SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

DOBÓ ANDOR, a Kohó- és Gépipari Minisztérium Műszaki Tudományos Tájékoztató Intézet műszaki gazdasági tanácsadója, N. P. FEDORENKO, akadémikus, a SZU Tudományos Akadémiája Központi Közgazdaság-matematikai Intézetének igazgatója, HEGEDŰS MIKLÓS, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem adjunktusa, HUNYADI KÁROLY, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem számítóközpontjának tudományos munkatársa, JAN KLACEK, a Csehszlovák Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézete munkatársa, MÓDOS GYULA, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem tanársegédje, PAP ANDRÁS, a Központi Statisztikai Hivatal Ökonometriai Laboratóriuma munkatársa, NYÁRY ZSIGMOND, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója, SIMONOVITS ANDRÁS, a MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos segédmunkatársa, MIROSLAV TOMS, a Csehszlovák Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézete munkatársa, SZÉP JENŐ, a matematikai tudományok doktora, a Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem tanszékvezető egyetemi tanára

*

Szerkesztőség: 1051 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215—96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők a 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111—010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215—11488, és a AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci utca 22. Telefon: 185—612. Előfizetési díj egy évre: 40,— Ft

Hunyadi Károly—Módos Gyula

A hálós programozási módszer egy mezőgazdasági alkalmazása

Tanulmányunk célja — a legkedvezőbb vállalati géppark és géphasználat hálós programmal történő meghatározásának a bemutatása. A hálós tervezés módszereinek gyakorlati alkalmazásában mind a tőkés, mind a szocialista országokhoz képest viszonylag kevés eredményt értünk el. A hazai gyakorlatban elsősorban az építőiparban és az ipar egyes területein számolhatunk be jelentősebb előrehaladásról. A szakirodalom is jórészt ezeket a területeket öleli fel. A mezőgazdasági alkalmazásnál még nagyobb a lemaradás. Eddig csak a kezdeti lépéseket tették meg, kevés gyakorlati eredménnyel.

A géppark és géphasználat tervezésének problémái

A mezőgazdasági termelés műszaki és technológiai fejlődése eredményeképp a gépesítés döntési problémái a vállalati gazdálkodásban igen bonyolultakká váltak. Egymás után alakulnak ki az ágazati géprendszerek, az állattenyésztés néhány ágában az iparszerű tartási módok általánossá válnak. Az ágazati géprendszerek kialakulásával együtt főképp a szántóföldi növénytermesztésben az ágazati géprendszerek egymással is bonyolult kölcsönhatásban állnak. A traktorpark, a szállító kapacitás, sőt számos esetben a betakarítás géprendszere is több ágazatban felhasználható. Ennek megfelelően módosult a vállalati gépparkkal szembeni igény is.

Az olyan géppark kialakítására kell törekedni, amely egyrészt biztosítja az összes munkák — tehát nem az egyes műveletek — minimális költséggel való elvégzését, másrészt lehetővé teszi valamennyi munka biológiailag és agrotechnikailag optimális időben való elvégzését is. Ez a kettős követelmény számos problémát vet fel.

Az *elvégzendő munka* a termelési szerkezet és az alkalmazott technológiáknak a függvénye. Az igen szoros kapcsolat a termelési szerkezet, a géppark és a technológiák együttes optimalizálását követeli meg.

A mezőgazdaságban a munkák *időben való elvégzésének* a fontossága közismert. A probléma inkább az időintervallumok meghatározásánál jelentkezik. Tudományos kísérletek során sikerült számos művelet elvégzésének optimális időszakát nagy pontossággal meghatározni, (pl. vetési időszakok) míg más műveleteknél a gazdaság korábbi tapasztalataira lehet támaszkodni. A gépszükséglet időszakos nagysága ugyanis adott műveletek és technológia mellett jórészt az egyes műveletek elvégzésére alkalmas időszakok hosszának a függvénye.

A *költségek* értelmezése is számos problémát vet fel. Vállalati alkalmazásoknál az állami támogatástól eltekintve a költségek két csoportra oszthatók: a változó és az állandó költségekre. A változó költségek elvileg pontosan meghatározhatók, míg az állandó költségek az amortizáció nagyságán keresztül egy összegben jelennek meg, függetlenül az igénybevétel intenzitásától. Ennek megfelelően *az a géppark, illetve technológia tekinthető optimálisnak, amely az előbbi feltételek mellett összességében a legkisebb költségfelhasználást igényli. Ennek meghatározása azonban bonyolult feladatot jelent.*

A géppark nagyságának és az igénybevétel meghatározásának módszerei

Ha a termelési szerkezet és, ebből adódóan, az elvégzendő munkák adottak, továbbá előzetesen döntésre jutottunk ezen munkafolyamatok elvégzési módjában is, akkor a géppark nagysága hagyományos módszerekkel is meghatározható. Az egyes időszakok igényei és a gépek teljesítménye alapján egyszerű osztással kapjuk a szükséges gépigényt. Ezt a számítást a mezőgazdasági vállalatok néhány időszakra a kampánytervek során el is végzik. Bár a korábbi termelési tapasztalatok alapján a csúcsidőszakok ideje a fontosabb erőforrásokra vonatkozóan megállapítható, de mértékének a megállapításához a munkák elvégzési módjában előzetesen döntésre kell jutnunk. Ugyanakkor közismert, hogy egy műveletet nagyon sok erőforrástípussal végezhetünk. A vállalati tartalékok — a gépesítés vonatkozásában — éppen ebben rejlenek, *minden műveletet úgy végezzünk, hogy az összköltségek minimálisak legyenek*, és ez nem feltétlenül a legkisebb műveleti költséget jelenti. A drágább gépek műveleti költségei általában alacsonyabbak, ugyanakkor magasabbak az amortizációs költségek. Ezek egybevetése hagyományos módszerekkel a sokoldalú összefüggések miatt szinte megoldhatatlan.

A bonyolult kapcsolatrendszer és az előbbiekben felvetett problémák a hagyományostól eltérő módszerek alkalmazását igénylik. A gyakorlati problémák megoldására napjainkig leginkább a lineáris programozás különféle változatait alkalmazták. Az immár klasszikusnak számító lineáris modellek továbbfejlesztéséről szinte napról-napra olvashatunk a különféle szaklapokban. A vállalati géppark és a géphasználat tervezése szintén megoldható lineáris programozással, ami lényegében a termelési szerkezet, a géppark és a technológiák együttes optimalizálását jelenti. [2] Az e tanulmányban kifejtett módszer széleskörű alkalmazásának az igen nagyszámú változó és korlátozó feltétel okozta számítástechnikai és modellszerkesztési problémák miatt napjainkban nincsenek meg a feltételei. A technológia és géppark optimalizálására konstruált modell is 1238 változót és 972 korlátozó feltételt tartalmaz. [1] Ezért azon vállalatokban, amelyekben a termelési szerkezet kialakultnak mondható, elégséges csak a technológia és az erőforrások együttes optimalizálását elvégezni. A magas műszaki színvonalon gazdálkodó mezőgazdasági vállalatok nagyrésze — főképp az állami gazdaságok — a természeti és üzemi adottságok, a sokévi tapasztalat és termelési hagyományok alapján már kialakította legkedvezőbb termelési struktúráját. E gazdaságokban a tartalékok inkább a technológia és az erőforrások optimalizálásában kereshetők. Ez a későbbiekben részletesen ismertetett *hálós modellel is megoldható*. A feladat jellegének megfelelően a fő súlyt a hálós költségtervezési és erőforrásallokáló eljárások vizsgálatára helyeztük. A meglevő számítógépi algoritmusokat is figyelembevéve arra a megállapításra jutottunk, hogy a meglevő algoritmusok közül eredeti formájában egyik sem alkalmazható. Ennek magyarázatát a mezőgazdasági termelés sajátosságaiban kell keresnünk, mert:

a) a munkák végzésére alkalmas időszakok erősen kötöttek,

b) egy-egy munkaműveletet az előírt technológiai és biológiai követelményeknek eleget téve is több erőforrás típussal végezhetünk, amelyek teljesítményei eltérőek.

Ezen sajátosságokból következően a tevékenységekhez sem CPM, sem PERT módszerrel nem tudunk időértékeket rendelni, — ehhez a technológiában előzetes döntésre kellene jutni —, csupán időszakokat lehet megadni, amelyekben a kijelölt munkákat feltétlenül el kell végezni.

Az erőforrások allokálására képes, nemzetközileg is ismert egyik magyar módszer az ERALL eljárás. Az ERALL módszer az erőforrások átcsoportosítási lehetőségeit figyelembevéve a tevékenységek olyan időbeli ütemezését biztosítja — az egyes tevékenységekre előírt különleges kikötések betartásával —, amely mellett az egész feladat megvalósításának ideje minimális lesz. Ilyen értelmű ütemezésre — az operatív tervek kivételével — a mezőgazdaságban csak igen korlátozottan van lehetőség.

A *kérdésfeltevés tehát fordított.* Nem az egyes tevékenységek — műveletek — legkedvezőbb kezdési és befejezési idejét keressük, mert a mezőgazdaságban ez adott, hanem a munkák adott időintervallumban történő elvégzéséhez a számításba jöhető erőforrások közül a legkedvezőbb típus kiválasztása és nagyságának a meghatározása a feladat, eleget téve a korábbiakban elmondott feltételeknek.

A feladat megoldására kialakított módszer matematikai leírása előtt röviden összefoglaljuk a számítások során nyerhető fontosabb eredményeket.

A módszer gyakorlati alkalmazásának feltételei és lehetőségei

A számítások elvégzéséhez, mint a módszer matematikai leírásánál majd kitűnik, viszonylag kevés adat szükséges. Ezen adatok a vállalati gazdálkodás feltételeiből adódóan rendelkezésre állnak, az adatok tartalmi problémáiról a korábbiakban már szóltunk. A módszer alkalmazásával *egy adott termelési szerkezethez* kapcsolódó munkafolyamatoknak és műveleteknek elvégzéséhez időszakonként szükséges gépparkot és géphasználatot határozhatunk meg. A *módszer alkalmazásának feltétele, hogy a termelési szerkezetet már előzetesen el kell dönteni.*

A konkrét számítások során több változatot is készíthetünk. A *változatok első csoportját* azok a számítások képezhetik, ahol a vállalat meglevő gépparkját figyelembe vesszük és azt keressük, hogy az adott gépparkot mely gépekkel kell kiegészíteni, hogy minden munkát időben el tudjunk végezni. Egyúttal választ kaphatunk arra a kérdésre is, hogy a meglevő, illetve vásárolandó gépparkot hogyan osszuk el az egyes tevékenységekre (műveletekre), hogy a költségfelhasználás minimális legyen.

A *változatok második csoportjában* a számítások során eltekinthetünk a meglevő gépparktól. A magas gépárak és a viszonylag alacsony amortizációs kulcsok miatt ezt csak akkor tehetjük, ha a meglevő géppark elhasználódásának megfelelő időhorizontot választunk.

A *számításokkal* így lényegében a géppark alakítására *irányvonalat adhatunk a vállalati vezetés számára.* Új géptípusok megjelenése esetén természetesen ezeket is be kell építeni a modellbe és így esetleg az előző számításoktól eltérő eredményeket kaphatunk. Ezt annál is inkább célszerű elvégezni, mert a számítási költségek nagyon alacsonyak.

Az egyes időszakok gépszükségletét a feladatok elvégzéséhez szükséges kapacitások összegezéséből kapjuk. Az operatív szervezés és főképp a költségfelhasználás szemszögéből nem kevésbé fontos a gépnagyságok mellett az egyes műveletek gépigényének meghatározása. A számítási eredményekből pontosan leolvashatjuk, hogy az egyes *tevékenységek* (munkafeladatok) *időben való elvégzéséhez milyen géptípusok milyen összetételben és nagyságban szükségesek* (géphasználatuk programja).

A módszert egy állami gazdaság legkedvezőbb gépparkjának és optimális géphasználatának a meghatározására a gyakorlatban is kipróbáltuk. Mivel a módszer heurisztikus, hatékonyságának és a használhatóságának a kritériuma csak a gyakorlat lehet. Az állami gazdaságra vonatkozó számítási eredmények lényegében egybeesnek az általános tendenciákkal. Ezek az irányzatok ismertek. [4] A változás pontos mértékét azonban konkrét számításokkal kell meghatározni, ami a vállalati adottságok, az elvégzendő műveletek volumene és a számításba jöhető technológiai variánsok függvénye. A fontosabb géptípusokra vonatkozó számítási eredményeket a melléklet tartalmazza.

A géppark vezérgépét a közép *univerzál traktorok* adják, amelyekből jelentős többletigény jelentkezik. Kihasználtságuk jó, évi átlagban 55–60%-ra tehető. A *könnyű traktorok* száma a meglevő szinthez visonyítva nem változott, de igénybevétele csak két időszakban célszerű, amikor az előbbi típusnak csúcsidőszakai vannak. A vállalat jelenlegi 6 db *lánctalpas traktorja* nem került be a géphasználat programjába. Ez azt jelenti, hogy a számítások mutatta géppark kialakulása után gazdaságosan semmilyen műveletre sem használhatók fel. Helyettük célszerűbb és gazdaságosabb a *középnehéz és a nehéz gumikerekű traktorok* használata. A *szállítópark* összetételét a meglevő helyzet határozza meg. Ha a meglevő gépparktól eltekintünk, akkor csak az IFA tehergépkocsik kerülnek a programba. Az így számított program egyébként a többi típusnál is jelentősen szelektált.

A számítások során *csak az erőgépeket vettük figyelembe.* Feltételeztük, hogy mindig annyi munkagépnek kell rendelkezésre állnia, hogy az erőgépek felhasználását ne akadályozzák. Kétségtelen, hogy ez a valóságos helyzet leegyszerűsítése. A további számításokban legalább a speciális és nagy értékű munkagépeket feltétlenül figyelembe kell venni.

A feladat matematikai megfogalmazása és leírása

A számítógépi algoritmus elkészítése során az ún. költségtervezési algoritmusból indultunk ki, amelyet a megoldandó feladat sajátosságainak megfelelően több lépésben módosítottunk. A legtöbb problémát az amortizációs költségek programba vonása okozta, amitől a feladat jellegéből adódóan semmiképpen sem tekinthettünk el. Az amortizációs költségek számításbavételével, valamint az erőforrásallokáló eljárások számos elemét is felhasználva jutottunk el az alábbiakban leírt erőforráselosztó és költségminimalizáló programhoz, amely alkalmasnak bizonyult a kitűzött feladat megoldására.

A feladat leírása és a számításhoz szükséges adatok jelölése a következő:

Jelöljük a tevékenységek halmazát I-vel, az egyes tevékenységeit i-vel: $I = \{i\}$ A tevékenységek elvégzéséhez számba jöhető erőforrások halmazát jelöljük J-vel: $J = \{j\}$ (A halmaz a meglevő és a vásárolandó erőforrásokat, illetve géptípusokat tartalmazza).

Minden egyes $j \in J$ erőforráshoz két számot rendelünk:

e_j = az egységnyi j erőforrás évi értékcsökkenési leírása

d_j = a j erőforrásból már meglevő mennyiség.

Minden egyes $i \in I$ tevékenységhez hozzárendeljük a következő számokat:

m_i = az elvégzendő munkamennyiség (ha, q, stb.)

$(k_i, b_i]$ intervallum (k_i a tevékenység kezdő időpontja, b_i a befejezési időpontja, és $k_i < b_i$) Előfordulnak csatlakozó intervallumok is. Ez indokolja, hogy az intervallumokat félig nyílt intervallumokként kezeljük.

J_i jelölje az i tevékenységhez rendelt erőforrások halmazát ($J_i \subset J$)

$c_{i,j}$ (minden $j \in J_i$ erőforrásra) az i tevékenységhez rendelt j erőforrás felső korlátja

$h_{i,j}$ (minden $j \in J_i$ erőforrásra) az i tevékenységhez rendelt j erőforrás felhasználásának időtartama (azt mutatja, hogy a szóbanforgó erőforrás egy egysége, egy gép, hány órát dolgozhat a $(k_i, b_i]$ intervallumban)

$q_{i,j}$ (minden $j \in J_i$ erőforrásra) az i tevékenységhez rendelt j erőforrás teljesítményének reciproka (azt jelenti, hogy a j erőforrás egy egységével egységnyi munkamennyiséget mennyi idő alatt lehet elvégezni)

$f_{i,j}$ (minden $j \in J_i$ erőforrásra) az i tevékenységhez rendelt j erőforrás felhasználásának változó költsége (azt jelenti, hogy mennyibe kerül a j erőforrással egy egységnyi munkamennyiséget elvégezni).

A feladat az, hogy minden $i \in I$ tevékenységhez meghatározzuk az $x_{i,j}$ ($j \in J_i$) gépszámokat úgy, hogy az m_i munkamennyiséget el lehessen végezni és az összes költség minimális legyen, azaz:

1. feltétel

$$m_i \leq \sum_{j \in J_i} x_{i,j} \cdot \frac{h_{i,j}}{q_{i,j}}$$

2. feltétel

$$0 \leq x_{i,j} \leq c_{i,j} \text{ minden } j \in J_i\text{-re,}$$

Kikötjük, hogy az $x_{i,j}$ csak egész szám lehet.

A minimalizálandó összköltség:

$$K = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J_i} x_{i,j} \cdot \frac{h_{i,j}}{q_{i,j}} \cdot f_{i,j} \right) + \sum_{j \in J} y_j \cdot e_j \,.$$

Az összefüggésben szereplő ismeretlen y_j-t a következőképpen határozhatjuk meg:

Jelölje t_1 és t_2 a terv kezdő- és befejezőidőpontját

$$t_1 = \min_{i \in I} k_i \,, \qquad t_2 = \max_{i \in I} b_i \,.$$

Jelölje I_t azoknak a tevékenységeknek a halmazát, amelyeken a t időpontban „dolgoznak”:

$$I_t = \{ i \mid i \in I \text{ és } k_i < t \leq b_i \}.$$

Az I_t segítségével felírható a j erőforrás $T_j(t)$ terhelési diagramja:[1]

$$T(t)=\sum_{i\in I_t} x_{i,j}, \quad t_1 < t \leq t_2.$$

A j erőforrásból szükséges maximális gépszámot jelöljük y'_j-vel:

$$y'_j = \max\{T_j(t) \mid t\in[t_1, t_2]\}.$$

A keresett y_j-t a következő összefüggés adja:

$$y_j = \max\{0, y'_j - d_j\}.$$

Tehát y_j értéke 0, ha $y'_j \leq d_j$ azaz a munkafeladat elvégzéséhez nem kell új j-típusú gépet beszerezni; ha $y'_j > d_j$ akkor csak az új gépek értékcsökkenési leírását vesszük figyelembe. Ugyanis a már meglevő d_j számú gép amortizációs költsége az igénybevételtől függetlenül felmerül.

Az algoritmus leírása

Az ismeretlen $x_{i,j}$-ket heurisztikus eljárással lépésről lépésre határozzuk meg. Az algoritmus lényegében abból áll, hogy egymásután sorra vesszük a tevékenységeket, és az adott szituációnak megfelelően a felhasználható erőforrások közül mindig azt rendeljük hozzá, amelyik a legkisebb költség-növekedést eredményezi.

Tegyük fel, hogy az i jelű tevékenységnél kétféle erőforrás (j és v; $j,v \in J_i$) közül kell egyet kiválasztanunk. Ha a j típusból egy gépet rendelünk a tevékenységhez a terv költsége $\Delta K_{i,j}$ értékkel növekedik:

$$\Delta K_{i,j} = \frac{h_{i,j}}{q_{i,j}} \cdot f_{i,j} + \lambda_j \cdot e_j \cdot \Delta y_j .$$

Ezt a költség-növekedést két részre osztottuk: az egy gép által elvégzett munkamennyiség közvetlen költsége (műveleti költség) és a gép értékcsökkenési leírásának a tevékenységre eső része. A költség első része egyszerűen számolható, hiszen minden adat ismert. A második tagban a λ_j és y_j az ismeretlen. A y_j egyszerűen megadható. Ugyanis egy tevékenység ütemezésekor két eset lehetséges:

a) Abban az intervallumban, ahol a szóbanforgó i tevékenységet el kell végezni, rendelkezésre áll egy j típusú gép. Ekkor $\Delta y_j = 0$, nincs szükség új gép beszerzésére.

b) Ahhoz, hogy a tevékenységet a j erőforrással el lehessen végezni, egy új gépet kell beállítani, mert a tervhez már eddig hozzárendelt j típusú gépek mind dolgoznak a szóbanforgó intervallumban. Így $\Delta y_j = 1$ ebben az esetben.

Nyilvánvaló, hogy a b) esetben az új gép értékcsökkenési leírása növeli a költségeket: Viszont ez az értékcsökkenési leírás nem terhelhető egyedül csak

[1] Ebből látható, hogy miért volt szükség a félig nyílt intervallumok használatára. Ugyanis előfordulhat, hogy két különböző tevékenységhez tartozó intervallum csatlakozik, azaz $b_i = k_l$, ahol i és l két különböző tevékenység. Tegyük fel, hogy $x_{i,j} > 0$ és $x_{l,j} > 0$, akkor a $t = b_l$ időpontban az $x_{i,j}$ és $x_{l,j}$ összegeződne, ami nyilvánvalóan nem engedhető meg.

erre a tevékenységre, mivel előfordulhat ,hogy a most bevont új géppel a terv más intervallumaiban folyó tevékenységek is végezhetők. Ezt a tényt veszi figyelembe a λ_j tényező ($0 < \lambda_j \leq 1$).

A $\Delta K_{i,j}$ költséget át kell még számítani egységnyi munkamennyiségre, hogy a különböző erőforrástípusokhoz tartozó többletköltségeket össze lehessen hasonlítani:

$$\Delta k_{i,j} = \Delta K_{i,j} \cdot \frac{q_{i,j}}{h_{i,j}} = f_{i,j} + \lambda_j \cdot e_j \cdot \Delta y_j \cdot \frac{q_{i,j}}{h_{i,j}}.$$

Hasonló módon kiszámítjuk a v erőforráshoz tartozó $\Delta k_{i,v}$ egységköltséget, és ha pl. $\Delta k_{i,j} < \Delta k_{i,v}$, akkor $x_{i,j}$ értékét növeljük egy egységgel, az $x_{i,v}$ pedig változatlan marad.

Tegyük fel, hogy valamilyen módon meg tudjuk határozni a λ_j értékét (erről később még szó lesz), tehát a $\Delta k_{i,j}$ kiszámítható. Ekkor a számítási eljárás vázlata a következő:

1. Kiválasztunk egy olyan i tevékenységet, amelyik nincsen ütemezve (tehát az eljárás még nem kezdte ütemezni vagy csak részben ütemezte).
2 Mindegyik olyan $j \in J_i$ erőforrás típushoz, ahol $c_{i,j} > x_{i,j}$, kiszámítjuk a $\Delta k_{i,j}$ értékét.
3. Kiválasztjuk a minimális $\Delta k_{i,j}$-hez tartozó j-t, ezt jelöljük j^*-vel.
4. Az x_{i,j^*}-t egy egységgel megnöveljük.
5. Ha van még olyan tevékenység, amelyik nincsen ütemezve, az 1. pontnál folytatódik az eljárás, egyébként vége a számításnak.

A λ_j tényezőt a következő módon számítjuk ki:

A tevékenységek I halmazát három diszjunkt részhalmazra osztjuk:

$$I = I^1 \cup I^2 \cup I^3, \text{ ahol}$$

$$I^1 = \{i \in I \mid x_{i,j} = 0 \text{ minden } j \in J_i\text{-re}\},$$

(ezeket a tevékenységeket még nem kezdte ütemezni az eljárás).

$$I^2 = \left\{i \in I \mid 0 < \sum_{j \in J_i} x_{i,j} \cdot \frac{h_{i,j}}{q_{i,j}} < m_i\right\},$$

(az I^2-ben vannak tehát azok a tevékenységek, amelyeket már elkezdett ütemezni az eljárás — van olyan $x_{i,j}$, hogy $x_{i,j} \neq 0$ valamelyik $j \in J_i$-re — de még nincs teljesen ütemezve a tevékenység).

$$I^3 = I - (I^1 \cup I^2),$$

(az I^3-ba az ütemezett tevékenységek tartoznak — azaz amelyekhez tartozó $x_{i,j}$-k kielégítik az 1. feltételt).

Legyen $t \in [t_1, t_2]$. A t minden rögzített értékéhez tartozik egy I_t^1 és I_t^2 tevékenységhalmaz:

$$I_t^1 = \{i \in I^1 \cup I^2 \mid k_i < t \leq b_i\},$$

(azaz a még nem ütemezett tevékenységek közül azok tartoznak az I_t^1 halmazba, amelyeken a t időpontban „dolgoznak"), és hasonlóan

$$I = \{i \in I^2 \cup \mid k_i < t \leq b_i\}$$

A fenti két halmaz segítségével felírható két függvény (a j erőforrás kétféle terhelési diagramja).

$$T_j^1(t) = \sum_{i \in I_t^1} x'_{i,j}, \text{ ahol } t \in [t_1, t_2]$$

$$x'_{i,j} = \left[m_i - \sum_{n \in J_i} \left(x_{i,n} \cdot \frac{h_{i,n}}{q_{i,n}} \right) \cdot \frac{q_{i,j}}{h_{i,j}} \right]$$

ahol $[x]$ az x-nél nem kisebb, hozzá legközelebb álló egész számot jelöli, és

$$T_j^2(t) = \sum_{i \in I_t^2} x_{i,j}.$$

A $T_j^2(t)$ a részben vagy egészen ütemezett tevékenységek szokásos terhelési diagramja, amely megmutatja, hogy egy adott t időpontban hány darab j típusú gépre van szükség, ha a szóbanforgó tevékenységeket el akarjuk végezni.

A $T_j^1(t)$ a még nem ütemezett „munkák"-ra elkészített terhelési diagram. Kiválasztjuk azokat a tevékenységeket, amelyeket még nem ütemeztünk teljesen, majd ezek közül azokat, amelyek a j erőforrással végezhetők. Minden ilyen tevékenységhez hozzárendelünk annyi j típusú gépet ($x'_{i,j}$) amennyi szükséges a hátralevő munkamennyiség elvégzéséhez.

Legyen

$$y_j^* = \max\{T_j^2(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$$

és

$$U_j = \{(t^1, t^2] \mid \text{minden } t \in (t^1, t^2]\text{-re } y_j^* < T_j^1(t) + T_j^2(t), \ (t^1, t^2] \subset [t_1, t_2]\}.$$

U_j azoknak a $[t_1, t_2]$-ből való intervallumoknak a halmaza, ahol a $T_j^2(t)$ függvény maximális értéke, y_j^*, kisebb mint $T_j^1(t) + T_j^2(t)$.

Így kapunk egy $\Sigma\Delta t_j$-vel jelölt számot

$$\Sigma\Delta t_j = \sum_{(t^1, t^2] \in U_j} (t^2 - t^1).$$

Tulajdonképpen $\Sigma\Delta t_j$ azt az időtartamot jelenti, amely megmutatja, hogy optimális esetben a most bevont új j típusú gépet mennyi ideig tudnánk a terv végrehajtásához felhasználni. Ha a szóbanforgó i tevékenységnél $\Delta t_i = b_i - k_i$, akkor a képletben szereplő λ_j tényező értéke:

$$\lambda_j = \frac{\Delta t_i}{\Sigma\Delta t_j}.$$

A $\Delta k_{i,j}$-t szolgáltató összefüggésben a Δy_j értékét az előbbiekben bevezetett $T_j^2(t)$ függvény segítségével is felírhatjuk:

$$\Delta y_j = \begin{cases} 0, \text{ ha } \max\{T_j^2(t) \mid t \in (k_i, b_i]\} < \max\{y_j^*, d_j\} \\ 1, \text{ minden más esetben.} \end{cases}$$

A meglevő géppark figyelembevételével végzett számítás eredményeit az alábbi táblázat tartalmazza:

A géptípusok kódszáma	A géptípusok megnevezése	A hálós program eredménye (db)	A gazdaság jelenlegi gépparkja (db)
1	Könnyű traktorok	8	8
2	Közép univerzál traktorok	34	24
3	Középnehéz univerzál traktorok	7	2
4	Lánctalpas traktorok	—	6
5	Nehéz gumikerekű traktorok	3	1
6	Csepel tehergépkocsi	5	5
7	ZIL platós tehergépk.	4	4
8	Billenőplatós tehergépk.	4	3
9	IFA pótkocsi nélküli tehergépkocsi	1	0
10	IFA pótkocsival együtt	4	1
11	SzK–4-es kombájn	4	4
12	E–512-es kombájn	4	3

(Beérkezett: 1973. aug. 6.)

IRODALOM

1. Acsay–Csáki–Varga: A vállalati gépszükséglet és gépfelhasználás komplex matematikai tervezése a mezőgazdaságban. Gazdálkodás. 1973. 4. sz.
2. Dr. Csáki Cs.: Az erőforrások kezelésének problémái a mezőgazdasági vállalati tervek lineáris programozási modelljeiben. Szigma. 1971. 1–2. sz.
3. Danyi D.–Fügedi T.: Hálótervezési módszerek (PERT, CPM) Budapest, 1965. Országos Ügyvitelgépesítési Felügyelet és a KSH Könyvtár Kiadványa.
4. Dimény I.: A gépesítés ökonomiája a mezőgazdaságban. Budapest, 1971. Akadémiai Kiadó
5. Hálótervezési módszerek I–II. Budapest, 1968. Országos Ügyvitelgépesítési Felügyelet.
6. Kaufmann–Desbazeille: A kritikus út módszerének matematikai alapjai. Budapest, 1972. Műszaki Könyvkiadó.
7. Kovács A.: A hálótervezési módszerek alapjai. Gazdálkodás. 1969. 10. sz.
8. Kovács A.–Nagy J.–Timon B.: Hálódiagram eljárás alkalmazása a mezőgazdasági üzemszervezésben. Gazdálkodás. 1967. 7. sz.
9. Kubas, P. és munkatársai: Matematikai módszerek a mezőgazdasági vállalatok tervezésében és vezetésében. Budapest, 1971. Mezőgazdasági Kiadó.
10. Kuzmiák M.: A hálótervezés az állami gazdaságokban. Agrárgazdasági Kutató Intézet Füzetei. 1971. 2. sz.
11. Papp O.: A hálós programozási módszerek gyakorlati alkalmazása. Budapest, 1969. Közgazdasági és Jogi Kiadó.
12. Archibald, R. D.–Villoria, R. L.: Hálós irányítási rendszerek. Budapest, 1971. Közgazdasági és Jogi Kiadó.
13. Schreiter, D.–Stempell, D.: A kritikus út módszere (CPM és PERT módszer) Budapest, 1966. Műszaki Könyvkiadó.

AN AGRICULTURAL APPLICATION OF THE NETWORK PLANNING METHOD

The object of the study is to develop a method of network designing and algorithm which — considering the characteristics of cultivation — are apt to define the most favourable equipment park and utilization of machines of a firm. Within the frame of an enterprise that very equipment park and technology can be regarded as the optimal ones which, on the one hand, ensure the carrying out works at minimal cost, on the other hand, make it possible to accomplish all the works in a biologically and agrotechnically optimal period. In order to define them the adoption of methods, different from the traditional ones, is needed. According to the authors' opinion, in their original form none of the existing Hungarian computer algorithms of network designing are applicable for the solving of the above task. One can find the explanation of this in the peculiarities of cultivation. Namely, the problem is just the other way round. One does not look for the most favourable starting and ending moments of certain activities (works) since in agriculture they are given. The main task is to choose the most favourable type and to define the volume of those resources which can be taken into consideration to the carrying out of works within a given time-span, while satisfying the above-mentioned requirements.

In the course of the preparation of the computer algorithm the authors started from the so-called algorithm of cost-planning and then modified it in a few steps. To involve the amortization costs into the program was the most problematic but because of the nature of the task it was impossible to disregard them.

The present method can be classified as a heuristic procedure, so practice alone can be the criterium of the efficiency and applicability of the adoption. The authors have tested this method in practice too for the determining of the most favourable equipment park and optimal utilization of machines of a state farm. It can exactly be read from the results what sort of types of machines are necessary in what sort of a combination and volume for the perfection in time of certain activities (works). At thesame time their summing up shows the volume of needs in machines of given periods. Relatively few data are necessary to the completion of the computations. These data are available, deriving from the conditions of enterprise management and the expenses of calculation can be regarded low.

ОДНО ИЗ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ ВНЕДРЕНИЙ СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАННОГО МЕТОДА

Целью этого труда является создание такого метода и алгоритма сетевого планирования, которые, учитывая свойства сельскохозяйственного производства, способны к определению самого выгодного машинного парка и употребления машин предприятия. В рамках предприятия могут считаться оптимальными тот машинный парк и технология, которые с одной стороны обеспечивают выполнение каждой работы с наименьшими затратами, а с другой стороны способствуют и выполнению каждой работы в биологически и агротехнически оптимальное время. Определение этого требует применения методов, отклоняющихся от традиционных. По мнению авторов ни один из существующих венгерских алгоритмов сетевого планирования на ЭВМ не применяемый в своей оригинальной форме к решению вышеуказанной задачи. Обьяснение этого нужно искать в свойствах сельскохозяйственного производства, так как постановка вопроса обратная. Мы ищем не самого выгодного момента начала и конца некоторых деятельностей — операций — так как они даны в сельском хозяйстве. Вместо этого задачами являются выбор наиболее выгодного типа тех ресурсов, которые могут засчитываться к выполнению работ в данном периоде и определение величины этого типа, удовлетворяя вышеупомянутые требования.

Во время приготовления алгоритма на ЭВМ авторы исходили из так называемого алгоритма планирования затрат и преобразовали его в нескольких шагах. Наибольшие проблемы появились при вовлечении в программу амортизационных затрат, на которые нельзя было не обращать внимания из-за характера задачи.

Представленный метод может быть причислен к геуристичным методам, поэтому только практика может быть критерием эффективности и применимости внедрения. Авторы испробовали метод и в практике для определения наиболее выгодного машинного парка и оптимального употребления машин одного совхоза. Результаты расчетов точно показывают, какие типы машин, сколько из них и в каком составе нужны для того, чтобы было возможно выполнять отдельные деятельности (задачи) во время. Итог этих результатов одновременно показывает нужды в машинах в отдельных периодах. К расчетам нужно относительно мало данных, они имеются в резальтате работы хозяйства, расходы расчетов тоже небольшие.

Szép Jenő–Hegedüs Miklós

Egyensúlyi rendszerek I.

A Közgazdaságtudományi Egyetem Matematikai Tanszéke feladatul tűzte ki olyan általános egyensúlyi elmélet kidolgozását, amelyik alkalmas lehet gazdasági rendszerek egyensúlyi problémáival kapcsolatos elméleti vizsgálatokra, továbbá gyakorlati – módszertani oldalról nézve számítástechnikailag használható és kezelhető még valódi alkalmazási méretekben is. Mint ismeretes a játékelméletben szereplő egyensúlypontok meghatározása sokszemélyes játékok esetében rendkívüli nehézséget jelent mindenekelőtt azért, mert a gyakorlatilag szóbajöhető méretekben nem áll rendelkezésre hatásos fixpontkeresési módszer. Ugyanakkor a játékelmélet jelenlegi formájában – csekély kivételtől eltekintve – nem alkalmas valóságos gazdasági „játékszituációk" modellezésére. Szükség van tehát olyan általánosabb alapok megteremtésére, amelyek lehetőséget adnak a valósághoz közelálló modellek vizsgálatára. Az alábbiakban főbb eredményeinkről számolunk be.

A következőkben rendszeren egy organikus rendszert értünk, amelynek jellemzői közül – kvalitatív megfogalmazásban – a következőket emeljük ki:

Sztatikus jellemzők:

1. Véges sok jól megkülönböztethető részből (szervből) áll.
2. Mindegyik szerv állapota függ a többitől.
3. Mindegyik szerv jól meghatározott állapotokban létezhet csak.
4. Léteznek a szerveknek és így a rendszernek kritériumai, amelyek alapján dönteni tud állapotváltoztatásáról.

Dinamikus jellemzők:

1. Mindegyik szerv – és így a rendszer – állapotalakulása időben megy végbe.
2. A szervek lehetséges állapotainak halmaza időben változik.
3. A szervek száma változhat az időben.

Kétféle rendszert célszerű megkülönböztetni

a. Autonóm rendszert, ahol a szervek állapotai kizárólag a többi szerv állapotától függnek.

b. Nem autonóm rendszert, ahol a szervek állapotai a rendszeren kívüli tényezőktől is függnek.

A következőkben organikus rendszeren mindenekelőtt gazdasági rendszert értünk, bár ennek az előzőkben leírt általános jellemzőin túli tulajdonságait – legalábbis egyelőre – figyelmen kívül hagyjuk.

Megfogalmazzuk a rendszer matematikai modelljét, majd vizsgálat alá veszszük e modellt. Maga a vizsgálat meglehetősen bonyolult és összetett matematikai eszközöket kíván. Éppen ezért a kiindulásnál még figyelmen kívül hagyjuk az időtényezőt, ami számos nehézség forrása. A vizsgálatok alapjául a [7] dolgozat szolgál.

A modell leírása során több helyen külön térünk ki a közgazdasági interpretációra.

1. Alapfogalmak

1.1 *Az n személyes játék fogalmának általánosítása*

Legyen adott meghatározott szerveknek egy

$$S = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

rendszere.

Rendeljük rendre a

$$\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$$

halmazokat a felsorolt szervekhez. A $\Sigma_i(\subseteq X_i)$ halmazt, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ az i-ik szerv *állapothalmaz*-ának nevezzük, továbbá feltételezzük, hogy az X_i megszámlálható bázisú metrikus tér. Legyen

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n.$$

A $\Sigma\ (\subseteq X_1 \times \ldots \times X_n)$ halmazt az *S rendszer állapothalmazának* nevezzük.

Legyen adott továbbá egy

$$L \subseteq \Sigma$$

halmaz. Az L halmazt, az *S rendszer megengedhető állapothalmazának* nevezzük, az elemeit pedig a rendszer *megengedhető állapotai*nak.

Rendeljük hozzá továbbá a felsorolt szervekhez rendre az

$$F_1, F_2, \ldots, F_n$$

ún. *preferencia függvényeket*, ahol az F_i függvény a Σ halmazt képezi le egy Y halmazba $(i = 1, 2, \ldots, n)$, amelyről feltesszük, hogy definiálva van benne egy jólrendezés. (Legtöbbször, de nem szükségképpen Y-nak a valós számok halmaza vehető, ha külön mást nem mondunk, akkor Y mindig a valós számok halmazát jelöli.) Legyen adott egy F függvény, amely az X^n-et egy Y-ba képezi le.

$$F(F_1, F_2, \ldots, F_n)\ (\Sigma \to Y)$$

függvényt az *S rendszer preferencia függvényének nevezzük.*

Hasonlóan rendeljük hozzá a szervekhez rendre a

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$$

pont-halmaz leképezéseket, ahol minden $\mathbf{x} \in \Sigma$-ra $\Phi_i(x)$ *a* Σ_i *nem üres részhalmaza* $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

A Φ_i függvényt az S_i szerv *környezetfüggvényének nevezzük.*

A környezetfüggvényektől megköveteljük még az alábbi feltételek teljesítését is:

A) $x_i \in \Phi_i(\mathbf{x})$; $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in L$; $i = 1, 2, \ldots, n$

B) *Ha* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in L$ és

$\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) \in \Sigma$, akkor

az $x_i' \in \Phi_i\ (\mathbf{x})$-ből az $\mathbf{x}' \in L$ következik $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Legyen továbbá

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_1(\mathbf{x}) \times \ldots \times \Phi_n(\mathbf{x}), \ (\mathbf{x} \in \Sigma).$$

A $\Phi(\mathbf{x})$ függvényt az S *rendszer környezetfüggvényének* nevezzük.

Világos, hogy minden $\mathbf{x} \in L$-re

$$\mathbf{x} \in \Phi(\mathbf{x}),$$

továbbá a fentiekhez hasonlóan, ha $\mathbf{x} \in L$ és $\mathbf{x}' \in \Sigma$ csak az i-ik komponensben különböznek, akkor az $\mathbf{x}' \in \Phi(\mathbf{x})$-ből az $\mathbf{x}' \in L$ következik.

Rendeljük hozzá továbbá még rendre a felsorolt szervekhez a

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

ún. *költségfüggvényeket*, ahol a C_i függvény nemnegatív és a $\Sigma \times \Sigma$ halmazt képezi le Y-ba, és feltesszük, hogy minden $\mathbf{x} \in \Sigma$-ra $C_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Legyen C az X^n halmazt az Y-ba leképező függvény. A

$$C(C_1, \ldots, C_n), (\Sigma \times \Sigma \to Y)$$

függvényt az S rendszer *költségfüggvényének* nevezzük.

Végül a felsorolt szervek mindegyikéhez hozzárendeljük még a

$$K_1, K_2, \ldots, K_n$$

korrekciós függvényeket, ahol K_i a $\Sigma \times \Sigma$ halmazt képezi le Y-ba és $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Végül legyen K egy az X^n-et az Y-ba leképező függvény. A

$$K(K_1, \ldots, K_n), (\Sigma \to Y)$$

függvényt az S *rendszer korrekciós függvényének* nevezzük.

Ezek után az S rendszert adottnak tekintjük, ha az

1. $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$	állapothalmazok
2. $F_1, \ldots, F_n$	preferencia függvények
3. $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$	környezetfüggvények
4. $C_1, \ldots, C_n$	költségfüggvények
5. $K_1, \ldots, K_n$	korrekciós függvények
6. L	megengedett állapotok halmaza
7. F	preferencia függvény
8. C	költségfüggvény
9. K	korrekciós függvény

adott.

Az S rendszert a továbbiakban az

$$S = \{\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n; F_1, \ldots, F_n; \Phi_1, \ldots, \Phi_n; C_1, \ldots, C_n; K_1, \ldots, K_n; L, F, C, K\}$$

szimbólummal jelöljük.

Az S rendszer tekinthető egy n személyes játék általánosításának is, ugyanis ha

$$\begin{array}{lll} \Phi_i = \Sigma_i & & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ C_i = 0 & & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ K_i = 0 & & (i = 1, 2, \ldots, n) \\ L = \Sigma & & \\ F = 0 & & \\ C = 0 & & \\ K = 0 & & \end{array}$$

akkor S egy n személyes játékra redukálható. Megjegyezzük, hogy több szerző foglalkozott már a játék olyan általánosításával, ahol $L \subset \Sigma$. ([2], [3]). Nem utalunk most a játékok egyéb általánosítási kísérleteire. Ha az szükségessé válik, akkor mindig az aktuális helyen fogunk hivatkozni.

Egy közgazdasági interpretáció. Valamely S gazdasági rendszer állhat pl. termelő S_i vállalatainak összességéből. Feltesszük, hogy bármelyik vállalat bármely időpontban jellemezhető egy állapotvektorral, amelynek komponensei pl. létszám, állóalap, forgóalap, termelési érték, nyereség stb. Mindegyik vállalatnak — nem túl hosszú időhorizontot tekintve — létezik egy elvileg lehetséges állapothalmaza: Σ_i. Ezekből az elvileg lehetséges állapotokból egy adott időpontban csak olyanok valósulhatnak meg, amelyeket a többi vállalatnak a kérdéses időpontban meglevő állapotai megengednek. Így jutunk a megengedhető L állapotok halmazához. Az F_i preferencia függvények segítségével a vállalatok saját állapotaikat értékelik, természetesen a többivel való kapcsolataiban, ezért F_i nemcsak $x_i \in \Sigma_i$-től ,hanem $\mathbf{x} \in \Sigma$-tól függ. A vállalatnak a többitől való függése általában nem determinisztikus, így bármikor van lehetőségük saját állapotuk módosítására, de természetesen nem korlátlanul. Ezt a korlátozott mozgási lehetőséget fejezi ki Φ_i, azaz S_i adott $\mathbf{x} \in L$-nél $\Phi(\mathbf{x})$-ben változhat, miközben reálisan a rendszer $\mathbf{x}$ aktuális állapotát veheti csak figyelembe. A C_i költségfüggvényeknek az a szerepük, hogy egy adott állapotból egy másikba jutás (fejlesztés) ráfordítással jár. A K_i korrekciós függvények lehetőséget adnak arra, hogy bármelyik vállalat az általános F_i preferencia függvényén és C_i költségfüggvényén túlmenően az S rendszer pillanatnyi állapotától és az elérni kívánt állapottól függően egyéb szempontokat is érvényesíthessen állapotváltoztatási döntéseinél.

1.2 *A lánc és a bejárhatósági tartomány fogalma*

Mielőtt a játékelméletből ismert egyensúlypont, valamint az egyensúlyhalmaz fogalmát értelmeznénk, bevezetünk néhány definíciót. Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$. Amennyiben $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ csak egyetlen komponensben különbözik egymástól (tegyük fel, hogy az i-ikben, $1 \leq i \leq n$), akkor az $\mathbf{x}$-et és az $\mathbf{y}$-t *összehasonlíthatónak* nevezzük és

$$\mathbf{x} \overset{i}{\sim} \mathbf{y}$$

szimbólummal jelöljük. Világos, hogy ez az összehasonlíthatóság nem ekvivalenciareláció.

Ha $\mathbf{x} \overset{i}{\sim} \mathbf{y}$ és $y_i \in \Phi_i(\mathbf{x})$, vagy ami ugyanaz $\mathbf{y} \in \Phi(\mathbf{x})$, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ az $\mathbf{x}$-ből *közvetlenül elérhető*, és ezt a tényt az

$$\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}$$

szimbólummal jelöljük. Minden $\mathbf{x}$-re $\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{x}$, de általában az $\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}$-ból az $\mathbf{y} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{x}$ nem következik, továbbá a reláció általában nem tranzitív.

Továbbá, ha $\mathbf{x} \in L$ és $\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}$, akkor a környezetfüggvények definíciója szerint $\mathbf{y} \in L$ következtik.

Legyen adott a Σ elemeinek egy

$$\mathfrak{L}: \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$$

véges vagy végtelen sorozata.

Az $\{\mathbf{x}_n\}$ sorozatot *lánc*-nak nevezzük, ha a sorozat bármely tagja az előtte levőből közvetlenül elérhető, azaz van olyan $\{i_m\}$ sorozat $(1 \leq i_m \leq n)$, hogy

$$\mathbf{x}_m \overset{i_m}{\rightarrow} \mathbf{x}_{m+1} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Ha egy $\mathbf{y}$ tagja egy $\mathbf{x}$-ből kiinduló $\mathfrak{L}$ láncnak, akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ az $\mathbf{x}$-ből *lánccal elérhető,* és ezt az

$$\mathbf{x} \overset{\mathfrak{L}}{\rightarrow} \mathbf{y}$$

szimbólummal jelöljük.

Világos, hogy a bevezetett reláció általában nem megfordítható, de tranzitív, továbbá ha $\mathbf{x} \in L$, akkor minden, az $\mathbf{x}$-ből lánccal elérhető elem ugyancsak az L-be tartozik.

Legyen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ és $\mathbf{x} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}$. Ha

$$F_i(\mathbf{x}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq F_i(\mathbf{y}) - C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

akkor azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ *az* $\mathbf{x}$*-nek i-ben egy javítása,* ha pedig

$$F_i(\mathbf{x}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < F_i(\mathbf{y}) - C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{y}$ *az* $\mathbf{x}$*-nek egy szigorú javítása i-ben*, és ezeket a továbbiakban az

$$\mathbf{x} \overset{i}{\leq} \mathbf{y}$$

és az

$$\mathbf{x} \overset{i}{<} \mathbf{y}$$

módon jelöljük.

Világos, hogy a bevezetett relációk általában nem tranzitívek.

Legyen $\{\mathbf{x}_m\}$ a Σ elemeinek egy lánca. Ha a sorozat bármely tagja az előtte levőnek javítása, akkor az $\{\mathbf{x}_n\}$ láncot *monoton*-nak, ha szigorú javítása, akkor *szigorúan monotonnak* nevezzük.

Egy $\mathbf{x} \in \Sigma$ pontra jelölje $\tau_{\leq}(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x}$-ből monoton lánccal, $\tau_{<}(\mathbf{x})$ pedig az $\mathbf{x}$-ből szigorúan monoton lánccal elérhető elemek összességét.

A $\tau_{\leq}(\mathbf{x})$-et *az* $\mathbf{x}$ *bejárhatósági*, a $\tau_{<}(\mathbf{x})$-et pedig az $\mathbf{x}$ *szigorú bejárhatósági tartományának* nevezzük.

A $\tau_{\leq}(\mathbf{x})$ és $\tau_{<}(\mathbf{x})$ bejárhatósági tartományokat *valódiaknak* nevezzük, ha a Σ valódi részhalmazai.

A korábbiakból világos, hogy ha $\mathbf{x} \in L$, akkor

$$\tau_{\leq}(\mathbf{x}), \ \tau_{<}(\mathbf{x}) \subset L.$$

Továbbá, ha $\mathbf{y} \in \tau_{\leq}(\mathbf{x})$ és $\mathbf{y}' \in \tau_{<}(\mathbf{x})$, akkor

$$\tau_{\leq}(\mathbf{y}) \subset \tau_{\leq}(\mathbf{x}) \text{ és } \tau_{<}(\mathbf{y}') \subset \tau_{<}(\mathbf{x}),$$

valamint mindig fennáll a

$$\tau_{<}(\mathbf{x}) \subset \tau_{\leq}(\mathbf{x}), \quad (\mathbf{x} \in \Sigma)$$

összefüggés.

1.3 *Egyensúlypont, stabilitási halmaz, egyensúlyhalmaz.*

Ezek után először a játékelméletben is alapvető fontosságú fogalmat, az egyensúlypont fogalmát értelmezzük.

Egy $\mathbf{x}^* \in L$ pontot az *S rendszer szigorú egyensúlypontjának* nevezzük, ha a bejárhatósági tartománya önmaga, azaz

$$\tau_{\leq}(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{x}^*\}.$$[1]

Világos, hogy az egyensúlypont fogalmának fenti értelmezése egybeesik speciális esetben a játékelméletből ismert „hagyományos" értelmezéssel.

Továbbá egy $\mathbf{x}^* \in L$ akkor és csak akkor *egyensúlypont,* ha a szigorú bejárhatósági tartománya az üres halmaz.

Ezek után értelmezni fogjuk a stabilitási halmaz fogalmát.

Egy $H_{\leq} \subset L$ halmazt az *S rendszer stabilitási* halmazának nevezzük, ha minden $\mathbf{x} \in H_{\leq}$-ra

$$[\tau_{\leq}(\mathbf{x})] = H_{\leq}.$$[2]

Egy $H_{<} \subset L$ halmazt az S rendszer *szigorú stabilitási* halmazának nevezzük, ha minden $\mathbf{x} \in H_{<}$-ra

$$[\tau_{<}(\mathbf{x})] = H_{<}.$$

Végül értelmezni fogjuk az egyensúlyhalmaz fogalmát:

Egy $H^*_{\leq} \subset \Sigma$ halmazt az *S rendszer egyensúlyhalmazának* nevezzük, ha minden $\mathbf{x} \in H^*_{\leq}$-ra

$$\tau_{\leq}(\mathbf{x}) = H^*_{\leq},$$

és ha egy $H^*_{<} \subset L$ halmaznál minden $\mathbf{x} \in H^*_{<}$-re

$$\tau_{<}(x) = H^*_{<},$$

akkor $H^*_{<}$ halmazt az *S szigorú egyensúlyhalmazának* nevezzük.

A $H_{\leq}$, $H_{<}$, $H^*_{\leq}$, $H^*_{<}$ halmazokat *valódiaknak* nevezzük, ha a

$$H_{\leq},\ H_{<}$$

valódi részhalmazai a Σ-nak és a

$$H^*_{\leq},\ H^*_{<}$$

valódi részhalmazai az L-nek.

1.4 *Az egyensúlypont és egyensúlyhalmazok „egyensúly" tulajdonsága*

Mindenek előtt világos, hogy egy egyensúlypont mint egyelemű halmaz egyben egyensúlyhalmaz is.

Ha valamely $\mathbf{x} \in H_{\leq}$, $H_{<}$-re az $\mathbf{x}$ bejárhatósági illetve szigorú bejárhatósági tartományai zártak, akkor a stabilitási halmaz egyensúlyhalmaz és a szigorú stabilitási halmaz szigorú egyensúlyhalmaz.

A stabilitási és egyensúlyhalmazok „minimális tulajdonságúak", abban az értelemben, hogy nincs olyan valódi részhalmazuk, amely ugyancsak stabilitási vagy egyensúlyhalmaz lenne.

[1] Egy $\mathbf{x}$-re $\{\mathbf{x}\}$ szimbólummal azt a halmazt jelöljük, amely csak az $\mathbf{x}$-et tartalmazza.

[2] Egy A halmazra $[A]$-val jelöljük azt a halmazt, ami az A-ból úgy áll elő, hogy hozzávesszük a határpontjait.

Továbbá a stabilitási és egyensúlyhalmazoknak külön-külön mindegyiknek meg van az a tulajdonsága, hogy a különbözőek egyben diszjunktak is.

Végül összehasonlítjuk az egyensúlypont és egyensúlyhalmaz fogalmát.

Legyen

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

az S rendszer egy egyensúlypontja.

A definícióból következik, hogy minden i-re $(1 \leqq i \leqq n)$ és minden

$$\mathbf{x}^{(i)} = x_1^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*)$$

pontra, ahol $x_i \in \Phi_i(\mathbf{x}^*)$:

$$F_i(\mathbf{x}^*) - K_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(i)}) \geqq F_i(\mathbf{x}^{(i)}) - C_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^{(i)}).$$

Azaz, amennyiben az S rendszer $n - 1$ számú tagja az „egyensúlyi állapotban van", akkor mintegy „kényszeríti" a kimaradó szervet (vállalatot) az egyensúlyi állapot, azaz az x_i^* elérésére, mert minden más szóbajöhető lépése esetén sem járhat jobban.

Megmutatjuk, hogy az egyensúlyhalmazoknak is lényegében megvan ez a tulajdonsága.

Legyen ugyanis $H^*_{\leq}$ az S rendszer egy egyensúlyhalmaza:

$$H^*_{\leq} = \{H_1^*, H_2^*, \ldots, H_n^*\}.$$

Legyen $x_i^* \in H_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, azaz tegyük fel, hogy az S rendszer az egyensúlyhalmazba jutott. Legyen ismét

$$\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \ldots, x_n^*), \quad (1 \leqq i \leqq n).$$

Ebben az esetben, az i-ik szervnek az összes lépési lehetőségét a $\Phi_i(\mathbf{x}^*)$ tartalmazza. Mivel

$$\tau_{\leq}(\mathbf{x}^*) = H^*,$$

azaz minden olyan lépés, ami az x_i^*-ből indul ki és olyan állapotba vezet, amely az i-ik szerv szempontjából „nem rosszabb" mint az x_i^* volt, szükségképpen a $\Phi_i(\mathbf{x}^*)$ egy olyan x_i eleme, amely a H_i^*-ben van.

Tehát amennyiben az S rendszer bejutott egy egyensúlyhalmazba, akkor ez azt jelenti, hogy az „egyéni lépések" csak akkor „kifizetődőek", ha azok az egyensúlyhalmazban történnek, más szóval ez is egy „egyensúlyi állapotnak" tekinthető.

1.5 *A stabilitási és egyensúlyhalmazok összefüggései*

A stabilitási halmazok definíciójából közvetlenül adódik, hogy ezek a halmazok zártak. Az egyensúly és szigorú egyensúlyhalmazok esetében ez már általában nem lesz így.

Ugyancsak a definíciók közvetlen következménye, hogy ha minden $\mathbf{x}$-re az $\mathbf{x}$ bejárhatósági illetve szigorú bejárhatósági tartományai zártak, akkor minden stabilitási illetve szigorú stabilitási halmaz egyensúly illetve szigorú egyensúlyhalmaz is egyben.

Vagy szűkebben, ha egy stabilitási illetve szigorú stabilitási halmaznak van olyan pontja, melynek bejárhatósági illetve szigorú bejárhatósági tartománya zárt, akkor az a stabilitási halmaz egyensúlyhalmaz illetve a szigorú stabilitási halmaz szigorú egyensúlyhalmaz.

Az alábbiakban elégséges feltételt fogunk adni a bejárhatósági illetve szigorú bejárhatósági tartományok zártságára.

Előrebocsájtunk néhány definíciót és két segédtételt.

Az egyensúlyhalmaznak gyakorlati és egyben számítástechnikai szempontból alapvető tulajdonsága, hogy bármely pontjából bármely pontjába (és így az egyensúlyhalmazon belül maradva) véges sok lépés után eljuthatunk.

A Φ_i függvényt a *Σ halmazon egyenletesen összefüggőnek* nevezzük, ha létezik olyan pozitív δ szám, hogy valahányszor $\mathbf{x} \overset{i}{\sim} \mathbf{y}$ és $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta$, mindannyiszor $x_i \in \Phi_i(\mathbf{y})$. (Ebből természetesen az $y_i \in \Phi_i(\mathbf{x})$ is következik.)

A $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvénnyel jellemzett korrekciót egy $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ pontban $\varepsilon(>0)$ *pontosságúnak nevezzük*, ha minden $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{y}$ esetén $K(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \geq \varepsilon$.

Ezek után bebizonyítjuk a következő segédtételt:

$$(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$$

1. Lemma:

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i függvények folytonosak, a Φ_i környezetfüggvények egyenletesen összefüggőek. Ha a K_i korlátozó függvények $(\mathbf{x} \neq \mathbf{y})$ a Σ_i-n folytonosak az $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ helyzetet kivéve és egy $\mathbf{x}^*$ pontban $\varepsilon^* = \varepsilon(\mathbf{x}^*)$ pontosságúak, akkor van olyan $\delta^* = \delta^*(\mathbf{x}^*)$ (>0) szám, hogy valahányszor $\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) < \delta^*$, mindannyiszor az $\mathbf{x}^*$ az $\mathbf{y}$-ból szigorúan monoton lánccal elérhető.

Bizonyítás:

Mivel a K_i függvények az $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ helyek kivételével folytonosak, ezért minden pozitív ε-hoz és $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ponthoz létezik olyan pozitív $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, \mathbf{x}, \mathbf{y})$, hogy ha

$$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') < \delta_1 \text{ és}$$

$$\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{y}') < \delta_1,$$

úgy

$$|\, K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - K_i(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \,| < \varepsilon, \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon^*}{2}$, és legyen $\mathbf{x} \in \Sigma$ tetszőleges, melyre $\varrho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) < \delta_1$.

Ekkor tetszőleges $\mathbf{y} \in \Sigma$ pontra $(\mathbf{y} \neq \mathbf{x})$

$$K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = K_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) - [K_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})] > \varepsilon^* - \frac{\varepsilon^*}{2} = \frac{\varepsilon^*}{2}.$$

Kaptuk tehát, hogy az $\mathbf{x}^*$-nak létezik olyan $\delta_1 = \delta_1(\mathbf{x}^*)$ sugarú környezete, hogy valahányszor $\varrho(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) < \delta_1$, mindannyiszor tetszőleges $\mathbf{y} \in \Sigma$-ra

$$K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > \frac{\varepsilon^*}{2}, \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

Mivel az F_i függvények folytonosak a Σ_i zárt halmazon, így ott egyenletesen is folytonosak. Ezért van olyan $\delta_2 > 0$ szám, hogy

$$| F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y}) | < \frac{\varepsilon^*}{6}, \ (\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_2;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Hasonlóan a C_i-k folytonossága miatt van olyan δ_3, hogy ha $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_3$, akkor

$$| C_i(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = |C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) | < \frac{\varepsilon^*}{6}, \ (i = 1, 2, \ldots n).$$

Mivel a Φ_i-k egyenletesen összefüggőek, ezért létezik olyan $\delta_4 < 0$ szám, hogy valahányszor $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Sigma$ és $\mathbf{x} \overset{i}{\sim} \mathbf{y}$, valamint $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_4$, mindannyiszor

$$x_i \in \Phi_i(\mathbf{y}) \text{ és } y_i \in \Phi_i(\mathbf{x}), \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Legyen $\delta^* = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$.
Megmutatjuk, hogy ha $\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) < \delta^*$, akkor az x^* az $\mathbf{y}$-ből szigorúan monoton lánccal elérhető.

Legyen:

$$\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n).$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_0 &= (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}, y_n)\\
\mathbf{y}_1 &= (x_1^*, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)\\
\mathbf{y}_2 &= (x_1^*, x_2^*, y_2, \ldots, y_{n-1}, y_n)\\
&\vdots\\
\mathbf{y}_{n-1} &= (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{n-1}^*, y_n)\\
\mathbf{y}_n &= (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \ldots, x_{n-1}^*, x_n^*).
\end{aligned}$$

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 \overset{1}{<} \mathbf{y}_1 \overset{2}{<} \mathbf{y}_2 \overset{3}{<} \ldots \overset{n-1}{<} \mathbf{y}_{n-1} \overset{n}{<} \mathbf{y}_n = \mathbf{x}^*.$$

Legyen i egy tetszőleges index ($1 \leq i \leq n$). Megmutatjuk, hogy

$$\mathbf{y}_{i-1} \overset{i}{<} \mathbf{y}_i .$$

$$\text{Mivel } \mathbf{y}_{i-1} \overset{i-1}{\sim} \mathbf{y}_i \text{ és } \varrho(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i) < \varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) < \delta^*,$$

ezért

$$x_i^* \in \Phi_i(\mathbf{y}_{i-1}),$$

azaz

$$\mathbf{y}_{i-1} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{y}_i.$$

Hátra van még a monotonitás bizonyítása. A monotonitást definiáló képlet az alábbi volt:

$$F_i(\mathbf{x}) - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < F_i(\mathbf{y}) - C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ezt átrendezve

$$[F_i(\mathbf{x}) - F_i(\mathbf{y})] - K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0.$$

Mivel $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) < \delta^*$, ezért elvégezhető az alábbi becslés:

$$[F_i(\mathbf{y}_{i-1}) - F_i(\mathbf{y}_i)] - K_i(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i) + C_i(\mathbf{y}_{i-1}, \mathbf{y}_i) < \frac{\varepsilon^*}{6} - \frac{\varepsilon^*}{2} + \frac{\varepsilon^*}{6} = -\frac{\varepsilon^*}{6} < 0,$$

ezzel az 1 Lemmát bizonyítottuk.

2. Lemma

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i függvények folytonosak a K_i függvények az $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ helyeken folytonosak, a Φ_i függvények egyenletesen összefüggőek. Ha $\mathbf{x}^*$ a Σ egy H részhalmazának olyan torlódási pontja, ahol a K_i függvények $\varepsilon(\mathbf{x}^*) > 0$ pontosságúak, akkor az $\mathbf{x}$ torlódási pont tagja egy, a H valamely eleméből kiinduló szigorúan monoton láncnak.

Bizonyítás:

Mivel $\mathbf{x}^*$ torlódási pontja a H-nak, ezért van a H elemeinek egy, az $\mathbf{x}^*$-hoz konvergáló sorozata:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}^*, \quad (\mathbf{x}_n \in H;\ n = 1, 2, \ldots).$$

A feltevésnél fogva a K_i függvényekkel jellemzett korlátozás az $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ helyen $\varepsilon(\mathbf{x}^*) > 0$, ezért teljesülnek az 1 Lemma feltételei. Így létezik olyan δ^*, hogy valahányszor $\varrho(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) < \delta^*$, mindannyiszor az $\mathbf{x}^*$ az $\mathbf{y}$-ból szigorúan monoton lánccal elérhető. Másrészt elég nagy n-re $\varrho(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}^*) < \delta^*$, így $\mathbf{x}_n$-től az $\mathbf{x}^*$ szigorúan monoton lánccal elérhető, amivel a 2. Lemmát bebizonyítottuk.

A fenti két segédtételnek már egyszerű következménye az alábbi tétel:

1. TÉTEL

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i függvények folytonosak, a K_i függvények az $x \neq y$ helyeken folytonosak és a Φ_i környezetfüggvények egyenletesen összefüggők. Ha a $H_\leq$ és $H_<$ halmazokon a K_i függvények $\varepsilon(x) > 0$ ($\mathbf{x} \in H_\leq$ ill. $H_<$) pontosságúak és $H_< \cap L \neq \emptyset$ ill. $H_< \cap L \neq \emptyset$, akkor $H_\leq = H^*_\leq$ ill. $H_< = H^*_<$.

1.6 *Az egyensúlypont létezésének kérdése*

Mielőtt rátérnénk a stabilitási és egyensúlyhalmazok létezésének feltételeire, előbb egy egyensúlypont létezési kritériumot adunk meg. Ennek bizonyítását hasonló gondolatmenettel végezzük, mint ahogy az [6]-ben ill. [2]-ben történik.

2. Tétel: Az $S=\{\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n; F_1,\ldots,F_n;\Phi_1,\ldots,\Phi_n;C_1,\ldots,C_n;K_1,\ldots,K_n;L\}$ rendszernek van egyensúlypontja, ha

a) Σ_i korlátos részhalmaza X_i-nek, $i=1,\ldots,n$.

b) az F_i függvények x_i-ben konkáv függvények, $x_i \in \Sigma_i$, $i=1,\ldots,n$.

c) az F_i függvények az $\mathbf{x}=[x_1,\ldots,x_n]$ változó folytonos függvényei, $\mathbf{x} \in \Sigma$, $i=1,\ldots,n$,

d) az L halmaz konvex, zárt halmaza Σ-nak,

e) $C_i(\mathbf{x};\ \mathbf{y})-K_i(\mathbf{x},\mathbf{y})$ folytonos, nemnegatív függvény és y_i-ben konkáv, $i=1,\ldots,n$.

Bizonyítás: Legyenek $\mathbf{x}=[x_1,\ldots,x_n]$, $\mathbf{y}=[y_1,\ldots,y_n]$ egymástól függetlenül változó vektorai L-nek.

Az

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{i=1}^{n}[F_i(y_1,\ldots,x_i,\ldots,y_n)+C_i(\mathbf{y};\ y_1,\ldots,x_i,\ldots,y_n)-\\ -K_i(\mathbf{y};\ y_1,\ldots,x_i,\ldots,y_n)]$$

függvény folytonos az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ változókban és $\mathbf{x}$-ben konkáv.

Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy ha létezik egy $\mathbf{y}^*=(y_1^*,\ldots,y_n^*)\in L$ úgy, hogy minden $\mathbf{x}\in\Phi(\mathbf{y}^*)$-ra fennáll

$$G(\mathbf{y}^*,\mathbf{y}^*)\geq G(\mathbf{x},\mathbf{y}^*) \tag{1}$$

akkor $\mathbf{y}^*$ egyensúlypontja S-nek. Ekkor ugyanis az előbbi egyenlőtlenség fennáll minden $\bar{\mathbf{y}}^{(i)}=[y_1^*,\ldots,x_i,\ldots y_n^*]\in L$ $(i=1,\ldots,n)$ vektorra. Felírva az (1) egyenlőtlenséget az $\mathbf{x}=\bar{\mathbf{y}}^{(i)}$ esetre, adódik

$$F_i(y_1^*,\ldots,y_n^*)\geq F_i(y_1^*,\ldots,x_i,\ldots,y_n^*)+C_i(\mathbf{y}^*;\ y_1^*,\ldots,x_i,\ldots,y_n^*)-\\ -K_i(\mathbf{y}^*;\ y_1^*,\ldots,x_i,\ldots,y_n^*)$$

ami az állítást igazolja: $\mathbf{x}\in\Phi(\mathbf{y}^*)$.

A bizonyítás menete ezekután a következő. Meg fogjuk mutatni, hogy ha a fenti (1) egyenlőtlenséget kielégítő $\mathbf{y}^*$ vektor nem létezik, akkor ellentmondásra jutunk a $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ függvény konkavitására tett megállapításunkkal.

Tegyük fel tehát, hogy az említett tulajdonságú $\mathbf{y}^*\in L$ vektor nem létezik, azaz bármely $\mathbf{y}\in L$-hez található olyan $\mathbf{x}\in\Phi(\mathbf{y})$ hogy $G(\mathbf{y},\mathbf{y})<G(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Tekintsük a következő H_x halmazt

$$H_x=\{\mathbf{y}\in L\mid G(\mathbf{y},\mathbf{y})<G(\mathbf{y},\mathbf{x})\}. \tag{2}$$

Világos, hogy a H_x halmazok befedik L-et, azaz

$$L=\bigcup_{\mathbf{x}\in L}H_x.$$

Minthogy a $G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ függvény az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ változókban folytonos, ezért a (2)-ben levő szigorú egyenlőtlenség miatt a H_x halmazok L-nek nyílt halmazai. Alkalmazván a Borel-féle befedési tételt, létezik L-ben véges sok olyan $\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(q)}$ vektor, hogy $L=\bigcup_{j=1}^{q}H_{x^{(j)}}$ fennáll.

Tekintsük most az

$$g_j(\mathbf{y})=\max G(\mathbf{x}^{(j)},\mathbf{y})-G(\mathbf{y},\mathbf{y});\ 0\},\ j=1,\ldots,q$$

nem negatív függvényt. Minthogy minden $\mathbf{y}$-hoz létezik olyan $\mathbf{x} \in \Phi(\mathbf{y})$, hogy $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > G(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ ezért minden $\mathbf{y}$-hoz van olyan j $(1 \leq j \leq q)$, hogy $G(\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{y}) >$ $> G(\mathbf{y}, \mathbf{y})$. Ebből következik, hogy a $g(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{q} g_j(\mathbf{y})$ függvény minden $\mathbf{y} \in L$-re pozitív. Így az

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\mathbf{y})}{g(\mathbf{y})} \mathbf{x}^{(j)}$$

összeg minden $\mathbf{y}$-ra az $\mathbf{x}^{(j)}$ vektorok egy konvex lineáris kombinációja és ezért L-nek eleme.

A $g_j(\mathbf{y})$ és $g(\mathbf{y})$ függvények nyilván folytonos függvények, azért az

$$\mathbf{y} \to \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\mathbf{y})}{g(\mathbf{y})} \mathbf{x}^{(j)}$$

leképezés $(\mathbf{y} \in L)$ az L konvex korlátos zárt halmaz önmagába való folytonos leképezése.

A Brouwer-féle fixponttétel szerint van olyan $\bar{\mathbf{y}} \in L$, hogy

$$\bar{\mathbf{y}} = \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\bar{\mathbf{y}})}{g(\bar{\mathbf{y}})} \mathbf{x}^{(j)}.$$

Minthogy $G(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{y}})$ konkáv $\mathbf{x}$-ben, ezért

$$G(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}) \geq \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\bar{\mathbf{y}})}{g(\bar{\mathbf{y}})} G(\mathbf{x}^{(j)}, \bar{\ }). \tag{3}$$

Ez az egyenlőtlenség azonban nem állhat fenn, ugyanis

1. $\bar{\mathbf{y}}$-hoz van legalább egy $\mathbf{x}^{(j)}$, amelyre

$$G(\mathbf{x}^{(j)}, \bar{\mathbf{y}}) > G(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})$$

2. ha valamely $\bar{\mathbf{y}}$-hoz $G(\mathbf{x}^{(j)}, \bar{\mathbf{y}}) < G(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})$ akkor $g_j(\bar{\mathbf{y}}) = 0$.

Ebből a két tulajdonságból pedig az

$$\sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\bar{\mathbf{y}})}{g(\bar{\mathbf{y}})} G(\mathbf{x}^{(j)}, \bar{\mathbf{y}}) > \sum_{j=1}^{q} \frac{g_j(\bar{\mathbf{y}})}{g(\bar{\mathbf{y}})} G(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}}) = G(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{y}})$$

egyenlőtlenség adódik, ami ellentmond (3)-nak. Ezzel a tételt igazoltuk.

1.7 *Stabilitási halmazok egzisztenciájának a kérdése*

Természetes ezek után felvetni azt a kérdést, hogy milyen feltételek mellett létezik az S rendszernek stabilitási illetve szigorú stabilitási halmaza.

Mielőtt az egzisztencia kérdésével foglalkoznánk, megjegyezzük, hogy a stabilitási halmaz és a szigorú stabilitási halmaz létezésének a kérdése nem egyformán lényeges. Tekintettel arra, hogy mindig gondolnunk kell elgondolásaink numerikus realizációjára is, a szigorú stabilitási halmazok sokkal fontosabb szerephez jutnak. Ez, bizonyos gyakorlati meggondolásokon túlmenően főleg annak a következménye, hogy a numerikus realizációk során, a probléma jellegéből következően csak számítógépes megoldásokra számíthatunk (főleg szimulációs módszerekre). Figyelembe véve a probléma jellegét, természetszerűen a valós típusú aritmetika (lebegőpontos aritmetika) jöhet szóba, márpedig lebegőpontos aritmetikával számolva az egyenlőség (a szigorú ,matematikai értelemben vett egyenlőség) eldöntése lehetetlen.

Ezért elsősorban a szigorú stabilitási halmazok létezésének a kérdését vizsgáljuk.

Mielőtt kimondanánk néhány segédtételt, bevezetünk egy definíciót:

Legyen $\mathbf{x} \overset{i}{\leq} \mathbf{y}$, és

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$\mathbf{y} = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Ha az $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ párhoz és az i indexhez létezik olyan valós változós

$$t \to x(t) \ (t \in [\alpha, \beta], \ x(t) \in \Sigma_i)$$

függvény, hogy $x(\alpha) = x_i$, $x(\beta) = y_i$ és valahányszor $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, mindannyiszor

$$\mathbf{x}(t_1) \overset{i}{\leq} \mathbf{x}(t_2),$$

ahol

$$\mathbf{x}(t_1) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x(t_1), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

$$\mathbf{x}(t_2) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x(t_2), x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

akkor azt mondjuk, hogy *az* $\mathbf{y}$ *az* $\mathbf{x}$*-ből folytonos javítással elérhető.*

Hasonlóan, ha $\mathbf{x} \overset{i}{<} \mathbf{y}$ és

$$\mathbf{x}(t_1) \overset{i}{<} \mathbf{x}(t_2),$$

akkor azt mondjuk, hogy *az* $\mathbf{y}$ *az* $\mathbf{x}$*-ből folytonos szigorú javítással elérhető.*

Ezek után bebizonyítjuk a következő segédtételt:

3. Lemma:

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i, K_i függvények folytonosak, a Φ_i függvények egyenletesen összefüggőek.

Ha minden $\mathbf{x} \in \Sigma$-ra annak bármely javítása egyben $\mathbf{x}$-nek folytonos szigorú javítása is, akkor a $[\tau_<(\mathbf{x})]$ halmaz zárt abban az értelemben, hogy minden $\mathbf{y} \in \in [\tau_<(\mathbf{x})]$-re $\tau_<(\mathbf{y}) \subseteq [\tau_<(\mathbf{x})]$.

Bizonyítás:

Legyen $\mathbf{x}^* \in [\tau_<(\mathbf{x})]$. Ha $\mathbf{x}^* \in \tau_<(\mathbf{x})$, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen tehát $\mathbf{x}^*$ a $\tau_<(\mathbf{x})$ egy olyan határpontja, amelyik nem tartozik a $\tau_<(\mathbf{x})$-hez.

Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\tau_<(\mathbf{x}^*) \subseteq [\tau_<(\mathbf{x})].$$

Indirekt bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van olyan

$$\mathbf{y}^* \in \tau_<(\mathbf{x}^*), \text{ hogy } \mathbf{y}^* \notin [\tau_<(\mathbf{x})].$$

Az $\mathbf{y}^*$ tehát az $\mathbf{x}^*$-ból szigorúan monoton lánccal elérhető. Legyen mindjárt az $\mathbf{y}^*$ a lánc első olyan eleme, amelyik nem tartozik $[\tau_<(\mathbf{x})]$-be. Legyen továbbá

$$\mathbf{x}^* \overset{i_1}{<} \mathbf{y}_1 \overset{i_2}{<} \mathbf{y}_2 \overset{i_3}{<} \ldots \overset{i_k}{<} \mathbf{y}_k \overset{i_*}{<} \mathbf{y}^*.$$

Mivel $\mathbf{y}^* \notin [\tau_<(\mathbf{x})]$, ezért $\mathbf{y}_i \notin \tau_<(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \ldots, k$, másrészt mivel $\mathbf{y}^*$ a lánc első olyan eleme, amelyik nem tartozik $[\tau_<(\mathbf{x})]$-be, így az $\mathbf{y}_i$ pontok ugyancsak határpontjai a $[\tau_<(\mathbf{x})]$-nek, $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Legyen az egyszerűség kedvéért $\mathbf{y} = \mathbf{y}_k$. Kaptuk tehát, hogy a $\tau_<(x)$-nek van olyan $\mathbf{y}$ határpontja, ahonnan kilépve egy $\mathbf{y}^*$ javításra már kikerülünk a $[\tau_<(x)]$-ből.

Azt fogjuk megmutatni, hogy egyben olyan határpont is létezik, amiből tetszőlegesen közeli olyan javítás is elérhető, amely nem tartozik $[\tau_<(\mathbf{x})]$-hez:

Induljunk ki az $\mathbf{y}$ és $\mathbf{y}^*$ pontokból. A korábbiak szerint $\mathbf{y} \overset{i_*}{<} \mathbf{y}^*$. Ezért a feltételek szerint létezik olyan

$$t \to y_{i^*}(t) \quad (t \in [\alpha, \beta]; \; y_{i^*}(t) \in \Sigma_i)$$

folytonos függvény, hogy $\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y}$, $\mathbf{y}(\beta) = \mathbf{y}^*$ és valahányszor $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, mindannyiszor

$$\mathbf{y}(t_1) \overset{i}{<} \mathbf{y}(t_2).$$

A definíció szerint

$$\mathbf{y}(\alpha) = \mathbf{y} \in [\tau_<(\mathbf{x})]$$
$$\mathbf{y}(\beta) = \mathbf{y}^* \notin [\tau_<(x)].$$

Legyen

$$t^* = \sup\{t : t \in [\alpha, \beta] \;\&\; \mathbf{y}(t) \in [\tau_<(\mathbf{x})\}.$$

Mivel a $[\tau_<(x)]$ zárt halmaz, ezért $\mathbf{y}(t^*) \in [\tau_<(\mathbf{x})]$. Másrészt szükségképpen $\mathbf{y}(t^*)$ határpontja $\tau_<(\mathbf{x})$-nek, továbbá bármely pozitív δ^*-hoz van olyan pozitív δ, hogy valahányszor $t > t^*$ és $t - t^* < \delta$, mindannyiszor

$$\varrho(\mathbf{y}(t), \mathbf{y}(t^*)) < \delta^* \text{ és}$$
$$\mathbf{y}(t) \notin [\tau_<(\mathbf{x})].$$

A feltevés szerint a Φ_i függvények egyenletesen összefüggőek, azaz létezik olyan pozitív δ_1, hogy valahányszor $\mathbf{x} \overset{i}{\to} \mathbf{y}$ és $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \delta_1$, mindannyiszor

$$y_i \in \Phi_i(\mathbf{x}), \; (i = 1, 2, \ldots, n).$$

A korábbiak szerint van a $\tau_<(\mathbf{x})$-nek olyan $\mathbf{z}$ határpontja, melyhez van olyan $\mathbf{z}^*$, hogy $\mathbf{z} \overset{i}{<} \mathbf{z}^*$ és $\mathbf{z}^* \notin [\tau_<(\mathbf{x})]$, továbbá $\varrho(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) < \dfrac{\delta_1}{2}$. Mivel $\mathbf{z}$ határpontja a $\tau_<(\mathbf{x})$-nek, ezért van a $\tau_<(\mathbf{x})$ elemeinek egy $\mathbf{z}$-hez tartó $\{\mathbf{z}^{(m)}\}$ sorozata.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n)$$
$$\mathbf{z}^* = (z_1, z_2, \ldots, z_{i-1}, z_i^*, z_{i+1}, \ldots, z_n)$$
$$\mathbf{z}^{(m)} = (z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \ldots, z_{i-1}^{(m)}, z_i^{(m)}, z_{i+1}^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)})$$
$$\mathbf{z}^{*(m)} = (z_1^{(m)}, z_2^{(m)}, \ldots, z_{i-1}^{(m)}, z_i^*, z_{i+1}^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}).$$

Világos, hogy $\lim\limits_{m\to\infty} \mathbf{z}^{*(m)} = \mathbf{z}^*$. Végezzük el a következő becslést, elég nagy m-re

$$\varrho(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) = \varrho(z_i^{(m)}, z_i^*) \leq \varrho(z_i^{(m)}, z_i) + \varrho(z_i, z_i^*) < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1.$$

Tehát minden elég nagy m-re

$$\varrho(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) < \delta_1.$$

Másrészt, mivel minden m-re

$$\mathbf{z}^{(m)} \overset{i}{\sim} \mathbf{z}^{*(m)} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

így a fentiek szerint, kihasználva a Φ_i-k egyenletes összefüggését, kapjuk hogy minden elegendően nagy m-re

$$\mathbf{z}^{(m)} \overset{i}{\rightarrow} \mathbf{z}^{*(m)}.$$

Ezek után meg fogjuk mutatni, hogy egyben minden elég nagy m-re

$$\mathbf{z}^{(m)} \overset{i}{<} \mathbf{z}^{*(m)}.$$

A korábbiak szerint

$$\mathbf{z} \overset{i}{<} \mathbf{z}^*.$$

Legyen

$$F_i(\mathbf{z}^*) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) - [F_i(\mathbf{z}^*) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] = \delta_2 > 0.$$

A feltevés szerint az F_i, C_i, K_i függvények folytonosak, így minden elegendően nagy m-re

$$| F_i(\mathbf{z}^{*(m)}) - F_i(\mathbf{z}^*) | < \frac{\delta_2}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$| C_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) | < \frac{\delta_2}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$| F_i(\mathbf{z}^{(m)}) - F_i(\mathbf{z}) | < \frac{\delta_2}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$| K_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) | < \frac{\delta_2}{5} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Ezek után minden elég nagy m-re elvégezhető az alábbi becslés:

$$\begin{aligned}
F_i(\mathbf{z}^{*(m)}) &- C_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - [F_i(\mathbf{z}^{(m)}) - K_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)})] = \\
&= F_i(\mathbf{z}^{*(m)}) - C_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - [F_i(\mathbf{z}^*) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] + \\
&+ \{[F_i(\mathbf{z}^*) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] - [F_i(\mathbf{z}) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)]\} + \\
&+ [F_i(\mathbf{z}) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] - [F_i(\mathbf{z}^{(m)}) - K_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)})] = \\
&= [F_i(\mathbf{z}^{*(m)}) - F_i(\mathbf{z}^*)] - [C_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)}) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] + \\
&+ \{[F_i(\mathbf{z}^*) - C_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)] - [F_i(\mathbf{z}) - K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*)]\} + \\
&+ [F_i(\mathbf{z}) - F_i(\mathbf{z}^{(m)})] - [K_i(\mathbf{z}, \mathbf{z}^*) - K_i(\mathbf{z}^{(m)}, \mathbf{z}^{*(m)})] > \\
&> -\frac{4\delta_2}{5} + \delta_2 = \frac{\delta_2}{5} > 0.
\end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy minden elég nagy m-re

$$\mathbf{z}^{(m)} \overset{i}{<} \mathbf{z}^{*(m)}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy minden elég nagy m-re

$$\mathbf{z}^{*(m)} \in \tau_{<}(\mathbf{z}^{(m)}) \subseteq \tau_{<}(\mathbf{x}) \subseteq [\tau_{<}(\mathbf{x})].$$

Mivel $[\tau_{<}(\mathbf{x})]$ zárt halmaz, így

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{z}^{*(m)} = \mathbf{z}^{*} \in [\tau_{<}(\mathbf{x})],$$

ami ellentmondás. Ellentmondásra jutván a Lemmát bizonyítottuk.

Megjegyzés:

A bizonyításból kitűnik, hogy a $C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ és $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényekről elegendő a folytonosságot csak az $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ pontokban megkövetelni.

A 3. Lemma segítségével a szigorú stabilitási halmazokra egy egzisztenciatételt bizonyítunk be.

3. TÉTEL

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az $F_i(\mathbf{x})$, $C_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $K_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvények folytonosak ($\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$), a Φ_i függvények egyenletesen összefüggőek. Ha minden $\mathbf{x} \in \Sigma$-ra annak bármely javítása egyben $\mathbf{x}$-nek folytonos szigorú javítása, akkor létezik az S rendszernek szigorú stabilitási halmaza.

Bizonyítás:

Legyen $\mathbf{x}$ egy tetszőleges eleme a Σ halmaznak. A 3. Lemma szerint a $[\tau_{<}(\mathbf{x})]$ halmaz „zárt a továbblépésre”.

Megmutatjuk, hogy a $[\tau_{<}(\mathbf{x})]$ részhalmazai között szükségképpen van szigorú stabilitási halmaz. Ha maga a $[\tau_{<}(\mathbf{x})]$ nem stabilitási halmaz, akkor van olyan $\mathbf{x}_1 \in [\tau_{<}(\mathbf{x})]$, hogy

$$[\tau_{<}(\mathbf{x}_1)] \subset [\tau_{<}(\mathbf{x})].$$

Ha a $[\tau_{<}(\mathbf{x}_1)]$ nem szigorú stabilitási halmaz, akkor van olyan $\mathbf{x}_2 \in [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)]$, hogy

$$[\tau_{<}(\mathbf{x}_2)] \subset [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)].$$

Ha véges lépésben nem jutunk el ilyen módon egy szigorú stabilitási halmazhoz, akkor korlátos, zárt halmazoknak egy szigorúan fogyó

$$[\tau_{<}(\mathbf{x})] \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)] \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_2)] \supset \dots$$

sorozatához jutunk.

Amennyiben ezek közös része (Cantor tétele) nem szigorú stabilitási halmaz, akkor innen kezdve újra megismételjük az eljárásunkat, az így kapott

$$[\tau_{<}(\mathbf{x})] \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)] \supset \dots \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_1)] \supset [\tau_{<}(\mathbf{x}_2')] \supset \dots$$

láncra alkalmazva a Baire–Hausdorf-féle tételt,[3] kapjuk hogy egy α indextől kezdve

$$[\tau_<(x_\alpha)] = [\tau_<(x_{\alpha+1})] = \ldots,$$

ami ellentmondás.

Ellentmondásra jutván a tételünket bizonyítottuk.

1.8 *Egyensúlyhalmazok létezésének a kérdése*

Ezek után már megfogalmazhatunk a szigorú egyensúlyhalmaz létezésére is egy elégséges feltételt:

4. TÉTEL

Legyenek a Σ_i halmazok korlátosak és zártak, az F_i, C_i függvények folytonosak, a K_i függvények az $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ helyek kivételével folytonosak, és legyenek a Φ_i környezetfüggvények egyenletesen összefüggőek. Legyenek továbbá a K_i függvények a Σ halmazon $\varepsilon(\mathbf{x}) > 0$ $(\mathbf{x} \in \Sigma)$ pontosságúak. Ha minden $\mathbf{x} \in \Sigma$ elem esetén annak minden javítása egyben $\mathbf{x}$-nek folytonos szigorú javítása, akkor létezik az S rendszernek szigorú egyensúlyhalmaza.

A tétel az 1. TÉTEL és a 3. TÉTEL közvetlen következménye.

(Beérkezett: 1973. június 28.)

IRODALOM

1. Arrow, K. J.–Debreu, G.: Existence of an equilibrium for a competitive economy. Econometrica, 22 (1954)
2. Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele. Berlin, 1959.
3. Gale, D.: The law of supply and demand. Math. Scand. 3, 155–169 (1955).
4. McKenzie, L.: On equilibrium in Graham's model of world trade and other competitive systems. Econometrica 22 (1954).
5. Nikaido, H.: On the classical multilateral exchange problem. Metroeconomica 8 (1956), 9 (1957).
6. Nikaido, H.–Isoda, K.: Note on noncooperative convex games. Pacific J. Math. 5, 807–815, (1955)
7. Szép, J.: On foundations of game theory, DM 70–3. Közgazdasági Egyetem.
8. Alekszandrov, P. Sz.: Bevezetés a halmazok és függvények általános elméletébe. Budapest, 1952. Akadémiai Kiadó.

EQUILIBRIUM SYSTEM I.

In this work we start a series of articles which deals with the structure of systems, detailed as follows and from which the basic problems and results of the classical game theory issue as a special case. In the following by system we mean an organic system and out of its characteristics we stress – in a qualitative shaping – the following ones:

[3] A Baire–Hausdorf-féle tételt l. pl. [8].

Static characteristics:

(1) It consits of finite number, well distinguishable parts (organs). (2) The state of each organ depends on the other ones. (3) Each organ can exist only in well defined states. (4) There are criteria for the organ and consequently for the system on the basis of which it can decide on its change of state.

Dynamic characteristics:

(1) The state of each organ — and so that of the system — changes in time. (2) The set of the feasible states of the organs changes in time. (3) The number of the organs may change in time.

It is expedient to discern two kinds of a system: (a) an autonomous system where the states of the organs depend on the state of the other organs alone and (b) a non-autonomous one where the states of the organs depend on factors beyond the system as well.

By an organic system we mean first of all an economic one though we take no notice — at least for the time being — of its features beyond its general characteristics, described above.

We prove existence theorems for state-sets of equilibrium in the most simple case when only one organ changes its state at a time.

РАВНОВЕСНЫЕ СИСТЕМЫ

В этой работе мы начинаем серию статей, которая занимается структурой систем, описанных в дальнейшем и из которой основные проблемы и результаты классической теории игры получаются, как специальный случай. В следующем под системой мы подразумеваем органическую систему, из характеристик которой — в квалитативной формулировке — мы подчеркиваем следующие:

Статические характеристики:

(1) Система состоит из конечных, хорошо отличимых частей (органов). (2) Состояние каждого органа зависит от других. (3) Каждый орган может существовать только в хорошо определенных состояниях. (4) Существуют критерии для органа и следовательно для системы, на основе которых она может решать об изменении своего состояния.

Динамические характеристики:

(1) Изменение состояния каждого органа — и так самой системы — происходит во времени. (2) Множество возможных состояний органов изменяется во времени. (3) Число органов может изменяться во времени. Целесообразно различать две разные системы: (а) автономную систему, где состояния органов зависят лишь от состояния других органов и (в) неавтономную систему, где состояния органов зависит и от факторов вне системы.

Под органической системой в первую очередь мы подразумеваем экономическую систему, хотя мы оставляем без внимания — по крайней мере временно — ее свойства, кроме ее вышеуказанных общих характеристик. Здесь мы доказываем теоремы существования для множеств равновесных состояний в том простейшем случае, когда одновременно всегда только один орган изменяет свое состояние.

Miroslav Toms—Jan Klacek

Ex post állandó arányok, létszám és növekedés Csehszlovákiában

A közgazdászok érdeklődésében az utóbbi időben észrevehetően előtérbe került a munkaerőnek a gazdasági növekedés folyamatában játszott szerepe.[1] Számos hipotézist, modellt és elméleti általánosítást fogalmaztak meg.[2] Az új munkák abban a következtetésben jutnak közös nevezőre, hogy a korábbi modellek alábecsülték a munkaerő szerepét a gazdasági növekedésben.

A jelen cikkben ökonometriai szempontból közelítjük meg a kérdést. Közvetlenül egyik említett hipotézist vagy elméletet sem szándékozzuk itt ellenőrizni. Amire kiváncsiak vagyunk, az *a termelés és létszám közötti számszerű kapcsolat* Csehszlovákiában. Különböző összefüggéseket fogalmazunk meg ezért e két változó között és empirikusan elemezzük szerepüket az elmúlt időszakban végbement növekedésben. Ezek az összefüggések azután bizonyos, kizárólag a munkaerőn alapuló termelési függvényeket implikálnak.

Tanulmányunkban támaszkodunk egész sor, a csehszlovák gazdasági növekedés mennyiségi jellemzőit elemző szerző írására. Ezeknek a munkáknak a tárgyát elsősorban a termelés és a beruházások, a termelés és az állóalapok, illetve a termelés és egyidejűleg mindkét termelési tényező (kéttényezős termelési függvények) közötti kapcsolat számszerűsítése és elemzése képezte. Kevesebb figyelmet fordítottak eddig a létszám és a termelés közötti kapcsolatra, ami a jelen dolgozat tárgyát képezi. Nyilvánvaló, hogy több modell egyrészt több „választ" ad, de ugyanakkor több kérdést is vet fel. Egybevetésük azonban hasznos szempontokat, sőt esetleg még következtetéseket is nyújthat. Tanulmányunkat ezért részleges hozzájárulásnak tekintjük ehhez a kiterjedt vitához.

A termelési függvények alkalmazásai fontos információkat nyújthatnak *a gazdaság rugalmasságának fokáról* rövid vagy középtávra. Különösen annak elemzésére gondolunk, hogy mennyiben jelent korlátot a létszám, és milyen szerepet játszik a gazdasági növekedés ütemének megválasztásánál. Ezeket

[1] Ez a tanulmány folytatása az egyik szerző néhány korábbi munkájának (különösen a [11]-nek), és az 1967—69-es években folytatott kutatások eredményeit foglalja össze Első változatát 1969 júniusára dolgoztuk ki. Ebben a formában közgazdászok és ökonometriai szakemberek szélesebb körében forgott, akik értékes bírálatban részesítették, észrevételeket és megjegyzéseket fűztek hozzá. A szerzők külön is köszönetet mondanak *J. Fogl*nak, *J. Goldman*nak, *J. Habr*nak, *Z. Tlusty*nak és *J. Walter*nak. Egyes ökonometriai problémákról *S. Hymans*szel, *M. Klas*szal és *L. D. Taylpr*ral, a michigani egyetem professzoraival is konzultáltak. A számítógépes munkákat *E. Sip* folytatta le. Obligát módon hozzá kell fűzni, hogy a tanulmányban esetleg fellelhető hibák és tévedések a szerzők rovására írandók.

[2] Az egyik legérdekesebb munka *Jánossy Ferenc* magyar közgazdász modellje. Jánossy F. [6], második rész.

a kérdéseket eddig nem vizsgálták részletesen a csehszlovák irodalomban. A cikk célja ezért mindenekelőtt az, hogy ellenőrizzük a létszámra épülő termelési függvények különféle változatait. Nem kívánunk határozott következtetéseket levonni, mindössze szempontokat szeretnénk kapni a további kutatáshoz.

A kutatás az összefüggésnek a gazdaság *ipari szektorában* való vizsgálatára korlátozódik. A későbbiekben át lehetne térni valamilyen heterogénebb aggregátum (például a mezőgazdaságon kívüli ágazatok vagy a termelő szféra egésze) elemzésére is. Az elemzést külön végeztük el a csehországi és a csehszlovák iparra. Mindkét esetben kétszektoros bontást is alkalmaztunk — a függvényeket külön megbecsültük a termelőeszközök termelésére, a fogyasztási javak termelésére és az ipari termelés egészére. Az adatok minden esetben az 1948–1968 időszakra vonatkoznak.

A cikk hozzávetőlegesen három részből áll. Az első részt a modellnek és feltevéseinek elméleti elemzése teszi ki. A továbbiakban az időbeli késleltetések és specifikációjuk problémáját tárgyaljuk. Végül a harmadik részben összefoglaljuk és értékeljük az alkalmazások eredményeit.

1. Elméleti feltételezések

Ebben a tanulmányban kizárólag egytényezős termelési függvényeket vizsgálunk. A termelés és létszám közötti kapcsolatot elemezzük. Rövid időszakra vonatkozó elemzésnél az ilyen megközelítés nyilvánvalóan indokolt.

Elméleti szempontból azonban nagy a jelentősége annak, hogy milyen feltevéseket fogadunk el a technológia jellegét illetően, milyen termeléselméleti modellt tételezünk fel. A vitákból kiviláglik, hogy az egyik, a valósághoz közelálló modell az *ex post állandó arányok* koncepciója, ami azt jelenti, hogy az egyszer előállított gépek munkaerővel való helyettesítése már nem lehetséges. Meghatározott technológia tárgyiasul bennük, és a munkával csak egy adott arányban kombinálhatók.[3]

Ezek a feltevések nyilvánvalóan különböznek azoktól az elméletektől, amelyekre a helyettesítésen alapuló termelési függvények (például a Cobb–Douglas-függvény) épülnek. Ezek a függvények ugyanis mind ex ante, mind pedig ex post helyettesítést megengednek. Ezek a feltevések elég távol állnak a valóságtól. Az ex post állandó arányok koncepciója — ha talán túlzott is — közelebb áll a valósághoz.

A helyettesítés bizonyos lehetőségei vitathatatlanul ex post is fennállnak. Az ideális tehát az lenne, ha olyan modellel dolgoznánk, amely a meglevő gépparkon belül is megengedne korlátozott helyettesítést. Ezt a modellt az jellemezné, hogy az ex post helyettesítés rugalmassága kisebb lenne, mint az ex ante helyettesítésé, de nagyobb lenne zérusnál. Ilyen modellt azonban mindeddig nem dolgoztak ki, és ezért nem áll fenn valamiféle „arany középút" lehetősége. A két leegyszerűsítés közül azt kell választani, amely kevésbé rugaszkodik el a valóságtól. Nem akarjuk azonban szembeállítani a két modellt, s inkább az érdekel bennünket, hogy milyen eredményeket adnak.

[3] Az ex post állandó arányok feltevését Csehszlovákiában először *Z. Paikert* [9] használta modelljében. Lásd még *Gomulka–Kilozi* [3].

Ha ex post állandó arányok érvényesülnek, a termelés növekedése csak annak az erőforrásnak a bővülésétől függ, amely a növekedési ütem korlátozó tényezője.[4] A többi erőforrást nem kell figyelembe venni a termelési függvényben. Fejlett gazdaságra az a feltevés tűnik adekvátnak, hogy a munkaerő a rendelkezésre álló kapacitásokhoz képest szűkös. A kapacitások nagyobbszámú munkaerő foglalkoztatására elegendők, mint a kialakult foglalkoztatási színvonal.[5] *A növekedés korlátozó tényezője tehát a munkaerő.*[6] Ebben a helyzetben — mint arra *G. A. Feldman* rámutatott — a termelés növekedési ütemét az — úgynevezett effektív egységekben mért — munkaerő dinamikája határozza meg, és ezért az állandó arányokat feltételező termelési függvényt a létszámra kell alapozni.

Alapvetően ellentétes körülmények érvényesülnek a fejlődő országokban. A meglevő termelőkapacitások nem képesek felszívni minden rendelkezésre álló munkaerőt. Ezekben a gazdaságokban ezért a termelőerők alacsony fejlettségi fokából fakadó munkanélküliség van. A gazdasági növekedés is kritikusan függ a tőke bővülésétől, és a termelési függvénynek ezt figyelembe kell vennie.

Az ex post állandó arányok modellje nem zárja ki a termelékenység növekedését, a technikai haladás létezését. Más kérdés azonban, hogyan lehet statisztikailag számszerűsíteni a technikai haladás hozzájárulását a gazdasági növekedéshez. A technikai haladás elemzése még a kezdeti lépéseknél tart. Ebben a tanulmányban ezért megelégszünk egy nagyon durva közelítéssel. A technikai haladást teljes egészében a meg nem testesült technikai haladásnak tulajdonítjuk. Elvileg így az időbeli trendnek kellene tartalmaznia a technikai haladás minden eredményét. Ez természetesen csak elméleti feltételezés. Minthogy nem tételezhetjük fel, hogy a modell feltevései pontosan teljesültek, a paraméter más hatásokat is tartalmazhat (például a lehetséges helyettesítési hatást, és mindazt, ami belekerül a véletlen eltérések vektorába).

2. Néhány gyakorlati megfontolás

Ezek voltak a kérdés elméleti vonatkozásai. A gyakorlati alkalmazásnál nem feledkezhettünk meg arról a körülményről sem, hogy a létszám a statisztikailag megfigyelt mennyiségeknek ahhoz a kis csoportjához tartozik, amelyekről hozzávetőlegesen azért tudjuk, mit is jelentenek. Bizonyos módszertani problémák itt is fellépnek, de ezek egyszerűen össze sem hasonlíthatók azzal a bizonytalansággal, amely a statisztikailag megfigyelt más mennyiségeket körülveszi (különösen az állóalapokat).[7]

Egy további „praktikus" megfontolás a korábbi munkák eredményeiből következik. A helyettesítést is figyelembe vevő termelési függvények (amelyek

[4] Ezt a tételt elsőként *G. A. Feldmann* bizonyította be 1928-ban [1]. A Feldmann-modell is állandó arányok feltételezésén alapult (ex post egészen biztosan, és esetleg ex ante is).

[5] Ezt a feltevést alátámasztják a fejlett országokban szerzett empirikus ismeretek. Teljességgel vitathatatlan, hogy a fejlett országokban teljes foglalkoztatás mellett is léteznek kihasználatlan kapacitások, és igen alacsony a műszakszám (a kapacitások átlagosan egy műszakban üzemelnek).

[6] A „korlátozó tényező" kifejezést elsőként *G. A. Feldmann* használta.

[7] Igen jól ismert az állóalapokra vonatkozó adatok rossz minősége. Tisztán statisztikai szempontból is fontos, hogy az alapok és az időbeli trend között erős a korreláció.

mind az állóalapokkal, mind a létszámmal számolnak) idősorokra alkalmazva nem adtak megnyugtató eredményeket. Az esetek túlnyomó többségében a számított paraméterek statisztikailag nem voltak szignifikánsak.[8] A termelési folyamatban szerepet játszó technikai összefüggések vizsgálata a figyelmet más termelési függvények felé fordította – elsősorban a dinamikus termelési függvények, keresztmetszet-vizsgálatok, állóalapokra épülő termelési függvények felé. A létszámra épülő termelési függvények további természetes alternatívaként kínálkoznak.

Befejezésül emlékeztetünk arra, hogy modellünk két alapvető feltételezésre épül: *a)* ex post állandó arányok érvényesülnek; *b)* a munkaerőkínálat a rendelkezésekre álló kapacitásokhoz képest viszonylag szűkös. Úgy véljük, hogy e feltételezések a csehszlovák, és különösen a csehországi gazdaságot illetően fölöttébb reálisak.[9]

A pontosság kedvéért még egy megjegyzést kell tennünk. A termelés és létszám közötti összefüggésre vonatkozó, alább következő ökonometriai vizsgálatok eredményei nem függenek attól, hogy elméleti feltevéseink érvényesek-e. A nyert eredmények elfogadható vagy elfogadhatatlan volta csak a számított paraméterek és további statisztikai jellemzők ellenőrzésével dönthető el. A két említett feltevés azonban *konzisztenssé* teszi elemzésünket a korábban feltételezett elméleti modellel. Avagy *T. Koopmans*szel szólva, érvényességük esetén a további vizsgálat már „az elmélettel való mérés".

Ha azonban minden eddig ismert tény ellenére az derülne ki, hogy a feltételek nem reálisak, abból annyi következtetést lehetne levonni, hogy méréseinknek nincs meg a korábbiakban megadott elméleti háttere. Nem következne azonban ebből, hogy maguk a következtetések „irreálisak". Az eredmények továbbra is bizonyos az eddigi növekedésben érvényesülő összefüggések statisztikai közelítései maradnának. Felmerülne azonban az az érdekes kérdés, hogy mely összefüggéseké, és milyen értelmezésben. A szkeptikus beállítottságú ember számára azonban ezek a kérdések mindig nyitott kérdések maradnak.

3. Az időbeli késleltetések problémája

A termelés és létszám közötti alapvető kapcsolatot természetesen nem nehéz számszerűsíteni. Az elemzést azonban néhány körülmény bonyolulttá teszi. Ehelyütt az időbeli késleltetések problémáját említjük meg.

A termelés és a létszám az idő előrehaladtával egyaránt változik. Par excellence dinamikus folyamatokról van itt szó. Ezekben a folyamatokban ezért sok, különböző (általunk nem ismert) lefolyású és hosszúságú időbeli késleltetés léphet fel. Nem sokkal ezelőtt egy kutatás rámutatott egy ilyen jellegű problémára. A munkatermelékenységnek *rövid távú ingadozásairól* van szó.[10] Kiderült, hogy a csökkenő ütemű termelésnövekedés időszakaiban csökken

[8] Ennek a jelenségnek az okait eddig nem tisztázták megnyugtatóan. Úgy tűnik azonban, hogy az alapvető okok a független változók korrelációjában és a két termelési tényező nehezen nyomonkövethető változásaiban rejlenek. A további kutatás során gondosabban kell ellenőrizni a helyzetet.

[9] Ez a következtetés mindenekelőtt a szabad munkaerőkínálat és az állóalapkihasználás alakulásának elemzéséből adódik. A munkaerőkínálat és -kereslet közötti viszony jelenlegi helyzetéről lásd [5].

[10] Lásd például *M. Toms* [11].

a munkatermelékenység növekedési üteme is, és ellentétes következmények érvényesek a növekvő ütemű növekedés időszakaiban. A tapasztalatok azt mutatják, hogy a munkatermelékenység dinamikája nagyon szoros korrelációt mutat a termelés dinamikájával.

Ezt a jelenséget különbözőképpen lehet magyarázni. Vitathatatlan azonban, hogy a legáltalánosabb ok a foglalkoztatás reakcióinak késése a termelés dinamikájának változásaihoz képest. A foglalkoztatottak száma nem alkalmazkodik azonnal és arányosan a termelés növekedési ütemének ingadozásaihoz. Ennek oka a foglalkoztatási színvonal rugalmatlansága lefelé, a más ágazatokban tapasztalható munkaerőhiány és általában a munkaerő-ráfordítás kvázi-állandó volta rövid időszakban. *A termelés dinamikus változásai nem vonnak maguk után arányos létszámváltozásokat, hanem a ledolgozott munkaórák, a munkaintenzitás és a munkaidő-kihasználás változásaiban jutnak érvényre.* Olyan rövid távú termelékenység-hullámzás alakul ki, amit a kváziciklus létezése és nem a technológia változásai váltanak ki.[11] A termelékenység ebben az összefüggésben tehát függő változó, amelyet a termelés ingadozásai határoznak meg.

Ezek a mozzanatok természetesen ,,gyengítik'' a termelés és létszám közötti kapcsolat szorosságát és olyan elemeket visznek be a vizsgált relációba, amelyek nem technológiai természetűek. A termelés dinamikájának ingadozásai mindenekelőtt az aggregált kereslet (különösen a beruházások és a készletek) egyenlőtlen növekedésével és szűk keresztmetszetek létrejöttével függenek össze. Kváziciklikus jellegű tényezőkről beszélhetünk tehát.[12]

Elemzésünkben arra törekszünk, hogy közelebb jussunk a létszám és termelés technológiai kapcsolataihoz. A kváziciklikus elemekkel áthatott paraméterekre az instabilitás jellemző, és az esetleges ex ante megfontolások szempontjából korlátozott a jelentőségük. A maximális cél az lenne, hogy a kváziciklikus mozzanatokat elkülönítsük a technológiai összefüggésektől, vagy másképpen, hogy megközelítsük a két mennyiség közötti alkalmazkodási folyamatban érvényesülő időbeli késleltetést.

Természetesen nehéz problémáról van szó, amelyről minimális a tájékozottságunk. A gyakorlatban különböző fajtájú késleltetések és különböző időhorizontú alkalmazkodási folyamatok léphetnek fel. Nagyon keveset tudunk az időbeli késleltetések *kauzalitásáról* is. Elméletileg azt lehet várni, hogy azokban az ágazatokban, ahol munkaerőhiány van, a termelés van késésben a létszám változásaihoz képest. Másfelől a munkaerővel jól ellátott ágazatokban inkább az lesz jellemző, hogy a létszámváltozás késik a termelés változásához képest. Igy fest a probléma ,,keresztmetszet''-szempontból. Analóg módon alakul viszont a helyzet az idősorok különböző pontjain (a kváziciklus eltérő fázisaiban).

Nyújt bizonyos lehetőségeket az ún. osztott késleltetések (distributed lags) bevezetése a termelés és létszám közötti kapcsolatba. Ezzel dinamikus termelési függvényhez jutunk, amely figyelembe veszi a termelés és létszám közötti alkalmazkodási folyamatokat.

[11] A termelékenység rövidtávú ingadozásai részben mérésének módszeréből következnek (a munkaráfordítást a foglalkoztatottak számával számszerűsítik). Ha pontosabb információ állna rendelkezésünkre a kifejtett munka mennyiségéről és intenzitásáról, akkor ez a ,,rövidtávú ingadozás'' nemlétezőnek bizonyulhatna. Részletesebben lásd [11].

[12] Ezt a fogalmat a *J. Goldman* és *K. Kouba* által a [2] könyvben bevezetett értelmezésben használjuk.

4. Az osztott késleltetések elméletének alapfogalmai

A közgazdasági elemzésben jelentős teret nyert az elosztott késleltetések elmélete.

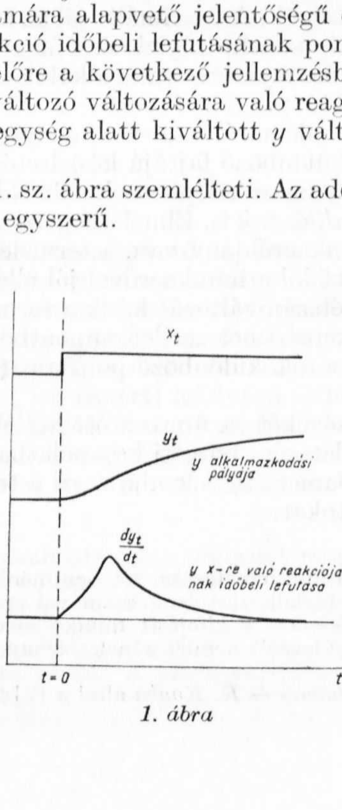
A közgazdasági mennyiségeknek az azokat meghatározó mennyiségek változásaira való reagálása nem annyira azonnali, mint amennyire azt a ,,tiszta'' elmélet rendszerint feltételezi. Egész sor technológiai, institucionális, gnoszeológiai stb. tényező hatására a gazdasági mennyiségek késve és fokozatosan reagálnak. A megváltozott színvonalon ezért nem azonnal, hanem olyan *alkalmazkodási folyamat* során jön létre az egyensúly, amely meghatározott időtartam alatt megy végbe. Azzal, hogy az azonnali reagálás helyébe az alkalmazkodási folyamatot állítjuk, a statikus gazdaságtan (a komparatív statika) területéről eljutunk a dinamikus folyamatok elemzéséhez, a gazdasági mozgás elméletéhez.

A problémát a legkönnyebben az alábbi példával világíthatjuk meg. Tételezzük fel, hogy a függő változó (valamilyen endogén közgazdasági mennyiség) csak egy x független változó (exogén mennyiség) függvénye. A kiinduló helyzetben x konstans és a két mennyiség között egyensúly érvényesül. Feltételezzük, hogy adott időpillanatban x egyszerű emelkedése következik be és ezen a szinten ismét konstans marad.

x emelkedése a kiinduló egyensúly megbomlását eredményezi, és y az új egyensúlyi helyzet irányába mozdul el, amit x új színvonala határoz meg. Persze y változása (az említett tényezők következtében) nem egy időpillanatban megy végbe, hanem meghatározott módon eloszlik az időben. Megjelenik tehát az elosztott késleltetés y-nak x változására való reagálásában.

A közgazdaságtan számára alapvető jelentőségű e reakció időbeli lefutásának megismerése. A reakció időbeli lefutásának pontos meghatározását a későbbiekben adjuk. Egyelőre a következő jellemzésből indulunk ki: A függő változónak a független változó változására való reagálásának időbeli lefutásán az x változása által időegység alatt kiváltott y változások idősorát érthetjük (dy/dt).

Az elmondottakat az 1. sz. ábra szemlélteti. Az adott esetben y reakciójának időbeli lefutása nagyon egyszerű.



1. ábra

A grafikus szemléltetést most függvényszerűen is kifejezhetjük. Általánosan felírhatjuk, hogy

$$y_t = f\ (x_t,\ x_{t-1},\ x_{t-2},\ \ldots) \tag{1}$$

Az (1) lineáris közelítése a következőképpen írható fel:

$$y_t = \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \ldots = \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i x_{t-i}\,. \tag{2}$$

A β együtthatókat *reakcióegyütthatóknak* nevezzük. Ha feltételezzük, hogy az egyensúly megbomlását követően y úgy reagál, hogy közeledik az új egyensúly hoz, akkor a $\Sigma\beta_i$ sorozatnak konvergensnek kell lennie.

A β_i reakcióegyütthatók sorozata jelenti az y-nak az x változásaira való reakciója időbeli lefutását. Az egyenletből az következik, hogy y-t nem csupán x egyidejű értéke, hanem számos múltbeli x is meghatározza. Az y függő változó ezért a „történelmi" x_{t-i} $(i = 0, 1, \ldots)$ értékek súlyozott átlagának függvénye, ahol a súlyok arányosak a reakcióegyütthatókkal. Ezek voltak az osztott késleltetések elméletének alapelemei.

A reakcióegyütthatók statisztikai becslésénél természetesen problémák merülnek fel. Elméleti szempontból i a végtelenig futhatna. A többszörös korreláción alapuló becslési módszerek persze csak olyan esetekben adnak viszonylag megnyugtató eredményeket, ha a reakció 2—3 időszakra oszlik el. Az x_t, x_{t-1}, x_{t-2} ... idősorban jelentős korreláció miatt multikollinearitás lép fel, ami levon a becslés értékéből. A további regressziós együtthatók pedig értelmetlenné válnak (ami a késletetett független változók közötti nagyfokú autokorreláció nyilvánvaló következménye). Nagyok a standard hibák és a becsült regressziós együtthatók semmiféle információt sem nyújtanak a reakció időbeli lefutásáról.

A probléma egy bizonyos megoldását adta *L. M. Koyck* [7]. Az volt a célja, hogy csökkentse a független változók számát s ezzel a függvény statisztikailag könnyebben legyen kezelhető. Koyck abból a hipotézisből indult ki, hogy a reakcióegyütthatók sorozata egy bizonyos ponttól kezdve közelíthető konvergens mértani sorozattal. Más szóval Koyck feltételezte, hogy egy bizonyos i indextől a reakcióegyütthatók *állandó arány szerint csökkennek*.

Ennek a hipotézisnek az alapján (1) helyébe a következőt írhatjuk:

$$y_t = \beta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^j x_{t-j} \qquad 0 \leq \lambda \leq 1 \tag{3}$$

vagy

$$y_t = \beta_0(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \lambda^j x_{t-j}). \tag{4}$$

Irjuk fel (4)-t y_{t-1}-re és szorozzuk meg λ-val:

$$y_{t-1} = \beta_0\ (\lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \lambda^j x_{t-j}) \tag{5}$$

vagy

$$\lambda y_{t-1} = \beta_0 \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{j+1} x_{t-j-1}\,. \tag{6}$$

Kivonva (4)-ből (5)-öt a következőt kapjuk:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \beta_0 x_t \tag{7}$$

A (7) összefüggés a következő egyszerűbb alakra hozható:

$$y_t - y_{t-1} = \beta_0 x_t - (1 - \lambda)\, y_{t-1} \tag{8}$$

vagy

$$\Delta y_{t-1} = \beta_0 x_t - \gamma\, y_{t-1} \tag{9}$$

ahol

$$\gamma = 1 - \lambda \tag{10}$$

Világos továbbá (7)-ből, hogy y_t-re igaz a következő:

$$y_t = \beta_0 x_t + \lambda y_{t-1} \tag{11}$$

A kapott összefüggést *Koyck-féle átalakításnak* nevezzük. Ha összehasonlítjuk az (1) és a (11) összefüggéseket, azt láthatjuk, hogy az átalakítás elfogadható mértékűre csökkentette a független változók számát.

Ha y-nak x-re vonatkozó rugalmasságát vizsgáljuk, a rövid és hosszú időszakra vonatkozó rugalmasság között jelentősek lehetnek a különbségek. Ha nincs kizárva az időbeli késleltetés lehetősége y-nak x változásaira való reagálásában, akkor az alkalmazkodási folyamat figyelmen kívül hagyása az y és x közötti kapcsolat hibás felfogását eredményezheti. Ha az időbeli késleltetés számottevő, akkor különbség van a rugalmasság értékében rövid és hosszú időszakra.[13]

A (9) összefüggésből következik, hogy az új egyensúlyi helyzet létrejöttekor, vagyis amikor $\Delta y_{t-1} = 0$, érvényes, hogy

$$y_t^* = \frac{\beta_0}{1 - \lambda} x_t \tag{12}$$

Ebből a következőképpen fogalmazható meg a rugalmasság hosszú időszakban, vagyis az időbeli késleltetésektől megtisztított reakcióegyüttható:

$$\beta^* = \frac{\beta_0}{1 - \lambda} \tag{13}$$

A (13)-ból következnek a kétféle rugalmasság közötti összefüggések. Ha nincs időbeli késleltetés ($t=0$), y-nak x változásaira való reagálása olyan gyors, hogy y mindig még az adott időszakban eléri új egyensúlyi értékét. Így a (11) egyenletben értelmét veszti a késleltetett változó. A rugalmasság rövid és hosszú időszakban hasonló. Ellenkező esetben a kétféle rugalmasság eltérő. Minél lassúbb az alkalmazkodási folyamat, annál nagyobbak az eltérések.

Ezeknek a következtetéseknek közvetlen jelentősége van problémánk szempontjából. Az elemzés megmutatta, hogy a termelés és létszám közötti egyszerű kapcsolat becslése olyan paramétert adhat, amelyet torzít, ha figyelmen kívül hagyjuk az időbeli késleltetést. Indokolt ezért, hogy közelebbről meghatározzuk az időbeli késleltetést, és ellenőrizzük, hogy szignifikáns-e vagy sem. Elméleti szempontból ezt a (11)-ben szereplő λ regressziós koefficiens szignifikanciájára vonatkozó statisztikai próbának kellene megmutatnia.

Nem tudunk olyan korábbi munkáról, amely osztott késleltetésekkel dolgozott volna.[14] A becslések azt tételezték fel, hogy a termelésnek a termelési

[13] A probléma bővebb elemzését lásd [11].
[14] Csehszlovákiában.

tényezők volumenére való reagálásában *semmiféle* időbeli késleltetés nincsen, ami természetesen fölöttébb nagyvonalú feltevés. Nem kell hosszabban bizonygatnunk, hogy ezekben a reagálásokban léteznek bizonyos késleltetések.

Ebben a tanulmányban a Koyck-féle osztott késleltetéssel dolgozunk. Feltételezzük, hogy a termelés és létszám közötti időbeli késleltetések jól közelíthetők ilyen típusú késleltetésekkel. Teljes mértékben elképzelhető persze az, hogy más modellek majd alkalmasabbnak vagy esetleg pontosabbnak bizonyulnak. Munkánk ezért az ebben az irányban folytatandó hosszútávú kutatás kiindulásának tekintendő.

5. A létszámra épülő dinamikus termelési függvény felírása

Az ökonometriai vizsgálatnál az ismertetett elméleti megfontolásokból indultunk ki. A termelés és létszám közötti összefüggésben vigyelembe vettük az osztott késleltetést.[15]

$$Q_t = AE_t^{\beta_1} E_{t-1}^{\beta_2} Q_{t-1}^{\beta_3} e^{\beta_4 t}, \tag{14}$$

ahol Q a termelés és E a létszám. Egyszerű átalakítással olyan formulát kapunk, amely lehetőséget nyújt a statisztikai becslésre.

$$\log Q_t = \log A + \beta_1 \log E_t + \beta_2 \log E_{t-1} + \beta_3 \log Q_{t-1} + \beta_4 t \tag{15}$$

Szemmelláthatóan dinamikus termelési függvényről van szó. A függvény közelítést ad a termelés és létszám közötti dinamikus alkalmazkodási folyamatra. Az utolsó független változónak (az exponenciális időbeli trendnek) kell tartalmaznia minden, a létszám hozzájárulásán kívüli termelési effektust. Mint kimutattuk, elméleti szempontból lényegében a technikai haladásról van szó.

Természetesen a függvény lineáris alakja is vizsgálható. Ebben a tanulmányban azonban csak az említett alakkal dolgoztunk.[16] Bizonyos előnye ennek a megközelítésnek, hogy a kapott β_1 paraméterek közvetlenül a termelésnek az adott változó szerinti rugalmasságát jelentik.[17] A további vizsgálatok használhatnának lineáris függvényeket is, majd pedig összehasonlítást lehetne végezni arra vonatkozólag, hogy melyik az előnyösebb.

A (14) függvény mellett becslést végeztünk a termelés és létszám közötti egyszerű kapcsolatra is:

$$\log Q_t = \log A + \beta_1 \log E_t \tag{16}$$

Ez a termelési függvény különbözőképpen interpretálható. Bizonyos szempontból statikus függvényről lehetne beszélni (nem veszi figyelembe az alkalmazkodási folyamatot), vagy pedig a két mennyiség között érvényesülő alapvető tapasztalati összefüggésről.

A (14) típusú függvény alkalmazásakor fellép a multikollinearitás veszélye. Ebben rejlik azoknak az ellenvetéseknek a magva, amelyek hangsúlyozzák a független változók közötti erős korreláció lehetőségét. Ebből a szempontból is az időbeli trendnek a függvénybe való bevezetése tűnik különösen „veszélyesnek”.

*

[15] Lásd *E. Kuh* [8].

[16] Logaritmikusan lineáris függvényről van szó.

[17] A pontosabb értelmezést lásd később.

Ahhoz, hogy véleményt mondhassunk a potenciális ellenvetések megalapozottságáról, elvégeztünk egy nagyobb próbát. A függvényben egymás után vezettük be az újabb és újabb független változókat, és figyeltük, hogy mi tör ténik egyes jellemzőkkel. Egészében véve a termelési függvények alábbi „kollekciójára" végeztük el a számítást:

$$\log Q_t = \log A + \beta_1 \log E_t \tag{I.}$$

$$\log Q_t = \log A + \beta_1 \log E_t + \beta_2 \log E_{t-1} \tag{II.}$$

$$\log Q_t = \log A + \beta_1 \log E_t + \beta_2 \log E_{t-1} + \beta_3 \log Q_{t-1} \tag{III.}$$

$$\log Q_t = \log A + \beta_1 \log E_t + \beta_2 \log E_{t-1} + \beta_3 \log Q_{t-1} + \beta_4 i \tag{IV.}$$

A próba első lépése nyilvánvalóan a (16) egyszerű termelési függvény becslése. Az egyes termelési függvények becslése alapján látható, hogy milyen következményekkel jár az újabb meg újabb független változók bevezetése a modellbe. Lényegében három kérdéscsoportról van szó:

a) a regressziós együtthatókra gyakorolt hatásról;

b) a számítás efficienciájára (a reziduális szórásra) való hatásról;

c) a becslés statisztikai szignifikanciájára gyakorolt hatásról.

A közgazdasági elemzés szempontjából az első mozzanat a legérdekesebb. A második nyilvánvaló. Pótlólagos változó bevezetése rendszerint növeli a regressziós együtthatót. Ugyanakkor persze erősíti a korreláció intenzitását, ami főleg a standard hibáknak viszonylagos növekedésében nyilvánul meg a regressziós együtthatókhoz képest. Ebből a tényből indulnak ki az említet ellenvetések. Ezért kívántuk modellünkben próbával ellenőrizni, mennyire megalapozott ez az elterjedt álláspont.

6. Statisztikai alkalmazás

Termelési függvényeink alkalmazásakor a termelésre és a létszámra vonatkozó adatokra van szükség. Itt többféle lehetőség és kombináció kínálkozik. A kiinduló adatok megválasztását azonban behatárolják a rendelkezésre álló statisztikai források. Esetünkben főleg az volt fontos, hogy a lehető leghosszabb időszakra vonatkozó konzisztens idősorokat kapjunk. Az alkalmazás szempontjából a másik követelmény az idősoroknak régiók közötti, valamint a két szektor közötti kölcsönös összehasonlíthatósága. Ezért a következőképpen jártunk el:

A létszám számszerűsítéseként az *ipari tevékenységet folytató munkások* számát szerepeltettük. Elvégeztük a számítást az összes ipari foglalkoztatottra épülő függvényre is. Az első változattal azonban sokkal kedvezőbb eredményeket kaptunk — szorosabbnak és erősebbnek találtuk a munkások száma és a termelés közötti összefüggést.[18] Ez a megállapítás közgazdasági szempontból nyilvánvaló és könnyen megmagyarázható. A létszámnak a munkásokon kívüli része nem befolyásolja közvetlenül a termelést és — számottevő mértékben — autonóm módon alakul.

[18] Hasonló eredményre jutott minden (általunk ismert) nemzetközi vizsgálat is.

Termelési mutatókul némi tétovázás után az 1968 évi változatlan árakon mért teljes termelést választottuk.[19] A mutató megválasztása a modellel végzett további ,,manőverek'' által támasztott követelményekkel függött össze. Nagyon érdekelt bennünket, hogy milyen eredményeket szolgáltat a modell dezaggregált adatokra történő alkalmazáskor. A kutatás adott fokán elsősorban arról volt szó, hogy külön vizsgálhassuk a termelőeszköz-termelés szektorának és a fogyasztásicikk-termelés szektorának dinamikáját.[20] Ez a bontás elméleti szempontból vonzó és érdekes gyakorlati következtetésekhez is vezethet. A két szektorból nyert eredményeket azután egybevetettük az egész ipari termelés elemzésével. Természetesen tisztában vagyunk a teljes termelés mutatójának valamennyi alapvető hiányosságával. Az elért előnyért azonban meg kellett fizetnünk ezt az árat.[21] Egyúttal érdekelt bennünket külön a *csehországi* iparra vonatkozó termelési függvények meghatározása is (regionális bontás). Elvégeztük ezért ugyanezeket a számításokat a csehországi iparra. Így a csehszlovák és csehországi iparra, egészében és kettébontva, termelési függvények egész ,,kollekcióját'' kaptuk meg. Minden termelési függvényt az 1948–1968-as időszakra vonatkozó adatokból nyertünk.

A függvényeket közvetlenül a legkisebb négyzetek módszerével határoztuk meg. A kapott eredményeket az 1. és 2. sz. táblázat tartalmazza. A táblázatokban összefoglaltuk a próba valamennyi fontos jellemzőjét.[22]

A próba kritériumául t eloszlású mennyiséget választottunk (a kiszámított **t** értékeket a regressziós együtthatók mellett zárójelben szerepeltetjük). A kapott **t** értékeket egybevetettük a megfelelő kritikus értékekkel.[23]

A **t** értékek változásainak figyelemmel kísérése pótlólagos független változók bevezetésénél fontos információt szolgáltat a független változók közötti korreláció változásairól.[24] Nem szabad azonban elhamarkodottan véleményt alkotni, előnyös-e vagy nem egy-egy újabb független változó bevezetése. Egy újabb magyarázó változó bevezetésének közvetlen hatása lehet negatív (csökkenti a már korábban bevezetett változók regressziós együtthatóinak t értékeit). Végső ítéletet csak utólag lehet mondani arról, hogy indokolt-e az adott

[19] Az idősorokat változatlan árakra és egységes szervezeti felépítésre számították át Lásd [10].

[20] Az ipari termelés ,,A'' és ,,B'' csoportjáról van tehát szó. A továbbiakban termelő eszköz-gyártó szektorról és fogyasztásicikk-gyártó szektorról beszélünk.

[21] Statisztikánk nem szolgáltat adatokat az ipari termelés ,,A'' és ,,B'' csoportjára a tiszta termelésről (vagy a hozzáadott értékről). Csak a teljes termelés adatai állnak rendelkezésünkre. Ez a további, ,,praktikus'' oka annak, hogy a munkaerőráfordítást a munkások számával tudjuk számszerűen megragadni. Statisztikánk megint csak nem figyel meg más adatot a létszámra vonatkozóan a két csoportra.

[22] Az eddigi csehszlovákiai ökonometriai tanulmányok túlnyomó többsége (azokat is ideértve, amelyek helyettesítést is figyelembe vevő termelési függvényeket számítottak) nem publikálta az egyes regressziós együtthatók becslésének statisztikai jellemzőit. Nem folytatjuk ezt a tradíciót, mert ez lehetetlenné teszi a kapott eredmények komoly értékelését.

[23] A **t** érték a regressziós együtthatónak standard hibájához mért arányát adja meg. Ha az egyenlet jobboldalán fokozódik a magyarázó változók közötti korreláció, akkor csökken a **t** érték (a regressziós együttható értékéhez képest növekszik standard hibája. A függő változó alakulásának magyarázatához való ,,hozzájárulása'' minimális, sőt még negatív is lehet (a reziduális szórás nem csökken, még növekedhet is). A kapott **t** érték a szabadságfokok adott száma mellett nem éri el a kritikus értéket (a választott szignifikancia-szint mellett). Ezt tükrözi az úgynevezett **t**-próba.

[24] Esetünkben a *B. Woolf* által a [12]-ben javasolt próbamódszer került alkalmazásra

1. táblázat

A csehszlovák ipar rövidtávú termelési függvényei (1948–1968)

	$\log E_t$	$\log E_{t-1}$	$\log Q_{t-1}$	t	R^2	RES
A. Egész ipar						
I.	3,580 (45,80)	–	–	–	99,15	0,002231
II.	3,183 (3,73)	0,3874 (0,47)	–	–	09,16	0,002333
III.	1,804 (4,73)	–1,073 (2,85)	0,7625 (9,21)	–	99,87	0,0003936
IV.	1,817 (4,93)	–1,310 (3,28)	0,7332 (8,88)	0,008070 (1,45)	99,88	0,0003682
B. Termelőeszközgyártó szektor						
I.	3,341 (56,46)	–	–	–	99,44	0,001813
II.	2,089 (3,50)	1,160 (2,10)	–	–	99,55	0,001523
III.	1,910 (5,18)	–1,209 (2,18)	0,7755 (5,89)	–	99,84	0,0005752
IV.	1,874 (5,19)	–0,8598 (1,43)	0,5990 (3,12)	0,008073 (1,35)	99,86	0,0005474
C. Fogyasztási cikk gyártó szektor						
I.	3,769 (13,09)	–	–	–	90,49	0,01827
II.	6,172 (4,61)	–2,572 (1,83)	–	–	92,06	0,01615
III.	1,350 (5,98)	–0,8578 (4,63)	0,8208 (32,36)	–	99,88	0,0002582
IV.	1,341 (6,10)	–0,9048 (4,93)	0,7511 (13,32)	0,006244 (1,37)	99,89	0,0002474
V.	1,403 (6,35)	–0,9883 (4,95)	0,7980 (27,57)	0,0001422 (1,47)	99,90	0,0002406

2. táblázat

A csehországi ipar rövidtávú termelési függvényei (1948–1968)

	$\log E_t$	$\log E_{t-1}$	$\log Q_{t-1}$	t	R^2	RES
A. Egész ipar						
I.	3,925 (36,41)	—	—			
II.	2,481 (2,64)	1,390 (1,55)	—	—	98,66	0,003049
III.	1,341 (3,14)	−0,7952 (1,71)	—	—	98,83	0,002829
IV.	1,737 (4,37)	−1,143 (2,72)	0,8205 (8,64)	—	99,79	0,0005309
			0,6590 (6,42)	0,01302 (2,59)	99,86	0,0003912
B. Termelőeszköz gyártó szektor						
I.	3,466 (38,70)	—				
II.	1,431 (1,67)	1,854 (2,39)				
III.	1,588 (3,35)	−1,415 (2,10)	—	—	98,81	0,003310
IV.	1,769 (3,97)	−0,7359 (1,04)	—	—	99,11	0,002624
C. Fogyasztási cikk gyártó			0,9302 (6,30)	—	99,74	0,0008012
szektor			0,5242 (2,12)	0,01478 (1,96)	99,80	0,0006801
I.	4,591 (11,44)	—	—	—	87,91	0,02008
II.	6,603 (4,40)	−2,160 (1,39)	—	—	89,14	0,01910
III.	1,397 (5,98)	−0,8694 (4,61)	0,8352 (34,48)	—	99,86	0,0002695
IV.	1,485 (7,63)	−0,9953 (6,18)	0,7039 (14,40)	0,009779 (2,94)	99,91	0,0001823
V.	1,572 (7,92)	−1,114 (6,44)	0,7817 (29,61)	0,0002204 (3,04)	99,91	0,0001779

A regressziós együtthatók mellett zárójelben szereplő adatok a megfelelő **t** értékek.

A t-vel jelölt oszlop az időbeli trend változóját jelenti. R^2 a korrelációs együttható. RES a reziduális szórás.

A táblázat első oszlopában szereplő római számok az egyes függvényeket jelentik a szöveg 5. részével összhangban.

változó bevezetése. Újabb változóknak a modellba való bevezetése ugyanis – mint arra B. Woolf rámutatott – megfordíthatja az eredetileg negatív hatást. Különösen érvényes ez késleltetett változókra.

Egyértelmű következtetéseket az eredményekből természetesen nem lehet levonni. Felmerül néhány probléma. Főleg egyre hívjuk fel a figyelmet. A reziduumok erős pozitív autokorrelációja esetén a standard hibák „aláértékelődnek", a korrelációs indexek pedig „túlértékelődnek".[25] A további kutatás során ezeket a kérdéseket részletesebben meg kell vizsgálni.

Csak jelezhetjük, hogy hasonló probléma merül fel minden ökonometriai modell sztochasztikus egyenleteinek becslésénél. Hogy a mérce mennyire szigorú, az attól függ, hogy mi az elemzés célja — paraméterek értékének meghatározásáról van-e szó, vagy pedig az egész függvény közelítéséről a fejlődés ex post nyomonkövetése és rövidtávú ex ante megfontolások szempontjából.

7. Az I. függvény becslése

A két táblázat tanulmányozása alapot ad bizonyos következtetésekre és általánosításokra. A legérdekesebbek a következők.

A létszám és termelés közötti egyszerű függvénykapcsolat (5. függvény) rendkívül jó eredményeket ad. A regressziós együtthatók minden esetben 3,0 fölött vannak (a 3,3–4,6 sávban mozognak), és a standard hibák nagyon kicsik. Valamennyi regressziós együttható statisztikailag erősen szignifikáns (lásd a **t**-próba értékeit). A függvény a termelés szórásának több mint 98 százalékát „megmagyarázza". A legerősebb összefüggést a csehszlovák ipar termelőeszköz-gyártó szektorában találtuk, viszonylag a leggyengébbet pedig a fogyasztásicikk-gyártó szektorokban, erre később visszatérünk. Mindkét ténynek lehet jelentősége közgazdasági szempontból.

Néhány megjegyzést kell most tennünk e termelési függvény paraméterének (a β_1 regressziós együtthatónak) az értelmezésével kapcsolatban. A paraméter legközvetlenebbül kínálkozó értelmezése a termelés munka szerinti rugalmassága lenne. Ez az értelmezés azonban nem lenne pontos (illetve nem lenne szükségképpen az). Amennyiben érvényesül a technikai haladás, illetve amennyiben a tőkeképződésnek egyáltalán van helyettesítési hatása, a paraméter értékében mindkét hatás kifejezésre jut. A paramétert ezért nem lehet a munka szerinti rugalmasságként felfogni, a szó szoros értelmében (azaz mint $\partial Q/\partial E \cdot E/Q$-t), hanem csak közelítően (azaz mint $dQ/dE \cdot E/Q$-t).[26] A paraméter megmondja, hogy hány százalékkal növekszik a termelés, ha ceteris paribus a létszám 1 százalékkal növekszik. A ceteris paribus kikötésnek itt ismert sajátos értelme van. A paraméter azt fejezi ki, hogy hány százalékkal növekszik a termelés, ha a technikai haladás üteme nem változik az eddigihez képest és változatlan lesz a tőkeképződés helyettesítési hatása.

Ha a szöveg további részében a termelés munka szerinti rugalmasságáról beszélünk, az ilyen értelemben definiált kategóriára gondolunk.

[25] E kérdés megítélését a Durbin-Watson együttható teszi lehetővé.

[26] Itt is látható, hogy mennyiben tér el a (15) függvény lineáris alakjától. A lineáris függvénynél a paraméter a következőképpen határozható meg: dQ/dE.

8. További magyarázó változók bevezetése

A második független változó (E_{t-1}) bevezetése rontja a becslés eredményét — az E_t paramétereknél feltűnően csökkennek a **t** értékek. Az E_{t-1}-nél a regressziós együtthatók (az esetek többségében) statisztikailag nem szignifikánsak a 0,05 szignifikancia-szintnél. A becslés efficienciája nem növekszik különösebben.

Igen érdekes viszont a kísérlet harmadik lépése. A harmadik független változó (Q_{t-1}) bevezetése számottevően javítja a becslést. Az előző változathoz képest több mint kétszeres csökkenés következik be a standard hibáknál. A **t**-próba értékei megnövekednek.[27] Igen magas **t** érték adódott a Q_{t-1} változónál is. Ebben a lépésben jelentősen megnövekszik a becslés efficienciája — a legjobban az összes lépések közül.[28] Mindez arról tanúskodik, hogy Q_{t-1}-nek kedvező hatása van, és érdemes bevezetni a modellba. Figyeljük meg, hogy E_{t-1}-nél minden regressziós együttható negatív.[29] Ez várható volt, és alátámasztja az osztott késleltetések mechanizmusára vonatkozó hipotézist (lásd később).

Mint említettük, nagyon kíváncsiak voltunk arra, hogy milyen hatása lesz az exponenciális időbeli trend bevezetésének a modellba. Vizsgálatunk azt mutatja, hogy az elfogultságnak itt nincs helye. Az időbeli trend bevezetésének egyfelől pozitív a hatása. A **t**-próba értékei egy eset kivételével emelkedtek. Emelkedett továbbá a becslés efficienciája.[30] Enyhén negatív hatás csak a Q_{t-1} jellemzőinél érvényesült. Azért nevezzük enyhének, mert a hatás nem számottevő. A regressziós együtthatók statisztikailag erősen szignifikánsak maradnak a Q_{t-1}-nél. Az időbeli trend paraméterei statisztikailag a 0,05 valószínűségi szinten szignifikánsak a csehországi iparra vonatkozó valamennyi alkalmazásnál. A csehszlovák ipar esetében a kapott eredmények a 0,10 szinten szignifikánsak.

A továbbiakban egy érdekesebb módon is megpróbáltuk bevezetni a függvénybe az időbeli trendet. *Kvardatikus időbeli trenddel* próbálkoztunk. A IV. függvényt az alábbi V. függvénnyel helyettesítettük:

$$\log Q_t = \log A + \beta_1 \log E_t + \beta_2 \log E_{t-1} + \beta_3 \log Q_{t-1} + \beta_4 t^2 \qquad \text{(V.)}$$

Ilyen módon próbáltuk meg gyengíteni a multikollinearitást és megakadályozni a technikai haladás paraméterének túlértékelését.[31]

A kvadratikus időbeli trend megragadhatta a technikai haladás ütemének esetleges felgyorsulását is. A kutatás jelen szakaszában az V. függvényt csak a csehországi és csehszlovák ipar fogyasztásicikk-gyártó szektorára alkalmaztuk. Már az indulásnál kiderült ugyanis, hogy itt magyarázta meg a létszám a termelés változásainak viszonylag legkisebb százalékát (90,5 százalék a csehszlovák és 87,9 százalék a csehországi iparnál). A létszám ebben a szektorban lassan nőtt, míg a termelés gyorsan bővült — gyorsan növekedett a munkatermelékenység és a rugalmasság E_t szerint igen magas. Más szóval az időbeli trendnek itt nagyobb szerepet kellett játszania.

[27] Egy regressziós együttható csekély kivételével.
[28] Leginkább a csehszlovák és csehországi ipar fogyasztásicikk-gyártó szektorában.
[29] A III. és IV. függvényre gondolunk.
[30] Leginkább a fogyasztásicikk-gyártó szektorokban, különösen a csehországiban.
[31] És a többi paraméter aláértékelését.

A számítások azt mutatják, hogy a kvadratikus időbeli trend bevezetésének pozitív hatása van. A **t**-próba értékei valamennyi regressziós együtthatónál emelkednek. Különösen megemelkedik a **t** érték magánál az időnél, ami legalábbis bátorító. A csehországi fogyasztásicikk-termelő szektorra való alkalmazásból végülis olyan függvény adódott, amely statisztikailag a 0,005 szinten szignifikáns.

Mindamellett nem tartjuk könnyűnek határozott következtetések levonását ilyen kis tapasztalati anyag alapján. A további kutatásoknak kell ellenőrizniük, hogy milyen lehetőségek kínálkoznak erre.

9. „Hosszútávú" termelési függvények

A kapott termelési függvényeket a létszámra és termelésre vonatkozó múltbeli adatok alapján számítottuk, és így az *ex post* érvényesülő összefüggéseket kellett közelíteniük. Említettük azonban, hogy rövid időszakban eltérhet egymástól a valóságos és a technológiailag indokolt foglalkoztatási színvonal. Ebben az esetben azután a számított termelési függvények paraméterei nemcsak a technológiai összefüggéseket fejezik ki, hanem a termelés dinamikájában érvényesülő kváziciklikus fluktuáció hatásait is.

Az alkalmazások azt mutatták, hogy a Q_{t-1}-nél a regressziós együttható aránylag magas és egyúttal statisztikailag szignifikáns. Az osztott késleltetések elméletéből így két következtetés adódik: a) az alkalmazkodási folyamat viszonylag lassú volt; b) a két mennyiség közötti eltérés valóban fennállt. Kísérletet kell ezért tenni a paramétereknek a kváziciklikus elemektől való „megtisztítására", és így kell közelebb jutni a technológiai jellegű összefüggéseket ábrázoló termelési függvényekhez.

A függvénybe e célból bevezettük az osztott késleltetést. Az osztott késleltetések elméletéből következően

$$\log Q^* = \frac{\log A}{1-\beta_3} + \frac{\beta_1+\beta_2}{1-\beta_3}\log E^* + \frac{\beta_4}{1-\beta_3}t. \tag{17}$$

Ez a termelési függvény az alkalmazkodási folyamat befejeződését követően megkapható. A (17) függvénynek azt a növekedési pályát kell leírnia, amelyen nincs eltérés a valóságos és a technológiailag indokolt létszám között. Adott foglalkoztatási színvonal mellett a függvény azt a *potenciális termelést* ábrázolja, amely az aggregált kereslet egyenletes fejlődése mellett valósulna meg. Beszélhetnénk az állandó növekedés állapotának termelési függvényéről is. A regressziós együtthatók Q_{j-1}-nél elért értékeiből következik, hogy az alkalmazkodási folyamat közepesen hosszú időperiódusban megy végbe, ami azt jelentheti, hogy a (17) termelési függvény a 3–5 éves időszak fejlődésére vonatkozólag releváns.

A függvényből kifejezhetjük a növekedés ütemét:

$$\frac{\Delta Q^*}{Q^*} = \frac{\beta_1+\beta_2}{1-\beta_3}\left[\frac{\Delta E^*}{E^*} + \frac{\beta_4}{l-\beta_3}\right]. \tag{18}$$

Mindkét egyenlet a létszám és termelés közötti technológiai kapcsolat közelítéséhez való hozzáállást jellemzi. Csupán arra kívánunk emlékeztetni, hogy ez a közelítés függ az osztott késleltetések választott modelljétől.

Tisztán terminológiai szempontból gyakran felvetődik a kérdés, hogy hogyan nevezzük a (17) termelési függvényt. Ha az osztott késleltetések elméletének terminológiáját alkalmazzuk, akkor hosszútávú termelési függvényről (és hosszútávú rugalmasságokról) beszélhetünk. Analóg terminológiát használnak a fogyasztási függvény elméletében is. A hosszútávú termelési függvény fogalmának azonban nem adható más értelmezés, mint az, amit az osztott késleltetések elméletében kapott. A „hosszútávú" jelző csak azt fejezi ki, hogy olyan relációról van szó, amelyhez az *alkalmazkodási folyamat közelítése* nyomán jutottak el.[32] Minthogy az elemzésből az következik, hogy az alkalmazkodási folyamat elég lassan megy végbe, állíthatjuk, hogy az ilyen termelési függvény közepes hosszúságú időperiódus vonatkozásában releváns. A (17) függvény alternatív megnevezése az állandó növekedés állapotának termelési függvénye kifejezés lehet.

E termelési függvény paramétereit a 3. sz. táblázat tartalmazza.

Valamennyi „hosszútávú" rugalmasság ($\beta_1 + \beta_2/1-\beta_3$) alacsonyabb, mint az I. függvény becslésénél kapott rugalmasságok. Értékük azonban magasabb,

3. *táblázat*

A csehszlovák és csehországi ipar „hosszutávu" termelési függvényei paramétereinek becslése

	$\frac{\beta_1+\beta_2}{1-\beta_2}$	$\frac{\beta_4}{1-\beta_3}$
A. Egész csehszlovák ipar		
III.	3,0779	—
IV.	1,9003	0,03025
1. Termelőeszköz gyártó szektor		
III.	3,1225	—
IV.	2,5292	0,02013
2. Fogyasztási cikk gyártó szektor		
III.	2,7466	—
IV.	1,7525	0,02509
V.	2,0530	0,00070
B. Egész csehorszóági ipar		
III.	3,0333	—
IV.	1,7419	0,03818
1. Termelőeszköz gyártó szektor		
III.	2,4785	—
IV.	2,1713	0,03106
2. Fogyasztási cikk gyártó szektor		
III.	3,2014	—
IV.	1,6538	0,03303
V.	2,0980	0,00101

Megjegyzés. A IV. és V. függvény paraméterei a csehszlovák iparra statisztikailag a 0,10 szinten szignifikánsak.

[32] Ugyanaz a megállapítás vonatkozik a létszám és a termelés közötti „technológiai" kapcsolat kifejezésre is.

mint a többi rövidtávú függvény alkalmazásával kapott β_1 paraméterek (vö. az 1. és 2. sz. táblázattal). Ez az eredmény eltér más kutatásokétól.[32/a]

A $\beta_4/1-\beta_3$ paraméternek kell tartalmaznia a meg nem testesült technikai haladás hozzájárulását (az ismertetett értelemben). A kapott technikai haladás-ütemek „értelmesnek" tűnnek, és egészében jól összhangban vannak a korábbi eredményekkel.[33]

E tanulmány keretei között nem vizsgáljuk meg, hogy mit implikálnak a becsült hosszútávú termelési függvények. Az eredmények azonban azt jelzik, hogy az olyan számításokból nyert paraméterek felhasználása, amelyek nem veszik figyelembe az időbeli késleltetés lehetőségét, helytelen következtetésehez vezethet. Határozottabb értékelésre csak a további kutatást követően nyílhat alkalom. Ha a hozzáállás helyesnek bizonyul is, még mindig különbséget kell tenni a tisztán rövidtávú, illetve a közép- és hosszútávú előrejelzés között.

10. Előzetes következtetések

Az olyan empirikus elemzés, mint a jelen dolgozat is, nem nyújthat alapot határozott következtetésekre. Célja mindenekelőtt az volt, hogy megteremtse a további kutatás feltételeit, s ösztönzést nyújtson ahhoz. Vizsgálódásaink fő következtetéseit a következőkben foglalhatjuk össze:

a) A létszám és termelés közötti kapcsolat statisztikai számszerűsítésének eredményei *összhangban vannak* azzal a hipotézissel, hogy Csehszlovákiában a gazdasági növekedés kritikusan függ a létszám alakulásától.[34] Szoros korreláció mutatkozott már a létszám és termelés egyszerű kapcsolatánál is.[35] A legszorosabb összefüggést a két termelőeszközgyártó szektorban és a csehszlovák ipar egészét illetően találtuk.[36] Ez fejlődésük erős extenzivitásáról tanúskodik A leglazább az összefüggés a csehszlovák és csehországi ipar fogyasztásicikkgyártó szektorában.

Azt mondottuk, hogy az eredmények összhangban vannak az említett hipotézissel. Nem állítjuk, hogy elemzésünk bizonyítja ennek a hipotézisnek a helyességét. Az ilyen következtetés ugyan csábító lenne, de nem lenne szükségképpen bizonyított. A hipotézis helytálló voltát gondosan, további tények elemzésével és különösen oly módon kell ellenőrizni, hogy megvizsgáljuk: más, eltérő hipotézisek mennyiben tudnak magyarázatot adni a megfigyelt folyamatokra.

b) Vizsgálataink igazolták, hogy a rövidtávú termelési függvény, amely ex post állandó arányokkal operál, jól képes ábrázolni a csehszlovák gazdasági növekedést. A kutatás további szakaszaiban negyedéves adatokkal kell majd dolgozni, közelebbről meg kell vizsgálni az állandó arányokkal dolgozó lineáris függvények alkalmazását, és egzaktabb képet kell kapni az idősorok korrelációjáról.

c) Az elemzés eredményei összhangban vannak az alkalmazkodási folyamat létezésére vonatkozó hipotézissel, és alátámasztják az osztott késleltetések

[32/a] Lásd *Kuh* [8].

[33] Lásd például *M. Hájek—M. Toms* [4].

[34] Ebben az összefüggésben hozzátehetjük, hogy alátámasztják ezt a legutóbbi kérdőíves felmérések eredményei is.

[35] Az I. függvényről van tehát szó mindkét kollekcióból.

[36] A pontos sorbarendezést az 1. és 2. táblázatban szereplő R^2 alapján lehet elvégezni.

bevezetésének jogosultságát. A regressziós együtthatók Q_{t-1}-nél statisztikailag erősen szignifikánsnak bizonyultak. Magas értékük alacsony reakcióegyütthatót, tehát hosszú alkalmazkodási folyamatot jelez.

Ebből következnek a rövidtávú és hosszútávú termelési függvények és rugalmasságaik közötti nyilvánvaló különbségek is. Az előrejelzési próbálkozásoknál figyelembe kell venni a probléma időbeli dimenzióját.

d) Ha ezzel bizonyítottként fogadjuk el az alkalmazkodási folyamat létezésének hipotézisét, akkor különbséget kell tenni két eset között:

da) a tisztán rövidtávú termelési függvény (III—IV.), amely rövid időszakban jellemzi az összefüggések alakulását. Ez a függvény konjunktúra-előrejelzéseknél lenne használható;

db) a (17) termelési függvény, amely közepes időszakra nézve releváns — hozzávetőlegesen az ötéves terv időszakáról van szó.

Ha viszont nem fogadjuk el ezt a hipotézist, akkor vissza kell térnünk az I. függvényhez, amely a létszám és termelés közötti egyszerű összefüggést ábrázolja. Ezt a függvényt még ki lehet egészíteni az időbeli trenddel. Tapasztalataink persze azt mutatják, hogy rövid időszakban a tisztán rövidtávú termelési függvények adják a legkielégítőbb előrejelzéseket.[37]

e) A termelés létszám szerinti rugalmassága az iparban számításaink szerint elég magas. A rövidtávú rugalmasságok a 3,3—4,6 sávban mozognak, a hosszútávúak valamivel alacsonyabbak. Hasonló eredményeket adnak a Cobb-Douglas típusú, helyettesítésen alapuló termelési függvények is, amennyiben nem tételezik fel a termelési volumen állandó hozadékát.[38] Ezek az értékek tartalmazzák a technológiai változások hatását is, és ezért számottevően alacsonyabb értékeket csak azok a függvények adnak, amelyek explicit módon veszik figyelembe a technikai haladás tényezőjét.

f) Mindenesetre lényeges, hogy a kapott eredmények cáfolják a csökkenő hozadék „törvényének" érvényességét rövid időszakban. E jelenség okainak elemzésével itt nem foglalkoztunk.[39]

(Beérkezett: 1972. október 16)

IRODALOM

1. FELDMANN, G. A.: К теории темпов национального дохода.. (A nemzeti jövedelem ütemének elméletéhez.) плановое хозяйство, 1928. 11—12. szám.
2. GOLDMANN, J.—KOUBA, K.: Bevezetés a szocialista gazdasági növekedés elméletébe. Budapest, 1970. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
3. GOMULKA, Sz.—KILOZI A.: Классификация типов технического прогресса и асимптотические траектории экономического роста. (A technikai haladás osztályozása és a gazdasági növekedés asszimptotikus pályái.) Экономика и математические методы. 1969. 6. szám.

[37] A szerzők először 1968 decemberében foglalkoztak előrejelzéssel (V. típusú függvény alapján).

[38] A ráfordításoknak a kihasználás változásaitól való megtisztítása után a csehszlovák iparra a következő termelési függvény adódott (lásd [4]:

$$\log Q = \underset{(1,70)}{0,4911} \log K + \underset{(1,94)}{1,7476} \log E + A$$

[39] Ezeknek a mozzanatoknak bizonyos elemzését tartalmazza [11].

4. HÁJEK, M.—TOMS, M.: Technický pokrok, produkční funkce a ekonomický růst v Československu. (Technikai haladás, termelési függvények és gazdasági növekedés Csehszlovákiában.) A CSTA Közgazdaságtudományi Intézetének kiadványa. Prága, 1969.
5. Jak je to s politikou pracovních sil a zamestnanosti. (Mi a helyzet a foglalkoztatási és munkaerőpolitikával.) Rudé právo, 1970. február 23.
6. JÁNOSSY F.: A gazdasági fejlődés trendvonala és a helyreállítási periódusok. Budapest, 1970. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
7. KOYCK, L. M.: Distributed lags and investment analysis. (Osztott késleltetések és beruházás-elemzés.) Amsterdam, 1954.
8. KUH, E.: Measurement of potential output. (A potenciális kibocsátás mérése.) American Economic Review, 1966. szeptember.
9. PAIKERT, Z.: Reprodukce základních fondů a vývoj produktivity práce. (Az állóalapok újratermelése és a munkatermelékenység alakulása.) Politická ekonomie, 1966. január.
10. Přepočty časových řad základních ukazatelů v průmyslu za rok 1948—1968 na organizaci a metodiku k 31. 12. 1968. (Az ipar alapvető mutatói 1948—1968 évi idősorainak átszámítása az 1968—december 31-i szervezetre és metodikára.) Federální statistický úřad (Szövetségi Statisztikai Hivatal), Prága, 1969.
11. TOMS, M.: Strnulost thru práce, krátkodobý pohyb produktivity a rozdělování. (A munkapiac merevsége, a termelékenység rövidtávú mozgása és az elosztás.) Politická ekonomie, 1969. november.
12. WOOLF, B.: Computation and Interpretation of Multiple Regressions. (Többszörös regresszók számítása és értelmezése.) Journal of Royal Statistical Society. 1951. 1. szám.

EX POST FIXED PROPORTIONS, EMPLOYMENT AND GROWTH IN CZECHOSLOVAKIA

Recent research throws new light on the short-run behaviour of labour productivity. Preceding studies draw attention to the fundamental factors causing cyclical fluctuations in labour productivity. Since labour input is quasifixed and the supply of labour is inelastic (in the short-run), the fluctuations in the volume of output (or in its growth rate) are not proportionally reflected in the level of employment. Also in Czechoslovakia the factor inelasticity turned out to play a significant role in the short-run responses of labour productivity.

In this paper the authors take the econometrician's point of view and analyze the relationship between employment and output in the Czechoslovak industry, under the assumption of fixed proportions ex post as between labour and capital. Factor labour inelasicity is taken into account by introducing Koyck's distributed lags.

Upon the theoretical assumptions an attempt is made to estimate a collection of short-run production functions. The model was applied to the Czechoslovak (and Czech) industry for the years 1948—1968. Besides the aggregate analysis, a two sector disaggregation was carried out — the functions were estimated separately for the producer and consumer goods sectors.

The results seem to be consistent with the hypotheses mentioned above. For example the values of the reaction coefficient indicate a long adjustment process. Further research is nevertheless needed to investigate thoroughly the subject matter of this study.

ПОСТОЯННЫЕ ПРОПОРЦИИ EX POST, ЗАНЯТОСТЬ И РОСТ В ЧЕХОСЛОВАКИИ

Недавное исследование по-новому объясняет развитие производительности труда за короткий период. Предшествующие научные исследования были направлены на основные факторы, вызывающие колебания в производительности труда. Так как инпут труда является квазипостоянным (за короткий период времени), колебания в объеме продукции (или в темпе роста) не отражены пропорционально в уровне занятости. Оказалось, что эта незластичность играет и в Чехословакии важную роль при пояснении кратковременных отклонений производительности труда.

В этой статье авторы рассматривают под эконометрическим взглядом и анализируют отношение занятости и продукции в промышленности СЧЧР — при предположении постоянных пропорций ex post между трудом и основными фондами. Фактор неэластичности труда изображен при помощи разделенного опоздания Койцка.

На основе этих теоретических предпосылок сделана статистическая оценка всего комплекта производственных функций. Модель использовалась применительно к чехословацкой (и чешской)промышленности в течение 1948—1968 года. Кроме агрегатного анализа была проведена двусекторная дезагрегация и были определены функции отдельно для сектора производства средств производства и производства предметов потребления. Результаты кажутся сопряженными с вышеприведенными гипотезами. Значения коэффициента реакции намечают, например, продолжительный процесс приспособления. Для подробного исследования этой тематики необходимо, однако, проводить дальнейшие работы.

Dobó Andor

Matematikai vizsgálatok a számítógépek várható számának alakulásával kapcsolatban

Bevezetés

Ebben az anyagban valamely ágazat vagy ország számítógépparkja helyzetének alakulását vizsgáljuk az idő függvényében; pontosabban a számítógépek várható számának becslésével foglalkozunk.

Az alkalmazott módszer általános jellege lehetővé teszi, hogy nemcsak számítógép esetében, hanem más ipari termék (pl. rádió, televízió, magnetofon, autó stb.) várható számának becslésénél is a közölt meggondolásokat alkalmazhassuk. Ugyanis „a gazdaság gyarapodási folyamatát" számos esetben az anyagban közölt modellel jól jellemezhetjük, s az így kapott eredmények is jól hasznosíthatók a vizsgált jelenségek viselkedésének leírásánál. Matematikai szempontból látni fogjuk, hogy lényegében „a születési és halálozási sztochasztikus folyamat" [1] általános modelljében szereplő függvények speciálisabb választásaival kapjuk a konkrét eredményeket.

Azért, hogy a kapott eredmények a gyakorlatban hasznosíthatók legyenek, részletesebben foglalkozunk az előállt függvénykapcsolatokban szereplő paraméterek becslésével, valamint az időszakos beszerzések ütemezésének kérdésével.

Megemlítjük, hogy a közölt problémára — ha más oldalról való megközelítésben és szempontból is — a válaszadás igénye a gyakorlatban ténylegesen felmerült többek között a Kohó- és Gépipari Minisztérium Számítástechnikai Alkalmazási Bizottság, a Központi Statisztikai Hivatal Országos Számítástechnika-alkalmazási Iroda, valamint az Országos Műszaki Fejlesztési Bizottság részéről is. Ez az anyag a kérdéskört elsősorban matematikai aspektusból tárgyalja, s a válaszadás egy lehetséges változatát mutatja be első közelítésként. (A Központi Statisztikai Hivatal Országos Számítástechnika-alkalmazási Iroda maga is kezdeményezője volt többek között egy matematikai alapon való megközelítésnek.)

Természetesen további más, az ittenitől eltérő, vagy meg nem fogalmazott szempontok és feltételek is előtérbe kerülhetnek akkor, amikor a jövőre nézve gazdaságilag tervezni és befolyásolni akarjuk a számítógéppark helyzetének alakulását. (Ilyen pl. az igény- és lehetőségelemzés!)

1. A számítógépek várható számának becslése

Jelölje ξ_t a t időpontban meglevő számítógépek számát. (Nyilvánvaló, hogy ξ_t valószínűségi változó.) Tegyük fel, hogy:

1° Ha a t időpontban a meglevő gépek száma $\xi_t = k$, akkor annak a valószínűsége, hogy a $t + \Delta t$ időpontban a gépek száma $\xi_{t+\Delta t} = k + 1$ lesz $a_k(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$-vel egyenlő, vagyis

$$P\{\xi_{t+\Delta t} = k + 1 \mid \xi_t = k\} = a_k(t)\,\Delta t + o(\Delta t) \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

itt $o(\Delta t)$ („kis ordó Δt") Δt olyan függvénye, melyre $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ midőn $\Delta t \to 0$; $a_k(t)$ pedig egy pozitív folytonos függvény.

2^0 Ha a t időpontban a meglevő gépek száma $\xi_t = k$, akkor annak a valószínűsége, hogy a $t + \Delta t$ időpontban a gépek száma $\xi_{t+\Delta t} = k - 1$ lesz $b_k(t)\Delta t + o(\Delta t)$, vagyis

$$P\{\xi_{t+\Delta t} = k - 1 \mid \xi_t = k\} = b_k(t)\,\Delta t + o(\Delta t) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

ahol $b_k(t)$ pozitív folytonos függvény.

Legyen $P\{\xi_t = k\} = P_k(t)$, vagyis jelölje $P_k(t)$ annak a valószínűségét, hogy a t időpontban a meglevő gépek száma pontosan k. Tegyük fel, hogy

$$3^0 \quad P_k(0) = \begin{cases} 1 \text{ ha } k = 0 \\ 0 \text{ ha } k \neq 0 \end{cases}.$$

Az 1^0 és 2^0 feltételek alapján valószínűségszámítási meggondolásokkal az alábbi matematikai összefüggésekhez jutunk:

$$P_0(t + \Delta t) = P_0(t)[1 - a_0(t)\,\Delta t] + P_1(t)\,b_1(t)\,\Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_k(t + \Delta t) = P_k(t)[1 - (a_k(t) + b(t))\,\Delta t] + P_{k-1}(t)\,a_{k-1}(t)\,\Delta t + {}$$
$$+ P_{k+1}(t)\,b_{k+1}(t)\,\Delta t + o(\Delta t) \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Ha a kapott egyenletrendszert rendezzük, s a Δt-vel való osztás után elvégezzük a $\Delta t \to 0$ határ átmenetet, az alábbi differenciálegyenletrendszert kapjuk:

$$(1)\quad \begin{aligned} P_0'(t) &= -P_0(t)\,a_0(t) + P_1(t)\,b_1(t) \\ P_k'(t) &= P_{k-1}(t)\,a_{k-1}(t) - P_k(t)[a_k(t) + b_k(t)] + P_{k+1}(t)\,b_{k+}(t) \ (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Első közelítésként tegyük fel, hogy

$$(2)\quad \begin{aligned} a_k(t) &= \eta\, t^{\alpha-1} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \\ b_k(t) &= k\,\gamma\, t^{\alpha-1} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots), \end{aligned}$$

ahol α, η és γ pozitív konstans. A közölt feltételek mellett a differenciálegyenletrendszer megoldásaként kapjuk, hogy $P_k(t)$ Poisson-eloszlást követ, vagyis

$$(3)\quad P_k(t) = \frac{[\lambda(t)]^k}{k!}\, e^{-\lambda(t)},$$

ahol

$$\lambda(t) = \frac{\eta}{\gamma}\,[1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha}],$$

s itt $1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha}$ tulajdonképpen nem más mint egy Weibull-eloszlásfüggvény.

Jelölje $M(t)$ a ξ_t várható értékét. Ekkor a várható érték definíciója szerint:

$$M(t) = M\{\xi_t\} = \sum_{k=1}^{\infty} k P_k(t) = \lambda(t)\, e^{-\lambda(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda(t)$$

azaz

$$(4)\quad M(t) = \frac{\eta}{\gamma}\,[1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha}],$$

Mivel

(5) $$M'(t) = \eta t^{\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha}$$

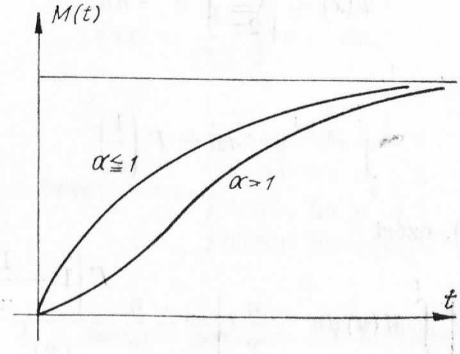
és

(6) $$M''(t) = [\eta(\alpha - 1) t^{\alpha-2} - \eta\gamma t^{2(\alpha-1)}] e^{-\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha},$$

ezért ha $0 < \alpha \leq 1$, akkor a $0 \leq t < \infty$ intervallumon

$$M''(t) < 0,$$

ami azt jelenti, hogy ez esetben $M(t)$ alulról nézve konkáv. Ha $\alpha > 1$, akkor $M(t)$ egy ideig konvex, majd utána konkáv alakba megy egy át. (1.1. ábra.)



1. ábra

Az empirikus adatok ismeretében már gyakran előre felismerhető α értékének értelmezési tartománya. A tapasztalat szerint általában $\alpha > 1$. A továbbiakban α -t alakparaméternek nevezzük.

Mint látható:

(7) $$\lim_{t\to\infty} P_k(t) = \frac{\left(\frac{\eta}{\gamma}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\eta}{\gamma}}$$

(8) $$\lim_{t\to\infty} M(t) = \frac{\eta}{\gamma}.$$

Az

(9) $$\int_0^t M(u)\,du = \frac{\eta}{\gamma} t - \frac{\eta}{\gamma} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{\alpha} u^\alpha} du$$

összefüggést vizsgálva a $\frac{\gamma}{\alpha} u^\alpha = x$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

(9') $$\int_0^t M(u)\,du - \frac{\eta}{\gamma} t = \frac{\eta}{\gamma} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{\frac{\gamma}{\alpha} t^\alpha} x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x} dx.$$

Ha $\alpha = 1$, akkor

$$\int_0^t M(u)\,du = \frac{\eta}{\gamma}t - \frac{\eta}{\gamma^2}[1 - e^{-\gamma t}].$$

Ha $\alpha = 2$, akkor

$$\int_0^t M(u)\,du = \frac{\eta}{\gamma}t - \frac{\eta}{\gamma}\sqrt{\frac{2\pi}{\gamma}}\left[[\Phi(\sqrt{\gamma}\,t) - \frac{1}{2}\right],$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Tekintettel arra, hogy

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-x}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

és $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$, ezért

$$\lim_{t\to\infty}\left[\int_0^t M(u)\,du - \frac{\eta}{\gamma}t\right] = -\frac{\eta}{\gamma}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}, \tag{10}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t M(u)\,du = \frac{\eta}{\gamma}. \tag{11}$$

E szerint tehát a „telítettségi szint" becslésére a numerikus számításoknál a (8)-val szemben kevésbé érzékeny (11)-et, illetve

$$\int_0^t M(u)\,du \approx \frac{\eta}{\gamma}t - \frac{\eta}{\gamma}\,\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

összefüggést használhatjuk.

2. A ξ_t konfidencia-intervalluma

Mivel ξ_t $\lambda(t)$ várható értékű Poisson-eloszlású valószínűségi változó, ezért ξ_t szórás négyzete:

$$D^2\{\xi_t\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k(t) - \lambda^2(t) = \lambda(t) = M(t),$$

vagyis

$$D\{\xi_t\} = D(t) = \sqrt{M(t)}. \tag{12}$$

Ezek után annak a valószínűsége, hogy ξ_t valószínűségi változó értéke az $M(t) - \mu\sqrt{M(t)}$ és $M(t) + \mu\sqrt{M(t)}$ határok közé esik, ismert módon [2] jó közelítéssel megadható. Eredményül kapjuk, hogy

$$P\{M(t) - \mu\sqrt{M(t)} \leq \xi_t < M(t) + \mu\sqrt{M(t)}\} =$$

$$= \sum_{M(t)-\mu\sqrt{M(t)} \leq k < M(t)+\mu\sqrt{M(t)}} e^{-M(t)} \frac{[M(t)]^k}{k!} = \sum_{-\mu \leq \frac{k-M(t)}{\sqrt{M(t)}} < \mu} e^{-M(t)} \frac{[M(t)]^k}{k!} \approx 2\Phi(\mu) - 1$$

(13) $$(M(t) - \mu M(t) \geq 0),$$

ahol

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

$$2\Phi(\mu) - 1 = \begin{cases} 0{,}683, & \text{ha } \mu = 1 \\ 0{,}954, & \text{ha } \mu = 2 \\ 0{,}997, & \text{ha } \mu = 3 \\ 0{,}999, & \text{ha } \mu = 4. \end{cases}$$

3. A szereplő paraméterek becslése

Ebben a részben az

$$M(t) = \frac{\eta}{\gamma}[1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha}]$$

összefüggésben szereplő η, γ, α paraméterek becslésével foglalkozunk. Induljunk ki abból, hogy

$$u^{\alpha-1} M(u) = \frac{\eta}{\gamma} u^{\alpha-1} - \frac{\eta}{\gamma} u^{\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{\alpha}u^\alpha},$$

és így

$$\int_0^t u^{\alpha-1} M(u)\, du = \frac{\eta}{\gamma} \int_0^t u^{\alpha-1}\, du - \frac{\eta}{\gamma} \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-\frac{\gamma}{\alpha}u^\alpha} du =$$

$$= \frac{\eta}{\gamma}\frac{t^\alpha}{\alpha} - \frac{\eta}{\gamma}\frac{1}{\gamma}[1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t^\alpha}],$$

vagyis

(14) $$M(t) = \eta\frac{t^\alpha}{\alpha} - \gamma \int_0^t u^{\alpha-1} M(u)\, du.$$

Rögzített α mellett határozzuk meg η és γ közelítő értékét, vagyis az $\hat{\eta}$ és $\hat{\gamma}$ értékét a legkisebb négyzetek módszere szerint. Keressük tehát rögzített α mellett $\hat{\eta}$-ra és $\hat{\gamma}$-ra nézve a

$$(15)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{M}(t_i)-\left[\hat{\eta}\frac{t_i^{\alpha}}{\alpha}-\hat{\gamma}\int_0^{t_i}u^{\alpha-1}\hat{M}(u)\,du\right]\right\}^2 \qquad (\xi_t=\hat{M}(t),\ \text{ha } 0\le t\le t_n)$$

kifejezés minimumát, melyet az

$$y_i=\hat{M}(t_i);\ z_i=z_i(\alpha)=\frac{t_i^{\alpha}}{\alpha};\ x_i=x_i(\alpha)=\int_0^{t_i}u^{\alpha-1}\hat{M}(u)\,du$$

jelölés mellett

$$(15')\qquad \sum_{i=1}^{n}\{y_i-\hat{\eta}z_i+\hat{\gamma}x_i\}^2$$

alakban is írhatunk. Az $\hat{\eta}$ illetve $\hat{\gamma}$ szerint differenciálva és a differenciálhányadosokat 0-val egyenlővé téve kapjuk, hogy a (15′) kifejezés akkor lesz minimális, ha

$$(16)\qquad \hat{\eta}=\hat{\eta}(\alpha)=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_iz_i+\hat{\gamma}\sum_{i=1}^{n}x_iz_i}{\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$$

$$(17)\qquad \hat{\gamma}=\hat{\gamma}(\alpha)=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}y_iz_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}z_ix_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}z_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_iz_i\right)^2}.$$

Az ilymódon számított (α-tól is függő) $\hat{\eta}$ és $\hat{\gamma}$ értékek ismeretében $\hat{\alpha}$ értékét becsüljük azzal az α értékkel, mely mellett $\hat{\eta}>0$, $\hat{\gamma}>0$ és

$$\delta(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\{y_i-\hat{\eta}(\alpha)z_i(\alpha)+\hat{\gamma}(\alpha)x_i(\alpha)\}^2 \qquad (0<\alpha<\infty)$$

négyzet összeg minimális. Vagyis legyen $\hat{\eta}>0$, $\hat{\gamma}>0$ mellett

$$(18)\qquad \hat{\alpha}=\{\alpha:\delta(\alpha)=\text{minimum}\}.$$

Ez utóbbi meghatározása számítógép igénybevétele esetén nem okoz különösebb nehézséget, mivel végső fokon egyváltozós feltételes szélsőérték helyet (minimumot) kell csupán kiszámítani. Az x_i értékeit jó közelítéssel a trapézformulával számolhatjuk. E szerint, ha

$$u_i^{\alpha-1}\hat{M}(u_i)=W_i,\quad (i=0,\,1,\,2,\,\ldots;\ W_0=0)$$

akkor

$$x_i = x_i(\alpha) = \int_0^{t_i} u^{\alpha-1}\hat{M}(n)\,du = \sum_{k=1}^{i} \int_0^{t_k} u^{\alpha-1}\hat{M}(u)\,du \approx \tag{19}$$

$$\approx h\left(\frac{W_0+W_1}{2}+\frac{W_1+W_2}{2}+\ldots+\frac{W_{i-1}+W_i}{2}\right)=$$

$$= h\left(\frac{W_0}{2}+W_1+W_2+\ldots+\frac{W_i}{2}\right),$$

ahol

$$h=\frac{t_i}{i}=\text{állandó}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots).$$

Megemlítjük, hogy a $\delta(\alpha)$ egyváltozós függvény minimumát a Hooke–Jeeves néven ismert minimum-kereső módszer alkalmazásával számítottuk ki. [3]. Ez a módszer egyébként – bizonyos feltételek mellett — alkalmas tetszőleges korlátos n változós függvény lokális minimumának a meghatározására is. A paraméterek becslését eredményező algoritmus Fortran nyelvű gépi programozását *Illés József* végezte, s ezért a közreműködéséért ez úton is köszönetet mond a szerző.

A számításokhoz az empirikus adatokat a KSH által kiadott ,,Számítástechnikai Évkönyv 1972'' [4] alapján, illetve az 1972-re vonatkozó tényadatok ismeretében állítottuk össze.

A paraméterek becslését eredményező numerikus számításokat 1966-tól 1972-ig, vagyis $t = 8$-tól $t = 14$-ig minden évre elvégeztük bizonyos ,,simítások'', ,,kiegyenlítések'' érdekében, valamint ,,érzékenység-elemzés'' végett. A minimum-keresés révén kapott paraméter értékek közül α-ra nézve, vagyis az alakparaméterre volt a legkevésbé ingadozó a számértékek alakulása. A $t = 8$-tól $t = 14$-ig terjedő időszakban az α becslésére kapott értékek átlaga: $\underline{\alpha} = 3{,}5498$; az átlag korrigált empirikus szórása pedig 0,087 értéknek adódott. A prognózist eredményező számítások folyamán α számszerű becslésére az $\hat{\underline{\alpha}}$ értéket választottuk. Az alakparaméter, vagyis α ismeretében az η és γ paramétereket az alábbi módon is becsülhetjük.

A $\hat{\gamma}$-ra nézve megköveteljük, hogy

$$\delta(\hat{\gamma};\ \alpha) = \min_{0<\gamma} \delta(\gamma;\ \alpha), \tag{20}$$

ahol

$$\delta(\gamma;\ \alpha) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{M}(t_i) - \frac{\hat{\eta}(\gamma;\ \alpha)}{\gamma}\left[1 - e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t_i^{\alpha}}\right]\right\}^2$$

és itt

$$\eta(\gamma;\ \alpha) = \frac{\gamma}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{M}(t_i)}{1-e^{-\frac{\gamma}{\alpha}t_i^{\alpha}}}.$$

A $\hat{\gamma} = \gamma(\alpha)$ ismeretében

$$\hat{\eta} = \hat{\eta}(\hat{\gamma};\ \alpha). \tag{21}$$

Ennél a paraméterbecslési eljárásnál is végső fokon egyváltozós feltételes szélső értékhelyet kell meghatározni.

A (21) alapján a $t=8$-tól $t=14$-ig terjedő időszakban η becslésére kapott értékek átlaga: $\hat{\underline{\eta}}=0{,}067673$; az átlag korrigált empirikus szórása pedig 0,00116 érték volt. Az α és η ismeretében γ értékét például (16) alapján becsülhetjük.

E szerint

$$\hat{\gamma}=\frac{\hat{\eta}\sum_{i=1}^{n} z_i^2-\sum_{i=1}^{n} y_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}. \tag{22}$$

(Amennyiben γ értékére ilymódon negatív számot kapunk, úgy γ-ban egyváltozós függvény feltételes $(\gamma>0)$ minimumát kell keresni!)

Az itt közölt meggondolások alapján az

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}&=3{,}5498\\ \hat{\eta}&=0{,}067673\\ \hat{\gamma}&=0{,}000097657\end{aligned} \tag{23}$$

értékek mellett a ξ_t-vel kapcsolatos számértékek alakulását az 1. Táblázat tartalmazza. A tényleges és számolt értékek függvényszerű alakulását – konfidencia határokkal – az 1. ábra tünteti fel. Természetesen az 1976–80 évekre eső számértékek alakulásáról lényegesen reálisabb képet fogunk kapni, ha majd a gépi programot az 1973–75 évre eső tényadatok figyelembevétele mellett futtatjuk le.

1. táblázat

t	Év	Tényleges adatok		Számolt értékek		Konfidencia intervallumok		
		Ψ_t	ξ_t	$M(t)$	$\xi_t-M(t)$	68,3%	95,4%	99,7%
0	1958	0	0	0	0			
1	1959	2	2	0	2			
2	1960	0	2	0	2			
3	1961	1	3	1	2			
4	1962	2	5	3	2	1–4	0–6	
5	1963	3	8	6	2	3–8	1–11	0–13
6	1964	2	10	11	–1	8–14	4–18	1–21
7	1965	7	17	19	–2	14–23	10–27	6–32
8	1966	12	29	30	–1	24–35	19–41	14–46
9	1967	15	44	45	–1	38–52	32–58	25–65
10	1968	21	65	64	1	56–72	48–80	40–88
11	1969	22	87	89	–2	79–98	70–107	60–117
12	1970	32	119	118	1	107–129	96–140	85–150
13	1971	43	162	152	10	140–164	127–177	115–189
14	1972	22	184	191	–7	177–205	163–218	149–232
15	1973			234		218–249	203–264	188–280
16	1974			280		263–297	246–313	230–330
17	1975			328		310–346	292–364	274–383
18	1976			377		358–397	338–416	319–435
19	1977			426		405–446	384–467	364–488
20	1978			472		450–494	428–515	407–537
21	1979			515		492–538	469–560	447–583
22	1980			553		530–577	506–600	483–624

4. A számítógép beszerzések éves ütemezése

Jelölje Ψ_t a t-edik időszakaszban ($t = 0, 1, 2, \ldots$) beszerzett számítógépek számát, ξ_t pedig változatlanul jelölje a t-edik időszakaszban meglevő (működő) számítógépek számát ($\xi_t = \hat{M}(t)$ ha $0 \leq t \leq T$). Legyen ν egy számítógép használati idejének várható értéke. Hogy egy számítógépet átlagosan mennyi ideig használunk, az függ a gép megbízhatóságától, a felhasználás módjától, a terhelés jellegétől, a vállalatok anyagi helyzetétől stb. A tapasztalatok szerint ν értéke általában $6 \leq \nu \leq 12$, de leginkább 7 és 8 év körül mozog.

A ν értékétől függően jelölje $Q_\nu(t)$ a t-edik időszakban beszerzendő számítógépek átlagos (várható) számát. Tegyük fel, hogy $t = T$ időpontig áll rendelkezésünkre a beszerzett gépek számának alakulására vonatkozó tényleges adat. Legyen

$$\Psi_t^* = \begin{cases} \Psi_t, & \text{ha } 0 \leq t \leq T \\ Q_\nu(t), & \text{ha } T < t < \infty. \end{cases} \tag{24}$$

Feltehetően $Q_\nu(t) = \Psi_t$, ha $0 \leq t \leq \nu$.

Mivel ν időtartam után a meglevő gépeket lecseréljük, illetve újabbal helyettesítjük, azért $Q_\nu(T+1)$ értékét jó közelítéssel az

$$M(T+1) - M(t) = Q_\nu(T+1) - \Psi_{T+1-\nu}^*$$

összefüggésből határozhatjuk meg. Innen kapjuk, hogy

$$Q_\nu(t+1) = M(T+1) - M(T) + \Psi_{T+1-\nu}^*.$$

Általában ha T és ν értékei egészek:

$$Q_\nu(T+k) = M(T+k) - M(T+k-1) + \Psi_{T+k-\nu}^*. \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{25}$$

Mivel

$$\lim_{k\to\infty} [M(T+k) - M(T+k-1)] = 0,$$

ezért

$$\lim_{k\to\infty} [Q_\nu(T+k) - \Psi_{T+k-\nu}^*] = 0.$$

Tekintettel arra, hogy a beszerzendő gépek száma az igény és anyagi lehetőségek folytán a gyakorlatban korlátos, így kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} Q_\nu(T+k) = \lim_{k\to\infty} \Psi_{T+k-\nu}^* = \text{állandó}. \tag{26}$$

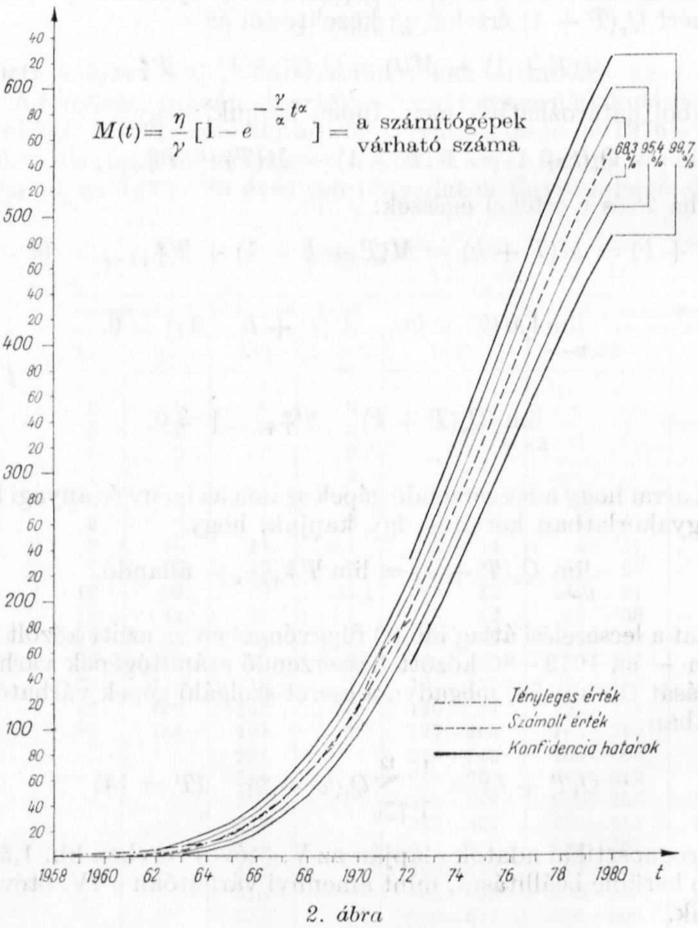
A 2. táblázat a lecserélési átlag idő (ν) függvényében — az itt közölt összefüggések alapján — az 1973—80 között beszerzendő számítógépek várható számának alakulását tünteti fel, megadva a cserét szolgáló gépek várható számát is. A táblázatban

$$\bar{Q}(T+k) = \frac{1}{7}\sum_{i=6}^{12} Q_i(T+k). \qquad (T = 14) \tag{27}$$

A közölt prognosztikai adatok alapján az V. ötéves tervben kb. 1,5-ször annyi számítógép kerülne beállításra, mint amennyi várhatóan a IV. ötéves terv időszakára esik.

2. táblázat

$T+k$	Év	$M(t)$	$Q_\nu(T+k)$ a $T+k$ évben beszerzendő gépek száma ν függvényében							Beszerzés ütemezése	Cserét szolgál átlagban
			$\nu=6$	$\nu=7$	$\nu=8$	$\nu=9$	$\nu=10$	$\nu=11$	$\nu=12$	$\bar{Q}(T+k)$	
15	1973	234	58	55	50	45	46	45	44	49	6
16	1974	280	67	61	58	53	48	49	48	55	9
17	1975	328	70	69	63	60	55	50	51	60	12
18	1976	377	81	71	70	64	61	56	51	65	16
19	1977	426	92	81	71	70	64	61	56	71	22
20	1978	472	68	89	78	71	67	61	58	70	24
21	1979	515	86	65	86	78	65	64	58	72	29
22	1980	553	84	81	60	86	70	70	59	73	35
								Összesen:		515	153
								1976–80		351	126



2. ábra

5. Kiegészítő megjegyzések

a) A kapott matematikai összefüggések jelenlegi és későbbi alkalmazásánál is gondot kell fordítani az adatok megbízhatóságára. (Sajnos nekünk a közölt számítások folyamán nem állt módunkban figyelembe venni azon gépek számát, amelyeket 1972-ig már lecseréltek. Mivel ezek száma viszonylag kicsi, feltehető, hogy a kapott eredményeket ez a hiányosság jelentősen nem befolyásolja.) Lényeges szempontnak kell tekinteni azt is, hogy az adatok közel azonos körülmények és feltételek mellett kialakult helyzetet, illetve állapotot tükrözzenek. Az elmúlt időszakban hazánkban a számítógépek elterjedését, a beszerzések alakulását különböző körülmények (új gazdasági mechanizmus, hazai számítógépgyártás, SZKFP) befolyásolták, és várhatóan befolyásolni is fogják. A modellezés során ez azt jelenti, hogy a szereplő paraméterek bizonyos idő után módosulni fognak. A tudományos és technikai haladás, a gazdasági feltételek módosulása, a nemzeti jövedelem gyarapodása, az irányítás rendszerének tökéletesítésére való törekvés mind befolyásoló hatással van az η, γ, α paraméterek számszerű értékére.

Ha τ-val jelöljük azon hatások összességének a mértékét, melyek a számítógépek elterjedésének fejlődését jellemzik és befolyásolják, úgy írhatjuk, hogy

$$\eta = \eta(\tau); \; \gamma = \gamma(\tau); \; \alpha = \alpha(\tau).$$

Bár ebben a megfogalmazásban a gyakorlati szempontból τ eléggé definiálatlan marad, alkalmazási szempontból mégis figyelembe vehető. Ugyanis ebben a bizonytalannak tűnő formában is kifejezi, sőt lehetővé teszi a fejlődés okozta változások követését. Ha például egy múltbeli időponttól, pl. 1966-tól, vagyis $t = 8$-tól előre rögzített eljárás szerint minden évre a tényleges adatok alapján elvégezzük η, γ és α becslését, akkor az így kapott értékeket τ függvényeként foghatjuk fel.

Esetünkben például

$$\begin{aligned} \eta(\tau_8) &= 0{,}071899 \qquad & \eta(\tau_{12}) &= 0{,}066931 \\ \eta(\tau_9) &= 0{,}066345 & \eta(\tau_{13}) &= 0{,}064478 \\ \eta(\tau_{10}) &= 0{,}064600 & \eta(\tau_{14}) &= 0{,}071790 \\ \eta(\tau_{11}) &= 0{,}067670 & & \end{aligned}$$

értéknek adódott. Mint látható, a közölt értéksor kevésnek bizonyul ahhoz, hogy az η értékek jövőbeni tendenciájára nézve következtetéseket vonjunk le, de számuk további gyarapodásával minden bizonnyal megállapítható lesz, hogy η értéke hosszabb távon nem egy konstans körül ingadozik, hanem valamilyen tendenciát követő függvény mentén veszi fel értékeit.

Így végső fokon τ függvényében — implicite az időtől is függően — a szereplő paraméterek változását prognosztikai igényeket kielégítő szinten követni tudjuk. Összefoglalóan tehát azt mondhatjuk, hogy a közölt matematikai modell elég általánosnak tekinthető ahhoz, hogy a vizsgált problémára első közelítésben kielégítő és elfogadható választ adjon. Minthogy azonban a szereplő paraméterek alakulására a fejlődés kimenetele hatást gyakorol, ezért e hatás tartósságától függ az, hogy a paraméterek milyen szakaszon maradnak állandósult értéken. A közöltek a prognosztikai eljárást mind módszert azonban nem bizonytalanabbá, hanem inkább egzaktabbá teszik, mivel a modell a dinamikus fejlődés tényét is figyelembe veszi.

b) Egy ország számítógépállományának darabszáma bár jellemzője lehet a számítástechnikai kulturáltságának, a számítástechnikai eszközök alkalmazási színvonalát, a géppark teljesítőképességét azonban ez elfogadhatóan már kevésbé jellemzi. A géppark teljesítményét alapvetően nem a darabszám, hanem a géptípusok műszaki paraméterei és az alkalmazott konfigurációjuk megoszlása, kiépítettsége jellemzi. Egyébként már a darabszám megállapításánál is mutatkozhatnak problémák, ugyanis nem mindig könnyű eldönteni, hogy milyen hardware-technikai eszközt tekintsünk számítógépnek.

Az ország gépparkjának teljesítményét nem volt szándékunk modellezni. Amennyiben a géppark teljesítménymegoszlását vizsgálnánk, úgy jó közelítéssel feltehetően Weibull-eloszlás jellemezné azt, melynél az összgépszám viszonylatában a kisgépek száma kb. 40–60% között mozogna.

Ha a számítógépek számát például ESZR kategóriákba sorolva vizsgálnánk, úgy a közölt módszerrel prognózist adhatunk az egyes típusok várható számának alakulásáról. Az így kapott információk jelentősen elősegítik a beszerzési terv kialakítását, a gyártási kooperáció tervszámainak kimunkálását. A közölt eljárás alkalmasnak bizonyulhat arra is, hogy az egyes ágazatok számítógép ellátottságának fejlődését tervszerűen befolyásoljuk. Általában elmondható, hogy a modell megfelelő alkalmazásával, illetve szükség szerinti fejlesztésével a számítástechnikai eszközök alkalmazásbavétele irányíthatóbbá tehető.

c) Az 1. pontban ismertetett matematikai modellel számos további probléma is vizsgálható, illetve megválaszolható. Így például egy számítógép típus vagy család „kihalását" vizsgálva megnézhetjük azt, hogy a t idő függvényében a vizsgált gépcsalád működésben levő gépeinek száma hogyan alakul. (Ennek a problémának a szerviz és alkatrész, valamint software ellátás tekintetében van gyakorlati jelentősége.) Ha χ_t jelöli egy adott géptípus vagy gépcsalád t időpontban használatban levő gépeinek számát és $P\{\chi = k\} = V_k(t)$, ahol

$$V_k(0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = 1 \\ 0, & \text{ha } k \neq 1, \end{cases}$$

akkor $V_k(t)$-ről belátható, hogy $P_k(t)$-hez hasonló differenciálegyenletrendszerrel jellemezhető. Ha már most feltételezhető, hogy

$$a_k(t) = k\beta$$

$$b_k(t) = k\mu t,$$

akkor a differenciálegyenletrendszer megoldásaként kapjuk, hogy

$$V_0(t) = 1 - \frac{e^{\frac{\beta^2}{2\mu}}}{A(t) + B(t)}$$

$$V_k(t) = \frac{e^{-\beta t + \frac{\mu}{2}t^2 + \frac{\beta^2}{\mu}}}{[A(t) + B(t)]^2}\left[\frac{A(t)}{A(t) + B(t)}\right]^{k-1}, \tag{28}$$

ahol

$$A(t) = \beta \int_0^t e^{\frac{(\mu x - \beta)^2}{2\mu}}\,dx$$

$$B(t) = e^{\frac{(\mu t - \beta)^2}{2\mu}}.$$

Ha $H(t)$ jelöli a szóban levő géptípus vagy gépcsalád t időpontban használatban levő gépeinek várható értékét (átlagát), akkor $V_k(t)$ ismeretében

$$H(t) = M\{\chi_t\} = \sum_{k=0}^{\infty} kV_k(t) = e^{-\frac{\mu}{2}t^2+\beta t}. \tag{29}$$

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $H(t)$ a maximumát a $t_0 = \frac{\beta}{\mu}$ helyen veszi fel, és ekkor

$$H(t_0) = e^{\frac{\beta^2}{2\mu}}. \tag{30}$$

d) Befejezésül nyomatékosan felhívjuk a figyelmet arra, hogy ebben az anyagban a számítógépek számának várható alakulását prognosztizáltuk, anélkül, hogy a hazánkban található géppark kategorizálásával behatóbban foglalkoztunk volna. A tényadatokat a KSH számítástechnikai évkönyvéből [4] vettük, s számítógépnek tekintettünk minden olyan hardware-technikai eszközt, melyet e könyv ilyennek megjelölt. Amennyiben a szereplő adatok közül bizonyosakat nem számítógépnek, hanem csupán szervezéstechnikai eszköznek tekintünk, úgy a prognosztikai adatokat is ennek figyelembevételével kell előállítani, illetve kiszámolni. A kidolgozott és kipróbált gépi program birtokában e számítások elvégzése már nem jár különösebb nehézséggel.

Ami a kapott eredmények alapján a számítógépek elterjedésének trendjét illeti, erről sokféleképpen vélekedhetünk. Bármi is legyen az első benyomásunk az eredményekről, tény, hogy konkrét műszaki—gazdasági összefüggések elemzésének mellőzése esetén reálisnak mondható véleményt kialakítani túlságosan kockázatos lenne. Ilyen aspektusból, valamint a már ismert igények és lehetőségek számbavétele mellett külön is értékelendők a modellezés útján kapott numerikus eredmények.

Természetesen elképzelhető, hogy pl. az egy főre jutó nemzeti jövedelem gyarapodásának és más hasonló számszerű jellemzőnek a függvényében vizsgáljuk a számítógépek elterjedésének az alakulását, s ezen az úton prognosztizáljuk a fejlődés trendjét. Az ilyen meggondolásokat elsősorban akkor célszerű megtenni, ha az elterjedés, felfutás trendjét más országok viszonylatában akarjuk vizsgálni, azért, hogy a fejlődés menetét ezekhez mérten befolyásoljuk. Ez a szándék bár helyesnek tűnik, de nem minden esetben közelíti meg a problémát reálisan, illetve elfogadhatóan. Nem szabad megfeledkeznünk ugyanis arról, hogy a fennálló lehetőségeinket tulajdonképpen a paraméterek becslésénél, ha implicite is, de figyelembe vettük, a lehetőségeken túlmenő változtatásokat pedig csak nagy nehézségek árán vagyunk képesek elérni. Arról nem is beszélve, hogy bizonyos gazdasági összefüggéseknek egésze más lehet a szerepük és hatásuk az egyes társadalmi rendszerekben, ezért az ilyen alapon nyugvó viszonyítás nem mindig szolgáltat helyes információt a beruházási politikák kialakításához.

Különben is a számítógépeknek egy országban való elterjedését olyan tények is jelentősen befolyásolják, melyeket nehezen lehet összehasonlítási mértékül kimunkálni. Így pl. a számítógépek elterjedésére hatással van az automatizáltság színvonala, az irányítás rendszerének fejlettségi foka, az egyes iparági tevékenységek súlya, szerepe, megoszlása az ország gazdasági életében; a vállalatok száma, szervezettségi foka; a számítástechnikai eszközök alkalmazásbavételi érdekeltségének mértéke; a számítástechnikai vonatkozású szolgáltatások színvonala; a befektetés megtérülésének kimeneti lehetősége stb.

Ahhoz tehát, hogy két vagy több ország számítástechnikai eszközökkel való ellátottságának színvonala reálisan összehasonlítható legyen, ilyen és hasonló szempontokat is alapul kellene venni. Ezek számbavételét is magában foglaló vizsgálatok kimunkálása nem látszik könnyű feladatnak.

Ezek után az itt közölt prognosztikai eljárást a problémakör első megközelítési változatának foghatjuk fel, amely jobb módszer híján ebben a formában is hasznosnak bizonyulhat.

(Beérkezett: 1973. szeptember 10.)

IRODALOM

1. GNYEGYENKO, B. K.—BELJAJEV, J. K.—SZOLOVJEV, A. D.: A megbízhatóságelmélet matematikai módszerei; Budapest Műszaki Könyvkiadó. Budapest 1970.
2. MEDGYESSY P.—TAKÁCS L.: Valószínűségszámítás. — Budapest 1966. Tankönyvkiadó. (Műszaki Matematikai Gyakorlatok sorozat) 65. o.
3. COOPER, L.—STEINBERG, D.: Introduction to methods of optimization; Philadelphia—London—Toronto, 1970. Saunders.
4. KSH Számítástechnikai Évkönyv 1972. Budapest, 1972. Statisztikai Kiadó.

MATHEMATICAL STUDIES ON THE TREND OF EXPECTED NUMBER OF COMPUTERS

In this paper the author models the probable trend of the ξ_t number of the computers, existing at a t moment with the "stochastic birth and death process" which — on general conditions — is defined by the differential-equation system (1). The author proves by the choice (2) that in case of the fulfilment of the initial conditions, given in 3°, the solution of the differential-equation system (1) is offered by (3) where $P_k(t) = P\{\xi_t = k\}$ is the probability of the condition that the number of the existing machines is exactly k at a t moment. On the basis of this the expected value of ξ_t is given by the formula $M(t)$ in (4).

Considering (3) the author gives an estimation to the confidence interval of ξ_t then deals in details with the estimation of the parameters η, γ, α, figuring in function $M(t)$. Given certain basic facts, he defines concretely their value with the help of a program, adapted to computer by József Illés. Then the author deals with the estimation of expected number of computers, to be obtained in the t-th period. The expected number is represented by $Q_\nu(t)$ [see: (25)] where ν is the expected life-time of a computer.

At the end of the paper there are riders, relating to the application and the applicability respectively.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ В СВЯЗИ С ДВИЖЕНИЕМ ПРЕДПОЛАГАЕМОГО ЧИСЛА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИН

В этом труде автор моделирует предполагаемое движение числа вычислительных машин ξ_t, существующих в момент «t» «стохастическим процессом рождения и смерти», который при общих условиях описывается системой дифференциальных уравнений (1). Автор доказывает при выборе (2), что в случае осуществления исходных условий, заданных в 3°, решение системы дифференциальных уравнений (1) доставляет (3), где $P(k_t) = P\{\xi_t = k\}$ вероятность того, что число машин, существующих в момент «t» равняется точно «k». На основе этого ожидаемая величина ξ_t получается из выражения $M(t)$ в (4).

Учитывая (3), автор дает оценку на конфиденционный интервал ξ_t, потом более подробно занимается оценкой параметров η, γ, α, входящие в функцию $M(t)$. Автор точно определяет величину этих параметров с помощью программы, адаптированной на вычислительную машину Йожефом Иллешем. После этого он занимается оценкой $Q_\nu(t)$, ожидаемого числа вычислительных машин, доставаемых в периоде «t», где ν ожидаемая величина времени использования одной вычислительной машины.

Наконец можно найти дополнительные замечания о применении и применимости.

SIMONOVITS ANDRÁS

A Leontief-inverz alá- illetve fölébecslésének egyik okáról

1. Quant [3] dolgozata talán az egyetlen, amely „a valószinűségi hibák Leontief-rendszerben" betöltött szerepét vizsgálta.

Ismert, hogy az ágazati kapcsolatok mérlegében szereplő *közvetlen ráfordítások* A mátrixa $n \times n$-es nem negatív, irreducibilis és 1-nél kisebb spektrál-sugarú mátrix. (Egy mátrix spektrál-sugara maximális abszolút értékű saját-értékének abszolút értéke.) A *teljes ráfordítások* Q mátrixát a következő összefüggés határozza meg:

$$Q = (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k. \tag{1}$$

A irreducibilitása miatt Q minden eleme pozitív. A gyakorlatban A mátrix α_{ij} elemei időben ingadoznak és értéküket pontatlanul ismerjük. Ezért ésszerű feltenni, hogy α_{ij} elemek *valószinűségi változók*. A gyakorlatban α_{ij}-t *várható értékével*, $\mathbf{M}\alpha_{ij}$-vel becsüljük, s Q-t nem várható értékével, hanem (1) determinisztikus változatával, $(I - \mathbf{M}A)^{-1}$-gyel becsüljük. Bródy azt kérdezte, melyik mátrix a nagyobb.[1] Bródy figyelmeztette a hallgatóságot, hogy a válasz függhet az együtthatók együttes eloszlásától!

Bródyt követve [1, 238–239. és 243–245.o.] két eloszlás típusra koncentrálunk, amelyek eleve érdekesek, fontosak lehetnek, bár egymásnak ellentmondanak.

I. típus: A véletlen együtthatók *teljesen függetlenek*.

II. típus: A *sor- és az oszlopösszegek állandóak*. Legegyszerűbb eset az un. *hiba-négyszög:* legyenek i, j, g, h természetes számok, ahol $i < g$ és $j < h$. Tegyük föl, hogy $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^0 + \varepsilon$, $\alpha_{ih} = \alpha_{ih}^0 - \varepsilon$, $\alpha_{gh} = \alpha_{gh}^0 + \varepsilon$ és $\alpha_{gj}^0 = \alpha_{gj}^0 - \varepsilon$, ahol $\alpha_{kl}^0 = E\,\alpha_{kl}$ és a többi együttható rögzített. Föjtesszük, hogy ε valószinűségi változó eloszlása *szimmetrikus*. $A(\varepsilon) = A(\varepsilon, i, j, g, h)$ jelöli a hibanégyszöggel terhelt mátrixot.

A következő két tételt bizonyítjuk be:

I. Tétel: Legyenek A mátrix elemei nem-negatív, teljesen független valószínűségi változók. Tegyük föl, hogy A mátrix minden realizációja (véletlentől függő konkrét értéke) irreducibilis és spektrál-sugara kisebb mint 1. Ekkor létezik $(I - \mathbf{M}A)^{-1}$, amely pozitív (elemű); $\mathbf{M}(I - A)^{-1}$ elemei pozitív valós számok vagy $+\infty$-ek; és teljesül

$$\mathbf{M}(I - A)^{-1} \geq (I - \mathbf{M}A)^{-1}. \tag{2}$$

[1] A teljes ráfordítások *elméleti* becslése $\mathbf{M}(I - A)^{-1}$ vagy *gyakorlati* becslése: $(I - \mathbf{M}A)^{-1}$? A várható érték operátora ($\mathbf{M}$) mindig a mögötte álló egész kifejezésre vonatkozik Pl. itt az inverz várható értékét jelzi, s nem a várható érték inverzét.

Ha van olyan determinisztikus B mátrix, amely A mátrix minden értékénél nagyobb, akkor A spektrál-sugarára vonatkozó feltétel teljesül ($\sigma(A) < 1$) $\mathbf{M}Q$ elemei végesek és a következő felső becslés vonatkozik Q-ra:

$$Q < (I - B)^{-1}.$$

Megjegyzések: $n = 1$ esetben a tétel állítása a jólismert Jensen-egyenlőtlenség következménye. A Jensen-egyenlőtlenség szerint, ha α valós értékű valószínűségi változó véges várható értékkel és olyan értékkészlettel, amelyet tartalmaz $f(t)$ konvex függvény értelmezési tartományának intervalluma; akkor $\mathbf{M}f(x) \geq f(\mathbf{M}(x)$. Ha $f(t)$ szigorúan konvex, akkor a két oldal egyenlősége ekvivalens azzal, hogy α egyetlen értéket vesz föl. $(1 - t)^{-1}$ pedig szigorúan konvex függvény a $(0,1)$ nyílt intervallumban.

$\mathbf{M}f(\alpha)$ lehet végtelen is: Legyen α egyenletes eloszlású a $(0,1)$-en; ekkor $\mathbf{M}(1 - \alpha)^{-1} = \infty$.

II. Tétel: Tetszőleges (i, j, g, h) hiba-négyszög esetén

$$sgn\, \mathbf{M}(I - A)^{-1} - (I - \mathbf{M}\, A)^{-1}_{kl} = sgn\, (q^0_{ki} - q^0_{hh})(q^0_{jl} - q^0_{gl})\, (q^0_{ij} - q^0_{ih} + q^0_{gh} - q^0_{gj})$$

(3) $\qquad k = 1, 2, \ldots, n$

ahol $sgn x\ x$ valós szám előjel-függvénye és $Q^0 = (I - \mathbf{M}\, A)^{-1}$.

Néhány szót a bevezetett eloszlástípusok mellett és ellen:

Egymástól távoleső ágazat-párokhoz tartozó együtthatók objektív ingadozása tényleg független lehet (pl. a bányászat energia-felhasználása és a textilipar munkaerő igénye). Ha minden mutatót egymástól független szakértők egymástól függetlenül becsülnek, szintén helyes az I. feltevés.

Másrészt, ha pl. a ráfordítási együtthatókat érték/érték mértékegységben mérjük, akkor a j. oszlopösszeg azt mutatja meg, hogy a j. ágazat 1 Ft értékű termékében hány Ft népgazdasági közvetlen ráfordítás testesül meg. Gyakorlatban ezt az összeget sokkal jobban ismerjük, mint egyes tagjait. Hasonló a helyzet a sorösszegekkel, bár itt közvetlen értelmezés nem adható.

Összegezve: Az I. Tétel teljesen független ráfordítási együtthatók esetén tetszőleges eloszlás és tetszőleges szektor-szám esetén bizonyítja Bródy sejtését az alábecslésről. Ugyanakkor elég speciális modellen, de még nem számpéldán ábrázoltuk a felülbecslés esetét is. Itt a ráfordítási együtthatók között azonos és ellentétes irányú lineáris kapcsolat volt. A valóságban mindkét feltevés csak gyengítve, egymás ellen küzdve érvényesül.

2. Az I. Tétel bizonyítása során felhasználjuk a következő jól ismert egyenlőtlenséget: Legyen α nem negatív valószínűségi változó, véges k-adik momentummal. Ekkor teljesül

(4) $$\mathbf{M}\alpha^k \geq (\mathbf{M}\alpha)^k$$

és egyenlőség csak $k = 1$ ill. determinisztikus α esetén teljesül. A bizonyítás a Jensen-egyenlőtlenségen és t^k szigorú konvexitásán alapszik, $k > 1$.

Ha (4)-et általánosítjuk nem negatív mátrixokra, akkor (1) értelmében a (2) egyenlőtlenséget is igazoljuk. Ezt szolgálja az alábbi

LEMMA: Legyen A nem-negatív elemű mátrix, ahol az elemek teljesen független valószínűségi változók. Ekkor teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

(5) $$\mathbf{M}\, A^k \geq (\mathbf{M}\, A)^k.$$

Ha minden (i, j)-re és minden realizációra teljesül $\alpha_{ij} < b_{ij}$, akkor igaz

$$A^k < B^k. \tag{6}$$

A Lemma bizonyítása: Legyen i és j tetszőleges 1 és n közötti természetes szám, s jelölje A^k (i, j) elemét $\alpha_{ij}^{(k)}$. A mátrix-szorzás ismételt alkalmazásával adódik a következő algebrai összefüggés:

$$\alpha_{ij}^{(k)} = \Sigma\{\prod_{s=1}^{k} \alpha_{h_r h_{r+1}},\ h_1 = i,\ h_{k+1} = j \text{ és } 1 \leq h_r \leq n,\ r = 1, 2, \ldots, k.\} \tag{7}$$

(Például $k = 2$ esetén $\alpha_{ij}^{(2)} = \sum_{h=1}^{n} \alpha_{ih}\alpha_{hj}$.)

Rögzítsünk egy ilyen index-sort, azaz egy k-tényezős szorzatot. Szükségünk lesz a szorzat várható értékére. Mivel egyes elemek többször is szerepelhetnek egy szorzatban, nem igaz, hogy a szorzat várható értéke a tényezők várható értékének a szorzata (ami csak teljesen független tényezők esetén igaz). Nekünk viszont elég lesz az is, hogy esetünkben a szorzat várható értéke *nem kisebb* a várható értékek szorzatánál.

Legyen $m(p, r)$ az α_{pr} elem előfordulási száma kiszemelt k-tényezős szorzatunkban. Nyilván szorzatunk felírható $\prod_{p=1}^{n}\prod_{r=1}^{n} \alpha_{pr}^{m(p,r)}$ alakban. Most n^2 tényezős szorzatunk van, ahol a tényezők a megfelelő elemek $m(p, r)$-edik hatványai, s ezek továbbra is teljesen függetlenek. Ezért rájuk teljesül

$$\mathbf{M}\prod_{p=1}^{n}\prod_{r=1}^{n} \alpha_{pr}^{m(p,r)} = \prod_{p=1}^{n}\prod_{r=1}^{n} \mathbf{M}\,\alpha_{pr}^{m(p,r)}. \tag{8}$$

Mivel az elemek nem negatívak, várható értékük sem negatív. Ezért (4) felhasználásával a következő összefüggéshez jutunk:

$$\prod_{p=1}^{n}\prod_{r=1}^{n} \mathbf{M}\,\alpha_{pr}^{m(p,r)} \geq \prod_{p=1}^{n}\prod_{r=1}^{n} \mathbf{M}\,\alpha_{pr}^{m(p,r)}. \tag{9}$$

(9)-ben pontosan akkor teljesül egyenlőség, ha *vagy* van olyan (p, r), hogy $m(p, r) > 0$ és $\mathbf{M}\,\alpha_{pr} = 0$ (ami $\alpha_{pr} \geq 0$ miatt $\alpha_{pr} = 0$-val egyenértékű); *vagy* minden olyan (p, r)-re, ahol $m(p, r) > 1$, ott α_{pr} determinisztikus.

Visszatérve eredeti jelöléseinkhez, (8) és (9) szerint igaz

$$\mathbf{M}\prod_{s=1}^{k} \alpha_{h_s h_{s+1}} \geq \prod_{s=1}^{k} \mathbf{M}\,\alpha_{h_s h_{s+1}}. \tag{10}$$

Összegezve a (10) egyenlőtlenség bal- ill. jobboldalán álló tagokat az összes $\{h_s\}$ sorozatra, (7) értelmében (5)-öt kapjuk.

Könnyen belátható (7) és (8) felhasználásával, hogy

$$\mathbf{M}\alpha_{ii}^{(2)} = (\mathbf{M}A)_{ii}^2 + \mathbf{D}^2\alpha_{ii} \text{ és } \mathbf{M}\alpha_{ij}^{(2)} = (\mathbf{M}A)_{ij}^2, \text{ ha } i \neq j. \tag{11}$$

$$\mathbf{M}\alpha_{ii}^{(3)} \geq (\mathbf{M}A)_{ii}^3 \text{ és } \mathbf{M}\alpha_{ij}^{(3)} = (\mathbf{M}A)_{ij}^3 + \mathbf{M}\alpha_{ij}(\mathbf{D}^2\alpha_{ii} + \mathbf{D}^2\alpha_{jj}) \text{ ahol } i \neq j. \tag{12}$$

Pozitív mátrixokra könnyen belátható, hogy ha egyik diagonális elem sem determinisztikus, akkor (5) szigorú egyenlőtlenség minden elemre és minden $k > 2$-re. Ha csak egy diagonális elem nem determinisztikus, akkor (5) szigorú egyenlőtlenség $k > 3$-ra. Ha egy főátlón kívüli elem sztochasztikussága biztosított, akkor (5) szigorú egyenlőtlenség $k > 4$-re.

Közgazdaságtanban nem-negatív mátrixokra teljesül a következő pozitivitási feltétel: van olyan m természetes szám, hogy $A^m > 0$. Ekkor igazolható, hogy ha minden változó sztochasztikus, akkor (5) éles $k > m + 1$-re, stb.

A most következő részben alsó becslést adunk módszerünk hibájára, azaz (2) jobb- és baloldalának különbségére. (1) szerint (2) ekvivalens a következő egyenlőtlenséggel:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M} A^k \geq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{M} A)^k. \tag{13}$$

Először igazoljuk, hogy (13) jobboldala véges, vagy ami ezzel ekvivalens, $\mathbf{M}A$ spektrál-sugara kisebb mint 1. Legyen $\bar{A}$ olyan realizációja A-nak, hogy $\mathbf{M}A \leq \bar{A}$. (Ilyen realizáció létezik, mert α_{ij}-k függetlensége miatt elemenként külön kiválaszthatók a várható értéknél nem kisebb realizációk.) Egyenlőtlenségünkből következik a megfelelő spektrál-sugarak közötti egyenlőtlenség: $\sigma(\mathbf{M}A) \leq \sigma(\bar{A}) < 1$, hiszen ez utóbbi egyenlőtlenség A minden realizációjára igaz.

Ezért (13) átrendezhető a következő alakban:

$$\sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{M} A^k - (\mathbf{M} A)^k] \geq 0. \tag{14}$$

A baloldalon álló kifejezés a mechanikus módszer hibája. Lemmánk értelmében (14) minden tagja nem-negatív [lásd (5)], így a $C = (c_{ij})$ hibamátrixot alulbecsüljük, ha véges sok tagot veszünk csak figyelembe. Mi megelégszünk az első négy taggal: $0 \leq k \leq 3$. Ekkor (11) és (12) szerint igaz, hogy

$$c_{ii} \geq \mathbf{D}^2 \alpha_{ii} \text{ és } c_{ij} \geq \mathbf{M}\alpha_{ij}(\mathbf{D}^2 \alpha_{ii} + \mathbf{D}^2 \alpha_{jj}),\ i \neq j. \tag{15}$$

4. Befejezésül kimondjuk az I. Tétel következő általánosítását:

III. Tétel: Legyen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$ analitikus függvény konvergencia-sugara $\varrho(> 0)$ és legyen minden u_k nem-negatív. Az A mátrix elemei legyenek teljesen független, nem-negatív értékű valószínűségi változók, valamint teljesüljön $\sigma(A) < \varrho$ minden realizációra. Ekkor az $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k A^k$ mátrixértékű valószínűségi változó értelmezhető és teljesül rá a következő egyenlőtlenség:

$$\mathbf{M}f(A) \geq f(\mathbf{M}A).$$

Továbbá, ha létezik olyan B determinisztikus mátrix, hogy A minden realizációjára teljesül $A \leq B$, másrészt $\sigma(B) < \varrho$, akkor $\sigma(A) \leq \sigma(B)$ és $f(A) \leq f(B)$ fennáll minden realizációra.

5. *Rátérünk a II. Tétel bizonyítására*

A dolgozat második felében a függetlenség feltevése helyett a másik végletet, a hiba-négyszög esetét vizsgáljuk. A hiba valószínűségi változó szimmetrikus eloszlású, ezért minden $A(\varepsilon)$ realizációhoz tartozik egy $A(-\varepsilon)$ realizáció. Rögzítsük először a hiba abszolút értékét $((e = |\varepsilon|)$ és vizsgáljuk az elméleti és a gyakorlati érték különbségét, mint a következő *szimmetrikus differenciát:*

$$C(e) = \frac{1}{2}[I - A(e)]^{-1} + \frac{1}{2}[I - A(-e)]^{-1} - [I - A(o)]^{-1}. \tag{17}$$

Szükségünk lesz a lineáris programozás szimplex módszerénél használt inverziós formulára. Legyen B egy reguláris mátrix, u oszlop- és v' sorvektor, uv' pedig az u és v' által alkotott *diád*-mátrix. Ekkor

$$(B + uv')^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv'\,B^{-1}}{1 + u'\,Bv}. \tag{18}$$

Esetünkben $u' = [0, \ldots, \underset{\text{i.}}{1}, \ldots, \underset{\text{g.}}{-1}, \ldots, o]$e $v' = [o, \ldots, \underset{\text{j.}}{1}, \ldots, \underset{\text{h.}}{-1}, \ldots, o]$

és $B = I - A(o)$, valamint $A(e) = A(o) + uv'$.

(17) és (18) összevetéséből egyszerű számolással adódik

$$C(e) = \frac{e^2\,u'\,Q^0 vQ^0 uv'\,Q^0}{1 - eu'\,Q^0\,v^2}. \tag{19}$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket, elhagyva az előjel szempontból érdektelen nevezőt és koordinátás alakra áttérve

$$\bar{c}_{kl}(i,j,g,h) = (q^0_{ki} - q^0_{kh})\,(q^0_{jl} - q^0_{gl})\,(q^0_{ij} - q^0_{ih} + q^0_{gh} - q^0_{gj}) \quad k,l = 1, 2, \ldots, n. \tag{20}$$

Ebből a II. Tétel, azaz (3) már közvetlenül következik.

6. Befejező elemzésünkben konkrétabbá kívánjuk tenni (20) összefüggést. Szorítkozzunk a két-szektoros modellre. Ekkor $n = 2$, $i = j = 1$ és $g = h = 2$. A továbbiakban föltesszük, hogy együtthatóink érték/érték dimenziójúak. Ekkor az oszlopösszegek kisebbek mint 1. A sorösszegekről hasonló feltevést nem tehetünk, csak azt tudjuk, hogy $\sigma(\mathbf{M}A) < 1$ miatt legalább egy sorösszeg kisebb mint 1. Tegyük föl, hogy az első sorösszeg mindig kisebb mint 1.

A kétszektoros Leontief-inverz explicit alakban könnyen fölírható:

$$Q = \frac{1}{\det\,(I - A)} \begin{pmatrix} 1 - \alpha_{22} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 - \alpha_{11} \end{pmatrix} \tag{21}$$

(21)-ből látható, hogy $\bar{c}_{kl}(i,j,g,h)$ 3. tényezője mindig pozitív, s az ugyancsak pozitív det $(I - A)$-val együtt a továbbiakban elhagyjuk. Bevezetve az előjel szempontból $\bar{c}$-vel azonos $\tilde{c}$-ot,

$$\tilde{c}_{kl} = (-1)^{k-l}(1 - \alpha^0_{1\bar{k}} - \alpha^0_{2\bar{k}})\,(1 - \alpha^0 - \alpha^0{}_{\bar{l}2}) \tag{22}$$

összefüggést nyerjük, ahol $\bar{k}$ és $\bar{l}$ a „másik" sort ill. oszlop indexét jelöli. A második tényezők mindig pozitívak, de a harmadik tényezők akkor és csak akkor pozitívak, ha a megfelelő sorösszeg kisebb mint 1.

Következésképp,

1. Ha mindkét sorösszeg kisebb mint 1, akkor az átlós elemek alábecsültek, az átlón kívüli elemek fölébecsültek.

2. Ha a második sorösszeg nagyobb mint 1, akkor az első sor elemei alábecsültek, a második sor elemei fölébecsültek.

Megjegyzés: Hasonlóan következik, hogy tetszőleges szektor esetén a k. diagonális elem negyobb mint a k. sor ill. oszlop bármelyik másik eleme, ha minden sorösszeg is kisebb mint 1. Tapasztalatból ismert utolsó állításunk, abban az esetben is, amikor feltételünk nem teljesül. Ezért következik (3)-ból vagy (20)-ból kétszektoros állításunk következő általánosítása:

$$\text{(23)} \qquad \mathbf{M}q_{ij} \gtrless q_{ij}^0, \quad \mathbf{M}q_{ih} \lesseqgtr q_{ih}^0, \quad \mathbf{M}q_{gh} \gtrless q_{gh}^0 \text{ és } \mathbf{M}q_{gj} \lesseqgtr q_{gj}$$

$$\text{ha} \quad q_{ij}^0 - q_{ih}^0 + q_{gh}^0 - q_{gj}^0 \gtrless o.$$

Kiegészítés: Eddig rögzítettük a hiba abszolút értékét. Mivel, eredményeink nem függtek e-től, — természetesen azon megkötés mellett, hogy A minden realizációjára igaz $A > 0$ és $\sigma(A) < 1$ — (17) várható értékére is igazak a megfelelő állítások:

$$\text{(24)} \qquad C = \mathbf{M}C(e) = \mathbf{M}(I - A)^{-1} - (I - \mathbf{M}A)^{-1};$$

Megjegyzés: Eddigi eredményeink mutatják, hogy $n > 2$ esetén nincsenek, nem is lehetnek általános tételek. Egy elemi megfigyelést azonban tehetünk: *determinisztikus sor- és oszlopösszegek ill. szimmetrikus együttható eloszlások esetén mindig vannak alá- és fölébecsült elemek.* Elég arra utalni, hogy 2×2-es aggregálás esetén — determinisztikus aggregáló mátrixokkal — mind a szimmetria, mind a determinisztikus sor- és oszlopösszeg tulajdonság változatlan. Ha minden elem pl. alábecsült volna, úgy az aggregálás után is úgy maradna. Ez viszont ellentmond előző megállapításunknak.

IRODALOM

1. Bródy, A.: „*Az ágazati kapcsolatok modellje*”, Akadémia, Bp. 1964.
2. Chinhan Fei, J.: „A fundamental theorem for the aggregation problem of input-output analysis”, *Econometrica*, 1956. pp. 400—412.
3. Quandt, R. E.: „Probabilistic Errors in the Leontief System”, *Naval Research Logistics Quaterly*, *5*, pp. 155—170. (1958)

ОБ ОДНОЙ ИЗ ПРИЧИН НИЖНЕЙ И ВЕРХНЕЙ ОЦЕНКИ ОБРАТНОЙ МАТРИЦИ ЛЕОНТЬЕВА

В действительности матрица *настоящих* затрат анализа межотраслевых балансов содержит числа с неверными стоимостями, отчасти из-за временных колебаний, а отчасти из ошибок статистических оценок. При отчислении *валовых* затрат теоретически следует использовать математическое ожидание обратной матрици Леонтьева, практически известно и используется обратная матрица Леонтьева математического ожидания матрицы настоящих затрат. Андраш Броди спросил, какая матрица — больше? Следуя анализу ошибок Броди доказываем, что (1) теоретическое значение — больше, если элементы матрицы, описанные веро ятностными переменными являются *вполне независимыми (нижняя оценка)* (2) в неглавной диагонали больше является практическое значение (верхняя оценка), а теоретичекое значение является больше в главной диагонали *(нижняя* оценка), если наша модель — двухсекторная и *сумма* рядов и колонн *даны* и фигурирующиеся расиределения симметрические. Математическое доказание основывается на форме степенного ряда обратного Леонтьева и на следующем *Лемма:*

Математическое ожидание степени положительной матрицы большая степени матрицы ожидаемой стоимости.

ON A REASON OF UNDER- AND OVERESTIMATION OF THE LEONTIEF-INVERSE

In reality the matrix of *current* inputs of input-output analysis contains numbers o *uncertain* value, partly due to time differences, to errors in statistical estimations. Theoretically, in calculating *total* inputs one has to use the expected value of the Leontief-inverse, practically the Leontief inverse of the expected value of the matrix of current inputs is known and used. András Bródy has asked, which matrix is greater? Following Bródy's error analysis, we shall prove, that

(i) the theoretical value is the greater if the entries of the matrix described by random variables are *complete independent*

(ii) the practical value is greater in the secondary diagonal *(overestimation)*, and the theoretical value is bigger in the main diagonal *(underestimation)*, if our model has two sectors and the *raw- and column sums are given* and the distributions are symmetric.

The mathematical proof is based upon the power-series form of the Leontief inverse and on the following *lemma:* the expected value of a power of a positive matrix is greater than the power of the matrix of the expected values.

KÖNYVEKRŐL

SHEPHARD, R. W.: *Theory of cost and production functions.* Princeton University Press. 308 p. Princeton, New Jersey, 1970.

A könyv az 1953-as kiadás átdolgozott, bővített változata. Mint ismeretes, a termelési függvényekkel kapcsolatos megoldatlan kérdések köre rendkívül széles és talán nincs is a közgazdasági matematikának olyan területe, amely ekkora vitákat kavart volna, amelyről annyit írtak volna és írnának, mint éppen erről a témáról. Ez a könyv a problémát főleg matematikai oldalról kezelve (a matematika apparátusából főleg az analízisre és a lineáris algebrára támaszkodik, de felhasználja a programozás elméletét is), szabatos tárgyalásmóddal vezeti be az olvasót ebbe az igen bonyolult kérdéskomplexumba. Fogalmainak, tételeinek világos, precíz jellege nagy segítséget nyújt a tájékozódni kívánó számára. A termelési függvények irodalmának egyik jellegzetes vonása, hogy rendkívül szerteágazó. A kérdés matematikai diszciplinaként való kezeléséből adódóan számos probléma hiányzik a könyvből, így például az outputok és a különböző inputok mérésének, a becslésnek a tárgyalása. A szerző figyelmét leginkább az inputok közti helyettesítés és a hozadék vizsgálatára irányítja. Meg kell jegyezni, hogy a matematikai hozzáállás – lévén alapjaiban közgazdasági kérdésről szó – nem szorítja ki a közgazdasági fejtegetéseket. A matematikai fogalmakat és tételeket – ahol csak lehetséges – verifikálja.

A termelési függvényeket tisztán technológiai tulajdonságaik alapján tárgyalja. Tárgyalásmódjában a rövid és a hosszútávú termelési függvények nem különböznek egymástól. A kettő közti különbség csupán abban áll, hogy a rövid távon az inputokra további kikötések vannak. Az itt bemutatott elmélet tehát egy nem-korlátozott technológiára érvényes, megmutatva, hogy milyen változások keletkeznek, ha egy korlátozott egység vizsgálatára térünk át. A szerző által definiált technológia igen általános.

Mielőtt megismerkednénk ezzel a technológiával, definiálnunk kell a különböző output-szintekhez tartozó lehetséges inputok halmazait. $L(u)$-val jelöljük az azon x input vektorokat (melyek komponensei természetesen nem-negatívak) tartalmazó halmazt, amelyek legalább az u outputot állítják elő, ahol u egy egydimenziós vektor. Szükség van még a technológiailag hatékony vektorok $E(u)$ halmazának definiálására is.

$$E(u) = \{x \mid x \in L(u), \quad y \leq x \rightarrow y \notin L(u)\}.$$

A technológiától a következőket kívánja meg:

1. 0 outputot bármelyik input vektor előállít és pozitív outputot 0 input vektor nem eredményezhet.

2. $x \in L(u)$ és $x' \geq x$-ből $x' \in L(u)$ következik, azaz az inputok felett diszponálunk. Véletlen események, mint például vízfelhasználásnál túlzott vízmennyiség nincs figyelembevéve.

3. Bármely output szint elérhető egy x ($x \neq 0$) input vektor skaláris nagyításával (bár nem szükségképpen hatékony módon) és ha egy szemipozitív vektor valamilyen skaláris nagyításával valamilyen pozitív output kapható, akkor az x null-inputjai olyan tényezőket jelölnek, melyek nem szükségesek a termeléshez.

4. Korlátos input vektorral nem korlátos output nem nyerhető.

5. A technológia legyen idő-osztható, azaz ha $x \in L(u)$, $y \in L(u)$ és $\Theta \in [0,1]$, akkor az $[(1-\Theta)\,x + \Theta\,y]$ vektort úgy interpretálhatjuk, hogy a kérdéses időszak $(1-\Theta)$ részében az x input vektorral, míg Θ részében az y input vektorral termelünk, melynek során legalább u outputot kapunk.

6. Egyetlen output szint sem érhető el hatékonyan nem-korlátos input vektorral. Ezután definiálja a termelési izokvant fogalmát, mint az $L(u)$ határának egy részhalmazát, majd bevezeti a termelési függvény fogalmát:

$$\Phi(x) = \mathrm{Max}\{u \mid x \in L(u),\ u \in [0; +\infty)\},$$

$x \neq 0$ és nem-negatív. Részletesen megvizsgálja, hogy ezen termelési függvény az adott technológián milyen tulajdonságokkal rendelkezik. Megmutatja, hogy a $\Phi(x)$ termelési függvény

$$L_{\Phi(u)} = \{x \mid \Phi(x) \geq u\}$$

szinthalmaza identikus az input vektorok $L(u)$ halmazával. Tehát a termelési struktúra vagy $\Phi(x)$-szel vagy $L(u)$-val definiálható. Megismertet a termelési függvények transzformáltjának fogalmával, mely szintén rendelkezik a termelési függvények tulajdonságaival. Ezen transzformált $F(\Phi(x))$ alakú, és az a jelentősége, hogy $\Phi(x)$-nek függvénye, ahol $\Phi(x)$ az inputok egy skalár mértéke. Így a különböző input szintek összehasonlíthatók és ez igen nagy jelentőségű a hozadékkal kapcsolatos vizsgálódásokban.

Bevezeti a homotetikus termelési függvények fogalmát és kimutatja speciális tulajdonságaikat. Megmutatja, hogy az általánosan használt és ismert Cobb-Douglas és ACMSU (CES) függvények is ez utóbbi függvény-osztályba tartoznak, habár a definiált technológia 6. tulajdonságát nem elégítik ki.

Részletes vizsgálatnak veti alá azt az esetet, ha az inputokra különböző korlátok adottak. Kimutatja, hogy ekkor az outputra csökkenő növekmény, vagy csökkenő átlag hozam valamilyen törvénye áll fenn. A következő fejezetben megismerkedünk az $L_{\Phi(u)}$ halmazon definiált $\Psi(u; x)$ távolságfüggvénnyel, mely egy adott u output előállításához szükséges input vektoroknak az $L_{\Phi(u)}$ határától való távolságát méri. Az $L_{\Phi(u)}$ halmaz is és így a termelési izokvant is megadható a $\Psi(u; x)$-szel. Sőt $E(u)$ is megadható vele. Megismerkedünk a Ψ tulajdonságaival és megtudjuk, hogy hogyan fejezhető ki segítségével a termelési függvény. Bemutatja a termelési függvénynek $\Psi(u; x)$-szel való definiálása előnyeit. A könyv részletesen foglalkozik a költségfüggvények elméletével is, melyeket az $L_{\Phi(u)}$ segítségével definiál. E függvények segítségével költségstruktúrákat ad meg, majd megvizsgálja a termelési és költségstruktúrák és függvények kapcsolatát, egyfajta dualitását. Egy egész fejezetet szentel a szerző a termelési és költségfüggvények aggregációja kérdésének. A könyv második része az egy dimenziós outputra vonatkozó tárgyalást kiterjeszti többdimenziós u vektorokra.

PAP ANDRAS

VANGREVELINGHE, G.: *Econometrie. Collection méthodes.* Paris, 1973. Hermann et Cie. 204 p.

Az ökonometriai módszerek és alkalmazásaik iránt érdeklődő közgazdászt és statisztikust gyakran elrettenti az ökonometriai kézikönyvek nagy terjedelme és komplikált tárgyalásmódja. Vangrevelinghe könyve végtelenül szerencsésen egyesít két követelményt: viszonylag szűk terjedelemben (204 oldal) tárgyalja a szűkebb értelemben vett ökonometriai módszertan fontos kérdéseit, anélkül, hogy lényeges kérdéseket bagatellizálna vagy mellőzne; ugyanakkor a mondanivaló szigorúan tudományos és matematikai tárgyalásmódjához is ragaszkodik, sőt gondosan ügyel arra, hogy minden tárgyalt kérdést gyakorlati példák segítségével (igen jól összeválogatott gyakorlati makroökonómiai példák segítségével) szemléltessen, sőt emberközelségbe hozzon. Ezzel az ökonometriai kézikönyvek között a gyakorlatibb orientáltságú kézikönyvekhez (amilyen pl. L. R. Klein-é) áll közelebb, szemben az elméletibb beállítottságúakkal (amilyen például J. Johnston-é vagy A. S. Goldberger-é).

Vangrevelinghe könyve összesen 8 fejezetből áll; ezek:

- az egyszerű regresszió
- a lineáris becslés általános alakja
- az autokorreláció problémája
- autoregresszív modellek
- az ún. elosztott késleltetésű (distributed lag) modellek
- a változók megfigyeléséből eredő hibák
- több egyenletből álló modellek és a szimultán egyenletrendszer
- szimultán egyenletekből álló modellek.

A könyvben tárgyalt problémák egymásutánja logikai felépítettségű. A viszonylag rövidebb 4. és 5. fejezet lényegében összetartozik. Ugyanez mondható a 7. és 8. fejezetről is; a mindössze 2 oldalt kitevő 7. fejezet anyaga a 8. fejezetbe kívánkozik.

A szerző az Előszóban magyarázza meg az ökonometria fogalmát, céljait; a Bevezetésben kerül sor az ökonometriai modell fogalmának ismertetésére, egy termelési függvény segítségével.

Az I. fejezet sokkal többet mond, mint amit címe (Egyszerű regresszió) elárul. Egyszerű példával (a háztartás fogyasztásának és a rendelkezésére álló jövedelemnek a kapcsolata) illusztrálja az exogén és endogén változók, a szimultán egyenletrendszer, a specifikációs hiba fogalmát; kitér a legkisebb négyzetek módszerének alapvető feltételezéseire, a lineáris esztimátorok tulajdonságaira és a hipotézisek vizsgálatára is. Illusztrálásul konkrét példát mutat be, éspedig az adatbázis, az alkalmazott formulák, a becsült paraméterek és teszt-eredmények részletes feltüntetésével: az egyszerű regressziós modell a francia ipar „szükséges” beruházásainak alakulását vizsgálja a termelési volumen függvényében az 1953–67 közötti időszakban.

A II. fejezet a „Lineáris becslés általános alakja” címszó alatt — az előző fejezet logikus folytatásaképpen — a többváltozós regressziószámítás kérdéseivel foglalkozik. Szemléltetés céljából — jól választva meg a példákat — három többváltozós fogyasztási függvényt mutat be, majd az ún. strukturális és sztochasztikus hipotéziseket (lényegében az identifikáltság fontosabb feltételeit) ismerteti. Itt helyénvaló lenne a magyarázó változók között esetleg fennálló multikollinearitásról, ennek tesztjéről valamivel többet mondani, tekintettel arra, hogy a multikollinearitás-vizsgálat a modell-specifikáció egyik igen fontos szakasza, és ezzel a problémával a modellező óhatatlanul szembe is kerül. Igen részletesen tér ki azonban azokra a feltételekre, amelyek a legkisebb négyzetek módszerének a többváltozós regressziószámítás esetén való alkalmazásához szükségesek, az esztimátorok tulajdonságaira, a szignifikancia-tesztekre. Kendall és Stuart *Advanced statistics* alapján olyan tesztet is bemutat, amelynek segítségével a modell paramétereinek linearitása vizsgálható.

Szükséges külön is hangsúlyozni a könyv pedagógiai kiválóságát. Az egyes fejezetekben az elméleti anyag tárgyalását rendszerint példák illusztrálják és gyakorlatok követik. Ezek a gyakorlati közgazdaság köréből vett példák és gyakorlatok igen tanulságosak az olvasó számára. A példák ebben a fejezetben azokat az eseteket illusztrálják, amikor valamelyik paraméter értéke a modellbe bevitt külső információ; máskor a paraméterek értékének alakulását vizsgálják úgy, hogy a vizsgált időszakot több részidőszakra osztják. Hasonlóképpen gyakorlati jelentőséggel bír annak a tesztnek a bemutatása, mely két alapsokaság homogenitását vizsgálja; pl. a jövedelem és a fogyasztás között megállapítható kapcsolat mennyiben hasonló és mennyiben tér el egymástól a nem-mezőgazdasági és a mezőgazdasági népességben? További konkrét példa segítségével vizsgálja különböző lakosságcsoportoknak fogyasztási magatartásában megnyilvánuló szignifikáns különbségeket azzal a konkrét céllal, mekkora hibát okoz az előrejelzésben, ha a fogyasztási magatartást (jelen esetben az autótulajdonosok üzemanyagfogyasztását) a lakosság egészére globálisan vesszük figyelembe, vagy az egyes társadalmi-gazdasági kategóriák eltérő magatartására is tekintettel vagyunk. Külön foglalkozik az idősoros becslés olyan esetével, amikor a sorban a tendenciától eltérő kiugró értékek is találhatók (természeti csapás vagy sztrájk következtében). Bőven idézzük a példákat, de ezt azzal a céllal tesszük, hogy a vizsgált problémák nagy számára és a könyv gyakorlati használhatóságára utaljunk.

A III. fejezet kizárólag az autokorreláció kérdéseivel foglalkozik. Szemléltetően mutatja be, hogy válhat a hibás specifikáció az autokorreláció forrásává; hogy alakulnak a reziduumok autokorrelációja esetén a legkisebb négyzetek esztimátorainak tulajdonságai; milyen tesztek ismeretesek az autokorreláció vizsgálatára; milyen becslési eljárások alkalmazhatók autokorreláció esetén; végül hogy használható fel ez az előrejelzésben? A tesztek bemutatásakor a közismert Durbin–Watson, illetve Neumann–Hart-féle mutató ismertetésén felül a kevésbé ismert Theil–Nagar-féle, ill. Koerts-féle tesztet is bemutatja.

A reziduumok autokorrelációja esetén alkalmazandó becslési eljárások közül az első differenciák regressziója és az általánosított legkisebb négyzetek módszere közismertek. A könyv mindkettőt bemutatja és mindkettőnek az alkalmazási feltételeit is ismerteti. Az alapvető hipotézis mindkét esetben az, hogy az autokorrelációt autoregresszív folyamat hozza létre. Bemutat egy olyan eljárást is, amelynek során a modell paraméterei és az autoregresszivitás mutatója egyszerre becsülhető. A fejezet még további kérdések tárgyalására is kitér. Egyik a reziduumok heteroszkedaszticitása; másik a modellbe bevitt külső információ” esete, valamint a (0,1)-es (általa „variables indicatrices”-nek nevezett) változók alkalmazásának módszere.

Értelmileg összetartozik a IV. és V. fejezet: autoregresszív modellek és elosztott késleltetésű modellek. Az autoregresszív folyamat következményeként egyes gazdasági jelenségek sok esetben ugyanannak a jelenségnek korábbi időpontbeli értékétől is függnek. Így pl. a lakosság fogyasztásának adott időpontbeli értékét erősen determinálják a korábban kialakult fogyasztói szokások. Az elosztott késleltetésű modellek az autoregresszív modelleknek egy speciális esetét képviselik; az alapvető feltételezés szerint a gazdasági hatótényezők nem azonnal és diszkrét időpontokban, hanem késve és folyamatosan fejtik ki hatásukat úgy, hogy az időben korábbiak hatása kevésbé érvényesül.

Autoregresszív modellekben, ha a magyarázó változó különböző időpontjaihoz tartozó értékek egymás mellett szerepelnek, a reziduumok függetlenségére tett kikötések nem érvényesek. A szerző szerint a megoldás attól függ, hogy mutatkozik-e a reziduumokban autokorreláció; gyakorlati tapasztalatok alapján annak a véleménynek ad hangot, hogy nem követünk el súlyos hibát, ha nem autokorrelált reziduumokat tartalmazó autoregresszív modellekre a lineáris regresszió módszerét alkalmazzuk. A tárgy fontosságához mérten kellő részletességgel tárgyalja az elosztott késleltetésű modellek problematikáját. A könyv a legkorszerűbb ismeretanyag birtokában itt is nagy készültségről és pedagógiai érzékről tesz tanúbizonyságot, amikor az elosztott késleltetésű modellek becslésének szükséges előfeltételeit, a különböző specifikációs lehetőségeket és e modellek becslését bemutatja.

A mű VI. fejezete a változók megfigyelési hibáival foglalkozik. Ezzel a kérdéskörrel az ökonometriai kézikönyvek viszonylag kevesebbet foglalkoznak mint a paraméterbecslés hibáival. A szerző érdeme, hogy külön fejezetet szentel a kérdésnek, holott pl. C. F. Christ közel 700 oldalas könyve is csak 1—2 oldalon keresztül, mellékes kérdésként kezeli a témát. A gyakorlatban sokszor az a vélemény dominál, hogy a paraméterbecslési módszereknek elég „robusztusoknak" kell lenniök ahhoz, hogy a viszonylag nem nagy mérési hibákat ellensúlyozzák. Mások egyszerűen az ökonometria területét egyáltalán nem érintő, a statisztikai megfigyeléssel kapcsolatos problémát látnak benne. Az újabb becslési módszerek azonban általában figyelembe veszik azt a különbséget, mely Y^* és X^* közvetlenül meg nem figyelhető változók és ezek ténylegesen megfigyelt Y és X értékei között vannak. Az eltéréseket a véletlen változókkal analóg módon kezelik, feltételezve, hogy az előbbiek várható értéke zérus, és hogy eloszlásuk független az Y^* és X^* változók értékétől, tehát a zavaró tényezőtől is. Ez azonban a gyakorlatban többnyire nincs így, s rendszerint a legkisebb négyzetek módszere sem alkalmazható. A szerző éppen ezért a súlyozott regressziószámítás módszerét, valamint az instrumentális változók módszerét is tárgyalja, és egy háztartási fogyasztási függvényre alkalmazott gyakorati példával illusztrálja a mondottakat, sőt a módszer előrejelzési alkalmasságát is bemutatja.

A VII. és VIII. fejezet lényegében együvé tartozik; mindkettő a szimultán egyenletekből álló modellekről szól: egyes változók az egyik egyenletben magyarázó változóként, a másikban függő változóként szerepelnek. A szimultán rendszer mibenlétét a szerző egy egyszerű keresleti-kínálati modell segítségével szemlélteti. E fejezetben az ökonometriai módszertan és a modellezési gyakorlat olyan fontos kérdéseit tárgyalja, mint az egyenletrendszer strukturális és redukált formája; az identifikáció és ennek feltételei. Ez a rész túlságosan sűrített: az identifikáció kérdése fontosságánál fogva külön fejezetet is megérdemelne. Ugyanez a fejezet tartalmazza egyébként az ismertebb paraméterbecslési módszerek leírását: a legkisebb négyzetek kétfokozatú módszerét, a maximális esélyesség korlátozott információn alapuló módszerét (mindkettőnek az alkalmazását Girshick-nek és Haavelmo-nak az Egyesült Államok élelmiszerkeresletére specifikált, ma már klasszikusnak számítható modelljén mutatva be). A legkorszerűbb szakirodalom felhasználásával a Theil-féle k-ad-osztályú esztimátorok módszerét, a főkomponensek alkalmazását, sőt a háromfokozatú legkisebb négyzetek módszerét is bemutatja. A fejezet gazdag anyagát az előzőkhöz hasonlóan példák és gyakorlatok egészítik ki; a mű végén rövidebb bibliográfia és tárgymutató is található.

Összefoglalva a mondottakat: az az olvasó, aki az ökonometriai módszertan iránt érdeklődik, ma sokkal kedvezőbb helyzetben van mint 8—10 évvel ezelőtt; módjában van válogatni az időközben megjelent kézikönyvek között. Vangrevelinghe könyve nem egyszerűen egy ökonometriai kézikönyv a többi között, hanem igen jó kézikönyv és alkalmas tankönyv. Tudományos és pedagógiai érdemeire a fentiekben kitértünk, s így mindazok az olvasók, akik tanulmányaik céljából Vangrevelinghe könyvét választják ki a szakirodalomból, jól fognak járni.

NYÁRY ZSIGMOND

TUDOMÁNYOS ÉLET

Matematikai közgazdaságtani modellek a szovjet közgazdaságban*

Nagy változások mennek végbe a szovjet gazdaságban, a népgazdaság fejlődésének irányítási és tervezési módszereiben és eszközeiben. Nehézzé vált a folyó (éves) és a középtávú (ötéves) tervezés a jelenlegi módszerek felhasználásával. Napjaink gyors társadalmi, gazdasági és tudományos változásai a Szovjetunióban igen bonyolultakká tették a gazdasági kapcsolatokat. Másfelől a műszaki-tudományos haladás az irányítás új módszerei és műszaki eszközei segítségével megteremtette az előfeltételeket korábban ismeretlen lehetőségek megvalósítására a tervek minőségi kidolgozásában. Ezeket a lehetőségeket a szovjet tudósok éppen a rendszer-szemléletű megközelítésben realizálják, amely lehetővé teszi a matematikai közgazdaságtan modellezési módszereinek alkalmazását egy olyan hatalmas és bonyolult rendszerben, mint a Szovjetunió népgazdasága.

Véleményünk szerint a mai feltételeknek és az új követelményeknek a legteljesebben az a komplex tervezési rendszer felel meg, melyet a szovjet közgazdászok javasolnak. Ebben az egységes népgazdasági terv megalkotásának kiindulópontját az ország fejlesztési célja képezi. E célok alapján alakítják ki a tervben az erőforrások termelési-technikai és területi szerkezetét.

A tervezés új eszközei, melyek képesek felölelni a tényezők hatalmas sokaságát a matematikai közgazdaságtani modellek. Ma már a Szovjetunió népgazdaságának minden egységében alkalmazzák őket — a vállalattól az ágazati minisztériumig és az ország Tervhivataláig. A szovjet gazdaságnak ezen ,,formulái'' igen hatékony segítségnek bizonyultak mind a tudományos kutatásban, mind a tervezési gyakorlatban, a szovjet állam gazdasági fejlődésének elemzésében és prognosztizálásában.

A matematikai közgazdaságtani modell a matematika nyelvén, képlet formájában leírt gazdasági feladat, jelenség vagy folyamat. A modelleket rendszerint nem egyszerűen a feladat leírására használják, hanem a megoldás legjobb útjának megkeresésére is. Ezért az ilyen modellekben feltétlenül megvan két összetevő: az optimálitás kritériuma és a megfelelő korlátozó feltételek. Az első azt mutatja meg milyen mértékben felel meg az adott megoldás a fejlesztési célnak, amelyre a feladat irányul. A második számbaveszi a munkaerő-, termelési, nyersanyagbeli és egyéb erőforrásokat. Ha ilyen hatalmas objektummal van dolgunk, mint a Szovjetunió népgazdasága, akkor a modell építésekor szükségszerű, hogy csak a fő, leglényegesebb tényezőket és a gazdasági rendszer fő összefüggéseit tüntessük fel. Az a törekvés, hogy ,,mindent'' figyelembe vegyünk, olyan terjedelmes modellre vezet, hogy annak elemzése és kiszámítása gyakorlatilag kivihetetlenné válik. Másrészt a túlzott egyszerűsítés nem tükrözi a tanulmányozandó jelenség lényegét, a kapott következtetések nem bírnak komoly gyakorlati értékkel.

Ezért alkalmaznak különböző matematikai közgazdaságtani modelleket az ország gazdasági szervezetének különböző szintjein. Együttvéve többlépcsős modellekben ábrázolhatja a teljes népgazdaságot. Meg akarok előzni egy félreértést: ezek a modellek, a tervezés és irányítás automatizált rendszerei, amelyeket ma már mindenütt alkalmaznak a Szovjetunióban és a számítástechnika nem tekintendő valamiféle ,,elektronikus matematikai szörnyeteg''-nek, megfellebezhetetlen orákulumnak, amelynek a következtetéseit vakon követni kell.

Az ember határozza meg a tervezés és irányítás módszertanát, az ember kezdeményezi a terv megalkotását és teljesítését, az ember elemzi a számítástechnika segítségével kapott eredményeket, végül az ember hozza a végső döntést. A modellek rendszere segít a leg-

* A cikket *Fedorenko* akadémikus négy cikkéből, melyeket az APN hírügynökség bocsájtott rendelkezésünkre, *Andorka Rudolf* szerkesztette, vonta össze. Fordította Vári Judit.

jobb döntés kiválasztásában a gazdasági fejlődési utak sok változata közül. Vagyis nem csak a gép, hanem egy ember–gép rendszer működik.

Bemutatok egy konkrét példát. A kilencedik ötéves terv (1971–1975) feldolgozásánál sok tervváltozatot vizsgáltak át. A tervfeladatokat, a lentről és fentről jövő javaslatokat tanulmányozták, mégpedig nem egyszer, hanem minden gazdasági fokon a vállalattól a Szovjetunió Tervhivataláig. Végül amikor gondosan átolvastak minden mellette és ellene szóló érvet, kiválasztották azt a variánst, amely a nemzeti jövedelem emelkedését kb. 40%-ra irányozza elő, az egy főre eső reáljövedelmekét körülbelül 30%-ra. A matematikai közgazdaságtani modell segítségével megállapították, hogy az alapvető termelési alapokat 50%-kal kell emelni, a munkaráfordításokat csak 5–6%-kal, így a munkatermelékenység körülbelül 36–40%-kal fog nőni. Meg kell mondani, hogy ilyen általános és első látásra nem bonyolult számítási feladatot sem lehet matematikai közgazdaságtani modellek nélkül megoldani. A tervfeladatokat részletezni kell, például az iparban több mint 50 ezer nagy- és középvállalatra, ebben a gazdasági rendszerben csaknem 120 millió ember dolgozik.

Milyen gyorsan tud (vagy fog) növekedni a népgazdaság? Minek a rovására lehet növelni a nemzeti jövedelmet, melyek a termelés kiterjesztésének és a hatékonyság növelésének forrásai?

Ezeket a kérdéseket teszik fel mindenekelőtt. A válaszok megtalálásában segítettek a modellek, amelyek kapcsolatot létesítenek a nemzeti jövedelem növekedése és a termelési erőforrások ráfordításainak növelése között. Természetesen arra törekszünk, hogy olyan módszereket találjunk a termelés kiszélesítésére, amelyek a legkisebb anyagi és munkaráfordítások mellett a termék lehetőleg maximális növekedését váltanák ki.

A tervezés további tökéletesítésének legfontosabb feladata a gazdasági egyensúly javítása, olyan termékek termelése, amelyek szükségesek más termékek termelésének növeléséhez és a lakosság növekvő igényeinek kielégítéséhez. Ehhez egész sor matematikai közgazdaságtani modellt használnak fel, köztük az ágazati kapcsolati mérlegeket is. Az ágazati kapcsolati mérleg főgondolata az, hogy minden ágazatot termelőnek és fogyasztónak tekint. Az ágazati kapcsolati mérleg modellje egységes információ-rendszer a kölcsönös termékszállításokról minden termelési ágazat között, valamint a termelési állóalapok volumenéről és ágazati szerkezetéről, a munkaerőforrásokról, stb.

Egyébként a közvetett kapcsolatoknak a népgazdaságban gyakran nagyobb a jelentőségük, mint a közvetleneknek. Ahhoz, hogy ruhát varrjanak Leningrádban, kőolajat kell termelni Baskiriában és ahhoz, hogy Togliattiban autót gyárthassanak, nemcsak magát az üzemet kell ellátni elektromos energiával, hanem a magnyitogorszki fémkombinát hengerműveit is és a jaroszlavli abroncsüzemet és sok mást is. Az ágazati kapcsolatok mérlege lehetővé teszi, hogy „legombolyítsuk" az ilyen kapcsolatok egész láncát, kiszámítsuk egyes ágazatok fejlődésének következményeit.

Az ágazati kapcsolatok modelljének segítségével kiszámítható az adott végtermékhez szükséges össztermék, meghatározhatók a beruházások és a munkaerőforrások, minden egyes ágazat szükséglete. Vannak más modellek is, amelyek optimalizálási feladatot oldanak meg: például meghatározzák a tőke, munkaerő és természeti erőforrások optimális elosztását, és felhasználását, amely a legmagasabb népgazdasági hatékonyságot biztosítja. Ilyenek a szovjet gazdaság általánosított „formulái", a szovjet egységes népgazdasági tervek megalkotási technológiájának „legfelsőbb fokú" matematikája. Ismétlem, ezek csak részei a matematikai modellezés általános rendszerének a szovjet gazdasági tervezésben.

A népgazdasági modellek mellett alkalmaznak ágazati és üzemi matematikai közgazdaságtani modelleket. Például az ásványolaj bányászat és feldolgozás 1971–1975. évi fejlesztési és területi elhelyezési terve, amelyet az új eljárások figyelembevételével számítottak ki, a hagyományos eljárással készült ágazati tervnél 800 millió rubellel jövedelmezőbbnek bizonyult.

Az SzKP XXIV. kongresszusának irányelvei előirányozzák, hogy 1975-re az ország ásványolajtermelését 480–500 millió tonnára, a különböző olajtermékek termelését pedig másfélszeresére növeljék. Ezek a népgazdaság felsőszintű tervmutatói. A tervezési munkák következő fokán, ágazati szinten határozták meg az új és felújítás előtt álló ásványolajfeldolgozó üzemek helyét és alapvető jellemzőit, az olajkutak kihasználási hatékonysága fokozásának reális lehetőségeit, stb. A különböző változatokat komputereken számolták ki, a termelés fejlesztésének és területi elhelyezésének optimalizáló modelljével. Fő meghatározó tényezőként szerepelt a nélkülözhetetlen olajtermékek mennyisége és választéka, a nyersanyaglelőhelyek távolsága, új szállítóeszközök megléte vagy szükségessége, a különböző költségek csökkentése, a termék jövendő fogyasztóinak címe, a munkaerőforrások és még sok más tényező.

Sok nagy gazdasági fontosságú feladat hasonló megoldását lehetne még felsorolni az anyagi termelés egész sor ágazatában. Csak azt jegyezzük meg, hogy az olyan egységes gazdasági szervezet keretei között, amilyen a szovjet gazdaság, hiányoznak a magánérdekek korlátai, nincs konkurrenciaharc. Nem merülnek fel nehézségek a fejlesztésre kijelölt területek felhasználásával kapcsolatban sem. A föld a szocialista társadalomban állami, össznépi tulajdon, ezért felhasználásának kritériuma a föld és minden egyéb természeti erőforrás ésszerű kihasználása. Az ilyen feladatok megoldásánál a társadalmi problémák komplexumát is figyelembe veszik, amilyenek: a lakásellátottság, a lakossági és kulturális szolgáltatások szférájának fejlesztése, a természeti környezet védelme, stb. Az ágazati modellek általában — például fenti példában (amely az ásványolajipar optimális fejlesztésére vonatkozott) — elég bonyolultak. A kiinduló információ volumene az adott esetben körülbelül húszezer mutatót tett ki és a változók száma csak egy számítási szinten körülbelül háromezer volt. A sokszoros elektronikus-számítógépi „lejátszás" eredménye azonban igazolta az új módszer nagy értékét.

A fenti példában úgy oldották meg a feladatot, hogy a beruházások és a folyó költségek minimumát érjék el, amelyek az ásványolaj bányászatával és feldolgozásával és a késztermék eladásával kapcsolatosak. Vagyis optimum-kritérium a minimális ráfordítás volt. Az ágazati modelleknél igen gyakran választják ezt az optimum-kritériumot. Sok esetben azonban az optimum-kritérium a maximális nyereség, amelyet az ágazat fejlesztésének eredményeképpen kapni lehet. A modell azt a tervváltozatot választja ki, amelyik a népgazdaságnak a legnagyobb hasznot hozza és a leggyorsabban kielégíti a lakosság szükségletét jó minőségű árukból.

Hogyan és miért választották például éppen Togliatti városát a Volgán az ország legnagyobb személyautógyára földrajzi telephelyéül? Ennek a komplexumnak a létesítésére az ország sok városa állt rendelkezésre. A jelöltek listáján szerepelt Kijev és Minszk, Gorkij és Belgorod, Jaroszlavl és Togliatti. Mindegyiknek megvolt a saját és elég súlyos érve.

A termelés lehetséges gazdasági mutatóinak, az építkezési feltételeknek és egyéb tényezőknek hasonló adatait vették fel a matematikai közgazdaságtani modellbe. Elektronikus számítógépen kiszámították a változatokat, amelyek csillagászati számokat tartalmaztak: a gépkocsik termelésének és eladásának kilátásairól, a vállalat építkezési ráfordításairól és a lakás-kommunális feltételekről az építők és a jövendő dolgozók számára, stb. A számítások megmutatták, hogy az üzem Belgorodban 20, Gorkijban 75, Jaroszlavban 85 millió rubellel lett volna drágább.

Az ágazati modelleknek nemcsak perspektivikus jellegük lehet, hanem a termelés operatív irányításának javítását is lehetővé teszik. Segítségükkel például az anyagi-műszaki ellátás szervei most összekapcsolják a termékek szállítóit és fogyasztóit, úgy, hogy a szállítási ráfordítások kisebbek lettek. Olyan körülmények között, amikor száz és ezer szállító és fogyasztó van, kapcsolataikat nem korlátozza a magántulajdon, és az útvonalakat összállami ésszerűséggel határozzák meg, azok racionális összekapcsolása különlegesen nehéz feladat. Ennek modellje száz és ezer egyenletet tartalmaz, amelyek megoldása még a hatalmas elektronikus számítógépek számára is munkaigényes. Szokványos kézi módszerrel az ilyen feladatok általában nem megoldhatók. Még az igen tapasztalt anyagbeszerzők leggyakorlottabb intuiciója is erőtlennek bizonyul ilyen esetekben.

Ma sok millió tonna termék elosztása az egész ország viszonylatában az elektronikus számítógépek segítségével történik. Ez a gazdaságnak tízmillió rubeleket hozott évente a teherszállításban és felszabadította a vasúti vagonok ezreit és közúti szállítóeszközöket.

Sok feladat megoldását segítik az üzemen belüli tervezési modellek. Hogyan lehet például a legésszerűbben megterhelni a hengerműveket a fémműben? Hogyan lehetne a legjobban megszervezni a panelek szállítását a házgyárból az építkezésekre, hogy azok időben érkezzenek és az autó kerülő útja a legkisebb legyen?

Hogy mit adnak, azt akár az első ilyen feladaton meg lehetne mutatni. Az elszámolások eredményeként sikerült azonos kapacitáson az öntvénytermelést 7—10%-kal növelni. Hogy a szokásos úton akkora növekedést érjünk el (új hengerművek beállításával és a meglevők rekonstrukciójával), évekre és milliós beruházásokra lett volna szükség. A szovjet közgazdászok mint az egész népgazdaságban, a vállalatoknál is arra törekszenek, hogy egyesítsék az egyes feladatok megoldására konstruált modelleket a modellek kölcsönösen összekapcsolt rendszereibe.

Felhasználják a matematikai közgazdaságtani modelleket a prognózis készítésben is. Különösen fontos ez a feladat napjainkban, amikor a tudományos felfedezések radikális termelési változásokat hoznak magukkal, amikor erősödik az emberi tevékenység hatása a környezetre. Ezért mind szükségesebb, de mind nehezebb is előre látni a ma hozott döntések távolabbi következményeit. Hogy értékelhessük a várható eredményeket, hosszútávú prognózisokat kell alkotni, és ezek felhasználásával kell a távlati terveket felépíteni.

A Szovjetunióban különféle gazdaságfejlesztési prognózisok tapasztalatait gyűjtötték össze. A rövidtávú prognózisok például a mezőgazdaságban terjedtek el. A nyár elején meghatározzák a terméskilátásokat és ezen az alapon terveznek meg egy sor gazdasági intézkedést: a betakarítási technikát az üzemanyagszükségletétől a betakarításban résztvev munkások anyagi ösztönző pénzkiutalásainak elosztásáig. A középtávú prognózisokat ágazati szinten és az egész népgazdaságban alkalmazzák. Így például a technikai haladást, a növekedési ütemet, a termelés és a nemzeti jövedelem volumenét, stb. számítják előre.

A hosszútávú prognózisok napjainkban a Szovjetunióban a komplex tervezési rendszer kötelező elemévé váltak. Rendszerint hosszabb időszakot ölelnek fel, mint a tervek, amelyeknek megalapozására konstruálták őket. Most készülnek például prognózisok az ökológia, az ásványi erőforrások területén a XXI. század első negyedére. Ha a prognosztizálás módszeréről beszélünk, ez két alapvető részt tartalmaz: az extrapoláció módszerét — azoknak a tendenciáknak a jövőbeli folytatását, amelyek a múltban alakultak ki, és az oksági kapcsolatok elemzését, ahol gazdaságmatematikai modelleket használnak fel.

Az Ökonometriai Társaság 1974 évi téli szemináriuma Dobogókőn

Az Ökonometriai Társaság európai állandó bizottságának rendezésében évente sor kerül az ún. téli szemináriumra. Ez a rendezvény a szakma fiatal művelőinek találkozását, eszmecseréjét hivatott előmozdítani. A szeminárium résztvevőit az európai állandó bizottság egy albizottsága hívja meg. Az albizottság Európa különböző régióit képviselő tagokból áll. Az albizottság összetétele három évente forgószínpad szerűen változik. Ebben az évben az albizottság elnöke Waelbroeck professzor volt, a keleteurópai régió képviselője: Kornai János.

A szemináriumon való részvétel egyik alapfeltétele, hogy a meghívott még korábban nem vett részt ilyen rendezvényen. Vagyis mindenki számára csak egyszer jöhet szóba a fiatal ökonométerek összejövetelén való szereplés. A szeminárium tárgya általában nincs előre megkötve. A résztvevők egy része előadást tart saját eredményeiről, amit a jelenlevők megvitatnak. A szeminárium létszáma általában nem több 30—40 főnél; beleértve a munkát irányító szenior tagokat is.

Az Ökonometriai Társaság vezetősége, az 1973-ban tartott osloi európai konferencia alkalmával annak a szándékának adott kifejezést, hogy szívesen rendezné Magyarországon a legközelebbi téli szemináriumot. Egyrészt azért, mert az 1972-es, Budapesten rendezett, európai konferenciának igen kedvező nemzetközi visszhangja volt. Másrészt azért is, mert ennek a rendezvénynek bizonyos anyagi eredménye volt, és a Társaság úgy gondolta, hogy ennek a megtakarításnak egy részéből fedezi a téli szeminárium költségeit

A Magyar Közgazdasági Társaság Elnöksége a Matematikai Közgazdasági szakosztály javaslatára hozzájárult ahhoz, hogy a szeminárium, mint társasági rendezvény kapjon jogi formát és ezzel az illetékes hatóságok is egyetértettek. Ilyen előzmények után került sor a résztvevők meghívására. Annak ellenére, hogy a meghívólevelek csak november végén, december elején érték el a címzetteket, a válaszok minden országból pozitívak voltak. 34 meghívott fogadta el a meghívást és közülük 28-an részt is vettek a szeminárium munkájában.

A résztvevők országonkénti megoszlása a következő volt:

Anglia: 3, Belgium: 2, Dánia: 2, Finnország: 1, Franciaország: 3, Lengyelország: 4, Magyarország: 4, NDK: 2, NSzK: 2, Norvégia: 1, Svájc: 1, Szovjetunió: 3.

A szemináriumon 14 előadás hangzott el. A vita általában úgy folyt, hogy a résztvevők előzetesen megkapták az előadás teljes szövegét. Ez jelentősen hozzájárult a vita élénkítéséhez, ami időnként majdnem szenvedélyessé is vált.

Az előadók országonkénti megoszlása: Anglia: 2, Belgium: 2, Franciaország: 2, Lengyelország: 2, Magyarország: 3, Norvégia: 1, Svájc: 1, és Szovjetunió: 1.

A szocialista országokból érkezők előadásai többségükben a népgazdasági tervezés problémaköréhez kapcsolódtak. Így W. N. Pavlov (Novoszibirszk) az önköltségcsökkentő beruházások népgazdasági hatékonyságának meghatározására szolgáló modellt mutatott be, amely a dinamikus input-output technikát használta fel. Sivák József arról a kutatásról számolt be, amelyet a Tervgazdasági Intézetben folytatnak gazdasági rendszerek autonóm vezérlésével kapcsolatban. Szepesi György a hosszútávú népgazdasági tervezésben jelentkező ártervezési problémákról beszélt. B. Suchecki azt a kutatást ismertette, amely Lengyelországban a lakossági kereslet egyenleteinek ökonometriai becslése érdekében folyt, illetve folyik. W. Sledzinski (Poznan) és Strausz Péter előadásai inkább technikai jellegűek voltak.

Nehezebb összefoglalni a nyolc nem szocialista országból érkező előadó témáit. A legdöntőbb különbség az előbb említett előadásokkal szemben az, hogy sokkal elméletibbek és távolabb állnak a gazdaság tényleges problémáitól.

Amikor azt mondjuk, hogy ezek az előadások sokkal inkább elméleti jellegűek, akkor egyszerre állítunk bizonyos pozitívumot és negatívumot is. A pozitívum, hogy szélesebb matematikai fegyverzettel dolgoznak és közben modelljeik világában érvényes új tételeket is bebizonyítanak. A negatívum, hogy a modellek érdekesnek tűnnek ugyan, de gyakran rendkívül vitatható, közgazdaságilag alig helytálló feltételezésekből indulnak ki.

Példának megemlítjük G. Fuchs igen magasszínvonalú előadását, amelyben rendkívül bonyolult differenciál-topológiai eszközökkel általánosított tételeket gazdasági rendszerek egyensúlyi állapotainak folytonosságáról. A vitában egyesek felvetették, hogy mi az értelme az ilyen vizsgálatoknak. A szerző — joggal — azzal érvelt, hogy ha van valamilyen modellünk, akkor szükséges, hogy ismerjük modellünk matematikailag igazolható tulajdonságait. Ezek között pedig alapvető jelentőségű az, hogy a körülmények nem túl jelentős megváltozása esetén az egyensúlyi helyzet jelentősen vagy csak kis mértékben mozdul-e ki a helyéről. Egy modell „jó viselkedéséhez" elengedhetetlen bizonyos folytonossági tulajdonság — vélte a szerző. A vitapartnerei ezzel szemben amellett kardoskodtak, hogy egy modell nem „attól jó" hogy folytonos, hanem attól, hogy feltételezései a gazdasági valóság reális absztrakcióit tükrözik.

A szeminárium legnagyobb vitáját Jean Pascal Benassy: „Neo-Keynesian Theory of Disequilibrium" című rendkívül figyelemreméltó tanulmánya váltotta ki. A szóbanforgó előadásban a szerző néhány részletet ismertetett „Disequilibrium Theory" című 1973-ban készült tanulmányából. Benassy formálisan is kezelhető modelleket igyekszik felállítani a gazdaságban fellépő nem-egyensúlyi helyzetek vizsgálatára. Döntő fontosságú szerepe van gondolati rendszerében a pénz szerepének. Benassy nem akármilyen gazdaságot modellez, hanem egy — mind mondja — monetáris gazdaságot. Olyan gazdaságot, amelyben létezik pénz és ennek a pénznek az a szerepe, hogy árukat csak pénzért lehet venni, illetve eladni.

Marxista közgazdászok előtt jól ismert, hogy a pénz kialakulása hogyan rejti magában a válságok keletkezésének elvont lehetőségét. Így nem meglepő, hogy a különböző neoklasszikus áramlatok jelenlevő képviselői mindenekelőtt a szerzőnek fent idézett kiinduló pontját bírálták és arra akarták rábeszélni, hogy helyettesítse azt „általánosabb", formális kezelés szempontjából „elegánsabb" feltételezéssel, amely speciális esetként magában foglalja a pénz létezésének a feltételezését.

Voltak akik így érveltek: Mi az hogy pénz? Semmi más, mint bizonyos korlátozása annak, hogy a különböző jószágok teréből milyen irányban lehet kijutni. Ha azt mondjuk, hogy van néhány kitüntetett irány, amelyeket az jellemez, hogy kizárólag azok mentén lehet kijutni: ez tökéletesen megfelelő feltételezés. A szerző ennek egy speciális esetét alkalmazza: nevezetesen azt, amikor a fenti értelemben vett kitüntetett irányok száma pontosan egy.

Benassy nem hagyta magát az „elegánsabbra" rábeszélni és következetesen ragaszkodott kiindulópontjához: ahhoz, hogy vizsgálatának semmi köze a naturális gazdaság jelenségeihez és hogy éppen a pénz piacának elkülönítése az összes többi áru piacától teszi lehetővé olyan modellek felépítését, amelyekben a nem egyensúly lehetősége úgy jelenik meg, mint nagyjából a tényleges gazdaságban.

Említésre érdemes, hogy Benassy fogalomalkotásaiban felismerhető Kornai Anti-equilibriumának hatása. Ugyanakkor munkája kísérlet olyan feladatok tényleges megoldására, amelyek Kornainál csak felvetve jelentkeznek. (Szeretnénk majd Benassy eredményeire a SZIGMA hasábjain érdemben is visszatérni.)

A szeminárium utolsó estéjén — ezirányú hagyományainkat követve — konzultációs lehetőséget biztosítottunk a külföldi résztvevőknek, hogy kötetlen formában választ kaphassanak a szocialista építőmunkánkkal összefüggő bármilyen kérdésükre. A kérdésekre a szeminárium hazai szervezői: Augustinovics Mária és Bod Péter válaszoltak. A késő éjszakába nyúló baráti beszélgetés valamennyi résztvevőben azt a benyomást keltette, hogy az Econometric Society 1974. évi téli szemináriuma nemcsak érdekes, tanulságos tudományos esemény volt, hanem hozzájárult ahhoz is, hogy különböző országok szakemberei jobban megismerjék egymást, személyes ismeretségeket, barátságokat kössenek. A szeminárium egész légköre az utóbbi években megjavult európai közérzetet tükrözte, és a maga szerény körében biztosan hozzá is járult további javulásához.

B. P.

Az Ökonometriai Társaság világkongresszusa

(Előzetes tájékoztatás)

1975 augusztus 20-tól 26-ig kerül megrendezésre az Ökonometriai Társaság harmadik világkongresszusa Torontóban.

A kongresszus tudományos programját negyventagú nemzetközi programbizottság készíti elő. A programbizottság elnöke

Prof. Marc Nerlove
Department of Economics
Northwestern University
629 Noyes St.
Evanston, Illinois, 60201 USA

A program középpontjában négy ünnepi nagyelőadás és 20—25 vitával egybekötött meghívott előadás áll majd. Ezekhez kapcsolódóan kb. 250 benyújtott előadás kerül a programra, amelyeket párhuzamos szekciókban fognak ismertetni.

A Programbizottság felhívta mindazokat, akik előadást kívánnak benyújtani, hogy ezirányú szándékukat közöljék a programbizottsággal. A jelentkezésen fel kell tüntetni a szerző(k) nevét és címét; az előadás teljes címét, valamint csatolni kell az előadás kb. 150 szavas angolnyelvű kivonatát.

Az előkészítő munkák egyszerűsítése érdekében a jelentkezőket arra kérik, hogy ne a programbizottság elnökével kezdjenek közvetlenül levelezést, hanem a programbizottság valamelyik tagjával. A programbizottság teljes névsorát az Econometrica közölni fogja.

A jelentkezők bármelyik programbizottsági taghoz fordulhatnak. Célszerű azonban vagy személyes ismerősnek, vagy az előadás témakörében tevékenykedő személyiségnek, vagy a szerző földrajzi régiója szerint illetékes programbizottsági tagnak írni. A Kelet-európai régiót egyelőre

Prof. Krysztof Porwit
Institute of Planning
Warsaw, Poland

és

Bod Péter
MTA Matematikai Kutató Intézet

képviselik a programbizottságban.

A Magyar Közgazdasági Társaság matematikai-közgazdasági szakosztályának vezetősége elhatározta, hogy megvizsgálja, milyen módon tud anyagi eszközöket előteremteni arra érdemes magyar szakemberek részvételének támogatására. Minthogy a legszerencsésebb esetben is legfeljebb egy-két kiutazás támogatásának a lehetőségével számolhatunk: az esetleg rendelkezésre álló eszközök felhasználásáról a Szakosztály vezetősége pályázat alapján fog dönteni. A pályázati hirdetményt akkor tesszük csak közzé, ha már sikerült majd a lehetőségeket tisztázni.

Felhívjuk érdekelt olvasóink figyelmét: a támogatásnak minden bizonnyal feltétele lesz az, hogy a pályázó előadását a nemzetközi programbizottság elfogadja. Az előadáskivonatok beküldésének nincs formális határideje. Azonban a korábban beküldött jelentkezések óhatatlanul bizonyos előnyt élveznek. A programbizottság 1975 első negyedében dönt véglegesen az elfogadásokról. Ezért legkésőbb az év végéig célszerű jelentkezni.

Végül szeretnénk figyelmeztetni arra a körülményre is, hogy az Ökonometriai Társaság anyagi eszközeiből fedezett támogatásra csak a Társaság tényleges tagjai tarthatnak igényt. Tagsági ügyekben Dr. Marton Ádám (KSH), az Ökonometriai Társaság hazai tagszervezője ad felvilágosítást.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sós Attila
A kézirat nyomdába érkezett: 1973. XI. 22. Terjedelem 7,35 (A/5) ív
74.75704 Akadémiai Nyomda, Budapest — Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

BOOK REVIEWS

SCIENTIFIC LIFE

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

TUDOMÁNYOS ÉLET

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST