SZIGMA

Matematikai közgazdasági folyóirat

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai-Közgazdasági Szakosztályának lapja

*

E szám szerzői:

ANDORKA RUDOLF, Központi Statisztikai Hivatal, DANCS ISTVÁN, kandidátus, az Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete önálló csoportvezetője, FÉNYES TAMÁS, kandidátus, az MTA Matematikai Kutató Intézete főmunkatársa, HUNYADI LÁSZLÓ, Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézete, KÁDAS SÁNDOR, egyetemi hallgató, MARTOS BÉLA, kandidátus, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos csoportvezetője, SÁRI JÓZSEF, a Magyar Nemzeti Bank Közgazdasági Főosztály osztályvezetője, SIMONOVITS ANDRÁS, az MTA Közgazdaságtudományi Intézete tudományos segédmunkatársa, SIVÁK JÓZSEF, az Országos Tervhivatal Tervgazdsági Intézete előadója, SZAKOLCZAI GYÖRGY, az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat osztályvezetője, SZEGEDY MIKLÓS, a Központi Statisztikai Hivatal főelőadója.

*

Szerkesztőség: 1361 Budapest, Münnich Ferenc u. 7.

Terjeszti a Magyar Posta. Előfizethető bármely postahivatalnál, a kézbesítőknél, a Posta hírlapüzleteiben és a Posta Központi Hírlap Irodánál (KHI 1900 Budapest V., József nádor tér 1.) közvetlenül vagy postautalványon, valamint átutalással a KHI. 215–96162 pénzforgalmi jelzőszámára. Egyes példányok beszerezhetők a 1055 Budapest V., Bajcsy-Zsilinszky út 76. sz. alatti hírlapboltban.

Előfizethető és példányonként megvásárolható: az AKADÉMIAI KIADÓ-nál, 1363 Budapest V., Alkotmány u. 21. Telefon: 111–010. Pénzforgalmi jelzőszámunk: 215–11488, és a AKADÉMIAI KÖNYVESBOLT-ban, 1368 Budapest V., Váci utca 22. Telefon: 185–612.
Előfizetési díj egy évre: 40,– Ft

Kádas Sándor—Szakolczai György

A beruházás és a technikai felszereltség optimális növekedési üteme

Az a munka, melyről ez a tanulmány számol be, szerves kapcsolatban áll az optimális beruházás problémájával foglalkozó külföldi eredményekkel, valamint saját korábbi vizsgálatainkkal.

Az említett *korábbi külföldi kutatások* (vö.: [2] [3], valamint az ott megadott irodalom) leegyszerűsített modellből indulnak ki. Feltételezik, hogy a termelés és az állóeszköz állomány azonos és az időben változatlan ütemben növekszik, aminek folytán a tőkekoefficiens is konstans; hallgatólagosan feltételezik, hogy a helyettesítési rugalmasság egységnyi, és így a modell csak a Cobb—Douglas esetre vonatkoztatható; a nettó termelés elemzéséből indulnak ki, vagyis elhanyagolják az amortizációt és a javítási költségeket; végül feltételezik, hogy a műszaki fejlődés és a beruházás függetlenek egymástól, vagyis nem veszik figyelembe az ún. megtestesült műszaki fejlődést, melynek érvényesülése újabb állóeszközök létesítését tételezi fel. Az eredmények ennek ellenére jól közelítik a valóságot, és a pénzügyi szabályozórendszer konzisztens elméleti megalapozását is lehetővé teszik (vö.: [6] [8]). A valóság és az elméleti eredmények elég nagy mértékű összhangja ellenére célszerűnek látszik a *modell továbbfejlesztése*, és a korlátozó feltételek legalább egy részének a feloldása. Az ezzel kapcsolatos munka *első eredményeit már korábban publikáltuk* [1] [7] [10]. Az ebben a korábbi munkában alkalmazott modell számolt az állóeszköz-állomány és a termelés növekedési ütemének eltérésével, és így a tőkekoefficiens esetleges időbeli csökkenésével vagy növekedésével. Lehetővé tette az egységnyitől különböző, bár konstans helyettesítési rugalmasság figyelembevételét, és így az elemzésnek a CES esetre való kiterjesztését. A nettó termelés helyett az amortizációt és a javítási költséget is magába foglaló hozzáadott érték elemzéséből indult ki, és így lehetővé tette e tényezők hatásának kifejezett figyelembevételét is. Ugyanakkor azonban teljesen elhanyagolta a műszaki fejlődés és a beruházás kölcsönös kapcsolatait, vagyis abból a hallgatólagos feltételezésből indult ki, hogy az ún. megtestesült műszaki fejlődés üteme zérus.

A modell felhasználásával bizonyítani lehetett, hogy ilyen feltevések esetén *az állóeszköz-állomány növekedési ütemének minden reális esetben egyértelműen meghatározható optimuma van,* mely egy véges időszak fogyasztásának egyértelműen meghatározható maximumára vezet. A beruházási folyamat optimálása ezek szerint elvben tisztán gazdasági kérdés, és nem a folyó fogyasztás

[1] Ez a cikk az Országos Anyag- és Árhivatal, valamint az INFELOR Rendszertechnikai Vállalat kiadásában megjelent részletes tanulmány [9] anyagán alapul. Az itt kifejtettek a szerzők személyes nézetei, és nem szükségképpen azonosak a fenti szervek álláspontjával.

ezzel járó korlátozásával kapcsolatos politikai, társadalmi vagy erkölcsi meggondolások függvénye. A modellből a különböző növekedési tényezők viszonylagos szerepére, az árpolitikára, és a fejlesztés finanszírozására vonatkozó további következtetések voltak levonhatók.

A most ismertetett *kutatás célja* ennek *a vizsgálat*nak a *továbbfejlesztése*: elsősorban a műszaki fejlődés és a beruházás függetlenségére vonatkozó feltevés elejtése, és az ún. *állóeszközökben megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele*. A modell ezen felül az amortizáció és a javítási költségek ábrázolását is valamivel közelebb kívánja vinni a valósághoz. A tanulmány 1. része a modellt, 2. része az ezen alapuló analitikus elemzést, 3. része pedig a numerikus számításokat és ezek eredményeit ismerteti. A tanulmányt az összefoglalás és az irodalomjegyzék zárja le.

1. A modell és a feltevések

A modell mindenekelőtt feltételezi, hogy a $b(t)$ *beruházás* $x = \gamma(b)$ konstans exponenciális ütemben nő az időben, vagyis

$$b(t) = b_0 e^{\gamma(b)t} = b_0 e^{xt}, \tag{1.1}$$

ahol b_0 a bázisidőszak beruházási színvonalát jelöli. A megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele évjáratonkénti termelési függvények (vö.: Solow [4] [5]) felírását teszi szükségessé.

Jelölje a továbbiakban τ az egyes *évjáratok*at, tehát azt, hogy a kérdéses állóeszköz a mindenkori futó időszakot (évet) megelőzően hány időszakkal (évvel) jött létre. Jelölje tehát $k(t, \tau)$ a t időszakban τ éves állóeszközök állományát. Erre az állományra vonatkozóan felírhatjuk, hogy

$$k(t, \tau) = b(t - \tau) = b_0 e^{x(t-\tau)}, \tag{1.2}$$

vagyis hogy a mindenkori t időpontban τ éves, azaz a τ évjárathoz tartozó állóeszközök állománya éppen a τ évvel azelőtti beruházással egyenlő. Feltételezzük tehát, hogy a javítások az állóeszköz-állományt folyamatosan éppen a kiinduló állapotnak megfelelő technikai szinten tartják, vagyis hogy az egyes évjárathoz tartozó állóeszközök állománya a selejtezési időpontjáig nem változik.

A modell egyik legfontosabb célkitűzése a már kifejtettek értelmében az ún. *állóeszközökben megtestesült műszaki fejlődés* (ε_6) figyelembevétele. Ez a műszaki fejlődés az állóeszköz állomány hatékonyságának időbeli növekedését írja le; feltételezzük, hogy a hatékonyságnak ez az időbeli változása konstans exponenciális ütemben megy végbe. Ez a műszaki fejlődés azonban azt eredményezi, hogy a különböző időpontban létrehozott eszközök hatékonysági színvonala eltérő lesz, és ezért ezek az eszközök nem adhatók össze közvetlenül, hanem a teljes $k(t)$ *eszközállomány* csak a

$$k(t) = \int_0^{T(t)} e^{\varepsilon_6(t-\tau)} k(t, \tau)\, d\tau \tag{1.3}$$

alakban definiálható, ahol $T(t)$ a t időszakban működő legrégebbi állóeszköz életkora. Ennek az egyenletnek az értelmében tehát az állóeszközökben megtestesült műszaki fejlődés csak az egyes évjáratok létrehozásának $(t - \tau)$

időpontjáig érvényesül, és ettől kezdve ezek az állóeszközök üzemeltetésük egész időszaka alatt csak a létrehozásuk idejének megfelelő, változatlan műszaki színvonalon üzemeltethetők, tehát ezt a műszaki fejlettségi színvonalat testesítik meg.

Az $l(t)$ *munkaerő-állomány*ról feltételezzük, hogy a bázisidőszak l_0 állományából kiindulva $\gamma(l)$ konstans exponenciális ütemben növekszik, vagyis hogy fennáll az

$$l(t) = l_0 e^{\gamma(l)t} \tag{1.4}$$

összefüggés.

A termelési összefüggések évjáratonkénti felírására való tekintettel szükség van az összes t időpontban az egyes τ évjáratokon dolgozó $l(t, \tau)$ munkaerő-állomány definiálására is, amit később adunk meg. Természetesen az összes évjáraton együtt nem dolgozhat több munkaerő, mint amennyi a t évben rendelkezésre áll, vagyis

$$l(t) \geq \int_0^{T(t)} l(t, \tau)\, d\tau. \tag{1.5}$$

A t időpontban a τ évjárathoz tartozó állóeszköz-állomány felhasználásával elérhető $q(t, \tau)$ *termelés* nagyságát megadó termelési függvény az eddigi jelölések bevezetése után a

$$q(t, \tau) = \varepsilon_2 e^{\varepsilon_1 t} [e^{\varepsilon_6(t-\tau)} k(t, \tau)]^{\varepsilon_3 \varepsilon_5} [e^{\varepsilon_7 t} l(t, \tau)]^{(1-\varepsilon_3)\varepsilon_5} \tag{1.6}$$

alakban írható fel, ahol ε_2 egy közgazdasági jelentéssel nem bíró konstans, ε_1 és ε_7 a meg nem testesült, illetve a munkaerőben megtestesült műszaki fejlődés átlagos évi üteme, ε_3 a termelés állóeszközök szerinti elaszticitása a volumen konstans hozadéka esetén, és ε_5 a volumen hozadékának nagyságát megadó paraméter.

Az ε_7 paraméter a munkaerővel kapcsolatos minőségi tényezők hatását juttatja kifejezésre. A beruházási kérdések elemzése esetén szerepe nem különbözik a meg nem testesült műszaki fejlődés hatásától. Bevezethetjük tehát az

$$\varepsilon_8 = \varepsilon_1 + \varepsilon_7(1 - \varepsilon_3)\, \varepsilon_5$$

jelölést, és a (1.6) termelési függvényt a

$$q(t, \tau) = \varepsilon_2 e^{\varepsilon_8 t} [e^{\varepsilon_6(t-\tau)} k(t, \tau)]^{\varepsilon_3 \varepsilon_5} l(t, \tau)^{(1-\varepsilon_3)\varepsilon_5} \tag{1.7}$$

egyszerűbb alakra hozhatjuk.

Az *évjáratonkénti termelési függvények* bevezetése esetén a t időszak teljes állóeszköz-állományán, tehát az összes évjárathoz tartozó termelőeszközön elért termelés a

$$q(t) = \int_0^{T(t)} q(t, \tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

alakban írható fel.

A megtestesült műszaki fejlődés bevezetésének egyenes következménye, hogy fel kell tételeznünk: egy-egy *adott évjáratra a munka technikai felszereltsége is adott*. Ez az utóbbi feltevés teljesen indokoltnak látszik. Ha valamely gépegység műszaki színvonalát a beruházás pillanatában véglegesen meghatározottnak tekintjük, ami teljes mértékben reális feltevés, akkor méginkább adottnak kell tekintenünk az ezen a gépegységen, illetve az ennek az évjáratnak megfelelő tőkén dolgozó munka technikai felszereltségét, vagyis a tőke–munka arányt. Minden egyes munkahely ugyanis egy valamely adott tőke–munka arányt testesít meg. Éppúgy, ahogy a munkahely technikai színvonala nem módosítható lényegesen a gépegység kiselejtezéséig, nem módosítható lényegesen a munkahely értéke, és így a tőke—munka arány vagyis a technikai felszereltség sem – egészen a munkahely kiselejtezéséig. Ezek szerint tehát nem követünk el nagy hibát, ha az egyes évjáratokhoz tartozó technikai felszereltséget adott konstansnak tekintjük.

Más szavakkal, ez a feltevés tulajdonképpen a termelési függvények szokásos feltevésrendszerébe tartozó *korlátlan helyettesíthetőség feltevésének* az elvetését, illetve *módosítását* jelenti. A korlátlan helyettesíthetőség feltevése azt jelenti, hogy a tőke–munka arány korlátlanul változtatható, és ugyanaz a termelési volumen számos – vagy elvben végtelenül sok – tőke–munka kombinációval állítható elő. Ez a modell ezt a feltevést oly értelemben módosítja, hogy a *korlátlan helyettesíthetőség* fennáll ugyan, vagyis a tőke–munka arány elvben bármilyen értéket felvehet, ez azonban *csak a még meg nem valósított beruházásokra vonatkozik. A már megvalósult beruházásokon* – tehát a már létrehozott termelő berendezéseken – ez *a tőke–munka arány már nem változtatható meg*, hanem a berendezéseket üzemeltetésük egész ideje alatt a létrehozásuk időpontjában végérvényesen meghatározott technikai felszereltség vagyis tőke–munka arány szintjén kell üzemeltetni (ez a feltevés természetesen nem teljesen pontosan, de elég jól közelíti meg a valóságot), tehát

$$\frac{k(t, \tau)}{l(t, \tau)} = \frac{k(t-\tau, 0)}{l(t-\tau, 0)} = \varkappa(t-\tau). \tag{1.9}$$

Ezek szerint a t időszakban a τ évjárathoz tartozó tőke technikai felszereltsége egyenlő a $t-\tau$ időszakban a zérus évjárathoz tartozó, tehát az abban az időszakban beruházott tőke technikai felszereltségével, ami csak $(t-\tau)$-tól függ: ez a $\varkappa(t-\tau)$. Ez teljes mértékben érthető is, mert a t időszakban τ éves tőke fizikailag azonos a $t-\tau$ időszakban 0 éves tőkével.

Most egy eddigi feltevésrendszerünkbe illő újabb feltevést vezetünk be: a mindenkor újonnan beruházott állóeszközök technikai felszereltsége kontans $\gamma(\varkappa) = y$ exponenciális ütemben nő:

$$\varkappa(t) = \varkappa_0 e^{yt}, \tag{1.10}$$

ahol $\varkappa_0$ a bázisidőszakban megvalósított beruházás technikai felszereltsége.

Ezeknek a jelöléseknek a bevezetése után a t időszak $q(t)$ bruttó *termelési értékét* a

$$q(t) = c(t) + b(t) + d(t) + r(t) \tag{1.11}$$

alakban is felírhatjuk, ahol $c(t)$, $d(t)$ és $r(t)$ rendre a t időszak fogyasztását, amortizációját és javítási költségeit jelöli.

A t időszakban a τ évjárathoz tartozó állóeszközök utáni $d(t, \tau)$ *amortizáció* a

$$d(t, \tau) = \delta(t, \tau)\, k(t, \tau) \tag{1.12}$$

egyenlettel adható meg, ahol $\delta(t, \tau)$ a megfelelő koefficiens. Ennek értékére vonatkozóan különböző feltevéseket vezettünk be; ezeket a numerikus elemzés során fogjuk tárgyalni. A t időszak összes $d(t)$ amortizációja innen a

$$(1.13) \qquad d(t) = \int_0^{T^*} d(t, \tau)\, d\tau$$

kifejezéssel írható fel, ahol T^* az amortizáció számítás céljára felhasznált, konstansnak tekinthető élettartam.

Az amortizáció ilyen módon való kezelése a modell egyik kritikus eleme. Az (1.3), (1.5) és (1.8) egyenletekben szereplő $T(t)$ élettartam ugyanis a számított optimális élettartam, ezzel szemben viszont T^* az amortizáció számítás céljára használt, becsült és konstansnak tekintett élettartam. Elvben akkor járnánk el a leghelyesebben, ha a kettőt azonosnak vennénk, ez azonban azért nem biztosítható, mert az amortizációs költség az optimális élettartam meghatározásának egyik elem, és az amortizáció maga is az optimális élettartamtól függ. Az adott modell keretei között nem tudtuk megoldani, hogy ezeket az értékeket szimultán határozzuk meg, és így $T(t)$ és T^* értékét azonosnak vegyük.

A most elmondottak ellenére ez a megoldás nem vezet nagyobb hibára, ugyanis biztosítottuk, hogy az eszközök értékét teljesen leírjuk, azaz a t időpontban beruházott eszköz (amely a t' időpontban $t' - t$ éves) után működtetése során évenként felszámított amortizációk összege (integrálja) kiadja a teljes értékét:

$$(1.14) \qquad \int_t^{t+T^*} d(t', t' - t)\, dt' = k(t, 0),$$

ahonnan

$$(1.15) \qquad \int_t^{t+T^*} \delta(t', t' - t)\, dt' = 1,$$

és ahol t' egy integrációs változó.

Feltételezzük, hogy az állóeszközök állandó karbantartásuk és felujításuk miatt egész kiselejtezésükig eredeti teljesítőképességük, műszaki színvonaluk fenntartása mellett üzemeltethetők.

A *javítási költségek*et ugyancsak évjáratonként definiáljuk az

$$(1.16) \qquad r(t, \tau) = k(t, \tau)\, \varrho_1 e^{\varrho_2}$$

egyenlettel, ahol ϱ_1 és ϱ_2 a javítási és állóeszköz fenntartási költségek meghatározásához felhasznált paraméterek. Innen a szokott módon, az

$$(1.17) \qquad r(t) = \int_0^{T(t)} r(t, \tau)\, d\tau$$

kifejezéssel kaphatjuk meg a t időszak összes $r(t)$ állóeszköz fenntartási költségét.

Az (1.1), (1.7), (1.13) és (1.17) egyenleteket az (1.11) egyenletbe behelyettesítve kifejezhetjük a t időszakhoz tartozó $c(t)$ fogyasztás értékét. Ezt az értéket a bázisidőszak és a T befejező időszak közötti intervallumra összegezve és esetleg az η diszkonttényezővel a bázisidőszakra lediszkontálva kapjuk meg a vizsgált időszak összes fogyasztását, mely érték x és y szerinti maximumának meghatározása, vagyis a

$$C(x, y) = \int_0^T e^{-\eta t} c(t)\, dt \to \max \tag{1.18}$$

feladat megoldása a vizsgálat célja. Az elemzés feltételezi, hogy a fogyasztási célra rendelkezésre álló termelés realizálásához szükséges vásárlóerő folyamatosan rendelkezésre áll, és ezért a probléma a keresleti oldal mellőzésével, csupán a termelési oldal figyelembevételével elemezhető.

Ezt a vizsgálatot az előző tanulmányokhoz ([1], [7], [10]) hasonlóan egyrészt analitikus, másrészt numerikus módszerekkel végeztük el.

2. Analitikus elemzés

A $C(x, y)$ *összes fogyasztás maximálás*ának az (1.18) kifejezéssel definiált feladatát az (1.11) egyenletből kiindulva oldjuk meg. Ebből az egyenletből a $c(t)$ fogyasztás értéke egyértelműen meghatározható, ha ismerjük a $q(t)$ termelés, $b(t)$ beruházás, $d(t)$ amortizáció és $r(t)$ javítási és állóeszköz fenntartási költségek nagyságát.

A $q(t, \tau)$ *termelési érték* a $k(t, \tau)$ állóeszközállomány és $l(t, \tau)$ létszám függvénye. $k(t, \tau)$ értékét az (1.2) egyenlet egyértelműen meghatározza, $l(t, \tau)$ értéke pedig az (1.9) egyenletből fejezhető ki. Ezeket a kifejezéseket az (1.7) termelési függvénybe behelyettesítve és felhasználva még az

$$\varepsilon_9 = \varepsilon_3\, \varepsilon_5\, \varepsilon_6$$

jelölést is, a termelési függvény a

$$q(t, \tau) = \varepsilon_2\, e^{\varepsilon_8 t} e^{\varepsilon_9 (t-\tau)} \frac{b_0^{\varepsilon_5}\, e^{\varepsilon_5 x (t-\tau)}}{[\varkappa_0\, e^{y(t-\tau)}]^{(1-\varepsilon_3)\varepsilon_5}} \tag{2.1}$$

alakba írható. Ha a jelölések egyszerűsítése érdekében az

$$\varepsilon_{10} = \frac{\varepsilon_2\, b_0^{\varepsilon_5}}{\varkappa_0^{(1-\varepsilon_3)\varepsilon_5}}$$

jelölést is bevezetjük, akkor a termelési összefüggést a

$$q(t, \tau) = \varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_8 t + \varepsilon_9 (t-\tau)]}\, e^{\varepsilon_5 (t-\tau)[x-(1-\varepsilon_3)y]} \tag{2.2}$$

képlettel fejezhetjük ki. Ezt az (1.8) egyenletbe behelyettesítve kaphatjuk meg a t időszak összes bruttó termelését. Az integrálás elvégzése után felírhatjuk, hogy

$$q(t) = \begin{cases} \varepsilon_{10} e^{[\varepsilon_8 + \varepsilon_9 + \varepsilon_5 (x-(1-\varepsilon_3)y)]t} * \dfrac{1 - e^{-T(t)(\varepsilon_9 + \varepsilon_5 [x-(1-\varepsilon_3)y])}}{\varepsilon_9 + \varepsilon_5 [x - (1-\varepsilon_3)y]}, \\ \text{ha } \varepsilon_9 + \varepsilon_5 [x - (1-\varepsilon_3)y] \neq 0; \text{ és } \varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_8 + \varepsilon_9 + \varepsilon_5 (x-(1-\varepsilon_3)y)]}\, T(t), \\ \text{ha } \varepsilon_9 + \varepsilon_5 [x - (1-\varepsilon_3)y] = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

A *javítási és állóeszköz fenntartási költségek* meghatározását az (1.16) egyenletből kiindulva tárgyaljuk. Ez az egyenlet az (1.2) egyenlet felhasználásával a

$$r(t, \tau) = b_0 \, e^{x(t-\tau)} \varrho_1 e^{\varrho_2 \tau} \tag{2.4}$$

alakra hozható. Innen az (1.7) egyenlet figyelembevételével és az integrálás elvégzésével felírhatjuk, hogy

$$r(t) = \begin{cases} b_0 \, \varrho_1 e^{xt} \dfrac{1 - e^{-(x-\varrho_2)\, T(t)}}{x - \varrho_2} & \text{ha } \varrho_2 \neq x, \\ b_0 \, \varrho_1 e^{xt} \, T(t) & \text{ha } \varrho_2 = x. \end{cases} \tag{2.5}$$

Az eddigiekből kitűnik, hogy mind $q(t)$, mind pedig $r(t)$ értéke az állóeszközök t időszakhoz tartozó optimális $T(t)$ *élettartamától* függ. $T(t)$ értékét úgy kell meghatároznunk, hogy $c(t)$ értéke maximális legyen az alábbi két feltétel mellett:

$$1. \int_0^{T(t)} 1(t, \tau) \, d\tau = \int_0^{T(t)} \frac{k(t, \tau)}{\varkappa_0 \, e^{y(t-\tau)}} \, d\tau \leq 1_0 \, e^{\varkappa(L)t} \tag{2.6}$$

illetve

$$2. \; T(t + \Delta t) \leq T(t) + \Delta t \text{ bármely } t\text{-re és } \Delta t\text{-re.} \tag{2.7}$$

Az első feltétel értelmében a rendelkezésre álló munkaerőnél többet nem használhatunk fel, a második feltétel értelmében pedig a t időpontban kiselejtezett gépet később már nem üzemeltethetjük. Ez utóbbi differenciálható $T(t)$ esetén ekvivalens a

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} \leq 1$$

feltétellel.

Ha most a többi változót adottnak tekintjük, $q(t)$ és $r(t)$, ennek folytán pedig $c(t)$ *csak* $T(t)$ *függvénye*. Az (1.11) egyenlőség ennek folytán a

$$c(T) = q(T) - r(T) - b_0 \, e^{xt} - d(t) \tag{2.8}$$

alakban írható fel, ahol a jobboldal két utolsó tagját adottnak tekintjük. Ha most bevezetjük a

$$G(x, y) = \varepsilon_9 + \varepsilon_5[x - (1 - \varepsilon_3)y]$$

jelölést, akkor

$$q(T) = \begin{cases} \varepsilon_{10} \, e^{[\varepsilon_8 + G(x,y)]t} \dfrac{1 - e^{-TG(x,y)}}{G(x, y)}, & \text{ha } G(x, y) \neq 0, \text{ és} \\ \varepsilon_{10} \, e^{[\varepsilon_8 + G(x,y)]t} \, T, & \text{ha } G(x, y) = 0; \end{cases} \tag{2.9}$$

illetve

$$r(T) = \begin{cases} b_0 \, \varrho_1 \, e^{xt} \dfrac{1 - e^{-(x-\varrho_2)T}}{x - \varrho_2}, & \text{ha } x \neq \varrho_2, \text{ és} \\ b_0 \, \varrho_1 \, e^{xt} \cdot T, & \text{ha } x = \varrho_2. \end{cases} \tag{2.10}$$

Innen, figyelembe véve, hogy

$$\frac{\partial c(T)}{\partial T} = \frac{\partial q(T)}{\partial T} - \frac{\partial r(T)}{\partial T},$$

felírhatjuk, hogy

$$\frac{\partial c(T)}{\partial T} = \varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_8 + G(x,y)]t} * e^{-TG(x,y)} - b_0\, \varrho_1 e^{xt} e^{-(x-\varrho_2)T}, \tag{2.11}$$

illetve, hogy

$$\frac{\partial^2 c(T)}{\partial T^2} = -\varepsilon_{10}\, e^{[\varepsilon_9 + G(x,y)]t} G(x, y)\, e^{-TG(x,y)} + b_0\, \varrho_1 (x - \varrho_2)\, e^{xt} e^{-(x-\varrho_2)T}. \tag{2.12}$$

Vezessük most be a

$$H(x, y) = G(x, y) - (x - \varrho_2)$$

jelölést. Ekkor $c(T)$ alakja a paraméterek, továbbá x, y, és t függvényében az alábbiak szerint alakul.

1. Ha $H(x, y) \neq 0$, akkor (2.11)-ből következik, hogy a $\frac{\partial c(T)}{\partial T}$ parciális derivált értéke egyetlen T_2 helyen lesz zérus, tehát a $c(T)$ függvénynek egyetlen T_2 szélső érték helye lesz, melynek értékét a

$$T_2 = \frac{\ln \frac{\varepsilon_{10}}{b_0\, \varrho_1} + [\varepsilon_8 + G(x, y) - x]\, t}{H(x, y)} \tag{2.13}$$

kifejezés adja meg. Ezt (2.12)-be behelyettesítve megfelelő átalakítások után a

$$\left. \frac{\partial^2 c(T)}{\partial T^2} \right|_{T=T_2} = -\, b_0\, \varrho_1 H(x, y) \tag{2.14}$$

egyszerű eredményt kapjuk. T_2 maximumhely, ha $H(x, y) > 0$, és minimumhely, ha $H(x, y) < 0$. A (2.13) a

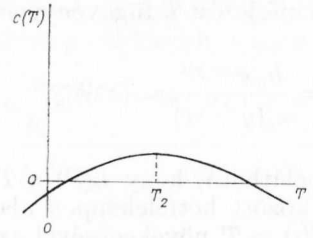
$$T_2 = \frac{\ln \frac{\varepsilon_{10}}{b_0\, \varrho_1} + [\varepsilon_8 + H(x, y) - \varrho_2]\, t}{H(x, y)} \tag{2.15}$$

alakra hozható. Könnyen belátható, hogy – amennyiben $H(x, y) > 0$ – reális paraméterértékek mellett a számláló pozitív lesz, és így $T_2 > 0$.

Ez az összefüggés *grafikusan* is ábrázolható. Ennek értelmében határozzuk meg $c(T)$ értékét a $T = 0$ helyen. (2.8)–(2.10) alapján könnyen belátható, hogy

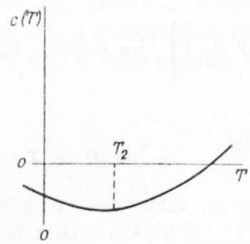
$$c(o) = -\, b_0\, e^{xt} - d(t),$$

vagyis hogy $c(0)$ értéke negatív. A $H(x, y) > 0$ és $T_2 > 0$ esetet ennek megfelelően az 2.1 ábra tünteti fel.

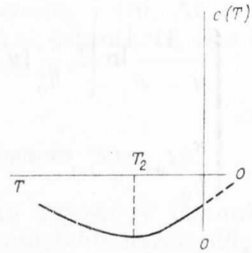


2.1 ábra

Ha $H(x, y) < 0$, akkor T_2 előjeléről semmit sem tudunk. A görbék alakját ez esetben a 2.2a és a 2.2b ábra mutatja be.

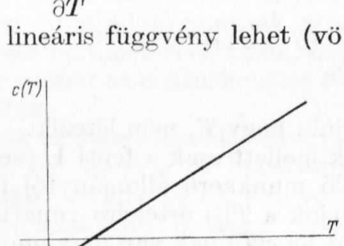


2.2a ábra



2.2b ábra

2. Ha $H(x, y) = 0$, akkor $\dfrac{\partial c(T)}{\partial T}$ konstans, és $c(T)$ monoton növekvő, konstans, vagy monoton csökkenő lineáris függvény lehet (vö.: 2.3 ábra).



2.3 ábra

A most elmondottak alapján nyilvánvaló, hogy a *paraméterektől, valamint x, y és t értékétől függ, hogy* $c(T)$*-nak van-e szélső értéke*, és ha igen, akkor az maximum-e. Vizsgáljuk most meg, hogyan alakul a *munkaerő foglalkoztatása*. Ha a (2.6) kifejezésben (1.2) figyelembevételével $k(t, \tau)$ helyébe $b_0\, e^{x(t-\tau)}$-t írunk és elvégezzük az integrálást, akkor

$$(2.16)\qquad \int\limits_0^{T(t)} = \frac{b_0}{\varkappa_0}\, e^{(x-y)(t-\tau)}\, d\tau = \frac{b_0\, e^{(x-y)t}}{\varkappa_0 (y-x)}\left[e^{-(x-y)T(t)} - 1\right] \leq l_0\, e^{\gamma(L)t}.$$

Az egyenlet baloldalán levő kifejezést T függvényének tekintve felírható, hogy

$$(2.17)\qquad L(T) = \frac{b_0\, e^{(x-y)t}}{\varkappa_0(y-x)} = [e^{-(x-y)T} - 1],$$

aminek alapján könnyen belátható, hogy $L(T)$ a T-ban monoton nő. (2.16) értéke ilyen körülmények között kétféleképpen alakulhat.

1. Adott t időpontban $T(t) = T$ növekedésével az egyenlőtlenség baloldala — $L(T)$ — egy pontban (jelölje ezt a pontot T_1) túllépi az egyenlőtlenség jobb oldalán álló értéket, tehát ennél régebbi állóeszközt ebben a t időpontban a munkaerő szűkössége miatt nem lehet üzemeltetni. Ekkor a (2.16) kifejezésben az egyenlőség jele érvényesül, és ekkor

$$(2.18)\qquad T_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{y-x} \ln\left\{ l_0 \dfrac{\varkappa_0}{b_0}(y-x)\, e^{[\gamma(L)+y-x]t} + 1 \right\}, & \text{ha } y \neq x, \text{ és} \\[2ex] \dfrac{\varkappa_0}{b_0}\, l_0\, e^{\gamma(L)t}, & \text{ha } y = x. \end{cases}$$

2. Ha $T \to \infty$, akkor a baloldal egy, a jobb oldalnál kisebb értékhez tart. Ebben az esetben az állóeszközök rendelkezésre álló mennyisége nem teszi lehetővé a teljes munkaerő kihasználását, még akkor sem, ha a legrégebbi állóeszközöket is üzemeltetjük. Ekkor a (2.18) egyenletben

$$l_0 \frac{\varkappa_0}{b_0}(y-x)\, e^{[\gamma(L)+y-x]t} + 1 \leq 0.$$

Ezt az esetet úgy tárgyaljuk, hogy T_1 nem létezik.

Reális paraméterértékek mellett csak a fenti 1. eset következik be, tehát T értéke a rendelkezésre álló munkaerő állománytól függ.

Most már összefoglalhatjuk a $T(t)$ értékére vonatkozó eredményeket.

1. Ha $H(x, y) > 0$, tehát ha $c(T)$-nak van maximuma és $T_1 \leq T_2$, vagyis ha az állóeszköz-állomány optimális élettartama a rendelkezésre álló munkaerő mennyiségétől függ, akkor $T(t) = T_1$, ha viszont $T_1 > T_2$, vagyis ha a rendelkezésre álló állóeszköz-állomány nem biztosítja a munkaerő teljes foglalkoztatását, akkor $T(t) := T_2$.

2. Ha $H(x, y) < 0$, tehát ha $c(T)$-nak minimuma van és $c(T_1) > c(0)$, akkor $T(t) := T_1$, ha viszont $c(T_1) \leq c(0)$, akkor $T(t) := 0$.

3. Ha $H(x, y) = 0$, akkor monoton növekvő $c(T)$ esetén $T(t) := T_1$, egyébként $T(t) := 0$.

4. Irreális paraméterek mellett előfordulhat, hogy T_1 nem létezik, s ekkor $H(x, y) < 0$, vagy $H(x, y) = 0$ és monoton növekvő $c(T)$ esetén $T(t)$-t nem tudjuk értelmesen definiálni.

Reális paraméterek és x, y értékek mellett csak a fenti 1. eset következik be, és még ezen belül is az az eset, amikor $T(t) = T_1(t)$, vagyis *a reális esetben és az itt bevezetett feltevések mellett az állóeszköz-állomány élettartama a rendelkezésre* *álló munkaerő mennyiségétől függ.* Ekkor a $T(t) = T_1(t)$ függvény differenciálható, és differenciálhányadosa 1-nél kisebb, vagyis belátható, hogy

$$\frac{\partial T_1(t)}{\partial t} = \frac{l_0 \frac{\varkappa_0}{b_0} e^{[\gamma(L)+y-z]t} [\gamma(L) + y - x]}{l_0 \frac{\varkappa_0}{b_0} (y - x) e^{[\gamma(L)+y-x]t} + 1} < 1. \tag{2.19}$$

Reális paraméterkombinációk és x, y értékek esetén tehát $T(t)$ függvényünk kielégíti a (2.1) – (2.7) egyenletekkel definiált *termelési összefüggéseket is.*

Az eredmény az elmondottak értelmében attól függ, hogy milyen értéket vesznek fel a beruházási politika parametrikusan kezelt változói. Ezek viselkedésére és hatására vonatkozóan azonban a modell itt közölt változata alapján nem sikerült egyértelmű analitikus eredményekre jutni. Az analitikus rész ezért elsősorban a numerikus rész előkészítésének tekinthető, és a legfontosabb következtetések a numerikus részből vonhatók le.

3. Numerikus elemzés

A probléma numerikus megközelítése során ugyanúgy jártunk el, mint a korábbi tanulmányokban ([1],[7],[10]). Az egyenletekben szereplő paramétereknek különböző értékeket adtunk, és különböző paraméterkombinációk mellett meghatároztuk a le nem diszkontált összes fogyasztás egy bizonyos adott intervallumon belüli számított értékét, majd a különböző paraméterkombinációkkal kapott értékek összehasonlítása alapján következtettünk az egyes paramétereknek a le nem diszkontált összes fogyasztás alakulására gyakorolt hatására. E számítások során kiinduló pontnak egy ún. *alapváltozat*ot választottunk, amelyben az összes paraméternek az ún. bázisértéket adtuk. A különböző numerikus változatok tehát az eredményeket ehhez a kiinduló paraméterkombinációhoz viszonyítják.

Külön kell foglalkoznunk az *amortizáció* kezelésével. Kétféle adott amortizációs politikát tételeztünk fel: *lineáris* és lineárisan gyorsított amortizációt. Az első esetben az állóeszköz beruházásától kezdve $T\varphi$ éven keresztül minden évben értékének $1/T^*$ hányadát írjuk le, azaz

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{T^*}. \tag{3.1}$$

Lineárisan gyorsított amortizáció esetén viszont az évenként leirandó hányad lineárisan csökken, azaz

$$\delta(t, \tau) = \frac{a}{T^*} \left(1 - \frac{\tau}{T^*}\right). \tag{3.2}$$

(1.15) figyelembevételével ezt a függvényt integrálva azt kapjuk, hogy $a = 2$.

A paraméterekből két alapváltozatot állítottunk össze, az ún. *összehasonlítható*, és az ún. *reális alapváltozatot*. Az előbbiben a műszaki fejlődés ütemére vonatkozó paramétereknek zérus értéket, a másodikban pedig megközelítőleg reális értéket adtunk. Az első, tehát az összehasonlítható változat ilyen módon megközelítőleg a korábbi vizsgálat ([1],[7],[10]) alapváltozatának felel meg, a reális változat viszont a feltételezett műszaki fejlődési ütemek reális szinten való megválasztása folytán jobban közelíti meg a valóságot. Az alapváltozatok paraméterértékei a következők:

Korábbi	*Összehasonlítható*	*Reális*
	alapváltozat	
$\varepsilon_1 = 0$	$\varepsilon_1 = 0$	$\varepsilon_1 = 0{,}02$
$\varepsilon_2 = 1$	$\varepsilon_2 = 1$	$\varepsilon_2 = 1$
$\varepsilon_3 = 0{,}25$	$\varepsilon_3 = 0{,}25$	$\varepsilon_3 = 0.25$
$\varepsilon_4 = 0$	$\varepsilon_4 = 0$	$\varepsilon_4 = 0$
$\varepsilon_5 = 1$	$\varepsilon_5 = 1$	$\varepsilon_5 = 1$
ε_6: –	$\varepsilon_6 = 0$	$\varepsilon_6 = 0{,}05$
ε_7: –	$\varepsilon_7 = 0$	$\varepsilon_7 = 0$
$l_0 = 1$	$l_0 = 1$	$l_0 = 1$
b_0: –	$b_0 = 0{,}1$	$b_0 = 0{,}15$
$\gamma(L) = 0$	$\gamma(L) = 0$	$\gamma(L) = 0{,}01$
$\delta = 0{,}05$	$\delta = 0{,}05$	$\delta = 0{,}05$
$\varrho_1 = 0{,}05$	$\varrho_1 = 0{,}05$	$\varrho_1 = 0{,}05$
$\varrho_2 = 0$	$\varrho_2 = 0$	$\varrho_2 = 0$
$\eta = 0$	$\eta = 0$	$\eta = 0$
$\varkappa_0 = 1(!!)$	$\varkappa_0 = 1$	$\varkappa_0 = 1$
$T = 20$	$T = 20$	$T = 20$

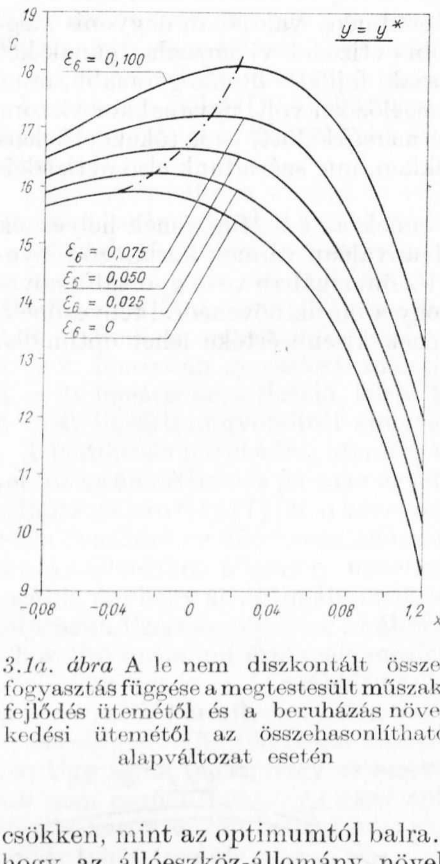
Természetesen *az összehasonlítható alapváltozat sem felel meg pontosan a korábbi számítások alapváltozatának*, mert a paraméterkészlet nem teljesen azonos. Fel kell hívni a figyelmet arra is, hogy $\varkappa_0$ a korábbi számításokban a munkaerő egészének átlagos technikai felszereltségét jelölte, ezekben a számításokban viszont a bázisidőszak zérus évjáratához tartozó eszközállományán dolgozó munkaerő technikai felszereltségét.

A numerikus számítások eredményeit a már idézett kiadvány [9] részletezi; ezek között a keretek között csak a legfontosabb eredményeket lehet összefoglalni.

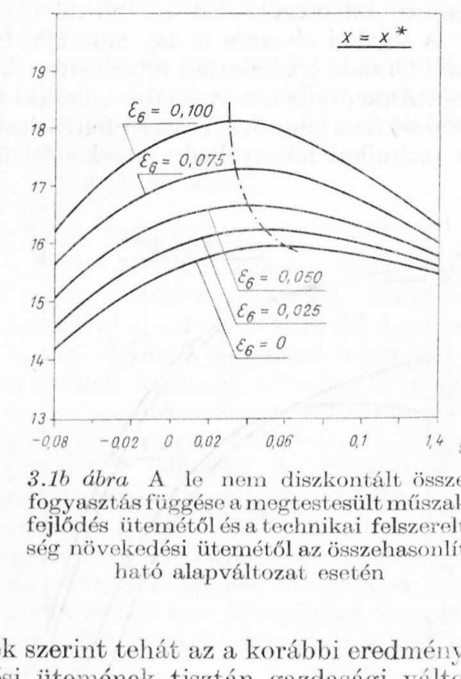
Ennek a vizsgálatnak a legfontosabb célja a megtestesült műszaki fejlődés hatásának elemzése volt. A le nem diszkontált összes fogyasztásnak a megtestesült műszaki fejlődés ütemétől való függését a 3.1a) és a 3.1b) ábra mutatja be.

Mindkét ábra a le nem diszkontált összes fogyasztás alakulását ábrázolja a megtestesült műszaki fejlődés ütemének parametrikus kezelésével. Az első ábra a beruházás növekedési ütemét tekinti független változának, és a technikai felszereltség növekedési ütemét a mindenkori optimális értékén rögzíti, a második ábra viszont a technikai felszereltség növekedési ütemét tekinti független változónak, és a beruházás növekedési ütemét rögzíti mindenkori optimális értékén. Ezek az optimális értékek természetesen a paraméterek függvényei, és így a megtestesült műszaki fejlődés más és más feltételezett üteméhez más és más optimális értékek tartoznak. Ezek az értékek leolvashatók az ábrákról; a számtáblázatokat itt hely hiányában nem lehet közölni.

A 3.1a ábra áll a legközelebb a korábbi vizsgálat eredményeiről beszámoló publikációkban ([1],[7],[10]) közöltekhez. Alakja teljes mértékben megfelel a korábbi publikációkban közölt ábrákénak. *A beruházás növekedési ütemének egyértelműen meghatározott optimuma* és a le nem diszkontált összes fogyasztásnak egyértelműen meghatározott maximuma *van akkor is, ha figyelembe veszszük a megtestesült műszaki fejlődést*, sőt ennek gyors ütemét tételezzük fel. Az elérhető összes fogyasztás görbéje az optimum pottól jobbra meredekebben



3.1a. ábra A le nem diszkontált összes fogyasztás függése a megtestesült műszaki fejlődés ütemétől és a beruházás növekedési ütemétől az összehasonlítható alapváltozat esetén



3.1b ábra A le nem diszkontált összes fogyasztás függése a megtestesült műszaki fejlődés ütemétől és a technikai felszereltség növekedési ütemétől az összehasonlítható alapváltozat esetén

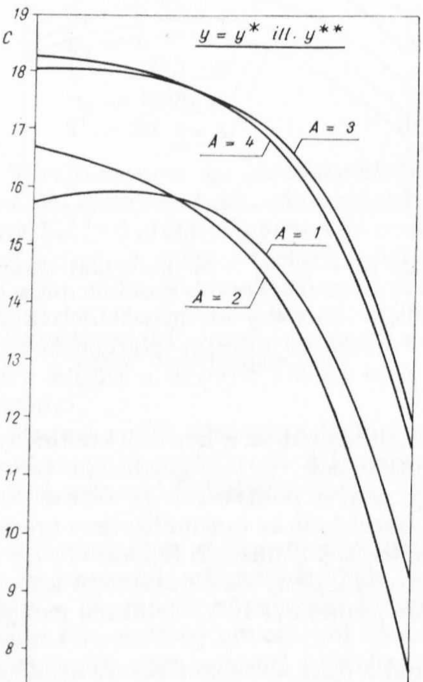
csökken, mint az optimumtól balra. Ezek szerint tehát az a korábbi eredmény, hogy az állóeszköz-állomány növekedési ütemének tisztán gazdasági változóktól függő optimális értéke van, és hogy nem a politikai vagy társadalmi szempontból még megengedhető maximális beruházás az optimális, nem annak a következménye, hogy elhanyagoltuk a megtestesült műszaki fejlődést, vagyis a beruházás és a műszaki fejlődés közötti összefüggést. Ez az alapvető következtetés a megtestesült műszaki fejlődés igen gyors, évi 10%-os üteme mellett is teljes mértékben fennáll.

A 3.1b ábra alakja nagymértékben hasonló a 3.1a ábráéhoz, azonban mégis vannak lényeges különbségek. A legfontosabb hasonlóság, hogy *a technikai felszereltség növekedési ütemének* is *egyértelműen meghatározható optimális értéke van*, mely a fogyasztás maximális értékére vezet. A beruházás politika két független változóval, tehát a beruházás és a technikai felszereltség növekedési ütemével való ábrázolása tehát lényegében véve ugyanarra az eredményre vezet, mint az egy független változós ábrázolás, mely a beruházási politikát az állóeszköz-állomány növekedési ütemével írta le.

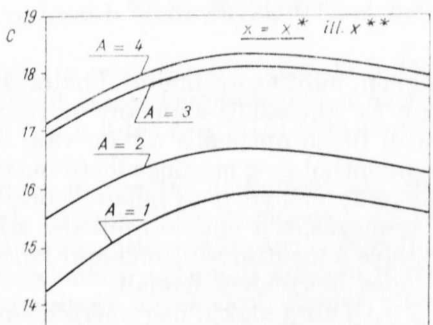
E megegyezés ellenére figyelemreméltók az eltérések. A műszaki fejlődés gyorsulása esetén a technikai felszereltség optimális növekedési üteme csökken. Ez azt mutatja, hogy *a műszaki fejlődés és a technikai felszereltség növekedése bizonyos mértékig egymást kompenzáló növekedési tényezők*. Érdekes módon úgy tűnik, hogy a műszaki fejlődés gyorsabb üteme csökkenti a technikai felszereltség optimális növekedési ütemét.

Ez az első pillanatban meglepőnek tűnő eredmény valójában nagyonis megfelel a *tényleges tapasztalatok*nak. A legutóbbi évtizedek világgazdaságának két alapvető fontosságú jellemzője, hogy a műszaki fejlődés üteme gyorsabb, mint a XX. század első évtizedeiben vagy azt megelőzően volt, ugyanakkor viszont a technikai felszereltség növekedési üteme mérséklődött, és a tőkekoefficiens a vezető ipari államokban inkább kissé csökken, míg századunk első évtizedeiben és azt megelőzően inkább növekedett.

A logikai elemzés is azt mutatja, hogy ennek az összefüggésnek helyesnek kell lennie. A gazdasági növekedésnek nyilvánvalóan vannak korlátozó tényezői. Amennyiben a gyorsabb műszaki fejlődés önmagában véve gyorsabb növekedést tesz lehetővé, ésszerű feltételezni, hogy a másik növekedési tényezőnek, a technikai felszereltség növekedési ütemének kisebb értéke lehet optimális.



3.2a. ábra A le nem diszkontált összes fogyasztás függése az amortizáció elszámolásának rendjétől és a beruházás növekedési ütemétől az összehasonlítható alapváltozat esetén



3.2b. ábra A le nem diszkontált összes fogyasztás függése az amortizáció elszámolásának rendjétől és a technikai felszereltség növekedési ütemétől az összehasonlítható alapváltozat esetén

Végül figyelemre méltó, hogy a 3.1b ábra görbéi lényegesen laposabbak, mint a 3.1a ábrán feltüntetett görbék. Ez arra utal, hogy a technikai felszereltség változása kevésbé fontos paraméter, mint a beruházás növekedési üteme, ugyanis az optimális értéktől való eltérés kevésbé csökkenti az elérhető összes fogyasztást

Az összehasonlítható alapváltozat felhasználásával végzett további számítások azt vizsgálták, hogy a le nem diszkontált összes fogyasztás értéke hogyan függ a meg nem testesült műszaki fejlődés ütemétől valamint a részesedési paraméter értékétől. Az eredmények teljes mértékben párhuzamosak voltak a korábbi vizsgálat ([1], [7], [10]) eredményeivel, tehát a megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele ebből a szempontból sem módosította az összefüggéseket.

Figyelemreméltóak viszont az *amortizációs politika* változtatásának hatásait bemutató számításokból levonható következtetések.

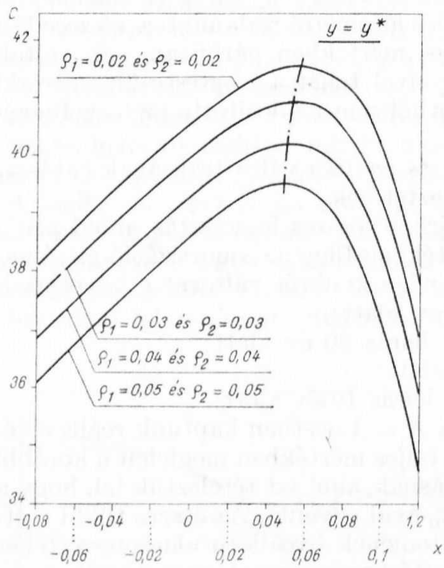
Az eredmények értelmében mind az elérhető összes fogyasztás, mind pedig az optimális beruházási politika nagymértékben függ az amortizáció elszámolásának módjától. Az itt figyelembe vett négy konkrét változat a következő:
$A = 1$: lineáris amortizáció, leírás húsz év alatt;
$A = 2$: lineárisan gyorsított amortizáció, leírás 20 év alatt;
$A = 3$: lineáris amortizáció, leírás 10 év alatt;
$A = 4$: lineárisan gyorsított amortizáció, leírás 10 év alatt.

A beruházás növekedési ütemére csak a $A = 1$ esetben kaptunk reális értéket; ez az amortizációs politika egyébként teljes mértékben megfelelt a korábbi számításokban ([1],[7],[10]) követett eljárásnak, ahol azt tételeztük fel, hogy a leírás évenként az állóeszköz állomány 5%-ával egyenlő. Az összes többi esetben az állóeszköz állomány növekedési ütemének irreálisan alacsony értékét kaptuk, úgyhogy az optimális értéket számítási programunk nem is tudta meghatározni. Ezért szerepelnek az ábrán az optimális értéket jelző x^* és y^* helyett a közelítő optimum értéknek megfelelő x^{**} és y^{**} jelölések. Az eredmények értelmében tehát — legalábbis az összehasonlítható alapváltozat esetében — az *amortizáció* bármilyen módon való *meggyorsítása* nagymértékben *csökkenti a beruházás optimális növekedési ütemét, és egyben növeli az elérhető összes fogyasztást*. Úgy tűnik tehát, hogy az amortizációs politika megfelelő megválasztásának nem csupán pénzügyi, elszámolási szempontból van jelentősége, hanem nagyon határozottan befolyásolja a gazdasági folyamatok alakulását is. Ez a kérdés tehát további alapos vizsgálatot igényel.

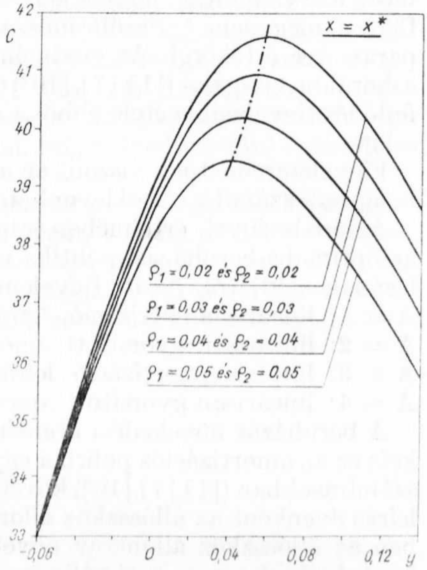
A technikai felszereltség optimális növekedési üteme már lényegesen kisebb mértékben függ az amortizáció elszámolási rendjétől, mint a beruházás növekedési üteme. A 3.2b ábra görbéi nagyon kevéssé jellegzetesek, ami ismét azt mutatja, hogy az elérhető összes fogyasztás csak csekély mértékben függ a technikai felszereltség növekedési ütemétől.

A reális alapváltozatból kiinduló számításainkban a megtestesült, a meg nem testesült, valamint e kétféle műszaki fejlődés kombinált hatását vizsgáltuk. A számítások nem vezettek az eddigiektől lényegesen eltérő eredményekre. Azt minden esetre meg lehetett állapitani, hogy a gazdaságpolitika szabadságfoka az egyes paraméterek értékének megváltozása tekintetében határozottan növekszik akkor, ha a figyelembe vett paraméterek száma növekszik, vagyis ha a gazdaságpolitikának többféle eszköz áll a rendelkezésére. Ugyanerre az eredményre vezettek a részesedési paraméter értékével kapcsolatos vizsgálatok is.

Végül a *javítási költségek*nek a le nem diszkontált összes fogyasztás alakulására gyakorolt hatását elemeztük. A számítások eredményei értelmében a fajlagos javítási költségek feltételezett növekedése párhuzamosan csökkenti az elérhető összes fogyasztást, valamint a beruházás és a technikai felszereltség optimális növekedési ütemét. Az összefüggéseket a 3.3a és a 3.3b ábra tünteti fel.



3.3a. ábra A le nem diszkontált összes fogyasztás függése a javítási költségek alakulásától és a beruházás növekedési ütemétől a reális alapváltozat esetén



3.3b. ábra A le nem diszkontált összes fogyasztás függése a javítási költségek alakulásától és a technikai felszereltség növekedési ütemétől a reális alapváltozat esetén

Összefoglalás

1. Az a kutatás, melyről ez a tanulmány számol be, az állóeszközállomány optimális növekedési ütemével-kapcsolatos korábbi vizsgálatok szerves folytatása. Elsősorban annak tisztázására törekedett, hogy az ún. *megtestesült műszaki fejlődés* figyelembevétele mennyiben módosítja az összefüggéseket és az optimális beruházási politikával kapcsolatban korábban elért eredményeket. Ennek a tényezőnek a figyelembevétele kapcsolatot hoz létre a *beruházás* és a *műszaki fejlődés* között, vagyis ilyen körülmények között a műszaki fejlődés nagyobb mértékben érezteti hatását, ha több a beruházás. Feltehető, hogy ilyen körülmények között az állóeszközállomány gyorsabb növekedési üteme lesz majd optimális.

2. A megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele a modell nagymértékű átdolgozását tette szükségessé. A megtestesült műszaki fejlődés figyelembevétele azt jelenti, hogy *a berendezéseket létrehozásuk időpontjának megfelelő technikai színvonalon és technikai felszereltség mellett lehet csak üzemeltetni*. Ennek folytán az állóeszköz állomány különböző időszakokban létre hozott, tehát különböző évjáratokhoz tartozó elemei már nem adhatók össze közvetlenül.

A termelés ilyen körülmények között csak az *egyes évjáratokra* külön-külön *felírt termelési függvényekkel* ábrázolható.

3. Ilyen feltevések mellett a modell és a beruházási politika *központi változója* nem a homogénnek tekintett állóeszköz állomány növekedési üteme, hanem egyrészt *a beruházás*, másrészt pedig *a technikai felszereltség* időben változatlannak tekintett *növekedési üteme* lesz. A vizsgálat során e két növekedési ütemnek azt a kombinációját próbáljuk meghatározni, az amortizációra és a javítási, valamint az állóeszköz fenntartási költségek elszámolására vonatkozó korábbi feltevések mellett, mely a *fogyasztás maximumára* vezet. Az elemzést analitikus és numerikus eszközökkel bonyolítottuk le.

4. Az *analitikus elemzés* arra az eredményre vezetett, hogy a beruházás és a technikai felszereltség növekedési ütemének parametrikus kezelése esetén az elérhető összes fogyasztás elsősorban az *állóeszközök optimális élettartamától* függ. Reális paraméterkombinációk esetén viszont ez az optimális élettartam nem tisztán gazdasági változóknak, hanem elsősorban a rendelkezésre álló *munkaerő-állomány*nak a *függvénye*. Az optimális élettartam tehát e feltevések keretei között az állóeszköz-állomány illetve a létszám viszonylagos szűkösségének illetve bőségének, és nem a műszaki fejlődés ütemének vagy egyéb tisztán gazdasági változáknak a függvénye. Elsősorban azért kaptuk ezt az eredményt, mert az *amortizációs politikát adottnak tekintettük*, és nem hoztuk közvetlen kapcsolatba az optimális élettartam meghatározásával.

5. A *numerikus számítások* legfontosabb eredménye, hogy a *megtestesült műszaki fejlődés* figyelembevétele *nem módosítja lényegesen a korábban kapott eredményeket*. A beruházás növekedési ütemének határozott és egyértelműen meghatározható optimuma, az elérhető összfogyasztásnak pedig egyértelműen meghatározható maximuma van akkor is, ha figyelembe vesszük a megtestesült műszaki fejlődést, vagyis a beruházás és a műszaki fejlődés kölcsönös kapcsolatát. A korábbi modell alapján kapott az az eredmény tehát, hogy nem a társadalmi és politikai korlátozó feltételek függvényében elérhető legmagasabb beruházási színvonal az optimális, hanem *a beruházásnak tisztán gazdasági változók függvényében meghatározható optimális értéke van*, nem módosul akkor, ha figyelembe vesszük a megtestesült műszaki fejlődést és évjáratonkénti termelési függvényeket írunk fel.

6. A numerikus számítások egyéb eredményei közül elsősorban az amortizációs politikához kapcsolódókat kell megemlíteni. Ezek értelmében az elérhető összes fogyasztás gyorsan nő, és a beruházás optimális növekedési üteme gyorsan csökken, ha bármilyen módon gyorsítjuk az amortizációt. Úgy látszik tehát, hogy az *amortizáció* távolról sem csupán pénzügyi—elszámolástechnikai kérdés, hanem *nagy befolyással van a növekedési folyamat egészére*. Feltétlenül szükségesnek látszik a *modell* olyan *továbbfejlesztése*, mely az optimális élettartamot és amortizációs politikát a beruházási politika egyéb alapváltozóival együtt, és azokkal szerves egységben tárgyalja.

(Beérkezett: 1973. április 16.)

IRODALOM

1. MIHÁLYFFY L., SZAKOLCZAI GY.: Az állóeszköz-állomány optimális növekedési üteme. Gazdaság, V (1972) 83–106. o.
2. PHELPS, E. E.: A felhalmozás aranyszabálya (Tanmese). A gazdasági növekedés feltételei c. kötetben. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 266–275. o.
3. PHELPS, E. E.: Második értekezés a felhalmozás aranyszabályáról. A gazdasági növekedés feltételei c. kötetben. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 276–296 o.
4. SOLOW, R. M.: A beruházás és a technikai haladás. A gazdasági növekedés feltételei c. kötetben. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 141–151. o.
5. SOLOW, R. M.: A technikai haladás, a tőkeképződés és a gazdasági növekedés. A gazdasági növekedés feltételei c. kötetben. Budapest, 1967. Közgazdasági és Jogi Könyv kiadó. 152–162. o.
6. SZAKOLCZAI GY.: Az erőforrások értékelése, II. rész: A növekedési elmélet. Közgazdasági Szemle, előkészületben.
7. Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei IV.: Az állóeszköz-állomány optimális növekedési üteme. Az egyszektoros modell alapján végzett számítások eredményei. Országos Anyag- és Árhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat, Budapest, 1970. 83+ 8+ 54 o.
8. Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei VIII.: Az erőforrások értékelése. Kísérlet a pénzügyi szabályozórendszer konzisztens elméleti megalapozására. Országos Anyag- és Árhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat, Budapest, 1972, 161 o.
9. KÁDAS S.—SZAKOLCZAI GY.: Az ártervezés ökonometriai modelljének eredményei V.: A beruházás és a technikai felszereltség optimális növekedési üteme. Országos Anyag- és Árhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat, Budapest, 1973, sajtó alatt.
10. A távlati tervezés ökonometriai modelljének eredményei I.: MIHÁLYFFY L.—SZAKOLCZAI GY.: Az állóeszköz-állomány optimális növekedési üteme a létszámváltozás ütemére vonatkozó különböző feltevések függvényében. Az egyszektoros modell alapján végzett számítások eredményei. Országos Tervhivatal és INFELOR Rendszertechnikai Vállalat, Budapest, 1970, 46 + 11 + 33 o.)

THE OPTIMUM RATE OF GROWTH OF INVESTMENT AND CAPITAL-LABOUR RATIO

The paper deals with the further development of the results of an earlier research work, on the issues of optimal investment. It takes into consideration the relationship between investment and technological development and includes embodied technological development in the model. This leads to a large-scale transformation of the model, as the consideration of embodied technological development makes it impossible to sum up directly the fixed assets established at various points of time and representing different technological levels. Therefore vintage production functions shall be described for the explanation of production on the fixed assets established at various periods. The two main variables of optimal investment policy model will be the rate of growth of investment and capital-labour ratio, for under these conditions it is rational to suppose that the fixed assets can operate only at a technological level and with a capital-labour ratio corresponding to the data of establishment.

The analysis carried out with the model has led to a result that the total consumption available depends at the first place on the optimal lifespan of fixed assets, and lifespand depends at the first place on the available manpower. The most important result of numerical calculations is that the consideration of embodied technological development does not alter the conclusion that it is not the socially and politically admissible highest investment level which is optimal. Even under these conditions optimum investment depends on economic variables only, which leads to the maximum of the total consumption. It was manifest too, that amortization exerts a great influence on the whole growth process and therefore it is expedient to treat amortization together with the other basic variables of investment policy and in an organic unity with them.

ОПТИМАЛЬНОЕ ТЕМПЫ РОСТА КАПИТАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ ТЕХНИЧЕСКОГО СНАБЖЕНИЯ

Статья занимается дальнейшим развитием результатов более ранней исследовательской работы. Она обращает внимание на связь между капитальными вложениями и техническим прогрессом и вставляет в модель воплощенный технический прогресс. Это ведет к перестройке модели, так как учет воплощенного технического прогресса делает невозможным непосредственное суммирование основных фондов, созданных в разных периодах и таким образом представляющих разные технические уровни. Поэтому на каждый год следует написать производственные функции для объяснения достижимого производства на основных фондах, созданных в разных периодах. Двумя главными переменными модели оптимальной политики капитальных вложений будет темп роста капиталовложения и техническое снабжение, так как в этих условиях рационально предполагать, что основные фонды можно эксплуатировать только на техническом уровне, соответствующем периоду создания, а также при техническом снабжении, определенном в период создания.

Аналитическое исследование, сделанное на основе модели, привело к тому результату, что все достижимое потребление зависит в первую очередь от оптимальной продолжительности жизни основных фондов, а продолжительность жизни зависит в первую очередь от наличия рабочей силы. Самый важных результат численных расчетов в том, что и в случае учета воплощенного технического прогресса правильным является то более раннее заключение, что не самый высокий уровень капитальных вложений, достижимый как функция общественных и политических ограничительных условий является оптимальным. Капитальное вложение и при таких условиях имеет оптимальное значение, определяемое как функция только экономических переменных, которое ведет к максимальной стоимости всего достижимого потребления. Стало ясным и то, что амортизация имеет большое влияние на весь процесс роста и поэтому целесообразно рассматривать амортизацию вместе с другими основными переменными политики капитальных вложений и в органическом единстве с ними.

Dancs István—Hunyadi László—Siván József

Készletjelzésen alapuló szabályozás Leontief-típusú gazdaságban

Tanulmányunk közvetlenül kapcsolódik Kornai J. és Martos B. Szigmában közölt cikkéhez, amely várhatóan egy hosszabb kutatómunka kiindulópontja lehet.[1] Természetesen e vizsgálatoknál kezdetben a sok egyszerűsítő feltevést alkalmazó modellekből kell kiindulni és a tapasztalatok felhasználásával haladhatunk a bonyolultabb szabályozási — magatartási formák elemzése felé. Vizsgálatunkat az idézett cikkben közölt, Leontief-típusú gazdaságra adott folytonos modellel kezdtük. A modellt felírtuk differenciaegyenletek formájában is. A folytonos és diszkrét modell megoldásainak párhuzamos elemzése a készletjelzésen alapuló szabályozás érdekes összefüggéseire hívta fel a figyelmet. Az eredmények elemzése egyúttal a kiinduló modell továbbfejlesztésének lehetőségeire is útmutatást adott. Az általunk vizsgált továbbfejlesztett modell is viszonylag egyszerű, azonban elemzése a kutatás szempontjából tanulságos.

A tanulmány három részből áll. Az első részben a folytonos és diszkrét modell legfontosabb jelöléseit és feltevéseit foglaljuk össze. A második részben a kiinduló modelleket és az azokkal ekvivalens modelleket fogalmazzuk meg és elemezzük. A harmadik részben a folytonos és diszkrét kiinduló modellek továbbfejlesztését végezzük el és e továbbfejlesztett modellek megoldását adjuk. Tárgyalásunkban párhuzamosan vizsgáljuk a folytonos és diszkrét esetet, s rámutatunk az eltérő megközelítésből adódó különbségek lényeges vonásaira. A vizsgálatokban nem térünk ki a rendszer működőképességének részletes elemzésére, inkább a magatartás stabilitásának kérdéseit állítottuk a középpontba.

1. Jelölések és feltevések

1.1. *Jelölések*

a) Általános jelölések

A kis betűk n elemű vektorokat, a nagy betűk mxn-es matrixokat jelölnek. A vektorok komponenseinek jelölésére a kis betűkhöz írott egyszeres indexek, a matrixok elemeinek jelölésére a kettős indexek szolgálnak. A j-edik egységvektort e_j, az összegező vektort e, az egységmatrixot E jelöli.

[1] A Tervgazdasági Intézetben működő szemináriumon kezdtünk el egy vizsgálatot, amelyen e tanulmány első változatát kidolgoztuk és megvitattuk. A vitában elhangzott és hasznosított megjegyzésekért a Matematikai Módszerek Alkalmazási Osztálya munkatársainak mondunk köszönetet.

$H\,u(t) = u(t+1)$ eltolásoperáció
$\Delta\,u(t) = u(t+1) - u(t)$ differenciaoperáció
i = komplex szám imaginárius egysége
$\otimes$ = speciális matrix-szorzás jele. Értelmezése:

$$B \otimes \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA_{11} & BA_{12} \\ BA_{21} & BA_{22} \end{pmatrix}.$$

b) Speciális jelölések

b1) Változók:

x = a termelés vektora; x_j = a j-edik ágazat termelése;
$\hat{X}$ = a termelési vektorból képzett diagonál-matrix, ahol $\hat{x}_{ii} = x_i$
u = a termelői készletek vektora, u_j = a j-edik ágazat készlete saját termeléséből;
Y = a felhasználói vásárlások matrixa; Y_{jk} = a k-adik termelő vásárlása a j-edik ágazat termékéből;
V = a felhasználói készletek matrixa; V_{jk} = a k-adik ágazatnál levő készlet a j-edik termékből;
w = a fogyasztói készletek vektora, w_j = a fogyasztó készlete a j-edik ágazat termékéből;
z = a fogyasztói vásárlások vektora, z_j = a fogyasztó vásárlása a j-edik ágazat termékéből.

b2) Adott mennyiségek:
$g = g(t) > 0$ a fogyasztás vektora, $g_j(t)$ = a t-edik évbeli fogyasztás a j-edik ágazat termékéből;
$F = F(t) \geq 0$ input-koefficiensek matrixa, F_{jk} = a k-adik ágazat egységnyi termékének előállításához felhasznált j-edik ágazatbeli termék.
u^*, V^*, w^* = a megfelelő készletek norma szerinti szintje.

Ismertek továbbá a változók kezdeti ($t = 0$ időponthoz tartozó) értékei (x°, u°, V°, Y°, w° és z°) a folytonos és (x_0, u_0, V_0, Y_0, w_0, és z_0) a diszkrét modellben.

1.2. *Feltevések*

1° A folytonos modell változói a $t \geq 0$ tartományban folytonosan differenciálhatók. Kezdő értékük a $t = 0$ időpontban adott (x^0, u^0, V^0, Y^0, z^0).

2° Minden változó determinisztikus.

3° A gazdaságban egyetlen fogyasztó van.

4° A gazdaság reálszférája Leontief-típusú, azaz:
- nincsenek külső korlátos erőforrások,
- a j-edik terméket egyetlen termelő állítja elő, s ez a j-edik ágazat. Az előállítás egy technológiával történik,
- a ráfordítások a termelés lineáris függvényei.

5° Az $F(t)$ matrix folytonosan differenciálható, nem negatív és domináns saját értéke minden $t \geq 0$-ra kisebb 1-nél. (A folytonossági kikötés csak a folytonos modellre szükséges.)

6^0 Az x^0 induló termelés folytatható, azaz:

$$x^0 - F^0 x^0 > 0$$

7^0 A folytonos modellben $g(t)$ függvény elégséges, azaz minden $t \geqq 0$-ra és minden j-re fennáll:[2]

$$g_j(t) > | x_j^0 - \sum_l F_{jl}^0 x^0 - g_j^0 |$$

8^0 Az induló készletek pozitívak:

$$u^0, V^0, w^0 > 0$$

Az $5^0 - 8^0$ feltételek a rendszer működőképességére mondanak ki lényeges összefüggéseket, a többi feltétel a vizsgált gazdaság szerkezetét jellemzi. Ebben a cikkben – amint azt bevezetőnkben is említettük – a rendszer működőképességét, annak feltételeit nem elemezzük. Az 5^0-8^0 feltételeket így elsősorban a [4]-ben tárgyalt modellel való szoros kapcsolat miatt soroltuk föl.

2. Leontief gazdaság egy folytonos és diszkrét modellje

2.1. *Eredeti modellek*

A modellek $2n^2+4n$ skaláregyenletből álló rendszerek, amelyek egyik csoportja alkotja a mérlegegyenletek rendszerét, a másik csoportba tartoznak a viselkedési egyenletek. A folytonos modell az idézett cikkben [4] tárgyalt modell kissé egyszerűbb formájú felírása, a diszkrét modell az ennek megfelelő felírás.

Folytonos modell [3]	Diszkrét modell [2]
Mérlegegyenletek	
$\dot{u} = x - Ye - z$	$\Delta u = x - Ye - z$
$\dot{V} = Y - F\hat{X}$	$\Delta V = Y - F\hat{X}$
$\dot{w} = z - g$	$\Delta w = z - g$
Magatartási szabályok	
$\dot{x} = \dot{Y} + \dot{z} + C^2(u^* - u)$	$\Delta X = \Delta(Ye) + \Delta z + C^2 [u^* - u(t)]$
$\dot{Y} = F\dot{\hat{X}} + \dot{F}\hat{X} + C^2(V^* - V)$	$\Delta Y = \Delta (F\hat{X}) + C^2[V^* - V(t)]$
$\dot{z} = \dot{g} + C^2 (w^* - w)$	$\Delta z = \Delta g + C^2 [w^* - w(t)]$

A c_j = a j-edik ágazat szabályozó paramétere,

C = a szabályozó változókból alkotott diagonális matrix,

továbbá: a változó szimbóluma fölé tett pont az idő szerinti deriválást jelöli.

A szabályozó paraméterek – mint az egyenletekből leolvasható – azt mutatják meg, hogy a termelés, a termelői és fogyasztói vásárlások változásá-

[2] Belátható, hogy a diszkrét modell esetében a rendszer működőképessége nem feltételezi a kikötés létezését.

ban milyen „súllyal" szerepelnek a normálkészlettől való eltérések. Másképpen fogalmazva; hogyan változzék pl. a termelés nagysága, ha a változásnál figyelembevesszük a normálkészlettől való eltérést kifejező információt.

Az egyenletek közgazdasági interpretációja viszonylag könnyen megadható. A folytonos modell esetében azonban a magatartási szabályok értelmezése elég nehézkes. A diszkrét modell kategóriái egyszerűbbek, hiszen itt a nehezen értelmezhető deriváltak helyett olyan világos fogalmak szerepelnek, mint készletváltozás, termelésnövekmény stb. A magatartási szabályok értelmezése is egyértelművé válik.

2.2. *Származtatott modellek*

2.2.1 Folytonos származtatott modell

A modell $2n^2 + 4n$ skaláregyenletből áll

a) Mérlegegyenletek:

$$\dot{u} = x - Ye - z$$
$$\dot{V} = Y - F\hat{X}$$
$$\dot{w} = z - g$$

b) Magatartási egyenletek:

$$\ddot{u} = C^2(u^* - u)$$
$$\ddot{V} = C^2(V^* - V)$$
$$\ddot{w} = C^2(w^* - w).$$

A származtatott modell és az eredeti modell közötti kapcsolat lényegét az alábbi állítás adja:

TÉTEL: Az eredeti és a származtatott modellek ekvivalensek. A tétel bizonyítása egyszerű, s a formális ekvivalencia mellett belátható a tartalmi egyezőség is [3].

A származtatott modell magatartási egyenletei egy fizikai analógia lehetőségére mutatnak. A fizikai analógiák jelentősége és a közgazdasági modellek elemzésénél adódó hasznossága már általánosan elfogadott. Jelen esetben a formai hasonlóság miatt a magatartási egyenletek a rezgés jelenségeit leíró másodrendű — többnyire állandó együtthatójú — lineáris differenciálegyenletekkel hozhatók rokonságba.

A fizikai példánál maradva tegyük fel, hogy valamely mozgó testre olyan erő hat, amely azt egyensúlyi állapotba igyekszik hozni. Az ilyen erő nagysága arányos az egyensúlyi helyzettől való eltéréssel. Jelöljük s-sel adott t időpillanatban az egyensúlyi helyzettől való távolságot, az arányossági együtthatót w-vel, ekkor az erő nagysága w^2s lesz. Tegyük fel továbbá, hogy a mozgás valamilyen ellenállás jelenlétében megy végbe, s ekkor fellép az ún. *ellenállási erő*, amelynek iránya ellentétes a mozgás irányával, nagysága $2k\dot{s}$-al egyenlő, ahol $2k$ arányossági tényező. Ha $f(t)$-vel jelöljük a rendszerre ható külső *zavaró erőt*, akkor a mozgás differenciál-egyenlettel írható le:

$$\ddot{s} = -2k\dot{s} - w^2s + f(t).$$

Ha $f(t) = 0$, akkor *szabad rezgésről*, egyébként *kényszer rezgésről* van szó.

A modellnél felírt magatartási egyenletek közül tekintsük pl. a következőt:

$$\ddot{u} = -c_j^2 u_j + c_j^2 u_j^*.$$

Ebben az egyenletben az említett arányossági együtthatónak a c_j^2 szabályozási paraméter felel meg, az $f(t)$ „zavaró erő" a normálkészlethez való igazodás kényszerűsége.

A második derivált közgazdasági értelmezése így szemléletessé tehető. Az $\ddot{u}_j$ jelenti a *készletváltozás sebességét*. A magatartási egyenlet tehát azt mondja ki, hogy a készletváltozás sebessége a normálkészlettől való eltéréstől függ.

A fizikai analógia két szempontból is hasznosnak tűnik: Egyfelől a mérlegegyenletek és magatartási egyenletek tisztábban elkülönülnek. Másfelől a megoldás szemléletesebb menetben valósítható meg és belátható, hogy a megoldás során nem szükséges feltételeznünk, hogy a C matrix diagonális. (Az egyszerűbb tárgyalásmód és az eredmények könnyebb értelmezhetősége miatt a tárgyalásban a C diagonális matrixszal dolgozunk.)

2.2.2 Diszkrét származtatott modell [2]

A diszkrét modell ugyancsak $2n^2 + 4n$ skaláregyenletből áll, azonban egyszerű átrendezéssel redukálni lehet az egyenletek számát. Így a származtatott modell a következő lesz:

(a) Mérlegegyenletek

$$\begin{aligned} x &= Ye + g + \Delta w + \Delta u \\ Y &= F\hat{X} + \Delta V \end{aligned}$$

(b) Magatartási egyenletek

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= C^2[u^* - u(t)] \\ \Delta^2 V &= C^2[V^* - V(t)] \\ \Delta^2 w &= C^2[w^* - w(t)] \end{aligned}$$

Diszkrét esetben a folytonoshoz hasonló módon lehet az eredeti és a származtatott modell ekvivalenciáját belátni. Míg azonban a folytonos modell esetében meglehetősen nehéz a származtatott modell értelmezése, a diszkrét modell esetében talán éppen a származtatott modell az, amelynek érdekes közgazdasági tartalmat lehet tulajdonítani.

Már első ránézésre megállapítható, hogy ebben a felírásban — amely tehát az eredeti felírásból logikusan következik — a készletek autonóm szabályozása figyelhető meg, azaz valamely ágazat jövőbeli készletalakulását semmilyen más tényező nem befolyásolja, csupán a normatív készlettől való eltérés és a szabályozás hatékonysága. Vizsgáljuk meg részletesebben példaként a $\Delta^2 u(t)$-re adott egyenletet! A baloldal kifejtése után a következő formula adódik:

$$u(t+2) - 2u(t+1) + u(t) = C^2[u^* - u(t)],$$

vagy átrendezve:

$$u(t+2) = u(t+1) + [u(t+1) - u(t)] + C^2[u^* - u(t)].$$

Még világosabbá válik a képlet tartalma, ha $t = t - 1$ helyen vizsgáljuk a folyamatot. Ekkor ugyanis:

$$u(t+1) = u(t) + [u(t) - u(t-1)] + C^2[u^* - u(t-1)]$$

adódik. A modell tehát úgy határozza meg a $t + 1$ időbeli készletet, hogy a t időbeli készlethez hozzáadja a megelőző időszak készletváltozását (ezt nevezzük a továbbiakban mechanikus extrapolációnak) és a szabályozási tagot, amelyben viszont az előző időbeli készletnek a normától való eltérése szerepel. Ez a késleltetett szabályozás (bár természetes, hiszen idő szükséges ahhoz, hogy a normától való eltérést regisztrálják és ennek megfelelő intézkedéseket tegyenek) súlyos problémák forrása és az egész rendszer működőképességét veszélyezteti. A modell folytonos változatában a szabályozást az $\ddot{u} = C^2(u^* - u)$ egyenlet írja le, ennél pedig a szabályozás késleltetés nélkül, a reakcióidő elhanyagolásával követi a normától való eltérést. Ez a magyarázata annak, hogy a kétféle — a folytonos és a diszkrét — megoldás gyökeresen különbözik egymástól.

2.3. *Származtatott modellek megoldása*

2.3.1 A folytonos modell megoldása és a megoldás értelmezése

A megoldás során támaszkodunk az alábbi segédtételre.

1. *Segédtétel*: A $\dot{Z} = \begin{pmatrix} O & E_n \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix} Z, \quad Z(0) = E_{2n}$

alakú matrix differenciálegyenlet megoldása:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix}\cdot t} = e^{Qt} = \begin{pmatrix} \cos Ct & C^{-1}\sin Ct \\ -C\sin Ct & \cos Ct \end{pmatrix}$$

ahol $Q = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix}$.

A tetel bizonyítása a [3]-ben található.

Tekintsük most a $\ddot{V} = C^2(V^* - V)$ rendszert: Ez átírható a következő rendszerré:

$$\dot{V} = \dot{V}$$

$$\ddot{V} = C^2(V^* - V)$$

azaz

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \ddot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -C^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C^2\, V^* \end{pmatrix}.$$

A differenciálegyenletek elméletéből ismert módon kapjuk, hogy:

$$\begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} = e^{Qt}\left[\begin{pmatrix} V(0) \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V^* \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} V^* \\ 0 \end{pmatrix} = e^{Qt}\begin{pmatrix} V^0 - V^* \\ Y^0 - F^0\hat{X}^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$\boxed{V = V^* + (\cos Ct)(V^0 - V^*) + (C^{-1}\sin Ct)(Y^0 - F^0\hat{X}^0)}\,.$$

Hasonló módon számíthatjuk ki az u és w változók értékeit is, csak az $\dot{u}(0)$ és $\dot{w}(0)$ értékek meghatározására kell ügyelnünk. A megoldás menetét itt nem közöljük, csak az eredményeket adjuk meg.

$$\boxed{u = u^* + \cos Ct(u^0 - u^*) + C^{-1}(\sin Ct)(x^0 - Y^0 e - z^0)}$$

$$\boxed{w = w^* + \cos Ct(w^0 - w^*) + C^{-1}(\sin Ct)(z^0 - g^0)}\,.$$

Ezzel meghatároztuk az u, V és w változókat.

A továbbiakban meghatározhatjuk az x, Y és z változók értékeit is.

Kezdjük a z-vel:

Mivel $\dot{w} = z - g$,

$$z = g + \dot{w} = g - C \sin Ct(w^0 - w^*) + \cos Ct(z^0 - g^0).$$

Hasonló módon meghatározhatjuk az x és az Y értékeit is. A z ismeretében

$$\dot{u} = x - Ye - z$$

$$\dot{V} = Y - F\hat{X}$$

rendszerből a második egyenletet e-vel szorozva és összeadva az egyenleteket, kapjuk, hogy

$$x = (E - F)^{-1}(\dot{V}e + \dot{u} + z).$$

Ebből

$$\boxed{\begin{aligned} x = (E - F)^{-1}[g - C(\sin Ct)(u^0 - u^* + V^0 e - V^* e + w^0 - w^*) + \\ + (\cos Ct)(x^0 - F^0 x^0 - g^0)]\end{aligned}}$$

($(E - F)^{-1}$ létezik, mert az $F(t) \geq 0$ minden $t \geq 0$-ra, és domináns sajátértéke kisebb 1-nél.)

Az $Y = F\hat{X} + \dot{V}$ rendszerből pedig

$$\boxed{Y = F\hat{X} - (C \sin Ct)(V^0 - V^*) + \cos Ct(Y^0 - F^0 \hat{X}^0)}\,.$$

A megoldás egy lehetséges értelmezéséhez tekintsük az u vektor j-edik koordinátáját, s ennek megfelelően a megoldásban szereplő többi változó megfelelő koordinátáját:

$$u_j = u_j^* + \cos c_j t(u_j^0 - u_j^*) + \frac{1}{c_j} \sin \quad t(x^0 - \sum_l Y_l - z_j^0).$$

Felhasználunk egy könnyen belátható segédtételt.

2. *Segédtétel*: A $(\sin \alpha)b + (\cos \alpha)c$

felírható a

$$\sqrt{b^2 + c^2} \sin(\alpha + \varphi)$$

formában, ahol $\varphi = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \operatorname{arc\,sin} \dfrac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}}$.

Alkalmazzuk ezt az eredményt az u_j változóra:

$$u_j = u_j^* + L_j \sin(c_j t + \varphi^0)$$

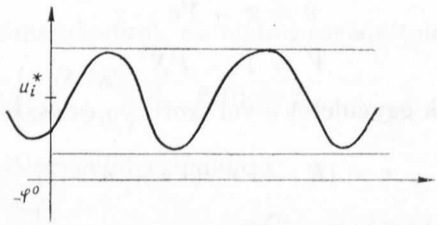
ahol

$$L_j = \frac{1}{c_j}\sqrt{c_j^2(u_j^0 - u_j^*)^2 + (x_j^0 - \sum_l Y_{jl}^0 - z_j^0)^2}$$

$$\varphi^0 = \arcsin \frac{u_j^0 - u_j^*}{L_j}.$$

A fenti forma a harmonikus rezgésnél megismert összefüggéshez hasonlít. Az L_j állandót a rezgés (általánosabban a mozgás) amplitúdójának nevezzük, a c_j a mozgás frekvenciája, míg a φ^0 a kezdő fázisa.

A mozgás képét az alábbi ábra szemlélteti:



Az $u_j(t)$ függvény értéke periodikus mozgás szerint változik. A mozgás főbb jellemzői a következők:

1^0 a periodikus mozgás centruma az u^* normálkészlet nagysága. A gazdasági egyedek magatartásában tehát érvényesül az a szempont, hogy a készletek alakulása a normálkészlet szintjéhez igazodjék.

2^0 A periodikus mozgás amplitudóját az L_j tényező adja. Az amplitúdó fontos jellemzője, hogy nagysága állandó és függ a szabályozási paraméter valamint az egyes változók kezdeti értékének nagyságától.

3^0 A mozgás periódusa is állandó.

4^0 A kezdőfázis meghatározásához a $\sin\varphi^0$ értékeit kell tekin- Mivel a $\sin\varphi^0$-ra adott kifejezésben a nevező mindig pozitív előjelű, a szög előjelét az $(u_j^0 - u_j^*)$ különbség határozza meg. Ha $u_j^0 - u_j^* > 0$, akkor $-\pi < \varphi^0 < \pi$, amiből megállapítható, hogy a görbe az u_j^* fölött metszi az $u_j(t)$ tengelyt.

A fenti értelmezés kiterjeszthető a több változóra is. Az eredmények hasonlóak lesznek. Érdekesebb viszont azt megvizsgálni, vajon a diszkrét esetben milyen eltérések vannak a folytonos esethez képest.

2.3.2. A diszkrét modell megoldása és értelmezése

A diszkrét modell megoldása állandó együtthatójú lineáris differenciaegyenlet megoldásához vezet. Itt most csupán példaként mutatjuk be az egyenlet megoldását a

$$\Delta^2 u = C^2[u^* - u(t)]$$

egyenletre. Átrendezés után – mint már láttuk – a következő formula adódik:

$$u(t+2) = 2u(t+1) - u(t) - C^2 u(t) + C^2 u^*$$

Melléírva az $u(t+1) = u(t+1)$ azonosságot a következő rendszer adódik:

$$H\begin{pmatrix} u(t) \\ u(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -(E+C^2) & 2E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ u(t+1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix}.$$

Ez egy inhomogén, elsőrendű, lineáris egyenletrendszer, melynek általános megoldása:

$$s(t) = A^t s(0) + A^t \sum_{\nu=0}^{t-1} A^{-(\nu+1)} f(t)$$

alakban írható fel, ahol A a feladat együttható mátrixa, $f(t)$ pedig ismert időfüggvény. Esetünkben az A matrix

$\begin{pmatrix} 0 & E \\ -(E+C^2) & 2E \end{pmatrix}$ az $f(t)$ függvény pedig $\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix}$ konstans lesz.

Az általános megoldás pedig a megfelelő átalakítások után az

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u(t+1) \end{pmatrix} = A^t\left[\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} + (A-E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix}\right] - (A-E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix}$$

alakot ölti.

A feladat következő lépése A^t matrix meghatározása.

Könnyen belátható, hogy ha léteznek olyan P és P^{-1} matrixok, amelyek A-t diagonális alakra hozták, azaz $A = P.B.P^{-1}$ (B diagonális matrix), akkor $A^t = P.B^t. P^{-1}$ alakban írható, B^t pedig könnyen meghatározható. Esetünkben belátható és behelyettesítéssel igazolható, hogy ha

$$P = \begin{pmatrix} E & E \\ E+iC & E-iC \end{pmatrix};\; P^{-1} = (-2iC)^{-1} \otimes \begin{pmatrix} E-iC & -E \\ -(E-iC) & E \end{pmatrix}$$

és $B = \begin{pmatrix} E+iC & 0 \\ 0 & E-iC \end{pmatrix}$, akkor az $A = P.B.P.^{-1}$ reláció teljesül.

Mivel B blokkonként diagonális matrix, hatványai könnyen előállíthatók, így a komplex számok trigonometrikus alakjának felhasználásával előállítható az A^t matrix a következő alakban:

$$A^t = C^{-1} \otimes \begin{pmatrix} -\sqrt{E+C^2}^{\,t-1}(E+C^2)\sin[(t-1)\Phi] & \sqrt{E+C^2}^{\,t}\sin(t\Phi) \\ -\sqrt{E+C^2}^{\,t}(E+C^2)\sin(t\Phi) & \sqrt{E+C^2}^{\,t+1}\sin[(t+1)\Phi] \end{pmatrix}.$$

Könnyen belátható az is, hogy a megoldásban szereplő $(A-E)^{-1}$ matrix

$$C^{-2} \otimes \begin{pmatrix} E & -E \\ E+C^2 & -E \end{pmatrix}$$

lesz, és a megoldás állandója pedig

$$(A-E)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix} = C^{-2} \otimes \begin{pmatrix} E & -E \\ E+C^2 & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ C^2 u^* \end{pmatrix} = C^{-2} \otimes \begin{pmatrix} -C^2 u^* \\ -C^2 u^* \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} u^* \\ u^* \end{pmatrix}.$$

A fenti formulák felhasználásával már könnyen előállítható $u(t)$ explicit megoldása és hasonló módon kapható $V(t)$ és $w(t)$ megoldása is:

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= u^* + C^{-1}\sqrt{E+C^2}^{\,t}\,[\sin t\Phi(u_1 - u^*) - (\sqrt{E+C^2})^{-1}\sin[(t-1)\,\Phi(u_0 - u^*)] \\ V(t) &= V^* + C^{-1}\sqrt{E+C^2}^{\,t}\,[\sin t\Phi(V_1 - V^*) - (\sqrt{E+C^2})^{-1}\sin(t-1)\Phi(V_0 - V^*)] \\ w(t) &= w^* + C^{-1}\sqrt{E+C^2}^{\,t}\,[\sin t\Phi(w_1 - w^*) - (\sqrt{E+C^2})^{-1}\sin(t-1)\Phi(w_0 - w^*)] \end{aligned}}$$

A fenti egyenletekben a kezdeti értékek mellett szerepelnek a $t = 1$ időben felvett értékek (u_1, V_1 és w_1) is, amelyek meghatározása a következő egyenletekből történik:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + x_0 - Y_0 e - z_0 \\ V_1 &= V_0 + Y_0 - F_0 \hat{X}_0 \\ w_1 &= w_0 + z_0 - g_0 . \end{aligned}$$

Ezzel tehát megkaptuk a magatartási egyenletek teljes megoldását.

A magatartási egyenletek megoldásának ismeretében elvégezhetjük a származtatott rendszer mérlegegyenleteinek megoldását is. Megoldandó tehát az

$$\begin{aligned} x &= Ye + g + \Delta w + \Delta u \\ Y &= F \cdot \hat{x} + \Delta V \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszer, ahol csak x és Y ismeretlen. Egyszerű átalakítások után kapjuk, hogy

$$\boxed{\begin{aligned} x &= (E - F)^{-1}[g + \Delta u + \Delta V + \Delta w] \\ Y &= F(E - F)^{-1}[\hat{g} + \Delta\hat{u} + \Delta V + \Delta\hat{w}] + \Delta V \end{aligned}}\,.$$

Ezzel előállítottuk a származtatott modell teljes megoldását. Hasonlóan a folytonos modellhez, a diszkrét modellt is átalakítjuk az elemzéshez. A diszkrét modell j-ik magatartási egyenlete

$$u_j(t) = u_j^* + M_j(t)\sin(\varrho_j t + \varphi^0)$$

alakot ölt, ahol φ^0 megegyezik a korábban definiálttal, míg a másik két tényező eltér a folytonos modellben alkalmazottaktól. A korábban bemutatottakhoz hasonló átalakítások után az adódik, hogy

$$M_j(t) = (\sqrt{1 + c_j^2})^{\,t} L_j$$

és

$$\varrho_j = \frac{c_j}{\sqrt{1 + c_j^2}}\,.$$

Látható, hogy a két megoldás között – a formai hasonlóságok mellett – jelentős különbség van. Ez a megoldás is periodikus ingadozást ábrázol, de fő jellemzői a következők:

1^0 A periodikus ingadozás centruma az u_j^* lesz. Ez teljesen érthető, hiszen ez az a készletnorma, amelyhez a termelők minden esetben törekednek. Mivel a rendszer szabályozásának egyik célja az, hogy ezt a centrumot alakítsa ki, a szabályozás ebből a szempontból jónak tekinthető.

2^0 Az ingadozás amplitúdóját az $M_j(t)$ tag fejezi ki. Ismeretes, hogy $c_j^2 > 0$, így mivel c_j^{-1} és L_j konstans, az amplitúdó t növekedésével korlátlanul növekszik. Ez alól csak egy kivételes eset létezik, mégpedig az, amikor mind u_{0j}, mind pedig u_{1j} megegyezik u_j^*-gal, ez azonban egyszersmind a periodicitást is megszünteti. Mivel a számítások eredményeinek ez az egyik leglényegesebb pontja, kissé részletesebben ki kell térnünk elemzésére.

Az, hogy a rezgőmozgás amplitúdója egyre növekvő és elég nagy t esetén bármilyen naggyá várhat, azt jelenti, hogy a mindenkori készletnagyság igen nagy értékekkel eltérhet a mozgás centrumától mind pozitív, mind negatív irányban. A készletek tehát nem stabilak olyan értelemben sem, ahogy az a folytonos modell esetén értelmezhető volt, tehát úgy, hogy a készletváltozás mindig bizonyos határon belül maradt. Ez pedig azt jelenti, hogy a modell által reprezentált szabályozás nem elégséges, bizonyos idő elteltével a rendszer működésképtelenné válik. Ennek oka — mint azt már a korábbiakban is említettük — az, hogy a szabályozás csak késéssel igazítja a készleteket, nem a pillanatnyi, hanem egy korábbi készletnagyságot vesz alapul, így egyre inkább eltér az előírt szinttől. Megjegyzendő, hogy a késleltetés — ami voltaképpen megfelel a reakcióidőnek — tetszés szerint kicsinek választható, hiszen t skálázását is tetszés szerint választjuk meg, lényeg csupán az, hogy véges intervallumot tekintünk a szabályozás megvalósítására, ekkor korábbi állításaink érvényben maradnak. Természetesen a változók diszkrét kezelése mellett az eredeti modellnek az a tétele, amely a rendszer működőképességét biztosítja az előbb elmondottak miatt nem érvényes.

Vizsgáljuk meg, hogy az amplitúdó növekedésének mértéke mely tényezőktől függ. Az egyszerűség kedvéért ismét csak egy komponensre irjuk fel az egyenlet megfelelő tényezőjét:

$$\frac{\sqrt{1+c_j^2}^{\,t}}{c_j}\sqrt{(u_{1j}-u_{0j})^2+c_j^2(u_{0j}-u_j^*)^2}$$

vagy ugyanezt áttekinthetőbb formába írva:

$$\sqrt{1+c_j^2}^{\,t}\sqrt{\frac{1}{c_j^2}(u_{1j}-u_{0j})^2+(u_{0j}-u_j^*)^2}\,.$$

Ebből a formából az alábbi következtetések vonhatók le:

- ha csak t-t tekintjük változónak, az amplitúdó végtelenhez tart t növekedésével
- ha $u_{1j}=u_{0j}=u_j^*$, akkor az amplitúdó konstans és 0-val egyenlő.
- ha c_j-t és t-t rögzítjük, akkor az amplitúdó úgy lesz nagy, ha a kiinduló készletértékek nagy mértékben eltérnek a normáktól. Ha a folyamat megközelítően egyensúlyi helyzetből indul az oszcilláció kisebb lesz.

3^0 A megoldásként kapott függvény j-edik elemének hullámhossza $\dfrac{2\pi}{\varrho_j}$.
Mindenek előtt megjegyzendő, hogy ez t-től független, azaz az oszcilláció

állandó hullámhosszú. A hullámhossz csak ϱ_j illetve ezen keresztül c_j függvénye, tehát a szabályozás intenzitásától függ. Érdekes kérdés az, hogy c_j megfelelő értékével lehet-e olyan nagy hullámhosszot kialakítani, amely esetén az oszcilláció már nem dominál az alábbi értelemben. Ha ϱ_j-t elég kicsire választjuk, a hullámhossz igen nagy lehet, ez azonban csak úgy valósulhat meg, hogy c_j is igen kicsi lesz, hiszen $\varrho_j = \arcsin\frac{c_j}{\sqrt{1+c_j^2}}$.
Ha c_j kicsivé válik, akkor a $\sqrt{1+c_j^2}$ közel esik 1-hez, tehát az amplitúdó kisebb mértékben növekszik, ugyanakkor abszolút nagyságát tekintve igen nagy lehet a formula második tényezője miatt. Ez tehát azt jelenti, hogy gyengébb szabályozást alkalmazva a hullámhossz és az amplitúdó is megnő, ezért azt állíthatjuk, hogy ily módon sem érhető el jó szabályozás. Mivel fennáll a $0 \leq \varrho_j < \frac{\pi}{2}$ egyenlőtlenség, csupán érdekességként belátható, hogy a minimális hullámhossz 5 lesz (azaz nagyobb mint 4). Ez azt jelenti, hogy tetszőleges kiindulópontból legalább 5 alkalommal kell szabályozni a folyamatot, hogy az visszatérjen kiinduló helyzetébe. Tekintsünk erre egy példát! Egy gazdaságban évente figyelik meg a készleteket és éves terveket készítenek rájuk. A készlettervezés mechanizmusa legyen a következő:

— a tervezés három információn alapul, ezek: a bázisidőszaki készletnagyság, a legutóbbi időszak készletváltozása, készletnorma;
— a bázisidőszaki készletnagyság és az előző időszak készletváltozása alapján meghatározza a spontán várható készletnagyságot (Ezt nevezhetjük mechanikus extrapolációnak, hiszen csupán a múltbeli fejlődési tendencia jövőbeni kivetítését jelenti)
— a terv azonban szabályoz is, mégpedig abba az irányba, hogy a készletek mozgása a norma körül történjen.

Ha a terv említett két tényezőjéből a szabályozási elem a döntő, akkor korábbi eredményeink azt jelentik, hogy a gazdaságban a készletek 4–5 éves ciklikus ingadozást fognak mutatni.

4⁰ Röviden megemlítjük, hogy az ingadozás fáziseltolódását ϱ_j mutatja. A már korábban felírt formula részletes elemzése helyett ennek is csupán néhány jellegzetes értékét mutatjuk be:

— c_j változásával szabályozni lehet a fáziseltolódást: ha c_j elég kicsi és $u_{1j} \neq u_{0j}$, akkor $\varrho_j = 0 \pm n\pi$, azaz nincs fáziseltolódás, ha viszont c_j nagy, akkor $\varrho_j \to \frac{\pi}{2}$;
— ugyancsak nincs fáziseltolódás akkor sem, ha $u_{0j} = u_j^*$, de ismét $\frac{\pi}{2}$ az eltolódás, ha $u_{1j} = u_{0j}$;
— könnyen leolvasható a formuláról, hogy amennyiben $u_{0j} > u_j^*$, azaz a rendszer a normálnál nagyobb készlettel indul, akkor $0 \leq \varrho_j \leq \pi$, ha viszont $u_{0j} < u_j^*$, akkor $\pi \leq \varrho_j \leq 2\pi$.

Érdemes megemlíteni, hogy a fáziseltolódás önmagában még nem ad választ arra a kérdésre, hogy a kiindulópontból pozitív, vagy negatív irányba indul a folyamat.

A fentiekben $u(t)$ függvény elemzését végeztük el, teljesen hasonló az elemzés és a következtetések más készletek ($V(t)$ és $w(t)$)esetében is. Áttérve a modell többi változójára belátható, hogy a fogyasztói vásárlások — feltéve, hogy reális $g(t)$ fogyasztási függvényt választunk — a készletek ingadozása és a fogyasztás viszonylagos stabil volta miatt szintén növekvő amplitúdójú ingadozásokat végeznek. Nem ilyen egyszerű a helyzet a termelés és a felhasználás esetében. Ezeknél ugyanis a különféle készletek lineáris kombinációi szerepelnek, azaz a termelés és a felhasználás pályája több különböző hullámhosszú, aplitúdójú és más eltolású függvény eredőjeként adódik. Az ily módon kapott pályák speciális esetben lehetnek símák, lehetnek szabályosan oszcillálók, de általában szabálytalan, hullámzó alakulást mutatnak.

Áttekintve a fenti elemzéseket a következő összefoglaló megállapításokat tehetjük:

a) A két modellfelírás, bár formailag nagyon hasonló, feltételeiben jelentős különbséget tartalmaz. Ez az eltérés a szabályozás megvalósításához szükséges idő figyelembe vételét, illetve elhanyagolását jelenti.

b) A feltételekben meglevő különbségek miatt a két modell más eredményeket szolgáltat. Más modellek elemzésénél is belátható, hogy a két felírás és megoldási mód között jelentős különbség van, itt azonban éppen a szabályozási idő bevezetésével a két modell egymásnak ellentmondó következtetésekhez vezet.

c) A folytonos modell eredményei azt mutatják, hogy a feltételezett szabályozás mellett a készletek állandó amplitúdójú periodikus ingadozást mutatnak, az oszcilláció hullámhossza állandó. A diszkrét modell esetében viszont az amplitúdó nem állandó, hanem idő függvényében növekvő, a megkívánt készletszinttől való eltérések a végtelenbe tartanak. A hullámhossz itt is állandó.

d) A folytonos modell megoldásában viszonylagos stabilitás észlelhető és nem túl szigorú megkötések mellett biztosítható a rendszer működőképessége. A diszkrét megoldás minden esetben t növekedésével a rendszer működőképességének megszűnéséhez vezet, így felveti azt a gondolatot, hogy az itt alkalmazott nem elégséges szabályozás helyett egy több szabályozóval történő szabályozást próbáljunk modellezni. A továbblépést — egy fizikai analógián keresztül — ismét a folytonos modell biztosította.

3. Továbbfejlesztett modellek

3.1. *Folytonos továbbfejlesztett modell leírása és megoldása*

Már utaltunk rá, hogy a továbbfejlesztés egy lehetséges módjához a fizikai analógia, valamint az eredmény értékeléséből adódó tanulság adott ötletet.[3] Alább megfogalmazzuk az ún. továbbfejlesztett modellt. A továbbfejlesztett modell az eredeti modellből kiindulva a következőképpen írható fel:

[3] Az általunk folytonos továbbfejlesztett modellnek nevezett modell speciális esetét dolgozta ki és működését elemezte Kornai J. és Martos B. Erről, a jelen tanulmány szerzőinek munkájától függetlenül kidolgozott modellről beszámoló cikk az Econometricaban jelenik meg [6].

(a) Mérlegegyenletek

$$\dot{u} = x - Xe - z$$
$$\dot{V} = Y - F\hat{X}$$
$$\dot{w} = z - g$$

(b) Magatartási szabályok

$$\dot{x} = \dot{Y} + \dot{z} + C^2(u^* - u) + 2D(u^{**} - \dot{u})$$
$$\dot{Y} = (F\dot{\hat{X}}) + C^2(V^* - V) + 2D(V^{**} - \dot{V})$$
$$\dot{z} = \dot{g} + C^2(w^* - w) + 2D(w^{**} - \dot{w})$$

ahol az eddig használt jelölések mellett az újak jelentése u^{**}, V^{**} és w^{**} = a megfelelő készletváltozás kívánatos üteme. D = szabályozási paraméterek matrixa.

Az 1. tétel alapján felírhatjuk a továbbfejlesztett modellt a származtatott modellből levezetett formában is.

Értelmezzük most a magatartási szabályokat! Látható, hogy az eredeti modellhez képest módosítottuk a szabályok tartalmát. A fizikai példához kapcsolódva egyfajta csillapítást igyekszünk az u, V és w oszcillációjába vinni azáltal, hogy ellenállási erővel is számolunk. A gazdálkodási egységek (ágazatok) magatartási, alkalmazkodási törvényeire gondolva megállapíthatjuk, hogy ez esetben a normálkészlethez való alkalmazkodáson túlmenően megköveteljük a készletváltozás egy adott szinthez való alkalmazkodását is. A megoldás értelmezésénél majd szemléltetjük, hogy ez a szabályozás két tendencia érvényesítését követeli meg. Az egyik tendenciát a c_i paraméterek határozzák meg, a másik tendenciáról még nem tudjuk, vajon erősíti-e ezt, vagy ellene hat.

A modell megoldásának menete a már megismert menethez áll közel. A megoldás során felhasználjuk a következő segédtételt:

3. *Segédtétel*: A $\dot{Z} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C^2 & -2D \end{pmatrix} Z,\ Z(0) = E_{2n}$

matrix-differenciálegyenlet megoldása[4]

$$e^{St} = \frac{E}{-2R} \otimes \begin{bmatrix} e^{(-D+R)t}(-D-R) + e^{(-D+R)t}(D-R) & e^{(-D-R)t} - e^{(-D+R)t} \\ (-D+R)\,e^{(-D+R)t}(-D-R) + (-D-R)\,e^{(-D-R)t}(D-R) & (-D-R)\,e^{(-D-R)t} - (-D+R)\,e^{(-D+R)t} \end{bmatrix}$$

ahol

$$S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -2C^2 & -2D \end{pmatrix}$$
$$R = \sqrt{D^2 - C^2}.$$

(Feltesszük, hogy $R \neq 0$. Ha $R = 0$, akkor az alábbi tárgyalástól eltérő elemzés szükséges, amit itt nem végzünk el.) A tétel bizonyítása [3]-ban található.

[4] Levezetéseinkben az egyszerűbb jelölés miatt esetenként törtalakban írunk matrixokat, amit valójában a nevezőben szereplő matrix inverzével való szorzásként értelmezünk.

Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\dot{V} = \dot{V}$$

$$\ddot{V} = C^2(V^* - V) + 2D(V^{**} - \dot{V})$$

azaz

$$\begin{pmatrix} \dot{V} \\ \ddot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -C^2 & -2D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C^2V^* + 2DV^{**} \end{pmatrix}.$$

Ebből

$$\begin{pmatrix} V \\ \dot{V} \end{pmatrix} = e^{St}\left[\begin{pmatrix} V^0 \\ \dot{V}(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V^* + 2C^{-2}DV^{**} \\ 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} V^* + 2C^{-2}DV^{**} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ebből kifejezve a V-t kapjuk:

$$\boxed{\begin{aligned} V = e^{-Dt}\left[\frac{e^{Rt} - e^{-Rt}}{2R} \cdot D + \frac{e^{Rt} + e^{-Rt}}{2}\right](V^0 - V^* - 2C^2DV^{**}) + \\ + e^{-Dt}\left[\frac{e^{Rt} - e^{-Rt}}{2R} \cdot \dot{V}(0)\right] + \left(V^* + 2\frac{D}{C^2}V^{**}\right) \end{aligned}}$$

(A fenti számítási menetben felhasználtuk, hogy

$$e^{(-D-R)t} = e^{-Dt} \cdot e^{-Rt}$$

fennáll, mivel D és R diagonál matrixok.)

A V változónál megismert számításhoz hasonlóan könnyen kiszámíthatjuk az u és w változók, a származtatott rendszernél már megismert módon pedig az x, Y és z értékeit is. Mivel az u, V és w értékeit és ebből azok deriváltjait ismerjük, a számítás elvégezhető. A nehézkes felírásmód miatt most ezen változók értékeinek leírásától eltekintünk.

3.2. *Diszkrét továbbfejlesztett modell leírása és megoldása*

Diszkrét esetben a továbbfejlesztett modell — akárcsak a származtatott modell — mérlegegyenletekből és magatartási egyenletekből áll, hasonlóan a folytonos modellhez a következő:

(a) Mérlegegyenletek

$$x = Ye + g + \Delta w + \Delta u$$

$$Y = F\hat{x} + \Delta V$$

(b) Magatartási egyenletek

$$\Delta^2 u = 2D(u^{**} - \Delta u) + C^2[u^* - u(t)]$$

$$\Delta^2 V = 2D(V^{**} - \Delta V) + C^2[V^* - V(t)]$$

$$\Delta^2 w = 2D(w^{**} - \Delta w) + C^2[w^* - w(t)].$$

Ebben a modellben tehát két szabályozás érvényesül: nem csupán a készletek nagyságát, de a készletváltozás nagyságát is szabályozzák. (Ez utóbbi történhet úgy, hogy a készletek stabilitását tekintjük kívánatosnak, azaz az előírt normatív készletváltozás valamennyi készletre nulla.) A jobb értelmezhetőség kedvéért alakítsuk át a magatartási egyenleteket; az átalakítást ismét csak egy egyenlet példáján mutatjuk be:

$$u(t+2) - 2u(t+1) + u(t) = 2Du^{**} - 2D\Delta u + Cu^{*} - Cu(t)$$

és átrendezésével a következő egyenletet kapjuk:

$$u(t+2) = u(t+1) + [E - 2D][u(t+1) - u(t)] - C^2u(t) + C^2u^{*} + 2Du^{**},$$

vagy ismét $t = t - 1$ helyen tekintve

$$u(t+1) = u(t) + [E - 2D][u(t) - u(t-1)] + C^2\big(u^{*} - u(t-1)\big) + 2Du^{**}$$

adódik. Ez a forma erősen hasonlít a származtatott modell értelmezésére felírt formára. Az alapvető különbség a kettő között az, hogy ott az $u(t) - u(t-1) = \Delta u(t)$ tag együttható mátrixa E volt, míg itt $[E - 2D)$, Visszatérve korábbi példánkhoz ez a magatartási egyenlet olyan készlettervezési mechanizmust ábrázol, amely a bázisidőszaki készletnagysághoz nem egyszerűen az utolsó időszak készletváltozását, hanem annak csak egy részét adja hozzá, s a normától való eltéréssel a korábban említett módon szabályoz. Ezt nevezzük az előző „mechanikus extrapolációval" szemben „lineáris extrapolációnak". Eltérést jelent még az is, hogy a fenti, az $u(t+1)$-re adott formulában szerepel egy additív konstans tag is ($2Du^{**}$).

A megoldás módja hasonló a korábban bemutatott származtatott modelléhez. Kiragadva ismét csak egy magatartási egyenletet vázlatosan mutatjuk be a megoldást. Megoldandó most tehát az

$$u(t+2) = u(t+1) + (E - 2D)\Delta u(t) - C^2u(t) + C^2u^{*} + 2Du^{**}$$

másodrendű lineáris differenciaegyenlet.

Az első lépésben ismét A^t hatványt állítjuk elő a már bemutatott főtengely-transzformáció segítségével. Itt az adódik, hogy

$$A^t = \left(-2\sqrt{D^2 - C^2}\right)^{-1} \otimes$$

$$\otimes \begin{bmatrix} (E-D+\sqrt{D^2-C^2})^t(E-D-\sqrt{D^2-C^2})+(E-D-\sqrt{D^2-C^2})^t(-E+D-D^2-C^2); \\ (E-D+\sqrt{D^2-C^2})^t+(E-D-\sqrt{D^2-C^2})^t \\ (E-D+\sqrt{D^2-C^2})^{t+1}(E-D-\sqrt{D^2-C^2})+(E-D-\sqrt{D^2-C^2})^{t+1}(-E+D-\sqrt{D^2-C^2}); \\ (E-D+\sqrt{D^2-C^2})^{t+1}+(E-D-\sqrt{D^2-C^2})^{t+1}. \end{bmatrix}$$

Ezután meghatározzuk a konstans tagot, amely ez esetben is – akárcsak a folytonos modellnél – $u^{*} + 2C^{-2}\cdot Du^{**}$ lesz. A keresett megoldás pedig

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u(t+1) \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} u_0 - u^{*} - 2C^{-2}Du^{**} \\ u_1 - u^{*} - 2C^{-2}Du^{**} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^{*} + 2C^{-2}Du^{**} \\ u^{*} + 2C^{-2}Du^{**} \end{pmatrix}$$

alakban írható. A részletes megoldást általában az A^t matrix bonyolultsága miatt nem írjuk fel; a következő, elemző részben csoportosítjuk a megoldásokat és ekkor adjuk meg a pontos megoldást is.

3.3. *A folytonos továbbfejlesztett modell megoldásának értelmezése*

A fenti formában adott megoldások további diszkussziója kívánatos. Az elemzést az u változóra végezzük el, de analóg módon a többi változóra is elvégezhetjük. A megoldásnál adott formulában az R valós vagy komplex voltától eltekintettünk. Az alábbiakban a D és C nagyságrendi relációja alapján két esetet különböztetünk meg.

I. eset: $\boxed{D < C}$

Ekkor $D^2 - C^2 < 0$ igy $R = \sqrt{D^2 - C^2} = (\sqrt{C^2 - D^2})\, i = i \cdot \hat{R}$ ahol tehát $\hat{R} = \sqrt{C^2 - D^2}$ valós.

Helyettesítsük be R helyére az $i\hat{R}$ értékeket.

$$u = e^{-Dt}\left[\frac{e^{i\hat{R}t} - e^{-i\hat{R}t}}{2i} D\hat{R}^{-1} + \frac{e^{i\hat{R}t} + e^{-i\hat{R}t}}{2}(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**}) + \right.$$

$$\left. + e^{-Dt}\left[\frac{e^{i\hat{R}t} - e^{-i\hat{R}t}}{2i\hat{R}}\dot{u}(0)\right]\right] + (u^* + 2C^{-2}Du^{**})$$

$$u = e^{-Dt}\{(\sin \hat{R}t) \cdot (D\hat{R}^{-1})[(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**} + \dot{u}(0)] +$$

$$+ (\cos \hat{R}t)(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**})\} + (u^* + 2C^{-2}Du^{**}).$$

Mivel

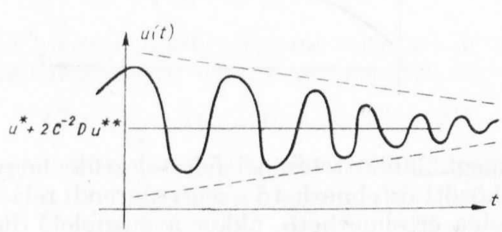
$$\dot{u}(0) = x^0 - Y^0 e - z^0$$

$$u = e^{-Dt}\{[(\sin \hat{R}t)(D\hat{R}^{-1})(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**} + x^0 - Y^0 e - z^0) +$$

$$+ (\cos \hat{R}t)(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**})]\} + (u^* + 2C^{-2}Du^{**}).$$

Az u változónak ebből a formájából már kiolvashatjuk a továbbfejlesztett modell megoldásának egyik nagyon fontos tulajdonságát. Látható, hogy az eredeti modell oszcilláló megoldását sikerült csillapítanunk. Ugyanis ha $t \to \infty$, akkor $e^{-Dt} \to 0$ és ebből következően $u \to (u^* + 2C^{-2}Du^{**})$.

Sematikus ábrán szemléletes képet adhatunk a csillapodás formájáról:



A továbbfejlesztés ötletét a fizikai analógia is segítette, s látható, hogy a csillapított rezgéshez hasonló mozgást kaptunk. Ezt a rendszert a következőkben gyengén csillapított rendszernek fogjuk nevezni.

Az eléggé nehezen áttekinthető felírás miatt most nem részletezzük az amplitúdó és frekvencia kiszámítását. Eredményünk: a rendszer stabillá vált.

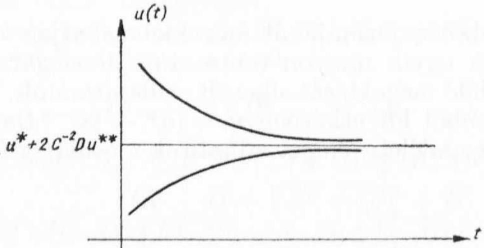
Jó lenne az u változó alakulásának közgazdasági hátterét is megadni. Ez nem könnyű. Említettük már, hogy a továbbfejlesztett rendszerben két szabályozási tendencia érvényesül: egyrészt a normálkészlethez való alkalmazkodás, másrészt a készletváltozás alkalmazkodása a kívánt mértékű változáshoz. Az előbbi fejtegetésből kiderült, hogy a rendszer nem az u^* helyen válik stabillá, hanem $u^* + 2C^{-2}Du^{**}$ helyen, azaz az u^{**} is „beleszól" a stabilitásba. Ez az érték magasabb az u^*-nál, ami azt sejteti, hogy a gazdálkodási egység magatartása, viselkedése erre a szabályozásra sajátosan reagál: ha megkívánjuk a készletváltozás kívánatos értékhez való alkalmazkodását, akkor ez a készletezésben bizonyos „rátartási" tendenciát vált ki. Másképpen fogalmazva ez azt is jelenti, hogy a kétféle szabályozás (a készletnorma betartása, illetve a készletváltozás betartása) ellentétes tendenciát fejez ki és emiatt az u^*-nál magasabb értéknél alakul ki a stabil helyzet.

II. eset: $\boxed{D > C}$. Mivel ez az előbbivel ellentétes relációt jelent, ezért ezt a rendszer erősen csillapított rendszernek fogjuk nevezni. Ebben az esetben a megoldás

$$u = e^{-Dt}\left[\frac{e^{t\sqrt{D^2-C^2}} - e^{-t\sqrt{D^2-C^2}}}{2\sqrt{D^2-C^2}}D + \frac{e^{t\sqrt{D^2-C^2}} + e^{-t\sqrt{D^2-C^2}}}{2}(u^0 - u^* - 2C^2Du^{**})\right] +$$

$$+ e^{-Dt}\left[\frac{e^{t\sqrt{D^2-C^2}} - e^{-t\sqrt{D^2-C^2}}}{2\sqrt{D^2-C^2}}\dot{u}(0)\right] + (u^* + 2C^{-2}Du^{**}).$$

Látható, hogy ebben az esetben semmiféle oszcilláció (rezgés) nem történik. A t növekedésével az u csökken, és ha $t \to \infty$, akkor $u \to (u^* + 2C^{-2}Du^{**})$. Ezt a mozgást a fizikában túlcsillapított mozgásnak hívják. A mozgás az alábbi ábrával szemléltethető:



Az említett eset megkülönböztetésénél feltételeztük, hogy a két szabályozási matrix (C és D) között értelmezhető a nagyságrendi reláció. Ha a nagyságrendi reláció nem volna értelmezhető, akkor a megfelelő diagonális elemeket hasonlítjuk össze, amelyek között ugyancsak az előbbi két reláció lehetséges. Az elmondottak alapján belátható, hogy a fenti szabályozási forma rugalmasan alkalmazható a vizsgált gazdaságra. Nem szükséges, hogy a D és C között egyértelmű nagyságrendi reláció legyen. Ez közgazdaságilag azt jelenti, hogy nem szükséges minden ágazatra ugyanazt a szabályozást alkalmazni. Egyik ágazatnál megkívánhatjuk, hogy a normálkészlethez való alkalmazkodás legyen a domináns a készletváltozás üteméhez való alkalmazkodás rovására, más ágazatoknál ennek a fordítottja is megengedhető. Az egész rendszer stabilitása szempontjából ez közömbös, csupán a csillapodás mértékében lesz különbség.

3.4. *A diszkrét továbbfejlesztett modell megoldásának értelmezése*

A diszkrét modell esetében ugyancsak a két szabályozási tag nagyságrendi relációja szerint tárgyaljuk a megoldásokat:

I. eset: $\boxed{D < C}$

Ekkor $D^2 - C^2 = -R^2$ és $\sqrt{-R^2} = iR$.

Jelöljük továbbá az $E - D$ matrixot G-vel, akkor a korábbi levezetésekhez hasonlóan belátható, hogy a megoldás ez esetben a következő lesz.

$$u(t) = R^{-1}\sqrt{G^2 + R^2}^t\,[\sin t\Phi(u_1 - u^* - 2C^{-2}Du^{**}) -$$
$$- \sqrt{G^2 + R^2}\sin(t-1)\Phi(u_0 - u^* - 2C^{-2}Du^{**}) + u^* + 2C^{-2}Du^{**}].$$

Az első megállapításunk az, hogy ha D-t O-nak választjuk, ez visszaadja a származtatott modell megoldását, tehát az ennek speciális esete. A másik fontos megállapítás az, hogy a függvény konstans része lényegesen bonyolultabb, mint az előző modell esetében. Az itt kapott konstans úgy interpretálható, hogy a kettős szabályozás folytán a készletalakulás centrumát nemcsak a normatív készlet, hanem a normatív készletváltozás is befolyásolja. Az ingadozás centruma e két norma lineáris kombinációjaként alakul ki, ahol a „súlyokat" a két szabályozó egymáshoz viszonyított aránya határozza meg.

Tekintsük most a kapott periodikus függvény amplitúdóját és vizsgáljuk meg, hogyan viselkedik az idő függvényében. Az amplitúdó tulajdonságai — elhagyva most R^{-1}-et és az átalakítás során belépő egyéb konstans tényezőket — alapvetően a $G^2 + R^2$ tényezőtől függnek. Visszahelyettesítve az eredeti jelöléseket azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{G^2 + R^2}^t = \sqrt{(E-D)^2 + C^2 - D^2}^t = \sqrt{E - 2D + D^2 + C^2 - D^2}^t =$$
$$= \sqrt{C^2 + E - 2D}^t.$$

Az amplitúdó jellegét a gyök alatti kifejezés nagysága dönti el:

(a) Az amplitúdó t növekedésével végtelenhez tart, ha

$$C^2 + E - 2D > E, \text{ azaz } C^2 > 2D.$$

Mivel a most vizsgált esetben $C^2 > D^2$ volt a feltétel, tehát

$$\boxed{C^2 > \max\,(D^2,\, 2D)}$$

esetben a megoldásfüggvény hasonló lesz, mint a származtatott modellnél. A származtatott modellnél egyébként $D = 0$, $D^2 = 0$, $2D = 0$ volt, így valóban ott fennállt ez az egyenlőtlenség. Ez másként azt jelenti, hogy ha a tervezésben a készletnagyság szerinti szabályozás a domináns, úgy a készletek az előző modellhez hasonlóan növekvő amplitúdójú ciklikus mozgást végeznek.

(b) Az amplitúdó t növekedésével állandó marad, ha

$$C^2 + E - 2D = E, \text{ azaz}$$

$$\boxed{C^2 = 2D \text{ és } C^2 > D^2}\,.$$

Következmény: Ha tekintjük a származtatott modellt; de feltételezzük, hogy a szabályozás nem késik, azaz elhanyagoljuk a reakcióidőt, a folytonos megoldáshoz hasonlóan állandó amplitúdójú periodikus függvény adódik.

Bizonyítás: A származtatott modell

$$u(t+2) = u(t+1) + \Delta u(t) + C^2\big(u^* - u(t)\big)$$

egyenlete helyett írjuk fel ugyanezt nem késleltetett szabályozással!

$$u(t+2) = u(t+1) + \Delta u(t) + C^2[u^* - u(t+1)].$$

Mivel itt csak egy szabályozó van, $D = 0$, így a feltétel második egyenlőtlensége eleve teljesül. Rendezzük át ezt az egyenletet a következő formára:

$$u(t+2) = u(t+1) + (E - C^2) + \Delta u(t) + C^2[u^* - u(t+1)],$$

Látható, hogy ez esetben a $\Delta u(t)$ tag együtthatójában az egységmatrix és az $\big(u^* - u(t)\big)$ tag együtthatójának különbsége szerepel, ez pedig nem más, mint az

$$u(t+2) = u(t+1) + [E - 2D\,]\Delta u(t) - C^2 u(t) + C^2 u^*$$

egyenlet $C^2 = 2D$ esetében. Így ez esetben a megoldásfüggvény amplitúdója állandó marad, azaz az állítást bebizonyítottuk.

Ez a következmény azért fontos, mert ez bizonyítja, hogy a diszkrét modell növekvő amplitúdóját a rekcióidő figyelembevétele, azaz a késleltetett szabályozás okozza. Más megfogalmazásban úgy mondhatjuk, hogy amennyiben a tervezés megfelelő előrelátással lehetőséget ad az azonnali szabályozásra, a szabályozás ilyen esetben hatékony lehet.

(c) Az amplitúdó t növekedésével 0-hoz tart, ha

$$C + E - 2D < E, \text{ azaz } C^2 < 2D$$

Annak feltétele tehát, hogy a periodikus ingadozás csillapítottá váljék az, hogy

$$D^2 < C^2 < 2D$$

Ez a felírás egyébként megadja azt az intervallumot, amelyben D értékeit választhatjuk, hiszen $D^2 < 2D$ csak akkor teljesülhet, ha $0 < D < 2$ áll fenn. Ilyen szabályozó-választás mellett tehát a rendszer stabilizálódik olyan értelemben, hogy a ciklikus kilengések egyre csökkennek.

II. eset: $\boxed{C^2 < D^2}$

Ekkor $D^2 - C^2 = R^2$ és $\sqrt{R^2} = R$.

A teljes megoldás ekkor a következő alakot ölti:

$$u(t) = 2R^{-1}\big((G+R)^t - (G-R)^t(u_1 - u^* - 2C^{-2}Du^{**}) - (G^2 - R^2)\,\cdot$$
$$\cdot\,(G+R)^{t-1} - (G-R)^{t-1})\cdot(u - u^* - 2C^{-2}Du^{**})\big) + u^* + 2C^{-2}Du^{**}.$$

Ez esetben a megoldás nem hozható olyan egyszerű, jól áttekinthető alakra, mint az előbb, ezért az elemzést is két lépésben végezzük.

(a) A megoldás függvény sima, azaz nem tartalmaz periodikus, oszcilláló tagot, ha mind $G + R$, mind $G - R$ nem-negatív. Ha bármelyik kifejezés negatívvá válik oszcilláció lép fel.

(b) A megoldásfüggvény t növekedésével végtelenhez tart, ha

$$\max \{ |G + R|, |G - R| \} > E$$

és konvergál az $u^* + 2C^{-2}Du^{**}$ értékhez, ha

$$\max \{ |G + R|, |G - R| \} < E.$$

Ezeknek az eredményeknek igen nehéz lenne közvetlen értelmezést adni, ezért itt csupán azt hangsúlyozzuk, hogy ilyen szabályozás mellett is lehetséges a rendszer stabilizálódása.

Az elemzést a továbbfejlesztett modellnek csak egy egyenletére végeztük el. Könnyen belátható, hogy V és w esetén teljesen analóg módon járhatunk el és a következtetések is hasonlóak lesznek. Mivel a továbbfejlesztett modell és a származtatott modell mérlegegyenletei megegyeznek, az x-re és Y-ra ott adott formulák itt is megadják a modell teljes megoldását.

A továbbfejlesztett modell megoldása és elemzése alapján az alábbi összefoglaló megállapításokat tehetjük:

(a) A továbbfejlesztett modell felírásának és elemzésének célja az volt, hogy bemutassunk egy olyan szabályozást, amely megszünteti az eredeti illetve származtatott modell egyes hiányosságait.

(b) A magatartási egyenleteket megfelelően átalakítva egy közgazdaságilag is jól értelmezhető formát kaptunk: a készletek tervezésekor az előző időszak készletváltozási tendenciáját nem lehet mechanikusan extrapolálni. Ha ehelyett ezt a készletváltozást egy alkalmas szorzóval szorozzuk, elérhető, hogy a készletek ingadozása ne nőjjön, sőt az oszcilláció csillapítható is.

(c) Megfelelő szabályozók választása — akárcsak a folytonos esetben — esetén a készletek időfüggvénye konvergál, határértéke $u^* + 2C^{-2}Du^{**}$ lesz.

(d) A megoldás elemzése során bizonyíthatóvá vált, hogy amennyiben az eredeti (és a származtatott) modellben a szabályozás időkésleltetés nélkül érvényesül, a megoldásfüggvény amplitúdója állandó lesz, és hasonlóan viselkedik, mint a folytonos modell megoldásfüggvénye. A modell felírásából az is látható, hogy egy szabályozó esetén — megfelelő előrelátást, előrebecslést feltételezve — ugyancsak lehetséges a rendszer bizonyos stabilizálása.

(e) A vizsgálatok bizonyították, hogy az itt alkalmazott kettős szabályozás segítségével mind sima, mind pedig periodikus függvény előállítható, sőt a szabályozók megfelelő értékei mellett a hullámzás amplitúdója nőhet, csökkenhet és állandó is maradhat. Ez arra utal, hogy ez a fajta szabályozás a folyamat összes fontos jellemzőjét képes szabályozni, így a korábbi helyett ezt a kettős szabályozást megfelelőbbnek tekintjük.

Összefoglalás

1° Tanulmányunkban egy meglevő modellből [4] indultunk ki. Alapvető célunk az volt, hogy ezt a modellt különféle újabb feltételezésekkel, illetve egyes feltételek feloldásával több irányban általánosítsuk.

2⁰ A módszer logikája az, hogy egyrészt fizikai analógiák alapján egyre bonyolultabb rendszert írjunk le folytonos modellek segítségével, másrészt viszont a megoldott és elemzett folytonos modellekből azok diszkrét párjával a gazdasági gyakorlathoz közelebb álló modellekhez jussunk.

3⁰ A kiinduló modell és annak diszkrét változata közt az alapvető eltérést a szabályozáshoz szükséges idő elhanyagolása, illetve figyelembe vétele okozza. Az elemzések fő eredménye az, hogy véges szabályozási (reakció) idő esetén a kiinduló szabályozási rendszer nem működőképes.

4⁰ A továbbfejlesztett modell megoldása mind folytonos, mind diszkrét esetben hasonló tulajdonságú. Mindkét megoldás bizonyítja, hogy a bevezetett kettős szabályozás megfelelőbb, mind az eredeti, a szabályozók megfelelő megválasztásával stabil készletalakulás is létrehozható.

5⁰ Befejezésül szerenénk rámutatni arra, hogy a vizsgált modell még sok általánositási és továbbfejlesztési lehetőséget rejt magában. Ezeket további kutatásaink során kívánjuk részletesebben vizsgálni.

(Beérkezett: 1973. március 26.)

IRODALOM

1. CODDINGTON, E. A.—LEVINSON, N.: Theory of ordinary differential equations. New-York, 1955. McGraw-Hill.
2. DANCS I.—HUNYADI L.: Készletjelzésen alapuló szabályozás egy Leontief típusú gazdaságban. A diszkrét modell. Budapest, 1972. Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet. 35. o.
3. DANCS I.—SIVÁK J.: Készletjelzésen alapuló szabályozás egy Leontief-típusú gazdaságban. Budapest, 1972. Országos Tervhivatal Tervgazdasági Intézet. 29. o.
4. KORNAI J.—MARTOS B.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése. Szigma, 1971. 1—2. sz. 34—50. o.
5. VIRÁG I.: Gazdasági rendszerek vegetatív működése sztochasztikus külső fogyasztással. Szigma. 1971. 4. szám. 261—268. o.
6. J. KORNAI—B. MARTOS: Autonomous functioning of the economic system. Econometrica, sajtó alatt.

CONTROL BASED ON STOCK SIGNALS IN A LEONTIEF-TYPE ECONOMY

The article introduces some advances of a stock control model elaborated by Kornai-Martos: The autonomous functioning of an economic system. SZIGMA 1971(1—2).

In the first part it introduces a derived model, equivalent mathematically to the original one, and describes the discrete analogous variant thereof, too. It presents and analyzes the solutions obtained.

The second part deals with the so-called advanced models. In these models it introduces an additional control term, the idea of which has been given by a physical analogue — the damped oscillation. It presents the solution to the continuous and discrete models, the interpretation and analysis of the solutions. On the basis of the results the next two main consequence can be drawn.

— the basic deviation between the continuous variants of the original model is that the continuous model neglects, and the discrete model takes into consideration the time necessary for regulation. In case of the discrete model this means that the control system is not viable in every case;

— the solution to the advanced model has similar features in the continuous as well as the discrete case. Both solutions prove that the introduced double control is more appropriate than the original one; stabilization of stocks can be achieved with an appropriate choice of regulators.

РЕГУЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ СИГНАЛИЗАЦИИ РЕЗЕРВОВ В ЭКОНОМИКЕ ТИПА ЛЕОНТЬЕВА

Статья представляет собой некоторые дальнейшие разработки модели Корнаи-Мартоша по регулированию резервов (Вегетативное действие экономических систем, СИГМА, 1971/1—2).

В первой части излагается т. н. заимствованная модель, которая математически эквивалентна оригинальной модели и описывает дискретный аналогичный вариант модели. Представляются решения обоих вариантов и анализируются полученные решения.

Вторая часть занимается т. н. развитыми моделями. В развитых моделях вводится добавочный регулятор, идею которого дала физическая аналогия — затухающее колебание. Эта часть знакомит также с решением непрерывной и дискретной развитой модели, дает объяснение и анализ решений.

На основе полученных результатов можно сделать два основных вывода:

— основное расхождение между непрерывным и дискретным вариантами оригинальной модели в том, что непрерывная модель упускает, а дискретная модель учитывает необходимое для регулирования время. В случае дискретной модели это означает то, что первоначальнач система регулирования не всегда способна к действию;

— решение развитой модели имеет похожие свойства и в непрерывным и в дискретном случаях. Оба решения доказывают, что введенное двойное регулирование более подходящее, чем оригинальное; соответствующим выбором регуляторов можно создать и стабильные резервы.

Martos Béla

Megjegyzések Dancs–Hunyadi–Siválk cikkéhez[1]

1.

Az első kérdés látszólag terminológiai: mit nevezhetünk magatartási szabálynak? Valójában azonban nem érdektelen terminológiai, hanem alapvető modellszerkesztési kérdésről van szó. Nem vállalkozom arra, hogy a ,,magatartás'' szó értelmét definiáljam, de számomra értelmetlennek tűnik azt mondani, hogy bizonyos fizikai tárgyaknak, termékeknek, készleteknek magatartásuk van. Magatartásuk, legalábbis a gazdaságban, embereknek, embercsoportoknak esetleg intézményeknek van, azaz beszélhetünk a fogyasztó, a termelő vállalat, a bank stb. magatartásáról, feltételezve, hogy bizonyos impulzusokra többé-kevésbé következetes módon reagálnak. (Például a Kornai–Martos és a Dancs–Hunyadi–Sivák modellekben a készletcsökkenésre vásárlással vagy termeléssel.) Ezzel szemben a készleteknek azt a tulajdonságát, hogy felhasználásuk esetén csökkennek, nem tekintem a készletek magatartásának. E felfogás értelmében a szerzők korrektül alkalmazzák a kifejezést a 2.1. és 3.1. fejezetekben, de hibásan a 2.2. fejezetbeli úgynevezett ,,származtatott modellek'' esetében és hasonlóképpen a 3.2 fejezetbeli ,,diszkrét továbbfejlesztett'' modell leírásában. (Közbevetőleg: az is vitatható, helyes-e egy modellből azonos átalakításokkal nyert új formát, új ,,származtatott'' modellnek nevezni.)

Lényeges mondanivalómat a fogyasztói magatartási egyenlettel illusztrálom. A

$$\dot{z} = \dot{g} + C^2(w^* - w)$$

egyenlet vagy ennek diszkrét változata, leírják azt, hogyan változtatja a fogyasztó vásárlásait, fogyasztásának és készletei alakulásának függvényében. Ez tehát egyértelműen magatartási szabály. Ezzel szemben a fenti egyenletnek és a reálfolyamatot leíró

$$\dot{w} = z - g$$

egyenlet kombinálásával nyert

$$\ddot{w} = C^2(w^* - w)$$

már nem mond semmit a fogyasztó magatartásáról, arról, hogy hogyan reagált az őt ért impulzusra, hanem a fogyasztó magatartásának és a reálfolyamatnak közös következményét írja le. A fogyasztó cselekedetei: vásárlás és fogyasztás ebben az egyenletben nem is szerepelnek, csak a készletek, amik e cselekedetek hatására jönnek létre. Így az utóbbit nem helyes magatartási egyenletnek nevezi.

Ugyanezt a gondolatot a szabályozáselmélet nyelvén is megfogalmazhatom. A mérlegegyenletek a szabályozott szakasz egyenletei, a magatartási egyenle-

[1] E megjegyzések szerzőjük személyes nézeteit fejezik ki, és nem tekinthetők a SZIGMA állásfoglalásának. *(Szerk.)*

tek pedig a szabályozó szakaszé. Ezzel szemben az, amit a szerzők a „származtatott modell"-ben magatartási egyenletnek neveznek, az az egész szabályozási kör (egyik) kimenő jelének egyenlete.

2.

A szerzőknek tökéletesen igazuk van abban, hogy a késleltetésnek a modellekbe való bevezetése növeli valósághűségüket. Ennek ugyan nem egyetlen, de egyik és nagyon célszerű eszköze a diszkrét idő alkalmazása. Így ki lehet küszöbölni a Kornai—Martos modelleknek azt a fogyatékosságát, hogy mind a reálfolyamatok, mind az információs folyamatok idő igénybevétele nélkül zajlanak le. A szerzők ennek egyik felére vállalkoztak, nevezetesen az információs folyamatok időigényének figyelembe vételére. Eddig a dolog rendben is van.

Az elv következetes alkalmazása azonban azt követeli meg, hogy minden időperiódusban csak olyan információt használhatunk fel, ami az időszak *elején* már rendelkezésre áll. Ez az elv nem érvényesül következetesen a szerzők diszkrét idős modelljeiben. Például a fogyasztó magatartási egyenleténél maradva az eredeti modellben

$$\Delta z = \Delta g + C^2(w^* - w)$$

azaz

$$z(t + 1) = z(t) + g(t + 1) - g(t) + C^2[w^* - w(t)].$$

Tehát a fogyasztónak $t + 1$ időszakbeli vásárlásainak meghatározásához nem csak t időszakbeli adatokra van szüksége, hanem a $t + 1$ időszakbeli fogyasztását is, tehát egyidejűleg keletkező adatot is, meg kell figyelnie. Ugyanez a kifogás felhozható a 3.2. fejezetbeli diszkrét továbbfejlesztett modell nek (a cikkben le nem írt, de könnyen rekonstruálható) magatartási egyenleteivel szemben is.

Nagyon is megértem, hogy a késleltetést korrektül kezelő

$$\Delta z(t) = \Delta g(t - 1) + C^2[w^* - w(t)]$$

alakú magatartási szabályok alkalmazása megnehezítette volna a rendszer megoldását és elemzését. De úgy éreztem, hogy e következetlenségről már csak azért is említést kell tennem, hogy a vizsgálatok egy lehetséges (és szerintem szükséges) további útját, a késleltetést következetesen alkalmazó magatartási szabályok alkalmazását, feltárjam.

3.

A fenti megjegyzések ellenére azt a munkát, amit a szerzők a diszkrét modellek kidolgozására, megoldására és elemzésére fordítottak eredményesnek és további munkára inspirálónak tartom. Mindemellett sajnálom, hogy megálltak a stabilitási kritériumok elemzésénél és nem terjesztették ki vizsgálatukat a működőképességre is. Így e pillanatban még nem tudjuk, biztosítani lehet-e és milyen előfeltételek mellett, hogy a termelés és a készletek a folyamat során pozitívak maradjanak.

Végül kötelességemnek tartom megemlíteni, hogy a 2. sz. megjegyzésben foglaltakra a cikknek egy magát megnevezni nem óhajtó lektora hívta fel a figyelmemet.

Fényes Tamás—Sári József

Nagy szervezeti rendszerek egy hitelfinanszírozási modellje

Nagy szervezeti rendszereken olyan komplexumokat értünk, amelyekben az egyes szervek önálló jogi személyek, meghatározott gazdasági önállósággal rendelkeznek és az irányítást ellátó csúcsszerv átcsoportosíthatja a pénzügyi forrásokat. Bár az egyes szervezeti egységek önálló pénzgazdálkodást folytatnak, nem állnak közvetlenül hitelkapcsolatban a Bankkal, hanem az irányító központ. A nagy szervezeti rendszerek körébe tartozhatnak termelő tevékenységet és nem termelő tevékenységet folytató komplexumok. Az előbbiek vállalati gazdálkodást folytató önálló szervekből tevődnek össze (ilyenek pl. a trösztök, egyesülések), a második csoportba általában igazgatási szervezetek tartoznak, mint pl. az állam és a költségvetési szervek. Mindkét típusú nagy rendszerre jellemző, hogy pénzgazdálkodásuk folyamatszerű és hiteligényük csak akkor keletkezik, ha a nagy szervezet egészében mutatkozik pénzhiány, azaz a kiadások meghaladják a bevételeket.

A modell felállításával célunk az, hogy közgazdaságilag és matematikailag leírjuk a nagy szervezeti rendszerek pénzfolyamatainak halmozott, végső eredményeit és ennek alapján meghatározzuk a hitelszükségletet, a folyósítások és törlesztések ütemét, mértékét. A feladat matematikai megoldásának feltétele, hogy a bevételek és a kiadások függvényekkel leírhatók legyenek; a közgazdasági követelmény pedig, hogy a mutatkozó pénzhiány pótlása a népgazdaság pénzügyi egyensúlyát ne veszélyeztesse. A jelen modelltől függetlenül vizsgálandó ezért minden egyes időszakban, hogy a népgazdasági tervből adottan rendelkezésre állnak-e a beszerezni vagy megfinanszírozni szándékolt használati értékek, és hogy a bankrendszer elegendő pénzügyi forrással rendelkezik-e a hitelszükséglet kielégítésére.

I. A hitelezés közgazdasági feltételeiről

Vizsgálódásainkat döntően az állami költségvetésre, mint a lehető legnagyobb szervezeti rendszerre központosítjuk. Tesszük ezt azért, mert az állami költségvetés az utóbbi években rendszeresen hiányt tervez és a ténymérlegben is deficittel találkozunk. Ezt a kiadási hiányt csak akkor képes az állami költségvetés pénzügyileg fedezni, ha a bankrendszer (valamely pénzintézet) a különbözetet hitel formájában rendelkezésére bocsátja. Tekintettel arra, hogy a szocialista államok költségvetésére hosszú időn keresztül az egyensúly ill. a bevételi többlet volt a jellemző, ezért nem alakult ki olyan módszer, amely alkalmas lehetne a hitel mértékének, illetve a kiadásokhoz és bevételekhez való arányának meghatározására. Vizsgáljuk meg ezért először, hogyan néz ki a tőkés államok eladósodása.

A tőkés államok költségvetésére hosszú idő óta jellemző a deficites gazdálkodás. A különbözetet a múltban általában másként bírálták el, ha a folyó költséggazdálkodás bevételi hiányáról és másként, ha beruházások finanszírozásáról volt szó. Az előbbi esetben az átmeneti likviditási zavart rövidlejáratú, lényegében bevételmegelőlegezési folyószámla hitellel szüntették meg, amit a költségvetési éven belül, vagy nem sokkal azt követően rendszerint vissza is fizettek. Tényleges tartós hitelkapcsolat többnyire csak a felhalmozások (beruházások) finanszírozására jött létre, döntően kötvénykibocsátás formájában. Az utóbbi időben tapasztalható — éppen a költségvetési hiányok általánossá és krónikussá válása következtében — hogy formálisan nem tesznek különbséget a folyó gazdálkodás és a beruházások pénzügyi hiánya között.

Az egyes fontosabb tőkés országok hiteltartozásainak eltérő mértéke szembetűnő. 1968-ban pl. az NSzK állami adósságállománya az éves bruttó társadalmi termék 21%-át és a költségvetési összkiadások 72%-át tette ki, ugyanez Hollandiában 60%, illetve 165%; Angliában viszont — ahol a jelentősebb tőkés országok között a legnagyobb az állami eladósodás — 98,5% és 245%. [1] Ha tehát hazai gyakorlatunkban arra szeretnénk választ adni, hogy a nemzetközi tapasztalatok szerint mekkora hitelnagyság ill. mekkora törlesztési- és kamatkötelezettség tekinthető az állami költségvetés szempontjából még elfogadhatónak, nem tudnánk egyértelműen válaszolni. Az adatokból úgy tűnik, mintha a költségvetés hiteligénybevételének lehetősége korlátlan volna, jóllehet a kötelezettségek egy bizonyos idő után akkora terhet rónak az állami pénzalapra, hogy a kamatot és a törlesztőrészleteket már csak újabb és újabb (és tegyük hozzá, mind nagyobb) hitel igénybevételével tudják teljesíteni. Mivel pedig a kölcsön egy tekintélyes része pénzteremtő hitel formájában kerül folyósításra, a kiáramló többletvásárlóerő árfelhajtó tényezőként hat.

Célszerű tehát, ha abból indulunk ki, hogy a nagy szervezeti rendszereknek és így az állami költségvetésnek is — bizonyos időintervallumban és határok között — saját bevételeikből kell fedezniök kiadásaikat. A jövedelmet egy meghatározott várható többlet erejéig lehet meghitelezni és azt is csak bizonyos véges időtartamon belül. A hitelnyújtás lehetősége abból adódik, hogy az anyagi oldalon létrejönnek a népgazdasági tervnek megfelelően azok a használati értékek, amelyek realizálásának egyetlen akadálya, hogy a költségvetés még nem rendelkezik elegendő pénzeszközzel.

A társadalmi termék használati értékéből adódó fogyasztási és felhalmozási alap figyelembevételével a nagy szervezeti rendszerek pénzgazdálkodását és hitelfinanszírozását is két részre célszerű bontani, mégpedig:

— a folyó gazdálkodásra, ahol a bevételek és a kiadások különbségeként mutatkozó pénzhiány pótlása a rövidlejáratú hitelezés szférájába tartozik. Feltételezzük, hogy az ilyen jellegű hiány csak átmeneti, esetleges, és — bővített újratermelés esetén — a következő időszakban várható bevételi növekmény fedezetet nyújt a rendezésre. Amennyiben ekkor sem pótolható az előző évi hiány, akkor a deficitfinanszírozás már nem a rövidlejáratú hitelezés keretébe tartozik.

— A felhalmozások területén a hiányok pótlása — a dolgok természetéből következően — tartós pénzigénnyel jár. Amennyiben a pénzszükségletet hitel formájában elégítik ki, a visszafizetés is hosszabb idő alatt történik, ami már a közép- és hosszúlejáratú hitelfinanszírozás szférája. A továbbiakban a tartós hitelezés kérdésével kívánunk bővebben foglalkozni.

Bármilyen szerv bank által történő meghitelezésének minőségi kritériumai vannak. A jelenlegi gyakorlatban érvényes kritériumokat azonban elsődlegesen a termelő tevékenységet folytató vállalati gazdálkodó szervekre dolgozták ki. A nem termelő nagy szervezeti rendszerekre ezeket a feltételeket közvetlenül alkalmazni — megítélésünk szerint — nem volna célszerű. Vannak azonban a hitelnek olyan általános érvényű sajátosságai, amelyek az adott hitelpolitikától függetlenül érvényesek. Elsősorban ez utóbbiak közé sorolható az a feltétel, hogy a hitelt meghatározott idő alatt vissza kell fizetni. Következik ebből, hogy hitel csak olyan mértékben nyújtható, amilyen mértékben visszafizethetősége biztosított. A másik ugyanilyen általános feltétel, hogy a bankhitelnek reális fedezete van. A fedezet szrosan összefügg a hitel tárgyával. Esetünkben a felhalmozási eszközök tárgyi megléte szükséges külső feltétel a fedezet szempontjából, de lényegét tekintve a nagy szervezeti rendszer várható jövedelmét, pénzügyi bevételét hitelezik meg.

A vállalat esetében a beruházási objektum vagy a felhalmozott készlet képezi a konkrét fedezetet, s a folyamat mind tevékenységileg, mind hitelfinanszírozási szempontból előre megállapított időtartam alatt megy végbe. A nagy szervezeti rendszerekben azonban az egészet tekintve végnélküliek a folyamatok, s a felhalmozásoknak nincsenek olyan értelemben vett kitüntetett időpontjai, amelyek a kezdetet és véget jelölnék. Itt ugyanis állandó jellegű és igen sok objektum finanszírozásáról van szó.

Tekintettel azonban arra, hogy a hitel lényegéhez tartozik a visszafizetési kötelezettség, ezért esetünkben is érvényes a szabály, hogy a kölcsönkapott összegeket az arra megállapított határidőn belül kamatostól vissza kell fizetni. Ennek feltétele pedig, hogy a ma igénybe vett hitelekkel szemben a szervezet egy meghatározott idő alatt — olyan bevételi többlettel rendelkezzék, amely az adott időszak tényleges kiadásain túlmenően fedezetet nyújt a bankkal szembeni kötelezettségekre is. Az elmondottak megvilágítására tegyük fel, hogy a nagy szervezeti rendszer meghitelezési időtartama kapcsolódik a vállalatoknál szokásos hosszúlejáratú hitel időtartamához, azaz 8—10 év. Figyelembe kell venni azt is, hogy az elvégzett beruházások, ill. felhalmozások elkészülési ideje átlagosan mekkora időtartamot igényel. Azt az időtartamot, amely az átlagos elkészülési időnek felel meg a mi adottságaink között átlagosan 3—5 évre tehetjük, következésképpen előzetes elemzések alapján lehet dönteni arról, hogy a törlesztő részleteket hányadik évtől kezdődően és hány évig kell teljesíteni. Egyidejűleg vizsgálat tárgyává lehet tenni, hogy a törlesztés — egy-egy évben folyósított hiteleket illetően — egyenlő részletekben vagy a várható bevételek változási arányában történjék-e.

A tényleges pénzhiány, vagyis a hitelszükséglet meghatározása céljából a törlesztő részleteket és a kamatokat az eredeti kiadásokhoz hozzá kell adni, mint kiadási többleteket, mert ezek az összegek növelik az esedékes kötelezettségeket. Ily módon a nagy szervezeti rendszerben időben és térben is összegeződnek a folyamatok, amelyek eredményeként egyidejűleg keletkezik hiteligény és törlesztési kötelezettség anélkül azonban, hogy ezt a jelenséget hitelprolongációnak tekinthetnénk.

A bevételek és a kiadások úgy értelmezhetők, mint az állami központi pénzalap növekedése és csökkenése; az egyes szervek pedig ebből a pénzalaból kapják meg kiadásaik fedezetére a szükséges összegeket. A kiadási többlet miatti pénzhiány a függvényértékek különbségeként mutatkozik, ahol a bevételek rendszeres növekedése lehetőséget ad — a hitelfolyósítás évenkénti mértékének korlátozása ellenére is — újabb és újabb hitel felvételére, mert egy előzőleg nyújtott hitelnek mindig létrejöhet a fedezete a bővített újratermelés következtében keletkező jövedelmek növekményéből. A korlátok szerepe az, hogy a hiteltartozás (állomány) ne növekedjék olyan mértékben, ami veszélyeztetné a visszafizethetőséget. Ily módon az évenként mutatkozó tartós pénzhiány ellenére is biztosítani lehet a hosszabb távú dinamikus pénzügyi egyensúlyt.

A kérdés az, hogy ha a nagy szervezeti rendszer egy véges időintervallumban rendszeresen hiányt mutat és az egyensúly létrehozása csak hitel igénybevételével lehetséges, meddig terjedhet annak határa? Erre vonatkozóan az alábbi logikai megoldás látszik célszerűnek:

— Egy-egy konkrét évben a hitelszükségletet a kiadások és a bevételek különbsége jelzi, amennyiben a kiadások összege nagyobb. Ha a komplexumnak már előzőleg keletkezett hiteltartozása állna fenn, a kiadásokat a hitelek törlesztő részlete és a kamatkötelezettség is növeli.

— Bővített reprodukció esetén a hitelszükséglet folytonosan növekvő. A modellben azt a halmozott pénzhiányt tekintjük maximum meghitelezhetőnek, amely egyenlő a hitelnyújtás és az átlagos használatba vételi időszak évei között mutatkozó bevételi többlettel. Ez a hitelállományra felállított mennyiségi korlát azt szolgálja, hogy csak egy bizonyos nagyságrendű jövőbeli jövedelem legyen előre elkölthető.

— A meghitelezés egy másik korlátjaként adódik, hogy a törlesztésekkel és kamatokkal növelt éves költségvetési kiadás ne haladja meg a felhalmozások elkészülte után várható éves bevétel nagyságát. Itt tehát a bevételek teljes összegének mennyiségi korlátjával találkozunk, amely egyben magában foglalja az előző korlátot is, ha az már előbb be nem következett volna.

II. A modell matematikai megfogalmazása

A modellből elvileg a következő feltételezések adódnak:

— ha bármely n-edik nap kiadása k_n, bevétele b_n, és véges időintervallumra feltételezhető, hogy $k_n > b_n$, akkor a hiány pótlására szolgáló pénzszükséglet az alábbiak szerint adódik egy évre vonatkoztatva

$$\sum_{n=1}^{360} (k_n - b_n) > 0\,;$$

— ha a nagy szervezeti rendszer kezdő pénzkészlettel (P_0) rendelkezik, s annak állandó fennállása nem indokolt, akkor ez az összeg csökkenti a hiteligényt; ha viszont egy minimális pénzkészlet tartása rendszeresen szükséges (hiszen sok egység folyamatos pénzellátásáról van szó), akkor a hitelszükséglet az előbbiekben felírt különbség;

— mivel $(k_n - b_n)$ hónapról-hónapra, évről-évre a bővített újratermelés feltételei között növekvően ismétlődik és arányos változást mutat a nemzeti jövedelemmel, alakulása leírható trendfüggvénnyel.

A fenti megállapítások általános érvényűnek tekinthetők és véges időtartamon belül a folyó gazdálkodásra is vonatkoznak. A dimenziók bővítésével lényegében hasonlóan játszódik le a folyamat a felhalmozásoknál is. Ezt írjuk le a folyamatos modellben, majd megadjuk a diszkrét modellt is a numerikus számítások könnyebb elvégezhetősége céljából.

1. *A folyamatos (elméleti) modell*

Ebben a pontban a nagy szervezeti rendszerek meghitelezésének matematikai modelljét és annak megoldását ismertetjük. A folyamatot a t időváltozó $0 \leq t \leq \infty$ tartományában vizsgáljuk. A modellben szereplő közgazdasági kategóriákat az alábbiak szerint jelöljük.

$K(t)$ = az időegységre eső összes kiadás, azaz $K(t) = \sum_{j=1}^{k} K_j(t)$

$K'(t)$ = az időegységre eső törlesztőrészlettel és kamattal növelt összes kiadás

$B(t)$ = az időegységre eső összes bevétel, azaz $B(t) = \sum_{j=1}^{k} B_j(t)$

$H_f(t)$ = az időegységre eső hitelfolyósítás

$H_v(t)$ = az időegységre eső hiteltörlesztés

$H(t)$ = teljes hitelállomány

i = kamatláb

n = hitellejárati idő

m = beruházások átlagos elkészülési ideje

j = a nagy szervezeti rendszer egyes szerveinek a jele

k = a nagy szervezeti rendszerhez tartozó szervek száma

A modell alapösszefüggéseit az alábbiakban definiáljuk:

$$H_f(t) = K'(t) - B(t) \tag{1}$$

$$K'(t) = K(t) + iH(t) + H_v(t) \tag{2}$$

$$\frac{dH(t)}{dt} = H_f(t) - H_v(t) \tag{3}$$

$$H_v(t) = \frac{1}{n-m} \int_{t-n}^{t-m} H_f(\tau)\, d\tau \tag{4}$$

$$H(t) \leq \int_0^t [B(\tau + m) - B(\tau)]\, d\tau \tag{5}$$

A modellben a $K(t)$ és a $B(t)$ függvényeket empirikus alapon adottaknak tekintjük, úgy szintén az i kamatlábat is, amely állandó paraméter. Az időben változó kamatláb sem teszi lényegesen bonyolultabbá a modellt, de azzal nem kívánunk foglalkozni.

A modell megoldása:

(4) differenciálásából adódik, hogy

$$\frac{dH_v(t)}{dt} = \frac{1}{n-m}[H_f(t-m) - H_f(t-n)]. \tag{6}$$

Továbbá (1) és (2) alapján $K'(t)$ kiküszöbölésével a következő kifejezést kapjuk:

$$H_f(t) = K(t) + iH(t) + H_v(t) - B(t). \tag{7}$$

4*

Ezt (3)-ba helyettesítve a teljes hitelállományra nézve fennáll az alábbi differenciálegyenlet

$$\frac{dH(t)}{dt} - iH(t) = K(t) - B(t) \tag{8}$$

A fenti (8) megoldása:

$$H(t) = H(0)e^{it} + e^{it}\int_0^t [K(\tau) - B(\tau)]e^{-i\tau}d\tau \tag{9}$$

ahol $H(0)$ a megadott kezdeti érték.

Határozzuk most meg a folyósított és törlesztett hitelt is. (3)-ból differenciálással:

$$\frac{d^2H(t)}{dt^2} = \frac{dH_f(t)}{dt} - \frac{dH_v(t)}{dt}.$$

Ebből $\frac{dH_v}{dt}$-t kifejezve, (6)-ba helyettesítve és rendezve:

$$\frac{dH_f(t)}{dt} - \frac{1}{n-m}[H_f(t-m) - H_f(t-n)] = \frac{d^2H(t)}{dt^2} \tag{10}$$

Így a már meghatározott teljes hitelállományt figyelembe véve – a folyósított hitelre egy differencia – differenciálegyenletet nyerünk.

Kezdeti feltétel gyanánt meg kell adnunk H_f értékét a $-n \leq t \leq 0$ intervallumban. Ezt a függvényt jelöljük $H_f^*(t)$-vel, tehát legyen

$$H_f^*(t) = H_f(t) \text{ ha } -n \leq t \leq 0$$

$$\text{és } H_f^*(t) = 0 \text{ különben}$$

(10) megoldható pl. a Mikusinski féle operátorszámítás segítségével [2]. (10) az alábbi operátoros alakra írható át, ahol s a differenciáloperátort e^{-ms}, e^{-ns} eltolási operátorokat jelöl.

$$s\{H_f\} - H_f(0) - \frac{1}{n-m}[e^{-ms}\{H_f\} + \{H_f^*(t-m)\} - e^{-ns}\{H_f\} - \{H_f^*(t-n)\}] = \left\{\frac{d^2H(t)}{dt^2}\right\} \tag{11}$$

[$H_f(0) = H_f^*(0)$, mert $H_f(t)$-nek nem lehet ugrása a $t = 0$-ban].

A H_f operátorára nézve egyszerűen adódik, hogy

$$\{H_f\} = \frac{\left\{\frac{d^2H(t)}{dt^2}\right\} + H_f(0) + \left\{\frac{1}{n-m}[H_f^*(t-m) - H_f^*(t-n)]\right\}}{s - \frac{1}{n-m}(e^{-ms} - e^{-ns})}. \tag{12}$$

Ismert sorbafejtési tétel következtében

$$\frac{1}{s - \dfrac{1}{n-m}\left(e^{-ms} - e^{-ns}\right)} = \frac{1}{s\left[1 - \dfrac{1}{n-m}\,\dfrac{\left(e^{ms} - e^{ns}\right)}{s}\right]} =$$

$$= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(n-m)^k}\,\frac{\left(e^{-ms} - e^{-ns}\right)^h}{s^k}$$

mellyel (12) figyelembevételével $H_f(t)$ operátorára az alábbi végső kifejezést nyerjük.

$$\{H_f(t)\} = \left[\left\{\frac{\mathrm{d}^2 H(t)}{\mathrm{d}t^2}\right\} + H_f(0) + \left\{\frac{1}{n-m}\left(H_f^*(t-n) - H_f^*(t-n)\right)\right\}\right]\cdot$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^{-ms} - e^{-ns}\right)^k}{(n-m)^k\, s^{k+1}}\,. \tag{13}$$

Az operátorszimbolika elemi szabályainak figyelembevételével (13) könynyen felírható, mint a t időváltozó függvénye. Megjegyezzük, hogy bármilyen véges időintervallumon a kapott végtelen sor az eltolási operátorok sajátsága folytán véges sorrá redukálódik. Ezek után már csak a törlesztett hitelt kell meghatároznunk. Ez viszont közvetlenül adódik a

$$H_v(t) = H_f(t) - \frac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t}$$

összefüggésből a már meghatározott H_f és H ismeretében.

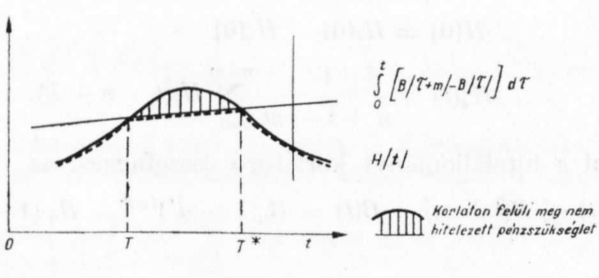
Megemlítjük, hogy a $K'(t)$ költségfüggvény is közvetlenül adódik a modellből.

A fentebb leírt modell az időnek abban az intervallumában érvényes, melyben a teljes hitelállomány eleget tesz (5)-nek.

Definíció

Legyen T az a legelső időpont, melyben a modellből számított hitelállomány eléri és meghaladja az (5) korlát által megadott értéket (feltéve, ha ilyen létezik).

Amennyiben T létezik, legyen T^* az a legelső időpont, melyben a modellből számított hitelállomány ismét eleget tesz az (5) korlát követelményének (feltéve, ha ez egyáltalán létezik). Rajzban:



A $T \leq t \leq T^*$ tartományban a hitelezés modellje annyiban egyszerűbb, hogy ott a teljes hitelállományra közvetlenül fennáll a

$$H(t) = \int_0^t [B(\tau + m) - B(\tau)]\, d\tau$$

kifejezés. Vagyis a teljes hitelállomány egyenlő a korláttal. A törlesztésnek és a folyósításnak a hitelállománnyal való kapcsolata változatlan. Ezt továbbra is a (10) sz. egyenlőség írja le.

Ha $t > T^*$, akkor ismét a modell kiinduló egyenlőségei szerint történik a hitelezés.

2. *Egy diszkrét modell*

Az elméleti modell által helyesen leírt folyamat végső eredményeként mutatkozó hitelállomány a valóságban nem változik meg minden másodperc idődimenzióban, hanem diszkrét időpontokban, nagyobb időközönként. A kiadások és a bevételek folyamatos változásából adódó pénzügyi hiány pótlása ugyanis nem történik meg minden pillanatban tényleges hitelnyújtás formájában, hanem csak egy-egy időintervallum halmozott forintösszege alapján, diszkrét időpontokban. Hasonlóan a törlesztéseket is nagyobb időközönként (rendszerint negyedév, év) kell teljesíteni. Íly módon a hitelállomány változása egy-egy diszkrét időpontban ugrásszerű, bár alakulása hosszabb távot tekintve határozott karakterű a kiadásokat és a bevételeket leíró függvényektől determináltan [3].

A gyakorlati szakember számára az alábbiakban leírt diszkrét modell szolgálhat a döntés alapjául, ahol a **t** időváltozó egységnyi hossza megegyezik a pénzügyi mérlegek készítésének gyakoriságával. Ez a feltétele egyrészt a jövőbeni gazdálkodás várható pénzszükségletei meghatározásának, másrészt a lezárt időszakok tényleges pénzügyi lehetőségei elemzésének.

A diszkrét modellben $K(t)$ és $B(t)$ a kiadási és a bevételi függvényeket jelöli; míg $H(t)$, $H_f(t)$ és $H_v(t)$ a hitelfinanszírozással kapcsolatos időtől függő változók. Az **i** kamatlábról itt is feltételezzük, hogy constans.

A modell működése az alábbi négy egyenlettel írható le

(1) $$H_f(t) = K'(t) - B(t)$$

feltéve, hogy a kezdő pénzállomány a teljes vizsgálati időszak alatt állandó, azaz $p(t) = p_0 =$ constans, ha $t \geq 0$

(2) $$K'(t) = K(t) + iH(t-1) + H_v(t)$$

(3) $$\Delta H(t) = H_f(t) - H_v(t) \qquad t \geq 1$$

$$H(0) = H_f(0) - H_v(0)$$

(4) $$H_v(t) = \frac{1}{n+1-m} \sum_{k=0}^{n-m} H_f(t-n+k).$$

Ehhez járul a hitelállományt korlátozó összefüggés, az

(5) $$H(t) \leq B(t+m) - B(t) = B_0(1+d')^{t+m} - B_0(1+d')^t$$

kifejezés.

Ezúttal feltételeztük, hogy a kiadásokat és a bevételeket exponenciális függvény írja le, bár az bármely más — empirikus alapon meghatározott — függvény lehet. E szerint:

$$K(t) = K_0(1 + d)^t \quad d > d' \tag{6}$$

$$B(t) = B_0(1 + d')^t \tag{7}$$

Megoldás

Az első két egyenletből $K'(t)$ kiküszöbölésével adódik, hogy

$$H_f(t) = K(t) + iH(t - 1) + H_v(t) - B(t). \tag{8}$$

A (8) és (3) kifejezésekből egyszerűen adódik, hogy

$$\Delta H(t + 1) - iH(t) = K(t + 1) - B(t + 1) \quad t \geq 0. \tag{9}$$

Így elsőrendű inhomogén differenciaegyenletet nyerünk a teljes H állományra, melyben márcsak a kamat, a kiadási és bevételi függvények szerepelnek. (9) megoldása

$$H(t) = H(0)\,(1 + i)^t + \sum_{k=1}^{t} (1 + i)^{k-1}\,[K(t + 1 - k) - B(t + 1 - k)] \quad t \geq 1 \tag{10}$$

és $H(t) = H(0)$ ha $t = 0$, $H(0) =$ kezdeti teljes hitelállomány.

Amennyiben (9)-ben figyelembe vesszük (6)-ot és (7)-et, úgy:

$$\Delta H(t + 1) - iH(t) = K_0(1 + d)^{+1} - B_0(1 + d')^{t+1} \tag{11}$$

is írható, mint (9) speciális esete. (11) megoldásánál az alábbi eseteket kell megkülönböztetni.

I. $d \neq i$, $d' \neq i$. Ekkor (11) megoldása

$$H(t) = \alpha(1 + i)^t + \frac{K_0}{d - i}(1 + d)^{t+} + \frac{B_0}{i - d'}(1 + d')^{+}, \quad t \geq 0 \tag{12}$$

$$\alpha = H(0) + \frac{K_0(1 + d)}{i - d} + B_0\frac{(1 + d')}{d' - i}$$

II. $d = i$, $d' \neq i$

$$H(t) = \left(H(0) + \frac{B_0(1 + d')}{d' - i}\right)(1 + i)^t + K_0 t\,(1 + i)^t - \frac{B_0}{d' - i}(1 + d')^{t+1} \tag{13}$$

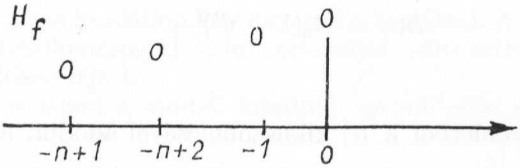
III. $d \neq i$, $d' = i$

$$H(t) = \left[H(0) - \frac{K_0(1 + d)}{d - i}\right](1 + i)^t - B_0 t\,(1 + i)^t + \frac{K_0}{d - i}(1 + d)^{t+1} \quad t \geq 0.$$

Most meg kell határozni a visszafizetett és folyósított hitelt (3)-ból kiküszöbölve $H_v(t)$-t és (4)-be behelyettesítve, majd rendezve kapjuk, hogy

$$H_f(t) - \frac{1}{n + 1 - m}\sum_{k=0}^{n-m} H_f(t - n + k) = \Delta H(t) \quad t \geq 1\,. \tag{14}$$

Íly módon egy **n**-ed-rendű inhomogén differencia egyenletre jutunk, mely a már meghatározott teljes hitelállomány ismeretében leírja a folyósított hitel időbeli változását. A megoldáshoz ismertnek tételezzük fel a kezdeti értékeket a $-n+1 \leq t \leq 0$ intervallumban



Nem tartjuk célszerűnek (14) megoldásának explicit alakban történő előállítását ui. ez megköveteli az összes lehetséges **n** és **m** érték mellett a (14)-hez tartozó homogén egyenlet karakterisztikus egyenletének megoldását. Előbb célhoz jutunk, ha (14) megoldását t növekedő értékeire lépésről-lépésre meghatározzuk. (14)-ből kapjuk ugyanis, hogy

$$H_f(1) = \Delta H(1) + \frac{1}{n+1-m} \sum_{k=0}^{n-m} H_f(k+1-n)$$

$$H_f(2) = \Delta H(2) + \frac{1}{n+1-m} \sum_{k=0}^{n-m} H_f(k+2-n)$$

és így tovább. A folyósított hitel értéke tehát bármely időszakra kiadódik.

Megemlítjük, hogy (2)-ből a $K'(t)$ költségfüggvény értékei is közvetlenül meghatározhatók. Amennyiben a számított teljes hitelállomány túlhaladja az (5) korlát által definiált értéket, akkor a hitelállományt a

$$H(t) = B(t+m) - B(t)$$

kifejezéssel tekintjük egyenlőnek. A törlesztés és folyósítás kiszámítása elvileg változatlan, oly módon azonban, hogy $H(t)$ korlátja egyidejűleg azonos nagyságban csökkenti $H_f(t)$ értékét is az (1)-hez képest. Így érvényben marad a folyósítást leíró (14) differenciaegyenlet is.

Amennyiben — bizonyos idő elteltével — a (10)-ből számított hitelállomány ismét az (5) korlát alá esik, akkor újból az ismertetett kiinduló egyenlőségek segítségével történik a hitelezés.

III. A modell gyakorlati alkalmazása

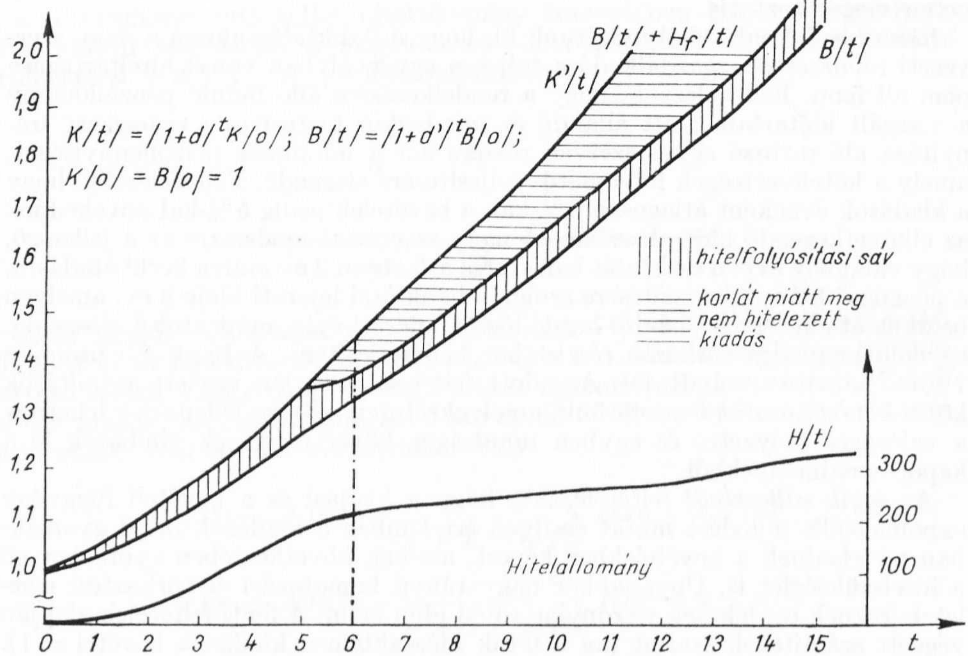
Az ismertetett feltételek figyelembevételével numerikus számításokat végeztünk a modell felhasználhatóságának ellenőrzése céljából. A számításoknál relatív számokból képzett függvénnyel dolgoztunk és a fejlődésre elfogadható növekedési ütemet vettünk figyelembe, reálisan adaptálva a hitel lejárati és törlesztési idejét, valamint a kamatlábat. A szimuláció alapján kapott variánsok közül két lehetséges esetet mutatunk be másfél évtizedes időtartamra. Úgy véljük, ez az időszak szükséges a nagy szervezeti rendszerek pénzgazdálkodási folyamatainak megismeréséhez, hosszabb időszak viszont már nem látszik célszerűnek, mivel a gazdasági adottságok és a pénzügyi szabályozási rendszer olyan mértékben módosulhat, amely az elfogadott feltételeket lényegesen megváltoztatja.

Számításainknál abból indultunk ki, hogy a 0-dik időszakban a nagy szervezeti rendszer pénzgazdálkodása teljesen egyensúlyban van és hiteltartozása nem áll fenn. Feltételezzük, hogy a rendelkezésére álló induló pénzállomány a vizsgált időtartam alatt állandó és mindenkor biztosítja a csúcsszerv irányítása alá tartozó egyes szervek részére azt a minimális pénzmennyiséget, amely a kötelezettségek folyamatos teljesítésére elegendő. Feltételezzük, hogy a kiadások évenként átlagosan 6%-kal, a bevételek pedig 5%-kal növekednek az elkövetkezendő időszakaszban. A nagy szervezeti rendszerre az a jellemző, hogy valamely évben eszközölt befektetés átlagosan 3 év múlva kerül átadásra, a pénzügyi hiány kiegészítésére szolgáló bankhitel lejárati ideje 8 év, amelyen belül az átadást követő évtől kezdődően a lejárati évig, mint utolsó időszakig, egyenlő nagyságú törlesztő részleteket kell teljesíteni. A Bank évi utólagos 7%-os kamatot számít fel. Az adott feltételek alapján végzett számítások közül két változatot ismertetünk, amelyekről úgy véljük, jellemzőek lehetnek a valóságos helyzetre és egyben tanulságos következtetések vonhatók le a kapott eredményekből.

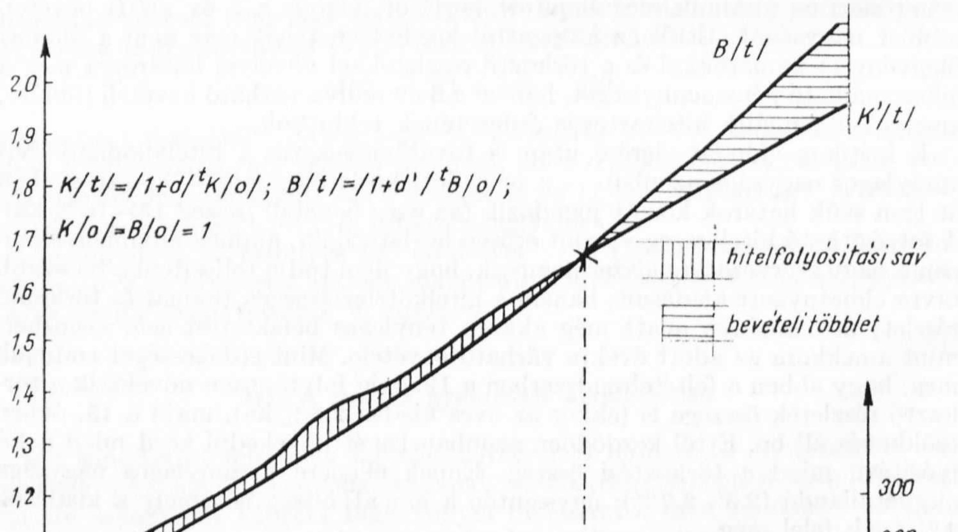
Az *egyik változatnál* feltételezzük, hogy a kiadási és a bevételi függvény exponenciális fejlődést mutat és ilyen értelemben a kiadások mind gyorsabban növekednek a bevételekhez képest, aminek következtében gyorsulva nő a hitelszükséglet is. Ugyanakkor nagyarányú kamatozási és törlesztési részletek lesznek esedékesek viszonylag rövid időn belül. A fenti feltételek alapján végzett számítások szerint (ha a 0-dik időszakban a kiadás = bevétel = 1), azt az eredményt kapjuk, hogy a nagy szervezeti rendszer már a 6. évben olyan kiadási kötelezettségeket kénytelen teljesíteni, amiáltal a hitelállomány eléri az általunk megállapított korlátot, vagyis a 3 év alatti bevételi többlet nagyságát. Ettől az időponttól kezdődően tehát már nem a kiadási függvény (a kamatokkal és a törlesztő részletekkel növelve) határozza meg a felhasználható pénzmennyiséget, hanem a 3 év múlva várható bevételi többlet, amelyet a fennálló hiteltartozás fedezetének tekintünk.

E kritikus időpont elérése után is továbbnövekszik a hitelállomány, viszonylagos nagysága azonban — a megadott korlátok miatt — hosszú éveken át igen szűk határok között ingadozik (az éves bevételi összeg 15—16%-ka). A folyósítható hitelösszeg viszont erősen korlátozódik, aminek eredményeképpen a nagy szervezeti rendszer nemcsak, hogy nem tudja teljesíteni a hosszabb távra előirányzott kiadásait, hanem a hitelkötelezettségek (kamat és törlesztő részlet) növekménye miatt még akkora tényleges befektetést sem végezhet, mint amekkora az adott évekre várható bevétele. Mint érdekességet említjük meg, hogy ebben a feltételrendszerben a 12. évig folytonosan növekszik a törlesztő részletek összege is (ekkor az éves kiadás 2,8%-ka), majd a 13. évben csökkenés áll be. Ettől kezdődően azonban ismét növekedni kezd mind a folyósítási, mind a törlesztési összeg. Ennek ellenére viszonylagos nagysága eléggé állandó (2,5—2,7%); úgyszintén a kamatköltség is, amely a kiadások 1%-ának felel meg.

Végső következtetésként azt lehet megállapítani, hogy a feltételezett fejlődési tényezők figyelembevételével a hitelállomány, bár korlátozott ütemben, de mégis végtelenül növekedhet; ennek a növekedésnek azonban a nagy szervezeti rendszer számára nincs meg a kellő hatékonysága, miután egyidejűleg rendszeresen nő a kamatfizetési kötelezettség és a törlesztő részletek nagysága



B/t/ + H_f/t/
B/t/
K'/t/
K/t/ = /1+d/^t K/o/; B/t/ = /1+d'/^t B/o/;
K/o/ = B/o/ = 1
hitelfolyósítási sáv
korlát miatt meg nem hitelezett kiadás
H/t/
300
200
100
Hitelállomány
t



B/t/
K'/t/
K/t/=/1+d/^t K/o/; B/t/=/1+d'/^t B/o/;
K/o/=B/o/=1
hitelfolyósítási sáv
bevételi többlet
300
200
100
Hitelállomány
H/t/
t

is. Az ilyen feltételű modellben tehát csak időleges a hitel stimuláló szerepe. Abban az esetben, ha a továbbiakban is biztosítani kívánják a nagyobb felhalmozási lehetőséget, az általunk megszabott korláton túlmenő hitelnyújtási igény jelentkezik, ami viszont mind nagyobb kötelezettségekkel jár együtt és egyidejűleg mind nagyobb arányúvá válik az eladósodás mértéke.

A modell alapján végzett számítások *másik változatában* feltételeztük a kiadások lineáris és a bevételek exponenciális növekedését. Ebben a feltételrendszerben tehát a kiadások állandó összegszerű növekedése viszonylagos csökkenő ütemet tételez fel, míg a bevételeknél változatlanul gyorsított ütemet vettünk figyelembe. Ennek alapján azt kaptuk — a szintén relatív számok alapján végzett számítások segítségével —, hogy az évenkénti hiteligény a 7. évig növekszik, míg a teljes hitelállomány a 8. évben éri el maximumát (az éves bevétel 11,4%-a). A 9. évben mind a folyósítási szükséglet, mind pedig a hitelállomány csökkenni kezd, majd ettől kezdve rohamosan megtörténik az előzőleg felvett hitelek visszafizetése. Sőt a 11. évben megszűnik a további hitelfolyósítás szükségessége is, mivel ekkor az évi bevételek már meghaladják a kiadásokat.

A két feltételrendszer összehasonlításából arra a következtetésre juthatunk, hogy ha a nagy szervezeti rendszer kötelezettségei az első feltételezés szerint alakulnak, tehát időlegesen gyorsabb ütemben növekednek, mint a bevételek, a hitelállomány növekedésének elvileg nincs határa, noha a hitelfolyósítás összege — a korlátok miatt — esetenként és átmenetileg csökkenhet az előző időszakhoz képest. Éppen ezért nagyobb időközönként felvetődik a hitelezési feltételek — elsősorban a mennyiségi korlátok — módosításának szükségessége. A második változat viszont arra hívja fel a figyelmet, hogy ilyen feltételek között megvan a reális lehetősége a hitel teljes visszafizethetőségének. Ekkor a nagy szervezeti rendszer bővített feltételek között teljesítheti feladatait, és egy esetleges ütemváltozás bekövetkezése után ismét mód nyílik az eredeti feltételek szerinti hitelnyújtásra, mivel a pénzügyi egyensúly helyreállítása reális célkitűzés.

A finanszírozásra sok más feltételt is meg lehet állapítani mind a kiadások és bevételek fejlődését, mind pedig a meghitelezési időtartamot és a törlesztési időt illetően. A változtatott feltételek azonban csak bizonyos néhány éves eltolódást jelentenek az ismertetett eredményekhez képest, és nem változtatnak azon a tényen, hogy a kiadások állandó jellegű nagyobb növekedési üteme esetén a hitelképesség 5—10 év múlva kimerül. Ugyanakkor a felhalmozások még a folyó évi bevételeket sem fogják elérni, kivéve, ha a Bank a célszerűen elfogadható korlátokon felül is nyújt hiteleket, mégpedig legalább olyan mértékben, amely összegszerűen a törlesztő részleteket és a kamatokat is magában foglalja. Szemléltetés céljából mellékeljük mindkét változat grafikus ábráját.

(Beérkezett: 1973. április 11.)

IRODALOM

1. Thiel, E.: Az állami eladósodás nemzetközi összehasonlításának kérdéséhez. Wirtschaftsdienst, 1971. augusztus.
2. Mikusinski, I.: Operátorszámítás. Budapest, 1961. Műszaki Könyvkiadó.
3. Balássy Á.: Vállalati pénzmozgások vizsgálatán alapuló hitelmodellek. MNB Tanulmányok. 45. sz.

A CREDIT FINANCING MODEL OF LARGE ORGANIZATION SYSTEMS

The aim of the authors is to describe mathematically the cumulated final results of monetary processes of large organizational systems and to determine the credit requirements. In these systems the processes are endless, without starting or endpoints of investments, because the financing of many objects is considered. The study is concentrated most part on the state budget, as the largest possible organizational system. The future income of the state budget can be credited up to an expectable surplus income, within a certain finite time horizon. In each year the credit requirement is indicated by the difference of incomes and expenses, if the sum of expenses is bigger. At most the cumulated money shortage can be credited, which equals the increase of incomes between the years of crediting and of the establishment of the fixed assets.

The process is examined in nonnegative domain of the time variable by the aid of a continuous (theoretical) and a discrete model. In the discrete model the per unit time equals the frequency of financial balances. The authors have carried out numerical calculations, too and they introduce two possible cases from among the variants obtained on the basis of simulation for a period of one and a half decades. In one variant they presuppose the exponential growth of incomes and expenses, and with the other one — the exponential growth of incomes and the linear growth of expenses. They have come to the conclusion that according to the first variant there is no theoretical limit of the increase of credits, though the sum of granting credit decreases sometimes and temporarily — because of the constraints. In the second case, however, there is a real possibility to repay the credit completely within a finite time.

МОДЕЛЬ ФИНАНСИРОВАНИЯ КРЕДИТА ДЛЯ БОЛЬШИХ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Цель авторов, чтобы математически описать накопленные конечные результаты денежных процессов больших организационых систем и определить потребность кредита. В этих системах процессы бесконечные, и у накопления нет таких специфичных сроков, обозначающих начало и конец, так как здесь идет речь о финансировании довольно многих объектов. Свои исследования авторы сосредоточивают в основном на государственном бюджете, как на самую большую возможную организационную систему. Они исходят из того, что будущий доход бюджета можно кредитовать до силы определенного ожидаемого перебора внутри определенных конечных сроков. Иногда в одном конкретном году потребность кредита определяется разницой расходов и доходов, если сумма расходов больше; а максимально тот недостаток денег кредитовать можно, который равен росту дохода между годами кредитования и среднего периода образования основных фондов. Процесс исследует в области переменного времени от нуля до бесконечности при помощи непрерывной (теоретической) и дискретной модели. В дискретной модели единичная длина переменного по времени равна частоте иготовления финансовых балансов. Авторы провели и численные расчеты, а из вариантов, полученных на основе симуляции, они показывают два возможных случая на пятнадцатилетний период. В одном варианте они предполагают экспоненциальное развитие расходной и доходной функций, а в другом — линейный рост расходов и экспоненциальный рост доходов. Авторы пришли к выводу, что по первому варианту в принципе нет границы роста наличности кредитов, хотя сумма кредитования — из-за ограничений — в отдельных случаях и временно снижается. А в другом случае имеет реальная возможность для полной выплаты кредита внутри конечного периода времени.

SIMONOVITS ANDRÁS

Megjegyzések a dinamikus ÁKM harmonikus volumen- és árarányainak meghatározásáról

Bevezetés

Tanulmányom dr. Bródy András akadémiai doktori disszertációjának egyetlen részkérdését vizsgálja: az egyensúlyi-harmonikus volumen- és árarányok meghatározására szolgáló soklépéses eljárások számítástechnikai tulajdonságát. Az olvasóról feltételezem, hogy ismeri Bródy [1] disszertációját („Érték és újratermelés") és/vagy későbbi [2] „Beszámolójá"-t. Igyekszem elkerülni az ismétléseket, ennek megfelelően jelöléseimben is teljesen követem Bródyt. Egészen röviden összefoglalom a problémát:

Bródy kimutatta, hogy a dinamikus ágazati kapcsolatok mérlegével leírt gazdaság harmonikus volumen- és árarányait, valamint harmonikus növekedési ütemét (s az ezzel egyező átlagprofitrátát) csak körkörösen, lineáris sajátvektor-sajátérték feladatként lehet megoldani. Ezért az értékről a termelési árra nem egy, hanem végtelen sok lépésben lehet áttérni; véges sok lépéssel tetszőlegesen jó közelítés érhető csak el. Általánosabban: Bródy ismétléses eljárása (iterációja) bizonyos nem egyensúlyi arányoktól az egyensúlyi arányokhoz való valamilyen átmenetet illusztrál. Mivel az eljárás nem mondja meg, hogy mi történik az áttérés folyamán jelenlevő feleslegekkel-hiányokkal, ez az eljárás inkább a gazdaság szereplőinek eszmei tevékenységeit (pl. alkuit), modellezi, mint ténylegesen tárgyiasuló döntéseit. (Ezt Bródy is kimondja; Kornai János pedig több helyen, pl. az „Anti-equilibrium"-ban [5] figyelmeztet több matematikus közgazdász ilyen jellegű hibájára.)

Tanulmányom a Bevezetésen kívül három részt tartalmaz:

I. A Leontief-Bródy modell harmonikus arányai és azok Bródy-féle iteratív meghatározása.

II. A Bródy-féle számítási eljárás konvergenciája. Ebben a részben

1. megmutatom, hogy Bródy *bizonyítása* elnagyolt, heurisztikus;
2. *igazolom,* hogy Bródy *állítása* helyes, ha feltesszük, hogy a kiindulási arányok elég közel vannak a harmonikus arányokhoz;
3. kiterjesztem az előző állítást két másik, Bródy által érintett eljárásra.

Mindhárom esetben feltételünk túl erős. Valószínűnek látszik, hogy egész általános feltételek mellett konvergensek az eljárások, csak az általam adott bizonyítás „követeli" e megszorítást, nem pedig az igazság.

III. Más típusú eljárást tárgyalok a dolgozat utolsó részében. Ez az eljárás közgazdaságilag szintén értelmezhető, a konvergencia gyorsaságát nem ismerem, mindenesetre bizonyos hatékonysági függvény monoton javul az eljárás során. Az eljárás talán átvihető az általánosabb Neumann-modellre is, szemben Bródy eljárásával.

Köszönetet mondok Bródy Andrásnak, aki e dolgozat korábbi változatát gondosan átnézte, több hibára és pongyolaságra mutatott rá. Természetesen a dolgozat esetleges hibáiért minden felelősség a szerzőt terheli.

I. A Leontief-Bródy modell harmonikus arányainak kiszámítása és a Bródy-féle algoritmusok

1. *A Leontief-Bródy modell*

Bródy könyvében az ágazati kapcsolatok mérlegének dinamikus és zárt formáját használja: n termelő ágazat van és az $n+1$-edik ágazat a munkaerő termelése-fogyasztása. A bővített újratermelés arányait a folyó- és a lekötött ráfordítások A és B mátrixa írja le. Mindkét mátrix $(n+1)\times(n+1)$ dimenziós, nemnegatív (elemű), irreducibilis és primitív mátrix. A termelő ágazatok folyó- és lekötött ráfordítás mátrixa $\bar{A}$ és $\bar{B}$ — vagyis Bródy jelölési elveihez hasonlóan, de ellentétesen a felülhúzás az n dimenziós nyílt rendszerre utal! A megfelelő mátrixok között a következő összefüggés áll:

$$A = \begin{pmatrix} \bar{A} & f \\ v & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} \bar{B} & g \\ z & 0 \end{pmatrix}.$$

Föltesszük, hogy a gazdaság képes növekedni, azaz van terméktöbbletet hozó volumenvektora: $x > 0$, melyre $Ax < x$. Ezzel egyenértékű, hogy létezik értéktöbbletet hozó árvektor: $p > 0$, melyre $pA < p$. Másszóval, A maximális abszolútértékű (= domináns) egyébként pozitív — sajátértéke (= spektrálsugara) kisebb mint $1: \rho(A) < 1$.

Ekkor létezik — az arányossági tényezőtől eltekintve — egyetlen pozitív x^0 oszlop- és p^0 sorvektor, valamint λ^0 pozitív szám, melyek kielégítik a következő egyenleteket:

$$(A + \lambda^0 B)\, x^0 = x^0 \tag{1}$$

$$p^0(A + \lambda^0 B) = p^0\,. \tag{2}$$

Könnyen belátható, hogy x^0 jobboldali sajátvektor a marxi-leontiefi-bródy értelemben vett egyensúlyi termelés vektora, p^0 baloldali sajátvektor a termelési ár vektora, λ^0 sajátérték pedig a harmonikus fejlődési ütem, ill. az átlagprofitráta.

2. *A harmonikus arányok kiszámítása*

A harmonikus volumen- és ararányok kiszámítása szokványos, ha rendelkezésre áll a teljes A mátrix Leontief-inverze: $Q = (I-A)^{-1}$. Ekkor ugyanis (1) és (2) egyensúlyi egyenletek a következő alakra hozhatók:

$$\frac{1}{\lambda^0} x^0 = QBx^0 \quad \text{és} \tag{3}$$

$$\frac{1}{\lambda^0} p^0 = p^0 BQ\,. \tag{4}$$

Mindkét egyenlet a szokásos *domináns* sajátvektor-sajátérték feladat, amely feltevéseink mellett egyszerű iterációval gyorsan és jól közelíthető. (Részletesebben lásd II. 2. 2. Tétel.)

Természetesen Q meghatározása torzítja a számítást, de ez nem lényeges. Bródy eltérő eljárása inkább azért érdekes, mert közvetlen közgazdasági tartalma van. x volumenvektor és p árvektor esetén a növekedési ütem jól becsülhető $\lambda(x, p) = p(I-A)x/pBx$ formulával. E közelítés relatív hibájáról mutattam ki korábbi [7] dolgozatomban, hogy lényegében kisebb, mint a volumenvektor, ill. az árvektor relatív hibájának kétszeres szorzata – általánosítva Bródy ezen tételét [1, 239–242. o.]. Továbbá x volumenvektor termeléséhez Ax volumenvektor folyó ráfordítás szükséges, a bővített termeléshez $\lambda(x, p)Bx$ volumenvektor lekötése szükséges.

A fentieknek megfelelően Bródy a következő iterációt vezette be:

$-x$ volumenvektorból a φ függvénnyel

(5) $$\varphi(x, p) = Ax + \frac{p(I-A)x}{pBx}Bx$$ új volumenvektort képezzük;

– p árvektorból a ψ függvénnyel

(6) $$\psi(x, p) = pA + \frac{p(I-A)x}{pBx}pB$$ új árvektort képezzük.

Lényegében ψ és ψ leképzésekkel háromféle iteráció képezhető:

(i) Rögzítsünk valamilyen p fiktív árvektort.

Valamilyen x^1 volumenvektorból kiindulva

(5i) $x^{t+1} = \psi(x^t, p)$ iterációval közelítjük x^0 harmonikus vektort.

Hasonló a helyzet

(6i) $$p^{t+1} = \psi(x, p^t)$$ iterációval.

„Közgazdaságilag azonban legérdekesebbnek az a számítási (és így elvont gazdasági) mechanizmus igérkezik, amely kiindulva az adott árakból módosítja a termelési arányokat, s e módosulás hatását figyelembeveszi az árak oldalán, s. i. t. Ez tulajdonképpen az előbbi két külön-külön végezhető számítás együttes (ii), méginkább felváltva (iii) való végzése. Bármilyen fontos is ennek további vizsgálata, messze túlmutat e dolgozat keretén s a gazdasági mechanizmus működési modelljeinek vizsgálatához, s a mechanizmus matematikai vizsgálatához vezet. E kérdéseket itt nem tárgyaljuk." (Bródy [1], 174–176. o.) Képletben:

(ii) Együttes alkalmazkodás:

(5ii) $x^{t+1} = \psi(x^t, p^t)$ (6ii) $p^{t+1} = \psi(x^t, p^t)$;

(iii) Váltakozó alkalmazkodás:

(5iii) $x^{t+1} = \psi(x^t, p^t)$ (6iii) $p^{t+1} = \psi(x^{t+1}, p^t)$.

II. A Bródy-féle eljárás konvergenciája

1. *Bródy állításai*

Bródy könyvében azt állítja, hogy (i) *iteráció konvergens*. Valójában csak azt bizonyítja, hogy $p\psi(x, p) = px$, azaz az „iteráció során az . . . árösszeg . . . változatlan marad." Ebből még $\{x^t\}_{t=1}^{\infty}$ sorozat korlátossága sem következik, nemhogy konvergenciája. Később Bródy is és a szerző is észrevették, hogy a kalkulatív ár nem lehet tetszőleges pozitív vektor. Ha pl. a bérek túl magasak az egyéb árakhoz képest, akkor $\lambda(x, p)$ negatívvá válhat, ami a volumenek negativitásában jut kifejezésre — rögzített árak mellett!

A továbbiakban mindig föltesszük, hogy a kiindulásul használt árak vektora értéktöbbletet hoz: $p > pA$. Ekkor $\lambda(x, p)$ pozitív, tehát pozitív x esetén $\varphi(x, p)$ is pozitív, (5) miatt. Tehát $\{x^t\}$ sorozat a $\{px = px^1, x > 0\}$ n-dimenziós szimplexben van, tehát *korlátos*. Ekkor Bródy állításának egy része — a korlátosság — helyes.

Bródy „Beszámoló"-jában visszatér (i) iterációra. Ebben az írásában egy bizonyításvázlatot közöl, amely azonban elnagyolt, heurisztikus és ellentmondásos ([2] 14. o.).

Röviden indokolom, mit tartok Bródy bizonyításában helytelennek:

Saját jelöléseimet használva, Bródy kiindulása a következő: Legyen $\tilde{x}^{t+1} = \lambda^t QB\tilde{x}^t$ a kiinduló iteráció, ahol λ^t értékét $\lambda(\tilde{x}^t, p)$ előírással úgy választottuk meg, hogy $p\tilde{x}^{t+1} = p\tilde{x}^t$ legyen (Bródy). Valójában ez utóbbi feltételt $\tilde{\lambda}^t = \tilde{\lambda}(\tilde{x}^t, p) = p\tilde{x}^t/pQB\tilde{x}^t$ választás biztosítja, amely általában különbözik λ^t-től.

„A fenti iterációból egyszerű és megengedett átalakításokkal kapjuk az ... $\tilde{x}^{t+1} = A\tilde{x}^t + \tilde{\lambda}^t B\tilde{x}^t + A(\tilde{x}^{t+1} - \tilde{x}^t)$ iterációt. Mivel azonban az iteráció konvergens, s így $\tilde{x}^{t+1} - \tilde{x}^t$ tart zérushoz, ezért az utolsó tag elhagyható. Így azonban éppen ..." (5i) ... „iterációhoz jutottunk." (Bródy) Eltekintve attól, hogy $\tilde{\lambda}^t \neq \lambda^t$, ha az iteráció perturbációs tagját — $A(\tilde{x}^{t+1} - \tilde{x}^t)$-t — elhagyjuk, a konvergencia megszűn*het*. —

Tanulmányom további részében (i), (ii) és (iii) iteráció konvergenciáját bizonyítom — az alábbi erős megszorítás mellett: *a kiindulásnál használt* (x^1, p^1) *legyen elég közel a célhoz,* (x^0, p^0)*-hoz*. Ez a megszorítás túl erős! Valószínű, bizonyításom nem a legalkalmasabb, s ezért kényszerülünk erre a megszorításra. Kellemetlen, hogy még azt sem tudom megadni, hogy mennyi az az „elég közel". A fejezet végén levő illusztráció szintén arra utal, hogy általános feltételek mellett is konvergens (i)iteráció.

2. *Néhány fontos konvergencia feltétel*

Nem sikerült olyan konvergencia-feltételt találnom, amelyből rögtön következne a Bródy iteráció konvergenciája. Három ismert konvergencia-feltétel együttes alkalmazásával bizonyítom eljárásunk konvergenciáját

Legyen U valamilyen halmaz az n dimenziós euklidesi térben, R^n-ben. Legyen f folytonos függvény, amely U-t U-ba képezi le. A fix-pont $(u^0 = f(u^0))$ meghatározására a következő iterációt szokták alkalmazni: $u^{t+1} = f(u^t)$. A fő kérdés: milyen $u^1 \in U$ kezdőértékekre konvergál az iteráció. Nyilvánvaló, hogy ha konvergál az iteráció, akkor valamilyen fixponthoz konvergál; s ha fixpontból indulunk ki, akkor ott is maradunk.

1. *Konvergencia tétel*: Legyen $f(u)$ kontrakció értelmezve $U \subset R^n$-beli korlátos és zárt halmazon: $s = \sup\limits_{u,v \in U} \dfrac{\| f(u) - f(v) \|}{\| u - v \|} < 1$. Ekkor egy és csak egy fixpontja van f-nek, s az iteráció tetszőleges kiindulás esetén (= globálisan) konvergens. ($\| u \|$ u valamilyen, pl. euklidesi normája.) [3; 9 12.2. 1 Tétel.]

2. *Konvergencia tétel*: Legyen $f(u) = Cu + d$ lineáris leképezés értelmezve $U = R^n$-ben és legyen $\varrho(C)$ C lineáris transzformáció (mátrix) spektrálsugara.

Az iteráció akkor és csak akkor konvergens globálisan, ha $\varrho(C) < 1$. A fixpont — az arányossági szorzótól eltekintve — egyértelmű [3; 9 13.3. Tétel.].

3. *Konvergencia tétel*: Legyen $f(u) = Cu$ *homogén* lineáris leképezés R^r-en. Az iteráció globálisan akkor és csak akkor korlátos, ha $\varrho(C) \leq 1$. Ha $\varrho(C) < 1$, akkor az iteráció globálisan konvergál a nulla-vektorhoz. Ha $\varrho(C) = 1$, akkor az iteráció pontosan akkor konvergens, ha egyetlen domináns sajátértéke van. Ha e domináns sajátértékhez egyetlen sajátvektor tartozik, akkor a fixpont is egyértelmű — eltekintve a triviális $u = 0$ fixponttól.

Ha C nemnegatív, irreducibilis és primitív mátrix (azaz van olyan hatványa, amely pozitív), akkor a domináns sajátvektor egyértelmű és minden nemnegatív és nem zéró u^1 esetén az iteráció ehhez konvergál [8].

Az 1. konvergencia tétel alapján bizonyítunk egy negyedik konvergencia tételt, amely Ostrowskitól [6] származik.

4. *Konvergencia tétel*: Legyen $f(u)$ leképezés valamilyen U tartományt U tartományba folytonosan leképező függvény, $u^0 \in U$ fixponttal. Tegyük föl, hogy $f(u)$ folytonosan differenciálható valamilyen V nyílt halmazon $(u^0 \in V)$, amelyet U tartalmaz; és $f_u(u)$ derivált mátrix spektrál sugara a fixpontban kisebb mint 1, azaz $\varrho\ \{f_u(u^0)\} < 1$. Ekkor van olyan W nyílt halmaz, melyet V tartalmaz, hogy minden $u^1 \in W$-re az iteráció u^0-hoz konvergál.

Bizonyítás-vázlat

A 4. Konvergencia tétel az 1. és a 2. konvergencia tétel *részleges* általánosítása, bizonyítása az 1. tételen alapszik. A bizonyítás lényege a következő: Ha $\bar{t}$ elég nagy természetes szám, akkor f függvény $\bar{t}$-adik iterált függvényének a derivált mátrixa kontrakció-mátrix, alkalmas V halmazon. Tehát az 1. Konvergencia tétel értelmében $m\bar{t}$-adik értékek sorozata konvergál u^0-hoz, stb.

Részletezve:

Ismert, hogy tetszőleges C mátrix esetén $\varrho(C) = \lim\limits_{t\to\infty} \sqrt[t]{\| C^t \|}$, (Varga [9], 62.0 Theorem 3.2.) ahol $\| C \| = \sup\limits_{u\neq 0} \{ \| Cu \| / \| u \| \}$. Ezért, ha $\varrho(C) < 1$, akkor van olyan $\bar{t}$ természetes szám, hogy $\| C^{\bar{t}} \| < 1$.

Legyen $f^t(u)$ f leképezés t-edik iteráltja: $f^1(u) = f(u)$ és $f^{t+1}(u) = f(f^t(u))$. A láncszabály alkalmazásával belátható, hogy $f_u^{t+1}(u) = f_u(f^t(u))\, f_u^t(u)$. A fixpontban e kifejezés egyszerűsödik: $f_u^{t+1}(u^0) = f_u(u^0)\, f_u^t(u^0)$, azaz $f_u^{t+1}(u^0) = f_u(u^0)^{t+1}$, ahol $t+1$ hatványkitevő, eltérően az eddigi iterációs indexektől!

Szükségünk lesz Lagrange-középértéktételének következő általánosítására: Legyen $g(u)$ folytonosan differenciálható függvény V konvex tartományban. Ekkor minden u és v V-beli pontpárhoz van olyan w pont az $\overline{u, v}$ szakaszon, hogy teljesül $\| g(u) - g(v) \| \leq \| g_u(w) \| \cdot \| u - v \|$ egyenlőtlenség.

Alkalmazzuk e tételt $g = f^{\bar{t}}$ függvényre; ha $\bar{t}$ elég nagy, akkor $f_u^{\bar{t}}(u^0) = f_u(u^0)^{\bar{t}}$ és $\varrho\ \{f_u(u^0)\} < 1$ miatt $\| f_u^{\bar{t}}(u^0) \| < 1$. A norma folytonosan függ a mátrix elemeitől, a mátrix elemei folytonosan függnek u-tól V-ben, tehát $f_u(u)$ folytonos függvénye u-nak. Mivel $\| f_u^{\bar{t}}(u^0) \| < 1$, van olyan W gömb V-ben, és s 1-nél kisebb pozitív szám, hogy minden $w \in W$-re $\| f_u^{\bar{t}}(w) \| < s < 1$. Eszerint és az utolsó bekezdés szerint $\| f^{\bar{t}}(u) - f^{\bar{t}}(v) \| \leq s \| u - v \|$, ha u, $v \in W$. — Vagyis $f^{\bar{t}}$ kontrakció W-ben.

Előfordulhat, hogy van olyan $u^1 \in W$, melyre $\{u^t\}$ nem minden eleme marad W-ben. Ezt elkerülendő, szorítkozzunk olyan $W_{\bar{t}}$-gömbre, melynek középpontja szintén u^0, és sugara W sugarának $(1-s)/s$-szerese, ha $s > 1/2$, ill. azonos W-vel, ha $s < 1/2$. [3; 9 12.2. B) feltétel].

Az 1. konvergencia tétel szerint minden $u^{\bar{t}} \in W_{\bar{t}}$-re $\{u^{m\bar{t}+\bar{t}}\}$ sorozat konvergál u^0-hoz. Alkalmasan választott W_r-re minden $u^r \in W_r$-re $f(u^r) \in W_{r+1}$ és $\{u^{m\bar{t}+r}\}$ sorozat konvergál u^0-hoz, $1 \leq r \leq \bar{t}$-ra. Tehát $\{u^t\}$ sorozat konvergál u°-hoz, ha $u^1 \in W_1$.

3. *A Bródy eljárás lokális konvergenciája*

Az előkészületek után könnyen bizonyíthatjuk:

I. TÉTEL. Ha a kalkulatív árvektor és a kiinduló volumenvektor elegendő közel van a harmonikus ár- és volumenvektorhoz, akkor a Bródy-féle (5i) iteráció konvergál a harmonikus volumenvektorhoz.

Bizonyítás:

Ha $p = p^0$, akkor $\lambda(x, p^0) = \lambda^0$, tehát $\psi(x, p^0) = (A + \lambda^0 B)x$. Ekkor $\psi(x, p^0)$ lineáris leképezés, amely kielégíti 3. konvergencia tétel utolsó bekezdésének feltételeit.

Ha $p \neq p^0$, akkor $\psi(x, p)$ nem lineáris, mert $\lambda(x, p)$ nem állandó, sőt nem is lineáris, hanem tört lineáris függvénye x-nek. Továbbá $p\varphi(x, p) = px$ azonosságból következően $p\varphi_x(x, p) = p$, vagyis $\varrho\{\varphi_x(x, p)\} \geq 1$, azaz $\|\varphi_x(x, p)\| \geq 1$, így nem tudjuk bizonyítani, hogy φ kontrakció. ($n=1$ esetben a Lagrange-középértéktétel szerint $f(u) - f(v) = f_u(w)(u-v)$, ezért $|f_u(u)| \geq$ ≥ 1-ből következik, hogy f nem kontrakció. Viszont $n > 1$ esetén két ellentétes irányú egyenlőtlenségünkből nem következik semmi sem.)

Át kell térni a bonyolultabb, nem-szimmetrikus *inhomogén* formulákra. Legyen $px = 1$, ekkor egyszerű számolással adódik (5)-ből

$$(5') \qquad \bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{p}) = \bar{A}\bar{x} + (1 - \overline{px})f + \lambda(\bar{x}, \bar{p})\left(\bar{B}\bar{x} + (1 - \overline{px})g\right).$$

Legyen $h^0 = f + \lambda^0 g$, és $h^*\bar{p} = (h_i \bar{p}_j)_{ij}^{nn}$ diád-mátrix. Ekkor $\varphi(\bar{x}, \bar{p}^0) = (\bar{A} + \lambda^0\bar{B} - h^0 * \bar{p}^0)x + h^0$. Mivel $\varphi(x, p^0)$ homogén leképezés globálisan konvergens, $\bar{\varphi}(\bar{x}, \bar{p}^0)$ inhomogén lineáris leképezés is globálisan konvergens, emiatt a 2. konvergencia tétel értelmében $\bar{\varphi}_x(\bar{x}, \bar{p}^0) = \bar{A} + \lambda^0\bar{B} - h^0 * \bar{p}^0$ spektrálsugara kisebb mint 1. Folytonossági megfontolások miatt van olyan V gömb $\bar{p}^0$ körül, hogy $\bar{p} \in V$ esetén teljesüljön $\{\bar{\varphi}_x(\bar{x}^0, \bar{p})\} \leq s < 1$. Ekkor a 4. konvergenciatétel szerint van olyan W (p-től függetlenül, csak V-től függően!), hogy $\bar{x} \in W$ esetén a Bródy-féle iteráció konvergens. —

Megjegyzés:

A bizonyításban felhasznált tételek elég lazán illeszkednek egymáshoz. Ez tehet a fő oka, hogy gyengébb eredményt (lokális konvergenciát) bizonyítottunk, mint ami igaznak látszik és ami szükséges volna. Tételünk csak arról biztosít, hogy a harmonikus pontok stabilak.

4. *A kettős iterációk lokális konvergenciája*

Az I. rész végén bevezettünk még két másik iterációs eljárást is, amelyeknél mind az árak, mind a volumenek minden lépésben módosulnak. Mind matematikai, mind közgazdasági megfontolások azt sugallják, hogy ezek az iterációk gyorsabban konvergálnak a harmonikus vektorokhoz, mint a fixáras (vagy fix-volumenes) volumen- ill. ár-iteráció.

Gondolatmenetünk teljesen hasonló az előzőhöz, ezért meglehetősen rövidre fogjuk a kifejtést.

II. TÉTEL: (ii) és (iii) kettős iterációk lokálisan konvergensek.

Bizonyítás:

Megint az inhomogén formulákra kell áttérni, de kissé eltérő formában. Legyen $x = (\bar{x}, x_{n+1})$ és $p = (\bar{p}, p_{n+1})$. Az előző kiküszöbölés helyett most $X = \bar{x}/x_{n+1}$ és $P = \bar{p}/p_{n+1}$ arányokra térünk át.

Ekkor az (5ii) és (6ii) formulákat inhomogén formulák helyettesítik:

$$(5'\mathrm{ii})\ X^{t+1} = \Phi(X^t, p^t) \quad \text{és} \quad (6'\mathrm{ii})\ P^{t+1} = \Psi(X^t, P^t)\,.$$

Tekintsük a (Φ, Ψ) leképezést, mely $2n$ dimenziós tyrtományt $2n$ dimenziós tartományba visz át. A derivált mátrix a következő: $J(X, P) = \begin{pmatrix} \Phi_X & \Phi_P \\ \Psi_X & \Psi_P \end{pmatrix}$.

Mivel $\Phi(X^0, P) = X^0$, $\Phi_P(X^0, P^0) = \Phi_P^0 = \mathrm{O}$. Hasonlóan $\Psi_X^0 = \mathbf{0}$.

Vagyis $J^0 = \begin{pmatrix} \Phi_X^0 & 0 \\ 0 & \Psi_P^0 \end{pmatrix}$, s így $\varrho(J^0) = \max\,\{\varrho(\Phi_X^0), \varrho(\Psi_P^0)\}$. Alkalmas V és W gömbök esetén tehát $P \in V$ és $X \in W$ esetén $\varrho\{J(X, P)\} < s < 1$.

(iii) egyetlen helyen tér el (ii)-től: (6'ii) helyett (6'iii) $\Psi(X^{t+1}, P^t) = \Psi\,\{\Phi\,(X^t, P^t), P^t\} = \tilde{\Psi}(X^t, P^t)$. De a harmonikus (X^0, P^0) pontban $\tilde{J}^0 = J^0$, stb. —

5. *Illusztráció: Kétszektoros modell*

Mivel vizsgálatunk közel sem befejezett, érdemesnek tűnik kitérni az egyetlen megoldott esetre, amikor is egy termelő- és egy fogyasztó ágazat van: $n = 1$. Ekkor A és B $n \times n$ dimenziós mátrixok a és b skalárokká zsugorodnak össze. Hogy (i) iteráció minden p kalkulatív ár mellett lineáris legyen, föltesszük, hogy $g = z = 0$. (Elhanyagoljuk a munkaerő bővített újratermeléséhez szükséges többletfogyasztást és az áruk bővített újratermeléséhez szükséges többletmunkaerőráfordítást !)

Legyen $p = (\bar{p}, 1)$ és $\overline{px} = 1$.

(5i) utolsó (itt második) sora: $\bar{x}_2^{t+1} = vx_1^t$, ahonnan behelyettesítéssel $x_1^{t+1} = (1 - vx_1^t)/p$ iterációt kapjuk, $0 < x_1 < 1/p$ korláttal.

Könnyen látható, hogy

— az iteráció globálisan konvergens, ha $v/\bar{p} < 1$,

— az iteráció globálisan divergens (a végtelenbe osszcillál), ha $v/\bar{p} > 1$, és

— $x^1 = x^0$ kivételével (fixpont) az iteráció divergens (két érték között alternál), ha $v/\bar{p} = 1$.

Összehasonlításul jegyezzük meg, hogy $p^0 = 1/f$; a bővíthetőség feltétele $vf < 1$-a; az ár értéktöbbletet hoz, ha $p > v/(1-a)$. Vagyis még meglehetősen általános feltevésünk is, miszerint a kalkulatív ár értéktöbbletet hoz, túl erős, legalábbis ebben az esetben.

III. A harmonikus arányok meghatározása a „tanuló módszerrel"

1. *A „tanuló" algoritmus rövid leírása*

Célszerűnek látszik az eljárás alapgondolatát előre venni — egyszerűsége miatt.

Induljunk ki valamilyen termelés (arány) vektorból (ahol az elemek összege 1). Vizsgáljuk meg az egyes ágazatok nettó termelésének és felhalmozásigényének hányadosát. Nyilvánvaló, hogy mennél kisebb a hányados, viszonylag annál szűkösebb ezen ágazat terméke. Ha az (egyik) legszűkebb ágazat arányát μ — 0 és 1 közötti pozitív — számmal növeljük, az összes termék egyforma arányú visszaszorításával, akkor a legszűkösebb ágazat bősége nő, a többié csökken. Belátható, hogy e növelési arány megválasztható úgy, hogy a kiindulásnál legszűkebb, ill. legbővebb termék bőség-mutatója egyenlővé váljon. Eközben a többi termék bősége alá is, fölé is kerülhet a közös értéknek, de mindenképpen alatta marad a kiindulásnál legnagyobb bőség-mutatónak. Vagyis eljárásunk fokozatosan csökkenti a legnagyobb bőség-hányadost, s folytonossági megfontolásokból fakadóan határértékben a maximális egyöntetű növekedési ütemre csökkenti. Ekkor viszont az alsó értékek is ide konvergálnak alulról (ha nem is monoton értelemben!), és a termelési arányok is a harmonikus arányokhoz konvergálnak.

2. *Matematikai tárgyalás*

Térjünk rá a matematikai tárgyalásra.

Legyen

$$\lambda_i(x) = (x_i - a_i x)/b_i x \tag{7}$$

az i. ágazat viszonylagos szűkösség-(bőség-) mutatója.[1] Itt és a továbbiakban a_i A matrix i. sorát jelöli, stb. Legyen $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ és μ valamilyen 0 és 1 közti szám. Jelölje $h(x)$, ill. $j(x)$ egyikét azoknak az indexeknek, melyre $\lambda_i(x)$ maximális, ill. minimális: $\lambda_{j(x)}(x) \leq \lambda_i(x) \leq \lambda_{h(x)}(x)$, $i = 1, \ldots m$.

Az előző pontban leírtak szerint a módosított termelési arányokat

$$\tilde{x} = \mu e_{j(x)} + (1-\mu) x \tag{8}$$

összefüggés adja, ahol $e_j = (\underbrace{0, \ldots, 1}_{j}, 0)$ a j-edik m dimenziós egységvektor.

A változtatási tényező megválasztása lényeges az iteráció konvergenciája, ill. konvergencia-sebessége szempontjából. Célszerűtlennek látszik a játék-

[1] Ebben a fejezetben már csak a homogén ($m = n + 1$ dimenziós) esetet vizsgáljuk.

elméletből ismert Brown-Robinson-féle tanuló algoritmus [4] követése, amely x-től függetlenül, a t-edik lépésben $\mu_t = \frac{1}{t}$ szorzót alkalmazza.

Először utalnék arra az egyszerű és közgazdaságilag is kézenfekvő tényre, hogy $\lambda_i(x, \mu, j)$ bőség-mutató rögzített j esetén minden $i \neq j$-re szigorúan csökken μ-vel, és $i = j$-re szigorúan nő. Nyilván

$$\lambda_i(x, 0, j) = \lambda_i(x) \text{ és } \lambda_i(x, 1, j) = \frac{\delta_{ij} - a_{ij}}{b_{ij}}, \; 1 \leq i \leq m.$$

Vagyis $\lambda_{j(x)}(x, 1, j(x)) > 0 \geq \lambda_{h(x)}(x, 1, j(x))$, vagyis $\lambda_i(x, \mu, j)$ folytonossága miatt van egyetlen egy olyan $\mu(x) \in [0, 1]$, melyre teljesül

$$\lambda_{j(x)}(x, \mu(x), j(x)) = \lambda_{h(x)}(x, \mu(x), j(x)) . \tag{9}$$

Mivel $i \neq j(x)$-re $\lambda_i(x, \mu, j(x))$ szigorúan monoton csökken, $\lambda_i(\tilde{x}) < \lambda_i(x)$, $i \neq j(x)$.

Következésképp igaz

$$\lambda_{h(\tilde{x})}(\tilde{x}) < \lambda_{h(x)}(x) , \tag{10}$$

az áttérésnél a maximális bőség-mutató csökken, kivéve $x = x^0$ esetet, amikor $\mu(x) = 0$.

Rátérünk az eljárás konvergenciájának bizonyítására: (Az iteráció t. lépése $x = x^t$ vektorból (8) és (9) szerint $x = x^{t+1}$ vektort képezi, stb., $t = 1, 2, \ldots$).

Nyilván $x^t \geq 0$ és $\sum_{i=1}^{m} x_i^t = 1$ fennáll minden $t = 1, 2, \ldots$-re, vagyis $\{x^t\}$ korlátos. Ezért kiválasztható belőle (legalább) egy konvergens részsorozat; jelöljük ezt $\{x^{t_k}\}_{k=1}^{\infty}$-nel: $\lim_{k \to \infty} x^{t_k} = y$.

(10) értelmében $0 < \lambda_{h(x^{t+1})}(x^{t+1}) < \lambda_{h(x^t)}(x^t)$, $t = 1, 2, \ldots$, tehát létezik

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_{h(x^t)}(x^t) = \inf_t \lambda_{h(x^t)}(x^t) . \tag{11}$$

Mivel $\lambda_{h(x)}(x)$ folytonosan függ x-től,

$$\lim_{t \to \infty} \lambda_{h(x^t)}(x^t) = \lambda_{h(y)}(y) . \tag{12}$$

Könnyen belátható (pl. [1]), hogy

$$\lambda_{j(x)}(x) \leq \lambda^0 \leq \lambda_{h(x)}(x) \tag{13}$$

egyenlőtlenség minden x-re fennáll, sőt egyenlőség csak mindkét oldalon egyszerre teljesülhet, méghozzá csak az $x = x^0$ helyen. Tehát elegendő belátni, hogy $\lambda_{h(y)}(y) = \lambda^0$, hiszen ekkor minden konvergens $\{x^{t_k}\}$ részsorozat x^0-hoz tart, vagyis az egész $\{x^t\}$ *korlátos* sorozat is x^0-hoz tart.

Indirekt bizonyítunk: $\lambda_{h(y)}(y) > \lambda^0$ (hiszen $\lim \lambda_{h(y)}(y) \geq \lambda^0$ eleve következik (13)-ból).

Indirekt feltevésünk szerint $y \neq x^0$, azaz $\lambda_{j(y)}(y) < \lambda_{h(y)}(y)$, tehát $\mu(y) > 0$. Másrészt (7), (8), (9) szerint $\{\mu(x^{t_k})\}_{k=1}^{\infty}$ konvergens és $\lim_{k \to \infty} \mu(x^{t_k}) = \mu(y)$.

Létezik legalább egy olyan j_0 index, melyre $j(x^{t_k}) = j_0$ végtelen sokszor teljesül. Tegyük föl, hogy a részsorozatba eleve csak ilyen tagokat vettünk be. Ekkor $x^{t_k+1} = \mu(x^{t_k})\, e_{j_0} + [1 - \mu(x^{t_k})]\, x^{t_k}$ összefüggésből következően $\lim\limits_{k\to\infty} x^{t_k+1}$ létezik és $= \mu(y)\, e_{j_0} + [1 - \mu(y)]\, y$, azaz $j_0 = j(y)$ és $\lim\limits_{k\to\infty} x^{t_k+1} = \tilde{y}$. Viszont (12), (11) szerint $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{h(x^{t_k+1})}(x^{t_k+1}) = \lambda_{h(\tilde{y})} < \lambda(\tilde{y})$, hiszen indirekt feltevésünk szerint $y \neq x^0$. Másrészt (10) és (12) szerint $\lim \lambda_{h(x^{t_k+1})}(x^{t_k+1}) = \lambda(y)$, ami ellentmond az előző egyenlőtlenségnek.

3. *Számítástechnikai megjegyzések*

(7) és (8) összefüggésből adódik

$$\lambda_i(x, \mu) = \frac{x_i - a_i\, x + \mu\, \{\delta_{ij(x)} - a_{ij(x)} - x_i + a_i\, x\}}{b_i\, x + \mu(b_{ij(x)} - b_i\, x)} .$$

Röviden: $\lambda_i(x, \mu) = \dfrac{\alpha_i + \mu\beta_i}{\gamma_i + \mu\varepsilon_i}$, ahol α_i, β_i, γ_i, ε_i függnek x-től. (9) figyelembevételével — x indexet elhagyva! —

$$(\beta_h\, \varepsilon_j - \beta_j\, \varepsilon_h)\, \mu^2 + (\alpha_h\, \varepsilon_j + \beta_h\, \gamma_j - \alpha_j\, \varepsilon_h - \beta_j\, \gamma_h)\, \mu + \alpha_h\, \gamma_j - \alpha_j\, \gamma_h = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk μ-re.

Mivel $\lambda_i(x) = \dfrac{\alpha_i(x)}{\gamma_i(x)}$ és $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_i(x^t) = \lambda^0$,

$$\lim_{t\to\infty} (\alpha_h\, \gamma_j - \alpha_j\, \gamma_h)\, \{x^t\} = 0 \quad \text{és} \quad \alpha_h\, \gamma_j - \alpha_j\, \gamma_h \geq 0 .$$

Vagyis a másodfokú egyenlet megoldásánál az állandótag egyre kisebb szerepet játszik, és ha eleve elhagyjuk, akkor a keletkező lineáris egyenlet $\nu(x)$ gyöke alul becsüli $\mu(x)$-et: $0 < \nu(x) < \mu(x)$, tehát $\lambda_{j(x)}\big(x, \nu(x)\big) < \lambda_{h(x)}\big(x, \nu(x)\big)$. E módosított eljárás minőségileg azonosan viselkedik az eredetivel: az eljárás konvergenciája és a maximális bőség monoton csökkenése analóg módon igazolható.

4. *A két eljárás összehasonlítása*

A Bródy-féle algoritmus teljesen hasonló lépésekből áll, míg az általam javasolt algoritmusnál mindig változhat a minimális és/vagy maximális index: $j(x^t)$ ill. $h(x^t)$. Egyrészt az új eljárásban az indexekkel külön kell törődni, sőt $\lambda_i(x)$-ek i-szerinti maximumát-minimumát is meg kell határozni, másrészt a (8) $x \to \tilde{x}$ lépés sokkal egyszerűbb, mint az (5)-beli φ leképezés.

Eljárásom érdekes közgazdasági vonása, hogy egyedül a primál feladatra épül, a duális árakról szó sincs. Megemlítem még, hogy nemcsak hogy globálisan konvergens, de bőségmutatója is monoton csökken az iteráció során. Viszont minden lépésben legfeljebb egy olyan tevékenységet hoz be, amely a kiindulásban nem szerepel, bár az optimális megoldásban szerepel, ami nagy feladatnál előnytelen.

Másrészt ez a módszer nem érzékeny a legnagyobb, ill. a második legnagyobb abszolút értékű sajátérték hányadosának 1-hez való közelségére, szemben a Mises iterációval, ami módszerem mellett szól.

(Beérkezett: 1973. március 5.)

IRODALOM

1. Bródy A.: Érték és újratermelés. Budapest 1969. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
2. Bródy A.: Beszámoló a dinamikus ÁKM-modellel végzett első magyarországi számításokról. (Kézirat) Budapest, 1970. p. 43.
3. Collatz, L.: Funktionanalysis und numerische Mathematik. Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1964. Springer. pp. 447.
4. Gale, D.: The theory of linear economic models. New York—Toronto—London, 1960. Mc Graw Hill. p. 330.
5. Kornai J.: Anti-equilibrium. Budapest, 1971. Közgazdasági ěs Jogi Könyvkiadó. 437. p.
6. Ostrowski, A.: Solution of Equations and Systems of Equations. New York, 1960. Academic Press.
7. Simonovits Á.: Pozitív mátrixok Raylegh hányadosáról. Szigma, 1969. 1. sz.
8. Szép J.: Analízis. Budapest, 1965. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.
9. Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, 1962. Prentice-Hall.

NOTE ON THE DETERMINATION OF THE HARMONIC VOLUME AND PRICE PROPORTIONS IN THE DYNAMIC INPUT-OUTPUT MODEL

I. The paper deals with the determination of equilibrium volume and price vectors of a closed dynamic input-output model. In the paper A and B denote the matrices of current and capital inputs, x and p — the volume and price vectors, λ — the rate of growth and the rate of profit which are equal. The quantities denoted by an ^{0} refer to equilibrium situation, which are determined by the equations (1) and (2) or the equivalent equations (3) and (4) of the paper, uniquely up to a scalar factor. For their determination András Bródy in [1] and [2] has introduced a procedure, which differs from the well-known Mises iteration, being economically interpretable and practically applicable. It is described by equations (5) and (6).

II. The paper points out that Bródy has not proven the *global* convergence of his procedure in a proper way. The author succeeded in .correcting the mistake with a heavy restriction only: he proves *local* convergence, despite that he agrees with Bródy that his procedure must be convergent globally, too.

III. In the third part of the paper an algorithm is introduced, called „learning algorithm" based on the well-known Brown-Robinson algorithm [4] of game theory. The procedure is iterative, too, it decreases in each step the production of every sector, proportionally so as to expand on this account the production of that sector which has the least „commodity surplus/capital input" quotient (the bottleneck sector). The reallocation is carried out so that the indices of previously tightest and richest sectors became dentical (see 7,8 and 9). It is easy to see that this procedure is globally convergent.

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЦЕНОВЫХ И ОБЪЕМНЫХ ПРОПОРЦИЙ ДИНАМИЧНОГО БАЛАНСА ЗАТРАТ И ВЫПУСКОВ

Статья занимается определением векторов объема и ценовой пропорции баланса закрытой динамичной модели затрат и выпусков. В статье A и B означают матрицы текущих и связанных затрат, x и p — векторы объема и цены, λ — темп роста и равная этим норму прибыли. Количества, отмеченные ^{0}, касаются положения баланса, которое определяют однозначно уравнения статьи (1) и (2) или эквивалентные им уравнения (3) и (4), несмотря на скалярные коэффициент. Андраш Броди в [1] и [2] внедрил вместо известной Мизес-итерации другой метод, который можно объяснять экономически и важный в практической работе. Этот метод описывают уравнения (5) и (6).

Статья показывает, что Броди не подходящим образом доказывает *глобальную* сходимость метода. И автору удалось исправить ощибку только с большим ограничением: он доказывает *локальную* сходимость, несмотря на то, что он соглашается с Броди в том, что его метод должен иметь глобальную сходимость.

В третьей части статьи автор знакомит с новым алгоритмом, основанным на хорошо известном в теории игр «учебном алгоритме» Брауна-Робинсона. Данный метод — также итеративный, он снижает на каждом шагу производство отраслей в одинаковой пропорции, чтобы освободившуюся часть можно было обратить на расширение отрасли с наименьшим частным от избытка продуктов на связанные затраты (т. е. самой скудной отрасли). Степень перегруппировки выбираем так, чтобы показатель самой скудной и самой обильной отраслей до перегруппировки был идентичным показателю после перегруппировки (7), (8), (9). Легко заметить, что метод является *глобально сходящимся*.

KÖNYVEKRŐL

KORNAI J.: *Anti-equilibrium. A gazdasági rendszerek elméleteiről és a kutatás feladatairól.* Budapest, 1971. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó. 437 p.

Kornai János közgazdaságtudományi munkásságát az új utak, problémák és megoldások merész keresése jellemzi. Akkor vetette fel a gazdasági vezetés túlzott központosításának kérdéseit, amikor az azóta megvalósult magyar és más szocialista országokbani gazdasági reformokat még aligha lehetett előrelátni. Több mint egy évtizeddel ezelőtt foglalkozott a nyereségrészesedési rendszer bevezetésének gazdasági hatásaival. Az elsők között volt, akik a nagyméretű programozási modelleknek az ágazati és országos tervezésben való alkalmazási lehetőségeit kutatta. Az Anti-equilibrium után írott legújabb könyve, az „Erőltetett vagy harmonikus növekedés" tulajdonképpen újabb fordulatot jelent kutatási munkájában. Minden eddigi művénél merészebb vállalkozás azonban az Anti-equilibrium, mert az egész közgazdaságtannak kétszáz éve kialakult fogalom rendszerét és alapfeltevéseit vonja kétségbe.

Munkásságának másik jellemzője, hogy problémafeltevései mindig a magyar gazdasági valóságból nőnek ki, a magyar országi akut kérdésekre keresnek feleletet, a magyar tapasztalatokat próbálják összegezni. A korábbi gazdaságirányítási rendszerből keresett kiutat, amikor a centralizáció-decentralizáció optimális viszonyát vizsgálta, a magyar gazdasági tervezés egzaktabbá tételét és tudományos megalapozását szolgálták a programozási modellekkel kapcsolatos kutatásai, az erőltetett növekedéssel szerzett kedvezőtlen magyar tapasztalatokat összegezte legutóbbi művében. A legkevésbé nyilvánvaló a kapcsolat a magyar valóság és Kornai gondolkodása között az Anti-equilibrium esetében. Valójában azonban ez a kapcsolat nem kevésbé szoros. Ebben a könyvben Kornai tulajdonképpen azt fogalmazza meg, — akkor is, amikor külföldi közgazdászokkal vitatkozik, — hogy a hagyományos egyensúly elmélet alig ad használható gyakorlati tanácsokat, útmutatásokat, amikor a jelenlegi magyar gazdaságban működő gazdasági egységek viselkedését akarjuk előrelátni vagy gazdaságpolitikai eszközökkel befolyásolni. Más kérdés az, hogy következtetései általánosabb érvényűek, éppen a könyv külföldi fogadtatásából láthatóan más országok eltérő gazdasági rendszerében is némiképpen alkalmazhatók.

Kornainak ez a munkája — amint jól megválasztott „harcos" címe is jelzi — forradalmat akar elindítani a közgazdaságtudományban. Az eddigi közgazdaságtani „forradalmakat" egy olyan gazdasági és társadalmi helyzet hozta létre, amelyben súlyos problémák merültek fel, amelyeket az addigi közgazdaságtani elmélet nem tudott megoldani. A sokat emlegetett keynesi forradalom hátterét a nagy világgazdasági válság adta, amelyben a hagyományos, neoklasszikus iskola gazdaságpolitikai tanácsai (a béreket le kell szállítani, takarékoskodni kell) teljesen használhatatlanoknak bizonyultak. Az utóbbi években a keynesi elmélet ellen megindult monetarista ellentámadás vagy „ellenforradalom" (Milton Friedman vezetésével) abból indult ki, hogy a kapitalista országokban jelenleg uralkodó inflációs folyamatokat a Keynes féle elmélet alapján nem lehet megfékezni. (Úgy látszik, hogy a monetaristák által javasolt eszközök még kevésbé eredményesek.) Vajon lehet-e ilyen — illetve ennél súlyosabb — helyzetről, az elmélet és a valóság igényei közötti meg nem felelésről beszélni az Anti-equilibriummal kapcsolatban? Kornai határozottan igenlő választ ad, mert a könyv előszavában azt mondja, hogy a magyar gazdasági reform előkészítésekor „mindazok, akik a munkában résztvettek, építhettek mindennapos tapasztalatukra, a magyar és külföldi gazdasági rendszerek működésével kapcsolatos gyakorlati ismereteikre, józan eszükre — de alig-alig támaszkodhattak a szó szigorúbb értelmemében vett tudományos elméletekre" (11. p.). „Az elmélet alkalmatlannak bizonyult a gyakorlati alkalmazásra — a tehetetlensége, munkaképtelensége feletti elkeseredés szülte könyvemet" (12. p.).

Ez az elmélet az általános egyensúlyelmélet vagy matematikai egyensúlyelmélet, ahogyan azt Arrow és Debreu modelljeikben kifejtették. Kornai szerint a reáltudományok érettségének három mutatója van: 1. a verifikáltság, 2. a formalizáltság, 3. a teoretikus struktúra kialakultsága. Az általános egyensúlyelméletnek a modern matematikai egyensúlyelmélet általi megfogalmazása az egyedüli gazdasági rendszerelmélet, amely az utóbbi két ismérvvel rendelkezik, de az sem elégíti ki a reáltudományi elmélettel szemben támasztott első és legfőbb követelményt, azt, hogy megállapításait verifikálták, bebizonyították, hogy azok megfelelnek a gazdasági valóságnak. Ezért csak gondolatkísérletnek lehet tekinteni.

Ha egy matematikai közgazdaságtani modell nem megfelelően írja le a valóságot, sőt ellentmond a valóságnak (mint Kornai mondja), akkor alapfeltevéseit kell megvizsgálnunk. Kornai János a könyv elején megfogalmazza azt a tizenként alapfeltevést, amelyre az általános egyensúlyelméletet felépítették, majd megjelöli, hogy a könyv melyik fejezeteiben bírálja azokat. Ezzel a példásan világos felépítéssel nem csak az olvasónak, hanem a recenzensnek és mindazoknak is megkönnyíti a helyzetét, akik az általános egyensúlyelmélet elleni vitájában állást akarnak foglalni. Vegyük sorra az alapfeltevéseket és bírálatukat!

1. Az ÁE (ahogyan Kornai az általános egyensúlyelméletet rövidíti) szerint a gazdaság statikus és stacioner, nem veszi figyelembe, hogy állandóan fejlődik, a gazdasági folyamatokat jellemző együtthatók, elaszticitások stb. állandóan változnak. A korábbi egyensúlyelméleteknek éppen ez a hibája váltotta ki az 1940-es évektől kezdve a növekedéselméleti irányzat részéről kapott bírálatokat. Mind az Anti-equilibriumból, mind az „Erőltetett vagy harmanikus növekedés"-ből kitűnik, hogy Kornai rokonságot érez általában a növekedéselmélet iránt és főképpen annak azon irányzatai iránt, amelyek a növekedést nemcsak néhány tényező függvényében, hanem a gazdasági és társadalmi fejlődés egész összefüggésrendszerében próbálják vizsgálni. Ezek az erősen interdiszciplináris jellegű (szociológiai, politikatudományi, pszichológiai stb. szempontokat is alkalmazó) irányzatok igérik ma a legtöbbet a közgazdaságtudományban.

2. Az ÁE feltételezi a szervezetek halmazának állandóságát, másszóval elsősorban a gazdasági rendszerben működő vállalatok számának és állományának változatlanságát. Ténylegesen a szervezetek nőnek, visszafejlődnek, újak születnek, régiek megszűnnek.

3. A gazdasági rendszerben kizárólag termelők és fogyasztók léteznek, és ezek egységesen lépnek fel. Ténylegesen mindenféle más szervezetek is léteznek (pl. minisztériumok), amelyek a gazdasági életben szerepet játszanak, és főképpen a termelő szervezeteken, vállalatokon belül erős érdekkonfliktusok fordulnak elő, és a gazdasági döntések ezeknek az érdekkonfliktusoknak az eredményeképpen jönnek létre. Nem vitás, hogy az általános egyensúlyelmélet jobban illik a 19. századi kapitalizmus leírására, amikor a vállalatok többnyire egy tőkés tulajdonában voltak, így a döntéseket a tőkés hozta és csakis saját érdekeit vette figyelembe. A mai kapitalista nagyvállalatokra és még inkább a nemzetközi óriásvállalatokra sokkal jobban alkalmazhatók az olyan modellek, amelyek a döntéseket különböző vállalati csoportok érdekkonfliktusainak eredményeképpen írják le. A szocialista vállalatok valóságos működését még kevésbé lehet egy olyan modellel jellemezni, amely szerint a döntésekben kizárólag a nyereség maximalizálás szempontja érvényesül. Ebből a felismerésből indultak ki a vállalatok működésének különböző szociológiai jellegű modelljei. Ezekről szintén el lehet mondani, hogy a közgazdaságtudomány legérdekesebb fejleményei közé tartoznak.

4. Az ÁE feltételezi a termékek halmazának állandóságát, vagyis a piacon nem jelennek meg új termékek. Ténylegesen a mai gazdasági fejlődést éppen az jellemzi, hogy a termelők új és új termékeket hoznak piacra, a vállalatok közötti verseny is nagy részben úgy megy végbe, hogy új, jobb minőségű termékekkel próbálják a piacot elhódítani.

5. Az ÁE a gazdaság szimultán működését tételezi fel, vagyis a termelésre vonatkozó döntés meghozása, a termelés, az értékesítés-megvásárlás és a fogyasztás között nincs időbeli eltolódás. Ez a feltevés nyilvánvalóan nem reális, sok nehézséghez is vezet a közgazdaságtanban (az időbeli eltolódás okozta folyamatokat írják le például a pókhálómodellek), de ezeket különböző lag-ek bevezetésével viszonylag egyszerűen lehet kezelni.

6. Az ÁE feltételezi a termelési hal-

mazok konvexitását, vagyis nincsenek oszthatatlan termékek, oszthatatlan erőforrások, a ráfordítások és kibocsátások közötti összefüggések leírhatók folytonos differenciálható függvényekkel, nincs növekvő hozadék és a helyettesítési határarány nem növekedő. Valóban ezeknek a részfeltételeknek egyike sem érvényes, történtek azonban kísérletek olyan ÁE modellek kidolgozására, amelyek ezeket a részfeltételeket nem tartalmazzák. Így azt lehet mondani, hogy a konvexitás feltételezéséből eredő nehézségek az ÁE keretében is leküzdhetőeknek látszanak.

7. Az ÁE feltételezi, hogy a termelők a nyereségüket akarják maximalizálni.

8. Az ÁE feltételezi, hogy a fogyasztók a haszonindex függvényüket maximálják.

E két feltevés elvetése esetén az ÁE teljesen összeomlik. Maga Kornai is kiemeli, hogy kritikája elsősorban ezek ellen (és a 6. feltevés ellen) irányul. A 7. feltevés szerinte az ÁE „eredendő bűne", mert valójában a vállalatok nem optimalizálásra, a nyereségük maximalizálására törekszenek, hanem bizonyos aspirációs szinteket akarnak elérni és meghatározott korlátokat nem akarnak túllépni. Ilyenek például: a biztonságos fejlődés, a közvélemény elvárásai, a fölérendelt szervek véleménye, a vállalaton belül különböző csoportok kívánságai. A 8. feltevéssel szemben Kornai azt hozza fel, hogy a fogyasztók viselkedése nem mindig következetes, sőt tulajdonképpen nem is létezik hasznossági függvényük. A két feltevés e bírálata lényegében azt mondja, hogy sem a termelők, sem a fogyasztók nem viselkednek racionálisan abban az értelemben, ahogyan azt az ÁE elmélet állítja, mert nem szükségképpen az optimális alternatívát keresik termelési vagy fogyasztási döntéseiknél.

Kornai Jánosnak ehhez a megállapításához két megjegyzést fűznék. Az egyik az, hogy nem ad iránymutatást arra vonatkozóan, hogy a gazdasági egységek különböző helyzetekben hogyan fognak viselkedni. Bizonyos mértékig körvonalazza elképzeléseit azzal, amit az aspirációs szintekről, valamint az adaptációs folyamatokról ír, ez azonban még korántsem elég egy új közgazdaságtani elmélet felépítéséhez.

A második megjegyzéssel azt szeretném jelezni, hogy a racionalitás feltevésének elvetése következtében nemcsak az általános egyensúlyelmélet omlik össze, hanem az elméleti közgazdaságtannak Adam Smithtől kiinduló egész főáramlata. A klasszikus polgári közgazdászok deduktív tudományként építették fel a közgazdaságtant, néhány axiomából indultak ki, többek között a gazdasági egységek racionális viselkedésének feltevéséből, és ezekből vezették le elméleteiket. A matematikai közgazdaságtan megjelenése ezen csak annyiban változtatott, hogy az axiomákat és levezetéseket matematikai képletekbe foglalták, ezzel világosabbá, könnyebben kezelhetőkké tették. Kétségtelen, hogy más társadalomtudományok, például a szociológia, lemondtak az ilyen deduktív elméletek készítéséről, és az ökonometriával a közgazdaságtudományban is egy egészen más tudományos kutatási stratégia jelent meg, amely a megfigyelhető tényekből indul ki és azokból próbál lépésről lépésre haladva egyre inkább általánosítható törvényszerűségeket megállapitani. Az így kidolgozott elméleti megállapítások azonban meg sem közelítik az általánosíthatóság foka tekintetében a közgazdaságtan deduktív modelljeit. Úgy látszik, hogy Kornai János is ezt az utat ajánlja a közgazdaságtudománynak, mert — ha jól értem — a válaszfüggvények rendszerének megismerése csak empirikus vizsgálatok útján lehetséges, és egyáltalán nem lehet feltételezni, hogy az adott helyen és időben megállapított válaszfüggvények máshol és máskor is érvényesek.

Az általános egyensúlyelmélet fennmaradó négy alapfeltevésére vonatkozó bírálat fontossága már lényegesen kisebb.

9. Az ÁE feltételezi, hogy a termelési és fogyasztási hałmazok, valamint a preferenciarendezések állandók, tehát nincs műszaki fejlődés, nincsenek kulturális és társadalmi tényezők hatására végbemenő változások. Ez összefügg az 1. feltétellel.

10. Az AE szerint a gazdasági rendszer szervezetei között egyetlen információ áramlik: az ár. A termékeknek egy adott időpontban egyetlen egységes áruk van. Ez a feltétel többé-kevésbé érvényes lehetett a 19. századi kapitalizmusban, amikor sok kisebb termelő vállalat versenyzett egymással, de nyilvánvalóan nem érvényes sem a monopolkapitalizmus, sem a tervgazdaság körülményei között. Az utóbbiban nagyon fontos információ a gazdasági terv is, még akkor is, ha az nincs részletesen lebontva. Emellett szerepet játszanak a termelők egymás közötti különféle közlései.

11. Az ÁE feltételezi a piaci kapcsolatok anonimitását, vagyis azt, hogy a termelők és fogyasztók között nincsenek egyéni kapcsolatok, amelyek döntéseiket befolyásolhatnák. Ez megint csak érvényes lehetett a 19. században, de semmiképpen sem felel meg a mai gazdasági valóságnak, amelyben néhány nagyvállalat áll egymással és a fogyasztókkal szem-

ben a piacon. A tökéletlen verseny és a monopolista verseny elméletei próbálták ezt az új helyzetet leírni.

12. Az ÁE-ben nincs bizonytalanság, a valóságos gazdasági életben viszont éppen a nagyfokú bizonytalanság a jellemző. Roy Radner a budapesti ökonometriai kongresszuson tartott előadásában vizsgálta, hogy a bizonytalanság elismerésével hogyan lehet az ÁE modelljét reálisabbá tenni.

Az általános egyensúlyelmélet mind a tizenkét alapfeltevésének bírálatában igazat kell tehát adni Kornai Jánosnak. A nagy kérdés azonban az, hogy ezek után mit tegyen a közgazdaságtudomány, ha nem akar a gazdasági folyamatok egyszerű leírásánál megmaradni. Az egyik lehetséges kiút az általános egyensúlyelmélet valamilyen fajta reformja, továbbfejlesztése. Ezt sokan próbálják, Kornai utal ezekre a törekvésekre, de az a véleménye, nem reformokra, hanem radikális fordulatra van szükség a közgazdaságtanban.

Az Anti-equilibriumban azonban nem állít egy másik kész elméletet az általános egyensúlyelmélet helyére. Erre, mint mondja, egyedül nem is vállalkozna, mert hozzá több közgazdásznemzedék együttes munkájára lenne szükség. Ehhez a munkaprogramhoz szeretne könyvével kutatókat toborozni. Ilyen értelemben az Anti-equilibrium — mint maga is mondja — félkésztermék. Vitathatatlanul nagyon hasznos félkésztermék, mert hozzásegíti a magyar közgazdászokat a közgazdaságtan külföldi irodalmában folyó viták megismeréséhez, nagyon világosan összefoglalja, szintetizálja ezeket a többnyire részkérdésekről folyó vitákat, segít a fogalmak tisztázásában és gondolkodásra ösztönző munkaprogramot vázol fel.

Két része van a könyvnek, ahol Kornai a rendszerezett bírálaton és a fogalmak tisztázásán túllép: a gazdaság vegetatív működésének leírása, és a nyomás-szívás elmélet. Az előbbi igen szellemesen mutatja be, hogy egy gazdaság olyan primitív szabályozási rendszer szerint is működni képes, amelyet a készletek állományának változásából kapott jelzések biztosítanak. Bár Kornai hangsúlyozza, hogy ez nem egy konkrét gazdasági rendszer modellje, hanem minden gazdasági rendszerben számottevő szerepet játszanak hasonló vegetatív folyamatok, mégis óhatatlanul felmerül az olvasóban az a gondolat (Kornai maga is utal rá), hogy a gazdasági reform előtti magyar gazdaság működésében sok volt a vegetatív elem. A nyomás-szívás probléma viszont a mai magyar gazdaságpolitika nagy kérdése. Másképpen megfogalmazva azt jelenti, hogyan lehet az eladók piaca vagyis áruhiány (szívás) állapotából a vevők piaca vagyis árubőség (nyomás) állapotába átmennyi. Egyet lehet Kornai Jánossal érteni abban, hogy a nyomás állapota sok vonatkozásban kedvezőbb a gazdaság hosszútávú fejlődése szempontjából, mert ez meggyorsítaná a műszaki fejlődést, fokozná a termelők közötti versenyt. Az áttérés tényleges lebonyolításához ajánlható gazdaságpolitikai eszközöket azonban nem részletezi. Az „Erőltetett vagy harmonikus növekedésben" újra visszatért erre a kérdésre.

Az Anti-equilibrium nem döntötte el a közgazdaságtan elmélete körüli vitát. Lehet úgy érvelni, hogy a racionalitás vagy optimalizálás tendenciaszerűen mégiscsak érvényesül a gazdaságban, ezért a hagyományos elmélet egészét mégsem kell az általános egyensúlyelmélettel együtt kidobni. Mások az optimalizáláson alapuló modelleknek normatív célokra való felhasználását fogják hangsúlyozni (ezt Kornai is elfogadja). Végül lehet úgy érvelni, hogy egyszerűen didaktikai célokra, — Kornai kifejezésével: gondolatkísérletként, — is érdemes az általános egyensúlyelmélettel foglalkozni, mert hozzásegít a gazdasági egységek viselkedésének megértéséhez. A problémákon való gondolkodás és a vita megindításával is nagyon hasznos szolgálatot tett Kornai János a magyar közgazdaságtudománynak.

ANDORKA RUDOLF

NEMÉNY V.: *Gazdasági rendszerek irányítása. A gazdasági kibernetika alapjai.* Budapest, 1973. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó.

„A rendszer meghatározott módon összekapcsolt, egymásra ok-okozati hatásokat kifejtő (ok-okozati hatások láncolatát alkotó) elemek együttese, hálózata. Bármely gazdasági komplexum (népgazdaság, vállalat) valóban nem egyéb, mint interdependens, kölcsönösen összefüggő és egymásra ható elemek, változók együttese, amelyben minden elem az azt jellemző értékek vektorával kifejezhető." — írja a szerző a könyv első fejezetében (majd egy későbbi fejezetben visszatér a definíció analízisére), — és ha meggondoljuk, hogy minden rendszer célszerű működésének és eredményes irányításának megvannak a maga sajátos törvényszerűségei, akkor a könyv címében jelzett téma feldolgozása valóban nagyfokú és széles körű érdeklődésre tarthat számot. Annál is inkább, mert bár számos könyv és cikk jelenik meg külföldön, és egyre több hazánkban is, amely ezt a témát érinti, vagy valamilyen aspektusban behatóan foglalkozik is azzal, de hazai viszonylatban ez az első olyan könyv, amely arra törekszik, hogy az utóbbi évtizedekben kialakult rendszerelméleti és kibernetikai fogalmakat közgazdasági szempontból világosan értelmezze, logikus rendszerbe foglalja, szintetizálja és a hazai tényleges, szocialista viszonyokra való alkalmazhatóságukat megmutassa. A könyv jellegzetes profilját a szerző így domborítja ki: „Nagyon élesen fogalmazva azt is mondhatnánk, hogy e munka a korszerű gazdaságirányítás vagy vezetéstudomány kommentált és szemléltetett lexikona (tezaurusza) kíván lenni."

Az első fejezet a kibernetika alapfogalmaival foglalkozik (a kibernetika fogalma, szabályozási rendszer, a rendszer elemei, alrendszerek, bemeneti és kimeneti értékek, bemeneti értékek transzformációja, informatika, jel, információ, döntés, fekete doboz, a rendszer struktúrája stb., stb.) ezzel a későbbieknek egy általános képét, keretét, alapvetését adva. Az általános fogalmak megtárgyalása után konkrét jelentkezésükről olvashatunk egyrészt a népgazdaság, másrészt a vállalat mint rendszer vonatkozásában.

A második fejezet részletesen szól a rendszer elemeiről (bemenet és kimenet, az elemek típusai, az elem működési módja, a transzformáció típusa). A fogalmak illusztrálására itt is gazdasági példák szolgálnak (építőipari munka kivitelezésének blokksémája, a népgazdaság irányítási rendszere, egy vállalat anyagkönyvelése stb.).

A harmadik fejezet azt vizsgálja, hogyan épül fel a rendszer az elemeiből, milyen relációk kötik össze a rendszer elemeit egymással, vagyis a fejezet tárgya a rendszer struktúrája. Itt mindenekelőtt szó van magáról a rendszerről, annak fajtáiról, az alrendszerekről, rendszerek elemzéséről és szervezéséről. A fejezet további részeiben a struktúráról, annak típusairól és az elemek kapcsolási módjairól olvashatunk.

Miután az előző fejezetek igen részletesen és számos, az aktuális gazdasági élet körébe vágó példával megvilágítva ismertették a gazdasági rendszerekkel kapcsolatos fogalmakat, a negyedik fejezetben e kellő előkészítés után sor kerülhet a könyv központi témájának, a rendszer irányításának tárgyalására. Ezen belül szó van a vezérlésről és szabályozásról mint az irányítás két formájáról, bonyolult rendszerek vezérlő alrendszeréről, a reakcióegyenletről mint a szabályozási rendszer matematikai modelljéről, a teljesítmény és megbízhatóság, valamint az optimalizálás kérdéseiről.

Végül az ötödik fejezet a rendszerszervezés főbb kérdéseivel foglalkozik, ezen belül az információrendszerrel és a döntési rendszerrel.

A könyv olvasása után úgy tűnik, hogy a szerzőnek sikerül elérni a maga elé tűzött célt, vagyis az olvasóval egy olyan fogalmi gondolati rendszert közölni, amely elsősorban az olvasó szemléletmódját alakítja, gazdagítja, teszi hatékonyabbá. Annak ellenére, hogy a könyvben felhozott példaanyag zöme konkrét gazdasági tartalommal rendelkezik, de az absztrakciónak azon a fokán, amely megfelel a szerző azon szándékának, hogy meglehetősen általános érvényű gondolatkörben mozogjon, — tehát a példaanyag jellegének ellenére sem várható, hogy a gyakorlati közgazdász receptszerűen fogja tudni alkalmazni a könyvben leírtakat. Maga a szerző is rámutat erre, és felhívja a figyelmet, hogy egy valódi szituáció rengeteg speciális probléma elé állítja azt, aki egy gazdasági rendszer irányításában vagy szervezésében vesz részt, ami számos kérdés önálló megoldását igényli az egyedi sajátosságok figyelembevételével.

A szerző azzal az igénnyel sem lép fel, hogy a tárgyalt fogalmakat szigorú definíciók közé szorítsa és merev elméletté bénítsa azokat az elképzeléseket, amelyek végső soron gyakorlati feladatok megoldását hivatottak elősegíteni, és amelyek a fejlődés jelenlegi fokán még sokszor spekulatív jellegűnek látszanak és gyakorlati ellenőrzésre, kipróbálásra szorulnak. Nem a leírtak minden részletében való végső kidolgozottsága, hanem mint egésznek a koncepciója és problémafelvetése a könyv igazi tartalma és értéke.

A fentiek igazolják a szerzőnek azt az álláspontját, hogy nem törekszik a matematikai eszközök felhasználásának „egzaktabbá" tételére, hiszen a hangsúly a kvalitatív fogalmakonés a szemléletmódon van.

A szerző nem esik abba a hibába sem, hogy erőltesse a műszaki és gazdasági rendszerek analógiáját, sőt alkalomadtán rámutat a köztük levő eltérésre.

A könyvet világos és könnyed tárgyalásmód jellemzi, és bőséges irodalomjegyzék egészíti ki. SZEGEDY MIKLÓS

PAWLOWSKI, Z.: *Ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego.* Warszawa, 1970. PWN. 223 p.

Az ökonometriai módszerek vállalati és részben ágazati szintű alkalmazását mutatja be. Kézikönyv jellegű, bemutatja és megmagyarázza a felhasználható képleteket, számpéldákkal szemlélteti a módszereket. Így azokat az ökonometriai munkában kissé járatos vállalati közgazdász minden további nélkül fel tudja használni vállalata problémáinak elemzésére.

Először az ökonometriai módszerek vállalati alkalmazásának általános kérdéseit tárgyalja. Az egyik probléma, hogy az ökonometriai elemzéshez felhasznált statisztikai adatok szükségképpen a múltra vonatkoznak, a kapott modellből pedig a közeljövőre vonatkozó következtetéseket akarunk levonni, amikor a múltbeni összefüggések részben már nem aktuálisak a műszaki, szervezési stb. feltételek megváltozása miatt. A szerzőnek az a véleménye, hogy ha a változások nem nagyon jelentősek és ha szabályszerűek, akkor a múltbeli adatok alapján megbecsült összefüggések felhasználása nem okoz komoly nehézséget.

Az adatbázis más vonatkozásokban lényegesebb problémákat okozhat. Mivel az adatok általában a vállalati gazdasági elszámolásból és nyilvántartásból származnak, tehát nem ökonometriai elemzés céljára gyűjtötték őket, gyakran igen fontos adatsorok hiányzanak. Ilyenkor az ökonométer kétféleképpen járhat el: vagy teljesen kihagyja az elemzésből a kérdéses változót (ami erősen problematikus eljárás), vagy keres egy másik adatsort, amely a hiányzóval feltehetően erős korrelációban van, és azt használja helyette. Másik nehézséget okoz az adatok esetleges hibája. A szerző bemutatja a változókban levő hiba hatásának kiszámítására használható képletet.

Ezt követően a vállalati munka különböző mutatószámainak rövidtávú előrebecslésére használható módszereket tárgyalja. Két módszert mutat be: az egyik egészen egyszerű, csupán a megfigyelt mutatószám (például a termelés) értékének a múltbani szóródásán alapul; a második a Brown által kidolgozott exponenciális kiegyenlítés módszere, amely a trend értékből és az előző időszakbeli tényleges értékből becsül előre.

A vállalati szintű ökonometriában is központi helyet foglal el a termelési függvények becslése. Szemben a makroszintű termelési függvényekkel itt több változót lehet figyelembe venni (az alapvető nyersanyagokat, félkésztermékeket, az energiafogyasztást, a különböző fajta gépeket és berendezéseket, munkákat, a termelőkapacitások kihasználását). A változók száma növelésének a rendelkezésre álló statisztikai megfigyelések száma szab határt. Viszonylag rövid idősorok esetén nem lehet sokváltozós függvényeket becsülni. Némileg könnyebb a helyzet, ha keresztmetszeti adatokat használnak fel több üzemből. Kitér a termelési tényezők komplementaritásának, illetve helyettesíthetőségének problémájára és képletet javasol két-két tényező helyettesíthetőségének meghatározására.

Hosszasan foglalkozik a Cobb-Douglas féle termelési függvényekkel. Nem egészen világos azonban az álláspontja abban a kérdésben, hogy nem-helyettesítő termelési tényezők előfordulása esetén és oszthatatlan termelési tényezők esetén is lehet-e ilyen alakú függvényt alkalmazni. Röviden tárgyalja a CES-típusú függvények és a Koopmans féle műszaki együttható vektorok alkalmazását üzemi szinten.

Hasonlóképpen érdekes és a termelési függvényekkel összefüggő kérdés a műszaki fejlődés mérése üzemi szinten. Megkülönbözteti a semleges (a munka technikai felszereltségét nem változtató) és a helyettesítő műszaki fejlődést (amelynek következtében a felhasznált munka és tőkeállomány arány eltolódik). Különféle képleteket mutat be ezek mérésére, közöttük a Cobb-Douglas termelési függvénynek a műszaki fejlődést figyelembe vevő tényezőkkel kiegészített alakját. Megemlít egy olyan lehetőséget is, hogy a Cobb-Douglas függvényben külön tényezőként szerepeltetik — természetesen negatív kitevővel — a gépek és berendezések átlagos életkorát. A műszaki fejlődés mérésének egy másik lehetősége a termelési tényezők (munka, tőkeállomány) hatványkitevőjében bekövetkező változások, trendek megfigyelése.

Ökonometriai módszerekkel lehet mérni az egyes munkások és nagyobb munkáskollektívák munkatermelékenységét. A befolyásoló tényezők lehetnek az első esetben az életkor, a munkában töltött idő, a nem, a munkahelyre utazás időtartama, az iskolai végzettség és szakképzettség, a munkahelyen kívüli lekötöttség (háztáji gazdaság megléte). Az így kiszámított összefüggések felhasználhatók a személyzeti politikában, valamint a munkatermelékenység előrebecslésére.

Az önköltségelemzés az ökonometriai elemzés régi területe. Hagyományosan a termelés nagyságának függvényében vizsgálják az önköltség alakulását, de figyelembe lehet venni más műszaki és gazdasági természetű változókat is (pl. egy cukorgyárban a répa cukortartalmát, a szállítási távolságot a termelők és a gyár között, a cukorrépa kampány hosszát). Különféle görbékkel lehet az önköltség alakulását jellemezni attól függően, hogy a termelés növekedésével az önköltség csökken, vagy pedig bizonyos csökkenés után nőni kezd.

Az utolsó két fejezet a volumenhozadék mérésének lehetőségét tárgyalja.

Figyelmet érdemel, hogy e könyv tanulsága szerint az operációkutatási módszerek után az ökonometria is utat talált a lengyel vállalatokhoz, és a szerző, aki korábban szinte teljesen a makroproblémákra összpontosította kutatásait, most érdemesnek látja a vállalati szintű ökonometriával való foglalkozást.

A. R.

Goldfeld, S. M.—Quandt, R. E.: *Nonlinear methods in econometrics.* Amsterdam—London, 1972. North Holland Publishing Company. 280 p.

A valóságos gazdasági életben számos olyan jelenség és összefüggés van, ahol nyilvánvalóan nemlinearitások fordulnak elő. Ezek lehetnek a paraméterekben (beleértve a hiba struktúrájukat) előforduló nemlinearitások, a változók nemlinearitásai és a becslő egyenletek nemlinearitása. A nemlinearitások kezelésének gyakorlati nehézségei több vonatkozásban korlátozták az ökonométerek munkáját. Egyrészt lemondtak a maximum-likelihood és az általánosított legkisebb négyzetek módszereinek alkalmazásáról és helyettük kevésbé jó statisztikai tulajdonságokkal rendelkező becsléseket adó módszerekhez folyamodtak, másrészt igyekeztek a makromodellek összefüggéseit linearizálni, végül törekedtek olyan hiba struktúrákat specifikálni, amelyek minél kisebb számítási nehézségeket okoznak. A szerzők ebben a könyvben a nemlinearitások kezelésének tökéletesebb módszereit keresik. Nem tárgyalják kimerítően a nemlinearitások teljes problémáját, inkább egy-egy problémakört ragadnak ki, amellyel ők maguk részletesebben foglalkoztak. (Felvettek a könyvbe egy fejezetet, amelynek szerzője D. E. Smallwood.)

Az első két fejezet általánosabb kérdésekkel foglalkozik szisztematikusabb módon. Az elsőben a nemlineáris függvények különböző maximalizálási módszereit tárgyalják és mutatják be. Ezekhez a módszerekhez azért kell folyamodni, mert az analitikus megoldás rendkívül nehéz. A különböző numerikus algoritmusok tulajdonságai eltérőek, így különböző gyorsasággal konvergálnak, némelyek hajlamosak nem megfelelő stacionárius pontokat, például nyeregpontokat kijelölni, némelyek esetében a konvergencia kritériumok kielégülhetnek olyan pontoknál is, amelyek egyáltalán nem stacionárius pontok, végül eltérőek a számítógép szükségletek. A különböző módszerek bemutatása és tulajdonságaik elemzése után a szerzők számpéldákkal illusztrálják azokat.

A második fejezetben a legkisebb négyzetek és a maximum-likelihood módszerét hasonlítják össze először a lineáris modellek esetében, majd az általánosabb (nemlinearitásokat tartalmazó) esetben. Arra a következtetésre jutnak, hogy az utóbbi módszer sok szempontból igen kedvező tulajdonságokkal rendelkezik az olyan esetek kezelésében is, amelyekre a legkisebnégyzetek módszere nem alkalmazható, ha az adatokat nagy mintákból lehet becsülni. A következő fejezetek e módszer alkalmazását tárgyalják egy-egy speciális esetben, ha a rendelkezésre álló minta kicsi.

A harmadik fejezet a heteroszcedaszticitás problémájával foglalkozik, vagyis ha nem minden megfigyelési egységnél azonosak a szórások. Ez a probléma különösen keresztmetszeti modelleknél fordul elő gyakran, amikor a megfigyelési egységek mérete különbözik. Például különböző jövedelmű háztartások háztartásstatisztikai adataiból, vagy különböző nagyságú vállalatok beruházási adataiból akarnak modellt becsülni. A közönséges legkisebb négyzetek módszere heteroszcedasztikus zavarokat tartalmazó modellre alkalmazva nem ad jó becsléseket és a heteroszcedaszticitás jelenléte érvénytelenné teszi a statisztikai szignifikancia teszteket. A szerzők egy egyenletből álló lineáris regressziós modell esetében írják és illusztrálják számpéldákkal a heteroszcedaszticitás kimutatását, a paraméterek becslését és a helyesbítés lehetőségét. A maximum-likelihhod módszer szolgáltatja a leghatékonyabb és könnyen kiszámítható becsléseket, a heteroszcedaszticitás kimutatására a chi-négyzet-likelihood arány teszt látszik a legjobbnak.

A negyedik fejezet olyan regressziós egyenletekkel foglalkozik, amelyekben a függő változó egy olyan fiktív változó, amely két értéket (0 és 1, igen és nem) vehet fel. Ilyen egyenlet fordulhat elő például egy tartós jószág keresletének vizsgálatában, amikor a háztartás az adott időszakban a kérdéses jószágot megvásárolja vagy nem vásárolja meg. Megvizsgálják a különböző becslési módszereket, közülük a maximum-likelihood módszert találják a legjobbnak. Ebben a fejezetben is végeznek kísérleti számításokat.

Az ötödik fejezetben olyan Cobb-Douglas típusú függvények becslésével foglalkoznak, amelyekben additív, illetve multiplikatív hibák fordulnak elő, a hatodik fejezet pedig évjárat típusú termelési függvények becslését tárgyalja. Mindkét esetben számítási példákat is bemutatnak.

Míg a Cobb-Douglas típusú függvények becslése viszonylag könnyen megoldhatónak látszik, viszont az évjárat típusú függvényeknél, ahol egészen különlegesen bonyolult fajta nemlinearitások tételezhetők fel a műszaki fejlődés alakulására vonatkozóan, nagyon nehéz problémák fordulnak elő.

A hetedik fejezet a szimultán egyenrendszerekben előforduló autokorreláció kezelését tárgyalja. Az ilyen modellekben a szimultaneitás és az autokorreláció egyaránt becslési problémákat okoz, és az ökonométerek nagyrésze úgy jár el — Goldberger tanácsát követve —, hogy csak az egyik fajta problémát, amelyet nehezebbnek tekintenek, próbálják megoldani, és a másikat (rendszerint az autokorrelációt) elhanyagolják, hogy a nagy bonyolultságot elkerüljék. Különösen gyakori ez az eljárás a makrogazdasági modellekben. A szerzők kétségbevonják ennek az eljárásnak a helyességét. Először egy-egyenletes rendszerben, a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásánál vizsgálják az autokorreláció hatását, majd áttérnek a szimultán rendszerekre és mintavételi számpéldákkal, kísérletekkel vizsgálják a különböző becslési módszereket, valamint a szimultaneitás és az autokorreláció okozta hibák egymáshoz való viszonyát. Attól függően, hogy az autokorreláció milyen fokú, különböző becslési módszerek látszanak a legjobbnak.

A nyolcadik fejezet a szimultán egyenletrendszerekben előforduló nemlinearitás kezelését vizsgálja kisminták esetében, a kilencedik fejezet pedig a paraméterekben bekövetkező strukturális változások becslésének lehetőségét tárgyalja.

A könyv mondanivalóját úgy lehet összefoglalni, hogy a nemlinearitások általában kezelhetőek és többnyire a maximum-likelihood módszer látszik a legjobb módszernek. Teljesen azonban nem szabad ezt általánosítani, mert különböző speciális problémákban esetleg más módszereket célszerűbb alkalmazni. Ezért semmilyen módszert sem szabad automatikusan alkalmazni, hanem a lehető legtöbbet meg kell tudni a probléma struktúrájáról.

A. R.

PÁLYÁZATI EREDMÉNY

A Magyar Közgazdasági Társaság Matematikai – Közgazdasági Szakosztálya pályázatot hirdetett *Rövid-, közép- és hosszútávú vállalati és ágazati tervezés statisztikai módszerekkel* címmel.

A beérkezett 7 pályamű felülbírálását a Szakosztály Elnöksége által megbízott, 3 tagú (Meszéna György, Szakolczai György, Tardos Márton) bírálóbizottság végezte.

A beérkezett pályaművek a lineáris programozás, a regresszió számítás és termelési függvényelemzés érdekes gyakorlati alkalmazásairól számoltak be.

A bíráló bizottság *A vállalati tervezés egyes részmegoldásainak matematikai módszerekkel való megközelítése* c. „Integráció” jeligéjű, *dr. Bucsay László* által készített, valamint *Az optimális géppark és a technológia matematikai tervezése egy mezőgazdasági vállalatban* c. „Triumvirátus” jeligéjű, *dr. Acsay Ferenc, dr. Csáki Csaba, dr. Varga Gyula* által készített pályaművek között osztotta meg — egyenlő arányban — az első két díjat 7 500 – 7 500 Ft. értékben.

Az „Integráció” jeligéjű tanulmány jól rendszerezi a vállalati tervkészítés feladatait, részletesen ismerteti a prognózis készítés — viszonylag egyszerű — módszereit, kitér a termelési struktúra lineáris módszerekkel való meghatározására, valamint vizsgálja a termék élettartam görbék és a műszaki fejlesztési terv-görbék élettartama közötti kapcsolatot.

A „Triumvirátus” jeligéjű pályázat a mezőgazdasági vállalat gépparkjának összetételét, és a géppark kihasználását vizsgálja lineáris programozási módszerekkel. A programozási feladatok alapján érzékenységi vizsgálatokat is végeztek. A tanulmány különösen a szerkesztés és a gondolatok világos kifejtése alapján érdemel dícséretet.

A beérkezett pályamunkák közül további kettőt *A műszaki fejlődés és gazdasági növekedés főbb összetevőinek hosszútávú tervezése a gépiparban* c., (szerzők: *Lovrencsics István, Marosvölgyi István, Szántó István)* valamint *A KGM-gépipar termelőberendezés állomány és struktúra hosszútávú tervezése* c., (szerzők: *Filep György és Pásztor Ferenc)* a Közgazdasági Társaság Elnöksége vigaszdíjban részesített.

A kiadásért felel az Akadémiai Kiadó igazgatója
Műszaki szerkesztő: Sós Attila
A kézirat nyomdába érkezett: 1973. VI. 27 Terjedelem: 7 (A/5) ív
73.75185 Akadémiai Nyomda, Budapest – Felelős vezető: Bernát György

CONTENTS

BOOK REVIEWS

СОДЕРЖАНИЕ

О КНИГАХ

Ára: 12,— Ft
Előfizetés egy évre: 40,— Ft

INDEX: 26793

TARTALOM

KÖNYVEKRŐL

1828

AKADÉMIAI KIADÓ, BUDAPEST