\pi) - \sum_{\nu=1}^{s} a_{il_\nu(j_\nu)} x_{j_\nu} - \omega_i| \leq (\xi^\circ + \varepsilon) \frac{\delta k + \varepsilon}{\omega_0 - \varepsilon} + \varepsilon \qquad \text{(III.30)}$$

amivel állításunkat igazoltuk.

Megjegyezzük, hogy ha $\varepsilon \to 0$ (és ezzel együtt természetesen $\delta \to 0$), akkor az egyre finomabb felosztásoknak és a 2. tételnek megfelelő primitív halmazok végtelen sorozata nem szükségképpen konvergens. Nyilvánvaló azonban, hogy létezik *legalább* egy torlódási pont és így a fentiek nemcsak az approximáció pontosságára adnak becslést, hanem egyben azt is bizonyítják, hogy a problémának van *egzakt* megoldása is.

A fentiekben a 2. tételnek eleget tevő primitív halmaz által generált σ_0 primitív alszimplex tetszőleges pontja betöltötte a közelítő egyensúlyi ár szerepét. Ahhoz, hogy végül is egyetlen közelítő árrendszerhez jussunk, eljárhatunk például úgy, hogy a (III.30) becslés pontosságát élesítjük.

Az a γ_0 érték keresendő, melyre

$$\min \gamma = \gamma_0 \qquad \text{(III.31)}$$

alávetve a következő feltételeknek:

$$-\gamma \leq \bar{\xi}_i(\pi) - \sum_{\nu=1}^{s} a_{il_\nu(j_\nu)} - \omega_i \leq \gamma \quad i = 1, \ldots, n \qquad \text{(III.32)}$$

ahol a $\bar{\xi}_i(\pi)$ függvény a $\xi_i(\pi)$ függvény lineáris közelítését adja és γ tetszőleges nem-negatív szám. (Feltesszük, hogy a $\xi_i(\pi)$ függvény Taylor-sorba fejthető hasonlóan az (I.22—25) feladat $f_i(\pi)$ függvényéhez.)

És mivel a π vektort a szóban forgó primitív alszimplexből választjuk:

$$\pi_i \geq \min [\pi_i^{j_1}, \ldots, \pi_i^{j_n}] \qquad i = 1, \ldots, n \quad \text{(III.33)}$$

valamint

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1 \ ; \ \pi_i \geq 0 \qquad i = 1, \ldots, n \quad \text{(III.34)}$$

III.3. *Numerikus tapasztalatok*

Az első fejezethez hasonlóan vesszük fel itt is a P_k halmazt. Feltesszük, hogy P_k elemeit $({}^{k_1}/_D, \ldots, {}^{k_n}/_D)$ adja, ahol a k_i számok pozitív egészek és összegük D. Az I.3-ban tárgyalt algoritmus befejeződése után a primitív halmazban szereplő vektorokat most is az előzőkhöz hasonlóan átlagoljuk. Scarf felteszi, hogy a primitív halmaz környezetében a keresleti függvények jól közelíthetők Taylor-soruk első két tagjával, és itt azt a vektort választja, amely minimalizálja a kereslet és kínálat közötti maximális eltérést. (Lásd a (III.31—34) feladatot.)

Feladatunkban, amely csupán numerikus tapasztalatszerzésre való és nem akarja a valóság látszatát kelteni, hat árufajta szerepel:

1. Tőke, amely a folyó periódus végén áll rendelkezésre (t. p. v.).
2. Tőke, amely a folyó periódus elején áll rendelkezésre (t. p. e.).
3. Szakmunka (sz. m.).
4. Szakképzetlen (szkl. m.).
5. Nem-tartós jószágok (nt. j.).
6. Tartós jószágok (t. j.).

Az adott időperiódus alatt a termelés három szektorban folyik. Az egyik tartós fogyasztási cikkeket, a másik nem-tartós fogyasztási cikkeket gyárt, míg a harmadik a periódus végén rendelkezésre álló tőkét előállító szektor. Az első hat tevékenység a fel nem használási tevékenységekkel azonos.

A tartós fogyasztási cikkek szektorát az alábbi két (hetedik és nyolcadik) tevékenység írja le:

7	8
4	4
−5,3	−5
−2	−1
−1	−6
0	0
4	3,5

ahol az árufajták sorrendje a fentiekben van megadva. E két tevékenység közül az első olyan eljárást ad, amely 4 egység tartós fogyasztási cikket állít elő, mialatt 5,3 egység tőkét, 2 egység szakmunkát és 1 egység szakképzetlen munkát használ fel. Az 5,3 egység tőke a használat következtében a periódus végére részlegesen elértéktelenedik és 4 egységre csökken. E szektor második tevékenysége a szakképzett és szakképzetlen munka helyettesítését teszi lehetővé.

A nem-tartós javak szektorában három lehetséges tevékenység van: a kilencedik, a tizedik és a tizenegyedik.

9	10	11
1,6	1,6	1,6
−2	−2	−2
−2	−4	−1
−3	−1	−8
6	8	7
0	0	0

Mint látható, itt is a szakmunka és a szakképzetlen munka különböző mértékű helyettesítésére van lehetőség.

Végül a tőkejószág szektor az alábbi három tevékenységet tartalmazza:

12	**13**	**14**
0,9	7	8
−1	−4	−5
0	−3	−2
0	−1	−8
0	0	0
0	0	0

ahol az első oszlop a tőke értékcsökkenésének rátáját adja meg, ha beruházásba nem fognak bele.

Hipotétikus gazdaságunk öt fogyasztót is magában foglal, amelyek különböző keresleti függvényhalmazzal és kezdeti árukészlet-vektorral rendelkeznek. A következő mátrix írja le az öt fogyasztó kezdő készletét:

	t. p. v.	t. p. e.	sz. m.	szkl. m.	nt. j.	t. j.
1. fogyasztó	0	3	5	0,1	0	1
2. fogyasztó	0	0,1	0,1	7	0	2
3. fogyasztó	0	2	6	0,1	0	1,5
4. fogyasztó	0	1	0,1	8	0	1
5. fogyasztó	0	6	0,1	0,5	0	2

Mint látható, a fogyasztók a periódus elején nem rendelkeznek sem nemtartós javakkal, sem olyan tőkejószággal, amelyik a periódus végén áll rendelkezésre. Az 5. fogyasztó rendelkezik a legtöbb tőkével a periódus elején, míg a kétfajta munkából és a különböző tartósságú fogyasztási javakból különféle mértékben részesednek.

A keresleti függvényeket Scarf konstans helyettesítés-rugalmasságú hasznossági függvényekből vezette le, az előző fejezet (II.8–13) relációinak megfelelően. Az r fogyasztó keresletét az i árufajtából a (II.12) képlet adta, amiből megkaphatjuk az i árura irányuló teljes keresletet:

$$\xi_i(\pi) = \sum_{r=1}^{5} \xi_{ri}(\pi) \qquad \text{(III.35)}$$

ω_{ri} értékeit (a gazdasági ügynökségek, illetve az individuumok tulajdonában levő kezdeti készletek nagyságait) az előző táblázatból olvashatjuk le. Az i árufajtából rendelkezésre álló összes árumennyiséget $\sum_{r=1}^{5} \omega_{ri}$ adja. A II. fejezetben, így most is, a b_r paraméterek adják a fogyasztók helyettesítés-rugalmasságait és a_{ri} méri az r fogyasztók keresleteinek intenzitásait az i; $i = 1, \ldots, 6$ áruk iránt. Az a_{ri} paraméterek numerikus értékeit a túloldali táblázatból kapjuk.

Mint ahogyan látható, nincs olyan fogyasztó, amelynek kereslete volna tőkéből a periódus *elején*, de lehet kereslete az időszak *végén* – függően az időszak áraitól. Az időszak végén rendelkezésre álló tőke iránti keresletet mint megtakarítási hajlamot interpretálhatjuk. A szakmunka és a szakképzetlen

	t. p. v.	t. p. e.	sz. m.	szkl. m.	nt. j.	t. j.
1. fogyasztó	4	0	0,2	0	2	3,2
2. fogyasztó	0,4	0	0	0,6	4	1
3. fogyasztó	2	0	0,5	0	2	1,5
4. fogyasztó	5	0	0	0,2	5	4,5
5. fogyasztó	3	0	0	0,2	4	2

munka oszlopainak adatait a fogyasztó saját munkaidejének csökkentésére (a szabadidő növelésére) irányuló hajlamát fejezik ki.

Végül a helyettesítés-rugalmasság konstans koefficienseit a következő táblázat szolgáltatja:

Fogyasztó	b_i
1	1,2
2	1,6
3	0,8
4	0,5
5	0,6

A példa numerikus megoldásában a P_k halmaz π^j elemeiről feltesszük, hogy $({}^{k_1}/_{100}, \ldots {}^{k_6}/_{100})$; $\sum_{j=1}^{6} k_j = 100$ alakúak. Ezzel a számításokhoz szükséges minden numerikus adatunk megvan.

Az algoritmus 913 primitív halmaz megvizsgálása után fejeződött be. Az IBM 7094-es gépen a számítási idő alig haladta meg az egy percet. Eredménye a következő primitív halmaz:

π^{j_1}	π^{j_2}	π^{j_3}	π^{j_4}	π^{j_5}	π^{j_6}
22	22	22	22	22	23
22	21	22	22	24	22
20	19	19	19	19	20
7	7	7	6	6	7
12	12	12	12	11	12
19	19	18	19	18	16

E hat vektor kölcsönösen egyértelmű kapcsolatban áll a B mátrixnak olyan hat oszlopával, amelyek a $\mathbf{Bz} = \omega$ egyenletrendszernek megengedhető bázisát alkotják. A fenti vektorok közül az első négy a 9., 7., 10. és a 11. tevékenységhez kapcsolódik, a leírás sorrendjében. A π^{j_5} vektor az összes tevékenység esetében negatív profitot ad és ezért a keresletek (egyik) oszlopának felel meg a **B** mátrixban. π^{j_6} a 13. tevékenységgel kapcsolatos.

Végül a hat vektort a lineáris programozás segítségével oly módon közepeltük, hogy a kereslet és kínálat különbsége minimális legyen [lásd a (III. 31—34) feladatot]. Eredményül a következőket kaptuk:

$$\check{\pi} = (21{,}8 \quad 21{,}8 \quad 19{,}4 \quad 7{,}4 \quad 12{,}2 \quad 17{,}4).$$

Tevékenység	Terjedelem	Profit
7	0,86	—0,05
8	0,0	—0,25
9	0,10	0,03
10	1,41	0,04
11	1,31	—0,02
12	0,0	—0,02
13	0,47	0,00
14	0,0	—0,33

A 7-es és 8-as tevékenység tartozik a tartós fogyasztási cikkeket gyártó szektorba. A nem-tartós szektor három tevékenysége a 9-es, a 10-es és a 11-es. Végül az utolsó három alkotja a periódus végén rendelkezésre álló tőkét előállító szektort. (Az első hat adja a fel nem használási tevékenységeket.)

Az utolsó oszlopban található profitokat már a normált árvektorral számítottuk, ahol $\hat{\pi}$ úgy van normálva, hogy az árak összege 1 legyen.

Végső összegezésként az ezekre az árakra számított piaci keresletet hasonlítsuk össze a nettó kínálattal, amelyet a tevékenységek fenti terjedelmei és a kezdeti árukészletek alapján határozhatunk meg:

	t. p. v.	t. p. e.	sz. m.	szkl. m.	nt. j.	t. j.
Kereslet	11,27	0,00	1,02	2,17	21,08	10,98
Kínálat	11,27	—0,01	1,01	2,14	21,06	10,96

Úgy tűnik, hogy a $\hat{\pi}$ árvektor és a fenti tevékenységterjedelmek a kereslet és kínálat egyensúlyának jó közelítését nyújtják. A profitok tekintetében azonban, amelyeknek zérónak kellene lenniök olyan tevékenységek esetén, amelyeket felhasználunk és nem-pozitívnak a többiekre vonatkozóan, láthatóan kevésbé kielégítő az eredmény. Ez kétségtelenül annak tulajdonítható, hogy a végső lineáris programozási problémában a kereslet és kínálat eltérését minimalizáltuk, és ez a cél a profitok tekintetében nem vezetett teljesen kielégítő eredményhez. De sok más átlagolási eljárás is használható és ezek behatóbb vizsgálatot érdemelnek, mielőtt nagyobb problémát próbálunk ki. Hangsúlyoznunk kell, hogy a végső lineáris programozási probléma számítási ideje alig egy-két másodperc, szinte elhanyagolható. Sok idő a kívánt tulajdonságú primitív halmaz meghatározásához kell. Ezzel a számítással kapjuk meg azt a környezetet, amelyben a közelítő egyensúlyi árvektor fekszik.

A példa vizsgálata során látható, hogy a ma rendelkezésre álló tőke azonos azzal, amit ma kell fizetni a holnapi tőkéért, így a valódi kamatláb természetesen zérónak veendő. Ez abban a tényben tükröződik, hogy a tőke kezdeti készlete a periódus végére 12,1 egységről 11,3 egységre csökken, bár a 13. tevékenység, a tőkét termelő tevékenység 0,47 terjedelemben kihasználásra kerül.

