SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

*

E szám szerzői:

BOD PÉTER kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézete tudományos főmunkatársa, dr. DÉNES FERENC, a Számítástechnikai Oktatási Központ igazgatóhelyettese, dr. FRIGYES ERVIN kandidátus, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézetének csoportvezetője, dr. GLATTFELDER PÉTER, az Országos Anyag- és Árhivatal Számítástechnikai és Módszertani Osztályának vezetője, KOVÁCS JÁNOS kandidátus, tudományos csoportvezető, MTA Közgazdaságtudományi Intézete, RÉTI JÁNOS, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat kutatója, dr. SCHÜCK TAMÁS, operációkutató, DATORG, SIMON BÉLÁNÉ, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete főelőadója, SIVÁK JÓZSEF, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete előadója, STAHL JÁNOS, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat osztályvezető-helyettese, dr. SZÉP JENŐ, a matematikai tudományok doktora, egyetemi tanár, Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, VÁCZI PÁL, a Magyar Vegyipari Egyesülés Mérnöki Irodája programozója.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI. Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215—96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők a Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488., az AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban: Budapest V., Váci utca 22. Telefon: 185—612.
Előfizetési díj egy évre: 40,— Ft

Réti János

Az általános gazdasági egyensúly Neumann-modelljének egy játékelméleti megoldása

Bevezetés

Az ebben a dolgozatban ismertetésre kerülő modell Neumann János, magyar származású amerikai matematikustól ered 1932-ből. A modell közeli rokonságban van a Walras-féle egyensúlyi modellek családjával, de bizonyítható a kapcsolata a Leontieff-modellekkel is. Ezekkel az összefüggésekkel részletesen foglalkozik Bródy András doktori disszertációja [3].

A Neumann-modell csak a 60-as években került a közgazdasági kutatások előterébe. Néhány év alatt a téma irodalma igen nagyra nőtt, a vizsgálatok nagy része a Neumann-gazdaság feltételrendszerének és működésének közgazdasági-elméleti kutatására irányult. Itt csak az egyik legkorábbi, Kemeny—Morgenstern—Thompson-tól származó tanulmányra hivatkozunk [2].

A vizsgálatok másik, viszonylag szerényebb része a modell algoritmizálásával foglalkozik, ezzel kapcsolatban Weil nevét említjük [4] [5]. Az algoritmizálás egyáltalán nem triviális feladat, sokáig csak a megoldás egzisztenciáját sikerült bizonyítani. Az itt következő eljárás a kétszemélyes mátrixjátékoknak a lineáris programzásból ismert tételeire épül és kidolgozott szimplex program esetén igen könnyen gépesíthető.

1. A modell ismertetése

A modell matematikai felírása előtt vizsgáljuk meg azokat a főbb közgazdasági feltevéseket, amelyekre a Neumann-modell felépül.

a) Legyen a vizsgált gazdaságban m termék, amelyet n eljárással, tevékenységgel állíthatunk elő. A gazdaság változatlan technológiai összefüggéseit az $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $(i = 1, \ldots, m)$, $(j = 1, \ldots, n)$ konstans, nem-negatív együtthatómátrixok fejezik ki, ahol a_{ij} a j-edik eljárás egységnyi anyagfelhasználását jelöli az i-edik termékből, b_{ij} pedig azt fejezi ki, hogy a j-edik eljárás egységnyi alkalmazása hány egységet termel az i-edik termékből.

b) A gazdaságban, miután elérte az egyensúlyi állapotot, minőségi változás nincs, a termelés változatlan struktúra mellett évről évre állandó ütemben nő, az árrendszer változatlan.

c) A modell zárt, termékjegyzéke tehát mindazon javakat tartalmazza, amelyeket a gazdaság valamilyen formában felhasznál, azaz elfogyaszt, így tartalmazza a közvetlen munkaráfordításokat és a tőkejavak kopását is (pl. ugyanazon, de különböző évjáratú gépek külön termékek lehetnek). A termelés „természetes tényezői”, mint pl. a munkaerő mennyisége vagy a föld, amelyek nem építhetők közvetlenül a modellbe, az időben korlátlanul bővíthetők.

d) A zártságból következik, hogy fogyasztása csak az adott eljárásoknak van. Így külön eljárást képez a lakossági fogyasztás. Hasonló módon kell beépíteni a külkereskedelmet a felhasznált illetve megtermelt jószágok, és az ezeket előállító tevékenységek közé. Így a változatlan technológiai eljárások mellett változatlan fogyasztási és külkereskedelmi struktúrát is feltételezünk.

e) Mivel a megtermelt termékek fogyasztása csak a modell keretein belül folyhat, az improduktív fogyasztás is (a munkaerő kiképzésének ráfordításaival együtt) szerepel a modellben, pl. a fogyasztással együtt, mint a munkaerő újratermelésének anyagi alapja. Az adott szinten el nem fogyasztott termékmennyiséget, mint „felesleget", azonnal a termelés további bővítésére fordítják, azaz beruházzák.

f) A modellben szereplő minden „tágabban értelmezett tevékenység" egységnyi időtartamú. Az ennél hosszabb tevékenységeket fel kell bontani, s az így keletkező félkész termékek tovább növelik a termékek listáját.

g) Feltételezzük, hogy az eljárások tetszőleges terjedelemben alkalmazhatók, ami egyenértékű a javak tökéletes oszthatóságával. Ugyanakkor a linearitásból következik, hogy a gazdaságban csak állandó hozadék létezik.

Jelölje továbbá az $x = \{x_j\}$ az egyes eljárások ismeretlen alkalmazási szintjét, $p = \{p_i\}$ pedig legyen az egyes termékek ismeretlen ára (árindexe). Itt és a továbbiakban mindenhol elhagytuk az i és j indexek mellől a fent meghatározott teljes indexhalmaz részletes kiírását, ezek az indexhatárok az összes képletben értelemszerűen érvényesek.

Modellünk alapösszefüggése a következő egyenlőtlenségrendszer:

$$\alpha \sum_j a_{ij} x_j \leq \sum_j b_{ij} x_j \tag{1.1}$$

valamint

$$\beta \sum_i a_{ij} p_i \geq \sum_i b_{ij} p_i \tag{1.2}$$

ahol α a gazdaság változatlan bővülési együtthatója,

β pedig a nyereség (kamat) tényező, (1 + a nyereségráta).

A fenti feltételek közgazdasági tartalma igen egyszerűen megfogalmazható. (1.1) azt fejezi ki, hogy egyetlen termékből sem lehet többet fogyasztani — az α bővülési együtthatót is figyelembe véve — mint amennyit az adott termékből megtermelnek, (1.2) pedig nem jelent mást, mint hogy egyensúlyi helyzetben egyetlen eljárás sem tartalmazhat több nyereséget, mint amennyit a gazdaságra jellemző átlagos β nyereségtényező meghatároz.

A modell további feltételei az előzőekből következnek az alábbi közgazdasági megfontolások alapján: amennyiben az i-edik termékből többet termelnek, mint amennyit a bővítést is figyelembe véve felhasználnak, akkor az szabaddá válik és ára zérus lesz, azaz:

$$\text{ha} \quad \alpha \sum_j a_{ij} x_j < \sum_j b_{ij} x_j, \quad \text{akkor} \quad p_i = 0, \tag{1.3}$$

a duális oldalon pedig, amennyiben valamely j-edik eljárás kevesebb nyereséget eredményez a β által meghatározott átlagnál, akkor ezt az eljárást a továbbiakban nem fogják felhasználni:

$$\text{ha} \quad \beta \sum_i a_{ij} p_i > \sum_i b_{ij} p_i, \quad \text{akkor} \quad x_j = 0\,. \tag{1.4}$$

Természetesen a termékek árainak, illetve a termelési eljárások szintjeinek nem-negatívaknak kell lenniük, azaz

$$(1.5)-(1.6) \qquad p_i, x_j \geq 0,$$

továbbá könnyen belátható, hogy amennyiben egy x illetve p vektor megoldása a modellnek, akkor bármely pozitív skalárral való szorzatuk is megoldás, ezért a további tárgyalás érdekében bevezethetjük a

$$(1.7) \qquad \sum_j x_j = 1$$

valamint a

$$(1.8) \qquad \sum_i p_i = 1$$

normalizáló feltételeket.

Legyen most az L_x halmaz a pusztán technikailag megvalósítható, vagy röviden a megengedett megoldások halmaza. Technikailag nyilván bármely x vektor megvalósítható, amely eleget tesz az (1.5) és (1.7) feltételeknek, mivel minden ilyen megengedett x termelési struktúrához található olyan α, amely mellett teljesül (1.1) is. Az egyértelműség kedvéért a továbbiakban minden $x \in L_x$ megengedett megoldáshoz tartozzon az a maximális α, melyre teljesül az (1.1), azaz

$$\alpha = \min_i \frac{\sum_j b_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j}, \qquad x \in L_x.$$

A fentiekhez hasonlóan definiálható a megengedett árvektorok L_p halmaza, melynek elemeire az (1.6) és (1.7) feltételeknek kell teljesülnie, és tartozzon valamely $p \in L_p$ megengedett árvektorhoz az a minimális β, amely még kielégíti (1.2)-t, tehát

$$\beta = \max_j \frac{\sum_i b_{ij} p_i}{\sum_i a_{ij} p_i}, \qquad p \in L_p.$$

Feladatunk azon $x^* \in L_x$, $p^* \in L_p$ vektorpár, illetve az ezekhez tartozó α^* és β^* meghatározása, amelyek kielégítik az (1.3) és (1.4) feltételeket is. Az ilyen $[x^*, p^*]$ vektorpárt közgazdaságilag a modell egyensúlyi megoldásának is nevezhetjük, hiszen (1.3) miatt az x^* termelési szerkezet nem implikál p^*-tól eltérő árrendszert, és fordítva, (1.4)-ből következik, hogy a p^* árrendszer nem ösztönöz az x^* termelési struktúra megváltoztatására. Természetes azonban, hogy a megoldásvektorok említett egyensúlyi tulajdonsága csak a modell által leírt gazdaság keretein belül igaz, s a modell egy konkrét megfogalmazása esetén elsősorban a paraméterek közgazdasági interpretálásától függ.

Az (1.1)—(1.8) alatt megfogalmazott modell megoldásának egzisztenciáját Neumann [1] tanulmányában Brouwer fixponttételének egy általánosítása segítségével bizonyította, továbbá kimutatta, hogy bármely $[x^*, p^*]$ egyensúlyi megoldáshoz tartozó α^*-ra és β^*-ra teljesül, hogy $\alpha^* = \beta^*$ és a megoldás ezekre a változókra egyértelmű. A bizonyítás során felhasználta az együtthatómátrixokra vonatkozó következő megszorítást:

$$a_{ij} + b_{ij} > 0.$$

Kemeny, Morgenstern és Thompson a már említett [2] tanulmányukban bizonyították, hogy ez a feltétel egy gyengébb és közgazdaságilag is jobban értelmezhető feltételpárra cserélhető ki:

(1.9.a) minden j-hez található legalább egy olyan i index, amelyre $a_{ij} > 0$, azaz minden eljárásnak van pozitív anyagfelhasználása, és

(1.9.b) minden i-hez található legalább egy olyan j index, melyre $b_{ij} > 0$, tehát minden termék termelhető valamely eljárással.

A modell algoritmusának kidolgozásához a továbbiakban feltételezzük még, hogy az együtthatómátrixokra teljesül a

(1.10) $$0 \leq a_{ij}; \qquad b_{ij} \leq 1$$

feltétel is. Könnyű belátni, hogy egy alkalmas szorzótényező segítségével ez mindig elérhető.

A Nemann-gazdaság rövid ismertetése után szeretnénk felhívni a figyelmet arra a szoros kapcsolatra, amely a modell és a játékelmélet között van — részben azért is, mert a továbbiakban tárgyalt megoldási algoritmus éppen a kétszemélyes mátrixjátékok elméletének tételein alapul. Erre a kapcsolatra már Neumann is rámutatott dolgozatában, hivatkozva egy a játékelmélettel kapcsolatos korábbi tanulmányára.

Legyen

$$\Phi(x, p) = \frac{\sum_i \sum_j b_{ij} p_i x_j}{\sum_i \sum_j a_{ij} p_i x_j}.$$

Az (1.1) és (1.2) feltételek alkalmas átalakításával könnyen belátható, hogy amennyiben az (1.1)—(1.8) feladatnak van egyensúlyi megoldása, úgy

(1.11) $$\alpha = \Phi(x, p^*) \leq \Phi(x^*, p^*) \leq \Phi(x^*, p) = \beta, \qquad x \in L_x; \quad p \in L_p$$

valamint

$$\alpha^* = \Phi(x^*, p^*) = \beta^*,$$

azaz

$$\alpha^* = \max \alpha, \quad \text{ha} \quad x \in L_x$$

$$\beta^* = \min \beta, \quad \text{ha} \quad p \in L_p.$$

Az (1.11)-ből közvetlenül leolvasható, hogy a feladat nem más, mint egy játékelméleti nyeregpont-probléma megoldása. Abban a speciális esetben, ha az A mátrix minden eleme egységnyi, az (1.5) és (1.8) felhasználásával az eredeti feladat az (1.11)-nek megfelelő

$$\alpha = \sum_i \sum_j b_{ij} p_i^* x_j \leq \sum_i \sum_j b_{ij} p_i^* x_j^* \leq \sum_i \sum_j b_{ij} p_i x_j^* = \beta, \qquad x \in L_x, \, p \in L_p$$

alakra hozható, ahol x_j^* és p_i^* a keresett egyensúlyi megoldások; és ez a probléma pontosan megegyezik a kétszemélyes mátrixjátékok feladatával.

Az eddigiek alapján könnyen belátható, hogy modellünk a következő nemlineáris programozási feladatnak felel meg:

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad p_i \geq 0$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad\qquad \sum_i p_i = 1$$

$$\alpha - \frac{\sum_j b_{ij} x_j}{\sum_j a_{ij} x_j} \leq 0 \qquad\qquad \beta - \frac{\sum_i b_{ij} p_i}{\sum_i a_{ij} p_i} \geq 0$$

$$\alpha \text{ max!} \qquad\qquad \beta \text{ min!}$$

2. Megoldási algoritmus

Legyen algoritmusunk induló értéke az $\alpha_0 = 0$ és képezzük a következő mátrixot:

$$c_{ij}^{(t)} = b_{ij} - \alpha_t a_{ij}, \tag{2.1.a}$$

ahol α_t értékét az

$$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{t-1} v_i \tag{2.2}$$

képlet határozza meg. Megjegyezzük, hogy a (2.1.a) még a következő alakban is felírható:

$$c_{ij}^{(t)} = c_{ij}^{(t-1)} - v_{t-1} a_{ij}. \tag{2.1.b}$$

Tekintsük most azt a kétszemélyes mátrixjátékot, melynek együtthatómátrixa $c_{ij}^{(t)}$. A programozás elméletéből ismeretes, hogy a játékelméleti feladat a következő lineáris programozási primál—duál feladatpár megoldásának felel meg:

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad p_i \geq 0$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad\qquad \sum_i p_i = 1$$

$$v_{1,t} - \sum_j c_{ij}^{(t)} x_j \leq 0 \qquad\qquad v_{2,t} - \sum_i c_{ij}^{(t)} p_i \geq 0 \tag{2.3}$$

$$v_{1,t} \text{ max!} \qquad\qquad v_{2,t} \text{ min!}$$

A (2.3) feladatról ismert, hogy mindig van megoldása, s így a (t) jelölést használva az optimális megoldásokra, felírhatjuk, hogy

$$v_t = v_{1,t} = v_{2,t} = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t)} x_j^{(t)}.$$

v_t ismeretében folytathatjuk az eljárást a (2.1) alapján $c_{ij}^{(t+1)}$ meghatározásával. Iterációnk minden lépésében tehát a (2.3) — lépésenként változó együtthatómátrixú — lineáris programozási feladatot kell megoldanunk.

Az (1.1)—(1.8) által meghatározott eredeti feladatnak abból az említett tulajdonságából, hogy $\alpha^* = \beta^*$ és a megoldás egyértelmű erre a két változóra, következik, hogy eljárásunk a modell megoldását szolgáltatja abban az esetben, ha az v_t sor konvergens. Ekkor ugyanis v_t zérushoz tart, s így (2.3) a következő alakot ölti:

$$\begin{array}{llll}
(2.4.\text{a}) & x_j \geq 0 & & p_i \geq 0 \\
(2.4.\text{b}) & \sum\limits_j x_j = 1 & & \sum\limits_i p_i = 1 \\
(2.4.\text{c}) & -\sum\limits_j c_{ij} x_j \leq 0 & & -\sum\limits_i c_{ij} p_i \geq 0 \\
(2.4.\text{d}) & \sum\limits_i \sum\limits_j c_{ij} p_i x_j = 0 . & &
\end{array}$$

A (2.4.a)—(2.4.b) egyértelműen megfelel az eredeti modell (1.5)—(1.8) feltételeinek, a (2.4.c)-ben levő egyenlőtlenségrendszer egyszerű átrendezéssel az (1.1), illetve (1.2) alakra hozható, végül a hiányzó (1.3) és (1.4) feltételek teljesülése a (2.4.d)-ből következik egyszerű megfontolások alapján.

3. Az eljárás konvergenciája

A kétszemélyes mátrixjátékok elméletének nyeregpont-tétele értelmében igaz, hogy

$$\sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t)} x_j \leq \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t)} x_j^{(t)} \leq \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i x_j^{(t)} , \qquad x \in L_x;\ p \in L_p, \tag{3.1}$$

ahol a (t)-vel jelölt változók a t-edik iteráció (2.3) feladatának optimális megoldásai.

Vizsgáljuk meg először v_0 értékét. Mivel $\alpha_0 = 0$,

$$v_0 = \sum_i \sum_j b_{ij} p_i^{(0)} x_j^{(0)} ,$$

ahol $p_i^{(0)}$, $x_j^{(0)}$ optimális megoldásai az

$$\begin{array}{cc}
x_j \geq 0 & p_i \geq 0 \\
\sum\limits_j x_j = 1 & \sum\limits_i p_i = 1 \\
v_{1,0} - \sum\limits_j b_{ij} x_j \leq 0 & v_{2,0} - \sum\limits_i b_{ij} p_i \geq 0 \\
v_{1,0} \ \max! & v_{2,0} \ \min!
\end{array}$$

feladatpárnak. A B együtthatómátrixra tett (1.9.b) feltétel értelmében, amely szerint B minden sorában van legalább egy pozitív elem, figyelembe véve v_0 maximális tulajdonságát, következik, hogy v_0 biztosan pozitív.

Legyen most a fenti (3.1) egyenlőtlenségben $x_j = x_j^{(t-1)}$ és $p_i = p_i^{(t-1)}$, s így (3.1) jobboldala alapján a következő egyenlőtlenséget írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
v_t \leq \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)} &= \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t-1)} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)} - \\
- v_{t-1} \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)} &\leq v_{t-1} \Big(1 - \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)}\Big) ,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

(3.1) baloldala alapján pedig:

$$\begin{aligned} v_t &\geq \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t)} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)} = \sum_i \sum_j c_{ij}^{(t-1)} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)} - \\ &- v_{t-1} \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)} \geq v_{t-1} (1 - \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)}) . \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.2)-ből és (3.3)-ból közvetlenül következik, hogy amennyiben valamely $v_{t-1} = 0$, akkor v_t értéke minden további lépésben zérus lenne, s így (2.4) alapján α_{t-1}, $x_j^{(t-1)}$, $p_i^{(t-1)}$ megoldása a modellnek. Ebben az esetben eljárásunk tehát véges lépésben szolgáltatja az optimumot.

Vizsgáljuk meg most azt az esetet, ha α végtelen sorozatot alkot. Mivel a fenti megfontolások alapján v_0 biztosan pozitív — (1.10)-ből következik, hogy a (3.2) és (3.3) kifejezésben levő szummák értéke 0 és 1 között van — tehát v_t értéke bármely t-re pozitív, s így felírhatjuk, hogy

$$0 \leq 1 - \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t)} x_j^{(t-1)} \leq \frac{v_t}{v_{t-1}} \leq 1 - \sum_i \sum_j a_{ij} p_i^{(t-1)} x_j^{(t)} \leq 1 . \tag{3.4}$$

v_t tehát monoton, nemnövekvő sorozatot alkot, ezért elegendő azt bizonyítanunk, hogy a (2.2)-ben meghatározott v_t sor, vagy a megfelelő $\sum_{i=0}^{t-1} v_i$ részletösszeg-sorozat konvergens. Tegyük fel ennek az ellenkezőjét, azaz legyen

$$\lim_{t \to \infty} \alpha_t = \infty .$$

Válasszuk meg ekkor t értékét úgy, hogy

$$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{t-1} v_i > \frac{n}{a_{kl}} , \tag{3.5}$$

ahol n az együtthatómátrixok oszlopainak számát jelöli. Legyen továbbá

$$a_{kl} = \min_{i,j} \{a_{ij} \,|\, a_{ij} > 0\} \tag{3.6}$$

és képezzük a következő A' mátrixot:

$$A' = \{a'_{ij}\} = \begin{cases} a_{kl} & \text{ha } a_{ij} > 0 \\ 0 & \text{ha } a_{ij} = 0 . \end{cases}$$

(2.3)-ból ugyanakkor következik, hogy

$$\begin{aligned} v_t &\leq \sum_j c_{ij}^{(t)} x_j^{(t)} = \sum_j b_{ij} x_j^{(t)} - \alpha_t \sum_j a_{ij} x_j^{(t)} \leq \\ &\leq \sum_j b_{ij} x_j^{(t)} - \alpha_t \sum_j a'_{ij} x_j^{(t)} . \end{aligned} \tag{3.7}$$

Most figyelembe véve, hogy (1.9.a) szerint az A, s így az A' mátrix minden oszlopában kell lennie pozitív elemnek, továbbá, hogy $x^{(t)}$ nem-negatív és normalizált, következik, hogy léteznie kell valamely u sorindexnek, melyre

$$u \in \{1, \ldots, m\}$$

és fennáll, hogy

$$\sum_j a'_{uj} x_j^{(t)} \geq \frac{a_{kl}}{n}. \tag{3.8}$$

A (3.7) reláció természetesen minden i-re fennáll, teljesülnie kell tehát erre a bizonyos u indexre is:

$$v_t \leq \sum_j b_{uj} x_j^{(t)} - \alpha_t \sum_j a'_{uj} x_j^{(t)}.$$

Ebből viszont (I.10), (3.5) és (3.8) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$v_t < 1 - \frac{n}{a_{kl}} \frac{a_{kl}}{n} = 0.$$

Ez azonban nyilvánvalóan ellentmond (3.4)-nek, s így hibás volt kiinduló feltevésünk, mely szerint α_t értéke tetszőlegesen nagyra választható. Így a v_t sor konvergens, s biztosan zérushoz tart. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a (2.1)—(2.3) alatt megfogalmazott algoritmus konvergens és véges vagy végtelen lépésben a Neumann-modell megoldását szolgáltatja.

A kézirat lezárása után ismertem meg az [5]-ben közölt, szintén a kétszemélyes mátrixjátékokat felhasználó algoritmust. A két módszer közötti lényeges különbség, hogy α értékét nem egy végtelen sor, hanem egy intervallumfelezéses eljárás határozza meg. Az itt közölt eljárás fő előnye a közgazdasági interpretáció lehetősége.

(Beérkezett: 1972. január 19.)

IRODALOM

1. Neumann J.: Válogatott előadások és tanulmányok. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Kemeny J. G.—Morgenstern O.—Thompson G. L.: A generalization of the Von Neumann-model of an expanding economy. Econometrica, 24 (1956), 115—135. o.
3. Bródy A.: Érték és újratermelés. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
4. Weil, R. L., Jr.: An Algorithm for the von Neuman Economy, Zeitschrift für Nationalökonomie, 24 (1964) 371—384.
5. Hamburger, M. J. — G. L. Thompson — R. L. Weil: Computation of Expansion Rates for the Generalized von Neumann Model of an Expanding Economy, Econometrica, 35 (1967), 542—547.

A GAME THEORETICAL SOLUTION TO THE NEUMANN MODEL OF GENERAL ECONOMIC EQUILIBRIUM

The paper deals with a solution algorithm of the Neumann-model of general economic equilibrium. In the model the unknown vector x denotes the levels of the applied production processes, the vector p denotes the prices of the products, α and β denote the growth rate of the economy and its profit (interest) rate, respectively. The non-negative constant coefficient matrices A and B mean the inputs and outputs of the unit application of activities from each product.

The solution algorithm of the model is built on the theory of two-person matrix games. Let e.g., vectors x_t and p_t be the optimal strategies, belonging to the C_t matrix game,

and v_t be the value of this game. Thus, in each step of the algorithm one must solve a pair of primal-dual linear programming problems corresponding with the above matrix game.

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad p_i \geq 0$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad\qquad \sum_i p_i = 1$$

$$v_{1t} - \sum_j c_{ij}^{(t)} x_j \leq 0 \qquad\qquad v_{2t} - \sum_i c_{ij}^{(t)} p_i \geq 0$$

$$v_{1t}\ \max! \qquad\qquad v_{2t}\ \min!$$

Let us determine matrix C_t by means of

$$c_{ij}^{(t)} = b_{ij} - \alpha_t a_{ij}\,,$$

where

$$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{t-1} v_i\,.$$

It is easy to see that this algorithm does solve the Neumann-model if the series v_t is convergent. It can be ensured by the aid of a simple transformation that v_t should constitute a monotone, non-negative sequence and the convergence of the above series of partial sums can also be proved.

РЕШЕНИЕ НЕЙМАН-МОДЕЛИ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ПРИ ПОМОЩИ ТЕОРИИ ИГР

Труд занимается алгоритмом решения Нейман-модели общего экономического равновесия. В модели неизвестный вектор x означает уровни использованных производственных процессов, вектор P — цены на товары, а α и β — индекс роста и фактор прибыли (процента) хозяйства. A и B не-отрицательные, постоянные матрицы коэффициентов, означают затраты и выпуски по различным продуктам единичного применения деятельностей.

Обработанный алгоритм решения модели базируется на теории двух-личных матричных игр. Пусть векторы x_t и P_t — оптимальные стратегии, принадлежащие к матричной игре C_t, а v_t — стоимость этой игры. Значит на каждом шаге алгоритма мы должны решить пару прямых двойственных задач программирования, соответствующих высшей матричной игре.

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad p_i \geq 0$$

$$\sum_j x_j = 1 \qquad\qquad \sum_i p_i = 1$$

$$v_{1t} - \sum c_{ij}^{(t)} x_j \leq 0 \qquad\qquad v_{t2} - \sum c_{it}^{(t)} p_i \geq 0$$

$$v_{1t}\ \max- \qquad\qquad v_{t2}\ \min!$$

Определим матрицу C_t с помощью

$$c_{ij}^{(t)} = b_{ij} - \alpha_t a_{ij}$$

где

$$\alpha_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{t-1} v_i\,.$$

Можно легко видеть, что наш алгоритм дает решение модели Неймана, если ряд v_t — сходится. С помощью простой трансформации можно обеспечить, чтобы v_t образовал монотонную не-отрицательную последовательность и можно доказать сходимость последовательности частичных сумм.

Frigyes Ervin—Simon Béláné

Strukturális változások mértékének és irányának vizsgálata[1]

A strukturális változások és eltérések vizsgálata a többváltozós problémák esetében merül fel, ha valamely vizsgálati egység több adattal, vektorral jellemezhető. Megoszlási viszonyszámokkal leírt strukturák mérésére számos eljárás áll rendelkezésünkre, ezek között találkozunk információelméleti mutatószámokkal is. E mérőszámok előnyös tulajdonsága, hogy megállapítható az egyes komponensekben jelentkező eltéréseknek a teljes eltéréshez való relatív hozzájárulása, ugyanakkor e mérőszámok nem szimmetrikusak, ami véleményünk szerint a mutató közgazdasági interpretálásánál problémát jelent, különösen jelentkezik ez abban az esetben, ha nem időbeli, hanem térbeli vizsgálatokat végzünk.

Cikkünkben olyan mérőszámok bemutatására törekszünk, amelyek lehetővé teszik a különböző struktúrák összehasonlítását és egyértelműen fejezik ki e struktúrák közötti eltérések mértékét és irányát.

1. A mérhetőség általános problémái

Strukturális eltérések mérése csak akkor lehetséges, ha az adott struktúrák számszerűen jellemezhetők.

Vezessük be a *mérhető struktúra* fogalmát:

Valamely „A" vizsgálati egység struktúrája akkor tekinthető mérhetőnek, ha hozzárendelhető egy

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} \quad \textit{strukturális vektor}$$

Két adott „A" és „B" vizsgálati egység struktúrája akkor tekinthető összemérhetőnek, ha az a és b strukturális vektorokra fennáll, hogy bármely i-re az a_i, b_i komponensek *azonos tartalmúak*, és a két vektor dimenziója megegyezik. A továbbiakban meg kell különböztetnünk még az *additív*, *kváziadditív* és a *nem additív* vektorokkal jellemzett struktúrákat.

Egy adott a strukturális vektor akkor additív, ha értelmezhető a következő

$$1\ {}^*a \text{ skaláris szorzat,}$$

[1] A II. Magyar ÁKM konferencián elhangzott előadás alapján, Siklós, 1971.

Ebben az esetben az egyes a_i $(i = 1, \ldots, n)$ értékek egyneműek és a megadott formában összegezhetők, és összegük közgazdaságilag értelmezhető. Ez a helyzet áll fenn pl. az értékben, főben stb. megadott (megoszlási viszonyszámokkal is helyettesíthető) komponensekből álló vektorokkal jellemzett struktúrák esetében.

Kvázi-additív struktúra esetében az adott „A" struktúrára jellemző vektorra fennáll a következő

$a = \langle k \rangle^{-1} g$ egyenlőség, és értelmezhetők

az 1^*k és az 1^*g összegek.

Ebben az esetben az a vektor komponensei $\frac{g}{k}$ típusú viszonyszámokból állnak, g és k additív vektorok.

Kvázi-additívak az intenzitási viszonyszámokból álló vektorokkal jellemzett struktúrák. E vektorokat azért tekintjük kvázi additívnak, mert — bár az elemek összege nem értelmezhető — az elemek egyneműek, és nem merülhetnek fel a mértékegységek önkényes megválasztásából adódó problémák.

Nem additív struktúráról van szó, ha az a strukturális vektor sem additívnak, sem kvázi-additívnak nem tekinthető. Nem additívak tehát a különböző mértékegységekben kifejezett mutatókból álló strukturális vektorok.

A strukturális eltérések mérőszámának bevezetése előtt definiálnunk kell az *azonos struktúra* fogalmát.

Az a és b vektorokkal jellemzett struktúrát akkor és csak akkor tekintjük azonosnak, ha

$$b = \alpha a \quad \text{ahol} \quad \alpha > 0$$

A strukturális eltérések mérőszámaival szemben — véleményünk szerint — az alábbi követelményeket kell támasztani:

1. Az azonos struktúra definíciója alapján — a strukturális eltérésről alkotott közgazdasági felfogásnak megfelelően — ne mutasson ki különbséget az a és az αa vektorokkal jellemzett struktúrák között, vagyis a strukturális eltérés valamely z mérőszámára érvényesüljön a következő egyenlőség:

$$z(a, b) = z(\alpha a, b), \qquad (\alpha > 0)$$

2. A mérés egyértelműsége érdekében mérőszámunk tegyen eleget a metrika követelményeinek, vagyis:

a) a z mérőszám értéke akkor és csak akkor legyen zérus, ha $a = \alpha b$, $(\alpha > 0)$ egyébként

$$z(a, b) > 0$$

b) a mutatószám legyen szimmetrikus, tegyen eleget a

$$z(a, b) = z(b, a) \text{ egyenlőségnek,}$$

c) teljesüljön az ún. háromszög egyenlőtlenség:

$$z(a, b) + z(b, c) \geq z(a, c)$$

E követelményeket mérlegelve a következő két mérőszámot javasolhatjuk:

1. két strukturális vektor hajlásszögét,
2. két egységnyi hosszúságúra normált strukturális vektor távolságát.

Két adott $a \neq 0$ $b \neq 0$ vektor hajlásszögén azt a φ szöget értjük, ami eleget tesz a következő összefüggésnek:

$$\cos \varphi = \frac{a^* \cdot b}{|a| \cdot |b|}$$

ahol: a^*b a két vektor skaláris szorzata,
$|a|$ ill. $|b|$ pedig az a ill. b vektorok hosszát jelenti.

Két vektor távolsága a következő kifejezés segítségével határozható meg:

$$d(a, b) = |a - b| = \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Két vektor távolsága tehát megegyezik a két vektor különbségének abszolút értékével. Mivel két vektor távolságára nem érvényes az 1. sz. feltétel, ugyanis a

$$d(a, b) = d(a, \alpha b)$$

egyenlőség csak abban az esetben áll fenn, ha:

$$\alpha = 1;$$

azért $d(a, b)$ helyett a $d'(a, b)$ mérőszámot vezetjük be:

$$d'(a, b) = \left| \frac{1}{|a|} a - \frac{1}{|b|} b \right|$$

vagyis az egységnyi hosszúságúra normált a és b strukturális vektorok távolságát.

Ebben az esetben könnyen belátható, hogy

$$d'(a, b) = d'(a, \alpha b)$$

mind a hajlásszög, mind a normált (egységnyi hosszúságú) vektorok távolsága esetében célszerű kikötés,[2] hogy a vektorokra fennálljon $a \geq 0$, $b \geq 0$ reláció. A hajlásszögnél az $a \neq 0$, $b \neq 0$ nagyságrendi reláció érvényesülése is szükséges.

Mind a hajlásszögre, mind az egységnyi hosszúságú vektorok távolságára érvényesülnek a metrika követelményei.

A hajlásszög és a normált vektorok közötti távolság egymásra kölcsönösen és egyértelműen leképezhetők. A két mutató között tehát elméleti alapon nem lehet különbséget tenni.

A strukturális eltérések mérőszáma

φ esetében a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ha $a \geq 0$, $b \geq 0$, és $\sum a_i \neq 0$, $\sum b_i \neq 0$,

d' esetében pedig a $[0, \sqrt{2}]$, ha $a \geq 0$, $b \geq 0$

intervallumokban jelentkezik.

[2] Ezt a kikötést azért tehetjük, mert a közgazdasági alkalmazások esetében a vektorok elemeire általában teljesül a nem negativitás.

Additív és kvázi-additív strukturális vektorok esetében a bevezetett mérőszámok egyértelműen jellemzik a strukturális eltérések mértékét.

Nem-additív struktúrák esetében felmerül a különböző mértékegységek problémája is.

Mivel nincs és — véleményünk szerint — nem is képzelhető el a mértékegységek olyan rendszere, ami e problémát kiküszöbölné; célszerűnek látszik valamilyen — a mértékegységtől független — *konvenció* bevezetése.

Ez a konvenció az eredeti komponensek dimenzió nélküli viszonyszámokkal való helyettesítése lehet; hogy a strukturális vektorok közötti eltéréseket kizárólag a vektorok megfelelő komponensei közötti arányok determinálják.

E viszonyszámok bázisa lehet:

a) valamely kitüntetett vizsgálati egység strukturális vektora *(kiválasztott konvenció)*,

b) az adott vizsgálatba bevont egységek megfelelő adatainak átlagolása *(átlagolási konvenció)*.

A *kiválasztott konvenció* két szempontból sem látszik célszerűnek.

a) Minden vizsgálatnál új konvenció lenne szükséges a bázis meghatározására.

b) E konvenciónál bázisul olyan strukturális vektort kellene választani, amelynek nincs zérus eleme.

Az *átlagolási konvencióval* kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy az óhatatlanul együtt jár azzal, hogy amennyiben új vizsgálati egységet vonunk be az elemzésbe, az új viszonyítási bázis, új átlag számítását teszi szükségessé. Ez azt jelenti, hogy a strukturális eltérések mérőszáma nem additív struktúrák esetében mindig a vizsgálati egységek adott rendszeréhez kötődik.

Fel kell hívnunk azonban a figyelmet arra, hogy e strukturális eltérések mérőszámai nagyon érzékenyek az *aggregációra*, ill. a *komponensek számának csökkentésére*.

Az aggregáció, ill. a dimenziócsökkentés azonban módosítja mind a hajlásszöget, mind a d' távolságot. Mivel φ és d' kölcsönösen és egyértelműen meghatározzák egymást, elegendő, ha a $\cos\varphi$-re mutatjuk be ezt a módosulást.

Az *aggregáció* esetében az a és b vektor két-két komponensét, pl. az i-ediket és a j-ediket vonjuk össze, s így $n - 1$ elemű vektorokat kapunk. E vektorok hajlásszöge φ aggr (a, b) és az eredeti a, b vektorok hajlásszöge között a következő összefüggés mutatható ki:[3]

$$\text{arc}\cos_{aggr}(a, b) = \varrho\, \text{arc}\cos(a, b),$$

ahol:

$$\varrho = \frac{1 + \dfrac{a_i b_j + a_j b_i}{a^* b}}{[(1 + 2a_i a_j)(1 + 2b_i b_j)]^{1/2}}$$

Amennyiben az ,,A'', ,,B'' és ,,C'' vizsgálati egységekre vonatkozó információk inkompatibilitását csak *valamelyik komponens*, pl. az n-edik komponens *elhagyásával*, tehát a dimenzió aggregálás nélkül csökkentésével érhetjük el,

[3] Az összefüggést az egyszerűség kedvéért normált (egységnyi hosszúságú) vektorokra mutatjuk be.

a következőképpen módosul:

$$\cos(a_{n-1}, b_{n-1}) = \eta \cos(a, b),$$

ahol a_{n-1}, b_{n-1} az n-edik elem elhagyásával kapott vektorokat jelöli, és

$$\eta = \frac{1 - \dfrac{a_n \cdot b_n}{a^* \cdot b}}{[(1 - a_n^2)(1 - b_n^2)]^{1/2}}$$

Látjuk tehát, hogy $\cos \varphi$, s ennek következtében d' is megváltozik a komponensek számának akár aggregációval, akár aggregáció nélkül történő csökkentésétől. Ennek konzekvenciáit fel kell mérni az elemzés előkészítő szakaszában.

2. A strukturális változások irányának vizsgálata

A strukturális elemzések egyik igen gyakori esete az, amikor az egyes vizsgálati egységek megkülönböztetésére szolgáló csoportképző ismérvek mennyiségi vagy idősort[4] alkotnak.

A tárgyalás lerövidítése érdekében a továbbiakban az idősort alkotó vizsgálati egységek esetére szorítkozunk, a mennyiségi sorokra vonatkozó analógiák ugyanis kézenfekvő módon adódnak.

Idősort alkotó vizsgálati egységek esetében a következő kérdéseket kívánjuk vizsgálni:

1. A kezdőponthoz viszonyított strukturális eltérések milyen mértékben képviselik a végső időpont struktúrájának vagy valamely normatív struktúrának a megközelítését, vagyis *mennyiben tekinthetők a strukturális eltérések fő irányába ható változásnak.*

Az első kérdés végeredményben két oldalról is megközelíthető: Ha idősorunk strukturális vektorai az $s_1, \ldots s_t$ sorozatot alkotják, megvizsgálhatjuk, hogy milyen nagyságrendi relációk érvényesülnek a következő:

a) $\varphi(s_1, s_2), \varphi(s_1, s_3), \ldots \varphi(s_1, s_t)$ vagy a $d'(s_1, s_2), d'(s_1, s_3), \ldots d'(s_1, s_t)$ sorozatban,

b) $\varphi(s_1, s_2), \varphi(s_2, s_3), \ldots \varphi(s_{t-1}, s_t)$ ill. a $d'(s_1, s_2), d'(s_2, s_3), \ldots d'(s_{t-1}, s_t)$, sorozatban.

E két sorozat vizsgálata azonban *csak* a strukturális eltérések *mértékére* nyújt felvilágosítást, és egyáltalán nem ad információt e változások *irányára.*

Idősorok strukturális elemzésénél azonban igen érdekes a második kérdés, vagyis a *fő irányba* ható strukturális eltérések vizsgálata és mérése is.

Fő irány alatt a *strukturális változásoknak* azt az irányát értjük, ahová a strukturális változásoknak vezetniük kellett volna, vagy ahová ténylegesen vezettek. A fő irány megállapítására két lehetőséget látunk.

a) Valamely normatív (tervezett) struktúra irányába ható vagy (és)

b) az utolsó ténylegesen előállott struktúra irányába ható változásoknak, mint fő iránynak elfogadását.

[4] Idősor alatt itt nem speciális sztochasztikus folyamatot, hanem időrendi sorrendben rendezett, strukturális vektorokból álló sorozatot értünk.

A továbbiakban a végső időszak struktúrájának megközelítését tekintjük a strukturális fejlődés fő irányának. A bemutatott módszerek azonban normatív vizsgálatokra is könnyen kiterjeszthetők.

Fő iránynak tehát azt a vektort tekintjük, melynek a megfigyelt első struktúra vektorával alkotott eredője a végpont struktúráját eredményezi.

Ha a fő irányt d'-vel jelöljük, akkor

$$s_1 + d' = s_t, \quad \text{vagyis} \quad d' = s_t - s_1,$$

ahol s_i $(i = 1, \ldots t)$ normált vektorok.

Fő irányba ható változás alatt pedig bármely: $(s_j - s_1)$ $(j = 2, \ldots t)$ eltérésvektornak e d' vektor irányába eső ortogonális vetületét (hosszát) értjük.

Ha ezt az ortogonális vetületet Δ_j-vel jelöljük:

$$\Delta_j = \cos(d', s_j)\, d'(s_j, s_1); \qquad j = 2, \ldots t$$

A Δ_j értékeket természetesen előjelesen kell figyelembe venni.

A Δ_j értékek a kezdő és a j-edik időpont közötti, a fő irányba eső távolságot jelölik. Az egyes időszakokhoz tartozó (fő irányba megtett) távolság mérésére pedig a következő mérőszámot definiáljuk:

$$\Delta'_j = \Delta_j - \Delta_{j-1}; \qquad j = 2. \ldots t$$

Könnyű belátni, hogy

$$\sum_{j=2}^{t} \Delta'_j = |d'| = d'(s_1, s_t)$$

A fő irányba ható változás vizsgálatánál két kérdésre kívánunk választ adni:

a) Az egyes Δ'_j értékek milyen sorozatot alkotnak, vagyis az idősor folyamán bekövetkezett strukturális *változások* milyen *ütemben* közelítették meg a végső időszak struktúráját.

b) Összegezve az egész időszak fejlődését, az mennyiben tekintheti *konzekvensnek*, vagyis a *végső időpont struktúrája fokozatos megközelítésének*.

Az első kérdésre a Δ_j $(j = 2, \ldots t)$ sorozat diszkussziójával adhatunk feleletet. A második kérdés megválaszolásához további mérőszámok adhatók meg: Ilyen mérőszám lehet pl. a

$$K_1 = \frac{d'}{\sum_{j=2}^{t} |\Delta'_j|} \quad \text{vagy a} \quad K_2 = \frac{\varphi(s_1, s_t)}{\sum_{j=2}^{t} \varphi(s_j, s_{j-1})} \quad \text{mutatószám.}$$

Mindkét mutatószámra jellemző, hogy értékei

$$\sum_{j=2}^{t} |\Delta'_j| \neq 0; \ \sum_{j=2}^{t} \varphi(s_j, s_{j-1}) \neq 0$$

esetben (vagyis amikor ilyen vizsgálat szükségessége egyáltalán felmerülhet) — a $[0, 1]$-ben jelentkeznek.

A két mutatószámmal kapcsolatban meg kell jegyeznünk, hogy egymást nem helyettesítő, hanem egymást kiegészítő információtartalommal bírnak.

$K_1 = 1$ azt jelenti, hogy a vizsgált időszak alatt *nem történt a fő iránnyal ellentétes strukturális változás*, vagyis $\Delta'_j \geq 0$ $(j = 2, \ldots t)$.

$K_2 = 1$ pedig azt fejezi ki, hogy minden változás *teljesen a fő irányba* történt, és az összes s_j $(j = 1, \ldots t)$ strukturális vektorunk — tehát d' is — ugyanabban a síkban helyezkedik el. Meg kell jegyeznünk, hogy a $K_2 = 1$-ből egyértelműen következik a $K_1 = 1$ egyenlőség.

Mind a K_1, mind a K_2 mutató akkor veszi fel a zérus értéket, ha $d' = 0$, vagyis ha a vizsgált időszak egészére nézve nincs strukturális változás, tehát az egymást követő több irányú strukturális változások az s_1 struktúra visszaállását eredményezik.

3. A dinamikus változások összetevőkre bontása

Az eddigiekben a strukturális eltérések mértékének és irányának vizsgálat módszerével foglalkoztunk.

Dinamikus vizsgálatok esetében azonban az a kérdés is felmerülhet, hogy valamely két időszakot jellemző (nem normált) vektorok közötti különbség milyen tendenciák eredőjeként jött létre. Itt a változás két összetevőjét kívánjuk megkülönböztetni: mégpedig a kiinduló időszak struktúrája irányába mutató inerciális tendenciát — a továbbiakban nem strukturális hatást — és a strukturális eltérések irányába mutató tendenciát — a továbbiakban strukturális hatást. E két tendencia vizsgálatánál abból indulunk ki, hogy mind a strukturális, mind a nem strukturális hatások időben egyenletesen jelentkeznek.

Legyen:

$$d = s_t - s_j,$$

ahol s_j a kiinduló időszak (nem normált) strukturális vektora,
s_t pedig a végső időszak (nem normált) strukturális vektora.

Feltevésünk szerint:

$$d = v + w,$$

ahol v a nem strukturális hatások és
w a strukturális hatások vektora.

A v és w vektorok bármely tetszőleges *két* időszak között egyértelműen meghatározhatók, mivel a két vektor iránya adott:

v iránya szükségszerűen, a definícióból adódóan megegyezik (vagy ellentétes) a kiinduló időszak strukturális vektorának s_j-nek az irányával.

w iránya pedig csak a j-edik és t-edik időszak közötti strukturális változásoktól függhet: tehát megegyezik a strukturális változást kifejező, korábban definiált

$$d' = \frac{s_t}{|s_t|} - \frac{s_j}{|s_j|} \quad \text{vektor irányával.}$$

Az ismert paralellogramma szabály alapján a v és w vektorok koordinátás alakja is előállítható.

$$v = \alpha s_j, \quad \text{ahol} \quad \alpha = \frac{|s_t|}{|s_j|} - 1,$$

$$w = \beta d', \quad \text{ahol} \quad \beta = |s_t| \, .$$

A v és a w vektorokkal voltaképpen – a fizikából vett analógiával – azt a *két erőt* határoztuk meg, ami a d vektorral jellemzett *teljes mozgást* létrehozta. Továbbmenve szükségesnek látszik összetevőire bontani azt a *tényleges változást*, ami a *d vektor irányában* e két hatásra külön-külön létrejött. Ez azonos a v és a w vektoroknak a d vektor irányába eső ortogonális vetületével.

Ezeket az ortogonális vetületeket d_v, ill. d_w szimbólumokkal jelölve:

$$d_v + d_w = d$$

ahol d_w a strukturális hatások következtében létrejött tényleges változások vektora és

d_v a nem strukturális (inerciális) hatások következtében létrejött tényleges változások vektora.

E vetületek előjeles hossza

$$|d_v| = \cos(d, v)\,|v|$$

$$|d_w| = \cos(d, w)\,|w| \text{ természetesen:}$$

$$|d_v| + |d_w| = |d|$$

Így a két időszak között bekövetkezett teljes változást jellemző d vektort két párhuzamos komponensre bontottuk fel.

A strukturális és nem strukturális változásoknak a teljes változásra gyakorolt hatás-intenzitása $d \neq 0$ esetében

$$q_w = \frac{|d_w|}{|d|}$$

és a

$$q_v = \frac{|d_v|}{|d|}$$

hányadosok formájában fejezhető ki (ahol $|d_v|$ és $|d_w|$ előjeles hosszakat jelentenek).

Az eddigiekben csak a kezdő és a végső időszak közötti változásokat fejeztünk ki strukturális és nem strukturális hatások vektorainak eredőjeként. Ez a felbontás azonban több közbeeső időszak esetére is kiterjeszthető; és részletesebb elemzésre is módot nyújt.

A bemutatott mérési módszereket az 1959–68. évekre kidolgozott ÁKM-ek strukturális elemzésére alkalmaztuk [3] Mivel számításaink célja elsősorban a javasolt mérési eljárások illusztrációja volt, ezért csupán az eredmények vázlatos elemzésére törekedtünk.

(Beérkezett: 1972. február 8.)

IRODALOM

1. KOSZOV V. V.: Az aggregációs probléma lehetséges megoldásai az ágazati kapcsolatok mérlegében. Voproszi Ekonomiki 1963/6.
2. LINNEMANN H.: An Econometric Study of International Trade-Flows. Amsterdam, 1966. North Holland Publishing Company.

3. Frigyes E.—Simon B.: A strukturális eltérések mérhetősége és mérési módszerei. OT. Tervgazdasági Intézet Közleményei, 1969/6.
4. Theil H.: Közgazdaságtan és információelmélet. Budapest, 1970. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

THE MEASUREMENT OF EXTENT AND DIRECTION OF STRUCTURAL CHANGES

In the recent years several papers have been published that make use of certain elements of classical vector calculus for the examination of structural deviations. It is a general feature of these papers that they use the angle of inclination between the vectors characterizing the examined structures as the index number of structural deviation.

a) The paper clarifies the basic concepts of structural examinations.

b) It determines the mathematical and economic requirements for the measurement of structural deviations or changes.

c) It shows that the suggested index numbers, the angle of inclination and the index number d (the distance between the standardized, unit length vectors) are consistent with the economic interpretation of structural changes and, at the same time, they meet the mathematical requirements of metrics.

d) Besides precise and unambiguous measurement the suggested methods analyse also the direction of structural changes.

In case of time series of structural vectors the paper contains index numbers measuring the consequence of changes. For the case of dynamic analysis, processes have been elaborated that separate the main forces affecting the entire multidimensional variation, (structural and inertial changes) and express their intensity numerically.

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕРЫ И НАПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ

В последние годы был опубликован ряд работ, использующих некоторые элементы классического векторного анализа для исследования структурных различий. Общая характерная черта этих работ, что они используют наклона векторов, характерных для исследуемых структур, в качестве показателя структурных разхождений,

а) Данная статья выясняет основные понятия, связанные с исследованием структур,

б) определяет возможные математические и экономические требования к измерению структурных разхождений или изменений.

в) Он показывает, что предлагаемые индексы, угол наклона и показатель «d» (расстояние между нормированными векторами единичной длине) согласуются с экономическим толкованием структурных изменений и в то же время они выполняют математические требования метрики.

г) Кроме точного и единозначного измерения, предлагаемые методы анализа исследуют и направление структурных изменений.

Относительно временных рядов структурных векторов труд содержит показатели для последовательности изменений. Также для динамических исследований были подготовлены методы анализа для обособления главных сил (структурных и инертных изменений) и для числового выражения их интенсивности.

Glattfelder Péter—Váczi Pál

Néhány megjegyzés a RAS módszer elméletéhez

A RAS módszer az input-output sémák előrebecslésének egyik lehetséges eszköze, melyet mind cambridgei kidolgozói,[1] mind magyarországi alkalmazói[2] már több ízben felhasználtak elméleti és gyakorlati kutatásaikban. Az eljárás — annak ellenére, hogy az algoritmus gyökere nem is Stone-éktól, hanem W. E. Demingtől származik (lásd [1]) — „bestseller" lett az egész világon, feltehetően logikus és egyszerű volta, több irányú felhasználhatósága következtében. Továbbfejlesztésével is többen foglalkoztak már, a legnagyobb visszhangra talált ilyen kiegészítés lényege az, hogy bizonyos nagy („súlyponti") koefficiensek időbeli alakulását egyedileg vizsgálja, majd a RAS-algoritmust a többi, az „irreleváns" koefficiensre kiterjesztve egyesíti a kétféle előre becslés eredményeit.

Jelen dolgozatunkban a RAS módszer bizonyosfokú általánosítását kívánjuk adni. Állításunk a következő: A RAS módszer mint előrebecslési eljárás, hallgatólagosan feltételezi a technikai koefficiensek exponenciális idő-függését. Tekintettel arra, hogy a gyakorlatban semmi sem igazolja ezen feltételezés helyességét (sőt bizonyos kutatások — így Szakolczaiék [9] eredményei is — ennek határozottan ellene mondanak) célszerű a RAS, vagy az annak alapgondolatát követő egyéb procedurákat azokra az esetekre is kiterjeszteni, ahol az előrebecsülni kívánt koefficiensek időben lineáris változást (vagy leginkább azt közelítő trendet) mutatnak.

Kutatómunkánk során sikerült egy olyan eljárást kidolgoznunk, mely szemben az eredeti Stone—Brown-féle variánssal, nem iteratív, hanem direkt algoritmus és amely a kísérleti számítások során az eredeti RAS-nál nem rosszabb eredményeket szolgáltatott.

Dolgozatunk három fejezetből áll. Az elsőben meghatározunk egy általános matematikai feladatot, melyneksegítségével az ágazati kapcsolati mérlegek technikai koefficienseit bizonyos feltételek megléte esetén előrebecsülhetjük. Ezek a feltételek általánosabbak, mint amit a RAS módszernél alkalmazunk, bár azok által inspiráltak.

A következő fejezet ennek az általános rendszernek két speciális esetével foglalkozik. Bizonyítjuk, hogy a technikai koefficiensek exponenciális idő-

[1] Az „ősforrások": Stone, R.—Brown, A.: [6] és Stone, R.—Bates, J.—Bacharach, M.: [7] alatti dolgozatai.

[2] Így például Németh, S.—Pór, A.: [5]-ben, Lipták, T.: [4]-ben, Kupcsik, J.—Rácz, A.: [3]-ban, Glattfelder, P. [2]-ben.

függése esetén automatikusan a RAS módszerhez jutunk, míg a lineáris időfüggés feltételezése egy direkt (nem-iteratív) előrebecslési algoritmust szolgáltat.

Az utolsó fejezetben egy olyan eljárást ismertetünk, mely a RAS módszer iteratív algoritmusát egy direkt algoritmussal közelíti.

1. A feladat matematikai megfogalmazása

Alkalmazzuk a következő jelölésrendszert. Kurzív betű vektort, illetve vektor-skalár függvényt, félkövér pedig matrixot, illetve kétindexes tenzor skalár függvényt jelent. A ^ a diagonális matrix, az e az összegező vektor jele. A dolgozatban szereplő indexes mennyiségek dimenziója n, és ha ezek az idő függvényei, úgy ezt felső indexezéssel szemléltetjük (pl. $\mathbf{A}(t_0) = \mathbf{A}^0$), rögzített időpont esetén.

Határozzuk meg $\mathbf{A}(t)$-t, ha

I.

$$\mathbf{A}^0, a(t), b(t)$$

ismertek,

II.

$$\mathbf{A}(t)\, e = a(t) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{A}^T(t)\, e = b(t) \tag{1.2}$$

$$a(t)\, e = b(t)\, e \tag{1.3}$$

összefüggések igazak és

III.

$$\mathbf{A}(t) \geq \mathbf{0} \tag{1.4}$$

$$a(t), b(t) > 0 \tag{1.5}$$

relációk teljesülnek. (A relációk komponensenként értendők.)

Az I–III. feltételek általában nem határozzák meg egyértelműen $\mathbf{A}(t)$-t. A megengedett $\mathbf{A}(t)$-k számának csökkentése érdekében újabb megszorító feltételeket vezetünk be, melyek – mint látni fogjuk – nem rekesztenek ki közgazdaságilag értelmes megoldást.

A II. feltétel $2n$ skalár-skalár (továbbiakban: skalár) függvény meghatározását teszi lehetővé, melyek közül (1.3) miatt csak $2n - 1$ független. $\mathbf{A}(t)$-nek n sora és n oszlopa van, tehát a meghatározható $2n$ függvény közül n-et $\mathbf{A}(t)$ soraihoz, n-et $\mathbf{A}(t)$ oszlopaihoz rendelünk hozzá, mivel semmi sem indokolja, hogy sort (sorokat) vagy oszlopot (oszlopokat) kitüntessünk. Megkívánjuk tehát a következő feltétel teljesülését:

IV. $\mathbf{A}(t)$ bármely komponensének alakja csak

$$A_{ij}(t) = A_{ij}[A^0_{ij}, x_i(t), y_j(t)] \tag{1.6}$$

lehet, ahol $x_i(t), y_j(t)$ az i-edik sorhoz ill. j-edik oszlophoz rendelt függvény.

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{A}(t)$ nem függhet t_0-tól, csak $t - t_0$ és $\mathbf{A}^0$-tól. Ellenkező esetben ugyanis $t_1 \neq t_0$-ból kiindulva más $\mathbf{A}(t)$-hez jutnánk, ami értelmetlen. Másrészt $\mathbf{A}(t)$ úgy is előállítható, hogy először $\mathbf{A}^0$, $t_1 - t_0$-ból meghatározzuk $\mathbf{A}^1$-et, majd $\mathbf{A}^1$, $t - t_1$-ből $\mathbf{A}(t)$-t, ahol $t_1 = t_0 + \lambda(t - t_0)$; $0 \leq \lambda \leq 1$. Ez matematikailag az alábbi függvényegyenlet alakjában fogalmazható meg

$$(1.7) \qquad \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^0, t - t_0) = \mathbf{A}\{\mathbf{A}[\mathbf{A}^0, \lambda(t - t_0)], (1 - \lambda\,(t - t_0)\}.$$

Mivel t_0 tetszőleges, válasszuk a $t_0 = 0$ kezdeti időpontot.

Figyelembe véve IV-et, további megszorító feltételként kell hogy megköveteljük:

V. $\mathbf{A}(t)$ bármely komponensének ki kell elégíteni az

$$(1.8) \qquad A_{ij}[A_{ij}^0, g_{ij}(t)] = A_{ij}\{A_{ij}[A^0, g_{ij}(\lambda t)], g_{ij}((1 - \lambda)\,t)\}$$

függvényegyenletet, ahol

$$(1.9) \qquad g_{ij}(t) = f[x_i(t), y_j(t)]$$

A feladat tehát $\mathbf{A}(t)$ meghatározása I—V. feltételek mellett.

2. Lineáris és exponenciális (RAS) eset

E fejezetben a feladat két megoldástípusával foglalkozunk.

a)

$$(2.1) \qquad A_{ij}[A_{ij}^0, g_{ij}(t)] = A_{ij}[A_{ij}^0 + g_{ij}(t)]$$

b)

$$(2.2) \qquad A_{ij}[A_{ij}^0, g_{ij}(t)] = A_{ij}[A_{ij}^0 g_{ij}(t)]$$

Mint látni fogjuk az a) eset $A_{ij}(t)$ időfüggése szempontjából lineáris, a b) eset pedig exponenciális.

a) *Lineáris eset*

Az V. feltételben megfogalmazott (1.8) függvényegyenlet alakja most

$$(2.3) \qquad A_{ij}[A_{ij}^0 + g_{ij}(t)] = A_{ij}\{A_{ij}[A_{ij}^0 + g_{ij}(\lambda t)] + g_{ij}[(1 - \lambda)\,t]\}.$$

(2.3) megoldása a Függelék I. Lemmája alapján

$$(2.4) \qquad A_{ij}(t) = A_{ij}^0 + \gamma_{ij}\, t$$

ahol γ_{ij} konstans. Az $A_{ij}(t)$ (2.4) szerinti előállításából eredően (1.1) és (1.2) csak akkor teljesülhet, ha $a_i(t)$, $b_j(t)$ lineáris függvény, azaz

$$(2.5) \qquad a_i(t) = a_i^0 + u_i\, t$$

$$(2.6) \qquad b_j(t) = b_j^0 + v_j\, t$$

A továbbiakban tegyük fel, hogy (2.5), (2.6) teljesül. A IV. feltétel miatt

$$(2.7) \qquad \gamma_{ij} = x_i + y_j$$

ahol x_i, y_j konstans. Meghatározásuk érdekében helyettesítsük (2.7)-et (2.4)-be

$$(2.8) \qquad A_{ij}(t) = A_{ij}^0 + (x_i + y_j)\, t$$

majd helyettesítsük (2.5), (2.6), (2.8)-at (1.1), (1.2)-be.

$$(2.9) \qquad \sum_{j=1}^{n} [A_{ij}^0 + (x_i + y_j)\, t] = a_i^0 + u_i t$$

$$(2.10) \qquad \sum_{i=1}^{n} [A_{ij}^0 + (x_i + y_j)\, t] = b_j^0 + v_j t$$

mivel $\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^0 = a_i^0$ és $\sum_{i=1}^{n} A_{ij}^0 = b_j^0$ azt kapjuk, hogy

$$(2.11) \qquad n x_i + \sum_{j=1}^{n} y_j = u_i$$

$$(2.12) \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i + n y_j = v_j$$

Ha $\mathbf{A}^0$-nak zéruselemei is vannak és azt akarjuk, hogy a zéruselemek ne változzanak, akkor (2.11), (2.12) helyett

$$(2.11/a) \qquad n_i x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ A_{ij} \neq 0}}^{n} y_j = u_i$$

$$(2.12/a) \qquad \sum_{\substack{i=1 \\ A_{ij} \neq 0}}^{n} x_i + m_j y_j = v_j$$

ahol

$$n_i = \sum_{\substack{j=1 \\ A_{ij} \neq 0}}^{n} 1$$

$$m_j = \sum_{\substack{i=1 \\ A_{ij} \neq 0}}^{n} 1$$

A (2.11) és (2.12) egyenletekből álló lineáris egyenletrendszer mátrixának rangja $2n - 2$, a (2.11/a) és (2.12/a) egyenletekből álló rendszer mátrixáé pedig legfeljebb $2n - 1$, ezért az x_i és y_j ismeretlenek közül minden esetben legalább egy szabadon választható. Az így nyert x_i, y_j konstansokat (2.8)-ba helyettesítve kapjuk a feladat megoldását.

b) *Exponenciális vagy RAS eset*

(1.8) függvényegyenlet most

$$A_{ij}[A_{ij}^0 \cdot g_{ij}(t)] = A_{ij}\{A_{ij}[A_{ij}^0 g_{ij}(\lambda t)] \cdot g[(1-\lambda)t]\} \tag{2.13}$$

(2.13) megoldása a Függelék II. Lemmája alapján

$$A_{ij}(t) = A_{ij}^0 e^{\gamma_{ij} t} \tag{2.14}$$

ahol γ_{ij} konstans. (2.14)-ből azonnal látható, hogy (1.1) és (1.2) csak akkor teljesülhet, ha $a_i(t)$, $b_j(t)$ meghatározott exponensű exponenciális függvények lineáris kombinációja, azaz

$$a_i(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e^{\beta_{ij} t} \tag{2.15}$$

$$b_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e^{\beta_{ij} t} \tag{2.16}$$

Belátható, hogy (1.1), (1.2) miatt ez csak akkor teljesülhet, ha

$$\alpha_{ij} = A_{ij}^0 \tag{2.17}$$

$$\beta_{ij} = \gamma_{ij} \tag{2.18}$$

tehát $A_{ij}(t)$ előállítása triviális.

Igen gyakran előfordul, hogy $a_i(t)$ és $b_j(t)$ értékét csak a $t = 0$ és $t = t_1$ pontban ismerjük, (a_i^0, a_i^1 és b_j^0, b_j^1). Ebben az esetben is meghatározható $A_{ij}(t)$ IV. miatt most is

$$\gamma_{ij} = x_i + y_j \tag{2.19}$$

(2.19)-et (2.14)-be helyettesítve

$$A_{ij}(t) = A_{ij}^0 e^{(x_i + y_j)t} \tag{2.20}$$

ahol x_i, y_j konstans. (2.20)-at (1.1), (1.2)-be helyettesítve $t = t_1$-re

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^0 e^{(x_i + y_j)t_1} = a_i^1 \tag{2.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij}^0 e^{(x_i + y_j)t_1} = b_j^1 \tag{2.22}$$

Ha bevezetjük az

$$R_i = e^{x_i t_1} \tag{2.23}$$

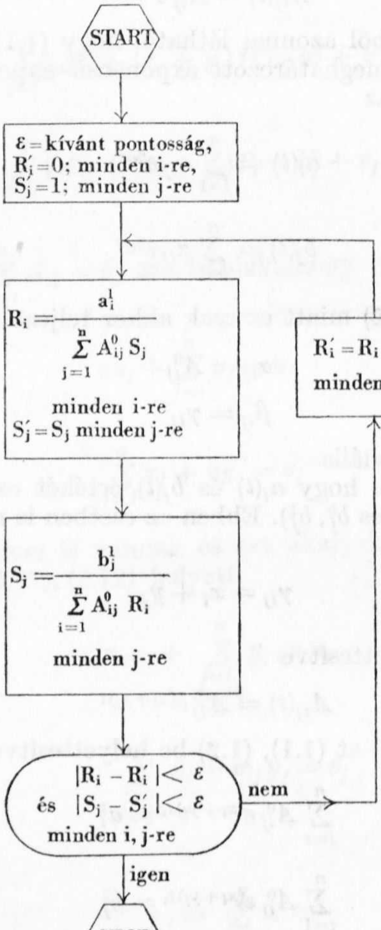
$$S_j = e^{y_j t_1} \tag{2.24}$$

jelöléseket, akkor (2.21), (2.22)-ből a jól ismert RAS egyenletekre jutunk (lásd [6]).

$$\sum_{j=1}^{n} R_i A_{ij}^0 S_j = a_i^1 \tag{2.25}$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i A_{ij}^0 S_j = b_j^1 \tag{2.26}$$

A RAS egyenletek megoldását egy iteratív algoritmussal, az ún. RAS módszer segítségével határozhatjuk meg. A RAS módszer logikai vázlatát az alábbi blokkdiagrammal szemléltetjük:



R_i, S_j ismeretében most már x_i, y_j és $A_{ij}(t)$ könnyen nyerhető (2.23), (2.24) és (2.20) segítségével.

$$x_i = \ln (R_i)/t_1 \tag{2.27}$$

$$y_j = \ln (S_j)/t_1 \tag{2.28}$$

$$A_{ij}(t) = A_{ij}^0 \, e^{\ln (R_i S_j) t/t_1} = A_{ij}^0 (R_i S_j)^{t/t_1} \tag{2.29}$$

Eredményeink azt mutatják, hogy a RAS módszer alkalmazása nem minden $a(t)$, $b(t)$ esetén vezet helyes eredményre. Szükséges feltétele, hogy $A_{ij}(t)$ az idő (2.20) alakú exponenciális függvénye legyen.

Ha a RAS módszer alkalmazásának feltételei teljesülnek, akkor létezik egy olyan direkt eljárás, mely a RAS eredményeit jól közelíti. A következő fejezet ennek a módszernek az ismertetésével foglalkozik.

3. A RAS-módszer lineáris közelítése

Tegyük fel, hogy az I—IV. feltételek teljesülnek $t = t_1$-re és a RAS módszer alkalmazható. Jelöljük

(3.1) $$r_i = e^{x_i t_1} - 1$$

(3.2) $$s_j = e^{y_j t_1} - 1$$

Alkalmazzuk e jelöléseket $t = t_1$ esetén (2.20)-ra.

(3.3) $$A_{ij}^1 = A_{ij}^0(r_i + 1)(s_j + 1) = A_{ij}^0(1 + r_i + s_j) + r_i A_{ij}^0 s_j$$

r_i és s_j lényegében véve A_{ij}^0 relatív változása a sor, illetve oszlop „hatás" miatt. Ha ez a változás nem túl nagy (empirikus tapasztalatok alapján, gyakorlati példák esetén 10^{-2} átlagos nagyságrendű), akkor $r_i + s_j$-hez képest $r_i s_j$ elhanyagolható. A direkt módszer ezen a felismerésen alapul, s alkalmazhatóságát is ez szabja meg.

Keressük A_{ij}^1-et

(3.4) $$A_{ij}^1 = A_{ij}^0(1 + \varrho_i + \sigma_j)$$

alakban. (3.4)-et mátrix alakban írva

(3.5) $$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^0 \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \hat{\boldsymbol{\rho}} \mathbf{A}^0$$

(1.1) és (1.2) miatt σ és ϱ a következő egyenletekből határozható meg:

(3.6) $$a^0 + \mathbf{A}^0\sigma + \hat{\boldsymbol{\rho}} a^0 = a^1$$

(3.7) $$b^0 + \hat{\boldsymbol{\sigma}} b^0 + \mathbf{A}^{0T} \varrho = b^1$$

mivel $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ és $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ diagonál mátrixok és ϱ és σ az ezekből képezhető oszlopvektorok, (3.6) és (3.7)-et átírhatjuk

(3.8) $$\mathbf{A}^0\sigma + \hat{\mathbf{a}}^0\varrho = a^1 - a^0$$

(3.9) $$\hat{\mathbf{b}}^0 \sigma + \mathbf{A}^{0T} \varrho = b^1 - b^0$$

alakba. σ és ϱ az

(3.10) $$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^0 & \hat{\mathbf{a}}^0 \\ \hat{\mathbf{b}}^0 & \mathbf{A}^{0T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \varrho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 - a^0 \\ b^1 - b^0 \end{pmatrix}$$

inhomogén lineáris egyenletrendszerből határozható meg. Az egyenletrendszer mátrixának rangja kisebb mint $2n$, ezért legalább egy ϱ_i, vagy σ_j komponenst szabadon megválaszthatunk.

A módszer előnye, hogy direkt eljárás, ugyanakkor az $\mathbf{A}^0$ zéruselemeit éppúgy érintetlenül hagyja, mint a RAS módszer.

Függelék

Tegyük fel, hogy $f(\alpha, x)$, $g(x)$ folytonos, monoton függvények, $0 \leq \lambda \leq 1$ és α tetszőleges paraméterek, akkor

I. Lemma

Az

$$f(\alpha, x) = f[\alpha + g(x)] = f\{f[\alpha + g(\lambda x)] + g[(1 - \lambda)x]\} \tag{I.1}$$

függvényegyenletet csak a

$$g(x) = mx + b \tag{I.2}$$

$$f(\alpha, x) = \alpha + g(x) - b = \alpha + mx \tag{I.3}$$

típusú függvények elégítik ki, ahol m, b tetszőleges konstansok.

Bizonyítás

$f(\alpha, x)$ monotonitása miatt (I.1)-ből

$$\alpha + g(x) = f[\alpha + g(\lambda x)] + g[(1 - \lambda)x] \tag{I.4}$$

(I.4)-be $\lambda = 1$-et helyettesítve

$$f[\alpha + g(x)] = \alpha + g(x) - g(0) \tag{I.5}$$

(I.5)-ből határozzuk meg $f[\alpha + g(\lambda x)]$-et és írjuk (I.4)-be

$$g(x) = g[\lambda x + (1 - \lambda)x] = g(\lambda x) + g[(1 - \lambda)x] - g(0) \tag{I.6}$$

Az (I.6) függvényegyenletet egyetlen függvénytípus elégíti ki (lásd [8]), mégpedig

$$g(x) = mx + b \tag{I.7}$$

ahol m, b tetszőleges állandók. (I.7)-et (I.4)-be helyettesítve $\lambda = 1$ esetén

$$f(\alpha, x) = \alpha + mx \tag{I.8}$$

Az (I.8) típusú függvények (I.1)-nek valóban megoldásai.

II. Lemma

Az

$$f(\alpha, x) = f[\alpha \cdot g(x)] = f \cdot \{f[\alpha \cdot g(\lambda x)] \cdot g[(1 - \lambda)x]\} \tag{II.1}$$

függvényegyenletet $\alpha \neq 0$ esetén csak a

$$g(x) = be^{mx} \tag{II.2}$$

$$f(\alpha, x) = \frac{\alpha}{b} g(x) = \alpha e^{mx} \tag{II.3}$$

típusú függvények elégítik ki, ahol m, b konstansok $b \neq 0$.

Bizonyítás

$f(\alpha, x)$ monotonitása miatt (II.1)-ből

(II.4) $$\alpha g(x) = f[\alpha \cdot g(\lambda x)] \cdot g[(1 - \lambda)x]$$

(II.4)-be $\lambda = 1$-et helyettesítve

(II.5) $$f(\alpha \cdot g(x)) = \alpha \frac{g(x)}{g(0)}$$

(II.5)-ből határozzuk meg $f[\alpha \cdot (\lambda x)]$-et és írjuk (II.4)-be

(II.6) $$g(x) = g[\lambda x + (1 - \lambda)x] = \frac{g(\lambda x) \cdot g[(1 - \lambda)x]}{g(0)}$$

A (II.6) függvényegyenlet egyetlen megoldástípusa a szakirodalom szerint (lásd [8]):

(II.7) $$g(x) = be^{mx}$$

ahol $b \neq 0$, m tetszőleges konstansok. (II.7)-et (II.4)-be helyettesítve, $\lambda = 1$ esetén

(II.8) $$f(\alpha, x) = \alpha e^{mx}$$

A (II.8) típusú függvények (II.1)-nek valóban megoldásai.

(Beérkezett: 1972. január 20.)

IRODALOM

1. DEMING, W. E.: Statistical adjustment of data. New York, 1943. Wiley. 115–117. o.
2. GLATTFELDER P.: A Nehézipari Minisztérium ágazati kapcsolati modelljének előrebecslése. Statisztikai Szemle, 1969/3. sz. 282–297. o.
3. KUPCSIK J.–RÁCZ A.: Az ágazati kapcsolati mérlegek dinamikai összehasonlítása. Statisztikai Szemle, 1969/4. sz. 335–368. o.
4. LIPTÁK T.: A RAS módszer kiterjesztése hármas bontású áramlásokra. Konkunktúra és Piackutató Intézet, Budapest, 1966. (Kézirat)
5. NÉMETH S.–PÓR A.: Az ÁKM koefficiens-számításainak egyik módszeréről. Budapest, 1968. Országos Tervhivatal.
6. STONE, R.–BROWN, A.: A long-term growth model for the British Economy. „GEARY, R. C. (szerk.): Europe's future in figures. Amsterdam, 1966. North Holland" kötetben.
7. STONE, R.–BATES, J.–BACHARACH, M.: A programme for growth. – Input-output relationships 1954–66. University of Cambridge, 1963.
8. SZÁSZ, P.: A differenciál- és integrálszámítás elemei. Budapest, 1951. Közoktatásügyi Kiadó Vállalat. 387–89. o.
9. Az ártervezés ökonometriai modellje. Országos Anyag- és Árhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat kiadványai. Budapest, 1968–1971.

SOME COMMENTS ON THE THEORY OF THE RAS METHOD

The paper deals with the extension and generalization of the RAS method which was elaborated by some representatives of the Cambridge econometric school (M. Bacharach, J. Bates, A. Brown, and R. Stone). According to the basic theorem the RAS method that makes coefficient-forecasts by means of the basic period coefficient matrix of input-

output schemes, and plan period row- and column-sums, is based upon the implicit assumption that the change of technical coefficient in time shows an exponential trend. The authors prove that this assumption is implied, indeed, by the RAS method and they examine the case when the coefficients of the technological matrix depend linearly on time, this case being as likely as the former from a practical point of view. It is characteristic both for their solution elaborated for the latter possibility, and for their („simplified") RAS algorithm, an approximate of the original RAS procedure, that the forecasted coefficient matrix does not result as a solution of a complicated iterative process but that of a comparatively simple linear equation system.

In the first part of the paper the authors collect the above propositions, and they set up a general mathematical problem for which the RAS method initiated by W. E. Deming and elaborated by Stone's team is one of the possible solutions. In the second chapter they deal with the linear and exponential cases of the above generalized problem. In the third part of the paper the original RAS method, the algorithm supposing exponential dependence on time, is approached by a linear method. It results in vectors which play economically the same role as the diagonal matrices R and S of the RAS method do.

In the Appendix mathematical formulation and proof of two Lemmas support the above propositions.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕТКИ К ТЕОРИИ МЕТОДА РАШ

Труд занимается распространением и обобщением метода РАШ, обработанного некоторыми представителями школы эконометрики в г. Кембридж (М. Бакарак, Й. Бетс, А. Браун и Р. Стон). По исходному положению метод РАШ, который прогнозирует коэффициенты с помощью коэффициент-матрикса в базисном периоде и сумм строчек и сумм столбцов в плановом периоде, косвенно базируется на предположении, что изменение во времени некоторых технических коэффициентов показывает экспоненциальный тренд. Авторы доказывают, что это косвенное предположение существует внутри РАШ-а, а потом они исследуют тот случай, когда коэффициенты практического матрикса линейно зависят от времени. В то же время является характерным как для их решения, обработанного для последней возможности, так и для («упрощенного») РАШ алгоритма, приближающего оригинальную РАШ-процедуру, что коэффициент-матрикс планируемого года получается не в результате сложного процесса итерации, а в результате решения относительно простой линейной системы уравнений.

В первой части труда авторы подытоживают вышеупомянутые установления и излагают такую общую математическую задачу, для которой метод РАШ, инспированный В. Е. Демингом и обработанный группой Стона, является одним из возможных решений. Во второй главе они занимаются линейными и экспоненциальными случаями вышей, обобщенной задачи.

В третьей части труда они приближают линейным методом оригинальный метод РАШ, т. е. алгоритм, предполагающий экспоненциальную зависимость от времени. Результат, полученный решением, дает векторы, которые в экономическом смысле выполняют ту же роль, что диагональные матрицы в методе РАШ.

В добавлении математическое изложение и доказательство двух лемм служат подтверждением вышеупомянутого предположения.

Kovács János

A magyar életszínvonaltervezés egyszerűsített konzisztencia-ellenőrzési modellje („MÉB alfa")

Az itt leírt számítási eljárás célja olyan egyszerű, gyors számítási módszert adni, amelynek segítségével az életszínvonal tényezők alapvető mennyiségi összefüggései gyorsan kiszámíthatók. Mindenekelőtt az a cél, hogy gyorsan át lehessen tekinteni, vajon az életszínvonal különböző területein számításba vett intézkedések gazdasági-pénzügyi kihatásai nem lépik-e túl a nemzeti jövedelemből az életszínvonal területekre várhatóan fordítható részt, figyelembe véve a nemzeti jövedelem feltételezett növekedési ütemét, a felhalmozás és fogyasztás várható arányát, illetve ezek variánsait. Amennyiben pedig túllépik, milyen mértékben kell csökkenteni az egyes területek igényeit, egyes területek preferálása mellett.

Ugyanakkor ezeket az igényeket itt úgy tekintjük, mint amelyek egymástól többé-kevésbé függetlenül születnek meg, ahogyan ez a valóságban is történik a tervezési munkacsoportokban. Nem vizsgáljuk pl. a munkaerőstruktúrának az oktatási igényekkel való összhangját, de nem vizsgáljuk a munkaerőstruktúra és a népgazdasági újratermelési folyamat közötti összhangot sem. Csupán egy ettől függetlenül számított várható foglalkoztatási szintből és munkaerőstruktúrából adódó reálkereseteknek a jövedelemszínvonalra való hatását és az oktatási rendszer fejlesztési variánsainak (folyó és egyszeri) ráfordítási kihatásait, illetve ezeknek a különböző gazdasági fejlődési ütemek és preferenciák mellett való teljesíthetőségét vizsgáljuk.

Nem elemezzük e módszer keretében az egyes intézkedések, fejlődési jelenségek mélyebb kihatásait sem. Pl. nem elemezzük az egyes munkaerő-kategóriákon belüli jövedelemeloszlást, hanem csupán az egyes kategóriák várható átlagos jövedelmével számolunk. Mind az előbbi, mind az utóbbi típusú vizsgálatokat és elemzéseket külön modellekre hárítjuk át.

A modell a Munkaerő és Életszínvonal Távlati Tervezési Bizottságának (MÉB) központi konzisztencia-ellenőrzési számításaira készült. Mint e bizottság minden munkája, ez is sok ember együttműködésének eredménye. Az alkalmazandó módszer kialakításához elsősorban Hoch Róbert és Timár János járult nagymértékben hozzá, valamint az OT Életszínvonal Osztályának a számításokat végző munkatársai (Boldoczki János, John Ede, Alpár Ottó, Monigl István, Mausecz Zsuzsa és mások). A számítási munkálatok során 12 életszínvonal-variáns közül végül is 4 maradt fenn a részletes számításokra. E variánsok főként abban különböznek egymástól, hogy az életszínvonal különböző tényezői közül melyeket preferálunk és milyen mértékben. A számítás során felhasznált adatokat (elsősorban a koefficiensek számításához szükséges adatokat) túlnyomórészt az életszínvonal egyes részterületeinek tervvariánsait kidolgozó munkacsoportok szolgáltatták, egy más részét az említett központi apparátus maga állította elő. A hosszútávú tervezés jelenlegi stádiuma nem teszi lehetővé magának a számítási anyagnak a közlését, bizonyos azonban, hogy egy idő múlva erre is sor fog kerülni.

I. A számítás során figyelembe veendő tényezők

Az Egyszerűsített Módszerben mindig a nemzeti jövedelemmel számolunk el, különös tekintettel a lakosság életszínvonalát érintő tételekre. Ezért az életszínvonalat közvetlenül érintő tényezőket a kívánatos mértékben részletezzük, a többit a lehetséges mértékben összevonjuk. Ennek megfelelően a következő tényezőket gondoljuk számításba venni (ezek módosítása nem okoz problémát):

A *Lakossági jövedelem*

A_1 1. Kereset = munkateljesítménytől függő kereset (bér + prémium + nyereségrészesedés + korpótlék). Mezőgazdasági dolgozóknál: munkaegység + bér + saját fogyasztás
A_2 2. Családi pótlék
A_3 3. Anyasági segély + gyermeknevelési segély
A_4 4. Nyugdíj
A_5 5. Oktatás + Népművelés
A_6 6. Egészségügy
A_7 7. Lakásfenntartási szubvenció + kommunális szubvenció
A_8 8. Bölcsőde – Óvoda + Napközi
A_9 9. Egyéb (szociális juttatás, üdültetés, munkaruha, utazási térítés, különélési pótlék stb.)

B *Lakossági fogyasztás*

B_1 1. Élelmiszer
B_2 2. Ruházat
B_3 3. Tartós fogyasztási cikkek
B_4 4. Közlekedés
B_5 5. Oktatás
B_6 6. Egészségügy
B_7 7. Lakás + kommunális szolgáltatás
B_8 8. Bölcsőde, óvoda, napközi
B_9 9. Egyéb
B_{10} 10. Megtakarítás

C *Lakosságot szolgáló beruházás*

C_1 1. Oktatási beruházás
C_2 2. Egészségügyi beruházás
C_3 3. Lakásépítés + kommunális beruházás
C_4 4. Egyéb

D *Közületi fogyasztás*

$D_1 - D_9$: Lásd B Lakossági fogyasztás 1—9. tételei alatt

E *Közületi beruházás*

E_1 1. Építés
E_2 2. Berendezés, felszerelés
E_3 3. Egyéb

F *Termelő felhalmozás*

F_1 1. Beruházás
F_2 2. Készletnövekedés

II. Figyelemmel kísérendő alapösszefüggések

A tervezési periódus (1971—1985) minden t időpontjában ($t = 1971, 1972, \ldots, 1985$) teljesülnie kell a következő egyenlőségeknek:

(1) $$A_t + C_t + D_t + E_t + F_t - B_{10,t} = I_t \pm J_t = I_t^*$$

ahol I_t a t-edik évre becsült nemzeti jövedelem
J_t a t-edik évre becsült fizetési mérleg egyenlege.

Szavakban:

A nemzeti jövedelem egyenlő a lakossági jövedelem, a lakosságot szolgáló beruházások, a közületi fogyasztás, a közületi beruházás és a termelő felhalmozás összegével, ha a lakossági jövedelemből levonjuk a lakossági megtakarítások összegét és a nemzeti jövedelmet korrigáljuk a fizetési mérleg várható egyenlegével.

(2) $$A_t - B_{10,t} = B_t$$

Szavakban:

A lakossági jövedelemből levonva a lakossági megtakarítások összegét, megkapjuk a lakossági fogyasztás értékösszegét. Ezért:

(3) $$B_t + C_t + D_t + E_t + F_t = I_t^*$$

Szavakban:

A nemzeti jövedelem egyenlő a lakossági fogyasztás, a lakosságot szolgáló beruházások, a közületi fogyasztás, a közületi beruházás és a termelőfogyasztás összegével.

(4) $$A_t + D_t - B_{10,t} = G_t$$

ahol G_t a t-edik évben a fogyasztási alap.

Szavakban:

A fogyasztási alap egyenlő a lakossági jövedelem és a közületi fogyasztás összegével, mínusz a lakossági megtakarítás.

(5) $$B_t + D_t = G_t$$

Szavakban:

A fogyasztási alap egyenlő a lakossági fogyasztás és a közületi fogyasztás összegével.

(6) $$B_t + C_t = G_t'$$

ahol G_t' a széles értelemben vett lakossági fogyasztási alap.

Szavakban:

A széles értelemben vett *lakossági* fogyasztási alap egyenlő a lakossági fogyasztás és a lakosságot szolgáló beruházás évi összegével.

(7) $$B_t + C_t + D_t = G_t''$$

ahol G_t'' a széles értelemben vett fogyasztási alap.

Szavakban:

A széles értelemben vett fogyasztási alap egyenlő a lakossági fogyasztás, a lakosságot szolgáló beruházás és a közületi fogyasztás összegével.

Indoklásra szorul, hogy a széles értelemben vett fogyasztási alapba miért vettük be a közületi fogyasztást, és a közületi beruházást miért nem: A közületi fogyasztás egy jelentős része alapjában véve lakossági fogyasztás (pl.: a fegyveres erők élelmiszer—ruházati fogyasztása „tehermentesíti" a lakosság fogyasztási alapját). Ugyanakkor a közületi beruházás túlnyomó része nem csökkenti a lakosságot szolgáló beruházási igényeket (pl. a laktanyaépítés nem csökkenti a lakásigényeket). Átfedések persze így is vannak (pl. honvédségi egészségügyi beruházások).

(8) $$C_t + E_t + F_t = H_t$$

ahol H_t a felhalmozási alap.

Szavakban:

A felhalmozási alap a lakosságot szolgáló beruházások, a közületi beruházások és a termelő felhalmozás összege.

(9) $$I_t^* - G_t' = D_t + E_t + F_t = H_t'$$

ahol H_t' széles értelemben vett „közösségi fogyasztási alap".

Szavakban:

A széles értelemben vett „közösségi fogyasztási alap"-ot a közületi fogyasztás, a közületi beruházás és a termelő felhalmozás összege adja.

(10) $$I_t^* - G_t'' = E_t + F_t = H_t''$$

ahol H_t'' a szűkebb értelemben vett „közösségi felhalmozási alap".

Szavakban:

A szűkebb értelemben vett „közösségi felhalmozási alap" a közületi beruházásokból és a termelő felhalmozásból tevődik össze.

Felmerül az a kérdés, hogy szükség van-e a (6), (7), (9) és (10)-ben definiált fogalmakra. Úgy érezzük, hogy az életszínvonal vizsgálatokban igen. Nem elégedhetünk meg egyszerűen a fogyasztási alap, illetve annak várható növekedési üteme vizsgálatával. Ez ugyanis egyrészt nem tartalmazza a lakossági életszínvonalát közvetlenül érintő, sőt azt nagymértékben meghatározó „lakosságot szolgáló beruházásokat" (gondoljunk csak a lakásproblémára), másrészt magában foglalja a közületi fogyasztást, amelynek egy része ugyan valójában a lakosság fogyasztásának részét képezi és így életszínvonal tényező, de azt a lakosság nem érzékeli, még kevésbé méltányolja és csak a közvetlen lakossági fogyasztást korlátozó hatását érzékeli. Szükség van tehát egyrészt a lakossági fogyasztás és a lakosságot szolgáló beruházások együttes vizsgálatára, másrészt a fogyasztási alap és a lakosságot szolgáló beruházások összegének elemzésére is. (Az elnevezéseket nem tartjuk túl lényegesnek, minden jobb javaslatot szívesen veszünk.)

Világosan látjuk, hogy az itt definiált fogalmak nem tiszta kategóriák. Néhány példát már említettünk. De említhetnénk a közlekedési beruházások problémáját — hogy tudniillik ebből mi tartozik a lakosságot (közvetlenül) szolgáló beruházások keretébe és mi a termelő felhalmozásba? Ezek elhatárolása részben a rendelkezésre álló statisztikai-rendszer, részben pedig szubjektív ,,egyszerűsítő'' elhatározások függvénye.

III. Növekedési ütem

A népgazdasági várható növekedési üteme alapvetően meghatározza a figyelembe veendő tényezők vagy legalábbis azok együttesének felső növekedési korlátját. Bár a növekedési ütem ritkán állandó egy 15 éves szakaszban, egyszerűsítés céljából egy állandó növekedési ütemre kell feltevéseket tennünk.[1] Így adódnak a következő összefüggések:

(11) $$G_0(1+r)^T = G_T$$

ahol G_0 a bázisévi fogyasztási alap
G_T a tervperiódus utolsó évének fogyasztási alapja
r a feltételezett növekedési üteme a fogyasztási alapnak.

(12) $$G'_0(1+r')^T = G'_T$$

(13) $$G''_0(1+r'')^T = G''_T$$

(14) $$H_0(1+q)^T = H_T$$

ahol q a felhalmozási alap feltételezett növekedési üteme.

(15) $$H'_0(1+q')^T = H'_T$$

(16) $$H''_0(1+q'') = H''_T$$

(17) $$G_0 + H_0 = I^*_0$$

(18) $$G_T + H_T = I^*_T$$

(19) $$I^*_0(1+s)^T = I^*_T$$

ahol s a nemzeti jövedelem feltételezett növekedési üteme,[2] és **(11)**, **(14)** és (18)-ból

(20) $$I_0(1+s)^T = G_0(1+r)^T + H_0(1+q)^T.$$

Ha tehát adva van egy becslés a nemzeti jövedelem s és a felhalmozási alap q növekedési ütemére, adott a fogyasztási alap várható növekedési üteme is.

[1] Lehetséges és szükséges szakaszos növekedési feltevésekkel élnünk (pl. 5 éves szakaszok), amennyiben és amikor ezek már *termelési* oldalról megalapozottak. Ha pl. a növekedés üteme szempontjából három szakaszt tételezünk fel, akkor (11) így írható:

$$G_0(1+r_1)^{T_1}(1+r_2)^{T_2}(1+r_3)^{T_3} = G_T$$

(Az első életszínvonal variánsok elkészítése *megelőzte* a termelési koncepció elkészítését.)

[2] (19)-ben hallgatólagosan feltételezzük, hogy a pénzügyi mérleg szaldója vagy zérus, vagy a nemzeti jövedelemnek konstansszorosa.

IV. A közvetlen életszínvonal-tényezők előállítása

Az I. fejezetben a nemzeti jövedelmet a vele való elszámolás lehetőségének megteremtése céljából formailag 6, valójában — a lakossági jövedelem és a lakossági fogyasztás azonossági összefüggése következtében — 5 részre osztottuk. Ebből az *életszínvonal*-tervezésnek az első hármat *terveznie*, az utolsó hármat az előbbi három tervezhetősége érdekében becsülnie kell.

A tervezés során felmerülő igények konzisztenciájának ellenőrzése során ezeket a tényezőket magának az ellenőrző szervnek is elő kell állítania. A gyors előállítás és nagyságrendi hibák vagy túlzások megtalálására legegyszerűbb eljárás valamilyen normatív előállítás.

$$A_t = \sum_i \sum_j a_{ijt} N_{ijt} \tag{21}$$

ahol a_{ijt} a lakosság j-edik rétegének tervezett jövedelme az i-edik jövedelem kategóriából (a t-edik tervévben) egy főre számítva,
N_{ijt} az i-edik jövedelemfajta szempontjából figyelembe vehető és a j-edik kategóriába tartozó lakossági réteg létszáma (a t tervévben).

Az a_{ij} normák nem függetlenek egymástól. Csaknem valamennyi függ pl. az átlagkeresetektől. Ezeket az összefüggéseket a tervezés során figyelembe kell venni. Például a nyugdíjnál; a negyedik jövedelemfajtánál:

$$A_{4t} = \sum_j \sum_k a_{4,j,(t-k)} N_{4,j,(t-k)}$$

és

$$a_{4,j,(t-k)} = \alpha_t a_{1,j,(t-k)}$$

ahol $N_{4,\,j,\,(t-k)}$ a t tervév előtt nyugdíjba menők száma a j-edik munkaerő kategóriából,
$a_{4,\,j,\,(t-k)}$ a k évvel a t év előtt nyugdíjba ment j-kategóriájú dolgozó nyugdíja,
$a_{1,\,j,\,(t-k)}$ ugyanezek átlagkeresete a nyugdíjba menetelkor,
α_t a nyugdíjrendszertől és annak tervezett módosításaitól függő paraméter.

V. A lakossági fogyasztás

A lakossági fogyasztás várható alakulásának becslése kétféleképpen történik:

1. A keresleti függvényekből kiindulva a lakossági összjövedelem szintjéhez rendelünk hozzá annak egy olyan bontását adó vektort (amelynek összege l és), amelynek komponensei megadják, hogy a lakosság jövedelmét milyen százalékos megoszlásban fordítja fogyasztási tényezőkre. (Természetesen ezzel egyenértékű, ha ezt a lakosság egy főjére adjuk meg.) Azaz

$$B_{it} = \varphi_{it} A_t$$

ahol B_{it} = az i-edik fogyasztási cikkcsoportból a fogyasztás a t-edik évben,
A_t = a lakossági összjövedelem a t-edik évben

és

$$\sum_{i=1}^{8} \varphi_i = 1$$

Azaz a fogyasztás megoszlása a jövedelem függvénye.

2. Másrészről a fogyasztás felírandó fogyasztási fajlagosok segítségével is

$$B_{it} = p_i \beta_{it} N_{it} - D_{it}^*$$

ahol N_{it} az i-edik fogyasztási cikkcsoportot fogyasztók száma (pl. B_5 és B_8 esetében a megfelelő korú lakosság),

β_{it} az i-edik cikkcsoportból a becsült egy főre jutó fogyasztás,

p_i az i-edik cikkcsoport „egységára" a bázisévben (minthogy változatlan áron számolunk),

D_{it}^* a közületi fogyasztásnak az i-edik cikkcsoportból a lakossági fogyasztást „tehermentesítő" része (főként élelem, ruházat).

Megjegyzendő, hogy a megtakarítást saját fogyasztási fajtaként számoljuk el ($B_{10} = \varphi_{10} A$).

VI. A lakosságot szolgáló beruházások

$$\sum_{t=1}^{T} C_{it} = \sum_j p_{ij}^u (K_{ijT} - K_{ij0}) + \sum_j p_{ij}^r K_{ij0} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ahol K_{ijT} az i-edik lakossági beruházásfajta j-edik típusából a tervidőszak végére tervezett kapacitás,

K_{ij0} ugyanabból a bázisévi (és a tervidőszak végéig megmaradó kapacitás),

p_{ij}^u az új kapacitás létesítési egységköltsége,

p_{ij}^r a régi kapacitás korszerűsítési egységköltsége.

VII. Közületi fogyasztás, közületi beruházás, termelő felhalmozás

D, E és F becslését elegendő (variánsonként) egyetlen tételben elvégezni. Kivétel D, a közületi fogyasztás, amelyet D_i-kre kell bontani a lakosság-fogyasztással való összefüggések miatt. (Bevalljuk, hogy itt nem látjuk világosnak, hogy hogyan lehet a halmozódást elkerülni.)

Az egy tételben való becslés lehet egy konstans tétel becslése, vagy az, hogy a nemzeti jövedelem konstans része. Ez utóbbi látszik jobbnak. (F-nél ez nyilvánvaló.)

$$D_t = dI_t$$

és

$$D_{it} = \delta_i D_t$$

ahol $\sum_i \delta_i = 1$,

$$E = eI_t,$$

$$F = fI_t.$$

VIII. A preferenciák érvényesítése

Módszertanról lévén szó, itt most nem kívánunk beszélni arról, hogy milyen életszínvonal tényezőket kell preferálni.

Tegyük fel azonban, hogy adott nemzeti jövedelem növekedési variáns mellett a tervidőszak végi lakossági jövedelmekre vonatkozóan benyújtott (és egyébként jogos) igények nem teljesíthetőnek mutatkoznak (pl. mert minimálisra becsült közületi fogyasztás, közületi beruházás és termelő beruházás mellett is túllépi a variánsban becsült nemzeti jövedelem kereteit, figyelembe véve egy ,,megváltoztathatatlannak'' tekintett, tehát külön preferált lakossági beruházást).

Jelöljük a benyújtott igényeket felső vonással, az adott variánsban elfogadhatónak látszó keretet alsó vonással

$$\bar{A}_T = \sum_{i=1}^{9} \bar{A}_{iT} > \underline{A}_T$$

(1) Tegyük fel, hogy preferáljuk az egyik jövedelemtényezőre, például a keresetekre bejelentett igény teljes teljesítését. A teljesíthető nagyságrendet jelöljük felül két vonallal.

$$\bar{A}_{1T} = \bar{\bar{A}}_{1T}$$

Ha a többi igény arányos csökkentése mellett ,,döntünk''

$$\underset{(i \neq 1)}{\bar{\bar{A}}_{iT}} = \frac{\underline{A}_T - \bar{\bar{A}}_{1T}}{\sum\limits_{i \neq 1} \bar{A}_{iT}} \bar{A}_{iT}$$

Ez természetesen bármely k-adik igény preferálására igaz, ha $\bar{A}_{kT} = \bar{\bar{A}}_{kT}$, akkor tetszés szerinti $i \neq k$-ra

$$\bar{\bar{A}}_{iT} = \frac{\underline{A}_T - \bar{\bar{A}}_{kT}}{\sum\limits_{i \neq k} \bar{A}_{iT}} \bar{A}_{iT}$$

(2) Természetesen az is lehetséges, hogy nem egy, hanem több jövedelem tényezőt preferálunk, pl. az első három tényezőt együtt:

$$\bar{\bar{A}}_{jT} = \bar{A}_{jT} \qquad j = 1, 2, 3.$$

Akkor az összes többi tényezőre ($i = 4, 5, \ldots, 9$)

$$\bar{\bar{A}}_{iT} = \frac{\underline{A}_T - \sum\limits_{j=1}^{3} \bar{\bar{A}}_{jT}}{\sum\limits_{j=4}^{9} \bar{A}_{jT}} \bar{A}_{iT}$$

(3) Az egyszerű arányos csökkentés azonban nem mindig célszerű. Lehet ugyanis az igényeknek egy olyan minimuma, amely alá nem látszik helyesnek menni. Az arányos csökkentésnél lehetséges, hogy egyes nem preferált igények ez alá a minimum alá mennének, miközben mások jóval fölötte maradnának (miközben persze ezek is a ,,benyújtott'' igények alatt maradnak). Ez esetben az eljárás:

Először meghatározzuk a nem preferált tényezőkre a minimális igényeket, majd ellenőrizzük, hogy a nem preferált igények minimuma alatta marad-e keretből ($\underline{A}_T$) a preferált (1, 2, 3) igények kielégítése után megmaradt résznek. Ha

$$\underline{A}_T - \sum_{j=1}^{3} \bar{A}_{jT} > \sum_{j=4}^{9} \min A_{jT}$$

akkor a megmaradt keretet a *minimális* (és nem a benyújtott) igényekarányában osztjuk fel:

$$\bar{\bar{A}}_{iT} = \frac{\underline{A}_T - \sum_{j=1}^{3} \bar{A}_{jT}}{\sum_{j=4}^{9} \min A_{jT}} \min A_{iT} \qquad (i = 4, 5, \ldots 9)$$

ha viszont

$$\underline{A} - \sum_{j=1}^{3} \bar{A}_{jT} < \sum_{j=4}^{9} \min A_{iT}$$

akkor valamely preferált tényezőt nem preferált tényezővé kell tenni és csupán minimumot kell számára megállapítani.

(4) A fogyasztási igények preferálása hasonlóképpen történhet. Célszerűbb azonban — úgy tűnik — a jövedelemmel való összefüggésüket mindig figyelembe venni. (Lásd V. 1. pontját.)

(5) Megint másik lehetőség az, hogy adott növekedési variáns és egy preferált lakossági fogyasztás mellett nem látszik kielégítőnek a lakosságot érintő beruházások iránt támasztott — egyébként jogosnak ítélt — igény. Tehát az n számú lakossági beruházási tényezőre (nomenklatúrában $n = 4$) $T = 15$ év alatt összesen támasztott igény nagyobb, mint a 15 év alatti lakosságot érintő beruházási keret

$$\bar{C} = \sum_{i=1}^{4} \sum_{t=1}^{15} \bar{C}_{it} > \underline{C}$$

ahol $\bar{C}$ a „benyújtott" összigény,

$\underline{C}$ a „lehetséges" keret.

Preferáljuk például az l és k igény teljes kielégítését a többi meghatározott minimuma mellett:

ha

$$\bar{\bar{C}}_l = \bar{C}_l$$

(azaz az l-edik benyújtott igényt elfogadjuk változatlanul) és

$$\bar{\bar{C}}_k = \bar{C}_k$$

és ha

$$\underline{C} = \sum_{i=k,l} \bar{C}_i > \sum_{i \neq k,1} \min C_i$$

akkor a lakosságot érintő minimális beruházási igényekhez hozzáadjuk a megmaradt keretnek a minimális igényekkel arányos részét

$$\bar{\bar{C}}_{\substack{i \\ i \neq k,1}} = \frac{\underline{C} - \sum_{i=k,1} \bar{C}_i}{\sum_{i \neq k,1} \min C_i} \min C_i$$

(Beérkezett: 1972. február 21.)

THE SIMPLIFIED CONSISTENCY CONTROL MODEL OF PLANNING LIVING STANDARDS IN HUNGARY („MÉB ALFA")

The paper describes a model that has been elaborated within the framework of long-term planning of living standards and aims at the consistency test of plans for different factors. The model was supposed to be easy to handle, to survey and to fit the available data.

The described model belongs to the family of systems of national economic balances. Its essence is the account of national income by means of a particular distribution of national income which takes into consideration in full detail those fields of utilizing the national income that directly influence living standards (consumption of the population, infrastructural investments serving the population directly, a part of collective consumption releasing consumption of the population). The model handles in an aggregated form those fields of utilizing the national income, which do not bear this character. It approaches the problem of consistency from two sides: partly it examines how large a national income (and growth) is necessary for meeting given living standards demand and partly, how fast the the single factors of living standards can be developed if national income (growth) and living standards preferences are given.

Several prospective variants of living standards have been elaborated with the model. The author expects that an opportunity for disclosing them will arise.

УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛЯ КОНСИСТЕНЦИИ ПЛАНИРОВАНИЯ ЖИЗНЕННОГО УРОВНЯ В ВЕНГРИИ («МЭБ АЛФА»)

Статья излагает модель, которую разработали в рамках долгосрочного планирования жизненного уровня для того, чтобы контролировать консистенции намеченных целей по различным факторам. Предпосылкой было, чтобы модель была направляемой, обозримой и употребляемой к существующим базам данных.

Изложенная модель принадлежит к фамилии систем народнохозяйственных балансов. Суть модели—отчет национальным доходам с таким особым распределением национального дохода, которое очень подробно учитывает область употребления национального дохода, непосредственно касающаяся жизненного уровня (потребление населения, инфраструктурные капиталовложения, непосредственно служащие населению, часть коллективного потребления, разгружающая потребление населения). Области употребления национального дохода, которые не имеют такого характера, модель учитывает агрегированно. Она приближает поблему консистенции с двух сторон: с одной стороны она изучает, какой национальный доход (и рост) может удовлетворить данные требования жизненного уровня, а с другой стороны, в какой мере можно развивать различные факторы жизненного уровня, если национальный доход (рост) и преференции жизненного уровня являются данными. С помощью модели были разработаны несколько вариантов намеченных целей жизненного уровня, для изложения которых наревно появится подходящий случай.

Bod Péter

Az indifferens programozási feladatokról

Az elméleti operációkutatási irodalom hosszú időn át viszonylag kevés figyelmet fordított a gazdasági döntési feladatok modellezésénél jelentkező érdek és célkonfliktusok elemzésére. Általánosan elterjedett, hogy kézikönyvekben és tananyagokban döntési problémákat egyszerűen mint matematikai programozási feladatokat tárgyalnak.

Az utóbbi években fokozódott az érdeklődés az olyan matematikai programozási modellek és eljárások iránt, amelyekben egyidejűleg több célt lehet figyelembe venni. A kérdés aktualitását mutatja, hogy a 7-ik nemzetközi matematikai programozási symposium (1970, Hága) külön szekciót szentelt e téma vizsgálatának. B. Roy áttekintést nyújtó bevezető előadása a közelmúltban nyomtatásban is megjelent [1]. Jellemző, hogy a cikkben hivatkozott 66 tudományos dolgozat közül csak 16 jelent meg 1966 előtt.

A több, egyidejűleg ható érdek alapján való optimalizálás általában valamilyen kompromisszumos döntésre kell hogy vezessen. Az itt alkalmazható operációkutatási eszközök éppen „okos" kompromisszumok megkeresését kell, hogy szolgálják. Ahol kompromisszumra van szükség, mert ellentétes érdekek ütköznek, ott rendszerint nincs lehetőség arra, hogy a megengedett döntések halmazán teljes rendezést vezessünk be. Meg kell elégedni részleges rendezéssel és így az ún. egzakt módszerek nem adnak egyértelmű megoldást, hanem elvezetnek a megengedett döntések egy olyan halmazához, amelynek elemei az alkalmazott rendezési reláció alapján nem összehasonlíthatók.

Kézenfekvő ezek után az a kérdés, hogy léteznek-e olyan programozási feladatok, amelyekben egyértelmű megoldásokat nyerünk annak ellenére, hogy nem teljes rendezési relációkkal dolgozunk; vagy másként fogalmazva: megadhatók-e olyan programozási feladatok, amelyekben az optimális megoldás messzemenően független a célfüggvény konkrét megválasztásától.

A továbbiakban ennek a kérdésnek a megválaszolására szolgáló néhány eredményt foglalunk össze.

1963-ban megjelent cikkemben [2] megmutattam, hogy az

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \leqq \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\}$$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \mathbf{x} \\ \mathbf{c}_2^* \mathbf{x} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{c}_k^* \mathbf{x} \end{bmatrix} = \mathbf{Cx} \to \max!$$

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}; \ \varrho(\mathbf{A}) = r\,; \mathbf{A}_{11} : (r\times r)\,; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}; \ \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1\,; \mathbf{C}_2]$$

lineáris vektormaximum probléma efficiens (tehát egy nem teljes rendezési reláció alapján optimális) megoldásainak a halmaza (a változók célszerű átindexelése után) az alábbi egyetlen elemből áll:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\,\mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ha a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{E}_{m-r} \end{bmatrix}$$

olyan megengedett bázis, hogy

$$\tilde{\mathbf{C}} = [-\mathbf{C}_1\mathbf{A}_{11}^{-1};\ \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}] \leq \mathbf{0}$$

Könnyen belátható, hogy ha adva van egy fenti tulajdonságú vektormaximum feladat, akkor a

$$Z = \{\mathbf{c}^* \mid c^* = \mathbf{p}^*\mathbf{C};\ \mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}^*\}$$

halmazból tetszőlegesen választott paramétervektorral rendelkező lineáris függvény maximuma az L halmazon mindig felvétetik az $\mathbf{x}_0$ pontban. Vagyis olyan lineáris programozási feladattal van dolgunk, amelynek optimális megoldása jelentősen független a célfüggvény megválasztásától.

G. Wintgen 1964-ben konkrét számítások tapasztalatai alapján észrevette, hogy a statikus nyílt input-output modell alapján felírt

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \min!$$

$$\mathbf{A} \geq \mathbf{0};\ \mathbf{1}^*A < \mathbf{1}^*$$

minimalizálási feladat mindig ugyanazt az optimális programot szolgáltatja, bármilyen nem negatív vektor is szerepel a célfüggvényben.

E jelenség alapján Wintgen bevezette a következő definíciót:

(3):

Legyen $\mathfrak{Z}$ a célfüggvények egy osztálya és $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ egy leképezés R^n-ből R^m-be. Tekintsük az

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}\}$$

megengedett megoldáshalmazt és a

$$z(\mathbf{x}) \to \max! \quad z(\mathbf{x}) \in \mathfrak{Z}$$

alakú optimalizálási feladatot: F.

F. indifferens programozási feladat a $\mathfrak{Z}$ függvényosztályra nézve, ha

$$\exists \mathbf{x}_0 \in L \text{ hogy } z(\mathbf{x}) \leq z(\mathbf{x}_0)\colon \forall \mathbf{x} \in L \text{ és } \forall z(\mathbf{x}) \in \mathfrak{Z}\text{-re.}$$

Wintgen fogalomalkotásának jogosságát éppen az a körülmény adta, hogy sikerült előzetesen nem triviális indifferens feladatokat találni. Triviálisan indifferens feladatok ugyanis könnyen definiálhatók:

Pl. — Ha egy programozási feladatban a megengedett megoldások halmaza egyetlen elemből áll, akkor az minden célfüggvényre nézve indifferens.

— Minden véges optimummal rendelkező feladat indifferens a célfüggvény monoton transzformáltjai által alkotott függvényosztályra.

Az alábbi elégséges feltételeket kimondó tételek Wintgentől származnak:

Wintgen 1. *tétele:* Legyen $L = \{\mathbf{x}(\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geqq \mathbf{0}\}$ a megengedett megoldások halmaza és

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} z_1(\mathbf{x}) \\ z_2(\mathbf{x}) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_k(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

komponensenként folytonos, az L halmazon felülről (alulról) korlátos k elemű vektor-vektor függvény, amelynek komponensei L-en a végesben felveszik maximumukat (minimumukat).

A feladat indifferens a $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ vektor minden

$$\mathbf{c}^*\mathbf{z}(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{c}^* \geq \mathbf{o}^*)$$

alakú nem negatív sulyokkal vett kombinációjára, ha $\mathbf{x} \in L$; $\mathbf{J} \in L \Rightarrow$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) \cup \mathbf{z}(\mathbf{y}) \in \mathbf{z}(L) \qquad \text{(max. feladat esetén)}$$

illetve

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{z}(\mathbf{y}) \in \mathbf{z}(L) \qquad \text{(min. feladat esetén)}$$

ahol:

$$\mathbf{x} \cup \mathbf{y} = [\max (x_i, y_i)]$$

$$\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = [\min (x_i, y_i)]$$

Wintgen 2. *tétele:* Ha a $\mathbf{B}$ mátrix minden sorában egy nem negatív elemet tartalmaz és az összes többi elem nem pozitív, akkor a

$$\mathbf{B}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \min! \qquad (\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}^*)$$

lineáris programozási feladat indifferens a nem negatív együtthatójú lineáris függvények osztályára nézve.

Wintgen eredményeihez kapcsolódva, 1966-ban bebizonyítottam [4], hogy a

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \min! \qquad (\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0})$$

$$\mathbf{x} \in L$$

$$L = \{\mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b};\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq 0$$

$$\mathbf{A} : (m \times n);\ \varrho(\mathbf{A}) = m$$

feladat akkor és (degenerációmentes esetben) csak akkor indifferens a nem negatív lineáris függvények osztályára nézve, ha az együtthatómátrix oszlopvektorterének van olyan megengedett bázisa, amelyben valamennyi nem bázisvektor koordinátái nem pozitívak.

Az utóbb említett két tétel nem-lineáris függvények osztályára nézve mondja ki bizonyos típusú feltételrendszerek esetében az indifferenciát. Az alábbi lemma figyelembevétele alapján azonban megállapítható, hogy az ilyen indifferencia egyenértékű azzal a ténnyel, hogy a megfelelő feladatok megengedett megoldáshalmazaiban létezik ,,legkisebb'' elem. Az R^n egy H halmazában ,,legkisebbnek'' nevezünk egy $\mathbf{x}_0 \in H$ elemet, ha

$$\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{x}; \qquad \forall \mathbf{x} \in H$$

Lemma: Ha $\mathbf{x}$; $\mathbf{y} \in R^n$, akkor

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{c}^*\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^*\mathbf{y}$$

tetszőleges $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}$ mellett.

Bizonyítás: Ha $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ és $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}^* \Rightarrow \mathbf{c}^*\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^*\mathbf{y}$.

Ha $\mathbf{c}^*\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^*\mathbf{y}$ tetszőleges $\mathbf{c}^* \geq \mathbf{0}^*$ mellett, akkor válasszuk $\mathbf{c}^*$ helyébe az egységvektorokat ($\mathbf{e}_i$). Vagyis:

$$\mathbf{e}_i^*\mathbf{x} \leq \mathbf{e}_i^*\mathbf{y} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow$$

$$x_i \leq y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$$

Ha tehát egy programozási feladatban a megengedett megoldások halmazának van legkisebb eleme, akkor az indifferens a nem negatív lineáris függvények osztályára nézve; sőt, az indifferencia ebben az esetben fennáll a minden változójában azonos irányban monoton függvények osztályára nézve is. Vagyis a fenti tételt úgy is lehet tekinteni, mint amely megadja a szükséges és elégséges feltételeket ahhoz, hogy egy olyan konvex poliéderben legyen legkisebb elem, amely kifejezhető, mint véges sok hipersík és a nem-negatív ortáns közös része.

A közelmúltban Cottle és Veinott [5] azt vizsgálták, hogy miként jellemezhetők általában az olyan poliéderek, amelyeknek van legkisebb elemük. Ismeretes, hogy minden konvex poliéder felfogható, mint véges sok zárt féltér közös része, vagyis felírhatók

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\} \qquad A : (m \times n)$$

alakban.

Cottle és Veinott 1. *tétele:* Egyenértékűek a következő állítások:

1. $\hat{\mathbf{x}}$ legkisebb eleme L-nek;

2. $\hat{\mathbf{x}} \in L$ és létezik olyan nem negatív $(n \times m)$ méretű $\mathbf{A}^+ \geq \mathbf{0}$ mátrix, hogy $\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{E}$ és $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$.

3. Létezik olyan $(n \times m)$ méretű $\mathbf{A}^+$ mátrix, hogy az

$$\mathbf{y}(\mathbf{c}) \equiv \mathbf{c}^*\mathbf{A}^+$$

vektor minden $\mathbf{c}^* \geqq \mathbf{0}^*$ mellett megengedett megoldása az

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A} = \mathbf{c}^*$$

$$\mathbf{y}^* \geqq \mathbf{0}^*$$

$$\mathbf{y}^*\mathbf{b} \to \max!$$

lineáris programozási feladatnak és optimális megoldás valamilyen pozitív $\mathbf{c}^* > \mathbf{0}^*$ esetén; és ezen felül $\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$.

A fenti egymással egyenértékű állítások igazak akkor és — feltéve, hogy az $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}$ vektornak legfeljebb n zérus eleme van — csak akkor, ha az alábbi feltételek egyike teljesül:

4. $\hat{\mathbf{x}} \in L$ és $\hat{\mathbf{x}}$-t egy nem negatív inverzű bázis határozza meg;

5. $\hat{\mathbf{x}}$-t nem negatív inverzű bázis határozza meg és ez a bázis optimális a (3) alatti feltételben definiált lineáris programozási feladatban — valamilyen $\mathbf{c}^* > \mathbf{0}^*$ mellett.

A fenti tétel valamilyen adott poliéder esetében mutatja meg annak a feltételeit, hogy legyen benne legkisebb elem. Azonban tekinthető az

$$L_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \geqq \mathbf{b}\}$$

halmazcsalád is. Hogyan jellemezhetők már most azok az $\mathbf{A} : (m \times n)$ mátrixok, amelyekre minden nem üres $L_{\mathbf{b}}$ halmaznak van legkisebb eleme. Erre a kérdésre válaszol

Cottle és Veinott 2. tétele: Egyenértékűek a következő állítások:

1. Minden $\mathbf{b}$-hez, amelyre $L_{\mathbf{b}} \neq \emptyset$ létezik legkisebb elem $L_{\mathbf{b}}$-ben:

2. $\mathbf{A}$-ban van olyan $\mathbf{B}$ bázis, hogy a $\mathbf{c}^*\mathbf{B}^{-1} \geqq \mathbf{0}^*$ egyenlőtlenségnek van pozitív megoldása $(c^* > o^*)$ és minden ilyen bázis inverze nem negatív:

Ha a mondott feltételeken túl az $\mathbf{A}$ mátrix tartalmaz teljesen n-edrendű egymásmátrixot, akkor

3. $\mathbf{A}^*$ Leontief típusú mátrix.

Egy mátrixot szokás pre-Leontief típusúnak mondani, ha minden oszlopában legfeljebb egy pozitív elem van. Egy pre-Leontief mátrix Leontief típusú, ha

$$\exists \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \quad \text{hogy} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} > \mathbf{0}$$

Fenti tételek általánosítják az eddigi eredményeket és lezárják a problémát konvex poliéderek legkisebb elemére vonatkozóan, illetve azzal a kérdéssel összefüggésben, hogy lineáris programozási feladatok mikor indifferensek valamennyi nem negatív lineáris függvényre.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a nem negatívan invertálható bázisok létezése indifferenciát eredményez bizonyos típusú programozási feladatoknál — bár e feladatok megengedett megoldásainak halmazában nincs legkisebb elem. Nyilvánvaló azonban, hogy ilyen esetekben az indifferencia nem vonatkozik a nem negatív lineáris függvények teljes osztályára, hanem annak csak bizonyos alosztályára. Ezek a vizsgálataink az ún. intervallum programozási feladatokhoz kapcsolódnak.

Az ún. intervallumprogramozás Charnestól és Ben-Israeltől származik [6]. Ők nevezték el intervallumprogramozási feladatnak az alábbi formában megfogalmazott lineáris programozási problémát:

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max!$$

$$\mathbf{x} \in L$$

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \qquad \mathbf{A} : (m \times n)$$

Az intervallumprogramozás legegyszerűbb feladata az, ha $\mathbf{A} = E_n$, vagyis

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \rightarrow \max!$$

$$\mathbf{x} \in L$$

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

Ennek a feladatnak az optimális megoldásait könnyű megtalálni a célfüggvény együtthatóinak közvetlen kiértékelése alapján. Minden olyan $\mathbf{x}_0$ vektor, amelyre

$$(\mathbf{x}_0)_i = \begin{cases} a_i \text{ ha } c_i < 0 \\ b_i \text{ ha } c_i > 0 \\ \lambda_i a_i + (1 - \lambda_i) b_i (0 \leq \lambda_i \leq 1) \text{ ha } c_i = 0 \end{cases}$$

nyilvánvalóan optimális megoldása a feladatnak.

Rendeljünk minden lineáris függvényhez két indexhalmazt:

$$J_\mathbf{c}^+ = \{i \in J = \{1, 2, \ldots, n\} \mid c_i > 0\}$$

$$J_\mathbf{c}^- = \{i \in J = \{1, 2, \ldots, n\} \mid c_i < 0\}$$

$J_\mathbf{c}^+$ és $J_\mathbf{c}^-$ alapján adódik: $J_\mathbf{c}^0 = J - J_\mathbf{c}^+ \cup J_\mathbf{c}^+$

Legyen $\mathfrak{Z}_\mathbf{c}$ azoknak a lineáris függvényeknek az osztálya, amelyekhez tartozó J^+ és J^- halmazok rendre megegyeznek $J_\mathbf{c}^+$-vel és $J_\mathbf{c}^-$-vel. Kimondható a következő nyilvánvaló megállapítás: a feladat indifferens $\mathfrak{Z}_\mathbf{c}$-re.

Tekintsük ezek után azokat az intervallumprogramozási feladatokat, amelyekben az együtthatómátrix teljes sorranggal rendelkezik:

$$\mathbf{A} : (m \times n); \qquad \varrho(\mathbf{A}) = m$$

Charnes és Ben-Israel hivatkozott cikkükben megmutatták, hogy amennyiben az ilyen típusú feladat megengedett megoldásainak halmaza nem üres és a célfüggvény e halmazon korlátos, úgy az optimális megoldások halmaza explicit módon megadható. A részleteket illetően az olvasó Gábor Győző ebben a folyóiratban megjelent ismertető cikke [7] alapján is tájékozódhat.

Használjuk majd az alábbi jelöléseket:

Az $\mathbf{A} : (m \times n)$ típusú mátrix képtere:

$$R(\mathbf{A}) = \{\mathbf{y} \in R^m \mid \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x};\ \mathbf{x} \in R^n\}$$

Az $\mathbf{A} : (m \times n)$ típusú mátrix magtere:

$$N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Olyan tetszőleges $\mathbf{T} : (n \times m)$ méretű mátrix, amely eleget tesz az

$$\mathbf{ATA} = \mathbf{A}$$

mátrixegyenletnek (minthogy e mátrixegyenlet megoldása általában nem egyértelmű) a megoldások halmazát $\mathbf{A}\{1\}$-gyel jelöljük és a halmaz minden eleme az $\mathbf{A}$ mátrix úgynevezett $\{1\}$ tulajdonságú általánosított inverze. η: leképezés, amely az $R^m \times R^m \times R^m$ teret R^m-be képezi le.

$$\eta(\mathbf{u}; \mathbf{v}; \mathbf{w}) = (\eta_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\eta_i = \begin{cases} v_i & \text{ha} \quad w_i < 0 \\ v_i & \text{ha} \quad w_i > 0 \\ \lambda_i u_i + (1-\lambda) v_i & \text{ha} \quad w_i = 0 \;\; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \end{cases}$$

Igaz a következő állítás: A

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x} \to \max!\ (\min!)$$

$$\mathbf{x} \in L$$

$$L = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{a} \leq \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} \neq \emptyset$$

$$\mathbf{A} : (m \times n); \qquad \varrho(\mathbf{A}) = m$$

feladat indifferens az $\mathbf{A}^*$ mátrix képterében fekvő, nem negatív együtthatóvektorral bíró lineáris függvények osztályára ($\mathfrak{Z}$) nézve, ha létezik az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorterének nem negatívan invertálható bázisa.

Minthogy a feladat megengedett megoldásainak a halmaza nem üres és a célfüggvény együtthatóvektora

$$\mathbf{c} \in R(\mathbf{A}^*) \quad \text{vagyis} \quad \mathbf{c} \perp N(\mathbf{A})$$

ezért minden szóba jöhető célfüggvény korlátos az L halmazon. Az optimális megoldások halmaza így:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\, \eta(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}^*\mathbf{T}) + \mathbf{y}$$

$$\mathbf{T} \in \mathbf{A}\{1\}; \qquad \mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$$

Feltevésünk szerint az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorterének van nem negatívan invertálható bázisa. Legyen ez – az egyszerűség kedvéért – az első m oszlop. Vagyis

$$\mathbf{A} = [\mathbf{A}_{B1}\, \mathbf{A}_N] \quad \text{és} \quad \mathbf{A}_B^{-1} \geq \mathbf{0}$$

Ebben az esetben $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \\ \mathbf{0}_{n-m,\, m} \end{bmatrix}$ olyan $(n \times m)$ méretű mátrix, amelyre

$$\mathbf{ATA} = [\mathbf{A}_B; \mathbf{A}_N] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \\ \mathbf{0}_{n-m,\, n} \end{bmatrix} [\mathbf{A}_B; \mathbf{A}_N] = \mathbf{E}_m[\mathbf{A}_B; \mathbf{A}_N] = \mathbf{A}$$

Vagyis $\mathbf{T} \in \mathbf{A}\{1\}$. Válasszuk $\mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$-ként a zérus vektort. Így tetszőleges $\mathbf{c}^*\mathbf{x} \in \mathfrak{Z}$ célfüggvény alapján az

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\, \eta[\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}^*\mathbf{T}]$$

vektor optimális megoldást jelent.

Minthogy a $\mathbf{c}^*\mathbf{T} = \mathbf{c}^* \begin{bmatrix} \mathbf{A}_B^{-1} \\ \mathbf{0}_{n-m,\, n} \end{bmatrix}$ szorzatban minden tényező nem negatív, maximum feladat esetén

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{b}$$

minimum feladat esetén

$$x_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a}$$

optimális megoldások: bármelyik $\mathbf{c}^*\mathbf{x} \in \mathfrak{Z}$ célfüggvény is forduljon elő.

Zlobec és Ben-Israel a közelmúltban általánosította az intervallumprogramozást olyan feltételrendszerek esetére is, amelyekben a rang kisebb mint a sorok száma [8]. Az ilyen feladatok explicit megoldása is lehetséges bizonyos körülmények között, de a megoldás során a $\mathbf{T}$ mátrix korábbi szerepét egy

$$\mathbf{TAA}^+$$

alakú mátrix veszi át, amelyben $\mathbf{A}^+$ a mátrix ún. Moore—Penrose-féle általánosított inverze [9]. Ha tudnánk: milyen mátrixok rendelkeznek nem negatív Moore—Penrose-féle általánosított inverzzel, további indifferens programozási feladatokat tudnánk értelmezni.

(Beérkezett: 1972. február 8.)

IRODALOM

1. Roy, B.: Problems and methods with multiple objective functions. Mathematical Programming, 1. (1971) 239—266. o.
2. Bod P.: Lineáris programozás több, egyidejűleg adott célfüggvény szerint. MTA Matematikai Kutató Intézetének Közleményei. VIII. B. 4. (1964) 541—556. o.
3. Wintger, G.: Indifferente Optimierungsprobleme. Mathematik und Kybernetik in der Ökonomie. Konferenzprotokoll. II. 3—6. (1964)
4. Bod P.: Megjegyzés G. Wintgen egy tételéhez. MTA III. Osztályának Közleményei. 16. (1966) 275—279. o.
5. Cottle, R. W.—Veinott, A. F. Jr.: Polyhedral sets having a least element. Megjelenés alatt a Mathematical Programming c. folyóiratban.
6. Ben-Israel, A.—Charnes, A.: An explicit solution of a special class of linear programming problems. Operations Research. 16. (1968) 1167—1175. o.
7. Gábor Gy.: Az intervallum programozás: a lineáris programozási feladatok egy speciális osztályának megoldási módszere. SZIGMA, 4. (1971) 117—125. o.
8. Zlobec, S.—Ben-Israel, A.: On explicit solutions of interval linear programs. Israel Journal of Mathematics. 8. (1970) 12—22. o.
9. Penrose, R.: A generalized inverse of matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc. 51. (1955) 406—413. o.

ON THE INDIFFERENT PROGRAMMING PROBLEMS

Long the professionals of operations research have paid little attention to the analysis of conflicts of interests and purposes at the modelling of economic decisions. In the last years the interest has increased for mathematical programming models and procedures where more objectives can be considered at the same time [1].

Optimization taking more interests into account simultaneously, in general, leads to decisions of compromise. With these problems, because of the contradicting interests, there is usually no possibility to the introduction of some kind of „complete" ordering on the set of admissible decisions. One must rest satisfied with the application of a „partial" ordering relation. Owing to this, however, the optimization procedures fail to yield a unique solution, but they lead to a subset of the feasible decisions, the elements of which cannot be compared any more by the applied ordering relation. Therefore the question arises, if there are programming problems in which one can receive unique solutions in spite of the fact that one does not work with complete ordering relations. Or to put it another way: can programming problems be given such that the optimal solution is considerably independent on the selection of the objective function

In the article we review some old and recent contributions to answer this question. They come from Wintgen [3], Cottle and Veinott [5], as well as from the author [2, 4].

Finally, it is shown that the interval programming problem [6] which has a full row rank is indifferent for a well determined class of linear functions if the column vector space of the coefficient matrix has a basis that can be non-negatively inverted.

ОБ ИНДИФФЕРЕНТНЫХ ЗАДАЧАХ ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Долгое время работники исследования операций обращали сравнительно мало внимания на анализ конфликта интересов и целей, возникающего при моделировании экономических ре шений.

В последние годы возрастал интерес к таким моделям и методам математического программирования, к которых можно принимать во внимание одновременно больше целей [1].

Оптимизация на основе нескольких, одновременно влияющих интересов вообще ведет к компромиссным решениям. При таких задачах, из-за противоположных друг другу интересов вообще нет возможности совершить какую-то «комплексную» систематизацию на множестве допустимых решений. Мы должны согласиться на применение «частичных» релаций систематизации. Однако, из-за этого процессы оптимализации не дают единозначного решения, а ведут к такому подмножеству допустимых решений, элементы которого уже не сопоставимые на основе примененной релации систематизации.

Поэтому вопрос очевиден: существуют ли такие задачи программирования, в которых мы получаем единозначные решения, несмотря на то, что мы работаем с некомплексных релаций систематизации. Или по-другому: можно ли создать такие задачи программирования, в которых оптимальное решение является существенно независимым от выборки целевой функции.

В статье рассматриваются несколько давних и новейших результатов ответа на этот вопрос. Они относятся к Винтгену [3], к Коттлу и Вейнотту [5], а также к автору [2, 4]. В конце показывается, что каждая задача программирования на интервалах, имеющая полную последовательность рангов [6] является индифферентной к хорошо определяемому классу линейных функций, если пространство векторов-столбцов матрикса коэффициентов имеет не отрицательно обратимый базис.

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

SIVÁK JÓZSEF

Nagyméretű feladatok megoldási módszerei

Az elmúlt évek során rendkívül gazdag irodalmi anyag halmozódott föl a nagyméretű programozási feladatok megoldási módszereiről. G. Dantzig és P. Wolfe 1960-ban publikálták gondolatébresztő tanulmányukat a lineáris programozási feladatok megoldásának dekompozíciós elvéről [5]. Az azóta eltelt években sok új javaslat látott napvilágot. Az új megoldási lehetőségek keresését a rendelkezésre álló számítógépek kis kapacitásából származó nehézségek áthidalása tette szükségessé. Felvetődött ugyanis az egyre nagyobb méretű feladatok megoldásának igénye. Így születtek meg a különböző dekompozíciós algoritmusok.

A számítógéptechnika gyors fejlődése — a harmadik generációs gépek megjelenése — révén lehetővé vált, hogy már több ezer feltételes programozási feladatokat is felbontás nélkül megoldjanak. Az új megoldási lehetőségek keresésének indítékát ezúttal a számítások idő- és költségigényének csökkentése adta.

Meg kell mondanunk, hogy az eredeti várakozások teljesülését nem mondhatjuk egyértelműen jónak, az új módszerek nem mindig hozták meg a remélt sikert.

A felhalmozódott ismeretanyag, a körülbelül 60-féle új eljárás három szempontból vált hasznossá. Először hozzájárult a számítástechnikai fogások eszköztárának bővítéséhez, másrészt olyan megoldási fogások kifejlesztéséhez, amelyek gyümölcsözőek az eddig nehezen kezelhető feladatok megoldásában (pl. nemlineáris feladatok megoldása). Harmadsorban a javasolt eljárások egy részének olyan közgazdasági interpretáció adható, amivel lehetővé válik bizonyos közgazdasági — elsősorban tervezési — folyamatok absztrakt modellezése, elemzése is.

Ebben a cikkben kísérletet teszünk arra, hogy a rendelkezésre álló irodalom alapján áttekintést adjunk a nagyméretű feladatok megoldási módszereinek kutatásában eddig elért eredményekről, valamint utaljunk a további kutatási irányokra. A cikk célja egyrészt az, hogy a témakörben kevésbé jártas érdeklődőknek új ismereteket adjon, másfelől az irodalmi anyag bizonyos fokú egységesítésével az avatottabbaknak rendszerezési szempontokat alakítsunk ki. Valamely témakör egységesítése sok esetben erőszakolt egyszerűsítésekhez vezet, amit ebben az esetben sem kerülhettünk el.

Az összefoglalás szempontjainak kialakításában a témakör klasszikusának számító G. Dantzig néhány tanulmánya mellett elsősorban A. Geoffrion összefoglaló cikkére támaszkodtunk [6], [7a] és [11].

A cikk három részből áll. Az első részben a nagyméretű feladatok néhány jellegzetes típusáról írunk. A második részben tárgyaljuk a megoldási módszereket. A tárgyalásban kitérünk a szimplex módszer továbbfejlesztését felhasználó módszerekre, majd az új megoldási algoritmusok főbb közös tulajdonságaira. A harmadik rész a dekompozíciós algoritmusok egy lehetséges közgazdasági interpretációjával foglalkozik. Az áttekintésben el akartuk kerülni a túlzott részletezettséget. Alapvetően azt tekintettük célunknak, hogy arra hívjuk fel a figyelmet, milyen módon kezelhetők az egyes algoritmusok. A részletek mellett felhívjuk a figyelmet az eredeti pulikációkra.

1. A nagyméretű feladatokról

Ha valamilyen definíciót akarnánk adni arra, hogy milyen mérettől kezdve nevezünk egy programozási feladatot nagyméretűnek, akkor bizonyára nehézségeink lennének. A nagy méret önmagában viszonylagos fogalom. A gyakorlatban a nagy méretet sokszor a feladat méretének és a rendelkezésre álló számológép kapacitásának viszonyával fejezzük ki.

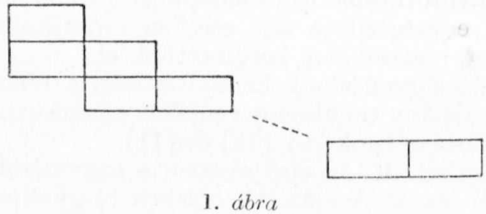
A nagyméretű feladatok megoldására tett törekvések alapvető célja az, hogy olyan lehetőségeket keressünk és találjunk, amelyek mellett a feladat méretei nem jelentik a megoldás akadályát. Teljesen érthető, hogy ilyen cél mellett nem lehet csupán a feladat méretére korlátozni figyelmünket. Szükséges, hogy alaposan elemezzük a feladat szerkezetét is.

A következőkben néhány jellegzetes, a programozási feladatokban gyakran előforduló speciális szerkezet alapján tipizáljuk a nagyméretű feladatokat. A struktúra ebben az összefüggésben a feladat korlátozó feltételeire vonatkozó együtthatómátrix szerkezetére utal. Természetesen a felsoroltakon kívül még számos egyéb típus is lehet, de figyelmünket azokra irányítjuk, amelyek gyakoriak, fontosak és főképp ismert eljárásokkal számítástechnikai célokra felhasználhatók.

A nagyméretű feladatok az együtthatómátrix speciális szerkezete szempontjából két nagy csoportba sorolhatók. Egyik csoportba tartoznak azok a feladatok, amelyek speciális szerkezettel rendelkeznek, a másik csoportba azok, amelyek nem rendelkeznek ilyen szerkezettel. A teljesség igénye nélkül néhány speciális típust ismertetünk. Ezek a következők:

— dinamikus szerkezet,
— többszektoros szerkezet,
— blokkháromszögű szerkezet,
— határolt blokkdiagonális szerkezet.

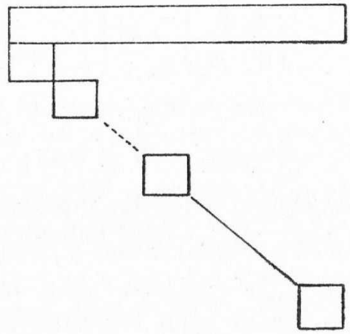
A dinamikus szerkezet a többperiódusú optimalizálási feladatok együtthatómátrixának jellegzetes formája. Az egyes évekre vonatkozó változók és feltételek elrendezése alapján lépcsős szerkezetnek is szokták nevezni. A szemléltetés megkönnyítésére a következő ábrát adjuk:



1. *ábra*

Ilyen típusú modell pl. [6]-ban található. A többszektoros szerkezetet másképpen blokkdiagonálisnak is nevezik. Ábrája a következő:

(1.2)



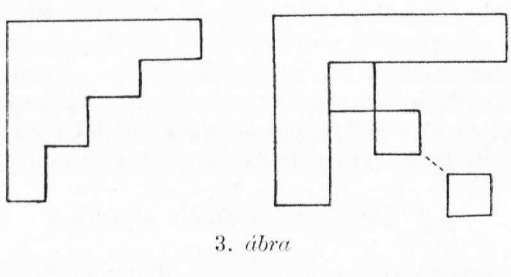
2. *ábra*

A többszektoros elnevezés onnan adódik, hogy a diagonálishoz tartozó blokkokat tekinthetjük úgy, mint egy gazdaság szektorait reprezentáló blokkokat, amelyek a feltételek egy részén keresztül egymással összekapcsolódnak (központi blokk).

A blokkdiagonális szerkezet egy speciális esete lehet az az eset, amelynél az összekapcsolódó, ún. interszektorális kapcsolatok hiányoznak.

A blokkháromszögű és határolt blokkdiagonális szerkezetet ábrával szemléltetjük:

(1.3)



3. *ábra*

Mint említettük a fenti szerkezettípusok a feladatok megoldása szempontjából fontos specialitások. A feladatok nagy csoportja nem rendelkezik ilyen szerkezettel. Előfordul, hogy az adott feladatot át tudjuk alakítani valamelyik speciális szerkezet mintájára, s ezzel valamelyik speciális szerkezetre kidolgozott algoritmust alkalmazni tudunk.

A lineáris programozási feladatok megoldásában alapvető jelentőségű blokkdiagonális szerkezetet például könnyen elérhetjük a következő egyszerű megfontolással. Adott a következő lineáris programozási feladat:

$$x \geq o$$

(1.4)
$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$f = cx \to \max_x$$

A feladatot a következő formában is megadhatjuk:

$$
\begin{aligned}
&x_1, x_2 \geq o \\
(1.5) \quad &\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \leq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\
&Ex_1 - Ex_2 = o \\
&cx_1 + cx_2 = 2f \to \max_x
\end{aligned}
$$

Ugyanez az ötlet alkalmazható a feladat duálisára. A feladat együtthatómátrixa így blokkdiagonálissá vált. A fenti felbontást didadikus felbontásnak nevezzük [23].

Az alkalmazás szempontjából szükséges lenne olyan eljárásokat ismerni, amelyek a feladat speciális struktúráját felderítik. Ebben a kérdésben, valamint az ilyen struktúrák előállítására vonatkozó eljárások tekintetében a gyakorlati készségünkre vagyunk utalva, mivel ilyen algoritmusok nem állnak rendelkezésre.

2. Megoldási módszerek

A nagyméretű feladatok megoldására tett kísérletek eredményeit tárgyaló irodalom rendkívül gazdag. A javasolt megoldási eljárások két részre tagolhatók:

1. Olyan eljárásokra, amelyek az ismert és hatékony eljárásnak nevezhető szimplex módszer további finomítására irányulnak és céljuk a nagyméretű feladatok speciális szerkezetéből adódó lehetőségek felhasználása a számítástechnikai hatékonyság fokozására. Az e csoportba tartozó eljárásokat a továbbiakban *bázismanipulációs* eljárásoknak nevezzük.
2. Olyan eljárásokra, amelyek célja az adott feladathoz tartozó új megoldási algoritmusok kidolgozása. Ilyenek pl. a *dekompozíciós algoritmusok*.

2.1. *Bázismanipulációs eljárások*

Az e csoportba tartozó eljárások lényege olyan lehetőségek keresése, amelyek felhasználásával a szimplex eljárás iterációi kisebb időigénnyel és ugyanakkor kisebb memória-igénybevétellel elvégezhetők. Ennek a célnak az elérése azáltal válik lehetségessé, hogy a feladatok nagy többsége sajátságos szerkezettel rendelkezik. Az egyik adottság, amit itt kihasználhatunk az, hogy a nagyobb feladatok együtthatómátrixának telítettsége alacsony. Nem szerencsés ezzel kapcsolatban számszerű megállapítást tenni, de szemléltetésre Dantzigot idézzük. ,,Például egy 200 egyenletet tartalmazó feladatnál az 5%-os telítettség a tipikus; nagyobb feladatoknál a telítettség 0,5%-ra vagy az alá esik.'' [6]. A másik adottság pedig a feladatoknak az 1. pontban említett szerkezettípusokkal való rokonsága.

Mivel a bázismanipulációs eljárások száma rendkívül nagy, arra teszünk kísérletet, hogy csoportosítást készítsünk, majd az eljárások felhasználhatóságának lehetőségeire hívjuk fel a figyelmet. A problémakör áttekintésére szolgáló tanulmányok Balinski [3], Gomory [12] munkái (magyar nyelven: Prékopa-Majthay [21]).

A bázismanipulációs eljárásoknak két csoportja van:
(1) oszlopgenerálási eljárások,
(2) bázisdekompozíciós módszerek.

2.1.1. *Oszlopgeneráló eljárások*

A szimplex módszernél minden egyes iterációban dönteni kell arról, melyik nembázis változót vonjuk be a bázisba. Ez megköveteli az ún. „redukált költség" tényezők kiszámítását és azok vizsgálatát. Amennyiben a változók száma nagy, e vizsgálat elvégzése nagy idő- és memóriafelhasználást igényel. Ennek kiküszöbölése céljából született meg a szimplex algoritmus olyan módosítása, amelynél a direkt számítás helyett a feladat speciális szerkezetéhez igazodó algoritmus szabályozza a bázisba kerülő oszlopok sorrendjét. Innen az oszlopgenerálás elnevezés. Az e területen született első eredmény Ford és Fulkerson nevéhez fűződik, akik 1958-ban publikálták módszerüket [10]. Bizonyos közelítésben a Dantzig—Wolfe-eljárás is úgy interpretálható, mint oszlopgeneráló módszer, hiszen itt is a bázisba kerülő új változók „sorsáról" döntünk az alfeladatok felhasználásával. (Egyéb felhasználásukról l. pl. [10], [12].)

2.1.2. *Bázisdekompozíciós eljárások*

Az 1. pontban vázolt szerkezettípusok figyelembevételével a programozási feladatok szimplex módszerrel való megoldását úgy is megszervezhetjük, hogy mind a számolási időigényt, mind a kapacitásigénybevételt csökkentjük. Az aktuális bázis szerkezetének kihasználására irányuló fogásokat együttesen *bázisdekompozíciónak* nevezzük.

A szimplex algoritmus alkalmazása esetén az aktuális bázis fontos szerepet játszik. Jelöljük B-vel az aktuális bázisvektorokból képzett matrixot. Ennek felhasználásával a következő vizsgálatokat kell elvégezni:

— meg kell határozni a bázismegoldást, azaz meg kell oldani a

$$Bx_B = b$$

egyenletrendszert, ahol x_B a bázismegoldás,

— meg kell határozni a bázisba épő vektornak a pillanatnyi bázisra vonatkozó koordináit, azaz meg kell oldani a

$$Bd_k = a_k$$

egyenletrendszert, ahol a_k a belépő vektor,

— meg kell határozni a bevonandó változót.

A fenti munkáknál az aktuális bázis inverzét kell megadnunk. A bázisinverz memórialekötése igen nagy lehet, mivel a ritka matrixok inverze általában a 100%-os tömöttséghez vezet. Nézzünk egy egyszerű példát! Legyen a bázis adott

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ennek inverze:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Az ilyen típusú mátrixok sajátságos szerkezetét feltétlenül ki kell használni az inverz meghatározásánál. E törekvések eredménye az inverz szorzatformás tárolása, az ún. *szorzatformás inverz*. A szorzatformában való tárolás azt jelenti, hogy az inverz mátrixok elemi mátrixok szorzataként ábrázoljuk. Az elemi mátrix olyan mátrix, amely csak egy sorában vagy oszlopában különbözik az egységmátrixtól. A fenti példára alkalmazva:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A számítógépben elegendő csupán az egységmátrixtól eltérő vektorokat tárolni. Természetesen sok iteráció után az elemi mátrixok száma nagy lehet és ez még stabilitási problémákkal is párosulhat, azonban ezek elkerülésére alkalmas fogások állnak rendelkezésre. A szorzatformás inverz alkalmazásának alapos tárgyalása Dantzig könyvében található [8].

A tulajdonképpeni bázisdekompozíció fogalmának azok az eljárások felelnek meg, amelyeknél a bázist bontjuk fel kisebb részekre. A bázis speciális szerkezete ugyanis megengedi, hogy kisebb részének és annak inverzének, valamint pótlólagos információknak a felhasználásával tulajdonképpen a teljes inverzet meghatározhassuk. A bázisnak ezt a részét munkabázisnak („working basis") nevezzük, amely rendelkezik azzal az előnyös tulajdonsággal, hogy egyszerűbben kezelhető mint a tényleges bázis. A munkabázissal kapcsolatos átfogó tanulmány kidolgozása Dantzig nevéhez fűződik [8].

A bázisdekompozíció jól alkalmazható:

— dinamikus struktúrára. Dantzig 1955-ben publikált cikkében már foglalkozik ezzel a kérdéssel [9], majd 1963-ban írott cikke újabb módszert ad arra vonatkozólag, hogyan lehet az inverzet meghatározni és az egyik iterációról a másikra való áttérésnél ezt a tulajdonságot megtartani [8]. Az ilyen struktúrára vezetnek a dinamikus Leontief-modell és a Markov folyamatok speciális esetei,

— blokkdiagonális szerkezetre [6], [8],

— határolt blokkdiagonális szerkezetre [6].

A bázisdekompozíció megvalósítása során a következő körülményeket kell figyelembe venni:

a) Fel kell ismerni a bázis speciális szerkezetét.

b) A szimplex iterációhoz szükséges feladatokat el kell végezni.

c) Az iterációval biztosítani kell, hogy a bázis szerkezete ne változzék.

A bázisdekompozíciós eljárások legegyszerűbb alkalmazási területei az ún. felsőkorlátos technikák [9], [25]. A felsőkorlát technikák alkalmazásának tapasztalatairól beszámoló cikkek szerint e manipulációval a számítási időt esetenként lényegesen csökkenteni lehet.

2.2. *Dekompozíciós algoritmusok*

A dekompozíciós algoritmusok definícióját széles értelemben használjuk. Nem csupán az eredeti feladat felbontás útján való megoldási módszereit soroljuk a módszerek e csoportjába, hanem az azokkal rokon eljárásokat is. Ez lehetővé teszi, hogy a megoldási lehetőségek tárgyalásában kitérjünk mind a lineáris, mind a nemlineáris programozási feladatokra. Azt azonban kikötjük, hogy csak véges számú változót és feltételt tartalmazó feladatokat vizsgálunk. Az újabb kutatások kitérnek a nem véges számú változós feladatok kezelésére is [4].

A következőkben először általános keretben szemléltetjük a dekompozíciós elv lényegét, majd az ennek alapján kialakított optimalizálási módszerek *alapelemeit* tekintjük át. Az alapelemek feldolgozásával az a célunk, hogy a nagyszámú eljárás lényeges jegyeinek kiemelésével rendszerezési szempontokat alakítsunk ki.

Tekintsük a következő feladatot:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} x &\geq o \\ Ax &= b \\ Bx &= d \\ cx &\to \min \end{aligned}$$

ahol x n elemű vektor,
A $m \times n$ méretű mátrix,
B $l \times n$ méretű mátrix,
c, b és d megfelelő méretű vektorok.

Definiáljuk az n dimenziós térnek egy zárt, konvex, poliedrikus halmazát a következőképp: $K = \{x | Bx = d;\ x \geq o\}$. Mivel $x \geq o$, ezért $K = C + H$, ahol C poliedrikus konus, amelyet véges számú $c^1, c^2, \ldots c^r$ extremális irány generál, azaz

$$C = \{x \mid \sum_{j=1}^{r} \mu_j c^j;\ \mu_j \geq 0\}.$$

Hasonlóképpen H az $e^1, e^2, \ldots e^h$ véges számú extremális pont konvex burka, azaz

$$H = \{x \mid x = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i e^i;\ \lambda_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^{h} \lambda_i = 1\}$$

A fenti jelölések felhasználásával transzformáljuk az (a) feladatot:

$$\lambda_i, \mu_j \geq 0 \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, h \\ j &= 1, 2, \ldots, r \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \qquad \sum_{i=1}^{h} \lambda_i p^i + \sum_{i=1}^{r} \mu_j r^j = b$$

$$\sum_i \lambda_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \alpha_i + \sum_j \mu_j \beta_j \to \min_{\lambda, \mu}$$

ahol

$$\alpha_i = ce^i; \qquad \beta_j = cc^j$$

$$p^i = Ae^i; \qquad r^j = Ac^j$$

A transzformált feladatot master feladatnak nevezzük. Mivel a h és r általában nagy, a feladat nagyon sok változót tartalmaz. A dekompozíciós elv kialakításánál abból indulunk ki, hogy e nagyszámú csúcspontból és irányból csak annyit vegyünk figyelembe, amennyire szükségünk van.

Tegyük föl, hogy ismerjük az $I^t \subset I = \{1, 2, \dots h\}$ és $J^t \subset J = \{1, 2, \dots, r\}$ indexhalmazokat, amelyekre adott a következő feladat:

$$\lambda_i \geq 0 \qquad i \in I^t$$

$$\mu_j \geq 0 \qquad j \in J^t$$

(c) $$\sum_{i \in I^t} \lambda_i p^i + \sum_{j \in J^t} \mu_j r^j = b$$

$$\sum_{i \in I^t} \lambda_i$$

$$\sum_{i \in I^t} \lambda_i \alpha_i + \sum_{j \in J^t} \mu_j \beta_j \rightarrow \min$$

Ezt a feladatot redukált master feladatnak fogjuk nevezni, mivel formailag a master feladathoz hasonlít, de oszlopainak csak egy részét tartalmazza. A redukált master feladatról feltesszük, hogy rendelkezik lehetséges bázismegoldással (azaz, $m + 1$ lineárisan független oszlopa van, valamint a megfelelő λ_i és μ_j értékek nem-negatívok). Feladatunk most már az, hogy e redukált master feladat megoldásának felhasználásával eljussunk az eredeti feladat megoldásához. Ennek érdekében a következő megfontolásokat tesszük:

Jelöljük $I^{t,0} \subset I^t$ és $J^{t,0} \subset J^t$ szimbólumokkal a redukált feladat optimális bázisindexeit, (π^t, δ_t)-vel a duál megoldásokat. Ekkor

$$\pi^t p^i + \delta_t = \alpha_i \qquad i \in I^{t,}$$

$$\pi^t r^j = \beta_i \qquad j \in J^{t,}$$

A (π^t, δ_t) szimplex együtthatókat felhasználjuk az egész feladat optimalitásának vizsgálatára. Keresünk olyan p^i-ket ($i \in I - I^t$), amelyekre $\pi^t p^i + \delta_t > \alpha_i$ vagy olyan r^j-ket ($j \in J - J^t$), amelyekre $\pi^t r^j > \beta_j$. A K definíciója alapján tehát olyan e^i-ket keresünk, amelyekre $(\pi^t A)\, e^i + \delta_t > ce^i$ vagy c^j-ket, ahol $(\pi^t A)\, c^j > cc^j$. Ehhez a következő kisebb méretű ún. alfeladatot oldjuk meg:

$$x \geq o$$

$$Bx = d$$

(d) $$(c - \pi^t A)x + \delta_t \rightarrow \min_x$$

A szimplex algoritmus ismert tulajdonsága alapján tudjuk, hogy a (d) megoldása során az alábbi esetek fordulnak elő:

1. A (d)-nek van optimális megoldása. Az optimális megoldás e^t lesz. Ebben az esetben kiszámítjuk az Ae^t vektort, amellyel mint új oszloppal a (c) feladatot bővítjük és azt ismételten megoldjuk.

2. A (d) célfüggvénye alulról nem korlátos $x \in K$-ra. Ismeretes, hogy ekkor létezik olyan $c^t \geq o$, amelyre $Bc^t = o$ és $[c - (\pi A)]\, c^t < o$. Ebben az esetben az $r^t = Ac^t$ oszloppal bővítjük a (c) feladatot és megoldjuk.

3. A (d) feladatnak nincs lehetséges megoldása. Ebben az esetben az eredeti feladatnak sincs lehetséges megoldása.

A fenti gondolatmenet szerint az (a) megoldáshoz egy iteratív folyamat segítségével jutunk. Az iteratív folyamatban a redukált master feladat és az alfeladat közötti információáramlásnak van döntő szerepe. Az alfeladattal elérhetjük, hogy az extremális csúcsok és irányok közül csak egyeseknek a meghatározását kell elvégeznünk, míg eljutunk az (a) megoldásához.

Az eljárás különösen akkor hatékony, ha az A-nak kevés sora van, az B pedig speciális szerkezetű. Ilyen egyszerű eset az, amikor az B blokkdiagonális szerkezetű.

A gondolatmenet kiterjeszthető olyan esetekre is, amelyeknél a K extremális pontjainak száma nem véges. Ezekkel itt nem foglalkozunk.

Az irodalomban fellelhető módszerek nagy részében felismerhetők a fenti, általánosabban vázolt megoldási elemek. A következőkben szeretnénk a módszerek legfontosabb elemeit összefoglalni. Ehhez a módszerekben rejlő fő közös tulajdonságok ismeretéből kell kiindulni.

A dekompozíciós algoritmusok legfontosabb közös jellemzői a következők:

— az adott feladat alkalmas átalakítással könnyebben kezelhető formába írható és ezáltal kisebb feladatok megoldására vezethető vissza. A felbontás eredményeképp kapjuk az ún. master feladatot, és az ún. alfeladatokat. Ez a felbontás a tulajdonképpeni dekompozíció,

— az átalakított feladathoz kereshető olyan megoldási fogás vagy stratégia, amely az alfeladatok és a master feladat közötti kapcsolatot teremti meg,

— az alfeladatok és a master feladat között meghatározott információáramlás van,

— az algoritmusok legtöbbször iterációk sorozatából állnak.

A fenti jellemzők kezünkbe adják a dekompozíciós eljárások csoportosítási lehetőségének kulcsát. Az algoritmusok ugyanis jellemezhetők egyrészt az átalakítási fogásokkal (gyakran dekompozíciós szabálynak nevezik), amelyeket feladatorientált manipulációknak fogunk nevezni. Valamely manipuláció egy megoldási stratégiával párosítva egy-egy algoritmust reprezentál. Az irodalomban ismert eljárások legtöbbje négy manipulációt alkalmaz. Ezeket tekintjük át a következőkben, majd utána kitérünk a megoldási stratégiákra. A manipulációk célja

— a feladat felbontása kisebb feladatokra (felbontás),

— a feladat átalakítása olyan szerkezetűvé, amelyre könnyen kezelhető algoritmus van (például vegyes nem lineáris feladatoknál a nem lineáris rész kiküszöbölése) (izolálás),

— a nem lineáris feltételek lineáris közelítése (közelítés).

2.2.1. *Dualizálás*

A legegyszerűbb fogás, amellyel valamely feladat egyszerűbb alakra bontható. A szimplex algoritmus alkalmazásánál akkor használjuk, ha a sorok száma az oszlopok számához viszonyítva nagy. A dekompozíciós módszerek irodalmában Rosen-féle particiós módszer példázza ezt a manipulációt, ahol a Dantzig—Wolfe-eljárásnál megismert blokkdiagonális szerkezet duálisából indulunk ki [22].

A dualizálásnál a fő problémát a nem lineáris esetek kezelhetősége jelenti. Az elmúlt években több cikk foglalkozik a nem lineáris problémák duálisának kérdéseivel [11].

2.2.2. *Belső linearizálás*

Gyakorta használt manipuláció, amely elsősorban a nem lineáris programozásban lehet eredményes. Valójában a Dantzig—Wolfe-eljárás alapgondolata ennek egy speciális esete, ezért részletesebben foglalkozunk vele.

Tekintsük a következő feladatot:

$$(2.1)\qquad g_i(x) \leq o \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$f(x) \to \max$$

ahol g_i és f folytonos függvények. Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy

$$S = \bigcap_i \{x : g_i(x) \leq o\}$$

konvexhalmaz. (Ha minden g_i kvázikonvex, akkor S konvex.)

A 2.1 feladatot másképpen is felírjuk:

$$(2.2)\qquad G(x) \leq o$$

$$f(x) \to \max$$

A (2.1) feladat egy nem lineáris programozási feladat. Speciális esetben a g_i függvények lineárisak:

$$(2.3)\qquad g_i(x) = \sum_j a_{ij} x_j - b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

azaz

$$G(x) = Ax - b$$

A továbbiakban megfontolásainkat az általánosabb esetre tesszük.

Legyenek $x_1, x_2, \ldots x_T$ n-elemű vektorok. Ezen vektorok konvex burkának valamely x pontja így

$$(2.4)\qquad x = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t x_t$$

ahol $\sum_t \alpha_t = 1$ és $\alpha_t \geq o$ $\forall$ t esetre.

Valamely $g(x)$ függvény e pontok konvex burkán a következő közelítéssel lineraizálható

$$(2.5)\qquad g(x) = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t g(x_t)$$

Ha a fenti problémában x és annak minden függvénye helyett a fenti (2.4) és (2.5) reprezentációt használjuk, akkor a (2.1) feladat a következő alakú lesz:

$$(2.6)\qquad \sum_t \alpha_t g_i(x_t) \leq 0 \qquad (i = 1, \ldots m)$$

$$\sum_t \alpha_t = 1$$

$$\alpha_t \geq 0 \ (\forall t)$$

$$\sum_t \alpha_t f(x_t) \to \max$$

A (2.6) α_t változókkal adott lineáris programozási feladat. Legyenek $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots$ $\ldots, \hat{\alpha}_T$ értékek a megoldásai. Ekkor

$$\hat{x} = \sum_t \hat{\alpha}_t x_t \tag{2.7}$$

az eredeti (2.1) feladat közelítő megoldása. Az, hogy ez a közelítés mennyire jó függ egyrészt az x_t pontoktól, de függ az f és g_i függvények természetétől, valamint a (2.6) feladat kezelési módjától.

Ha a g_i függvények konvexek, akkor a konvexitás miatt

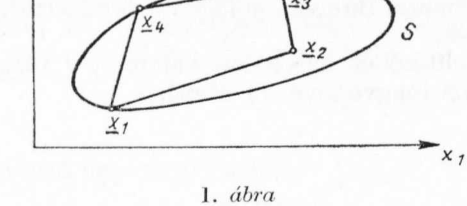
$$g_i(\hat{x}) = g_i(\sum_t \hat{\alpha}_t x_t) \leq \sum_t \hat{\alpha}_t g_i(x_t) \leq 0 \tag{2.8}$$

azaz $\hat{x} \in S$.

Ha az f konkáv, akkor

$$\sum_t \alpha_t f(x_t) \leq f(\hat{x})$$

azaz a (2.6) feladat célfüggvénye az $\hat{x}$-hez tartozó érték alsó korlátja. Világítsuk meg egy példával a R^2-ben a fenti gondolatmenetet. Tekintsük a következő ábrát (1. ábra):



1. *ábra*

Az S halmazt az x_1, x_2, x_3, x_4 pontok konvex burkával közelítjük. A belső linearizálás azt jelenti, hogy az S-et közelítő halmaz konvex poliéder, amelyet véges számú lineáris egyenlőtlenség ír le. Az x_1, x_2, x_3, x_4 pontokat bázisnak nevezzük.

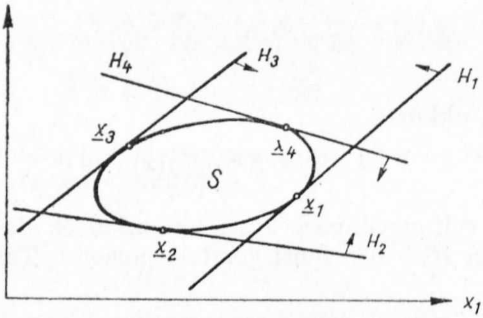
A konvex halmaz mintájára a konvex (konkáv) függvény is linearizálható!

A linearizálás jelentőségét növeli az a körülmény, hogy rugalmasan alkalmazható mind a bázis megválasztását, mind a linearizálandó halmazt illetően.

A fenti kétdimenziós ábra viszonylag könnyűnek tünteti fel a dolgot, és ez kevés változó esetén talán megfelel a valóságnak, de sok változó esetén komplikáltabb. Nagy előnye abban áll, hogy a manipulációt csak implicite kell elvégezni, azaz a bázis pontjainak csak egy kis részét kell meghatároznunk. Valójában a Dantzig—Wolfe-eljárás mögött húzódó gondolat ilyen természetű, ami lehetőséget ad a DW-eljárás nem lineáris verziójának kifejlesztésére. Abban az esetben, ha maga az S halmaz konvex poliéder, akkor a belső linearizálás elegánsan elvégezhető. Csupán az a teendő, hogy a szóban forgó bázis elemeit a poliéder extremális pontjaival tesszük egyenlővé. Az extremális pontokat csupán a kívánt mértékben kell meghatározni.

2.2.3. *Külső linearizálás*

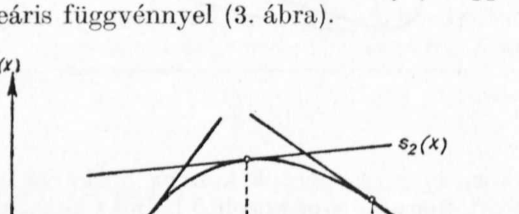
A belső linearizálás azon az alapgondolaton épült föl, hogy az S halmazt bizonyos pontjai konvex burkaként ábrázoljuk. A külső linearizálás pedig úgy tekinthető, mint egy olyan közelítő eljárás, amely az S halmazt félterek halmazának közös részeként ábrázolja. Tartsuk meg továbbra is az S-re adott definíciónkat. Szemléltetésre tekintsük az R^2-ben adott konvex halmaz külső linearizálását (2. ábra):



2. *ábra*

Az S halmazt tehát a $H_1 \ldots H_4$ hipersíkok alkotta félterek közös része által definiált konvex halmazzal (konvex poliéder) közelítettük meg, ahol is a poliéder tartalmazza S-et.

Az S halmaz közelítéséhez hasonlóan valamely f függvény is közelíthető szakaszonként lineáris függvénnyel (3. ábra).



3. *ábra*

Az s függvényeket úgy definiáljuk, hogy adott x_i-nél rendelkezzenek azzal a tulajdonsággal, hogy értékük sehol sem kisebb az f-nél (ha f konkáv) és x_i pontban $s(x_i) = f(x_i)$. Ha az f függvény differenciálható, akkor egy $\hat{x}$-hez tartozó s függvény az elsőrendű Taylor-sorral adható meg, azaz

$$s(\hat{x}) = f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x})$$

ahol $\nabla f(\hat{x})$ az $f(x)$ $\hat{x}$-beli gradiense, $\nabla f(x) = \left(\frac{\vartheta f(x)}{\vartheta x_1}, \ldots, \frac{\vartheta f(x)}{\vartheta x_n}\right)$

Az elmondottakat alkalmazzuk most programozási feladatra! Tekintsük az eredeti (2.1) feladatot és tegyük fel, hogy adottak az $x_1, x_2, \ldots x_T$ pontok, amelyekhez i_t indexet rendelünk 1 és m között. Minden t-re a $g_{i_t}(x) \geq o$ feltételt a Taylor-sorral közelítsük, s ekkor a nem lineáris feladat a következő feladatba megy át:

$$g_{i_t}(x_t) + \nabla g_{i_t}(x_t)(x - x_t) \leq 0 \qquad t = 1, \ldots T \tag{2.7}$$

$$f(x) \to \max_x$$

Feltesszük, hogy minden g_i konvex. Ebben az esetben minden S halmazbeli pont kielégíti a (2.7) feltételt is, mivel a (2.7) baloldala sohasem nagyobb $g_{i_t}(x)$-nél. A (2.7) által definiált halmaz nagyobb S-nél.

A feladat megoldására gondolva látható, hogy a megoldás akkor lehet hatékony, amennyiben a (2.7) az eredeti feladat megoldását anélkül adja, hogy sok x_t meghatározása válna szükségessé. A megoldás egy hatékony módszerét Kelley dolgozta ki [14].

A fenti manipuláció hatékonysága a közelítő pontok gazdaságos generálásától függ. A belső linearizálás alapgondolatához hasonlóan Kelley módszere olyan, amelyben nem kell előre megadni explicite az x_t pontokat, csupán a kívánt mértékben.

A külső linearizálás felvet egy természetesen adódó kérdést: vajon létezik-e adott ponthoz tartozó „érintő". Az már bizonyított, hogy az R^n-ben adott zárt konvex halmaz valamely határpontja legalább egy rajta áthaladó támaszsíkkal rendelkezik [11]. Ebből következik, hogy minden zárt konvex halmaz a határoló félterek közös részeként reprezentálható.

2.2.4. *Vetítés*

Tekintsük a következő egyszerű feladatot:

$$\begin{aligned} & y \in Y \\ & x - g(y) = 0 \\ & h(x) \geq 0 \\ & \max_{x,y} f(x, y) \end{aligned} \tag{2.8}$$

ahol a h és g vektorfüggvények. A feladat y változóra való vetítésén a következő feladatot értjük:

$$\max_{y \in Y} \left\{ \begin{matrix} \sup_x f(x, y) \\ h(x) \geq 0, x = g(y) \end{matrix} \right\} \tag{2.9}$$

A kapcsos zárójelben levő supremumot $v(y)$-nal jelölve

$$(2.10)\qquad v(y)=\begin{cases} f[g(y),y)] & \text{ha } h[g(y)]\geq 0 \\ -\infty & \text{ha } h[g(y)]=0 \end{cases}$$

Bevezetve a $V=\{y|h[g(y)]\geq 0\}$ jelölést, a (2.8) feladat a következőképp írható

$$(2.11)\qquad \begin{gathered} y\in V\cap Y \\ v(y)\to \max. \end{gathered}$$

A fenti példa szemlélteti a *vetítés* vagy másképpen a *particionálás* lényegét. Látható, hogy a vetítéssel az eredetinél egyszerűbb feladathoz jutottunk azáltal, hogy a változók egy részét (az y változókat) átmenetileg rögzítettük.

A módszer általánosítását most már könnyen elvégezhetjük. Tekintsük most az alábbi feladatot:

$$(2.12)\qquad \begin{gathered} x\in X \\ y\in Y \\ g(x,y)\geq 0 \\ \max f(x,y) \end{gathered}$$

ahol $X\subseteq E^n$, $Y\subseteq E^m$ és g egy vektorfüggvény. A (2.12)-nek az y változók terére eső vetületét a következők szerint definiáljuk:

$$(2.13)\qquad \max_{y\in Y}\begin{Bmatrix} g(x,y)\geq 0 \\ \sup\limits_{x} f(x,y) \end{Bmatrix}$$

A (2.13) már csak y-ban változó feladat. Ha a kapcsos zárójelben levő kifejezést $v(y)$-nal jelöljük, akkor a feladatot átírhatjuk. Ha valamely y esetén $v(y)$ nem megengedett, akkor v-t $-\infty$ értékűnek tekintjük. Legyen $V=\{y|g(x,y)\geq$ $\geq 0,\ x\in X\}$. A (2.13) feladat tehát

$$(2.14)\qquad \begin{gathered} y\in V \\ \max_{y\in Y} v(y) \end{gathered}$$

A V halmazt az $x\in X$ és $g(x,y)\geq 0$ feltételek y terére eső vetületének nevezzük.

A (2.12) és (2.14) közötti nagyon fontos összefüggést a következő tétel írja le:

TÉTEL: A (2.12) akkor és csak akkor nem megengedett vagy nem-korlátos, ha a (2.14) is az. Ha $(y_0 y_0)$ a (2.12) optimális megoldása, akkor y_0 a (2.14) optimális megoldása. Ha y_0 optimális megoldása a (2.14)-nek és x_0 eléri az $f(x,y_0)$ supremumot az $x\in X$ és $g(x,y_0)\geq 0$ mellett, akkor x_0 az y_0-al együtt optimális megoldása a (2.12)-nek.

A vetítés manipulációját alkalmazhatjuk például a következő feladat esetén:

$$(2.15)\qquad \begin{gathered} x_k\in X_k \qquad k=1,\dots,K \\ y\in Y \end{gathered}$$

$$G_k(y) + g_k(x_k) \leq 0 \qquad (k = 1, \ldots, K)$$

$$\max_{x, y} \{F(y) + \sum_{k=1}^{K} f_k(x_k)\}$$

ahol x_k n_k dimenziós vektor és G_k, valamint g_k ugyanazon méretű vektorfüggvények. A feladat egy K szektoros modellként interpretálható, ahol az y változók a központilag ellenőrzött tevékenységeket szimbolizálják, míg az x_k a szektorok változóinak vektora. Ha az y változókat átmenetileg rögzítjük, akkor K független feladatot kapunk, amely az y-ra való vetítésnek felel meg:

$$\max_{y \in Y} [F(y) + \sum_{k=1}^{K} v_k(y)]$$

(2.16) ahol

$$v_k(y) = \left\{ \begin{matrix} \sup\limits_{x_k \in X_k} f_k(x_k) \\ g_k(x_k) \leq -G_k(y) \end{matrix} \right\}$$

A vetítés további alkalmazását a Benders-féle particiós módszer kapcsán mutatjuk be [2.2.6 pont].

A fent bemutatott átalakítási fogások felhasználási körét a következő tábla szemlélteti:

	Felbontás	Izolálás	Közelítés
1. Dualizálás	+	+	
2. Belső linearizálás	+		
3. Külső linearizálás			+
4. Vetítés		+	

Érdekes annak összefoglalása is, hogy az ismertebb algoritmusok milyen manipulációkat alkalmaznak.

	Dualizálás	Belső linearizálás	Külső linearizálás	Vetítés
Abadie—Williams [1]		+		
Benders [26]			+	+
Dantzig—Wolfe [5]		+		
Rosen [22]	+		+	
Weitzman [24]			+	+
ten Kate [13]		+		

2.2.5. *Megoldási stratégiák*

Áttekintettük a legfontosabb átalakítási fogásokat, amelyekkel elértük, hogy az adott feladatot könnyebben kezelhető alakra hoztuk. Ehhez mindig választható olyan megoldási stratégia, amelynek felhasználásával a feladatokat egyszerűbb optimalizálási feladatok — ún. alfeladatok — megoldásának sorozatával állítjuk elő. Amennyiben a feladat szerkezete valamilyen speciális szerkezet-típusba tartozik, úgy az alfeladatok kialakítása során ezt a tulajdonságot kihasználjuk.

A megoldási stratégiák száma rendkívül nagy, s ezek nagy része kiválóan alkalmazható a nagyméretű feladatok megoldásában. Tekintsünk át röviden néhány fontosabb megoldási stratégiát:

a) *Relaxációs stratégia*

A relaxáció olyan konvex feladatok esetén célravezető eljárás, amelyek sok egyenlőtlenséget tartalmaznak. A módszer alapgondolata a következőképpen foglalható össze. Megoldjuk az adott feladat egy olyan változatát, amelyet úgy kapunk, hogy az egyenlőtlenségek egy részét (lehetőleg minél többet) nem vesszük figyelembe. Ha az így kapott megoldás nem elégíti ki az elhagyott feltételeket, akkor generálunk és a vizsgálati körünkbe vonunk egy ilyen feltételt és az lgy kapott feladatot oldjuk meg. A bővített feladat megoldását behelyettesítjük az ignorált feltételekbe. Ha a megoldás kielégíti a feltételeket, akkor az eljárást befejezzük, ha viszont nem ez az eset áll fenn, akkor az előbbi bővítést alkalmazva újra megoldjuk a feladatot. A lineáris programozási feladatok megoldásában is ismert Lemke-féle duál módszer a relaxációs stratégiával ekvivalens.

A stratégiát a Kelley által kidolgozott metszősík módszeren szemléltetjük.

A megoldandó feladat:

$$\begin{gathered} x \geq 0 \\ Ax \leq b \\ g(x) \leq 0 \\ cx \rightarrow \min \end{gathered}$$

ahol a g-ről feltesszük, hogy konvex és differenciálható az $X = \{x | x \geq 0, Ax \leq b\}$ halmazon.

A külső linearizálást alkalmazva a feladat a következő feladattá alakítható:

$$\begin{gathered} x \in X \\ g(\tilde{x}) + \nabla g(\tilde{x}) \leq 0 \quad \forall\, \tilde{x} \in X \\ cx \rightarrow \min \end{gathered}$$

A relaxációs stratégia lehetővé teszi, hogy kezdetben kerüljük a g valamennyi érintőjének meghatározását. Minden iterációban e feladat egy csökkentett változatát oldjuk meg. A csökkentett feladat egy x^* optimális megoldása akkor és csak akkor megengedett az átalakított feladatban, ha $g(x^*) \leq 0$. Ha $g(x^*) \nleq 0$, akkor a $\nabla g(x^*)$ felhasználásával előállítható egy megsértett feltétel, amelyet a csökkentett feladathoz csatolunk. A stratégia alkalmazását megkönnyíti az a körülmény, hogy a csökkentett lineáris programozási feladat módosítása után nem kell a számításokat elölről kezdeni, hanem postoptimalizációs technikával állapíthatjuk meg az új megoldásokat.

b) *Lépcsőzetes közelítés* [11], [22]

A megoldási stratégia nagyméretű feladatok megoldásában először J. B. Rosen particiós módszerénél fordult elő [22]. Általában olyan feladatok megoldásánál előnyös, amelyek lényegesen egyszerűbbé válnak akkor, ha a bennük szereplő változók egy részét átmenetileg rögzítjük. Ilyen átmeneti rögzítést tudunk elérni az értelmezési tartományok valamely változóra való veítétésével. A később bemutatandó Benders-módszer erre is jó példa. Általánosságban is igaz, hogy ez a stratégia a vetítéssel párosítható előnyösen. Eltekintünk a további részletezéstől, a fenti irodalmi utalásokban részletes leírás található.

c) *Restrikciós stratégia* [5], [10], [11]

Olyan feladatok esetén, amelyeknél sok nem-negatív változóval kell dolgoznunk, hatékonyan alkalmazhatjuk. Valójában a lineáris programozás szimplex módszere képviseli ezt a stratégiát. Most egy kicsit általánosabban értelmezzük a lényegét: a változók egy részhalmazát átmenetileg 0-val tesszük egyenlővé és a csökkentett feladatot megoldjuk. Ha a kapott megoldás nem elégíti ki az adott feladat optimumkövetelményét, akkor az előbb megkötött változók közül egyet vagy többet „felszabadítunk" — azaz megengedjük a pozitivitást — és a most már kisebb kötöttséggel bíró feladatot megoldjuk. Az eljárást addig folytatjuk, míg az optimumkritérium teljesül. A megoldási stratégia alapgondolata a Dantzig—Wolfe-eljárásban megtalálható, ahol a master feladat felírása során az extremális pontok nagy száma miatt nagyon sok változós feladatot kapunk. A restrikciós stratégia kiváló tárgyalása található a [11]-ben.

A bemutatott manipulációk, valamint a megoldási stratégiák párosítása megteremti a kb. 60—70 ismertetett eljárás osztályokba sorolásának keretét. Valamely stratégia általában több manipulációval is párosítható. Ez magyarázza a jelenleg meglevő nagyszámú algoritmust. Az osztályozási szemponton túl az új algoritmusok kidolgozásának módját is megkapjuk ezzel a párosítással.

Nem célunk itt valamennyi eljárást osztályokba sorolni. Inkább néhány közismert eljárást jellemzünk a manipulációk és stratégiák párosítása szerint. A Dantzig—Wolfe-eljárás így a belső linearizálás és a restrikciós stratégia párosításának felel meg. Benders módszere a vetítés és fokozatos közelítés párosítását reprezentálja, ugyanígy Weitzman módszere is.

Vannak azonban olyan eljárások, amelyek nem feleltethetők meg valamely párosításnak, mert nem a fenti átalakítási fogásokat alkalmazzák. Ilyen esetben a módszerek jellemzését úgy tehetjük teljessé, hogy az egyéb tulajdonságaikat is megadjuk. A master és az alfeladatok közötti iterációs kapcsolatban áramló információk alapján történő csoportosításról a 3. pontban írunk.

Összefoglalásképpen legszögezhetjük, hogy a dekompozíciós eljárások jellemzését a következő ismérvek alapján végezhetjük:

1. a master feladat kialakításánál használt manipulációk jellege,
2. az alfeladatok megoldásában használt megoldási stratégiák
3. a master és az alfeladatok közötti információáramlás jellege.

2.2.6. *Két példa*

1. *Benders módszere* [26]

Megoldandó a következő feladat:

$$x \geq 0 \tag{2.17}$$

$$y \in Y$$

$$Ax + F(y) \leq b$$

$$cx + f(y) \to \max_{x,y}$$

A feladat valójában egy szemi-lineáris programozási feladat. Jó lenne ha az y változókat átmenetileg rögzítenénk, mert úgy egyszerűbb feladathoz jutnánk. Alakítsuk át ezért a (2.17) feladatot úgy, hogy az y-ra való vetítést alkalmazzuk. Ekkor

$$(2.18) \qquad \max_{y \in Y} \{f(y) + \sup_{x \geq 0} [cx, Ax = b - F(y)]\}$$

A kapcsos zárójelben levő supremum a következő lineáris programozási feladatnak felel meg:

$$(2.19) \qquad \begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &\leq b - F(y) \\ cx &\to \max \end{aligned}$$

A feladat y változásától függően jobboldalban paraméteres feladat. Feltesszük, hogy legalább egy olyan y létezik, ahol véges optimuma van, ekkor a dualitási tétel értelmében igaz továbbá, hogy az

$$(2.20) \qquad \begin{aligned} u &\geq 0 \\ uA &\geq c \\ u[b - F(y)] &\to \min \end{aligned}$$

megengedett minden y-ra. Jelöljük $\langle u^1 \ldots u^p \rangle$-vel a (2.20) extremális pontjait és $\langle u^{p+1} \ldots u^{p+q} \rangle$-val az extremális irányait. A dualitási tétel értelmében igaz továbbá, hogy a (2.19) akkor és csak akkor megengedett, ha a (2.20)-nak van véges optimuma, azaz, ha y kielégíti az

$$(2.21) \qquad u^j[b - F(y)] \geq 0 \qquad j = p+1, \ldots, p+q$$

feltételeket. Mivel a (2.18)-ban mindazon y-ok esetén $-\infty$ értéket tekintünk, amelyre (2.19) nem megengedett, ezért a (2.21) feltételeket a (2.18)-hoz tehetjük. A (2.18) helyett a dualitási tételen alapuló megfontolások alapján a következőt írhatjuk:

$$(2.22) \qquad \max_{y \in Y} \{f(y) + \min_{1 < j < p} [u^j(b - F(y))]\}$$

$$u^j(b - F(y)) \geq 0 \qquad (j = (p+1), \ldots (p+q)$$

Mivel a minimum a legnagyobb alsó korlát, a feladat a következő lesz:

$$(2.23) \qquad \begin{aligned} &\operatorname*{maximum}_{y \in Y; y_0} f(y) + y_0 \\ &y_0 \leq u^j(b - F(y)) \qquad j = 1, \ldots, p \\ &0 \leq u^j(b - F(y)) \qquad j = p+1, \ldots, p+q \end{aligned}$$

Nézzük most meg a fenti megfontolások alapján kialakított feladat megoldási algoritmusát. Az algoritmus lényege az, hogy a feladatot felbontjuk kisebb feladatok megoldására, s ezáltal elkerüljük, hogy kezdetben minden u^j-t ismerjünk.

1. lépés: meghatározunk egy $(\hat{y}_0, \hat{y})$ értékpárt, ahol $\hat{y} \in Y$.
2. lépés: megoldjuk a (2.20) feladatot, amelynek eredményeképp kapjuk az u megoldásokat. (A 2.20)-ban y helyére $\hat{y}$ írunk.)
3. lépés: Vizsgáljuk a következő relációt (optimumszabály)

$$y_0 \leq u^j[b - F(y)]$$

Két eset van:

(a) $\hat{y}_0 \leq u^j[b - F(y)]$
Ebben az esetben $(\hat{y}_0, \hat{y})$ optimális megoldása az induló feladatnak.

(b) Ha az (a) reláció nem teljesül, akkor előállítjuk a (2.23) egy megsértett feltételét, amellyel bővítjük a feladatot.[1]

2. *Dantzig—Wolfe dekompozíciós eljárás* [5]

A szerzők egy speciális struktúráju lineáris programozási feladatra alkalmazták a dekompozíció elvét.

A feladat a következő:

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &= a \\ Bx &= b \\ cx &\to \max \end{aligned} \tag{2.24}$$

A $Bx = b$ feltételek tartalmazzák az ún. közös feltételeket, az $Ax = a$ feltételek az ún. speciális feltételeket akkor, ha az együtthatómátrixot blokkdiagonálisnak tételezzük fel. A következő megfontolásokon keresztül megvilágítjuk a dekompozíciós elv lényegét.

Definiáljuk a $P = \{x | Ax = a,\ x \geq 0\}$ poliédert. A kiinduló feladat ekkor átírható:

$$\begin{aligned} x &\in P \\ Bx &= b \\ cx &\to \max \end{aligned} \tag{2.25}$$

A feladatot átalakítottuk. Föltesszük, hogy a P nem üres és korlátos, s extremális pontjait $x_1, \dots x_p$ halmaz reprezentálja. A (2.24) a belső linearizálás felhasználásával átfogalmazható

$$\begin{aligned} \alpha &\geq 0 \\ B \sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j &= b \end{aligned} \tag{2.26}$$

[1] A kifejtésben szándékosan nem írtunk a halmaz természetéről. Szeretném ugyanis kiemelni az eljárásnak azt a jellemzőjét, hogy az Y definiálásától függően a módszer más és más típusú feladatok megoldását teszi lehetővé. Ha az Y egy konvex poliéder integer pontjaiból áll és f, F lineáris, akkor a (2.23) integer lineáris feladat. Ha rendelkezünk ilyen feladat megoldására alkalmas gépi algoritmussal, akkor a Benders-módszer hatékonyan alkalmazható.

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j = 1$$

$$c(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j x_j) \to \max$$

A (2.24) feladat ekvivalens a (2.26)-tal. A feladat felírásához ismernünk kellene valamennyi extremális megoldást. A belső linearizálás gondolatát felhasználva elérhetjük, hogy nem kell valamennyi extremális pontot explicite megadni. Erre szolgál egy olyan iterációs eljárás, amelyben a (2.26) tölti be a master feladat funkcióját, míg az alfeladathoz a következő megfontolások útján jutunk. Jelöljük a (2.26) feladat duál változóit (u, u_0)-val, ahol u_0 a normalizáló feltételhez tartozó duál változó. A programozási feladat optimalitási kritériuma szerint a redukált költségnek nem negatívnak kell lenni, azaz

$$u_0 + uBx^j - cx^j \geq 0 \qquad (j = 1, 2, \dots p) \tag{2.27}$$

amely ekvivalens az

$$u_0 + \min_{1 \geq j \geq p} (uB - c)\, x^j \geq 0 \tag{2.28}$$

vagy, mivel egy lineáris függvény a P halmazon csúcspontban veszi fel a minimumát,

$$u_0 + \min_{x \in P} (uB - c)\, x \geq 0 \tag{2.29}$$

relációval.

A (2.29)-ből az

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ Ax &= b \\ \min\,&(uB - c)\, x \end{aligned} \tag{2.30}$$

feladatot nevezzük alfeladatnak, amelynek alapvető szerepe van az algoritmusban.

Az algoritmus így a következő:

1. lépés: meghatározzuk a (2.26) egy lehetséges bázismegoldását és a kapcsolódó (u, u_0) értékeket.

2. lépés: Megoldjuk a (2.30) feladatot.

3. lépés: Vizsgáljuk a következő relációt

$$u_0 + \min_{x \in P} (uB - c)\, x \geq 0$$

Két eset van:

a) az egyenlőtlenség teljesül, ekkor elértük a kiinduló feladat optimumát

b) nem teljesül az egyenlőtlenség, ekkor bővítjük a feladatot a következő oszloppal:

$$\begin{pmatrix} Ax^{j_0} \\ 1 \\ cx^{j_0} \end{pmatrix}$$

Az iterációt a 4. lépésnél folytatjuk.

4. lépés: A bővített feladatot megoldjuk és a 2. lépésnél folytatjuk az iterációt.

3. A dekompozíciós eljárások felhasználása

Ha összefoglaljuk a dekompozíciós módszerek fő jellemzőit, akkor a módszerek érdekes közgazdasági interpretációjához juthatunk. A nagyméretű feladatot alfeladatokra bontottuk, valamint egy ún. master feladatra. A megoldási algoritmus egy iterativ folyamat a master és alfeladatok között, amelyben meghatározott információk áramlanak az egyes feladattípusok között. Az iterációs folyamatnak akkor van vége, amikor elértük a kiinduló feladat globális optimumát. A dekompozíciós módszereknek ezt a leírását rokonságba hozhatjuk a tervezési folyamatok egyszerűsített leírásával. A gazdaságról feltételezzük, hogy egy központra és több szektorra tagozódik. A tervezési folyamat célja a gazdaság egészére vonatkozó optimalizálási feladat megoldása. A központ nem képes egyedül megoldani a teljes feladatot. A számításokat megszervezheti úgy, hogy a nagy feladatot felbontja (dekomponálja) kisebb feladatokra, méghozzá a gazdaság szervezeti tagozódásának megfelelő szektorfeladatokra. A tervezési folyamatban a központ problémája ekkor az, hogy úgy szervezze meg a szektorok és központ közötti információcsere folyamatát, hogy a szektorfeladatok optimális megoldásai az egész gazdaságra vonatkozó optimumhoz konvergáljanak.

A fenti rokonság szemléltetésére tekintsük a következő feladatot:

$$\sum_{i=1}^{K} g_i^j(x_i) \leq b_0^j \qquad (j=1,\ldots m) \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{K} c_i(x_i) \rightarrow \max$$

ahol az x_i az egyes szektorok n_k méretű vektorai, K a szektorok száma.

Tételezzük fel, hogy a tervezési folyamat kezdetén a szektorok csak a saját $g_i^j(x_i)$ és $c_i(x_i)$ függvényeit ismerik, de nem ismerik más szektorok ugyanezen információit, valamint a b_0^j-t. A központ viszont a b_0^j-t ismeri, de nem ismeri a szektorok technológiáit reprezentáló g_i függvényeket. (Egyelőre ne tegyünk semmi kikötést a g_i és c_i tulajdonságairól.)

A tervezési folyamatban a központ feladata a b_0^j erőforrások olyan felosztása amely felosztás a legnagyobb össznyereséget hozza. (Ha a célfüggvény nyereségmaximálás.) A központ ezt a felosztást kétféleképpen szervezheti:

1. közvetlen korlátfelosztással,
2. közvetett korlátfelosztással.

Tekintsük a két esetet.

1. A közvetlen korlátfelosztás esetén a központ a b_0^j egy lehetséges allokációját készíti el:

$$\sum_{i=1}^{K} b_i^j = b_0^j \qquad (j=1,\ldots,m) \tag{3.2}$$

A b_i^j értékek ismeretében a következő feladat fogalmazható meg szektorszinten:

$$g_i^j(x_i) \leq b_i^j \qquad (j=1,\ldots m) \tag{3.3}$$

$$c_i(x_i) \rightarrow \max$$

A szektor tehát csupán saját nyereségének maximálására törekszik az adott lehetőségek mellett. A (3.3) feladatok megoldásával megkapjuk az $\hat{x}_i(b_i)$ primál és $\hat{u}_i(b_i)$ duál megoldásokat. A (3.1) globális optimuma akkor érhető el, ha b_0^j felosztása optimális. Ennek az a feltétele, hogy az erőforrások árnyékárait reprezentáló $\hat{u}_i(b_i)$ értékek egyenlők legyenek minden szektorban, azaz

$$\hat{u}_1(b_i) = \hat{u}_2(b_i) = \ldots = \hat{u}_K(b_i). \tag{3.4}$$

Ellenekző esetben a központ új felosztást csinál. A fenti egyszerűsített iterációs folyamat tehát olyan tervezési rendszert képvisel, ahol a központ utasítások formájában közli a szektorokkal, hogy milyen keretek mellett maximálják nyereségüket, a szektorok pedig hatékonysági mutatókat jelentenek vissza a központnak. (Feltételezzük torzításmentesen.)

A kérdés most már az, hogyan algoritmizálható egy ilyen iteratív folyamat. Itt kapcsolódunk a dekompozíciós eljárások irodalmához. Az információáramlás szempontjából ilyen folyamat megvalósításához szolgáló algoritmusok a ten Kate [13], a Kornai—Lipták [16] és a Weitzman [24] által kidolgozott eljárások.

A másik felvetődő kérdés arra vonatkozik, vajon az árnyékárak egalizálódása esetén tényleg elértük-e a globális optimumot. Sajnos ez csak szigorúbb kikötések mellett igaz (konvexitás), míg egyéb esetben csak a globális optimum szükséges feltételeit teljesítettük (l. Kuhn—Tucker-tétel).

2. A közvetett korlátfelosztás vagy árnyékármegállapító eljárás esetén a központ határozza meg az erőforrásokért fizetendő árat $\hat{u}^j$ és megküldi a szektoroknak. A szektorok most a következő feladatot oldják meg:

$$\max\ v_i = c_i(x_i) - \sum_j \hat{u}^j g_i^j(x_i) \tag{3.5}$$

A $c_i(x_i)$ szektornyereség és az igénybevett erőforrásokért fizetett költség különbsége a maximalizálandó függvény. A feladat megoldásával az $x_i(\hat{u}^j)$ megoldásokat kapjuk. A központi feladat globális optimumát akkor érjük el, ha a központ olyan árakat határoz meg, hogy az alábbi két feltétel teljesül:

$$\text{megengedettség: } \sum_i g_i^j[\hat{x}(u^j)] \leq b_0^j \tag{3.6}$$

$$\text{optimalitás: } u^j\{b_0^j - \sum_i g_i^j[\hat{x}_i(u^j)]\} = 0 \tag{3.7}$$

A közvetlen felosztáshoz hasonlóan itt is rokonságot találunk a dekompozíciós algoritmusokkal. A klasszikus Dantzig—Wolfe-algoritmuson kívül egyéb algoritmusok is ilyen folyamatként interpretálhatók (pl. Rosen [22] és az Abadie—Williams [1]).

Sajnos ezúttal is ugyanazok a kérdések problematikusak, amelyek az előző pontban is problematikusak voltak. Csak lineáris esetben igaz, hogy a (3.6) és (3.7) feltételeket kielégítő szektoroptimumok egyúttal a kiinduló feladat globális optimumát adják.

Bevezetőnkben már említettük, hogy a dekompozíciós módszereket alapvetően a nagyméretű feladatok megoldásának igényéből kiindulva dolgozták ki. Az elmúlt években egyre több cikk foglalkozott a különböző módszerek közgazdasági interpretációjával is, a módszereknek a decentralizált tervezési folyamatok elméletével való összekapcsolásával [19]. E két felhasználási irány sajátságos fejlődési utat tett meg. A harmadik generációs gépek megjelenése a számítástechnikai nehézségek nagyfokú mérsékléséhez vezetett. Ebből következőleg a számítástechnikai felhasználás igénye is csökkent. Ezen túlmenően az is bebizonyosodott, hogy a nagyméretű feladatok dekompozíciós algoritmussal való megoldás több, előre nem várt nehézséget támaszt. Gyümölcsözőnek látszanak viszont az algoritmusokban felismerhető megfontolások a nem lineáris és egyéb nehezebben kezelhető feladatok megoldási lehetőségeinek bővítésében [25].

Egy másik felhasználási terület az elmúlt egy-két évben egyre jobban kirajzolódik. A további kutatások szempontjából érdekesnek látszik a dekompozíciós eljárások kedvező, előnyös tulajdonságainak a kontrollelméletben való felhasználása. Az elmúlt években megjelent cikkek közül kiemeljük Dantzig [7] és Dantzig—Van Slyke [7a] munkáit. Ugyancsak további kutatásokra serkentő gondolat a dekompozíciós módszereknek a gazdasági rendszerelmélettel való összekapcsolása [15].

IRODALOM

1. ABADIE, J.—WILLIAMS, A. C.: Dual and parametric methods in decomposition. In GRAVES, R. L.—WOLFE, P. (szerk.): Recent advances in mathematical programming. New York, 1963. McGraw-Hill.
2. BALAS, E.: An infeasibility-pricing method for linear programs. Operations Research Vol. 14. No. 5. pp. 847—873.
3. BALINSKI, M. L.: On some decomposition approaches in linear programming. In Recent Mathematical Advances in Operations Research. Engineering Summer Conferences. University of Michigan. 1964.
4. CHARNES, A.—COOPER, W. W.—KORTANEK, K. O.: On the theory of semi-infinite programming and a generalization of the Kuhn-Tucker saddle-point theorem for arbitrary convex function. Naval Research Logistics Quarterly Vol. 16. No. 1. (1969) pp. 41—51.
5. DANTZIG, B. G.—WOLFE, P.: Decomposition principle for linear programs. Operations Research. January-February 1960. pp. 101—111; Econometrica Vol. 29. No. 4. pp. 767—778.
6. DANTZIG, B. G.: Large-scale linear programming. In DANTZIG, G. B.—VEINOTT, A. F. (eds.): Mathematics of the decision sciences. Part I. Americal Mathematical Society 1968.
7. DANTZIG, B. G.: Linear control processes and mathematical programming. SIAM Journal on Control. February, 1966. pp. 56—60.

7a. DANTZIG, B. G.—VAN SLYKE, R. M.: Generalized linear programming. [25]-ben, 75—117. o.

8. DANTZIG, B. G.: Linear programming and extensions. Princeton, N. J., 1963. Princeton University Press.
9. DANTZIG, B. G.: Upper bounds, secondary constraints and block triangularity in linear programming. Econometrica 23. (1955) No. 2. pp. 174—183.
10. FORD, L. R.—FULKERSON, D. R.: A suggested computation for maximal multicommodity network flows. Management Science. October, 1958. pp. 97—101.
11. GEOFFRION, A. M.: Elements of large-scale mathematical programming. Management Science. July, 1970. pp. 651—692.
12. GOMORY, R. E.: Large and nonconvex problems in linear programming. Proceedings of symposia in applied mathematics. Vol. XV. (1963) American Mathematical Society. pp. 125—139.
13. A. ten KATE: Decomposition of linear programs by direct distribution. Netherlands School of Economics. Rotterdam, 1970. (kézirat, megjelenik az Econometrica-ban)
14. KELLEY, J. E.: The cutting-plane method for solving convex programs. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. Vol. 8. No. 4. (1960) pp. 703—712.
15. KORNAI J.: Gondolatok a többszintű tervezési rendszerekről. Közgazdasági Szemle. 1971/9. sz.
16. KORNAI J.—LIPTÁK T.: Two-level planning. Econometrica. Vol. 33. No. 1. (1965) pp. 141—169.

17. KREKÓ B.: Lineáris programozás. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
18. KÜNZI, H. P.—TAN, S. T.: Lineare Optimierung grosser Systeme. Lecture Notes in Mathematics. Berlin—Heidelberg—New York, 1966. Springer-Verlag.
19. MALINVAUD, E.: Decentralized procedures for planning. In MALINVAUD, E.—BACHARACH, M. O. L. (eds.): Activity analysis in the theory of economic growth. New York, 1967. Macmillan Company.
20. ORCHARD-HAYS, W.: Advanced linear programming computing techniques. New York, 1968. McGraw-Hill.
21. PREKOPA, A.—MAJTHAY, A.: Nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldási módszerei. Kézirat, 1970.
22. ROSEN, J. B.: Primal partition programming for block diagonal matrices. Numerische Mathematik Vol. 6. (1964) S. 250—260.
23. SIVÁK J.—LIGETI, I.: Nagyméretű lineáris programozási feladatok megoldásában felhasználható néhány dekompozíciós eljárás. OT Tervgazdasági Intézet Tájékoztatója. 1969.
24. WEITZMAN, M.: Iterative multi-level planning with production targets. Econometrica. 1970. 1. sz.
25. WISMER, D. A.: Optimization methods for large-scale systems. McGraw-Hill Book Company. New York, 1971.
26. BENDERS, J. F.: Partitioning procedures for solving mixed-variabres programming problems. Numerische Mathematik. Vol. 4. 1962. pp. 239—252.

KÖNYVEKRŐL

KEMENY, J. G.—SNELL J. L.—THOMPSON. G. L.: *A modern matematika alapjai.* Budapest, 1971. Műszaki Könyvkiadó. 498 o.

A három amerikai szerző művének eredeti címe: Introduction to finite mathematics. A mű első amerikai kiadása 1957 januárjában jelent meg. Az első kiadás előszavából idézem a következőket:

„A főiskolai tanulmányok matematikai anyaga az első két évben rendszerint az analízis és az azt előkészítő anyagrészek. A Dartmouth College matematikai tanszékein néhány évvel ezelőtt elhatároztuk, hogy új típusú bevezető előadást kísérletezünk ki, amelyet a hallgatók a hagyományos előadások mellett választhatnának. Szándékunk az volt, hogy a hallgatók korán megismerkedjenek a modern matematika bizonyos alapfogalmaival. Bár ennek keretében elsősorban matematikát akartunk tanítani, elhatároztuk, hogy a tananyagba biológiai és társadalomtudományi alkalmazásokat is felveszünk és így olyan nézőpontot biztosítunk, amely a matematika alkalmazásait tekintve különbözik a szokásostól, vagyis attól, amely elsősorban a fizikára van tekintettel.

Az itt felvázolt előadás megtervezésekor úgy láttuk, hogy erre nincs alkalmas tankönyv, ezért elhatároztuk, hogy írunk ilyen könyvet."

Sajnálatos tény, hogy ez a munka csak 15 évvel az amerikai megjelenés után jutott el a magyar olvasó kezébe. Nyilvánvaló, hogy a társadalomtudományok matematikai problémáival foglalkozó szakirodalom e másfél évtized alatt könyvtárnyi mennyiségű kötettel bővült, s jelentős mértékben fejlődött a szakterület didaktikája is. Éppen ezért az előszó utalása a könyv újszerűségére — melyet idéztem — az akkori állapotot jellemzi, nem pedig a jelenlegit. A munka szerencsés összeállítására, világos és színvonalas tárgyalásmódjára jellemző, hogy hazai kiadása az említett késedelem ellenére még mindig aktuális volt. Igaz ugyan, hogy hazai közgazdászképzésünk ma már eléggé gazdag a különféle matematikai diszciplínákat (valószínűségszámítás, lineáris algebra, mátrixszámítás, gráfelmélet, stb.) ismertető szakirodalomban, szűkében vagyunk azonban az olyan jellegű tankönyveknek, amelyek összefoglalóan, színvonalasan és közérthetően tárgyalják a matematikának mindazokat a fejezeteit, amelyekre a közgazdásznak, az operációkutatónak, vagy szociológusnak szüksége lehet.

Nos, a Dartmouth College professzorai által összeállított tankönyv éppen ilyen munka és elsősorban a gyakorlati szakemberek igényeit tartja szem előtt. Ezen nem azt értem, hogy a közölt definíciók és bizonyítások nem eléggé szigorúak, hanem azt, hogy a könyv inkább a közérthető magyarázatokra és a kidolgozandó példákra helyez súlyt, nem pedig a csak matematikust érdeklő tételekre és azok bizonyításaira.

A könyv hét részből áll:

I. Összetett kijelentések
II. Halmazok és részhalmazok
III. Particiók és számlálás
IV. Valószínűségszámítás
V. Vektorok és mátrixok
VI. Lineáris programozás és játékelmélet
VII. Alkalmazások társadalomtudományi problémákra

Az I. rész jó áttekintést ad a matematikai logika alapozó fejezetéről, a kijelentéskalkulusról.

A II. rész a halmazalgebrába nyújt bevezetést, feltárja a halmazok és kijelentések közötti összefüggést, ismerteti a Venn-diagramok felhasználásának módját, valamint a kettes számrendszer lényegét. Egyik különösen érdekes fejezete e résznek a „Szavazó koalíciók" című. Ebben a fejezetben a szerzők a döntéshozó testületeken belüli erőviszonyokkal, szavazásokkal foglalkoznak.

A III. rész a particiókkal, vagyis halmazok diszjunkt részhalmazokra való felosztásával foglalkozik, de az olvasó a kombinatorika alapfogalmait: a permutációkat és kombinációkat is megismeri ebben a részben. Egy „Szavazási hatalom" c. fejezetben újra visszatérnek a szerzők az előző részben már említett problémára. L. S. Shapley és M. Shubik nyomán megadnak egy módszert a szavazási hatalom mérésére.

A IV. részben betekintést nyerhetünk a valószínűségszámítás alapvető fogalmaiba. Megismerhetjük a valószínűség, a klasszikus valószínűségi mérték, a feltételes valószínűség fogalmát, Bayes tételét, a nagy számok törvényét, a központi határeloszlás-tételt. Külön fejezet foglalkozik a szotachasztikus folyamatokban nagy jelentőségű Markov-láncokkal.

Az V. rész bevezetést ad a mátrixszámításba. Különös érdeme a könyvnek, hogy a vektorok és mátrixok fogalmát, valamint az ezeken értelmezett műveletek fogalmát magától értetődő természetességgel vezeti be. A permutáció-mátrixokkal foglalkozó két fejezet betekintést ad a csoportelméletbe. A lineáris egyenletrendszerek megoldásával foglalkozó fejezet blokkdiagramot is bemutat és ezzel mintegy előkészíti a számítógépi programozás alapelveinek megértését.

A VI. rész igen szerencsés módon foglalja össze a lineáris programozás és a játékelmélet kapcsolatát. Ez a részt azért is figyelemre méltó, mert a magyar nyelvű szakirodalomban kevés a játékelmélet gyakorlati alkalmazásaival foglalkozó mű. Ennek a résznek lényeges hiányossága, hogy nem mutatja be a lineáris programozási feladatok szimplex módszerrel való megoldását, csupán lábjegyzetben utal a szerzőknek egy másik munkájára, amelyben ez megtalálható. Nem túlzás azt állítani, hogy a lineáris programozás szimplex módszere minden más módszernél alkalmasabb, hatékonyabb, tárgyalását ezért az ilyen összefoglaló jellegű munkákban nem szerencsés mellőzni.

A VII. rész talán a legérdekesebb, mindenesetre legközelebb áll a gyakorlati alkalmazásokhoz. Megmutatja, hogy hogyan lehet hírközlési és szociometriai problémákat mátrix- és gráfelméleti módszerrel tárgyalni.

A mátrixalgebra biológiai alkalmazását mutatja be a „Sztochasztikus folyamatok a genetikában" című fejezet. Pszichológiai alkalmazásba nyerünk betekintést az Estes-féle tanulási modell kapcsán. A permutáció-mátrixok egy szociológiai vonatkozását mutatják be azok a fejezetek, amelyek bizonyos primitív társadalmak házassági szabályaival foglalkoznak. Két fejezet a Neumann-féle „bővülő gazdaságra" vonatkozó modellel, valamint a gazdasági egyensúllyal foglalkozik. Az alkalmazásokról szóló részt és egyben a könyvet egy szimulációval foglalkozó rövid fejezet zárja le.

Valamennyi rész végén feladatokat közölnek a szerzők. Ezeknek megoldása a tárgyalási részekben közölt mintafeladatok figyelemmel kísérése után az olvasónak remélhetőleg nem okoz nehézséget. Amennyiben több, hasonló elv alapján megoldható feladatot is közölnek a szerzők, ezek közül legalább az egyiknek megoldását is közlik zárójelben. Ugyancsak minden rész — a feladatok után — irodalomjegyzéket is közöl az illető témakörben elmélyülni szándékozó olvasó tájékoztatására.

A fordítás Varga Tamás főiskolai docens, a lektorálás Urbán János egyetemi adjunktus jó munkáját dicséri. A fordító és a lektor lábjegyzetein kívül meg kell említeni Ruzsa Imrének a IV. részt kiegészítő lábjegyzeteit, melyek a mű értékét nem lebecsülendő mértékben emelik. Sajnos, a könyv nem mentes a sajtóhibáktól, de ezeknek száma nem jelentős.

A könyv feltehetően jól fogja szolgálni mind a szervezett oktatás, mind az egyéni továbbképzés ügyét.

Schück Tamás

Ford L. R. Jr.—Fulkerson D. R.: *Flows in networks*. Princeton, 1962. Princeton University Press.

A könyv a lineáris programozás elméletének sok helyütt jól alkalmazható, hálózati folyamok vagy szállítási típusú feladatok néven ismert fejezetével foglalkozik. Bár első kiadása 10 évvel ezelőtt jelent meg, e témáról legfeljebb csak ezzel egyenértékű könyvet írtak az azóta eltelt időben.

A könyv négy fejezetből áll.

Az első fejezet a hálózatok és hálózati folyamokra vonatkozó legfontosabb fogalmak bevezetése után a maximális folyamprobléma dualitási tételét és a megoldására szolgáló ún. címkézési eljárást, valamint az alapmodell néhány egyszerű kifejezését tárgyalja.

A második fejezet első felének tételei szükséges és elégséges feltételeket adnak különféle lineáris feltételeket kielégítő folyamok létezésére. (Pl. a hálózat bizonyos pontjaiban levő adott nagyságú készletekből adott nagyságú igényeket kielégítő folyam, vagy előírt alsó és felső korlátokat kielégítő áramlás létezésének vizsgálata.) Kihasználva azt, hogy amennyiben egy maximális folyam probléma paraméterei egész számok, akkor van egészszámokból álló megoldás is, a fejezet második része az eddigi eredmények alkalmazását tárgyalja klasszikus kombinatorikus problémákra. (Pl. a König–Egerváry tétel, részben rendezett halmazok láncfelbontása, egy halmaz adott részhalmazainak bizonyos feltételeket kielégítő reprezentáns rendszerei.)

A harmadik fejezet különféle minimális költségű folyamok konstrukcióival foglalkozik. Részletesen tárgyalja a szállítási feladatot, az ún. általános minimális költségű folyam problémáit, valamint az „out-of-kilter" algoritmust. Foglalkozik néhány alkalmazási lehetőséggel is. (Pl. a kritikus út módszernél a minimális költségnek az átfutási idő függvényeként történő meghatározása.)

A negyedik fejezet elsősorban elméletinek látszó témákat tartalmaz. Elsőként arra ad választ, hogy mi annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy kétváltozós függvényhez legyen olyan hálózat, hogy a hálózatbeli lehetséges maximális folyamértékek egybeessenek az adott függvény értékeivel. A másodikként vizsgált kérdés, illetve eredmény egy adott hálózat összes maximális folyamértékeinek meghatározása. A harmadik megoldott probléma: olyan minimális költségű hálózat meghatározása, amelynek az egyes pontjai közötti maximális folyamok nagysága alulról korlátozva van.

A könyvnek példamutatóan pontos és világos tárgyalásmódja mellett legfőbb érdeme, hogy megvalósítja az előszóban kitűzött célt: a matematikai problémák megoldására olyan konstruktív eljárásokat adni, amelyek hatékony szállítási eljárásokként realizálhatók. Bár az alkalmazási példák jó része kézikönyv szintű, kézikönyvnél ez megbocsátható.

A hamarosan magyar fordításban is megjelenő könyv ismerete minden operációkutatással foglalkozó szakember számára hasznos lehet.

STÁHL JÁNOS

PÁLYÁZATI FELHÍVÁS

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztálya pályázatot hirdet

Rövid-, közép- és hosszútávú vállalati és ágazati tervezés matematikai módszerekkel

címmel. A pályázatra olyan művek benyújtását kérjük, melyek a matematikai módszerek konkrét alkalmazásával kapcsolatos tapasztalatokról számolnak be vagy konkrét tervezési problémák megoldását teszik lehetővé és közgazdasági értékelést is tartalmaznak. A pályázati feltételeknek nem felelnek meg kifejezetten matematikai módszertani jellegű, az alkalmazás kérdéseivel és közgazdasági értékeléssel nem foglalkozó tanulmányok.

Pályázati feltételek

1. A pályázaton mindenki, egyénileg vagy csoportosan, egy vagy több pályamunkával is részt vehet.
2. A pályaművek terjedelme a 100 gépelt oldalt nem haladhatja meg.
3. A pályaműveknek tartalmazniuk kell a felhasznált irodalom jegyzékét.
4. A pályázatra csak még nem publikált munkák nyújthatók be.
5. A pályázatra egyetemi doktori, kandidátusi, vagy akadémiai doktori disszertációk nem nyújthatók be.
6. A pályaműveket a Társaság Titkársága (Budapest V., Kossuth Lajos tér 4., 128–089) veszi át. Beküldési határidő: 1973. március 31.
7. A pályázat jeligés; az esetleg nem jeligésen érkező pályázatokat a Bíráló Bizottság az értékelés során nem veheti figyelembe.
8. A Bíráló Bizottságot a Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának vezetősége jelöli ki.
9. A legkiemelkedőbb pályamunkák díjazására a Társaság a következő díjakat tűzi ki:

1 db I. díj	10 000,– Ft
2 db II. díj	5 000,– Ft

10. A Bíráló Bizottság egyes pályadíjakat visszatarthat, megoszthat, illetve összevonhat.
11. Valamely pályadíj elnyerése nem érinti a szerzői jogokat.

A pályázattal kapcsolatos felvilágosítást a Társaság Titkársága, továbbá a Matematikai-Közgazdasági Szakosztály titkára (Ormós Zsolt, KSH Gazdaságkutató Intézet, Budapest II., Keleti Károly u. 5/7., 159–240) adnak.

Magyar Közgazdasági Társaság
Matematikai-Közgazdasági
Szakosztály

A matematikai oktatás helye és szerepe a közgazdászképzésben[1]

Az elektronikus számítógépek megjelenése több tudományágnak új lendületet adott. Számos gyakorlati probléma, amelyeknek megoldására kézi úton vagy asztali számítógép segítségével gondolni sem lehetett, megoldhatóvá vált. Egymás után jöttek létre új számítási módszerek, hiszen ezek alkalmazást nyerhettek az elektronikus számítógépek segítségével. Ilyen problémák és módszerek bőven találhatók a fizikában, csillagászatban, és — a második világháború óta — egyre erőteljesebben a közgazdaságtudományban is. Ezeknek a gyakorlati problémáknak a megoldási kísérletei azután visszahatottak természetesen magára a matematikára is, új matematikai fejezeteknek vetették meg az alapjait. A matematika számos — ma már klasszikusnak tekintett — területe (differenciál- és integrálegyenletek elmélete, a variációszámítás és magának a klasszikus analízisnek nagy része) fizikai problémákból nőtt ki, nem is beszélve a valószínűségszámításról és a matematikai statisztikáról, amelyeknek gyakorlati jelentősége közismert.

A gyakorlat igénye azonban újabb és újabb feladatok elé állította a szakembereket. Az utolsó 30—40 évben jött létre, illetve van kifejlődésben a játékelmélet, a lineáris és nem lineáris programozás elmélete, a statisztikai döntéselmélet, a rendszerelmélet és több más kutatási terület. Ezek hátterében már nem a fizika, hanem nagy súllyal a közgazdaságtudomány, és a közgazdasági gyakorlat problémaköre áll.

Ma már a közgazdászok számára írt, magas szintű matematikai eszközöket felhasználó, szakkönyv-irodalom egész könyvtárat tölt ki, amihez hozzá kell vennünk az évről évre bővülő matematikai-közgazdasági szakfolyóiratok sorát is. Egyre nehezebb áttekintést nyerni a különböző közgazdasági problémákról írt és komoly matematikai eszközöket felhasználó cikkekről és tanulmányokról.

Ha a közgazdászképzésben korszerű matematikai programokat akarunk összeállítani, akkor a fenti általános képből kell kiindulnunk.

Ami a közgazdaságtudományt illeti, a matematikai eszközök használhatósága és felhasználása tekintetében a következő területek foglalkoztatják legjobban a kutatókat:

a) információszervezési és rendszerszervezési problémakör,

b) a modellalkotási problémakör,

c) a modellek megoldásához vezető matematikai módszertani terület és végül

d) a programtervezési terület, amely lehetővé teszi, hogy az elkészült modellek számítógépre kerüljenek és megoldhatók legyenek.

A felsorolt területek egyike sem olyan, hogy ott valamiféle „recept"-gyűjteménynyel célhoz lehetne jutni. (Ezeknek a „recepteknek" ugyanis se szeri se száma).

Ez azt jelenti, hogy a közgazdászképzésben a fent említett területek mindegyikén mindenekelőtt olyan általános megalapozást kell adni, hogy a közgazdászok képesek legyenek olvasni és megérteni a munkaterületükhöz tartozó szakirodalmat, felismerjék azok alkalmazhatóságát a saját területükön, illetve képesek legyenek olyan változtatásokat önállóan végrehajtani, amelyekkel használhatóvá válik a szóban forgó modell, vagy módszer.

Csaknem valamennyi cikk és tanulmány a következő matematikai tárgyak alapos ismeretét tételezi fel: lineáris algebra, analízis, valószínűségszámítás, differenciálegyenletek. A matematikának ezek a fejezetei tehát nélkülözhetetlenek a korszerű közgazdász alapképzésben. Ezeknek az alapismereteknek az elsajátítása után ke-

[1] E cikkhez, amely a szerző és a szerkesztőség szerint nem merítette ki a témát, várjuk az olvasó hozzászólását.

rülhet sor a lineáris és nem lineáris programozás, a matematikai statisztika, a sztochasztikus módszerek, a sorbanállási problémák, a játékelmélet, a numerikus módszerek stb., azaz az alkalmazáshoz igen közelálló fejezetek ismertetésére. Itt nem térek most ki a szoros értelemben vett számítástechnikai tárgyakra, amelyek oktatása az említett matematikai tárgyakkal nagyrészt párhuzamosan folyhat.

Világos azonban az, hogy nem egyforma súllyal kell minden közgazdász hallgatónak a felsorolt matematikai tárgyakat tanulnia. Ez függ a választott szaktól, a szak matematika igényétől. Jelenleg a közgazdász hallgatókat (a tanárszakosok kivételével) két nagy csoportra osztjuk. Az első csoportba a vállalati szakirányú képzést nyerő ún. mikroszakos hallgatok sorolhatók, míg a másikba a népgazdasági tervező-elemző szakosok, az ún. makroszakos hallgatók. Az előbbiek képezik a hallgatók nagy többségét. Az utóbbiak létszáma az elkövetkező években várhatóan 100 körül fog mozogni. A Marx Károly Közgazdaságtudományi egyetemen kialakított képzési koncepció szerint a népgazdasági tervezőelemző szak (amelyből a harmadik évben leválik egy kislétszámú matematikus-közgazdász szak, a többi képezi a gazdaságpolitikai szakot) alkotja az egyetem matematikaigényes szakát 5 éves képzési idővel. A mikroszakosok 4 éves képzési idejéből az első két évben szerzik meg az előbbieknél lényegesen kisebb matematikai ismereteiket. A második évtől kezdődően (ekkor válnak el a mikro- és makroszakosok) a matematikai tanszék a két szakirány számára erősen eltérő programokkal dolgozik. Minthogy a vállalatok is egyre nagyobb számban igényelnek matematikailag jól képzett közgazdászokat, ezért a jövőben a mikroszakosokból (a második évtől kezdődően) leválik egy kb. 20 fős csoport, amelyik a matematikai és számítástechnikai képzésben a makroszakosok programjai szerint tanul.

A közgazdászképzésben a matematikai oktatásnak kettős szerepet kell betöltenie. Egyrészt meg kell adnia azokat az alapokat, amelyeket bármelyik közgazdasági szak korszerű tananyaga feltételez, másrészt egyes szakok esetében (főleg a makro szakokon) olyan mély matematikai módszertani ismereteket kell nyújtania, amelyek a közgazdasági modelltervezőknek, számítástechnikai programtervezőknek (kb. 5—10 évre előretekintve) nélkülözhetetlenek. Az pedig az Egyetem Továbbképző Intézetének egyik feladata lesz, hogy a végzett közgazdászok általános és speciális szaktudását korszerű szinten tartsa.

Ha tehát a matematikai tanszék legalábbis tananyagában a nemzetközi színvonalon akar maradni, akkor a fent körvonalazott alapon kell állnia.

A matematika helyének megítélése a közgazdászképzésben elsősorban a közgazdászok feladata. E téren még — tudomásom szerint — nem egységes az álláspont. Egyet azonban világosan lehet látni: a nagy teljesítményű számítógépek elterjedésével a közgazdaságtudomány is egy erősen meggyorsult változáson megy át és ebben a matematikai eszközök szerepe napról napra fokozódik.

Szép Jenő

A Számítástechnikai Oktató Központ a számítástechnikai program megvalósításáért

Alig húsz évvel ezelőtt még csak öt, ma viszont már több, mint 125 ezer számítógép dolgozik a világon. Japánban félévenként 1000 számítógépet állítanak üzembe. Hazánkban jelenleg mintegy 150 számítógép dolgozik. Az utolsó évben 30 számítógéppel növekedett az állomány, s 1975-ben — a program szerint — számuk eléri a 400-at.

A Minisztertanács által 1971 novemberében jóváhagyott program a számítástechnika alkalmazását a IV. ötéves terv időszakában 7 milliárd forint beruházással alapozza meg. Az állami költségvetés — az alkalmazás fejlesztéséhez — 1,4 milliárd forint összeget bocsát rendelkezésre és — a vállalatok saját erőforrásain felül — 4 milliárd forint hitelkeret áll rendelkezésre.

A komplex program, amely az 1971—85 közötti időszakra vonatkozik, tartalmazza a hazai számítógépgyártás, alkalmazás és kutatás feltételeit, továbbá a szocialista integrációval és a szakemberek képzésével kapcsolatos feladatokat.

A számítástechnikai program a IV. ötéves terv legjelentősebb központi fejlesztési programjai közé tartozik. A kormányhatározat „zöld utat" nyitott a számítástechnikai eszközök és berendezések hazai gyártásának meggyorsításához és szélesebb körű alkalmazásához.

Számítástechnikai szakemberképzés

A számítástechnikai program megvalósításának egyik legfontosabb feltétele — a számítógépek gyártása és alkalmazásba vétele mellett — a szellemi háttér biztosítása. Mivel a számítástechnikai program fokozott követelményeket támaszt a szakemberképzéssel szemben, az új számítástechnikai szakemberek (rendszerszervezők, folyamatszervezők, operációkutatók, számítógép kezelők, programozók, műszakiak) tömegére van szükség. A szakemberek hiánya egyrészt jelentős mértékben korlátozza a nagy erőforrásokat lekötő számítógépek, berendezések hatékony felhasználását és kihasználását, másrészt a fokozódó kereslet következményeként túlzott mértékű munkaerővándorlást is eredményez. Az állami költségvetésből a számítástechnikai alkalmazás fejlesztésére előirányzott 1,4 milliárd forint összegnek mintegy felét az oktatás fejlesztésére, a szakemberek képzésére kell fordítani.

A számítástechnikai szakemberképzés — hazánkban éppenúgy, mint világszerte — intézményes oktatási rendszerben és tanfolyami rendszerű képzési formában folyik. A szakember szükséglet fedezésére az elmúlt évek folyamán mind az intézményes oktatás, mind a tanfolyami rendszerű képzés területén jelentős erőt fordítottak.

Intézményes és tanfolyami rendszerű számítástechnikai oktatás

A Művelődésügyi Minisztérium sokat tett az intézményes számítástechnikai oktatás beindításáért és kiszélesítéséért, számítógépeket és egyéb eszközöket szerzett be, oktatási bázisokat létesített.

A számítástechnikai program tehát nem hagyta érintetlenül az intézményes (középés felsőfokú) oktatást. A számítástechnikai oktatási koncepciót az intézmények széles köre dolgozta ki. A koncepció kialakításakor figyelembe vették a számítástechnikai oktatás céljait, a szóban forgó intézmények oktatási rendszerét, szakterületét és ennek megfelelően módosították a tanterveket. A koncepció kidolgozását és a tantervek módosítását természetesen szervezeti változások is követték. Számítástechnikai, folyamatszabályozási, automatizálási, kibernetikai tanszékek alakultak, új tantárgyakat (szabályozástechnika, vezérléstechnika, digitalis technika, számítógépek programozása), új tematikákat dolgoztak ki és vezettek be.

Egyre több főiskola és egyetem (pl. a Pénzügyi és Számviteli Főiskola, a Kandó Kálmán Villamosipari Műszaki Főiskola, a Bánki Donát Gépipari Műszaki Főiskola, a Kecskeméti Gépipari és Automatizálási Műszaki Főiskola, a Kazincbarcikai Felsőfokú Vegyipari Gépészeti Technikum, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, a Budapesti Műszaki Egyetem, a Szegedi József Attila Tudományegyetem) kapcsolódik be a számítástechnikai szakemberek képzésébe. A középiskolai számítástechnikai oktatás elsősorban a számítástechnikai kultúra megalapozását szolgálja. A főiskolák számítástechnikai oktatása alapvetően rendszerszervezők és számítógépet üzemeltető, karbantartó üzemmérnökök képzésére irányul. Itt az oktatási programba elsősorban a mérnöki számítások, a közgazdasági és ügyviteli adatok számítógépes megoldását, feldolgozását, továbbá a termelési műveletek paramétereinek számítógépes vezérlését, szabályozását és optimalizálását építették be. Az egyetemi oktatás viszont elméletibb jellegű számítástechnikai képzést nyújt, amely az alapkutatásokra és a fejlesztési kutatásokra irányul.

A tanfolyami rendszerű oktatás elsősorban valamely területen a gyakorlati munka ellátásához szükséges számítástechnikai ismeretekkel látja el a hallgatókat. Számítástechnikai tanfolyami képzést elsősorban a Számítástechnikai Oktató Központ (SZÁMOK), a Pénzügyminisztérium Szervezési Intézete és egyes Számítóközpontok folytatnak.

A SZÁMOK a számítástechnikai program megvalósításáért

A két évtizedes múltra visszatekintő tanfolyami képzés — a számítástechnikai eszközök típusának, mennyiségének és alkalmazási körének megfelelően — jelentős változáson, fejlődésen ment keresztül. A hatvanas évek közepéig — az akkori technikai szintnek és igényeknek megfelelően — lényegében csak lyukkártya rendszerű képzés (szervező, programozó, gépkezelő, műszerész) folyt, amely kiterjedt az országban üzemelő valamennyi géptípusra. (A középgépes szakemberek képzése korábban nem volt része az oktatási programnak. Kezdettől — 1959-től — fogva a Pénzügyminisztérium Szervezési Intézete képezte a középgépes szakembereket.)

A lyukkártyagépes tanfolyamokat — az első években — 250—300 hallgató látogatta. Ez a szám az 1960-as évek elejére már 800—1000-re növekedett. 1968-ig a lyukkártyagépes szakemberképzés szervezetileg a Központi Statisztikai Hivatal keretében működő Országos Ügyvitelgépesítési Felügyelet (OÜF) Oktatási Osztályához tartozott, s ebből az osztályból létesült az Oktató Központ.

Az Oktató Központ kezdetben 15—20 fős apparátussal dolgozott és 250—300 óraadó számítástechnikai szakember segítette munkáját. Az oktatást gyakorlatilag a külső óraadók, elismert hazai szakemberek végezték. Az apparátus — létszámánál fogva — csak a tanfolyamokkal kapcsolatos előkészítési, szervezési és irányítási teendőket, a vizsgáztatással járó feladatokat láthatta el.

A számítástechnikai képzés iránti igény — a számítógépek szélesebb körű elterjedésével — évről évre fokozatosan növekedett. Az ötvenes évek 250—300 fős hallgatói létszámával szemben 1965/66-ban már 1500 fő, 1969—70-ben 2200 fő, 1970/71-ben pedig 7280 fő fejezte be a tanulmányait, az elmúlt oktatási évben pedig 8153 hallgató látogatta a SZÁMOK tanfolyamait.

A tanfolyami rendszerű szakemberképzés fejlesztése végett az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság és a Központi Statisztikai Hivatal oktatási koncepció, módszer és tananyag licencet vásárolt a Control Data Corporation (CDC)-től. A licencvásárlás a számítástechnikai előadók képzését, oktatási segédletek (tananyagok, könyvek és jegyzetek, továbbá filmek stb.) biztosítását szolgálja. A szerződés hét évre szól. A CDC ellátja az előadók folyamatos továbbképzését, az átadott módszerek, anyagok, demonstrációs eszközök világszínvonalon tartását. Az Oktató Központ szervezeti kereteit a megnövekedett feladatokat figyelembe véve 1970-ben kibővítették és 45 főállású előadót vettek fel.

Az előadók több hónapos (4-től 8 hónapig terjedő) képzést kaptak — az oktatási licenc-szerződés alapján — Frankfutban a CDC-nél. A fiatal előadók az 1971/72-es oktatási évben már bekapcsolódtak a számítástechnikai szakemberek képzésébe.

Az Oktató Központ fejlesztése, a főállású előadók alkalmazása és az oktatási licenc vásárlása már érezteti hatását a tanfolyami rendszerű számítástechnikai képzésben és továbbképzésben.

A fiatal előadók — a CDC képzés és anyagok felhasználásával — kidolgozták és továbbfejlesztették a tanfolyamok tematikáit. Az egységes képzést és korszerű módszertani elvek alkalmazását biztosító előadói kézikönyvek összeállítása, oktatási segédeszközök (diák, írásképvetítési anyagok stb.) készítése pedig megkezdődött. E tevékenység eredményeként az oktatási rendszer, az előadások felépítése és tartalma egységesebbé vált. Az előző oktatási években — 250—300 külső előadó alkalmazása mellett — egységes oktatási elvek és módszerek természetszerűleg kevésbé érvényesülhettek. (Megjegyezzük azonban, hogy a tanfolyami oktatás nyilvánvalóan a jövőben sem nélkülözheti a legjobb gyakorlati szakemberek esetenkénti alkalmazását.) Változott a hallgatók vizsgáztatási rendszere is, ezzel a hallgatók felkészültségének reálisabb megítélésére és összehasonlító értékelésére nyílt lehetőség.

A számítástechnikai program és annak végrehajtása természetesen nem korlátozódik Budapestre. A tanfolyami képzés vidéki bázisai fokozatosan kiépülnek. Az Oktató Központ irányítása alatt az elmúlt oktatási évben hat városban (Miskolcon, Debrecenben, Szegeden, Szolnokon, Pécsett és Győrött) alakultak ki a Területi Oktatási Egységek, amelyek a vidéki számítástechnikai tanfolyamok előkészítésével, szervezésével és lebonyolításával kapcsolatos feladatokat látják el. A regionális képzés nem korlátozódik az említett hat városra. Más vidéki városokban (Ózdon, Dunaújvárosban, Székesfehérvárott stb.) szintén folyik számítástechnikai képzés az Oktató Központ szervezése és irányítása alatt. A regionális képzés előretörését és méreteit jól jellemzik az elmúlt év adatai. A 219 tanfolyami csoportból 98 (45%) és a 8153 hallgatóból 3250 (38%) vidéki városban szervezett tanfolyamhoz tartozott.

Jelentős súlyuk van a vállalati megrendelés alapján szervezett tanfolyamoknak. A szerződéses tanfolyamok száma az előző évekhez viszonyítva jelentősen megnövekedett. A vállalati tanfolyamok és hallgatóik az összes tanfolyamok 49, illetőleg 37%-át képviselték. A szerződéses tanfolyamok iránti érdeklődés a számítástechnikai program végrehajtása kapcsán (a számítógépek elterjedésével a népgazdaság különböző ágazataiban) a jövőben — várhatóan — még tovább növekszik. A vezetők, a műszaki-gazdasági szakemberek is egyre határozottabb érdeklődést mutatnak a számítástechnikai ismeretek megszerzése iránt. Néhány évvel ezelőtt még kettő, a múlt évben már 15, ebben az oktatási évben pedig 28 „Számítógép és Vezetés" című tanfolyam szolgálta a vezetők számítástechnikai továbbképzését.

Az 1972-es oktatási év tavaszi továbbképző és speciális tanfolyamai

A számítástechnikai szakemberek képzését az oklevelet nyújtó tanfolyamok szolgálják, melyek alapképzettséget adnak. Habár az alapképzést nyújtó tanfolyamok tematikájukban alkalmazkodnak a változásokhoz, a fejlődéshez, az új módszerek alkalmazásához szükséges ismeretek széleskörű terjesztését a követelményeknek megfelelő gyorsasággal nem szolgáltatják. Ez a felismerés vezeti az Oktató Központot, amikor a továbbképző és speciális tanfolyamok típusainak, számának növelésével, színvonaluk emelésével oktatási programját gazdagítja.

A továbbképző és speciális tanfolyamok iránti érdeklődés a számítástechnikai szakemberek körében egyre fokozódik. Ezt tükrözi, hogy az elmúlt oktatási évben — az előző évhez viszonyítva — 195%-kal emelkedett a különböző továbbképző és speciális tanfolyamok hallgatóinak száma.

Igen népszerűnek és színvonalasnak bizonyultak az elmúlt oktatási évben megrendezett továbbképző és speciális tanfolyamok. A számítástechnikai szakemberek továbbképzését 12 különböző témájú tanfolyam szolgálta.

A tanfolyamokon — a SZÁMOK munkatársai mellett — elismert hazai és neves külföldi szakemberek, világcégek képviselői tartottak előadásokat.

A számítástechnika legújabb eredményeit és módszereit a következőkben felsorolt Továbbképző és speciális tanfolyamok ismertették:

- Az automatizált adatfeldolgozás ellenőrzése,
- Bibliográfiai adatok tárolása és feldolgozása számítógéppel,
- Digitális szimuláció,
- Döntési táblázatok,
- File-szervezés,
- Hálóstervezési módszerek gyakorlati alkalmazása,
- List processing
- Operációkutatási esettanulmányok,
- Operációs rendszerek,
- Számítóközpontok vezetése és szervezése,
- Távadatfeldolgozás,
- Time sharing.

Az Operációs rendszerek című tanfolyamnak, amelyre több világcég (IBM, ICL, CDC, SIEMENS, UNIVAC) elküldte képviselőjét, külföldön is kedvező visszhangja volt. Az automatizált adatfeldolgozás ellenőrzése című tanfolyam újszerű tematikájával lepte meg a szakembereket.

Az 1972. őszi program változatosságával és újszerűségével minden eddigi sorozatot felülmúl. A szakemberek megtalálhatják az érdeklődési körükhöz tartozó tanfolyamokat.

Szeptember 4. és november 24. között a következő 11 továbbképző és speciális tanfolyamot rendezi meg az Oktató Központ:

Számítástechnika az államigazgatásban I. (IX. 4—5.). A tanfolyam — az államigazgatási információs rendszer fejlesztésével összhangban — olyan számítástechnikai és alkalmazási ismereteket nyújt, amelyeket a résztvevők mindennapi munkájuk során hasznosíthatnak.

Számítógép és vezetés (IX. 4—15 és IX 18—29.). A tanfolyam átfogóan ismerteti a korszerű számítástechnika bevezetésének, alkalmazásának feltételeit és módszereit a vezetésben.

Távadatfeldolgozás (IX. 4—8.). A tanfolyam betekintést nyújt a távadatfeldolgozási rendszerekbe hardware és software megközelítésben, továbbá széles körű ismertetést ad a hazai felhasználási lehetőségekről és eredményekről.

Nomogramok alkalmazása a közgazdaságtanban (IX. 6—8.). A tanfolyam átfogó képet nyújt a nomogramokról, azok felhasználási lehetőségeiről és alkalmazási területeiről.

Az automatizált adatfeldolgozás ellenőrzése (IX. 11—22.). A tanfolyam az automatizált adatfeldolgozás ellenőrzési problémáinak és módszertani alapelveinek ismertetésével foglalkozik.

Operációkutatási programcsomagok (IX. 11—16.). A tanfolyam a Magyarországon installált nagyobb számítógépek operációkutatási programcsomagjainak, valamint a nagyobb számítógépgyártó cégek operációkutatási programcsomagjainak ismertetését szolgálja.

Számítástechnika az államigazgatásban II. (IX. 25—29.). A tanfolyam átfogó képet ad a számítástechnikai eszközök és módszerek alkalmazási lehetőségéről különös tekintettel a Számítástechnikai Központi Fejlesztési Program államigazgatási feladataira.

File-szervezés (X. 23—27.). A tanfolyam a különböző típusú file-ok kezelésével és szervezésével foglalkozik. Átfogó képet nyújt az egyes file-szervezési eljárások célszerűségéről és feltételeiről.

Közvetlen mágneses adatrögzítési és optikai leolvasási eljárások (XI. 13—17.). A tanfolyam a hazánkban kevésbé ismert korszerű módszereket mutatja be, és ismerteti a hazai és külföldi gyakorlatot is.

Gazdasági rendszermodellezés (XI. 20—24.). A tanfolyam betekintést nyújt a matematikai modellezésbe, a modellszerkesztésbe és a számítógépes rendszermodellezésbe.

DÉNES FERENC

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Helle Mária
A kézirat nyomdába érkezett: 1972. III. 29. Terjedelem: 7,35 (A/5 ív)
Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

CONCEPTS AND METHODS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

ПОНЯТИЯ И МЕТОДЫ

О КНИГАХ

НАУЧАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,– Ft
Előfizetés egy évre: 40,– Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

FOGALMAK ÉS MÓDSZEREK

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST