

# SZIGMA

## Matematikai közgazdasági folyóirat

Szerkesztő bizottság:

A MAGYAR KÖZGAZDASÁGI TÁRSASÁG  
MATEMATIKAI KÖZGAZDASÁGI SZAKOSZTÁLYÁNAK VEZETŐSÉGE

Szerkeszti: MARTOS BÉLA

Munkatársak: ANDORKA RUDOLF, BÁGER GUSZTÁV, BOD PÉTER,  
PONGRÁCZ TIBOR

\*

E szám szerzői:

ANDORKA RUDOLF, a Központi Statisztikai Hivatal Társadalomstatisztikai Főosztályának főelőadója, GLATTFELDER PÉTER, az Országos Anyag- és Árhivatal Számítástechnikai és Módszertani Osztálya vezetője, KOVÁCS JÁNOS kandidátus, tudományos csoportvezető, MTA Közgazdaságtudományi Intézete, LAMPL TAMÁS, az INFELŐR Rendszer-technikai Vállalat Operációkutatási Osztályának vezetője, LJUBOMIR MARTIĆ egyetemi tanár, Zágrábi Egyetem, Jugoszlávia, MESZÉNA GYÖRGY adjunktus, Marx Károly Közgazdasági Egyetem, DR. NYÁRY ZSIGMOND, a Központi Statisztikai Hivatal Ökonometriai Laboratóriumának főelőadója, RADNÓTI ÉVA kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos munkatársa, SEBESTYÉN JÓZSEF, az Agrárgazdasági Kutatóintézet osztályvezetője, SIMON BÉLÁNÉ, Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete, SZÉKELY BÉLA, az Országos Tervhivatal főelőadója, SZEPESI GYÖRGY, Országos Tervhivatal, TIMÁR JÁNOS kandidátus, az Országos Tervhivatal osztályvezetője, VÁCZI PÁL, Magyar Vegyipari Egyesülés Mérnöki Irodája, VITA LÁSZLÓ, a Központi Statisztikai Hivatal előadója.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI. Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215—96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488., az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban: Budapest V., Váci utca 22. Telefon: 185—612.  
Előfizetési díj egy évre: 40,— Ft

## A gazdasági növekedés optimális pályái egy szabályozott gazdasági rendszerben

### Bevezetés

A szocialista gazdasági tervezés egyre szélesebb körben használja fel a közgazdasági-matematikai növekedési modelleket. Nem törekszünk e modellek rendszerezésére és ismertetésére, csak néhány, a jelen munkában bemutatott modell szempontjából lényeges sajátosságaikat emeljük ki. Nagyon általánosan fogalmazva, ezek a modellek a gazdaság valamilyen kvantitatíve leírt állapotához hozzárendelnek olyan növekedési egyensúlyi pályákat, amelyek azon közgazdasági elméleti rendszer értelmében, amelyben e modellek fogalmazódtak, optimálisak. Ezt az optimumot dinamikusan értelmezzük, azaz nem egy állapot, hanem egy olyan pálya, amelynél az adott optimum kritérium értelmében nem létezik jobb. (Lásd pl. [13].) Ezek a modellek csak korlátozottan alkalmazhatók a tervezés céljaira. A tervezés végső feladata abban rejlik, hogy kidolgozza a gazdaság egy, a változó körülményekhez alkalmazkodó pályáját és meghatározza azokat az eszközöket, szabályozókat, amelyek segítségével ez a pálya a valóságban realizálható. Ezek a növekedési modellek két szempontból nem alkalmazkodnak a tervezés követelményeihez. Egyrészt többségük csak változatlan, konstans struktúrához tudja hozzárendelni az optimális növekedési pályát és különböző struktúrák esetén többször meg kell oldani a modellt. Viszont a struktúrák közötti kapcsolatról, az áttérés lehetőségeiről és az áttérési pályákról e modellek segítségével nem szerezhetünk információt. Másrészt e modellek nem szabályozott rendszereket tükröznek, nem tudjuk segítségükkel meghatározni, hogy a modellben leírt optimális növekedési pályához — hogy ez megvalósuljon — milyen szabályozó eszközöket kell alkalmazni, milyen eszközökkel és hogyan lehet a gazdaságot rátéríteni erre az egyensúlyi pályára. E két hiányosság bizonyos mértékű kiküszöbölésére próbálunk modellünkkel kísérletet tenni. Ilyen irányú kísérlettel már találkozhattunk a hazai és külföldi irodalomban. A hazai irodalomból megemlíthetjük Bródy András, Kornai János és Martos Béla, a külföldi irodalomból pedig Hamada, Szmirnov, Murakami nevét. Modellünk heurisztikusan a következő alapokra épül fel.

A gazdasági fejlődés folyamatát diszkrét és folytonos folyamatok egységeként fogjuk fel, mégpedig a következő módon. A fejlődés egy meghatározott szakaszában csak mennyiségi változás (növekedés) van, a struktúra változatlan marad az erre a szakaszra jellemző átlagos szinten. A struktúra változása diszkrét (ugrásszerű), új fejlettségi szint kialakítását jelenti, amin szintén mennyiségi növekedés fog végbemenni. A gazdasági fejlődés szakaszai diszkréten váltják egymást, míg az egyes szakaszokon belül a fejlődés folytonos. A modell erre a gazdasági fejlődési hipotézisre épül fel. Az egyes szakaszok sorrendje a modell számára meghatározott, azonban az áttérés feltételeinek megérési ideje és az áttérés szabályozható. A modell segítségével a gazdaság mű-

ködésének törvényszerűségei szabályozhatók. A modell a tervezésben úgy nyerhet alkalmazást, hogy a tervező felméri, hogy a közeljövőben milyen strukturális változások következhetnek be, vagy kívánatos, hogy bekövetkezzenek (nem futurologikus célokról van szó), meghatározza azokat az időhorizontokat, amik egy-egy új struktúrára való áttéréshez véleménye szerint szükségesek és ekkor a modell segítségével meghatározhatja a modellben a szabályozók azon értékét, amelyek mellett a gazdaság a meglévő struktúrán optimálisan fejlődik és minimális idő alatt áttér az új struktúrára. Optimális fejlődés alatt az adott fejlettségi szinten, az adott struktúrához és szabályozáshoz tartozó maximális növekedési ütemű *egyensúlyi* fejlődést értjük. Az egyensúly értelmezésére még visszatérünk.

## I. A modell megfogalmazása

### I.1. Alapvető közgazdasági definíciók és feltételezések

A modellben centrális szerepet játszik a *gazdasági struktúra* fogalma, amin általános értelemben vett ráfordítási szerkezetet értünk, beleértve a fogyasztás szerkezetét, mint a munkaerő bővített újratermeléséhez szükséges ráfordítási szerkezetet és az export-import szerkezetet. A technikát a modellben a ráfordítási struktúrával fogjuk jellemezni.

*Ráfordításokon* folytonos és egyszeri ráfordításokat értünk. Egyszeri ráfordítás a teljes eszköz (álló + forgó) igényt tartalmazza.

*Ráfordítási szerkezet*: matematikai formáját tekintve  $n$  elemű vektor, a tevékenység egységnyi intenzitású gyakorlásához szükséges ráfordításokat tartalmazza.

*Egyszerű ráfordítási szerkezet* csak a holtmunka ráfordításokat tartalmazza (anyag ráfordítások).

*Teljes ráfordítási szerkezet* a holtmunka ráfordításokon kívül az eleven munka ráfordításokat is tartalmazza.

*Visszagyűrűztetett ráfordítási szerkezet* olyan teljes anyagi ráfordítási struktúra, ami az eleven munka ráfordítások helyett azok szétosztott anyagi ráfordítás igényét tartalmazza.

*Szektor* alatt homogén tevékenységet értünk, amelyhez adott időpontban rögzített ráfordítási szerkezet tartozik.

*Technikai szint* olyan műszaki fejlettségi állapot, amelyet konstans ráfordítási szerkezettel jellemezünk.

*Áttérés* a technikai szint megváltozása, amelynek feltétele az egyszeri ráfordítások, termelési alapok meghatározott hányadának lecserélése és megfelelő tartalékok, készletek képzése.

*Termelési struktúrán* egy olyan  $n$  elemű vektort értünk, amelynek  $k$ -ik komponense a  $k$ -ik szektor termelési szintjének mutatója.

Dinamikus *egyensúly* alatt azt a fejlődési pályát értjük, amely adott ráfordítási szerkezet mellett az összes ezen ráfordítási szerkezethez tartozó lehetséges fejlődési pályákat egy bizonyos  $t$  idő után dominálja. Az ilyen dinamikus egyensúlyi pályát *Neumann path*-nak, vagy *turnpike*-nek nevezik az angol nyelvű irodalomban.

A további tárgyalás folyamán a következő feltételezésekkel élünk, anélkül, hogy újra hivatkoznánk rá.

- a) A népgazdaság  $n$  szektort tartalmaz.
- b) A népgazdasági struktúra egy adott  $i$ -ik technikai szinten jellemezhető, egy  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  matrix-párral, amely matrixok oszlopvektorai az egyes szektorok folytonos és egyszerű ráfordítási szerkezetei.
- c) A technikai szintek sorrendje közgazdasági megfontolások alapján meghatározott. Ezek a közgazdasági megfontolások egyrészt nemzetközi összehasonlításon, másrészt műszaki fejlődés prognózisain alapulhatnak.

### 1.2. A modellben alkalmazott jelölések

$I = \{I/i = 1, 2, 3, \dots, m\}$  indexhalmaz a vizsgálatba bevont lehetséges technikai szintek rendező halmaza.

- $\mathbf{A}_i$  az  $i$ -edik technikai szinthez tartozó visszagyűrűztetett folyó ráfordítási szerkezet.
- $\mathbf{B}_i$  az  $i$ -edik technikai szinthez tartozó visszagyűrűztetett egyszerű ráfordítási szerkezet.
- $\hat{x}_i$  az  $i$ -edik technikai szinthez tartozó optimális egyensúlyi telelési struktúrának megfelelő pálya (Neumann-pálya).
- $x_i$  az  $i$ -edik technikai szinthez tartozó nem egyensúlyi termelési struktúra.
- $\bar{\lambda}_i$  az  $i$ -edik technikai szinthez tartozó maximális egyensúlyi növekedési ütem a Neumann—Leontieff—Bródy modellben.
- $\lambda_i$  az  $i$ -edik technikai szinthez tartozó maximális egyensúlyi növekedési ütem  $\alpha_i$  vezérlés mellett.
- $\alpha_i$  az  $i$ -edik technikai szinthez tartozó, az  $i + 1$ -ik szintre való áttérés feltételeinek megérését szabályozó paraméter.
- $u$  külső erőforrás az áttérés vezérlésére.
- $\varphi(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x_i = \hat{x}_i \\ 1, & \text{ha } x_i \neq \hat{x}_i \end{cases}$  a feladat szintetizáló funkcionálja.

### 1.3. A Neumann—Leontieff—Bródy modellről

Modellünk egy zárt, dinamikus input-output modellen alapul, ezért szükséges kitérni ezen modellesalád néhány alapvető jellemzőjére.

a) Ezek a modellek egy teljesen zárt gazdaságot tükröznek: a gazdaság outputja egyensúlyi esetben teljes egészében a következő időszak inputjául szolgál és azt ki is elégíti.

b) A gazdasági struktúra jellemezhető egy fent definiált  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  matrixpárral, mely matrixok egyensúlyi esetben egyértelműen meghatározott input szerkezetet követelnek meg. Mivel az a) pont értelmében a gazdaság input-szerkezete azonos output-szerkezetével, ez a közös input-output, amely csak egy konstans skalár szorzóval térhet el egymástól az  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  matrixok által jellemzett transzformáció saját-vektora.

A modellben szereplő transzformációs matrix — amely  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  matrixokból komponálódik<sup>1</sup> — közgazdasági tulajdonságokból kifolyólag (nem negatív és irreducibilis) olyan, hogy csak egyetlen pozitív saját-vektorral rendelkezik. Mivel közgazdaságilag ebben a modellben csak a pozitív inputok és outputok

<sup>1</sup>  $\mathbf{A}$  és  $\mathbf{B}$  komponálódásán azt értjük, hogy a transzformáció matrixa  $\mathbf{Q} \mathbf{B}$ , ahol  $\mathbf{Q} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ .

értelmezhető, az előbbiekből leírtak alapján ez az egyetlen olyan fejlődési pálya, amely végtelen időhorizonton **A** és **B** változatlansága mellett egy zárt gazdaságban fenntartja az input és output egyensúlyát, ezért ezt a pályát maximális *egyensúlyi* növekedési pályának és az ehhez a saját-vektorhoz tartozó saját-értéket (amely nyilvánvalóan egy növekedési ütem, amely azt mutatja, hogy az output hányszorosa az inputnak) maximális egyensúlyi növekedési ütemnek nevezzük. Mivel ilyen tulajdonságú pályát hasonló feltételek mellett Neumann-nak sikerült először definiálnia, ezen pályát Neumann-pályának nevezik. E pálya meghatározására törekszik Leontief és Bródy A. is.

Mivel a mi modellünk főleg Bródy A. modelljéhez kapcsolódik, röviden szólunk erről a modellről.

A modell alapformulája a következő:

$$\dot{x} = Ax + B\dot{x},$$

ahol **A** és **B** visszagyűrűztetett folytonos és egyszeri ráfordítási szerkezet,  $x$  a termelés és  $\dot{x}$  a termelés idő szerinti növekménye (derivált). A feladat egy lineáris homogén differenciálegyenletrendszerhez vezet és Bródy A. bebizonyította, hogy ezen egyenletrendszer fundamentális matrixának domináns saját-értékéhez tartozó saját-vektor a fentiek értelmében Neumann-pálya. A fenti feladat megoldását tehát ezen Neumann-pálya megkeresése jelenti.

Ezután rátérünk modellünk ismertetésére.

#### 1.4. A feladat megfogalmazása

Adott  $m$  darab technikai szint meghatározott fejlettségi sorrendbe rendezve. A gazdaság jelenlegi állapota  $x_0$  termelési vektorral és **A**<sub>1</sub>, **B**<sub>1</sub> ráfordítási szerkezettel jellemezhető. Meg kell határozni a gazdasági fejlődésnek egy olyan pályáját, amely a következő sajátosságokkal rendelkezik:

a)  $x_0(t_0)$ -ból átvesszi a gazdaságot egy  $\hat{x}_1(t)$  pontba és ez az átvitel minimális idő alatt történik.

b) Minden  $i$ -edik technikai szinten az  $i$ -edik szintnek megfelelő  $\hat{x}_i$  egyensúlyi termelési vektorhoz tartozó egyensúlyi pálya biztosítja olyan kapacitás-tartalékok (definícióját lásd később) képződését, amely lehetővé teszi az  $i + 1$ -ik szintre való áttérést  $T$  idő után.

c) A megfelelő tartalékok képződése után az  $i$ -edik technikának megfelelő  $\hat{x}_i$  termelési szerkezetről az  $i + 1$ -ik technikának megfelelő  $\hat{x}_{i+1}$  szerkezetre való áttérés minimális idő alatt történik.

A matematikai modell alapja egy zárt dinamikus Bródy modell, amelynek segítségével meg lehet határozni a hosszú távú fejlődés egyensúlyi pályáját. A jelen modell ettől a következőkben tér el:

a) A modell az egyensúlyi pályák közötti átmeneti pályákat időoptimalizálja.

b) Az egyes szintekhez tartozó egyensúlyi pályák nemcsak a jelen technika feltételeit fejezik ki, hanem tartalmazzák a fejlettebb technikai szintre való áttérés feltételeit is.

c) Az egyensúlyi pályák nem abszolút determináltak a ráfordítási szerkezet által, hanem a műszaki fejlődés gyorsaságát, az áttérés idejét befolyásoló paraméterrel szabályozhatók.

Az alkalmazott módszert tekintve a modell egy sajátérték feladat és egy lineáris időoptimum feladat sajátos szintézise, amelyben a szintetizáló funkcionál szerepét  $\varphi(x)$  játssza.

A modell egy szakadós jobboldalakkal rendelkező lineáris inhomogén differenciálegyenlet rendszerrel írható le:

$$x_i(t) = \mathbf{A}_i x_i(t) + \mathbf{B}_i \dot{x}_i(t) + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{x}_i(t) - \varphi(x_i) u(t).$$

## 2. A modell működése

A  $\varphi(x_i)$  funkcionál aktuális értékeinek megfelelően két részre bonthatjuk a feladatot.

### 2.1. I. fázis: Egyensúlyi fejlődés adott technikai szinten

Legyen  $x_i(t) = \hat{x}_i(t)$ , ekkor a  $\varphi(x)$  funkcionál értéke a definíció szerint 0. A feladat ebben az esetben a következő formában írható fel:

$$\hat{x}_i(t) = \mathbf{A}_i \hat{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \dot{\hat{x}}_i(t) + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{\hat{x}}_i(t). \quad (1)$$

Ezen összefüggés közgazdasági tartalma a következő: a termelésnek, mint forrásnak fedeznie kell a termelés és a fogyasztás folyó ráfordításait  $\mathbf{A}_i \hat{x}_i$ , a termelés és fogyasztás növekedéséhez szükséges egyszeri ráfordítás-növekményeket  $\mathbf{B}_i \dot{\hat{x}}_i$  (álló + forgóalap növekmény) és ezen kívül fedezni kell az  $i + 1$ -ik technikai szintre való áttéréshez szükséges, e szint egyszeri ráfordítási szerkezetének megfelelő és  $\alpha_i$  skalár paraméterrel szabályozott, kapacitások képződését. A modell segítségével kapható egyensúlyi növekedési ütem alacsonyabb lesz, mint más modellekkel való számításoknál (pl. nem visszagyűrűztetett struktúrával dolgozó I—0 modellek) a következők okok miatt:  $\mathbf{B}_i$  matrix konstrukciója olyan, hogy a termelésnek, mint forrásnak nem csak a termelő alapok megfelelő  $\lambda$  ütemű növekedését kell biztosítani, hanem a nem-termelő alapok és az ún. szellemi tőke (az oktatásban lekötött tőke)  $\lambda$  ütemű növekedését is. Ezen alapok fajlagos tőkeigényességi koefficiensei Kovács J. és Bródy A. számításai szerint elég magasak a termelő alapokhoz képest. Az egyensúlyi fejlődéshez viszont ezen alapok megfelelő ütemű növekedése is szükséges. Ebből látszik, hogy a modell rendkívül érzékeny a nem-termelő szektor (modellünkben vissza van gyűrűztetve a termelő szektorokba) fajlagos tőkeigényességi mutatóira. Külön magyarázatot igényel  $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{\hat{x}}_i$  közgazdasági tartalma. A felhasználás ezen elemét a jövőbe fektetett beruházásoknak tekinthetjük, amely beruházás, selejtezés, pótlás révén is realizálódhat. A meglevő  $i$ -edik szintű állóalapok meghatározott részét ki kell selejtezni és a termelésnek, mint forrásnak ezen rész pótlását is fedeznie kell.

Modellünkben ez a pótlás biztosítja a következő technikai szintre való áttérés feltételeit, mivel a következő technikai szint fejlettebb termelési alapjait az előző szinten kell megtermelni, tehát amikor beindul az  $i$ -edik technikai szinten való termelés, akkor a nettó beruházások színvonalára már az  $i + 1$ -ik szintnek, ugyanakkor a meglevő állóalapok szintje és struktúrája az  $i$ -edik szintnek felel meg. Az áttérés elvi feltételét úgy fogalmazhatjuk meg, hogy ezen induló állóalapok meghatározott részét kicseréljük  $i + 1$ -ik szinten levő állóalapokkal. Ezt az évenként végbemenő pótlást reprezentálja az  $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \dot{\hat{x}}_i$ .

(Ezen vektor pontos jelentését még a következő pontban megmagyarázzuk.) Ezen vektor definíciójából következően, a pótlás egy szektoron belül az  $i+1$ -ik struktúrának, a szektorok közötti arány, mivel  $\hat{x}_i$  vektorral szorzunk, az  $i$ -edik technikai szintnek felel meg. Nyilvánvaló, hogy az új technikára való áttérés bekövetkezése az itt leírt pótlási folyamatától függ. Modellünkben ezt a folyamatot fogjuk szabályozni és ezzel egyben szabályozzuk az áttérés lehetséges időpontját is. E pótlási folyamat szabályozása két oldalról történik. Egyrészt az évenkénti pótlás szabályozásával, erre szolgál az  $\alpha_i$  paraméter, másrészt annak az aránynak a meghatározásával, amely megmutatja, hogy az  $i$ -edik szinten levő induló állóalapot mekkora hányadát kell lecserélni az  $i+1$ -ik szintre való áttéréshez. (Ennek szabályozására a későbbiekben definiálandó  $\gamma_i$  paraméter szolgál.)

## 2.2 A Neumann-pálya szabályozása

Térjünk megegyeszer vissza  $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \hat{x}_i$  tartalmára. Az előző pontban ezt mint selejtezés-pótlást értelmeztük, amely pótlás egy adott ágazaton belül nem az  $i$ -edik, hanem az  $i+1$ -ik struktúra szerint megy végbe. Ennek a pótlásnak nem a szerkezetét, hanem csak a szintjét szabályozzuk  $\alpha_i$  paraméterrel, ebből viszont az következik, hogy az állóalapot szerkezete nem, viszont fajtánkénti átlagos élettartama megváltozik, mivel a selejtezés és az annak teljesen megfelelő pótlás az  $i$ -edik struktúrától eltérő  $i+1$ -ik struktúrán történik. Ebből az is következik, hogy bizonyos állóalap fajtáknál az induló állóalapot meghatározott hányadának lecserélése előbb befejeződhet, viszont az  $i+1$ -ik struktúrára csak akkor lehet áttérni, ha ez a lecserélődés minden állóalap fajtánál befejeződött. Ezért ha pl. a  $k$ -adik állóalap fajtánál az induló állóalap már lecserélődött, akkor ettől az időponttól fogva a  $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \hat{x}_i$   $k$ -adik sora már nem selejtezés-pótlást, hanem az  $i+1$ -ik struktúrára való áttéréshez szükséges kapacitások képzését jelenti. Ennek megfelelően az új struktúrára való áttérés feltétele nem szűkíthető le pusztán az induló állóalapot lecserélésére, hanem magában foglalja a régi és új állóalap struktúra közti különbségnek megfelelő kapacitások képződését is.

Amíg meg nem érlelődnek az  $i+1$ -ik struktúrára való áttérés feltételei, addig a gazdaság az  $i$ -edik struktúra Neumann-pályáján fejlődik, így lehetséges, hogy felesleges kapacitások is képződnek, mivel a Neumann-pálya definíciója miatt nem lehet csökkenteni azon állóalapot termelését, amelyek az  $i+1$ -ik struktúrán kisebb súllyal szerepelnek, mint az  $i$ -ediken. A  $\mathbf{B}_{i+1}$  matrix bekapcsolásával arra törekszünk, hogy az eredeti nem szabályozott Neumann-pályát egyensúlyi voltának megtartása mellett a következő  $i+1$ -ik struktúrának megfelelő egyensúlyi irány felé térítsük el — mivel  $\mathbf{B}_{i+1}$  bekapcsolásával a felhasználási szerkezetben megjelenik egy olyan elem, amely az  $i+1$ -ik struktúra követelményeinek tesz eleget — de ugyanakkor megtartjuk a modell zártságát.

Közgazdaságilag belátható, hogy a Neumann-pálya kialakításában az  $\alpha_i \mathbf{B}_{i+1}$  matrix jóval kisebb szerepet játszik, mint akár az  $\mathbf{A}_i$ , akár a  $\mathbf{B}_i$  matrix, amiből következik, hogy az eltérítés mértéke nem lehet nagy. Az eltérítés mértékét  $\alpha_i$  paraméterrel szabályozzuk.

Látható, hogy  $\alpha_i$  nem csak a pótlási folyamatot szabályozza, hanem a maximális növekedési ütem  $\lambda_i$  nagyságát is befolyásolja.  $\alpha_i$  és  $\lambda_i$  közötti kapcsolat megvilágítása már a modell matematikai analízisét igényli.

Mivel az (1) differenciálegyenletrendszer, amit a Bródy modell kibővítésének tekinthetünk, nem  $x_i$ -re, hanem az  $x_i$ -k közül egy kitüntetett  $\hat{x}_i$ -re oldjuk meg, ezért a Neumann-pálya definíciója értelmében bevezethetjük az

$$\dot{\hat{x}}_i = \lambda_i \hat{x}_i \quad (2)$$

egyenlőséget, ahol  $\hat{x}_i > 0$ .

Így az (1) differenciálegyenletrendszer egy  $\lambda_i$ -re vonatkozó saját-érték feladattá alakítható át:

$$\hat{x}_i = \mathbf{A}_i \hat{x}_i + \lambda_i (\mathbf{B}_i \hat{x}_i + \alpha \mathbf{B}_{i+1} \hat{x}_i). \quad (3)$$

A modellben szereplő matrixok tulajdonságai alapján a feladat  $\alpha_i$  bizonyos értékei mellett  $\lambda_i$ -re és  $\hat{x}_i$ -re megoldható. (Lásd: a modell matematikai levezetése c. fejezetben.)

Felmerül a kérdés, hogy hogyan válasszuk meg  $\alpha_i$  szabályozó paraméter értékét.

Az előbbi leírásból következik, hogy  $\alpha_i$  és  $\lambda_i$  között függvénykapcsolat van, amelynek segítségével lemérhető a szabályozó hatása  $\lambda_i$ -re.

A matematikai részben bizonyítjuk, hogy ennek a függvénynek létezik az inverze, akkor viszont meg tudjuk határozni, hogy  $\lambda_i$  egyes értékeihez milyen  $\alpha_i$  tartozik. Nevezzük ezt a függvényt válaszfüggvénynek és jelöljük  $V(\lambda_i)$ -vel. Mivel  $\lambda_i$  a gazdaság maximális egyensúlyi növekedési ütemét jelöli, ezért e  $V(\lambda_i)$  függvény értelmezési tartománya közgazdasági megfontolások alapján behatárolható.  $\lambda_i$  felső határát a nem szabályozott Neumann–Leontief–Bródy modellből kiszámítható maximális egyensúlyi növekedési ütem  $\bar{\lambda}_i$  jelenti, alsó határát pedig a lakosság növekedési üteme plusz az életszínvonalra előírt közgazdasági és politikai megfontolások által meghatározott minimális növekedési ütem adja. Ha fent definiált intervallumban meghatározzuk  $V(\lambda_i)$  értékeit, akkor megkapjuk az adott technikai szinthez tartozó lehetséges  $\alpha_i$  szabályozó paramétereket és azoknak a növekedési ütemre gyakorolt hatását.

A szabályozás elvi ismertetésénél leírtuk, hogy a selejtezés-pótlási folyamatot nem csak az évi pótlás, hanem az áttéréshez szükséges lecserélési arány meghatározásával is szabályozzuk.

Most ezen második szabályozóval foglalkozunk.

Az  $i$ -edik egyensúlyi szint induló tőkeállománya  $\mathbf{B}_i \hat{x}_i(0) = d_i^{(1)}$ . A lecserélést azonban nem  $\mathbf{B}_i$  struktúra, hanem  $\mathbf{B}_{i+1}$  struktúra szerint hajtjuk végre. Tegyük fel, hogy az áttéréshez  $d_i^{(1)}$ -nek  $\gamma_i$  százalékát kell lecserélni, akkor az áttérés egy olyan  $T_i = \tau_i$  idő múlva következhet be, amelyre teljesül

$$\lambda_i \alpha_i \int_0^{\tau_i} \mathbf{B}_{i+1} \hat{x}_i(t) dt \geq \gamma_i d_i^{(1)}; \quad \tau_i \rightarrow \min, \quad (4)$$

$\alpha_i$  és  $\gamma_i$  között a következő összefüggés áll fenn: mindkettővel  $T_i$  időszakaszt szabályozzuk. Felírhatunk tehát egy

$$T_i = G(\gamma_i, \alpha_i)$$

függvényt, s  $V(\lambda_i) = \alpha_i$  függvény segítségével meghatározhatjuk e kétváltozós függvény értékkészletét. Így  $G$  függvény segítségével egy adott  $i$  struktúrához tartozó lehetséges ( $\lambda_i$  szempontjából) és kívánt szabályozás meghatározható és a modell segítségével kiszámítható e szabályozáshoz tartozó optimális fejlődési ütem.



## 2.3. Áttérés az új egyensúlyi állapotra

### 2.3.1. Az áttérés feltételeinek megérése

Gazdaságunk az előbb leírt módon egy egyensúlyi pályán eljutott egy olyan állapothoz, hogy a rendelkezésre álló állóalakok struktúrája lehetővé teszi az új technikának megfelelő ráfordítási struktúrára való áttérést. Azzal a hipotézissel élünk, hogy a ráfordítási struktúra, a feltételek megérése után egy adott időpontban diszkrétén átalakul (azaz az  $\mathbf{A}_i$  a modellben  $\mathbf{A}_{i+1}$ -re, a  $\mathbf{B}_i$  pedig  $\mathbf{B}_{i+1}$ -re cserélődik ki) és ugyanakkor az új ráfordítási struktúrához tartozó új egyensúlyi termelési struktúra kialakulása folytonos (hosszabb ideig tartó) folyamat. Természetesen a termelési alapok új struktúrájának diszkrét kialakulása tőkeveszteséggel jár, amely tőkeveszteség két részre osztható. Az első rész abból adódik, hogy a régi egyensúlyi termelési arányok mellett a  $\mathbf{B}_i$ -t átcsereéljük  $\mathbf{B}_{i+1}$ -re, ennek nagyságát a következő kifejezésből határozhatjuk meg

$$v_i^1 = (\mathbf{B}_{i+1} - \mathbf{B}_i) \hat{x}_i(T),$$

Ezen  $v_i^1$  vektor negatív elemei jelentik a tőkeveszteséget. Pozitív elemei mutatják azt a tőkemennyiséget, amely a termelés szinten tartásához az  $i + 1$ -ik technikán szükséges. Ebből rögtön látszik, hogy  $\hat{x}_i$  most már nem egyensúlyi vektor, mert nem képes szinten tartani külső erőforrások nélkül a termelést.

A tőkeveszteség második felének magyarázatára csak az áttérés leírása után térünk vissza.

### 2.3.2. Az áttérési folyamat

A modell alapfeltételezései mellett hosszútávon az egyedüli stabil fejlődést az egyensúlyi pálya, a Neumann-pálya biztosítja. A ráfordítási szerkezet átalakulásával a gazdaság kibillen erről az egyensúlyi pályáról, éppen ezért a modell szellemében feladatunk: a gazdaságot rátéríteni az új ráfordítási szerkezetnek megfelelő egyensúlyi pályára.

A gyakorlatban is ismertek a nem egyensúlyi fejlődésből adódó hátrányok (a gyakorlatban az egyensúly persze csak közelítőleg valósul meg), ezért jogosan támasztható az az igény, hogy ilyen szakaszokon minél előbb legyünk túl, minél hamarabb térjünk vissza az egyensúlyra. Persze az áttérés nem ingyenes és az áttéréshez igénybevehető erőforrások korlátosak. Ezért kézenfekvően adódik az az optimalizálási feladat, hogy ezeket az áttéréshez szükséges erőforrásokat olyan struktúrában és színvonalon használjuk fel (ezzel úgy szabályozzuk a gazdaságot), hogy az áttérés minimális idő alatt történjen.

Matematikailag fogalmazva egy olyan optimális szabályozási feladatról van szó, ahol egy rendszert minimális idő alatt a rendszer homogén egyenletrendszerének stacionárius megoldására akarjuk rátéríteni. Tulajdonképpen a feladat nem más, mint egy időoptimalis szabályozási feladat, amely a modell alaprendszeréből adódóan lineáris.

Ilyen feladatokkal foglalkozott többek között L. V. Pontrjagin és munkacsoportja, különösen V. G. Boltjanskij.

Egy lineáris időoptimum feladat modellünkre a következőképpen interpretálható.

Az áttéréshez szükséges külső erőforrásokat, a modell szabályozó paramétereit jelöljük  $u$ -val. Modellünk matematikai formája most a következő:

$$x = \mathbf{A}_{i+1}x + \mathbf{B}_{i+1}\dot{x} + \alpha_{i+1}\mathbf{B}_{i+2}\ddot{x} - u. \quad (4.a)$$

A feladat tehát a gazdaságot rátéríteni a következő homogén differenciálegyenletrendszer stacionárius<sup>2</sup> megoldására (az  $i + 1$ -ik technikához tartozó Neumann-pályára):

$$x = \mathbf{A}_{i+1}x + \mathbf{B}_{i+1}\dot{x} + \alpha_{i+1}\mathbf{B}_{i+2}\ddot{x}, \quad (4.b)$$

minimális idő alatt, a következő peremfelvételek mellett:

$$x_0 = x(0) = \hat{x}_i(T); \quad x(T + \Theta) = \hat{x}_{i+1}(T + \Theta),$$

ahol  $\hat{x}_{i+1}$  (4.b) homogén rendszer stacionárius megoldása.

A megoldás során keresni kell egy olyan korlátos tartományba eső  $u(t)$  függvényt, amelyhez tartozó  $x(t)$ ,  $u(t)$ -vel együtt, kielégíti a (4.a) differenciálegyenletrendszert és ugyanakkor  $x(t)$  átmegy  $x_0$ -on és  $\hat{x}_{i+1}$  sugáron minimális  $\Theta$  idő alatt.

Felmerül a kérdés, hogy  $\hat{x}_{i+1}$ -et hogy határozhatjuk meg, mivel ezt az áttérési feladathoz mint peremfelvételt meg kell adni.  $\hat{x}_{i+1}$  éppen úgy határozható meg, mint 2.2.-ben az  $\hat{x}_i$ , a megfelelő behelyettesítéseket figyelembevéve.

Annak ellenére, hogy  $\hat{x}_{i+1}$  kívülről kerül be a feladatba, feladatunk ún. mozgógéppont feladat, mivel az  $i + 1$ -ik struktúrához tartozó Neumann-pályát, mint irányt tudjuk csak megadni, s hogy ezt a struktúrát milyen szinten tudjuk elérni, csak a megoldásból derül ki.

Vizsgáljuk meg az  $u$  szerepét. Az  $u(t)$ -nek egy olyan függvénynek kell lennie e feladat jellegéből kifolyólag, amely szakaszonként folytonos és az összes lehetséges  $u(t)$  függvények értékkészlete egy zárt korlátos konvex halmazt alkot. Az  $u(t)$  függvény szakadási pontjait nevezzük átkapcsolási pontoknak. Az átkapcsolások hatására az  $x(t)$  pálya megőrzi folytonosságát, de az  $u(t)$  függvény szakadási helyein törése van. Tehát az  $u(t)$  függvény szakadás pontjai között az  $x(t)$  pálya karaktere meghatározott, egy közösleges inhomogén differenciálegyenletrendszer megoldása, amelynek jobboldala  $u(t)$ .

Közgazdaságilag  $u(t)$  szerepe a következő:  $x(t)$  jelenti a rendszerben önmaga által kitermelt forrást, ugyanakkor a rendszer által igényelt, ehhez a forráshoz szükséges, ráfordításokat ez a forrás nem tudja fedezni, mert  $x(t)$  nem egyensúlyi. Ha azonban  $x(t)$ -hez hozzávesszünk  $u(t)$ -t is, mint a rendszer számára külső forrást, így a forrás és a felhasználás egyensúlyban lesz. Ugyanakkor  $u(t)$  az a szabályozó, amely  $x(t)$ -t a stacionárius egyensúly felé irányítja. Ez az irányítás úgy történik, hogy  $u(t)$  szakaszonként változik — mégpedig a kapcsolási pontokban — s így  $x(t)$  pálya is szakaszonként, de folytonosan változik.

Nyilvánvaló, hogy a vezérlés lehetőségeit és ezáltal az áttérés jellegét az  $u$ -ra vonatkozó korlátok megadásával befolyásolhatjuk. A korlátok megválasztására nehéz általános tanácsot adni, ez következik a valóságban fennálló objektív korlátokból és a feladat konkrét közgazdasági tartalmából.

<sup>2</sup> Egy lineáris homogén differenciálegyenletrendszer stacionárius megoldásán értjük a domináns sajátértékhez tartozó parciális megoldást.

Az  $u$  valóságban egyrészt mint külső erőforrás, másrészt mint a rendszer által felhasználatlan tartalék jelenik meg. Az  $u$  statisztikai tartalmának értelmezésére bő lehetőség nyílik.

Ezek után visszatérünk az áttérés alatt keletkező tőkeveszteség nagyságának megvilágítására.

A tőkeveszteség második fele abból adódik, hogy az  $i + 1$ -ik termelési alap struktúra mellett a termelési vektor fokozatosan és folytonosan az  $i + 1$ -ik struktúrának megfelelően egyensúlyivá alakul (tulajdonképpen ezt az átalakulást írja le a második fázis). E veszteség mértékét a következőképpen határozhatjuk meg: tegyük fel, hogy az áttérés  $T$  időpontban kezdődött és valamely  $T + \Theta$  időpontban fejeződött be és ebben az időpontban a termelési struktúra már az  $i + 1$ -ik ráfordítási struktúrához tartozó Neumann-pálya.

Ha az áttérési folyamatban a kapcsolási pontok száma  $n$  és ezeknek megfelelő időpontokat  $\tau_j$ -vel ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) jelöljük, akkor a második fázisban keletkező tőkeveszteséget a

$$v_i^2 = \mathbf{B}_{i+1} \left[ x(\tau_1) - x(0) + \sum_{j=1}^n x(\tau_{j+1}) - x(\tau_j) \right],$$

– ahol  $x(0) = \hat{x}_i(T)$  – vektor negatív komponensei reprezentálják. A pozitív komponensek az áttérési folyamathoz szükséges külső erőforrásból biztosítandó kumulált tőkemennyiséget mutatják.

### 3. A modell matematikai leírása

*I. fázis:*  $\varphi(x) = 0$ .

A feladat jelen fázisban a következőképpen írható fel:

$$x = \mathbf{A}_i x + \lambda_i (\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1}) x. \quad (5)$$

Alakítsuk át (5)-öt a következőképpen:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}_i) x = \lambda_i (\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1}) x. \quad (6)$$

Mivel  $\mathbf{A}_i$  ún. Leontieff–Minkowszky típusú matrix, ezért

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}_i)^{-1} = \mathbf{Q}_i \quad (7)$$

létezik, s mivel  $\mathbf{A}$  matrix irreducibilitásából és abból, hogy Neumann sora konvergens – spektrális rádiusa kisebb, mint egy – következik, hogy

$$\mathbf{Q}_i \geq \mathbf{0}. \quad (8)$$

Vezessük be az  $1/\lambda_i = \mu_i$  jelölést, ekkor feladatunkat felhasználva (7)-et és (8)-at a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\mu_i x = \mathbf{Q}_i (\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1}) x. \quad (8.a)$$

A feladat jellegéből adódóan fennállnak a következő összefüggések:

$$\mathbf{B}_k \geq \mathbf{0}; \quad \alpha_k \geq 0; \quad k \in I, \quad (9)$$

ahol  $I$  rendező indexhalmaz (lásd: „A modellben alkalmazott matematikai szimbólumok jelentése.”).

(9)-ből következik, hogy

$$\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1} \geq \mathbf{0}. \quad (10)$$

(10) és (8) miatt

$$\mathbf{K}_i(\alpha_i) = \mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1})$$

nem negatív és irreducibilis. Ezen megfontolás alapján alkalmazhatjuk a következő tételsorozatot:

1.  $\mathbf{K}_i(\alpha_i)$ -nek létezik pozitív  $\hat{x}_i$  sajátvektora;
2.  $\hat{x}_i$  egy skalárszorozótól eltekintve egyértelmű;
3.  $\hat{x}_i$ -hez tartozó  $\mu_i$  sajátérték pozitív és domináns;
4.  $\mathbf{K}_i(\alpha_i)$  matrixnak nincs több pozitív sajátvektora [5].

Feladatunkat domináns  $\mu_i$ -re és az ehhez tartozó  $\hat{x}_i$ -re oldjuk meg.

Az  $\alpha_i$  szabályozó paraméter lehetséges értékeinek meghatározása a  $V(\lambda_i)$  függvény segítségével történik. A  $V(\lambda_i)$  függvény értelmezési tartománya legyen

$$\delta_i \leq \lambda_i \leq \bar{\lambda}_i, \quad (11)$$

ahol  $\bar{\lambda}_i$  az  $i$ -edik szinthez tartozó Neumann pálya,  $\alpha_i = 0$  esetén.

Bizonyítsuk be  $V(\lambda_i)$  függvény egzisztenciáját. Írjuk fel újra (8.a)-t

$$\frac{1}{\lambda_i} x = \mathbf{Q}_i(\mathbf{B}_i + \alpha_i \mathbf{B}_{i+1}) x$$

Ebből világosan látszik, hogy ez  $\alpha_i$  és  $\lambda_i$  között egy implicit függvénykapcsolatot fejez ki. Jelöljük e függvényt  $V^{-1}(\alpha_i) = \lambda$ -val.

Bizonyítandó, hogy létezik ennek a függvénynek inverze a (11) által meghatározott intervallumban.

Az inverz létezésének feltétele, hogy az  $\alpha_i$ -re megadott intervallumon a függvény monoton legyen. Ez a következők miatt áll fenn.

Ha  $\mathbf{B}_i$ -nek nincs tiszta 0 oszlopa, amit közgazdaságilag nyugodtan feltehetünk, akkor mivel  $\mathbf{Q}_i > 0$ , a matrixszorzás definíciója értelmében  $\mathbf{Q}_i \mathbf{B}_i > 0$ .

Ekkor, mivel  $\alpha_i \geq 0$  tartományban van értelmezve és  $\mathbf{B}_{i+1} \geq 0$ , a (8.a) jobboldalán szereplő matrix is pozitív.

Ebből következik, hogy ha  $\alpha_i$  nő, akkor ezen matrixnak van olyan eleme, amelyik nő, ekkor viszont alkalmazhatjuk a következő tételt:

Ha  $\mathbf{A} > 0$  és legnagyobb saját értéke  $\mu$ , akkor  $\mathbf{A}$  matrix bármelyik elemének növelésével  $\mu$  nő, csökkenésével  $\mu$  csökken. [3]

Ebből viszont egyértelműen következik, hogy  $\lambda_i$  az  $\alpha_i$ -nek monoton csökkenő függvénye.

Most be kell bizonyítani, hogy ez a  $V(\lambda_i)$  inverz függvény létezik a (11) által meghatározott tartományban.

(8.a)-ból egyszerű átalakítással a következő formulához jutunk

$$(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{Q}_i \mathbf{B}_i) x = \lambda_i \alpha_i \mathbf{Q}_i \mathbf{B}_{i+1} x. \quad (11.a)$$

Ennek a kifejezésnek a baloldalán levő matrix egy resolvens.

Ha  $\alpha_i > 0$ , akkor az előző tétel értelmében  $\lambda_i < \bar{\lambda}_i$ , és így

$$\mu_i = 1/\lambda_i \quad \text{esetén,} \quad \mu_i > \bar{\mu}_i. \quad (11.b)$$

Osszuk el (11.a) mindkét oldalát  $\lambda_i$ -vel:

$$(\mu_i \mathbf{E} - \mathbf{Q}_i \mathbf{B}_i) x = \alpha_i \mathbf{Q}_i \mathbf{B}_{i+1} x. \quad (11.c)$$

(11.b) miatt a (11.c)-ben szereplő  $\mu_i$ -k a baloldali resolvens spektrális rádiusán kívül esnek, ezért ezen resolvens inverze létezik minden  $\alpha_i > 0$ -ra.

Ezzel a  $V(\lambda_i)$  függvény egzisztenciáját bizonyítottuk.

A  $\gamma_i$  szabályozó paraméter meghatározásához írjuk fel újra a (4) kifejezést:

$$\lambda_i \alpha_i \int_0^{\tau_i} \mathbf{B}_{i+1} \hat{x}_i(t) dt \geq \gamma_i d_i^{(1)}; \quad \tau_i \rightarrow \min.$$

Rögzítsük  $\alpha_i$  értékét, ezáltal a  $V^{-1}(\alpha_i)$  függvényen keresztül  $\lambda_i$  is rögzített. Tegyük fel, hogy  $T$  időpontban akarunk áttérni és határozzuk meg  $\gamma_i$  értékét a  $0 \leq \gamma_i \leq 1$  zárt intervallumon belül. (Közgazdaságilag nyilvánvaló, hogy  $\gamma_i$  értéke csak ebbe az intervallumba eshet.)

Lássuk meg, hogy ez előbbi optimalizálási feladat helyett a célfüggvény rögzített optimális értékéhez keressük azt a  $\gamma_i d_i^{(1)}$  feltételt, amely mellett ez a megoldás lehetséges is a  $\gamma_i$ -re megadott korlátok között. Így minden  $\alpha_i$  és  $T_i$ -hez egy  $L(\alpha_i, T_i)$  függvény segítségével hozzárendelhetünk egy olyan  $\gamma_i$ -t, amely mellett  $T_i$  a (4) feladat optimális megoldása. (Természetesen e feladat a  $\gamma_i$ -re vonatkozó korlátok miatt rögzített  $\alpha_i$  mellett csak egy zárt intervallumba eső  $T_i$ -kre oldható meg.)

II. fázis:  $\varphi(x) = 1$ .

Írjuk fel újra a feladat alapformuláját:

$$x(t) = \mathbf{A}_{i+1} x(t) + \mathbf{B}_{i+1} \dot{x}(t) + \alpha_{i+1} \mathbf{B}_{i+2} \dot{x}(t) - u(t);$$

$$\int_0^{\tau} dt \rightarrow \min. \quad (12)$$

Vezessük be a

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{B}_{i+1} + \alpha_{i+1} \mathbf{B}_{i+2}$$

jelölést. Ekkor feladatunk átrendezés után

$$\mathbf{P}_{i+1} \dot{x} = (\mathbf{E} - \mathbf{A}_{i+1}) x + u, \quad (13)$$

$$x(0) = x_0,$$

$$x(\tau) = x_1.$$

Vezessünk be egy  $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$  skalár vektorfüggvényt. Írjuk fel a következő Hamilton-függvényt:

$$H(p, x, u) = \mathbf{P}_{i+1}^{-1} (p'(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{i+1}) x + p' u). \quad (14)$$

A gyakorlati megoldásnál  $\mathbf{P}_{i+1}$  invertálhatóságát nem kell feltételezni.

A (13)-hoz tartozó adjungált homogén rendszer:

$$-p'(\mathbf{E} - \mathbf{A}_{i+1}) = \dot{p}' \mathbf{P}_{i+1}; \quad p(0) = p_0. \quad (15)$$

*Tétel:* ha  $x(t)$  és  $u(t)$  optimális folyamat, amely átmegy  $x_0$  és egy előre megadott  $x(\tau)$  pontokon, akkor létezik olyan  $p(t)$  függvény, amely eleget tesz a következő tulajdonságoknak:

1. kielégíti a (15)-ös differenciálegyenletrendszer,
2.  $u(t)$  maximalizálja a (14) Hamilton-függvényt úgy, hogy ez a maximum a  $[0, \tau]$  időintervallumban konstans és nem negatív.

A tétel bizonyítását lásd: [14].

A tétel az optimalitás szükséges feltételét fogalmazza meg. Az elégséges feltételek a differenciálegyenletrendszer konkrét tulajdonságaitól függenek. Mivel feladatunk II. fázisa lineáris időoptimum feladat, érvényes a következő tétel:

Ha létezik lehetséges vezérlés, amely átviszi az objektumot egy adott kezdeti állapotból az egyensúlyi állapotba, akkor a maximumelv nem csak szükséges, hanem elégséges feltétel is. [6]

A megoldás a következő heurisztikus elven alapszik:

Tegyük fel, hogy a (12) differenciálegyenletrendszer egy jól választott transzformációval átalakítottuk úgy, hogy  $x(\tau)$ -t az origóba helyeztük. Ekkor bizonyítható, hogy léteznek olyan  $C(t)$  halmazok, amelynek pontjaiból  $t$  idő alatt el lehet jutni lehetséges pályán az origóba. Ezen  $C(t)$  halmazok konvexek, zártak, korlátosak, egy vektorparaméter folytonos leképezései és tartalmazzák az origót.

A  $C(t)$  halmazok határpontjain kell keresni azokat a pontokat, amelyekre nézve a  $t$  optimális. A elválasztó hipersíkok tétele értelmében a (15) rendszer  $p_0$  kezdeti értéket azon  $C(t)$  halmaz  $x_0$  pontján átmenő hipersík normálisa fogja megadni, amely halmaznak  $x_0$  határpontja. Ebből látható, hogy a fő probléma a  $p_0$  kezdeti érték megkeresése. Ez csak iterációval lehetséges [7].

A mi feladatunk nem az origóba eljuttatni a rendszert, hanem az irányvektorával adott sugárra, amely nem más, mint a feladat homogén lineáris differenciálegyenletrendszerének stacionárius megoldása ( $i + 1$ -ik Neumann-pálya). Alkalmaznunk kell tehát a transzverzálitási feltételt, ami heurisztikusan a következőt jelenti:

Ha a célbaérés  $\tau$  időpontban történik, akkor a pálya az említett sugár azon  $x(\tau)$  pontjában ér véget, amelyre fennáll a következő összefüggés

$$(p(\tau), x(\tau)) = 0.$$

Az iterációs megoldás menete a következő:

1. válasszunk ki egy tetszőleges  $p_0$  kezdeti értéket,
2. oldjuk meg az adjungált homogén rendszert ezen  $p_0$  mellett,
3. a Hamilton-függvény maximalizálása alapján határozzuk meg az  $u(t)$  vezérlést,
4. oldjuk meg szakaszonként (12)-öt,
5. vizsgáljuk meg, hogy a differenciálegyenletrendszer azon megoldása, amely a transzverzálitási feltétel mellett metszi a megadott sugarat, milyen pontból indul ki. Ha nem  $x_0$ -ból, akkor a [7]-ben található iterációs módszer alapján változtassuk  $p_0$ -t és hajtsuk végre rendre az 1., 2., 3., 4., 5. lépéseket mindaddig, amíg be nem találunk az  $x_0$  pontba.

Meg kell jegyeznünk, hogy az első fázisra is megadható egy időoptimum feladat:  $\gamma_i$ -hez keressük  $\alpha_i$  azon értékét, ahol  $T_i$  minimális. Ezen feladat megoldására alkalmazott elv hasonló az Eaton iterációhoz, tulajdonképpen egy általánosított duál módszer: optimális, de nem lehetséges megoldásokkal közelítünk a lehetséges megoldásokhoz.

(Bérekzett: 1971. április 15.)

## IRODALOM

1. ATHANS, M.: Optimal control. New York, 1966. McGraw Hill.
2. AUGUSTINOVICS M.: Egy hosszútávú tervezési modellsorozat. SZIGMA, 1970. 1. sz.
3. BRÓDY A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. BRÓDY, A.: The optimal and time-optimal path of economic growth. Contributions to input-output techniques I. Ed.: A. P. Carter, A. Bródy. Amsterdam—London, 1970. North-Holland Publishing Co.
5. BODEWIG, E.: Matrix calculus. Amsterdam, 1959. North Holland Publishing Co.
6. БОЛТЯНСКИЙ, В. Г.: Математические методы оптимального управления. Москва, 1966. Издательство Наука.
7. EATON: An iterative solution to time-optimal control. Journal of Mathematical Analysis, 1962. 5. sz.
8. FADDEEN, E.—GILBERT, E.: Computational aspects of time-optimal control problem. Computing methods in optimisation problem. Ed.: Balakrishnan and Neustadt. New York, 1964. Academic Press.
9. LEONTIEFF, V.: The dynamic inverse. Contributions to input-output techniques I. Ed.: A. P. Carter, A. Bródy, Amsterdam, 1970. North-Holland Publishing Co.
10. LEONTIEFF, V.: Input-output economics. Oxford, 1966. Oxford University Press.
11. MORISHIMA: Equilibrium stability and growth. Oxford, 1966. Clarendon Press.
12. MURAKAMI—TSHUKUI: The turnpike of Japanese economy. Contributions to input-output techniques II. Ed.: A. P. Carter, A. Bródy. Amsterdam, 1970. North-Holland Publishing Co.
13. PONTRJAGIN—BOLTJANSZKIJ—GAMKRELIDZE—MISCSENKO: Optimális folyamatok elmélete. Budapest, 1968. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
15. SAMUELSON, P.: Foundation of economic analysis. New York, 1965. Atheneum.
16. SZAKOLCZAI Gy. (Szerk.): A gazdasági fejlődés feltételei. Budapest, 1963. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
17. SEPHARD, W.: The proof of law of diminishing returns. Zeitschrift für Nationalökonomie. Berlin, 1970. Springer.
18. WILKINSON, J. H.: The algebraic eigenvalue problem. Oxford, 1965. Clarendon Press.

## OPTIMAL PATHS OF ECONOMIC GROWTH IN A CONTROLLED ECONOMIC SYSTEM

In the paper the authors construct a controllable input-output model. Thereby they endeavour to promote establishment of economico-mathematical models in which a characteristic feature of the socialist economy, namely that it is planned and controlled, appears explicitly.

The input-output model described in the paper is a closed dynamic model of the Neumann—Leontieff—Bródy type, which has been further developed in the following directions: in the model economic development is characterized by the change of economic structure and this change takes place in a specific way. First the economy develops in a fixed structure along the maximal equilibrium growth path, but this equilibrium structure is specified in such a way that the conditions of passing over to the next, more developed structure are expressed, too. This appears in the mathematical model as a specific formulation of the extended reproduction of fixed assets. After the conditions of passing over to the next structure have grown ripe on a given structure (according to the requirements of the model) the transformation of the input structure takes place suddenly but the output structure slips out of the balance and accommodates itself to the new input structure only gradually. This change in the output structure is controlled in the model by applying a method of time optimization so that the equilibrium is attained as soon as possible.

The elements of control appear in the equilibrium period of the model as well. The authors control the conditions for the maturity of passing over to the new structure, too. They describe the equilibrium period mathematically as a special eigenvalue problem, in the second period the time optimization is based on the application of Pontrjagin's maximum principle for a linear time optimum problem.

## ОПТИМАЛЬНЫЕ ПУТИ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА В РЕГУЛИРОВАННОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

В статье авторы построят регулируемую модель затрат и выпусков. Таким образом они хотят предвигать построение таких экономико-математических моделей, в которых выражается та черта социалистического планового хозяйства, что оно является планированным, регулируемым.

Модель затрат и выпусков, разложенная в данной статье, является закрытой динамической моделью типа Наймана-Леонтьева—Броди, которую развели в следующем направлении: экономическое развитие в модели характеризуется изменением экономической структуры, и это изменение происходит специальным образом. В начале хозяйство развивается в рамках данной структуры на путь максимального равновесного роста, но в таком образом определенной структуре равновесия находятся и предпосылки перехода на следующую, более развитую структуру. В математической модели это выражается в специфической формулировке расширенного воспроизводства основных фондов. После того, как в данной структуре — в соответствии с требованиями, поставленными в модели — созрели условия перехода на следующую структуру, преобразование структуры затрат происходит скачкообразно, а структура выпусков выходит из равновесного положения и только постепенно приспосабливается к новой структуре затрат. В данной модели авторы регулируют описанное изменение структуру выпусков, употребляя для наиболее быстрого достижения равновесного положения метод оптимализации времени.

Элементы регулировки появляются и в равновесном периоде модели. Авторы регулируют и условия созревания перехода на новую структуру. Период равновесия математически описывают с помощью специальной задачи собственного значения, а вторая часть, оптимализация времени, основывается на использовании принципа максимума Понтрягина для линейной задачи оптимализации времени.



## ÁKM együttthatók előrejelzése autoregresszivitás alkalmazásával

Az ágazati kapcsolatok mérlege modelljében rejlő információtartalom mind az elméleti vizsgálatokban, mind a gyakorlati tervező és elemző munkában igen hasznosnak bizonyult. Éppen ezért fontos a modell paramétereinek vizsgálata és előrejelzése.

Empirikus vizsgálatok alapján az ÁKM együttthatók viszonylagos stabilitást mutatnak, ennek ellenére indokolt olyan módszerek kidolgozása, amelyek lehetőséget adnak az együttthatók időbeni alakulásának kifejezésére.

Általában kétféle módszer alkalmazása terjedt el:

— az ÁKM együttthatóiból alkotott idősorok analitikus függvényvel történő közelítése;

— valamint az ún. RAS<sup>1</sup> módszer, melyet általában akkor alkalmaznak, ha megfelelő idősorok nem állnak rendelkezésre az előrejelzéshez.

Az említett módszerek a tényadatokat mint rögzített értékeket kezelik — pedig ezek valójában valószínűségi változók — és hallgatólagosan feltételezik, hogy a múltbeli tendencia változatlanul érvényesül a jövőben is.

Gazdasági folyamatok törvényszerűségeinek feltárásához — ha a vizsgált tényezők között sztochasztikus kapcsolat áll fenn — jelentős segítséget nyújtanak az idősor elemzés módszerei. Ezek alapján abból a feltevésből indulunk ki, hogy az ÁKM együttthatókból alkotott idősor, a trend kiszűrése után, autoregresszív sémának tekinthető. A hipotézis helyességét statisztikai próbával ellenőrizzük, ugyancsak a próba alapján döntünk az autoregresszivitás rendjére vonatkozóan is.

Vizsgálatunk során egyrészt választ keresünk arra a kérdésre, hogy indokolt-e az ÁKM ráfordítási együttthatók mátrixából alkotott idősorban az autoregresszivitás hipotézise, másrészt megmutatjuk, hogy egy adott mérlegsorozat, a számítási eredmények alapján, milyen előrejelzést eredményez.

### 1. Az autoregresszivitás módszere

#### 1.1. A trend leválasztás problémái

A mérlegsorozat jellegére és viszonylagos rövidségére való tekintettel az idősort úgy vizsgáljuk, mint trend autoregresszív séma, s véletlen komponens eredőjét. A közelítő függvény típusa megválasztásának vizsgálatakor azt tapasztaltuk, hogy a tényadatokhoz céljainknak megfelelő mértékben illesz-

<sup>1</sup> A módszer részletes leírása megtalálható: Németh — Pór: az ÁKM koefficiens számításainak egyik módszeréről: A RAS módszer alkalmazása. OT Tervgazdasági Intézet Közleményei 1968.

kedik a lineáris függvény. Nem célunk a hosszútávú előrebecslés, ezért a lineáris trend mellett döntöttünk.

A trend paraméterek meghatározása a legkisebb négyzetek elve értelmében az alábbiak szerint történt:

$$(1.1.1) \quad f(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^N [y_i - (\hat{a}x + \hat{b})^2] \rightarrow \min.$$

Az idősor elemeiből rendre levonjuk a megfelelő trend értékeket, s a további vizsgálatokat az így adódó maradékkal végezzük.

### 1.2 Az autoregresszivitás hipotézise

Feltevésünk szerint az ÁKM együtthatók időbeni változásának a trend leválasztása után maradó része  $k$ -ad rendű autoregresszív séma:

$$(1.2.1) \quad X_t = a_0 + a_1 X_{t-1} + \dots + a_k X_{t-k} + Y_t,$$

ahol  $a_i$   $t$ -től független paraméterek,

$Y_t$  független, azonos elosztású valószínűségi változókból álló idősor

$$M(Y_t) = 0; \quad D^2(Y_t) = \sigma^2$$

Feladatunk az  $a_i$  paraméterek becslése, az autoregresszivitás hipotézisének ellenőrzése statisztikai próbával, valamint a próba közvetett felhasználásával alkalmazott autoregresszivitás rendjének meghatározása.

### 1.3. Paraméter becslések

A séma paramétereire konzisztens becslést adunk a következő összefüggések alapján:

$$(1.3.1) \quad f(\hat{a}_0, \hat{a}_1 \dots \hat{a}_k) = \sum_{t=1}^N (X_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 X_{t-1} - \dots - \hat{a}_k X_{t-k})^2 \rightarrow \min.$$

Ebből a paraméterek meghatározására  $(k+1)$  db egyenlet adódik:

$$(1.3.2) \quad \sum_{t=1}^N X_t = N\hat{a}_0 + \sum_{i=1}^k \hat{a}_i \sum_{t=1}^N X_{t-i},$$

$$(1.3.3) \quad \sum_{t=1}^N X_t X_{t-j} = \hat{a}_0 \sum_{t=1}^N X_{t-j} + \sum_{i=1}^k a_i \sum_{t=1}^N X_{t-i} X_{t-j},$$

$$j = 1, 2 \dots k.$$

Az (1.3.2) és (1.3.3)-ból kapott paraméter becslések csak akkor érvényesek, ha az alábbi karakterisztikus egyenlet minden gyöke abszolút értékben határozottan kisebb mint egy, ha ez a feltétel nem teljesül, a paraméterek határozatlanok. Ennek ellenőrzésére el kell végezni a karakterisztikus egyenlet megoldását:

$$(1.3.4) \quad z^k - \hat{a}_1 z^{k-1} - \dots - \hat{a}_{k-1} z - \hat{a}_k = 0,$$

Ha elfogadhatók a paraméter becslések, leválasztjuk az  $Y_t$  véletlen komponenszt:

$$(1.3.5) \quad Y_t = X_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 X_{t-1} - \dots - \hat{a}_k X_{t-k},$$

ezután megadható  $D^2(Y_t) = \sigma^2$  konzisztens becslése a következő összefüggés alapján:

$$(1.3.6) \quad S^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (X_t - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 X_{t-1} - \dots - \hat{a}_k X_{t-k})^2.$$

### 1.4 A statisztikai próba

Az autoregresszivitás hipotézisének ellenőrzésére (közvetve a séma rendjének meghatározására) statisztikai próbát végzünk.

A próba részletes leírása és bizonyítása [1] III. fejezetében megtalálható. A könyv nehezen hozzáférhető, ezért a próba alkalmazásához szükséges számítások menetét közöljük:

— Meghatározzuk az empirikus korrelációs együtthatókat ( $\hat{\rho}_i$ ).

Feltétel:  $M(Y_t) = 0$ ;  $D^2(Y_t) = \sigma^2$ ;

ekkor:

$$(1.4.1) \quad \hat{\rho}_i = \frac{\sum_{t=1}^{N-i} Y_t \cdot Y_{t-i}}{\left(\sum_{t=1}^{N-i} Y_t^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{t=1}^{N-i} Y_{t+i}^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1.$$

— Együttható összehasonlítás alapján meghatározzuk  $A_i$  értékeit a következő összefüggések felhasználásával:

$$(1.4.2) \quad \varphi(z) = \sum_{i=0}^k \hat{a}_i z^i, \quad (k \text{ a séma rendje}),$$

ahol  $a_i$  a becsült paramétereket jelenti,  $z$  a karakterisztikus egyenlet gyöke (ezt azonban számszerűsíteni nem kell, az egyenlet mindkét oldala  $z$  polinomja lesz);

$$(1.4.3) \quad \varphi^2(z) = \sum_{i=0}^{2k} A_i z^i.$$

— Az autoregresszivitás hipotézisének eldöntéséhez a következő  $\chi^2$  próbát alkalmazzuk:

Kiszámítjuk a szükséges  $R_s$  értékeket:

$$(1.4.4) \quad R_s = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j \varrho_{s-j},$$

$$s = k + 1, \dots, N - 1.$$

Az  $R_s^2$  valószínűségi változók összege aszimptotikusan  $\chi^2$  eloszlású  $f$  szabadságfokkal ( $f$  a kiadódó  $R_s$  változók száma).

$$(1.4.5) \quad \chi_f^2 = R_{k+1}^2 + R_{k+2}^2 + \dots + R_{k+f}^2.$$

Ha a minta alapján kapott  $\chi_f^2$  érték nagyobb, mint a táblázatból leolvasott  $\chi_p^2$  ( $p$ : a próba szintjét jelenti), a hipotézist elvetjük;

$$\text{ha } \chi_f^2 \leq \chi_p^2,$$

a hipotézist  $p$  valószínűségi szinten elfogadjuk.

## 2. Az adathalmazról

Gazdasági folyamatokra alkalmazott idősor elemzéseknél általában problémát jelent az adatsor viszonylagos rövidege. ÁKM együtthatókat vizsgálunk, így még egy nehézséggel találkozunk; a mérlegsorozatnak egy további feltételt is ki kell elégítenie, ugyanis hogy azonos szerkezetben, azonos áron készüljön.

Mindezek figyelembevételével számításainkat az 1959–69. évi „B” típusú ÁKM-ek belső négyzetéből kapott ráfordítási együtthatók idősorára végeztük. A mérlegsorozatból készült összeállítás [3] az 1959–65. évekre „A népgazdasági ártervezés alapadatai” c. sorozat, ill. a KSH 1966–68. évi mérlegeinek átdolgozott adatait tartalmazza. A mérlegek 1965. évi árakon készültek, 15 szektorra.

## 3. Számítási eredmények

Célunk egyrészt annak eldöntése, hogy indokolt-e az ÁKM ráfordítási együtthatóiból alkotott idősorra az autoregresszivitás hipotézise, másrészt következő egy-két évre — az észlelt autoregresszivitás figyelembevételével — extrapolált együtthatómatrix előállítás.

A számítás elvégzése — mint a matematikai statisztikai feladatok általában — igen munkaigényes. Ilyen nagymennyiségű adat esetében a kifizűtött feladat elvégzése csak elektronikus számológépen volt lehetséges. A számításokat a Központi Fizikai Kutató Intézet ICT — 1905 típusú gépén végeztük. Ezúton szeretnénk köszönetet mondani Szántai Tamásnének, az OT Számítástechnikai Központ munkatársának a gépi munkák lelkiismeretes, pontos elvégzéséért.

Az ÁKM együtthatók vizsgálataival kapcsolatos tapasztalatok azt mutatják, hogy a különböző aggregáltságú mérlegek együtthatói eltérően viselkednek, ezért elképzelhető, hogy egyes számítási eredményeink csak az adott vizsgálatra vonatkoztathatók. Lehetséges pl., hogy a különböző mértékben aggregált együtthatómatrixok idősoraihoz eltérő rendű autoregresszív sémát rendelhető, amit hipotézis vizsgálat alapján kell eldönteni.

Alapvetőnek tekinthető viszont azon megállapításunk, hogy az autoregresszivitás felhasználása — mint módszer — hatékony segédeszköz a megbízhatóbb extrapolációk előállításához.

3.1 *A hipotézisvizsgálat eredménye*

Valamennyi adatsorra — összesen 225 esetben — elvégeztük a statisztikai próbát, a hipotézis minden esetben elfogadhatónak bizonyult. A próba alapján történt az autoregresszivitás rendjének meghatározása is, esetünkben  $k = 2$ -re tehattük a legstabilabb következtetéseket.

3.2 *Az 1969–70. évi ÁKM együtthatók extrapolált matrixa*

A leírt módon extrapolált ÁKM ráfordítási együtthatókat megkapjuk, ha ha megfelelő trendeket és az autoregresszivitás értékek előrebecslésével kapott eredményeket összegezzük (lásd 1–2. tábla).

Ha megvizsgáljuk, hogy az egyes összetevők milyen arányban vesznek részt az összeg kialakításában, igen változatos képet kapunk.

A vizsgált esetek száma	Az autoregresszív értékek részvétele az összeg %-ában		
	0,1–10%	10–30%	30% felett
130	+		
70		+	
25			+

Ha a fenti számszerű eredményekből — az idősor rövidege miatt — azt a következtetést nem is vonhatjuk le, hogy valóban ilyen nagy mértékű az autoregresszivitás az ÁKM együtthatók idősorában, azt mindenesetre feltételezhetjük, hogy olyan összetett folyamattal állunk szemben, amelyre vonatkozóan csak trend extrapolációval valóban nem merítjük ki az összes lehetőségeket. Feltételezhető pl., hogy ha rendelkezésünkre állna megfelelő hosszúságú idősor, esetleg egy vagy több periodikus komponens is leválasztható lenne.

Eredeti célunk volt többek között az is, hogy ha a vizsgálat befejezéséig elkészül az 1969. évi ténymérleg — az általunk használható szerkezetben — eredményeink realitását az összehasonlítás alapján értékeljük. Sajnos, ez az ÁKM még nem áll rendelkezésre, így az összehasonlítás csak utólag végezhető majd el.

Az autoregresszivitás segítségével nyert extrapoláció realitását támasztja alá a következő vizsgálat is. Kérdés, az így kapott együttható-matrix mennyiben felel meg annak a kritériumnak, hogy aszimptotikusan nilpotens legyen? Ennek szükséges és elégséges feltétele, hogy az  $A$  matrix minden saját értékére teljesüljön a

$$|\lambda_i| < 1$$

feltétel.

Ez könnyen eldönthető az ún. Collatz-féle kritérium alapján, amely szerint, ha az  $A$  matrix eleget tesz az

$$I^* A < I^*$$

követelménynek, akkor minden saját értékére fennáll, hogy

$$|\lambda_i| < 1.$$

Az ÁKM ráfordítási együtthatók  
„B” változat  
1969

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,06326	0,16905	0,02459	0,00634	0,00825	0,09365	0,00853
2	0,03725	0,00355	0,05409	0,01880	0,02756	0,03799	0,01211
3	0,03506	0,01038	0,28935	0,15064	0,03364	0,01551	0,00053
4	0,02166	0,03560	0,03702	0,19762	0,05669	0,02268	0,01824
5	0,00532	0,00032	0,01538	0,00698	0,08772	0,00796	0,00247
6	0,04453	0,06325	0,02447	0,03835	0,04582	0,10171	0,04430
7	0,02357	0,01084	0,01425	0,02573	0,01879	0,03661	0,26887
8	0,00206	0,00000	0,00070	0,00029	0,00745	0,00735	0,00786
9	0,00000	0,00000	0,00000	0,00045	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,01912	0,06944	0,01747	0,01036	0,00274	0,00442	0,00098
11	0,02065	0,00032	0,00009	0,00016	0,00060	0,01011	0,03678
12	0,04116	0,05612	0,01639	0,00622	0,06086	0,01740	0,00771
13	0,00135	0,00529	0,00341	0,00558	0,00673	0,00852	0,00340
14	0,00140	0,00030	0,00651	0,00417	0,00253	0,00806	0,00405
15	0,00127	0,00009	0,00080	0,00467	0,00049	0,00123	0,00040

Az ÁKM ráfordítási együtthatók  
„B” változat  
1970

	1	2	3	4	5	6	7
1	0,06348	0,15182	0,02205	0,00458	0,07881	0,09215	0,00853
2	0,03620	0,00015	0,05247	0,01871	0,02822	0,03891	0,01193
3	0,03493	0,01066	0,29134	0,14188	0,03093	0,01378	0,00180
4	0,01793	0,03396	0,03527	0,19772	0,05686	0,02301	0,01834
5	0,00509	0,00019	0,01411	0,00640	0,08806	0,00718	0,00245
6	0,04383	0,06119	0,03246	0,03985	0,04724	0,10601	0,04632
7	0,02263	0,00645	0,01524	0,02570	0,01644	0,03783	0,27193
8	0,00220	0,00000	0,00061	0,00033	0,00810	0,00310	0,00736
9	0,00000	0,00000	0,00000	0,00052	0,00000	0,00000	0,00000
10	0,01818	0,06211	0,02049	0,01227	0,00188	0,01114	0,00121
11	0,02051	0,00019	0,00002	0,00040	0,00040	0,00996	0,03581
12	0,04303	0,05685	0,01644	0,00641	0,06276	0,01799	0,00729
13	0,00080	0,00497	0,00098	0,00558	0,00689	0,00822	0,00243
14	0,00131	0,00028	0,00615	0,00414	0,00240	0,00804	0,00386
15	0,00151	0,00005	0,00029	0,00512	0,00050	0,00106	0,00024

1. Bányászat
2. Villamosenergiaipar
3. Kohászat
4. Gépipar
5. Építőanyagipar

6. Vegyi- és gumiipar
7. Könnyűipar
8. Élelmiszeripar
9. Magánkisipar
10. Építőipar

1. tábla

extrapolált mátrixa

1965. évi bruttó áron

8	9	10	11	12	13	14	15
0,00494	0,00587	0,00733	0,00215	0,03617	0,01169	0,00150	0,00379
0,00744	0,00822	0,01958	0,00438	0,03270	0,03349	0,00058	0,01748
0,00313	0,05164	0,03263	0,00382	0,01096	0,00042	0,00086	0,00140
0,00860	0,07984	0,10392	0,01728	0,03428	0,01685	0,01662	0,00992
0,00442	0,00832	0,14078	0,00403	0,00300	0,00635	0,00136	0,00000
0,02430	0,03760	0,02602	0,04395	0,10064	0,01889	0,00359	0,02278
0,00797	0,21457	0,04949	0,00548	0,02990	0,02895	0,02563	0,40728
0,12016	0,00521	0,00109	0,09548	0,00141	0,00092	0,00056	0,00215
0,00000	0,00121	0,00118	0,00132	0,00052	0,00308	0,00016	0,00000
0,00191	0,00065	0,02269	0,01174	0,05534	0,04706	0,00134	0,00215
0,36930	0,00100	0,00431	0,27012	0,00713	0,00452	0,00257	0,00932
0,03436	0,01890	0,08559	0,00246	0,02198	0,21437	0,59563	0,02003
0,00330	0,11915	0,01568	0,01393	0,00961	0,00750	0,00648	0,01814
0,00263	0,00082	0,00167	0,00197	0,00470	0,00021	0,00000	0,00369
0,00168	0,02379	0,00685	0,00043	0,00174	0,01033	0,00187	0,00318

2. tábla

extrapolált mátrixa

1965. évi bruttó áron

8	9	10	11	12	13	14	15
0,00547	0,00576	0,00726	0,00201	0,03815	0,01130	0,00169	0,00429
0,00740	0,00785	0,01821	0,00398	0,03228	0,03240	0,00071	0,01593
0,00291	0,05024	0,03847	0,00350	0,01181	0,00040	0,00092	0,00205
0,00856	0,07667	0,10593	0,01700	0,05606	0,01647	0,01794	0,01280
0,00485	0,00830	0,13865	0,00370	0,00323	0,00689	0,00133	0,00000
0,02231	0,03622	0,02489	0,04027	0,09396	0,01900	0,00410	0,02212
0,00915	0,22238	0,04960	0,00595	0,02937	0,03089	0,02795	0,37939
0,10903	0,00612	0,00104	0,08075	0,00250	0,00106	0,00066	0,00191
0,00000	0,00113	0,00142	0,00205	0,00053	0,00277	0,00008	0,00000
0,00011	0,00026	0,21990	0,01147	0,06391	0,04323	0,00147	0,00191
0,37580	0,00041	0,00559	0,28928	0,00785	0,00476	0,00276	0,01732
0,03448	0,01776	0,08553	0,00239	0,02202	0,20432	0,60903	0,01977
0,00663	0,11942	0,01585	0,01394	0,00927	0,00774	0,00851	0,01657
0,00258	0,00040	0,00168	0,00183	0,00392	0,00020	0,00000	0,00286
0,00150	0,02044	0,00687	0,00042	0,00177	0,00996	0,00231	0,00280

- 11. Mezőgazdaság
- 12. Közlekedés
- 13. Belkereskedelem
- 14. Külkereskedelem
- 15. Egyéb termelő tevékenység

Ez azt jelenti, hogy az 1969–70. évi előrebecsült matrixok oszlopösszegei rendre kisebbek legyenek mint egy; s ez a követelmény eredményeinkre teljesül.

Mint már említettük, az ÁKM együtthatómatrix elemei egy véletlen tag kivételével előrebecsülhetők, ez azt jelenti, hogy az (1–2.) táblában közölt együtthatómatrix minden eleméhez megadható az autoregresszív sémában szereplő  $Y_t$  véletlen komponens szórása. Úgy véljük, szemléletesebb képet adunk, ha a relatív szórás értékeit közöljük.

A vizsgált esetek száma	Relatív szórás			
	1–10%	10–20%	20–30%	30% felett
107	×			
61		×		
55			×	
16				×

Ha részletesebben elemezzük a számszerű eredményeket, azt tapasztaljuk, hogy a nagyobb abszolút értékű együtthatókból álló idősorhoz tartozó relatív szórások értéke általában 1,5–6% közé esik. Ezek az eredmények is azt az általánosan ismert tapasztalatot igazolják, hogy a nagyobb együtthatók stabilabbak.

### 3.3 Konfidencia tartomány

Gazdasági idősorok előrejelzését gyakran analitikus trendek alapján végzik, de csak ritkán találkozunk az idősorok megbízhatóságának számszerű megadásával is. Szeretnénk felhívni a figyelmet, hogy ez esetenként messzemenően téves szemléletet eredményezhet, különösen akkor, ha hosszabb távra extrapolálunk.

A tényadatok és a trend alapján előállított értékek között jelentkezik egy véletlen jellegű eltérés. Elméleti megfontolások alapján belátható, hogy a tényadatok  $(1 - p)$  100% valószínűséggel esnek abba az intervallumba, amelynek félhosszúságát a következő összefüggés adja meg, ha a regressziós függvény lineáris:

$$(3.3.1) \quad tp \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N-2}} \sqrt{1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{c^2}},$$

ahol  $tp$  az  $N - 2$  szabadságfokú Student eloszlás adott  $p$ -hez tartozó értéke,

$$c^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x_k - \bar{x})^2.$$

$x$  értékét változtatva, ez az intervallum, egy változó szélességű sávot sírol végig, a benne fekvő pontok összessége alkotja a konfidencia tartományt.

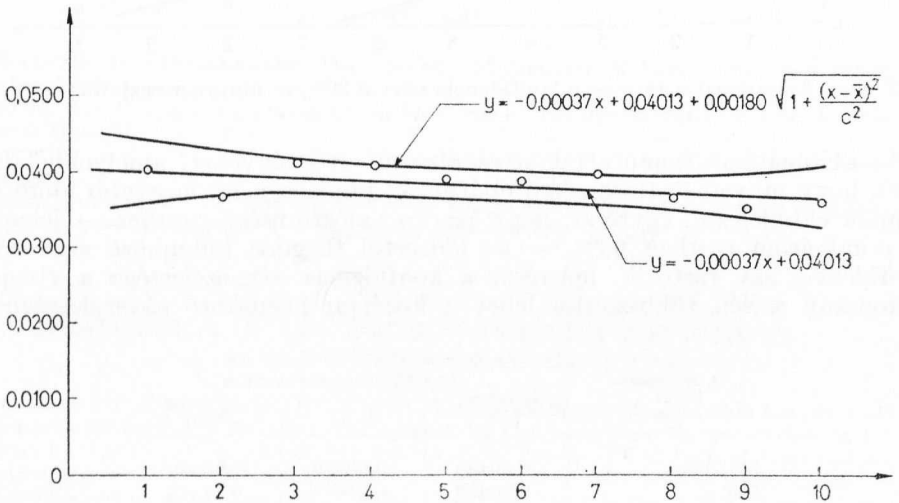


A sáv határainak egyenlete a következő:

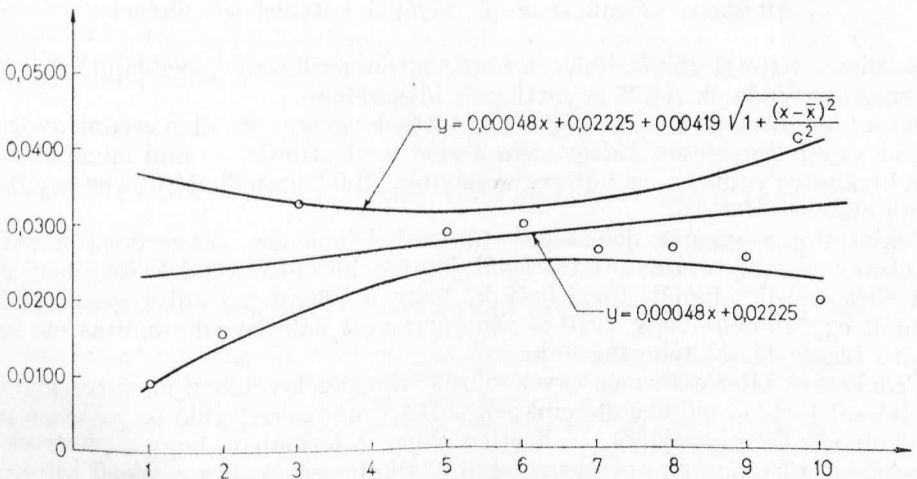
$$(3.3.2) \quad y = \hat{a}x + \hat{b} \pm tp \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N-2}} \sqrt{1 + \frac{(x - \bar{x})^2}{c^2}},$$

ahol  $a$  és  $b$  a regressziós függvény paraméterei.

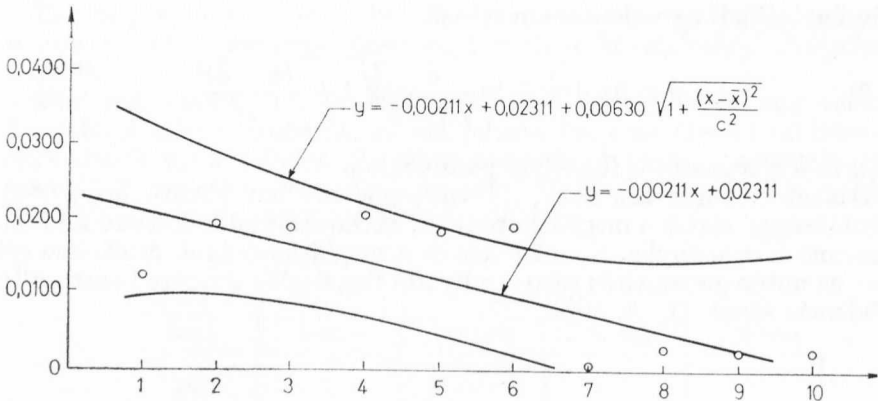
$p$  értékét 0,05-nek választva, a konfidencia sáv azt jelenti, hogy 95%-os valószínűséggel esnek a megfelelő tény ill. extrapolált adatok a sáv által meghatározott tartományba. Szemléltetés és a megbízhatóságuk értékelése céljából — az autoregresszivitás relatív súlyától függően — 3 esetre konstruáltunk konfidencia sávot. (1—3. ábra).



1. ábra. A regressziós egyenes a konfidencia sávval 3%-os autoregresszivitás esetén.



2. ábra. A regressziós egyenes a konfidencia sávval 15%-os autoregresszivitás esetén.



3. ábra. A regressziós egyenes a konfidencia sávval 90%-os autoregresszivitás esetén.

Az alábbiakban bemutatjuk a számszerű eredményeket, amelyekből látható, hogy milyen óvatosan kell eljárunk, különösen ha hosszabb időre kívánunk előrejelezni, egyrészt, mert azonos valószínűségi szinthez — jelenleg ez mindhárom esetben 95% — az idősortól függően különböző szélességű konfidencia sáv tartozik, másrészt a konfidencia sáv szélessége a vizsgált tartomány szélén többszöröse lehet a középben jelentkező sáv szélességnek.

A konfidencia sáv szélessége	Az autoregresszítás részaránya		
	3%	15%	90%
Középen	0,00180	0,00419	0,00630
Szélén	0,00433	0,01008	0,01515

#### 4. Általános következtetések, további kutatási lehetőségek

Reálisan feltételezhető, felismerhető, s numerikusan megállapítható az autoregresszivitás az ÁKM együttthatók idősoraiiban.

Ha a különböző terleteken végzett kutatások egyszer stabilan eredményezni fognak egy *folyamatosan kidolgozásra kerülő* mérlegtípust, — ami minél előbb igen kívánatos volna, — az autoregresszivitás jól felhasználható lesz az együttthatók előrebecslésében.

Tekintettel a vizsgált jelenség határozott fellépésére, célszerűnek látszik a számítások folytatása a lineárisnál jobban közelítő trendek esetében is.

A vizsgálatok alapján rögzíthetjük, hogy a jelentkező autoregresszivitás alapján egy 1969-es vagy 1970-es tényméreleggel való összehasonlítás elé kielégítő bizakodással tekinthetünk.

Érdekesnek látszanak még egy konkrét vizsgálat keretében az autoregresszivitással történő előrebecsléseinknek a RAS módszerrel való összevetése is, hatékonyság szempontjából. — Esetleg abban a formában, hogy a „keretek” előrejelezése történne az autoregresszivitás alkalmazásával, s a végső kitértés a RAS módszer segítségével.

Ha a vizsgálat egy következő megismétlésénél a mérleg mérete más lesz, megfigyelhetjük majd az aggregáció hatását az autoregresszivitás jelentkezésére.

Egy következő lépésben esetleg felvetődik az együtthatók — viselkedésük alapján történő — differenciált kezelése is.

Érdemes lenne a módszert más gazdasági idősorokra is alkalmazni, ahol esetleg hosszabb adatsor áll rendelkezésre és megkísérrelhető esetleg periodikus komponens meghatározása is.

(*Béérkezett: 1971. március 22.*)

## IRODALOM

1. GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: Statistical analysis of stationary time series Uppsala, 1956.
2. PRÉKOPA A.—ÉLTETŐ Ö.: Matematikai statisztika. Budapest, 1964. Központi Statisztikai Hivatal.
3. NÉMETH S.: 1959—68. évi ágazati kapcsolati mérlegek és koefficiens számítások (kézirat).
4. MESZÉNA GY.—SIMON B.: Autoregresszivitás vizsgálata az ágazati kapcsolatok mérlegében. Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete Közleményei 1970/5. sz.

## INVESTIGATION OF THE AUTOREGRESSIVITY HYPOTHESIS IN INPUT-OUTPUT TABLES

The authors investigate whether the hypothesis of autoregressivity holds true or not for time series composed from input coefficients. At the same time the paper makes an attempt at forecasting these coefficients from a given (1959—1968) factual time series.

It is assumed that — after eliminating the trend effect — the time series in question may be considered as autoregressive schemas. This hypothesis is checked by a statistical test. Moreover, by means of the test the order of the autoregressivity can be determined as well.

Relying on factual time series data, the values of these elements can be forecast for the following two years. These forecasts, as usual, do not include the effect of the random components of the time series. This way, we could succeed in composing the whole forecast coefficient matrix. The errors and the confidency boundaries of the forecast coefficients have been calculated, too.

## ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОРЕГРЕССИИ В МЕЖОТРАСЛЕВОМ БАЛАНСЕ

Цель разработки состоит, с одной стороны, в том, чтобы ответить на вопрос, является ли обоснованной гипотеза авторегрессии в ряде времени, построенном из коэффициентов затрат межотраслевого баланса, а с другой стороны, показать, что на основе результатов проведенных расчетов какой прогноз можно получить из данной серии балансов (1959—1968 гг.).

На основе разработки предполагается, что ряд времени — после исключения трендов — можно принять в качестве авторегрессивной схемы. Гипотеза проверяется статистическими пробами, на основе проб решается и порядок авторегрессии.

В знании предыдущих членов ряда времени она дает на последующие два периода прогностические элементы ряда времени — за исключением случайного компонента —, и таким образом создает комплектные экстраполированные матрицы коэффициентов. В разработке проводятся и расчеты относительно надежности полученных данных.

## Ex post jellegű modellek eredményeinek előrebecsléséről

### Kérdésfelvetés<sup>1</sup>

Az utóbbi években a szocialista országok tervezési gyakorlatában is mind gyakrabban javasolják többperiódusú makroökonómiai tervmodell összeállítását.<sup>2</sup> Az eddigi elméleti eredmények és gyakorlati számítások azt mutatják, hogy e modellekből nyerhető információk több-kevesebb áttétellel hasznosan alkalmazhatók az elkövetkezendő évek termelési, ár, beruházási, bér, jövedelmi és egyéb terveinek összeállításánál. Feltétlenül ez az általános benyomás akkor is, ha előnyeik mellett egy sor komoly nehézséggel is járnak. Ez utóbbiak okait vizsgálva a következő főbb észrevételeket tehetjük:

— A szóbanforgó többperiódusú optimalizációs (terv-) modellek vagy egy viszonylag rövidebb tervidőszak valamennyi évére (pl. 1972—73—74—75) vagy pedig egy hosszabb periódus megkülönböztetett időpontjaira (szakaszaira) készültek (pl. 1975—1980—1985). Ebből kifolyólag az eredmények utólagos extra-, illetve interpolációjára ritkán van módszertanilag is elfogadható lehetőség.

— Mind a primál, mind pedig a duális megoldásoknál gyakori az oszcilláció, az ágazati (szektor-) ár- és volumeindexek időbeli ugrálása, divergens mozgása. Ha erre a közgazdasági logika talál is magyarázatot (pl., hogy az ok a különböző szűkös erőforrások felszabadulásának időbeli eltérése), az eddigi tapasztalat, a bővített újratermelés vastörvénye, a piaci gyakorlat ellene szól e hullámzásoknak.

— Nagyméretű, többperiódusú modelleknél komoly problémát okoz a roppant adathalmaz előrebecslése. Különösen igaz ez, ha több periódus alatt nemcsak 2—3 tervévet értünk. Más probléma a feltételi rendszerek, a korlátok és a célfüggvények szükségszerűen eltérő jellegű (metodikájú) előrebecslése, az ily módon kialakított optimalizációs modell realitása, konzisztenciája.<sup>3</sup>

Az általunk kidolgozott eljárás lényege a következő. Nem több bázismodell előrevetítése útján nyert többperiódusú ex-ante (prognózis) modellt optimalizálunk, hanem *rendre elvégezzük* az összehasonlítható szerkezetű és tartalmú *ex-post* (bázis-) modellek optimalizálását, s az ezekre nyert (bázisidőszaki) primál és duális megoldásokat extrapoláljuk.<sup>4</sup>

Milyen előnyöket ígér ez az eljárás? Megítélésünk szerint a következőket:

<sup>1</sup> Ez a dolgozat a [3] második részének korrigált változata.

<sup>2</sup> Lásd pl. [1], [2], [7] és [9].

<sup>3</sup> Bizonyos esetekben a konzisztencia megőrzésére jó algoritmus a [4]-ben ismertetett eljárás.

<sup>4</sup> Ex-post modell-sorozat elvi igényével már [8] is jelentkezett. Dolgozatunkban egyébként a modell kifejezés mindig lineáris programozási modellt jelent; elvileg azonban nem látjuk akadályát, hogy az előrebecslési eljárást a nem lineáris modellek eredményeire is kiterjesszük.

— Már a korábbi modellekkel kapcsolatban is feltehetjük volna a kérdést: ha a primál és duális megoldásokat keressük valamely jövőbeli időpontra (időpontokra) miért nem a bázisidőszak primál és duális megoldásaiból prognosztizáljuk azokat? Ez látszana direkt útnak, nem pedig a többperiódusú ex-ante modellezés.

— Eljárásunk alkalmazása esetén a bázismodellek adatainak, vagyis az alapfeltételeknek időbeli változásain kívül automatikusan figyelembe jönnek a rendszer indirekt összefüggései is, lévén, hogy feltétel-rendszerek helyett már optimum-pontokat extrapolálunk.

— A módszer lényege folytán nem egy  $n \cdot m$ -es alapmodellt, hanem egy (esetleg néhány)  $n$  és  $m$  elemű vektort kell erőrebecsülni. Ettől a hibalehetőség nagyfokú csökkenését remélhetjük. (Ez természetesen csak hipotézis.)

— Az eljárás kiküszöböli a primál és duális optimumok jövőbeli szakaszos hullámzásának problémáját. Ez a hullámzó mozgás elvileg a bázisadatokra is fennállhat, azonban egyrészt a [6] vizsgálat tapasztalatai, másrészt saját kísérleti számításaink szerint a makroökonomiai adatsorok zöme, így pl. a magyar népgazdaság struktúrája 1960—1970 között nagyon is „trendszerű” alakulást mutatott. A nehézséget itt csupán az előrejelzés módszertana okozza. Ennek megoldása után már tetszés szerinti időpontra megadható az optimális ár- és volumenterv.<sup>5</sup>

Eljárásunkkal kapcsolatban szükségesnek tartjuk megjegyezni, hogy a fenti állítások feltételezik a gazdasági fejlődés töretlen, viszonylag monoton voltát a tervidőszak folyamán. Ez igen komoly absztrakció, annak ellenére, hogy végső soron bevallva—bevallatlan a korábbi ex-ante modellek is éltek e feltételezéssel.

Az eljárásrendszer homályos pontjait, veszélyzónáit a következő területeken érezzük:

— Az eljárás feltételezi viszonylag nagyszámú „standardizált” ex post modell meglétét, illetve azok nagyfokú aggregáltságát, aminek eredményeként a gazdasági fejlődésben oly gyakori új feltételek és új változók hatása tompítottan jelentkezik.

— A javasolt megoldás könnyen inkonzisztens eredményre vezet, ugyanis első közelítésben semmi sem garantálja, hogy az előrebecsült  $x$  primál és  $r$  duális megoldásokra (illetve, hogy az eleve adott vagy szintén előrebecsült  $c$  cél-függvény és  $b$  korlátvektorokra) fennáll az ismert és szükségszerű

$$c^* \cdot x = r^* \cdot b$$

összefüggés. Annak ellenére, hogy ez a probléma már a „klasszikus” esetben is felvetődött (még hozzá olyan formában, hogy az egyenletrendszer, illetve a korlátok elemeinek egyedi becslése után kialakuló modellnek esetleg nincs megengedett megoldása), igyekeztünk e kérdést is megoldani, s dolgozatunk *hátralevő részében tulajdonképpen az e téren nyert eredmények bemutatására helyez- zük a fő hangsúlyt.*

— A módszer feltételezi, hogy rendelkezésünkre áll az ex post modellekhez szükséges valamennyi alapadat, és pedig összehasonlítható szerkezetben és tartalommal. Ez jelenlegi adottságaink mellett meglehetősen erős feltétel, s így az eljárás népgazdaságtervezési alkalmazásának hatóköre némiképp korlátozott.

<sup>5</sup> Elfogadva azt a kantorovicsi koncepciót, miszerint a duális megoldást mint optimális arányvektort értelmezzük.

— Egyelőre nem keresünk választ arra, hogy a hagyományos vagy az általunk javasolt eljárás igényel-e több számítási munkát. (Azt a kérdést, hogy melyik ad „jobb” megoldást, aligha lehet egyértelműen megválaszolni, lévén, hogy azonos adatokból kiinduló, matematikailag egyaránt korrekt előrebecslések összehasonlítása általában értelmetlen; ha van is közgazdasági létjogosultsága, az mindig a szóbanforgó feladat jellegének függvénye.)

Mindenesetre az a körülmény, hogy a Magyarországon működő számítógépeken eddig maximum  $2000 \cdot 2000$ -es méretű lineáris programozási feladatot tudtak megoldani, bizonyítani látszik eljárásunk „gazdaságosabb” voltát, különös tekintettel arra, hogy ismert módon (ugyancsak tapasztalati eredmények alapján) a modell méreteinek lineáris növekedése köbösen változtatja a számítási igényt.

— Ugyancsak nem kívánunk itt bővebben foglalkozni az extrapoláció módjával, a „legjobb előrebecslés” kérdésével; jelen esetben ezt egyéb közgazdasági, illetve matematikai megfontolások eredményeként már adottnak tekintjük.

— Abból eredően, hogy a módszer a lineáris programozás összefüggései közül csak az erős dualitási tételt használja közvetlenül fel (a többit pedig csak indirekte), az eredmények eltérnek más módszerek eredményeitől, de közgazdasági tartalmuk változatlan.

— A Lagrange-féle eljárás alkalmazásakor megtörténhet, hogy negatívnak adódnak olyan változók, melyekre csak nemnegatív értéket tudunk közgazdaságilag értelmezni. (Pl. termelési szintek.) Jóllehet ennek valószínűsége a feladat kérdésfeltevéséből eredően igen csekély, mint elvileg lehetséges hibával ezzel is számolni kell.

A primál és duál megoldások extrapolációjának lehetősége tehát arra a hipotézisre épül, hogy ha egy matrix-idősornak (feltételrendszernek), annak valamennyi elemének van meghatározott időbeli változása (trendje), úgy az azokból képzett optimalizációs modellek primál és duális megoldásainak is van. Itt kell még megemlíteni, hogy kutatásunk — mely ma még távolról sem lezárt — háromféle megoldás vizsgálatára koncentráldik:

— az egyes bázisévek modelljeit nem kapcsolni össze, csupán azonos szerkezetben, azonos célfüggvény- és korlátvektor típusokkal optimalni valamennyit, s a nyert primál (duális) megoldásokat előrevetíteni a kívánt időpontokra („monoton extrapoláció”).

— Az  $n$ -edik bázisév modelljének összeállításához felhasználni az  $(n - 1)$ -edik időpont modelljének megoldásából nyert információkat („spirál-extrapoláció”).

— Valamennyi bázisév modelljét egyetlen átlós-szerkezetű nagy modellbe fogni össze és az utóbbit optimalni, majd az egyes évekre ily módon kialakuló primál és duál megoldásokat előrevetíteni.

Az utóbbi két eljárással, az azokkal végzett számítások eredményeivel egy későbbi dolgozatban kívánunk foglalkozni.

### Az előrebecslések konzisztenciájáról

Az előrebecsült primál- és duális megoldások konzisztenciájának biztosítására jól hasznosítható a legkisebb négyzetek módszere, illetve a Lagrange-féle multiplikációs eljárás. Jelen esetben tehát az

$$(1) \quad r^*(t_q) \cdot b(t_q) = c^*(t_q) \cdot x(t_q)$$

összefüggést kielégítő vektorokat keressük a  $t_q$  időpontra előrebecsült  $x(t_q)$ , és  $r^*(t_q)$  primál és duális megoldás-vektorok, valamint az ugyancsak előrebecslés eredményeként jelentkező  $c'(t_q)$  és  $b'(t_q)$  célfüggvény és korlát-vektorok ismeretében.

Elhagyva a  $t_q$  argumentumokat, megoldandó a

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n [(c_j - c'_j)^2 + (x_j - x'_j)^2] + \sum_{j=1}^m [(r_j - r'_j)^2 + (b_j - b'_j)^2] \rightarrow \text{minimum!}$$

szélsőértékszámítási feladat a

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{j=1}^m r_j b_j = 0$$

feltétellel, aholis  $n$  és  $m$  a vektorok elemszámát mutatja.

A feltételes szélsőértékszámítási feladat a Lagrange-féle multiplikációs eljárással a következő (feltétel nélküli) szélsőértékszámítási feladatra vezet:

$$(4) \quad L = \sum_{i=1}^n [(c_i - c'_i)^2 + (x_i - x'_i)^2] + \sum_{j=1}^m [(r_j - r'_j)^2 + (b_j - b'_j)^2] + \lambda \left( \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{j=1}^m r_j b_j \right) \rightarrow \text{minimum!}$$

ahol  $\lambda$  a Lagrange-féle multiplikátor, közgazdaságilag a konzisztencia „ára”.

Képezve a  $c_k$ ,  $x_k$ ,  $r_s$ ,  $b_s$  és  $\lambda$  szerinti parciális deriváltakat, a következő egyenleteket kapjuk:

$$(5) \quad \partial L / \partial c_k = 2(c_k - c'_k) + \lambda x_k = 0$$

$$(6) \quad \partial L / \partial x_k = 2(x_k - x'_k) + \lambda c_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$(7) \quad \partial L / \partial r_s = 2(r_s - r'_s) - \lambda b_s = 0 \quad s = 1, 2, \dots, m$$

$$(8) \quad \partial L / \partial b_s = 2(b_s - b'_s) - \lambda r_s = 0$$

$$(9) \quad \partial L / \partial \lambda = \sum_{i=1}^n c_i x_i - \sum_{j=1}^m r_j b_j = 0$$

Ebből — vektorformában — kapjuk, hogy

$$(10) \quad 2(c - c') + \lambda x = 0$$

$$(11) \quad 2(x - x') + \lambda c = 0$$

$$(12) \quad 2(r - r') - \lambda b = 0$$

$$(13) \quad 2(b - b') - \lambda r = 0$$

$$(14) \quad c^* x - r^* b = 0$$

▼agyis

$$(15) \quad c = \frac{2}{4 - \lambda^2} (2c' - \lambda x')$$

$$(16) \quad x = \frac{2}{4 - \lambda^2} (2x' - \lambda c')$$

$$(17) \quad r = \frac{2}{4 - \lambda^2} (2r' + \lambda b')$$

$$(18) \quad b = \frac{2}{4 - \lambda^2} (2b' + \lambda r')$$

feltéve, hogy  $\lambda \neq \pm 2$

Helyettesítjük a (15)–(18) egyenleteket (14)-be és egyszerűsítsünk  $\frac{2}{4 - \lambda^2}$ -tel.

Átrendezés után kapjuk, hogy

$$(19) \quad \lambda^2 - 2q\lambda + 4 = 0$$

ahol

$$q = \frac{c^{*'} \cdot c' + x^{*'} \cdot x' + r^{*'} \cdot r' + b^{*'} \cdot b'}{c^{*'} \cdot x' - r^{*'} \cdot b'}$$

feltéve, hogy  $c^{*'} \cdot x' - r^{*'} \cdot b' \neq 0$ . Ellenkező esetben a feladat kitűzése értelmetlen, hiszen az előrebecsült adatok (a vonással jelölt vektorok) már eleve konzisztensek.

(19) megoldásaként

$$\lambda = q \pm \sqrt{q^2 - 4}$$

adódik. A  $q^2 \geq 4$  mindenkori teljesülése a  $q$  definíciójából könnyen belátható s így a  $\lambda$ -t a (15)–(18) összefüggésekbe írva már a keresett  $x^*$ ,  $r^*$ ,  $c$  és  $b$  vektorokat kapjuk.

A módszert a magyar népgazdaság 1959–1966-os összevont input-output tábláin alapuló optimalizációs modelleken már kipróbáltuk. A konkrét számítások eredményéről egy előkészület alatt álló nagyobb tanulmányban kívánunk referálni, befejezésül álljon itt példaként a [3]-ban is ismertetett részeredmény.

#### Ágazati árnyékarak időbeli változása<sup>6</sup>

Szektor	Év	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	
									tény- adat	előre- becsült érték
Ipar		0,85	0,83	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87	0,85	0,87
Építés		0,78	0,73	0,76	0,77	0,79	0,82	0,83	0,83	0,84
Élelmiszergazdaság		1,48	1,59	1,64	1,61	1,57	1,54	1,61	1,59	1,61
Tercier ágazatok		0,97	0,92	0,97	1,03	1,04	1,12	1,14	1,15	1,17

<sup>6</sup> Ex post előrebecslés négysektoros optimalizációs modell alapján, melynek alapadatait dezaggregált formában [6] tartalmazza, elvi sémája pedig szinte teljesen azonos a [8] alapjául szolgáló modellével. A célfüggvény a dolgozó létszám minimalása volt.

(Beérkezett: 1971. március 8.)



## IRODALOM

1. BOD P.: A népgazdaság hosszútávú (15–20 éves) tervezésének egy lehetséges matematikai modelljéről. *Sigma*, 1969. 1. sz. 59–66. o.
2. CERNY, M.—HEYL, L.—LOULA, D.—OCENASEK R.: Experiments with a linear medium-term optimal planning model. *Ekonomicko—Matematicky Obzor*, 1968. 3–4. se.
3. GLATTFELDER, P.—VÁCZI, P.: Some price design methods with multi-period models. Az Ökonometriai Társaság második konferenciáján elhangzott előadás. Cambridge, 1970. szeptember.
4. GLATTFELDER P.—VÁCZI P.: Egy algoritmus input-output sémák előrebecslésének korrekciójára. *Sigma*, 1970. 3. sz. 167–172. o.
5. Канторович, Л. В.—Макаров, Л. В.: Оптимальные модели перспективного планирования. Применение математики в экономических исследованиях. Том 3. Москва, 1965. Соцэкиз. стр. 7–87.
6. Az ártervezés ökonometriai modellje. OAÁH-Infelcor Rendszertechnikai Vállalat kiadványai. Budapest, 1968–1971.
7. SIMON Gy.: A népgazdasági árprogramozás dinamikus modellje. *Sigma*, 1968. 1. sz. 3–16. o.
8. Шимон, Д.: Исследование оптимальных оценок на основе народнохозяйственного программирования. Előadás az 1967-es moszkvai input-output konferencián.
9. Урлаки, Зс.: A multi-technological, multi-period model for Hungarian twenty-year planning. Az ötödik nemzetközi input-output konferencián elhangzott előadás, Genf, 1971. január.

## ON THE FORECASTING OF THE RESULTS OF EX POST MODELS

In the planning of future prices and quantities so-called ex-ante models are applied more and more often in recent times. The essence of such procedures based on linear programs consists in forecasting the  $A$ ,  $c^*$  and  $b$  components of the well-known problems of type  $\{x \geq 0; Ax \leq b; c^*x \rightarrow \max\}$  with different methods for one or two points of time, and then interpreting the primal solution  $x$  and dual solution  $r^*$  as the optimal plan of quantities and price proportions, respectively.

The authors suggest another procedure which also operates by means of the method of linear programming, but differs from the ex-ante modelling conceptually. Its essence is that optimization does not succeed here the forecasting of the constraint system, the bounding vector and objective function, but it is done for the different point of time of the basic period, and the projection of time series formed from the primal and dual solution vectors gives the optimal plan of quantities and prices for the future.

The general explanation of the concept is followed by the discussion of the positive and negative features of the procedure. The authors include in the advantages of the method that, compared to ex-ante modelling, considerably less elements must be forecasted, and so the economic reality of the method is likely to be greater. Another remarkable advantage is that the method automatically excludes the possibility of inconsistency (sometimes appearing in ex-ante modelling), because it does not forecast the partial components of the model but its results. In certain cases, especially with large-size models the computational requirements also seem smaller.

The paper does not examine the question what methods should be used for forecasting. The dangerous zones of the suggested procedure, however, are discussed, in a great extent. Among these it is conspicuous that the method supposes the existence of a sufficient number of basic period models similar both in form and in contents. The authors also state unambiguously that even this method cannot always eliminate the temporal fluctuations, „oscillation” of the primal and dual solutions either, at most it transfers them from the years of the plan period to the basic period models.

The authors provide for the consistency of the forecasted primal and dual solutions in the framework of a special constrained extreme value problem, where they forecast objective function and bound vectors, too. The paper concludes in discussing the numerical results of an optimization based on the input-output tables of the Hungarian economy in the years 1959–1966.

## ОБ ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛЕЙ ВИДА EX POST

В последнее время планирование цен и выпусков все чаще употребляет для будущего так называемые ex-ante модели. Сущность этих методов, обоснованных на линейном программировании, состоит в том, что для известной задачи типа  $x \geq 0$ ;  $Ax \leq b$ ,  $cx \rightarrow \max!$  с помощью различных методов оценивают компоненты  $A$ ,  $c$  и  $b$  на один или больше моментов времени, а потом прямое решение  $x$  и двойственное решение  $r^*$  берут за план оптимального соотношения выпуска и — соответственно — цен.

Авторы предлагают другой метод, который работает тоже методом линейного программирования, но в принципе отличается от моделирования ex-ante. Сущность этого метода находится в том, что в это случае оптимализация происходит не после оценки систем ограничений, вектора ограничений и целевой функции, а на различные моменты времени базисного периода, а оптимальный план цен и выпусков для будущего получается из отражений вектора временного ряда, полученного таким образом из прямых и двойственных решений.

После общего описания принципа излагаются положительные и отрицательные черты метода. В числе преимущественных этого метода авторы перечисляют, что сравнивая с моделированием ex-ante для этой модели нужно оценивать значительно меньше элементов, и так экономическая реальность решения наверняка больше. Другое значительное преимущество этого метода вытекает из того, что оценивает не отдельных компонентов модели, а ее результатами, таким образом заранее исключает возможность таких неконсистенций, которые возникают при моделировании ex-ante. В некоторых случаях, особенно в случае больших моделей, и расчетные проблемы оказываются меньшими.

Данная работа не занимается с тем вопросом, что с какими методами производится сама оценка. Тем больше излагаются опасности предлагаемого метода. Из них нужно подчеркивать, что метод предлагает существование нужного числа базисных моделей одинаковой формы с одинаковым содержанием. Авторы однозначно констатируют и то, что и данная модель не всегда сможет устранять волнение прямых и двойственных решений во времени, в крайнем случае переносит с годы планового периода на базисные модели.

Авторы обеспечивают консистентно оцененных прямых и двойственных решений в рамках специальной условной экстремальной задачи, используя также оцененные целевую функцию и векторы ограничений. В заключении работы представляют числовые результаты оптимализации, базированной на агрегированные межотраслевые балансы венгерского народного хозяйства за 1959—1966.

## Becslés és előrejelzés: néhány ökonometriai modell összehasonlítása\*

1. Azokban, akik az ökonometriai modellek egyre növekvő irodalmát figyelemmel kísérik, izgalmas kérdésként merül fel a modellek megbízhatóságának kérdése. Mikor „jó” egy ökonometriai modell? Milyen (tartalmi vagy formai) ismervek alapján kísérhetjük meg megállapítani a modellek megbízhatóságát? Vannak-e olyan mérőszámok, amelyek segítségével a modellek ebből a szempontból összehasonlíthatók?

Az ökonometriai modellek rendszerezésének, vizsgálatának többféle szempontja képzelhető el. Érdekes lehet például, hogy ugyanarra a nemzetgazdaságra kidolgozott több modell közül melyik a „jobb” olyan értelemben, hogy az illető gazdaság legjellemzőbbnek felismert összefüggéseit melyik modellnek sikerült jobban megragadni. Ilyen típusú vizsgálatra is van lehetőség, mert jó néhány ország van, amelyre több ökonometriai modellt is kidolgoztak már, például az Egyesült Államok, Japán, Görögország. Így az Egyesült Államokra kidolgozott modellek körében ilyen értelmű vizsgálatot végzett M. K. Evans egy tanulmánya [4]. A magyar Központi Statisztikai Hivatal Ökonometriai Laboratóriuma 1966-ban különféle „morfológiai” ismervek alapján húsz ökonometriai modellt vizsgált meg [17]; a modellek „jóságának” összehasonlítására azonban — tudomásunk szerint — mindeddig nem történtek kísérletek.

A „modell jósága” kifejezés értelemszerűen a specifikált összefüggések tartalmára, gazdasági plauzibilitására utal. A modell akkor „jó”, ha egyrészt a vizsgált jelenségek (pl. a népgazdaság meghatározott időszakaszban történt fejlődése) leglényegesebb jellemvonásait tartalmilag helyesen ragadta meg, másrészt ezek kapcsolatának mennyiségi jellemzőit statisztikailag megbízhatóan sikerült becsülnie. A modell lehet jól specifikált, de becslési eredményei lehetnek ugyanakkor rosszak, valamint fordítva. A „modell jósága” sokkal szélesebb fogalom mint a „becslés jósága”. A modellek tartalmi „jóságát” azonban számszerűen összehasonlítani nem tudjuk. Minden összehasonlítást eleve megnehezítene a specifikált összefüggések (egyenletek) modellenként igen különböző száma, típusa, alakja, információtartalma. Meg kell tehát kísérelnünk a *modellek jóságának* és ezek összehasonlítási lehetőségének a vizsgálatát a *becslés jóságának*, tehát azoknak a standard mutatószámoknak az alapján, amelyek a becsléskor kidolgozást nyertek. E mutatószámok alapján alkothatunk ítéletet arról, hogy a modellben specifikált összefüggések statisztikailag alátámaszthatók-e. Meg kell jegyeznünk azonban, hogy ezek a mutató-

\* A cikk a Központi Statisztikai Hivatal Ökonometriai Laboratóriuma „Laboratóriumi Munkaanyagok” c. kiadványsorozata 12. számaként megjelent tanulmány átdolgozott változata.

számok csak a becslés hibáit mutatják ki — amelyek végső soron specifikációs hibákra utalnak, — de nem mutatják a megfigyelés, ill. mérés hibáit.

2. A teszt-eljárásokat, amelyek az ökonometriai modellek becslési jóságát vizsgálják, a szakirodalom „nem-prediktív” és „prediktív” tesztek-ként minősíti [3]. Az előbbieket a modell becslült eredményeinek standard mutatószámok segítségével való vizsgálatát jelentik, az utóbbiak az előrejelzés módszerét alkalmazzák a modell „ellenőrzésére”.

2.1. A nem-prediktív teszt — az ökonometriai modellek többségében — a következő mutatószámok vizsgálatán alapul:

- a) a teljes determinációs együttható;
- b) a becslült paraméterek standard hibája;
- c) a reziduumok autokorrelációs mutatója.

A teljes determinációs együttható ( $R^2$ ) azt mutatja, hogy az egyenlet függő változójának varianciáját milyen mértékben magyarázza meg a független változók varianciája. Ennek a mutatónak többnyire a szabadságfokok szerint kiigazított alakját szokták figyelembe venni:

$$R^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{T - 1}{T - k},$$

ahol  $T$  a megfigyelések,  $k$  az egyenletben szereplő változók száma.

A becslült  $R^2$  értékek vizsgálatára a  $t$ -próba alkalmazható, amelynek alapján meg lehet állapítani, hogy hol van a korrelációs együttható szignifikanciájának az alsó határa [5].

Az egyes változók paramétereinek (a regressziós együtthatóknak) abszolút nagysága önmagában a becslés jóságának mérőszámául nem alkalmas. Azt, hogy a becslés alkalmával a paraméter mind az előjel, mind a nagyságrend szempontjából kielégítően, a várakozásoknak megfelelően alakult-e, a jelenségek kapcsolatára vonatkozó a priori ismeretek, illetve a modell közgazdasági értékelése hivatott eldönteni.

Az a kérdés viszont, hogy a paraméter mikor szignifikáns, csak a paraméterérték és saját standard hibája hányadosának („ $t$ -ratio”) vizsgálata segítségével dönthető el. E hányados szignifikanciája ismét a  $t$ -próba segítségével vizsgálható. Ha a  $t$ -eloszlás-táblázatot nézzük, azt látjuk, hogy 5 százalékos szignifikancia-szinten, ha a szabadságfokok száma 10 és 60 között változik (a vizsgált modellek esetében ugyanis a megfigyelések száma általában ezek között a határok között mozog), a mutató értékének kb. az 1.8–2 intervallumba kell esnie, vagyis a paraméterértéknek a standard hiba közel kétszeresének kell lennie. Általános gyakorlat szerint azonban a paramétert szignifikánsnak tekintik már abban az esetben, ha a paraméterérték nagyobb a standard hiba értékénél (ez mintegy 30 százalékos szignifikancia-szintnek felel meg; más szóval, ilyenkor csak 70 százalékos biztonsággal állíthatjuk, hogy a paraméter a „valódi” paraméter torzítatlan becslése) [3].

A becslés jóságának további feltétele, hogy az egyes egyenletek reziduumainak alakulása véletlenszerű, egymástól független legyen, a reziduumok ne tartalmazzanak autokorrelációt. A modell valamely egyenletén belül akkor áll fenn autokorreláció, ha az

$$E(u_i \cdot u_{i+i}) = 0, \quad i \neq 0$$

feltétel nem teljesül, vagyis a reziduumok egymást követő értékei korrelálnak

egymással. Ennek mérésére általában a Durbin—Watson-féle ún.  $d$ -mutatót használják:

$$d = \frac{\sum_2^T (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_1^T (u_t)^2}$$

ahol  $u_t$  az egyenlet sztochasztikus változójának  $t$  időpontbeli értéke,  $T$  a megfigyelések száma.

A Durbin—Watson-féle  $d$ -mutató helyett az autokorreláció mérésére egyes modellekben a Neumann—Hart-féle mutató használatos. Képlete:

$$\frac{\delta^2}{S^2} = \frac{\sum_{t=2}^T (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T (u_t - \bar{u})^2} \cdot \frac{T}{T-1},$$

ahol  $u_t$  a véletlen változó  $t$  időpontbeli értéke,  $T$  a megfigyelések száma.

A mutatószám az egymást követő reziduumerőtekek egymástól való négyzetes eltérésének és a reziduumok varianciájának számszerű arányát adja meg. Ha  $u_t$ -nek számszerűen magas értékét számszerűen magas értéke követi, ill. alacsony értékét alacsony érték, akkor különbségük kicsiny szám, tehát a tört számlálója, ill. értéke kicsiny számérték lesz (pozitív autokorreláció); magas és alacsony  $u_t$  értékek váltakozása esetén a tört értéke viszonylag magas szám (negatív autokorreláció). Azok a határok, amelyek közé a szignifikáns értékek esnek, a megfelelő táblázatból olvashatók ki [3].

Az említett mutatószámokon kívül a becslési eljárás során olykor még más mutatók is kiszámításra kerülnek (parciális korrelációs együtthatók, részleges determinációs együtthatók stb.), általában azonban a becslési eredményeket az ismert mutatószámok segítségével ellenőrzik. Ez egyben azt is jelenti, hogy a mutatók számszerű értékének összehasonlításával a modellek is összehasonlíthatók a becslés jóságát kifejező „elfogadható” és „nem elfogadható” mutatószámaik százalékaránya segítségével.

2.2. A prediktív teszt vizont az ökonometriai előrejelzés módszerét alkalmazza a modell stabilitásának az ellenőrzésére. Ennek során olyan adatok kerülnek felhasználásra (külső információ), amelyek a modell megfigyelési időszakában eredetileg nem szerepeltek. A teszt alapja az a meggyőződés, hogy a modell jósága (ebben a vonatkozásban: stabilitása) nem dönthető el egyszerűen a fentiekben tárgyalt mutatószámok alapján, hanem ezen túlmenően azt is meg kell vizsgálni, hogy az egyenletrendszer segítségével sikerült-e a modell bázis-időszakán túl is érvényes kapcsolatokat megfogalmazni.

A modellek stabilitásának vizsgálata legegyszerűbben az ún. utólagos előrejelzés (ex-post forecast) segítségével történik, mégpedig akár a szimulán egyenletrendszert alkotó strukturális egyenletek segítségével (egyenletenként), akár az egyenletrendszer redukált alakjával. Az első esetben

$$y_t = \beta X_t + u_t$$

alakú strukturális egyenlet alapján becsülünk előre, ahol minden egyenletben  $y_t$  = az  $y$  függő változó vektora a modell megfigyelési időszakában,

$X_t =$  az  $x_1, x_2, \dots, x_m$  magyarázó változók megfigyelt értékeinek mátrixa,  
 $u_t =$  a sztochasztikus tényező vektora a modell megfigyelési időszakában.

A  $T$  időpont a modell megfigyelési időszakának záróéve. A pontbecslés feladata, hogy a magyarázó változók ( $T + i$ ) időpontbeli (ténylegesen adott vagy feltételezett) értékei alapján „előrejelje” a függő változó ( $T + i$ ) időpontbeli értékét ( $\hat{y}_{T+i}$ ). Tehát az egyes egyenletek magyarázó változói helyében — a strukturális  $\beta$ -paraméterek állandóságát feltételezve — a magyarázó változók  $x_{T+i}$  értékeit helyettesítjük be.

Az  $\hat{y}_{T+i}$  értéknek az  $y_{T+i}$  tényszámmal való összehasonlítása az utólagos előrejelzés hibáját adja meg, ami a modell-struktúra stabilitásának jelzőszámaként tekinthető.

A redukált forma segítségével történő előrejelzés esetén az egyenletrendszer endogén változóinak ( $T + i$ ) időpontbeli értéke a rendszer valamennyi predeterminált változója ( $T + i$ ) időpontbeli (tényleges vagy becsült) értékének függvénye. Az előrejelzés a következő egyenlet alapján történik:

$$y_t = \gamma Z_t + v_t$$

ahol

$Z_t =$  a predeterminált változók mátrixa,

$v_t =$  a sztochasztikus reziduumok vektora.

Ebben az esetben az egyes endogén változók  $y_{T+i}$  értéke a  $Z_{T+i}$  értékek alapján határozandó meg.

Az endogén változók tényleges értékének ( $y_{T+i}$ ) és „előrejelzett” értékének ( $\hat{y}_{T+i}$ ) az egybevetése többféleképpen történhetik. Vizsgálatunkban azt az egyszerű módot választottuk, hogy a becsült adatokat a tényadatok százalékában fejeztük ki.

3. Vizsgálatunk alkalmával a becslés jóságát az ökonometriai modellek egyre növekvő sokaságából mintául választott tizenkét ökonometriai modell segítségével kívántuk felmérni. Ezek kiválasztásakor arra törekedtünk, hogy a mintában olyan modellek szerepeljenek, amelyek „dimenziójukat” tekintve (változók, egyenletek száma) a magyar M-2. ökonometriai modellhez hasonlíthatók (ezért mellőztük itt például a többszáz változót és egyenletet tartalmazó Brookings-modellt). További törekvésünk az volt, hogy nemzetgazdasági (és nem ágazati szintű) modelleket válasszunk ki; ezenkívül arra törekedtünk, hogy a mintában olyan közismert régebbi modellek mellett, mint a Klein—Goldberger-féle amerikai modell vagy az angol Oxford-modell, viszonylag újabb ökonometriai modellek is szerepeljenek.

Vizsgálatunk alapját a következő tizenkét ökonometriai modell képezte:

1. Klein és Goldberger amerikai modellje [12];
2. a Klein—Ball—Hazlewood—Vandome-féle angol (ún. Oxford-) modell [11];
3. T. C. Liu amerikai modellje [16];
4. Friend és Taubman amerikai modellje [6];
5. az Evans-féle amerikai modell [4];
6. a Pavlopoulos-féle görög modell [18];
7. Pawlowski és munkatársai második lengyel modellje [2];

8. Shishido és munkatársai japáni modellje [19];
9. a Gallaway—Smith-féle amerikai modell [7];
10. C. E. V. Leser írországi modellje [15];
11. L. R. Klein hosszútávú japáni növekedési modellje [14];
12. N. Islam pakisztáni modellje [10].

4. A továbbiakban egyenként sorra vesszük az említett modelleket és megvizsgáljuk a nem-prediktív és prediktív tesztek eredményeit.

#### 4.1. Klein és Goldberger Egyesült Államokra kidolgozott modellje [12]

A modell a közép nagyságú modellek közé tartozik: 38 változója és 20 egyenlete van; ebből 15 sztochasztikus összefüggés. A modell, a második világháborús évek kihagyásával, az 1929—1950. évek időszakát öleli fel (18 éves megfigyelés). A becült eredmények között a teljes determinációs együtthatók nem szerepelnek.

A paraméterek standard hibája jóval a paraméterérték alatt marad. Ez alól mindössze két esetben van kivétel. Minthogy a modellnek — a konstans paraméterektől eltekintve — 36 becült paramétere van, az előforduló két eset nem jelentős.

A reziduumok autokorrelációját a Neumann—Hart-féle mutatóval vizsgálták. A szerzők megállapítása szerint három egyenletben mutatkozik erős autokorreláció, ami az egyenletek számát véve figyelembe, az esetek együtödét teszi ki.

A modellel 1951-re és 1952-re végeztek ex-post prognózist. Ennek eredményei az alábbiakban foglalhatók össze:

Endogén változó	1951. évi becslés az 1951. évi	1952. évi becslés az 1952. évi
	tényszámok százalékában	
Fogyasztás	100	103
Nem bérjellegű, nem mezőgazdasági jövedelem	91	101
Értékesítőkenési leírás	86	81
Vállalati megtakarítások	73	40
Beruházások	72	82
Vállalati nyereség	86	96
Magánalkalmazottak bérjövödelme	96	100
Bérből és fizetésből élők száma	99	105
Bérindex	98	103
Import	95	87
Bruttó nemzeti termék	96	100
Nemzeti jövedelem	96	102
Bruttó nemzeti termék árindexe	100	107
Mezőgazdaságban keletkező jövedelem	116	134

A becslés eredményei a fenti tábla számadatai alapján a  $\pm 10$  százalékos hibahatárt ritkán haladták meg.

## 4.2. Az Egyesült Királyságra kidolgozott ún. Oxford-modell [11]

A modell 37 egyenletéből 31 sztochasztikus összefüggés. Az  $\bar{R}^2$  együtthatók a 31 eset közül 22 esetben 0,9 fölötti számértékek, 6 esetben 0,8–0,9 között helyezkednek el; 2 esetben 0,7 fölötti, de 0,8 alatti értékek. A legkevésbé szoros összefüggés az export-egyenlet változói között mutatkozik (0,64). A paraméterek standard hibája kedvezőtlenebb képet mutat. A paraméterértéknél magasabb standard hiba viszonylag elég sok esetben fordul elő. Az egyenletrendszer 162 becsült paraméteréből (figyelmen kívül hagyva ismét a konstans paramétereket) összesen 40 inszignifikáns.

Az autokorrelációt a Neumann–Hart-féle mutatóval vizsgálták. 5 százalékos szignifikancia-szinten az egyenletek nagy részében mélyen a megengedett alsó határ alatt van a mutató értéke, ami erős pozitív autokorrelációra utal. Ez 19 egyenletben, azaz az esetek közel kétharmadában fordul elő. Így a becsült eredmények nem nevezhetők különösebben sikerültnek.

A modellel 1959. év I. és II. negyedévére vonatkozólag végeztek ex-post forecast-ot [9], [13]. A szerzők különbséget tesznek az ún. „pure extrapolation” és a „forecast-extrapolation” fogalma között. Az előzőn értik az endogén változóknak azt az előrejelzett értékét, mely a predeterminált változók *tényszámai* alapján adódik a modelltől; az az utóbbi azt jelenti, hogy a becslés a predeterminált változók valamiképpen *becsült* értékén alapult.

Alábbiakban hasonlítjuk össze a strukturális egyenletrendszerrel végrehajtott 1959. évi „forecast-extrapolation”, valamint a redukált egyenletrendszerrel 1961-ben végzett „pure extrapolation” értékeit az 1959. II. negyedévi tényszámokkal. A vizsgált tíz endogén változó vonatkozásában az eredmények a következők:

Endogén változó	Az 1959. II. n. évre végzett	
	pure extrapolation	forecast-extrapolation
	értékei a tényadatok %-ában	
Ipari termelés	95	94
Import-volumen	94	92
Export-volumen	102	90
Munkanélküliség	115	119
Fogyasztói árindex	102	96
Heti bérlindex	101	94
Átlagos hetibér	100	93
Tartós fogyasztási cikkek forgalma	70	91
Egyéb fogyasztási cikkek forgalma	96	105
Élelmiszerforgalom	94	100

## 4.3. T. C. Liu Egyesült Államokra kidolgozott modellje [16]

A modell 36 egyenlete között 19 sztochasztikus összefüggés van. A modell az 1947–1959. évi időszak negyedéves idősorain alapul (50 megfigyelés).

A többszörös determinációs együtthatók tíz esetben 0,9 fölötti értékek; három esetben 0,8 fölött, de 0,9 alatt helyezkednek el, végül egy esetben az  $R^2$  érték 0,46. Két egyenletre a mutató értékét nem adták meg.



A vizsgált 63 paraméter közül 9 minősíthető inszignifikánsnak, ami viszonylag alacsony szám.

Az autokorrelációt a Durbin—Watson-féle mutatóval vizsgálták. 50 megfigyelést véve figyelembe, 5 százalékos szignifikancia szinten általában véve az autokorrelációs mutatók is igen kedvezően alakultak. A kétfokozatú módszerrel becsült 21 egyenletből (az alternatív változatokat is figyelembe véve) egyetlen esetben mutatható ki pozitív autokorreláció, a nem-mezőgazdasági beruházások egyenletében. (Ha viszont a legkisebb négyzetek klasszikus módszerével becsült eredményeket nézzük, öt esetben mutatkoznék a reziduumokban autokorreláció, tehát a kétfokozatú becslés kedvezőbb eredményeket nyújtott.)

A modellel az 1960. évre, valamint 1961 első három negyedévére vonatkozólag végeztek ex-post forecast-ot; részben az egyes strukturális egyenletekkel, részben az egyenletrendszer redukált alakjával. Az eredmények — a bruttó nemzeti termék-árindex-változójának kivételével — igen jónak mondhatók. Az értékek egyébként az alábbi táblázatban láthatók:

Endogén változók	1961. év II. negyedévi	1961. év III. negyedévi
	előrejelzett érték a tényleges érték %-ában	
Bruttó nemzeti termék	99	99
Termelő beruházások	98	99
Üzemi berendezések	109	107
Lakóházépítkezés	97	99
Szolgáltatások	100	100
Nem tartós fogyasztási cikkek forgalma	101	100
Tartós fogyasztási cikkek forgalma	101	102
Forgóeszközök értéke (mezőgazdaság nélkül)	100	91
A bruttó nemzeti termék árindexe	194	31

#### 4.4. Friend és Taubman Egyesült Államokra szerkesztett modellje [6]

A modell — szerzőinek gondolatmenete szerint — azt kívánta bizonyítani, hogy a nemzeti jövedelem és komponenseinek rövidtávú előrejelzésére néhány egyenletből álló kis modellek is alkalmasak. A szerzők a modellt félévenként megfigyelt adatokra építették, melyekben a negyedéves szezonális hullámzás már kiegyenlítődik.

A modell az 1953—1960. éves periódus féléves adatain, 16 megfigyelésen épült, az idősort a megfigyelések első differenciái alkotják. A kis modell csupán 4 sztochasztikus összefüggést tartalmaz.

A szabadságfokok szerint kiigazított teljes determinációs együtthatók közül ket tőnek az értéke 0,8 felett van; kettőnek az értéke a 0,7—0,8 intervallumba esett. Kedvezők a paraméterek standard hibaszámítási eredményei is: a tíz becsült paraméter közül egynek a standard hibája a paraméterértékkel egyezik, a többié ennél kisebb. A reziduumok autokorrelációjára vonatkozólag nem közöltek adatokat.

Ex-post forecast-ot a modellel 1961-re és 1962-re végeztek; ezzel a változók féléves növekedését vagy csökkenését jelezték. Az 1961. II. félévi és az 1962. I—II. félévi eredmények például a következő képet nyújtják:

Endogén változó	Előrejelzett értékek a tényadat %-ában		
	1961. II.	1962. I.	1962. II.
Nemzeti jövedelem	109	120	74
Fogyasztás	149	120	79
Nem-mezőgazdasági beruházások	83	71	82
Lakásépítés	77	.	23
Nem-mezőgazdasági forgóeszközök	100	171	82
Kormányzati kiadások	100	100	100

#### 4.5. Az Evans-féle, Egyesült Államokra szerkesztett modell [4]

Evans az 1948—1962. évi időszak negyedéves adataira építette modelljét, mely 29 sztochasztikus összefüggést tartalmaz. A szabadságfok szerint kiigazított teljes determinációs együtthatók ebből 13 esetben 0,9 fölötti értékek, 5 esetben 0,8—0,9 intervallumban, 2 esetben 0,7—0,8 intervallumban, további 8 esetben 0,6—0,7 intervallumban helyezkednek el. Egy esetben 0,55 az együttható értéke.

A modell 84 becsült paramétere közül csak egy inszignifikáns. Ezt az átlagon felüli jó eredményt a reziduumban mutatkozó erős autokorreláció rontja le. A 29 Durbin—Watson-koefficiens közül csak tíz oly akad, amely kétségtelen autokorrelációmentességre enged következtetni; az esetek kétharmadában igen erős pozitív autokorreláció, egyetlen esetben negatív autokorreláció mutatkozik.

A modell 1964-ben utólagos előrejelzések tárgya volt ugyan, de ennek eredményét a tanulmány nem közli.

#### 4.6. Pavlopoulos Görögországra konstruált modellje [18]

A görög nemzetgazdaságra többen dolgoztak már ki modellt; így D. S. Suits [20], valamint Adelman és Chenery [1]. Pavlopoulos modelljének megfigyelési időszaka az 1949—1959. évi periódus (11 éves megfigyelés).

A szabadságfokok szerint korrigált többszörös determinációs együtthatók a 12 sztochasztikus egyenlet közül 11 esetben 0,9 fölötti értékek; egy esetben 0,8—0,9 intervallumban helyezkedik el.

A modell struktúráját 30 becsült paraméter alkotja. Az eredmények ebben a vonatkozásban is rendkívül kedvezőek: csak egy egyenletben találunk inszignifikáns paramétert. A Neumann—Hart-féle mutatóval végzett vizsgálat sem pozitív, sem negatív autokorrelációt nem mutatott ki.

Utólagos előrejelzés a vizsgálati időszakot követő két évre: 1960-ra és 1961-re történt a modellel, éspedig a modellnek mind strukturális, mind redukált formájával.

A redukált egyenletrendszer nyolc endogén változójának 1960. és 1961. évi tényleges és jelzett értékeit az alábbi táblázat hasonlítja össze:

Endogén változó	Becsült értékek az 1960. évi tényleges érték %-ában	Becsült értékek az 1961. évi tényleges érték %-ában
Fogyasztás	99	101
Mezőgazdaságban keletkező jövedelem	100	100
Mezőgazdasági termékek külföldi fogyasztása	102	107
Bruttó mezőgazdasági termékek árindexe	99	106
Fogyasztói árindex	99	102
Import	99	94
Bruttó nemzeti termék (mezőgazd. kivételével)	98	101
Nemzeti jövedelem	99	100

Az utólagos előrejelzés a táblázat adatai alapján feltétlenül sikeresnek mondható.

#### 4.7. A Barczak—Ciepielewska—Jakubczyk—Pawlowski-féle második lengyel modell [2]

A modell — egy 1964-ben publikált korábbi kísérleti modell folytatásaképpen — az 1950—1964. évi időszak éves megfigyelésein alapul. A 12 sztochasztikus egyenletből az  $R^2$  0,9 fölötti érték hét egyenletben; egy egyenletben 0,8—0,9 között, egy egyenletben 0,7—0,8 között, valamint két egyenletben 0,6—0,7 között van a teljes determinációs együttható értéke. Mindössze egy egyenletben nem sikerült kapcsolati szorosságot kimutatni a változók között ( $R^2 = 0,27$ ).

A 26 becsült paraméter közül mindössze kettő inszignifikáns; két esetben a hiba ugyanakkora mint a paraméter. A modell az autokorreláció vizsgálatát nem a megszokott módon végzi: ún. elsőrendű autokorrelációs együtthatókat (współczynniki autokorelacji) számít; ez a reziduum-idősor és az egy évvel késleltetett reziduum-idősor korrelációját mutatja. Három egyenlet esetében mutatkozik szignifikáns autokorreláció.

A modell az előrejelzés kérdését is a szokott módszertől némileg eltérően kezeli, minthogy az előrejelzést lényegében az endogén változók trendjének extrapolációjával hajtja végre. Először meghatározzák az egyes endogén változók trendfüggvényeit; vizsgálatuk szerint a legtöbb változó trendje exponenciális. A trendeket az 1965—1968. évi időszakra extrapolálták; ez a művelet az 1965. és 1966. év vonatkozásában ex-post prognózis, minthogy ezekre az évekre vonatkozólag a tényszámok már rendelkezésre álltak, s így az összehasonlítási lehetősége megvolt. Magával a „kauzális modellel” a szokott módon ex-post előrejelzést a szerzők nem végeztek; e helyett viszont a kauzális modell és az általuk „fejlődési tendenciák modelljének” nevezett trend-modell „pontosságát” hasonlították össze. Az összehasonlítás céljára a  $\varphi^2$  értékeket ( $\varphi^2 = 1 - R^2$ ), valamint a „véletlen változás együtthatóit” (az ún.  $c$ -együtthatókat: a reziduumok standard eltéréseinek és a függő változó átlagértékének hányadosai) használták fel; tehát a  $\varphi^2$  és a  $c$  együtthatókat mindkét „modellre”,

tizenkét endogén változóra nézve kiszámították, amikor is az értékek egyezése volt hivatva eldönteni a trend-extrapoláció pontosságát.

Az eredmények azt mutatták, hogy mind a  $\varphi^2$  értékek, mind a  $c$ -együtthatók alacsonyabbak a kauzális modellben, mint a trend-modell esetében (az esetek kétharmadában), ami azt jelenti, hogy a kauzális modell a fejlődést pontosabban írja le, mint a trend-modell.

Az 1965–1966. évi extrapolált trendértékek és tényszámok egyes változók esetében (beruházás, nemzeti jövedelem, reálbér) erősen eltérnek; olykor a  $\pm 5$ , sőt  $\pm 10$  százalékos hibahatárt is meghaladják.

#### 4.8. A Shishido—Kohno—Nagaya—Tanaka-féle japán modell [19]

A modell idősorai 48 megfigyelésre (az 1954–1965. évi időszak negyedéves adatai) épültek; 53 egyenlete közül a sztochasztikus összefüggések száma 23.

Csak 11 egyenletre nézve közlik a teljes determinációs együtthatók értékét. Kilenc esetben 0,9 fölötti, egy-egy esetben a 0,8–0,9 intervallumban, illetve a 0,7–0,8 intervallumban elhelyezkedő értéket találtak.

83 becsült paraméter alkotja az egyenletrendszer struktúráját. A 83 esetből csak két esetben (két egyenletben) fordul elő inszignifikáns paraméter.

A Durbin—Watson-koefficiensek a reziduumok autokorrelációját mutatják. 5 százalékos szignifikancia-szinten az esetek kétharmadrészében erős autokorreláció fordul elő.

Ex-post prognózist a minta-időszakon túlmenően két évre végeztek a modellel. A közölt számananyag alapján a becsült értékek és a tényszámok százalékos eltérése nem állapítható pontosan meg, de úgy tűnik, hogy az eltérések az 5 százalékos hibahatárt nem lépték túl.

#### 4.9. Gallaway és Smith Egyesült Államokra kidolgozott modellje [7]

A modellnek mindössze három sztochasztikus egyenlete van; az 1948–1957. évi időhorizontot átfogó idősor 40 megfigyelést ölel fel. Az idősort a szezonális hatástól megtisztított adatok első differenciái alkotják.

A teljes determinációs együtthatók ( $R^2$ ) viszonylag alacsony számértékek; a megfigyelések számát véve azonban figyelembe, csak egy van az 5%-os szignifikanciaszint alatt.

A modellnek mindössze 5 becsült paramétere van. A standard hiba nagysága minden esetben a paraméterérték alatt marad.

Az autokorreláció mérésére a Durbin—Watson-féle mutatót használták fel. Az együtthatókat nem közlik; megállapításuk szerint azonban a három egyenletből két esetben a reziduumok autokorreláció-mentessége állapítható meg, míg egy esetben a teszt nem ad megbízható választ.

A modellel 1958. négy évnegyedére vonatkozólag végeztek ex-post forecast-ot. Az „előrejelzett” értékeket a tényszámok százalékában tüntetve fel, 1958. négy negyedévére vonatkozólag a nemzeti jövedelem változója — három komponens változó összegeként — a következő képet mutatja:

1958. I. negyedév:	102%
1958. II. negyedév:	98%
1958. III. negyedév:	100%
1958. IV. negyedév:	100%

Az eredmények igen kedvezők. A modell azonban nagyfokú aggregáltsága folytán, inkább csak sikeres módszertani kísérletnek tekinthető annak illusztrálására, hogy a nemzeti jövedelem komponenseinek egyes predeterminált változók korábbi értékei alapján történő előrejelzése a nemzeti jövedelem előrejelzésére sikeresen használható. A sikeres előrebecslést némileg bizonytalanná teszi, hogy az  $R^2$  értékek a becslés során igen alacsonynak mutatkoztak (0,23, 0,40 és 0,42). Ehhez képest az előrejelzés és a tényszámok nagyfokú egyezése valóban meglepő, de nem meggyszó.

#### 4.10. Leser írországi modellje [15]

A 15 éves megfigyelésen alapuló modell (1948/49-től 1963/63-ig) hat sztochasztikus összefüggést tartalmaz. A teljes determinációs együtthatók a hat egyenlet közül kettőben 0,7 fölötti számértékek; két esetben 0,6–0,7 között, két további egyenlet esetében 0,4–0,5 intervallumban foglalnak helyet. 5 százalékos szignifikancia-szinten ez a két mutató nem szignifikáns.

Tizenegy becslőt paraméter közül 2 paraméter standard hibája haladja meg a paraméter értékét. Autokorreláció-vizsgálatról viszont a modellben nem történik említés.

A modellel az 1963/64 pénzügyi évre végeztek ex-post forecast-ot a következő eredménnyel:

Endogén változó	Becsült eredmények a tényszámok %-ában
Lakosság fogyasztása	92
Közületi fogyasztás	84
Bruttó állótőkeberuházás	95
Export	122
Import	97
Bruttó nemzeti termék	101

A közületi fogyasztás és az export kivételével a változók értéke a  $\pm 10$  százalékos hibahatárt nem haladja meg.

#### 4.11. Klein hosszútávú japán növekedési modellje [14]

L. R. Klein modellje az 1878–1937-ig terjedő periódus öt éves időszakokra számított adatai alapján becsülte meg Japán gazdasági növekedésének jellemzőit. Tíz egyenlete közül nyolc sztochasztikus összefüggés; változóinak száma 16. A modell becsült eredményei igen jók. A 8 teljes determinációs együttható közül ötnek az értéke 0,9 fölött van; kettőé a 0,7–0,9 intervallumba esik, míg egy esetben 0,65.

Hasonlóképpen kedvezően alakultak a  $t$ -hányadosok is; mind a kilenc paraméter szignifikáns. Autokorreláció-vizsgálatok eredményét a cikk nem közli.

Ex-post forecast-ot végeztek az 1953–57. évi öt éves időszakra, amikor Japán már kiheverte a második világháború okozta gazdasági megrázkódtatásokat. Az „utólagos előrejelzés” attól függően adott igen különböző eredménye-

ket, hogy a predeterminált változók értékének meghatározásakor a világháborús éveket beszámítják-e vagy nem. Az utóbbi változat esetén az *ex-post* forecast eredményei kedvezőbbek és a következő képet mutatják:

Endogén változók	Becsült értékek az 1953—57. évi ténytűszámok %-ában
Őstermelő ágazatok nettó termelése	109
Egyéb ágazatok nettó termelése	123
Nettó termelés összesen	120
Munkaerő az őstermelő ágazatokban	113
Munkaerő az egyéb ágazatokban	88
Összes munkaerő	100
Élelmiszer-import	115
Népesség szaporodása	100

Az eredmények tanúsága szerint a modell a fejlődés ütemét (egy változó kivételével) túlbecsülte. Ugyancsak egy eset kivételével a becült értékek és tényszámok eltérése a  $\pm 20$  százalékos hibahatáron belül van.

#### 4.12. N. *Islam pakisztáni modellje* [10]

A modellt az 1951/52—1959/1960. évi időszakra dolgozták ki. Tipikus példája egy fejlődő országra kidolgozott modellnek. Megbízhatóságát erősen befolyásolják adatbázisának fogyatékoságai. Idősorai csak 11 évet ölelnek fel; ez a becslési eredményeken is meglátszik. Bár a modell 50 egyenlet segítségével identifikált, ebből csak 20 a sztochasztikus összefüggések száma; változóinak száma 62.

A hús  $R^2$  érték közül három 0,9 fölött van; a 0,7—0,9 intervallumba esik ugyancsak három, a 0,5—0,7 intervallumba öt. Három további együttható a 0,3—0,5 között, hat másik együttható pedig 0,3 érték alatt helyezkedik el. Az utóbbi két esetben az együtthatók inszignifikánsak.

A paraméterek standard hibája 24 paraméterérték alapján vizsgálható. Inszignifikáns ezek között mindössze négy.

Autokorreláció-vizsgálat és utólagos előrejelzés a modellel nem történt.

5. Az alábbiakban táblázatba foglaltuk a nem-prediktív tesztek eredményét.

5.1. Az I. sz. táblázat a teljes determinációs együtthatók alakulását mutatja abban a tíz egyenletben, amelyben a tizenkét kiválasztott modell közül ez értelemszerűen vizsgálható volt.

A vizsgált 142 teljes determinációs együttható közül mindössze 13 minősült inszignifikánsnak, ami az eseteknek 9 százalékát teszi ki. (Ha a mintából az Islam-féle pakisztáni modellt elhagynánk, az inszignifikáns paraméterek mindössze 3,3 százalékot tennének ki). Az esetek 50 százalékában 0,9 fölötti érték mutatkozott, ami a változók igen szoros kapcsolatára utal; 0,7—0,9 intervallumban elhelyezkedő érték az esetek 75 százalékában, míg 0,5—0,9 közötti az esetek 89 százalékában fordult elő.

I. sz. tábla  
Az  $R^2$  értékek (\*-gal jelölt; inszignifikáns)

Modell megnevezése	Összes becsült $R^2$ értékek		0,90 fölötti értékek		0,70—0,89 közötti értékek		0,50—0,69 közötti értékek		0,30—0,49 közötti értékek		0,30 alatti értékek	
	szám	%	szám	%	szám	%	szám	%	szám	%	szám	%
1. Klein— Goldberger	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2. Klein—Ball— Hazlewood— Vandome	31	100	22	71	8	26	1	3	—	—	—	—
3. T. C. Liu	17	100	10	59	6	35	—	—	1	6	—	—
4. Friend— Taubman	4	100	—	—	4	100	—	—	—	—	—	—
5. Evans	29	100	13	45	7	24	9	31	—	—	—	—
6. Pavlopoulos	12	100	11	92	1	8	—	—	—	—	—	—
7. Pawlowski	12	100	7	58	2	17	2	17	—	—	1*	8
8. Shishido	.	.	.	.	.	.	.	.	—	—	.	.
9. Gallaway— Smith	3	100	—	—	—	—	—	—	2	67	1*	33
10. Leser	6	100	—	—	2	33	2	33	2*	33	—	—
11. Klein, japáni modell	8	100	5	63	2	25	1	12	—	—	—	—
12. Islam	20	100	3	15	3	15	5	25	3*	15	6*	30
Összesen	142	100	71	50	35	25	20	14	8	5,5	8	5,5

5.2. A  $t$ -hányadosok (a paraméterek és standard hibáik hányadosai) értékét a II. sz. táblázat tünteti fel.

II. sz. tábla  
A paraméterek és standard hibáik hányadosai ( $t$ -hányadosok)

Modell megnevezése	1 alatti értékek		1—2 intervallumban elhelyezkedő értékek		2—3 intervallumban elhelyezkedő értékek		3 fölötti értékek		Összes paraméter	
	száma	%	száma	%	száma	%	száma	%	száma	%
1. Klein— Goldberger	2	6	12	33	6	17	16	44	36	100
2. Klein—Ball— Hazlewood— Vandome	40	25	30	19	20	12	72	44	162	100
3. T. C. Liu	9	14	17	27	9	14	28	45	63	100
4. Friend— Taubman	—	—	1	10	2	20	7	70	10	100
5. Evans	1	1	2	2	16	19	65	78	84	100
6. Pavlopoulos	1	3	8	27	5	17	16	53	30	100
7. Pawlowski	2	8	5	19	4	15	15	58	26	100
8. Shishido	2	2	14	17	10	12	57	69	83	100
9. Gallaway— Smith	—	—	1	20	2	40	2	40	5	100
10. Leser	2	18	2	18	2	18	5	46	11	100
11. Klein, japáni modell	—	—	1	11	1	11	7	78	9	100
12. Islam	4	17	6	25	4	17	10	41	24	100
Összesen	63	12	99	18	81	15	300	55	543	100

A tizenkét kiválasztott modellnek összesen 543 paramétere került vizsgálat alá. Inszignifikáns volt ezeknek mintegy 1/8 része (12 százalék). Ha a paramétert csak akkor tekintjük szignifikánsnak, ha értéke a standard hibának több mint kétszerese (vagyis a  $t$ -hányados értéke 2 feletti szám), akkor az inszignifikáns paraméterek száma 30 százalék, vagyis a paraméterek közel egyharmadrésze.

5.3. Az autokorrelációs mutatók eredményeit a III. sz. táblázat mutatja. A vizsgált tizenkét modell közül csak nyolc modell esetében közöltek autokorrelációs mutatókat, úgyhogy vizsgálatunk bázisát mindössze 146 autokorrelációs mutató szolgáltatta. Ha ebből a szempontból nézzük a modelleket, egyes modellekben meglepően magas százalékarányt juttatnak kifejezésre az autokorrelációt mutató egyenletek (olykor 60–70 százalék); sokszor éppen ott, ahol a  $t$ -hányadosok igen kedvezően alakultak (példa erre az Evans-féle modell és a Shishido-féle modell) [4], [19].

III. sz. tábla<sup>1</sup>

Autokorreláció a modellekben

Modell megnevezése	Az autokorrelációs mutatók száma	Emek alapján megállapítható			Az egyenletek hány %-ában fordul elő
		pozitív	negatív	összes	
		autokorreláció			
1. Klein – Goldberger	15	3	—	3	20
2. Klein – Ball (Oxford)	31	19	—	19	61
3. T. C. Liu	21	1	—	1	5
4. Friend – Taubman	.	.	.	.	.
5. Evans	29	18	1	19	66
6. Pavlopoulos	12	—	—	—	—
7. Pawlowski	12	3	—	3	25
8. Shishido	23	15	1	16	70
9. Gallaway – Smith	3	—	—	—	—
10. Leser	.	.	.	.	.
11. Klein (Japán)	.	.	.	.	.
12. Islam	.	.	.	.	.
Összesen	146	59	2	61	42

Az egyes modellekkel végzett ex-post forecast eredményeit nem látszott célszerűnek táblázatban összefoglalni. A részleges eredmények azt mutatják, hogy a tényleges és „előrejelzett” érték a változók többségében a  $\pm 10$  százalékos hibahatáron belül van. Gyakoriak azonban az ennél nagyobb eltérések is, főleg olyan változók esetében, amelyeknek alakulását természeti vagy konjunkturális, illetve világgazdasági hatások befolyásolják.

6. A fenti mutatószámok alapján sem könnyű végérvényes következtetéseket levonni a modellek becslési jósága tekintetében. A kedvezőtlen becslési eredményekben általában a specifikáció hibái jutnak kifejezésre; egyik esetben a paraméterek inszignifikanciájában, másik esetben autokorrelációban. Így fordulhat elő, hogy egy-egy egyenlet valamelyik mutató vonatkozásában kedvező, egy másik mutató tekintetében ugyanakkor kedvezőtlen képet mutat.



A becslült mutatószámok közül a teljes determinációs együtthatók és a  $t$ -hányadosok kedvezően alakultak, magas azonban az autokorrelált reziduuumokat feltüntetető egyenletek számaránya. Valószínű azonban, hogy a választott kis minta alapján ez a kérdés nem dönthető el teljes érvénnyel; annál inkább, mert feltételezhető, hogy az első differenciákon alapuló legkisebb négyzetek módszerével becslült, előrejelzés céljára konstruált modellek (Gallaway—Smith és Leser modelljei) nem tartalmaznak autokorrelációt. Az autokorrelált reziduuumokat tartalmazó egyenletek számaránya azonban még ebben az esetben is közel 40 százalékot tenne. A jövőre nézve az volna a helyes, ha a paraméterbecslési eljárás megválasztásakor fokozott szerephez jutnának az autokorrelációt figyelembe vevő becslési módszerek (így az első differenciákon alapuló legkisebb négyzetek és az általánosított legkisebb négyzetek módszerei). Vizsgálatunk szempontjából pedig a kiválasztott minta növelése és újabb modelleknek a vizsgálat körébe való bevonása látszik szükségesnek ahhoz, hogy általánosabb érvényű ítéletet mondhassunk a modellek becslési jósága tekintetében. Ismételten hangsúlyozzuk azonban, hogy a modell jóságának a becslés jósága csupán egyik attribútuma, és a modell információtartalmának is hozzá kell járulnia ahhoz, hogy a modell valóban jó modell legyen.

(Beérkezett: 1971. május 27.)

#### IRODALOM

1. ADELMAN, I.—CHENERY, H. B.: Foreign aid and economic development: the case of Greece. *The Review of Economics and Statistics*, 1966. február. 1—19. o.
2. BARCZAK, A.—CIEPIELEWSKA, B.—JAKUBCZYK, T.—PAWLOWSKI, Z.: Model ekonometryczny gospodarki Polski ludowej. Warszawa, 1968. Państwowe Wydawnictwo Naukowe.
3. CHRIST, C. F.: *Econometric models and methods*. New York, 1967. John Wiley and Sons.
4. EVANS, M. K.: Multiplier analysis of a post-war quarterly U. S. model and a comparison with several other models. *The Review of Economic Studies*, 1966. október. 337—359. o.
5. FISHER, R. A.: *Statistical Method for Research Workers*. London, 1954.
6. FRIEND, I.—TAUBMAN, P.: A short-term forecasting model. *The Review of Economics and Statistics*, 1964. augusztus. 229—236. o.
7. GALLAWAY, L. E.—SMITH, P. E.: A quarterly econometric model of the United States. *Journal of the American Statistical Association*, 1961. június. 379—383. o.
8. HALABUK L.—HULYÁK K.—NYÁRY Zs.—VITHALM Z.: Az M-2. modell: becslés és struktúra. *Laboratóriumi Munkanyagok*, 10. sz. Budapest, 1970. KSH.
9. HAZLEWOOD, A.—VANDOME, P.: A post-mortem on economic forecasts for 1959. *Bulletin of the Oxford University Institute of Statistics*, 1961. 1. sz. 67—81. o.
10. ISLAM, N.: A short-term model for Pakistan economy. *Pakistan Branch of Oxford University Press*. Lahore, 1965.
11. KLEIN, L. R.—BALL, R. J.—HAZLEWOOD, A.—VANDOME, P.: *An econometric model of the United Kingdom*. Oxford, 1961. Basil Blackwell.
12. KLEIN, L. R.—GOLDBERGER, A. S.: *An econometric model of the United States 1929—1952*. Amsterdam—London, 1955. North Holland Publishing Co.
13. KLEIN, L. R.—HAZLEWOOD, A.—VANDOME, P.: Re-estimation of the econometric model of the U. K. and forecasts for 1961. *Bulletin of the Oxford University Institute of Statistics*, 1961. 1. sz. 49—66. o.
14. KLEIN, L. R.: A model of Japanese economic growth, 1878—1937. *Econometrica*, 1961. 3. sz.
15. LESER, C. E. V.: The role of macro-economic models in economic forecasting. *Econometrica*, 1966. 4. sz. 862—872. o.

16. LIU, T. C.: An exploratory quarterly econometric model of effective demand in the postwar economy. *Econometrica*, 1963. 3. sz. 301—348, p.
17. NYÁRY ZS.—KOTÁSZ GY.-NÉ: Sztochasztikus makromodellek néhány jellemző tulajdonsága. *Laboratóriumi Munkaanyagok*. 1. sz. Budapest, 1966. KSH.
18. PAVLOPOULOS, P.: A statistical model for the Greek economy 1949—1959. Amsterdam, 1966. North Holland Publ. Co.
19. SHISHIDO, S.—KOHNO, A.—NAGAYA, S.—TANAKA, S.: Use of national accounts for a short-term econometric model: 1954—1966. *The Review of Income and Wealth*. 1968. 3. sz. 277—309. p.
20. SUITS, D. B. An econometric model of the Greek economy. Center of Economic Research, Athens, 1964.
21. THEIL, H.: Applied economic forecasting. Amsterdam, 1966. North Holland Publishing Co.

### ESTIMATION AND FORECASTING: COMPARISON OF SOME ECONOMETRIC MODELS

Seeing the numerical increase of econometric models we can raise the question of the reliability of the models with a special actuality. When is an econometric model „good”? The „goodness” of the model means first of all that the model has defined the most prominent economic relationships adequately. This, however, cannot be numerically measured; we must rest satisfied with the examination of the significance of the model's estimated indices relying on standard tests.

The test-processes examining the „estimation reliability” of the model are so-called predictive and non-predictive tests. The examination of the squared multiple correlation coefficient ( $R^2$ ), the standard error of parameters and the auto-correlation of the residuals can be included in the former. The later examines the stability of the model over the basic period applying the method of econometric forecasting. On the basis of the results of test-processes a comparison of models can also be attempted.

Further on twelve, mostly medium sized econometric models will be examined and compared, according to the indices just mentioned. We have also summarized the results of non-predictive tests in tables. Table I shows the value of the squared multiple correlation coefficient ( $R^2$ ), Table II shows the significance of parameters (by means of the quotients of the parameters and their standard error, the so-called  $t$ -quotient) and Table III examines the auto-correlation of residuals.

The results of the ex-post forecast, performed by the models are discussed in detail. The „forecasted” value and the actual number has been compared by expressing the forecasted value as a percentage of the actual number for each variable.

The results of this comparison enable us to draw the following conclusions:

1) The estimated indices lie within permissible error in the majority of cases. It occurs, however, that the „estimation reliability” of the model shows favourable for one index, and unfavourable for another.

2) In the case of the examined models 9 per cent of the squared multiple correlation coefficients ( $R^2$ ), but 12 per cent of the parameters have been insignificant. Auto-correlation could be pointed out in 42 per cent of the cases.

3) The results of the predictive test show that with the majority of variables the difference between the actual and forecasted value is within  $\pm 10$  per cent error. Greater differences often occur, too, mostly in the case of variables being influenced by natural or business cycle effects.

### ОЦЕНКА И ПРОГНОЗ: СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

С ростом числа эконометрических моделей все острее возникает вопрос надежности этих моделей. Когда является эконометрическая модель «хорошей»? То, что данная модель «хорошая», в первую очередь означает, что она хорошо оформляет наиболее важные соотношения народного хозяйства. Однако это не сможет измерять численно, значит, мы должны удовлетворяться анализом значимости — на основе стандартных тестов — показателей модели.

Тест-методы — которые проверяют «правильные оценки» моделей — являются так называемыми непредиктивными тестами. К первым относится изучение коэффициента полной детерминации, стандартной ошибки параметров и автокорреляции резидуумов. А последняя — используя метод эконометрической оценки — изучает стабильность модели после базисного периода. По результатам тест-методов можно пытаться сравнивать разные модели. В дальнейшем — по перечисленным показателям — анализируются и сравниваются двенадцать эконометрических моделей, в основном средней величины. Результаты непредиктивных тестов мы собрали в форме таблицы. Таблица I показывает значения коэффициентов полной детерминации, таблица II содержит показатели значимости параметров (с помощью частных значений параметров и их стандартных ошибок, так называемых  $t$ -частных), а таблица III изучает автокорреляции резидуумов.

Подробно излагаются результаты «последующей оценки» (ex-post forecast), проведенной с помощью различных моделей. Сравнение «прогнозированного» значения и фактического данного произвели таким образом, что для каждой переменной прогнозированной значение выражали в процентах от фактического данного.

На основе произведенных анализов можно пытаться сделать следующие выводы:

1. Оцененные показатели в большинстве случаев находятся в рамках допустимой погрешности. Все-таки бывало, что «правильность оценки» данной модели по одной из показателей казалась хорошей, а по второй нехорошей.

2. В числе анализированных моделей 9% коэффициентов полной детерминации было незначимым 12%, оцененных параметров. Автокорреляция оказалась в 42% случаев.

3. Результаты предиктивного теста показывают, что для большинства перспективных оцененное и фактическое значения внутри  $\pm 10$  процентного предела погрешности. Однако бывают расхождения и больше этого, в основном в случае таких переменных, которые изменяются под влиянием природных или конъюнктурных факторов.

LJUBOMIR MARTIĆ

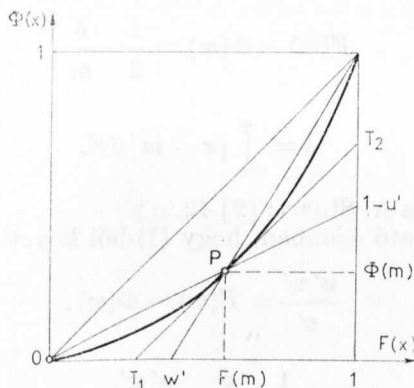
## Geometriai megjegyzések az új jövedelem-egyenlőtlenségi mutatókhoz\*

Éltető Ödön és Frigyes Ervin a Frigyes-féle  $u$ ,  $v$  és  $w$  egyenlőtlenségi mutatók egyszerű geometriai interpretációját adja. Dolgozatunkkal kapcsolatban itt az  $u'$ ,  $v'$  és  $w'$  standardizált mutatókat kívánjunk interpretálni. Ezenkívül ebben a jegyzetben bebizonyítunk egy, e mutatók és a relatív középceltérés közötti összefüggést, és ennek is geometriai interpretációját adjuk.

Folytonos elosztás esetén a standardizált mutatók a következőképpen fejezhetők ki:

$$(1) \quad u' = \frac{F(m) - \Phi(m)}{F(m)}, \quad w' = \frac{F(m) - \Phi(m)}{1 - \Phi(m)}, \quad v' = \frac{F(m) - \Phi(m)}{F(m)[1 - \Phi(m)]},$$

ahol:  $m$  az átlagos jövedelmet,  $F(x)$  és  $\Phi(x)$  az eloszlásfüggvényt, ill. az első momentum-eloszlásfüggvényt jelöli,  $F(m)$  és  $\Phi(m)$  pedig a koncentrációs görbe azon pontjának koordinátái, amely a  $\Phi(x) = F(x)$  egyenestől maximális távolságban helyezkedik el (1. ábra).



1. ábra

Ahhoz, hogy bemutassuk e mutatók geometriai jelentését, egyeneseket kell húzni a  $P[F(m), \Phi(m)]$  ponton keresztül  $(0, 0)$ -tól és  $(1, 1)$ -től. E két egyenes

\* A megjegyzések alapjául szolgáló cikk eredetileg magyar nyelven jelent meg, lásd [1A]. A megjegyzések maguk először az *Econometrica* 1970. évi novemberi számában (36. évf., 6. sz., 936–937. o.) jelentek meg. (Szerk.)

közül az első az  $F(x) = 1$  egyenest  $(1, 1 - u')$  pontban metszi. Ebből következik, hogy  $u'$  az  $(1, 1 - u')$ ,  $(1, 1)$  szakasz hossza. Könnyű azonban belátni, hogy  $u'$  a  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  és  $(1, 1 - u')$  csúcsokkal meghatározott háromszög területének kétszeresét is képviseli.

A  $P$ -n és  $(1, 1)$ -en átmenő egyenes az  $F(x)$  tengelyt a  $w'$  pontban metszi. Könnyen kimutatható, hogy  $w'$  az  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$  és  $(w', 0)$  csúcsokkal meghatározott háromszög területének kétszeresét is képviseli. Már csak  $v'$ -nek, a harmadik standardizált mutatónak a geometriai jelentését kell megtalálni. Ehhez csak egy egyenest kell meghúzni,

$$(2) \quad \Phi = \frac{w}{u} (F - w')$$

amely összeköti a  $(w', 0)$  és az  $(1, 1 - u')$  pontokat. A  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, 1 - u')$  és  $(w', 0)$  csúcsokkal meghatározott négyszög kétszeres területe egyenlő  $v'$ -vel, hiszen

$$2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - w') (1 - u') \right] = u' + w' - u'w',$$

és Éltető Ödön és Frigyes Ervin szerint [1A, 18. o.]  $u' + w' - u'w' = v'$ .

Éltető Ödön és Frigyes Ervin cikkében [1A, 19. o.] az  $u'$  standardizált egyenlőtlenségi mutató az R. R. Schutz-féle  $F(m) - \Phi(m)$  koefficienshez (lásd [4]) a következőképpen kapcsolódik:

$$(3) \quad F(m) - \Phi(m) = F(m)u'.$$

G. Rosenbluth [3] bebizonyította, hogy a Schutz-koefficiens nem más, mint a relatív középeltérés:

$$(4) \quad F(m) - \Phi(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{m},$$

ahol

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} |x - m| dF.$$

(lásd pl. M. Kendall és A. Stuart: [2] 42. o.)

Könnyen kimutatható azonban, hogy (1)-ből következik

$$(5) \quad \frac{u'w'}{v'} = F(m) - \Phi(m).$$

(5)-ből és (4)-ből

$$(6) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{m} = \frac{u'w'}{v'}.$$

Így megkaptuk az összefüggést a relatív középeltérés — egy jól ismert egyenlőtlenségi mutató — és az új standardizált jövedelem-egyenlőtlenségi mutatók között.

Könnyen kimutatható, hogy a  $T_1$  pont abszcisszáját (6) megadja. Ez következik a  $P$  pont definíciójából és a (4) és (6) relációkból. Továbbá kimutatható, hogy (6) a  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $P$  háromszög kétszeres területét képviseli. Ennek a háromszögnek ugyanis ugyanakkora a területe, mint a  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $T_1$  három-

szögnek. Ebből következik, hogy (6), akár csak a Gini-féle koefficiens, a Lorenz-görbe segítségével értelmezhető.

$$(7) \quad \Phi = \begin{cases} \frac{F}{u}, & 0 \leq F \leq F(m), \\ 1 + w(F - 1), & F(m) \leq F \leq 1. \end{cases}$$

## IRODALOM

1. ÉLTETŐ, Ö.—FRIGYES, E.: New income inequality measures as efficient tools for causal analysis and planning. *Econometrica*, Vol. 36. No. 2. 1968. pp. 383—396.
- 1A. ÉLTETŐ Ö.—FRIGYES E.: Új jövedelem-egyenlőtlenségi mutatók, tulajdonságaik és hasznosítási lehetőségeik. *SZIGMA*, 1968. 1. sz. 17—28. o.
2. KENDALL, M.—START, A.: *The Advanced Theory of Statistics*. Vol. 1. London, 1958.
3. ROSENBLUTH, G.: Note on Mr. Schutz's Measure of Income Inequality. *The American Economic Review*. Vol. 41. No. 5. (1951) 935—937. p.
4. SCHUTZ, R. R.: On the Measurement of Income Inequality. *The American Economic Review*. Vol. 41. No. 1. (1951) 107—122. p.

# A költségárányos árkonceptió preferencia rendszere

## A vizsgált probléma és feltételi rendszere

A tanulmány nem vizsgálja, hogy a költségárányos ár optimális ár-e, és ha igen, milyen célfüggvény szempontjából nézve az. Egyszerűen elfogadja, hogy létezik ilyen árkonceptió és azt vizsgálja, hogy a központi irányítás ilyen árkonceptiója hogyan befolyásolja a termelés fejlesztésének irányát. Nem feltételezi azt sem, hogy a termelés volumenét központilag határozzák meg, de feltételezi, hogy a központi irányításnak bizonyos befolyása van a fejlesztésre, egy-egy ágazat számára gyorsítani vagy lassítani tudja a fejlődés feltételeit (pl. hitel nyújtással, adókedvezményel stb.). Azaz a központi irányítás kialakít egy preferencia rendszert, amelynek alapján egyes termékek termelését nagyobb, másokét kisebb mértékben segíti elő. Azt vizsgáljuk, hogy milyen legyen ez a preferencia-rendszer, ha olyan volumenek termelésének irányába kívánja ösztönözni a termékek termelésének fejlődését, mely volumenek mellett a kereslet és kínálat egyensúlyát biztosító árak átlagköltségárányosak.

A feladat megoldásához a következőket kell ismernünk:

$x_0$  a bázisidőszak termelési vektora,  
 $\lambda(x_0)$  a piaci ár és a költségárányos ár hányadosának vektora, melynek koordinátái  $\frac{p_i}{k_i}$ , ahol  $p$  a piaci ár vektora és  $k$  a költségárányos ár vektora.

$E_r(x_0)$  = a kereslet jövedelem rugalmassága

$E_p(x_0)$  = az ár kínálati rugalmassága,

$E_k(x_0)$  = az átlag költség volumen rugalmassága,

$r$  = a tervezett %-os jövedelem változás.

A fenti adatokból meghatározhatjuk az ár jövedelem rugalmasságát, illetve az  $r$  %-os jövedelem növekedés hatására változatlan kínálat mellett bekövetkező árnövekedést. Ez  $10^2 r E_r E_p 10^2 \%$ . Számításaink egyszerűbb formában való kifejezésére a továbbiakban az  $E^* = 10^2 r E_r$  jelölést fogjuk bevezetni.  $r$  %-os volumen növekedés esetén a piaci ár %-os változása  $(E_r^* E_p) 10^2 \%$ . Az átlagköltség  $x$  %-os volumen változásra jutó %-os változása pedig  $x E_k 10^2 \%$ .

A számítás eltekintett attól, hogy az  $x_0$  pontra számított pontrugalmassági együttható és az  $x_0$  pontra számított ívrugalmassági együttható értéke eltérő, illetve csak akkor esik egybe, ha a számítás alapjául szolgáló görbe lineáris. A számítás azonban nem a lineáritást feltételezi, hanem azt, hogy a rugalmassági együtthatónak az ív függvényében való változása nem nagyobb, mint a becült adatok pontatlansága. Különben is a számítás nem pontrugalmassági együtthatókkal dolgozik, hanem a figyelembe vett szakaszon az  $x_0$  pontra számított ívrugalmassági együtthatók átlagával, s azt feltételezi, hogy ezek-

nek az átlag körüli szóródása nem nagy. Egyébként azért is indokolt, hogy nem törekszünk nagy pontosságra, mert alapjában véve nem is pontos volumeneket, hanem közelítő volumenek alapján, fejlesztési rangsort szeretnénk megállapítani. De olyan fejlesztési rangsort, hogy ez a rangsorolás az átlagprofit-rátá kialakítása irányába hasson. Az árváltozás és a költségváltozás hatására bekövetkező nyereségváltozás

$$[p_0(E_r^* E_p - xE_p) - xE_k k_0].$$

Hozzáadva ehhez  $(\lambda_0 - 1) k_0$ -t

$$\lambda[x_0(1+x)] = (\lambda_0 - 1)k_0 + [p_0(E_r^* E_p - xE_p) - xE_k k_0].$$

Határozzuk meg  $x$ -et úgy, hogy  $p = k$  és  $\lambda[x_0(1+x)] = 0$

teljesüljön, akkor

$$\lambda_0 - 1 + \lambda_0(E_r^* E_p - xE_p) - xE_k = 0.$$

Innen

$$x = \frac{\lambda_0 - 1 + \lambda_0 E_r^* E_p}{\lambda_0 E_p + E_k}.$$

Később bizonyítjuk, hogy képletünk az

$$E_k(E_r^* E_p + 1) < \frac{E_k}{\lambda_i} < -E_p \text{ eseter nem terjed ki.}$$

Ha a rugalmassági együtthatókról nem tételezzük fel, hogy nem függenek az íz hosszúságától, hanem ehelyett a konstans pontrugalmassági együttható feltételezésével élünk,<sup>1</sup> számításunk eredménye akkor sem fog lényegesen eltérni az előzőtől.

Legyen  $p = \sigma R^{E_r E_p} \cdot q^{-E_p}$ ;  $k = \varkappa q^{E_k}$ ;

$$\lambda_0 = \frac{p_0}{k_0} = \frac{\sigma}{\varkappa} R^{E_r E_p} q^{-(E_p + E_k)}.$$

$r$  %-os jövedelemváltozás és  $x$  %-os volumen változás hatására:

$$1 = \lambda = \frac{p}{k} = \frac{\sigma}{\varkappa} [R(1+r)]^{E_r E_p} [q(1+x)]^{-(E_p + E_k)},$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} = (1+r)^{E_r E_p} (1+x)^{-(E_p + E_k)},$$

$$1+x = [\lambda_0(1+r)^{E_r E_p}]^{\frac{1}{E_p + E_k}},$$

$$\ln(1+x) = \frac{1}{E_p + E_k} \ln \lambda_0 + \frac{E_r E_p}{E_p + E_k} \ln(1+r).$$

<sup>1</sup> Gyakorlatilag, amikor rugalmassági együtthatókkal számolnak, akkor legalábbis e két feltételezés egyikével szoktak élni, vagy a pont és ívrugalmassági együttható különbségétől tekintenek el vagy konstans pontrugalmasságot feltételeznek.



Az előző számításban  $x$  alakulását vizsgáltuk, de  $x$  alapján a rangsorolás ugyanaz, mint  $\ln(1+x)$  alapján, s itt ez a számítást lényegesen egyszerűsíti.

Mindkét számítás mutatja, hogy ha elő akarjuk segíteni az átlagprofitráta kialakulását, akkor négy mutató  $\lambda_0$ ,  $E_p$ ,  $E_r$ ,  $E_k$  alakulását kell figyelembe venni, s e négy mutató közül önmagában egyik sem meghatározó jelentőségű, hanem egymáshoz viszonyított nagyságuktól függ, hogy melyik válik meghatározóvá.

Vizsgáljuk meg, hogy a különböző tényezők milyen mértékben befolyásolják a %-os növekedést, vagyis a fejlesztési lehetőségeket. Vagyis ha két termékünk van, amelyekre nézve a négy mutató  $\lambda$ ,  $E_p$ ,  $E_r$ ,  $E_k$  közül három megegyezik és egy eltér, akkor a kettő közül melyiknek a fejlesztése mutatkozik előnyösebbnek. Vizsgálatunkban feltételezzük, hogy  $r > 0$  és csekély jelentőségük miatt eltekintünk az inferior cikkektől.

*A piaci ár és a költségárányos ár hányadosának ( $\lambda_0$ ) befolyása  
a volumen fejlesztésre*

Mennyire függ  $x$  növekedése  $\lambda_0$ -tól?

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_0} = \frac{E_k(1 + E_r^* E_p) + E_p}{(\lambda_0 E_p + E_k)^2} > 0, \quad \text{ha} \quad E_k(1 + E_r^* E_p) > -E_p,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \lambda_0^2} = \frac{-2(\lambda_0 E_p + E_k)E_p}{(\lambda_0 E_p + E_k)^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda_0}.$$

Vagyis ha  $E_k$  nagyobb mint  $\frac{-E_p}{1 + E_r^* E_p}$  és  $-\lambda_0 E_p$  közül a nagyobbik, akkor  $\lambda_0$  növekedésével, minden egyéb tényezőt azonosnak véve, a függvény értéke lassulva növekszik.

Majdnem ugyanezt figyelhetjük meg a konstans rugalmassági együtthatókra vonatkozó összefüggésnél is.

$$\frac{\partial \ln(1+x)}{\partial \lambda_0} = \frac{1}{E_k + E_p} \cdot \frac{1}{\lambda_0} > 0, \quad \text{ha} \quad E_k > -E_p,$$

$$\frac{\partial^2 \ln(1+x)}{\partial \lambda_0^2} = \frac{-\partial(\ln 1+x)}{\partial \lambda_0} \cdot \frac{1}{\lambda_0}.$$

Ha  $E_k > -E_p$ , minden egyéb tényezőt azonosnak véve,  $\lambda_0$  növekedésére a függvény értéke lassulva növekszik.

*$E_p$  befolyása a volumen fejlesztésére*

$$\frac{\partial x}{\partial E_p} = \frac{\lambda_i(1 + E_r^* E_k - \lambda_i)}{(\lambda_i E_p + E_k)^2} < 0, \quad \text{ha} \quad 1 + E_r^* E_k - \lambda_i < 0$$

és

$$\frac{\partial^2 x}{\partial E_p^2} = \frac{-2\lambda_i}{\lambda_i E_p + E_k} \cdot \frac{\partial x}{\partial E_p}.$$

Vagyis  $E_p$  növekedésével, minden egyéb körülményt azonosnak véve, a függvény értéke lassulva csökken, ha

$$1 + E_r^* E_k - \lambda_i < 0 \quad \text{és} \quad E_k > -\lambda_i E_p.$$

Hasonlókra jutunk a konstans ponttrugalmassági együttható feltételezésénél is.

$$\frac{\partial \ln(1+x)}{\partial E_p} = \frac{E_r E_k \ln(1+r) - \ln \lambda_i}{(E + E_k)^2} < 0, \quad \text{ha} \quad \ln \lambda_i > E_r E_k \ln(1+r)$$

és

$$\frac{\partial^2 \ln(1+x)}{\partial E_p^2} = \frac{-2(E_p + E_k)}{(E_p + E_k)^2} \cdot \frac{\partial \ln(1+x)}{\partial E_p}.$$

Ha  $\ln \lambda_i > E_r E_k \ln(1+r)$  és  $E_k > -E_p$ , akkor  $E_p$  növekedésével, minden egyéb tényezőt azonosnak véve, a függvény értéke, vagyis a fejlesztési lehetőség lassulva csökken.

Ha  $r = 0$ , akkor mind a lineáris, mind a loglineáris esetben  $E_p$  növekedésével a függvény értéke, vagyis a fejlesztési lehetőség akkor növekszik, ha a profitráta kedvezőtlen  $\lambda_i < 1$ . Ugyanis ha a kedvezőtlen profitráta miatt a volumen csökkentjük, akkor ha  $E_p$  nagy, a volumen csökkenés miatt az ár gyorsan növekszik, s a profitráta is hamar kedvezővé válik,  $E_p$  tehát nyilvánvalóan  $\lambda_i$ -vel ellentétes irányban fejti ki hatását, amely  $E_r$  és  $E_k$  nagyságától sem független.  $E_r$  és  $E_k, E_p$ -vel egyirányban fejti ki hatását, ha  $E_k$  negatív, ellenkező irányban ha pozitív.

#### *$E_r$ befolyása a volumen fejlesztésére*

$$\frac{\partial x}{\partial E_r} = \frac{\lambda_i r E_p}{\lambda_i E_p + E_k} > 0, \quad \text{ha} \quad -\lambda_i E_p < E_k.$$

A loglineáris esetben:

$$\frac{\partial \ln(1+x)}{\partial E_r} = \frac{E_p \ln(1+r)}{E_p + E_k} > 0, \quad \text{ha} \quad -E_p < E_k.$$

$E_r$  növekedésével lineárisan növekszik a fejlesztési lehetőség. A kivételenként tekintett  $-E_p > E_k$  és  $-\lambda_i E_p > E_k$  eset tárgyalására még visszatérünk.

#### *$E_k$ befolyása a volumen fejlesztésére*

$$\frac{\partial x}{\partial E_k} = \frac{-\lambda_0(1 + E_r^* E_p) + 1}{(\lambda_0 E_p + E_k)^2} = 0, \quad \text{ha} \quad \frac{1}{\lambda_i} < 1 + E_r^* E_p,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial E_k^2} = \frac{-2}{\lambda_0 E_p + E_k} \frac{\partial x}{\partial E_k}. \quad \text{Ezért, ha} \quad \frac{1}{\lambda_i} < 1 + E_r^* E_p \quad \text{és} \quad E_k > -\lambda_0 E_p, \quad \text{akkor } E_k$$

növekedésével a fejlesztési lehetőség gyorsulva csökken.

A  $\frac{\partial x}{\partial E_k} = \frac{-x}{\lambda_i E_p + E_k}$  kifejezésből jól látható, hogy ha  $x > 0$  akkor  $E_k$  csökkenésével  $x$  értéke csökken, s ha  $x < 0$ , akkor  $E_k$  növekedésével  $x$  értéke nő

kivéve a később tárgyalandó esetet, amikor  $-\lambda_i E_p > E_k$ . Csaknem azonosak a következtetések a loglineáris esetből, ahol

$$\frac{\partial \ln(1+x)}{\partial E_k} = \frac{-x}{E_p + E_k}$$

A teljesen azonos rendes eset mellett itt  $-E_p > E_k$  a később vizsgálandó kivétel.

*Összefoglalva:* az elemzés kimutatta, hogy a költségarányos árak kialakítására törekvő volumen fejlesztési koncepcióban négy mutató  $\lambda_i$ ,  $rE_r$ ,  $E_p$  és  $E_k$  határozza meg a fejlesztés mértékét. A négy mutató külön-külön meghatározott fejlesztési irányba ösztönöz, egymás hatását kölcsönösen segítik vagy korlátozzák.

A kivételektől eltekintve mind a kétféle számítás szerint a volumen  $\lambda_i$  növekedésével lassulva nő,  $E_p$  növekedésével lassulva csökken,  $E_r$  növekedésével lineárisan növekszik és  $E_k$  növekedésével, ha  $x < 0$ , akkor nő, ha  $x > 0$ , akkor csökken.

*A kivételek elemzése*

Azokat az eseteket vizsgáljuk meg, amelyekben az első differenciálhányados előjele eltér a közgazdaságilag általánosan értelmezhető előjeltől, ami  $\lambda_i$ -nél és  $E_r$ -nél pozitív,  $E_p$ -nél negatív,  $E_k$ -nál pedig  $x$  előjelével ellentétes előjelű.

*A kivételek*

	$x$ differenciálhányadosai szerint	$\ln(1+x)$ diff. hányadosai szerint
$\lambda_i$ szerinti diff. hányados szerint	$E_k < \frac{-E_p}{1 + E_r^* E_p}$	$E_k < -E_p$
$E_p$	$1 + E_r E_k - \lambda_i > 0$	$\ln \lambda_i < E_r E_k \ln(1+r)$
$E_r$	$E_k < -\lambda_i E_p$	$E_k < -E_p$
$E_k$	$E_k < -\lambda_i E_p$	$E_k < -E_p$

Mivel az  $E_p$  hatását korlátozó kivétel elemzésével már foglalkoztunk, ezért voltaképpen csak két kivétellel kell foglalkoznunk, az  $E_r$  és  $E_k$  vizsgálatánál kimutatott  $E_k < \lambda_i E_p$  és a  $\lambda_i$  vizsgálatánál kimutatott  $E_k < \frac{-E_p}{1 + E_r^* E_p}$  kivétellel. Az exponenciális függvénynél nyert  $-E_p > E_k$  összefüggéssel azért nem kell külön foglalkoznunk, mert ha  $E_k(1 + E_r^* E_p) < -E_p$  teljesül, akkor  $E_k < -E_p$  is teljesül.

Nyilvánvaló, hogy ha  $\frac{1}{\lambda_i} > E_r^* E_p + 1$ , akkor az  $\frac{E_k}{\lambda_i} < -E_p$  korlátozást az  $E_k(E_r^* E_p + 1) < -E_p$  korlátozás magában foglalja. Ezért először az

$$\frac{E_k}{\lambda_i} < E_k(E_r^* E_p + 1) < -E_p$$

esetet vizsgáljuk meg, s azután az

$$E_k(E_r^* E_p + 1) < \frac{E_k}{\lambda_i} < -E_p$$

feltételt.

\*

$$\frac{E_k}{\lambda_i} < E_k(E_r^* E_p + 1) < -E_p.$$

Az egyéni profitráta kedvezőtlen.  $\lambda_i < 1$  és  $E_k < 0$ , ami annyit jelent, hogy a volumen növekedésével az átlagköltség csökken, vagyis a termelés még nem érte el az üzemi optimumot. Az árrugalmasság viszonylag alacsony,  $E_k$  negatív és abszolút értéke, vagyis a volumen növekedéssel járó költségcsökkenés, elég nagy. Ezáltal a volumen növelés a profitrátát javítja. Ezért képletünk a kedvezőtlen profitráta ellenére a volumen növekedést írja elő. Megsértjük-e ezzel a költségárányos árak kialakítására törekvő volumen-fejlesztési koncepciót? Nem, hiszen éppen ez az elv az, amely az egyéni profitrátáknak az átlagprofitrátához való közeledését írja elő.

Ha a kedvezőtlen profitráta miatt csökkentenénk a volumet, akkor az egyéni profitráta még mélyebbre süllyedne az átlagprofitráta alá. Igaz, hogy dinamikusan nézve a dolgot, egy idő után az árrugalmasság megnövekedne, s ezáltal a kizáró feltétel érvényét vesztené, vagyis eljutnánk az átlagprofithoz, de úgy, hogy közben hosszabb időn át megsértettük az átlagprofitrátához való közeledés elvét. Ha viszont a volumen növelésével közeledünk az átlagprofithoz akkor vagy elérjük az átlagprofitot még hozzá úgy, hogy folyamatosan közeledünk az átlagprofit felé, vagy nem érjük el az átlagprofitot, mert még mielőtt elérnénk, eljutunk az üzemi optimumig, amelyen túl  $E_k$  pozitívvá válik, vagyis a profitráta nem javítható tovább a volumen növelésével. S ezzel meg is szűnik az az állapot, amelyet kivételesnek tekintettünk.

\*

$$E_k(E_r^* E_p + 1) < \frac{E_k}{\lambda_i} < -E_p.$$

A profitráta kedvező.  $\lambda_i > 1$ . A termelés még nem érte el az üzemi optimumot.  $E_k < 0$ . Az árrugalmasság a költségárrugalmasság abszolút értékéhez képest kicsi, vagyis a profitráta a volumen növelésével tovább javítható. Mivel a profitráta már kiinduláskor is magasabb volt az átlagprofitrátánál, ezért az egyéni profitráta növekedésével még jobban eltávolodik az átlagprofitrátától. Képletünk, amelyet az átlagprofitráta megközelítésére állítottunk fel, most a volumen csökkenését írja elő. Valójában azonban növelnünk kell a volumet, hiszen mind a négy mutató a volumen növelésére ösztönöz, s a volumen növelésével reagál az ilyen esetben az a mechanizmus is, amely a piacon az átlagprofitrátát kialakítja. Mi sem sértjük meg az átlagprofitráta kialakításának elvét, ha ebben az esetben ugyanúgy járunk el, mint az átlagprofitráta kialakításának piaci mechanizmusa.

A harmadik oldalon felállított képletünk tehát nem érvényes az

$$E_k(E_r^* E_p + 1) < \frac{E_k}{\lambda_i} < -E_p$$

esetre. Ebben az esetben ugyanis a volument növelni kell. Meddig? Dinamikusan szemlélve látjuk, hogy ha elérünk az üzemi optimumig, azon túl  $E_k > 0$ , vagyis képletünk újból érvénybe lép. S képletünk felhasználásával állapíthatjuk meg, hogy a volumen növelésével az üzemi optimumon túl hol kell megállnunk.

### A költségárányos árak kialakításának koncepciója

(4 mutató kölcsönhatásán nyugvó preferencia rendszer)

Láttuk, hogy az átlagprofit kialakítására törekedve nemcsak az átlagprofit-ráta és az egyéni profitráta viszonyát kellett figyelembe vennünk, hanem a jövedelemrugalmasságot, az árrugalmasságot és a termelés költségrugalmasságát is. Ebből is érzékelhetjük, hogy a gazdaság fejlesztésének költségárányos árak kialakítására törekvő koncepciója milyen széles és átfogó koncepció, amely sokoldalúan oldja meg a gazdaság fejlesztésének problémáit.

Éppen ez a sokoldalúság az oka annak, hogy a költségárányos ár koncepciójának követői előtt nem határolódik el mereven a profitráta alakulása szempontjából vett egyensúlyi állapot a nem-egyensúlyitól, s ezért egyensúlyi állapotba jutva nem jutunk holtponthez, nem zárul be előttünk a továbbjutás lehetősége. Ha elérjük az egyensúlyi állapotot, amelyben  $\lambda_i = 1$  minden  $i$ -re, akkor is tovább mehetünk, sőt tovább is kell mennünk a termelési arányok változtatásában úgy, hogy közben nem sértjük meg a költségárányos árak kialakítására törekvő fejlesztési koncepciókat. Hiszen, ha a négy mutató közül egy kiegyenlített, akkor a többi differenciáltsága ad támpontot a továbbhaladásra. Legyen  $\lambda_i = 1$  minden  $i$ -re. Hogyan haladhatunk akkor tovább a fejlesztésben? Például a jövedelemváltozás megtervezésével. Termékenként a jövedelemváltozás hatása a keresletre  $E_{ri}^*$  keresletnövekedést idéz elő.  $E_{ri}^*$  %-os volumenváltozás a költségárányos árat  $k_i$ -ről  $k_i(1 + E_{ri}^*E_{ki})$ -re változtatja. A jövedelmzőségi arányok differenciálódnak.

$$\lambda_i = \frac{1}{1 + E_{ri}^* E_{ki}}$$

$\lambda_i > 1$ , ha  $E_{ki} > 0$  és  $\lambda_i < 1$  ha  $E_{ki} < 0$ . Vagyis ebben az esetben, amikor  $\lambda_i$ -k szerint preferálunk, akkor tulajdonképpen  $E_{ki}$ -k szerint preferálunk, mert a  $\lambda_i$  arányok  $E_{ki}$ -től függően határozódnak meg. A költségárányos ár kialakítására törekvő fejlesztési koncepció szerint a fejlesztés azonban most sem lesz arányos az  $E_{ki}$ -k által meghatározott  $\lambda_i^*$ -okkal. Ugyanis, ha a jövedelemváltozás miatt differenciálódott profitrátákat akarjuk kiegyenlíteni további jövedelemváltozás feltételezése nélkül ( $r = 0$ ), akkor

$$x_i = \frac{\lambda_i - 1}{E_{ki} + E_p \lambda_i}$$

A volumenváltozás a jövedelemváltozás miatt  $E_r^*$  %, s a volumenváltozás miatt differenciálódó profitráták kiegyenlítése miatti volumenváltozás ( $\lambda_i^*$  behelyettesítésével):

$$\frac{-E_{ri}^* E_{ki}}{E_{ki}(1 + E_{ri}^* E_{ki}) + E_{pi}}$$

Összevonva a két volumenváltozást:

$$x_i = \frac{(E_{ri}^* E_{ki})^2 + E_{ri}^* E_{pi}}{E_{ki}(1 + E_{ri}^* E_{ki}) + E_{pi}}$$

Kiindultunk egy tetszőleges árrendszerből s költségárányos árak kialakítására törekedve meghatározott rendszer szerint a termékeket  $\lambda_i$ ,  $E_{ri}^*$ ,  $E_{ki}$  és  $E_{pi}$  nagysága alapján preferálva, illetve diszpreferálva költségárányos árrendszerhez jutottunk el. Ezután a termékeket  $E_{ri}^k$  nagysága alapján preferálva haladtunk tovább. Ennek során a nyereségráták differenciálódtak. Mégsem sértettük meg a költségárányos árak elvét, mert  $r$  jövedelemváltozás akkor is eltérítene a költségárányos árártól, ha a volumeneket modellüinktől eltérően  $\lambda_i$ -vel arányosan, azaz  $\lambda_i = 1$  miatt egyenlő arányban, fejlesztenénk. Ebben az esetben a konstans bővülési ráta miatt az egynél nagyobb jövedelem-rugalmasságú cikkeknel kielégítetlen kereslet, az egynél kisebb jövedelem-rugalmasságúaknál feles kínálat keletkezne. Ha piaci egyensúlyra törekszünk, akkor a nagyobb jövedelemrugalmaságú cikkek árát növelni, a kisebbeket csökkenteni kell. Ez visszahat a jövedelemrugalmaságokra, még hozzá úgy, hogy a nagyobbakat még nagyobbá, a kisebbeket még kisebbé teszi. A következő periódusban tehát az esetleg továbbra is fenntartott konstans bővülési ráta még nagyobb keresleti fölöslegeket és hiányokat fog létrehozni. Az egyensúlyi zavarokat elimináló piaci árarányok egyre gyorsuló ütemben térnek el a költségárányoktól, egyre nagyobb a jövedelmezőségi arányok eltérése, s a mind jobban szóródó jövedelemrugalmasági együtthatók miatt a konstans bővülési ráta egyre tarthatatlanabbá válik.

Az egyensúlyhiány  $i$  terméknel  $(r - E_{ri}^*)\%$ , s az ennek megfelelő fogyasztói árváltozás  $(r - E_{ri}^*)E_{pi}10^2\%$ . A jövedelmezőségi arány termékenként különböző, éspedig

$$\frac{1 + (r - E_{ri}^*) E_{pi}}{1 + E_{ri}^* E_{ki}} 10^2 \%$$

A profitráták tehát éppen azáltal differenciálódtak, hogy a volumeneket az azonos profitrátáknak megfelelő azonos arányban növeltük.

De  $E_r^*$  szerint fejlesztve módunk van számolni a nyereségráták differenciálódásával, amely adott  $rE_r$ -ek mellett csakis  $E_{ki}$ -ktől függ, s tervbe venni a differenciák eliminálását  $E_{ki}$ -k és  $E_{pi}$ -k figyelembevételével.

A költségárányos árak kialakítására törekvő fejlesztési koncepció tehát nem egy mutatót követ, hanem *egyidejűleg, de időről időre különböző súllyal négy mutató: a nyereségráta, jövedelem, az ár- és a költségrugalmaság  $\frac{p_i}{k_i}$ ,  $E_r$ ,  $E_p$ ,  $E_k$  szerint preferálva fejleszti a volumeneket.*

Továbbra is elhagyva modellünket, térjünk most rá annak vizsgálatára, hogy ha költségárányos árak kialakítására törekedve nem e négy tényezőnek meghatározott rendszer szerinti figyelembevételével, hanem közülük egynek a kiválasztása alapján fejlesztjük a termelést, milyen eredményre jutunk, és az egyes tényezők külön-külön milyen irányba ösztönöznek.

*$E_r$  nagysága szerinti preferencia*

$E_{ri}$  nagysága szerint preferálva a termékeket az összes fejlesztési lehetőségeket esetleg egy termékre, a legnagyobb jövedelemrugalmasságúra koncentrálnánk még akkor is, ha számolunk a jövedelemrugalmassági együtthatónak a telítődés miatti csökkenésével. Esetleg a fejlesztésre rendelkezésre álló összes erőforrások bevetésével sem növekedne meg a volumene annyira, hogy jövedelemrugalmasságát második helyre szorítaná.

Korlátozó feltételeket kellene megadnunk az  $E_{ri}$  szerinti preferenciában, méghozzá külső korlátozó feltételeket, mert magának az  $E_{ri}$  szerinti preferenciának nincsenek belső korlátai. Nem jutunk el egy olyan állapotig, amikor  $E_{ri} = 1$  minden  $i$ -re, hiszen  $E_{ri} = 1$  minden  $i$ -re azt jelenti, hogy a fogyasztás szerkezete nem függ a jövedelem színvonalától. Ha külső korlátokat, például  $E_p$ ,  $E_k$ ,  $\lambda_i$  figyelembevételét írjuk elő az  $E_r$  szerinti preferencia számára, akkor attól függően tér el a költségárányos árak koncepciójától vagy egyezik meg azzal, hogy hol szabjuk meg ezeket a korlátokat. Hiszen láttuk, hogy  $E_{ri}$  figyelembevételét a költségárányos árak szerinti fejlesztés koncepciója is előírja.

A költségárányos árak koncepciója mellett is adódhat olyan helyzet, amikor a fejlesztés alapvetően a nagy jövedelemrugalmasságú termékekre koncentrálódik. Például, ha a nagy jövedelemrugalmasságú termékeknél nagyon kedvező a profitráta, s emellett kicsi az  $E_k$  és az  $E_p$ , s nagy a jövedelemnövekedés.

Ha a fejlesztésben az  $E_{ri}$  szerinti preferencia nagyobb, mint amekkorát a jövedelemváltozás figyelembevételével a költségárányos árak kialakítására törekvő fejlesztési koncepció is indokol, akkor ez a fejlesztési irány a magasabb jövedelmű rétegeknek kedvez, s azok számára tesz lehetővé nagyobb reáljövedelem-növekedést.

 *$E_p$  nagysága alapján való diszpreferencia*

A költségárányos árak kialakítására törekvő fejlesztési koncepció, mint láttuk, többek között  $E_p$  nagysága alapján is diszpreferálja a termékeket. Lehet-e az  $E_p$  mutató egy preferenciarendszer egyetlen mutatója?

Az  $E_p$  szerinti preferencia, a minél kisebb árrugalmasságú termékek preferálásával, adott árak fenntartására irányul. Tehát attól függően jobb vagy kevésbé jó, hogy az eredeti, valamilyen elv szerint kialakított vagy véletlenül kialakult, árrendszer mennyire volt rossz vagy jó, illetve ha jó volt, mennyire vált vagy nem vált elavulttá.

 *$\lambda_i$  szerinti preferencia*

A költségárányos árak kialakításának koncepciójában központi szerepe van a nyereségrátának hiszen a költségárányos árak kialakításának elve az általános nyereségráta kialakításának elve. Ez az elv, mint láttuk, nem azonos a kizárólagosan  $\lambda_i$  szerinti preferencia elvével. De mivel eddig a költségárányos árak tudatos kialakításának preferencia rendszerét nem fejtették ki, találkozunk a költségárányos árak kialakítására törekvő koncepció olyan leszűkített statikus értelmezésével is, amely csak az adott  $\lambda_i$  arányok alapján alakítja ki preferencia rendszerét.

Úgy tűnik, hogy e statikus értelmezés és a költségáranys ár kialakítására törekvő dinamikus koncepció közt a végeredmény tekintetében csak időbeli eltolódás van. Hiszen ha csak  $\lambda_i$  szerint preferálunk, akkor, miközben ezt a profitráta kiegyenlítése érdekében tesszük, az eredmény mégis egy *ki nem egyenlített* profitráta lesz. Kiegyenlítetlenségét éppen annak köszönheti, hogy nem vettük figyelembe az áraknak és a költségeknek a volumen függvényében és az áraknak a jövedelem függvényében való változását.

Amikor a második periódusban az első periódus után még mindig kiegyenlítetlen profitráta kiegyenlítésére törekszünk, akkor tulajdonképpen az ár-, a költség- és a jövedelemrugalmassági együtthatók által mért múltbeli hatást vesszük figyelembe.

Csak szubjektíve preferálunk *egy* mutató ( $\lambda_i$ ) szerint, objektíve most is négy mutató szerint preferálunk  $\lambda_i^t$  szerint és  $E_{ki}^{t-1} E_{pi}^{t-1} (\tau E_{ri})^{t-1}$  szerint. Vagyis a négy mutató közül hármát egy periódusos késéssel (*lag-gel*) veszünk figyelembe.

De ez az egy periódusos késés igen sokat jelenthet a fejlődés és a fejlődési ütem szempontjából, mert éppen a költség rugalmassági mutató figyelembe vétele az, ami a legerősebben ösztönöz a növekedés irányába,<sup>2</sup> s ezért ennek késedelmes figyelembe vétele kárt okoz a fejlődés szempontjából. Ezért teljesen jogosan érheti vád a költségáranys árak koncepcióját, ha a költség rugalmassági együtthatót nem eléggé vagy, késedelmesen veszi figyelembe s *nagyon fontos és jelentős* a költség rugalmassági együttható ( $E_k$ ) vagy azzal egyenértékű ugyanazt kifejező más mutató szerepének hangsúlyozása [3].

#### *$E_k$ szerinti preferencia. A hozadéki elv*

Az  $E_k$  szerinti preferencia elve nem más, mint a Hoch Róbert [3] által kifejtett hozadéki elv. Mi a hozadéki elv, a  $V$  mutató alapján való preferencia?

A  $V$  mutató a volumen %-os növekményének és az összköltség %-os növekményének hányadosa.

$$V = \frac{\Delta q}{q} : \frac{\Delta K}{K} = \frac{K}{q} : \frac{\Delta K}{\Delta q},$$

ahol  $K$  az összköltség,  
 $q$  a volumen.

$\frac{\Delta K}{\Delta q}$  azonban nem más mint a határkölség,  $\frac{K}{q}$  pedig az átlagkölség. Vagyis

$$V = \frac{\text{átlagkölség}}{\text{határkölség}}$$

Mit jelent, ha  $V = 1$ ? Akkor a határkölség egyenlő az átlagkölséggel. Ez tulajdonképpen az üzemi optimum definíciója. A  $V$  mutató azonban nem mikro, hanem makroökonómiai kategória. Értelmezhető-e mégis az üzemi optimum analógiájára? A matematikai forma szerint mindenesetre. És a közgazdasági tartalom szerint? Átlagkölség és határkölség népgazdasági szinten, illetve egy-egy termék vagy ágazat számára népgazdasági szinten is értelmezhető kategóriák. Egymással való egyenlőségük népgazdasági szinten is optimális helyzetet jelöl. Népgazdasági optimumot? — Nem. — Csak népgazdasági szintű optimumot a költségalakulás szempontjából. A valódi nép-

<sup>2</sup> A költség rugalmassági együtthatónak erre a tulajdonságára később még visszatérünk.



gazdasági optimum meghatározásánál ennél több szempontot kell figyelembe vennünk. A népgazdasági szinten összegezett költséggörbe alakulását is jellemzi az átlagköltség és a határköltség hányadosa. Ha a határköltség kisebb mint az átlagköltség, az átlagköltséggörbe csökken; ha nagyobb, növekszik; ha egyenlő, akkor a görbének minimum helye van. Az analógia tehát felállítható. Hogy a népgazdaságilag összegezett költséggörbe nem vagy nem mindig parabola alakú? Természetesen. Az üzemi költséggörbe sem, és főképp nem mindig az és mégis bevett szokás így ábrázolni és nem ek nélkül. Hiszen, ha az átlagköltség görbéje csökkenő, akkor úgy tekinthető mint a parabola csökkenő, ha növekvő, akkor mint a növekvő szakasza. Ha lineáris, akkor mint egy szakasz lineáris közelítése. Elméletileg azonban mindig tekinthetünk egy olyan hosszabb szakaszt, amelyben a költségek alakulását parabolával jellemezhetjük. Amíg az adott kapacitás kihasználatlan, addig a határköltség kisebb mint az átlagköltség, az átlagköltség görbéje csökkenő. Az adott kapacitás mind teljesebb kihasználásával a határköltség nő. Amikor a határköltség eléri az átlagköltséget, az átlagköltség görbéjének csökkenése megszűnik, s mielőtt a határköltség nagyobb az átlagköltségnél, az átlagköltség görbéje növekvővé válik. Az adott kapacitáshoz tartozó átlagköltség görbéje tehát, mind üzemi, mind népgazdasági szinten, parabola alakú. Igaz, sem üzemi, sem népgazdasági szinten a termelés rendszerint nem fut végig adott kapacitás költséggörbéjén, hanem áttér más kapacitáshoz tartozó más költséggörbékre. Ezt az üzemi és a népgazdasági szintű költséggörbék elemzésénél egyaránt figyelembe kell venni. A továbbiakban népgazdasági szintű költséggörbékét fogunk elemezni, de az üzemi költséggörbével való hasonlósága miatt használni fogjuk az „üzemi optimum” kifejezést. Azért tesszük ezt, hogy emlékeztessük az olvasót arra, hogy nem egy „igazi” népgazdasági optimumról van szó, nem az egész népgazdaság fejlődése szempontjából optimális állapotról, hanem csak az adott kapacitáshoz tartozó népgazdasági szintű költséggörbe minimumáról, vagyis egy üzemi szemléletű optimum állapotról.

Az üzemi optimumban  $V = 1$  és  $E_k = 0$ . S ha  $V > 1$ ? Akkor az átlagköltség nagyobb mint a határköltség. Még nem értük el az üzemi optimumot,  $E_k < 0$ . Ha  $V < 1$ , az átlagköltség kisebb mint a határköltség, a termelés túl van az üzemi optimumon,  $E_k > 0$ .

$V$  és  $E_k$  között a következő összefüggés állapítható meg:

$$E_k = \frac{1 - V}{100V - V^2},$$

illetve infinitézimális számítással,

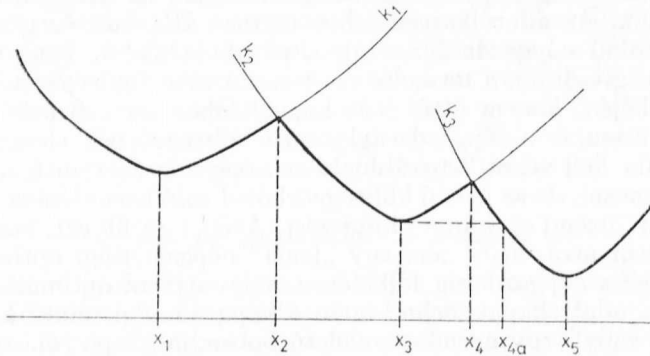
$$E_k = \frac{1 - V}{V}.$$

Ezért a termékek  $E_k$  szerinti rangsorolása megegyezik  $V$  szerinti rangsorolásukkal.

Míg sem az  $E_p$  szerinti, sem az  $E_r$  szerinti preferencia nem vezet kiegyenlítő-déshez, addig a  $V$  szerinti preferencia következetes, hosszú időszakon át való alkalmazása elméletileg a  $V$ -k bizonyos fokú kiegyenlítő-déséhez vezet, mivelhogy  $V$  a volumen növekedésének függvényében csökken. Elvileg tehát egy olyan állapot felé kell közelednünk, amelyben  $V = 1$  minden  $i$ -re.

Amikor a termelési volumeneket  $V$  szerint preferálva igyekszünk meghatározni, akkor a termelés volumenét az üzemi optimum felé tereljük. Kétségtelen, hogy az üzemi optimumban való termelésnek van gazdasági jelentősége, hiszen adott költséggörbén a termelést a minimális átlagköltségek felé tereli. Voltaképpen a termelési költségek csökkentésére ösztönöz. *Önköltségsökkentési koncepciót tartalmaz, akár csak a költségáramos árak koncepciója*, amely az  $E_k$ , tehát a  $V$  szerinti preferenciát is magában foglalja, de amely annál szélesebb, más irányú ösztönzéseket is felölelő koncepció.

Bár a termelésnek az üzemi optimum felé terelése jelentős, de nem abszolút érvényű. A költséggörbének ugyanis nem egy, hanem több optimuma van. Ez alatt azt értem, hogy bár *egy* adott költséggörbének általában egy szélső értékhelye van, de a fejlesztés során a költséggörbék megváltoznak, eltolódnak alacsonyabb optimumok felé. Mivel ez az eltolódás is a volumen függvényében következik be, ezért a költséggörbéket egyesíthetjük egy költséggörbévé úgy, hogy minden intervallumban a legalacsonyabban levőt vesszük figyelembe (1. sz. ábra).



1. ábra

Ábrázolásunkban a görbe első helyi optimuma az  $x_1$  pontban, a második az  $x_3$  pontban, a harmadik az  $x_5$  pontban van. Ha a termelés volumene az  $x_1, x_2$  szakasz belsejében van, akkor nem feltétlenül az  $x_1$  pontban levő helyi optimum felé érdemes terelni a termelést, hanem esetleg fokozatosan az  $x_2$  pont felé, ahol már érdemes áttérni a  $k_2$  görbét adó fejlettségi színvonalra és onnan továbbhaladni az  $x_3$  helyi optimum felé, majd esetleg ismét tovább, az  $x_4$  pontban a  $k_3$  költséggörbére térve, az  $x_5$  pont felé. Az így értelmezett optimum felé való törekvést, az összetett költséggörbén optimumból optimumba való haladást, nem foglalja magában az  $E_k$ , illetve a  $V$  nagysága szerinti preferencia elve. A költségáramos árak kialakítására törekedve azonban a kereslet követelményeinek megfelelően könnyen juthatunk el az egyik helyi optimumtól a másik felé, ha a kereslet elég magas. Ábránk módot ad arra is, hogy az azonos és a növekvő technikai színvonalon való fejlesztés kérdését együtt kezeljük.

Nem minden volumen növelés jár együtt kapacitás növeléssel. Növelhetjük a volument az adott kapacitás jobb kihasználásával vagy az adott kapacitás túlterhelésével önköltségnövelés árán is. S még a kapacitás növelése sem mind

technikafejlesztő növelés. Növelhetjük a kapacitást azonos színvonalon extenzív fejlesztéssel, sőt, ha a nagyon erős kereslet gyors alkalmazkodást kíván, még a korábban használaton kívül helyezett elavult kapacitás átmeneti újrabekapcsolására is sor kerülhet.

Ábránk egyértelműen választ ad arra, hogy mikor kell áttérni az azonos technikai színvonalon, adott költséggörbén való fejlesztésről, magasabb technikai színvonalra, új költséggörbére. Azokban a pontokban, amelyekben a régi és az új költséggörbe egymást metszi, ábránkon az  $x_2$  és  $x_4$  pontokban.<sup>3</sup> Úgy látszik, mintha kizárólag a költséggörbe alakjától függne, mikor kell az egyik költséggörbéről a másikra áttérni. A költséggörbe alakját pedig jól jellemezhetjük a  $V$  mutató alakulásával. Úgy tűnik tehát, mintha  $V$  mutató határozná meg, mikor térhetünk át új technikai színvonalra. Sőt, kifejezhetnénk ezt úgy is, hogy akkor, amikor  $V$  mutató értéke igen nagy. Hiszen ha a  $V$  mutatót az  $x_2$ ,  $x_3$  ívre számítom, akkor a  $V$  mutató értéke kiugróan magas lesz. Valójában azonban akkor térünk át új technikai színvonalra, amikor a volumennek a négy mutató kölcsönhatása által megkövetelt fejlesztése során eljutunk addig a volumenig, ahol a régi és az új költséggörbe egymást metszi. A  $V$  mutató állandóan csökken, amíg egy költséggörbén haladunk. Ha kizárólag a  $V$  mutató nagysága alapján preferálnánk és diszpreferálnánk, akkor eljutnánk az üzemi optimumba, s onnan nem tudnánk továbbjutni, legfeljebb csak ugrásszerűen, egy következő üzemi optimumba vagy megközelítőleg abba. Ha például a termelés az  $x_1$ ,  $x_2$  szakasz belsejében lenne, amikor a  $V$  szerinti preferencia alkalmazására rátérünk, akkor az  $x_1$ ,  $x_2$  belsejében levő ponttól az  $x_3$ -ig terjedő ívre számolt  $V$  mutató nagy lenne, s a volumen fejlesztését írná elő  $x_3$ -ig. Az  $x_3$  pontból azonban a következő lépés már csak az  $x_5$  pontba, vagy esetleg az  $x_5$  pont elé, de az  $x_{4a}$  ponton túra vihet. Ez egyben azt is jelenti, hogy épp az üzemi optimumban, amikor a termelés feltételei a legkedvezőbbek, kellene áttérni új költséggörbére. *Kizárólag a  $V$  mutató alapján való fejlesztés nagyon erősen ösztönöz az új technika bevezetésére, még akkor is, ha a régiek a lehetőségeit sem használtuk ki teljesen, s a kereslet nem is kíván tőlünk jelentős fejlesztést.*

Négy mutató ( $rE_r$ ,  $E_p$ ,  $\lambda_i$  és  $E_k$ ) alapján fejlesztve a termelést, ha a kereslet elég nagy, eltávolodhatunk az üzemi optimumtól, de az eltávolodás lehetőségét behatárolja a  $V$  mutató csökkenése. Minél gyorsabb a  $V$  mutató csökkenése, mennél gyorsabban növekszik a költséggörbe, annál hamarabb jutunk olyan ponthoz, ahol az új költséggörbe csökkenő szakaszát metszi. Ebben a pontban két  $V$  mutató van. Az egyik egynél kisebb és a régi költséggörbe emelkedő szakaszához tartozik, a másik egynél nagyobb és az új költséggörbe süllyedő szakaszához tartozik. A  $V$  mutató az üzemi optimum előtt egynél nagyobb s egyre csökken. Az üzemi optimumban értéke egy s azon túlhaladva folytatja csökkenését. A termelés az üzemi optimumot annyira haldhatja meg, hogy eljuthat az új költséggörbével való metszéspontba. Itt az új költséggörbéhez tartozó  $V$  mutató egynél nagyobb és csökkenő, s ismét az egy felé tart a termelésnek az új üzemi optimum felé haladásával. A  $V$  mutató egy körül ingadozik, amennyiben az egy alá csökkenés lehetőségét korlátozza az új költséggörbére való áttérés lehetősége, az egy fölé emelkedés pedig szintén átmeneti, a mutató fokozatosan csökken ahogy az üzemi optimum felé közeledünk.

<sup>3</sup> Mivel a termelés volumene nem folyamatosan nő, lehet, soha nincs az  $x_2$ , illetve  $x_4$  pontban. De akkor is ezek a kritikus volumenek, amelyek elválasztják a kisebb és a nagyobb kapacitás alapján kifizetődőbb termelést.

A  $V$  mutató hasonlóan, bár még lazább tendencia-jelleggel, ingadozik az egy körül, mint az egyéni profitráták az átlagprofit körül.

Látják ezt a szabadversenyos kapitalizmust ábrázoló egyes polgári közgazdák is, akik úgy értelmezik a hosszútávú egyensúlyt, hogy ott a rövidtávú egyensúly feltételein túl (kereslet és kínálat egymást fedi és az árak költségarányosak), még egy további feltétel, az üzemi optimumban termelés feltétele is megvalósul, s egyenesen a szabadverseny az, ami efelé a hosszútávú egyensúly felé terel [2].

Valóban, ha eljutnánk egy olyan, persze csak elméletileg lehetséges állapotba, ahol a profitráták már teljesen kiegyenlítettek ( $\lambda_i = 1$  minden  $i$ -re), akkor egy olyan állapot felé kellene továbbhaladnunk, amelyben a  $V$  mutatók is kiegyenlítődnének ( $V_i = 1$  minden  $i$ -re). Ugyanis, ha  $\lambda_i = 1$  minden  $i$ -re és a jövedelmek változatlanok, akkor ott érhetjük el az egyéni profitráta növekedését, ahol  $E_k < -E_p$ , ez pedig kizárólag olyan termékeknél következik be, amelyeknek a termelése még nem érte el az üzemi optimumot. Ha pedig csak azoknak a termékeknek termelését fejlesztjük, amelyek az üzemi optimumot még nem érték el, s a többit visszafejlesztjük, akkor végső soron olyan állapotba jutunk, amikor minden terméket az üzemi optimumban termelnek, vagyis  $V_i = 1$  minden  $i$ -re.

A költségarányos árak dinamikus koncepciójában a  $V$  mutató kiegyenlítődése felé haladás során létrejönnek a  $V$  mutató újbóli differenciálódásának okai is. Ugyanis differenciálódnak a profitráták. A  $V$  mutató nagysága alapján fejlesztett termékeknél az egyéni profitráta növekszik, s növekedése lehetővé teszi, hogy a fejlesztésben az üzemi optimumon túl haladjunk, annyira, amennyire azt az egyéni profitráta magasságában jelentkező erős kereslet megkívánja, de legfeljebb annyira, amíg az új költséggörbével való metszéspontot elérjük. Itt a kereslet nagysága már nem  $V$  mutató további csökkenését, hanem az új technikára való áttérést, s ezzel a  $V$  mutató ugrásszerű növelését követeli. De ne feledjük, hogy a  $V$  mutató ugrásszerű növekedése további csökkenésének alapjává válik.

Mivel az egyéni profitráták kiegyenlítődésekének tendenciája erősebb s elsődlegesebb mint a  $V$  mutatók kiegyenlítődésekének tendenciája, ezért ilyen értelemben mondhatjuk, hogy ez előbbi rövidebb távon érvényesül.

Így három egyensúlyi helyzetet különböztethetünk meg.

1. A legszűkebben értelmezett, a legrövidebb időszakra szóló egyensúlyi ár, amely csak annak a feltételnek tesz eleget, hogy a kereslet és a kínálat fedi egymást. Ezt a feltételt a piaci árnak mindenkor ki kell elégítenie.

2. A piaci ár centruma egy olyan ár, amely egy további feltételnek, a költségarányosság feltételének is eleget tesz. Ez mint centrum ár a piaci árhoz képest hosszú távú, de maga is mozgó centrum, méghozzá meghatározott irányba mozog, egy további feltétel teljesítése felé.

3. A további feltétel az üzemi optimumban való termelés feltétele, a költség-rugalmassági együtthatók kiegyenlítődése. Ez a feltétel hosszabb távon érvényesül, mint a költségarányos árak feltétele. Ezért az ezt a feltételt nem tartalmazó költségarányos árkonceptiót statikusnak, az utóbbi feltételt is tartalmazó árkonceptiót dinamikusnak neveztem.

Az  $E_k$  vagyis a  $V$  mutatók kiegyenlítődése tehát hosszabb időszakon érvényesül, mint az átlagprofitráták kiegyenlítődése, s hosszú távon kap nagyobb jelentőséget. Nem véletlen, hogy Hoch Róbert éppen a hosszú távú tervezés problémáinak tanulmányozása során jutott el a hozadéki elv koncepciójához.

A szocializmusban nem jön létre automatikusan az áraknak egy ilyen hosszú távú, a harmadik feltételnek is eleget tevő, egyensúly felé való terelése. Ha az értékarányos árak koncepcióját szűken, vagyis rosszul értelmezzük, akkor pedig egyáltalán nem jön létre. Az értékarányos árak dinamikus értelmezésében azonban egy ilyen hosszú távú egyensúly felé haladunk, amelyben nemcsak a nyereségarányok, de a költségrugalmasságok is kiegyenlítődni igyekeznek. A két egyensúlyi feltétel közül azonban a nyereségráták kiegyenlítődése az elsődleges, míg a költségrugalmassági együtthatók kiegyenlítődésenek tendenciája másodlagos.

(Beérkezett: 1971. április 14.)

#### IRODALOM

1. CSIKÓS-NAGY B.: A hetvenes évek gazdaságpolitikájának vitájához.
2. DORFMANN: Piac és vállalati árpolitika. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
3. HOCH R.: Az optimális kiboocsátási szerkezetet szolgáló árpolitika. Budapest, 1969. (Sokszorosított.)
4. HOCH R.: A ráfordítás-arányos árrendszerről. Közgazdasági Szemle, 1967. 1. sz.
5. MICHEL, H.: Zur Beeinflussung des Wachstumsprozesses einer Volkswirtschaft durch staatliche Massnahmen. Berlin-Frankfurt, 1965. Cahlen.
6. NAGY T.: Az árak szerepe a szocializmusban. Budapest, 1960. Kossuth Könyvkiadó.
7. VINCE I.: A hozadéki elv bírálata. Figyelő, 1970. március 11.

#### THE SYSTEM OF PREFERENCES WITHIN THE CONCEPT OF PRICES PROPORTIONAL TO COSTS

The paper examines the following problem: if central administration can exert a certain influence on the development of economic sectors and it wishes to enforce its influence so that the market mechanism should direct prices towards the prices proportional to costs, what kind of index numbers should be taken into account when forming the system of preferences.

We point out that within the concept of prices proportional to costs the system of preferences is formulated with the consideration of four indices. These are:  $\lambda = \frac{p}{k}$ , the quotient of the market price and the price proportional to costs;  $E_p$ , the price elasticity;  $E_k$ , the cost elasticity and  $E_r$ , the income elasticity, or  $100 r E_r = E_r^*$ , where  $r$  is the growth of incomes in percentages.

How large is that quantity change in percentages ( $x$ ) which would make prices proportional to costs? Supposing linear functional relationship we have:

$$x = \frac{\lambda_0 - 1 + \lambda_0 E_r^* E_p}{\lambda_0 E_p + E_k} ;$$

With loglinear functional relationship we have:

$$\ln(1 + x) = \frac{1}{E_p + E_k} \ln \lambda_0 + \frac{E_r E_p}{E_p + E_k} \ln(1 + r) .$$

We analyze what influence the magnitude of each index number has on the quantity increments according to the concept of prices proportional to costs. We examine the result of formulating the system of preferences with the consideration of only one index instead of four. Among the four indices, as a matter of fact, there are only two such that

a system of preferences can be built on them alone, namely:  $\lambda = \frac{p}{k}$ , that is substantially a profitability index and  $E_k$ , the cost elasticity coefficient, which substantially is a returns index. It seems as if there were no essential difference between the preference according to  $\lambda$  and the preference according to the four indices, as we take into account the other there indices just because they influence the future formation of  $\lambda$ . Neglecting them would delay their consideration by one period only. The one-period lag can mean, however, much from the angle of the rate of development because it is the consideration of the cost elasticity coefficient that yields the strongest stimulator in the direction of growth. And what does the exclusive consideration of the cost elasticity coefficient, or what means the same, the returns index formed by the quotient of average costs and marginal costs, result? This index, as a system of preferences, directs production to the direction of the factory optimum and if it has already attained the factory optimum, it allows the increase in quantity on a new technical level only, on a new costs curve. If we develop production exclusively on the basis of this index, we stimulate the establishment of new technologies very strongly even if the possibilities of the old one have not been completely exhausted and demand does not require a considerable development either. When developing according to the concept of prices proportional to costs we do not switch over to a new cost curve at the factory optimum in general, but in the point of intersection of the old and new cost curve. If demand is sufficiently large, we can move off the factory optimum, but this possibility is limited by the decrease of the returns index. The steeper the cost curve increases, the sooner we reach the point where it intersects the decreasing part of the new cost curve and where the quantity increase starts anew on the cost curve advancing to the new factor optimum.

#### СИСТЕМА ПРЕФЕРЕНЦИЙ КОНЦЕПЦИИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО ЗАТРАТАМ

Статья излагает следующий вопрос: если центральное руководство может оказывать некоторое влияние на развитие отдельных отраслей, и хочет пользоваться своим влиянием, таким образом, чтобы механизм рынка приблизил цены к ценам, пропорциональным затратам, то в этом случае какие показатели надо иметь в виду для создания своей системы предпочтений.

Показываем, что концепция цен, пропорциональных затратам, образует свою систему предпочтений на основе четырех показателей. Эти: частное рыночной цены и цены, пропорциональной затратам,  $\lambda = \frac{p}{k}$ , эластичность цены  $E_p$ , эластичность затрат  $E_k$  и эластичность доходов  $E_r$  или  $100 E_r$  где  $r =$  рост доходов в процентах.

Какое то изменение объема  $x\%$ -ное, которое сделало бы цены пропорциональными затратам. Предполагая линейные соотношения:

$$x = \frac{\lambda_0 - 1 + \lambda_0 E_r^* E_p}{\lambda_0 E_p + E_k};$$

в лог-линейном соотношении:

$$\ln(1+x) = \frac{1}{E_p + E_k} \ln \lambda_0 + \frac{E_r E_p}{E_p + E_k} \ln(1+r).$$

Анализируем, что по концепции цен, пропорциональных затратам, как влияют величины отдельных показателей на развитие объема. Изучаем куда вело бы, если бы мы не на основе этих четырех показателей, а только на основе одного из них построили нашу систему предпочтений. В действительности среди четырех показателей имеются только две некоторые можно было бы построить систему предпочтений;  $\lambda = \frac{p}{k}$ , которая на самом деле является показателем доходности, и  $E_k$  коэффициент эластичности, который на самом деле является показателем производительности влаженного труда и капитала. Кажется, что между предпочтением, построенной по  $\lambda$  и предпочтением, построенной на четырех показателях нет существенной разницы, ведь остальных три показателя учитываем как раз потому, что они влияют на будущее изменение  $\lambda$ . Их пренебрежение означало бы только то, что мы учитывали бы их с опозданием на один период. Но это опоздание на один период

может оказать значительное влияние с точки зрения темпа роста, потому, что как раз учет коэффициента эластичности затрат, или, что то же самое, показателя производительности труда и капитала, полученного как частное средние затраты и предельной затраты? Этот показатель, как система предпочтений направляет производство в направлении заводского оптимума, а если оно уже достигло заводского оптимума, тогда повышение объема оно допускает только переходя на новый технический уровень и на новую кривую затрат. Развивая производство исключительно на основе этого показателя, мы слишком сильно стимулируем на ввод новой техники и в том случае, если мы еще не использовали полностью возможности старой и спрос тоже не требует от нас значительного развития. Развивая производство на основе концепции ценообразования пропорционально затратам, мы обычно переходим на новую кривую не в заводском оптимуме, а в точки пересечения и новой кривой затраты. Если спрос является достаточно большим, мы можем отойти от заводского оптимума, но возможность отхода ограничена понижением показателя продуктивности. Чем круче поднимается кривая затрат, тем скорее дойдет она до такой точки, где она пересекает падающую часть новой кривой затрат и где сейчас уже на этой начинается рост объема, приближая новый заводской оптимум.

# FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KOVÁCS JÁNOS — TIMÁR JÁNOS

## A munkaerő és az oktatás távlati tervezésének módszerei néhány európai szocialista országban\*(I.)

Ez a tanulmány Bulgária, Csehszlovákia, Lengyelország, Magyarország, Románia és a Szovjetunió tervezési tapasztalatai alapján általános áttekintést kíván adni azokról a fontosabb módszerekről, amelyeket a szocialista országok tervezési gyakorlatában részben már az elmúlt években és évtizedekben gyakorlatilag alkalmaztak, részben a most folyó távlati tervezés során bevezetés vagy csak kísérletezés alatt állanak.

A tanulmány a szocialista országokban alkalmazott tervezési módszereket főbb témakörönként és módszertani típusonként ismerteti. Eltekint az egyes országok gyakorlatában fellelhető, a módszertan lényegét nem érintő sajátosságoktól és azt igyekszik megragadni, ami e módszerekben az alapvető és általánosítható. A szerzők e munkában felhasználták saját, sokéves tapasztalataikat, a rendelkezésre álló forrásmunkákat, amelyek jegyzékét a tanulmány végén közlik, valamint a szocialista országok egyes szakértőinek e célra adott közvetlen tájékoztatásait, amelyekért ezúton is hálás köszönetet mondanak.

### Bevezetés

1. A tervezés olyan komplexum, amely magában foglalja a társadalmi-gazdasági célok rendszerét és a szoros értelemben vett tervező munkát, amelyet a tervek kidolgozására és végrehajtására szolgáló eszközök és módszerek felhasználása jellemez. Ezenkívül ez a tervezés több szinten folyik, amelyek egyrészt autonómak, másrészt azonban egymással kölcsönösen kapcsolatban vannak és egymástól kölcsönösen függenek. Ezek a szintek a következők: népgazdaság, gazdasági és közigazgatási ágazatok, vállalatok és különböző intézmények, valamint a földrajzi és közigazgatási körzetek. Végül a tervezés rövid, közép és hosszú távon folyik.

2. A tervezés e jellemző területei közül ez a tanulmány kizárólag azokkal a módszerekkel foglalkozik, amelyek a hosszútávú tervek kidolgozásának céljaira szolgálnak népgazdasági szinten, a munkaerő- és az oktatástervezés területén. A rövideg kedvéért munkaerőtervezésről beszélünk. Ez alatt a fogalom alatt azt a tervező munkát értjük, amely a munkaerő-források kihasználására vonatkozik mind annak színvonalát, mind pedig nemek, kor, foglalkozás és képzettség szerinti struktúráját illetően [15]. A szakmai vagy foglalkozási struktúra tervezése szorosan kapcsolódik az oktatás tervezéséhez, amely magában foglalja a köznevelési rendszer fejlesztésének tervezését éppúgy, mint e rendszer működéséhez szükséges anyagi és egyéb feltételek megtervezését.

3. A mellékelt organigramm (I. sz. ábra) illusztrálja a munkaerő-tervezés helyét és szerepét a gazdasági tervezésben és feltárja annak tartalmát is. A munkaerő struktúrája állandóan változik és e strukturális változások üteme

\* Az Európai Gazdasági Bizottság gazdasági kormányfőtanácsadói értekezlete VIII. ülészakára (1970. november) a Titkárság nevében beterjesztett vitaindító tanulmány.





jelentősen fokozódott a XX. században, főként a II. világháború óta. Ez az egyik oka annak, hogy a tervezés szükségességének gondolata teret nyer a piac spontán működésén alapuló gazdaságokban is. A strukturális változások gyorsasága elengedhetetlenné teszi a tervezést, amennyiben időben akarnak felkészülni a várható változásokra és e célból elő akarják készíteni a szükségesnek mutató intézkedéseket. Másrésztől a munkaerő struktúrájában létrejövő változások — különösképpen azok, amelyek az oktatást és a képzettséget érintik — csak viszonylag lassan éreztetik hatásukat, főként abban a mértékben, amilyen mértékben a fiatalok gazdaságilag aktívvá válnak új típusú képzettséggel és oktatással, valamint annak a mértékében is, ahogyan az időskorúak gazdaságilag inaktívvá válnak nyugdíjba vonulás vagy egyéb okok miatt.

4. Ahhoz, hogy ezek a változások érzékelhetőek legyenek a népgazdaság szintjén és társadalmilag jelentőssé váljanak, bizonyos időnek kell eltelnie, amely általában meghaladja a rövid- és középtávú tervezés intervallumát. Éppen ezért, a szocialista országokban az utolsó évtizedben a munkaerő- és oktatástervezés egyre nagyobb súllyal fordul a hosszútávú tervek felé. Ugyanakkor kifejlődik egy olyan tervezési rendszer, amely figyelembe veszi a különböző távlatú tervek egymástól való kölcsönös függését.

5. A hosszútávú tervnek nincs olyan kötelező jellege, mint a közép- és rövidtávú terveknek. A hosszútávú terv az illetékes szervek által történt kidolgozás és elfogadás után a gazdaságpolitika stratégiáját fejezi ki. Irányelveket szolgáltat a rövidebb lejáratú tervek kidolgozásához, amely utóbbiak a kormány operatív döntéseinek alapjául szolgálnak. Ebben az értelemben a hosszútávú tervezés a közép- és rövidtávú tervezés fejlesztésének és tökéletesítésének eszköze. Megfordítva, a közép- és rövidtávú tervezés lehetővé teszi a hosszútávú tervezés ellenőrzését és korrekcióját.

6. A hosszútávú és a rövidebb távú tervek között más lényeges különbségek is vannak. A közfelfogással ellentétben, e különbségek csak viszonylag kevésbé jelentkeznek a tervszámítási módszerekben. Az egyik lényeges különbség abban rejlik, hogy a tervidőszak időtartamától függően a társadalmi-gazdasági folyamatok más és más szakaszaira helyezik a hangsúlyt.

7. A különbség tehát nem a tervek részletezettségi fokában van, hanem sokkal inkább abban, hogy a tervek milyen részeit dolgozzák ki részletesebben vagy összevontabban. Például a rövidlejáratú tervek kidolgozása során a különböző iskolatípusokban levő tanulók számát kell részletesen megtervezni. Ezzel szemben a hosszútávú terveknél a hangsúly áttevődik a szakmunkaerő-szükségleti terv kidolgozására és azoknak a képzési szinteknek a megtervezésére, amelyek e szükségletet kielégíthetik, mégpedig a konvertibilitás elve alapján (lásd II. fejezetet) összevont szakmai csoportok szerint. Hasonlóképpen az oktatás hosszútávú tervezése során nagyon pontosan meg kell határozni a köznevelési rendszer horizontális és vertikális struktúrájában szükséges változtatásokat (lásd III. fejezet), miközben az oktatási rendszernek ezt a vonatkozását adottsággként kell kezelni a rövidtávú tervezésben.

8. A különböző távlatú tervek között jelentős különbség van azoknak a paramétereknek, koeficienseknek és egyéb mutatóknak a kidolgozása során felmerülő nehézségek tekintetében is, amelyek a tervszámításokhoz szükségesek, valamint a kidolgozott mutatók hibahatárai vonatkozásában is. Rövid távon a már lezajlott vagy megkezdődött folyamatok többsége szűk határok közé szorítja az ezeket a folyamatokat jellemző paraméterekben bekövetkező

változásokat. Minél hosszabb a tervidőszak, annál nagyobb lehetőség van a mutatók változására és ezzel párhuzamosan a hibahatárok és a paraméterek kidolgozásában mutatkozó nehézségek is növekednek. Ez a magyarázata annak, hogy a hosszútávú tervezésben a tudományos kutatás és elemzés szerepe megnő nemcsak a múlt vonatkozásában, hanem, és főként, a folyamatok fejlődési irányainak előre becsülésében is. A hosszú táv ugyanakkor növeli a választási lehetőséget a különböző utak és a különböző fejlesztési módok között. Éppen ezért, a terv jóváhagyását megelőző időszakban a fejlesztési lehetőségeket kifejező variánsok kidolgozásának igen nagy fontossága van.

## I. Az általános munkaerőtervezés módszerei

### 1. A munkaerőmérlegek rendszere

9. A munkaerőtervezés módszertana szorosan összefügg a szocialista foglalkoztatáspolitikai elvi alapjaival és céljaival. Ezek megfogalmazásában és elméleti indokolásában az esetenként fellelhető részletbeni eltérések mellett tartalmilag azonos követelmény minden szocialista országban a népgazdaság munkaerőszükségletének és a foglalkoztatás iránti igények volumenének és struktúrájának összehangolása abból a célból, hogy a munkát igénylők a képzettségüknek és képességeiknek megfelelően munkát találjanak, tehát a társadalmi értelemben vett munkanélküliséget elkerüljék és ugyanakkor e munkaerő foglalkoztatása minél hatékonyabban szolgálja a gazdasági növekedést. A *teljes foglalkoztatottság* ebben az értelemben tehát azt jelenti, hogy a munkaerőszükséglet és a munkaerőforrások nemcsak globálisan, hanem strukturálisan is kiegyensúlyozottak [28].

10. A szocialista országok munkaerő tervezésének alapvető eszköze a munkaerő mérlegek rendszere. E mérleg számbaveszi és szembeállítja egymással egyrészről a népgazdaság munkaerő szükségletét, másrészről a munkaképes lakosságot, azaz a munkaerő forrásokat és az ezek közül munkát igénylőket; mégpedig nemcsak volumenben (a foglalkoztatást kívánók és a munkahelyek globális létszámában), hanem az igények és a munkaerő források minőségi struktúrájában is. Ez a szembeállítás lehetővé teszi a népgazdaság munkaerő-egyensúlyának vizsgálatát, a kívánatos egyensúlytól való eltérések megállapítását és egyensúlyhiány esetén a megfelelő intézkedések kidolgozását az egyensúly biztosítása céljából.

11. A munkaerő mérlegek több, egymással szorosan összefüggő mérlegekből állnak, amelyek együttesen konzisztens rendszert alkotnak. E rendszer legfontosabb részei a következők:

- összevont munkaerő-mérleg,
- szükséglet-fedezeti mérleg,
- ifjúsági mérleg.

A mérlegekhez számos számítási tábla tartozik, amelyek közül egyeseket valójában ugyancsak mérlegekként kezelnek. E táblák száma különböző országok között is, és a tervidőszak tartama szerint is. A hosszútávú tervek esetében számuk többszázra is rúghat.

12. A munkaerőmérlegeket a szocialista országokban hosszú idő óta sikerrel alkalmazzák. Elkészítésük kezdetben az ún. „hagyományos” módszerekkel történt és történik jórészt jelenleg is. Egyes országokban azonban megkezdő-

dött e mérlegszámítások gépesítése is. Könnyen belátható, hogy a munkaerő-mérleg számításai jól megfogalmazhatók a mátrix algebra nyelvén és ily módon alkalmassá válnak a gépesítésre [5]. A részsámítások gépesítése olyan ember-gép modellek alkalmazását is lehetővé teszi, amelyeknél egy-egy számítás-sorozat végén a gépi számítás megszakad, lehetővé válik a számítás-sorozatban jelentkező ellentmondások közgazdasági elemzése, majd az elemzés alapján módosított paraméterekkel az újabb számítás-sorozat gépi úton való ismételt elvégzése. Megoldható e modell olyan továbbfejlesztése, amely a paraméterek szükséges változtatását maga végzi el.

## 2. Az összevont munkaerőmérleg

13. Az összevont munkaerőmérleg a foglalkoztatott munkaerő létszám-változását tartalmazza a tervidőszak kezdete és vége között, azaz azt vizsgálja, hogy a tervidőszak alatt hogyan változik meg egyfelől a népgazdaság munkaerőszükséglete, másfelől a foglalkoztatást igénylők száma. A mérleg e két oldal azonosságát, azaz a foglalkoztatás egyensúlyát tervezi a tervidőszak végére.

14. A népgazdaság munkaerőszükségletének meghatározása a termelés ágazatonkénti felfutása, a beruházások és a műszaki fejlődés, valamint a termelékenység alakulására vonatkozó számítások alapján történik [22]. Ezek a számítások — a népgazdasági tervezés konzisztens rendszerén belül — az ágazati tervezés részei és ily módon a munkaerő-tervezés számára *külső* információt jelentenek. A munkaerő-tervezés azonban — előzetes becslésként, első megközelítésként, valamint az ágazati számítások „fogadására”, azok ellenőrzésére — maga is végez számításokat a termelékenység és termelés alakulására — legalábbis a népgazdaság alapvető ágai vonatkozásában.

A népgazdaság munkaerőszükségletének számítási módszerét a következő általános formula fejezi ki [21]:

$$L_i = \frac{P_i}{p_i},$$

ahol:

$L_i$  = az  $i$ -edik ágazat munkaerőigénye,

$P_i$  = az  $i$ -edik ágazat termelése,

$p_i$  = az  $i$ -edik ágazat termelékenysége.

A népgazdaság teljes munkaerőszükséglete ( $L$ ) pedig

$$L = \sum_i L_i.$$

15. A foglalkoztatást igénylők számának megállapítása a demográfiai prognózisokból indul ki. A demográfiai prognózisok megállapítják a lakosság várható létszámát, nem és kor szerinti összetételét a tervidőszak végére.

A demográfiai előrejelzés szokásos módszere a következő:

Az  $x$  korú népességet a bázisév lakosságának évről-évre történő továbbéltetésével kapják a következő formula segítségével:

$$L_{x+1}^{t+1} = L_x^t \cdot P_x^t,$$

ahol  $P_x^t$  annak valószínűsége, hogy a  $t$  naptári év elején életben levő  $x$  korú népesség megéri  $(t + 1)$  naptári év elejét, tehát az  $(x + 1)$  életévét.

A belépő generációk számának meghatározását kifejező formula:

$$N^t = \sum_x (L_x^{t-1} + L_{x+1}^{t-1}) 0,5 f_x^t,$$

ahol:

$$N^t = a \text{ t naptári év folyamán történő éves születések száma;}$$

$$L^t = a \text{ t naptári év elején az } x \text{ korú nők száma;}$$

$$f_x = a \text{ korszpecifikus születési arányszám.}$$

16. E prognózisból kiindulva az összevont munkaerőmérleg számításainak első menete a következő:

- megállapítják a munkaképes korban levő lakosság számát,
- ebből levonásra kerül a háztartásban elfoglaltak, a munkaképes korú tanulók és a munkaképtelenek létszáma,
- megbecsülik a foglalkoztatást igénylő, munkaképes koron túli népesség létszámát.

17. E számítások eredménye adja a foglalkoztatást igénylőkre vonatkozó első prognosztizált létszámot.

A népgazdaság munkaerőszükségletére és a foglalkoztatást igénylők számára vonatkozó első számítások csak véletlen esetben mutatnak azonnal egyensúlyi állapotot. Az egyensúly kialakítása a prognózisokban alkalmazott paraméterek változtatásával történik. Az első prognózisokban alkalmazott paraméterek többnyire a múlt fejlődési tendenciáinak vagy a tervezés időpontjában kialakult arányoknak a jövőre való kivetítését jelentik. E paraméterek azonban nem merevek. A társadalmi-gazdasági fejlődéssel egyes paraméterek „automatikusan” is változnak és bizonyos határok között a paraméterek megfelelő intézkedésekkel változtathatók, amire a tervezők a társadalmi célok realizálásával tudatosan is törekcszenek. A változtatások lehetőségét könnyen megérteni a következők alapján:

18. A demográfiai előrejelzés szokásos módszereinél a demográfusok általában a hosszabb vagy rövidebb időre visszanyúló múlt tendenciáinak előre vetítésével alakítják ki a lakosság létszámára és korösszetételére vonatkozó előrebecsléseiket. A szocialista tervezési gyakorlat „befolyásolt” demográfiai előrejelzései nem egyszerűen a múlt tendenciáit vetítik előre, hanem azt vizsgálják, milyen demográfiai fejlődés kívánatos és egyúttal lehetséges a jövőben, figyelembe véve a spontán fejlődést várhatóan befolyásoló politikai, gazdasági és társadalmi intézkedéseket. Ilyen intézkedések például a születésekre ható családi pótlék, gyermekgondozási segély rendszere, a fogamzásra ható egészségügyi intézkedések stb.

19. A munkaképes korú lakosság foglalkoztatási szintjének szabályozása az európai szocialista országok eddig kialakult viszonyai között elsősorban a népgazdaságból a háztartásba, illetve a háztartásból a népgazdaságba irányuló mozgás befolyásolásával lehetséges. Akár csak a demográfiai fejlődést befolyásoló eszközöknél, a szocialista munkaerő-tervezés itt is figyelembe veszi a befolyásolás korlátait, de igyekszik kihasználni e korlátok között a manőverezés lehetőségeit. A férfiak foglalkoztatása a szocialista országok mindegyikében a demográfiai maximum körül van [24]. A nem foglalkoztatott munkaképes korú férfiak szinte kizárólag a munkaképes korú tanulókhöz, és a testi vagy szellemi fogyatékosokhoz, valamint a tartós vagy végleges rokkantság következtében munkaképtelenek közé tartoznak. Éppen ezért a munkaképes korú népesség foglalkoztatási szintjére vonatkozó prognózisok lényegében a nők foglalkoztatásának társadalmi-gazdasági problémaköréhez vezetnek el. A nők foglalkoztatási szintje alsó és felső értékeinek tervezésekor a szocialista foglalkoztatás-politika általában a következő tényezőket hatását veszi figyelembe:

a) A foglalkoztatási igények növekedése irányába hat:

- a nők társadalmi egyenjogúságának megvalósítására való törekvés;
  - a nők iskolázottsági színvonalának folytonos emelkedése;
  - a nők gazdasági egyenjogúságának megvalósítását szolgáló törekvések;
- az „egyenlő munkáért-egyenlő bért” elve gyakorlati alkalmazása;
- a gyermekellátás és gyermekgondozás terhére megkönnyítő intézmények és a háztartási munkát segítő kereskedelmi és szolgáltatási hálózat fejlesztése (óvoda, napközi stb.);
  - végül, de nem utolsó sorban a nők számára kedvező munkalehetőségek bővülése.

b) A nők háztartásban való maradási hajlamát erősítő tényezők:

- a jövedelmi színvonal általános emelkedése;
- a családi pótléknak a gyermekek családi eltartási költségeihez való közeledése;
- a csecsemőkorú kisgyermekkel rendelkező anyák otthonmaradását elősegítő speciális segélyek (pl. gyermekgondozási segély);
- a családi-háztartási munkát megkönnyítő intézményekben mutatkozó hiány, illetve munkájuk hiányosságai;
- és végül, de nem utolsó sorban, a női munkaerő iránti kereslet relatív csökkenése.

20. A felsorolt tényezők pozitív vagy negatív hatása számszerűen is megbecsülhető, ha a tervezés a szorosan vett közgazdasági kutatások mellett, demográfiai és szociológiai tudományos vizsgálatokra is támaszkodik. Hasonlóképpen jól körülhatárolható, hogy — a biológiai előregedésre és az idősebbek munkavállalására és foglalkoztatására ható adott körülmények között — milyen mértékben szabályozható a munkaképes koron túl levő, idősebb népesség gazdasági aktivitása például a nyugdíjrendszer megfelelő módosításával. Ennek számításait az öregkorú keresők mérlege foglalja össze.

21. Abban az esetben, ha a munkaerő-tervezés az előzőekben említett szabályozók és a hozzájuk tartozó foglalkoztatási paraméterek meghatározott korlátok közötti változtatásával a mérleg egyensúlyát kialakítani nem tudja, vagy a szükségesnek látszó intézkedések társadalmilag hátrányos ellentmondásokat keltenének életre, a gazdasági ágazatok tervezésében a termelés, a műszaki fejlesztés, a termelékenység paramétereinek megváltoztatására kerül sor.

A 13–21. pontban vázolt számítások formalizált összefoglalása a következő:

Kiindulópont a tervidőszak utolsó évére ( $T$ ) vonatkozó demográfiai előrejelzés:

Legyen  $\mathbf{I}_x$  a lakosság számának vektora, korszertinti bontásban, a tervidőszak végén;  $\mathbf{I}_x^m$  és  $\mathbf{I}_x^f$  a férfi lakosság és a női lakosság vektora.

$$\mathbf{I}_x = (L_0^T, L_1^T, \dots).$$

A lakosságot (nemek szerinti bontásban) osszuk három részre:

1)  $\mathbf{I}'_{x,1} = (L_0^T, L_1^T, \dots, L_{14}^T)$  a munkaképes korhatár alatt levő népesség korévenkénti bontásban;

$\mathbf{I}'_{x,2}$  = a munkaképes korú lakosság;

2)  $\mathbf{I}^m_{x,2} = (L_{15}^{m,T}, \dots, L_{60}^{m,T})$  (ha pl. 15 év a férfiaknál a munkaképes kor alsó határa és 60 év a felső határa);

3)  $\mathbf{I}^f_{x,2} = (L_{15}^{f,T}, \dots, L_{55}^{f,T})$  (ha pl. a nőknél 55 év a munkaképes kor felső határa);

4)  $\mathbf{I}'_{x,3}$  = a munkaképes korhatáron túli lakosság;

$$\mathbf{I}_{x,3}^{m'} = (L_{61}^{m,T}, L_{62}^{m,T}, \dots)$$

$$\mathbf{I}_{x,3}^{f'} = (L_{56}^{f,T}, L_{57}^{f,T}, \dots)$$

azaz

$$\mathbf{I}_x^m = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{x,1}^m \\ \mathbf{I}_{x,2}^m \\ \mathbf{I}_{x,3}^m \end{pmatrix}$$

és

$$\mathbf{I}_x^f = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{x,1}^f \\ \mathbf{I}_{x,2}^f \\ \mathbf{I}_{x,3}^f \end{pmatrix}.$$

Jelentse  $\alpha_x^m$  az  $x$  korú olyan férfiaknak az arányát, akik tanulnak és emiatt munkára nem vehetők igénybe és  $\alpha_x^f$  ennek női megfelelőjét,

$$\alpha_x^{m'} = (a_{15}^m, a_{16}^m, \dots, a_{25}^m, 0, 0, \dots)$$

(azaz pl. 25 évtől gyakorlatilag zérus).

Jelölje  $\langle \alpha_x^m \rangle$  az  $\alpha_x^m$  vektor elemeiből képezett diagonális mátrixot. Vonjuk ki a munkaképes korúakból a tanulók számát

$$\mathbf{I}_{x,2}^{m,1} = (\mathbf{E} - \langle \alpha_x^m \rangle) \mathbf{I}_{x,2}^m,$$

ahol  $\mathbf{E}$  az egységmátrix.

Hasonlóképpen

$$\mathbf{I}_{x,2}^{f,1} = (\mathbf{E} - \langle \alpha_x^f \rangle) \mathbf{I}_{x,2}^f.$$

Jelöljük  $\beta_x^m$ -el az  $x$  korú férfiak közül a fizikai vagy szellemi alkalmatlanság (rokkantság) következtében nem foglalkoztathatók arányát, és  $\langle \beta_x^m \rangle$ -el az ezekből az arányszámokból képzett diagonális mátrixot.

$$\mathbf{I}_{x,2}^{m,2} = \mathbf{I}_{x,2}^{m,1} - (\langle \beta_x^m \rangle \mathbf{I}_{x,2}^m),$$

$\mathbf{I}_{x,2}^{m,2}$  megadja a foglalkoztatható és foglalkoztatandó munkaképes korú férfiak számát. Jelölje  $\beta_x^f$  az  $x$  korú nők közül a háztartásban maradók felső határát (százalékban) és  $\hat{\beta}_x^f$  az alsó határát, akkor

$$\mathbf{I}_{x,2}^{f,2} = \mathbf{I}_{x,2}^{f,1} - (\langle \hat{\beta}_x^f \rangle \mathbf{I}_{x,2}^f)$$

megadja a foglalkoztatható és foglalkoztatandó munkaképes korú nők számának alsó határát, korévenként, és

$$\hat{\mathbf{I}}_{x,2}^{f,2} = \mathbf{I}_{x,2}^{f,1} - (\langle \beta_x^f \rangle \mathbf{I}_{x,2}^f)$$

a foglalkoztatható munkaképes korú nők számának felső határát korévenkénti bontásban.

A munkaképes koron túl levők foglalkoztatásának arányait ugyancsak egy intervallumban lehet megadni.

Jelentse  $\gamma_x^m$  és  $\hat{\gamma}_x^m$  az  $x$  korú munkaképes koron túli férfiak foglalkoztatási szintjének alsó, illetve felső határát; és  $\gamma_x^f$ , illetve  $\hat{\gamma}_x^f$  jelentse ugyanezt a nőkre vonatkozóan;

$$\mathbf{I}_{x,3}^{m,1} = \langle \gamma_x^m \rangle \mathbf{I}_{x,3}^m$$

és

$$\hat{\mathbf{I}}_{x,3}^{m,1} = \langle \hat{\gamma}_x^m \rangle \mathbf{I}_{x,3}^m,$$

illetve

$$\mathbf{I}_{x,3}^{f,1} = \langle \gamma_x^f \rangle \mathbf{I}_{x,3}^f$$

és

$$\hat{\mathbf{i}}_{x,3}^{f,1} = \langle \hat{\gamma}_x^f \rangle \mathbf{k}_{x,3}^f,$$

$\mathbf{e}$ -vel jelölve az összegező vektort,  
a férfi foglalkoztatottak számának alsó határa tehát:

$$\mathcal{L}^m = \mathbf{e} \mathbf{l}_{x,2}^{m,2} + \mathbf{e} \mathbf{l}_{x,3}^{m,1},$$

a női foglalkoztatottak számának alsó határa:

$$\mathcal{L}^f = \mathbf{e} \mathbf{l}_{x,2}^{f,2} + \mathbf{e} \mathbf{l}_{x,3}^{f,1},$$

a férfi foglalkoztatottak számának felső határa:

$$\hat{\mathcal{L}}^m = \mathbf{e} \mathbf{l}_{x,3}^{m,2} + \mathbf{e} \hat{\mathbf{i}}_{x,3}^{m,1},$$

a női foglalkoztatottak számának felső határa:

$$\hat{\mathcal{L}}^f = \mathbf{e} \hat{\mathbf{i}}_{x,2}^{f,2} + \mathbf{e} \hat{\mathbf{i}}_{x,3}^{f,1}.$$

Az egész lakosságra vonatkozóan tehát a foglalkoztatás alsó határa:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^m + \mathcal{L}^f,$$

a foglalkoztatás felső határa pedig:

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}^m + \hat{\mathcal{L}}^f.$$

Ha az  $i$ -edik ágazat termelési előirányzata a tervidőszak végére  $P_i$ , termelékenységési előirányzata  $p_i$ , akkor az ágazatok összes létszámgénye

$$L = \sum_i \frac{P_i}{p_i}.$$

Ha  $L < \mathcal{L} < \hat{\mathcal{L}}$ , azaz ha az ágazatok létszámgénye az előzőekben kapott foglalkoztatási alsó és felső határ között van, akkor a foglalkoztatás globális egyensúlya biztosítva van és a feladat a  $\beta$  és  $\gamma$  paraméterek olyan beállítása, hogy az igénybevehető munkaerőforrások éppen egybeessenek a foglalkoztatási szükséglettel. Ha ez nem teljesül ( $\mathcal{L} < L$  vagy  $\hat{\mathcal{L}} < L$ ), akkor az ágazatokkal való egyeztetés szükséges a termelési vagy termelékenységési paraméterek megváltoztatása érdekében.

22. Az összevont munkaerőmérleg tehát végső soron megadja a tervidőszak elején és végén foglalkoztatottak létszámát, a foglalkoztatottak megoszlását a népgazdaság különböző ágai között, és megfelelő felvilágosítással szolgál a foglalkoztatottság nem és kor szerinti megoszlására. A foglalkoztatottság szakmai és képzettségi struktúrájára vonatkozóan már csak korlátozott és közvetett jelzést ad és nem informál a két időpont között lejátszódó folyamatról. Ebből a szempontból tehát statikus végpontszemlélet jellemzi az összevont munkaerőmérleget. Lezárása azonban módszertanilag is csak akkor történhet meg, ha a két időpont közötti folyamat tervezése igazolja a tervidőszakot befejező időpont céljainak helyességét és realitását.

### 3. A szükséglet-fedezeti mérleg

23. A népgazdaság foglalkoztatási egyensúlyának dinamikus tervezésére a szükséglet-fedezeti mérleg szolgál. Ez a mérleg a tervidőszak kezdetén rendelkezésre álló munkaerőforrásokat mind demográfiai, mind pedig gazdasági



szempontból továbbélteti. A szükséglet-fedezeti mérleg megállapítja, hogy a tervidőszak kezdetén foglalkoztatottak közül

— mennyien halnak meg, illetve válnak fizikailag vagy szellemileg munkaképtelenné;

— a munkaképes korban levő foglalkoztatottak közül mennyien lépnek vissza a háztartásba;

— mennyien válnak gazdaságilag inaktívvá nyugdíjazás következtében; (számításait az „öregkorú keresők mérlege” tartalmazza).

Ezen kívül információkat nyújt arról, hogy

— milyen irányú és mértékű az egyes népgazdasági ágak közötti munkaerő-mobilitás és mekkora ennek az egyes népgazdasági ágakban várható egyenlege.

24. E számítások (előrebecslések) elvégzése után, ezek összegeként megadják a népgazdaságban foglalkoztatottak közül a tervidőszak alatt demográfiai és társadalmi mobilitási okokból kieső teljes munkaerő létszámát. Ehhez hozzáadva az összevont munkaerőmérleg alapján számított létszámkülönbötet, megkapjuk a népgazdaság teljes új munkaerőszükségletét a tervidőszak folyamán.

25. A teljes új munkaerőszükséglet kielégítésére a következő munkaerő-források állnak rendelkezésre:

— az ifjúság közül a tervidőszak folyamán munkába lépők;

— a háztartásból a társadalmi foglalkoztatásba belépők, munkaképes korú népesség;

— a munkaképes korban túli népességből gazdaságilag reaktiváltak;

— az ágazatok közötti munkaerőmobilitás egyenlegeként egyes ágazatokban jelentkező „nyereség”.

26. A szükséglet-fedezeti mérleg teljes elkészítése magában foglalja az ifjúsági mérleg, valamint az öregkorú keresők mérlegének végső eredményeit, valamint lehetővé teszi az összevont munkaerőmérleg lezárását (lásd 22. pont). A szükséglet-fedezeti mérleg tehát az egész munkaerő és oktatástervezési munka szintézisét jelenti. Amennyiben az említett számítások megbízható vizsgálatokon és részszámításokon alapulnak, e mérleg elkészítése egyúttal az általános munkaerőtervezés befejeztét jelenti.

#### 4. Az ifjúsági mérleg

27. A szükséglet-fedezeti mérleghez szorosan kapcsolódó ifjúsági mérleg végigkíséri a fiatal korosztályok sorsát az iskolázás kezdetétől a munkába-állásig, illetőleg a háztartásba lépésig. Ennek az útnak legfőbb állomásai, amelyekről az ifjúsági mérleg felvilágosítással szolgál:

— az iskolarendszerbe való belépés;

— az iskolarendszeren belüli mozgás: egyik osztályból a másikba, illetve egyik iskolatípusból a másikba, mind vertikális, mind horizontális irányba;

— az iskolából való kilépés — megkülönböztetve a tanulmányok félbehagyását és befejezését — a népgazdasági tevékenység valamelyik ágába vagy a háztartásba.

28. Az ifjúsági mérleg, azáltal, hogy végigvezeti a fiatal korosztályokat az iskolarendszer különböző szakképzettséget nyújtó iskolatípusain, azt is megmutatja, hogy a fiatalok milyen szakképzettséggel lépnek ki az iskolarendszerből. Ebből következően az ifjúsági mérleg meghatározott szakképzettségű fiatalokat oszt el az ennek megfelelő gazdasági ágak között.

29. Az ifjúsági mérlegnek tehát két alapvető feladata van:

- a) a fiatal korosztályok elosztása az iskolarendszer különböző típusai között;
- b) a tanulmányaikat befejező (vagy félbehagyó), meghatározott képzettséggel rendelkező (vagy szakképzetlen) fiatalok elosztása a népgazdaság különböző ágai között.

30. Az első, lényegében az oktatás tervezésének alapvető feladata. Az ifjúsági mérleg ily módon az oktatási terv sajátos visszatükröződése. A második feladat, amely az ifjúsági mérleg sajátos funkciója, látszólag egyszerű. Annak biztosítása azonban, hogy a tervezett elosztás ténylegesen megvalósuljon, az operatív foglalkoztatáspolitikai nem könnyű feladata.

A szakemberszükségletet megfelelő struktúrában kielégítő oktatási rendszert egy olyan  $\mathbf{O} = [o_{ij}]$  mátrixszal ábrázolhatjuk, amelynek  $o_{ij}$  eleme annak valószínűségét adja meg, hogy — egyik évről a másikra — milyen valószínűséggel kerülnek a tanulók a rendszer  $i$ -edik helyéről a  $j$ -edikre [12].

Az  $\mathbf{O}$  mátrix három részből áll. Az első rész ( $\mathbf{X}$ ) az oktatási rendszeren belüli belső mozgásokat írja le, a második rész ( $\mathbf{Y}$ ) az oktatási rendszernek a munkaerő-csatornába való kibocsátásait, míg a harmadik ( $\mathbf{Z}$ ) a gazdaságilag inaktívra válást (háztartásba lépés).

Az iskolarendszer  $m$  szakképzettséget adó  $m$  iskolatípus és összesen  $n$  iskolai évfolyamot tartalmaz.

Jelöljük  $\mathbf{q}^t$ -vel  $[q_1^t, q_2^t, \dots, q_n^t]$  az iskolarendszer különböző osztályaiban levő tanulók számát,

$q^{*t}$ -vel a  $t$ -edik évben a kötelező oktatás első évfolyamára beiskolázottak számát. Akkor

$$\mathbf{q}^t = \mathbf{X}'\mathbf{q}^{t-1} + \mathbf{q}^{*t} \mathbf{e}_1,$$

ahol  $\mathbf{e}_1$  az első egységvektor [ $\mathbf{e}_1' = (1, 0, \dots, 0)$ ]. Az iskolarendszertől a termelésbe belépők száma  $[\mathbf{b}^t = (b_1, b_2, \dots, b_m)]$

$$\mathbf{b}^t = \mathbf{Y}'\mathbf{q}^t.$$

Jelentse  $r_{ij}$  [ $r_i' = (r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{ip})$  és  $p$  a termelő ágazatok száma] azt, hogy az  $i$ -edik szakképzettséggel a termelésbe lépők ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) milyen arányban lépnek a  $j$ -edik ágazatba ( $j = 1, 2, \dots, p$ ).

Képezzük az

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{r}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{r}_m \end{pmatrix}$$

diagonális mátrixot, amelynek  $m \cdot p$  sora és  $m$  oszlopa van. Az  $\mathbf{R}\mathbf{b}^t$  szorzat első  $p$  eleme megadja az első típusú (pl. szakképzetlen) munkaerő számát, amely rendre az 1, 2, ...  $p$ -edik ágazatba lép és így tovább. Ezt kell egybevetni a teljes új munkaerőszükségletnek az ifjúsági forrásból fedezendő részével.

31. Végső soron az ifjúsági mérleg — a szükséglet-fedezeti mérlegen keresztül — annak folyamatos ellenőrzését jelenti, hogy a népgazdaság távlati szakemberszükségleti terve valamint az erre alapozott távlati oktatásfejlesztési terv létrehozza-e munkahelyi és e szakmai struktúra közötti folyamatos összhangot és ezáltal a foglalkoztatás szakmai struktúrájának egyensúlyát. Ezt a bonyolult feladatot az ifjúsági mérlegben egy olyan számítási rendszerrel oldják meg, amely önmagában is zárt rendszert alkot. Ennek legfontosabb elemei a következők:

- a munkaképes korú tanulók táblája,
- az iskolát elhagyó vagy befejező fiatalok táblája,

- a tanulmányaikat folytató fiatalok elosztási táblája,
- a tanulmányaikat befejező fiatalok elosztási táblája.

Ezek a táblák részletezve vannak oktatási szintek és az iskolatípusok szerint.

## II. A szakmunkaerőszükséglet tervezésének módszerei

### 1. Alapelvek

32. A szocialista országok tervezési gyakorlatában az oktatás tervezésének alapja és kiindulópontja a népgazdaság munkaerőszükséglete. Ebből következően a szakmunkaerőszükséglet tervezésével szembeni követelményeket az oktatás tervezésének igényei nagymértékben meghatározzák és megfordítva. Ez az összefüggés szükségszerűen következik abból, hogy az iskolarendszer képzettségi szint és oktatási tartalom szerint differenciált struktúrája, amely lényegében a konkrét társadalmi munkamegosztás sajátos kifejeződése, a gazdasági fejlettségtől, a tudományos és technikai színvonalától függ. Ezért, ha az oktatás egész rendszerét arányosan és tervszerűen kívánjuk fejleszteni, akkor a népgazdaság munkaerőszükségletét is teljeskörűen, a képzettség szintje és tartalma szerint differenciálva kell megtervezni. Ezt a *szakmunkaerőszükséglet globális és komplex tervezési elvének* nevezzük [28]. Ez az elv azt a követelményt támasztja a tervezőkkel szemben, hogy a tervezés ne csak egyes „fontosnak” tűnő ágazatra vagy szakmára korlátozódjék, hanem minden ágazat teljes munkaerőszükségletét felölelje, valamennyi szintre (iskolázottság) és valamennyi szakmára (foglalkozás) kiterjedjen.

33. A globális és komplex szakmunkaerőtervezés elve szükségszerűen felveti a tervek részletezettségének, a szakmunkaerőszükséglet szakmák és szintek szerinti bontásának problémáját. Az egyes országokban összeállított foglalkozási jegyzékek több ezer egyéni foglalkozást, szakmát tartalmaznak. Ezek száma a tudományos és technikai fejlődéssel gyorsan növekszik. Az oktatás ugyan nagymértékben integrálja az egyéni foglalkozásokat, azonban még az iskolai szakoktatás is — a szakmunkásképzést belcélrtve — egy-egy országban többszáz, különféle jellegű és szintű képzésre tagozódik. Ilyen részletezettséggel hosszabb távra nem lehet, de nem is szükséges a szakmunkaerőszükséglet megtervezni. A tervezés túlzott, indokolatlan részletezettsége nemcsak a tervezési munka volumenét, hanem a tervek hibalehetőségeit is megsokszorozza.

34. A népgazdaság távlati szakmunkaerőszükségletét csak összevont szakmai csoportokra célszerű kidolgozni, a *konvertibilitás elve* alapján [28]. Konvertibilitásnak azokat a szakmákat tekintjük, amelyek tartalmilag közel állnak egymáshoz és amelyekben ezért az alapképzés többnyire azonos, a szakosítás pedig nagyobb részt a képzés befejező szakaszában történik. Ilyen feltételek mellett a végző szakemberek az egymáshoz közeleső szakmák bármelyikében hasznos munkát tudnak végezni megfelelő begyakorlás után, de külön átképzés nélkül. Példaként megemlíthető, hogy az egyes szocialista országok egyetemien és műszaki főiskoláin 50—100, a Szovjetunió esetében még nagyobb számú specializált szakmára képeznek ki mérnököket. A konvertibilitás elve alapján e szakmákat 10—20 csoportra össze elehet vonni. A konvertibilitás elve ilyen módon lehetővé teszi, hogy a tervezők eleget tegyenek a globális és komplex tervezési elvnek anélkül, hogy a tervek túlzott részletezésének hibájába esnének.

35. A szakmunkaerőszükséglet tervezésének harmadik koncepcionális elve a *szakmunkaerőtervezés és az oktatás tervezésének direkt kapcsolata* [28]. Ez abból is következik, hogy az oktatás tervezésének egyik közvetlen célja: biztosítani a munkahelyi struktúra és a szakmai struktúra közötti összhangot, elősegíteni a munkaerőszükséglet és a munkaerőforrások közötti egyensúly kialakulását. A szakmunkaerőszükséglet tervezésénél ezért elvi és módszertani okokból is abból indulnak ki a szocialista országok tervezői, hogy egyéni-társadalmi, de szorosán vett gazdasági (hatékonysági) szempontból is az a célszerű, ha az emberek iskolában szerzett szakképzettsége (ismeretei) megfelelnek a betöltött munkahelyek követelményeinek.

36. Ez a kapcsolat egyes szakmák esetében általánosan elfogadott (például az orvosi foglalkozást automatikusan azonosítja mindenki az orvosi képzettséggel). Minél kevésbé specifikus szakképzettséget igényel valamelyik szakma (foglalkozás), annál nagyobb az eltérés a gyakorlatban a munkahelyi-szakmai és a képzettségi-ismereti struktúra között. A tudományos fejlődéssel azonban minden foglalkozásban, szakmában növekednek a minőségi követelmények és így növekszik azoknak az aránya, akik az adott foglalkozáshoz szükséges általános és szakmai ismereteiket megfelelő iskolákban szerezték meg. Ebből kiindulva a szakmunkaerőszükségleti tervek szakmai csoportosításának rendszere a különböző színvonalú és típusú oktatási intézmények csoportosításának felel meg — a konvertibilitás elve alapján. A tervezés során a munkahelyeket, azok munkakövetelményeinek elemzése alapján, a megfelelő szakmai csoporthoz sorolják be.

37. A szakmunkaerőszükséglet és oktatás tervezése közötti direkt kapcsolat azt a további követelményt támasztja a tervezőkkel szemben, hogy különös gonddal vizsgálják a társadalmi (szakmai) mobilitásból eredő veszteségeket. A végző szakemberek egy része nem marad meg első ízben megszerzett képzettségénél. Ennek a mobilitásnak egyik, társadalmilag hasznos iránya a munkaerő vertikális „felfelé” irányuló mobilitása. Így például minden szocialista országban a szakmai középiskolában végző „technikusok” viszonylag jelentős része azonnal vagy később, munka mellett, továbbtanul és magasabb képzettséget (például mérnöki diplomát) szerez. Másféle, társadalmilag nem hasznos, de alig elkerülhető, a munkaerő „lefelé” irányuló vertikális mobilitása. Ennek következtében a kiképzett szakemberek egy része olyan munkát végez, amelynek követelményei alacsonyabbak, mint a megszerzett iskolai képzettség. A vertikális mobilitással egyidőben az egyes szakmákban különböző mértékű a horizontális szakmai mobilitás. A szakképzésnek tehát nemcsak az egyes szakmákban dolgozók állományváltozását, valamint a nyugdíjalépők és elhalálozók miatti „természetes” veszteséget kell pótolnia, hanem a társadalmi mobilitás miatt kieső munkaerőt is pótolnia kell.

## 2. Normatív módszerek

38. A szakmunkaerőszükséglet tervezésében alkalmazott két legfőbb módszer a *normatív módszer* és a *fajlagos együttthatók* másnéven *szaturációs koeficiensek* módszere [22].

39. A normatív módszer lényege az, hogy a termelés felfutását jellemző különböző mutatószámokhoz munkaerőszükségleti fajlagosokat rendelnek hozzá. Így például munkaerőszükségleti normák tartozhatnak a bruttó termeléshez, a nettó termeléshez, a nemzeti jövedelemhez, az állóeszközállomány-

hoz stb. Ezeknek a normáknak és a termelés felfutásának, az állóeszköz állomány alakulásának stb. ismeretében meg lehet határozni a termelés növekedéséhez szükséges munkaerőszükségletet.

A *normatív* módszert példaként jellemzi a következő formula [8]:

$$L^i = \lambda_i K_0(1 + z)^T,$$

ahol:

$K_0$  = a bázisidőszak állálapja,

$\lambda_i$  = az állóalapok fajlagos létszámszükséglete,

$z$  = az állóalapok növekedési üteme,

$L^i$  = a munkaerőszükséglet az  $i$ -edik kategóriájú munkaerőből. Normatíva lehet a termelékenységi mutató is. Ebben az esetben:

$$L = \lambda P,$$

ahol  $p$  a termelés.  $\lambda = \frac{1}{p}$  helyettesítéssel kapjuk az  $L = \frac{P}{p}$  termelékenységgel kifejezett létszámszükségletet ( $p$  a termelékenység).

40. A normatív módszer segítségével kapott bruttó létszámhoz, közvetlen termelő létszámhoz, vagy munkáslétszámhoz az úgynevezett *szaturációs együtthatók*, vagy *fajlagos mutatók* segítségével lehet hozzárendelni a megfelelő, szorosabb értelemben vett szakmunkaerő-szükségletet [21]. Így például szokásos megadni az 1000 munkásra jutó gépész-, vegyész-, stb. mérnök, technikus és szakmunkás-szükségletet, vagy az 1000 foglalkoztatottra jutó egyetemi végzettségű, főiskolai végzettségű, középiskolai végzettségű egészségügyi dolgozó arányszámát. Ily módon a normatív módszer és a szaturációs együtthatók módszerével együttesen meghatározható valamely ágazat munkaerőszükséglete és az ágazatok összesítésével az egész népgazdaság munkaerőigénye globálisan és megfelelő strukturális bontásban.

41. Az eddigiekből is kitűnik, hogy a szaturációs együtthatók módszere is tulajdonképpen normatív módszert jelent. A különbség annyi, hogy a normatív módszer általában a népgazdasági tevékenység anyagi tényezőinek alakulásához rendel hozzá munkaerő normákat, míg a szaturációs együtthatók tulajdonképpen a munkaerő strukturális megoszlására jellemző viszonyszámokat jelenti.

Például, ha

$L^M$  = a munkáslétszám,

$L^F$  = az okleveles gépészmérnökszükséglet,

$\lambda^F$  = a fajlagos okleveles gépészmérnökszükséglet,

$$L^F = \lambda^F L^M.$$

### 3. Prognosztikus és extrapolációs módszerek

42. Mindkét módszer alkalmazásának alapkérdése a normatívák és a szaturációs koeficiensek megtervezése. Az erre alkalmazott módszerek egyike, a modell-üzem módszere [24]. Ennek alkalmazásakor a tervezők vagy kiválasztanak egy olyan élenjáró technológiával dolgozó üzemet, amelyről feltehető, hogy az ott alkalmazott technológia a tervidőszak végére az ágazatot általánosan jellemzi vagy pedig műszaki és gazdasági szakemberek közreműködésével felvázolják a jövőben feltehetően létrejövő, de még nem létező ilyen üzem képét. Ebben a „modell-üzemben” aztán részletesen elemzik a munkahelyi struktúrát, tehát a szükséges munkahelyek számát és az egyes munkahelyek

ellátásához szükséges szakismeretek, szakképzettséget, létszámot. Így kialakul a modell-üzem létszámüksége és munkaerőstruktúrája és ezt a létszámot és struktúrát vetítik ki az egész ágazatra. Lényegében ezt a módszert nevezik egyes országokban nomenklátúra eljárásnak, vagy a munkahely-lista módszernek is.

43. A modell-üzem a maga tiszta formájában könnyen belátható okoknál fogva leginkább az ágazatokban alkalmazható, amelyek termelése és technológiája viszonylag homogén és a termelés koncentrált nagyüzemekre épül.

A *modell-üzem módszer* alkalmazása a következőket jelenti:

Legyen a kiválasztott üzemben, amelynek termelése  $P_b$ ,  $n$  számú aggregátum vagy technológiai egység. Az  $i$ -edik aggregátum üzemeltetéséhez szükséges  $j$ -edik típusú személyzet  $L_{i,b}^j$ . Tehát a modell-üzem összes  $j$ -edik típusú munkaerőszüksége

$$L_b^j = \sum_{i=1}^n L_{i,b}^j.$$

Ha az egész ágazat termelése  $P$ , akkor az ágazat teljes  $j$ -edik típusú munkaerőszüksége

$$L^j = \frac{P}{P_b} L_b^j,$$

vagy pedig, ha feltesszük, hogy  $N$  ilyen típusú, üzem fog működni, akkor

$$L^j = N L_b^j.$$

44. Azokban az ágazatokban, amelyekben a termelés technológiája üzemenként jelentősen különbözik és ezek a különbségek feltehetően a tervidőszak alatt sem tűnnek el, a modell-üzem módszer módosított formája, az ún. *ágazati keresztmetszet-módszer* a következő módon kerül alkalmazásra: Az ágazat üzemait az alkalmazott technológia szerint csoportokba sorolják. Az egyes csoportokra vonatkozóan külön-külön alakítják ki a modell-üzemeket és így az ágazat létszáma és munkaerőstruktúrája e csoportok létszámának és struktúrájának összegeződéseképpen jön létre.

45. A vegyes profilú és különböző technológiájú ágazatokban ez az eljárás a következő: az üzemeket az alkalmazott technológiai színvonalnak megfelelő csoportokba sorolják és e csoportok munkaerőstruktúráját vizsgálják a bázisidőszakban. Feltételezik, hogy a tervidőszak folyamán az alacsonyabb technológiával dolgozó üzemesoport technológiája eléri a magasabb színvonalú technológiával dolgozó csoportokét és ennek megfelelően e magasabb kategóriájú csoport munkaerőstruktúráját. A legfelső szintű csoportokra vonatkozóan ez esetben sem kerülhető el vagy a modell-üzem módszernek eredeti formában való alkalmazása, vagy pedig a keresztmetszetből adódó fejlődési tendenciák egyéb módon való meghosszabbítása.

E módszer alkalmazásánál az eljárás a következő:

Soroljuk az üzemeket  $n$  kategóriába: legyen az  $i$ -edik kategóriába tartozó üzemek fajlagos munkaerőszüksége a  $j$ -edik kategóriájú munkaerőből  $\lambda_j^i$ . Feltesszük, hogy mindegyik üzemesoport a tervidőszak végén egy fokkal magasabb technológiai színvonalon fog dolgozni. Akkor a termelés teljes szüksége  $j$ -edik típusú munkaerőből:

$$L^j = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i+1}^j P_i + L_m^j,$$

ahol:  $P_i$  az  $i$ -edik üzemesoport feltételezett termelése a tervidőszak végén;  
 $L_m^j$  az utolsó csoportba sorolt üzemek munkaerőszüksége a  $j$ -edik kategóriájú munkaerőből más módszerrel (például modell-üzemekkel) számolva.

46. A normatívák és a fajlagos munkaerő-együtthatók tervezéséhez széles körben alkalmazzák a trend-extrapolációt [24]. Ennek során a különböző mutatószámok múltbeli alakulását elemzik és az elemzés alapján illesztett trendvonalat extrapolálják. A trendgörbe (egyenes) illesztése és extrapolálása azonban nem mechanikusan történik, hanem a múltra vonatkozó statisztikai adatok közgazdasági elemzésével igyekeznek kiszűrni a tervezők az illesztési pontok közül azokat a kiszögéléseket, amelyek a gazdaság normális fejlődésén kívüleső külső hatásokat, rendkívüli megrázkódtatásokat tükröznek. A trendszámítások alkalmazásánál sokoldalú vizsgálatra törekednek oly módon is, hogy a munkaerővel kapcsolatos többféle összefüggést figyelembe veszik. Így például a munkaerő létszámának alakulását az idő, a termelés és a nemzeti jövedelem függvényében, a különböző munkaerő kategóriák (képzettségi szint és szakmai struktúra szerint) létszámának alakulását az idő, a termelés, a nemzeti jövedelem, az összlétszám, a munkáslétszám stb. függvényében. Az így kapott trendek extrapolált szakaszait aztán ismételtelen közgazdasági elemzésnek vetik alá a helyes következtetések levonása céljából.

Leggyakrabban az

$$L^i = a + bX$$

lineáris regressziós függvény alkalmazásával találkozunk, de találhatók más jellegű függvények is, pl. az

$$L^i = aX^b \text{ alakú görbe.}$$

47. A tervszámítások során gyakran megkísérlik több tényező egyidejű összefüggésének multi-korrelációs számítása segítségével való figyelembevételét is. A makroökonómiai (tehát ágazati és népgazdasági szintű) vizsgálatoknál általában ugyanazokat a tényezőket veszik figyelembe, mint a trendszámításoknál, csak nem külön-külön, hanem azok meghatározott csoportjait együttesen [24], [26]. Az együtthatók becslésénél ugyanolyan jellegű közgazdasági elemzések készülnek, mint a trendszámításoknál és a következtetéseket ismét különböző közgazdasági megfontolások figyelembevételével vonják le.

Általában az

$$L^i = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

forma kerül alkalmazásra, ahol  $x_i$  a becslésnél figyelembevett  $i$ -edik bázisfaktor.

48. Ezeknek az extrapolálás jellegű számításoknak egyik alapvető problémája, hogy a paraméterek viszonylag rövid időszakok tényadataiból esetenként ennél jóval hosszabb időre kell következtetéseket levonni. Ezért minden óvatosság mellett is, a sokoldalú, egymástól eltérő előrebecslések csak azt a sávot tudják meghatározni, amelyen belül a vizsgált tényező feltételezhetően mozogni fog.

49. A nemzetközi összehasonlító vizsgálatok a munkaerő struktúráról az előző módszerekkel kapott képet összehasonlítják más, gazdaságilag fejlettebb országok munkaerő struktúrájával [24], [29]. A nemzetközi összehasonlításnak, mint tervezési módszernek alkalmazhatóságát nagymértékben korlátozza a társadalmi rendszerek különbözősége, a gazdaságpolitikai céloknak és a gazdaságirányítási módszereknek ebből adódó differenciái, a gazdaság ágazati struktúrájának eltérései és végül, de nem utolsó sorban a munkaerő statisztiki-

kák nomenklatúrájának és tartalmának jelentős különbségei [6]. Ennek ellenére az egyéb módszerrel kapott következtetések ellenőrzésére a legtöbb országban használgják, minthogy a jelentős eltérések legalább is okot adnak az elvégzett számítások ellenőrzésére, az esetleges túlzások utólagos korrekciójára. Megjegyezzük, hogy a nemzetközi összehasonlítást, mint a hosszútávú prognózis eszközt, felfoghatjuk sajátos extrapolációs módszerként is.

#### *4. Szakértői becslés és vállalati igénybejelentés*

50. A szakértői becslések és szakértői interjúk módszerének alkalmazása során vagy közvetlenül tesznek fel kérdéseket az előbbi pontokban említett tényezőkre, vagy közvetve azokra a tényezőkre, amelyekből következtetni lehet a munkaerőhelyzet alakulására. (Például beruházásokra, technológiára, gyártmányfejlesztési tervekre, a gyártmányprofil kiszélesítésére stb.) A munkaerőre vonatkozó közvetlen szakértői becsléseknek megvan az az előnyük, hogy a szakértők jól ismerik vállalatuk vagy ágazatuk feszültségeit és korrigálni tudják a statisztikai felmérések adatait például a különböző típusú munkaerőkben meglévő hiányokkal vagy feleslegekkel, amit a statisztikai adatok természetesen nem tükröznek.

51. A vállalati, minisztériumi igénybejelentés módszerének alkalmazásakor a vállalatok, trösztök vagy minisztériumok a jövőben várható munkaerő-igényeik számítása során általában az előző pontokban említett eljárásokat alkalmazzák szükségleteik felbecslésére. Korrekcióik azonban más jellegűek, mint a központi tervező szervek által alkalmazottak. Jellegzetes például a túlbiztosításra való törekvés, elsősorban a magasban kvalifikált szakemberekben a valóságosnál nagyobb igények bejelentése. Ezt a módszert egyébként inkább a rövid- és középtávú munkaerőtervezés céljaira alkalmazzák, mivel a vállalatok kevéssé tudják felmérni helyzetük hosszú távú alakulását. A magasabb szintű egységek felé haladva, a vállalattól, a vállalati egyesülésekig, trösztökig, majd az ágazati minisztériumokig, ez a bizonytalanság csökken, de meg nem szűnik, hiszen az ágazat fejlesztési perspektívája is véglegesen csak az egységes népgazdasági tervben alakul ki. Ennek ellenére, ha a vállalati és ágazati igénybejelentéseknél a létszámra vonatkozó abszolút adatokat nagy fenntartással kell is kezelni, a munkaerő struktúráját illető információk igen fontosak és értékesek.

#### *5. Matematikai modellek*

52. A szakmunkaerő-szükséglet modellezésében végzett eddigi kezdeti lépések a népgazdaság ágazati termelési tervének modellezéséhez kapcsolódtak. A népgazdasági tervek készítése során a szocialista országokban már hosszabb idő óta alkalmaznak különböző optimalizálási modelleket, elsősorban lineáris programozási, valamint input-output modelleket. A munkaerő tervezés céljaira e modellekben a munkaerő koefficienseket struktúrálgják, azaz nem egyetlen létszámkoefficiens alkalmaznak, hanem a legfontosabb szakmunkaerő kategóriákra külön munkaerő-koefficiensek szerepelnek a modellben. A termelési modellek ilyen irányú kibővítésének legáltalánosabb iránya, hogy a modellben szereplő ágazatok között megjelenik a munkaerő újratermelését szolgáló tevékenység, így mindenekelőtt az oktatás. A programozási modellekben ugyan-



akkor speciális célfüggvények jelennek meg, mint például a munkaerő-költségeket minimalizáló vagy a munkaerő hatékonyságát maximalizáló célfüggvény.

A szakmunkaerőszükséglet matematikai modellezésének egyik jellegzetes megfogalmazása a következő [7]:

Jelentse

$X_{ij}$  az  $i$ -edik ágazatban ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) alkalmazott  $j$ -edik tényező ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) volumenét;

$A_{ij}$  a  $j$ -edik tényező hatékonyságát az  $i$ -edik ágazatban;

$C_{ij}$  a  $j$ -edik tényező alkalmazási költségét az  $i$ -edik ágazatban;

$P_i$  az  $i$ -edik ágazat előírt termelését.

Az első  $k$  tényező ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) jelentse a különböző kategóriájú munkaerőt; az utolsó ( $n - k$ ) tényező ( $j = k + 1, \dots, n$ ) jelentse az anyagi jellegű tényezőket,

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k c_{ij} X_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=k+1}^n c_{ij} X_{ij} = \min,$$

következő feltételek mellett:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_{ij} \geq P_i, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k X_{ij} = L,$$

$$X_{ij} \geq 0,$$

ahol  $L$  az összes foglalkoztatott.

53. A termelési modellek kiterjesztése a munkaerőtervezésre ebből a szempontból csupán két dolgot jelent:

– A munkaerő tervezés újabb kontrollját az ágazatoktól kapott külső információkra, főként a termelési előírányzatokra.

– A munkaerő strukturális érzékenységének újabb ellenőrzési lehetőségét.

A munkaerő alapvető szakmai struktúrájának tervezésében a népgazdasági termelési modellek azonban nem nyújtanak segítséget, mivel a munkaerő koefficienseinek kidolgozásában e modellek is a munkaerő-tervezés előzőekben vázolt szuverén módszereire támaszkodnak.

### 6. Ellenőrző érzékenységi vizsgálatok

54. Miután az előbb említett módszerek segítségével megállapításra került a népgazdaság várható munkaerőstruktúrája, a tervezők megvizsgálják, hogyan hat a munkaerő-struktúrára az, ha a népgazdaság ágazati struktúrája másként alakul, mint amit kiinduló pontként a munkaerőmérlegek alapján figyelembe vettek [24]. Amennyiben már előzetesen több struktúra-hipotézis volt, akkor ezekből az ágazati struktúra-hipotézisekből kapott munkaerő-struktúrák eltérései e tekintetben megfelelő felvilágosítással szolgálnak. Szokásos azt is vizsgálni, hogyan változna a népgazdaság munkaerőstruktúrája, ha az ágazatok munkaerő-struktúrája megmaradna a bázisidőszak színvonalán és csupán az ágazati struktúra változása hatna a népgazdasági munkaerő struktúrára.

55. Ennek megfordítottja annak vizsgálata: milyen lenne a népgazdaság munkaerőstruktúrája abban az esetben, ha az ágazatok tervezett munkaerő-struktúrája a bázisidőszak ágazati struktúrájához tartozna. Ezek a vizsgálatok

tájékoztatót adnak a tervezés során elkövethető hibák szélső határaitól és bizonyos következtetések vonhatók le a valószínű hibahatárokról vonatkozóan is.

56. Más jellegű, fontos ellenőrző vizsgálat, hogy az oktatási rendszer különböző iskolatípusainak meglévő és kifejleszthető kapacitásait figyelembevéve, milyen mértékben lehetséges a számított struktúra megvalósítása. Ennek az ellenőrző módszernek további változata, hogy a tervezett szükséglet kielégítésére létrehozandó kapacitásnak a tervidőszakot meghaladó, további hosszabb időszak alatti kihasználása milyen munkaerőstruktúrát hoz létre ilyen hosszú távlatban.

57. A tapasztalatok azt mutatják, hogy az említett módszerek egyike sem eredményezi önmagában, kielégítő pontosságú terv kidolgozását. A csálhatatlanságot nem biztosítja e módszerek együttes alkalmazása sem. Mégis több módszer együttes alkalmazása lehetővé teszi az egyes módszerekkel kapott eredmények kölcsönös kontrollját, a hibalehetőségek jelentős csökkentését. Éppen ezért, minden országban a vázolt módszerek közül egyszerre többet alkalmaznak, ha nem is alkalmazzák minden esetben valamennyit. Csaknem minden országban alkalmazásra kerül a normatív módszer és a fajlagos mutatók (szaturációs együtthatók) módszere, valamint a modell-üzem módszere. Különböző országok az egyéb módszereket esetenként kiegészítő módszerként alkalmazzák.

*(A tanulmány II. (befejező) részét és az irodalomjegyzéket következő számunkban közöljük.)*

# KÖNYVEKRŐL

EZEKIEL, M.—FOX, K. A.: **Korreláció és regresszióanalízis, Lineáris és nem-lineáris módszerek.** Budapest, 1970. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 594 p.

Az utóbbi években hazánkban is igen megnőtt a korrelációs és regressziós módszerek gyakorlati alkalmazása iránti érdeklődés. Ezért mindenképpen üdvözlendő a Kiadó azon törekvése, hogy az e módszereket részletesen tárgyaló művet adjon a téma iránt érdeklődők kezébe. Ez annál is inkább indokolt volt, mert az 1958-ban megjelent „Korreláció és trendszámítás” c. könyv már régen elfogyott, s nem is elégténé már ki a jelenlegi igényeket. Az azonban már nagyon is vitatható, hogy a Kiadó választása miért pont e műre esett. A könyv első kiadása ugyanis 1930-ban jelent meg, s ez a tény az 1959-es átdolgozás ellenére is rányomja bélyegét. Első megjelenésekor feltehetően korszerűnek számított, jól összefoglalta a téma hatalmas irodalmában található eredményeket, de ma — 1971-ben — ez semmiképpen sem mondható el róla. Annál is inkább érthetetlen, hogy a Kiadó e könyvet jelentette meg, mert ma már egy sor kitűnően megírt, korszerű kézikönyv áll rendelkezésre a korrelációs és regressziós módszerekről.<sup>1</sup> Igaz, hogy e könyvek az olvasótól jóval több matematikai ismeretet követelnek meg, mint Ezekiel és Fox műve, de úgy vélem, hogy a Kiadó „Matematikai ismeretek gazdasági szakemberek számára” c. sorozatában megjelent kötetek, és a közgazdász hallgatók jelenlegi matematikai oktatásának színvonala lehetővé tenné e kézikönyvek megértését és használatát is. Ehhez még azt is hozzátehetjük, hogy az ismeretek elterjedésének mai szintjén problematikus, hogy vajon

hasznos-e, ha olyanok nyúlnak önállóan a regresszió-analízis felhasználásához, akiknek e kézikönyvek megértéséhez nem elegendő a felkészültsége. Végül e könyv megjelentetése ellen szól az is, hogy az utóbbi időben több olyan könyv is megjelent,<sup>2</sup> ami bár korántsem ilyen részletesen, de lényegében hasonló szinten tárgyalja a korreláció- és regresszióanalízis módszereit.

A könyv megítélésem szerint az ún. ismeretterjesztő, tehát nem az adott téma szakembereihez szóló művek kategóriájába tartozik. A szerzők szerint a könyv megértése az olvasótól csak „igén szerény” színvonalú matematikai ismereteket tételez fel, sőt a Kiadó szerint „gyakorlatilag semmiféle matematikai előképzettséget nem kíván meg”. A korreláció- és regresszióanalízis módszerei azonban véleményem szerint sokkal bonyolultabbak annál, hogy ez így igaz lehessen. Ez persze nem jelenti azt, hogy e módszereket nem lehet ismeretterjesztő szinten tárgyalni. Lehetséges, sőt szükséges olyan könyvek megírása, amelyek a laikus olvasóval is megismertetik e módszerek lényegét, vázolják azokat a gyakorlati problémákat, melyek e módszerek használatát igénylik, s felhívják a figyelmet az adott módszerek alkalmazásának korlátaira is. Ez is csak úgy lehetséges azonban, ha a könyv szerzője alaposan átgondolja az ismertetendő problémakört, igyekszik magát beleképzelni a teljesen laikus olvasó helyébe, s tudatosan vállalja az ebből adódó megkövetéseket, de ugyanakkor nem mond le a tudományos precizségről sem. Ennek következetes végrehajtása roppant nehéz feladat, s véleményem szerint ez az oka annak, hogy nagyon kevés a valóban jó ismeretterjesztő könyv. A két szerző — mint az a későbbiekből világosan kiténik

<sup>1</sup> Például: Graybill, F. A.: An introduction to linear statistical models, New York, 1961. McGraw — Hill Book Company, Inc.; Morrison, D. F.: Multivariate Statistical Methods, New York, 1967. McGraw — Hill Book Company, Inc.; Draper-Smith: Applied regression analysis, New York, 1968. John Wiley.

<sup>2</sup> Hajtman B.: Bevezetés a matematikai statisztikába — pszichológusok számára Budapest, 1968. Akadémiai Kiadó.; Moroney, M. J. Számoktól a tényekig. Budapest, 1967. Gondolat Kiadó.

— nem tartotta be ezt az elvet, s korszerűtlensége mellett ez a könyv másik alapvető hibája.

A könyv hét fő részből és a számítási módszereket valamint néhány matematikai megjegyzést tartalmazó függelékből áll. Az I. részben a szerzők a könyv további részeinek megértéséhez szükséges alapfogalmakat foglalják össze. E részben a statisztikai minták ingadozásának mérőszámairól, az e mintákból kapott eredmények megbízhatóságáról, valamint a változók közötti kapcsolat alapfogalmairól olvashatunk. Az első fejezetben a címmel ellentétben nem találjuk meg a statisztikai minta definícióját, s a mintavétellel kapcsolatos alapvető kritériumokat sem, pedig az egész fejezetben e mintákból számított mérőszámokról van szó. A lábjegyzetekben szereplő képletek azt a látszatot keltik, hogy a könyv valóban csak elemi matematikai ismereteket követel meg, pedig ez így nem igaz. Érthetetlen, hogy a szórás kiszámításánál a Sheppard-féle korrekció említve van, de a Bessel-féle (a torzítatlanságot biztosító) nem. A normális eloszlás ismertetése egy lábjegyzetnél többet érdemelne, sőt igényelne is. A 2. fejezetben igen ügyesen és szemléletesen van előkészítve a mintaátlag standard hibájának definíciója. Zavaró azonban az, hogy nincsenek összefoglalva a mintaátlag azon tulajdonságai, melyekre a konfidenciaintervallumok meghatározása épül. A torzítatlanság fogalmát minden definíció nélkül használják a szerzők, ami szintén zavaró. A következő két fejezetben a változók közötti kapcsolat alapfogalmai, valamint a kapcsolatvizsgálat elemi módszerei találhatók meg. E két fejezet fő hiányossága az, hogy nem esik bennük szó a változók közötti kapcsolatok típusáról. A 4. fejezetben igen ügyes és szemléletes a regressziófüggvény lehetséges tartományának meghatározása az empirikus regressziófüggvény alapján, konfidenciaintervallumok számítása útján. Az eddig terjedő egész első részből kimaradt a statisztikai próbák és a varianciaanalízis alapfogalmainak tisztázása, ami különösen a 23. fejezetben bosszulja meg magát.

A II. részben a szerzők a kétváltozós lineáris és nem-lineáris regressziós függvények paramétereinek meghatározását, valamint az e függvények alapján nyert becslések pontosságának elemi módszerekkel történő vizsgálatát tárgyalják. Az 5. fejezetben a lineáris regressziós függvény paramétereinek, a reziduuumok szórásának meghatározásáról, és ezen eredmények értelmezéséről van szó. E fejezetben nem derül ki az  $a$  paraméter általános értelmezése és az értelmezhetőség feltétele. A

következő fejezetben a nem-lineáris függvények alkalmazásának szükségességéről (ez nem túl meggyőző) és a bennük szereplő paraméterek meghatározásáról olvashatunk. Igen hasznos a különböző függvénytípusok együttes bemutatása, de az azután következő rész túl matematikus a valóban csak az előszóban megkívánt matematikai ismeretekkel rendelkező olvasó számára. E fejezetben arra is találhatók példák, hogy milyen logikai megfontolásokon keresztül juthatunk el az alkalmazandó függvénytípus kiválasztásához, csak az a baj, hogy e példák fizikai jellegük következtében jóval egyszerűbbek a közgazdaságtudományi gyakorlatban előforduló eseteknél. A szerzők nagyon helyesen mutatnak rá arra, hogy a különféle matematikai görbék alkalmazása csak akkor tekinthető megalapozottnak, ha az adott formula logikailag is alátámasztható. A következő, 7. fejezetben a regressziós függvény alapján nyert becslések pontosságának vizsgálatát tárgyalják a szerzők. Itt zavaró, hogy a lineáris esetben a reziduuumok korrigálatlan szórásnégyzete szerepel először s csak azután később találkozunk újra az 5. fejezetből már ismert korrigált formulával. A szerzők a reziduuumok normális eloszlását annak külön kikötése nélkül használják, holott a modell valószínűségi hátterét csak sokkal később, a 17. fejezetben tisztázzák. E fejezetben találjuk meg a korrelációs együtthatónak és indexnek a reziduuumok szórásán alapuló definícióját, valamint e mérőszámok értelmezését is. E rész utolsó két fejezetében a számítások gyakorlati végrehajtására találhatunk példákat, ill. a regressziós és korrelációs mérőszámok jelentéséről és használatáról olvashatunk.

A III. rész négy fejezetében a szerzők a többszörös lineáris regressziót tárgyalják. A 10. fejezetben a szerzők — igen helyesen — abból indulnak ki, hogy a statisztikus a gyakorlatban csak több tényező együttes hatását tudja észlelni, s sokszor igen nehéz az egymással kölcsönösen összefüggő változók hatásának szétválasztása. Az e fejezetben leírt szukcesszív eliminációs módszernek nincs ugyan különösebb gyakorlati jelentősége, de jó bevezetője a következő két fejezetnek. Ehhez képest azonban kissé túlzott méretű, és így az elimináció lépései csak nehezen áttekinthetőek. A következő fejezetben már a többváltozós lineáris regressziós függvény paramétereinek a legkisebb négyzetek módszerén alapuló meghatározásáról van szó. Az eltérésszorzatokkal felírt normálegyenletrendszer megoldására a „rövidített Doolittle-féle módszert” javasolják a szerzők. E fejezet hiányossága az, hogy a szerzők nem adják meg elég

világosan a parciális regressziós együtt-  
hatók általános értelmezését. A 12. fejezet  
a reziduális szórás és a különféle korrelá-  
ciós együtt- $t$ hatók meghatározását tárgyalja.  
Ezek jelentése azonban — amely a  
laikusok számára igen komoly problémát  
szokott jelenteni — nincs kellőképpen meg-  
magyarázva. Nagyon hiányolom a közön-  
séges korrelációs együtt- $t$ hatók matrixának  
elhagyását is, amely jól áttekinthetően  
foglalja össze a többszörös korrelációs-  
számítás eredményeit is. Az e részt záró 13.  
fejezet a számítások gyakorlati elrendezé-  
sét és egy igen egyszerű és hasznos ellen-  
őrzési lehetőséget mutat be. Az e fejezet-  
ben szereplő példában meg van adva a  
regressziós együtt- $t$ hatók standard hibája is,  
de azok kiszámítására nincs semmiféle  
utalás.

A könyv IV. részét a többszörös nem-  
lineáris regresszióknak szentelték a szerzők.  
E részben a szerzők — megítélésem szerint  
— aránytalanul nagy figyelmet fordítanak  
a grafikus módszerekre. Ennek következté-  
ben igen szegényes, s a nem szakember  
számára nem mindig teljesen érthető a  
14. fejezet elején a lineárisra transzformál-  
ható görbék paramétereinek matematikai  
úton történő meghatározása. A 14. fejezet  
hátralevő részében és az egész 16. fejezet-  
ben a grafikus módszerek leírása található  
meg. Mindkét fejezet az jellemző, hogy  
csak elég nehezen követhető, nagyon hiány-  
zik az egymászt követő lépések világos le-  
írása és összefoglalása. E részek nehéz  
követhetőségéhez még a bemutatott példák  
bonyolultsága is hozzájárul. A közbeeső —  
igen rövid — 15. fejezet a reziduális szórás,  
valamint a többszörös és parciális korre-  
lációs indexek meghatározását mutatja  
be.

Az V. részben (17–20. fejezetek) az  
eredmények szignifikanciájának vizsgálá-  
tára szolgáló módszerek leírása található  
meg. A 17. fejezetben a szerzők a mintából  
meghatározott korrelációs és regressziós  
együtt- $t$ hatók szignifikanciájának vizsgálá-  
tával foglalkoznak. Bevezetéképpen a kül-  
önböző típusú mintavételi modelleket há-  
tárolják el egymástól, a két alapvető mo-  
dell azonban nincs elég precízen leírva.  
Ezután a regressziós együtt- $t$ hatók stan-  
dard hibáinak meghatározása következik,  
de a többváltozós esetre adott (17.2) for-  
mula nem elég általános, s nincs megadva  
a regressziós egyenletben szereplő kons-  
tansok standardhiba képlete sem. Ugyan-  
csak nincs megadva explicit hibaképlete  
sem. Ugyancsak nincs megadva explicit  
formában a paraméterekre vonatkozó kon-  
fidenciaintervallumok képlete sem, s az  
ezek alapját képező  $t$ -statisztika említése-  
kor nincs megfogalmazva a hozzá tartozó

nullhipotézis. A korrelációs együtt- $t$ hatók  
szignifikanciájának vizsgálatakor a szerzők  
nem hívják fel kellőképpen a figyelmet az  
eredményekkel szembeni fokozott óvatossá-  
g szükségességére. A 18. fejezetben vilá-  
gos összefoglalást találunk arról, hogy ho-  
gyan befolyásolja a korreláció és regresszió-  
számítás eredményeit az egyes változók  
értékei szerinti, mintavétel, illetve azok  
mérési hibája. A következő fejezet az ún.  
egyedi prognózisok hibájának meghatá-  
rozási módját ismerteti. E fejezetben nincs  
elég világosan megfogalmazva az egyedi  
prognózis becslés szórásának jelentése. Az  
e részt lezáró 20. fejezetben a szórásképle-  
tek idősoroknál való alkalmazhatóságának  
kérdését tárgyalják a szerzők, s felhívják  
a figyelmet az idősorok alapján végrehaj-  
tott vizsgálatok „buktatóira” is. A rezi-  
duumok autokorreláltságának vizsgálatára  
két módszert is ismertetnek, s megadják  
az ezek eredményétől függően végrehaj-  
tandó korrekciók formuláit is. Az egész  
V. rész komoly hiányosságának tartom  
azt, hogy a szerzők nem foglalják össze a  
korrelációs és regressziós elemzés eredmé-  
nyeivel kapcsolatos hibaszámítási mód-  
szerek alapvető feltételeit.

A könyv VI. részében különféle speciális  
regressziós módszerek ismertetésére kerül  
sor. A 21. fejezetben az ún. nem-szét-  
választható független változók esetén alkalmazható  
grafikus és algebrai módszerek  
leírása található meg, helyenként túlzott  
nagyvonalúsággal. A 22. fejezet azt a  
speciális esetet tárgyalja, amikor a függet-  
len változók között egy vagy több kvali-  
tativ változó is szerepel. Ez a fejezet is  
elég elnagyolt, s nem törekedtek benne a  
szerzők általános eredmények bemutatá-  
sára. Az e fejezetben alkalmazott jelölések  
nem túl szerencsések, s megnehezítik az  
egyébként nem nehéz gondolatmenet meg-  
értését. A 23. fejezetben a varianciaanalízis  
regresszióelemzéshez kapcsolódó alkalmazási  
lehetőségeiről van szó. Talán ez a  
fejezet képezi az egész könyv legkevésbé  
érthető részét. Az egyes alkalmazások ki-  
vétel nélkül konkrét példákon keresztül  
vannak bemutatva, szinte minden magya-  
rázat nélkül, s a témával most ismerkedő  
olvasó — véleményem szerint — saját  
hibáján kívül képtelen annak megértésére.  
Szinte kivétel nélkül ez érvényes a két-  
vagy többváltozós egyenletrendszerek il-  
lesztését ismertető 24. fejezetre is. E rész-  
ben több más speciális módszer is helyet  
kaphatott volna. Hogy csak a legfon-  
tosabbakat említsem: a multikollinearitás  
és a kiküszöbölésre szolgáló mód-  
szerek, és az ún. heteroszkedasztikus  
modell esetén alkalmazandó súlyozott leg-  
kisebb négyzetek módszere.

A könyv utolsó része két fejezetből áll. A 25. fejezet azokat a feladattípusokat sorolja fel, amelyekre már sikerrel alkalmazták a korreláció- és regressziószámítás módszereit. E fejezetet gazdag irodalomjegyzék egészíti ki. Az utolsó fejezetben a korreláció- és regressziószámítás módszereit alkalmazó kutató munkájának egyes fázisait ismertetik a szerzők, s igen helyesen figyelmeztetnek arra, hogy a könyvükben ismertetett módszerek, csak kellő körültekintéssel alkalmazva válhatnak a kutatás hatékony eszközeivé.

A függelékben leírt számítási módszerek jól áttekinthető „algoritmusszerű” formában vannak megadva, melyek megkönnyítik azok gyakorlati végrehajtását. A függelék másik része néhány matematikai levezetést, illetve megjegyzést tartalmaz.

A könyv sajnos elég sok sajtóhibát, s több — feltehetőleg — fordítási hibát is tartalmaz. Összefoglalva, annyit mondhatunk róla, hogy pozitívumai ellenére sem elégti ki a vele szemben támasztott igényeket, s egy jó magya nyelvű — valóban ismeretterjesztő jellegű — könyv megjeleneése még mindig várat magára.

VITA LÁSZLÓ

PAWLÓWSKI, Z.: *Ökonometria*. Budapest, 1970. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

„A munka kísérlet az ökonometriai kutatás fontosabb területeinek bemutatására” — írja könyvének előszavában Z. Pawlowski professzor, akinek neve Magyarországon is közsímert. Szerényen és mértéktartóan ekként saját maga állapítja meg könyvének helyét az ökonometriai szakirodalomban; könyve sok előnyét véve figyelembe, nagyon is szerényen és mértéktartóan. A könyv (eredetije Varsóban 1966-ban jelent meg) lényegesen több mint egyszerű „kísérlet”.

Pawlowski könyve tizenöt fejezetben foglalkozik az ökonometria elméleti és gyakorlati kérdéseivel. Mintegy fele részben (első hét fejezet) elméleti kérdéseket, fele részben (további nyolc fejezet) konkrét alkalmazásokat tárgyal. Előljáróban szükséges rámutatni a könyvben tárgyalt kérdések helyes logikai egymásutánjára és a szerző jó pedagógiai érzékére, másrészt a könyv gyakorlati beállítottságára, mely az egyes kérdések tárgyalásában szembetűnő, és abból fakad, hogy a szerző — azon túl, hogy az ökonometria elméletének is igen alapos ismerője — gyakorlati modellező, és több lengyel ökonometriai modell megalkotásában vitt vezető szerepet.

A szakirodalom egyre több ökonometriai kézikönyvet tart nyilván. Jóformán nincs két olyan mű, mely az ökonometria

fogalmait és a tárgyalt kérdések témakörét illetően azonos szempontokat követne, de ez egy fiatal tudományág esetében aligha csodálatos. Pawlowski definíciója szerint az ökonometria a gazdasági jelenségek mennyiségi törvényszerűségeit speciális matematikai-statisztikai apparátus segítségével kutató tudomány. A meghatározás elemei helyesek, de az ökonometriának a matematikai közgazdaságtantól való különállása ezen az alapon nem eléggé egyértelmű. Ennek megfelelően vitatható az ökonometria tárgyköre is. Úgy tűnik azonban, hogy ezt időben és helyenként a matematikai-statisztikai előképzettség, valamint az alkalmazások igénye szabja meg. Ebből a szempontból a könyv nagyon is reális igényeket elégít ki. Különösen ki kell emelnünk azt a részt, (24–31. oldal), amely az ökonometria céljáról és feladatairól szól — a szocialista gazdaságban.

A mű első része (az elméleti kérdések tárgyalása) a következő témaköröket öleli fel: az ökonometriai modellek; ezek paramétereinek becslése; előrejelzés; idősor-elemzés; az adatbázis kérdései; aggregáció.

A szerzőnek a modellezés területén szerzett gyakorlati tapasztalatai, széleskörű ismeretanyaga nyomja rá bélyegét az ökonometriai modellek problémaköréről foglalkozó II. és III. fejezetre. Tárgyalásra kerülnek az exogén és endogén változók meghatározásának szempontjai, a specifikáció folyamatának egyes szakaszai; a modellek osztályozásának egyes problémái. Kifogásolható itt az ökonometriai modell fogalmi meghatározása; hiányzik ugyanis belőle az ökonometriai modellek legfontosabb jellemvonása. Nem elég, hogy az ökonometriai modell egyenlet vagy egyenletrendszer segítségével fogalmazza meg a vizsgált gazdasági jelenségek között fennálló összefüggéseket: a lényeg a modell sztochasztikus jellege, paramétereinek a valószínűségszámítás segítségével történő becslése, a kapcsolatok verifikálása. A modelleknek okozati leíró modellekre, szimpomatikus és trend-modellekre való felosztása nem kifogásolható; kevésbé indokolt azonban a független egyenletekből álló modelleket egyszerű modelleknek nevezni. Külön érdeme a fejezetnek a karakterisztikus változók világos és részletes tárgyalása.

Az általános elvi rész egyik legértékesebb fejezete az ökonometriai modellek becslésével foglalkozó III. fejezet. Részletesen és nagyon jó előadásban mutatja be a legkisebb négyzetek módszerével való becslés menetét; itt kerül tárgyalásra a heteroszkedaszticitás és az autokorreláció problémája is (ezzel kapcsolatban bemutatásra kerül a legkisebb négyzetek első differen-

ciának alapuló módszere is). A becslési módszerek közül voltaképpen csak a legkisebb négyzetek klasszikus és Theil-féle kétfokozatú módszerét tárgyalja a szerző, ennél komplikáltabb módszereket nem. Ez nem is volna kifogásolható, ha a könyv további fejezetei során (így pl. a 130. oldalon a redukált formával kapcsolatban) nem esnék szó a korlátozott információ módszeréről is, anélkül, hogy a módszer bemutatásra kerülne. Nem esik szó viszont a multikollinearitásról (holott ez az autokorrelációnál is nehezebben kezelhető probléma a gyakorlati modellezés során előbb-utóbb feltétlenül felmerül). Ebben a fejezetben tárgyalja röviden a szerző az identifikáció egyes vonatkozásait is.

A IV. fejezetben az ökonometriai modell segítségével végrehajtott előrejelzés kérdéseiről és az előrejelzés hibájáról van szó. A szimultán modellekkel végzett előrejelzés kapcsán beszél a redukált formáról, talán nagyon is röviden és leegyszerűsítve. Mint nagyon értékes és érdekes részt kell itt kiemelnünk az extrapoláció különböző módszereinek és feltételeinek tárgyalását.

Az V–VI. fejezetben a szerző az idősor-elemzés és a statisztikai adatbázis problematikáját tárgyalja. Vitatható, talán, hogy ennek — a különben igen jól megírt — témakörnek a tárgyalása helyénvaló-e egy viszonylag kis terjedelmű ökonometriai kézikönyvben. A szerző arra is kitér — az Oxford-moddellel kapcsolatban — hogy a negyedéves adatokra épülő modellek hogy kezelik a szezonális kérdését: ez lényegében a karakterisztikus változókkal való operálásnak egyik speciális esete. Ebben a fejezetben kapott helye a „látszólagos korreláció” kérdésének tárgyalása is.

A mű VII. fejezete az aggregálás elméletének elemeivel és az aggregálás különböző eseteivel foglalkozik. Helyesen a makro- és mikroparaméterek közötti összefüggés tárgyalására fekteti a fősúlyt; az előbbieket lényegében az utóbbiak súlyozott összegei. Részletesen foglalkozik azzal az esettel, amikor a változók kapcsolatának elemzése makro-szinten folyik ugyan, de figyelembe kell venni valamelyik aggregált változó eloszlását dezaggregáltabb szinten is. Ennek formális eszközeül aggregálási operátor bevezetését ajánlja.

A könyv következő fejezeteiben az ökonometria elméletének néhány gyakorlati területén való alkalmazásait tárgyalja, alig valamivel kisebb terjedelemben, mint az első hét elméleti fejezet. Ez különben pedagógiai szempontból helyes és másutt (pl. Lesernél) is gyakran alkalmazott megoldás. Itt a következő témakörök kerülnek tárgyalásra: termelési függvény, termelékenység- és költségelemzés, input-output,

a létfenntartási költségek, a jövedelemeloszlás és a fogyasztói kereslet vizsgálata, valamint a népgazdasági ökonometriai modellek néhány kérdése.

A VIII. fejezet foglalkozik a termelési függvényekkel, ezek elméleti kérdéseivel, valamint egyes típusaival, így a Cobb–Douglas-típusú függvénnyel. Különös figyelmet szentel a Koopmans-féle koncepciónak (ez a termelési függvényt mátrixként kezeli, melynek elemeit a termelés technológiai együtthatói adják), valamint többféle lengyel termelési függvény-koncepciónak, így K. Zajac és J. Pajestka modelljeinek. Néhány konkrét példát is bemutat.

A munkatermelékenység-elemzéssel és a költségelemzéssel foglalkozó IX. és X. fejezet elsősorban a szerzőnek a témában folytatott és másutt publikált korábbi vizsgálataira támaszkodik. A kérdés tárgyalását egyébként két részproblémára bontja fel: az egyéni munkatermelékenység elemzésére és a munkatermelékenység vizsgálatára makroökonómiai szinten. A szerző konkrét példát mutat be arra, hogyan használható fel a variancia analízis az egyéni munkatermelékenység elemzésére; ezt követően a munkában eltöltött idő és a munkatermelékenység összefüggéseit vizsgálja.

A szerzőnek a munkatermelékenység és a termelési költségek elemzése területén végzett vizsgálatai általában a többváltozós regressziószámítás gyakorlati alkalmazásai. Az önköltségalakulás és fajlagos költség-alakulás modelljei különböznek aszerint, hogy a modell a rövid vagy hosszútávú elemzés célját szolgálja; valamint attól függően, hogy homogén vagy heterogén cikket gyártanak. Mind a IX., mind a X. fejezetet különösen nagy haszonnal olvashatják és alkalmazhatják vállalati közgazdászok, üzemgazdászok; annál inkább, mert a szerző megállapításait bőven illusztrálja gyakorlati példákkal.

Felmerülhet a kérdés, hogy az input-output analízissel foglalkozó XI. fejezetnek helye-e egy ökonometriai kézikönyvben. A szerző nyilván O. Langet követi ebben; véleményünk szerint azonban az ágazati kapcsolatok mérlegének témaköre nem tartozik az ökonometriához. Lényegében ugyanezt mondhatjuk a létfenntartási költségindexekről szóló XII. fejezetről, amely a közismert Laspeyres- és Paasche-formulákat, valamint az ún. kettes súlyrendszerű indexet magyarázza. A könyvnek ezek a fejezetei tulajdonképpen a matematikai közgazdaságtan körébe vágnak; igaz viszont, hogy az ökonometriának a szerző által használt tágabbkörű definíciójába is beleférnek.

A jövedelemeloszlás vizsgálatában a szerző saját kutatásain felül a kérdés ismert

lengyelországi szakértőinek (J. Kordos, E. Vielrose) a munkásságára is támaszkodik. Ebből a fejezetből külön ki kell emelnünk az egy főre jutó jövedelemszínonal stabilitásának a vizsgálatát, illetve annak a kérdésnek a korszerű és magas színvonalú tárgyalását, hogy milyen módszerekkel határozható meg a magasabb ill. alacsonyabb jövedelemcsoportba való átmenet valószínűsége.

Kiemelkedő fontosságú a könyv XIV. fejezete, mely a fogyasztói kereslet ökonometriai vizsgálatáról, a keresleti függvényekről és ezek történeti fejlődéséről szól. Ez különben az ökonometriának egyik legfejlettebb és hagyományos területe. A szerző külön tárgyalja az egyes fogyasztók, háztartások keresletalakulását kifejező mikroökonómiai keresleti függvényeket, valamint a népesség nagyobb aggregátumaira vonatkozó makroökonómiai keresleti függvényeket. Külön kerülnek elemzésre az élelmiszerek és a tartós fogyasztási javak keresletének függvényei, magyarázó változóikkal együtt; bőségesen hivatkozik a kérdés külföldi irodalmára és „klasszikusaira” (Törnquist, Stone), valamint a szerző saját korábbi kutatásaira a lengyelországi fogyasztói kereslet, illetve a keresleti elaszticitás-vizsgálatok területén. Különösen érdekesek azok a vonatkozások, melyek a keresletnek szocialista országokban való vizsgálatára jellemzők. Egyik legfontosabb megállapítása, hogy a kereset-elemzés nem nélkülözheti a kínálati és az ár-viszonyok egyidejű vizsgálatát. A kérdés speciális esetenként bemutatja az elégtelen kínálat esetében történő kereslet-elemzés általa követett módszerét (trend-változó ill. karakterisztikus változók alkalmazása).

A mű utolsó fejezete — bár vázlatosan — a népgazdasági szintű ökonometriai modellekkel foglalkozik. Rövid áttekintését adja az ökonometriai modellek fejlődésének, majd illusztrációképpen az angol Oxford-modell néhány egyenletét mutatja be. A lengyelországi modell-kísérleteket, illetve az 1964-ben publikált népgazdasági szintű ökonometriai modellt — annak bemutatása nélkül — éppen csak megemlíti. Nagy érdeme a könyvnek a 25 oldalt betöltő irodalomjegyzék.

Örömmel üdvözölhető és mindenképpen nagy nyereségként könyvelhető el Pawlowski professzor értékes munkájának magyar nyelvű kiadása, mely véleményünk szerint régen tapasztalt hiányt tölt be és népszerű könyvnek ígérkezik a magyar közgazdászok és statisztikusok körében, és mindazoknak az olvasóknak a körében is, akiket az ökonometriai kézikönyvektől eddig azoknak többnyire nagy terjedelme

és a kérdések komplikált megfogalmazása tartott vissza. Ebből a szempontból igen nagy érdem a mű mértéktartó terjedelme, világossága, jó tárgyalásmódja és pedagógiai ihletettsége, nem utolsósorban gyakorlati beállítottsága. Dicsérettel kell kiemelnünk a fordítás és a szakmai ellenőrzés gondos és színvonalas munkáját is.

NYÁRY ZSIGMOND

**Gazdasági fejlődés és tervezés.** Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

A Közgazdaságtudományi Intézet kutatási tervében központi helyet foglalnak el a tervezés tudományos megalapozására és ezzel összefüggésben a gazdasági növekedésre és fejlődésre vonatkozó vizsgálatok. Ezeknek egyes eredményeit mutatják be az Intézet munkatársainak e kötetben összegyűjtött tanulmányai. Így a kötet alapján jó keresztmetszeti képet lehet kapni az Intézetben végzett kutatómunka jelentős részéről. Mindenképpen nagyon jellemzőnek mondhatjuk ezért, hogy a tanulmányoknak háromnegyede kifejezetten matematikai közgazdaságtani jellegű és a fennmaradó egynegyedrész is kisebb-nagyobb mértékben használja a matematikai közgazdaságtan fogalmait és kategóriáit.

A kötetben összegyűjtött tanulmányok több nagy problémakör köré csoportosulnak. Ezeknek mindegyike a konkrét magyar gazdasági tervezés és gazdaságpolitika akut és megoldásra, feltárásra váró kérdése.

Két tanulmány foglalkozik az egyenletes, illetve optimális növekedési ütem és beruházási hányad megállapíthatóságával, illetve meghatározásával különböző növekedési modellek segítségével. Ezt a kérdést nagyon aktuálissá teszi az a vita, amely a felszabadulás utáni első évtized gazdasági növekedésének megítélése, valamint — ezzel összefüggésben — a közeljövőben követendő gazdaságpolitika körül folyt. HORVÁTH JÓZSEF, aki egy Kalecki-féle növekedési modell használatával fel az elérhető egyenletes hosszútávú növekedési ütem meghatározására, arra a következtetésre jut, hogy nálunk — figyelembe véve a munkaerőhiányt — nem biztos, hogy a magasabb beruházási hányad hosszabb távon magasabb növekedési ütemhez vezet. Mindenképpen rontja a népgazdasági hatékonyságot a növekedési ütem erős hullámzása, amely az átmeneti túlzott beruházás következménye. VIRÁG ILDIKÓ viszont Harrod — Domar-típusú növekedési modellekről bizonyítja be, hogy segítségünkkel nem lehet ésszerű választ kapni az optimális beruházási hányad kérdésére, mert bármilyen diszkontfüggvény alkal-



mazása esetén ciklikus beruházási politikát ajánl a modell.

Két tanulmány elemzi az oktatás és a gazdasági növekedés összefüggéseit. SCHMIDTNE KIGYÓSSY ÉVA igen érdekes és további kutatásokban hasznosítható adatokat közöl a szakemberképzés költségeiről, KOVÁCS JÁNOS pedig az iskolai létszámok tervezési modelljét írja le. Az utóbbinak konkrét, számszerű kidolgozása a magyar társadalom és gazdaság viszonyaira lényeges segítséget nyújtana az oktatástervezésnek.

Ugyancsak két tanulmány foglalkozik a kereslettel. ÖRDÖG MIKLÓS olyan modelleket ismert, amelyek a jövedelemnek és az árak a keresletre való hatását dinamikus kezelik és ezzel a keresletkutatást közelebb hozzák a valóságos folyamatokhoz, mint a statikus modellek. A szakirodalom alapos tárgyalása után maga is kidolgoz egy dinamikus keresleti függvényt és a kereslet-kínálat egyensúlyi feltételét ennek alapján határozza meg. HOCH RÓBERT és KOVÁCS ILONA számításokat végeztek különböző javak és szolgáltatások keresleti függvényének meghatározására. A szokásos keresleti, illetve fogyasztási függvényekkel kapcsolatos nehézségek kiküszöbölése, illetve megkerülése céljából a vizsgált áru keresletét az úgy nevezett *jövedelemcikk* fogyasztásának függvényévé teszik. Jövedelemcikk csak olyan cikk vagy cikkesoport lehet, amelynek fogyasztása kizárólag a reáljövedelem, pontosabban a reáljövedelés alakulásától függ. Erre a célra a grammokban kifejezett állati fehérjefogyasztást találják megfelelőnek.

SCHMIDT ÁDÁM a költségvetési és népgazdasági egyensúly fogalmával, azoknak összefüggéseivel, valamint az ezekből levonható gazdaságpolitikai következtetésekkel foglalkozik. Bemutatja az államháztartás egyensúlyára vonatkozó közgazdaságtani tanítások fejlődését a teljes költségvetési egyensúly megkövetelésétől az állandó költségvetési deficit elfogadásáig. Nagyon helyesen hangsúlyozza, hogy a költségvetési egyensúly biztosítása a magyarországi gazdasági körülmények között sem lehet kizárólagos cél, és hogy a költségvetési egyensúly fennállása korántsem egyértelmű a népgazdasági egyensúllyal.

Két munka tárgyal világ gazdasági kérdéseket. MOLNÁR FERENC idősorok alapján elemzi az Egyesült Államok gazdasági fejlődésének ciklikusságát és a nagy válság elmaradásának okait, CUKOR GYÖRGY pedig a fejlődő országok iparfejlesztési stratégiájának ellentétes koncepcióit (kisipar vagy gyáripár, munkaigényes és tőkeigényes technológia, importhelyettesítés vagy exportfejlesztés) hasonlítja össze.

Végül négy tanulmány is tárgyalja a népgazdasági tervezés matematikai modellekkel való alátámasztásának lehetőségeit. BRÓDY ANDRÁS egy dinamizált input-output modellt mutat be, SIMON GYÖRGY az igen nagy méretű matematikai programok megoldásának egy új módszerét, a reflektor programozást írja le. MARTOS BÉLA azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy a matematikai programozásban megkövetelt feltételek mennyire érvényesülnek a gyakorlati gazdasági problémákban. Ezt az indokolja, hogy a matematikai programozás jelenleg használható technikai viszonylag fejletlenek, csak bizonyos fajta problémák megoldására használhatók fel. Először topológiai fogalmakkal jellemzi a programozásban alkalmazott feltevéseket, majd az analízis, a függvények nyelvén. Végül TÉNYI GYÖRGY a különböző alternatívák, például népgazdasági tervek, programok közötti választás kritériumainak elemzésével tulajdonképpen a programozásban használt célfüggvény fogalmát mélyíti el. A probléma — elsősorban a népgazdasági tervezésben — azért jelentkezik, mert össze kellene vetnünk olyan jelenségeket, tárgyakat, amelyeknek minőségi különbözősége az egyszerű összemérést, sorrendbe állítást lehetetlenné teszi.

ANDORKA RUDOLF

ANDORKA R.: *Mikromodellek*. Budapest, 1970. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

A nemzetközi szakirodalmat kiválóan ismerő szerző célját így fogalmazta meg: „Ezzel a munkával olyan kézikönyvet kívánunk a közgazdász olvasókörzéség kezébe adni, amely tájékoztatja arról, hogy melyek azok a matematikai közgazdaságtan által kidolgozott eszközök, amelyeket a vállalatok gazdasági elemzés, előrebecslés, tervezés céljára fel tudnak használni.”

A *Mikromodellek* igen időszerű könyv: egyrészt időszerűek maguk a problémák is, amelyeknek korszerű kezelési módjával foglalkozik, másrészt van már szép számmal olyan közgazdánk is, aki rendelkezik a haszonnal való olvasáshoz szükséges ismeretekkel, valamint a gazdasági élet különböző posztjain a gyakorlati alkalmazás lehetőségével.

A könyv első két fejezete a döntéseket hozók két nagy csoportja viselkedésének jellemzésére kidolgozott modelleket ismerteti. Először a háztartások keretében élő emberek gazdasági magatartását írja le, mint fogyasztókat és mint munkavállalókat, majd a második részben a termelés, illetve szolgáltatás egységeinek, a vállala-

toknak a tevékenységi köréhez tartozó döntésekkel foglalkozik. A harmadik részben a piacot tárgyalja, ahol a döntést hozók két fő csoportja, illetve egyes al-csoportjaik találkoznak egymással.

A szerző a külföldi szakirodalom gazdag tárházából kiválasztott modelleket tárgyal. Bemutatja a modellek megalkotóinak egy-egy problémára vagy problématípusra vonatkozó kérdésfeltevéseit, közgazdasági (esetleg technológiai) alapfeltételezéseit, majd azt, hogy matematikailag hogyan következnek ezekből egy meghatározott tulajdonságokkal rendelkező formula, amely a döntést hozóknak megadhatja a szükséges eligazítást. Ezért nem is vitatja a modellek alkotói által vallott felfogás helyes vagy helytelen voltát, nem vonva el a figyelmet arról, ami itt a legfontosabb: a közgazdasági gondolat és a matematikai forma viszonyáról.

Világosan és egyértelműen bontakoznak ki a szerző matematikai tárgyalásmódjában olyan fogalmak is, amelyeket a már nem egészen fiatal közgazdák gyakrabban láthattak idézőjelben, mint értelmezve, megmagyarázva. Nagy érdeme ez a könyvnek, mert a polgári közgazdaságtan története során kialakult fogalmakat csak akkor tehetjük a helyükre gondokozásunkban, ha *tartalmukkal nézünk szembe*, a szótári (nem egyszer félreértett, rosszul fordított) alakjukkal való vitakozás helyett. Az igazi szembenézés nélküli pörlekedés ugyanis már elég sokba került a szocialista országoknak. Csak egy mezőgazdasági példát említek: a termelési függvényhez kapcsolódó fogalmak esetét. A ráfordítás-hozam viszonyokat kizárólag csoportosított táblázatok segítségével vizsgáló agrárökonómusok minden szocialista országban boldogan mutatták ki, hogy náluk a „növekvő hozadék” érvényesül. Ez állt ugyanis a „hozadék” rendszerint nem tisztázott fogalma mögött. (Helyesen: hozamtöbblet!) Örömmel említhetjük a fölött az ellentmondás fölött, amely a mezőgazdaság állapota és a ráfordítás-hozam viszonyok általuk adott értelmezése között fennállott. Termelési függvény szemléletben ugyanis elég kellemetlenként tálal fel ez az örvendetesnek minősített helyzet: a fajlagos ráfordítások küszöb alatti szintjével konstanztálta a mezőgazdaságot az elmulasztott gazdasági lehetőségek zónájában, ahol matematikai eszközökkel is legfeljebb a veszteséget minimalizálhatjuk, a hozamoknak (és ebből következőleg a termékek tömegének) megengedhetetlenül alacsony szintjén.

A különböző piaci formákról, a tökéletes versenyről, monopóliumról, monopolisztikus versenyről szóló harmadik részben leírt modelleket kifejezetten tőkés viszo-

nyok vizsgálatára dolgozták ki. Ha azonban úgy áll a dolog, amint néha halljuk, hogy egyes vállalatok nálunk tartósan az eladók piacának előnyeit élvezik, akkor a társadalmi viszonyok terén fennálló különbség ellenére se kellene a mi modell-szerkesztőinknek figyelmen kívül hagyóknak az e fejezetben leírtakat. A mezőgazdaság esete külön elgondolkoztató lehet: termelészökeinek vásárlásakor egy-két vállalattal áll szemben, termékeinek zömét ugyancsak egy-két vállalat veszi át, úgy hogy a mezőgazdasági üzemek zöme vevő az eladók piacán és eladó a vevők piacán.

Noha első pillanatban talán a könyv gyengéjének látszhat, én előnyének tartom, hogy a vállalati magatartás programozási modelljeit szűkszavúan, inkább példákon keresztül ismerteti, ellentétben a termelési és a keresleti függvényekkel. A matematikai programozásnak ugyanis összehasonlíthatlanul szélesebb irodalma van nálunk, mint más matematikai módszereknek, és még elég gyakran találkozhatunk azzal az egyszerűsítő felfogással, hogy a lineáris programozás egyenlő a matematika gazdasági alkalmazásával. Jó tehát ez a látszólagos egyensúlyhiány arra, hogy lassan megszűntethessük egy sokkal nagyobb egyensúlyhiányt nemcsak a vállalatoknál működő gazdasági szakemberek, hanem gyakran oktatók és kutatók gondolkodásában is. Ez az anyagbeosztás és tárgyalásmód talán segíthet abban, hogy a közgazdaságtan és a matematika együttműködésének eredményeit ne csupán egyetlen fegyverfűpusban, hanem egy modern hadsereg gazdag, valamely célt sokféle úton, de összehangoltan szolgálni képes fegyvertárában lássuk.

A könyv néhány pontján a szerzőnek érdemes volna elgondolkoznia egy-két kiegészítéssel, illetve álláspontja (esetleg csak kifejezés- illetve tárgyalásmódja) revízióján. A következőkben néhány példát említek.

A 19. oldal lábjegyzetében a szerző megindokolja, miért ismerteti úgy a keresleti görbéket, ahogy számunkra természetesebbnek látszanak. Hozzá lehetett volna tenni, hogy a vevőért versengő árutulajdonos keresletelemzésében az ár függő változó is lehet.

A 46. oldal két lábjegyzete azt sejteti, hogy a szerző mindig az angol nyelvű szakirodalomban találkozott a Hesse-féle determinánssal, és ez lehet az oka a német név utolsó e-je lemaradásának.

A 108. oldalon bevezetett „határelaszticitás” kifejezést nem tartom szerencsésnek. Kár volna, ha a parciális elaszticitás fogalma ilyen néven honosodna meg nálunk. Ha ugyanis a „határ.” kezdetű kifejezések „differenciális” értelemben hasz-

náljuk, akkor a határelaszticitást valamely elaszticitás-függvény deriváltjaként kellene értelmeznünk, ellentmondva a könyv elején helyesen levezetett elaszticitás-fogalomnak. Van már néhány pontatlan, zavart és meddő vitákat keverő kifejezés közgazdasági nyelvünkben, ne szaporítsuk őket!

A 114. oldalon közölt ábra szakaszainak minősítésében téved a szerző, mikor a függvény 1. és 2. szakaszát is racionális termelési zónának minősíti. Bármekkora is a fajlagos ráfordítás szintje, ha még nem érte el a 2. és 3. szakasz határához, az átlagos hatékonyság maximumához tartozó  $X$ -értéket (a szerző szóhasználatában a technikai optimumot), a ráfordításnövelés nagyobb átlagos hatékonysághoz segítené. Ezért nevezhetjük a ráfordítás és a hozam *fizikai egységekben mért viszonya* szempontjából is az elmulasztott gazdasági lehetőségek zónájának az 1. és a 2. sza-

kaszt. Ha pedig az árakat is bevonjuk az elemzésbe, kiderül, hogy a

$$\frac{p_x}{p_y} = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

helyzet jellemzi a nyereségkülöböt a jövedelem maximumára törekvő termelő számára. Racionális termelési zóna tehát csak a 3. szakasz lehet.

Megjegyzéseimet néhány, a példányszámra vonatkozó gondolattal szeretném befejezni. Az Andorka Rudolf fordításában megjelent Baumol-könyv nagy nyeresége közgazdasági irodalmunknak. 1700 példányban adták ki, 125 Ft-os áron. A Mikromodellek 1300 példányban jelent meg, 49 Ft-ért, ennyit kezdő közgazdák és egyetemi hallgatók is könnyebben kiadnak. Baumol jobb megértéséhez jó és biztos út vezet a *Mikromodelleken* át. Miért szűkítjük meg ezt az utat a kis példányszámmal?

SEBESTYÉN JÓZSEF

# TUDOMÁNYOS ÉLET

## Az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat gazdaságmatematikai munkái

Az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat 1965-ben alakult — a KSH felügyelete alatt — azzal a céllal, hogy a legkorszerűbb számítógépes irányítási, döntési és információ feldolgozási, valamint matematikai módszereket és eszközöket vizsgálja, továbbfejlessze és a gyakorlatban alkalmazza. A vállalat a számítógépes rendszerek előkészítésében, software-jének kialakításában, beszerzésében, üzembe helyezésében, valamint konkrét — vállalati és népgazdasági — problémák rendszer-szemléletű modellezésében, programozásában, gépre szervezésében és az eredmények gyakorlati bevezetésében nyújt segítséget a hozzá forduló intézményeknek. A gyakorlati tapasztalatokat általánosítva az elektronikus számítógépek alkalmazásának minden területén széleskörű módszertani kutatómunkát végez.

A vállalat többféle típusú nagykapacitású idegen gépen is dolgozik, és emellett saját kutatásaihoz egy MINSZK-2 és egy MINSZK-22 géppel rendelkezik. A vállalatnak több mint 300 munkatársa van, közülük kb. 250 dolgozik kutatói munkakörben mint matematikus, mérnök és közgazdász.

A *Programozási Rendszerek Főosztálya* alapsoftware-fejlesztéssel, fordító programok és operációs rendszerek készítésével foglalkozik. Munkái között jelentős szerepet tölt be a különböző hazai előállítású számítógépek alap-software-jének és fordító programjainak elkészítése, valamint a szocialista országok Egységes Számítástechnikai Rendszerének munkájában való aktív közreműködés.

A különböző *műszaki osztályok* a számítógépek beszerzésével kapcsolatos műszaki tanácsadó feladatokat látják el, segítenek a gépek kiválasztásában, a legösszegebb számítógép konfiguráció meghatározásában, a műszaki átvételben és az üzemeltetésben. Közreműködnek a hazai számítógép-, illetve perifériagyártásban, a szerszámgépek numerikus vezérlésének (NC) fejlesztésében és a számítógépes tervezésben (CAD).

A *Rendszerfejlesztési és az Államigazgatási Főosztályok* vállalatok és költségvetési szervek megbízásából integrált, számítógépes információs és irányítási rendszerek kidolgozásával, általánosan alkalmazható programcsomagok, programrendszerek (pl. általános táblázó és válogató programok), valamint egyedi programok készítésével, helyszíni alkalmazásával és bevezetésével foglalkoznak. Így pl. jelentős rendszer-szervezési munka folyik a Magyar Alumíniumipari Tröszt különböző területein, a gyógyszeriparban, a bútortiparban, a Május 1. Ruhagyárban, a Csepel Autógyárban, a VIDEOTON-nál.

A *Számológéppont* a MINSZK-2 és -22 gépek üzemeltetésével, műszaki fejlesztésével, e gépekre fordító programok és alap software készítésével, géppora értékesítéssel kapcsolatos szervezési és programozási feladatokkal foglalkozik.

Az INFELOR egyik fő profilja a gazdaságmatematikai módszerek kutatása és ezek alkalmazása a vállalati és népgazdasági szintű irányításban. E feladatok a *Gazdaságmatematikai Főosztály* tevékenységi körébe tartoznak. A főosztály jelenleg két osztályra — az Operációkutatási Osztályra és az Ökonometriai Osztályra — tagozódik.

Az *Operációkutatási Osztályon* már néhány évvel ezelőtt kidolgozták a *szállítási probléma típusú matematikai modellek* megoldásának három igen hatékony, gyors és kevés memóriahelyet igénylő — gráfrepresentációs módszeren alapuló — programrendszerét a MINSZK-2 típusú (8 K kapacitású) elektronikus számítógépre. A disztribúciós módszer gépi megoldásánál a legtöbb időt a potenciálok kiszámítása és a javításhoz szükséges hurok megkeresése veszi igénybe, mert mindkét feladat a pillanatnyi megoldás „geometriai szerkezetével” kapcsolatos. Ugyancsak ez foglalja le a belső memóriában is a legtöbb helyet. Ahhoz, hogy a potenciálok számítását és a javító hurkot rövid úton megtaláljuk, az szükséges, hogy a pillanatnyi megoldást a

gép memóriájában megfelelő módon tároljuk. Erre a célra igen jónak és gazdaságosnak bizonyult a Dömölky – Frivaldszky-féle gráfprezentációs módszer, amelyben a pillanatnyi megoldás gráfját – amely gráf csúcspontjai a feladó-, illetve felvevőhelyek, élei pedig a megoldásban szereplő útvonalak – irányítottá tesszük és a gráf szerkezetét leíró függvényeket határozzuk meg. Mindezek alapján az optimalizáláshoz a számítógép belső memóriájában csak igen kevés információt kell tárolni és a szükséges számítások gyorsan végrehajthatók.<sup>1</sup> Az így kidolgozott program még a kiskapacitású számítógépen is viszonylag rövid idő alatt képes megoldani  $m+n \leq 1240$ -es méretű feladatokat. Ezzel a programmal oldották meg (a MINSZK-2 gépen) a legnagyobb – kb. 600 feladó és 600 felvevőhelyet figyelembevéve – magyarországi szállítási feladatot a Gabona Tröszt részére.

A programrendszer másik tagja a *kapacitáskorlátos szállítási feladat*, amely minden relációra egyedi felsőkorlátot tud figyelembe venni az optimalizálás során. A MINSZK-2 gépre kidolgozott program felső méret-határa  $m+n \leq 410$ . Ezt a programot eredményesen használták fel a *VÁTI és az OT településtervezési feladatainak* megoldására. A kidolgozott modell figyelembeveszi az egyes járáások munkaerőkapacitását, az egyes iparágak munkaerőigényét, valamint az egyes településvariánsok „költségét”, amelyet a víz, energia, nyersanyag, közművesítés, szállítási stb. igények alapján pontozásos módszerrel határoztak meg. A modell a munkaerők ipartelepítési helyek közötti szétosztását optimalizálja. A modellben az egyes településeken létesíthető iparágak létszámigényei felülről korlátozva voltak, ami biztosította, hogy csak reális vállalati nagyságok kerülhessenek az optimális programba. Hasonló típusú modellt alkalmaztak a mezőgazdasági növények optimális termelésének országos szétosztására, ahol az optimalizálás kritériuma az egyes járáások termőföldjeinek az egyes terményekre vonatkoztatott hatékonysága. Itt az egyedi felsőkorlátokat az adta, hogy egy növényféléből egy járásban bizonyos százalékánál többet különböző okokból (pl. vetésforgó, munkaerőigény időbeli eloszlása stb.) nem lehet termelni. A számítás az OT távlati tervezési céljaira szolgált.

A programrendszer harmadik tagja az ún. *általánosított szállítási vagy gépterhelési feladat* számítógépes programja. Amíg a legtöbb gépi program ezt a feladatot a

lineáris programozás szimplex módszerével tudja csak megoldani, addig ez a program – kihasználva a feladat speciális szerkezetét – közvetlenül optimalizál. Itt a felső mérethatár  $m+n \leq 400$ . A programot olyan vállalati termékoptimalizálási feladatoknál használták, ahol a kibocsátást egyetlen jellemző termelési keresztmetszet határozta meg, amelyben a különböző teljesítőképességű homogén gépesoportokon alternatív módon különböző termékek állíthatók elő, eltérő hatékonysággal. Ilyen feladatokat oldottak meg pl. textilipari üzemek szövődéjének optimalizálása során, dróthúzó üzem, kohászati üzem optimális termékösszetételének meghatározásánál.

Speciális matematikai modellrendszert dolgoztak ki a Gabona Tröszt részére. A feladat az *országos búza- és liszt szállítások, valamint a malmok őrlési tervének együttes optimalizálása* volt. A tröszt feladata a gabona és az őrlmények országos (megyék közötti) mozgatása, míg a megyei vállalatok díszponálnak a megyén belüli szállítások felett. Ennek megfelelően a számítások két szintű modelljét dolgozták ki:

1. Az országos kétlépesős, ikertermékes szállítási és termelési optimumszámítás, összevont raktár-, malom- és fogyasztóhelyek figyelembevételével. Ezen kétlépesős (búza-malom-liszt), ikertermékes (1 q búzából egyszerre többféle őrlmény keletkezik, alternatív kiórlési technológiákkal), speciális szerkezetű szállítási feladat a szállítási költség és a műszakszámonként eltérő termelési költség összegét minimalizálta. A feladat 150 raktárat, 200 malmot és kb. 250 specifikált fogyasztóhelyet figyelembevéve kb. 600 × 600-as méretű volt. Az ikertermékes feladatot visszavezették – a kiórlési technológiák figyelembevételével, a méretek jelentős növelése árán – a „klasszikus” szállítási feladat modelljére. A modell meghatározta az egyes malmok terhelési szintjeit, valamint a búzának és a lisztféléknek a megyék közötti szállítási irányait (amelyek a megyei számítások input adataiként kerültek felhasználásra).

2. A második modell megyénként és árunemenként (búza és lisztfélék) külön-külön egylépesős szállítási feladatok optimalizálását jelentette, egyedi raktárak, malmok és fogyasztóhelyek figyelembevételével.<sup>2</sup>

Az OEGH megbízásából 1967–1969-es években foglalkoztak az *éves széntermelés-szállítás-felhasználás együttes optimalizálásának matematikai modelljeivel*. Figyelembe vették az egyes szénbányákban a különböző szénfajták előállításának eltérő ter-

<sup>1</sup> Az algoritmust részletesebben az *Információ-Elektronika* 1966. évfolyama tartalmazza.

<sup>2</sup> A modellrendszerről részletesebben az *Információ-Elektronika* 1969. 2. számában számoltak be.

melési költségeit, a szállítási költségeket, valamint a felhasználók különböző tüzelő berendezés-fajtáinál az eltérő szénfajták felhasználásából adódó eltérő hatásokok gazdasági kihatásait. Erre a feladatra első lépésben az általánosított szállítási feladat matematikai modelljét alkalmazták a modellben szereplő  $h_{ij}$  hatások miatt. Ezt a  $h_{ij}$ -t azonban sikerült két különböző tényező hatásaként kifejezni:  $h_{ij} = f_i t_j$ , ahol  $f_i$  a tüzelőberendezésre jellemző hasznosítási fok, míg  $t_j$  a szénfajtra jellemző tüzelési egyenérték. Ezen felbontással a feladat a számítástechnikailag sokkal egyszerűbben kezelhető és gyorsabb szállítási feladatra redukálódott. Kísérleteket végeztek közelítő számításokkal is, a piaci mechanizmus számítógépes szimulációjával. A munka későbbi szakaszában figyelembe vették az adott bányában együttesen jelentkező szénfajták kötött arányainak (ikertermékeknek) kihatását a matematikai modellre. Erre a célra a szállítási és lineáris programozási feladatok megoldásának sorozatából álló dekompozíciós módszert dolgoztak ki.<sup>3</sup> A kidolgozott modellrendszerrel az 1965. évi tényleges országos alapadatok alapján kísérleti számításokat végeztek, amelyeket az OEGH elemzési célokra használtak fel.

Ugyancsak az OEGH megbízásából folyamatban van a *távlati optimális energiastruktúra és az optimális beruházási politika meghatározására szolgáló, szimuláción alapuló programrendszer kidolgozása*. Olyan modellt dolgoztak ki, amellyel az energiegazdaságban bármilyen javasolt beruházási politika konzisztenciája — időben és térben — ellenőrizhető és következményei nyomon követhetők. A beruházási döntéseket a lehető legszélesebb körben vizsgálják, az energiarendszer kompetitív és komplementer részeire gyakorolt közvetlen és közvetett, jelen és jövőendő hatásaitkal együtt. Az első modell statikus volt és a technikai összefüggések aggregált leírását tartalmazta. Adott időszakra energifajtánként egyetlen előrejelzett fogyasztási adat alapján számolta ki a szükséges átalakítási, termelési és import tevékenységet és az átalakítandó energifajták közötti választás az elmúlt időszakokból vett gyakorisági eloszlásokból történt. A második modell már dinamikus és az energiegazdaság részletes leírását tartalmazza. Lehetőséget ad az átalakítandó energiahordozók közti, valamint a kihozatal arányait biztosító technológiák közötti választásra, szerepelnek benne a keresleti és kínálati szerkezetek közötti kölcsönhatások, az árak

és a termelt mennyiségek közötti összefüggések, valamint a szállítási rendszer korlátozott kapacitása. Ezen szimulációs modellek számítógépes programjai elkészültek és az első kísérleti számítások is megtörténtek (MINSZK-22-es számítógépen).<sup>4</sup>

Sok területen alkalmazzák a különböző *hálótechnikai* módszereket (CPM, EMALL). Ezen munkák közül külön ki kell emelnünk a MEDICOR Kutatási-Fejlesztési Intézete részére kidolgozott hálótechnikai modell-rendszert. Ez az Intézet évente jelentkező többszáz kutatási-fejlesztési témáját, azok párhuzamos és soros logikai kapcsolódásainak, az egyes tevékenységek (különböző szellemi és eszközjellegű) kapacitásigényének (pl. különböző szakutadási mérnöki, technikai, rajzoló, dokumentációs, gépírói, döntési és ellenőrzési, fénymásolóberendezési igények) és ezen kapacitásokra vonatkozóan a programozási időegységenként rendelkezésre álló összkapacitások figyelembevételével lehetőleg minél rövidebb átfutási idővel tudják teljesíteni a kutatási és fejlesztési feladatokat. A modell-rendszer minimális alapinformáció megadásával magát a hálórendszert is összeállítja a MINSZK-22 számítógép számára, elvégzi az aktualizálásokat, így jelentősen lecsökken a manuálisan szükséges előkészítő munka. A MEDICOR 1970-ben már alkalmazta a modell-rendszer számításából kapott eredményeket.

Az INFELOR foglalkozik az ún. *utazó ügynök és járatszerkesztési* típusú feladatokkal is. Az utazó ügynök probléma egy általánosabb esetére kidolgoztak egy algoritmust, olyan problémák megoldására, ahol adott szállítások egymásutánját kellett megszervezni úgy, hogy az üres futás minimális legyen. Az algoritmus ezektől optimumot ad és alapjául szolgált különböző közelítő algoritmusok kidolgozásának. Így egy ipari nagyvállalat részére olyan algoritmust és számítógépi programot dolgoztak ki, amely az egyes üzemek közötti — különböző típusú vonatokkal és pótkocsikkal történő — és egyetemesrakományokban kifejezett anyag- és alkatrészszállítást naponta, adott szállítási időpontok betartása mellett minimális szállítésköltséggel (illetve minimális költséggel) biztosítja. Befejezés előtt áll a Budapesti Postaigazgatóság levél-csomaggyűjtő és elosztó, valamint a körzeti hírlapelosztó járataira vonatkozó matematikai modell és számítógépi program kidolgozása. Ezen programrendszer az egyes postaládák, postahivatalok és pályaudvarok, valamint hírlapkiosztóhelyek közötti gépkocsi-szállítást

<sup>3</sup>Lásd Információ-Elektronika 1967. 4. szám és Szigma 1970. 2. szám.

<sup>4</sup>A modell részletesebb ismertetése a Statisztikai Szemle 1970/10. számában található.

szervezi meg úgy, hogy a gépkocsik üres futása minimális legyen. A matematikai modellhez ismert minden szállítás kezdő és végpontja, a rakodási idők, azon legkorábbi és legkésőbbi időpontok, amelyek közé egy szállításnál a rakodás megkezdésének, illetve befejezésének esnie kell, végül az egyes szállítási relációk között szállítandó mennyiség. A feladat méretére jellemző, hogy kb. 1500 szállítási relációt kell egyszerre figyelembe venni. A program eredménye megadja, hogy mely típusú gépkocsinak honnan-hova, mikor kell mennie, mit és mennyit kell szállítania.

Az Országos Vízügyi Hivatal szakembereivel együttműködve több éves kutatómunka indult a Tiszavölgyi Vízgazdálkodási Rendszer *vízkezelteinek gazdaságos felhasználására szolgáló szimulációs modell* kidolgozására, a *vízkezelés számító gépes irányítására*. Ennek során a fő cél a térben, időben, mennyiségben és minőségben változó vízkezelési folyamatok szétosztása (kezelési módja), hogy ez a térben, időben, mennyiségben és minőségben változó vízigényeket a leg gazdaságosabban elégítse ki. E komplex feladat megoldása három téma kidolgozásával kezdődött:

1. A felülről vezérelt öntözősatorna-rendszerek vízkezelését az egyes esatornaszakaszok felső pontján levő zsilipek nyitásával-zárásával lehet szabályozni. A vízhiányok időbeli levonulására vonatkozó műszaki-matematikai modell alapján kidolgoztunk egy számítógépi programot, amely az egyes esatornaszakaszok műszaki jellemzői, az egyes pontoknál térben és időben jelentkező vízigények alapján meghatározza a esatorna-rendszerek zsilipeinek nyitási-zárási időpontjait. A kidolgozott modellt a későbbiekben dinamizálni lehet, a zsilipek kezelésénél levő időbeli és egyéb kötöttségek hatásainak figyelembevételével.

2. A vízkezelési modellek elkészítésének egyik alapfeltétele az öntözőrendszer vízigényeinek ismerete. Erre a célra matematikai-statisztikai modellt dolgoztak ki, amely a napi átlagos vízigényt meteorológiai adatok és az adott területen levő különböző növény kultúrák időjárástól és a növény fejlődési szakaszától függő vízigények alapján becsüli meg.

3. Az öntözőrendszerek vízigénye és a vízkezelési mód közötti kapcsolat jellemzésére szolgáló statisztikai modellt dolgoztak ki és az elmúlt időszakok adatai alapján eloszlásvizsgálatokat végeztek. A vízigények valószínűségelméleti jellemzése lehetővé teszi, hogy nagyobb vízkezelési rendszerek modellezésénél (pl. Tisza I., Tisza II. vízlépcső), ahol a nagy térbeli kiterjedés, halmazosság és egyéb hatások miatt már el

kell tekinteni az igények rövid időszakokra szóló tételes összegyűjtésétől, matematikailag jól kezelhető eloszlásfüggvényekkel jellemzett vízigények szerepeljenek az egész rendszer modelljében.

A fenti három részfeladat alapján a későbbiekben az egész rendszer összefüggő modellezéséhez, majd a számítógépes irányítás előkészítéséhez is hozzá lehet majd fogni.

A Vállalat igen sok megrendelő részére végzi a *termékösszeállítás optimalizálására* szolgáló lineáris programozási feladatok modellezését és számítását. Ezen munkák közül ki kell emelnünk a Csavaripari Vállalat részére készülő modellszámítást, amely során egy igen nagyméretű lineáris programozási feladatot kell — valószínűleg dekompozíciós módszerrel — a vállalat technológiai sajátosságainak és struktúrájának kihasználásával megoldani. A feladat méreteire jellemző, hogy kb. 500 homogén gépes csoporton kb. 10 000 féle terméket kell előállítani, mindegyiket átlagban három technológiai változattal és azon belül is 10–20 féle alternatív megmunkálási lehetőséggel (azonos célú, de mérethatár és teljesítőképesség szerint eltérő homogén gépes csoportokon). Ezenkívül mind a 10 000 cikkre piaci „csoport” felsőkorlátot is figyelembe kell venni (ugyanazon termék eltérő gyártási lehetőségei miatt). A feladatot ebben a formájában közvetlenül a szimplex módszer könyvtári programjával — belátható időn belül — nem lehetne megoldani. Speciális modellre és algoritmusra volt szükség a feladat megoldásához. Az egyes gyártási vertikumokra — mint részfeladatokra — a szállítási és az általánosított szállítási feladat algoritmusát alkalmazzák, míg a központi feladatot ezeket összefogja és együttesen optimalizálja.

Az Operációkutatási Osztály az eddig részletesebben tárgyalt feladatokon kívül sok más jellegű feladattal is foglalkozik. Így több vállalatnál foglalkozik *készletmodellekkel*. Az egyik ipari nagyvállalat részére megbízhatósági készletmodellét készített az egyenletesen beérkező anyagok csoportjára és kb. 20 000 anyagra elvégezte a számításokat. A közeljövőben a nem egyenletesen érkező anyagok csoportjára dolgozza ki a modellt. Foglalkozott *gyógy-szernév-generáló programok* készítésével, a *gazdasági rendszerekre ható tényezők matematikai vizsgálatával* (pl. termelési függvények kidolgozása, a gazdasági mechanizmus ösztönzőinek, szabályozóinak a vállalatok üzletpolitikájára gyakorolt hatásainak vizsgálatával). Foglalkozott különböző *anyaghasználati problémák* modellezésével és optimalizálásával (így pl. tárcsakiszabás

esetére modellt dolgozott ki a leszabási változatok meghatározására, majd ezek és a szabászati igények alapján optimális programot készített.). A VÁTI részére a lakásösszetétel optimalizálására, az Állattenyésztési Kutató részére a szarvasmarha-állomány optimális fajta-összetételének meghatározására (az 1975, 1985 és 1990-es évekre előrebecsült tej, hús és export-igények, valamint az egyes fajtákra jellemző különböző tényezők figyelembevételével) dolgoztak ki modelleket.

Az *Ökonometriai Osztály* makroökonómiai — népgazdasági vagy ágazati — szintű és egyben közép- illetve hosszútávú tervezési problémák elemzését végzi matematikai, elsősorban ökonometriai módszerek felhasználásával.

A legnagyobb volumenű munka az Országos Anyag- és Árhivatal megbízásából az *ártervezés ökonometriai modelljével* kapcsolatban folyik. A modell célja a közép- és hosszútávú áralakulás előrebecslése, illetve — a munka későbbi szakaszában — optimalítása. A munka eddigi szakaszában azt mérték fel, hogy mely ágazatokban várhatók árnövekedések, illetve áresökkenések, előreláthatólag hogyan alakul az általános árindex és a létfenntartási költségek indexe, milyen kapcsolat van a pénzügyi ösztönzők és az árak alakulása között, milyen árhatásokkal járna a pénzügyi ösztönzőrendszer egységesítése és a mentesítések, valamint dotációk megszüntetése, végül, hogy az életszínvonalpolitika szempontjából milyen problémákat vet fel az általános árindex és létfenntartási költségek indexe közötti divergencia. Ezekhez a vizsgálatokhoz szorosan kapcsolódik az OT megbízásából végzett számítás, amelynek célja annak meghatározása, hogy a munkabérek milyen ütemben növelhetők inflációs veszély felidézése nélkül.

A Külkereskedelmi Minisztérium részére végzett elemzéseknél azt vizsgálták, hogy milyen összefüggés van a devizaszorzó alakulása és az áralakulás között, milyen mértékben van lehetőség az ösztönzők módosítására, illetve célszerűnek látszó korrekciójára, továbbá, hogy a tőkés importárak emelkedése milyen mértékű árfeszültséget okoz idehaza, vagyis hogy milyen

mértékben importáljuk a világpiacon tapasztalható inflációs tendenciákat.

Az Árhivatal és a Tervhivatal részére készített elemzések a *beruházás optimális növekedési ütemének meghatározására* törekedtek. Ezek az elemzések azt mutatták, hogy objektív módszerekkel meghatározható az állóeszköz állomány növekedési ütemének legkedvezőbb vagy legnagyobb racionális értéke és így objektív, matematikai módszerekkel elemezhető a beruházási politika legalapvetőbb kérdései. Meghatározható az is, hogy ez a legkedvezőbb érték hogyan függ a gazdasági növekedést befolyásoló különböző tényezőktől.

Ennek a vizsgálatnak további érdekes részeredménye a *gazdasági növekedés és a munkaerő ráfordítás* közötti szoros kapcsolat kimutatása és annak bizonyítása, hogy a gazdasági növekedést kedvezően befolyásoló tényezők jórésze csak akkor érvényesülhet kellőképpen, ha a népgazdaság egészében, vagy legalábbis a kritikus fontosságú ágazatokban a létszám is növekszik.

A Kohó- és Gépipari Minisztérium, illetve az OMF B Gépipari Főosztálya részére végzett számítások elsősorban annak meghatározását célozzák, hogy  *mennyi beruházásra van szükség egy jó munkaerő megtakarításhoz*, és hogy milyen mértékben tekinthető racionálisnak a munkaerőfelszabadító beruházások kiterjesztése. Az MTA Közlekedéstudományi Munkaközössége részére végzett elemzés a *közlekedéssel szembeni igények várható alakulását* próbálja felmérni, és azt elemzi, hogy a műszaki fejlődés hazai üteme hogyan hasonlítható össze külföldön tapasztalható műszaki fejlődési ütemmel.

A Gazdaságmatematikai Főosztályon a megrendelésekre végzett munkák mellett jelentős belső kutatási munka is folyik. Ez egyrészt az arányaiban is igen jelentős fiatal munkaerő szakmai továbbképzésére irányul belső szakszemináriumok formájában, másrészt néhány kiemelt témában (amelyek iránt a közeljövőben a vállalatok és intézmények részéről várhatóan nőni fog az igény) a kutatások alkalmazását szolgálja.

LAMPL TAMÁS



## CONTENTS

GYÖRGY SZEPESI—BÉLA SZÉKELY: Optimal paths of economic growth in a controlled economic system .....	137
GYÖRGY MESZÉNA—MRS. BÉLA SIMON: Investigation of the autoregressivity hypothesis in input-output tables .....	153
PETER GLATTFELDER—PÁL VÁCZI: On the forecasting of the results of ex post models .....	165
ZSIGMOND NYÁRY: Estimation and forecasting: comparison of some econometric models .....	173
LJUBOMIR MARTIĆ: A geometrical note on new income inequality measures .....	191
ÉVA RADNÓTI: The system of preferences within the concept of prices proportional to costs .....	195

### CONCEPTS AND METHODS

JÁNOS KOVÁCS—JÁNOS TIMÁR: Methods of planning manpower and school enrolment in some European socialist countries .....	213
--	-----

### BOOK REVIEWS

MORDECHAI EZEKIEL—KARL A. FOX: Correlation and regression analysis ( <i>László Vita</i> ) .....	233
Z. PAWLOWSKI: Econometrics ( <i>Zsigmond Nyáry</i> ) .....	236
Economic development and planning ( <i>Rudolf Andorka</i> ) .....	238
RUDOLF ANDORKA: Micro-models ( <i>József Sebestyén</i> ) .....	239

### SCIENTIFIC LIFE

TAMÁS LAMPL: Economico-mathematical activities of INFELOR, Enterprise for Systems Engineering .....	243
---	-----

## СОДЕРЖАНИЕ

Дердь Сепеши—Бела Секей: Оптимальные пути экономического роста в регулируемой экономической системе .....	137
Дердь Месена—Белане Симон: Исследование авторегрессии в межотраслевом балансе .....	153
Петер Глаттфелдер—Пал Вацзи: Об оценке результатов моделей вида ex post .....	165
Жигмонд Няри: Оценка и прогноз: сравнение некоторых эконометрических моделей .....	173
Любомир Мартич: Геометрические замечания к новым показателям неравенства доходов .....	191
Ева Радноти: Система предпочтений концепции ценообразования пропорционально затратам .....	195

### ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

Янош Ковач—Янош Тимар: Методы перспективного планирования рабочей силы и образования в некоторых европейских социалистических странах .....	213
---	-----

### О КНИГАХ

Мордехай Эзекиел—Карл А. Фокс: Корреляция и анализ регрессий ( <i>Ласло Вита</i> ) .....	233
З. Павловски: Эконометрия ( <i>Жигмонд Няри</i> ) .....	236
Экономическое развитие и планирование ( <i>Рудольф Андорка</i> ) .....	238
Рудольф Андорка: Микромодели ( <i>Йозеф Шебештен</i> ) .....	239

### НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Тамаш Лампл: Экономическо-математические работы в Предприятии техники систем ИНФЕЛОР .....	243
--	-----

## TARTALOM

SZEPESI GYÖRGY—SZÉKELY BÉLA: A gazdasági növekedés optimális pályái egy szabályozott gazdasági rendszerben .....	137
MESZÉNA GYÖRGY—SIMON BÉLÁNÉ: ÁKM együtthatók előrejelzése autoregresszívítás alkalmazásával .....	153
GLATTFELDER PÉTER—VÁCZI PÁL: Ex post jellegű modellek eredményeinek előrebecsléséről .....	165
NYÁRI ZSIGMOND: Becslés és előrejelzés: néhány ökonometriai modell összehasonlítása .....	173
LJUBOMIR MARTIĆ: Geometriai megjegyzések az új jövedelem-egyenlőtlenségi mutatókhoz .....	191
RADNÓTI ÉVA: A költségáryos árkonceptió preferencia-rendszere .....	195

## FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KOVÁCS JÁNOS—TIMÁR JÁNOS: A munkaerő és az oktatás távlati tervezésének módszerei néhány európai szocialista országban .....	213
--	-----

## KÖNYVEKRŐL

MORDECHAI EZEKIEL—KARL A. FOX: Korreláció és regresszióanalízis ( <i>Vita László</i> ) .....	233
Z. PAWLOWSKI: Ökonometria ( <i>Nyári Zsigmond</i> ) .....	236
Gazdasági fejlődés és tervezés ( <i>Andorka Rudolf</i> ) .....	238
ANDORKA RUDOLF: Mikromodellek ( <i>Sebestyén József</i> ) .....	239

## TUDOMÁNYOS ÉLET

LAMPL TAMÁS: Az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat gazdaságmatematikai munkái .....	243
---	-----