Összehasonlítás kedvéért vezessünk be modellünkbe egy további termelő tevékenységet — a tizenötödiket — a tőkejavakat termelő szektorban. A

15

6,4
−3,5
−1
−5
0
0

tevékenység 0,13 profitot hoz az eredeti modell normált egyensúlyi árain, azaz, ha ez a tevékenység rendelkezésre áll, bizonyára felhasználásra is kerül. Ésszerűnek tűnik arra gondolni, hogy e tevékenység bevezetése a kamatlábat az előző zéró színvonalhoz képest növelni fogja.

Ha most is ugyanazzal az árráccsal dolgozunk, mint az előbbiekben, a számítás 1185 árvektor kiszámítása után körülbelül egy perc húsz másodperc gépi számítási idő alatt fejeződik be az IBM 7094 számítógépen. Átlagolás után a következő árvektort és tevékenység terjedelmeket kapjuk:

$$\hat{\pi} = (18{,}8 \quad 22{,}0 \quad 19{,}6 \quad 7{,}1 \quad 13{,}4 \quad 19{,}1)$$

Tevékenység	Terjedelem	Profit
7	0,69	−0,11
8	0,0	−0,30
9	0,0	0,06
10	1,79	0,08
11	0,76	0,04
12	0,0	−0,05
13	0,0	−0,22
14	0,0	−0,56
15	0,95	−0,12

A kereslet és kínálat közötti új összefüggést az alábbi táblázat adja:

	t. p. v.	t. p. e.	sz. m.	szkl. m.	nt. j.	t. j.
Kereslet	12,98	0,00	1,03	2,41	19,73	10,29
Kínálat	12,93	−0,01	1,02	2,40	19,68	10,28

Az új, 15. tevékenység elsősorban a 11. tevékenység terhére lép be, amelyben nagymennyiségű szakképzetlen munkát használnak fel nem-tartós cikkek termelésére. Ezért a nem-tartós cikkek ára emelkedik és fogyasztása csökken. A kamatráta várt növekedése is bekövetkezik a megtakarítás növekedésével együtt.

*

A tárgyalt példák azt a sebességet és pontosságot jelzik, amellyel az algoritmus egy közepesen nehéz feladatnál működik. Scarf dolgozata végén kifejti meggyőződését, hogy ez mind sebességben, mind pontosságban finomabb programozási technikák segítségével még tetemesen javítható. Így olyan problémákat is megoldhatunk majd, amelyek több fajta árut tartalmaznak.

(Beérkezett: 1969. VI. 15.)

KÖNYVEKRŐL

E. Sz. Ventcel: *A dinamikus programozás elemei.* Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1969, 199 p.

Jelena Ventcel könyve az első olyan mű a hazai könyvpiacon, amely teljes egészében a dinamikus programozással foglalkozik.

A szerző gyakorlati problémák révén vezeti be a dinamikus programozással megoldható leggyakoribb feladat-típusokat. Az első fejezetben bemutatott probléma: bizonyos K alaptőkét és évente a keletkező jövedelmet kell több vállalat között szétosztani úgy, hogy a tervezési időszak végére a vállalatok bevételének összege maximális legyen (ismerve az egyes vállalatok részére juttatott eszközök feltételezett hatékonyságát minden egyes évre vonatkozóan). A probléma szakaszonkénti optimalizálással oldható meg. Ezzel a készletelosztási feladattal olyan folyamatra mutat be példát a szerző, amelyik természeténél fogva szakaszokra bontható. Kitér arra a fontos körülményre, hogy e feladatok a szakaszonkénti optimalizálás megkerülésével is megoldhatók, de az ilyen közvetlen megoldás legtöbbször bonyolultabb, mint a dinamikus programozási eljárások. Vannak olyan feladatok, ahol a szakaszokra bontást mesterséges úton végezzük el. A szerző nem ad választ arra a kérdésre, mi dönti el azt, hogy egy feladatot érdemesebb-e szakaszokra bontani és szakaszontkénti optimalizálással megoldani vagy valamilyen egyéb eljárást választani. Ennek ellenére a könyv elolvasása után kapunk bizonyos képet a feladatoknak arról a köréről, ahol a dinamikus programozás módszereinek igénybevétele javasolható.

A második fejezet nagyvonalakban ismerteti a szakaszonkénti optimalizálás elvét és a megoldás módszerét. A további három fejezet példákon mutatja be a könyv elején elmondottakat. A 6. és a 7. fejezet általánosan tárgyalja a dinamikus programozás feladatát és megoldását. A szakaszonkénti optimalizálás módszere Sellman tételén alapul, eszerint optimális politika csak optimális alpolitikákból állhat, ám ezt a könyv nem említi. A szerző az előszóban hangsúlyozta, hogy a bizonyításokat általában mellőzi, de talán ez a tétel jelentőségénél fogva helyet érdemelt volna a munkában. Bellman tétele a dinamikus programozás gondolatmenetének igen fontos láncszeme, és bizonyításának vagy legalább a rá való hivatkozásnak hiánya az igényesebb olvasó számára logikai ugrásnak tűnik.

A szakaszok számának korlátlan növelése (amellyel a feltételekben sokszor jelentkező elhanyagolásokat küszöbölhetjük ki) inkább elméleti jelentőségű, amint a szerző a 7. fejezet végén megállapítja. Gyakorlatilag a szakaszok számát addig növeljük, amíg az eredmények pontossága kárpótol a számítások megnövekedett mennyiségéért.

A könyv további hat fejezete a készletelosztási feladatokkal foglalkozik, mivel a gyakorlat szempontjából ezek a legfontosabbak a dinamikus programozással megoldható feladatok közül. A készletelosztási feladatokat három csoportba sorolja: *a)* készletelosztás két termelőegység között nem egynemű szakaszok alapján, itt utal arra a speciális esetre, amikor a koefficiensek a szakaszok között változatlanok, *b)* készletfelhalmozási feladat (egy termelőegység a különböző időszakokban eszközeinek mekkora részét tartalékolja és mekkora részét ruházza be), *c)* kettőnél több termelési ág közötti készletelosztás feladata.

A 13. fejezetben olyan készletelosztási feladatokról van szó, amelyeknél egy korábbi lépés hatása valamely későbbi szakaszban jelentkezik. A gyakorlatban ennek azok a modellek felelnek meg, amelyekben a beruházás késéssel fejti ki hatását. A könyv ezeket a bonyolultabb feladatokat következménnyel járó készletelosztási feladatoknak nevezi.

A 15. és 16. fejezet a dinamikus programozás sztochasztikus feladataival foglalkozik. Akár az egész könyv, az itt közölt gyakorlati példák is azt a gondolatot ébresztik, hogy a dinamikus programozást elsősorban a közgazdasági tervezés és a hadviselés tudománya alkalmazhatja.

A szerző stílusa világos, közérthető és szemléletességre törekszik. Az irodalomjegyzékkel kapcsolatban megemlítendő, hogy Bellman hivatkozott könyve az 1957-ben megjelent angol nyelvű mű orosz fordítása, magyar fordítását is örömmel látnánk.

A Ventcel-mű fordítója időnként a vélt szabatosságért föláldozza a magyarosságot. Nem valószínű, hogy elterjed nálunk az olyan kifejezésmód, mint „m lépések”.

A könyv fő érdeme az, hogy az olvasóknak a dinamikus programozás módszeréről és jelentőségéről igen plasztikus képet ad. Így a gyakorlati szakemberek érdeklődését felkeltheti a téma iránt, a kutatókat pedig a dinamikus programozás elméletével való mélyebb ismerkedésre ösztönözheti.

Jakabffy Imre

VARGA JÓZSEF: *Gyakorlati programozás.* Tankönyvkiadó, 1969. 325 p.

„A tankönyv a termelés tervezésének és szervezésének a lineáris és lineárisra visszavezethető programozási lehetőségeit tárgyalja” — írja ajánlásában a Tankönyvkiadó. A munka címe és a fenti ajánló sor alapján már képet is alkothatunk jellegéről, és egyben támpontot kapunk értékeléséhez is. Érdekes lehet ebből a szemszögből két kérdés megválaszolása.

— Egyrészt: kik használhatják, forgathatják eredményesen?

— Másrészt: hogyan kapcsolódik ez a könyv a lineáris programozás magyar nyelvű irodalmához?

Annyit mindenképpen leszögezhetünk már elöljáróban is, hogy a könyv gazdagította a még eléggé szűk skálájú magyar nyelvű programozási irodalmat. Az oktatásban, továbbképzésben jól felhasználható munkák száma elég kicsi, s itt jelent ez a könyv nem csak mennyiségi pótlást.

A munka a tervezésben felhasználható programozási eljárásokat, a lineáris, illetve lineárisra visszavezethető modellek típusait, a modellek megoldási algoritmusait 21 fejezetre tagolva tárgyalja. Tartalmuk nyers csoportosításban három nagy témakörbe sorolható.

— Az első fejezetek foglalkoznak a modell fogalmával, definíciójával, majd konkrétabban a lineáris programozási feladatok megoldási módjaival, a modellek felírásánál felhasznált egyszerűsítő feltevésekkel és a különböző típusú feladatok kölcsönös összefüggéseivel.

— A könyv nagy része — a XVIII. fejezetig terjedő rész — a programozási módszereket tárgyalja. E rész központi témája a lineáris programozás szimplex módszere, továbbá a szimplex módszer néhány, a gyakorlatban is felhasznált változata. Két érdekes témát emelnénk ki még ebből a részből. Egyik a nem-lineáris modellek szimplex módszerrel való megoldásának, megoldhatóságának problematikája, a másik pedig a kritikus út módszere. E rész tartalmazza a szállítási és a vele rokon feladatok tárgyalását is, s tegyük hozzá, kellő igényességgel.

— A munka harmadik fő részét az utolsó négy fejezet alkotja. Az újdonság erejével ható fejezetek az iparban, a mezőgazdaságban, a kereskedelemben és a szállítás területén felvethető és felvetődő problémákat tárgyalják. A feladatok csoportosulnak aszerint, hogy milyen irányítási fokon vetődtek fel (üzemi, vállalati, irányítószervi) és hogy milyen gazdasági kérdéshez kapcsolódnak (erőforrásfelosztás, optimális technológia, telepítés stb.). Itt már tulajdonképpen a gyakorlatban alkalmazott programozásról van szó.

A könyv szerkezeti-didaktikai felépítése a következő: Az egyes fejezetek bevezetőjében a téma legfontosabb elméleti összefüggéseinek tömör vázlatát kapjuk. A bevezetőt gyakorlati bemutatás követi. Itt a példák általában egyszerűek, csupán a módszer interpretálására szolgálnak. Meg kell jegyeznünk, hogy a valóság legtöbbször nehezebb, újabb fogásokat is követelő feladatok megfogalmazására kényszerít. A példák egyszerűségét azonban részben indokolja, hogy tankönyvről van szó, továbbá az utolsó fejezetek amúgy is kárpótolnak ebbeli hiányérzetünkben. A könyv használhatóságát növeli, hogy a jelölésrendszer egységes és áttekinthető.

Az elmondottak nagyjából alátámasztják azt a megállapítást, hogy ez a munka az egyetemi oktatás hasznos segédeszköze. Ugyanígy használhatják azok is, akik tanfolyamokon vagy éppen magánszorgalommal tesznek kísérletet a programozási ismeretek elsajátítására. Korántsem akarjuk ezzel azt mondani, hogy elolvasása és feldolgozása avatott gazdasági programozási szakemberré teszi az olvasót.

A munka hasznosan bővíti hazai irodalmunkat. Felépítésében és tárgyalásmódjában Krekó B.: Lineáris programozás c. munkájára épül és kiegészítője a Közgazdasági Egyetem oktatásában felhasznált Bod P.: Bevezetés a gazdasági programozásba c. jegyzetnek is.

Sivák József

Röviden új külföldi könyvekről

Barczak, A., Ciepielewska, B., Jakubczyk, T., Pawlowski, Z.: *Model ekonometryczny gospodarki Polski Ludowej.* (Lengyelország gazdaságának ökonometriai modellje.) Warszawa, PWN. 1968. 182 p.

A katowicei egyetemen dolgozó kutatócsoport évek óta az ökonometriai kutatások központja Lengyelországban. Ebben a munkában a korábbinál nagyobb, népgazdasági ökonometriai modellt mutatnak be. 17 egyenletből áll, ezek közül 5 egyenlet azonosság vagy mérleg-összefüggés típusú. 17 nem-késleltetett endogén változó szerepel benne, nevezetesen a foglalkoztatás, a beruházás, a nemzeti jövedelem a mezőgazdaságban és a nem-mezőgazdasági ágazatokban együttvéve, a nem-produktív beruházások, az import és az export, a fogyasztási hányad, valamint a reálbér az iparban és az egyéb ágazatokban stb. 14 előre meghatározott értékű változó van a modellben, ezek közül 8 az előbb említett endogén változóknak korábbi időszakra vonatkozó értéke, 6 pedig exogén változó. Az utóbbiak között szerepel a munka termelékenysége az iparban és a búzaimport, valamint négy változó, amely a beruházási és a mezőgazdasági politikát jellemzi az adott évben és 0 vagy 1 értéket kap attól függően, hogy a kormányzat a beruházás növelésére vagy az életszínvonal emelésére helyezett-e nagyobb súlyt, és hogy a mezőgazdasági politika hatására az egyéni gazdaságokban mekkora beruházásokat végeztek.

A modell paramétereit az 1950—1964. időszak adatai alapján becsülték részben a klasszikus és a kettős legkisebb négyzetek módszerével. Közlik a modellnek strukturális és redukált alakját, elemzik az endogén változók trendjét és összehasonlítják a trendek és az ökonometriai modell alapján kapott eredményeket.

A szerzőknek az a meggyőződésük, hogy az ágazati kapcsolatok mérlegei és az optimálisi modellek mellett a leírt fajtájú ökonometriai modelleknek fontos szerepük lehet a szocialista gazdaság irányításában.

Blechstein, K.: *Graphische Linearprogrammierung als Entscheidungshilfe bei der landwirtschaftlichen Betriebsplanung.* (A grafikai lineáris programozás mint döntési segédeszköz a mezőgazdasági üzemi tervezésben.) Hamburg. 1969. Verlag Paul Parey. 162 p.

A grafikai lineáris programozás ismertetett módszere a programozás oktatásában rendszeresen használt grafikai probléma-ábrázolás és megoldás továbbfejlesztése. Célja azonban elsősorban gyakorlati problémák megoldása és csak másodsorban az oktatás. Mezőgazdasági üzemek vezetőit és mezőgazdasági tanácsadókat kíván megtanítani arra, hogyan kell termelési problémákat a programozás kategóriáiban megfogalmazni és nagyon egyszerűen és szemléletesen megoldani.

A grafikai módszernek alapvető korlátja, hogy csak igen kevés, két (legjobb esetben három) változót lehet figyelembe venni, ezért csak igen egyszerű problémák kezelésére alkalmas. A szerző ezen a nehézségen úgy kíván segíteni, hogy egyrészt erősen aggregál, másrészt felbontja a problémákat és lépésenként vesz figyelembe egy-egy új elemet.

Úgy tűnik, hogy a könyv fő haszna a nagyon egyszerű üzemi problémák megoldásán túlmenőn inkább az lehet, hogy közelebb viszi, érthetőbbé teszi a programozást a mezőgazdasági üzemek vezetői számára. Mivel útmutatást ad a problémák megfogalmazására, például a korlátozó feltételek megbecslésére a meglevő üzemi adatok alapján, valamint szemléletessé teszi a megoldás logikai menetét, a kisebb problémák végiggondolásán és megoldásán keresztül felkeltheti az érdeklődést a bonyolultabb problémák megoldására is alkalmas programozási módszerek alkalmazása iránt.

Gelbaum, B. R.—March, J. G.: *Mathematics for the social and behavioral sciences. Probability, calculus and statistics.* (Matematika a társadalom- és viselkedéstudományok számára. Valószínűségszámítás, differenciál- és integrálszámítás, statisztika.) Philadelphia. 1969. W. B. Saunders Company. 337 p.

A könyv gyakorlati igényből született. A szerzők 1964-től kezdődően a californiai egyetem társadalom- és viselkedéstudományi karán matematikát, számítástechnikát és matematikai társadalomtudományt oktattak. Úgy látták, hogy nem tudnak e társadalomtudomány szakos hallgatók kezébe megfelelő tankönyvet adni. A bevezető jellegű tankönyvek ugyanis a matematikának azokat az elemeit helyezik előtérbe, amelyeket különösen a fizikai és a mérnöki problémákban lehet eredményesen alkalmazni. E könyvek példaanyaga nem tartalmaz a társadalomtudományokból vett problémákat.

A szerzők fő céljuknak tekintették, hogy a társadalomtudományokkal foglalkozó hallgatók megtanulják felismerni:

milyen célokra lehet különböző matematikai módszereket saját tudományterületükön felhasználni. Ezt segítik elő nemcsak a példák és feladatok, hanem a munka felépítése is.

A valószínűségszámításból indulnak ki, mert úgy látják: a társadalomtudományokban a valószínűségi modelleket lehet a legeredményesebben felhasználni. Először a mintatér fogalmát vezetik be. Itt is, a következő fejezetekben is sokat alkalmazzák a halmazelméleti megfogalmazásokat. A valószínűségszámítás alaptételei után a permutációkkal és kombinációkkal (mint a mintatérben lehetséges megfigyelési értékek számának meghatározásával stb.), a feltételes valószínűséggel és a véges mintaterekre vonatkozó valószínűségi változókkal foglalkoznak. Ezután térnek rá a határértékek, a differenciálás és az integrálás tárgyalására, hogy ennek alapján bevezethessék a folytonos valószínűségi változókat. Az utolsó két fejezet a becslésekkel és a hipotézisek ellenőrzésével foglalkozik.

A könyvet egy további kötet fogja kiegészíteni, amely hasonló felfogásban tárgyalja a lineáris algebrát, a differencia- és differenciál-egyenleteket, valamint néhány speciális matematikai problémát.

A. R.

Ágazati elemzések a Nehézipari Minisztérium Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézetében

A NIM Ipargazdasági és Üzemszervezési Intézet a minisztérium megbízásából megalakulásától kezdve foglalkozik olyan közgazdasági-matematikai modellek összeállításával, amelyek alkalmasak az ágazatok, az iparágak és az ágazatok tevékenységét jellemző fontosabb termékek közgazdasági elemzésére. A modellekkel szemben támasztott általános követelmény mindig az volt, hogy az anyagi termelést népgazdasági összefüggésekben vizsgálják.

A gazdaságirányítási és elemzési munka céljaira — módszertani szempontból — elsősorban az input—output mérlegek és a lineáris programozási modellek jöttek számításba. Első lépésként a gazdasági összefüggések leírására szolgáló modell mellett döntöttünk s csak később — éppen az input—output modellek adataira támaszkodva — lehetett áttérni lineáris programozási modellekre.

A tárca vezetői a közgazdasági-matematikai modellt alapvetően az exportgazdaságossági számítások megalapozására, a vegyipari importigény népgazdasági szükségességének bemutatására, a devizamérleg elemzésére kívánták felhasználni, s ezt a célt a mérlegmodell valóban jól szolgálta.

Az Intézet Közgazdasági osztálya az elmúlt öt év alatt hat modellt állított össze és azok alapján elemző számításokat végzett. A mérlegek azokra az évekre készültek, amelyekre a Központi Statisztikai Hivatal is kiadott ágazati kapcsolati mérlegeket.

A közgazdasági elemzésekhez — a különböző irányú igényeknek megfelelően — háromfajta mérlegmodell került kidolgozásra:

- belföldi áras értékbeni,
- természetes mértékegységű és
- világpiaci áras mérlegmodell.

A belföldi áras értékbeni kombinált mérlegmodell

A modellt úgy alakítottuk ki, hogy az ne csak a NIM tevékenységeinek egymásközti kapcsolatát tartalmazza, hanem lehetőséget nyújtson népgazdasági szintű elemzések végrehajtásához is. E céllal készítettük el Magyarországon először a terméktípusú iparági kombinált input—output modellt.

A modell főbb sajátosságai a következők:

— A lehető legnagyobb homogenitásra való törekvés végett a kapcsolatokat termékekkel, termékcsoportokkal ábrázoltuk.

— A modell részletesen felöleli a nehézipar belső összefüggéseit, de szervesen kapcsolódik a népgazdaság egészére összeállított input—output modellhez is. Ezáltal modellünk népgazdasági szintű elemzésekre is alkalmassá vált.

A modell különválasztja a minisztérium irányítása alá tartozó vállalatok tevékenységét az azonos termékeket termelő NIM-en kívüli vállalatokétól.

Az 1961. évi adatok alapján készült modell 98 szektort ölel fel. A NIM termelőtevékenységét 72 szektor reprezentálja, további 26 szektor a népgazdaság többi termelő ágazatát.

Az 1965. évi mérleg már 150 szektort tartalmaz; ebből 122 a NIM tevékenységét, 28 pedig a külső népgazdasági ágak tevékenységét reprezentálja. Itt kell megemlíteni, hogy 101 kiemelt termékkel és termékcsoporttal a NIM tevékenységének csaknem 75 százalékát sikerült átfogni.

Mivel a tárca gazdasági és műszaki szakemberei részéről erre igény merült fel, az 1965. évi input—output modell naturális változatban is elkészült.

A modell szerkezeti felépítése a mérlegmodellek általános sémáját követi és a számítási műveletek is megfelelnek az általános gyakorlatnak; ismertetésükkel nem foglalkozunk. Csupán néhány főbb következtetésre, illetve megoldási módozatra utalunk:

— *Belső négyzetek.* A kombinált mérleg felépítéséből következik, hogy belőle több belső négyzet alakítható ki. Az első a NIM tevékenységek belső négyzete, a második a népgazdaság egészét — a NIM tevékenységeket részletesen, a többi népgazdasági ágakat összevontan — magába foglaló belső négyzet. Míg az előző két négyzetet csak a hazai anyagfelhasználás alapján kialakult kapcsolatokra értelmeztük, addig a harmadik belső négyzet további anyagi összefüggéseket tüntet fel: az export, illetve az importanyag-felhasználás értékét relációnként, továbbá a beruházások és az amortizáció értékét.

— *Inverzmatrixok.* A három belső négyzetből inverzmatrixokat is képeztünk, melyek különböző szintű tartalmi vizsgálatok végzésére voltak alkalmasak. A NIM belső kapcsolatainak inverzmatrixa segítségével kimutattuk, hogy a tárca által felhasznált anyagok és egyéb erőforrások milyen extern kibocsátási célokat szolgáltak. Elemeztük azt is, hogy a mezőgazdasági és az élelmiszeripar fejlesztése milyen gépipari, kohászati stb. termékigényeket támaszt a minisztérium termelésén keresztül. Halmozott népgazdasági mutatók kiszámítását a második belső négyzetből nyert inverzmatrix tette lehetővé. Segítségükkel tártuk fel például az export és a NIM termelés összefüggéseit, követtük nyomon az exportstruktúra változásának hatásait. A teljes mutatók számításának alapja a harmadik belső négyzet volt, amely a nem-termelő fogyasztáshoz szükséges minisztériumi termelést mutatta ki termékenként, illetve tevékenységenként. Vizsgálni lehetett a fogyasztás energiaigényességét, vegyipari anyagszükségletét és így tovább. E mutatók a tervezésben is hasznos segítséget nyújtottak.

— *Import anyagfelhasználás.* Az eddigi mérlegszámítások a közvetett importanyag-szükségletet összevontan mutatták ki. A NIM mérlegszámításoknál megoldottuk, hogy a közvetett szükségletet importanyagfajtánként, illetve profilgazdánként lehessen felmérni. Így tételesen számot tudtunk adni arról, hogy a vegyipar által felhasznált különböző nagyértékű importanyagok végső soron milyen NIM-en kívüli termelési, illetve végső felhasználási célokat szolgáltak. Ily módon megállapíthatók voltak az importanyag felhasználás közvetett csökkentésének módozatai, illetve az, hogy az extern felhasználók termelése milyen közvetlen és közvetett igényeket támaszt.

— *Devizamérleg.* Korábban a devizamérleg elsősorban a vizsgált egység közvetlen exportjának és importanyag-felhasználásának különbségét tartalmazta s nem vette figyelembe, hogy az utóbbinak egy része más termelő ágazatok céljait szolgálja. Ezt a fajta „tisztítást" az ágazati modellel végzett számítások segítségével végeztük el, mikor azt vizsgáltuk, hogy a végső felhasználás milyen importanyagot igényel közvetlenül és milyent közvetve, más ágazatok hazai anyagfelhasználásán keresztül. Az így meghatározott importigénynek és az exportnak összevetéséből adódó devizamérleg már népgazdasági szinten mutatja ki, hogy az ágazat tevékenysége milyen hatást gyakorol a devizamérlegre.

A KSH és a NIM modellek összehasonlíthatósága. Már az alapadatokat tartalmazó mérlegek kidolgozásánál is alapvető szempont volt az összehasonlíthatóság. Utaltunk rá, hogy a NIM mérleg is tükrözte a népgazdasági összefüggéseket, arányokat. A matrixalgebrai számítások elvégzése után megvizsgáltuk a népgazdaság teljes összefüggéseit tartalmazó főbb mutatókat, s megállapítható volt, hogy a NIM modell értékei a KSH mérleg értékeit általában 0,5—1,5%-os hibával közelítik. Ez az eltérés alapjában a részletesebb szektor bontásnak tulajdonítható. A NIM és a KSH mérlegének mutatói tehát összehasonlíthatók. Ezzel lehetővé vált a NIM tevékenységének népgazdasági értékelése és olyan mérlegrendszer kialakítása, amely egymással — közgazdasági-tartalmi szempontból — összhangban van.

A modell részletes leírását, az elemző számítások módszerét és a kapott eredmények felhasználásának lehetőségeit részletesen a „*Nehézipari Minisztérium ágazati kapcsolatainak közgazdasági-matematikai modellje; összeállítás, felhasználhatóság*" c. kiadványban ismertettük. Az 1961-es, az 1965. évi modellek alapadatait és számítási eredményeit a fenti kiadvány folytatásaként megjelenő sorozatban adtuk közre.

Naturális mértékegységű kombinált modell

A naturális mértékegységű modell összeállítása mellett a következő indokok szóltak:

— A kombinált modell évenkénti összeállítása, a gépi számítások évenkénti elvégzése a jelenlegi adatforrások (éves iparstatisztikai beszámoló jelentések) mellett lehetetlen. Egy év alatt csak a NIM modell belső négyzetének kidolgozása lehetséges. Ezt a munkát az 1967. évre az 1965. évi szektorbontásnak megfelelően el is végeztük. Kombinált iparági mérleg összeállításához — a tapasztalatok szerint — két-három év szükséges.

— Az értékben kifejezett ÁKM-ek — még ha azonos szektorbontásban készültek is — az árváltozások befolyásoló hatása miatt alig-alig összehasonlíthatók. A termelői és fogyasztói árak szinte minden változása érinti a belső négyzet, az alsó szárny és az oldalszárny értékeinek nagyságát és szerkezetét. Árindexek segítségével ugyan a mérlegeket összehasonlíthatóvá tehetjük, de ezek csak durván közelítő eljárások.

Ha az árváltozás módosítja az alapmatrixot, módosul az inverzmatrix, a halmozott és teljes ráfordítási mutatók együttese is. Tehát olyan alapmatrix összeállítására kellett gondolnunk, amelyre az árak változása kevésbé hat. Ez a naturális mértékegységben összeállított matrix. A tárcát reprezentáló naturális alapmatrix adatainak 67,5 százaléka természetes mértékegységű, áraktól független volumenekből áll. Természetesen ebben a matrixban is szerepelnek értékben kifejezett sorok, mivel a vállalatoknak csak a kiemelt termékeit lehet természetes mértékegységben kifejezni, a termelés többi részét nem.

Az ilyen naturális modell már alkalmasabb az összehasonlításra. Különösen használható a tárca termékértékesítésének és felhasználásának nyomonkövetésére és árszámításokra, például többféle tervezett áras és devizaáras mérleg készítésére. A terméktípusú mérlegek természetes mértékegységű fajlagosaival a tervezés során különböző előrebecsléseket végezhetünk.

A mérleg fajlagos anyagfelhasználásai a műszaki szakemberek részére bővebb áttekintést nyújtanak és elősegítik a modell számítási eredményeinek szélesebb körű felhasználását.

A modell felépítése megegyezik az értékben összeállított modell szerkezetével. Ezt azért tartottuk fontosnak, mert az első naturális modell alapján nyert számítási eredményeket össze kívántuk hasonlítani az azonos módszertani elvek alapján összeállított értékbeni modell eredményeivel.

A természetes mértékegységű modell a NIM 122 tevékenységéből 91 terméket, illetve termékcsoportot emel ki természetes mértékegységben. A további 31 az iparágak egyéb tevékenységét Ft-ban tünteti fel. A NIM-en kívüli ágazatok, valamint a modell alsó szárnya — a nem anyag jellegű ráfordítások — az értékbeni modellel megegyeznek.

A két modell felépítésében eltérő vonás, hogy a naturális modellhez kapcsolódik egy ún. kiegészítő mátrix. Ez a mátrix a NIM belső négyzet 8 egyéb tevékenységéből és 11 külső ágazatból származó, mintegy 95 fajta jelentősebb felhasználást részletez. Ennek a mátrixnak azért van nagy jelentősége, mert egyes nagyobb volumenű, a belső négyzetben ki nem emelt anyagok felhasználását reprezentálja. Ilyenek például az iparágak sajátos anyagfelhasználásai, mint például a szénbányászatban a robbantószer, a bányafa, a TH gyűrű, a villamosenergia hálózat szerelésénél a távvezetéképítési elem, az elektromos porcelánszigetelő, a gyógyszeriparban a felhasznált mákgubó.

E kiegészítő mátrixszal nyert NIM és népgazdasági szintű tartalommutatók értékes tájékoztatást nyújtottak arról, hogy a NIM szektorok extern kibocsátását igénylő ágazatok milyen mérvű anyagi erőforrások igénybevételét kívánták meg.

A modell alapján végzett különféle számítások használhatósága, de különösen a népgazdasági tartalommutatók elemzése bizonyította, hogy a naturális kombinált modell meghozta a várt eredményeket. Az értékbeni és naturális mérlegek tartalommutatóinak összehasonlítása és értékelése még folyik. A két modell népgazdasági szintű mutatói szorosan megközelítik egymást, s ebből — többek között — azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a közgazdasági elemzésben mind a két modell önállóan is megállja a helyét.

A naturális kombinált mérlegről, illetve az elemző számításokról folyamatosan a „*Nehézipari Minisztérium közgazdasági-matematikai modellje*" c. kiadványsorozat tájékoztat.

A világpiaci áras modell

Külső piaci kapcsolataink különböző hatásainak vizsgálatához készültek a szocialista és nem-szocialista világpiaci árakkal valamint a külkereskedelmi árakkal átárazott ágazati kapcsolati mérlegek.

Az átárazáshoz az 1961. évi 54 szektoros, az 1965. évi 83 szektoros netto áras KSH, valamint az 1965. évi 150 szektoros brutto áras NIM kombinált mérlegeket használtuk fel. Az átárazott modellek matematikai elemzésével lehetővé vált, hogy összehasonlítsuk a szocialista és a nem-szocialista piac árain összeállított modell mutatóit egymással, és mindkettőt a belföldi áras mérleggel.

A világpiaci áras modellekkel végzett elemző számításoknak különösen három eredménye jelentős:

- a népgazdaság anyagi termelése alapján mért rubel—dollár értékarány,
- a devizaáras modellekkel számított hatékonysági mutatók,
- a szocialista, a nem-szocialista és a belföldi árarányok összehasonlítása.

A világpiaci áras input—output modellekkel végzett számítások támpontokat adnak a külső piaci árak és a belső árak jobb összehangolására, a nemzetközi munkamegosztás hatékonyabb kihasználására.

Eddig az alábbi — modelleket és elemzéseket ismertető — kiadványok készültek el: „*A KGST ármodell világpiaci árakon történő átárazása*"; „*A magyar népgazdaság ágazati kapcsolatainak mérlege világpiaci árakon*"; „*Világpiaci áras népgazdasági modell-elemzés*".

Jelenleg az 1968. évi modell kiadása van előkészületben.

A további feladatokról

A közgazdasági-matematikai modellek összeállítását és elemzését állandó feladatának tekinti az Intézet. 1968. évre például mindhárom mérlegtípus összeállítása szerepel munkatervünkben. Ezen kívül még egy — a rövid távú tervmunkák koordinálására és elemzésére alkalmas — 1975. évi tervmérleg összeállítását is tervezzük.

A több évre rendelkezésre álló mérlegek — ha sikerül összehasonlíthatóságukat biztosítani — hosszabb időszak elemzését is lehetővé teszik. Természetes, hogy ilyen vizsgálatok végzésére is gondolunk. Munkánk következő jelentősebb fázisa azonban a távlati tervváltozatok programozása lesz.

Kiss Ferenc—Kéri Elemérné—Szabó Aladár

Matematikai-Közgazdasági Konferencia Várnában

1969 decemberében a várnai Műszaki-Közgazdasági Főiskola (BIHC) nagyszabású közgazdász és matematikus találkozót hívott össze Várnába. A 4 napos konferencián, melynek témája az operációkutatás ipari alkalmazása volt, mintegy 750 hazai és külföldi meghívott vendég vett részt. Többségük a gyakorlati életben — elsősorban az iparban — dolgozó szakember volt, de képviseltette magát Bulgária valamennyi egyeteme, főiskolája és matematikai módszereket alkalmazó kutatóintézete.

A konferencia célja általános tájékoztatás, illetve tájékozódás volt az operációkutatás ipari alkalmazásairól. Az elhangzott mintegy 40 előadás értékét így elsősorban nem a felhasznált matematikai módszerek újszerűsége, hanem az alkalmazási területek kiválasztása és bemutatása adta meg. Az alkalmazások között láttunk Monte-Carlo-módszerrel vizsgált munkaidő-kihasználási problémát, termelési folyamat szinkronizálását megoldó modellt, matrixmodellt egy vállalat munkaerő-szükségletének előrebecslésére, integer programot a sorozatnagyság meghatározására, lineáris programozási modelleket a kohászati termékelosztásra, az építőipari tevékenység tervezésére és így tovább.

A konferencián nagy szerepet kapott az ipar vezetésének problematikája, az információk feldolgozása és a számítógépek szerepe a vállalatvezetésben. Az információk és intézkedések áramlásának vizsgálatára különböző CPM-modelleket és olyan információrendszeri sémákat mutattak be, melyek középpontjában az elektronikus számítógép áll.

Ezenkívül egy-egy előadás foglalkozott a többváltozós lineáris programozási feladatok grafikus megoldásával, az elemi dinamikus programozási feladat gépi programjával, az integer programozási feladatok algoritmusával stb.

Az előadásokat bolgár nyelven tartották; a külföldi vendégek számára német és orosz nyelvű tolmácsolás volt. A konferencia napi 7 órás munkaprogramja esténként jól szervezett kulturális rendezvényekkel egészült ki.

Varga József

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya és a SZIGMA Szerkesztősége

pályázatot hirdet:

„Matematikai (operációkutatási) módszerek konkrét felhasználása vállalati gazdasági döntések előkészítésében" címmel.

Pályázati feltételek:

1. A pályázaton egyénileg vagy csoportosan bárki részt vehet.
2. A pályaművek terjedelme lehetőleg a 100 gépelt oldalt ne haladja meg. A felhasznált irodalmat fel kell tüntetni.
3. Pályázni csak eddig nem publikált pályaművekkel lehet; disszertációs munkák a pályázatból ki vannak zárva.
4. A Bíráló Bizottság nem javasol jutalmazásra olyan tanulmányokat, amelyekben kizárólag a szakirodalomra támaszkodó modellelképzelések és javaslatok találhatók és és hiányzik belőlük a vizsgált vállalat adottságainak a konkrét elemzése. A gyakorlatban kipróbált, bevált és ténylegesen felhasználásra kerülő módszereket ismertető tanulmányokat előnyben részesítjük a kizárólag elméleti értékű eredményeket tartalmazó tanulmányokkal szemben.
5. A pályaműveket lezárt borítékban jeligével ellátva, 3 példányban 1970. november hó 30-ig kell a SZIGMA Szerkesztőségéhez (Budapest, V., Münnich Ferenc utca 7. II. em.) eljuttatni. A borítékon feltűnően meg kell jelölni: „Pályázat". A pályázathoz jeligével ellátott lezárt borítékot kell mellékelni, amely a szerző (szerzők) nevét, lakáscímét, munkahelyét és beosztását tartalmazza. A jeligés borítékokat a Bíráló Bizottság a díjak odaítélése után és csak díjazott vagy dícséretben részesített pályázatok esetén bontja fel.
6. A pályadíjakat erre felkért Bíráló Bizottság javaslatai alapján a Matematikai Közgazdasági Szakosztály vezetősége ítéli oda, 1971. február hó 28-ig. Eredményhirdetésre 1971 márciusában, a Szakosztály nyilvános ülésén kerül sor.
7. A pályadíjak a következők:

I díj: 10 000 Ft
II díj: 5 000 Ft

A Szakosztály vezetősége a pályaművek alkalmasságától függően további néhány pályázatot dícséretben és 1000—2000 forintos jutalomban részesíthet.

8. A díjazott pályamunkákat szerzőik a pályázat elbírálása után saját belátásuk szerint publikálhatják. Kívánságra a tanulmányokat vagy egyes részeiket a SZIGMA külön szerzői honorárium mellett közli.
9. A pályázat részleges sikertelensége esetére a Szakosztály vezetősége fenntartja magának azt a jogot, hogy a díjakat egyáltalán ne, illetve csökkentett összegben vagy más megosztásban adja ki.
10. A pályázattal kapcsolatban szükség esetén felvilágosítást nyújtanak Horváth József vagy Madarász Aladár, a Matematikai Közgazdasági Szakosztály titkárai (MTA Közgazdaságtudományi Intézet. Tel.: 127—294).

Magyar Közgazdasági Társaság
Matematikai-Közgazdasági
Szakosztály
SZIGMA Szerkesztőség

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója — Műszaki szerkesztő: Merkly László
A kézirat nyomdába érkezett: 1970. III. 5 — Terjedelem: 8,4 (A/5) ív
70.69291 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENT

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST