SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

*

E szám szerzői:

HUNYADI LÁSZLÓ, Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete, HÜTTL ANTÓNIA, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete munkatársa, IMRÉNYI BÉLA, a Központi Statisztikai Hivatal szervezője, KOVÁCS ÁLMOS, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat csoportvezetője, LIGETI ISTVÁN, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete munkatársa, MÓCZÁR JÓZSEF, tanársegéd, Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, Népgazdaság Tervezése Tanszék, SIMON ANDRÁS, a Konjunktúra- és Piackutató Intézet főelőadója, SIVÁK JÓZSEF, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete előadója, STAHL JÁNOS, a DATORG gazdasági-műszaki tanácsadója, SZÉKELY BÉLA, az Országos Tervhivatal főelőadója, SZEPESI GYÖRGY, az Országos Tervhivatal főelőadója, TÉNYI GYÖRGY, a Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézete tudományos munkatársa, VÁRI PÉTERNÉ, operációkutató, INFELOR Rendszertechnikai Vállalat.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető: bármelyik postahivatalnál, a kézbesítőnél, a Posta hírlapüzleteiben, a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI. 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy átutalással a KHI. 215—96162 pénzforgalmi jelző számára. Egyes példányok beszerezhetők az 1055 Budapest V.,;Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u 21. Telefon 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámok: 215—11488 és az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci u. 22. Telefon: 185—612.

Simon András—Stahl János

Optimum, árak és egyensúly a nemzetközi kereskedelemben

A nemzetközi kereskedelem elméletének egyik régi problémája, hogy a kereskedelemben hogyan érvényesülnek az egyes résztvevő országok közös, illetve egyéni érdekei. Nyilvánvaló, hogy mindegyik ország érdekelt a nemzetközi munkamegosztás hatékonyságában, de az is nyilvánvaló, hogy a hatékony külkereskedelem mellett arra törekszik, hogy a kereskedelemből származó előnyök — melyek korlátozottan rendelkezésre álló anyagi javakban testesülnek meg — minél nagyobb mértékben őnála, és ne a partnerországnál jelentkezzenek. Ezzel összefüggő probléma az árak, a hatékonyság és a jövedelemeloszlás közötti összefüggés: milyen külkereskedelmi árak segítik elő, hogy az egyes országok egymástól függetlenül hozott gazdasági döntései valamilyen nemzetek feletti koordináció nélkül is hatékonyak legyenek? Az ilyen árak a fizetési mérleg egyenlegétől függően, a kereskedelemből származó előnyök milyen megoszlását biztosítják az egyes partnerországok között?

E cikk szerzői előtt e kérdések egy több országot átfogó optimumszámítási modell[1] kialakítása során merültek fel, amikor el kellett dönteni, hogy mi legyen a programozási feladat célfüggvénye. A felvetett problémák azonban sokkal messzebbre vezetnek, és az adott válaszok sokkal nagyobb területen használhatók fel, mint egy optimumszámítási feladat célfüggvényének meghatározása.

A tárgyalás mégis szorosan kapcsolódik az optimumszámításhoz. Ennek egyik oka módszerünkben rejlik: a nemzetközi gazdaság és ezen belül az egyes országok gazdaságának termelési lehetőségeit egy optimumszámítási feladat feltételrendszereként írjuk fel, az egyes országok gazdasági céljait pedig egy optimumszámítási feladat célfüggvényeként értelmezzük. Ezekre a valóságot kétségtelenül leegyszerűsítő absztrakciókra az a szintén kétségtelen tény jogosít fel, hogy az egyes országok valóban, ha nem is „optimalizálnak", de legalábbis törekszenek a gazdasági jólét fokozására határaikon belül. A tárgyalás másik kapcsolata az optimumszámítással az, hogy a következtetések levonásánál nem feledkeztünk meg eredeti célunkról, az említett nemzetközi optimumszámítási feladat célfüggvény-problémájának megoldásáról, és ahol erre lehetőség van, kitérünk az ezzel kapcsolatos következtetésekre is.

Cikkünk megállapításai a közgazdasági irodalomban általában nem számítanak újnak, inkább összefoglalását és az előbbiekben említett problémák szerinti kifejtését adják ismert tételeknek. Újnak csak a külkereskedelmi egyensúlyi helyzetek linearitási feltételek melletti unicitásának tárgyalása tekinthető.

[1] Lásd: Simon András: Több szocialista ország gazdasági kapcsolatainak optimalizálási modellje c. cikkét ugyanebben a számban.

Mivel a felvetett problémákkal közvetlenül vagy közvetve a nemzetközi kereskedelemmel foglalkozó irodalom egy tekintélyes hányada foglalkozik, nem vállalkoztunk teljes bibliográfia közlésére. Irodalomra csak ott hivatkozunk, ahol a kérdésben alapvető műről vagy egy tétel közvetlen átvételéről van szó.

Néhány alapfeltevés

Tegyük fel, hogy a nemzetközi kereskedelemben résztvevő országok mindegyike az általa fogyasztott termékmennyiségekből álló x vektort egy konkáv $c(x)$ függvény maximalizálása alapján értékeli.

Az összes olyan lehetséges termékkombinációk halmazáról, melyet egy ország elő tud állítani, feltesszük, hogy konvex. A kereskedelemben résztvevő országok mindegyikének az az érdeke, hogy a fogyasztásra kerülő termékeknek olyan kombinációja jöjjön létre, amelyből a saját részesedése a legnagyobb célfüggvény-értéket biztosítja számára és egyik országnak sem fűződik közvetlenül érdeke ahhoz, hogy a másik ország milyen célfüggvény-értéket ér el.

Jövedelemeloszlás

Nyilvánvaló, hogy az adott lehetőségeken belül nem növelhető mindegyik ország célfüggvény-értéke tetszés szerint, sőt egy bizonyos határon túl az egyik ország célfüggvény-értéke már csak a többi ország rovására nőhet. Ezen határnak megfelelő két termékkombináció esetén nem tudjuk megmondani, hogy az egyik termékkombinációt vagy a másikat részesítsük-e előnyben anélkül, hogy egyben az egyes országok célfüggvényeit is rangsorolnánk. Ilyen rangsor felállítása igencsak nehéz lenne; valamilyen nemzetekfeletti ítélőszék felállítását tenné szükségessé, amely eldönti, hogy az egyes országok között milyen életszínvonal különbségek „igazságosak" vagy „igazságtalanok". Annak érdekében, hogy erre a feladatra ne kelljen vállalkoznunk, nevezzük optimálisnak mindazokat a helyzeteket, melyekben bármelyik ország célfüggvény-értéke már csak úgy növelhető, hogy ezzel egyidejűleg valamelyik ország célfüggvény-értékét csökkentenünk kell. Az optimum ilyen fogalmát nevezzük Pareto-féle optimumnak.

Kuhntól és Tuckertől származik az a tétel [9], hogy az ilyen értelemben optimális helyzetet biztosító termékkombinációk bármelyike előállítható egy olyan programozási feladat optimális megoldásaként, ahol a feladat célfüggvénye az egyes résztvevők célfüggvényeinek nem-negatív lineáris kombinációja. (A tétel az úgynevezett vektor-maximum problémaként ismert.)

A programozási feladat célfüggvényeinek súlyrendszere határozza meg, hogy az egyes országok hogyan részesednek a program eredményeiből. Általában minél nagyobb egy ország célfüggvényének a súlya a közös célfüggvényben, annál nagyobb az illető ország célfüggvény-értéke az optimális programban. Ezt az állításunkat később pontosabban is megfogalmazzuk.

Nemzetközi optimalizációs számítás esetén sem vállalkozhatunk arra, hogy az egyes országok jövedelmi színvonalát összehasonlítsuk és ítéletet alkossunk arra vonatkozóan, hogy a jövedelmek egy adott elosztása igazságos-e vagy sem. Feladatunknak legfeljebb azt tekinthetjük, hogy optimumszámítást végzünk úgy, hogy az egyes feladatok célfüggvényeit a résztvevő országok célfüggvényeinek más és más súlyozásával képezzük és az egyes számítások eredményeit összehasonlítjuk egymással és az optimalizálás előtti helyzettel. A gyakorlatban természetesen eléggé korlátozott a jövedelmek eloszlásának az a sávja, amelyet reálisnak tekinthetünk: valószínű, hogy csak olyan variánsok tekinthetők minden ország részéről elfogadhatónak, melyek mindegyik résztvevő ország számára nagyobb célfüggvényértéket biztosítanak, mint az optimalizálás előtti helyzetben.

Bár nem tudjuk előre, az optimális program ismerete nélkül, hogy egy adott súlyrendszer milyen céfüggvény-értéket biztosít a résztvevőknek, a valutaárfolyamok és a súlyrendszer később ismertetendő összefüggései alapján valószínűleg megbecsülhető lenne, hogy a jövedelmek bizonyos elosztása az optimalizálás során hozzávetőlegesen milyen célfüggvény súlyok mellett valósulna meg.

Árak, egyensúly és hatékonyság

A jövedelemelosztás meghatározásával ellentétben már megoldható közgazdasági feladat, hogy a gyakorlatban a jövedelmek elosztása milyen módon történjen.

Az elosztás egyik meghatározója az ár. Nyilván minél magasabb valamilyen termék külkereskedelmi ára, annál nagyobb jövedelmet ér el az exportáló ország az importáló országgal szemben.

A jövedelem elosztásának másik meghatározója a külkereskedelmi mérleg. Az aktív kereskedelmi mérleg viszonylag nagyobb exportot és kisebb importot jelent. Adott árakon tehát a kereskedelmi mérleg aktívvá válása csökkenti az illető ország rendelkezésére álló termékek mennyiségét.

Az árakat és a kereskedelmi mérleg egyenlegét, mint a jövedelem elosztásának formáit nem célszerű tetszőlegesen alkalmazni. Az áraknak ugyanis nemcsak a jövedelmek elosztásánál van szerepük, hanem az optimális munkamegosztás kialakításának eszközei is lehetnek, míg a kereskedelmi mérleg egyenlegének ilyen szerepe nincsen.

Az egyes országok termelési szerkezetük kialakításánál általában mérlegelik, hogy az adott külkereskedelmi árakon mit érdemes otthon előállítani, illetve mit érdemes inkább importálni. Megfelelő nemzetközi árak esetén az egyes országok annak ellenére, hogy egymástól elkülönülve — nem ismerve a másik fél magatartását — döntenek, a résztvevő országokat együttesen tekintve is (Pareto) optimális termelőtevékenységet és külkereskedelmi szerkezetet alakíthatnak ki, míg nem megfelelő árak esetén az országonként decentralizált döntések eredményeként nem optimális termelési szerkezet jön létre.

Célszerű tehát a nemzetközi kereskedelmet olyan árakon folytatni, hogy az egyes országok döntései optimális nemzetközi munkamegosztásra vezessenek, és a jövedelmek elosztását kizárólag a külkereskedelmi mérlegegyenleg funkciójává kell tenni.

Felmerül a kérdés, hogy mik ezek a „megfelelő", hatékonyságot biztosító árak. A kérdés megválaszolása előtt fogalmazzuk meg pontosabban a külkereskedelmi árak iránt támasztott követelményeket.

Az egyes országok termelési lehetőségeit és célfüggvényét lineáris függvényekkel írjuk le. E feltevésünk kizárólag a tárgyalás egyszerűsítését szolgálja, következtetéseink bármilyen konvex termelési halmaz és maximalizálandó konkáv célfüggvény esetén érvényesek.

Tegyük fel, hogy i ország a következő feltételek mellett maximalizálja a z_i változó értékét:

$$
\begin{aligned}
A_i x_i &\leq b_i \\
H_i x_i + u_i z_i - y_i &\leq 0 \\
P y_i &\leq \alpha_i \qquad (1) \\
x_i \geq 0, \; z_i &\geq 0
\end{aligned}
$$

ahol x_i vektor elemei a termelő tevékenységek szintje (ide sorolhatjuk a programozási modellben nem szereplő országokkal folyó exportot és importot is);

z_i a fogyasztás szintje (skalárváltozó)

y_i a külkereskedelmi változók vektora (a pozitív elemek az i országba irányuló forgalom, a negatív elemek az i országból a többi országba irányuló forgalom volumenét mutatják);

A_i mátrix elemei a tevékenységek fajlagos felhasználását mutatják a megfelelő elsődleges erőforrásokból;

b_i az elsődleges erőforrások vektora (ide sorolhatjuk a külkereskedelmi lehetőségeket is a programozási modellben nem szereplő országokkal);

H_i pozitív elemei a tevékenységek fajlagos anyagráfordítását, negatív elemei a tevékenységek fajlagos kibocsátását jelölik;

u_i a fogyasztás egységnyi szintjének fajlagos termékfelhasználása; (skalárváltozó)

P a külkereskedelmi árak vektora;

α_i a külkereskedelmi mérleg egyenlege. Az α_i számokra teljesül a $\Sigma\alpha_i = 0$ feltétel.

A felírt feladat annak megfogalmazása, hogy i ország külkereskedelmi szerkezetének kialakításakor saját termelési lehetőségeinek ismeretén kívül csak két információnak van birtokában: a külkereskedelmi árnak és az előírt devizaegyenlegnek. Ezek ismeretében választja ki a számára optimális termelési és külkereskedelmi tevékenységeket. Kérdés az, hogy milyen P árak mellett lesz az országok közötti munkamegosztás a már definiált értelemben optimális.

A felírt modell csak megközelítően tükrözi a valóságot annyiban, hogy valójában az egyes országok egyrészt nem képesek optimális döntésre, másrészt az árakon kívül rendelkeznek egyéb információkkal is a partnerek termelési lehetőségeire, fogyasztására vonatkozóan. Az előbbi feltevéssel már foglalkoztunk. Ami az utóbbit illeti, megjegyezzük, hogy az árak csak akkor veszítenék el teljesen jelentőségüket, ha a partnerország termelési lehetőségeiről az információ teljes volna. Ilyen tökéletes információ azonban nem áll semmilyen döntésthozó rendelkezésére, még az országon belüli termelési lehetőségekről sem.

Visszatérve a modellre, bebizonyítjuk, hogy annak, hogy az (1) feladatok optimális megoldásaként Pareto-optimum jöjjön létre, az a feltétele, hogy az optimális megoldásra $\sum_i y_i \leq 0$ legyen, vagyis az exportkínálat ne legyen kisebb, mint az importkereslet. A bizonyítás egyben arra is választ ad, hogy a kereslet és a kínálat ilyen egyensúlya milyen külkereskedelmi árak mellett valósul meg.

1. tétel[2]: Ha az (x_i^*, y_i^*, z_i^*)-k az (1) feladatoknak olyan optimális megoldásai, melyekre teljesül $\sum_i y_i^* \leq 0$, akkor vannak olyan $\lambda_i > 0$ számok, hogy az (x_i^*, z_i^*)-k optimális megoldásai az

$$A_i x_i \leq b_i \quad (i = 1, 2 \ldots) \tag{2}$$

$$\sum_i H_i x_i + \sum_i u_i z_i \leq 0$$

$$x_i \geq 0 \quad z_i \geq 0$$

$$\sum_i \lambda_i z_i \to \max$$

lineáris programozási feladatnak, az ún. közös feladatnak.

Megfordítva, ha valamely $\lambda_i > 0$-k mellett (x_i^*, z_i^*) optimális megoldása a (2) feladatnak akkor van olyan P vektor és vannak olyan α_i számok, melyekre $\sum_i \alpha_i = 0$ és az $(x_i^*, H_i x_i^* + u_i z_i^*, z_i^*)$-k optimális megoldásai a megfelelő (1) feladatoknak.

(Az említett vektor-maximum tétel alapján az állítást röviden úgy is fogalmazhatjuk, hogy modellünkben a Pareto optimális és az egyensúlyi helyzetek egybeesnek.)

Bizonyítás. Szükségünk lesz az (1) feladatok duális feladataira:

$$q_i A_i + p_i H_i \geq 0$$

$$p_i u_i \geq 1 \tag{3}$$

$$p_i - \nu_i P = 0$$

$$q_i \geq 0, \quad p_i \geq 0, \quad \nu_i \geq 0$$

$$q_i b_i + \nu_i \alpha_i \to \min;$$

valamint a (2) feladat duálisára:

$$\bar{q}_i A_i + pH_i \geq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

$$pu_i \geq \lambda \qquad (i = 1, 2 \ldots)$$

$$\bar{q}_i, p \geq 0$$

$$\sum_i \bar{q}_i b_i \to \min .$$

Ha (x_i^*, y_i^*, z_i^*) optimális megoldása (1)-nek, akkor van olyan (3)-t kielégítő (q_i^*, p_i^*, ν_i^*), hogy

$$q_i^* b_i + \nu_i^* \alpha_i = z_i^*$$

[2] Hasonló tétel bizonyítása — nemlineáris esetében — tudomásunk szerint először Uzawa [13] cikkében szerepel. Egy más lineáris modellre Micielski és Piaszczynski bizonyítottak ilyen tételt [10].

Minthogy feladatunk esetén $\nu_i \neq 0$, innen

$$\alpha_i = \frac{z_i^* - q_i^* b_i}{\nu_i^*}$$

amit összegezve és figyelembevéve $\sum_i \alpha_i = 0$-t

$$\sum_i \frac{z_i^*}{\nu_i^*} = \sum_i \frac{q_i^*}{\nu_i^*} b_i.$$

Legyen $\lambda_i = \frac{1}{\nu_i^*}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. $\sum_i y_i \leq 0$ folytán az (x_i^*, y_i^*, z_i^*)-k lehetséges megoldásai (2)-nak és $P^* = \frac{p_1^*}{\nu_i^*} = \ldots = \frac{p_i^*}{\nu_i^*} = \ldots$-t választva $\left(\ldots \frac{q_1^*}{\nu_i^*} \ldots, p^*\right)$ pedig megoldása (4)-nek. Utolsó egyenlőségünk folytán a szóban forgó megoldások optimális megoldások.

A megfordítást bizonyítandó legyen $(\ldots \bar{q}^* \ldots p^*)$ (4) egy optimális megoldása. Ismét a feladat természetéből következően feltehető, hogy $p^* \neq 0$. Legyen $P = p^*$

$$p_i^* = \frac{p^*}{\lambda_i}, \quad q_i^* = \frac{\bar{q}_i^*}{\lambda_i}, \quad \nu_i = \frac{1}{\lambda_i},$$

$$y_i^* = Hx_i^* + u_i z_i^* \text{ és } \alpha_i = Py_i^*.$$

Akkor egyrészt nyilván (x_i^*, y_i^*, z_i^*), illetve (q_i^*, p_i^*, ν_i^*) lehetséges megoldásai (1)-nek, illetve (3)-nak, másrészt a dualitási tétel folytán

$$q_i^* b_i + \nu_i^* \alpha_i = \frac{\bar{q}_i^*}{\lambda_i} A_i x_i^* + \frac{p^*}{\lambda_i} (H_i x_i^* + u_i z_i^*) =$$

$$= \frac{1}{\lambda_i} (\bar{q}_i^* A_i + p^* H_i) x_i^* + p_i^* u_i z_i^* = z_i^*,$$

azaz e megoldások optimális megoldások is. Ugyancsak a kiegészítő eltérések tétele miatt

$$\sum_i \alpha_i = p^* \sum_i (H_i x_i^* + u_i z_i^*) = 0,$$

amivel a tételt bizonyítottuk.

Megjegyezzük még, hogy

$$\alpha_i = Py_i^* = p^*(H_i x_i^* + u_i z_i^*) = -q_i^* A_i x_i^* + \lambda_i z_i^* = \lambda_i z_i^* - q^* b_i .$$

A bizonyítás során adódott, hogy az egyensúlyt és egyúttal Pareto-optimumot biztosító árrendszer egybeesik egy közös feladat megoldásaként kapott árnyékárakkal.

Az is látható a bizonyításból, hogy az egyensúlyra az jellemző, hogy az ország-feladatok megoldásaként kapott árnyékárak csak egy $\nu_i = \frac{1}{\lambda_i}$ szorzóban különböznek az egyensúlyi külkereskedelmi áraktól. Ha az országfeladat árnyékárrendszerét tekintjük az illető ország belföldi árainak, akkor ezt a szorzót, mint a külkereskedelmi árak belföldi árakra való egységes átszámítási kulcsát, nevezhetjük valutaszorzónak vagy valutaárfolyamnak. A tétel bizonyítása alpján az egyes országok így értelmezett valutaárfolyama az illető ország célfüggvényének a közös feladat célfüggvényében való súlyával azonos.

Ez a tény arra enged következteni, hogy egy optimumszámítási feladat numerikus kiszámítása során a célfüggvények súlyának meghatározásakor bizonyos esetekben a tényleges valutaárfolyamok ismerete segítséget adhat. Akkor ugyanis, amikor szoros kapcsolat van az ország-feladatok árnyékárrendszere és a tényleges belföldi árak között: pl. az egyes országok célfüggvényértéke az illető ország belföldi valutájában van megadva (pl. adott ágazati struktúrájú nemzeti jövedelem Ft-ban). A különböző országok árnyékárszínvonalának arányai ekkor feltehetően közel lesznek a tényleges árszínvonalak arányaihoz, a modell valutaárfolyam-arányai pedig közel lesznek a tényleges valutaárfolyam-arányokhoz. Ez a tény természetesen csak igen hozzávetőleges információt nyújt a modell célfüggvény-súlyaira vonatkozóan. A tényleges valutaárfolyamokat is különbözőképpen értelmezhetjük: úgy, mint valamilyen pénzügyi elszámolásnál használt árfolyamokat, vagy a vásárlóerő-paritás, vagy esetleg külkereskedelmi valutaszorzók átlagaként számított árfolyamokat. Valószínű azonban, hogy ha a súlyok megállapításánál nagyságrendileg az így számbajövő árfolyamokhoz közelálló értékek mellett döntünk, akkor olyan optimumhoz jutunk, amely nem lesz túl „részrehajló": minden résztvevő számára célfüggvényérték-javulást eredményez az optimalizálás előtti helyzethez képest.

Az egyensúly unicitása

A közös programozási feladatban más és más az optimális megoldás attól függően, hogy a célfüggvényben milyen az egyes országok célfüggvényeinek a súlya. Nyilvánvaló, hogy az egyes országok feladatait tekintve is többféle olyan helyzet lehetséges, hogy a külkereskedelemben a kereslet és kínálat egyensúlya biztosított. Ezek az egyensúlyi helyzetek attól függően különbözhetnek, hogy a külkereskedelmi mérleg egyenlege (a devizaegyenleg) mekkora. Különböző mérlegegyenlegek mellett más és más lehet a termelés optimális szerkezete és az egyensúlyt biztosító árrendszer is. Kérdés, hogy a mérlegegyenleg változtatása hogyan befolyásolja az egyes országok célfüggvényeit.

Tegyük fel, hogy az egyik egyensúlyi helyzet abban különbözik a másiktól, hogy az *A* ország külkereskedelmi mérlegegyenlege különböző. Ha a külkereskedelmi árak változatlanok lennének, akkor abban a variánsban, ahol *A* ország aktívuma nagyobb (passzívuma kisebb), a nagyobb értékű export és kisebb értékű import révén kevesebb termék jutna belföldre és így *A* ország célfüggvényértéke is kisebb lenne, mint a másik variáns esetén. Ez azt jelentené, hogy az egyensúlyi árak követelménye és a kereskedelmi mérleg egyenlegének előírása egyértelműen meghatározná a jövedelem eloszlását a kereskedelemben résztvevő országok között: minél passzívabb (aktívabb) egy ország egyenlege, annál nagyobb (kisebb) lesz célfüggvényértéke a többi ország rovására (javára).

Valójában azonban a mérlegegyenleg változtatásával az egyensúlyi árak is változnak. Tegyük fel, hogy *A* ország egyenlege passzívabbá válik. Ha ekkor a külkereskedelmi árarányok *A* ország rovására változnak, (az általa exportált termékek árának csökkenésével és az importált termékek árának növekedésével), és a változás elég nagymértékű, akkor olyan helyzet is előállhat, hogy

A ország célfüggvényértéke a mérlegegyenleg romlása ellenére csökken. Ezzel eljutottunk a közgazdaságtan egyik érdekes elméleti problémájához, az egyensúly ún. unicitásának problémájához. Ha a mérlegegyenlegek rendszere és az említett közös programozási feladatban a célfüggvények súlyrendszere között egyértelmű megfeleltetés létesíthető, akkor ez annyit jelent, hogy egy egyenlegrendszer előírása mellett csak egyféle optimális munkamegosztás és egyféle egyensúlyi árrendszer van. Ekkor beszélünk az egyensúly unicitásáról.

Ha az egyes országok valutaárfolyamait a közös programozási feladat súlyrendszereként definiáljuk, akkor ugyanezt egyszerűbben is fogalmazhatjuk: az unicitás fennáll, ha a valutaleértékelés mindig javítja, a valutafelértékelés mindig rontja az illető ország kereskedelmi mérlegét.

Régóta keresi a közgazdaságtudomány a választ arra, hogy a valóságban fennáll-e a külkereskedelem egyensúlyának unicitása. A közgazdasági elmélet sok elégséges feltételt talált már, melynek érvényessége esetén bizonyítható az unicitás. Ezek a feltételek azonban — bár többé-kevésbé megközelítik a valóságot — teljesen sohasem érvényesek. Így ezeknek az eredményeknek a segítségével csak valószínűsíthető, de teljesen nem igazolható az unicitás fennállása. Hasonlóan, a világkereskedelemben végbemenő változások figyelése is (pl. valutaleértékelések és -felértékelések vizsgálata), bár valószínűsíti az egyensúly unicitását, de nem ad tökéletesen megnyugtató választ a kérdésre.

Nem foglalkozunk részletesen az egyensúly unicitásának a közgazdasági irodalomban igen nagy terjedelemben tárgyalt témájával, csak példaképpen felsorolunk néhány elégséges feltételt, melyek biztosíthatják az unicitás létezését.[3]

A feltételek egyik csoportja az országok (gazdasági egységek) célfüggvényeire vonatkozik. Az e feltételeket vizsgáló modellek általában azzal az egyszerűsítő feltételezéssel élnek, hogy minden ország egy adott termékkészlettel gazdálkodik, a termelés tehát ki van zárva a modellből. Ilyen esetben az ún. közös társadalmi célfüggvény létezése következtében fennáll az unicitás, ha

vagy a célfüggvény minden országban azonos pozitív homogén függvény,

vagy a célfüggvény pozitív homogén, de nem szükségszerűen azonos minden országban, és minden ország azonos termékkészlettel rendelkezik.[4]

A feltételek másik csoportja a termékek keresleti függvényeire vonatkozik. Ilyen feltétel például az ún. szigorú bruttó helyettesíthetőség: ha valamely termék ára nő, akkor az iránta való kereslet csökken, a többi termék iránti kereslet pedig nő.[5] Ismert, hogy ez a feltétel általában fennáll, de gyakran vannak a termékek komplementaritásából (egymást kiegészítő jellegéből) adódó kivételek.

A célfüggvények és a keresleti függvény bruttó helyettesíthetőségi tulajdonsága közötti kapcsolatot jól mutatja, hogy ha az egyes országok célfüggvénye egy CES függvény,[6] akkor a bruttó helyettesíthetőségi feltétel ekvivalens azzal, hogy a termékek közötti helyettesítés rugalmassága nagyobb, mint 1.[7]

[3] Az unicitás feltételeiről igen átfogó ismertetést nyújt [4] vagy [11].

[4] E feltételekről lásd pl. [5], [6], [8], [12].

[5] Erre az estre Arrow—Block—Hurwicz igazolta az unicitás fennállását. [1], ill. [3]-ben Wald [14] gondolatának továbbfejlesztésével. A bruttó helyettesíthetőségnél valamivel enyhébb feltétel mellett Gale [7] bizonyította az unicitást.

[6] A függvény ismertetését lásd pl. [2].

[7] Lásd Chipman [4], 726. o.

A következőkben lineáris célfüggvények feltételezése mellett vizsgáljuk az unicitás feltételeit. Az említett modellekkel szemben a termelésre is kiterjesztjük a modellt: feltesszük, hogy a termelési lehetőségek egy lineáris egyenlőtlenségrendszerrel határozhatók meg.

Könnyen belátható, hogy ez esetben általában nem áll fenn a bruttó helyettesíthetőség, sőt az unicitás sem.

Példa több egyensúlyra

Az alábbi esetben például azonos mérlegegyenleg mellett két ország között többféle egyensúlyi helyzet létezik.

Legyenek 1 és 2 ország termelési lehetőségei és célfüggvénye:

$$\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & +3x_2 & & & & \leq 20 \\
-x_1 & & -y_1 & & +2z & \leq 0 \\
 & -x_2 & & -y_2 & +z & \leq 0 \\
 & & P_1y_1 & +P_2y_2 & & \leq 0 \\
\hline
 & & & & z & \to \max
\end{array}$$

valamint

$$\begin{array}{rrrrrl}
2x_1' & +x_2' & & & & \leq 30 \\
-x_1' & & +y_1' & & +z' & \leq 0 \\
 & -x_2' & & +y_2' & +3z' & \leq 0 \\
 & & -P_1y_1' & -P_2y_2' & & \leq 0 \\
\hline
 & & & & z' & \to \max
\end{array}$$

A 0 egyenleg mellett három egyensúly, tehát háromféle Pareto optimális program létezik. A közös feladat célfüggvénye a három esetben:

$$\text{(a)} \quad \frac{15}{30}z + \frac{15}{30}z'$$

$$\text{(b)} \quad \frac{18}{30}z + \frac{12}{30}z'$$

$$\text{(c)} \quad \frac{10}{30}z + \frac{20}{30}z'.$$

Az optimális programok a következők:

Változók	Változók értékei (a)	(b) esetben	(c)
x_1	20	20	17
x_2	0	0	1
x_1'	2	0	0
x_2'	26	30	30
$y_1 = y_1'$	-4	-8	-9
$y_2 = y_2'$	8	6	3
z	8	6	4
z'	6	8	9

A külkereskedelmi árarány — mivel a mérlegegyenleg 0 — megegyezik az export és az import arányának reciprokával.

Látható, hogy a célfüggvénysúlyok (valutaárfolyamok) változtatása ellenére a kereskedelmi mérleg egyenlege változatlan, az optimális célfüggvényérték viszont az 1. országban 8-tól 4-ig, a 2. országban 6-tól 9-ig változik.

Amikor a példa több egyensúly létezésének lehetőségét bizonyítja, egyben azt is sugallja, hogy az a valóságban eléggé valószínűtlen. Feltételezései ugyanis több szempontból speciálisak és szélsőségesek:

a termékek nem helyettesíthetik egymást a fogyasztásban;

a két ország célfüggvénye nemcsak különböző, hanem speciálisan olyan tulajdonságú, hogy mindkét ország saját exporttermékét fogyasztja nagyobb arányban a másik termékhez képest.

Egy speciális lineáris modell

Belátható, hogy egy másik szélsőséges esetet tekintve példának, amikor az országok fogyasztásában a termékek változatlan arányban helyettesíthetik egymást, valamint nem kerülnek külkereskedelmi forgalomba továbbfeldolgozásra kerülő termékek, akkor az egyensúly unicitása fennáll.

Tekintsünk két országot, 1. és 2. országot.

Legyen az egyes országokra vonatkozó modell

$$\begin{aligned} A_i x_i &\le b_i \\ H_i x_i + z_i - y_i &\le 0 \\ P y_i &\le \alpha_i \\ x_i \ge 0, \quad z_i &\ge 0 \\ c_i z_i &\to \max \qquad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{5}$$

alakú, ahol a H_i mátrixok minden eleme nempozitív, minden sora tartalmaz legalább egy nemzérus elemet és $c_i > 0$.

Tegyük fel, hogy az (5)-nek most megfelelő

$$\begin{aligned} A_1 x_1 \qquad\qquad\qquad &\le b_1 \\ A_2 x_2 \qquad\qquad &\le b_2 \\ H_1 x_1 + H_2 x_2 + z_1 + z_2 &\le 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \\ \lambda_1 c_1 z_1 + \lambda_2 c_2 z_2 &\to \max \end{aligned} \tag{6}$$

,,közös feladatok'' minden optimális megoldása nem degenerált.

Az egyes országokra vonatkozó (5) alakú modell esetén is bizonyítható az 1. tételnek megfelelő állítás. Ennek alapján egyensúly esetén minden α_i külkereskedelmi mérlegegyenleg rendszer egy valamilyen λ_i-rendszernek megfelelő (6) feladat és duálisának optimális megoldásaiból adódik, az

$$\alpha_i = \lambda_i c_i z_i^* - q_i^* b_i$$

összefüggések alapján. Minthogy a (6) feladatban a λ_i-kat ugyanazzal a számmal megszorozva ugyancsak ezzel a számmal szorzódik P és α_i is, anélkül, hogy az (5) és (6) feladatok optimális megoldásai megváltoznának, csak az $(1, \lambda_2)$ alakú súlyrendszerekkel foglalkozunk. Érdektelennek tekintjük és kizárjuk azt az esetet is, amikor z_2^* minden eleme 0.

Ekkor fenn áll a következő:

2. tétel: A tett feltevések mellett $\alpha_1 = -\alpha_2$ külkereskedelmi mérlegegyenlegekhez legfeljebb egy olyan $(1, \lambda_2)$ súlyrendszer tartozik, hogy az (5) feladatok optimális megoldásaira $y_1 \leq -y_2$ teljesül.

Bizonyítás. Két országot tartalmazó modellünk esetében elég azt belátnunk, hogy

$$\alpha_1 = c_1 z_1^* - q_1^* b_1$$

mint λ_2 függvénye szigorúan monoton (amint a modell közgazdasági tartalma alapján várható, csökken).

Tekintsük λ_2 két tetszőleges $\lambda_2^{(1)}$, $\lambda_2^{(2)}$ értékét, melyre $\lambda_2^{(1)} < \lambda_2^{(2)}$

Legyen z_1 optimális értéke $(1, \lambda_2^{(1)})$ súlyok mellett $z_1^{(1)}$, valamint $(1, \lambda_2^{(2)})$ súlyok mellett $z_1^{(2)}$.

Ekkor

$$c_1 z_1^{(2)} + \lambda_2^{(1)} c_2 z_2^{(2)} \leq c_1 z_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)} c_2 z_2^{(1)}$$

és

$$c_1 z_1^{(1)} + \lambda_2^{(2)} c_2 z_2^{(1)} \leq c_1 z_1^{(2)} + \lambda_2^{(2)} c_2 z_2^{(2)},$$

melyekből

$$c_2 z_2^{(1)} \leq c_2 z_2^{(2)},$$

amit az első összefüggéssel összehasonlítva

$$c_1 z_1^{(2)} \leq c_1 z_1^{(1)}$$

adódik.

A (6) feladat duálisa

$$\begin{aligned} q_1 A_1 + pH_1 &\geq 0 \\ q_2 A_2 + pH_2 &\geq 0 \\ p &\geq c_1 \\ p &\geq \lambda_2 c_2 \\ q_1 b_1 + q_2 b_2 &\to \min \end{aligned} \tag{7}$$

és (6) optimális megoldásainak nemdegenerált voltából és a H_i mátrixokra tett feltevés folytán (7) egyetlen optimális megoldásában $p^* = \max \{c_1, \lambda_2 c_2\}$, ahol a max komponensenként értendő. Igy a $\lambda_2^{(2)}$-hez tartozó $q_1^* b_1$ érték nagyobb a $\lambda_2^{(1)}$-höz tartozó megfelelő értéknél, mivel rögzített λ_2 esetén

$$\begin{aligned} q_1 A_1 &\geq -p^* H_1 \\ q_1 &\geq 0 \\ q_1 b_1 &\to \min \end{aligned}$$

feladat optimumértékéről van szó. A tételt ezzel igazoltuk.

Ha modellünkben több mint két országot veszünk figyelembe, nem alkalmazható a 2. tételéhez hasonló bizonyítás, és valamelyest módosulnak is az unicitás feltételei.

Tekintsünk ugyanis két tetszőleges λ_i-rendszert. $(i = 1, 2, \ldots n)$. Normáljuk őket a két-országos modellhez hasonlóan úgy, hogy az egyik ország célfüggvény-súlya mindkét súlyrendszerben azonos legyen. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy λ_1 értéke azonos mindkét rendszerben és azt is, hogy az összes többi ország célfüggvény-súlya a második λ_i-rendszerben nem kisebb, mint az elsőben.

Ha ekkor a 2. tétel bizonyításának logikáját követve be tudnánk bizonyítani, hogy a két λ_i rendszerben az

$$\alpha_1 = \lambda_1 c_1 z_1 - q_1 b_1$$

összefüggés alapján különböző α_1 értékek adódnak, akkor bizonyítva lenne a 2. tételnek megfelelő állítás: modellünk feltevései mellett egy α_i rendszerhez ($\Sigma\alpha_i = 0$) csak egy olyan $(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ rendszer van, hogy az (5) feladatok optimális megoldásaira $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\Sigma y_i^* \leq 0$ teljesül.

A megfelelő feltételek mellett továbbra is igaz az előbbi bizonyítás azon állítása, miszerint a második λ_i-rendszerbeli $q_1^* b_1$ érték nagyobb az első rendszerbeli megfelelő értéknél, mivel $p^* = \max\{\lambda_1 c_1, \lambda_2 c_2 \ldots \lambda_n c_n\}$, és $q_1^* b_1^*$ a

$$q_1 A_1 \geq -p^* H_1$$
$$q_1 \geq 0$$
$$q_1 b_1 \to \min$$

feladat optimumértéke.

Általánosan nem igaz azonban a két országot tartalmazó modell $c_i z_i$-kre vonatkozó állítása. Nem mindig teljesül ugyanis, hogy tekintve egy $\lambda_1^{(1)} \lambda_2^{(1)} \ldots \lambda_n^{(1)}$ és egy $\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)} \ldots \lambda_n^{(2)}$ rendszert, ahol $\lambda_1^{(1)} = \lambda_1^{(2)}$ és a további i-kre $\lambda_i^{(1)} \leq \lambda_i^{(2)}$, akkor a megfelelő $z_1^{(1)}, z_2^{(1)} \ldots z_n^{(2)}$ és $z_1^{(2)}, z_2^{(2)} \ldots z_n^{(2)}$ optimális megoldásokra $c_1 z_1^{(1)} \geq c_1 z_1^{(2)}$.

Sőt, amint a következő példa is mutatja, a fenti feltétel nem teljesülése esetén azonos α_i rendszer mellett több egyensúlyi helyzet is létrejöhet.

Tegyük fel, hogy három ország létezik, és $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = 72$, $\alpha_3 = -84$. Mindegyik országnak három termék termelésére van lehetősége, de az 1. ország csak az első terméket, a 2. ország csak a második terméket és a 3. ország csak a harmadik terméket fogyasztja és a célfüggvények koefficiensei a fogyasztott termékekre vonatkozóan 1, a többi termékre vonatkozóan 0. Két egyensúlyi helyzetet tekintsünk, az első esetben $\lambda_1^{(1)} = 1$, $\lambda_2^{(1)} = 2$, $\lambda_3^{(1)} = 3$, a második esetben $\lambda_1^{(2)} = 1$, $\lambda_2^{(2)} = 6$, $\lambda_3^{(2)} = 6$.

Anélkül, hogy a termelési lehetőségek teljes halmazát meghatároznánk, feltehetjük, hogy az egyes országok termelési lehetőségei olyanok, hogy az első esetben az 1. ország termelése a három termékből rendre 0, 0, 4, a 2. országé 0, 0, 24, a 3. országé 0, 0, 24. A második esetben az 1. ország termelése 1, 1, 3, a 2. ország termelése 6, 6, 18, a 3. ország termelése 6, 6, 18. Könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\sum_i \lambda_i^{(1)} c_i z_i^{(1)} \geq \sum_i \lambda_i^{(1)} c_i z_i^{(2)} \text{ és } \sum_i \lambda_i^{(2)} c_i z_i^{(2)} \geq \sum_i \lambda_i^{(1)} c_i z_i^{(2)},$$

megfelelő termelési halmazok mellett tehát mindkét termelési program optimális.

Könnyen ellenőrizhető az is, hogy a termelés és fogyasztás értékének különbsége országonként mindkét esetben azonos a megadott devizaegyenlegekkel, valamint az is, hogy a két esetben az országok célfüggvény-értékei rendre 0, 0, 52, illetve 7, 7, 39.

Az unicitás eddigi értelmezése mellett példánk kétségtelenül több egyensúly létezését bizonyítja.

A példa ennek ellenére egy kissé „sántít". A második helyzetben ugyanis az elsőhöz képest — a célfüggvény-súlyok növelésének eredményeként — nagyon megnőtt a „külkereskedelmi árak" színvonala ($p^* = \max\{\lambda_1 c_1 \ldots \lambda_n c_n\}$-ből következően). Így például a 2. ország értékben előírt kereskedelmi aktívuma az „infláció" utáni árrendszerben „reálértéken" jóval kisebb exportszállításokkal is teljesíthető. Ez teszi lehetővé, hogy az új helyzetben a 2. országnak nagyobb legyen a célfüggvény-értéke. A nominálisan azonos α_i-rendszerek ellenére ilyen értelemben mégsem azonosak a külkereskedelmi mérlegek egyenlegei a két helyzetben.

Az „infláció" hatását vagy úgy szűrhetjük ki, hogy másképpen normáljuk a λ_i-rendszereket, például előírjuk, hogy $\sum_i \lambda_i = 1$, vagy pedig csak olyan helyzeteket tekintünk, melyeknél $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2 \ldots, n)$.

Ez utóbbi esetekre nem sikerült általánosan bizonyítanunk az unicitást. A modell feltevéseinek következményeként fennálló nagyfokú helyettesítési lehetőségek a termékek között azonban nagymértékben valószínűsítik azt a hipotézist, hogy az unicitás ilyen esetben a több országos modellre is fennáll.

Unicitás igazolása tényadatokkal

A speciális modellekről visszatérve a valóságos gazdasághoz, érdekes lenne egy olyan vizsgálat, amely tényadatok segítségével adna valószínű választ arra a kérdésre, hogy a valóságban fennáll-e az unicitás. Erre egy nemzetközi optimumszámítási modell lehetőséget adna. A vizsgálat a termelési technológiákra és a célfüggvényre vonatkozó tényadatok felhasználásával végzett optimumszámítások sorozatát jelentené. Az egyes számításokban a közös célfüggvény súlyrendszere más és más lenne. A súlyok változtatásától függően az egyes országok árnyékárakon számított mérlegegyenlege is változna. Ha a számítások azt mutatnák, hogy a különböző közös célfüggvények és a külkereskedelmi mérlegegyenlegek között egyértelmű megfeleltetés létesíthető, akkor az unicitás — legalábbis bizonyos λ-tartományban — fennáll.

Tudomásunk szerint nem készült még ilyen számítás, amely az unicitás problémájára tényadatok segítségével, optimumszámítások eredményeinek összehasonlításával keresné a választ.

(Beérkezett: 1972. június 10.)

IRODALOM

1. Arrow, K. J.—Block, H. D.—Hurwicz, L.: On the Stability of the Competitive Equilibrium, II, Econometrica, 27 (1959. Január) 82—109.
2. Arrow, K. J.—Chenery, H. B.—Minhas, B. S.—Solow, R. M.: Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency, Review of Economics and Statistics, 43 (1961 augusztus) 225—250.
3. Arrow, K. J.—Hurwicz, L.: On the Stability of the Competitive Equilibrium, I, Econometrica, 26 (1958 október) 522—552.

4. Chipman, J. S.: A Survey of the Theory of International Trade: Part 2, The Neoclassical Theory, Econometrica, 33 (1965 október) 685—760.
5. Dorfman, R.—Samuelson, P. A.—Solow, R. M.: Linear Programming and Economic Analysis. New York, 1968. McGraw-Hill.
6. Eisenberg, E.: Aggregation of Utility Functions, Management Science 7 (1961 július) 337—350.
7. Gale, D.: The Law of Supply and Demand, Mathematica Scandinavica, 3 (1955) 155—169.
8. Gorman, W. M.: Community Preference Fields, Econometrica, 21 (1953 január) 63—80.
9. Kuhn, H. W.—Tucker, A. W.: Non-linear programming. Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951.
10. Micielski, J.—Piaszczynski, W.: A Mathematical Model of International Economic Cooperation, 1965. Sokszorosított előadás.
11. Quirk, J.—Saposhnick, R.: Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics. New York, 1968. McGraw-Hill.
12. Samuelson, P. A.: Social Indifference Curves, Quarterly Journal of Economics, 70 (1956 február) 1—22.
13. Uzawa, H.: Prices of the Factors of Production in International Trade, Econometrica, 27 (1959 július) 448—468.
14. Wald, A.: Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen, Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, Heft 7 (1934—1935), 1—6.

OPTIMUM, PRICES AND EQUILIBRIUM IN INTERNATIONAL TRADE

The article deals with the prices in international trade, as means of efficient economic allocation as well as with the role of prices and of the balance of trade in the distribution of income among the countries. It draws its conclusions from economic models of the trading countries, where each country maximizes a linear objective function on a production set determined by linear functions.

It proves that a theorem of economics, proven under other conditions, claiming that the Pareto optima and the trading equilibria coincide, is valid with these linear models, too. The Pareto optimal situations are established as optimal solutions of linear programming problems where the constraints are the countries' constraints on production and the objective function is a non-negative linear combination of the objective functions of the countries. The systems of shadow prices are at the same time the equilibrium prices. It is stated, that the informational trade prices have to fulfil this only function, and the aspects of the distribution of income among countries should not be considered in their formation. These latter aspects can be taken into account by means of unilateral money transfer among countries, which appears in the balance of payments.

Furthermore, the article deals with the question if the system of trade balances uniquely determines the distribution of income among countries. It illustrates with an example that in a general case this uniqueness does not exist, and then it discusses the conditions which ensure uniqueness under the above mentioned assumptions of linearity.

ОПТИМУМ, ЦЕНЫ И РАВНОВЕСИЕ В МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛЕ

Статья занимается действительными в международной торговле ценами, как средством эффективного хозяйства, а также ролью цен и внешнеторгового баланса в распределении дохода между странами. Для выводов она использует модели экономик стран, принимающих участие в торговле, в которых каждая страна максимизирует линейную целевую функцию на производственном множестве, установленной линейными функциями.

Она доказывает, что тезис экономики, доказанный в других условиях, согласно которому оптимальные положения Парето совпадают положениями торгового равновесия, действителен и в линейных моделях. Оптимальные положения Парето складываются в оптималь-

ных решениях таких проблем, системы условий которых — совокупность производственныху словий стран, и целевые функции — неотрицательные линейные комбинации целевых функций отдельных стран. Система теневых цен оптимального решения проблемы является в то же время системой цен, обеспечивающей равновесие. Авторы констатирую, что внешнеторговые цены должны исполнять только эту функцию и нельзя допускать, чтобы аспект распределения доходов между странами влиял на их формирование. Указанные аспекты могут быть учтены посредством одностороннего перевода, который проявляется в модели во внешнеторговом балансе.

В дальнейшем статья ставит проблему: однозначно установливает ли система внешнеторговых балансов распределение доходов между странами. Она иллюстрирует примером, что в общем случае нет такой однозначности, а потом она занимается условиями, которые обеспечивают эту однозначность в вышеупомянутых предположениях линейности.

Simon András

Több szocialista ország gazdasági kapcsolatainak optimalizálási modellje[1]

A szocialista közgazdaságtan igen régi és sokszor megtárgyalt témája a külkereskedelem hatékonysága.

A hatékonyság problémája a legtöbbször egy adott ország szempontjából vetődik fel. A kérdés általában az, hogy az illető ország bizonyos adott lehetőségeken belül hogyan tudná a számára legelőnyösebben kialakítani külkereskedelmét. Az adott külkereskedelmi lehetőségek bizonyos külkereskedelmi árakat, egy előírt devizaegyenleget, és az export-import adott piaci korlátait jelentik. Optimális külkereskedelmi szerkezet akkor alakul ki, ha az illető ország a rendelkezésre álló lehetőségeken belül a legnagyobb eredményt éri el. Az elérendő eredmény — melyet célfüggvénynek nevezünk — általában a keresletnek megfelelő összetételű terméktömeg, de bizonyos esetekben — ha a gazdaságosság fogalma kevésbé általánosan vetődik fel — lehet más is, például termelési költségek megtakarítása, minél nagyobb nyereség, maximális devizaegyenleg stb.

Tegyük fel, hogy ilyen „nemzeti" modellek segítségével egy bizonyos időszakra több ország kialakított egy számára optimális külkereskedelmi tervet. Semmi sem biztosítja ekkor, hogy a tervek konzisztensek lesznek. A forgalom egyik ország számára optimális volumene nem biztos, hogy a másik ország számára is optimális lesz, és így az egyik ország kereslete nem biztos, hogy találkozik a másik ország kínálatával. Ha mégis feltesszük, hogy ez a konzisztencia biztosított — pl. a partnerek számára az optimumszámításon kívüli meggondolásokból előre előírunk valamilyen külkereskedelmi szerkezetet, — akkor pedig a külkereskedelem szerkezete valószínűleg nem optimális. Hasznos lenne minden ország számára, ha olyan számításokat is végeznénk, amelyek a nemzetközi kereskedelem több országot együttesen tekintve is konzisztens variánsai közül választják ki az optimálisat.

Mit tekintsünk ilyen esetben optimális forgalomnak?

Definiáljuk az optimumot a következőképpen: mindazon munkamegosztási variánsokat optimálisaknak tekintjük, ahol bármelyik ország célfüggvényértékének növelésére már csak úgy van lehetőség, hogy egy másik ország célfüggvényértékét egyidejűleg csökkentjük. Az optimum ilyen megfogalmazása mellett végtelen sokféle optimális variáns képzelhető el. Az egyes variánsok attól függően különbözhetnek egymástól, hogy egyik vagy másik ország célfüggvényértékének növelését részesítjük-e előnyben a többiéhez képest.

Egy nemzetközi optimumszámítás különösen a szocialista országok egymás közötti kereskedelmének elemzésében nyújthatna segítséget.

[1] E cikk a Konjuktúra és Piackutató Intézet kiadványa [6] alapján készült.

Ismert, hogy a szocialista viszonylatú külkereskedelem gazdasági megítélését jelenleg két tényező akadályozza: a megbízható belföldi költségkalkulációk hiánya és a külkereskedelmi áruk torzulásai.

Az előbbi tekintetében egy nemzetközi számítás sem hozna újat. Az utóbbit tekintve azonban nagy előnyt jelentene a nemzeti keretek között végrehajtott számításokkal szemben, hogy ez esetben a külkereskedelmi forgalom gazdaságosságának megítélésénél figyelmen kívül lehetne hagyni a külkereskedelmi árat.

Mit jelent az áraknak ez a torzulása? Tudjuk, hogy az árak milyen kevés tájékoztatást adnak a partnerország termelési feltételeiről vagy az exporttermék versenyképességéről az importáló ország piacán. A tervek és elképzelések bizonyos mértékű egyeztetése, valamint egyéb áron kívüli információk cseréje révén végül természetesen így is mindig kialakul valamilyen — összességében mindkét fél számára előnyös — külkereskedelmi forgalom. Az áraknak a költségektől való elszakadása következtében azonban a jövedelmező és nemjövedelmező, vagy a különféle szempontból előnyös és előnytelen export-, illetve importoknak egymással szembe állítása a forgalom összefüggéseinek olyan bonyolult szövevényét alakította ki, hogy egyik résztvevő sem tudná biztosan felmérni, hogy valamely termék vagy termékcsoport forgalmának csökkentése vagy növelése végülis számára előnyös vagy előnytelen változást hozna-e teljes külkereskedelmi forgalmában, illetve jövedelmében.

Attól például, hogy A országban a személygépkocsi exportjának kitermelési költsége nagyobb, mint az árbevétel, még lehet, hogy A ország számára célszerű az export, mert az illető termékkel például olyan kötöttáru termékek állnak szemben, amelynek a forgalma viszont A ország számára igen kedvező, de B ország számára kedvezőtlen. Mindezen felül egyáltalán nem tudhatjuk, hogy végülis az adott munkamegosztás gazdaságos-e, tehát, hogy a személygépkocsi gyártásában A országnak, a kötöttáru előállításában B országnak van-e egyáltalán komparatív előnye és nem érhetne-e el mindkét ország nagyobb jövedelmet, ha mind a személygépkocsi, mind a kötöttáru kereskedelmét beszüntetnék, vagy fordítva osztanák meg a munkát. Lehet ugyanis, hogy csak az importőrök számára igen kedvező ár miatt alakult ki ilyen munkamegosztás. Vagy ha feltesszük, hogy a személygépkocsi kereskedelme az exportáló A ország számára előnyös árakon bonyolódik, A ország akkor sem tudhatja, hogy a partner érdekeltsége biztosítva van-e a forgalom növelésében, és így számíthat-e arra, hogy növekvő exportja piacra talál. Az is lehet, hogy tudja, hogy a partner hajlandó a forgalom növelésére, de ezt nem azért teszi, mert számára is előnyös a személygépkocsi importja, hanem esetleg azért, mert ezzel saját kötöttáruja számára véli biztosítani a felvevő piacot stb., stb.

Egy nemzetközi számítás abban jelent többet a nemzeti modellekkel végzett számításoknál, hogy a különböző országokból származó információk összegyűjtésével biztosítja az egyes országok külkereskedelmi programjának konzisztenciáját.

Egy alkalommal készült eddig ilyen számítás, 1970-ben Augustinovics Mária modelljének felhasználásával [3]. Az 1962-es adatokat felhasználó ex post optimumszámítás lényegében adott termelőkapacitások mellett határozza meg három ország 1962. évi optimális kereskedelmi forgalmát. Az itt ismertetendő modell ennek a modellnek továbbfejlesztése. A továbbfejlesztés elsősorban a különböző országok termékei helyettesíthetőségének pontosabb megfogalmazását jelenti, amennyiben [3]-al szemben többféle arányban történő helyettesítési lehetőségeket vesz figyelembe. Emellett itt kerülnek először kifejtésre azok a nemzetközi optimumszámításnál elkerülhetetlen és [3]-ban is implicite alkalmazott feltételezések és felmerült problémák, melyekre [3] tanulmány nem tér ki.

Az ismertetendő modell bizonyos rokonságot mutat a nemzetközi kereskedelem konzisztens előrebecslésének [4] és [5] modelljeivel, amennyiben ez a modell is hozzájárulhat a külkereskedelmi tervek konzisztenciájának a megalapozásához. Fő célja azonban az említett tanulmányokkal 'szemben nem prognózis készítése, hanem a nemzetközi kereskedelmi forgalom értékelő elemzése.

A feltételezett vizsgálat több ország teljes népgazdaságát átfogja. Természetes, hogy egy ilyen vizsgálat nem tud termékenkénti, csak népgazdasági ágazatokra vonatkozó adatokat feldolgozni. Így szükségszerűen következtetései is csak egyes népgazdasági ágazatokra vonatkozóan érvényesek. Illúzió lenne tehát azt várni, hogy egy ilyen számítás alapján bármilyen termék előállítására, exportjára, importjára vonatkozóan döntést lehetne hozni, vagy bármilyen termék külkereskedelmi áráról valamilyen értékelő megállapítást lehetne tenni.

A számítás elvileg arra adna választ, hogy milyen ágazatokban volna lehetőség a forgalom ilyen, vagy olyan irányú növelésére, vagy milyen ágazatokban lenne esetleg szükség a forgalom szűkítésére, illetve hol lenne szükség az árak módosítására ahhoz, hogy biztosítva legyen a partnerek érdekeltsége egy mindkét fél számára előnyösebb külkereskedelmi megállapodásban. A felhasznált adatok nagyfokú bizonytalansága miatt azonban a modell gyakorlatilag aligha lenne alkalmas ilyen konkrét döntések megalapozására. Nem lehetne pl. a fejlesztési eszközök ágazatok közötti elosztásáról ilyen számítások alapján dönteni. Mindazonáltal ez a lehetőség valószínűleg közvetlenül nem is fenyeget.

A modell valószínűleg csak arra lenne alkalmas, hogy egyrészt általános következtetéseket vonjunk le az egyes országoknak a nemzetközi munkamegosztásba való bekapcsolódására, és az abból származó előnyökből való részesedésére vonatkozóan, másrészt esetleg ráirányítaná a figyelmet egyes olyan ágazatokra, ahol érdemes lenne a forgalom kiszélesítésének a lehetőségeire vonatkozóan részletesebb vizsgálatokat folytatni.

Az importtermékek és a hazai termékek közötti helyettesíthetőség

A modellben döntő szerepet játszik az importtermékek és a belföldi eredetű termékek közötti helyettesítés határaránya: az a szám, amely megmutatja, hogy az illető termékeket felhasználó ágazatok termelésének, vagy a fogyasztásnak azonos szintje mellett mennyivel kell növelnünk (csökkentenünk) az importot, ha a hazai termékek felhasználását kismértékben csökkenteni (növelni) akarjuk.

Feltesszük, hogy ha az importált és a hazai eredetű termékeket helyettesítjük egymással, akkor a helyettesítés egy termékcsoporton belül megy végbe, vagyis ha például A ország textilipari termékeinek egy részét importtal helyettesítjük, akkor B országnak csak textilipari termékei jöhetnek szóba, mint helyettesítő termékek. Egy ágazat termékei tehát csak az ágazat úgynevezett kiegészítő importjával helyettesíthetők. Így a különböző országok termékeinek helyettesíthetősége alatt mindig csak az országok azonos elnevezésű (de nyilván nem teljesen azonos termékstruktúrájú) ágazatainak termékei közötti helyettesíthetőséget értjük. Kétségtelen, hogy a helyettesíthetőség elméletileg ennél szélesebb körű, a gyakorlatban azonban eltekinthetünk ettől.

Ez az ágazatokon belüli helyettesíthetőség lesz az egyetlen összekötő kapocs a modellben a különböző országok gazdaságai között.

Elegendő lesz azt ismernünk, hogy az egyik ország valamely ágazata termékeinek egységnyi mennyisége az illető ország belföldi valutájában, mint mennyiségi egységben számolva mennyi terméket helyettesíthet egy másik ország valamely ágazatának termékeiből, a másik ország valutájában mint mennyiségi egységben számolva. Nem lesz szükség arra, hogy a különböző országok azonos elnevezésű ágazatainak termékeiből egy termékcsoportot képezzünk, vagy például arra, hogy a különböző országokban azonosnak tekintsük az azonos elnevezésű ágazatok termékstruktúráját. Nem lesz szükség arra sem, hogy az egyes országok adatait valamilyen közös árrendszer szerint átszámítsuk, hiszen a modellben a belföldi áraknak csak annyi lesz a szerepük, hogy az egy ágazaton belüli termékek összegezését és egy termékkénti kezelését lehetővé teszik. Ugyanígy a különböző valutáknak is csak mint mennyiségi egységeknek lesz szerepük a modellben.

Hogyan becsülhető a helyettesítési határarány ágazatonkénti értéke? Nyilvánvaló, hogy ez az érték függ az import és a belföldi termékek mennyiségi arányától. Ha a helyettesítési határarány értékét valamelyik évre jellemző tényleges felhasználási arányok mellett keressük, akkor rendelkezésünkre állnak erre vonatkozó adatok.

Tekintsük először azt az esetet, amikor az import szocialista viszonylatból származik.

Ez esetben alapvető információt nyújt számunkra, hogy hogyan alakul ki egy importtermék belföldi ára. Ismeretes, hogy a szocialista országok többségében az importtermékek ára az úgynevezett „bearányosítás" elve alapján kerül meghatározásra. Ez annyit jelent, hogy ha van az importtermékhez hasonló belföldi eredetű termék, akkor az importtermék ára azonos egy hasonló belföldi termék árával. Ha nincsen hasonló belföldi termék, akkor a termék belföldi termékekhez viszonyított értéke használati tulajdonságai alapján felállított arány szerint kerül megállapításra, „bearányosítás"-ra. Ha tehát az árak aránya valóban megfelel ezeknek az elveknek, a belföldi felhasználó (termelő, vagy fogyasztó) anélkül, hogy termelésének mennyisége vagy fogyasztási szintje változna, a felhasznált belföldi terméket mindig azonos értékű importtermékkel helyettesítheti — a belföldi áron azonos értékű import használati tulajdonságai egyenértékűek ugyanis a hazai termékével.

Ezt úgy is kifejezhetjük, hogy az importtermékek belföldi ármegállapítása olyan, hogy a belföldi valutát tekintve mennyiségi egységnek az import és a hazai termékek helyettesítési határaránya éppen 1 — egy forintnyi importtermék egy forintnyi belföldi terméket helyettesíthet.

Ennek alapján a helyettesítési határarány kifejezhető más mértékegységben is: pl. A ország B országba irányuló exporttermékei és B ország belföldi eredetű termékei közti helyettesítési határarány meghatározható úgy is, hogy minden ország termelését saját pénznemében mérjük, a helyettesítési határarány akkor az A országból B országba irányuló forgalom A ország valutájában, illetve B ország valutájában számított értékének a hányadosa.

Érdemes megjegyezni, hogy a helyettesítési határarány ugyanazon ágazat (termékcsoport) termékei közti arány. Így értékét – a volumen mérésénél a különböző termékek súlya révén – csak az ágazaton belüli árarányok befolyásolják. A számítás tehát független az árarányok ágazatok közötti esetleges torzításaitól.

Kétségtelen, hogy az importtermékek árának „bearányosítással" történő megállapítására nincsen tökéletesen megbizható módszer és így a szocialista importtermékek árai nem mindig felelnek meg használati tulajdonságaiknak. Ennek ellenére elfogadhatóknak tartom, mint megközelítő értékeket.

A konvertibilis elszámolású viszonylatokból származó import és a belföldi eredetű termékek helyettesítési határarányának meghatározásánál már kevésbé támaszkodhatunk a belföldi árrendszer nyújtotta információkra. Bár több szocialista országban elvileg az innen származó importtermékek ára is „bearányosítás"-sal kerül megállapításra, a gyakorlatban ez az elv kevésbé érvényesül, mint a szocialista importnál. Gyakran előfordul, hogy ha egy hazai termék és egy importtermék azonos áron szerezhető be és a felhasználó (vállalat, fogyasztó) szabadon dönthetne, akkor az importterméket venné meg. Hogy a felhasználók ilyen esetben sokszor mégis a belföldi eredetű terméket választják, annak oka nem az árak aránya, hanem az importot korlátozó különféle rendszabályok (importkeretek, engedélyezési rendszer, devizális kötöttségek stb.). Amíg tehát az importot a termékek árán kívül más eszközökkel is kénytelenek vagyunk korlátozni, addig az importból származó és a hazai eredetű termékek ráaránya nem tekinthető a helyettesítés határarányának.

Meg kell jegyezni, hogy az ágazat kiegészítő importját érintő mennyiségi korlátozások csak akkor bizonyítják, hogy az árarányok nem egyeznek meg a helyettesítési határarányokkal, ha a korlátozás ugyanazon ágazat belföldi termékeivel szemben érvényesül. Attól például, hogy az illető ágazat teljes (belföldi és importeredetű) termelése kontingensek segítségével kerül elosztásra, még lehet a felhasználók számára közömbös, hogy az ágazat termékei közül hazai, vagy importterméket kapnak-e, a helyettesítési határarány tehát megegyezhet az ráaránnyal.

Termékektől és valószínűleg országoktól függően változik, hogy a tőkés eredetű import ára megfelel-e a helyettesítési határaránynak vagy sem. Azokban az ágazatokban, ahol az import ára nem arányos a használati értékével, a termékek helyettesíthetőségére vonatkozóan merészebb feltételezésekkel kellene élni.

A következő megjegyzés főleg a magyarországi importtermék-ármegállapítással kapcsolatos. Magyarországon sok importtermék belföldi árát – akár szocialista, akár tőkés eredetű – úgy állapitják meg, hogy a vételárat a devizaszorzó segítségével (esetleg vámmal terhelve) számítják át hazai valutára. Az ármegállapitás módja tehát elvileg nem a bearányositás.

Az elmondottak alapján könnyen meggondolhatjuk, hogy ez a tény önmagában még nem teszi kizárttá, hogy ezen termékek ráaránya megfeleljen a helyettesítés határarányának. Ennek feltétele ugyanis csak az, hogy a felhasználók számára közömbös legyen, hogy hazai vagy importterméket vásárolnak-e. Ha tehát ezek a termékek minden korlátozás nélkül megvásárolhatók, és az irántuk megnyilvánuló kereslet megegyezik a kínálattal, akkor a belföldi termékekhez viszonyított árak itt is megfelelnek a helyettesítési határaránynak.

Hogyan változik a helyettesítési határarány értéke, ha az import és a belföldi eredetű termékek aránya változik?

Nyilvánvaló, hogy ha A és B ország azonos elnevezésű ágazatainak termékstruktúrája azonos lenne, akkor az egyik ország termékei tetszőlegesen helyettesíthetők lennének a másik ország termékeivel, változatlan helyettesítési határarány mellett. A valóságban azonban amennyire az egyes országok hasonló ágazatainak termékei nem teljesen azonosak, annyira korlátozottak is a helyettesítési lehetőségek.

A termékek közötti helyettesítésekre vonatkozó döntésekben mind a termelők, mind a fogyasztók részéről bizonyos ésszerűséget tételezhetünk fel: feltehető, hogy elsősorban a kedvező helyettesítési lehetőségeket használják ki, és csak az ilyen lehetőségek kimerülésével végeznek kevésbé előnyös helyettesítéseket. Ilyen feltételek mellett minél több hazai terméket helyettesítünk importtal, a további helyettesítés annál nehezebb lesz, az import és a hazai termékek közötti helyettesítési határarány tehát nő. Feltehető például, hogy A és B ország gépipari szerkezete olyan, hogy egyes B országbeli géptípusok nagyon jól megfelelnek bizonyos A országbeli beruházási igényeknek, érdemes lehet őket a hazai gépek helyett alkalmazni. Ha azonban növelni akarjuk A ország B országból származó gépimportját, az addig importált géptípusokra irányuló speciális igények kimerülnek és az importgépeket olyan területeken is használatba veszik, ahol ezek hatékonysága jóval kisebb — az import növelésével tehát egyre több importgép helyettesít ugyanannyi hazai gépet, a helyettesítési határarány tehát egyre nő. Vagy a textilipart — és fogyasztói felhasználást — tekintve példának bizonyos importvolumen esetén az A országbeli fogyasztók körében magas áron is keresettek lehetnek B ország textiltermékei. Ha azonban a hazai textiltermékeket egyre nagyobb volumenben akarjuk importtal helyettesíteni, a fogyasztók legfeljebb úgy lesznek hajlandók a hazai termékek helyett további importtermékeket vásárolni, ha az import, illetve a hazai termékek árának aránya alacsonyabb lesz. A fogyasztók értékelésében tehát egységnyi hazai textiltermék csak egyre nagyobb mennyiségű importtermékkel lesz egyenértékű, egyre nagyobb mennyiséggel lesz helyettesíthető.

Ugyanez a gondolatmenet természetesen az ellenkező irányú helyettesítésre is igaz: minél nagyobb volumenű importot akarunk hazai termékekkel helyettesíteni, a helyettesítés annál nehezebb lesz, a hazai termékek és az import közötti helyettesítési határarány nő.

Érdemes egy kicsit részletesebben kitérni ennek a feltevésnek az indokolására, mit jelent ez a „bizonyos ésszerűség" az ágazatok gazdálkodásában. Azt jelenti-e ez, hogy egy ágazaton belül a felhasználók a számukra adott lehetőségeken belül mindig a számukra optimális import- és belföldi termékkombinációt választják? Egy ilyen feltevés kérdésessé tenné az egész optimumszámítás értékét. Semmi okunk ugyanis feltételezni, hogy a gazdaságban az egy ágazaton belüli döntésekben nagyobb racionalitás érvényesül, mint az ágazatok közötti döntésekben. Ha tehát a modellben feltesszük, hogy az erőforrások ágazatok közötti allokációja nem optimális (márpedig ezt feltesszük, hiszen éppen az optimum meghatározása a cél), hogyan lehetne a számítás egyik alapja az, hogy egy ágazaton belül ez az optimum fennáll? Nos, az a feltevés, hogy az import fokozásával a belföldi termékek helyettesítése egyre gazdaságtalanabbá válik, sokkal kevesebb, mint az optimális gazdálkodás feltevése. Ettől még lehet, hogy az importot nagyon rosszul használják fel, vagy sokszor nem veszik igénybe ott, ahol gazdaságos lenne. A feltevés csupán azt jelenti, hogy ez a nem-optimális felhasználás független az import volumenétől. Attól, hogy az importot növeljük, sem a felhasználók nem válnak „okosabbá", sem a döntésüket befolyásoló információs rendszer nem válik tökéletesebbé: általában nem fognak továbbra sem felismerni olyan kedvező lehetőségeket, melyeket addig nem ismertek fel.

A helyettesítési rugalmasság tárgyalásakor térek ki arra a kérdésre, hogy milyen információ áll — illetve nem áll — rendelkezésünkre arra vonatkozóan, hogy a helyettesítési határarány említett növekedése milyen mértékű a helyettesítés növelésének függvényében.

A helyettesíthetőség matematikai megfogalmazása

A lineáris programozási modellekhez hasonlóan tegyük fel, hogy a termelő tevékenységek egy-egy **a** vektorral jellemezhetők. A vektor pozitív elemei a tevékenység fajlagos anyagfelhasználását vagy kapacitásigényét mutatják a megfelelő termékből (termékcsoportból) vagy kapacitásból, negatív elemei pedig a tevékenység egységnyi alkalmazásával előállítható termékmennyiséget a megfelelő termékből (termékcsoportból). A felhasznált és termelt mennyiséget az $\mathbf{a}_j x_j$ vektor adja, ahol x_j a j-edik tevékenység alkalmazásának terjedelme.

Az aggregált, termékcsoportokkal dolgozó lineáris programozási modellek egy termékcsoportot homogénnek tekintenek, vagyis nem tesznek különbséget aközött, hogy az $\mathbf{a}_j$ vektor i-edik eleme az i-edik termékcsoporton belül milyen termék (vagy kisebb termékcsoport) felhasználását (termelését) mutatja. Ez a feltétel más szóval annyit jelent, hogy közömbös, hogy egy ágazat termékei közül melyiket használjuk fel, a termékek egymással korlátlanul helyettesíthetők.

Az ismertetendő modell annyiban különbözik a szokásos aggregált lineáris programozási modellektől, hogy az $\mathbf{a}_j$ vektor i-edik eleme — amennyiben nem kibocsátást, hanem felhasznált jelent — nem teljesen homogénnek tekintett termékcsoportra vonatkozik. Az i-edik termékcsoporton belül megkülönböztetjük egymástól a hazai eredetű és az importból származó termékeket és a kétféle eredetű termékek helyettesíthetőségét illetően az előbbi fejezetben említett feltételezésekkel élünk. Azonos célra tehát különböző arányban használhatunk fel hazai eredetű és importált termékeket. Minél többet használunk fel azonban az egyikből a másik rovására, annál nagyobb mennyiségre van szükség az illető termékből a másik egységnyi mennyiségének helyettesítésére.

A termékek helyettesíthetőségére vonatkozó következő néhány feltételezést egyedül az indokolja, hogy lehetővé teszi a helyettesíthetőség egyszerűbb matematikai megfogalmazását. E feltevések legfeljebb annyiban tekinthetők jogosnak, hogy nem jelentenek lényeges torzítást a valósághoz képest.

Feltesszük, hogy a helyettesítési határarány csak a termékek felhasználási arányától függ, az összes felhasználás függvényében konstans.

Definiáljuk az import és a belföldi termékek közötti helyettesítés rugalmasságát, mint azt a számot, amely megmutatja, hogy azonos végtermékkibocsátás vagy fogyasztási szint mellett hány százalékkal kell növelnünk (csökkentenünk) a felhasználásban az import és a hazai termékek mennyiségének arányát ahhoz, hogy a helyettesítési határarány egy százalékkal nőjön (csökkenjen), feltéve, hogy a változás elég kicsiny.[2] Feltesszük, hogy ez a helyettesítési rugalmasság konstans, vagyis akármilyen a termékek aránya az összes felhasználáson belül, az arány egy százalékos növekedése a helyettesítési határaránynak mindig azonos százalékos növekedésével jár.

Feltesszük azt is, hogy egy ágazaton belül a különböző viszonylatokból származó importok is helyettesíthetik egymást és ezek között a helyettesítési rugalmasság azonos és szintén konstans a felhasználási arányok függvényeként.

E feltevés jogosnak tűnhet, ha meggondoljuk, hogy a különféle országok azonos elnevezésű ágazatai ha nem is azonos termékszerkezetűek, de jellegükben mégis hasonló termékekből állnak. Így feltehető, hogy e termékek közötti helyettesíthetőség is hasonló, függetlenül a származási országoktól.

Nem tesszük fel természetesen, hogy a helyettesítési rugalmasság ágazatonként is azonos.

Ha az előbbi feltételek teljesülnek, akkor az importált és a hazai eredetű termékek közötti függvénykapcsolatot az ismert CES-függvénnyel jellemezhetjük:

$$Q = f(z_1, z_r) = \left(\alpha_1 z_1^{-\beta} + \sum_{r=2}^{n} \alpha_r z_r^{-\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$$

ahol:

Q — az összes felhasználás az illető termékcsoportból
z_1 — a termékcsoport hazai eredetű termékeinek mennyisége
z_r — a termékcsoport r-edik piacról származó importeredetű termékeinek mennyisége $(r = 2, 3 \ldots n)$
$\alpha_r (r = 1, 2, \ldots n)$, β — a függvény paraméterei

Számolással ellenőrizhető, hogy a helyettesítési rugalmasság értéke $\frac{1}{1+\beta}$.

Feltéve, hogy az importtermékek és a hazai termékek helyettesíthetőségét leíró CES-függvény az adatszolgáltatás időpontjában és az optimumszámítás tárgyidőpontjában azonos, a paraméterek kiszámítására valamely év termelési és külkereskedelmi forgalmi adatai n db egyenlet felállítását teszik lehetővé: $n-1$ egyenletet szolgáltat az alapadatok szerint adott forgalom melletti helyettesítési határarányok ismerete és egy további egyenletet ad a tényadatok behelyettesítése a függvény egyenletébe.

Ez az n egyenlet természetesen nem elegendő a függvény α_r és β paraméterének, tehát $n+1$ számú paraméternek a meghatározásához. Az α_r paraméterek csak β, vagy a helyettesítési rugalmasság egy ismert vagy feltételezett értéke mellett számíthatók.

A helyettesítési rugalmasság értéke

Ha a helyettesítési rugalmasság értékét statisztikai eszközökkel akarnánk becsülni, akkor a belföldi áron számított ágazatonkénti és országonkénti kiegészítő import idősorainak ismeretére volna szükségünk, egy lehetőleg

[2] A helyettesítési rugalmasságra részletesebben lásd pl. [1]. 341—345. o. és 504—505. o.
[3] A függvény jellemzését lásd pl. [2].

hosszabb időszakra. Ha ekkor feltennénk, hogy ebben az időszakban a termékek helyettesíthetőségét leíró CES-függvények változatlanok, akkor a regressziószámítás módszereivel e függvények minden paramétere becsülhető lenne. A módszert azonban részben e feltételezés bizonytalansága, részben a szükséges idősorok összeállításánál fellépő valószínűleg leküzdhetetlen nagy adatgyűjtési nehézségek miatt nem lehet alkalmazni.

A helyettesítési rugalmasság meghatározása tulajdonképpen csak úgy volna lehetséges, ha különféle hipotetikus import- és hazai termékkombinációkra vonatkozó adatoknak lennénk birtokában. Ilyen adatok pontos összeállítására aligha vállalkozhatunk, legfeljebb igen hozzávetőleges becsléseket tehetünk. E becslések nagyfokú bizonytalanságát tekintve talán helyesebb nem is becsült, hanem feltételezett értékekről beszélni. A feltételezésnél mérlegelhetjük azokat a tényezőket, amelyek a helyettesítési rugalmasság nagy vagy kis értékei mellett szólhatnak. Ha például valamilyen ágazat megközelítően homogén, mint például egyes alapanyagtermelő ágazatok, akkor ezek termékei egymással nagymértékben helyettesíthetők, tehát az import- és a hazai termékek közötti helyettesítési rugalmasság feltehetően nagy. Más ágazatokban, ahol a termékek igen sokfélék és az egyes országok szerint más és más az ágazat termékstruktúrája — mint például a gépiparban —, ott a helyettesítési rugalmasság valószínűleg kisebb. Figyelembe véve, hogy egyes importtermékek nem állíthatók elő egyáltalán belföldön, megbecsülhetjük a nem-kompetitív import volumenét, és ennek ismeretében meghatározhatjuk a helyettesíthetőség korlátait is.

Egyszerű megfontolások alapján tehát következtethetünk arra, hogy a helyettesítési rugalmasság ágazatok közötti eltérései milyen irányúak és a helyettesíthetőség milyen korlátok között érvényesül. A helyettesítési rugalmasság abszolút nagyságát azonban a „józan ész”-re alapozott meggondolások csak igen széles határok közé szorítják, a feltételezett értékeknek a ténylegestől való eltérése tehát igen nagy is lehet. Ebből a tényből az következik, hogy az optimális program és a tényleges vagy tervezett helyzet eltérésének nagyságát igen óvatosan kellene értékelnünk, hiszen ez jórészt feltételezéseink következményeit tükrözi. Bátrabb következtetéseket legfeljebb az eltérések iránya alapján vonhatnánk le.

A modell lehetőséget nyújt arra is, hogy ugyanazon ágazat termékei között más és más helyettesítési rugalmassággal számoljunk attól függően, hogy a termékek termelő felhasználásra vagy végső felhasználásra kerülnek-e. Feltehető ugyanis, hogy bizonyos esetekben egy ágazaton belül más termékek kerülnek termelőfelhasználásra és mások végső felhasználásra, így a különféle eredetű termékek közti helyettesíthetőség más és más e két felhasználó szerint. Megfelelő statisztikai adatok birtokában (az ágazatonkénti és viszonylatonkénti import termelő, illetve fogyasztói felhasználás szerinti bontása) megvizsgálható lenne, hogy a tényadatok szerinti helyettesítési határarányok különböznek-e a felhasználó szerint. Ha igen, akkor a meglevő adatokhoz ágazatonként kétféle CES-függvény lenne illeszthető, még akkor is, ha a helyettesítési rugalmasság feltételezésünk szerint egy ágazaton belül esetleg azonos is. Elvileg még tovább bonthatnánk az importot felhasználó ágazatok szerint is, ez azonban végképp elszakadna a statisztikailag megfigyelhető árumozgások körétől.

A modell

Az előbbi alapvető feltételezések mellett az optimumszámítási modellnek sokféle változatát lehetne megfogalmazni. E változatok közül példaképpen választottam ki egyet, ismertetve az erre a változatra jellemző speciális feltételezéseket. Ezek a feltételezések a modell lényegét nem érintik, sokféleképpen módosíthatnánk őket, újabb és újabb modellváltozatokat képezve. Nem dönthető el a rendelkezésre álló adatok és a számítástechnikai lehetőségek pontos ismerete nélkül, hogy e változatok közül végülis melyek tekinthetők a valóságot jobban megközelítő változatoknak, illetve a gyakorlatban inkább megvalósíthatóknak.

A modell változói és feltételrendszere

A modellben termelési, a régión kívüli országokkal folytatott export-, valamint importtevékenységek, és a régión belüli külkereskedelmi tevékenységek szerepelnek, régiónak nevezve a számításban résztvevő országokat. Ez utóbbi tevékenységek az exportáló ország szempontjából export-, az importáló ország szempontjából importváltozók.

A termékek helyettesíthetőségére tett előbbi feltevések alapján minden ország belföldi felhasználásra kerülő termelése és szocialista importja között egy CES-függvénnyel jellemezhető függvénykapcsolat van. Ezt fejezi ki az [1] egyenlőtlenségrendszer.

Eszerint a régió minden országára fennáll az az összefüggés, hogy az i-edik termékből a termelő felhasználás és belföldi végső felhasználás összege nem lehet nagyobb, mint amennyit az e célra rendelkezésre álló belföldi termékek és szocialista importtermékek kombinációja, valamint az erre a célra rendelkezésre álló tőkés import lehetővé tesz.

$$\underbrace{-\sum_{\substack{j=1\\ j\in N_1(j)}}^{J_k} h_{ijk}(x_{jk}+x^{e}_{jk})+u_{ik}z_k}_{\text{Összes belföldi felhasználás}} \leq$$

$$\leq \left[\alpha_{ik}\underbrace{\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\in N_2(j)}}^{J_k} h_{ijk}x_{jk}\right)^{-\beta_{ik}}}_{\substack{\text{Belföldi kibocsátás}\\ \text{belföldi felhasználásra}}}+\underbrace{\left(\sum_{\substack{r=1\\ k\neq r}}^{n}\alpha_{irk}y_{irk}\right)^{-\beta_{ik}}}_{\substack{\text{Régióból származó}\\ \text{import}}}+\underbrace{\left(\sum_{l=1}^{L}\alpha_{ilk}y^{Rb}_{ilk}\right)^{-\beta_{ik}}}_{\substack{\text{Egyéb szocialista}\\ \text{import}}}\right]^{-\frac{1}{\beta_{ik}}}+\underbrace{y^{\$}_{ik}}_{\substack{\text{Tőkés}\\ \text{import}}} \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots I)$$
$$(k = 1, 2, \ldots n)$$

ahol

h_{ijk} — az i-edik ágazat termékeiből a k-adik ország egységnyi j-edik tevékenysége által felhasznált, illetve kibocsátott mennyiség a k-adik ország belföldi áran (h_{ijk} felhasználás esetén negatív, kibocsátás esetén pozitív)

$N_1(j)$ — $\{j \mid 1 \leq j \leq J_k,\quad h_{ijk} < 0\}$

$N_2(j)$ — $\{j \mid 1 \leq j \leq J_k,\quad h_{ijk} > 0\}$

x_{jk} — a belföldi felhasználásra kerülő termékeket előállító j-edik tevékenység szintje a k-adik országban

x^e_{jk} — exportra kerülő termékeket előállító j-edik tevékenység szintje a k-adik országban

y_{irk} — az i-edik ágazat külkereskedelmi forgalmának volumene a régión belüli r-edik országból a k-adik országba, az r-edik ország belföldi árain

y^{Rb}_{ilk} — az i-edik ágazat termékeinek importja a régión kívül l-edik szocialista országból a régión belüli k-adik országba, rubelben

$y^{\$}_{ik}$ — az i-edik ágazat termékeinek importja tőkés viszonylatból a k-adik országba, a k-adik ország belföldi árain

u_{ik} — a k-adik ország egységnyi belföldi végső felhasználásának termékfelhasználása az i-edik ágazatból

z_k — a k-adik ország belföldi végső felhasználásának szintje

$\alpha_{ik}, \alpha_{irk}, \alpha_{ilk}, \beta_{ik}$ — a CES-függvények paraméterei

Az egyenlőtlenség szerint a tőkés import változatlan arányban helyettesíthet belföldi vagy szocialista importból származó termékeket. Természetesen sok más módja is lenne a tőkés import figyelembe vételének. Feltehető például, hogy a tőkés import és az egyéb eredetű termékek közötti helyettesítési lehetőségek is egy CES-függvénnyel írhatók le.

A (2) egyenlőtlenségrendszer szerint az i-edik ágazat összes exportja egyik országban sem lehet több, mint amennyi hazai termelésből export céljára rendelkezésre áll:

$$\underbrace{\sum_{\substack{k=1\\k\neq r}}^{n} y_{irk} + \sum_{l=1}^{L} y^{Rb\,\mathrm{exp}}_{irl} + y^{\$\,\mathrm{exp}}_{ir}}_{\text{Összes export}} \leq \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\j\in N_2(j)}}^{J_k} h_{ijk}\, x^e_{jk}}_{\substack{\text{Belföldi}\\ \text{kibocsátás}\\ \text{exportra}}} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots I \\ r = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix} \tag{2}$$

$y^{Rb\,\mathrm{exp}}_{irl}$ — az i-edik ágazat exportja az r-edik országból az l-edik régión kívüli szocialista országba, az r-edik ország belföldi árain

$y^{\$\,\mathrm{exp}}_{ir}$ — az i-edik ágazat exportja az r-edik országból tőkés viszonylatba, az r-edik ország belföldi árain

Az export tehát csak belföldi termelésből származhat, itt a belföldi termékek nem helyettesíthetők importtal. Ez más szóval annyit jelent, hogy kizárjuk a reexportot.

A modell ún. egyperiódusú modell, tehát egy adott többéves időszak beruházási döntéseit, és az időszak utolsó évének termelésre és külkereskedelemre vonatkozó döntéseit optimalizálja. Ennek megfelelően a modell tevékenységeit jellemző vektorok beruházási fajlagosai a teljes időszakban felmerülő beruházási szükségletet mutatják, kibocsátási és ráfordítási fajlagosai pedig az időszak utolsó évére jellemző értékek.

A modell jelenlegi vázlatos megfogalmazása nem teszi szükségessé sem annak eldöntését, hogy ez az időszak milyen hosszú legyen, sem pedig annak eldöntését, hogy ez egy múltbeli vagy jövőbeli időszak legyen-e.

A múltbeli időpontra vonatkozó ex post programozás mellett szólna az adatok könnyebb beszerezhetősége. Egy jövőbeli időszakra vonatkozó optimalizálás esetén előrebecsült adatokkal kellene számolnunk, melyek összeállítása bizonyára sok nehézségbe ütközne. Ennek ellenére valószínűleg érdemes lenne vállalni ezeket a nehézségeket, hiszen nyilvánvaló, hogy egy jövőre vonatkozó számítás lényegesen több aktuális következtetésre ad lehetőséget, mint egy múltbeli időszak értékelése.

A modell jellegének megfelelően szerepelnek tisztán termelési és termelési-beruházási tevékenységek.

Tisztán termelési tevékenységről beszélhetünk, ha az időszak utolsó évében a termelés az optimalizálási időszak kezdetén is rendelkezésre álló kapacitásokon történik. Az ilyen tevékenységek terjedelme nyilván nem haladhatja meg az időszak előtti utolsó évre jellemző termelési volument.

Új kapacitáson való termelési tevékenységhez nyilván beruházásokat kell végrehajtani. E tevékenységek beruházási fajlagosai azt mutatják, hogy ahhoz, hogy az időszak utolsó évében egységnyi kapacitás rendelkezésre álljon, összesen mennyi beruházást kell végrehajtani az egész időszak folyamán. Az optimumszámítás nem terjedne ki arra, hogy milyen legyen ezeknek a beruházásoknak az időszakon belüli időbeli ütemezése. A számítás nem adna választ arra sem, hogy a termelés szerkezetének milyen kialakítása biztosítja, hogy az időszak folyamán végrehajtandó beruházásokhoz szükséges anyagi eszközök megfelelő ágazati és áruösszetételben rendelkezésre álljanak. Adottnak tekintjük az időszak során beruházási célra rendelkezésre álló eszközök belföldi valutában kifejezett értékét és feltesszük, hogy e kereteken belül az eszközök megfelelő anyagi összetételben állnak rendelkezésre.

A modell feltételezi, hogy az olyan beruházások, melyeknek üzembe lépése az időszak után történik, részben már eleve eldöntöttek és így a modellben figyelembe vett beruházási keretek e beruházások szükségleteinek levonásával kerültek megállapításra, részben pedig a modell célfüggvényében szerepelnek, mint az utolsó év végső felhasználásának része. (A célfüggvényről később lesz szó.)

Elvileg kétféle modellt lehetne konstruálni aszerint, hogy országonként korlátozzuk-e a beruházások volumenét, vagy csak egy közös beruházási keretet veszünk figyelembe. Annak ellenére, hogy az utóbbi modell elméletileg általában nagyobb célfüggvény-értéket biztosítana, mégis célszerűbb, ha csak az előbbi változat mellett döntünk. Az országonkénti beruházási keretek meghatározása esetén ugyanis viszonylag kicsi a beruházási javak árrendszerének hatása az optimális programra. Kétségtelen, hogy az árrendszer torzításai egyik vagy másik ágazatot kedvezőbbnek vagy kedvezőtlenebbnek tüntethetik fel beruházásigényesség szempontjából, attól függően, hogy milyen az illető ágazat beruházásainak ágazati szerkezete. Mivel azonban a beruházások ágazati szerkezete általában eléggé hasonló (kevéssé függ a beruházások jellegétől), a torzítás elhanyagolhatóan csekély. Így a beruházási fajlagosok és a beruházási keretek megállapításánál elfogadhatók az illető ország tényleges árain, belföldi valutájában számított értékek. Ha azonban a modellnek különböző országokban megvalósítható beruházások közül kell választania, az egyes árrendszerek sajátosságainak — például a beruházási javak árszinvonalának — már döntő szerepük lehet abban, hogy a beruházások melyik országban tűnnek előnyösebbnek.

Közös beruházási keret esetén tehát elkerülhetetlen a különféle országok valutáiban, különböző árrendszerekben megadott adatok összehasonlítása és egy közös árrendszer szerinti átszámítása. E feladat újabb, gyakorlatilag alig megoldható problémákat vetne fel, hiszen többek között azt is el kellene dönteni, milyenek legyenek ezek az árak.

A munkaerő-létszám korlátait is kétféleképpen vehetnénk figyelembe: feltehetjük, hogy a létszám országonként adott, vagy feltehetünk bizonyos mértékű munkaerővándorlási lehetőséget. Ez utóbbi feltevés lényegesen kisebb nehézségeket okozna az adatok összeállításánál, mint a beruházási eszközök mozgásának megengedése, de kétségtelen, hogy nem lenne könnyű megállapítani, milyen határig csoportosítható át a munkaerő egyik országból a másikba.

Az a követelmény, hogy a termelés nem lehet nagyobb, mint amennyit a beruházási és létszámkorlátok, az időszak elején meglevő kapacitások adta lehetőségek, valamint a természeti feltételek (bányászatban, mezőgazdaságban stb.) lehetővé tesznek, matematikailag hasonló egyenlőtlenségekkel fogalmazható meg. Így ezeket a követelményeket egyetlen egyenlőtlenség-rendszerbe foglalhatjuk. Az egyenlőtlenségrendszer a modell olyan változatát tükrözi, melynél sem a beruházások, sem a munkaerő országok közötti átcsoportosítására nincs lehetőség:

$$\sum_{j=1}^{J_k} a_{tjk}(x_{jk}+x^e_{jk}) \leq b_{tk} \quad \begin{pmatrix} t=1,2,\dots T_k \\ k=1,2,\dots n \end{pmatrix} \tag{3}$$

ahol

b_{tk} — a k-adik ország t-edik termelési korlátja

a_{tjk} — a k-adik ország j-edik tevékenységének fajlagos felhasználása az illető ország t-edik termelési korlátjából.

Feltehető, hogy a tőkés import egy része nem-kompetitív: nem helyettesíthető sem belföldi, sem szocialista importból származó termékekkel:

$$\sum_{j=1}^{J_k} k_{ijk}(x_{jk}+x^e_{jk}) + k_{ik} z_k \leq y^{\$}_{ik} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots I \\ k=1,2,\dots n \end{pmatrix} \tag{4}$$

ahol

k_{ijk} — a k-adik ország j-edik tevékenységének fajlagos nem-kompetitív tőkés importfelhasználása az i-edik ágazatból

k_{ik} — a k-adik ország egységnyi belföldi végső felhasználásának nem-kompetitív tőkés importfelhasználása az i-edik ágazatból

A szocialista export és import ágazatonként és viszonylatonként nem lehet nagyobb az értékesítési, illetve beszerzési lehetőségeknél, és nem lehet kisebb, mint amennyi a hosszú lejáratú szerződéseket is figyelembe véve, gazdaságpolitikai szempontból indokolt; a tőkés külkereskedelmi lehetőségek ezzel szemben csak az exportban korlátozottak:

$$K^{Rb}_{ilk} \leq y^{Rb}_{ilk} \leq \bar{K}^{Rb}_{ilk} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots I \\ l=1,2,\dots L \\ k=1,2,\dots n \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$K^{Rb\,\mathrm{exp}}_{ikl} \leq y^{Rb\,\mathrm{exp}}_{ikl} \leq \bar{K}^{Rb\,\mathrm{exp}}_{ikl} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots I \\ l=1,2,\dots L \\ k=1,2,\dots n \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$y^{\$\,\mathrm{exp}}_{ik} \leq \bar{K}^{\$\,\mathrm{exp}}_{ik} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\dots I \\ k=1,2,\dots n \end{pmatrix} \tag{7}$$

K^{Rb}_{ilk}, $K^{Rb\,\mathrm{exp}}_{ilk}$, $\bar{K}^{Rb}_{ilk}$, $\bar{K}^{Rb\,\mathrm{exp}}_{ikl}$, K_{ik}^{exp} — a megfelelő külkereskedelmi változók piaci korlátai

A modell matematikai megfogalmazásakor nem szerepelnek megkülönböztetve az olyan ágazatok, melyeknek termékei jellegüknél fogva gyakorlatilag egyáltalán nem kerülnek külkereskedelmi forgalomba (építőipar stb.). Ha a megfelelő ágazatokban előírjuk, hogy a külkereskedelmi forgalom 0 legyen, akkor a modell az ilyen ágazatokat is tartalmazza.

A modell e változatában nem szerepelnek a szállítási költségek. Ez az elhanyagolás kizárólag azért történt, hogy a képletekben szereplő változók és szimbólumok amúgy is nagy száma ne növekedjék teljesen áttekinthetetlenül naggyá. Bizonyos, hogy egyes ágazatokban — főleg nagyobb, vagy egymástól távolabbi országok közötti forgalom esetén — elkerülhetetlen a szállítási ráfordítások figyelembe vétele. Az erre vonatkozó adatok összeállítása is bizonyára sok közgazdasági problémát vetne fel, ezekre azonban a modellalkotás jelenlegi kezdeti fázisában nem térek ki.

A következő (8) egyenlőtlenségek előírják, hogy a régió együttes devizaegyenlege nem mutathat egyik régión kívüli szocialista országgal sem nagyobb passzívumot (kisebb aktívumot), mint egy adott érték, míg a (9) egyenlőtlenség a régió országainak együttes tőkés devizaegyenlegét írja elő:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{I} y_{ilk}^{Rb} - \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{I} d_{irl}^{Rb} y_{irl}^{Rb\,\mathrm{exp}} \leq S_l^{Rb} \quad (l = 1, 2, \ldots L) \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{I} d_{ik}^{\$} y_{ik}^{\$} - \sum_{r=1}^{n} \sum_{i=1}^{I} d_{ir}^{\$} y_{ir}^{\$\,\mathrm{exp}} \leq S^{\$} \tag{9}$$

ahol

$d_{irl}^{Rb}\ d_{ir}^{\$}$ — a r-edik ország i-edik ágazata termékeinek exportára az l-edik szocialista, illetve a tőkés piacon: az export egységnyi belföldi valutában számított mennyiségéért kapott árbevétel Rbl-ben, illetve \$-ban

$d_{ik}^{\$}$ — a k-adik ország i-edik ágazata termékeinek importára a tőkés piacon: egységnyi belföldi valutában számított mennyiségért fizetett \$-ár

S_l^{Rb} — a régió együttes külkereskedelmi mérlegének előírt egyenlege az l-edik régión kívüli szocialista ország viszonylatában

$S^{\$}$ — a régió tőkés külkereskedelmi mérlegének előírt együttes egyenlege

Semmi akadálya nem volna természetesen, hogy országonként írjuk elő a devizaegyenlegeket, feltételezve, hogy a régió minden országa kétoldalúan kiegyenlített kereskedelmet folytat a kívülálló országokkal, sőt, elvileg annak sem volna akadálya, hogy a régión belüli kereskedelemben is előírjuk, hogy a forgalom valamilyen adott árrendszerben kétoldalúan kiegyenlített legyen. Mindezek a korlátozások azonban nyilván feleslegesen csökkentenék a modell célfüggvényének optimális értékét.

A nem-negativitási követelmények egészítik ki a modell feltételrendszerét:

$$x_{jk} \geq 0; \quad x_{jk}^{e} \geq 0; \quad y_{irk} \geq 0; \quad y_{ilk}^{Rb} \geq 0;$$

$$y_{ik}^{\$} \geq 0; \quad y_{irl}^{Rb\,\mathrm{exp}} \geq 0; \quad y_{ir}^{\$\,\mathrm{exp}} \geq 0; \quad z_k \geq 0.$$

A modell feltételrendszere az egyes országok devizaegyenlegeit sem a régión kívüli országok viszonylatában, sem az egymás közötti viszonylatokban nem tartalmazza. Az egyenlegek értéke az optimumszámítás végrehajtása során az export és az import optimális értékének különbségeként országonkint számítható. E devizaegyenlegek értéke természetesen adott külkereskedelmi forgalom mellett is attól függ, hogy milyen a külkereskedelmi forgalomba kerülő termékek ára. Ha az exportok és az importok értékét a modell árnyékárrendszerén számítjuk ki, akkor összefüggést állapíthatunk meg az egyes országok egyenlegei és a modell célfüggvénye között. Mielőtt azonban erre rátérnék, természetesen tisztázni kell, hogy mi legyen a modell célfüggvénye.

A célfüggvény

Mint a bevezetőben említettem, egy nemzetközi optimumszámítás esetén mindazon programokat optimálisaknak tekinthetjük, melyek azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy egyik ország célfüggvényértéke sem növelhető anélkül, hogy egy másik ország célfüggvényértékét csökkentenénk. Nem szükséges, hogy feladatunknak tekintsük annak eldöntését, hogy mi legyen az egyes országok célfüggvénye. Ezt a modell szempontjából adottságnak tekinthetjük, amely az egyes számításban résztvevő országok elhatározásától, illetve adatszolgáltatásától függ.

Bebizonyítható, hogy a cikk elején említett értelemben optimális programok a modellben úgy határozhatók meg, hogy az egyes országok célfüggvényeinek súlyozott összegét maximalizáljuk. Ha például minden ország saját belföldi végső felhasználását maximalizálja egy adott ágazati struktúra szerint, akkor a célfüggvény

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \to \max$$

alakú, ahol

λ_k — a k-adik ország célfüggvényének súlya a feladat célfüggvényében.

Ez azonban a lehetséges célfüggvényeknek csak egy hipotétikus változata, a modell lényegének változtatása nélkül bármely más célfüggvény is szerepeltethető lett volna.

A súlyok megválasztásától függ, hogy a közös célfüggvényértéken belül mekkora lesz egyik vagy másik ország célfüggvényértéke. Ezektől a súlyoktól függ az is, hogy árnyékárakon számítva mekkora lesz az egyes országok devizaegyenlege.

Általában minél nagyobb egy ország célfüggvénysúlya a feladatban, annál nagyobb lesz célfüggvényértéke, de ugyanakkor annál passzívabb lesz devizaegyenlege.

Ha egy adott devizaegyenleg-rendszer melletti optimális program kiszámítása a cél (pl. előírjuk, hogy minden ország devizaegyenlege 0 legyen), akkor számítások sorozatára van szükségünk. Addig kell a célfüggvény súlyokat változtatva új és új optimalizálást végeznünk, amíg meg nem találjuk a kívánt devizaegyenlegeknek megfelelő súlyokat.[4]

[4] A célfüggvénysúlyok, a célfüggvényértékek és a devizaegyenlegek összefüggéseire pontosabban lásd: Simon András—Stahl János: „Optimum, árak és egyensúly a nemzetközi kereskedelemben" c. cikkét ebben a számban.

A modell kiszámíthatósága

Végül a modell kiszámításának számítástechnikai problémáiról — tapasztalatok hiányában — kevés mondható.

A CES-függvény tulajdonságai alapján tudjuk, hogy a modell egy konvex programozási feladat, amelynek a megoldása visszavezethető lineáris programozási feladatra. Kétségtelen viszont az is, hogy a feladat megoldásának számításigényessége többszöröse a korlátok és a változók számát tekintve azonos méretű lineáris programozási feladatnak. Így nyilvánvaló, hogy a modell ágazati részletezésének meghatározásánál, vagy bizonyos egyszerűsítő feltételezések mérlegelésénél lényeges szerepet játszanának a számítástechnikai lehetőségek.

A helyettesíthetőség egy alternatív lineáris megfogalmazása

Az előbbi modell az import és a hazai termékek közötti összefüggéseket egy konstans helyettesítési rugalmasságú folytonos függvénnyel jellemezte. Nem ez az egyetlen lehetőség az összefüggések jellemzésére, sőt azt is nehéz lenne elméletileg eldönteni, hogy milyen típusú függvények közelítik meg a legjobban a valóságos összefüggéseket.

Egy másik lehetőség a lineáris függvények alkalmazása. Feltehetjük, hogy amíg egy ágazatban az import és a hazai eredetű termékek aránya bizonyos határok között van, a termékek egy adott állandó arányban helyettesíthetik egymást.

Ha az import aránya meghaladja ezt a határt, akkor egy következő határig az importtal való helyettesítés aránya megintcsak állandó lesz, de most már kedvezőtlenebb: csak nagyobb mennyiségű importtal lesz helyettesíthető egységnyi belföldi termék: a helyettesítési határarány tehát az előző modellel szemben nem folytonosan, hanem szakaszonként ugrásszerűen változik.

A különböző helyettesítési határarányoknak megfelelően minden országra viszonylatonként és ágazatonként többféle importtevékenységet definiálunk: jelöljük ezek számát M-mel.

Mindegyik importtevékenység más és más arányban helyettesíti az importáló ország termékeit az exportáló ország termékeivel.

Ilyen feltételezés mellett a modellben az (1) egyenlőtlenség helyébe a következő egyenlőtlenségek lépnek:

$$\underbrace{-\sum_{\substack{j=1\\ j\in N_1(j)}}^{J_k} h_{ijk}(x_{jk}+x^e_{jk})+u_{ik}z_k}_{\text{Összes belföldi felhasználás}} \leq$$

$$\leq \underbrace{\sum_{\substack{j=1\\ j\in N_2(j)}}^{J_k} h_{ijk}x_{jk}}_{\substack{\text{Belföldi termelés}\\ \text{belföldi}\\ \text{felhasználásra}}} + \underbrace{\sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{n}\sum_{m=1}^{M} g_{irkm}y_{irkm}}_{\text{Import a régióból}} + \underbrace{\sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{M} g_{ilkm}y^{Rb}_{ilkm}}_{\substack{\text{Egyéb szocialista}\\ \text{import}}} + \underbrace{y^{\$\,\mathrm{imp}}_k}_{\substack{\text{Tőkés}\\ \text{import}}}$$

$$(i=1,2,\ldots I)$$
$$(k=1,2,\ldots n)$$

$$\delta_{irkm}\left[-\sum_{\substack{j=1\\ j\in N_1(j)}}^{J_k} h_{ijk}(x_{jk}+x^e_{jk})+u_{ik}z_k\right]\geq y_{irkm}\quad \begin{matrix}(i=1,2,\ldots I)\\ (r=1,2,\ldots k-1,b+1,\ldots n)\\ (k=1,2,\ldots r-1,r+1,\ldots n)\\ (m=1,2,\ldots M)\end{matrix}$$

$$\delta_{ilkm}\left[-\sum_{\substack{j=1\\ j\in N_1(j)}}^{J_k} h_{ijk}(x_{jk}+x^e_{jk})+u_{ik}z_k\right]\geq y_{ilkm}\quad \begin{matrix}(i=1,2,\ldots I)\\ (l=1,2,\ldots L)\\ (k=1,2,\ldots n)\\ (m=1,2,\ldots M)\end{matrix},$$

ahol

y_{irkm}, y^{Rb}_{ilkm} — az i-edik ágazat termékeinek forgalma az exportáló ország valutájában a régión belüli r-edik, illetve a régión kívüli l-edik szocialista országból a k-adik országba, ha a két ország termékei az m-mel jelzett arányban helyettesíthetik egymást

g_{irkm}, g_{ilkm} — az y_{irkm}, illetve az y_{ilkm} tevékenységhez tartozó helyettesítési határarány értéke: azt mutatja, hogy egységnyi exportáló ország valutájában számított termékvolumen az i-edik ágazatban mennyi belföldi terméket helyettesít az importáló ország belföldi valutájában, ha a forgalom y_{irkm}, illetve y_{ilkm} szerinti

δ_{irkm}, δ_{ilkm} — azt mutatja, hogy a k-adik országban az i-edik ágazat termékeinek egységnyi mennyisége maximálisan mennyi r-edik (l-edik) országból származó importtermékkel helyettesíthető az m-mel jelzett arányban.

A számításhoz szükséges adatok

Az optimumszámítási modellben felhasználandó adatok legnagyobb része olyan, amelyek ismerete és feldolgozása egy népgazdasági keretek között végrehajtott optimumszámításnak is feltétele. Ilyenek pl. a különféle termelő tevékenységek fajlagosainak, a termelési kapacitásoknak, a tőkés külkereskedelmi áraknak és lehetőségeknek stb. a meghatározása.

A nemzetközi számítás ezeken az adatokon túlmenően a következőket igényelné: egyrészt ezeknek az adatoknak egy egységes ágazati felosztás szerinti átdolgozását, másrészt az egységesen definiált ágazatok közötti helyettesítési lehetőségekre vonatkozó adatokat.

Nem kívánom alábecsülni az előbbi feladat roppant nehézségeit, így csak egy olyan kijelentést kockáztatok meg, hogy ilyen adatok összeállításának elvi akadályai valószínűleg nem volnának.

Az utóbbiakra vonatkozó adatokat a modell ismertetése során tárgyalt feltételezések mellett a külkereskedelmi forgalom ágazatonkénti és ország-ország viszonylatonkénti adatait jelentik valamely évre vonatkozóan, mind az exportáló, mind az importáló ország belföldi árain.

Magyarországon 1968 óta minden évre rendelkezésre állnak ilyen adatok, éspedig igen részletes, 86 ágazatos bontásban, a többi országban azonban nem ismerem az adatgyűjtési lehetőségeket. Ezeknél az adatoknál valószínűleg nemcsak az egységes nomenklatúra szerinti összeállítás, hanem a különféle paritáson rendelkezésre álló adatok egyeztetése is komoly nehézségeket okozna. Mindenesetre optimizmusra ad okot az a tény, hogy az 1962. év Csehszlovákiára, Lengyelországra és Magyarországra vonatkozó hasonló adatait használta fel a [3] tanulmány.

Összefoglalóan megállapítható, hogy egy nemzetközi optimumszámítás végrehajtásának lehetőségeivel kapcsolatban lényegében két probléma merül fel. Az egyik az a tény, hogy az összeállítható adatok csak igen bizonytalan és hiányos információt nyújtanak a modell számára (elsősorban a termékek helyettesítési lehetőségeire vonatkozóan). Úgy vélem azonban, hogy az információ hiányosságai nem haladják meg azt a mértéket, amely e szempontból nem nagyon elkényeztetett makroökonómiai számításokra általában jellemző. A másik probléma az adatok összeállítása. A számítás óriási adathalmaz összegyűjtését és feldolgozását igényelné. Számolni kellene azzal is, hogy a résztvevő országokat a számítás eredményeihez fűződő vélt érdekeik miatt az adatszolgáltatásnál esetleg gazdaságpolitikai vagy taktikai meggondolások vezérelnék, és ez tovább nehezítené az adatok beszerzését vagy csökkentené az adatok megbízhatóságát.

Az eredmények várható érdekessége miatt azonban mindezek a kétségtelen nehézségek nem zárják ki azt, hogy célszerű lenne a KGST-országok érdeklődését felkeltve most már országonként részletesebben vizsgálni a számítás lehetőségeit.

(Beérkezett: 1972. július 19.)

IRODALOM

1. Allen, R. G.: Mathematical Analysis for Economists, London, 1966. Macmillan.
2. Arrow, K. J.—Chenery, H. B.—Minhas, B. S.—Solow, R. M.: Capital-Labour Substitution and Economic Efficiency. The Review of Economics and Statistics, 43 (1961 augusztus) 225—250.
3. Jelentés Csehszlovákia—Magyarország—Lengyelország gazdaságának multiregionális, sokszektoros modelljeivel folytatott együttes kutatásokról. Országos Tervhivatal kiadványa, 1970. A tanulmányt a három ország szakértőiből álló csoport készítette.
4. Nagy A.: A külkereskedelem távlati terv-variánsainak és a világkereskedelem várható alakulásának konzisztenciája, Külkereskedelem, 9, 1968.
5. Nagy A.—Szilágyi M.—Török E.: A nemzetközi kereskedelem elemzésére és prognózisára szolgáló két kereskedelem-áramlási modell. Konjunktúra és Piackutató Intézet kiadványa. 19.
6. Simon A.: Több szocialista ország gazdasági kapcsolatainak optimalizálási modellje. Konjunktúra- és Piackutató Intézet kiadványa, 1971.

OPTIMIZATION MODEL OF THE ECONOMIC RELATIONS AMONG SEVERAL SOCIALIST COUNTRIES

The model looks for Pareto optimal economic structures for countries taking part in an international optimization. The model considers aggregate branches of trade and production of the countries.

The model links the national models describing the production possibilities in the countries taking part in the caloulation. The linkage between the national models is based on the fact, that the products of some sectors in one country may be substituted for the products of a sector in another country. The setting up of the substitution relationship means the very establishment of the international model. The model supposes that in each country and each sector the marginal rates of substitution between the imported and domestic products equals the rates of domestic prices and so they are known. There

is less information available regarding how the marginal rate of substitution changes if the structure of production and trade changes. It can be assumed that this rate will increase with increasing imports but the degree of change can be estimated only roughly, or it can be used only as hypothetical values.

The article gives two alternatives to the mathematical formulation of substitution possibilities: it suggests the application of either the CES function or a linear function.

The article does not discuss how the particular objective functions of the participating countries should be set up, it is considered to fall under the country's sovereignty. A Pareto optimum can be attained when maximizing a positive linear combination of these particular objective functions.

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИМИ СТРАНАМИ

Модель испытает создать экономические структуры некоторых стран, принимающих участие в международной калькуляции оптимума в интересах создания оптимального положения Парето.

Исследование анализирует внешнеторговую и производственную структуру по отраслям отдельных стран.

Модель связывает «национальные» модели, описывающие производственные условия стран, принимающих участие в калькуляции. Между «национальными» моделями существует связь, по которой продукты отраслей одной страны могут заместить продукты отраслей другой страны. Оформление этой связи замещения означает создание «международной» модели. Модель предполагает, что предельные нормы замещения между импортированными и отечественными продуктами, различающие по отраслям, соглашаются во всех странах пропорцией отечественных цен и так известны. Что касается изменения предельной нормы замещеная в зависимости от структуры производства и импорта, имеется меньше информаций. Можно полагать, что увеличением субституции импортом растет эта норма, степень изменения, однако, можно оценивать только очень грубо или касательно этого можно было считать только полагаемыми стоимостями.

Для математического оформления возможностей субституции статья создает альтернативу, она предполагает пользование т. н. функции CES или конвексной функции, состоящей из периодов.

Статья не занимается тем, какая целевая функция в участвующих странах: она считает их предпосылками, определение которых «собственное» дело страны. Оптимальное положение Парето складывается, если калькуляция максимизирует функцию, созданной в качестве положительной линейной комбинации целевых функций в отдельных странах.

Hunyadi László—Hüttl Antónia—Ligeti István

A folytonos és diszkrét megoldás különbsége az egyszektoros dinamikus Leontief modell esetében[1]

A közgazdasági kutatásokban használt matematikai apparátus a legutóbbi évekig jórészt a természettudományokban – főként a fizikában – kialakult és alkalmazott módszereket ölelte fel. Mivel a fizikában már a múlt században széleskörűen alkalmazták a klasszikus analízis, a differenciál- és integrálszámítás, valamint a differenciálegyenletek kezelésének módszereit, a kor közgazdászai számára is adottak voltak és zömében alkalmazásra kerültek ezek a módszerek. Walras óta elfogadott a matematikai közgazdászok körében a gazdasági változók folytonosságának feltételezése a modellek egész sorában. A növekedési modellek, az ökonometriai modellek és a különféle programozási modellek néhány kivételtől eltekintve szinte kizárólag folytonos változókkal dolgoznak és megoldásukban a klasszikus analízis eszközeit használják fel.

Valójában a gazdasági változók a legritkább esetben folytonosak, vagy ha folytonosak is, csupán diszkrét pontokban megfigyelt értékeik állnak rendelkezésre. Sok esetben a folytonosság feltételezése nem okoz számottevő torzítást, előfordul azonban, hogy ez a közelítés nem engedhető meg. Ilyenkor a klasszikus differenciálszámítás helyett a gyakorta kényelmetlenebb differenciaszámítás használható; a módszertani nehézségekért azonban kárpótol az, hogy a modell jobban illeszkedik a valósághoz.

Cikkünkben egy egyszerű, általánosan ismert növekedési modell – a dinamikus Leontief modell – példáján kívánjuk bemutatni a két megoldási módszer és a kapott eredmények közti különbséget.

A cikk három fő részből áll. A bevezetést követő első részben a kiinduló modellt, annak kétféle megoldási módszerét ismertetjük alternatív fogyasztási függvények esetén. A második rész az eredményeket és a két megoldás közti különbséget értékeli, míg a harmadik részben a magyar népgazdaság 1960–1970 évi adatait felhasználva, szemléltető példán mutatjuk be az eredményeket és befejezésül összefoglaljuk a fontosabb következtetéseket.

1. Az egyszektoros dinamikus Leontief modell és megoldása

Leontief dinamikus modellje a következő:[2]

$$x(t) - Ax(t) - B\dot{x}(t) = y(t) \tag{1}$$

[1] A téma a Tervgazdasági Intézetben működő szemináriumon vetődött fel, ezért köszönettel tartozunk dr. Dancs Istvánnak, a szeminárium vezetőjének a kutatásban nyújtott segítségéért és tanácsaiért.

[2] Részletesebben leírása megtalálható pl. Andorka—Dányi—Martos könyvében [1].

ahol:

$x(t)$ a bruttó kibocsátás vektorát,
A a termelő felhasználás mátrixát,
B a beruházási mátrixot,
$\dot{x}(t)$ a termelésnövekmény vektorát,
$y(t)$ a végső felhasználás vektorát jelöli.

A fenti modellnek igen sok változata ismert, ezekre azonban nem szándékozunk kitérni, hiszen ez a modell csupán eszköz arra, hogy rámutassunk a valójában folytonosnak nem tekinthető, mégis folytonosnak feltételezett változók okozta torzításokra. Ezért inkább még jobban egyszerűsítettük a problémát. A gazdaságot egy szektornak tekintve a következő modellt kapjuk:

$$x(t) - \alpha x(t) - \beta \dot{x}(t) = y(t) \tag{2}$$

Kiinduló problémánk: mennyiben vezet a fenti modell alternatív y(t) függvények mellett más x(t) függvényekre, mint a gazdasági valóságot hívebben eíró, de ritkán alkalmazott

$$x(t) - \alpha x(t) - \beta[x(t+1) - x(t)] = y(t) \quad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$

modell. A kettő közötti különbség világos: míg a (2) esetében a termelésnövekmény *derivált függvény*, a (3)-ban *függvény differencia*. A (2) modell matematikailag egy inhomogén, állandó együtthatójú lineáris *differenciálegyenlet*, míg a (3) egy ugyanilyen *differenciaegyenlet*.[3]

A kettő közötti különbség részletesebb megvilágítása végett írjuk fel $\dot{x}$(t)-t részletesebben:

$$\dot{x}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Ez tehát a termelésnek infinitezimálisan kis időegységre vonatkozó növekményét jelenti, míg az $x(t+1) - x(t)$ kifejezés véges, egységnyi idő (pl. év) alatt bekövetkező termelésnövekményt fejez ki. Látható, hogy (3) közelebb áll a valósághoz, mivel $x(t)$-re vonatkozóan csupán diszkrét időpontokban mért adatok állnak rendelkezésre.

Első lépésben tekintsünk el $y(t)$ konkrét alakjától és oldjuk meg a két egyenletet! A differenciálegyenlet megoldása meglehetősen ismert, így csak röviden mutatjuk be. Átrendezve az egyenletet és $1 - \alpha = \gamma$ helyettesítést bevezetve

$$\gamma x(t) - \beta \dot{x}(t) = y(t)$$

adódik, ahol $0 < \gamma < 1$ és $\beta > 0$. Megfelelő integráló tényező alkalmazásával az egyenlet általános megoldása:

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} \exp\left[\frac{\gamma}{\beta} \cdot t\right] \cdot \left\{ \int_0^t \exp\left[-\frac{\gamma}{\beta} \cdot z\right] \cdot y(z) \mathrm{d}z + C \right\}, \tag{4}$$

és $x(0) = x_0$ kezdeti feltétel mellett a megoldás a következő formát ölti:

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} \exp\left[\frac{\gamma}{\beta} \cdot t\right] \cdot \left\{ \int_0^t \exp\left[-\frac{\gamma}{\beta} \cdot z\right] y(z)\, \mathrm{d}z + \gamma x_0 \right\}. \tag{5}$$

[3] A modellben a paramétereket állandónak tekintettük, matematikai szempontból azonban nem okoz különösebb problémát, ha α és β helyett $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ szerepel az egyenletben.

A differenciaegyenlet megoldását célszerű kissé részletesebben bemutatni. Elöljáróban bevezetünk néhány jelölést.

Legyen I az egységoperáció, amelyre nézve

$$I\,x(t) = x(t)$$

ε az eltolásoperáció, amelynek definíciója:

$$\varepsilon\,x(t) = x(t+1)$$

és D a differenciaoperáció, amelynek értelmezése:

$$D\,x(t) = x(t+1) - x(t)$$

Könnyen belátható a differenciaoperáció és az eltolásoperáció néhány fontos tulajdonsága, nevezetesen

$$D\,x(t) = (\varepsilon - I)\,x(t)$$

$$\varepsilon^2 x(t) = \varepsilon\big(\varepsilon\,x(t)\big) = \varepsilon\big(x(t+1)\big) = x(t+2)$$

és általában

$$\varepsilon^h x(t) = x(t+h).$$

A továbbiakban szükségünk lesz még D^{-1}-re, amelyet a következőképpen definiálunk:

$$(D^{-1}D)\,x(t) = I\,x(t) = x(t)$$

Belátható, hogy D^{-1} – akárcsak a határozatlan integrál – nem egyértelműen meghatározott, hiszen tetszőleges (egy szerint periodikus), függvény hozzáadásával olyan D^{-1}-ek kaphatók, amelyek kielégítik a fenti relációt. Ezért a számítások során szükségünk van a „határozott összegezésre", amely a határozott integrál megfelelője, és amelyet a következő módon vezetünk be:

$$[\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1} + \ldots + \varepsilon^n]\,D\,x(t) = [\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^k]\,x(t).$$

Mindkét oldalra D^{-1}-t alkalmazva

$$[\varepsilon^k + \varepsilon^{k+1} + \ldots + \varepsilon^n]\,x(t) = D^{-1}[\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^k]\,x(t) = D^{-1}[x(n+1) - x(k)]$$

adódik, azaz más felírással

$$[D^{-1}x(t)]_k^{n+1} = \sum_{t=k}^{n} x(t) \tag{6}$$

ahol $n > k$, n és k természetes számok.

Ennek segítségével a (3) differenciaegyenlet könnyen megoldható. A korábbiakhoz hasonlóan

$$\gamma\,x(t) - \beta\,D\,x(t) = y(t)$$

$$\gamma\,x(t) - \beta\,x(t+1) + \beta\,x(t) = y(t)$$

és innen

$$(\gamma + \beta)\,x(t) - \beta\,x(t+1) = y(t) \tag{7}$$

$x(t)$ együtthatójával végigosztva

$$x(t) - \frac{\beta}{\gamma+\beta}\,x(t+1) = \frac{1}{\gamma+\beta}\,y(t)$$

alakot kapunk. Alkalmas számmal végigszorozva mindkét oldalt a baloldalon teljes differenciát kapunk, és ekkor a megoldás már egyszerű. Ez az alkalmas szorzó itt $-\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^t$ lesz, ekkor

$$\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{t+1} \cdot x(t+1) - \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^t x(t) = -\frac{1}{\gamma+\beta} \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^t y(t)$$

$$D\left[x(t) \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^t\right] = -\frac{1}{\gamma+\beta} \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^t y(t) \tag{8}$$

és

$$\left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^t x(t) = D^{-1}\left[-\frac{1}{\gamma+\beta} \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^t y(t)\right].$$

Ezt az előbbiek szerint megoldva, átrendezve és az $x(0) = x_0$ kezdeti feltétel alkalmazásával a következő megoldás adódik:

$$x(t) = -\frac{1}{\gamma+\beta} \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^{-t} \left\{\sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^i y(i) - x_0(\gamma+\beta)\right\}. \tag{9}$$

Ez a megoldás az (5) megoldással analóg, de láthatóan nem azonos vele. Hogy az eltérés világosabb legyen, konkrét formát adunk a végső kibocsátás $y(t)$ függvényének. Három esetet vizsgálunk:

a) $y(t) = \delta_1 t + y_0$, azaz a végső felhasználás időfüggvénye (trendje) lineáris;

b) $y(t) = y_0$, azaz a végső felhasználás konstans (ez az előző speciális esete $\delta_1 = 0$ esetében);

c) $y(t) = y_0 \exp[\delta_2 t]$, azaz a végső felhasználás trendje exponenciális.

A három változat közül csupán a lineáris esetre mutatjuk be azt a lépést, amely némiképp eltér a szokványos megoldásoktól, egyébként csak az eredmények közlésére szorítkozunk.

a) Lineáris $y(t)$ esetében a differenciálegyenlet megoldásaként a következő függvény adódott:

$$x(t) = \frac{y_0 + \delta_1 t}{\gamma} + \exp\left[\frac{\gamma}{\beta} \cdot t\right] \cdot \left\{x_0 - \frac{y_0}{\gamma} - \frac{\delta_1 \beta}{\gamma^2}\right\} + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma^2} \tag{10}$$

Ugyanezen y(t) esetében a differenciaegyenlet megoldásához a

$$\sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^i (\delta_1 i + y_0)$$

összegezést kell elvégezni. Voltaképpen ez az egyetlen lépés, amely némiképp megnehezíti a megoldást, hiszen a folytonos esetben az integrál segítségével ez könnyebb volt. Egy egyszerű fogás segítségével azonban az összegezés könnyen elvégezhető. Felbontjuk a fenti összeget a következőképpen:

$$\delta_1 \sum_{i=0}^{t-1} i \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^i + y_0 \sum_{=0}^{t-1} \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^i.$$

Ebből csupán a $\sum_{i=0}^{t-1} i \cdot \left(\frac{\beta}{\gamma+\beta}\right)^i$ tag okoz problémát. $\varrho = \frac{\beta}{\gamma+\beta}$ helyettesítéssel $\sum_{i=0}^{t-1} i\,\varrho^i = \varrho \sum_{i=1}^{t-1} i\,\varrho^{i-1}$ adódik, ez pedig $\varrho \sum_{i=0}^{t-1} (\varrho^i)'$ alakban írható. Mivel az összegezés és a deriválás felcserélhető, ebből $\varrho \left(\sum_{i=0}^{t-1} \varrho^i\right)'$-t kapunk, azaz

$$\varrho\left(\frac{\varrho^t-1}{\varrho-1}\right)' = \frac{t\,\varrho^{t-1}(\varrho-1)-(\varrho^t-1)}{(\varrho-1)^2}.$$

A megfelelő visszahelyettesítések és átrendezések után a differenciaegyenlet megoldása a következő lesz:

$$x(t) = \frac{y_0+\delta_1 t}{\gamma} + \left(\frac{\gamma+\beta}{\beta}\right)^t \cdot \left\{x_0 - \frac{y_0}{\gamma} - \frac{\delta_1 \beta}{\gamma^2}\right\} + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma^2} \tag{11}$$

b) Konstans $y(t)$ esetén (10) és (11) alapján azonnal adódik a *folytonos változatra:*

$$x(t) = \frac{y_0}{\gamma} + \exp\left[\frac{\gamma}{\beta}\cdot t\right]\cdot\left(x_0 - \frac{y_0}{\gamma}\right). \tag{12}$$

A *diszkrét változatra* pedig

$$x(t) = \frac{y_0}{\gamma} + \left(\frac{\gamma+\beta}{\gamma}\right)^t\cdot\left(x_0 - \frac{y_0}{\gamma}\right) \tag{13}$$

c) Ha a végső kibocsátást exponenciális függvénnyel írjuk le, akkor a kapott megoldás *folytonos esetre:*

$$x(t) = \frac{y_0 \exp\left[\delta_2 t\right]}{\gamma-\beta\,\delta_2} + \exp\left[\frac{\gamma}{\beta}\cdot t\right]\cdot\left(x_0 - \frac{y_0}{\gamma-\beta\delta_2}\right) \tag{14}$$

Diszkrét változatban a következő függvényt kapjuk:

$$x(t) = \frac{y_0 \exp\left[\delta_2 t\right]}{\gamma-\beta(\exp\delta_2-1)} + \left(\frac{\gamma+\beta}{\beta}\right)^t\left(x_0 - \frac{y_0}{\gamma-\beta(\exp\delta_2-1)}\right). \tag{15}$$

Az egyenleteknek különböző típusú $y(t)$ függvények melletti megoldását tehát megkaptuk. Meglepő a formai hasonlatosság a megfelelő differencia- és differenciálegyenletek megoldásfüggvényei között. Ez a formai hasonlatosság azonban jelentős eltéréseket takarhat, ezért vizsgáljuk meg most részletesebben a kapott eredményeket.

2. A megoldások értelmezése és elemzése

Mindenekelőtt néhány szót kell szólnunk a kapott eredmények közgazdasági értelmezéséről. Ezek tehát a bruttó kibocsátásnak (társadalmi terméknek) azt az időfüggvényét, pályáját adják meg, amelyek kielégítik a modell egyenleteit. Mivel a kapott függvények közül a lineáris fogyasztási trenddel számított alak a legbonyolultabb, itt csupán ennek tartalmát vizsgáljuk, a többi ennek alapján könnyen értelmezhető.

Tekintsük tehát a (11) formulát. Az egyenlet mindkét oldalát γ-val szorozva az alábbi alkalmas alakot kapjuk:

$$\gamma\, x(t) = y_0 + \delta_1 t + \left(\frac{\gamma+\beta}{\beta}\right)^t \cdot \left\{\gamma\, x_0 - \left(y_0 + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma}\right)\right\} + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma}.$$

A nettó kibocsátásnak ($\gamma\, x(t)$-nek tehát három tételt kell fedeznie. Az első a mindenkori fogyasztás ($y_0 + \delta_1 t$). A másik kettő értelmezése némiképp nehezebb. A zárójelben levő kifejezés első tagja az induló nettó kibocsátás ($\gamma\, x_0$). A második tagjában szerepel $\frac{\delta_1\beta}{\gamma}$, amely az egységnyi idő alatt bekövetkező fogyasztásnövekedés teljes beruházásigényét jelenti. Így a zárójelben levő kifejezés azt mutatja, hogy a kiinduló nettó termelésnek egyrészt az induló fogyasztást, másrészt a következő időszak fogyasztásnövekményéhez szükséges beruházási eszközöket kell fedeznie. A zárójeles kifejezés normális esetben pozitív számot tartalmaz, ellenkező esetben a gazdaság további működése nincs biztosítva. A zárójel előtt álló $\left(\frac{\gamma+\beta}{\beta}\right)^t$ tényező a növekedés ütemére jellemző szám, ez a megoldásfüggvény leglényegesebb eleme. A második tag tehát a fogyasztás növeléséhez minimálisan szükséges beruházások feletti bővítéseket jellemzi, míg a harmadik tag a következő időszak fogyasztásának eléréséhez szükséges teljes beruházási összeget jelenti. Összesen tehát a termelésnek fedeznie kell a fogyasztási szükségleteket, azok minimálisan előírt növekedéséhez szükséges eszközöket, valamint a gazdaságnak ezeken túlmenő bővítését.

A függvény alakja – jól látható – a $\gamma\, x_0 - \left(y_0 + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma}\right) = K$ kifejezés előjelétől függ. Arra már utaltunk, hogy ez nem lehet negatív. Abban az esetben, ha $K = 0$, azaz kiinduló helyzetben bizonyos egyensúly áll fenn, azaz a gazdaságnak nem marad eszköze a bővítésre,

$$x(t) = y_0 + \delta_1 t + \frac{\delta_1 \beta}{\gamma}$$

alakúvá egyszerűsödik a függvény. Ha $K > 0$, akkor viszont a termelés exponenciálisan növekszik, a gazdaság bővül.

Hasonlóképp értelmezhető – a paraméterek eltérő jelentésének szem előtt tartásával – a többi megoldásfüggvény is. Mivel azonban elsődleges célunk nem a megoldások értelmezése, hanem a módszertani problémák vizsgálata, térjünk most át ezek elemzésére.

Az eredmények értelmezését több szempont szerint végezhetjük el. A (10)–(15) kifejezéseket egymással összevetve, lényeges hasonlóságokat és eltéréseket vehetünk észre mind a különböző függvénytípusok szerint, mind pedig a differenciál- és a differenciaszámítással kapott eredmények között. A következőkben három szempontot veszünk figyelembe, és ezek alapján hasonlítjuk össze az eredményeket.

a) A differenciál- és a differencia-számításból származó eltérések az időtől függetlenül, a paraméterek függvényében.

b) A differenciál- és a differencia-számításból származó eltérések alakulása azonos paraméterek mellett az idő függvényében.

c) A három különböző típusú fogyasztási függvény mellett kapott eltérések.

ad. *a)* Figyeljük meg páronként a kapott eredményeket, azaz állítsuk szembe egymással a két különböző módszerrel kiszámított függvényeket: a lineárist a lineárissal, a konstans esetet a konstans esettel és az exponenciálisat megfelelő párjával. Ebben a szemléletben a megfelelő párok a (1)—(11); (12)—(13); (14)—(15). Teljesen hasonló alakú tagokat találhatunk, kivéve a differenciál esetnél az exponenciális tagot, amelynek mindhárom esetben szemmel látható megfelelője egy hatványkifejezés. A differenciál- és a differencia-egyenlettel számolt változatok tehát csupán akkor jó közelítései egymásnak, ha éppen ez a két tag közel esik egymáshoz, azaz ha

$$e^{\frac{\gamma}{\beta}} \approx \frac{\gamma + \beta}{\beta}. \tag{16}$$

Amennyiben ez az összefüggés jó közelítésben teljesülne, a lineáris és a konstans esetben a két módszer között nem lenne lényeges eltérés. Az exponenciális esetben még egy másik tényező is van, amelyre még visszatérünk. Tekintsük először csak (16)-ot és írjuk fel először a baloldal hatványsorát.

$$e^{\frac{\gamma}{\beta}} = 1 + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{2!} + \ldots + \frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^k}{k!} + \ldots \tag{17}$$

A (16) jobboldalát β-val leosztva:

$$\frac{\gamma + \beta}{\beta} = 1 + \frac{\gamma}{\beta}. \tag{18}$$

Látható, hogy a hatványsor első két tagja adja a differenciaszámításnál használt hatványkifejezés alapját. Ezek után látható, hogy a két módszer közötti különbség csak abban az esetben elfogadható, ha:

$$|\,\gamma\,| \ll |\,\beta\,|\,. \tag{19}$$

Az exponenciális esetben még egy hasonló összefüggést is figyelembe kell venni. Ez a (14)—(15) kifejezés nevezőjében található különbség. A megfelelő tagok között fenn kell állnia a következő relációnak:

$$\delta_2 \approx e^{\delta_2} - 1\,. \tag{20}$$

A fentiekhez hasonlóan a jobb oldal hatványsora

$$e^{\delta_2} - 1 = \delta_2 + \frac{\delta_2^2}{2!} + \frac{\delta_2^3}{3!} + \ldots$$

A (20) kifejezés baloldala tehát megegyezik a jobboldal hatványsorának első tagjával, így a következő hatványoktól függ, hogy (20) mennyire teljesül. A közelítés tehát akkor elfogadható, ha $|\,\delta_2\,|$ elég kicsi. Exponenciális fogyasztási trend esetén tehát a két módszer közötti eltérés annál kisebb, minél inkább teljesül egyidejűleg (19) és a $|\,\delta_2\,|$-re tett kikötés.

ad. *b)* A differenciál és a differencia közötti különbség létezik, és a gyakorlatban — mint látni fogjuk — nem is jelentéktelen. Nem okozna ez különösebb problémát, ha a modell olyan értelemben stabil rendszer lenne, hogy a paraméterek változtatása és a két módszer különbsége által okozott eltérés az idő múlásával csökkenne. A Leontief rendszer azonban gyakorlatilag instabil.[4]

A rendszerek stabilitásának elmélete matematikailag jól kidolgozott terület. A [3] különösen fontos definíciókat ad a folytonos és a diszkrét rendszerek stabilitására. A matematikai forma helyett itt azonban csak verbálisan, a Leontief rendszerre alkalmazva fogalmazzuk meg a rendszerek instabilitását.

A rendszert akkor nevezzük instabilnak, ha az időtengelyen van olyan pont, ahol egy $\varepsilon > 0$ elmozduláshoz a bruttó termelés változása nagyobb lehet, mint egy előre meghatározott, tetszőleges szint.

Azt, hogy maga a Leontief rendszer a paraméterek gazdaságilag szóbajöhető értékei mellett kielégíti a definíciót, könnyű belátni. Próbáljuk inkább megvizsgálni, mit jelent az instabilitás definíciója a differencia és differenciál módszert illetőleg.

A modell megoldásában a (16) t-edik hatványa szerepel. A (16)-nak megfelelő formát tekintve:

$$\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)^t \approx \left(1+\frac{\gamma}{\beta}+\left(\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{2!}+\ldots\right)\right)^t.$$

A jobboldalon szereplő kifejezést vizsgálva két megállapítást tehetünk:

a) A differenciál-számítással kapott eredmény számszerűen mindig nagyobb, mint a differencia módszer eredménye, ugyanis

$$\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^3}{3!}+\ldots>0$$

b) Rögzített γ és β mellett a két módszer eredménye közötti különbséget okozó kifejezést így írhatjuk:

$$h(t)=\left[\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)+\left(\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^3}{3!}+\ldots\right)\right]^t-\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)^t.$$

A binomtétel alkalmazásával belátható, hogy

$$h(t)=\binom{t}{1}\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)^{t-1}\cdot\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i}{i!}+\sum_{k=2}^{t}\binom{t}{k}\left(1+\frac{\gamma}{\beta}\right)^{t-k}\left(\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i}{i!}\right)^k.$$

Mivel $\sum\limits_{i=2}^{\infty}\frac{\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^i}{i!}$ pozitív konstans, a kifejezés második tagja pedig pozitív, így

$$\lim_{t\to\infty} h(t)\to\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a Leontief rendszer a megoldásban használt módszerre nézve is instabil.

[4] A stabilitás kérdésével részletesebben foglalkozik pl. a megadott két rendszerelméleti munka: [2] és [3].

A gyakorlati használhatóságot illetően, mint később látni fogjuk, t-nek már elég kis értékénél $h(t)$ olyan nagy lehet, hogy használhatatlanná teszi az eredményeket.

ad. *c)* A modell megoldásánál három különböző típusú fogyasztási trendet használtunk. A függvénytípusok lényegesen befolyásolták a modell eredményét is. A konstans fogyasztás mellett eredményül kapott (12) és (13) speciális esetei a lineáris és exponenciális esetnek, ugyanis ha (10) és (11)-be $\delta_1 = 0$-t, illetve (14) és (15)-be $\delta_2 = 0$-t helyettesítünk, a (12), illetve (13) kifejezéshez jutunk.

A függvénytípusok különbözősége erősen függ a paraméter-értékektől. Ezt számításaink is igazolták. Továbbá könnyen belátható, hogy a konstans fogyasztás esetében számolt differencia- és differenciál-eredmény relatív hibája nagyobb, mint az exponenciális és a lineáris eset relatív hibája; azaz:

$$\frac{x_l^d(t)}{x_l^\Delta(t)} < \frac{x_c^d(t)}{x_c^\Delta(t)};$$

valamint

$$\frac{x_{\exp}^d(t)}{x_{\exp}^\Delta(t)} < \frac{x_c^d(t)}{x_c^\Delta(t)}$$

ahol:

d — a differenciállal számított függvény jele
Δ — a differenciával számított függvény jele
l — a lineáris függvény jele
exp — az exponenciális függvény jele
c — a konstans függvény jele.

Összegezve: a két módszer közötti eltérésre a konstans fogyasztás mellett számított eredmény a legérzékenyebb.

3. A numerikus számítások értékelése

Mint a korábbiakban beláttuk, a modell pusztán elméleti jellegű elemzésével is sok figyelemreméltó következtetésre jutottunk, ezen túlmenően azonban eredményeinket numerikus számításokkal is alá kívántuk támasztani.[5] A számítások célja elsősorban az volt, hogy a számítási módszerekre vonatkozó megállapításokat demonstráljuk, tehát főként módszertani következtetések levonására alkalmasak. Bár konkrét statisztikai adatok[6] alapján határoztuk meg a modell paramétereit, az eredmények gazdaságpolitikai jellegű következtetések levonására természetesen nem alkalmasak. Részben azért, mert az egyszektoros modell túlságosan aggregált, részben pedig azért, mert a paraméterek meghatározásánál — módszertani kísérletről lévén szó — nem törekedtünk teljes pontosságra.

Mindhárom említett fogyasztási trenddel kilenc számítást végeztünk. A számításokat egyrészt aszerint különböztettük meg, hogy a paraméterek mely évre vonatkoznak (feltettük, hogy az időtől függetlenek), másrészt aszerint, hogy a nettó nemzeti termelést hogyan osztottuk meg felhalmozásra és fogyasztásra.

[5] A számítások az OT.SzK. System 4/70 elektronikus számítógépen készültek.
[6] A számításokhoz szükséges alapadatokat a KSH kiadványából [4] vettük.

A felhalmozási hányad az a tényező, amelyre legérzékenyebben reagál a modell eredménye, ezért a statisztikában alkalmazott „felhalmozás" mellett az egyes változatokban az üzembehelyezett nettó beruházásokat, illetve az anyagi ágazatokban üzembehelyezett beruházásokat szerepeltettük. A különféle módon számított paraméterek azt mutatták, hogy a fogyasztási trendek paraméterei igen kis mértékben változtak; a különböző variánsok közti eltérés főként a beruházási együttható értékeit befolyásolta.

Összehasonlítási alapnak az 1975-ös évet választottuk. Bár a számításokat 20 éves periódusra készítettük el, mégis reálisabbnak látszott egy viszonylag közeli évre kapott eredményeket elemezni. A tényleges termelési adatok idősorából is elég megbízhatóan lehetett következtetni az 1975. évi bruttó nemzeti termelésre. Az elemzésnél az 1960-as bázisév alapján kapott eredményeket nem vettük figyelembe. Ez esetben t = 15 évre nyert megoldás a modell instabilitása miatt már nagyon eltér a reálistól.

A számítások egyik fontos következtetése az, hogy *a modellből nyert bruttó nemzeti termelés minden variánsnál magasabb*, mint a trend szerinti, amit az 1960–1970-es évek átlagos növekedési ütemét feltételezve exponenciális függvény alapján becsültünk meg. Ez a tendencia általában is jellemző a növekedési modellekre; a gazdaságban rejlő lehetőségeket túlértékelik.

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy a legszélsőségesebb számítási eredmények és a tényleges termelési számok közti eltérés milyen tényezőkre vezethető vissza, a különbség kialakulásában melyik milyen szerepet játszik. A tényezőket aszerint csoportosíthatjuk, hogy melyek azok, amelyek a modell megoldásánál alkalmazott módszerre vezethetők vissza, melyek azok, amelyek a paraméterek numerikus meghatározásához kapcsolódnak, és végül mit tekinthetük a Leontief modell „hibájának". Módszerünk ez esetben az volt, hogy először kiszűrtük azokat az eltéréseket, amelyek a megoldásnál alkalmazott feltételezésekből származtak, majd a paraméterek kiszámításából adódó hibákat vontuk le és csak a megmaradó rész tudható be annak, hogy a modell pontatlanul írja le a valóságot.

a) *A modell matematikai levezetésénél alkalmazott feltételezésekből származó eltérések*

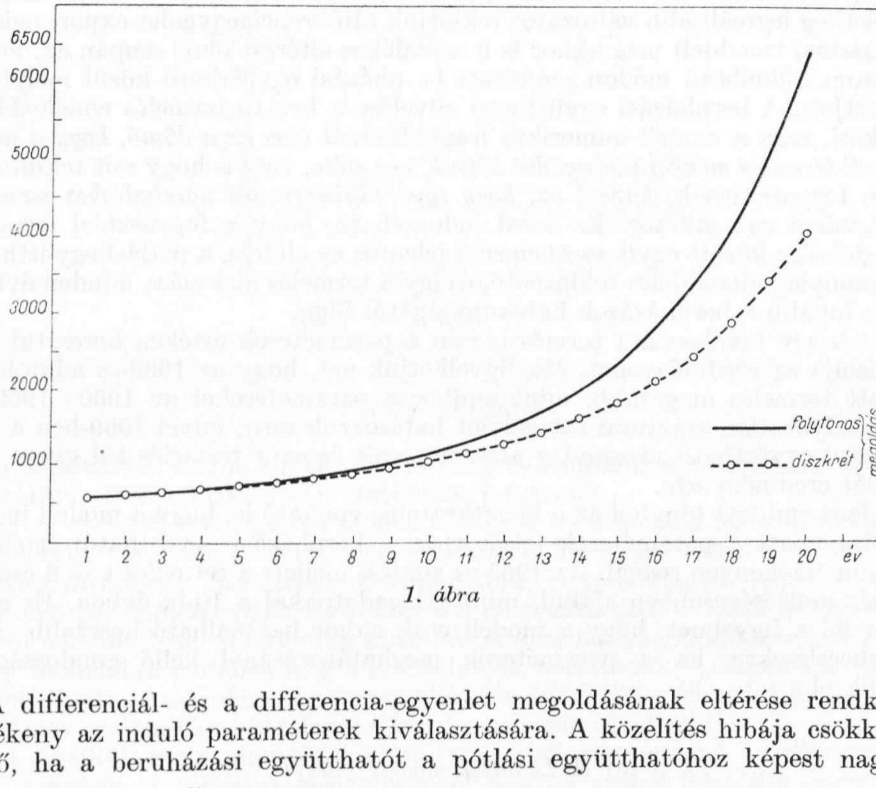
Tekintsük először a *differenciál- és a differencia-egyenlet* megoldásának eredményéből adódó eltéréseket. A legnagyobb hibát – ami a teljes eltérés mintegy 67 százaléka – akkor követjük el, ha a gazdaság fejlődését differenciál- és nem differencia-egyenlettel írjuk le.

A differencia-egyenlet használatát a következő megfontolások alapján tartjuk helyesebbnek:

- a rendelkezésre álló statisztikai adatok diszkrét időpontokra vonatkoznak,
- a gazdasági folyamatokat befolyásoló intézkedések diszkrét időpontokhoz kapcsolódnak,
- a beruházások bizonyos késleltetésekkel valósulnak meg; ezek figyelembevétele diszkrét modellekkel jobban interpretálható.

A Leontief modellből nyert numerikus eredmények is azt igazolják, hogy különösen hosszútávú előrebecsléseknél nem célszerű differenciál-egyenlettel számolni, mert ez számottevő torzítást okozhat. Az általunk ebből a szempontból vizsgált változat az 1969-es évet tekinti bázisnak, és már 6 év alatt is jókora eltérés mutatható ki. Minthogy az eltérés időben nő, hosszútávon ez teljesen irreális eredményekre vezet.

A két megoldás közti eltéréseket szemléletesen mutatja az alábbi ábra.



1. ábra

A differenciál- és a differencia-egyenlet megoldásának eltérése rendkívül érzékeny az induló paraméterek kiválasztására. A közelítés hibája csökkenthető, ha a beruházási együtthatót a pótlási együtthatóhoz képest nagyra választjuk, így a $\frac{\gamma}{\beta}$ arány nullához közelít. Az ábrán bemutatott változat is ezért mutat ki viszonylag kis eltérést a két módszer között. Már korábban utaltunk rá, hogy a paraméterek reálisan szóbajöhető értékei mellett az általunk vizsgált összes változatban a differenciál és a differencia egyenletek relatív hibája (eltérés/differencia-érték) lineáris fogyasztást trend esetén a legkisebb. Ezt a tényt a számítási eredmények egyértelműen igazolták.

A *fogyasztási trend megválasztása* alapvetően befolyásolja a számítási eredményeket. Mint az várható volt, a modell elég érzékenyen reagál a fogyasztási trend típusára. Az eltérésnek hozzávetőleg 22 százalékát az okozhatta, hogy a fogyasztást konstansnak tekintettük. Ez a tény azzal magyarázható, hogy állandó fogyasztás mellett a nettó nemzeti termelés növekedése teljes egészében felhalmozásra fordítható. A lineáris és az exponenciális fogyasztási függvény között nem lehet egyértelmű rangsort felállítani, az érzékenységi vizsgálatok többségénél (9 esetből 7-nél) hosszú távon az exponenciális trend használata bizonyult reálisabbnak. Mindazonáltal olyan változat is akadt, ahol kezdetben a lineáris, később az exponenciális függvény szolgáltatott jobb közelítést.

b) *A kezdő paraméterek kiválasztásából adódó eltérések*

A beruházási együttható nagysága mind a 9 változatban eltér egymástól, így az együttható módosításának hatását jól nyomon lehet követni. Ha az elméletileg legreálisabb változatot tekintjük (differenciaegyenlet exponenciális fogyasztási trenddel) még akkor is 9 százalékos eltérést okoz csupán az, hogy a három különböző módon számított beruházási együttható közül melyiket választjuk. A beruházási együttható növelése a bruttó termelés emelkedését megköti, azaz a modell numerikus megoldásánál *nem az a döntő, hogy a nettó nemzeti termelés mekkora hányadát kötjük meg előre*, vagyis hogy mit tekintünk végső fogyasztásnak, *hanem az, hogy egységnyi termelés növekedéshez mennyi beruházásra van szükség*. Ez azzal indokolható, hogy a fogyasztási trendek meredeksége között egyik esetben sem jelentős az eltérés, a pótlási együttható is viszonylag állandónak tekinthető, és így a termelés alakulása minden évben egyre inkább a beruházások hatékonyságától függ.

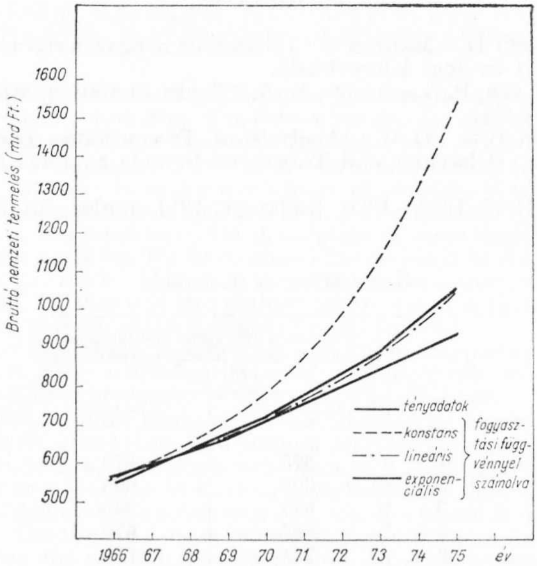
A bázisév kiválasztása természetesen a paraméterek értékén keresztül befolyásolja az eredményeket. Megfigyelhetjük azt, hogy az 1969-es adatokkal kapott termelés magasabb, mint amikor a paramétereket az 1960–1969-es évek súlyozatlan számtani átlagaként határozzuk meg, mivel 1969-ben a beruházási együttható viszonylag alacsony volt és ez a termelés túl gyors felfutását eredményezte.

A fent említett tényből az a következtetés vonható le, hogy a modell instabilitása miatt a paraméterek (elsősorban a beruházási együttható) értékére nagyon érzékenyen reagál. Az 1969-es adatok mellett a termelés $t = 6$ esetén is már szélsőségesebben alakul, mint átlagadatokkal a 10-ik évben. Ez arra hívja fel a figyelmet, hogy a modell csak akkor használható hosszabb távú előrebecslésekre, ha a paraméterek meghatározásánál kellő gondossággal járunk el.

c) *A Leontief modell hibája*

Ha azt vizsgáljuk, hogy milyen tényezők okozhatják a tényadatok (illetve az azokhoz illesztett trend értékei), valamint a modell által számított eredmények eltérését, mindenekelőtt az aggregáltságot kell megemlítenünk, hiszen az egyszektoros modell sohasem lehet reális folyamatok hű tükrözője. A modell szükségszerűen elhanyagol egy sor tényezőt, illetve ezekre *ceteris paribus* feltételt ad. Nyilvánvaló, hogy amennyiben ezek a tényezők a tervidőszakban másként alakulnak, mint a bázisidőszakban, modellhibákhoz vezetnek. Feltétlen megemlítendő, hogy a paraméterek állandóságának feltételezéséből is hasonló hibák adódhatnak.

Ha a modell megoldásából az a) és b) alatti tényezőket kiszűrjük, az így nyert termelési érték és a trend szerinti bruttó nemzeti termelés közti különbség a teljes eltérésnek kb. 2 százaléka. A tényleges (trend szerinti) és a számított eredmények eltérését a következő ábra mutatja be.



2. ábra

4. Összefoglalás

A fentiekben vázolt elméleti elemzések és numerikus számítások alapján az alábbi összefoglaló következtetésekre jutottunk.

a) A vizsgált egyszektoros modell esetében a differencia- és a differenciálegyenlettel való felírás, illetve megoldás között, bár nagy a formai hasonlóság, *jelentős eltérés van.* Számításaink kimutatták, hogy a magyar népgazdaságra jellemző paraméterértékek mellett a két megoldási mód közötti különbségek olyan nagyok, hogy a folytonos közelítés el nem hanyagolható hibákra vezet.

b) Modellünk esetében még a reálisabbnak tekinthető — differencia-egyenlettel kapott — megoldás is szisztematikusan *felülbecsli a tényadatokat*, a növekedésnek valamiféle megalapozatlanul optimista útját adja.

c) Anélkül, hogy numerikus számításainkból messzemenő következtetéseket vonnánk le, feltétlen megemlítendő, hogy a *modell* felettébb *érzékeny a beruházások hatékonyságát jellemző paraméterek változására*. Ez a beruházások hatékonyságának az egész termelési folyamatra gyakorolt jelentős szerepét hangsúlyozza.

d) Az elemzés során nyilvánvalóvá vált, hogy a modell ilyen egyszerű formában sok hibaforrást rejt magában. Ezeket a hibákat a kiinduló feltételezések egy részének feloldásával csökkenteni lehet. A többszektoros diszkrét feladat megoldása, az együtthatók időfüggvényként való kezelése és a modell reális konzisztens adatbázisra való helyezése a középtávú tervezés még hatékonyabb eszközévé teheti a dinamikus Leontief modellt.

(Beérkezett: 1972. április 26.)

IRODALOM

1. Andorka R.—Dányi D.—Martos B.: Dinamikus népgazdasági modellek. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Kalman, R. E.—Falb, P. L.—Arbib, M. A.: Topics in Mathematical System Theory. Mc.Graw-Hill Book Co.
3. Micher, A. N.—Poster, D. W.: Analysis of Discontinous Large-Scale Systems: Stability, Transient Behaviour and Trajectory Bounds. Systems Science. Volume 2. July 1971. No. 1.
4. Népgazdasági mérlegek 1966—1970. Budapest, 1971. június. Statisztikai Kiadó.

Értéktáblázat az 1. ábrához

Év	Eltérések a differencia- és differenciál-megoldások között (lineáris fogyasztási függvény esetén)	
	Differenciál	Differencia
1	575	573
2	608	605
3	645	639
4	686	676
5	734	718
6	790	766
7	855	820
8	934	882
9	1030	956
10	1147	1043
11	1293	1146
12	1475	1271
13	1703	1423
14	1992	1607
15	2358	1834
16	2825	2113
17	3421	2457
18	4183	2885
19	5161	3415
20	6416	4075

Értéktáblázat a 2. ábrához

Év	A bruttó nemzeti termelés alakulása			
	Tényadatok alapján	Konstans	Lineáris	Exponenciális
		fogyasztási függvény esetén		
1966	560	573	573	575
1967	603	610	605	608
1968	632	656	639	644
1969	665	714	676	684
1970	711	786	718	728
1971		876	766	777
1972		990	820	833
1973		1133	882	897
1974		1311	956	969
1975	935	1536	1043	1053

THE DIFFERENCE BETWEEN THE CONTINUOUS AND DISCRETE SOLUTION TO THE ONE-SECTOR DYNAMIC LEONTIEF MODEL

A great part of the mathematical models used in economic research presupposes the continuity of the economic variables. The reason for this is mainly methodological: the techniques of handling continuous variables have long been established in sciences, so there were readily available methods for the economic model-makers. The discrete handling of variables is, however, in many cases more reasonable, than the supposition of continuity, both the informations as well as the economic decisions are linked to discrete points of time, and, at the same time, the description of some time-lags is more natural by the help of discrete variables. The basic aim of the article is to show up the deviations which arise from the two kinds of handling the variables, or rather from the difference in the solution methods. To this end the authors make use of a simple and well-known model, the one-sector variant of the dynamic Leontief model.

In the first part of the article they solve the equation, supposing continuous as well as discrete variables with three different types of consumption functions. Comparing the fellow solutions, the formal similarity is conspicuous in all cases.

The second part deals with the analysis of the solutions. The dependence of the solution on the parameters is discussed first. The authors consider parameter values so that the results of the two methods approximate each other well. They examine the results with identical parameters as a function of time and establish that the deviation between the solutions can grow indefinitely as a function of *t*, i. e. the model is not stable as regards the solution method. The type of consumption function influences the results essentially, too and estimation on the relative deviations with different consumption functions is made.

In the third part the analysis is illustrated by a numerical example. The calculations with the 1960—1969 data of the Hungarian national economy have pointed out that the two solution methods lead to deviations that cannot be neglected, even for practically acceptable values of the parameters. The results obtained with the discrete handling of variables have seemed more realistic so it is expedient to solve more complex Leontief models with discrete variables.

РАЗНИЦА МЕЖДУ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНЫМ И ДИСКРЕТНЫМ РЕШЕНИЯМИ В СЛУЧАЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЛЕОНТЬЕВА

Большая часть математических моделей, употребляемых в экономических исследованиях, предполагает продолжительность экономических переменных. Причина этого в первую очередь методологическая: техника продолжительных переменных была создана в естественных науках уже раньше, итак в распоряжении экономических модельников были готовые модели. Дискретная трактовка переменных, однако, является во многих случая более логичной, чем предположение продолжительности, ведь и система информации и экономические решения связываются дискретными временными сроками, и в то же время предписание некоторых запаздывающих эффектов более естественное при помощи дискретных переменных. Основная цель статьи представить разницы, которые даются из двухобразной трактовки переменных и из разницы между способами решения уравнений. К этой цели авторы употребляют простую, общеизвестную модель, односекторный вариант динамической модели Леонтьева.

В первой части статьи дается решение модели, предположением и продолжительных и дискретных переменных при функциях потребления трех разных типов. Если пары решения возле друг друга, мы легко намечаем похожность по форме во всех случаях.

Вторая часть статьи занимается анализом полученных решений. Авторы сперва анализируют полученные решения в функции параметров. Установливаются параметры, при которых два метода можно считать хорошим приближением друг друга. Изучаются полученные результаты при одинаковых параметрах в функции времени и установливаются, разница между парами решения в функции *t* может увеличивать до любой величины. т. е. метод решения модели является нестабильным. Авторы устанавливают, что и тип функции

потребления существенно влияет на результаты, а потом они создают релации величины релативной ошибки решений, полученных при разных функциях потребления.

В третьей части анализ иллюстрируется нумерическим примером. Вычисления на основе данных венгерского народного хозяйства по 1960—1969 гг. оказали, что при практически возможных стоимостях параметров два метода решения ведут к значительным разницам. Результаты, полученные при дискретной трактовке переменных оказывались более реальными, итак решение более сложных моделей Леонтьева при дискретных переменных является целесообразным.

Szepesi György—Székely Béla

Egy dinamikus input-output modell további elemzése

Bevezetés

Az [1] alatti cikkünkben közöltük egy szabályozott dinamikus input-output modell vázát. Az azóta eltelt időszakban három irányban folytattunk a modellel kapcsolatban kutatásokat. Egyrészt folytattuk a modell elméleti analízisét mind közgazdasági, mind matematikai szempontból, másrészt elvégeztük az első kísérleti jellegű számításokat és harmadrészt megteremtettük a modell számítástechnikai hátterét. A vizsgálatok elsősorban azt célozták, hogy felderítsük mennyiben alkalmas ez a modell a hosszú távú tervezés céljaira. Ebből a szempontból elsősorban azt kellett megvizsgálnunk, hogy a modell alapfeltevése hogyan és mennyire egyszerűsíti le a bonyolult valóságot, és ezek az alkalmazott absztrakciók nem teszik-e lehetetlenné a modell eredményeinek gyakorlati felhasználását. E kérdés pozitív értelmű tisztázása után megtettük az első lépéseket a modellel kapcsolatos számítások statisztikai és számítástechnikai megszervezésére. Ezekről fogunk e cikk keretében beszámolni.

1. A modell pontosabb közgazdasági tartalma

A modell egy olyan gazdaságot ábrázol, amelyben a ráfordítási szerkezet diszkrét módon változik, míg a kibocsátási szerkezet folytonosan idomul a megváltozott ráfordítási szerkezethez. Mennyiben reális ez a feltevés? A modell megideologizálása nélkül állíthatjuk, hogy a nagyobb beruházások eredményeképpen üzembelépő új korszerű kapacitások ugrásszerűen változtatják meg a ráfordítások szerkezetét anélkül, hogy ezáltal a kibocsátási szerkezet ugrásszerű változását kikényszerítenék. Természetesen ilyenkor felborul a kibocsátások és a felhasználások egyensúlya, amennyiben ez az egyensúly fennállt. Egy normálisan működő gazdaságban működnek olyan erők, amelyek elindítják a források adaptációját a megváltozott felhasználási szerkezet irányába. Ez az automatikus adaptáció ciklikus folyamatokat indíthat meg. Modellünk azonban egy olyan gazdaságot ábrázol, amelyben tervezés és ezen alapuló szabályozás működik. Így a ráfordítási struktúra változásai előre megtervezhetők, beindulásuk és a termelés adaptációs folyamata szabályozható. Ennek a modell szerint funkcionáló gazdaságnak alapvető célja: maximális ütemű stabil fejlődést biztosítani változó technikai feltételek mellett. Azt hisszük, hogy ez a cél hosszú távon reálisan kitűzhető, és megvalósítása nem hoz roszszabb eredményt, mint valamilyen célváltozó optimalizálása.

A konstans ráfordítási szerkezethez tartozó hosszú távon stabil egyensúlyi pályát az ún. Neumann-modell segítségével határozhatjuk meg. Bizonyítható az úgynevezett turn-pike tételek segítségével, hogy bizonyos célváltozók optimális értékeihez tartozó fejlődési pálya konvergál az optimalizálási modell feltételrendszeréhez tartozó hosszú távú egyensúlyi pályához. (Ezek a célváltozók lehetnek: az összfogyasztás, az időszakvégi tőkeállomány stb.) Változó ráfordítási szerkezethez tartozó stabil egyensúlyi pálya meghatározása a Neumann-modell módosítását igényli. Modellünkben a ráfordítási szerkezet diszkrét módon változik, ezért a stabil egyensúlyi pálya meghatározható úgy is, mint az egyes ráfordítási struktúrákhoz tartozó egyensúlyi pályák sorozata. A ráfordítási szerkezet megváltozását követő egyensúlytalansági szakaszok hosszát pedig minimalizáljuk. Így az ugrásszerű módon megváltozó ráfordítási szerkezethez tartozó stabil pálya az adott ráfordítási szerkezethez tartozó stabil egyensúlyi szakaszokból és a struktúraváltozást követő minimális hosszúságú egyensúlytalansági szakaszokból áll.

A hosszú távon stabil pálya meghatározásának ez a módja valójában egy rövidlátó módszer. Nem használja ki azt a tényt, hogy a jövőbeni struktúrák tervezhetők, és figyelembevehetők a jelenlegi struktúrákhoz tartozó egyensúly meghatározásánál.

Ha a jelenlegi egyensúly feltételeinek meghatározásánál csak a jelenlegi ráfordítási szerkezetet vesszük figyelembe, akkor a következő ráfordítási szerkezet belépésekor fellépő egyensúlytalanságok nagyon heves mértékűek lehetnek. Ha a jelenlegi egyensúly feltételeinek kialakításánál figyelembe vesszük a következő szakasz ráfordítási szerkezetéhez tartozó egyensúlyi output szerkezetet, azaz valamilyen módon az egyensúly fenntartása mellett a jelenlegi kibácsátási szerkezetet közelítjük ehhez, akkor az átmeneti szakasz ingadozásai csillapíthatók. Tulajdonképpen ez a feltétel jelenti a Neumann-modell tényleges módosítását olyan értelemben, hogy egy kvázi dinamikus modellből egy dinamikus modellé alakítjuk át. Ezzel a modellel egy adott ráfordítási szerkezethez egy olyan stabil egyensúlyi pályát határozhatunk meg, amelyben kifejezésre jutnak egy jövőbeni tervezett ráfordítási szerkezethez tartozó egyensúlyi pálya sajátosságai is.

Hogyan lehet ez a módosítást végrehajtani úgy, hogy a realitás kritériumát maximálisan figyelembe vegyük? Azt akarjuk elérni, hogy a jelenlegi egyensúlyi kibocsátási struktúra eltolódjon a következő szakasz kibocsátási szerkezete felé. Mivel az egyensúlyi kibocsátási szerkezet megegyezik a felhasználási, ráfordítási szerkezettel, ezért a kibocsátási szerkezetet úgy tolhatjuk el a következő időszak kibocsátási szerkezetének irányába, hogy a felhasználás elemei között szerepeltetünk olyanokat, amelyekhez tartozó ráfordítási szerkezet már a következő szakaszra jellemző. Ezen felhasználási célok kielégítésének intenzitása határozza meg a kibocsátási szerkezet eltolódásának mértékét. Felmerül a kérdés, hogy a ráfordítási szerkezet mely elemei által támasztott igények szerkezete egyezhet meg a következő szakaszra jellemző ráfordítási szerkezettel. Egy input-output modellben kétféle ráfordítás-típust különböztethetünk meg: folytonos és egyszeri ráfordításokat.

A folytonos ráfordítások (anyag- és munkaráfordítások) közé nem vihetünk olyan elemet, amelynek szerkezete eltér a jelenlegi technika által determinált szerkezettől. Az egyszeri ráfordítások a lekötött tőke (álló + forgó) bővítését, illetve pótlását jelentik. Az elhasznált tőke pótlása a ráfordítások legrugalmasabb eleme.

Ennek a pótlásnak van egy technikailag meghatározható minimuma, amelynek szerkezete meg kell hogy egyezzen a tőke ráfordítások szerkezetével.

E minimumon felül azonban a tőke pótlásának szerkezete tetszőleges lehet, tehát megegyezhet a következő időszak tervezett tőkeráfordítási szerkezetével. Ha a pótlás szerkezete eltér a jelen szakaszban funkcionáló technikához tartozó tőkeráfordítási szerkezettől, akkor ez csak az állóeszközök átlagos élettartamát fogja differenciálni. Ebben az esetben viszont a felhasználási struktúra elemei között megjelent egy olyan, amelynek szerkezete a következő tervezett szakasz technikai szinvonalának felel meg, és ezáltal a jelen szakasz kibocsátási szerkezete közelíthető a következő szakasz kibocsátási szerkezetéhez. A közelítés intenzitását meghatározza a jelen szakaszban végbemenő, de a következő szakasz ráfordítási szerkezetével megegyező pótlás intenzitása.

A ráfordítási struktúra diszkrét megváltozásának időpontja lényegében attól függ, hogy a meglevő állóalapok mekkora hányadát korszerűsítettük. A korszerűsítés egyrészt pótlás, másrészt bővítő beruházások formájában megy végbe. A jelen szakaszban funkcionáló állóeszközök szerkezete megegyezik a jelen technika által determinált szerkezettel. A pótlás viszont a következő technika által determinált szerkezet szerint megy végbe, éppen ezért bizonyos állóeszköz-fajtákból már befejeződhet a meglevő állóalapok cseréje, míg a többieknél ez nem történt meg. Ez a jelen és a jövő technikájához tartozó ráfordítási szerkezet közötti különbségből adódik. Az áttérés viszont akkor kezdődhet meg, ha a „legszűkebb keresztmetszet"-ben is befejeződött az induló állóalapok meghatározott hányadának lecserélése. A többi állóalapfajtánál felesleges kapacitások keletkezhetnek. E felesleges kapacitások nem azt jelentik, hogy ezeket egyáltalán nem lehet felhasználni, a jelen szakaszban folyó termelés céljaira, hanem inkább a kapacitáskihasználás csökkenésében a tőke/termelés mutató romlásában nyilvánulnak meg.

Ennek alapján a módosított Neumann-modellben a kibocsátások és a felhasználás dinamikus egyensúlya csak formálisan marad meg, mert egy bizonyos idő eltelte után a pótlási igényként jelentkező felhasználások egy része ténylegesen kihasználatlan marad.

A pótlásnak csak egy része szükséges a jelen technikán folyó termelési folyamat egyensúlyának fenntartásához, egy másik része azt a funkciót tölti be, hogy a kibocsátás egyensúlyi szerkezetét közelítse a következő szakasz technikájához tartozó egyensúlyi kibocsátási szerkezethez. Ennek mintegy áraként felesleges, nem teljesen kihasznált kapacitások keletkezhetnek, ez az ár tulajdonképpen annak az ára, hogy a következő egyensúlyi szakaszra való áttérés minél simább, minél zökkenőmentesebb legyen. A kibocsátási szerkezet ily módon történő szabályozásának meg van az az előnye, hogy a dinamikus egyensúly olyan értelmű megsértése nélkül, hogy ciklikus ingadozások állnának elő, közelíti a kibocsátási szerkezetet a jövő kibocsátási szerkezetéhez.

Felmerül az a kérdés, hogy a gyakorlatban milyen szabályozó eszközök segítségével lehetne ezt a szabályozást megvalósítani? Mivel modellünk formai szempontból megegyezik a Neumann- Leontief–Bródy-modellel, illetve annak parametrizált változatának tekinthető, értelmezhető e modell duálisa, amely bizonyos, a gazdasági mechanizmusra tett feltételezések mellett a kibocsátási szerkezetet a módosított modell által meghatározott kibocsátási szerkezet felé mozgatja.

A modellel kapcsolatos elméleti vizsgálatokkal elsősorban az első szakasz sajátosságait sikerült felderíteni. További fontos feladat a második szakasz, az időoptimális szabályozási folyamat közgazdasági-elméleti sajátosságainak felderítése, esetleges összekapcsolása a gazdasági ciklusok elméletével.

2. Az áttérés kezdőpontjának matematikai meghatározása

Mielőtt erre részletesen is rátérnénk, formálisan összefoglaljuk az [1]-ben leírt modellt.

Jelölések:

A a gazdaság visszagyűrűztetett folyó ráfordítási struktúráját reprezentáló matrix
B a gazdaság visszagyűrűztetett egyszeri ráfordítási struktúráját reprezentáló matrix
B_1 a következő szakasz egyszeri ráfordítási struktúrája
α az évi selejtezést szabályozó paraméter
λ egyensúlyi növekedési ütem $\alpha = 0$ szabályozás mellett
$\lambda_{(\alpha)}$ egyensúlyi növekedési ütem α szabályozás mellett
$\hat{x}_{(\alpha)}$ egyensúlyi termelési szerkezet α szabályozás mellett (ahol $\sum_i x(\alpha) = 1$)
t az idő
$\hat{x}_{(\alpha, t)}$ t időszaki termelés vektora α szabályozás mellett
$b_{(\alpha, t)}$ a tőkeállomány vektora t időszakban α szabályozás mellett
$s_{(\alpha, t)}$ a selejtezés vektora t időszakban α szabályozás mellett
γ lecserélési hányad
τ az áttérés megkezdésének időpontja
$e_{(\alpha, \gamma)}$ időpontban fennálló felesleges kapacitások α és γ szabályozóértékek mellett
c a termelés szintje $t = 0$ mellett

A modell első fázisát (egyensúlyi fázis) a következő összefüggés-rendszer írja le:

$$\left.\begin{array}{ll} x_{(\alpha, t)} = Ax_{(\alpha, t)} + B\dot{x}_{(\alpha, t)} + \alpha B_1 \dot{x}_{(\alpha, t)} & 1,\ t = [0, \tau] \\ x_{(\alpha, t)} > 0 & 2,\ x_{(0)} = c\hat{x}_{(\alpha)}\ 1\text{,a} \end{array}\right\} \mathrm{I}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \int_0^\tau \alpha B_1 \dot{x}_{(\alpha, t)}\, dt \geq \gamma B_0 x_{(0)} & 3, \\ \tau \to \min! & 4, \end{array}\right\} \mathrm{II}$$

$$\left.\begin{array}{ll} s_{(\alpha, t)} = B_1 \dot{x}_{(\alpha, t)} & 4, \\ b_{(\alpha, t)} = Bx_{(\alpha, t)} & 5, \\ e_{(\alpha, \gamma)} = \int_0^\tau s_{(\alpha, t)}\, dt - \gamma B_0 x_{(0)} & 6, \end{array}\right\} \mathrm{III}$$

Az összefüggés-rendszer három csoportra osztható. Az I. csoport az egyensúlyi arányokat és növekedési ütemet határozza meg. A II. csoport az áttérés megkezdésének időpontját, míg a III. csoport a különféle gazdasági struktúrákat határozza meg. Az egyes csoportok közti bonyolult összefüggésrendszer kibontása a modell tulajdonképpeni analízisét jelenti. Ennél a vizsgálatnál induljunk ki a II. csoportból és ezen keresztül vizsgáljuk meg a modell specialitását és eltérését a többi Neumann-típusú modelltől.

Tegyük fel, hogy kiválasztottunk egy α értéket és ennek alapján megoldottuk az I. egyenletcsoportot, ugyanis ehhez további adatokra nincs szükség.

Tehát az I.[1] csoport megoldása független a II., illetve a III. csoport megoldásától.

Az I. összefüggéscsoport analízisével részletesen foglalkoztunk az [1]-ben, most figyelmünket a II. csoportra összpontosítjuk. Írjuk fel mégegyszer a II. csoport összefüggéseit, most már részletesebben

$$\int_0^\tau \alpha B_1 \dot{x}_{(\alpha,t)}\, dt \geq \gamma Bx_{(0)} \tag{1}$$

$$\tau \to \min! \tag{2}$$

$$\alpha \geq 0 \tag{3}$$

$$B_1 \geq 0 \tag{4}$$

$$\dot{x}_{(\alpha,t)} = \lambda_{(\alpha)} x_{(\alpha,t)} \tag{5}$$

amiből

$$x_{(\alpha,t)} = c\hat{x}_{(\alpha)} e\, \lambda^t; \quad \hat{x}_{(\alpha)} > 0 \tag{6}$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \tag{7}$$

$$B \geq 0 \tag{8}$$

$$x_{(0)} = c\hat{x}_{(\alpha)}; \quad c > 0 \tag{9}$$

Az (1)–(9) egy nem lineáris programozási feladat, amelynek megoldhatóságát bizonyítjuk.

Végezzük el az (1) összefüggésben az integrálást

$$\int_0^\tau \alpha\lambda B_1 x_{(\alpha,t)}\, dt = c\,\lambda\alpha \int_0^\tau B_1 \hat{x}_{(\alpha)} e^{\lambda\tau}\, dt = c(e^{\lambda\tau} - 1)\,\alpha B_1 \hat{x}_{(\alpha)}$$

Azaz (1) összefüggés

$$(e^{\lambda\tau} - 1)\, c\alpha B_1 \hat{x}_{(\alpha)} \geq \gamma Bx_{(0)} \tag{1'}$$

alakot adja.

A könnyebb matematikai kezelhetőség érdekében alakítsuk át az (1′, 9) feladatot a következő formába:

$$(e^{\lambda\tau} - 1)\,\alpha B_1 x_{(0)} \geq \gamma Bx_{(0)} \tag{1''}$$

$$\tau \to \min! \tag{2''}$$

a (3,9) feltételek változatlanul hagyásával.

Jelöljük (1′′) bal oldalán álló függvényt (skalár – vektor függvény) $\psi(\tau)$-al, azaz $\psi(\tau) = (e^{\lambda\tau} - 1)\,\alpha B_1 x_{(0)}$-al.

Belátható, hogy $\psi(\tau)$ τ folytonos monoton növekvő függvénye, amelynek képe az L^n-ben[2] egy $B_1 x_{(0)}$ irányú sugár. Ennek megfelelően az (1′′, 2′′, 3, 9) feladat ekvivalens a következő feladattal[3]

$$\psi(\tau) \geq \gamma\, Bx_{(0)} \tag{1'''}$$

$$1^* \varkappa(\tau) = 1^*(\psi(\tau) - \gamma\, Bx_{(0)}) \to \min! \tag{2'''}$$

$$\ldots (3,\ 9)$$

[1] A továbbiakban II. összefüggéscsoporttal mint az I-től független feladattal foglalkozunk, az I. egyenletcsoport lehetséges megoldásainak halmazát úgy vesszük figyelembe, hogy a II. csoportot ennél bővebb, tehát ezt is tartalmazó halmazon értelmezzük; az n dimenziós euklidesi tér pozitív ortansán. Azaz feltesszük, hogy I. egyenletcsoport megoldásai, az $\hat{x}(\alpha)$ vektorok ide esnek.

[2] Ahol L^n az n dimenziós euklidesi tér.

[3] 1^* összegező sorvektor.

1. tétel: az (1''', 2''', 3, 9) feladat lehetséges megoldásainak tartománya egy L^n nem negatív ortansába eső eltolt konvex konusz, amelynek csúcspontja $\gamma Bx_{(0)}$ és alkotói az egységvektorokkal párhuzamosak (azaz merőlegesek egymásra).

Bizonyítás:

Bevezetve $\gamma Bx_{(0)}=v$ jelölést (1''', 2''', 3, 9), lehetséges megoldásainak L halmaza a következőképpen definiálható

$$L = \{x/x \geq v\}$$

Lássuk be, hogy L konvex, ha $x_1 \in L$ és $x_2 \in L$ és $0 \leq \delta \leq 1$, akkor minden $x = \delta x_1 + (1-\delta) x_2 \geq \delta v + (1-\delta) v = v$, azaz $x \in L$.

Ha L eltolt konvex konusz v csúcsponttal, akkor felírható $L' + v$ alakban, ahol $L' = \{z/z = x - v)$. Be kell bizonyítanunk L' origo csúcsponttal konvex konusz.

Ha $x \in L$, akkor $x \geq v$ és $x - v = z \geq 0$, azaz $L' = \{z/z \geq 0\}$, ha $z \geq 0$, akkor bármely $\delta > 0$ $\delta z \geq 0$, azaz $z \in L'$. Tehát L' és ezáltal L is konvex konusz. A tétel harmadik feléhez elegendő belátnunk, hogy L' alkotói az egységvektorokkal[4] párhuzamos sugarak, bármely i, j-re $e_i \in L'$ és $e_j \in L'$, tehát L'-ben alkothat két sugár derékszöget, de ennél nagyobb szög L' sugaraira vonatkozóan nem definiálható L'-ben. Tegyük fel az ellenkezőjét, az z_1 és z_2 zárjon be 90°-nál nagyobb szöget, ez egyértelmű azzal, hogy $z_1^* z_2 < 0$, de mivel $z_1 \in L'$ és $z_2 \in L'$ azaz $z_1 \geq 0$ és $z_2 \geq 0$, ez nem lehetséges, azaz L' alkotói az egységvektorokkal párhuzamos sugarak.

2. tétel: az (1''', 2''', 3, 9) feladatnak mindig van optimális megoldása és az L valamelyik határoló hipersíkján található, ahol L a lehetséges megoldások halmaza.

Bizonyítás:

Mivel $L = \{x/x \geq v\}$, és $v > 0$, valamint $\psi(\tau)$ képe egy olyan sugár, amelynek iránya $B_1 x_{(0)} > 0$ és $\psi(\tau)$ τ monoton növekvő, folytonos, koordinátánként végtelenbe tartó függvénye, ezért $\psi(\tau)$-nek és L-nek van mindig metszéspontja.

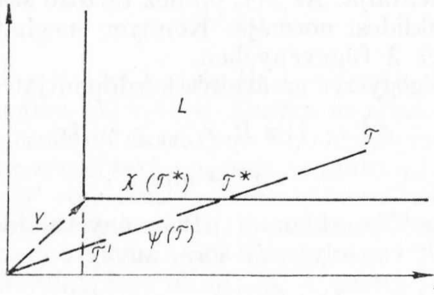
Legyen τ_0 az az idő, amikor $\psi(\tau)_0$ metszi L-t. Ekkor $\tau < \tau_0$ esetén $\psi(\tau)$ nem megengedett, $\tau \geq \tau_0$-nál viszont megengedett. Azaz τ is, $\psi(\tau)$ is $\tau = \tau_0$-ban minimális a megengedett halmazon.

A modell eltérése a klasszikus Neumann modelltől

Ábrázoljuk a kétdimenziós térben az (1, 9) feladatot

Vizsgáljuk meg az áttérési feladat közgazdasági tartalmát a fentiek ismeretében. A gazdaság akkor kezdheti meg az áttérést a következő szakaszra, amikor az induló tőkeállomány $(\beta x_{(0)})$ γ_0 százaléka kicserélődött. Azonban a pótlási alapok struktúrája $(B_1 x_{(0)})$ eltér az induló állóalapok struktúrájától $(Bx_{(0)})$, ezért a pótlási folyamat közben felesleges kapacitások keletkeznek,

[4] e_i, e_j az i, illetve j egységvektor.



1. ábra

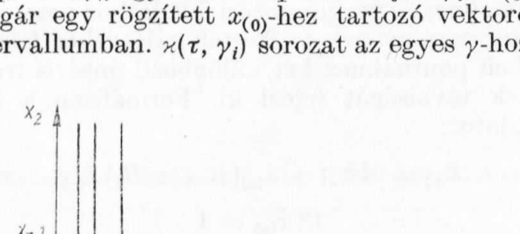
mert a pótlási folyamat akkor fejeződhet be, amikor a lecserélődés a legszűkebb keresztmetszetben (ábránkon x_2 komponens) is befejeződött, közben x_1 komponensre már τ' időpontban összegyűltek a lecseréléshez szükséges alapok és x_1-ből $\varkappa(\tau^*)$ felesleges kapacitás keletkezik.

A felesleges kapacitások függése γ-tól

A felesleges kapacitások viszonylag egyszerű módon függnek a lecserélési aránytól. A lecserélési arány azonban valójában nem egy tiszta döntési változó. A döntés lehetséges intervallumát sokkal inkább műszaki-technikai feltételek határolják be, mint makroökonómiai-közgazdasági megfontolások. Ugyanis, hogy egy új technikai struktúrára való áttéréshez a meglevő állóalapok mekkora részét kell lecserélni, az nagyrészt a régi és az új technika viszonya, kontinuitása által determinált. De ez a determináltság nem abszolút értelmű, ezért manőverezési döntési lehetőség fennáll.

Pusztán formai szempontból a γ lecserélési hányad 0 és 1 között változhat. Az induló állóalapok struktúrája meghatározott és γ-tól független. Vizsgáljuk meg, hogy ceteris paribus hogyan függnek a felesleges kapacitások γ-tól.

Az ábrán $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ egyenesek reprezentálják $\gamma_i Bx_{(0)}$ vektorok mértani helyét, $\gamma_i Bx_{(0)}$ sugár egy rögzített $x_{(0)}$-hez tartozó vektorokat reprezentálja az $\gamma_i = [0, 1]$ intervallumban. $\varkappa(\tau, \gamma_i)$ sorozat az egyes γ-hoz tartozó felesleges



2. ábra

kapacitásokat reprezentálja. Az $\varkappa(\tau, \gamma_i)$-hez tartozó szakaszok hossza a felesleges kapacitások euklidesi normája. Könnyen meghatározhatjuk az áttérés megkezdésének idejét λ függvényében.

Ehhez írjuk fel mégegyszer az áttérés kezdőpontját meghatározó feladatot

$$(e^{\lambda\tau} - 1)\, \alpha\, B_1\, x_{(\alpha,\,0)} \geq \gamma\, B x_{(\alpha,\,0)} \tag{1}$$

$$\tau' \to \min \tag{2}$$

Ha τ^* optimális megoldás, akkor $\varkappa(\tau)$ függvény tulajdonságai következtében B-nek, illetve B_1-nek van olyan i^* sora, amelyre

$$(e^{\lambda\tau} - 1)\, \alpha\, B_1^{(i^*)}\, x_{(\alpha,\,0)} = \gamma\, B^{(i^*)}\, x_{(\alpha,\,0)} \tag{3}$$

Minden $i \neq i^*$-ra viszont

$$(e^{\lambda\tau} - 1)\, \alpha\, B_1^{(i)}\, x_{(\alpha,\,0)} \geq \gamma\, B^{(i)} x_{(\alpha,\,0)}\,. \tag{4}$$

Az i^* sort a következő formula alapján határozhatjuk meg

$$\min_i \frac{B_1^{(i)}\, x_{(\alpha,\,0)}}{B^{(i)}\, x_{(\alpha,\,0)}}\,. \tag{5}$$

Amelyik i-re az 5 teljesül, az lesz az i^*.

Ekkor viszont a 3-ból

$$\tau^* = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\gamma\, B^{(i^*)}\, x_{(\alpha,\,0)}}{\alpha\, B_1^{(i^*)}\, x_{(\alpha,\,0)}} + 1 \right). \tag{6}$$

A felesleges kapacitások extrémumának meghatározása

Az előző pontban láttuk, hogy rögzített α érték mellett a felesleges kapacitások összvolumene monoton módon függött a lecserélési aránytól, γ-tól. Ilyen értelemben a γ értelmezési tartományának nincs olyan belső pontja, ahol a felesleges kapacitásoknak szélső értéke lenne. Felmerül a kérdés, hogy rögzített γ érték mellett van-e olyan α szabályozás, amely mellett a felesleges kapacitásoknak minimuma van? Követelményként előírhatjuk még, hogy ehhez az α-hoz tartozó növekedési ütemnek meg kell haladni egy előre megadott minimumot. Ez a feladat egy nem lineáris programozási feladathoz vezet, amikoris a feladat feltételrendszere egy paraméteres sajátérték sajátvekor feladat, célfüggvénye egy euklideszi térbeli ponthalmaz két különböző lineáris transzformáció által generált képterének távolságát fejezi ki. Formálisan a következő módon írhatjuk fel a feladatot:

$$\hat{x}_{(\alpha)} = A\hat{x}_{(\alpha)} + \lambda_{(\alpha)}(B + \alpha\, B_1)\, \hat{x}_{(\alpha)} \tag{1}$$

$$1^*\, \hat{x}_{(\alpha)} = 1 \tag{2}$$

$$||\, B\hat{x}_{(\alpha)} - B_1\, \hat{x}_{(\alpha)}\, || \to \min! \tag{3}$$

ahol 1^* összegző sorvektor.

Ezzel a feladattal kapcsolatban a kutatások folyamatban vannak, amelyek során elsősorban azt keressük, hogy vajon teljesülnek-e azok a feltételek, amelyek fennállása esetén a nem lineáris programozási feladatokra vonatkozó nyeregpont tételek alkalmazhatók?

3. A modellel végzett kísérleti számítások eredményei

Az alapadatok

A modell adatbázisát a Bródy András által publikált Közgazdaságtudományi Intézet belső anyagából [2] vettük. Ezeken az adatokon, amelyek a magyar népgazdaság 1965. évi adatain alapulnak, néhány módosítást hajtottunk végre. Az adatok (A, B matrix) tartalmazzák a munkaerő sorát és a fogyasztás oszlopát is, valamint a „B" típusú mérlegben a külkereskedelmi soron az import és a külkereskedelmi oszlopon az export adatai szerepelnek. Az A és B matrix összeállításának részletesebb leírását [2] tartalmazza. A számításoknál tehát az 1. táblában közölt adatokból indultunk ki. A modell inputjául szolgál még a B_1 matrix, amely a következő időszak fajlagos tőkeráfordítási struktúráját reprezentálja. A B_1 matrix konstruálásánál a B matrixot vettük alapul és ezt módosítottuk a következő elvek alapján (ezek az elvek nem egy valóságos gazdaságpolitikát reprezentálnak, de egy lehetséges koncepciót, amelynek alapján B_1 elemei számszerűsíthetők)

1. A technikai fejlődés következő szakaszában nő a fajlagos tőkeráfordítás nagysága,
2. nő minden ágazatban az iparból eredő fajlagos tőkelekötés,

1. tábla

a) „A" Folyó ráfordítások matrixa 100 Ft kibocsátásra jutó ráfordítás

	1	2	3	4	5
1. Ipar	41	12	33	84	40
2. Mezőgazdaság	6	35	2	8	12
3. Egyéb	5	3	7	7	11
4. Külkereskedelem	10	2	2	0	2
5. Munkaerő	21	27	32	19	20

b) „B" Egyszeri ráfordítások matrixa 100 Ft kibocsátásra jutó ráfordítás

1. Ipar	51	130	557	81	74
2. Mezőgazdaság	3	51	1	2	1
3. Egyéb	10	0	0	5	0
4. Külkereskedelem	20	14	67	22	1
5. Munkaerő	2	3	3	1	500

2. tábla

B_1 Egyszeri ráfordítások matrixa (célstruktúra) 100 Ft kibocsátásra jutó ráfordítás

	1	2	3	4	5
1. Ipar	60	170	620	110	90
2. Mezőgazdaság	3	48	1	2	1
3. Egyéb	15	0	0	2	1
4. Külkereskedelem	17	13	62	22	1
5. Munkaerő	5	4	5	3	561

3. csökken az importból eredő tőkelekötés,

4. nő az egyéb szektorból eredő tőke lekötése, ez oly módon függ össze a 3. ponttal, hogy importgépek helyett inkább licenciákat vásárolunk és ezt az egyéb szektorban számoljuk el,

5. nő a lekötött szellemi tőke.

Az ezen elvek alapján konstruált B_1 matrixot tartalmazza a 2. táblázat.

Neumann-pálya és a valóságos gazdasági szerkezet

A 3. táblázat 1. oszlopa a tényleges output struktúrát mutatja, 2. oszlopa Bródy András által számított egyensúlyi struktúrát mutatja, a 3. oszlopa pedig a módosított B matrix segítségével számolt A, B matrixhoz tartozó output struktúrát. A táblázatból kitűnik, hogy az ipar kivételével az általunk

3. tábla

A tényleges és a számított kibocsátási szerkezet

	Tény	Bródy-modell	Modell	Tény/Bródy-modell	Tény/modell
1. Ipar	46	45,1	45,1	+1,7	+1,9
2. Mezőgazdaság	11	11,4	11,3	−3,5	−2,7
3. Egyéb	7	6,8	7,1	+3,0	−2,8
4. Külkereskedelem	9	6,4	6,4	+28,8	+28,8
5. Munkaerő	27	30,2	30,1	−11,8	−11,1

végrehajtott módosítások következtében az egyensúlyi arányok közelebb kerültek a tényleges arányokhoz, ugyanakkor viszont a növekedési ütem nálunk 5,28%, míg Bródynál 5,36%.

Mivel modellünkkel most végezzük az első kísérleti számításokat, ezért szükség volt arra, hogy egyrészt a modell inputja nagyjából megegyezzék egy már bejátszott modell inputjával, másrészt, hogy a modell eredményeit kettős kontroll alá vegyük, összevessük egy másik modellel és ahol ez lehetséges volt, a tényleges adatokkal.

A szabályozott Neumann-pálya viselkedése

Mint azt a bevezetőben leírtuk, modellünkben azért alkalmazunk szabályozást, hogy az egyensúlyi arányokat, az egyensúly fenntartása mellett közelítsük a következő szakaszra jellemző optimális egyensúlyi arányokhoz. Az empirikus vizsgálatoknál számos leegyszerűsítő feltevéssel éltünk; csak két periódust vettünk figyelembe, a második periódusban nem alkalmaztunk szabályozást és végül a legerősebb absztrakciót említjük meg: feltételeztük, hogy mindkét időszak folyó ráfordítási struktúrája azonos. Erre azért volt szükség, mert ebből az esetből kiindulva akarjuk vizsgálni, hogy az első periódusban alkalmazott szabályozás hatására közelednek-e az első szakaszhoz tartozó egyensúlyi arányok a második szakasz egyensúlyi arányaihoz. Ezután érdemes csak megvizsgálni ezt a folyamatot abban az esetben, ha a két szakasz A matrixa különbözik.

A 4. táblázat 1. oszlopa az A, B matrixhoz tartozó egyensúlyi arányokat tartalmazza, a 2. oszlopa pedig az A, B_1 matrixokhoz tartozó egyensúlyi

4. tábla

A „start" és a „cél" kibocsátási szerkezet 100 Ft összes kibocsátás megoszlása

	Start	Cél
1. Ipar	45,12	45,34
2. Mezőgazdaság	11,34	11,23
3. Egyéb	7,10	7,18
4. Külkereskedelem	6,38	6,21
5. Munkaerő	30,05	30,03

arányokat mutatja. A kétféle B-hez tartozó egyensúlyi output struktúra viszonylag nem nagyon tér el a B elég szignifikáns változtatása mellett (például az ipar soron a fajlagos tőkelekötést átlagosan 23%-kal növeltük).

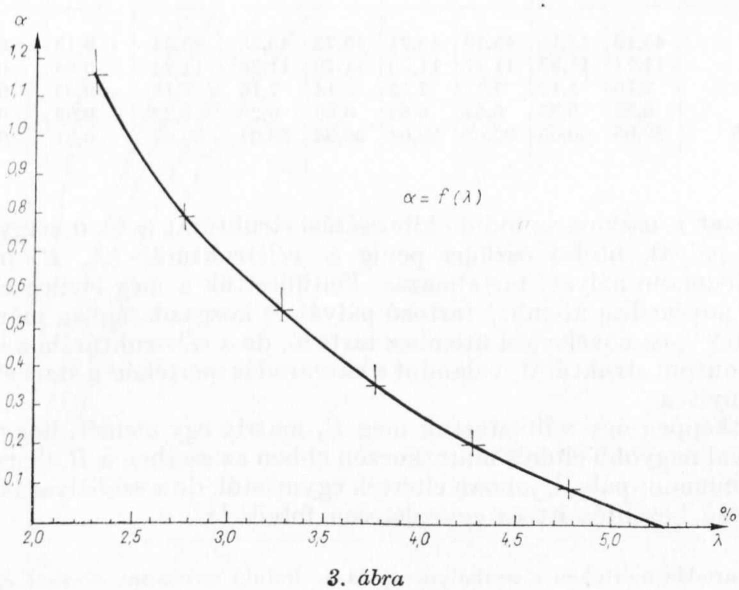
Jelentősen csökken azonban az egyensúlyi növekedési ütem; a B matrixhoz 5,28%-os növekedési ütem tartozik, a B_1-hez 4,65%. Ezt azzal magyarázhatjuk, hogy B_1 elemeit átlagosan kb. 10%-kal növeltük.

Az α növelésére elég érzékenyen reagál a növekedési ütem. A 3. ábra mutatja α függését λ-tól. Úgy tűnik, hogy az egy monoton csökkenő konvex függvény. A közgazdaságilag értelmezhető értelmezési tartományon belül ennek a függvénynek nincsenek aszimptotái.

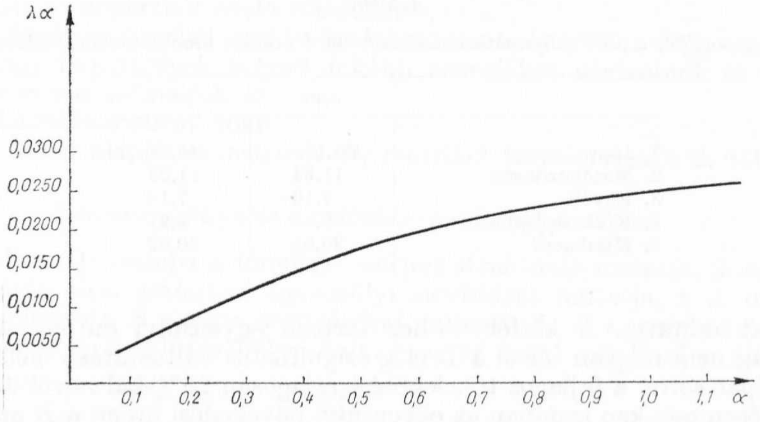
A lecserélés abszolút nagyságának alakulását mutatja az $\alpha\lambda$ szorzat, amely már figyelembe veszi a λ csökkenésének hatását a selejtezés volumenére. $\alpha\lambda$ szorzat függését α-tól mutatja a 4. számú grafikon.

Az α szabályozás hatása a kibocsátási struktúrára a következő módon jelenik meg:

α növekedésével $x_{(\alpha)}$ monoton módon gyorsan konvergál $\hat{x}_1$-hez, amely nem más, mint QB_1 matrix domináns sajátértékéhez tartozó sajátvektor, tehát az α szabályozás változatlan A matrix mellett teljesíti funkcióját, a kibocsátási



3. ábra



4. ábra

struktúrát közelíti a következő időszak kibocsátási struktúrájához. Ellenben, ha nagyon közel akarnánk jutni ehhez a struktúrához, akkor a növekedés ütem irreálisan alacsony lenne. Az 5. táblázat mutatja a kibocsátási szerkezet alakulását különféle növekedési ütemek és ehhez tartozó α szabályozás mellett.

5. tábla

Szabályozott kibocsátási struktúrák 100 Ft kibocsátás megoszlása

Szabályozó értéke Növek. ütem	$\alpha = 0$ $\lambda = 5{,}28$	$\alpha = 0{,}21$ $\lambda = 4{,}28$	$\alpha = 0{,}35$ $\lambda = 3{,}78$	$\alpha = 0{,}54$ $\lambda = 3{,}28$	$\alpha = 0{,}79$ $\lambda = 2{,}78$	$\alpha = 1{,}16$ $\lambda = 2{,}28$	$\alpha = 24{,}42$ $\lambda = 0{,}2$	Eltérés $(\alpha = 1{,}16)-(\alpha = 0)$	Eltérés $(\alpha = 24{,}42)-(\alpha = 0)$	Cél-struk-túra
1. Ipar	45,12	45,16	45,19	45,21	45,23	45,25	45,34	+0,13	+0,22	45,34
2. Mezőg.	11,34	11,32	11,31	11,30	11,29	11,28	11,24	−0,06	−0,10	11,23
3. Egyéb	7,10	7,12	7,12	7,13	7,14	7,15	7,18	+0,05	+0,08	7,18
4. Külker.	6,38	6,35	6,34	6,32	6,30	6,29	6,22	−0,09	−0,16	6,21
5. Munkaerő	30,05	30,05	30,05	30,04	30,04	30,04	30,03	−0,01	−0,02	30,03

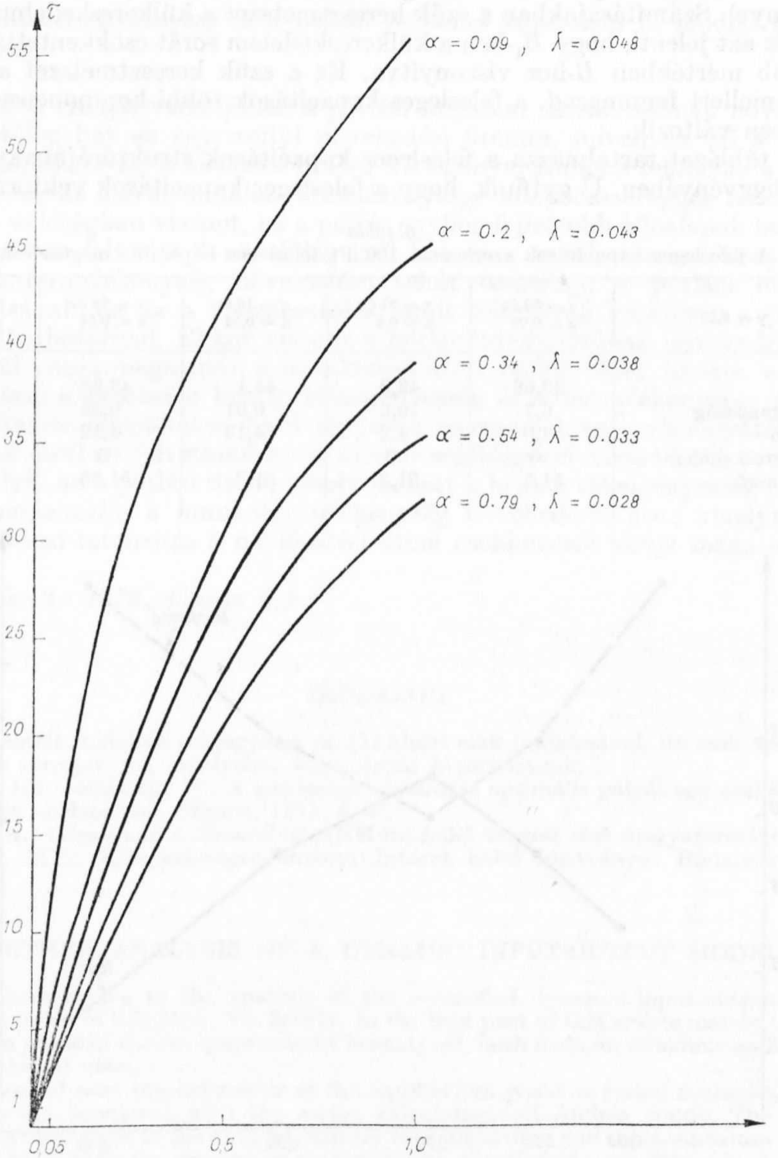
A táblázat 1. oszlopa az induló kibocsátási struktúrát ($\alpha = 0$, hagyományos Neumann-pálya), utolsó oszlopa pedig a célstruktúrát (A, B_1 matrixhoz tartozó Neumann-pályát) tartalmazza. Feltüntettük a még elvileg elfogadott 2,28%-os növekedési ütemhez tartozó pályát és közgazdaságilag már elfogadhatatlan 0,2%-os növekedési ütemhez tartozó, de a célstruktúrához legjobban hasonlító output struktúrát, valamint a csavarodás mértékét[5] a start struktúrához viszonyítva.

Kísérletképpen úgy változtattuk meg B_1 matrix egy elemét, hogy B és B_1 között jóval nagyobb eltérés mutatkozzon ebben az esetben a B, illetve B_1-hez tartozó Neumann-pályák jobban eltértek egymástól, de α szabályozás hatására bekövetkező közelítés itt és egyenletesen folyik le.

[5] A csavarodás mértékén a szabályozott és az induló struktura elérését értjük.

Az áttérés kezdő időpontjának meghatározása és a felesleges kapacitások

Először megvizsgáltuk empirikusan τ függését γ-tól, ez a függvény egy transzformált logaritmikus függvény, mint azt a bevezető részben elméletileg is igazoltuk. Az 5. számú ábra az egyes α-hoz tartozó $\tau(\gamma)$ függvényeket ábrázolja. Ebből az ábrából kitűnik, hogy α hatása a selejtezés szinvonalára erősebb, mint a növekedési ütem (λ) hatása, azaz minél kisebb az α, annál feljebb helyezkedik el az ehhez az α-hoz tartozó $\tau(\gamma)$ függvény, azaz minél kisebb



5. *ábra*

az α, annál több idő szükséges a rögzített lecserélési hányad mellett az áttérés megkezdéséhez. Ennek alapján ezen függvénysereg segítségével az áttérési időt nem lehet optimalizálni rögzített lecserélési hányad mellett.

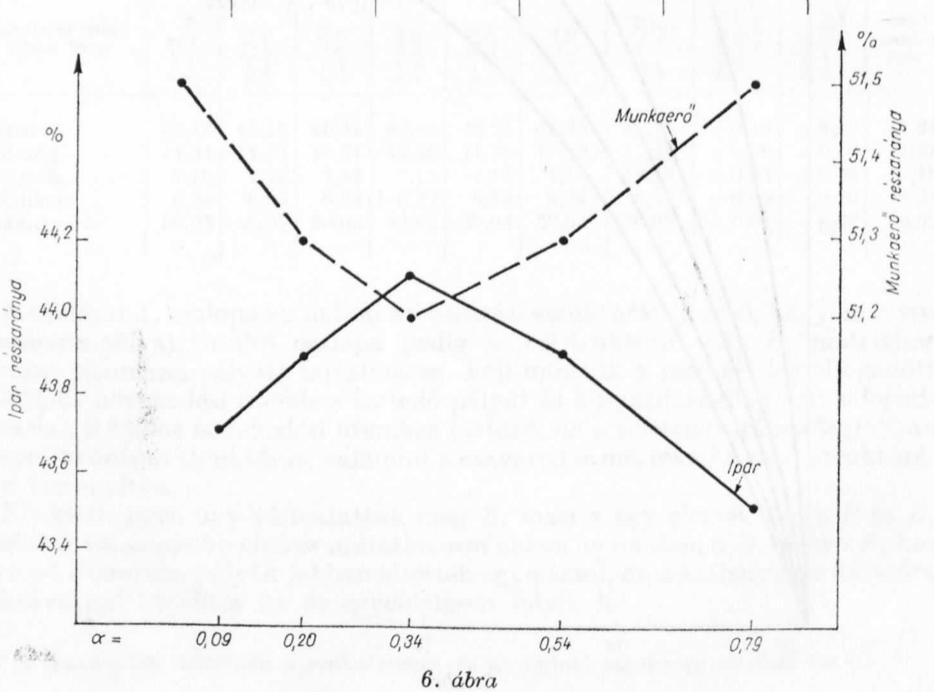
Felmerül az a kérdés, hogy van-e olyan α, amely mellett a felesleges kapacitások minimálisak a lecserélési hányad rögzített értéke mellett. Az első részen írottak alapján ezt elméletileg nem tudjuk bizonyítani, de a kísérleti számítások alapján úgy tűnik, a 3,8%-os növekedési ütem és a hozzá tartozó 0,34 α érték mellett a felesleges kapacitásoknak minimuma van (γ értéke itt közömbös, mivel a felesleges kapacitások összege rögzített α mellett γ lineáris homogén függvénye). Számításainkban a szűk keresztmetszet a külkereskedelmi szektor volt. Ez azt jelenti, hogy B_1-ben a külkereskedelem sorát csökkentettük a legnagyobb mértékben B-hez viszonyítva. Ez a szük keresztmetszet α változtatása mellett fennmarad, a felesleges kapacitások többi komponense α függvényében változik.

A 6. táblázat tartalmazza a felesleges kapacitások struktúrájának változását α függvényében. Ú gytűnik, hogy a felesleges kapacitások vektorának két

6. tábla

A felesleges kapacitások szerkezete 100 Ft felesleges kapacitás megoszlása

$\gamma = 6{,}25$	$\tau = 30$ év $\alpha = 0{,}09$	$\tau = 21$ év $\alpha = 0{,}2$	$\tau = 16$ év $\alpha = 0{,}34$	$\tau = 13$ év $\alpha = 0{,}54$	$\tau = 12$ év $\alpha = 0{,}79$
1. Ipar	43,66	43,9	44,1	43,93	43,53
2. Mezőgazdaság	0,7	0,6	0,61	0,58	0,08
3. Egyéb	4,0	4,2	4,13	4,12	4,0
4. Külkereskedelem	0	0	0	0	0
5. Munkaerő	51,5	51,3	51,2	51,35	51,49



6. *ábra*

legnagyobb értékű eleme α növekedésével ellentétes irányú mozgást végez, amelyet a 6. sz. ábra mutat, ez a két fő komponens az ipari szektor és a munkaerő szektor. Az eddigi kísérleti számítások azt igazolták, hogy a modell egy elég absztrakt elméleti feltevésekre épített közgazdasági rendszer leírására alkalmas, viszont mi a gyakorlatban is alkalmazni akarjuk. Ezért közelíteni kell a modell feltételrendszerét a valóságban funkcionáló gazdaság feltételrendszeréhez.

A munkatermelékenység és a pótlási folyamat kapcsolata (a modell továbbfejlesztése)

A modell eredeti verziójában a pótlási folyamat intenzitásának növekedése csökkentőleg hat az egyensúlyi növekedési ütemre, mivel, ha nő a pótlási intenzitás, akkor nő a termelés bruttó tőkeigénye. Ennél a felírásnál a pótlási folyamat és az eleven munka termelékenysége közti összefüggés nincs ábrázolva. A valóságban viszont, ha a pótlás egyben fejlettebb állóalapok belépését jelenti, akkor feltétlenül növelőleg kell hatnia a munka termelékenységére. A munkatermelékenység növekedése tehát összefügg a pótlási folyamat intenzitásával. Ez az a visszacsatolás, amit feltétlenül szükséges a jövőben a modellbe beépíteni. Ekkor viszont a pótlás intenzitásának növekedése nem feltétlenül vonja maga után a növekedési ütem csökkenését, hanem a növekedési ütem alakulása a bruttó tőkeigényesség és a termelékenység, a növekedési ütemre ellentétesen ható tényezők egymástól való viszonyától függ. Ebben az esetben felvethető az a modell segítségével vizsgálható probléma, hogy melyik az a pótlási ütem, amely mellett a bruttó tőkeigényesség növekedését kompenzálja a munkatermelékenység növekedése, azaz amelynél nagyobb pótlási intenzitás a növekedési ütem csökkenését vonja maga után.

(Beérkezett: 1972. június 8.)

IRODALOM

A felhasznált irodalom megegyezik az [1] alatti cikk irodalmával, itt csak azokat az anyagokat soroljuk fel, amelyekre közvetlenül hivatkoztunk.

1. SZEPESI GY.—SZÉKELY B.: A gazdasági növekedés optimális pályái egy szabályozott gazdasági rendszerben. Szigma, 1971. 4. sz.
2. BRÓDY A.: Beszámoló a dinamikus ÁKM-modellel végzett első magyarországi számításokról. MTA Közgazdaságtudományi Intézet belső kiadványa. Budapest, 1969.

FURTHER ANALYSIS OF A DYNAMIC INPUT-OUTPUT MODEL

The authors return to the analysis of the controlled dynamic input-output model already set down in SZIGMA, No. 3/1971. In the first part of this article mainly the first equilibrium phase of the two phase model is analysed, both from an economic and mathematical point of view.

In the second part the behaviour of the equilibrium phase is tested numerically and the results are compared with the earlier calculations of András Bródy. The results confirm the basic ideas of the authors, namely that discarding and replacement on a developed structure divert the production pattern in the direction of a pre-determined, improved and balanced production pattern.

ДАЛЬНЕЙШИЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧНОЙ МОДЕЛИ

Авторы возвращаются к анализу регулированной динамичной модели input-output, которая раньше уже была представлена в журнале Сигма, том IV., №. 3, 1971. В первой части этой статьи они исследуют теоретически, со стороны экономики и математики в первую очередь первую, т. н. фазу равновесия модели, состоящей из двух фаз.

Во второй части статьи они исследуют нумерически поведение фазы равновесия и они сопоставляют результаты с ранними расчетами Андраша Броди. Результаты доказывают основную гипотезу авторов, согласно которой браковка и субституция, сделанные на развитой структуре уклоняет структуру производства в направление заранее установленной, более развитой структуры равновесия производства.

Kovács Álmos

Az $\frac{N}{sB+E}$ mutató szerinti optimalizálás egyes kérdései

1968 óta a vállalati jövedelemszabályozási rendszer lényeges vonása, hogy a vállalati nyereséget a bérszorzóval súlyozott bérköltség és a lekötött eszközállomány arányában, előírt módon két részre kell osztani. Ez a rendszer a vállalati érdekeltség fontos mutatójává teszi a

$$q = \frac{N}{sB+E}$$

arányt. (N a nyereséget, s a bérszorzót, B a bérköltséget, E pedig az eszközállományt — álló- és forgóeszközök összege — jelöli). A q mutató nagysága határozza meg a fajlagos — egységnyi bérre jutó — részesedési alap és az egységnyi eszközértékre jutó fejlesztési alap szintet is, és így megállapíthatjuk, hogy a vállalati gazdálkodás fontos célja lehet e mutató maximalizálása. A vállalati optimalizáló modellek célfüggvényét mindig csak az adott helyzet pontos ismeretében határozhatjuk meg és így nem állítjuk, hogy az ilyen modellek célfüggvényének mindig ezt a mutatót kell tekintenünk, de a mutató központi szerepe indokolttá teszi, hogy részletesen foglalkozzunk a mutató maximalizálása kapcsán felvethető egyes kérdésekkel [2].

Ez a célfüggvény azonban nem csak a jövedelemszabályozás jelenlegi rendszere miatt állítható előtérbe. A vállalati gazdálkodás hatékonyságát tükröző mutatók között fontos szerepet kap a vállalat által elért nyereség és a lekötött termelési tényezők aránya. E mutató kapcsán persze felvethető, nem volna-e helyesebb, ha nemcsak a nyereséget, hanem a vállalat által létrehozott teljes új értéket állítanánk szembe a termelési tényező lekötéssel. Véleményünk szerint erre a kérdésre határozott nemmel kell felelnünk, miután a létrehozott új érték nyereségen kívüli részét a felhasznált termelési tényezők csaknem teljesen meghatározzák, hiszen mind a bérköltség, mind pedig a bérarányos és eszközarányos adók (járulékok) nagysága a vállalati gazdálkodás minőségétől függetlenül, kizárólag a termelési tényező felhasználás mértékétől függően alakul. Így bár árrendszerünk sajátosságai, a kötelező termelési feladatok léte és más, jól ismert problémák miatt a nyereség mutató is jogosan támadható, még mindig ezt a mutatót tekinthetjük a vállalati gazdálkodás eredményeit legjobban tükröző mutatónak, és így általában a nyereség és a lekötött termelési tényezők arányával mérhető a legpontosabban a vállalati gazdálkodás hatékonysága. (Természetesen azzal is tisztában kell lennünk, hogy ez a mutató az eszköz- és bérlekötést közös nevezőre hozó bérszorzó értékének is függvénye). Azt mondhatjuk tehát, hogy a jövedelemszabályozási rendszer a q

mutatóval a vállalati gazdálkodás hatékonyságát viszonylag jól tükröző mutatót állított középpontba. Véleményünk szerint azonban ez a mutató nem csak vállalati szinten tükrözi a gazdálkodás hatékonyságát. Akár a népgazdaság teljes termelő tevékenységére, akár valamely kisebb aggregátumra (pl. ágazat) vonatkozóan is, ezt az arányt a gazdálkodás hatékonyságát mérő egyik mutatónak tekinthetjük. A termelési tényező lekötés mértéke ugyanis bármely aggregátum esetén lényegében meghatározza a létrehozott új érték nyereségen kívüli részét, és az új érték elemei közül elsősorban a nyereség az, amely a gazdálkodás minőségétől függ. A nagyobb nyereség kedvezőbb lehetőségeket ad a termelő ágazatok további fejlesztésére, valamint a társadalmi szempontból rendkívül fontos nem termelő tevékenységek tervezettnél gyorsabb fejlesztésére, a szociális kiadások fokozására stb. (Ne felejtsük el, hogy nyereség csak realizált termelés után képződik, ami biztosítéka annak, hogy a nyereség növekedése csak társadalmilag szükséges javak előállításának lehet a következménye.) Így a nyereség népgazdasági szinten is olyan mutatónak tekinthető, amely összefoglalóan tükrözi a gazdálkodás eredményeit, a kérdés inkább csak az lehet, van-e értelme népgazdasági szinten is annak, hogy a nyereséget a termelésben lekötött termelési tényezők mennyiségéhez viszonyítsuk. Véleményünk szerint erre a kérdésre igennel kell válaszolnunk, hiszen az előbb említett nem termelő jellegű tevékenységek fejlesztése a megfelelő anyagi forrásokon kívül azt is szükségessé teszi, hogy a népgazdaság bizonyos termelő erőforrásait ezeken a területeken hasznosítsuk, így azonos nyereség esetén q nagyobb értéke kedvezőbb lehetőséget teremt a termeléstől független társadalmi célok megvalósítására.

Hangsúlyozni akarjuk, hogy nem tekintjük a népgazdaság kizárólagos céljának e célfüggvény maximalizálását, de úgy érezzük, nem érdektelen annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy milyen hatással van a népgazdasági szinten értelmezett hatékonysági mutató alakulására, ha a vállalatok saját hatékonysági mutatójuk maximalizálására törekszenek, és megfordítva, milyen vállalati célfüggvény felel meg a q népgazdasági szintű maximalizálásának.

A továbbiakban ezekre a kérdésekre keresünk választ.

A q mutató szerinti optimalizálás lényeges vonásait először egy egyszerűsített modell alapján elemezzük és a hangsúlyt a hagyományos nyereség maximalizáló modell jellemző vonásaival való összehasonlításra helyezzük. A továbbiakban megvizsgáljuk, hogy az egyszerű modell alapján levont következtetések mennyiben módosulnak egy általánosabb modell esetén, majd a q mutatót maximalizáló modellek erőforrás értékelésével és a decentralizált irányítási rendszerek lehetőségeivel foglalkozunk.

A vizsgált modellek csak folytonos változókat tartalmaznak, az elemzés során mégis elsősorban a vállalatok fejlesztési döntéseit vizsgáljuk. Úgy érezzük, hogy ilyen általános jellegű tárgyalás esetén elfogadható, ha a fejlesztési változókat is folytonos változóként kezeljük. Ez a megközelítési mód a gyakorlattól nem idegen, a középtávú tervezés lineáris programozási modelljei is sokszor ezt az utat követik.

1. A q mutató maximalizálása abban az esetben, amikor a tevékenységek mértékét csak egyedi felső korlátok korlátozzák

A q mutató szerinti maximalizálás hatásait először egy egészen egyszerű modell mellett vizsgáljuk. Ez a modell gyakorlati szempontból valószínűleg csak kevés esetben használható, ugyanakkor segítségével jól ábrázolhatjuk a mutató szerinti maximalizálás általános jellemzőit.

A modell alapfeltevése, hogy a vállalati tevékenységek mértékét egyetlen erőforrás-korlát sem korlátozza, valamennyi tevékenység esetén csak a tevékenység egyedi felsőkorlátját kell figyelembevennünk. Ilyen felső korlátnak tekinthető például az adott áron való értékesítési korlát, így a modellben különböző tevékenységekkel reprezentálhatjuk például egy termék különböző piacokon való értékesítését. Természetesen különböző piacnak tekinthető az adott piacon különböző árak mellett való értékesítés is, ahol nyilvánvalóan az ár az eladott mennyiség monoton nem növekvő függvénye. Ezt a konkáv mennyiség-ár függvényt szakaszos lineáris függvénnyel közelítjük.

Vezessük be a következő jelöléseket:

x_i = i vállalati tevékenység mértéke;
k_i = i vállalati tevékenység felső korlátja;
n_i = i vállalati tevékenység fajlagos bruttó nyereséghozama (a tevékenység egységnyi mértékű alkalmazásából származó árbevétel és a tevékenységgel arányos — változó — költségek különbsége);
b_i = i vállalati tevékenység fajlagos bérigénye (a tevékenység egységnyi mértékű alkalmazása esetén fellépő változó bérköltség);
e_i = az i vállalati tevékenység fajlagos eszközigénye (a tevékenység egységnyi mértékű alkalmazása esetén fellépő változó eszköz igény);
C = vállalati állandó költségek összege;
D = állandó bérköltség.
G = állandó eszközérték.

Modellünk ekkor a következőképpen írható le:

$$x_i \geq 0$$

$$x_i \leq k_i$$

$$\frac{\sum_i n_i x_i - C}{s \sum_i b_i x_i + \sum_i e_i x_i + sD + G} \max .$$

A modell megoldására egy rendkívül egyszerű algoritmus használható: legyen $x_i = k_i$ arra az i-re, amelyre $\dfrac{n_i}{sb_i + e_i}$ maximális, ha

$$\max_i \frac{n_i}{sb_i + e_i} \geq \frac{\sum_j n_j k_j - C}{s \sum_j b_j k_j + \sum_j e_j k_j + sD + G}$$

ahol j a már korábban az optimális programba bekerült tevékenységeken fut végig. Ez az eljárás tehát azt jelenti, hogy az egyes tevékenységek az $\dfrac{n_i}{sb_i + e_i}$ mutató nagysága szerinti sorrendben kerülnek be az optimális tervbe mindaddig, míg a fajlagos hatékonyságukat mérő $\frac{n_i}{sb_i + e_i}$ mutató még nem kisebb a már alkalmazott tevékenységek révén kialakult vállalati hatékonysági mutatónál.

Ez a megoldási algoritmus abban az esetben is használható, ha a feltételeket egy globális vállalati kapacitáskorláttal is kiegészítjük, de feltesszük, hogy az egyes tevékenységek fajlagos kapacitásigénye megegyezik. (A mértékegység megfelelő megválasztásával ez mindig biztosítható, természetesen ilyenkor megfelelően módosítanunk kell az egyedi felső korlátokat és a célfüggvény mutatókat is.) Az eljárás egy ilyen globális kapacitáskorlát figyelembevétele esetén csak annyiban módosul, hogy az egyes tevékenységek alkalmazása során az egyedi és az általános hatékonysági mutató összehasonlítása mellett a kapacitásfelhasználást is egybe kell vetnünk a kapacitáskorláttal, és ha a kapacitáskorlát kimerülésekor még van olyan tevékenység, amelynek hatékonysága jobb az átlag hatékonyságnál, akkor az utolsóként alkalmazott (viszonylag legkevésbé hatékony) tevékenység alkalmazásának mértéke k_i-nál kisebb lesz.

Érdemes modellünk eredményeit összehasonlítani a hasonló szerkezetű nyereség-maximalizáló modellek eredményeivel. A nyereségmutató maximalizálása esetén is használható egy hasonló jellegű optimalizálási eljárás, de ebben az esetben nincs szükség az egyes tevékenységek célfüggvény mutatóinak a pillanatnyi célfüggvény értékkel való összehasonlítására, az optimális programba kerülés feltétele a kapacitáskorlát betartása mellett csak annyi, hogy teljesüljön az $n_i \geq 0$ egyenlőtlenség. Ebből következik, hogy abban az esetben, amikor q maximalizálása során a kapacitáskorlát szabja meg az optimális programba kerülő tevékenységek körét, a két célfüggvény szerinti optimalizálás azonos eredményre vezet.

Ugyanakkor, ha a modellben nem veszünk figyelembe globális kapacitáskorlátot, vagy ha a q-t maximalizáló optimális program nem meríti ki ezt a korlátot, már nem feltétlenül lesz azonos a két célfüggvénynek megfelelő optimális terv. A megfelelő optimalizáló eljárások összehasonlítása alapján nyilvánvaló, hogy a két optimális terv akkor tér el egymástól, ha a q mutató maximalizálása során már valamely $n_i \geq 0$ érték mellett az $\frac{n_i}{sb_i + e_i}$ érték kisebb lesz, mint a már programba került tevékenységek alapján kialakult q érték.

Ez tehát azt jelenti, hogy valamennyi olyan tevékenység, amely a q-t maximalizáló optimális tervbe bekerül, bekerül a nyereségmaximalizáló optimális programba is, mégpedig mindkét esetben azonos lesz a tevékenységek alkalmazásának mértéke is — ami megegyezik a tevékenység egyedi felső korlátjával. Ugyanakkor a két optimális terv eltérése esetén a nyereségmaximalizáló terv még további tevékenységek alkalmazását is előírja, nevezetesen bekerül az optimális programba az összes olyan tevékenység is, amelyek hatékonysági mutatója ugyan nem éri el a vállalati átlag hatékonyság értékét, de alkalmazásuk abszolút értelemben még a nyereség növelésére vezet. Ebben az értelemben tehát a nyereség maximalizálása jobban ösztönöz a termelési lehetőségek kihasználására, mint q maximalizálása.

q maximalizálása esetén az optimális tervbe bekerülő tevékenységek száma attól függ, hányadik tevékenység programba kerülése után lesz már nagyobb az átlagos vállalati hatékonyság a programba még be nem vont tevékenységek hatékonyságánál. Így a q mutatót maximalizáló optimális program annál kevésbé tér el a nyereség maximalizáló optimális tervtől

– minél nagyobb a vállalati állandó költségek összege,

– ezen belül minél nagyobb az állandó bérköltség,

– minél nagyobb az állandó eszközérték,

– minél kisebb az optimális programba bekerülő tevékenységek átlagos hatékonysága.

Ezek az állítások rendkívül könnyen bizonyíthatóak, csak azt kell belátnunk, hogy az aktuális átlagos vállalati hatékonyságot mérő

$$\frac{\sum_j n_j k_j - C}{s \sum_j b_j k_j + \sum_j e_j k_j + sD + G}$$

mutató értéke fenti esetekben mindig csökken, ha minden más érték változatlan.

A modell alapján így a nyereségmaximalizálás és a q mutató szerinti maximalizálás között a termelési lehetőségek kihasználása tekintetében már említett eltérés mellett még egy alapvető eltérés figyelhető meg: a q szerinti maximalizálás „egyedileg" értékeli a tevékenységeket a nyereség maximalizálás általános értékelésével szemben.

Egyedi értékelésen azt értjük, hogy q maximalizálása esetén egy tevékenység nem csak a rá jellemző $\frac{n_i}{sb_i + e_i}$ mutatótól függően kerül be az optimális programba, hanem értékelése során szerepet játszanak a vállalat olyan egyedi jellemzői is, mint az állandó költségek összege, az állandó bérköltség és az állandóan lekötött eszközérték nagysága, valamint a vállalat által alkalmazható többi tevékenység hatékonysága is. Így adott hatékonyságú tevékenységet e tényezőktől függően esetleg valamely vállalatban már nem célszerű alkalmazni, ugyanakkor egy másik vállalat optimális programja még ennél rosszabb hatékonyságú tevékenységek alkalmazását is célszerűnek tartja. Ugyanakkor a nyereség maximalizálás általánosan értékel: az $n_i \geq 0$ feltétel a vállalati adottságoktól függetlenül mindig elegendő ahhoz, hogy a megfelelő tevékenység bekerüljön az optimális programba, ha a globális vállalati kapacitáskorlát azt még lehetővé teszi. (Természetesen maga az n_i érték nem független a vállalati adottságoktól, alapvetően azok határozzák meg, az elmondottak csak arra utalnak, hogy a vállalati adottságok által meghatározott n_i érték nagysága alapján nyereségmaximalizálás esetén már eldönthető, hogy a tevékenység bekerülhet-e az optimális tervbe, míg q maximalizálása esetén ez továbbra is a vállalati adottságok függvénye marad!)

A két célfüggvény szerinti optimalizálást eddig elméleti alapon hasonlítottuk össze, érdemes arra is kitérnünk, hogy ezek az eltérések milyen gyakorlati következményekkel járhatnak.

A rövidtávú tervezés során általában a meglevő termelési kapacitások – állóeszközök és munkaerő – optimális kihasználásán van a hangsúly, a tervezés legfontosabb döntési problémái a termék választék kialakításával, az értékesítési irányok meghatározásával kapcsolatosak. Ebből következik, hogy a q mutató nevezője rövid távon csaknem teljesen adottnak tekinthető, a programozási modell egyes tevékenységeihez tartozó változó bér- és eszközigény viszonylag nagyon kis súlyt képvisel az állandó bér- és eszközértékhez képest, és így q nagy valószínűséggel ugyanott veszi fel maximumát, ahol a nyereség maximális, tehát a rövidtávú tervezés céljaira szolgáló modellekben, a termékválaszték, az értékesítési irányok optimalizálása során, a meglevő állóeszköz állomány mellett alkalmazható optimális technológiai változatok meghatározásakor a legtöbb esetben a nyereség maximalizáló modell is biztosítja q maximumát.

Az elmondottak természetesen nem jelentik azt, hogy q maximalizálása minden rövidtávú tervezési modellben helyettesíthető a nyereség maximalizálással, a két célfüggvénynek megfelelő optimum annál kisebb valószínűséggel lesz különböző, minél kisebb a modell változóihoz kapcsolódó változó bér- és változó eszközigény a vállalati szinten állandónak tekinthető bérköltséghez és eszközállományhoz képest. Érdemes itt felhívni a figyelmet arra is, hogy az állandó munkaerő- és eszközállomány nem értelmezhető mereven, a kategorizálás során nem tekinthetünk el a tervezési időszak hosszától. Minél hosszabb időszakot fog át a vállalati terv, annál inkább jogos az állandó és változó költségek hagyományos módon való elhatárolása, ugyanakkor egy viszonylag rövid tervperiódusban pl. a teljesítmény bérben dolgozó egyértelműen valamely termelési eljáráshoz kapcsolható munkaerő jó részét is adottságként kell kezelnünk, amellyel kapcsolatosan rövid távon csak a hasznosítás irányának változtatása merülhet fel, és nem lehet szó az alkalmazás mértékének lényeges változtatásáról.

A tervezési időszak hosszának növelése lehetővé teszi, hogy számos olyan erőforrást is változóként kezeljünk, amelyekkel rövid távon adottságként kell számolnunk. Minél hosszabb időszakra vonatkozó terv készítéséről van szó, annál nagyobb súlyt kapnak a tervezés döntési problémái között a vállalati kapacitás struktúra, és általában az erőforrás szerkezet fejlesztésével és módosításával kapcsolatos kérdések, és viszonylag kisebb lesz a termékválaszték és az értékesítési irányok részletes meghatározására vonatkozó döntések szerepe már csak azért is, mert ezeknek a döntéseknek mindig szorosan kell kapcsolódniok a mindenkori piaci igényekhez, amelyek hosszútávon már csak viszonylag aggregált formában mérhetők fel. Ennek megfelelően a közép- és hosszútávú tervezés céljaira szolgáló modellek változóihoz kapcsolható változó bér- és változó eszközigény súlya az állandónak tekinthető bér- és eszközértékhez képest sok esetben már egészen jelentős lehet, és így általában számolhatunk azzal, hogy a nyereség maximalizáló modellek eredményei esetleg erősen eltérnek a q mutató maximalizáló modell eredményeitől.

Miután látható, hogy q maximalizálása és a nyereség maximalizálás általában csak viszonylag hosszabb időszakot — közép-, ill. hosszútávú tervezés — átfogó modell estén vezet eltérő eredményre, érdemes visszatérnünk a két célfüggvény szerinti optimalizálás eltéréseinek értékelésére.

Egyszerű modellünk viselkedése alapján megállapítottuk, hogy a nyereség maximalizáló modell a termelési lehetőségek jobb kihasználására ösztönöz, mint a q mutató szerinti optimalizálás. Ez az elméleti következtetés a gyakorlatban várható tényleges hatások ismerete nélkül azt a következtetést vonhatja maga után, hogy a nyereségmaximalizálás általában kedvezőbb gazdasági eredményekkel jár, mint q maximalizálása, és így nem helyeselhető, ha a gazdaságirányítási rendszer a q mutatót állítja a vállalati érdekeltség homlokterébe. Egészen más képet kapunk, ha az elméleti megállapítást kiegészítjük a gyakorlatban várható következmények bemutatásával. Miután a meglevő kapacitások és a már lekötött erőforrások kihasználása tekintetében a két célfüggvény szerinti optimális program azonos eredményre vezet, a szűken értelmezett kapacitás kihasználás tekintetében nem kell attól tartanunk, hogy a q mutató alkalmazása miatt a meglevő állóeszközök kihasználása romlani fog a maximális nyereséget biztosító kihasználási színvonalhoz képest.

A kapacitás bővítési lehetőségek értékelése tekintetében már valószínűleg sok esetben előfordulna, hogy egyszerű modellünk alkalmazása esetén a nyereségmaximalizáló modell jobban használná ki a felmerülő termelési lehetőségeket, mint q-t maximalizáló modell. Utóbbi célfüggvény alkalmazása úgy tekinthető, hogy a modell a termelés bővítési lehetőségek értékelése során egy szigorúbb minimum követelmény alapján dönt a felmerülő lehetőségek elfogadásáról, mint a nyereségmaximalizáló modell. Az a tény, hogy a szabályozási rendszer a vállalatok erőforrás felhasználásának bővítését szigorúbb követelményhez köti, mint a pozitív nyereséghozam követelménye, csak a mindenkori gazdasági helyzettől függően értékelhető. Könnyen belátható, hogy ez a szigorúbb követelmény csak abban az esetben érinti kedvezőtlenül a népgazdaság fejlődését, ha a munkaerő és a beruházási erőforrások kínálata lényegesen nagyobb lesz az irántuk jelentkező keresletnél, és így bizonyos erőforrások kihasználatlanul maradnak annak ellenére, hogy alkalmazásuk még nyereséggel járna.

A szocialista gazdasági rendszerben mindeddig ennek az esetnek pontosan a fordítottja volt jellemző, tehát az erőforrások iránti kereslet rendszeresen nagyobb az erőforrás kínálatnál. Ilyen helyzetben viszont az erőforrások hatékony felhasználása érdekében kifejezetten szükség van arra, hogy a pozitív nyereséghozamnál szigorúbb minimum követelménynek kelljen teljesülnie ahhoz, hogy a vállalatok bővíthessék erőforrásaikat. Érdemes itt megjegyeznünk, hogy kapitalista viszonyok között sem annak alapján döntenek a tőkebefektetésekről, hogy hoznak-e nyereséget, hanem bizonyos hozadék elérését tekintik a befektetés minimum követelményének.

A jelenleg tárgyalt egyszerű modell viselkedése alapján levonható második lényeges következtetés az volt, hogy míg a nyereségmaximalizálás egységes követelmény szerint értékeli a programozási modellek változóit, q maximalizálása esetén egyedi, a vállalat mindenkori helyzetét tükröző követelmény érvényesül. Miután a rövidtávú tervezés céljaira szolgáló modellekben a két célfüggvény alkalmazása általában nem vezet eltérő eredményekre, ismét csak a viszonylag hosszabb időszakot átfogó modellek esetén kell megvizsgálnunk, milyen követelményei vannak a q szerinti maximalizálás fenti tulajdonságának.

Már utaltunk arra, hogy mindaddig, amíg a különböző erőforrások kereslete nagyobb kínálatuknál, lényegesen javítható felhasználásuk hatékonysága, ha alkalmazásukat szigorúbb minimum követelmény teljesítéséhez kötjük. Ezt a megállapítást kiegészíthetjük azzal, hogy szükségszerűen a hatékonyság csökkenésére vezet, ha ez a minimum követelmény nem egységes. A kérdés formális elemzésére még visszatérünk, de formális bizonyítás nélkül is belátható, hogy a vállalatonként különböző minimum követelmények miatt előfordulhat, hogy egyes hatékonyan dolgozó vállalatok már nem alkalmaznak olyan tevékenységeket, amelyek hatékonysága jobb a népgazdasági átlagnál — és így alkalmazásuk a hatékonyság népgazdasági szintű javulására vezethetne — ugyanakkor pedig egy olyan vállalat, amelynek q mutatója kedvezőtlen, még olyan tevékenységek alkalmazását is célszerűnek tartja, amelynek hatékonysága nem éri el a népgazdasági átlagot, és alkalmazása így az adott vállalat hatékonyságának javulása ellenére is a népgazdasági szintű hatékonyság csökkenésére vezet.

Elméletileg tehát kimutatható, hogy a q maximalizálásában való érdekeltség a vállalatonként eltérő minimum követelmény miatt azt eredményezheti hogy az erőforrások felhasználásának hatékonysága elmarad a lehetőségektől. Ez az elméleti eshetőség azonban csak abban az esetben válik gyakorlati, veszéllyé, ha a q maximalizálásából származtatható minimum követelmény határozza meg az erőforrás felhasználás mértékét. Világos, hogy abban az esetben, amikor a vállalatok olyan erőforrás felhasználási lehetőségekkel rendelkeznek, amelyek közül még a legrosszabb hatékonysága is nagyobb a népgazdasági átlag hatékonyságánál, ez a minimum követelmény nem játszik szerepet. Modellünkben ugyanilyen eredménnyel jár, ha vannak ugyan a népgazdasági átlagnál rosszabb hatékonyságú erőforrás felhasználási lehetőségek, de a globális vállalati kapacitáskorlát valamennyi vállalat esetében olyan „szűk”, hogy az ilyen tevékenységek nem kerülnek be az optimális programba. A későbbiekben ismertetésre kerülő részletesebb modellek pontos leírása nélkül is eléggé valószínűnek látszik, hogy a modellek korlátozó feltételei sok esetben maguk is olyan szűrőt képeznek, amelyek megakadályozzák a népgazdasági átlagnál rosszabb hatékonyságú tevékenységek bekerülését a programba. Különösen így van ez, ha a feltételek között szerepelnek azok a hitelpolitikai korlátok is, amelyek révén központilag is biztosítani lehet, hogy a q mutatóban való érdekeltség e kedvezőtlen hatása ne jelentkezzék. Mindenesetre célszerű szem előtt tartanunk, hogy a nyereség kötelező megosztását előíró jövedelemszabályozási rendszer magában rejti ezt a kedvezőtlen irányzatot, amelynek érvényre jutását esetleg a szabályozás más elemeinek (hitelpolitika) megfelelő alkalmazásával kell megakadályozni.

Egyszerű modellünk alapján még egy kérdésre, a bérszorzó szerepének vizsgálatára térünk ki. A bérszorzó egyrészt szerepet játszik az optimális tervbe való bekerülés minimum követelményének kialakításában, másrészt hatást gyakorol a különböző eszköz-bér aránnyal járó fejlesztési változatok gazdaságosságának alakulására.

A bérszorzó növelése az eszköz-bér arány nagyságával fordított arányban vezet a q mutató csökkenésére, tehát minél nagyobb az eszköz-bér arány, annál kisebb mértékben csökken q értéke. Ebből következik, hogy abban az esetben, amikor az állandóan lekötött eszközök és az állandó bérek aránya nagyobb, mint a modell egyes változóihoz tartozó változó eszközigény változó bérköltség arány, a bérszorzó növelése az erőforrás felhasználás minimum követelményének növelését jelenti, miután adott vállalati tevékenység struktúra esetén nagyobb mértékben nő az átlaghatékonyság, mint az egyes tevékenységekhez rendelhető egyedi hatékonyság, aminek az átlagos hatékonyságnál nagyobbnak kell lennie annak érdekében, hogy a tevékenység alkalmazása a vállalati q érték növelésére vezessen. Feltételezhető, hogy a gyakorlatban többnyire ez az eset fordul elő, és csak ritkán lesz az állandóan lekötött eszközérték és az állandó bérköltség aránya kisebb, mint az egyes tevékenységekhez kapcsolható változó eszközigény változó bérköltség arány. Ezt a feltevést megerősíti az a tény, hogy a nem kifejezetten rövidtávú modellekben, tehát azokban a modellekben, amelyekben a változó eszközigény és a változó bérigény általában már lényeges szerepet játszanak az optimális terv kialakításában, a munkaerő állomány viszonylag nagy része szabadon kezelhető, míg az állóeszközállomány esetében ez nem mondható el.

A bérszorzó és a minimum követelmény kapcsolata valójában persze minden egyes tevékenységre vonatkozóan más lesz — itt is megfigyelhető a q mutatóban való érdekeltség bizonyos fajta ,,egyedi'' értékeléssel járó hatása — bár az előbb vázolt fő irányzatot a legtöbb esetben csak lényegtelen mértékben torzítják ezek a hatások. A bérszorzó nagysága ugyanis az elmondottaknak megfelelően a tevékenységre jellemző változó eszközigény — változó bérköltségarány és a vállalati átlagos eszköz-bér arány kapcsolatától függő módon váll toztatja meg a tevékenység gazdaságosságáról e modell alapján kialakult képet, tehát minél kisebb a tevékenységre jellemző eszköz-bér arány a vállalati eszközbér arányhoz képest, annál nagyobb mértékben romlik a tevékenység gazdaságossága, az adott tevékenység szempontjából annál nagyobb mértékben nő a minimum követelmény. Így a bérszorzó nemcsak az ,,abszolút'' gazdaságosság mércéjének kialakulásában kap szerepet, hanem meghatározza a tevékenységek ,,relatív'', egymáshoz viszonyított gazdaságosságát is: növelése javítja azoknak a tevékenységeknek a relatív gazdaságosságát, amelyeket nagy eszköz-bér arány jellemez, és csökkenti a kis eszköz-bér aránnyal rendelkező tevékenységek relatív gazdaságosságát.

Egyszerű modellünk elemzésének befejezésekor ismét utalunk arra, hogy ezt a modellt nem annyira a gyakorlati felhasználási lehetőségek miatt tárgyaltuk részletesen, hanem azért, mert rendkívül egyszerű szerkezete lehetőséget adott arra, hogy bemutassuk a q mutató szerinti optimalizálás lényeges jellemzőit. A továbbiakban a gyakorlati alkalmazás követelményeit helyezzük előtérbe, de megvizsgáljuk azt is, hogy az egyszerű modellünk alapján levont következtetések továbbra is érvényesek maradnak-e, tehát valóban q szerinti optimalizálás lényeges jellemzőinek tekinthetjük-e őket.

2. A q mutató maximalizálása lineáris feltételi egyenletek esetén

A gazdasági gyakorlatban alkalmazott matematikai programozási modellek javarésze lineáris programozási modell. Ezek a modellek az alkalmazott, sokszor bizonyos fokig egyszerűsítő feltevések — a tevékenységek mértékétől független fajlagos erőforrásigény, a tevékenységek alkalmazásának folytonosan változtatható mértéke és a tevékenységek alkalmazásának mértékétől független fajlagos eredmény és költség hatás mellett is többnyire gyakorlatilag is hasznosítható eredményeket adnak. A lineáris programozási modelleket a vállalati gazdálkodás különböző részterületein adódó döntési problémák — szállítási feladat, termékválaszték meghatározás stb. — megoldása mellett széleskörűen alkalmazzák a vállalati terveket előkészítő munka során is.

Ha egy programozási modellben lineáris feltételi egyenletek mellett törekszünk q maximalizálására, ugyanazokat az egyszerűsítő feltevéseket alkalmazzuk, mint amelyeket a lineáris programozási modellek alkalmazása során kell alkalmaznunk. Így a megfelelő hiperbolikus programozási modell alkalmazásának feltételei a célfüggvény kérdését leszámítva ugyanazok, mint egy lineáris programozási modell alkalmazásának feltételei, ezért minden olyan tervezési feladat esetén, amikor elfogadhatónak bizonyul egy lineáris programozási modell alkalmazása, elfogadhatónak tartható a hiperbolikus programozási modell alkalmazása, ha meghatározható az egyes tevékenységek fajlagos árbevétel, változó költség, változó bérköltség és változó eszközigény mutatója.

A q maximalizálásának modellje általános formában így a következő lesz:

$$x \geq 0$$

$$Ax \leq k \tag{1}$$

$$Fx \geq f$$

$$\frac{n^* x - C}{sb^* x + e^* x + sD + G} \max$$

Az alkalmazott új jelölések a következők:

a_{ij} = a j tevékenység egységnyi alkalmazása esetén az i erőforrásból szükséges mennyiség, $A = [a_{ij}]$

f_{ij} = a j tevékenység egységnyi alkalmazásának hozzájárulása az i feladat teljesítéséhez, $F = [f_{ij}]$

f_i = az i feladat mértéke, $f^* = [f_1, f_2, \ldots, f_n]$.

A megfelelő hiperbolikus programozási feladat megoldása több, viszonylag egyszerű, a szimplex módszerhez közelálló algoritmus segítségével is biztosítható.

A q mutató szerinti optimalizálás jellemzőinek vizsgálatára jó lehetőséget ad Martos algoritmusa [3]. (Gyakorlati feladatok esetén mindig teljesül, hogy a lehetséges megoldások halmaza korlátos, és hogy a nevező minden lehetséges megoldás esetén pozitív.)

Jelölje egy tetszőleges megoldásban a célfüggvénybeli számláló értékét p_0, a nevező értékét pedig m_0, a j tevékenységhez tartozó, az adott bázisra vonatkozó számláló értékét p_j, a nevező értékét pedig m_j. A megoldás akkor optimális, ha valamennyi, a bázisban nem szereplő j-re teljesül az

$$m_0 p_j - p_0 m_j \leq 0$$

egyenlőtlenség. Ha valamely j-re

$$m_0 p_j - p_0 m_j > 0,$$

a megoldás javítható, ha a megfelelő j tevékenység bekerül a bázisba (degeneráció esetén természetesen a célfüggvény érték nem javul).

Az $m_0 p_j - p_0 m_j \leq 0$ egyenlőtlenség helyett felírhatjuk a következő három egyenlőtlenséget:

$$\frac{p_j}{m_j} \leq \frac{p_0}{m_0} \quad (\text{ha } m_j > 0),$$

$$\frac{p_j}{m_j} \geq \frac{p_0}{m_0} \quad (\text{ha } m_j < 0),$$

és

$$p_j \leq 0 \quad (\text{ha } m_j = 0),$$

(m_0 értéke a gyakorlati feladatokban mindig pozitív).

Az optimum feltételét tehát megfogalmazhatjuk úgy, hogy a megoldás optimális, ha valamennyi olyan tevékenység esetén, amelynek alkalmazása növelné a nevező értékét, az egységnyi nevező növekményre jutó számláló növekmény kisebb az aktuális célfüggvényértéknél, és ha valamennyi olyan tevékenység esetén, amelynek alkalmazása csökkentené a nevező értékét, az egységnyi nevező csökkenésre jutó számláló csökkenés nagyobb az aktuális célfüggvényértéknél, az olyan tevékenységekre vonatkozóan pedig, amelyek alkalmazása a nevező értékét változatlanul hagyja, a számláló értéke csökkenne.

Miután a q célfüggvény számlálójában ugyanaz a mutató szerepel, mint amely a vállalati nyereség maximalizálása esetén a megfelelő lineáris programozási modell célfüggvénye volna, könnyen összehasonlíthatjuk a két célfüggvény szerinti optimalizálás eredményeit. Nyereség maximalizálás esetén egy megoldás akkor optimális, ha valamennyi, a bázisban nem szereplő j-re $p_j \leqq 0$. Ennek megfelelően, ha a q-t maximalizáló megoldásban valamely tevékenységre, amelyhez pozitív m_j tartozik és a $\frac{p_j}{m_j} \leqq \frac{p_0}{m_0}$ egyenlőtlenség teljesül, de p_j nem negatív, a megfelelő tevékenység a nyereség maximalizálása esetén még bekerülne az optimális megoldásba. Ugyanakkor, ha a nyereséget maximalizáló megoldásban valamely olyan tevékenységre vonatkozóan, amelyhez negatív m_j tartozik és az optimum feltételnek megfelelően p_j is negatív, de a $\frac{p_j}{m_j}$ érték kisebb, mint q aktuális értéke, nagyobb q értéket kapunk, ha a megfelelő tevékenység kerül a bázisba.

Az elmondottak tehát azt jelentik, hogy a q maximalizálása esetén az optimális programban szereplő valamennyi olyan tevékenység, amelynek alkalmazása növelné a változó bér- és eszközigényt, szerepel a nyereség maximalizáló optimális programban is, és ez a program esetleg további ilyen tevékenységek alkalmazását is célszerűnek tartja. Ugyanakkor, ha a nyereséget maximalizáló optimális programot q maximalizálása esetén módosítanunk kell, akkor olyan „tevékenységeket" kell a bázisba vonnunk, amelyekhez negatív m_j tartozik, amelyek tehát csökkentik a változó bér- és eszközigényt. Ez tehát azt jelenti, hogy valamely „igazi" tevékenységet vagy meg kell szüntetnünk, vagy pedig egy olyan másik tevékenységre kell kicserélnünk, amelynek alkalmazása kevesebb $sb + e$ lekötéssel jár, mint az elhagyandó tevékenység alkalmazása.

Az optimális programok összehasonlítása alapján így megállapítható, hogy a vizsgált modell eredményei lényegében ugyanolyan irányzatokat tükröznek, mint amilyeneket az egyszerű modell alapján ismertettünk: a nyereség maximalizálás általában jobban ösztönöz a termelési lehetőségek kihasználására, mint a q szerinti maximalizálás. Ha pontosan fogalmazunk, csak azt állapíthatjuk meg, hogy az optimális program által felhasznált változó bérköltség és eszközfelhasználás összege nyereségmaximalizálás esetén legalább akkora, mint q maximalizálás esetén. Miután azonban a termelési lehetőségek kihasználása többnyire megfelelően mérhető a változó bér- és eszközfelhasználással, általában nem követünk el hibát, ha a két kifejezést alternatív módon használjuk. Természetesen könnyen szerkeszthető olyan modell, amelyben a termelési lehetőségek kihasználását valamely más mutatóval mérve — pl. termelési érték — q maximalizálása nagyobb termelési értékkel jár, mint a nyereség maximalizálás, reális feltételek esetén azonban ez nem következhet be, tehát bár matematikailag elképzelhető ilyen eset, a közgazdasági megfontolások miatt ezt kizártnak, vagy legalábbis egészen ritka kivételnek tekinthetjük.

A q és a nyereség maximalizálás eltérései ebben a modellben is azoktól a tényezőktől függenek, mint az egyszerű modellben, tehát szerepe van a vállalati állandó költségeknek, az állandó bérköltségnek, az állandóan lekötött eszközértéknek és az optimális programban szereplő tevékenységek átlagos hatékonyságának.

Állításaink részletes bizonyítására nem térünk ki, csak utalunk arra, hogy az állandó költség tételek nagysága és a programban szereplő tevékenységek hatékonysága határozza meg az adott megoldásban szereplő $\frac{p_0}{m_0}$ értékét, ami viszont meghatározza azt a hatékonysági követelményt, amelyet a tevékenységek relatív hatékonyságának el kell érnie, hogy alkalmazása még célszerű legyen. Csak annyiban kell módosítanunk az egyszerű modell alapján levont következtetéseket, hogy a tevékenységre jellemző hatékonysági mutató — $\frac{n_j}{sb_j + e_j}$ — helyett ebben a modellben a tevékenységek relatív hatékonysága — $\frac{p_j}{m_j}$ — játszik döntő szerepet, amelyet eredeti hatékonyságuk mellett a bázisban szereplő többi tevékenység hatékonysága, a tevékenység erőforrás igénye és a bázisban szereplő tevékenységek erőforrás igényei is befolyásolnak.

Ebben a modellben is megfigyelhető, hogy a nyereség maximalizálás „általános" értékelésével szemben a q szerinti maximalizálás „egyedileg" értékeli a tevékenységeket, bár az értékelés eltérései nem olyan szembeszökőek. Nyereség maximalizálás esetén ugyanis már nem a tevékenység eredeti n_j értéke, hanem az aktuális p_j érték dönti el, bekerül-e a tevékenység az optimális programba. A p_j érték a tevékenységre egyértelműen jellemző n_j értéken kívül a vállalat sajátos-helyzetétől, bizonyos egyedi jellemzőitől is függ, miután a bázisban szereplő tevékenységek nyereségmutatói, e tevékenységek fajlagos erőforrás-igényei és a j tevékenységre jellemző fajlagos erőforrásigény mutatók is szerepet játszanak abban, mekkora lesz p_j. (A lineáris programozás szokásos jelölései szerint $p_j = n_j - n^*B^{-1}a_j$, ahol n^* a bázisban szereplő tevékenységek célfüggvény együtthatóit, B pedig a bázisvektorokból alkotott matrixot jelöli). Így tulajdonképpen ez a modell már nyereségmaximalizálás esetén is egyedileg értékeli a tevékenységeket, a q szerinti maximalizálás azonban további egyedi jellemzőket is figyelembevesz annak eldöntése során, bekerül-e a tevékenység az optimális programba, így egyrészt szerepet játszanak a tevékenységek nevező értékei, másrészt pedig az aktuális célfüggvény érték is. Ehhez képest pedig általánosnak tekinthetjük a nyereség maximalizáló célfüggvény értékítéletét, ha pedig el akarjuk kerülni a nem egészen egyértelmű egyedi, ill. általános értékelés kifejezéseket, megfogalmazhatjuk úgy a két célfüggvény szerinti optimalizálás egyik lényeges eltérését, hogy míg nyereség maximalizálás esetén teljesen független az aktuális célfüggvényértéktől, hogy egy tevékenység alkalmazása javítja-e a célfüggvényértéket, a q maximalizálása esetén ez a mindenkori megoldáshoz tartozó célfüggvény értéktől, és így az azt befolyásoló valamennyi tényezőtől is függ.

A modell alapján levonható elméleti következtetések gyakorlati jelentőségéről ugyanazt mondhatjuk el, mint az egyszerű modell esetén, így erre nem térünk ki ismét.

Ismertetjük viszont azt a duális feladatot, amely a hiperbolikus programozási feladat megoldására használható Charnes—Copper-féle lineáris programozási feladathoz rendelhető.

3. Az erőforrások értékelése az $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{sB} + \mathrm{E}}$ mutató maximalizálása esetén

Charnes és Cooper a hiperbolikus programozási feladat megoldására egy lineáris programozási feladatot szerkesztettek, amelynek megoldása egyszerű transzformáció révén megadja a hiperbolikus feladat megoldását is. (Az eljárás alkalmazhatóságának feltételei, a lehetséges megoldások halmazának korlátossága és a nevező pozitivitása a q maximalizálása során gyakorlati feladatok esetén mindig teljesülnek.) Az

$$\begin{gathered} x \geq 0 \\ Ax \leq b \\ \frac{c^* x + c_0}{d^* x + d_0} \to \max \end{gathered} \tag{2}$$

feladathoz rendelhető lineáris programozási feladat a következő:

$$\begin{gathered} y \geq 0, \quad t \geq 0 \\ Ay - bt \leq 0 \\ d^*y + d_0 t = 1 \\ c^*y + c_0 t \to \max \end{gathered} \tag{3}$$

A két feladat optimum értéke megegyezik, a lineáris programozási feladat optimális megoldásából az $x_0 = \frac{1}{t_0} y_0$ formulával kapjuk meg a hiperbolikus feladat optimális megoldását (t_0 így az optimális megoldáshoz tartozó nevező érték reciproka).

A (3) lineáris programozási feladathoz a következő duális feladatot rendeljük:

$$\begin{gathered} u^* \geq 0 \\ u^*A + vd^* \geq c^* \\ -u^*b + vd_0 \geq c_0 \\ y \to \min \end{gathered} \tag{4}$$

Az $\frac{N}{sB + E}$ mutatót maximalizáló (1) modellhez tartozó duális feladat így a következő lesz:

$$\begin{gathered} u^* \geq I, \; w^* \geq 0, \\ u^*A - w^*F + v(sb^* + e^*) \geq n^* \\ u^* k - w^* f - v(sD + G) \leq C \\ v \to \min \end{gathered} \tag{5}$$

Miután a (3) feladat optimális megoldásában t értéke mindig pozitív lesz, az

$$u^* k - w^* f - v(sD + G) \leq C$$

egyenlőtlenség az optimális megoldásban a kiegészítő eltérések tétele értelmében mindig egyenlőség formájában teljesül.

Az optimális v érték az optimális q értékkel egyenlő, így ez az egyenlet lehetőséget ad a duális feladat változóinak értelmezésére.

Az $\frac{1}{sD+G}u_i$ érték azt méri, hogyan alakul a hatékonysági mutató optimális értéke, ha az i erőforrásból egységnyivel több áll rendelkezésre, míg az $\frac{1}{sD+G}w_i$ érték azt mutatja, mennyivel nő a hatékonysági mutató értéke, ha az i feladat szintje egységnyivel csökken. A lineáris programozás elméletéből ismeretes, hogy a duális változó értékek abban a tartományban, amelyben az optimális megoldás szerkezete — az optimális bázis — változatlan, állandóak, és mivel gyakorlati feladatok esetén a megoldáshoz mindig rendelhető egy ilyen tartomány (általános jellegű feladatnál zérus annak a valószínűsége, hogy a megoldás degenerált), az erőforrások és a feladatok kismértékű változása esetén mindig elfogadhatjuk a duális változók által az erőforrások és a feladatok gazdaságosságáról adott információkat.

A hiperbolikus programozási feladat esetén szintén rendelhetünk az egyes megoldásokhoz egy olyan tartományt, amelyben a megoldás szerkezete változatlan, és lényegében ez lesz az a tartomány, amelyben a duális változók által az erőforrások és a feladatok gazdaságosságáról adott információkat érvényeseknek tekinthetjük, de ebben az esetben a duális változók értéke nem marad teljesen változatlan, csak annyit mondhatunk, hogy értékeik nem változnak ugrásszerűen, és változásuk gyakorlati feladatok esetén általában lényegtelen nagyságrendű lesz. Mindez világos, ha az

$$u^*A - w^*F + v(sb^* + e^*) \geq n^*$$

egyenlőtlenségeket tekintjük, amelyek az optimális bázisban szereplő tevékenységek esetén egyenlőség formájában teljesülnek. Miután pedig a tevékenységeket jellemző paraméterek állandóak, v értéke pedig megváltozik, az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha legalábbis valamelyik u, ill. w érték megváltozik. Abból viszont, hogy az $\frac{1}{sD+G}w_i$ értékek v értékének változását mérik a megfelelő erőforrás, ill. feladat változása esetén, arra is következtethetünk, hogy nemcsak egy u, ill. w érték változik meg, hanem valamennyi nem zérus érték változni fog, miután pl. a valamely erőforrásból rendelkezésre álló mennyiség növelése azt eredményezi, hogy valamelyik tevékenység alkalmazásának mértéke növelhető. Egy tevékenységegységnyivel nagyobb mértékű alkalmazása viszont egyre kisebb mértékben növeli v értékét, mivel a tevékenységet jellemző hatékonyság állandó, a vállalati hatékonyság pedig nő. Így az adott erőforráshoz tartozó u érték csökkenni fog. Ugyanakkor ebből az is látható, hogy a duális változók értékének változása csak viszonylag kismértékű, miután egy tevékenység alkalmazásának kismértékű fokozása csak kis mértékben változtatja a hatékonysági mutatót, és így csak lényegtelenül módosítja a tevékenység egységnyivel nagyobb mértékű alkalmazásától várható hatékonyság növelés értékét. Így abban a tartományban, amelyben a megoldás szerkezete nem változik, ha matematikai értelemben nem is tekinthetjük állandónak a duális változó értékeket, a gazdasági elemzésben elhanyagolhatjuk változásukat.

4. Decentralizált irányítási modellek a q mutató népgazdasági szintű maximalizálása esetén

A nyereség és a q mutató szerinti maximalizálás eltérő vonásai tükröződnek az (5) feladat feltételi egyenleteiben is. A nyereség maximalizáló modell duálisának feltételi egyenletei

$$u^*A - w^*F \geq n^*$$

típusú egyenletek lesznek. Ezek az egyenlőtlenségek azt kötik ki, hogy az egyes tevékenységek egységnyi alkalmazásához szükséges erőforrások árnyékáraikon értékelt összege legalább akkora, mint a tevékenység egységnyi alkalmazásával járó összes „hozadék". Ezen az összes hozadékon a tevékenység bruttó nyereségmutatójának és annak a névleges hozadéknak az összegét értjük, amely a kötelező feladatokhoz való hozzájárulás alapján illeti meg a tevékenységet, és amelyet az egyes feladatokhoz való hozzájárulásnak a feladatok árnyékáraival súlyozott összegeként definiálunk. Ezt a névleges hozadékot a tevékenységeket megillető „különbözeti járadékként" is értelmezhetjük. Minden kötelező feladathoz rendelhetünk ugyanis egy különbözeti járadékot, amelynek nagysága egyenlő lesz azzal a nyereségcsökkenéssel, amely annak a tevékenységnek az alkalmazásából származik, amely tevékenységet csak a megfelelő kötelező feladat miatt kell alkalmaznunk. Az összes olyan tevékenység, amely hozzájárul e feladat teljesítéséhez, a megfelelő gazdaságtalan tevékenység alkalmazásának bizonyos mértékű megtakarítását, és így az ebből származó nyereségcsökkenés megtakarítását tesz ilehetővé. A feladathoz tartozó árnyékár révén ezt a megtakarítást adjuk hozzá a megtakarító tevékenység hozadékához, tehát a tevékenység különbözeti járadékot kap.

A lineáris programozás elmélete alapján ismeretes, hogy az optimális programban szereplő tevékenységek esetén fenti egyenlőtlenségek egyenlőség formájában teljesülnek, míg a többi tevékenység esetén az árnyékárakon mért erőforrás igény nagyobb lesz a tevékenység összhozadékánál. Erre az összefüggésre alapulnak a decentralizált irányítási rendszerek egyes modelljei, miután az erőforrások és a feladatok árnyékárainak elszámolási árként való alkalmazása esetén bármely részterületen csak azok a tevékenységek bizonyulnak nem veszteségesnek, amelyet a központilag meghatározott megoldás is optimálisnak tart. Ezért ha az egyes részterületeken a döntéshozók érdekeltsége a veszteség nélküli működéshez kötődik, csak olyan tevékenységek alkalmazását fogják célszerűnek tartani, amelyeket a központi program is előírna. Miután azonban semmi sem biztosítja, hogy a tevékenységek alkalmazásának mértékét a központ és az egyes részterületek azonosnak válasszák, a központi irányítás általában nem kerülhető el, és az árnyékárak előírásán kívül a tevékenységek mértékének meghatározása is központi feladat marad.

A q szerinti optimalizálás esetén az erőforrásokon és a feladatokon kívül a bér- és eszközfelhasználáshoz — pontosabban a bérszorzóval súlyozott bérigény és az eszközlekötés összegéhez is tartozik egy árnyékár, amelynek értéke éppen az optimális q értékkel lesz azonos. Fogalmazhatjuk ezt úgy is, hogy mind a bérigényhez, mind pedig az eszközlekötéshez tartozik egy árnyékár, és a bérigényhez tartozó árnyékár a bérszorzónak megfelelő számszor — s-szer — nagyobb, mint az eszközigényhez tartozó árnyékár. Érdemes itt arra is felfigyelnünk, hogy ha a modell korlátozó feltételei között munkaerőkorlát is szerepel, akkor ez a modell a munkaerőhöz kétféle árnyékárat rendel. A munkaerőhöz mint erőforráshoz tartozó árnyékár a munkaerő szűkösségét méri, értéke zérus, ha a modell megoldása nem meríti ki a munkaerő korlátot, míg ellenkező esetben ez az árnyékár a korábban leírt módon mutatja, milyen hatékonyság növekedést eredményezhetne a munkaerő korlát egységnyi bővítése. Ugyanakkor a munkaerőhöz — bérköltséghez — mint termelési tényezőhöz tartozó árnyékár mindig pozitív lesz, és értéke — sv — azt mutatja, milyen nyereség növekedést kell biztosítani egységnyi bér felhasználásának az adott modellben. Hasonlóan kétféle árnyékár rendelhető az eszközlekötéshez, bár globális eszközkorlát általában nem szerepel a korlátozó feltételek között.

Az

$$u^*A - w^*F + vs\,b^* + ve^* \geq n^*$$

típusú egyenletek tehát azt kötik ki, hogy az egyes tevékenységek által igényelt erőforrások árnyékárakon értékelt összegének és a megfelelő árnyékárakkal súlyozott bér-,-valamint eszközigény összegének az összege legalább akkora, mint a tevékenység összes hozadéka, amelyet a nyereség maximalizáló modellhez hasonlóan a bruttó nyereséghozam és a ,,névleges'' hozadék összegeként defíniálunk. Egyenlőség csak az ,,optimális'' tevékenységek esetén teljesül. A termelési tényezők árnyékárait így értelmezhetjük kötelezően fizetendő járulékokként is, és ekkor azt mondhatjuk, hogy a tevékenységek gazdaságosságának eldöntésekor hozadékukkal a bér-, valamint eszközlekötési járulékkal növelt költségeket kell szembe állítanunk.

A q szerinti maximalizálás ,,egyedi'' jellege mutatkozik meg abban, hogy az optimális bér- és eszközlekötési járulék értéke az adott modell optimális q értékével lesz egyenlő, tehát ha a vállalatok egymástól függetlenül optimalizálják ezt a mutatót, a bér- és eszközfelhasználás célszerűségét mérő mutató vállalatonként különböző lesz, a kevésbé hatékony vállalatok a népgazdasági átlagnál kisebb hozadék esetén is célszerűnek fogják találni újabb termelési tényezők alkalmazását, míg az átlagnál hatékonyabban dolgozó vállalatok olyan alkalmazási lehetőségeket is gazdaságtalannak találnak, amelyek javítanák a népgazdasági szintű hatékonyságot. Így az optimális primál megoldás szerkezetének elemzése kapcsán levont következtetéseket megerősíti a duális feladat optimális megoldása alapján a termelési tényezők járulékairól levonható következtetés. E járulékokkal kapcsolatosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez a modell semmi esetre sem ad választ a bér- és eszközlekötési járulékok arányának sokat vitatott kérdésére, miután elfogadja a bérszorzó értékét, és tulajdonképpen csak a bérszorzóval súlyozott bérköltség és az eszközlekötés összegéhez tartozóan határoz meg egy járulékot, amelynek bér- és eszközlekötési járulékra való osztását formálisan hajtottuk végre.

Érdekes lehet a duális feladat most vizsgált feltételi egyenleteit v-re rendezve is megvizsgálnunk. A megfelelő skalár egyenletek

$$v \geq \frac{n_j + \sum_i w_i f_{ij} - \sum_i u_i a_{ij}}{sb_j + e_j} = \frac{n_j'}{sb_j + e_j}$$

azt mondják, hogy az egyes tevékenységek módosított q mutatója nem nagyobb, mint az optimális v érték, és a lineáris programozás elméletéből ismert összefüggésnek megfelelően egyenlőség csak az optimális programban szereplő

— degeneráció esetén alternatívaként szereplő — tevékenységek esetén teljesül. A tevékenységek q mutatójának módosítása csak a számlálót érinti: a bruttó nyereséghozamot növelni kell a kötelező feladatokhoz való hozzájárulásért járó „különbözeti járadékok" összegével, és csökkenteni kell a tevékenység által igényelt erőforrások árnyékárakon mért költségével.

A hiperbolikus és a lineáris programozási modellek számos közös vonása alapján várható, hogy a decentralizált irányítási modellek könnyen adaptálhatók q maximalizálásának esetére is.

A mutató népgazdasági szintű maximalizálása elméletileg megvalósítható egy olyan nagyméretű modell alapján, amely a népgazdaság valamennyi erőforrását, az összes minimálisan teljesítendő feladat formájában előírható célkitűzést és a népgazdaság valamennyi tevékenységét átfogja. E modell megoldása egyrészt megadja, hogy mely tevékenységeket milyen mértékben kell alkalmazni annak érdekében, hogy a népgazdasági szintű hatékonyság (q) maximális legyen, másrészt viszont megadja egy speciális szabályozási rendszer elemeinek számszerű értékeit is a duális feladat optimális megoldása révén. E szabályozási rendszer elemei a következők:

— az erőforrások árnyékárai (u_i értékek);

— a kötelező feladatokhoz rendelhető különbözeti járadék kulcsok (w_i értékek);

— a termelési tényezők felhasználása után kötelezően fizetendő járulékkulcs (v), amelyet bérjárulék (sv) és eszközlekötési járulék kulcsra oszthatunk (v).

A szabályozási rendszer arra épül, hogy a tevékenységek alkalmazásáról döntéseket hozó kisebb egységek (vállalatok) érdekeltsége egy speciálisan definiált hozadékösszeg maximalizálásához fűződik. E hozadék összeg számítása során a vállalatok az egyes tevékenységek bruttó nyereséghozamát (az árbevétel és a változó költségek különbségét) növelhetik azzal a különbözeti járadékösszeggel, amely a tevékenységnek a kötelező feladatokhoz való hozzájárulásai alapján jár (értelmezhetjük ezeket a járadékokat termelési támogatásként is). Ugyanakkor ezt a hozadékot csökkenteniük kell a tevékenység által igényelt erőforrások árnyékáraikon mért költségeivel (amelyeket adóként is értelmezhetünk), és a bér-, valamint eszközlekötés után fizetendő járulékokkal.

A népgazdasági modell optimális megoldásában szereplő tevékenységek esetén a tevékenység hozadéka éppen fedezi a felhasznált erőforrások és termelési tényezők költségeit, míg az összes olyan tevékenység esetén, amely népgazdasági szempontból nem optimális, ezek a költségek nagyobbak lesznek a tevékenység hozadékánál.

A nyereségmaximalizáló modellhez hasonlóan a szabályozási rendszer ebben az esetben is csak azt biztosítja, hogy a vállalatok népgazdaságilag optimális tevékenységek alkalmazását tartják célszerűnek, de nem biztosítja automatikusan, hogy a vállalatok ezeket a tevékenységeket olyan mértékben alkalmazzák, amilyen mértéket a népgazdasági modell optimális megoldása írna elő. Így a közvetett szabályozást ebben az esetben is ki kell egészíteni bizonyos mértékű közvetlen irányításnak is: a vállalatok által optimálisnak tartott tevékenységek mértékét központilag kell előírni. Valójában azonban az optimális tevékenységeknek csak viszonylag kis részére vonatkozóan van szükség erre a központi előírásra, miután az olyan tevékenységek esetén, amelyek optimális mértékű alkalmazása egymagában meríti ki a modell valamelyik korlátját, a tevékenység alkalmazásáról döntést hozó vállalat e korlátnak megfelelően az optimális mértékű alkalmazásnak megfelelően dönt, ha a nem központilag szabályozott mértékű tevékenységek esetén a lehetőségek teljes kihasználását írjuk elő. Ugyanakkor általában a tevékenységek nagy részéhez egyedi felsőkorlátokat rendelhetünk — többnyire a piaci lehetőségeknek megfelelően — így ebben az irányítási rendszerben a közvetlen utasításokon alapuló beavatkozás viszonylag kismértékűre csökkenthető. Ha ezt a megállapítást kiegészítjük azzal a már említett ténnyel, hogy a közvetlen utasítás csak a vállalat által optimálisnak tartott alternatívák közötti választást érinti, és így nem ellentétes a vállalat érdekeivel, elméletileg mindenképpen elfogadhatónak tekinthetjük ezt a szabályozási rendszert.

A realizálhatóság lehetőségeivel nem foglalkozunk részletesen, miután ebből a szempontból nincs különbség a népgazdaság lineáris programozási modelljeinek és a q mutatót maximalizáló modellnek a duálisára épülő szabályozási rendszerek között. Így míg kisebb aggregátumok — pl. egy több részegységet tartalmazó nagyvállalat — esetén gyakorlatilag is minden részletében megvalósíthatónak látszik az előzőekben ismertetett irányítási rendszer, népgazdasági szinten inkább csak azt mondhatjuk, hogy a szabályozási rendszer felépíthető a q mutatót népgazdasági szinten maximalizáló modell duális megoldása alapján, és elvárható, hogy ez a szabályozási rendszer olyan vállalati magatartást eredményez, amely tendenciájában megfelel a népgazdasági érdekeknek.

Az elmondottak a q szerinti optimalizálás érdekes sajátosságát tükrözik: míg a vállalati q mutatók maximalizálása révén nem biztosítható a mutató népgazdasági szintű optimalizálása, konstruálható egy olyan szabályozási rendszer, amely a vállalati nyereség maximalizálására épülve a népgazdasági szintű q mutató optimalizálására vezet.

A hiperbolikus célfüggvényt optimalizáló modellhez rendelhető duális feladatot felírhatjuk úgy is, hogy a feltételi egyenleteket v-re rendezzük. Bár matematikailag nyilván azonos feladatról van szó, ebben az esetben közgazdaságilag más értelmezést adhatunk a felépíthető decentralizált irányítási rendszernek. Ha ugyanis a vállalatok nyereségük és a részükre járó különbözeti járadékok (termelési támogatások) összegéből fedezik az erőforrások után fizetendő adókat, és az azután náluk maradó nettó nyereség, valamint a tevékenységhez kapcsolható bérszorzóval súlyozott bérköltség és lekötött eszközérték arányának maximalizálásában érdekeltek, csak olyan tevékenységek alkalmazását találják majd célszerűnek, amely tevékenységek népgazdaságilag optimálisak, miután az ilyen tevékenységekhez tartozó $\dfrac{n_j + w^* f_j - u^* a_j}{sb_j + e_j}$ érték eléri a hatékonyság népgazdasági szintű mutatójának, v-nek az értékét, míg a többi tevékenység esetén a tevékenységhez rendelhető hatékonysági mutató v-nél kisebb lesz. Első pillanatra úgy tűnhet, hogy a vállalati q mutató maximalizálást előíró rendszer is biztosíthatja a mutató népgazdasági szintű maximumát. Ez a vállalati célfüggvény azonban csak az újonnan lekötött termelési tényezők hatékonyságát értékeli, és az egyes tevékenységekhez rendelhető ,,változó'' hatékonyság értékelése során semmilyen szerepet nem kap a vállalati hatékonysági mutató korábbi értéke, tehát a rendszer kiszűri az ebből eredő torzító hatásokat. A vállalat egészére vonatkozó q mutató még javulhatna — ha értéke v-nél kisebb — népgazdaságilag nem optimális tevékenységek alkalmazása révén, ill. a népgazdaságilag optimális tevékenységek csökkentik a v-nél nagyobb vállalati hatékonysági mutatók értékét, miután azonban az érdekeltség nem q-hoz, hanem csak az újonnan lekötött termelési tényezőkre vonatkozó ilyen mutatóhoz fűződik, a vállalat számára csak népgazdaságilag optimális tevékenységek alkalmazása lesz célszerű. A rendszer természetesen ebben az esetben sem biztosítja automatikusan, hogy a vállalatok minden tevékenység mértékét helyesen válasszák meg, ezért a pontos optimum biztosítása ekkor is bizonyos mértékű közvetlen irányítást tesz szükségessé, amely azonban ebben az esetben is csak az alternatívák közötti választást érinti, és nem ellentétes a vállalati érdekekkel.

Az irányítási rendszer ilyen megfogalmazása talán szerencsésebbnek tekinthető abból a szempontból, hogy a vállalati érdekeltségi mutató maximuma ebben az esetben nem 0 lesz, mint a nyereség maximalizáló megfogalmazás esetén, hanem egy pozitív érték, ami a matematikai azonosság ellenére, valószínűleg az érdekeltségi mutató hatásának intezívebb érvényesülését teszi lehetővé. Ezt csak alátámasztja az a tény, hogy a nyereség maximalizáló megfogalmazás esetén az optimális megoldáshoz tartozó vállalati nyereség tulajdonképpen negatív érték, ha figyelembevesszük, hogy az n_j értékek a tevékenységek árbevételének és változó költségeinek a különbségei, és így ennek a bruttó nyereség összegnek fedeznie kell a vállalati állandó költségeket is. Az n_j értékek természetesen nem módosulnak a hiperbolikus célfüggvény esetén, miután azonban ebben az esetben az érdekeltség eleve egy „mesterséges" mutatóhoz kötődik — a nevezőben nem szerepelnek az állandóan lekötött termelési tényezők —, a gyakorlati megvalósítás talán reálisabb lehetőségnek tekinthető, mint egy olyan nyereségmaximalizáló rendszerben, amely végeredményben csak a veszteség nagyságát minimalizálja.

(Beérkezett: 1972. május 4.)

IRODALOM

1. CHARNES, A.—COOPER, W. W.: Programming with linear fractional functionals. Nava Research Logistics Quarterly, Sept.-Dec. 1962.
2. KOVÁCS Á.: Megjegyzések a jövedelemszabályozási rendszerről és a vállalati célfüggvényről. Pénzügyi Szemle, 1969/2.
3. MARTOS B.: Hyperbolic programming. Naval Research Logistics Quarterly, June-Sept. 1964, 135—155. o.

SOME PROBLEMS IN OPTIMIZATION ACCORDING TO THE $\dfrac{N}{sB + E}$ INDEX NUMBER

In the present control system of firm's income the $q = \dfrac{N}{sB + E}$ index is in the focus of the firm's interest (N = profit, B = wage cost, E = fixed assets, s = weighting coefficient). At the same time q can be considered one of the most important indices measuring the efficiency of economic entities, since the other elements of the new value beside profits are independent on the quality of management if factor inputs are fixed.

The characteristics of optimization according to q are examined first by means of a simple model and we compare the behaviour of the model with that of the profit maximizing model. Two characteristic features of optimization according to q are emphasized: Furthermore, stronger minimal requirements for the utilisation of productive factor and

the increased role of the firm's working conditions. Furthermore, it is shown on the basis of Martos' hyperbolic programming algorithm that the above differences between the maximization of q and of the profit can be pointed out in every model where the constraints are described by a linear equation system. The resource evaluation of the q-maximizing model is analysed according to the dual of the linear program equivalent of the hyperbolic program in the sense of Charnes and Cooper.

This model is used for the demonstration of how the maximization of the index q can be ensured in a decentralized management system where the decisions on the activities are made according to the taxes paid for the use of resources and to the extra allowances given for obligatory tasks.

It is shown that the index q of a higher economic unit cannot generally be maximized by the way of the lower units maximizing their own q, and indicated how to modify the objective function to this end.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ СОГЛАСНО ИНДЕКСУ $\frac{N}{sB+E}$

При настоящей системе регулирования доходов на предприятиях в центре заинтересованности предприятия стоит индекс $q = \frac{N}{sB+E}$ (N = прибыль, B = расход зарплат, E = стоимость вложенных средств, s = расчетный фактор). В то же время q можно считать одним из самых важных индексов, измеряющих эффективность экономических единиц, потому что при данном факторе производства элементы новой стоимости кроме прибыли являются независимыми от качества хозяйствования.

В статье характерные черты оптимизации согласно индексу q мы исследуем сперва на основе простой модели и сопоставляем ведение модели ведением модели максимизации прибыли. Подчеркиваем две характерные черты оптимизации согласно q: «строгость» минимального требования к использованию фактора производства и большая роль способностей предприятия. В дальнейшем, на основе гиперболического алгоритма программирования Мартоша показывается, что вышеупомянутые разницы между q и максимизацией прибыли можно показать во всех моделях, где условия преписываются системой линейного неравенства. Статья анализирует оценку ресурсов модели, максимизирующей q, на основе дуали проблемы гиперболического программирования согласно линейному варианту Чарнеса—Купера и употребляет эту модель для представления того, как можно обеспечивать максимизацию индекса q при децентрализованной системе управления, в которой ответственные лица за деятельность решат об употреблении деятельности на основе налогов, уплачиваемых за пользование ресурсов.

Показывается, что индекс q большей единицы вообще нельзя максимизать так, чтобы частичные единицы максимизали свою стоимость q и дается, как следует модифицировать целевые функции частичных единиц в интересах этой цели.

Bod Péter

Néhány megjegyzés Kovács Álmos cikke ürügyén

Örvendetesen fejlődik nálunk a matematikai módszerek közgazdasági alkalmazása. Egyre több bonyolult elméleti és gyakorlati közgazdasági kérdést igyekeznek egzakt matematikai megfogalmazás révén megközelíteni; álláspontokat, véleményeket bizonyítani.

A szándék és a megvalósulás azonban nem mindig esnek egybe. Az, hogy matematikai módszereket alkalmazunk, önmagában még egyáltalában nem biztosítja közgazdasági gondolkodásunk egzaktságát; sőt . . .

Amilyen mértékben szélesedik matematikai-közgazdasági irodalmunk, olyan mértékben szaporodnak nálunk is bizonyos módszerek – én inkább módszertani hibáknak nevezném őket, amelyek egyáltalában nem ismeretlenek a nemzetközi irodalomban sem; amelyek azonban aligha öregbítik szakmánk tekintényét.

Hadd említsek ezek közül néhányat anélkül, hogy akár a teljesség igényével lépnék fel, akár éppen a legproblematikusabb pontokra hívnám fel a figyelmet.

1. Vizsgálunk egy folyamatot valamilyen egyszerűsített modell alapján. Tisztázzuk a modell tulajdonságait, majd következtetéseket vonunk le a vizsgált folyamatra – de figyelmen kívül hagyjuk mindazt amit egyszerűsítettünk.

Kovács Álmos cikke 1. pontjában olyan modellal írja le a vállalatok viselkedését, amelynek megengedett megoldáshalmaza:

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{o} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{k}\} \ .$$

Érdekes különbségeket mutat ki a nyereségfüggvény és a q mutató e halmaz feletti viselkedése között. Eddig a vizsgálat hasznos. Ezután a szerző következtetéseket igyekszik levonni arra, hogy milyen eltérő hatása lehet a kétféle célfüggvénynek a vállalat fejlesztéssel kapcsolatos tevékenységére.

Az elemzett modellban azonban nem szerepel a fejlesztéssel kapcsolatos tevékenységek formalizálása. Amennyiben a modell egyáltalában tartalmazza a valóság valamilyen elemét, akkor éppen azt a vetületét ábrázolja, amelyben a szerző szerint sem várható különbség a kétféle érdekeltség hatásában.

Így akár igazak, akár nem igazak a szerző fejtegetései: azok nem függnek össze a matematikai vizsgálattal.

2. Hajlamosak vagyunk arra, hogy megfelelő közgazdasági elemzés nélkül definiáljunk modelljeinkben fogalmakat, és így azok gyakran semmit sem tükröznek az objektív valóságból.

A nyereség (volumenében vagy fajlagos nagyságában) reális vállalati kategória. Alakulásához anyagi érdekek is fűződnek. Érdemes tehát vizsgálni, hogy milyen körülmények között alakul kedvezően és van reális tartalma az olyan kérdésnek is, hogy milyen tevékenységek mellett lehet akár a nyereség tömegét, akár az eszközegységre jutó fajlagos nyereséget maximalizálni.

Mit jelent azonban a népgazdaság szintjén összegezett nyereség, illetve a népgazdasági szinten számított q mutató? Nem jelentenek többet meghatározott tartalmú statisztikai mutatószámoknál. Azonban milyen össztársadalmi érdek kapcsolható e mutatók népgazdasági szinten való maximalizálásához? Különösen ha azt is figyelembe vesszük, hogy adott nagyságú nemzeti jövedelemből az össznépgazdasági nyereség csak a fogyasztás rovására növelhető.

3. Minden matematikai-közgazdasági modell számos absztrakciót tartalmaz. Az absztrakciók jogosságát vagy elfogadhatóságát a gazdasági valósághoz való viszonyukban lehet csak megítélni; de nem lehet őket más absztrakt konstrukciókhoz való viszonyukban elbírálni. Legalábbis az ilyen értékelés könnyen félrevezető lehet.

A szerző cikkének 4. pontjában azt bizonygatja, hogy az általa javasolt q mutató maximalizálásán nyugvó decentralizált irányítási rendszer éppen olyan mértékben megvalósítható, mint a nyereségmaximalizáló célfüggvényhez kapcsolódó modell. Az érvelés formálisan igaz.

Azonban a népgazdaság lineáris programozási modelljeinek duálisára épülő szabályozási rendszerek a valóságban nem léteznek. Számos elméleti megfontolás szól amellett, hogy ha léteznének, aligha szabályoznának „optimálisan" ha ezen a fogalmon nem valami definiált fogalmat értünk, hanem azt, amit az átlagember ért e fogalmon. Ti., hogy a dolgok úgy nagyjából jól mennek, vagy legalábbis az adott körülmények között nem mehetnek jobban.

Kovács érvelését tehát formális igazságának sérelme nélkül meg lehet fordítani: a q mutató maximalizálására épülő duális irányítási rendszer éppen olyan problematikus lenne, mint amihez a szerző viszonyítja.

4. A matematikai programozási modellek a gazdasági döntések előkészítésének hatékony eszközei lehetnek. De csak akkor azok, ha a konkrét döntési problémák valóságos körülményei között specifikált modellekkel dolgozunk.

Minden olyan vizsgálat, amely valamilyen „általános" modell (legyen az lineáris vagy nem lineáris, folytonos vagy diszkrét változójú, determinisztikus vagy sztochasztikus) testére van szabva, csak ezen általános modell bizonyos matematikai tulajdonságaira vethet fényt.

E sajátosságok közgazdasági interpretálásánál messzemenő óvatosságra van szükség, mert minél általánosabb a modell, annál általánosabbak (tehát annál semmitmondóbbak) lehetnek csak a konzekvenciái.

Különösen áll ez abban az esetben, amikor olyan bonyolult és a maga nemében specifikus folyamatot, mint a népgazdaság egészének mozgása az alábbi feltételrendszerrel írunk le:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{k}$$

$$\mathbf{Fv} \geq \mathbf{f}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{o}\,.$$

Még ilyen általános modellel is lehet bizonyos modellkísérleteket végezni – és Kovács Álmos cikke több érdekes modellkísérletet tartalmaz. E kísérletek bizonyított eredményei azonban nagyon soványak ahhoz, hogy elbírják egy konkrét szabályozási rendszerre irányuló javaslat terheit.

Soraim megírására Kovács Álmos cikke csak ürügyet adott. Az igazat megvallva a Pécsi Operációkutatási Konferencián alakult ki az a véleményem, hogy nincs minden rendben azon a területen, ahogy alkalmazni próbálunk olykor matematikai eszközöket közgazdasági problémák vizsgálatára.

Kovács Álmos

Viszontválasz

Cikkem célja a q mutató szerint optimalizálás legáltalánosabb jellemző vonásainak vizsgálata volt, elsősorban a klasszikusnak tekinthető nyereség optimalizálással való összehasonlítás alapján. Nem kívántam tehát állást foglalni a q mellett, az elemzés fő célja éppen az, hogy tisztább képet kapjunk az alkalmazásával járó különböző hatásokról, ami esetleg segítséget nyújthat a mutató értékelésében. Bod Péter bírálatára pontonként válaszolok.

1. A fejlesztési tevékenységek folytonos változóval való szerepeltetése ilyen általános vizsgálat esetében — véleményem szerint — elfogadható, ugyanezt az utat követik a vállalati, ágazati és népgazdasági tervezés gyakorlatában alkalmazott középtávú és éves tervezési lineáris programozási modellek. Az elemzés során arra a kérdésre szerettem volna választ adni, milyen eltérést okoz, ha a meglevő lineáris programozási tervezési modellek célfüggvényében nem a nyereség, hanem az egységnyi bérre jutó részesedési alap tervidőszak végi értékének maximalizálása szerepel. A korábbi évekre vonatkozó kikötések a feltételek között vehetők figyelembe. A fejlesztési tevékenység formalizálása ebben a felfogásban nem érinti a célfüggvényt, hanem csak a feltételrendszer kialakítása során válik szükségessé. Céljainknak azonban megfelel az az általános kikötés, hogy a modell feltételi egyenletei lineáris egyenletek legyenek, ami a gyakorlati alkalmazásnak legtöbbször ugyanis feltétele. Megjegyzem még, hogy a fejlesztési változókat egész értékű változókként szerepeltetve, a gyakorlati megvalósítás igényeit szem előtt tartva írtuk Stahl Jánossal közösen a SZIGMA 1971. 3. számában megjelent „Egy vállalati beruházási modell" című cikkünket, úgy vélem azonban, hogy a q célfüggvény szerinti optimalizálás tendenciáinak vizsgálatára a folytonos modell is alkalmas.

Az elemzést didaktikai okokból kezdtem azzal az egyszerűsített modellel, amelyben az egyes tevékenységeket — így a fejlesztés jellegű tevékenységeket is — csak egyedi felső korlátjuk korlátozza, de a továbbiakban megmutattam, hogy a levont következtetések lényegében ugyanúgy érvényesek, ha további lineáris korlátozó feltételeket is tartalmaz a modell.

2. A cikknek semmiképpen sem volt célja, hogy állást foglaljon abban a kérdésben, hogy milyen mutató méri a legjobban a népgazdaság termelő tevékenységének hatékonyságát. Az elemzés során csak arra akartam felhívni a figyelmet, hogy a vállalati q értékek maximalizálása nem vezet feltétlenül a q népgazdasági szintű maximalizálására, de nem foglaltam állást abban a kérdésben, hogy az kívánatos volna-e.

A bevezetőben minden esetre felsoroltam néhány érvet a népgazdasági szintű q alkalmazása mellett, ezekre vonatkozólag ellenérvet nem kaptam. Az nyilván nem igaz, hogy a nyereség csak a fogyasztás rovására növelhető. (Még-adott nagyságú nemzeti jövedelem mellett sem igaz, hiszen a termelő ágazatokban képződött nyereség a nem termelő ágazatok dolgozóinak fogyasztását nagyobb mértékben növelheti, mint ahogyan a termelő ágazatok dolgozóinak fogyasztását — a munkaerő megtakarításon keresztül — esetleg csökkenti; ráadásul viszont a nyereség növelése gyakorlatilag mindig a nemzeti jövedelem növekedésével jár együtt.)

3. Semmiképpen sem kívántam állást foglalni az optimális duális megoldás alapján felépíthető szabályozási rendszer mellett (33.o. második bekezdés). A kérdés vizsgálatát mégis szükségesnek tartottam a következő okok miatt:

— a programozási modellek közgazdasági elemzése során ez a kérdés mindenképpen felmerül, véleményem szerint az elemzés nem teljes, ha nem térünk ki erre a kérdésre is (a SZIGMA közölt már kizárólag e kérdéssel foglalkozó cikket is lengyel szerzőktől),
— a duális feladat elemzése más oldalról erősíti meg a primál megoldás alapján levont egyik legfontosabb következtetésünket, amely szerint a hányados jellegű célfüggvény alkalmazása az egyedi sajátosságok túlzott érvényesítése miatt magában rejt egy kedvezőtlen irányzatot (a decentralizált irányítási rendszerben az egységek állandóan lekötött termelési tényezői nem játszanak szerepet!);
— végül egy rendkívül fontos gyakorlati ok: számos nagyvállalat egymástól sok tekintetben függetlenül gazdálkodó gyárat egyesít, és ilyen vállalatok esetén már a belső szabályozás reális alternatívája lehet az optimális duális megoldásra épített rendszer. (A kérdéssel egy későbbi cikkben részletesen is szeretnék foglalkozni.)

Imrényi Béla

A kanonikus korrelációszámítás

A kanonikus korrelációszámítás a többváltozós statisztikai elemzés témakörébe tartozik. A vizsgálatra kiválasztott valószínűségi változókat két csoportra osztjuk, valamilyen — a változók természetéből adódó — szempont szerint. Az így kapott két változócsoportot felfoghatjuk úgy is, mint két valószínűségi vektorváltozót. Az elméletben levezetésre kerülő „trace korrelációs együttható" a közönséges korrelációs együttható általánosítása a két vektorváltozó között. Bemutatjuk emellett az elmélet egy gyakorlati alkalmazását: egy becslési módszert a többváltozós ökonometriai modell endogén (függő) változóira. Az összefüggések levezetése során alkalmazzuk a matematikai statisztika és a mátrixszámítás egyes alapvető tételeit, és az anyag megértése szempontjából ezek ismerete az olvasó részéről is szükséges.

1. A kanonikus korrelációszámítás problémája

Legyen X a p komponensű $x' = (x_1, \ldots, x_p)$ valószínűségi vektorváltozóból vett T elemű minta (vagy T elemű idősor) mátrixa:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \ldots x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} \ldots x_{2p} \\ \vdots & \\ x_{T1} & x_{T2} \ldots x_{Tp} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

és Y a q komponensű $y' = (y_1, \ldots, y_q)$ valószínűségi vektorváltozóból vett T elemű minta (v. T elemű idősor) mátrixa:

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \cdots y_{1q} \\ y_{21} & y_{22} \cdots y_{2q} \\ \vdots & \\ y_{T1} & y_{T2} \cdots y_{Tq} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $q \leq p$.

A vektorok komponenseit a változók jelentése szerint állítjuk össze. Például az x vektor tartalmazhat közgazdasági mutatókat, az y pedig szociológiaikat, számszerű fiziológiai, illetve pszichológiai kísérletek eredményeit, ökonometriai modell predeterminált, illetve endogén változóit stb.

Vizsgálni akarjuk, hogy milyen mértékű sztochasztikus kapcsolat van a két vektorváltozó között. Nagyon áttekinthető volna ez az összefüggés, ha x_1 és y_1 korrelációja nagy volna, ugyanígy x_2 és y_2-é, . . ., x_q és y_q-é. Ugyanakkor mindegyik változó kizárólag a „saját párjával" volna korrelált, az x_i és y_j függetlenek lennének, ha $i \neq j$.

A változók összefüggéseit leíró lineáris modell ekkor csakis az

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \beta_1 + w_1 \\ y_2 &= x_2 \beta_2 + w_2 \\ &\vdots \\ y_q &= x_q \beta_q + w_q \end{aligned} \tag{1.3}$$

alakot öltheti (itt feltettük, hogy x_i, y_i és w_i várható értéke zérus, és w_i a sztochasztikus kapcsolattal együttjáró disturbancia).

Természetesen egy statisztikai adatfelvétel sem fog ilyen összefüggést tartalmazó adatokat adni. Ellenben bevezethetünk olyan változókat, amelyek mutatják a fenti tulajdonságokat, és ugyanakkor tartalmazzák az összes információt is, amely a statisztikai adatokban van. Ezek a változók az x, illetve y vektorok komponenseinek különböző lineáris kombinációi lesznek, maguk is valószínűségi vektorváltozók:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1' x \\ u_2 &= a_2' x \\ &\vdots \\ u_q &= a_q' x \end{aligned} \tag{1.4}$$

és

$$\begin{aligned} v_1 &= b_1' y \\ v_2 &= b_2' y \\ &\vdots \\ v_q &= b_q' y \end{aligned} \tag{1.5}$$

Vektorálisan:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1' x \\ a_2' x \\ \vdots \\ a_q' x \end{pmatrix} \text{ vagy } u = A' x \tag{1.6}$$

és

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1' y \\ b_2' y \\ \vdots \\ b_q' y \end{pmatrix} \text{ vagy } v = B' y \tag{1.7}$$

A matematikai feladat lesz az A és B mátrixokat meghatározni oly módon, hogy a kapott u és v valószínűségi vektorváltozók mutassák az (1.3) egyenletekkel kapcsolatban említett tulajdonságokat, nevezetesen azokat, hogy u_1 és v_1, u_2 és v_2, . . . u_q és v_q a lehető legszorosabban korreláljon, és az összes többi korreláció zérus legyen.

Most kimondhatjuk a pontos *definíciót:* Ha adott a p komponensű x és a q komponensű y valószínűségi vektorváltozó, akkor képezzük az A és B konstans mátrixokkal az $u = A'x$ és $v = B'y$ valószínűségi vektorváltozókat. Az így kapott $u' = (u_1, \ldots, u_q)$ és $v' = (v_1, \ldots, v_q)$ vektorok komponenseit „kanonikus változóknak" nevezzük, ha az

$$\varepsilon u_i^2 = 1 \tag{1.8}$$

$$\varepsilon v_i^2 = 1 \qquad i = 1, \ldots, q \tag{1.9}$$

feltétel mellett teljesül az, hogy a következő korrelációk zérusok:

$$\varepsilon u_i\, u_j = 0 \tag{1.10}$$

$$\varepsilon v_i\, v_j = 0 \tag{1.11}$$

$$\varepsilon u_i\, v_j = 0 \qquad i = 1, \ldots, q \tag{1.12}$$

ha $i \neq j$; azonkívül ha még teljesül az $\varepsilon u_i v_i$ $(i = 1, \ldots, q)$ korrelációkra az (1.8), (1.9) feltételek mellett az, hogy az $\varepsilon u\, v = a'\varepsilon xy'b$, $p + q$ változós függvény lokális maximumai. Az $\varepsilon u\, v$ függvénynek e lokális maximumait „kanonikus korrelációs együtthatóknak" nevezzük. (A görög eredetű „kanonikus" szó jelentése: szabályos, szabályszerű.)

2. A kanonikus korreláció számítás matematikai alapjai

Tekintsük a $p + q$ komponensű $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ valószínűségi vektorváltozót Σ variancia-kovariancia mátrixszal, amely négy rész-mátrixból áll:

$$\Sigma = \varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} (x'\ y') = \varepsilon \begin{pmatrix} xx' & xy' \\ yx' & yy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor $\varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$. Később látni fogjuk, hogy ez a megszorítás nem változtat a kanonikus korrelációs együtthatók értékén. Feltesszük még azt, hogy Σ pozitív definit. Ez utóbbi feltételezéssel nem zártunk ki egyetlen számunkra jelentőséggel bíró esetet sem, csupán azokat az érdektelen eseteket, amelyekben a komponensek lineárisan összefüggőek.

E feltételek mellett a következő *tételt* fogjuk bebizonyítani:

Az x és y vektorokhoz találhatók (1.4) és (1.5) alakban felírt kanonikus változók. Az $r_1, \ldots, r_q$ kanonikus korrelációs együtthatók a

$$\begin{vmatrix} -r\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -r\Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2}$$

egyenlet pozitív gyökei.

Az i-edik kanonikus változó-pár képzéséhez szükséges a_i, b_i konstans vektorok pedig a

$$\begin{pmatrix} -r_i\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -r_i\Sigma_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

homogén lineáris egyenletrendszer gyökei $i = 1, \ldots, q$ esetén, feltéve, hogy $r_i \neq r_j$, ha $i \neq j$.

Először megkeressük az $u = a'x$ és $v = b'y$ alakú skaláris szorzatok közül azokat, amelyek kielégítik az

$$1 = \varepsilon u^2 = \varepsilon a'xx'a = a'\Sigma_{11}a \tag{2.4}$$

$$1 = \varepsilon v^2 = \varepsilon b'yy'b = b'\Sigma_{22}b \tag{2.5}$$

feltételeket, azaz varianciájuk egységnyi, és e feltételek mellett az εuv függvénynek (amely az u és v változók korrelációs együtthatója) szélsőértéke van. A függvény más alakban:

$$\varepsilon uv = \varepsilon a'xy'b = a'\varepsilon xy'b = a'\Sigma_{12}b \tag{2.6}$$

A Lagrange-féle feltételes szélsőértékszámítás módszerével keressük meg (2.6) szélsőértékeit:

Legyen:

$$\psi = a'\Sigma_{12}b - \frac{1}{2}\lambda(a'\Sigma_{11}a - 1) - \frac{1}{2}\mu(b'\Sigma_{22}b - 1) \tag{2.7}$$

ahol $\frac{1}{2}\lambda$ és $\frac{1}{2}\mu$ Lagrange-féle multiplikátorok. A ψ függvény szélsőértékei között lesznek az εuv szélsőértékei (2.4) és (2.5) feltételek mellett. Deriváljuk ψ-t a és b komponensei szerint, és zérussal tesszük egyenlővé:

$$\frac{\partial\psi}{\partial a} = \Sigma_{12}b - \lambda\Sigma_{11}a = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial b} = \Sigma_{21}a - \mu\Sigma_{22}b = 0. \tag{2.9}$$

(2.8)-at szorozzuk balról a'-val, (2.9)-et b'-vel:

$$a'\Sigma_{12}b - \lambda a'\Sigma_{11}a = 0 \tag{2.10}$$

$$b'\Sigma_{21}a - \mu b'\Sigma_{22}b = 0. \tag{2.11}$$

Az egységnyi varianciák következtében $\lambda = \mu = a'\Sigma_{12}b = \varepsilon uv$, tehát λ értéke éppen az u és v változók korrelációs együtthatója. Így (2.8)-at és (2.9)-et a következőképpen írhatjuk át.

$$-\lambda\Sigma_{11}a + \Sigma_{12}b = 0 \tag{2.12}$$

$$\Sigma_{21}a - \lambda\Sigma_{22}b = 0 \tag{2.13}$$

vagy mátrix egyenletben:

$$\begin{pmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0. \tag{2.14}$$

mive 14) homogén lineáris egyenletrendszer az ismeretlen $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vektorra nézve, a nem triviális megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy mátrixának determinánsa zérus legyen:

$$\begin{vmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.15}$$

A (2.14) és (2.15) egyenletekkel megkaptuk a tételben szereplő egyenleteket. Ezzel azt láttuk be, hogy az uv függvény feltételes szélsőérték helyei csakis a (2.14) és (2.15) egyenletek által meghatározott $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vektorok között lehetnek.

Belátjuk, hogy (2.15)-nek λ-ra q számú pozitív gyöke van. (2.15) egy $(p+q)$-adfokú algebrai egyenlet, mert $(-\lambda)^{p+q}$ együtthatója $(\Sigma_{11}) \cdot (\Sigma_{22})$, ahol egyik tényező sem zérus, és a determináns kifejtésében az összes többi tagban λ kitevője $(p+q)$-nál kisebb. Ezért $(p+q)$ számú gyöke van az egyenletnek. Az összes gyök valós, mert ha a (2.14) egyenletet balról szorozzuk az $(\bar{a}', \bar{b}')$ vektorral, azt kapjuk, hogy

$$\lambda = \bar{a}'\Sigma_{12}b \quad \text{és} \quad \lambda = \bar{b}'\Sigma_{21}a$$

azaz λ egyenlő a saját konjugáltjával.

Vizsgáljuk meg a (2.15) egyenletet a gyökök szempontjából. Nem változtat a gyökökön, ha az egyenletet megszorozzuk a

$$\frac{|\Sigma_{22}^{-1}|}{|\Sigma_{11}|} \text{ konstanssal:}$$

$$\frac{|\Sigma_{22}^{-1}|}{|\Sigma_{11}|} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.16}$$

Az egyenlet bal oldalát a lehető legegyszerűbb alakra hozzuk:

$$\begin{aligned} &\frac{|\Sigma_{22}^{-1}|}{|\Sigma_{11}|}(-\lambda\Sigma_{11}) \cdot |-\lambda\Sigma_{22} - \Sigma_{21}(-\lambda\Sigma_{11})^{-1}\Sigma_{12}| = \\ &= (-\lambda)^p(\Sigma_{22})^{-1}|-\lambda\Sigma_{22} - \Sigma_{21}(-\lambda\Sigma_{11})^{-1}\Sigma_{12}| = \\ &= (-\lambda)^p\left|-\lambda I - \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\frac{1}{-\lambda}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\right| = \\ &= (-\lambda)^p\left|\frac{1}{-\lambda}\cdot(-\lambda^2\cdot I + \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})\right| = \\ &= \frac{(-\lambda)^p}{(-\lambda)^q}|\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} - \lambda^2 I| = \\ &= (-\lambda)^{p-q}|\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} - \lambda^2 I| = 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Láthatjuk, hogy a (2.15) egyenletben λ^{p-q} gyöktényezőt kiemelhetjük, tehát az egyenlet gyökei között $p-q$ számú zérus van. A további $2q$ számú gyök a

$$|\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} - \lambda^2 I| = 0 \tag{2.18}$$

egyenlet gyökei. Itt λ^2 lehetséges értékei a $\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$ mátrix saját értékei, mivel ez a mátrix nem szinguláris, nincs zérus sajátértéke. Fent láttuk, hogy minden λ valós értékű, ezért minden λ^2 pozitív. (Ezzel közvetve beláttuk azt is, hogy a mátrix pozitív definit.) A nagyság szerint sorbarendezett $p+q$ számú gyök a következőképpen írható fel:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_q > 0 = \ldots = 0 > -\lambda_q > \ldots > -\lambda_1.$$

A (2.18) egyenletet más módon is levezethetjük. Tekintsük a (2.18) és (2.13) egyenleteket. (2.12)-ből $\lambda\Sigma_{11}a = \Sigma_{12}b$. Ezt balról szorozva Σ_{11}^{-1}-vel

$$\lambda a = \Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b \tag{2.19}$$

$$a = \frac{1}{\lambda}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b. \tag{2.20}$$

(2.13)-ból $\Sigma_{21}'a = \lambda\Sigma_{22}\,b$. Ezt Σ_{22}^{-1}-nel balról szorozva:

$$\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\,a = \lambda b \tag{2.21}$$

egyenletet kapjuk. (2.21) mindkét oldalát szorozzuk λ-val, és λa helyébe (2.16) jobb oldalát helyettesítjük:

$$\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b = \lambda^2 b \tag{2.22}$$

vagy

$$\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b = \lambda^2\,\Sigma_{22}\,b. \tag{2.22/a}$$

Eszerint a b vektorok valóban a $\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}$ mátrix sajátvektorai, λ_i^2 ($i = 1, \ldots q$) pozitív valós számok a sajátértékek.

(2.22) levezetésével lépésről-lépésre megegyező levezetéssel beláthatjuk, hogy

$$\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\cdot a = \lambda^2 a \tag{2.23}$$

vagy

$$\Sigma_{12}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\cdot a = \lambda^2\,\Sigma_{11}\,a. \tag{2.23/a}$$

(2.22) és (2.23) egyenletek között az a különbség, hogy míg az előbbi együtthatómátrixa $q\times q$, az utóbbi $p\times p$ méretű ($p \geq q$). A mátrixszorzat tényezőinek rangjai között a legkisebb q, így a (2.23) mátrix szinguláris, és sajátértékei között $p - q$ számú zérus van.

Ezekből az egyenletekből láthatjuk azt is, hogy miért volt szükség arra a feltételre, hogy a különböző sorszámú kanonikus korrelációs együtthatók különbözzenek egymástól: ha két együttható egyenlő volna — pl. $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ —, akkor a λ_i^2 sajátértékhez végtelen sok sajátvektor tartozna, amelyek egy kétdimenziós lineáris alteret feszítenek ki. Ekkor a kanonikus változók előállítása már nem egyértelmű. (Bár a ,,trace korreláció'' értelmezhető.)

Most belátjuk, hogy ha $\lambda_i \neq \lambda_j$, akkor $\varepsilon v_i v_j = 0$. Ugyanis: $\varepsilon v_i v_j = b_i'\Sigma_{22}b_j$.

Itt (2.22)-ből behelyettesítjük $b_j = \frac{1}{\lambda_j^2}\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b_j$ értékét:

$$\varepsilon\, v_i\, v_j = b_i'\,\Sigma_{22}\frac{1}{\lambda_j^2}\,\Sigma_{22}^{-1}\,\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b_j = \frac{1}{\lambda_j^2}\,b_i'\,\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b_j$$

$$\lambda_j^2\,\varepsilon\, v_i\, v_j = b_i'\,\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b_j\,. \tag{2.24}$$

Ugyanígy kapjuk:

$$\lambda_i^2\,\varepsilon\, v_j\, v_i = b_j'\,\Sigma_{21}\,\Sigma_{11}^{-1}\,\Sigma_{12}\,b_i\,. \tag{2.25}$$

Mivel $\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$ szimmetrikus, és (2.24) és (2.25) jobb oldala skalár, ezért azok egyenlők. A két egyenletet kivonva egymásból:

$$(\lambda_j^2 - \lambda_i^2)\;\varepsilon\, v_i\, v_j = 0 \tag{2.26}$$

egyenletet kapjuk. A feltétel szerint $\lambda_i \neq \lambda_j$, így $\varepsilon v_i v_j = 0$. Ugyanígy beláthatjuk, hogy a zérustól és egymástól különböző sajátértékekhez tartozó a_i, a_j sajátvektorokból képzett u_i, u_j kanonikus változók is korrelálatlanok. Ebből már az is következik, hogy $\varepsilon u_j v_i = 0$, ha $\lambda_j \neq 0$, mert (2.24) felhasználásával:

$$\varepsilon v_i v_j = \frac{1}{\lambda_j^2} b_i' \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} b_j = \frac{1}{\lambda_j^2} b_i' \Sigma_{21} \lambda_j a_j = \frac{1}{\lambda_j} b_i' \Sigma_{21} a_j = \frac{1}{\lambda_j} \varepsilon v_i u_j . \tag{2.27}$$

Itt a kifejezés második átalakításánál a (2.19) összefüggést alkalmaztuk, és mivel már beláttuk, hogy $\varepsilon v_i v_j$ zérus, ezért $\varepsilon v_i u_j$ is az.

Tehát a $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_q > 0$ értékhez tartozó $u_1 = a_1' x$, $v_1 = b_1' y$, $\ldots u_q = a_q' x$, $v_q = b_q' y$ változókra teljesül az $\varepsilon u_i^2 = 1$ és $\varepsilon v_i^2 = 1$ feltétel mellett az $\varepsilon u_i u_j = \varepsilon u_i v_j = \varepsilon v_i v_j = 0$, azaz a nevezett korrelációk eltűnnek.

Ha még bebizonyítjuk, hogy minden egyes $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ korreláció érték az εuv függvénynek lokális maximuma, akkor a tételbe foglalt állítást teljes egészében bebizonyítottuk. Ez a hátralevő bizonyítás elég hosszadalmas, és a kanonikus változók természetéről nem tartalmaz használható tulajdonságokat, azért itt mellőzzük, részletesen megtalálható [1]-ben. Mivel λ (a Lagrange-féle állandó) egyenlőnek bizonyult a kanonikus korrelációs együtthatóval, a jelölésen már nem változtatunk, λ-val jelöljük továbbra is a kanonikus korrelációs együtthatót.

A (2.17) egyenlet gyökeinek száma $p + q$. Ezek közül csak q számú pozitív figyelembevételével képeztünk kanonikus változókat. Mivel a (2.23) egyenletben λ^2 szerepel, ezért λ helyébe a negatív megoldásokat helyettesítve ugyanazt az egyenletrendszert kapjuk, mintha a pozitív megoldásokat helyettesítettük volna be, így lényegileg különböző megoldáshoz nem jutunk.

3. A kanonikus korrelációs együtthatók és a kanonikus változók becslése

Az $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektorból vett T elemű minta mátrixa, (X, Y), mérete $T \times (p+q)$, egy sora az (x', y') vektorból vett minta egy eleme. A vektor variancia-kovariancia mátrixának, Σ-nak a becslése:

$$S = \frac{1}{T} (X, Y)' \; (X, Y) = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} X'X & X'Y \\ Y'X & Y'Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

mert az $\varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ feltételt még megtartjuk.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ becsléseit, $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_q$ értékeket a

$$\begin{vmatrix} -\hat{\lambda} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & -\hat{\lambda} S_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.2}$$

egyenlet gyökei adják meg. Ezeket egyszerűbben az

$$|\,(S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} - \hat{\lambda}^2 I)\,| = 0 \tag{3.3}$$

egyenletből számítjuk ki. $\hat{\lambda}^2$ pozitív gyökei adják a q számú megoldást.

A kapott $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_q$ értékeket egyenként visszahelyettesítjük a

$$\begin{pmatrix} -\hat{\lambda} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & -\hat{\lambda} S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.4}$$

egyenletbe. Ebből kiszámíthatjuk az $\begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{pmatrix}$ vektorokat, egy határozatlan konstans szorzó erejéig. (Az egyenlet csak a vektor állását határozza meg, hosszát nem.) A vektoroknak ki kell még elégíteniük az

$$\hat{a}_i' S_{11} \hat{a}_i = 1 \tag{3.5}$$

és

$$\hat{b}_i' S_{22} \hat{b}_i = 1 \tag{3.6}$$

egyenleteket. Ezek már egyértelműen meghatározzák $\begin{pmatrix} \hat{a}_i \\ \hat{b}_i \end{pmatrix}$ számszerű értékét.

Lényegében egyszerűbb számítási módszer, ha a kapott $\hat{\lambda}_i (i = 1, \ldots, q)$ értékeket az

$$(S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} - \hat{\lambda}_i^2 I)\, \hat{b}_i = 0 \tag{3.7}$$

egyenletbe helyettesítjük vissza. (3.7) ugyanis csak $(q \times q)$ méretű homogén, lineáris egyenletrendszer $\hat{b}_i$ komponenseire nézve, míg (3.4) $(p+q) \times (p+q)$ méretű. (3.7) megoldásait a (3.6) egyenlet teszi egyértelművé. $\hat{a}_i$ értékeit a (2.20) formulából számítjuk ki:

$$\hat{a}_i = \frac{1}{\hat{\lambda}_i} S_{11}^{-1} S_{12} b_i \tag{3.8}$$

Ezzel megkaptuk a kanonikus változók együtthatóit. Az eredményül kapott a_i konstans vektorokra a (3.5) feltételnek azonosan teljesülnie kell (jó módszer az eredmény ellenőrzésére), mert

$$\hat{a}_i' S_{11} \hat{a}_i = \left(\frac{1}{\hat{\lambda}_i} S_{11}^{-1} S_{12} \hat{b}_i \right)' S_{11} \hat{a}_i = \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \hat{b}_i' S_{21} S_{11}^{-1} S_{11} \hat{a}_i =$$

$$= \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \hat{b}_i' S_{21} \hat{a}_i = \frac{1}{\hat{\lambda}_i} \hat{\lambda}_i = 1.$$

Az utolsó átalakításban a (2.6) egyenlet megfelelőjét használtuk fel.

4. Megjegyzés a számításhoz

A többváltozós statisztikai analízisben gyakran van szükség a változók transzformálására, pl. indexszámokká alakítás, standardizálás stb. Be fogjuk bizonyítani, hogy a kanoniku korrelációs együtthatók értékei invariánsok a változók ilyen transzformációival szemben.

Tétel: Ha a 2. szakaszban szereplő x és y vektorok koordinátáit a $w_i = e_i x_i + f_i \; (i = 1, \ldots, p)$ és $z_i = g_i y_i + h_i \; (i = 1, \ldots, q)$ transzformációknak vetjük alá, ahol $e_i \neq 0$ és $g_i \neq 0$, a transzformált valószínűségi vektorokhoz akkor, és csak akkor találhatunk egyértelmű kanonikus változókat, ha x és y-hoz is találhatunk, és ha az x és y vektorok kanonikus korrelációs együtthatói $\lambda_1 \ldots, \lambda_q$, akkor ugyanezek lesznek a w és z vektoroké is.

Bizonyítás: A tételben szereplő transzformációk a

$$w = Ex + f \tag{4.1}$$

$$z = Gy + h \tag{4.2}$$

egyenletekbe foglalhatók össze, ahol $E = \langle e_1, \ldots, e_p \rangle$ és $G = \langle g_1, \ldots, g_q \rangle$ diagonális mátrixok,

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_q \end{pmatrix}.$$

A transzformált vektorok várható értéke ($\varepsilon x = 0$ és $\varepsilon y = 0$ következtében) $\varepsilon w = \varepsilon(Ex + f) = E\varepsilon x + f = f$, ugyanígy $\varepsilon z = h$, tehát a konstans vektorokkal egyenlő. A transzformált mátrixok variancia-kovariancia mátrixa:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon(w - f)(w - f)' & \varepsilon(w - f)(z - h)' \\ \varepsilon(z - h)(w - f)' & \varepsilon(z - h)(z - h)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon(Ex)(Ex)' & \varepsilon(Ex)(Gy)' \\ \varepsilon(Gy)(Ex)' & \varepsilon(Gy)(Gy)' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon(Exx'E) & \varepsilon(Exy'G) \\ \varepsilon(Gyx'E) & \varepsilon(Gyy'G) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\Sigma_{11}E & E\Sigma_{12}G \\ G\Sigma_{21}E & G\Sigma_{22}G \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

A kanonikus korrelációs együtthatók és a kanonikus változók keresésekor most az $a'E\Sigma_{12}Gb$ függvény értékének a maximumát kell keresni, $a'E\Sigma_{11}Ea = 1$ és $b'G\Sigma_{22}Gb = 1$ feltétel mellett. Ez a számítás pontosan ugyanúgy történik, mint azt a 2. pontban bebizonyított tételben láttuk. A különbség csak az, hogy Σ_{11} helyén $E\Sigma_{11}E$ stb. áll. Ennek eredményeképpen kapjuk, hogy a kanonikus korrelációs együtthatók a

$$\begin{vmatrix} -\lambda E\Sigma_{11}E & E\Sigma_{12}G \\ G\Sigma_{21}E & -\lambda G\Sigma_{22}G \end{vmatrix} = 0 \tag{4.4}$$

egyenlet gyökei. E determináns mátrixát átalakíthatjuk:

$$\begin{pmatrix} -\lambda E\Sigma_{11}E & E\Sigma_{12}G \\ G\Sigma_{21}E & -\lambda G\Sigma_{22}G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Ebből következik, hogy a (4.4) egyenlet és a

$$\begin{vmatrix} -\lambda\Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & -\lambda\Sigma_{22} \end{vmatrix} = 0$$

egyenletek ekvivalensek. Itt felhasználtuk azt, hogy $|AB| = |A|\,|B|$. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A tétel értelmében az idősorok adatait számolhatjuk tényleges számokkal, tetszés szerinti bázisú indexszámokkal, tetszés szerinti egységeket választhatunk, vagy standardizálhatunk. Ezek a transzformációk mind a tételbeli transzformációval egyező alakúak.

Vigyázat! Az első differenciákkal való számolás nem ad helyes eredményt. Valójában a tételbe foglaltaknál jóval több is igaz az F és G mátrixoknak nem szükséges diagonálisaknak lenniök, elég ha négyzetes mátrixok, továbbá nem szingulárisak.

5. Regressziós egyenletek a kanonikus változók segítségével

A következőkben két változó halmaz közötti sztochasztikus kapcsolatot akarjuk vizsgálni. Az x vektor komponenseit tekintjük független változóknak, az y-éit pedig függő változóknak. (Ökonometriai terminológiával: predeterminált és endogén változók.) Abból az alapfeltevésből indulunk ki, hogy a független változók nem hatnak egymásra, értéküket egymástól függetlenül változtatják, ellenben az összes független változó hatást gyakorol az összes függő változóra. Ezekkel összhangban fel kell tennünk azt is, hogy a függő változók között is kölcsönös egymásrahatások vannak (interdependencia). Ezeket a kapcsolatokat jellemző modellt kapunk, ha kétváltozós regressziós egyenleteket írunk fel a kanonikus változók között, (1.3) alakjában. Ehhez a becsléshez az $u' = (u_1, \ldots, u_q)$ és $v' = (v_1, \ldots, v_q)$ vektorokból vett mintára (idősorra) van szükség. Legyen ezek mátrixa:

$$U = \begin{pmatrix} u_{11}\ u_{12}, \ldots, u_{1q} \\ u_{21}\ u_{22}, \ldots, u_{2q} \\ \vdots \\ u_{T1}\ u_{T2}, \ldots, u_{Tq} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

és

$$V = \begin{pmatrix} v_{22}\ v_{12} \ldots, \quad v_1 \\ v_{21}\ v_{22} \ldots, \quad v_2 \\ \vdots \\ v_{T1}\ v_{T2}, \ldots, v_{Tq} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

A mátrixok i-edik sora az u, illetve v vektorokból vett minta (idősor) i-edik eleme. Mivel az u és v komponensei elvont változók, közgazdasági jelentés nélkül, ezért azokból a szokásos módon nem is tudunk „mintát venni". Az i-edik komponensre vett T elemű minta itt azt jelenti, hogy az $u_i = x' a_i$ skaláris szorzatban x' helyébe rendre behelyettesíthetjük az x' vektorra vett T elemű minta elemeit. Ez mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{Ti} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}\ x_{12}, \ldots, x_{1p} \\ x_{21}\ x_{22}, \ldots, x_{2p} \\ \vdots \\ x_{T1}\ x_{T2}, \ldots, x_{Tp} \end{pmatrix} \cdot a_i \tag{5.3}$$

és

$$\begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{Ti} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11}\ y_{12}, \ldots, y_{1q} \\ y_{21}\ y_{22}, \ldots, y_{2q} \\ \vdots \\ y_{T1}\ y_{T2}, \ldots, y_{Tq} \end{pmatrix} b_i \tag{5.4}$$

$i = 1, \ldots, q$-ra. Így az U és V mátrixok elemeit az X és X mátrixokból, valamint a_i és b_i értékeiből számítjuk ki. Szükség lesz még $\hat{\lambda}_i$ értékére is, a regressziós egyenletek becslésénél. Mivel ettől a paragrafustól kezdve elméleti értékekről nem lesz szó, az egyszerűség kedvéért a becslésre vonatkozó $\wedge$ jelet elhagyjuk, $\hat{a}_i$, $\hat{b}_i$, $\hat{\lambda}_i$ helyett csak a_i, b_i, λ_i-t fogunk írni. A $\wedge$ jelet, ha használjuk, az a függő változók becslésekor kapott regresszió értékeket fogja jelölni.

Jelöljük röviden $A = (a_1, \ldots, a_q)$ és $B = (b_1, \ldots, b_q)$. Ennek segítségével az (5.3) és (5.4) egyenlőségek $i = 1, \ldots, q$-ra az

$$U = XA \tag{5.5}$$

$$V = YB \tag{5.6}$$

alakba írhatók röviden. A variancia-kovariancia mátrixok jelölése (3.1)-gyel megegyezően:

$$S_{11} = \frac{1}{T} X' X \tag{5.7}$$

$$S_{12} = \frac{1}{T} X' Y \tag{5.8}$$

$$S_{22} = \frac{1}{T} Y' Y. \tag{5.9}$$

Felírjuk a kanonikus változók variancia-kovariancia mátrixait is:

$$\frac{1}{T} U' U = \frac{1}{T} A' X' XA = A' \frac{1}{T} X' XA = A' S_{11} A.$$

Az $A'S_{11}A$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $a_i' S_{11} a_j$. Ennek értéke 1, ha $j = i$, — azaz a főátlóban — és zérus, ha $i \neq j$, tehát $\frac{1}{T} U'U$ egyegységmátrix. Az

$$\frac{1}{T} U' U = A' S_{11} A = I \tag{5.10}$$

egyenlőség tartalmazza azt a feltételt, hogy a kanonikus változók egységnyi varianciájúak, és azt a tételt, hogy a különböző kanonikus változók korrelálatlanok. Hasonlóképpen írhatjuk fel az

$$\frac{1}{T} V' V = B' S_{22} B = I \tag{5.11}$$

egyenlőséget is.

Bevezetjük a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_q \end{pmatrix}$$

diagonális mátrixot, és ennek segítségével az

$$\frac{1}{T} U' V = A' S_{12} B = \Lambda \tag{5.12}$$

mátrixegyenlőséget írhatjuk fel. E mátrix i-edik sorának j-edik eleme $a_i'S_{12}b_j$, mely $i = j$ esetén λ_i (az i-edik kanonikus korrelációs együttható), $i \neq j$ esetén pedig zérus.

Végül megemlítjük még azt, hogy a (3.8) egyenleteket:

$$a_i = \frac{1}{\lambda_i} S_{11}^{-1} S_{12} b_i \quad i = 1, \ldots, q$$

röviden az

$$A = S_{11}^{-1} S_{12} B \Lambda^{-1} \tag{5.13}$$

alakban írhatjuk. Ugyanígy levezethető a

$$B = S_{22}^{-1} S_{21} A \Lambda^{-1} \tag{5.14}$$

mátrixegyenlőség.

Ezekután elkezdhetjük a tulajdonképpeni feladatot, a „kanonikus függő" változók becslését a „kanonikus független" változók segítségével. A becslést a legkisebb négyzetek módszerével hajtjuk végre:

$$\hat{V} = U(U'U)^{-1}U'V = U\frac{1}{T} \cdot I \cdot T \cdot \Lambda = U\Lambda. \tag{5.15}$$

Az i-edik egyenletben a regressziós együttható az i-edik kanonikus korrelációs együttható:

$$\hat{v}_i = u_i \lambda_i$$

U és V értékét az (5.5) és (5.6) egyenletek segítségével átalakítva:

$$\widehat{YB} = XA\Lambda \tag{5.16}$$

Vizsgáljuk meg, mit kapunk, ha közvetlenül Y-t becsüljük meg az U függvényében:

$$\hat{Y} = XA(A'X'XA)^{-1}A'XY \tag{5.17}$$

(5.7), (5.8) és 5.10) segítségével:

$$\hat{Y} = XA(TI)^{-1}A'TS_{12}$$

$$\hat{Y} = XAA'S_{12} \tag{5.18}$$

(5.14)-ből kapjuk:

$$S_{22}B'\Lambda = S_{21}A,$$

ennek transzponáltja:

$$A'S_{12} = \Lambda B'S_{22}.$$

Ennek jobboldalát (5.18)-ban $A'S_{12}$ helyébe írva

$$\hat{Y} = XA\Lambda B'S_{22} \tag{5.19}$$

egyenletet kapjuk. Ezt a képletet később fel fogjuk használni, előbb azonban egy ebből következő fontos tényt kell megvizsgálnunk. (5.19)-ben A helyébe (5.13) jobb oldalát helyettesítjük.

$$\hat{Y} = XS_{11}^{-1}S_{12}B\Lambda^{-1}\Lambda B'S_{22}$$

$$Y = XS_{11}^{-1}S_{12}BB'S_{22} \tag{5.20}$$

$BB'S_{22}$-ről megmutatjuk, hogy $(q \times q)$ méretű egységmátrix: az (5.11) egyenlőséget balról és jobbról beszorozzuk B-vel, illetve B^{-1}-vel

$$BB' \cdot S_{22} BB^{-1} = BB' S_{22} = I.$$

Ezt megtehettük, mert $B(q \times q)$ méretű nem szinguláris mátrix. Így (5.19)-ből az

$$\hat{Y} = XS_{11}^{-1} S_{12} \tag{5.21}$$

egyenlőséget kaptuk, ami nem más, mint az Y-nak a legkisebb négyzetek módszerével történő becslése X függvényében:

$$\hat{Y} = X(X'X)^{-1} XY$$

$$\left(\text{beszorozva } T \text{ és } \frac{1}{T}\text{-vel}\right).$$

Ebből az eredményből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy az (5.19) vagy az (5.17) formulával végrehajtott becslés ugyanazt az $\hat{Y}$ regressziós értékeket adja, mint a legkisebb négyzetek módszerével történő becslés.

Most térjünk vissza az (5.15) egyenlettel kapcsolatos eljáráshoz: az elvont „kanonikus változókkal" hajtjuk végre a becslést. A becsült egyenletek alakja a következő:

$$\hat{v}_i = u_i \lambda_i \tag{5.22}$$

Mivel a λ_i együtthatók az εuv függvény lokális maximumai, ezért azt várjuk, hogy jó részük nagy lesz. Mégis az fog bekövetkezni, hogy az utolsó egy-két konstans nem különbözik szignifikánsan zérustól. Ezt a korrelációs együtthatókra vonatkozó szignifikancia vizsgálattal dönthetjük el, mivel ezek a kanonikus változók közönséges korrelációs együtthatói. (A szignifikancia szint függ a mintavétel számától.) Azokhoz a kanonikus korrelációs együtthatókhoz tartozó kanonikus változókra nem is írhatjuk fel az (5.22) egyenletet, ezek részvétele a becslésben nem „jogos" (nem írhatunk fel sztochasztikus összefüggést korrelálatlan változók között).

Tegyük fel, hogy az első $r(r < q)$ számú kanonikus korrelációs együttható szignifikánsan különbözik zérustól. Az a számítás, hogy ezekkel (5.22) alakú egyenleteket írunk fel — a függő változók szempontjából —, ekvivalens az (5.18) vagy (5.19) egyenletekkel végrehajtott becslésekkel, ahol most már csak az első r számú kanonikus változó vesz részt a becslésben. A két egyenlet formailag változatlan marad, csupán a mátrixok mérete változik meg:

$$\Lambda(r \times r), \ A(p \times r) \text{ és } B(q \times r)$$

méretű.

Az eredményül kapott $\hat{Y}$ mátrix rangja r lesz, ezért $q-r$ számú változó kifejezhető r számú lineárisan független lineáris kombinációjaként. Így a vizsgálatban szereplő változók nem alkothatnak szimultán egyenletrendszert.

Most úgy tűnik, hogy egy „keserű lemondást" kellett végrehajtanunk. El kellett ejtenünk olyan információk felhasználását, amelyet a korábbi számítási módszerben figyelembe vettünk. Ez azonban nagyon leegyszerűsített értékelés. Sztochasztikus egyenleteinkkel történő előrebecslésnél nagyon fontos, hogy azt kizárólag megbízható információ felhasználásával végezzük, különben előrebecslésünk sem lesz megbízható. Másrészt a két módszer összehasonlítása nem is mutatja meg az eljárás igazi előnyeit. Gondoljunk el ugyanis egy olyan példát, amelyben 2 függő változó és 3 független változó közötti összefüggést közelítjük a hagyományos módszerrel. Legyen a kapott egyenlet:

$$y_1 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$$

$$y_2 = x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3.$$

Ha most a függő változókhoz hozzáveszünk egy újabb változót, y_3-t, a független változókhoz meg mondjuk újabb kettőt, x_4 és x_5-t és ezeken már a kanonikus korrelációs módszerrel hajtunk végre becslést, akkor ez a módszer figyelmen kívül hagyja az x_1, x_2, x_3-ban rejlő információ értéktelen részét, és felcseréli azt az x_4, x_5 hasznos információjával. Így y_1, y_2 és y_3 elörejelzése megbízhatóbb lesz.

Amennyiben lehetőségünk van igen nagy (100—1000) elemű minta vételére, a változók számát is jelentősen növelhetjük. A változók számára az szab határt, hogy kovariancia mátrixuknak, S-nek a gyakorlatban zérustól jelentősen el kell térnie.

6. A korrelációs együttható általánosítása a kanonikus korreláció elméletének segítségével

A p komponensű x és a q komponensű y vektorok közötti sztochasztikus kapcsolat mérésére alkalmas mutatót keresünk. Megkívánjuk tőle, hogy 0 és 1 közé eső valós szám legyen. Azonkívül a korrelációs együttható általánosításaként legyen felfogható, így a $q = 1$ esetben egyezzen meg a többszörös korrelációs együtthatóval.

Induljunk ki megint abból a problémából, hogy az y vektort a legkisebb négyzetek módszerével becsülni akarjuk az x lineáris függvényeként. (1.1) és (1.2) a mintavételi mátrixok. Az egyenlet:

$$Y = XP + W \tag{6.1}$$

Itt $P = (X'X)^{-1}X'Y$. Y és W mérete $(T\times q)$, X-é $(T\times p)$ és P együttható mátrixé $(p\times q)$. Most nem tesszük fel, hogy $q \leq p$. A W mátrix tartalmazza az úgynevezett zavaró tényezők hatását, amely független az x és y vektortól. A mintavételi mátrixok esetében ez abban nyilvánul meg, hogy W korrelálatlan X-szel és Y-nal:

a) $X'W = X'(Y-XP) = X'Y - X'XP = X'Y - X'X(X'X)^{-1}X'Y =$

$= X'Y - X'Y = 0,$

tehát

$$X'W = 0, \tag{6.2}$$

b) $\hat{Y}'W = P'X'W = P'0 = 0, \qquad (6.3)$

tehát

$$\hat{Y}'W = 0.$$

A most levezetett összefüggések segítségével belátható, hogy Y kovariancia mátrixa $\hat{Y}$ és W kovariancia mátrixainak összege:

$$Y'Y = P'X'XP + W'W \tag{6.4}$$

mert $Y'Y = (XP+W)'(XP+W) = P'X'XP + W'W + W'XP + P'X'W$ és itt a 3. és 4. tag (6.2) szerint zérusmátrix.

(6.4) $q \times q$ méretű mátrix. Az egyenletet komponensekként kiírva:

$$\operatorname{cov}(y_i y_j) = \operatorname{cov}(\hat{y}_i \hat{y}_j) + \operatorname{cov}(w_i w_j) \tag{6.5}$$

$i = 1, \ldots, q$ és $j = 1, \ldots, q$ összes kombinációira. Az egyenlet $i = j$ esetén az i-edik változó varianciáját tartalmazza.

(6.4)-et szorozzunk be balról $(Y'Y)^{-1}$-vel:

$$I = (Y'Y)^{-1}P'X'XP + (Y'Y)^{-1}W'W \tag{6.6}$$

Ebből

$$P'X'XP = Y'X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'Y = Y'X(X'X)^{-1}X'Y.$$

Ezt (6.6)-ba helyettesítve:

$$I = (Y'Y)^{-1}Y'X(X'X)^{-1}X'Y + (Y'Y)^{-1}W'W. \tag{6.7}$$

Jelöljük $(Y'Y)^{-1}W'W = D$, így a kanonikus korrelációs együtthatókat meghatározó sajátértékegyenlet:

$$|(I-D) - \lambda^2 I| = 0 \tag{6.8}$$

alakba írható, mert (6.7)-ből $I - D = S_{22}^{-1}S_{21}S_{11}^{-1}S_{12}$.

$Y'Y$, $\hat{Y}'\hat{Y}(= |Y'X(X'X)^{-1}X'Y|)$ és $W'W$ mátrixok felfoghatók úgy, mint az egyváltozós variancia általánosításai. Ugyanígy az $I - D$ és D mátrixok pedig úgy tekinthetők, mint a megmagyarázott, illetve a meg nem magyarázott varianciának a függő változó varianciájához való aránya. A probléma csak az, hogy az $I - D$ és D mátrixokhoz hogyan rendeljünk számértéket. Megfelelő mértékszám lesz a zérustól különböző sajátértékek számtani közepe:

$$(\bar{\lambda})^2 = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} \lambda_i^2 \tag{6.9}$$

$$1 - (\bar{\lambda})^2 = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}(1 - \lambda_i^2). \tag{6.10}$$

Az így kapott két mértékszám összege 1, értékük 0 és 1 közé esik. $(\bar{\lambda})^2$ csak akkor 0 vagy 1, ha minden sajátérték is az. Amennyiben csak ezt a két mutatót számoljuk, a bonyolult sajátértékszámításra sincs szükség. Egy négyzetes mátrix sajátértékeinek összege ugyanis mindig egyenlő átlós elemeinek összegével, és ez az összeg változatlan marad tetszőleges bázistranszformáció alkalmazása esetén:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \text{ jelölés mellett } tr(A) = tr(C^{-1}AC)$$

ahol C az átmenet mátrixa, mert $tr(AB) = tr(BA)$. Így a kívánt mutatót a következő alakba írhatjuk:

$$(\bar{\lambda})^2 = tr(S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}) \tag{6.11}$$

Ha $q = 1$, az Y mátrix mérete $T \times 1$, azaz Y egy T elemű vektor. Az

$$(Y'Y)^{-1}Y'X(X'X)^{-1}X'Y$$

mátrixszorzat egy számkonstanssá válik, amelynek egyetlen sajátértéke van: önmaga.

A $(\bar{\lambda})^2 = \dfrac{Y'X(X'X)^{-1}X'Y}{Y'Y}$ alakba írható, ami éppen y és x többszörös korrelációs együttható négyzete. Így beláttuk azt is, hogy $\bar{\lambda}$ megfelel, mint a korrelációs együttható általánosítása. Könnyen beláthatjuk, hogy a trace-korrelációs együttható számítható akkor is, ha az egyes nullától különböző kanonikus korrelációs együtthatók között egyenlők is vannak.

A paragrafus elején az $Y = XP + W$ mátrix egyenletből indultunk ki. Ökonometriai elemzésekben az ilyen egyenletekben feltételezzük, hogy x nem sztochasztikus változó, y pedig az. Ebből arra következtethetnénk, hogy a (6.11) formula más eredményt ad, ha a két változó szerepét megcseréljük. Vegyük észre azonban, hogy a (3.3) és (3.4) egyenletek, amelyekből a kanonikus korrelációs együtthatókat számoljuk $p-q$ számú zérus gyököt kivéve ekvivalensek: a pozitív gyökök azonosak. Így azok összege is megegyezik:

$$tr(S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}) = tr(S_{11}^{-1} S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}) \tag{6.12}$$

okoskodásunk tehát független a (6.1) modelltől, csupán az összefüggések jobb megértése kedvéért használtuk fel a gondolatmenetben.

Függelék

A számítás menete

a) A változókat standardizáljuk. Ez az

$$x_i' = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x}$$

transzformációit jelenti $i = 1, \ldots, T$-re, és itt

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{T} \quad \text{és} \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{T} \Sigma(x_i - \bar{x})^2}.$$

Erre azért van szükség, hogy a varianciák számításánál ne jöjjenek ki túl nagy számok. Amint azt a 4. pontban beláttuk, a kanonikus korrelációs együtthatók értékén ez nem változtat.

b) Kiszámítjuk $|S|$ értékét. Amennyiben $|S| < \delta$, ahol δ a kerekítési hibák nagyságrendje, a számítást nem folytathatjuk a kiválasztott változókkal, mert azok gyakorlatilag lineárisan összefüggőek.

c) Kiszámítjuk az $S_{11}^{-1} S_{12}$, majd az $S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$ mátrixszorzatot.

d) Kiszámoljuk a mátrix átlós elemeinek összegét:

$$(\bar{\lambda})^2 = tr(S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}),$$

e) Kiszámítjuk az $S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$ nem szimmetrikus mátrix sajátértékeit. Ez eléggé bonyolult számítás, részletes leírását [2]-ben megtaláljuk (275—278. o.).

f) Megoldjuk az $(S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} - \lambda_i^2 I)\,\beta_i = 0$ homogén lineáris egyenletrendszereket $i = 1, \ldots, r$-re (r az indexe az utolsó zérustól szignifikánsan különböző λ_r-nek).

g) A homogén lineáris egyenletrendszer megoldását a $b_i' S_{22} b_i = 1$, $i = 1, \ldots, q$ feltételek teszik egyértelművé, ezért az f) pontban kiszámított sajátvektorokat beszorozzuk az

$$\frac{1}{\sqrt{\beta_i' S_{22} \beta_i}}$$

konstanssal. A végső megoldás tehát:

$$b_i = \frac{1}{\sqrt{\beta_i' S_{22} \beta_i}}\,\beta_i \qquad i = 1, \ldots, r\text{-re}.$$

h) Az

$$a_i = \frac{1}{\lambda_i} S_{11}^{-1} S_{12} b_i \qquad i = 1, \ldots, r$$

képletből kiszámoljuk az a_i vektorokat, a_i és b_i vektorok a kanonikus változók konstans együtthatói.

i) Megbecsüljük a függő változókat az $Y = XAA'S_{12}$ mátrix egyenletből.

(Beérkezett: 1972. április 20.)

IRODALOM

1. ANDERSON, J. W.: An introduction to multivariate statistical analysis. New York, 1958. John Wiley and Sons.
2. KREKÓ B.: Mátrixszámítás. Budapest, 1964. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
3. JOHNSTON, J.: Economic methods. New York, 1963. McGraw-Hill Book Co.
4. DHRYMES, P. J.: Econometrics: statistical foundations and application. New York, 1970. Harper and Row Publishers.
5. MORRISON, D. F.: Multivariate statistical methods. New York, 1967. McGraw-Hill Book Co.
6. HOOPER, J. W.: Simultaneous equations and canonical correlation theory. Econometrica, Vol. 37. (1969).
7. GLAHN, H. R.: Some relationship derived from canonical correlation theory. Econometrica, Vol. 37. (1969).

ON CANONICAL CORRELATION

Canonical correlation belongs to the multivariate statistical analysis. The closeness of the connection between two probability vector variables can be measured by its help.

Let the two variable be vectors x having p components and y having q components. Suppose $q \leq p$. The linear transforms of the two vectors are as follows: $u = A' x$, $v = B' y$. From among the possible linear transformations those are sought, where the transformed

are uncorrelated and besides the corresponding components of the two vector have maximum correlation, each. According to the theory there is a single solution for the q pairs of variables which meets the above requirements.

As a result the vectors x and y can be transformed into closely correlated pairs of q variables. These pairs of variables, the canonical variables give useful information on the interrelations between the components of y and x. The trace of a specific matrix is an appropriate index number for measuring the closeness of the connection between the vectors x and y, and it can be considered as a generalization of the correlation coefficient, too.

Also a process for estimating the parameters of a multivariate regression model can be obtained from the theory. Practically the dependent variables are estimated here as functions of those canonical variables whose canonical correlation coefficient proved significant.

О КАЛЬКУЛЯЦИИ КАНОНИЧЕСКОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

Калькуляция канонической корреляции принадлежит статистическому анализу с многими переменными. При помощи этого метода тесноту связи между двумя вектор-переменными можно измерять.

Пусть будет два вектор-переменного вектор x, с компонентом p и вектор y, с компонентом q. Предполагаем, что $q \leqq p$. Линейные трансформации двух векторов: $u = A'x$, $v = B'y$. Среди всех возможных линейных трансформаций мы ищем те, в которых видно, что компоненты новых вектор-переменных, полученные при их помощи не в корреляци друг с другом и кроме этого видно, что корреляции другу другу компонентов векторов имеют максимумы. Согласно теории для пара переменных в номере q имеется точно одно решение, которое удовлетворят вышеупомянутые условия.

В результате векторы x и y можно трансформировать в пара переменных в номер q, которые в тесной корреляции друг с другом. Эти пары переменных — канонических переменных — можно представить полезную информацию о взаимозависимостях компонентов x и y.

Из теории можно получить и процесс для оценки параметров регрессивной модели со многими переменными. Здесь практически зависимые переменные оцениваются как функции тех канонических переменных, коэффициенты канонической корреляции доказываются сигнифактными.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

Tényi György

Fogyasztási modellek

I. Bevezetés

A fogyasztási keresletet vizsgáló modern kutatások nagyjából két csoportra oszthatók (noha az empirikus vizsgálatok nem mindig sorolhatók be egyértelműen e két csoport valamelyikébe): 1. egyetlen jószág fogyasztásának alakulása, ill. 2. átfogó, minden fogyasztási kiadásra kiterjedő modell felállítása. Az első típusba tartozó kutatások többé-kevésbé közvetlenül gyakorlati célokat szolgálnak (piackutatás). A vizsgálat konkrét céljából rendszerint már adódik a szóban forgó jószág (-csoport) meghatározása, amely lehet egészen szűk is (pl. ilyen és ilyen igényeket kielégítő asztali rádiókészülék). Azt, hogy milyen változók függvényében vizsgáljuk a keresletet, maga a jószág, a vizsgálat célja és pontossági igénye, az adatgyűjtés lehetősége stb. szabják meg. Egyes tartós fogyasztási cikknél szerepelhet pl. a fogyasztási egységek jövedelmét reprezentáló változó,[1] a fogyasztói egység nagysága, korösszetétele, a jószág ára, a belőle felhalmozódott fogyasztói állomány, az esetleges komplementer termékek fogyasztása stb. Egy másik terméknél esetleg más változók más típusú függvényével közelítjük a fogyasztást.

A második csoportba tartozó kutatások célja a fogyasztói összkereslet szerkezetének meghatározása. Ezek a modellek rendszerint növekedési vagy ökonometriai modellek részei. Biztosítanunk kell, hogy a fogyasztók összjövedelme és összkiadása egyenlő legyen. A jószágcsoportok meghatározását az utóbbi modell szükségletei szabják meg.

Számítástechnikai szempontok eleve korlátozzák a jószágkategóriák lehetséges számát, ezenkívül pedig minél erősebbek a javak közötti helyettesítési és komplementaritási hatások, annál kevésbé lehet reményünk arra, hogy egyszerű, kevés paramétert tartalmazó függvényekkel jó becslést kapunk. Ha nagy aggregátumokat (pl. élelmiszer, lakás, textiliák, tartós fogyasztási javak, egyéb) vizsgálunk, akkor valószínű, hogy ezek a hatások gyengülnek.

Az alábbiakban ismertetett fogyasztási modellekben csak a jövedelem és az árak szerepelnek.

A keresletkutatás első lépése a fogyasztói egység, a jövedelem és a jószág csoportok definiálása. Itt ezeket adottaknak tételezzük fel.[2]

Két problémakörrel foglalkozunk. Az egyik a fogyasztási modellek általános tulajdonságai és ajánlott, ill. kipróbált konkrét változatai; a másik pedig

[1] Egy ilyen kutatásban ([20]) például a fogyasztó globális jövedelmi-vagyoni helyzetének leírására a tulajdonában levő ház forgalmi értéke szerepelt magyarázó változóként.

[2] Csupán utalunk a jövedelemváltozó specifikálásával kapcsolatban Hoch R.—Kovács I. [10] tanulmányára.

a keresztmetszeti és az idősor-adatok összehasonlításával kapcsolatos néhány kérdés. A következő jelöléseket alkalmazzuk:

n — a termékek (termékcsoportok) száma,
m — az egyének (jövedelemkategóriák) száma,
q_i — az i-edik termék fogyasztása ($i = 1, \ldots, n$),
P_i — az i-edik termék nominális ára ($i = 1, \ldots, n$),
P_0 — árindex,
$p_i = \dfrac{P_i}{P_0}$ — az i-edik termék reálára ($i = 1, \ldots, n$),
R — a nomináljövedelem,
$r = \dfrac{R}{P_0}$ — a reáljövedelem,
$E_\tau(\xi) = \dfrac{\partial\xi}{\partial\tau} \cdot \dfrac{\tau}{\xi}$ — a ξ változó τ szerinti rugalmassága,
$\alpha_i = \dfrac{q_i P_i}{R}$ — a jövedelemből az i-edik termék megvásárlására fordított rész.

II. A fogyasztási modellekre vonatkozó általános összefüggések

E modellekre vonatkozó általános feltételek és összefüggések részletes tárgyalását illetően lásd pl. [8], [21]. Itt röviden összefoglaljuk a legfontosabbakat.

Tételezzük fel, hogy az egyes fogyasztói javak iránt megmutatkozó kereslet a jövedelemtől és az összes termék árától függ, és írjuk most fel ezt az összefüggést a nomináljövedelem és -árak segítségével:

$$q_i = F_i(P_1, \ldots, P_n; R), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

ahol $F_i(\ldots)$ differenciálható függvény.

Nyilván fenn kell állnia a

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i = R \tag{2}$$

összefüggésnek. Legyen

$$\alpha_i = \frac{q_i P_i}{R},$$

vagyis a jövedelemnek az i-edik termék megvásárlására fordított hányada.

Vezessük be a

$$q_i P_i = f_i(P_1, \ldots, P_n; R)$$

jelölést. (2)-ből nyilván

$$\alpha_i = \frac{q_i P_i}{R} = \frac{f_i(P_1, \ldots, P_n; R)}{\sum_{j=1}^{n} f_j(P_1, \ldots, P_n; R)}. \tag{2a}$$

Fel szokták tételezni továbbá, hogy a keresleti függvény 0-adfokú homogén, vagyis

$$F_i(\xi P_1, \ldots, \xi P_n; \xi R) = F_i(P_1, \ldots, P_n; R). \tag{3}$$

Ennek az utóbbi feltételezésnek a jogosultsága nem egyértelmű. Feltétlenül jogosult lenne, ha valamilyen okból szükségessé válna ugyanazoknak az áraknak (és jövedelmeknek) különböző pénzegységekben való kifejezése, mert éppen a (3) tulajdonság biztosítja, hogy a kereslet független legyen a pénzegység megválasztásától. Ez azonban gyakorlatilag aligha szükséges. Viszont, ha a fogyasztói magatartásban érvényesül egy olyan szemlélet is, hogy minél drágább valamely termék, szükségszerűen annál kívánatosabb, „jobb" is, az ilyen magatartást jobban le lehet írni nem homogén fogyasztási függvényekkel. Egyes empirikus vizsgálatok igazolják ezt a megfontolást. (Lásd [13].)

Fontos szerepük van az

$$E_R(q_i) = \frac{\partial q_i}{\partial R} \cdot \frac{R}{q_i}, \quad i = 1, \ldots, n;$$

$$P_j \text{ állandó}, j = 1, \ldots, n,$$

mennyiségnek (jövedelemrugalmasság), továbbá az

$$E_{P_j}(q_i) = \frac{\partial q_i}{\partial P_j} \cdot \frac{P_j}{q_i}, \qquad i, j = 1, \ldots, n;$$

$$R \text{ és } P_k (k \neq j) \text{ állandó},$$

árrugalmasságoknak, amelyek durván azt fejezik ki, hogy a jövedelem, illetve a j-edik ár 1 százalékos megváltozásakor hány százalékkal változik meg az i-edik termék fogyasztása.

Belátható, hogy

$$E_\xi[F(\xi)] = \frac{\partial(\log F)}{\partial(\log \xi)}. \tag{4}$$

Az ár- és jövedelemrugalmasságok között fennállnak a következő összefüggések:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_{P_j}(q_i) = -\alpha_j, \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

(A (2) egyenlet P_j szerinti differenciálásával); valamint

$$\sum_{i=1}^{n} E_{P_j}(q_i) = -E_R(q_i), \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

(A (3) összefüggésből.) Továbbá (5) és (6) miatt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i E_R(q_i) = 1. \tag{7}$$

Az $F_i(P_1, \ldots, P_n; R)$ függvényt az elsőfokú tagokig Taylor-sorba fejtve, kapjuk:

$$\frac{dq_i}{q_i} = E_R(q_i)\frac{dR}{R} + \sum_{j=1}^{n} E_{P_j}(q_i)\frac{dP_j}{P_j}, \tag{8}$$

illetve (4) felhasználásával:

$$d(\log q_i) = \frac{\partial(\log q_i)}{\partial(\log R)} \cdot d(\log R) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\log q_i)}{\partial(\log P_j)} d(\log P_j). \tag{8a}$$

A (8) összefüggésből látható, hogy általában n^2 árrugalmasságot és n jövedelemrugalmasságot kell meghatároznunk, amelyek között $2n$ számú összefüggés áll fenn [(5) és (6)], tehát $n^2 - n$ a független paraméterek száma.

III. A fogyasztási modellek speciális osztályai

Az (1)–(3) modellben szereplő F_i függvényekben általában mindenféle helyettesítési, jövedelem és komplementaritási hatás kifejeződhet. Nincs viszont semmiféle kiindulópontunk ezeknek a függvényeknek a megválasztására. Gyakorlatilag azonban nem is szükséges ilyen általános modell, mert a becslésükre felhasználható adatok nem tartalmaznak annyi árváltozást, amennyi megalapozott következtetések levonásához szükséges.[3]

Ez a felismerés volt a kiindulópontja azoknak a vizsgálatoknak, amelyek arra irányultak, hogy milyen leegyszerűsítő feltevések lehetségesek a keresleti függvényekkel kapcsolatban és milyen információkat kaphatunk belőlük azok alakjára, tulajdonságaira nézve.

A) Kétváltozós keresleti függvények

A keresleti függvény leegyszerűsítésének egyik kézenfekvő módja, ha feltételezzük, hogy valamely jószág iránti kereslet csak a reáljövedelemtől és a szóban forgó termék reálárától függ:

$$q_i = F(r, p_i). \tag{9}$$

A $P_0(P_1, \ldots, P_n)$ árindexről feltételezzük, hogy differenciálható és homogén lineáris függvény, tehát

$$P_0(\xi P_1, \ldots, \xi P_n) = \xi P_0(P_1, \ldots, P_n).$$

A homogenitás miatt

$$\sum_{j=1}^{n} E_{P_j}(P_0) = 1 \text{ és} \tag{10}$$

$$P_0(P_1, \ldots, p_n) = P_0\left(\frac{P_1}{P_0}, \ldots, \frac{P_n}{P_0}\right) = \frac{1}{P_0} \cdot P_0 = 1. \tag{11}$$

Keressük tehát az olyan

$$f_i(r, p) = p_i \cdot F_i(r, p_i), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

függvényeket, amelyekre

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(r, p_i) = r. \tag{13}$$

[3] Mint Deaton és Wigley megjegyzi (lásd [4]): „Az empirikus kutatásokból származó árrugalmasságokban szinte elkerülhetetlenül nagyobb szerepe van a modell struktúrájának, mint az empirikus tényanyagnak."

Fourgeaud és Nataf [6] adták meg az ilyen fogyasztási modellek általános alakját. Gondolatmenetük a következő:

(11)-ből kifejezve p_n-t,

$$p_n = \Psi(p_1, \ldots, p_{n-1}),$$

és ezzel (13) a

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i(r, p_i) + f_n[r, \Psi(p_1, \ldots, p_{n-1})] = r \tag{14}$$

alakot ölti. p_i szerint differenciálva

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} + \frac{\partial f_n}{\partial \Psi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Az általános esetben, amikor (15) bal oldalának második tagja nem zérus (ellenkező esetben ugyanis triviális függvényt kapunk):

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial f_1}{\partial p_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial \Psi}{\partial p_1} \quad (i = 2, \ldots, n-1). \tag{16}$$

Ebből r és p_i kivételével a többi változót rögzítve:

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i}(r, p_i) = \frac{\partial \Psi}{\partial p_i}(p_1^0, \ldots, p_i, \ldots, p_n^0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial p_1}(r, p_1^0) \Big/ \frac{\partial \Psi}{\partial p_1}(p_1^0, \ldots, p_i, \ldots, p_n^0). \tag{17}$$

Legyen

$$\frac{\partial f_1}{\partial p_1}(r, p_1^0) = K(r) \quad \text{és}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p_i} \Big/ \frac{\partial \Psi}{\partial p_1^0} = a_i(p_i), \quad (i = 2, \ldots, n-1). \tag{18}$$

Tehát

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_i}(r, p_i) = K(r) \cdot a_i(p_i),$$

és ha bevezetjük az

$$\int a_i(p_i)\,\mathrm{d}p_i = A_i(p_i) \tag{18a}$$

jelölést, akkor

$$f_i(r, p_i) = K(r)\, A_i(p_i) + b_i(r) \quad (i = 2, \ldots, n-1). \tag{19}$$

Könnyen belátható, hogy $f_1(r, p_1)$ és $f_n(r, p_n)$ is a (19) alakban írható fel. Tehát az olyan fogyasztási modellek, amelyekben a fogyasztás csak a reáljövedelemtől és a megfelelő jószág reálárától függ,

$$f_i(r, p_i) = K(r)\, A_i(p_i) + b_i(r), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

alakúak, ahol

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(p_i) = 0 \quad \text{és} \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(r) = r. \tag{22}$$

A (18) és (18a) egyenletből látható, hogy az $A_i(p_i)$ együtthatók és a P_0 árindex között összefüggés van. Ha

$$P_0(P_1, \ldots, P_n) = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i P_i^\beta\right]^{1/\beta},$$

ahol $\Sigma a_i = 1$, akkor ehhez az árindexhez az

$$f_i(r, p_i) = K(r)\,(a_i p_i^\beta - b_i) + b_i \cdot r, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{20a}$$

alakú modell tartozik, ahol $\Sigma b_i = 1$.

Hasonlóképpen a

$$P_0(P_1, \ldots, P_n) = \prod_{i=1}^{n} P_i^{a_i}$$

árindexnek, ahol $\Sigma a_i = 1$, az

$$f_i(r, p_i) = K(r)\,(a_i \log p_i + b_i) + a_i \cdot r \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{20b}$$

modell felel meg, ahol $\Sigma b_i = 0$.

A (20)—(22) modellben valamely jószág iránti kereslet az árindex közvetítésével függ a többi jószág árától. Az árrugalmasságok kiszámításának módszerére visszatérünk.

B) R. Frisch módszere az árrugalmasságok kiszámítására

A fogyasztási függvények specifikálásának egy másik (inkább csak módszertanilag érdekes) útja az, hogy feltételezzük: a fogyasztó maximál egy

$$u(q_1, \ldots, q_n) \tag{23}$$

hasznossági függvényt, amelynek léteznek a

$$\frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \ldots, n),$$

illetve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q_i\, \partial q_j}, \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

parciális deriváltjai, ahol

$$\frac{\partial u}{\partial q_i} > 0,$$

és a keresleti függvényt ebből vezetjük le. (Lásd például [8].)

A (2) feltétellel felírjuk a Lagrange-függvényt:

$$u(q_1, \ldots, q_n) - \lambda(\Sigma q_i P_i - R), \tag{23a}$$

ahol λ a Lagrange-szorzó. Az optimális $(q_1^0, \ldots, q_n^0)$ pontban (23a) deriváltjának nullává kell válnia, tehát

$$u_i(q_1^0, \ldots, q_n^0) = \lambda P_i, \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{24}$$

ahol

$$u_i = \frac{\partial u}{\partial q_i}.$$

A (24) egyenletrendszer megoldható:

$$q_i = F_i(R, P_1, \ldots, P_n), \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{25}$$

$$\lambda = F_0(R, P_1, \ldots, P_n).$$

Az ilyen F_i fogyasztási függvényekre a (2)—(8) összefüggéseken kívül érvényes még az

$$E_R(q_i) + E_{P_k}(q_i)\,\alpha_k = E_R(q_k) + E_{P_i}(q_k)\,\alpha_i \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{26}$$

úgynevezett Slutzky-egyenlet is. (Lásd például [8].)

Tehát a (23) hasznossági függvény létezésének feltételezésével a fogyasztási modell független paramétereinek száma $n^2/2-n$-re csökken, és a hasznossági függvény tulajdonságaira vonatkozó további feltevésekkel mégjobban csökkenthető.

Ragnar Frisch [7] vezette be az

$$E_{q_j}(u_i) = \frac{u_i}{q_j} \cdot \frac{q_j}{u_i}, \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

mennyiségeket, amelyek azt fejezik ki, hogy az i-edik jószág utolsó elfogyasztott egységének hasznossága hogyan függ a j-edik jószágból elfogyasztott mennyiségtől. Az

$$E_{q_j}(u_i) = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j) \tag{27}$$

feltevés mellett levezette a következő összefüggéseket:

$$E_{P_i}(q_i) = -E_R(q_i)\left[\alpha_i - \frac{1 - \alpha_i E_R(q_i)}{E_R(\lambda)}\right], \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{28}$$

és

$$E_{P_j}(q_i) = -E_R(q_i)\,\alpha_j \cdot \frac{1 + E_{P_i}(q_i)}{1 - \alpha_i E_R(q_i)}, \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j). \tag{29}$$

Tehát, ha ismerjük az α_i arányokat, az $E_R(q_i)$ jövedelemrugalmasságokat és egyetlen direkt árrugalmasságot, akkor a (27) feltétel teljesülése esetén az összes többi árrugalmasságot ki lehet számítani. A (27) feltétel ekvivalens azzal, hogy a hasznossági függvény additív vagy alkalmas monoton növekvő transzformációval additív alakra hozható. A feltétel empirikusan nem ellenőrizhető, mégis számos szerző — több-kevesebb fenntartással — közöl olyan eredményeket, amelyeket ezzel a módszerrel kapott. Természetesen minél kisebb a termékkategóriák száma, annál nagyobb valószínűséggel lehet olyan kategorizálást találni, amely mellett a rokonsági hatások kiküszöbölhetők.

IV. Empirikus alkalmazásra javasolt fogyasztási modellek

Konkrét fogyasztási modellek megszerkesztésének kézenfekvő kiindulópontja valamilyen, az empirikus vizsgálatok során bevált jövedelem-fogyasztás összefüggés (Engel-görbe) felhasználása.[4]

Az alábbiakban ismertetendő négy modell közül három vezethető le ily módon. A Houthakker-modell kiinduló pontja némileg eltérő.

A) A kettős logaritmikus modell

Ha feltételezzük, hogy az ár- és jövedelemrugalmasságok állandók, akkor (8)-ból kapjuk:

$$q_i = c_i R^{a_i} \prod_{j=1}^{n} P_j^{b_{ij}}, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{30}$$

Ezek a függvények — vagy többé-kevésbé leegyszerűsített változataik — könnyen becsülhetők és a keresletkutatásban régóta elterjedtek. (Lásd pl. [16].) Tulajdonképpen azonban csak egy speciális osztályuk sorolható a fogyasztási modellek közé.

Ugyanis a (3) homogenitási feltétel miatt

$$a_i = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A (2) feltétel pedig általában csak akkor teljesül, ha

$$a_i = E_R(q_i) = 1, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Ugyanis legyen $a_i > 1$ valamilyen i-re. Ekkor

$$\frac{q_i P_i}{R} \to \infty, \quad \text{ha} \quad R \to \infty,$$

létezik tehát olyan R_0, hogy $q_i P_i / R > 1$, ha $R > R_0$, tehát (2) nem teljesülhet. Ezért $a_i \leq 1$, $(i = 1, \ldots, n)$. De $a_i < 1$ sem lehetséges, mert (30)-t (2)-be helyettesítve és R szerint differenciálva:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i P_i \cdot a_i}{\sum_{i=1}^{n} q_i P_i} = 1,$$

vagyis

$$\sum_{i=1}^{n} q_i P_i (1 - a_i) = 0,$$

ebből (mivel a baloldali összeg minden tagja nemnegatív),

$$a_i = 1, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

[4] A szóbajöhető Engel-görbék szinte teljes felsorolását és tulajdonságaik elemzését illetően lásd [9].

B) A rotterdami modell

A modell kiinduló pontja a (8a) összefüggés (lásd [2] és [19]). Tehát nem az egyes termékek összes fogyasztásáról tételezzük fel, hogy a (30) logaritmikus függvénynek megfelelően függ a jövedelemtől és az áraktól, hanem csak a fogyasztás, illetve a jövedelem növekményét tekintjük két időpontra vonatkozó logaritmikus függvény különbségének. A modell alakja:

$$\Delta(\log q_i) = a_i \left[\Delta(\log R) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta(\log P_k)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \left[\Delta(\log P_i) - \sum_{k=1}^{n} a_i \alpha_k \Delta(\log P_k)\right],$$

ahol például

$$\Delta(\log q_i) = \log q_i^{(t)} - \log q_i^{(t-1)}.$$

A rotterdami modellben az árváltozások hatása három részre van bontva. Az első szögletes zárójelben levő összeg a jövedelemeffektust fejezi ki, a második szögletes zárójel pedig a helyettesítési hatást képviseli. Ez az utóbbi maga is két részből tevődik össze. Ugyanis a (2) összefüggés miatt két véletlenszerűen kiválasztott jószág között a helyettesítési hatás a valószínűbb. Ezt az „általános" helyettesítési effektust le kell vonni a tulajdonképpeni specifikus helyettesítési hatást kifejező $\Sigma\, b_{ij}\, \Delta(\log P_i)$ tagból.

C) A Houthakker-modell

Kiindulhatunk a (2a) összefüggésből. Ebből ugyanis

$$q_i = \frac{f_i \dfrac{R}{P_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n} f_i}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A (2) feltétel teljesülését tulajdonképpen tetszőleges f_i függvények biztosítják de úgy kell ezeket megválasztanunk, hogy q_i az $R, P_1, \ldots, P_n$ változók alkalmas függvénye legyen.

Houthakker ajánlotta [11] az

$$f_i = a_i \left[\frac{R}{P_i}\right]^{b_i}$$

helyettesítést. Ezzel

$$q_i = \frac{a_i \left[\dfrac{R}{P_i}\right]^{b_i+1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \left[\dfrac{R}{P_i}\right]^{b_j}}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Belátható, hogy

$$E_R(q_i P_i / q_j P_j) = C_{ij},$$

vagyis bármelyik két kiadáscsoport hányadosának jövedelemrugalmassága állandó. A kereslet jövedelemrugalmassága:

$$E_R(q_i) = 1 + b_i - \sum_{j=1}^{n} b_j \alpha_j .$$

D) A lineáris modell

Ezt a modellt eredetileg L. Klein és M. Rubin ajánlotta. Továbbfejlesztése és alkalmazása R. Stone nevéhez fűződik. (Lásd [17], [18].)

$$q_i P_i = a_i P_i + b_i \big(R - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\big), \tag{31}$$

ahol $\Sigma b_i = 1$.

Ez azt jelenti, hogy a fogyasztó jövedelmének egy részét ,,alapfogyasztásra'' költi, a fennmaradó részt pedig lineárisan, de a rögzített résztől általában eltérő megoszlásban költi el.

A (31) függvényhez tartozó jövedelemrugalmasság:

$$E_R(q_i) = \frac{b_i R}{q_i P_i} = \frac{b_i}{\alpha_i} .$$

Az árrugalmasság:

$$E_{P_j}(q_i) = \delta_{ij} \left(\frac{a_i}{q_i} - 1 \right) - \frac{b_i}{q_i P_i} a_j P_j ,$$

ahol

$$\delta_{ij} = \begin{matrix} 1, \text{ ha } i = j, \\ 0, \text{ ha } i \neq j. \end{matrix}$$

Ebből látható, hogy inferioris javak esetén a megfelelő $b_i < 0$. R. Stone megmutatta (lásd [17]), hogy ha minden $b_i > 0$, akkor komplementaritás nem lehetséges a modellben. A javak közötti helyettesítést azonban a modell képes figyelembe venni. Kimutatható, hogy a (31) modellnek megfelelő Engel görbe lineáris, a saját ár és a fogyasztás közötti összefüggés pedig hiperbolikus.

Megmutatjuk most, hogy a lineáris modell a (20a) modellnek egy speciális esete.

Végezzük el a következő átalakítást: legyen

$$K = \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

$$\Theta_i = \frac{a_i}{K} ,$$

$$P_0 = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i P_i . \tag{32}$$

Ekkor

$$q_i p_i = K(\Theta_i p_i - b_i) + b_i R. \tag{33}$$

Látható, hogy (33) speciális esete a (20a) modellnek, mégpedig

$$K(r) = K = \text{állandó és}$$

$$\beta = 1;$$

továbbá ellenőrizhető, hogy a (21) és (22) feltétel is teljesül.

Tehát a lineáris modell szerint valamely termék fogyasztása csak a reáljövedelemtől és az illető termék reálárától függ, ha az árindexet a (32) összefüggéssel definiáljuk.

A lineáris modell merevségéért némi kárpótlást nyújt, hogy az a_i, b_i paraméterek időbeli állandóságának feltételezése feloldható — tehát bizonyos dinamizmus vihető a modellbe, anélkül, hogy a becslési problémák megoldhatatlanná válnának.

Három dinamizálási kísérletet ismertetünk (lásd [4], [15]):

a) Legyenek a paraméterek az idő lineáris függvényei:

$$a_{it} = a_i^* + a_i^{**} \cdot t$$

és

$$b_{it} = b_i^* + b_i^{**} \cdot t,$$

ahol t például években fejezhető ki. Ez a változat akkor látszik célszerűnek, ha feltételezhető, hogy a paraméterek változását okozó dinamikus hatások késés nélkül érvényesülnek.

b) Tételezzük fel, hogy a paraméterek az előző időszak fogyasztásától függnek:

$$a_{it} = a_i^* + a_i^{**} \cdot q_{i,t-1}$$

és

$$b_{it} = b_i^* + b_i^{**} \cdot q_{i,t-1}.$$

c) Tételezzük fel, hogy a fogyasztó R pillanatnyi jövedelme egy állandó vagy az időben szabályszerűen változó (permanens) $\hat{R}$ részből, illetve egy véletlenszerű (tranziens) $R - \hat{R}$ részből áll, és hogy e két jövedelemrészt a fogyasztó lineárisan, de eltérő arányok szerint osztja fel a jószágcsoportok között:

$$q_i P_i = a_i P_i \hat{R} + b_i(R - \hat{R}), \quad (i = 1, \ldots, n)$$

ahol

$$\Sigma a_i = \Sigma b_i = 1.$$

Ez a modell már nem lineáris R-ben, de speciális esete (20)-nak mégpedig a

$$K(r) = \frac{\hat{R}}{P_0}$$

választás mellett.

E) A modellek összehasonlítása

Ahhoz, hogy a fenti modelleket egybevethessük szükséges, hogy azonos adatbázison, azonos statisztikai módszerekkel készített becslések illeszkedését értékelhessük.

A szerzőnek két ilyen összehasonlító vizsgálatról van tudomása. Az egyiket K. Yoshihara végezte [22], aki a Houthakker-modellt és a lineáris modell alapváltozatát alkalmazta 1900—1955 közötti japán adatokra, öt jószágkategóriában. A lineáris modellel egyértelműen jobb eredményeket kapott, mint a Houthakker-modellel.

R. W. Parks [14] a rotterdami modellt, a Houthakker-modellt, valamint a lineáris modell alapváltozatát és a) dinamizált változatát hasonlította össze 1861—1955 közötti svéd adatok alapján, 8 jószágcsoport alkalmazásával. A rotterdami modellel kapta „átlagban" a legjobb illeszkedést, noha négy jószágcsoportban a dinamizált lineáris modell valamivel jobb eredményt adott. A többi modell egyértelműen rosszabbul volt illeszthető az adatokhoz.

V. A háztartásstatisztikákon és az idősorokon alapuló számítások összehasonlítása

Ismeretes, hogy a keresztmetszeti, illetve az idősor-adatok alapján végzett számítások többnyire eltérő eredményeket adnak. Ennek egyik oka az, hogy amikor a jelenleg kis jövedelmű fogyasztói egységek elérik a jelenleg nagyobb jövedelmű egységek jövedelemszintjét, fogyasztásszerkezetük nem lesz szükségképpen azonos az utóbbiak mai fogyasztásszerkezetével. Van azonban még néhány olyan tényező, amelyeknek hatása többé-kevésbé kiszűrhető. A továbbiakban ezekkel foglalkozunk.

A) Reáljövedelem és reálár, nomináljövedelem és nominálár

Az idősorok vizsgálatánál rendszerint árszínvonallal deflált jövedelmek és árak, a keresztmetszeti vizsgálatokban pedig nominálárak és -jövedelmek szerepelnek. Megvizsgálandó tehát, milyen összefüggés van a kétféle módszerrel számított rugalmasságok között.

Ezt a vizsgálatot végezte el Fourgeaud és Nataf [6] az általuk kidolgozott (20) modellre vonatkozóan.

Kiszámítható, hogy

$$E_r(q_i) = E_R(q_i), \tag{34a}$$

$$E_{P_j}(q_i) = - E_{P_j}(P_0)\, E_r(q_i) + E_{p_i}(q_i), \tag{34b}$$

$$E_{P_i}(q_i) = - E_{P_i}(P_0)\, E_r(q_i) + E_{p_i}(q_i) + E_{p_i}(q_i). \tag{34c}$$

Tehát a reál-, illetve a nomináljövedelem alapján számított rugalmasságok megegyeznek, de az árrugalmasságokról ez általában nem állítható. Ezekből az összefüggésekből kiszámíthatók a (20) modellben az árrugalmasságok, ugyanis (34a)—(34c)-t (6)-ba behelyettesítve:

$$1 + E_{p_i}(q_i) \cdot \frac{\alpha_i}{E_{P_i}(P_0)} = 1 + E_{p_j}(q_j) \cdot \frac{\alpha_j}{E_{P_j}(P_0)} .$$

Tehát egyetlen árrugalmasságból kiszámíthatjuk az összes többit, ha az α_i arányokat ismerjük.

B) Az idősorból és a keresztmetszetből számított jövedelem rugalmasság eltérése

Egyes számításokból megfigyelhető, hogy rendszeres eltérés van az idősorból és a keresztmetszetből számított jövedelemrugalmasság között.

Erre a jelenségre C. Fourgeaud a következő magyarázatot adta (lásd [5]): legyen n a termékek, m pedig a keresztmetszeti mintában szereplő egyének vagy jövedelemkategóriák száma, legyen továbbá $R_t^{(j)}$ és $q_{i,t}^{(j)}$ a j-edik egyén jövedelme illetve fogyasztása az i-edik termékből a t-edik időszakban. Legyen a tényleges jövedelem és fogyasztás valószínűségi változó, például

$$R_t^{(j)} = \bar{R}_t^{(j)}(1 + \varepsilon_t^{(j)})$$

és

$$q_{i,t}^{(j)} = \bar{q}_{i,t}^{(j)}(1 + \eta_{i,t}^{(j)}),$$

ahol $\bar{R}_t^{(j)}$ és $\bar{q}_{i,t}^{(j)}$ a jövedelem, illetve a fogyasztás permanens része, $\varepsilon_t^{(j)}$ és $\eta_{i,t}^{(j)}$ 0 várható értékű, a permanens résztől független és ahhoz képest kicsiny valószínűségi változók. Ekkor, ha

$$v_t^{(j)} = \log R_t^{(j)} \text{ és } z_{i,t}^{(j)} = \log q_{i,t}^{(j)},$$

akkor közelítőleg

$$v_t^{(j)} = \bar{v}_t^{(j)} + \varepsilon_t^{(j)}$$

és

$$z_{i,t}^{(j)} = \bar{z}_{i,t}^{(j)} + \eta_{i,t}^{(j)}.$$

Tételezzük fel továbbá, hogy $\varepsilon_t^{(j)}$ és $\eta_{i,t}^{(j)}$ között j-től és t-től független lineáris regresszió van és a regressziós együttható μ_i. Legyen a háztartásstatisztika alapján számított regresszió

$$z_{i,t}^{(j)} = a_{i,t} \cdot v_t^{(j)} + b_{i,t}.$$

Tételezzük fel végül, hogy ha a permanens jövedelem és fogyasztás mérhető lenne, akkor a

$$\bar{z}_{i,t}^{(j)} = \bar{a}_i \cdot \bar{v}_t^{(j)} + \bar{b}_i$$

összefüggést találnánk közöttük. Ekkor bebizonyítható, hogy

$$a_{i,t} \lesseqgtr \bar{a}_i$$

aszerint, hogy

$$\mu_i \lesseqgtr \bar{a}_i.$$

Mármost az $\varepsilon_t^{(j)}$ és az $\eta_{i,t}^{(j)}$ valószínűségi változókra vonatkozó feltevések miatt az idősorok adatai a permanens jövedelemmel és fogyasztással azonosíthatók az így kapott regressziós együttható tehát $\bar{a}_i$-vel egyenlő, viszont keresztmetszeti adatokkal számolva az $a_{i,t}$ együtthatókat kapjuk. A $\mu_i < a_i$ eset az alapvető fogyasztási javakra, a $\mu_i > a_i$ eset pedig a luxuscikkekre vonatkoztathatók. Ez egybevág egyes kutatóknak azzal a megállapításával (lásd [5]), hogy keresztmetszeti adatokból az alapvető fogyasztási javakra kisebb, a luxuscikkekre pedig nagyobb jövedelemrugalmasság adódik, mintha idősoradatok alapján számolunk.

VI. Az összkereslet és az összjövedelem felhasználása az egyéni fogyasztási függvények becslésére

Az egyéni fogyasztási függvények becslésének vagy keresztmetszeti adatokból kellene történnie (mégpedig eléggé szűk jövedelemkategóriákkal), vagy pedig egyetlen fogyasztói egység idősor-adatait kellene felhasználni erre a célra. Ilyen adatok azonban ritkán állnak rendelkezésünkre.

Ha azonban ismerjük a lakosság jövedelemeloszlását, akkor ezt felhasználhatjuk az egyéni fogyasztási függvények kiszámítására. Legyen a jövedelem eloszlásfüggvénye $f_t(x)$, az egyes termékek összfogyasztása $Q_{i,t}$ és $q_i(R)$ az egyéni fogyasztási függvény. Ekkor

$$Q_{i,t} = \int_0^\infty q_i(R) f_t(R)\,\mathrm{d}R. \tag{35}$$

Ismeretes, hogy a jövedelemeloszlás sokszor kielégítően közelíthető a kétparaméteres log-normális eloszlással (lásd például [1]), amelynek sűrűségfüggvénye

$$f(R) = \frac{1}{R\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\log R-\mu)^2\right],$$

$$\text{ha } R>0;\ \text{illetve } f(R)=0, \text{ ha } R\le 0.$$

$q_i(R)$ két speciális megválasztása mellett a (35) integrál zárt alakban előállítható.

1. Legyen $q_i(R) = a_i R^{b_i}$, ekkor kiszámítható, hogy

$$Q_i = a_i \exp\left[\mu b_i + \frac{b_i^2\sigma^2}{2}\right].$$

Vizsgáljuk meg, milyen összefüggés van az eloszlás jellemzői és az átlagos kereslet között.

A lognormális eloszlás várható értéke:

$$M(\xi) = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right],$$

szórásnégyzete pedig:

$$D^2(\xi) = M^2(e^{\sigma^2}-1).$$

Ebből

$$Q_i = a_i\left(\sqrt{D^2+M^2}\right)^{b^2-b_i}\cdot M^{2b_i-b_i^2}.$$

Látható, hogy ha $\dfrac{D}{M}\to 0$, akkor

$$Q_i \to a_i\cdot M^{b_i},$$

tehát ekkor az átlagos kereslet és az átlagos jövedelem között ugyanolyan összefüggés van mint az egyéni jövedelem és a kereslet között. Továbbá

$$\frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}D} = -\frac{DQ_i}{D^2+M^2}\cdot(b_i^2-b_i),$$

tehát ha $b > 1$, akkor (rögzített átlagjövedelem mellett), az átlagos kereslet a szórásnak monoton csökkenő függvénye.

Ha az átlagos jövedelem és az átlagos kereslet közötti összefüggést kívánjuk vizsgálni, akkor célszerű (36)-ot kissé átalakítani:

$$Q_i = a_i \exp\left[(b - b_i)\frac{\sigma^2}{2}\right] \cdot M^{b_i} = c_i M^{b_i}.$$

2. Legyen $q_i(R) = a_i + b_i \log R$. Ekkor belátható, hogy

$$Q_i = a_i + b_i \mu = a_i - b_i \frac{\sigma^2}{2} + b_i \log M.$$

Tehát az egyéni, illetve az aggregált fogyasztási függvények — lognormális jövedelemeloszlást feltételezve — mindkét esetben azonosak, eltérések csak a paraméterekben vannak.

IRODALOM

1. Aitchison, J.—Brown, J. A. C.: The Lognormal Distribution. Cambridge University Press, 1957.
2. Barten, A. P.: Estimating Demand Equations. Econometrica, 1968. április.
3. Beeck, J. G. van: Consumption Forecasts for the Netherlands. A [16] kötetben.
4. Deaton, A. S.—Wigley, K. J.: Econometric Models for the Personal Sector. Bulletin of the Oxford University, Institute of Economics and Statistics. 1971 május.
5. Fourgeaud, C.: Les projections de consommation en France. a [16] kötetben.
6. Fourgeaud, C.—Nataf, A.: Théorie des choix. Econometrica, 1959. július.
7. Frisch, R.: A Complete Scheme for Computing All Direct and Cross Demand Elasticities. Econometrica, 1959. április.
8. Hicks, J. R.: Value and Capital. Oxford, 1946. Clarendon.
9. Hoch, R.: A kereslet szerkezete és a jövedelem alakulása, kandidátusi disszertáció, 1960.
10. Hoch R.—Kovács I.: „A jövedelemváltozások és a fogyasztóiár-változások hatása a keresletre", a Gazdasági fejlődés és tervezés című kötetben, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1969.
11. Houthakker, H. S.: Additive Preferences. Econometrica, 1960. április.
12. Houthakker, H. S.: Present State of Consumption Theory. Econometrica, 1961. október.
13. Kalman, P. J.: Theory of Consumer Behaviour. Econometrica, 1968. július—október.
14. Parks, R. W.: Systems of Demand Equations. Econometrica, 1969. október.
15. Pollak, R. A.—Wales, T. J.: Estimation of the Linear Expediture System. Econometrica, 1969. október.
16. Sandee, J. (szerk.): Europe's Future Consumption. Amsterdam, 1964. North-Holland Publ. Co.
17. Stone, R.: Linear Expenditure Systems and Demand Analysis. The Economic Journal, 1954. No. 255.
18. Stone, R.—Brown, A.—Rowe, D. A.: Demand Analysis and Projections for Britain, a [16] kötetben.
19. Theil, M.: The Information Approach to Demand Analysis. Econometrica, 1965. január.
20. Watts, H. W.—Tobin, J.: Consumer Expenditures and the Capital Account. a Consumption and Saving c. kötetben.
21. Wold, H.—Juréen, L.: Demand Analysis. New York, 1953. John Wiley.
22. Yoshihara, K.: Demand Functions An Application to the Japanese Expenditure Pattern. Econometrica, 1969. április.

John J. Siegfried

Az első lecke ökonometriából[1]

Minden felcseperedő ökonométernek idejében meg kell tanulnia, hogy nem vall jóízlésre két mennyiség összegét az

$$1 + 1 = 2 \tag{1}$$

alakban fejezni ki. Egy felsőbb évfolyamba járó közgázhallgató már tudja, hogy

$$1 = \ln e, \tag{2}$$

és azt is, hogy

$$1 = \sin^2 q + \cos^2 q. \tag{3}$$

Továbbá az egyszerű olvasónak is nyilvánvaló, hogy

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \tag{4}$$

Tehát az (1) egyenletet átírhatjuk a következő tudományosabb alakba:

$$\ln e + (\sin^2 q + \cos^2 q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \tag{5}$$

Könnyen belátható, hogy

$$1 = \cosh p \sqrt{1 - \tanh^2 p}, \tag{6}$$

és tekintettel arra, hogy

$$e = \lim_{\delta \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{\delta}, \tag{7}$$

az (5) egyenlet tovább egyszerűsíthető:

$$\ln\left[\lim_{\delta \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)^{\delta}\right] + (\sin^2 q + \cos^2 q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh p \sqrt{1 - \tanh^2 p}}{2^n} \tag{8}$$

Megfigyelve, hogy

$$0! = 1, \tag{9}$$

[1] E tanulmány kidolgozásához senki sem nyújtott támogatást. A szerző egy ismeretlen, de eszes kútfőnek tulajdonítja az elemzés eredeti csíráit.

és visszaemlékezve arra, hogy az inverz mátrix transzponáltja egyenlő a transzponált inverzével, kiszabadulhatunk az egydimenziós tér szorításából. Vezessük be az X négyzetes (nem szinguláris) mátrixot, akkor

$$Det[(X')^{-1} - (X^{-1})'] = 0. \tag{10}$$

(9)-et (10)-zel kombinálva

$$\{Det\ [(X')^{-1} - (X^{-1})']\}! = 1, \tag{11}$$

és ezt behelyettesítve, a (8) egyenlet a következőre vezethető vissza:

$$\ln \lim_{\delta \to \infty} \left[\{Det\ [(X')^{-1} - (X^{-1})']\}! + \frac{1}{\delta} \right]^{\delta} + \sin^2 q + \cos^2 q = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh p \sqrt{1 - \tanh^2 p}}{2^n}. \tag{12}$$

Ezzel sikerült az (1) összefüggést az elegáns és világos (12) alakra hozni. Más hasonló módszerek is alkalmazhatók (1) egyszerűsítésére, de ezek már triviálisan adódnak, ha az ifjú ökonométer az alapvető elveket egyszer elsajátította.[2]

[2] A cikket eredetileg angol nyelven publikálta a *Journal of Political Economy*, 78. kötet, 6. szám (1970. november—december). Fordította *Martos Béla*. Az eredeti publikáció néhány hibás formuláját a szerző jóváhagyásával a fordító kijavította. *(Szerk.)*

KÖNYVEKRŐL

MEIER, R. C.—NEWELL, W. T.—PAZER, H. L.: *Simulation in business and economics.* Englewood Cliffs, 1969. Prentice-Hall.

A három amerikai szerző 1969-ben megjelent könyve megismertet a szimulációval kapcsolatos alapfogalmakkal, betekintést nyújt a szimuláció vállalati és közgazdasági alkalmazásába és tárgyalja a módszerrel kapcsolatos legfontosabb technikai kérdéseket.

A könyv bevezető része definiálja a tárgykör sokszor ellentmondásosan használt terminológiáját, élesen elhatárolja egymástól a szimuláció, a Monte-Carlo módszer, a heurisztika, a játék és a modell-mintavételezés fogalmát. A szimulációs módszer ismertetésekor hivatkozik a műszaki és természettudományok által régóta használt analóg szimulációra és példák segítségével érzékelteti az analóg és digitális szimuláció közötti különbségeket.

A továbbiakban egy készletezési feladat kapcsán hasonlítja össze az analitikus és szimulációs megoldási módszereket. Meggyőző érveket sorakoztat fel az utóbbi alkalmazása mellett, különösen komplex, dinamikus modellek esetén, ugyanakkor utal a módszer alkalmazása során felmerülő technikai nehézségekre is. Végül megmutatja, milyen előnyöket nyújt a vállalati gyakorlatban a kétféle módszer együttes használata és vázolja ennek alapvető hardware-software kritériumait.

A következő három fejezet a szimuláció vállalati és közgazdasági alkalmazásával foglalkozik. A szerzők reprezentáns példák egész sorát ismertetik a vállalat egy-egy operatív résztevékenységével (pl. készletezés, tervezés, termelésprogramozás stb.) illetve ezek összehangolt működésével kapcsolatban.

Az előbbiek közül említést érdemelnek az Imperial Oil Ltd. számára készült készletezési és a Hughes Aircraft Company számára készült termelésprogramozási modell, valamint a RAND Corporation PERT-analizátora, az utóbbiak közül Sprowls és Asimov vállalati modellje.

Az Imperial Oil Ltd. raktározási rendszere sztochasztikus paraméterekkel leírt tevékenységek komplex láncolatával modellezhető. Ilyen típusú modellben a készletezési politika analitikus optimalizálása gyakorlatilag megoldhatatlan feladat, ezért az optimumhoz nem vezető, de elfogadható megoldást biztosító szimulációs módszert alkalmaztak.

A Hughes Aircraft Ltd. meglehetősen bonyolult termelőrendszerének egész értékű programozással történő optimalizálása helyett — az ehhez szükséges rendkívül nagy számítási kapacitás és gépidő következtében — olyan szimulációs modellt építettek, amely különféle termelési stratégiák esetén hatékonysági mutatók (pl. rendelések átlagos átfutási ideje, gépek kihasználtsági foka stb.) vizsgálatára alkalmas.

A RAND Corporation szimulátora a PERT-hálózatok analízise során felmerülő problémák megoldását célozza. (Pl. a nem-kritikus utakhoz tartozó időeloszlások hatása a befejezési időpont szórására.) Az alkalmazott módszer a szimuláció speciális fajtája, az ún. modell-mintavételezés.

Sprowls és Asimov modellje egy hipotetikus vállalat különböző egységeinek funkcionális működését, illetve ezek formális és informális kapcsolatát írja le abból a célból, hogy az egységek közötti együttműködés minél hatékonyabb formáit megtalálja.

Valamennyi ismertetett modellel kapcsolatban részletesen foglalkozik a szerző az adott területen elterjedten használt analitikus módszerekkel és ezek alkalmazhatósági korlátaival. Rámutat a szimulációs módszer alkalmazásának előnyeire olyan esetekben is, amikor analitikus megoldás is szóbajöhet. Különösen nagy jelentőséget tulajdonít a módszernek több vállalati egység együttes tervezésében.

A felsőszintű vállalati vezetés számára készült modellek közül kiemeli a könyv az ún. „ipari dinamika" szemléletmódját tükröző modelleket. Bemutatja az ipari dinamika által folytonos állapotterűnek feltételezett rendszerek struktúráját, a módszer használatos fogalmait és jelöléseit. Részletesen ismerteti az ipari dinamikának egy termelési-elosztási rendszer stabilitásának és egy vállalat növekedésének vizsgálatára történő alkalmazását. Az eredményeket idődiagramokon mutatja be, amelyek jól szemléltetik a rendszerbe épített negatív visszacsatolások lengéscsillapító hatását.

A szimuláció közgazdasági alkalmazásainak áttekintése során bemutatott ökonometriai, szocioökonometriai és piaci modellek elsősorban a környezet és a gazdaságpolitikai döntések hatásának elemzésére és előrejelzésre alkalmasak. A legigényesebb ezek között a Brookings-SSRC ökonometriai modellje, amely az USA nemzetgazdaságának valamennyi fontosabb szektorát átöleli, valamint a Balderston—Hoggatt-féle piaci modell, amely a fakitermelő iparág termelőinek, kis- és nagykereskedőinek viselkedését írja le. A szerző a továbbiakban foglalkozik a szimulációnak közgazdaságtani hipotézisek vizsgálatára, paraméterbecslésre történő alkalmazásával.

Külön fejezet tárgyalja a szimulációval rokon heurisztika három vetületét: a heurisztikus feladatmegoldó módszereket, a mesterséges intelligencia létrehozásának kérdéseit és az emberi gondolkodás szimulációját. A heurisztika e három vetületét példák segítségével illusztrálja.

Elsőként egy olyan elhelyezési (allokálási) feladat heurisztikus megoldását ismerteti, amelynek direkt megoldása aránytalanul nagy gépidőt igényelne.

A mesterséges intelligenciával kapcsolatban két kérdéssel foglalkozik: az alakzatfelismerési képességgel, illetve a feladatok részfeladatokra bontásának és ezek összehangolt megoldásának képességével.

Végül az emberi gondolkodási folyamat megismerését célzó modellek közül beruházási döntéshozatalt szimuláló modelleket mutat be.

A szintén külön fejezetben tárgyalt játékok a szimuláció speciális fajtájának tekinthetők. Ezek lényege, hogy a szimulált konfliktushelyzetben hozott döntések hatását a számítógép a döntéshozók számára azonnal visszacsatolja és újabb emberi beavatkozást tesz lehetővé.

A könyv elsősorban vállalati gazdasági vezetők egyéni és csoportos oktatására kifejlesztett játékmodelleket ismertet. Értékeli a játékok által az egyes bonyolult rendszerek megismerésében és különböző vezetési stratégiák tanulmányozásában nyújtott segítséget. Kiemeli a játékok alkalmazásával folyó oktatás módszertani előnyeit, impresszivitását. Végül felhívja a figyelmet a játékok egyéb alkalmazási területeire, pl. a meghatározott feladattal szembekerülő csoportok viselkedését tanulmányozó pszichológiai kutatásokra.

A könyv utolsó három fejezete a szimuláció technikai kérdéseivel foglalkozik.

A speciális szimulációs nyelveket tárgyaló fejezet röviden felsorolja a modellleíró nyelvekkel szemben támasztott, elsősorban a rendszerdinamika leírására vonatkozó általános követelményeket. Részletesen ismertet három elterjedten használt szimulációs nyelvet: a blokk-diagramra orientált GPSS-t, az ipari dinamika szemléletmódját tükröző DYNAMO-t és a FORTRAN-bázisú, időben erősen változó struktúrájú rendszerek leírására alkalmas SIMSCRIPT-et. Szemléltetésül közöl egy-egy modell-programot a fenti nyelvek tipikus alkalmazási területéről: egy kiszolgálási rendszer (GPSS), egy ökonometriai modell (DYNAMO), és egy termelési-raktározási rendszer (SIMSCRIPT) leírását.

A szerző a továbbiakban vázolja a speciális szimulációs nyelvek korlátait, felhívja a figyelmet az adott modellhez legmegfelelőbb leírónyelv kiválasztásának problematikájára. Végül összefoglalja a modell-mintavételezési és a heurisztikus módszerek, valamint a vezetői játékok által a programnyelvekkel szemben támasztott igényeket (pl. listakezelés, interaktivitás stb.).

A modellalkotással foglalkozó fejezet elsősorban a sztochasztikus rendszerek leírásával, a rendszerdinamika modellezésével és az ember-gép együttműködésével kapcsolatos általános technikai kérdéseket tárgyalja.

A sztochasztikus rendszerekkel kapcsolatban ismertet egyenletes (ill. egyéb adott) eloszlású valószínűségi változók előállítására szolgáló néhány eljárást és szóráscsökkentő eljárásokat. A rendszerdinamikával kapcsolatos kérdések közül a folytonos állapotterű rendszerek modellezési lehetőségeit, illetve az egyidejű események leírásánál felmerülő esetleges ellentmondások kiküszöbölési módjait érinti. Végül felsorolja az ember-gép együttes, párbeszédes feladatmegoldáshoz szükséges hardware-software eszközöket (time-sharing, interaktív nyelvek stb.).

A könyv befejező része a megalkotott modellek érvényességének és a kísérletek végrehajtásának elvi és gyakorlati kérdéseivel foglalkozik. Részletesen ír a kísérletek kezdeti feltételeinek beállításáról, a kezdeti tranziensek kiküszöbölésének lehetőségeiről, az exogén adatok — esetleg tömeges — beviteléről, a kísérleti eredmények gyűjtéséről, kiértékeléséről, megfelelő formátumú kiviteléről. Végezetül röviden tárgyalja a kísérlet tervezésénél alkalmazható matematikai módszereket.

A fenti áttekintés alapján látható, hogy a könyv átfogó képet nyújt a szimulációs módszernek a számítórendszerek fejlődésével párhuzamos elterjedéséről. A könyv első része gazdag példaanyag segítségével mutatja be az egyszerűbb operációkutatási modellektől az egész gazdaságot átölelő ökonometriai modellek felé ívelő fejlődést. A szerzők nagy gondot fordítanak az egyes példákkal kapcsolatos analitikus módszerek áttekintésére, értékelésére és a két módszer objektív összehasonlítására; vázolják azokat a lehetőségeket, amelyeket a szimuláció nyújt a jövő vállalati vezetése és közgazdasági kutatásai számára.

A heurisztikával és játékokkal foglalkozó fejezetek a szimuláció alkalmazásának további olyan széles területeit vetítik az olvasó elé, mint az ember gondolkodásának kutatása és az oktatás.

A technikai kérdéseket tárgyaló fejezetek szinvonalukat tekintve elmaradnak a könyv megelőző részei mögött. Módszertanilag szerencsésebb megoldás lenne, ha a modellek és kísérletek leírásának követelményeivel foglalkozó 8. és 9. fejezetek megelőznék a leírás eszközéül szolgáló programozási nyelveket tárgyaló 7. fejezetet. További hiányossága ennek a résznek, hogy a modellalkotás általános kérdései helyett csupán egy-egy részletkérdéssel foglalkozik. Ugyancsak meglehetősen elnagyolt a kísérlettervezés matematikájával foglalkozó alfejezet is.

A technikai jellegű kérdések elnagyolását az indokolhatja, hogy a szerzők a könyvet általános bevezetőnek szánták a szimulációs módszer gyakorlati alkalmazása iránt érdeklődő szakemberek számára. A szinvonalas, hasznos olvasmányt elsősorban operációkutatóknak, közgazdászoknak, vállalati gazdasági vezetőknek ajánlhatjuk. Az érdeklődő valamennyi fejezet végén gazdag feladatgyűjteményt és bibliográfiát talál.

Vári Péterné

QUANDT, R. E. (szerk.): *The demand for travel: theory and measurement.* — Lexington, Mass, 1970. Heath Lexington Books. 304 p.

A matematikai közgazdaságtan és az ökonometriai módszerek fokozatosan elterjednek olyan gazdasági és társadalmi problémák területén, amelyek a hagyományos elméleti közgazdaságtan körén kívül voltak, vagy annak a határterületén helyezkedtek el, mert a klasszikus közgazdaságtan által vizsgált piaci viszonyok nem érvényesültek bennük. Ennek nyilvánvaló oka, hogy a gazdaságilag fejlett társadalmak életében számos olyan terület van, ahol a piaci viszonyok a hagyományos elmélet által feltételezett tisztaságukban nem érvényesülnek, hanem egyrészt monopolisztikus, illetve oligopolisztikus elemek, másrészt az állami beavatkozás is szerepet játszanak. Az utóbbi elemek szükségessé tesznek bizonyos fokú előrebecslést és tervezést.

Jellegzetesen ilyen terület a települések, elsősorban városok fejlesztése és a közlekedés. A személygépkocsik számának megnövekedése következtében súlyos közlekedési problémák merültek fel sok városban. Elhangzottak olyan javaslatok, hogy a személygépkocsival való közlekedés növekedését gátolni kellene és a tömegközlekedést kellene fejleszteni. Kérdés azonban, hogy az utazóközönség igénybevenné-e a tömegközlekedési eszközöket, és hogy milyen tarifapolitikával, milyen tömegközlekedési eszközök fejlesztésével lehetne elérni a közutak személygépkocsikkal való terhelésének csökkentését.

Nyilvánvaló, hogy pusztán mérnöki módszerekkel nem lehet a közlekedés tervezésének problémáját megoldani, mert egyrészt a közutakat építő, a tömegközlekedési eszközöket fenntartó állam vagy város oldalán, másrészt a különböző közlekedési lehetőségek között választó egyének oldalán a gazdasági megfontolások elsőrendű szerepet játszanak. A múltbeli trendek egyszerű extrapolálása szintén nem adhat megbízható eredményeket, hiszen éppen az új utazási lehetőségek hatásának felmérése, az irántuk várható kereslet előrebecslése lenne a kérdés lényege. Ezért nyújthatnak nagy segítséget az olyan matematikai közgazdaságtani modellek, amelyek egyrészt az elméleti közgazdaságtan fogalmaiból épülnek fel, másrészt kvantifikálhatók. Az ebben a könyvben összegyűjtött — részben új, részben folyóiratokban már közölt — tanulmányok ezt a célt kívánják szolgálni.

Az első tanulmány (K. J. Lancaster) a fogyasztói viselkedés új elméletét írja le, anélkül hogy magára az utazás problémájára kitérne. Ennek az elméletnek lényege, hogy a fogyasztó haszon függvényében nem maguk a fogyasztott javak, hanem a javaknak különböző tulajdonságai szerepelnek. Egy-egy jószágnak több tulajdonsága lehet, amelyet a fogyasztó értékel, viszont ugyanaz a tulajdonság több jószágot is jellemez, vagyis e tulajdonság kívánt szintjét különböző javakkal el lehet érni. A szerző a „javak" kifejezés helyett a „tevékenység" kifejezést is használja, jelezve, hogy nem szükségképpen egy kézzelfogható jószágról van szó. A modell középpontjában a „fogyasztási technológia struktúrájának matrixa" áll, amelynek együtthatói kifejezik, hogy egy-egy jószág (tevékenység) milyen mennyiségben szolgáltatja a fogyasztó haszon függvényében szereplő különböző tulajdonságokat. A fogyasztás ilyen modelljének több előnye van a hagyományos modellhez viszonyítva: 1. reálisabbá teszi a helyettesítési alternatívákat (például két személygépkocsi sok tulajdonság tekintetében azonos, viszont egy bizonyos tulajdonság tekintetében különbözik), 2. lehetővé teszi az új javak nehézség nélküli bevezetését a modellbe (mert azok csak néhány tulajdonság tekintetében térnek el a hagyományosaktól).

A következő fejezet (A. G. Wilson) a hagyományos gravitációs modell újrafogalmazása, amely szerint a két pont közötti közlekedés e kettőnek tömegétől (pl. népességszámától) és távolságuktól függ. Utána Quandt és W. J. Baumol bemutatják a fenti új fogyasztási modell alkalmazását az utazás elemzésére. Az „absztrakt közlekedési módok" modelljének nevezi megközelítésüket. Ez aztjelenti, hogy nem konkrét közlekedési eszközök igénybe vételének egymáshoz viszonyított keresletét vizsgálják, hanem a különböző közlekedési eszközök által nyújtott tulajdonságok iránti keresletet. Tehát utazás-keresleti függvényükben az utazási idő, költség és a kapcsolatok sűrűsége (mennyi időnként indul vonat, repülő stb.) szerepelnek olyan változók mellett, mint a kérdéses település népességszáma, iparosodottsága, egy főre jutó jövedelme. A keresleti függvény alakja a Cobb—Douglas függvényére emlékeztet, a hatványkitevők elaszticitásokat fejeznek ki. Ezek segítségével becsülni lehet az utazási megrövidítésének, a tarifa csökkentésének stb. hatását a kérdéses közlekedési eszköz igénybevételére.

A kötet szerkesztőjének két további tanulmánya (az egyiknek társszerzője Kan Hua Young) foglalkozik e modell módosításaival és gyakorlati alkalmazásával. Kalifornia városok közötti közlekedési adatokból becsülték a modell paramétereit. Két további tanulmány (A. J. Blackburn) foglalkozik még a fenti fogyasztási modellnek az utazási keresletre való alkalmazásával.

Két tanulmány (L. N. Moses és H. F. Williamson, illetve M. E. Beesley) az utazással töltött idő negatív hasznát (disutility) próbálja megbecsülni egy chicagói, illetve egy londoni kérdőíves felvétel alapján. Ezt a negatív hasznot, illetve az utazási idő megtakarítást közlekedési eszközökként az egyén jövedelmének függvényében vizsgálják. A modellekből arra a kérdésre keresnek választ: mennyivel olcsóbbnak (és gyorsabbnak) kell lennie a tömegközlekedésnek ahhoz, hogy a személygépkocsi tulajdonosok egyrésze a gépkocsi helyett a tömegközlekedést vegye igénybe a munkahelyre való utazáshoz. Ugyanezt a kérdést vizsgálja egy tanulmány leedsi adatok alapján a diszkriminánsanalízis módszerével.

A. R.

TUDOMÁNYOS ÉLET

Szakértői konferencia a hosszú távú, a pénzügyi és az ártervezés matematikai módszereiről

A Magyar Közgazdasági Társaság matematikai-közgazdasági, népgazdasági-tervezési és pénzügyi szakosztályai 1972 májusában háromnapos konferenciára hívták össze a hosszú távú, pénzügyi és ártervezés szakértőit.

A konferencia a matematikai módszerek alkalmazásának legfontosabb tapasztalatait összegezte e három fontos területen. Az elhangzott előadások és hozzászólások egyrészt az alkalmazott módszereket, a számításokból levont következtetéseiket ismertették, másrészt vitatták azokat a közgazdasági problémákat, amelyek megoldására módszereiket kidolgozták vagy amelyekre éppen módszereik alapján felfigyeltek.

A hosszú távú tervezésben a matematikai módszerek kutatására és alkalmazására irányuló munka már néhány évvel ezelőtt megkezdődött. Augustinovics Mária bevezető előadásában e munkák szervezeti feltételeinek kialakításával és az eddigi hazai tapasztalatokkal foglalkozott. Kiemelte, hogy a hosszú távú matematikai tervezés két területen viszonylag kidolgozottabb: egyrészt a hosszabb időhorizontú résztervek (pl. energiaterv) készítése, másrészt az újratermelési folyamat egészének működését leíró, teljesen aggregált, és erősen elméleti jellegű növekedési modellek kidolgozása területén. Emellett egyedülálló, úttörő jellegű kísérlet a népgazdaság dezaggregált, sokszektoros hosszabb távú tervezési modelljének kidolgozása.

A modellezési munkák kedvezőbb feltételeinek megalapozására szolgál az OT Távlati Tervezési főosztályán kialakított *adat- és programtár*, amelyről Székely Béla tartott beszámolót. Ez az adat- és programtár biztosítja a hagyományos módszerű elemzések és a matematikai modellek számára egyaránt hozzáférhető egységes adatbázist. Az adatrendszer fő fejezetei tartalmazzák a bázisidőszak makroökonómiai idősorait és ágazati kapcsolati mérlegeit, a tervidőszakra vonatkozó legfontosabb előirányzatok ágazati variánsait, valamint a modellek inputjait és outputjait. Ehhez kapcsolódnak a dokumentációkra és a különböző aggregációs eljárásokra vonatkozó kiegészítések. Az adattárhoz szervesen kapcsolódó programtár a különféle adategységeket kezelő, a háttérmemória kezelésére vonatkozó, valamint operatív szubrutinokból áll. A paraméterekkel vezérelhető felhasználói programok lehetővé teszik a tervezők közvetlen kapcsolatát az adatbázissal. Ilyen például az input-output elemzésekhez jól felhasználható mátrix-operációs, illetve a standard input-output elemző programok.

Hosszú távú tervezési célokra szolgál az ún. *kapacitásvizsgáló modell.* A modellel végzett számítások első eredményeit Bod Péter ismertette. Ez a modell az ágazati és a központi tervek közötti dialógusra épül. Egy termelési technológiát feltételez; a fejlesztési terveket, a kapacitásokat és a készletek alakulását endogén módon határozza meg. Nem a termelést, hanem a termelés anyagi lehetőségeit, tehát a kapacitásokat adja meg — innen származik a modell elnevezése.

Szepesi György egy *dinamikus szabályozott input-output modellel* végzett kísérleti számítások eredményeit ismertette. A modell kiinduló feltételezése, hogy a ráfordítási szerkezet a nagy beruházások következtében diszkréten változik, a kibocsátási szerkezet viszont folyamatosan. A gazdaság egészében a stabil egyensúlyi növekedés felé való közeledés irányzata tapasztalható. Ezek a feltevések a *Neumann-modell* és az *időoptimális modell* szintézisére vezettek, ugyanis a Neumann-modellel írható le az adott technológiához tartozó egyensúlyi növekedés, a technikai változások következtében fellépő átmeneti szakaszok lerövidítését pedig az időoptimálási modellel lehet megközelíteni.

Fekecs Gábor a hosszú távú tervezésben több változatban kidolgozott *ágazati fejlesztési variánsok népgazdasági kombinálásának* problémájával foglalkozott, s az úgynevezett HOVÁ (hosszútávú válogató) modellel végzett számítások kezdeti eredményeit ismertette. A modell 46 szektoros és mintegy 200 ágazati tervvariánsból válogatja össze

— lineáris programozási feladat keretében — a konzisztens népgazdasági kombinációkat adó szektorterveket.

AUGUSTINOVCS MÁRIA egy *késleltetett dinamikus hosszú távú* modellcsaláddal végzett számítások eredményeit értékelte. Ez a modell nem valamely optimális vagy konzisztens struktúra kialakítására törekszik, hanem a gazdasági folyamatok időbeli lefolyását vizsgálja. A hosszú távú növekedési folyamatok egyik fontos jellemzője, hogy a beruházást viszonylag hosszú időköz választja el az újonnan létrehozott állóeszközökön megjelenő termeléstől. A modell ezt az időbeli eltérést, illetve ennek sajátosságait, hatásait elemzi az *elosztott késleltetés* módszerével. A számítások a modell egy zárt és egy nyilt (lineáris programozási) változatával folynak.

A *külső feltételek bizonytalanságának és alternatív gazdaságpolitikák kialakításának* problémájával foglalkozott TARDOS MÁRTON. Kutatásai főként a nemzetközi gazdasági kapcsolatok modellezésére irányultak. E célra egy többszakaszos, ÁKM bázisú lineáris programozási modellt írt fel, amelynek felhasználása során az egzogén paraméterek konfidencia-intervallumának alsó, felső és középértékeivel kellene számolni. Ilyen nagyszámú egyenértékű változat meghatározására a rendelkezésére álló számítógépi kapacitás nem ad lehetőséget. Konkrét számításaiban 12 különböző, egyenértékű fejlődési fő utat írt le. Legfontosabb következtetése, hogy semmiféle módszerrel sem lehet kellő információt kapni a külkereskedelemmel kapcsolatban álló ágazatok hosszú távú fejlesztési döntéseinek megalapozásához, ezért a legbiztosabb stratégia a gyors megtérülésre és a beruházott állóeszközök gyors leírására való törekvés.

Egy kisebb szerzői kollektíva — DÁNIEL ZSUZSA, JÓNÁS ANNA, KORNAI JÁNOS, MARTOS BÉLA — munkájáról beszámolva Jónás Anna egy aggregált, 12 szektoros dinamikus növekedési modellel végzett számítások eredményeit ismertette. A modell *15 éves növekedési pályákat* ír le. A termelést a modellben technikai paraméterek — az állóeszköz-fajlagos, a készletnorma, az anyaghányad, a selejtezési hányad — határozzák meg, a fogyasztási hányadot és a beruházások szektorok közötti elosztását gazdaságpolitikai jellegű paraméterek szabályozzák. A számításokból levont következtetések közül kiemelte, hogy a növekedés sokkal jobban függ az állóeszközök kihasználásától és szektoronkénti megoszlásától, mint a fogyasztás és felhalmozás arányától.

SZAKOLCZAI GYÖRGY az INFELOR keretében folyó, a hosszú távú tervezéshez kapcsolódó munkákról számolt be. Valamennyi munka eredeti célja az *ártervezés ökonometriai modelljének megalapozása* volt. Ismertette azokat a 14 szektoros ÁKM előrebecsléseket, amelyeket több más modell adatbázisként felhasznált, majd foglalkozott az *állóeszközállomány optimális növekedési ütemének meghatározására* felírt modellel. A beruházás és a növekedés összefüggéseit, valamint a demográfiai és társadalmi változásokat szimulációs módszerrel vizsgálták.

PÖLÖSKEI PÁL az állami iparra vonatkozó hosszú távú *konzisztens előrebecsléseket* tárgyalta. Az ágazatok egymástól függetlenül becsült legfontosabb mutatószámainak konzisztenciáját termelési függvények biztosítják oly módon, hogy a kapott konzisztens értékek és az eredeti előrebecslések közötti különbség súlyozott négyzetösszege a legkisebb legyen. Szerinte az így kapott számok megbízhatósága sokkal jobb az önálló extrapolációval kapott előrebecsléseknél.

A tervezési modellek módszertani jellegzetességeit tárgyaló előadások mellett a konferencia előadói és hozzászólói érdekes és izgalmas közgazdasági problémákat is felvetettek.

ÁCS MAGDA a népgazdaság legfontosabb makroökonómiai mutatóinak elemzésével foglalkozott, e mutatók 1950—70-es idősorainak vizsgálata alapján. BOLDOCZKY JÁNOS az életszínvonal hosszú távú tervezésének eddigi eredményeit és problémáit tárgyalta.

Az előadásokat követően kialakult rendkívül élénk vita még a késő esti „kerekasztal-értekezleten" is folytatódott. Többen kétségesnek tartották a népgazdaság egészére kiterjedő részletes hosszú távú mennyiségi tervek kidolgozásának realitását, s különösen nehéznek, bizonytalannak találták a nemzetközi munkamegosztásba való bekapcsolódásunk konkrét lehetőségeinek hosszú távra való pontos felmérését.

*

A konferencia második napja a *szabályozó rendszer modellezésének* kérdéseivel foglalkozott.

Ezen a területen a matematikai módszerek alkalmazása még sokkal inkább a kezdetén tart, mint a hosszú távú tervezésben. Ezért a vita nem annyira a módszertani, hanem inkább a közgazdasági kérdések körül összpontosult. Az előadók és a hozzászólók főként a modellezés tartalmi kérdéseinek tisztázására törekedtek.

TARDOS MÁRTON *a vállalatok és a központi szervezetek kapcsolatának problémáit* elemezte. Hangsúlyozta a közvetlen és a közvetett irányítás különválasztásának szükségességét. Szerinte a közvetett gazdasági irányítás körén belül meg kellene teremteni az autonóm vállalkozás intézményes és szervezeti feltételeit. Ebben a körben a vállalatoknak az eddiginél nagyobb kezdeményezési lehetőséget kellene biztosítani, és a szabályozási rendszer egyes elemeinek korszerűsítését csakilyen körülmények között lehet a siker reményében megkísérelni.

SZAKOLCZAI GYÖRGY a gazdasági *szabályozó rendszer konzisztens tervezésének* szükségességét hangsúlyozta, s a szabályozási rendszer bizonyos elemeinek funkcióit elemezve, vázolta ezek módosítására vonatkozó elképzeléseit.

DEÁK ANDREA a *pénzügyi megkülönböztetések (preferenciák és diszpreferenciák) rendszerének* problémáit ismertette, s a szabályozó rendszerünkben tapasztalható belső inkonzisztencia feloldásának sürgető szükségességét hangsúlyozta.

A tőke-munka helyettesítésének és az erőforrások értékelésének kérdésével foglalkozott ANTAL LÁSZLÓ. Megítélése szerint az erőforrások értékelésének az erőforrások hozadékához kell alkalmazkodnia, és az erőforrások utáni normatív elvonások arányának az erőforrások hozadékának arányát kell kifejeznie. Az eszközigényesség és a vállalati jövedelmezőség között meglepő mértékű negatív korrelációból arra következtetett, hogy árrendszerünk nem termelési ár típusú.

KOVÁCS ÁLMOS a *nyereség kötelező megosztását előíró jövedelemszabályozási rendszert figyelembe vevő vállalati optimalizációs modellekkel* foglalkozott. Elemzését kezdetben egy egyszerű, majd egy programozási jellegű modellre alapozta. Mindkét módon kimutatta, hogy a nyereség kötelező megoszlását előíró jövedelemszabályozási rendszer nem vezethet az erőforrások optimális allokációjára. Ennek az az oka, hogy ebben a rendszerben nem magát a nettó nyereséget vagy a nettó termelést, hanem egy abból származtatott viszonyszámot kell maximálni. Ez pedig nem vezet az eredmény maximálására.

Az előadásokat követő vitában a hozzászólók — KOPÁTSY SÁNDOR, MEGYERI ENDRE, RÉVÉSZ GÁBOR — egyrészt a matematikusok és közgazdászok közötti jobb együttműködést hangsúlyozták, másrészt szabályozó rendszerünk megítéléséről, a központi tervező hatóságok, illetve a piaci mechanizmus hatókörének szerepéről folytattak élénk eszmecserét.

*

A konferencia harmadik napján az *ártervezés* matematikai módszereit tárgyalták. Ezen a területen a matematikai modellezésnek nagyobb hagyományai vannak. KÓNYA LAJOS bevezető előadásában hangsúlyozta e munkák rendkívüli jelentőségét, s aláhúzta az értékfolyamatok tervezésének növekvő szerepét.

Az Árhivatalban folyó ártervezési munkákat GLATTFELDER PÉTER ismertette. Az elsősorban orientációs célokat szolgáló modell-elemzések mellett az operatív munka alátámasztására folyamatosan készülnek input-output elemzések és termékmodellszámítások. Szükségesnek tartotta a hasonló területen működő intézmények szervezett együttműködését, és a különböző modellek felhasználását megkönnyítő egységes adatbázis megteremtését.

KOCKA LÁSZLÓNÉ a *világpiaci áras ármodellel* kapcsolatos kutatásról számolt be, és érdekes megállapításokat tett a hazai és világpiaci árarányok eltéréseiről.

Az ártervezés ökonometriai modellje — amelyet SZAKOLCZAI GYÖRGY ismertetett — a hagyományos input-output áregyenleteket népgazdasági és ágazati szintű mennyiségi és pénzügyi konzisztencia-feltételekkel egészíti ki. Az árak meghatározása a költségelemek egymástól független előrebecslésén alapul. A modell nem csupán ártervezésre, hanem továbbfejlesztett változatában a gazdasági szabályozó rendszer konzisztens tervezésére is alkalmas.

GÁBOR GYŐZŐ a Közgazdaságtudományi Intézetben Simon György által kezdeményezett *népgazdasági árprogramozás* modelljének fő feltevéseit és összefüggés-rendszerét ismertette. A számítások eredményei egy népgazdasági volumentervnek és a legfontosabb erőforrások felhasználásának optimális értékrendszerét adják meg. Az előadó szerint a számítások eredményei egy határbázison álló optimális árrendszer közelítésére felhasználhatók.

RÉTI JÁNOS a Neumann modell alapján számítható *optimális ár- és termelési struktúrával* foglalkozott. Ez a modell alkalmas a növekedés Neumann-féle egyensúlyi útjához tartozó mennyiségi és árrendszer kiszámítására. Az eredmények a maximális növekedési ütemet és az egyensúlyi nyereségrátát is megadják. Az ismertetett algoritmus a kétszeményes matrixjátékok programozási megoldásán alapul. A feladat megoldhatóságát az előadó elméleti oldalról bizonyította, a gyakorlati számításokra még nem került sor.

A vitában a hozzászólók — Rácz László, Szira Tamás és Vass Kálmán — egy oldalról az ártervezés módszertani nehézségeit és elméleti feltevéseit taglalták, más oldalról az előző napi vita folytatásaképpen a *jó modellezést megalapozó közgazdasági elméleti kutatások* nélkülözhetetlen továbbfejlesztését hangsúlyozták.

Ezt a gondolatot domborította ki az ülést befejező zárszavában Kádas Kálmán, a konferencia elnöke: ,,a közgazdaságtudomány reneszanszára van szükség", hogy a népgazdasági folyamatok tervezésének és irányításának hatékonysága számottevően javuljon.

A konferencia tanúsága szerint ennek a fellendülésnek megteremthetők az objektív és szubjektív feltételei.

Sz. Gy.—V. F.-né

„Operációkutatás a gyakorlatban "72" konferencia (Pécs, 1972. május 17—20.)

1972. május 17—20-ig Pécsett, a Technika Házában ,,Operációkutatás a gyakorlatban '72" címmel operációkutatási konferenciát rendezett a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási Szakosztálya és a Társaság pécsi szervezete, a Bólyai János Matematikai Társulat Matematikai Alkalmazási Szakosztályának és a Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-közgazdasági Szakosztályának közreműködésével.

A konferencián 370-en vettek részt, 74 előadás hangzott el. A résztvevők magas száma kifejezi azt a nagyfokú érdeklődést, amely az utóbbi években megfigyelhető a legkülönfélébb diszciplinák területén az operációkutatási módszerek alkalmazása és kutatása iránt.

A konferencia a gyakorlatot, az operációkutatás ipari, építőipari, közlekedési, mezőgazdasági, gazdaságtervezési, termelésirányítási alkalmazásait helyezte előtérbe. Az előadások többsége tényleges problémák operációkutatási megközelítésével, megoldásával, vagy modellekben elemzett feltárásával foglalkozott. Egységes volt az a vélemény, hogy operációkutatás nincs matematika nélkül, hogy a számítógép ehhez legtöbbször már nélkülözhetetlen, de nem kisebb a jelentősége a problémát verbálisan megfogalmazó rendszerelemzésnek, a gazdasági-hatékonysági szempontok pontos megfogalmazásának, a valóban szükséges információk felsorolásának és az ezeket előállító adatfeldolgozási rendszer megszervezésének. A konferencia ebben az egységes szemléletben (rendszerszemléletben) eredményesen mutatott rá az operációkutatás szerepére, természetesen szem előtt tartva azt a lényeges aspektust, hogy az operációkutatás gyakorlata nem fejlődhet az őt megalapozó matematikai elmélet, a modellek és módszerek fejlődése nélkül.

A konferencia összesen négy plenáris ülést tartott. A plenáris üléseken elhangzott előadások témái tükrözték az operációkutatás legfontosabb jellegzetességeit. A konferencia nyitó beszédében elhangzott az a megállapítás, hogy az operációkutatásra nem adható egyetlen definíció, de kiemelhetők és elhatárolhatók a legfontosabb vonásai. Így a plenáris üléseken az alábbi témák szerepeltek:

Rendszerszervezés, rendszerszemlélet és operációkutatás (Jándy Géza).
A matematika és operációkutatás kapcsolata (Prékopa András).
A komputerek szerepe az operációkutatásban (Heppes Aladár).
Az oktatás és az operációkutatás (Hosszú Miklós).

A rendszerszemlélet és az operációkutatás kapcsolatával foglalkozó előadás a rendszerelmélet legfontosabb fogalmait, definícióit foglalta össze abból a nézőpontból, hogyan lehetne az operációkutatás szemléletmódját javítani.

A matematika és az operációkutatás kapcsolatáról tartott előadás izgalmas kérdése volt a két terület elhatárolása. Az előadás megállapította, hogy az operációkutatás nem matematika, a matematika az operációkutatás módszertanát szolgáltatja.

Az operációkutatás és az elektronikus számítógépek felhasználásának szoros kapcsolata nem vitatott. Az e területről tartott előadás elsősorban a számítógépek felhasználásának hazai problémáit és tapasztalatait elemezte. Szó volt ezzel összefüggésben a gépvásárlások, a gépcsaládok kiválasztásának kérdésétől kezdve a számítógépekkel rendelkező költségvetési szervek és vállalatok eltérő adottságaiból adódó konzekvenciákon keresztül a szimulációs lehetőségekig.

Az operációkutatás hazai továbbfejlődése szempontjából kiemelt jelentősége van az oktatás hatékonysága emelésének. Sokat vitatott kérdések kerültek napirendre ezzel összefüggésben. Így a matematikai módszertan és a gyakorlati alkalmazások megfelelő arányának, azok egymásraépülésének meghatározása, a tanfolyamos és intézményes oktatás megfelelő szintű összekapcsolásának problémái voltak az ülés fontosabb kérdései.

Említettük már, hogy a plenáris üléseken kialakult és hangoztatott álláspontok a továbbhaladás, az operációkutatás gyakorlatának továbbfejlődése szempontjából voltak érdekesek. Megállapítható volt, hogy az utóbbi években végbement gyors fejlődés a kutatások bizonyos szétaprózódásával járt együtt. A résztvevők véleménye szerint a terminológiai viták helyett arra kell törekedni, hogy az operációkutatás nagyobb koncentrációját alakítsuk ki. Erre kitűnő lehetőséget nyújtanak az ilyen jellegű konferenciák.

A vitában résztvevők elmondták véleményüket az operációkutatási módszerek hazai alkalmazásának nehézségeiről. Ezzel összefüggésben nem csupán a felvetődő problémák természetéről volt szó, hanem az alkalmazás tárgyi és személyi feltételeinek biztosításánál adódó nehézségekről is. Bármennyire is nagyfokú volt az utóbbi években az előrehaladás, a gyakorlatban még találkozhatunk bizonyos érdektelenséggel.

Külön kiemelhető a résztvevőknek az a véleménye, hogy az operációkutatást a ,,helyére'' kell tenni. Az operációkutatás önmagában csupán segítség, eszköz a problémák megoldásában. Ezért az operációkutatási módszereket kellő óvatossággal kell kezelni, s az alkalmazás hatékonyságát az alkalmazó mérnökök, közgazdászok, matematikusok, szociológusok együttes tevékenységével kell fokozni.

A konferenciára beküldött előadásokat három szekcióban vitatták meg.

Az előadások megközelítő csoportosítása témák szerint a következő:

matematikai jellegű	23 %
gazdasági alkalmazás	43 %
számítástechnikai problémák	10 %
műszaki alkalmazások	14 %

Tekintsük át kissé részletesebben a témaköröket. Nem szándékozunk kitérni egyes előadások ismertetésére, méltatására. Elsősorban arra fordítjuk a figyelmet, hogy az egyes kategóriákban melyek voltak azok a kérdések, amelyek különösen gyakran visszatértek az előadásokban.

A *matematikai jellegű előadások* egyik része egy-egy újabb kutatási eredmény ismertetését tűzte céljául, a másik része néhány kissé árnyékba került vagy még ezideig fel nem használt matematikai apparátusra hívta fel a hallgatóság figyelmét. Egyaránt találkozunk optimális folyamat-problémával, idősorelemzéssel, tömegkiszolgálási problémák vizsgálatával. Hasonlóan előfordultak a gazdasági programozáshoz tartozó előadások; indifferens programozás, dekompozíció, SUMT módszer. Talán kicsit nagyobb hangsúlyt kapott az előbbieknél a 0—1 programozás módszereinek vizsgálata, valamint néhány gráfelméleti kérdés.

A *gazdasági alkalmazás* témakörébe soroltuk az előadásoknak közel a felét. Ezek az előadások csaknem kizárólag olyan módszerekkel, modellekkel foglalkoztak, amelyek alkalmazása már megvalósult, vagy jelenleg folyamatban van. Tulajdonképpen ez az a kategória, ahol legjobban lemérhetjük az operációkutatás alkalmazásának hatékonyságát.

Elsősorban ki kell emelni azokat az előadásokat, amelyek különböző vállalatok konkrét problémáinak megoldását ismertették. A vállalati szinten felmerülő kérdéseket ismét elég jól elkülöníthetjük egymástól. A vizsgálatok egyik csoportja a vállalat döntéshozását segítő, a gazdasági tervezést szolgáló modellek körébe sorolható. Ebben a csoportban találkozhattunk a részesedési alapot maximáló és a gyártási időt minimáló modellekkel egyaránt. Több előadás foglalkozott a nagyvállalatok középtávú tervezésével. A vállalati vizsgálatok másik csoportja közelebb állt a technológiai folyamatokhoz. Itt a figyelem elsősorban az egyes műhelyek berendezésére, a berendezések optimális elhelyezésére irányult. Ugyanakkor feltüntek olyan szorosan ide kapcsolódó problémák, mint a gépjavítások gazdaságossági kérdései és a tervszerű megelőző karbantartás vizsgálata. A vállalati vizsgálatok harmadik témaköre a vállalat készletgazdálkodását figyelte. Több előadás foglalkozott a minimális költséggel megvalósítható készletezési politika kialakításával.

A gazdasági alkalmazások másik nagy csoportja az úthálózattal kapcsolatos kérdéseket vizsgálta. A vizsgálatok egy része szállítási problémákhoz jutott, más része a jövőbeli úthálózat kialakításának problémáihoz. Az úthálózat kialakításának vizsgálatánál különösen nagy figyelmet kapott a vasúti forgalom és annak központi irányítása.

A gazdasági alkalmazások harmadik nagy csoportját a mezőgazdasághoz kapcsolódó előadások képezték. Ebben a témában került előtérbe a matematikai módszerek felhasználása olyan formában, hogy a mezőgazdaság tervezése egy szabványosított modellrendszer segítségével történne. Ugyanakkor érdekes részproblémák megoldásával is megismerkedhettünk. Megemlítjük többek között az állattenyésztési, értékesítési és feldolgozási modellt, a műtrágya termelés modelljét, valamint egy szimulációs modellt a nagyüzemi termékbetakarításra.

A gazdasági alkalmazások esetében a vizsgált problémák matematikai apparátusa túlnyomórészt a lineáris programozásra szorítkozik. Egy másik eléggé aktuális segédeszközként a gráfelméletet említhetjük. Ez különösen a szállítási és úthálózat problémák vizsgálatánál játszik jelentős szerepet.

A *számítástechnikai problémák* körébe csak azokat az előadásokat soroltuk be, amelyek egy-egy algoritmus kidolgozásával, javításával foglalkoztak, vagy pedig egy önálló programrendszert ismertettek. A matematikai előadások már alig foglalkoztak lineáris programozással, a gazdasági alkalmazásoknál viszont ez a módszer még jelentős szerepet kapott. Mivel a számítástechnika közelebb áll az alkalmazásokhoz, az előadások zöme még a lineáris programozás konkréten felmerülő problémáit vizsgálta. Ismertettek olyan lineáris programozási programcsomagot, amely azáltal igyekszik kiküszöbölni a hibalehetőségeket, hogy a feladat felépítésétől, a mátrixgenerálástól az ellenőrző számításokig mindent automatikusan végez. Egy ilyen rendszer különösen a rendszeres alkalmazás esetén nagy segítség. A lineáris programozás számítástechnikai problémái közül kiemelkedik az instabil feladatok bázisának újrainvertálási kérdése.

A programrendszerek ismertetésénél kiemeljük a beruházási technológiák költségbecslésére készült program csomagot, egy többlépcsős tervezési modellt, valamint a nyomdaipar számítógépes gyártásprogramozásának ismertetését. A műszaki alkalmazásokat tárgyaló előadásokat különválasztottuk a gazdasági alkalmazásoktól. A legnagyobb figyelem a vízgazdálkodásra irányult. Több előadás foglalkozott öntözőhálózatok kialakításával, vízlevonulási tervekkel és tározórendszerek méretezésével. A híradástechnika területéről megemlítjük a hírközlő kábelek sorolásával, a két fázisú kiszolgálási rendszer megvalósításával, valamint az áramkörök tervezésének gazdaságossági kérdésével foglalkozó előadásokat. Műszaki vetületében hallhattunk előadást az anyagok optimális keveréséről.

Az *egyéb kategóriába* soroltuk azokat az előadásokat, amelyek már nem kifejezetten az operációkutatás módszereivel foglalkoztak. Ezek felmérték az operációkutatás hazai helyzetét, a gazdasági vezetők és az operációkutatás kapcsolatát. Külön említést érdemelnek azok az előadások, amelyek az operációkutatás oktatásának hazai és külföldi tapasztalatait összegezték és néhány, a jövőre vonatkozó elképzelést ismertettek.

Összefoglalásképpen az alábbi megjegyzéseket tehetjük: módszertani oldalról az előadások alapján a legaktuálisabb témakörök a lineáris (és nem lineáris) programozási módszerek, a gráfelmélet, a szimuláció és a sztochoasztikus vizsgálatok voltak. Az alkalmazások túlnyomó többséggel mikrogazdasági jellegűek voltak, s alig volt olyan előadás, amely makrogazdasági problémákkal foglalkozott. Örömmel üdvözölhetjük azt a tényt, hogy a konferencia résztvevőinek nagy része nem csak kutatóintézetektől, hanem termelő vállalatoktól érkezett és aktív részvételük mutatja talán legjobban, hogy hazánkban is előtérbe került az operációkutatás tényleges alkalmazása.

A konferencia — mint az előzőekből kiderült — nem volt tudományos vitafórum, hiszen ehhez részletkérdések mélyre ható elemzése szükséges. Ha jellemezni akarnánk, akkor talán a „tájékozódási fórum" megjelölés fejezné ki közelebbről jellegét. Az egyes üléseken elhangzott előadások, hozzászólások, a szünetekben folytatott beszélgetések hasznos információcsere lehetőségét nyújtották még akkor is, ha a véleménycserék időnként eléggé általános kérdésekről folytak.

Ligeti István—Móczár József—Sivák József

8. Nemzetközi matematikai programozási szimpózium

A Matematikai Programozási Társaság közli, hogy a 8. Nemzetközi Matematikai Programozási Szimpóziumot a Stanford Egyetemen tartja 1973. augusztus 26—31. között.

A matematikai programozás elméleti, számítási és alkalmazási kérdéseivel foglalkozó előadások nyújthatók be. Az előadáskivonatokat 1973. március 1-ig kell megküldeni a Program Bizottság elnökének: Professor George B. Dantzig, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, California 94305, USA.

A szimpóziumra vonatkozó egyéb információt Prof. Richard W. Cottle ad, címe ugyanaz.

V. Magyar operációkutatási konferencia

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya a Bolyai János Matematikai Társulat Matematikai Alkalmazási Szakosztályának és a Neumann János Számítógéptudományi Társaság Operációkutatási Szakosztályának támogatásával 1973. október 1—4-én a balatonfüredi Marina Szállóban rendezi meg az V. Magyar Operációkutatási Konferenciát.

A konferencia célja a Budapesten, Veszprémben, Debrecenben és Pécsett rendezett korábbi konferenciák folytatásaképpen a hazánkban folyó operációkutatási és hasonló jellegű kutatómunka újabb eredményeinek áttekintése, és a kutatók közötti, már rendszeressé vált kapcsolat fenntartása.

A konferencia programjának központjában az operációkutatási és egyéb matematikai módszerek közgazdasági alkalmazása áll:

1. *A matematikai módszerek felhasználása a népgazdasági, ágazati és vállalati szintű, rövid, közép- és hosszú távú tervezésben és előrejelzésben.*
2. *A gazdasági tervezés és előrejelzés matematikai módszertani problémái.*
3. *A matematikai tervezés és előrejelzés számítástechnikai problémái.*
4. *A regionális tervezés és telepítés kérdései.*
5. *A kockázat problémája a gazdasági tervezésben és elemzésben.*
6. *Operációkutatási és ökonometriai módszerek.*

Szervező Bizottság: Heppes Aladár, Ormós Zsolt (a Bizottság titkára), Pongrácz Tibor, Szakolczai György (a Bizottság elnöke) és Szép Jenő.

Programbizottság: Bod Péter, Forgó Ferenc (a Bizottság titkára), Jándy Géza, Krekó Béla, Prékopa András, Szakolczai György és Szép Jenő (a Bizottság elnöke). A beérkező előadások témájától függően a Programbizottság elnöke további szakértők közreműködését is fogja kérni.

A konferencia résztvételi költsége 1000,— Ft. Ez az összeg magában foglalja az előadások kivonatát tartalmazó kötet elkészítését és szétküldését, a szállodai elhelyezést és a teljes ellátást.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat nyomdába érkezett: 1972. VIII. 16. Terjedelem: 12,25 (A/5 ív)
Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 24,– Ft
Előfizetés egy évre: 40,– Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST