SZIGMA

Matematikai Közgazdasági folyóirat

Szerkesztő bizottság:

A MAGYAR KÖZGAZDASÁGI TÁRSASÁG
MATEMATIKAI-KÖZGAZDASÁGI SZAKOSZTÁLYÁNAK VEZETŐSÉGE

Szerkeszti: MARTOS BÉLA

Munkatársak: ANDORKA RUDOLF, BÁGER GUSZTÁV, BOD PÉTER,
PONGRÁCZ TIBOR

*

E szám szerzői:

BÁGER GUSZTÁV, Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete, DR. CSÁKI CSABA, a Marx Károly Közgazdasági Egyetem adjunktusa, GÁBOR GYŐZŐ, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos segédmunkatársa, KORNAI JÁNOS, a közgazdaságtudományok doktora, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos osztályvezetője, KOVÁCS ÁLMOS, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat csoportvezetője, MAJTHAY ANTAL, kandidátus, az MTA Számítástechnikai központjának tudományos munkatársa, MARTOS BÉLA, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos főmunkatársa, MESZÉNA GYÖRGY, a Marx Károly Közgazdasági Egyetem adjunktusa, JERZY MYCIELSKI, Külkereskedelmi Intézet, Varsó, RIMLER JUDIT, az MTA Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos munkatársa, SEBESTYÉN JÓZSEF, Agrárgazdasági Kutató Intézet, STAHL JÁNOS, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat osztályvezetőhelyettese, SZEGEDY MIKLÓS, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, SZÉKELY BÉLA, az Országos Tervhivatal főelőadója, WITOLD TRZECIAKOWSKI, Külkereskedelmi Intézet, Varsó.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI. Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215–96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488., az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban: Budapest V., Váci utca 22. Telefon: 185–612.
Előfizetési díj egy évre: 40,– Ft

Jerzy Mycielski – Witold Trzeciakowski

A pénzügyi rendszer és a rövid távú tervezés a tervgazdaságban

1. Bevezetés

E tanulmánynak az a célja, hogy bemutassa, hogyan használják fel a pénzügyi rendszert a tervgazdaság irányítására. Csak az optimális irányítás (optimális tervezés) elmélete képezi érdeklődésünk tárgyát.

A tervgazdaságot természetesen a központi tervező szerv egyenesen is irányíthatja, pénzügyi eszközök felhasználása nélkül. Ilyenfajta irányítási rendszerre mutat egy példát a kétszintes optimális tervezési eljárás, amelyet Kornai és Lipták [3, 4] javasol. A központi tervező szerv által kiadott direkt feladatok száma azonban hatalmas lehet (a Kornai—Lipták-féle eljárás szerint a termékek és vállalatok számának szorzatával egyenlő). Ez a gyakorlatban alkalmazhatatlanná teszi a direkt irányítási módszert, legalábbis ami az egész népgazdaság optimális tervezését illeti.

A tervgazdaság optimalizálásának másik módszerét [11] javasolta, amely Kantorovics [2], Dantzig és Wolfe [1][1] lineáris programozásban alkalmazott dekompozíciós eljárásán alapul. Ezt az eljárást nemlineáris programok esetére is általánosítani lehet [9]. Minden egyes vállalat (t.i. a termelési és kereskedelmi tevékenység alárendelt egysége) maximalizálja az árnyékárakon mért nyereséget („kalkulatív nyereség"); a központi tervező szerv úgy változtatja az árnyékárakat, hogy az összes termék mérlege egyensúlyban legyen. A központi tervező szerv által kiválasztandó — és azután megváltoztatandó — paraméterek száma még mindig nagyon magas (a termékek számával egyenlő), de sokkal alacsonyabb, mint a direkt utasításos módszernél. Ezért az optimális tervezés nyereségmaximalizálási módszere a gyakorlatban megfelelőbbnek látszik, és széleskörűen használják is, pl. a lengyel külkereskedelem földrajzi- és árustruktúrájának megtervezésénél.[2]

Meg kell említeni, hogy a nyereségmaximalizálási módszer elvileg csak a rövid távú tervezésnél alkalmazható („kurrens optimalizálás").[3] Ezért a tanulmányozandó pénzügyi rendszer sem használható fel hosszú távú tervezés céljaira.

Bár a nyereségmaximalizálási eljárás elve nem függ attól, milyen egyenleget választottunk célfüggvénynek, az árnyékárak dimenziója ettől a választástól függ. A továbbiakban feltételezzük, hogy a teljes munkabérköltség (amely a termelésnek és a szolgáltatásoknak felel meg) a minimalizálandó makromodell célfüggvénye, és hogy az árnyékárakat következetesen belföldi fizetőeszközben fejezzük ki.

[1] A külkereskedelem földrajzi szerkezetének optimalizálására lásd [13, 5]. Több ország kölcsönös gazdasági együttműködésének optimalizálására, mint általánosított problémára lásd [10, 7].

[2] A lengyel külkereskedelmi tervezési rendszer leírásához lásd [14, 6].

[3] A nyereségmaximalizálási eljárást lehet úgy általánosítani, hogy tartalmazza a kiegészítő beruházások problémáját is. Lásd [12].

Nyilvánvaló, hogy a tervezés nyereségmaximalizálási módszere a pénzügyi rendszerrel való összekapcsolás nélkül is használható (kivéve a munkaráfordítás mérésére szolgáló bérrendszert). Ilyenfajta helyzetre példa a lengyel külkereskedelmi tervezés, ahol a „kalkulatív nyereséget" egy ösztönzési rendszerhez kapcsolták. A pénzügyi rendszer funkcióit — megfelelő szinten tartani a felhalmozást, fenntartani az egyensúlyt a fogyasztási cikkek piacán — a pénzügyi rendszer árai, árfolyamai és nyeresége látják el, míg tervezésre az árnyékárakat, a marginális árfolyamokat (ti. a valuták árnyékárait) és a kalkulatív nyereséget használják fel.

Érdemes azonban a két rendszer — a pénzügyi és a rövidtávú tervezési rendszer — integrálásának a lehetőségeit kutatni, mivel ez jelentősen egyszerűsítheti az irányítást, sőt meg kell szüntetnie az esetleges ellentmondásokat a tervezési és a pénzügyi rendszer között, meg kell könnyítenie a tervezés rendszeréhez kapcsolódó ösztönzők funkcionálását. E tanulmány célja ilyenfajta integrált pénzügyi és tervezési rendszer konstruálása; más szóval, olyan pénzügyi rendszer konstruálása, amely a nyereségmaximálási elvvel összhangban a rövid távú optimális tervezési döntéseknél is felhasználható.

Először néhány megjegyzést fűzünk az árnyékárak és a kiskereskedelmi árak kapcsolatához (2. rész). Majd pedig a 3. részben megszerkesztjük a pénzügyi célfüggvényt és a pénzügyi rendszer árait, árfolyamait, adóit és szubvencióit; a vállalati optimális tervezés e célfüggvény optimalizálását jelenti. A 4. részben a pénzügyi rendszer három variánsát tárgyaljuk. Az 5. részben az adók és szubvenciók témáját egészítjük ki.

2. Árnyékárak és kiskereskedelmi árak

Ismeretes, hogy az árnyékárak közgazdaságilag, mint a termékek (szolgáltatások) marginális költsége értelmezhetők. Más szóval, egy adott termék árnyékára a teljes népgazdasági munkabérköltségnek az a többlete, amely a termék egyenlegének egységnyi növekedése által jön létre. Az árnyékárak értéke a munkabérköltségtől függ, beleértve a feldolgozóipart is, valamint műszaki tényezőktől, export- és importáraktól, termelési kapcitástól, a kereslettől és a kínálattól külföldi piacokon, és a nemzeti termék tervezett struktúrájától és volumenétől. Ugyanezek a tényezők határozzák meg a termelői és szolgáltatási tevékenység munkabérköltségét a népgazdaságban. A k jószág árnyékárát a következőkben l_k-val jelöljük; ha a jószág az r külföldi piac valutája, az árnyékárat (t.i. a marginális árfolyamot) M^r-rel fogjuk jelölni. A k termék (szolgáltatás) kiskereskedelmi árát[4] a fogyasztási cikkek belföldi piacán W_k-val jelöljük, az egyéni fogyasztás tervezett mértékét ebből a termékből P_k^C-val (k termék felhasználását beruházási és kollektív fogyasztási célra nem számítjuk be P_k^C-ba). L^i jelöli a munkabérköltséget az i vállalatnál, B pedig a különbséget egyrészt a béralapnak az a része, amely nem a termelő és szolgáltató tevékenységnek felel meg (nyugdíjak, katonai és közigazgatási bérek), másrészt a nem egyéni fogyasztásra költött fogyasztói jövedelmek (megtakarítások, adók stb.) között. A fogyasztási cikkek piacán az egyensúly feltétele

$$\sum_k W_k P_k^C = \sum_i L^i + B\,. \tag{1}$$

[4] Az egyszerűség kedvéért eltekintünk a fogyasztási cikkek kis- és nagykereskedelmi árának különbségétől.

A W_k kiskereskedelmi áraknak nemcsak az általános (1) egyensúlyt kell biztosítaniuk, hanem az egyes fogyasztási cikkek piacán a termékek (szolgáltatások) iránti kereslet és kínálat (t.i. P_k^C) egyenlőségét is. Ebből következik, hogy — adott kollektív fogyasztás esetén — a kiskereskedelmi árak megfelelő értékei $\sum_i L^i + B$-től, P_k^C-tól és a fogyasztók preferenciáitól függnek (és attól is, hogyan függ B P_k^C-tól, ha ilyen függés fennáll).

Jelöljük β-val az árnyékárak relatív szintjét a kiskereskedelmi árakkal összehasonlítva. Pontosabban β az az arány, ahogyan az árnyékárakon mért egyéni fogyasztási alap aránylik a kiskereskedelmi árakon mért egyéni fogyasztási alaphoz:

$$\beta = \frac{\sum_k l_k P_k^C}{\sum_k W_k P_k^C} \tag{2}$$

(1) felhasználásával β-t a következő formában írhatjuk:

$$\beta = \frac{\sum_k l_k P_k^C}{\sum_k L^i + B}. \tag{3}$$

Át lehet látni, hogy β B-től, P_k^C-tól és azoktól a tényezőktől függ, amelyek az árnyékárakat és a termelési és szolgáltatási tevékenység munkabérköltségét határozzák meg. Más szóval, β csak B-től és a népgazdaság kurrens optimalizálása problémája paramétereitől függ. Nem függ a fogyasztók preferenciáitól (bár a kiskereskedelmi árak rendszerének szerkezete — adott P_k^C esetén — függ ezektől a preferenciáktól).

Meg kell említeni, hogy semmi ok nincs arra, hogy β 1-gyel legyen egyenlő a tervgazdaságban.[5] A felhalmozási arány (beruházás és kollektív fogyasztás céljára) olyan döntés, amelyet a központi tervező szerv variálhat, és β ettől az aránytól függ. Adott $\sum_i L^i$ esetén magasabb felhalmozási arány kisebb P_k^C értékeket, és így magasabb W_k és alacsonyabb β értékeket jelent. Ha kicsi a különbség a fogyasztási cikkek marginális és átlagos termelési költsége között, akkor a felhalmozásnak kívánatos szinten tartása céljából a kiskereskedelmi árak színvonalát nemcsak az átlagköltségszint felett, hanem a marginális termelési költség szintje felett is kell tartani, legalábbis akkor, ha B nem nagy és negatív; tehát ebben az esetben $\beta < 1$. Ha azonban nagy a különbség a marginális és az átlagköltségek között, a felhalmozás kívánt mértékének megfelelő kiskereskedelmi árszint a marginális költségek alatt tartható, legalábbis ha B nem nagy és pozitív; ebben az esetben $\beta > 1$.

Feltételeztük már, hogy a W_k-k egyensúlyi árak a P_k^C-k tervezett értékeinél; ezért W_k a fogyasztók preferenciáitól függ. Ez azonban nem jelenti azt, hogy az egyéni fogyasztás szerkezetét (t.i. P_k^C-k rendszerét) a fogyasztók preferenciái szerint határozzák meg. Ezt még kiegészítőleg feltételezve, t.i. feltételezve, hogy P_k^C tervezett értékei maximalizálják a fogyasztói hasznossági függvényt adott $\sum_i L^i$, adott beruházás és kollektív fogyasztás esetén, ebből

[5] A tökéletesen szabadpiaci gazdaságban — tökéletes verseny, az adók (jövedelemadót kivéve) és szubvenciók teljes hiánya — áll, hogy $W_k = l_k$ és így $\beta = 1$.

(mivel B P_k^C-tól függ) az árnyékárak és az egyensúlyi kiskereskedelmi árak közötti kölcsönös arányosság elvét[6] — mint ismeretes — levezethetjük. E szerint az elv szerint az arányossági tényező természetesen β-val egyenlő; ti. minden fogyasztási cikkre (áruk és szolgáltatások)

$$l_k = \beta W_k . \tag{4}$$

(4) felhasználásával adott β érték esetén P_k^C értékei, valamint W_k és l_k megfelelői értékei meghatározhatók. Ezért l_k-t és W_k-t P_k^C függvényeiként kell ismernünk (adott k esetén l_k és W_k árak az összes P_k^C-któl függnek). Az első ezek közül a függvények közül a népgazdaság kurrens optimalizálási problémája alapján vezethető le, a második a fogyasztási cikkek keresleti rugalmasságából és $\Sigma L^i + B$-ből. Ez utóbbi P_k^C függvénye és ezt a függvényt B és ugyancsak a népgazdaság optimalizálásának problémája határozza meg.

Meg kell jegyezni, hogy ha el is fogadjuk a (4) elvet, ez nem használható kivétel nélkül, mivel azzal az eredménnyel járhat, hogy például a szeszes ital kiskereskedelmi árát túl alacsony szinten határozzák meg a társadalmi érdek szempontjából (még ha az a fogyasztók preferenciáival konzisztens is lenne), a könyvek árát pedig túl magas szinten.

3. A javasolt pénzügyi rendszer elvei

Kísérletet teszünk a nyereségmaximalizálási elv szerinti rövid távú optimális döntéseknél felhasználható pénzügyi rendszer megkonstruálására.

Először azt kötjük ki, hogy a termelési szférában a pénzügyi rendszer csak egy V_k árrendszert és egy N^r árfolyamrendszert tartalmaz, ti. azt, amelyen a termelők egymásnak fizetnek (viszont megengedünk egy ettől különböző W_k kiskereskedelmi árrendszert). Az természetesen nem szükséges, hogy a termelési szférában a pénzügyi rendszer egyetlen ár- és árfolyamrendszeren alapuljon; a tervgazdaságok meglevő pénzügyi rendszerei gyakran több ár- és árfolyamrendszeren alapulnak ebben a szférában. Úgy látszik azonban, hogy az egyetlen V_k ár- és N^r árfolyamrendszeren alapuló pénzügyi rendszer a gyakorlatban egyszerűbb és hatékonyabb lesz, feltéve, hogy lehetséges úgy megtervezni, hogy megfeleljen azoknak a gazdaságpolitikai követelményeknek (pl. a pénzügyi egyensúly, a felhalmozás megfelelő mértéke követelményének stb.), amelyeket a differenciált ár- és árfolyamrendszer melletti érveknek szoktak tekinteni. Ahogy a továbbiakban kimutatjuk, a pénzügyi rendszert meg lehet így tervezni.

Ha a pénzügyi rendszernek kell a népgazdaság kurrens optimalizálása alapjának lenni a nyereségmaximalizálási elvnek megfelelően, meg kell követelnünk a vállalatoknál maximalizálandó kalkulatív nyereségi és a pénzügyi célfüggvény ekvivalenciáját. A két célfüggvény ekvivalenciája azt jelenti, hogy a második az elsőnek növekvő függvénye. Mivel a legkényelmesebb a termékek ráfordításának és kibocsátásának lineáris függvényét venni a pénzügyi rendszer célfüggvényeként, és azt belföldi valutában kifejezni, azt következtetjük, hogy a pénzügyi célfüggvénynek egyenlőnek kell lennie a kalkulatív nyereségnek és

[6] Lásd pl. [8]. Ez a tanulmány egyrészt β és a marginális árfolyam közötti kapcsolattal is foglalkozik, másrészt olyan árfolyamokkal is, amelyek a kiskereskedelmi árakból származnak (mint „maximális árfolyam", ahogy ezt Kalecki és Polsczek definiálta).

egy bizonyos pozitív, dimenzió nélküli a^i állandónak a szorzatával, mínusz egy bizonyos Q^i állandó. Lehetséges természetesen a pénzügyi rendszernek ebből az „alap"-célfüggvényéből további célfüggvényeket képezni (pl. a pénzügyi ösztönzési alapét), ha az „alap" függvénynek egy nem-lineáris növekvő függvényét vesszük. Azt is hangsúlyozni kell, hogy a^i és Q^i állandók a különböző vállalatoknál különbözők lehetnek.

Jelöljük p^i_k-val a k jószág (szolgáltatás) kibocsátása és ráfordítása közti különbséget az i vállalatnál. Más szóval, $|p^i_k|$ a k jószág nettó kibocsátása, ha $p^i_k > 0$, és a k jószág nettó felhasználása, ha $p^i_k < 0$. Az i vállalat „alap" pénzügyi célfüggvényét a következő formában írhatjuk le:

$$a^i\Big(\sum_k l_k p^i_k - L^i\Big) - Q^i . \tag{5}$$

Meg kell jegyezni, hogy ha az i vállalat az r külföldi piacra exportál, vagy onnan importál, akkor az egyik p^i_k az idegen valuta-bevételeket vagy kiadásokat jelöli, a megfelelő l_k-t pedig M^r marginális árfolyamként kell felfogni.

Most úgy kell leírnunk az (5) pénzügyi célfüggvényét, hogy ne az l_k árnyékárakat és az M^r marginális árfolyamokat használjuk, hanem a pénzügyi rendszer V_k árait és N^r árfolyamait (a termelési szférában). Az egyes áruk kibocsátásait és ráfordításait (5)-ben l_k-val (vagy M^r-rel) arányosan áraztuk. A pénzügyi rendszer egyszerűsége kedvéért elkerülhetetlennek látszik annak kikötése, hogy ezen ráfordításokat és kibocsátásokat V_k-val (vagy N^r-rel) arányosan kell árazni, ha (5)-t a pénzügyi rendszer árainak felhasználásával írjuk le. Ezért ki kell kötnünk az árnyékárak és marginális árfolyamuk rendszerének, valamint V_k árak és N^r árfolyamok rendszerének kölcsönös arányosságát:

$$V_k = b\, l_k \tag{6}$$

minden jószágra, és

$$N^r = b\, M^r \tag{7}$$

minden külföldi piacra. b pozitív állandó, dimenzió nélküli szám, ha a pénzügyi rendszer árait hazai valutában fejezzük ki, és i-től függetlennek kell lennie, mert különben egynél több V_k árrendszer és N^r árfolyamrendszer jönne létre a termelési szférában (kikötésünkkel ellentétben).

Az (5) pénzügyi célfüggvényt most így írhatjuk le:

$$\frac{a^i}{b} \sum_k V_k p^i_k - a^i L^i - Q^i . \tag{8}$$

Ha az i vállalat az r külföldi piacra exportál vagy onnan importál, akkor az egyik p^i_k az idegen valutabevételeket vagy kiadásokat jelöli, a megfelelő V_k-t pedig N^r marginális árfolyamként kell felfogni.

Jelöljük Z^{Gi}-vel i vállalat bruttó pénzügyi nyereségét, vagyis a különbséget a V_k árrendszer szerint árazott termékmennyiség, az ugyanazon árrendszer szerint árazott anyagfelhasználás, és a direkt munkabérköltség között:

$$Z^{Gi} = \sum_k V_k p^i_k - L^i. \tag{9}$$

Defíniáljuk a T^{Ai} és T^{Li} adókat:

$$T^{Ai} = \left(1 - \frac{a^i}{b}\right) \sum_k V_k p_k^i, \tag{10}$$

$$T^{Li} = (a^i - 1) L^i. \tag{11}$$

Most az i vállalat (8) „alap" pénzügyi célfüggvényét Z^{Ni} nettó pénzügyi nyereség formájában írhatjuk le:

$$Z^{Ni} = Z^{Gi} - T^{Ai} - Q^i. \tag{12}$$

Az egyes vállalatoknál a kurrens irányításra vonatkozó gazdasági döntéseket Z^{Ni} maximalizálása elvének megfelelően kell hozni. A központi tervező szervnek úgy kell a V_k árakat és az N^r árfolyamokat változtatni, hogy biztosítsa mind az áruk egyensúlyát, mind a külkereskedelemét az összes külföldi piacon. Természetesen Z^{Ni}-nek csak egy részét lehet a vállalat rendelkezésére bocsátani (pl. pénzügyi ösztönzési alap formájában), Z^{Ni} legnagyobb részét az állami költségvetésbe kell irányítani jövedelemadó formájában (progresszív, differenciált az egyes vállalatoknál).

Fűzzünk néhány megjegyzést T^{Ai} és T^{Li} adókhoz. Először, ha $a^i > b$, akkor $-T^{Ai}$ szubvenció; ha $a^i < 1$, $-T^{Li}$ szubvenció. Látható, hogy a T^{Ai} adó az értéknövekedéssel, T^{Li} a munkabérköltséggel arányos. Természetesen mindkét adónak árformáló jellege van; V_k és N^r egyensúlyi értékeit befolyásolják.

(12)-ből következik, hogy Q^i közgazdaságilag adót vagy terhet is jelent ($-Q^i$ szubvenciót jelent, ha Q^i negatív). Q^i azonban nem függ a kurrens irányítás döntési változóitól, de függhet pl. a beruházási döntések változóitól.

Hadd jegyezzük meg, hogy az áruk és szolgáltatások termelési szférájában funkcionáló T^{Ai} és T^{Li} adóktól eltekintve, a javasolt pénzügyi rendszerben mégy egy adónak kell megjelennie. Ez abból a tényből következik, hogy a W_k kiskereskedelmi árak különbözhetnek — mint már említettük — a V_k termelői áraktól. A különbség egy olyan adó, amely az egyéni fogyasztás szférájában funkcionál; a k árura nézve, ez a T_k^C adó a következő kifejezéssel egyenlő:

$$T_k^C = (W_k - V_k) P_k^C. \tag{13}$$

Ha $W_k < V_k$, $-T_k^C$ szubvenció.
A T_k^C adók összegét T^C-vel jelöljük:

$$T^C = \sum_k T_k^C. \tag{14}$$

(2), (6) és (13) felhasználásával ezt nyerjük:

$$T^C = (1 - \beta b) \sum_k W_k P_k^C = \left(\frac{1}{\beta b} - 1\right) \sum_k V_k P_k^C. \tag{15}$$

Ha a (4) elvet elfogadjuk, a (6) formulából a kiskereskedelmi és a termelői árrendszer kölcsönös arányosságát kapjuk:

$$V_k = \beta b W_k \tag{16}$$

minden fogyasztási cikkre (áruk és szolgáltatások). Továbbá ekkor a (13) formula szerint

$$T_k^C = (1 - \beta b) W_k P_k^C = \left(\frac{1}{\beta b}\right) V_k P_k^C, \tag{17}$$

ami megadja az egységes adótételt minden fogyasztási cikkre. A P_k^C értékeknek és a nekik megfelelő W_k, illetve l_k értékeknek kiszámítási módszere, amelyet röviden már bemutattunk, (6) és (16) miatt egyben a V_k fogyasztói árak meghatározásának a módszere is, és a fogyasztói árakkal fejezhető ki (nem pedig az l_k-kal).

Foglaljuk össze következtetéseinket a javasolt pénzügyi rendszer pénzügyi egyensúlyát illetően. Ennek az egyensúlynak első eleme az egyensúly az egyéni fogyasztás szférájában, amely a kiskereskedelmi áraknak megfelelő (a felhalmozás kívánatos volumenétől függő) szinten tartásával és a T_k^C adók felhasználásával érhető el. A pénzügyi egyensúly második eleme a termelő vállalatok egyensúlya. A javasolt pénzügyi rendszer ezt az egyensúlyt is biztosítja, legalábbis, ha $Q^i \leq 0$. Ez abból a tényből következik, hogy az optimális terv szerint a kalkulatív nyereség nem negatív, és a Z^{Ni} nettó pénzügyi nyereség a kalkulatív nyereségnek és egy pozitív állandónak a szorzatával egyenlő, ha $Q_i = 0$. Így Z^{Ni} (a $Q^i \leq 0$ esetben) az optimális tervben nem negatív.

4. A pénzügyi rendszer variánsai

A javasolt pénzügyi rendszerben a^i és b állandók tetszőlegesen megválasztott értékeinél mindhárom — T^{Ai}, T^{Li} és T^C — adó különbözik nullától. Mi több, (10)-ből, (11)-ből és (15)-ből következik, hogy általában lehetetlen a^i és b értékeit úgy meghatározni, hogy mindhárom adó eltűnjön; ez csak akkor volna lehetséges, ha $\beta = 1$ (ekkor $a^i = b = 1$-et kellene vennünk).

Az azonban kimutatható, hogy ha a^i és b értékeit megfelelően választjuk meg, T^{Ai}, T^{Li} és T^C közül mindenesetre kettőt eltűntethetünk; ezt háromféleképpen lehet elvégezni, attól függően, melyik adó nem tűnik el. Most a javasolt pénzügyi rendszernek ezt a három variánsát tárgyaljuk. Gyakorlati okokból az a jó, ha a pénzügyi rendszerben az adófajták száma a lehető legkisebb; ezért a legkedvezőbb pénzügyi rendszer megválasztása a következő három variáns közötti választásra korlátozódik.

1. variáns. Legyen $a^i = b = 1$. Így $T^{Ai} = T^{Li} = 0$ és

$$T^C (1 - \beta) \sum_k W_k P_k^C = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sum_k V_k P_k^C. \tag{18}$$

A V_k árak és az N^r árfolyamok rendszere az árnyékárak és marginális árfolyamok rendszerével azonos, és mind a bruttó, mind a nettó pénzügyi nyereség ($Q^i = 0$ esetben) egyenlő a kalkulatív nyereséggel. Ha a (4) elvet elfogadjuk, a W_k kiskereskedelmi árak és a T_k^C adók így alakulnak:

$$W_k = \frac{1}{\beta} V_k, \tag{19}$$

$$T_k^C = (1 - \beta) W_k P_k^C = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) V_k P_k^C \tag{20}$$

minden fogyasztási cikkre.

2. *variáns.* Legyen $a^i = 1$ és $b = \dfrac{1}{\beta}$. Így $T^{Li} = T^C = 0$ és

$$T^{Ai} = (1 - \beta) \sum_k V_k P_k^i . \tag{21}$$

A V_k árak és az N^r árfolyamok a β-val elosztott árnyékárakkal, ill. marginális árfolyamokkal egyenlők; a nettó pénzügyi nyereség ($Q^i = 0$ esetben) a kalkulatív nyereséggel egyenlő. Ha a (4) elvet elfogadjuk, a W_k kiskereskedelmi árak és a V_k árak egyenlők (csak egy árrendszer van a népgazdaságban) és a T_k^C adók mind eltűnnek:

$$W_k = V_k , \tag{22}$$

$$T_k^C = 0 \tag{23}$$

minden fogyasztási cikkre.

3. *variáns-* Lengyen $a^i = b = \dfrac{1}{\beta}$. Így $T^{Ai} = T^C = 0$ és

$$T^{Li} = \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) L^i . \tag{24}$$

A V_k árak, N^r árfolyamok és a nettó pénzügyi nyereség ($Q^i = 0$ esetben) rendre a β-val elosztott árnyékárakkal, marginális árfolyamokkal, ill. a kalkulatív nyereséggel egyenlőek. Ha a (4) elvet elfogadják, a W_k kiskereskedelmi árak és a V_k árak egyenlők (csak egy árrendszer van a népgazdaságban) és a T_k^C adók mind eltünnek:

$$W_k = V_k , \tag{25}$$

$$T_k^C = 0 \tag{26}$$

minden fogyaszási cikkre.

Ha $\beta < 1$, akkor, ahogy ez (18)-ból, (21)-ből és (24)-ből következik, T^C adó az 1. variánsban, T^{Ai} adó a 2. variánsban, és T^{Li} adó a 3. variánsban; ha azonban $\beta > 1$, akkor ezek mind szubvenciók (ellenkező előjellel).

Meg kell jegyezni, hogy ha $b = \dfrac{1}{\beta}$-t vesszük, akkor egyes vállalatoknál a 2. variáns használható (t.i. $a^i = 1$), más vállalatoknál pedig a 3. variáns $\left(\text{t.i. } a^i = \dfrac{1}{\beta}\right)$. A $b = 1$ értéknek csak az 1. variáns felel meg (t.i. $a^i = 1$).

5. Megjegyzések az adókról és szubvenciókról

A javasolt pénzügyi rendszerben a T^{Ai}, T^{Li} és T_k^C adók (szubvenciók) nemcsak a népgazdaság egyensúlyát, hanem kurrens optimalizálását is biztosítják. Ez megkülönbözteti ezeket az adókat (szubvenciókat) azoktól a – néha alkalmazott – adóktól és szubvencióktól (mint pl. egyes áruk exportjának vagy veszteséges termelésének szubvencionálása ezen áruk külkereskedelmi egyensúlya érdekében) amelyek a gazdaság egyensúlyához vezetnek ugyan, de optimalitásához nem.

Azt azonban hangsúlyozni kell, hogy bizonyos esetekben a gazdaság egyensúlya és optimalizálása érdekében szükséges a T^{Ai}, T^{Li} és T_k^C mellett más adók vagy szubvenciók alkalmazása is. Ez a gazdaság kurrens optimalizálása egy másik modelljének elemzéséből következik (lásd [11]). Ez a modell valamivel általánosabb, mint az, amely ebben a tanulmányban fejtegetéseink alapját képezte. Ezek közé az adók és szubvenciók közé tartoznak a vámok és az export-import szubvenciók, amelyek a külkereskedelmi ügyletek vagy szerződések feltételeihez való alkalmazkodás eredményeként jöttek létre; ugyanis az ilyen szerződések vagy egyezmények keretében az egyes import- vagy exportügyletek külön szubvenciók vagy vámok hiányában „veszteségesek" vagy „túl nyereségesek" lehetnek.

A tárgyalt adókon és szubvenciókon kívül természetesen néhány más, teljesen indokolt adó és szubvenció is létezik, amelyek nem a népgazdaság egyensúlya és kurrens optimalizálása érdekében jönnek létre, hanem más premisszák alapján. Ide tartozik a már említett jövedelemadó, amelynek az a célja, hogy Z^{Ni} nagy részét elvonja az i vállalattól, pl. beruházási célokra vagy anyagi ösztönzési alap formájában. Továbbá olyan adók és szubvenciók tartoznak ide, melyeket pl. a túlságosan szűk specializáció kockázatának elkerülési tendenciája szül, vagy hosszú távú gazdaságfejlesztés-politikai meggondolások (új, felnövekvő termékek szubvencionálása) és így tovább.

Az inkább társadalmi, mint gazdasági meggondolásokkal igazolt adó példája lehet a tervgazdaságban az alkalmazottak által fizetendő jövedelemadó. Arról van szó, hogy egy megfelelően megkonstruált bérrendszerben egy adott vállalatnál a munkabérköltségnek bérleti díjakat is kell tartalmazniuk, mivel bizonyos szűkös szakmunkákat alkalmaznak. Más szóval, az alkalmazottak e csoportjainak bére megfelelően magas kell, hogy legyen, máskülönben nem fogják a szakmunkásokat megfelelően alkalmazni a népgazdaságban; olyan vállalatoknál is érdemes lesz alkalmazni őket, ahol nem elég nagy a munka termelékenysége. Másrészt ez nem jelenti azt, hogy a különleges képzettséggel rendelkező munkásoknak munkájuk „árnyékárával" egyenlően kell keresniük (bár a vállalat által kifizetett bérnek ezzel az árral kell egyenlőnek lennie). Ilyen magas kereset a társadalmi egyenlőség elve szempontjából elfogadhatatlan lenne; emellett a szakképzett munkaerő piaci kínálatának növelésére gyakorolt hatása elhanyagolható, hosszú távra pedig a kínálat növelésére gyakorolt ösztönző hatása túl erős lehet (megfelelő számú munkás átképzése folytán). Ebből következik az alkalmazottakra kirótt jövedelmi adó szükségessége, amelynek összegét az alkalmazottak egyes csoportjai szerint differenciálják. Természetesen ezt az adót nem szabad összetéveszteni a vállalati béralappal arányos T^{Li} adóval.

Meg kell itt jegyezni, hogy a jövedelemadó szubvenció formájában is felléphet, amelyet az állami, nem pedig a vállalati költségvetésből fizetnek az alkalmazottnak. A jövedelem-szubvenciót az alkalmazottak kevésbé hatékony csoportjaira (pl. alacsony műveltségűek, nők stb.) alkalmazzák, azért, hogy a foglalkoztatásuk ellen ható ösztönzést elkerüljék, amely akkor következik be, ha a vállalat által fizetendő bért írják elő magas szinten. Ez a szubvenció a teljes foglalkoztatottsági politika eszköze lehet, és helyettesítheti a tömegáruk kiskereskedelmi árának csökkentését [azaz a (4) elvtől való eltérést] annak érdekében, hogy a lakosság alacsony jövedelmű rétegei is fogyaszthassák ezeket az árukat. Így elkerülhető az is, hogy a lakosság többi rétegeinek fogyasztási struktúrája eltorzuljék a tömegáruk viszonylagosan túl nagy fogyasztásának irányában. A jövedelem-szubvenció egyik példája a megfelelően meghatározott családi pótlék is.

(Beérkezett: 1970. november 20.)

IRODALOM

1. Dantzig, G.—Wolfe, P.: The decomposition algorithm for linear programs. Econometrica, Vol. 29. 1961. 767—778. o.
2. Kantorovich, L. V.: The best use of economic resources.. London, 1965. Pergamon Press.
3. Kornai, J.: Mathematical planning of structural decisions. Amsterdam—London, 1967. North-Holland Publishing Co.
4. Kornai, J.—Lipták, T.: Two-level planning. Econometrica, Vol. 33. 1965. 141—169. o.
5. Kronsjő, T. O. M.: Iterative pricing for planning foreign trade. Economics of Planning, 1963. 1. sz. 1—22. o.
6. Margolis, J.—Trzeciakowski, W.: Multi-level planning and decision-making. Az Európai Gazdasági Bizottság Gazdasági Főtanácsának 6. értekezlete, Genf, 1968. 3. konferencia (sajtó alatt).
7. Mycielski, J.: A model for regional harmonization of national development plans. Economic Bulletin for Asia and the Far East, Vol. 18. 1967. 2. sz. 44—71. o.
8. Mycielski, J.: Ceny kalkulacyjne, ceny detaliczne, kursy dewizowe. Gospodarka Planowa, 1965. 12. 24—33. o.
9. Mycielski, J.: Декомпошизионный метод текущей оптимализации народного хозяйства и его применение в торговле. Международная конференция по вопросам рентабельности внешней торговли. Научно-исследовательский институт внешней торговли. Szófia, 1964.
10. Mycielski, J.—Plaszczynski, B.: A mathematical model of international economic cooperation. Proceedings of the First Scandinavian-Polish Regional Science Seminar, Committe for Space Economy and Regional Planning of the Polish Academy of Sciences. Studies, Vol. 17. 1967. 263—286. o.
11. Barna, T. (ed.): Structural interdependence and economic development. Macmillan, 1963. 2. fejezet: Mycielski, J.—Rey, K.—Trzeciakowski, W.: Decomposition and Optimization of Short-Run Planning in a Planned Economy.
12. Mycielski, J.—Trzeciakowski, W.: Critères du choix des investissements rapidement rentables. Economies et Sociétés (Cahiers de l'I. S. E. A.) Vol. 4. 1970. 1. sz. Librairie Droz, Genève. 127—145. o.
13. Trzeciakowski, W.: Model optymalizacji biezacej polityki kierunkowej w handlu zagranicznym. Gospodarka Planowa, 1960. 8—9. sz. 47—53. o.
14. Trzeciakowski, W.: System nagriadzani — produkcji eksportowej nowymia instrumentem kierowania gospodarchego. Gospodarka Planowa, 1966. 8—9. sz. 10—15. o.

THE FINANCIAL SYSTEM AND SHORT-RUN PLANNING IN A PLANNED ECONOMY

The paper deals with the construction of a rational financial system which can be used for the optimal short-run decision-making in a planned economy, according to the profit maximization concept. It establishes the necessary relationships between the financial and accounting profit, and between the prices in the sphere of production and the shadow and retail prices. It has been shown that the proposed financial system ensures the financial equilibrium in both the sphere of production and the sphere of consumption. Some taxes (subsidies) which are the constituents of this financial system have been discussed in detail.

ДЕНЕЖНАЯ СИСТЕМА И КРАТКОСРОЧНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В ПЛАНОВОМ ХОЗЯЙСТВЕ

Работа занимается созданием рациональной денежной системы, которая может быть использована при принятем оптимальных решений в плановом хозяйстве, согласно принципу максимизации прибыли. Установлены необходимые связи между денежной и расчетной прибылями, и также между заготовительными, теневыми и розничными ценами. Доказывается авторами, что предлагаемая денежная система обеспечивает денежное равновесие и в сфере производства, и в сфере потребления. Некоторые налоги (субвенции), представляющие собой составную часть этой денежной системы подробно обсуждены.

Rimler Judit – Székely Béla

A gazdasági fejlődésre jellemző közös trendek vizsgálata diád-módszerrel

A fejlődő gazdaságokban a gazdaság minden területére állandó mozgás, változás jellemző. A különböző területeken végbemenő változások jellegzetességeinek vizsgálata állandó témája az elméleti és gyakorlati közgazdasági elemzéseknek. Számos tanulmány foglalkozik az állóalap állomány időbeli alakulásának vizsgálatával, az ipar, mezőgazdaság és egyéb ágazatok fejlődésének összehasonlító elemzésével, a szakképzettség szintjének és összetételének változásával, a fogyasztási struktúra változásának elemzésével, hogy csak néhányat említsünk az igen gazdag választékból.

E vizsgálat célja nem egy-egy kiemelt – az előzőekben felsorolt vagy ahhoz hasonló – területen végbemenő változás vagy változások elemzése, hanem *a gazdaság minden területére jellemző változások közös vonásainak feltárása.* Vizsgálatunk ebből a szempontból tekinthető újszerűnek. Nem ismerünk ugyanis olyan tanulmányt, amelynek kifejezett célja az lett volna, hogy a gazdasági fejlődés különböző területein végbemenő változások közös vonásait keresse.

A gazdaság különböző területein végbemenő változásoknak azért lehetnek egyáltalán közös vonásaik, mert a gazdaság éppúgy, mint valamilyen élő szervezet egységes egészet alkot. A gazdaságra, mint szerves egészre az jellemző, hogy ha valamely részében változás történik, ez nem marad elszigetelt. Egy területen végbemenő változás továbbgyűrűzik más területekre, ahol további változásokat indukál, amelyek ismét tovább gyűrűznek s. i. t. A gazdaság különböző területein végbemenő változások tehát egymástól nem függetlenek: a különböző területekre jellemző gazdasági folyamatok és állományok alakulásának közös vonásai vannak. A közös vonások azonban csak hosszabb idő átlagában figyelhetők meg, mert rövid távon viszonylag nagyobb súllyal térítik el az egyes folyamatok és állományok alakulását egymástól a véletlen és szisztematikus tényezők. Hosszú idő átlagában e tényezők hatása kiegyenlítődik és megjelennek a változásokra jellemző közös trendek.

I. A vizsgálat módszere

A gazdaság különböző területeire jellemző folyamatok és állományok alakulása közötti kapcsolatokat egy korábbi vizsgálat során faktoranalízis segítségével mutattuk ki [3]. A faktoranalízis eredményeiből a vizsgált változók közötti összefüggéseket állapíthatjuk meg: megtudhatjuk, hogy mely változók vannak kapcsolatban egymással, hány olyan változó-csoport van, amelyik egymástól független, milyen ezeknek a változó-csoportoknak a súlya stb.

Faktoranalízis segítségével azonban az egymással kapcsolatban levő változók közös trendjének alakulását nem tudjuk nyomon követni.[1] A következőkben ismertetett módszerrel éppen a közös trendek vizsgálatára nyílik lehetőség.

A diád-módszer lényege: átlagos struktúrák és közös trendek

A vizsgálatban alkalmazott módszert Székely Béla mutatja be a „Matrixok egy speciális diadikus felbontása és ennek néhány alkalmazása az összehasonlító elemzésben" c. cikkében [4]. E módszert a továbbiakban a rövidség kedvéért diád módszernek nevezzük. Az idézett cikkben megtalálható a diád módszer részletes matematikai ismertetése. Jelen cikkben ezért a tisztán matematikai jellegű tárgyalástól eltekintünk. Verbálisan azonban viszonylag részletesen kitérünk a módszer ismertetésére, alkalmazásával kapcsolatos néhány problémára, és a kapott eredmények értelmezésének néhány fontosabb kérdésére.

A diád módszerrel egy több változóból álló változó-rendszer elemzését kíséreltük meg elvégezni. A vizsgálathoz, amely során a változók alakulásának közös vonásait kívántuk feltárni, rendelkezésre álltak a változók idősorai. A változók idősoraiból egy olyan A matrixot állítottunk elő, amelynek oszlopai megegyeznek a vizsgált változók idősoraival. Az A matrix a_{ij} eleme tehát a j-edik vizsgált változó értéke az i-edik évben.

A diád módszerrel bármely tetszőleges matrix, így az előbb defíniált A matrix, teljes diadikus felbontását is elvégezhetjük. A felbontás első lépésében az A matrixot egy diád és egy ún. maradék összegeként állítjuk elő a következő formában:

$$A = A_1 + R_1 .$$

E diadikus felbontás legfontosabb jellemzője az, hogy R_1 Euklideszi normája[2] minimális és ezért az első diád matrixa — A_1 — az összes leválasztható diádok közül legjobban közelíti az eredeti változók A matrixát.

Az első diád matrixa, per definitionem, egy oszlopvektor, t_1 és egy sorvektor, s_1, szorzataként állítható elő. A t_1 oszlopvektort a diád generáló oszlopvektorának, az s_1 sorvektort a diád generáló sorvektorának nevezzük. Az A_1 közelítő matrix első sorát úgy kapjuk meg, hogy a generáló oszlopvektor első elemével szorozzuk meg a generáló sorvektort. A második sor úgy áll elő, hogy a generáló oszlopvektor második elemével szorozzuk meg a generáló sorvektort, s. i. t.

Az A_1 matrixnak az előzőekben leírt előállítási módjával összhangban a változók *átlagos struktúráján* a generáló *sorvektort* értjük.

A generáló oszlopvektor elemei — szintén a diadikus szorzat képzési szabálya szerint — az átlagos struktúra egy-egy időponthoz tartozó súlyai. A generáló *oszlopvektor* tehát úgy értelmezhető, mint az átlagos struktúrához tartozó *közös trend.*

A diadikus felbontás első lépésében tehát egy olyan diádhoz jutunk el, amelyhez tartozó mátrix legjobban megközelíti a vizsgált változók idősorából összeállított

[1] A közös trendek lefutásának vizsgálata elsősorban azért nehézkes, mert az eredeti változók az alkalmazott faktoranalízisnél standardizáltak, és ezért a közös trendeket is standardizált formában kapjuk meg. További probléma, hogy a közös trendektől való eltérések, a közelítés hibája közvetlenül nem figyelhető meg.

[2] Egy matrix Euklideszi normája a matrix elemeinek négyzetösszegéből vont négyzetgyök.

matrixot, és amelynek generáló sorvektora a változók átlagos struktúráját, generáló oszlopvektora pedig az átlagos struktúrához tartozó közös trendet fejezi ki.

Az eredeti matrix és az első diád matrixának különbségeként előálló első maradék matrix az első diád elemenkénti közelítési hibáját tartalmazza. Az R_1 maradék matrix r_{ij} eleme az A matrix a_{ij} és az A_1 matrix α_{ij} elemeinek különbsége, vagyis a j-edik változó i-edik évi eredeti és becsült értéke közötti különbség. Minél nagyobb az R_1 matrix r_{ij} elemeinek értéke, az első diád annál kevésbé jól közelíti a változók eredeti értékeit, minél kisebb, annál jobb a közelítés.

Az R_1, első maradékmatrixot tovább bonthatjuk az előbbiekben ismertetett módszer szerint, egy diád és egy maradék matrix összegére. A maradék matrixból leválasztott első diád lesz az eredeti adatok második diádja és az itt keletkezett maradék matrix az eredeti adatok második maradék matrixa. A második diád matrixa az előzőekhez hasonlóan egy oszlop-, t_2, és egy sor-, s_2, vektor szorzataként állítható elő. Az oszlop- és sorvektorok értelmezése ugyanaz mint az első diádnál. A különbség az első és a második diádhoz tartozó sor- és oszlopvektorok tartalmában az, hogy míg az első diádnál a közös trend és az átlagos struktúra az eredeti adatokra, a második diádnál az első diád leválasztása utáni maradék matrixra vonatkozik. *A második diád sorvektora tehát a változók eredeti értékei és az első diáddal becsült értékei közötti különbségek egymáshoz viszonyított átlagos arányát, struktúráját fejezi ki. Az oszlopvektor pedig az átlagos maradék struktúrához tartozó közös trendet.*

Az első maradék matrix elemeit tehát a második diáddal kíséreljük meg leírni. A közelítés pontosságát itt is az eredeti és a becsült értékek közötti különbséggel jellemezhetjük. A különbség a második maradék matrix, az R_2.

A második maradék matrixot az előzőek szerint bonthatjuk tovább a harmadik diád és a harmadik maradék matrix összegére. Mivel a teljes felbontásban az eredeti A matrix k darab diád összegeként áll elő — ahol k a vizsgált matrix rangja[3] — a diádok leválasztását elvileg mindaddig folytatni kell, amíg az utolsó maradék matrix minden eleme nulla nem lesz. A gyakorlati számításokban azonban a diádok leválasztásánál nem szükséges a nulla maradék matrixig eljutni. Általában nem szükséges minden diádot leválasztani akkor, ha az r-edik diádhoz tartozó R_r maradék matrix elemei nem nagyobbak az eredeti értékek valamely előre megadott százalékánál. A közelítés pontosságának százalékos határait többé-kevésbé önkényesen határozzuk meg. Az azonban biztos, hogy ezt a százalékos határt nem érdemes magasabban megállapítani, mint amekkorák az eredeti adatok mérési hibái.

A diád módszer és a klasszikus faktoranalízis

Az előbbiekben ismertetett diád módszer, amelynek teljes kifejtése, amint már említettük, a [4]-ben megtalálható, lényeges vonásait és alkalmazási területét tekintve hasonló a klasszikus faktoranalízis egyik, az ún. alapvető faktorok [1], [5] módszeréhez. A diád módszerben a speciális diadikus felbontás szintén alapvető faktorok kikeresése, csak általánosabb értelemben, mint a faktoranalízisnél.

Az alapvető faktorok módszere esetén (a faktoranalízisben) keressük azon közös faktorokat, amelyek együttese a lehető legjobban megközelíti a redukált R korrelációs matrixot.

[3] A matrix rangja: lineárisan független oszlopainak vagy sorainak maximális száma.

Mivel R szimmetrikus matrix, előállítható

$$R = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i' = \sum_{i=1}^{n} Q_i$$

alakban, ahol a_i vektorok az R matrix α_i abszolútértékben csökkenő sorrendbe rendezett sajátértékeihez tartozó sajátvektorok.

Ezen felbontáshoz az

$$\begin{aligned} &R_i = R_{i+1} + a_{i+1} a_{i+1}', \\ &\| R_{i+1} \| = \min!, \; R_0 = R \end{aligned} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

rekurziós formulával juthatunk el.

Ennél a felbontásnál könnyű dolgunk van, mivel a redukált korrelációs matrix szimmetricitása biztosítja, hogy a sajátvektorai egymásra páronként ortogonálisak, s így a belőlük képzett faktorok is egymásra ortogonálisak.

Nem áll ezen tézis egy tetszőleges $n \times m$-es A matrixra.

Az előbbiekhez hasonló megfontolások alapján azonban eljuthatunk az A matrix egy faktorizációjához is.

Az A matrix ilyen jellegű felbontását azért tűztük ki célul, mivel úgy véltük, hogy ezen faktorok értelmezése egyszerűbb, struktúrája áttekinthetőbb, mint az eredeti matrixé.

Alkalmazva a Gauss legkisebb négyzetek módszerét, arra az eredményre jutunk, hogy egy A matrix

$$\begin{aligned} &A_i = A_{i+1} + u_{i-1} v_{i+1}', \\ &\| A_{i+1} \| = \min!, \end{aligned} \qquad i = 0,1,2,\ldots, \varrho(A) - 1$$

(ahol $\varrho(A)$ az A matrix rangja és $A_0 = A$)
rekurzív diadikus felbontásával az A matrix olyan faktorizációját kapjuk, ahol u_k az AA', v_k az $A'A$ matrix sajátvektora, melyek a (csökkenő abszolut érték szerint felsorolt) közös α_k sajátértékhez tartoznak.

A rekurzív felbontás és a felbontásra alkalmazott módszer (Gauss legkisebb négyzetek módszere) tehát az alapvető faktorok módszerénél és a diád módszernél azonosnak tekinthető. A kapott faktorok azonban a faktoranalízisnél magának a matrixnak a sajátvektorai, a diád módszernél pedig a faktorok a matrix és transzponáltjának bal, illetve jobboldali szorzatához tartozó sajátvektorai.

A diád módszer alkalmazása esetén tehát az eredeti vizsgálandó adatokat tartalmazó matrixot közelítjük, a hozzá legjobban ,,hasonlító'' diáddal, majd a közelítés pontosságát a többi — a maradékmatrix(ok)ról leválasztott — diád hozzávevésével növeljük.

Mivel a módszer a maradékmatrix négyzetösszegének minimalizálásán alapul, alkalmazásánál ügyelnünk kell az A matrix kondíciójára, vagyis arra, hogy az elemek lehetőleg azonos súlyúak legyenek. A klasszikus faktoranalízisnél e probléma nem merül fel, mert a változók standardizált formában szerepelnek a számításban.

A két módszer — a faktoranalízis és a diád módszer —, a következő fő vonásokban hasonlít, illetve különbözik egymástól.

Mindkét módszerrel olyan változórendszerek vizsgálhatók, amelyekre az jellemző, hogy a változók közül legalább néhánynak az alakulása nem független egymástól. Mindkét módszerrel megállapítható, hogy melyek azok a változók, amelyek alakulására közös jellegzetességek nyomják rá bélyegüket, és melyek azok, amelyek a többi változótól függetlenül alakulnak.

A különbségek közül a legfontosabb az, hogy bár mindkét módszernél faktorizáció történik, az eredmények más formákban állnak rendelkezésre és így értelmezésük és értelmezhetőségük is különböző. A faktoranalízisnél a változók közötti összefüggéseket kifejező korrelációs matrixot faktorizáljuk. Ezért az eredményül kapott főfaktorokhoz tartozó faktorsúlyok csak azt mutatják, hogy milyen szoros a korreláció a különböző változók és főfaktorok között. A diád módszernél azonban közvetlenül a vizsgálandó változók matrixát bontjuk faktorokra. A faktorok ezért több és általánosabb jellegű információt szolgáltatnak a vizsgált változókról. Nemcsak azt tudhatjuk meg az eredményekből, hogy mely változók függnek, illetve függetlenek egymástól, hanem azt is, hogy az összes változóra (vagy változó csoportra) jellemző közös trendektől hogyan térnek el az egyes változók idősorai globálisan és évenként, hogy a közös trendektől való eltérések milyen trendet követnek és így tovább.

A diád módszer és a faktoranalízis között mégegy, az előzőekből következő különbséget célszerű megemlíteni. A számítások eredményeként különböző formájú és tartalmú információkat nyerünk a vizsgált változórendszerről. Az eredmények tehát különbözőek, így azok közgazdasági értelmezése is más problémákat vet fel. A faktoranalízisnél az összes főfaktor értelmezése nagy problémát jelent [2]. A diád módszernél ellenben az eredmények — a közös trendek — közgazdasági a interpretálása csak harmadik diádtól kezdve válik nehézkessé.

A későbbiekben, a számítási eredmények ismertetésekor, a faktoranalízis és a diád módszer összevetésére mégegyszer visszatérünk.

A vizsgálatban szereplő változók

Magyarország gazdasági fejlődésének jellemzésére a már említett faktoranalitikus vizsgálathoz egy negyvenkilenc mutatóból álló mutatószámrendszert állítottunk össze. A mutatóknak, amelyeket a továbbikaban változóknak is nevezünk, az idősorai a gazdaság különböző területein végbemenő változásokat fejezik ki az 1950—1966-os időszakra vonatkozóan.

A változók a gazdaság különböző szféráiban végbemenő változások mennyiségi, minőségi és kihasználási aspektusait mutatják. Tíz különböző, a gazdasági fejlődésre jellemző területre állítottunk össze mutatókat. A tíz területre jellemző mutatócsoportok a következők:

I. Eredménymutatók.
II. A munkaerő-források kihasználását és minőségét jellemző mutatók.
III. A lekötött eszközök mennyiségét és minőségét jellemző mutatók.
IV. Az ipari termelés részarányát és a források minőségét jellemző mutatók.
V. A mezőgazdasági termelés részarányát és a források minőségét jellemző mutatók.
VI. A tercier ágazatok részarányát, teljesítményét és a források minőségét jellemző mutatók.
VII. A külkereskedelem mennyiségét és összetételét jellemző mutatók.
VIII. A lakossági fogyasztás összetételét jellemző mutatók.
IX. A lakosság szociális és egészségügyi ellátottságát jellemző mutatók.

X. A lakosság kommunikációs és kulturális ellátottságát jellemző mutatók.

A diád-módszerrel a negyvenkilenc változó közül harmincnyolcat vizsgáltunk. A faktoranalízis ugyanis azt mutatta, hogy a negyvenkilenc változó közül harmincnyolc volt többé-kevésbé szoros kapcsolatban a közös változásokat kifejező első főfaktorral. Mivel a diád-módszerrel a fejlődésre jellemző közös trendek alakulását vizsgáljuk, azokat a változókat, amelyek alakulására nem jellemzők a változók többsége által követett közös trendek, a vizsgálatból kizárjuk. A vizsgálatban szereplő változók felsorolása az 1. táblázatban található.

A számításnál a változók idősorainak 1959-es bázison számolt indexével dolgoztunk. Az indexek alkalmazására azért volt szükség, mert a különböző dimenziójú változók eredeti mértékegységekben mért idősorainak szerepeltetése erősen torzította volna az eredményeket. A módszer ugyanis az eredeti és a közelítő matrix közötti abszolút eltérés minimalizálásán alapul és így az eredmény nem független a számításban szereplő változók mércéjétől.

Annak következtében, hogy a változók dimenziója különböző és nem ismerünk olyan súly-rendszert, amellyel a különböző változóknak a közös trendre gyakorolt hatását kifejezhetnénk, egyetlen megoldás maradt, minden változónak azonos súlyt adni, vagyis indexekkel számolni. Az átlagos struktúrák értelmezésére és a struktúra változások elemzésére azonban éppen az indexekkel való számolás miatt nem nyílik lehetőség. A közös trendek és az átlagos struktúrák együttes elemzését a módszerrel csak akkor tudnánk elvégezni, ha a változók dimenziója azonos lenne, és a változók súlyának arányait a közös mértékegységben kifejezett érték vagy volumen arányok mutatnák, vagy ha — különböző dimenziójú változók esetében — rendelkezésre állna a változók súlyának, fontosságának arányait kifejező értékrendszer. Az indexekkel való számolás következtében minden változó azonos súllyal hat a közös trendek kialakítására, a közös trendek tehát valóban a vizsgált változók átlagos és közös lefutását közelítik meg.

A közelítés pontosságának fokozása a változók számának csökkentésével

A vizsgálat célkitűzése az volt, hogy a vizsgálatba bevont harmincnyolc változó időbeli alakulásának közös vonásait feltárjuk. A változások közös jellegzetességeit a fentiekben ismertetett diád-módszer segítségével nyerhető közös trendekkel fejeztük ki. A közös trendek azonban csak akkor „közösek", vagyis több változóra egyszerre jellemzőek, ha segítségükkel az egyes változók alakulása megfelelő pontossággal követhető. A követés, vagy becslés pontosságát kétféle módszerrel növeltük. Az első módszer a változók számának csökkentésén, a második a leválasztott diádok számának növelésén alapult.

Az első módszer alkalmazásánál a vizsgálatba bevont változók körét lépésenként csökkentettük, kihagyva a számításból azokat a változókat, amelyek alakulását legkevésbé pontosan lehetett leírni az első diádhoz tartozó első közös trenddel.

A változók kihagyásánál két szempontot vettünk figyelembe: először is kihagytuk azokat a változókat, amelyek átlagos növekedési üteme lényegesen eltért (alacsonyabb vagy magasabb lévén) a változók többségére jellemző első közös trend növekedési ütemétől. Másodsorban azokat a változókat hagytuk ki, amelyeknek az első közös trend körüli időbeli ingadozása a változók többségére jellemző ingadozási sémától lényegesen eltért.

A növekedési ütemek szerinti szelektálást az egyes változóknak az első diád segítségével becsült átlagos értéke és a tényleges átlagos érték aránya alapján hajtottuk végre. Ha a becsült és a tényleges érték egybeesik, az első diáddal való becslés száz százalékig pontos. Ekkor az arányokat kifejező mutató értéke egyenlő eggyel. Ha a mutató értéke kisebb mint egy, a diáddal becsült értékek kisebbek, mint az eredeti értékek, ha nagyobb mint egy, akkor nagyobbak. Az első esetben a közös trend növekedési üteme alacsonyabb, mint a változó átlagos növekedési üteme, a második esetben pedig magasabb.

A változóknak a növekedési ütemek alapján történő szelektálása az átlagos — egész időszakra vonatkozó — értékek összehasonlításán alapul, és ezért ennél a szelektálásnál az egyes változóknak az első közös trend körüli időbeli ingadozása, az eltérések ciklusa nem játszik szerepet. Az eltérések ciklusát az első maradék matrixból lehet leolvasni. A maradék matrix elemei változónként mutatják a becsült és tényleges értékek közötti eltérések nagyságát és irányát minden egyes évre vonatkozólag. A maradék matrix segítségével vizsgálhatjuk meg tehát, hogyan, milyen ciklus szerint térnek el az egyes változók a közös rendtől.

Az első lépés első diádja változónkénti átlagos közelítésének pontosságát kifejező arányok mutatóit az 1. táblában, az első diád megnevezésű sorokban mutatjuk be. A táblában szereplő koefficiensek a becsült értéket mutatják a tényleges érték százalékában. Ezt a százalékos mutatót g-vel jelölve, a g_1 mutatók az első, a g_2 mutatók a második és a g_3 mutatók a harmadik lépéshez tartozó arányokat mutatják.

Az első lépésben g_1 maximális értéke 50, minimális értéke 0,5. „A feljavított mezőgazdasági terület az összes feljavításra szoruló terület százalékában" változónál tehát a diád segítségével becsült átlagos érték a tényleges érték ötvenszerese, „az egy lakosra jutó gabonanemű-fogyasztás" változójánál pedig a becsült érték a tényleges érték fele. A közelítés tehát a szélsőséges esetekben igen rossz. A fentieken kívül még további tizenöt változónál igen pontatlan a közelítés az átlagos értékek alapján.

A második lépésben csak azok a változók szerepelnek, amelyeknél a becslés pontosságát kifejező koefficiensek értéke az első lépésben $0{,}70 \leq g_1 \leq 1{,}30$.

A második lépésben a közös trendtől való eltéréseket kifejező koefficiensek jelentős mértékben közelebb kerültek egymáshoz, illetve egyhez. A g_2 koefficiensek maximális értéke 1,47, minimális értéke 0,83.

A második lépés után további öt változót hagytunk ki, méghozzá azokat, amelyeknek a koefficiense a második lépésben kisebb volt, mint 0,80 és nagyobb, mint 1,20. A harmadik lépésben a közelítések pontossága tovább javult. A harmadik lépésben a maximális érték 1,17, a minimális érték 0,90. Az első diád segítségével becsült értékek tehát maximálisan tíz százalékkal becsülték alá, és tizenhét százalékkal fölé a tényleges értékeket.

Az első lépés után kihagyott változók többségénél nemcsak a növekedés átlagos üteme tért el jelentősen a közös trendtől, de a trendtől való eltérések időbeli alakulása is különböző volt. Azon változók többségének, amelyek a második lépésben is szerepelnek, időbeli ingadozására az jellemző, hogy az első lépésnél nyert közös trenddel becsült érték az időszak elején — körülbelül az első tíz évben — magasabb, mint a tényleges érték, s az időszak végén alacsonyabb. A kihagyott változók többségénél az eltérések alakulására a előbbi tendencia ellenkezője jellemző: az időszak első részében a közös trenddel becsült érték alacsonyabb, az időszak második felében pedig magasabb, mint a tényleges érték. A második lépés után kihagyott öt változó becsült értékének a tényleges értéktől való eltérési ciklusa szintén különbözik a számításban szereplő többi változó többségére jellemző ciklustól.

1. tábla

A közelítés pontossága lépésenként és diádonként

A változó megnevezése	A diádok száma*	Becsült érték a tényleges érték százalékában		
		1. lépés	2. lépés	3. lépés
I. Eredménymutatók				
Egy aktív keresőre jutó nemzeti jövedelem	E.D.	0,80	0,94	1,02
	E.+M.D.	0,99	0,94	1,01
Egy lakosra jutó fogyasztás (a nemzeti jövedelemből)	E.D.	0,79	0,93	1,01
	E.+M.D.	1,01	0,96	1,01
II. A munkaerőforrások kihasználását és minőségét jellemző mutatók				
A dolgozók és eltartottak aránya a munkaerőforrást képző népességen belül	E.D.	0,71	0,84	0,91
	E.+M.D.	0,96	0,91	0,92
Egy aktív keresőre jutó szakmunkások száma	E.D	0,71	0,85	0,92
	E.+M.D.	0,98	0,92	0,93
Egy lakosra jutó újdiplomások száma	E.D.	7,81	—	—
	E.+M.D.	4,71	—	—
III. A lekötött eszközök mennyiségét és minőségét jellemző mutatók				
Egy aktív keresőre jutó álló- és forgóeszközök összege	E.D.	0,70	0,83	0,90
	E.+M.D.	0,93	0,88	0,91
Az állóeszköz egységére jutó forgóeszköz	E.D.	0,76	0,91	0,99
	E.+M.D.	1,08	1,01	1,00
A három évesnél fiatalabb gépi állóeszközök aránya az összes gépi állóeszközökhöz	E.D.	0,62	—	—
	E.+M.D.	0,82		
IV. Az ipari termelés részarányát és a források minőségét jellemző mutatók				
Egy aktív keresőre jutó ipari aktív kereső	E.D.	0,73	0,87	0,94
	E.+M.D.	1,01	0,95	0,95
Egy aktív keresőre jutó felszerelt villamosmotorok teljesítőképessége (az állami iparban)	E.D.	0,89	1,05	1,13
	E.+M.D.	1,05	1,01	1,12
V. A mezőgazdasági termelés részarányát és a források minőségét jellemző mutatók				
Az összes aktív keresők és a mezőgazdaság aktív keresők aránya	E.D.	0,70	0,83	0,90
	E.+M.D.	0,96	0,91	0,91

* E. I. = Első diád
E. +M. = Első és Második diád

(1. tábla folytatása)

A változó megnevezése	A diádok száma*	Becsült érték a tényleges érték százalékában 1. lépés	2. lépés	3. lépés
Feljavított mezőgazdasági terület az összes feljavításra szoruló terület százalékában	E.D.	50,04	—	—
	E.+M.D.	7,62		
Egy mezőgazdasági aktív keresőre jutó traktorok száma (traktoregységben)	E.D.	2,49	—	—
	E.+M.D.	0,68		
Egy hektár mezőgazdasági területre jutó összes műtrágya felhasználás	E.D.	2,49	—	—
	E.+M.D.	1,15		
Egy mezőgazdasági aktív keresőre jutó villamosenergiafogyasztás	E.D.	23,74	—	—
	E.+M.D.	−2,04		
VI. A tercier ágazatok részarányát, teljesítményét és a források minőségét jellemző mutatók				
Egy aktív keresőre jutó közlekedésben és kereskedelemben foglalkoztatott aktív keresők	E.D.	0,67	—	—
	E.+M.D.	1,00		
Egy aktív keresőre jutó teherszállítás árutonna-kilométerben	E.D.	1,16	1,35	—
	E.+M.D.	1,18	1,18	
Az összes teherszállítás aránya a vasúti teherszállításhoz	E.D.	0,55	—	—
	E.+M.D.	0,89		
Villamosított vonalak hossza a vasúti vonalak építési hosszának ezrelékében	E.D.	0,63	—	—
	E.+M.D.	0,86		
VII. A külkereskedelem mennyiségét és összetételét jellemző mutatók				
Egy aktív keresőre jutó külkereskedelmi forgalom	E.D.	1,27	1,47	—
	E.+M.D.	1,05	1,10	
Egy devizaforint nyersanyag és félkésztermék exportra jutó késztermék export	E.D.	0,89	1,08	1,17
	E.+M.D.	1,39	1,26	1,20
Egy devizaforint nyersanyag és félkésztermék importra jutó késztermék import	E.D.	0,74	0,86	0,93
	E.+M.D.	0,82	0,76	0,90
VIII. A lakossági fogyasztás összetételét jellemző mutatók				
Egy lakosra jutó villamosenergia-fogyasztás a háztartásokban (lakásban)	E.D.	1,80	—	—
	E.+M.D.	1,16		
Egy lakosra jutó cukorfogyasztás	E.D.	0,83	0,99	1,07
	E.+M.D.	1,16	1,09	1,09
Egy lakosra jutó gabonaneműfogyasztás reciproka	E.D.	0,52	—	—
	E.+M.D.	0,85		
Egy lakosra jutó húsfogyasztás	E.D.	0,67	—	—
	E.+M.D.	0,93		

(1. tábla folytatása)

A változó megnevezése	A diádok száma*	Becsült érték a tényleges érték százalékában 1. lépés	2. lépés	3. lépés
Egy lakosra jutó iparcikkforgalom	E.D.	0,90	1,05	1,13
	E.+M.D.	0,98	0,95	1,11
IX. A lakosság szociális és egészségügyi ellátottságát jellemző mutatók				
Egy lakosra jutó lakások száma	E.D.	0,54		
	E.+M.D.	0,86		
Egy biz tosítottrajutó fontosabb betegségi biztosítási juttatások forintösszege	E.D.	1,02	1,20	
	E.+M.D.	1,14	1,10	
Tisztított csecsemőhalandósági arányszám reciproka	E.D.	0,90	1,07	1,15
	E.+M.D.	1,13	1,07	1,15
Egy lakosra jutó orvosok száma	E.D.	0,75	0,90	0,97
	E.+M.D.	1,04	0,98	0,98
Egy lakosra jutó kórházi ágyak száma	E.D.	0,65		
	E.+M.D.	0,98		
X. A lakosság kommunikációs és kulturális ellátottságát jellemző mutatók				
Egy lakosra jutó bekapcsolt telefonfőállomások száma	E.D.	1,04	1,22	
	E.+M.D.	1,27	1,22	
Egy lakosra jutó levelek száma	E.D.	0,62		
	E.+M.D.	0,96		
Egy lakosra jutó rádió-előfizetők száma	E.D.	1,53		
	E.+M.D.	1,76		
Egy lakosra jutó példányszám az összes terjesztett lapokból	E.D.	1,09	1,30	
	E.+M.D.	1,33	1,28	
Egy lakosra jutó nagyvárosi lakosok száma	E.D.	0,56		
	E.+M.D.	0,95		
Egy lakosra jutó könyvek példányszáma	E.D.	0,80	0,94	1,02
	E.+M.D.	0,87	0,83	0,98

Az előzőekben hangsúlyoztuk, hogy a kihagyott, vagy ki nem hagyott változók eltérési ciklusaira jellemző vonások a változók többségére, de nem összességére vonatkoznak. Előfordult ugyanis, hogy kihagytunk olyan változót, amelynek ciklusa hasonlított a bennmaradt változók ciklusára, és fordítva, nem hagytunk ki olyan változót, amely ciklusa eltért a bennmaradt változókra jellemző ciklustól. A szelektálásnál ugyanis elsősorban a közelítés átlagos pontosságát vettük figyelembe és igyekeztük javítani, és csak másodsorban voltunk tekintettel az eltérések ciklusaira.

A változóknak a fenti elvek alapján történt szelektálása nagymértékben elősegítette a változók alakulásának közös trenddel való leírását. Az 1. táblából sorirányban haladva leolvasható, hogy a tényleges és becsült értékek közötti eltérések a második lépésben közelebb vannak egyhez, mint az első lépésben, és a harmadik lépésben közelebb, mint a második lépésben. Megfigyelhető az is, hogy a második és harmadik lépés között a javulás viszonylag kicsi az első és második lépés közötti javuláshoz viszonyítva.

Valamely diád globális közelítésének pontosságát a diádhoz tartozó mátrix és az eredeti matrix normájának összehasonlításával is kifejezhetjük. Az első diád közelítésének pontosságát a különböző lépésekben a 2. tábla első oszlopából olvashatjuk le. Az egyes lépésekhez tartozó százalékos értékek azt is mutatják, hogy a közös trendtől eltérő, ahhoz kevésbé jól illeszkedő változók kihagyása milyen mértékben javította a közelítés pontosságát. Míg az első lépésben a közelítés pontossága nem érte el a 75 százalékot, a harmadik lépésben már a 90 százalékhoz van közel.[4]

A közelítés pontosságának fokozása a leválasztott diádok számának növelésével

A közelítés pontosságát az előbbiekben tárgyalt változókihagyásos módszer mellett azzal is fokozhatjuk, hogy a vizsgált változó-rendszerre nemcsak az első közös trendet határozzuk meg, hanem a második, harmadik, s. i. t. közös trendeket is. A vizsgálat során 4—6 közös trendet határoztunk meg, de ebben a cikkben csak az első és a második közös trendet elemezzük. A harmadik és az azután következő többi közös trend elemzésére két ok miatt nem térünk ki. Először is azért, mert az első és a második közös trendhez képest a többi közös trend súlya igen kicsi, másodszor pedig azért, mert a harmadik és ezután következő közös trendek közgazdasági értelmezése nehézkes.

Az 1. sz. táblában az ,,első és második diád'' nevű sorokhoz tartozó értékek fejezik ki az első és második diáddal együttesen becsült értékeket (a tényleges érték százalékában), míg az ,,első diád'' nevű sorban levő értékek az első diáddal becsült értékeket. A két sor összehasonlításából is láthatjuk, hogy a becslés pontosabb akkor, ha az első és a második diáddal együttesen számolunk. A közelítés pontosságát különösen az első lépésben javítja nagymértékben a második diád bevonása. A második és harmadik lépésnél a javulás nem olyan jelentős. Az első lépésnél azért adódott lehetőség a közelítés pontosságának nagymértékű emelésére a második diád segítségével, mert az első diáddal való közelítés sok változónál éppen a változók idősorainak különböző alakulása miatt, nagyon pontatlan volt. Egyes változóknak az előbb említett szabály szerinti kihagyásával azonban — a második és harmadik lépésben — az első diáddal való közelítés pontossága nagymértékben fokozódott, és ezért a második diád korrekciós hatása a második, harmadik lépésben már nem lehetett olyan jelentős.

A második diádhoz tartozó matrix és az eredeti értékekből összeállított matrix normáinak összehasonlítása a második diád súlyát fejezi ki az eredeti értékek alakulásának magyarázatában. Az első és a második diád matrixa normabeli közelítési mutatóinak összege pedig az első két diáddal végzett közelítés pontosságára utal.

[4] Az egyes diákok százalékos részesedését, súlyát az eredeti adatokból összeállított matrix megmagyarázásában pontosan csak akkor tudnánk megállapítani, ha az összes — k darab — diádot meghatároztuk volna. Számításainkban azonban csak az első 4—6 diádot választottuk le, mert az első négy diáddal változónként és globálisan egyaránt megfelelő pontosságú közelítést értünk el. Az első négy diád leválasztása utáni maradék, a meg nem magyarázott rész, az eredeti adatok egy százaléka körül mozgott. Tekintve, hogy a számításban szereplő adatok mérési hibája feltehetően nagyobb volt, mint egy százalék, további diádok meghatározása feleslegesnek tűnt. Annak következtében azonban, hogy csak az első négy diáddal számoltunk, az egyes diádok százalékos részesedését felülbecsültük. A felülbecslés mértéke azonban, a számításban figyelembe nem vett diádok kis súlya miatt, elhanyagolható.

2. tábla

Az első és a második diád közelítésének globális pontossága

A lépések száma	Az első	A második	Az első és a második
	diád normája az eredeti matrix normájának százalékában		
1	0,735	0,196	0,931
2	0,869	0,077	0,946
3	0,881	0,063	0,944

A második diád figyelembevétele mindhárom lépésben megnövelte és nivellálta a közelítés pontosságának szintjét. Az első lépésnél a második diád bevonása jelentős mértékben — közel 20 százalékkal — növelte a közelítés pontosságát, a második és harmadik lépésben a javulás 6—7 százalékos.

Az első két diád együttesen az összes változó alakulásának átlagosan 93—94 százalékát, tehát döntő többségét magyarázza meg.

Szem előtt kell tartani azonban, hogy amikor a normák segítségével fejezzük ki a közelítés pontosságát, akkor átlagos, az egész matrixra együttesen jellemző mutató-számmal dolgozunk. Az 1. és a 2. tábla összevetéséből nyilvánvaló, hogy az átlagos közelítés az egyes stádiumokban nagyon kedvező lehet abban az esetben is, amikor néhány változóra a közelítés igen pontatlan. Ezért az egyes változók alakulásának a közös trendekkel való megközelítése, a globális pontosságtól függetlenül, csak akkor célszerű, ha a változónak az 1. táblában közölt koefficiense 1-hez közel van.

II. Számítási eredmények

A számítási eredmények értékelésénél két szempontot vettünk figyelembe. A számítás különböző lépéseiben nyert közös trendek bemutatásával egyidőben megkíséreltük ezeket a közös trendeket összehasonlítani és magyarázatot keresni az eltérések okaira. A különböző lépésekhez és diádokhoz tartozó eredmények összevetéséből azonban nem vonhatunk le megcáfolhatatlan következtetéseket. Az egyes közös trendek összehasonlításánál és a különbségek elemzésénél ugyanis az eredményeket a tartalmi eltéréseken kívül az is befolyásolhatja, hogy a közös trendek közelítési pontossága különböző. A közös trendek összehasonlításánál ezért nem az eltérések nagyságát, hanem általános irányát, tendenciáit emeljük ki.

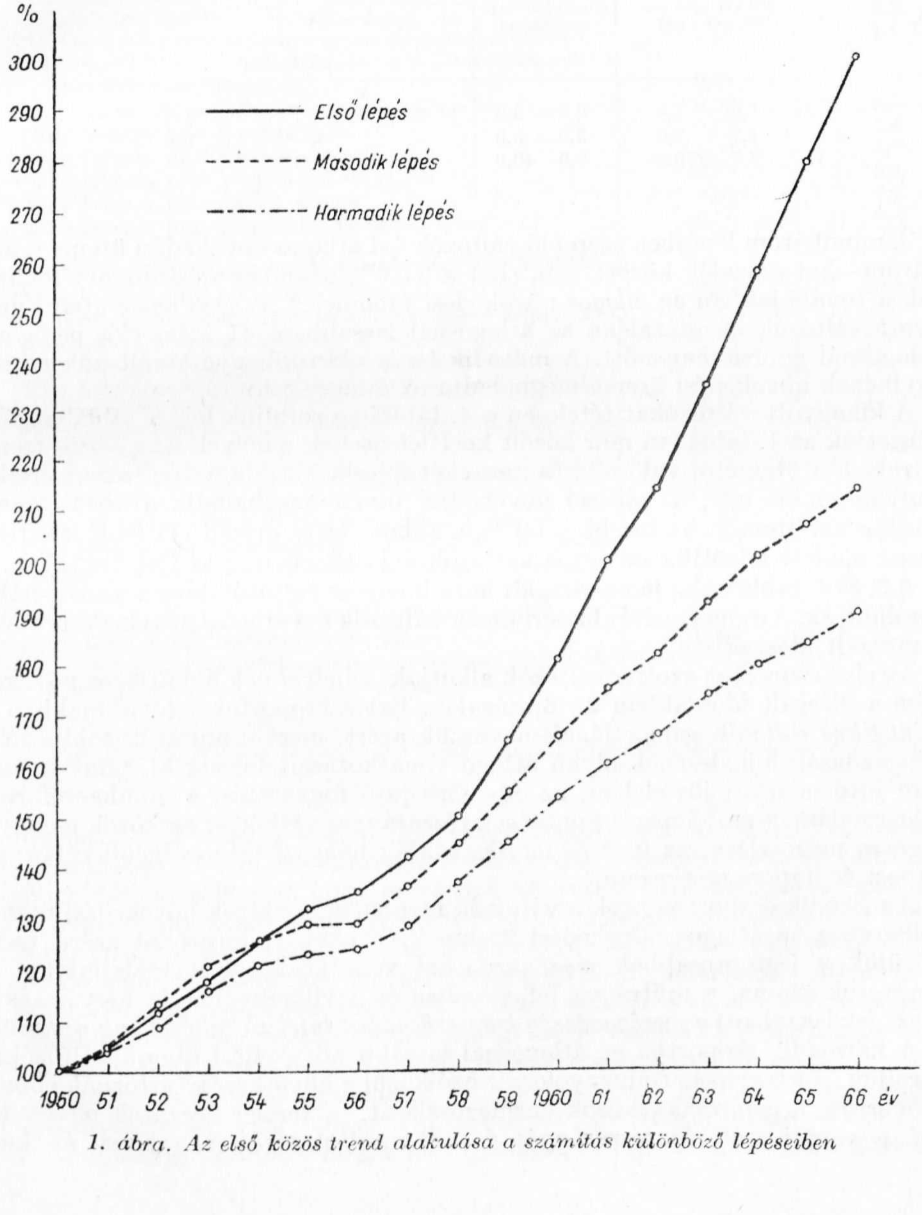
A továbbiakban a különböző lépésekhez tartozó első közös trendek, majd az első és második közös trendek együttes alakulását elemezzük.

Az első közös trendek alakulása a különböző lépésekben

A számítás első, második és harmadik lépéséhez tartozó harmincnyolc, huszonegy és tizenhat változó első diáddal becsült közös trendjeinek alakulását az 1. ábrán mutatjuk be.

A grafikonról leolvasható, hogy az első lépés közös trendjére jellemző a leggyorsabb növekedés. Az első lépésben szereplő harmincnyolc változó közös trendjének értéke 1966-ban háromszorosa a 1950-es értéknek, s ez viszonylag magas — évi 6,7 százalékos — átlagos növekedési ütemnek felel meg. A második lépésben az évi átlagos növekedési ütem 4,6 százalék, a harmadikban pedig 3,9. Mindhárom közös trendre az jellemző, hogy lefutásuk viszonylag egyenletes.

A különböző lépésekhez tartozó közös trendek eltérő meredeksége, növekedési üteme annak tulajdonítható, hogy az első, illetve a második lépés után kihagyott változók átlagos növekedési ütemei jelentős mértékben eltérnek a számításokból ki nem hagyott változók jellemzőitől.



1. ábra. Az első közös trend alakulása a számítás különböző lépéseiben

Az eltérések jellemzésére a 3. táblában az első és a második lépés után kihagyott, valamint a mindhárom lépésben szereplő változók megoszlását adjuk meg az egész időszakra jellemző növekedés mértéke és átlagos üteme alapján.

3. tábla

A változók megoszlása a változások nagyságrendje és üteme szerint

A változás mértéke (1966 évi adat per 1950 évi adat)	Évi átlagos növekedési ütem százalékban	Kihagyott változók az első lépések után	Kihagyott változók a második lépések után	Mindhárom lépésben szereplő változók
		százalékban		
1,0—1,6	0,3—3,0	59	—	—
1,7—2,6	3,0—6,0	—	—	100
2,7—220,0	6,0—40,0	41	100	—

A mindhárom lépésben szereplő változók évi átlagos növekedési üteme tehát három—hat százalék között van. (Ezt a 3—6%-os növekedési ütemet tekintjük a továbbiakban az *átlagos* növekedési ütemnek.) Az első lépés után kihagyott változók 59 százaléka az átlagosnál lassabban, 41 százaléka pedig az átlagosnál gyorsabban nőtt. A második lépés után kihagyott változók mindegyikének növekedési üteme meghaladta az átlagos szintet.

A kihagyott változókat tételesen a 4. táblában soroljuk fel. A táblában feltüntetjük az 1. táblában már közölt koefficienseket, amelyek itt a közös trend növekedési ütemétől való eltérés mértékét fejezik ki. (Ha a koefficiens értéke nagyobb mint egy, a változó növekedési üteme meghaladja a közös trend növekedési ütemét, ha kisebb mint egy, akkor alatta marad.) A fenti koefficiensek mellett közöljük az egyes változók évi átlagos növekedési ütemét is.

A 3. és 4. táblák alapján a vizsgált harmincnyolc változót három fő csoportba sorolhatjuk. A csoportosítás kritériuma a változók évi átlagos növekedési üteme a vizsgált időszakban.

Az első csoportot azok a változók alkotják, amelyeknek évi átlagos növekedése a vizsgált időszakban 3—6 százalék. Ezt a csoportot a továbbiakban a *szintetikus változók* csoportjának nevezzük azért, mert e mutatók többsége a népgazdaság fejlődésének olyan átfogó vonatkozásait fejezik ki, mint az egy főre jutó nemzeti jövedelem, az egy főre jutó fogyasztás, a munkaerőforrás kihasználása, a szakképzett munkások részaránya, a lekötött eszközök mennyisége és megoszlása, az ipar és mezőgazdaság népgazdaságon belüli súlya, az export és import szerkezete.

A második csoportba azok a változók tartoznak, amelyek növekedési üteme sokszorosa az átlagos növekedési ütemnek. Ezeket a változókat azért, mert közülük a legfontosabbak mezőgazdasági vonatkozásúak (a talajjavítás, a traktorok száma, a műtrágya felhasználás és a villamosenergia fogyasztás a mezőgazdaságban) *a mezőgazdaság korszerűsödését kifejező változóknak nevezzük.*

A harmadik csoportba az átlagosnál lassúbb növekedési ütemű változókat soroljuk. A vizsgált harmincnyolc változó közül a következők tartoznak ebbe a csoportba: a gépi állóeszközök kormegoszlását, a tercier ágazatok részesedését, a vasúti szállítás részarányát és villamosítottságát, a gabona és hús-

4. tábla

A kihagyott változók évi átlagos növekedési üteme

A változó megnevezése	Az első diáddal becsült érték a tényleges érték százalékában	Évi átlagos növekedési ütem százalékban
Az átlagosnál lassabban fejlődő változók		
*A háromévesnél fiatalabb gépi állóeszközök aránya az összes gépi állóeszközökhöz	0,62	2,8
*Egy aktív keresőre jutó közlekedésben és kereskedelemben foglalkoztatott aktív keresők	0,67	2,3
*Összes teherszállítás aránya a vasuti teherszállításhoz	0,55	1,1
*Villamosított vasútvonalak hossza a vasútvonalak építési hosszának ezrelékében	0,63	2,8
*Egy lakosra jutó gabonafogyasztás reciproka	0,52	0,3
*Egy lakosra jutó húsfogyasztás	0,67	2,4
*Egy lakosra jutó lakások száma	0,54	0,9
*Egy lakosra jutó kórházi ágyak száma	0,65	2,1
*Egy lakosra jutó levelek száma	0,62	2,1
*Egy lakosra jutó nagyvárosi lakosok száma	0,56	0,8
Az átlagos ütemnél gyorsabb ütemben fejlődő változók		
*Egy lakosra jutó újdiplomások száma	7,81	23,3
*Feljavított mezőgazdasági terület az összes feljavításra szoruló terület százalékában	50,04	39,9
*Egy mezőgazdasági aktív keresőre jutó traktorok száma	2,49	15,9
*Egy hektár mezőgazdasági területre jutó összes műtrágya felhasználás	2,49	14,3
*Egy mezőgazdasági aktív keresőre jutó villamosenergia fogyasztás	23,74	35,0
**Egy aktív keresőre jutó teherszállítás árutonnakilométerben	1,16	7,9
**Egy aktív keresőre jutó külkereskedelmi forgalom	1,27	8,9
*Egy lakosra jutó villamosenergia fogyasztás a háztartásban	1,80	12,4
**Egy biztosítottra jutó fontosabb betegségi biztosítások forintösszege	1,02	6,4
**Egy lakosra jutó bekapcsolt telefonfőállomás száma	1,04	6,3
*Egy lakosra jutó rádióelőfizetők száma	1,53	8,5
**Egy lakosra jutó példányszám az összes terjesztett lapokból	1,09	6,6

Megjegyzés: Egy csillaggal jelöltük az első és két csillaggal a második lépés után kihagyott változókat.

fogyasztást, a lakás és kórházi ágy ellátottságot, valamint a nagyvárosi lakosság részarányát kifejező változók. E viszonylag heterogén csoport változóinak többségére az jellemző, hogy nincsenek közvetlen kapcsolatban a termeléssel. Kivétel ez alól a műszaki-technikai fejlődést kifejező két változó — a gépek kormegoszlása és a vasútvonalak villamosítottsága. E két változó növekedési üteme azonban megközelíti a szintetikus változók növekedési ütemét, s így inkább ebbe a csoportba sorolható. A többi változó a tercier ágazatok jellemzőit, a lakosság fogyasztási és ellátottsági szintjét fejezi ki. A harmadik csoport változóit ezért a *nem termelő jellegű változók* csoportjának nevezzük.

A szintetikus, a mezőgazdasági és a nem termelő jellegű változó csoportokon kívülmaradt még néhány változó. Ezek növekedési üteme az átlag felett volt, de nem közelítette meg a mezőgazdasági csoport változóinak növekedési ütemét. A szóbanforgó változók azok, amelyek a második lépés után maradtak ki. E változók közül a külkereskedelmi forgalom és a teherszállítás volumenének alakulását leíró mutatók a legkarakterisztikusabbak, mert ezek növekedési üteme tér el legjobban a szintetikus változók növekedési ütemétől. A többi változó növekedési üteme megközelíti az átlagos növekedési ütemű változók legmagasabb értékét.

A fenti három karakterisztikus változó-csoport segítségével már viszonylag egyszerűen kifejezhetjük a három lépés közös trendjei közötti eltéréseket. Ezek szerint a harmincnyolc változó közös trendje azért emelkedik olyan meredeken, mert az első lépésben még szerepelnek az igen dinamikus mezőgazdasági változók. A mezőgazdasági változók kihagyásával, a második és harmadik lépésekben a szintetikus változók csoportja kerül túlsúlyba. Mivel a szintetikus változók átlagos növekedési üteme a mezőgazdasági változókénál sokkal kisebb, a második és harmadik lépés közös trendje az első lépés trendje alatt halad.

A második lépés közös trendje pedig azért mutat magasabb növekedési ütemet, mint a harmadik lépésé, mert a csoporton kívüli változók (amelyek közül a külkereskedelmi forgalom és a teherszállítás a legjelentősebb) növekedési üteme a szintetikus változók növekedési üteme fölött van.

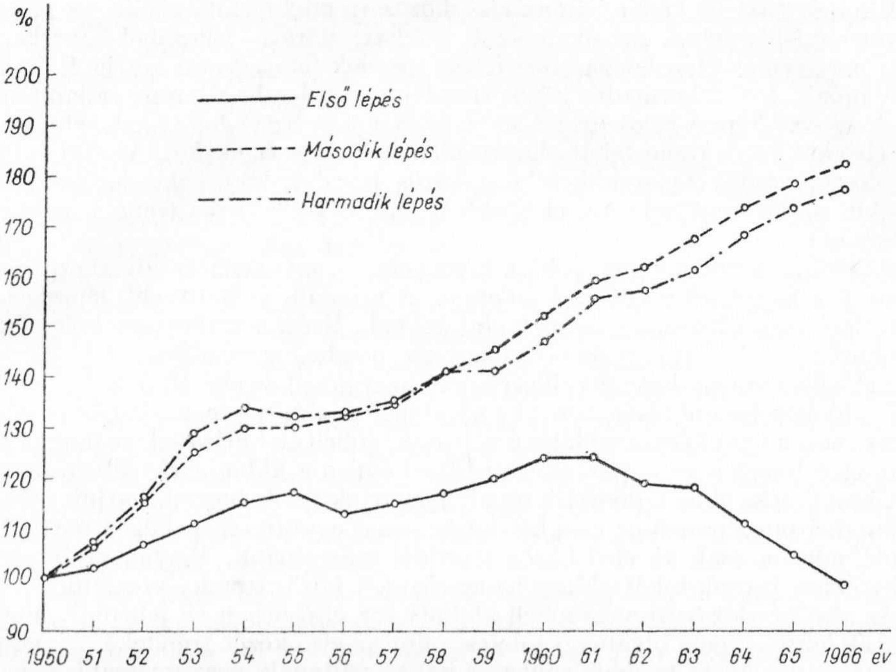
Az első közös trendek összehasonlításából az előzőeknél részletesebb következtetéseket nemigen vonhatunk le, főképp azért, mert az első lépés közös trendjének közelítése sokkal kedvezőtlenebb (lásd 2. táblát), mint a második és harmadik lépésé. Nagymértékben javíthatjuk az első lépésben a közelítés pontosságát, s így kedvezőbb feltételeket nyerhetünk az összehasonlításhoz, ha az első két diáddal együttesen számolunk.

Az első két közös trend alakulása a különböző lépésekben

Az első két közös trend együttes alakulását a 2. ábrán mutatjuk be.[5]

Az 1. és 2. ábrát összehasonlítva feltűnő a közös trendek „helycseréje". Az első közös trendeknél az első lépéshez tartozó trend meredeksége a legnagyobb, az első két közös trendnél pedig a legkisebb. A helycsere azért következett be, mert az első diád közelítésének pontossága az első lépésben nem volt megfelelő. A közelítés pedig azért nem lehetett megfelelő, mert az első lépésben szereplő harmincnyolc változó között egyaránt találhatók olyan változók, amelyeknek növekedési üteme nagyon gyors (a mezőgazdasági csoport) és olyanok (a nem termelő jellegű változók csoportja), amelyek igen lassan változtak. Tekintve, hogy az alkalmazott módszerrel a számításban szereplő összes változóra jellemző közös trend meghatározására kerül sor, az első lépésben a közös trend az igen gyorsan növekedő mezőgazdasági változókat követve magasan az átlag fölött helyezkedett el. Mivel ez az igen gyors növekedést kifejező közös trend nemcsak az átlagnál lassabban fejlődő változók, de az átlagos növekedési ütemű változók alakulását is nagymértékben felülbecsülte, a második közös trend igen alacsony növekedési ütemekkel korrigálta az elsőt. Míg tehát az első lépés első közös trendjének alakulását elsősorban a mezőgazdasági változók gyors növekedése határozta meg, a második közös trend

[5] Az első és a második közös trendeket úgy vontuk össze, hogy az első közös trendet az ahhoz tartozó változónkénti közelítés pontosságát kifejező arányszámok átlagával; a másodikat pedig a második közös trendhez tartozó arányszámok átlagával súlyoztuk,



2. *ábra. Az első két közös trend alakulása a számítás különböző lépéseiben*

alakulására a nem-termelő jellegű változók lassú változása nyomta rá a bélyegét.

Az első lépés közös trendjeinek fenti sajátosságaiból közvetlenül magyarázható a trendek helycseréje. Az első közös trendeknél az első lépésben domináló mezőgazdasági változók növekedési üteme meghaladta, az első két közös trendnél a meghatározó nem-termelő jellegű változók növekedési üteme nem érte el a második és harmadik lépésre jellemző szintetikus változók növekedési ütemét. Ezért az első közös trendeknél az első lépés görbéje a másik kettő felett, az első két közös trendnél pedig a második és harmadik lépés görbéje alatt haladt.

Az első és az első két közös trendeknek az egész időszakra jellemző évi átlagos növekedési ütemeit az 5. táblában foglaljuk össze.

Bár a második és a harmadik lépéseknél a második közös trend bevonása nem eredményezett az előzőekhez mérhető radikális változást, a növekedési ütemek ezeknél a lépéseknél is csökkentek.

5. tábla

Az első és az első két közös trend átlagos növekedési ütemei

A közös trendek	Első lépés	Második lépés	Harmadik lépés
Az első közös trend	6,7	4,6	3,9
Az első két közös trend	0,0	3,8	3,6

Mindhárom lépésben tehát az első közös trendek felülbecsülik az átlagos növekedési ütemeket. Az alkalmazott módszer iteratív jellegéből következik, hogy az egymás után leválasztott közös trendek fokozatosan korrigálják egymás hibáit. Így a harmadik közös trendet is figyelembe véve megállapítható, hogy az első három közös trend az első két közös trend fölött helyezkedik el. Az első két közös trend tehát alulbecsüli a valóságos értékeket. Az alul és felül becslések, vagyis a soronkövetkező közös trendek korrekciós hatása annál kisebb, minél pontosabb az előzőekben már bevont közös trendek együttes közelítése.

Az első lépésben a legnagyobb a korrekció, az egymásután következő közös trendekre nagyfokú oszcilláció jellemző. A második és harmadik lépésben az oszcilláció jóval kisebb, a trendek stabilabbak. Ezért a számítások második és harmadik lépéseiben nyert eredmények megbízhatóbbaknak tekinthetők. Ennek ellenére nem hagytuk, illetve nem hagyjuk el az első lépés másik kettővel való összehasonlítását sem. Az első lépés eredményeinek vizsgálata lehetséges, mert a nagyfokú oszcillálás a változók időbeli alakulásával megmagyarázható és célszerű is ez a vizsgálat, amellyel éppen a különböző változó-csoportok karakterisztikus fejlődési irányait tárhatjuk fel és hasonlíthatjuk össze.

Mindhárom lépésnél az első két közös trend együttesének közelítése kedvezőbb, mintha csak az első közös trenddel számolnánk. Megbízhatóbb eredményekhez jutunk tehát akkor, ha az első két közös trendet vizsgáljuk.

Az első két közös trend időbeli alakulására elsősorban az jellemző, hogy a görbék lefutása nem olyan egyenletes, mint az első közös trendeké. A vizsgált időszakban a közös trendek többször irányt váltanak, azaz gyorsabb növekedési periódusokat lassabb, sőt egy esetben kifejezetten csökkenő növekedési ütemű szakaszok követnek.

A leggyorsabb volt a növekedés — mindhárom lépésben — a vizsgált időszak első felében, 1950-től 1954–55-ig. Ezt a szakaszt egy viszonylag lassú fejlődési periódus követi, amely az ötvenes évek végéig tart. Ezután az első lépés közös trendje körülbelül olyan ütemben kezd csökkenni, mint a másik két trend nőni. A különböző ütemű, de körülbelül azonos irányú fejlődés tehát 1960-ig tart. 1960 után az első lépés közös trendje fokozott mértékben távolodik a körülbelül párhuzamosan haladó második és harmadik lépés közös trendjétől. Ez a távolodás azt jelzi, hogy az időszak második felében az átlagos, a lassú és a gyors fejlődésű változók növekedési ütemei nem közelednek, hanem távolodnak egymástól, a növekedési ütemek mégjobban differenciálódnak.

Néhány következtetés

A gazdasági fejlődés jellegéről alkotott hipotézisünk szerint valamely népgazdaság tartós fejlődésének az az előfeltétele, hogy a gazdaság különböző területein végbemenő változásokat kifejező növekedési ütemek közötti különbségek hosszú távon kiegyenlítődjenek.[6] A növekedési ütemek hosszútávú kiegyenlítődése másképp azt jelenti, hogy a gazdasági fejlődés folyamán a gazdaság különböző területeire jellemző trendek többé-kevésbé párhuzamosan haladnak. Csak a párhuzamos fejlődés esetén bontakozhatnak ki ugyanis a gazdaság legfontosabb területei — a gazdasági tevékenységet végző ember, a

[6] E hipotézis részletes kifejtését, amelynek csak néhány elemét idézzük itt fel, lásd [2]-ben.

termelési eszközök, a szükségletek és a környezet — között azok a kölcsönös összefüggések, amelyek a zavartalan fejlődést biztosítják. A párhuzamos fejlődés esetén tehát egyetlen terület sem marad le olyan mértékben, hogy az a többi terület fejlődését gátolná.

Abban az esetben, amikor a párhuzamos fejlődést biztosító kiegyenlítődési tendencia nem érvényesül, vagyis ha vannak a gazdaságban olyan területek, amelyek növekedési üteme tartósan és jelentős mértékben eltér egymástól, akkor a gazdaságban egyensúlytalanságok keletkeznek, s ezek hatására előbb-utóbb az egész gazdaság fejlődése lelassul.

Fontos azt hangsúlyozni, hogy a növekedési ütemkülönbségek csak akkor gátolják a fejlődést, ha ugyanazon változók, vagy változó csoportok között tartósan fennállnak. A nem tartós különbségek a növekedési ütemben épp ellenkezőleg, a fejlődés velejárói és előmozdítói. A dinamikusan, az átlagosnál gyorsabban fejlődő területek általában pozitív hatással vannak a gazdaság fejlődésére, szinte magukkal húzzák a hozzájuk kapcsolódó területek fejlődését és ezen keresztül meggyorsítják az egész gazdaság növekedését.

A fékező hatás csak akkor jelentkezik, ha a dinamikusan fejlődő területek nem tudnak felzárkózni az átlagos növekedési ütemű területekhez vagy ha a dinamikus területek gyors növekedése más területek rovására megy, s így az utóbbiak fokozatosan lemaradnak.

A trendeknek a számítás során tapasztalt szétválása nem a kiegyenlítődést, hanem az egyre gyorsabb távolodást jelzi. Az első lépés első és első két közös trendjének alakulása azt mutatja, hogy az átlagosnál gyorsabb növekedési ütemű változók — a mezőgazdasági és ahhoz csatlakozó néhány változó — növekedési üteme az 1960-as évektől fokozatosan nő, míg az átlagosnál lassabban fejlődő — a nem termelő jellegű — változók növekedési üteme tovább csökken. A szintetikus jellegű változók alakulására pedig — az eredményekből úgy tűnik — már rányomja a bélyegét a lassú és gyors csoportok divergenciája. A szintetikus jellegű változók növekedési üteme az időszak második felében ugyanis alacsonyabb, mint az időszak első felében, amikor a növekedési ütemek közötti eltérések nem nőttek. A számítás eredményeiből tehát arra következtethetünk, hogy a vizsgált időszakban, illetve főleg annak második felében a nem termelő jellegű változók lemaradása fékezte a gazdasági növekedést.

A számításokból tehát azt a konkrét következtetést vonhatjuk le, hogy az egész gazdaság legjellemzőbb és legfontosabb területein a növekedés üteme a hatvanas években azért csökkent, mert a tercier ágazatok fejlesztése, a fogyasztási struktúra korszerűsítése, a lakás- és az egészségügyi helyzet igen lassú javulása — hogy csak a legfontosabb tényezőket említsük — nagyon elmaradt a gazdaság többi területeinek fejlődésétől. A lemaradó területek szűk keresztmetszetet képeznek és nem engedik kibontakozni az átlagos ütemnél gyorsabban fejlődő területeknek, elsősorban a mezőgazdaság korszerűsítésének előrevivő, megújító hatását. A gazdaság gyorsabb ütemű növekedésének feltétele, az előzőekből következőleg, tehát az, hogy a lemaradt területek fejlődése meggyorsuljon, azaz a különböző növekedési ütemű változó-csoportok növekedési üteme ne távolodjék, hanem közeledjék egymáshoz.

A számításokból adódó másik, nem az előzőekhez hasonló konkrét gazdasági, hanem kifejezetten metodikai jellegű tanulság a faktoranalízis és a diád módszer összehasonlításával kapcsolatos.

A vizsgálatban szereplő változók ismertetésekor már említettük, hogy a diád-módszerrel végzett számításokban csak azok a változók szerepeltek, amelyek kapcsolata a faktoranalízis során nyert első főfaktorral szoros volt. A főfaktor és a változók közötti kapcsolat szorosságát a faktorsúlyok fejezik ki. A faktorsúlyok nem mások, mint valamelyik főfaktor és valamelyik változó közötti korrelációk. A faktoranalízisnél az egyik legfontosabb probléma az, hogy ezek a faktorsúlyok nem elég pontos és megbízható mutatói a főfaktorok és a változók közötti kapcsolatoknak.

A faktoranalízisből nyert eredmények összehasonlítása az e cikkben közölt diád módszerű elemzéssel azt mutatja, hogy a faktorsúlyok valóban nem a legmegfelelőbb indikátorok. A vizsgált harmincnyolc változó közül ugyanis számos olyan található, amelyik mind a növekedési ütemük, mind a rövid távra vonatkozó irányuk és irányváltozásaik tekintetében különböznek egymástól, és mégis többé-kevésbé azonos faktorsúlyokkal kapcsolódnak az első főfaktorhoz. Pontosabban fogalmazva azt mondhatjuk, hogy a változók és a főfaktorok közötti kapcsolatot kifejező faktorsúlyok közötti különbségek általában nem tudják kellő mértékben kifejezésre juttatni azokat a különbségeket, amelyek az egyes változók időbeli alakulásai között mutatkoznak.

A faktoranalízissel tehát csak a változók közötti globális összefüggéseket tárhatjuk fel. Ezután kerülhet sor az egyes változók és változó-csoportok időbeli alakulásának részletes elemzésére a diád módszer segítségével. A faktoranalízis és a diád módszer tehát, éppen az előbbiek miatt, elsősorban nem versenyző, hanem egymást kiegészítő, a gazdasági fejlődés jellegzetességeit különböző szinteken vizsgáló módszernek tekinthetők.

(Beérkezett: 1971. január 28.)

IRODALOM

1. Harmann, H. H.: Modern factor analysis. Chicago and London, 1967. University of Chicago Press.
2. Rimler J.: A gazdasági fejlődés vizsgálata és a faktoranalízis. Közgazdasági Szemle, 1970. 7–8. sz.
3. Rimler J.: Kísérlet a faktoranalízis alkalmazására a gazdasági fejlődés vizsgálatában. Közgazdasági Szemle, 1970. 10. sz.
4. Székely B.: Mátrixok egy speciális diadikus felbontása és ennek néhány alkalmazása az összehasonlító elemzésben. Szigma, 1970. 4. sz.
5. Vita L.: A faktoranalízis közgazdasági alkalmazásának lehetőségeiről. Szigma, 1970. 2. sz.

INVESTIGATION OF COMMON TRENDS IN THE ECONOMIC DEVELOPMENT BY THE METHOD OF DIADS

The investigation reviewed in the paper analyzes a system of index numbers which consists of 38 indices. The system characterises the development of the Hungarian economy between 1950–1966. The analysis was carried out by means of a method based on a special diadic decomposition of matrices, the so-called diad-method. The diad-method is a special method of factor analysis. In the paper the authors also deal with the similarities and differences between the classical factor analysis and the diad-method.

One of the most important lessons of the investigation is that the diad-method, which can generally be applied to the analysis of interdependent systems of variables, is appropriate also for the analysis of a system of variables expressing the different aspects of development. Calculations have resulted broad-scale and easily comprehensible information on the development of the investigated period. This information enlightens some remarkable characteristics of development.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩИХ ТРЕНДОВ, ХАРАКТЕРНЫХ ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ С ПОМОЩЬЮ ДИАДИЧЕСКОГО МЕТОДА

В исследовании, изложенном в статье, анализировалась система показателей, состоящая из 38 элементов, репрезентирующих характерные черты развития венгерской экономии в периоде от 1950 до 1966. Анализ произошел с помощью т. н. диадического метода, основного на специальное, диадическое разложение матриц. Диадический метод является специальным методом факторного анализа. В статье авторы занимаются и с обнаружением аналогий и расхожений между методами классического факторного анализа и диадическим методом.

Как один из наиболее важных результатов исследования, доказалось, что диадический метод, который вообще можно использовать для анализа систем переменных, зависящих друг от друга, подходит для анализа системы переменных, выражающих различные аспекты развития. Результаты расчетов привели к таким широкообразным и легко истолковаемым информациям, которые осветили некоторые замечательные характерные черты развития.

Kornai János – Martos Béla

Gazdasági rendszerek vegetatív működése

Bonyolult, sokféle funkciót ellátó rendszerek irányítását általában egyszerűbb és magasabbfokú mechanizmusokból álló, többfokozatú szabályozók látják el.[1] Így például az űrhajó számos funkcióját egyszerű beépített automatikák vezérlik, más tevékenységeit fél-automatikusan a földről irányítják, ismét más funkciókat az űrhajósok közvetlenül, kézierővel kormányoznak. Vagy gondoljunk a magasabbrendű élő organizmusra, pl. az emberi szervezetre. Működésének egyrészét – többek között a légzést, az emésztést, a vérkeringést, a szív, a tüdő-, a gyomor- és bélrendszer, a vese működését – a vegetatív (autonóm) idegrendszer, a működés másrészét pedig a központi idegrendszer szabályozza.

A gazdaság is bonyolult, sokféle funkciót ellátó rendszer. Folyamatait többféle, alacsonyabb és magasabb fokú mechanizmus együttesen szabályozza. Az alacsonyabbfokút – a fiziológiai analógia alapján – *vegetatív (autonóm) szabályozásnak* nevezzük.[2]

Tanulmányunk első szakasza a „szabályozási mechanizmus" fogalmát magyarázza meg, összehasonlítást tesz különböző mechanizmusok között és tapasztalati megfigyeléseket ismertet. A 2. és 3. szakasz tárgya az autonóm szabályozás elméleti elemzése egy általános és egy speciális modell segítségével. Végül a 4. szakaszban következtetéseket vonunk le, s általános megjegyzéseket fűzünk a megelőző elméleti elemzéshez.

1. Szabályozási mechanizmusok

1.1. *Az ármechanizmus és az utasításos mechanizmus*

A gazdasági rendszert, működésének elvont elemzésére, két szférára osztjuk fel. A *reálszférában* mennek végbe a gazdaság anyagi, fizikai folyamatai: a termelés, a termékek helyváltoztatása és a fogyasztás. A *szabályozási szféra* hiva-

[1] Tanulmányunk azokra a közgazdasági és modellépítési gondolatokra támaszkodik amelyeket Kornai János fejtett ki *Anti-Equilibrium* [4] című könyvének az autonóm szabályozásról szóló fejezetében, és az [5] tanulmányban. Az átalános modell jelen továbbfejlesztése és a speciális modell a szerzők közös munkája, az utóbbinak az elemzését Martos Béla végezte el.

A szerzők kutatásaikat a Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézetében végezték. Kornai János munkáját fél éven át a Cowles Foundation for Research in Economics (Yale University, USA) keretében folytatta, a Ford alapítvány által rendelkezésre bocsátott alapokból. Felhasználjuk az alkalmat, hogy köszönetet mondjunk a kutatásunkat támogató intézményeknek.

A tanulmány anyagát előadtuk a Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett Operációkutatási Konferencián, Debrecen, 1970 és az Econometric Society 2. Világkongresszusán, Cambridge, Anglia, 1970.

[2] Az alacsonyabbfokú idegrendszer megjelölésére az angolnyelvű fiziológiai irodalom az „autonóm" jelzőt, más nyelvek, köztük a magyar is a „vegetatív" jelzőt használja. Az általunk leírt analóg gazdasági jelenséget mindkét jelző találóan jellemzi.

tása a reálfolyamatok vezérlése. Itt megy végbe az információk összegyűjtése, feldolgozása és továbbadása, a döntések előkészítése és meghozatala.

A szabályozási szférán belül alrendszereket különböztetünk meg, amelyeket *szabályozási mechanizmusoknak* nevezünk. Ezek – noha szorosan egymáshoz kapcsolódva fejtik ki hatásukat – mégis bizonyosfokig elkülönülnek egymástól.

A szabályozási mechanizmusokat főként a következő ismérvek alapján határolhatjuk el egymástól:

1. *Szervezet.* A gazdaság mely szervezetei vesznek részt a mechanizmus működésében?

2. *Információs struktúra.* Mely információ-típusok jellemzik a mechanizmus közlés-áramlását? Milyen szervezetek között áll fenn információs kapcsolat a szóbanforgó mechanizmus keretében?

3. *Magatartási szabályok.* Milyen szabályosságok jellemzik a mechanizmusban résztvevő szervezetek döntéshozatali folyamatait? Milyen információs inputra milyen információs outputtal válaszolnak, másszóval: miféle válaszfüggvénnyel írható le magatartásuk?

4. *Motiváció.* Milyen motívumok késztetik a szervezeteket magatartási, döntési szabályaik és az azokhoz tartozó információs struktúra kialakítására?

Az alábbiakban nagyon vázlatosan, s erősen leegyszerűsítve összefoglaljuk két ,,tiszta'' szabályozási mechanizmus ismérveit. Az első: az *ármechanizmus*, amelyet gyakran *piaci mechanizmusnak* is neveznek. Szervezete teljesen decentralizált; minden termelő és fogyasztó, eladó és vevő résztvesz benne. Nincsenek jogilag szankcionált alá-fölérendeltségi viszonyok. Információs struktúrájának fő jellegzetessége: az ár szolgál a szabályozás jelzőrendszereként. Túlkínálat esetén az ár csökken, túlkereslet esetén nő. A termelő magatartási szabálya: ha valamely termék ára emelkedik, többet kell termelni, kevesebbet kell felhasználni belőle (árcsökkenés esetén megfordítva). A termelő motivációja: a profit növelése. (A fogyasztó magatartási szabályait és motivációját itt nem érintjük.)

A második mechanizmus, amelyet meg akarunk említeni: az utasításokkal irányító központi szabályozás, röviden: az *utasításos mechanizmus*. Szervezete teljesen centralizált és hierarchikus. A gazdaság minden reáltevékenységét végső soron a központ irányítja, rendszerint nem közvetlenül. A központ alatt, s a termelő vállalatok fölött — egy, két vagy több szinten elrendezve — alközpontok, középfokú irányító szervek helyezkednek el. Az információs struktúra jellegzetessége: a közlések ,,függőleges'' áramlása. Felülről lefelé utasításokat küldenek, alulról felfelé pedig jelentéseket. A jelentések alapján a központ dönt. A rövidlejáratú adaptáció szabályozására szolgáló magatartási szabály: ha a jelentésekből hiány derül ki, a termelés növelésére ad utasítást, ha felesleg mutatkozik, a termelés csökkentését írja elő. A termelő vállalatok motivációja: a fegyelem, az utasítások teljesítéséhez fűződő anyagi és erkölcsi érdekeltség. (A fogyasztói magatartásra ismét nem térünk ki.)

Az irodalom jelentős része azt a benyomást kelti, mintha a kapitalista gazdaság reálszféráját kizárólag az ármechanizmus, a szocialista gazdaságét pedig (legalábbis a decentralizálási reformokat megelőző korszakban) kizárólag az utasításos mechanizmus szabályozná. Ez azonban nem állja meg a helyét. Mind a kapitalista, mind a szocialista gazdaságban szimultán többféle szabályozási mechanizmus működik. A kapitalista gazdaságban megjelennek – ha nem is az egész országot átfogó méretekben, de legalábbis részlegesen – az utasításos mechanizmus elemei: a nagy konszernek és a nagy állami-gazdasági szervezetek irányításában. A szocialista gazdaságban pedig már a reform előtt is működött — ha szoros korlátok között is — az ármechanizmus, s hatóköre a reformok nyomán tovább szélesedett.

Ezeket még kiegészítik további szabályozási mechanizmusok is. Ilyen például *a népgazdaság közép- és hosszúlejáratú állami tervezése*, amely kezdettől fogva igen fontos hatást fejtett ki a szocialista országokban, de egyre nagyobb szerephez jut a fejlődő országokban, sőt a fejlett tőkés roszágokban is.

1.2. *A vegetatív (autonóm) szabályozás*

További ilyen szabályozási mechanizmusnak minősíthető a *vegetatív (autonóm) szabályozás* is. Tulajdonképpen ez maga is összetett, több ,,al-mechanizmusra'' tagolódó regulátor. *Megtalálható mind a kapitalista, mind a szocialista gazdaságokban.*

A vegetatív szabályozási mechanizmus legfontosabb — s tanulmányunkban részletesen tárgyalt — összetevője, ,,al-mechanizmusa'' a *készletjelzéseken alapuló szabályozás*. A termelő vállalat egyik legfontosabb információs forrása: a saját termékeiből és a felhasznált anyagokból álló készletek megfigyelése. Ha saját termékeiből a készlet felhalmozódik, akkor célszerű a termelés színvonalát csökkenteni, ha viszont a készlet leapad, akkor érdemes a termelést fokozni. Hasonlóképpen: ha az anyagkészlet felduzzad, a beszerzés csökkenthető, ha az anyagkészlet túl kicsi, a beszerzést célszerű növelni. Utóbbihoz hasonló logika alapján dönthet bevásárlásairól a fogyasztói háztartás is.

A vegetatív szabályozási mechanizmus egy másik összetevője a *közvetlen kapcsolat vevő és eladó között*. Ajánlat, hirdetés, előzetes tárgyalás, megrendelés formájában közlik egymással: mit tudnak és akarnak adni, illetve kapni.

A vegetatív szabályozás jellegzetessége: mindig a legalsó szinten megy végbe, a közvetlen termelők és fogyasztók között, magasabbfokú adminisztratív szervek bevonása nélkül. ,,Autonóm''; nem kapcsolódik közvetlenül valamilyen bonyolult össz-társadalmi folyamathoz. Az utasításos mechanizmus sokszáz vállalat és hivatal precíz összjátékára épül, utasítások és jelentések bonyolult áramlására. A piaci mechanizmusban az árat a résztvevő vállalatok és háztartások együttesen alakítják ki. A szabályozásban viszont sokkal inkább lokális jellegű a folyamat. A készletjelzéseken alapuló szabályozásban a vállalat vagy a háztartás csupán *saját* készletét figyeli meg; az organizmus egyetlen sejtjén *belül* lejátszódó információs és döntési processzussal van dolgunk. A vevő és eladó közvetlen kapcsolatában az organizmus két ,,szomszédos'' sejtje érintkezik egymással.

A vegetatív működés további jellegzetessége: egyszerűsége, úgy is mondhatnánk: primitívsége. Triviális jelenségekről van szó, amelyekről mindenki tud — csak éppen az elmélet hagyta figyelmen kívül.

A vegetatív szabályozás motivációját valószínűleg a következő irányban lehet keresni. Minden, egyszer már létrejött szervezet törekszik a megmaradásra, továbbélésre. A szervezethez tartozó személyek nagy többsége legalább annyira azonosul a szervezettel, hogy annak fennmaradását, folyamatos, zökkenőmentes működését kívánja, legalábbis akkor, ha ez nem kíván tőle túl nagy, a megszokottat meghaladó áldozatot, erőfeszítést. Ily módon az anyagbeszerző, az üzemmérnök, az értékesítési osztály dolgozója bizonyos fokig azonosul munkakörével és természetesnek érzi, hogy az ő feladata a vállalat folyamatos anyagellátása, az üzem sima működtetése, illetőleg a termékek eladása. Igyekszik a feladatokat legalább olyan mértékben ellátni, hogy a szervezet folyamatosan működhessen. A vegetatív működésnek bizonyára egyéb motívumai is vannak, de a fenti látszik a legjelentősebbnek.

Ahogy az élő organizmus elemi működését — mondjuk a vérkeringést vagy a légzést — nem a központi idegrendszer tudatos aktusai biztosítják, hanem a vegetatív idegrendszer, ugyanúgy a gazdasági rendszer elemi életfunkcióit is vegetatív szabályozás vezérli. Nem igaz, hogy a kapitalista vállalat okvetlenül bevárja, míg az A termék *ára* csökken és a B terméké nő, s csak azután csökkenti az A termék és növeli a B termék termelését. Nem igaz, hogy a szocialista vállalat okvetlenül bevárja, míg *utasítást* kap: csökkentse az A termék és növelje a B termék termelését — és csak azután lát hozzá az utasítás megvalósításához. Mindkét társadalomban érvényesül autonóm mozgás. A vállalat „önmagától" csökkenti A és növeli B termelését, mert látja, hogy előbbiből felduzzadt, utóbbiból leapadt a készlet; illetve a vevő egyszerűen közölte vele: szeretne kevesebb A és több B terméket kapni.

Összefoglalásul táblázatos formában is áttekintjük a most tárgyalt szabályozási mechanizmusok ismérveit.

Szabályozási mechanizmusok ismérvei

	Ármechanizmus	Utasításos mechanizmus	Vegetatív szabályozási mechanizmus	
			Készletjelzés	Vevő és eladó közvetlen kapcsolat
Szervezet	Decentralizált Valamennyi vevő és eladó együttes tevékenységének eredménye	Centralizált, hierarchikus	Decentralizált Kizárólag a szervezeten belül megy végbe	Decentralizált Kizárólag egy-egy eladó-vevő pár kapcsolatára épül
Információs struktúra: fő máció-típus	Ár	Lefelé: utasítás, felfelé: jelentés	Készletjelzés	Igények és lehetőségek közvetlen közlése
Magatartási szabály a termelőnél	Árváltozás → output-input változtatása	Utasítás → végrehajtás	Készletváltozás → output-input változtatása	vevő(eladó) közlése → termelő (felhasználó) alkalmazkodása
Termelő motivációja	Profit növelése	Fegyelem, érdekeltség az utasítás végrehajtásában	Azonosulás a funkcióval, a vállalat túlélésével, folyamatos üzemeltetésével	

1.3. *Tapasztalatok*

A vegetatív szabályozás empírikusan megfigyelhető. Leírásához — a termelés körében maradva — közelről tanulmányozni kell a vállalatok életét, a felhasznált információkat, a döntés „hüvelykujjszabályait". A szerzők személyes tapasztalatai, s számos vállalati vezetővel folytatott beszélgetései alátámasztani látszanak a vegetatív szabályozás létét, s kiemelkedően fontos hatóerejét. Működésének és más szabályozási mechanizmusokkal való összekapcsolásának módszeres leírása azonban további empírikus és elméleti kutatást igényel.

Figyelemreméltó közvetett bizonyítékát adta a vegetatív szabályozás fontos szerepének a magyar gazdaságvezetés reformja. Három évvel ezelőtt, 1968. január 1-én egyik napról a másikra kiiktatták a gazdaság igen széles területén az utasításokkal irányító központi szabályozást, legalábbis a rövidlejáratú döntések körében. Azóta azonban csupán a reálszférának aránylag kisebb részét szabályozza „tiszta" ármechanizmus, a piac egyensúlyi helyzetéhez rugalmasan igazodó mozgó árakkal. Ennek ellenére nem keletkezett vákuum a gazdaság szabályozásában. A reform előtt is, utána is működött a vegetatív szabályozás. Meggyőződésünk szerint jelentős részben ennek köszönhető, hogy a termelés „ment magától"; különösebb zökkenő nélkül, simán mennek végbe a gazdaság reálfolyamatai.

Bármilyen fontos is a további empírikus kutatás, vannak korlátai. A gyakorlatban a vegetatív szabályozás a magasabbrendű mechanizmusokkal összefonódva, együttesen hat. „Tiszta" formában, a többitől teljesen elkülönítve csak elméletileg, matematikai modellek segítségével elemezhetjük.

2. Általános modell

Jelen tanulmányunkban kizárólag a vegetatív szabályozás egyik összetevőjének, „al-mechanizmusának", a készletjelzéseken alapuló vezérlésnek az elméleti elemzésével foglalkozunk. Először egy általános modellt ismertetünk, amely keretül szolgál a konkrét vizsgálatok egész sorozatához, majd — a 4. szakaszban — specifikáljuk az általános modellt, s egy egyszerű konkrét modellen végezzük el az elemzést.

A gazdasági rendszerben m számú elsődleges korlátos erőforrás áll rendelkezésre és n számú terméket állítanak elő. A rendszer szervezetei: M számú fogyasztó és $N+1$ számú termelő, akik közül a 0 sorszámú a természet elsődleges erőforrásait „termeli" a semmiből.

A rendszer dinamikus; minden változója az idő, t függvénye. Az időre vonatkozó argumentumot a további tárgyalásban csak hellyel-közzel tesszük ki, ha hangsúlyozni akarjuk, hogy valamely változó az időnek *adott* függvénye. Az idő szerinti deriválást a változó fölé tett ponttal jelezzük.

2.1. *Változók*

A tárgyalás jelenlegi általános szintjén nyitva hagyjuk a kérdést, vajon sztochasztikus vagy determinisztikus változókat szerepeltetünk-e a modellben.

Endogén változók

u_{ij} = az i-edik termelő termékkészlete (output-készlet) a j-edik termékből ($i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, n$).

v_{ij} = az i-edik termelő anyagkészlete (input-készlet) a j-edik termékből ($i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, n$).

w_{ij} = az i-edik fogyasztó készlete a j-edik termékből ($i = 1, \ldots, M;\ j = 1, \ldots, n$).

r_{ih} = az i-edik termelő készlete a h-adik erőforrásból ($i = 0, 1, \ldots, N;\ h = 1, \ldots, m$).

x_{ij} = az i-edik termelő termelése a j-edik termékből ($i = 1, \ldots, N;\ j = 1, \ldots, n$).

y_{ikj} = az i-edik termelő vásárlása a k-adik termelőtől a j-edik termékből ($i = 1, \ldots, N$; $k = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, n$).

z_{ikj} = az i-edik fogyasztó vásárlása a k-adik termelőtől a j-edik termékből ($i = 1, \ldots, M$; $k = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, n$).

s_{ikh} = a h-adik erőforrás átadása a k-adik termelőtől az i-edik termelőhöz ($h = 1, 2, \ldots, m$; $i, k = 0, 1, \ldots, N$).

p_{ij} = az i-edik termelő felhasználása a j-edik termékből ($i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, n$).

q_{ih} = az i-edik termelő felhasználása a h-adik erőforrásból ($i = 1, \ldots, N$; $h = 1, \ldots, m$).

Exogén változók

g_{ij} = az i-edik fogyasztó fogyasztása a j-edik termékből ($i = 1, \ldots, M$; $j = 1, \ldots, n$).

r_h = a rendszer összes készlete a h-adik erőforrásból ($h = 1, \ldots, m$).

2.2. *Általános feltevések*

1. A változók a $t \geq 0$ tartományban folytonosan differenciálhatók. Kezdőértékük a $t = 0$ időpontra adva van. A kezdőértéket felső indexként írt nullával jelöljük (pl. $x_{ij}^0, u_{ij}^0, \ldots$).
2. Nincsenek ikertermékek ($p_{ij} \geq 0$).
3. A fogyasztás $g_{ij} = g_{ij}(t) \geq 0$ az időnek adott függvénye.
4. A rendszer összes erőforráskészlete $r_h = r_h(t) \geq 0$, az időnek adott függvénye.
5. Az erőforrások nem termelhetők ($q_{ih} \geq 0$), de alkalmazásuk során nem is használódnak el, nem fogynak. Természetes növekedésük, ill. fogyásuk a 0 sorszámú ,,termelő'' készletét változtatja.
6. A j-edik termék minősége homogén; független attól, melyik k termelő állítja elő. Ennek megfelelően minden felhasználó számára, legyen az akár termelő, akár fogyasztó, közömbös, hogy a termék melyik termelőtől ered. Feltételezzük: amennyiben a kínálat fedezi a keresletet, azaz a későbbiekben ismertetésre kerülő mérlegegyenletek kielégülnek, akkor létezik olyan mechanizmus, amely biztosítja, hogy az eladó és a vevő megtalálja egymást. Ezt a mechanizmust nem modellezzük.[3]

2.3. *A modell*

Ráfordítási függvények

$$p_{ij} = p_{ij}(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}, t) \tag{2.1}$$

$$q_{ih} = q_{ih}(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}, t) \tag{2.2}$$

E függvényekről feltesszük, hogy $p_{ij}, q_{ih} \geq 0$, ha $x_{i1}, \ldots, x_{in}, t \geq 0$. Lásd: 2. és 5. feltevést.

[3] Ugyanezt a feltételezést hallgatólagosan megteszik az ármechanizmus matematikai modelljei is.

Mérlegegyenletek

(2.3) $$\dot{u}_{ij} = x_{ij} - \sum_{k=1}^{N} y_{kij} - \sum_{k=1}^{M} z_{kij}$$

(2.4) $$\dot{v}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} y_{ikj} - p_{ij}$$

(2.5) $$\dot{w}_{ij} = \sum_{k=1}^{N} z_{ikj} - g_{ij}$$

(2.6) $$\dot{r}_{ih} = \sum_{k=0}^{N} s_{ikh} \qquad i \neq 0$$

(2.7) $$r_h = \sum_{i=0}^{N} r_{ih}$$

(2.8) $$y_{ikj} = -y_{kij}$$

(2.9) $$z_{ikj} = -z_{kij}$$

(2.10) $$s_{ikh} = -s_{kih}$$

A (2.3)–(2.10) egyenletek a termelés és forgalom triviális egyensúlyi feltételeit adják meg. (2.6)-nál figyelembe vettük az 5. feltevést.

Magatartási szabályok

(2.11) $$x_{ij} = \xi_{ij}\left[u_{ij}, \sum_{k=1}^{N} y_{kij} + \sum_{k=1}^{M} z_{kij}\right]$$

(2.12) $$\sum_{k=1}^{N} y_{ikj} = \eta_{ij}[v_{ij}, p_{ij}]$$

(2.13) $$\sum_{k=1}^{N} z_{ikj} = \zeta_{ij}[w_{ij}, g_{ij}]$$

(2.14) $$\sum_{k=0}^{N} s_{ikh} = \sigma_{ih}[r_{ih}, q_{ih}] \qquad i \neq 0.$$

A termelés, a termék- és erőforrás-beszerzés a készleteknek és a felhasználásnak a függvénye. Itt a $\xi_{ij}[\ldots]$, $\eta_{ij}[\ldots]$ stb. függvények operátorként értelmezendők, így például időszerinti deriválást, integrálást és más operációkat is tartalmazhatnak.

2.4. *Az elméleti problma általános felvetése. Túlélési feltételek*

A kérdés, legáltalánosabb formában, a következő:

Kialakíthatók-e olyan készletjelzésre épülő magatartási szabályok, amelyek mellett a rendszer túlélése, folytonos működése (sőt esetleg növekedése is) biztosítva van?

A kérdés megválaszolásához definiálnunk kell a „túlélés”, a „folytonos működés” fogalmát. A (2.1)–(2.10) rendszerrel jellemzett gazdaságban a túlélésnek egy enyhe fogalma például a következő egyenlőtlenségekkel definiálható:

$$x_{ij} \geqq 0 \tag{2.15}$$

$$u_{ij},\ v_{ij},\ w_{ij} \geqq 0 \tag{2.16}$$

$$r_{ih} \geqq q_{ih} \qquad i \neq 0 \tag{2.17}$$

$$r_{oh} \geqq 0$$

Azaz a termelés és a termékkészletek nem lehetnek negatívak, az erőforrások alkalmazása nem haladhatja meg a készletet. Természetesen ennél szigorúbb túlélési feltételek is előírhatók.

A kérdés csak az általános modell bizonyos specifikálása esetén válaszolható meg. Így további feltevéseket kell tennünk a ráfordítási függvényekre, a fogyasztásra, az erőforrásokra. A következő szakaszban egy ilyen erősen specifikált és egyszerűsített modellváltozatot mutatunk be.

3. Speciális modell: Leontief-gazdaság, integráló szabályozás

3.1. *Speciális feltevések*

Az előző szakaszban bevezetett hat általános feltevésen túlmenően most továbbiakat vezetünk be. E feltevések első csoportja (1–3) a gazdaság szerkezetére vonatkozik:

1. Minden működési változó determinisztikus.
2. Egyetlen fogyasztó van. ($M = 1$)
3. A gazdasági rendszer reálszférája Leontief-típusú, azaz:
   - Nincsenek külső korlátos erőforrások. ($m = 0$)
   - Az i-edik terméket egyetlen termelő állítja elő, az i-edik ágazat, még-pedig egyetlen technológiával ($n = N$).[4]
   - A ráfordítások a termelésnek lineáris függvényei:

$$p_{ji} = F_{ij} x_j. \tag{3.1}$$

[4] Ennek megfelelően a következő speciális jelöléseket alkalmazzuk: Kis betűk n elemű pektorokat, nagy betűk $n \times n$ méretű mátrixokat jelölnek. A vektorok komponenseit és a vagonális mátrixok diagonális elemeit egyszerű, a mátrixok általános elemeit kettős alsó indexszel látjuk el.

Az előbbi konvenciótól eltérően e_j-vel jelöljük a j-ik egységvektort és e-vel az egységvektorok összegét, az összegező vektort. E_j az a mátrix, amelynek j-ik diagonális eleme 1, az összes többi eleme 0. Ezek összegét, az egységmátrixot E-vel jelöljük.

u = a termelői készlet vektora, u_i = az i-ik ágazat készlete saját termékéből.

V = a felhasználói készletek mátrixa, V_{ij} = az j-ik ágazatnál levő készlet a i-ik ágazat termékéből.

w = a fogyasztói készlet vektora, w_i = a fogyasztó készlete az i-ik ágazat termékéből.

x = a termelés vektora, x_i = az i-ik ágazat termelt mennyisége.

Y = a felhasználói vásárlások mátrixa, Y_{ij} = az j-ik ágazat vásárlása a i-ik ágazat termékéből.

z = a fogyasztói vásárlások vektora, z_i = a fogyasztó vásárlása az i-ik ágazat termékéből.

$g = g(t) > 0$ a fogyasztás adott vektora. g_i = a fogyasztás az i-ik ágazat termékéből.

$F = F(t) \geqq 0$ az input koefficiensek adott mátrixa. F_{ij} = j-ik ágazat egységnyi termékének előállításánál az i-ik ágazat termékéből felhasznált mennyiség.

A feltevések következő csoportja (4—7) az adottnak feltételezett $F(t)$ input-koefficiens mátrix, $g(t)$ fogyasztási függvény és az x^0, u^0, V^0, w^0 induló adatokra köt ki bizonyos összefüggéseket, amelyek együttesen, mint látni fogjuk elégségesek ahhoz, hogy a rendszer működőképességét fenntarthassuk.

4. Az $F(t)$ input-koefficiens mátrix nem negatív (ezzel tejesül a 2. általános feltevés), folytonosan differenciálható és spektrális rádiusza 1-nél kisebb minden $t \geq 0$-ra.

5. Az x_0 induló termelés *folytatható*, azaz

$$x^0 - F^0 x^0 > 0 \tag{3.2}$$

6. A $g(t)$ fogyasztási függvény *elégséges*, azaz minden $t \geq 0$-ra és minden i-re áll:[5]

$$g_i(t) > |x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_j^0 - g_i^0| \,. \tag{3.3}$$

7. Az induló készletek pozitívak:[6]

$$u^0 > 0, v^0 >, 0, w^0 > 0 \,. \tag{3.5}$$

Az 5. és 6. feltevéshez némi kiegészítő magyarázatot fűzünk:

Az induló termelés folytathatóságának feltétele azt követeli meg, hogy az induló termelésnek megfelelő nettó termék pozitív legyen. E követelmény szinte triviálisnak tűnik. Valójában mégsem teljesen az, hiszen eléggé nagy induló készletek terhére a gazdaság hosszabb időn át működőképes maradhat akkor is; ha az induló nettó terméknek van negatív komponense.

A fogyasztás elégségességének feltétele már mesterkéltebbnek tűnik, de nem nagyon szigorú. Ez legjobban (3.4) alatti alakjából látszik, amely azt követeli, hogy a fogyasztás minden termékből haladja meg a nettó termelés felét.

3.2. *A modell és megoldása*

Mérlegegyenletek

Az 1.—3. speciális feltevések alkalmazásával a mérlegegyenletek az alábbi alakot öltik. (Az egyenleteket baloldalon vektor, jobboldalon skalár alakban írjuk fel.)[7]

$$\dot{u} = x - Ye - z \qquad \dot{u}_i = x_i - \sum_j Y_{ij} - z_i \tag{3.6}$$

$$\dot{V}e_j = Ye_j - FE_j x \qquad \dot{V}_{ij} = Y_{ij} - F_{ij} x_j \tag{3.7}$$

$$\dot{w} = z - g \qquad \dot{w}_i = z_i - g_i \tag{3.8}$$

[5] A (3.3) feltételt $t = 0$-ra alkalmazva kapjuk:

$$g^0 > \frac{1}{2}(x^0 - F^0 x^0) > 0 \tag{3.4}$$

azaz (3.3) implikálja (3.2)-t és ez utóbbi redundáns. Továbbá, ha még feltesszük, hogy $g(t) \geq g^0$ minden t-re (például $g(t)$ monoton növekvő függvény), akkor (3.4) szükséges és elégséges ahhoz is, hogy (3.3) kielégüljön.

[6] A speciális modellben később kitűnő okból szigorú ($>$) egyenlőtlenségként követelünk meg számos feltételt, amelyek az általános modellben gyenge ($\geq$) alakban szerepeltek.

[7] A (2.8)—(2.10) forgalmi mérlegek e modellben feleslegesé válnak.

Magatartási szabályok

Vezessük be a következő konstansokat, amelyek a szabályozó rendszer „beállítását" végzik majd el:

u^*, V^*, w^* = a megfelelő változókra vonatkozó normálkészlet
C = a szabályozó paraméterek diagonális mátrixa (C_i az i-ik ágazat szabályozó paramétere).

A következő – a szabályozástechnikában integráló szabályozásnak nevezett – magatartási szabályokat alkalmazzuk [6].

$$\text{(3.9)} \quad \dot{x} = \dot{Y}e + \dot{z} + C^2(u^* - u) \qquad \dot{x}_i = \sum_j \dot{Y}_{ij} + \dot{z}_i + C_i^2(u_i^* - u_i)$$

$$\text{(3.10)} \quad \dot{Y}e_j = FE_j\dot{x} + \dot{F}E_jx + C^2(V^* - V)e_j \qquad \dot{Y}_{ij} = F_{ij}\dot{x}_j + \dot{F}_{ij}x_j + C_i^2(V_{ij}^* - V_{ij})$$

$$\text{(3-11)} \quad \dot{z} = \dot{g} + C^2(w^* - w) \qquad \dot{z}_i = \dot{g}_i + C_i^2(w_i^* - w_i)$$

A modell megoldása

A fenti (3.6)–(3.11) lineáris egyenletrendszer $2n^2 + 4n$ skaláregyenletből áll, ugyanennyi ismeretlen függvénnyel. Együtthatómátrixa nem szinguláris, ezért pontosan egy olyan megoldása van, amelyik a $t = 0$ időpontban az u^0, V^0, w^0, x^0, Y^0, z^0 értéket veszi fel. Ezt a megoldást itt explicit alakban megadjuk, helyessége behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető.

$$u = u^* + (\cos Ct)(u^0 - u^*) + (C^{-1}\sin Ct)(x^0 - Y^0e - z^0)$$

$$Ve_j = V^*e_j + (\cos Ct)(V^0 - V^*)e_j + (C^{-1}\sin Ct)(Y^0e_j - F^0E_jx^0)$$

$$w = w^* + (\cos Ct)(w^0 - w^*) + (C^{-1}\sin Ct)(z^0 - g^0)$$

$$\text{(3.12)} \quad x = (E - F)^{-1}[g - (C\sin Ct)(u^0 - u^* + V^0e - V^*e + w^0 - w^*) + (\cos Ct)(x^0 - F^0x^0 - g^0)]$$

$$Ye_j = FE_jx - (C\sin Ct)(V^0 - V^*)e_j + (\cos Ct)(Y^0e_j - F^0E_jx^0)$$

$$z = g - (C\sin Ct)(w^0 - w^*) + (\cos Ct)(z^0 - g^0).$$

Mint e megoldásból látható, az alkalmazott szabályozás instabil (oszcilláló). Stabil szabályozáshoz bonyolultabb (többtagú) magatartási szabályok szükségesek. Ilyen szabályozás esetleg nélkülözheti majd a felhasználásra vonatkozó információkat is és pusztán készletjelentések alapján működhet. Ennek kidolgozása egyik következő kutatási feladatunk.

A (3.12) megoldás x, Y és z komponensei – mint az könnyen belátható, – g komponenseinek monoton növekvő függvényei, ami egyébként várható volt. Ezt összevetve az elégséges fogyasztás (3.3) feltételével, kitűnik, hogy modellünk akár stagnáló, akár tetszés szerint növekvő gazdaságot ábrázolhat. A növekedés korlátait a speciális modellünkben elhanyagolt erőforrások szabják meg.

3.3. *A rendszer működőképessége*

A rendszer működőképességének feltételeit, az általános modellnél említett lehetőséghez hasonlóan, a következő egyenlőtlenségekkel definiáljuk:

$$x > 0, \tag{3.13}$$

$$u > 0, \tag{3.14}$$

$$V > 0, \tag{3.15}$$

$$w > 0\,. \tag{3.16}$$

TÉTEL. *Az* 1.—4. *általános feltételeket* (2.2. fejezet) *és az* 1.—7. *speciális feltételeket kielégítő rendszerben van a* C_i *szabályozó paramétereknek és az* u_i^*, V_{ij}^*, w_i^* *normálkészleteknek olyan pozitív értékrendszerük, hogy a* (3.6)—(3.11) *egyenletrendszer megoldása a* (3.13)—(3.16) *feltételek értelmében működőképes.*

Bizonyítás. Tekintve egy

$$\xi(t) = \alpha + \beta \cos \varphi t + \gamma \sin \varphi t$$

skalárfüggvényt, annak szükséges és elégséges feltétele, hogy $\xi(t) > 0$ álljon minden $t \geq 0$-ra az, hogy

$$\alpha > (\beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.17}$$

Alkalmazva ezt a (3.12)-beli u, V, w függvényekre (3.14)—(3.16)-ból a következő egyenlőtlenségekhez jutunk:

$$\begin{aligned} u_i^* &> [u_i^0 - u_i^*)^2 + C_i^{-2}(x_i^0 - \sum_j Y_{ij}^0 - z_i^0)^2]^{\frac{1}{2}} \\ v_{ij}^* &> [V_{ij}^0 - V_{ij}^*)^2 + C_i^{-2}(Y_{ij}^0 - F_{ij}^0 x_j^0)^2]^{\frac{1}{2}} \\ w_i^* &> [(w_i^* - w_i^*)^2 + C_i^{-2}(z_i^0 - g_i^0)^2]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ha most a normálkészleteket úgy választjuk meg, hogy

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i^0 \\ v_{ij}^* &= v_{ij}^0 \\ w_i^* &= w_i^0 \end{aligned} \tag{3.19}$$

a C_i szabályozó paraméterek értékét pedig úgy, hogy

$$C_i > max \left\{ \frac{|x_i^0 - \sum_j Y_{ij}^0 - z_i^0|}{u_i^0} ; \max_j \frac{|Y_{ij}^0 - F_{ij}^0 x_j^0|}{V_{ij}^0} ; \frac{|z_i^0 - g_i^0|}{w_i^0} \right\}, \tag{3.20}$$

akkor a (3.18) egyenlőtlenségek és ezzel a (3.14)—(3.16) egyenlőtlenségek is teljesülnek.

A (3.13) feltétel teljesüléséhez (3.12)-ből véve x-et, elégséges, ha

$$g > (\sin Ct)(u^0 - u^* + V^0 e - V^* e + w^0 - w^*) - (\cos Ct)(x^0 - F^0 x^0 - g^0) \tag{3.21}$$

hiszen F-ről feltettük, hogy spektrális rádiusza minden t-re kisebb egynél, tehát az $(E - F)^{-1}$ Leontief inverz nem negatív és így minden pozitív vektorral való szorzata pozitív. (3.17) szerint (3.21) teljesül, ha

$$g_i > [C_i^2 (u_i^0 - u_i^* + \sum_j V_{ij}^0 - \sum_j V_{ij}^* + w_i^0 - w_i^*)^2 + (x_i^0 - \sum_j F_{ij}^0 x_j^0 - g_i^0)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.22}$$

Ez a normálkészletek (3.19) alatti választása esetén (3.3) miatt áll tetszőleges C_i-kre.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk, sőt (3.19) és (3.20) alatt megadtuk a normálkészletek és a szabályozó paraméterek egy lehetséges választásának szabályát is. Meg kell azonban jegyezni, hogy a (3.18) és (3.22) egyenlőtlenségekből álló rendszert ki lehet elégíteni akkor is, ha (3.19) nem teljesül pontosan, ennek feltételeit azonban igen bonyolult lenne explicit alakban előállítani.

3.4. *A rendszer perturbációja*

Az előzőekben leírt gazdaságot valójában csak akkor van jogunk szabályozottnak nevezni, ha képes arra, hogy kisebb külső zavarok esetén is működőképes maradjon. Ennek a kérdésnek vizsgálatához a rendszeren különböző fajta perturbációkat hajtunk végre. A vizsgálat során feltételezzük, hogy a perturbálatlan rendszer működőképes, azaz a normálkészleteket és szabályozó paramétereket úgy állapítottuk meg, hogy a perturbálatlan rendszer megoldása kielégítse a (3.13)–(3.16) feltételek teljesüléséhez elégséges (3.18) és (3.22) egyenlőtlenségeket. Nem tesszük fel azonban, hogy e feltételeket éppen a (3.19)–(3.20) relációkban megadott módon elégítették ki.

Első perturbáció: Eltérés a kezdeti értékektől

Tegyük fel, hogy a rendszer beindítása során az u^0, V^0, w^0, x^0, Y^0, z^0 kezdeti értékeket pontatlanul állapították meg és valójában a kezdő értékek $\tilde{u}^0$, $\tilde{V}^0, \ldots, \tilde{z}^0$ voltak, úgy azonban, hogy az $u, V, \ldots, z$ változók $2n^2 + 4n$ dimenziós terében a $P \equiv (u^0, V^0, \ldots, z^0)$ pont a $\tilde{P} \equiv (\tilde{u}^0, \tilde{V}^0, \ldots, \tilde{z}^0)$ ponthoz kellőképpen közel fekszik.

A két különböző kiinduló pontnak két különböző [a (3.6)–(3.11) mozgásegyenletekkel leírt] pálya felel meg. A pályakoordináták különbségét az első $n^2 + 3n$ koordinátára írjuk csak fel, azokra, amelyeknek a pozitivitását (3.13)–(3.16) előírja.

$$\begin{aligned}
&\tilde{u} - u = (\cos Ct)(\tilde{u}^0 - u^0) + (C^{-1} \sin Ct)(\tilde{x}^0 - \tilde{Y}^0 e - \tilde{z}^0 - x^0 + Y^0 e + z^0) \\
&(\tilde{V} - V) e_j = (\cos Ct)(\tilde{V}^0 - V^0) e_j + (C^{-1} \sin Ct)[(\tilde{Y}^0 - Y^0) e_j - F E_j (\tilde{x}^0 - x^0)] \\
&\tilde{w} - w = (\cos Ct)(\tilde{w}^0 - w^0) + (C^{-1} \sin Ct)(\tilde{z}^0 - z^0) \\
&\tilde{x} - x = (E - F)^{-1} [-(C \sin Ct)(\tilde{u}^0 + \tilde{V}^0 e + \tilde{w}^0 - u^0 - V^0 e - w^0) + \\
&+ (\cos Ct)(E - F)(\tilde{x}^0 - x^0)]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Látható, hogy a (3.23) jobboldalán álló kifejezések minden komponensének abszolút értéke kisebb lesz egy tetszés szerinti, az időtől nem függő $\varepsilon > 0$ számnál, ha $\tilde{P}$ eléggé közel fekszik P-hez, éspedig minden $t \geq 0$-ra. Következésképp a pályakoordináták közötti különbség abszolút értéke kisebb lesz ezen ε-nál, minden t-re. Mivel pedig a perturbálatlan megoldás fenti koordinátái pozitívak, elég kicsi ε-t választva a perturbált megoldásé is pozitívak maradnak.

Második perturbáció: A készletek ugrásszerű változása

Itt azt tételezzük fel, hogy a $t = \tilde{t}$ pillanatban a készletek a (3.12) integrál adta értékek helyett ugrásszerűen a tőlük eltérő $\tilde{u}$, $\tilde{V}$, $\tilde{w}$ értékeket veszik fel. Ez természetesen együtt jár azzal, hogy a (3.6)—(3.8) mérlegegyenletek a $\tilde{t}$ pillanatban nem érvényesek (nincsenek is értelmezve). Viszont feltételezzük, hogy egyébként a gazdaság úgy működik tovább, mintha mi sem történt volna, azaz a (3.9)—(3.11) magatartási szabályoknak megfelelően.

Ezt a perturbációt felfoghatjuk úgy, mintha a rendszer működése a $t = \tilde{t}$ időpontban újra kezdődnék. Ha a C_i-ket elég nagyra választottuk, ahhoz, hogy a (3.18) egyenlőtlenségek akkor is kielégüljenek, ha azokba u^0, V^0, w^0 helyett az $\tilde{u}$, $\tilde{V}$, $\tilde{w}$ perturbált $\tilde{t}$ időpontbeli készleteket és x^0, Y^0, z^0, F^0, g_0 helyébe az $x(\tilde{t})$, $Y(\tilde{t})$, $z(\tilde{t})$, $F(\tilde{t})$, $g(\tilde{t})$ értékeket helyettesítjük és g minden $t \geq \tilde{t}$-re elég nagy ahhoz, hogy a (3.22) egyenlőtlenség is, ugyanezzel a helyettesítéssel, érvényben maradjon, akkor a rendszer a $\tilde{t}$ időpont után is működőképes marad, jóllehet a C_i szabályozó paraméterek és a normálkészletek értékét nem változtattuk meg. Ha viszont a készletek ugrásszerű változása olyan radikális, hogy a (3.18) vagy (3.22) egyenlőtlenségek valamelyike felborul, akkor az új helyzethez való alkalmazkodás az említett paraméterek újbóli megállapítását (a szabályozás „utánaállítását") követeli meg.

Harmadik perturbáció. Eltérés az adott F(t) *input mátrixtól és* g(t) *fogyasztási vektortól*

Feltételezzük, hogy az $F(t)$ input koefficiens mátrix és a $g(t)$ fogyasztási vektor helyébe a $\tilde{F}(t)$ és $\tilde{g}(t)$ perturbált értékek lépnek, a következő tulajdonságokkal

a) $\tilde{F}(t)$ és $\tilde{g}(t)$ folytonosan differenciálhatók $t \geq 0$-ra
b) $\tilde{F}(0) = F^0$, $\tilde{g}(0) = g^0$
c) $\tilde{F}(t)$ spektrális rádiusza kisebb 1-nél, minden $t > 0$-ra
d) $\tilde{g}(t)$ kielégíti a (3.22) egyenlőtlenséget, minden $t > 0$-ra.

Ekkor a perturbált rendszer működőképes marad, hiszen a (3.18) egyenlőtlenségeket a perturbáció nem érinti (3.22) érvényességét pedig feltételeztük (*d*) és e feltevés nyilván teljesül, ha $\tilde{g}(t) - g(t)$ komponenseinek abszolút értéke eléggé kicsi.

4. Következtetések és általános megjegyzések

A 3. szakaszban leírt egyszerű modell a 2. szakaszban körvonalazott „modell-család" egyik tagja. Kidolgozását csupán első lépésnek tekintjük a probléma elméleti vizsgálatában. Ugyanezen modell-család más tagjai a következő szempontok szerint alakíthatók ki:

— A modell sztochasztizálása.
— Nem-lineáris ráfordítási függvények bevezetése.
— Korlátos erőforrások explicit figyelembevétele.
— A technológiai választás, a termékek közti helyettesítés reprezentálása a modellben.
— Más magatartási szabályok alkalmazása.
— A szabályozás időigényének, késleltetésének figyelembe vétele.

A 3. szakaszban bizonyítani tudtuk, hogy — erős megszorításokat tartalmazó feltevések mellett — a vegetatív szabályozás képes egymagában működtetni a reálszférát, sőt annak puszta stagnálásán, „vegetálásán" túlmenően még növekedését is biztosíthatja. A továbbiakban — a feltevéseket lépésről-lépésre gyengítve — fel kell tárnunk a megállapítás „határait". Melyek azok a szabályozási funkciók, amelyet a vegetatív mechanizmus képes ellátni, s melyek ellátására képtelen? Ilyesféle kérdésekre kell majd felelnünk:

Csupán kis, az eredeti egyensúlyi helyzetet nem túlságosan megzavaró megrázkódtatásokhoz képes-e a reálszféra adaptálódni a vegetatív szabályozás vezérletével, vagy nagyobbakhoz is?

Képes-e a reálszféra szabályozására akkor is, ha vannak külső korlátos erőforrások? Különösen pedig akkor, ha a külső erőforrások volumene és relatív arányai változnak az időben, pl. az egyik erőforrás viszonylag mindinkább szűkössé válik egy másikhoz képest?

Az előbbi kérdéssel összefügg: csak adott technológia mellett képes-e a reálszférát szabályozni, vagy képes-e vezérelni a technológiai változást?

S végül: mennyire hatékony, pazarló vagy takarékos a vegetatív szabályozás? Költségei: a készletek lekötése, s a termelés, illetve beszerzés ingadozásával együttjáró átállítási veszteségek. Viszont javára szól, hogy nagyon olcsón szerzi be az információt, kicsi az adminisztrációs költsége.

A további elméleti kutatáshoz elsősorban a szabályozáselmélet eredményeire támaszkodhatunk. Itt egy fogalmi rendszerében jól felépített elméletről van szó, amelyet ugyan elsősorban műszaki célokra alkalmaztak, de képes absztrakt módon leírni szabályozási folyamatokat és elemezni azok sajátosságait függetlenül attól, hogy a szabályozott reálfolyamat miből áll. A szabályozáselmélet gazdasági (mikroökonómiai) felhasználásának úttörője *H. A. Simon* volt [7], akinek gondolatai számos ponton érintkeznek a mieinkkel. Úgy tűnik, hogy kezdeményezését nem igen követték. (Az optimális szabályozás elmélete e kutatási iránytól távolabb esik, nem is térünk reá ki.)

Egy másik fontos diszciplina az optimális készletgazdálkodás céljaira kidolgozott operációkutatási modellek és elméleti tételek. Utóbbi témakörrel számos elméleti közgazdász is foglalkozott — de mindig mikroökonómiai nézőpontból [2]. Noha sok esetben valóságos „perszonálunió" volt egyfelől a gazdasági rendszer *egészét* (pl. az általános egyensúlyelméletet) és a *rész*problémát, a vállalati készletgazdálkodást kutató közgazdászok csoportjai között, az elméletnek ez a két területe sohasem integrálódott. Ez az integráció időszerűvé vált. A készletnek sokféle funkciója van. Egyik hivatása (s ezzel foglalkozott az operációkutatás): zavartalanná tenni a vállalat munkáját és a vállalat vevőkörének kiszolgálását. Másik funkciójára jelen tanulmány kívánt rámutatni: jelzőrendszerként szolgál a gazdaság egészének szabályozásához.

További kutatásunkban nem kívánnánk ugyanabba a hibába esni, mint az ármechanizmus, illetve az utasításokkal irányító központi szabályozás jónéhány kutatója. Miután erősen elvont gondolatmenet alapján bebizonyították, hogy az egyik, illetve a másik speciális szabályozási mechanizmus képes *egymagában* irányítani a reálszférát — elfeledkeztek kiinduló feltevéseik erős megszorításairól. Az igazság ugyanis az, hogy a *valóságos* ármechanizmus, illetve a *valóságos* utasításos mechanizmus nem képes egymagában szabályozni a *valóságos* reálszférát. Ugyanez áll a vegetatív mechanizmusra is. Papíron — modellünk leegyszerűsített világában — képes egymagában szabályozni a gazdasági életet. Hatóereje nem tűnik gyengébbnek (vagy legalábbis lényegesen gyengébbnek) mint a másik két mechanizmusé; hasonló feltevésekből vezethető le mindhárom mechanizmus működőképessége.

A valóságos gazdaság szabályozása összetett és többfokozatú. Egyrészt: a különböző szabályozási mechanizmusok között *munkamegosztás* van; kölcsönösen kiegészítik egymást. A modern gazdaságban az árak rendszerint széles területeken merevek, tehetetlenek. A vegetatív szabályozás révén kisebb változásokhoz könnyen hozzáigazodhat a rendszer, még mielőtt a változást akár árjelzések, akár központi utasítások közvetítenék. A vegetatív szabályozásnak szerepét — benyomásunk szerint — az jelöli ki, hogy e mechanizmus egyszerű, „primitív", tehát gyors és olcsó. Bonyolult adaptációs feladat vezérlését a vegetatív szabályozás szimpla mechanizmusa nem képes ellátni, nem is beszélve a jövendő változásokhoz való előzetes alkalmazkodásról.

Nemcsak munkamegosztás van a szabályozási mechanizmusok között, hanem *átfedés* is. Ugyanazt a reálfolyamatot különböző mechanizmusok *együttesen* szabályozzák.

Egyik mechanizmus sem teljesen megbízható önmagában. Alkalmas összekapcsolásuk, együttes hatásuk révén kölcsönösen korrigálhatják egymás tévedéseit, tompíthatják a kilengéseket, csökkenthetik az adaptációs veszteségeket. (Természetesen hibás összekapcsolás esetén kölcsönösen fel is erősíthetik a kilengéseket, a veszteségeket.)

A legfontosabb, amit ezzel kapcsolatban meg kell gondolnunk, a tapasztalat. Minden valóságos modern gazdasági rendszer szabályozása összetett, többfokozatú. Ez arra mutat, hogy elkerülhetetlenül ilyenre van szükség. Nem érdemes tehát azon gondolkodnunk, hogyan teremthető meg egy olyan optimális „tiszta" mechanizmus (pl. optimális árrendszer), amely egymagában elvégez minden szabályozást. Akár az árak, a rövidlejáratú utasítások, a készletjelzések vagy a közép- és hosszúlejáratú tervek szerepét vizsgáljuk, végső soron azt a kérdést kell majd felvetnünk: hogyan hatnak ezek az információk *együttesen* a gazdaság reálfolyamataira.

Ez olyan kérdés, amelyet tudományunk jóformán még fel sem tett önmagának. Nem is várhatunk rá gyors választ. Sok matematikai modellünk van már az egyik szabályozásra, az ármechanizmusra. Most, a következő kutatási fázisban modelleznünk kell a többi mechanizmust (az utasításos szabályozást, a tervezést, a vegetatív szabályozást stb.). Ezt követheti majd a még nehezebbnek ígérkező, de okvetlenül elvégzendő feladat: a többfokozatú, összetett szabályozási rendszerek elméleti elemzése.

(Beérkezett: 1971. január 26.)

IRODALOM

1. ARROW, K. J.—HURWICZ, L.: Decentralization and computation in resource allocation in Essays in Economics and Econometrics. Chapel Hill, 1960. University of North-Carolina Press.
2. ARROW, K. J.—KARLIN, S.—SCARF, H.: Studies in the mathematical theory of inventory and production, Standford, 1958. Stanford University Press.
3. HADLEY, G.—WHITIN, T. M.: Analysis of inventory systems. New York, 1953. Prentice Hall, Inc.
4. KORNAI J.: Anti-equilibrium. Budapest, Akadémiai Kiadó. (Sajtó alatt).
5. KORNAI J.: Vegetatív működésű gazdasági rendszer. Budapest, 1969. A Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézete. (Kéziratban).
6. SZÁDAI R.: A szabályozáselmélet elemei. Budapest, 1963. Műszaki Könyvkiadó.
7. SIMON, H. A.: On the application of servomechanism theory in the study of production control. Econometrica, 20. (1952) pp. 247—268.

THE AUTONOMOUS FUNCTIONING OF AN ECONOMIC SYSTEM

Analyzing the way an economic system (a firm as well as a national economy) works, a distinction can be made between its autonomous and higher functioning. This bears analogy to the working of the autonomous and the higher nervous system in living organisms, hence the terminology adapted. The main features of the autonomous functioning of the economic system are:

1. The simplicity of the information required for making decisions. The relative unimportance of price-type information.
2. The simple behavioral rules which rely mostly on habits.

This excludes fundamental changes in technology as well as major investment decisions, which are contolled by the higher control system. Another point of view is a problem of restriction: the autonomous functioning aims only at the survival of the system, which may include a stationary extension, in an essentially unchanged environment. Any other, more complex goals appear in the higher control system.

The autonomous functioning of different systems seems to be very similar, while the higher functioning is fairly diversified owing to political, social, historical and other conditions. It seems to be hard to separate the effects of the autonomous functioning in as much as they are always mixed up with the effects of higher functioning in any modern economy. No empirical evidence as to the viability of a pure autonomous economy can be given. We must restrict ourselves to theoretical reasoning via simplified formal models.

As a first approximation of the problem a simple model for the Leontief-type economy will be demonstrated. Simple behavioral rules are applied, where relative changes in production and purchase quantities depend only on changes in producers' and consumers' own stocks, sales and consumption quantities, while prices play no role. The analysis of the model proves that such an economy can survive even if minor outer disturbances occur.

The conclusion which can be drawn is that information about stocks may play a considerable part in the control of any economic system, a much more important role than is usually acknowledged in the literature.

ВЕГЕТАТИВНОЕ ДЕЙСТВИЕ СИСТЕМЫ ХОЗЯЙСТВА

Анализируя действие системы хозяйства (предприятия или народного хозяйства), мы можем различать между вегетативным и волевым действиями. Это является подобным действию вегетативной и соматической нервной системы живого организма, поэтому мы используемся этой терминологией. Главные характерные черты вегетативного действия системы хозяйства следующие:

1. Информация для принятия решений является простой. Информация о типе цен является сравнительно неважной.
2. Правила поведения основываются главным образом на обычаях.

Это исключает базисные технические изменининя и решения о крупных капиталовложениях, потому что они контролизируются волевой системой. Другая точка зрения — эта проблема ограничения: вегетативное действие стремится только к поддержанию системы, что может означать устойчивое расширение, по существу в неизмененном окружении.

Вегетативное действие различных систем кажется очень подобным вышеупомянутому, но волевые действия являются разнообразными, благодаря политическим, общественным, историческим и другим условиям. В современном хозяйстве различать влияние вегетативного действия от влияния волевого трудно, потому что они всегда смешиваются. Нельзя доказать жизнеспособность чистого вегетативного хозяйства. Мы можем ограничиваться только на теоретические заключения в интересах упрошенных формальных моделей.

В качестве первого подхода к проблеме авторы представляют простую модель хозяйства типа Леонтиев. Применяются простые правила поведения, когда сравнительные изменения количества производства и покупки товаров зависят только от изменений запасов, сбыта и количества потребления производителей и потребителей, а цены играют никакой роли. Анализ моделей показывает, что такое хозяйство может существовать, даже если происходят мелкие внешние неполадки.

Можно вывести заключение, что информация о запасах может иметь значительную роль в контроли систем хозяйства, более важную роль, чем вообще признается в литературе.

BÁGER GUSZTÁV

Marginális értékek a lineáris programozási feladatban

Az árnyékárat általában a lineáris programozási modellben szereplő korlát értékelésének tekintjük. Egy korlátozó feltétel árnyékára a korlátvektor egy komponensének kismértékű változtatásához tartozó célfüggvényérték-változás nagyságát és irányát mutatja meg.

Hasonló értelemben olyan árnyékárakat is értelmezhetünk, amelyek jelzik azt, hogy az együtthatómatrix és a célfüggvénykoefficiensek kismértékű változtatásának hatására – a többi paraméter változatlansága mellett – milyen mértékben változik meg a célfüggvény értéke. A lineáris programozási feladat marginális értékeinek ily módon való értelmezése egy általánosabb árnyékár-fogalomhoz vezet.

Jelen cikkben a lineáris programozási feladat marginális értékeivel foglalkozunk és – A. C. Williams egy matematikai dolgozatának eredményei alapján [1] – olyan tételeket és formulákat tekintünk át, amelyek a marginális értékek létezésével és kiszámításával függnek össze.

Így cikkünk nemcsak az árnyékár fogalma általánosításának egy lehetőségét mutatja be, hanem a lineáris programozási feladat érzékenységének általánosabb alapokon való elemzésére alkalmas módszert is leír. Az optimálási eredmények elemzésében felhasználható eszköztár gazdagítására sarkall az a gyakorlati vizsgálatainkból adódó tapasztalat, hogy a hazai népgazdasági programozási számítások árnyékárainak instabilitása nagy.

1. A probléma felvetése

Adott egy lineáris programozási probléma a duáljával:

$$\text{I. } \max c^*x, \text{ ha } x \geq o,\ Ax \leq b,$$

$$\text{II. } \min y^*b, \text{ ha } y^* \geq o^*,\ y^*A \geq c^*.$$

Kérdés: adott H, $\hat{b}$ és $\hat{c}$ esetén mit mondhatunk az

$$\text{I.}' \max (c^* + \alpha\hat{c}^*)\,x, \text{ ha } x \geq o,\ (A + \alpha H)\,x \leq b + \alpha\hat{b}$$

$$\text{II.}' \min y^*(b + \alpha\hat{b}), \text{ ha } y^* \geq o^*, y^*(A + \alpha H) \geq c^* + \alpha\hat{c}^*$$

lineáris programozási problémák célfüggvényértékéről (röviden: értékéről), ha α 0-hoz közeli pozitív szám.

Egy jelölést vezetünk be: legyen A az előbbi m×n-es matrix, b m-dimenziós oszlop, c^* n-dimenziós sorvektor, és

$$(1) \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & b \\ c^* & o \end{bmatrix}.$$

Legyenek továbbá:

$S(\tilde{A})$ az I. primál probléma megengedett megoldásainak halmaza,
$T(\tilde{A})$ a II. duál probléma megengedett megoldásainak halmaza,
$S_0(\tilde{A})$ az I. primál probléma optimális x_0 vektorainak halmaza,
$T_0(\tilde{A})$ a II. duál probléma optimális y_0 vektorainak halmaza.

A lineáris programozás ismert alaptétele szerint, ha $S_0(\tilde{A})$ vagy $T_0(\tilde{A})$ egyike nem üres, akkor a másik sem és $y_0^*b = c^*x_0$. Ebben az esetben azt mondhatjuk, hogy $\tilde{A}$ megoldható és a program értéke $c^*x_0 = y_0^*b$. Ezt az értéket jelöljük $\varphi(\tilde{A})$-val.

Legyen most H egy m×n-es matrix, $\hat{b}$ m-dimenziós oszlop, $\hat{c}^*$ n-dimenziós sorvektor, és

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H & \hat{b} \\ \hat{c}^* & o \end{bmatrix}. \tag{2}$$

A $\tilde{H}$ matrixot *perturbációs matrixnak* fogjuk nevezni.

Legyen $\alpha \geq 0$. Az $(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ matrixhoz tartozó lineáris programozási feladatot vizsgáljuk. Amennyiben a feladatnak van megoldása, definiálhatjuk a következő $f(\alpha)$ függvényt:

$$f(\alpha) = \varphi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}), \tag{3}$$

ahol a φ függvény, mint a fentiekben bevezettük, a lineáris programozási feladat értékét jelenti.

A függvény értelmezési tartománya az olyan α-k halmaza, melyekre a megfelelő $S_0(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ és $T_0(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ halmaz nem üres: azaz, melyekre $(\tilde{A} + \alpha\tilde{H})$ megoldható.

Mivel bennünket az érdekel, hogyan viselkedik az $f(\alpha)$ akkor, ha az α ,,közel'' nulla, megvizsgálhatjuk, hogy az $f(\alpha)$ függvény $\alpha = 0$-nál milyen feltételek esetén deriválható jobbról. A függvényt jobbról deriválhatónak mondjuk, ha a következő feltételek teljesülnek:

(I) a 0 egy jobboldali környezete beletartozik az f(x) függvény értelmezési tartományába,
(II) legyen a függvény 0-ban jobbról folytonos,
(III) létezzék továbbá a következő határérték:

$$f'(o) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{\varphi(\tilde{A} + \alpha\tilde{H}) - \varphi(\tilde{A})}{\alpha}. \tag{4}$$

Az $f'(0)$-t az $\tilde{A}$ program $\tilde{H}$ perturbációs matrixra vonatkozó *marginális értékének* nevezzük. Mint később látni fogjuk, a $\tilde{H}$ perturbációs mátrix speciális választásával a szokásos értelemben árnyékárnak nevezett értékeket kapjuk meg marginális értékként. Vagyis a marginális érték az árnyékár *általánosításának* tekinthető.

Alapvető egzisztenciatétel, hogy $\tilde{A}$ programnak minden $\tilde{H}$-ra vonatkozóan akkor és csakis akkor létezik a marginális értéke, ha $S_0(\tilde{A})$ és $T_0(\tilde{A})$ halmazok korlátosak.[1]

[1] Ezt a tételt A. C. Williams bizonyította be, aki *Mills* eredményeit [2] fejlesztette tovább.

2. A perturbáció speciális választásánál jelentkező árnyékár típusok

A $\tilde{H}$ perturbációs matrix alkalmas megválasztásával olyan marginális értékekhez juthatunk, amelyek a közgazdasági elemzés szempontjából nagy jelentőséggel bírnak. A továbbiakban feltételezzük, hogy a feladat nem degenerált és a primális optimális és duális optimális halmazok korlátosak.

Három alapvető (tiszta) marginális értéket vezetünk be. Ezek a következők:

Korlátárnyékár

Ha a $\tilde{H}$ perturbációs matrixot úgy választjuk, hogy

$$H = o, \quad \hat{c}^* = o^*, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} (i),$$

akkor az $f'(0)$ marginális érték azt mutatja meg, hogy a korlátvektor i-edik komponensének változásával a célfüggvény értéke milyen arányban változik. Változáson természetesen egy eléggé „kicsi" változást értünk, amelyet az egységnek megfelelő megválasztásával egységnyinek fogunk mondani.

Mint látjuk, a korlátárnyékár azt mutatja, hogy a korlátérték egységnyivel történő növelése mennyivel változtatja a program értékét, vagyis a szokásos árnyékár fogalommal azonos. Hasonló megállapítás tehető akkor is, ha az i-edik komponensben 1 helyett —1-et írunk.

Tevékenység-árnyékár

Ha a $\tilde{H}$ perturbációs matrixot úgy választjuk, hogy:

$$H = \begin{array}{c} (j) \\ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array} (i), \quad \hat{c}^* = o^*, \quad \hat{b} = o,$$

ekkor az $f'(0)$ marginális érték arról tájékoztat, hogy az A matrix α_{ij} elemének egységnyi változása miként hat a lineáris programozási feladat értékére. Ily módon a *tevékenység*-árnyékár a szélesebb értelemben vett — a reál és a szabályozási szférát felölelő — termelési technológiában jelentkező változások hatásainak elemzésére szolgálhat.

Hozam-árnyékár

Ha a $\tilde{H}$ perturbációs matrixot úgy választjuk, hogy:

$$H = o, \quad \hat{c}^* = [o \ldots \overset{(i)}{1} \ldots o], \quad \hat{b} = o,$$

akkor a hozam-árnyékár az i-edik tevékenység hatékonysága egységnyi változásának hatását mutatja meg a program értékére. Mivel a hatékonyság-változás elvileg árváltozásban nyilvánul meg, a hozam-árnyékár az árváltozások hatásainak elemzéséhez nyújthat segítséget.

Ezek mellett természetesen vizsgálhatók olyan esetek is, amikor a $\widetilde{H}$ perturbációs matrix nemcsak egy nem-nulla elemet tartalmaz. Példaként megemlítjük a következő esetet. Ha a $\widetilde{H}$ perturbációs matrixot úgy választjuk, hogy

$$H = o, \quad \hat{c}^* = o^*, \quad \hat{b} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\beta}^m \end{bmatrix},$$

akkor az a hatás elemezhető, amelyet a korlátvektor együttes módosítása okoz, ha a $\hat{b}$ irányába mozdulunk el. A gyakorlati alkalmazások szempontjából természetesen jelentősebbek azok az esetek, amikor nem a korlátvektor egészének, hanem néhány — egymással szoros kapcsolatban álló — komponensének a módosítására kerül sor.

Ha a H, $\hat{b}$, $\hat{c}^*$ matrixok nemcsak egy nem-nulla elemet tartalmaznak, akkor nem tiszta, hanem kevert korlát-, tevékenység és hozam-árnyékárról beszélünk.

3. Eljárások a különböző típusú árnyékárak kiszámítására

Az előző pontban bevezetett általánosított árnyékárak kiszámítására az [1] dolgozat következő tétele ad lehetőséget.

TÉTEL (Williams): Ha az $\tilde{A}$-hoz tartozó lineáris programozási feladatra az $S_0(\tilde{A})$ és $T_0(\tilde{A})$ halmazok nem üresek, korlátosak és $\widetilde{H}$ tetszőleges perturbációs matrix, akkor az $f'(0)$ marginális értékre

$$(5) \qquad f'(o) = \max_{x \in S_0(\tilde{A})} \min_{y \in T_0(\tilde{A})} \Psi(\widetilde{H}, x, y),$$

ahol

$$\Psi(\widetilde{H}, x, y) = \hat{c}^* x + y^* \hat{b} - y^* H x.$$

Mint a tételből látható, nagyon egyszerűen számolható az $f'(0)$ marginális érték abban az esetben, ha *egyetlen* primál és duál optimális megoldás van. Ekkor ugyanis

$$(6) \qquad f'(o) = \Psi(\widetilde{H}, x_0, y_0) = \hat{c}^* x_0 + y_* \hat{b} - y^*_0 H x_0 .$$

Ezen formula alapján az előző pontban tárgyalt árnyékártípusokra a következők adódnak:

Korlátárnyékár

A (6) egyenlet alapján

$$7) \qquad f'(o) = y^* \hat{b} .$$

Az $f'(0)$ jelentése miatt ez azt jelenti, hogy ha „kicsi" α mellett $\alpha\hat{b}$-pal növeljük a korlátvektort, akkor a program értéke $\alpha y^*_0 \hat{b}$-pal nő. Speciálisabban: tiszta korlátárnyékár esetében $f'(0) = \eta_i$, vagyis a szokásos árnyékár fogalommal van dolgunk. (η_i az y_0 vektor i-edik komponense.)

Tevékenység-árnyékár

A (6) egyenlet és az előző pontban mondottak alapján

$$(8)\qquad f'(0) = y_0^*(0,\ldots,0,\overset{(j)}{h},0,\ldots 0)\,x_0 = (y_0^* h)\,\xi_j,$$

ahol ξ_j az x_0 vektor j-edik komponense.

Ha tehát a j-edik tevékenység ráfordítási együtthatóit αh-val növeljük, akkor a célfüggvény értéke $\alpha(y_0^* h)\xi_j$-vel nő. Vagyis a tevékenység együttható-változását árnyékáron értékelve meg kell szoroznunk a tevékenységnek az optimális megoldásban való terjedelmével ahhoz, hogy a marginális értéket megkapjuk.[2]

A tiszta koefficiens-árnyékár esetében viszont

$$(9)\qquad f'(0)\,\eta_i\,\xi_j\,.$$

Ekkor, ha $\eta_i = 0$, a szóban forgó feltételben történő koefficiens-változásra a célfüggvény értéke érzéketlen. Ugyanez a helyzet akkor is, ha egy tevékenység nulla szinten van és az oszlopába tartozó együtthatók változásának hatását vizsgáljuk. Ez azt jelenti tehát, hogy a program értéke azokra a koefficiens-változásokra érzékeny, amelyek az optimális bázisban levő tevékenységekhez és az aktív feltételekhez tartoznak.

Hozam-árnyékár

Ismét a (6) egyenlet és az előző pont alapján

$$(10)\qquad f'(0) = \hat{c}^*\,x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy $\alpha\hat{c}^*$ változás hatására a lineáris programozási feladat értéke $\alpha\hat{c}^* x_0$-val nő. Tehát „kicsi'' változás esetén a célfüggvény értékének módosulása csak olyan tevékenységekhez tartozó célfüggvény-koefficienseknek a változására érzékeny, amelyek benne vannak az optimális bázisban.

Ha a primál- vagy duálfeladatnak *több* optimális megoldása is van, akkor az árnyékárak Williams tétele alapján ugyancsak kiszámíthatók, de ebben az esetben egy — esetleg két — lineáris programozási feladat megoldására van szükség.

Korlátárnyékár

A (5) képlet alapján

$$(11)\qquad f'(0) = \min_{y\in T_0(\tilde{A})} y^*\,\hat{b}\,.$$

Tehát az $f'(0)$ marginális érték a következő lineáris programozási feladat értékével azonos.

$$\begin{aligned} y^* A &\geq c\\ y^* &\geq o^*\\ y^* b &= \varphi(\tilde{A})\\ y^* \hat{b} &\to \min\,. \end{aligned}$$

[2] Hasonló eljárást követhetnénk akkor is, amikor a H matrixban nem egy oszlop, hanem egy sor nem-nulla.

Amint a (11) formulából látszik, a célfüggvény értékének növekedését úgy kapjuk meg, hogy kiszámoljuk azokat az árnyékárakat, amelyeken a korlátváltozást értékelve a legkisebb értéket kapjuk.

Tevékenység-árnyékár

A (5) egyenletből kiindulva

$$f'(0)=\max_{x\in S^0}\min_{y\in T_0} y^* H x=\max_{x\in S_0}\min_{y\in T_0}(y^* h)\,\xi_j=$$

$$(12)\qquad =\begin{cases}\min\limits_{y\in T^0}(y^* h)\cdot\max\limits_{x\in S^0}\xi_j, & \text{ha } \min\limits_{y\in T^0}(y^* h)\geq 0\\ \min\limits_{y\in T^0}(y^* h)\cdot\min\limits_{x\in S^0}\xi_j, & \text{ha } \min\limits_{y\in T^0}(y^* h)\leq 0.\end{cases}$$

A szóbanforgó max., ill. min. értékeket a következő lineáris programozási feladatok megoldásával kapjuk meg.

$$\begin{array}{lcl} y^* A\geq c & & A x\leq b\\ y^*\geq o^* & \text{és} & x\geq o\\ y^* b=\varphi(\tilde A) & & c^* x=\varphi(\tilde A)\\ y^* h\rightarrow \min & & \xi_j\rightarrow \max,\ (\min).\end{array}$$

Mint látható, a formulából a marginális értéket úgy nyerjük, hogy a koefficiens-változást legalacsonyabban értékelő árnyékárrendszert keressük meg és ezt szorozzuk a tevékenység bekerülési szintjének lehető legnagyobb (legkisebb) értékével.

Hozam-árnyékár

Az (5) formula alapján

$$(13)\qquad f'(0)=\max_{x\in S^0(\tilde A)}\hat c^* x$$

Ebből következően az $f'(0)$ marginális érték az alábbi lineáris programozási feladat megoldásából adódik.

$$\begin{array}{c} A x\leq b\\ x\geq o\\ c^* x=\varphi(\tilde A)\\ \hat c^* x\rightarrow \max\end{array}$$

Az $f'(0)$ marginális értéket tehát úgy kapjuk meg, hogy megkeressük a célfüggvénykoefficienst módosító vektor és az optimális tevékenységek vektorai szorzatának legnagyobb értékét.

Megjegyezzük, hogy a fenti lineáris programozások mindegyike az eredeti (I) és (II) lineáris programozási feladatpártól csak egyetlen feltételben különbözik, ezért számítástechnikailag nagyon egyszerűen tovább lehet lépni az (I) és (II) feladat megoldásáról a fenti feladatok megoldására.

4. A numerikus vizsgálatok jelentőségéről

Az általános árnyékár fogalom bevezetése, a különböző marginális értékek ismerete nemcsak az árnyékárvizsgálatok elvont módszertana, hanem a gyakorlati alkalmazások szempontjából is fontos. A marginális értékek ismerete lehetőséget teremt arra, hogy a népgazdasági programozási modellek paraméterei változásának a program értékére gyakorolt hatását teljeskörűen elemezzük.

Az ilyen elemzések hasznosságát — úgy véljük — nem kell különösképpen bizonygatnunk. A fő érvet maga a népgazdasági programozási gyakorlat adja, az a körülmény, hogy a tervezési folyamat egyes lépéseit leíró-követő modellek paraméterei rendkívüli gyorsasággal változnak. Itt mindenekelőtt a beruházási programok adatainak és a külkereskedelmi áraknak a változása említhető meg példaként.

Ha viszont az elvi-közgazdasági modellszerkesztés oldaláról nézzük a marginális érték-vizsgálatok jelentőségét, megállapíthatjuk, hogy szerepük itt is nagy: jelezhetik a modell stabil vagy instabil voltát, tájékoztatást nyújthatnak arról, hogy a modell szerkezetét és paramétereit érintő bizonyos változtatások indokoltak-e, a program értékének megváltozása reális vagy irreális-e. Annak a gyakorlati tapasztalatnak alapján, miszerint a modellekben nagyobb választási lehetőséget és helyettesithetőséget kell megengedni, különösen kitűnik az ilyen jellegű vizsgálatok jelentősége.

(Beérkezett: 1971. február 16.)

IRODALOM

1. Williams, A. C.: Marginal values in linear programming. J. SIAM. Vol. 11. No. 1 March 1963.
2. Mills, H. D.: Marginal values of matrix games and linear programs. Linear Inequalities and Related Systems, No. 7.,1956·Princeton University Press, pp. 183—193.

MARGINAL VALUES IN LINEAR PROGRAMS

By means of utilization and economic interpretation of A. C. Williams' mathematical results, the paper surveys theorems and formulae related to the existence and calculation of marginal values.

Depending on the special choice of perturbation three basic (pure) marginal values emerge which can be considered as a generalization of the notion of shadow price. These are as follows:

— Bound shadow price: it shows the rate of change in the value of the objective function when changing the i-th component of the bounding vector.

— Activity shadow price: it indicates how an individual change affecting a single element of matrix A influences the value of the linear program.

— Objective shadow price: it shows the effect of a unit change in efficiency of the i-th activity on the value of the program.

The notion of generalized shadow price can also be defined in case the perturbation matrix contains more than one non-zero element. In this case we have mixed bound, activity and objective shadow prices and not pure ones.

The paper then surveys the formulae of different types of shadow prices. The calculation processes are divided into two groups taking into account whether the primal or dual problem has one or more optimal solutions.

The notion of generalized shadow prices finds important practical application in the economy-wide programming, by showing whether a model is stable or unstable under the assumption that the parameters are subject to abrupt changes.

МАРГИНАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Статья, используя и экономически интерпретируя математические результаты работы А. Ц. Вилиамса, рассматривает такие теоремы и формулы, которые связаны со существованием и расчетом маргинальных значений.

В зависимости от специального выбора пертурбаций, получаются три основных (чистых) маргинальных значений, которые можно считать обобщением понятия теневой цены. Эти следующие:

— Теневая цена ограничения: показывает, до какой меры изменяется значение целевой функции с изменением i-го компонента вектора ограничения.

— Теневая цена деятельности: показывает влияние частного изменения (касающегося отдельных элементов матрицы A) на значение задачи линейного программирования.

— Теневая цена выручки: показывает влияние единичного изменения в эффективности i-ой деятельности на значение программы.

Понятие общей теневой цены можно толковать и в таких случаях, когда матрица пертурбации содержит не один ненулевой элемент. В этом случае мы говорим не о чистой, а о смещенной теневой цене ограничения, деятельности и выручки.

В дальнейшем статья показывает формулы различных типов теневой цены. Способы расчетов разделяются на две группы в зависимости от того, что прямая или двойственная задача имеет одно или больше оптимальных решений.

Понятие общей теневой цены важно с точки зрения практического использования в народнохозяйственном программировании для показания того, является ли модель стабильной или нестабильной при условиях чрезвычайного скорого изменения параметров.

Kovács Álmos – Stahl János

A vállalati beruházási politika optimálásának egy modellje

A vállalatok anyagi érdekeltsége elsősorban a $\frac{N}{sB+E}$ mutató – továbbiakban hatékonysági mutató – alakulásához fűződik [4], ahol N a vállalati nyereséget, B az éves bérköltséget, E az évi átlagos eszközállományt, s pedig a bérszorzót jelöli. A vállalati beruházási politikának így célja lehet egy olyan fejlesztési stratégia kidolgozása, amely valamilyen értelemben a mutató maximálására vezet. A „valamilyen értelemben" kifejezést azért kell használnunk, mert a beruházás hatásai általában több éven át érezhetőek és így többnyire nem lehet egyetlen év hatékonysági mutatójának maximálását célul kitűzni. Először azonban röviden azokkal az esetekkel foglalkozunk, amikor ez a közelítés elfogadhatónak tűnik.

A hosszútávú beruházási politika kialakításakor feltétlenül egy nagyobb időszakot kell átfogni a tervezésnek, ugyanakkor adódhatnak olyan, viszonylag szűkebb területet érintő fejlesztési kérdések is, amelyekben egyetlen év eredményeire gyakorolt hatás alapján dönthetünk. Két alapvető feltételnek azonban ekkor együttesen teljesülnie kell:

– a beruházás hatása a vállalati eredményre, valamint a vállalat eszköz- és bérszükségletére a tervezés során átfogott időszak egészében azonos legyen (tehát pl. a létrehozott kapacitás kezdettől fogva ugyanolyan szinten legyen kihasználható, a gyártott termékek várható eladási ára, minősége ne változzék stb.);

– a döntés mindenképpen megvalósítandó feladatok alternatív megoldási módjai közötti választásra vonatkozzon.

Ha a j beruházási javaslat megvalósítására ezután várható nyereség növekmény n_j, a bérköltség növekmény b_j, eszközállomány növekmény pedig e_j, akkor a feladat az

$$\frac{N+\sum\limits_j n_j x_j}{s\left[B+\sum\limits_j b_j x_j\right]+E+\sum\limits_j e_j x_j}$$

mutató maximálása, ahol az x_j-k 0,1 értékű változók.

Ha erőforráskorlátokat és feltétlenül megoldandó feladatokat leíró feltételeket nem veszünk figyelembe, akkor – amint azt alább megmutatjuk – a beruházási javaslatokat az $\frac{n_j}{sb_j+e_j}$ mutatójuk szerinti sorrendben kell megvalósítani, de csak abban az esetben, ha ez a mutató még nagyobb, mint a már kialakult vállalati $\frac{N^*}{sB^*+E^*}$ érték.

Már ebben az egyszerű esetben is megállapíthatjuk, hogy

– a pozitív nyereséghozam önmagában még korlátlan fejlesztési erőforrások esetén sem elegendő ahhoz, hogy egy beruházás gazdaságos legyen;

– azonos nyereségnövekményt biztosító és azonos bér- és eszközfelhasználással járó beruházások megvalósítása a vállalat induló helyzetétől függően egy vállalat számára gazdaságos, más vállalat számára pedig gazdaságtalan lehet;

– végül azonos főmutatók esetén a bérszorzó értékétől függően is változik az egyes beruházási változatok gazdaságosságára jellemző kép.

Ha az erőforráskorlátokat is figyelembe vesszük, az optimális beruházási politika meghatározása érdekében meg kell oldani a megfelelő ,,hiperbolikus'' célfüggvény mellett a 0,1 változós programozási feladatot, de a feltételek nélküli maximálás alapján levonható következtetések is utalnak arra, hogy a nyereségmaximáló modelltől eltérő eredményeket kaphatunk.

Az $\dfrac{N}{sB+E}$ mutató nevezőjében szereplő kifejezést írjuk $M + \Sigma m_j x_j$ alakban, a korlátozó feltételeket kielégítő lehetséges programok halmazát jelöljük X-szel.

Megoldandó feladatunk most tehát

$$(1) \qquad x \in X \Big\} \frac{N + \sum n_j x_j}{M + \sum m_j x_j} \to \max$$

alakú, ahol minden $x \in X$-re a nevezőben szereplő kifejezés pozitív. Ezen feladat megoldására kézenfekvőnek látszik az alábbi eljárás:

Legyen $\lambda^{(1)}$ tetszőleges szám és $k = 1$.

Oldjuk meg az

$$(2) \qquad x \in X\} \, N + \sum_j u_j x_j - \lambda^{(k)} (M + \sum_j m_j x_j) \to \max$$

feladatot. Ha ennek nincs lehetséges megoldása, nyilván (1)-nek sincs. Ellenkező esetben legyen $x^{(k)}$ (2) egy optimális megoldása. Ha az optimumérték zérus, $x^{(k)}$ (1)-nek is optimális megoldása. Ha nem, legyen

$$\lambda^{(k+1)} = \frac{N + \sum_j n_j x_j^{(k)}}{M + \sum_j m_j x_j^{(k)}}$$

és folytassuk (2) megoldásával $k = k + 1$-re.

Az eljárás helyessége, illetve véges volta nyilvánvaló.

$\lambda^{(1)}$ legcélszerűbb választásának az (1)-nek megfelelő folytonos feladat optimumértéke látszik, mikor is $\lambda^{(1)}$ felső korlát, a további $\lambda^{(k)}$-k az (1) feladat optimumértékének monoton növekvő alsó korlátai.

Elég valószínű, hogy ezen eljárás nem túl hatékony, függetlenül attól, hogy (2)-t valamilyen leszámlálási algoritmussal [5] vagy vágási technikával oldjuk meg.

(1) megoldására leginkább valamilyen leszámlálási algoritmus látszik legcélszerűbbnek, és a következőkben két ilyen eljárást körvonalazunk.

Minthogy X-et a változók egészértékű voltát kikötő feltételeken túl lineáris egyenlőtlenségek határozzák meg, azért mindenekelőtt alkalmazhatók az összes ezen alapuló tesztek.

A hányados célfüggvény figyelembevételének alapja az lehet, hogy miután bizonyos változók értékét rögzítettük, az $\frac{N + \sum rn_j x_j}{M + \sum rn_j x_j}$ hányados feltétel nélküli maximuma a szabad változók függvényében egyszerűen meghatározható.

Rendezzük ugyanis nemnövekvő sorrendbe a változókhoz tartozó $\frac{n_j}{m_j}$ hányadosokat és legyen a sorban következő szabad $x_{j'}$ változóra $x_{j'} = 1$ mindaddig, amíg $\frac{n_{j'}}{m_{j'}} > \frac{N^*}{M^*}$ ahol

$$N^* = N + \sum' n_j x_j$$

$$M^* = M + \sum' n_j x_j$$

és Σ' azt jelöli, hogy azokat a változókat kell összegezni, amelyek az előzőek során értéket kaptak: a rögzített változókat és a sorban eddig vizsgált szabad változókat.

Az eljárás helyességét igazolandó vezessük be a következő jelöléseket:

$$N_R = N + \sum' n_j x_j, \qquad M_R = M + \sum' m_j x_j$$

ahol Σ' a rögzített változókra történő összegzést jelöl,

$$N_s = \sum' n_j, \qquad M_s = \sum' m_j$$

ahol viszont Σ' az eljárás során $x_j = 1$ értéket kapott szabad változókra történő összegzést jelöli.

Legyen továbbá
$$\frac{N_R + \sum'' n_j + \sum''' m_j}{N_R + \sum'' m_j + \sum''' m_j}$$

az x_j változók egy tetszőleges 0—1 értékadásához tartozó hányadosérték, ahol Σ''-ben összegeztük az N_s, illetve M_s definíciójában is fellépő indexeket, Σ'''-ban pedig a többit.

Be kell látnunk, hogy

$$\frac{N_R + \sum'' n_j + \sum''' n_j}{M_R + \sum'' m_j + \sum''' m_j} \leq \frac{N^*}{M^*}$$

ahol N^* és M^* az eljárás eredményeként kapott számláló, illetve nevező.

Ha Σ'' és Σ''' mindegyike üres, az állítás nyilván igaz, hiszen az eljárás az $\frac{N_R}{M_R}$ hányadosból indul ki és azt végig növeli.

Ha Σ''' nem üres, akkor minden ide tartozó j indexre

$$\frac{n_j}{m_j} \leq \frac{N^*}{M^*}$$

amiből

$$\sum''' n_j \leq \frac{N^*}{M^*} \sum''' m_j$$

Elég most már igazolni, hogy

$$N_R + \Sigma'' n_j \leq \frac{N^*}{M^*} (M_R + \Sigma'' m_j)$$

mert ez az előbbivel együtt éppen a bizonyítandó állítás.

Ez nyilván igaz, ha Σ'' üres és nyilván igaz akkor is, ha Σ''-ben pontosan azok a szabad változók szerepelnek, amelyek N^*, illetve M^*-ban.

Ha viszont a fennmaradó esetre

$$N_R + \Sigma'' n_j > \frac{N^*}{M^*} (M_R + \Sigma'' m_j)$$

teljesülne, akkor tekintve egy olyan x_j szabad változót, mely N^* és M^*-ban szerepel, de Σ''-ben nem, erre

$$\frac{n_j}{m_j} \geq \frac{n_{j'}}{m_{j'}} > \frac{N^*}{M^*}$$

azaz

$$n_j < \frac{N^*}{M^*} m_j$$

ahol x_j az eljárás során adódó legnagyobb indexű nemnulla szabad változó.

Ezen egyenlőségeket az őket megelőzővel összeadva

$$N^* > \frac{N^*}{M^*} M^*$$

-hoz jutunk, ami ellentmondás.

Vegyük még észre, hogy a változók sorrendje rögzített — függetlenül attól, hogy melyek a szabad és melyek a rögzített változók — aminek a számológépi programozás megkönnyítése szempontjából van jelentősége.

Egy másik eljárás alapja az összes 0 vagy 1 komponensű x generálása olyan sorrendben, hogy a megfelelő $\frac{\sum n_j x_j}{\sum m_j x_j}$ értékek monoton nemnövekvők legyenek. Az előbbiekhez hasonlóan könnyen belátható, hogy a [2]-ben lineáris célfüggvény esetére javasolt eljárás ebben az esetben is helyes, ha a lineáris függvény együtthatói helyett az $\frac{n_j}{m_j}$ hányadosokkal dolgozunk.

Térjünk most vissza ahhoz a lényegesen reálisabb kérdéshez, amelynél a beruházási politika kialakítása során azt kell figyelembe vennünk, hogy legalábbis egy-egy döntés hatásai egy időszak folyamán nem azonos módon jelentkeznek minden évben. Ez a feltevés jobban megfelel a valóságnak, hiszen egy-egy beruházás sokszor maga is több lépcsőben fejeződik be, de emellett is az a jellemzőbb, hogy a létrehozott kapacitás teljes kihasználása csak fokozatosan következik be, a várható értékesítési lehetőségek sem azonosak az időszak valamennyi évében stb.

Az a gyakran használt modell, amelynek a célja egy diszkontált nyereségösszeg maximálása és a feltételek között a különböző fejlesztési erőforrások nagyságát veszi figyelembe éves bontásban [7], esetleg elfogadhatatlan megoldást eredményez, mivel egyes években a részesedési alap szintje nagyon kedvezőtlenül alakulhat. Hasonló a helyzet egy olyan modell esetén is, amely valamely év $\frac{N}{sB+E}$ mutatójának maximálását tűzi ki célul.

Kikerülhető ez a probléma, ha célfüggvényként az $\frac{N}{sB+E}$ mutató átlagos értékének maximálását választjuk, erősen diszkontálva a későbbi évek mutatóit, ez a célfüggvény azonban még mindig meglehetősen bonyolultnak látszik, ezért a következő megoldást javasoljuk: a feladat feltételei között írjuk elő az $\frac{N}{sB+E}$ mutató elérendő értékét az egyes években, és ilyen feltételek mellett törekedjünk a nyereség maximalizálására.

A modell ekkor általánosan a következő feltételekkel írható fel:

(3) $$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

(4) $$x_{j-1} \leq x_j \qquad (j = J_{k-1}+1, \ldots, J_k - 1 \quad k = 1,2\ldots)$$

(5) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(t)} x_j \leq \bar{b}_i^{(t)} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

(6) $$\frac{N = \sum\limits_{j=1}^{n} n_j^{(t)} x_j}{sB + s\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^{(t)} x_j + E\sum\limits_{j=1}^{n} e_j^{(t)} xj} = d^{(t)} \qquad (t = 1, \ldots, T)$$

(7) $$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} n_j^{(t)} (1+\beta^{(t)})\, x_j \to \max$$

A j beruházási lehetőségekhez az x_j változót rendeljük: ha egy megoldás alapján a beruházás megvalósításra kerül, értéke 1, egyébként 0.

A modell általános jellegének megfelelően figyelembe veszünk olyan beruházási lehetőségeket is, amelyek valamely önállóan is értelmezhető beruházás ,,folytatásaként'' valósíthatók meg. A (4) feltételek az ilyen típusú beruházásoknak a modellbe való beépítését teszik lehetővé: a ,,többütemű'' beruházási javaslat ,,elemei'' az $X_{j_{k-1}} \ldots X_{j_{k-1}}$ változóknak felel meg, az indexek sorrendje pedig a megvalósítás sorrendjét határozza meg. Természetesen az olyan több ütemű beruházási javaslatokat, amelyek esetében az egyes ütemek önállóan nem értelmesek, egyetlen változó reprezentálja.

Az (5) feltételek biztosítják azt, hogy a kialakított fejlesztési politika erőforrás igénye az egyes években ne legyen több a rendelkezésre álló erőforrásoknál (pénzügyi, munkaerő, anyag, import stb. keretek). Ennek megfelelően $a_{ij}^{(t)}$ a j beruházási javaslat i erőforrásigényét, $\bar{b}_i^{(t)}$ pedig az i erőforrásból felhasználható mennyiséget mutatja a t-edik évben, és $\beta^{(t)}$ jelöli a t-edik évre vonatkozó diszkont faktort.

Már itt érdemes megjegyezni, hogy e kereteket nem célszerű nagyon mereven kezelni, hiszen legalábbis jó részük bizonyos mértékig rugalmasnak tekinthető.

Ugyanez elmondható az egyes beruházási javaslatok erőforrás igényeinek többségéről is, elég például a megvalósítás ütemének változtatásával elérhető lehetőségekre utalnunk.

Még határozottabban mondhatjuk el mindezt a (6) feltételekkel kapcsolatban, amelyek a hatékonysági mutató alakulására vonatkozóan írják elő évenként az adott érték ($d^{(t)}$) elérését. Megjegyezzük, hogy hasonló módon vehetők figyelembe a bérgazdálkodás szempontjából lényeges „jövedelmezőségi" mutató $\frac{N+B}{L}$, (ahol L a vállalat dolgozóinak létszámát jelöli) alakulására vonatkozó feltételek is, hiszen az egyes beruházási javaslatok létszámhatásai szintén felmérhetőek. Nyilván nem mellékes a vállalat számára, hogy hogyan alakul hatékonysági mutatója és így a részesedési alap szintje, ugyanakkor a mereven megválasztott feltételek miatt hosszú távon mindenképpen kedvező változatok esetleg nem kerülnek be az optimális programba.

Már utaltunk arra, hogy e feltételek figyelmen kívül hagyása elfogadhatatlan megoldásra vezethet, de hasonlóan káros volna, ha merev kezelésük eleve kizárná a távlatilag eredményes fejlesztési alternatívák egy részét.

Miután a feltételek közt kikötöttük, hogy a hatékonysági mutatónak bizonyos szintet valamennyi figyelembe vett évben el kell érnie, jogosnak tűnik a diszkontált nyereséghozam maximálását szerepeltetni célfüggvényként. Így a figyelembe veendő évek száma nem lesz túlságosan nagy, hiszen a célfüggvény távlatilag már biztosítja a hatékonysági mutató szintjét. Ugyanakkor egy kiválasztott év hatékonysági mutatóját célfüggvényként szerepeltetve, a későbbi időszakra gyakorolt hatást kevésbé venné a modell figyelembe. A diszkontálást szélesen értelmezzük, a kamatlábnak tükröznie kell azt a tényt is, hogy a későbbi években várható eredmények csak kisebb megbízhatósággal mérhetők fel, váratlan körülmények lényegesen nagyobb szerepet játszhatnak, a gyors megtérülés lehetőséget adhat kedvező, de ma még nem ismert lehetőségek fokozottabb kihasználására stb.

A programozási feladatok többsége esetén a szigorú feltételek és a döntésre rendelkezésre álló rövid idő miatt azokat a megoldási módszereket tekinthetjük legjobbnak, amelyek pontosan meghatározzák az optimális megoldást. A beruházási politika kialakításakor azonban – amint arra már utaltunk – nagyon sok olyan feltételt is figyelembe kell vennünk, amelyeket csak hozzávetőleges pontossággal lehet leírni, és sokszor nem fogalmazhatók meg pontosan az optimalitás kritériumai. Ugyanakkor a döntésre általában hosszabb idő áll rendelkezésre, lehetőség van arra, hogy a döntésben illetékesek a már előzetesen megszűrt változatokat tovább mérlegeljék, és esetleg újabb szempontok felvetésével tovább szűkíthessék a tovább vizsgálandó kört.

Mindezek alapján célszerűnek látszik Everett G. L. M. módszerét [1] (magyarul pl. [4]-ben) alkalmazni, hiszen e módszer segítségével rendkívül gyorsan és egyszerűen meghatározhatunk viszonylag kevés számú, a feltételeket „nagyjából" teljesítő beruházási „politikát", amelyek a generált erőforrás felhasználás és a hatékonysági mutató generált értékei mellett optimálisak.

A G. L. M. módszert Kaplan [3] alkalmazta a feladatunkhoz nagyon hasonló Lorie–Savage feladatra [6], [7]. A módszert azonban triviális módosítással ebben az esetben is alkalmazhatjuk. [1]-ben a maximumfeladatban csak kisebb-egyenlő feltételek szerepelnek, ennek megfelelően a multiplikátorok nem–negatívak. A megfelelő tételek azonban könnyen átfogalmazhatók úgy, hogy a kisebb-egyenlőséget előíró feltételekhez pozitív, a nagyobb-egyenlőséget előíró feltételekhez pedig negatív multiplikátorokat rendelünk. Ebben az esetben is azonnal látszik a kapcsolat a megfelelő lineáris programozási feladat árnyékáraival, amelyek fontos szerepet játszanak a javasolt megoldási eljárásban. Tekintsük tehát a (3)-, (5)-, (6)- és (7)-nek megfelelő alábbi feladatot:

$$x_j = 0 \text{ vagy } 1 \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_i \, (i = 1, \ldots, m) \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq d_j \, (i = m+1, \ldots, m+p) \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max \tag{11}$$

Legyen az s vektor első m eleme nempozitív, utolsó p eleme nemnegatív, és legyen továbbá a

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{i=m=1}^{m+p} s_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \tag{12}$$

Lagrange-függvény maximuma x^0-ban. x^0 ekkor maximálja a $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ függvényt a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j x_j^0 = a_i^0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^0 = d_i^0 \qquad (i = m+1. \ldots, m+p) \tag{14}$$

feltételek mellett.

Ugyanis x^0 definíciója szerint

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 - \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 - \sum_{j=m+1}^{m+p} s_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^0 \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{i=m+1}^{m+p} s_i \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j,$$

következésképpen (13) és (14) esetén fennáll

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq 0$$

Hasonlóan belátható, hogy ha $x(\varepsilon)$ mellett a Lagrange-függvény értéke maximumánál legfeljebb ε-nal kisebb, akkor $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j(\varepsilon)$ legfeljebb ε-nal lesz kisebb a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(\varepsilon) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j \geq \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j(\varepsilon) \qquad (i = m+1, \ldots, m+p)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

feladat optimumértékénél.

A módszer alkalmazhatóságának alapvető feltétele, hogy valamilyen módon szabályozni tudjuk (13) és (14) feltételek jobboldalának értékeit, tehát lehetőség adódjon arra, hogy ezeket az értékeket közelíthessük (9) és (10) jobboldalának értékeihez. Everett 2. tétele utal ilyen lehetőségre, de triviálisan bizonyíthatjuk a következő állítást is két, csak egyetlen elemben eltérő s vektor esetén:

Az első n erőforrás valamelyikéhez (tehát kisebb-egyenlő feltételhez) tartozó s_i érték növelése esetén a megfelelő erőforrás optimális programbeli felhasználása azonos marad vagy kisebb lesz, csökkentése esetén pedig azonos marad vagy nagyobb lesz. A következő p feltétel valamelyikéhez (tehát a nagyobb egyenlőség feltételekhez, azaz valamilyen színvonal elérését célzó feltételekhez) tartozó s_i abszolút értékének növelése esetén a megfelelő felhasználás az optimális programban azonos marad vagy nagyobb lesz, csökkentése esetén pedig azonos marad vagy kisebb lesz.

Legyen ugyanis az $s^{(1)}$ és az $s^{(2)}$ vektor egyetlen elem kivételével azonos: $s_j^{(1)} = s_j^{(2)}$ $j \neq i$, és $s_i^{(1)} \neq s_i^{(2)}$.

Legyen továbbá az $s^{(1)}$-hez tartozó optimális megoldás $x^{(1)}$, az $s^{(2)}$-höz tartozó optimális megoldás $x^{(2)}$, a megoldáshoz tartozó jobboldalak $d^{(1)}$ és $d^{(2)}$, a megfelelő optimumértékek pedig c_1 és c_2.

Ekkor nyilván teljesülnek

$$c_1 - s_i^{(1)} d_i^{(1)} - \sum_{j \neq i} s_j^{(1)} d_j^{(1)} \geq c_2 - s_i^{(1)} d_i^{(2)} - \sum_{j \neq i} s_j^{(1)} d_j^{(2)} \tag{15}$$

és a

$$c_2 - s_i^{(2)} d_i^{(2)} - \sum_{j \neq i} s_j^{(2)} d_j^{(2)} \geq c_1 - s_i^{(2)} d_i^{(1)} - \sum_{j \neq i} s_j^{(2)} d_j^{(1)} \tag{16}$$

egyenlőtlenségek.

(15) és (16) összeadásával az

$$s_i^{(2)} (d_i^{(1)} - d_i^{(2)}) \geq s_i^{(1)} (d_i^{(1)} - d_i^{(2)}),$$

illetve az

$$(s_i^{(2)} - s_i^{(1)}) (d_i^{(1)} - d_i^{(2)}) \geq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk, ahonnan az állítás már következik.

Adott s mellett a Lagrange-függvény maximuma rendkívül könnyen meghatározható, hiszen

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \sum_{i=m+1}^{m+p} s_i \sum_{j=1}^{m} b_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left[c_j - \sum_{i=1}^{m} s_i a_{ij} - \sum_{i=m+1}^{m+p} s_i b_{ij} \right] x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j .$$

Tehát a függvény maximumát megkapjuk, ha azokat az x_j értékeket választjuk 1-nek, amelyekhez tartozó $\alpha_j \geq 0$.

Az általános modell (4) feltételeit nem kell külön kezelnünk: egy „többütemű" beruházás első ütemei akkor kerülnek be az optimális programba, ha a későbbi fázisokhoz tartozó pozitív α_j-k abszolút értékeinek összege nagyobb, mint a negatív α_j-k abszolút értékeinek az összege. Az α_j értékek alapján viszonylag könnyen meghatározhatjuk azokat a megoldásokat is, amelyek az optimum adott ε-sugarú környezetébe esnek: optimális x_j-knél a j-k összes olyan részhalmaza esetén, amelyhez tartozó $\Sigma\alpha_j < \varepsilon$, a megfelelő x_j-k a 0 és 1 értékek valamennyi kombinációján végigfuthatnak, a többi x_j értékeinek változatlansága mellett.

Az induló s vektor meghatározása érdekében célszerű a megfelelő lineáris programozási feladat — amelyet az egészértékűségre vonatkozó kikötést az $x_j \geq 1$ feltételekkel helyettesítve nyerünk — árnyékárait meghatároznunk, hiszen ebben az esetben a megfelelő s és az árnyékárak azonosak [4]. Az s vektor változtatásának mértékére vonatkozóan hasznos információkat kaphatunk, ha a megfelelő lineáris programozási feladatot más jobboldalak esetén is megoldjuk.

(Beérkezett: 1971. január 22.)

IRODALOM

1. EVERETT III, H.: Generalized lagrange multiplier method for solving problems of optimum allocation of resources. Operations Research, 1. (1963), 339—417. o.
2. GREENBERG, H.: A dynamic programming solution to integer linear programs. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 26. (1969), 454—459. o.
3. KAPLAN, S.: Application of the generalized multiplier method. Operations Research, 14. (1966), 1130—1136. o.
4. KOVÁCS Á.: Megjegyzések a jövedelemszabályozási rendszerről és a vállalati célfüggvényről. Pénzügyi Szemle, 1969/2.
5. KOVÁCS L. B.: A diszkrét programozás kombinatorikus módszerei. Bolyai János Matematikai Társulat kiadványa, 1969.
6. LORIE, J. — SAVAGE, L. J. :Three problems in capital rationing. J. Business, 1966. Oct.
7. WEINGARTNER: Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems. Prentice-Hall, 1963.

A MODEL FOR THE OPTIMIZATION OF INVESTMENT POLICY IN A FIRM

Two programing models concerning the index number $\frac{N}{sB+E}$ are investigated. This indicator — where N denotes the profit of the firm, E the stock of assets, B the wages and s the wage coefficient — expresses the firm's material interests. Beside economic conclusions the solution possibilities are also dealt with for programming problems, where the constraints are linear in the 0—1 variables, and the objective function is the quotient of two linear functions. Furthermore a certain modification of the so-called G. L. M. method is discussed.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛИТИКИ КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ НА ПРЕДПРИЯТИЯХ

В статье исследуется две модели программирования, учитывающие показатель $\frac{N}{sB+E}$ которая выражает материальную заинтересованность предприятий, и где обозначение следующие: N — доход предприятия, B — затраты на заработные платы, E — закрепленные фонды, a s — умножитель заработной платы. Кроме экономических выводов статья занимается с возможностью решения таких задач программирования, которые содержат линейные условия для переменных 0—1 и целевая функция которых является частным двух линейных функций, т. е. исследуется т. н. метод G. L. M. в небольшой мере модифицированном виде.

Csáki Csaba

Az erőforrások kezelésének problémái a mezőgazdasági vállalati tervek lineáris programozási modelljeiben

A mezőgazdasági termelés természet-technológiai, valamint társadalmi-gazdasági sajátosságaiból eredően sok speciális probléma lép fel, amikor matematikai módszereket alkalmazunk mezőgazdasági vállalatok távlati terveinél. A Szigma 1969. évi 4. száma [2] tartalmazza olyan lineáris programozási modell általános leírását, amely komplex mezőgazdasági vállalati távlati tervek kiszámítására nyújt lehetőséget. A modell gyakorlati felhasználása során szerzett tapasztalatok azt mutatják, hogy az eredmények használhatósága szempontjából alapvető fontosságú az erőforrások megfelelő beépítése a feladatba. A gazdaságok termelési programjának optimalizálására olyan modellt célszerű alkalmazni, amely az erőforrások ésszerű és hatékony felhasználásának követelményét is érvényesíti.

E feladat és általában az erőforrások szerepeltetése a mezőgazdasági vállalatok távlati tervezési modelljeiben *sajátos megoldásokat igényel*, mivel:

— a mezőgazdasági vállalatok erőforrásainak jelentős része (pl. a föld, a gépi eszközök jó része) többféleképpen hasznosítható, felhasználásukkal a legkülönfélébb termékek állíthatók elő;

— az erőforrásokat élőlények — növények, állatok — életfolyamataival összefüggő, azoktól elválaszthatatlan termelő folyamatban hasznosítják;

— a különböző termékek előállításának nagyszámú technológiai megoldása képzelhető el és jóval nagyobb a termelési technológiák változtatásának lehetősége egy-egy gazdaságnál, mint egy-egy meghatározott felszereltségű iparvállalatnál.

Cikkemben több konkrét vizsgálat[1] tapasztalataira támaszkodva ezeket a sajátos megoldásokat, tehát az erőforrásokkal összefüggő fontosabb modellszerkesztési problémákat szeretném összefoglalni.

A vállalati távlati tervezési modellekben az erőforrások a korlátozó feltételekben jelennek meg, amelyekben az erőforrások iránti igényeket és azok kielégítésének lehetőségeit állítjuk szembe. Ennek megfelelően az erőforráskorlátokkal összefüggő problémák is két nagy csoportra oszthatók. Egyrészről dönteni kell az igények szerepeltetéséről, másrészt megfelelő megoldást kell találni a fedezet lehetőségeinek a beépítésére. A szakirodalomban [3], [4], [5], [6], [7] elsősorban az utóbbi problémakört dolgozták fel, ezért részletesebben az igények megfogalmazásával foglalkozom.

[1] Az Orosházi, a Komáromi, a Vizesfási, a Gorzsai Állami Gazdaság és a Makói Lenin Termelőszövetkezet távlati terveinek kidolgozása matematikai módszerekkel.

1. Az erőforrás-igények modellezése

A komplex mezőgazdasági vállalati távlati tervek kiszámítását szolgáló modellek összeállítása során az egyes termelési ágak erőforrás-igényeit eddig általában úgy vették figyelembe [4], [5], [6], hogy *előzetesen rögzítették ágazatonként, illetve termékenként a termelés technológiáját és ezzel együtt az egyes változókhoz kapcsolódó fajlagos ráfordítások nemét és volumenét is*. Ilyen megoldás alkalmazásánál a termelés technológiája, az erőforrások felhasználása kívül esik az optimalizálás körén. Csak az előre meghatározott technológiával folytatható termelési tevékenységek versenyeznek egymással. Az ilyen módon kiszámított termelési program *csak az adott technológiák, illetve fajlagos ágazati ráfordítások feltételezésével, annak keretei között tekinthető optimálisnak.*

Amennyiben a termelési technológiákra vonatkozó előzetes döntés optimális, a fajlagos ráfordítások rögzítése nem csökkenti az így számított optimális megoldás értékét. Azonban erősen kétséges, hogy hagyományos tervezési módszereket alkalmazva sikerül-e a legkedvezőbb technológiai megoldást megtalálni. Ezért általában elmondható, hogy a változók kötött ráfordításszerkezete és ráfordításvolumene jelentős hibaforrás lehet az optimum meghatározásában.

Vizsgálataim szerint az egyes termelési ágaknál jelentkező ráfordítás-igények modellbe építésének lényegesen pontosabb megoldása is alkalmazható, amelyben *az ágazatok fajlagos ráfordításainak, termelési technológiáknak az optimalizálása is szerepel.* A technológiák modelleken belüli optimalizálása olyan lehetőség, amely rendkívüli mértékben szélesíti az ilyen módszerekkel kiszámítható fejlesztési információk körét.

A termelési ágak termelési technológiájának optimalizálása és ennek a távlati tervek meghatározására szolgáló modellekbe való beépítése meglehetősen bonyolult és összetett feladat, amely az alábbi módon oldható meg:

1. Bővíteni kell a változók számát. Az egyes termelési ágakhoz, illetve erőforrásokhoz kapcsolódóan új változókra van szükség, amelyek értékei egyrészt a különböző termékek előállítására fordítandó optimális ráfordítások mértékét mutatják, másrészt megadják a különböző erőforrások felhasználási területeit. Nevezzük ezeket a változókat *erőforrás-felhasználási változók*nak. Egy-egy ilyen változó azt adja meg, hogy milyen volumenben kell egy erőforrást igénybe venni valamelyik termelési ág meghatározott termelési feladata[2] végrehajtásakor. Ennek értelmében erőforrástípusonként annyi erőforrás-felhasználási változóra van szükség, ahány termelési ágnál és ezen belül termelési feladatnál a kérdéses erőforrás igénybevételére sor kerülhet.

Az egyes termelési tevékenységekhez (termelési változókhoz) kapcsolódó erőforrás-felhasználási változók értékei mutatják meg az egyes termékek előállításának optimális technológiai megoldásait. Ezen változók értékei alapján meghatározhatók az optimális fajlagos ráfordítások is.

2. A korlátozó feltételek rendszerében olyan összefüggéseknek kell szerepelniök, amelyek a termékelőállítás oldaláról jelentkező igényeket és az ezek kielégítését szolgáló erőforrás-felhasználási változók kapcsolatát fogalmazzák meg termelési áganként (pl. valamely állatfaj fehérjeigénye és a szükséglet

[2] *Termelési feladat*nak tekintem a különböző termékek előállítási folyamata során jelentkező műveleteket (pl. szántás), ill. igények kielégítését (pl. az állatok emészthető fehérje-szükségletének fedezése). Ezek megoldása egy vagy több módon lehetséges.

kielégítésének különböző lehetőségeit szimbolizáló, az egyes takarmányfajtáknak megfelelő változók szembeállítása). Ezek a korlátozó feltételek a következőképpen írhatók le:[3]

— a *növénytermelési technológiákra* vonatkozó összefüggés:

$$t_b x_{\text{def}} - \sum_{a=1}^{c} v_{a(\text{def})b} \leq 0$$

ahol:

t_b = a d-edik növényfajnak a gazdaság f-edik talajtípusán az e-edik célra történő termelésénél jelentkező b-edik termelési feladatot kifejező fajlagos mutató[4];

$v_{a(\text{def})b}$ = az a-adik erőforrásból az említett növénytermelési tevékenység b-edik termelési feladatának a megoldására felhasznált (igénybevett) mennyiség;

$a = 1 \ldots c$, c = az erőforrások száma;

$b = 1 \ldots o$, o = a termelési feladatok száma az egyes termelési ágaknál;

— az *állattenyésztési technológiák* meghatározása:

$$p_b y_{gh} - \sum_{a=1}^{c} v_{a(gh)b} \leq 0$$

ahol:

p_b = a g-edik állattenyésztési tevékenység h-adik istállótípusban való tartása során a b-edik termelési feladat erőforrás igényét kifejező fajlagos mutató;

$v_{a(gh)b}$ = az a-adik erőforrásból az említett állattenyésztési tevékenység b-edik termelési feladatának a megoldásánál felhasznált mennyiség.

A feltételeknek ebből a típusából annyi szerepelhet a modellben, *amennyi a növény és az állattenyésztési ágak (változók) és ezen belül a termelési feladatok száma.* A különböző termelési ágak azonos jellegű termelési feladatai és a meg-

[3] Itt és a továbbiakban is a változóknak az alábbi jelölési rendszerét használom:

x_{def} = d-edik *növényfaj* (az azonos növények különféle fajtáit külön növényeknek tekintve) e-edik célra termelt volumene a gazdaság f-edik talajtípusán (hozamszinten), ahol

d = $1 \ldots l$; l = a modellben szereplő növényfajták száma,

e = $1 \ldots m$; m = a termelési célok száma növényenként,

f = $1 \ldots n$; n = a figyelembe vett talajtípusok (hozamszintek) száma;

y_{hg} = a g-edik *állattenyésztési tevékenység* mérete a h-adik típusú istállóban (állattenyésztési tevékenységnek tekintjük a különböző állatfajok fajtaváltozatainak kor-, ivarcsoportjait és hasznosítási irányait), ahol

g = $1 \ldots p$; p = az állattenyésztési tevékenységek száma,

h = $1 \ldots q$; q = a modellben szereplő tartási lehetőségek (férőhely-típusok) száma állatfajonként;

z_i = i-edik *feldolgozó* vagy *egyéb kiegészítő tevékenység* mérete a tevékenység jellegének megfelelő mértékegységben, ahol

i = $1 \ldots r$; r = a feldolgozó és kiegészítő tevékenységek száma a modellben;

u_j = a j-edik *kereskedelmi tevékenység* (beszerzés vagy értékesítés) volumene, ahol

j = $1 \ldots s$; s = a kereskedelmi tevékenységek száma;

v_k = a k-adik *egyéb tevékenység* mérete a tevékenységnek megfelelő mértékegységben, ahol

k = $1 \ldots t$; t = az egyéb tevékenységek száma.

[4] Ez esetben tehát a termelési változók technikai koefficiensei nem a fajlagos ráfordításokat mutatják, hanem a termelési feladatok volumenét (pl. búza esetében az 1 kh-ról elszállítandó termék mennyiségét stb.)!

oldás lehetséges módozatai azonban egy korlátozó feltétel keretében is szembeállíthatók egymással, ha összevonjuk őket.

Természetesen technológiai vagy biológiai okokból korlátozhatjuk valamely erőforrás-típus vagy típusok igénybevételének volumenét is a különböző termelési ágaknál. Ez a korlátozás kifejezhető *abszolút számokkal*, rögzítve bizonyos megoldások maximálisan lehetséges vagy feltétlenül megkövetelt méretét, előírhatunk azonban a különböző felhasználási módok között bizonyos *arányokat* is:

— *korlátozás abszolút számmal*

$$v_{a(\mathrm{def})b} \leqq q_b$$

ahol:

q_b = az a-adik erőforrás felhasználási korlátja az adott növénytermelési tevékenység b-edik termelési feladatánál;

$$v_{a(gh)b} \leqq r_b$$

r_b = az a-adik erőforrás felhasználási korlátja az adott állattenyésztési tevékenység b-edik termelési feladatánál;

— *arányok előírása*

$$v_{a(\mathrm{def})b} \leqq a_b \sum_{a=1}^{c} v_{a(\mathrm{def})b}$$

ahol:

a_b = az a-adik erőforrás megkövetelt felhasználási arányát kifejező koefficiens az adott növénytermelési tevékenység b-edik termelési feladatánál.

$$v_{a(gh)b} \leqq c_b \sum_{a=1}^{c} v_{a(gh)b}$$

ahol:

c_b = az a-adik erőforrás megkövetelt felhasználási arányát kifejező koefficiens az adott állattenyésztési tevékenység b-edik termelési feladatánál.

A modellben elsősorban az utóbbi típusú feltételek beépítésének van értelme. Az egyes termelési tevékenységek mértékének ismerete nélkül ugyanis a különböző erőforrások ágazati felhasználására vonatkozó kötöttségeket csak a legritkább esetben lehet elfogadhatóan abszolút számokban megfogalmazni.

A termelési technológiák optimalizálását is magában foglaló modellek mérete — az erőforrások és a termelési ágak, valamint a termékek előállításánál figyelembe vett termelési feladatok számától függően — a rögzített technológia alapján összeállított modellének többszöröse. Ez esetben nehéz lehet a nagy modell megoldása és nem könnyű a termelési ágak termelési feladatainak a számszerű meghatározása sem. A mind tökéletesebb és nagyobb teljesítményű számítógépek egyre inkább csökkentik a modellek méretével kapcsolatos problémákat. Ennek ellenére úgy vélem, napjainkban feltétlenül létjogosultsága van a technológiák optimalizálását is megoldó modelleknél egyszerűbb modelleknek is.

Számos olyan módszer ismeretes, amelyek segítségével csökkenthető a fajlagos ráfordítások előzetes rögzítéséből eredő pontatlanság, s e módszerek a technológiák, illetve a fajlagos ráfordítások bizonyos mértékű optimalizálására is lehetőséget nyújtanak. Az így nyert eredmények ugyan nem teljesen egyenértékűek a technológiák egészének optimalizálását szolgáló modellekével, a kapott eredmények gyakorlati használhatósága azonban nem sokkal kisebb. Nagy előnyük viszont a kisebb modell és az egyszerűbb matematikai eljárás, a gyorsaság.

A szakirodalom és kutatásaim szerint több közbeeső megoldási mód jöhet számításba, amelyek közül elsősorban az alábbiak érdemelnek figyelmet:

— a termelési technológiák előzetes optimalizálása;

— termelési áganként több reálisan elképzelhető technológiai rendszer modellbe építése;[5]

— a főbb erőforrások közötti helyettesítés lehetővé tétele;

— a termelési technológiák egésze helyett a kritikus technológiai mozzanatok optimalizálása.

1. A rögzített technológiákból eredő problémák — mint már említettük — megszűnnek, ha a figyelembe vett technológiai változat az adott termék előállításának legkedvezőbb változata. De ilyen technológiákhoz csak abban az esetben juthatunk, ha *a termelési szerkezet meghatározására szolgáló modell összeállítása előtt speciálisan e célt szolgáló kisebb feladatok segítségével meghatározzuk a különböző termékek előállításának legkedvezőbb technológiáját, illetve kritikus esetben egy-két technológiai variánst.* E módszer számos előnnyel jár. Mindenekelőtt feleslegessé teszi a túl nagy modelleket, ugyanakkor az előzetes optimalizálás során lényegesen igényesebbek is lehetünk, hiszen ilyenkor a modell lehetséges mérete gyakorlatilag nem korlátozza munkánkat. Véleményem szerint ezért ez a legcélszerűbb eljárás.

2. Nagyon jól felhasználható programot ad az olyan modell, amelyben rögzített technológiákkal számolunk ugyan, azonban *egy-egy termék előállításánál az elképzelhető összes fontosabb technológiai variánst figyelembe vesszük, mint külön tevékenységet, amelyeket viszont hagyományos módszerekkel tervezünk meg.* Az optimális szerkezetben nyilvánvalóan a legkedvezőbb lehetőség fog szerepelni. Ez esetben a fő probléma az, hogy nincs biztosíték arra, hogy ez a legkedvezőbbnek tűnő eljárás optimális, tehát a ráfordítások legkedvezőbb szerkezetét mutatja meg. A modell ilyen összeállítása esetén minden egyes növénytermelési változó *valamilyen fajtával bizonyos célból, valamilyen hozamszinten (földterületen), meghatározott technológiával* folytatott növénytermelő tevékenységet jelent. (Amennyiben pl. egy gazdaság magyar és jugoszláv hibridkukoricát termelhet három talajtípuson, háromféle termelési technológiával takarmánynak és vetőmagnak, úgy a kukoricatermelés különböző lehetőségeit 36 változó képviseli a modellben). Az állattenyésztési változók pedig *valamilyen állatfaj meghatározott kor-, ivarcsoportjának és hasznosítási irányának felelnek meg bizonyos épülettípusban, meghatározott tartási technológiát feltételezve.* (Pl. a sertéshizlalás 18 változóval szerepel a modellben, ha 2 fajta, 3 féle épülettípus és ezen belül 3 tartási-, takarmányozási technológia jöhet számításba.)

3. A főbb erőforrások közötti *helyettesítés lehetőségének modellbe* építése szintén közelebb vihet a ráfordítások legkedvezőbb szerkezetének eléréséhez. Amennyiben csupán egyoldalú helyettesítésről lehet szó (az *a* erőforrás helyettesítheti a *b*-t), csak egy-egy új változó beállítására van szükség, amely a helyettesítés volumenét mutatja (*b* erőforrás helyett felhasznált *a* erőforrás). A teljes, tehát kétoldalú helyettesítés (az *a* helyettesítheti a *b*-t, a *b* pedig az *a* erőforrást) bonyolultabb modellt követel. A kétirányú helyettesítés volumenét külön változókkal szimbolizáljuk. Ez esetben nagyon kell ügyelni a helyette-

[5] Ezt javasolja *Tóth József* a takarmánynövények szerkezetének meghatározására [8].

sítési változókat is tartalmazó korlátozó feltételek körültekintő összeállítására. Az egyirányú helyettesíthetőség figyelembevételére gyakran lehet szükség, különösen a szűk keresztmetszetek enyhítésével kapcsolatban. A kölcsönös helyettesítés megfogalmazása elég körülményes, könnyen követhetünk el modellszerkesztési hibákat. Ezért úgy vélem, célszerűbb e megoldás helyett, a vele teljesen egyenértékű alábbi eljárást alkalmazni.

4. Az előzőekben megállapítottuk, hogy a termelési technológiák egészének optimalizálása a termelési program optimalizálására szolgáló modellben viszonylag körülményes. Nem jelenti ez azonban azt, hogy a termelési technológiák, illetve a felhasználandó erőforrások összetételének a programozási lehetőségét teljesen el kell vetni. Elképzelhető olyan megoldás is, amikor a számítások eredményeitől *csupán a kritikus technológiai mozzanatokra* kérünk választ. Azon technológiai elemeket (és a nekik megfelelő ráfordításokat), amelyeknél a legkedvezőbb megoldás egyértelműen meghatározható, előzetesen rögzíthetjük. A kritikus, többféleképpen megoldható lépéseknél viszont a technológiák optimalizálásának ismertetett módján lehet eljárni. Az ilyen modellek eredményei pontosság tekintetében majdnem elérik a technológiák teljes optimalizálásával végrehajtott számítások színvonalát.

2. Az erőforrás-igények kielégítése

Az erőforrásokkal kapcsolatos korlátozó feltételek megfogalmazásának másik problémaköre az *ágazati igények kielégítésére felhasználható erőforrásokkal függ össze.* Függetlenül a termelési ágak ráfordításainak a modellben való szerepeltetési módjától, tehát az előzőekben tárgyalt megoldásoktól, a *termelési szerkezet alakulását meghatározó erőforrások figyelembevételének is több lehetősége van.*

A programozási gyakorlatban eddig általában úgy konstruálták meg a komplex vállalati modelleket, hogy fix értékekkel rögzítették az erőforrások felhasználásának maximális lehetőségét.[6] Ez az erőforrások egy részénél kétségtelenül helytálló feltételezés, hiszen pl. a földterület módosítására gyakorlatilag nincs lehetőség. Szép számmal vannak azonban olyan erőforrások is, mint ahogy erre *Tóth József* [9] nem régen felhívta a figyelmet, amelyek volumenét a gazdaságok a termelési programmal együtt határozhatják meg (pl. a traktorállomány, az állami gazdaságokban a munkáslétszám stb.).

Tóth József megállapítása szerint a termelést korlátozó tényezők, így az erőforrások is, jellegüket tekintve két csoportra oszthatók:

„1. *Merev korlátok.* Ide sorolhatjuk azokat a termelést korlátozó tényezőket, amelyek értékeinek változtatása lehetetlen, vagy nagy nehézségbe ütközik, illetve valamilyen ok következtében egyáltalán nem kívánatos . . .

2. *Rugalmas korlátok.* E csoportba azokat a termelési korlátokat soroljuk, amelyeknek változtatása általában nem ütközik nehézségekbe, s amelyeket mindaddig érdemes változtatni, amíg az gazdaságos." ([9] 510–511. o.)

Úgy vélem, az erőforrásokkal kapcsolatos korlátozó feltételek fedezeti oldalának a megfogalmazásánál ezen osztályozásból célszerű kiindulni. A *merev korlátot* jelentő erőforrásokból (pl. földterület) rendelkezésre álló és felhasználható mennyiségeket fix értékkel kell rögzíteni. A *rugalmas korlátként* kezelhető

[6] Ilyen megoldásokkal találkozhatunk az amerikai (Heady, E. O. [3] stb.) és a szovjet szakirodalomban [4] [5] [6] is.

erőforrásoknál viszont lehetővé kell tenni, hogy a szükséges volument a fejlesztés igényei határozzák meg. Természetesen a rugalmas korlát fogalmát nem szabad abszolút értelemben venni. „A rugalmasság tehát nem jelenti azt — írja *Tóth József* —, hogy a korlát értéke 0-tól végtelenig változtatható, csak azt, hogy az adott üzem szempontjából, az adott viszonyok és feltételek között a korlát merevsége feloldható vagy tágítható." ([9] 511. o.)

A rugalmas korlátként kezelt erőforrások reprezentálása új, *erőforrás-szükségleti* változók[7] beállításával oldható meg. Ezen változók értékei a különféle *erőforrás-fajtákból az optimális fejlesztési program megvalósításához szükséges* mennyiségeket mutatják. Az ilyen változók segítségével elérhetjük a rugalmas korlátként kezelt erőforrások optimálisan szükséges mennyiségének a kiszámítását is. Az erőforrás-szükségleti változókkal a modellekben a konstans kapacitásokat helyettesítjük.[8] A termelési technológiák vagy azok bizonyos elemeinek a komplex vállalati modelleken belüli optimalizálása esetén az erőforrás-szükségleti változóknak összegező szerepe van. Ilyenkor ezek a különböző termelési ágak, különféle technológiák erőforrás-felhasználásainak az összegét mutatják.

Nem szabad azonban elfelejtenünk, hogy az elvileg rugalmasnak tekinthető erőforrások nem egyformán rugalmasak. A „rugalmasság" mértéke az erőforrásoktól függően más és más lehet. Ennek megfelelően a rugalmasan kezelhető erőforrásokkal kapcsolatos feltételeknek a megfogalmazásánál is többféle lehetséges megoldási mód jöhet számításba.

Az erőforrás-szükségleti változók ilyetén alkalmazása, azaz erőforrás-típusonként egy olyan változó beállítása, amely az összes szükségletet mutatja, csak azon erőforrásokkal kapcsolatban célszerű, amelyeknél a gazdaságban meglevő kapacitások gyakorlatilag semmilyen kötöttséget nem jelentenek, illetve nincs lényeges különbség aközött, hogy a szükségleteket a meglevő kapacitásokból, vagy új kapacitásokból elégítik-e ki. (Pl. ilyen erőforrás az állami gazdaságokban a munkaerő és a forgóeszközök bizonyos típusai.)

Az erőforrások igen jelentős csoportjánál, mindenekelőtt az állóeszközök nagy részénél, bizonyos tekintetben más a helyzet. Számolni kell azzal, hogy

— a meglevő kapcitások nem hagyhatók figyelmen kívül, mivel ezek egyrészt új befektetések nélkül rendelkezésre állnak, másrészt korlátozott más irányú hasznosításuk vagy értékesítésük lehetősége, nagy értékük miatt azonban tetemes veszteséggel járhat, ha kihasználatlanul hagyjuk őket;

— új kapacitások létrehozása a meglevőkön felül nagy anyagi befektetést igényel, viszont a gazdaságok fejlesztési, beruházási lehetőségei általában korlátozottak.

Ezen tényezőket figyelembe véve, véleményem szerint, a rugalmasan korlátozott erőforrások nagy részénél célszerű *különbséget tenni a meglevő kapacitásokhoz kapcsolódó és az új kapacitások létrehozását feltételező igénybevétel között.* Természetesen merev korlátként kell rögzíteni a meglevő kapacitások értékeit, valamint a kapacitásbővítés lehetőségeit. Sőt bizonyos körülmények között elképzelhető az is, hogy feltételként elő kell írni valamelyik meglevő erőforrás teljes vagy meghatározott mértékű kihasználását. Különösen előfordulhat ez

[7] Nem tévesztendők össze ezek a változók az ágazati technológiák optimalizálásával kapcsolatos erőforrás-felhasználási változókkal.

[8] Rögzített kapacitások esetén azt írjuk elő, hogy a felhasználás nem lehet több a rendelkezésre álló mennyiségnél, a második esetben viszont azt, hogy az igények nem haladhatják meg az erőforrás-szükségleti változó értékét.

az állattartási épületekkel — pl. napjainkban az állami gazdaságokban ilyen erőforrás a tehénistálló — és az ültetvényekkel kapcsolatosan. A rugalmasság tehát csak ezen keretek között értendő.

A meglevő kapacitásokhoz kapcsolódó és az új kapacitásokat feltételező felhasználások között két módon differenciálhatunk:

1. *Két erőforrás-szükségleti változót állítunk be* erőforrás-típusonként. Az egyik a meglevő kapacitásokból kielégítendő szükségleteket, a másik pedig az újonnan kialakítandó kapacitásokkal fedezendő szükségletek volumenét mutatja.[9]

2. *Csak az újonnan kialakítandó kapacitásokat terhelő szükségleteket jelképezzük erőforrás-szükségleti változóval,* míg a meglevő kapacitásokat a hagyományos módon, fix értékekkel vesszük figyelembe.[10]

Végül meg kell jegyezni, hogy a rugalmas korlátként kezelhető erőforrások egy részénél eljárhatunk más módon is. Az olyan erőforrások, amelyek felhasználásával kapcsolatos kötöttségek elhanyagolhatók — kivéve a termelési technológiák modellen belüli optimalizálásának esetét — *a korlátozó feltételek megfogalmazásánál teljesen figyelmen kívül is hagyhatók.* Ez a megoldás a modellek mérete szempontjából kétségtelenül előnyös. Vigyázni kell azonban arra, hogy nehogy a túlzott egyszerűsítéssel pontatlanság forrását teremtsük meg.

Az előzőek értelmében a komplex mezőgazdasági vállalati távlati tervezési modellekben az erőforrások és az igények kapcsolatát az alábbi típusú feltételek ábrázolhatják:

1. *Előzetesen rögzített ráfordításszerkezet esetén*

a) *merev korlátként kezelt erőforrás:*

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n} a_{\mathrm{def}}x_{\mathrm{def}}+\sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q} a_{gh}y_{gh}+\sum_{i=1}^{r} a_i z_i+\sum_{j=1}^{s} a_j u_j+\sum_{k=1}^{t} a_k v_k \leq A$$

ahol:

a = fajlagos felhasználási koefficiens az *a* típusú erőforrásból,

A = az *a* típusú erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség;

b) *rugalmas korlátként kezelt erőforrás:*[11]

— az összes szükségletet egy erőforrásszükségleti változó jelképezi:

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n} a_{\mathrm{def}}x_{\mathrm{def}}+\sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q} a_{gh}y_{gh}+\sum_{i=1}^{r} a_i z_i+\sum_{j=1}^{s} a_j u_j+\sum_{k=1}^{t} a_k v_k - v_a \leq 0$$

ahol:

v_a = az *a*-adik típusú erőforrásból az optimális termelési szerkezet megvalósításához szükséges mennyiség;

— a meglevő és az új kapacitások szerint differenciált erőforrás-szükségleti változók:

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n} a_{\mathrm{def}}x_{\mathrm{def}}+\sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q} a_{gh}y_{gh}+\sum_{i=1}^{r} a_i z_i+\sum_{j=1}^{s} a_j u_j+\sum_{k=1}^{t} a_k v_k-(v_{am}+v_{au}) \leq 0$$

[9] Ez esetben az egyik változó értékének felső határát a meglevő kapacitások, a másikét pedig a bővítési lehetőségek szabják meg.

[10] E megoldás esetén a korlátozó feltétel: az igények mínusz az új kapacitások egyenlőek a meglevő kapacitásokkal.

[11] Természetesen az erőforrás-szükségleti változók értékeit más korlátozó feltételek is behatárolják.

ahol:

v_{am} = az a típusú erőforrás meglevő kapacitásából az optimális termelési szerkezet megvalósításához szükséges mennyiség,

v_{au} = az a típusú erőforrásból az optimális termelési szerkezet megvalósításához szükséges újonnan létesítendő kapacitás;

— az erőforrás-szükségleti változó az új kapacitásokat jelképezi:

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{n}\sum_{f=1}^{m} a_{\text{def}} x_{\text{def}} + \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q} a_{gh} y_{gh} + \sum_{i=1}^{r} z_i a_i + \sum_{j=1}^{s} a_j u_j + \sum_{k=1}^{t} a_k v_k - v_{au} \leq A$$

2. *A technológiák modellen belüli optimalizálásának esetén*

a) *merev korlátként kezelt erőforrások:*

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n}\sum_{b=1}^{o} v_{a(\text{def})b} + \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q}\sum_{b=1}^{o} v_{a(gh)b} \leq A$$

b) *rugalmas korlátként kezelt erőforrás:*

— az összes szükségletet egy erőforrás-szükségleti változó jelképezi:

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n}\sum_{b=1}^{o} v_{a(\text{def})b} + \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q}\sum_{b=1}^{o} v_{a(gh)b} - v_a \leq 0$$

— a meglevő és az új kapacitások szerint differenciált erőforrás-szükségségleti változók:

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n}\sum_{b=1}^{o} v_{a(\text{def})b} + \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q}\sum_{b=1}^{o} v_{a(gh)a} - (v_{am} + v_{au}) \leq 0$$

— az erőforrás-szükségleti változó az új kapacitásokat jelképezi:

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n}\sum_{b=1}^{o} v_{a(\text{def})b} + \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q}\sum_{b=1}^{o} v_{a(gh)b} - v_{au} \leq A$$

A mezőgazdasági vállalatok erőforrásainak speciális típusát képezik azok, amelyek a *gazdaságon belül folyó termelő tevékenység révén is létrejöhetnek* (ilyenek például a takarmányok). Ez esetben az előzőektől némileg eltérő módszert alkalmazhatunk. Erőforrásszükségleti változóval csak a külső forrásból fedezendő erőforrásokat célszerű jelképezni, míg a saját termelés lehetőségei közvetlenül szembeállíthatók az igényekkel.

— *Előzetesen rögzített ráfordításszerkezet esetén:*

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n} a'_{\text{def}} x_{\text{def}} + \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q} a'_{gh} y_{gh} + \sum_{i=1}^{r} a'_i z_i + \sum_{j=1}^{s} a'_k u_j + \sum_{k=1}^{t} a'_k v_k - v_u = 0 \text{ vagy} \leq A$$

ahol:

a' = fajlagos felhasználási ($a' > 0$), illetve termelési ($a' < 0$) koefficiens az a erőforrásból;

v_u = az a típusú erőforrásból a gazdaságon kívülről beszerzendő mennyiség (amennyiben az a erőforrásból a gazdaságon belül megtermelt mennyiség nagyobb az igényeknél v_u az értékesítés vagy a készletnövekedés volumenét mutatja. Ez esetben $v_u > 0$).

— *A technológiák modellen belüli optimalizálásának esetén:*

$$\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n}\sum_{b=1}^{o} v_{a(\mathrm{def})b} + \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q}\sum_{b=1}^{o} v_{a(gh)b} -$$

$$-\sum_{d=1}^{l}\sum_{e=1}^{m}\sum_{f=1}^{n} a''_{\mathrm{def}}\, x_{\mathrm{def}} - \sum_{g=1}^{p}\sum_{h=1}^{q} a''_{gh}\, y_{gh} - \sum_{i=1}^{r} a''_i z_i - v_u = 0 \text{ vagy} \leq A$$

ahol:
a'' = fajlagos termelési koefficiens az a erőforrásból.

A korlátozó feltételeket, amennyiben az időszakonként eltérően jelentkező igények ezt szükségessé teszik, *időszakos bontásban* is megadhatjuk. Ilyenkor minden erőforrásra annyi feltételt írunk elő, ahány időszakot figyelembe veszünk.

Az előzőekben áttekintettük az erőforrások kezelésének néhány problémáját. Cikkemben a fő figyelmet az *igények és a fedezet figyelembevételének módszereire* fordítottam. Természetes a mezőgazdasági vállalati távlati tervezési modelleknél az erőforrásokkal kapcsolatosan egyéb problémák is felmerülhetnek. Így hasonlóan összetett kérdés a különböző erőforrások közötti arányok előírása, a lineáris modellekben az erőforrások méretezése stb., amelyekkel itt nem foglalkozom.

(Beérkezett: 1971. január 18.)

IRODALOM

1. CSÁKI Cs.: Mezőgazdasági vállalati távlati tervezés matematikai programozással Budapest, 1969. Akadémiai Kiadó. 144 p.
2. CSÁKI Cs.: Egy mezőgazdasági vállalat fejlesztési terve. Szigma, 1969. 4. sz.
3. HEADY, E. O.: A döntési tervezési eljárások, valamint a körülmények szintézise. Kézirat. Ökonómiai modellek és kvantitatív módszerek a mezőgazdasági döntésekhez és tervezéshez címmel megrendezett nemzetközi szemináriumon (Keszthely, 1968. június 24—július 3.) elhangzott előadás.
4. Использование математических методов и вычислительной техники в сельском хозяйстве. Moszkva,, 1968. Издательство Экономика. 366 о.
5. Кравченко, Р. Г.—Попов, И. Г.—Толпекин, С. З.: Экономико-математические методы в организации сельскохозяйственного производства. Moszkva, 1967. Издательство Колос. 479 о.
6. Применение математических методов в экономических исследованиях по сельскому хозяйству. Moszkva, 1964. Издательство Экономика. 355 о.
7. REISCH, E. M.: A mikrotervezés és a döntések bevált eszközei. Kézirat. Ökonómiai modellek és kvantitatív módszerek a mezőgazdasági döntésekhez és tervezéshez címmel megrendezett nemzetközi szemináriumon (Keszthely, 1968. június 24—július 3.) elhangzott előadás.
8. TÓTH J.: A takarmánygazdálkodás matematikai tervezése. Budapest, 1968. Akadémiai Kiadó. 165 p.
9. TÓTH J.: A termelési szerkezet és a források optimuma. Statisztikai Szemle, 1969. 5. sz. 510—519 p.
10. TÓTH J.: Korszerű módszerek alkalmazása a mezőgazdasági döntések megalapozásában. Vezetés a mezőgazdaságban, az élelmiszeriparban, az erdészet-faiparban, 1970. 2. sz. 24—32 p.

PROBLEMS IN HANDLING RESOURCES WITHIN LINEAR PROGRAMMING MODELS FOR FARM PLANS

So far in the planning of farms the models have determined *the demand for resources of the prduction sectors* by preliminarily fixing the technology of production and, along with this, the sort and volume of per unit inputs for each variable. In this case the calculated production program can be considered optimal only within the framework of the given technologies and input coefficients. However, another model can be constructed, which includes *the optimization* of the sector's inputs, i.e. that *of the production technologies*.

The essence of the solution suggested by the author is: new variables called *resource-utilization variables* must be assigned to each productive sector and to each resource. Their value shows the optimal inputs for the production of different goods on one hand, and the fields of resource utilization on the other.

The size of models including the optimization of production technologies is the multiple of those with fixed technology. Therefore the paper also discusses *simpler solution methods* than those solving the complete optimization of technologies. These are: preliminary optimization of production technology; inclusion of several technological systems into the model for each productive sector; allowing substitution among the resources; optimizaiton of the critical aspects of technology;

ПРОБЛЕМЫ ТРАКТОВКИ РЕСУРСОВ В МОДЕЛЯХ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПО ПЛАНАМ ДЛЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

До сих пор в моделях, использованных в долгосрочном планировании для сельскохозяйственных предприятий, потребности отдельных отраслей в ресурсах определили таким образом, что заранее закрепили технологию производства и вместе с этим вид и объем удельных затрат, относящихся к разным переменным. В таком случае полученная программа производства является оптимальной только в рамках данных технологий и данных удельных затрат. Однако можно конструировать и такую модель, в которой оптимизируемся удельные затраты отраслей, т. е. технологии производства.

Сущность метода, предлагаемого автором: нужны новые, так называемые переменные использования ресурсов, относящиеся к отдельным отраслям или ресурсам. Значения этих переменных с одной стороны показывают оптимальные затраты, необходимые для производства различных продукций, а с другой стороны показывают на область употребления различных ресурсов.

Размерность моделей, включающих оптимизацию технологии производства, в много раз больше размерности модели, составленной на основе закрепленных технологий. Поэтому статья излагает решения, которые проще моделей, решающие полную оптимизацию технологией. Такие: — предварительная оптимизация технологий производства; — построение в модель больше систем технологий для каждой отрасли производства; — разрешение заимоменяемости главных ресурсов; — оптимизация критических моментов технологии.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

Szegedy Miklós

Megoszlási strukturák vizsgálata információelméleti mérőszámokkal

A jövedelemegyenlőtlenség, az ipari koncentráció, bizonyos gazdasági mennyiségek területi vagy egyéb megoszlásai stb. elemzésének közös jellemzője, hogy egy egységnek tekinthető mennyiség részesedési arányai, illetve ezeknek az arányoknak a változásai, eltérései képezik a kvantitatív vizsgálat tárgyát. A sajátos gazdasági tartalomtól elvonatkoztatott, matematikai tárgyalás esetén az egységnek a részesedési arányai által meghatározott felbontását *megoszlási struktúrának* nevezzük. A gazdasági életben előforduló megoszlási struktúrákkal kapcsolatos mérésekhez számos eljárás áll rendelkezésünkre. Ezek között újabban egyre nagyobb teret nyer az információelméletből merített mutatószámok alkalmazása is, főleg azért, mert e mutatók, azon kívül, hogy csak egyszerű számítások elvégzését igénylik, visszavezethetők a struktúra részein belüli és a részek közötti viszonyokat kifejező mérőszámok összegére, ami a nem-információelméleti mérőszámokra általában nem érvényes. Ezért hasznos, ha betekintést nyerünk az információelmélet eredményeinek gazdasági alkalmazhatósága kérdéseibe azáltal, hogy megsimerkedünk néhány alapvető mérőszámmal és ezek tulajdonságaival a gazdasági értelmezhetőség szempontjából. Cikkünk éppen ezt a célt szeretné szolgálni.

Az információelmélet elnevezés, bár több értelemben használatos, általánosan elfogadottan a technikai hírközlés statisztikai elméletének egy területét jelöli. Az információelmélet eredete a statisztikus termodinamikába nyúlik vissza, ahol az entrópia alapvető jelentőségű fogalma kialakult.

Az elmélet úttörője R. V. L. Hartley volt az 1928-ban megjelent tanulmányával. Az elmélet tulajdonképpeni megalapítójának C. E. Shannon tekinthető, akinek 1948-ban jelent meg dolgozata erről a témáról. Shannon számos új fogalmat vezetett be és a tiszta matematikai kutatás számára is új lehetőségeket nyitott meg. Ma már az információelmélet ebben a tisztán matematikai értelemben a valószínűségelmélet egyik rohamosan fejlődő új ágának számít. Az elmélet bizonyos fogalmai és összefüggései annyira általánosak, hogy sokkal szélesebb körben értelmezhetők, mint a híradástechnika, így a gazdasági elemzésben is, amint azt igen kiterjedten és részletesen fejtegeti H. Theil Közgazdaságtan és információelmélet c. könyve.

Jelen cikk főleg Theil előbb említett művére támaszkodik, felhasználva egyéb forrásokat is (l. irodalomjegyzék). Annak a célkitűzésnek megfelelően, hogy figyelmünket csak néhány alapvető és egyszerű mérőszámra koncentrálva részletesen vizsgáljuk ezek fogalmát, tulajdonságait és egymással való kapcsolatukat, szükségesnek mutatkozott saját észrevételeinkkel kiegészíteni a tárgyalást, így az egyedi információ gazdasági értelmezhetőségét illetően, a mérőszámok dezaggregálhatóságára, ill. többszörös dezaggregálására vonatkozólag, de főképpen annak elemzésével, hogyan követik az ipari koncentráció mérőszámai a vállalatok egyesülésének folyamatát. Az ipari koncentráció egyik használatos mérőszámával, a vállalatok egyenletességi egyenértékszámával kapcsolatban egy, a koncentráció közvetlen kifejezésére alkalmas mutatót is bevezettünk, és ezt a vállalatok egyenlőtlenségi arányszámának neveztük.

A tárgyalásra kerülő fogalmak jobb megértése végett maradjunk egyelőre a híradástechnikai értelmezésnél. Tegyük fel, hogy véges sok különböző fajta hír vétele történik úgy, hogy minden egyes hírfajta vétele meghatározott valószínűséggel következik be. A hírfajták teljes sorozata tehát egy valószínűségeloszlást határoz meg, vagyis olyan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számok sorozatát, amelyekre

$$0 < x_i \leq 1 \text{ és } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Minél nagyobb valószínűségű hír érkezik, annál kevésbé vagyunk meglepve, annál kisebb a hír *információtartalma*. Tehát egyetlen hír információtartalma vagy más szóval *egyedi formációja* az illető hír valószínűségének csökkenő függvénye. Ha még megköveteljük az egyedi információ szemléletes fogalma alapján, hogy ez a mennyiség csakis a hír valószínűségétől függjön, hogy legyen folytonos a $0 < x \leq 1$ értelmezési tartományban, hogy ha az esemény valószínűsége 1, akkor a függvényérték legyen 0 (hiszen az ilyen hír vétele egyáltalán nem meglepő, vagyis semmiféle új információt nem tartalmaz), hogy 0-nál a függvény határértéke legyen ∞ (hiszen a 0 valószínűségű hír vétele „végtelenül" meglepő lenne), végül, hogy bármely két független hír vételének információtartalma legyen a két hír egyedi információjának összege (mivel minden további független információ additíve növeli az addigi információt), — akkor e követelmények egyértelműen meghatározzák az egyedi információ függvényének képletét:

$$h(x) = c \log \frac{1}{x}$$

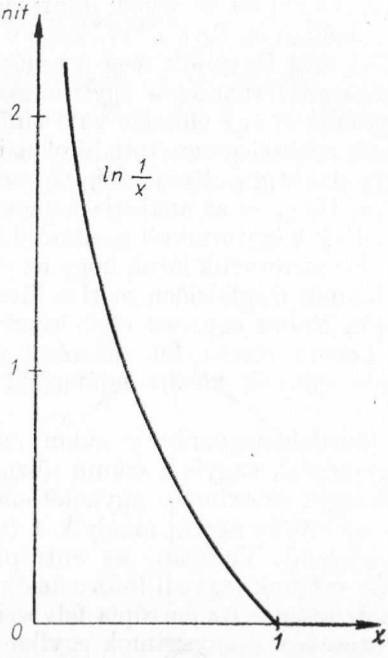
függvénytípust, ahol x független változó a hír vételének valószínűsége, a logaritmus alapja és c konstans értéke pedig tetszőleges. A gyakorlatban az egyszerűség kedvéért c értékét 1-nek szokták választani; ekkor, ha a logaritmus alapja 2, az egyedi információ egységét *bit*-nek nevezzük, természetes logaritmus esetén pedig az egység neve *nit*. Tehát például egy 0,5 valószínűségű hír információtartalma 1 bit, ami közelítőleg 1/1,433 azaz 0,693 nitnek felel meg (viszont 1 nit $\approx$ 1,443 bit). Matematikai levezetéseknél célszerűbb a természetes logaritmus használata, míg a gyakorlati számítások eredményeit inkább bit-ben szokták kifejezni.

Az egyedi információ, vagyis a $h(x) = \log 1/x$ függvény menetét az 1. ábra mutatja.

Ezek után képzeljük el azt, hogy nagyon sok esetben kapunk hírt, és a különböző fajta hírek előfordulási gyakoriságai jó közelítésben megegyeznek a hírek vételi valószínűségeivel. Ha kvantifikálni akarjuk a hírek okozta meglepődésünk átlagos szintjét, akkor az egyes meglepődéseink mértékeinek, az egyedi információknak az átlagát kell vennünk, ami a hírfajták információtartalmának a (gyakoriságnak megfelelő) valószínűséggel súlyozott átlaga:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{1}{x_i} = - \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$$

az $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ valószínűségeloszlás esetén.



1. ábra. Az egyedi információ függvénye

A $H(x)$ függvényt értelmezhetjük abban az esetben is, amikor egy vagy több hír vételi valószínűsége 0. Figyelembe véve, hogy

$$\lim_{x \to 0} x \log \frac{1}{x} = 0,$$

megállapodunk abban, hogy a $H(x)$ függvényben azok a tagok, amelyekben az $x_i = 0$, 0-nak számítanak. A meghatározott valószínűséggel rendelkező hírfajták teljes rendszerének átlagos vételi bizonytalanságát jellemző $H(x)$ mennyiséget nevezzük entrópiának.

Az entrópiát mint az egyedi információk súlyozott átlagát szintén az egyedi információ egységében adjuk meg. Ha tehát az entrópia képletében szereplő logaritmus alapja 2, a kifejezés értékét bit-ben kapjuk meg.

Világos, hogy egy hírfajta-rendszer valószínűségeloszlása matematikailag pontosan azoknak a követelményeknek tesz eleget, amelyeknek egy megoszlási struktúra, hiszen ennek a részesedési arányszámai is 1-nél nem nagyobb nemnegatív számok és összegük 1. Persze, ha megoszlási struktúráról van szó, akkor az $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sorozat tagjait nem valószínűségeknek, hanem részesedési arányszámoknak, részarányoknak vagy megoszlási viszonyszámoknak nevezzük. Az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sorozat ilyen átértelmezése esetén az egyedi információ mint egy részarány nagyságának csökkenő függvénye csak azt fejezi ki, hogy az illető részarány ,,milyen nagyon'' kicsi. Ez önmagában nem volna túlságosan érdekes, de ha figyelembe vesszük, hogy egy megoszlási struktúra egyenletességét a többi részarányhoz viszonyítva igen kis részarányok milyen nagyon csökkentik, akkor kezdjük megérteni az egyedi információ jelentőségét a megoszlási struktúra vonatkozásában is. Erre a kérdésre később még visszatérünk.

A részletes elemzés előtt még figyeljük meg a valószínűségeloszlás átlagos bizonytalansága és a megoszlási struktúra egyenletessége közötti analógiát. Minél közelebb esnek egymáshoz egy eloszlás valószínűségei, átlagosan annál bizonytalanabbak vagyunk a ténylegesen vett híreket illetően; és minél közelebb esnek egymáshoz egy struktúra részesedési arányai, annál egyenletesebbnek mondható a struktúra. Hogy ez az analógia nemcsak a felületes szemlélet eredménye, azt azonnal belátjuk egy konkrét gazdasági struktúra, a jövedelemeloszlás vizsgálata révén. Be szeretnénk látni, hogy az entrópia függvény valóban szemléletes fogalmainknak megfelelően méri a jövedelemeloszlás egyenletességét vagy egyenlőségét. Ehhez egyrészt ellenőrizni kell, hogy az entrópia szélsőértékeit megfelelő helyen veszi-e fel, másrészt megfelelően követi-e a függvény változása a részarányok között lejátszódó kiegyenlítődési folyamatokat.

Nyilvánvaló, hogy a jövedelemegyenlőség akkor maximális, ha az összes részarány megegyezik egymással, vagyis n számú részarány esetén mindegyik $1/n$; a minimális egyenlőséget (maximális egyenlőtlenséget) pedig az jelenti, ha mindegyik részarány 0, kivéve egyet, amelyik 1 (vagyis egyetlen kézben összpontosul az összjövedelem). Valóban, az entrópia értéke sosem lehet negatív, mert nem-negatív számok (egyedi információk) nem-negatív számokkal (részarányok) súlyozott átlaga. Az entrópia felveszi a 0 értéket, mégpedig pontosan akkor, ha a részesedési arányszámok egyike 1, a többi 0, amiről az entrópia képletébe való behelyettesítéssel azonnal meggyőződhetünk. Az entrópia minimuma tehát 0, és ez éppen a megkívánt esetben következik be. Az entrópia maximumát a Lagrange-féle multiplikátor-módszerrel határozhatjuk meg:

A feltételi egyenlet:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Ezt 0-ra redukálva, az így nyert kifejezést λ-val, a Lagrange-féle multiplikátorral szorozva és az entrópia értékéből kivonva kapjuk a következő kifejezést:

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right) \cdot$$

Ennek $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ szerinti deriváltját 0-val téve egyenlővé azt kapjuk, hogy

$$-1 - \log x_i - \lambda = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ahol a logaritmus most természetes logaritmust jelent. (Ha más alapot használunk, akkor a $-1 - \log x_i$ egy konstanssal szorzódik, ami következtetésünkre nincs kihatással.) Tehát minden i-re

$$x_i = e^{-1-\lambda},$$

amiből az következik, hogy minden egyes x_i ugyanazzal a konstanssal, így egymással is egyenlő, vagyis

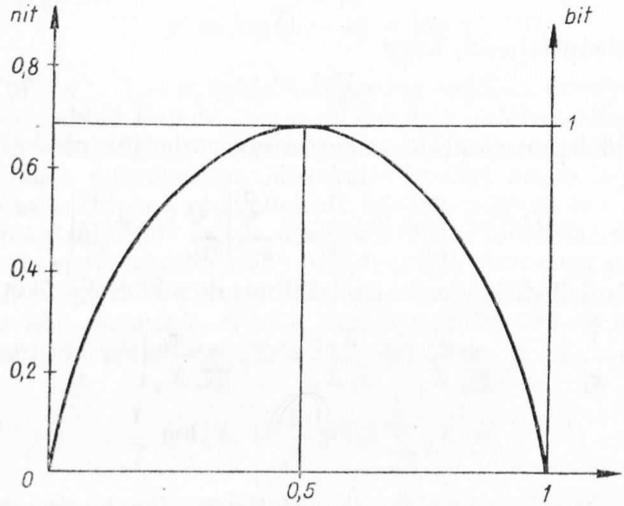
$$x_i = \frac{1}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ebben az esetben az entrópia értéke:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{1}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \log n = \log n,$$

ez a függvény maximuma, összhangban a szemlélet által előírt követelménnyel.

Az entrópia függvény menetét a 2. ábra mutatja abban a speciális esetben, amikor $n = 2$, $x_1 = x$ és $x_2 = 1 - x$.



2. ábra. Az entrópia függvénye ($n = 2$)

Problematikus lehet, hogy a függvény maximuma függ a struktúrát alkotó megoszlási viszonyszámok számától. Ha például a struktúrát csak két viszonyszám alkotja, akkor a teljes egyenlőségnek ($x_1 = x_2 = 1/2$) megfelelő entrópia 1 bit, ha viszont 1024 viszonyszámból áll a struktúra, akkor a maximális egyenlőség ($x_1 = x_2 = \ldots = x_{1024} = 1/1024$) entrópiája 10 bit. Mindkét esetben teljes egyenlőségről van ugyan szó, mégis, hogy 1024 jövedelem egyenlő egymással, az többet jelent, mint az, hogy csupán két jövedelem egyenlő egymással. (Úgy is mondhatnánk, hogy 1024 viszonyszám megegyezése több egyenlőségi relációt foglal magában, mint két viszonyszámé.) Ha tehát a jövedelemegyenlőség fogalmába beleértjük a viszonyszámok számából eredő hatást is, akkor az entrópia alkalmas mutatónak bizonyul.

Előfordulhat, hogy a mérésből ki akarjuk küszöbölni ezt a hatást; ekkor az entrópiát elosztjuk maximumával:

$$H_r(x) = \frac{H(x)}{\log n} \qquad (n > 1),$$

a hányadost *relatív entrópiá*nak nevezzük. Értéke a 0 és 1 határok között mozog. (Ha $n = 1$, akkor nincs értelmezve.)

Ahhoz, hogy megvizsgálhassuk, hogyan változik az entrópia értéke két részarány kiegyenlítődése közben, először látnunk kell az entrópia felbontását.

A teljes struktúrát alkotó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arányszámok (ill. ezek indexei) tartozzanak G számú diszjunkt halmazba; jelöljük ezeket $S_1, S_2, \ldots, S_G$-vel. Ekkor az S_g részhalmaz részesedési arányszáma az alaphalmazhoz viszonyítva:

$$X_g = \sum_{i \in S_g} x_i \qquad (g = 1, 2, \ldots, G).$$

Az S_g részhalmazon belüli részesedési arányszámok:

$$\xi_i = \frac{x_i}{X_g} \qquad (i \in S_g; g = 1, 2, \ldots, G)$$

amelyekre nyilván teljesül, hogy

$$\sum_{i \in S_g} \xi_i = 1 \qquad (g = 1, 2, \ldots, G).$$

A $H(x)$ entrópiában szereplő összegezést elvégezhetjük részhalmazok szerint csoportosítva:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{1}{x_i} = \sum_{g=1}^{G} \left[\sum_{i \in S_g} x_i \log \frac{1}{x_i} \right].$$

A szögletes zárójelbeli kifejezést átalakíthatjuk a következőképpen:

$$\sum_{i \in S_g} x_i \log \frac{1}{x_i} = X_g \sum_{i \in S_g} \frac{x_i}{X_g} \log \frac{X_g}{x_i X_g} = X_g \sum_{i \in S_g} \frac{x_i}{X_g} \left(\log \frac{X_g}{x_i} + \log \frac{1}{X_g} \right) =$$
$$= X_g \sum_{i \in S_g} \xi_i \log \frac{1}{\xi_i} + X_g \log \frac{1}{X_g}.$$

A $\sum_{i \in S_g} \xi_i \log \frac{1}{\xi_i}$ kifejezést részhalmazon belüli entrópiának nevezzük és $H_g(x)$-szel jelöljük, így

$$H(x) = \sum_{g=1}^{G} X_g \log \frac{1}{X_g} + \sum_{g=1}^{G} X_g H_g(x),$$

ahol a jobb oldal első tagja a *halmazközi entrópia*, második tagja a *részhalmazon belüli entrópiák súlyozott átlaga* (a súlyok az egyes részhalmazok részesedési arányszámai).

Most tegyük fel, hogy adott jövedelemeloszlás esetén két alany részesedése nem egyezik meg, és jövedelmük olyan módosuláson megy keresztül, a többi részesedést változatlanul hagyva, hogy a kisebb jövedelemmel rendelkező jövedelme javul a nagyobb jövedelmű társa rovására mindaddig, amíg kettőjük jövedelmének teljes kiegyenlítődése be nem következik. Vajon az entrópia függvény e kiegyenlítődést követi-e azáltal, hogy egyre nagyobb értéket vesz fel? Az entrópia felbontására támaszkodva igenlő választ adhatunk.

Álljon ugyanis S_1 részhalmaz abból a két részarányból, amelyeknek összege változatlan, de fokozatosan kiegyenlítődnek egymással, míg a többi részarány tartozzék S_2-be. Ekkor az entrópia:

$$H(x) = \sum_{g=1}^{2} X_g \log \frac{1}{X_g} + \sum_{g=1}^{2} X_g H_g(x).$$

Ebben a kifejezésben csak a kételemű S_1 részhalmaz entrópiája, $H_1(x)$ változik a részarányok eltolódása következtében. Vizsgáljuk meg a $H_1(x)$ függvény menetét, bevezetve a következő jelöléseket. Legyen a „szegényebb" alany részaránya $x_1 = x$, a „gazdagabbé" $x_2 = 1 - x$, az entrópia $H_1(x) = y$. Ekkor

$$y = x \log \frac{1}{x} + (1 - x) \log \frac{1}{1 - x}.$$

(Ennek a függvénynek a képét láthatjuk a 2. ábrán.) A kérdéses intervallum 0-tól 0,5-ig terjed. Ebben az intervallumban a függvény felveszi minimumát ($x = 0$-nál) és maximumát ($x = 0{,}5$-nél). Mivel (természetes logaritmus esetén)

$$y' = \log (1 - x) - \log x > 0$$

mindaddig, míg $x > 1 - x$, tehát a függvény valóban növekedést mutat.

Az elmondottakból látható, hogy az entrópia valóban elfogadható a jövedelemeloszlási struktúra — és persze bármely más megoszlási struktúra — egyenletességének mértékeként. Megokolás közben azt is láthattuk, hogyan bontható fel az entrópia a részhalmazok közötti entrópia és a részhalmazokon belüli entrópiák súlyozott átlaga összegére. Ez a felbonthatóság az entrópia mint mérőszám egyik legértékesebb tulajdonsága, mert nagy segítséget nyújt a struktúrában megnyilvánuló egyenletesség elemzéséhez.

Mielőtt tovább mennénk, álljunk meg egy pillanatra az entrópiát alkotó egyes tagoknál mint függvényeknél. Egy ilyen tag

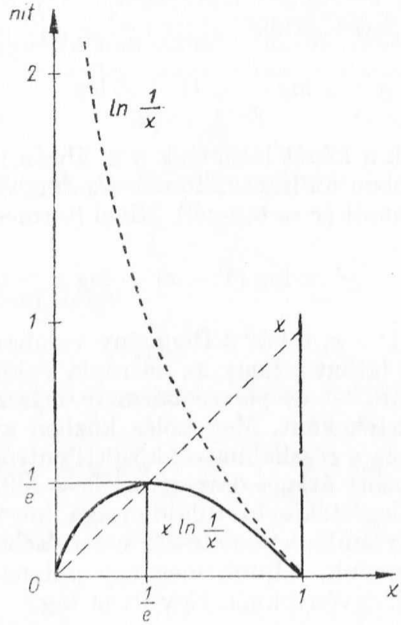
$$y = x \log \frac{1}{x}$$

egy részaránynak és a részarány egyedi információjának szorzata. Mint láttuk, az egyedi információ a részarány kicsiségének mértékéül is szolgálhat, maga a részarány pedig saját nagyságának mérőszáma. Ha szorzatukat mint függvényt diszkutáljuk a 0 és 1 határok között, megállapíthatjuk, hogy minimumát, 0-t a végpontoknál veszi fel, és a végpontoktól az intervallum belseje felé haladva növekedik az $x = 1/e$ pontig (a logaritmus alapjának megválasztásától függetlenül), ahol eléri maximumát ($y = 1/e$). A függvény menetét a 3. ábra mutatja (természetes logaritmus esetében).

Durván fogalmazva egy ilyen tag annál kevésbé növeli a struktúra entrópiájának értékét, minél jobban távolodik x a maximumhelytől, vagyis minél végletesebbé (vagy nagyon naggyá, vagy nagyon kicsivé) válik. Ezzel az egyedi információ átértelmezését próbáltuk egy kissé megvilágítani, bár ennek önmagában nincs jelentősége, csak az entrópia szempontjából.

Az entrópiát tehát a megoszlási struktúrán belül megnyilvánuló egyenletesség mérőszámának tekinthetjük. Felmerülhet azonban két struktúra összehasonlításának kérdése is, vagyis ha adva van két azonos számú részesedési arányszámból álló megoszlási struktúra: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ és $y_1, y_2, \ldots, y_n$, amelyek között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés áll fenn úgy, hogy az azonos indexű arányszámok felelnek meg egymásnak, akkor kérdezhetjük, hogy mekkora a két struktúra közötti eltérés nagysága. Az információelmélet ehhez is kielégítő mérőszámot szolgáltat: az *információpontatlanságot* (vagy információ-divergenciát); képlete:

$$I(y{:}\,x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{y_i}{x_i}.$$



3. ábra. Az $x \log \frac{1}{x}$ *függvény és komponensei a (0,1) intervallumban*

Az összehasonlítás iránya nem közömbös, mert az x-ek és y-ok szerepe általában nem cserélhető fel a kifejezés értékének megváltozása nélkül. Az információelméletben az x értékek a hírek korábbi (a priori), az y értékek pedig későbbi (a posteriori) valószínűségeit jelölik. Ezt a gondolatot megtartva a gazdasági alkalmazásoknál is az x-ek időben vagy átvitt értelemben korábbi, az y-ok későbbi részesedési arányszámokat jelölnek.

Vizsgáljuk meg, hogy az információpontatlanság valóban alkalmas-e struktúrák egymástól való eltérésének mérésére. Ebből a szempontból az a követelmény látszik a legfontosabbnak, hogy ha két tetszőleges indexre $y_i > x_i$ és $y_j < x_j$, és a többi arányszám változatlansága mellett a két struktúra eltérése úgy nő, hogy x_i még kisebb lesz, x_j pedig (nyilván ugyanannyival) még nagyobb, akkor a mérőszám is nagyobb értéket vegyen fel. Az információpontatlanság valóban így viselkedik.

Legyen ugyanis x_i csökkenése (x_j növekedése) ε. Vizsgáljuk meg a következő függvény menetét:

$$f(\varepsilon) = y_i \log \frac{y_i}{x_i - \varepsilon} + y_j \log \frac{y_j}{x_j + \varepsilon} .$$

Ez a kifejezés az információpontatlanság változó része. Ha ez az $\varepsilon = 0$ helyen növekedést mutat, akkor a teljes összeg is növekedik, amit éppen ki szeretnénk mutatni. Mivel

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{y_i}{x_i - \varepsilon} - \frac{y_j}{x_j + \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{y_i}{x_i} - \frac{y_j}{x_j} ,$$

és itt $y_i/x_i > 1$ és $y_j/x_j < 1$, tehát a két tört különbsége pozitív; ez éppen a függvény növekedését jelenti.

Az információpontatlanság értelmezhetőségét tekintve problémát jelent, ha valamelyik x vagy y értéke 0. Ha az egyik $y = 0$ és a megfelelő x is 0, akkor e számpár szempontjából a két struktúra egyáltalán nem tér el egymástól, tehát értelmes (és lehetséges) az

$$y \log \frac{y}{x}$$

tagot 0-nak értelmezni. Ha az egyik $y = 0$ és a megfelelő $x > 0$, akkor limesmeggondolással most is 0-nak vehető a tag értéke. Ha viszont $y > 0$, de $x = 0$, akkor a kifejezés még az $x \to 0$ határátmenettel sem értelmezhető, hiszen a kifejezés értéke ∞-hez tart.

Ez utóbbi meggondolásból az is következik, hogy az információpontatlanság tetszőleges nagy értéket is felvehet, hacsak valamelyik x érték a többi x-hez és y-hoz képest eléggé kicsi. Tehát az információpontatlanságnak nincs maximuma. Hogy minimuma éppen akkor van, amikor a megfelelő részarányok egymással páronként egyenlők, azt a következőképpen láthatjuk be.

Szorítkozzunk arra az esetre, mikor minden x_i és y_i pozitív és definiáljuk az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ mennyiségeket a következő egyenletekkel:

$$x_i = y_i (1 + \varepsilon_i) \qquad (i\ 1, 2, \ldots, n),$$

amiből következik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i = 0,$$

mivel

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i + y_i \varepsilon_i)$$

azaz

$$1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i.$$

Ezért az információpontatlanság így is felírható:

$$I(y:x) = -\sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{x_i}{y_i} = -\sum_{i=1}^{n} y_i \log (1 + \varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i [\varepsilon_i - \log (1 + \varepsilon_i)].$$

Az ε_i-ket definiáló egyenletekből világos, hogy $1 + \varepsilon_i > 0$, tehát a szögletes zárójelbeli kifejezést csak a $(-1, \infty)$ intervallumba vizsgáljuk. Ha $\varepsilon_i = 0$, akkor a kifejezés értéke is 0. Mivel a kifejezés ε_i szerinti deriváltja – természetes logaritmust használva –

$$\frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i}$$

ez $-1 < \varepsilon_i < 0$ esetén negatív, $\varepsilon_i > 0$ esetén pedig pozitív, tehát a kifejezés $\varepsilon_i = 0$-nál veszi fel minimumát, a 0-t. Ebből már következik, hogy $I(y:x) \geq 0$, és 0 pontosan akkor, ha az összes ε_i eltűnik, vagyis $x_i = y_i$ minden i-re, tehát ha a két struktúra egymással azonos.

Ha egy vagy több y nulla, akkor limes-meggondolással ugyanerre az eredményre jutunk.

A fenti tulajdonságok alapján az információpontatlanságot joggal tekinthetjük két megfelelő struktúra eltérése mértékének és a megoszlási struktúrák összehasonlításakor nevezhetjük *struktúra-eltérésnek* is.

A struktúra-eltérésnek is megvan az az előnyös tulajdonsága, ami az entrópiának: szintén visszavezethető a részhalmazok mérőszámaira, mégpedig a következőképpen.

A részarányokat (ill. azok indexeit) osszuk be G számú részhalmazba, ezek: $S_g (g = 1, 2, \ldots, G)$. Legyen

$$X_g = \sum_{i \in S_g} x_i, \qquad Y_g = \sum_{i \in S_g} y_i,$$

$$\xi_i = \frac{x_i}{X_g} \; (i \in S_g), \qquad \eta_i = \frac{y_i}{Y_g} \; (i \in S_g).$$

Természetesen

$$\sum_{i \in S_g} \xi_i = \sum_{i \in S_g} \eta_i = 1.$$

Az $I(y:x)$ tagjait részhalmazok szerint csoportosítva:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{y_i}{x_i} = \sum_{g=1}^{G} \left(\sum_{i \in S_g} y_i \log \frac{y_i}{x_i} \right),$$

ahol

$$\sum_{i \in S_g} y_i \log \frac{y_i}{x_i} = Y_g \sum_{i \in S_g} \frac{y_i}{Y_g} \log \frac{y_i / Y_g}{x_i / X_g} \cdot \frac{Y_g}{X_g} = Y_g \sum_{i \in S_g} \left(\eta_i \log \frac{\eta_i}{\xi_i} + \log \frac{Y_g}{X_g} \right) =$$

$$= Y_g \sum_{i \in S_g} \eta_i \log \frac{\eta_i}{\xi_i} + Y_g \log \frac{Y_g}{X_g}.$$

Végeredményben

$$I(y:x) = \sum_{g=1}^{G} Y_g \log \frac{Y_g}{X_g} + \sum_{g=1}^{G} \left(Y_g \sum_{i \in S_g} \eta_i \log \frac{\eta_i}{\xi_i} \right),$$

tehát a teljes struktúra-eltérés felírható a *halmazok közötti stuktúra-eltérés* és a *részhalmazokon belüli átlagos struktúraeltérés* összegeként.

Ezt a mennyiséget előnyösen használhatjuk fel gazdasági megoszlási struktúrák összehasonlítására, egy struktúra időbeli változásának mérésére, struktúra-előrejelzés pontosságának kvantifikálására.

A megoszlási struktúrán belüli egyenlőtlenséget, vagyis a részesedések koncentráltságát nyilvánvalóan egy olyan mérőszámmal fejezhetjük ki, amely az entrópiának inverze, amely annál nagyobb, minél jobban tér el a struktúra — adott elemszám mellett — a teljesen egyenletestől. Az eddig megtárgyalt mennyiségek és fogalmak alapján nem nehéz megfelelő mérőszámot találni egy struktúra koncentrációjára, vagyis a struktúrában fellépő egyenlőtlenségre.

Világos, hogy egy lehetséges mérőszám az entrópia tényleges értékeinek a maximálistól való eltérése:

$$\log n - H(y)\,.$$

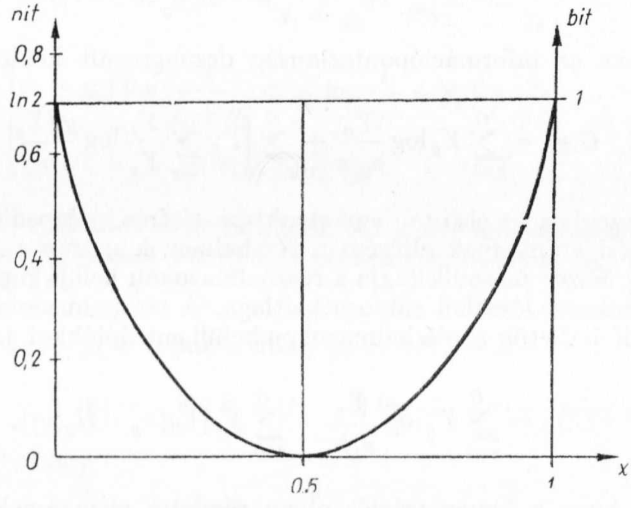
Ugyanezt a kifejezést kapjuk, ha kiszámítjuk a tényleges $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ struktúrának a teljesen egyenletestől $(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1/n)$ való eltérését:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{y_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{y_i}{1/n} = \log n - \sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{1}{y_i}\,.$$

Ezek szerint a

$$C(y) = \log n - H(y)$$

kifejezést a koncentráció információelméleti mérőszámának tekinthetjük és röviden *koncentrációnak* nevezzük. A koncentráció függvény menetét a **4.** ábra szemléltet abban a speciális esetben, amikor $n = 2$, $y_1 = x$, $y_2 = 1 - x$.



4. ábra. A koncentráció függvénye ($n = 2$)

A koncentráció szélsőértékei megegyeznek az entrópia szélsőértékeivel (tehát minimuma 0, maximuma $\log n$), csakhogy ahol az egyik minimumot vesz fel, ott veszi fel a másik a maximális értékét, és fordítva.

A koncentrációnál talán még érthetőbb, hogy a részesedések számának növekedésével a maximum növekedése miért vág egybe megszokott fogalmainkkal. Gondoljunk a jövedelemegyenlőtlenségre mint konkrét példára. $n = 2$ esetében egyiknek jut az összjövedelem, a másiknak pedig nem jut semmi, ekkor a koncentráció 1 bit. $n = 1024$ esetében a maximális egyenlőtlenség azt jelenti, hogy ismét egyetlen személynek jut az összjövedelem, viszont most 1023-nak a részesedése 0, ez pedig nyilvánvalóan nagyobb mértékű egyenlőtlenségnek fogható fel, ennek megfelelően a koncentráció számértéke is nagyobb: 10 bit.

Ha a részesedések számának hatását mégsem akarjuk figyelembe venni a koncentráció mérésénél, akkor ugyanúgy járhatunk el, mint az entrópiával, vagyis osztunk a maximummal:

$$C_r(y) = \frac{\log n - H(y)}{\log n}.$$

Ezt a mennyiséget *relatív koncentrációnak* nevezzük; értéke tetszőleges n esetén 0 és 1 között mozog.

A koncentráció mint az információpontatlanság speciális esete szintén felbontható, dezaggregálható.

Legyen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ a vizsgált struktúra, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1/n$ pedig a neki megfelelő, teljesen egyenletes struktúra. Használjuk az eddigi jelöléseinket, kiegészítve azzal, hogy jelölje n_g a g-edik részhalmaz részesedéseinek számát. Ekkor

$$X_g = \frac{n_g}{n} \quad \text{és} \quad \xi_i = \frac{1}{n_g},$$

Behelyettesítve az információpontatlanság dezaggregált képletébe azt kapjuk, hogy

$$C(y) = \sum_{g=1}^{G} Y_g \log \frac{Y_n}{n_g/n} + \sum_{g=1}^{G} \left(Y_g \sum_{i \in S_g} \frac{Y_i}{Y_g} \log \frac{y_i/Y_g}{1/n_g} \right).$$

Ebben az összegben az első tag egy struktúra-eltérés, mégpedig a részhalmazok részesedési arányainak eltérése a részhalmazok nagyság szerinti arányszámaitól; az összeg második tagja a részhalmazokon belüli koncentrációknak a részhalmazrészesedésekkel súlyozott átlaga. A részhalmazokon belüli koncentrációk kifejezhetők a részhalmazokon belüli entrópiákkal, jelölésük $H_g(y)$. Ekkor

$$C(y) = \sum_{g=1}^{G} Y_g \log \frac{Y_g}{n_g/n} + \sum_{g=1}^{G} Y_g [\log n_g - H_g(y)].$$

Előfordul, hogy a koncentrációt olyan részletes elemzésnek akarjuk alávetni, amelyben kétszeres dezaggregálást alkalmazunk, például jövedelemegyenlőtlenség elemzése ágazati bontásban és azon belül nemek szerint. A kétszeres vagy általában többszörös dezaggregálás azért keresztülvihető, mert a részhalmazon belüli koncentráció mint koncentráció tovább bontható. (Egyébként hasonló érvényes az entrópiára is.)

Megjegyzendő, hogy míg az entrópia, információpontatlanság és koncentráció dezaggregálható, addig a relatív entrópia és relatív koncentráció nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Bár a koncentráció mérőszáma általában alkalmas valamely struktúrában fellépő egyenlőtlenség mérésére, egyik legfontosabb alkalmazását az ipari koncentráció elemzése jelenti.

Könnyen belátható, hogy ha egy vállalat részaránya egy másik vállalatnál kisebb, és a nagyobb vállalat rovására növeli részarányát (úgy, hogy kettőjük részarányának összege állandó marad), akkor részarányaik kiegyenlítődéséig a koncentráció értéke csökken (vagyis éppen fordítva, mint az entrópiánál), megegyezésben a koncentrálódás fogalmával. Speciális problémát jelent azonban két vállalat egyesülése, ugyanis ekkor az eredeti struktúra részarányainak száma eggyel nagyobb, mint az egyesülés utánié; eddig viszont csak megfeleltethető struktúrák összehasonlításáról volt szó. Vizsgáljuk meg ezt a kérdést részletesebben.

Tegyük fel, hogy két vállalat úgy egyesül, hogy részarányaik összegeződnek és a többié változatlan marad. Az egyesülés következtében a struktúra entrópiája mindig csökken. Jelöljük ugyanis a szóban forgó két vállalat részarányát y_1-gyel, ill. y_2-vel ($y_1 > y_2 > 0$), a vállalatok számát (az egyesülés előtt) n-nel; ekkor az entrópia az egyesülés előtt:

$$H(y) = y_1 \log \frac{1}{y_1} + y_2 \log \frac{1}{y_2} + \sum_{i=3}^{n} y_i \log \frac{1}{y_i};$$

egyesülés után pedig:

$$H'(y) = (y_1 + y_2) \log \frac{1}{y_1 + y_2} + \sum_{i=3}^{n} y_i \log \frac{1}{y_2}.$$

Mivel

$$(y_1 + y_2) \log \frac{1}{y_1 + y_2} < y_1 \log \frac{1}{y_1} + y_2 \log \frac{1}{y_2},$$

tehát valóban

$$H(y) > H'(y).$$

A koncentráció változása szempontjából fontos az a megállapítás, hogy a két entrópia különbsége felvehet tetszőleges kis értéket. Ugyanis ha bevezetjük a következő jelöléseket:

$$y_1 + y_2 = k \text{ (konstants)}, \; y_2 = x, \; y_1 = k - x,$$

akkor

$$H(y) - H'(y) = k \log k - (k - x) \log (k - x) - x \log x.$$

Figyelembe véve, hogy

$$\lim_{x \to 0} x \log x = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0} (k - x) \log (k - x) = k \log k,$$

megállapíthatjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0} [H(y) - H'(y)] = 0,$$

és ez éppen azt jelenti, hogy a különbség, amelyről már beláttuk, hogy mindig pozitív, tetszőlegesen megadott pozitív számnál kisebb értéket vesz fel, hacsak y_2 elég kicsi.

A koncentráció ugyan szoros kapcsolatban áll az entrópiával, azonban lényeges eltérés, hogy míg az entrópia növekedése csak a struktúra pozitív arányszámaitól függ, addig a koncentrációnál szerepet játszik a részesedési arányszámok száma is tekintet nélkül arra, hogy e részarányok nullától különbözők-e vagy sem. Nézzük meg, hogyan változik a koncentráció a két vállalat egyesülésekor.

A koncentráció az egyesülés előtt

$$C(y) = \log n - H(y),$$

egyesülés után

$$C'(y) = \log(n-1) - H'(y).$$

A koncentráció változása

$$C'(y) - C(y) = H(y) - H'(y) - \log\frac{n}{n-1}.$$

Tehát előfordulhat az is, hogy a koncentráció csökken, ha két vállalat egyesül, hiszen ennek feltétele

$$H(y) - H'(y) < \log\frac{n}{n-1},$$

ez pedig, mint az imént láttuk, lehetséges.

Hasonló érvényes a relatív koncentrációra is. Ez akkor csökken, ha

$$H(y) - H'(y) < H'(y)\cdot\frac{\log\frac{n}{n-1}}{\log(n-1)}$$

és ugyanez a feltétele a relatív entrópia növekedésének.

El kell-e vetnünk információelméleti mérőszámainkat e tulajdonságuk miatt? Ha a koncentrációt úgy fogjuk fel, hogy az elsősorban a részesedések egyenlőtlenségét jelenti, akkor egy aránytalanul kis vállalat beolvadása egy lényegesen nagyobb vállalatba valóban az (így értelmezett) koncentráció csökkenéséhez vezethet. Ha viszont megkívánjuk, hogy mérőszámunk a részesedések számának csökkenésére a hétköznapi értelemben reagáljon, akkor le kell mondanunk a közvetlen mérőszámról, helyette az inverz mutatót, az entrópiát használhatjuk.

Szemléletessé tehetjük a struktúra egyenletességének kifejezését azáltal, hogy az entrópia helyett az ún. *vállalatok egyenletességi egyenértékszámát* használjuk. Ez a szám arra a kérdésre ad választ, hogy hány egyenlő nagyságú vállalat egyenletessége egyezik meg a tényleges egyenletességgel (egyenletességen a struktúra entrópiáját értve). Képletben, ha az egyenértékszámot M-mel jelöljük:

$$\log M = \sum_{i=1}^{n} y_i \log\frac{1}{y_i},$$

tehát

$$M = e^{H(y)}$$

Ezt a számot úgy használhatjuk fel a koncentráció közvetlen kifejezésére, hogy kiszámítjuk, hányszorosa a vállalatok tényleges száma az egyenértékszámnak:

$$\frac{n}{M} = \frac{n}{e^{H(y)}}.$$

Ezt a hányadost *a vállalatok egyenlőtlenségi arányszámának* nevezzük. Ez tényleg követi a koncentráció változását, mert logaritmusa éppen $C(y)$.

Összefoglalásképpen álljon itt a következő táblázat a vizsgált mérőszámoknak és azok néhány jellegzetességeinek felsorolásával.

Megnevezés	Képlet	Értékkészlet határai	Mérték-egység	Dezaggregálható-e
Egyedi információ	$\log \frac{1}{x}$	0, log n	bit	—
Entrópia vagy egyenletesség	$H(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log \frac{1}{x_i}$	0, log n	bit	Igen
Relatív entrópia	$\frac{H(x)}{\log n}$	0,1	—	—
Információponatlanság vagy struktúraeltérés	$I(y : x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \log \frac{y_i}{x_i}$	0, ∞	bit	Igen
Koncentráció	$C(x) = \log n - H(x)$	0, log n	bit	Igen
Relatív koncentráció	$\frac{C(x)}{\log n}$	0,1	—	—
Vállalatok egyenletességi egyenértékszáma	$e^{H(x)}$	1, ∞	—	—
Vállalatok egyenlőtlenségi arányszáma	$\frac{n}{e^{H(x)}}$	1, ∞	—	—

Megjegyzések: (1) A fenti táblázatban n jelenti a struktúra részesedési arányszámainak számát, x_i és y_i az x ill. y struktúra i-edik részesedési arányszámát.

(2) A bit csak egyike a lehetséges egységeknek; a képletben szereplő logaritmus alapjától függően más és más elnevezést használunk.

IRODALOM

1. Corradi E.: Az információelmélet alapfogalmai és gazdasági alkalmazásának néhány kérdése. A KSH Statisztikai és Matematikai Módszerek Közgazdasági Alkalmazásának Laboratóriuma, 7. sz. munkaanyag.
2. Hall, M.—Tideman, N.: Measures of Concentration. Journal of the American Statistical Association, March 1967.
3. Horowitz, A.J.: Entropy, Markov Processes and Competition in the Brewing Industry. The Journal of Industrial Economics, 1968. No. 3.
4. Kotász Gy.-né—Szegedy, M.: Információelméleti mérőszámok alkalmazása a gazdasági elemzésben. KSH Ökonometriai Füzetek. 11. sz. 1970.
5. Meyer-Eppler, W.: Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie. Berlin, 1959. Springer-Verlag.
6. Reza, F. M.: Bevezetés az információelméletbe. Budapest, 1966. Műszaki Könyvkiadó.
7. Shannon, C. E.: A Mathematical Theory of Communication. Bell System Technical Journal. Vol. 27. 1948.
8. Shannon, C. E.—Weaver, W.: The Mathematical Theory of Communication. The University of Illinois Press, Urbana, 111., 1949.
9. Theil, H.: Economics and Information Theory. Amsterdam, 1967. North-Holland Publishing Co., Magyar fordítás: Közgazdaságtan és információelmélet. Budapest, 1970. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

Gábor Győző

Az intervallum programozás: a lineáris programozási feladatok egy speciális osztályának megoldási módszere

Az intervallum programozás módszere az alábbi típusú lineáris feladat megoldására alkalmas:

Maximalizálandó a

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \tag{1}$$

függvény a

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \tag{2}$$

értelmezési tartomány felett, ahol az $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matrix és a $\mathbf{c} = (c_j)$, $\mathbf{a} = (a_i)$, $\mathbf{b} = (b_i)$ vektorok adottak, $a_i \leq b_i$ $(i = 1,2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$, továbbá a (2)-t kielégítő vektorok halmaza nem üres és (1)-nek korlátos optimuma van (2) felett.

Ez a feladattípus természetesen megoldható az ismert lineáris programozási algoritmusokkal, de egyrészt a feladat méretei jelentősen nőnek (a feltételi egyenlőtlenségek mindkét oldalról történt korlátozása a feltételek, a változók előjelkötetlensége a változók számának megkettőződéséhez vezet), másrészt egyszerűbb megoldó eljárásokkal a feladat speciális alakjából fakadó egyéb problémák is felmerülhetnek. (Ez az oszlopok, illetve sorok megduplázódásának lehet a következménye, ui. a bázistranszformációk sorozatával megoldott feladatoknál a kerekítési hibák okozta torzulás a szokásosnál *lényegesen veszélyesebb* lehet. Ezért a feladattípusnak szimplex módszerrel történő megoldásakor a [6] 2. fejezetében leírt transzformáció ajánlható.)

A feladattípus viszonylagos gyakorisága, valamint a fenti számítástechnikai nehézségek vezettek az intervallumprogramozás-sal kapcsolatos kutatásokhoz.

E cikk célja, ismertetni a Ben-Israel, Charnes és Robers által 1967—68 körül kidolgozott új módszer első eredményeit.

Az intervallumprogramozás legfontosabb tulajdonsága, hogy olyan feladatok megoldására, melyet eddig csak iteratív úton lehetett megoldani *explicit* megoldást kínál. Másik érdeme az, hogy segítségével lényegesen könnyebb megadni az optimális megoldások *halmazát*. Ez különösen akkor fontos, ha meggondoljuk, hogy egy duálisában erősen degenerált feladat valamennyi primálisan optimális bázisát meghatározni a szimplex módszer segítségével gyakorlatilag lehetetlen.

Az eljárás gondolatmenetének megértéséhez vizsgáljuk meg (1), (2) optimumát, ha $\mathbf{A}$ egységmatrix, azaz $\mathbf{A} = \mathbf{E}_m$. Ekkor az optimális megoldás az alábbi módon határozható meg:

$$x_j = \begin{cases} a_i & \text{ha } c_j < 0 \qquad i = j = 1, 2, \ldots, m \\ b_i & \text{ha } c_j > 0 \\ \lambda a_i + (1 - \lambda) b_i & \text{ha } c_j = 0 \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

Ezen speciális eset két általánosításáról lesz szó a továbbiakban.

I.

Tekintsük először [1] alapján azt az esetet, melyben **A** *minden sora lineárisan független.*

Ezen tulajdonság teljesülésekor mindig létezik olyan $n \cdot m$ méretű $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \ldots, \mathbf{t}_m]$ matrix, mely kielégíti az alábbi matrixegyenletet:[1]

$$\mathbf{ATA} = \mathbf{A}\,, \tag{3}$$

és melynek segítségével megadhatók az optimális megoldások:

$$\mathbf{x} = \sum_{i \in H_1} a_i \mathbf{t}_i + \sum_{i \in H_2} b_i \mathbf{t}_i + \sum_{i \in H_0} [\lambda b_i + (1-\lambda) a_i] \mathbf{t}_i + \mathbf{y} \tag{4}$$

ahol:

$$H_1 = \{i \mid \mathbf{c}^*\mathbf{t}_i < 0\}$$
$$H_2 = \{i \mid \mathbf{c}^*\mathbf{t}_i > 0\}$$
$$H_0 = \{i \mid \mathbf{c}^*\mathbf{t}_i = 0\}$$
$$0 \leq \lambda \leq 1$$
$$\mathbf{y} \in N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{y} \in E^n\}$$

Legyen ugyanis

$$\mathbf{z} = \mathbf{Ax}$$

ekkor **A** fenti tulajdonsága miatt egyrészt minden **z** felírható ilyen alakban, másrészt

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} + \mathbf{y}$$

és emiatt (1), (2) a következő ekvivalens feladatra transzformálódik:

$$\max\, (\mathbf{c}^*\mathbf{Tz})$$

$$\mathbf{a} \leq \mathbf{z} \leq \mathbf{b}$$

(ugyanis $\mathbf{c}^*\mathbf{y} = 0$, lásd később).

Ha tehát ismerünk egy olyan **T** matrixot, mely kielégíti (3)-t és ismerünk egy $\mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$ vektort, akkor (4) megadja (1) és (2) egy optimális megoldását. Meg kell jegyezni, hogy (4)-gyel definiált **x** független attól, hogy melyik **T** matrixot választjuk, de nem független **y** megválasztásától.

T és $N(\mathbf{A})$ meghatározásához szükség van egy olyan **S** m · m-es nem-szinguláris matrixra, melyre teljesül, hogy

$$\mathbf{SA} = [\mathbf{E}_m, \mathbf{D}]\mathbf{P} \tag{5}$$

ahol **P** n-ed rendű permutáló matrix. Ekkor

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}^* \left[\begin{array}{c} \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{0}_{n-m,m} \end{array}\right]$$

és

$$N(\mathbf{A}) = \left\{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} = \mathbf{P}^* \left[\begin{array}{c} -\mathbf{D} \\ \hline \mathbf{E}_{n-m} \end{array}\right] \mathbf{z},\ \mathbf{z} \in E^{n-m}\right\}$$

(5)-ből látható, hogy a szokásos bázistranszformációs eljárás segítségével **T** és $N(\mathbf{A})$ meghatározható.

[1] A Moore-Penrose féle általánosított inverz ezen **T** matrix speciális esete.

Az eddigiekhez még két megjegyzés:

1. Az $N(\mathbf{A})$ halmaz sohasem lehet üres. Ui. a nullvektor mindig eleme a halmaznak.
2. Alapvető jelentősége van e kérdés tárgyalásakor annak a ténynek, hogy (1)-nek akkor és csak akkor van korlátos optimuma (2) felett, ha a célfüggvényegyütthatók vektora merőleges az $N(\mathbf{A})$ halmazra.

1. példa:

$$\text{maximum } (4x_1 - 8x_2 - 5x_3)$$
$$0 \leq 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$
$$-2 \leq -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 3$$

$$\begin{array}{|ccc|cc|}
\hline
\boxed{2} & -2 & 3 & 1 & 0 \\
-1 & 3 & 4 & 0 & 1 \\
\hline
1 & -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & \boxed{2} & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\
\hline
1 & 0 & \frac{17}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\
1 & 0 & \frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{E}_3 \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{17}{4} \\ \frac{11}{4} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad N(\mathbf{A}) = z\begin{bmatrix} -\frac{17}{4} \\ -\frac{11}{4} \\ -1 \end{bmatrix}_{-\infty < z < +\infty}$$

$$H_1 = \{2\}$$
$$H_2 = \{1\}$$
$$H_0 = \varnothing$$

$$\mathbf{x} = -2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -\frac{17}{5} \\ -\frac{11}{4} \\ -0 \end{bmatrix}$$

ahol z tetszőleges skalár.

II.

Vegyük most [3] szerint azt az esetet, amikor **A** *minden oszlopa lineárisan független.* (Ebben az esetben a korlátos optimum létezése nyilvánvaló. Ekkor ugyanis $N(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, és erre bármilyen célfüggvényvektor merőleges.]

Ekkor az (1), (2) feladatot az alábbi feladattá alakítjuk át:

$$\tilde{\mathbf{c}}^*\mathbf{x}' = \max! \tag{6}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{A}}\mathbf{x}' \leq \bar{\mathbf{b}} \tag{7}$$

$$\hat{\mathbf{a}} \leq \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}' \leq \hat{\mathbf{b}}$$

feltételek mellett, ahol úgy $\hat{\mathbf{A}}$, mint az $\bar{\mathbf{A}}$ matrix kvadratikus és nem-szinguláris. Ez az átalakítás úgy történik, hogy az $m \cdot n$-es **A** matrixot, melynek rangja n (azaz $\varrho(\mathbf{A}) = n$), valamint az $m \cdot 1$-es **a** és **b**-t három részre bontjuk.

(8a) $\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$ $\mathbf{A}_1$ $n \cdot n$-es méretű $\varrho(\mathbf{A}_1) = n$

(8b) $\mathbf{a}_2 \leq \mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2$ $\mathbf{A}_2$ $q \cdot n$-es méretű $\varrho(\mathbf{A}_2) = q$

(8c) $\mathbf{a}_3 \leq \mathbf{A}_3\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_3$ $\mathbf{A}_3$ m-n-$q \cdot n$-es méretű.

Miután $\mathbf{A}_1$ sorait leválasztottuk **A**-ból, a fennmaradó sorok közül maximális számú lineárisan független $\mathbf{A}_2$-be kerül, míg a többi sor $\mathbf{A}_3$-ba.

Ezután (8a)-ból kiválasztjuk az

$$\mathbf{a}_4 \leq \mathbf{B}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_4$$

sorokat oly módon, hogy az

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

matrix $n \cdot n$-es nem-szinguláris matrix legyen. (Ez a kiválasztás mindig lehetséges.)

Ekkor az (1), (2) feladat így „bővül":

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} = \max!$$

$$\mathbf{a}_1 \leq \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_1$$

$$\mathbf{a}_2 \leq \mathbf{A}_2\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{a}_4 \leq \mathbf{B}\,\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_4$$

$$\mathbf{a}_3 \leq \mathbf{A}_3\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_3$$

feltételek mellett.

Képezzük most az alábbi feladatot:

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} + \mathbf{0}^*\mathbf{y} = \max! \tag{9}$$

az alábbi korlátokkal:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{m-n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

(10)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_4 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{E}_{m-n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix}$$

Nyilvánvaló, hogy (1), (2) optimuma és (9), (10) optimuma között kölcsönös és egyértelmű a megfeleltetés és (9), (10) optimális megoldásából (1), (2) optimuma minden átalakítás nélkül adódik.

Ilyen módon (6), (7) valóban előállítható (1), (2)-ből (9), (10) szerint. Írjuk át ezután (6), (7)-et az alábbi ekvivalens feladattá:

$$\mathbf{c}^*\bar{\mathbf{x}} = \max! \tag{11}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \tag{12}$$

$$\bar{\mathbf{a}} \leq \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{b}} \tag{13}$$

$$\hat{\mathbf{a}} \leq \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}} \leq \hat{\mathbf{b}} \tag{14}$$

feltételi rendszer mellett. Erre a feladatra alkalmazhatók a Dantzig és Wolfe által leírt dekompozíciós elvek:[2] A (13)-mal reprezentált polieder (ekkor ugyanis egyrészt $\bar{\mathbf{A}}$ nemszingularitásából következően az adjungált homogén rendszernek nincs a triviálistól különböző megoldása, ezért a halmaz korlátos, másrészt a halmaz konvex és extremális pontjainak száma véges, ezért a halmaz konvex poliéder) elemei felírhatók az

$$\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{v}}\,, \quad \mathbf{1}^*\bar{\mathbf{v}} = 1, \quad \bar{\mathbf{v}} \geq \mathbf{0} \tag{15}$$

összefüggésekkel, ahol $\bar{\mathbf{P}}$ matrix oszlopvektorai a (13)-mal előállított polieder extremális pontjait tartalmazzák. Mivel (14) hasonlóan kezelhető, ezért (11), (12), (13), (14) felírható így:

$$\text{maximum } (\bar{\mathbf{c}}^*\bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{v}})$$

ha

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}\bar{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{P}}\hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{1}^*\bar{\mathbf{v}} \qquad &= 1 \\ \mathbf{1}^*\hat{\mathbf{v}} &= 1 \\ \bar{\mathbf{v}},\ \hat{\mathbf{v}} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{16}$$

Tegyük fel, hogy ezen feladatnak ismerjük egy lehetséges bázismegoldását egy $\mathbf{s}^* = [\mathbf{s}_1^*, s_2, s_3]$ duális vektorral együtt. Ezután $\bar{\mathbf{P}}$ és $\hat{\mathbf{P}}$ oszlopait meghatározzuk, de csak a feltétlenül szükséges mértékben. Jelöljük ezen oszlopokat a $\hat{\mathbf{p}}_i(i = 1, \ldots, \bar{N})$ és $\bar{\mathbf{p}}_i(i = 1, \ldots, \hat{N})$ szimbólumokkal, legyen továbbá

$$\bar{\mathbf{k}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{k}}_i = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{p}}_i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{k}}_i$ vagy $\hat{\mathbf{k}}_i$ bekerülhet a bázisba, ha a

$$(\mathbf{c}^*\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{s}^*\hat{\mathbf{k}}_i) > 0 \quad \text{vagy} \quad -\mathbf{s}^*\hat{\mathbf{k}}_i > 0$$

A szokásos szimplex eljárás szerint ez a vektor kerül be a bázisba, ami a legnagyobb célfüggvényelemmel (θ-val) rendelkezik.

$$\theta = \max\,[\max\nolimits_{\bar{p}_i} (\mathbf{c}^*\bar{\mathbf{p}}_i - \mathbf{s}^*\bar{\mathbf{k}}_i),\ \max\nolimits_{\hat{p}_i} (-\,\mathbf{s}^*\hat{\mathbf{k}}_i)]$$

[2] A továbbiak megkívánják a szimplex technika és a DW eljárás bizonyos ismeretét. ([4], [5], [6] stb.)

Közismert, hogy az eljárás addig folytatódik, amíg θ pozitív. θ nempozitivitása már optimális megoldást jelez.

Adott s-hez tartozó optimális $\bar{\mathbf{p}}^0$ kiszámításának módja (4) szerint [$N(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$, $\lambda = 1$]:

(17)
$$\bar{\mathbf{p}}^0 = \sum_{i \in \bar{H}_1} \bar{a}_i \bar{\mathbf{t}}_i + \sum_{i \in \bar{H}_2} \bar{b}_i \bar{\mathbf{t}}$$

ahol:

$$\bar{\mathbf{T}} = [\bar{\mathbf{t}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{t}}_{m-q}] = \bar{\mathbf{A}}^{-1}$$

és

(18)
$$\bar{H}_1 = \{i | (\mathbf{c} - \mathbf{s}_1)^* \bar{\mathbf{t}}_i < 0\}$$
$$\bar{H}_2 = \{i | (\mathbf{c} - \mathbf{s}_1)^* \bar{\mathbf{t}}_i \geq 0\}$$

Hasonlóan:

(19)
$$\hat{\mathbf{p}}^0 = \sum_{i \in \hat{H}_1} \hat{a}_i \hat{\mathbf{t}}_i + \sum_{i \in \hat{H}_2} \hat{b}_i \hat{\mathbf{t}}$$

ahol:

$$\hat{\mathbf{T}} = [\hat{\mathbf{t}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{t}}_{m-q}] = \hat{\mathbf{A}}^{-1}$$

és

(20)
$$\hat{H}_1 = \{i | \mathbf{s}_1^* \hat{\mathbf{t}}_i > 0\}$$
$$\hat{H}_2 = \{i | \mathbf{s}_1^* \hat{\mathbf{t}}_i \leq 0\}$$

Ha $\theta > 0$, akkor vagy $\bar{\mathbf{k}}_l^0$, vagy $\hat{\mathbf{k}}_l^0$ kerül be a bázisba, at új bázishoz új duális s* tartozik és a számítási ciklus kezdődik elölről. Ha a degenerációt sikerül elkerülni, az eljárás véges lépésben optimumhoz vezet. Az optimális megoldás értéke (15) első képletébe visszahelyettesítve nyerhető.[3]

Ha az olvasó netán fél a dekompozíciós módszerek számítástechnikai nehézségeitől, akkor rá kell mutatni arra, hogy a magyar terminológiában „szektorfeladat" néven meghonosodott (13) és (14) összefüggések (17), (18) illetve (19), (20) képletekkel szimbolizált megoldása közvetlenül kiszámítható, míg a [4] „szektorfeladatai"-nak megoldása lineáris programozási feladatok meghatározását kívánja. (Az $\bar{\mathbf{A}}$, illetve $\hat{\mathbf{A}}$ matrixokat természetesen előbb invertálni kell.) A „központi" feladatnak nevezett (16)-os összefüggés kiszámítása [4] szellemében történik.

Kezdő bázismegoldást mesterséges változók beiktatásával kapunk. A feladat ekkor igy írható fel:

$$\text{maximum } (\mathbf{c}^* \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{v}} - M \mathbf{l}^* \mathbf{z})$$

$$\bar{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{v}}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}} & \hat{\mathbf{P}} & \\ \mathbf{1}^* & \mathbf{0}^* & \mathbf{E}_{m-q+2} \\ \mathbf{0}^* & \mathbf{1}^* & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m-q} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ahol M nagy pozitív skalár. (Ha a **z** vektor valamelyik eleme a bázisban marad, a feladatnak nincs megoldása.) Az algoritmus illusztrálására tekintsük az alábbi példát:

[3] Az [5] 11. fejezet 7 §-ában leírt módszer ezen algoritmus elődjének tekinthető. Ugyancsak hasonló módszer található Hadley G.: Nonlinear and Dynamic Programming (Reading, 1964. Addison-Wesley.) c. könyvében, 4. fejezet 7. § 126–129. o.

2. *példa:*

$$\text{maximum } (2x_1 + x_2)$$

$$0 \leq x_1 \leq 16$$

$$0 \leq x_2 \leq 20$$

$$-1 \leq \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 \leq 6$$

$$-6 \leq \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_2 \leq 4$$

Ekkor:

$$\bar{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{A}}^{-1} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{A}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A megoldás menetét a mellékelt táblázat mutatja.

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_2 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{v}_3 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{20} & 1 & -\frac{6}{20} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{20} - 1 & & \frac{21}{20} \\ -\frac{1}{16} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{10} \\ \frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Az optimális megoldás (15) első képlete szerint:

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 0 \\ 20 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

III.

Nagyon fontos körülmény, hogy az (1), (2) feladatot, ha

$$\varrho(\mathbf{A}) < \min(m, n)$$

könnyen át lehet alakítani olyan feladattá, melynek minden oszlopa lineárisan független és rendelkezik a feltételezett tulajdonságokkal. Az átalakított feladat megoldása egyúttal megoldása az eredeti feladatnak is.

Iteráció i	Bázisváltozók	Bázisinverz				s_1 / s_2 s_3	$\bar{H}_1$ / $\hat{H}_1$	$\bar{H}_2$ / $\hat{H}_2$	$\bar{p}_i^0$ / $\hat{p}_i^0$	$c^* \bar{p}_i - s^* \bar{k}_i$ / $-s^* \hat{k}_i$	A bázisba kerülő változó jele	A bázisba kerülő változó oszlopa
1	z_1	1	0	0	0	$-M$		1	16			16
	z_2	0	1	0	0	$-M$	$\varnothing$	2	20	$52+37\,M$	$\bar{v}_1$	20
	z_3	0	0	1	0	$-M$	1	2	-5	$4\,M$		1
	z_4	0	0	0	1	$-M$			2			0
2	z_1	1	$-\frac{4}{5}$	0	0	$-M$	2	1	16	$32+17\,M$		16
	$\bar{v}_1$	0	$\frac{1}{20}$	0	0	$\frac{13}{5}+\frac{17}{20}M$			0		$\bar{v}_2$	0
	z_3	0	$-\frac{1}{20}$	1	0	$-M$	$\varnothing$	1	2	$\frac{208}{5}+\frac{63}{5}M$		1
	z_4	0	0	0	1	$-M$		2	16			0
3	$\bar{v}_2$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{20}$	0	0	$2+\frac{1}{16}M$	1	2	0	M		-12
	$\bar{v}_1$	0	$\frac{1}{20}$	0	0	1			20		$\hat{v}_1$	-6
	z_3	$-\frac{1}{16}$	0	1	0	$-M$	2	1	12	$30+\frac{7}{4}M$		0
	z_4	0	0	0	1	$-M$			6			1
4	$\bar{v}_2$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{20}$	0	$\frac{9}{20}$	$2+\frac{1}{16}M$	1	2	0	M		0
	$\bar{v}_1$	0	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{3}{10}$	1			20		$\bar{v}_3$	20
	z_3	$-\frac{1}{16}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-M$	2	1	12	0		1
	$\hat{v}_1$	0	0	0	1	$30-\frac{3}{4}M$			6			0
5	$\bar{v}_2$	0	$-\frac{1}{20}$	1	$-\frac{6}{20}$	2	$\varnothing$	1	16	0	$\theta = 0$ optimum	
	$\bar{v}_1$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{20}$	-1	$\frac{21}{20}$	1		2	20			
	$\bar{v}_3$	$-\frac{1}{16}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	0	2	1	12	0		
	$\hat{v}_1$	0	0	0	1	30			6			

A fent vázolt két algoritmus egész sor probléma megoldására alkalmazható. Néhány gazdasági természetű modell megoldását mutatja be a [2] dolgozat.

A leggyakoribb lineáris programozási probléma, mely a következő alakú:

$$\text{maximum}\ (\mathbf{c}^*\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{21}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$$

szintén átfogalmazható az (1), (2) alakra:

$$\text{maximum}\ (\mathbf{c}^*\mathbf{x})$$
$$\mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq M\mathbf{1} \tag{22}$$
$$M\mathbf{1} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b},$$

ahol M elegendően nagy pozitív skalár. A (22)-vel jelzett feladatra az elsőként vázolt algoritmus a duál szimplex módszerhez szolgáltat „jó" induló bázist, míg a második algoritmussal e feladat minden átalakítás nélkül megoldható.

A közelmúltban publikált több dolgozat kifejezetten azt a célt tűzte ki és oldotta meg, hogy (21)-re *hatékony* módszereket adjon az intervallum programozás segítségével (pl. [7]).

Összefoglalva: Az intervallum programozás egyik fő erénye — a számítástechnikai előnyökön túlmenően — az, hogy szemben az iterációk sorozatával optimumot elérő algoritmusokkal, az optimális megoldást *explicite* adja meg, hátránya viszont, hogy általában nem szolgáltatja a primál feladat megoldásával egyidejűleg a feladat duálásának megoldását is.

IRODALOM

1. Ben-Israel, A.—Charnes, A.: An explicit solution of a special class of linear programming problems. Operations Research, Vol. 16 (1968), pp. 1166—1175.
2. Ben-Israel, A.—Charnes, A.—Hurter, A. P.—Robers, P. D.: On the explicit soluton of a special class of linear economic models. Operations Research, Vol. 18 (1970), pp. 462—470.
3. Ben-Israel, A.—Robers, P. D.: A decomposition method for interval linear programming. Management Science, Vol. 16 (1970), pp. 374—387.
4. Dantzig, G. B.—Wolfe, P.: The decomposition principle for linear programs. Operations Research, Vol. 8 (1960), pp. 101—111.
5. Hadley, G.: Linear Programming. Reading, 1962. Addison-Wesley.
6. Orchard-Hays, W.: Advanced Linear Programming Computing Techniques. New York, 1968. McGraw Hill.
7. Zlobec, S.—Ben-Israel, A.: On explicit solutions of interval linear programs. Israel Journal of Mathematics, Vol. 8 (1970), pp. 12—22.

KÖNYVEKRŐL

Bos, H. C. (szerk.): *Towards Balanced International Growth. Essays presented to J. Tinbergen.* (A kiegyensúlyozott nemzetközi növekedés felé. Tanulmányok J. Tinbergen tiszteletére.) North-Holland Publishing Company. Amsterdam—London. 1969. 329 p.

Tanulmányok Tinbergen professzor tanítványai, régebbi és mai munkatársai tollából abból az alkalomból, hogy visszavonul a Németalföldi Közgazdaságtani Intézet igazgatói állásából. Az írások tárgyukat Tinbergennek az utóbbi években művelt két fő kutatási területéről veszik: a gazdasági tervezés és optimális gazdasági növekedés, valamint a nemzetközi gazdasági kapcsolatok optimális rendszere köréből.

S. Chakravarty — abból kiindulva, hogy a gazdaságilag gyengén fejlett országok gazdaságfejlesztésében különösen fontos szerepe van a tőkejavak átcsoportosíthatatlanságának (a beruházási és a fogyasztási javakat előállító ágazatok között), kétszektoros Feldman-Mahalanobis típusú növekedési modellben keresi az optimális beruházási politikát, különböző haszon függvények felhasználásával.

Az optimális beruházási, illetve megtakarítási program kérdéséhez szól hozzá *J. C. Saigal.* Maneschi bírálta Chakravartynak egy korábbi megoldását, Saigal itt kimutatja, hogy Maneschi bírálata az ott alkalmazott véges időhorizontról triviális. Ahhoz, hogy az optimális megtakarítási modellek használható irányelveket adjanak a tervezőknek, Saigal szerint újra kell fogalmazni a Chakravarty, Tinbergen és mások által alkalmazott haszon függvényt és el kell ejteni a konstans tőkeegyüttható feltételezését.

M. Inagaki új fogalmakat vezet be az optimális növekedési út elméletébe. Valamely növekedési út a fogyasztás szempontjából kedvezőbb (dominancia) egy másiknál, ha az utóbbinál egy időszakban sem ad kisebb fogyasztást, de néha nagyobb fogyasztást eredményez. Hatékony az a növekedési út, amelynél nincs kedvezőbb út ilyen értelemben. A kritikus növekedési út olyan út, amely elválasztja a hatékony utak tartományát a nem-hatékonyakétól. A Phelps-féle aranyszabály növekedési útja ilyen kritikus út.

A. Qayum egy dualisztikus gazdaság kiegyensúlyozott és maximális növekedési lehetőségeit elemzi. Ezen olyan gazdaságot ért, amelyben van egy kis modern ipari szektor, amely annyi munkást alkalmaz, amennyi — a munka határtermelékenysége alapján — kifizetődő, és mellette egy hagyományos mezőgazdasági szektor, amely a munkaerő többi részének munkát ad, tekintet nélkül arra, hogy a munka határtermelékenysége kisebb vagy nagyobb a munkás fogyasztásánál. Bemutatja az ilyen gazdaságokra kidolgozott Mahanalobis és Ranis-Fei féle modelleket, majd egy saját modellt ír le. Bevezeti a „kommercializálódási pont" fogalmát, ahol a gazdasági fejlődés eljut arra a szintre, amikor már a hagyományos szektorban is a munka határtermelékenysége alapján határozzák meg a foglalkoztatást.

B. Herman, L. B. M. Mennes és *J. G. Waardenburg* egy világméretű gazdaságfejlesztési modell első kísérleti változatát mutatják be. A modell a termelési ágazatokat osztja szét a különböző országok és régiók között olyan módon, hogy minden egyes területegység kitűzött gazdaságfejlesztési célját világméretekben a legkisebb költséggel érjék el. Tehát előírja a nemzetközi munkamegosztás egy optimálisnak tekinthető változatát. Az egyes ágazatok termékeinek szállítási költségeit figyelembe véve regionális, országos, kontinens és világméretekben kicserélt (külkereskedelmi forgalomba hozott) termékeket különböztet meg. A modellnek ebben a kísérleti változatában tíz ágazat szerepel. A tanulmány megírása óta a kutatásokat tovább folytatták a Németalföldi Közgazdaságtani Intézetben. Többek között konkrét számítási eredményeik vannak arról, hogy az egyes ország-csoportokban milyen termékeket leggazdaságosabb termelni és exportálni.

A világméretű gazdaságfejlesztési programoknak egy másik kérdésével foglalkozik *H. C. Bos* és *A. Kuyvenhoven* tanulmánya. Azt vizsgálják ugyanis, hogy több ország beruházási politikájának integrációja, összeegyeztetése milyen előnyökkel és hátrányokkal járhat az egyes országok számára. A beruházási tervek össze nem egyeztetése egyértelműen hátrányos, mert egyes iparágainak fejlesztésekor minden ország arra számít, hogy az ország szükségleteit meghaladó termelési kapacitás létesítésével, exporttal próbálja a nagyobb termelési volumenből eredő megtakarításokat kihasználni, ezért az egyes országok tervei ellentmondásba kerülhetnek. A gyakorlatban azonban az integráció nehezen valósítható meg, mert az egyes országok attól félnek, hogy a beruházási terveket az ő kárukra egyeztetik össze. Többféle modell-típust lehetne a probléma megfogalmazására felhasználni: a lineáris programozási, egész számú programozási és a klasszikus Lagrange-szorzós modelleket, de egyik sem tökéletes. Ez a tanulmány az utóbbi módszert alkalmazza, de teljesen nem kívánja megoldani a kérdést.

H. Linnemann azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy mekkora hatása van a szomszédos fekvésnek és távoli országok közötti speciális (külkereskedelmi, gazdasági politikai) kapcsolatoknak a két ország közötti kereskedelem volumenére. Úgy látszik, hogy az utóbbi fajta kapcsolatok (sokszor a volt gyarmattartó ország és a gyarmat között) egyes esetekben erősebben ösztönzik a kereskedelmi kapcsolatokat, mint a két ország közötti kis távolság.

F. P. Jansen és *L. H. Jansen* a gazdaságilag gyengén fejlett országokból az Egyesült Államokba, valamint az Európai Gazdasági Közösségbe és az Európai Szabadkereskedelmi Területre (a ,,Hetek'' országaiba) irányuló export múltbeli tendenciáit és várható alakulását vizsgálja. *Y. B. De Wit* az indonéziai gazdasági tervezést ismerteti, mint a gazdasági káosz körülményei közötti gazdaságirányítás példáját.

P. A. Cornelisse és *J. Versluis* bemutatják, hogy a Tinbergen által kidolgozott ,,semi-iput-output'' módszer, amely az input-output matrixnak csak egy részére összpontosítja a figyelmet, pontosan ugyanazt az eredményt adja, mint az a lineáris programozási megoldás, amely a teljes matrixot figyelembe veszi. A ,,semi-input-output'' módszernek az a lényege, hogy valamely meghatározott gazdaságfejlesztési beruházási tervet úgy értékelnek, hogy az adott szektoron kívül csak azokat a szektorokat vizsgálják, amelyekre az adott beruházási tervnek az ágazati kapcsolatokon keresztül jelentékeny hatása van. A szerzők itt felső korlátokat vezetnek be azon ágazatok termelésére vonatkozóan, amelyek terméküket a nemzetközi piacon értékesítik, és így keresik a modell segítségével a fejlesztés szempontjából optimális szektort.

G. K. Boon ágazatonkénti munka-output és tőke-output arányokat számít a mexicoi gazdaságra, majd C. E. S. termelési függvények segítségével megállapítja, hogy a munka termelékenysége lényegesen alacsonyabb, mint annak az adott tőkefelhasználás mellett lennie kellene.

N. Islam a pakisztáni exporttámogatási politikát tárgyalja (matematikai eszközök nélkül).

L. H. Klaassen és *A. C. Van Wickeren* az input-output tábla segítségével határozzák meg Hollandiában, hogy az egyes ágazatokba tartozó üzemek telepítésének mekkora regionális multiplikátor hatásuk van. Figyelembe veszik egyrészt az újonnan telepített termelés által létrehozott kereslet multiplikátor hatását. Ebben az alapvető és nem-alapvető ágazatok közötti megkülönböztetést használják fel. Az utóbbiak termékei nem tárgyai a régiók közötti kereskedelmi kapcsolatoknak (az előbbiek termékeit viszont exportálhatják és importálhatják a régiók). Mivel minden új üzemtelepítés, beruházás támaszt bizonyos keresletet a nem-alapvető ágazatok termelése iránt, van bizonyos másodlagos jövedelemnövelő hatása az adott régióban, azon az elsődleges hatáson kívül, hogy magában az üzemben új munkahelyek és új jövedelem képződik. Másrészt a keresleti hatáson kívül jelentkezik az üzemnek egy kínálati hatása is, mert a termékeit feldolgozó és más új üzemeket vonz az adott régióba. Az utóbbiaknak ismét van keresleti hatása. Ezeknek a hatásoknak összessége adja a teljes regionális multuplikátort.

J. Serck-Hanssen a gyárak optimális számát vizsgálja térbelileg körülhatárolt piacon. A leírt matematikai modellben termelési és szállítási költségeket vesz figyelembe, a költségfüggvények nem lineárisak. *J. P. Pronk* és *E. J. Schreuel* ,,semi-input-output'' modell segítéségével vizsgálja, hogy mi a gazdaságilag gyengén fejlett országoknak nyújtott gazdasági segély hatékony formája. *J. C. Ramaer* azokról a nehézségekről ír, amelyekkel az elméletben képzett matematikai közgazdász találkozik, amikor az üzemekben gyakorlati problémákat kell megoldania. *(A. R.)*

WOLFE, J. N. (szerk.): *Value, Capital, and Growth. Papers in honour of Sir John Hicks.* (Érték, tőke és növekedés. Tanulmányok John Hicks tiszteletére.) Edinburgh University Press. Edinburgh. 1968. 552 p.

Hicks professzor nyugdíjba vonulása alkalmából állították össze a kötetet munkatársainak, tanítványainak, barátainak az írásaiból, amelyek nagyrészt az általa művelt tudományterületekre vonatkoznak.

K. J. Arrow a vállalat optimális tőkepolitikájának elméleti modelljét írja le. A probléma lényege: hogyan válassza meg a vállalat tőkeállományát az egymás után következő időszakokban. A válasz egyszerű: minden időszakban olyan mennyiségű tőkeállományt tartson, hogy a tőke határnyeresége (márginal profitability) egyenlő legyen a tőke költségével, amely utóbbi a kamatlábnak, az értékcsökkenésnek és a tőkejavak árcsökkenésének összege. A problémát az bonyolítja, hogy a tőkejavak irreverzibilisek: a beruházás után nem adhatók el minden további nélkül. Ezért a határnyereség fogalmába bele kell építeni a jövőbeli nyereségeket, amelyeket viszont nem ismerünk pontosan, hanem valamilyen módon előrebecslünk.

R. W. Clower és W. B. Johnson a fogyasztás elméletét dinamizálják olyan módon, hogy a háztartás vagyonát felveszik a fogyasztást meghatározó függvénybe (a jövedelem mellé). Ugyanakkor a jövedelem és a fogyasztásra költött összeg közötti különbség a háztartás vagyonának növekedését jelenti. Ezt a modellt empirikus adatokkal is alátámasztják.

F. M. Fischer és *K. Shell* a létfenntartási költségindex elméletének egyik alapvető és megoldatlan problémáját vizsgálják, az ízlés és a minőség változásait, valamint az új javak bevezetését. Szerintük helytelen a létfenntartási költség olyan értelmezése, hogy választ várunk arra a kérdésre: mekkora jövedelemre van szükségem ma, hogy a mai árak mellett ugyanolyan jó helyzetben legyek, mint voltam a tegnapi árak és tegnapi jövedelem mellett? Az index csak arra a kérdésre adhat választ: valamilyen megadott indifferencia térkép mellett, a javak árának egyik és egy ettől eltérő másik együttese milyen jövedelmet tesz szükségessé, hogy a fogyasztó ugyanazon az indifferencia görbén maradhasson? Konkrétabban arra kereshetünk választ: ha a mai árak érvényesültek volna tegnap, akkor milyen jövedelemre lett volna szükség tegnap, hogy ugyanolyan helyzetben legyek, mint voltam a tegnapi árak és jövedelem mellett? Az a kérdésfeltevés lehetővé teszi az ízlésváltozásoknak és a javak minősége változásának kezelését a modellben.

W. M. Gorman kétségeit fejezi ki aziránt, hogy a fix termelési tényezők mennyiségét mérni lehet, mivel különböző hatékonysággal használják fel őket, így nem lehet számukra egységes hatékonysági árat meghatározni.

R. Harrod a modell fogalmáról értekezik. Nincs megelégedve e fogalom nagyon általános alkalmazásával a közgazdaságtanban. Helyesnek tartaná annak korlátozását az olyan egyenletrendszerekre, amelyekben szerepelnek módosítható paraméterek (és amelyek nem evidens tételeket fejeznek ki).

H. S. Houthakker visszatér egy régebben Hicks által tárgyalt problémára, amelyet „normális késési bánatpénznek" (backwardation) nevezett. Ez azt jelenti, hogy a jövőbeli szállításra kötött ügyletekben a jelenleg uralkodónál valamivel alacsonyabb árat szoktak kikötni (normális körülmények között, ha a kereslet és a kínálat feltételei nem változnak).

J. R. T. Hughes gazdaságtörténeti tanulmánnyal szerepel a kötetben, amely azonban érdekesen próbál bizonyítani egy elméleti közgazdaságtani tételt: Wicksell szerint a természetes kamatláb (a tőke hozama) és a tényleges bankkamatláb közötti különbség iránya és nagysága magyarázza meg az igénybe vett hitel mennyiségét. Ezért hiába alacsony a bankkamatláb, ha a természetes kamatláb még alacsonyabb, — a vállalkozók kevés hitelt vesznek igénybe, a gazdasági konjunktúra kedvezőtlen és az árak alacsonyak. A szerző Anglia 1844 és 1914 közötti gazdaságtörténetén bizonyítja ennek a tételnek érvényét.

M. C. Kemp a vámok hatását vizsgálja a külkereskedelem volumenére és arányaira matematikai modellen.

Ch. Kennedy azzal a kérdéssel foglalkozik, hogyan kell a népgazdasági termelési függvényekben az időt figyelembe venni. Szerinte ez sokkal nagyobb probléma, mint a tőke egységes kezelhetőségének kérdése. A termelés ugyanis időt igényel, a ráfordítások és a kibocsátás között idő telik el. Mekkora legyen a figyelembe vett késés? Ennek a kérdésnek a kamatelmélet szempontjából is jelentőségét látja.

N. Liviatan Hicksnek egy régebbi levezetéséhez kapcsolódik, amelyben az indifferencia görbe elemzést úgy alkalmazta sok jószág esetére, hogy egy kivételével az összes többi javakat (amelyeknek árarányai változatlanok) egyetlen jószágként kezelte. A szerző itt egy másik, egyszerűbb bizonyítást közöl.

D. McFadden a Hicks-féle stabil egyensúlyt vizsgálja. Hicks szerint valamely általános egyensúly akkor tökéletesen stabil, ha valamely jószág árának csökkenése következtében a kereslete nagyobbá válik a kínálatánál akkor is, ha az összes többi javak ára is megváltozik az új egyensúlyi helyzet kialakításának megfelelően. Samuelson differenciál egyenlet rendszer alakjában fogalmazta meg az árak alkalmazkodásának mechanizmusát és azt állította, hogy az általános tökéletes stabilitás se nem elégséges, se nem szükséges feltétele a dinamikus stabilitásnak. Ez a tanulmány a Hicks-féle és a dinamikus stabilitási feltételek szintézisét dolgozza ki.

L. W. McKenzie az optimális növekedési utaknak Ramsey által megkezdett vizsgálati vonalát folytatja. Szintén feltételez egy telítettségi szintet. Termelési modellje azonban teljesen általános (nem egytermékes); növekvő népességet tételez fel. Neumann-típusú modellel arra a következtetésre jut, hogy a végesszámú optimális út néhány periódus kivételével közel fekszik a transzformációs halmaznak egy oldallapjához.

Hicks megkülönböztette az autonóm és az indukált találmányokat, valamint a munkamegtakarító, semleges és tőkemegtakarító műszaki fejlődést és azt állította, hogy a munka és tőke egymáshoz viszonyított árának változása úgy befolyásolja a műszaki fejlesztést, hogy inkább olyan találmányok születnek és olyanokat alkalmaznak, amelyek a drágábbá váló termelési tényező kisebb alkalmazása irányában hatnak és a másik tényező hatékonyságát növelik nagyobb mértékben. *M. Morishima és M. Saito* az Egyesült Államok 1902 és 1955 közötti adatain kétszektoros modellel bizonyítják ezt a tételt.

P. A. Samuelson két irányban általánosítja a termelési tényezők helyettesítési elaszticitásának fogalmát: kiterjeszti több termelési tényezőre és több jószág esetére.

R. M. Solow azt vizsgálja, hogyan alkalmazkodik optimálisan a vállalat munkaerő állománya a termelés rövidtávú változásaihoz. Az ökonometriai modellekben általános tapasztalat, hogy a munkaerő késéssel reagál a termelés változására. Solow ezt úgy magyarázza meg elméleti modelljével, hogy figyelembe veszi benne egyrészt a munkás elbocsátás és felvétel költségeit, valamint az esetleges túlóradíjakat (ha a szükséglet nagyobb, mint a munkaerő), másrészt annak értékét, ha a fölös munkaerőt átmenetileg nem termelő munkában (pl. karbantartásban) foglalkoztatják.

H. Uzawa tárgyalja az egyéni jövedelemnek optimális megosztását a fogyasztás és a megtakarítás között. A jövőbeni jövedelmek értékelésétől (diszkontlábától) és a megtakarítással elérhető kamattól függ, hogy az egyén időszakról időszakra menynyit takarít meg optimálisan. Uzawa levezeti a rövidtávú és hosszútávú fogyasztási függvényt, valamint a pénz és más megtakarítási formák keresletét. (*A.R.*)

ACKOFF, R. L., SASIENI, M. W.: *Fundamentals of Operations Research.* (Az operációkutatás alapjai.) John Wiley and Sons. New York—London—Sidney. 1968. 455 p.

Mindkét szerző neve közismert az operációkutatási szakirodalomban. Ez a közös könyvük egyesíti régebbi, más társszerzőkkel írt munkáik előnyeit: a Churchman—Ackoff—Arnoff féle *Bevezetés* közérthetőségét és gyakorlatiasságát, és a Sasieni—Yaspan—Friedman féle *Módszerek és problémák* világosságát és áttekinthetőségét. Ez a könyv is „bevezetés" jellegű: nem tárgyal részletkérdéseket, nem mélyed bele a matematikai és számítási problémákba. Nem matematikusoknak, nem is az operációkutatás szakembereinek íródott, hanem egyrészt kezdő tanulóknak, másrészt — talán mindenekelőtt — vállalati vezetőknek, közgazdászoknak, mérnököknek, akik meg akarják ismerni: milyen problémák megoldására alkalmazható, milyen kérdésekre adhat választ az operációkutatás. A könyv áttanulmányozása után az olvasó megtanulta: hogyan kell kérdéseket feltenni az operációkutatónak?

Ennek megfelelő a könyv tartalmi felosztása. Először — közel a terjedelem egynegyedében — az operációkutatás természetével, a problémák megfogalmazásának módjával, a modellépítéssel, a megoldások levezetésével foglalkozik. Itt tárgyal olyan kérdéseket, mint a rendszer elemzés, a döntési kritériumok bizonytalan helyzetekben, a különböző célok összemérésének lehetősége (tradeoff), a szekvenciális döntési modellek, a szimuláció, stb.

A könyv gerince azonban a különböző fajta problémák bemutatása és az operációkutatás által kidolgozott modellek és megoldási módszerek ismertetése. Nevezetesen: 1. allokációs problémák (szállítás, hozzárendelés, lineáris szétosztási probléma), 2. raktározási problémák (determinisztikus és valószínűségi helyzet, két raktár, újramegrendelés fix időszakonként), 3. kicserélés, karbantartás, felújítás, a berendezés megbízhatóságának növelése, 4. dinamikus programozás, 5. sorban állás (a beérkezések és a kezelési idők különböző eloszlásai esetén, sorban állási problémák szimulálása), 6. PERT és kritikus út (sorrend-megállapítás és koordinálás), 7. útvonalak kijelölése (utazó ügynök probléma és minimális úthosszúság egy hálózatban), 8. versenyhelyzetek (játékelmélet, piaci értékesítési problémák), 9. felkutatási problémák (geológiai kutatások, minőségellenőrzés stb. — általában ahol a mintavételi hibát és a megfigyelési hibát kell figyelembe venni és a felkutatás költségét a tévedés okozta veszteséggel kell összemérni).

A könyv utolsó fejezetei ismét általános kérdéseket tárgyalnak: a modellnek és megoldásának ellenőrzését, ,,tesztelését'' (nem maradt-e ki a modellből egy lényeges változó, nem került-e bele lényegtelen? — paraméter becslési módszerek), a gyakorlati alkalmazást és a modell megoldásának időről időre való újraellenőrzését (nem változtak meg az eredeti körülmények olyan módon, hogy az optimális megoldást is újonnan kell meghatározni?). Végül az operációkutatás korlátait tárgyalva megállapítja, hogy jelenleg elsősorban csak ,,taktikai'' feladatok megoldására alkalmas, de remélni lehet, hogy továbbfejlesztése módot fog nyújtani a ,,stratégiai'' döntések (hosszútávú, az egész szervezetet érintő, a főcélokra irányuló döntések) tudományos megalapozására is.

Hasonló jellegű magyar nyelvű könyv nem áll a vállalati közgazdászok, mérnökök stb. rendelkezésére. A kétkötetes Kaufmann-munka, amelyet a Műszaki Könyvkiadó adott ki, nagyobb igényű, lényegesen többet tárgyal az operációkutatási módszerek matematikájából, de nem tárgyalja rendszeresen az operációkutatással megoldható vállalati feladatokat. Felmerül a javaslat, érdemes volna ezt a könyvet is kiadni magyarul.

A.R.

Tájékoztatás az 1970. évi pályázatról

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai–Közgazdasági Szakosztálya és a SZIGMA Szerkesztősége 1970. évre pályázatot írt ki; pályázni lehetett vállalati operációkutatási problémák megoldását ismertető tanulmányokkal.

A pályázati felhívásra három pályamű érkezett be. Elbírálásukra a Szakosztály elnöksége az alábbi bizottságot küldte ki: Bod Péter, Krekó Béla, Martos Béla, Meszéna György.

A bíráló bizottság a dolgozatok és az előzetesen felkért lektorok véleményeinek áttanulmányozása alapján úgy döntött, hogy olyan pályamű, amely a kitűzött 10 000 Ft-os első díjra érdemes lenne, nem érkezett.

A *Mezőgazdaság 1970* jeligéjű pályázat egy termelőszövetkezet távlati tervének kidolgozására alkalmas lineáris programozási modellt ír le. A módszert a gyakorlatban is használták. A dolgozat részletesen elemzi és ismerteti a gyakorlati felhasználás körülményeit, az alkalmazó termelőszövetkezet gazdasági adottságait. Hiányossága, hogy az alkalmazott, látszólag nem-lineáris célfüggvény kezelésével és megoldási módszerével kapcsolatban semmiféle magyarázatot nem tartalmaz és csak pótlólagos érdeklődésre derült ki, hogy valójában a célfüggvény lineárisra redukálódik.

A bíráló bizottság javaslatára a Szakosztály Vezetősége a *Mezőgazdaság 1970* jeligéjű pályaművet, amelynek címe: *A termelési szerkezet és termelési források egyidejű optimalizálásának módszere és gyakorlati alkalmazása*, 5000 Ft-os második díjjal jutalmazta.

Dícséretben és 2000 Ft különjutalomban részesült a *1010101* jeligéjű pályamű, amelynek címe: *Matematikai (operációkutatási) módszerek konkrét felhasználása vállalati gazdasági döntések előkészítésében.*

A pályázat azzal foglalkozik, hogyan kell az út-, vasút- és hídépítési ágazat igényeit kielégítő adatbázist megteremteni, amelyből azután szükség szerint gazdaságmatematikai modelleket lehet összeállítani vagy mutatószámokat kiszámítani. Dícséretet érdemel a szerző nagyméretű rendszerező munkája, amellyel egy használható információs alaprendszert állított össze. Ezen túlmenően a szerző kísérletet tesz néhány, az információs rendszerre támaszkodó modell megfogalmazására is. A dolgozat e részeinek gyakorlati felhasználhatósága azonban nincs bizonyítva. További hiányosságai a munkának a matematikai megfogalmazás hibái és az, hogy sokszor hiányoznak a hivatkozások azokra a forrásokra, amelyekben a dolgozatban felvetett problémákat, vagy azokhoz hasonlókat korábban már megoldottak.

A díjnyertes tanulmányok szerzői:

Mezőgazdaság 1970 — Dr. TÓTH ZÓZSEF egyetemi docens, a mezőgazdasági tudományok kandidátusa,

Dr. KÁDÁR BÉLA egyetemi docens, a mezőgazdasági tudományok kandidátusa,

Dr. VADÁSZ LÁSZLÓ egyetemi docens, a mezőgazdasági tudományok kandidátusa,

Dr. PFAU ERNŐ egyetemi adjunktus,

Dr. KOZMA ANDRÁS egyetemi adjunktus.

Mindannyian a Debreceni Agrártudományi Egyetem Üzemtani Tanszékén dolgoznak.

1010101 — Dr. TAVASZY FERENC okl. mérnök, a Közlekedésépítési Szervező és Adatfeldolgozó Egyesülés Üzemszervezési Irodájának vezetője.

A Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem Matematika Tanszékének tudományos munkássága

A közgazdasági kutatások világszerte gyors ütemben haladnak a kvantitatív törvényszerűségek felismerésének és alkalmazásának problémákban és eredményekben egyaránt gazdag útjain. A gazdasági gyakorlat egyre sürgetőbben igényelte aktív, a problémák megoldására módszertanilag is jól felkészült közgazdasági szakemberek képzését. Ahhoz azonban, hogy az Egyetem Matematika Tanszéke a mindebből rá háruló feladatoknak a jelenlegi hazai követelmények színvonalán eleget tudjon tenni, a lehető legnagyobb energiával be kellett kapcsolódnia mind az aktuális alapkutatási feladatok, mind az igényelt operációkutatási alkalmazások kidolgozásába.

Ez a kutató munka intenzív és szervezett tanszéki formában tíz évvel ezelőtt indult meg és azóta is eredményesen folyik.

Rendszeres külföldi (román, német, olasz, amerikai, japán, stb.) kapcsolatokkal rendelkező alapkutatás folyik a modern algebra egyes területein, így a csoport- és félcsoportelmélet, az univerzális algebrák, a gyűrűelmélet területén. E kutató tevékenység aktuális, élő voltát jól érzékelteti, hogy kiemelkedő algebristák részvételével heti rendszeres problémafelvető és megbeszélő algebrai szeminárium működik a Tanszéken.

Folyamatos alapkutatási tevékenységet folytat a Tanszék a játékelmélet területén. E munka méretére jellemző, hogy a hazai szakirodalomból eddig még hiányzó játékelméleti kézikönyv megírása került napirendre.

Egyre újabb elméleti s az operációkutatás különböző területeire vezető problémákat vet fel a gyakorlati feladatok megoldására irányuló modell-alkotási tevékenység is. Mindezek esetenként aktuális kutatási témákat jelentenek, s megoldásuk az alapot szolgáltató gyakorlati probléma megoldásának is kulcsa lesz.

A kialakult s hosszabb távra érvényes koncepció szerint a Tanszék alapkutatási munkáit a rendszerek matematikai leírásának általános problémái és az egyensúlyelmélet témája fogja át. Az egyes részfeladatokra vonatkozó kutatások pedig szervesen illeszkednek a kidolgozni kívánt főbb témákba.

A külföldi kapcsolatok szorosabbá tétele, az alapkutatási eredmények kölcsönös és gyors megismerése érdekében nemzetközi terjesztésre idegen nyelvű időszakos kiadványt jelentet meg a Tanszék. Eddig 14 szám jelent meg.

Az alapkutatások mellett, a beérkező igényeknek megfelelően, a konkrét operációkutatási feladatok szinte minden főbb típusával találkozik s eredményesen foglalkozik a Tanszék. A problémákat felvető vállalatok, intézmények számára készült jelentős számú tanulmány, valamint folyóiratcikkek mellett az érdekesebbnek tűnő s esetleg további alkalmazásokra is alkalmas munkákból eddig két gyűjteményes kötet jelent meg a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadónál: 1967-ben Döntési Modellek, 1969-ben Döntési Modellek II. címen. Mindkét kötetben 9—9 konkrét feladat megoldása szerepel. Részletesebb ismertetésükre nem térünk ki, mivel e munkákkal a Szigma 1970. III. évf. 2. számában külön is foglalkozott.

Az alkalmazásokkal kapcsolatos munkákról egyébként általában elmondható, hogy elsősorban a matematikai programozás, illetve a sztochasztikus módszerek és modellek kategóriáiba sorolhatók.

A közvetlen operációkutatási probléma-megoldás és alkalmazási tevékenység mindhárom alapvető szinten jelentkezik a Tanszék munkájában. A vállalatok igényeikkel általában közvetlenül fordulnak az egyetem vezetőségéhez, a tanszékhez vagy annak munkatársaihoz. Ugyanakkor az egyetem több országos hatáskörű szervvel áll szocialista szerződés alapján kapcsolatban, s a megnyilvánuló, egyre mélyebbre hatoló igények matematikai vonatkozásait természetszerűleg a Tanszék elégíti ki. Így az ágazati szintű problémák tanulmányozására jó lehetőségek nyílnak. Szoros és aktív a Tanszék kapcsolata az Országos Tervhivatallal. Így biztosítva van a népgazdasági szintű operációkutatási problémákkal való folyamatos foglalkozás lehetősége is.

A felsorolt feladatok teljesítése, az országos számítógép program s az ebből adódó oktatási feladatok számítástechnikai vonatkozásban is növekvő igényeket támasztanak a Tanszékkel szemben. Hogy mindezeknek a Tanszék eleget tehessen, az Egyetemi Számítóközponttal szoros elméleti és gyakorlati együttműködésre van szükség.

A születő új alapkutatási eredmények és a rájuk épülő alkalmazások tapasztalatai alapját képezik a korszerű tananyag összeállításának.

A Tanszéken folyó kutatómunka jellemzéséhez kiegészítésképpen megemlítjük a Tanszék tevékenységére s a létszámra vonatkozó fontosabb statisztikai adatokat:

Előadások* heti óraszáma:		117 óra
Gyakorlatok heti óraszáma:		140 óra
Tanszéki létszám,	főállásban:	15 fő
	félállásban:	9 fő
	külső óraadók:	34 fő

Az elmúlt néhány évben tanszéki szerzőktől megjelent
tankönyvek és kézikönyvek száma: 8
összes publikációk száma: 253

A felsoroltakon kívül jelentős számban készültek jegyzetek, esettanulmányok, s állandóan folyt „post-graduális" továbbképző jellegű oktatás is.

Összefoglalva az elmondottakat megállapíthatjuk, hogy a Tanszék az évek során folyamatosan kialakította a modern közgazdasági-matematikai oktatási követelmények előfeltételét biztosító tananyagot, az ehhez szükséges elméleti és gyakorlati kérdések megoldásában aktívan közreműködött, rendszeres alapkutatást folytat s az alkalmazásokban részt vállalva segíti munkatársainak a gazdasági gyakorlattal való szerves és folyamatos kapcsolatot.

MESZÉNA GYÖRGY

Az Agrárközgazdák Nemzetközi Szövetségének XIV. Konferenciája

1970. augusztus 24. és szeptember 2. között Minszkben tartották a Szövetség történetében a legnagyobb létszámú konferenciát, amelyet — 62 ország 685 küldöttének részvételével — először rendeztek szocialista országban. Fő témája: a mezőgazdaság tervezése. A tervezés és gazdaságelemzés modern módszereivel foglalkozó előadások jórészt az 1968-ban Keszthelyen rendezett kelet-nyugati szeminárium munkájához kapcsolódtak.

A résztvevőknek majdnem harmada jött a szocialista országokból (többük először képviseltette magát ezen a tudományos fórumon). A 100 fős szovjet delegáció 4 előadással szerepelt (A. Rumjancev, Sz. Szergejev, R. Kravcsenko, I. Lukinov). A 31 fős magyar csoport tagjai közül Kovács Géza előadást, Szikszay Béla és Sebestyén József vitaindító korreferátumot tartott. A szocialista országok képviselői közül még a lengyel R. Manteuffel tartott vitaindító korreferátumot.

A konferencia munkája plenáris és szekció-üléseken és 17 vitacsoportban folyt. Az előadások közül többnek volt matematikai-gazdaságtani jellege, de e helyen csak néhányukról számolunk be röviden.

*

G. Waardenburg (Hollandia) regionális optimalizálási problémákkal foglalkozott, országon belüli és országok közti vonatkozásban egyaránt. A termelési-szállítási feladatként kezelt problémánál kimutatta, hogy a termelési és szállítási feladat külön-külön való megoldásánál jelentkező költségszintekhez képest a szimultán megoldás esetében kapott

* Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy egyetemünkön általában hat féléven át folyik alapozó és szakágazati jellegű matematika oktatás — a szűkebb szakos képzés esetében viszont végig a tíz féléven át.

termelési költségek nagyobbak, de a szállítási költségek annyival kisebbek, hogy az összköltség is kisebbnek bizonyult az ő tapasztalataik szerint. Foglalkozott az oszthatatlansággal is, de csak műszaki-gazdasági szempontból felmerülő problémaként kezelte.

R. G. Kravcsenko (Szovjetunió) a mezőgazdasági nagyüzemek tervezésének és irányításának általuk kidolgozott modellrendszerét ismertette. Ez a rendszer a 10—15 éves, az 5 éves, az éves és az operatív tervekre vonatkozó 4 modellcsoportból áll. Mindegyik csoportban 3 blokk van. Az első blokk az üzemnél nagyobb egységek terveihez (pl. regionális tervekhez) kapcsolódik, a második az üzemet mint egységet kezeli, míg a harmadik az üzemen belüli elemekre (pl. ágazatokra) vonatkozik. A négy modellcsoport hierarchikus rendszert alkot, amelynek egy irányban ható szigorúságát a csúszó tervezés koncepciójának elfogadása enyhíti.

E. Reisch (NSZK) azokat a tapasztalatokat összegezte, amelyeket Nyugat-Európa, Észak-Amerika és Ausztrália kutatói az utóbbi években a mezőgazdasági üzemek tevékenységének matematikai elemzésében és tervezésében szereztek. A jobb számítógépek és algoritmusok mellett fontosak azok a változások, melyek a gazdasági koncepcióval, a vállalat szemléletével kapcsolatosak, és melyek a modellekben tükröződnek. Az idő, a tér és a nem-linearitás mellett a kockázat és bizonytalanság is a modellek jellemzője lett, az optimalizálás mellett az elfogadhatóság is tért nyert, továbbá megkedvelték a szimulációt. A több éves üzemterveknél a csúszó tervezés elvét kezdik előnyben részesíteni. A célkitűzést illetően a korábban egyeduralkodó nyereség-szemlélet hátrább szorult, főként az ,,emberközelibb'' célok térnyerése folytán. Terjed az a szemlélet, hogy a mezőgazdaság nem külön világ, a mezőgazdasági nagyüzem nem különbözik az ipari nagyüzemtől, tehát joggal alkalmazzák itt is a vállalat kibernetikai, illetve magatartási modelljét, ugyanúgy, mint az iparban.

L. Eisbruber és K. White (USA) is azt állapította meg, hogy a modern mezőgazdasági üzem semmi lényegesben nem különbözik az ipari vagy akár közlekedési vállalattól, így a mezőgazdasági üzemek működésével kapcsolatos elvek matematikai leírása sem különbözhet. Az oktatásban még a piacorientáció a vállalat-elmélet központja, míg a gyakorlatnak már a management-orientációjú elméletre van szüksége. Ez a matematikai eszközök használatában is eltolódást hozott (ezzel kapcsolatosan a differenciál-számítás és a matematikai programozás előnyeit és hátrányait vetették egybe). Úgy találták, hogy még nincs átfogó vállalat-elmélet, ennélfogva nem gondolkozhatunk egységes vállalati matematikai rendszerben sem, hanem csak meghatározott célokra, egyes problémák megoldására szolgáló eljárásokról mint működési alrendszerekről beszélhetünk. Ezek működtetésénél a teoretikus és a gyakorlati ember szervezettebb együttműködésére van szükség.

*

A Szövetség vezetősége az előadások kisebb részét nem meghatározott személyektől kérte, hanem két tárgykörben — a kockázat és a bizonytalanság kezelése, továbbá a mezőgazdasági kínálat elemzése tárgyában — nemzetközi versenyfelhívást adott ki. A megnevezett körhöz többé-kevésbé szorosan kapcsolódó 61 dolgozat közül egy héttagú nemzetközi bírálóbizottság (ebben a szocialista államokat Magyarország képviselte) válogatott. Főként a 30-as, 40-es éveikben levő szerzők küldtek be értékes anyagot. Nem egy jó tanulmány maradt azonban ismeretlenül, mivel nem fért bele az ilyen előadások számára biztosítható (megnövelt) időkeretbe. Példa lehet erre A. Khalifa szudáni közgazda dolgozata a nomád állattenyésztés kínálati függvényéről, amely eredményesen ötvözte a közgazdasági és szociológiai meggondolásokat.

A vitacsoportok közül a 15. számú viselte az ,,ökonometriai módszerek alkalmazása'' nevet, de másokban is folyt erős gazdaság-matematikai hátteret igénylő munka. A 15-ös csoportban élénk tevékenységet fejtett ki L. V. Kantorovics, de a szocialista országokban folyó munkáról elsősorban a Nyugaton még nem ismert fiatalabb generáció szereplése tett bizonyságot. Különösen a moszkvai Jegyemszkijt és a novoszibirszki Mozsint emelhetjük ki olyanokként, akik nagyban hozzájárultak ahhoz, hogy a konferencián általános megbecsülést vívott ki egy új szovjet közgazdász-generáció.

Sebestyén József

Az V. Nemzetközi Input-Output Konferencia

Az ENSZ Titkárság és a Harvard Egyetem (USA) közös rendezésében, Genfben, 1971. január 11—15. között került sor az V. Nemzetközi Input-Output Konferenciára.

A konferencián az öt világrész valamennyi érdekelt kutató helye képviseltette magát. A mintegy 60 előadást több mint kétszáz szakértő 13 szekcióban hallgatta és vitatta meg. Hazánkból 15-en vettek részt és 6 előadást tartottak (Augusztinovics Mária, Bródy András, Kovács János, Nagy András, Nyitrai Vera, Ujlaki Zsuzsa). A Szovjetuniót népes delegáció képviselte. A delegáció tagjai nyolc előadást tartottak és aktívan részt vettek a konferenciát szervező és irányító munkában. Először vett részt a nemzetközi input-output konferencián az NDK képviselője, aki előadást is tartott.

A konferencia szekciói jól követték az input-output témákban az utóbbi időben bekövetkezett elméleti és gyakorlati változásokat, gazdagodást. Az első szekció például a természeti környezettel kapcsolatos felhasználási, módszertani kérdéseket vitatta meg, melyben helyet kapott a levegőszennyeződés közgazdasági kihatásainak input-output módszerrel történő vizsgálatáról szóló előadás is.

A hazai elméleti és gyakorlati munka számára különösen sok használható tapasztalatot nyújtottak

— a nemzetközi összehasonlításokkal,
— az árszámításokkal,
— a külkereskedelemmel,
— a tervezés-elemzéssel,
— az optimalizációs számításokkal, valamint
— a dinamikus modell kérdéseivel foglalkozó szekciók előadásai és vitái.

A Konferencia rendkívüli témagazdagsága még azok számára is meglepő volt, akik folyamatosan figyelemmel kísérik a témakör nemzetközi szakirodalmát. A konferencia jól bizonyította az input-output technika széles körű alkalmazhatóságát. Különösen hasznosnak ígérkeznek azok az előadások, kutatási irányok, melyek az input-output technikát a programozási, optimalizációs eljárásokkal kapcsolják össze. Továbbá említést érdemelnek azok a sikeres kísérletek, melyek a Leontief-féle dinamikus modell egzakt bizonyítását szolgálják. Ilyen kísérletekről elsősorban a Harvard egyetem munkatársai számoltak be. *(N. S.)*

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat nyomdába érkezett: 1971. III. 8. terjedelem: 11.90 (A/5) ív

71.71335 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST